

n-tartibli chiziqli bir jinsli va chiziqli bir jinsli bo'lmagan o'zgaras koeffisientli differensial tenglamalar

Asosiy savollar:

1. n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgaras koeffisientli differensial tenglamalar
2. n-tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan o'zgaras koeffisientli differensial tenglamalar
3. O'zgaras koeffisientliga keltiriladigan tenglamalar
4. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama ko'rinishini soddalashtirish.

Yechimning nollari.

Tayanch iboralar: haqiqiy argumentli kompleks funksiya, kompleks funksiyaning haqiqiy va mavhum qismi, kompleks yechim, xarakteristik tenglama, xarakteristik sonlar, xususiy yechim, umumiy yechimi, ko'phad, ko'rsatkichli funksiya, Eylerning chiziqli tenglamasi, Chebishev tenglamasi, yechimning nollari, Bessel tenglamasi, o'ziga qo'shma differensial tenglama, trivial yechim, notrivial yechim, tebranuvchi yechim, tebranmas yechim.

n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgaras koeffisientli differensial tenglamalar

Ushbu $z(x) = u(x) + iv(x)$ funksiya **haqiqiy argumentli kompleks funksiya** deyiladi, bunda $u(x)$ va $v(x)$ haqiqiy x argumentli haqiqiy funksiyalar. $u(x)$ va $v(x)$ mos ravishda $z(x)$ kompleks funksiyaning **haqiqiy** va **mavhum qismi** deyiladi. Bunday funksiyaga misol keltiramiz: $e^{\alpha x} = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx$, bu yerda $\alpha = a + ib$.

Faraz qilaylik $u^{(n)}(x)$ va $v^{(n)}(x)$ hosilalar mavjud bo'lsin, u holda $z(x)$ funksiya x bo'yicha n-tartibli hosila $z^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)$ formula bilan aniqlanadi. Masalan, ixtiyoriy α o'zgaras (haqiqiy yoki kompleks) son uchun $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ formula o'rinli.

Agar $z(x) = u(x) + iv(x)$ funksiya

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)z' + p_n(x)z = 0 \quad (1)$$

tenglamani biror I intervalda ayniyatga aylantirsa, uni (1) chiziqli bir jinsli tenglamaning I intervaldagi **kompleks yechimi** deb aytamiz. Kompleks yechimning bitta muhim hossasini keltiraylik. Agar $z(x) = u(x) + iv(x)$ funksiya (1) tenglamaning kompleks yechmi bo'lsa, u holda $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (1) tenglamaning haqiqiy yechimlari bo'ladi.

Ushbu

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

tenglama **n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffisientli differensial tenglama** deyiladi. (2) tenglamaning hususiy yechimini $y = e^{\lambda x}$ ko'rinishda qidiraylik, bu erda λ - biror o'zgarmas (haqiqiy yoki kompleks) son. Buni (2)ning chap qismiga qo'yamiz:

$$L(e^{\lambda x}) = [\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Bundan ko'rinadiki $y = e^{\lambda x}$ funksiya (2) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun λ son

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (3)$$

tenglamaning ildizi bo'lishi zarur va yetarli. (3) tenglama (2) bir jinsli chiziqli tenglamaning **harakteristik tenglamasi**, uning ildizlari esa **harakteristik sonlari** deyiladi.

Faraz qilaylik karakteristik tenglamaning $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (haqiqiy yoki kompleks sonlar) ildizlari turlicha bo'lsin. U holda biz (2) tenglamaning n ta hususiy yechimiga ega bo'lamiz:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (4)$$

(4) yechimlar chiziqli erkli bo'lishini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n x} = 0 \quad (5)$$

ayniyat o'inli bo'lsin, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ o'zgarmas sonlardan kamida bittasi

noldan farqli. Umumiylikka ziyon keltirmagan holda $\alpha_n \neq 0$ deb olaylik. (5)ni $e^{\lambda_1 x}$ ga bo'lamiz va hosilasini olamiz:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} = 0.$$

Bu ayniyatni $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ ga bo'lamiz va hosilasini olamiz:

$$\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)e^{(\lambda_n - \lambda_2)x} = 0$$

Ketma ket shunday mulohazlar yuritib quydagi ayniyatga kelamiz:

$$\alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} = 0$$

Bu esa noto'g'ri ayniyatdir. Demak (4) funksiyalar ixtiyoriy oraliqda chizqli erklidir.

Hulosa qiladigan bo'lsak, agar (2) tenglamaning $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ **harakteristik sonlari haqiqiy va turlicha** bo'lsa, u holda (4) yechimlar haqiqiy funksiyalar bo'lib, (2) bir jinsli chiziqli tenglamaning **umumiy yechimi** $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ formula bilan ifodalanadi.

Agar harakteristik sonlar orasida $a + ib$ kompleks son ham bor bo'lsa, u holda, algebra kursidan ma'lumki $a - ib$ kompleks son ham harakteristik son bo'ladi. O'z navbatida (4) funksiyalar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$y_1 = e^{(a+ib)x}, y_2 = e^{(a-ib)x}, y_3 = e^{\lambda_3 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (6)$$

y_1 va y_2 funksiyalarning haqiqiy qismlari aynan bir hil, mavhum qismlari esa ishorasi bilan farqlanadi shu bilan birga ular (2) tenglamani qanoatlantiradi. (6) sistemada y_1 va y_2 funksiyalar o'rniga ularni qoyamiz:

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = e^{ax} \sin bx, y_3 = e^{\lambda_3 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (7)$$

(6) yechimlarning chiziqli erkliligidan (7) funksiyalarning chiziqli erkliligi kelib chiqadi, chunki

$$\alpha_1 e^{(a+bi)x} + \alpha_2 e^{(a-bi)x} + \alpha_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n x} \equiv$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) e^{ax} \cos bx + i(\alpha_2 - \alpha_1) e^{ax} \sin bx + \alpha_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n x}$$

ayniyat o'rinli. Demak, qarayotgan holatda har bir λ haqiqiy harakteristik son (2) tenglamaning bitta $y = e^{\lambda x}$ hususiy haqiqiy yechimini aniqlaydi, har bir

$\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ kompleks harakteristik sonlar jufti ikkita $y_1 = e^{ax} \cos bx$, $y_2 = e^{ax} \sin bx$ hususiy haqiqiy yechimini aniqlaydi. Hullas, (2) tenglamaning harakteristik sonlari turlicha bo'lganda biz hamma vaqt n ta haqiqiy yechimga ega bo'lamiz va ularning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi tenglamaning umumiy yechimini aniqlaydi.

Misol. $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$ tenglamani qaraylik. Uning harakteristik tenglamasi $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$. Harakteristik sonlar $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Demak e^{-x} , $e^{2x} \cos 3x$, $e^{2x} \sin 3x$ funksiyalar berilgan tenglamaning chiziqli fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi. Umumiy yechim:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$$

Endi harakteristik tenglama ildizlari orasida karralilari ham bor deb faraz qilaylik. λ_1 (haqiqiy yoki kompleks son) – (3) harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo'lsin, u holda

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0 \quad (8)$$

munosabatlar o'rinli. Ushbu $L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$ ayniyatni λ bo'yicha m marta differensiallaymiz, bunda chap tomondagi operator λ ga bog'liq bo'lmaganligi sababli differensiallash amalini operator belgisi ichiga kiritish mumkin. O'ng tomonda esa ko'paytmaning differensial hisoblanadi:

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} L(e^{\lambda x}) = L\left(\frac{d^m}{d\lambda^m} e^{\lambda x}\right) = L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^m C_m^i P^{(i)}(\lambda) x^{m-i} e^{\lambda x}.$$

Bu yerda (8)ga ko'ra $m = 0, 1, \dots, k-1$ larda $L(x^m e^{\lambda_1 x}) \equiv 0$ ayniyat hosil bo'ladi, ya'ni

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \quad (9)$$

funksiyalar (2) chiziqli bir jinsli tenglamaning yechimlaridan iborat. Bu yechimlarning chiziqli erkliligini yuqorida (4) funksiyalarni chiziqli erkliligini ko'rsatgandek ko'rsatish mumkin.

Demak, harakteristik tenglamaning k karrali har qanday λ_1 haqiqiy ildizini (2) tenglamaning k ta haqiqiy chiziqli erkli hususiy yechimini aniqlaydi.

Agar karakteristik tenglama k karrali $a + ib$ ildizga ega bo'lsa, u holda k karrali $a - ib$ ildizga ham ega bo'ladi. (9)ga ko'ra bu ildizlar $2k$ ta

$$e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}, xe^{(a+ib)x}, xe^{(a-ib)x}, \dots, x^{k-1}e^{(a+ib)x}, x^{k-1}e^{(a-ib)x} \quad (10)$$

chiziqli erkli kompleks yechimni aniqlaydi. Ularning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib olamiz:

$$e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \cos bx, xe^{ax} \sin bx \dots, x^{k-1}e^{ax} \cos bx, x^{k-1}e^{ax} \sin bx.$$

(10) funksiyalarning chiziqli ekliligidan bu funksialarning ham chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi. Demak, karakteristik tenglamaning k karrali har qanday $a + ib$, $a - ib$ qo'shma kompleks ildizlari (2) tenglamaning $2k$ ta haqiqiy chiziqli erkli hususiy yechimini aniqlaydi.

Algebra kursidan ma'lumki n -tartibli algebraik chiziqli tenglama hamma vaqt n ta ildizga ega, ya'ni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sonlar (3) tenglamaning mos ravishda $k_1, k_2, \dots, k_r$ karrali ildizlari bo'lsa u holda $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ tenglik o'rinli bo'ladi. Hulosa qilib aytganda, (2) tenglamaning karakteristik sonlari qanday bo'lmasin biz hamma vaqt n ta haqiqiy yechimga ega bo'lamiz va ularning ihtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi korinishida tenglamaning umumiy yechimini aniqlaymiz.

Misol. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$ tenglamani qaraymiz.

Harakteristik tenglama $\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0$. Uning ildizlari: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -2i$. Bu harakteristik sonlarga mos hususiy yechimlar:

$$e^x, \cos 2x, \sin 2x, x \cos 2x, x \sin 2x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) \cos 2x + (C_4 + C_5 x) \sin 2x.$$

Chiziqli bir jinsli bo'lmagan o'zgaras koeffisientli tenglamalar

n-tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan o'zgaras koeffisientli tenglama

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

korinishga ega, bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ - o'zgaras haqiqiy sonlar. Oldingi darsda biz har qanday n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgaras koeffisientli tenglamani umumiy yechimini qurishni o'rgandik. U holda (1) tenglamaning umumiy yechimini o'zgarasni variatsiyalash usulida kvadraturalarda topa olamiz. Lekin $f(x)$ funksiyaning ayrim hususiy ko'rinishlarida (1) tenglamaning hususiy yechimi kvadraturalarsiz aniqlanadi. Bunday holatlarda, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimiga bu hususiy yechimni qo'shib (1) tenglamaning umumiy yechimini kvaraturalarsiz hosil qilamiz.

(1) tenglamada $f(x)$ funksiya ko'phad va ko'rsatkichli funksiyaning ko'paytmasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$f(x) = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x} = P(x) e^{\alpha x}.$$

bu yerda $p_0, p_1, \dots, p_m, \alpha$ - o'zgaras sonlar (ular nolga teng bo'lishi ham mumkin). (1) tenglamaning hususiy yechimini qidirishni 2ta holatga ajratib olib boramiz.

1-holat. α - tenglamaning harakteristik soni emas, ya'ni $P(\alpha) \neq 0$. Bu holatda y_1 hususiy yechimni

$$y_1 = (q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m) e^{\alpha x} \quad (2)$$

ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $q_0, q_1, \dots, q_m$ - noma'lum o'zgaras sonlar. (2) funksiyaning (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} L[(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m) e^{\alpha x}] &= q_0 L(x^m e^{\alpha x}) + q_1 L(x^{m-1} e^{\alpha x}) + \dots + \\ &+ q_{m-1} L(x e^{\alpha x}) + q_m L(e^{\alpha x}) = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Bu yerda $L(e^{\alpha x}) = P(\alpha) e^{\alpha x}$ va $L(x^s e^{\alpha x}) = \sum_{i=0}^s C_s^i P^{(i)}(\alpha) x^{s-i} e^{\alpha x}$ formulalardan

foydalanaylik:

$$+ q_m P(\alpha) e^{\alpha x} = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}$$

$$\begin{aligned} x^m : \quad & q_0 P(\alpha) = p_0 \\ x^{m-1} : \quad & q_0 C_m^1 P'(\alpha) + q_1 P(\alpha) = p_1 \\ & \dots\dots\dots \\ x^1 : \quad & q_0 C_m^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-2} P^{(m-2)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P(\alpha) = p_{m-1} \\ x^0 : \quad & q_0 C_m^m P^{(m)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P'(\alpha) + q_m P(\alpha) = p_m \end{aligned} \tag{3}$$

Misol. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$ tenglamani umumiy yechimini topaylik.

$$6ax^2 + (6b - 10a)x + 6c - 5b + 2a = 6x^2 - 10x + 2$$
$$\begin{cases} 6a = 6 \\ 6b - 10a = -10 \\ 6c - 5b + 2a = 2 \end{cases}$$

2-holat. α - harakteristik tenglamaning k ($k \geq 1$) karrali ildizi bo'lsin, ya'ni

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Bu holatda y_1 hususiy yechimni (2) ko'rinishda qurib bo'lmaydi, chunki $P(\alpha) = 0$. Hususiy yechimni

$$y_1 = x^k (q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m) e^{\alpha x} \quad (4)$$

ko'rinishda qidiramiz. (4) funksiyani (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$L\left(\sum_{s=0}^m q_s x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right) = \sum_{s=0}^m q_s \sum_{i=k}^{k+m-s} C_{k+m-s}^i P^{(i)}(\alpha) x^{k+m-s-i} e^{\alpha x} = \sum_{s=0}^m p_s x^{m-s} e^{\alpha x}$$

$$\text{Bundan } \sum_{s=0}^m q_s \sum_{i=k}^{k+m-s} C_{k+m-s}^i P^{(i)}(\alpha) x^{k+m-s-i} = \sum_{s=0}^m p_s x^{m-s}. \text{ Bu yerda } x \text{ ning bir}$$

hil darajalari oldidagi koefisientlarni tenglashtiramiz:

$$\begin{aligned} x^m : \quad & q_0 C_{k+m}^k P^{(k)}(\alpha) = p_0 \\ x^{m-1} : \quad & q_0 C_{k+m}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^k P^{(k)}(\alpha) = p_1 \\ & \dots\dots\dots (5) \\ x^1 : \quad & q_0 C_{k+m}^{k+m-1} P^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-2} P^{(k+m-2)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} C_{k+1}^k P^{(k)}(\alpha) = p_{m-1} \\ x^0 : \quad & q_0 P^{(k+m)}(\alpha) + q_1 P^{(k+m-1)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_m P^{(k)}(\alpha) = p_m \end{aligned}$$

Bu tenglilardan izlanayotgan barcha $q_0, q_1, \dots, q_m$ koefisientlar bir qiymatli aniqlanadi, chunki $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Misol. $y'' - 5y' = -5x^2 + 2x$ tenglamani qaraymiz. Unga mos bir jinsli tenglama: $z'' - 5z' = 0$. Bir jinsli tenglamani yechamiz: $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. $z = C_1 + C_2 e^{5x}$. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $P(x)e^{0x}$ ko'rinishga ega va $\alpha = 0$ harakteristik tenglamaning oddiy ($k=1$ karrali) ildizi. Shuning uchun tenglamaning hususiy yechimini $y_1 = x(ax^2 + bx + c)$ ko'rinishda qidiramiz: $y_1' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y_1'' = 6ax + 2b$. Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$-15ax^2 + (6a - 10b)x + 2b - 5c = -5x^2 + 2x$$

Bundan $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = 0$. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{x^3}{3}.$$

Endi (1) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = e^{ax}[P_m^{(1)}(x)\cos bx + P_m^{(2)}(x)\sin bx]$$

ko'rinishga ega bo'lganda uning hususiy yechimini qidirish usulini ko'rib chiqamiz, bu yerda $P_m^{(1)}(x)$ va $P_m^{(2)}(x)$ – m-darajali berilgan ko'phadlar. Buning uchun 2ta holatni ajratib olamiz.

1-holat. $\alpha = a + ib$ - harakteristik tenglamaning ildizi emas. Bu holatda hususiy yechimni $y_1 = e^{ax}[Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx]$ ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $Q_m^{(1)}(x)$ va $Q_m^{(2)}(x)$ - m darajali koeffisientlari noma'lum ko'phadlar.

Misol. $y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x)$ tenglamani umumiy yechimini topamiz (bu yerda $a=1$, $b=1$). Avval chiziqli bir jinsli tenglamani yozaylik: $z'' + z' - 2z = 0$. Uni integrallaymiz:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, z = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

$a + ib = 1 + i$ son harakteristik tenglamaning ildizi eamas. Shuning uchun Berilgan tenglamaning hususiy yechimini $y_1 = e^x(A\cos x + B\sin x)$ ko'rinishda qidiramiz:

$$y_1'' + y_1' - 2y_1 = e^x[(-A + 3B)\cos x - (B + 3A)\sin x] = e^x(\cos x - 7\sin x)$$

$$\begin{cases} -A + 3B = 1 \\ B + 3A = 7 \end{cases}$$

Bundan $A=2$, $B=1$. $y_1 = e^x(2\cos x + \sin x)$. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi: $y_1 = e^x(2\cos x + \sin x) + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

2-holat. $\alpha = a + ib$ - harakteristik tenglamaning k ($k \geq 1$) karrali ildizi. Bu holatda hususiy yechimni $y_1 = x^k e^{ax}[Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx]$ ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $Q_m^{(1)}(x)$ va $Q_m^{(2)}(x)$ -- m-darajali koeffisientlari noma'lum ko'phadlar.

Misol. $y'' + y = 2\sin x$ tenglamani qaraymiz (bu erda $a = 0$, $b = 1$).

$$z'' + z = 0, \lambda^2 + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \pm i, z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$a + ib = i$ son harakteristik tenglamaning oddiy ildizi (bir karrali) bo'lgani uchun berilgan tenglamaning hususiy yechimini $y_1 = x(A\cos x + B\sin x)$ ko'rinishda

qidiramiz: $A = -1$, $B = 0$, $y_1 = -x \cos x$ hosil bo'ladi. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi: $y = -x \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

O'zgaras koeffisientlarga keltiriladigan tenglamalar

Bizga chiziqli bir jinsli tenglama berilgan:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (1)$$

Erkli o'zgaruvchini almashtirish bilan bu tenglamani o'zgaras koeffisientli chiziqli tenglamaga olib kelish masalasi bilan shug'ullanamiz. $t = u(x)$ almashtirish bajaraylik. U holda:

$$y' = y'_t t'_x = y'_t u'(x)$$

$$y'' = y''_{t^2} [u'(x)]^2 + y'_t u''(x)$$

.....

$$y^{(n)} = y^{(n)}_{t^{(n)}} [u'(x)]^n + \dots + y'_t u^{(n)}(x)$$

Bu hisoblashlar ko'rsatadiki yuqoridagi almashtirishdan keyin (1) tenglama $y^{(n)}_{t^{(n)}} [u'(x)]^n + \dots + p_n(x)y = 0$ ko'rinishni oladi. Buni $[u'(x)]^n$ ga bo'lamiz:

$$y^{(n)}_{t^{(n)}} + \dots + \frac{p_n(x)}{[u'(x)]^n} y = 0. \text{ Bu yerda } u(x) \text{ funksiyani shunday tanlash kerakki } y$$

oldidagi koeffisient o'zgaras songa aylansin. $\frac{p_n(x)}{[u'(x)]^n} = \frac{1}{c^n}$ desak, u holda

$u'(x) = c \sqrt[n]{p_n(x)}$ yoki $u(x) = c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx$. Shunday qilib, agar (1) tenglama erkli o'zgaruvchini almashtirish bilan o'zgaras koeffisientli tenglamaga aylansa u holda almashtirish formulasi

$$t = c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx \quad (2)$$

ko'rinishda bo'lishi zarur.

Endi **Eylarning chiziqli tenglamasini** qaraymiz:

$$D(y) \equiv x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (3)$$

bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ - o'zgarmas haqiqiy sonlar. Bu tenglamani (1) tenglama bilan taqqoslab $p_n(x) = \frac{a_n}{x^n}$ ekanligini ko'ramiz. (2)ni hisobga olib (3) tenglamada

$t = c \int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}} dx$ yoki $c = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ deb olib, $t = \ln x$ almashtirish bajaramiz. U holda:

$$y' = y'_t \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = y''_{t^2} \frac{1}{x^2} - y'_t \frac{1}{x^2}$$

$$y''' = y'''_{t^3} \frac{1}{x^3} - 3y''_{t^2} \frac{1}{x^3} + 2y'_t \frac{1}{x^3}$$

.....

$$y^{(n)} = y^{(n)}_{t^n} \frac{1}{x^n} + \dots + (-1)(n-1)! y'_t \frac{1}{x^n}$$

Bu hisoblashlar ko'rsatadiki $x^i y^{(i)}$ ifoda $y'_t, y''_{t^2}, \dots, y^{(i)}_{t^i}$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat va (3) tenglamada ularni mos ravishda qo'ysak o'zgarmas koeffisientli tenglama hosil bo'ladi.

Misol. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$t = \ln x$ almashtirish bajarsak: $y' = y'_t \cdot \frac{1}{x}$, $y'' = y''_{t^2} \frac{1}{x^2} - y'_t \frac{1}{x^2}$. Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz: $y''_{t^2} - y'_t - 2y'_t + 2y = 0$ yoki $y''_{t^2} - 3y'_t + 2y = 0$. Bu o'zgarmas koeffisientli tenglamaning harakteristik tenglamasi: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Demak $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Almashtirish formulasi bo'yicha x o'zgaruvchini qaytaramiz: $y = C_1 x + C_2 x^2$. **Javob:** $y = C_1 x + C_2 x^2$.

Oldingi maruzamizda ko'rdikki o'zgarmas koeffisientli tenglamaning hususiy yechimlari $e^{\lambda t}$ ko'rinishida bo'lar edi. (3) Eyler tenglamasini hususiy yechimi ko'rinishini aniqlash uchun yuqoridagi $t = \ln x$ almashtirishdan foydalanaylik: $e^{\lambda t} = e^{\lambda \ln x} = x^\lambda$.

(3) tenglamaning hususiy yechimini $y = x^\lambda$ ko'rinishda qidiramiz. U holda:

$$y^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)x^{\lambda-k} \quad (k=1,\dots,n)$$

$y = x^\lambda$ funksiyani va uning hosislalarini (3) tenglamaning chap qismiga qo'yamiz:

$$D(x^\lambda) = [\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n]x^\lambda.$$

Bundan ko'rinadiki $y = x^\lambda$ Eyler tenglamsini hususiy yechimi bo'lishi uchun λ

$$P(\lambda) \equiv \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

tenglamaning ildizi bo'lishi zarur va yetarli. Bu tenglama **Eyler tenglamasining harakteristik tenglamasi**, uning idizlari esa **harakteristik sonlari** deyiladi.

Faraz qilaylik harakteristik tenglamaning ildizlari turlicha bo'lsin. u holda Eyler tenglamasining n ta hususiy yechimiga ega bo'lamiz:

$$y_1 = x^{\lambda_1}, y_2 = x^{\lambda_2}, \dots, y_n = x^{\lambda_n} \quad (4)$$

Bu yechimlar $(0, +\infty)$ intervalda chiziqli erkli. Agar barcha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ildizlar haqiqiy bo'lsa, u holda (4) yechimlar haqiqiy bo'lib Eyler tenglamasining **umumiy yechimi** $y = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + \dots + C_nx^{\lambda_n}$ formula bilan ifodalanadi.

Agar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ildizlar orasida $a+ib$ kompleks son bor bo'lsa, u holda unga $x^{a+ib} = x^a[\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)]$ kompleks yechim mos keladi. Demak $x^a \cos(b \ln x)$ va $x^a \sin(b \ln x)$ funksiyalar haqiqiy yechimlardan iborat. Bu vaqtda $a-ib$ ham harakteristik tenglamaning ildizi bo'lib unga ham aynan yuqoridagi haqiqiy yechimlar mos keladi. Umumiy yechim formulasida $a \pm ib$ kompleks sonlar juftligiga mos $x^a[C_1 \cos(b \ln x) + C_2 \sin(b \ln x)]$ qo'shiluvchi qatnashadi.

Endi λ_1 son harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo'lsin, ya'ni

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0.$$

$D(x^\lambda) \equiv P(\lambda)x^\lambda$ ayniyatni λ bo'yicha m marta differensiallaymiz:

$$D(x^\lambda (\ln x)^m) = \sum_{i=0}^m C_m^i P^{(i)}(\lambda) x^\lambda (\ln x)^{m-i}$$

Bundan $x^{\lambda_1} (\ln x)^m$ ($m=1,\dots,k-1$) funksiyalar Eyler tenglamasining hususiy yechimlari ekanligi kelib chiqadi. Demak λ_1 - harakteristik tenglamaning haqiqiy k

karrali ildizi bo'lsa, Eyler tenglamasining umumiy yechim formulasida bu ildizga mos $[C_1 + C_2 \ln x + \dots + C_k (\ln x)^{k-1}]x^{\lambda_1}$ qo'shiluvchi qatnashadi.

Yuqoridagidek mulohazalar yuritib $a \pm ib$ kompleks sonlar harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo'lsa, Eyler tenglamasining umumiy yechimida bu ildizlarga mos

$$\{[C_1 + \dots + C_k (\ln x)^{k-1}] \cos(b \ln x) + [C_1 + \dots + C_k (\ln x)^{k-1}] \sin(b \ln x)\} x^{\lambda_1}$$

qo'shiluvchi qatnashishini ko'rsatish mumkin.

Chebishev tenglamasini qaraymiz:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad (5)$$

Bu tenglama $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, +\infty)$ intervallarning har birida mavjudlik va yagonalik teoremlarini qanoatlantiradi. Biz (5) tenglamaning $(-1, +1)$ intervaldagi umumiy yechimini quramiz. (2) formulaga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$t = c \int \sqrt{\frac{n^2}{1 - x^2}} dx$$

Bu yerda $c = -\frac{1}{n}$ deb olsak $t = \arccos x$ yoki $x = \cos t$ almashtirish formulasi hosil

bo'ladi. Bundan

$$y' = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = -y'_t \frac{1}{\sin t}$$

$$y'' = y''_{t^2} \frac{1}{\sin^2 t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^3 t}$$

Bularni (5) tenglamaga qo'ysak $y''_{t^2} - y'_t \frac{\cos t}{\sin t} + y'_t \frac{\cos t}{\sin t} + n^2 y = 0$ yoki

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0$$

o'zgarmas koeffisientli tenglamani hosil qilamiz. Uning umumiy yechimi $y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$ formulaga ega. Bundan **Chebishev tenglamasining umumiy yechimini** hosil qilamiz: $y = C_1 \cos n \arccos x + C_2 \sin n \arccos x$.

**Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama ko'rinishini
soddalashtirish. Yechimning nollari.**

Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamani qaraylik:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (1)$$

Bu tenglamada hamma vaqt birinchi tartibli hosilani yo'qotish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun $y = ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ almashtirish bajaramiz, bu erda z yangi nomalum funksiya. Bundan:

$$y' = z'e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} - \frac{1}{2}p(x)ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

$$y'' = z''e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} - p(x)z'e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} - \frac{1}{2}p'(x)ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} + \frac{1}{4}p^2(x)ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

Bularni (1) tenglamaga qo'yamiz va $e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ ifodaga bo'lamiz:

$$z'' + \left[-\frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) + q(x) \right] z = 0.$$

Bu tenglamada $Q(x) = -\frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) + q(x)$ funksiya (1) tenglamaning **invarianti** deyiladi. Demak (1) tenglamani invariant orqali

$$z'' + Q(x)z = 0 \quad (2)$$

ko'rinishga yozish mumkin ekan. Agar (2) tenglama kvadraturalarda integrallansa u holda (10) tenglama ham kvadraturalarda integrallanadi.

Misol. $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ **Bessel tenglamasini** qaraylik. Bu yerda

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}, \quad Q(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{n^2}{x^2} = 1 + \frac{1-4n^2}{4x^2}. \quad \text{Agar}$$

Bessel tenglamasining $n = \pm \frac{1}{2}$ bo'lganda hususiy holini qarasak, $Q(x) = 1$ hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (3)$$

tenglamada $y = ze^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x} dx} = \frac{z}{\sqrt{x}}$ almashtirish bajarilsa, u

$$z'' + z = 0 \quad (4)$$

ko'rinishga keladi. (4) tenglamaning umumiy yechimi $z = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Almashtirish formulasiga ko'ra (3) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$\text{O'rni kelganda shuni aytish kerakki } J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

funksiyalar **Bessel funksiyalari** deb ataladi. (3) tenglamaning umumiy yechimini Bessel funksiyalari orqali ifodalash mumkin: $y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

Ushbu

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0 \quad (5)$$

tenglama ikkinchi tartibli **o'ziga qo'shma differensial tenglama** deyiladi.

Koeffisientlari I intervalda uzluksiz bo'lgan har qanday ($p_0(x) \neq 0$)

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

bir jinsli tenglamani $\frac{p(x)}{p_0(x)}$ ga ko'paytirsak (5) ko'rinishga keladi, bu erda

$$p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}. \text{ Haqiqatdan ham}$$

$$p(x)y'' + \frac{p(x)p_1(x)}{p_0(x)}y' + \frac{p(x)p_2(x)}{p_0(x)}y = 0$$

$$e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y' + \frac{p(x)p_2(x)}{p_0(x)} y = 0$$

$$\left(e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y' \right)' + \frac{p(x)p_2(x)}{p_0(x)} y = 0.$$

Ohirgi tenglama (5) ko'rinishga ega.

Misol. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ Bessel tenglamasini o'ziga qo'shma

ko'rinishga keltiramiz. Bu yerda $p(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$, $\frac{p(x)}{p_0(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Bunga ko'ra

Bessel tenglamasini o'ziga qo'shma ko'rinishi quyidaicha bo'ladi:

$$xy'' + y' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0 \text{ yoki } (xy)' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0.$$

3-reja. Oddiy differensial tenglamaning $y = 0$ yechimi – **trivial yechim** deyiladi. Aynan nolga teng bo'lmagan har qanday yechimi esa **notrivial yechim** deyiladi. Agar tenglamaning $y(x)$ notrivial yechimi $x = x_0$ nuqtada nolga aylansa, bu nuqta $y(x)$ yechimning **noli** deb ataladi. Oddiy differensial tenglamaning I intervalda aniqlangan $y(x)$ notrivial yechimi shu intervalda kamida ikkita nolga ega bo'lsa, u holda $y(x)$ – I intervalda **tebranuvchi yechim** deyiladi, aks holda **tebranmas yechim** deyiladi.

Misol. 1. $y'' - y = 0$ tenglamani qaraymiz. Uning umumiy yechimi $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Tenglamaning ixtiyoriy notrivial yechimi $(-\infty, +\infty)$ intervalda bittadan ortiq nolga ega bo'lmasligini ko'rsataylik. Tenglamaning biror $y(x)$ yechimi $x_1 \neq x_2$ nuqtalarda nolga aylanadi deb teskari faraz yuritsak, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} C_1 e^{x_1} + C_2 e^{-x_1} = 0 \\ C_1 e^{x_2} + C_2 e^{-x_2} = 0 \end{cases}$$

Bu sistemadan $C_1 = C_2 = 0$ aniqlanadi. Demak x_1, x_2 nuqtalarda nolga aylangan yechim trivial yechimdan iborat. Shunday qilib berilgan tenglamaning ixtiyoriy notrivial yechimi $(-\infty, +\infty)$ intervalda tebranmas yechimdan iborat.

2. $y'' + y = 0$ tenglamani qaraylik. Umumiy yechimi $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Tenglamaning ixtiyoriy notrivial yechimi har qanday 2π uzunlikdagi intervalda kamida ikkita nolga ega. Demak bunday intervallarda tenglamaning notrivial yechimlari tebranuvchi bo'ladi.

Lemma. (1) tenglamaning $y(x)$ notrivial yechimining ixtiyoriy $x = x_0$ noli izolirlangan (yakkalangan) bo'ladi, yani shunday $\varepsilon > 0$ son mavjudki,

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervalda yechim boshqa nolga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teskari faraz o'rinli bo'lsin, yani ixtiyoriy $\varepsilon_n > 0$ ($\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$) son olinganda ham, $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$ intervalda $y(x)$ yechimning x_0 dan farqli x_n noli mavjud bo'lsin. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ limit o'rinli. $y'(x_0)$ hosilani ta'rif bo'yicha hisoblaylik: $y'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. Demak (1) tenglamaning $y(x)$ notrivial yechimi $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantirar ekan. Pikar teoremasiga ko'ra bu boshlang'ich shartlarni faqat $y = 0$ trivial yechim qanoatlantiradi. Bu ziddiyat lemmani isbotlaydi.

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama yechimining tebranuvchanlik hususiyatini o'rganish uchun (2) ko'rinishdagi

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (6)$$

tenglama yechimlarini o'rganamiz, chunki yuqorida ko'rdikki har qachon (1) tenglamani (2) ko'rinishga olib kela olamiz.

Teorema. Agar $q(x)$ funksiya I intervalda uzluksiz va $q(x) \leq 0$, $x \in I$, tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda (6) tenglamaning yechimlari shu intervalda tebranmas bo'ladi.

Isbot. Teskarisi o'rinli bo'lsin, ya'ni notrivial $y = y(x)$ yechim topilib, x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) bu yechimning I intervaldagi kema-ket kelgan nollari bo'lsin. Demak (x_1, x_2) intervalda $y = y(x)$ yechim nolga aylanmaydi. Umumiylikka ziyon keltirmagan holda $y(x) > 0$ tengsizlik barcha $x \in (x_1, x_2)$ larda o'rinli deb olamiz. U holda $x = x_0$ nuqtada $y = y(x)$ funksiya kamaymaydi, ya'ni $y'(x_0) \geq 0$. Bu yerda $y'(x_0) = 0$ bo'lishi mumkin emas, chunki $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ boshlang'ich shartni faqat trivial yechim qanoatlantiradi. Demak $y'(x_0) > 0$.

$y = y(x)$ funksiya (6) tenglamani qanoatlantirganligidan foydalanamiz:

$$y''(x) = -q(x)y(x) \geq 0.$$

Demak $y'(x)$ funksiya $[x_1, x_2]$ kesmada kamaymaydi. Bunga ko'ra barcha

$x \in (x_1, x_2)$ lar uchun $y'(x) \geq y'(x_1) > 0$. Chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga ko'ra shunday $c \in (x_1, x_2)$ son topiladiki $y(x_2) - y(x_1) = y'(c)(x_2 - x_1)$ tenglik o'rinli. Bu tenglik noto'g'ri, chunki uning chap tomoni nolga teng, o'ng qismi esa musbat. Teorema isbotlandi.

Sinov uchun savol va topshiriqlar

1. n -tartibli o'zgarmas koefitsientli chiziqli bir jinsli tenglamaning umumiy ko'rinishini yozing va uni yechish usulini keltiring.

2. Uning xususiy yechimini topish mumkin bo'lishi uchun o'ng tomoni qanday ko'rinishga ega bo'lishi kerak?

3. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamaning bitta xususiy yechimi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi ma'lum bo'lganda uning umumiy yechimini qanday topiladi.

4. n -tartibli tenglamalar uchun o'zgarmas variatsiyalash metodini misollarda tushuntiring.

5. Eyler tenglamasining umumiy ko'rinishini yozing. Qanday almashtirish yordamida u o'zgarmas koefitsientli chiziqli tenglamaga keltiriladi?

6. Funktsiyalarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligi ta'rifini keltiring va misollarda ko'rsating.

7. Eyler tenglamasini yeching: $4x^3 y''' + 3xy' - 3y = 0$

8. $y'' - 2(1 + tg^2 x)y = 0$, $y_1 = tg x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

1. Tenglamani yeching.

1.1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$

1.2. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

1.3. $y''' - 2y' - 2y = 0$

1.4. $y^{vi} + 2y^v + y'^v = 0$

1.5. $y''' - 8y' + 5y = 0$

1.6. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

1.7. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

1.8. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

1.9. $y'^v - y = 0$

1.10. $y''' - 3y'' - 2y' = 0$

1.11. $2y''' - 3y'' + y' = 0$

1.12. $y^v - 10y''' + 9y' = 0$

1.13. $y''' + 8y = 0$

1.14. $y'^v + y = 0$

1.15. $y'^v + 10y'' + 9y = 0$

1.16. $y'^v + 8y'' + 16y = 0$

1.17. $y^v + 8y''' + 16y' = 0$

1.18. $y'^v + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$

1.19. $y'^v + 2y''' + 2y'' - 5y = 0$

1.20. $y^v + 4y'^v + 5y''' - 6y' - 4y = 0$

2. Tenglamaning umumiy yechimini toping.

- 2.1. $y'' - 2y' = 2\cos 2x$ 2.2. $y'' + y' = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$
2.3. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$ 2.4. $y'' - 3y' = 2\cos 3x$
2.5. $y'' - 4y' = 16\cos 4x$ 2.6. $y'' + 2y' = 2\sin 2x$
2.7. $y'' + 3y' = 2\sin 3x$ 2.8. $y'' + y' = 2\sin x$
2.9. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$
2.10. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$
2.11. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$
2.12. $y'' - 4y = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$
2.13. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$
2.14. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$
2.15. $y'' + 25y' = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$
2.16. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\sin 4x - 64\cos 4x$
2.17. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$
2.18. $y''' - 25y' = 25(\cos 5x + \sin 5x) - 50e^{5x}$
2.19. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$
2.20. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\sin 6x + \cos 6x)$

Adabiyotlar

1. Morris Tenenburt, Harry Pollard. Ordinary Differential Equations. Birkhäuser. Germany, 2010.
2. Robinson J.C. An Introduction to Ordinary Differential Equations, Cambridge University Press 2013.
3. Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н. Однй дифференциал тенгламалар. Тошкент, “Ўзбекистон”, 1994.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., КомКнига/ URSS. 2006. – 472 с.
5. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., КомКнига/ URSS. 2006. – 312 с.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: Изд-во РХД. 2000. -175с.
7. Umrzaqov N., Umrzaqov S. Однй дифференциал тенгламалар. Andijon – 2017 yil.

8. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991. 314 с.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1984.
10. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1987.
11. Федорук М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука.1980.
12. Самойленко А.М. и др. дифференциальные уравнения. М., 1989. 384 с.
13. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967. 565 с.
14. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М.: Наука. 1987.

Internet saytlari

1. www.lib.homelinux.org/math
2. www.eknigu.com/lib/Mathematics/
3. www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC