O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

B.S.Zakirov, G. G'aymnazarov, H.R.Umarov

FUNKSIONAL ANALIZ

fanidan pedagogik texnalogiya asosida tayyorlangan
o'quv-uslubiy majmua

$$\omega\left(f;\delta\right)_p = O\left(\omega\left(\delta\right)\right)$$

$$\omega\left(\delta\right) = O\left(\delta^{\alpha+\frac{1}{p}}\right), \quad \mathrm{p} \geq 1$$

Guliston 2017

B.S.Zakirov, G.G'aymnazarov, H.R.Umarov. «Funksional analiz» fanidan pedagogik texnalogiyalar asosida tayyorlangan o'quv-uslubiy majmua. Guliston 2017, 68 bet.

Ushbu majmua amaldagi dasturlar asosida tayyorlanib 5130100-matematika ta'lim yo'nalishida ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan. Unda pedagogik texnalogiyalar tizimiga asoslangan holda o'qituvchi va identiv o'quv maqsadlari, mavzu bo'yicha ko'rib chiqilishi zarur muammolar, nazorat topshiriqlar, talabalar mustaqil bajarishi zarur bo'lgan topshiriqlar keltirilgan.

Majmuada funksional analizning bosqichlari keng yoritilgan. Har bir mavzu oxirida fanda echimini kutayotgan ilmiy muammolar ro'yxati keltirilgan.

Majmua Guliston Davlat universiteti o'quv-uslubiy kengashi tomonidan (___-bayonnoma, __.________.2017 yil) nashrga tavsiya etilgan.

Taqrizchilar: Norjigitov H. (GulDU) fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Qo'rg'onov K. (O'zMU) fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Mas'ul muharrir: Jamuratov K. (GulDU) fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

MUNDARIJA

KIRISH

Funksional analiz fani matematikada asosiy o'rinni egallaydi. Hayotning ko'pgina masalalarini yyyYechishda avvalo unga mos bo'lgan matematik modellar tuziladi. Tuzilgan matematik modellar asosan algebraic usul bilan tekshiriladi va yechiladi. Buni biror jarayonning differentsial tenglamasi yoki differentsial tenglamalar sistemasi misolida ko'rish mumkin. Har bir masalaning yechimini biror toplamda (Funksional fazoda) qaraladi.

Bu esa algebraik tushunchalarni, tasdiqlarni umumiy nuqtai nazardan qarashga olib keladi. Shu sabali bu o'quv-uslubiy majmuada metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar tushunchalari va unga doir masalalar ko'riladi.

Funksional analiz fan va texnikaning juda ko'p tarmoqlarida tatbiq etiladi.

Axborotlarni uzatish va qabul qilishda (televideniya, radio, uyali telefon)da operatorlar nazariyasidan keng foydalaniladi. Iqtisodiy masalalarni modellashtirish va ularning optimal yechimlarini aniqlashda chiziqli operator tushunchalar muhim ahamiyatga ega.

Funksional analiz fani bakalavriatning ikki kursida o'qitilib, mutaxassislik fanlarining asosiylaridan xisoblanadi. Bu kursda metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar tushunchalari va ularga oid masalalar ko'riladi.

I. Fanni o'qitishdan maqsad va vazifalar.

1.1. Fanning maqsadi: Talabalarga nazariy bilim berish, zaruriy tushunchalarni, teoremalarni isbotlash usullarini o'rgatish. Fazoviy tasvur hamda abstrakt taffakur kabi, inson faoliyatining barcha sohalari uchun zarur bo'lgan qobiliyatni rivojlantirishdan iborat.

1.2. Fanning vazifalari: Talabalarga funktsiyalar nazariyasiga doir bilimlar berish, nazariy bilimlarning boshqa tarmoqlariga hamda boshqa fanlarning masalalarini yYechishga tadbiqlashni o'rgatishdan va fikrlash tasvvurini rivojlantirishdan iboratdir. Bu erda quyidagi mavzular o'rganiladi:
- To'plamlar nazariyasi;
- O'lchovli funktsiyalar nazariyasi;
- Lebeg integrali.

1.3. Talabalarga qo'yiladigan talablar:

Talabalar to'plam va uning xossalarini, o'lchov va o'lchovli to'plamga doir teoremalarni; o'lchoqli funktsiya tushunchasini va unga doir teoremalarni; integral tushunchasini Lebeg tomonidan rivojlantirilishini, Lebeg ma'nosidagi integral xossalarini o'zlashtirishlari shart.

1.4. Fanni o'rgatishda informatsion-metodik ta'minotlardan, internet ma'lumotlardan keng foydalaniladi. Bunda fanning boshqa fanlar bilan bog'liqligi va uning ahamiyati bayon etiladi.

II. Fanning mazmuni.

2.1. Lektsiya mavzulari, mazmuni va vaqti.

№	Mavzu	Ko'riladigan masalalar mazmuni	Vaqt, soat
1.	**To'plamlar nazariyasi**	1. To'plamlar. To'plamlar ustida amallar. Sanoqli to'plamlar. To'plam quvvati	2
		2. Sanoqsiz to'plamlar. Kontinuum quvvatli to'plamlar. Quvvatlarni solishtirish. Kantor-Bernshteyn teoremasi	2
		3. To'plamlar xalqasi va algebra. σ-xalqa va σ-algebra (S. 101-106 bet)	2
		4. Limit nuqta, yaqinlashuvchi to'plam (ketma-ketlik). Yopiq (hosila to'plam) va ochiq to'plamlar *ichki nuqtalar) xossalari. (S, 47-73 bet)	2
2.	**To'plam o'lchovi**	5. To'plam o'lchovi va uning xossalari (S.78-84 bet)	2
		6. O'lchovli to'plamlar haqida teoremalar. Kantor to'plami va uning o'lchovi. (S. 84-90)	2
		7. O'lchovsiz to'plamga misol. Borel teoremalari. O'lchovni davom ettirish. (S. 58 bet) (92-94, 107, 115-122 betlar)	2
3.	**O'lchovli funktsiyalar**	8. O'lchovli funktsiyalar va ularning xossalari. (S. 144-148 bet)	2
		9. O'lchovli funktsiyalar va ularning xossalari.	2
		10. Egorov va Luzin teoremalari (Tekis yaqinlashish) (S.156-160 bet)	2
4.	**Lebeg integrali**	11. Chegaralangan funktsiyaning Lebeg integrali va uning xossalari (S. 162-170 bet)	2
		12. Lebeg integrali ostida limitga o'tish chegaralanmagan funktsiyaning Lebeg integrali (Jamlanuvchi funktsiyalar) (S.171-178)	2
		13. $L_p$fazolar. Gelder va Minkovskiy tengsizliklari.	2
		14. Riman va Lebeg integrallarini solishtirish (S. 189-194).	2
		15. O'lchovlarning to'g'ri ko'paytmasi. Fubini teoremasi. Absolyut uzluksiz va singulyar o'lchov. Radon-Nikodim teoremasi. (S.287-292)	2
		JAMI	30

2.2. Amaliy mashg'ulotlar mavzulari, bajariladigan ish mazmuni va vaqti

№	Mavzu	Ko'riladigan masalalar mazmuni	Vaqt, soat
1.	**To'plamlar nazariyasi**	1. To'plamlar. To'plamlar ustida amallar. Sanoqli to'plamlar. To'plam quvvati	2
		2. Sanoqsiz to'plamlar. Kontinuum quvvatli to'plamlar.	
		3.Quvvatlarni solishtirish. Kantor-Bernshteyn teoremasi	2
		4. To'plamlar xalqasi va algebra. σ-xalqa va σ-algebra (S. 101-106 bet)	
		5. Limit nuqta, yaqinlashuvchi to'plam (ketma-ketlik).	2
		6. Yopiq (hosila to'plam) va ochiq to'plamlar *ichki nuqtalar) xossalari. (S, 47-73 bet)	
2.	**To'plam**	7. To'plam o'lchovi va uning xossalari (S.78-84 bet)	2
		8. O'lchovli to'plamlar haqida teoremalar. Kantor to'plami va	

	o’lchovi	uning o’lchovi. (S. 84-90)	
		9. O’lchovsiz to’plamga misol. Borel teoremalari. O’lchovni davom ettirish. (S. 58 bet) (92-94, 107, 115-122 betlar)	
3.	**O’lchovli funktsiyalar**	10. O’lchovli funktsiyalar va ularning xossalari. (S. 144-148 bet)	2
		12. Egorov va Luzin teoremalari (Tekis yaqinlashish) (S.156-160 bet)	2
4.	**Lebeg integrali**	13. Chegaralangan funktsiyaning Lebeg integrali va uning xossalari (S. 162-170 bet)	2
		14. Lebeg integrali ostida limitga o’tish.	2
		15.Chegaralanmagan funktsiyaning Lebeg integrali (Jamlanuvchi funktsiyalar) (S.171-178)	
		16. Lp fazolar. Gelder va Minkovskiy tengsizliklari.	2
		17. Riman va Lebeg integrallarini solishtirish (S. 189-194).	
		18. O’lchovlarning to’g’ri ko’paytmasi. Fubini teoremasi. Absolyut uzluksiz va singulyar o’lchov. Radon-Nikodim teoremasi. (S.287-292)	2
		JAMI	24

Asosiy adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o’zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi. T. 1993.
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elemento’ teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza. M. «Nauka», 1972 g.
3. Ochan Yu.S. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu. M. Prosveshenie. 1981 g.

Qo’shimcha adabiyotlar:

1. Trenogin V.A. Funktsionalno’y analiz. Iz-vo «Nauka», M. 1980 g.
2. Ayupov Sh.A. va boshqalar. Funktsiyalar nazariyasi, Toshkent 2004 y.
3. G’aymnazarov G., G’aymnazarov O.G. Funktsional analiz kursidan masalalar yYechish, «Fan va texnalogiya», Toshkent 2006 y.
4. Haqiqiy o’zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi fanidan o’quv-uslubiy majmua (tuzuvchi dots.G.G’aymnazarov), Guliston 2008 y.

3.1. Talabalar mustaqil ishlari:

3.1. Mustaqil holda o’rganiladigan mavzular:

3.1.1. To’plamlar quvvatini solishtirish.
3.1.2. Kantor funktsiyasi. O’lchovli to’plam misoli.
3.1.3. Lebegning aniqmas integrali.
3.1.4. Riman-Stiltes integrali.

Adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o’zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi. T. 1993.
2. Ayupov Sh.A. va boshqalar. Funktsiyalar nazariyasi, Toshkent 2004 y.

3.2. Mustaqil ish topshiriqlari:

3.2.1. To’plam quvvati.
3.2.2. O’lchovli to’plam, o’lchovsiz to’plam.
3.2.3. Lebegning aniqmas integrali.
3.2.4. Riman-Stiltes integrali.

Adabiyotlar:

1. Ochan Yu.S. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu. M. Prosveshenie. 1981 g.
2. G’aymnazarov G., G’aymnazarov O.G. Funktsional analiz kursidan masalalar yYechish, «Fan va texnalogiya», Toshkent 2006 y.

3. Haqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi fanidan o'quv-uslubiy majmua (tuzuvchi dots.G.G'aymnazarov), Guliston 2005 y.

Fanning reyting ishlanmasi va baholash mezoni.

№	Nazorat turlari	Soni	Ball	Jami
1.	1. Joriy baholash 1.1. Amaliy mashg'ulotlar bajarish 1.2. Uy vazifalari bajarish 1.3. Mustaqil topshiriqlarni bajarish **Jami**	 10 10 5	 2 2 2	 20 20 **10** **50**
2.	2. Oraliq baholash 2.1. Og'zaki so'rash 2.2. TMI referat 2.3. Yozma ish **Jami**	 5 2 2	 1 4 3,5	 5 8 **7** **20**
3.	3. Yakuniy baholash 3.1. Yozma ish yoki test sinov	 1	 **30**	 **30**
	Jami			**100**

Baholash mezoni

1. Joriy baholash bo'yicha:

1.1. Joriy baholashda, amaliy mashg'ulotlarda to'liq qatnashib, uni topshiriqlarini to'la bajargani uchun talabaga ___ ball beriladi. Agar topshiriqlar to'la bo'lmasa, ___________ ball beriladi.

1.2. Uyga vazifani to'liq o'z vaqtida sifatli bajargan talabaga har bir vazifa uchun ______ ballgacha beriladi.

1.3. Mustaqil ish topshiriqlari (jamoaviy ta'lim asosda) to'liq va sifatli bajarilgan ish uchun ______ ball, topshiriq to'liq bajarilmasa, uning bajarilish sifati va hajmiga nisbatan ________ballgacha baholanadi.

2. Oraliq baholash bo'yicha:

2.1. Oraliq baholash ____ marta yozma ish olinib, har biri ____ tadan savol asosida olinadi. Har bir savolga to'g'ri javob uchun _____ balldan beriladi.
2.2. ____ marta og'zaki so'rov o'tkaziladi. Og'zaki so'rovda _____ tadan og'zaki javob berish talab etiladi. Har bir savolga _____ balldan beriladi.

3. Yakuniy baholash bo'yicha:

3.1. Yozma ishda ____ ta savol beriladi. Har bir savolga to'g'ri va thliq javob uchun _____ ball beriladi. Agar test sinovi bhlsa _____ ta savol beriladi. Har bir to'g'ri javob uchun _____ ball beriladi.

FUNKSIONAL ANALIZ FANI BO'YIChA TA'LIM TEXNOLOGIYALARINI ISHLAB CHIQISHNING KONSEPTUAL ASOSLARI

Bilim olish jarayoni bilan bog'liq ta'lim sifatini belgilovchi holatlar: darsni yuqori ilmiy-pedagogik darajada tashkil etilishi, muammoli mashg'ulotlar o'tkazish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg'or pedagogik texnologiyalardan va multimedia qo'llanmalardan foydalanish, tinglovchilarni mustaqil fikrlashga undaydigan, o'ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo'yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, ijodkorlikka yo'naltirish, erkin muloqotga kirishishga, ilmiy izlanishga jalb qilish va boshqa tadbirlar ta'lim ustuvorligini ta'minlaydi. Ta'lim samaradorligini orttirishda fanlar bo'yicha ta'lim texnologiyasini ishlab chiqishning kontseptsiyasi aniq belgilanish va unga amal qilishi ijobiy natija beradi. Fanni o'qitishning maqsadi va ta'lim berish texnologiyasini loyihalashtirishdagi asosiy kontseptual yondashuvlar quyidagilardan iborat.

Fanning maqsadi. 5460100-matematika ta'lim yo'nalishlarida tahsil olayotgan talabalarga metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar tushunchalarini va ularning xossalarini o'rgatishdan iboratdir.

Fanni o'qitishning vazifalari. Funksional analizning asosiy tushunchalari bo'lgan: metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar haqida bilimlar berish, olgan nazariy bilimlarning tatbiqlarini tushuntirish hamda amaliy masalalarni yYechishga qaratishdan va natijada fikrlash qobiliyatini rivojlantirishdan iborat.

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. O'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishlarini ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshishga e'tibor qaratishni amalga oshiradi. Har bir talabaning shaxs sifatida kasbiy takomillashuvini ta'minlaydi. Ta'limning markaziga bilim oluvchi qo'yiladi.

Tizimli yondoshuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo'g'inlarini o'zaro bog'langanligi, yaxlitligi bilim olish va kasb egallashning mukammal bo'lishiga hissa qo'shadi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatini jadallashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida barcha qobiliyat va imkoniyatlarni, tashabbuskorlikni ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi. Egallangan bilimlarning ko'nikma va malakaga aylanishi, amaliyotda tatbiq etilishiga sharoit yaratadi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o'quv jarayoni ishtirokchilarining psixologik birligi va o'zaro munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. O'qituvchi va talabaning hamkorlikdagi ta'limiy faoliyat yuritishiga zamin yaratadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratlilik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi o'rtasidagi sub'ektiv munosabatlarda hamkorlikni, maqsad va faoliyat mazmunini shakllantirishda erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi. Ta'lim jarayonida "sub'ekt-sub'ekt" munosabatlari tarkib topadi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni ob'ektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni ta'minlaydi. Muammoli savol, vazifa, topshiriq va vaziyatlar yaratish va ularga echim topish jarayonida ongli, ijodiy, mustaqil fikrlashga o'rgatiladi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash - hozirgi axborot kommunikatsiya texnologiya vositalari kuchli rivojlangan sharoitda ulardan to'g'ri va samarali foydalanish, axborotlarni tanlash, saralash, saqlash, qayta ifodalash ko'nikmalari hosil qilinadi. Bu jarayonda kompyuter savodxonligi alohida ahamiyat kasb etadi.

O'qitishning metodlari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid vizuallash, taqdimot, bahs) muammoviy usul, keys-stadi, pinbord, loyiha va amaliy ishlash usullari. Interfaol usullarni mavzuning mazmuniga mos holda tanlash va ulardan samarali foydalanishga o'rgatadi.

O'qitish vasitalari: o'qitishning an'anaviy vositalari (darslik, ma'ruza matni, amaliy tatbiqlar, boshqa fanlar bilan bog'liqligi va boshqalar) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiya vositalari keng ko'lamda tatbiq etiladi.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan operativ ikki yoqlama (teskari) aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlarning yo'lga qo'yilishi.

Teskari aloqa usullari va vositalari: ongli ravishda tushunish, blits-so'rov, joriy, oraliq va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi amalga oshiriladi. Ta'lim jarayonida kafolatlangan natijaga erishish ta'minlanadi.

Boshqarish usullari va tartibi: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik xarita ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati ham tartibli yo'lga qo'yiladi.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning naitijalarini reja asosida nazorat va tahlil qilib boriladi. Kurs oxirida yozma, og'zaki yoki test topshiriqlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi. Baholarning haqqoniy bo'lishiga, oshkoraligiga alohida e'tibor qaratiladi.

1- Modul

Mavzu: To'plam va to'plam nazariyasining elementlari.

Ajratilgan vaqt: ma'ruza-8 soat
amaliy mashg'ulot.-8 soat

Asosiy savollar:

1. To'plam nazariyasining elementlari.
2. Xalqa va algebra.

Ma'ruzaga oid tayanch tushuncha va iboralar:

To'plamning quvvati, sannoqli, sannoqsiz to'plamlar, ekivivalentlik, Kantor–Bernshteyn teoremasi, akslantirishlar, binar munosabatlar, xalqa, algebra, yarim xalqa, minimal algebra.

Ma'ruzaga oid muammolar:

1. O'lchovli va o'lchovsiz to'plam quvvati.
2. To'plamlarni akslantirish.

1-savol bo'yicha dars maqsadi:

1.Xar-xil to'plamlarning quvvatini tushintirish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. Sanoqli va sannoqsiz to'plamlarning quvvatini tushintira oladi.
2.To'plamlarni bir-biriga akslantira oladi.

1 - savol bayoni:

To'plam ta'riflanmaydigan matematik tushuncha bo'lib ba'zi bir narsalar, buyumlar, ob'ektlarni birgalikda qarash natijasida vujudga keladi.
Masalan barcha natural sonlarni birgalikda qarash natural sonlar to'plamini, to'g'ri chiziqda etuvchi nuqtalarni birgalikda qarash shu to'g'ri chiziq nuqtalari to'plamini beradi.

1-TA'RIF: To'plamni tashkil etuvchi ob'ektlar shu to'plamning elementlari deyiladi.

To'plamlar odatda lotin yoki grek alifbosining bosh xarflari bilan, ularning elementlari esa shu alifboning kichik xarflari bilan belgilanadi.

Agar A To'plam a, b,c, . . . elementlardan tuzilgan bo'lsa, u $A= \{ a,b,c, ...\}$ ko'rinishda yoziladi. To'plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz to'plam bo'ladi.

2-TA'RIF: A to'plamning xar bir elementi B to'plamda mavjud bo'lsa va aksincha B to'plamning xar bir elementi A to'plamda mavjud bo'lsa, A va B to'plamlar o'zaro teng (bir xil) deyiladi va bu to'plamlarning tengligi $A=B$ (1) orqali belgilanadi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, ikkita to'plamning tengligi aslida ularning bitta to'plam ekanligini bildiradi.

Masalan:

$$A= \{2,5\},\ B= \{x \mid x^2- 7x+10 =0\} \text{ bo'lsa } A=B$$

A-tekislikdagi teng tomonli uchburchaklar to'plami, B-shu tekislikdagi ichki burchaklari teng bo'lgan barcha uchburchaklar to'plami bo'lsa, o'z-o'zidan ma'lumki, $A=B$ bo'ladi.

3-TA'RIF: B to'plamning xar bir elementi A to'plamda mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning qism to'plami deyiladi va B ning qism to'plam ekanligi $B\subseteq A$ ko'rinishda belgilanib, $\subseteq$ belgi saqlanishlik belgisi deb yuritiladi.

Agar A,B,C to'plamlar bitta to'plamning qism to'plamlari deb qaralsa, u xolda saqlanishlik munosabati quyidagi asosiy xossalarga ega:

a) $A\subseteq A$

b) $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, u xolda $A=B$

v) $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ dan $A \subseteq C$ ekanligi kelib chiqadi.

4-TA'RIF: B to'plamning barcha elementlari A to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan barcha A da yana B ga tegishli bo'lmagan elementlar xam mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning xos qism to'plami deyiladi.

Xos qism to'plam $B \subseteq A$ (2) orqali belgilanadi.

5-TA'RIF: Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deb ataladi va u $\varnothing$ orqali belgilanadi.

6-TA'RIF: A to'plamning o'zi va $\varnothing$ to'plam shu A to'plamning xosmas qism to'plami deyiladi.

A va B to'plamlarning tengligini isbotlash uchun $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ ekanligi ko'rsatiladi.

Biror A to'plam B to'plamning qism to'plami ekanligini isbotlash degan so'z A ning ixtiyoriy elementi B ga tegishli ekanligini ko'rsatish demakdir.

Tegishlilik $\in$ va saqlanishlik $\subset$ munosabatlari bir-biridan farq qiladi. Masalan, tegishlilik munosabati uchun saqlanishlik munosabatining biz yuqorida ko'rib o'tgan uchta xossasi bajarilmaydi.

Eslatma: Natural, butun, ratsional va xaqiqiy sonlar to'plamlarini mos ravishda N,Z,Q va R orqali belgilaylik. Unda mazkur to'plamlar uchun $N \subset Z \subset Q \subset R$ munosabatlar o'rinlidir.

Isalgan n ta elementli to'plamning barcha qism to'plamlari soni 2n ga teng. Bu tasdiqni matematik induktsiya printsipi asosida isbotlash mumkin.

1-TA'RIF: A va B to'plamlarning kamida bittasiga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tuzilgan C to'plam shu to'plamlarning birlashmasi deyiladi va $A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi.

Yuqoridagi ta'rifga ko'ra C to'plamni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$C = A \;\; B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}$

To'plamlar birlashmasi tushunchasini itsalgan chekli sondagi to'plamlar uchun xam kiritish mumkin.

n ta $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamining birlashmasi

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \underset{i=1}{\cup} A_i$ ko'rinishda yoziladi.

2-TA'RIF: A va B to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plam shu to'plamlar kesishmasi deyiladi va u $A \cap B$ ko'rinishda belgilanadi.

Misol: A= {1,3,5,7} , B= {1,2,3,4,5,6} bo'lsa, u xolda

$A \cap B$= {1,3,5} bo'ladi. n ta to'plamning kesishmasi

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \underset{i=1}{\cup} A_i$ ko'rinishda yoziladi.

3-TA'RIF: A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deb A ga tegishli, lekin B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi va u $A \Delta B$ ko'rinishda belgilanadi.

Misol: A= {1,3,5,7}, B= {1,2,3,4,5,6}

A\B ={7}

B\A= {2,4,6}

4-TA'RIF: A ning B da xamda B ning A da bo'lmagan elementlari to'plami shu to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va u $A \Delta B$ ko'rinishda belgilanadi.

Misol: A= {1,3,5,7}, B= {1,2,3,4,5,6} bo'lsa,

$A \Delta B$= {2,4,6,7} bo'ladi.

A va B to'plamlarning ayirmasi va simmetrik ayirmasini mos ravishda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$A \backslash B = \{x \mid x \in A,\ x \in B\}$ $A \Delta B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\} \cup \{x \mid x \notin A,\ x \in B\}$

5-TA'RIF: B to'plam A ning qism to'plami bo'lganda A\B to'plam B ni A gacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi va u $\overline{B}$ yoki CAB orqali yoziladi.

B= {1,2,3} A= {1,2,3,4,5} CAB= {4,5}

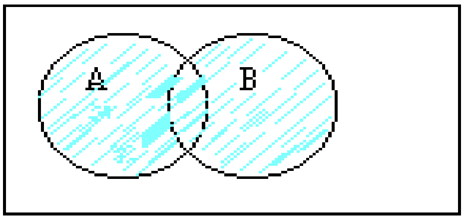
Yuqoridagi ta’rifga asosan $B\cup\overline{B}=A$ bo’ladi. Agar A to’plam boshqa to’plamning xos qism to’plami deb qaralmasa, u xolda uning to’ldiruvchisi ∅ bo’lib, ∅ ning to’ldiruvchisi esa A bo’ladi.

6-TA’RIF: Xar qanday to’plamning xos qism to’plami deb qaralmagan to’plam universial to’plam deyiladi va u ∪ orqali belgilanadi.

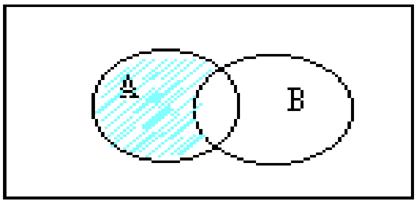
7-TA’RIF: A to’plam elementlarini birinchi, B to’plam elementlarini ikkinchi qilib tuzilgan barcha juftliklar to’plami A va B to’plamlarning dekart (to’g’ri) ko’paytmasi deyiladi va u AXB orqali belgilanadi.

∪ universal to’plami to’g’ri to’rtburchak bilan va uning xos qism to’plamlarini shu to’rtburchak ichidagi doiralar bilan tasvirlanishini qabul qilamiz. Bu xolda to’rtburchakning shitrixlangan bo’lagi A qism to’plam bo’lsa, shitrixlanmagan bo’lagi A to’ldiruvchi to’plam bo’ladi.

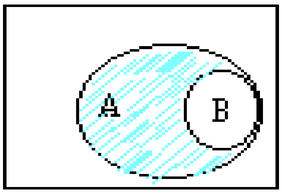
Bundan A=A ekanligi ravshan.



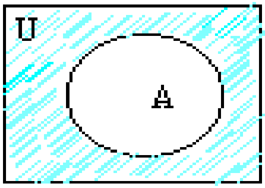
AUB



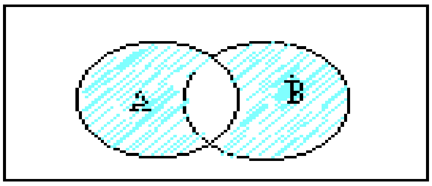
A\B



$C_BA=C_AB$



$C_AU=CA$



$A\Delta B=B\Delta A$

1. $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. $A\cup B$
5. $A\cup U=U$
6. $A\cap U=A$
7. $A=A$
8. $\varnothing=U$, $\overline{U}=\varnothing$
9. n(A)deb A to’plamning elementlarini belgilaymiz. U xolda

$$n(A\cup B)qn(A)Qn(B)-n(A\cap B$$

Odatda chekli va chiksiz to’plamlarni farq qiladilar. Matematikada ko’pincha cheksiz to’lamlar bilan ish ko’rishga to’g’ri keladi.

Masalan, natural sonlar to’plami, uzluksiz funktsiyalar to’plami bular cheksiz to’plamidir.

Endi ikkita chekli A va B to’plam berilgan bo’lsin. Ularning elementlar soniga qarab solishtiriladi. Masalan: studentlar va stunlar soni.

1-TA’RIF. Agar A va B to’plamlar orsida o’zaro bir qiymatli musabat mavjud bo’lsa, u holda bu to’plamlar ekvivalent yoki teng quvvatli to’plamlar deyiladi va A→B deb yozladi.

Odatda A to’plamga ekvivalent bo’lgan to’plamlar sinfi $\overline{\overline{A}}$ bilan belgilanadi va $\overline{\overline{A}}$ ni A to’plamning quvvati yoki kardinal soni deb ataladi. Chekli to’plamning quvvati sifatida to’plam elementlarning soni olinadi.

$$A = \{2,4,6,8...,200\}\overline{\overline{A}}$$

Masalan: $B = \{1,2,3,...180\}\overline{\overline{B}}$

$A = 100 < B = 150$

Chekli to’plamlar uchun quyidagilarni qayd qilamiz.

1) $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ yoki $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ yoki $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$

2) Agar {1,2,3,…,n}qN desak, u holda

N_1, N_2, N_n,… (1)

To’plamlar barcha chekli “etalhon” to’plamlarni beradi, ya’ni ixtiyoriy chekli to’plam (1) ning birotasiga ekvivalent bo’ladi.

3) $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$

Yuqoridagi xossalar cheksiz to’plamlar uchun ko’rib o’tishdan avval quyidagilarni o’rganamiz. Ixtiyoriy to’plamlarning quvvatlarini solishtirish uchun quyidagi ta’rifni kiritamiz.

2-TA’RIF: Quvvatlari A=α, B=β bo’lgan A va B to’plamlar berilgan bo’lsin. Agar A va B lar ekvivalent bo’lmasa va B da A ga ekvivalent B qism mavjud bo’lmasa, u holda B ninig quvvati A ning quvvatidan katta deyiladi $\alpha>\beta$ va yoki $\alpha<\beta$ deb yoziladi.

Cheksiz to’plamlarning eng soddasi natural sonlar to’plamidir.

1-Ta’rif. Natural sonlar to’plam va unga ekvivalent bo’lgan to’plamlar sanoqli to’plamlar deyiladi. Aks holda sanoqsiz to’plamlar deyiladi .

Misollar: 1)Chekli to’plamlar sanoqli.

Teorema.1. Chekli yoki sanoqli to’plamlarning soni chekli yoki sanoqli birlashmasi ham chekli yoki sanoqli to’plamdir.

Teorema.2. Har kanday cheksiz to’plamning sanoqli to’plamdan iborat qismi mavjud.

Teorema .3. Ratsional sonlar to’plami sanoqli .

Teorema .4. (0,1) segmentlarning nuqtasidan iborat to’plam sanoqsizdir.

Isbot. Eq[0,1] segmentning nuqtalaridan iborat to’plam sanoqli deb faraz qilaylik. U holda E to’plamning barcha elementlarini nomerlab chiqish mumkin.

$$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \sim \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$$

E ni 1/3 va 2/3 nuqtalar bilan uchta teng segmentga bo’lamiz.

[0; 1/3], [1/3; 2/3], [2/3; 1]

Ravshanki, X_1 element bir vaqtda bu uchala segmentning xar biriga tegishli bo’la olmaydi. Demak, ularning kamida bittasiga kirmaydi. O’sha segmentni E_1 bilan belgilaymiz. Endi E_1 ni uchta teng segmentga bo’lamiz.Bu segmentlarning kamida bittasiga x_2 nuqta kirmaydi: O’shani E_2 bilan belgilaymiz. E_2 o’z navbatida yana uchta teng segmentga bo’lamiz va xakozo.

Natijada biri ikkinchisining ichiga joylashgan

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset ..... \supset E_n \supset ...$$

Segmentlar ketma-ketligiga ega bo’lamiz.Bu to’plamlar yasalishiga ko’ra x_n nuqta E_n ga kirmaydi. E_n segment uzinligi $1/3^n = 3^{-n}$ bo’lib, n ortganda nolga intiladi.Limitlar nazariyasiga asosan E_n segmentlarning barchasiga kiruvchi birgina y nuqta mavjud:

$$y \in E_n (n = 1,2...)$$

Bu nuqta E To’plamga tegishli bo’lgani uchun (1) ketma-ketlikda mavjud, ya’ni shunday m topiladiki, bu m uchun $y = x_m$ bo’ladi. Ikkinchi tomonda

$$X_m \notin E_m, y \in E_m$$

munosabatlardan $Y \neq x_m$ kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi.

TA’RIF. [0,1] segmentdagi nuqtalar to’plamiga ekvivalent bo’lgan to’plamlarni kontinuum quvatli to’plam deyiladi.

5- TEOREMA. [a,b] segment sanoqsiz to’plam, kontinuum quvatga ega.

ISBOT. Xaqiqattan, agar [a,b] segmentning o’zgaruvchisi elementini z bilan [0,1] segmentning o’zgaruvchi elementini x bilan belgilasak, u holda

$$z = a + (b-a)x, x \in [0,1].$$

almashtirish bu segmentdagi nuqtalar to’plami kontiniym quvvatga ega.

6- TEOREMA. [a,b] yoki (a,b], (a,b) kontinum quvvatga ega.

Isbotini mustaqil bajaring.

AKSLANTIRISh VA ULAR USTIDA AMALLAR

Akslantirishlar (funktsiyalar) tushunchasi matematika fani uchun eng muxim tushunchalardan biridir.

1-TA’RIF: Agar A to’plamning biror x elementlari uchun biror qonun qoida bilan B to’plamning y elementi mos keltirilsa, u xolda bu qonun yoki qoida x ni y ga akslantirish deyiladi va u f deb belgilanadi.

Bu ta’rif quyidagicha qabul qilingan:

Yqf(x) yoki f: $A \to B$; bunda A to’plam f akslantirishning aniqlanish soxasi deb yuritiladi. yqf(x) shartni qanoatlantiruvchi (x,y) juftliklar to’plami esa funktsiya grafigi deyiladi. (akslantirish grafigi deyiladi)

2 -TA’RIF: Agar A=B bo’lsa, f akslantirish to’plamni o’z-o’ziga akslantiruvchi almashtirish deyiladi.

F:A$\to$B akslantirishda x$\in$A ga mos keluvchi B To’plam elemrnti f(x) deb belgilanadi va x ning obrazi (tasviri) deyiladi. X- esa asli (proobrazli) deyiladi.

Ta’rifga asosan ixtiyoriy x yagona f(x) tasvirga ega, lekin B ning ixtiyoriy elementi xar doim songa ega bo’lavermaydi.

Misol: 1) A- odamlar To’plami: B- musbat ratsional sonlar To’plami bo’lsin. F:A$\in$B munosabat xar bir odamga uning santimetr bilan xisoblangan bo’yini mos qo’yilishi. Eni 2000 sm ga mos keluvchi odam yuq. 175 sm ga mos odamlar bitta emas. 2) F:A$\in$ x^2 moslikni qurib turishi mumkin.

3-TA’RIF: Agar B to’plamning xar bir elementi asliga ega bo’lsa, u xolda f:A$\in$B akslantirish syurektiv (utsiga) akslantirish deyiladi.

f:x$\in$ x^2 -syurektiv akslantirish.

4-TA’RIF:Agar B to’plamning xar bir y elementi bittadan ortiq asliga ega bo’lmasa bunday f:A$\in B$ akslantirish inektiv (ichiga) akslantirish deyiladi.

Bunda $x_1 \neq x_2 \quad y_1 \neq y_2$

5-TA’RIF: Agar f:A$\to$B akslantirish bir vaqtning o’zida syurektiv va inektiv bo’lsa, bunday akslantirishga biektiv akslantirishlar dwyiladi.

A va B chekli To’plamlar uchun n(A)$\geq$n(B), da syurektiv, n(A)$\leq$ n(B), da inektiv, n(A)q n(B), da biektiv akslantirish deyiladi.

n(A)- bunda A To’plam elementlar soni.

Masalan: Odamlar 50000 bo’lsin –A. 20000 gacha bo’lgan ratsional sonlar to’plami –B n(A)>n(B)

6-TA’RIF: x$\in$A, f: A$\to$B, $A_1 \leq$A bo’lsin. F(x) tasvirlarning {f(x)} To’plamiga A1 To’plamning f akslantirishdagi tasviri deyiladi va u f(x) orqali belgilanadi.

7-TA’RIF: Agar $B_1 \subseteq B$ bo’lsa, B To’plamning tula asli deb B_1 ga kiruvchi barcha elementlar asllarining To’plamiga aytiladi u f-1(B) orqali belgilanadi.

fq Dom fq {x(shunday y mavjudki, uning uchun (x,y)$\to$(F} (fq infY) (shunday x mavjudki, uning uchun (x,y)(f} to’plamlar mos ravishda funktsiyaning aniqlanish va qiymatlar soxasi deb yuritiladi.

8-TA’RIF: A To’plamning xar bir x elementini yana shu x elementga o’tkazuvchi (akslantiruvchi) akslantirishga ayniy akslantirish deyiladi va

A : A$\rightarrow$ A orqali belgilanadi.

Endi akslantirishlar kompozitsyasi (superpozitsiyasi- yani ko’paytmasi) xaqida tuxtab utamiz.

Faraz qilaylik A,B va C To’plamlar berilgan bo’lsin. Ular uchun f:A$\rightarrow$B va G:B$\rightarrow$C lar urnatilgan bo’lsin.

Mazkur akslantirishlar yordamida A ni c ga utkazuvchi H akslantirishni tuzish mumkin. Buning uchun A ning xar bir x eelementiga f(x) $\in$B ni x quyamiz. Xar bir f(x) ga esa C To’plamning g$\in$f(x)) elementini mos quyamiz. Bu ko’paytma deyiladi.

TEOREMA: f:A$\rightarrow$B akslantirish teskarilanuvchi bulishi uchun bu akslantirish o’zaro bir qiymatli (biektiv) bulishi zarur va kifoya.

Muxokama uchun savollar:

1.1. To’plam quvvati tushinchasini ayting
1.2. Sanoqli va sanoqsiz to’plamni izoxlang
1.3. Akslantirishni turlarini ayting.
1.4. Binar munosabat turlarini izoxlang.

2-savol bo’yicha dars maqsadi:

1. Xalqa va algebrani tushintirish

Identiv o’quv maqsadi:

1. Xalqani tushintira oladi.
2. Algebrani tushintira oladi.

2 - savol bayoni:

To’plamlar sistemasida aniqlangan haqiqiy funktsiya to’plam funktsiyasi deyiladi.Quyida biz ba’zi bir xossalarga ega bo’lgan to’plamlar sistemasini qaraymiz.

1- ta’rif. Agar N sistemaning istalgan ikkita A va B elementi uchun $A \cap B \in H$ va $A \Delta B \in H$ munosabatlar o’rinli bo’lsa, u holda N sistema to’plamlar xalqasi deyiladi.

2- ta’rif. Agar N to’plamlar sistemasining biror E elementi va shu sistemaning istalgan A elementi uchun $E \cap A = A$ tenshlik o’rinli bo’lsa , u holda E element N sistemaning birlik elementi deyiladi.

3- ta’rif. Birlik elementga ega bo’lgan N xalqa to’plamlar alebrasi (qisqacha algebra) deyiladi.Quyidagi teoremma xalqa a’rifidan kelib chiqadi.

1- teorema. Istalgan sondagi $\{H_2, \alpha \in \mathrm{I}\}$ xalqalar sistemasining ko’paytmasi $\{H_2, \alpha \in \mathrm{I}\}$ xam xalqadir.

2- teorema. Xar qanday N to’plamlar sistemasi uchun shu sistemani o’z ichiga olgan yagona minimal xalqa mavjud .

4-ta’rif. N to’plamlar sistemasi uchun $\phi \in H$ va xar qanday $A \in H$ va $B \in H$ uchun $A \cap B \in H$ bo’lib, shu sistemaning A va A_1 elementlari $A_1 \subset A$ munosabatni qanoatlantirganda N sistemadan o’zaro kesishmaydigan soni chekli A_2 , A_3 ,……. A_n elementlar topilsaki,ular uchun $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ tenglik o’rinli bo’lsa, u holda N sistema yarim halqa deyiladi.

3- teorema. N yarim halqani o’z ichiga olgan minimal halqaning har bir A elementi N yarim halqadan olingan soni chekli o’zaro kesishmaydigan A , A , .. , A

to'plamlarning yig'indisidan ibograt , ya'ni har bir A ushbu ko'rinishga ega:
$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n$, $A_1 \in H$, $\mathrm{I} = 1_1 N$, $A_i \cap A_j = \otimes$ $i \neq j$

5- ta'rif.Agar N to'plamlar xalqasida $A_n \in H$ nq1,2,3… munosabatdan $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$ $A_n \in H$ munosabat kelib chiqsa, bunday xalqa xalqa deyiladi.Birlik elementga ega bo'lgan v-xalqa valgebra deyiladi.

6-ta'rif Agar N to'plam xalqasida munosabatdan $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$ $A_n \in H$ munosabat kelib chiqsa, bunday xalqa v xalqa deyiladi.
4- teoremma. Xar qanday ikki A va B tuplam uchun quyidagi ayniyatlar o'rinli:

1. $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$

2. $A \cup B = (A \cup [B \setminus (A \cap B)]$
3.A\B= $A \Delta (A \cap B)$
4.CA $\Delta CB = A \Delta B$
5.B=($A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B]$5-teoremma. Har qanday B, B_1, B_2 xamda $A_1, A_2, ...A_n$ to'plamlar uchun ushbu
1. $(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_3)$
2. $(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$

Muxokama uchun savollar:
2.1. Xalqa deb nimaga aytiladi?
2.2. Algebra deb nimaga aytiladi?
2.3. Xalqa va algebra xossalarini ayting.
2.4. Minimal algebrani xosil qiling.

Ma'ruzaga oid ilmiy muammolar:

Agar M to'plamning quvvati a ga teng bo'lib, M ning qism to'plamlaridan tuzilgan N to'planing quvvati b ga teng bo'lsa, u holda b quvvat a dan katta ekanligi isbot etildi.

Endi quvvati b dan kichik, lekin a dan katta bo'lgan R to'plam mavjudmi, degan masala kelib chiqadi. Bu fanda kontinuum muammosi deb ataladi. Bu muammo fanda hal etilgan emas.

II. **Amaliy mashg'ulot** To'plam nazariyasining elementlariga doir misol va masalalarni yYechish

Ajratilgan vaqt 8- soat

Dars maqsadi.
1. Sanoqli va sanoqsiz to'plamlarni misollar yYechish bilan o'rganish.
2. Xalqa va algebrani tushintirish.

Identiv o'quv maqsadi:
1. Sanoqli va sannoqsiz to'plamning kuvvatini aniklaydi.
2. Binar munosabatlarni tushintira oladi.
3. Xalqa va algebraning farkini ajrata oladi.

Amaliy mashg'ulot: zaruriy tushuncha va teoremmalar.

Agar A va B to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, A va B to'plamlar ekvivalent deyiladi yoki teng quvvatli to'plamlar deyiladi.

Ekvivalentlik $\approx$ deb belgilanadi, ya'ni $A \approx V$.

Ikkita chekli A va B to'plamlardagi elementlar soni bir xil bo'lsa, bunday A va B to'plamlar ekvivalent yoki teng quvvatli bo'ladi.

Shunday qilib to'plamlarning teng quvvatli (bir xil quvvatlilik) tushunchasi chekli to'plamlar elementlar sonining bir xillik tushunchasining umumlashmasidan iborat.

Ixtiyoriy A to'plamning quvvatini $\overline{\overline{A}}$ yoki m(A) deb belgilaymiz. Chekli to'plam quvvati to'plamni tashkil etuvchi elementlar sonidan iborat.

Masalan:

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{23}\}$, $\overline{\overline{A}}=23$, m(A)=23

Agar A to'plam N={1,2,3,…} natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lsa, A sanoqli to'plam deyiladi.

Sanoqli to'plamning quvvatini $\aleph_0$ harf bilan belgilaymiz

$$m(N)=\aleph_0 \quad \text{yoki} \quad \overline{\overline{N}}=\aleph_0$$

Natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lmagan cheksiz to'plam sanoqsiz to'plam deyiladi.

Teorema. [0,1] kesmadagi nuqtalar to'plami sanoqsizdir.

Ta'if. [0,1] kesmadagi nuqtalar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plam kontinuum quvvatli to'plam deyiladi.

Kontinuum to'plam quvvatini s harf bilan belgilaymiz.

$$U=[0,1], \quad m(U)=c \quad \text{yoki} \quad \overline{\overline{U}}=s$$

2. Asosiy teoremalar.

1.1.teorema. (Kantor-Bernshteyn) Agar A to'plamning A_1 qism to'plami $A_1 \approx V$ bo'lib B to'plamning V_1 qism to'plami $V_1 \approx A$ bo'lsa, u holda $A \approx V$ bo'ladi.

1.2.teorema. Chekli yoki sanoqli miqdoridagi chekli yoki sanoqli to'plamlarning birlashmasi, yana chekli yoki sanoqli to'plamdan iborat.

1.3.teorema. Agar A to'plamning elementlari chekli parametrlar bilan aniqlangan bo'lib, har biri bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda sanoqli to'plamlar qiymatlarini qabul qilsa, u holda bunday $A=\{a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\}$ to'plamning quvvati m(A)q$\aleph_0$ bo'ladi.

Bu teoremani quyidagicha ham keltirish mumkin.

1.3A. teorema. Agar A to'plamning elementlari n parametr bilan aniqlangan bo'lib, bularning har biri boshqasiga bog'liq bo'lmagan holda sanoqli to'plam qiymatlarini qabul qilsa, ya'ni

$$A=\{a_{x_1,x_2,\ldots,x_n}\}, \qquad x_k=\{x_k^1,x_k^2,\ldots\}; \qquad k=1,2,\ldots,n$$

bo'lsa, u holda $m(A)=\aleph_0$ bo'ladi.

1.4.teoerema. Chekli yoki sanoqli miqdordagi kontinuum to'plamlarning birlashmasi yana kontinuum to'plamdan iborat.

1.4A.teorema. Har qanday [*a*,*b*] segmentdagi nuqtalar to'plami kontinuum quvvatli to'plamdir.

1.5.teoerema. Agar A to'plamning elementlari $A=\{a_{i_1,i_2,...}\}$ sanoqli parametrlar bilan aniqlangan bo'lib har biri bir-biriga bog'liq bo'lmasdan ikkita har xil qiymatlarni qabul qilsa, u holda bunday A to'plam quvvati m(A)=s bo'ladi.

1.6.teorema. Agar A to'plamning elementlari $A=\{a_{i_1,i_2,...}\}$ chekli yoki sanoqli parametrlar tanlash bilan aniqlangan bo'lib har biri boshqasiga bog'liq bo'lmagan holda kontinuum qiymatni qabul qilsa, u holda bunday A to'plam quvvati m(A)=s bo'ladi.

1.7.teorema. Uzluksiz funktsiyalar to'plami kontinuum

m(C[a,b])=c

1.8.teorema. Faraz qilaylik M ixtyoriy to'plami bo'lsin. Agar elementlari M ning hamma qism to'plamlaridan iborat bo'lgan to'plam ω bo'lsa, u holda ω ning quvvati berilgan M to'plamning quvvatidan katta bo'ladi, ya'ni

m(ω)>m(M).

Demak, biz berilgan M ixtiyoriy to'plamdan quvvati undan katta bo'lgan ω to'plamni tuzishimiz mumkin va bundan yana quvvati ω nikidan katta bo'lgan boshqa to'plamni tuzishimiz mumkin. Shunday qilib biz quvvatlarning yuqoridan chegaralanmagan shkalasini hosil qilishimiz mumkin.

Agar M ning quvvatini α desak, u holda ω ning quvvati 2^{α} bo'lib, 1.8.teorema ni

$$\alpha<2^{\alpha}$$

tengsizlik ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu tengsizlik M chekli to'plam bo'lganda ko'rinib turibdi.

Agar $\alpha=\aleph_0$ bo'lsa, u holda $\aleph_0<2^{\aleph_0}$, ya'ni natural sonlar to'plamidan tuzilgan qism to'plamlar to'plamning quvvati, natural sonlar to'plamning quvvatidan katta.

1.9.teorema. natural sonlar to'plamining hamma qism to'plamlaridan tuzilgan to'plamning quvvati kontinuumdir, ya'ni

$$2^{\aleph_0}=c$$

1.10.teorema. Chekli yoki sanoqli miqdordagi sanoqli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi sanoqli to'plamdir.

1.11.teorema. Agar A va B to'plamlar kontinuum quvvatga ega bo'lsa, u holda ularning Dekart ko'paytmasi AxV ham kontinuum quvvatga ega bo'ladi.

Agar $\alpha=c$ kontinuum bo'lsa, u holda 2^s – giperkontinuum deyiladi.

1.12.teorema. [0,1] segmentda berilgan haqiqiy funktsiyalar to'plamining quvvati 2^s ga teng, ya'ni giperkontinuum quvvatidan iborat.

1.13.teorema. To'g'ri chiziqning barcha qismlaridan tuzilgan to'plamlar tizimining quvvati 2^s ga teng.

3. Masalalar yYechish.

1.1.-masala. [a,b] kesmadagi nuqtalardan tuzilgan hamma ketma-ketliklar to'plami kontinuum quvvatga ega ekanligi isbotlansin.

Yechish. [a,b] kesmadagi nuqtalardan tuzilgan hamma ketma-ketliklar to'plamini A bilan belgilaylik. U holda har bir *a* element ($a\in$A) $a=a_{i_1 i_2 i_3 ...}$ sanoqli parmetrlar tanlash bilan aniqlangan bo'lib, har qaysi boshqasiga bog'liq bo'lmagan holda [a,b] nuqtadagi nuqtalar to'plami qanday quvvatga ega bo'lsa, shuncha qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni kontinuum qiymat qabul qiladi. U holda 1.6.teoremaga asosan m(A)=s bo'ladi.

1.2.-masala. Agar

A={x(t)$\in$C[0,1]: x(0)=0}

bo'lsa, A to'plamning quvvati nimaga teng?

Yechish. Faraz qilaylik

$$A_1=\{x(t)\in C[0,1]:\ x(t)=\alpha t,\ \ 0<\alpha\le 1\}$$

bo'lsin. U holda $A_1\subset A$ va $m(A_1)=c\le m(A)$ bo'lishi ko'rinib turibdi. Ikkinchi tomondan $A\subset S[0,1]$ va $m(C)=s$ bo'lganidan

$$m(A)\le m(C)$$

$A\supset A_1$ dan $m(A)\ge m(A_1)=c$. Demak, $m(A)=s$

1.3.-masala.

$$A=\left\{x(t)\in C[0,1]:\ \int_0^{\frac{1}{2}}x(t)dt=0\right\}$$

to'plam quvvati nimaga teng?

Yechish. Faraz qilaylik

$$A_1=\{x(t)\in C[0,1]:\ \ x(t)=0,\ 0\le t\le \tfrac{1}{2};$$
$$x(t)=\alpha\left(t-\tfrac{1}{2}\right),\ \tfrac{1}{2}<t\le 1,\ 0\le\alpha\le 1\}$$

bo'lsin. U holda $A_1\subset A$ va $m(A_1)=c\le m(A)$ ekanligi ravshan.

Ikkinchi tomondan $A_1\subset S[0,1]$ va $m(A)\le m(S)=c$

Demak,

$$m(A)=c$$

1.4.-masala. Butun koeffitsientli darajasi n dan oshmaydigan algebraik ko'pxadlar to'plamining quvvati nimaga teng?

Yechish. Faraz qilaylik R masala shartidagi algebraik ko'pxadlar to'plami bo'lsin. Agar $R(t)\in R$ bo'lsa, u holda

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$$

ko'pxad (n+1)-ta $\{a_k\}_0^n$ ko'rinishdagi parametr bilan aniqlangan bo'lib bularning har biri boshqasiga bog'liq bo'lmagan holda butun sonlarni qabul qiladi, ya'ni

$$m\{a_k\}=a,\quad k=0,1,2,\ldots,n$$

Shuning uchun 1.3.teoremaga asosan $m(P)=a$

1.5.-masala. Butun koeffitsioentli hamma algebraik ko'phadlar to'plamining quvvati nimaga teng?

Yechish. P_n orqali 1.4.teoremadagi algebraik ko'phadlar to'plamini va R orqali hamma butun koeffitsientli ko'phadlar to'plamini belgilaylik. U holda

$$P=\bigcup_{n=0}^{\infty}P_n$$

Endi 1.2.teoremaga asosan m(P)qa ekanini ko'ramiz.

1.6.-masala. 6 raqami qatnashmaydigan o'nli kasr bilan ifodalanuvchi [0,1] kesmadagi nuqtalar to'plamining quvvati nimaga teng?

Yechish. Masala shartidagi [0,1] kesmadagi nuqtalar to'plamini A deb va [0,1] kesmadagi sonlarni to'qqizli kasrga yoyilmasi to'plami B bo'lsin.

Bu A va B to'plam orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. Buning uchun A to'plamdagi har bir kasrda 9 raqamni oltinchi o'ringa yozamiz. U holda A va B to'plam elementlari orasidagi moslik bir xil to'qqiz raqamli yoyilma bilan ta'minlangan bo'ladi.

Demak, m(A)qs

Eslatma. Agar $x\in[0,1]$ bo'lsa, u holda $x=0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ bunda har bir α_k boshqasiga bog'liq bo'lmagan holda o'nli yoyilmada mumkin bo'lgan

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

qiymatlardan qabul qiladi va to'qqiz raqamli yoyilmada mumkin bo'lgan

0,1,2,3,4,5,6,7,8

qiymatlardan qabul qiladi.

1.7.-masala.

$$A\{(x,y)\in R^2:\ |x|+x=|y|+y,\ x^2+y^2\le 1\}$$

to'plamning quvvati nimaga teng?

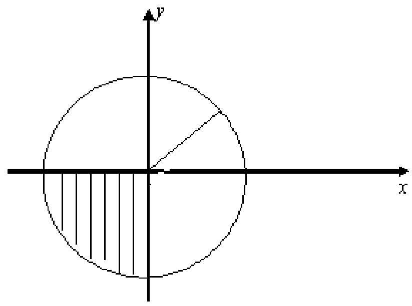
Yechish. Markazi koordinat boshida va radiusi birga teng bo'lgan doiraning nuqtalar to'plamini A_1 deb belgilaylik. Tekislikning uchinchi chorakdagi nuqtalar to'plamini (chegarasidagilar bilan birgalikda) va u=x, x≥0 nurda yotuvchi nuqtalar to'plamini A_2 deb belgilaylik. U holda

$$A=A_1\cap A_2$$

$$A_1=\{(x,y)\in R^2:\ x^2+y^2\le 1\}$$

$$A_2=\{(x,y)\in R^2:\ |x|+x=|y|+y\}$$

bo'ladi. (shaklga qarang)



$A\subset R^2$ bo'lganda $m(A)\le m(R^2)=c$

Endi

$$B=\{(x,y)\in R^2:\ y=x,\ x\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\}$$

bo'lsin.

U holda $V\subset A$ va m(B)=s ekanligi ko'rinib turibdi.

Shunday qilib,

$$s=m(V)\le m(A)$$

Endi $s\le m(A)$ va $m(A)\le c$ tengsizliklardan

$$m(A)=c$$

kelib chiqadi.

1.8.-masala. A=[0,1], $B=Q\cap[0,1]$ bo'lsa, u holda D=AxV to'plam quvvatini toping. Bunda+ratsional sonlar to'plami.

Yechish. A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi (x,u) juftlar to'plamidan iborat bo'lib $x\in A$, $u\in V$ lardan iboratdir. Shuning uchun D to'plam quyidagicha ifodalanadi.

$$D=\{(x,y)\in R^2:\ 0\le x\le 1,\ y=\alpha,\ \alpha\in B\}$$

Endi $D\subset R^2$ bo'lganidan $m(D)\le m(R^2)=c$

Ikkinchi tomondan $[0,1]\subset D$ bo'lganidan

$$m([0,1])=c\le m(D)$$

Demak, m(D)=c

1.9.-masala. «Agar A sanoqli to'plam bo'lsa, u holda $\overline{A}$ to'plam ham sanoqli» deb tasdiqlash mumkinmi? $\overline{A}$ esa A ning tutashmasi.

Yechish. Faraz qilaylik+ratsional sonlar to'plami bo'lsin, ya'ni

$$Q\subset R=(-\infty,\infty)$$

U holda

$$m(Q)=\aleph_0$$

Endi $\overline{Q}$ =R bo'lganidan va m(R)=c bo'lganidan

$$m(\overline{Q})=c$$

hosil bo'ladi. Demak, masaladagi tasdiq o'rinli emas.

1.10.-masala. Kompleks tekislikda sinz funktsiya faqat mavhum qiymatga ega bo'ladigan nuqtalar to'plamining quvvatini toping.

Yechish. Izlanayotgan to'plamni A deb belgilaylik

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin xchy + i\cos xshy$$

$$shy = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \qquad chy = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

bo'lganidan A to'plamda faqat

$$\sin x ch y = 0$$

bo'ladigan R^2 fazoning nuqtalari kiradi. Lekin chy≠0, y∈R. Shuning uchun

$$A=\{(x,y)\in R^2: \ \sin x=0, \ |y|<\infty\}$$

$A\subset R^2$ bo'lganidan m(A)≤c.

Ikkinchi tomondan

$$B=\{(x,y)\in R^2: \ x=0, \ |y|<\infty\}$$

to'plam A to'plam ichida joylashgan, ya'ni V⊂A.

Endi m(B)=s ekanligini qayd qilsak va V⊂A munosabatni e'tiborga olsak.

$$s=m(V)\le m(A)$$

Nihoyat m(A)≤s va m(A)≥s tengsizlikdan m(A)=s kelib chiqadi, ya'ni masala shartidagi to'plam quvvati kontinuumga teng.

1.11.-masala. [0,1] va $[0,1]\setminus\left\{\frac{1}{n}\right\}$ to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

Yechish. A va B to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslikni quyidagicha o'rnatish mumkin.

Faraz qilaylik

$$A_1 = \left\{x\in[0,1]: \ x=\tfrac{\sqrt{2}}{2^n}, \ n\in N\right\}, \qquad A=[0,1]$$

$$B_1 = \left\{x\in[0,1]: \ x=\tfrac{1}{n}, \ n\in N\right\}, \qquad B=[0,1]\setminus\left\{\tfrac{1}{n}\right\}$$

Endi

$$C_1 = A_1\cup B_1 = \left(1, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{1}{3}, ...\right)$$

deb belgilaylik.

B_1 va C_1 to'plamlar sanoqli. Shuning uchun uning elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslikni nomerlash qoidasi bo'yicha o'rnatish mumkin.

$$A/C_1=B/A_1$$

bo'lgani uchun bu to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslikni «o'zini-o'ziga» qoidasi bilan o'rnatish mumkin.

Bu esa A va B to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin ekanligini ko'rsatadi.

Amaliy mashg'ulot uchun zaruriy adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. «Xakikiy uzgaruvchili funktsiyalar nazariyasi» T- 1982 y. 1-bob, 9-44 bet.
2.Ochan Yu.S. Sbornik zadacha po matimaticheskomu analizu, M 1981,4-16 bet.

III. **Mustaqil topshiriq**

1-Topshiriq To'plamlar quvvatini solishtirish.
2 - topshiriq. Quyidagi masalalarni eching

1. (A\B)\C=(A\C)\(B\S) ni isbotlang.
2. $\left[A,\left(B\bigcup C\right)\right]=\left[A,B\right]\bigcup\left[A,C\right]$ ni isbotlang.
3. (0,1) va (0,∞) To'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

4. Sanoqli to'plamlar birlashmasining tasviri shu to'plamlar birlashmasining tengligini ko'rsating.
5. Monoton funktsiyaning uzilish nuqtalar to'plami ko'pi bilan sanoqli ekanligini isbotlang.
6. $[0,1]$ dagi uzluksiz funktsiyalar to'plami kontinuum quvvat ekanligini isbotlang.
7. $[0,1]$ dagi monoton funktsiyalar to'plamini aniqlang.
8. Son o'qidagi barcha simmetrik, intervallar va yarim ochiq intervalar, yarim xalqa ekanligini isbotlang.
9. $A=\{x(t)\in C[0,1]:\ x\left(\frac{1}{2}\right)>0\}$ to'plam quvvati qanday bo'ladi?
10. Faraz qilaylik A to'g'ri chiziqda sanoqli to'plam bo'lsin. Bu A to'plamni α miqdorga ($\alpha\in R$) siljishdan hosil bo'lgan A_α bilan kesishmaydigan qilib siljitish mumkinmi?
11. A to'plam o'zi bilan ustma-ust tushmaydigan qism to'plamga ekvivalent bo'lgandagina cheksiz to'plam bo'lishini isbotlang.
12. [a,b] kesmada berilgan va bu kesmaning hech bo'lmasa bitta nuqtasida uzilishga ega bo'lgan funktsiyalar to'plamining quvvati qanday bo'ladi?
13. Hamma monoton funktsiyalar to'plamining quvvati qanday topiladi?
14. Faraz qilaylik [a,b] kesmada berilgan x(t) funktsiyalar har bir t_o ($t_o\in[a,b]$) nuqtada lokal minimumga ega bo'lsin.

Bunday x(t) funktsiyalar [a,b] da har xil qiymatlarni soni sanoqlidan ortiq bo'lmasligi isbotlansin.
15. [0,1] va [0,1]g'Q to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilsin. Bunda+ratsional sonlar to'plami.
16. [-1,1] kesmadagi ratsional nuqtalar to'plami A va $V=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2\leq 1\}$ bo'lsa, u holda D=AxV to'plam quvvati qanday bo'ladi?

IV. Mavzu bo'yicha yakukniy mashg'ulot

1) To'plamlar sannoqli va sonnoqsiz turlarga ajratiladi. Bu to'plamlar uchun quvvat tushunchalari kiritilib, ularning muhim xossalari biri berilgan to'plamdan quvvati undan katta bo'lgan to'plam tuziladi.

2) To'plamda qo'shish (birlashma), ayirish va ko'paytirish (kesishma) amallari bajarilsa, bunday to'plam xalqa deyiladi. Birlik elementga ega bo'lgan xalqa algebra deyiladi.

3) Biror o'lchovli to'plam to'ldiruvchisi yana o'lchovli to'plamdir. O'lchovli to'plamlar sistemasi algebradan iborat.

I-modul bo'yicha nazorat savollari :

1. Qism to'plam deb nimaga aytiladi ?
2. To'plam ustida qanday amal bajariladi ?
3. Eyler – Venn diogrammasini tushintiring.
4. S'yurektiv akslantirish nima ? Misol keltiring.
5. In'ektiv akslantirish nima? Misol keltiring.
6. Biektiv akslantirish nima ? Misol keltiring.
7. Teskarilanuvchan akslantirishni mavjudlik shartini ayting.
8. Toq va juft sonlar to'plamini solishtiring.
9. Ratsional sonlar sanoqlimi? To'plamlarga misol keltiring.
10. Sanoqli va sannoqsiz to'plamga misol keltiring.
11. Kontiniuum quvvatili to'plam deb nimaga aytiladi?
12. Binar munosabat nima? Misol keltiring.
13. Refleksiv, simmetrik, tranzitiv munosabatlarga misollar keltiring.
14. Tartib, ekvivalentlik munosabatni tushintiring.
15. Atirefleksivlik, simmetrikmas, tranzitivmas munosabatlarni misollar bilan tushintiring.

16. Xalqa nima? Misol keltiring.
17. Algebra nima? Misol keltiring.
18. Yarim xalqa nima? Misol keltiring.
19. Goomomorfizm moslikni tushintiring. Misol keltiring.
20. Izomorfizm moslikni tushintiring. Misol keltiring.
21. Dekart ko'paytma nima? Misol keltiring.
22. Dekart ko'paytma xossalarini ayting.

Tavsiya etilayotgan adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalar nazariyasi , T.1991
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elemento' teoriya funktsiy i funktsiionalnogo analiza, M. 1980
3. Ochan Yu.S. Sbornik zadacha po matematicheskiy analiza, M .1981
4. Natanson I.P. Teorya funktsiy vehestvennoy peremenoy, M. 1974

II-**modul**

Mavzu: To'plam o'lchovi.

Ajratilgan vaqt 8 soat maruza, 8 soat amaliy mashg'ulot

Asosiy savollar

1. To'plam o'lchovi.
2. O'lchovni Lebeg ma'nosida davom ettirish..

Maruzaga oid tayanch tushuncha va iboralar:

Tashqi o'lchov, to'plam o'lchovi, Kantor to'plamlari, Luzin teoremasi, halqa, Algebra, to'plamning additiv funktsiyasi, minimal halqa, to'ldiruvchi.

Mavzuga oid muammolar:

1. O'lchovli va o'lchovsiz to'plamlar
2. O'lchovni davom ettirish

1 - savol bo'yicha dars maqsadi:

1. Talabalarda to'plamning o'lchov tushunchasini xosil qilish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. To'plam o'lchovini Lebeg ma'nosida tushintira oladi.
2. O'lchovli to'plamlar xossalarini izoxlay oladi.

1-asosiy savol bayoni

E chegaralangan to'plam va [a,b] shu to'plamni o'z ichiga olgan eng kichik segment bo'lsin. Faraz qilaylik soni chekli yoki sannoqli oraliqlar sistemasi bo'lib, E ning har bir x nuqtasi oraliqlarning birortasida joylashgan bo'lsin.

u_i bilan G_i oraliqning uzunligini belgilaymiz. Bunday oraliqlar sistemasini cheksiz ko'p usullar bilan tuzish mumkin. Uholda $\sum \mu_i > 0$ chunki μ_i oraliqning uzunligi. Demak, $\sum_i \mu_i$ yig'indilar sistemasi qo'yidan chegaralangan va shuning uchun u aniq qo'yi chegaraga ega.

1-ta'rif. $\sum_I \mu_I$ yig'indilar sistemasining Aniq qo'yi chegarasining to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi va uni $\mu*$(E) bilan belgilanadi, ya'ni

$$\mu*(E)=\inf \sum_i \mu_i$$

Izohlar. a) $\sum_i \mu_i > 0$ bo'lganligi uchun $\mu * \geq 0$ bo'ladi.

v) $\mu *$ (E) $\leq$v-a tengsizlik o'rinli: haqiqatdan har qanday E>0 uchun

E$\subset$ (a-ε ,b+ε)

Bundan $\mu *$ (E) < b-a +2ε

Bu erda ε ixtiyoriy bo'lganligi uchun

$\mu *$(E) $\leq$ b-a

Ushbu μ_*(E) = b-a- $\mu *$(SE)

Son E to'plamning ichki o'lchovi deyiladi. μ_*(E) $\geq$0 chunki SE$\subset$S[a,b]

va o'z navbatida μ_*(E) $\leq$a-b

Tashqi va ichki o'lchovning bir necha xossalarini ko'rib o'tamiz.

1-teorema. E to'plamning tashqi o'lchovi uning ichki o'lchovidan kichik emas, ya'ni

$$\mu_* \ E \leq \mu^* E$$

2-teorema. Agar A va B to'plamlar uchun A$\subset$B bo'lsa, u holda

$$\mu^* \text{(A)} \leq \mu^* \text{(V)}, \quad \mu_* \text{(A)} \leq \mu_* \text{(V)}$$

3-teorema. Agar chegaralangan Eto'plam chekli yoki soni sannoqli $E_{1,}E_2 \ldots$ to'plamlarning yig'indisidan iborat, ya'ni E=$U_K E_K$ bo'lsa ,u holda

$$\mu^* \text{(E)} \leq \sum_{л} \mu^* \ (E_к)$$

4-teorema. Agar chegaralangan E to'plam uchun

$$\text{E=}\bigcup_{л} E_л \, , \qquad E_л \cap E_n = \qquad k \neq n$$

bo'lsa, u holda

$$\mu_* \text{(E)} \geq \sum_k \mu_* \ (E_{Kr})$$

2-ta'rif. (A. Lebeg) E to'plamning tashqi o'lchovi uning ichki o'lchoviga teng bo'lsa u holda E o'lchovli to'plam deyiladi va uning o'lchovini μ (E) bilan belgilanadi, ya'ni

μ (E)= μ_*(E)= μ^*(E)

5-teorema. Agar E to'plam o'lchovli bo'lsa , u holda SE ham o'lchovli to'plam bo'ladi,

6-teorema. (A. Lebeg) E to'plamning o'lchovli bo'lishi uchun

$$\text{E=(G} \cup e_1\text{)G'} \ e_2 \qquad (1)$$

ko'rinishida yozish mumkinligi zarur va kifoyadir.

Bu tenglikning o'ng tomonidagi G , e_1 va e_2 to'plamlar ixtiyoriy berilgan η songa muvofiq qo'yidagicha tuzilgan: G o'zaro kesishmaydigan soni chekli oraliqLar sistemasining yig'indisidan iborat. e_1 va e_2 ning har biri tashqi o'lchovi η sondan kichik bo'lgan to'plamlar. (1) tenglik bajarilganda qo'yidagi munosabat ham o'rinli bo'ladi.

$$\mu(\theta) - \eta < \mu(E) < \mu(\theta) + \eta$$

O'lchovlar to'plamlari haqidagi teoremalar.

1-teorema. Agar $E_1, E_2, ...E_n$ o'lchovli to'plamlar bo'lsa, ularning yig'indisi ham o'lchovli to'plam bo'ladi; yig'indining hadlari o'zaro kesishmaydigan to'plamlardan iborat bo'lsa, yig'indining o'lchovi hadlar o'lchovlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

2-teorema. O'lchovli $E_1 ва E_2$ to'plamlarning ayirmasi ham o'lchovli to'plamdir: agar $E_1 \subset E_2$ bo'lsa, u holda

$$\mu(E_1 \mid E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$$

bo'ladi.(Isboti[3] ga qarang)

3-teorema. Agar [a,b] segmentda joylashgan o'lchovli $E_1, E_2,....$ to'plamlar ketma-ketligi berilgan bo'lsa, u holda ularning yig'indisi bo'lmish $E = \bigcup_1^\infty E_i$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

Bundan tashqari agar $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$ bo'lsa , u holda $\mu(E) = \sum_1^\infty \mu(E_i)$

Bu tenglik o'lchovning to'la additivlik yoki G additivlik xossasi deyiladi.

4-teorema. Har qanday sannoqli E to'plam o'lchovli va uning o'lchovi nolga teng.(Isboti [3] ga qarang.)

5-teorema. [a,b] segmentda joylashgan ,soni chekli yoki sannoqli o'lchovli to'plamlarning ko'paytmasi o'lchovli to'plamdir. (Isboti [3] ga qarang.)

6-teorema. Agar [a,b] segmentda joylashgan o'lchovli $E_1 \subset E_2 \subset ...$ to'plamlar ketma-ketligi berilgan bo'lsa, u holda $\mu(\bigcup_1^\infty E_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ tenglik o'rinli bo'ladi.(Isbot [3] ga qarang)

4-teoremaga izoh. Shuni ham aytib o'tish kerakki 4-teoremaning teskarisi doimo to'g'ri bo'lmaydi, ya'ni to'plamning o'lchovi nolga teng bo'lsa , bu to'plamning sannoqli bo'lishi shart emas.

Buning to'g'riligini ko'rsatish uchun misol sifatida Kantorning P_0 to'plamini olamiz.

Ma'lumki Kantorning P_0 to'plami τ_0 to'plamning [0,1] segmentgacha to'ldiruvchisi va

$$\mu(\tau_0) = \mu\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} + \mu\left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\} + \mu\left\{\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right\} = 1$$

Demak, 2-teoremaga asosan

$\mu(P_0) = \{[0,1]/\delta_0\} = \mu\{[0,1]\} - \mu(\delta_0) = 0$

P_0 sannoqsiz to'plam . Sannoqsiz to'plamning o'lchovi ham nolga teng.

7-teorema. Agar [a,b] segmentda joylashgan $E_1 \supset E_2 \supset ...$ o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi berilgan bo'lsa, u holda

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

8-teorema. (N. Luzin) Agar E to'plam bo'lib, uning o'lchovi musbat bo'lsa, u holda istalgancha kichik $\eta > 0$ uchun shunday mukammal R$\subset$ E to'plam topish mumkinki, bu to'plam uchun ushbu $\mu(P) > \mu(E) - \eta$ tengsizlik bajariladi.

Muxokama uchun savollar:

1.1. To'plamning tashqi va ichki o'lchovi nimalardan iborat?
1.2. Tashqi va ichki o'lchov qanday xossalarga ega?
1.3. O'lchovli to'plamlar qanday xossalarga ega?
1.4. Kantor to'plam qanday tuziladi?

2- savol bo'yicha dars maqsadi:

1. To'plamning o'lchov tushinchasini umumlashtirish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. To'plamlar xalqasini tushintira oladi va xossalarini izohlaydi.
2. O'lchovning Lebeg ma'nosidagi davomini izohlay oladi.

2-asosiy savolning bayoni .

To'plamlar sistemasida aniqlangan haqiqiy funktsiya to'plam funktsiyasi deyiladi. Quyida biz ba'zi bir xossalarga ega bo'lgan to'plamlar sistemasini qaraymiz.

1-ta'rif. Agar N sistemaning istalgan ikkita A va B elementi uchun $A \cap B \in H$ va $A \Delta B \in H$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda N sistema to'plamlar xalqasi deyiladi.

2-ta'rif. Agar N sistemaning biror E elimenti vash u sistemaning istalgan A elementi uchun $E \cap A = A$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda E element N sistemaning birlik elementi deyiladi.

3-ta'rif. Birlik elementga ega bo'lgan N xalqa to'plamlar algebrasi (qisqacha algebra) deyiladi.

Quyidagi teorema xalqa ta'rifidan kelib chiqadi.

1-teorema. Istalgan sondagi $\{H_\alpha, \alpha \in J\}$ xalqalar sistemasining ko'paytmasi $H \cap H_\alpha, \alpha \in J$ ham xalqadir.

2-teorema. Har qanday N to'plamlar sistemasi uchun shu sistemani o'z ichiga olgan yagona minimal xalqa mavjud.

4-ta'rif. N to'plamlar sistemasi uchun $\varnothing \in H$ va har qanday $A \in H$ va $B \in H$ uchun $A \cap B \in H$ bo'lib, shu sistemaning A va A_j elementlari $A_j \subset A$ munosabatni qanoatlantirganda N sistemadan o'zaro kesishmaydigan soni chekli $A_1, A_2 .... A_n$ elementlar topilsaki, ular uchun $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda N sistema yarim xalqa deyiladi.

3-teorema. N yarim xalqAni o'z ichiga olgan G' minimal xalqaning har bir A elementi N yarim xalqadan olingan soni chekli o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, ... A_n$ to'plamlarning yig'indisidan iborat, ya'ni har bir $A \in|$ Ushbu ko'rinishga ega:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n, \qquad A_i \in H, i = 1, n, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$$

5-ta'rif. Agar N to'plamlar xalqasida $A_n \in H$, nq1,2,3,…. Munosabatdan $A_n = \bigcup_{n=1} A_n \in H$ munosabat kelib chiqSA, bunday xalqa σ xalqa deyiladi.

Birlik elementga ega bo'lgan σ xalqa σ algebra deyiladi.

6-ta'rif. Agar N to'plamlar xalqasida $A_n \in H, n = 1,2,3,....$ munosabatdan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in H$ munosabat kelib chiqsa, bunday xalqa σ xalqa deyiladi.

4-teorema. Har qanday ikki A va B to'plam uchun quyidagi ayniyatlar o'rinli:

1. $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$
2. $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$
3. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$
4. $CA \Delta CB = A \Delta B$
5. $B = (A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B)]$

5-teorema. Har qanday B, B_1, B_2 hamda $A_1, A_2 .... A_n$ to'plamlar uchun ushbu

1. $(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$
2. $(A_1 \cup B_2) \Delta (B_1 \cup B_2)$

Bu ma'ruzada σ_m yarim xalkada aniklangan σ additiv m ulchovni Lebeg ma'nosida davom 'nnbhbi masalasi bilan shugillanamiz.Bunda σ_m yarim xalkada birlik element bulgan xol bilan chegaralanamiz.

Shunday kilib $\sigma_m$yarim xalkada aniklangan σ additiv m ulchov berilgan bulsin.Bu yarim xalkadagi E birlik elementning barcha kismi (elementlardan) tuplamlardan tuzulgan sistemani M orkali belgilaymiz.Ma'lumki M sistema σ algebrani

Muxokama uchun savollar.

2.1 To'plam halqasi deb nimaga aytiladi?
2.2 To'plam algebrasi deb nimaga aytiladi?
2.3 Yarim halqa nima?
2.4 O'lchov yarim halqasidan halqagacha davom ettirishni izoxlang?
2.5 O'lchovning Lebeg ma'nosida davom ettirish nimalardan iborat?

Mavzuga oid ilmiy muammo

Matematikaning ko'pchilik masalalarida ba'zi to'plamlarni soni chekli to'plamlarning birlashmasi sifatida emas, balki soni cheksiz to'plamlarning birlashmasi sifatida ifodalashga to'g'ri keladi. Masalan, doiraning yuzini hisoblashda uni soni cheksiz bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar shaklida ifodalashdan foydalaniladi. Xuddi shunday egri chiziqli figuraning yuzini hisoblashda (Aniq integral tushunchasini kiritishda) foydalaniladi.

Bunday masalalarda o'lchovning additivlik xossasi etarli bo'lmay qoladi. Shu sababli bu xossani ma'lum bir ma'noda umumlashtirish masalasi muammo bo'lib hisoblanadi.

Additivlik xossasini biror ma'noda umumlashtirish muammosi hal qilingan emas.

II. Amaliy mashg'ulot. To'plam o'lchovi va uning xossalariga doir misol va masalalar yYechish.

Ajratilgan vaqt 8 soat.

Dars maqsadi:

1. Berilgan to'plamning o'lchovini xisoblab topishni o'rgatish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. Berilgan to'plamni ng o'lchovini aniqlaydi.
2. O'lchovning xossalarini bilib oladi.

2.1. Masalalarni yYechish uchun zaruriy tushunchalar.

Faraz qilaylik $aq(a_1,a_2,,\dots,a_n)$ va $bq(b_1,b_2,\dots,b_n)$ lar R fazoning ikkita nuqtasi bo'lib $a_i\le b_i$ $(iq1,2,\dots,n)$ bo'lsin. Ushbu

$$Gq\{x\in R_n,\ xq(x_1,x_2,\dots,x_n),\ a_i<x_i<b_i\}$$

to'plam R_n fazoda n o'lchovli ochiq parallelopiped deyiladi va

$$Fq\{x\in R_n,\ xq(x_1,x_2,\dots,x_n),\ a_i\le x_i\le b_i\}$$

to'plam R_n fazoda n o'lchovli yopiq parallelopiped deyiladi.

$G\subset D\subset F$ shartni qanoatlantiruvchi D to'plam uchi a va b nuqtalarda bo'lgan n-o'lchovli paralelipiped deyiladi.

Agar $A\subset R_n$ to'plamni o'zaro kesishmaydigan $\{D_k\}$ parallelopipedlarning birlashmasi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa ($A=\cup D_k$), u xolda A elementar to'plam deyiladi.

Ushbu

$$\mu^* A = \inf_{A \subset \bigcup_k D_k} \sum_k m D_k$$

con A ($A \subset R_n$) to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi, bunda

$$mD = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

con n o'lchovli parallelopiped yoki F(G-ochiq yoki F- yopiq) ning hajmi deyiladi.

Ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday elementar $B \subset R_n$ to'plam mavjud bo'lib, $A \subset R_n$ bo'lganda

$$\mu^* (A \Delta B) < \varepsilon$$

bo'lsa, u xolda A to'plam Lebeg bo'yicha o'lchovli deyiladi.

Lebeg bo'yicha qaralayotgan o'lchovli to'plamlardagi A to'plamning tashqi o'lchovi shu to'plamning Lebeg o'lchovi deyiladi va μA deb yoziladi. Tashqi o'lchov bilan bir vaqtda ichki o'lchovni ham qayd qilaylik.

Ushbu

$$\mu_* A = mD - \mu^* (C_A D), \quad A \subset D = \bigcup_k D_k$$

son A to'plamning ichki o'lchovi deyiladi.

Endi A to'plamning Lebeg o'lchovini quyidagicha ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Agar tashqi va ichki o'lchovlar teng bo'lsa, u xolda A ***to'plam o'lchovli*** deyiladi va bu son uning Lebeg o'lchovi deb ataladi va

$$\mu^* A = \mu_* A = \mu A$$

deb yoziladi.

Agar bu tenglik bajarilmasa ***to'plam o'lchovsiz*** deyiladi.

Agar n=1 bo'lsa, u xolda $A \subset R_1$ to'plamning o'lchovini chiziqli (bir o'lchovli), n=2 bo'lsa $A \subset R_2$ to'plamning o'lchovini yassi (tekis ikki o'lchovli) deb ataymiz. Ixtiyoriy k o'lchovli ($1 \le k \le n$) $A \subset R_n$ to'plam uchun s o'lchovli o'lchovni ($k \le s \le n$) tushunchasini kiritish mumkin.

To'plamning o'lchovi cheksiz qiymatni ham qabul qilishi mumkin. Bu haqda quyidagini qayd etamiz. Sanoqli miqdordagi chekli o'lchovga ega bo'lgan to'plamlar birlashmasining o'lchovi cheksiz qiymatni qabul qilishi mumkin.

1. *Asosisy teoremalar.*

2.1.Teorema O'lchovli to'plamning to'ldiruvchisi yana o'lchovli to'plamdan iborat.

2.2.Teorema O'lchovli to'plamlarning birlashmasi, kesimi, ayirmasi, simmetrik ayirmasi yana o'lchovli to'plamdir.

2.3.Teorema O'lchovli to'plamni o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamga o'zgartirish uning o'lchoviga ta'sir qilmaydi.

2.4.Teorema Har qanday paralelopiped o'lchovlidir va uning o'lchovi n-o'lchovli hajmga teng.

2.5.Teorema Har qanday elementar to'plam o'lchovli va uning o'lchovi uni tashkil qilgan parallelopipedlar o'lchovlarining yig'indisiga teng.

2.6.Teorema Sanoqli miqdordagi o'lchovli to'plamlar birlashmasi va kesishmasi o'lchovli to'plamdan iborat.

2.7.Teorema. Ixtiyoriy yopiq (ochiq) to'plam o'lchovlidir.

2.8.Teorema Agar o'lchovli $A_1, A_2, \ldots$ to'plamlar kengayuvchi $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ yoki qisqaruvchi $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ ketma-ketlikni tashkil etib mos ravishda

$$A=\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa \qquad yoki \qquad A=\bigcap_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa$$

bo'lsa, u xolda har ikki xolatda

$$\lim_{n\to\infty}(\mu A_n)=\mu A$$

bo'ladi.

<u>*2.9.Teorema*</u> *Agar* $A=\bigcup_{\kappa=1} A_\kappa$ *bo'lib* A_k *(k=1,2,3,...) to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u xolda*

$$\mu A\le\sum_k \mu A_k$$

<u>*2.10.Teorema*</u> *Agar* A_k *(k=1,2,3,...) o'lchovli to'plamlar bo'lib*

$$A=\bigcup_{\kappa=1} A_\kappa \quad A_i\cap A_j=\varnothing \quad i\neq j$$

bo'lsa, u xolda

$$\mu A=\sum_\kappa A_\kappa$$

bo'ladi.

Endi o'lchovsiz to'plam haqida to'xtab o'tamiz.

Chegaralangan o'lchovsiz to'plamning mavjudligi quyidagi misolda ko'rsatiladi.

Avvalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ segmentning nuqtalari orasida ekvivalentlik tushunchasi kiritiladi. Agar x va u ning ayirmasi $x\text{-}u$ son ratsional bo'lsa, ular ***ekvivalent*** deyiladi va $x\approx u$ deb yozamiz. Bu ekvivalentlik quyidagi xossalarga ega:

1) Simmetriklik: Agar $x\approx u$ bo'lsa, $u\approx x$
2) Tranzitivlik: Agar $x\approx u$, $y\approx z$ bo'lsa, $x\approx z$
3) Refleksivlik: Har qanday x element uchun $x\approx x$.

Bu erda asosan $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ segment, o'zaro ekvivalent bo'lgan elementlardan iborat bo'lgan K(x) sinflarga ajratiladi ($x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$). Bu erda ikkita har xil K(x) sinf o'zaro kesishmaydi. Shunday qilib, $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ segment o'zaro kesishmaydigan sinflarga bo'linadi.

Endi bu sinflarning har biridan bittadan element tanlab olib, bu tanlab olingan elementlar to'plamini A bilan belgilanadi. Bunday A to'plamning o'lchovsiz ekanligi, ya'ni

$$\mu^* A\neq\mu_* A$$

munosabat [1] ning 22-§ da batafsil bayon qilingan.

Masalalarn yYechish uchun quyidagilarni esaltib o'tamiz.

1. To'g'ri chiziqdagi ξ ***nuqtaning atrofi*** deb shu nuqtani o'z ichiga olgan oraliqqa (intervalga aytiladi.
2. To'g'ri chiziqda biror ξ nuqta va E to'plam berilgan bo'lsin. Agar ξ nuqtaning har qanday atrofida E to'plamning ξ dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda ξ nuqta E to'plamning ***limit nuqtasi*** deyiladi.

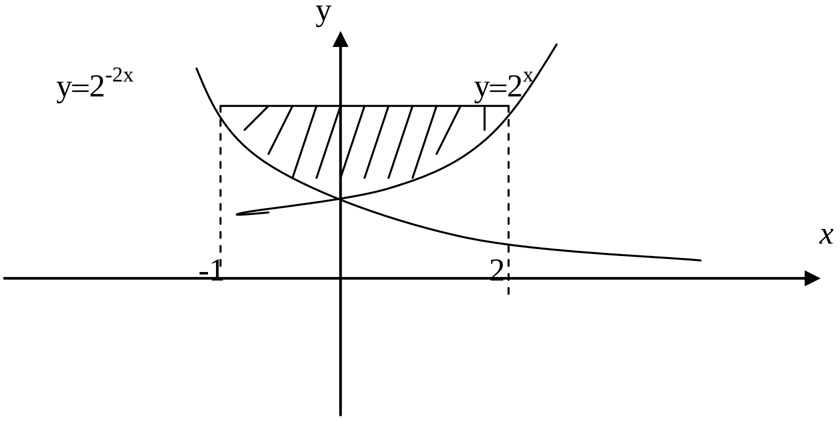
3. E to'plamning barcha limit nuqtalaridan iborat bo'lgan to'plam E to'plamning ***hosila to'plami*** deyiladi va uni E' bilan belgilaymiz.

4. $\overline{E} = E \cup E'$ to'plam E to'plamning yopilmasi deyiladi.

3. Masalalar yYechish namunalari.

1-Masala. A={(x,y)∈R_2, y=2^x, y=2^{-2x}, y≤4} to'plamning o'lchovini toping?

Yechish: Masala shartidan 2^x=4, 2^{-2x}=4 bo'lganda x_1=2, x_2=-1 topamiz. A to'plam quyidagi chizmada (1-chizma) tekislikning shtrixlangan qismidan iborat.



1-chizma

Bu to'plam yopiq va 2.7.teoremaga asosan o'lchovli, uning o'lchovi μA esa shtrixlangan yuzaga mos keladi. Shuning uchun

$$\mu A = \int_{-1}^{0}(4-2^{-2x})dx + \int_{0}^{2}(4-2^{x})dx =$$

$$= 4x\,/_{-1}^{0} + \frac{2^{-2x}}{2\ln 2}\,/_{-1}^{0} + 4x\,/_{0}^{2} - \frac{2^{x}}{2\ln 2}\,/_{0}^{2} = 12 - \frac{9}{2\ln 2}$$

2-Masala. Faraz qilaylik A to'plamning yopilmasi $\overline{A}$ bo'lsin. «Agar μA=0 bo'lsa, u xolda $\mu\overline{A}$=0 bo'ladi» deb tasdiqlash mumkinmi?

To'plam tutashmasini eslatib o'tamiz.

A to'plamning xosilaviy to'plami A′ bo'lsin. U xolda $A \cup A' = \overline{A}$ to'plam A to'plamning tutashmasi deyiladi. (A′ - bu A ning limit nuqtalari to'plami).

Yechish. Faraz qilaylik hamma haqiqiy o'qdagi ratsional sonlar to'plami + bo'lsin.+to'plam sanoqli bo'lgani uchun uning nuqtalarini raqamlab (nomerlab) chiqamiz:

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

U xolda

$$Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}$$

Endi $\{\tau_k\}\cap\{\tau_s\}=\varnothing$ (k≠s) bo'lganidan.

Teorema 9 ga asosan

$$\mu Q=\sum_{k=1}^{\infty}\mu\{\tau_k\}=0$$

chunki $\mu\{\tau_k\}$q0

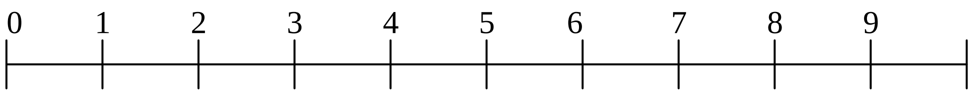
Ikkinchi tomondan $\overline{Q}=R_1$ bo'lib uning chiziqli o'lchovi

$$\mu\overline{Q}=\mu R=\infty$$

Demak, « $\mu A=0$ bo'lsa, u xolda $\mu\overline{A}=0$ bo'ladi» deb tasdiqlash noto'g'ridir.

3-Masala. A to'plam [0,1] nuqtalarini o'nli kasr sonlar ko'rinishida ifodalaganda 1 va 4 raqamlar qatnashmaydigan nuqtalar to'plamidan iborat bo'lsin. Bunday A to'plamning o'lchovi nimaga teng?

Yechish. [0,1] kesmani 10 ta teng bo'laklarga bo'lamiz va har bir bo'lakni o'suvchi 0,1,2,…,9 raqamlar orqali belgilaymiz. A to'plamda birinchi o'nli raqami 1 va 4 bo'lgan nuqtalar qatnashmaydi (2-chizmaga qarang).



2-chizma

Bu esa bizga [0,1] kesmadan $[\frac{1}{10},\frac{2}{10})$ va $[\frac{4}{10},\frac{5}{10})$ intervallarni chiqarib tashlashni bildiradi, ya'ni birinchi qadamda [0,1] kesmadan uzunligi $\frac{2}{10}$ bo'lgan ikkita intervalni chiqarib tashlash kerak. Qolgan sakkizta kesmada shunday muxokamani yuritamiz: har birini 10 ta teng bo'lakka bo'lamiz va uzunligi $\frac{2}{10^2}$ ga teng bo'lgan ikkitadan intervalni tashlaymiz, ya'ni ikkinchi qadamda [0,1] kesmadan o'lchovi $8\cdot\frac{2}{10^2}$ bo'lgan to'plamni chiqarib tashlaymiz va hokazolar. Nihoyat [0,1] kesmadan o'lchovi

$$\mu G=\frac{2}{10}+8\cdot\frac{1}{10^2}+8^2\cdot\frac{1}{10^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 8^{n-1}}{10^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=1$$

bo'lgan G ochiq to'plam chiqarib tashlanadi. Endi A=[0,1]g'G bo'lib

$$\mu A=\mu[0,1]-\mu G=1-1=0$$

bo'lishi o'z-o'zidan ravshan.

4-Masala. O'lchovi nolga teng bo'lgan har qanday bo'shmas va yopiq to'plam hech qaerda zich emasligi isbotlansin.

Masalani yYechishdan avval to'plamning zichlik ta'rifini eslaymiz. Agar to'plamning birorta ham <u>*yolgiz*</u> (diskret) nuqtasi bo'lmasa, bunday to'plamni o'zida zich to'plam deyiladi. Agar A ning tutashmasi bo'lgan $\overline{A}\supset B$ bo'lsa, u xolda A to'plam B to'plamda zich deyiladi. Agar A to'plam hech qanday sharda zich bo'lmasa, u xolda A to'plam hech qaerda zich emas deyiladi, ya'ni har bir $B\subset R_1$ sharda boshqa $B'\subset B$ shar mavjud bo'lib A to'plam bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, A xech kaerda zichmas deyiladi.

$$B'\cap A=\varnothing$$

Masala echimi. Faraz qilaylik $F\subset R_n$ to'plam o'lchovi nolga teng bo'lgan bo'shmas yopiq to'plam bo'lsin. $B(\bullet,r)\subset R_n$ esa $B(\bullet,r)\cap F=\varnothing$ bulgan ixtiyoriy ochik shar bulsin.

Agar $B(\bullet,r)\subset F$ bulsa, u xolda

$$0<\mu B(\bullet,r)\le\mu F$$

Lekin bunday bo'lishi mumkin emas, chunki

$$\mu F=0$$

Demak, shunday $x\in B(\bullet,r)$ mavjud bo'lib $x\notin F$. U xolda $x\in CF$. Lekin SF ochiq to'plam. Shuning uchun X ning atrofi bo'lgan A(x)

$$A(x)\cap F=\varnothing$$

shartni qanoatlantiruvchi

$$A(x)\subset SF$$

bo'lgan A(x) to'plam mavjuddir. Endi V(•,r)- ochiq to'plam bo'lgani uchun

$$U(x)\subset B(\bullet,r)$$

bo'lgan U(x) to'plamni olaylik. Faraz qilaylik

$$V(x)=A(x)\cap U(x)$$

bo'lsin. U xolda V(x) to'plam x nuqta atrofidir va

$$V(x)\subset A(x),\quad A(x)\cap F=\varnothing$$

bo'lganidan

$$V(x)\cap F=\varnothing$$

Bu muxokamalarga asosan

$$B(\bullet,r')\cap F=\varnothing$$

bo'lib

$$B(\bullet,r')\subset V(x)\subset U(x)\subset B(\bullet,r)$$

bo'lgan V(•,r') ochiq shar mavjud.

Demak F to'plam hech qaerda zich emas.

5-Masala. Agar $-1\le x\le 0$ bo'lganda $f(x)=-x^2$ va $0<x\le 1$ bo'lganda $f(x)=1$ bo'lsa, u xolda ixtiyoriy $a\in R_1$ con uchun E(f>a) to'plam o'lchovli bo'ladimi?

Yechish. Agar $a\ge 1$ bo'lsa $E(f>a)=\varnothing$ Agar $0\le a<1$ bulsa, $E(f>a)=(0,1]$. Agar $-1\le a<0$ bo'lsa, $E(f>a)=(-\sqrt{-a},1]$. Nihoyat agar $a<-1$ bo'lsa, u xolda $E(f>a)=[-1,1]$. Endi

$\varnothing$, (0,1], ($-\sqrt{-a}$, 1), [-1,1] to'plamlar o'lchovi bo'lganidan $\forall a \in R_1$ uchun E(f>a) tuplam ulchovli bo'ladi.

Kerakli adabiyotlar (Amaliy mashg'ulot uchun)

1. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi, 3,4- boblar, 74-126 betlar.
2. Ochan Yu.S. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu., 1981, 407-451 str. 46-51.

III. Mustaqil topshiriqlar.

1 - Topshiriq

1. O'lchovsiz to'plamlarga doir misollar tuzing.

2 - topshiriq

Quyidagi masalalarni eching

1. Agar

$$A=\{t\in[0,1]: x'(t)=0, x'(t)\in C[0,1]\}$$

bo'lsa u holda

$$\mu A=0$$

bo'lishini isbotlang.

2. Agar [0,1] kesmaning qism to'plami bo'lgan A_k (k=1,2,…,n) to'plam uchun

$$\sum_{k=1}^{n}\mu A_k > n-1 \quad \text{bo'lsa, u holda} \quad \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0$$

bo'lishini isbotlang.

3. [0,1] kesmaning hamma o'lchovli qism to'plamlar tuplamining quvvati kontinuum quvvatdan katta ekanligi isbotlansin.

4. Tekislikning birlik kvadratdagi $|\sin\alpha| < \frac{1}{2}$ ва $\cos(x+y)$ irratsional son bo'ladigan $(x,u)\in R^2$ nuqtalar to'plamining qism to'plam o'lchovini toping.

5.Sonni o'nli sanoq tizimida yozganda, 2 raqam 3 raqamdan avval uchraydigan [0,1] kesmaning qism to'plam o'lchovini toping.

6. Faraz qilaylik S aylananing uzunligi 1 ga teng bo'lsin va α biror irratsional son bo'lsin. S aylanani $n\cdot\alpha\pi$ (n-butun son) burchakka burishda biror nuqta aylananing boshqa nuqtasiga o'tuvchi nuqtalarni bir sinfga kiritamiz. Bu sinflarning har biri nuqtalarning sanoqli to'plamidan iborat bo'ladi. Har bir sinfda bittadan nuqta tanlaymiz. Bunday nuqtalar to'plamini F_o deb belgilaymiz. F_o to'plamning o'lchovsiz ekanligini ko'rsating (Ko'rsatma [4] 264-265 betga qarang)

IV. Mavzu bo'yicha yakuniy mashg'ulot

1) To'planing o'lchov tushunchasi uzunlik, yuza, hajm, funktsiya orttirmasi, biror chiziq bo'ylab yoki biror soha bo'ylab olingan integral kabi tushunchalarning umumlashmasidir.

2) To'plamning o'lchov tushunchasi haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasida vujudga kelib, undan ehtimollar nazariyasiga, dinamik sistemalarga va matematikaning boshqa sohalariga tadbiqlash boshlandi.

3) Agar to'plamning ichki va tashqi o'lchovlari teng bo'lsa, u holda bunday to'plam o'lchovli to'plam deyiladi.

Sannoqli miqdordagi o'lchovli to'plamlar birlashmasi va kesishmasi yana o'lchovli to'plamdan iborat.

Chegaralangan o'lchovsiz to'plamlar ham mavjuddir.

Nazorat savollar.

1. To'plamning tashqi va ichki o'lchovi nima?
2. Tashqi o'lchov xossalarini ayting.
3. Ichki o'lchov xossalarini ayting.
4. O'lchovning Lebeg ta'rifini izoxlang.
5. O'lchovli to'plam qanday xossalarga ega?
6. Lebeg teoremasini izoxlang.
7. Kantor to'plam qanday tuziladi ?
8. Kantorning P va G to'plamning o'lchovlarini xisoblab ko'rsating.
9. O'lchovli to'plamlar ketma – ketligi haqidagi teoremani izoxlang.
10. Luzin teoremasini izoxlang.
11. To'plamlar halqasi ta'rifini ayting.
12. Yarim xalqa ta'rifini ayting.
13. To'plamlar algbrasini izoxlang.
14. Minimal xalqa nima?
15. To'plam funktsiyasi nima?
16. Additiv o'lchamni izoxlang?
17. O'lchamni davom ettirish nima?
18. Xar xil additiv o'lchovini izoxlang.
19. O'lchovni davom ettirish haqidagi teoremani izoxlang.
20. O'lchovni Lebeg ma'nosida davom ettirish va u xaqida teoremalarni isbotlang.

Tavsiya etilgan adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchilarning funktsiyalar nazariyasi, Toshkent 1994 y
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementi teorii funktsiy i funktsiyanalnogo analiza, god 1980.
3. Ochan Yu.S. Sbornik zadach po matimaticheskomu analizu, Mosk. 1981 g.

III-modul

Mavzu:O’lchovli funktsiyalar

Ajratilgan vaqt 8 soat ma’ruza, 6 soat amaliy mashg’ulot.

Asosiy savollar.

1. O’lchovli funktsiya tushunchasi va uning xossalari.
2. O’lchovli funktsiyalar ketma- ketliginig xossalari.

Mavzuga oid tayanch tushinchalar va iboralar:

O’lchovli funktsiya , ekivivalentlik, deyarli yaqinlashish, ketma- ketlik, o’lchov bo’yicha yaqinlashish,Lebeg,Riss, Egorov teoremasi.

Mavzuga oid muammolar:

1. Funktsiyalar ketma-ketligining o’lchov bo’yicha yaqinlashishi

1- savol bo’yicha dars maqsadi:

1. O’lchovli funktsiya tushinchasini berish.

Identiv o’quv maqsadi:

1. O’lchovli funktsiyani tushintira oladi.
2. O’lchovli funktsiyani xossalarini izoxlay oladi.

1-asosiy savolni bayoni.

1-ta’rif. Agar o’lchovli E to’plamda (cheksiz qiymatlarga ega bo’lsa) berilgan f(x) funktsiya uchun $E\{f.a\}$ to’plam xar qanday xaqiqiy a da o’lchovli funktsiya deyladi.

Bu ta’rifda (L) o’lchovli to’plamlar xaqida gap borganligi uchun f(x) funktsiya ba’zan(L) o’lchovli funktsiya deyladi.

Agar bu ta’rifda E va $E\{f.>a\}$ to’plamlar (B) o’lchovli bo’lsa , u xolda f(x) funktsiya xam (v) o’lchovli deyladi.

Bu bobda o’lchovli to’plam va funktsiyalar(L) ma’nosida ishlatiladi.

1-teorema. 1.Agarf(x) funktsiya E to’plamda o’lchovli bo’lsa, u xolda xar qanday xaqiqIy a va b sonlar uchun

1) $E\{f \le a\}$ 2) $E\{a < f \le b\}$ 3) $E\{f = a\}$ 4) $E\{f \ge a\}$ 5)E $\{f < a\}$

to’plamlarning xar biri xam o’lchovli bo’ladi.

2. Agar ixtyoriy xaqiqIy a va v sonlar uchun 1),2),3),4),5) to’plamlarning birortasi o’lchovli bo’lsa,f(x) funktsiya E to’plamda o’lchovli bo’ladi.

Isbot.1) E va to’plamlar o’lchovli bo’lgani uchun

$$E\{f \le a\} = \frac{E}{E}\{f > a\}$$

tenglikda $E\{f \le a\}$ to’plamning o’lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2) $E\{a < f \le b\} = E\{a < f\} \cap E\{f \le b\}$

tenglikning o’ng tomonidagi to’plamlar o’lchovli , demak $E\{a < f \le b\}$ to’plamlar xam o’lchovli

3) $E\{f = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left\{a - \frac{1}{n} < f \le a + \frac{1}{n}\right\}$

tenglikning o’ng tomonidagi to’plamlar o’lchovl bo’lgani uchun bu to’plam xam o’lchovli.

4) $E\{f \ge a\} = E\{f > a\} \cup E\{f = a\}$

tenglikning o’ng tomonidagi to’plam o’lchovli, demak $E\{f \ge a\}$ to’plam xam o’lchovli.

5) $E\{f < a\} = E\{f \le a\} \setminus E\{f = a\}$

tenglikdan to'plamning o'lchovliligi kelib $E\{f < a\}$

Teoremaning ikkinchi qismi birinchi qismiga o'xshash isbotlanadi.

2- teorema. Agar f(x) funktsiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u xolda bu funktsiya E to'plamning ixtiyoriy o'lchovli E qismida xam o'lchovli bo'ladi.

Isbot. 1- t a ' r i f.ga muvofiq xar qanday xaqiqiy a son uchun to'plamning o'lchovli ekanligi ko'rsatilas, teorema isbot etilgan bo'ladi. Bu to'plamning o'lchovliligi Ushbu

$$E_1\{f > a\} = E_1 \cap E\{f > a\}$$

tenglikdan kelib chiqadi , chunki E va $E\{f > a\}$ to'plamlarning xar biri teorema shartigi muvofik $E_1\{f > a\}$ to'plam xam o'lchovli.

3-teorema. $\{E_1\}$ son chekli yoki sannoqli , xar bir$|a,b|$ segmentda butunlay joylashgan, o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi bo'lsin. Agar *f(x)* funktsiya bu to'plamning xar birida ulchovli bo'lsa , u xolda bu funktsiya ularning yig'indisida xam o'lchovli bo'ladi:

$$E = \bigcup_k E_k$$

Isbot.1- t a ' r i f. ga va teoremani shartiga muvofiq xar qanday k uchun $E_k \text{ва} E_k\{f > a\}$ to'plamlarning xar biri o'lchovli bo'ladi .Demak $E = \bigcup_k E_k$ to'plam xam o'lchovli bo'ladi .Endi

$$E\{f > a\} = \bigcup_k (E\{f > a\} \cap E_k)$$

tenglikdan esa f(x) funktsiyaning E to'plamda ekanligi kelib chiqadi .

4- teorema . Agar f(x) funktsiya o'lchovli E to'plamda o'zgarmas k soniga teng bo'lsa , u xolda f(x) o'lchovli funktsiya bo'ladi .

Isbot.Darxaqiqat,

$$E\{f > a\} = \begin{cases} E.\text{агар} k > \text{аббылс} \\ 0, \text{агар} k \le \text{аббылс} \end{cases}$$

5-teorema. Agar f(x) o'lchovli funktsiya bo'lib ,k o'zgarmas son bo'lsa , u xolda f(x) Qk va kf(x) funktsiyalar xam o'lchovli bo'ladi .

Isbot. Ushbu $E\{f + k > a\} = E\{f > a - k\}$

$$E\{kf > a\} = \begin{cases} E\left\{f > \dfrac{a}{k}\right\} \text{агар} k > 0 \\ E\left\{f < \dfrac{a}{k}\right\} \text{агар} k < 0 \end{cases}$$

ko'rinishida yozamiz , bu erda $\sum'$ va $\sum''$ Lar mos ravishda $\omega_k < \frac{1}{r}$ shartlarni qanotlantiruvchi xadlarning yig'indisidan iborat. F(x) funktsiya $[a,b]$ segmentda chegaralangan bo'lgani uchun shunday k>0 son mavjud ushbu

$$|f(x)| < k, x \in [a,b]$$

tensizlik bajariladi . Bundn a<ω_k <2k tengsizlik kelib chiqadi.(7) nim xisobga olib ,Ushbu

$$\sum' \omega_k (a_{k+1} - a_u) < \frac{1}{r} \sum' (a_{k+1} - a_u) \prec \frac{b-a}{r} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

$$\sum'' \omega_k (a_{k+1} - a_u) < 2k \sum'' (a_{k+1} - a_u) = 2kl \qquad (10)$$

munosabatlarni yozamiz, bu erda (6),(8),(9) munosabatlardan

$$\varepsilon \le \sum \omega_k (a_{k+1} - a_u) < \frac{\varepsilon}{2} + 2kl$$

munosabati kelib chiqadi.

Muxokama uchun savollar:

1.1. O’lchovli funktsiya nima?
1.2. O’lchovsiz funktsiya nimalardan iborat?
1.3. Ekvivalentlik deb nimaga aytiladi?

2- savol bo’yicha dars maqsadi:

1. Funktsiyalar ketma- ketligining o’lchovi bo’yicha yaqinlashishni o’rgatish.

Identiv o’quv maqsadi:

1. O’lchov bo’yicha va deyarli yaqinlashishlarni o’rgana oladi.
2. Har xil yaqinlashishlar orasidagi bog’lanishni o’rganib oladi.

2 - savol bayoni.

1-teorema. Ulchovli E tuplam ulchovli $f_1(x), f_2(x),....$ funktsiyalar ketma-ketligi berilgan bulsin. Agar E tuplamning xar bir x nuktasida

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

tenglik bajarilsa, u xolda funktsiya E tuplamda ulchovli buladi.

Ta’rif. (F.Riss) Ulchovli E tuplamda deyarli chekli, ulchovli funktsiya va deyarli chekli, ulchovli funktsiyalar ketma-ketligi berilgan bulsin. Agar xar kanday musbat E son uchun ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E\{| f_n - f |> \delta\}) = 0$$

munosabat bajarilsa, u xolda $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi $f(x)$ funktsiyaga ulchov buyicha yakinlashuvchi deyiladi va $f_n \geq f$ kurinishda yoziladi.

2-teorema. (A.Lebeg) $f(x)$ funktsiya ulchovli E tuplamda deyarli yakinlashuvchi ulchovli $|f_n(x)|$ funktsiyalar ketma-ketligi E tuplamda $f(x)$ funktsiyaga ulchov buyicha xam yakinlashuvchi buladi.

Izox. Teoremaning teskarisi tegri emas, ya’ni ulchov buyicha yakinlashishdan deyarli yakinlashish kelib chikadi.

3-teorema. Agar $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi E tuplamda ulchov buyicha $f(x)$ *ва* $g(x)$ funktsiyalarga yakinlashsa, bu funktsiyalar E tuplamda ekvivalent buladi (isboti [3] ga karang)

4-teorema (F.Riss) Agar S funktsiyalar kektma-ketligi E tuplamda funktsiyaga ulchov buyicha yakinlashsa, u xolda bu ketma-ketlikdan shunday kism ketma-ketlik ajralib olish mumkin, bu kism ketma-ketlik E tuplamda $f(x)$ funktsiyaga deyarli yakinlashuvchi buladi. (isboti [3] ga karang)

5-teorema. (D.F. Egorov) Ulchovli E tuplamda $f(x)$ funktsiyaga deyarli yakinlashuvchi ulchovli $\{f_n(x)\}$funktsiyalar ketma-ketligi berilgan bulsin. U xolda xar kanday $E > 0$ uchun shunday ulchovli R<E tuplamni topish mumkinki, uning uchun $\mu p > \mu E - \varepsilon$ munosabat bajarilib, bu R tuplamda $\{f_n(x)\}$funktsiyalar ketma-ketligi funktsiyaga tekis yakinlashadi. (isboti [3] ga karang)

6-teorema.(N.N.Luzin). Agar $f(x)$ funktsiya E tuplam ulchovli bulsa u xolda xar kanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday yopik $f \subset E$ tuplamni topish mumkinki, bu tuplamda $f(x)$ funktsiya uzluksiz va $\mu(F) > \mu(E) - \varepsilon$ munosabat urinli buladi.

Muxokama uchun savollar:

2.1 Ketma- ketlikning o'lchov bo'yicha yaqinlashishi nimalardan iborat va qaysi xossaalarga ega?
2.2 Deyarli yaqinlashish nima va uqaysi xossalarga ega?
2.3 O'lchov bo'yicha, deyarli, tekis yaqinlashishlar bir –biri bilan qanday bog'langan?
2.4 O'lchovli funktsiya bilan uzluksiz funktsiya orasida qanday bog'lanish bor?
2.5 Luzin teoremasi nimalardan iborat?

Mavzuga oid ilmiy muammo

Bir o'zgaruvchili funktsiyalar uchun «teng o'lchovli funktsiyalar» tushunchasi kiritilgan va bunga doir ilmiy tekshirishlar olib borilgan.

Endi ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar uchun bu masala muammo bo'lib turibdi.

II. **Amaliy mashg'ulot** : O'lchovli funktsiyalar va ularning xossalariga doir masalalar yYechish.

Ajratilgan vaqt 8 soat.

Dars maqsadi:

1. O'lchovli funktsiyalar xossalarini o'rgatish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. O'lchovli funktsiya xossalariga doir masala echa oladi.
2. O'lchovli funktsiyalar ketma-ketligining biror ma'noda yaqinlashishdan boshqa bir ma'noda yaqinlashishini keltirib chiqara oladi.

3.1. Zaruriy tushunchalar.

O'lchovli E to'plamda berilgan f(x) funktsiya va ixtiyoriy $a \in R_1$ son uchun

$$E(f>a)=\{x \in E : f(x)>a\}$$

to'plam o'lchovli bo'lsa, u holda f(x) E to'plamda o'lchovli funktsiya deyiladi.

Agar

$$\mu \ \{x \in E, |f(x)| = \infty\}=0$$

bo'lsa, u holda E to'plamda berilgan f(x) funktsiya deyarli hamma joyda chekli deyiladi.

Agar

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in E : f_n(x) \not\to f(x)\} = 0$$

bo'lsa, u holda $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi E to'plamda f(x) funktsiyaga deyarli hamma joyda yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x\in E: \left| f_n(x) - f(x) \right| > \varepsilon\} = 0$$

bo'lsa, u holda $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi E to'plamda berilgan f(x) funktsiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Agar f(x) va φ(x) funktsiyalar E o'lchovli to'plamda berilgan bo'lib

$$\mu\{x\in E: f(x)\neq\varphi(x)\}=0$$

bo'lsa, u holda f(x) va φ(x) funktsiyalar E to'plamda ekvivalent deyiladi va $f(x)\backsim\varphi(x)$ deb belgilanadi.

2. Asosiy teoremalar

3.1. Teorema Agar f(x) funktsiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda bu funktsiya E to'plamning o'lchovli kism to'plamida o'lchovli bo'ladi.

3.2. Teorema Agar f(x) va g(x) funktsiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa,u holda

$$f(x)\pm g(x),\, f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$$

funktsiyalar E to'plamda o'lchovli bo'ladi.

3.3.Teorema Agar o'lchovli va deyarli hamma joyda chekli $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi E to'plamning deyarli hamma joyida f(x) funktsiyaga yaqinlashsa, u holda bu f(x) funktsiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi.

3.4.Teorema Agar o'lchovli funktsiyalar $\{f_n(x)\}$ ketma-ketligi E to'plamning deyarli hamma joyida f(x) funktsiyaga yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlik shu f(x) funktsiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi.

3.5.Teorema (F.Riss). O'lchov bo'yicha f(x) ga yaqinlashuvchi xar qanday $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligidan shu f(x)ga deyarli hamma joyda yaqinlashuvchi qismiy

$$\{f_{n_k}(x)\}$$

ketma-ketliklarni (xar xil bo'lishi mumkin) ajratish mumkin.

3.6.Teorema (D.F.Egorov, 1911 yil). Agar o'lchovli funktsiyalar $\{f_n(x)\}$ ketma-ketligi E to'plamning deyarli hamma joyida f(x) funktsiyaga yaqinlashsa, u holda $\forall\delta>0$ uchun shunday E_δ ($E_\delta\subset E$) o'lchovli kismiy to'plam mavjud bo'lib kuyidagilar bajariladi:

1) $\mu E_\delta>\mu E-\delta$

2)E_δ to'plamda $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik f(x) funktsiyaga tekis yaqinlashadi.

3.7.Teorema (N.N.Luzin,1913y). [a,b] kesmada berilgan f(x) funktsiya o'lchovli bo'lish uchun $\forall\varepsilon>0$ uchun [a,b] kesmada shunday φ(x) uzuluksiz funktsiya mavjud bo'lib

$$\mu\{x\in[a,b]: f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon$$

bo'lishi zarur va kifoya.

3.Masalalar yYechish.

1-masala . f(x) funktsiya E to'plamda ($E\subset R_1$) o'lchovli. $\exp f(x)=e^{f(x)}$ funktsiya ham E to'plamda o'lchovli bo'ladimi?

Yechish. Agar $a \le 0$ son bo'lsa, u xolda $E\{e^{f(x)}>a\}$ to'plam E to'plam bilan ustma-ust tushadi. Bu xolda f(x) funktsiya E da o'lchovlidir.

Agar a>0 bo'lsa, u xolda

$$E\{e^{f(x)}>a\}=E\{f(x)>\ln a\}$$

bo'lib, $E\{f(x)>\ln a\}$ o'lchovli to'plam bo'lganidan, ta'rifga asosan $f(x)$ funktsiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi. Bu xolda ham $e^{f(x)}$ funktsiya E da o'lchovli. Demak $e^{f(x)}$ funktsiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi.

2-masala. [0,1] kesmada o'lchovli bo'lgan $F(x)$ funktsiya faqat bitta nuqtada uzluksiz bo'lishi mumkinmi?

Yechish. Faraz qilaylik $f(x)=x\cdot D(x)$ bo'lib, bunda $D(x)$ Dirixle funktsiyasidan iborat bo'lsin, ya'ni $x\in[0,1]$ da

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{-ratsional nuqtada} \\ 0, & x\text{-irratsional nuqtada} \end{cases}$$

U xolda $f(x)$ funktsiya (0,1] yarimintervalning xar bir nuqtasida uzilishga ega, chunki x ratsional nuqta bulsa, $f(x)=x\neq0$; x irratsional nuqta bo'lsa, $f(x)=0$. Endi $x_n\to0$, $(n\to\infty)$ ixtiyoriy $\{x_n\}\subset(0,1]$ ketma-ketlikni olaylik. U xolda $x_n\to0$ da $f(x_n)\to f(0)=0$ bo'ladi, chunki $f(x_n)=x_n\cdot D(x_n)$ edi. Demak, $f(x)$ funktsiya Geyne ta'rifiga asosan $x=0$ nuqtada uzluksizdir.

Shunday qilib faqat bitta nol nuqtada $f(x)$ funktsiya uzluksiz. Endi $f(x)qx\cdot D(x)$ funktsiyaning o'lchovli ekanligini ko'rsatish kifoya.

$f_1(x)=x$ funktsiya uzluksiz funktsiya bo'lganidan o'lchovlidir. Dirixle funktsiyasi $D(x)$ esa chegaralangan funktsiya, ya'ni o'lchovli funktsiya. Demak, 3.2.teoremaga asosan $f(x)qx\cdot D(x)$ funktsiya o'lchovlidir. Shunday qilib E da o'lchovli bo'lgan funktsiya faqat bitta nuqta uzluksiz bo'lishi mumkin, qolgan barcha nuqtalarda uzilishga ega bo'ladi.

3-masala. Faraz qilaylik $f(x)$ funktsiya [0,1] kesmada o'lchovli bo'lsin. U xolda ixtiyoriy ochiq G to'plam uchun $(G\subset[0,1])$ uning asli $f^{-1}(G)$ o'lchovli to'plam ekanligini isbotlang.

Yechish. G to'plamni o'zaro kesishmaydigan sanoqli intervallarning birlashmasi ko'rinishda ta'svirlaymiz, ya'ni

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k)$$

$$(\alpha_i,\beta_i)\cap(\alpha_j,\beta_j)=\varnothing \quad i\neq j$$

Endi (α_k,β_k) intervalni

$$(\alpha_k,\beta_k)=(-\infty,\beta_k)\cap(\alpha_k,\infty)$$

ko'rinishda qaraymiz. Berilgan $f(x)$ funktsiya [0,1] da o'lchovli bo'lganida

$$E(f(x)>\alpha_k)=f^{-1}((\alpha_k,\infty)$$

$$E(f(x)<\beta_k)=f^{-1}((-\infty,\beta_k))$$

to'plamlar o'lchovlidir. U xolda

$$f^{-1}((\alpha_k,\beta_k))=f^{-1}((\alpha_k,\infty))\cap f^{-1}((-\infty,\beta_k))$$

bo'lganidan 2.2.teoremaga asosan sanoqli bo'lgan

$$f^{-1}((\alpha_k,\beta_k)$$

to'plamlarning xar biri o'lchovli to'plamlardan iboratdir.Endi

$$f^{-1}(G)=\bigcup_k f^{-1}((\alpha_k,\beta_k))$$

tenglikni e'tiborga olib 2.6.teoremaga asosan $f^{-1}(G)$ to'plamning o'lchovli ekanligini tasdiqlaymiz.

4-masala. Agar $\{f_n(x)\}$ va $\{g_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketliklar mos ravishda f(x) va g(x) funktsiyalarga E to'plamda o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u xolda ularning yigindisi $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ ham E to'plamda f(x)+g(x) funktsiyalar yigindisiga o'lchov bo'yicha yaqinlashishini isbotlang.

Yechish. $\{f_n(x)\}$ va $\{g_n(x)\}$ ketma-ketliklarning o'lchovi bo'yicha f(x)va g(x) yaqinlashishdan quyidagilar kelib chikadi. Xar qanday $\varepsilon>0$ uchun $n\to\infty$ da

$$\mu E(\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})\to 0$$

$$\mu E(\left|g_n(x)-g(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})\to 0$$

Endi

$$\begin{aligned}&E(\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right|\geq\varepsilon)\subset\\ &\subset E(\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})\cup E(\left|g_n(x)-g(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})=A\end{aligned}\qquad(*)$$

ekanligini ko'rsatamiz.
Xaqiqatan, agar $x\notin A$, u xolda

$$x\notin E(\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})$$

va

$$x\notin E(\left|g_n(x)-g(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}$$

Bu esa $\forall x\notin A$ uchun

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|g_n(x)-g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarning bajarilishini ko'rsatadi. Bu oxirgi tengsizliklardan

$$\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right|<\varepsilon$$

kelib chiqadi.

Demak,

$$x \notin E\left(\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right| \geq \sigma\right)$$

Shunday kilib (*) munosabat isbotlandi va bunday $\forall\varepsilon>0$ uchun $n\to\infty$ da

$$\mu E\{\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right| \geq \sigma\} \to 0$$

munosabat kelib chiqadi. Shu bilan masala to'la echildi.
5-masala.Har qanday

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$$

ketma-ketlik uchun yaqinlashish turlarini ko'rsating.

Yechish. Agar $x=0$ bo'lsa, u xolda $\forall n\in N$ uchun $f(x)=0$ va $x=0$ nuqtada $n\to\infty$ da $f_n(x)\to 0$. Agar $0<x<1$ bo'lsa, u xolda $n_0\to\infty$ da $x^n\to 0$. Shuning uchun $n\to\infty$ da $f_n(x)\to 0$. Agar $x=1$ bo'lsa, u xolda $\forall n\in N$ uchun $f_n(x)=\frac{1}{2}$, ya'ni $x=1$ nuqtada $n\to\infty$ da $f_n(x)\to\frac{1}{2}$.

Faraz kilaylik $0\le x<1$ bulganda $f_0(x)=0$ va $x=1$ bulganda $f_0(x)=\frac{1}{2}$ bo'lsin. U xolda yuqoridagi muxokamalarga asosan $n\to\infty$ da $f_n(x)\to f_0(x)$ kelib chiqadi. Ketma-ketlikning nuqtaviy yaqinlashishidan hamma joyda deyarli yaqinlashishi va o'lchov bo'yicha yaqinlashishi (3.4.teorema) kelib chiqqanligi uchun berilgan ketma-ketlik $f_0(x)$ funktsiyaga yaqinlashadi va hamma joyda deyarli yaqinlashadi hamda o'lchov bo'yicha yaqinlashadi. Lekin bu ketma-ketlik $f_0(x)$ funktsiyaga tekis yaqinlashmaydi, chunki aks holda $f_0(x)$ funktsiya uzluksiz funktsiyadan iborat bo'lishi kerak edi.

Amaliy mashg'ulot uchun kerakli adabiyotlar:

1. Ochan Yu.S. Sbornik zadach po matimaticheskomu analizu, Mos.1981 , 85-87, 679-700.
2. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalar nazariyasi. Toshkent 1982 y, 5 bob., 144-160 betlar.

III. Mustaqil topshiriqlar.

1- topshiriq.

Agar f(x) funktsiya E to'plam o'lchovli bo'lsa u holda f^{-1}(E) to'plam o'lchovli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlang.

2- topshiriq

Quydagi masalalarni eching:

1. Agar f(x) o'lchovli funktsiya bo'lsa, u xolda $\ln|f(x)|$ o'lchovli funktsiya bo'ladimi?
2. Agar f(x) funktsiya $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada o'lchovli bo'lsa va $|f(x)|\le 1$ bo'lsa, u xolda arcsinf(x) funktsiya o'lchovli buladimi?
3. Agar E to'plamda $|f(x)|$ funktsiya o'lchovli bo'lsa, u xolda f(x) funktsiya E to'plamda o'lchovli buladimi?
4. [0,1] kesmada o'lchovli bo'lib, faqat bitta nuqtada uzilishga ega bo'lgan, hech qanday uzluksiz funktsiyaga ekvivalent bo'lmagan funktsiya bo'lishi mumkinmi?
5. Agar f(x) funktsiya xar qanday $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ kesmada o'lchovli bo'lsa, u xolda f(x) funktsiya [a,b] kesmada ham o'lchovli bo'lishini isbotlang.

6. Faraz qilaylik $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi $f(x)$ funktsiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsin va ixtiyoriy n natural son uchun $f_n(x)\leq a$, $x\in[0,1]$ bo'lsin. U xolda $[0,1]$ kesmaning deyarli hamma joyida

$$f(x)\leq a$$

tengsizlikning bajarilishini isbotlang.

7*. Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, u xolda $[a,b]$ kesmada bu xosila o'lchovli funktsiyadan iboratligi isbotlansin.

IV. **Mavzu bo'yicha yakuniy mashg'ulot.**

1. Funktsiyalar nazariyasida o'lchovli funktsiyalar tushunchasi uzluksiz funktsiyalar, jamlanuvchi funktsiyalar kabi tushunchasining umumlashmasi bo'lib xizmat qiladi.
2. O'lchovli to'plamda berilgan ixtiyoriy chegaralangan funktsiyaning qiymatlar to'plami o'lchovli bo'lsa, u holda bunday funktsiya o'lchovli funktsiya deyiladi. Ixtiyoriy ikkita o'lchovli funktsiyaning yigindisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi yana o'lchovli funktsiyadan iborat.
3. O'lchovli funktsiyalar ketma-ketligiga doir bo'lgan oddiy (uzluksiz, jamlanuvchi) funktsiyalar tegishli bo'lgan teoremalarning umumlashmasi bo'lib xisoblanadi.

Nazorat savollar:

1. O'lchovli funktsiya deb nimaga aytiladi ?
2. O'lchovli funktsiyalar qanday xossalarga ega?
3. Ekivivalent funktsiyalar deb nimaga aytiladi?
4. Deyarli uzluksiz funktsiyani tushuntiring.
5. Uzluksiz fuktsiyani tushintiring.
6. Uzluksiz funktsiya o'lchovli bo'ladimi ?
7. O'lchovli funktsiyalarning xammasi uzluksizmi?
8. Deyarli yaqinlashishni tushintiring?
9. Deyarli chetli funktsiyani tushuntiring va misol keltiring.
10. O'lchov bo'yicha yaqinlashishni izoxlang.
11. O'lchovli funktsiyalar ketma – ketligi haqidagi Lebeg teoremasini izoxlang.
12. Riss teoremasi nimadan iborat?
13. Egorov teoremasini izoxlang.
14. Luzin teoremasini mohiyatini izoxlang.
15. O'lchov bo'yicha yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqadimi?
16. Lebeg teoremasiga teskari teorema o'rinlimi?
17. Deyali yaqinlashish o'lchov bo'yicha yaqinlashishdan qaysi ma'noda kelib chiqadi?
18. Riss teoremasi matematik analizdagi qaysi teoremaga o'xshaydi?
19. O'lchovli funktsiyalar ustida bajariladigan hamma amallar uzluksiz funktsiya uchun xam o'rinlimi? Aksinchachi?

Tavsiya etilgan adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi T. 1994 y.
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elemeto' teorii funktsiy i funktsiyanalnogo analiza, Mos. 1980 g.
3. Ochan.Yu.S. Sbornik zadacha po matematicheskomu analizu, Mos. 1981 g.

IV-modul
Mavzu: Lebeg integrali.

Ajratilgan vaqt 10 soat ma'ruza, 8 soat amaliy mashg'ulot

Asosiy savolar:
1. Lebeg integrali va ularning xossalari.
2. Lebeg integrali ostidan limitga o'tish.
3. Riman va Lebeg integralini solishtirish.
4. Lp-sinflar va asosiy tengsizliklar.

Ma'ruzaga oid ta'yanch tushinchalar va iboralar:
Dirixle funktsiyasi, quyi va yuqori yig'indi, Lebeg integrali, Lebeg teoremasi, mavjudlik sharti, deyarli uzluksizlik, zarur va kifoyali shart, additivlik, to'g'ri ko'paytma, Fubin teoremasi.

Mavzuga oid muammolar:
1. To'plam bo'yicha Lebeg integrali.
2. Riman va Lebeg integrallarining mavjudligini aniqlash.

1-savol bo'yicha dars maqsadi:
1. Lebeg integralini bayon qilish.

Identiv o'quv maqsadi:
1. To'plam bo'yicha Lebeg integralini izoxlaydi.
2. Lebeg integralini xossalarini izoxlaydi.

1-asosiy savol bayoni :

Avvalo Lebeg integralini $[a,b]$ segmentdagi o'lchovli E to'plamning xarakteristik funktsiyasi uchun aniqlaymiz. Ushbu $f_T(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \in E \end{cases}$ Funktsiyaning E to'plamning xarakteristik funktsiyasi deyiladi.
$f_e(x)$ funktsiyaning Lebeg integrali deb m(E) songa (ya'ni E to'plamning o'lchoviga) aytiladi va quydagicha belgilanadi. $(L)_E \int f_E(x)dx = \mu(E)$
Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} k, x \in E \\ 0, x \in E \end{cases}$$

funktsiya uchun Lebeg integralini

$$(L)\int_E f_{E(x)dx = r\mu(E)}$$

tenglik bilananiqlaymiz. Umumiy xolga snish uchun A va B bilan o'lchovli E to'plamda aniqlangan $f(x)$ funktsiyaning mos ravishda aniq quyi va aniq yuqori chegaralarini belgilaymiz xamda $[A,B]$ segmentni quyidagi n qismga bo'lamiz.
$A = y_0 < y, < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n = B$
Sungra $L\partial(\partial = 0, n-1)$ bilan $y\partial \le f(x) \le y_{r+1}$

Tengsizlikni kanoatlantiruvchi x nuktalardan iborat tuplamni belgilaymiz. $f(x)$ Funktsiya ulchovli bulganligi uchun $L_0(\partial = 0, n-1)$ tuplamlar ulchovli buladi. Endi ushbu

$$S = \sum_{\partial=0}^{n-1} y\partial m(L\partial), S = \sum_{\partial=0}^{n-1} y\partial + 1m(L\partial)$$

yig'indilarni tuzamiz (s va S ni mos ravishda kuyi va yukori yig'indilar deyiladi) va kuyidagi ta'rifni kiritamiz:

Ta'rif. Agar λ_n nolga intilganda $(n \to \infty)$ s va S yig'indilarning limiti mavjud bo'lib, bir-biriga teng bo'lsa va bu limit nuqtalarini tanlab olishga bogliq bo'lmasa, u holda bu limitni funktsiyaning E to'plamdagi Lebeg integrali deyiladi va bu integral yuqoridagi xusussiy xoldagi kabi ushbu

$$(L)_E Sf(x)dx$$

ko'rinishda belgilanadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funktsiya o'lchovli E to'plamda o'lchovli va chegaralanmagan bo'lsa, u xolda uning Lebeg integrali mavjuddir.

Isbot. Chegaralangan va o'lchovli $f(x)$ funktsiyani olib, uning uchun s va S yig'indilarning umumiy limitga ega ekanligini ko'rsatamiz. Bu funktsiya chegaralangani uchun uning aniq quyi va aniq yuqori chegaralari mavjud; ular mos ravishda A va B bo'lsin. $[A, B]$ segmentni ikki usul bilan quyidagicha n va n qismlarga bo'lamiz:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_{n1} = B(1)$$

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n2-1} < y_{n2} = B(2)$$

Agar

$$\lambda_{n_1} = \max_{0 \le \partial \le n-1_1} (y_{\partial+1} - y_\partial), \lambda_2 = \max_{0 \le \partial \le n_2 - 1} (y_0^1 - y_0^1), \lambda = \max\{\lambda_{n_1}; \partial_{n_2}\}$$

belgilashlarni kiritsak, u xolda bo'linish nuqtalari uchun ushbu

$$\begin{cases} y_{\partial+1} - y_\partial \le \lambda(\partial = 0, n_1 - 1) \\ y_{\partial+1} - y_\partial \le \lambda(\partial = 0, n_2 - 1) \end{cases}$$

tengsizliklarbajariladi.Bu tengsizliklardan

$$S - s = \sum_{\partial=0}^{n_1-1} (y_{\partial+1} - y_\partial) m(l_\partial) \le \lambda \sum_{\partial=0}^{n_1-1} m(l_\partial) = \lambda m(E)$$

quyidagimunosabatlar kelib chiqadi.

$$S' - s' = \sum_{\partial=0}^{n_2-1} (y'_{\partial+1} - y'_\partial) m(l'_\partial) \le \lambda \sum_{\partial=0}^{n_2-1} = \lambda m(E)$$

Bu erda s' va S' sonlar (2) bo'linishi uchun tuzilgan quyi va yuqori yig'indilar . Endi (1) va (2) bo'linish nuqtalarini , ya'ni y_∂, y_∂ nuqtalarning xammasini bo'luvchi nuqtalarsifatida olamiz vategishli s'' va S'' yigindilarni tuzamiz . Buning natijasida s va s' yigindilar kamaymaydi,S va S' yigindilari esa ortmaydi, ya'ni

$$s \le s'' \le s'' \le s$$
$$s' \le s'' \le s'' \le s' \quad (3)$$

Tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Darxaqiqat, agar $(y_\partial, y_{\partial+1})$ oraliqni birorta yangi nuqta yordami bilan oraliqlarga bo'lsak, u xolda ushbu

$$y_\partial m(l_\partial) \le y_\partial m\{E(y_\partial \le f < \varepsilon)\} + y_{\partial+1} m(E(\varepsilon \le f < y_{\partial+1})$$

tengsizlik bajariladi.Bundan ko'rinadiki, s $\in$ s'',ya'ni qo'shimcha bo'linish nuqtalari kiritilishi natijasida quyi yigindi kamaymaydi. Shunga o'xshash ushbu

$$y_{\partial+1} m(l_\partial) \ge \xi m\{E(y_\partial \le f < \xi)\} + y_{\partial+1} m(E(\xi \le f < y_{\partial+1}))$$

tengsizlilarni xam yozishimiz mumkin ; bundan ko'rinadiki, yangi nuqtani kiritish natijasida S yigindining tegishli xadi ortmas ekan, S yiuindining uzi xam ortmaydi. (3) munosabatlardan ko'rinadiki (s,S) va (s',S')oraliqlar(s",S")oraliqdan iborat umumiy qismga ega ekan. Demak,s,s",S va S' sonlarning xammasi uzunligi $2\lambda m$ dan katta bo'lmagan oraliqda joylashgandir. λ ni istalgancha kichik qilish mumkinligidan va matematik analizdagi umumiy yaqinlashishi printsipiga muvofiq s,S yigindilarning umumiy limitga ega ekanligi kelib chiqadi.

Demak, yuqorida berilgan tarifgamuvofiq xar qanday chegaralangan o'lchovli $f(x)$ funktsiya uchun Lebeg integrali doimo mavjud.

Lebeg integralining ko'pgina xossalari Riman integral xossasi kabidir

Muxokama uchun savolar:

1.1. Integral yig'indilar qanday tuziladi?
1.2. Lebeg integrali deb nimaga aytiladi?
1.3. O'rta qiymat haqidagi teorema.
1.4. Lebeg integralining asosiy xossalari.

2- savol bo'yicha dars maqsadi:

1. Lebeg integrali ostida limitga o'tishni o'rganish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. Integral ostida limitga o'tish moxiyatini o'rgana oladi.
2. Integral ostida limitga o'tish shartini tushina oladi.

2-asosiy savol bayoni:

Ulchovi E to'plamda aniqlangan o'lchovli va chegaralangan funktsiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, bu ketma-ketlik o'lchovli F(x) funktsiyaga E to'plamning xar bir nuqtasida E deyarli yoki o'lchov bo'yicha yaqinlashuvi bo'lsin. U xolda

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx \qquad (1)$$

munosabat doimo o'rinlimi degan savol tugiladi. Bu munosabatning umuman aytganda, doimo o'rinli emasligini quyidagi misoldan ko'rish mumkin . Masalan $f_n(x)$ funktsiya $[0,1]$ segmentda quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \overline{\in} (0,\dfrac{1}{n}) \\ n, x \subset (0,\dfrac{1}{n}) \end{cases}$$

u xolda xar qanday $x \in [0,1]$ uchun ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ tenglik

o'rinlidir. Lekin $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ ya'ni(1) munosabat bajarilmas ekan.

Endi, funktsiyalar ketma-ketligi qanday shartlarni qanoatlantirganda (1) munosabat o'rinli bo'ladi degan savol tugiladi. Bu savolga Lebegning quyidagi teoremasi javob beradi:

Teorema: (A.Lebeg)o'lchovli E to'plamda o'lchovli va chegaralangan funktsiya f_n ketma-ketlik berilgan bo'lib, bu ketma-ketlik o'lchovli F(x) funktsiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashuvchi bo'lsin. Agar E to'plamning barcha elementlari uchun va xar qanday n natural son uchun ushbu $|f_n(x)| < k$ tengsizlikni qanoatlantiradigan Kson mmavjud bo'lsa u xolda bunday funktsiyalar ketma-ketligi uchun (1) munosabat o'rinli .

Isbot. Dastlabki E to'plamda ushbu $|f(x)| \le k(2)$ tengsizlik deyarli bajarilishini ko'rsatamiz. Darxaqiqat, $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlikdan Ris teoremasiga ko'ra shunday $\{f_{n_k}(x)\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin, u funktsiyaga deyarli yaqinlashadi .

Endi $|F_{n_k}(x)| < k$

Tengsizlikdan limitga o'tilsa (2) munosabat kelib chiqadi. Ixtiyoriy $G > 0$ son uchun

$$A_n(G) = E(|f_n - F)| \ge G)$$

$$B_n(G) = E(|f_n - F)| < G)$$

To'plamlarni tuzamiz. U xolda,

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| \le \int |f_n(x) - F(x)|dx = \int_{A_n(G)} |f_n(x) - F(x)|dx + \int_{B_n(G)} |f_n(x)F(x)|dx(3)$$

Muxokama uchun savollar:

2.1. Nima uchun inegral ostidan xama vaqt limitga o'tib bo'lmaydi?
2.2. Qanday shartda integral osti limitga o'tish mumkin.?

3-savol bo'yicha dars maqsadi:

Riman va Lebeg integrallarini solishtirishni tushuntirish

Identiv o'quv maqsadi:

1. Riman va Lebeg integrallarining mavjudlik shartini aniqlay oladi.
2. Riman va Lebeg integrallarini bir-biri bilan solishtira oladi.

3- savol bayoni

TA'RIF. Agar bir o'lchovli E to'plamda berilgan funktsiyaning uzilish nuqtalaridan iborat to'plamning nuqtalari nol bo'lsa, u holda funktsiya E to'plamda deyarli uzluksiz funktsiya deyiladi.

TEOREMA. (A.Lebeg). $[a,b]$ segmentda funktsiyaning Riman integrali mavjud bo'lishi uchun uning bu segmentda chegaralangan va deyarli uzluksiz bo'lishi zarur va kifoyadir.

ISBOT. Zarurligi. Funktsiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi bo'lishi uchun avvalo chegaralangan bo'lishi kerakligi Riman integralining ta'rifidan bevosita ko'rinadi.

Chegaralangan funktsiyaning $[a,b]$ segmentdagi uzilish nuqtalaridan iborat bo'lgan to'plamni+bilan belgilaymiz. Endi $\omega(x)$ bilan $f(x)$ funktsiyaning x nuqtada tebranishini belgilab, $Q_n = Q\left\{\omega(x) \ge \frac{1}{n}\right\}$ to'plamni ko'ramiz. Har bir uzilish nuqta Q_n to'plamlarning biriga albatta kiradi va, aksincha, shuning uchun

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \qquad (1)$$

Endi Q_n to'plamning yopiqligini ko'rsatamiz. Darhaqiqat, agar x_0 nuqta Q_n to'plam uchun limit nuqta bo'lsa, u holda x_0 ni o'z ichiga olgan har qanday oraliq to'plamning kamida bitta nuqtasini o'z ichiga oladi, demak, bu oraliqda $f(x)$ funktsiyaning tebranishi $\frac{1}{n}$ dan kichik bo'lmaydi. Demak, Q_n yopiq to'plam va shuning uchun u o'lchovli. (1) tenglikdan o'lchovli to'plamlar haqidagi teoremaga asosan Q_n to'plamning ham o'lchovli ekanligi kelib chiqadi. $\mu(Q) > 0$ deb faraz qilamiz, u holda Q_n to'plamlar orasida shunday Q_r to'plam topiladiki, uning uchun ushbu munosabat bajariladi: $\mu(Q_r) = \alpha > 0$ (2)

Darhaqiqat, agar $\mu(Q_r) = 0, r = 1,2,....$ bo'lganda edi, u holda

$\mu(Q) = \lim_{n\to\infty} \mu(Q_n) = 0$ (3) bo'lar edi, chunki (3) munosabat

farazimizga zid, shuning uchun (2) munosabat o'rinli.

Endi $[a,b]$ segmentni n ta segmentga bo'lib, ushbu $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k)$ (4)

yig'indini tuzamiz, bu erda ω_k oraliqni $f(x)$ funktsiyaning $[a_k, a_{k+1}]$ segmentidagi tebranishi belgilandi. Bu yig'indi Q_r to'plamning birorta ham nuqtasini o'z ichiga olmagan. $[a_k, a_{k+1}]$ segmentlarga mos hadlarni chiqarib tashlaymiz. Q_r to'plam bo'sh bo'lmaganligi uchun (chunki $\mu(Q_r) > 0$), (4) yig'indining hamma hadlari chiqib ketmaydi. Demak, ushbu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \geq \Sigma' \omega_k (a_{k+1} - a_k) \geq \frac{1}{2} \Sigma' (a_{k+1} - a_k) \qquad (5)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu erda Σ' oraliq chiqarilib tashlash natijasida qolgan segmentlarga tegishli hadlar yig'indisi belgilanadi. Ammo

$$\Sigma'(a_{k+1} - a_k) \geq \mu(Q_r) = \alpha$$

chunki Σ' ga kirgan hadlarga tegishli $[a_k, a_{k+1}]$ segmentlar sistemasi Q_r to'plamni butunlay o'z ichiga oladi. Shuning uchun (5) tengsizlikdan ushbu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \geq \frac{\alpha}{r}$$

tengsizlik kelib chiqadi, bundan esa

$$\lim_{\sigma_n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \neq 0,$$

munosabat, ya'ni $f(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ segmentda Riman integrali mavjud ekanligi kelib chiqadi.

Demak, agar $[a,b]$ segmentda chegaralangan funktsiya bo'lsa, u holda Ushbu funktsiya Riman ma'nosida integrallanuvchi emas ekan. Shunday qilib, $f(x)$ funktsiya integrallanuvchi bo'lishi uchun uning $[a,b]$ segmentda chegaralangan va deyarli uzluksiz bo'lishi zarur ekan.

Muxokama uchun savollar.

3.1. Riman va Lebeg integrallari farqi nima?
3.2. Biridan ikkinchisini keltirib chiqarish mumkinmi? Aniqlashtiring.
3.3 Xamma haqiqiy o'q bo'ylab olingan Riman va Lebeg integrallarini solishtiring.

4 - savol bo'yicha dars maqsadi:

1. Lp- sinfda Gelder va Minkovskiy tengsizliklarini o'rganish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. Gelder tengsizligini tushintira oladi.
2. Minkovskiy tengsizligini tushintira oladi.

4 - savol bayoni

Tarif. Funnktsiyalarning $L_p(X,\mu)$ ($\rho \succ 0$) sinfi deb ,ushbu

$$\int_X |f(x)|^p d\mu$$

integrali mavjud bulgan barcha ulchov li $f(x)$ funktsiyalar tuplamiga aytiladi.

Aytaylik, X tuplamning ulchovi chekli bulsin, u xolda X tuplamda ulchovli bulgan xar kanday $f(x)$ funktsiya uchun

$$|f(x)| \le \frac{1+f^2(x)}{2} \qquad [1-f(x)]^2 \ge 0$$

tenksizlik urinli bulgani uchun $L_2(X,\mu) \subset L_1(X,\mu)$ munosabat kelib chikadi. Ammo buning aksinchasi urinli emas. bunga misol keltirish uchun X tuplamni $[0,1]$ segmentdan iborat deb, μ ulchovni esa segmentdan iborat deb, μ ulchovni esa bu segmentdagi Lebeg ulchovi deb olamiz. Agar $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ bulsa, u xolda $f(x) \in L_1(X,\mu)$, ammo . Sunggi munosabat $L_2(x,\mu), \subset L_1(X,\mu)$ munosabat urinli emas. Xakikatan, agar Xni barcha xakikiy sonlar tuplami deb (yani $(-\infty,\infty)$ oralik.) μ ulchovni esa Lebeg ulchovi deb olsak, u xolda $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ funktsiya $L_2(X,\mu)$ sinfining elementi bulmaydt. Chunki bu funktsiya $(-\infty,\alpha)$ orlikda jamlanuvchi emas.

Teorema (Gelder tengsizligi). Agar $\rho \succ 1$ bulib, $f(x) \in L_p, g(x) \in L\frac{p}{p-1}$ bulsa u xolda

$f(x)\cdot g(x) \in L_1$ va $\left|\int f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \left\{\int |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\int |g(x)|^{\frac{p}{1-p}} dx\right\}^{\frac{p-1}{p}}$ munosabatlari urinli buladi.

Teorema. (Minkovskiy va Koshi tenksizliklari). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalari L_p sinfga kirsa, u xolda $(f(x)+g(x)) \in L_p$ va $\left\{\int |f+g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\int |f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int |g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ tenksizlik urinli buladi.

Muxokama uchun savollar:

4.1. Funktsiyani Lp- sinifi nimalardan iborat?
4.2. Gelder tengsizligining mohiyati nimada?
4.3. Minkovskiy tengsizligining moxiyati nimada?

Mavzuga oid ilmiy muammo:

Agar funktsiya $L_2[a,b)$ fazoda yotsa, u holda bunday funktsiya $L\,[a,b)$ fazoda ham yotadi. Lekin buning teskarisi o'rinli emas. Shu nuqtai nazardan $L_p[a,b)$ fazoda yotuvchi funktsiyalar qanday holatlarda $L_q[a,b)$ fazoda $(q > p)$ yotish masalasi muammodan iboratdir. Bu muammoni yanada kengaytirib funktsiyalarni n o'lchamli fazoda qarash nazarda tutiladi.

Bu muammolar fanda hali to'la echilmagan.

Amaliy mashg'ulot. Lebeg integrali va uning xossalariga doir misol-masalalar yYechish.

Ajraktilgan vaqt 8 soat

Dars maqsadi:

1. Lebeg integralini va uning xossalarini misol va masalalar yordamida tushintirish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. Chegaralangan va chegaralanmagan funktsiyalarning Lebeg integralini xisoblay oladi.
2. Lebeg integralining ahamiyatini tushintirishga doir masala echa oladi.

1. Zaruriy tushunchalar.

Agar f(x) funktsiyaning E to'plamdagi har xil qiymatlar soni sanoqli to'plamdan ortiq bo'lmasa, u holda bunday f(x) funktsiya E to'plamda sodda funktsiya deyiladi.

Agar E_k to'plam o'lchovli μE_k va

$$E_k = \{x \in E : f(x) = C_k\}$$

bo'lib

$$\sum_k |C_k| \mu E_k$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u xolda E to'plamda berilgan va o'lchovli bo'lgan f(x) sodda funktsiya E to'plam bo'yicha Lebeg ma'nosida integrllanuvchi deyiladi.

Agar E to'plamdagi f(x) sodda funktsiya integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_k |C_k| \mu E_k$$

qator Lebeg integrali deyiladi va

$$\int_E f(x)dx$$

deb belgilanadi.

Agar E to'plam deyarli hamma joyida f(x) funktsiyaga tekis yaqinlashuvchi integrallanuvchi sodda $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi mavjud bo'lsa, u holda o'lchovli va deyarli hamma joyda chekli bo'lgan f(x) funktsiya E to'plam bo'yicha Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi.

Agar f(x) funktsiya E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

E to'plam bo'yicha Lebeg integrali deyiladi va

$$\int_E f(x)dx$$

deb belgilanadi.

2. *Asosiy teoremalar*

4.1.Teorema. Faraz qilaylik f(x) sodda funktsiya

$$E=\bigcup_k E_k,(E_k=\{x\in E; f(x)=C_k\}<E_k\cap E_s=\varnothing,\ k\neq s)$$

to'plamda berilgan bo'lsin. Agar E_k to'plamning har biri o'lchovli bo'lsa, u holda f(x) funktsiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi.
4.2.Teorema. O'lchovi nol bo'lgan to'plam bo'yicha ixtiyoriy f(x) funktsiyadan olingan integral noga teng.
4.3.Teorema O'lchovi nol bo'lgan to'plamdagi integrallanuvchi funktsiyaning o'zgarishi, uning integral qiymatini o'zgartirmaydi.
4.4.Teorema. (additivlik xossasi) Faraz qilaylik E to'plam A_k to'plamlarning birlashmasi sifatida tasvirlangan bo'lib A_k larning ixtiyoriy bir jufti kesishmaydigan bo'lsin va $\{A_k\}$ to'plam soni sanoqli to'plamdan ortiq bo'lmasin. Agar f(x) funktsiya E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f(x) har bir A_k to'plamda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_E f(x)d\mu=\sum_k \int_{A_k} f(x)d\mu$$

shu bilan birga

$$\sum_k \int_{A_k} |f(x)|d\mu<\infty$$

4.5.Teorema. Faraz qilaylik E to'plam A_k to'plamlarning birlashmasi sifatida tasvirlangan bo'lib A_k larning ixtiyoriy bir jufti kesishmaydigan bo'lsin va $\{A_k\}$ to'plam sanoqli to'lamdan ortiq bo'lmasin. Agar f(x) funktsiya har bir A_k to'plamlarda integrallanuvchi bo'lsa va

$$\sum_k \int_{A_k} |f(x)|d\mu<\infty$$

bo'lsa, u holda f(x) funktsiya E to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.
4.6.Teorema.(Absolyut uzluksizlik xossasi) Agar f(x) funktsiya E to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ bo'lib ixtiyoriy $e\subset E$ ($\mu e<\delta$) uchun

$$\int_e |f(x)|d\mu<\varepsilon$$

bo'ladi.
4.7.Teorema.(A.L.Lebeg) Faraz qilaylik $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi E to'plamda f(x) funktsiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsin va E to'plamda integrallanuvchi bo'lgan $\varphi(x)$ uchun

$$|f_n(x)|\le\varphi(x),\forall n\in N$$

tengsizlikni E to'plamda deyarli bajarilsin. U holda f(x) funktsiya E to'plamda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\lim_{n} \int_{E} f_n(x)d\mu = \int_{E} (\lim_{n} f_n(x))d\mu$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4.8.Teorema. (B.Levi) Faraz qilaylik $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik kamaymadigan (o'smaydigan) bo'lsin;
2) E to'plamda $f_n(x)$ funktsiyalar integrallanuvchi bo'lib

$$\int_{E} f_n(x)dx \le K, \forall n \in N = \{1,2,3,\dots\}$$

bo'lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

mavjud va f(x) funktsiya E da integrallanuvchi bo'ladi va shu bilan birga

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E} f_n(x)d\mu = \int_{E} \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu = \int_{E} f(x)dx$$

Natija. Agar manfiy bo'lmagan $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi uchun E to'plamda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_n(x)d\mu$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

qator E to'plamda deyarli hamma joyda yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\int_{E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E} f_n(x)d\mu$$

tenglik bajariladi.

4.9.Teorema. (P.Fatu) Agar manfiy bo'lmagan $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi E to'plamda f(x) funktsiya deyarli yaqinlashuvchi bo'lib E to'plamda $f_n(x)$ funktsiyalar integrallanuvchi bo'lsa va ixtiyoriy n natural son uchun

$$\int_{E} f_n(x)d\mu \le K, k = const$$

bo'lsa, u holda f(x) funktsiya E to'plamda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_E f(x)d\mu \le K$$

bo'ladi.

4.10.Teorema. [a,b] kesmada berilgan f(x) funktsiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun f(x) funktsiya chegaralangan va [a,b] kesmada deyarli hamma joyda uzluksiz bo'lishi zarur va kifoyadir.

3. Masalalar yYechish

4.1.-masala. [-1,1] kesmada integrallanmaydigan sodda funktsiyani tuzing.

Yechish. f(x) funktsiyani quyidagicha tuzamiz. Agar

$$x \in \left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \setminus \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]\right), n = 1,2,3,\ldots$$

bo'lsa, f(x)=n deb olamiz va x=0 bo'lsa, f(x)=0 deb olamiz. U xolda f(x) sodda va o'lchovli funktsiyalardan iborat bo'ladi. Agar

$$E_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \setminus \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$$

bo'lsa, u holda E_n o'lchovi

$$\mu E_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

Endi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\mu E_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

bo'lgani uchun f(x) funktsiya [-1,1] kesmada integrallanuvchi emas.

4.2. Masala. Agar R va Q_{n-1} tuplam Kantor tuplamlari bulib

$$x \in \Delta_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} (\alpha_{kn}, \beta_{kn}) \in G$$

bo'lganda

$$f(x) = (\alpha_{kn} - x)(x - \beta_{kn})$$

bo'lsa va $x \in P$ bo'lganda

$$f(x) = 0$$

bo'lsa, u holda

$$\int_0^1 f(x)dx$$

integralni hisoblang.

Yechish. Bunday berilgan f(x) funktsiya [0,1] kesmada uzluksiz. Shuning uchun [0,1] da Lebeg ma’nosida va demak Riman ma’nosida ham integrallashuvchi. 4.4.Teoremaga asosan

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_P f(x)dx+\int_Q f(x)dx\ ,\ P\cup Q=[0,1]$$

Endi $\mu P=0$ bo’lgani uchun 4.2.teoremaga ko’ra

$$\int_p f(x)dx=0$$

Bu tenglikni e’tiborga olib 4.4.teoremaga asosan tenglikka quyidagini topamiz.

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n} f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_{\alpha_{k_n}}^{\beta_{k_n}}(\alpha_{k_n}-x)(\beta_{k_n}-x)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_0^{\frac{1}{2^k}} x\left(\frac{1}{3^n}-x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\int_0^{\frac{1}{3^n}}\left(\frac{1}{3^n}x-x^2\right)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}}=\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{27}\right)^n=\frac{1}{150}$$

4.3. Masala. Faraz qilaylik $\mu A<\infty$ bo’lib, A to’plamning hamma joyida deyarli f(x)>0 bo’lsin. Agar

$$\int_A f(x)dx=0$$

bo’lsa, u holda $\mu A=0$ ekanligi isbotlansin.

Yechish. B to’plamni quyidagicha aniqlaymiz

$$B=\{x\in A;\ f(x)\le 0\}$$

U holda $\mu B=0$ ekanligi masala shartidan kelib chikadi. 4.3.Teoremani e’tiborga olsak A to’plamda f(x)>0 deb qarashimiz mumkin.

Endi faraz qilaylik $\mu A\neq 0$ bo’lsin. U holda $\mu F\neq 0$ bo’lsa $F\subset A$ berk qism to’plam mavjuddir va F to’plamda f(x) funktsiya uzluksiz bo’ladi (Luzin teoremasiga qarang). F to’plamning ixtiyoriy x nuqtasi uchun f(x)>0 bo’lganidan va f(x) funktsiya F to’plamda uzluksiz bo’lganidan $f(x)\ge C$ tengsizlik o’rinli bo’ladigan S>0 son mavjud.

Endi

$$0=\int_A f(x)d\mu\ge\int_F f(x)d\mu\ge C\cdot(\mu F)>0$$

Bu qarama-qarshilik (ziddiyat) bizning farazimiz noto’g’ri ekanligini ko’rsatadi.

Demak, $\mu A=0$

4.4.masala.

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx,\ p>1, q>0$$

integralni hisoblang.

Yechish. Ma’lumki, $\ln(1-x^q)$ funktsiyani [0,1) oraliqda ushbu

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{kq}}{k}$$

darajali qatorga yoyiladi. Bu qator [0,1) da tekis yaqinlashuvchidir. Demak qator $\ln(1-x^q)$ funktsiyaga [0,1) hamma joyida deyarli yaqinlashadi.

Endi

$$f_n(x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{kq+p-1}}{k}$$

deb faraz qilaylik. $f_n(x)$ funktsiyalar o'smaydigan ketma-ketlikni tashkil qiladi va uning integrali

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(kq+p)}=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\frac{p}{2})}<\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\infty$$

Bu esa $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlikning 4.8.teorema shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatadi.

Demak,

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^2)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(kq+p)}$$

4.5.masala. Ushbu

$$\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+100}$$

funktsiya $[0,\infty)$ oraliqda:

a) Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'ladimi?

v) Lebeg bo'yicha integrallanuvchi bo'ladimi?

Yechish. Quyidagicha belgilash qilamiz.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+100}\to g(x)=\sin x$$

f(x) funktsiya $x\to\infty$ da monoton kamayuvchidir va $f(x)\to 0$.

g(x) funktsiyaning [0,A] oraliqdagi boshlang'ich funktsiyasi tekis chegaralangan. Shuning uchun $[0,\infty)$ da $f(x)\cdot g(x)$ funktsiyaning Piman integrali mavjud (Dirixle alomatiga asosan).

Lebeg ma'nosida $f(x)\cdot g(x)$ va $|f(x)\cdot g(x)|$ funktsiyalar bir vaqtda yoki integrallanuvchi yoki integrali mavjud emas. $[0,\infty)$da $|f(x)\cdot g(x)|$ funktsiyaning integrallanuvchi emas ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham,agar $|f(x)\cdot g(x)|$integrallanuvchi bo'lsa, u holda $\sin^2 x\le|\sin x|$ $(\forall x\in R)$ ga asosan

$$f(x)\sin^2 x=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(x)\cos 2x \qquad \left(\sin^2 x=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)$$

funktsiya ham integrallanuvchi bo'ladi.

Demak $[0,\infty)$ da f(x) va f(x)cos2x funktsiyalar integrallanuvchi.

Lekin

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{\pi}{2}a$$

bo'lgani uchun

$$\int_0^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}dx=\left|\begin{array}{c} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{array}\right|=2\int_0^{\infty}\frac{t^2}{t^2+100}dt=\int_0^{\infty}dt-10\pi=\infty$$

bu oxirgi qarama-qarshilik (ziddiyat) $|f(x)\cdot g(x)|$ funktsiyaning $[0,\infty)$ da integrallanuvchi emas ekanligini ko'rsatadi.

Demak, bu funktsiyaning Lebeg integrali mavjud emas.

4.6.masala. f(x) funktsiyaning ixtiyoriy $[\alpha,\beta]$ da ($[\alpha,\beta]\subset(a,b)$) Riman integrali mavjud. Bu funktsiyaning [a,b] kesmada integrali mavjudmi?

Yechish. Yuqoridagi 4.10. teoremaga asosan f(x) funktsiya chegaralangan va [a,b] ning deyarli hamma joyida uzluksiz bo'lishi kerak.

Ixtiyoriy $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ kesmada f(x) funktsiya integrallanuvchi bo'lganligidan f(x) funktsiya (a,b) intervalda deyarli hamma joyda uzluksizligi kelib chiqadi. U holda [a,b] kesmaning hamma joyida deyarli uzluksiz. Lekin ixtiyoriy $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ kesmada f(x)ning chegaralanganligidan [a,b] kesmada chegaralnganligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$ bo'lsa, u holda f(x) funktsiya [a,b] kesmada chegaralanmagan, lekin ixtiyoriy $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$da funktsiya chegarlangan.

Demak, f(x) funktsiyaning [a,b] kesmada Riman integrali mavjud bo'lmasligi mumkin.

4.7.masala. Agar

$$f(x)=nxe^{-nx^2}$$

bo'lsa

$$\lim_n\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_n f_n(x)dx, n=1,2,\ldots$$

tenglik o'rinli bo'ladimi?

Yechish. $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi [0,1] kesmada nolga yaqinlashadi. Demak, $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik $n\to\infty$ o'lchov bo'yicha nolga yaqinlashadi. Bu esa Lebeg teoremasining (4.7.teorema) birinchi sharti bajarilishini ko'rsatadi.

Endi

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\tfrac{1}{2}n\int_0^1 e^{-nt}dt=\tfrac{1}{2}(1-e^{-n})\to\frac{1}{2}, n\to\infty$$

bo'lgani uchun Lebeg teoremasining ikkinchi sharti bajarilmasligini ko'ramiz.

Shunday qilib $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligi uchun integrallanuvchi mojaronta (taqqoslanuvchi) funktsiya mavjud emasligini tasdiqlaymiz.

Demak, berilgan funktsiya uchun

$$\lim_n\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1(\lim f_n(x))dx$$

4.8.masala. Agar

$$f_n(x)=n^{\alpha}x(1-x)^n$$

bo'lsa, u holda α ning qanday qiymatlarida

$$\lim\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1(\lim f_n(x))dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi?

Yechish. Ixtiyoriy $n\in N=\{1,2,\ldots\}$ uchun

$$f_n(0)=f_n(1)=0$$

Bu esa $n\to\infty$ da x=0, x=1 nuqtalarda $f_n(x)\to 0$ ekanligini ko'rsatadi. Agar 0<x<1 bo'lsa, u holda $0<1-x=\theta$ va

$$n^{\alpha}(1-\theta)\theta^{n}=n^{\alpha}\theta^{n}-n^{\alpha}\theta^{n+1}$$

Ixtiyoriy $\alpha\in R\in(-\infty,\infty)$ uchun $n\to\infty$ da $n^{\alpha}\theta^{n}\to 0$ bo'lganidan $n\to\infty$ da [0,1] kesmada $f_n(x)\to 0$, $\alpha\in R$.

Shuning uchun $\alpha\in R$ bo'lib $n\to\infty$ da

$$\int_0^1 (\lim f_n(x))dx\to 0$$

Ikkinchi tomondan

$$\int_0^1 f_n(x)dx=n^{\alpha}\int_0^1 x(1-x)^n dx=n^{\alpha}\int_0^1 (1-x)x^n dx=\frac{n^{\alpha}}{(n+1)(n+2)}$$

Bu oxirgi tenglik $\alpha<2$ bo'lganda

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx=0, n\to\infty$$

tenglikni keltirib chiqaradi.

Demak, berilgan funktsiya uchun ko'rsatilgan tenglik $\alpha<2$ hamma qiymatlar uchun bajariladi.

4.9. Masala. [0,1] kesmada quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{f_n(x)\}$ integrallanuvchi funktsiyalar ketma-ketligini tuzing:

1) $n\to\infty$ da $f_n(x)\to f(x)$ deyarli hamma joyda
2) $f(x)$ funktsiya [0,1] da integrallanuvchi
3) $\lim\limits_n \int_0^1 |f_n(x)-f(x)|dx\neq 0$

Yechish. $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligini quyidagicha tuzamiz:

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2, & 0\le x<\frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

[0,1] kesmada deyarli, $n\to\infty$ da $f_n(x)\to 0$ ekanligi ko'rinib turibdi va shu bilan birga

$$\int_0^1 (\lim f_n(x))dx=0$$

Bu esa 1) va 2) shart bajarilishini ko'rsatadi. Lekin

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|dx=\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{\frac{1}{n}} dx=\infty\neq 0$$

Bu 3) shart bajarilishini ko'rsatadi.

4.10.- Masala. Agar

$$f_n(x)=\begin{cases} |\ln x|, & 0\le x\le\frac{1}{n} \\ \cos^2 x, & \frac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

bo'lsa, u holda [0,1] kesmada $\{f_n(x)\}$ funktsiyalar ketma-ketligining limit funktsiyasi integrallanuvchi bo'ladimi?

Yechish. Xar qanday x>0 uchun $\frac{1}{n_0}<$ x bo'ladigan $n_0=n_0(x)$ son topiladi. Bu esa $n\geq n_0$ bulganda ixtiyoriy x>0 uchun $f_n(x)=\cos^2x$, ya'ni $n\to\infty$ da ixtiyoriy x>0 uchun $f_n(x)\to\cos^2x$ munosabatni bildiradi. Agar x=0 bo'lsa, u holda ixtiyoriy n ($n\in N$) uchun $f_n(x)=\infty$. Demak $n\to\infty$ da deyarli hamma joyda $f_n(x)\to sos^2x$ va bu limit funktsiya [0,1] da integrallanuvchidir.

Endi chegaralanmagan funktsiyaning Lebeg integraliga doir masalalarni ko'raylik.

Avvalo chegaralanmagan funktsiyaning Lebeg integrali tushunchasini eslaylik.

Faraz qilalylik $f(x)\geq 0$ funktsiya bo'lsin va $[f(x)]_n$ esa quyidagicha aniqlansin.

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x), & f(x)\leq n \\ n, & f(x)>n \end{cases}$$

Bu $\{f(x)\}_n$funktsiya chegaralangan va o'lchovli. Demak u integrallanuvchi.

Endi f(x) funktsiyadan E to'plam bo'yicha olingan integralni $[f(x)]_n$ funktsiya integralining limiti sifatida aniqlaylik (limit mavjud bo'lgan holda), ya'ni

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x)]_n dx$$

Amaliy mashulot uchun kerakli adabiyotlar:

1. Ochan Yu.S. Sbornik zadach po matimaticheskomu analizu, M. 1981 g. str.83-85
2. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalar nazariyasi. T. 1982y. 163-193 betlar.

III. **Mustaqil topshiriqlar:**

1- topshiriq. Lebegning aniqmas integrali.

2- topshiriq. Quyidagi masalalarni eching.

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{[x]}$ integralni hisoblang, bunda [x] esa x ning butun qismi.

2. Faraz qilaylik $\mu A<\infty$ bo'lib, f(x) funktsiya A to'plamda integrallanuvchi va deyarli A ning deyarli hamma joyida $|g(x)|\leq m$ bo'lsin, A to'plamda f(x)g(x) funktsiyaning integrallanuvchi ekanligi isbotlansin.

3. $[0,\infty)$ da

$$f(x)=\frac{x^p\sin x}{1+x^q},\quad p>-2,\ p<q\leq p+1$$

funktsiya Riman va Lebeg bo'yicha integrallanuvchi bo'ladimi ?

4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ integralni hisoblang.

5. Agar

$$f_n(x)=\frac{1}{1+n^2x^n}$$

bo'lsa, u xolda $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))dx$ tenglik o'rinlimi ?

6. Agar $f_n(x)=\begin{cases} ctgx, 0\leq x\leq \frac{1}{n} \\ -1, \frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}$ bo'lsa, u holda $\lim\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1(\lim f_n(x))dx$ o'rinlimi?

7. Faraz qilaylik chegaralangan, manfiymas $\{f_n(x)\}$ o'lchovli funktsiyalar ketma-ketlig uchun $n\to\infty$ $\int_E f_n(x)dx\to 0$ bo'lsin.

U xolda E to'plamning deyarli hamma joyida $f(x)\to 0$ deb tasdiqlash mumkinmi?

8*. Agar f(x)=(cosm!nx)^{2n} bo'lsa, $\int_0^1 f(x)dx$ integralni xisoblang.

9. $\int_0^1 \ln\frac{1}{x}dx$ integralni hisoblang

IV. **Mavzu bo'yicha yakuniy mashg'ulot.**

1.Riman integrali tushunchasi analizning elementar kursidan ma'lum. U esa uzluksiz yoki sannoqli miqdorda uzilish nuqtalariga ega bo'lgan funktsiyalar uchun tadbiq etiladi.
2.O'lchovli funktsiyalar uchun Riman intergallari yaroqli emas. Shu nuqtai nazardan, bunday funktsiyalar uchun Lebeg, integral tushunchasini kengaytirdi va rivojlantirdi.
3.Lebeg integralining mohiyati (Rimandan farqli holatda) Ox o'qdagi nuqtalar x nuqtasiga yaqin qilib olmasdan, Ou o'qdagi funktsiyalar qiymatlari shu x nuqtadagi funktsiya qiymatiga yaqin qilib olinadi. Bu esa Riman integral tushunchasini kengaytirish deb xisoblanadi.
4.Lebeg integrali uchun Riman integralining xossalari o'rinlidir. Lekin aksinchasi xamma vaqt o'rinli bo'lavermaydi. Masalan, agar biror to'plam bo'yicha olingan Libeg integrali nolga teng bo'lsa, u xolda integral ostidagi funktsiya deyarli nolga tengdir. Shunday qilib Lebeg integrali Riman integralining kengaytirilishi va rivojlantirilishi deb xisoblanadi.

Nazorat savollari:

1. Lebeg integralini tuzishda quyi va yuqori yig'indilar qanday tuziladi?
2. To'plam o'lchovi qanday axamiyatga ega?
3. Lebeg integrali ta'rifingi ayting.
4. Chegaralanmagan funktsiya uchun Lebeg integralini ayting.
5. Lebeg integralining asosiy xossalarini ayting.
6. Riman integralidan farq qiluvchi xossalarini ayting.
7. Lebeg integrali ostidan limitga o'tish mohiyatini ayting.
8. Qanday shartda integral ostidan limitga o'tadi?
9. Deyarli uzluksizlik Lebeg integralida qanday axamiyatga ega?
10. Xama xaqiqiy o'q bo'yicha Lebeg integralini izoxlang.
11. Riman integrali mavjudligi Lebeg integrali uchun o'rinlimi?
12. Lebeg integralini ma'vjudligi Riman integrali uchun o'rinlimi?
13. Integral qanday shartda bir xil bo'ladi?
14. Xaqiqiy o'qda olingan Lebeg va Riman integralini solishtiring.
15. Lebeg integrali nolga teng bo'lsa, funktsiya xaqida nima deyish mumkin?
16. O'lchovi nolga teng bo'lgan to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali nimaga teng?
17. Lp- sinflar nima?
18. L_1 va L_2 sinflarni solishtiring.
19. Gelder tengsizligi nima?
20. Minkovskiy tengsizligi nima?
21. Koshi – Buinevskiy tengsizligi nima?

Tavsiya etilayotgan adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalar nazariyasi,Tosh.1994.
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elemento' teorii funktsiy i funktsianolnogo analiza M. 1980
3. Ochan Yu.S. Sbornik zadach po matimaticheskomu analizu ,M.1981

V -modul

Mavzu: Absolyut uzluksiz o'lchovlar va Lebeg - Stiltes integrali.

Ajratilgan vaqti 4 soat ma'ruza, 4 soat amaliy mashg'ulot.

Asosiy savollar:

1. Absolyut uzluksiz o'lchovlar.

Ma'ruzaga oid tayanch ibora va tushunchalar.

To'plam funktsiyasi, ishorali o'lchov, Radon - Nikodim teoremasi, Xan yoyilmasi, ishorali uzluksiz o'lchov, singulyar o'lchov, Lebeg - Stiltes o'lchovi va integrali.

Mavzuga oid muammolar:

1. Ishorali o'lchov.
2. Lebeg - Stiltes integrali .

Asosiy savol bo'yicha dars maqsadi:

1. Ishorali o'lchovni tushuntirish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. To'plam funktsiyasini tushintira oladi.
2. Uzluksiz o'lchov va singulyar o'lchovni izoxlaydi.

Asosiy savol bayoni:

Faraz qilaylik, biror τ additiv μ o'lchovga ega bo'lgan E to'plamda jamlanuvchi $f(x)$ funktsiyaberilgan bo'lsin. U xolda teoremaga asosan bu funktsiya E to'plamning xar qanday o'lchovi A qismida xam joylanuvchi bo'ladi. Agar tayinlangan funktsiya uchun quydagi aniqmas Lebegning aniqmas integrali $L(A)=\int_A f(d)d\mu(1)$ ni qarasak, Lebeg integralining τ additivlik xossaga asosan (1) tenglik bilan aniqlangan $L(A)$ to'plam funktsiya, additiv o'lchovning manfiy emaslik xossasidan tashqari barcha xossalarga ega bo'ladi (chunki, agar E to'plamda $f(x)\le 0$ xar qanday o'lchovli $A\,c\,E$ to'plam uchun $L(A)\le 0$ bo'ladi.)

Bu esa qiymatlar to'plami manfiy sonlardan iborat bo'lgan xolni xam o'z ichiga oluvchi ixtiyoriy to'plam funktsiyalari sinfini o'rganishga olib keladi.

1-ta'rif. Biror to'plamlar sistemasida aniqlangan L to'plam funktsiyasi uchun shu sistemada olingan xar qanday o'zaro kesishmaydigan soni sanoqli to'plamlarda $A\ \ A_1, A_2..., A_n,...,(A_k\cap A_i;=\varnothing R\ne i)L(\bigcup_{K=1}^{\infty}A_K)=\sum_{K-1}^{\infty}L(A_K)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bunday to'plam funktsiyasi $\tau-$ additiv to'plam funktsiyasi deyiladi.

2-ta'rif τ additiv μ o'lchovga ega bo'lgan E to'plamning o'lchovi qism to'plamlardan iborat 2(E) sistemada aniqlangan xar qanday $\tau-$ additiv$L(\cdot)$ to'plam funktsiyasi ishorali o'lchov deyiladi.

3-ta'rif. Agar istalgan $B\in L(E)$ uchun $L(A\cap B)\le 0(L(A\cap B)\ge 0)$ bo'lsa, $A\in Z(E)$ to'plam $L(\cdot)$ ishorali o'lchovga nisbatan manfiy (musbat) to'plam deyiladi.

Manfiy va musbat to'plamlarning mavjudligi xaqidagi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. Agar ishorali $L(\cdot)$ o'lchov Z(E) sistemada aniqlangan bo'lsa, u xolda E to'plamning shunday o'lchovli E- qismi mavjudki, $L(\cdot)$ ishorali o'lchovga nisbatan E- to'plam manfiy, $E^{+}=E/E^{-}$ to'plam esa musbat bo'ladi.

E to'plamning musbat E^{+} va manfiy E^{-} to'plamlarning yigindisi shaklida ifodalashi, ya'ni $\underline{F}=E^{+}\cup E^{-}$ yoyilmasi uning Xaan ma'nodagi yoyilmasi deyiladi.

Agar ishorali $L(\cdot)$ o'lchovning tashuvchisi chekli yoki sanoqli to'plamdan iborat bo'lsa, ishorali diskret o'lchov deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\mu(A)=0$ bo'lgan xar qanday $A\in Z(\underline{F}), L(A)=0$ uchun bo'lsa, $L(\cdot)$ ni μ o'lchovga nisbatan absalyut uzluksiz ishorali o'lchov deyiladi.

Nixoyat, agar ishorali $L(\cdot)$ o'lchovning tashuvchisi μ o'lchovi nol bo'lgan biror $A\in Z(E)$ to'plamdan iborat bo'lsa, u μ o'lchovga nisbatan singulyar ishorali o'lchov deyiladi.

Lemma. Agar aynan nolga teng bo'lmagan ν,μ o'lchovga nisbatan absalyut uzluksiz bo'lsa, u xolda shunday natural n va $\mu(B)>0$ bo'lgan o'lchovli B to'plam topiladiki, B to'plam ishorali o'lchovga nisbatan musbat to'plam bo'ladi.

Teorema. (RADON-NIKODIM). Agar ishorali ν o'lchov xamda $G-$ additiv μ o'lchov Z(x) σ algebrada aniqlanib ν o'lchov μ o'lchovga nisbatan absalyut uzluksiz bo'lsa,u holda X to'plamda μ o'lchov bo'yicha jamlanuvchi f(x) funktsiya mavjud bo'lib, har bir $A\in Z(x)$ uchun $\nu(A)=\int_A f(x)d\mu$

tenglik o'rinlidir

Muxokama uchun savollar.

1. To'plam funktsiyasi nima ?
2. Ishorali uzluksiz o'lchov deb nimaga aytiladi?
3. Singulyar o'lchov nima?
4. Radon – Nikodim teoremasini moxiyatini izoxlang.

Mavzuga oid ilmiy muammo:

Agar $a<b<c$ bo'lsa, u holda (a,c) bo'yicha olingan Lebeg-Stiltes integralining mavjudligidan (a,b) va (b,c) bo'yicha olingan Lebeg-Stiltes integrallarining mavjudligi kelib chiqadi. Lekin aksinchasi umuman hamma vaqt o'rinli emas.

Endi qanday funktsiyalar uchun aksinchasi o'rinli bo'lish masalasi muammo hisoblanadi. Bunday muammo o'z echimini kutmoqda.

II. **Amaliy mashg'ulot.** Lebeg - Stiltes integralidoir masalalar yYechish.

Ajratilgan vaqt 4 soat.

Dars maqsadi.

1. Lebeg – Stiltes integralini masala yYechish yordamida tushintirish.

Identiv o'quv maqsadi:

1. Lebeg – Stiltes o'lchovini biladi.
2. Lebeg – Stiltes integraliga doir masala echa oladi.

1. Zaruriy tushunchalar.

Faraz qilaylik, [a.b] segmentdan aniqlangan monoton F funktsiya orqali keltirib chiqarilgan μ_F Lebeg-Stiltes ulchovli berilgan bulsin. Bu ulchov uchun Lebeg integirali tushunchasini kiritib, odatdagidek, jamlanuvchi funktsiyalar sinfini aniqlashimiz mumkin. [a,b]segmentda aniqlangan $f(x)$ funktsiyaning μ_F ulchov buyicha Lebeg integirali Lebeg-Stiltes integirali deyiladi va u quyidagicha belgilanadi.

$$\int_a^b f(x)dF(x).$$

2. Masalalar yYechish.

1. $F(x)=h(x)=\sum_{x_i<x} h_i$ bu erda $h(x)$ pogonali funktsiya bulib, $x_1, x_2, x_3,...$lar $h(x)$ning uzulish nuktalari, $h_1, h_2, h_3...$lar esa nuktalarga mos funktsiyaning sakrashlari. $F(x)$ funktsiya yaratgan μ_F ulchovning tashuvchisi $x_1, x_2, x_3,...$ nuktalar ekanligi va xar bir x_i nuqtaning ulchovi $\mu_F(\{x_i\})=h_i$, $i=1,2,...$ ekanligini Lebeg-Stites ulchovining birinchi xolida kurgan Edik.endi, agar μ_F ulchovga mos kelgan Lebeg-Stiltes integiralini olsak, kuyidagiga ega bulamiz:

$$\int_a^b f(x)d\mu_F = \int_a^b f(x)dh(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)h$$

2. Agar F absolyut uzluksiz funktsiya bulsa, ushbu

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F^{\backslash}(x)dx \qquad (1)$$

tenglik urinli. Demak, bu xolda Lebeg-Stiltes integrali Lebeg integiraliga aylanar ekan

Amaliy mashg'ulot uchun zaruriy adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalar nazariyasi, T. 1982y. 303-307 betlar.

III. **Mustaqil topshiriqlar**

1-topshiriq. Riman - Stiltes integrali.
2-topshiriq. Quyidagi masalalarni eching.

1. $\int_0^1 x^{\alpha} d\sin\frac{1}{x}$ integral α - ning qaysi qiymatida mavjud?

2. $\int_0^{\pi} \sin x d\varphi(x)$ ni xisoblang, bunda

$$\varphi(x) = x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi(x) = 2, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi$$

$$\varphi(x) = x-\frac{\pi}{2}, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$$

IV. **Mavzu bo'yicha yakuniy mashg'ulot**

1) Faraz qilaylik X to'palam μ o'lchovga ega bo'lgan ixtiyoriy fazo bo'lsin. *f(x)* funktsiya esa μ bo'yicha X da jamlanuvchi funktsiya bo'lsin.

U holda:

$$\Phi(A)=\int_A f(x)d\mu, \qquad A\subset X$$

integral A to'plam funktsiyasi deyiladi. Endi F funktsiya additiv o'lchov bo'lib *f(x)*funktsiyaga bog'lik bo'lgan ishora almashuvchi (ishorali) o'lchovdan iboratdir va bu esa o'lchov tushunchasini rivojlantirish deb xisoblanadi.

2) Faraz qilaylik biror F funktsiya $[a,b]$ kesmada μ o'lchovni hosil qilsin. Bunday o'lchov uchun

$$\int_a^b f(x)d\mu$$

Lebeg integrali tushunchasini kiritamiz. Bunday integral Lebeg-Stilstes integrali deyiladi va bu Lebeg integralini kengaytirish deb xisoblanadi.

3) Lebeg–Stilstes integral bilan bir qatorda Riman–Stilstes integral tushunchasi ham kiritiladi. Riman-Stiltes integral tushunchasi Riman integral tushunchasi kabi xosil qilinadi va uning xossalari Riman integrali xossalariga o'xshashdir. Bular Riman integralini ma'lum ma'noda rivojlantirish deb xisoblanadi.

Nazorat savollari:

1. To'plam funktsiyasi nima?
2. Ishorali uzluksiz o'lovni tushintiring.
3. Singulyar o'lchovni izoxlang.
4. Manfiy to'plam nimadan iborat?
5. Xan yoyilmasi.
6. Radon - Nikodim teoremasini izoxlang.
7. Bir o'lchovni boshqa o'lchov bo'yicha xosilasini izoxlang.
8. Lebegning aniqmas integralini ayting.
9. Lebeg – Stiltes o'lchovini ayting.
10. Lebeg - Stiltes integralini tushintiring.
11. Lebeg – Stiltes integrali tatbiqiga misol keltiring.
12. Riman – Stiltes integralini tushintiring.
13. Qanday shartda Lebeg – Stiltes integrali ostida limitga o'tish mumkin.
14. Absalyut uzluksiz funktsiyani ayting.
15. O'zgarishi chegaralangan funktsiyani ayting.
16. Monoton funktsiyani ayting.
17. Lebeg ma'nosida jamlanuvchi funktsiyalar.
18. Jardon ma'nosida yoyilma nimadan iborat?
19. Lebeg – Stiltes integralini xossalarini ayting.
20. Riman - Stiltes integralini xossalarini ayting?

Tavsiya etilgan adabiyotlar:

1. Sarimsoqov T.A. Xaqiqiy o'zgaruvchi funktsiyalar nazariyasi. T 1991.
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elemento' teorii funktsiy i funktsianalnogo analiza M. 1980
3. Ochan Yu .S. Sbornik zadacha po matematichiskomu analizu, M.1981.
4. Natanson I.P. Teoriya funktsiy veshestvennoy peremenoy, M. 1974.

FUNKSIONAL ANALIZ FANIDA YECHIMINI KUTAYOTGAN ILMIY MUAMMOLAR

1. Laplas tenglamasining yechimlari gidrodinamika masalalarini tekshirishda muhim ahamiyatga ega. Shuning uchun Laplas tenglamasining yechimini chegaraviy qiymatdan chetlanishini **Banax** fazosida norma bo`yicha chegaralash masalasi to`la yechilgan emas.
2. Xuddi shunday **Shredenger** tenglamalari haqidagi masalalar ham to`la yechilgan emas.
3. Fredgolm integral tenglamalari yechimlarini trigognometrik ko`phadlar yoki butun funksiyalar bilan yaqinlashtirish masalasi hali qaralgan emas.
4. Quyidagi tasdiqlarni $L_p(R_n)$, $0<p<\infty$ fazoda ko`p o`zgaruvchili funksiya uchun hosil qilish muammo bo`lib turibdi.

A) Agar $f(x)$ funksiya

$$\omega(f;\delta)_p = O(\omega(\delta)) \qquad (1)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $f(x)$ funksiya Lipα sinfdagi birorta funksiyaga ekvivalent bo`lishi uchun

$$\omega(\delta) = O\left(\delta^{\alpha+\frac{1}{p}}\right), \quad p \ge 1 \qquad (2)$$

bo`lishi zarur va kifoya.

B) Yuqoridagi (1) shartni qaoatlantiruvchi $f(x)$ funksiya birorta uzluksiz funsiyaga ekvivalent bo`lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty$$

bo`lishi zarur va kifoya.

INFORMATSION-USLUBIY TA`MINOT

Asosiy adabiyotlar.

1. Sarimsoqov T.A. “Funksional analiz kursi” T. 1980 y.
2. Qobulov V. “Funksional analiz va xismoblash matematikasi” T. 1976.
3. Kolmogorov A.N. Fomin S.V. “Elnmento’ teorii funktsiiy i funktsionalnogo analiza” 1976 y.
4. G.G’aymnazarov , O.G.G’aymnazarov Funksional analiz kursidan masalalar yechish, T. “fan va texnalogiya”, 2006 y.
5. R.G’anixo’jaev va boshqalar Funksional analiz, T. O’zMU 2009 y.
6. Sh.A.Ayupov, M.M.Ibragimov, K.K.Kudaybergenov Funksional analizdan misol va masalalar, Nukus, “Bilim”, 2009 y.

Qo`shimcha adabiyotlar.

1. Kantarovich A.G., Akilov V.M. Funksional analiz M.: 1977.
2. Rudin M. Funksional analiz, M. 1972.
3. Maqsudov T. Chiziqli integral tenglamalar, T. 1976.
4. Salohitdinov M.S. Integral tenglamalar, T. 2006.

Internet saytlari

1. www.ziyonet.uz
2. www.gduportal.uz
3. http://www.mcce.ru
4. http://www.lib.mexmat.ru

FUNKSIONAL ANALIZ FANIDAN ILMIY MAQOLALAR E`LON QILINADIGAN JURNALLAR RO`YXATI VA SAYTLAR

1. O`zbekiston fanlar akademiyasi ma`ruzalari.
2. O`zbekiston matematika jurnali.
2. Izvestiya VUZ.
3. Sibirskiy matematicheskiy jurnal.
4. www.manpo.ru
5. www.Mat.zametki.ru

GLOSSARIY

$x \in A$ - x element A to’plamga tegishli yoki qarashli.
$A \oplus B$ - A va B to’plamlarning to’g’ri yig’indisi.
dimR – R fazoning o’lchovi, dimision – o’lchov.
R_n – n o’lchobli chiziqli fazo.
$A \cup B$ - A va B to’plamlarning birlashmasi.
Ag’B - A to’plamdan B to’plamning ayirmasi.
$A \cap B$ - A va B to’plamlarning kesishmasi.
$A \subset B$ - A to’plam b to’plamning qism to’plami.
Ø – bo’sh to’plam.
(x, y) – x va y vektorlarning skalyar ko’paytmasi.
$|x| = \|x\|$ - x vektorning uzunligi (normasi).
$|AB|$ - A va B nuqtalar orasidagi masofa (AB – kesma uzunligi).
$\mathrm{pr}_{OX}a$ – a vektorning OX o’qdagi proetsiyasi.
C – komplets sonlar fazosi.
A^{-1} matrisa (yoki operator) A matrisaga (operatorga) teskari matrisa (operator).
Θ – nol vektor.
r_A – A operatorning (almashtirishning) o’lchovi.
kernA – A operatorning yadrosi.
$|A| = \det A$ – A matrisaning determinanti.
A* - A operatorga qo’shma operator.
$|\lambda|$ - λ komplets sonning bobi.
T:$x \rightarrow y$ – T operator x vektorni y vektorga atslantiradi.
A~B – A va B to’plamlar ekvivalent.
A$\rightarrow$B – A xossadan B xossa kelib chiqadi.
Z/C - Z guruhning C qism guruh bo’yicha yoyilmasi.
$\varphi_k(x) \leftrightarrow a_k$ - $\varphi_k(x)$ va a_k elementlar o’zaro bir qiymatli moslikda qaraladi.
$\forall$ - umumiylik kvantori.
$\forall x$ – barcha x elementlar uchun.
N – natural sonlar to’plami.
Z – butun sonlar to’plami.
Q – rasional sonlar to’plami.
R – haqiqiy sonlar to’plami.