КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Основные вопросы:

§ 1. Комплексные числа в алгебраической форме
§ 2. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Тригонометрическая форма
§ 3. Возведение в степень и извлечение корня
§ 4. Вычисление сумм и произведений с помощью комплексных чисел
§ 5. Корни из единицы
§ 6. Показательная и логарифмическая функции комплексной переменной

Ключевые слова и выражения: комплексное число; мнимая единица; действительная и мнимая части комплексного числа; комплексно-сопряженное число; корень n-й степени из комплексного числа; комплексного числа; комплексная плоскость; действительная и мнимая оси; модуль и аргумент комплексного числа; тригонометрическая форма комплексного числа; теорема о модуле суммы; формула Муавра; формула корня n-й степени из комплексного числа; корни n-й степени из 1; первообразные корни n-й степени из 1; круговой многочлен; показатель, которому принадлежит корень; формулы Эйлера; показательная форма комплексного числа.

§1. Комплексные числа в алгебраической форме

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел. Комплексное число вида (a, o) отождествляется с действительным числом a. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\boldsymbol{C}$. Пары (a, b) и (c, d) считаются *равными* в том и только том случае, когда равны их соответствующие компоненты, т.е. $(a, b) = (c, d) <=> \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$ Сложение и умножение комплексных чисел определяется равенствами

$$(a, в)+(c, d) = (a+c, b+d),$$
$$(a, b)\cdot(c, d) = (ac–bd, ad+ bc)$$

Комплексное число (0,1) принято обозначать буквой i и называть *мнимой единицей*. Легко проверить, что $i^2+1=0$, т.е. i является корнем уравнения $i^2+1=0$.

Всякое комплексное число z можно записать в алгебраической форме: $a+bi$. Если $z=a+bi$, то a называется *действительной частью комплексного числа* z и обозначается $Re\ z$, b называется *мнимой частью комплексного числа* z и обозначается через $Im\ z$. Комплексное число $z = a–bi$ называется *комплексно-сопряженным с комплексным числом* $z = a+bi$.

Комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ считаются *равными*, тогда и только тогда, когда $a = c,\ \ b = d$.

Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме определяются следующими равенствами:

$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$

$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i,$

$(a+bi)\,(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i,$

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ $(c+di \neq 0,$ т.е. $c^2+d^2 \neq 0)$

Другими словами, все арифметические действия над комплексными числами производятся по тем же правилам, по каким они производятся для действительных чисел, если учитывать при этом равенство $i^2 = -1$.

Если в сумме, разности и частном комплексных чисел каждое число заменить комплексно-сопряженным с ним, то и результаты заменятся сопряженными с ними числами:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}, \qquad \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_1 - z_2}, \qquad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}, \qquad \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

Действия *возведения в степень* определяется как:

$$z^n = \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots z}_{n\text{раз}}, & \text{если } n \geq 2 \\ z, & \text{если } n = 1, \; n \in \boldsymbol{N} \end{cases}.$$

Для $z \neq 0$ полагают: $z^0 = 1, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

При возведении комплексного числа в степень с целыми показателями справедливы следующие свойства:

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{pq}, \quad (z_1 \cdot z_2)^p = z_1^p \cdot z_2^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p = \frac{z_1^p}{z_2^p}, \quad \text{где } p \cdot q \in \boldsymbol{Z}.$$

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое комплексное число ω, $\omega = \sqrt[n]{z}$, что $\omega W^n = z (n \geq 2, \; n \in \boldsymbol{N})$.

П р и м е р 1. Найти действительные числа x и y из уравнения:

$$(5x-3y)+(x-2y)i=6+(8-x+y)i.$$

Решение. Используя условие равенства комплексных чисел, получим

$$\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ x - 2y = 8 - x + y \end{cases}$$

Отсюда определяем неизвестные x и y:

$x = -\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{28}{9}$.

П р и м е р 2. Найти степени i.

Решение. По определению $i^0=1$, $i^1=1$, далее, известно, что $i^2 = -1$. Поэтому $i^3=i^2 \cdot i=-i$, $i^4=i^3 \cdot i=1$, $i^5=i^4 \cdot i=1$.

Вообще: $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $n \in N$.

П р и м е р 3. Возвести в степень: $(1+i)^{20}$, $(1-i)^{21}$.

Решение. Можно воспользоваться формулой бинома Ньютона, но легче поступить иначе. Заметим, что $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$. Тогда

$(1+i)^{20} = \left[(1+i)^2\right]^{10} = (2i)^{10} = -2^{10}$, $(1-i)^{21}\left[(1-i)^2\right]^{10}(1-i) = (-2i)^{10}(1-i) = -2^{10}(1-i)$.

Для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с комплексными коэффициентами, в первую очередь, надо научиться извлекать квадратные корни из комплексных чисел. Согласно определению, то, что число $x+yi$ является значением корня квадратного из числа $a+bi$, равносильно утверждению.

$$(x+yi)^2=a+bi \qquad (*)$$

Уравнение (*) имеет два различных решения, которые находятся по формулам:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}};\quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

где радикал означает арифметическое значение корня, а x и y выбираются одного знака, если $b>0$, и разных знаков, если $b<0$.

П р и м е р 4. Значение квадратного радикала $\sqrt{24-10i}$ равны $5-i$ и $-5+i$.

Квадратный корень можно извлечь и непосредственно.

П р и м е р 5. Извлечь корень $\sqrt{5+12i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5+12i} = x+yi$. По определению корня имеем $(x+yi)^2 = 5+12i$ или $(x^2-y^2)+2xyi = 5+12i$, откуда получаем систему $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=12 \end{cases}$.

Возведя оба уравнения в квадрат и сложив их, получим

$$(x^2+y^2)^2 = 25+144 \quad \text{и} \quad x^2+y^2 = 13.$$

Тогда из системы $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$, определим неизвестные x и y:

$x = \pm 3$, $y = \pm 2$.

Из второго уравнения первой системы следует, что у x и y знаки совпадают. Поэтому $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=-3$, $y_2=-2$.

Итак, $\sqrt{5+12i}$ имеет два значения $3+2i$ и $-3-2i$.

Теперь, умея извлекать квадратные корни, точно так же, как и в школьном курсе математики, устанавливаем, что:

Корни квадратного уравнения с комплексными коэффициентами $ax^2+bx+c=0$ находятся по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

П р и м е р 6. Корни квадратного уравнения $(3-i)x^2-2(2-3i)x-4i=0$, равны $x_1 = 0{,}4-0{,}8i$ и $x_2 = 0{,}2-1{,}4i$.

П р и м е р 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$.

Решение. Умножим обе части первого уравнения на $(1-i)$, а второго на $(1+i)$. Тогда получим $\begin{cases} 2z_1-2iz_2 = 2 \\ 2z_1+2iz_2 = -2+4i \end{cases}$.

Сложим оба уравнения. Тогда $4z_1 = 4i$. Отсюда $z_1=i$.

Вычтем из первого уравнения второе $-4z_2i=4-4i$. Отсюда $z_2 = \frac{-1+i}{i} = 1+i$.

П р и м е р 8. При каком действительном значении a число $4i^4-3ai^3+(2-a)i-5+a$ будет действительным?

Решение. Так как $i^4 = 1$, $i^3 = -i$, то $4i^4 - 3a^3 + (2-a)i - 5 + a = (2a+2)i + a - 1$. Следовательно, это число будет действительным при $2a+2=0$, т.е. $a = -1$.

П р и м е р 9. Решить уравнение $z\bar{z} + 2\bar{z} = 3 + 2i$.

Решение. Пусть $z=x+yi$. Тогда получим $x^2+y^2+2x-2yi=3+2i$. Приравнивая действительные и мнимые части получим: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ -2y = 2 \end{cases}$.

Отсюда $y = -1, \quad x = -1 \pm \sqrt{3}$. Следовательно, $z_1 = (-1+\sqrt{3}) - i, \quad z_2 = (-1-\sqrt{3}) - i$.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Найти сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если:

а) $z_1 = 5+4i$, $z_2 = -2+3i$; в) $z_1 = -8-7i$, $z_2 = -3i$;

с) $z_1 = 5 + \sqrt{3i}$, $z_1 = 5 - \sqrt{3i}$.

2. Найти разность z_2-z_1 частное $\frac{z_2}{z_1}$, если

а) $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 5$; b) $z_1=-1+\sqrt{3}i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$;

с) $z_1 = a - \sqrt{b}i$, $z_2 = a + \sqrt{b}i$.

3. Вычислить:

a) $(4+i)(5+3i) - (3+i)(3-i)$;

b) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; *c)* $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$; *d)* $\frac{(3-i)(1-4i)}{z-i}$; *e)* $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$;

f) $\frac{(3-i)(1-4i)}{z-i}$; *q)* $(z+i)^3 + (2-i)^3$; *h)* $(3+i)^3 - (3-i)^3$; *j)* $\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

4. Найти действительную часть комплексного числа:

а) $z = \frac{(1+2i)^3}{i} + i^{19}$; b) $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} + \frac{1}{i}$.

5. Найти мнимую часть комплексного числа:

а) $z = (2-i)^3(2+11i)$ b) $z = \frac{2-3i}{1+4i} + i^6$.

6. Доказать равенства:

a) $(1+i)^{8n} = 2^{4n} (n \in N)$; *b)* $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n} (n \in Z)$.

7. Решить систему уравнений:

a) $\begin{pmatrix} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} (1-i)z_1 - 3z_2 = -i \\ 2z_2 - (3+3i)z_2 = 3-i \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{pmatrix}$

8. Вычислить:

a) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}$; b) $i+i^2+i^3+\ldots i^n$, $n > 4$; c) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \ldots i^{50}$.

9. Пусть $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Вычислить:

a) $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$; b) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$;

c) $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$.

10. Решить уравнения:

a) $(i-z)(1+2i) + (1-iz)(3-4i) = 1+7i$; b) $z^2 + \bar{z} = 0$; c) $(1-i)\bar{z} - 3iz = 2-i$;

d) $z\bar{z} + 3(z-\bar{z}) = 4+3i$; e) $z\bar{z} + 3(z+\bar{z}) = 7$; f) $z\bar{z} + 3(z+\bar{z}) = 3i$.

11. Вычислить:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$; e) $\sqrt{-11+60i}$; f) $\sqrt{-8-6i}$;

b) q) $\sqrt{2-3i}$, h) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, i) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$, $\sqrt[4]{-1}$.

12. Решить уравнения:

a) $x^2 - (2+i)x + (-1+7i) = 0$; b) $x^2 - (3-i)x + (5-5i) = 0$;

c) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$; d) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$; e) $x^4 + 34x^2 + 289 = 0$;

f) $x^2 - (4+3i)x + 1 + 5i = 0$; g) $x^2 + 5x + 9 = 0$; h) $x^2 + x + 1 + i = 0$.

§ 2. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Тригонометрическая форма

Установим взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и комплексными числами. Для этого зафиксируем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Это значит, что каждой точке плоскости сопоставляется упорядоченная пара действительных чисел (a,b), т.е. элемент $(a,b) \in C$, и наоборот, каждому комплексному числу (a,b) сопоставлена в плоскости точка с координатами a и b. В связи с этим сама плоскость называется *комплексной*. При этом соответствии действительным числам сопоставляются точки вида (a,o), т.е. точки, лежащие на оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс комплексной плоскости называется *действительной осью*. Точкам оси ординат сопоставляются числа вида (o,b) мнимые числа. Поэтому ось ординат комплексной плоскости называют *мнимой осью*.

Обычно говорят, что комплексное число $z = (a, b)$ изображается на плоскости точкой с координатами a и b или векторам с проекциями a и b на оси абсцисс и ординат соответственно. Часто говорят просто: точка z или вектор z. Пусть $z \in \boldsymbol{C}$. *Модулем* комплексного числа $z = a+bi$ называется действительное число $z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением вектора z называется *аргументом числа* z и обозначается символом $arq\ z$. Аргумент не определен для числа 0.

Рассмотрим произвольное отличное от нуля комплексное число $z = (a,b)$ и соответствующий ему вектор на плоскости. Положение точки z на плоскости вполне определяется её полярными координатами: расстоянием r от начала координат до точки z, т.е. $|z|$, и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением вектора z, т.е. *arq z*.

Если $z = a + bi$, то $cos\varphi = \frac{a}{r}$, $sin\varphi = \frac{b}{r}$. Отсюда следует, что при любом расположении точки z на комплексной плоскости

$$z = r(cos\varphi + sin\varphi).$$

Такая форма записи комплексного числа, называется *тригонометрической*.

Рассмотрим умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\varphi_2)$.

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad z_2 \neq 0.$$

П р и м е р 1. Действительное число $|z|$ – это расстояние от точки, изображающей z, до начала координат. Другими словами, $|z|$ это длина вектора, изображающего z.

П р и м е р 2. Множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| = 3$, – это окружность с центром в начале координат, а радиус равен 3.

П р и м е р 3. Множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| \le 3$ – это круг с границей, центр которого лежит в начале координат, а радиус равен 3.

П р и м е р 4. Множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z - 1 + 2i| = 3$, – это окружность с центром в точке (1,–2) и радиусом, равным 3.

П р и м е р 5. Множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z - 1 + 2i| \le 3$ это круг с границей, центр которого лежит в точке (1,–2), а радиус равен 3.

П р и м е р 6. Пусть $z_1, z_2 \in C$. Тогда расстояние между точками, изображающими z_1 и z_2 на комплексной плоскости равно $|z_1 - z_2|$ (*теорема о модуле разности*).

П р и м е р 7. Сравнивая стороны треугольника с вершинами в точках o, z_1, z_2, получаем *теорему о модуле суммы*

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Из этой теоремы следует следующее утверждение.

П р и м е р 8. При любых $z_1, z_2, \ldots, z_n \in C$

$$|z_1| - |z_2| - \ldots - |z_n| \le |z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots |z_n| .$$

П р и м е р 9. Указать на плоскости множество точек, изображающих комплексные числа и удовлетворяющих неравенству

$$|z - i| + |z + i| < 4 .$$

Решение. Пусть $z = x+iy$, $x,y \in \boldsymbol{R}$. Тогда $|x + yi - i| + |x + yi + i| < 4$.

Отсюда $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} < 4$.

Преобразовывая это неравенство получим

$$4x^2 + 3y^2 < 12 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} < 1 .$$

Таким образом, указанным множеством будет часть плоскости, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} < 1$.

П р и м е р 10. комплексные числа удовлетворяют условиям $1 < |z| < 2$, $\frac{\pi}{6} < arg < \frac{\pi}{4}$. Где расположены точки, изображающие эти числа.

Решение. Так как $1 < |z| < 2$, то точки, удовлетворяющие этому условию, лежат внутри кольца, ограниченного окружностями с центром в точке *O* и радиусом 1 и 2.

Рис.

А так как $\frac{\pi}{6} < arg < \frac{\pi}{4}$, то решению задачи удовлетворяют только точки, лежащие внутри области, изображенной на рисунке.

П р и м е р 11. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - 25i| \le 15$, найти число, имеющее наименьший аргумент.

Решение. Условию $|z - 25i| \le 15$ удовлетворяют только числа, изображаемые точками, которые лежат внутри и на границе круга с центром в точке (0,25) и радиусом 15.

Рис.

Как видно из рисунка, числу с наименьшим аргументом отвечает точка *M*, в которой прямая *OM* касается окружности. Из прямоугольной треугольника *OMC* найдем, что

$$OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20,$$

$$\cos\alpha = \frac{MC}{OC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}; \quad \sin\alpha = \frac{OM}{OC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Поэтому $x = OM \cdot \cos\alpha = 12$, $y = OM \sin\alpha = 16$, значит искомое число $z = 12+16i$.

П р и м е р 12. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа: a) $z = 1-i$; b) $z = -3-4i$.

Решение. a) $a=1$, $b=-1$, $tg\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Изображающая число z точка лежит в четвертой четверти. Поэтому для аргумента φ можно взять значения $\frac{7}{4}\pi$ или $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно,

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right].$$

Заметим, что равенство $1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ не является тригонометрической формой числа $1-i$.

b) $a = -3$, $b = -4$, значит $r = 5$, $tg\varphi = \frac{4}{3}$. Так точка лежит в третьей четверти, то для φ остается найти такое значение, что $tg\varphi = \frac{4}{3}$ и $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$.

$\varphi = \pi + \alpha$, где α острый угол и $tg\alpha = \frac{3}{4}$. Поэтому $\alpha = arctg\ \frac{4}{3}$, т.е. $\alpha = \pi + arctg\ \frac{4}{3}$. Тогда $-3 - 4i = 5\left[\cos(\pi + arctg\ \frac{4}{3}) + i\sin(\pi + arctg\ \frac{4}{3})\right]$.

П р и м е р 13. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i\ tg\alpha$, где α данный угол, причем a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Преобразуем данное число z:

$$\text{a) } z = 1 \pm i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Так как число $\frac{1}{\cos\alpha} > 0$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и в скобке стоит косинус и синус одного и того же аргумента, то полученное выражение есть тригонометрическая форма числа z;

b) При $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ число $\frac{1}{\cos\alpha} < 0$ и, значит, выполненное выше преобразование не дает тригонометрической формы числа z.

Преобразуем z по другому:

$z = -\frac{1}{\cos\alpha}\left[(-\cos\alpha) + i(-\sin\alpha)\right] = -\frac{1}{\cos\alpha}\left[\cos(\pi + \alpha) + i\sin(\pi + \alpha)\right]$, что дает тригонометрическую форму числа z при условии $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

П р и м е р 14. Найти аргумент числа $w = z^2 - z$, если известно, что $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение. Имеем

$$w = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi) -$$
$$- (\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos 2\varphi - \cos\varphi) + i(\sin 2\varphi - \sin\varphi).$$

Преобразуя выражение в скобках, получаем, что

$$w = -2\sin\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{3\varphi}{2} + i\cos\frac{3\varphi}{2}\right) =$$
$$2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}\right)\right].$$

При $0 < \varphi < 2\pi$ число $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$ и полученное выражение есть тригонометрическая форма числа w. Поэтому $\arg w = \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}$.

При $\varphi = 0$ число $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, откуда $w = 0$. В этом случае аргумент числа w не определен.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

13. Построить точки, изображающие комплексные числа: 1; –1; i; $-i$; $-1+i$; $2-3i$; $-6+3i$; $\cos 30° - i\sin 30°$; $\cos 150° + i\sin 150°$.

14. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найдите четвертую вершину этого параллелограмма.

15. На комплексной плоскости даны точки $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найти комплексные числа, соответствующие точкам, лежащим на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

16. Решить уравнения: a) $|z| - iz = 1 - 2i$; b) $z^2 + 3|z| = 0$; c) $z^2 + |z|^2 = 0$.

17. Решить систему уравнений: $|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|$.

18. Решить систему уравнений: $\begin{cases} |z+1| = |z+2| \\ |3z+9| = |5z+10i|. \end{cases}$

19. Найти комплексные числа, соответствующие:

a) вершинам квадрата с центром в начале координат, со сторонами длины 1, параллельными осям координат;

b) вершинам правильного треугольника с центром в начале координат, стороной, параллельной оси ординат, вершиной на отрицательной вещественной полуоси и радиусом описанного круга, равным 1.

c) вершинам правильного шестиугольника с центром в точке $2 + i\sqrt{3}$, стороной, параллельной оси абсцисс, и радиусом описанного круга, равным 2.

20. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям:

a) $|z| = 1$; b) $arg\ z = \frac{\pi}{3}$; c) $|z| \le 2$; d) $|z - 1 - i| < 1$; e) $|z + 3 + 4i| \le 5$; f) $3 < |z| < 5$

q) $1 \le |z - 2i| < 2$; h) $|arg z| < \frac{\pi}{6}$; i) $|Re\ z| \le 1$; j) $-1 < Re\, iz < 0$; k) $|Im\ z| = 1$;

l) $|Re\, iz + Im\ z| < 1$; m) $|z - 1| + |z + 1| = 3$; n) $|z + 2| - |z - 2| = 3$; o) $|z - 2| = Re\, z + 2$;

p) $|z + 1 < |1 - z|$.

21. Среди комплексных чисел *z*, удовлетворяющих условию $|z + 1 - i| \le 1$, найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

22. Среди комплексных чисел *z*, удовлетворяющих условию $|z - 5i| \le 3$, найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

23. Для каких точек M(x,y) плоскости *Oxy* выполняются равенства:

a) $\left|\sqrt{2x + y} + i\sqrt{x + 2y}\right| = \sqrt{3}$. b) $\left|\sqrt{x^2 + 4} + i\sqrt{y - 4}\right| = \sqrt{10}$?

24. Выразите модуль и аргумент комплексного числа через модуль и аргумент сопряженного с ним числа.

25. Точки *A* и *B* изображают на плоскости *Oxy* комплексные числа $a = 6+8i$ и $b = 4-3i$ соответственно. Найдите хотя бы одно такое число c, чтобы изображающая его точка *C* лежала на биссектрисе угла *AOB* .

26. При каких условиях: a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; b) $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$?.

27*. Доказать, что всякое комплексное число *z*, отличное от (-1), модуль которого 1, может быть представлено в виде $z = \frac{1 + ti}{1 - ti}$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

28. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

a) 7; b) i; c) -3; d) $-5i$; e) $1+i\sqrt{3}$; f) $-1+i\sqrt{3}$ g) $1- i\sqrt{3}$; h) $\sqrt{3}+i$;

i) $-\sqrt{3}+i$; j) $-\sqrt{3}-i$; k) $\sqrt{3}-i$; l) $1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$; m) $2+\sqrt{3}+i$; n) $1-(2+\sqrt{3}\,i)$

o) $cos\alpha - isin\alpha$; p) $sin\alpha + icos\alpha$; q) $\frac{1 + tg\,\alpha}{1 - itg\,\alpha}$; r) $1+ cos\alpha + isin\alpha$; s) $-sin\alpha - i(1+cos\alpha)$.

29. Представить в алгебраической и тригонометрической форме комплексные числа:

a) $\frac{i(cos\frac{5}{3}\pi + isin\frac{5}{3}\pi)}{cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}}$; b) $\frac{1}{cos\frac{4}{3} - isin\frac{4}{3}\pi}$; c) $\frac{i}{(1+i)^2}$;

d) $\frac{-cos\frac{5}{12}\pi + isin\frac{5}{12}\pi}{cos\frac{13\pi}{12} - isin\frac{13\pi}{12}}$; e) $\frac{(cos\frac{\pi}{3} - isin\frac{\pi}{3})(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3})}{i}$.

30. Представить в тригонометрической форме комплексное число:

a) $\frac{5(cos100^0 + isin100^0)i}{3(cos40^0 - isin40^0)}$; b) $\frac{sin\frac{2}{5}\pi + i(1 - cos\frac{2}{5}\pi)}{i - 1}$.

31. Доказать тождество $|x+y|^2+|x-y|^2=2(|x|^2+|y|^2)$. Какой геометрический смысл имеет это тождество?

§3. Возведение в степень и извлечение корня

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$. Тогда при любом целом n справедлива *формула Муавра*

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Формула Муавра позволяет решить вопрос об извлечении корня произвольной степени из комплексного числа. Напомним, что комплексное число w называется *корнем n-й степени* $(n\in N)$ из комплексного числа z, если $w^n=z$. Корень n-й степени из z будем обозначать символом $\sqrt[n]{z}$.

Имеется несколько значений корня n-й степени из данного числа z, поэтому запись $\sqrt[n]{z}=w$ означает, что w есть одно из них. В пределах одного рассуждения под выражением $\sqrt[n]{z}$ всегда понимают одно и тоже значение корня n-й степени из z.

В случае действительного положительного z под $\sqrt[n]{z}$ часто понимают не произвольное, а действительное положительное значение корня (арифметическое значение). Когда из контекста ясно, что речь идет именно об этом значении корня, такое специальное употребление знака радикала не оговаривается, например, при вычислении модуля комплексного числа.

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$, тогда, где $k=0,1\ldots,n-1$, т.е.

$\sqrt[n]{z}=w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, *корня n-й степени из комплексного числа* z дает n различных значений.

Пример 1. Вычислить $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$.

Решение. Так как $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$ то

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}=\left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}\right)^{20}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{20}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)\right)^{20}=2^{10}\left(\cos\frac{140}{12}\pi+i\sin\frac{140}{12}\pi\right)=2^{10}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)=$$

$$=2^{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^9\sqrt{2}(1-i)$$

Пример 2. Вычислить $(1+\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$.

Решение. Так как (см. задача 28 (*r*))

$$1+\cos\alpha+i\sin\alpha=\begin{cases}2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right) & \text{при} \quad 0\le\alpha\le\pi\\ -2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+2\pi}{2}+i\sin\dfrac{\alpha+2\pi}{2}\right) & \text{при} \quad \pi\le\alpha\le 2\pi\end{cases},$$ то

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}+i\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{ при } 0\le\alpha<\pi,$$

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(-2)^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}+n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}+n\pi\right)\right) \text{ при } \pi\le\alpha\le 2\pi.$$

П р и м е р 3. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Запишем $z=-16$ в тригонометрической форме:

$$z=-16=16(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Тогда формула извлечения корня в нашем случае дает

$$w_\kappa=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},\quad w_1=2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$w_2=2\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},\quad w_3=2\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

П р и м е р 4. Записать в тригонометрической форме элементы множества

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}.$$

Решение. Так как $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$, а

$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, то

$$\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right).$$

Следовательно, $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\dfrac{13\pi+24\kappa\pi}{48}+i\sin\dfrac{13\pi+24\kappa\pi}{48}\right)$, где $\kappa=0,1,2,3$.

Формула Муавра оказывается удобным средством для преобразования некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции.

П р и м е р 5. Выразить $tg\,5\varphi$ через $tg\,\varphi$.

Решение. Имеем соотношение $\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5$.

Применив бином Ньютона, получим

$$\cos5\varphi+i\sin5\varphi=\cos^5\varphi+5i\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi-10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi+i\sin^5\varphi$$

т.к. $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$. Приравнивая действительную и мнимую части соответственно, получим

$$\cos5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi,\ \sin5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^5\varphi.$$

Отсюда

$$tg\,5\varphi = \frac{5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^5\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + \cos\varphi\sin^4\varphi} = \frac{5tg\,\varphi - 10\,tg^3\alpha + tg^5\varphi}{1 - 10\,tg^2\varphi + 5tg^4\varphi}.$$

Мы поделили числитель и знаменатель на $\cos^5\varphi$.

П р и м е р 6. Выразить $\sin^5\varphi$ линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.

Решение. Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тогда $z^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, $z^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$, $z^{-k} = \cos k\varphi - i\sin k\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos k\varphi = \frac{z^k + z^{-k}}{2}$, $\sin k\varphi = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}$. Тогда

$$\sin^5\varphi = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^5 = \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i} = \frac{\left(z^5 - z^{-5}\right) - 5\left(z^3 - z^{-3}\right) + 10\left(z - z^{-1}\right)}{32i} =$$

$$= \frac{2i\sin 5\varphi - 10i\sin 3\varphi + 20i\sin\varphi}{32i} = \frac{\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi}{16}$$

Аналогично, любое выражение вида $\cos^\kappa\varphi\,\sin^m\varphi$ можно представить линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

32. Вычислить: a) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$; b) $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$; c) $\frac{\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1 + i)^{20}}$; d) $\frac{(1 + i)^{2n+1}}{(1 - i)^{2n-1}}$, $n \in N$; e) $z = (tg\,1 - i)^4$; f) $(tg\,2 - i)^4$; q) $\left(\sin\frac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\frac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

33. Доказать, что $\left(\frac{1 + itg\,\alpha}{1 - itg\,\alpha}\right)^n = \frac{1 + itg\,\alpha n}{1 - itg\,\alpha n}$.

34. Доказать, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, то $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\alpha$.

35. Упростить $(1 + \omega)^n$, где $\omega = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$.

36. Записать в тригонометрической форме элементы множества:

a) $\sqrt[6]{i}$; b) $\sqrt[10]{512\left(1 - i\sqrt{3}\right)}$; c) $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1 - i)}$.

37. Записать в алгебраической форме элементы множества:

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[4]{1}$; c) $\sqrt[6]{1}$; d) $\sqrt[3]{i}$; e) $\sqrt[4]{-4}$; f) $\sqrt[6]{64}$; g) $\sqrt[8]{16}$; h) $\sqrt[6]{-27}$; i) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$; j) $\sqrt[4]{-72\left(1 - i\sqrt{3}\right)}$; k) $\sqrt[3]{1 + i}$; l) $\sqrt[3]{2 - 2i}$; m) $\sqrt[3]{\frac{8 + 24i}{3 - i}}$; n) $\sqrt[3]{\frac{27 - 54i}{2 + i}}$: o) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1 + i\sqrt{3}}}$: p) $\sqrt[4]{\frac{32}{9\left(1 - i\sqrt{3}\right)}}$.

38. Решить уравнения: a) $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$; b) $z^6 + 64 = 0$.

39. Запишите число $z = \dfrac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$ в алгебраической форме при условии, что действительные части $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5-12i}$ отрицательны.

40. Найти корни уравнения $z^{10}-z^5-992=0$, действительные части, которых отрицательны.

41. Выразить через *cosx* и *sinx*: a) *sin*6*x*+*cos*6*x*; b) *cos*8*x*; c) *sin*8*x*.

42. Выразить *tg* 7*x* через *tg x*.

43. Выразить *tg nx* через *tg x*, где *n* – целое положительное.

44*. Показать, что $sin^n nx$ и $cos^n nx$ (*n* – целое положительное) можно выразить в виде многочлена первой степени от косинусов и синусов углов, кратных *x*.

45. Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных *x*:

a) $sin^3 x$; b) $sin^4 x$; c) $cos^5 x$; d) $cos^6 x$; e) $sin^3 x\, cos^5 x$; f) $cos^7 x + sin^7 x$.

§4. Вычисление сумм и произведений с помощью комплексных чисел

П р и м е р 1. Доказать тождество:

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Решение. Применяя бином Ньютона, получим

$1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$,

$1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$. Складывая эти два равенства, а затем, вычитая, получим искомое тождество.

П р и м е р 2. Доказать тождество:

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{\pi n}{3}\right).$$

Решение. Рассмотрим тождество.

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Положим в этом тождестве последовательно $x = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$, где $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Получим:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots,$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + C_n^3\varepsilon^3 + \ldots,$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon^2 + C_n^3\varepsilon^4 + C_n^3\varepsilon^6 + \ldots$$

Но $1 + \varepsilon^\kappa + \varepsilon^{2\kappa} = 0$, если *k* не делится на 3, и $1 + \varepsilon^\kappa + \varepsilon^{2\kappa} = 3$, если κ делится на 3.

Следовательно, $2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3\{C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots\}$.

Так как для ε можно принять значение $\varepsilon = cos\,\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,sin\,\frac{2\pi}{3}$, то $1+\varepsilon = -\varepsilon^2 = -cos\,\frac{4\pi}{3} - isin\,\frac{4\pi}{3} = cos\,\frac{\pi}{3} + isin\,\frac{\pi}{3}$, $1+\varepsilon^2 = -\varepsilon = -cos\,\frac{2\pi}{3} - isin\,\frac{2\pi}{3} =$

$cos\,\frac{\pi}{3} - isin\,\frac{\pi}{3}$.

Поэтому $2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2\,cos\,\frac{n\pi}{3}$. Отсюда

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\,cos\,\frac{n\pi}{3}\right).$$

П р и м е р 3. Доказать равенство
$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = C_{n+1}^2 + 2\left(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \ldots C_2^2\right)$.

Решение. Так как $C_\kappa^2 = \frac{\kappa(\kappa-1)}{1\cdot 2} = \frac{\kappa^2}{2} - \frac{\kappa}{2}$, то $2C_\kappa^2 = \kappa^2 - \kappa$. Следовательно, $2\sum_{\kappa=2}^{n} C_\kappa^2 = \sum_{\kappa=2}^{n} k^2 - \sum_{\kappa=2}^{n} k$. Отсюда и получается наше тождество.

П р и м е р 4. Вычислить следующую сумму: $\delta = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$

Решение. Рассмотрим выражение $(1+i)^n = 1 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + \ldots$. Отсюда $(1+i)^n = \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots\right) + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots\right)$. Но $(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\left(cos\,\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,sin\,\frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому

$\delta = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\,cos\,\frac{n\pi}{4}$.

Отсюда следует, что если $n = 4m$, то $\delta = (-1)^m 2^{2m}$, если $n = 4m+1$, то $\delta = (-1)^m 2^{2m}$, если $n = 4m+3$, то $\delta = (-1)^{m+1} 2^{2m+1}$, если $n = 4m+2$, то $\delta = 0$.

П р и м е р 5. Доказать тождество: $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$..

Решение. Рассмотрим следующий многочлен: $(1+x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$.

Отсюда $\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + \frac{C_n^2}{2}x^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}x^{n+1}$ **(*)**.

Полагая здесь x=1, получим искомое тождество.

П р и м е р 6. Доказать тождество: $C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+\kappa}^n = C_{n+\kappa+1}^{n+1}$.

Решение. Выражение стоящее в левой части, есть коэффициент при x^n в следующем многочлене: $S = (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + (1+x)^{n+2} + \ldots + (1+x)^{n+\kappa}$. Преобразуем этот многочлен:

$$S = (1+x)^n\left[1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^\kappa\right] = (1+x)^n\,\frac{(1+x)^{\kappa+1}-1}{x} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[(1+x)^{n+\kappa+1} - (1+x)^n\right].$$

Коэффициент при x^{n+1} в многочлене, стоящем внутри квадратной скобки, равен $C_{n+\kappa+1}^{n+1}$.

П р и м е р 7. Показать, что имеет место равенство

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \ldots + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p .$$

Решение. Рассмотрим следующие многочлены:

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x_n^s , \quad (1+x)^m = \sum_{t=0}^{m} C_m^t x_t .$$

Имеем: $(1+x)^n (1+x)^m = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_n^t x^t = (1+x)^{n+m} = \sum C_{m+n}^p x^p$.

Отсюда следует требуемое равенство.

П р и м е р 8. Доказать тождество:

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n .$$

Решение. Рассмотрим произведение $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Имеем $\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{n} C_n^t x^t = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^\kappa x^\kappa$. Отсюда $C_{2n}^\kappa = \sum_{s+t=\kappa} C_n^s C_n^t$.

Следовательно, $C_{2n}^n = \sum_{s+t=n} C_n^s C_n^t = \sum_{s=0}^{n} C_n^s C_n^{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \left(C_n^s\right)^2$.

П р и м е р 9. Доказать равенство: $2^{2m} cos^{2m} \varphi = \sum_{\kappa=0}^{m-1} 2C_{2m}^\kappa cos 2(m-\kappa)\varphi + C_{2m}^m$.

Решение. Имеем $cos\ \varphi + \dfrac{(cos\ \varphi + i\, sin\ \varphi) - (cos\ \varphi - i\, sin\ \varphi)}{2}$.

Положим $cos\varphi + isin\varphi = z$. Тогда $cos\varphi - isin\varphi = z^{-1}$,

$$cos^{2m}\varphi = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{\kappa=0}^{2m} C_{2m}^\kappa z^{-\kappa} z^{2m-\kappa} .$$

Далее $2^{2m} cos^{2m}\varphi = \sum_{\kappa=0}^{m-1} C_{2m}^\kappa z^{2(m-\kappa)} + C_{2m}^m + \sum_{\kappa=m+1}^{2m} C_{2m}^\kappa z^{2(m-\kappa)}$. Положим во второй сумме $m-k = -(m-k^1)$. Тогда эта сумма перепишется так:

$$\sum_{\kappa'=m-1`}^{0} C_{2m}^{2m-\kappa'} z^{-2(m-\kappa')} = \sum_{\kappa=0`}^{m-1} C_{2m}^\kappa z^{-2(m-\kappa)} .$$

Таким образом, $2^{2m} cos^{2m}\varphi = \sum_{\kappa=0}^{m-1} C_{2m}^\kappa \left(z^{2(m-\kappa)} + z^{-2(m-\kappa)}\right) + C_{2m}^m$.

Но $Z^{2(m-\kappa)} + Z^{-2(m-\kappa)} = 2cos2(m-k)$. Поэтому

$$2^{2m}\ cos^{2m}\ \varphi = \sum_{\kappa=0}^{m-1} 2C_{2m}^\kappa\ cos\ 2(m-\kappa)\varphi + C_{2m}^m .$$

П р и м е р 10. Доказать равенство:

$$sin\varphi + sin2\varphi + \ldots + sin\varphi = \frac{sin\dfrac{n\varphi}{2}\, sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{sin\dfrac{n\varphi}{2}} (\varphi \neq 2k\pi,\ k \in z).$$

Решение. Введем в рассмотрение следующую сумму $A = cos\varphi + cos2\varphi + \ldots + cosn\varphi$. Тогда, обозначая через B левую часть нашего равенства, получим $A + Bi = (cos\varphi + isin\varphi) + (cos2\varphi + isin2\varphi) + (cosn\varphi + isinn\varphi)$. Мы

пришли к сумме геометрической прогрессии. Введем следующее обозначение: $\alpha = cos\,\frac{\varphi}{2} + i\,sin\,\frac{\alpha}{2}$. Тогда $A + Bi = \alpha^2\alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n} = \frac{\alpha^{2n+2} - \alpha^2}{\alpha^2 - 1}$

Вынесем теперь в числителе и знаменателе такие степени α, чтобы в скобках оставались разности степеней с противоположными показателями (для возможности этого мы ввели сокращенное обозначение для $cos\,\frac{\varphi}{2} + i\,sin\,\frac{\varphi}{2}$, а не для $cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi$, что, казалось бы, естественнее): $A + Bi = \frac{\alpha^{n+2}\left(\alpha^n + \alpha^{-n}\right)}{\alpha\left(\alpha - \alpha^{-1}\right)} =$

$$= \frac{\alpha^{n+1}\left(\alpha^n - \alpha^{-n}\right)}{\alpha - \alpha^{-1}} = \frac{\left(cos\,\frac{n+1}{2}\varphi + i\,sin\,\frac{n+1}{2}\varphi\right)2i\,sin\,\frac{n\varphi}{2}}{2i\,sin\,\frac{\varphi}{2}} = \frac{sin\,\frac{n\varphi}{2}}{sin\,\frac{n\varphi}{2}}\left(cos\,\frac{n+1}{2}\varphi + i\,sin\,\frac{n+1}{2}\varphi\right).$$

Откуда $B = \frac{sin\,\frac{n\varphi}{2}\,sin\,\frac{(n+1)\varphi}{2}}{sin\,\frac{\varphi}{2}}$.

Одновременно, мы получили $A = \frac{sin\,\frac{n\varphi}{2}\,sin\,\frac{(n+1)\varphi}{2}}{sin\,\frac{\varphi}{2}}$.

Аналогичным образом могут быть преобразованы суммы вида $a_1\,cos\,b_1 + a_2\,cos\,b_2 + \ldots + a_n\,cos\,b_n$ и $a_1\,sin\,b_1 + a_2\,sin\,b_2 + \ldots + a_n\,sin\,b_n$, если аргументы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тригонометрических функций образуют арифметическую прогрессию, а коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ геометрическую.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

46*. Доказать тождества: a) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{n-1} = 2^{2n-2}$, если n– четное;

b) $1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-2}$, если n– нечетное

47*. Доказать тождества: a) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2cos\,\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$

b) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2cos\,\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

48*. Вычислить следующую сумму: $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$.

49*. Доказать тождество:

$$\kappa C_n^0 + \frac{\kappa^2 C_n^1}{2} + \frac{\kappa^3 C_n^2}{3} + \frac{\kappa^4 C_n^3}{4} + \ldots + \frac{\kappa^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{(\kappa+1)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

50*. Доказать тождество: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots(-1)^\kappa C_n^\kappa = (-1)^\kappa C_{n-1}^\kappa$.

51. Показать, что имеет место равенство:

$$C_n^0 C_n^\kappa + C_n^1 C_n^{\kappa+1} + \ldots C_n^{n-\kappa} C_n^n = \frac{2n!}{(n-\kappa)!\,(n+\kappa)!}.$$

52*. Доказать тождества:

a) $\left(C_n^0\right)^2 - \left(C_{2n}^1\right)^2 + \left(C_{2n}^2\right)^2 + \ldots + \left(C_{2n}^{2n}\right)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$;

b) $\left(C_{2n+1}^0\right)^2 - \left(C_{2n+1}^1\right)^2 + \left(C_{2n+1}^2\right)^2 - \ldots - \left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2 = 0$.

53*. Доказать следующие равенства:

a) $2^{2m} \sin^{2m}\varphi = \sum_{\kappa=0}^{m-1} (-1)^{m+\kappa} 2C_{2m}^{\kappa} \cos 2(m-\kappa)\varphi + C_{2m}^{m}$;

b) $2^{2m} \cos^{2m+1}\varphi = \sum_{\kappa=0}^{m} C_{2m+1}^{\kappa} \cos(2m - 2\kappa + 1)\varphi$;

c) $2^{2m} \sin^{2m+1}\varphi = \sum_{\kappa=0}^{m-1} (-1)^{m+\kappa} C_{2m+1}^{\kappa} \sin(2m - 2\kappa + 1)\varphi$.

54*. Доказать равенства:

a) $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cos\frac{5\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$;

b) $\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \sin\frac{5\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$.

55*. Найти суммы: a) $\cos x + C_n^1 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos(n+1)x$

b) $\sin x + C_n^1 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin(n+1)x$.

56*. Найти сумму: $\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2(2n-1)x$.

57. Показать, что:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$;

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$.

58*. Найти суммы:

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$

b) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

§5. Корни из единицы

Как и для всякого отличного от нуля комплексного числа, для числа 1 существует ровно n значений корня n–й степени. Так как $1 = \cos 0 = i\sin 0$, то для *корней n–й степени из 1* имеет место формула $\varepsilon_\kappa = \cos\frac{2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{2\pi\kappa}{n}$ при $k = 0,1\ldots., n-1$.

Корень n–й степени из 1 называется *первообразным*, если он не является корнем из 1 с меньшим чем n натуральным показателем. Другими словами, ε есть первообразный корень n–й степени из 1, если $\varepsilon^n = 1$, но при любом натуральном $m < n$, $\varepsilon^m \neq 1$. Число $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ есть, очевидно, первообразный корень n–й степени из 1, но при $n > 2$ существуют и другие первообразные корни.

П р и м е р 1. Показать, что число $\varepsilon = cos\,\frac{2\pi\kappa}{n} + i sin\,\frac{2\pi\kappa}{n}$ ($k \geq 1$, $n \geq 2$ - целые числа) является первообразным корнем степени $\frac{n}{d}$ из единицы, где d наибольший общий делитель чисел k и n отсюда следует, что ε тогда и только тогда первообразный корень n–й степени из единицы, когда k и n взаимно просты.

Решение. Пусть $\kappa = \kappa_1 d$, $n = n_1 d$, где n_1 и κ_1 уже взаимно просты. Отсюда $\varepsilon = cos\,\frac{2\pi\kappa_1}{n} + i\,sin\,\frac{2\pi\kappa_1}{n}$. Возводя ε в степень $m < n_1$, $m > 0$, получим $\varepsilon^m = cos\,\frac{2\pi m\kappa_1}{n} + i sin\,\frac{2\pi m\kappa_1}{n}$.

Если $\varepsilon^m = 1$, то $\frac{2\pi m\kappa_1}{n_1} = 2\pi s$, где $s \in Z$, или $\frac{\kappa_1 m}{n_1} = s$, т.е. $\kappa_1 m$ делится на n_1. Но κ_1 взаимно просто с n_1. Следовательно, m делится на n_1, что противоречит условию $0 < m < n_1$.

Таким образом, $\varepsilon^m \neq 1$ при $0 < m < n_1$. А при $m = n_1$ получается, что $\varepsilon^{n_1} = cos\,2\pi\kappa_1 + i\,sin\,2\pi\kappa_1 = 1$. Отсюда видно, что ε - первообразный корень степени $n_1 = \frac{n}{d}$ из единицы.

Из рассмотренного примера следует, что число первообразных корней n-й степени из 1 равно числу меньших n и взаимно простых с n чисел, т.е. оно равно значению $\varphi(m)$ функции Эйлера.

Многочлен $X_n(x) = \prod_{k=1}^{\varphi(n)} (x - \varepsilon_\kappa)$, где ε_κ первообразный корень степени n из 1 ($\kappa = 0,1,..., \varphi(n)$) называется *круговым многочленом*.

П р и м е р 2. Найти корни из единицы степени 6.

Решение: Из формулы для корней n-й степени из единицы имеем:

$$\varepsilon^m = cos\,\frac{2\pi\kappa}{6} + i sin\,\frac{2\pi\kappa_1}{6}, \quad \kappa = 0,1,2,3,4,5..$$

Следовательно, искомыми корнями будут: $\varepsilon_0 = cos + i sin\,0 = 1$

$\varepsilon_1 = cos\,\frac{\pi}{3} + i\,sin\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon_2 = cos\,\frac{2}{3}\pi + i\,sin\,\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon_3 = cos\,\pi + i\,sin\,\pi = -1$,

$\varepsilon_4 = cos\,\frac{4}{3}\pi + i\,sin\,\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon_5 = cos\,\frac{5}{3}\pi + i\,sin\,\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Если корень n-й степени из единицы является первообразным корнем степени δ из единицы, то обычно δ называется *показателем, которому принадлежит этот корень*.

П р и м е р 3. Выписать первообразные корни степени 6 из единицы.

Решение. Согласно примера 1 первообразными корнями степени 6 из единицы будут $\varepsilon_1, \varepsilon_5$, т.е. $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

П р и м е р 4. Найти корни 5-й степени из 1, решив уравнение $x^5 - 1 = 0$ алгебраически.

Решение. Разложим левую часть на множители:

$$(x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) = 0 .$$

Первообразные корни являются корнями уравнения.

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 .$$

Оно равносильно уравнению $x^2 + x^{-2} - x + x^{-1} + 1 = 0$. Обозначим через $z = x + x^{-1}$. Заметим, что $x^2 + 2 + x^{-2} = z^2$, мы получили следующее уравнение относительно z: $z^2 + z - 1 = 0$, откуда $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Корни из 1 находятся из уравнений: $x^2 - z_1 x + 1 = 0$ и $x^2 - z_{12} x + 1 = 0$. Откуда $x = \frac{z_1 \pm i\sqrt{4 - z_1^2}}{2}$ и $x = \frac{z_2 \pm i\sqrt{4 - z_2^2}}{2}$. Подставив вместо z_1 и z_2 их значения, получим $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $x_4 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Сопоставление с формулой $x_\kappa = \cos\frac{2\pi\kappa}{5} + i\sin\frac{2\pi\kappa}{5} = \cos\kappa\cdot 72^0 + i\sin\kappa\cdot 72^0$ дает мало известную формулу: $\cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Из нее легко выводится формула для длины стороны a_{10} правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса r. Именно,

$$a_{10} = 2r\sin\frac{2\pi}{10\cdot 2} = 2r\sin\frac{\pi}{10} = 2r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = 2r\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot r .$$

П р и м е р 5. Выписать все корни 28-й степени из 1, принадлежащие показателю 7.

Решение. Имеем $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi\kappa}{28} + i\sin\frac{2\pi\kappa}{28}$, $(\kappa = 0,1,2,\ldots,27)$, –корни 28-й степени из единицы. Среди них, принадлежащими показателю 7 будут $\varepsilon_4, \varepsilon_8, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{16}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{21}$, или их можно записать в виде:

$$\cos\frac{2\pi\kappa}{7} + i\sin\frac{2\pi\kappa}{7}, \quad \text{где } \kappa = 0,1,2,3,4,5,6 .$$

П р и м е р 6. Разложить на множители с вещественными коэффициентами $x^n - 1$.

Решение. Пусть $n = 2m$, тогда уравнение $x^n - 1 = 0$ имеет два вещественных корня 1, -1 и $2m-2$ комплексных.

При этом $\varepsilon_\kappa = \cos\frac{2\pi\kappa}{2m} + i\sin\frac{2\pi\kappa}{2m}$ сопряжено с

$$\varepsilon_{2m-\kappa} = \cos\frac{2(2m-\kappa)\pi}{2m} + i\sin\frac{2(2m-\kappa)\pi}{2m} .$$

Таким образом, имеем

$$x^{2m}-1=\left(x^2-1\right)\left(x-\varepsilon_1\right)\left(x-\overline{\varepsilon_1}\right)\left(x-\varepsilon_2\right)\left(x-\overline{\varepsilon_2}\right)\ldots\left(x-\varepsilon_{m-1}\right)\left(x-\overline{\varepsilon_{m-1}}\right)$$

$$x^{2m}-1=\left(x^2-1\right)\left[x^2-\left(\varepsilon_1+\overline{\varepsilon_1}\right)x+1\right]\ldots\left[x^2-\left(\varepsilon_{m-1}+\overline{\varepsilon_{m-1}}\right)x+1\right]$$

$$x^{2m}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{\kappa=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{\kappa\pi}{m}+1\right).$$

Если $n = 2m+1$, то аналогичным путем получим

$$x^{2m+1}-1=(x-1)\prod_{\kappa=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{2\kappa\pi}{2m+1}+1\right).$$

П р и м е р 7. Доказать, что $\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$.

Решение. Используя результат примера 6, получим: $\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=\prod_{\kappa=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{\kappa\pi}{m}+1\right)$.

Положив $x = 1$, получим $m=2^{m-1}\prod_{\kappa=1}^{m-1}\left(1-\cos\frac{\kappa\pi}{m}\right)$ или $m=2^{2(m-1)}\prod_{\kappa=1}^{m-1}\sin^2\frac{\kappa\pi}{2m}$, и наконец, $\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}=\prod_{\kappa=1}^{m-1}\sin\frac{\kappa\pi}{2m}$.

П р и м е р 8. Решить уравнение $(x+1)^m-(x-1)^m=0.\quad(m>1)$.

Решение. Преобразуем уравнение, тогда получим: $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m=1$.

Отсюда $\frac{x+1}{x-1}=\varepsilon_\kappa$, где $\varepsilon_\kappa=\cos\frac{2\pi\kappa}{m}+i\sin\frac{2\pi\kappa}{m},\quad\kappa=1,2,\ldots m-1$. Тогда, имеем $x=\frac{\varepsilon_\kappa+1}{\varepsilon_\kappa-1}$. Преобразуем это выражение

$$x=\frac{1+\cos\frac{2\pi\kappa}{m}+i\sin\frac{2\pi\kappa}{m}}{\cos\frac{2\pi\kappa}{m}+i\sin\frac{2\pi\kappa}{m}-1}=-\frac{2\cos^2\frac{2\pi\kappa}{m}+2i\sin\frac{\pi\kappa}{m}\cos\frac{\pi\kappa}{m}}{2\sin^2\frac{2\pi\kappa}{m}-2i\sin\frac{\pi\kappa}{m}\cos\frac{\pi\kappa}{m}}=\frac{2\cos\frac{\pi\kappa}{m}\left(\cos\frac{\pi\kappa}{m}+i\sin\frac{2\pi\kappa}{m}\right)}{2\sin\frac{\pi\kappa}{m}+\left(\sin\frac{\pi\kappa}{m}-i\cos\frac{2\pi\kappa}{m}\right)}=$$

$$=-ctg\frac{\pi\kappa}{m}(-i)=ictg\frac{\pi\kappa}{m}.$$

Таким образом, $x=-ictg\frac{\pi\kappa}{m},\quad\kappa=1,\ldots,m-1$.

П р и м е р 9. Доказать, что если a и b взаимно просты, то все корни степени ab из 1 получаются умножением корней степени a из 1 на корни степени b из 1.

Решение. Пусть α_κ и β_s корни a-й и b-й степеней из 1, где $\kappa=0,1\ldots,a-1$; $s=0,1,2,\ldots,b-1$.

Сначала покажем, что если произведение корня степени a из 1 на корень степени b из 1 есть корень степени ab из 1. Действительно, пусть $\alpha^a=1,\ \beta^b=1$. Тогда $(\alpha\beta)^{ab}=\left(\alpha^a\right)^b\left(\beta^b\right)^a=1$.

Отсюда достаточно доказать, что все $\alpha_\kappa\beta_s$ различны. Допустим, что $\alpha_{\kappa_1}\beta_{s_1} = \alpha_{\kappa_2}\beta_{s_2}$. Тогда $\frac{\alpha_{\kappa_1}}{\alpha_{\kappa_2}} = \frac{\beta_{s_2}}{\beta_{s_1}}$, т.е. $\alpha_i = \beta_j$. На основании задачи 13, имеем, что $\alpha_i = \beta_j$ =1, т.е. $\kappa_1 = \kappa_2$, $s_1 = s_2$.

П р и м е р 10. Решить уравнение

$$cos\varphi + C_n^1 cos(\varphi + \alpha)x + C_n^2 cos(\varphi + 2\alpha)x^2 + ... C_n^n cos(\varphi + n\alpha)x^n = 0.$$

Решение. Пусть

$$S = cos\varphi + C_n^1 cos(\varphi + \alpha)x + ... + cos(\varphi + n\alpha)x^n,$$

$$T = sin\varphi + C_n^1 sin(\varphi + \alpha)x + ... + sin(\varphi + n\alpha)x^n.$$

Тогда $S + Ti = \mu(1 + \lambda x)^n$, $S - Ti = \overline{\mu}(1 + \overline{\lambda} x)^n$, где $\lambda = cos\alpha + isin\alpha$, $\mu = cos\varphi + isin\varphi$. Отсюда $2S = \mu(1 + \lambda x)^n + \overline{\mu}(1 + \overline{\lambda} x)^n$. Уравнение принимают вид $\mu(1 + \lambda x)^n + \overline{\mu}(1 + \overline{\lambda} x)^n = 0$.. Решая это уравнение, получим

$$x_k = -\frac{sin\dfrac{(k+1)\pi - 2\varphi}{2n}}{sin\dfrac{(k+1)\pi - 2\varphi - 2n\alpha}{2n}}; \quad k = 0,1,2,... n-1.$$

У П Р А Ж Н Е Н И Я

59. Написать корни из единицы степени: a) 2; b) 3; c) 4; d) 8; e) 12; f) 24.

60. Выписать первообразные корни степени: a) 2; b) 3; c) 4; d) 8; e) 12; f) 24 .

61. Для каждого корня a) 16; b) 20; c) 24 степени из единицы указать показатель, которому он принадлежит.

62. ε - первообразный корень степени $2n$ из 1, вычислить сумму $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + ... + \varepsilon^{n-1}$.

63. Найти сумму всех корней n- й степени из 1.

64. Вычислить, $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + ... + n\varepsilon^{n-1}$ где ε корень n–й степени из 1.

65. Пусть ε - корень степени n из 1. Вычислить сумму $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + ... + n^2\varepsilon^{n-1}$.

66. Найти суммы:

$a)$ $cos\frac{2\pi}{n} + 2cos\frac{4\pi}{n} + ... + (n-1)cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$;

$b)$ $sin\frac{2\pi}{n} + sin\frac{4\pi}{n} + ... + (n-1)sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

67. Определить сумму первообразных корней: a) 15-й; b) 24-й; c) 30-й степени из 1.

68*. Показать, что корни уравнения $\lambda(z-a)^n + \mu(z-b)^n = 0.$, где λ, μ, a, b - комплексные, лежат на одной окружности, которая в частном случае может выродится в прямую (n натуральное число).

69. Решить уравнения

a) $(x+2)^n - (x-2)^n = 0$; b) $(x+5i)^n - (x-5i)^n = 0$; c*) $(x + 3i)^n + i(x - 3i)^n = 0.$

d) $(x+ai)^n - (cos\varphi + isin\varphi)(x-ai)^n = 0$, $\varphi \neq 2\kappa\pi$, $a \in \boldsymbol{R}$.

70*. Доказать, что если A комплексное число, модуль которого равен 1, то уравнение $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A$ имеет все корни вещественные и различные.

71*. Если a и b взаимно просты, то $x^a - 1$ и $x^b - 1$ имеют единственный общий корень.

72*. Если a и b взаимно просты, то произведение первообразного корня степени a из 1 на первообразный корень степени b из 1 есть первообразный корень степени ab из 1 иђ обратно.

73. Доказать, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$, если a и b взаимно просты, где $\varphi(n)$ есть число первообразных корней n-й степени из 1.

74*. Доказать, что если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$-различные простые числа, то $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

75*. Показать, что число первообразных корней n-й степени из 1 четное, если $n > 2$.

76. Выписать «круговые полиномы» $X_n(x)$ для n равного: a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 8; i) 9; j) 10; k) 11; l) 12; m) 15; n) 105.

77. Написать полином $X_p(x)$, где p простое число.

78*. Написать полином $X_{p^m}(x)$, где p простое число.

79*. Доказать, что при n нечетном, большем 1, $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

80*. Доказать, что если d составлено из простых делителей, входящих в n, то каждый первообразный корень из 1 степени nd есть корень степени d из первообразного корня n-й степени из 1 и обратно.

81*. Доказать, что если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_{\kappa 1}}$, где $p_1, p_2, \dots, p_\kappa$ различные простые числа, то $X_n(x) = X_{n'}\left(x^{n''}\right)$, где $n' = p_1, p_2 \dots p_\kappa$; $n'' = \frac{n}{n''}$

82*. Обозначим через $\mu(n)$ сумму первообразных корней n-й степени из 1, доказать, что $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат, хотя бы одного простого числа; $\mu(n) = 1$, если n есть произведение четного числа различных простых чисел; $\mu(n) = -1$, если n есть произведение нечетного числа различных простых чисел.

83*. Доказать, что $\sum_{n \neq 1} \mu(d) = 0$, если d пробегает все делители числа n, при $n \neq 1$.

84*. Доказать, что $X_n(x) = \Pi\left(x^d - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, где d пробегает все делители n.

85*. Найти $X_n(1)$.

86*. Найти $X_n(-1)$.

87*. Определить сумму произведений первообразных корней n-й степени из 1, взятых по два.

88*. $S = 1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^9 + ... + \varepsilon^{(n-1)^2}$, где ε – первообразный корень степени n из 1. Найти $|S|$.

§6. Показательная и логарифмическая функции комплексной переменной

Показательная функция от комплексной переменной z определяется при помощи формулы Эйлера: $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$.

Положим в этой формуле a=0. Получим: $\cos b + i\sin b = e^{bi}$.

Заменив b на -b, получим $\cos b - i\sin b = e^{-bi}$.

Складывая и вычитая почленно эти равенства, найдем формулы

$$\cos b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2},\ \sin b = \frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2i},$$

которые называются *формулами Эйлера*. Они устанавливают связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией с мнимыми показателями.

Комплексное число, заданное в тригонометрической форме $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, можно записать в форме $re^{\varphi i}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной*. Далее, $\alpha = re^{\varphi i} = e^{\ell nr}e^{\varphi i} = e^{\ell nr + \varphi i}$. Это делает естественным определение натурального логарифма: $\ell n\alpha = \ell nr + i\varphi$, так что вещественной частью логарифма комплексного числа оказывается логарифм его модуля, мнимой частью – его аргумент. Введенная таким образом логарифмическая функция определена для всех комплексных чисел, за исключением нуля. Необходимо только помнить, что логарифмическая функция многозначна, в силу многозначности аргумента. В частности, свойство логарифма – логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей – верно только с учетом многозначности.

П р и м е р 1. Одно из значений $\ln 1$ равен 0, одним из значений $\ln(-1)$ является πi, так как $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}$. Но $\ln[(-1)(-1)] = \pi i + \pi i = 2\pi i$. Это одно из значений логарифма 1 (так как $1 = \cos 2\pi\kappa + i\sin 2\pi\kappa$), но отличное от 0.

Пусть α – комплексное число, отличное от нуля. Тогда $\alpha = e^{\ln d}$ при любом значении $\ln\alpha$. Поэтому естественно считать по определению $\alpha^\beta = \ell^{\beta\ln\alpha}$. Это снова многозначная функция от α и β, в силу многозначности $\ln\alpha$, который определен с точностью до слагаемого $2\kappa\pi i$.

П р и м е р 2. Найти чему равно i^i.

Решение. Так как $\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$, то $i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)}$. Мы получили в некотором смысле парадоксальной результат – все значения «очень мнимого» выражения i^i вещественны.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

89*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a+bi}{n}\right)^n$.

90*. Во что превращается согласно формулы Эйлера правило сложения аргументов при умножении комплексных чисел? Тот же вопрос для формулы Муавра.

91. Вычислить: a) $ln(-e)$, b) $ln(-2)$, c) lni, d) $ln(-e)$, e) $e^{\pi i}$, f) 2^i, q) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$.

92. Найти $ln\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)$, $-1\le x\le 1$.

93*. Выразить *arctgx* через логарифмическую функцию.

Комплексные числа.

§1.

1. a) $3+7i$; $-22+7i$; b) $-8-10i$; $21-24i$; c) 10; 28.

2. a) $4-2i$; $1-2i$; b) $\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)i$; $\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{b}i$, $\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i$;

3. a) $7+17i$; b) $10-11i$; c) $14-5i$; d) $5+i$; e) $\frac{13}{2}-\frac{1}{2}i$; f) $\frac{11}{5}-\frac{27}{5}i$; d) 4; h) 52 i; i) 2; j) 1.

4. a) –2; b) 0.

5. a) 0; b) $-\frac{11}{17}$.

7. a) $z_1=2,\ z_2=1-i$; b) $\varnothing$; c) $z_1=\frac{(2+i)z_2-i}{2}$.

8. a) 1; b) 0, если $n=4\kappa$; i, если $n=4\kappa+1$; i-1, если $n=4\kappa+2$; -1, если $n=4\kappa+3$; c) $-i$.

9. a) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$; b) a^3+b^3;
c) $2\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\left(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\right)+12abc$.

10. a) $-1-i$; b) $0,-1$, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) i; d) $z_1=\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{1}{2}i$;
e) $\left\{x+yi\mid -7\le x\le 1,\ y=\pm\sqrt{7-6x-x^2}\right\}$; f) $\varnothing$

11. a) $\pm(1+i)$; b) $\pm(2-2i)$; c) $\pm(2-i)$; d) $\pm(1+4i)$; e) $\pm(5+6i)$; f) $\pm(1-3i)$;
g) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$; h) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; i) $i^\alpha\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\alpha=0,1,2,3$;
j) $\frac{\sqrt{2}(\pm1\pm i)}{2}$.

12. a) $x_1=3-i$; $x_2=-1+2i$; b) $x_1=2+i$, $x_2=1-3i$; c) $x_1=1-i$; $x_2=\frac{4-2i}{5}$;
d) $x_1=2-i$, $x_2=-2+i$, $x_3=2+i$, $x_4=-2-i$; e) $x_1=x_2=i\sqrt{17}$, $x_3=x_4=-i\sqrt{17}$;
f) $x_1=3+2i$, $x_2=1+i$; g) $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i$, $x_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$; h) $x_1=-i$, $x_2=-1+i$

§ 2.

14. $z_4=z_1+z_3-2z_2$.

15. $t(7+i)$, t - произвольное положительное число.

16. a) $2-\frac{3}{2}$i; 0, $3i$, $-3i$; c) bi, $b\in\boldsymbol{R}$.

17. $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$.

18. $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$; $-\frac{3}{2}-2i$.

19. a) $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$; b) -1, $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $4+i\sqrt{3}$, $2+2i\sqrt{3}$, $1+2i\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$, 1, 3.

20. a) окружность радиуса 1 с центром в начале координат;

b) луч, выходящий из начала координат и образующий угол $\frac{\pi}{3}$ с положительной вещественной полуосью:

c) круг радиуса 2 с центром в начале координат, включая границу;

d) внутренность круга радиуса 1 с центром в точке $1+i$;

e) круг радиуса 5 с центром в точке $-3-4i$, включая границу;

f) внутренность кольца, заключенного между окружностями радиусов 3 и 5 с центром в начале координат;

g) кольцо, заключенное между окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $2\ i$, причем окружность радиуса 1 включается, *а* радиуса 2 – не включается;

h) внутренность угла, содержащего положительную вещественную полуось и образованного лучами выходящими из начала координат под углами $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$ к этой полуоси;

i) полоса, заключенная между прямыми $x = \pm 1$, включая эти прямые;

j) внутренность полосы, заключенной между $y = 1$ и вещественной осью;

к) две прямые $y = \pm 1$;

l) внутренность полосы, заключенной между прямыми $x + y = \pm 1$;

m) эллипс $\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{5} = 1$;

n) гипербола $\frac{4x^2}{9} - \frac{4y^2}{7} = 1$;

o) парабола $y^2 = 8x$;

p) открытая полуплоскость, лежащая слева от мнимой оси.

21. i .

22. $\frac{12}{5} + \frac{16}{5}i$.

23. a) на отрезке $[A, B]$, где $A(-1,2)$, $B(2,-1)$; b) точки расположены на параболе $y = -x^2 + 10$, где $y \geq 4$.

24. $|z| = |\bar{z}|$, $arg z = -arg\, \bar{z}$.

25. $c = 7+i$, $C(7,1)$.

26. a) $argz_1 = argz_2$; b) $argz_1 = -argz_2$, $|z_1| \geq |z_2|$.

27. *Указание*. Выразить t через z и доказать, что $\bar{t} = t$.

28. a) $7(cos0 + isin0)$; b) $\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$; c) $3(cos\pi + isin\pi)$;

d) $5\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)$; e) $2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$; f) $2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$;

g) $2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; h) $2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$; i) $2\left(cos\frac{5}{6}\pi + isin\frac{5}{6}\pi\right)$;

j) $2\left(cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+isin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right)$; k) $2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

l) $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$; m) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{12}+isin\frac{\pi}{12}\right)$ или

$\sqrt{6}+\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12}+isin\frac{\pi}{12}\right)$; для получения второго выражения для модуля применить формулу $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

n) $2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+isin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right)$; o) $cos(-\alpha)+isin(-\alpha)$;

p) $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; q) $cos2\alpha+isin2\alpha$

r) при $0\le\alpha<\pi$, $2cos\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}+isin\frac{\alpha}{2}\right)$;

при $\pi\le\alpha<2\pi$, $-2cos\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha+2\pi}{2}+isin\frac{\alpha+2\pi}{2}\right)$;

s) при $0\le\alpha\le\pi$, $2cos\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{3\pi-\alpha}{2}+isin\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)$

при $\pi\le\alpha<2\pi$, $-2cos\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\pi-\alpha}{2}+isin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$

29. a) $1=cos0+isin0$; b) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=cos\frac{4}{3}\pi+sin\frac{4}{3}\pi$; c) $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(cos0+sin0)$;

d) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=cos\frac{5}{3}\pi+isin\frac{5}{3}\pi$; e) $-i=cos\frac{3}{2}\pi+sin\frac{3}{2}\pi$.

30. a) $\frac{5}{3}\left(cos230^0+isin230^0\right)$; b) $\sqrt{2}\,sin\frac{\pi}{5}\left(cos\frac{29}{20}\pi+isin\frac{29}{20}\pi\right)$.

31. Тождество выражает известную теорему геометрии: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

§ 3.

32. a) $2^9\left(1-i\sqrt{3}\right)$; b) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{12}$; c) – 64; d) 2, если n – четное, –2, если n – нечетное; e) $\frac{1}{cos^4 1}(cos4+isin4)$; f) $\frac{1}{cos^4 2}(cos2+isin2)$; g) $-32\,i\,cos^5\frac{3\pi}{5}$.

36. a) $cos\frac{(4k+1)\pi}{12}+isin\frac{(4k+1)\pi}{12}(0\le k\le 5)$;

b) $(cos\frac{(6k-1)\pi}{30}+isin\frac{(6k-1)\pi}{30}(0\le k\le 9)$

c) $\sqrt{2}\left(cos\frac{(8k-1)\pi}{32}+isin\frac{(8k-1)\pi}{32}\right)(0\le k\le 7)$.

37. a) $\left\{1,-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; b) $\{\pm1,\pm i\}$; c) $\left\{\pm1,\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$;

d) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-i\right\}$; e) $\{1\pm i;-1\pm i\}$; f) $2\sqrt[6]{1}(см(c))$;

g) $\{\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}i,\pm\sqrt{2}(1+i),\pm\sqrt{2}(1-i)\}$; h) $\left\{\pm i\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)\right\}$;

i) $\{\sqrt{3}+i,-1+i\sqrt{3},-\sqrt{3}-i,1-i\sqrt{3}\}$; j) $\{3-i\sqrt{3},\sqrt{3}+3i,-3+i\sqrt{3},-\sqrt{3}-3i\}$;

k) $\left\{\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2\sqrt{3}}+i\sqrt{2\sqrt{3}}\right),\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}(i-1),\ \frac{1}{6}\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right\}$;

l) $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),-\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right),1-i\right\}$;

m) $\{\pm\sqrt{3}+i,-2i\}$; n) $\left\{\frac{3}{2}\left(\pm\sqrt{3}+i\right),-3i\right\}$; o) $\left\{\pm\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}\right)\right\}$;

p) $\left\{\pm\left(1-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right)\right\}$.

38. a) $\sqrt[5]{2}\left(cos\frac{\pi}{15}+isin\frac{\pi}{15}\right);\sqrt[5]{2}\left(cos\frac{7\pi}{15}+isin\frac{7\pi}{15}\right);\sqrt[5]{2}\left(cos\frac{13\pi}{15}+isin\frac{13\pi}{15}\right);$

$\sqrt[5]{2}\left(cos\frac{19\pi}{5}+isin\frac{19\pi}{5}\right);\sqrt[5]{2}\left(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3}\right)$

b) $\sqrt{3}+i$, **2i**, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, **-2i**, $\sqrt{3}-i$.

39. $-\frac{3}{2}i$;

40. $2\left(cos144^{0}+isin144^{0}\right),2\left(cos216^{0}+isin216^{0}\right),\ \sqrt[5]{31}\left(cos108^{0}+isin108^{0}\right),$
$-\sqrt[5]{31}\left(cos252^{0}+isin252^{0}\right).$

41.

a) $cos^{6}x+6cos^{5}xsinx-15cos^{4}xsin^{2}x-20cos^{3}xsin^{3}x+15cos^{2}xsin^{4}x++6cosxsin^{5}x-sin^{6}x$;

c) $sin8x=8cos^{7}xsinx-56cos^{5}xsin^{3}x+56cos^{3}xsin^{5}x-8cosxsin^{7}x$;

b) $cos8x=cos^{8}x-28cos^{6}xsin^{2}x+70cos^{4}xsin^{4}x-28cos^{2}xsin^{6}x+sin^{8}x$.

42. $ctg\,7x=\frac{7tgx-35tg^{3}x+21tg^{5}x-tg^{7}x}{1-21tg^{2}x+35tg^{4}x-7tg^{6}x}$.

43. $tg\ nx=\frac{\sum_{\kappa=0}^{m}(-1)^{\kappa}C_{n}^{2\kappa+1}tg^{2\kappa+1}x}{\sum_{\kappa=0}^{\ell}(-1)^{\kappa}C_{n}^{2\kappa}tg^{2\kappa}x}$, где m,ℓ – такие целые числа что

$\frac{n-1}{2}-1<m\le\frac{n-1}{2},\ \frac{n}{2}-1<\ell\le\frac{n}{2}$.

44. При нечетном $n=2\ell+1$, имеем

$$sin^{n}x=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{k}C_{n}^{k}sin(n-2k)x.$$

При четном $n=2\ell$, имеем

$$\sin^n x = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{\ell-1}(-1)^k C_n^k \cos(n-2k)x + (-1)^\ell \frac{1}{2}C_n^\ell\right].$$

При нечетном $n = 2\ell + 1$, имеем $\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{\ell} C_n^k \cos(n-2k)x$.

При четном $n = 2\ell$, имеем $\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{\ell-1} C_n^k \cos(n-2k)x + \frac{1}{2}C_n^\ell\right]$.

Указание. Рассмотреть $z = \cos x + i\sin x$, $\bar{z} = \cos x - i\sin x$. Отсюда

$\cos x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\sin x = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $\cos^n x = \frac{1}{2^n}(z+\bar{z})^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} z^k$, $\sin^n x = \frac{1}{(2i)^n}(z-\bar{z}) =$

$= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k z^{n-k} z^k$

Далее, следует группировать члены с одинаковыми биномиальными коэффициентами, выносить общий множитель $z^k \bar{z} = 1$ и пользоваться формулой Муавра.

45. a) $\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; b) $\frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$; c) $\frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$;

d) $\frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}$; e) $\frac{1}{128}(\sin 8x + 2\sin 6x - 2\sin 4x - 6\sin 2x)$

f) $\frac{1}{64}[(\cos 7x - \sin 7x) + 7(\cos 5x + \sin 5x) + 21(\cos 3x - \sin 3x) + 35(\cos x + \sin x)]$.

§ 4.

46. a) и b) сводятся к примеру 1, если учесть, что $C_{2n}^{\kappa} = C_{2n}^{2n-\kappa}$.

47. Равенства a) и b) получаются аналогично примеру 2 при рассмотрении сумм: $2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2 + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n$, $2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n$.

48. См. пример 4.

49. Получается из тождества (*) примера 5 при $x = k$.

50. *Решение*. Выражение, стоящее в левой части, есть коэффициент при x^n в следующем многочлене:

$x^n(1+x)^n - x^{n-1}(1+x)^n + x^{n-2}(1+x)^n + \ldots + (-1)^k x^{n-k}(1+x)^n =$

$= (1+x)^n\left(x^n - x^{n-1} + \ldots + (-1)^k x^{n-k}\right) = (1+x)^{n-1}\left(x^{n+1} + (-1)^k x^{n-k}\right)$. Очевидно, что коэффициент при x^n в последнем выражении равен: $(-1)^k C_{n-1}^k$.

51. Следует из примера 7.

52. a) *Решение*. Рассмотрим произведение $(1+x)^m(1-x)^m = (1-x^2)^m$. Следовательно, $\sum_{s=0}^{m}(-1)^s C_m^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_m^t x = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k x^{2k}$, поэтому $\sum_{s+t=2k}^{m}(-1)^s C_m^s C_m^t = (-1)^k C_m^k$. Допустим сначала, что m – четное, и положим $m = 2n$. Пусть $k = n$. Тогда $\sum_{s+t=2n}^{m}(-1)^s C_{2n}^s C_{2n}^{2-nt} = (-1)^n C_{2n}^n$. Отсюда получаем: $\sum_{s=0}^{2n}(-1)^s (C_{2n}^s)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$; b) если m – нечетное, то полагаем $m = 2n+1$. Коэффициент при x^{2n+1} в левой части равенства $(1+x)^m(1-x)^m = (1-x^2)^m$ равен: $\sum_{s+t=2n+1}(-1)^s C_{2n+1}^s C_{2n+1}^t = \sum_{s=0}^{2n+1}(-1)^S (C_{2n+1}^s)^2$. Но пра-

вая часть предыдущего равенства показывает, что этот коэффициент должен равняться нулю (так как из разложения легко видно, что отсутствуют нечетные степени x). Поэтому $\sum_{s=0}^{2n+1}(-1)^s\left(C_{2n+1}^s\right)^2=0$ и наше равенство доказано.

53. a) В примере 9 заменить φ на $\frac{\pi}{2}-\varphi$; b) и c) выводятся аналогично примеру 9 и a).

54. Аналогично примеру 10.

55. a) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{(n+2)x}{2}$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}$.

56. $\frac{n}{2}-\frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$. *Указание*: Воспользоваться формулой $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{2}$.

58. a) $\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$; b) $\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$. *Указание*. Для вычисления сумм вида $1+2\alpha+3\alpha^2+\ldots+na^{n-1}$ их полезно умножить предварительно на $1-\alpha$.

§ 5.

59. a) ±1; b) $1,-\frac{1}{2}\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$; c) $\pm1,\pm i$; d) $\pm1,\pm i,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$;

e) $\pm1,\pm i,\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$;

g)

$\pm1,\ \pm i,\ \pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i);\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2};\ \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

60. a) -1; b) $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\pm i$; d) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$; e) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$;

f) $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

61. a) Обозначая $\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{16}+i\sin\frac{2\pi k}{16}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;

показателю 2 принадлежит ε_8;

показателю 4 принадлежат $\varepsilon_4,\varepsilon_{12}$;

показателю 8 принадлежат $\varepsilon_2,\varepsilon_6,\varepsilon_{10},\varepsilon_{14}$

первообразные корни 16-й степени $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\varepsilon_5,\varepsilon_7,\varepsilon_9,\varepsilon_{11},\varepsilon_{13},\varepsilon_{15}$,

b) Обозначая $\varepsilon_{\kappa,}=\cos\frac{2\pi\kappa}{20}+i\sin\frac{2\pi\kappa}{20}$ получаем:

показателю 1 принадлежат ε_0;

показателю 2 принадлежат ε_{10};

показателю 4 принадлежат $\varepsilon_5,\varepsilon_{15}$;

показателю 5 принадлежат $\varepsilon_4,\varepsilon_8\varepsilon_{12}\varepsilon_{16}$;

показателю 10 принадлежат $\varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{18}$;

первообразные корни 20-й степени $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_9, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{17}, \varepsilon_{19}$

c) Обозначая $\varepsilon_{\kappa,} = cos\frac{2\pi\kappa}{24} + isin\frac{2\pi\kappa}{24}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;

показателю 2 принадлежит ε_{12};

показателю 3 принадлежат $\varepsilon_8, \varepsilon_{16}$;

показателю 4 принадлежат $\varepsilon_6, \varepsilon_{18}$;

показателю 6 принадлежат $\varepsilon_4, \varepsilon_{20}$;

показателю 8 принадлежат $\varepsilon_3, \varepsilon_9, \varepsilon_{15}, \varepsilon_{21}$;

показателю 12 принадлежат $\varepsilon_2, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{22}$;

первообразные корни 24-й степени $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{17}, \varepsilon_{19}, \varepsilon_{23}$.

62. $\frac{2}{1-\varepsilon}$.

63. 0, если $n > 1$.

64. $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, если $\varepsilon \neq 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$, если $\varepsilon = 1$.

65. $-\frac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$, если $\varepsilon \neq 1$; $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, если $\varepsilon = 1$.

66. a) $-\frac{n}{2}$; b) $-\frac{n}{2}ctg\frac{\pi}{n}$;

67. a) 1; b) 0; c) -1.

68. *Решение*. Если z удовлетворяет данному уравнению, то $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}$.

Множество всех точек, расстояния от которых до двух данных точек находятся в данном отношении, есть окружность (в частном случае - прямая при $|\lambda| = |\mu|$).

69. a) $-2ictg\frac{\pi k}{n}$ $(k = 0,1,\ldots,n\text{-}1)$; b) $x = 5ctg\frac{\pi k}{n}$ $(k = 0,1,\ldots,n\text{-}1)$;

c) $x = 3ctg\frac{4k+3}{4n}\pi$ $(k = 0,1,\ldots,n\text{-}1)$. *Указание*. Исходить из уравнения

$x + 3i = (x - 3i)\alpha_k$, $\alpha_k = \sqrt[n]{-i} = cos\frac{4k+3}{2n}\pi + isin\frac{4k+3}{2n}\pi$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$;

d) $actg\frac{2\pi k+\varphi}{2n}$ $(k = 0,1,\ldots,n\text{-}1)$.

70. *Решение*. Пусть $A = cos\varphi + isin\varphi$. Тогда $\frac{1+ix}{1-ix} = \eta_k^2$, где

$\eta_k = cos\frac{\varphi+2\pi k}{2m} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{2m}$ $(k = 0,1,\ldots,m\text{-}1)$.

Отсюда $x = \frac{\eta_k^2 - 1}{i(\eta_k^2 + 1)} = \frac{\eta_k - \eta_k^{-1}}{i(\eta_k + \eta_k^{-1})} = tg\frac{\varphi+2\pi k}{2m}$.

71. *Решение*. Пусть ε – общий корень $x^a - 1$ и $x^в - 1$; s - показатель, которому принадлежит ε. Тогда s - общий делитель a и b, s может быть поэтому равно только 1 и ε =1. Обратное очевидно.

72. Пусть α и β -первообразные корни степени a и b из 1. Пусть $(\alpha\beta) = 1$. Тогда $\alpha^{bs} = 1$; $\beta^{as} = 1$. Выходит, что bs делится на a; as делится на b. Следовательно, s делится на ab. Пусть λ - первообразный корень степени ab из 1. Тогда $\lambda = \alpha^{\kappa}\beta^{s}$ (см. пример 9). Пусть α^{κ} принадлежит показателю $a_1 < a$. Тогда $\lambda^{a_1 b} = \left(a^{\kappa}\right)^{a_1 b}\left(\beta^{s}\right)^{a_2 b} = 1$, что невозможно. Точно так же можно показать, что β^{S} - первообразный корень степени b из 1.

73. Непосредственно следует из задачи 72.

74. *Решение*. Сначала выпишем все числа кратные p и не превосходящие p^{α}. А именно $1\cdot p$, $2\cdot p$,…,$p^{\alpha-1}$ p. Очевидно, что таких чисел $p^{\alpha-1}$. Следовательно, по определению функции Эйлера, имеем: $\varphi\left(p^{\alpha}\right) = p\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Тогда, на основании задачи 73, имеем $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\varphi\left(p_1^{\alpha_2}\right)\ldots\varphi\left(p_n^{\alpha\kappa}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_{\kappa}}\right)$.

75. *Решение*. Если ε -первообразный корень n -й степени из 1, то и $\bar{\varepsilon}$, сопряженное с ε, тоже первообразный корень степени n из 1. При этом $\varepsilon \neq \pm 1$, так как $n > 2$.

76. a) $X_1(x) = x - 1$; b) $X_2(x) = x + 1$; c) $X_3(x) = x^2 + x + 1$; d) $X_4(x) = x^2 + 1$; e) $X_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$; f) $X_6(x) = x^2 - x + 1$; g) $X_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + +x + 1$; h) $X_8(x) = x^4 + 1$; i) $X_9(x) = x^6 + x^3 + 1$; j) $X_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; k) $X_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$; e) $X_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$; m) $X_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$; n)

$X_{105}(x) = x^{48} + x^{47} - x^{46} + x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} -$

$- x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1$

77. $X_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$.

78. $X_{p^m}(x) = x^{(p-1)p^{m-1}} + x^{(p-2)p^{m-1}} + \ldots + x^{p^{m-1}} + 1$. *Указание*. Доказать , что все корни $x^{p^{m-1}} - 1$ и только они не являются первообразными корнями $x^{p^m} - 1$.

79. *Решение*. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\varphi(n)}$ - первообразные корни степени n из 1. тогда (см. задачу 72) числа $(-\alpha_1)$, $(-\alpha_2)$,..., $(-\alpha_{\varphi(n)})$ будут первообразными корнями степени 2n из 1. Имеем $X_{2n}(x) = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2)\ldots(x + \alpha_{\varphi(n)}) = (-1)^{\varphi(n)}(-x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(-x - \alpha_{\varphi(m)})$, или (см. задачу 75) $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

80. *Решение*. Пусть $\varepsilon_{\kappa} = cos\frac{2\pi\kappa}{nd} + isin\frac{2\pi\kappa}{nd}$ - первообразный корень степени nd из 1, т.е. k и n взаимно просты. Разделим k на n получим, $k = nq+r$, где

$0<r<n$. Отсюда, имеем: $\varepsilon_\kappa = cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + isin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d}$, т.е. ε_κ - одно из значений корня степени d и $\eta_r = cos\frac{2\pi r}{n} + isin\frac{2\pi r}{n}$; η_r - первообразный корень степени n из 1, так как всякий общий делитель r и n есть общий делитель k и n.

Пусть теперь $\eta_r = cos\frac{2\pi r}{n} + isin\frac{2\pi r}{n}$ - первообразный корень степени n из 1, т.е r и n, взаимно просты. Составим

$$\varepsilon_q = cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + isin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} = cos\frac{2\pi(r+nq)}{nd} + isin\frac{2\pi(r+nq)}{nd},$$

где $q = 0,1,2..., d-1$; ε_q - первообразный корень степени nd из 1. Действительно, если бы $r + nq$ и nd делились оба на некоторые простое число p, то на p делились бы n и r, а это невозможно.

81. *Решение*. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... \varepsilon_{\varphi(n^1)}$ - первообразные корни степени n' из 1. Тогда $X_{n'}\left(x^{n''}\right) = \prod_{\kappa=1}^{\varphi(n')}\left(x^{n'} - \varepsilon_\kappa\right)$. Пусть далее $(x-\varepsilon_{\kappa,1})(x-\varepsilon_{\kappa,2})....(x-\varepsilon_{\kappa,n''})$ - разложение $\left(x^{n''} - \varepsilon_\kappa\right)$ на линейные множители. Тогда $X_{n'}\left(x^{n''}\right) = \prod_{\kappa=1}^{\kappa=\varphi(n')}\prod_{i=1}^{i=n''}(x-\varepsilon_{\kappa,i})$. На основании задачи 80 каждый линейный множитель $x-\varepsilon_{\kappa,i}$ входит в разложение $X_n(x)$ и обратно. Так как, кроме того $\varphi(n) = n''\varphi(n')$, степени $X_n(x)$ и $X_{n'}\left(x^{n''}\right)$ равны.

82. *Указание*. Использовать задачи 77, 78, 72 и показать что 1) $\mu(p) = -1$, если p – простое; 2) что $\mu\left(p^\alpha\right) = 0$, если p - простое число, $\alpha>1$; 3) $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$, если a и b взаимно просты.

83. *Решение*. Сумма всех корней степени n из 1 равна O. Так как каждый корень n-й степени из 1 принадлежит показателю α, являющемуся делителем n и обратно, то $\sum_{d/n}\mu(d) = 0$.

84. *Решение*. Пусть $\varepsilon_\kappa = cos\frac{2\pi\kappa}{n} + isin\frac{2\pi\kappa}{n}$ принадлежит показателю n_1. Тогда множитель $x-\varepsilon_\kappa$ войдет в такие и только такие двучлены x^d-1, где d делится на n_1. При этом, если d пробегает все делители n, кратные n_1, $\frac{n}{d}$ пробегает все делители $\frac{n}{n_1}$. Таким образом $x-\varepsilon_\kappa$ в правую часть войдет с показателем $\sum_{d_1/\frac{n}{n_1}}\mu(d_1)$. Сумма эта равна 0, если $\frac{n}{n_1} \neq 1$, и равна 1 если $n = n_1$.

85. *Решение*. Если $n = p^{\alpha}$ где p - простое, то $X_n(1) = p$. Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}$, где $p_1, p_2, \dots, p_{\kappa}$ – различные простые, то (задача 81) $X_n(1) = X_{n'}(1)$; где $n' = p_1 p_2 \dots p_{\kappa}$.

Пусть теперь $n = p_1 p_2 \dots p_{\kappa}$; $\kappa \geq 2$; $n_1 = \frac{n}{p_{\kappa}}$. Заметим, что для получения всех делителей n_1 достаточно ко всем делителям n приписать их произведения на p_k. Поэтому

$$X_n(x) = \prod_{d/n} \left(x^d - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} = \prod_{d/n'} \left(x^d - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \cdot \prod_{d/n'} \left(x^{dp_k} - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{dp_k}\right)} = \left[X_{n'}(x)\right]^{-1} X_{n'}\left(x^{p_{\kappa}}\right).$$ Отсюда $X_n(1) = 1$.

86. *Решение*. 1) Пусть n – нечетное, большее единицы. Тогда (см. задачу 79) $X_n(-1) = X_{2n}(1) = 1$;

2) Пусть $n = 2^{\kappa}$, тогда $X_n = \frac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{2}} - 1} = x^{\frac{n}{2}} + 1$ и $X_n(-1)$ равно O, если $k=1$ и равно 2, если $k>1$.

3) Пусть $n = 2n_1$, где n_1 - нечетное, большее единицы. Тогда (см. задачу 79) $X_n(-1) = X_{n_1}(1)$ и следовательно, $X_n(-1)$ или равно р если $n_1 = p^{\alpha}$ (р - простое), или равно 1, когда $n_1 \neq p$

4) Пусть $n = 2^{\kappa} n_1$, где к>1, а $n_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ ($p_1, p_2, \dots p_s$ различные нечетные простые числа). В этом случае (см. задачу 81) $X_n(x) = X_{2 p_1 p_2 \dots p_s}\left(x^{\lambda}\right)$, где $\lambda = 2^{\kappa-1} p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_s^{\alpha_s - 1}$. Отсюда следует, что $X_n(-1) = X_n(1) = 1$.

87. *Решение*. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ - первообразные корни степени n из 1:

$$S = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{\varphi(n)-1} \varepsilon_{\varphi(n)} = \frac{\left[\mu(n)\right]^2 - \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2\right)}{2}.$$

1) Пусть m-нечетное, тогда ε_i^2 есть первообразный корень степени n из 1 и $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_j^2$ только при $i = j$. Поэтому $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = \mu(n)$ $S = \frac{\left[\mu(n)\right]^2 - \mu(n)}{2}$.

2) Пусть $n = 2n_1; n_1$ - нечетное. В этом случае - ε_i (см. задачу 72) есть первообразный корень степени n_1 из 1 и поэтому (см. 1). $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = \mu(n_1) = -\mu(n)$. Таким образом, в этом случае $S = \frac{\left[\mu(n)\right]^2 + \mu(n)}{2}$.

3) Пусть $n = 2^k n_1$, где $k > 1$, n_1 - нечетное. В этом случае ε_i^2 принадлежит показателю $\frac{n}{2}$. На основании задачи 80 утверждаем, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{\varphi(n)}$ представляют собой квадратные корни из $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$, где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$ - первообразные корни степени $\frac{n}{2}$ из 1. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = 2\left(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}\right) = 2\mu\left(\frac{n}{2}\right); \quad S = -\mu\left(\frac{n}{2}\right).$$

88. *Решение.* $S=\sum_{x=0}^{n-1}\varepsilon^{x^2}$, $\varepsilon^{x^2}=\sum_{x=y}^{y+n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum_{S=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+S)^2}$ при любом целому y:

$S'=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2}$, $S'S=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2}S=\sum_{y=0}^{n-1}\left(e^{-y^2}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}\right)=\sum_{y=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys+s^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{s^2}\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys}\right)=$

$=n+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon^{s^2}\sum_{y=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{2s}\right)^y=n$ при нечетном n. $SS'=n+n\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=n\left(1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right)$ при четном n, так как $\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2sy}=0$ при $2s$, не делящемся на n. Итак, $|S|=\sqrt{n}$, если n – нечетное, и $|S|=\sqrt{n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]}$, если n – четное.

§ 6.

89. *Решение.* Запишем $u_n=1+\frac{a+bi}{n}$ в тригонометрической форме и будем искать отдельно предел модуля и предел аргумента числа u_n^n. Имеем: $r_n^n=\left|u_n^n\right|=\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{n/2}\to e^a$; $arg\,U_n^n=n\varphi_n$, где $\sin\varphi_n=\frac{b}{nr_n}\to 0$. Считая $\varphi_n\to 0$, получим $n\varphi_n=\frac{b}{r_n}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\to b$. Итак, $\lim_{n\to\infty}U_n^n=e^a(\cos b+i\sin b)$.

90. *Решение.* Формула

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_2+\varphi_2)$$

превращается в $e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ т.е. в правило сложения показателей при умножении степеней с одинаковым основанием. Аналогично, формула Муавра превращается в $\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{i\varphi n}$.

91. a) $1+(2k+1)\pi i$; b) $\ln 2+(2k+1)\pi i$; c) $(4k+1)\frac{\pi i}{2}$; d) $(8k+1)\frac{\pi i}{4}$;

e) –1; f) $e^{-2k\pi+i\ln 2}$; g) $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$.

92. $i\arccos x+2k\pi i$.

93. *Решение.* Имеем $tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}$. Пусть $tg\varphi=x$. Тогда $e^{2i\varphi}=\frac{1+ix}{1-ix}$, $\varphi=\frac{1}{2i}\cdot\ln\frac{1+ix}{1-ix}+k\pi$.