

Tyuring mashinalari. Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish.

Tyuring mashinasi ustida amallar

Asosiy savollar:

1. Algoritm tushunchasiga aniqlik kiritish
2. Tyuring mashinasi tushunchasi.
3. Tyuring mashinasining ishlashi.
4. Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish.

Tayanch iboralar: Algoritm. Ommaviy muammo. Yechish algoritmi. Tyuring mashinasi. Tashqi alfavit. Ichki alfavit. Lenta (mashinaning tashqi xotirasi). Boshqaruvchi kallak. Boshlang'ich axborot. Mashina dasturi. Tyuring funksional sxemasi. Realizatsiya qilish. O'nlik sistemada n dan $n+1$ ga o'tish. Algoritm. Natural sonlarni qo'shish. Evklid algoritmi.

Algoritm tushunchasiga aniqlik kiritish

Algoritm tushunchasini aniqlashdagi muammolar. Matematika tarixida bir xil turdagi savollar to'plamiga «ha» yoki «yo'q» va bir xil turdagi funksiyalar sinfi «hisoblanuvchi» yoki «hisoblanuvchi emas» degan javoblar berilishi mumkin bo'lgan algoritmlarni izlash uzoq davom etdi. Ayrim vaqtlarda bu izlanishlar natijasiz tugadi. Bu hollarda, tabiiyki, algoritmning mavjudligiga shubha bilan qaraladi.

1- misol. Fermaning «buyuk teoremasi» deb ataluvchi tasdiqni qaraymiz. 1637 yillar atrofida Ferma quyidagi teoremaning isboti o'zida borligini e'lon qildi: « $x^n + y^n = z^n$ tenglama $n > 2$ bo'lganda musbat butun son qiymatli x, y, z, n yechimga ega emas». Bu teorema faqatgina 2000 yilda Angliya olimi Endryu Uals tomonidan isbotlandi. ■

2- misol. 1900 yilda Parijda o'tkazilgan ikkinchi xalqaro matematiklar kongressida olmon matematigi David Gilbert yechilishi muhim bo'lgan 23 matematik muammolar ro'yxatini o'qib berdi. Bu ro'yxatda **Gilbertning 10-**

muammosi deb nom olgan quyidagi muammo ham bor edi: «Koeffitsiyentlari butun sonlardan iborat bo‘lgan har qanday algebraik tenglamaning butun sonli yechimi mavjudmi?». Gilbert butun sonli koeffitsiyentlardan iborat bo‘lgan har qanday algebraik tenglama butun sonli yechimga egami degan muammoni yechadigan (hal qiladigan) algoritm yaratish kerakligini ko‘rsatdi. ■

Matematikada butun sonli koeffitsiyentlarga ega bo‘lgan algebraik tenglamalar **Diofant tenglamalari** deb ataladi. Masalan,

$$x^2 + y^2 - 2xz = 0, 10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$$

ko‘rinishdagi tenglamalar diofant tenglamalaridir bo‘ladi, ulardan birinchisi uch o‘zgaruvchili va ikkinchisi bir o‘zgaruvchili tenglamadir. Umumiy holda tenglama istalgan sondagi o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lishi hamda bunday tenglamalar butun sonli yechimlarga ega bo‘lishi ham, ega bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $x^2 + y^2 - 2xz = 0$ cheksiz ko‘p butun sonli yechimlarga ega, $10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$ tenglama esa butun sonli yechimga ega emas.

Bir o‘zgaruvchili diofant tenglamasining hamma butun sonli yechimlarini topish algoritmi anchadan beri mavjud. Aniqlanganki, agar

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

butun sonli koeffitsiyentlardan iborat tenglamaning ildizi butun son bo‘lsa, u holda bu ildiz a_n koeffitsiyentning bo‘luvchisi bo‘ladi. Bu tasdiqqa asoslanib, quyidagi algoritmni tavsiya etish mumkin:

- 1) a_n sonning hamma bo‘luvchilarini topish: $d_1, d_2, \dots, d_n$;
- 2) a_n sonning har bir bo‘luvchisi uchun $P_n(x)$ ning qiymatini aniqlash: $P_n(d_i)$ ($i = \overline{1, n}$);
- 3) agar $1, 2, \dots, n$ sonlardan birorta i uchun $P_n(d_i) = 0$ bo‘lsa, u holda d_i tenglamaning yechimi bo‘ladi. Agar barcha $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ uchun $P_n(d_i) \neq 0$ bo‘lsa, u holda tenglama butun sonli yechimga ega emas (algoritm tugadi).

Gilbertning 10- muammosi bilan dunyoning ko'p matematiklari deyarli 70 yil mobaynida shug'ullanishdi va nihoyat, 1968 yilga kelib Sankt-Peterburglik yosh matematik Yu. V. Matiyasevich va sal keyinroq, aniqrog'i, 1970 yilda rus matematigi G. V. Chudnovskiy bu muammoni hal qilishdi. Aniqlandiki, *qo'yilgan masalaning yechimini bera oladigan algoritm mavjud emas*.

Algoritmning intuitiv ta'rifi qat'iy emasligiga qaramasdan, u muayan masalaning yechimini topadigan algoritmning to'g'riligiga shubha uyg'otmaydi.

Matematikada shunday yechimi topilmagan algoritmik muammolar mavjudki, ular yechimga egami yoki ega emasmi ekanligini aniqlash muammosi paydo bo'ladi. Bu muammoni yechishda algoritmning intuitiv ta'rifi yordam bera olmaydi. Bu hollarda yo algoritmning mavjudligini, yoki uning mavjud emasligini isbotlash kerak bo'ladi.

Birinchi holda masalani yechadigan jarayonni tasvirlash kifoya. Bu jarayonning haqiqatan ham algoritm ekanligiga ishonch hosil qilish uchun algoritmning intuitiv tushunchasi yetarli bo'ladi.

Ikkinchi holda algoritmning mavjud emasligini isbotlash kerak. Buning uchun algoritmning nima ekanligini aniq bilish talab qilinadi. XX asrning 30-yillarigacha algoritmgacha aniq ta'rif berilmagan edi. Shuning uchun algoritm tushunchasiga aniq ta'rif berish keyingi davr matematikasining asosiy masalalaridan biri bo'lib qoldi. Bu ta'rifni ishlab chiqish jarayonida ko'p qiyinchilik borligi ma'lum bo'ldi. Birinchidan, bunday ta'rif algoritm intuitiv ta'rifining mohiyatini aks ettirishi, ikkinchidan esa, u formal aniqlik nuqtai nazaridan mukammal bo'lishi kerak edi.

Bu muammoning tadqiqotchilari tomonidan algoritmning bir nechta ta'rifi ishlab chiqildi. Ammo vaqt o'tishi bilan bu ta'riflarning o'zaro teng kuchliligi aniqlandi. Ana shu ta'rif hozirgi zamon algoritm tushunchasidir.

Algoritm tushunchasini aniqlashga yondashishlar. Algoritm tushunchasini aniqlash bo'yicha yondashishlarni uch asosiy yo'nalishga bo'lish mumkin.

Birinchi yo'nalish effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasini aniqlash bilan bog'liq. Bu yo'nalish bo'yicha A.Chyorch, K.Gyodel, S.Klini tadqiqot ishlarini olib borishgan.

1932-1935 yillar davomida A.Chyorch va S.Klini tomonidan o'rganilgan va « λ -aniqlanuvchi funksiyalar» deb atalgan, to'g'ri aniqlangan hisoblanuvchi nazariy-sonli funksiyalar sinfining « λ -aniqlanuvchi funksiyalar» sinfi bizning intuitiv tasavvurimiz bo'yicha hisoblanuvchi deb qaraladigan hamma funksiyalarni qamrab olishi mumkin degan fikr tug'ilganligi 1935 yilda e'lon qilindi. Bu kutilmagan natija edi.

J.Erbranning bir g'oyasi asosida 1934 yilda K.Gyodel tomonidan aniqlangan va «umumrekursiv funksiyalar» deb atalgan boshqa **hisoblanuvchi funksiyalar** sinfi ham « λ -aniqlanuvchi funksiyalar» xossalariga o'xshash xossalarga ega edi.

1936 yilda A.Chyorch va S.Klini tomonidan bu ikkita sinf bir xil sinf ekanligi isbotlandi, ya'ni *har qanday λ -aniqlanuvchi funksiya umumrekursiv funksiya bo'lishi va har qanday umumrekursiv funksiya λ -aniqlanuvchi funksiya ekanligi* tasdiqlandi.

1936 yilda Chyorch quyidagi tezisni e'lon qildi: *har qanday intuitiv effektiv (samarali) hisoblanuvchi funksiyalar umumrekursiv funksiyalardir.*

Bu teorema emas, balki tezisdir: tezis tarkibida intuitiv aniqlangan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi, aniq matematik atamalarda aniqlangan umumrekursiv funksiya tushunchasi bilan aynan tenglashtirilgan. Shuning uchun bu tezisni isbotlash mumkin emas. Ammo Chyorch va boshqa olimlar tomonidan bu tezisni quvvatlovchi ko'p dalillar ko'rsatildi.

Ikkinchi yo'nalish algoritm tushunchasini bevosita aniqlash bilan bog'liq: 1936-1937 yillarda, A.Tyuring Chyorch ishlaridan bexabar holda yangi funksiyalar

sinfni kiritdi. Bu funksiyalarni «Tyuring bo'yicha hisoblanuvchi funksiyalar» deb atadilar. Bu sinf ham yuqorida aytilgan xossalarga ega edi va buni **Tyuring tezi** deb aytamiz. 1937 yilda A.Tyuring isbotladiki, *uning hisoblanuvchi funksiyalari λ -aniqlanuvchi funksiyalarning o'zi va, demak, umumrekursiv funksiyalarning xuddi o'zi ekan*. Shuning uchun Chyorch tezi bilan Tyuring tezi ekvivalentdir.

1936 yilda E.Post (Tyuring ishlaridan bexabar holda) aynan Tyuring erishgan natijalarga mos keladigan natijalarni e'lon qildi va 1943 yilda, 1920-1922 yillardagi nashr etilmagan ishlariga asoslanib, to'rtinchi ekvivalent tezisni nashr etdi. Shunday qilib, algoritm tushunchasini bevosita aniqlashga va so'ngra uning yordamida hisoblanuvchi funksiya tushunchasini aniqlashga birinchi bo'lib bir-biridan bexabar holda E.Post va A.Tyuring erishdilar.

Post va Tyuring algoritmik jarayonlar ma'lum bir tuzilishga ega bo'lgan «mashina» bajaradigan jarayonlar ekanligini ko'rsatishdi. Ular ushbu «mashinalar» yordamida barcha hisoblanuvchi funksiyalar sinfi bilan barcha qisman rekursiv funksiyalar sinfi bir xil ekanligini ko'rsatdilar va, demak, Chyorch tezisining yana bitta fundamental tasdig'i yuzaga keldi.

Uchinchi yo'nalish – Rossiya matematigi A.Markov tomonidan ishlab chiqilgan normal algoritmlar tushunchasi bilan bog'liq.

Tyuring mashinalari

Tyuring mashinasi tushunchasi. Agar qandaydir ommaviy muammoni yechish algoritmi ma'lum bo'lsa, u holda uni realizasiya qilish uchun shu algoritmda aniq yoritilgan ko'rsatmalarni ijro qilish zarur. Algoritmni realizasiya qilish jarayonini avtomatlashtirish g'oyasi, tabiiyki, inson bajaradigan ishni mashinaga uzatishni taqozo qiladi. Bunday mashinani XX asrning 30- yillarida E.Post va A.Tyuring tavsiya etishgan.

Tyuring mashinasi tushunchasi intuitiv ma'lum bo'lgan hisoblash protsedurasini elementar operatsiyalarga ajratish natijasida hosil bo'lgan. Tyuring

ta'kidlaydiki, istalgan mumkin bo'lgan hisoblashni o'tkazish uchun uning elementar operatsiyalarini qaytarish yetarli.

Tyuring ayrim turdagi nazariy hisoblash mashinasini izohlab berdi. Bu mashina muayyan mexanik qurilma emas, balki «xayoliy» matematik mashinadir. Berilgan ko'rsatmani bajaruvchi hisoblovchi odamdan yoki mavjud raqamli hisoblash mashinasidan Tyuring mashinasi ikki jihati bilan farq qiladi.

Birinchidan, «Tyuring mashinasi» xato qila olmaydi, ya'ni u og'ishmay (chetga chiqmasdan) ko'rsatilgan qoidani be kami-ko'st bajaradi.

Ikkinchidan, «Tyuring mashinasi» potensial cheksiz xotira bilan ta'minlangan.

Endi Tyuring mashinasi tushunchasi bilan batafsil tanishamiz. Tyuring mashinasini quyidagilar to'liq aniqlaydi.

Tashqi alfavit, ya'ni $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ chekli simvollar to'plami. A to'plam elementlarining chekli ketma-ketligi A to'plamdagi **so'z** deyiladi. So'zni tashkil etuvchi simvollar soni shu **so'zning uzunligi** deyiladi.

Masalan, A alfavitning har bir elementi uzunligi 1ga teng bo'lgan so'zdir. Bu alfavitda so'z ko'rinishida mashinaga beriladigan axborot (informatsiya) kodlashtiriladi. Mashina so'z ko'rinishida berilgan informatsiyani qayta ishlab, yangi so'z hosil qiladi.

Ichki alfavit, ya'ni $q_0, q_1, q_2, \dots, q_m, O', Ch, J$ simvollar. $q_0, q_1, q_2, \dots, q_m$ mashinaning chekli son holatlarini ifodalaydi. Istalgan mashinaning holatlari soni tayinlangan bo'ladi. Ikki holatda maxsus vazifa bajariladi: q_1 mashinaning boshlang'ich (dastlabki) holati, q_0 natijaviy (oxirgi) holati (to'xtash holati).

O', Ch, J surilish simvollaridir (mos ravishda, o'ngga, chapga va joyida).

Ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin bo'lgan lenta (mashinaning tashqi xotirasi). U katakchalarga (yacheykalarga) bo'lingan

bo‘ladi. Har bir katakchaga faqat bitta harf yozilishi mumkin. Bo‘sh katakchani a_0

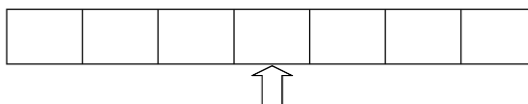
a_0	a_2	a_3	a_3	a_7	a_9	a_{11}	a_{12}			
-------	-------	-------	-------	-------	-------	----------	----------	--	--	--

1- shakl

simvoli bilan belgilaymiz (1-shakl).

Boshqaruvchi kallak (golovka). U lenta bo‘ylab harakat qiladi va biror katakcha (yacheyka) qarshisida to‘xtashi mumkin (2-shakl).

Bu holatda «kallak katakchani, ya’ni simvolni «**ko‘rib turibdi**»» deb aytamiz. Mashinaning bir takt davomidagi ishida kallak faqat bitta katakchaga surilishi



2- shakl

(o‘ngga, chapga) yoki joyida qolishi mumkin.

Lentada saqlanayotgan har bir informatsiya tashqi alfavitning a_0 dan farqli chekli simvollar majmuasi bilan tasvirlanadi. Mashina ish boshlashidan oldin lentaga **boshlang‘ich axborot** (boshlang‘ich ma’lumot) beriladi. Bu holda boshqaruvchi kallak, qoidaga asosan, q_1 boshlang‘ich holatni ko‘rsatuvchi oxirgi chap belgi qarshisida turadi (3-shakl).

Mashinaning ishi taktlar yig‘indisidan iborat bo‘lib, ish davomida boshlang‘ich informatsiya oraliq informatsiyaga aylanadi.

a_0	a_3	a_2	a_2	a_4	a_1	
-------	-------	-------	-------	-------	-------	--



3- shakl

Boshlang‘ich informatsiya sifatida lentaga tashqi alfavitning katakchalarga ixtiyoriy ravishda qo‘yilgan chekli simvollar sistemasini (alfavitdagi ixtiyoriy so‘zni) berish mumkin.

Berilgan boshlang'ich informatsiyaga bog'liq bo'lgan ikki hol bo'lishi mumkin.

1. Mashina chekli son taktdan keyin to'xtaydi (q_0 to'xtash holatiga o'tadi) va lentada B informatsiya tasvirlangan bo'ladi. Bu holda mashina A boshlang'ich informatsiyaga nisbatan tatbiq etiladigan (qo'llanib bo'ladigan) va uni qayta ishlab B natijaviy informatsiyaga keltirgan deb aytiladi.

2. Mashina hech qachon to'xtamaydi, ya'ni q_0 to'xtash holatiga o'tmaydi. Bu holda mashina A boshlang'ich informatsiyaga nisbatan tatbiq etilmaydi deb aytiladi.

Mashina ishining har bir taktida quyidagi funksional sxema bo'yicha harakat qiladi:

$$\begin{array}{c} O' \\ a_i q_j \rightarrow a_v \text{ Ch } q_s, \\ J \end{array}$$

bu yerda a_i , a_v – tashqi alfavitning harflari; q_j , q_s – mashinaning holatlari; O' , Ch , J – surilish simvollari.

Boshqaruvchi kallak lentada qanday harfni ko'rib turganligi (bizning yozuvda a_i) va mashina qaysi holatda (bizning yozuvda q_j) turganligiga qarab, bu taktda uch elementdan iborat komanda ishlab chiqiladi:

1) ko'rib turilgan harf almashtirilgan tashqi alfavit harfi (a_v);

2) kelgusi takt uchun tashqi xotira adresi $\begin{pmatrix} O' \\ \text{Ch} \\ J \end{pmatrix}$;

3) mashinaning kelgusi holati (q_s).

Tyuring mashinasining ishlashi.

Barcha komandalar majmuasi **Tyuring mashinasining dasturini** tashkil qiladi. Dastur ikki o'lchovli jadval shaklida bo'lib, u **Tyuring funksional sxemasi** deb ataladi. Bunday sxema 1- jadvalda misol sifatida berilgan. Ravshani, Tyuring mashinasining ishi butunlayiga uning dasturi bilan aniqlanadi. Agar ikkita Tyuring mashinasining funksional sxemalari bir xil bo'lsa, u holda ular bir-biridan farq qilmaydi. Har xil Tyuring mashinalari har xil dasturga ega bo'ladi.

1-jadval

	a_0	a_1	a_2
q_1	$a_2Ch\ q_3$	$a_1O'q_2$	a_2Chq_1
q_2	$a_0J\ q_2$	$a_2J\ q_1$	$a_1J\ q_2$
q_3	$a_0O'q_0$	$a_1O'q_4$	$a_2J\ q_1$
q_4	$a_1J\ q_3$	$a_0O'q_4$	$a_2O'q_4$

Bundan keyin Tyuring mashinasining har xil **konfiguratsiyalarini** (ko'rinishlarini) soddaroq ifodalash uchun lenta va uning katakchalarini ifodalamasdan axborotni faqat so'z shaklida yozamiz.

Boshqaruvchi kallak va mashina holatini ifodalash sifatida mashina holatini yozamiz.

1- jadvalda berilgan funksional sxemaga mos keluvchi Tyuring mashinasining ishini misollarda ko'rib o'taylik.

1- misol. Dastlabki konfiguratsiya quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$a_0 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0$$

$$q_1$$

Boshqaruvchi kallak a_2 harfini ko‘rib turganligi va mashina q_1 holatda bo‘lganligi uchun mashina a_2 Ch a_2 komandani ishlab chiqadi va natijada ikkinchi konfiguratsiyani hosil qilamiz.

$$a_0 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0$$

$$q_1$$

Ravshanki, navbatdagi konfiguratsiyalar quyidagi ko‘rinishlarda bo‘ladi:

$$a_0 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0 \quad - \quad \text{uchinchi konfiguratsiya,}$$

$$q_1$$

$$a_0 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0 \quad - \quad \text{to‘rtinchi konfiguratsiya,}$$

$$q_3$$

$$a_0 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0 \quad - \quad \text{beshinchi konfiguratsiya.}$$

$$q_0$$

Beshinchi konfiguratsiyada mashina q_0 holatda (to‘xtash holatida) turganligi uchun $a_2 a_2 a_2$ so‘z hisoblashning natijasi bo‘ladi. ■

2- misol. Boshlang‘ich konfiguratsiya quyidagicha bo‘lsin:

$$a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0$$

$$q_1$$

1- jadvaldagi funksional sxemadan foydalanib, quyidagi konfiguratsiyalarga kelimiz:

$$a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0 \quad - \quad \text{ikkinchi konfiguratsiya,}$$

$$q_1$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_0 \quad - \quad \text{uchinchi konfiguratsiya,}$$

$$q_1$$

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & & & q_2 \end{array} - \text{to'rtinchi konfiguratsiya,}$$

Ikkinchi va oltinchi konfiguratsiyalardan ko‘rinib turibdiki, mashinaning ish jarayoni takrorlandi va, demak, natija bo‘lmaydi. ■

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_0 \\ & & & & & q_2 \end{array} - \text{beshinchi konfiguratsiya,}$$

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & & & q_1 \end{array} - \text{oltinchi konfiguratsiya.}$$

Tyuring mashinasida algoritmni realizasiya qilish

Ayrim oddiy arifmetik algoritmlarni realizasiya qiladigan (amalga oshiradigan) Tyuring mashinasini yasashni misollarda o‘rganamiz.

Tyuring mashinasida o‘nlik sistemada n dan $n+1$ ga o‘tish algoritmini realizasiya qilish. O‘nlik sanoq sistemasida n sonning yozuvi berilgan bo‘lsin va $n+1$ sonning o‘nlik sistemasidagi yozuvini ko‘rsatish, ya’ni $f(n) = n+1$ funksiyani hisoblash talab etilsin.

Ravshanki, mashinaning tashqi alfaviti 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlardan va bo‘sh katakcha a_0 dan iborat bo‘lishi kerak. Lentaga o‘nlik sistemada n sonni yozamiz. Bu yerda qatorasiga bo‘sh joysiz har bir katakchaga bitta raqam yoziladi.

Qo‘yilgan masalani yechish uchun ishning birinchi taktida mashina n sonning oxirgi raqamini o‘chirib, uni bir birlik katta songa almashtirib va agar oxirgi raqam 9 sonidan kichik bo‘lsa, u holda to‘xtash holatiga o‘tishi kerak.

Agar n sonning oxirgi raqami 9 bo‘lsa, u holda mashina 9 raqamni o‘chirib, bo‘sh qolgan katakchaga 0 raqamni yozib, o‘sha holatda qolgan holda chapga yuqoriroq razryadli qo‘shnisiga surilishi kerak. Bu yerda ishning ikkinchi taktida mashina yuqoriroq razryadli raqamga 1 sonini qo‘shishi kerak.

Tabiiyki, chapga surilish paytida yuqoriroq razryadli raqam bo'lmasa, u holda mashinaning boshqaruvchi kallagi bo'sh katakchaga chiqishi mumkin. Bu holatda bo'sh katakchaga mashina 1 raqamini yozadi.

Aytilganlardan shu narsa kelib chiqadiki, $f(n) = n + 1$ funksiyani hisoblash algoritmini realizasiya qilish paytida mashina bor yo'g'i ikkita q_1 va q_0 holatlarda bo'ladi.

Shunday qilib, o'nlik sistemada n dan $n + 1$ ga o'tish algoritmini realizasiya etadigan Tyuring mashinasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1	$1Jq_0$	$1Jq_0$	$2Jq_0$	$3Jq_0$	$4Jq_0$	$5Jq_0$	$6Jq_0$	$7Jq_0$	$8Jq_0$	$9Jq_0$	$0Chq_1$

Quyida $n = 183$ va $n = 399$ sonlar uchun mos ravishda ularning konfiguratsiyalari keltirilgan.

Natural sonlarni qo'shish algoritmi. Mashina lentasiga tayoqchalar majmuasi shaklida ikkita son berilgan bo'lsin. Masalan, 2 va 3 sonlari. Bu sonlarni

$$a_0 \underset{q_1}{183} a_0 \qquad a_0 \underset{q_1}{399} a_0$$

$$a_0 \underset{q_0}{184} a_0 \qquad a_0 \underset{q_1}{390} a_0$$

$$a_0 \underset{q_1}{300} a_0$$

$$a_0 \underset{q_1}{400} a_0$$

qo'shish talab etilsin. Qo'shish simbolini (belgisini) yulduzcha bilan belgilaymiz. Shunday qilib, mashina lentasiga quyidagi so'z yoziladi.

$$a_0 | \quad | \quad * \quad | \quad | \quad | \quad a_0 \qquad (1)$$

(1) so'zga tatbiq qilish natijasida 2 va 3 sonlarining yig'indisini, ya'ni

$$a_0 | \quad | \quad | \quad | \quad a_0 \qquad (2)$$

so'zni beradigan funksional sxemani topish talab etiladi.

Qo'yilgan masalani yechish jarayonini izohlab beraylik. Dastlabki momentda mashinaning kallagi eng chapdagi tayoqchani ko'rib tursin. Uni to

birinchi bo'sh katakchaga erishguncha hamma tayoqcha va yulduzchalarni cheklab o'ngga so'rish kerak. Bu bo'sh katakchaga birinchi tayoqcha yoziladi. Undan so'ng ikkinchi tayoqchaga qaytib kelish kerak va uni uchirib to'xtash kerak. Mashina ishining hamma taktini quyidagi mos konfiguratsiyalarda ifodalab beramiz.

1) $a_0 * a_0$	2) $a_0 * a_0$	3) $a_0 * a_0$
q_1	q_2	q_2
4) $a_0 * a_0$	5) $a_0 * a_0$	6) $a_0 * a_0$
q_2	q_2	q_2
7) $a_0 * a_0$	8) $a_0 * a_0$	9) $a_0 * a_0$
q_2	q_3	q_3
10) $a_0 * a_0$	11) $a_0 * a_0$	12) $a_0 * a_0$
q_3	q_3	q_3
13) $a_0 * a_0$	14) $a_0 * a_0$	15) $a_0 * a_0$
q_3	q_3	q_1
16) $a_0 a_0 * a_0$	17) $a_0 * a_0$	18) $a_0 * a_0$
q_2	q_2	q_2
19) $a_0 * a_0$	20) $a_0 * a_0$	21) $a_0 * a_0$
q_2	q_2	q_2
22) $a_0 * a_0$	23) $a_0 * a_0$	24) $a_0 * a_0$
q_3	q_3	q_3
25) $a_0 * a_0$	26) $a_0 * a_0$	27) $a_0 * a_0$
q_3	q_3	q_3
28) $a_0 * a_0$	29) $a_0 * a_0$	30) $a_0 a_0 * a_0$
q_3	q_1	q_0

Bu jarayon masalaning yechish algoritmini ikki o'lchovli 1- jadval shaklida yozishga imkoniyat yaratadi.

Shunday qilib, bu yerda $\langle a_0, *, | \rangle$ – tashqi alfavit va q_0, q_1, q_2, q_3 – mashina holatlaridan foydalanildi.

1- jadval

	a_0	$*$	$ $
q_1		$a_0 J q_0$	$a_0 O' q_2$
q_2	$ J q_3$	$* O' q_2$	$ O' q_2$
q_3	$a_0 O' q_1$	$* Gh q_3$	$ Ch q_3$

Evklid algoritmi. Evklid algoritmi berilgan ikkita natural son uchun ularning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish kabi masalalarni yechishda qo‘llaniladi. Ma’lumki, Evklid algoritmi quyidagi kamayuvchi sonlar ketma-ketligini tuzishga keltiriladi: birinchisi berilgan ikki sonning eng kattasi bo‘ladi, ikkinchisi – kichigi, uchinchi – birinchi sonni ikkinchisiga bo‘lishdan hosil bo‘lgan qoldiq, to‘rtinchi – ikkinchi sonni uchinchisiga bo‘lishdan hosil bo‘lgan qoldiq va hokazo, bu jarayon qoldiqsiz bo‘linguncha davom ettiriladi. Oxirgi bo‘lishdagi bo‘luvchi masala yechimining natijasi bo‘ladi.

Evklid algoritmini Tyuring mashinasining dasturi sifatida ifodalash talab etilgan bo‘lsin. Bu dastur sonlarni taqqoslash va ayirish sikllarining navbatma-navbat (navbatlashib) kelishini ta’minlashi kerak.

To‘rtta harfdan iborat $\langle a_0, |, \alpha, \beta \rangle$ tashqi alfavitdan foydalanamiz. Bu yerda a_0 – bo‘sh katakcha simvoli, $|$ – tayoqcha, α va β – tayoqcha rolini vaqtinchalik o‘ynaydigan harflar.

Masalaning yechilishini boshlang‘ich konfiguratsiyasi

$$a_0 ||||| a_0$$

$$q_1$$

bo‘lgan hol uchun 4 va 6 sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish misolida ko‘rib o‘taylik.

Birinchi navbatda mashina lentada yozilgan sonlarni taqqoslashi kerak. Shu maqsadga erishish uchun mashina birinchi sonni ifodalovchi tayoqchalarni α harfi

bilan va ikkinchi sonni ifodalovchi sonlarni β harfi bilan almashtirishi kerak. Mashina ishining birinchi to'rt taktiga mos keluvchi uning konfiguratsiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{array}{c} a_0 ||||| a_0 \\ q_1 \end{array} & 2) \begin{array}{c} a_0 |||\alpha||| a_0 \\ q_2 \end{array} \\
 3) \begin{array}{c} a_0 |||\alpha||| a_0 \\ q_2 \end{array} & 4) \begin{array}{c} a_0 |||\alpha\beta||| a_0 \\ q_1 \end{array}
 \end{array}$$

Shu bilan dastlabki sonlarni taqqoslash sikli tamom bo'lib, ayirish sikli boshlanadi. Bu sikl davomida kichik son lentadan butunlayiga o'chiriladi, β harfi bilan belgilangan ikkinchi son tayoqchalar bilan almashinadi va, demak, katta 6 soni ikkita 4 va 2 sonlariga bo'linadi.

Bu operatsiyalarga bir qator konfiguratsiyalar to'g'ri keladi. Shulardan ayrimlarini yozamiz:

$$\begin{array}{c}
 a_0 \alpha \alpha \alpha \alpha \beta \beta \beta \beta | a_0 \\
 q_1 \\
 a_0 \alpha \alpha \alpha \alpha \beta \beta \beta \beta | a_0 \\
 q_3 \\
 a_0 a_0 \alpha \alpha \alpha \beta \beta \beta \beta | a_0 \\
 q_3 \\
 \\
 a_0 a_0 a_0 a_0 \beta \beta \beta \beta | a_0 \\
 q_3 \\
 a_0 a_0 a_0 a_0 | \beta \beta \beta | a_0 \\
 q_3 \\
 \\
 a_0 a_0 a_0 a_0 ||||| a_0 \\
 q_3 \\
 a_0 a_0 a_0 a_0 ||||| a_0 \\
 q_2
 \end{array}$$

Shu bilan birinchi ayirish sikli tamom bo‘ladi.

Endi mashina 4 va 2 sonlarini taqqoslashi kerak. Bu sonlarni taqqoslash sikli quyidagi

$$\begin{array}{c} a_0 || \alpha \alpha \beta \beta a_0 \\ q_4 \end{array}$$

konfiguratsiyaga va ayirish sikli

$$\begin{array}{c} a_0 |||| a_0 \\ q_1 \end{array}$$

konfiguratsiyaga olib keladi.

Uchinchi taqqoslash sikli 2 va 2 sonlarini

$$\begin{array}{c} a_0 \alpha \alpha \beta \beta a_0 \\ q_3 \end{array}$$

konfiguratsiyaga va ayirish sikli

$$\begin{array}{c} a_0 || a_0 \\ q_0 \end{array}$$

oxirgi konfiguratsiyaga olib keladi.

Shunday qilib, Tyuring funksional sxemasi 2- jadval ko‘rinishida bo‘ladi.

2- jadval

	a_0		α	β
q_1	$a_0 O' q_3$	$\alpha J q_2$	$\alpha Ch q_1$	$\beta Ch q_1$
q_2	$a_0 Ch q_4$	$\beta J q_1$	$\alpha O' q_2$	$\beta O' q_2$
q_3	$a_0 J q_0$	$ J q_2$	$a_0 O' q_3$	$ O' q_3$
q_4	$a_0 J q_0$	$ J q_1$	$ Gh q_4$	$a_0 Ch q_4$

Sinov savollari

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarni hisoblovchi algoritmlarni Tyuring mashinasining dasturlari sifatida ifodalang:
 - a) $\varphi(n) = n + 2$; b) $\varphi(n) = n + 4$; d) $\varphi(n) = 0$.
2. Quyidagi funksiyalarni funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasini tuzing:
 - a) $\text{sgn } x = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$
 - b) $\overline{\text{sgn } x} = \begin{cases} 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$
3. Ushbu $\varphi(n) = 2n$ funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasini tuzing.
4. Ushbu $f_p(n) = \begin{cases} 1, & \text{agar } n \text{ son } p \text{ songa qoldiqsiz bo'lsin,} \\ 0, & \text{aks holda,} \end{cases}$ funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasining dasturlarini $\{a_0, 1\}$ alfavitda yozing.
5. Funktsional sxemalari 1- va 2- jadval jadvallarda berilgan Tyuring mashinasi qanday funksiyalarni hisoblashi mumkinligini aniqlang.

1- jadval

	a_0	
q_1	$a_0 O' q_{p+1}$	Ch q_2
q_2	$a_0 O' q_{p+3}$	Ch q_3
...	...	...
q_{p-1}	$a_0 O' q_{p+3}$	Ch q_p
q_p	$a_0 O' q_{p+1}$	Ch q_1
q_{p+1}	J q_0	$a_0 J q_{p+2}$
q_{p+2}	$a_0 O' q_{p+1}$	
q_{p+3}	$a_0 J q_0$	$a_0 J q_{p+4}$
q_{p+4}	$a_0 O' q_{p+3}$	

2- jadval

	a_0	
q_1	O' q_4	Ch q_2
q_2	$a_0 O' q_6$	Ch q_3
q_3	$a_0 O' q_6$	Ch q_1
q_4	J q_0	$a_0 J q_5$
q_5	$a_0 O' q_4$	
q_6	$a_0 J q_0$	J q_7
q_7	$a_0 O' q_6$	$a_0 O' q_6$

6. Dasturi 3- jadvaldagi funksional sxema orqali berilgan Tyuring mashinasi qanday ko‘rinishdagi funksiyani hisoblashi mumkinligini aniqlang.

3- jadval

	a_0		α	β
q_1	$a_0 \text{ Ch } q_2$	$ O' q_1$	$\alpha O' q_1$	$\beta O' q_1$
q_2		$\beta \text{ Ch } q_3$	$\alpha \text{ Ch } q_2$	$\beta \text{ Ch } q_2$
q_3	$a_0 O' q_4$	$ J q_1$		
q_4	$a_0 J q_0$		$ O' q_4$	$ O' q_4$

Ko‘rsatma. Misollarni yechishda L.M.Lixtarnikov va T.G.Sukachevalarning (Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Санкт-Петербург. Лань. 1999.) kitobidan foydalanishni tavsiya etamiz, 248–250- va 275–281-sahifalar.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Ommaviy muammo deganda nimani tushunasiz?
2. Yechish algoritmi nima?
3. Tyuring mashinsining ta’rifini bilasizmi?
4. Tashqi va ichki alfavitlar bir-biridan nima bilan farq qiladi?
5. Mashinaning tashqi xotirasi deganda nimani tushunasiz?
6. Boshqaruvchi kallak joyida turadimi yo siljiydimi?
7. Boshlang‘ich axborot sifatida lentaga beriladigan axborot qanday bo‘lishi kerak?
8. Mashina dasturi nimalardan tashkil topgan bo‘ladi?

Adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Юнусов А.С. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси элементлари, Т., 2003.
5. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
6. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Санкт-Петербург. 1999 г.
7. Тухтасинов М., Дискрет математика ва математик мантик.- Т., Университет, 2005.
8. Тўраев Х.Т., Математик мантик ва дискрет математика.- Т., Ўқитувчи, 2003.
9. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: Наука. -1969.
10. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
11. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973
12. Partee B., ter Meulen A., Wall R. Mathematical Methods in Linguistics. Dordrecht: Reidel, 1989.
13. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972.
14. Мальцев А. И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.

Internet saytlari

1. <http://dimacs.Rutgers.edu/>
2. <http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq.toclist/SIDMA>
3. <http://www.uni-bonn.de/logic/world.html>
4. <http://www.vsppub.com/journals/jn-DisMatapp.html>
5. <http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/>
6. <http://www.math.uu.se/logic-server/>
7. <http://dmoz.org/Science/Math/logic/>
8. <http://nit.itsoft.ru/2003/tezicy/articles/296.htm>