Т.Т.Тўйчиев, Д.Х.Джумабоев, А.А.Абдуллаев

Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан

МУСТАҚИЛ ИШЛАР

Тошкент –2004

Аннотация

Қўлланма комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан мустақил ишларни бажариш учун мўлжалланган бўлиб, шу фаннинг ўқув дастури асосида тузилган ва ўқув адабиёти Давлат таълим стандартининг бакалавр мутахассислиги “Математика” ва “Механика” йўналишларига мос келади.

Қўлланма комплекс сонлар ва комплекс аргументли функциялар, элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар, комплекс аргументли функциянинг интеграли ва чегирмалар назарияси мавзуларини ўз ичига олади. Қўлланмада 3 та мустақил иш, 1092 та мисол ва масалалар келтирилган булиб, улардан 52 та мисол ва масалалар батафсил ечими билан келтирилган.

Муаллифлар:

Физ.–мат. фанлари номзоди, доц. **Тўйчиев Т.Т.**

Физ.–мат. фанлари номзоди, **Джумабоев Д.Х.**

Катта ўқитувчиси **Абдуллаев А.А.**

Масъул муҳаррир:

Физ.–мат. фанлари номзоди, доц. **Шоимқулов Б.А.**

МУНДАРИЖА

Сўз боши

Ўзбекистон Республикасининг Таълим тўғрисидаги Қонуни ва Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури талабларини амалга оширишда Ўзбекистон Миллий Университети механика-математика факультети математик анализ кафедраси жамоаси масъулиятини ҳис этган ҳолда илмий-тадқиқот ишлари ва илмий педагогик кадрлар тайёрлаш самарадорлигини ошириш мақсадларини кўзлаб ўз олдига қатор вазифаларни белгилади.

Илм-фан жадал тараққий этаётган, замонавий ахборот-коммуникация тизимлари воситалари кенг жорий этилаётган жамиятда турли фан соҳаларида билимларнинг тез янгиланиб бориши, таълим олувчилар олдига уларни жадал эгаллаш билан бир каторда, мунтазам ва мустақил равишда билим излаш вазифасини кўймокда.

Бу вазифани ҳал қилиш мақсадида ўқув режаларига математик ва комплекс анализ фанларидан лаборатория ҳамда мустақил таълим олиш киритилди. Ўз навбатида ўқув дастурларида режага мос равишда ўзгартиришлар амалга оширилди.

Ҳозирги вақтда математик ва комплекс анализнинг услублари фан, техника ва иктисодиётнинг турли-туман масалаларини ҳал қилишда кенг қўлланилмоқда. Халқ хўжалигининг барча соҳаларида компьютерларнинг ва математик усулларнинг ялпи қўлланилиши муноабати билан бу усулларнинг аҳамияти янада ортди.

Юқорида қайд этиб белгиланган вазифалар бажарилишининг исботи сифатида юзага келган ушбу қўлланма комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан мустақил ишларни бажаришга мўлжалланган бўлиб, ўқув адабиети Давлат таълим стандартининг бакалавр мутахассислиги “Математика” ва “Механика” йуналишларига мос келади.

Қулланма уч параграфдан иборат бўлиб уларда “Комплекс сонлар ва комплекс аргументли функциялар”, “Элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар” ва “Комплекс аргументли функциянинг интеграли ва чегирмалар назарияси’’ мавзулари бўйича 3 та мустақил иш тавсия этилган. Ҳар бир мустақил ишни беришдан аввал шу мустақил ишни бажариш учун лозим бўладиган асосий тушунча ва теоремалар келтирилган. Сунг 21 та вариантдан иборат бўлган вазифа мустақил ечиш учун тавсия қилинган. Талабанинг мавзуларни ўзлаштиришини ҳамда ишни бажаришини енгиллаштириш мақсадида ҳар бир параграфнинг охирида 1 та вариантдаги (21-вариант) барча мисол ва масалалар тўлиқ ечиб кўрсатилган.

Қўлланмани ёзишда муаллифлар томонидан мавзуларнинг оддий ва содда тилда, тушунарли ва равон баён этилишига ҳаракат қилинди. Шу муносабат билан муаллифлар қўлланма талабаларда билим олишга интилиш ҳисси, мустақил фикрлаш малакаларининг шаклланишига хизмат қилади деб умид билдирадилар ҳамда у талабаларга комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанининг айтиб ўтилган мавзулари бўйича билимларини оширишда ёрдам беради деб ишонадилар.

1-§. 1-МУСТАҚИЛ ИШ

КОМПЛЕКС СОНЛАР ВА КОМПЛЕКС АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАР

Комплекс сонлар ва улар устида амаллар.

Комплекс соннинг геометрик тасвири.

Комплекс соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли кўринишлари.

Комплекс текисликда соҳа ва эгри чизиқ .

Стереографик проекция.

Комплекс аргументли функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги.

Функциянинг дифференциалланувчилиги. Коши-Риман шартлари.

Гармоник функциялар.

Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси. Конформ акслантиришлар.

-А-

АСОСИЙ ТУШУНЧА ВА ТЕОРЕМАЛАР

1^0. **Комплекс сонлар ва улар устида амаллар**.

Маълумки, комплекс сон

$$z = x + iy \qquad (1)$$

кўринишда ифодаланади, бунда x ва y лар ҳақиқий сонлар i эса $(i^2 = -1)$ мавҳум бирликдир.

Одатда x ҳақиқий сонга z комплекс соннинг *ҳақиқий қисми*, y ҳақиқий сонга эса z комплекс соннинг *мавҳум қисми* дейилади ва

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z$$

каби белгиланади.

Агар (1) да $y = 0$ бўлса, $z = x + i \cdot 0 = x$ бўлиб, z ҳақиқий x сонга тенг бўлади. Агар (1) да $x=0$ булса , $z=0+iy=iy$ булиб, z соф мавҳум сон бўлади. (1) да $x=0$,$y=0$ бўлса, z комплекс сон 0 га тенг бўлади.

Иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонлар берилган бўлиб, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ бўлса, унда z_1 ва z_2 комплекс сонлар *бир бирига тенг* дейилади. Агар $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$ бўлса, у ҳолда z_2 комплекс сон z_1 га *қўшма комплекс сон* дейилади ва $\bar{z}_1$ каби белгиланади.

Демак, $z = x + iy$ бўлса, $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ бўлади. Масалан, $z = 2 + \frac{1}{3}i$ комплекс соннинг қўшмаси $\bar{z} = 2 - \frac{1}{3}i$ бўлади.

Айтайлик, иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Улар устидаги арифметик амаллар қуйидаги қоидалар асосида аниқланади.

1) $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

2) $z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} := \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$;

4) $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}$.

Изоҳ. $z_1 \cdot z_2$ кўпайтма $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ ифодани ҳадма-ҳад кўпайтиришдан ҳосил бўлишини кўриш қийин эмас:

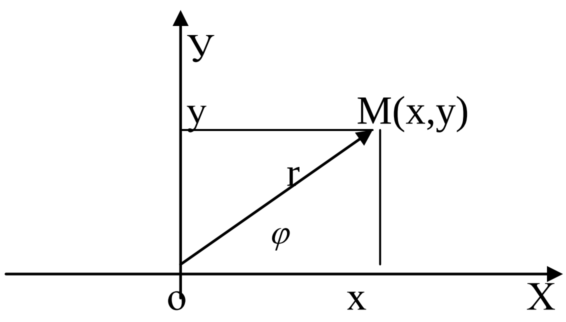
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ нисбатни ҳисоблашда касрнинг сурат ва махражини $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ га кўпайтирилади:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

2^0. **Комплекс соннинг геометрик тасвири**.

Текисликда, *Oxy* Декарт координатлар системасида $z = x + iy$ комплекс сон координатлари *x* ва *y* булган M(*x*,*y*) нуқтани ифодалайди (1-чизма).



***1-чизма*.**

Шу M(x,y) нуқта $z = x + iy$ комплекс сонниңг *геометрик тасвири дейилади.* Демак, ҳар бир комплекс сон текисликда битта нуқтани ифодалайди. Аксинча, текисликдаги ҳар бир нуқта ҳақиқий қисми шу нуқтанинг абсциссасига, мавҳум қисми эса ординатасига тенг бўлган комплекс сонни ифодалайди.

Шундай қилиб, текисликнинг барча нуқталари тўплами билан барча комплекс сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Бунда барча ҳақиқий сонларнинг геометрик тасвири абсциссалар ўқини, барча соф мавҳум сонларнинг геометрик тасвири ((0,0) нуктадан фарқли) эса ординаталар ўқини ифодалайди. Шунинг учун абсциссалар ўқини *ҳақиқий ўқ*, ординаталар ўқини эса *мавҳум ўқ* дейилади. Oxy текисликни эса *комплекс текислик* дейилади ва C ҳарфи билан белгиланади.

1-чизмадаги $\overrightarrow{OM}$ векторга M(x,y) нуқтанинг *радиус вектори* дейилиб, бу векторнинг узунлиги r га $z = x + iy$ *комплекс сонниңг модули* дейилади ва $|z|$ каби белгиланади. $\overrightarrow{OM}$ вектор билан Ox ҳақиқий ўқнинг мусбат йуналиши орасидаги φ бурчак z *комплекс сонниңг аргументи* дейилади ва $\varphi = \arg z$ каби белгиланади.

Агар $z = x + iy$ комплекс сон берилган бўлса унинг модули ва аргументи қуйидаги тенгликлар ёрдамида ҳисобланади:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \qquad (2)$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & агар\ x \ge 0, y \ge 0\ булса, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & агар\ x < 0\ булса \\ arctg\dfrac{y}{x} + 2\pi, & агар\ x \ge 0, y < 0\ , булса \end{cases} \qquad (3)$$

1-чизмадан

$$\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

эканлигини ҳосил қиламиз ва бундан

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (4)$$

ифодага эга бўламиз. Бу ифода z комплекс *соннинг тригонометрик ифодаси (шакли)* дейилади.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (5)$$

тенглик *Эйлер формуласи* дейилади. Бундан

$$z = re^{i\varphi}$$

комплекс соннинг кўрсаткичли кўриниши келиб чиқади.

1-Теорема. *Иккита* z_1 *ва* z_2 *комплекс сон кўпайтмасининг модули шу комплекс сонлар модулларининг кўпайтмасига тенг:*

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Иккита комплекс сон купайтмасининг аргументи шу комплекс сонлар аргументларининг йиғ индисига тенг.

2-Теорема. *Ушбу*

$$|z^n| = |z|^n, \arg z^n = n\arg z \; (n \in N)$$

тенгликлар ўринлидир.

3-Теорема. *Иккита комплекс сон нисбати* $\frac{z_1}{z_2}$ *учун*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|.}, \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

тенгликлар ўринли.

Изоҳ. Комплекс сонлар аргументларига доир келтирилган тенгликларда комплекс сон аргументи шу сонга мос радиус векторнинг текисликдаги ҳолати маъносида тушунилади.

(4)–муносабат ва 2-теоремадан z^n учун

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (6)$$

Муавр формуласи келиб чиқади.

3⁰. Комплекс текисликда соҳа ва эгри чизиқ.

Айтайлик,

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

функциялар $[\alpha,\beta]$ да $([\alpha,\beta] \subset R)$ аниқланган ва узлуксиз булсин. Унда

$$z = x + iy$$

комплекс сон ҳақиқий ўзгарувчи t га боғлиқ бўлиб,

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

ҳақиқий аргументли комплекс қийматли функцияга эга бўламиз.

Равшанки, t ўзгарувчи $[\alpha,\beta]$ да ўзгарганда $z(t)$ функциянинг қийматлари C да ўзгариб, бирор эгри чизиқни ташкил этади. Шу сабабли

$$z = z(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

функцияга эгри чизиқнинг ***параметрик тенгламаси*** дейилади.

Агар $z = z(t)$ да $\forall t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$ учун $t_1 \ne t_2$ бўлишидан $z(t_1) \ne z(t_2)$ бўлиши келиб чиқса, у ҳолда $z = z(t)$ эгри чизиқ *содда чизиқ* дейилади.

Агар $z(\alpha) = z(\beta)$ бўлса, $z = z(t)$ эгри чизик *ёпик чизиқ* дейилади.

Комплекс текислик C да бирор z_0 нукта ҳамда $\varepsilon > 0$ сон олайлик.

1-Таъриф. *Ушбу*

$$\{z \in C : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

тўплам z_0 *нуқтанинг* ε ***атрофи*** *дейилади ва* $U(z_0,\varepsilon)$ *каби белгиланади:*

$$U(z_0,\varepsilon) = \{z \in C : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Равшанки, $U(z_0.\varepsilon)$ атроф маркази z_0 нуқтада, радиуси ε бўлган очиқ доира бўлади.

C да бирор D тўплам берилган бўлсин ($D \subset C$). Агар $z_0 \in D$ нуқтанинг $\exists U(z_0,\varepsilon)$ атрофи мавжуд бўлиб, $U(z_0,\varepsilon) \subset D$ бўлса, у ҳолда z_0 нуқта D тўпламнинг ***ички нуқтаси*** дейилади.

2-Таъриф. *Агар D тўпламининг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, уҳолда D* ***очиқ тўплам*** *дейилади.*

C да бирор F тўплам берилган бўлсин ($F \subset C$)

3-Таъриф. *Агар* $z_0 \in C$ *нуктанинг ихтиёрий* $U(z_0,\varepsilon)$ *атрофида F тўпламнинг* z_0 *нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси бўлса,* z_0 *нуқта F тўпламнинг* ***лимит нуқтаси*** *дейилади.*

4- Таъриф. *Агар F тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F* ***ёпик тўплам*** *дейилади.*

5-Таъриф. *Агар D тўпламнинг ихтиёрий* z_1, z_2 *нуқтарларини D тўпламда тўлиқ ётувчи бирорта узлуксиз* γ *эгри чизиқ ёрдамида бирлаштириш мумкин бўлса, уҳ олда D* ***боғ ламли тўплам*** *дейилади.*

6-Таъриф. *Агар* $D(D\subset C)$ *тўплам очиқ ҳамда боғламли тўплам бўлса, бундай тўплам* ***соҳа*** *деб аталади.*

D соҳанинг ўзига тегишли бўлмаган лимит нуқталаридан ташкил топган тўплам ***D соҳанинг чегараси*** дейилади ва ∂D каби белгиланади.

Ушбу

$$D\cup\partial D$$

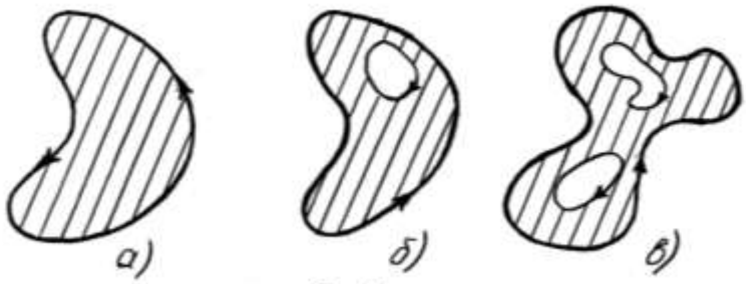
тўплам $\overline{D}$ каби белгиланади. Демак, $\overline{D}:=D\cup\partial D$.

Агар D соҳанинг чегараси ∂D боғламли тўплам бўлса, D ***бир боғламли***, акс ҳолда эса ***кўп боғламли соҳа*** дейилади.

D соҳа чегараси ∂D нинг боғламли компонентлари сонига қараб D соҳани ***бир боғламли, икки боғламли, n боғламли соҳа*** деб атаймиз.

Соҳа чегарасининг ***мусбат йуналиши*** деб шундай йўналишни қабул қиламизки, кузатувчи бу йўналиш бўйлаб ҳаракат қилганда соҳа унга нисбатан ҳар доим чапда жойлашган бўлади.

Масалан, 2-чизмада а) бир боғламли, б) икки боғламли, в) уч боғламли соҳалар тасвирланган бўлиб, соҳа чегараларининг мусбат йўналишлари стрелкалар билан кўрсатилган.



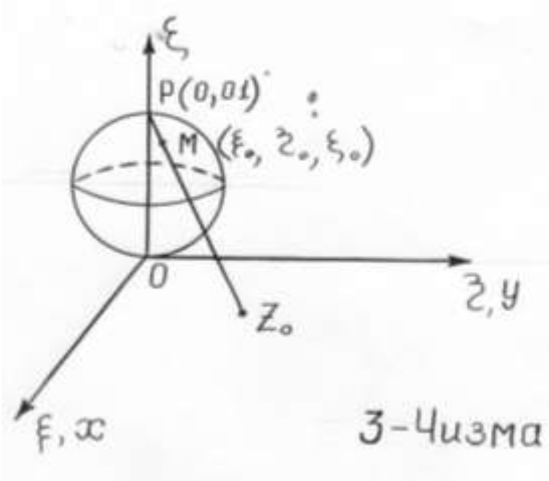
2-Чизма

4^0. **Стереографик проекция.**

R^3 фазода (ξ,η,ζ) Декарт координаталар системасини олайлик. Бу фазода

$$S=\{(\xi,\eta,\zeta)\in R^3:\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta\}$$

сферани қараймиз. Фараз қилайлик ξ ва η ўқлар мос равишда x ва y ўқлари билан устма-уст тушсин (3-чизма).



3-Чизма

Равшанки, қаралаётган S сфера Oxy текислигига координата бошида уринади. Комплекс текисликда $z_0 = x_0 + iy_0$ нуқта олиб, бу нуқтани сферанинг P нуқтаси билан тўғри чизиқ кесмаси ёрдамида бирлаштирамиз. Натижада, бу туғри чизиқ сферани $M(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ нуқтада кесади. Демак, комплекс текисликдаги ҳар бир нуқта S сферадаги бирор нуқта билан ифодаланади, ва аксинча, S сферадаги ҳар бир нуқтага (P нуқтадан бошқа) комплекс текисликда ягона нуқта мос келади.

Шундай қилиб, $S \setminus \{P\}$ тўплам билан комплекс текислик ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди. Одатда бу мослик ***комплекс текисликнинг стереографик проекцияси*** дейилади.

Агар z_0 нуқта ∞ га интилса, бу z_0 нуқтага S сферада мос келувчи нуқтанинг P га яқинлашишини кўриш қийин эмас. Бу ҳол P нуқтага комплекс текисликда $z = \infty$ нуқтани мос қўйиш табиийлигини кўрсатади. Демак, комплекс текислигидаги ягона $z = \infty$ нукта S сферада P нуқта билан ифодаланади. Комплекс текислик чексиз узоқлашган нукта $z = \infty$ билан биргаликда кенгайтирилган комплекс теккислик деб аталади ва $\overline{C}$ каби белгиланади. S сферадаги $M(\xi, \eta, \zeta)$ ва комплекс текисликдаги $z = x + iy$ нукта орасидаги мослик қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}; \qquad (7)$$

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \; y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \qquad (8)$$

Бу тенгликлардан фойдаланиб, *сферик масофа тушунчасини* киратамиз. Айтайлик, $z_1, z_2 \in \overline{C}$ нукталар берилган булсин, z_1 ва z_2 нукталар орасидаги сферик масофа деганда, уларнинг Риман сфераси S даги образлари орасидаги масофа тушунилади ва у $\rho(z_1, z_2)$ каби белгиланади. (7) ва (8) – тенгликлар ёрдамида ушбу формулаларни келтириб чиқариш қийин эмас.

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \sqrt{1+|z_2|^2}} \qquad (z_1 \neq \infty; z_2 \neq \infty); \qquad (9)$$

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}. \qquad (10)$$

5⁰. Комплекс аргументли функциялар.

Комплекс сонлар текислиги С да бирор Е тўплам берилган булсин ($E \subset C$).

1-Таъриф. *Агар Е тўпламдаги ҳар бир z комплекс сонга f қоида ёки қонунга кўра битта w комплекс сон мос қўйилган бўлса, Е тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у*

$$f : z \to w \qquad ёки \qquad w = f(z)$$

каби белгиланади.

Бунда Е тўплам функциянинг ***аниқланиш тўплами***, z ***эркли ўзгарувчи ёки функция аргументи***, w эса z узгарувчининг ***функцияси*** дейилади.

Айтайлик $w = f(z)$ функция бирор Е (Е$\subset$С) тўпламда берилган бўлсин. Бу функцияни

$$w = f(x+iy) = u + iv \qquad (x \in R, y \in R)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу эса Е тўпламда икки ўзгарувчили иккита

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

функцияларнинг аниқланишига олиб келади. Бундан битта комплекс ўзгарувчили $w = f(z)$ функциянинг берилиши иккита икки ўзгарувчили ҳақиқий функциялар

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

берилишига эквивалент булиши келиб чикди.

$w = f(z)$ функция E$\subset$C тўпламда берилган бўлиб, z ўзгарувчи E тўпламда ўзгарганда функциянинг мос қийматларидан иборат тўплам

$$F = \{f(z) : z \in E\}$$

бўлсин. Бу тўпламга функциянинг ***қийматлари тўплами*** дейилади.

E$\subset$C тўпламда $w = f(z)$ функциянинг берилиши Oxy комплекс текислигидаги E тўпламни (тўплам нуқталарини) Ouv комплекс текислигидаги F тўпламга (тўплам нуқталарига) акс эттиришдан иборат. Шу сабабли $w = f(z)$ ни E тўпламни F тўпламга ***акслантириш*** дейилади.

$w = f(z)$ функция E тўпламда (E$\subset$C) берилган бўлиб, F эса шу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин

$$F = \{f(z) : z \in E\}.$$

Сўнгра F тўпламда ўз навбатида бирор $\zeta = \varphi(w)$ функция берилган бўлсин. Натижада E тўпламдан олинган ҳар бир z га F тўпламда битта $w(f : z \to w)$ сон ва F тўпламдан олинган бундай w сонга битта $\zeta(\varphi : w \to \zeta)$ сон $(\zeta \in C)$ мос қўйилади. Демак, E тўпламдан олинган ҳар бир z га битта ζ сон мос қўйилиб, $\zeta = \varphi(f(z))$ функция ҳосил бўлади. Бундай функция ***мураккаб функция*** дейилади.

$w = f(z)$ функция E тўпламда берилган бўлиб, F тўплам эса шу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин. F тўпламдан олинган ҳар бир w комплекс сонга E тўпламда фақат битта z сонни мос қўядиган функцияга $w = f(z)$ функцияга нисбатан ***тескари функция*** дейилади ва у $z = f^{-1}(w)$ каби белгиланади.

2-Таъриф. *Агар аргумент* z *нинг E тўпламдан олинган ихтиерий* z_1 *ва* z_2 *қийматлари учун* $z_1 \neq z_2$ *бўлишидан* $f(z_1) \neq f(z_2)$ *бўлиши келиб чиқса,* $f(z)$ *функция E тўпламда* ***бир япроқли*** *(ёки* ***бир варақли****) функция деб аталади.*

Мисол. $f(z) = \dfrac{1}{2z-3}$ функцияни $E = \{z \in C;\ \ |z| < \dfrac{3}{2}\}$ доирада бир япроқлиликка текширинг.

◃ Фараз қилайлик, $z_1, z_2 \in$E лар учун $f(z_1) = f(z_2)$, яъни

$\dfrac{1}{2z_1-3} = \dfrac{1}{2z_2-3}$ бўлсин $. \Rightarrow 2z_1 - 3 = 2z_2 - 3 \Rightarrow z_1 = z_2. \Rightarrow f(z)$ функция E тўпламда бир япроқли. ▹

Фараз қилайлик $w = f(z)$ функция $E \subset C$ тўпламда берилган бўлиб, z_0 нуқта шу Е тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

3-Таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон учун* $\exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ *сон топилсаки, аргумент* z *нинг* $0 < |z - z_0| < \delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча* $z \in E$ *қийматларида* $|f(z) - A| < \varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда* A *комплекс сон* $f(z)$ *функциянинг* $z \to z_0$ *даги **лимити** деб аталади ва*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

каби белгиланади.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциянинг лимитини ҳисоблаш $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ларнинг лимитларини ҳисоблашга келтирилиши мумкин.

1-Теорема. $w = f(z)$ *функция* $z \to z_0 (z_0 = x_0 + iy_0)$ *да* $A = \alpha + i\beta$ *лимитга эга (*$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$*) бўлиши учун*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta$$

бўлиши зарур ва етарли.

Айтайлик $w = f(z)$ функция $E \subset C$ тўпламда берилган бўлиб, z_0 нуқта шу Е тўпламнинг ўзига тегишли бўлган лимит нуқтаси бўлсин.

4-Таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *учун* $\exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ *сон топилсаки, аргумент* z *нинг* $|z - z_0| < \delta$ *тенгсизликни қаноатлатирувчи барча* $z \in E$ *қийматларида*

$$|f(z) - f(z_0) < \varepsilon|$$

тенгсизлик бажарилса у ҳолда $f(z)$ *функция* z_0 *нуктада узлуксиз деб аталади.*

(Равшанки ,бу холда $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ булади)

Одатда $z - z_0$ айирма *функция **аргументининг орттирмаси*** дейилади, уни Δz каби белгиланади: $\Delta z = z - z_0$, $f(z) - f(z_0)$ айирма эса ***функция орттирмаси*** дейилиб уни Δf каби белгиланади:

$$\Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Шу тушунчалардан фойдаланиб, z_0 нуқтадаги функция узлуксизлиги 4-таърифини қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f = 0$$

бўлса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада ***узлуксиз*** дейилади.

5-Таъриф. *Агар $f(z)$ функция E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция E тўпламда узлуксиз дейилади.*

2-Теорема. $f(z) = u(x.y) + iv(x, y)$ *функциянинг* $z_0 = x_0 + iy_0$ *нуқтада узлуксиз бўлиши учун* $u = u(x, y)$ *ҳамда* $v = v(x, y)$ *функцияларнинг* (x_0, y_0) *нуқтада узлуксиз бўлиши зарур ва етарли.*

$w = f(z)$ функция $E \subset C$ тўпламда берилган бўлсин.

6-Таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон учун* $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *сон топилсаки, E тўпламнинг* $\left| z' - z'' \right| < \delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий* $z', z'' \in E$ *нуқталарида*

$$\left| f(z') - f(z'') \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(z)$ *функция* E *тўпламда* ***текис узлуксиз*** *дейилади.*

3-Теорема. (Кантор теоремаси). *Агар* $f(z)$ *функция чегараланган ёпиқ тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

6^0. Функциянинг дифференциалланувчилиги. Коши-Риман шартлари.

Бирор $E \subset C$ соҳада $w = f(z)$ функция берилган бўлсин**.** Ихтиерий $z_0 \in E$ нуқта олиб, унга шундай Δz орттирма берайликки**,** $z_0 + \Delta z \in E$ бўлсин**.** Натижада**,** $f(z)$ функция**ҳ**ам z_0 нуктада

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

орттирмасига эга бўлади**.**

1-Таъриф. *Агар* $\Delta z \to 0$ *да* $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ *нисбатнинг лимити*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \tfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит комплекс ўзгарувчили $f(z)$ *функциянинг* z_0 *нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва* $f'(z_0)$ *каби белгиланади:*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (11)$$

Фараз қилайлик, $f(z) = u(x.y) + iv(x.y)$ функция $z_0 = x_0 + iy_0$ **(** $z_0 \in C$ **)** нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин**.**

2-Таъриф. *Агар* $u(x, y)$ *ва* $v(x, y)$ *функциялар* x, y *ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида* (x_0, y_0) *нуқтада дифференциалланувчи бўлса,* $f(z)$ *функция* z_0 *нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи дейилади.*

Бу ҳолда $du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0)$ ифода $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтадаги *дифференциали* дейилади:

$$df = du + idv.$$

Теорема. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *функциянинг* z_0 *нуқтада* $f'(z_0)$ *ҳосилага эга бўлиши учун бу функциянинг* $z_0(x_0, y_0)$ *нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи бўлиб,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (12)$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Одатда (12) шартлар *Коши-Риман шартлари* дейилади.

Комплекс анализда ушбу $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

белгилашлар ёрдамида $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали $df = du + idv$, $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$

кўринишда қулай ифодаланади.

Юқорида келтирилган (12) – Коши-Риман шартлари

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad (13)$$

тенгликка эквивалент бўлади.

Агар $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, бу нуқтада $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ бўлиб, f нинг ҳосиласи $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$, дифференциали эса

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'(z_0) dz$$

кўринишда бўлади. Комплекс анализда ҳосилага эга бўлган функциялар *C – дифференциалланувчи* функциялар дейилади.

Амалиетда функцияларни С-ифференциалланувчиликка текширишда Коши-Риман шартларидан фойдаланилади.

Кутб координатлар системасида

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) + iv(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

функция учун Коши-Риман шартлари

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases} \qquad (14)$$

кўринишда бўлади.

Фараз қилайлик, $w = f(z)$ функция бирор $E \subset C$ соҳада берилган бўлсин.

3-Таъриф. *Агар $f(z)$ функция $z_0 \in C$ нуқтанинг бирор $U(z_0, \varepsilon)$ атрофида С-дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция z_0 нуқтада голоморф функция дейилади.*

4-Таъриф. *Агар $f(z)$ функция E соҳанинг ҳар бир нуқтасида голоморф бўлса, функция E соҳада голоморф дейилади.*

Одатда Е соҳада голоморф функциялар синфи $O(E)$ каби белгиланади.

5-Таъриф. *Агар* $g(z)=f(\frac{1}{z})$ *функция* $z=0$ *нуқтада голоморф бўлса,* $f(z)$ *функция* "∞" *нуқтада голоморф дейилади.*

6-Таъриф. *Агар* $\overline{f(z)}$ *функция* $z_0 \in C$ *нуқтада голоморф бўлса,* $f(z)$ *функция* z_0 *нуқтада антиголоморф дейилади.*

7^0. **Гармоник функциялар**.

Фараз қилайлик, R^2 фазодаги $E(E \subset R^2)$ соҳада $F=F(x,y)$ функция берилган бўлиб, у шу соҳада иккинчи тартибли $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}$,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}$$

узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

Таъриф. *Агар* E *соҳанинг ҳар бир нуқтасида*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\, x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0 \qquad (15)$$

тенглик бажарилса, $F=F(x,y)$ *функция* E *соҳада гармоник функция дейилади.*

(15) – тенгламани *Лаплас тенгламаси* дейилади. Бу тенглама ушбу

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Лаплас оператори ёрдамида $\Delta F=0$ шаклда ҳам ёзилади. Лаплас оператори учун

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (15) - тенгликни

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial \overline{z}}=0 \qquad (16)$$

шаклда ёзиш мумкинлигини кўрамиз.

Теорема. $E \subset C$ *соҳада голоморф бўлган ҳар қандай* $f(z)$ *функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари* $u(x,y)$ *ва* $v(x,y)$ *функциялар шу соҳада гармоник бўладилар.*

Эслатма. Ихтиерий иккита $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ гармоник функциялар учун $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функциянинг голоморф бўлиши шарт эмас. f нинг голоморф бўлиши учун u ва v лар Коши-Риман шартлари орқали боғланган бўлишлари лозим. Бундай ҳолда u ва v гармоник функциялар *қўшма гармоник функциялар* дейилади.

Бир боғламли $E\subset C$ соҳада $u(z)=u(x,y)$ гармоник функция бўлиб, $z_0\in E$ тайинланган нуқта бўлсин. У ҳолда

$$v(z)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \qquad (17)$$

иккинчи тур эгри чизиқли интеграл $u(z)$ функцияга қўшма гармоник функция $v(z)$ ни аниқлайди.

8^0. Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси. Конформ акслантиришлар.

Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция бирор $E\subset C$ соҳада берилган бўлсин. Уни (z) текисликнинг нуқталарини (w) текислик нуқталарига акслантириш деб қараймиз. Айтайлик, $w=f(z)$ функция $z_0\in E$ нуқтада $f'(z_0)$ $(f'(z_0)\neq 0)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда $w=f(z)$ акслантириш ёрдамида $|z-z_0|=r$ айлана, чексиз кичик миқдор $o(|z-z_0|)$ эътиборга олинмаса

$$|w-w_0|=|f'(z_0)|\cdot r$$

айланага аксланади. Агар $|f'(z_0)|<1$ бўлса, унда $|z-z_0|=r$ *айлана сиқилади*, $|f'(z_0)|>1$ бўлганда эса *айлана чўзилади.*

Демак, функция ҳосиласининг модули $w=f(z)$ акслантиришда *«чўзилиш коэффициентини»* билдирар экан.

Энди $w=f(z)$ акслантириш z_0 нуқтадан ўтувчи γ силлиқ чизиқни (w) текисликдаги Γ чизиққа акслантирсин. Бу ҳолда функция ҳосиласининг аргументи $w=f(z)$ акслантиришда γ чизиқни қандай бурчакка буришини билдиради.

$f'(z_0)\neq 0$ бўлган ҳолда (z_0) нуқтадан ўтувчи икки γ_1 ва γ_2 эгри чизиқлар орасидаги бурчак α бўлса, $w=f(z)$ акслантиришда бу чизиқларнинг акслари Γ_1 ва Γ_2 лар орасидаги бурчак ҳам α га тенг бўлади.

Айтайлик, $w = f(z)$ функция $E \subset C$ соҳада берилган бўлиб, $z_0 \in E$ бўлсин.

1-Таъриф. *Агар* $w = f(z)$ *акслантириш*

1) маркази z_0 *нуқтада бўлган чексиз кичик айланани чексиз кичик айланага ўтказиш хоссасига,*

2) z_0 *нуқтадан ўтувчи ҳар қандай иккита чизиқ орасидаги бурчакнинг миқдорини ҳам, йуналишини ҳам сақлаш хосссасига эга бўлса,* $w = f(z)$ *акслантириш* z_0 *нуқтада конформ акслантириш деб аталади.*

Агар бу таърифдги 2-шартда бурилиш бурчагининг миқдори ўзгармай, йуналиши қарама-қаршисига ўзгарса, бундай акслантириш *II-тур конформ акслантириш* дейилади.

2-Таъриф. *Агар* $E \subset C$ *соҳада аниқланган* $w = f(z)$ *акслантириш учун*

1) $w = f(z)$ *функция* E *соҳада бир япроқли функция,*

2) *E соҳанинг ҳар бир нуқтасида конформ бўлса, берилган акслантириш E соҳада конформ акслантириш деб аталади.*

Конформ акслантиришлар қуйидаги хоссаларга эга:

1) Конформ акслантиришга тескари бўлган акслантириш ҳам конформ акслантириш бўлади.

2) Чекли сондаги конформ акслантиришларнинг суперпозицияси яна конформ акслантириш бўлади.

Теорема. *Агар* $w = f(z)$ *акслантириш* $E \subset C$ *соҳада бир япроқли бўлиб,* $f'(z) \neq 0$ *бўлса, уҳолда акслантириш шу соҳада конформ бўлади.*

Назорат саволлари.

1. Комплекс сонлар устида амаллар.
2. Комплекс сонни геометрик тасвирлаш.
3. Комплекс соннинг модули ва аргументини ҳисоблаш.
4. Комплекс соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли кўринишлари.
5. Муавр формуласи.
6. Комплекс текисликда эгри чизиқ тушунчаси.
7. Комплекс текисликда соҳа тушунчаси.
8. Бир боғламли ва кўп боғламли соҳалар.
9. Стереографик проекция.
10. Сферик масофа тушунчаси.

11. Комплекс аргументли функция, мураккаб ва тескари функция тушунчалари.
12. Бир япроқ ли функция таърифи ва унга мисоллар.
13. Комплекс аргументли функциянинг лимити ва узлуксизлиги.
14. Ҳакикий анализ маъносида дифференциалланувчилик таърифи.
15. С–дифференциалланувчилик таърифи.
16. Голоморф функциялар.
17. Гармоник функциялар.
18. Голоморф ва гармоник функциялар орасидаги боғ ланиш.
19. Қўшма гармоник функциялар ва уларни топиш.
20. Ҳосила модулининг геометрик маъноси.
21. Ҳосила аргументининг геометрик маъноси.
22. Нуқ тада ва соҳ ада конформ акслантиришлар.

- B -

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1-Масала. Қуйидаги z_1 ва z_2 комплекс сонларнинг йиғ индиси, айирмаси, кўпайтмаси, нисбати ҳ амда $z_1 + \frac{1}{z_2}$ ни топинг:

1.1 $z_1 = \sqrt{2} + i$, $z_2 = \sqrt{2} - i$.

1.2. $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

1.3. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$.

1.4 $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$.

1.5. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 3 - 4i$.

1.6. $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 5 - 2i$.

1.7. $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 3 + i\sqrt{2}$.

1.8. $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 3 - i\sqrt{2}$.

1.9. $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$.

1.10. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 4 + 3i$.

1.11. $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 4 - 3i$.

1.12. $z_1 = 1 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{5}i$.

1.13. $z_1 = 2 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{5}i$.

1.14. $z_1 = 2 + \sqrt{5}i$, $z_2 = \sqrt{5} + 2i$.

1.15. $z_1 = 2 - \sqrt{5}i$, $z_2 = \sqrt{5} + 2i$.

1.16. $z_1 = 3 - \sqrt{5}i$, $z_2 = 3 + \sqrt{5i}$.

1.17. $z_1 = \sqrt{3} + \sqrt{5}i$, $z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{5}i$.

1.18. $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$.

1.19. $z_1 = 3 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 3 - \sqrt{5}i$.

1.20. $z_1 = \sqrt{5} + 3i$, $z_2 = \sqrt{5} + 3i$.

1.21. $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

2-Масала. Амалларни бажаринг, ҳосил бўлган комплекс сонларнинг модули ва аргументини топиб, уларни комплекс текисликда тасвирланг.

2.1. $(\sqrt{3} + i\sqrt{3})^6 \cdot (1+i)^3$.

2.2. $(\sqrt{3} + i\sqrt{3})^4 \cdot (1-i)^4$.

2.3. $(-\sqrt{3} + 3i)^6 \cdot (3 + i\sqrt{3})^4$.

2.4. $(-\sqrt{3} - 3i)^3 \cdot (3 + i\sqrt{3})^6$.

2.5. $(\sqrt{3} + 3i)^5 \cdot (3 + i\sqrt{3})^3$.

2.6. $(\sqrt{3} - 3i)^4 \cdot (3 + i\sqrt{3})^6$.

2.7. $(\sqrt{3} + 3i)^3 \cdot (1+i)^5$.

2.8. $(\sqrt{3} + 3i)^4 \cdot (1-i)^5$.

2.9. $(3 + i\sqrt{3})^4 \cdot (1+i)^5$.

2.10. $(3 + i\sqrt{3})^3 \cdot (1-i)^5$.

2.11. $(-1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3})^6 \cdot (1+i)^3$.

2.12. $(-1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3})^4 \cdot (1-i)^4$.

2.13. $(1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{3})^6 \cdot (1+i)^4$.

2.14. $(1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{3})^3 \cdot (1+i)^6$.

2.15. $(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3})^5 \cdot (1+i)^3$.

2.16. $(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3})^4 \cdot (1-i)^6$.

2.17. $(-1+i)^3 \cdot (1 + i\sqrt{3})^5$.

2.18. $(-1+i)^4 \cdot (1 - i\sqrt{3})^5$.

2.19. $(1+i)^4 \cdot (1 + i\sqrt{3})^5$.

2.20. $(1-i)^3 \cdot (1 - i\sqrt{3})^5$.

2.21. $(1-i)^3 \cdot (1 + i\sqrt{3})^8$.

3-Масала. Қуйидаги тенгсизликларни қаноатлан-тирувчи барча нуқталар тўпламини комплекс текислик C да тасвирланг.

3.1. $1 < |z+2-3i| \le 3$.

3.2. $1 \le |z+1+i| < 2$.

3.3. $1 < |z-1+i| \le 2$.

3.4. $1 \le |z+1-i| < 2$.

3.5. $1 < |z-3+4i| \le 3$.

3.6. $1 \le |z+3-4i| < 3$.

3.7. $1 < |z-1+2i| \le 2$.

3.8. $1 \le |z+1-2i| \le 3$.

3.9. $1 < |z-2+i| \le 2$.

3.10. $1 \le |z+2-i| \le 3$.

3.11. $1 < |z+2+i| \le 2$.

3.12. $1 < |z-2-3i| \le 3$.

3.13. $2 \le |z-1-3i| < 3$.

3.14. $2 < |z+1-3i| \le 3$.

3.15. $2 \le |z+1+3i| < 3$.

3.16. $2 < |z-1+3i| \le 3$.

3.17. $2 \le |z-3i| < 3$.

3.18. $2 < |z+3-i| \le 3$.

3.19. $2 \le |z+3| < 3$.

3.20. $2 < |z-3+i| \le 3$.

3.21. $1 < |z-2+3i| \le 3$.

4-Масала. Қуйидаги тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини С текисликда тасвирланг.

4.1. $\begin{cases} (\operatorname{Im} z)^2 < 2\operatorname{Re} z, \\ (\operatorname{Re} z)^2 \le \operatorname{Im} z. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} (\operatorname{Im} z)^2 < \operatorname{Re} z, \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \le 3. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} (\operatorname{Im} z)^2 < \operatorname{Re} z, \\ |z| < 2. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} (\operatorname{Im} z)^2 < \operatorname{Re} z, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} (\operatorname{Im} z)^2 < \operatorname{Re} z, \\ |z| > 1. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \le \operatorname{Im} z, \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \le 4. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \le \operatorname{Im} z, \\ |z-i| < 1. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \le \operatorname{Im} z, \\ |z-1| < 1. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \le \operatorname{Im} z, \\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \pi \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} |z-1| < 1, \\ |z-i| < 1. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} |z-1|<1, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ **4.12.** $\begin{cases} |z-i|>2, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1, \\ |z| < 2. \end{cases}$ **4.14.** $\begin{cases} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \le 3, \\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 < |z| \le 3. \end{cases}$ **4.16.** $\begin{cases} 1 < |z| \le 3, \\ (\operatorname{Im} z)^2 < \operatorname{Re} z. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 1 < |z| \le 3, \\ (\operatorname{Re} z)^2 < \operatorname{Im} z. \end{cases}$ **4.18.** $\begin{cases} 1 < |z| \le 2, \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 1 < |z| \le 2, \\ \operatorname{Re} z > 0. \end{cases}$ **4.20.** $\begin{cases} 1 < |z| \le 2, \\ \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

5-Масала. Қуйидаги тенглама айлананинг тенгламаси эканлигини исботланг ва бу айлана марказининг координаталари ҳамда радиусини топинг.

5.1. $|z|^2 + (1-i)z + (1+i)\overline{z} + 1 = 0$.

5.2. $|z|^2 + (1-4i)z + (1+4i)\overline{z} + 6 = 0$.

5.3. $|z|^2 + (2-3i)z + (2+3i)\overline{z} + 11 = 0$.

5.4. $|z|^2 + (3-2i)z + (3+2i)\overline{z} + 12 = 0$.

5.5. $|z|^2 + (4-3i)z + (4+3i)\overline{z} + 20 = 0$.

5.6. $|z|^2 + (2-4i)z + (2+4i)\overline{z} + 9 = 0$.

5.7. $|z|^2+(4-5i)z+(4+5i)\overline{z}+21=0$.

5.8. $|z|^2+(4-i)z+(4+i)\overline{z}+16=0$.

5.9. $|z|^2+(3-i)z+(3+i)\overline{z}+9=0$.

5.10. $|z|^2+(4-4i)z+(4+4i)\overline{z}+24=0$.

5.11. $|z|^2+(1-5i)z+(1+5i)\overline{z}+25=0$.

5.12. $|z|^2+(5-i)z+(5+i)\overline{z}+25=0$.

5.13. $|z|^2+(2-5i)z+(2+5i)\overline{z}+28=0$.

5.14. $|z|^2+(5-2i)z+(5+2i)\overline{z}+28=0$.

5.15. $|z|^2+(3-5i)z+(3+5i)\overline{z}+25=0$.

5.16. $|z|^2+(5-3i)z+(5+3i)\overline{z}+25=0$.

5.17. $|z|^2+(5-4i)z+(5+4i)\overline{z}+25=0$.

5.18. $|z|^2+(2-2i)z+(2+2i)\overline{z}+7=0$.

5.19. $|z|^2+(3-3i)z+(3+3i)\overline{z}+16=0$.

5.20. $|z|^2+(4-4i)z+(4+4i)\overline{z}+28=0$.

5.21. $|z|^2+(4-3i)z+(4+3i)\overline{z}+21=0$.

6-Масала. **C** комплекс текислигидаги z нуқтанинг **S** Риман сферасидаги образини топинг.

6.1. $1+i$. **6.2.** $1-i$. **6.3.** $2+i$.

6.4. $2i+1$. **6.5.** $2-i$. **6.6.** $-2+i$.

6.7. $2+2i$. **6.8.** $2-2i$. **6.9.** $3+i$.

6.10. $3-i$. **6.11.** $-1+i$. **6.12.** $1+3i$.

6.13. $1-3i$. **6.14.** $3+2i$. **6.15.** $3-2i$.

6.16. $2+3i$. **6.17.** $2-3i$. **6.18.** $-2+3i$.

6.19. $-2-3i$. **6.20.** $3-3i$. **6.21.** $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

7-Масала. Ҳисобланг.

7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\sin(\frac{k\pi}{4})$.

7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\sin(\frac{k\pi}{3})$.

7.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos(\frac{k\pi}{3})$.

7.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos(\frac{k\pi}{4})$.

7.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin(\frac{k\pi}{4})$.

7.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos(\frac{k\pi}{3})$.

7.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin(\frac{k\pi}{3})$.

7.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos(\frac{k\pi}{6})$.

7.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin(\frac{k\pi}{6})$.

7.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos(\frac{k\pi}{3})$.

7.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin(\frac{k\pi}{3})$.

7.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos(\frac{k\pi}{4})$.

7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin(\frac{k\pi}{4})$.

7.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos(\frac{k\pi}{6})$.

7.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin(\frac{k\pi}{6})$.

7.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\cos(\frac{k\pi}{3})$.

7.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\sin(\frac{k\pi}{3})$.

7.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\cos(\frac{k\pi}{4})$.

7.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\sin(\frac{k\pi}{4})$.

7.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{3^k}{4^k}\cos(\frac{k\pi}{4})$.

7.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos(\frac{k\pi}{4})$.

8-Масала. Қуйидаги функциялар аниқлаган эгри чизиқларни топинг.

8.1. $z=t+it^2 \qquad (0\le t<+\infty)$.

8.2. $z=2t+it^2 \qquad (0\le t<+\infty)$.

8.3. $z=t+i2t^2 \qquad (0\le t<+\infty)$.

8.4. $z=t+\frac{i}{t} \qquad (-\infty<t<0)$.

8.5. $z = t + \frac{i}{t}$ $(0 < t < +\infty)$.

8.6. $z = 2t + \frac{i}{t}$ $(-\infty < t < 0)$.

8.7. $z = t + \frac{i}{2t}$ $(0 < t < +\infty)$.

8.8. $z = 4t^2 + it^4$ $(-\infty < t < +\infty)$.

8.9. $z = t^2 + i\frac{t^4}{16}$ $(-\infty < t < +\infty)$.

8.10. $z = 9t^2 + it^4$ $(-\infty < t < +\infty)$.

8.11. $z = \mathrm{Re}\cdot e^{i2t}$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{4})$.

8.12. $z = \mathrm{Re}\, e^{i3t}$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{6})$.

8.13. $z = \mathrm{Im}\, e^{i2t}$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{4})$.

8.14. $z = \mathrm{Im}\, e^{i3t}$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{6})$.

8.15. $z = 2t$ $(0 \le t \le 3)$.

8.16. $z = 2 + it$ $(2 \le t \le 5)$.

8.17. $z = t + 3i$ $(1 \le t \le 2)$.

8.18. $z = 2 + i + [(3 + 2i) - (2 + i)]t$ $(0 \le t \le 1)$.

8.19. $z = 3 + 2i + [(5 + 4i) - (3 + 2i)]t$ $(0 \le t \le 1)$.

8.20. $z = 3 + 2i + [(4 + 4i) - (3 + 2i)]t$ $(0 \le t \le 1)$.

8.21. $z = 1 + i + [(2 + 3i) - (1 + i)]t$ $(0 \le t \le 1)$.

9-Масала. Қуйидаги $f(z)$ функцияларни берилган соҳаларда бир япроқликка текширинг.

9.1. $f(z) = z^2;$ $E = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$

9.2. $f(z) = z^2;$ $E = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$.

9.3. $f(z) = z^3;$ $E = \{0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$.

9.4. $f(z)=z^2;\qquad E=\{|z|<1\}$.

9.5. $f(z)=z^2;\qquad E=\{|z|<1, 0<\arg z<\frac{3\pi}{2}\}$.

9.6. $f(z)=z^2;\qquad E=\{|z|>2\}$.

9.7. $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z});\quad E=\{|z|<1\}$.

9.8. $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{2}{z});\quad E=\{|z|<2\}$.

9.9. $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{2}{z});\quad E=\{\operatorname{Im} z>0\}$.

9.10. $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{2}{z});\quad E=\{\operatorname{Re} z>0\}$.

9.11. $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{2}{z});\quad E=\{\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\}$.

9.12. $f(z)=\frac{1}{z+3};\qquad E=\{|z|<3\}$.

9.13. $f(z)=\frac{1}{z+3};\qquad E=\{|z|>3\}$.

9.14. $f(z)=\frac{1}{z+4};\qquad E=\{|z|<4\}$.

9.15. $f(z)=\frac{1}{z+3};\qquad E=\{\operatorname{Re} z>3\}$.

9.16. $f(z)=\frac{1}{z+i};\qquad E=\{\operatorname{Re} z>1\}$.

9.17. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y);\quad E=\{\operatorname{Im} z>0\}$.

9.18. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y);\quad E=\{0<\operatorname{Im} z<\pi\}$.

9.19. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y);\quad E=\{|z|<1\}$.

9.20. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y);\quad E=\{0<\operatorname{Re} z<\frac{1}{2}\}$.

9.21. $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$**;** $\qquad E=\{|z|<2\}$.

10-Масала. Берилган функцияларни узлуксизликка текширинг.

10.1. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$.

10.2. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+i)}$.

10.3. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+i)}$.

10.4. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z+i)}$.

10.5. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$.

10.6. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z+i)}$.

10.7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)}$.

10.8. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z-1)}$.

10.9. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-i)}$.

10.10. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z-i)}$.

10.11. $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)(z+i)}$.

10.12. $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+i)}$.

10.13. $f(z)=\dfrac{1}{(2z+1)(z+i)}$.

10.14. $f(z)=\dfrac{1z}{(2z+1)(z-i)}$.

10.15. $f(z)=\dfrac{1}{(2z-1)(z+i)}$.

10.16. $f(z)=\dfrac{1}{(2z-1)(z-i)}$.

10.17. $f(z)=\dfrac{z}{(2z-i)(z-1)}$.

10.18. $f(z)=\dfrac{z}{(2z-i)(z+1)}$.

10.19. $f(z)=\dfrac{z}{(2z+i)(z-1)}$.

10.20. $f(z)=\dfrac{z}{(3z+i)(z-1)}$.

10.21. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$

11-Масала. Функция ҳосиласини таъриф ёрдамида ҳисобланг.

11.1. $f(z)=\dfrac{1}{z+i}\quad (z\neq -i)$.

11.2. $f(z)=\dfrac{1}{z+1}\quad (z\neq -1)$.

11.3. $f(z)=\dfrac{1}{z-1}\quad (z\neq 1)$.

11.4. $f(z)=\dfrac{1}{z-i}\quad (z\neq i)$.

11.5. $f(z)=\dfrac{1}{2z-1}\quad (z\neq \dfrac{1}{2})$.

11.6. $f(z)=\dfrac{1}{2z+1}\quad (z\neq -\dfrac{1}{2})$.

11.7. $f(z)=\dfrac{1}{2z-i}\quad (z\neq \dfrac{i}{2})$.

11.8. $f(z)=\dfrac{1}{2z+i}\quad (z\neq -\dfrac{i}{2})$.

11.9. $f(z)=z^2$.

11.10. $f(z)=z^3$.

11.11. $f(z)=z^2+2z$. **11.12.** $f(z)=z^3-z+1$.

11.13. $f(z)=1-3z^2$. **11.14.** $f(z)=z+2z^2$.

11.15. $f(z)=3z\ \ -1$. **11.16.** $f(z)=2z\ \ +3$.

11.17. $f(z)=\dfrac{1}{z}\quad (z\neq 0)$. **11.18.** $f(z)=\dfrac{z}{2}+5$.

11.19. $f(z)=\dfrac{2z}{3}$. **11.20.** $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.

11.21. $f(z)=\dfrac{1}{z+2}\quad (z\neq -2)$.

12-Масала. Куйидаги функцияларни С-дифференциалланувчанликка текширинг

12.1. $f(z)=\operatorname{Re} z$. **12.2.** $f(z)=z^2\operatorname{Re} z$.

12.3. $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$. **12.4.** $f(z)=z^2\operatorname{Im} z$.

12.5. $f(z)=\operatorname{Re} z^2$. **12.6.** $f(z)=z\cdot(\operatorname{Re} z)^2$.

12.7. $f(z)=[\operatorname{Re} z]^2\cdot\operatorname{Im} z$. **12.8.** $f(z)=[\operatorname{Im} z]^2\cdot\operatorname{Re} z$.

12.9. $f(z)=z(\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z)$. **12.10.** $f(z)=\operatorname{Im} z^2$.

12.11. $f(z)=|z|^2$. **12.12.** $f(z)=|\overline{z}|^2$.

12.13. $f(z)=z\operatorname{Re} z$. **12.14.** $f(z)=\overline{z}\cdot\operatorname{Im} z$.

12.15. $f(z)=\operatorname{Im} z$. **12.16.** $f(z)=z$.

12.17. $f(z)=\overline{z}$. **12.18.** $f(z)=2xy-i(x^2+y^2)$.

12.19. $f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$. **12.20.** $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$.

12.21. $f(z)=z\operatorname{Im} z$.

13-Масала. Берилган функцияларни голоморфликка текширинг.

13.1. $f(z)=x+y+i(ax+by)$. **13.2.** $f(z)=x^2-y^2+ibxy$.

13.3. $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{ay}{x^2+y^2}$. **13.4.** $f(z)=x+2y+i(ax-by)$.

13.5. $f(z)=x-y+i(ax-by)$. **13.6.** $f(z)=x+y+i(ax-y)$.

13.7. $f(z)=a(x^2-y^2)+2ixy$. **13.8.** $f(z)=x^2+ay^2+ibxy$.

13.9. $f(z) = x + y + i(x + ay)$. **13.10.** $f(z) = \frac{ax}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}$.

13.11. $f(z) = x^2 + ay^2 - ibxy$. **13.12.** $f(z) = x - y + i(ay + bx)$.

1313. $f(z) = x^2 - y^2 + iaxy$. **13.14.** $f(z) = ax + by + icy$.

13.15. $f(z) = ax + y + i(bx + cy)$. **13.16..** $f(z) = x^2 - ay^2 + i2xy$.

13.17. $f(z) = \frac{ax}{x^2 + y^2} + i\frac{by}{x^2 + y^2}$. **13.18.** $f(z) = x - 2y + i(bx + cy)$.

13.19. $f(z) = ax + i(bx + cy)$. **13.20.** $f(z) = ax + y + i(bx + cy)$.

13.21. $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$.

14-Масала. $\gamma - z_0$ нуқтадан чиқувчи $\arg(z - z_0) = \varphi$ нур бўлсин. Қуйидаги мисоллардаги акслантиришлар учун z_0 нуқтадаги чўзилиш коэффиценти $R(\varphi)$ ва бурилиш бурчаги $\alpha(\varphi)$ ни топинг.

14.1. $w = z^2$, $z_0 = i$. **14.2.** $w = \overline{z^2}$, $z_0 = 1$.

14.3. $w = \bar{z} + 2z$ $z_0 = 0$. **14.4.** $w = z^2$, $z_0 = \frac{i}{4}$.

14.5. $w = z^2$, $z_0 = 1 - i$. **14.6.** $w = z^2$, $z_0 = -1 + i$.

14.7. $w = z^3$, $z_0 = i$. **14.8.** $w = z^3$, $z_0 = -\frac{i}{4}$.

14.9 $w = z^2 + 2\bar{z}$, $z_0 = 1$. **14.10.** $w = z^2 - 2\bar{z}$, $z_0 = i$.

14.11 . $w = e^{2x}(\cos 2y + \sin 2y)$; $z_0 = 0$.

14.12 . $w = e^{2x}(\cos 2y - i\sin 2y)$; $z_0 = 0$.

14.13 . $w = \frac{z-1}{z+1}$, $z_0 = 1$. **14.14.** $w = \frac{z-(1+i)}{z+1+i}$, $z_0 = 1 + i$.

14.15. $w = \frac{z-2+i}{z+2-i}$, $z_0 = 2 - i$. **14.16.** $w = \frac{z-2i}{z+2i}$, $z_0 = 2i$.

14.17. $w = \frac{z+2}{z-2}$, $z_0 = -2$. **14.18.** $w = \frac{z-2}{z+2}$, $z_0 = 2$.

14.19. $w = \frac{z+2i}{z-2i}$, $z_0 = -2i$. **14.20.** $w = \frac{z+1-i}{z-1+i}$, $z_0 = -1 + i$.

14.21. $w = \frac{z-i}{z+i}$, $z_0 = i$.

15-Масала. Қуйида берилган $u(x,y)$ гармоник функцияларга кўрсатилган соҳаларда қўшма гармоник бўлган $v(x,y)$ функцияларни топинг ва улар ёрдамида голоморф $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функцияни қуринг.

15.1. $u(x,y)=4xy \quad E=C$. **15.2.** $u(x,y)=2x-3y+5,\ E=C$.

15.3. $u(x,y)=\dfrac{2x+y}{3(x^2+y^2)}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.4. $u(x,y)=2(x^2-y^2)+4xy \quad E=C$.

15.5. $u(x,y)=x^2-y^2-2xy, \quad E=C$.

15.6. $u(x,y)=\dfrac{x-2y}{2(x^2+y^2)}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.7. $u(x,y)=x^2-y^2+x, \quad E=C$.

15.8. $u(x,y)=3(x^2-y^2)-6xy, \quad E=C$.

15.9. $u(x,y)=x+2y-1, \quad E=C$.

15.10 $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.11. $u(x,y)=\dfrac{x+y}{4(x^2+y^2)}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.12. $u(x,y)=y^2-x^2+2xy, \quad E=C$.

15.13. $u(x,y)=x^2-3xy^2, \quad E=C$.

15.14. $u(x,y)=-x+4y-5, \quad E=C$.

15.15. $u(x,y)=xy+1, \quad E=C$.

15.16. $u(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.17. $u(x,y)=2x^3-6xy^2, \quad E=C$.

15.18. $u(x,y)=x^2-y^2+xy,\ E=C$.

15.19. $u(x,y)=2x+4y-1, \quad E=C$.

15.20. $u(x,y)=y^2-x^2-4xy, \quad E=C$.

15.21. $u(x,y)=2(x^2-y^2)-1, \quad E=C$.

16-Масала. Қуйидаги функцияларнинг конформлик соҳалари топилсин.

16.1. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$. **16.2.** $f(z) = \dfrac{2z+1}{z-1}$.

16.3. $f(z) = z^2 + 1$. **16.4.** $f(z) = z^2 - 1$.

16.5. $f(z) = 2z^2 + z - 1$. **16.6.** $f(z) = z^2 - 2z$.

16.7. $f(z) = z^3 - 1$. **16.8.** $f(z) = z^3 + 1$.

16.9. $f(z) = z^3 + 3z$ **16.10.** $f(z) = z^3 - 3z$.

16.11. $f(z) = \dfrac{z-3}{2z+1}$ **16.12.** $f(z) = \dfrac{z+4}{2z-5}$.

16.13. $f(z) = e^x(\cos y + \sin y)$. **16.14.** $f(z) = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y)$.

16.15. $f(z) = e^{-x}(\cos y - \sin y)$. **16.16.** $f(z) = e^{-2x}(\cos 2y - i\sin 2y)$.

16.17. $f(z) = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$. **16.18** $f(z) = \dfrac{1}{2}(z - \dfrac{1}{z})$.

16.19. $f(z) = 3z^2 - 6z$ **16.20.** $f(z) = z^3 - 8$.

16.21. $f(z) = 4z^2 - 8z$.

- С -

НАМУНАВИЙ ВАРИАНТ ЕЧИМИ.

Намунавий вариант сифатида 21-вариантни олиб, ундаги мисол ва масалаларнинг ечимларини намуна сифатида келтирамиз.

1.21-Масала. Қуйидаги

$$z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2} \quad \text{ва} \quad z_2 = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$$

комплекс сонларнинг йиғ индиси, айирмаси, кўпайтмаси, нисбати ҳамда $z_1 + \dfrac{1}{z_2}$ ни топинг.

$\lhd$ $z_1 + z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{2}) + (\sqrt{3} - i\sqrt{2}) = (\sqrt{3} + \sqrt{3}) + i(\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}.$

$z_1 - z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{2}) - (\sqrt{3} - i\sqrt{2}) = (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + i(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}i.$

$z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - i\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (i\sqrt{2})^2 = 3 - 2i^2 = 5$.

$$\frac{z_1}{z}=\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(i\sqrt{2})^2}=\frac{3+i2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2i^2}{3+2}=$$

$$=\frac{(3-2)+i\cdot 2\sqrt{6}}{5}=\frac{1}{5}+i\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$z_1+\frac{1}{z_2}=\sqrt{3}+i\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}=\sqrt{3}+i\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{3+2}=$$

$$=\sqrt{3}+i\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{5}+i\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{6\sqrt{3}}{5}+i\frac{6\sqrt{2}}{5}.\rhd$$

2.21-Масала. Амалларни бажаринг, ҳосил бўлган комплекс соннинг модули ва аргументини топинг, уни комплекс текисликда тасвирланг $(1-i)^3\cdot(1+i\sqrt{3})^8$.

$\lhd$Олдин $z_1=1-i$ *ва* $z_2=1+i\sqrt{3}$ сонларнинг модули ва аргументини (2) ва (3) – формулалардан фойдаланиб топиб, сўнг уларни тригонометрик шаклда ёзамиз ва Муавр формуласидан фойдаланамиз:

$$z_1=1-i\ \Rightarrow |z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

$$\arg z_1=arctg\frac{x}{y}+2\pi=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}\Rightarrow z_1=\sqrt{2}.$$

$$\cdot(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})\Rightarrow z_1^3=(1-i)^3=2\sqrt{2}(\cos\frac{21\pi}{4}+i\sin\frac{21\pi}{4})=$$

$$2\sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=-2(1+i).$$

$$z_2=1+i\sqrt{3}\ \Rightarrow |z_2|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\quad \arg z_2=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow z_2=1+i\sqrt{3}=$$

$$\cdot=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\Rightarrow z_2^8=(1+i\sqrt{3})^8=2^8(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3})=$$

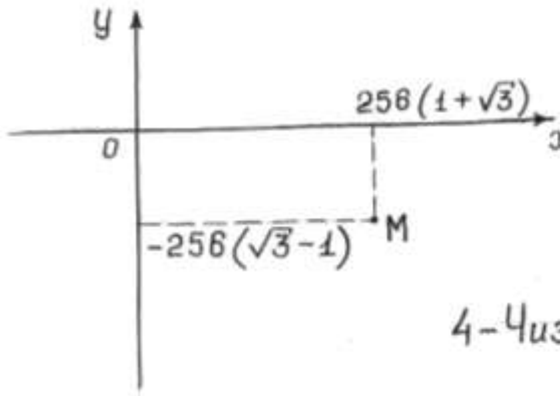
$$=256(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=256\cdot(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-128(1-i\sqrt{3}).$$

$$z=(1-i)^3\cdot(1+i\sqrt{3})^8=z_1^3\cdot z_2^8=256(1+i)(1-i\sqrt{3})=$$

Демак,

$$=256\cdot[(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})]=256\cdot(1+\sqrt{3})-i\cdot 256\cdot(\sqrt{3}-1).$$

Бу комплекс сон текисликда $M(256(1+\sqrt{3}),\ -256(\sqrt{3}-1))$ нуқтани ифодалайди (4-чизма)▹



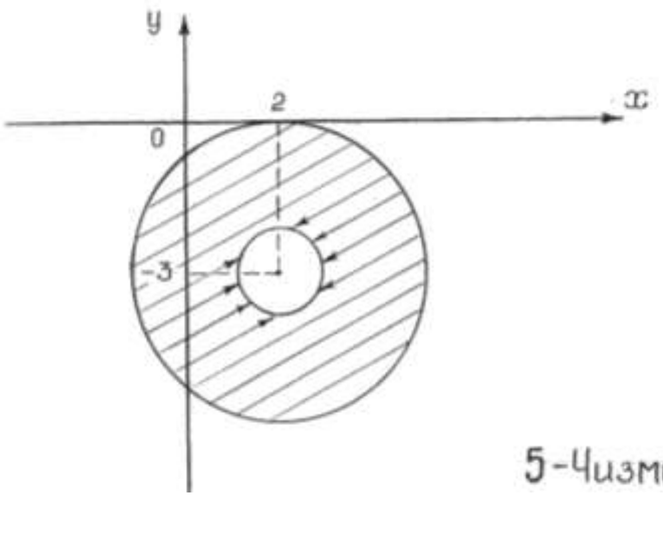
4-Чизма

3.21-Масала. Қуйидаги $1<|z-2+3i|\le 3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўпламини C комплекс текисликда тасвирланг.

◃ $|z-2+3i|=|x+iy-2+3i|=|(x-2)+i(y+3)|=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$ бўлгани учун берилган $1<|z-2+3i|\le 3$ тўплам

$$1<(x-2)^2+(y+3)^2\le 9$$

халқадан иборат бўлади. Бу маркази (2;-3) нуқтада радиуслари 1 ва 3 га тенг бўлган концентрик айланалар орасидаги нуқталар ва радиуси 3 га тенг айлана нуқталарини ўз ичига олган халқадир (5-чизма)▹



5-Чизма

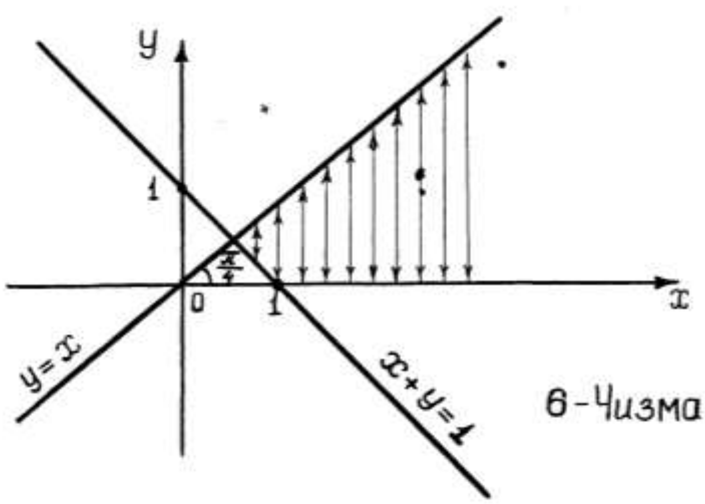
4.21-Масала. Қуйидаги

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини C текисликда тасвирланг.

$$\lhd \begin{cases} \operatorname{Re} z = x, \\ \operatorname{Im} z = y \end{cases} \quad \text{ва} \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + y > 1 \\ 0 < y < x \end{cases}$$

Бу тўплам 6-чизмада тасвирланган $\rhd$



6-Чизма

5.21-Масала. Ушбу

$$|z|^2 + (4-3i)z + (4+3i)\bar{z} + 21 = 0$$

тенглама айлананинг тенгламаси эканлигини исботланг ва бу айлана марказининг координаталари ҳамда радиусини топинг.

$$\left.\begin{array}{l} z = x + iy \\ \\ \overline{z} = x - iy \\ \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = |z|^2 + (4-3i)z + (4+3i)\overline{z} + 21 =$$

$\triangleleft$

$$= x^2 + y^2 + (4-3i)(x+iy) + (4+3i)\cdot(x-iy) + 21 = x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = \text{Бу}$$

$$= (x+4)^2 + (y+3)^2 - 4 \Rightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 2^2.$$

маркази (-4,-3) нуқтада ва радиуси 2 га тенг бўлган айлананинг тенгламаси $\triangleright$

6.21-Масала. C комплекс текислигидаги $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ нуқтанинг S Риман сферасидаги образини топинг.

$\triangleleft$ Бу масалани ечишда (7)- формулалардан фойдаланамиз.

$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.} = 1$ Бу ердан (7)-

формулага кура $\xi = \frac{x}{1+|z|^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\eta = \frac{y}{1+|z|^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{1}{2}$

эканлигини топамиз. Демак, берилган нуқтанинг Риман сферасидаги образи $(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{2})$ экан $\triangleright$

7.21-Масала. Ҳисобланг. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\frac{k\pi}{4}$.

$\triangleleft$ Берилган лимитни ҳисоблаш учун олдин

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} (\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{i\frac{k\pi}{4}}}{2^k}$$

кетма-кетликнинг лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i\frac{k\pi}{4}}}{2^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{e^{\frac{in\pi}{4}}}{2^n}}{1-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}} = ((\left|e^{\frac{in\pi}{4}}\right| =$$

$$= \left|\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right| = 1)) = \frac{1}{1-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}}.$$

Бундан $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\frac{k\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2}} = \operatorname{Re}\frac{2}{2-e^{\frac{i\pi}{4}}} = \operatorname{Re}\frac{2}{2-(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{4}{4-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{4(4-\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{4-\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}. \quad \triangleright$$

8.21-Масала. Қуйидаги

$$z = (1+i) + [(2+3i)-(1+i)\}]t \qquad (0 \le t \le 1)$$

функция аниқлаган эгри чизиқни топинг.

$\triangleleft \quad z(t) = x(t) + y(t) = (1+i) + [(2+3i)-(1+i)]t = 1+i+(1+2i)t =$

$=1+t+i(1+2t)$

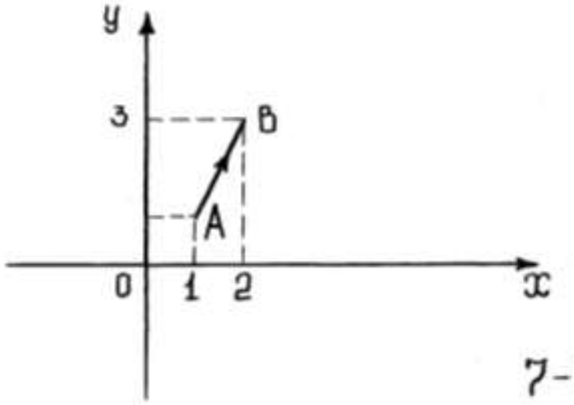
тенгликдан, берилган чизиқнинг параметрик тенгламаси.

$$\begin{cases} x(t) = 1+t, \\ y(t) = 1+2t, \qquad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

эканлигини, бу ердан эса

$$y = 1+2t = 2(1+t)-1 = 2x-1, \quad 1 \le x \le 2$$

эканлигини топамиз. Демак, берилган чизиқ 7-чизмада тасвирланган A(1;1) нуқтадан B(2;3) нуқтага қараб йўналган AB кесмадан иборат экан$\triangleright$



7-Чизма

9.21-Масала. $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ функцияни $E=\{|z|<2\}$ соҳада бир япроқликка текширинг.

$\triangleleft$Бу масалани ечишда 5^0 пунктдаги 2-таърифдан фойдаланамиз. Фараз қилайлик $z_1, z_2, \in E$ лар учун $f(z_1)=f(z_2)$, яъни $\frac{1}{2}(z_1+\frac{1}{z_1})=\frac{1}{2}(z_2+\frac{1}{z_2})$ бўлсин $\Rightarrow \frac{(z_2-z_1)(1-z_1z_2)}{z_1z_2}=0 \Rightarrow$

Берилган функциянинг Е тўпламда бир япроқли бўлиши учун шу тўпламнинг

$$z_1z_2=1$$

тенгликни қаноатлантирувчи z_1, z_2 нуқталарни ўзида сақламаслиги зарур ва етарли. Лекин,

$$z_1=i\in E \quad , \qquad z_2=-i\in E \qquad \text{ва} \qquad z_1\cdot z_2=1. \Rightarrow f(z)$$

функция Е соҳада бир япроқли бўлмайди$\triangleright$

10.21-Масала. $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ функцияни узлуксизликка текширинг.

$\triangleleft$ $z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z=\pm i$ нуқталар функциянинг узилиш нуқталари. Қолган барча нуқталарда функциянинг узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. $\forall z\in C\setminus\{-i, i\}$ учун

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)=\frac{1}{(z+\Delta z)^2+1}-\frac{1}{z^2+1}=\frac{-\Delta z\cdot(2z+1)}{[(z+\Delta z)^2+1]\cdot(z^2+1)}$$

бўлиб, бу тенгликдан $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta f(z)=0$ эканлиги келиб чиқади.Бу эса $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ функциянинг $\forall z\in C\setminus\{-i, i\}$ нуқтада узлуксиз эканлигини англатади$\triangleright$

11.21-Масала. $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ $(z\neq -2)$ функциянинг ҳосиласи таъриф ёрдамида ҳисоблансин.

$\triangleleft$ $\forall\ z\in C\setminus\{-2\}$ учун (11)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f'(z)\ :=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{1}{z+\Delta z+2}-\dfrac{1}{z+2}}{\Delta z}=$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{(z+\Delta z+2)(z+2)}=-\frac{1}{(z+2)^2}\ . \quad \triangleright$$

12.21-Масала. $f(z)=z\cdot \operatorname{Im} z$ функцияни С–дифференциалланувчанликка текширинг.

$\triangleleft$Бу масалани 6^0 пунктда келтирилган теоремадан фойдаланиб ечамиз.

$$f(z)=z\cdot \operatorname{Im} z=(x+iy)\cdot y=xy+iy^2\ \Rightarrow u(x,y)=xy,\ v(x,y)=y^2.$$

Бу функциялар $\forall(x,y)\in R^2$ нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи. Энди бу функциялар учун Коши-Риман шартларини текширамиз. Ушбу $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y$

тенгликлардан $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

Коши-Риман шартлари фақат (0,0) нуқтадаги бажарилиши келиб чиқади. Демак, $f(z)=z\cdot \operatorname{Im} z$ функция фақат $z=0$ нуқтада С–дифференциалланувчи$\triangleright$

13.21-Масала. $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$ функцияни голоморфликка текширинг.

$\triangleleft$ $f(z)=x+ay+i(bx+cy)\Rightarrow u(x,y)=x+ay,\ \ v(x,y)=bx+cy$

функциялар R^2 да ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи. Бу функциялар учун Коши-Риман шартларини текширамиз.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=a\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=b\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=c \qquad \text{ва}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow b = -a \quad \text{ва} \quad c = 1$$

шартлар бажарилса, $f(z)$ функция С да голоморф булади ва

$f(z) = x + ay + i(-ax + y) = (1 - ai)z$ тенглик бажарилади $\triangleright$

14.21-Масала. Фараз қилайлик $\gamma - i$ нуқтадан чиқувчи $\arg(z - i) = \varphi$ нур бўлсин. $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ акслантириш учун i нуқтадаги чўзилиш коэффициенти $R(\varphi)$ ва бурилиш бурчаги $\alpha(\varphi)$ ни топинг.

$\triangleleft$ $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ $\Rightarrow$ $\forall z \in C \setminus \{-i\}$ учун $w'(z) = (\dfrac{z-i}{z+i})' = \dfrac{2i}{(z+i)^2}$ $\Rightarrow w'(i) = -\dfrac{i}{2}$.

Демак,

$$R(\varphi) = |w'(i)| = \left| -\frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{ва} \quad \alpha(\varphi) = \arg w'(i) = \arg(-\frac{i}{2}) = \frac{3\pi}{2} \ \triangleright$$

15.21-Масала. Берилган $u(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 1$ гармоник функцияга Еқ С соқ ада қўшма гармоник бўлган $v(x, y)$ функцияни топинг ва улар ёрдамида голоморф $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функцияни қуринг.

$\triangleleft$ $v(x, y)$ функция $u(x, y)$ функцияга қўшма гармоник функция бўлгани учун улар Коши-Риман шартларини бажариши керак:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4y \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(x, y) = \int 4y dx + \varphi(y) = 4xy + \varphi(y) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 4x + \varphi'(y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x \Rightarrow 4x + \varphi'(y) = 4x \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(y) = const = c. \Rightarrow v(x, y) = 4xy + c$

қўшма гармоник функция.

$\Rightarrow f(z) = u + iv = 2(x^2 - y^2) - 1 + i(4xy + c) = 2(x + iy)^2 - 1 + ic = 2z^2 - 1 + ic.$ $\triangleright$

16.21-Масала. Қуйидаги

$$f(z) = 4z^2 - 8z$$

функциянинг конформлик соҳаси топилсин.

▹ Бу масалани 8^0 пунктдаги теоремадан фойдаланиб ечамиз.

$$f'(z) = (4z^2 - 8z)' = 8(z-1) \neq 0 \Rightarrow z \neq 1.$$

Функцияни бир япроқликка текширамиз. Фаразқилайлик, $f(z_1) = f(z_2)$ бўлсин.

$\Rightarrow 4z_1^2 - 8z_1 = 4z_2^2 - 8z_2 \Rightarrow 4(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 2) = 0 \Rightarrow$

Берилган функциянинг E тўпламда бир япроқли бўлиши учун шу тўпламнинг

$$z_1 + z_2 = 2 \qquad (18)$$

тенгликни қаноатлантирувчи z_1, z_2 нуқталарни ўзида сақламаслиги зарур ва етарли.

Шундай қилиб, $f(z) = 4z^2 - 8z$ функция $z = 1$ нуқтани ва (18)–тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарни ўзида сақламайдиган ихтиерий $E \subset C$ соҳада конформ бўлар экан ▹

2−§. 2−МУСТАҚИЛ ИШ

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАР ЁРДАМИДА БАЖАРИЛАДИГАН КОНФОРМ АКСЛАНТИРИШЛАР

Риман теоремаси.

Сощанинг сақланиш принципи.

Чизиқли функция.

Каср чизиқли функция.

Даражали функция.

Жуковский функцияси.

Кьрсаткичли функция.

Тригонометрик функциялар.

Кьп қийматли функциялар.

Симметрия принципи.

− A −

АСОСИЙ ТУШУНЧА ВА ТЕОРЕМАЛАР

Конформ акслантиришлар назариясида асосан қуйидаги икки масала ьрганилади:

1−масала. С комплекс текисликдаги бирор Е сощада (Е⊂С) $w = f(z)$ акслантириш берилган щолда сощанинг аксини, яъни $w(E)$ ни топиш.

2−масала. Иккита ихтиёрий $E \subset C_z$ $F \subset C_w$ сощалар берилган щолда Е сощани F сощага аксалантирувчи конформ $w = f(z)$ акслантиришни топиш.

Бу масалаларни щал =илишда =уйидаги тасди=лардан фойдаланилади.

1−Теорема. (Риман теоремаси). *Агар Е ва F лар мос равишда кенгайтирилган комплекс текислик $\overline{C_z}$ щамда $\overline{C_w}$ лардан олинган ва чегараси 2 та нуктадан кам бьлмаган бир боғламли сощалар бьлса, Е сощани F сощага конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функция мавжуд.*

2−Теорема. (сощанинг сакланиш принципи). *Агар $f(z)$ функция Е сощада голоморф бьлиб, $f(z) \neq const$ бьлса , $f(E)$ щам сощa бьлади.*

Амалиётда кьпинча берилган Е сощани ьзидан соддароқ бьлган сощага, масалан бирлик доира ёки юқори ярим текисликка конформ акслантириш масаласини ечиш талаб қилинади. Бу масалани щал қилишда биз комплекс аргументли элементар функциялар синфини, биринчи навбатда уларнинг геометрик хоссаларини татбик қилиш услубларини ьрганишимиз зарур.

1^0. Чизикли функция

1−Таъриф. *Ушбу*

$$w = az + b \qquad (a, b \in C\ , a \neq 0) \qquad\qquad (1)$$

кьринишдаги функция чизиқли функция (акслантириш) деб аталади.

Чизиқли функция C_z комплекс текисликни C_w комплекс текисликка конформ акслантиради.

Чизиқли функциянинг хусусий щолларини қараймиз:

1) Айтайлик,

$$w = z + b \quad (b \in C)$$

бьлсин. Бу функция параллел кьниришни амалга оширади.

2) Айтайлик,

$$w = e^{i\alpha} \cdot z \quad (\alpha \in R)$$

бьлсин. Бу функция C_z текисликдаги хар бир z нуктани координата боши атрофида соат стрелкасига тескари йуналишда α бурчакка буришни амалга оширади.

Масалан,

$$w = iz = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})z = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$$

функция координата боши атрофида 90^0га,

$$w = -z$$

эса 180^0 га буришни амалга оширади.

3) Айтайлик,

$$w = kz \quad (k > 0)$$

бьлсин. Бу функция берилган сощани унга ьхшаш сощага чузиб ($\kappa > 1$ да) ёки сиқиб ($\kappa < 1$ да) акслантиради.

Умуман ,

$$w = az + b \quad (a, b \in C)$$

функция ёрдамида бажариладиган акслантириш C_z текисликдаги сощани □чьвиш□ бирор бурчакка буриш щамда параллел кучиришни амалга оширади. Амалиётда бу функциянинг шу хоссаларидан фойдаланилади.

Фараз килайлик, $w=f(z)$ функция С текисликдаги бирор Е соҳада берилган бўлсин.

2–Таъриф. *Агар $a\in E$ нуктада*

$$f(a)=a$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $z=a$ нуқта $w=f(z)$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.

$w=az+b$ чизиқли акслантириш $a\neq 1$ бўлганда иккита

$$z_1=\infty,\ z_2=\frac{b}{1-a}$$

қўзғалмас нуқталарга эга.

Агар $a=1$ бўлса, $z=\infty$ шу чизиқли акслантиришнинг каррали қўзғалмас нуқтаси бўлади.

2⁰. Каср чизиқли функция.

1–Таъриф. *Ушбу*

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad (a,\ b,\ c,\ d\in C) \qquad (2)$$

кўринишдаги функция каср–чизиқли функция (каср–чизиқли акслантириш) деб аталади.

Бу таърифда $ad-bc\neq 0$ деб қараймиз, акс ҳолда $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ бўлиб, w функция ўзгармасга айланади.

Каср чизиқли функция кенгайтирилган $\overline{C}_z$ комплекс текисликни кенгайтирилган $\overline{C}_w$ комплекс текисликка конформ акслантиради.

Каср чизиқли акслантиришлар қатор хоссаларга эга.

1-Хосса. *Каср чизи=ли акслантиришларнинг суперпозицияси яна каср чизи=ли акслантириш былади; каср чизи=ли акслантиришга тескари былган акслантириш щам каср чизи=ли былади.*

2–Хосса. *Ихтиерий каср чизиқли акслантириш $\overline{C}_z$ даги айлана ёки тўғри чизиқни $\overline{C}_w$ даги айлана ёки тўғри чизиққа акслантиради.*

Бу хоссани каср чизиқли акслантиришнинг *доиравийлик хоссаси* дейилади (тўғри чизиқ одатда радиуси чексизга тенг бўлган айлана деб қаралади).

Изоҳ Каср чизиқли функция ёрдамида айлана айланага ёки тўғри чизиққа аксланишини аниқлаш учун функциянинг махражини нолга айлантирувчи $z=-\frac{d}{c}$ нуқтанинг қаралаётган айланага тегишли ёки тегишли эмаслигини аниқлаш кифоядир.

Масалан,

$$w=\frac{1}{z-3}$$

акслантириш $\{z:|z|=2\}$ айланани айланага, $\{z:|z|=3\}$ айланани эса тўғри чизиққа ўтказади.

Текисликдаги γ тўғри чизиққа нисбатан симметрик нуқталар тушунчаси ўқувчига элементар математикадан маълум. Энди бу тушунчани айланага нисбатан келтирайлик.

2–Таъриф. *Агар z_1 ва z_1^* нуқталар учи*

$$\gamma=\{z\in C\,|\,|z-z_0|=R\}$$

айлана марказида бўлган битта нурда ётиб, улардан айлана марказигача бўлган масофалар кўпайтмаси γ айлана радиусининг квадратига тенг бўлса, яъни

$$\begin{cases}\arg(z_1^*-z_0)=\arg(z_1-z_0),\\ |z_1^*-z_0|\cdot|z_1-z_0|=R^2\end{cases}$$

тенгликлар ўринли бўлса, z_1 ва z_1^* нуқталар C комплекс текисликдаги γ ***айланага нисбатан симметрик нуқталар*** *дейилади.*

Агар z_1 ва z_1^* нукталар γ айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлса,у холда

$$z_1^*-z_0=\frac{R^2}{\overline{\overline{z_1-z_0}}} \qquad (3)$$

бўлади.

3–Хосса. *Ҳар кандай каср чизикли акслантириш натижасида (z) текисликдаги γ айлана ёки тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган z_1 ва z_1^* нукталарнинг акси (w) текисликда γ айлананинг акси бўлган $w(\gamma)$ айлана ёки тўғри* *чизиққа нисбатан симметрик бўлган w_1 ва w_1^* нуқталардан иборат бўлади.*

Бу хосса каср–чизиқли акслантиришда ***симметрикликнинг сақланиш хоссаси*** дейилади.

4–Хосса. (z) *текисликда берилган ҳар хил* z_1, z_2, z_3 *нукталарни* (w) *текисликда берилган ҳар хил* w_1, w_2, w_3 *нуқталарга акслантирувчи каср чизиқли функция мавжуд ва у ягонадир.*

Бу акслантириш ушбу

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \qquad (4)$$

муносабатдан топилади. (4)–муносабатга ***ангармоник нисбат*** деб аталади.

5–Хосса. *Ушбу*

$$w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad \operatorname{Im} a>0 \qquad (5)$$

каср чизиқли функция юқори ярим текислик $\{\operatorname{Im} z>0\}$ *ни бирлик доира* $\{|w|<1\}$ *га акслантиради, бунда* θ *–ихтиёрий ҳақиқий сон.*

6–Хосса. *Ушбу*

$$w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a|<1 \qquad (6)$$

каср чизиқли функция (z) *текисликдаги бирлик доира* $\{|z|<1\}$ *ни* (w) *текисликдаги бирлик доира* $\{|w|<1\}$ *га акслантиради, бунда* θ *–ихтиерий ҳақиқий сон.*

3^0. Даражали функция.

Таъриф. *Ушбу*

$$w=z^n \quad (n\in N,\ n>1)` \qquad (7)$$

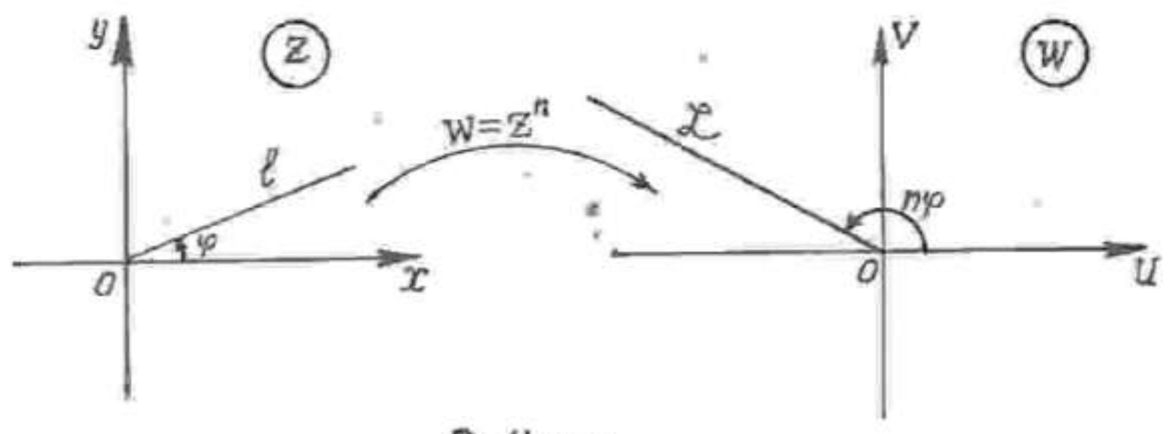
кўринишдаги функция даражали функция дейилади.

Даражали функция С да голоморф ва бу функция ёрдамида бажариладиган акслантириш $\forall z\in C\setminus\{0\}$ нуқтада конформ бўлади: $w'=nz^{n-1}$ ҳосила $C\setminus\{0\}$ да нолдан фарқлидир.

Агар $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\Psi}$ дейилса ,

$$\begin{cases} \rho = r^n, \\ \psi = n\varphi \end{cases} \qquad (8)$$

эканлигини кьрамиз. Бу тенгликлардан $w = z^n$ функция аргументи φ га тенг бьлган, 0 нуқтадан чиқувчи ℓ нурни, аргументи $n\varphi$ га тенг бьлган L нурга акслантиришини кьрамиз ($8-$чизма).



8 – Чизма

Агарда биз (z) текислигида орасидаги бурчаги $\dfrac{2\pi}{n}$ дан кичик бьлган координата бошидан чиқувчи иккита нур билан чегараланган D соҳани қарасак, $w = z^n$ функциянинг бу соҳада бир япроқли эканлигини кьрамиз.

Масалан, $w = z^n$ функция

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

соҳанинг ҳар бирида бир япроқли, демак, конформ бьлиб, уларнинг ҳар бирини (w) текслигидаги $C \setminus R_+ = C \setminus [0,+\infty)$ соҳага акслантиради.

Амалиётда $w = z^n$ функциясидан бурчакли сохаларни узидан соддарок соҳаларга акслантиришда фойдаланилади.

4^0. **Жуковский функцияси.**

Таъриф. *Ушбу*

$$w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \qquad (9)$$

функция Жуковский функцияси деб аталади.

Бу функция $z=0$ ва $z=\infty$ нукталардан ташқари бутун текисликда *голоморф* функциядир.

Жуковский функциясининг ҳосиласи $w'=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{z^2})$ бўлиб, $\{+1;-1\}$ нуқталардан ташқарида $w'\neq 0$ дир. $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ функция ёрдамидаги акслантириш $\{+1;-1\}$ нуқталардан ташқарида ($z=0$, $z=\infty$ нукталарда ҳам) *конформдир.*

$(9)-$функция бирор $E\subset C$ соҳада бир япроқли бўлиши учун бу соҳа ушбу

$$z_1\cdot z_2=1 \quad\cdot \qquad (10)$$

муносабатни каноатлантирувчи z_1 ва z_2 нукталарга эга бўлмаслиги зарур ва етарли.

Бундай соҳа сифатида $U=\{z\in C:|z|<1\}$ ёки $U^*=\{z\in C:|z|>1\}$ соҳаларни олиш мумкин. Жуковский функцияси бу соҳаларнинг ҳар бирини $[-1;\ 1]$ кесманинг ташқарисига конформ акслантиради.

Агар Жуковский функциясида

$$z=re^{i\varphi}\ ,\quad w=u+iv$$

дейилса, унда

$$u+iv=\frac{1}{2}(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi})$$

бўлиб,

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\varphi. \\ \\ v=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\varphi \end{cases} \qquad (11)$$

бўлади. (11) дан $(9)-$акслантириш учун қуйидагилар келиб чикади.

1) (z) текисликдаги $\{z\in C: |z| = r\ , r>1\}$ айлана (w) текисликдаги фокуслари $(-1;\ 0)$ ва $(1;\ 0)$ нуқталарда, ярим ўқлари

$$a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$$

бўлган эллипсга аксланади.

2) (z) текисликдаги $\{z\in C: |z| = r,\ r<1\}$ айлана (w) текисликдаги фокуслари $(-1;\ 0)$ ва $(1;\ 0)$ нукталарда, ярим ўқлари

$$a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$$

бўлган эллипсга аксланади.

3) (z) текисликдаги $\{z\in C: \arg z = 0\}$ нур (w) текисликдаги $\{w\in C: \arg w = 0\}$ нурга, $\{z\in C: \arg z = \pi\}$ нур эса $\{w\in C: \arg w = \pi\}$ нурга аксланади.

4) (z) текисликдаги $\{z\in C: \arg z = \frac{\pi}{2}\}$ ҳамда $\{z\in C: \arg z = \frac{3\pi}{2}\}$ нурларнинг ҳар бири (w) текисликдаги $\{w\in C: \mathrm{Re}\, w = 0\}$ тўғри чизиққа аксланади.

5) (z) текисликдаги

$$\{z\in C: \arg z = \varphi;\ \ \varphi\neq 0\ ,\ \varphi\neq\frac{\pi}{2}\ ,\ \ \varphi\neq\pi\ \ \varphi=\frac{3\pi}{2}\}$$

нур (w) текисликдаги ушбу

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1$$

гиперболанинг мос «шохчасига» аксланади.

5^0. e^z функцияси.

Таъриф. *Ушбу*

$$e^z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \qquad (z\in C)$$

функция кўрсаткичли функция дейилади.

Агар $z = x+iy$ десак,

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (12)$$

тенглик ьринли.

Кьрсаткичли $w=e^z$ функция қуйидаги хоссаларга эга:

1) e^z функция C комплекс текисликда голоморф ва унинг щрсиласи

$$(e^z)'=e^z$$

бьлади.

2) e^z функция учун

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2} \quad (z_1\in C,\ z_2\in C)$$

бьлади.

3) e^z функция даврий бьлиб, унинг асосий даври $2\pi i$ булади:

$$e^{z+2\pi i}=e^z$$

4) $\forall z\in C$ учун $(e^z)'\neq 0$ булиб, $w=e^z$ функция ёрдамидаги акслантириш C текисликнинг щар бир нуқтасида конформ акслантириш бьлади.

$(12)-$тенгликка кьра, $\left|e^z\right|=e^x$, $\arg e^z=y$ бьлиб, $w=e^z$ функция (z) текисликдаги $\{x=x_0\}$ тьғри чизиқни $\{|w|=e^{x_0}\}$ айланага, $\{y=y_0\}$ тугри чизикни эса $\{\arg w=y_0\}$ нурга акслантиради. $w=e^z$ функция $П_k=\{y_0<\operatorname{Im}z<y_0+2\pi\}$, соҳада бир япроқли бьлади (бу ерда $y_0\in R$ бьлган ихтиерий нуқта). Жумладан, $w=e^z$ функция ушбу

$$П_k=\{z:\ 2k\pi<\operatorname{Im}z<2(k+1)\pi\},\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

соҳаларнинг щар бирини (w) текисликдаги $C\setminus R_+$ га конформ акслантиради. Худди шунга ьхшаш $w=e^z$ функция $\{z:0<\operatorname{Im}z<\pi\}$ йьлакни юқори ярим текисликка конформ акслантиради.

6^0. Тригонометрик функциялар.

$(12)-$тенгликда $x=0$ десак,

$$\begin{cases} e^{iy}=\cos y+i\sin y \\ e^{-iy}=\cos y-i\sin y \end{cases}$$

тенгликларга эга бьлиб,бундан

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{13}$$

ифодаларни щосил қиламиз (13) – формулалар ихтиёрий щақиқий сон учун ьринли бьлиб, улардан биз

$$w = \cos z, \quad w = \sin z$$

функцияларни аниқлашда фойдаланамиз.

Таъриф. *Ушбу*

$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \\ ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{cases} \tag{14}$$

тенгликлар ёрдамида аниқланган функцияларга комплекс аргументли тригонометрик функциялар деб аталади.

Тригонометрик функцияларнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

1) $\cos z$ ва $\sin z$ функциялар С комплекс текисликда голоморф ва уларнинг щосилалари

$$(\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

бьлади.

2) $\mathrm{tg}z$ функция

$$\left\{ z \in C; \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

тьпламда, $\mathrm{ctg}z$ функция эса

$$\{ z \in C; \ \ , z \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$$

тьпламда голоморф бьлади.

3) sinz, tgz, ctgz функциялар тоқ, cosz эса жуфт функция бўлади.

4) Триногометрик функциялар даврий бўлиб, cosz ва sinz нинг даври 2π га, tgz ва ctgz нинг даври π га тенгдир.

5) Ҳақиқий ўзгарувчили тригонометрик функциялар орасидаги муносабатларни ифодаловчи формулаларнинг кўпчилиги комплекс ўзгарувчили бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлади.

Изоҳ Комплекс аргументли cosz ва sinz функцияларнинг ҳақиқий аргументли cosz ва sinz функциялардан фарқли томони шундаки, улар чегараланган бўлиши шарт эмас. Масалан w=cos z функциянинг комплекс текслик C да чегаранланмаганлигини кўрсатайлик,

◁ *Маълумки,*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad .$$

Бу тенгликда z=iy деб оламиз. Унда

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \infty$$

Бу эса w=cosz функциянинг *C* да чегараланмаганлигини билдиради ▷

6) Ушбу

$$\cos(iz)=\mathrm{ch}z\ , \qquad i\sin z=-\mathrm{sh}z\ ,$$

$$\cos z=\mathrm{ch}(iz), \qquad \sin z=-i\,\mathrm{sh}(iz)$$

муносабатлар ўринли, бунда

$$ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\ , \quad sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\ . \qquad (15)$$

Одатда, (15) – функциялар *гиперболик функциялар* дейилади.

7) Тригонометрик функциялар ёрдамида бажариладиган акслантиришлар бир нечта бизга маълум акслантиришларнинг композицияси натижасидан иборат бўлади.

Мисол. Ушбу

$$w = \sin z$$

функция ёрдамида бажариладиган акслантириш (z) текислигидаги

$$D = \{z \in C : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$$

соҳани (ярим йўлакни) (w) текисликдаги қандай соҳага акслантиради?

◁Берилган $w = \sin z$ функция ёрдамида бажариладиган акслантириш бизга маълум бўлган

$$w_1 = iz \quad , \quad w_2 = e^{w_1} \quad , \quad w_3 = \frac{w_2}{i}$$

акслантиришлар композициясидан иборат бўлиб,

$$w = \sin z = \frac{1}{2}(w_3 + \frac{1}{w_3})$$

бўлади. Бинобарин, бу акслантиришларни, кетма–кет бажариш натижасида $w = \sin z$ учун $w(D)$ топилади:

1) D соха $w_1 = iz$ акслантириш натижада

$$D_1 = \{w_1 \in C : \operatorname{Re} w_1 < 0 \ , \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2}\}$$

соҳага ўтади.

2) D_1 соҳа $w_2 = e^{w_1}$ акслантириш натижасида

$$D_2 = \{w_2 \in C : |w_2| < 1 \ , \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}\}$$

ярим доирага ўтади.

3) D_2 соҳа $w_3 = \frac{w_2}{i}$ акслантириш натижасида

$$D_3 = \{w_3 \in C : |w_3| < 1 \, , \qquad \pi < \arg w_3 < 2\pi\}$$

соҳага ўтади.

4) D_3 соха $w = \sin z = \frac{1}{2}(w_3 + \frac{1}{w_3})$ акслантириш натижасида

$$w(D) = \{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

соҳага ўтади.

Демак, $w=\sin z$ акслантириш (z) такисликдаги

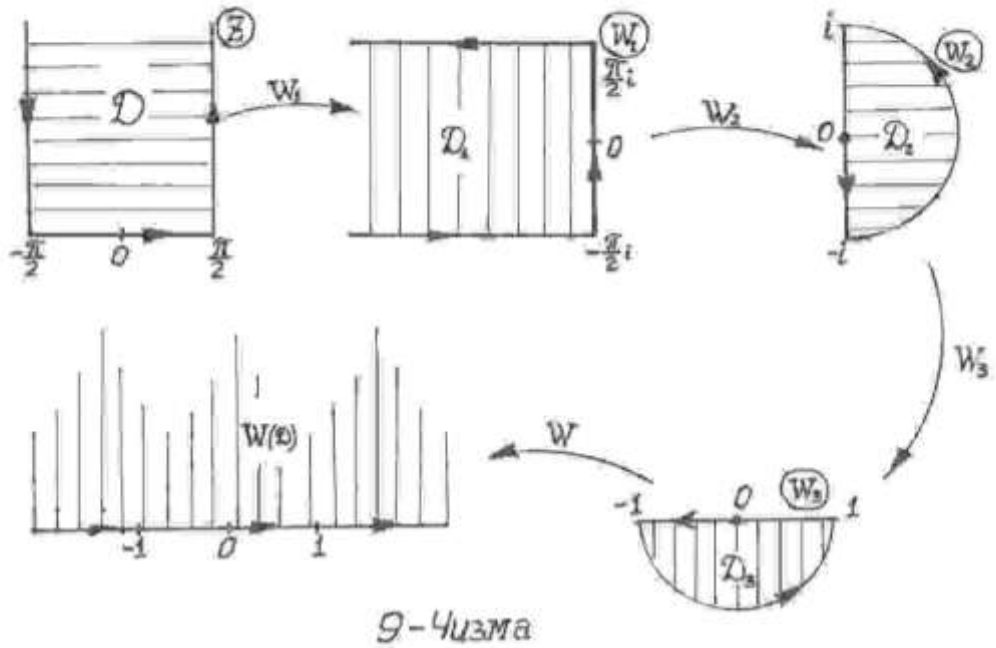
$$D=\{z\in C: -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} z>0\}$$

сощани (w) текисликдаги

$$w(D)=\{w\in C: \operatorname{Im} w>0\}$$

юқори ярим текисликка акслантирар экан.

Олинган функциялар D сощани қайси йьл билан $w(D)$ сощага акслантириши 9–чизмада кьрсатилган ▹



9-Чизма

7⁰. Кьп қийматли функциялар.

Комплекс аргументли функциялар назариясида голоморф функцияга тескари бьлган функцияни ьрганиш масаласи щам мущим ьринда туради. Аксарият щолларда бундай функциялар бир қийматли бьлмай, аргументнинг битта қийматига бир нечта (баъзи щолда чексиз кьп) комплекс сон мос қьйилади. Бундай функцияларни қатъий математик асосда бериш йьлида комплекс анализга Риман сиртлари термини киритилади. Биз бу ерда энг содда кьп қийматли функцияларни қараш билан кифояланамиз.

а) $w=\sqrt[n]{z}$ $\quad (n\geq 2-\textit{бутун сон})$ **функцияси.**

1–Таъриф. *Ушбу*

$$w^n = z \qquad (16)$$

тенгламанинг ечимларига z *комплекс соннинг* n*–даражали илдизлари дейилади ва* $w = \sqrt[n]{z}$ *каби белгиланади.*

(16) – тенгламанинг ечимлари илдиз чиқариш учун *Муавр формуласига* кўра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),\ k \in Z \qquad (17)$$

тенглик ёрдамида топилади. Бу ечимлар к нинг $0,1,2,.....,(n-1)$ қийматларида бир – биридан фарқ қилиб, к – нинг бошқа қийматларида эса улар такрорланади. Шунинг учун ҳам $\sqrt[n]{z}$ n – та қийматли бўлиб, бу қийматлар

$$\sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\arg z+2k\pi}{n} \cdot i}, \qquad , \ k = 0,1,2,\cdots,(n-1) \qquad (18)$$

дир.

$w = \sqrt[n]{z}$ нинг функционал хоссаларини ўрганишда қуйидаги содда, лекин муҳим теоремадан фойдаланилади.

Теорема. (Тескари функциянинг конформлиги ҳақидаги теорема). *Фараз қилайлик,* $w = f(z)$ *функция* (z) *текисликдаги* D *соҳани* (w) *текисликдаги* G *соҳага конформ акслантирувчи функция бўлсин. У ҳолда бу функцияга тескари бўлган* $z = f^{-1}(w)$ *функция* G *ни* D *га конформ акслантиради.*

Ўқувчига $z = w^n$ функциянинг бир япроқли бўладиган соҳалари 3^0 – пунктдан маълум: $z = w^n$ функция ушбу ҳар бир

$$D_k = \{\frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n}\}, \quad k = 0,1,2,...,(n-1),$$

соҳада бир япроқли бўлиб, бу соҳани у $G = C \setminus R_+$ соҳага конформ акслантиради. $k = 0$ десак $z = w^n$ функция

$$D_0 = \{0 < \arg w < \frac{2\pi}{n}\}$$

соҳани G га конформ акслантиради. Келтирилган теоремага кўра бу акслантиришнинг тескариси G *ни* D_0 га конформ акслантиради. Бу тескари функция (18) даги

$$\sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg z}{n}}$$

га мос келиб, бу бир қийматли функцияга $\sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функциянинг *0–тармоғи* дейилади ва у $(\sqrt[n]{z})_0$ каби белгиланади. Худди шундай $z=w^n$ функция

$$D_1=\{\frac{2\pi}{n}<\arg z<2\cdot\frac{2\pi}{n}\}$$

соҳани ҳам G га конформ акслантиради. Бу функциянинг тескариси G *ни* D_1 га акслантириб, унга $\sqrt[n]{z}$ нинг *1–тармоғи* дейилади ва у $(\sqrt[n]{z})_1$ каби белгиланади. Бу жараённи давом эттириб, $\sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функциядан n та бир қийматли тармоқлар $(\sqrt[n]{z})_0,(\sqrt[n]{z})_1,...(\sqrt[n]{z})_{n-1}$ ларни ажрата оламиз. Бу ҳар бир $(\sqrt[n]{z})_k$, $k=0,1,...(n-1)$, тармоқ G да бир қийматли ва уни D_k соҳага конформ акслантиради.

Мисол. $D=C\setminus R_+$ соҳани бирлик доирага конформ акслантиринг.

◁ $(\sqrt{z})_0$ тармоқнинг хоссасига кўра $w_1=(\sqrt{z})_0$ функция D ни юқори ярим текисликка конформ акслантиради. (5) – формулага кўра $w=\dfrac{w_1-i}{w_1+i}$ каср чизиқли функция юқори ярим текисликни бирлик доирага акслантиради. Демак $w=\dfrac{(\sqrt{z})_0-i}{(\sqrt{z})_0+i}$ функция $C\setminus R_+$ ни бирлик доирага конформ акслантиради ▷

$w=\sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функцияда $(\sqrt[n]{z})_0,(\sqrt[n]{z})_1,...,(\sqrt[n]{z})_{n-1}$ бир қийматли функцияларнинг ҳосил қилиниши кўп қийматли функциялардан *тармоқ ажратиш* дейилиб, бу ерда биз тармоқ ажратишнинг битта услубини бердик. Бу тармоқлардан одатда $w=(\sqrt[n]{z})_0$ тармоқ кўп ишлатилади. Амалиётда бу функциялардан бурчак соҳаларни кичрайтириш (сиқиш) учун фойдаланилади.

Баъзи бир масалаларни ечишда кўп қийматли $w=\sqrt[n]{z}$ функциянинг бир қийматли тармоқларини берилган шартларга қараб ҳам ажратишга тўғри келади. Масалан, $n=2$ бўлганда, икки қийматли $w=\sqrt{z}$ функциянинг иккита бир қийматли $(w)_0$ *ва* $(w)_1$ тармоқларини қуйидагича ҳам ажратиш мумкин:

$$(w)_0=\sqrt{z}\quad,\quad\sqrt{-1}=i\quad(\textit{ёки}\ \sqrt{1}=1)$$

ва

$$(w)_1 = \sqrt{z} \quad , \quad \sqrt{-1} = -i \quad (\text{ёки } \sqrt{1} = -1)$$

$(w)_0$ тармоқ $C \setminus R_+$ ни юқори ярим текисликка, $(w)_1$ тармоқ эса $C \setminus R_+$ ни қуйи ярим текисликка конформ акслантиради.

б) w=Lnz функцияси.

2−Таъриф. *Ушбу*

$$e^w = z \qquad (19)$$

тенгламанинг ечимлари z *комплекс соннинг логарифми дейилади ва* $w = Lnz$ *каби белгиланади.*

(19) — тенгламани ечиш учун z *ни* $z = re^{i\varphi}$ кўринишда, w *ни эса* $w = u + iv$ шаклда ифодалаймиз:

$$e^{u+iv} = re^{i\varphi}.$$

Бунда $e^u = r$, $e^{iv} = e^{i\varphi}$ тengликларга эга бўлиб,ечим $u = \ln r, \quad v = \varphi + 2k\pi, \quad k \in Z$ эканлигини кўрамиз. Демак,

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \ , \ k \in Z \qquad (20)$$

бўлиб, Lnz функция кўп қийматлидир.

e^w функция

$$\Pi_k = \{w \in C : 2k\pi < \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi\}, \ k \in Z$$

соҳаларда бир япроқли ва бу соҳаларнинг ҳар бирини $C \setminus R_+$ га конформ акслантиришини биламиз. Тескари функциянинг конформлиги ҳақидаги теоремадан фойдалансак, биз $w = Lnz$ функциясидан чексиз кўп тармоқлар

$$w = (Lnz)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \ , k \in Z$$

ни ажратиш мумкин эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ҳар бир тармоқ $G = C \setminus R_+$ да голоморф бўлиб, уни Π_k йўлакка конформ акслантиради.

Келишувга кўра $(Lnz)_0 = \ln z$ деб белгиланади ва бу функцияга Lnz *функциянинг бош тармоғи* дейилади.

Мисол. $z_0 = i$ нуқтани $w_0 = \dfrac{5\pi i}{2}$ нуқтага ўтказадиган *логарифмнинг бир қийматли тармоғи* ёрдамида

$$D = \{z : z \notin (-\infty, 0]\}$$

соҳанинг аксини топинг.

◁ Lnz функциянинг

$$w=(Lnz)_k=\ln z+2k\pi i \quad , \quad k=0,1,2,...$$

тармоқларидан қайси бирини танлашимиз кераклигини

$$w(i)=\frac{5\pi i}{2}$$

шартдан аниқлаймиз:

$$\frac{5\pi i}{2}=\ln i+2k\pi i=\ln|i|+i\arg i+2k\pi i=i\cdot\frac{\pi}{2}+2k\pi i\,.$$

Бу ердан $к=1$ эканлигини топамиз. Демак, Lnz нинг керакли тармоғи

$$w=(Lnz)_1=\ln z+2\pi i$$

экан. $w_1=\ln z$ функция ёрдамида D соҳанинг

$$\{w_1:-\pi<\operatorname{Im}w_1<\pi\}$$

йўлакка аксланишини текшириш қийин эмас. $w=w_1+2\pi i$ функция ёрдамида эса йўлак

$$\{w:\pi<\operatorname{Im}w<3\pi\}$$

йўлакка аксланади ▷

в) Комплекс сонни комплекс даражага кўтариш.

$w=Lnz$ функциясидан фойдаланиб, ихтиерий $z\neq 0$ ва *а* комплекс сонлар учун таърифга кўра

$$z^a=e^{aLnz}=e^{a[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]} \qquad (21)$$

деб қабул қилинади.

Масалан,

$$i^i=e^{iLni}=e^{i[\ln|i|+i(\arg i+2k\pi)]}=e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \quad ,k\in Z\,.$$

Демак, i^i нинг чексиз кўп қийматлари мавжуд бўлиб, уларнинг ҳаммаси ҳақиқий сонлардир.

(21) – муносабат ердамида биз ихтиерий комплекс сон учун

$$w=z^a$$

функциясини ьрганишимиз мумкин. Амалиетда a — щақиқий сон бьлган щол кьп қьлланилиб, $w = z^a$ функция бурчак сощаларни конформ акслантиришда фойдалидир.

г) Тескари тригонометрик функциялар.

Комплекс ьзгарувчили функциялар назариясида тескари функция тушунчаси щақиқий ьзгарувчили функциялар синфидаги каби киритилади.

Масалан,

$$w = Arc\cos z$$

функция $z = \cos w$ тенгламани қаноатлантирувчи барча w ларнинг қийматлари тьпламидан иборат, яъни $\cos z$ функцияга тескари функциядир.

$$Arc\sin z\,, \quad Arctgz\,, \quad Arcctgz$$

ва бошқа функциялар щам шунга ьхшаш аниқланади.

Таърифдан фойдаланиб

$$Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (22)$$

тенгликнинг ьринли эканлигини кьрсатиш қийин эмас. Бу ерда илдизнинг барча қийматлари олинади.

(22) — тенгликдан кьриниб турибдики, логарифмик функция каби $Arc\cos z$ функция щам бир қийматли эмас. $Arc\cos z$ функциянинг бош қиймати $w = \arccos z$ деб олинади ва ушбу

$$w = \arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (23)$$

тенглик ёрдамида аниқланади.

$w = Arc\cos z$ функция

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

юқори ярим текисликда чексиз кьп қийматли бьлиб, (22) — тенгликдан фойдаланиб унинг бир қийматли тармоқларини ажратиш мумкин. Улар

$$(Arc\cos z)_k = -i(Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}))_k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Масалан, $к=0$ бьлса,

$$(Arc\cos z)_0 = \arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

функция

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

соҳани

$$\{w : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$$

ярим йўлакка конформ акслантиради.

8^0. Симметрия принципи.

Бир соҳани иккинчи соҳага конформ акслантиришда симметрия принципидан кенг фойдаланилади.

Фараз қилайлик, $f_1(z)$ функция D_1 соҳада ($D_1 \subset C$) берилган ҳамда шу соҳада конформ бўлсин. Бунда D_1 соҳанинг чегараси ∂D_1 нинг бирор қисми $\gamma(\gamma \subset \partial D_1)$ айлана ёйи ёки тўғри чизиқ кесмасидан иборат. Бу $f_1(z)$ акслантириш D_1 соҳани G_1 соҳага, γ чизиқни Γ чизиққа (Γ - айлана ёйи ёки туғри чизиқ кесмаси) акслантирсин:

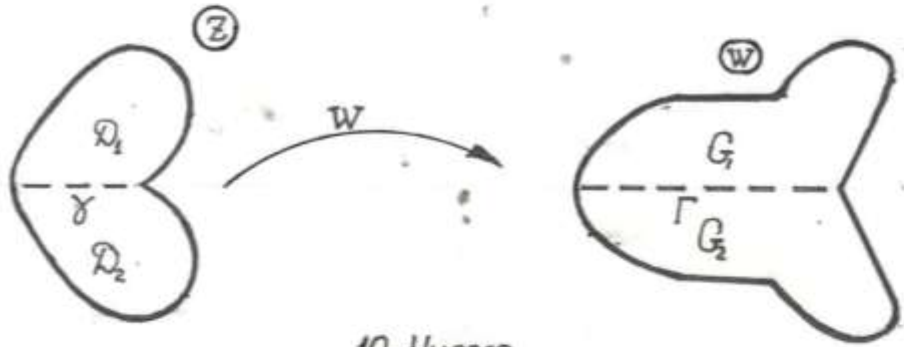
$$G_1 = f_1(D_{1,})$$

$$\Gamma = f_1(\gamma).$$

D_1 соҳанинг γ ёйга нисбатан симметрик бўлган соҳаси D_2, G_1 соҳанинг Γ ёйга нисбати симметрик бўлган соҳаси эса G_2 бўлсин. $f_2(z)$ функцияни D_2 соҳада шундай аниқлаймизки, унинг қийматлари $f_1(z)$ функциянинг G_1 даги қийматларига Γ ёйга нисбатан симметрик бўлган қийматларни қабул қилсин. У ҳолда $f_2(z)$ функция D_2 *ни* G_2 *га*, ушбу

$$w = \begin{cases} f_1(z) \quad , \quad z \in D_1, \\ f_1(z) = f_2(z) \, , \quad z \in \gamma \, , \\ f_2(z) \quad , \quad z \in D_2 \end{cases}$$

функция эса $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ соҳани $G_1 \cup \Gamma \cup G_2$ соҳага конформ акслантиради (10-чизма).



10-Чизма

Одатда, юқоридаги тасдиқ *симметрия принципи* ёки *Риман–Шварц теоремаси* деб аталади.

Эслатма. Агар γ ва Γ лар ҳақиқий ўқдаги кесмалар бўлса, у ҳолда $f_2(z)$ функция ушбу

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$$

тенглик ёрдамида аниқланади.

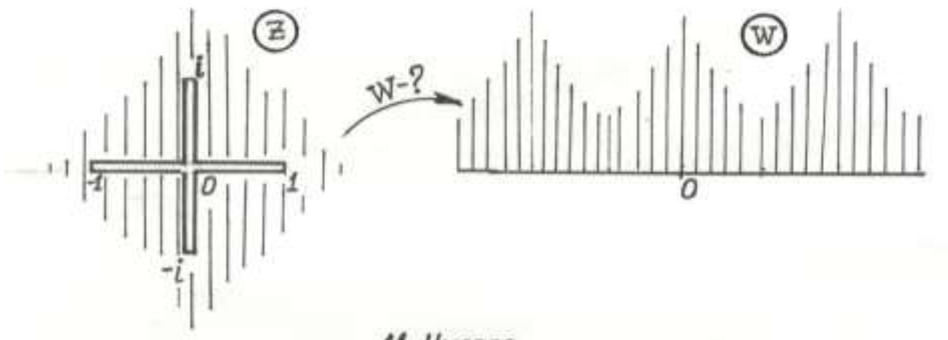
Мисол. Ушбу

$$D = \{z \in C : z \notin [-1;1],\ z \notin [-i;i]\}$$

соҳани юкори ярим текислик

$$\{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

ка конформ акслантирувчи $w = w(z)$ функцияни топинг (11-чизма).



11–Чизма

$\triangleleft$ Қуйидаги

$$D_1 = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\ ,\ z \notin [0,1]\}$$

соҳада

$$w_1 = z^2$$

функцияни қараймиз. Равшанки, бу акслантириш D_1 соҳада конформ бўлади.

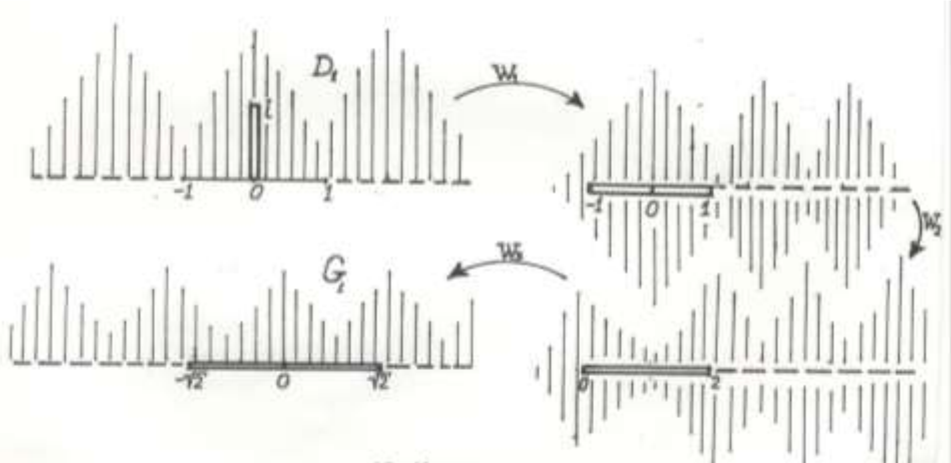
Энди D_1 соҳани юқори ярим текисликка акслантирамиз. Бу қуйидаги

$$w_1 = z^2$$

$$w_2 = w_1 + 1, \qquad (24)$$

$$w_3 = \sqrt{w_2}\ , \quad \sqrt{-1} = i$$

акслантиришларни кетма-кет бажариш натижасида содир бўлади. ((24)–акслантиришларнинг бажарилиш жараёни 12-чизмада тасвирланган):



12-Чизма

Шундай қилиб, D_1 соҳа ушбу

$$w_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{w_1 + 1} = \sqrt{z^2 + 1}\ , \quad \sqrt{-1} = i$$

функция ёрдамида

$$G_1 = \{w_3 \in C : \operatorname{Im} w_3 > 0\}$$

юқори ярим текисликка конформ аксланар экан. Энди симметрия принципидан фойдаланиб, D соҳани

$$w_3 = \sqrt{z^2 + 1}\ , \quad \sqrt{-1} = i$$

функция ёрдамида

$$G = \{w_3 \in C : w_3 \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

соҳага конформ акслантирамиз. Бу соҳани юқори ярим текислик

$$\{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

ка конформ акслантириш қуйидаги

$$w_4 = \frac{w_3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_3},$$

$$w = \sqrt{w_4} \quad , \quad \sqrt{-1} = i$$

акслантиришларни кетма-кет бажарилиши натижасида амалга оширилади.

Демак, $D = \{z \in C : z \notin [-1;1],\ z \notin [-i;i]\}$ соҳани юқори ярим текислик $\{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$ка конформ акслантирувчи функция

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{\frac{w_3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_3}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{z^2 + 1}}} \quad , \quad \sqrt{-1} = i$$

бўлади ▹

9^0. **Асосий элементар функциялар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар**.

Биз бу пунктда амалиётда кўп учрайдиган асосий элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришларни бир жойга жамлаб чизмалардан фойдаланган ҳолда келтирамиз.

I. **Каср- чизиқли функция**.

1) Ангармоник нисбат.

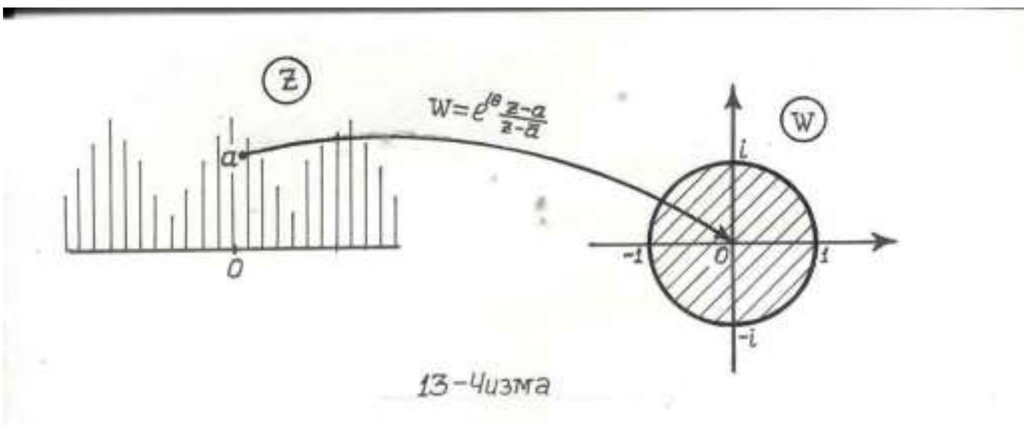
Берилган $z_1, z_2, z_3 \in C_z$ нуқталарни мос равишда $w_1, w_2, w_3 \in C_w$ нуқталарга акслантирувчи каср–чизиқли функция ушбу

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

ангармоник нисбатдан топилади.

2) $w = e^{i\theta} \cdot \dfrac{z - a}{z - \bar{a}}$, $\quad \operatorname{Im} a > 0$ *ва* $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$

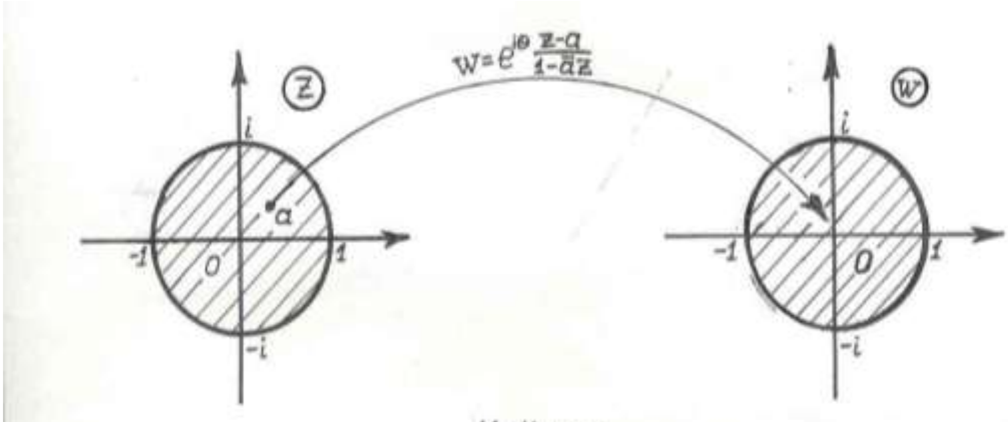
бўлса, $w(D) = \{w : |w| < 1\}$ бўлади (13-чизма).



13-Чизма

$$3)\, w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad |a|<1 \quad ва\ \ D=\{z:|z|<1\}$$

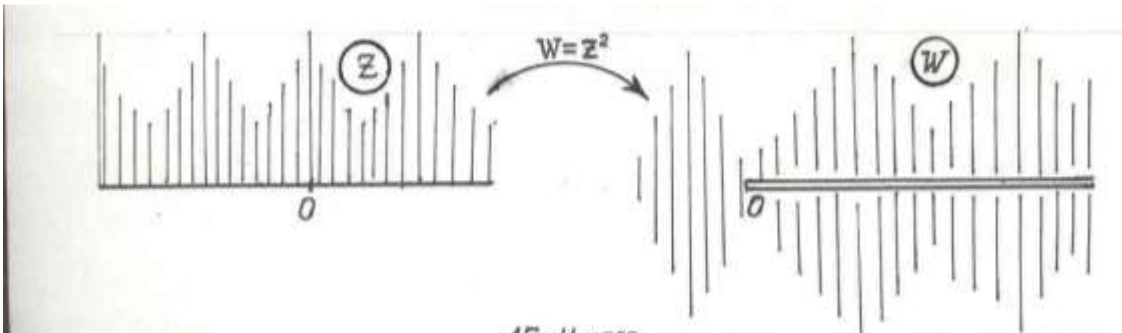
бўлса, $w(D)=\{w:|w|<1\}$ бўлади (14-чизма).



14-Чизма

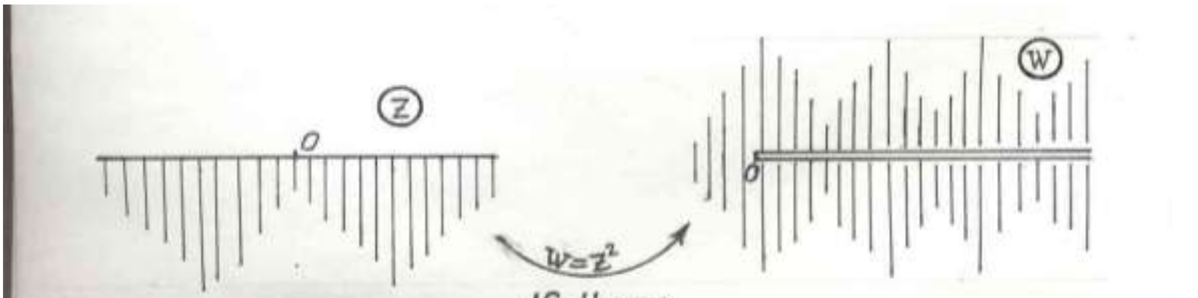
II. **Даражали функция ва унга тескари бўлган функциялар**.

1) $w=z^2$ *ва* $D=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ *булса,* $w(D)=C\setminus R_+$ бўлади (15-чизма).



15-Чизма

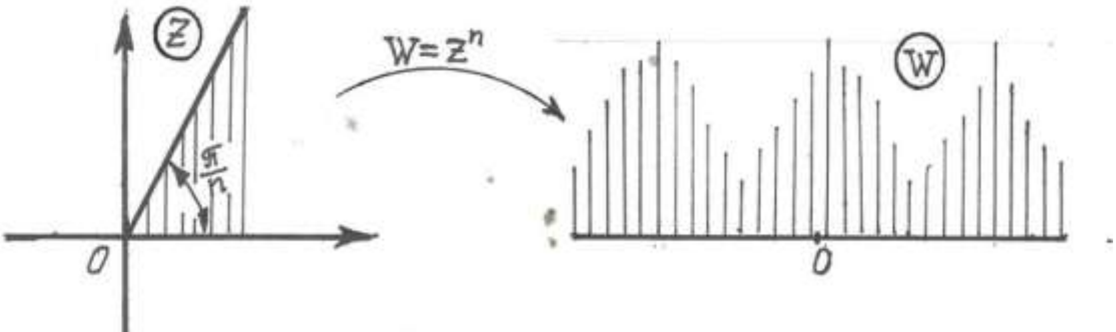
2) $w=z^2$ *ва* $D=\{z:\operatorname{Im}z<0\}$ *булса,* $w(D)=C\setminus R_+$ бўлади (16-чизма).



16-Чизма

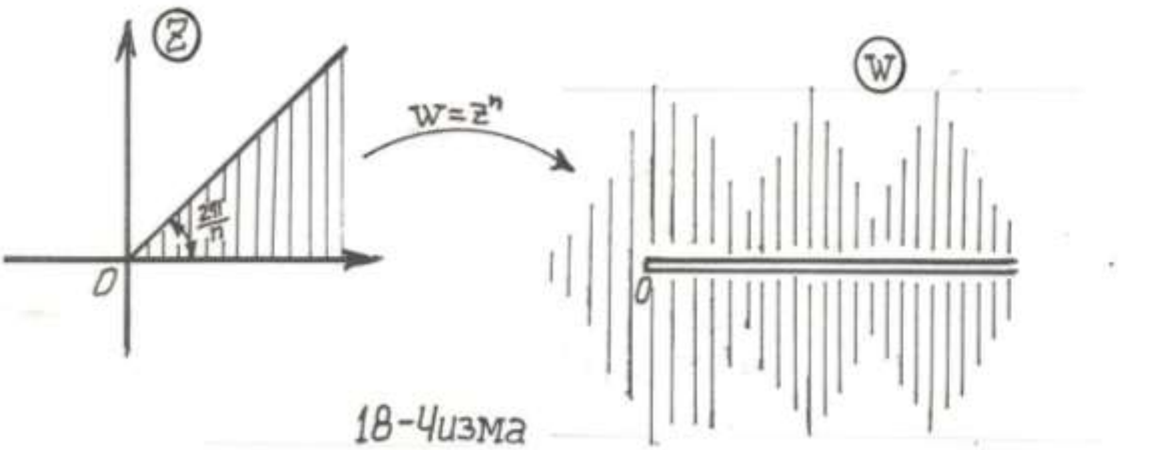
3) $w=z^n$ *ва* $D=\{0:0<\arg z<\frac{\pi}{n}\}$ *булса,* $w(D)=\{w:\operatorname{Im}w>0\}$

бўлади (17-чизма).



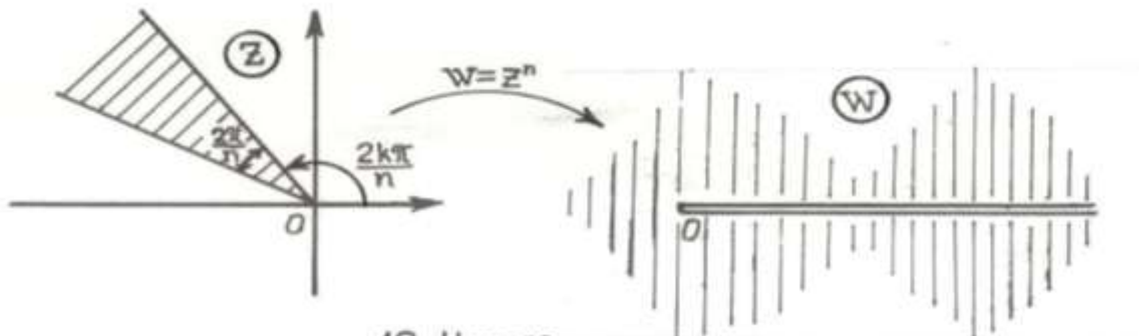
17-Чизма

4) $w = z^n$ *ва* $D = \{0 : 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n}\}$ *булса,* $w(D) = C \setminus R_+$ бўлади (18-чизма).



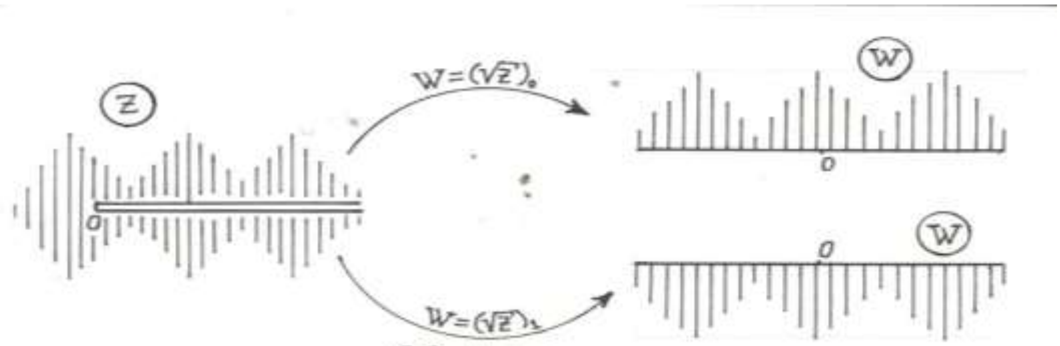
18-Чизма

5) $w = z^n$ *ва* $D = \left\{\dfrac{2k\pi}{n} < \arg z < \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right\},\ k = 0,1,\ldots n-1,$ бўлса, $w(D) = C \setminus R_+$ бўлади (19-чизма).



19-Чизма

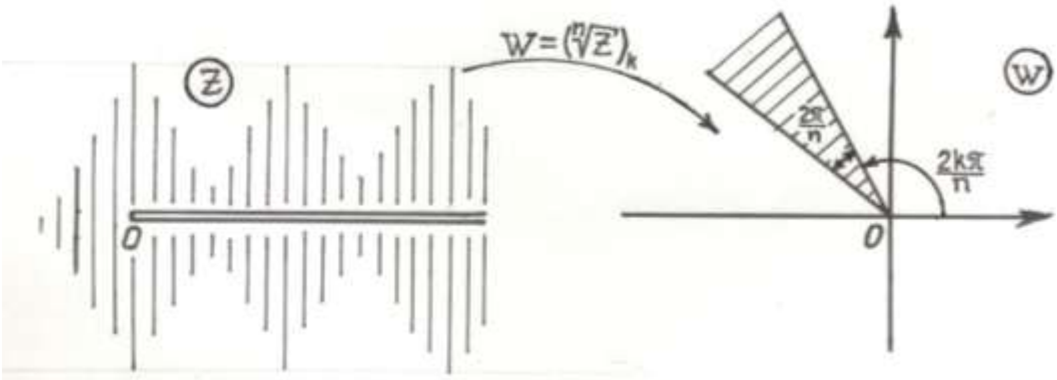
6) $w = (\sqrt{z})_0$ (*еки* $w = \sqrt{z},\ \sqrt{-1} = i$) *ва* $D = C \setminus R_+$ ва бўлса, $w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ ва $w = (\sqrt{z})_1$ (*еки* $w = \sqrt{z},\ \sqrt{-1} = -i$) бўлса, $w(D) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$ бўлади (20-чизма).



20-Чизма

7) $w=(\sqrt[n]{z})_k$, $k=0,1,\ldots n-1$ *ва* $D=C\setminus R_+$ бўлса,

$w(D)=\{w:\dfrac{2k\pi}{n}<\arg w<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}\}$ бўлади (21-чизма).

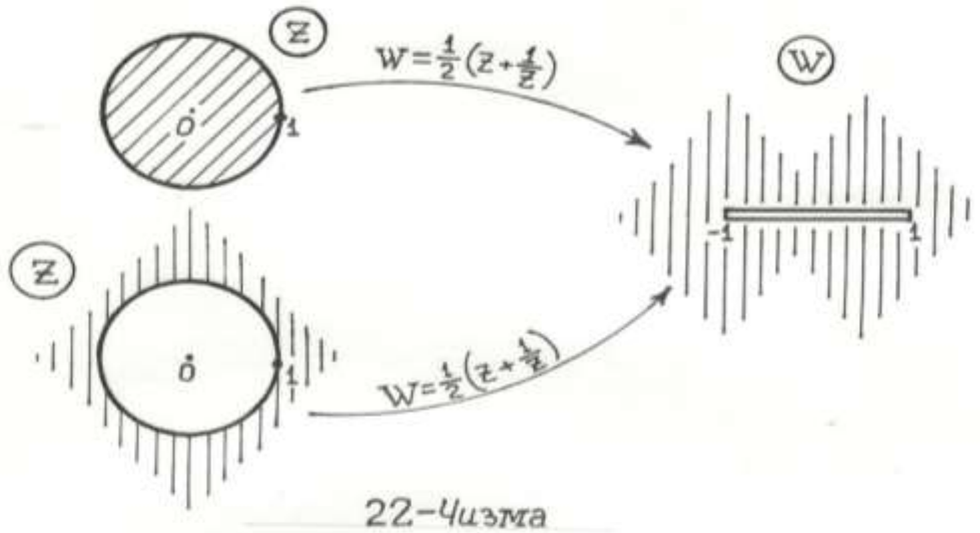


21-Чизма

III. **Жуковский функцияси ва унга тескари функция**.

1) $w=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$ *ва* $D=\{z:|z|<1\}$ *булса* $w(D)=\{w:w\notin[-1;1]\}$ бўлади (22-чизма).

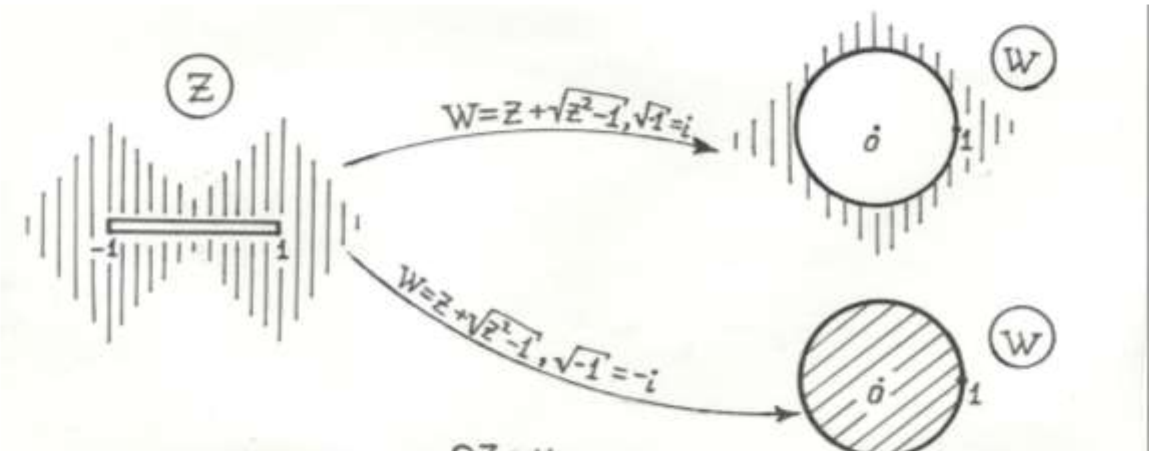
2) $w=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$ *ва* $D=\{z:|z|>1\}$ *булса* $w(D)=\{w:w\notin[-1;1]\}$ бўлади (22- чизма).



22-Чизма

3) $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$; $\sqrt{-1} = i$ *(еки* $w(\infty) = \infty$) *ва* $D = \{z : z \notin [-1;1]\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| > 1\}$ бўлади (23-чизма).

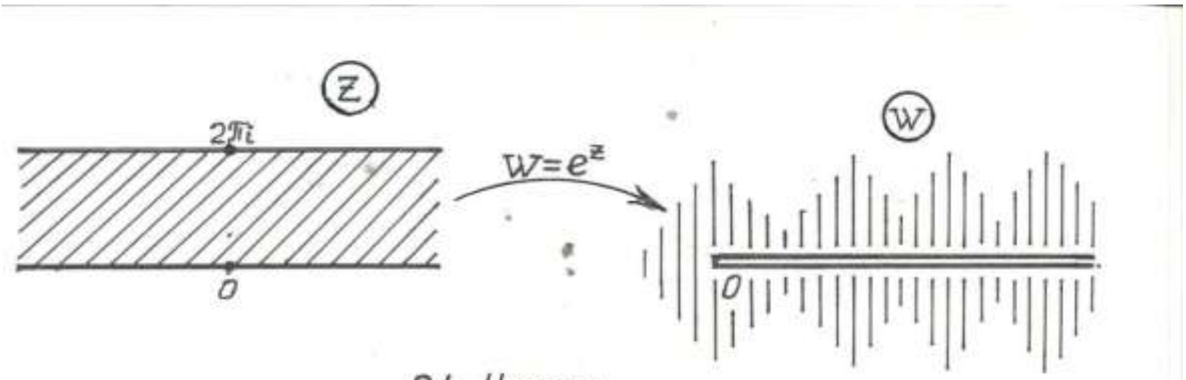
4) $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$; $\sqrt{-1} = -i$ *(еки* $w(\infty) = 0$) *ва* $D = \{z : z \notin [-1;1]\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| < 1\}$ бўлади (23-чизма).



23-Чизма

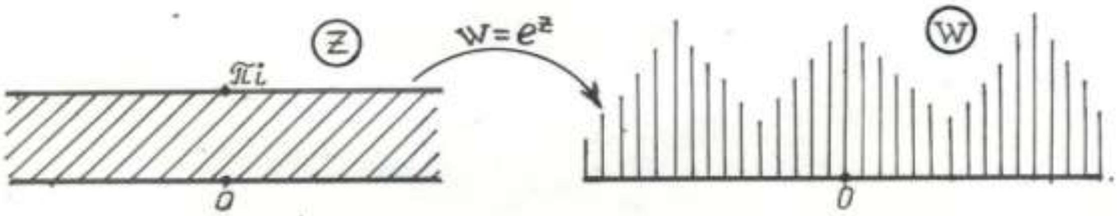
Кўрсатгичли ва логарифмик функциялар.

1) $w = e^z$ *ва* $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ *булса* $w(D) = C \setminus R_+$ бўлади (24-чизма).



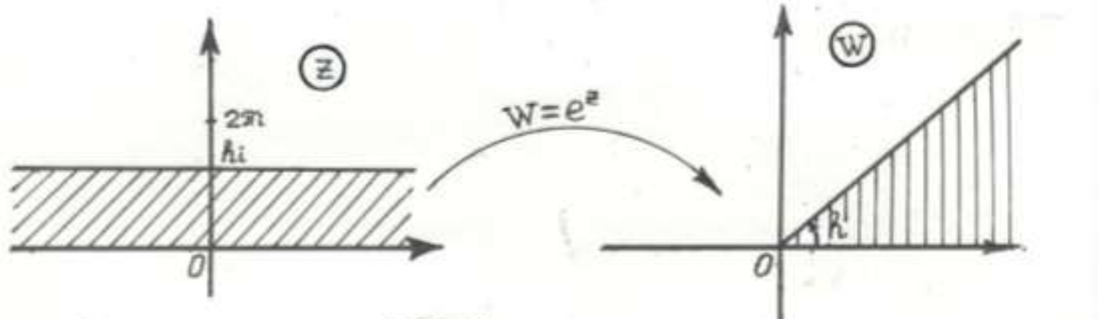
24-Чизма

2) $w=e^z$ *ва* $D=\{z:0<\operatorname{Im}z<\pi\}$ *булса* $w(D)=\{w:\operatorname{Im}w>0\}$ бўлади (25-чизма).



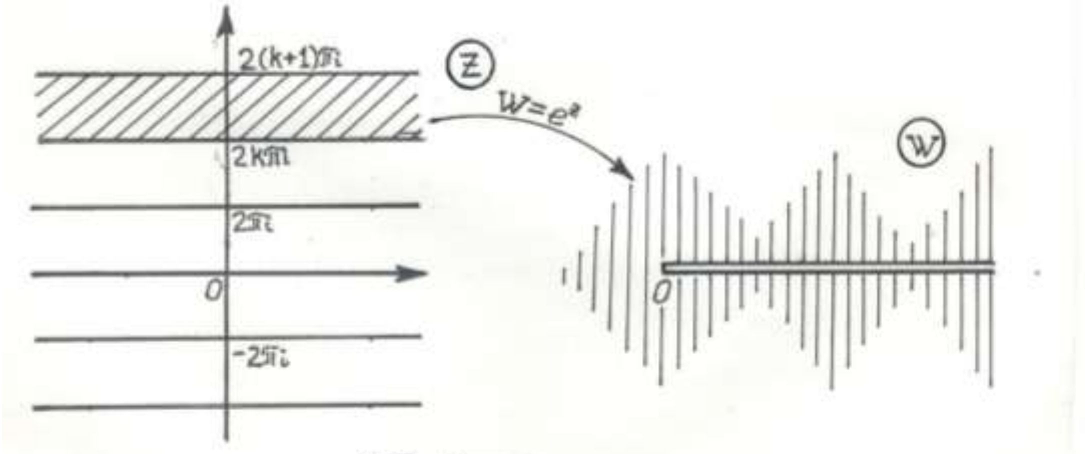
25-Чизма

3) $w=e^z$ *ва* $D=\{z:0<\operatorname{Im}z<h,\ h<2\pi\}$ бўлса, $w(D)=\{w:0<\arg w<h\}$ бўлади (26-чизма).



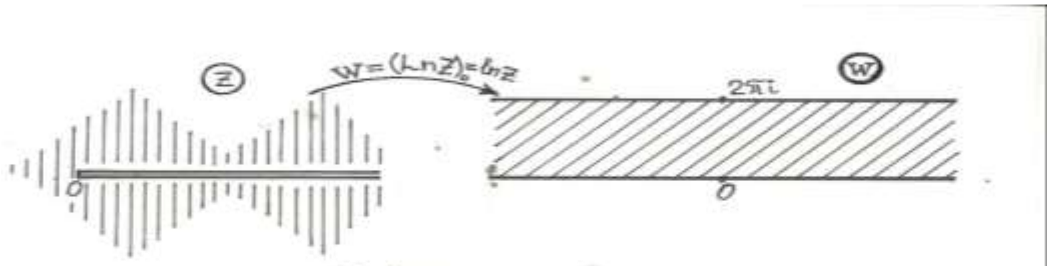
26-Чизма

4) $w=e^z$ *ва* $D=\{z:2k\pi<\operatorname{Im}z<2(k+1)\pi\}$ $k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ бўлса, $w(D)=C\setminus R_+$ бўлади (27-чизма).



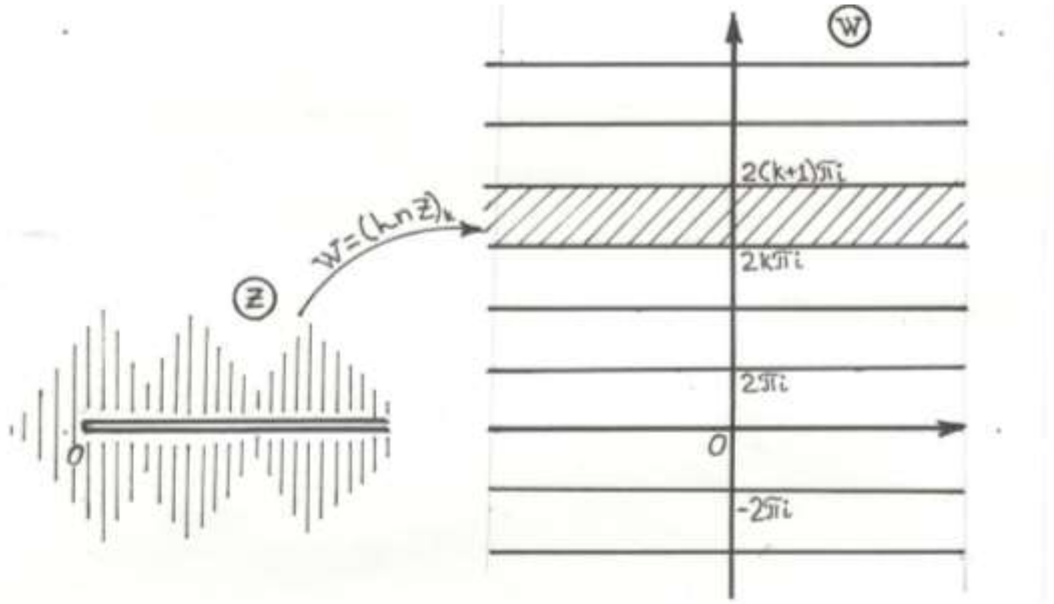
27-Чизма

5) $\quad w=(Lnz)_0=\ln z$ *ва* $D=C\setminus R_+$ *булса* $w(D)=\{w:0<\operatorname{Im}w<2\pi\}$ бўлади (28- чизма).



28-Чизма

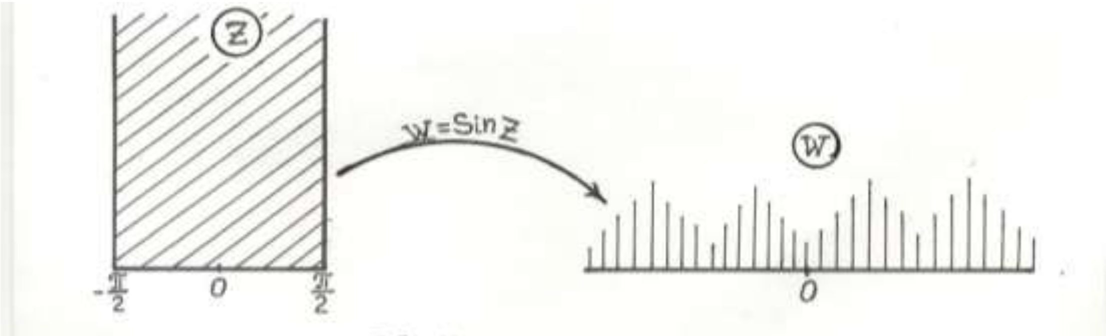
6) $\quad w=(Lnz)_k$ *ва* $D=C\setminus R_+$ *булса,* $w(D)=\{w:2k\pi<\operatorname{Im}w<2(k+1)\pi\}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ бўлади (29-чизма).



29-чизма.

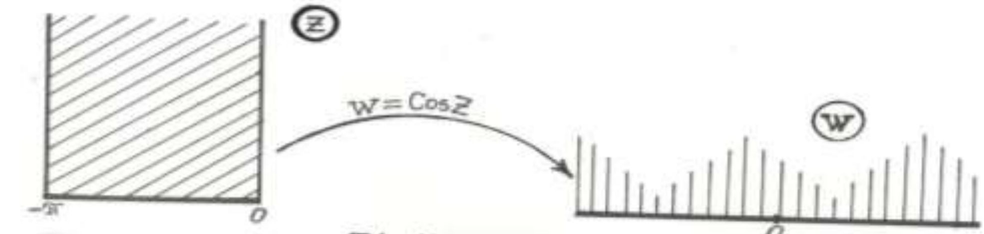
V. Тригонометрик ва тескари тригонометрик функциялар.

1) $w = \sin z$ *ва* $D = \left\{ z : -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$ бўлса,
$w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади (30-чизма).



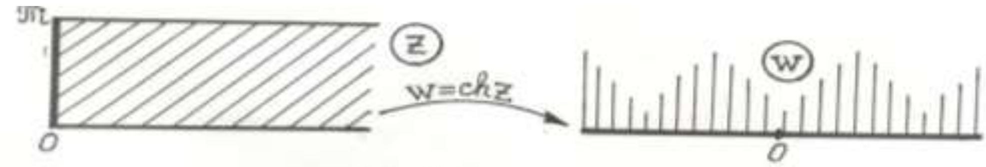
30-Чизма

2) $w = \cos z$ *ва* $D = \{z : -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса,
$w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади (31-чизма).



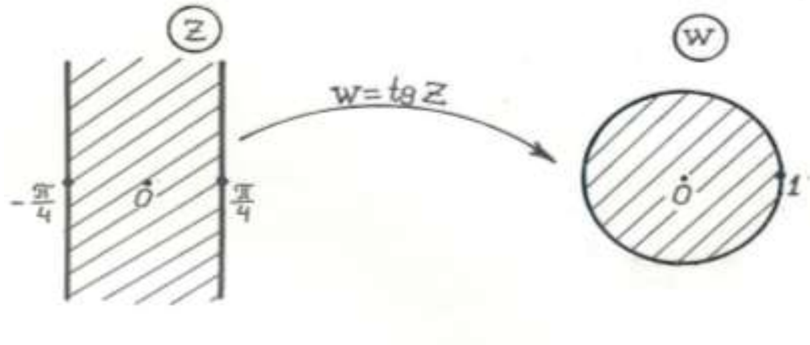
31-Чизма

3) $w = chz$ *ва* $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$ бўлса,
$w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади (32-чизма).



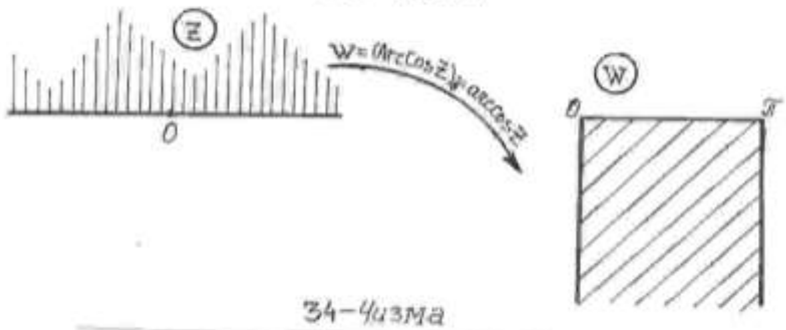
32-Чизма

4) $w = tgz$ *ва* $D = \{z : -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{4}\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| < 1\}$ бўлади (33- чизма).



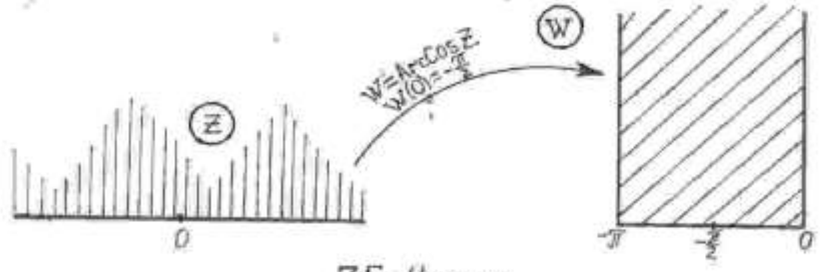
33-чизма

5) $\quad w = (Arc\cos z)_0 = \arccos z$ *ва* $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = \{w_i : 0 < \operatorname{Re} w < \pi,\ \operatorname{Im} w < 0\}$ бўлади (34-чизма).



34-чизма

6) $w = Arc\cos z,\ w(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ *ва* $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса, $w(D) = \{w : -\pi < \operatorname{Re} w < 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлади (35- чизма).



35-чизма

Назорат саволлари.

1. Конформ акслантиришлар назариясининг асосий масалалари.
2. Риман теоремаси.
3. Соҳанинг сақланиш принципи.
4. Чизиқли функция ва унинг хоссалари.

5. Каср-чизиқли акслантиришнинг доиравийлик хоссаси.
6. Каср-чизиқли акслантиришда симметрикликнинг сақланиш хоссаси.
7. Ангармоник нисбат.
8. Юқори ярим текисликни бирлик доирага акслантирувчи каср-чизиқли функциянинг умумий кўриниши.
9. Бирлик доирани бирлик доирага акслантирувчи каср-чизиқли функциянинг умумий кўриниши.
10. Даражали функция ва унинг хоссалари.
11. Жуковский функцияси ва унинг хоссалари.
12. Курсаткичли функция ва унинг хоссалари.
13. Тригонометрик функциялар ва уларнинг хоссалари.
14. Даражали функцияга тескари бўлган $w = \sqrt[n]{z}$ $(n \ge 2 - \textit{бутун сон})$ функцияси.
15. $w = Ln\, z$ функцияси.
16. Комплекс сонни комплекс даражага кўтариш.
17. Тескари тригонометрик функциялар.
18. Симметрия принципи.

- В -

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1-Масала. Берилган D соҳанинг $w = f(z)$ чизиқли функция ёрдамидаги аксини топинг.

1.1. $D = \{|z-1| < 2\}, w = 1 - 2iz$. **1.2.** $D = \{|z-i| < 2\}, w = 1 - 2iz$.

1.3. $D = \{|z+1| < 2\}, w = 1 - 2iz$. **1.4.** $D = \{|z+i| < 2\}, w = 1 - 2iz$.

1.5. $D = \{|z-1| < 2\}, w = 1 + 2iz$. **1.6.** $D = \{|z-i| < 2\}, w = 1 + 2iz$.

1.7. $D = \{|z+1| < 2\}, w = 1 + 2iz$. **1.8.** $D = \{|z+i| < 2\}, w = 1 + iz$.

1.9. $D = \{|z-1| < 2\}, w = iz + 1 + i$. **1.10.** $D = \{|z-i| < 2\}, w = iz + 1 + i$.

1.11. $D = \{|z+1| < 2\}, w = iz + 1 + i$. **1.12.** $D = \{|z+i| < 2\}, w = iz + 1 + i$.

1.13. $D = \{|z-1| < 2\}, w = iz - 1 + i$. **1.14.** $D = \{|z-i| < 2\}, w = iz - 1 + i$.

1.15. $D = \{|z+1| < 2\}, w = iz - 1 + i$. **1.16.** $D = \{|z+i| < 2\}, w = iz - 1 + i$.

1.17. $D = \{|z-1| < 2\}, w = iz + 1 - i$. **1.18.** $D = \{|z-i| < 2\}, w = iz + 1 - i$.

1.19. $D=\{|z+1|<2\}, w=iz+1-i$. **1.20.** $D=\{|z+i|<2\}, w=iz+1-i$.

1.21. $D=\{|z-1-i|<2\}, w=iz+1+i$.

2-Масала. Берилган z_0 нуқтани қўзғалмас қолдириб, z_1 нуқтани w_1 нуқтага ўтказадиган чизиқли акслантиришни топинг.

2.1. $z_0=1+i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

2.2. $z_0=1-i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

2.3. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=i$.

2.4. $z_0=1-i$, $z_1=1+i$, $w_1=i$.

2.5. $z_0=1+i$, $z_1=1-i$, $w_1=i$.

2.6. $z_0=1-i$, $z_1=2-i$, $w_1=i$.

2.7. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=1-i$.

2.8. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=1+i$.

2.9. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=1-i$.

2.10. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=1+i$.

2.11. $z_0=1+i$, $z_1=2+i$, $w_1=2-i$.

2.12. $z_0=1+i$, $z_1=2-i$, $w_1=2+i$.

2.13. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=2-i$.

2.14. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=2-i$.

2.15. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=2+i$.

2.16. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=2+i$.

2.17. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=i$.

2.18. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=i$.

2.19. $z_0=1+i$, $z_1=1+2i$, $w_1=-i$.

2.20. $z_0=1+i$, $z_1=1-2i$, $w_1=-i$.

2.21. $z_0=1+2i$, $z_1=i$, $w_1=-i$.

3-Масала. қуйидаги акслантиришлар учун чекли қўзғалмас нуқта z_0 (агар у мавжуд бўлса), бурилиш бурчаги φ ва чузилиш коэффициенти к-ни топинг. Акслантиришни $w-z_0=\lambda(z-z_0)$ каноник кўринишига келтиринг.

3.1. $w = z + 1 - 2i$. **3.2.** $w = z + 1 + 2i$. **3.3.** $w = z - 1 - 2i$.

3.4. $w = z - 1 + 2i$. **3.5.** $w = z + 2 - i$. **3.6.** $w = z + 2 + i$.

3.7. $w = z - 2 + i$. **3.8.** $w = z - 2 - i$. **3.9.** $w = z - 2 + 2i$.

3.10. $w = z + 2 - 2i$. **3.11.** $w = 2z + 1 - 2i$. **3.12.** $w = 2z + 1 + 2i$.

3.13. $w = 2z - 1 - 2i$. **3.14.** $w = 2z - 1 + 2i$. **3.15.** $w = 2z + 2 - i$.

3.16. $w = 2z + 2 + i$. **3.17.** $w = 2z - 2 + i$. **3.18.** $w = 2z - 2 - i$.

3.19. $w = 2z - 1 + i$. **3.20.** $w = 2z + 1 - i$. **3.21.** $w = 2z + 1 - 3i$.

4-Масала. Берилган D доирани G доирага акслантирувчи чизиқ ли функцияни топинг.

4.1. $D = \{|z - 1 + i| < 2\}$, $G = \{|w - i| < 4\}$.

4.2. $D = \{|z - 1 + i| < 2\}$, $G = \{|w + i| < 4\}$.

4.3. $D = \{|z + 1 - i| < 2\}$, $G = \{|w - i| < 4\}$.

4.4. $D = \{|z + 1 - i| < 2\}$, $G = \{|w + i| < 4\}$.

4.5. $D = \{|z - 1| < 2\}$, $G = \{|w + i| < 3\}$.

4.6. $D = \{|z - i| < 2\}$, $G = \{|w + 1| < 3\}$.

4.7. $D = \{|z + 1| < 2\}$, $G = \{|w + i| < 3\}$.

4.8. $D = \{|z + i| < 2\}$, $G = \{|w + 1| < 3\}$.

4.9. $D = \{|z - i| < 3\}$, $G = \{|w + i| < 4\}$.

4.10. $D = \{|z - 1| < 3\}$, $G = \{|w + i| < 4\}$.

4.11. $D = \{|z - 1 + i| < 4\}$, $G = \{|w - i| < 3\}$.

4.12. $D = \{|z - 1 + i| < 4\}$, $G = \{|w + i| < 2\}$.

4.13. $D = \{|z + 1 - i| < 4\}$, $G = \{|w - i| < 2\}$.

4.14. $D = \{|z + 1 - i| < 4\}$, $G = \{|w + i| < 5\}$.

4.15. $D = \{|z - 1| < 4\}$, $G = \{|w + i| < 2\}$.

4.16. $D = \{|z - i| < 4\}$, $G = \{|w + i| < 2\}$.

4.17. $D = \{|z + 1| < 4\}$, $G = \{|w + i| < 2\}$.

4.18. $D = \{|z + i| < 4\}$, $G = \{|w + 1| < 2\}$.

4.19. $D = \{|z - i| < 4\}$, $G = \{|w + i| < 3\}$.

4.20. $D=\{|z-1|<4\}$, $G=\{|w+1|<2\}$.

4.21. $D=\{|z-i|<2\}$, $G=\{|w-2|<4\}$.

5-Масала. Берилган D соҳанинг каср-чизиқли $w=f(z)$ акслантириш ёрдамида аксини топинг.

5.1. $D=\{|z|>1\}$, $w=\dfrac{z-1}{z+i}$.

5.2. $D=\{x<0, y<0\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.

5.3. $D=\{|z|<1\}$, $w=\dfrac{z+i}{z+1}$.

5.4. $D=\{\operatorname{Im} z<1\}$, $w=\dfrac{z-i}{z}$.

5.5. $D=\{0<\operatorname{Re} z<2\}$, $w=\dfrac{1}{z-2}$.

5.6. $D=\{\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.

5.7. $D=\{|z|<1, |z-1|<\sqrt{2}\}$, $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

5.8. $D=\{|z|>1, |z-1|<\sqrt{2}\}$, $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

5.9. $D=\{|z-1|>2\}$, $w=\dfrac{2iz}{z+3}$.

5.10. $D=\{|z-1|>2\}$, $w=\dfrac{z+1}{z-2}$.

5.11. $D=\{|z-1|<3\}$, $w=\dfrac{z-1}{2z-6}$.

5.12. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$, $w=\dfrac{z}{z-1+i}$.

5.13. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$, $w=\dfrac{z}{z-2}$.

5.14. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$, $w=\dfrac{z-3+i}{z+1+i}$.

5.15. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z<0\}$, $w=\dfrac{1-z}{1+z}$.

5.16. $D=\{|z+i|>1, \operatorname{Im} z>1\}$ $\qquad w=\dfrac{1}{z}$.

5.17. $D=\{1<|z|<2\}$, $\qquad w=\dfrac{1}{z-2}$.

5.18. $D=\{x>0, y<0\}$, $\qquad w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

5.19. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z<0\}$, $\qquad w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$.

5.20. $D=\{\dfrac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\}$, $\qquad w=\dfrac{z}{z+1}$.

5.21. $D=\{0<\operatorname{Re} z<1\}$, $\qquad w=\dfrac{z-1}{z}$.

6-Масала. +уйидаги шартларни қаноатлантирувчи каср-чизиқли $w(z)$ акслантиришни топинг.

6.1. $w(1)=1$, $\qquad w(0)=-1$, $\qquad w(i)=i$.

6.2. $w(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $\qquad w(2)=2$, $\qquad w(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i)=\infty$.

6.3. $w(0)=2$, $\qquad w(1+i)=2+i$, $\qquad w(2i)=0$.

6.4. $w(4)=0$, $\qquad w(2+2i)=1+i$, $\qquad w(0)=2i$.

6.5. $w(0)=0$, $\qquad w(i)=2$, $\qquad w(2i)=3$.

6.6. $w(0)=0$, $\qquad w(2)=i$, $\qquad w(3)=2i$.

6.7. $w(1)=0$, $\qquad w(1+i)=\infty$, $\qquad w(3i)=3i$.

6.8. $w(0)=1$, $\qquad w(\infty)=1+i$, $\qquad w(3)=4i$.

6.9. $w(i)=2$, $\qquad w(\infty)=2i$, $\qquad w(-i)=0$.

6.10. $w(2)=i$, $\qquad w(2i)=\infty$, $\qquad w(0)=3i$.

6.11. $w(i)=-2$, $\qquad w(\infty)=4i$, $\qquad w(-i)=2$.

6.12. $w(-2)=i$, $\qquad w(4i)=\infty$, $\qquad w(2)=-i$.

6.13. $w(0)=-1$, $\qquad w(2i)=i$, $\qquad w(1+i)=1-i$.

6.14. $w(i)=-1$, $\qquad w(\infty)=i$, $\qquad w(1)=1+i$.

6.15. $w(i)=-1$, $\qquad w(1)=\infty$, $\qquad w(1+i)=i$.

6.16. $w(\infty)=-1$, $\qquad w(i)=\infty$, $\qquad w(i)=i$.

6.17. $w(0)=-1,\qquad w(\infty)=\infty,\qquad w(1)=i$.

6.18. $w(1)=1,\qquad w(\infty)=-1,\qquad w(i)=i$.

6.19. $w(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},\qquad w(2)=2,\qquad w(\infty)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$.

6.20. $w(2)=0,\qquad w(2+i)=1+i,\qquad w(\infty)=\infty$.

6.21. $w(-1)=i,\qquad w(i)=\infty,\qquad w(1+i)=1$.

7-Масала. D соҳани G соҳага акслантирувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи каср-чизиқли $w(z)$ функцияни топинг.

7.1. $D=\{\operatorname{Im} z>0\},\qquad G=\{\operatorname{Im} w<0\},\qquad w(i)=i,\qquad \arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$.

7.2. $D=\{\operatorname{Im} z>0\},\qquad G=\{\operatorname{Im} w<0\},\quad w(2i)=2i,\quad \arg w'(2i)=-\frac{\pi}{2}$.

7.3. $D=\{\operatorname{Im} z<0\},\qquad G=\{\operatorname{Im} w>0\},\quad w(-i)=-i,\quad \arg w'(-i)=\frac{\pi}{2}$.

7.4. $D=\{\operatorname{Im} z<0\},\qquad G=\{\operatorname{Im} w>0\},\quad w(-2i)=-2i,\quad \arg w'(-2i)=\frac{\pi}{2}$.

7.5. $D=\{|z|<1\},\qquad G=\{|w|<1\},\qquad w(\frac{1}{4})=0,\qquad \arg w'(\frac{1}{4})=0$.

7.6. $D=\{|z|<1\},\qquad G=\{|w|<1\},\qquad w(-\frac{1}{2})=0,\qquad \arg w'(-\frac{1}{2})=0$.

7.7. $D=\{|z|<1\},\qquad G=\{|w|<1\},\qquad w(\frac{i}{4})=0,\qquad \arg w'(\frac{i}{4})=\frac{\pi}{2}$.

7.8. $D=\{|z|<1\},\qquad G=\{|w|<1\},\qquad w(-\frac{i}{2})=0,\qquad \arg w'(-\frac{i}{2})=\frac{\pi}{2}$.

7.9. $D=\{|z|<2\},\qquad G=\{|w|<4\},\qquad w(1)=2,\qquad \arg w'(1)=\frac{\pi}{2}$.

7.10. $D=\{|z|<1\},\qquad G=\{|w|<2\},\qquad w(\frac{i}{2})=0,\qquad \arg w'(\frac{i}{2})=0$.

7.11. $D=\{|z|<1\},\qquad G=\{|w-1|<1\},\qquad w(0)=\frac{1}{4},\qquad \arg w'(0)=0$.

7.12. $D=\{\operatorname{Im} z>0\},\qquad G=\{|w|<1\},\qquad w(i)=0,\qquad \arg w'(i)=0$.

7.13. $D=\{\operatorname{Im} z>0\},\qquad G=\{|w|<2\},\qquad w(-i)=0,\qquad \arg w'(-i)=0$.

7.14. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}, \quad G=\{|w|<1\}, \quad w(1+i)=0, \quad \arg w'(1+i)=\frac{\pi}{2}$.

7.15. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}, \; G=\{|w|<1\}, \; w(-1+2i)=0, \; \arg w'(-1+2i)=\frac{\pi}{2}$.

7.16. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}, \quad G=\{|w+1|<1\}, \quad w(i)=0, \quad \arg w'(i)=1$.

7.17. $D=\{|z-2i|<1\}, \; G=\{\operatorname{Im} w>\operatorname{Re} w\}, \; w(2i)=-2, \; w(i)=0$.

7.18. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}, \quad G=\{\operatorname{Im} w>0\}, \quad w(i)=i, \quad \arg w'(i)=\frac{\pi}{2}$.

7.19. $D=\{\operatorname{Im} z>0\}, \quad G=\{\operatorname{Im} w>0\}, \quad w(2i)=i, \quad \arg w'(2i)=0$.

7.20. $D=\{|z|<3\}, \quad G=\{\operatorname{Re} w<0\}, \quad w(0)=-1, \quad \arg w'(0)=\frac{\pi}{2}$.

7.21. $D=\{|z|<2\}, \quad G=\{\operatorname{Re} w>0\}, \quad w(0)=1, \quad \arg w'(0)=\frac{\pi}{2}$.

8-Масала. +уйидаги D тўпламнинг берилган акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

8.1. $D=\{\operatorname{Re} z=2\}$ $\qquad w=z^2$.

8.2. $D=\{\operatorname{Im} z=3\}$ $\qquad w=z^2$.

8.3. $D=\{\arg z=\frac{\pi}{3}\}$ $\qquad w=z^4$.

8.4. $D=\{|z|=2, \frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2\pi}{3}\}$ $\qquad w=z^2$.

8.5. $D=\{\operatorname{Im} z>1\}$ $\qquad w=z^2$.

8.6. $D=\{\operatorname{Re} z>1\}$ $\qquad w=z^2$.

8.7. $D=\{|z|<2, \frac{\pi}{2}<\arg z<\pi\}$ $\qquad w=z^2$.

8.8. $D=\{|z|>2, \frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\}$ $\qquad w=z^2$.

8.9. $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$ $\qquad w=z^2$.

8.10. $D=\{\operatorname{Re} z<-1\}$ $\qquad w=z^2$.

8.11. $D=\{|z|<4, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}\}$ $\qquad w=z^2$.

8.12. $D=\{|z|>3, \operatorname{Re} z>0\}$ $\qquad w=z^2$.

8.13. $D=\{|z|>2, \arg z=\dfrac{\pi}{4}\}$ $\qquad w=z^3$.

8.14. $D=\{|\arg z|<\dfrac{\pi}{4}, z\notin[0,1]\}$ $\qquad w=z^4$.

8.15. $D=\{|z|=4, \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\}$ $\qquad w=z^4$.

8.16. $D=\{|z|>1, \pi<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\}$ $\qquad w=z^2$.

8.17. $D=\{\operatorname{Re} z>0\ , z\notin[1,+\infty)\}$ $\qquad w=z^2$.

8.18. $D=\{\operatorname{Im} z<0,\ z\notin(-\infty,-2]\}$ $\qquad w=z^2$.

8.19. $D=\{|z|>2, \arg z=\dfrac{\pi}{3}\}$ $\qquad w=z^6$.

8.20. $D=\{|z|<3, \arg z=\dfrac{\pi}{4}\}$ $\qquad w=z^4$.

8.21. $D=\{|z|=2, \dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}\}$ $\qquad w=z^6$.

9-Масала. Жуковский функциясидан фойдаланиб қуйидаги тўпламларнинг аксини топинг.

9.1. $|z|=\dfrac{1}{2}$, $\qquad \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$.

9.2. $|z|=2$, $\qquad \dfrac{3\pi}{4}<\arg z<\dfrac{5\pi}{4}$.

9.3. $|z|>2$, $\qquad z\notin[2,+\infty)$.

9.4. $|z|<\dfrac{1}{2}$, $\qquad z\notin[-\dfrac{1}{2};0]$.

9.5. $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$, $\qquad z\notin[i,+i\infty)$.

9.6. $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$, $\qquad z\notin[0,4i]$.

9.7. $|z|<1$, $\qquad z\notin[-1;0]$.

9.8. $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ $\quad z \notin [\frac{i}{2}; i]$.

9.9. $|z|<\frac{1}{2}$, $\quad 0<\arg z<\frac{\pi}{2}]$.

9.10. $|z|<\frac{1}{2}$, $\quad \frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}$.

9.11. $|z|>2$, $\quad 0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

9.12. $|z|>2$, $\quad \frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}$.

9.13. $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$.

9.14. $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Im} z<0$.

9.15. $|z|<\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z>0$.

9.16. $|z|<\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z<0$.

9.17. $|z|>2$, $\operatorname{Im} z>0$.

9.18. $|z|<2$, $\operatorname{Im} z<0$.

9.19. $1<|z|<2$, $\operatorname{Im} z>0$.

9.20. $\frac{1}{2}<|z|<2$, $\operatorname{Im} z>0$ $\operatorname{Re} z>0$.

9.21. $\operatorname{Im} z>0,\quad z \notin \{|z|=1,\ 0<\arg z \le \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \le \arg z \le \pi\}$.

10-Масала. +уйидаги тўпламларнинг e^z акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

10.1. $0<\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z<0$.

10.2. $-\pi<\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Im} z>0$.

10.3. $\operatorname{Re} z>0$, $\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\pi$.

10.4. $\operatorname{Re} z<0$, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<0$.

10.5. $1<\operatorname{Re} z<2$, $0<\operatorname{Im} z<\pi$.

10.6. $2<\operatorname{Re} z<3 \quad \frac{\pi}{2}< \operatorname{Im} z<\frac{3\pi}{2}$.

10.7. $\operatorname{Re} z>0$,$0< \operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}$.

10.8. $\operatorname{Re} z<0 \quad , \ -\frac{\pi}{2}< \operatorname{Im} z<0$.

10.9. $\frac{\pi}{2}< \operatorname{Im} z<\frac{3\pi}{2}$.

10.10. $0< \operatorname{Im} z<\pi \ , \quad \operatorname{Re} z>0$.

10.11. $-\frac{\pi}{4}< \operatorname{Im} z<\frac{\pi}{4}$.

10.12. $-\frac{\pi}{4}< \operatorname{Im} z<\frac{\pi}{4} \ , \quad \operatorname{Re} z>0$.

10.13. $-\frac{\pi}{4}<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Re} z<0$.

10.14. $\operatorname{Im} z=2\cdot\operatorname{Re} z+1$.

10.15. $\operatorname{Re} z<\operatorname{Im} z<\operatorname{Re} z+2\pi$.

10.16. $\operatorname{Im} z=2\operatorname{Re} z$.

10.17. $\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z+1$.

10.18. $\operatorname{Im} z+\operatorname{Re} z=2$.

10.19. $\operatorname{Im} z-\operatorname{Re} z=3$.

10.20. $1<\operatorname{Re} z<4 \ , \quad \frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\pi$.

10.21. $0<\operatorname{Re} z<2 \ , \quad \pi<\operatorname{Im} z<2\pi$.

11-Масала. +уйидаги D тўпламнинг берилган $w=f(z)$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

11.1. $D=\{\operatorname{Re} z=2\}$, $\quad w=\cos z$.

11.2. $D=\{\operatorname{Im} z=2\}$, $\quad w=\cos z$.

11.3. $D=\{0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z<0\}$, $\quad w=\cos z$.

11.4. $D=\{-\pi<\operatorname{Re} z<0 , \operatorname{Im} z<0\}$, $\quad w=\cos z$.

11.5. $D=\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2}\ ,\operatorname{Im}z<0\}$, $w=\cos z$.

11.6. $D=\{-\pi<\operatorname{Re}z<0\}$, $w=\cos z$.

11.7. $D=\{0<\operatorname{Re}z<\pi\ ,-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\frac{\pi}{2}\}$, $w=\cos z$.

11.8. $D=\{\operatorname{Re}z=2\}$, $w=\sin z$.

11.9. $D=\{\operatorname{Im}z=2\}$, $w=\sin z$.

11.10. $D=\{0<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2}\ ,\operatorname{Im}z<0\}$, $w=\sin z$.

11.11. $D=\{-\pi<\operatorname{Re}z<0\ ,\operatorname{Im}z<0\}$, $w=\sin z$.

11.12. $D=\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2}\ ,\operatorname{Im}z<0\}$, $w=\sin z$.

11.13. $D=\{-\pi<\operatorname{Re}z<0\}$, $w=\sin z$.

11.14. $D=\{0<\operatorname{Re}z<\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\frac{\pi}{2}\}$, $w=\sin z$.

11.15. $D=\{0<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{4}\}$, $w=tgz$.

11.16. $D=\{-\pi<\operatorname{Re}z<0\}$, $w=tgz$.

11.17. $D=\{0<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{4}\}$, $w=ctgz$.

11.18. $D=\{0<\operatorname{Re}z<1\ ,\operatorname{Im}z>0\}$, $w=tg\pi z$.

11.19. $D=\{0<\operatorname{Re}z<\pi\ ,\operatorname{Im}z>0\}$, $w=\sin z$.

11.20. $D=\{-\frac{\pi}{4}<\operatorname{Re}z<0\}$, $w=tgz$.

11.21. $D=\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\}$, $w=\sin z$.

12-Масала. Берилган D соҳани $G=\{\operatorname{Im}w>0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

12.1. $D=\{|z|<1\ \ ,\ \ \operatorname{Im}z>0\}$.

12.2. $D=\{|z|<1\ \ ,\ \ \operatorname{Im}z<0\}$.

12.3. $D=\{|z|<1\ \ ,\ \ \operatorname{Re}z>0\}$.

12.4. $D=\{|z|<1 \ , \quad \operatorname{Re} z<0\}$.

12.5. $D=\{-\pi<\operatorname{Im} z<\pi \ , \quad z \notin [1,+\infty)\}$.

12.6. $D=\{|z+1|>1 \ , \ |z-2|>2\}$.

12.7. $D=\{|z+2|>2 \ , \ |z-1|>1\}$.

12.8. $D=\{|z-1|>1 \ , \ \operatorname{Re} z>0\}$.

12.9. $D=\{|z+1|>1 \ , \ \operatorname{Re} z<0\}$.

12.10. $D=\{|z-i|>1 \ , |z-2i|<2\}$.

12.11. $D=\{|z+i|>1 \ , |z+2i|<2\}$.

12.12. $D=\{|z-1|>1 \ , |z-2|<2\}$.

12.13. $D=\{|z+1|>1 \ , |z+2|<2\}$.

12.14. $D=\{0<\operatorname{Re} z<1 \ , \operatorname{Im} z>0\}$.

12.15. $D=\{-1<\operatorname{Re} z<0 \ , \operatorname{Im} z<0\}$.

12.16. $D=\{\operatorname{Re} z>0 \ , -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}\}$.

12.17. $D=\{\operatorname{Re} z<0 \ , -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}\}$.

12.18. $D=\{\operatorname{Re} z>0 \ , |z-1|>1 , |z-2|<2\}$.

12.19. $D=\{\operatorname{Re} z>0 \ , |z+1|>1 , |z+2|>2\}$.

12.20. $D=\{\operatorname{Re} z<0 \ , \operatorname{Im} z>0 \ , |z-i|>1\}$.

12.21. $D=\{\operatorname{Re} z>0 \ , -\pi<\operatorname{Im} z<\pi\}$.

13-Масала. +уйидаги тенгламаларни ечинг.

13.1. $z^5+2=i$. **13.2.** $z^4-1=i$. **13.3.** $z^3+2i=2$.

13.4. $z^2-z+1=i$. **13.5.** $z^2-4i=2$. **13.6.** $z^5+32=0$.

13.7. $z^3+81=0$. **13.7.** $z^5+1=0$. **13.9.** $z^4+z^2+1=0$.

13.10. $z^7+1=0$. **13.11.** $z^2+4i=3$. **13.12.** $z^8=1-i$.

13.13. $z^2=i$. **13.14.** $z^2+i=1$. **13.15.** $z^3-1=0$.

13.16. $z^4+1=0$. **13.17.** $z^3+2=2i$. **13.18.** $z^3-i=0$.

13.19. $z^6 + 8 = 0$. **13.20** $z^2 - 4i = 3$. **13.21.** $z^5 + 4 = 3i$.

14-Масала. $w = \sqrt{z}$ функциянинг қуйида берилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамида D соҳанинг аксини топинг.

14.1. $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$, $\sqrt{1} = 1$.

14.2. $D = \{\operatorname{Re} z < 0\}$, $\sqrt{-1} = i$.

14.3. $D = \{z \notin (-\infty, 2]\}$, $\sqrt{4} = 2$.

14.4. $D = \{z \notin [-2, +\infty)\}$, $\sqrt{4} = 2i$.

14.5. $D = \{|z| < 1 \text{ , } \operatorname{Im} z > 0\}$, $\sqrt{\dfrac{i}{2}} = \dfrac{1+i}{2}$.

14.6. $D = \{|z| < 1 \text{ , } \operatorname{Im} z < 0\}$, $\sqrt{-\dfrac{i}{2}} = \dfrac{1-i}{2}$.

14.7. $D = \{|z| > 1, \ \dfrac{3\pi}{4} < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}\}$, $\sqrt{-1} = i$.

14.8. $D = \{|z| > 1, \ \dfrac{3\pi}{4} < \arg < \dfrac{5\pi}{4}\}$, $\sqrt{-1} = -i$.

14.9. $D = \{(\operatorname{Im} z)^2 > 2\operatorname{Re} z + 1\}$, $\sqrt{-1} = -i$.

14.10. $D = \{(\operatorname{Im} z)^2 > 2\operatorname{Re} z + 1\}$, $\sqrt{-1} = i$.

14.11. $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $\sqrt{i} = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

14.12. $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $\sqrt{i} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

14.13. $D = \{z \notin [2i, +i\infty)\}$, $\sqrt{1} = 1$.

14.14. $D = \{z \notin [-i\infty, -2i)\}$, $\sqrt{1} = 1$.

14.15. $D = \{z \notin [1, +\infty)\}$, $\sqrt{-1} = i$.

14.16. $D = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$, $\sqrt{1} = 1$.

14.17. $D = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$, $\sqrt{1} = -1$.

14.18. $D = \{|z| < 4, \operatorname{Re} z < 0\}$, $\sqrt{1} = 1$.

14.19. $D = \{|z| < 4, \operatorname{Re} z < 0\}$, $\sqrt{1} = -1$.

14.20. $D=\{\operatorname{Re} z>0, |z|>1\}, \quad \sqrt{1}=1.$

14.21. $D=\{\operatorname{Im} z>0, (\operatorname{Im} z)^2>4\operatorname{Re} z+4\}, \quad \sqrt{-1}=i.$

15-Масала. Қуйидаги соҳаларни $\{\operatorname{Im} w>0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

15.1. $\operatorname{Im} z>0$, $z\notin[0,2i]$.

15.2. $\operatorname{Re} z<0$, $z\notin[-2,0]$.

15.3. $|z|<2$, $0<\arg z<\frac{3\pi}{2}$.

15.4. $|z|>2$, $0<\arg z<\frac{3\pi}{2}$.

15.5. $|z|<2$, $|z-2i|<2$.

15.6. $|z|>2, \quad |z-2i|>2$.

15.7. $z\notin[-2,3]$.

15.8. $z\notin[-2i,2i]$.

15.9. $z\notin\{(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\}$.

15.10. $z\notin\{(-i\infty,-i]\cup[i,+i\infty)\}$.

15.11. $\operatorname{Im} z>0, z\notin\{|z|=1,\ 0\le\arg z\le\frac{\pi}{4}\}$.

15.12. $\operatorname{Im} z>0, z\notin\{|z|=1, \frac{3\pi}{4}\le\arg z\le\pi\}$.

15.13. $\operatorname{Im} z>0, (\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1$.

15.14. $|z-1|<2, |z+1|<2$.

15.15. $|z-1|>2, |z+1|>2$.

15.16. $\operatorname{Im} z>0,\ |z-i|<2$.

15.17. $z\notin\{|z|=1\ ,\ 0\le\arg z\le\pi\}$.

15.18. $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4},\ z\notin[i,+i\infty)$.

15.19. $\operatorname{Im} z>0,\ \ z\notin[2i,+\infty i)$.

15.20. $\operatorname{Re} z < 0$, $z \notin (-\infty,-1]$.

15.21. $z \notin \{|z| \le 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$, $z \notin [-i,0]$.

16-Масала. Қуйидаги соҳаларни $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи биорта $w(z)$ функцияни топинг.

16.1. $z \notin [-2i,2i]$.

16.2. $z \notin \{-\infty;-2] \cup [4,+\infty)\}$.

16.3. $|z| > 1,\ z \notin \{[-2,-1] \cup [1,2]\}$.

16.4. $|z| > 1$, $z \in (-\infty,-2]$.

16.5. $|z| > 4,\ z \notin \{[-4,-2] \cup [-1,4]\}$.

16.6. $\operatorname{Im} z > 0, z \notin \{|z| = 1, \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi\}$.

16.7. $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0, z \notin [0, \frac{i}{2}]$.

16.8. $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, z \notin \{\arg z = \frac{\pi}{4}, 0 \le |z| \le \frac{1}{4}\}$.

16.9. $|z| > 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, z \notin \{\arg z = \frac{\pi}{4}, |z| \ge 2\}$.

16.10. $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, z \notin \{|z| = 2, \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\}$.

16.11. $4(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \ge 4, z \notin [2i;3i]$.

16.12. $\frac{\pi}{2} < \arg z < 2\pi, z \notin \{|z| = 1, \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi\}$.

16.13. $z \notin [0,+\infty), z \notin \{|z| < 1,\ \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{3\pi}{2}\}$.

16.14. $\operatorname{Im} z > 0,\ z \notin \{|z| \le 1,\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}\}$.

16.15. $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi,\ z \notin [0,+\infty)$.

16.16. $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi,\ z \notin \{(-\infty,0] \cup [\pi,+\infty)\}$.

16.17. $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi,\ z \notin [-\pi i,0]$.

16.18. $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi,\ z \notin \{[-\pi i,-\frac{2\pi}{2}] \cup [0,\pi i]\}$.

16.19. $-1 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [0, i]$.

16.20. $-1 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [i, +i\infty)$.

16.21. $|z - 2i| > 2, \ |z + 2i| > 2, \ z \notin [-2; 2]$.

17-Масала. Қуйидаги ифодаларнинг барча қийматларини топинг.

17.1. $Ln5$. **17.2.** $Ln(-1)$. **17.3.** Lni.

17.4. $\ln(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$. **17.5.** $\ln i$. **17.6.** $Ln(1 + i\sqrt{3})$.

17.7. $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^i$. **17.8.** $(-1)^i$. **17.9.** $(-3 + 4i)^{1+i}$.

17.10. $\bar{2}^i$. **17.11.** $(-i)^i$. **17.12.** $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{1+i}$.

17.13. $Arc\sin 1$. **17.14.** $Arc\cos\frac{1}{2}$. **17.15.** $Arc\cos 2$.

17.16. $Arc\cos i$. **17.17.** $Arcctg1$. **17.18.** $Arcctg(1 + 2i)$.

17.19. $Arc\sin\frac{4i}{3}$. **17.20.** $Arc\cos\frac{3i}{4}$. **17.21.** $Arc\sin 2$.

18-Масала. Қуйидаги соҳаларнинг $w = Lnz$ функциянинг қўйилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамидаги аксини топинг.

18.1. $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}, \quad w(i) = \frac{\pi i}{2}$.

18.2. $D = \{\operatorname{Im} z < 0\}, \quad w(-i) = -\frac{\pi i}{2}$.

18.3. $D = \{z \notin (-\infty, 0]\}$, $w(1) = 4\pi i$.

18.4. $D = \{z \notin (-\infty, 0]\}$, $w(-i) = -\frac{\pi i}{2}$.

18.5. $D = \{z \notin [0, +\infty)\}$, $w(1) = 4\pi i$.

18.6. $D = \{z \notin [0, +\infty)\}$, $w(-i) = -\frac{\pi i}{2}$.

18.7. $D = \{z \notin [0, +\infty)\}$, $w(i) = \frac{5\pi i}{2}$.

18.8. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(i)=\dfrac{5\pi i}{2}$.

18.9. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(-i)=\pi i$.

18.10. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-1)=\pi i$.

18.11. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(-i)=-\dfrac{\pi i}{2}$.

18.12. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-i)=-\dfrac{\pi i}{2}$.

18.13. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(i)=\dfrac{\pi i}{2}$.

18.14. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(i)=\dfrac{\pi i}{2}$.

18.15. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2})=\dfrac{10\pi i}{3}$.

18.16. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2})=\dfrac{10\pi i}{3}$.

18.17. $D=\{z\notin[0,+\infty)\}$, $w(-1)=-\pi i$.

18.18. $D=\{z\notin(-\infty,0]\}$, $w(-1)=-\pi i$.

18.19. $D=\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$, $w(i-i0)=-\dfrac{3\pi i}{2}$.

18.20. $D=\{|z|<1, z\notin[0,1]\}, w(-1+0)=-\pi i$.

18.21. $D=\{z\notin(-\infty,0], z\notin[1,+\infty)\}, w(i)=\dfrac{\pi i}{2}$.

19-Масала. Симметрия принципидан фойдаланиб, $D=\{|z|<1\}$ бирлик доиранинг берилган функция ёрдамидаги аксини топинг.

19.1. $w=\dfrac{z}{\sqrt[20]{(1+z^{20})^2}}$.

19.2. $w=\dfrac{z}{\sqrt[19]{(1+z^{19})^2}}$.

19.3. $w=\dfrac{z}{\sqrt[18]{(1+z^{18})^2}}$.

19.4. $w=\dfrac{z}{\sqrt[17]{(1+z^{17})^2}}$.

19.5. $w=\dfrac{z}{\sqrt[16]{(1+z^{16})^2}}$.

19.6. $w=\dfrac{z}{\sqrt[15]{(1+z^{15})^2}}$.

19.7. $w = \dfrac{z}{\sqrt[14]{(1+z^{14})^2}}$. **19.8.** $w = \dfrac{z}{\sqrt[13]{(1+z^{13})^2}}$.

19.9. $w = \dfrac{z}{\sqrt[12]{(1+z^{12})^2}}$. **19.10.** $w = \dfrac{z}{\sqrt[11]{(1+z^{11})^2}}$.

19.11. $w = \dfrac{z}{\sqrt[10]{(1+z^{10})^2}}$. **19.12.** $w = \dfrac{z}{\sqrt[9]{(1+z^{9})^2}}$.

19.13. $w = \dfrac{z}{\sqrt[8]{(1+z^{8})^2}}$. **19.14.** $w = \dfrac{z}{\sqrt[7]{(1+z^{7})^2}}$.

19.15. $w = \dfrac{z}{\sqrt[6]{(1+z^{6})^2}}$. **19.16.** $w = \dfrac{z}{\sqrt[5]{(1+z^{5})^2}}$.

19.17. $w = \dfrac{z}{\sqrt[4]{(1+z^{4})^2}}$. **19.18.** $w = \dfrac{z}{\sqrt[3]{(1+z^{3})^2}}$.

19.19. $w = \dfrac{z}{\sqrt[21]{(1+z^{21})^2}}$. **19.20.** $w = \dfrac{z}{\sqrt[22]{(1+z^{22})^2}}$.

19.21. $w = \dfrac{z}{\sqrt[n]{(1+z^{n})^2}}$.

20-Масала. Симметрия принципидан фойдаланиб, берилган соҳаларни $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта функцияни топинг.

20.1. $z \notin [-1{,}2],\ z \notin [-i, i]$.

20.2. $z \notin [-2;1],\ z \notin [-i, i]$.

20.3. $z \notin [-1{,}1],\ z \notin [-i, 2i]$.

20.4. $z \notin [-1{,}1],\ z \notin [-2i, i]$.

20.5. $z \notin [-1{,}1],\ z \notin [-i;0]$.

20.6. $z \notin [-1{,}1],\ z \notin [0, i]$.

20.7. $z \notin [0{,}1],\ z \notin [-i, i]$.

20.8. $z \notin [-1{,}0],\ z \notin [-i, i]$.

20.9. $|z| > 1,\ z \notin [-2;-1],\ z \notin [-2i;-i],\ z \notin [i;2i]$.

20.10. $|z| < 2,\ z \notin \{[-1;2] \cup [-i;i]\}$.

20.11. $|z|>1,\ z\notin\{[1;2]\cup[-2i;-i]\cup[i;2i]\}$.

20.12. $|z|<2,\ z\notin\{[-2;1]\cup[-i;i]\}$.

20.13. $|z|>1,\ z\notin\{[-2;-1]\cup[1;2]\cup[i;2i]\}$.

20.14. $|z|<2,\ z\notin\{[-1;1]\cup[-i;2i]\}$.

20.15. $|z|>1,\ z\notin\{[-2;-1]\cup[1,2]\cup[-2i;-i]\}$.

20.16. $|z|<2,\ z\notin\{[-1,1]\cup[-2i,i]\}$.

20.17. $0<\operatorname{Re} z<1,\ z\notin\{\operatorname{Re} z=\frac{1}{2},\ -\infty<\operatorname{Im} z\le -2\}$.

20.18. $z\notin[-2,2],\ z\notin[0,2i]$.

20.19. $-1<\operatorname{Re} z<0,\ \ z\notin\{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2},\ 2<\operatorname{Im} z<\infty\}$.

20.20. $z\notin[0,2],\ \ z\notin[-2i,2i]$.

20.21. $0<\operatorname{Re} z<1,\ z\notin\{\operatorname{Re} z=\frac{1}{2},\ 2\le\operatorname{Im} z<\infty\}$.

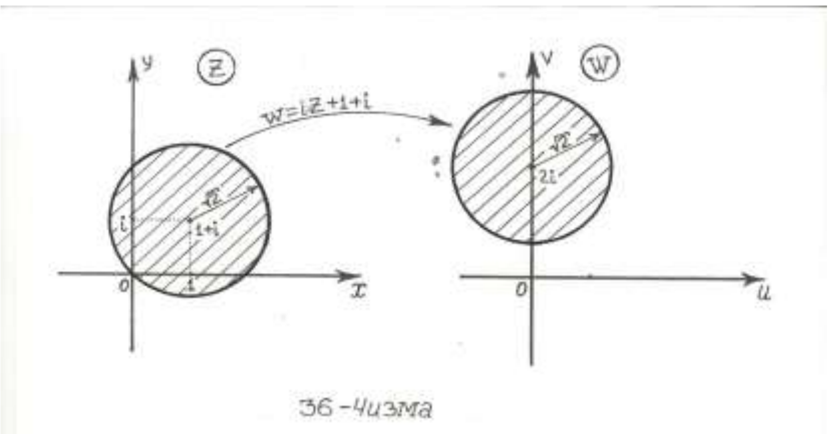
- C -

НАМУНАВИЙ ВАРИАНТ ЕЧИМИ.

1.21-Масала. Берилган $D=\{|z-1-i|<2\}$ соҳанинг $w=iz+1+i$ функция ёрдамидаги аксини топинг.

◃ $w=iz+1+i$ тенгламани z га нисбатан ечамиз:

$z=-iw+i-1 \Rightarrow |z-1-i|=|-iw-2|=|-i(w-2i)|=|-i|\cdot|w-2i|=|w-2i| \Rightarrow D$ доиранинг акси $G=w(D)=\{|w-2i|<\sqrt{2}\}$ доира экан. (36-чизма)▹



36-Чизма

2.21-Масала. Берилган $z_0 = 1+2i$ нуқтани қўзғалмас қолдириб, $z_1 = i$ нуқтани $w_1 = -i$ нуқтага ўткизадиган чизиқли акслантиришни топинг.

◁Маълумки, чизиқли акслантиришнинг умумий кўриниши $w = az + b$. Бу ердаги $a, b \in C$ номаълумларни масала шартидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{cases} a(1+2i) + b = 1+2i, \\ ai + b = -i. \end{cases} \Rightarrow a = 2+i\ ,\ b = 1-3i.$$

Демак, $w = (2+i)z + 1 - 3i$ ▷

3.21-Масала. +уйидаги $w = 2z + 1 - 3i$ учун чекли қўзгалмас нуқта z_0 (агар у мавжуд бўлса), бурилиш бурчаги φ ва чўзилиш коэффициенти k ни топинг. Акслантиришни $w - z_0 = \lambda(z - z_0)$ каноник кўринишга келтиринг.

◁ +узгалмас нуқтани $w(z_0) = z_0$ тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$2z_0 + 1 - 3i = z_0 \Rightarrow z_0 = -1 + 3i \Rightarrow w - z_0 = 2z + 1 - 3i - z_0 =$$

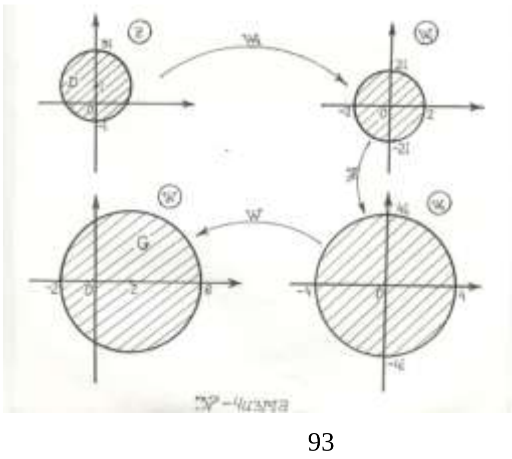
$$= 2z + 1 - 3i + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i).$$

Демак, $w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$. Бу ердан

$z_0 = -1 + 3i,\ \varphi = 0,\ k = 2; w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$ натижага келамиз▷

4.21-Масала. Берилган $D = \{|z - i| < 2\}$ доирани $G = \{|w - 2| < 4\}$ доирага акслантирувчи чизиқли функцияни топинг.

◁ Ушбу $w_1 = z - i$ функцияни қарайлик. Бу функция берилган D доирани (w_1) текисликда маркази координата бошида бўлган $|w_1| < 2$ доирага акслантиради. Энди $w_2 = 2w_1$ *ва* $w = w_2 + 2$ акслантиришлардан кетма-кет фойдалансак берилган доира G доирага аксланади (37-чизма).



Демак , $w = w_2 + 2 = 2w_1 + 2 = 2(z-i)+2 = 2z + 2(1-i)$ $\triangleright$

5.21-Масала. Берилган $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ соҳанинг $w = \dfrac{z-1}{z}$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

$\triangleleft$ Бу масалани ечиш учун соҳанинг сақланиш принципи ва каср-чизиқли акслатиришнинг доиравийлик принципидан фойдаланамиз. $G = w(D)$ десак, $\partial D = w(\partial D)$ бўлади.

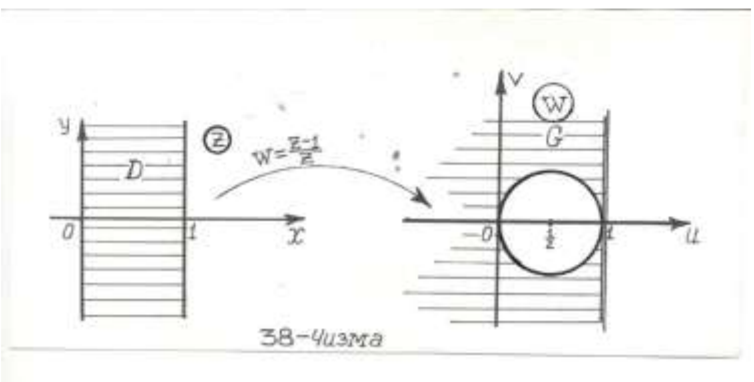
$\partial D = \{\operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\operatorname{Re} z = 1\}$. $z \in \{\operatorname{Re} z = 0\}$ ва $w(0) = \infty$ бўлгани учун $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ тўғри чизиқнинг акси тўғри чизиқ бўлади. Уни топиш учун $z_1 = i$ *ва* $z_2 = -i \in \{\operatorname{Re} z = 0\}$ нуқталарни олиб, уларнинг образларини топамиз: $w(i) = \dfrac{i-1}{i} = 1+i,\ w(-i) = \dfrac{-i-1}{-i} = 1-i. \Rightarrow$ Бу нуқталардан ўтувчи туғри чизиқ $\operatorname{Re} w = 1$. $\operatorname{Re} z = 1$ туғри чизиқнинг акси эса айлана бўлади, чунки бу чизиқнинг устида $w = \dfrac{z-1}{z}$ функцияни ∞ га айлантирадиган нуқта йўқ. Уни топиш учун $w = \dfrac{z-1}{z}$ тенгламадан z ни топамиз:

$$z = \frac{-1}{w-1} = \frac{-1}{u+iv-1} = \frac{-1}{u-1+iv} = \frac{-(u-1-iv)}{(u-1)^2+v^2} = \frac{1-u}{(u-1)^2+v^2} + i\frac{v}{(u-1)^2+v^2}$$

Бу ердан ва $\operatorname{Re} z = 1$ дан

$$\Rightarrow \frac{1-u}{(u-1)^2+v^2} = 1 \Rightarrow (u-1)^2+v^2 = 1-u \Rightarrow (u-\frac{1}{2})^2+v^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Демак, $\partial G = \{\operatorname{Re} w = 1\} \cup \{\left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\} \Rightarrow G = \{\operatorname{Re} w < 1,\ \left|w-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\}$ (38-чизма). $\triangleright$



38-Чизма

6.21-Масала. Қуйидаги $w(-1)=i, \quad w(i)=\infty, \quad w(1+i)=1$ шартларни қаноатлантирувчи каср-чизиқли $w(z)$ акслантиришни топинг.

◁Бу масалани ечиш учун ушбу

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

ангармоник нисбатдан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $z_1=-1$, $z_2=i$, $z_3=1+i$ *ва* $w_1=i$, $w_2=\infty$, $w_3=1$. $w_2=\infty$ бўлгани учун ангармоник нисбат қуйидаги

$$\frac{w-w_1}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

кўринишга келади. Бу ердан

$$\frac{w-i}{1-i}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{1+i-i}{1+i+1}$$

ва $w=\dfrac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$ эканлигини топамиз▷

7.21-Масала. $D=(|z|<2\}$ соҳани $G=\{\operatorname{Re} w>0\}$ соҳага акслантирувчи ва $w(0)=1,\ \arg w^1(0)=\dfrac{\pi}{2}$ шартларни қаноатлантирувчи каср-чизиқли $w(z)$ функцияни топинг.

◁Аввал (5)-формуладан фойдаланиб G ни D га конформ акслантирувчи каср-чизиқли функциянинг умумий кўринишини топиб оламиз. Бунинг учун ушбу $z_1=iw$, $z_2=e^{i\theta}\dfrac{z_1-a}{z_1-\overline{a}}$ *ва* $z=2z_2$ акслантиришларни кетма-кет бажариш етарли эканлигини кўриш қийин эмас.

Демак,

$$z=2z_2=2e^{i\theta}\frac{z_1-a}{z_1-\overline{a}}=2e^{i\theta}\cdot\frac{iw-a}{iw-\overline{a}}.$$

Бу тенгламани w га нисбатан ечиб, D ни G га акслантирувчи функциянинг умумий кўриниши

$$w=-i\frac{\overline{a}z-2ae^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ердаги a *ва* θ номаълумларни берилган шартлардан фойдаланиб топамиз:

$$w(0)=1 \Rightarrow -i\cdot\frac{-2ae^{i\theta}}{-2e^{i\theta}}=-ai=1 \Leftarrow a=+i \Rightarrow w=-i\frac{-iz-2ie^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}=-\frac{z+2e^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}$$

$\arg w'(0)=\dfrac{\pi}{2}$ шартдан θ ни топамиз:

$$\arg w'(0)=\arg(-\frac{4e^{i\theta}}{(z-2e^{i\theta})^2})\Big|_{z=0}=\arg\frac{-1}{e^{i\theta}}=\pi-\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$$

Демак,

$$w=-\frac{z+2i}{z-2i}$$

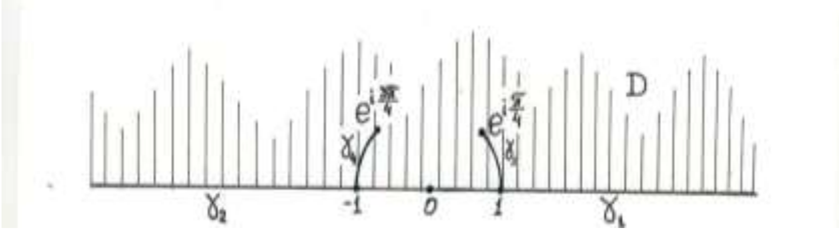
функция масала шартини қаноатлантирувчи функция бўлар экан ▹

8.21-Масала. Қуйидаги $D=\{|z|=2,\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{3}\}$ тўпламнинг $w=z^6$ функция ёрдамидаги аксини топинг.

◃ Агар $z=re^{i\varphi}$ *ва* $w=\rho e^{i\varphi}$ десак, унда $w=z^6$ дан $\rho=r^6$ *ва* $\psi=6\varphi$ эканлиги келиб чиқади. Унда $G=w(D)=\{|w|=64,\ \ \pi<\arg w<2\pi\}$ бўлади ▹

9.21-Масала. Жуковский функциясидан фойдаланиб ушбу $D=\{\operatorname{Im} z>0,\ \ z\notin\{|z|=1,\ 0\le\arg z\le\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\le\arg z\le\pi\}$ тўпламнинг аксини топинг.

◃ Бу масалани ечиш учун биринчи навбатда D соҳанинг чизмасини чизиб оламиз (39-чизма) ва (11)-формулалардан фойдаланамиз.



39-чизма.

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}(r + \dfrac{1}{r})\cos\varphi, \\ \\ v = \dfrac{1}{2}(r - \dfrac{1}{r})\sin\varphi \end{cases} \qquad (11)$$

Маълумки соҳанинг сақланиш принципига кўра $w(\partial D) = \partial G$ бўлади. Агар

$\gamma_1 = [0,+\infty),\ \gamma_2 = (-\infty,0],\ \gamma_3 = \{r = 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}$ *ва* $\gamma_4 = \{r = 1, \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi\}$ десак, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ бўлади ва (11)–формулалардан фойдалансак, $w(\gamma_1) = [1,+\infty),\ w(\gamma_2) = (-\infty,-1],\ w(\gamma_3) = [\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ *ва* $w(\gamma_4) = [-\frac{\sqrt{2}}{2},-1]$ эканлигини топамиз.

$$\Rightarrow\ \partial G = w(\gamma_1) \cup w(\gamma_2) \cup w(\gamma_3) \cup w(\gamma_4) = (-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty).$$

Демак, $G = w(D) = \{w \notin (-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}], w \notin [\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)\}$ ▹

10.21-Масала. Қуйидаги $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 2,\ \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ тўпламнинг $w = e^z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

◃Агар $z = x + iy$ *ва* $w = \rho e^{i\varphi}$ десак ,

$$\begin{cases} \rho = e^x \\ \\ \varphi = y \end{cases} \qquad (*)$$

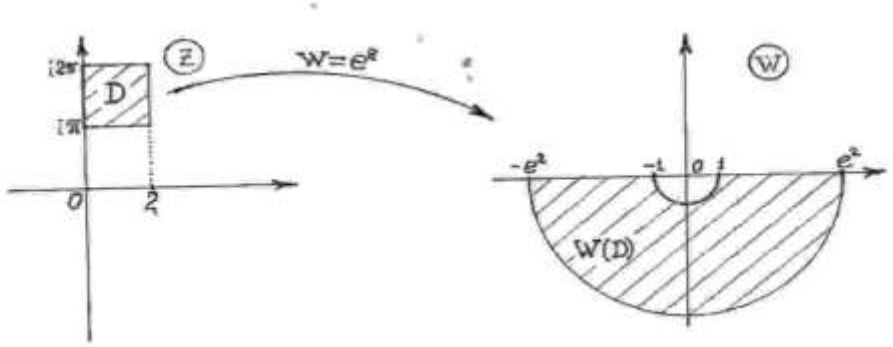
системани ҳосил қиламиз. Унда D соҳада

$$e^0 < \rho < e^2 \ ,\quad \pi < \psi < 2\pi$$

бўлади. Шуларни эътиборга олиб топамиз:

$$w(D) = \{1 < |w| < e^2 ,\quad \pi < \arg w < 2\pi\}$$

D ҳамда $w(D)$ тупламлар 40-чизмада тасвирланган▹



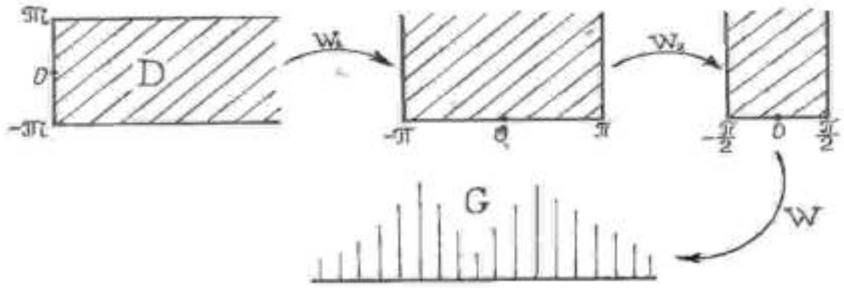
40-Чизма

11.21-Масала. Қуйидаги $D=\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im}z>0\}$ соҳанинг $w=\sin z$ функция ёрдамидаги аксини топинг.

◁ Бу масаланинг ечими 6^0-пунктда келтирилган ▷

12.21-Масала. Ушбу $D=\{\operatorname{Re}z>0,\ -\pi<\operatorname{Im}z<\pi\}$ соҳани $G=\{\operatorname{Im}z>0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

◁ Бу типдаги масалаларни 9^0-пунктда келтирилган акслантиришлардан фойдаланиб ечиш мақсадга мувофиқдир. Биз V даги 1)-акслантиришдан фойдаланамиз. Керакли акслантиришни топиш учун $w_1=iz$, $w_2=\frac{w_1}{2}$, $w=\sin w_2$ акслантиришларни бажариш кифоя (41-чизма).



41-Чизма

Демак, $w=\sin w_2=\sin\frac{w_1}{2}=\sin\frac{iz}{2}=\frac{e^{i\cdot\frac{iz}{2}}-e^{-i\frac{iz}{2}}}{2i}=i\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{2}=ish\frac{z}{2}$ ▷

13.21-Масала. Қуйидаги $z^5+4=3i$ тенгламани ечинг.

$$\lhd\ z^5+4=3i \Rightarrow z^5=-4+3i \Rightarrow z=\sqrt[5]{-4+3i}=$$

$$=\sqrt[5]{|-4+3i|}\cdot\left[\cos\frac{\arg(-4+3i)+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\arg(-4+3i)+2k\pi}{5}\right]=$$

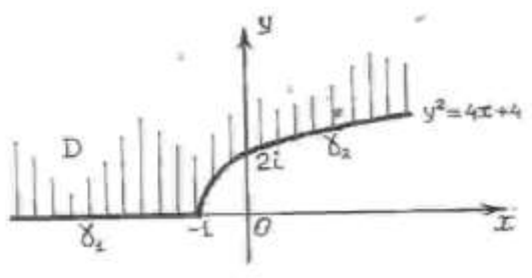
$$=\sqrt[5]{5}\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi-arctg\frac{3}{4}}{5}+i\sin\frac{(2k+1)\pi-arctg\frac{3}{4}}{5}\right],\ \ k=0,1,2,3,4\ \rhd$$

14.21-Масала. $w=\sqrt{z}$ функциянинг $\sqrt{-1}=i$ шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамида

$$D=\{\operatorname{Im} z>0\ ,\quad (\operatorname{Im} z)^2>4\operatorname{Re} z+4\}$$

соҳанинг аксини топинг.

$\lhd$ Аввал D соҳанинг чизмасини чизиб оламиз (42-чизма).



42-Чизма

Кейин $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\psi}$ деб,

$$w=\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})\quad (k=0,1)$$

тенглик ва $\sqrt{-1}=\sqrt{1}\cdot(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi+2k\pi}{2})=i$ шартдан $k=0$ эканлигини топамиз.

Демак,

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})=\sqrt{r}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{экан} \qquad \Rightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt{r},\\ \psi=\dfrac{\varphi}{2}.\end{cases} \qquad (*)$$

муносабатлардан фойдаланиб, D соҳанинг чегараси ∂D нинг образи ∂G ни топамиз:

$\gamma_1 = (-\infty,-1] = \{\varphi = \pi,\ 1 \le r < +\infty\}$ ва $\gamma_2 = \{y^2 = 4x + 4,\ \ y \ge 0\}$ десак, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ бўлади. $w(\gamma_1) = \{\psi = \dfrac{\pi}{2}, 1 \le \rho < +\infty\}$ эканлигини тўғридан тўғри (*) муносабатдан келиб чиқади. Энди $w(\gamma_2)$ топамиз:

$$w = \sqrt{z} \Rightarrow w^2 = z \Rightarrow (u + iv)^2 = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ \\ y = 2uv \end{cases} \qquad (**)$$

$$y^2 = 4x + 4 \Rightarrow 4u^2v^2 = 4u^2 - 4v^2 + 4 \Rightarrow u^2v^2 - u^2 + v^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

(**) ва

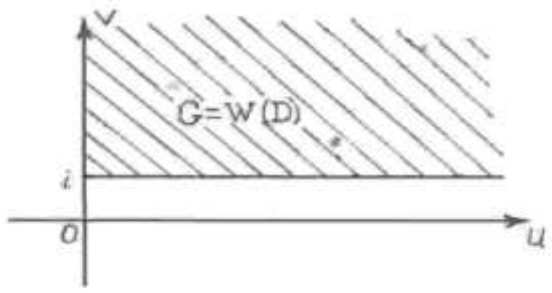
$$(v^2 - 1)(u^2 + 1) = 0 \Rightarrow v = 1, u \ge 0.$$

Демак,

$$w(\gamma_2) = \{v = 1, u \ge 0\} \Rightarrow \partial G = w(\gamma_1) \cup w(\gamma_2) =$$

$$= \{\arg w = \frac{\pi}{2}, 1 \le |w| < +\infty\} \cup \{\operatorname{Im} w = 1,\ \operatorname{Re} w \ge 0\}$$

Бу ердан ва мисол шартидан $G = \{\operatorname{Re} w > 0,\ \operatorname{Im} w > 1\}$ эканлигини ҳосил қиламиз (43-чизма)$\triangleright$



43-чизма

15.21-Масала. Қуйидаги

$$D = \{z \notin \{|z| \le 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\},\ \ z \notin [-i,0]\}$$

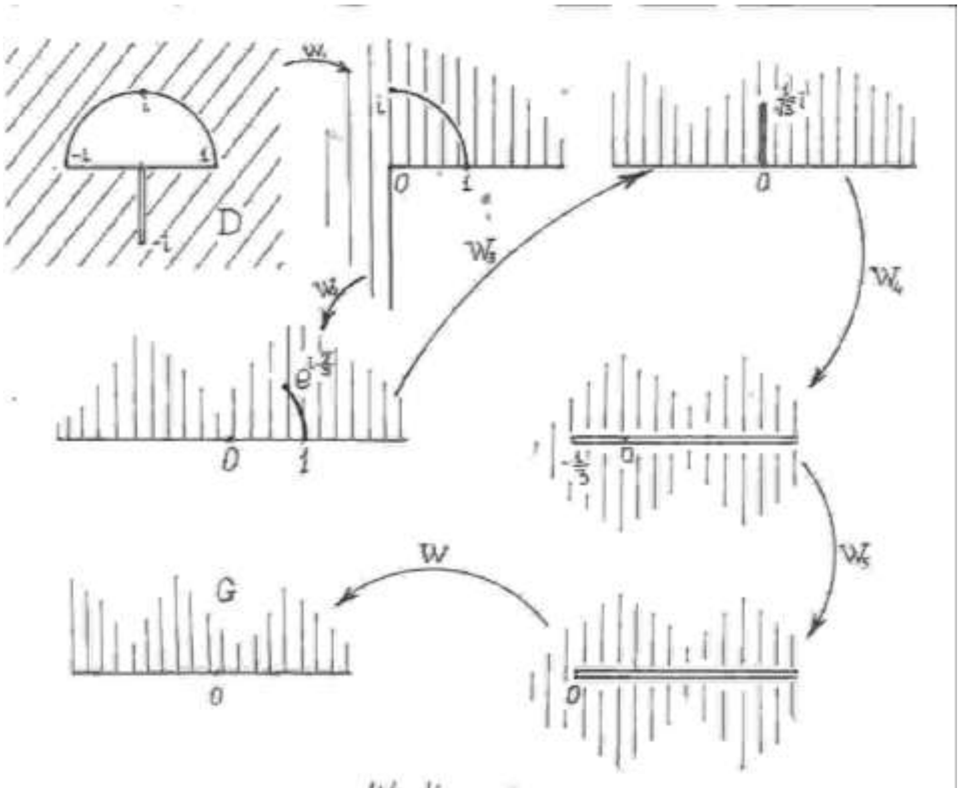
соҳани $G = \{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

$\triangleleft$Масала шартини қаноатлантирувчи конформ акслантиришни қуйидаги акслантиришларни кетма-кет бажариш ёрдамида топамиз:

$$w_1=\frac{1-z}{1+z}\ ,\quad w_2=w_1^{\frac{2}{3}}\ ,\quad w_3=\frac{w_2-1}{w_2+1}\ ,\quad w_4=w_3^2\ ,\quad w_5=w_4+\frac{1}{3}\ ,$$

$$w=\sqrt{w_5}\ ,\ \sqrt{-1}=i$$

Олинган функциялар D соҳани қайси йўл билан G соҳага акслантириши 44-чизмада кўрсатилган.



44-чизма

Демак, масала шартини қаноатлантирувчи функция

$$w=\sqrt{w_5}=\sqrt{w_4+\frac{1}{3}}=\sqrt{w_3^2+\frac{1}{3}}=\sqrt{(\frac{w_2-1}{w_2+1})^2+\frac{1}{3}}=\sqrt{(\frac{w_1^{\frac{2}{3}}-1}{w_1^{\frac{2}{3}}+1})^2+\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt{[\frac{(1-z)^{\frac{2}{3}}-(1+z)^{\frac{2}{3}}}{(1-z)^{\frac{2}{3}}+(1+z)^{\frac{2}{3}}}]^2+\frac{1}{3}},\sqrt{-1}=i$$

экан ▹

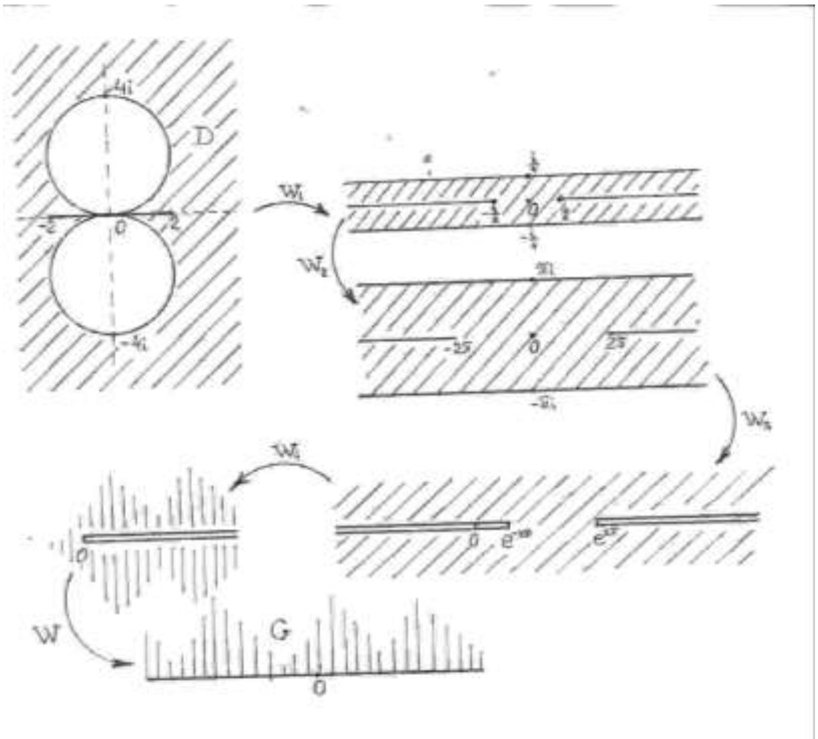
16.21-Масала. Қуйидаги

$$D=\{|z-2i|>2,\ |z+2i|>2\ ,\quad z\notin[-2,2]\}$$

соҳани $G=\{\operatorname{Im} w>0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта $w(z)$ функцияни топинг.

◁Масала шартини қаноатлантирувчи конформ акслантиришни топиш учун қуйидаги акслантиришларни кетма-кет бажариш кифоя (45-чизма):

$$w_1=\frac{1}{z}\,,\ w_2=4\pi w_1\,,\ w_3=e^{w_2},\ w_4=\frac{e^{2\pi}-w_3}{e^{-2\pi}-w_3},\ w=\sqrt{w_4}\,,\ \sqrt{-1}-i.$$



45-чизма

Демак, $w=\sqrt{w_4}=\sqrt{\dfrac{e^{2\pi}-w_3}{e^{-2\pi}-w_3}}=\sqrt{\dfrac{e^{2\pi}-e^{\frac{4\pi}{z}}}{e^{-2\pi}-e^{\frac{4\pi}{z}}}}$, $\sqrt{-1}=i.$ ▷

17.21-Масала. Қуйидаги $Arc\sin 2$ ифоданинг барча қийматларини топинг.

◁Бу типдаги масалаларни ечишда исботлаш қийин бўлмаган қуйидаги тенгликлардан фойдаланилади.

1) $Arc\sin z=-iLni(z+\sqrt{z^2-1}).$

2) $Arc\cos z=-iLn(z+\sqrt{z^2-1}).$

3) $Arctgz = \frac{1}{2} Ln \frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i} Ln \frac{1+iz}{1-iz}$.

4) $Arcctgz = \frac{i}{2} Ln \frac{z-i}{z+i}$

Бу тенгликларда илдизнинг барча қийматлари олинган. Биз 1)-тенглик ва (20)- формуладан фойдаланамиз:

$$Arc\sin 2 = -iLni(2+\sqrt{2^2-1}) = -iLn(2\pm\sqrt{3})i =$$

$$= -i[\ln(2\pm\sqrt{3}) + i\cdot\frac{\pi}{2} + 2k\pi i] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{(4k+1)\pi}{2} - i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3}) \;,\quad k\in Z. \qquad \triangleright$$

18.21-Масала. Куйидаги $D=\{z\notin(-\infty,0]\,,\,z\notin[1,+\infty)\}$ соҳанинг $w=Lnz$ функциянинг $w(i)=\frac{\pi i}{2}$ шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамидаги аксини топинг.

$\triangleleft$ Lnz функциянинг

$$w=(Lnz)_k = \ln z + 2k\pi i \qquad , \qquad k=0,\pm1,\pm2,...$$

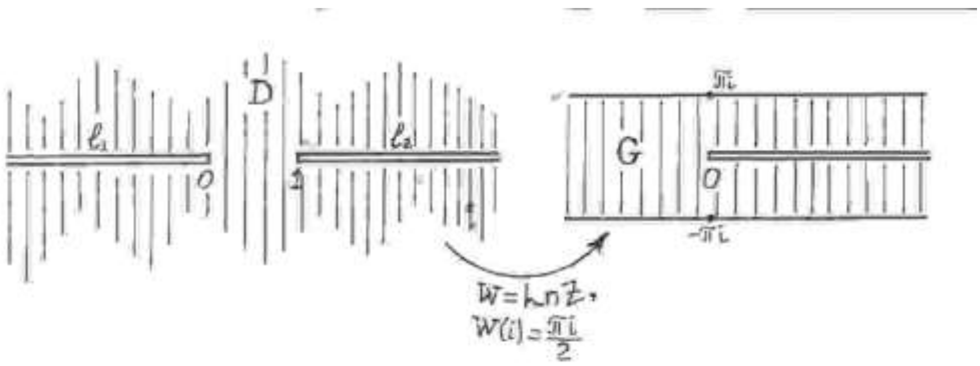
тармокларидан кайси бирини танлашимиз кераклигини $w(i)=\frac{\pi i}{2}$ шартдан аниқлаймиз:

$$\frac{\pi i}{2} = \ln i + 2k\pi i = \ln|i| + i\arg i + 2k\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$$

Бу ердан k҆ 0, эканлигини топамиз. Демак, Lnz нинг керакли тармоғи $w=(Lnz)_0=\ln z$ экан. $w=\ln z$ акслантириш ёрдамида D соҳанинг аксини топиш учун $w=u+iv$ *ва* $z=re^{i\varphi}$ десак,

$$\begin{cases} u=\ln r, \\ \qquad\qquad (*) \\ v=\varphi \end{cases}$$

эканлигини кўрамиз. Агар $l_1=(-\infty,0]$ *ва* $l_2=[1,+\infty)$ десак, $\partial D = l_1\cup l_2$ бўлади. (*) тенгликка кўра $w(l_2)=\{v=0,\ 0\le u<+\infty\}$ *ва* l_1 нурнинг юқори қирғоғи $\{v=\pi\}$ тўғри чизиққа, пастки қирғоғи эса $\{v=-\pi\}$ тўғри чизиққа аксланади. Демак, $G=\{-\pi<\operatorname{Im}w<\pi\ ,\ w\notin[0,+\infty)\}$ экан. (46-чизма) $\triangleright$



46-чизма

19.21-Масала. Симметрия принципидан фойдаланиб , $D=\{|z|<1\}$ бирлик доиранинг $w=\dfrac{z}{\sqrt[n]{(1+z^n)^2}}$ функция ёрдамидаги аксини топинг.

$\triangleleft D$ бирлик доирани учлари $z=0$ нуқтада ва кенглиги $\dfrac{2\pi}{n}$ га тенг бўлган $D_0,D_1,D_2,\ldots,D_{n-1}$ n-та секторга ажратамиз. Равшанки,

$$D_0=\{z\in C:-\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n}\ ,\ |z|<1\}$$

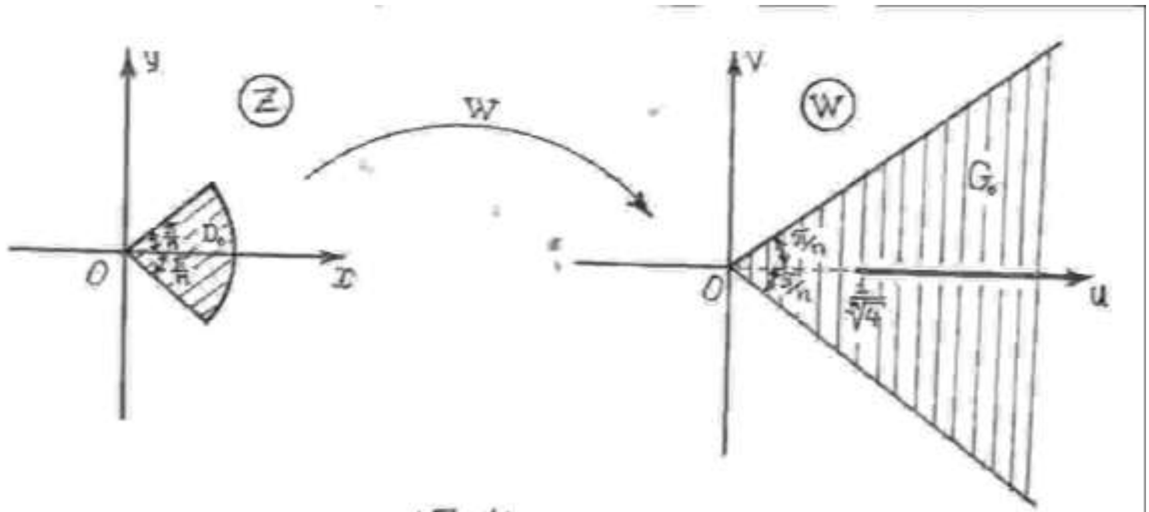
деб олиш мумкин. Сунг берилган w функцияниқуйидагича ёзиб оламиз:

$$w=\frac{z}{\sqrt[n]{(z^n+1)^2}}=\sqrt[n]{\frac{z^n}{z^{2n}+2z^n+1}}=\frac{1}{\sqrt{z^n+2+\dfrac{1}{z^n}}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot[\dfrac{1}{2}(z^n+\dfrac{1}{z^n})+1}}.$$

Агар $w_1=z^n$, $w_2=\dfrac{1}{2}(w_1+\dfrac{1}{w_1})$, $w_3=w_2+1$ *ва* $w_4=\dfrac{1}{2w_3}$ дейилса, унда w функция ушбу $w=(\sqrt[n]{w_4})_0$ кўринишга келади. Бу акслантиришлардан фойдаланиб, D_0 нинг акси

$$G_0=\{w\in C:-\frac{\pi}{n}<\arg w<\frac{\pi}{n},\quad w\notin[\frac{1}{\sqrt[n]{4}},+\infty)\}$$

бўлишини топамиз (47-чизма).



47-Чизма

Шу мулоҳаза асосида, симметрия принципини n марта қўллаш натижасида $w = \dfrac{z}{\sqrt[n]{(z^n+1)^2}}$ функция бирлик доира $D=\{z\in C: |z|<1\}$ ни n-та $\{\arg w = \dfrac{2\pi k}{n},\ |w|\ge \dfrac{1}{\sqrt[n]{4}}\}$, $k=\overline{0,n-1}$ нурлар бўйига қирқилган (w) текисликка акслантиришини топамиз ▷

20.21-Масала. Симметрия принципидан фойдаланиб

$$D=\{0<\operatorname{Re} z<1,\ z\notin\{\operatorname{Re} z=\frac{1}{2},\ 2\le \operatorname{Im} z<\infty\}\}$$

соҳани $\{\operatorname{Im} w>0\}$ юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи бирорта функцияни топинг.

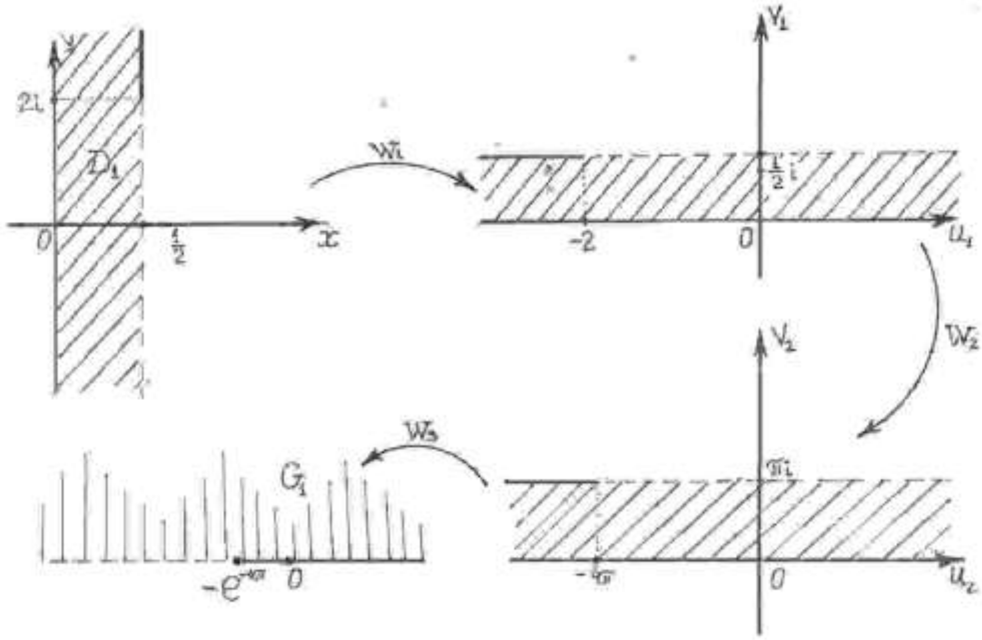
◁ Қуйидаги $D_1=\{0<\operatorname{Re} z<\frac{1}{2}\}$ соҳани қараймиз. Бу соҳа

$$w_1 = iz,\ w_2 = 2\pi w_1,\ w_3 = e^{w_2} \qquad (25)$$

акслантиришларни бирин-кетин бажариш натижасида

$$G_1 = (\operatorname{Im} w_3 > 0\}$$

юқори ярим текисликка конформ аксланади. (25)-акслантиришларнинг бажарилиши жараёни 48-чизмада тасвирланган.



48-чизма

Симметрия принципидан фойдаланиб, берилган соҳа $w_3 = e^{w_2} = e^{2\pi w_1} = e^{2\pi iz}$ функция ёрдамида $G = \{w_3 \notin [-e^{-4\pi}, +\infty)$ соҳага конформ аксланишини топамиз. Бу G соҳа

$$w_4 = w_3 + e^{-4\pi} \ \ ва \ \ w = \sqrt{w_4}\,,\ \sqrt{-1} = i$$

акслантиришлар ёрдамида $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ юқори ярим текисликка аксланади.

Демак, берилган соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функция ушбу

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{e^{2\pi iz} + e^{-4\pi}}\ ,\ \sqrt{-1} = i,$$

кўринишда бўлади ▹

3-§. 3-МУСТАҚИЛ ИШ

КОМПЛЕКС АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ИНТЕГРАЛИ ВА ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИ

Комплекс аргументли функциянинг интеграли тушунчаси.

Кошининг интеграл теоремаси.

Кошининг интеграл формуласи.

Даражали қаторлар.

Голоморф функцияларнинг хоссалари.

Лоран қатори.

Функциянинг яккаланган махсус нуқталари.

Чегирмалар ва уларни ҳисоблаш.

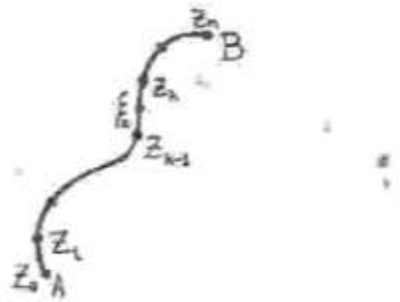
Интегрални чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш.

- А -

АСОСИЙ ТУШУНЧА ВА ТЕОРЕМАЛАР.

1^0. Интеграл тушунчаси.

Комплекс текислик C да тўғриланувчи $\gamma = \overset{\cup}{AB}$ эгри чизиқ берилган бўлсин. Бу эгри чизиқни A дан B га қараб $z_0, z_1, ..., z_n$ нуқталар ёрдамида n та $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ ёйларга ажратамиз (49-чизма).



49-Чизма

γ_k ёйларнинг $(k = 1,2,...,n)$ узунликларини l_k *ва* $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} l_k$ деб белгилаймиз.

Айтайлик, γ эгри чизиқда $f(z)$ функция берилган бўлсин. $\forall\ \xi_k \in \gamma_k$ нуқта олиб, қуйидаги

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(z_k-z_{k-1}) \qquad (1)$$

интеграл йигиндини тузамиз.

Таъриф. *Агар* $\lambda\to 0$ *да* $f(z)$ *функциянинг интеграл йигиндиси* γ *эгри чизиқнинг бўлиниш усулига ҳамда* γ_k *даги* ξ_k *нуқтанинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда чекли лимитга эга бўлса, бу лимит* $f(z)$ *функциянинг* γ *эгри чизиқ бўйича интеграли деб аталади ва*

$$\int_\gamma f(z)dz \qquad (2)$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_\gamma f(z)dz:=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(z_k-z_{k-1}). \qquad (3)$$

Агар $z=x+iy,\quad f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u+iv$ дейилса, унда ушбу

$$\int_\gamma f(z)dz:=\int_\gamma udx-vdy+i\int_\gamma vdx+udy \qquad (4)$$

тенглик ҳосил бўлади.

1-Теорема. $f(z)$ *функциянинг* γ *эгри чизиқ бўйича интеграли*

$$\int_\gamma f(z)dz$$

нинг мавжуд бўлиши учун қуйидаги

$$\int_\gamma udx-vdy \quad \text{ва} \quad \int_\gamma vdx+udy$$

эгри чизиқли интегралларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

Хусусан, $f(z)$ функция узлуксиз бўлса унинг интеграли мавжуд булади.

2-Теорема. *Агар* $f(z)$ *функция* γ *эгри чизиқда берилган ва узлуксиз,* γ *эгри чизиқ ушбу*

$$z=z(t) \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

тенглама билан берилган бўлиб , $z'(t)\ne 0$ *бўлса, у ҳолда*

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[|z(t)|]\cdot z'(t)dt \qquad (5)$$

бўлади.

Бу формуладан комплекс аргументли функция интегралини ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисол. Ушбу

$$I_n = \int_\gamma (z-a)^n\,dz \qquad (n - \text{бутун сон})$$

интегрални ҳисобланг, бунда $\gamma = \{z \in C : |z-a| = \rho,\ \rho > 0\}$ айланадан иборат (йўналиш соат стрелкасининг йуналишига қарама-қарши олинган).

◁ γ айлананинг тенгламасини куйидаги

$$z = z(t) = a + \rho \cdot e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

кўринишида ёзиб оламиз. Унда

$$dz = d(a + \rho \cdot e^{it}) = i\rho \cdot e^{it}\,dt$$

бўлиб, (5)-формулага кўра

$$I_n = \int_\gamma (z-a)^n\,dz = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt$$

бўлади. Агар $n \ne -1$ бўлса,

$$I_n = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt = i\rho^{n+1} \cdot \frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

бўлади. Агар $n = -1$ бўлса

$$I_{-1} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

бўлади. Демак,

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & агар n \ne -1 \text{ булса} \\ 2\pi i, & агар\ n = -1 \text{ булса} \end{cases}$$ ▷

2^0. Кошининг интеграл теоремаси.

Комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида фундаментал теоремалардан бири Кошининг интеграл теоремасидир.

1-Теорема. (Кошининг интеграл теоремаси) *Фараз қилайлик, $f(z)$ функция комплекс текислик C даги бир боғламли D соҳада голоморф бўлсин. Уҳолда ихтиерий тўғриланувчи ёпиқ эгри чизиқ $\gamma \subset\subset D$ учун*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

бўлади.

Юқорида, 1^0-пунктда биз кўрдикки $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$ функциясидан $\gamma:|z-a|=\rho$ айлана буйича олинган интеграл $2\pi i$ га тенг. Бу мисолда $f(z)$ функция $C\setminus\{a\}$ да голоморф бўлиб,бу соҳа бир боғламли эмас. Шунинг учун ҳам $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz\neq 0$ бўлди. Демак, 1-теоремадаги D соҳанинг бир боғламли бўлиши муҳим шарт экан.

2-Теорема. *$D\subset C$ соҳа бир боғламли, чегараси тўғриланувчи чизиқдан иборат бўлган соҳа бўлиб, $f(z)$ функция D да голоморф, $\overline{D}$ да узлуксиз ($f(z)\in O(D)\cap C(\overline{D})$ бўлсин. Уҳолда*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz=0$$

бўлади.

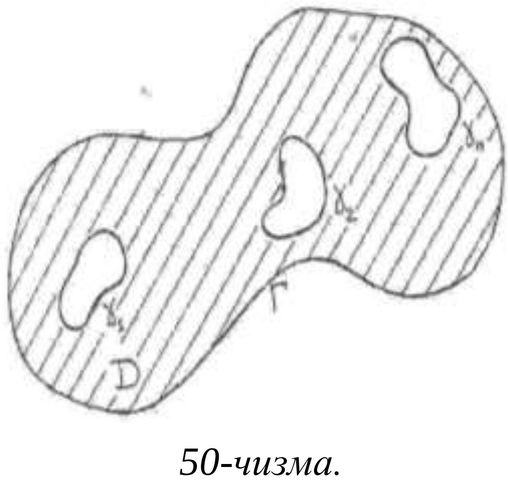
3-Теорема. (Кўп боғламли соҳа учун Коши теоремаси) *Фараз қилайлик, $D\subset C$ соҳа чегараси $\Gamma,\gamma_1,...\gamma_n$ тўғриланувчи чизиқлардан ташкил топган кўп боғламли соҳа бўлсин (50-чизма). Агар $f(z)\in O(D)\cap C(\overline{D})$ бўлса , уҳолда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz=\int\limits_{\Gamma\cup\gamma_1^-\cup...\cup\gamma_n^-} f(z)dz=0$$

тенглик ўринлидир.

Бу тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz$

(6)



50-чизма.

Натижа. *Фараз қилайлик,* $D \subset C$ *бир боғламли соҳа бўлиб,* γ_1, γ_2 *чизиқларнинг ҳар бири* ($\gamma_1 \subset D, \gamma_2 \subset D$) *боши* z_0 *ва охири* z_1 *нуқтада бўлган чизиқлар бўлсин (51-чизма). Агар* $f(z) \in O(D)$ *бўлса, уҳолда*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \qquad (7)$$

бўлади.

51-чизма.

(7)-тенглик, қаралаётган интегралнинг z_0 ва z_1 нуқталаригагина боғлиқ бўлиб, интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслигини билдиради. Шуни эътиборга олиб, (7)-интегрални

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz \qquad (8)$$

каби белгилаш ҳам мумкин.

1-Мисол. Ушбу

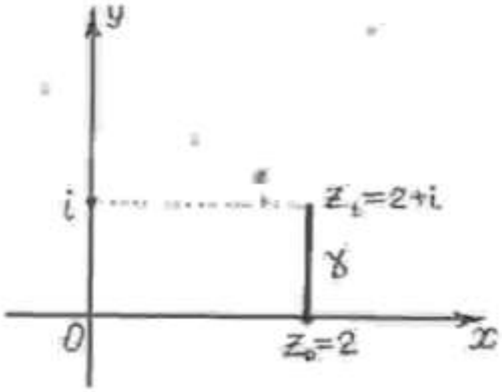
$$\int_{2}^{2+i} z^2 dz$$

интегрални ҳисобланг.

$\triangleleft$Равшанки, $f(z) = z^2 \in O(C)$. Бинобарин, берилган интеграл $z_0 = 2,\ z_1 = 2 + i$ нуқталарни бирлаштирувчи йўлга боғлиқ бўлмайди. Шундан фойдаланиб интеграллаш чизиғи γ сифатида

$$\gamma = \{z = x + iy \in C : x = 2, \quad 0 \le y \le 1\}$$

тўғри чизиқ кесмасини оламиз (52-чизма)



52-чизма

Бу γ чизиқда

$$z = 2 + iy, \qquad dz = idy$$

бўлишидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_2^{2+i} z^2 dz = \int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (2+iy)^2 \cdot idy = i\int_0^1 (4 + 4iy - y^2)dy =$$

$$= i(4y + 2iy^2 - \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 = -2 + \frac{11}{3}i. \qquad \rhd$$

2-Мисол. Ушбу

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} \qquad (z \neq 0)$$

интегралнинг қиймати $z_0 = 1$ ва $z_1 = 2$ нуқталарни бирлаштирувчи йўлга боғлиқ бўладими (йўл координата бошидан ўтмайди деб фараз қилинади)?

$\lhd$ Равшанки,

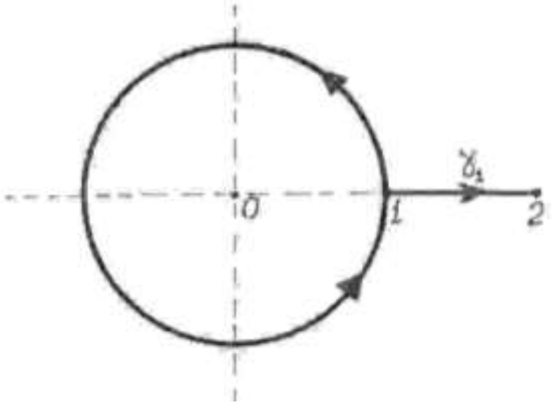
$$f(z) = \frac{1}{z}$$

функция $D = C \setminus \{0\}$ соҳада голоморф. Айни пайтда бу бир боғламли соҳа эмас. Демак, Кошининг интеграл теоремасидан фойдаланиб бўлмайди. $z_0 = 1$ ва $z_0 = 2$ нуқталарни бирлаштирувчи иккита γ_1 ҳамда γ_2 чизиқларни

$$\gamma_1 = \{z = x + iy \in C : 1 \le x \le 2\ ,\ y = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in C : |z| = 1\} \cup \gamma_1$$

деб оламиз (53- чизма).



53-чизма.

γ_1 чизиқда $z = x, \quad dz = dx$ бўлиб,

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$$

$|z| = 1$ айланада $z = e^{i\varphi}\, (0 \le \varphi \le 2\pi), dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ бўлиб,

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi \int_0 \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi + \int_1^2 \frac{dx}{x} = 2\pi i + \ln 2$$

бўлади. Демак, берилган интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ экан ▹

Агар (8)-интегралда z_0 нуқтани тайинлаб, z_1 ни эса z ўзгарувчи сифатида қаралса, (8)-интеграл z ўзгарувчининг функцияси бўлади:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz\,.$$

4-Теорема. *Агар $f(z)$ функция бир боғламли $D \subset C$ соҳада голоморф бўлса, у ҳолда $F(z)$ функция ҳам D соҳада голоморф бўлиб,*

$$F'(z) = f(z) \qquad (z \in D)$$

бўлади.

Бу теоремадан кўринадики, бир боғламли соҳада голоморф функция $f(z)$ нинг бошланғич функцияси мавжуддир.

5-Теорема. *Агар $\Phi(z)$ функция $D \subset C$ соҳада $f(z)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда*

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z} \qquad (9)$$

формула (Ньютон-Лейбниц формуласи) ўринли бўлади, бунда z_0 ва z нуқталар D соҳага тегишли ихтиерий нуқталар.

3^0. Кошининг интеграл формуласи.

Комплекс текислик C да чегараси тўғриланувчи чизиқ бўлган чегараланган D соҳани қарайлик. Кузатувчи бу соҳа чегараси ∂D бўйлаб ҳаракат қилганда соҳа ҳар доим чап томонда қолсин.

1-Теорема. *Агар $f(z) \in O(D) \cap C(\overline{D})$ бўлса, уҳолда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \begin{cases} f(z), & \text{агар } z \in D \text{ булса} \\ 0, & \text{агар } z \notin \overline{D} \text{ булса} \end{cases} \qquad (10)$$

тенглик ўринли бўлади.

Одатда (10)-формула *Кошининг интеграл формуласи* дейилади. Бу формула $f(z)$ нинг $z \in D$ нуқтадаги қийматини чегарадаги қийматлар билан боғлайдиган формуладир.

1-Мисол. Ушбу

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4}$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ эгри чизиқ C текисликнинг $\pm 2i$ нуқталаридан ўтмайдиган ихтиерий ёпик чизиқ.

$\triangleleft$Фараз қилайлик, γ ёпиқ чизиқ билан чегараланган тўплам D бўлсин.

а) $\pm 2i \notin \overline{D}$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2+4} \in O(\overline{D})$$

бўлиб, Кошининг интеграл теоремасига кўра

$$\oint_\gamma \varphi(z)dz = \oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4} = 0$$

бўлади.

б) $+2i \notin D; -2i \notin \overline{D}$ бўлсин. Бу ҳолда, аввало интеграл остидаги функцияни

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}$$

кўринишида ёзиб оламиз. Унда

$$f(z)=\frac{1}{z+2i}\qquad ,a=2i$$

лар учун 1-теореманинг шартлари бажарилганлиги сабабли (10)-формулага кўра

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4}=\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-2i}dz=2\pi i\cdot f(2i)=\frac{2\pi i}{2i+2i}=\frac{\pi}{2}$$

бўлади.

в) $-2i\in D,\quad 2i\notin \overline{D}$ бўлсин. Бунда юқоридаги б) ҳолдагига ўхшаш мулоҳоза юритиш билан топамиз:

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4}=\oint_{\gamma}\frac{\frac{1}{z+2i}}{z+2i}=2\pi i\cdot\frac{1}{z-2i}\Big|_{z=-2i}=-\frac{\pi}{2}.$$

г) $2i\in D,\quad -2i\in D$ бўлсин. Бу ҳолда, аввал интеграл остидаги функцияни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}=\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{z+2i}\right).$$

У ҳолда

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4}=\frac{1}{4i}\left[\oint_{\gamma}\frac{dz}{z-2i}-\oint_{\gamma}\frac{dz}{z+2i}\right]=\frac{1}{4i}\cdot 2\pi i(1-1)=0$$

бўлишини топамиз ▹

(10)-формуладаги $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ интегралга *Коши интеграли* дейилади. Коши интегралида ∂D контур соҳа чегараси бўлиб, $f(\xi)$ функция D соҳада голоморфдир. Энди, фараз қилайлик, C текисликда ихтиерий тўғриланувчи Γ контур ва Γ да аниқланган ҳамда узлуксиз $f(\xi)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда ушбу

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

интегралга *Коши типидаги интеграл* дейилади.

2-Теорема. *Коши типидаги интеграл* $C\setminus\Gamma$ *соҳада* $F(z)$ *функциясини аниқлаб, бу функция ушбу хоссаларга эгадир:*

а) $F(z)$ *функция* $C\setminus\Gamma$ *да голоморф,* *б)* $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)=0$,

в) $F(z)$ *функциянинг исталган тартиблиҳ осиласи* $F^{(n)}(z)$ *мавжуд ва*

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

тенглик ўринли.

Натижа. *Голоморф функция исталган тартиблиҳ осилага эгадир.*

Ҳақиқатан ҳам, голоморф функцияни Коши интеграли ёрдамида ифодалаш мумкин. Коши интегралининг исталган тартибли ҳосиласи мавжудлигидан берилган функция ҳам исталган тартибли ҳосилага эга:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi \qquad (11)$$

2-Мисол. Ушбу

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{2z}}{(z+3)^4}dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ чизиқ C текисликдаги $z=-3$ нуқтани ўз ичига оладиган ихтиерий ёпик контур.

◁ γ контур билан чегараланган соҳани D деб белгилаймиз. Равшанки, $f(z)=e^{2z}$ функция ва D соҳа учун 2-теореманинг шартлари бажарилади. Унда (11)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{2z}}{(z+3)^4}dz=\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{(z+3)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\cdot f'''(-3)=$$

$$=\frac{2\pi i}{6}\cdot 2^3\cdot e^{-6}=\frac{8\pi i}{3e^6}. \qquad ▷$$

4^0**. Даражали қаторлар**.

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+...+c_n(z-a)^n+... \qquad (12)$$

қаторга *даражали қатор* дейилади (бунда $c_0,c_1,...c_n,...$ ҳамда a-комплекс сонлар).

Агар (12)-қаторда $z-a=\xi$ дейилса, у (12) қатор $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ кўринишдаги даражали қаторга келади. Бинобарин, шу кўринишдаги қаторларни ўрганиш биз учун етарли бўлади.

1-Теорема. *(Абель теоремаси) Агар*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (13)$$

даражали қатор z *нинг* $z = z_0 (z_0 \neq 0)$ *қийматида яқинланувчи бўлса, у ҳолда қатор*

$$\{z \in C : |z| < |z_0|\}$$

доирада абсолют яқинланувчи бўлади. Агар (13)-қатор z *нинг* $z = z_1$ *қийматида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда қатор*

$$\{z \in C : |z| > |z_1|\}$$

тўпламда узоқланувчи бўлади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси

$$\bigcup = \{z \in C : |z| < r\}$$

доирадан иборат бўлиб, қаторнинг яқинлашиш радиуси r ушбу

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (14)$$

Коши-Адамар формуласидан топилади.

(13)-даражали қатор ўзининг яқинлашиш соҳасига тегишли бўлган ихтиерий

$$\{z \in C : |z| \leq \rho\}, \quad \rho < r$$

ёпиқ доирада *текис яқинлашувчи* бўлади.

Функцияларни даражали қаторларга ёйиш қаторлар назариясидаги муҳим масалалардан ҳисобланади. Бу масала қуйидаги теорема ёрдамида ҳал этилади.

2-Теорема. *Агар* $f(z)$ *функция* $D \subset C$ *соҳада голоморф бўлса, у ҳолда* D *соҳадаги ихтиерий*

$$U = \{z \in C : |z - a| < r\} \qquad (\forall a \in D)$$

доирада $(U \subset D)$ *уни даражали қаторга ёйиш мумкин:*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n . \qquad (15)$$

Бу ерда c_n-коэффициентлар

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \ , \ 0<\rho<r, \ \ (n=0,1,2...) \qquad (16)$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

Одатда, коэффициентлари (16)-тенгликлар ёрдамида аниқланадиган (15)-қаторга *Тейлор қатори* дейилади.

Амалиётда кўпчилик масалаларни ҳал қилишда элементар функцияларнинг Тейлор қаторига ёйилмаларидан фойдаланилади:

1) $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1.$

2) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!} \qquad |z|\in C.$

3) $\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad , \qquad z\in C.$

4) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \qquad z\in C.$

5) $shz=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad , \qquad z\in C.$

6) $chz=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \qquad z\in C.$

7) $(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}z^n \quad , \qquad |z|<1.$

8) $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n} \quad , \qquad |z|<1.$

3-Теорема. *Айтайлик,* $U=\{z\in C:|z-a|<r\}$ *доира берилган бўлиб,* $f(z)\in O(U)$ *ва* $M=\max_{z\in\partial U}|f(z)|$ *бўлсин. У ҳолда* $f(z)$ *функциянинг а нуқта атрофидаги Тейлор қатори*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z-a)^n$$

коэффициентлари учун ушбу

$$|c_n| \le \frac{M}{r^n} \qquad (n = 0,1,2,...) \qquad (17)$$

Коши тенгсизликлари ўринли бўлади.

5^0. **Голоморф функцияларнинг хоссалари**.

1-Теорема. *Агар $f(z)$ функция D соҳада голоморф бўлса, у ҳолда $\forall n \in N$ учун $f^{(n)}(z)$ мавжуд ва у D соҳада голоморф бўлади.*

2-Теорема. (Лиувилль теоремаси) *Агар $f(z)$ функция бутун текислик C да голоморф бўлиб, чегараланган ($|f(z)| \le M$) бўлса, у ҳолда $f(z) \equiv const$ бўлади.*

Фараз қилайлик, $f(z)$ функция бирор $a \in C$ нуқтанинг атрофида голоморф бўлсин. Агар $f(a) = 0$ бўлса, a сони $f(z)$ *функциянинг ноли* дейилади. Агар $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ бўлиб, $f^{(n)}(a) \ne 0$ бўлса, a сони $f(z)$ функциянинг *n-тартибли* ёки *n каррали ноли* дейилади. Хусусан, $n = 1$ да *a оддий ноль* дейилади.

Агар $f(z)$ функция $z = \infty$ да голоморф бўлиб, $f(\infty) = 0$ бўлса, ∞ *нуқта функция ноли* дейилади. Функциянинг бундай нолининг тартиби

$$g(z) = f(\frac{1}{z})$$

функциянинг $z = 0$ нуқтадаги ноли тартиби билан аниқланади.

3-Теорема. *Агар $f(z)$ функция ($f(z) \ne 0$) $a \in C$ нуқтанинг атрофида голоморф бўлиб, a сон функциянинг n–тартибли ноли бўлса,*

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\varphi(z)$ функция a нуқтанинг атрофида голоморф ва $\varphi(a) \ne 0$.

4-Теорема. (ягоналик теоремаси) *Айтайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $D \subset C$ соҳада голоморф бўлиб, камида битта лимит нуқтага эга бўлган $E \subset D$ тўпламда $f(z) = g(z)$ бўлсин. У ҳолда барча $z \in D$ лар учун $f(z) \equiv g(z)$ бўлади.*

5-Теорема. (модулнинг максимум принципи) *Агар $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳада голоморф бўлиб, унинг модули $|f|$ бирорта ички $z_0 \in D$ нуқтада (локал) максимумга эришса, у ҳолда $f(z) \equiv const$ бўлади.*

6^0. **Лоран қатори**.

Ушбу

$$\ldots + c_{-n} \cdot \frac{1}{(z-a)^n} + c_{-(n-1)} \cdot \frac{1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + c_{-1} \cdot \frac{1}{z-a} +$$

$$+ c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

ифода Лоран қатори дейилади ва

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

каби белгиланади. Лоран қатори

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (18)$$

ва

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \qquad (19)$$

қаторлар йиғиндиси сифатида ифодаланади. (18)-каторга *Лоран қаторининг тўғри қисми*, (19) га эса *бош қисми* дейилади.

(18)–даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (20)$$

формула ёрдамида топилиб, унинг яқинлашиш соҳаси

$$\{z \in C : |z-a| < R\}$$

бўлади. (19)-қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \qquad (21)$$

формула ёрдамида топилади ва унинг яқинлашиш соҳаси

$$\{z \in C : |z-a| > r\}$$

бўлади. $\Rightarrow$ Берилган Лоран қаторининг яқинлашиш соҳаси

$$\{z \in C : r < |z-a| < R\}$$

ҳалқадан иборат бўлади.

Теорема. *Агар $f(z)$ функция $U = \{r < |z-a| < R\}$ ҳалқада голоморф бўлса, у шу ҳалқада Лоран қаторига ёйилади:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad (22)$$

Қаторнинг коэффициентлари ушбу

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \qquad (23)$$

формулалар ёрдамида топилади ($r < \rho < R$).

Лоран қаторини яқинлашиш соҳасида ҳадлаб дифференциаллаш ва интеграллаш мумкин.

7^0. **Функциянинг яккаланган махсус нуқталари**.

Бирор $f(z)$ функцияни қарайлик. Бу функция учун a нуқтада ($a \in \overline{C}$) голоморфлик шарти бажарилмаса a нуқта $f(z)$ функциянинг *махсус нуқтаси* дейилади.

Таъриф. *Агар а махсус нуқтанинг шундай*

$$\overset{\circ}{U}(a) = \{z \in C : 0 < |z-a| < \varepsilon\}$$

ўйилган атрофи топилсаки, $f(z)$ *функция* $\overset{\circ}{U}(a)$ *да голоморф бўлса, а нуқта* $f(z)$ *функциянинг яккаланган махсус нуқтаси дейилади.*

Фараз қилайлик, a нуқта $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлсин.

1) Агар

$$\lim_{z \to a} f(z) = A$$

(A-чекли сон) бўлса, a нуқта $f(z)$ функциянинг *бартараф қилинадиган махсус нуқтаси* дейилади.

2) Агар

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

бўлса, a нуқта $f(z)$ функциянинг *қутб нуқтаси* дейилади.

3) Агар $z \to a$ да $f(z)$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, a нуқта $f(z)$ *функциянинг ўта махсус нуқтаси* дейилади.

Эслатма. *A* нуқта $f(z)$ функциянинг бартараф қилинадиган махсус нуқтаси бўлса,

$$f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$$

деб олиниши натижасида махсуслик бартараф этилади.

Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг қутб нуқтаси бўлса, у ҳолда шу нуқта $\frac{1}{f(z)}$ функциянинг ноли бўлади. $\frac{1}{f(z)}$ функция нолининг тартибига $f(z)$ *функция қутбининг тартиби* дейилади.

Энди функциянинг махсус нуқталари билан унинг Лоран қатори орасидаги боғланишини ифодалайдиган тасдиқларни келтирамиз.

1-Теорема. $f(z)$ *функциянинг яккаланган махсус а нуқтаси унинг бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқтаси бўлиши учун* $f(z)$ *функциянинг а нуқта атрофида Лоран қаторига ёйилмасида бош қисмининг бўлмаслиги, яъни*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-a)^n$$

бўлиши зарур ва етарли.

2-Теорема. $f(z)$ *функциянинг яккаланган а нуқтаси унинг қутб нуқтаси бўлиши учун* $f(z)$ *функциянинг а нуқта атрофида Лоран қаторига ёйилмасида бош қисм таркибида чекли сондаги нолдан фарқли ҳадларнинг бўлиши, яъни*

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n\cdot(z-a)^n \qquad (m>0)$$

бўлиши зарур ва етарли.

3-Теорема. $f(z)$ *функциянинг яккаланган махсус а нуқтаси унинг ўта махсус нуқтаси бўлиши учун* $f(z)$ *функциянинг а нуқта атрофида Лоран қаторига ёйилмасида бош қисм таркибида чексиз кўп сондаги нолдан фарқли ҳадларнинг бўлиши зарур ва етарли.*

8^0. **Чегирмалар ва уларни ҳисоблаш**.

Фараз кқлайлик, $f(z)$ функция $\{0<|z-a|<\delta\}$ да голоморф бўлиб, a нуқта бу функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлсин.

1-Таъриф. *Ушбу*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}f(z)dz \qquad (0<\rho<\delta)$$

интеграл $f(z)$ *функциянинг а нуқтадаги чегирмаси дейилади ва* $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)$ *каби белгиланади:*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}f(z)dz\,.$$

Равшанки, $f(z)$ функция a нуқтада голоморф бўлса, $\underset{z=a}{res}\, f(z)=0$ бўлади.

Айтайлик, $f(z)$ функция $\{r<|z|<\infty\}$ да голоморф бўлсин.

2-Таъриф. *Ушбу*

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\rho} f(z)dz \quad (\rho>r)$$

интеграл $f(z)$ функциянинг $z=\infty$ нуқтадаги чегирмаси дейилади ва $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)$ каби белгиланади:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\rho} f(z)dz \quad .$$

1-Теорема. *Агар $f(z)$ функция $\{0<|z-a|<r\}$ халқада Лоран қатори*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

га ёйилган бўлса, у ҳолда

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=c_{-1} \qquad (24)$$

бўлади. Агар $f(z)$ функция $\{r<|z|<\infty\}$ халқада Лоран қатори

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

га ёйилган бўлса, у ҳолда

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-c_{-1} \qquad (25)$$

2-Теорема. (Чегирмаларнинг йиғиндиси ҳақидаги теорема). *Агар $f(z)$ функция $C\setminus\{a_1,a_2,...,a_n\}$ тўпламда голоморф бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{res}\, f(z)+\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=0 \qquad (26)$$

бўлади.

Энди функция чегирмаларини ҳисоблашда фойдаланадиган формулаларни келтирамиз.

1) Агар $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг *биринчи тартибли қутб нуқтаси* бўлса,

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z) \qquad (27)$$

бўлади.

2) Агар $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ учун $\varphi(z)$ *ва* $\psi(z)$ функциялар a нуқтага голоморф бўлиб, $\psi(a)=0,\quad \psi'(a)\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad (28)$$

бўлади.

3) Агар $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг *n-тартибли қутб нуқтаси* бўлса,

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} \qquad (29)$$

бўлади.

4) Агар $z=\infty$ нуқтада $f(z)$ функция голоморф бўлса,

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\lim_{z\to\infty} z[f(\infty)-f(z)] \qquad (30)$$

бўлади.

5) Агар $f(z)=\varphi(\frac{1}{z})$ бўлиб, $\varphi(z)$ функция $z=0$ нуқтада голоморф бўлса,

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-\varphi'(0) \qquad (31)$$

бўлади.

9^0. **Интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш**.

Чегирмалар ёрдамида турли интегралларни ҳисоблаш мумкин. Бунда қуйидаги теорема муҳим роль ўйнайди.

Теорема (Коши теоремаси). *Фараз қилайлик,*

1) $f(z)$ *функция* $D\setminus\{a_1,a_2,...a_n\}$ *соҳада голоморф* $(D\subset C,\ \ a_1,a_2,...,a_n\in D)$,

2) $f(z)$ *функция соҳанинг чегарасигача аниқланган ва* $\overline{D}\setminus\{a_1,a_2,...a_n\}$ *да узлуксиз,*

3) ∂D *- тўғриланувчи ёпиқ контур бўлсин. У ҳолда*

$$\int_{\partial D} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{res}\, f(z) \qquad (32)$$

формула ўринлидир.

Изоҳ. (32)-формула $\infty \in D$ бўлган ҳол учун ҳам ўринлидир. Фақат бу ҳолда $z = \infty$ ни $f(z)$ учун махсус нуқта деб ҳисоблаш ҳамда ∂D чизиқ ориентациясини соат стрелкаси йўналишида олиш кифоядир.

Юқорида келтирилган Коши теоремасидан амалиётда ёпик контур бўйича олинган интегралларни ҳисоблашда фойдаланилади.

10^0. Аниқ интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш.

Аниқ интегралларни ҳам чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Бунда аниқ интеграл комплекс ўзгарувчили функциянинг контур бўйича олинган интегралига келтирилиб ҳисобланади.

а) $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш.

Ушбу

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx \qquad (33)$$

интеграл берилган бўлиб, уни ҳисоблаш талаб этилсин, бунда $R(\cos x, \sin x) - \cos x$ *ва* $\sin x$ ларнинг рационал функцияси ва у $[0,2\pi]$ да узлуксиз.

Эйлер формуласига кўра

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

бўлишини эътиборга олиб, сунг

$$z = e^{ix}$$

деб белгилаш киритсак, унда

$$x \in [0,2\pi] \Rightarrow z \in \{\, z \in C : |z| = 1\},$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad , \quad \sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \; dx = \frac{1}{iz}dz$$

бўлиб, берилган (33)-интеграл қуйидагича

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint_{|z|=1} \widetilde{R}(z)dz$$

бўлади, бунда

$$\widetilde{R}(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})).$$

Ҳосил бўлган интеграл олдинги пунктдаги $(32) -$ формула ёрдамида ҳисобланади.

б) Хосмас интегралларни ҳисоблаш.

Чегирмалар назариясидан фойдаланиб хосмас интегралларни ҳам ҳисоблаш мумкин. Бу куйидаги теоремага асосланган.

Теорема. $f(z)$ *функция* $\{z\in C:\operatorname{Im} z>0\}$ *соҳанинг чекли сондаги махсус нуқталаридан ташқари барча нуқталарида голоморф бўлиб, унинг чегарасида узлуксиз бўлсин. Агар*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz=0 \qquad (\gamma_r=\{|z|=r\ ,\ \ 0\le\arg z\le\pi\}) \qquad (34)$$

бўлса, у ҳолда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *яқинлашувчи бўлиб,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k\succ 0}\underset{z=z_k}{res} f(z) \qquad (35)$$

бўлади.

Бу теоремадаги $(34)-$шартнинг бажарилишини кўрсатишда қуйидаги леммалардан фойданилади.

1-Лемма (Жордан леммаси). *Агар*

$$\lim_{r\to\infty} r\max_{z\in\gamma_r}|f(z)|=0 \qquad (36)$$

бўлса,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz=0 \qquad (37)$$

бўлади.

2-Лемма.(Жордан леммаси). *Агар*

$$\lim_{r\to\infty}\max_{z\in\gamma_r}|f(z)|=0 \qquad (38)$$

бўлса, у ҳолда $\forall\lambda>0$ *учун*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz=0 \qquad (39)$$

бўлади.

Энди

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}R(x)dx$$

кўринишдаги хосмас интегралларни қарайлик.

Агар $\lim\limits_{r\to\infty}\max\limits_{z\in\gamma}|R(z)|=0$ бўлса, у ҳолда бу интегралга 2-леммани ва юқоридаги теоремани қўллаш натижасида қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = -2\pi\cdot \mathrm{Im}\left\{\sum_{\mathrm{Im}\, z_k \succ 0} \underset{z=z_k}{res}[e^{i\lambda z}\cdot R(z)]\right\}, \qquad (40)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = 2\pi\cdot \mathrm{Re}\left\{\sum_{\mathrm{Im}\, z_k \succ 0} \underset{z=z_k}{res}[e^{i\lambda z}\cdot R(z)]\right\}, \qquad (41)$$

Мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx$$

интегрални ҳисобланг.

$\lhd$ $f(z)$ функция деб

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}=\frac{e^{iz}}{[z-(1+i)]\cdot[z-(1-i)]}$$

ни оламиз. Бу функциянинг 2та $z_1=1+i$ ва $z_2=1-i$ қутб нуқталари бўлиб, улардан $z_1=1+i \in \{\mathrm{Im}\, z>0\}$ бўлади.

$R(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+2}$ функция учун $z\to\infty$ да $R(z)\sim\dfrac{1}{z^2}$ бўлганидан 2-лемма шартининг бажарилиши таъминланади. Унда (41)-формулага кўра

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx = 2\pi\cdot \mathrm{Re}[\underset{z=z_1}{res} f(z)]$$

бўлади.

(27)-формуладан фойдаланиб $\underset{z=z_1}{res} f(z)$ ни ҳисоблаймиз:

$$\underset{z=z_1}{res} f(z)=\lim_{z\to 1+i}\left\{\frac{e^{iz}}{[z-(1+i)]\cdot[z-(1-i)]}\cdot[z-(1+i)]\right\}=$$

$$=\frac{e^{i(1+i)}}{2i}=\frac{e^{-1}}{2}(\sin 1 - i\cos 1).$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx = 2\pi\cdot \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-1}}{2}(\sin 1 - i\cos 1)\right]=\pi e^{-1}\sin 1. \qquad \rhd$$

Назорат саволлари.

1. Комплекс аргументли функция интегралининг таърифи.
2. Интеграл мавжуд бўлишининг зарурий ва етарли шартлари.
3. Кошининг интеграл теоремаси.
4. Кўп боғламли соҳа учун Коши теоремаси.
5. Комплекс аргументли функция интегралининг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги.
6. Ньютон–Лейбниц формуласи.
7. Кошининг интеграл формуласи.
8. Коши интеграли ва Коши типидаги интеграл.
9. Даражали қаторлар ва уларнинг хоссалари.
10. Элементар функцияларнинг даражали қаторга ёйилмалари.
11. Лиувилль теоремаси.
12. Голоморф функциянинг ноллари.
13. Ягоналик теоремаси.
14. Модулнинг максимум принципи.
15. Лоран қаторлари ва уларнинг хоссалари.
16. Функциянинг яккаланган махсус нуқталари.
17. Яккаланган махсус нуқталар ва Лоран қатори орасидаги боғланиш.
18. Чегирманинг таърифи ва чегирма билан Лоран қаторининг коэффициентлари орасидаги боғланиш.
19. Чегирмаларнинг йиғ индиси ҳақидаги теорема.
20. Чегирмаларни ҳисоблаш формулалари.
21. Комплекс аргументли функциялардан ёпик контур бўйича олинган интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисоблаш.
22. $\int_{0}^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.
23. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.
24. Жордан леммалари.

25. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.

26. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.

- В -

МУСТА+ИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1-Масала. Боши $a(a \in C)$ охири $b(b \in C)$ нуқтада бўлган γ тўғри чизиқ кесмаси бўйига қуйидаги интегралларни таъриф ёрдамада ҳисобланг.

1.1. $\int_\gamma (3z+1)dz, \quad a = 1+i, \quad b = 1-i.$

1.2. $\int_\gamma (z-i)dz, \quad a = 1+i, \quad b = 1+2i.$

1.3. $\int_\gamma (z+i)dz, \quad a = 1+i, \quad b = i.$

1.4. $\int_\gamma (3z-i)dz, \quad a = 1+i, \quad b = -1-i.$

1.5. $\int_\gamma (3z+i)dz, \quad a = 2i, \quad b = 1-i.$

1.6. $\int_\gamma (z+2i)dz, \quad a = 2i, \quad b = 1+i.$

1.7. $\int_\gamma (z-2i)dz, \quad a = 2i, \quad b = -1-i.$

1.8. $\int_\gamma (z-2)dz, \quad a = 2, \quad b = 1+i.$

1.9. $\int_\gamma (z+2)dz, \quad a = 2, \quad b = 1-i.$

1.10. $\int_\gamma (3z-1)dz, \quad a = 2, \quad b = -1+i.$

1.11. $\int_\gamma (3z-2)dz, \quad a = 2, \quad b = -1-i.$

1.12. $\int_\gamma (z+3)dz, \quad a = 1+i, \quad b = i.$

1.13. $\int_\gamma (z-3)dz, \quad a = 1+i, \quad b = -i.$

1.14. $\int_\gamma (z-3i)dz, \quad a = 1-i, \quad b = i.$

1.15. $\int\limits_{\gamma}(z+3i)dz, \quad a=1-i, \quad b=-i.$

1.16. $\int\limits_{\gamma}(2z-3)dz, \quad a=-1+i, \quad b=i.$

1.17. $\int\limits_{\gamma}(2z+3)dz, \quad a=-1+i, \quad b=-i.$

1.18. $\int\limits_{\gamma}(2z-3i)dz, \quad a=-1-i, \quad b=i.$

1.19. $\int\limits_{\gamma}(2z+3i)dz, \quad a=-1-i, \quad b=-i.$

1.20. $\int\limits_{\gamma}(3z-i)dz, \quad a=2+i, \quad b=2-i.$

1.21. $\int\limits_{\gamma}(2z-1)dz, \quad a=2+2i, \quad b=i.$

2-Масала. +уйидаги интегралларни берилган z_0 ва z_1 нуқталарни туташтирувчи γ тўғри чизиқ бўйича ҳисобланг.

2.1. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz, \quad z_0=1+i, \quad z_1=2+3i.$

2.2. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz, \quad z_0=2+2i, \quad z_1=3+4i.$

2.3. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy)dz, \quad z_0=1+i, \quad z_1=2+3i.$

2.4. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz, \quad z_0=2+2i, \quad z_1=3+4i.$

2.5. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz, \quad z_0=1+i, \quad z_1=2+3i.$

2.6. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz, \quad z_0=2+2i, \quad z_1=3+4i.$

2.7. $\int\limits_{\gamma}zdz, \quad z_0=1+i, \quad z_1=2+3i.$

2.8. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz, \quad z_0=2+2i, \quad z_1=3+4i.$

2.9. $\int\limits_{\gamma}\bar{z}dz, \quad z_0=1+i, \quad z_1=2+3i.$

2.10. $\int\limits_{\gamma}\bar{z}dz, \quad z_0=2+2i, \quad z_1=3+4i.$

2.11. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz, \quad z_0=1+i, \ z_1=3+2i.$

2.12. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz, \quad z_0=2+2i, \ z_1=4+3i.$

2.13. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz, \quad z_0=1+i, \ z_1=3+2i.$

2.14. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz, \quad z_0=2+2i, \ z_1=4+3i.$

2.15. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy)dz, \quad z_0=1+i, \ z_1=3+2i.$

2.16. $\int\limits_{\gamma}(x+iy^2)dz, \quad z_0=1+2i, \ z_1=3+4i.$

2.17. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy^2)dz, \quad z_0=1+i, \ z_1=3+2i.$

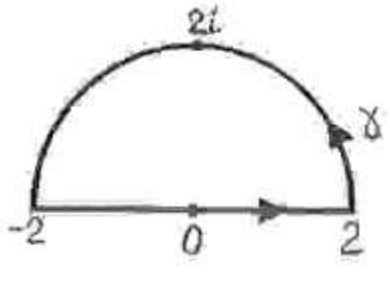
2.18. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy)dz, \quad z_0=1+2i, \ z_1=3+4i.$

2.19. $\int\limits_{\gamma}zdz, \quad z_0=1+i, \ z_1=3+2i.$

2.20. $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy)dz, \quad z_0=1+2i, \ z_1=3+4i.$

2.21. $\int\limits_{\gamma}(x^2+iy^2)dz, \quad z_0=1+i, \ z_1=2+3i.$

3-Масала. 54-чизмада тасвирланган γ чизиқ бўйича олинган қуйидаги интегралларни ҳисобланг.



54-чизма

3.1. $\oint\limits_{\gamma}\frac{\bar{z}}{z}dz.$ **3.2.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{2z-\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

3.3. $\oint\limits_{\gamma}\frac{2\bar{z}+z}{z}dz.$ **3.4.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{3z-\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

3.5. $\oint\limits_{\gamma}\frac{3\bar{z}+z}{z}dz.$ **3.6.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{3\bar{z}-2z}{z}dz.$

3.7. $\oint\limits_{\gamma}\frac{2z-3\bar{z}}{\bar{z}}dz.$ **3.8.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{3\bar{z}-z}{z}dz.$

3.9. $\oint\limits_{\gamma}\frac{2\bar{z}+3z}{z}dz.$ **3.10.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{5z-6\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

3.11. $\oint\limits_{\gamma}\frac{6\bar{z}-5z}{z}dz.$ **3.12.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{4z-5\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

3.13. $\oint\limits_{\gamma}\frac{4\bar{z}+5z}{z}dz.$ **3.14.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{5z-4\bar{z}}{\bar{z}}dz.$ **3.15.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{5\bar{z}+4}{z}dz.$ **3.16.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{7z-8\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

3.17. $\oint\limits_{\gamma}\frac{7\bar{z}+8z}{z}dz.$ **3.18.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{8z-5\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

3.19. $\oint\limits_{\gamma}\frac{6\bar{z}-7z}{z}dz.$ **3.20.** $\oint\limits_{\gamma}\frac{6z+7\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

3.21. $\oint\limits_{\gamma}\frac{7z+6\bar{z}}{\bar{z}}dz.$

4-Масала. Агар $\gamma: x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0<t\le 2\pi,$ эллипс бўлса, қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

4.1. $\int\limits_{\gamma} ydz,\quad a=2,\quad b=3.$ **4.2.** $\int\limits_{\gamma} zdz,\quad a=2,\quad b=3.$

4.3. $\int\limits_{\gamma} \bar{z}dz,\quad a=2,\quad b=3.$ **4.4.** $\int\limits_{\gamma}(2x-iy)dz,\quad a=2,\quad b=3.$

4.5. $\int\limits_{\gamma}(x-iy)dz,\quad a=2,\quad b=3.$ **4.6.** $\int\limits_{\gamma} x^2dz,\quad a=3,\quad b=2.$

4.7. $\int\limits_{\gamma} y^2dz,\quad a=3,\quad b=2.$ **4.8.** $\int\limits_{\gamma}(x^2-iy)dz,\quad a=3,\quad b=2.$

4.9. $\int\limits_{\gamma}(x-iy^2)dz,\quad a=3,\quad b=2.$ **4.10.** $\int\limits_{\gamma}(x+i\cdot 2y)dz,\ a=3,\ b=2.$

4.11. $\int\limits_{\gamma}(2x+iy)dz,\quad a=3,\quad b=2.$ **4.12.** $\int\limits_{\gamma}(x-i\cdot 2y)dz,\ a=2,\ b=3.$

4.13. $\int_{\gamma}(3x-iy)dz,\quad a=3,\quad b=2$. **4.14.** $\int_{\gamma}(x-i3y)dz,\quad a=3,\ b=2$.

4.15. $\int_{\gamma}(3x+iy)dz,\quad a=2,\quad b=3$. **4.16.** $\int_{\gamma}(x+i3y)dz,\quad a=2,\ b=3$.

4.17. $\int_{\gamma}(3x-2iy)dz,\ a=3,\ b=2$. **4.18.** $\int_{\gamma}(2x-3iy)dz,\quad a=3,\ b=2$.

4.19. $\int_{\gamma}(3x+2iy)dz,\ a=2, b=3$. **4.20.** $\int_{\gamma}(2x+3iy)dz,\quad a=2,\ b=3$.

4.21. $\int_{\gamma}(4x+3iy)dz,\ a=3,\ b=2$.

5-Масала. +уйидаги интегралларни ҳисобланг.

5.1. $\int_{-3}^{-3+i} zdz$. **5.2.** $\int_{i}^{2+i} z^2dz$. **5.3.** $\int_{1}^{1+i} zdz$.

5.4. $\int_{3i}^{1+3i} zdz$. **5.5.** $\int_{3}^{3+i} zdz$. **5.6.** $\int_{-2i}^{1-2i} zdz$.

5.7. $\int_{-2}^{1-2i} z^2dz$. **5.8.** $\int_{2}^{2+i} zdz$. **5.9.** $\int_{2}^{2+i} z^2dz$.

5.10. $\int_{1+2i}^{2+i} zdz$. **5.11.** $\int_{1+i}^{2+i} z^2dz$. **5.12.** $\int_{-2}^{-2+3i} zdz$.

5.13. $\int_{-1+2i}^{2+2i} zdz$. **5.14.** $\int_{-1+2i}^{2+2i} z^2dz$. **5.15.** $\int_{-2+i}^{1+i} zdz$.

5.16. $\int_{-2+i}^{1+i} zdz$. **5.17**. $\int_{3-2i}^{3+i} zdz$. **5.18.** $\int_{3-2i}^{3+i} z^2dz$.

5.19. $\int_{-3-i}^{4-i} zdz$. **5.20.** $\int_{-3-i}^{4-i} z^2dz$. **5.21.** $\int_{-2+i}^{1+i} z^2dz$.

6-Масала. Кошининг интеграл формуласидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

6.1. $\int\limits_{|z-1|=3} \dfrac{e^z dz}{(z-1)(z+3)(z+i)}$. **6.2.** $\int\limits_{|z+1|=3} \dfrac{e^z dz}{(z-3)(z+3)(z+i)}$.

6.3. $\int\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\sin z}{(z^2+1)(z-2i)}dz$. **6.4.** $\int\limits_{|z-1|=2} \dfrac{e^z}{(z-1)(z-2)(z+2i)}dz$.

6.5. $\int\limits_{|z|=2,5} \dfrac{\sin z}{(z-3i)(z^2-5z+6)}dz$. **6.6.** $\int\limits_{|z-1|=2} \dfrac{e^z}{(z+i)(z+2)(z+2i)}dz$.

6.7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{(z-i)(z+1)(z+3)}dz$. **6.8.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\sin z}{(z-2)(z+i)(z+4i)}dz$.

6.9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2,5}\frac{e^z dz}{(z-3i)(z^2+3z+1)}$. **6.10.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{e^z}{z(z-2i)(z+2i)}dz$.

6.11. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{\sin z}{(z+i)(z-2i)(z+3)}dz$. **6.12.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{\cos z}{z(z+i)(z+2i)}dz$.

6.13. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{e^z}{(z-1)(z-2i)(z+2i)}dz$. **6.14.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}dz$.

6.15. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{\sin z}{(z-1)(z-2i)(z+3i)}dz$. **6.16.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{\cos z}{(z+1)(z-i)(z-2)}dz$.

6.17. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-4i)(z-2i)(z-i)}dz$. **6.18.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{e^z}{(z^2+4)(z-5i)}dz$.

6.19. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\sin z}{(z^2-4)(z+4)}dz$. **6.20.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{(z-2)(z+2i)(z+4i)}dz$.

6.21. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{(z+4)(z^2-6z)}dz$.

7-Масала. Кошининг интеграл формуласидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

7.1. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3}\frac{z+1}{(z-1)^3\cdot(z+2)^2}dz$. **7.2.** $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=3}\frac{z-1}{(z-3)^2\cdot(z+i)^3}dz$.

7.3. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z+2}{z^2\cdot(z^2+1)}dz$. **7.4.** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z-2}{(z+i)^3\cdot(z+2)^2}dz$.

7.5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2,5}\frac{z-1}{(z-2)^3\cdot(z-3)}dz$. **7.6.** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z+2}{z(z-1)^3\cdot(z-2)^2}dz$.

7.7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{z-1}{(z-i)^3\cdot(z+1)^2}dz$. **7.8.** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z+1}{(z-2)^2\cdot(z+i)^3}dz$.

7.9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2,5}\frac{z-1}{(z+2)^2\cdot(z+1)^3}dz$. **7.10.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{z+1}{z^3\cdot(z-2i)^2}dz$.

7.11. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{z+1}{(z+i)^3\cdot(z-2i)^2}dz$. **7.12.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{z-1}{z^3\cdot(z+i)^2}dz$.

7.13. $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3 \cdot (z-2i)^2} dz$. **7.14.** $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z+1)^3 \cdot z^2} dz$.

7.15. $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z+1)^3 \cdot (z-2i)^2} dz$. **7.16.** $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z-1}{(z+1)^3 \cdot (z-i)} dz$.

7.17. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-2i) \cdot (z-i)^3} dz$. **7.18.** $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z+2)^3 \cdot (z-2)^2} dz$.

7.19. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-2i)^3 \cdot (z+i)^2} dz$. **7.20.** $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-2)^3 \cdot (z+2i)^2} dz$.

7.21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^3 \cdot (z-3)} dz$.

8-Масала. +уйидаги мисолларда берилган $f(z)$ функцияни $z=a$ нуқтанинг атрофида Лоран қаторига ёйинг ва қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

8.1. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$, $a=-i.$

8.2. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a=2.$

8.3. $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, $a=i.$

8.4. $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+2)}$, $a=-2.$

8.5. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $a=2.$

8.6. $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-i)}$, $a=i.$

8.7. $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+1)}$, $a=-1.$

8.8. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+i)}$, $a=2.$

8.9. $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+1)}$, $a=-1.$

8.10. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2i)}, \quad a=0.$

8.11. $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2i)}, \quad a=2i.$

8.12. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+i)}, \quad a=0.$

8.13. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2i)}, \quad a=1.$

8.14. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}, \quad a=0.$

8.15. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2i)}, \quad a=-1.$

8.16. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-i)}, \quad a=i.$

8.17. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z-i)}, \quad a=i.$

8.18. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z+2i)}, \quad a=2i.$

8.19. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}, \quad a=2.$

8.20. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2(1-i)z-4i}, \quad a=-2i.$

8.21. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3iz-2}, \quad a=2i.$

9-Масала. +уйидаги мисолларда $f(z)$ функцияни кўрсатилган халқ ада Лоран қ аторига ёйинг.

9.1. $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}, \quad V=\{0<|z|<\infty\}.$

9.2. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, \ V=\{0<|z|<1\}.$

9.3. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, \ V=\{2<|z|<\infty\}.$

9.4. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}, \ V=\{0<|z|<2\}.$

9.5. $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$, $V=\{2<|z-1|<\infty\}$.

9.6. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $V=\{2<|z|<3\}$.

9.7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $V=\{1<|z|<3\}$.

9.8. $f(z)=\dfrac{1}{z+z^2}$, $V=\{0<|z|<1\}$.

9.9. $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$, $V=\{1<|z+2|<3\}$.

9.10. $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $V=\{0<|z-i|<2\}$.

9.11. $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $V=\{0<|z+i|<2\}$.

9.12. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $V=\{2<|z-1|<\infty\}$.

9.13. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$, $V=\{2<|z-1|<\infty\}$.

9.14. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.15. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.16. $f(z)=\dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.17. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4}$, $V=\{4<|z+2|<\infty\}$.

9.18. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$, $V=\{2<|z|<\infty\}$.

9.19. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.20. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$, $V=\{1<|z|<2\}$.

9.21. $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2},\ V=\{0<|z-2|<1\}.$

10-Масала. +уйидаги функцияларнинг барча махсус нуқ таларини топинг, уларнинг характерини аниқ ланг ва функцияларни $z=\infty$ нуқ тада текширинг (қ утблар учун уларнинг тартибини кўрсатинг).

10.1. $f(z)=ctgz-\dfrac{1}{z}.$

10.2. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2+1)^2}.$

10.3. $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin z-1}.$

10.4. $f(z)=\cos\dfrac{1}{1-z}.$

10.5. $f(z)=\dfrac{z^7}{(z^2-1)^2\cos\dfrac{1}{z-1}}.$

10.6. $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}.$

10.7. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}.$

10.8. $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}.$

10.9. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}.$

10.10. $f(z)=\dfrac{e^z}{z\cdot(1-e^{-z})}.$

10.11. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}\cdot e^{\frac{1}{z+1}}.$

10.12. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}.$

10.13. $f(z)=\dfrac{z^2+9}{e^z}.$

10.14. $f(z)=e^{\frac{2z}{2-z}}.$

10.15. $f(z)=\dfrac{2}{(z^2-i)^3}.$

10.16. $f(z)=\dfrac{e^z}{4+z^2}.$

10.17. $f(z)=tg2z.$

10.18. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z+i}.$

10.19. $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z-1)^3z\cdot(z+1)}.$

10.20. $f(z)=e^{\frac{2}{z+3i}}.$

10.21. $f(z)=\dfrac{1}{z^3\cdot(2-\cos z)}.$

11-Масала. +уйидаги функцияларнинг барча махсус нуқ таларидаги ва $z=\infty$ нуқ тадаги чегирмаларини ҳ исобланг (бунда $z=\infty$ нуқ та махсус нуқ таларнинг лимит нуқ таси бўлмаган ҳ ол қ аралсин).

11.1. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(z+4)}$.

11.2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{2z^2-\frac{\pi}{2}z}$.

11.3. $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$.

11.4. $f(z)=z^3\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$.

11.5. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

11.6. $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{2}{z}}$.

11.7. $f(z)=\dfrac{tgz}{z^2-\frac{\pi z}{4}}$.

11.8. $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^2}$.

11.9. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

11.10. $f(z)=z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$.

11.11. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

11.12. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$.

11.13. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-e^{-z})}$.

11.14. $f(z)=z^3\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

11.15. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(z^2+4)}$.

11.16. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2-z}$.

11.17. $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{z^2\cdot(z^2+i)}$.

11.18. $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$.

11.19. $f(z)=\dfrac{ctgz}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$.

11.20. $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z-2}$.

11.21 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\cdot(z^2+9)}$.

12-Масала. +уйидаги интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисобланг.

12.1. $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{e^z dz}{z^3\cdot(z-1)}$.

12.2. $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2\cdot(z+2)(z+4)}dz$.

12.3. $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{z^2 dz}{(z^2+1)\cdot(z-3)}$.

12.4. $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)^2}dz$.

12.5. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^3 dz}{z^4 - 2}$. **12.6.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3 + z^5}{z^4 + 1} dz$.

12.7. $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{z+1}{(z-1)^2 \cdot (z+i)} dz$. **12.8.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{(z-3)\cdot(z+i)} dz$.

12.9. $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z-2}{(z+1)^2 \cdot (z+2)} dz$. **12.10.** $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{z-1}{(z-2)^2 \cdot (z-3)} dz$.

12.11. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{(z-i)^2 \cdot (z+i)} dz$. **12.12.** $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z+1}{(z-2)\cdot(z+i)^2} dz$.

12.13. $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z-1}{(z+2)\cdot(z+1)^2} dz$. **12.14.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{z^5 \cdot (z+i)^2} dz$.

12.15. $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z+1}{z(z-2i)\cdot(z-i)^2} dz$. **12.16.** $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+2)^2 \cdot (z-3)^2} dz$.

12.17. $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{2z+5}{(z-2i)^3 \cdot (z+i)^2} dz$. **12.18.** $\oint\limits_{|z-1|=1,5} \frac{1}{z^2 (z-2)^3 \cdot (z+2i)} dz$.

12.19. $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^2+1)\cdot(z^4-1)} dz$. **12.20.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z+3}{(z^3+1)\cdot(z+5)} dz$.

12.21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)\cdot(z^5-1)} dz$.

13-Масала. +уйидаги интегралларни ҳ исобланг.

13.1. $\int\limits_{\partial D} (2z-1)\cos\frac{z}{z-1} dz, \quad D = \{|z| < 2\}$.

13.2. $\int\limits_{\partial D} \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad D = \{|z| < 1\}$.

13.3. $\int\limits_{\partial D} z^2 \sin\frac{1}{z} dz, \quad D = \{|z| < 1\}$.

13.4. $\int\limits_{\partial D} \frac{1}{e^z + 1} dz, \quad D = \{|z - 2i| < 2\}$.

13.5. $\int\limits_{\partial D} z^3 \sin\frac{1}{z} dz, \quad D = \{|z| < 2\}$.

13.6. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3} dz\ , \quad D = \{\frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$.

13.7. $\int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz, \quad D = \{|z - i| < 1\}.$

13.8. $\int\limits_{\partial D} z \cdot \sin \frac{z+1}{z-1} dz, \quad D = \{|z| < 2\}.$

13.9. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1} dz, \quad D = \{|z| < 2\}.$

13.10. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2+1)} dz, \quad D = \{|z - 1 - i| < 2\}.$

13.11. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z^3 - z)(z - i)} dz, \quad D = \{|z - 1| < 1\}.$

13.12. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz, \quad D = \{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{2}{3}}\}.$

13.13. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{1}{z}, \quad D = \{|z| < 4\}.$

13.14. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+2} e^{\frac{1}{2z}} dz, \quad D = \{|z| > 4\}.$

13.15. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz, \quad D = \{|z - 2| < \frac{1}{2}\}.$

13.16. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz, \quad D = \{|z| < 3\}.$

13.17. $\int\limits_{\partial D} \sin^2 \frac{1}{z} dz, \quad D = \{|z| < 2\}.$

13.18. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1} dz, \quad D = \{|z - 1| > 1\}.$

13.19. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{\sin z \cdot (1 - \cos z)} dz, \quad D = \{|z| < 5\}.$

13.20. $\int\limits_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} dz, \quad D = \{|z| > 2\}.$

13.21. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz, \quad D = \{|z| > 3\}.$

14-Масала. +уйидаги аниқ интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисобланг.

14.1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin^2 x)^2}$. **14.2.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos^2 x)^2}$.

14.3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\sin^2 x)^2}$. **14.4.** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^{2x} dx}{\frac{5}{4}-\cos x}$.

14.5. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{2-\cos x}$. **14.6.** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{2+\sin x}$.

14.7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$. **14.8.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos^2 x)^2}$.

14.9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$. **14.10.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$.

14.11. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x} dx$. **14.12.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

14.13. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+4\sin x}$. **14.14.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5+4\cos x} dx$.

14.15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$. **14.16.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+2\cos x}$.

14.17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x+3}$. **14.18.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4}-\sin x}$.

14.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2}$. **14.20.** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4+3\cos x} dx$.

14.21. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{2-\sin^2 x}$.

15-Масала. +уйидаги чегараси чексиз бўлган интегралларни чегирмалар ёрдамида ҳисобланг.

15.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$. **15.2.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

15.3. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{x}{(x^2+1}\right)^2 dx$. **15.4.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

15.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$. **15.6.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+6x^2+25}$.

15.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2ix-2}$. **15.8.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^6dx}{(x^4+8)^2}$.

15.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4ix-5)^2}$. **15.10.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-2ix-2)^2}$.

15.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. **15.12.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^4dx}{(2+3x^2)^4}$.

15.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$. **15.14.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$.

15.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^6+1}dx$. **15.16.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

15.17. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$. **15.18.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}\quad (n\in N)$.

15.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$. **15.20.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+2x^2)^n}\quad (n\in N)$.

15.21. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}\quad (n\in N)$.

16-Масала. +уйидаги интегралларни Жордан леммаларидан фойдаланиб ҳ исобланг.

16.1. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)}dx$. **16.2.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^4+x^2+1}dx$.

16.3. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin 3x}{x^2+4}dx$. **16.4.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^3}dx$.

16.5. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}dx$. **16.6.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

16.7. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+4}dx$. **16.8.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}dx$.

16.9. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$. **16.10.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx$.

16.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

16.12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}dx$.

16.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}dx$.

16.14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}dx$.

16.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$.

16.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3+13x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$.

16.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$.

16.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$.

16.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

16.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$.

16.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$.

- С -

НАМУНАВИЙ ВАРИАНТ ЕЧИМИ.

1.21-Масала. Боши $a = 2 + 2i$ охири $b = i$ нуқтада бўлган тўғри чизиқ кесмаси бўйича қуйидаги

$$\int_{\gamma} (2z - 1)dz$$

интегрални таъриф ёрдамида ҳисобланг.

$\triangleleft$ γ чизиқни a дан b га қараб $z_0, z_1, ... z_n$ нуқталар ёрдамида $n - ta$ $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ ёйларга ажратамиз. $\forall\ \xi_k \in \gamma_k$ нуқта олиб, қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

интеграл йиғиндини тузамиз . Унда таърифга кўра

$$\int_{\gamma} (2z - 1)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) \qquad (42)$$

бўлади. $f(z) = 2z - 1 \in C(\gamma)$ бўлгани учун (42)-лимит мавжуд ва бу лимитнинг қиймати γ нинг бўлиниш усулига ва ξ_k нуқталарнинг танланишига боғлик эмас. $\Rightarrow$ $\xi_k = \dfrac{z_{k-1} + z_k}{2}$ деб олсак,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} (2\xi_k - 1) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left[2 \cdot \frac{z_k + z_{k-1}}{2} - 1 \right] \cdot (z_k - z_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} [(z_k + z_{k-1}) \cdot (z_k - z_{k-1}) - (z_k - z_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - z_{k-1}^2) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n^2 - z_0^2 - (z_n - z_0) = b^2 - a^2 - (b - a) =$$

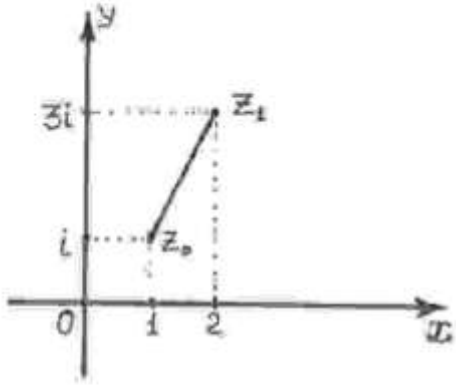
$$= i^2 - (2 + 2i)^2 - (i - 2 - 2i) = -1 - 4 \cdot 2i + i + 2 = 1 - 7i$$

Демак,

$$\int_{\gamma} (2z - 1)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = 1 - 7i \qquad \triangleright$$

2.21-Масала. +уйидаги $\int_{\gamma} (x^2 + iy^2)dz$ интегрални $z_0 = 1 + i,\quad z_1 = 2 + 3i$ нуқталарни туташтирувчи γ тўғри чизиқ бўйича ҳисобланг.

◁ Биринчи навбатда γ тўғри чизиқнинг тенгламасини топамиз. $\gamma: y = 2x - 1, \quad 1 \le x \le 2$ эканлигини кўриш қийин эмас.



55-чизма.

Бу тенглама, $z = x + iy, \; dz = dx + idy$ ва γ да $dy = 2dx$ эканлигидан фойдаланиб, берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_\gamma (x^2 + iy^2) dz = \int_\gamma (x^2 + iy^2) \cdot (dx + idy) = \int_\gamma (x^2 dx - y^2 dy) +$$

$$+ i \int_\gamma (x^2 dy + y^2 dx) = \int_1^2 [x^2 - (2x-1)^2 \cdot 2] dx + i \int_1^2 [x^2 \cdot 2 + (2x-1)^2] dx =$$

$$= \int_1^2 (-7x^2 + 8x - 2) dx + i \int_1^2 (6x^2 - 4x + 1) dx = -\frac{19}{3} + 9i. \qquad \triangleright$$

3.21-Масала. 54-чизмада тасвирланган γ чизиқ бўйича олинган қуйидаги

$$\oint_\gamma \frac{7z + 6\overline{z}}{\overline{z}} dz$$

интегрални ҳисобланг.

◁ Агар $\gamma_1 = \{z = x + iy \in C : y = 0, \; -2 \le x \le 2\}, \; \gamma_2 = \{z \in C : |z| = 2, \; \operatorname{Im} z > 0\}$ деб белгиланса, унда $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ бўлиб, интегралнинг хоссасига кўра

$$\oint_\gamma \frac{7z + 6\overline{z}}{\overline{z}} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{7z + 6\overline{z}}{\overline{z}} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{7z + 6\overline{z}}{\overline{z}} dz$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{7z+6\bar{z}}{\bar{z}}dz = \int_{-2}^{2} \frac{7x+6x}{x}dx = 13\int_{-2}^{2} dx = 13\cdot 4 = 52,$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{7z+6\bar{z}}{\bar{z}}dz = \left(\begin{pmatrix} z = 2e^{i\varphi} \;, & 0 \le \varphi \le \pi \\ \bar{z} = 2e^{-i\varphi} \;, & dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi \end{pmatrix}\right) =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{7\cdot 2e^{i\varphi} + 6\cdot 2e^{-i\varphi}}{2e^{-i\varphi}} 2ie^{i\varphi}d\varphi = 2i\int_0^{\pi}(7e^{3i\varphi} + 6e^{i\varphi})d\varphi =$$

$$= 2\left(\frac{7}{3}e^{3i\varphi} + 6e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{100}{3}.$$

Демак,

$$\oint_{\gamma} \frac{7z+6\bar{z}}{\bar{z}}dz = 52 - \frac{100}{3} = \frac{56}{3} \quad \triangleright$$

4.21-Масала. Агар $\gamma : x = 3\cos t,\;\; y = 2\sin t,\;\; 0 \le t \le 2\pi$ эллипс бўлсақ уйидаги

$$\int_{\gamma} (4x + 3iy)dz$$

интегралҳ исоблансин.

◃ Бу интегрални (5) формуладан фойдаланибҳ исоблаймиз:

$$z = z(t) = x(t) + i\cdot y(t) = 3\cos t + i\cdot 2\sin t \Rightarrow z^1(t) = -3\sin t + 2i\cos t.$$

Унда (5)–формулага кўра

$$\int_{\gamma}(4x+3iy)dz=\int_{0}^{2\pi}(12\cos t+6i\sin t)\cdot(-3\sin t+2i\cos t)dt=$$

$$=3\int_{0}^{2\pi}[-16\sin t\cdot\cos t+i(8\cos^2 t-6\sin^2 t)]dt=$$

$$=3\int_{0}^{2\pi}[-8\sin 2t+i(8\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}-6\cdot\frac{1-\cos 2t}{2})]dt=$$

$$=3\int_{0}^{2\pi}[-8\sin 2t+i(1+7\cos 2t)]dt=3\cdot[4\cos 2t+i(t+\frac{7}{2}\sin 2t)]\Big|_{0}^{2\pi}=$$

$$=3\cdot 2\pi i=6\pi i \;\; \triangleright$$

5-21-Масала. +уйидаги

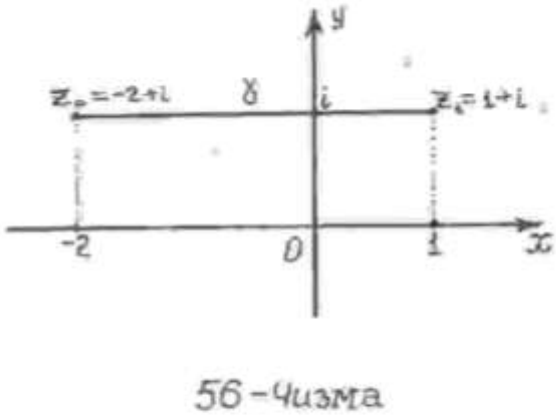
$$\int_{-2+i}^{1+i} z^2 dz$$

интегралнин ҳисобланг.

$\triangleleft$ Бу мисол 2^0-пунктда келтирилган 1-мисолга ўхшаш ечилади. $f(z)=z^2\in O(C)\Rightarrow$ Интегралнинг қиймати $z_0=-2+i$, $z_1=1+i$ нуқталарни бирлаштирувчи йўлга боғлиқ бўлмайди. Шундан фойдаланиб интеграллаш чизиғи γ сифатида

$$\gamma=\{z=x+iy\in C: y=1\,,\ -2\le x\le 1\}$$

тўғри чизиқ кесмасини оламиз (56-чизма).



56-Чизма

Бу γ чизиқда $z=x+i$, $dz=dx$ бўлишидан фойдаланиб топамиз.

$$\int_{-2+i}^{1+i} z^2 dz = \int_\gamma z^2 dz = \int_{-2}^{1} (x+i)^2 dx =$$

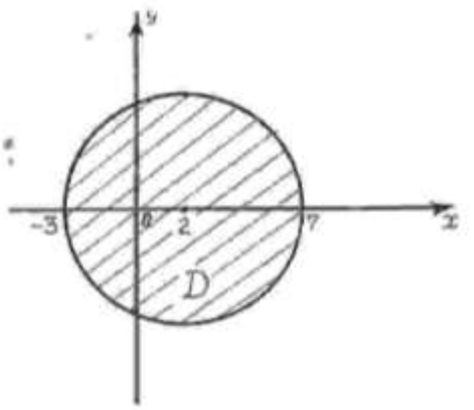
$$= \int_{-2}^{1} (x^2 + 2ix - 1) dx = (\frac{x^3}{3} + ix^2 - x)\Big|_{-2}^{1} = -3i \qquad \triangleright$$

6.21-Масала. Кошининг интеграл формуласидан фойдаланиб қуйидаги

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{(z+4)(z^2-6z)}$$

интегрални ҳисобланг.

$\triangleleft$ $|z-2|=5$ айлана билан чегараланган соҳани D деб белгилаймиз (57-чизма).



57-Чизма

$F(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z+4)(z^2-6z)} = \dfrac{e^{z^2}}{z(z-6)(z+4)}$ деб белгиласак, $z_1 = 0$ *ва* $z_2 = 6$ нуқталар $\in D,$ $z_3 = -4 \notin D.$ Шу фактдан фойдаланиб $F(z)$ функцияни ушбу

$$F(z) = \frac{e^{z^2}}{6(z+4)} \cdot (\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z}) = \frac{f(z)}{z-6} - \frac{f(z)}{z}$$

кўринишида ифодалаб оламиз, бунда $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{6(z+4)} \in O(D).$

Кошининг интеграл формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{(z+4)(z^2-6z)} = \int\limits_{|z-2|=5} F(z)dz = \int\limits_{|z-2|=5} \frac{f(z)}{z-6} dz -$$

$$- \int\limits_{|z-2|=5} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i[f(6) - f(0)] = 2\pi i(\frac{e^{36}}{60} - \frac{1}{24}) =$$

$$= \frac{\pi i}{6} \cdot (\frac{e^{36}}{5} - \frac{1}{2}). \qquad \triangleright$$

7.21-Масала. Кошининг интеграл формуласидан фойдаланиб кқ йидаги

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^3 \cdot (z-3)} dz$$

интегрални ҳ исобланг.

$\triangleleft$ $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ нуқ талар $\{z \in C : |z| = 2\}$ айлана билан чегараланган $\{z \in C : |z| < 2\}$ доирага тегишли бўлиб, $z_2 = 3$ нуқ та эса шу доирага тегишли эмас. $z_0 = 0$ *ва* $z_1 = 1$ нуқ таларни $\{z \in C : |z| < 2\}$ доирага тегишли ва узаро кесишмайдиган γ_1 *ва* γ_2 ёпиқ чизиқ лар билан ўраймиз. Бу γ_1 , γ_2 чизиқ лар ҳ амда $\{z \in C : |z| = 2\}$ айлана билан чегараланган уч боғ ламли соҳ ани D билан белгилаймиз.(58-чизма).

58-Чизма

Берилган интеграл остидаги

$$F(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^3 \cdot (z-3)}$$

функция D соҳ ада голоморф бўлади. 2^0-пунктда келтирилган кўп боғ ламли соҳ а учун Коши теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{|z|=2} F(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} F(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} F(z)dz = I_1 + I_2$$

Агар

$$I_1 = \oint\limits_{\gamma_1} F(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{z+1}{z(z-1)^3(z-3)}dz$$

интегралда

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}$$

дейилиб, (10)-формуладан фойдаланилса

$$I_1 = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi i$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$I_2 = \oint\limits_{\gamma_2} F(z)dz = \oint\limits_{\gamma_2} \frac{z+1}{z(z-1)^3(z-3)}dz$$

интегралда

$$\varphi(z) = \frac{z+1}{z(z-3)}$$

деб ва (11)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_2 = \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi(z)}{(z-1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\varphi^{11}(1) = ((\varphi(z) = \frac{z+1}{z(z-3)} =$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{4}{z-3} - \frac{1}{z}) \Rightarrow \varphi^{1}(z) = \frac{1}{3}(-\frac{4}{(z-3)^2} + \frac{1}{z^2}) \Rightarrow \varphi^{11}(z) =$$

$$\frac{1}{3}[\frac{8}{(z-3)^3} - \frac{2}{z^3}] \Rightarrow \varphi^{11}(1) = \frac{1}{3}(-1-2)) = -\pi i.$$

Шундай килиб,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z\cdot(z-1)^3(z-3)}dz = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}\pi i - \pi i = -\frac{\pi i}{3}$$

бўлади ▹

8.21-Масала. +уйидаги

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3iz - 2}$$

функцияни $a = 2i$ нуқтанинг атрофида Лоран қаторига ёйинг ва қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

◃ Олдин $f(z)$ функцияни

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z-i)}$$

кўринишда тасвирлаймиз. Сўнг уни содда касрларга ёйиб, чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндиси формуласидан фойдалансак,

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z-i)} = \frac{-i}{z-2i} + \frac{i}{z-i} = \frac{-i}{z-2i} +$$

$$+\frac{1}{1+\frac{z-2i}{i}} = \frac{-i}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{z-2i}{i}\right)^n$$

Лоран қатори ҳосил бўлади ва бу қатор $\{0 < |z-2i| < 1\}$ соҳада яқинлашади ▹

9.21-Масала. +уйидаги $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ функцияни $V = \{0 < |z-2| < 1\}$ халқада Лоран қаторига ёйинг.

◃ $$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{2z-3}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (z-2)^n$$

Ҳосил бўлган Лоран қатори берилган $V = \{0 < |z-2| < 1\}$ халқада яқинлашади. ▹

10.21-масала. +уйидаги $f(z)=\dfrac{1}{z^3\cdot(2-\cos z)}$ функциянинг барча махсус нуқталарини топинг, уларнинг характерини аниқланг ва функцияларни $z=\infty$ нуқтада текширинг (қутблар учун уларнинг тартибини кўрсатинг.

◁ $f(z)$ функциянинг қутб нуқталарини топиш учун $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=z^3\cdot(2-\cos z)$ функциянинг нолларини топамиз. $z=0$ нуқта $\varphi(z)$ функциянинг 3-тартибли ноли бўлгани учун таърифга кўра $f(z)$ функциянинг 3-тартибли қутб нуқтаси бўлади. $\varphi(z)$ функциянинг бошқа нолларини $2-\cos z=0$ ёки $\cos z=2$ тенгламани ечиб топамиз. Бу тенгламани 2-параграфдаги формулалардан фойдаланиб ечамиз:

$$z=Arc\cos 2=-iLn(2\pm\sqrt{2^2-1})=-i[\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi i]=$$

$$=2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3}).$$

Бу нуқталар $\varphi(z)$ функция учун 1-тартибли ноль бўлгани учун $f(z)$ функция учун 1-тартиблиқутб нуқта бўлади.

$z=\infty$ нуқта $f(z)$ функциянинг яккаланган махсус нуқтаси бўлмайди, чунки уқутб нуқталар учун лимит нуқта бўлади.

Шундай килиб,

$z=0$ - 3-тартиблиқутб;

$z_k=2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3}),\quad k=0,\pm1,\pm2,...$ - 1-тартиблиқутблар;

$z=\infty$ -қутбларнинг лимит нуқтаси бўлар экан ▷

11.21-масала. +уйидаги $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\cdot(z^2+9)}$ функциянинг барча махсус нуқталаридаги ва $z=\infty$ нуқтадаги чегирмаларниҳисобланг.

◁ Берилган функцияни

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2\cdot(z^2+9)}=\frac{e^z}{z^2(z-3i)(z+3i)}$$

кўринишда ёзиб, унинг махсус нуқталари: $a_1=3i,\ a_2=-3i$ - биринчи тартиблиқутб нуқталар, $a_3=0$ - иккинчи тартиблиқутб нуқта ва $z=\infty$ - ўта махсус нуқта бўлишини аниқлаймиз. $\underset{z=a_1}{res}f(z)$ ва $\underset{z=a_2}{res}f(z)$ ларни ҳисоблашда (27)-формуладан фойдаланамиз:

$$\underset{z=a_1}{res}\, f(z) = \underset{z=3i}{res}(z-3i)\, f(z) = \lim_{z\to 3i} \frac{e^z}{z^2\cdot(z+3i)} =$$

$$= e^{3i}\cdot\frac{1}{-9\cdot 6i} = -\frac{1}{54}(\sin 3 - i\cos 3),$$

$$\underset{z=a_2}{res}\, f(z) = \underset{z=-3i}{res}(z+3i)\cdot f(z) = -\frac{1}{54}(\sin 3 + i\cos 3).$$

(29)–формулага кўра $\underset{z=a_3}{res}\, f(z)$ ниҳисоблаймиз:

$$\underset{z=a_3}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2\cdot f(z)] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{z^2+9}\right)^1 =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^z\cdot(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2} = \frac{1}{9}.$$

$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)$ ни ҳисоблашда эса 8^0-пуктдаги 2-теорема (чегирмаларнинг йиғ индисиҳақидаги теорема)дан фойдаланса бўлади:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -\sum_{k=1}^{3}\underset{z=a_k}{res}\, f(z) = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3). \qquad \triangleright$$

12.21-Масала. +уйидаги

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz$$

интегрални чегирмалар ёрдамидаҳисобланг.

$\triangleleft$ (32)-формулага кўра $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ учун

$$\oint_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{5}\underset{z=a_k}{res}\, f(z) = -2\pi i[\underset{z=3}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z)]$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги чегирмаларниҳисоблаймиз:

$$\underset{z=3}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\, f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{z^5-1} = \frac{1}{242}$$

Агар

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z^6}\cdot\frac{1}{(1-\frac{3}{z})(1-\frac{1}{z^5})}$$

эканини эътиборга олсак, унда $z=\infty$ нуқта $f(z)$ функциянинг 6-тартибли ноли бўлишини аниқлаймиз. Бу функциянинг Лоран қатори

$$f(z)=\frac{1}{z^6}+\frac{c_{-7}}{z^7}+\frac{c_{-8}}{z^8}+....$$

бўлиб, $c_{-1}=0$ бўлади. Демак,

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=0\,.$$

Шундай килиб,

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz=-2\pi i\cdot(\frac{1}{242}+0)=-\frac{\pi i}{121}. \quad \rhd$$

13.31-Масала. +уйидаги

$$\int\limits_{\partial D}\sin\frac{z}{z+1}dz,\qquad D=\{|z|>3\}$$

интегралниҳ исобланг.

$\lhd$ $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$ деб, сўнг (32)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_{\partial D}f(z)dz=2\pi i\cdot\underset{z=\infty}{res}\, f(z)$$

Энди $f(z)$ функциянинг $z=\infty$ нуқтадаги чегирмасини (30)-формулага кўраҳ исоблаймиз:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\lim_{z\to\infty}z[f(\infty)-f(z)]=\lim_{z\leftarrow\infty}z(\sin1-\sin\frac{z}{z+1})=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\Big(\ 2z\cdot\cos\frac{1+\dfrac{z}{z+1}}{2}\cdot\sin\frac{1-\dfrac{z}{z+1}}{2}\ \Big)=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{2z}{2\cdot(z+1)}\cdot\cos\frac{2z+1}{2(z+1)}\cdot\frac{\sin\dfrac{1}{2(z+1)}}{\dfrac{1}{2(z+1)}}\right]=\cos1.$$

Демак,

$$\int\limits_{\partial D}\sin\frac{z}{z+1}dz=2\pi i\cdot\cos1. \quad \rhd$$

14.21-Масала. +уйидаги

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{2-\sin^2 x} dx$$

аниқ интегрални чегирмалар ёрдамида ҳисобланг.

$\lhd$ Бу интегралда $e^{2ix} = z$ алмаштиришни бажарсак, $x \in [0, \pi] \Rightarrow z \in \{z \in C : |z| = 1\}$,

$$dx = \frac{1}{2iz} dz,$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2}$$

бўлиб,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{2-\sin^2 x} = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \cdot \frac{\frac{1+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2}}{2-\frac{1-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \cdot \frac{(z+1)^2}{z^2+6z+1} dz$$

тенглик ўринлидир.

Интеграл остидаги

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z^2+6z+1)} = \frac{(z+1)^2}{z \cdot [z-(-3+2\sqrt{2})] \cdot [z-(-3-2\sqrt{2})]}$$

функциянинг $z_0 = 0,\ z_1 = -3+2\sqrt{2},\ z_2 = -3-2\sqrt{2}$ махсус нукталари бўлиб, улардан $z_0 = 0$ *ва* $z_1 = -3+2\sqrt{2}$ лар $\{|z| < 1\}$ соҳага тегишли бўлган қутб нуқталаридир.

Коши теоремасини ((32)-формулани) қўллаб, топамиз:

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i[\underset{z=0}{res}\, f(z) + \underset{z=z_1}{res}\, f(z)] = 2\pi i[\frac{1}{z_1 z_2} +$$

$$+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{(z_1+1)^2}{z_1-z_2}] = 2\pi i[1+\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{(-3+2\sqrt{2}+1)^2}{4\sqrt{2}}] =$$

$$= 2\pi i(1-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Демак,

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{2-\sin^2 x}dx = \pi\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}). \qquad \triangleright$$

15.21-Масала. +уйидаги чегараси чексиз бўлган

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} \qquad (n\in N)$$

интегрални чегирмалар ёрдамида ҳ исобланг.

$\triangleleft$ Аввало берилган интегрални

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Энди

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z+i)^n\cdot(z-i)^n}$$

десак, бу функция

$$\{z\in C : \operatorname{Im} z > 0\}\ \partial a\ \ z = i$$

махсус нуқ тага, n -тартибли қ утбга эга.

Равшанки,

$$\lim_{r\to\infty} r\cdot\max_{\gamma_r} f(z) = 0 \quad (\gamma_r = \{|z| = r, 0\le \arg z\le\pi\}) \Rightarrow$$

Жорданнинг 1-леммасига кўра $\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_{\gamma_r} f(z)dz = 0$ бўлади. Унда 10^0-пунктдаги теоремага кўра

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i\,\underset{z=i}{res}\, f(z)$$

бўлади.

(29)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\underset{z=i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-i)^n \cdot f(z) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[\frac{1}{(z+i)^n}] = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2i}.$$

Натижада

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\pi$$

бўлиб, берилган интеграл учун

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

бўлишини топамиз ▹

16.21-Масала. +уйидаги

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$$

интегрални Жордан леммаларидан фойдаланиб ҳисобланг.

◃ Бу масалани ечиш учун Жорданнинг 2-леммаси ва (41)-формуладан фойдаланамиз. $f(z)$ функция деб

$$f(z) = \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2} = \frac{(z+1)\cdot e^{2iz}}{[z-(-1+i)]\cdot[z-(-1-i)]}$$

функцияни оламиз. Бу функциянинг 2та $z_1 = -1+i$ *ва* $z_2 = -1-i$ қутб нуқталари бўлиб, улардан $z_1 = -1+i \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ бўлади.

$R(z) = \dfrac{z+1}{z^2+2z+2}$ функция учун $z\to\infty$ да $R(z) \cong \dfrac{1}{z}$ бўлганидан Жорданнинг 2-леммаси шартининг бажарилиши таъминланади ва леммага кўра

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} R(z)e^{2iz}dz = \lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$$

тенглик бажарилади, бунда $\gamma_r = \{|z| = r,\ 0 < \arg z < \pi\}$.

Унда (41)-формулага кўра

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = 2\pi \cdot \mathrm{Re}[\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)]$$

бўлади. (27)-формуладан фойдаланиб $\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)$ ниҳ исоблаймиз:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)\cdot\frac{(z+1)e^{2iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\right] =$$

$$= \frac{(z_1+1)e^{2iz_1}}{(z_1-z_2)} = \frac{ie^{-2-2i}}{2i} = \frac{e^{-2}}{2}(\cos 2 - i\sin 2).$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = 2\pi \cdot \mathrm{Re}[\frac{e^{-2}}{2}(\cos 2 - i\sin 2)] = \pi e^{-2}\cos 2. \qquad \triangleright$$

АДАБИЁТЛАР

1. **Шабат Б.В**. Введение в комплекснўй анализ. 2-нашри, 1-қ.- М.,”Наука”, 1976.

2. **Худойберганов Г**., **Ворисов А**., **Мансуров Х**. Комплекс анализ. (маърузалар). – Т.,”Университет” ,1998.

3. **Садуллаев А**., **Худойбергангов Г**., **Мансуров Х**., **Ворисов А**., **Туйчиев Т**. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қ исм (комплекс анализ).- Т., “Ўзбекистон”, 2000.

4. **Волковўский Л.И**., **Лунц Г.Л.**, **Араманович И.Г**. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3-нашри. – М. “Наука”, 1975.

5. **Евграфов М.А**., **Бежанов К.А**., **Сидоров Ю.В**., **Федорюк М.В.**, **Шабунин М.И**. Сборник задач по теории аналитических функций, 2-нашри. –М., “Наука” 1972.

6. **Лаврентьев М.А**., **Шабат Б.В**. Методў теории функций комплексного переменного. 4-нашри. –М., ”Наука”, 1973.

7. **Сидоров Ю.В**., **Федорюк М.В**., **Шабунин М.И**. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М. “Наука”, 1976.

8. **Маркушевич А.И.**, **Маркушевич Л.А**. Введение в теорию аналитических функций. -М., “Просвеқ ение”, 1977.