# НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

## СОДЕРЖАНИЕ

**НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА……1**
**ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ……5**
**СХЕМА БЕРНУЛЛИ……..9**
**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ…….11**
**ВЕРЯТНОСТНЫЕ ТАБЛИЦЫ……..15**

## НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Неравенство Чебышева встречается в теории вероятностей в двух видах: для неотрицательных случайных величин и в общем виде, т.е. для случайных величин, которые могут принимать значения разных знаков.

**Неравенство Чебышева** (для неотрицательных случайных величин). Пусть случайная величина $\xi \geq 0$ и имеет конечное математическое ожидание $E\xi < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}.$$

*Доказательство.* Представим случайную величину $\xi$ в виде суммы

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,$$

где

$$\xi_1 = \begin{cases} \xi, & \text{если} \quad \xi \geq \varepsilon \\ 0, & \text{если} \quad \xi < \varepsilon \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \xi_2 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \xi \geq \varepsilon \\ \xi, & \text{если} \quad \xi < \varepsilon \end{cases}$$

Поскольку случайная величина $\xi \geq 0$ , то и $\xi_1 \geq 0$, и $\xi_2 \geq 0$. Тогда

$$E\xi = E\xi_1 + E\xi_2 \geq E\xi_1 \geq \varepsilon \cdot \mathrm{P}(\xi \geq \varepsilon)$$

Разделив это неравенство на $\varepsilon > 0$, получим неравенство Чебышева.

Доказано.

**Неравенство Чебышева** (в общем виде). Пусть случайная величина $\xi$ имеет конечную дисперсию $D\xi < \infty$ . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\mathrm{P}(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

*Доказательство*. Из неравенства Чебышева для неотрицательных случайных величин получаем

$$\mathrm{P}(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказано.

Разберем несколько задач из задания на эту тему.

**Задача 1** (задание 7: а, д). По известному «правилу трех сигм» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более, чем на три корня из дисперсии, мала. Найти

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right),$$

если $\xi$ имеет:

1) нормальное распределение с параметрами $a, \sigma$;
2) распределение Пуассона с $E\xi = 0{,}09$.

Сравнить результат с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

*Решение*.

1) Ранее (см. пособие для дистанционного занятия «Числовые характеристики случайных величин») для случайной величины $\xi$ , распределенной нормально с параметрами $a, \sigma$, мы вычислили математическое ожидание и дисперсию:

$$E\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2.$$

Вычислим сначала точное значение вероятности

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right).$$

Для этого, воспользовавшись формулой плотности нормального распределения с параметрами $a, \sigma$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

получаем

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) = \mathrm{P}(|\xi - a| < 3\sigma) = \mathrm{P}(-3\sigma < \xi - a < 3\sigma) =$$

$$= \mathrm{P}(a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

После замены в этом интеграле

$$y = \frac{x-a}{\sigma}, \qquad dy = \frac{dx}{\sigma},$$

находим

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{3} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

Для вычисления значений этого интеграла во всех учебниках и задачниках по теории вероятностей имеется таблица значений функции

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

В этом пособии такая таблица приведена в разделе «Вероятностные таблицы». Используя эту таблицу значений для $\Phi_0(x)$ находим

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) = 2\Phi_0(x) = 2 \cdot 0{,}4987 = 0{,}9984$$

Теперь получим оценку данной вероятности по неравенству Чебышева

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}\right) \leq \frac{D\xi}{9D\xi} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) \geq 0{,}8889$$

Результат, полученный с помощью вероятностных таблиц, входит в область, полученную с помощью неравенства Чебышева.

2) Вычислим точное значение вероятности

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right)$$

для случайной величины, распределенной по закону Пуассона с математическим ожиданием $E\xi = 0{,}09$.

Для этого сначала найдем параметр $\lambda$ данного распределения. Как мы выяснили на прошлом вебинаре (см. пособие для дистанционного занятия «Числовые характеристики случайных величин»), числовые характеристики случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda$, равны

$$E\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda.$$

Поэтому

$$\lambda = 0{,}09; \qquad D\xi = E\xi = 0{,}09\,.$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) = \mathrm{P}(|\xi - 0{,}09| < 0{,}9) = \mathrm{P}(-0{,}9 + 0{,}09 < \xi < 0{,}9 + 0{,}09) =$$

$$= \mathrm{P}(-0{,}81 < \xi < 0{,}99) = \mathrm{P}(\xi = 0) = e^{-0{,}09} = 0{,}9139$$

Здесь мы воспользовались формулой для вероятности, с которой случайная величина, распределенная по закону Пуассона, принимает заданное значение

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0{,}1{,}2{,}3{,}\ldots).$$

Найдем оценку для требуемой вероятности по неравенству Чебышева:

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}\right) \leq \frac{D\xi}{9D\xi} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) \geq 0{,}8889$$

Видим, что точное значение вероятности входит в интервал оценки, полученный с помощью неравенства Чебышева.

Стоит заметить, что в некоторых случаях улучшить неравенство Чебышева нельзя. Например, в задаче из задания 7 г) приведен пример случайной величины, для которой оценка, полученная по неравенству Чебышева, является точной.

**Задача 2** (задание 7 г). Для случайной величины $\xi$ с распределением

$$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{18}\,, \qquad P(\xi = 0) = \frac{8}{9},$$

Найти

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right)$$

и сравнить найденную вероятность с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

*Решение*. Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi$

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{18} + (-1) \cdot \frac{1}{18} + 0 \cdot \frac{8}{9} = 0$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 = 1 \cdot \frac{1}{18} + 1 \cdot \frac{1}{18} + 0 \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) = \mathrm{P}(|\xi| < 1) = \mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{8}{9}$$

Заметим, что неравенство Чебышева в этом случае превращается в равенство

$$\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}\right) \leq \frac{D\xi}{9D\xi} = \frac{1}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| < 3\sqrt{D\xi}\right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

## ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Для последовательности случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

часто требуется оценить средние арифметические

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

Одну из таких оценок даёт закон больших чисел.

**Закон больших чисел**. Если у случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

существуют дисперсии и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n}{n^2} = 0\,,$$

то к случайным величинам

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

применим закон больших чисел, а именно, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{E\xi_1 + E\xi_2 + \cdots + E\xi_n}{n} \right| < \varepsilon\right\} = 1$$

**Усиленный закон больших чисел**. Если случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$$

одинаково распределены, попарно независимы и имеют конечное математическое ожидание $E\xi_1 = a$, то выполнено равенство

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} = a\right\} = 1$$

Решим задачу на эту тему.

**Задача 3** (задание 9). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $0 \le x \le 1$, а

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$$

– независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ .

Доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left| \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n} - \int_0^1 f(x)dx \right| > \varepsilon\right\} = 0$$

**Решение**. Если ввести обозначение

$$\eta_n = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n}$$

то, используя свойства математического ожидания и дисперсии (см. пособие для дистанционного занятия «Числовые характеристики случайных величин»), находим

$$E\eta_n = \frac{Ef(\xi_1) + Ef(\xi_2) + \cdots + Ef(\xi_n)}{n} = Ef(\xi_1) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$D\eta_n = \frac{Df(\xi_1) + Df(\xi_2) + \cdots + Df(\xi_n)}{n^2} = \frac{Df(\xi_1)}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left( \int_0^1 f^2(x)\, dx - \left( \int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 \right) = \frac{A}{n},$$

где

$$A = \int_0^1 f^2(x)\, dx - \left( \int_0^1 f(x)\, dx \right)^2$$

С помощью неравенства Чебышева получаем

$$0 \le \mathrm{P}\left( \left| \eta_n - \int_0^1 f(x)\, dx \right| > \varepsilon \right) \le \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2} < \frac{A}{n\varepsilon^2}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n\varepsilon^2} = 0\,,$$

то по теореме о трех последовательностях заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n} - \int_0^1 f(x)dx \right| > \varepsilon \right\} = 0$$

Доказательство закончено.

**Задача 4** (задание 10). Последовательности

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \qquad \text{и} \qquad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$$

образованы одинаково распределенными случайными величинами, независимыми внутри каждой последовательности (случайные величины $\xi_n$ и $\eta_n$ могут быть зависимыми),

$$E\xi_n = E\eta_n = a, \quad D\xi_n = D\eta_n < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Выполняется ли закон больших чисел для последовательности

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$$

где

$$\zeta_{2n-1} = \xi_n, \ \zeta_{2n} = \eta_n, \qquad n = 1,2, \ldots ?$$

Выполняется ли усиленный закон больших чисел?

**Решение**. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$A_k = \left\{ \omega\colon \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k}{k} - a \right| \ge \varepsilon \right\}, \qquad k = 1,2, \ldots$$

$$B_k = \left\{\omega: \left|\frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k}{k} - a\right| \geq \varepsilon\right\}, \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$C_{k,m} = \left\{\omega: \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m}{k+m} - a\right| \geq \varepsilon\right\}, \qquad k,m = 1,2,\ldots$$

Тогда для любых натуральных чисел $k$ и $m$ выполнено включение

$$\overline{A}_k \cap \overline{B}_m \subset \overline{C}_{k,m}$$

Действительно, пусть $\omega \in \overline{A}_k \cap \overline{B}_m$. В этом случае

$$\begin{cases} \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k}{k} - a \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m}{m} - a \right| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ka - k\varepsilon < \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k < ka + k\varepsilon \\ ma - m\varepsilon < \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m < ma + m\varepsilon \end{cases}$$

Складывая неравенства, получаем

$$(k+m)a - (k+m)\varepsilon < \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m < (k+m)a + (k+m)\varepsilon$$

откуда вытекает неравенство

$$\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m}{k+m} - a \right| < \varepsilon$$

Значит, $\omega \in \overline{C}_{k,m}$.

Следовательно, для любых натуральных чисел $k$ и $m$ также выполнено включение

$$C_{k,m} \subset A_k \cup B_m$$

Теперь заметим, что

$$\left| \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} - a \right| = \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]} - a \right|$$

Поэтому

$$\left\{\omega: \left| \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} - a \right| \geq \varepsilon\right\} = C_{\left[\frac{n+1}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]} \subset A_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \cup B_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

а, значит, выполнено неравенство

$$P\left\{\left| \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} - a \right| \geq \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - a \right| \geq \varepsilon\right\} + P\left\{\left| \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]} - a \right| \geq \varepsilon\right\}$$

Поскольку к каждой из последовательностей $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ применим закон больших чисел, то каждая из вероятностей в правой части неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left| \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} - a \right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

то есть к последовательности $\{\zeta_n\}$ применим закон больших чисел.

Теперь рассмотрим множество

$$C = \left\{\omega: \nexists \lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} = a\right\} =$$

$$= \left\{\omega: \exists\varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n > N: \left| \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} - a \right| \geq \varepsilon\right\}$$

Как мы уже доказали ранее, множество $C \subset A \cup B$, где

$$A = \left\{\omega: \exists\varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n > N: \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - a \right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$B = \left\{\omega: \exists\varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n > N: \left| \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]} - a \right| \geq \varepsilon\right\}$$

Поскольку к каждой из последовательностей $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ применим усиленный закон больших чисел, то

$$P(A) = P(B) = 0.$$

Значит, и

$$P(\mathrm{C}) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) = 0$$

Таким образом, к последовательности $\{\zeta_n\}$ применим усиленный закон больших чисел. Решение задачи 4 завершено.

## СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Схемой Бернулли (последовательностью испытаний Бернулли) называют серию независимых случайных экспериментов, в результате каждого из которых событие *A* может либо произойти с вероятностью $p$, либо не произойти с вероятностью $q = 1 - p$.

Рассмотрим серию из $n$ испытаний Бернулли и обозначим через $\mu_n$ количество испытаний, в результате которых событие $A$ произошло. Величину $\mu_n$ часто называют числом «успехов» в $n$ испытаниях Бернулли.

**Теорема Бернулли**. Вероятность того, что в серии из *n* испытаний событие *A* произойдет ровно *k* раз, выражается формулой Бернулли:

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

При больших значениях $n$ расчеты по формуле Бернулли затруднительны, поэтому обычно используют приближенные формулы, полученные на основании предельных теорем для формулы Бернулли при $n \to \infty$.

**Теорема Пуассона**. Если $n \to \infty$, $p \to 0$, а $np \to \lambda$, то

$$P(\mu_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Другими словами, при малых значениях $p$ и большом числе испытаний $n$ справедлива формула (пуассоновское приближение):

$$P(\mu_n = k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}, \quad \text{где } \lambda_n = np, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Таблица значений функции

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

приведена в разделе «Вероятностные таблицы».

При малых значениях $q$ и большом числе испытаний $n$ пуассоновское приближение дает возможность получить приближенное значение также и для вероятностей числа «неудач».

Обычно пуассоновское приближение для вероятностей числа «успехов» используют в случае, когда $n$ велико, а $p$ является малым и выполнено неравенство: $np \leq 10$.

В случае, когда $n$ велико, а $p$ и $q$ не являются малыми ($npq \geq 20$), более точным, чем пуассоновское приближение, является нормальное приближение, полученное при помощи теорем Муавра-Лапласа.

**Локальная теорема Муавра-Лапласа**. Если $p$ постоянно и существует $C > 0$ такое, что

$$\left| \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right| \leq C \tag{1}$$

то

$$P(\mu_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

равномерно по всем $k$, для которых выполнено неравенство (1).

**Интегральная теорема Муавра-Лапласа**. Если $p$ постоянно, то

$$P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

равномерно по $a, b$.

Для практических вычислений используют следующие приближенные формулы:

$$P(\mu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \quad \text{где} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad (2)$$

В разделе «Вероятностные таблицы» приведена таблица значений функции

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Для того чтобы с помощью этой таблицы вычислить значения функции $\Phi(x)$, используются следующие свойства:

- если $x \ge 0$, то $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$,
- если $x < 0$, то $\Phi(x) = 0{,}5 - \Phi_0(x)$.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 5**. В урне находятся 5 красных и 8 синих шаров. Один шар наудачу извлекается из урны и возвращается в неё 4 раза. Найти вероятность того, что при извлечении:

3) красный шар появится ровно 3 раза;

4) красный шар появится не менее 2-х раз.

*Решение*. Поскольку перед каждым извлечением одного шара из урны в ней находятся 13 шаров, из которых 5 красных, то вероятность появления красного шара при каждом извлечении одна и та же и равна $\frac{5}{13}$.

По формуле для вероятности числа «успехов» в последовательности из 4 независимых испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» в каждом испытании $p = \frac{5}{13}$, получаем:

- в случае 1)

$$P(\mu_4 = 3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{13}\right) = \frac{4000}{28561} \approx 0{,}14$$

- в случае 2)

$$P(\mu_4 \geq 2) = P(\mu_4 = 2) + P(\mu_4 = 3) + P(\mu_4 = 4) = 1 - P(\mu_4 = 0) - P(\mu_4 = 1) =$$

$$= 1 - C_4^0 \left(\frac{5}{13}\right)^0 \left(\frac{8}{13}\right)^4 - C_4^1 \left(\frac{5}{13}\right)^1 \left(\frac{8}{13}\right)^3 \approx 1 - (0{,}62)^4 - 4 \cdot 0{,}38 \cdot (0{,}62)^3 = 0{,}49$$

*Ответ:* 0,14; 0,49

**Задача 6**. При производстве микросхем на 1000 готовых изделий в среднем приходится 5 бракованных. Найти вероятность того, что в партии из 180 микросхем окажется ровно 3 бракованных микросхемы.

*Решение*. Пусть событие *A* состоит в том, что случайно выбранная микросхема является бракованной. Вероятность этого события равна $p = 0{,}005$. Найдем вероятность того, что при $n = 180$ испытаниях Бернулли событие *A* произойдет ровно 3 раза.

Поскольку в нашем случае

$$\lambda = np = 180 \cdot 0{,}005 = 0{,}9 < 10,$$

то, воспользовавшись пуассоновским приближением, по таблице 3 значений функции

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

для $\lambda = 0{,}9; \quad k = 3$ находим

$$P(\mu_{180} = 3) \approx 0{,}04940$$

*Ответ:* 0,0494.

**Задача 7**. Какова вероятность того, что при 4500 бросаниях игральной кости 6 очков на ней выпадет от 710 до 810 раз?

*Решение*. Пусть событие *A* состоит в том, что при бросании игральной кости на ней выпало 6 очков. Вероятность этого события равна $p = \frac{1}{6}$. Найдем вероятность того, что при $n = 4500$ испытаниях Бернулли событие *A* произойдет от 710 до 810 раз.

Поскольку в этой задаче

$$q = \frac{5}{6}\ , \quad np = 750, \quad npq = 625 > 20,$$

то будем использовать приближенную формулу (2), полученную из интегральной теоремы Муавра-Лапласа:

$$P(710 \le \mu_{4500} \le 810) = P\left(\frac{710-750}{25} \le \frac{\mu_{4500}-750}{25} \le \frac{810-750}{25}\right) =$$

$$= P\left(-1{,}6 \le \frac{\mu_{4500}-750}{25} \le 2{,}4\right) \approx$$

$$\approx \Phi_0(2{,}4) + \Phi_0(1{,}6) = 0{,}4918 + 0{,}4452 = 0{,}937$$

*Ответ:* 0,937.

**Задача 8**. В поселке 7350 жителей. Один раз в сутки из поселка в город ходит поезд. Каждый житель поселка раз в неделю ездит в город на этом поезде, выбирая день для поездки случайным образом и независимо от других жителей поселка. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще, чем 1 раз в 100 дней?

*Решение*. Рассмотрим какой-нибудь день недели, например, понедельник. Пусть событие *A* состоит в том, что житель поселка решил поехать в город в понедельник. Вероятность события *A* не зависит от выбора жителя поселка и равна $\mathrm{p} = \frac{1}{7}$.

Обозначим буквой $M$ число мест в поезде. Для того, чтобы поезд в понедельник не был переполнен, нужно, чтобы число жителей, выбравших понедельник для поездки, не превышало *M*. Другими словами, при $n = 7350$ испытаниях Бернулли событие *A* должно произойти не более $M$ раз.

В соответствии с условием задачи необходимо, чтобы

$$P(\mu_{7350} \le M) \ge 0{,}99.$$

Поскольку

$$q = \frac{6}{7}\ , \quad np = 1050, \quad npq = 900 > 20\ ,$$

то можно воспользоваться приближенной формулой (2):

$$P(\mu_{7350} \le M) = P\left(\frac{\mu_{73500}-1050}{30} \le \frac{M-1050}{30}\right) \approx \Phi\left(\frac{M-1050}{30}\right) \ge 0{,}99$$

С помощью таблицы 2 для значений функции $u_\alpha$, определяемой равенством $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\int_{u_\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\ ,$$

при $\alpha = 0{,}01$ находим

$$u_{0{,}01} = 2{,}326\ .$$

Следовательно,

$$\frac{M - 1050}{30} \geq 2{,}326 \quad \Leftrightarrow \quad M \geq 1119{,}78 \quad \Leftrightarrow \quad M \geq 1120$$

*Ответ:* 1120.

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ТАБЛИЦЫ

### ТАБЛИЦА 1. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

| $x$ | Сотые доли | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 03133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 04946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 04985 | 0,4985 | 0,4986 |
| 3,0 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |

### ТАБЛИЦА 2. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $u_\alpha$, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ РАВЕНСТВОМ

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

| $\alpha$ | 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,015 | 0,020 | 0,025 | 0,030 | 0,035 | 0,040 | 0,045 | 0,050 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_\alpha$ | 3,0902 | 2,5758 | 2,3263 | 2,1701 | 2,0537 | 1,9600 | 1,8808 | 1,8119 | 1,7507 | 1,6954 | 1,6449 |

**ТАБЛИЦА 3. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ** $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| $k$ \ $\lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,90484 | 0,81873 | 0,74082 | 0,67032 | 0,60653 | 0,54881 | 0,49659 | 0,44933 | 0,40657 |
| 1 | 0,09048 | 0,16375 | 0,22225 | 0,26813 | 0,30327 | 0,32929 | 0,34761 | 0,35946 | 0,36591 |
| 2 | 0,00452 | 0,01638 | 0,03334 | 0,05363 | 0,07582 | 0,09879 | 0,12166 | 0,14379 | 0,16466 |
| 3 | 0,00015 | 0,00109 | 0,00333 | 0,00715 | 0,01264 | 0,01976 | 0,02839 | 0,03834 | 0,04940 |
| 4 | | 0,00006 | 0,00025 | 0,00072 | 0,00158 | 0,00296 | 0,00497 | 0,00767 | 0,01112 |
| 5 | | | 0,00002 | 0,00006 | 0,00016 | 0,00036 | 0,00070 | 0,00123 | 0,00200 |
| 6 | | | | | 0,00001 | 0,0004 | 0,00008 | 0,00016 | 0,00030 |
| 7 | | | | | | | 0,00001 | 0,00002 | 0,00004 |

| $k$ \ $\lambda$ | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,36788 | 0,13534 | 0,04979 | 0,01832 | 0,00674 |
| 1 | 0,36788 | 0,27067 | 0,14936 | 0,07326 | 0,03369 |
| 2 | 0,18394 | 0,27067 | 0,22404 | 0,14653 | 0,08422 |
| 3 | 0,06131 | 0,18045 | 0,22404 | 0,19537 | 0,14037 |
| 4 | 0,01533 | 0,09022 | 0,16803 | 0,19537 | 0,17547 |
| 5 | 0,00307 | 0,03609 | 0,10082 | 0,15629 | 0,17547 |
| 6 | 0,00051 | 0,01203 | 0,05041 | 0,10419 | 0,14622 |
| 7 | 0,00007 | 0,00344 | 0,02160 | 0,05954 | 0,10445 |
| 8 | 0,00001 | 0,00086 | 0,00810 | 0,02977 | 0,06528 |
| 9 | | 0,00019 | 0,00270 | 0,01323 | 0,03627 |
| 10 | | 0,00004 | 0,00081 | 0,00529 | 0,01813 |
| 11 | | 0,00001 | 0,00022 | 0,00193 | 0,00824 |
| 12 | | | 0,00006 | 0,00064 | 0,00343 |
| 13 | | | 0,00001 | 0,00020 | 0,00132 |
| 14 | | | | 0,00006 | 0,00047 |
| 15 | | | | 0,00002 | 0,00016 |
| 16 | | | | | 0,00005 |
| 17 | | | | | 0,00001 |