MULOHAZALAR HISOBI.

Reja:

1. **Mulohazalar hisobi.**
2. **Isbotlanuvchi formulaning ta’rifi.**
3. **O‘rniga qo‘yish qoidasi.**

Kirish

Mulohazalar algebrasining tavsifini berishda biz mulohazalarning mantiqiy qiymatlaridan (rost, yolg‘ondan) foydalandik. Ammo rost va yolg‘on tushunchalar matematik tushunchalar emas. Bu tushunchalar ko‘p hollarda subyektiv va ko‘proq filosofiyaga tegishlidir. Bunga muvofiq rost va yolg‘on tushunchalardan foydalanmasdan matematik mantiqni qurish maqsadga muvofiqdir. Shu bilan birga bu qurishda mantiq qonunlarning o‘zlaridan foydalanmaslik zarur. Mulohazalar hisobi bu interpretatsiyasi mulohazalar algebrasi bo‘lgan aksiomatik mantiqiy sistemadir.

1. Mulohazalar hisobi

Har qanday hisobning tavsifi bu hisob simvollarining tavsifini, alfavitini chekli simvollarning konfiguratsiyasi (joylanishi) iborat bo‘lgan formulalarni va keltirib chiqariluvchi formulaning ta’rifini o‘z ichiga kiritadi.

Mulohazalar hisobining alfaviti uchta kategoriyali simvollardan tashkil topgan:

a) Birinchi kategoriyali simvollar $x,y,z,\ldots,x_1,x_2,\ldots$

Bu simvollarni o‘zgaruvchi mulohazalar deb ataymiz.

b) Ikkinchi kategoriyali simvollar $\vee, \&, \rightarrow, -$

Ular umumiy namlanuvchi mantiqiy bog‘lovchilar deb yuritiladi. Ulardan birinchisi – dizyunktsiya belgisi yoki mantiqiy qo‘shish ikkinchisi konyunktsiyasi belgisi yoki mantiqiy ko‘paytirish uchinchisi – implikatsiya belgisi yoki mantiqiy keltirib chiqarish va to‘rtinchisi – inkor belgisi.

c) Uchinchi kategoriyali simvollarni qavslar deb ataluvchi () simvollar juftligi tashkil qiladi. Mulohazalar hisobi boshqa simvollarga ega emas. Mulohazalar hisobining so‘zlari mulohazalar hisobi alfavitining chekli simvollar ketma–ketligidan iborat. Formulalarni belgilash uchun lotin alfavitining bosh harflaridan foydalanamiz. Bu harflar mulohazalar hisobi simvollari bo‘lmaydi. Ular formulalarning faqat shartli belgilashlaridan iboratdir.

Mulohazalar hisobi formulasining ta’rifi

(1) Har qanday o‘zgaruvchi x,y,z,… formula bo‘ladi

(2) Agar A va B – formulalar bo‘lsa u holda $(A\&B), (A \vee B), (A \to B), \bar{A}$ lar ham shuningdek formulalardir.

(3) Simvollarning hech bir boshqa qatori formula bo‘lmaydi.

Mulahazalar hisobi formulalariga misollar keltiramiz x,y,z o‘zgaruvchi mulohazalar formula ta’rifining 1–bandiga muvofiq formula bo‘ladi. Ammo unda $(x\&y), (x \vee z), (y \to z), \bar{x}$ so‘zlar formula ta’rifining 2–bandiga muvofiq formula bo‘ladi. Bu sababga ko‘ra

$(\overline{x\&y}), \big((x \vee z)\&(y \to z)\big), ((x\&y) \to (y \to z))$ so‘zlar ham formula bo‘ladi.

Ravshanki $x\bar{y}, \&x, (x\&y, x \vee y)$ so‘zlar formula bo‘lmaydi (bu so‘zlarning uchinchisi yopiqmas qavsni o‘zichiga olsa to‘rtinchisida esa qavslar yo‘q). Formula tushunchasi bilan bir vaqtda qism formula yoki formulaning qisim tushunchasi kiritiladi.

1) Elementar formulaning qismi formulasi faqat uning o‘zi bo‘ladi.

2) Agar formula $\bar{A}$ ko‘rinishiga ega bo‘lsa u holda uning qisim formulalari uning o‘zi, A formula va A formulaning hamma qisim formulalari bo‘ladi.

3) Agar formula $(A * B)$ ko‘rinishiga ega bo‘lsa (bu yerda va bundan buyon * simvol deb uchta $\vee$,&,$\to$ simvollarning ixyoriy bittasini tushunamiz) u holda uning qism formulalari uning o‘zi, A va B formulalar hamda A va B

formulalarning barcha qism formulalari bo‘ladi. Masalan $\left((x\&\bar{y}) \to (\overline{\bar{z} \vee y})\right)$ formula uchun uning qisim formulalari quydagilar bo‘ladi:

$((x\&\bar{y}) \to (\overline{\bar{z} \vee y}))$ – nolinchi chuqurlikdagi qism formula,

$(x\&\bar{y}), (\overline{\bar{z} \vee y})$ – birinchi chuqurlikdagi qism formulalar,

$x, \bar{y}, (\bar{z} \vee y)$ – ikkinchi chuqurlikdagi qism formullar,

$y, \bar{z}$ – uchunchi chuqurlikdagi qism formulalar

z – to‘rtinchi chuqurlikdagi qism formulalar.

Ravshanki bunda eng kata chuqurlikda faqat elementar formulalar bo‘ladi. Biroq elementar formulalar boshqa chuqurliklarda ham bo‘lishi mumkin. Formulalarning yozuvida ayrim soddalashtirishlarni kiritamiz. Formulalar yozuvida qavslarni qaytarishni (tashlab yuborishni) aynan mulohazalar algebrasidagi qoidalarga asosan bajaramiz.

Bu qoudalarga muvofiq $\left((A\&B) \vee C\right), (\overline{A \vee B}), ((A \vee B) \to (C\&D))$ formulalarni mos ravishda $A\&B \vee C, \overline{A \vee B}$ $A \vee B \to C\&D$ ko‘rinishida yozamiz.

2. Isbotlanuvchi formulaning ta’rifi.

1) Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi.

Mulohazalar hisobini qurishida quydagi etap isbotlanuvchi formulalar sinfini ajratish bo‘ladi. Formula ta’rifi qanday xarakterli bo‘lsa isbotlanuvchi formulaning ta’rifi ham huddi shunday xarakterga egadir. Avval dastlabki isbotlanuvchi formulalar (aksiomalar) aniqlanadi, keyin esa bor bo‘lgan isbotlanuvchi formulalardan yangi isbotlanuvchi formulani hosil qilishga imkon beruvchi keltirib chiqarishi qadamlari aniqlanadi. Dastlabki isbotlanuvchi formulalardan keltirib chiqarish qoidalarni qo‘llash yo‘li bilan isbotlanuvchi formulani hosil qilishi berilgan formulani aksiomalardan keltirib chiqarish deb ataladi. Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi 11 ta aksiomadan iborat bo‘lib ular to‘rtta guruhga bo‘linadi.

Birinchi guruh aksiomalari:

$|_1 \quad x \to (y \to x)$

$|_2 \quad (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$

Ikkinchi guruh aksiomalari:

$||_1 \quad x\&y \to x$

$||_2 \quad x\&y \to y$

$||_3 \quad (z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x\&y))$

Uchinchi guruh aksiomalari:

$|||_1 \quad x \to x \vee y$

$|||_2 \quad y \to x \vee y$

$|||_3 \quad (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$

To‘rtinchi guruh aksiomalari:

$|V_1 \quad (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$

$|V_2 \quad x \to \bar{\bar{x}}$

$|V_3 \quad \bar{\bar{x}} \to x$

1) O‘rniga qo‘yish qoidasi

Agar mulohazalar hisobida *A* formula isbotlanuvchi, *x* – o‘zgaruvchi, *B* – mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsa u holda x o‘zgaruvchini *A* formulaga u necha marta kirgan bo‘lsa hamma joyda B formula bilan almashtirish natijasida hosil qilingan formula ham shuningdek isbotlanuvchi formula bo‘ladi *A* formulada x o‘zgaruvchini *B* formula bilan almashtirish amalini o‘rniga qo‘yish deb yuritiladi va simvolik shunday yoziladi

$\int_x^B (A)$

Shunday ifodalangan qoidaga aniqlik kiritaylik

1) Agar *A* formula *x* o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa u holda

$\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yishi *B* ni beradi

b) Agar A formula x dan farqli u o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa u holda

$\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yishi A ni beradi

v) Agar A formula uchun o‘rniga qo‘yishi aniqlangan bo‘lsa u holda

A ning inkorida x ning o‘rniga

B formulani qo‘yish o‘rniga qo‘yishi inkordan iborat ya’ni $\int_x^B(\bar{A})$ o‘rniga qo‘yish $\overline{\int_x^B(A)}$ beradi.

g) Agar A_1 va A_2 formulalar uchun o‘rniga qo‘yishlar aniqlangan bo‘lsa u holda

$\int_x^B(A_1 * A_2)$ o‘rniga qo‘yish

$\int_x^B(A_1) * \int_x^B(A_2)$ ni beradi

Agar A – isbotlanuvchi formula bo‘lsa $\vdash A$ deb yozamiz

Unda o‘rniga qo‘yish qoidasini sxematik quydagicha yozish mumkin

$\frac{\vdash A}{\vdash \int_x^B(A)}$ va bu yozuv shunday o‘qiladi:

Agar A formula isbotlanuvchi bo‘lsa u holda $\int_x^B(A)$ formula ham isbotlanuvchi.

2) Xulosa qilish qoidasi.

Agar A va $A \to B$ formulalar mulohazalar hisobida isbotlanuvchi bo‘lsa u holda B formula ham shuningdek isbotlanuvchi bo‘ladi. Bu qoidaning sxematik yozuvi

$\frac{\vdash A;\ \vdash A \to B}{\vdash B}$ ko‘rinishiga egadir.

3) Isbotlanuvchi formulaning ta’rifi

1) Har qanday aksioma isbotlanuvchi formula bo‘ladi

2) Isbotlanuvchi formuladan x o‘zgaruvchi o‘rniga ixtiyoriy B formulani qo‘yishni qo‘llash yo‘li bilan hosil qilingan formula isbotlanuvchi formuladan iborat

3) Isbotlanuvchi A va $A \to B$ formulalardan xulosa qilish qoidasini qo‘llashdan hosil qilingan B formula isbotlanuvchi formuladan iborat

4) Mulohazalar hisobining boshqa hech bir formulasi isbotlanuvchi formula deb hisoblanmaydi.

Isbotlanuvchi formulani hosil qilish jarayonini isbot deb ataladi. Isbotlarga misollar keltiramiz.

1) Bunda $\vdash A \to A$ (implikatsiyaning refleksivligini) isbotlang

$|_2$ foydalanib $\vdash (x \to (y \to z)) \to \big((x \to y) \to (x \to z)\big)$ va $\int_z^x (|_2)$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz. Unda $\vdash \big(x \to (y \to x)\big) \to \big((x \to y) \to (x \to x)\big)$ (1) formulani hosil qilamiz $|_1$ aksiomaga va (1) formulaga xulosa qilish qoidasini qo‘llab $\vdash (x \to y) \to (x \to x)$ (2) formulani hosil qilamiz.

(2) formulada $\int_y^{\bar{\bar{x}}}(2)$ o‘rniga qo‘yilishini amalga oshiramiz. Natijada ushbu isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz $\vdash (x \to \bar{\bar{x}}) \to (x \to x)$ (3) IV_2 aksiomaga va (3) formulaga xulosa qilish qoidasini qo‘llaymiz. Bu isbotlanuvchi formulaga olib keladi $\vdash (x \to x)$ (4). Nihoyat (4) formulada x o‘rniga A formulani qo‘yishni amalga oshirib $\vdash A \to A$ hosil qilamiz.

2) Bunda $\vdash \overline{x \vee y} \to \bar{x}\&\bar{y}$ ni isbotlang.

$||_3$ aksiomani olamiz va unda ketma–ket ikkita almashtirish avval x ni $\bar{x}$ ga keyin esa y ni $\bar{y}$ ga almashtirish bajaramiz. Natijada isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz. Haqiqatan ham

$\vdash (z \to x) \to \big((z \to y) \to (z \to x\&y)\big)$

$\vdash (z \to \bar{x}) \to \big((z \to y) \to (z \to \bar{x}\&y)\big)$

$\vdash (z \to \bar{x}) \to \big((z \to \bar{y}) \to (z \to \bar{x}\&\bar{y})\big)$ (1)

1. Formulada $\int_z^{\overline{x \vee y}}(|)$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz. Unda

$\vdash (\overline{x \vee y} \to \bar{x}) \to \big((\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x}\&\bar{y})\big)$ (2)

hosil qilamiz. Bunda

$\overline{x \vee y} \to \bar{x}$ (3) *va* $\overline{x \vee y} \to \bar{y}$ (4) formulalarning isbotlanuvchi formulalar ekanligini isbotlaymiz. IV_1 aksiomani olamiz va $\int_y^{x \vee y}(IV_1)$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz.

Natijada $\vdash (x \to x \vee y) \to \left((\overline{x \vee y} \to \bar{x})\right)$ (5) hosil qilamiz

(5) formula va $|||_1$ $x \to x \vee y$ aksiomaga xulosa qilish qoidasini qo‘llab (3) formulaning isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

IV_1 $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$ aksiomani olamiz va $\int_y^z(IV_1)$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz.

$\vdash (x \to z) \to (\bar{z} \to \bar{x})$ (i) yana $\int_x^y$(i) o‘rniga qo‘yishni bajarib ushbuni topamiz

$\vdash (y \to z) \to (\bar{z} \to \bar{y})$ (ii) yana $\int_z^x$(ii) o‘rniga qo‘yishni bajarib

$\vdash (y \to x) \to (\bar{x} \to \bar{y})$ (iii) hosil qilamiz.

$\int_x^{x \vee y}$(iii) o‘rniga qo‘yishni bajarib $\vdash (y \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{y})$ (i$\ddot{V}$) ni hosil qilamiz. (i$\ddot{V}$) formula va $|||_2$ y$\to x \vee y$ aksiomalarga xulosa qilish qoidasini qo‘llab (4) formulaning isbotlanuvchi ekanligini xosil qilamiz (3) va (2) formulalarga xulosa qilish qoidasini qo‘llab ushbu isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz

$\vdash (\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x}\&\bar{y})$ (6)

(4) va (6) formulalarga xulosa qilish qoidasini qo‘llab dastlabki formulaning isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz

$\vdash (\overline{x \vee y} \to \bar{x}\&\bar{y})$

Nazorat topshiriqlari:

a. Quydagi ifodalardan qaysi biri mulohazalar hisobining formulalari bo‘ladi:

$(\bar{P}_1 \wedge \bar{P}_2) \to (P_1 \vee P_2)$;

$\left((P_1 \vee P_2) \vee (P_1 \& P_2)\right) \to \bar{P}_3$;

$(P_1 \to (P_2 \vee P_3)) \to P_3$;

$(P_1 \to P_2) \to \big((P_1 \to \bar{P}_2) \to P_1\big)$;

$\big(P_1 \wedge (\to P_2)\big) \to (P_2 \vee \bar{P}_1)$;

$(P_1 \to P_3) \to \Big((P_2 \to P_3) \to \big((P_1 \vee P_2) \to P_3\big)\Big)$;

$\big((x \to y) \wedge (y \to z)\big) \to (\bar{x} \vee z)$;

$(x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{y})$

Yechilishi ta'rifga muvofiq 1),3),4),6),7) ifodalar formulalar bo'ladi qolganlari esa formula emas.

b. Formulalarning barcha qism formulalarini yozing

$x \to (y \to x)$; 2) $\overline{a \vee b} \to c$; 3) $a\&\overline{c \vee b}$; 4) $x \to y\&z$; 5) $x \vee y\&z \to x$;

6) $\overline{x \to y} \vee x\&y$; 7) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (\bar{x} \vee z)$;

8) $(x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{y})$

Yechilishi 1) $x \to (y \to x)$ formula nolinchi chuqurlikdagi qism fomula $x, (y \to x)$ birinchi chuqurlikdagi qism formulalar y,x ikkinchi chuqurchadagi qism formulalardir. $\overline{a \vee b} \to c$ nolinchi chuqurlikdagi qism formula, $\overline{a \vee b}, c$ birinchi chuqurlikdagi qism formulalar $a \vee b$ ikkinchi chuqurlikdagi qism formula bo'lib, a,b esa uchinchi chuqurlikdagi qism formulalardir.

$a\&\overline{c \vee b}$ nolinchi chuqurlikdagi qisim formula a, $\overline{c \vee b}$ lar birinchi chuqurlikdagi qisim formulalar, $c \vee b$ ikkinchi chuqurlikdagi qism formula a,b esa uchunchi chuqurlikdagi qism formulalar bo'ladi. $\overline{a \vee b} \to c$ nolinchi chuqurlikdagi $\overline{a \vee b}, c$ birinchi chuqurlikdagi $a \vee b$ ikknchi chuqurlikdagi a,b uchunchi chuqurlikdagi qism formulalardir.

$x \vee y\&z \to x$ nolinchi chuqurlikdagi $x \vee y\&z, x$ birinchi chuqurlikdagi x,y&z ikkinchi chuqurlikdagi y,z uchunchi chuqurlikdagi qism formulalardir.

$\overline{x \to y} \vee x\&y$ nolinchi chuqurlikdagi $\overline{x \to y}, x\&y$ birinchi chuqurlikdagi $x \to y, x, y$ ikkinchi chuqurlikdagi x,y uchinchi chuqurlikdagi qism formulalardir

$((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (\bar{x} \vee z)$ nolinchi chuqurlikdagi $\big((x \to y) \wedge (y \to z)\big), \bar{x} \vee z$ birinchi chuqurlikdagi $x \to y, y \to z, \bar{x}, z)$ ikkinchi chuqurlikdagi x,y,z uchinchi chuqurlikdagi qism formulalardir.

$(x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{y})$ nolinchi chuqurlikdagi $x \to y, (x \to \bar{y}) \to \bar{y}$ ikkinchi chuqurlikdagi x,y, $(x \to \bar{y})$ uchinchi chuqurlikdagi x,$\bar{y}$ to‘rtinchi chuqurlikdagi u esa beshinchi chuqurlikdagi qism formulalardir.

Hosilaviy keltirib chiqarish qoidalari ham ko‘rib chiqilgan o‘rniga qo‘yish va xulosa qilish qoidasi kabi yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qlishga imkon beradi. Ular o‘rniga qo‘yish va xulosa qilish qoidalari yordamida hosil qilinadi, shuning uchun esa ularning hosilalari bo‘ladi.

3. O‘rniga qo‘yish qoidasi.

A – isbotlanuvchi formula $x_1, x_2, \dots, x_n$ o‘zgaruvchilar $B_1, B_2, \dots, B_n$ esa mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulalari bo‘lsin. Unda A formulaga $x_1, x_2, \dots, x_n$ o‘zgaruvchilar o‘rniga mos ravishda $B_1, B_2, \dots, B_n$ formulalarni bir vaqtda ko‘yish natijasi isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Bu qoidani isbotlash uchun juft–juft bilan har xil va $A, B_1, \dots, B_n$ formulalarga kiruvchi barcha o‘zgaruvchilardan farq qiluvchi $z_1, z_2, \dots, z_n$ o‘zgaruvchilarni tanlab olamiz. Endi A formulada avval x_1 ni z_1 ga keyin x_2 ni z_2 ga va hokazo va nihoyat x_n ni z_n ga almshtirib ketma–ket n ta o‘ringa qo‘yishni qilamiz. Bu o‘ringa qo‘yishlar isbotlanuvchi formulalarni beradi:

$\vdash \int_{x_1}^{z_1}(A)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_1$ beradi,

$\vdash \int_{x_2}^{z_2}(A_1)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_2$ beradi, …,

$\vdash \int_{x_n}^{z_n}(A_{n-1})$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_n$ beradi.

So‘ngra A_n formulaga z_1 ni B_1 ga keyin z_2 ni B_2 ga va hokazo va nihoyat z_n ni B_n ga almashtirib yana ketma–ket n ta o‘rniga qo‘yishni o‘tkazamiz. Bu o‘rniga qo‘yishlar isbotlanuvchi formulalarni beradi.

$\vdash \int_{z_1}^{B_1}(A_n)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash C_1$ formulani beradi,

$\vdash \int_{z_2}^{B_2}(C_1)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash C_2$ formulani beradi, …,

$\vdash \int_{z_n}^{B_n}(C_{n-1})$ o‘rniga qo‘yish $\vdash C_n$ formulani beradi.

Bunda A formulada $x_1, x_2, \dots, x_n$ o‘zgaruvchilar o‘rniga mosravishda $B_1, B_2, \dots, B_n$ formulalarni bir vaqtda qo‘yish natijasida isbotlanuvchi C_n formula hosil bo‘lishi tushunarlidir.

Bir vaqtda keyin amalni sxematik quydagi ko‘rinishda yoziladi.

$$\vdash \int_{x_1,x_2,\dots,x_n}^{\frac{\vdash A}{B_1,B_2,\dots,B_n}}(A)$$

a. Murakkab xulosa qilish qoidasi.

Ikkinchi hosilaviy qoida

$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots (A_n \to L) \dots)))$ ko‘rinishdagi formulalarga qo‘llaniladi va shunday ifodalanadi.

Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ va $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots (A_n \to L) \dots)))$ formulalar isbotlanuvchi bo‘lsa u holda L formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi. Bu tasdiq xulosa qilish qoidasini ketma–ket qo‘llash bilan osongina isbotlanadi. Haqiqatan ham agar A_1 va $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots (A_n \to L) \dots)))$ formulalar isbotlanuvchi bo‘lsa u holda xulosa qilish qoiddasiga ko‘ra $A_2 \to (A_3 \to (\dots (A_n \to L) \dots)))$ formula ham isbotlanuvchi. Ammo A_2 va $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots (A_n \to L) \dots)))$ formulalar isbotlanuvchi ekanligidan u holda $A_3 \to (\dots (A_n \to L) \dots)))$ formula ham isbotlanuvchi. Bu mulohazalarni davom ettirib nihoyat biz bunda L formulaning isbotlanuvchi ekanligini isbotlaymiz. Murakkab xulosa qilish qoidasi sxematik shunday yoziladi:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots (A_n \to L) \dots)))}{\vdash L}$$

1.3. – mashqni echishni davom ettiramiz

2) $A \to A\&A$ isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

II_3 aksiomani olamiz va unda $\int_{x,y,z}^{A,A,A}(II_3)$ o‘rniga qo‘yishni qilamiz natijada

$\vdash (z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x\&y))$

$\vdash (A \to A) \to \big((A \to A) \to (A \to A\&A)\big)$ (1) xosil qilamiz. Ammo

$\vdash (A \to A)$ (2)

va (2) ga MxQ qo‘llab

$\vdash A \to A\&A$ hosil qilamiz.

3)$(\bar{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\bar{A} \vee C \to B))$ isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz II_3 aksiomani olamiz va $\int_{x,y,z}^{B,A,A\&B}(II_3)$ o‘rniga qo‘yishini bajaramiz

$\vdash (z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x\&y))$

$\vdash (A\&B \to B) \to \big((A\&B \to A) \to (A\&B \to B\&A)\big)$ (1) ni hosil qilamiz. Ammo

$\vdash (A\&B \to B)$ (2)

$\vdash (A\&B \to A)$ (3)

(1),(2) va (3) formulalarga MxQ qo‘llab

$\vdash (A\&B \to B\&A)$ hosil qilamiz.

4) $A \vee B \to B \vee A$ formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. III_3 aksiomani olamiz va unda $\int_{x,y,z}^{A,B,B\vee A}(III_3)$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz

$\vdash (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$

$\vdash (A \to B \vee A) \to \big((B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A)\big)$ (1) hosil qilamiz. Ammo

$\vdash A \to B \vee A$ (2)

$\vdash B \to B \vee A$ (3)

(1),(2) va (3) formulaga MxQ qo‘llab

$\vdash A \vee B \to B \vee A$ hosil qilamiz.

5)$(A \to B) \to (A \to A)$ formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz I_2 aksiomani olamiz va unda $\int_{x,y,z}^{A,B,A}(I_2)$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz natijada

$\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$

$\vdash (A \to (B \vee A)) \to \big((A \to B) \to (A \to A)\big)$ (1) hosil qilamiz. Ammo $\vdash A \to (B \to A)$ (2)

va (2) formulalardan XQ ko‘ra $(A \to B) \to (A \to A)$ hosil qilamiz.

6) $\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}$ formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. IV_3 aksiomani olamiz va unda $\vdash \bar{\bar{x}} \to x$

$\int_x^{\bar{A}}(IV_3)$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz $\vdash \bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}$ hosil qilamiz.

b. Sillogizm qoidasi.

Agar $A \to B$ va $B \to C$ formulalar isbotlanuvchi bo‘lsa u holda $A \to C$ formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi ya’ni

$$\frac{\vdash A \to B, \vdash B \to C}{\vdash A \to C}$$

Bu qoidani isbotlash uchun quydagi bir vaqtda o‘rniga qo‘yishni qo‘llaymiz:

$\int_{x,y,z}^{A,B,C}(I_2)$ va $\int_{x,y}^{B\to C,A}(I_1)$ isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz.

$\vdash (A \to (B \to C)) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$ (1)

$\vdash (B \to C) \to \big(A \to (B \to C)\big)$ (2)

Bundan tashqari shartga ko‘ra quydagi formulalar isbotlanuvchi

$\vdash A \to B$ (3)

$\vdash B \to C$ (4)

(4) va (2) dan xulosa qilish qoidasiga ko‘ra

$\vdash A \to (B \to C)$ (5) hosil qilamiz. Ammo unda (5),(3) va (1) formulalardan murakkab xulosa qilish qoidasiga ko‘ra $\vdash A \to C$ ega bo‘lamiz.

c. Kontrpozitsiya qoidasi.

Agar $A \to B$ formula isbotlanvuchi formula bo‘lsa u holda $\bar{B} \to \bar{A}$ formula ham isbotlanuvchi ya’ni $\frac{\vdash A \to B}{\vdash \bar{B} \to \bar{A}}$

Bu qoidani isbotlash uchun bir vaqtda o‘rniga qo‘yishni qilamiz: $\int_{x,y}^{A,B}(IV_1)$ natijada isbotlanuvchi

$\vdash (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$

$\vdash (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$ (1) formulani hosil qilamiz. Ammo shartga ko‘ra $\vdash (A \to B)$ (2) formula isbotlanuvchi

va (1) formulalardan xulosa qilish qoidasiga ko‘ra $\bar{B} \to \bar{A}$ ega bo‘lamiz.

Qo‘sh inkorni yo‘qotish qoidasi

Agar $A \to \bar{\bar{B}}$ formula isbotlanuvchi bo‘lsa u holda $A \to B$ formula ham isbotlanuvchi.

Agar $\bar{\bar{A}} \to B$ formula isbotlanuvchi bo‘lsa u holda $A \to B$ formula ham isbotlanuvchi ya’ni

$\frac{\vdash A \to \bar{\bar{B}}}{\vdash A \to B}$ va $\frac{\vdash \bar{\bar{A}} \to B}{\vdash A \to B}$

Bu qoidani isbotlash uchun $\int_x^A (IV_2)$ va $\int_x^B (IV_3)$ o‘rniga qo‘yishlarni bajaramiz natijada isbotlanuvchi formulalar hosil qilamiz.

$\vdash A \to \bar{\bar{A}}$ (1)

$\vdash \bar{\bar{B}} \to B$ (2)

Ammo shartga ko‘ra $\vdash A \to \bar{\bar{B}}$ (3) isbotlanuvchi b) shartga ko‘ra esa $\vdash \bar{\bar{A}} \to B$ (4) formula isbotlanuvchi. Shunday qilib, agar (3) va (2) formulalardan sillochizm qoidasiga ko‘ra $\vdash A \to B$ hosil qilamiz. Agarda b) shart bajarilsa u holda (1) va (4) formulalardan $\vdash A \to B$ hosil qilamiz.

3.1. Hosilaviy keltirib chiqarish qoidalaridan foydalanib ushbu formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

1) $\bar{A} \vee \bar{B} \to \overline{A \& B}$ 2) $A \to R$ bu yerda hamma vaqt $\vdash R$

3) $(A \to B) \to (A \to A \vee B)$; 4) $F \to A$ $Fq\bar{R}$ va $\vdash R$

5) $(A \to B) \to (A \to A)$ 6) $A \& \bar{A} \to F$

7) $(A \to B) \& \bar{B} \to \bar{A}$ 8) $\bar{A} \& \bar{B} \to \overline{A \vee B}$

Yechilishi:

III_3 aksiomaga $\int_{x,y,z}^{\bar{A},\bar{B},\overline{A\&B}} (III_3)$ o‘rniga qo‘yishni qilamiz natijada

III_3: $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$

$\vdash (\bar{A} \to \overline{A\&B}) \to \big((\bar{B} \to \overline{A\&B}) \to (\bar{A} \vee \bar{B} \to \overline{A\&B})\big)$ (1) hosil qilamiz. II_1 va II_2 aksiomalarni olamiz va ularga konpozitsiya qonunlarini qo‘llaymiz.

$\vdash A\&B \to A$ $\vdash \bar{A} \to \overline{A\&B}$ (2)

$\vdash A\&B \to B$ $\vdash \bar{B} \to \overline{A\&B}$ (3)

hosil qilamiz (1),(2) va (3) lardan MxQ ko‘ra $\vdash \bar{A} \vee \bar{B} \to \overline{A\&B}$ hosil qilamiz.

I_1 aksiomada $\int_{x,y}^{R,A}(I_1)$ o‘rniga qo‘yishni amalga oshirib ushbu isbotlanuvchi formulani hosilq qilamiz.

$\vdash R \to (A \to R)$ (1)

Ammo shartga ko‘ra $\vdash R$ (2) (1) va (2) dan XQ ko‘ra $\vdash A \to R$

I_1 aksiomada $\int_{x,y}^{A\to A\vee B, A\to B}(I_1)$ o‘rniga qo‘yishni amalga oshirib ushbu isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz.

I_1: $x \to (y \to x)$

$\vdash (A \to A \vee B) \to \big((A \to B) \to (A \to A \vee B)\big)$ (1)

Ammo $\vdash A \to A \vee B$ (2) (1) va (2) dan XQ ko‘ra

$\vdash (A \to B) \to (A \to A \vee B)$

$\vdash (\bar{A} \to R)$ 2) ga muvofiq bu yerda $\vdash R$.

Unda kontrpozitsiya qoidasiga ko‘ra $\vdash \bar{R} \to \bar{\bar{A}}$ isbotlovchi formulani hosil qilamiz $\bar{R}qF$ va qo‘sh inkorni yo‘qotish qoidasiga ko‘ra $\vdash F \to A$ hosil qilamiz.

$\int_{x,y}^{A\to A, A\to B}(I_1)$ o‘rniga qo‘yishni bajarib

I_1: $x \to (y \to x)$

$\vdash (A \to A) \to \big((A \to B) \to (A \to A)\big)$ (1)

$\vdash (A \to A)$ (2)

va (2) lardan XQ ko‘ra $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$ hosil qilamiz.

Nazorat topshiriqlari.

1.1. $L_1 q(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$, $L_2 qA \vee B$ $L_3 qA \to B \vee C$ formulalar uchun quydagi o‘ringa qo‘yishlarning har qaysining natijalarini yozing.

$\int_{A,B}^{B,C}(L_1)$ 2) $\int_{A}^{A\to B}(L_2)$ 3) $\int_{A,C}^{B\to A\&B,B}(L_3)$

4) $\int_{A,B}^{A\&B,A\vee B}(L_1)$ 5) $\int_{A,B}^{B,A}(L_2)$ 6) $\int_{A,B,C}^{A\&\bar{A},C,\bar{A}}(L_3)$

Yechilishi:

$\int_{A,B}^{B,C}(L_1)\,q\int_{A,B}^{B,C}\big((A\to B)\to(\bar{B}\to\bar{A})\big)q(B\to C)\to(\bar{C}\to\bar{B})$

$\int_{A}^{A\to B}(L_2)\,q\int_{A}^{A\to B}(A\vee B)q(A\to B)\vee B$

$\int_{A,C}^{B\to A\&B,B}(L_3)\,q\int_{A,C}^{B\to A\&B,B}(A\to B\vee C)q(B\to A\&B)\to B\vee B$

$\int_{A,B}^{A\&B,A\vee B}(L_1)\,q\int_{A,B}^{A\&B,A\vee B}(A\to B)\to(\bar{B}\to\bar{A})q(A\&B\to A\vee B)\to(\overline{A\vee B}\to\overline{A\&B})$

$\int_{A,B}^{B,A}(L_2)\,q\int_{A,B}^{B,A}(A\vee B)qB\vee A.$

$\int_{A,B,C}^{A\&\bar{A},C,\bar{A}}(L_3)\,q\int_{A,B,C}^{A\&\bar{A},C,\bar{A}}(A\to B\vee C)qA\&\bar{A}\to C\vee\bar{A}.$

1.2. O‘rniga qo‘yish qoidasini qo‘llab bunda quydagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini isbotlang.

$(A\to B)\&B\to B$

$A\&B\to A\&B\vee C$

$(\bar{A}\to B)\to((C\to B)\to(\bar{A}\vee C\to B))$

$\overline{\overline{C\vee D}}\to C\vee D$

$(A\&B\to(C\to B\&C))\to((A\&B\to C)\to(A\&B\to B\&C))$

Yechilishi:

1. $\int_{x,y}^{A\to B,B}(II_2)\,q\int_{x,y}^{A\to B,B}(x\&y\to y)q(A\to B)\&B\to B$

2. $\int_{x,y}^{A\&B,C}(III_1)\,q\int_{x,y}^{A\&B,C}(x\to x\vee y)qA\&B\to(A\&B)\vee C$

3. $\int_{x,y,z}^{\bar{A},C,B}(III_3)\,q\int_{x,y,z}^{A,C,B}(x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))q(\bar{A}\to B)\to((C\to B)\to(\bar{A}\vee C\to B))$

4. $\int_{x}^{C\vee D}(IV_3)\,q\int_{x}^{C\vee D}(\bar{\bar{x}}\to x)q\overline{\overline{C\vee D}}\to C\vee D$

5. $\int_{x,y,z}^{A\&B,C,B\&C}(I_2)\, q \int_{x,y,z}^{A\&B,C,B\&C}(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) q (A\&B \to (C \to B\&C) \to ((A\&B \to C) \to (A\&B \to B\&C))$

1.3. O‘rniga qo‘yish va xulosa qilish qoidasini qo‘llab ushbu formulalarning isbotlanuvchi ekanligini o‘rnatilsin.

III_3 aksiomani olamiz va unda $\int_{x,y,z}^{A,A,A}(III_3)$ o‘rniga qo‘yishni qilamiz

$\vdash (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$

$\vdash (A \to A) \to \big((A \to A) \to (A \vee A \to A)\big)$ (i) isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz

Ammo $\vdash (A \to A)$ (2)

(2) va (1) xulosa qilish qoidasini qo‘llab

$\vdash (A \to A) \to (A \vee A \to A)$ (3) ni hosil qilamiz yana (2) va (3) ga hulosa qilish qoidasini qo‘llab $\vdash A \vee A \to A$ hosil qilamiz.

ADABIYOTLAR

1. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: ИЦ Академия, 2006
2. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Физматлит, 2004.
3. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекиций. Задачник-практикум и решения: Учебное пособие.–СПб.: Лань, 2009.–288с.
4. Шабунин Л.В. Математическая логика. Логика высказываний и логика предикатов. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2003.