

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

**O.G.GAIMNAZAROV
O.N.DUSHABOEV
U.T.JALILOV**

MATEMATIKADAN MASALALAR TO'PLAMI
Akademik litseylar uchun
o'quv qo'llanma

GULISTON 2024

I BOB ALGEBRAIK TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR.

1.1 - § Tenglama. Tenglamaning ildizi. Algebraning asosiy teoremasi.

Tenglama. Harf bilan belgilangan noma'lum son qatnashgan tenglik **tenglama** deyiladi.

Masalan, $ax + b = 0$, bu yerda $a \neq 0$ va b – ixtiyoriy haqiqiy son. Tenglik belgisidan chap va o'ngda turgan ifodalar tenglamaning chap va o'ng qismlari deyiladi. Tenglamaning chap yoki o'ng qismidagi har bir o'shiluvchi tenglamaning hadi deyiladi.

Xususan, $3x + 5 = 0$, $x + 5 = 7x - 3$ va $F = mg$ larni ham misol qilib keltirish mumkin.

Tenglamarning paydo bo'lishida asosan, u yoki bu ijtimoiy yoki texnik masalalar sabab bo'ladi.

Masala. Olma nok birgalikda 17000 so'm turadi. Olma nokdan 9000 so'm arzon. Nokning bahosini toping.

Yechish. Nok x so'm tursin, u holda olma $(x - 90)$ so'm turadi. Masalaning shartiga ko'ra $(x + x - 9000) = 17000$, bundan $2x = 17000 + 9000$, $2x = 26000$, $x = 13000$.

Javob: Nok 13000 so'm turadi.

Ta'rif. Tenglamaning ildizi deb, noma'lumning shu tenglamani to'g'ri tenglikka aylantiradigan qiymatiga aytiladi.

Tenglama ikkita, uchta va hokazo ildizlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan,

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

tenglama ikkita ildizga ega: 5 va -2, chunki $x = 5$ va $x = -2$ da tenglama to'g'ri tenglikka aylanadi.

$$(x + 3)(x - 7)(x + 9) = 0$$

tenglama esa uchta ildizga ega: -3, 7 va -9.

Tenglama ildizlarining soni cheksiz ko'p bo'lishi mumkin.

Masalan, $4(x - 4) = 4x - 16$ tenglamaning ildizlari soni cheksiz ko'p: x ning istalgan qiymati tenglamaning ildizi bo'ladi, chunki har bir x da tenglamaning chap qismi o'ng qismiga teng.

Tenglama ildizlarga ega bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $3x - 7 = 3x + 2$ tenglamaning ildizlari yo'q, chunki x ning istalgan qiymatida bu tenglamaning chap qismi o'ng qismidan kichik bo'ladi.

Tenglamani yechish — uning barcha ildizlarini topish yoki ularning yoʻqligini koʻrsatish demakdir.

Koʻpgina amaliy masalalarni yechish

$$ax = b \quad (1)$$

koʻrinishdagi tenglamaga keltiriladi, bunda a va b — berilgan sonlar, x — nomaʼlum son. (1) tenglama **chiziqli tenglama** deb ataladi.

Algebraning asosiy teoremasi. Koʻphadlarning ildizlari bilan ish koʻrilganda, har qanday koʻphad ham ildizga ega boʻlaveradimi? Degan savol tugʻuladi. Koeffitsientlari haqiqiy boʻlib, haqiqiy ildizga ega boʻlmagan koʻphadlar mavjudligi maʼlum, $x^2 + 1$ ana shunday koʻphadlardan biridir. Koeffitsientlari ixtiyoriy kompleks (haqiqiy koeffitsientli koʻphadlar bularning xususiy holdir) sonlardan iborat boʻlgan koʻphadlar ichida ham ildizga ega boʻlmaganlari mavjudmi degan savol tugʻiladi? Shunday koʻphadlar mavjud boʻlganda edi, kompleks sonlar sistemasini kengaytirishga toʻgʻri kelar edi. Ushbu kompleks sonlar algebrasining asosiy teoremasi oʻrinlidir.

Teorema. Darajasi birdan kichik boʻlmagan, istalgan son koeffitsientli, har qanday koʻphad hech boʻlmaganda, umumiy holda bitta kompleks ildizga ega boʻladi.

Bu teorema matematikaning eng katta yutuqlaridan biri hisoblanadi va fanlarning xilma-xil sohalarida tatbiq qilinadi. Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Natija. n -darajali ($n \geq 1$) istalgan kompleks koeffitsientli koʻphad, xuddi n ta kompleks ildizga ega boʻladi. Bunda ildizlar necha karrali boʻlsa, xuddi shuncha marta sanaladi.

Algebraning asosiy teoremasi $n = 0$ boʻlganda ham oʻrinli, chunki 0-darajali koʻphad ildizlarga ega emas. Algebraning asosiy teoremasi darajasi aniqlanmagan nolga koʻphadgagina (nolga soniga) qoʻllanishi mumkin emas.

Tenglamalarning teng kuchliligi. Bir hil ildizlarga ega tenglamalar **teng kuchli** tenglamalar deyiladi.

Ildizga ega boʻlmagan har bir tenglama ham teng kuchli hisoblanadi. Tenglamani yechish jarayonida uni soddaroq, lekin berilgan tenglamaga teng kuchli boʻlgan tenglama bilan

almashtirishga harakat qilinadi. Shuning uchun har qanday shakl almashtirishlarda berilgan tenglama unga teng kuchli tenglamaga o'tishini bilish muhimdir.

Teorema: Agar tenglamada birorta qo'shiluvchini tenglamaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga ishorasini o'zgartirib o'tkazilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

Masalan,

$$5x - 13 = 16x - 7$$

tenglama

$$5x - 13 - 16x + 7 = 0$$

ga teng kuchlidir.

Teorema: Agar tenglamaning har ikkala tomonini noldan farqli bir songa ko'paytirilsa yoki bo'linsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

Masalan,

$$5x - 7 = \frac{10x - 3}{4}$$

tenglama

$$20x - 28 = 10x - 3$$

tenglamaga teng kuchli (birinchi tenglamaning har ikkala tomonini 3 ga ko'paytirildi).

Tenglamalarning asosiy xossalari. Tenglama tarkibidagi algebraik ifodalar ustida turli amallar bajarish mumkin. Bunda tenglamaning ildizlari o'zgarmaydi. Keng tarqalgan amallar quyidagilardir:

1. Tenglamaning har ikki tomoniga aynan bir xil **haqiqiy sonni** qo'shish mumkin.
2. Tenglamaning har ikki tomonidan aynan bir xil haqiqiy sonni ayirish mumkin.
3. Tenglamaning har ikki tomonini 0 dan boshqa har qanday haqiqiy songa bo'lish mumkin.
4. Tenglamaning har ikki tomonini har qanday haqiqiy songa ko'paytirish mumkin.

5. Tenglamaning istagan tomonida qavslarni ochish mumkin.

6. Tenglamaning istagan qismida o'xshash qo'shiluvchilarni keltirish mumkin.

7. Tenglamaning istalgan hadini bir qismdan ikkinchi qismga qarama-qarshi ishora bilan olib o'tish mumkin.

8. Ba'zi hollarda har ikki tomonga ayrim bir **funksiyalarni** qo'shish mumkin.

Bunday amal bajarayotganda tenglama ildizlari yo'qotilmasligiga e'tibor berish kerak. Masalan, $yx = x$ tenglamasida ikki guruh yechim bor: $y = 1$ (har qanday x bilan) va $x = 0$ (har qanday y bilan). Ikkala tomonni ikkinchi darajaga ko'tarish (ya'ni, ikki tomonga $f(s) = s^2$ funksiyasini kiritish) berilgan tenglamani $(yx)^2 = x^2$ qilib o'zgartiradi. Bu yangi tenglamada eski tenglamaning barcha ildizlari bilan birga yangi ildizlar ham bor: $y = -1$ va x har qanday son.

Masalan, $7x + 1 = 1 - x$ va keyingi qadamda $7x = x$ tenglama olinadi, bu yerda bir soni tashlab yuborildi.

MASHQLAR:

1. Chiziqli tenglamalarni yeching.

1) $3x + 1 = -48$; 2) $5x + 12 = -49$;

3) $3\frac{1}{2}x + 8 = 8$; 4) $3x + 5 = -4x - 16$;

5) $2,6x + 18x = -206$; 6) $x + 0,3x = 7\frac{1}{3}x - 48$;

7) $\frac{x}{1} + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x}{3 \cdot 4} + \frac{x}{5 \cdot 6} + \frac{x}{6 \cdot 7} = \frac{13}{49}$;

8) $\frac{x}{18} - \frac{2x - 3}{36} = \frac{x}{72} - \frac{5x - 14}{9}$.

2. Quyidagi tenglamalarni yechib, ularning ildizlari soni haqida hulosaga qiling.

1) $2,6x + 18 = -20 - 0,4x + 3x$; 2) $2x + 18 = 3^2 \cdot 2 - 0, (6)x + 2\frac{2}{3}x$;

3) $x + 18 = -20 + 0, (9)x$; 4) $-38 + 0, (2)x + 18 = -20 - \frac{5}{9}x + \frac{7}{9}x$.

3*. Tenglamani yeching

$$1) \frac{0,125x}{\frac{16}{24} - \frac{21}{40} \cdot 8 \frac{7}{16}} = \frac{1 \frac{28}{63} - \frac{17}{21} \cdot 0,7}{0,675 \cdot 2,4 - 0,02};$$

$$2) \frac{x}{10,5 \cdot 0,24 - 15,15 : 7,5} = \frac{9 \cdot 1 \frac{11}{90} - 0,45 : 0,9}{1 \frac{3}{40} - 4 \frac{3}{8} : 7}.$$

4. Tenglamani ildizini toping

$$1) 1 - \frac{x-3}{2} = \frac{2-x}{3} + 4; \quad 2) \frac{a+13}{10} - \frac{2a}{5} = \frac{3-a}{15} + \frac{a}{2};$$

$$3) 4 - x(x+8) = 11 - x^2; \quad 4) 4x(3x-1) - 2x(6x+8) = 5.$$

6. Tenglama ildizlari soni nechta?

$$1) x(x+1)(x+2)\dots(x+99) = 0;$$

$$2) (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\dots(x+99) = 0.$$

1.2 - § Umumlashgan Viyet teoremasi. Kvadrat uchhadni ko'paytuvchilarga ajratish

Umumlashgan Viyet teoremasi. Uchinchi darajali keltirilgan tenglama deb

$$x^3 + px^2 + tx + q = 0 \quad (1)$$

tenglamaga aytiladi.

Viyet teoremasi: agar x_1, x_2, x_3 -sonlari (1) tenglamaning ildizlari bo'lsa, u holda quidagilar o'rinli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = t \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -q \end{cases}$$

$$\text{Misol: } x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1 \end{cases}.$$

Ta'rif. n - darajali keltirilgan tenglama deb

$$x^n + px^{n-1} + tx^{n-2} + \dots + rx + q = 0 \quad (2)$$

tenglamaga aytiladi.

3. Ifodalarni soddalashtiring.

$$1) \frac{1}{x^2 - 25x + 156} + \frac{2}{x^2 - 144}; \quad 2) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} + \frac{2 - x}{x + 3};$$
$$3) \frac{5x + 1}{x^2 - 9x - 10} : \frac{2}{x^2 + 2x + 1}; \quad 4) \frac{(x - 3)(x - 13)}{x^2 - 25x + 156} \cdot \frac{x^2 - 144}{9 - x^2}.$$

4. Tengalmalarda haqiqiy ildizlari soni nechta?

$$1) x^4 + 17x^2 + 16 = 0; \quad 2) x^4 - 17x^2 + 16 = 0;$$
$$3) x^3 + 17x^2 + 16x - 34 = 0; \quad 4) x^3 + 3x^2 + 6x - 27 = 0;$$
$$5) x^3 - 6x^2 + 9x - 27 = 0; \quad 6) x^3 + 6x^2 + 9x + 27 = 0.$$

5. Tenglamalarni yeching.

$$1) x^4 + 16 = 0; \quad 2) x^4 - 17x^2 + 16x = 0;$$
$$3) x^3 + 5x^2 + 4x - 10 = 0; \quad 4) x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0;$$
$$5) x^3 - 6x^2 + 9x - 27 = 0; \quad 6) x^3 + 6x^2 + 9x + 27 = 0.$$

6. $-1; 2; -3$ - sonlari $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ tenglama ildizlari bo'lsa, u holda quyidagilarni toping.

$$1) p + r; \quad 2) p^2 + 3r;$$
$$3) p^2 - 3qr; \quad 4) p^4 - 3r^2.$$

7. $-1; 2; -3$ va 1 - sonlari $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$ tenglama ildizlari bo'lsa, u holda quyidagilarni toping.

$$1) p, q, r, t; \quad 2) p^2 - 2t;$$
$$3) p^2 - 3qr; \quad 4) p^4 - 3t^2.$$

1.3 - § Bikvadrat tenglamalarni yechish. Tengalamalarda o'zgaruvchini almashtirish usuli. Qaytma tenglamalar.

Bikvadrat tenglamalarni yechish. Bikvadrat tenglama deb, odatda $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Yechish usuli: $x^2 = y$ deb belgilansa, $ay^2 + by + c = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechib, y_1 va y_2 ildizlarni topamiz. Topilgan y_1 va y_2 ni belgilashga ketma-ket qo'yib, 1) $x^2 = y_1$ va 2) $x^2 = y_2$ tenglamalarni hosil qilamiz.

1) Agar y_1 va y_2 larning ikkalasi ham musbat bo'lsa berilgan tenglama 4 ta haqiqiy ildizga ega bo'ladi.

2) Agar ulardan biri musbat ikkinchisi manfiy bo'lsa berilgan tenglama faqat 2 ta haqiqiy ildizga ega bo'ladi.

3) Agar y_1 va y_2 manfiy bo'lsa berilgan tenglama umuman, haqiqiy ildizga ega bo'lmaydi.

Misol: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$, $x^2 = y$ deb belgilasak $y^2 - 7y + 12 = 0$
 $D = 49 - 48 = 1$.

$$y_1 = \frac{7+1}{2} = 4, \quad y_2 = \frac{7-1}{2} = 3.$$

1) $x^2 = y_1$, $x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

2) $x^2 = y_2$, $x^2 = 3$, $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$.

Misol: $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$, $x^2 = y$ deb belgilasak,
 $9y^2 + 5y - 4 = 0$ bu yerda, $D = 25 + 144 = 169$ ga teng.

$$y_1 = \frac{-5+13}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}, \quad y_2 = \frac{-5-13}{18} = -1.$$

$$x^2 = y_1, \quad x^2 = \frac{4}{9}, \quad x_1 = \frac{2}{3} \quad \text{va} \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$x^2 = y_2, \quad x^2 = -1, \quad -1 < 0 \quad \text{va} \quad \text{bu holda haqiqiy ildiz yo'q.}$$

Misol: $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$, $x^2 = y$ deb belgilasak
 $y^2 + 5y + 6 = 0$ va $D = 25 - 24 = 1$ ga teng.

$$y_1 = \frac{-5+1}{2} = -2, \quad y_2 = \frac{-5-1}{2} = -3.$$

1) $x^2 = y_1$, $x^2 = -2$, $-2 < 0$,

2) $x^2 = y_2$, $x^2 = -3$, $-3 < 0$ ikkala holda ham yechim

mavjud emas.

Tenglamalarda o'zgaruvchini almashtirish usuli.
Qaytma tenglamalar.

Misol. Ushbu $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglama $x \neq \pm 1$, $x \neq \pm 2$ bo'lganda aniqlangan.

Tenglamaning har ikkala qismini $\frac{x^2-4}{x^2-1}$ ga bo'lamiz va

$$20 \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} - 5 \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} + 48 = 0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamada $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = t$ belgilash

kiritib, $20t^2 + 48t - 5 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Uning yechimlari:

$$t_1 = -\frac{5}{2}; \quad t_2 = \frac{1}{10}.$$

Bu yechimlardan foydalanib, x o'zgaruvchiga qaytamiz:

1) $t_1 = -\frac{5}{2}$ bo'lganda $7x^2 + 9x + 14 = 0$ tenglamani olamiz va uning ildizlari

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm i\sqrt{311}}{14}.$$

2) $t_2 = \frac{1}{10}$ bo'lganda $3x^2 - 11x + 6 = 0$ tenglamani olamiz va uning ildizlari

$$x_3 = 3; \quad x_4 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Javob: } x_1 = \frac{-9 - i\sqrt{311}}{14}; \quad x_2 = \frac{-9 + i\sqrt{311}}{14}; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = \frac{2}{3}.$$

Misol. Ushbu $x^6 - 64 = 0$ tenglamani to'liq kvadrat ajratish usuli bilan yeching.

Yechish: $(x^3)^2 - 8^2 = 0$; $(x^3 - 8)(x^3 + 8) = 0$; $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$;

1) $x - 2 = 0$ tenglamadan $x_1 = 2$ yechim olinadi.

2) $x + 2 = 0$ tenglamadan $x_2 = -2$ yechim olinadi.

3) $x^2 + 2x + 4 = 0$ tenglamadan

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} \text{ yechimlar topiladi.}$$

4) $x^2 - 2x + 4 = 0$ tenglamadan

$$x_{5,6} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3} \text{ ildizlarni hosil qilamiz.}$$

Javob: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1 - i\sqrt{3}$; $x_4 = -1 + i\sqrt{3}$; $x_5 = 1 - i\sqrt{3}$ va

$x_6 = 1 + i\sqrt{3}$.

Misol. Ushbu $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$ qaytma tenglamani yeching.

$$\text{Yechish: } x^2 + \frac{1}{x^2} + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0;$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0;$$

$x + \frac{1}{x} = t$ deb almashtirish kiritamiz. Natijada quyidagi kvadrat tenglamani hosil qilamiz: $t^2 + 5t - 14 = 0$. Bu tenglamaning yechimlarini topamiz:

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2}$$

bundan $t_1 = -7$; $t_2 = 2$.

Bu topilgan qiymatlardan $x_{1,2,3,4}$ qiymatlarni topamiz:

1) $t_1 = -7$ bo'lganda $x + \frac{1}{x} = -7$ bo'lib, $x^2 + 7x + 1 = 0$ kvadrat

tenglamani olamiz. Uning ildizlari $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4}}{2} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

2) $t_2 = 2$ bo'lganda $x + \frac{1}{x} = 2$ bo'lib, $x^2 - 2x + 1 = 0$ tenglamadan $(x - 1)^2 = 0$ tenglamaga kelamiz va $x_{3,4} = 1$ ildizlarni olamiz.

Javob: $x_1 = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = 1$.

Ta'rif. Ushbu

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi butun algebraik tenglama **qaytma tenglama** deyiladi.

Bunda tenglamaning boshidan va oxiridan bir xil uzoqlikda yotgan hadlarning koeffitsientlari bir-biriga teng bo'ladi. Qaytma tenglamaning ildizlaridan hech biri nolga teng emasligini ko'rish oson.

Agar $x = 0$ tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda biz $a = 0$ ga ega bo'lamiz va tenglamaning darajasi pastroq bo'ladi.

Oldin juft ($n = 2k$) darajali qaytma tenglamani qaraymiz.

Tenglamaning har ikkala qismini x^k ga bo'lib, hadlarni guruhlash natijasida uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$a\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + b\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \dots + l\left(x + \frac{1}{x}\right) + f = 0. \quad (2)$$

Agar (5) tenglamada $x + \frac{1}{x} = y$ desak, ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y; \dots \quad (3)$$

(6) ni (5) ga qo'yib, y ga nisbatan k darajali tenglamani hosil qilamiz. x ning qiymatlarini esa $x^2 - yx + 1 = 0$ tenglamadan topamiz.

Toq darajali ($n = 2k + 1$) qaytma tenglamani yechish juft darajali qaytma tenglamani yechishga keltiriladi.

Ushbu $ax^{2k+1} + bx^{2k} + cx^{2k-1} + \dots + cx^2 + bx + a = 0$ tenglamaning $x = -1$ ildizga ega ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, -buning chap qismi $x + 1$ ga bo'linadi. Tenglamaning ikkala qismini har biri $x + 1$ ga bo'linadigan qo'shiluvchilar yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$a(x^{2k+1} + 1) + bx(x^{2k-1} + 1) + cx^2(x^{2k-3} + 1) + \dots + lx^k(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)(ax^{2k} + b_1x^{2k-1} + \dots + b_1x + a) = 0.$$

Shunday qilib, masala juft ko'rsatkichli ushbu $ax^{2k} + b_1x^{2k-1} + \dots + b_1x + a = 0$ qaytma tenglamani yechishga keltiriladi.

Qaytma tenglamaning yana o'ziga xos bir xususiyati bor. Agar $x = x_0$ soni qaytma tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda $x = \frac{1}{x_0}$ soni ham shu tenglamaning ildizi bo'ladi.

Misol. $21x^6 + 82x^5 + 103x^4 + 164x^3 + 103x^2 + 82x + 21 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamaning har ikkala qismini x^3 ga bo'lamiz:

$$21\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 82\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 103\left(x + \frac{1}{x}\right) + 164 = 0.$$

Agar $x + \frac{1}{x} = t$ desak, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ bo'ladi.

Natijada t ga nisbatan tenglamaga ega bo'lamiz:

$$21t^3 + 82t^2 + 40t = 0 \Rightarrow t(21t^2 + 82t + 40) = 0.$$

Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi: $t_1 = 0$ va $21t^2 + 82t + 40 = 0$. Bu tenglamalarni yechib, ildizlarni topamiz: $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{4}{7}$, $t_3 = -\frac{10}{3}$.

Agar: 1) $t_1 = 0$ bo'lsa, $x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Uning ildizlari: $x_1 = -i$, $x_2 = i$.

2) $t_2 = -\frac{4}{7}$ bo'lsa, $7x^2 + 4x + 7 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

Uning ildizlari: $x_3 = \frac{-2 - 3i\sqrt{5}}{7}$; $x_4 = \frac{-2 + 3i\sqrt{5}}{7}$.

3) $t_3 = -\frac{10}{3}$ bo'lsa, $3x^2 + 10x + 3 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

Uning ildizlari: $x_5 = -\frac{1}{3}$; $x_6 = -3$.

Javob: $x_1 = -i$; $x_2 = i$; $x_3 = \frac{-2 - 3i\sqrt{5}}{7}$; $x_4 = \frac{-2 + 3i\sqrt{5}}{7}$;

va $x_5 = -\frac{1}{3}$; $x_6 = -3$.

Ushbu $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + l = 0$ ($l \neq 0$) tenglama qaytma tenglama bo'lishi uchun uning koeffitsientlari quyidagicha bog'langan bo'lishi kerak:

$$d = \lambda b, l = \lambda^2 a.$$

Bunday holda berilgan tenglama $y = x + \frac{\lambda}{x}$ almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keladi.

Ushbu

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m \quad (4)$$

tenglamani qaytma tenglamaga keltirish uchun uning koeffitsientlari orasida $a + b = c + d$ (yoki $a + c = b + d$, yoki $a + d = b + c$) tenglik bajarilishi kerak.

Ushbu

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 = c \quad (5)$$

ko'rinishdagi tenglama

$$x = t - \frac{a+b}{2} \quad (6)$$

almashtirish bilan bikvadrat tenglamaga keltiriladi. Haqiqatan, berilgan tenglamada $x + a = t + m$, $x + b = t - m$ almashtirishlarni bajarsak,

$a - b = 2m$, $m = \frac{a-b}{2}$ bo'ladi. Bunday holda $x + a = t + \frac{a-b}{2}$ yoki $x = t - \frac{a-b}{2}$. Natijada (5) tenglama t ga nisbatan quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c.$$

Bu tenglamani soddalashtirgandan keyin esa $t^4 + 6\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 t^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = \frac{c}{2}$ bikvadrat tenglamani olamiz.

Ushbu

$$\frac{dx}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + mx + q} = c \quad (7)$$

ko'rinishdagi tenglama

$$px + \frac{q}{x} = t \quad (8)$$

almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keladi. Agar $c = 0$ bo'lsa, u holda (10) tenglama $x_1 = 0$ ildizga ega bo'ladi. Qolgan ildizlari x ga nisbatan kvadrat tenglamaga keltirib topiladi.

Agar $c \neq 0$ bo'lsa, u holda $x \neq 0$ bo'lib, bunday holda (10) tenglama chap qismining surat va maxrajini x ga bo'lib, uni

$\frac{a}{px + n + \frac{q}{x}} + \frac{b}{px + m + \frac{q}{x}} = c$ ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamada

$px + \frac{q}{x} = t$ almashtirish bajarsak, $\frac{a}{t+n} + \frac{b}{t+m} = c$ tenglamani olamiz.

Oxirgi tenglama $t \neq n$, $t \neq m$ shartlarda

$ct^2 + (mc + nc - a - b)t + mnc - am - bn = 0$ kvadrat tenglamaga keladi.

MASHQLAR:

1. Tenglamani yeching.

1) $x^4 - 15x^2 + 14 = 0$;

2) $7x^4 + 5x^2 - 12 = 0$;

3) $6x^4 - 15x^2 - 19 = 0$;

4) $16x^4 - 25x^2 - 41 = 0$;

5) $x^8 - 12x^2 - 2 = 0$;

6) $x^8 + 7x^2 - 2 = 0$;

7) $x^6 - 4x^3 + 4 = 0$;

8) $x^{12} - 5x^6 + 4 = 0$;

9) $5x^{18} - 6x^9 + 1 = 0$;

10) $x^{10} - 14x^5 - 51 = 0$.

2. Qaytma tenglamalarni yeching.

1) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 3x + 1 = 0$;

2) $7x^3 + 5x^2 + 5x + 7 = 0$;

3) $6x^4 - 15x^2 + 6 = 0$;

4) $3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = 0$;

5) $5x^2 - 12x + 5 = 0$;

6) $x^3 + 7x^2 + 7x + 1 = 0$;

7) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$;

8) $4x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x + 4 = 0$.

3. Tenglamani yeching.

1) $(x-1)^4 - 14(x-1)^2 - 51 = 0$;

2) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^4 + 8\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 9 = 0$;

3) $5(5x-2)^8 + 9(5x-2)^4 + 4 = 0$;

4) $7(2x-5)^8 - 9(2x-5)^4 + 2 = 0$.

4. Tenglamani yeching.

1) $(x-2)^4 + (x-4)^4 = 8$;

2) $(x+2)^4 + (x-4)^4 = 6$;

3) $(x+5)^4 + (x+7)^4 = 12$;

4) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^4 = 4$.

5. Tenglamani yeching.

1) $\frac{x}{2x^2 + 3x + 1} + \frac{2x}{2x^2 + 4x + 1} = \frac{19}{42}$;

2) $\frac{x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 1} = 0.75$.

1.4 - § Determinant haqida tushuncha. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss va Kramer usullarida yechish. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

Ta'rif. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ son **ikkinchi tartibli determinant**

deyiladi. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$ son

uchinchi tartibli determinant deyiladi (hisoblash qoidasi o'ng tomonida tuzilgan hadlar tuzilishi qoidasidan iborat).

Misol. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 15 + 2 = 17.$

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 6 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) - (-2) \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \cdot (3) - 6 \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$= -15 + 72 + 40 = 97.$$

Chizikli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish.

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ sistema berilgan bo'lsa, uning yechimi

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ bo'ladi, bu yerda $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Misol. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ sistemani yeching.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -7; \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4;$$

$$x = \frac{-27}{-7} = 3\frac{6}{7}; y = -\frac{4}{7}.$$

Javob. $\left(3\frac{6}{7}; -\frac{4}{7}\right).$

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ sistemaning yechimi

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ bo'lib,

sistemasini elementar almashtirishlar yordamida, uchburchak yoki trapetsiya shakliga keltirish mumkin. Faraz qilaylik, $a_{11} \neq 0$ bo'lsin(aks holda tenglamalar o'rnini almashtirish mumkin).

Birinchi tenglamani $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ga ko'paytirib 2-tenglamaga, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ga

ko'paytirib 3-tenglamaga va hakozi $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ ga ko'paytirib m -

tenglamaga qo'shamiz va quyidagi ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array} \right. \quad (5)$$

Bunda $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib, 2-tenglamani $-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ ga

ko'paytirib i -tenglamaga qo'shamiz va 3-dan boshlab barcha tanglamalardan x_2 noma'lum yo'qoladi. Bu usulni $m - 1$ marta qo'llab, quyidagi ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(1)}x_k + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \\ 0 = b_{k+1}^{(k-1)} \\ \dots\dots\dots \\ 0 = b_m^{(k-1)} \end{array} \right. \quad (6)$$

Agar bu matritsada $b_{k+1}^{(k)}, b_{k+2}^{(k+1)}, \dots, b_m^{(m-1)}$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, (4) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Agar $b_{k+1}^{(k)}, b_{k+2}^{(k+1)}, \dots, b_m^{(m-1)}$ larning barchasi nolga teng bo'lsa, berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'ladi va bunda ikki hol bo'lishi mumkin. Birinchi holda, (6) sistema uchburchak shaklga keladi, ya'ni $k = n$ va sistema yagona yechimga ega. Yechimlarni aniqlashda oxirgi tenglamadan oxirgi noma'lumni topishdan boshlanadi, topilganlarni bitta oldinga tenglamaga qo'yib bitta oldingi noma'lum topiladi va bu jarayon birinchi

noma'lum topilguncha davom ettiriladi. Ikkinchi holda, (6) sistema trapetsiya shaklga keladi va sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Oxirgi tenglamadagi birinchi noma'lumdan boshqa barcha noma'lumlarni erkli son deb, barcha tenglamalarda tenglikning o'ng tomoniga o'tkaziladi va qolgan noma'lumlar uchbuchak shakldagi kabi aniqlanadi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechishda uning matritsaviy yozuvidan foydalanish qulay.

Misol. Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y - 3z = -3 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

Berilgan tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasini -2 va -3 ga ko'paytirib, mos ravishda 2- va 3-tenglamalarga qo'shamiz.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -5z = -15 \\ -4y - z = -5 \end{cases}$$

Bu holda, 2- va 3-tenglamalar o'rinlarini almashtiramiz, chunki $a_{22}^{(1)} = 0$.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -4y - z = -5 \\ -5z = -15 \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan oxirgi noma'lumni topamiz.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4y + z = 11 \\ z = 3 \end{cases}$$

So'ngra, $z = 3$ ni ikkinchi tenglamaga qo'yib, y ni topamiz:

$$4y + 3 = 11, y = 2.$$

Endi $y = 2$ va $z = 3$ ni 1- tenglamaga qo'yib, x ni topamiz:

$$x + 2 + 3 = 6, x = 1.$$

Demak, $x = 1, y = 2, z = 3$.

MASHQLAR:

1. Determinantlarni hisoblang.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} 14 & 28 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. Quyidagi sistemalarni Kramer va Gauss usullarida yeching.

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - y = 7 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 4x + 5y = 18 \\ x - 2y = -2 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 4y = 7 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x + 5y = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x - y = 6 \end{cases}.$$

3. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$1) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + z = 8 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ 5x + 3y = -1 \\ x + 4z = 9 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 11 \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

4. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$1) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + 5y + z = 3 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 5x + 3y = 3 \\ x + y + 4z = 5 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 7x - y + 2z = 13 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ -2x + 3y + 4z = 2 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y + 2z = -2 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

5. Determinantlarni hisoblang.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -15 & 7 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -12 & 3 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & 2 \\ ab & 1 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 21 & 2 & 783 \\ 0 & -42 & 155 \\ 0 & 0 & -84 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 11 & 2565 & 1243 \\ 0 & -8 & 5875 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 7 & 3,5 & 5 \\ 3 & 1,5 & -2 \end{vmatrix}$$

6. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$1) \begin{cases} x + 5y - z = 7 \\ x - y + 2z = -2 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 5x + 3y = 11 \\ x + y + 4z = 3 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 7x - y + 2z = 50 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ -2x + 3y + 4z = -7 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

7. Tenglamalarni yeching.

$$1) \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

1.5-§ Tenglamalar sistemalarini yechishning maxsus usullari. Yuqori darajali tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari.

Umumiy holatda bir nechta noma'lumli yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechish masalasi juda qiyin, ko'pincha elementar algebra yordamida hal qilishga imkon bermaydi. Biroq, ko'p hollarda tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechishning ma'lum usullarini– qo'shish va ayirish, noma'lumni almashtirish orqali yo'q qilish, yangi noma'lumni kiritish usullarini birlashtirib, sistemani yechish yo'lini topish mumkin. Ammo har bir alohida muammoda muvaffaqiyatli hal qilish usulini topish uchun uning o'ziga xos xususiyatlaridan foydalanish kerak. Keling, bir nechta misollarni ko'rib chiqaylik.

Masala. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 18 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Yechish. 1-usulda avvalgidek oddiy tarzda ikkinchi tenglamadan $y = 3 - x$ ni topib, sistemaning birinchisiga qo'ysak, $x^3 + (3 - x)^3 = 18$ ni hosil qilamiz va uni yechib, dastlab, x ni topamiz va uni $y = 3 - x$ ga qo'yib umumiy yechimlarni avvalgidek topib olish mumkin.

2-usul. $x^3 + y^3 = 18$ ni quyidagicha yozib olaylik, ya'ni

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) = 18$$

Sistema ikkinchi tenglamasiga e'tibor qaratib, $27 - 9xy = 18$ ni olamiz va uni soddalashtirib, $xy = 1$ ni hosil qilamiz.

Yuqoridagilardan kelib chiqib

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini tuzamiz. Uni avvalgi usullarda yechib,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ y_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

yechimlarni olamiz.

Masala. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} (x + 1)^2 (y + 1)^2 = 27xy \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10xy \end{cases}$$

Yechish. Birinchi va ikkinchi tenglamalarda har bir qavsni ochib chiqamiz. Keyin har birining ikkala tomonini xy ga bo'lib yuborib,

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) \left(y + \frac{1}{y} + 2\right) = 27 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) = 10 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Ular uchun $x + \frac{1}{x} = z$ va $y + \frac{1}{y} = t$ yangi belgilashlarni kiritamiz. Yangi o'zgaruvchilarga almashtirilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} (z+2)(t+2) = 27 \\ zt = 10 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib,

$$z_1 = \frac{5}{2}, t_1 = 4, z_2 = 4, t_2 = \frac{5}{2}$$

yechimlarni olamiz.

$x + \frac{1}{x} = z$ va $y + \frac{1}{y} = t$ tenglamalarga z va t ning qiymatlarini

ketma-ket qo'yib ushbu yechimlar juftlarini olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ y_3 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = \frac{1}{2} \\ y_4 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}, \\ \begin{cases} x_5 = 2 + \sqrt{3} \\ y_5 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_6 = 2 - \sqrt{3} \\ y_6 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_7 = 2 + \sqrt{3} \\ y_7 = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_8 = 2 - \sqrt{3} \\ y_8 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Masala. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a - yz \\ y(x+y+z) = b - xz \\ z(x+y+z) = c - xy \end{cases}$$

Yechish: Yuqoridagi sistemani quyidagicha ham yozib olish mumkin:

$$\begin{cases} (x+z)(x+y) = a \\ (y+z)(y+x) = b \\ (z+x)(z+y) = c \end{cases}$$

Sistemaning uchchala tenglamasini o'zaro ko'paytirib, va natijaning ikkala tomonidan kvadrat ildiz chiqarib, quyidagini olamiz:

$$(x+z)(x+y)(y+z) = \pm\sqrt{abc}.$$

Bundan esa,

$$(y+z) = \pm \frac{\sqrt{abc}}{a}; (x+z) = \pm \frac{\sqrt{abc}}{b}; (x+y) = \pm \frac{\sqrt{abc}}{c}$$

larni hosil qilamiz. Ularni hadma had qo'shib yuborib,

$$x+y+z = \pm \sqrt{abc} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

ni hosil qilamiz. Lekin,

$$y+z = \pm \frac{\sqrt{abc}}{a}$$

bo'lgani uchun, x ning qiymati hosil bo'ladi:

$$x = \pm \frac{\sqrt{abc}}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right).$$

Huddi shu tarzda keyingi ildizlarni topamiz:

$$y = \pm \frac{\sqrt{abc}}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right); z = \pm \frac{\sqrt{abc}}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right).$$

Yuqoridagi yechimlar uchligida bir vaqtda "+" yoki bir vaqtda "-" ishorani olish lozim.

MASHQLAR:

1. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$1) \begin{cases} x+y+z = a \\ x+y+v = b \\ x+z+v = c \\ y+z+v = d \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} \frac{xy}{ay+bx} = c \\ \frac{xz}{az+cx} = b; \\ \frac{yz}{bz+cy} = a \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x(x+y+z) = a^2 \\ y(x+y+z) = b^2; \\ z(x+y+z) = c^2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y + 2x + z = a(y + x)(z + x) \\ x + y + z = b(y + z)(y + x) ; \\ x + y + z = c(y + z)(z + x) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y + z + yz = a \\ x + z + xz = b ; \\ x + y + xy = c \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} yz = ax \\ xz = by \\ xy = cz \end{cases} \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$$

$$7) \begin{cases} x(y + z) = a^2 \\ y(x + z) = b^2 ; \\ z(x + y) = c^2 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^3 = ax + by \\ y^3 = bx + ay ; \end{cases}$$

2. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = cxyz \\ x^2 + z^2 = bxyz ; \\ y^2 + z^2 = cxyz \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = c^2 \\ z^2 + x^2 + xz = b^2 ; \\ y^2 + z^2 + yz = a^2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 ; \\ x + y + z = a \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 + v^4 = a^4 \\ x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = a^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = a^2 \cdot \\ x + y + z + v = a \end{cases}$$

1.6 - § Tenglamalarga olib kelinadigan matnli masalalar. Harakatga oid masalalar. Ishga doir masalalar. Foizga, aralashmalarga oid masalalar. Boshqa turdagi matnli masalalar.

Tenglamalarga olib kelinadigan matnli masalalar. Harakatga oid masalalar. Matematika kursida matnli masalalar juda ko'p uchraydi. Ularni yechish ba'zida o'quvchilarda qiyinchilik tug'diradi. Agar matnli masalaga oid aniq tenglama tuzilmasa uni yechimi hatto bo'ladi.

Maktab matematika kursida matnli masalalar odatda quyidagi usullar yordamida yechiladi:

1. Kesimlar usuli
2. Arifmetik usul
3. Tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi

Biz masalalarni asosan, 3-usul tenglamalar yoki tenglamalar sistemasiga keltirish orqali yechish usulini bu mavzuda ko'rib chiqamiz.

Harakatga oid masalalar.

Bunda biz 3 xil tipdagi harakatga oid masalalarni qaraymiz:

- I. Quruqlikda harakatlanuvchi vositalar: Poyezd, avtomobil, velosiped,
- II. Suvda harakatlanuvchi vositalar: paroxod, kater, sol,
- III. Quruqlikda harakatlanuvchi jonli vositalar: odam, turli hayvonlar,

Bu mavzudagi masalalarni yechish uchun quyidagilarni bilish muhim:

1) agar yo'l - S , vaqt - t , tezlik - v deb belgilansa $v = \frac{S}{t}$, $S = vt$ $t = \frac{S}{v}$ bo'ladi.

Matematik masalalar yechishda biz S , v , t ko'rinishdagi belgilash- lardan foydalanishimiz shart emas. Masala berilganda iloji boricha topish kerak bo'lgan kattalikni x deb belgilab, boshqa kattaliklarni ham shu x ga bog'lab olib, tenglama tuzishga to'g'ri keladi.

Ayrim masalalarda vaqtlarni tenglashda ayrimlarida vaqtlar ayirmasini yoki yig'indisini qarashga to'g'ri keladi. Ayrim

masalalarda bosib o'tilgan yo'llarni tenglash yoki yo'llar yig'indisi, ayirmasini qarashga to'g'ri keladi. Xuddi shuningdek tezliklarni tenglash, yoki tezliklar yig'indisi, ayirmasini qarash kerak bo'ladi.

2) A va B shaharlardan 2 ta avtomobil tezliklar bilan bir biriga qarab harakatlansa va shaharlar orasidagi masofa s bo'lsa avtomobillar t soatda uchrashsa quyidagi tenglama tuzish mumkin $S = v_1t + v_2t$.

3) Oralaridagi masofa S bo'lgan A va B shaharlardan bir tomonga qarab tezliklar bilan harakatlanayotgan vositalar t soatda uchrashsa ushbu tenglik o'rinli $S = v_1t - v_2t$ $v_2 > v_1$.

4) bir - biriga qarab v_1 va v_2 tezliklar bilan harakatlanayotgan avto- mobillarning yaqinlashish tezligi $v_1 + v_2 = v$.

(uzoqlashish tezligi ham $v_1 + v_2 = v$ bo'ladi) agar masofa S bo'lsa ular $t = \frac{S}{v_1 + v_2}$.

5) Teploxodning xususiy tezligi deb - uning ko'ldagi, yani sokin suvdagi tezligiga aytiladi. Faraz qilaylik teploxodning xususiy tezligi x bo'lsin. Daryo oqimining tezligi a bo'lsin. Teploxodning oqim bo'yicha tezligi $v = x + a$, teploxodning oqimga qarshi tezligi $v = x - a$.

6) Sol ko'lda va daryoda oqimga qarshi suza olmaydi. Sol faqat oqim bo'yicha harakatlanishi mumkin va solning tezligi oqim tezligiga teng bo'ladi.

7) Tenglama tuzayotganda, uning chap va o'ng qismlaridagi kattaliklar bir xil o'lchovda bo'lishi kerak.

8) 1 min - 1km/60 soat

k min - km/60 soat

Masala. Poyezd yo'lda 30 minut to'xtab qoldi. Poyezd jadval bo'yicha yetib kelishi uchun mashinist qolgan masofada tezligini $8 \frac{km}{soat}$ ga oshirdi. Poyezd jadval bo'yicha qanday tezlik bilan yurishi kerak edi?

Yechish: Poyezd jadval bo'yicha tezligi $x \frac{km}{soat}$ bo'lsin, harakat vaqti $\frac{80}{x}$ soat bo'ladi. Keyingi tezligi $(x + 8) \frac{km}{soat}$ bo'ladi va harakat vaqti $\frac{80}{x+8}$ soatga bosib o'tadi. 30 minut = $\frac{30}{60}$ soat = $\frac{1}{2}$ soat .

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+8} = \frac{1}{2}, \quad \frac{80(x+8-x)}{x(x+8)} = \frac{1}{2}, \quad 1280 = x^2 + 8x, \quad x^2 + 8x - 1280 = 0,$$

$x_1 = -40$ chet ildiz, $x_2 = 32$, $J : 32$.

Masala. Teploxod oqim bo'yicha A pristandan B (ga) pristanga bordi. Teploxod yarim soat to'xtagandan keyin orqaga qaytdi va A dan chiqqanidan 8 soat o'tgandan so'ng shu pristanga qaytib keldi. Agar A va B pristanlar orasidagi masofa 36 km, daryo oqimining tezligi $2 \frac{km}{soat}$ gat eng bo'lsa, teploxodning turg'un suvdagi tezligini toping.

Yechish: teploxodning turg'un suvdagi tezligi $x \frac{km}{soat}$ bo'lsin, Teploxodning oqim bo'yicha tezligi $(x + 2) \frac{km}{soat}$ bo'ladi. Teploxodning oqimga qarshi tezligi $(x - 2) \frac{km}{soat}$ bo'ladi.

$$30 \text{ minut} = \frac{1}{2} \text{ soat}$$

Mos tenglamani tuzamiz:

$$\frac{36}{x+2} + \frac{1}{2} + \frac{36}{x-2} = 8 \text{ va udan } \frac{36}{x+2} + \frac{36}{x-2} = \frac{15}{2} \text{ ni hosil qilamiz,}$$

keyin uni soddalashtirib, $72(x-2) + 72(x+2) = 15(x^2 - 4)$ ni olamiz va uni soddalashtirib, $15x^2 - 144x - 60 = 0$ ga kelamiz. Unig ikkala tomonini 3 ga bo'lib, $5x^2 - 48x - 20 = 0$ ni olamiz va uni yechib (manfiy ildizni tashlab yuborib) $x = \frac{48+52}{10} = 10$ ni olamiz.

$$J: x = 10 \frac{km}{soat}.$$

1 - eslatma: Ayrim masalalarni yechishda tenglama tuzmasdan sodda mulohaza yuritib sonli ifodalar yordamida javobni topish mumkin.

Masala. Kema oqim bo‘ylab A portdan B portgacha 2 sutka, B dan A gacha 3 sutkada yetadi. Sol A dan B gacha necha sutkada yetadi?

Yechish: A dan B gacha masofa a ga teng bo‘lsin. Bu masofani sol x sutkada bosib o‘tsin, demak uning tezligi $\frac{a}{x}$ km/sutka bo‘ladi.

Shartga ko‘ra, oqim bo‘ylab harakat qilayotgan kemaning tezligi $\frac{a}{2}$ km/sutka, turg‘un suvdagi tezligi esa $\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{x}\right)$ km/sutka bo‘ladi.

Shunga o‘xshash, oqimga qarshi harakatdagi kemaning tezligi $\frac{a}{3}$ km/sutka bo‘lib, turg‘un suvdagi tezligi $\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{x}\right)$ km/sutka bo‘ladi.

Bularni tenglashtirib $\frac{a}{2} - \frac{a}{x} = \frac{a}{3} + \frac{a}{x}$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib $x = 12$ ni topamiz.

Javob: 12 sutka.

Ishga doir masalalar. Foizga, aralashmalarga oid masalalar. Agar ishga oid masalalarda ish hajmi berilmasa ish hajmini 1 ga teng deb olish kerak.

Masala: Biror ishni Ali a kunda bajarsa, bir kunda shu ishning $\frac{1}{a}$ qismini bajaradi. Shu ishni Vali b kunda bajarsa, bir kunda $\frac{1}{b}$ qismini bajaradi. Shu ishni ikkalasi birgalikda c kunda bajarsa, bir kunda shu ishning $\frac{1}{c}$ qismini bajaradi.

Quyidagi jadvalni tuzish mumkin.

	Jami	1kunda
Ali	a	$1/a$
Vali	b	$1/b$
Birgalikda	c	$1/c$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Bu jadvalda shu mavzudagi deyarli barcha masalalarni avvalgi mavzudagi eskalatorga bog‘liq masalalar bajariladi.

Masala: Birinch va ikkinchi birgalikda quvur hovuzni 12 soatda to'ldiradi. Birinch va uchinchi birgalikda quvur hovuzni 15 soatda to'ldiradi. Ikkinchi va uchinchi quvur hovuzni birgalikda 20 soatda to'ldiradi. Agar uchulasi burdaniga ishlasa hovuzni necha soatda to'ldiradi.

Yechish:

1- quvur hovuzni x soatda to'ldirsa: 1soatda hovuzning $\frac{1}{x}$ qismini

2- quvur y soatda to'ldirsa: 1soatda hovuzning $\frac{1}{y}$ qismini

3- quvur z soatda to'ldirsa: 1soatda hovuzning $\frac{1}{z}$ qismini to'ldiradi

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$$

J: 10 kunda .

Prosentga oid masalalar. Prosent so'zi lotincha "prosentum" so'zidan kelib chiqqan bo'lib, "yuzdan bir" degan ma'noni bildiradi.

Ta'rif. Sonning 1 prosent deb – uning 100 dan bir qismiga aytiladi. Prosent so'zi o'rniga qisqacha % belgisi yoziladi.

Demak: 100% – 1 soni deganidir.

Masala: a) 800% ning 1%i $\frac{800}{100} = 8$ ga teng b) 324 ning 1%i

$$\frac{324}{100} = 3,24 \text{ ga teng.}$$

Prosentga oid quyidagicha masalalar yechiladi.

Berilgan a sonining $k\%$ ini topish masalasi

Bu masala 2 xil usulda: sonli ifoda tuzib yoki proporsiya shaklidagi soda tenglama tuzib yechiladi.

Masala: 740 ning 15%ni toping.

I - usul: $(740 : 100) \cdot 15 = 17,4 \cdot 15 = 111$

II - usul:

740 – 100%

$$x - 5\% \quad \frac{740}{x} = \frac{100}{15}, \quad x \cdot 100 = 740 \cdot 15, \quad x = 111.$$

$k\%$ i a ga teng bo'lgan sonning o'zini topish.

Masala: 13%i 78 ga teng bo'lgan sonni toping.

I - usul: $(78 : 13) \cdot 100\% = 6 \cdot 100 = 600$

II - usul:

78 – 13%

$$x - 100\% \quad \frac{78}{x} = \frac{13}{100}, \quad x \cdot 13 = 78 \cdot 100, \quad x = 600.$$

Biror a sonini $k\%$ ga orttirish.

Biror a sonini $k\%$ ga orttirish uchun a ni $1 + \frac{k}{100}$ ga ko'paytirish kerak.

Masalan: berilgan sonni 1%, 40%, 72%, 187% ga orttirish uchun o'sha sonni mos ravishda 1,01 ga, 1,4 ga, 1,72 ga, 1,87 ga ko'paytirish kerak.

Masala: 742 ni 18% ga orttiring.

Yechish: $742 \cdot 1,18 = 875,56$.

Masala. Berilgan asonni avval 20% ga so'ngra 30% ga ortiriladi. Berilgan son jami necha foizga ortgan?

Yechish: $1,3 \cdot (1,2a) = 1,56a$ demak, 56% ga ortgan.

Berilgan a sonni $k\%$ ga kamaytirish.

Berilgan a sonni $k\%$ ga kamaytirish uchun a ni $1 - \frac{k}{100}$ ga ko'paytirish kerak.

Masalan: Berilgan sonni 1%, 10%, 32%, 57%, 85% ga ko'paytirish uchun shu sonni mos ravishda 0,99 ga, 0,9 ga, 0,68 ga, 0,43 ga, 0,15 ga ko'paytirish kerak.

Masala: 730 ni 25% ga kamaytiring.

Yechish: $0,75 \cdot 730 = 547,5$.

Masala. Berilgan a soni avval 20% ga orttirib, so'ngra 20% ga kamaytirildi. berilgan son qanday o'zgargan?

Yechish: $0,8(1,2a) = 0,96a$ 4% ga kamaygan.

a sonining b songa % nisbati.

a sonining b songa % nisbati deb - $\frac{a}{b}$ ga aytiladi.

2 - eslatma: prosentga oid masalalarning hammasi ham proporsiya tuzib yechilmaydi. Ayrimlarida chiziqli tenglama tuziladi.

Masala. Korxonadagi ayollar hamma ishchilarning 35%ini tashkil qiladi. Agar korxonada erkaklar ayollardan 252 kishiga ortiq bo'lsa, korxonada ayollar soni nechta?

Yechish: Korxonada erkaklar umumiy ishchilarning $100 - 35 = 65\%$ ni tashkil etadi. Erkaklar ayollardan $65 - 35 = 30\%$ ga ortiq. 30% ishchilar 252 tani tashkil etsa, 35% i nechta bo'ladi?

$$\frac{35 \cdot 252}{30} = 294$$

Javob: Korxonada ayollar soni 294 ta ekan.

Aralashmaga oid masalalar.

Ikkita turli moddalar aralashmasidan iborat modda qaralayotgan bo'lsin. Bu aralashma eritma yoki qotishma shaklida bo'lishi mumkin. Faraz qilaylik, qandaydir eritma tarkibida A modda 13 litr, B modda 20 litr ekan, har bir moddaning shu eritmadagi present miqdorini aniqlaymiz.

$$20 \text{ l} - 100\%$$

$$13 \text{ l} - x \%$$

$$x = \frac{13 \cdot 100}{20} = 65\% , \quad 100\% - 65\% = 35\%$$

Demak, eritma tarkibida A moddaning protsent miqdori (konsentrasiyasi) 65% ekan, B moddaning konsentrasiyasi 35% ekan.

3 - eslatma: Agar massasi m , konsentrasiyasi $x \%$ bo'lgan eritmaga massasi n , konsentrasiyasi $y \%$ bo'lgan eritma qo'shilsa massasi $m + n$, konsentrasiyasi: $z = \frac{mx + ny}{m + n} \%$

Masala: Mis va qo'rg'oshindan iborat aralashmaning 60% i mis va u aralashma tarkibida qo'rg'oshindan 2 kg ko'p. Aralashma tarkibida qancha mis bor.

Yechish:

mis 60% - x
 qo'rg'oshin - $x - 2$

$$\frac{60}{40} = \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{x-2} \quad x = 6 \text{ kg.}$$

Boshqa turdagi matnli masalalar.

Masala. Ikki sonning yig'indisi 90 ga, nisbati esa 8 ga teng bo'lsa, bu sonlarni toping.

Yechish: Masala shartiga ko'ra $\begin{cases} x + y = 90 \\ \frac{x}{y} = 8 \end{cases}$ sistemaga ega

bo'lamiz. Bu sistemani yechib $x = 80, y = 10$ ni hosil qilamiz.

Javob: 80 va 10.

Masala. Shaxsiy korxonada chiqargan mahsulotni 3348 so'mga sotib 4% zarar ko'rdi. Bu mahsulotning tannarxi qancha bo'lgan?

Yechish: Mahsulotning tannarxi 100% deb qabul qilinadi, u holda ko'rilgan zarar tannarxiga nisbatan hisoblanadi. Demak, 3348 so'm tannarxining $100 - 4 = 96\%$ ini tashkil qiladi. Tannarxni x bilan belgilasak, uni topish uchun $3348:96 = x:100$ proporsiyaga ega bo'lamiz, buni yechib $x = \frac{3348 \cdot 100}{96} = 3487,5$ so'mni topamiz.

Javob: 3487 so'm 50 tiyin.

Masala. Mahsulotning 1 kilogrammi 640 so'm turar edi. Narxi tushirilganidan keyin u 570 so'm bo'ldi. Mahsulotning narxi necha foiz tushirilgan?

Yechish: Mahsulot narxi $640 - 570 = 70$ so'mga kamaytirildi. Bu 640 - ning necha foizini ($x\%$) tashkil qilishini topish uchun $640:100 = 70:x$ proporsiyaga ega bo'lamiz. Buni yechib $x = \frac{100 \cdot 70}{640} \approx 10,94$ ni topamiz.

Javob 10,94 %.

Masala. Mayiz quritiladigan uzum og'irligining 32%ini tashkil qiladi. Necha kg uzum quritilganda 2 kg mayiz chiqadi?

Yechish: Masala shartiga ko'ra 2 kg mayiz quritiladigan uzumning 32% ini tashkil qiladi. Shuning uchun $2:32 = x:100$ bo'lib, bundan $x = \frac{2 \cdot 100}{32} = 6,25$

J: 6,25 kg.

Masala. Mahsulot 30% ga arzonlashtirildi. Yangi narx yana 15% ga kamaytirildi. Mahsulotning dastlabki narxi necha foizga arzonlashtirildi?

Yechish: Mahsulotning dastlabki narxini x deb belgilaymiz. Uning narxi 30% kamaygan bo'lsa, endi $x - 0,3x = 0,7x$ bo'ladi. Bu narx yana 15%ga kamaytirilgan bo'lsa, uning narxi $0,7x - 0,15 \cdot 0,7x = 0,595x$ ni tashkil etadi. Avvalgi narx x , oxirgi narx $0,595x$ bo'lsa, mahsulot narxi $x - 0,595x = 0,405x$ ga arzonlashtirildi. Bulardan foydalanib, $0,405x$ ni necha foiz (P) ekanligini topamiz.

$$P = \frac{100 \cdot 0,405x}{x} = 40,5\%$$

J: 40,5%.

Masala. Guruhdagi talabalarning 12%i matematikadan yozma ishni umuman bajarmagan, 32%i xatolar bilan bajargan, qolgan 14 talaba hammasini ishlagan. Guruhda nechta talaba bo'lgan?

Yechish: 14 ta to'g'ri ishlagan talabalar, talabalar umumiy sonining $100 - 12 - 32 = 56\%$ ni tashkil qiladi. Agar talabalarning umumiy soni x bo'lsa, $x : 100 = 14 : 56$ bo'ladi. Bundan $x = \frac{100 \cdot 14}{56} = 25$

ni topamiz.

J: 25 ta talaba.

Tenglama yoki tenglamalar sistemasi yordamida yechiladigan masalalar.

Berilgan masalani tenglama tuzib yechish uchun avvalo masala shartidagi biror kattalikni, iloji boricha toppish talab etilayotgan kattalikni noma'lum x deb belgilab qolgan kattaliklarni x ga bog'lab shartga mos tenglama tuzib tenglama yechiladi. Topilgan yechim masalani qanoatlantiradimi yoki yo'qmi ekani ko'riladi.

Ayrim masalalarni yechishda ikki noma'lumli tenglamalar sistemasi tuzishga to'g'ri keladi. Lekin ko'pincha sistema tuziladigan masalalarni bitta tenglama tuzib ham yechish mumkin. Demak, eng muhimi belgilashni qulay tanlab masala shartini to'g'ri tushunib shartga mos tenglama tuzishdadir. Ushbu mavzudagi masalalarni yechish uchun quyidagilarni yodda tutish zarur bo'ladi.

I. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ o'rta arifmetigi deb, $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ songa aytiladi.

II. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ o'rta geometrigi $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$ deb ga aytiladi.

III. Har qanday 2 xonali sonni $10x + y$, 3 xonali sonni esa $100x + 10y + z$ ko'rinishda yozish mumkin. Bunda x, y va z raqamlar.

Masalan: a) $97 = 10 \cdot 9 + 7$ b) $236 = 100 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6$

4 - eslatma: Agar 2 xonali sonning raqamlari aniq bo'lmasa 1 - raqami x , 2 - raqami y bo'lsa bu sonni \overline{xy} deb belgilaymiz.

Demak, $\overline{xy} = 10x + y$

Masalan: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

IV. Ayrim tenglama yoki tenglamalar sistemasi tuzib yechish mumkin bo'lgan masalalarni javoblardan foydalanib og'zaki yechish mumkin.

Masala: 2 xonali son o'zining raqamlari yig'indisidan 4 marta katta. Raqamlari kvadratlarining yig'indisi 5 ga teng. Shu 2 xonali sonning kvadratini hisoblang.

Yechish:

I - usul: Bu masalani ushbu sistemani yechib bajarish mumkin. $\overline{xy} = 10x + y$ $\begin{cases} 10x + y = 4(x + y) \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

II - usul: Javoblarni masala shartini qanoatlantirishi tekshirib ko'riladi. a) $441 = 21^2$ $4(2 + 1) = 21$?

b) $169 = 13^2$ $4(1 + 3) = 13$?

c) $121 = 11^2$ $4(1 + 1) = 11$?

d) $144 = 12^2$ $4(1 + 2) = 12$ to'g'ri keladi. $1^2 + 2^2 = 5$

V. Ayrim masalalarni yechishda bo'linish alomatlaridan foydalanish ham mumkin bo'ladi.

MASHQLAR:

1. Mahsulotni 138600 so'mga sotib, 10% foyda olindi. Mahsulotning tannarxi qancha?

2. Bir quti sigaret 800 so'm turar edi. Narxi tushirilgandan keyin u 704 so'm bo'ldi. Narxi necha foizga arzonlashdi?

3. Ekskursiya uyushtirish uchun har bir qatnashchidan 225 soʻmdan yigʻilsa, hamma xarajatlar uchun 1320 soʻm yetmaydi. Agar har bir qatnashchidan 240 soʻmdan yigʻilsa, 1320 soʻm ortib qoladi. Ekskursiya qatnashchilari nechta boʻlgan?

4. Kollej talabalarining 55%i qizlar. Qizlar oʻgʻil bolalardan 120 taga ortiq. Barcha talabalarning soni nechta?

5. Bir necha kishi 8100 soʻm yigʻishi lozim edi. Agar ular 3 kishiga kam boʻlganda, har bir kishi 450 soʻmdan ortiq toʻlashi lozim boʻlar edi. Ular necha kishi boʻlgan?

6. A va B shaharlar orasidagi masofa suv boʻylab 20 km. Qayiq A dan B ga va B dan A ga borib kelishi uchun 10 soat vaqt sarf qildi. Agar qayiqni oqim boʻylab 3 km ga sarf qilgan vaqti, oqimga qarshi 2 km ga sarf qilgan vaqtiga teng boʻlsa, kemaning turgʻun suvdagi tezligini toping.

7. Kema oqim boʻylab 36 km va oqimga qarshi shuncha yoʻl bosib, hammasi boʻlib 5 soat vaqt sarf qildi. Agar oqim tezligi 3 km/soat boʻlsa, kemaning turgʻun suvdagi tezligini toping.

8. Yoʻlovchi poyezd stansiyasiga keta turib, avvalgi 1 soatda 3,5 km masofani oʻtdi. Shu tezlikda harakatlanayotgan yoʻlovchi 1 soat kechiki- shini sezib, tezligini 5 km/soatgacha oshirdi va stansiyaga 30 mi nut oldin yetib keldi. Yoʻlovchi qancha masofani oʻtishi kerak edi?

9. Doʻkondan maʼlum miqdordagi pulga 10 ta shokolad va 15 ta bulochka olish mumkin. Shuncha pulga 20 ta shokolad va 8 ta bulochka olish mumkin. Shu pulga faqat bulochka sotib olinsa, nechta bulochka olish mumkin?

10. Sotuvchi 40% li spirtning litrini 1000 soʻmdan sotib olib, unga suv qoʻshib 20%li spirtga aylantirmoqda va litrini yana 1000 soʻmdan sotmoqda. Bu ishda sotuvchi necha % foyda qiladi?(Qoʻshilgan suv tekin deb olinsin)

11. 7 ta sonning oʻrta arifmetigi 13 ga teng. Bu sonlarga qaysi son qoʻshilsa ularning oʻrta arifmetigi 18 boʻladi?

12. 5 ta sonning oʻrta arifmetigi 13 ga teng. Shu sonlarga qaysi son qoʻshilsa ularning oʻrta arifmetigi 19 ga teng boʻladi?

13. n soni 10; 12 va m sonlarining oʻrta arifmetigidan 1,5 marta koʻp. m ni n orqali ifodalang.

14. Qutiga 25 kg massali yuk joylandi. Agar qutining massasi yuk massasining 12% ini tashkil etsa, qutining massasini toping.

15. Noma'lum sonning 14%i 80 ning 35%iga teng. Noma'lum sonni toping.

16. Kutubxonadagi kitoblarning 55%i o'zbek tilida, qolgan kitoblar rus tilida. Rus tilidagi kitoblar 270 ta. Kutubxonada o'zbek tilida nechta kitob bor?

17. Qutiga 12kg massali yuk joylandi. Agar qutining massasi yuk massasining 25% ini tashkil etsa, qutining massasini toping.

18. Punktlardan bir vaqtning o'zida ikki turist bir-biriga qarama-qarshi yo'lga chiqdi. Birinchisi avtobusda tezligi 40 km/soat, ikkinchisi avtomobilda. Agar ular 2 soatdan keyin uchrashgan bo'lishsa, avtomobil- ning tezligini toping.

19. Muayyan masofani bosib o'tish uchun ketadigan vaqtni 25% ga kamaytirish uchun tezlikni necha foiz orttirish kerak?

20. It o'zidan 30m masofada turgan tulkini quva boshladi. It har sakraganda 2 m, tulki esa 1 m masofani o'tadi. Agar it 2 marta sakragan- da, tulki 3 marta sakrasa, it qancha (m) masofada tulikini quvib etadi?

21. A va B shaharlar orasidagi masofa 188 km. Bir vaqtning o'zida bir-biriga qarab A shahardan velosipedchi, B shahardan mototsiklchi yo'lga tushdi va ular A shahardan 48 km masofada uchrashdi. Agar velosipedchining tezligi 12 km/soat bo'lsa, mototsiklchining tezligini toping.

22. Hovuzga 2 ta quvur o'tkazilgan. Birinchi quvur bo'sh hovuzni 10 soatda to'ldiradi, ikkinchisi esa 15 soatda bo'shatadi. Hovuz bo'sh bo'lgan vaqtda ikkala quvur birdaniga ochilsa, hovuz necha soatdan keyin to'ladi?

23. Usta muayyan ishni 12 kunda, uning shogirdi 30 kunda bajaradi. Agar 3 ta usta va 5 ta shogird birga ishlasalar, o'sha ishni necha kunda bajarishadi?

24. 800 kg mevaning tarkibida 80% suv bor. Bir necha kundan keyin mevaning og'irligi 500kg ga tushdi. Endi uning tarkibida necha foiz suv bor?

25. 20 litr tuzli suvning tarkibida 12% tuz bor. Bu eritmada tuz miqdori 15% bo'lishi uchun necha litr suv bug'lantirilishi kerak?

26. Qotishma kumush va oltindan iborat bo'lib, o'zaro 3:5 nisbatda. Agar qotishmada 0,45 kg oltin bo'lsa, qotishmaning og'irligini (kg) toping.

27. Eritma tarkibida 60g tuz bor. Unga 400g toza suv qo'shilsa, tuzning konsentratsiyasi 1,5 marta kamaydi. Dastlabki eritma necha gramm bo'lgan?

28. A aralashmaning bir kilogrammi 1000 so'm, B aralashmaning bir kilogrammi esa 2000 so'm turadi. B va A aralashmadan 3:1 nisbatda tayyorlangan 1kg aralashma necha so'm turadi?

29. Daryodagi A va B pristanlar orasidagi masofa 84km ga teng. Bir vaqtning o'zida oqim bo'ylab A pristanidan kater (turg'un suvdagi tezligi 21km/soat). B pristanidan sol jo'natildi. 3km/soat bo'lsa, qancha vaqtda keyin kater solga etib oladi?

30. Motorli qayiqning daryo oqimi bo'yicha tezligi 21 km/soat dan ortiq va 23 km/soat dan kam. Oqimga qarshi tezligi esa 19 km/soat dan ortiq va 21 km/soat dan kam. Qayiqning turg'un suvdagi tezligi qanday oraliqda bo'ladi?

1.7 - § Tengsizliklarning umumiy xossalari. Bevosita isbotlash usuli. Tengsizlikni kuchaytirish usuli.

Tengsizliklarning umumiy xossalari.

Ta'rif. Agar x ga bog'liq bo'lgan $A(x)$ va $B(x)$ ifodalar quyidagi munosabatlardan $A(x) > B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) < B(x)$, $A(x) \leq B(x)$ birini qanoatlantirsa, bir noma'lumli tengsizlik berilgan deyiladi.

Ta'rif. Bu ifodalarni ikkala tomoni ma'noga ega bo'ladigan x ning qiymatlari to'plami tengsizliklarning mavjudlik sohasi deyiladi.

Ta'rif. O'zgaruvchi x ning tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlar to'plami tengsizlikning yechimi deyiladi.

$2x - 6 \leq 0$ bo'lsin, bundan $2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 3$ bo'lib, tengsizlikning yechimi $x \in (-\infty, 3)$ bo'ladi.

Tengsizliklarning yechimini topishda quyidagi qoidalarga rioya qilish lozim:

1. Tengsizlikning ikkala tomoniga bir xil ifodani qo‘shish yoki ayirishdan tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi;

2. Tengsizlikning ikkala tomonini bir xil musbat ifodaga ko‘paytirish yoki bo‘lishdan tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi;

3. Tengsizlikning ikkala tomonini bir xil manfiy ifodaga ko‘paytirsak yoki bo‘lsak, tengsizlik ishorasi teskarisiga o‘zgaradi, ya’ni $A(x) > B(x)$ bo‘lsa:

$$1) A(x) + C(x) > B(x) + C(x);$$

$$2) C(x) > 0 \text{ bo'lsa, } A(x) \cdot C(x) > B(x) \cdot C(x) \text{ va } \frac{A(x)}{C(x)} > \frac{B(x)}{C(x)};$$

$$3) C(x) < 0 \text{ bo'lsa, } A(x) \cdot C(x) < B(x) \cdot C(x) \text{ va } \frac{A(x)}{C(x)} < \frac{B(x)}{C(x)} \text{ bo'ladi.}$$

Bevosita isbotlash usuli. Tengsizlikni kuchaytirish usuli.

Misol. Istalgan a, b va c sonlari uchun $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$ ekanligini isbotlang.

Yechish: Istalgan a, b va c sonlari uchun, $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c)$ ayirmaning manfiy emasligini ko‘rsatamiz:
 $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c) = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) = (a - b)^2 + (a - c)^2$

Istalgan sonning kvadrati nomanfiy son bo‘lgani bois, $(a - b)^2 \geq 0$ va $(a - c)^2 \geq 0$ bo‘ladi. Demak, $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c)$ istalgan a, b va c sonlari uchun nomanfiydir, ya’ni $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c) \geq 0$ va undan berilgan tengsizlik kelib chiqadi.

Misol. Istalgan a, b va c musbat sonlari uchun $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$ (1) tengsizlik isbotlansin.

Yechish: Tengsizlik chap qismida shakl almashtirish bajarib, uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right).$$

Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2; \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 2; \quad \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2.$$

Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shib, (1) tengsizlikni hosil qilamiz.

Misol. Agar $x > 0$ bo'lsa, $2^{12\sqrt{x}} + 2^{4\sqrt{x}} \geq 2 \cdot 2^{6\sqrt{x}}$ ni isbotlang.

Yechish. $2^{12\sqrt{x}} + 2^{4\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{12\sqrt{x}} \cdot 2^{4\sqrt{x}}} = 2 \cdot \left(2^{x^{12+4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{6\sqrt{x}}.$

MASHQLAR:

1. Agar $x, y > 0$ bo'lsa, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ ni isbotlang.
2. Agar $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$ bo'lsa, quyidagini isbotlang:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$
3. $x, y, z > 0$ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ ni isbotlang.
4. $a, b, c > 0$ bo'lsa, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ ni isbotlang.
5. $a, b, c > 0$ bo'lsa, $(a+1)(b+1)(c+a)(b+c) \geq 16abc$ ni isbotlang.
6. $2^x + 2^{\frac{2-x-y}{2}} + 2^y$ ning eng kichik qiymatini aniqlang.
7. $2a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2$ ning eng kichik qiymatini toping.
8. $a, b, c > 0$ bo'lsa, $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$ ni isbotlang.
9. $x, y, z > 0$ $\frac{1}{(x+y+z)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{28\sqrt{3}}{9\sqrt{xyz(x+y+z)}}$ ni isbotlang.
10. $a, b, c > 0$ bo'lsa, $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$ ni isbotlang.
11. $a, b, c > 0, ab^2c^3 = 1$ bo'lsa, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$ ni isbotlang.

Koshi -Bunyakovskiy tengsizligi va uning tadbiqlari. Biz bu mavzuda tengsizliklarni isbotlashda qo'llanadigan klassik

tengsizliklardan biri Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini keltirib o'tamiz. a_1, a_2, \dots, a_n va b_1, b_2, \dots, b_n haqiqiy sonlari berilgan bo'lsin.

Teorema. a_1, a_2, \dots, a_n va b_1, b_2, \dots, b_n haqiqiy sonlari uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Dastlab, yuqoridagi tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \quad (2)$$

(2) tengsizlik (1) ning aynan o'zidir.

Isbotni $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$ yig'indi ostidagi ifodani kvadratga oshirib uni baholash orqali olib boramiz, bu yerda x – ixtiyoriy haqiqiy son.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 x^2 + \sum_{i=1}^n 2a_i b_i x + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \\ &= x^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{aligned}$$

ni olamiz. Bunda biz yig'indi faqat i ga bog'liq bo'lgani bois, 2 va x larni yig'indidan chiqarib oldik. Uning boshi va ohirini birlashtirib uni baholaymiz: $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$ bo'ladi, chunki dastlab yig'indi ostida nomanfiy son joylashgan edi. Biz kvadrat uchhadni hosil qildik. Uni soddaroq qilib, quyidagicha yozib olamiz:

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0 \quad (3)$$

Bu yerda, $A = \sum_{i=1}^n a_i^2, B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, C = \sum_{i=1}^n b_i^2$. (3) kvadrat tengsizlik uchun $A \geq 0, C \geq 0$, shundan kelib chiqib, (3) ifoda har doim o'rinli bo'lishi uchun uning diskriminanti nomanfiy bo'lishi lozim. Demak, $D = 4B^2 - 4AC \geq 0$ kelib chiqadi. Uni $AC \leq B^2$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Oxirgi tengsizlikda A, B, C lar o'rniga ularning qiymatlarini qo'yib,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Bernulli tengsizligi. Endi bernulli tengsizligiga to'xtalib o'taylik.

Teorema. $x \geq -1$ haqiqiy sonlar uchun va $n \in N$ larda ushbu tengsizlik o'rinli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (4)$$

Bu teoremani matematik induksiya metodi bilan isbotlash mumkin.

Misol. Quyidagi ifodaning eng kichik qiymati – y toping.

$$y = \sqrt{4^{3x^2+2}} + 4\sqrt{4^{1-3x^2}}.$$

Yechish: Har bir qo'shiluvchi musbat ekanligidan, o'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymat haqidagi teoremani qo'llaymiz ($a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$). Shunday qilib, quyidagilarni olamiz

$$y = \sqrt{4^{3x^2+2}} + 4\sqrt{4^{1-3x^2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{4^{3x^2+2}} \times 4\sqrt{4^{1-3x^2}}} = 4\sqrt{\sqrt{4^{3x^2+2}} \times 4^{1-3x^2}} = 8\sqrt{2}.$$

va nihoyat, $y_{eng} = 8\sqrt{2}$.

$$J: y_{eng} = 8\sqrt{2}.$$

Masala. Agar a va b musbat, m va n – natural son bo'lsa, x ning musbat qiymatlari uchun $ax^n + \frac{b}{x^m}$, ifodaning eng kichik qiymatini toping.

Yechish:

$$ax^n + \frac{b}{x^m} = \underbrace{\frac{a}{m}x^n + \frac{a}{m}x^n + \dots + \frac{a}{m}x^n}_{m \text{ marta}} + \underbrace{\frac{b}{nx^m} + \frac{b}{nx^m} + \dots + \frac{b}{nx^m}}_{n \text{ marta}}$$

U holda, o'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymat haqidagi Koshi tengsizligiga ko'ra quyudagiga egamiz

$$\frac{ax^n + \frac{b}{nx^m}}{n+m} \geq \sqrt[m+n]{\frac{a^m x^{mn}}{m^m} \cdot \frac{b^n}{x^{mn} n^n}} = \sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}$$

tenglik $\frac{a}{m}x^n = \frac{b}{nx^m}$ bo'lganda yuz beradi, ya'ni $x^{m+n} = \frac{bm}{an}$, yoki

$$x = \sqrt[m+n]{\frac{bm}{an}} \text{ bo'lganda.}$$

Sunday qilib, berilgan ifoda eng kichik qiymati $(m+n) \sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}$

bo'ladi.

$$J: (m+n)^{m+n} \sqrt{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}.$$

MASHQLAR:

1. Quyidagilarni toping.

1) y ning eng kichik qiymatini toping.

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$$

2) Ifodaning eng katta qiymatini toping.

$z = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}$ va u qiymatga qaysi nuqtalarda erishishini ko'rsating.

3) y ning eng kichik qiymatini toping.

$$y = \sqrt{5x^2 - 3x + 1} + \sqrt{5x^2 + 3x + 1}$$

4) $\frac{x^4 + x + 3}{x}$, $x \in (0; \infty)$ ifodaning eng kichik qiymati topilsin.

$$2. \sqrt{x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1} + \sqrt{3x^2 - x^4 - x^3} = \frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 3)$$

tenglamani yeching.

3. Tenglamani yeching. $\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{1 - x - x^2} = x^2 + x + 2$

4. Tengsizlikni yeching. $(2 - 5^{x-2} - 5^{2-x})^{-1} \cdot (x^2 - x - 2) \cdot \sqrt{3-x} \geq 0$

5. Tenglamani yeching. $\frac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}$.

6. Tenglamani yeching. $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3$

7. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ va $abcd = 1$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + ad + ac + bd \geq 10$ ni isbotlang.

8. Agar $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ bo'lsa, quyidagilar o'rinli ekanini ko'rsating:

1) $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$;

2) $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$;

3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$;

4) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$;

5) $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.

1.8 - § Parametrli chiziqli tenglama.

Chiziqli tenglama deb $ax = b$ tenglamaga aytilishi bizga ma'lum. Bunda a va b berilgan sonlar Agar a yoki b ning o'rniga biror harf yoki harfiy ifoda kelsa bunday tenglama parametrli tenglama deyiladi va unga harf parametr deyiladi. Masalan: a) $kx = 7$, b) $(k^2 - 1)x = k + 7$, c) $(a - 3)x = a + 4$, d) $3x = a - 1$

Ko'pincha parametrli chiziqli kvadrat tenglama berilganda quyidagi uchta savoldan bittasi qo'yiladi.

1) parametrning qanday qiymatida tenglama bitta (yagona) ildizga ega bo'ladi.

2) parametrning qanday qiymatida tenglama cheksiz ko'p ildizga ega bo'ladi.

3) parametrning qanday qiymatida tenglama ildizga ega bo'lmaydi.

a) $ax = b$ tenglama **bitta yechimga** ega bo'lishi uchun $a \neq 0$ bo'lishi kerak, b esa har qanday son bo'lishi mumkin.

Misol: p ning qanday qiymatida $p^2x - 4 = x + p - 5$ tenglama bitta ildizga ega bo'ladi.

Yechish:

$$\begin{aligned} p^2x - 4 &= x + p - 5, \\ xp^2 - x &= p - 1, \\ x(p^2 - 1) &= p - 1, \\ p^2 - 1 &\neq 0, \quad p \neq \pm 1. \end{aligned}$$

b) $ax = b$ tenglama **cheksiz ko'p yechimga** ega bo'lishi uchun bir vaqtda $a = 0$ va $b = 0$ bo'lishi kerak.

Misol: a ning qanday qiymatida $(a^2 - 4)x = a + 2$ tenglama cheksiz ko'p ildizga ega bo'ladi.

Yechish: 1) $a^2 - 4 = 0$, $a^2 = 4$, $a = \pm 2$,

2) $a + 2 = 0$ $a = -2$.

J: $a = -2$.

c) $ax = b$ tenglama yechimga ega bo'lmasligi uchun $a = 0$ va $b \neq 0$ bo'lishi kerak.

Misol: n ning qanday qiymatida $n^2x - n = x + 1$ tenglama ildizga ega emas.

Yechish: $n^2x - x = n + 1$, $x(n^2 - 1) = n + 1$, $n^2 - 1 = 0$, $n = \pm 1$,
 $1 + n \neq 0$, $n \neq -1$.

J: $n = 1$.

1 - eslatma: parametrli chiziqli tenglama berilib yuqoridagi 3 ta savoldan birortasi qo'yilganda berilgan tenglamani $ax = b$ shaklga keltirib so'ngra uch holatdan biri bo'yicha tekshiriladi

2 - eslatma: shu savollarga javob berish uchun javoblarni qo'yib tekshirish ham mumkin.

3 - eslatma: misollarga mos tengsizlikni yechish kerak

Misol: $3x - 4 = 2(x - t)$, $3x - 4 = 2x - 2t$, $3x - 2x = 4 - 2t$,
 $x = 4 - 2t$, $4 - 2t > 0$, $-2t > -4$, $t < 2$.

Parametrli kvadrat tenglamalar. Kvadrat tenglama deb,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ko'rinisdagi tenglamaga aytiladi. Bunda a, b, c berilgan sonlar bo'lib, $a \neq 0$ bo'ladi.

Agar a, b yoki c koeffisientlar o'rinlarida biror harf yoki harfiy ifoda ishtirok etsa bunday tenglama parametrli kvadrat tenglama deyiladi.

Masalan: a) $px^2 + x + p - 2 = 0$,

b) $(a - 3)x^2 + ax + a^2 = 0$,

c) $ax^2 + (a - 3)x - 2a + 5 = 0$.

Parametrli kvadrat tenglamalar berilganda quyidagicha savollar qo'yilishi mumkin.

I. Berilgan parametrning qanday qiymatlarida tenglama ikkita ildizga ega bo'ladi deyilsa, $D > 0$ tengsizlikni yechish kerak

II. Berilgan parametrning qanday qiymatlarida tenglama ildizga ega bo'lmaydi deyilsa, $D < 0$ tengsizlikni yechish kerak.

III. Berilgan parametrning qanday qiymatlarida tenglama bitta yoki 2 ta bir xil ildizga ega bo'ladi deyilsa, $D = 0$ tengsizlikni yechish kerak.

IV. Qachon tenglama ildizlaridan biri 0 ga teng bo'ladi $c = 0$ teng- lamani yechish kerak.

V. Qachon tenglama ildizlari qarama-qarshi sonlardan iborat bo'ladi deyilsa, $b = 0$ tenglamani yechish kerak.

VI. Agar parametrning qanday qiymatida kvadrat tenglamaning ikkala ildizi musbat yoki manfiy yoki har xil ishorali bo'ladi deb so'ralsa Viyet teoremasidan foydalaniladi.

Buning uchun berilgan tenglamani $x^2 + px + q = 0$ shaklga keltirib $x_1 + x_2 = -p$ $x_1 x_2 = q$ ekanini bilish kerak

a) ildizlari har xil ishorali bo'lsa $q < 0$ tengsizlikni yechish yetarli.

b) ikki ildiz ham musbat deyilsa $q > 0$ va $p < 0$ tengsizlikning umu- miy yechimi topiladi

c) agar ikkita manfiy ildiz so'ralsa $q > 0$ va $p > 0$ tengsizliklar umu- miy yechimini topish kerak

VII. Agar parametrli tenglamada tenglama ildizlaridan biri berilsa parametrni topish uchun berilgan ildizni noma'lum o'rniga qo'yish kerak

VIII. Ko'pgina parametrli masalalar Viyet teoremasi yordamida bajariladi.

Teorema: Agar x_1 va x_2 sonlari $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning ildizlari bo'lsa $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$ bo'ladi.

Misol: $x^2 + px + 21 = 0$ tenglamada $x_1 = 3$ bo'lsa, p ni toping.

$$x_1 \cdot x_2 = 21, \quad 3x_2 = 21, \quad x_2 = 7, \quad x_1 + x_2 = -p, \quad 3 + 7 = -p, \quad p = -10, \quad p = -10$$

Misol: $x^2 + x + a = 0$ tenglamada $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{5}$ bo'lsa $a = ?$

$$x_1 \cdot x_2 = a, \quad x_1 + x_2 = -1, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{5}, \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{-1}{a} = \frac{1}{5}, \quad a = -5$$

J: $a = -5$.

Misol: $x^2 + px + 12 = 0$ tenglamada $|x_1 - x_2| = 1$ bo'lsa $p = ?$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, & |x_1 - x_2|^2 = 1^2, & x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \\ p^2 = 48 + 1 = 49, & p = \pm 7 \\ x_1 \cdot x_2 = 12 \end{cases}$$

J: $p = \pm 7$.

Misol: y_1 va y_2 sonlari $y^2 + my + n = 0$ tenglamaning ildizi

$$y_1 + y_2 = -m, \quad (y_1 + 4)(y_2 + 4) = n - 24,$$

$$y_1 y_2 + 4y_1 + 4y_2 + 16 = n - 24,$$

$$n + 4(y_1 + y_2) + 16 = n - 24,$$

$$y_1 \cdot y_2 = n, \quad n - n + 4(-m) + 16 + 24 = 0, \quad -4m = -40, \quad m = 10.$$

1 - eslatma: Agar $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglama qachon bitta ildizga ega bo'ladi deyilsa $D = 0$ tenglamani yechish yetarli. Agar masala shartida kvadrat tenglama deb ta'kidlanmasa $a = 0$ holatda ham qarash kerak.

Parametrli tengsizliklar.

Ta'rif. Tengsizlik tarkibida biror o'zgarmas sonning o'rniga qandaydir harf ishtirok etsa, bunday tengsizlik **parametrli tengsizlik** deyiladi, o'sha harf esa **parametr** deyiladi.

Bunday tengsizliklarda shu parametrga bog'liq savollar qo'yiladi va bu savolga javob berish uchun shu parametrga nisbatan chiziqli yoki kvadrat tengsizlikni yechishga to'g'ri keladi. Kvadrat tenglama $D > 0$ bo'l-ganda 2 turli ildizga $D < 0$ da esa umuman ildizga ega bo'lmasligini yodda tutish kerak. Bu mavzudagu savollarga o'rganganlarimizga asosan javob bera olamiz.

Misol: $x^2 + kx + 9 = 0$ tenglama k ning qanday qiymatlarida yechimga ega emas.

Yechish: $x^2 + kx + 9 = 0$, $D = k^2 - 36 < 0$, $(k - 6)(k + 6) < 0$.

$J: (-6; 6)$.

Misol: $\begin{cases} ax > 5a - 1 \\ ax < 3a + 1 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi a ning qanday

qiymat-larida yechimga ega emas.

Yechish: $5a - 1 < ax < 3a + 1$

$$5a - 1 < 3a + 1$$

tengsizlik yechimga ega bo'lmasligi uchun

$$5a - 1 \geq 3a + 1$$

$$2a \geq 2$$

$$a \geq 1$$

$J: [1, \infty)$.

Agar $ax^2 + bx + c > 0$ tengsizlik x ning barcha qiymatlarida to'g'ri bo'lsa bu tengsizlikning yechimi barcha sonlar to'plamidan iborat bo'ladi. Aksincha bu tengsizlik x ning birorta ham qiymatida bajarilmasa bu tengsizlik yechimga ega emas deyiladi.

I. Agar $a > 0$ va $D < 0$ bo'lsa $ax^2 + bx + c > 0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty, \infty)$ bo'ladi.

II. Agar $a < 0$ va $D < 0$ bo'lsa $ax^2 + bx + c > 0$ tengsizlik yechimga ega bo'lmaydi.

III. Agar $a < 0$ va $D < 0$ bo'lsa $ax^2 + bx + c < 0$ tengsizlikning yechi- mi $(-\infty, \infty)$ bo'ladi.

IV. Agar $a > 0$ va $D < 0$ bo'lsa $ax^2 + bx + c < 0$ tengsizlik yechimga ega bo'lmaydi.

Misol: $kx^2 + 2x + k + 2 > 0$ yechimga ega bo'lmaydigan k ning butun qiymatlari orasida eng kattasini toping.

Yechish: 1) $k < 0$ bo'lishi shart.

$$2) D = 4 - 4k(k + 2) < 0,$$

$$4 - 4k^2 - 8k < 0, k^2 + 2k - 1 > 0, D = 4 + 4 = 8,$$

$$k_1 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}, k_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2};$$

$(-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}; \infty)$ yoki $(-\infty; -1 - \sqrt{2})$ va eng kata butun ildizi 3 ga teng.

MASHQLAR:

1. m ning qanday qiymatlarida $m(mx - 3) = 7x + 5$ tenglama echimga ega bo'lmaydi?

2. a ning qanday qiymatlarida $ax + a = x + a$ tenglama echimga ega bo'lmaydi?

3. a ning qanday qiymatlarida $ax = 3x - 5$ tenglama echimga ega bo'lmaydi?

4. n ning qanday qiymatlarida $nx - 2 = 2n + 3x$ tenglama cheksiz ko'p echimga ega bo'ladi?

5. a ning qanday qiymatlarida $ax - 2 = 3a + 4x$ tenglamaning birorta ham yechimi bo'lmaydi?

6. m ning qanday qiymatlarida $m^2x - 4m = x + 1$ tenglamaning ildizlari cheksiz ko'p bo'ladi?

7. n ning qanday qiymatlarida $nx + 2 = 3n + 7x$ tenglamaning ildizi bo'lmaydi?

8. Ushbu $(a^2 - 4)x - 3 = 0$ tenglama yechimga ega bo'lmaydigan a ning barcha qiymatlari yig'indisini hisoblang.

9. Ushbu $10(ax - 1) = 2a - 5x - 9$ tenglama a ning qanday qiymatlarida yagona echimga ega?

10. k ning qanday qiymatlarida $k^2(y - 1) = y - k$ tenglamaning ildizi mavjud emas?

11. $4(ax + 1) = 2a + 7x$ - tenglama a ning qanday qiymatlarida cheksiz ko'p echimga ega?

12. a ning $(a^2 - 9)x + 16 = 0$ tenglama echimga ega bo'lmaydigan barcha qiymatlari ko'paytmasini hisoblang.

13. Tenglama a ning qanday qiymatida yechimga ega emas?
 $5x - a - 5 = (a + 2)(x + 2)$

14. Ushbu $nx = n^2 - 9$ tenglamaning ildizlari natural son bo'ladigan $n \in \mathbb{N}$ ning barcha qiymatlari yig'indisini toping.

15. $\frac{2kx + 5}{3} = \frac{2k + 3 + 3x}{2}$ - tenglama k ning qanday qiymatida echim- ga ega emas?

16. Tenglamaning ildizi 0 ga teng bo'ladigan m ning barcha qiymatlari ko'paytmasini toping.

$$x^2 - 9x + (m^2 - 4)(m^2 - 9) = 0$$

17. b ning qanday qiymatida $x^2 - \frac{4}{5}x + 3b = 0$ uchhad to'la kvadrat bo'ladi?

18. k ning qanday qiymatlarida $x^2 - 9x + k^2 - 8k = 0$ ifodani to'la kvadrat shaklida tasvirlab bo'ladi?

19. Ushbu $x^2 - px + 8 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 4 ga teng. Bu tenglamaning barcha koeffitsentlari yig'indisini toping.

20. p ning qanday qiymatida $x^2 + 3px + 20 = 0$ tenglamaning ildiz- laridan biri 5 ga teng bo'ladi?

21. Ushbu $x^2 + 5px - 16 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 4 ga teng. Shu tenglamaning koeffitsentlari yig'indisini toping.

22. Ushbu $x^2 + 4px - 16 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 2 ga teng. $\frac{p}{16}$ nimaga teng?

23. a ning qanday qiymatida $x^2 + 4(p^2 - 4)x - 12 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri -3 ga teng bo'ladi?

24. x_1 va x_2 sonlar $x^2 + 2x + a = 0$ tenglamaning ildizlari bo'lib, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3}$ tenglikni qanoatlantiradi. a ni toping.

25. k ning qanday qiymatlarida $kx^2 - 6kx + 2k + 3 = 0$ tenglama ildizlari kublarining yig'indisi 72 ga teng bo'ladi?

26. x_1 va x_2 sonlar $x^2 + 2ax + 8 = 0$ kvadrat tenglamaning echimlari va $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$ bo'lsa, a ning qiymatini toping.

27. m ning qanday qiymatlarida $4x^2 + 2\sqrt{2}ax - 50 = 0$ tenglamaning ildizlari qarama-qarshi sonlar bo'ladi?

28. Ushbu $x^2 + 2(a-3)x - 5 = 0$ tenglama ildizlari ayirmasining kvad-rati 36 ga teng bo'lsa, ildizlarining yig'indisi qancha bo'lishini toping?

29. $kx^2 + 2x + k + 2 > 0$ tengsizlik yechimga ega bo'lmaydigan k ning butun qiymatlari orasida eng kattasini toping.

30. a ning qanday qiymatlarida $\begin{cases} 3 - 7x < 3x - 7 \\ 1 + 2x < a + x \end{cases}$ tengsizliklar

siste- masi yechimga ega emas?

31. Ushbu $(x-a)(x-b) \leq 0$ tengsizlikning yechimlar to'plami $[2; 6]$ joraliqdan iborat. ab ning qiymatini toping.

32. a ning qanday qiymatlarida $ax^2 + 8x + a < 0$ tengsizlik x ning barcha qiymatlarida o'rinli bo'ladi?

33. $\begin{cases} ax \geq 7a - 3 \\ ax \leq 3a + 3 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi a ning qanday

qiymatlarida yechimga ega bo'lmaydi?

34. k ning qanday qiymatida $k(k+6)x = 3k + 5(x+2)$ tenglama echimga ega bo'lmaydi?

35. a ning qanday qiymatida $(a^2 - 2)x = a(x + 2a) + 4$ tenglamaning ildizlari cheksiz ko'p bo'ladi?

36. a ning qanday qiymatlarida $(3x - 2a)a = 6x - 4$ tenglama bitta musbat yechimga ega?

37. m ning qanday qiymatida $\frac{6x - m}{2} = \frac{7mx + 2}{5}$ tenglamaning ildizi nolga teng bo'ladi?

38. a ning qanday qiymatida $\frac{3x - 2a}{4} = \frac{4ax - 2}{5}$ tenglama ildizga ega emas?

39. Ushbu $3x^2 + 21x + 45a = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 5 ga teng. Ikkinchi ildizning kvadratini toping toping.

40. m ning qanday qiymatlarida $3x^2 - (3m - 15)x - 27 = 0$ tenglama- ning ildizlari qarama-qarshi sonlar bo'ladi?

41. Ushbu $x^2 + px + 6 = 0$ tenglama ildizlari ayirmasining kvadrati 40 ga teng. p ning qiymatini toping.

42. Agar $x^2 - x + q = 0$ tenglamaning x_1 va x_2 $x_1^2 + x_2^2 = 19$ ildizlari shartni qanoatlantirsa, q ning qiymati qanchaga teng bo'ladi?

43. $x^2 + 3px - 21 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 7 ga teng. Ikkinchi ildizi va p ning qiymatini toping.

44. $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning ildizlari $x^2 - 3x + 2 = 0$ tenglamaning ildizlaridan ikki marta katta. p va q ning qiymati topilsin.

45. Ushbu $x^2 - \frac{1}{5}px + p^2 - 10p + 21 = 0, \quad p = \text{const}.$

Tenglamaning ildizlaridan biri 0 ga teng. Shu shartni qanoatlantiruvchi ildizlarning yig'indisini toping.

46. b ning qanday qiymatlarida yechimga ega emas?

$$\begin{cases} bx \geq 6b - 2 \\ bx \leq 4b + 2 \end{cases}$$

47. Tengsizliklar sistemasi b ning qanday qiymatlarida yechimga ega bo'lmaydi?

$$\begin{cases} bx \geq 5b - 3 \\ bx \leq 4b + 3 \end{cases}$$

48. k ning $kx^2 + 4x + k + 1 > 0$ tengsizlik yechimga ega bo'lmaydigan butun qiymatlari orasidan eng kattasini toping.

II-BOB. KOMPLEKS SONLAR.

2.1 - § Kompleks son tushunchasi.

Agar S maydon R haqiqiy sonlar maydonining kengaytmasi bo'lib, quyidagi ikkita shartni qanoatlantirsa, u kompleks sonlar maydoni deyiladi:

1. Ushbu $i^2 = -1$ tenglikni qanoatlantiruvchi $i \in C$ element mavjud; bunday element mavxum birlik deyiladi.

2. Har qanday $z \in C$ element uchun shunday $a, b \in R$ haqiqiy sonlar mavjudki, $Z = a + bi$ o'rinli.

S maydonning elementlari kompleks sonlar deb ataladi.

Bunday kengaytmaning mavjudligini ko'rsatamiz.

Buning uchun R^2 da qo'shish va ko'paytirish amallarini kiritamiz.

Qo'shish amali sifatida vektorlarni qo'shishamalni olamiz:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d). \quad (1)$$

Ko'paytirish amalini ushbu

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad). \quad (2)$$

ifoda (formula) bilan aniqlaymiz.

qo'shish amaliga nisbatan R^2 ning kommutativ guruh ekanligi ilgari ko'rsatilgan edi. Bunda $(0, 0)$ element bu guruxning nol elementidir.

Ko'paytirishning kommutativligi (2) va ushbu

$$(c,d) \cdot (a,b) = (ca - db, da + cb).$$

ifodalarning o'ng tomonidagi vektorlarning tengligidan kelib chiqadi. Assotsiativligi esa quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} [(a,b) \cdot (c,d)](p,q) &= (ac - bd, bc + ad)(p,q) = \\ &= (acp - bdp - bcq - adp, bcp + adp + acq - bdq), \\ (a,b)[(c,d)(p,q)] &= (a,b)(cp - dq, cq + dp) = \\ &= (acp - adq - bcq - bdp, acq + adp + bcp - bdq) \end{aligned}$$

Distributivlik xossalari esa quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} [(a,b) + (c,d)](p,q) &= (a+c, b+d)(p,q) = (ap + cp - bq - \\ &- dq, aq + cq + bp + dp), (a,b)(p,q) + (c,d)(p,q) = \\ &= (ap - bq, bp + aq) + (cp - dq, cq + dp) = \\ &= (ap - bq + cp - dq, bp + aq + cq + dp). \end{aligned}$$

Demak R^2 to'plam bu amallarga nisbatan xalqa ekan. Ushbu $(1,0)$ element shunday xususiyatga egaki, har qanday $(a,b) \in R^2$ element uchun

$$(1,0)(a,b) = (a,b),$$

ya'ni $(1,0)$ element R^2 ning birlik elementi. Noldan farqli ixtiyoriy $(a,b) \in R^2$ elementni olamiz: $(a,b) \neq (0,0)$. U xolda a, b sonlarning kamida biri nol'dan farqli, ya'ni $a^2 + b^2 \neq 0$. Ushbu

$$(a,b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = (1,0)$$

tenglik ko'rsatadiki, R^2 da nol'dan farqli har qanday

(a, b) element teskarilanuvchi va $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$.

Demak, R^2 to'plam kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan maydondir. Bu maydonni S orqali belgilaymiz va uni kompleks sonlar maydoni deb ataymiz. Bu maydon R maydonning kengaytmasi ekanligini va yuqorida keltirilgan ikkita xossani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

$C = R^2$ da $(x, 0)$ ko'rinishidagi barcha vektorlar to'plamini R orqali belgilaymiz.

Yuqorida kiritilgan (1) qo'shish va (2) ko'paytirish amallarini R elementlarida qaraymiz:

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (a \cdot c, 0).$$

Bu formulalardan R ning maydon ekanligi bevosita kelib chiqadi. Demak, S maydon R maydonning kengaytmasi. 24-§ da $K = R$ ning $K' = R'$ ga izomorf ekanli ko'rsatilgan edi. Izomorf maydonlarni algebraik nuqtai nazardan bir xil deb hisoblaganimiz uchun S maydondagi R' maydonni R maydon bilan ayniylashtiramiz. Kelajakda $(a, 0)$ o'rniga a yozamiz.

Ushbu

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

tenglik ko'rsatadiki, agar $(0, 1)$ ni iorqali belgilasak y holda $i^2 = -1$. Demak, S maydonda yuqorida aytilgan birinchi shart o'rinli.

Ixtiyoriy $(a, b) \in C$ uchun $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$ tenglikni yozishimiz mumkin. Demak, S maydon uchun yuqoridagi ikkinchi shart ham o'rinli, ya'ni har qanday $z = (a, b) \in C$ element

$$z = a + bi \quad (3)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. Berilgan (a, b) vektor koordinatalari bilan to'la aniqlangani uchun uni (3) ko'rinishda yagona usul bilan yozish mumkin (3) ifodadagi a soni z kompleks sonning xaqiqiy qismi deyiladi va $\operatorname{Re} z$ orqali belgilanadi. Undagi b soni esa z kompleks ss ning mavxum qismi deyiladi va $\operatorname{Im} z$ orqali belgilanadi. SHunday qilib, haqiqiy sonlar mavxum qismi nol' bo'lgan kompleks sonlardir. Haqiqiy qismi nol' bo'lgan kompleks sonlar, ya'ni $bi (b \in R)$ ko'rinishidagi sonlar sof mavxum kompleks sonlar

deyiladi.

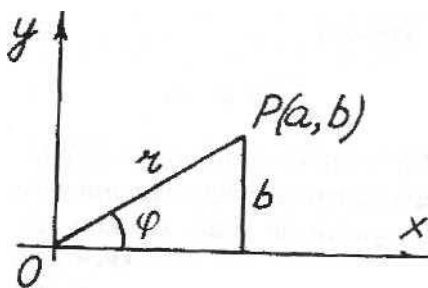
Agar R haqiqiy sonlar to'plamini to'g'ri chiziq sifatida geometrik talqinini qarash, u holda R^2 ni tekislik deb qarashimiz mumkin.

(3) formula R^2 tekislik nuqtalari bilan kompleks sonlar maydoni orasida biektsiya o'rnatadi. Bu biektsiya S kompleks sonlar maydoning geometrik talqini, tekislik esa -kompleks tekislik deyiladi.

Kompleks sonlarni kompleks tekislikning nuqtalari deb ham gapiriladi. Bunda haqiqiy sonlarga abstsissa o'qining nuqtalari, so'f mavxum sonlarga esa ordinata o'qining nuqtalari mos keladi. Shuning uchun ba'zan abstsissa o'qi - haqiqiy o'q, ordinata o'qi esa mavxum o'q deyiladi.

Kompleks tekislikda qutb koordinat tizimini kiritamiz. Qutb sifatida O nuqta va qutb o'qi sifatida haqiqiy musbat yarim o'qni (abstsissalar o'qining musbat yarim o'qini) olamiz (1-shakl).

Tekisliqdagi $P(a,b)$ nuqtaning (z, φ) qutb koordinatalari quyidagicha aniqlanadi: R nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofa va Ox qutb yarim o'qi bilan OR kesma orasidagi φ burchak bilan R nuqtaning tekislikdagi o'rni to'la aniqlanadi. r - qutb



radiusi va φ - qutb burchagi deyiladi.

1-shakl.

r masofa bo'lgani uchun u doim manfiy bo'lmagan haqiqiy songa va faqat $P = 0$ bo'lgandagina nol'ga tengdir. φ burchak bo'lgani uchun uning qiymatlari $0 \leq \varphi < 2\pi$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak.

Ammo shunday masalalar uchraydiki, ularda ixtiyoriy haqiqiy qiymatli (ya'ni qiymatlari $[0, 2\pi]$ oraliqdan tashqarida yotgan) burchaklar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Kelishuvga muvofiq musbat burchaklar soat mili yurishiga qarshi yo'nalishda va manfiy burchaklar strelkasi yurishi yo'nalishi bo'yicha hisoblanadi. Qutb koordinatalari (r, φ) va $(r, \varphi + 2k\pi)$

bo'lgan juftlar har qanday k butun son uchun tekislikda bitta nuqtaga keladi.

2.2 - § Kompleks sonning trigonometrik shakli.

1-shakldagi to'g'ri bo'rchakli OPQ uchburchakdan R nuqtaning (a, b) dekart koordinatalari bilan (r, φ) qutb koordinatalari $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$ tengliklar bilan bog'langanligi olinadi. Agar $P(a, b)$ nuqta berilgan bo'lsa, u holda uning qutb radiusi $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ tenglik orqali topiladi. $r \neq 0$ holda uning qutb burchagi π ga yoki 2π ga karrali bo'lgan son aniqligida $\cos \varphi = \frac{a}{r}, \sin \varphi = \frac{b}{r}$ tengliklardan topiladi. $r = 0$ holda uning qutb burchagi ixtiyoriy haqiqiy son. $z = a + bi$ kompleks sonning radiusi uning moduli deyiladi va $|z|$ orqali belgilanadi.

Ushbu $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ifodadan va $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ belgilardan bevosita $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ tengsizliklar kelib chiqadi.

$|z|$ funktsiya z ning bir qiymatli funktsiyasi, $z = a + bi$ kompleks sonning kutb burchagi uning argumentideyiladi va $\operatorname{Arg} z$ orqali belgilanadi. Agar φ son z kompleks sonning qutb burchagi bo'lsa, har qanday k butun son uchun $\varphi + 2\pi k$ ham z ning qutb burchagi bo'lgani sababli $\operatorname{Arg} z$ funktsiya z ning ko'p qiymatli funktsiyasidir. Demak, berilgan $z (z \neq 0)$ uchun $\operatorname{Arg} z$ bitta son emas, balki $\{\varphi + 2\pi k\}$ ko'rinishdagi barcha sonlar tizimi (bu er kixtiyoriy butun son).

Ushbu $z = a + bi$ ifoda odatda z kompleks sonning algebraik ifodasi deyiladi. Bu ifodadan va $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$ tengliklardan foydalanib, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ifodani olamiz. Bu z kompleks sonning trigonometrik ifodasi deyiladi. Kompleks sonning trigonometrik ifodasi quyidagi ma'noda yagona:

1-teorema. Agar $z (z \neq 0)$ kompleks sonning ikkita $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ va $z = r^1(\cos \varphi^1 + i \sin \varphi^1)$ trigonometrik ifodalari berilgan bo'lsa, u holda $r = r^1$ va shunday k butun son mavjudki, $\varphi = \varphi^1 + 2\pi k$.

Isbot. Haqiqatan, bu holda $r \cos \varphi = r^1 \cos \varphi^1, r \sin \varphi = r^1 \sin \varphi^1$. Bulardan

$$r = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \sqrt{(r^1 \cos \varphi^1)^2 + (r^1 \sin \varphi^1)^2} = r^1.$$

U holda $z \neq 0$ bo'lgani uchun $\cos \varphi = \cos \varphi'$, $\sin \varphi = \sin \varphi'$. Bu tengliklardan φ va φ' burchaklarning bir-biridan $2\pi k$ (k -butun son) ga farq qilishi kelib chiqadi.

Kompleks sonlar ustida qo'shish va ayirish amallarini bajarishda ularning algebraik ifodasi bilan ish ko'rish qulay. Kompleks sonlarning trigonometrik ifodasi esa kompleks sonlarni ko'paytirishda, bo'lishda va darajaga ko'tarishda qo'l keladi.

Agar $Z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $Z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ bo'lsa, u holda

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = r_1 \cdot r_2 [(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))].$$

Bundan 1-teoremaga asosan $r_1 \cdot r_2 = |Z_1 \cdot Z_2|$, ya'ni

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| \quad (4)$$

Yuqorida olingan tenglikdan

$$\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2) = \text{Arg}Z_1 + \text{Arg}Z_2 \quad (5)$$

tenglik ham kelib chiqadi. Bu tenglik quyidagicha tushuniladi $\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2)$ sonlar tizimi $\varphi + \psi$, $\varphi \in \text{Arg}Z_1$, $\psi \in \text{Arg}Z_2$ ko'rinishidagi sonlar tizimidan iborat.

(4) tenglik gomomorfizmlar yordamida quyidagicha talqin qilinadi:

S maydonni ko'paytirishga nisbatan yarimgurux va R_0 - manfiy bo'lmagan xaqiqiy sonlar to'plamini ko'paytirishga nisbatan yarimgurux deb qarasaq, u holda (4) tenglik $Z \rightarrow |Z|$ moslikning S va R_0 yarimguruxlar gomomorfizmi ekanligini ko'rsatadi.

(5) tenglik ham gomomorfizm sifatida talqin qilinishi mumkin. Bu gomomorfizm ustida keyinroq to'xtalamiz. Matematik induksiya yordamida har qanday $Z_k = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $k = \overline{1, n}$ kompleks sonlar uchun quyidagi tengliklar olinadi:

$$Z_1 \cdot Z_2 \dots Z_n = |Z_1| \cdot |Z_2| \dots |Z_n| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)), \quad (6)$$

ya'ni $|Z_1 \cdot Z_2 \dots Z_n| = |Z_1| \cdot |Z_2| \dots |Z_n|$ va

$$\text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2 \dots Z_n) = \text{Arg}Z_1 + \text{Arg}Z_2 + \dots + \text{Arg}Z_n.$$

2.3- § Muavr formulasi.

2-teorema (Muavr formulasi). Har qanday n butunson va

har qanday $\varphi \in R$ burchak uchun

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

tenglik o'rinli.

I s b o t . (6) formulada $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ va $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$ deb olsak, (7) formulaning n naturalsonlar uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Ushbu

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-1} &= \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \\ &= \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

tenglik (7) ning $n = -1$ da o'rinli ekanligini ko'rsatadi. endi ixtiyoriy n manfiy butun sonni olamiz. Uni, $n = -m, m \in N$, deb olib, (7) tenglikning har qanday natural son uchun va $n = -1$ uchun o'rinliligidan foydalanib, quyidagi tenglikni olamiz:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-m} = \\ &= \left((\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-1} \right)^m = (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))^m = \\ &= \cos(-m\varphi) + i \sin(-m\varphi) = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \end{aligned}$$

ya'ni (7) tenglik n manfiy butun son uchun ham o'rinli

Agar $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ bo'lsa, u xolda (6)

va (8) tengliklardan

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Demak,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{r_1}{r_2} \right|, \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$$

Kompleks sonning moduli haqiqiy son absolyut qiymati (moduli) tushunchasining umumlashmasidir: agar $z = x + yi$ haqiqiy son bo'lsa, u holda $y = 0, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2} = |x|$. Har qanday

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad \text{uchun}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \quad |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Demak $|z_1 - z_2|$ son kompleks tekislikdagi z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi masofadir.

($|x_1 - x_2|$ son to'g'ri chiziqdagi x_1 va x_2 nuqtalar orasidagi masofa bo'lgani kabi). Bunga ko'ra, agar $z_0 \in C, r \in R, r > 0$ bo'lsa, u holda

$$\{Z \in C : |Z - Z_0| = r\}, \{z \in C : |z - z_0| < r\}, \{z \in C : |z - z_0| \leq r\}$$

to'plamlar mos ravishda markazi z_0 nuqtada radiusi r bo'lgan aylanani, ochiq va yopiq doiralarni ifodalaydi.

Berilgan $z = a + bi$ uchun $a - bi$ son z ga kompleks qo'shma deyiladi va \bar{z} orqali belgilanadi. $\bar{\bar{z}}$ nuqta kompleks tekislikda haqiqiy o'qqa nisbatan z ga simmetrik joylashgan. Ravshanki, $\bar{\bar{z}} = z$.

$$|\bar{z}| = |z|, z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z, z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z, z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

$z = \bar{z}$ tenglik o'rinli bo'lishi uchun $z \in \mathbb{R}$ shartning bajarilishi zarur va kifoya.

3-teorema. $z \rightarrow \bar{z}$ formula bilan berilgan $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aks ettirish S maydonning avtomorfizmidir.

Isbot. $z = \bar{\bar{z}}$ ayniyatdan f^{-1} ning mavjudligi va $f^{-1} = f$ tenglik kelib chiqadi. Xususan, f – biektsiya. Agar $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ bo'lsa, u holda

$$f(z_1 + z_2) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1i) +$$

$$+ (a_2 - b_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = f(z_1) + f(z_2),$$

$$f(z_1 z_2) = f((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i) =$$

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i =$$

$$= (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = f(z_1) \cdot f(z_2).$$

4-teorema. Har qanday $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ uchun

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

I s b o t. Xaqiqatan

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 +$$

$$+(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

Bundan

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Bu tengsizlikdan esa $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ kelib chiqadi. Bunga ko'ra

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|. \text{ Bundan}$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

2.4 - § Ildiz chiqarish.

$z \in \mathbb{C}$ va n – natural son bo'lsin ($n > 1$). Ushbu $W^n = z$ tenglikni qanoatlantiruvchi W kompleks son z ning n -darajali ildizi deyiladi.

1-teorema. Har qanday $Z \neq 0$ kompleks son naq n ta turli n -darajali ildizga ega. Agar $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ bo'lsa, u holda ular quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$W_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), (k = \overline{0, n-1}).$$

Isbot. $W^n = z$ bo'lib, $W = p(\cos \theta + i \sin \theta)$ – uning trigonometrik ifodasi bo'lsin. Muavr formulasiga asosan

$$W^n = p^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Bundan $p^n = r$, $n\theta = \varphi + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Bu tengliklardan esa $p = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \frac{\varphi + 2m\pi}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ ni olamiz. Demak, z ning har bir n -darajali

$$\text{ildizi ushbu } W = W_m = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2m\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right), m \in \mathbb{Z}$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. Aksincha, bunday ko'rinishga ega bo'lgan har qanday kompleks son z ning n -darajali ildizidir.

Endi w_m va w_l lar qachon o'zaro tengligini aniqlaymiz. $w_m = w_l$ dan $\frac{\varphi + 2m\pi}{n} - \frac{\varphi + 2l\pi}{n}$ ayirmaning $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ko'rinishga ega ekanligi kelib chiqadi.

Bundan $\frac{m-l}{n} = k$, ya'ni m va l sonlari n ga bo'linganda bir xil qoldiqqa ega ekanligi kelib chiqadi. Bundan, birinchidan, n ning qoldiqlari faqat $0, 1, \dots, n-1$ bo'lishi mumkinligidan ushbu w_0, w_1, \dots, w_{n-1} sonlarning turli ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchidan, har qanday $m \in \mathbb{Z}$ uchun m ni n ga bo'lganda qoldiq p ga teng bo'lsa ($0 \leq p \leq n-1$), u holda $w_m = w_p$, ya'ni har qanday w_m son w_0, w_1, \dots, w_{n-1} sonlarning birortasiga tengligi kelib chiqadi.

Misol ko'ramiz. $z^4 + 1 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari mavjud emas, ammo 4 ta kompleks ildizga ega - ular (-1) sonning 4-darajali ildizlari. Ushbu $1 = \cos \pi + i \sin \pi$ ifodaga ko'ra w_0, w_1, w_2, w_3 ildizlar quyidagi ko'rinishga ega:

$$W_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$W_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

$$W_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},$$

$$W_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Boshqa misol. Bir sonining n -darajali ildizlari ustida to'xtalamiz. $1 = \cos 0 + i \sin 0$ ifodaga ko'ra 1 ning n -darajali ildizlari quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$W_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = \overline{0, n-1})$$

Bir sonining barcha ildizlari ko'paytirish amaliga nisbatan gurux hosil qiladi.

Haqiqatan, agar $\alpha^n = 1, \beta^n = 1$ bo'lsa, u holda $(\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n = 1$. Bir sonining o'zi birning n -darajali ildizi: $1^n = 1$. Agar $\alpha^n = 1$ bo'lsa, u holda $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\alpha^n} = 1$, ya'ni har bir birning n -darajali ildizining teskarisi ham birning n -darajali ildizidir.

$$\text{Muavr formulasiga asosan } W_k \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = W_1^k,$$

ya'ni birning barcha n -darajali ildizlari W_1^k darajalari orqali hosil qilinadi.

Birorta elementining darajalaridan iborat guruh siklik guruh deyiladi. Yuqoridagi mulohazalar bilan quyidagi teorema isbotlandi:

2-teorema. Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun birning n -darajali kompleks ildizlari ko'paytirish amaliga nisbatan tsiklik guruhni hosil qiladi.

III BOB. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

Ushbu bobda kombinatorikada qollaniladigan usul va qoidalar, kombinatsiyalar, kombinatsiya tushunchasi, o'rinlashtirishlar, o'rin almashtirish, Kombinasiyalashlar (gruppalashlar), binom formulasi, takrorlanuvchi o'rinlashtirishlar va o'rin almashtirish, takrorli Kombinasiyalashlarga oid ma'lumotlar bayon qilingan. Shuningdek, kombinatorikaning asosiy qoidalari, O'rinlashtirishlar, o'rin almashtirish, Kombinasiyalashlar (gruppalashlar), binom formulasi, takrorlanuvchi o'rinlashtirishlar, o'rin almashtirish, Kombinasiyalashlarga va takrorlashga doir misollar keltirilgan.

3.1- § Kombinatorika asosiy qoidalari

Kombinatorika haqida umumiy tushuncha. Matematikaning kombinatorika (birlashmalar nazariyasi) deb ataluvchi bo'limida chekli yoki muayyan ma'noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy elementlardan iborat to'plamni qismlarga ajratish, o'rin almashtirish, o'rinlashtirish, kombinatsiyalash, ya'ni birlashmalar tuzish kabi masalalari o'rganiladi. Shuningdek, unda to'plamlar va kombinatsiyalar, ularning birlashmasi va kesishmasi hamda ularni turli usullar bilan tartiblash masalalari ham qaraladi.

Kombinatsiya - bu kombinatorikaning asosiy tushunchasi bo'lib, ixtiyoriy to'plamning qandaydir sondagi elementtaridan tuzilgan birlashmalar hisoblanadi. Kombinatorikada bunday birlashmalarni o'rin almashtirish, o'rinlashtirish, Kombinasiyalash deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganiladi. Kombinatorik xarakterga ega bo'lgan masalalarda mumkin bo'lgan barcha variantlar sonini hisoblash uchun «nechta?» yoki «necha xil usulda?» kabi savollarga javob berish talab qilinadi. To'plamlar va kombinatsiya tushunchasi yordamida kombinatorikaning asosiy tushunchalarini ifodalash qulay. Elementlarining tartibi bilan bir-biridan farq qiladigan kombinatsiyalarni kortej deb ataymiz.

Masalan, (3; 4; 5), (5; 3; 4) juftliklar elementlarining tartibi bilan farqlanuvchi ikkita turli kortej hisoblanadi. Kortejni tashkil qilgan elementlar soni kortejning uzunligi (quvvati) hisoblanadi. Ba'zi hollarda kortej iborasi o'rniga juftliklar, yani uning uzunligini

e'tiborga olib, ikkilik, uchtalik va hokazo k taliklar iborasi ham ishlatiladi.

Shu kabi berilgan A, B, C to'plamlar elementlaridan tartiblangan uchtaliklar, umuman, k ta to'plam elementlaridan tartiblangan k taliklar to'plami tuziladi. Uzunliklari teng, tartibi va tarkibi bir xil bo'lgan kortejlar teng deyiladi.

Masalan, $(4; 12; 13)$ va $(\sqrt{16}, \sqrt{144}, \sqrt{169})$ kortejlar teng va bir xil uzunliklarda ($n=3$) elementlari:

$$4 = \sqrt{16}, \quad 12 = \sqrt{144}, \quad 13 = \sqrt{169}.$$

Lekin $(a; b; c)$ va $(c; a; b)$ kortejlarning uzunliklari va elementlari bir xil bo'lsa-da, lekin ular teng emas, chunki koordinatalari turli tartibda joylashgan.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan, ya'ni 0 uzunlikdagi k talik bo'sh kortej k talik kortej deyiladi. To'plamlarda esa elementlarning tartibi rol o'ynamaydi, k uzunlikdagi kortejda e'sa elementlarning tartibi ahamiyatli bo'lib, ular takrorlanishi ham mumkin.

Ta'rif. Tartiblangan: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ to'plamning elementlaridan tuzilgan va A_1 to'plamning elementini birinchi, A_2 to'plamning elementini ikkinchi va hokazo A_k to'plamning elementini k o'ringa qo'yib tuzilgan k uzunlikdagi kortejlar to'plamiga Dekart ko'paytma deyiladi. Dekart ko'paytma

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_k = \{(a_1; a_2; a_3; \dots; a_k), a_i \in A_i, i=\overline{1, k}\}$$

ko'rinishida yoziladi.

Agar $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ to'plamning birortasi bo'sh to'plam bo'lsa, u holda ulardan foydalanib birorta ham kombinatsiya tuzish mumkin emas. Demak, tarkibida hech bo'lmasa bitta bo'sh to'plam qatnashgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ to'plamlarning Dekart ko'paytmasi bo'sh to'plam, ya'ni $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_k = \emptyset$ bo'lar ekan.

1-misol. $A = \{6, 7, 9\}$ va $B = \{a, b, c\}$ to'plamlar elementlaridan shunday juftliklar tuzaylikki, ulardagi birinchi o'rindagi A to'plamning tartib bilan olingan elementi, ikkinchi o'rinda B to'plamning tartib bilan olingan elementi yoziladigan bo'lsin: Hosil bo'ladigan juftliklar to'plamini $A \times B$ orqali belgilasak,

$$A \times B = \{(6; a), (6; b), (6; c), (7; a), (7; b), (7; c), (9; a), (9; b), (9; c)\}$$

to'plam hosil bo'ladi. Agar birinchi o'rinda B to'plamning elementlari qo'yiladigan bo'lsa, yozilishi va tartibi bilan oldingisidan farq qiladigan:

$$A \times B = \{(a;6), (a;7), (a;9), (b;6), (b;7), (b;9), (c;6), (c;7), (c;9)\}$$

to'plam hosil bo'ladi.

Bu yerda $(6;a), (6;b), \dots, (c;7), (c;9)$ kortejlarning tarkibidagi elementlar shu juftlikning komponentlari yoki koordinatalari deyiladi (lotincha componentis -tashkil etuvchi).

2-misol. $A = \{a, b, c\}$ va $B = \{1, 3\}$ to'plamlarning $A \times B$ Dekart ko'paytmasini topamiz. Dekart ko'paymada oltita kortej mavjud. Ular:

$$A \times B = \{(a;1), (a;3), (b;1), (b;3), (c;1), (c;3)\}$$

to'plamni tashkil qiladi.

A va B to'plamlarning elementlari sonini mos ravishda $n(A)$, $n(B)$ orqali, umumiy juftliklar sonini esa $n(A \times B)$ orqali belgilaylik.

1-teorema. A va B chekli to'plamlarning elementlaridan tuzilgan juftliklar soni shu to'plamlarning elementlari soni ko'paytmasiga teng.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Bu teoremadan kombinatorikaning ko'paytirish qoidasi hisoblanib, undan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

Xulosa. Umuman, k ta $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ chekli to'plamdan tuzilgan uzunligi k songa teng kombinatsiyalar soni

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot \dots \cdot n(A_k)$$

bo'lar ekan.

2-teorema (umumlashgan ko'paytirish qoidasi). Elementlari soni mos ravishda $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ ta bo'lgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ to'plamlardan bittadan element olib tuzilgan k uzunlikdagi kombinatsiyalar soni $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ songa teng.

Isboti: teoremani isbotlash uchun matematika induksiya usulidan foydalanamiz.

Induksiya bazasi: $k = 1$ uchun teorema o'rinli, $k = 2$ bo'lgan holda esa teoremaning isboti ko'paytirish qoidasidan kelib chiqadi.

Induksion o'tish: teorema $k=t$ ($t=1,k$) uchun to'g'ri deb faraz qilib, $k=t+1$ uchun ham o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Dastlab uzunligi birga teng kombinatsiya tuzamiz. Bu kombinatsiya berilgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_t, A_{t+1}$ to'plamlarning ixtiyoriy biridan faqat bitta elementni tanlash orqali tuziladi. Masalan, bu kombinatsiya $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}$ to'plamdan olinsa, bunday kombinatsiyalar soni n_1 ta. Uzunligi birga teng kombinatsiyaning ixtiyoriy birini olib, uning o'ng tomoniga A_1 to'plamdan farqli biror masalan $A_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\}$ to'plamning elementini joylashtirsak, uzunligi ikkiga teng kombinatsiyalar soni n_2 ta bo'ladi. Uzunligi birga teng kombinatsiyalar soni n_1 ta ekanligini hisobga olsak, uzunligi ikkiga teng jami $n_1 \cdot n_2$ ta kombinatsiyalar hosil bo'ladi. Kombinatsiyalar hosil qilish jarayonini yuqoridagidek davom ettirib, hosil bo'lgan uzunligi t ga teng kombinatsiyalarning o'ng tomoniga $A_1, A_2, A_3, \dots, A_t$ to'plamdan farqli A_{t+1} to'plamning n_{t+1} ta elementlaridan ixtiyoriy birini joylashtirib, uzunligi $(t+1)$ ga teng n_{t+1} ta kombinatsiyalar hosil qilinadi. Demak, uzunligi t ga teng kombinatsiyalar soni $n_1, n_2, n_3, \dots, n_t$ ta bo'lgani uchun, uzunligi $(t+1)$ ga teng bo'lgan jami kombinatsiyalar soni $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_t \cdot n_{t+1}$ ta.

Bu teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

Xulosa. X_1 elemenmi n_1 ni ta usul bilan, X_2 elementni n_2 usul bilan va hokazo, oxiri $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{k-1}$ tanlanishlardan keyin X_k element n_k ta usulda tanlansa, u holda $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$ juftlikni ni $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ ta usulda tanlash mumkin.

1-misol. Raqamlari har xil bo'lgan nechta to'rt xonali sonlar tuzish mumkin.

Yechish: Raqamlari $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ bo'lgan songa $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ juftlikni mos keitiramiz, u holda a_1 elementni 9 ta usul bilan (1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlar orasidan), a_2 elementni tanlash uchun 9 ta usul (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlarning a_1 dan farqli bo'lgan ixtiyoriy biri), a_1 va a_2 element tanlangandan so'ng, a_3 ni tanlash uchun 8 ta imkoniyat, a_4 elementni tanlash uchun 7 ta imkoniyat mavjud. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra, izlanayotgan sonlar soni $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ ta bo'ladi.

2-misol. A shahardan B shaharga borish uchun m har xil yo'llar bilan, B dan esa C shahargacha n har xil yo'llar bilan borish mumkin bo'lsin. A shahardan B shahar orqali C shaharchasiga nechta turli yo'llar bilan borsa bo'ladi?

Yechish. A dan B ga olib boradigan m yo'ldan bittasini tanlansa, u orqali n ta yo'l bilan C shaharga o'tish mumkin. Demak, A dan C ga $m \times n = mn$ yo'llar orqali borish mumkin.

3-misol. Futbol bo'yicha mamlakat birinchiligida 16 ta jamoa ishtirok etadi. Oltin va kumush medallarni necha usul bilan taqsimlash mumkin?

Yechish. Oltin medalni 16 ta jamoadan bittasi olish mumkin. Bittadan oltin medal egasi bo'lgan jamoa aniq bo'lgandan so'ng, kumush medalni qolgan 15 ta jamoadan bittasi olishi mumkin. Demak, oltin va kumush medallarni kombinatorikaning ko'paytirish qoidasiga asosan $16 \times 15 = 16 \cdot 15 = 240$ usul bilan taqsim etish mumkin.

4-misol. Berilgan 0,1,2,3,4,5 raqamlardan qancha to'rt xonali sonlar tuzish mumkin?

a) biffa raqam bir ma'tadan ko'p qatnashmasa;

b) hosil bo'lgan son toq bo'lsa (raqamlar qaytarilishi mumkin).

Yechish. a) To'rt xonali sonning birinchi raqami sifatida 1,2,3,4,5 raqamlardan birortasi bo'lishi mumkin. Agar birinchi raqam tanlangan bo'lsa, ikkinchi raqam 0 ni ham hisobga olsak, 5 ta usul bilan, uchinchi raqam 4 ta usul bilan, to'rtinchi raqam 3 ta usul bilan taqsimlanishi mumkin. Demak,

$$n_1 = 5, \quad n_2 = 5, \quad n_3 = 4, \quad n_4 = 3$$

va kombinatorikaning ko'paytirish qoidasiga asosan, to'rt xonali sonlar:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \text{ ta.}$$

c) Bu holda to'rt xonali sonning birinchi raqami 1,2,3,4,5 lardan bittasi ($n_1 = 5$), ikkinchi va uchinchi raqamlar esa 0,1,2,3,4,5 lardan bittasi

($n_2 = 6, n_3 = 6$), oxirgi to'rtinchi raqam 1,3,5 lardan bittasi ($n_4 = 3$) o'lishi mumkin. Demak, to'rt xonali toq sonlar:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540 \text{ ta.}$$

3-teorema. Agar A va B o'zaro kesishmaydigan to'plam bo'lsa, u holda bu to'plamlar birlashmasining elementlari soni ularning har biridagi elementlar soni yig'indisiga teng, ya'ni

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

bu yerda: $A \cap B = \emptyset$.

Bu teorema kombinatorikaning qo'shish qoidasi deyiladi va undan quyidagi xulosaga kelib chiqadi.

O'zaro kesishmaydigan n ta elementli A to'plam va m ta elementli B to'plam berilgan bo'lib, kamida bitta to'plamga tegishli birorta elementni tanlash imkoniyati ularning umumiy elementlari $n + m$ soniga teng bo'lar ekan.

Xulosa. Agar A to'plamdan olingan x elementni n ta usulda tanlash, B to'plamdan olingan y elementni esa m ta usul bilan tanlash mumkin bo'lsa va bu usullar bir-biridan farqli bo'lsa yoki bir-biriga bog'liq bo'lmasa, x yoki y elementni $n + m$ ta usul bilan bajarish mumkin.

4-teorema (umumlashgan qo'shish qoidasi). Juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|,$$

Bu yerda: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

2-masala. Guruh 15 ta o'g'il bolalardan va 17 ta qiz bolalardan iborat. Guruh rahbari bir talabani shaxmat musobaqasiga tanlab olishi kerak. Bu tanlashdan keyin 1 ta o'g'il va 1 ta qiz bolani shaxmat musobaqasiga tanlaydi. U bu ishni necha xil usul bilan qilishi mumkin?

Yechish: Qo'shish qoidasiga ko'ra, birinchi tanlashda $15 + 17 = 32$ ta imkoniyat mavjud. Bu tanlanishdan keyin guruh talabalar soni bittaga kamayadi. Agar bu tanlanma o'g'il bola bo'lsa, u holda ikkinchi tanlanmani guruh rahbari ko'paytirish qoidasiga binoan $14 \cdot 17 = 238$ ta usul bilan, tanlanma qiz bola bo'lsa, $15 \cdot 16 = 240$ ta usul bilan bajarishi mumkin.

Yuqorida bayon qilingan chekli to'plam uchun ko'paytirish va qo'shish qoidalari $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$ bo'lgan hollardagina o'rinli bo'lib, chekli sondagi ixtiyoriy to'plam uchun bu amallarni umumlashtirish mumkin.

Bu qoidalar kombinatorikada umumlashgan qo'shish va ko'paytirish yoki kiritish va chiqarish qoidalari deyiladi.

5-teorema. Ixtiyoriy chekli A_1, A_2 to'plamlar uchun

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

va

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2|$$

tengliklar o'rinli.

6-teorema. Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \\ &- |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

hamda

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \\ &- |A_1 \cup A_3| - \dots - |A_{n-1} \cup A_n| + |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + \dots + |A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n| + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli.

Isboti:

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \\ &- |A_1 \cup A_3| - \dots - |A_{n-1} \cup A_n| + |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + \dots + |A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n| + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| \end{aligned}$$

o'rinli ekanligini isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz.

Induksiya bazasi: $n = 2$ uchun formula 5-teoremaga asosan to'g'ri.

Induksion o'tish: teoremani $n = k$ uchun to'g'ri deb faraz qilib, $n = k + 1$ bo'lgan hol uchun o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. U holda $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}$ kesishmani

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cap A_{k+1}$$

ko'rinishida ifodalaymiz. So'ngra 5-teoremani va birlashmaga nisbatan distributivlik qonunini qo'llab hamda $n = k$ uchun formula to'g'riligini hisobga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cap A_{k+1}| = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| + \cap |A_{k+1}| - \\ - |(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cup A_{k+1}|$$

Bu ifodadagi oxirgi ayriluvchi $n = k$ ta to'plamning kesishmasini ifodalaganligi uchun, induksiya faraziga ko'ra, bu ayriluvchini quyidagicha yozish mumkin:

$$|(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cap A_{k+1}| = |(A_1 \cup A_{k+1}) \cap (A_2 \cup A_{k+1}) \cap \dots \cap (A_k \cup A_{k+1})| = \\ = |A_1 \cup A_{k+1}| + |A_2 \cup A_{k+1}| + \dots + |A_k \cup A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_{k+1}) \cap (A_2 \cup A_{k+1})| - \\ - \dots - |(A_{k-1} \cup A_{k+1}) \cap (A_k \cup A_{k+1})| + \dots + \\ + (-1)^{k-1} |(A_1 \cup A_{k+1}) \cup (A_2 \cup A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cup A_{k+1})| = \\ = |A_1 \cup A_{k+1}| + |A_2 \cup A_{k+1}| + \dots + |A_k \cup A_{k+1}| - |A_1 \cup A_2 \cup A_{k+1}| - \\ - \dots - |A_{k-1} \cup A_k \cup A_{k+1}| + \dots + (-1)^{k-1} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}|$$

Bu ifodani o'z o'rniga qo'ysak,

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| + |A_{k+1}| - |A_1 \cap A_2| - \\ - |A_1 \cup A_3| - \dots - |A_k \cup A_{k+1}| + |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + \dots + |A_{k-1} \cup A_k \cup A_{k+1}| + \\ + \dots + (-1)^k |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}|$$

tenglik kelib chiqadi.

A shahardan B shaharga borishning n ta, B shahardan C shaharga borishning m ta yo'li bo'lsa, u holda A shahardan C shaharga borishning nm ta yo'li bor, ya'ni A dan C ga nm xil usulda borish mumkin.

1. Bir mamlakatda 4 ta shahar bor ekan: A, B, C va D. A shahardan B ga 6 ta yo'l, B shahardan C ga 4 ta yo'l olib borarkan. A dan D ga 2 ta yo'l, D dan C ga 3 ta yo'l bilan borish mumkin ekan. A shahardan C shaharga necha xil yo'l bilan borish mumkin?

2. Agar natural sonning yozuvida faqat toq sonlar qatnashsa, bunday sonni „yoqimtoy“ son deymiz. Nechta: 3 xonali „yoqimtoy“ son mavjud?

3. Agar natural sonning yozuvida faqat toq sonlar qatnashsa, bunday sonni „yoqimtoy“ son deymiz. Nechta 4 xonali „yoqimtoy“ son mavjud?

4. Yozuvida hech bo'lmaganda bitta juft raqam qatnashgan 6 xonali sonlar nechta?
5. 4 ta turli xatni 4 ta turli konvertga necha xil usulda joylash mumkin?
6. 5 nafar o'quvchidan 2 nafarini „Bilimlar bellashuvi“ da qatnashish uchun tanlab olish kerak. Buni necha xil usulda bajarish mumkin?
7. Doskada 12 ta ot, 8 ta fe'l va 7 ta sifat yozilgan. Gap tuzish uchun har bir so'z turkumidan bittadan olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?
8. Shaxmat taxtasida oq va qora ruxni bir-birini ololmaydigan („ura olmaydigan“) qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?
9. Shaxmat taxtasida 8 ta ruxni bir-birini ololmaydigan qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?
10. Shaxmat taxtasiga oq va qora farzinlarni, ular bir-birini „ura olmaydigan“ qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?
11. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni, o'yin qoidalarini buzmaganda, necha xil usulda qo'yish mumkin?
- Ko'rsatma: 3 ta holni qarang:
- 1) oq shoh burchakda turibdi;
 - 2) oq shoh taxtaning chetida (lekin burchakda emas) turibdi;
 - 3) oq shoh taxtaning chetida emas.
12. Maktab oshxonasida oq non, qora non va uch xil kolbasa bor. Ulardan necha xil buterbrod tayyorlash mumkin?
13. Ba'zi mamlakatlarning bayroqlari turli rangdagi 3 ta gorizontaal yoki 3 ta vertikal „yo'l“ lardan iborat. Oq, yashil, ko'k rangli matolar yordamida shunday bayroqlardan necha xilini tikish mumkin?
14. Bo'sh joylarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 raqamlaridan birini yozish mumkin bo'lsa, $\square + \square + \square = 10$ „tenglama“ nechta yechimga ega bo'ladi? Raqamlar takrorlanishi mumkin. Ikki holni qarang: (masalan: 1) 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 turli yechim; 2) bitta yechim deb qaraladigan hollar).
15. Nodirning chamadoni kod bilan ochiladi. Bu kod uchta raqamdan iborat bo'lib, har bir raqam 3 dan katta emas. Kodda 13 soni qatnashmaydi. Nodir kodni unutib qo'ygan bo'lsa, kodni topish uchun u ko'pi bilan necha marta „urinishi“ lozim bo'ladi? (Raqamlar takrorlanmaydi)

3.2- § O‘rin almashtirishlar

Chekli $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ to‘plamning barcha elementlarini o‘z ichiga olgan ushbu kombinatsiyalarni qaraylik:

$$(a_1; a_2; a_3; a_4), \quad (a_3; a_1; a_2; a_4)$$

Bu juftliklar bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qilmoqda. Ushbu kombinatsiyalarda elementlari takrorlanmasdan o‘rni almashayotganligi sababli, bunday birlashmalarni takrorsiz o‘rin almashtirishlar deb ataymiz.

Agar A to‘plamning har bir elementiga $1, 2, \dots, n$ sonlardan bittasi mos qo‘yilgan bo‘lsa, chekli A to‘plam tartiblangan deyiladi ($n - A$ to‘plamning elementlari soni). Bunda turli elementlarga turli sonlar mos keladi. Boshqacha aytganda, agar A to‘plamning elementlari nomerlangan bo‘lsa, bu to‘plam tartiblangan deyiladi. Faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan tartiblangan to‘plamlar o‘rin almashtirishlar deb ataladi.

Ta‘rif: Faqat elementlarining tartibi bilangina farq qiluvchi, ya'ni $n = k$ bo‘lgandagi o‘rinlashtirishlarga o‘rin almashtirish deyiladi.

n ta elementdan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni P_n bilan belgilanadi (P - fransuzcha permutation - o‘rin almashtirish so‘zining bosh harfi).

Agar n ta elementdan k tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlarda $n = k$ bo‘lsa, o‘rin almashtirish hosil bo‘lib, ular faqat elementlari tartibi bilan farqlanadi. Ularning soni:

$$P_n A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!, \quad P_n = n! \quad (1)$$

qiymatga teng.

Izoh. $n!$ - birdan n gacha natural sonlar ko‘paytmasi bo‘lib, “ n factorial” deb o‘qiladi. $0! = 1$ deb qabul qilingan.

Bitta elementli $A = \{a\}$ to‘plamda faqat bitta o‘rin almashtirish borligi ravshan. Ikkita elementli $A = \{a_1, a_2\}$ to‘plamda ikkilik juftlikni tuzishda birinchi elementni tanlash uchun ikkita imkoniyat, birinchi element tanlangandan so‘ng, ikkinchi elementni tanlash uchun bitta imkoniyat mavjud. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, ikkilik juftlikni $P_2 = 1 \cdot 2 = 2$ usul bilan tanlash mumkin. Bu son ikkita elementli o‘rin almashtirishlar sonini

ifodalaydi. Shu kabi $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to'plamda o'rin almashtirishlar soni $P_n = n!$ songa teng.

Eslatma. Kombinatsiyalami tuzishda vergul belgisidan foydalanmaslik uning xususiyatiga ta'sir qilmaydi. Bu eslatma barcha kombinatorik tuzilmalar uchun o'rinlidir.

Teorema. n ta elementli tartiblangan to'plamning o'rin almashtirishlar soni $n!$ ta bo'ladi, ya'ni:

$$P_n = n!$$

formula o'rinli.

Isboti: teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz.

Induksiya bazasi: $n = 1$ uchun $P_1 = 1! = 1$ o'rinli.

Induksion o'tish: tasdiq biror $n = k$ uchun o'rinli deb $n = k + 1$ bo'lgan holda o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. $k + 1$ ta elementli tartiblangan to'plamni hosil qilish uchun $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ tartiblangan to'plamga a_{k+1} elementni kiritib, $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ to'plamni hosil qilamiz. Bunda a_{k+1} element $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ to'plamga $k!$ ta o'rin almashtirishlarning har biriga quyidagicha $k + 1$ ta usulda kiritiladi: birinchi elementdan oldin; birinchi va ikkinchi element orasiga; ikkinchi va uchinchi element orasiga va hokazo $k -$ elementdan keyin joylashadi. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ to'plam uchun $(k + 1) \cdot k!$ ta o'rin almashtirish hosil bo'ladi, ya'ni:

$$P_{k+1} = (k + 1)!$$

formula o'rinli bo'ladi.

1-misol. Beshta 1,2,3,4,5 o'lchamli mahsulotlarni yashiklarga joylashtirish kerak. Agar 2 sonining 3 sonidan keyin joylashtirish mumkin bo'lmasa, unda mahsulotlarni necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechish: Beshta yashikka 5 xil o'lchamli mahsulotni joylashtirishlar soni $P_5 = 5! = 120$ ta. Agar (3;2) juftiikni ajratib olib, 1,(3;2)4,5 o'lchamlardan o'rin almashtirishlar tuzilsa, ularning soni $P_4 = 4! = 24$ ta. U holda misol shafli bo'yicha $120 - 24 = 96$ ta usul mavjud.

2-misol. Kitob tokchasidagi 15 ta kitobdan 3 tasi rus, ingliz, fransuz tilida. Bu kitoblarni yonma-yon ketadigan qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?–

Yechish: Bu uchta kitobdan bitta juftlik tuzamiz. Ular orasida $P_3 = 3! = 6$ ta o‘rin almashtirishlar mavjud. Tokchada juftlik tuzilgandan keyin uchtalik kitoblar juftligi bilan 13 ta element qoladi. O‘zaro o‘rin almashtirishlar soni $P_{13} = 13!$ ta bo‘lib, har bir o‘rin almashtirishlar tarkibida ingliz, rus, fransuz tilidagi tuzilgan juftlik ichidagi 6 ta o‘rin almashtirishni ham hisoblaganda, birgalikda o‘rin almashtirishlar soni $P_{13} \cdot P_3 = 13! \cdot 6$ ta ekan.

2.3- § Takrorsiz o‘rinlashtirishlar

1. n ta elementdan tuzilgan elementlari takrorlanmagan X to‘plam elementlari-dan k tadan tanlab olib tuzilgan takrorsiz o‘rinlashtirishlar deb, n ta element ichidan tanlab olingan k ta shunday elementga aytiladiki, ular bir-biridan elementlar tarkibi yoki tarkibdagi elementlar joylashuvi bilan farq qiladi. $n \geq k$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Misol: $X = \{1, 3, 4, 6\}$ raqamlaridan ixtiyoriy ikkitasini tanlab takrorsiz nechta ikki xonali son hosil qilish mumkin?

$$1\text{-usul: } \underbrace{\left. \begin{array}{cccc} 13 & 31 & 41 & 61 \\ 14 & 34 & 43 & 63 \\ 16 & 36 & 46 & 64 \end{array} \right\}}_{4 \text{ ta}} 3 \text{ ta} \quad 3 \cdot 4 = 12 \text{ ta.}$$

$$2\text{-usul: } \overline{ab} = \overline{a b} \Rightarrow 4 \cdot 3 = 12 \text{ ta.}$$

$$3\text{-usul: } n = 4, k = 2 \text{ ta } A_n^k = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ ta.}$$

Misol: $X = \{1, 3, 5, 7\}$ raqamlaridan ixtiyoriy ikkitasini tanlab takrorsiz nechta ikki xonali son hosil qilish mumkin?

$$1\text{-usul: } \underbrace{\left. \begin{array}{cccc} 13 & 31 & 51 & 71 \\ 15 & 35 & 53 & 73 \\ 17 & 37 & 57 & 75 \end{array} \right\}}_{4 \text{ ta}} 3 \text{ ta} \quad 3 \cdot 4 = 12 \text{ ta.}$$

2-usul: $\overline{ab} = \overline{a b} \Rightarrow 4 \cdot 3 = 12$ ta.

3-usul: $n = 4, k = 2$ ta $A_n^k = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 = 12$ ta.

3.4- § Takrorli o‘rin almashtirish

O‘rin almashtirishlarda har bir kombinatsiya elementlarining faqat tartibi bilan farqlanadi. Agar o‘rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlansa, aynan shu bir xil elementlar o‘rinlari almashtirilsa, yangi o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi. Shuning uchun ham elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni elementlari takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlar sonidan kichik bo‘lishi tabiiy. Uzunligi n songa teng kombinatsiya elementlari orasida n_1 marta a_1 element, n_2 marta a_2 element va hokazo n_k marta a_k element ishtirok etsin. Bu elementlarning o‘rinlari almashtirishdan hosil qilingan kombinatsiyalar takrorli o‘rin almashtirishlar deyiladi.

Teorema. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (1)$$

formula bilan topiladi, bu yerda $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ - umumiy elementlar soni, k - har bir elementning kombinatsiyada ishtirok etishlar soni.

Takrorsiz o‘rin almashtirishlar formulasi (1) formulaning $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$ bo‘lgandagi xususiy holi.

Isboti. Uzunligi n songa teng kombinatsiya elementlari orasida n_1 marta a_1 element, n_2 marta a_2 element va hokazo n_k marta a_k element ishtirok etsin. Bu kombinatsiyaning mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlar sonini topaylik. Birinchi a_1 element n_1 marta qatnashgani uchun, bu elementning mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlari soni $n_1!$, ikkinchi a_2 element n_2 marta qatnashgani uchun, $n_2!$ ta o‘rin almashtirish va hokazo a_k element $n_k!$ ta o‘rin almashtirish mavjud. Bu o‘rin almashtirishlar bog‘liq bo‘lmagani uchun, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, umumiy o‘rin almashtirishlar soni $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!$ ta. Uzunligi $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$

songa teng kombinatsiya uchun o'rin almashtirishlar soni esa $n!$ ta bo'ladi. Kombinatsiya n_1 marta a_1 element, n_2 marta a_2 element va hokazo n_k , mara a_k elementdan iborat bo'lgani uchun $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!$ ta o'rin almashtirish yangi o'rin almashtirishni ifodalaydi. Demak, $n!$ ta o'rin almashtirishlar tarkibida $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!$ ta o'rin almashtirishlar bo'lgani sababli, takrorli o'rin almashtirishlar soni

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

ta ekan.

Bu teoremani quyidagicha ham isbotlash mumkin.

A chekli to'plam bo'lib, uning elementlar soni n ta bo'lsin. Quyidagi masalani ko'ramiz: bu to'plamni o'zaro kesishmaydigan (ya'ni umumiy elementlari bo'lmagan) k ta $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ qism to'plamlarga necha usul bilan ajratish mumkin. Boshqacha aytganda, necha usul bilan A to'plamni

$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_k, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

yig'indi ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda B_i to'plamning elementlari soni mos ravishda n_i bo'lsa, $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$, ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) tenglik bajariladi.

Qo'yilgan masalada hamma $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ qism to'plamlarni quyidagicha hosil qilish mumkin: A to'plamning ixtiyoriy n_1 ta elementli B_1 qism to'plamini olamiz. Yuqoridagilardan kelib chiqadiki, buni $C_n^{n_1}$ usul bilan bajarish mumkin. Keyin qolgan $n - n_1$ ta elementdan $C_{n-n_1}^{n_2}$ usul bilan n_2 ta elementli B_2 qism to'plamni ajratamiz va hokazo. Turli $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ to'plamlarni tanlashlarning umumiy soni kombinatorikaning ko'paytirish qoidasiga asosan,

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot (n-n_1)! \cdot n_2! \cdot (n-n_1-n_2)! \cdot \dots \cdot n_k! \cdot (n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}-n_k)!}$$

Demak, natijaga ko'ra, takrorli o'rin almashtirishlar soni

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

ta. (1) formula bilan aniqlanadigan $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ sonlar polinomial koeffitsiyentlar deb ataladi.

Takrorli o'rin almashtirishlar vositasida Nyuton binomi formulasini umumlashtirishimiz mumkin. $P(n_1, n_2)$ takrorli o'rinlashtirishlarda a_1 element n_1 marta, n_2 marta a_2 element ishtirok etgan bo'lsin. Agar $n_1 + n_2 = n$ tenglikda $n_1 = k$ va $n_2 = n - n_1 = n - k$ deb olsak,

$$P(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k$$

binomial koeffitsiyent kelib chiqadi.

Demak, binom formulasini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= P(n,0) \cdot x^n + P(n-1,1) \cdot x^{n-1}a + \dots + P(0,n) \cdot a^n = \\ &= \sum_{k=0}^n P(n-k, k) \cdot x^{n-k} a^k \end{aligned} \quad (2)$$

bu yerda $P(n-k, k) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = C_n^k$.

Teorema. Ixtiyoriy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ va natural n son uchun

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)^n = \sum P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k} \quad (3)$$

formula o'rinli, bu yerda $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ natural son.

Bu formula umumlashgan Nyuton formulasi deb ataladi.

Isboti. $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)^n$ ifodaning yoyilmasini n ta bir xil ifodalaming ko'paytmasi shaklida yozaylik:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)^n = \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) \cdot \dots \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)}_{n \text{ ta}}$$

Qavslarni ochib, o'xshash hadlarni ixchamlaymiz. Yoyilmaning tarkibidagi har bir $a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}$ ko'paytmaning koeffitsiyentlari n ta elementli ($n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$) takrorli o'rin almashtirishlar soniga teng bo'lib chiqadi. Demak, berilgan ifodaning yoyilmasi

$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)^n = \sum P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}$ yig'indidan iborat.

Ko'phad yoyilmasini hisoblaganda, $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ sonlar $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ ($n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k$) sonlarning o'rin almashtirishlari natijasida hosil bo'lsa, u holda

$a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}$ va $a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot a_3^{b_3} \cdot \dots \cdot a_k^{b_k}$ hadlarning koeffitsiyentlari teng bo'ladi. Daraja ko'rsatkich n sonini $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ ko'rinishida bo'laklashda $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots \leq n_k$ yoki $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlash va unga mos $a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}$ ifodaning daraja ko'rsatkichlarini mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlari olinadi.

Masalan, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasini topaylik. Daraja ko'rsatkich 3 sonini mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar bilan bo'laklaylik. Bunday imkoniyatlar soni 3 ta bo'lib, ular

$$3 = 3 + 0 + 0, \quad 3 = 2 + 1 + 0, \quad 3 = 1 + 1 + 1$$

ko'rinishida va qolgan imkoniyatlar har bir yoyilmadagi sonlarning o'rin almashtirishlari natijasida kelib chiqadi. Demak, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasida uch turli koeffitsiyentlar mavjud:

$$P(3,0,0) = 1, \quad P(2,1,0) = 3, \quad P(1,1,1) = 6.$$

Ifodaning yoyilmasi:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2) + 6abc$$

ko'rinishda bo'ladi.

1-misol. "Matematika" so'zidan harflarni almashtirib, necha xil usul bilan so'z yasash mumkin?

Yechish: $k=10$ "m" harfi ikki marta, "a" harfi uch marta, "t" harfi ikki marta, qolgan harflar bir marta ishtirok etyapti. Umumiy

$$\text{usullar soni } P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Agar harflar bir marta qatnashsa, masalan, "a" harfi alohida olingan element deb qabul qilinsa, u holda $P(10) = 10!$ ta usul mavjud bo'ladi.

2. n ta elementdan tuzilgan elementlari takrorlanmagan takrorli o'rin almash-tirish deb, n ta elementni ichidan uning har bir elementini bir marta yoki bir necha marta tanlab n ta shunday element hosil qilishga aytiladi, ular bir-biridan elementlar tarkibi yoki tarkibdagi elementlar o'rinalmashtirishi bilan farq qiladi.

$$\overline{A}_n^n = n^n$$

Misol: $X = \{5,7\}$ raqamlaridan takrorlanadi-gan nechta ikki xonali son hosil qilish mumkin?

$$1\text{-usul: } \underbrace{\begin{pmatrix} 55 & 75 \\ 57 & 77 \end{pmatrix}}_{2\text{ ta}} \} 2\text{ ta} \quad 2 \cdot 2 = 4 \text{ ta.}$$

$$2\text{-usul: } \overline{ab} = \overline{\overbrace{a}^{2\text{ ta}} \overbrace{b}^{2\text{ ta}}} \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \text{ ta.}$$

$$3\text{-usul: } n = 2 \text{ ta } \overline{A_n^n} = \overline{A_2^2} = 2^2 = 4 \text{ ta.}$$

Misol: $X = \{6, 8, 9\}$ raqamlaridan takrorlana-digan nechta uchxonali son hosil qilish mumkin?

$$1\text{-usul: } \underbrace{\begin{pmatrix} 666 & 866 & 966 \\ 668 & 868 & 968 \\ 669 & 869 & 969 \\ 686 & 886 & 986 \\ 688 & 888 & 988 \\ 689 & 889 & 989 \\ 696 & 896 & 996 \\ 698 & 898 & 998 \\ 699 & 899 & 999 \end{pmatrix}}_{3\text{ ta}} \} 9\text{ ta} \quad 3 \cdot 3 = 27 \text{ ta.}$$

$$2\text{-usul: } \overline{abc} = \overline{\overbrace{a}^{3\text{ ta}} \overbrace{b}^{3\text{ ta}} \overbrace{c}^{3\text{ ta}}} \Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ ta.}$$

$$3\text{-usul: } n = 3 \text{ ta } \overline{A_n^n} = \overline{A_3^3} = 3^3 = 27 \text{ ta.}$$

3. Takrorli o'rin almashtirish deb, 1-elementi k_1 marta, 2-elementi k_2 marta,

3-elementi k_3 marta, ..., n-elementi k_n marta, takrorlangan va jami elementlar son

$k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$ bo'lgan to'plamga, elementlari takrorlangan to'plam deyiladi.

Takrorli o'rin almashtirishlar sonini $P(k_1, \dots, k_m)$ orqali belgilanadi.

$$P(k_1, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Agar $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_m = 1$ bo'lsa, u holda Takrorsiz o'rin almashtirish formulasi kelib chiqadi: $P(k) = k!$.

Misol: "Behruz" so'zida harflar o'rni almashtirilsa, nechta "so'z" hosil bo'ladi.

Yechish: Har bir element bir martadan ishtirok etganligi uchun $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$ va $k = 1+1+1+1+1+1 = 6$ ga teng $P(k) = P(6) = 6! = 720$.

Misol: “Statistika” soʻzida harflar oʻrni almashtirilsa, nechta “soʻz” hosil boʻladi.

Yechish:

S: $k_1 = 2$ ta, T: $k_2 = 3$ ta, A: $k_3 = 2$ ta

I: $k_4 = 2$ ta, K: $k_5 = 1$ ta

$$k = 2 + 3 + 2 + 2 + 1 = 10$$

$$P(2,3,2,2,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 = 75600.$$

1. $P(3,1,2)$ takrorli oʻrin almashtirishlar sonini toping?
2. 30 detalni 5 har xil qutiga 6 tadan necha xil usul bilan joylashtirish mumkin.
3. 30 detalni 5 bir xil qutiga 6 tadan necha xil usul bilan joylashtirish mumkin.
4. “Suxrob” soʻzida harflar oʻrni almash-tirilsa, nechta “soʻz” hosil boʻladi.
5. “Kitob” soʻzidagi harflarni oʻrin almashtirib, nechta soʻz hosil qilish mumkin?
6. “Matematika” soʻzidagi harflarni oʻrin almashtirib, nechta soʻz hosil qilish mumkin?
7. Oʻquvchilarning 3 ta koʻk, 4 ta qora, 5 ta qizil qalami bor. Ulardan faqat bittasini necha xil usul bilan tanlashi mumkin?
- 7.1. Oʻquvchilarning 3 ta koʻk, 4 ta qora, 5 ta qizil qalami bor. Ulardan har biridan bittasini necha xil usul bilan tanlashi mumkin?
8. “Raketa” soʻzidagi harflarni oʻrin almashtirib, nechta “soʻz” hosil qilish mumkin?
9. Hisoblang: $C_8^6 \cdot P_2$ ($P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)
10. Kasirni qisqartiring: $\frac{n!}{(n+1)!}$
11. Toʻrt nafar yigit va ikki nafar qizdan konsertni olib borishi uchun bitta yigit va bitta qizni tanlab olish kerak. Bunday ishni nechta usul bilan amalga oshirish mumkin?
12. Oʻyin boshlaganda 10 nafar voleybol oʻyinchi bilan nechta usul bilan 6 nafarini oʻyinga tushurish mumkin?

13. 6 ta katakdan ikkitasi qizil rangga, qolgan to'rtta katak esa oq, qora, yashil va ko'k rangga (har biri bitta rangga) bo'yalishi kerak. Bunday ishni necha usul bilan amalga oshirish mumkin?
14. O'quvchi 5 ta kitobdan uchtasini necha xil usulda tanlab olishi mumkin?
15. 10 ta o'quvchi bor. Ularni 3 tadan qilib necha xil usul bilan gurux qilish mumkin?

O'rin almashtirish (takrorsiz va takrorli)

a. $P_n = n!$

b. $P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$

1. 5 ta turli xatni 5 ta turli konvertga necha xil usulda joylash mumkin?
2. Tug'ilgan kuningizga taklif etilgan 6 ta do'stingizni 6 ta stulga necha xil usulda o'tkaza olasiz?
3. Stolda ona tili, algebra, geometriya, fizika darsliklari yotibdi. Sevara ularni kitob javoniga qo'ymoqchi. Bu darsliklar javonda jami necha xil usulda turishi mumkin?
4. 7 nafar o'quvchi navbatga necha usul bilan turishi mumkin?
5. Ba'zi mamlakatlarning bayroqlari turli rangdagi 3 ta gorizontaal yoki 3 ta vertikal „yo'l“ lardan iborat. Oq, yashil, ko'k rangli matolar yordamida shunday bayroqlardan necha xilini tikish mumkin?
6. „BARNO“ so'zida harflar o'rnini almashtirib, nechta so'z hosil qilish mumkin?
7. „KUNFU“ so'zida harflar o'rnini almashtirib, nechta so'z hosil qilish mumkin?
8. „BARAKA“ so'zida harflar o'rnini almashtirib, nechta so'z hosil qilish mumkin?
9. „MATEMATIKA“ so'zida harflar o'rnini almashtirib, nechta so'z hosil qilish mumkin?
10. „NOZIMA“ so'zida harflar o'rnini almashtirib, nechta so'z hosil qilish mumkin?
11. „LALAKU“ so'zida harflar o'rnini almashtirib, nechta so'z hosil qilish mumkin?
12. „ALLA“ so'zida harflar o'rnini almashtirib, nechta so'z hosil qilish mumkin?

13. „BARRA“ soʻzida harflar oʻrnini almashtirib, nechta soʻz hosil qilish mumkin?

14. „DAFTAR“ soʻzida harflar oʻrnini almash-tirib, nechta soʻz hosil qilish mumkin?

15. „TATU“ soʻzida harflar oʻrnini almashtirib, nechta soʻz hosil qilish mumkin?

3.5- § Oʻrinlashtirishlar

$n = 3$ ta elementli $A = \{3, 4, 5\}$ toʻplam elementlaridan raqamlari takrorlanmaydigan ikki xonali sonlar tuzaylik: 34, 35, 45, 43, 53, 54. Bu sonlar tartiblangan uzunligi 2 ga teng boʻlgan kombinatsiyalarni, yaʼni tartiblangan qism toʻplamlarini aniqlaydi. Ularning umumiy sonini A_3^2 ta deb belgilaymiz (oʻqilishi: “3 elementdan 2 tadan olib, tuzilgan oʻrinlashtirishlar soni”). Bizda $A_3^2 = 6$ boʻlmoqda. Har qaysi juftlikning birinchi elementini yo 3, yo 4, yo 5, yaʼni uni $n = 3$ ta ixtiyoriy tanlash imkoni bor. Agar birinchi element tanlangan boʻlsa, ikkinchi elementni tanlash uchun $n - 1 = 2$ ta tanlash imkoni qoladi. Demak, koʻpaytirish qoidasiga koʻra, jami juftliklar soni

$$A_3^2 = 3 \cdot (3 - 1) = 6$$

ta, yaʼni $A_3^2 = 6$ ta boʻladi.

Taʼrif: n ta elementdan k ($k \leq n$) tadan tuzilgan takrorsiz oʻrinlashtirishlar deb shunday birlashmalarga aytiladiki, ulaming har birida berilgan n ta elementdan k ta element boʻlib, ular bir-biridan elementlarining tarkibi yoki elementlarining tartibi bilan farq qiladi. n ta elementdan k tadan olib tuzilgan oʻrinlashtirishlar soni A_n^k kabi belgilanadi (A - fransuzcha “arraguement” - oʻrinlashtirish soʻzining bosh harfi).

n ta elementli A toʻplam elementlaridan k tadan olib tuzilgan oʻrinlashtirishlar deb, A toʻplamning k uzunlikdagi tartiblangan qism toʻplamiga aytiladi. oʻrinlashtirishlarda har bir juftliklar bir-biridan tarkibi va tartibi jihatdan farq qiladil

Teorema. n elementdan k tadan olib tuzilgan oʻrinlashtirishlar soni, eng kattasi n songa teng boʻlgan k ta ketma-ket sonlarning koʻpaytmasiga teng, yaʼni

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \quad (1)$$

Isboti: n elementdan k tadan olingan kombinatsiyalar sonini topaylik. Kombinatsiyaning birinchi elementi ixtiyoriy tartibda n ta usul bilan tanlanadi. U holda ikkinchi element uchun $n-1$ ta imkoniyat va hokazo oxirgi k element uchun $k-1$ ta element tanlangandan so'ng, $n-(k-1)$ ta tanlanish imkoni qoladi va bunda hech qaysi element takror tanlanmaydi. Barcha k uzunlikdagi kombinatsiyalar soni, ko'paytirish qoidasiga muvofiq, $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$ ta.

Bu teoremani matematik induksiya usuli orqali ham isbotlash mumkin.

Induksiya bazasi: $k=1$ uchun $A_n^1 = n$ tenglik o'rinli.

Induksion o'tish: $k=t$ uchun

$$A_n^t = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(t-1))$$

formula to'g'ri deb faraz qilib, $k=t+1$ bo'lganda,

$$A_n^{t+1} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(t+1)-1)$$

formula ham to'g'ri ekanini ko'rsatamiz. n elementdan $t+1$ tadan o'rinlashtirishlarning ixtiyoriy birini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o'rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ to'planning ixtiyoriy elementi, masalan, a_1 elementini tuzilayotgan o'rinlashtirishga joylashtiramiz. Bu elementdan keyin umumiy soni A_{n-1}^t ta bo'lgan $n-1$ ta elementdan t tadan o'rinlashtirishlarni ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 bo'lgan $t+1$ tadan o'rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^t ga teng bo'ladi.

Bunday o'rinlashtirishlarda $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ to'planning elementlarini ixtiyoriy birini tanlash mumkinligini hisobga olsak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, n ta elementdan $t+1$ tadan o'rinlashtirishlarning jami soni:

$$n \cdot A_{n-1}^t = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(t+1)-1) = A_n^{t+1}$$

Bu ifoda formulani $k=t+1$ uchun to'g'riligini ko'rsatadi.

O'rinlashtirishlar formulasini

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (2)$$

ko'rinishda ham yozishimiz mumkin.

(2) formulani isbotlash uchun (1) formulani songa

ko'paytiramiz, $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$

$$A_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

tenglik kelib chiqadi.

1-misol. Guruhda 8 ta o'quv fani o'qitiladi va har kuni 3 xil dars o'tiladi. Kunlik dars jadvali necha turli usul bilan taqsimlab qo'yilishi mumkin?

Yechish: Bu taqsimlash usuli 8 ta elementdan 3 tadan olib tuzilgan o'rinlashtirishlar soniga teng. Demak, $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ ta usul bilan darslarni taqsimlash mumkin.

2-misol. $A = \{1, 2, 3\}$ to'plamning qism to'plamlari sonini toping.

Yechish: k ta elementli to'plamning qism to'plamlari sonini 2^k ta bo'lishini matematik induksiya metodi bo'yicha isbot qilish mumkin. Berilgan to'plamning qism to'plamlari soni $2^3 = 8$ ta bo'ladi. Ular quyidagilar:

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{\emptyset\}$

3.6- § Takrorlanuvchi o'rinlashtirishlar

n ta elementdan iborat to'plam berilgan bo'lib, uning elementlaridan k uzunlikdagi kombinatsiyalar tuzilsin. Kombinatsiyalardagi har bir elementlar k tadan oshmagan holda istalgancha takrorlanishi mumkin bo'lsin. Bu kombinatsiyalar bir-biridan elementlarining tarkibi va joylashish tartibi bilan farq qiladi. Bunday usul bilan tuzilgan birlashmalarga n ta elementdan k tadan olib tuzilgan takrorli o'rinlashtirishlar deyiladi.

Ushbu misolga qaraylik. $n = 3$ ta elementli $A = \{3, 4, 5\}$ to'plam elementlaridan raqamlari takrorlanishi mumkin bo'lgan ikki xonali sonlarni topish talab qilinsin.

Ikki xonali sonning ko‘rinishi \overline{ab} bo‘lib, uzunligi ikkiga teng bo‘lgan kombinatsiyani ifodalasin. Birinchi raqamni tanlash uchun $A = \{3,4,5\}$ to‘plamning elementlaridan birini, ya’ni uchta imkoniyat, ikkinchi raqamni tanlash uchun esa, yana uchta imkoniyat mavjud. Chunki ikki xonali sonning raqamlari takrorlanishi mumkinligi masala shartida keltirilmoqda. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, uzunligi ikkiga teng bo‘lgan kombinatsiyalar soni $3 \cdot 3 = 9$ ta ekan. Bu sonlar: 33,44,55,34,35,45,43,53,54 ko‘rinishida bo‘lishi mumkin.

Teorema. n ta turli elementlardan k tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni:
$$\overline{A}_n^k = n^k \quad (1)$$
 formula yordamida topiladi.

Isboti: Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz.

Induksiya bazasi: $k = 1$ uchun $\overline{A}_n^1 = n^1$ ekanligi ravshan.

Induksion o‘tish: $k = t$ uchun $\overline{A}_n^t = n^t$ formulani to‘g‘ri deb faraz qilib, $k = t + 1$ bo‘lganda, $\overline{A}_n^{t+1} = n^{t+1}$ formula ham to‘g‘ri ekanini ko‘rsatamiz. n elementdan $t + 1$ tadan olib tuzilgan takrorli o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy birini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday takrorli o‘rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plamning ixtiyoriy elementini olamiz. Bu elementdan keyin umumiy soni \overline{A}_n^t ta bo‘lgan, ya’ni n ta elementdan t tadan takrorli o‘rinlashtirishlarni ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Bunday o‘rinlashtirishlarda $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plamning elementlarini ixtiyoriy birini tanlash mumkinligini hisobga olsak, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, n ta elementdan $t + 1$ tadan takrorli o‘rinlashtirishlarning jami soni $n \cdot \overline{A}_n^t = n \cdot n^t = n^{t+1}$. Bu ifoda formulani $k = t + 1$ uchun to‘g‘riini ko‘rsatadi.

Demak, umumlashgan ko‘paytirish qoidasiga binoan, n ta elementli A to‘plam elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan kombinatsiyalar soni k ta bir xil to‘plam elementlarining soniga teng ekan. Bu son k ta $n(A)$ - A to‘plam elementlari soni ko‘paytmasidan iborat:

$$\underbrace{n(X) \cdot n(X) \cdot \dots \cdot n(X)}_{k \text{ ta}} = (n(X))^k = n^k \quad (2)$$

1- misol. 1,3,7,8,6 sonlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha to'rt xonali sonlar qancha?

Yechish: $A = \{1,3,7,8,6\}$ to'plam elementlaridan raqamlari takrorlanadigan to'rt xonali sonlar, ya'ni juftliklar tuzamiz. Bunday sonlar 1378, 7777, 1111, ... kabi ko'rinishda bo'lishi mumkin bo'lib, ularning umumiy soni beshta elementdan to'rttadan takrorli o'rinlashtirishlar soniga teng, ya'ni $\overline{A}_5^4 = 5^4 = 625$ ta.

2. n ta elementdan tuzilgan elementlari takrorlanmagan X to'plamni k tadan tanlab taktotli o'rinlashtirish deb, n ta elementni ichidan uning har bir elementini bir marta yoki bir necha marta tanlab k ta shunday element hosil qilishga aytiladi, ular bir-biridan elementlar tarkibi yoki tarkibdagi elementlar joylashuvi bilan farq qiladi.

$$\overline{A}_n^k = n^k;$$

Misol: $X = \{1,3,4,6\}$ raqamlaridan ixtiyoriy ikkitasini tanlab takrorli nechta ikki xonali son hosil qilish mumkin?

1-usul:
$$\left. \begin{array}{cccc} 11 & 31 & 41 & 61 \\ 13 & 33 & 43 & 63 \\ 14 & 34 & 44 & 64 \\ 16 & 36 & 46 & 66 \end{array} \right\} 4 \text{ ta} \quad 4 \cdot 4 = 16 \text{ ta.}$$

2-usul:
$$\overline{ab} = \overline{a \ b} \Rightarrow 4 \cdot 4 = 16 \text{ ta.}$$

3-usul: $n = 4, k = 2$ ta,

$\overline{A}_n^k = \overline{A}_4^2 = 4^2 = 16$ ta.

Misol: $X = \{1,3,5,7\}$ raqamlaridan ixtiyoriy ikkitasini tanlab takrorli nechta ikki xonali son hosil qilish mumkin?

1-usul:
$$\left. \begin{array}{cccc} 11 & 31 & 51 & 71 \\ 13 & 33 & 53 & 73 \\ 15 & 35 & 55 & 75 \\ 17 & 37 & 57 & 77 \end{array} \right\} 4 \text{ ta} \quad 4 \cdot 4 = 16 \text{ ta.}$$

2-usul:
$$\overline{ab} = \overline{a \ b} \Rightarrow 4 \cdot 4 = 16 \text{ ta.}$$

3-usul: $n = 4, k = 2$ ta,

$$\overline{A}_n^k = \overline{A}_4^2 = 4^2 = 16 \text{ ta.}$$

1. $X = \{1, 3, 5, 7\}$ to'plam elementlaridan nechta ikki xonali takrorsiz sonlar juftligini tuzish mumkin?
2. $X = \{1, 3, 5, 7\}$ to'plam elementlaridan nechta takrorlanadigan ikki xonali sonlar juftlini tuzish mumkin?
3. 1, 2, 3, ..., 9 raqamlaridan nechta uch xonali nomerlash tuzish mumkin?
4. 30 ta o'quvchisi bo'lgan sinfdan boshliq, yordamchi va kotib necha xil usul bilan saylash mumkin?
5. 5 ta har xil daftardan uch bola o'rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?
6. $A = \{a, b, c, d\}$ to'plamning barcha qism to'plamlari nechta?
7. a, b, d, e, f harflardan qancha uch harfli so'z tuzish mumkin?
8. $A = \{a, b, c, d, e\}$ to'plamning barcha qism to'plamlari nechta?
9. 8 ta har xil kitobdan 3 tasi necha xil usul bilan tanlanishi mumkin?
10. Qo'mitaga 7 kishi saylangan. Ular orasidan rais, yordamchi va kotibni necha usul bilan tanlanishi mumkin?
11. Agar har bir o'quvchiga bittadan ortiq kitob berilmasa, 6 ta kitobni 10 o'quvchiga necha xil usul bilan tarqatish mumkin?
12. 6 raqamiga ega bo'lmagan besh xonali nomerlardan qancha bo'ladi?
13. $n(X) = k$ va $n(Y) = l$ bo'lsin, X to'plamni Y to'plamga akslantirishlar sonini toping?
14. 10 ta har xil detalni 3 ta qutiga necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?
15. 1, 6, 7 va 9 raqamlardan ularni takrorlamasdan mumkin bo'lgan barcha 4 xonali sonlar tuzilgan. Bu sonlardan nechtasi 4 ga qoldiqsiz bo'linadi?

O'rinlashtirishlar (takrorsiz va takrorli)

a. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

b. $\overline{A}_n^k = n^k$

1. Mijozning uy telefoni 7 raqamli bo'lib, 316 dan boshlanadi. Mijoz a'zo bo'lgan bu telefon stansiyasi nechta mijozga xizmat ko'rsata oladi?

2. Turli raqamli nechta to'rt xonali son bor?
3. 3,4,5,6,7 raqamlari yordamida hammasi bo'lib raqamlar takrorlanmasa, nechta ikki xonali son tuzish mumkin?
4. 7, 4, 5, 6, 9, 8 raqamlari yordamida hammasi bo'lib raqamlar takrorlanmasa, nechta uch xonali son tuzish mumkin?
5. 7, 4, 5, 6, 9, 8 raqamlari yordamida nechta uch xonali son tuzish mumkin?
6. 3, 4, 5, 6, 7 raqamlari yordamida nechta ikki xonali son tuzish mumkin?
7. 3, 4, 5, 6, 0, 8 raqamlari yordamida hammasi bo'lib raqamlar takrorlanmasa, nechta uch xonali son tuzish mumkin?
8. 2, 4, 5, 0, 9, 8 raqamlari yordamida nechta uch xonali son tuzish mumkin? (Raqamlari takrorsiz).
9. $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ to'plam elementlari yordamida tuzilgan nechta uch xonali sonda 4 raqami qatnashadi? (Raqamlari takrorsiz).
10. Raqamlar takrorlanishi mumkin bo'lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 raqamlaridan nechta 4 xonali son tuzish mumkin?
11. 6, 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan 5 xonali sonlar tuzildi. Ularning nechtasi 2 ga bo'linadi?
12. 6, 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan 5 xonali sonlar tuzildi. Ularning nechtasi 4 ga bo'linadi?
13. Hamma raqamlari toq bo'lgan nechta 5 xonali son bor?
14. Hamma raqamlari juft bo'lgan nechta 5 xonali son bor?
15. Nechta uch xonali sonda faqatgina bitta 6 raqami bor?

3.7- § Kombinasionalashlar (gruppalashlar)

Endi A to'plam elementlaridan k taliklar emas, balki qism to'plamlari tuzaylik. Ular o'z tarkibidagi elementlari bilan bir-biridan farq qiladi.

Masalan: $A=(a,b,d,e,f)$ to'plam bo'yicha tuzilgan $k=3$ ta elementli (a,d,f) , (a,e,f) , (b,d,e) uchtaliklar biz aytayotgan qism to'plamlaridir.

n ta elementli A to'plamning k ta elementli qism to'plamlari shu elementlardan k tadan olib tuzilgan takrorsiz Kombinasionalashlar (kombinatsiyalar) deyiladi.

Ta'rif: Kombinasiyalashlar deb n ta elementdan k tadan olib tuzilgan va bir-biridan eng kamida bitta element bilan farq qiladigan O'rinlashtirishlarga aytiladi.

Teorema. n ta elementdan k tadan olib tuzilgan Kombinasiyalashlar soni

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \quad (1)$$

formula bilan topiladi. n ta elementdan tuzilgan Kombinasiyalashlar soni bilan belgilanadi. (C - fransuzcha combination - Kombinasiyalash so'zining bosh harfi).

Isboti: A to'plamning k ta elementlardan iborat to'plam ostilarini (qism to'plam) tuzish uchun $(k-1)$ elementlardan tashkil topgan to'plam ostilariga qolgan $(n-k+1)$ ta elementlardan bittasini qo'yish kerak bo'ladi. Elementlar soni $(k-1)$ bo'lgan to'plam ostilari C_n^{k-1} ta bo'lgani uchun, shuncha to'plam ostilarining har birini $(n-k+1)$ usul bilan k - elementli to'plam ostilariga aylantirish mumkin va ularning soni $(n-k+1) \cdot C_n^{k-1}$ bo'ladi.

Lekin bu to'plam ostilarining hammasi har xil bo'lmaydi, chunki bunday k ta elementli to'plam ostilarini k ta usul bilan tuzish mumkin. Shuning uchun ham topilgan son $(n-k+1) \cdot C_n^k$, k ta elementli to'plam ostilari soni dan k marra katta bo'ladi, ya'ni

$$k \cdot C_n^k = (n-k+1) \cdot C_n^{k-1}$$

Oxirgi rekkurent munosabatni ketma-ket tatbiq etib,

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2)}{k \cdot (k-1)} \cdot C_n^{k-2} = \dots = \\ &= \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2} \cdot C_n^1 = \frac{A_n^k}{k!} \end{aligned}$$

tenglikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

Kombinasiyalashlarni quyidagicha ham tushunish mumkin: n ta elementli A to'plamning k ta elementli qism to'plamlari shu elementlardan k tadan olib tuzilgan Kombinasiyalashlar deyiladi.

Yuqoridagilardan ma'lumki, A to'plamning k ta elementli to'plam ostilari (qism to'plam) soni C_n^k songa teng va bu to'plam ostilarining har birini $k!$ usul bilan tartiblash mumkin. Demak,

ko'paytirish qoidasiga asosan, A to'plamning hamma k ta elementli to'plam ostilarini $k! \cdot C_n^k$ usul bilan tartiblab chiqish mumkin. Boshqacha aytadigan bo'lsak, har bir n ta elementdan k tadan olib tuzilgan Kombinasionalashlarda elementlarni o'rni almashtirilsa, k ta elementli o'rin almashtirishlar hosil bo'ladi. Kombinasionalashlar sonini o'rin almashtirishlar soniga ko'paytirsak, mavjud barcha o'rinlashtirishlar soni hosil bo'ladi. Demak, barcha o'rinlashtirishlar soni $C_n^k \cdot P_n = A_n^k$ songa teng. Bundan

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2)$$

formula kelib chiqadi.

Kombinasionalashlar quyidagi xossalarga ega:

1. $C_n^0 = 1$.
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
3. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
4. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Isbot: 1. (2) formuladan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

2. (2) formula yordamida

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

tenglik kelib chiqadi.

3. Ushbu shakl almashtirish yordamida tenglik to'g'ri ekanligini ko'rishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-(k+1))!(n-k) \cdot (k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1} \end{aligned}$$

4-xossa ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

1-misol. Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 6 ta nuqta orqali nechta kesma o'tqazish mumkin?

Yechish: Nuqtalar soni 6 ta. Har ikki nuqta izlanayotgan kesmani beradi. Kesmalar bir-biridan bitta nuqtasi bilan farq qiladi. Bu esa 6 ta elementdan 2 tadan olib tuzilgan Kombinasiyalashlar soniga teng. Demak, ularning soni $C_6^2 = 15$ ta.

2- misol. $9 \cdot C_{4x}^{3x+1} = 2 \cdot C_{4x+1}^{3x+1}$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani soddalashtiramiz,

$$\frac{C_{4x}^{3x+1}}{C_{4x+1}^{3x+1}} = \frac{2}{9}$$

bu yerda tenglamaning surati:

$$C_{4x}^{3x+1} = \frac{(4x)!}{(3x+1)!(x-1)!},$$

maxraji esa:

$$C_{4x+1}^{3x+1} = \frac{(4x+1)!}{(3x+1)!x!}$$

keladi, ulaming nisbatini topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{C_{4x}^{3x+1}}{C_{4x+1}^{3x+1}} &= \frac{(4x)!}{(3x+1)!(x-1)!} \cdot \frac{x!(3x+1)!}{(4x+1)!} = \frac{2}{9}, \\ \frac{(4x)!}{(3x+1)!(x-1)!} \cdot \frac{(3x+1)!(x-1)!x}{(4x)!(4x+1)!} &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Natijada ushbu tenglama hosil bo'ladi: $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{9}$, $x = 2$.

3-misol. Agar qavariq n burchakning diagonallaridan. ixtiyoriy uchasi bir nuqtada kesishmaydigan bo'lsa, bu n -burchakning diagonallari nechta nuqtada kesishadi.

Yechish. Ikki diagonal kesishgan har qanday nuqta n -burchakning uchlari bo'lgan 4 ta nuqta bilan aniqlanadi (kesishgan diagonallarning oxirgi nuqtalari). Berilgan n -burchakning uchlari bo'lgan har qanday 4 ta nuqtaga uchlari shu nuqtalarda bo'lgan 2 ta diagonal kesishgan 1 ta nuqta mos keladi. Shuning uchun ham diagonal kesishgan nuqtalar soni ko'pburchakning uchlari bo'lgan n nuqtadan 4 tadan olib tuzilgan Kombinasiyalashlar soni:

$$C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24}$$

bo'ladi. Masalan, to'rtburchak uchun 1 ta, beshburchak uchun 5 ta nuqta mos keladi.

Izoh. Keltirilgan natijadan ko'rinadiki, ketma-ket 4 ta natural sonning ko'paytmasi 24 soniga karrali bo'ladi. Buni matematik induksiya yordamida isbotlash mumkin.

Binom formulasi. C_n^k formuladagi n va k argumentlarga turli qiymatlar beraylik:

$$\begin{aligned} C_0^0 &= 1 \\ C_1^0 &= 1, C_1^1 = 1 \\ C_2^0 &= 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1 \\ C_3^0 &= 1, C_3^1 = 3, C_3^2 = 3, C_3^3 = 1 \\ C_4^0 &= 1, C_4^1 = 4, C_4^2 = 6, C_4^3 = 4, C_4^4 = 1 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Hosil qilingan sonlarni qatorlarga joylashtirsak, uchburchakka o'xshash sonlar jadvali hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} &1 \\ &1 \quad 1 \\ &1 \quad 2 \quad 1 \\ &1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ &1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Bunday sonlar jadvali Paskal uchburchagi yoki arifmetik uchburchak deb nomlanadi. Bu uchburchak qatorlarini istalgancha davom ettirish va uning yordamida istalgan n ta elementdan k tadan olib tuzilgan Kombinasiyalashlar sonini hosil qilish mumkin.

Paskal uchburchagi qiymatlaridan quyidagi qonuniyatlarni payqash mumkin:

1. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va perpendikulyar kateti $C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$ formulalar bilan topilgan birlardan iborat.
2. Uchburchakning gipotenuzasi va perpendikulyar katetidan bir xil uzoqlashgan C_n^k formula bilan topilgan sonlar qatorining

o'rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lib, ular o'zaro teng, ya'ni

$$C_n^{n-k} = C_n^k.$$

3. Uchinchi qatordan boshlab har bir qatordagi birlardan tashqari, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ formula bilan aniqlangan ixtiyoriy son, bu son turgan qatordan yuqorida joylashgan shu son tepasidagi son va undan chap tomondagi bitta sonning yig'indisiga teng.

4. Uchburchakning ichidagi C_n^k formula bilan aniqlangan sonlar shu qatorning teng o'rtasigacha o'sib, so'ng kamayadi.

Endi qisqa ko'paytirish formulalarini eslaylik:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ yig'indining kvadrati, bu yerda:

$$a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2, \quad C_2^0 = C_2^2 = 1, \quad C_2^1 = 2.$$

2. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ yig'indining kubi, bu yerda:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3, \quad C_3^0 = C_3^3 = 1, \quad C_3^1 = C_3^2 = 3.$$

Ushbu yig'indilarning o'ng tomonidagi ko'phadlarning koeffitsiyentlari Paskal uchburchagining C_n^k formula bilan aniqlangan sonlari ekanligi ko'rinadi. Demak, chekli yig'indining ixtiyoriy natural darajasi quyidagi formulalar orqali hisoblanadi.

Teorema: Haqiqiy x va a sonlar hamda n natural son uchun:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^{n-m} a^m \quad (1)$$

yoki

$$(x+a)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m x^{n-m} a^m \quad (2)$$

formulalar o'rinli.

(1) va (2) formulalar Nyuton binom formulasi deb ataladi.

Isboti: Matematik induksiya usulidan foydalanib, formulalarni isbotlashimiz mumkin.

Induksiya bazasi: $n=1$ uchun $(x+a)^1 = (x+a)$ formula to'g'ri.

Induksion o'tish: $n=k$ uchun formula to'g'ri deb hisoblab, $n=k+1$ uchun to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ formulani e'tiborga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} (x+a)^{k+1} &= (x+a) \cdot (x+a)^k = (x+a) \cdot (x^k + C_k^1 x^{k-1} a + \dots + a^k) = \\ &= (x^{k+1} + C_k^1 x^k a + \dots + a^{k+1}) = x^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) x^k a + \dots + a^{k+1}. \end{aligned}$$

Agar a ni $-a$ deb olsak, (2) formulaning to'g'ri ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerda C_n^k sonlar binomial koeffitsiyentlar hisoblanib, uning qiymatlaridan binom formulasining quyidagi xossalari kelib chiqadi.

Binomformulasining xossalari:

1. x sonining daraja ko'rsatkichi kamayib boradi, a sonining daraja ko'rsatkichi esa ortib boradi. Ulaming daraja ko'rsatkichlari yig'indisi n songa teng.
2. Binomial yoyilma $n = 1$ ta haddan iborat.
3. Binomial koeffitsiyentlar yig'indisi 2^n ga teng. Agar $x = a = 1$ deb olinsa,

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

tenglik kelib chiqadi.

4. Yoyilmaning istalgan hadi $T_{k+1} + C_n^k x^{n-k} a^k$ ifodadan iborat.
5. Yoyilmaning chetlaridan teng uzoqlikda turgan hadlarining koeffitsiyentlari o'zaro teng. Chunki bu koemtsiyentlar Paskal uchburchagini ifodalaydi.
- 6, Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisiga teng. Agar $x = 1$ va $a = -1$ deb olinsa,

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + C_n^n = (1-1)^n = 0$$

tenglik kelib chiqadi.

7. $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot C_n^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) tenglik o'rinli. Chunki,

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k!(n-k-1)!(n-k)!}{k!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

8. n natural sondan oshmaydigan eng katta k toq son uchun $C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^k = 2^{n-1}$ tenglik hamda n natural sondan oshmaydigan eng katta k juft son uchun

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^k = 2^{n-1}$$

tenglik o'rinli.

9. Toq n son uchun

$$C_n^0 < C_n^1 < C_n^2 < \dots < C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}+1}$$

va

$$C_n^{\frac{n-1}{2}+1} > C_n^{\frac{n-1}{2}+2} > \dots > C_n^n;$$

juft n son uchun

$$C_n^0 < C_n^1 < C_n^2 < \dots < C_n^{\frac{n}{2}}$$

va

$$C_n^{\frac{n}{2}} > C_n^{\frac{n}{2}+1} > \dots > C_n^n$$

munosabatlar o'rinli.

Agar n toq son bo'lsa, $k = \frac{n+1}{2}$ butun son bo'lib

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{n-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}+1} \cdot C_n^k = \frac{n+1}{\frac{n+1}{2}} \cdot C_n^k = C_n^k$$

o'rinli. Demak, n toq son bo'lsa, binomial koeffitsiyentlar qatorining ikkita hadi tengligi kelib chiqadi:

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}+1}.$$

10. Agar n juft son bo'lsa, binom yoyilmaning o'rta hadi

$$T_{k+1=\frac{n+2}{2}} = C_n^k x^{n-k} a^k$$

ifodadan iborat bo'lib, u eng katta va yagonadir, agar n toq son bo'lsa, o'rta had mavjud emas. Faqat yoyilmaning o'rtasidagi ikkita had teng.

$$11. C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}.$$

$$12. (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

$$13. C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \dots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+k}^k.$$

1- misol. $\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{18}$ binom yoyilmaning o'rta hadini toping.

Yechish:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{18} = C_{18}^0 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{18} + C_{18}^1 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{17} \cdot x^{\frac{2}{3}} + \dots + C_{18}^{18} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{18}$$

yoyilmada 19 ta had bor. o'rtta had o'ninchi had bo'lib,

$$T_{k+1=\frac{18+2}{2}} = T_{9+1} = C_{18}^9 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^9 \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^9 = 5^9 \cdot 48620 \cdot x^{\frac{2}{3}} \text{ qiymatga teng.}$$

2-misol. $\left(\sqrt[4]{5} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x$ binom yoyilmaning boshidan.

to'qqizinchi hadini shu yoyilmaning oxiridan to'qqizinchi hadiga nisbati $\frac{1}{15}$ songa teng. x no'malumni toping.

Yechish: Berilgan ifodani binomi formulasi yordamida yozamiz.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{5} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x &= C_x^0 \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^x + C_x^1 \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) + \dots + C_x^8 \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{x-8} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^8 + \\ &+ \dots + C_x^{x-8} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{x-8} + \dots + C_x^x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x \end{aligned}$$

yoyilmani boshidan to'qqizinchi hadi $C_x^8 \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{x-8} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^8$ ifodaga,

oxiridan

to'qqizinchi hadi esa $C_x^{x-8} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{x-8}$ ifodaga teng. $C_n^k = C_n^{n-k}$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun, $C_x^8 = C_x^{x-8}$ tenglik kelib chiqadi.

Shartga ko'ra,

$$\frac{C_x^8 \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{x-8} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^8}{C_x^{x-8} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{x-8}} = \frac{1}{15}$$

Qiymatga teng. U holda bu ifodani soddalashtirib ushbu

$$\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{x-8-8} \cdot \left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^{8-(x-8)} = \frac{1}{15}$$

tenglamani yechamiz.

$$\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{x-16} \cdot \left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^{16-x} = \frac{1}{15}, \quad 5^{\frac{x-16}{4}} \cdot 3^{-\frac{x-16}{4}} = \frac{1}{15}, \quad 15^{\frac{x-16}{4}} = 15^{-1}, \quad x=12.$$

3-misol. $\left(\sqrt{3^{x-1}} + 2^{\frac{x}{2}}\right)^m$ binom yoyilmasi beshinchi hadining

binomial koefitsiyentini uch marla orttirilgani, ikki asosga ko'ra logarifini bilan uchinchi hadi binomial koemtsiyenti ikki asosga ko'ra logarifmi orasidagi ayirma $\log_2 3 - 1$ ga tengligi ma'lum bo'lsa, x o'zgaruvchining qanday qiymatida uchinchi hadni $\sqrt{2}$ marla orttirilgani bilan to'rtinchi hadi nisbati 1 ga teng bo'ladi.

Yechish: Masala shartiga ko'ra, $\log_2(3C_m^4) - \log_2(C_m^2) = \log_2 3 - 1$,

u holda $\log_2 \frac{3C_m^4}{C_m^2} = \log_2 \frac{3}{2}, \quad \frac{3C_m^4}{C_m^2} = \frac{3}{2}$

ifodani hisoblaymiz, natijada

$$\frac{3m!}{4!(m-4)!} \cdot \frac{2!(m-2)!}{m!} = \frac{3}{2}.$$

tenglama hosil bo'ladi, uni soddalashtirib,

$$\frac{3m!}{4!(m-4)!} \cdot \frac{2!(m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)!}{m!} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{(m-2) \cdot (m-3)}{4} = \frac{3}{2}.$$

ifodani keltirib chiqaramiz va $m^2 - 5m = 0$ tenglamani yechamiz, un dan $m = 0$, $m = 5$ qiymatlar topiladi. Binom ko'rsatkich $m = 0$ bo'lishi mumkin emas. Agar ko'rsatkich $m = 5$ bo'lsa,

$$\frac{\sqrt{2}C_5^2 \cdot \left(\sqrt{3^{x-1}}\right)^3 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 2}}{C_5^2 \cdot \left(\sqrt{3^{x-1}}\right)^3 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 3}} = 1$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechamiz. Ifodaning surati

$$\sqrt{2}C_5^2 \cdot \left(\sqrt{3^{x-1}}\right)^3 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 2} = 10\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{(x-1) \cdot 3}{2}} \cdot 2^x,$$

maxraji esa

$$C_5^2 \cdot \left(\sqrt{3^{x-1}}\right)^2 \cdot 2^{\frac{x}{2} \cdot 3} = 10 \cdot 3^{x-1} \cdot 2^{\frac{3x}{2}}$$

ko'rinishga ega. Ulaming nisbatini hisoblaymiz, natijada ushbu

$$\sqrt{2}C_5^2 \cdot 3^{\frac{(x-1) \cdot 3}{2} \cdot (x-1)} \cdot 2^{x \cdot \frac{3x}{2}} = 1$$

tenglama hosil bo'ldi. Bu tenglamani yechamiz:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = 1.$$

1. n ta elementdan tuzilgan elementlari takrorlanmagan X toplamdan k tadan tanlab takrorsiz kombinatsiyalar tuzish deb, n ta element ichidan tanlab olingan k ta shunday elementga aytiladiki, ular bir-biridan faqat elementlar tarkibi bilan farq qiladi.

Takrorsiz kombinatsiyalar soni:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n \geq k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n \geq k$$

Eslatma: $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_n^n = 1$; $C_n^0 = C_n^n = 1$;

Misol: Yashikda 15 ta har xil detal bor. Ulardan har biri 4 tadan iborat necha xil detallar to'plamini hosil qilish mumkin?

Yechish: $n = 15$ ta, $k = 4$ ta

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow$$

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4! \cdot 11!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1365.$$

3.8- § Takrorlanuvchi kombinatsiyalar

n ta elementdan k tadan olib tuzilgan elementlari istalgancha takrorlanishi mumkin bo'lgan kombinatsiyalarni qaralaylik. Bu kombinatsiyalar bir-biridan faqat elementlarining tarkibi bilan farqlanib, tartibi rol o'ynamasin.

Masalan, $A = \{a, b\}$ to'plamning a elementidan k_1 ta, b elementidan k_2 ta olib tuzilgan uzunligi $k = k_1 + k_2 = 3$ songa teng kombinatsiyalar tuzamiz:

(a, a, a) , bu yerda $k_1 = 3$, $k_2 = 0$

(a, a, b) , bu yerda $k_1 = 2$, $k_2 = 1$

(a, b, b) , bu yerda $k_1 = 1$, $k_2 = 2$

(b, b, b) , bu yerda $k_1 = 0$, $k_2 = 3$

Bu kombinatsiyalar bir-biridan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farqlanadi. Bunday usul bilan tuzilgan kombinatsiyalar n ta elementdan k tadan olib tuzilgan takrorli Kombinatsiyalashlar deb ataladi.

Teorema. n ta elementdan k tadan olib tuzilgan takrorli gurublashlar soni

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \quad (1)$$

formula orqali hisoblanadi.

Isboti: n ta elementli $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plamdan k tadan olib tuzilgan takrorli Kombinatsiyalashlar sonini topish uchun har bir kombinatsiyalar tarkibidagi a_i , $i = \overline{(1, n)}$ elementlarni nol va bir raqamlaridan iborat kodlar yordamida shifrlaymiz. Agar a_i element kombinatsiyada necha mar'la qatnashsa, shuncha birlar yozamiz, agar qatnashmasa, hech narsa yozmaymiz. Berilgan $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plam tarkibidagi vergullarni nol raqami bilan almashtiramiz.

Masalan, $A = \{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan 4 ta elementdan 5 tadan takrorli (b, b, d, d, d) Kombinatsiyalashlarga 01100111 shifr mos keladi. Bu yerda $A = \{a, b, c, d\}$ to'plamdagi a elementdan keyingi vergul 0 raqamiga, (b, b, d, d, d) kombinatsiyada b element ikki mar'la qatnashgani uchun ikkita 11 raqamiga, $A = \{a, b, c, d\}$ to'plamdagi b va c elementdan keyingi vergullar 00 raqamiga, (b, b, d, d, d) kombinatsiyada d element uch mar'la qatnashgani uchun uchta 111 raqamiga akslantirilgan. 01100111 shifr tarkibida beshta 1 raqami va uchta 0 raqami qatnashmoqda. Agar bu yerda ixtiyoriy bitta 1 va 0 raqami o'rnini almashtirilsa, bu shifrga mos yangi kombinatsiya hosil bo'ladi.

Masalan, 01100111 shifrnin birinchi ikki raqami o'rnini almashtirilsa, hosil bo'lgan 10100111 shifrga mos kombinatsiya (a, b, d, d, d) ko'rinishida bo'lib qolgan kombinatsiyalardan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi. 01100111, 10100111 va hokazo shifrlar tarkibida $k = 5$ ta va $n - 1 = 4 - 1 = 3$ ta nol raqami qatnashyapti. Demak, n ta elementli $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plamdan k tadan olib tuzilgan takrorli Kombinatsiyalashlar sonini 0 va 1 raqamlardan iborat shifrlarning o'rin almashtirishlar soniga teng.

Bu shifr tarkibida $(n-1)$ ta 0 raqami, k ta 1 raqami mavjud. Shuning uchun

$$\bar{C}_n^k = P(n-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

formula kelib chiqadi.

1-misol. Tomonlari 8,5,9,6 sonlar bo'la oladigan nechta uchburchaklar yasash mumkin?

Yechish: Masala shartida berilgan sonlar ixtiyoriy uchburchak uchun o'rinli bo'lgan $a+b>c$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Izlanayotgan uchburchaklar teng tomonli, teng yonli va turli tomonli bo'lishi mumkin. Shuning uchun 8,5,9,6 sonlardan tuzilgan uzunligi uchga teng, hech bo'lmasa biffa elementi bilan farqlanuvchi kombinatsiyalar soni izlanayotgan uchburchaklar soniga teng, Bu son esa to'rtta elementdan 3 tadan olib tuzilgan takrorli Kombinatsiyalashlar soniga teng:

$$\bar{C}_4^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

1. n ta elementdan tuzilgan elementlari takrorlanmagan takrorsiz o'rin almash-tirish deb, shu n ta elementndan n tadan olib elementlari takrorsiz tuzilgan va faqat elementlarning joylashuvi bilan farq qiluvchi o'rin almashtirishlarga aytiladi.

$$P_n = n!$$

Misol: $x = \{2,5,7\}$ raqamlaridan takrorsiz nechta uch xonali son hosil qilish mumkin?

$$1\text{-usul: } \underbrace{\left. \begin{array}{ccc} 257 & 527 & 725 \\ 275 & 572 & 752 \end{array} \right\}}_{3\text{ta}} 2\text{ta} \quad 3 \cdot 2 = 6 \text{ ta.}$$

$$2\text{-usul: } \overline{abc} = \overline{\substack{a \\ 3\text{ta}} \substack{b \\ 2\text{ta}} \substack{c \\ 1\text{ta}}} \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ ta.}$$

$$3\text{-usul: } n = 3 \text{ ta } P_n = P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ ta.}$$

Misol: $x = \{1,3,4,6\}$ raqamlaridan takrorsiz nechta to'rt xonali son hosil qilish mumkin?

1346 3146 4136 6134
 1364 3164 4163 6143
 1436 3416 4316 6314
 1463 3461 4361 6341
 1634 3614 4613 6413
 1643 3641 4631 6431

1-usul: $4 \cdot 6 = 24$ ta.

2-usul: $\overline{abcd} = \overline{\underset{4\text{ta}}{a} \underset{3\text{ta}}{b} \underset{2\text{ta}}{c} \underset{1\text{ta}}{d}} \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ta.

3-usul: $n = 4$ ta, $P_n = P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ta.

1. $X = \{1, 3, 5\}$ to'plam bo'yicha nechta uch xonali sonlar tuzish mumkin?
2. 3 ta detalni 3 ta qutiga necha xil tartibda joylashtirish mumkin?
3. 6 nafar mehmonni 6 ta stulga o'tkazish variantlari nechta?
4. 7 xil kitobni 7 o'quvchiga necha usul bilan tarqatish mumkin?
5. Hech qaysi ikki komanda bir xil ochko olmagan bo'lsa, 8 komandani turnir jadvaliga necha usul bilan joylashtirish mumkin?
6. 6 nafar mehmonni 6 ta stulga o'tkazish variantlari nechta?
7. 4 ta kitobni nechta xil usulda joylashtirish mumkin.
8. 4 ta o'quvchini 25 ta o'ringa nechta xil usulda o'tkazish mumkin.
9. 5 ta odam 5 ta stulga nechta usulda o'rin almashib o'tirish mumkin?

2. n ta elementdan tuzilgan elementlari takrorlanmagan X toplamdan k tadan tanlab takrorli kombinatsiyalar tuzish deb, n ta element ichidan uning har bir elementini bir marta yoki bir necha marta tanlab k ta shunday element hosil qilishga aytiladiki, ular birbiridan faqat elementlar tarkibi bilan farq qiladi.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}; \quad k > n$$

Misol: Bolalar archa bayramiga sovg'a tayyorlash uchun 5 xil meva berildi. Bu mevalardan 8 ta mevadani iborat necha xil sovg'a tayyorlash mumkin?

Yechish: $n = 5$ ta, $k = 8$ ta

$$\begin{aligned} \overline{C}_5^8 &= C_{5+8-1}^8 = C_{12}^8 = \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} \\ &= \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495. \end{aligned}$$

$$\text{b. } \overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

1. To'rtta a, b, c, d elementdan ikkitadan tuzish mumkin bo'lgan barcha takroriy guruhlar nechta?
2. Maktab oshxonasida 3 xil ko'rinishda shirinliklar bor. O'quvchi 2 dona shirinlikni necha usulda tanlab olish mumkin?
3. Maktab oshxonasida 4 xil ko'rinishda shirinliklar bor. O'quvchi 5 dona shirinlikni necha usulda tanlab olish mumkin?
4. Maktab sport anjomlari bazasida futbol, volleybol va basketbol to'plari bor bor. Sport murabbiyi 5 dona to'pni necha usulda tanlab olish mumkin?
5. Maktab sport anjomlari bazasida 11 xil ko'rinishda futbol to'plari bor bor. Sport murabbiyi 6 dona to'pni necha usulda tanlab olish mumkin?
6. Bolalar archa bayramiga sovg'a tayyorlash uchun 5 xil meva berildi. Bu mevalardan 8 ta mevadan iborat necha xil sovg'a tayyorlash mumkin?
7. 4 xil kitobdan necha usul bilan 7 kitobdan iborat to'plam yozish mumkin?
8. 4 xil mevadan necha usulda 6 dona mevalardan iborat sovg'a tayyorlash mumkin?
9. To'rtta 100 so'mlik va to'rtta 50 so'mlik tangalardan to'rtta tangani necha xil usul bilan tanlab olish mumkin?
10. 0, 1, 2, ..., 9 sonlaridan foydalanib nechta domino toshi yasash mumkin?

Kombinatorika

1. 0;1;2;3;4;5 raqamlardan jami nechta raqamlari takrorlanmaydigan 3 xonali sonlar tuzish mumkin?
2. 0;1;2;3;4;5 raqamlardan jami nechta 3 xonali sonlar tuzish mumkin?
3. 6 ta to'g'ri chiziqlar ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?
4. 6 ta to'g'ri chiziqlar ko'pi bilan tekislikni nechta qismga ajratadi?

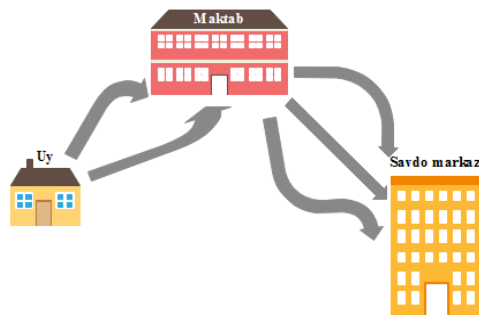
5. Markazlari har xil nuqtalarda bo'lgan 3 ta aylana ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?
6. Tog'ning cho'qqisiga 8 ta yo'l olib boradi. Borgan yo'lidan qaytmaslik sharti bilan tog'ning cho'qqisiga jami necha xil usulda borib kelish mumkin?
7. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan a va b to'g'ri chiziqlar berilgan, a to'g'ri chiziqqa 3 ta, b to'g'ri chiziqda 4 ta nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta uchburchak mavjud?
8. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan a va b to'g'ri chiziqlar berilgan, a to'g'ri chiziqqa 2 ta, b to'g'ri chiziqda 4 ta nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta to'rtburchak mavjud?
9. Aylanada 5 ta har xil nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta turli vatar mavjud?
10. Aylanada 6 ta har xil nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta har xil uchburchak chizish mumkin?
11. Tekislikda ixtiyoriy uchtasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 11 ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta turli kesma mavjud?
12. Tekislikda ixtiyoriy uchtasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 8 ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta uchburchak mavjud?
13. 34974 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?
14. 2 ta har xil kitobni 12 ta o'quvchidan 2 tasiga bittadan berish sharti bilan necha xil usulda berish mumkin?
15. Alida 3 ta fizika va 2 ta matematika kitoblari bor. Ali matematika kitoblari yonma-yon bo'lishi sharti bilan bu 5 kitobni javonga jami necha xil usulda joylashtirishi mumkin?

Ko'paytma va yig'indiga doir masalalar

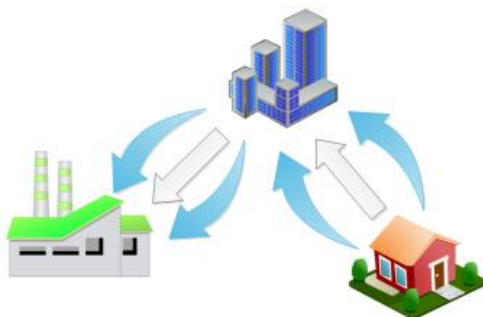
1. Savatda 4 ta anor, 5 ta nok va 6 ta olma bor. Savatdan bitta meva tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?
2. Savatda 4 ta anor, 5 ta nok va 6 ta olma bor. Savatdan ikkita turli nomdagi mevani tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?

3. Savatda 4 ta anor, 5 ta nok va 6 ta olma bor. Savatdan bittadan anor, nok va olmani tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?

4. Anvar (uyidan maktabga, maktabdan savdo markaziga borishi uchun) yo'lni necha xil usulda tanlashi mumkin?

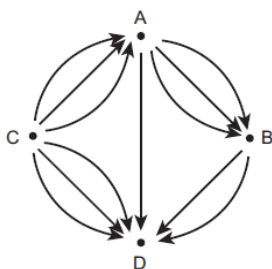


5. Jamshid (uyidan shaharga, shahardan zavodga borishi uchun) yo'lni necha xil usulda tanlashi mumkin?

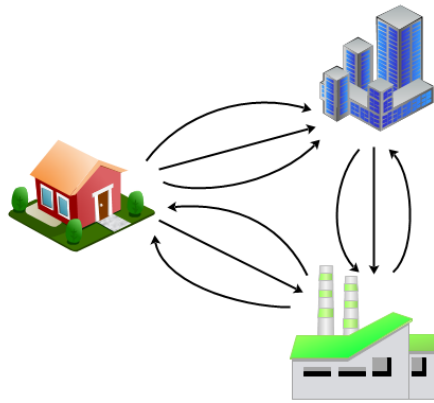


6. Bir mamlakatda 4 ta shahar bor ekan: A, B, C va D. A shahardan B ga 5 ta yo'l, B shahardan C ga 4 ta yo'l olib borarkan. A dan D ga 6 ta yo'l, D dan C ga 3 ta yo'l bilan borish mumkin ekan. A shahardan C shaharga necha xil yo'l bilan borish mumkin?

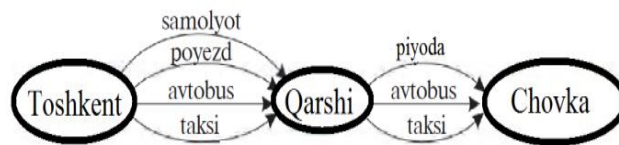
7. C nuqtadan D nuqtaga necha xil usulda borish mumkin?



8. Behruz uyidan chiqib zavodga necha xil usulda borishi mumkin?



9. Toshkentdan yo'lga chiqqan yo'lovchi Chovka qishlog'iga necha xil usulda kelishi mumkin?



10. Doskada 10 ta ot, 6 ta fe'l va 9 ta sifat yozilgan. Gap tuzish uchun har bir so'z turkumidan bittadan olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

11. „Rayhon“ kafesining taomnomasida 3 xil somsa, 4 xil 1-taom, 5 xil 2- taom bor ekan. 3 turdagi taomga buyurtmani nechta usulda berish mumkin?

12. Chorvador 10 ta qo'y va 15 ta echki sotmoqchi. Xaridor bitta qo'y va bitta echki olmoqchi. U necha xil usulda sotib olishi mumkin?

13. „MEGA PLANET “gipermarketining „Hammasi uy uchun“ bo'limida 15 xil piyola, 8 xil vaza, 10 xil choy qoshiq bor. Nazira xola turli nomdagi ikkita buyum sotib olmoqchi. U buni necha xil usulda amalga oshirishi mumkin?

14. Maktab kutubxonasida 4 xil matematika, 2 xil fizika va 3 xil tarix faniga doir kitoblar bor. Doston turli fanga oid ikkita kitobni uyda o'qish uchun olmoqchi. U buni necha usulda amalga oshirishi mumkin?

15. Maktab oshxonasida oq non, qora non va uch xil kolbasa bor. Ulardan necha xil buterbrod tayyorlash mumkin?

Kombinatsiyalarni qo'shish qoidalari

Misol: Guruhda 25 ta o'quvchi bor, ulardan 11 tasi o'g'il bolalar va 14 tasi qizlar. Guruhdan bir jinsga ta'luqli ikki kishilik o'quvchini necha xil usulda tanlash mumkin?

Yechish:

1) 11 ta o'g'il bolalardan 2 tasini tanlash usullari soni C_{11}^2

2) 14 ta qizlardan 2 tasini tanlash usullari soni C_{14}^2

$C_{11}^2 + C_{14}^2 = 55 + 91 = 146$ usulda tanlash mumkin.

Misol: Behruzning 5 ta tavug'i bor. U necha xil usulda tavuqlarini hovliga qo'yib yuborishi mumkin (u xohlasa bit-tadan, yo ikkitadan, yoki hammasini bir vaqtda qo'yib yuborishi ham mumkin)?

Yechish:

1) C_5^1 bittadan qo'yib yuborishi mumkin;

2) C_5^2 ikkitadan qo'yib yuborishi mumkin;

3) C_5^3 uchttadan qo'yib yuborishi mumkin;

4) C_5^4 to'rtttadan qo'yib yuborishi mumkin;

5) C_5^5 beshtadan qo'yib yuborishi mumkin;

$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$.

Kombinatsiyalarni ko'paytirish qoidalari

Misol: Guruhda 25 ta o'quvchi bor, ulardan 11 tasi o'g'il bolalar va 14 tasi qizlar. Guruhdan ikki o'quvchini shundy tanlash kerakki ulardan biri o'g'il bola, ikkikchisi esa qiz bola bo'lsin. Bu ikki o'quvchidan iborat to'plamni necha xil usulda tanlash mumkin?

Yechish:

1) 11 o'g'il bolalardan 1 tasini tanlash usullari soni C_{11}^1

2) 14 qizlardan 1tasini tanlash usullari soni C_{14}^1

$C_{11}^1 \cdot C_{14}^1 = 11 \cdot 14 = 154$ ga teng bo'ladi.

Misol: Guruhda 25 ta o'quvchi bor, ulardan 11 tasi o'g'il bolalar va 14 tasi qizlar. Guruhdan 5 o'quvchini shundy tanlash

kerakki ulardan 2 tasi o'g'il bola va 3 tasi qiz bola bo'lsin. Bu 5 o'quvchidan iborat to'plamni necha xil usulda tanlash mumkin?

Yechish:

1) 11 o'g'il bolalardan 2 tasini tanlash usullari soni C_{11}^2

2) 14 qizlardan 3 tasini tanlash usullari soni C_{14}^3

$$C_{11}^2 \cdot C_{14}^3 = \frac{11!}{2!(11-2)!} \cdot \frac{14!}{3!(14-3)!} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} \cdot \frac{14!}{3! \cdot 11!} =$$

ga teng bo'ladi.

$$= \frac{14!}{2! \cdot 3! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{2 \cdot 6} = 20020$$

1. $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{2}{3}$ tenglikda x natural son bo'lsa, uning qiymatini toping.

2. $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 7$ tenglikda x natural son bo'lsa, uning qiymatini toping.

3. $A_{x-1}^2 + C_x^1 = 5$ tenglikda x natural son bo'lsa uning qiymatini toping.

4. $C_x^2 + C_x^1 = 10$ tenglamani yeching (x natural son).

5. $2C_{x+1}^2 - A_x^2 = 10$ tenglamani yeching (x natural son).

6. $2C_{x+1}^2 - A_x^2 = 4$ tenglamani yeching (x natural son).

7. Aloqa binosida 50 ta kompyuter bor. Ularni bir-biriga ulash davomida 8 ta sim chiqsa, kompyuterlarni ulash uchun nechta sim kerak?

8. 5 ga bo'linadigan 6 xonali sonlar nechta?

9. Raqamlar takrorlanishi mumkin bo'lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 raqamlardan nechta 5 xonali son tuzish mumkin?

10. Ikkita parallel to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, ularning birida 4ta, ikkinchisida 3 ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo'lgan nechta uchburchak bor?

11. 3 nafar o'quvchini 6 ta stulga necha xil usulda o'tqazish mumkin?

12. Futbol jamoasidagi 11 kishi orasidan jamoa sardori va uning yordamchisini necha xil usulda tanlab olish mumkin?

13. Bog'iston qishlog'idan Toshkentga 2 ta yo'l bilan, Toshkentdan Urganchga 4 ta yo'l bilan borish mumkin. Bog'istondan Urganchgacha borish yo'llari soni nechta?

14. 12 ta oq atirgul va 13 ta qizil atirguldan ikkita oq atirgul va uchta qizil atirguldan iborat guldasta tuzish kerak. Buni necha xil usulda bajarish mumkin?

15. Matematika to'garagida faol qatnashuvchi 10 ta o'quvchidan 4 tasini Xalqaro matematika olimpiadasiga yuborish uchun ularni necha xil usulda tanlasa bo'ladi?

Kombinatorikani takrorlashga doir masalalar.

1. 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan necha 3 xonali son tuzish mumkin?

2. 4 ta a, b, c, d elementdan (predmetdan) 2 tadan olib tuzilgan har xil guruhlar soni necha?

3. Qavariq oltiburchakning diagonallari necha nuqtada kesishadi? Hech qaysi uchta diagonal bitta nuqtada kesishmaydi, deb faraz qilinadi.

4. O'lchamlari 8×4 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak $8 \cdot 4 = 32$ ta kvadratchalarga bo'lingan. Kvadratchalarning tomonlari bo'yicha yurganda A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo'llar soni necha?



5. 7 yigit va 4 qizdan iborat o'quvchilar guruhidan oltita o'quvchini shunday tanlab olish kerakki, ularning ichida qizlar soni ikkitadan kam bo'lmasin. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

6. 1, 2, 3, ..., 9 raqamlaridan ularni takrorlamay tuzilgan 9 xonali sonlar ichida 2 va 5 raqamlari yonma-yon turadiganlari necha?

7. P_4, P_5, P_6 sonlarini toping. Ularga qanday ma'no berish mumkin?

8. 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan necha 4 xonali son tuzish mumkin? Ularning nechtasi: 2 ga bo'linadi?

9. 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan necha 4 xonali son tuzish mumkin? Ularning nechtasi 4 ga bo'linadi?

10. 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan necha 4 xonali son tuzish mumkin? Ularning nechtasi 11 ga bo'linadi?

11. Tug'ilgan kuningizga taklif etilgan 4 ta do'stingizni 4 ta stulga necha xil usulda o'tkaza olasiz?

12. C_{10}^4 sonini ikki usulda hisoblang.

13. C_8^3 sonini ikki usulda hisoblang.

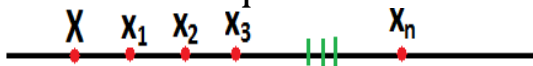
14. C_7^5 sonini ikki usulda hisoblang.

15. C_5^3 sonini ikki usulda hisoblang.

16. C_{10}^7 va C_{10}^3 larni taqqoslang?
17. C_8^3 va C_8^5 larni taqqoslang?
18. C_6^2 va C_6^4 larni taqqoslang?
19. Kutubxonachi Sizga 5 ta turli kitobni o'qishni taklif qildi. Siz shulardan 3 tasini tanlab olmoqchisiz. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?
20. Ikkita parallel to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, ularning bittasida 5 ta, ikkinchisida 3 ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo'lgan nechta uchburchak mavjud?

3.9- § Kombinatorikaning geometriyaga tadbiqlari

1. To'g'ri chiziqda n ta nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orqali nechta turli kesma hosil qilish mumkin?



Yechilishi: Kesma hosil qilish uchun bizga ikkita nuqta kerak bo'ladi. Shuning uchun n ta nuqtadan ikkitasini guruhlab jami kesmalar sonini topishimiz mumkin:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1) \cdot n}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

1. To'g'ri chiziqda n ta nuqta belgilandi. Nechta kesma hosil bo'ladi?
2. To'g'ri chiziqda 4 ta nuqta belgilandi. Nechta kesma hosil bo'ladi?
3. To'g'ri chiziqda 6 ta nuqta belgilandi. Nechta kesma hosil bo'ladi?
4. To'g'ri chiziqda 10 ta nuqta belgilandi. Nechta kesma hosil bo'ladi?

2. Tekislikda n ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchtasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta **to'g'ri chiziqlar** o'tadi?

Yechilishi. Masala shartini qanoatlantiradigan nuqtalarni A_1, \dots, A_n deb belgilaymiz. Bunday nuqtalar mavjud, misol tariqasida bitta aylanada yotgan n ta nuqtani olishimiz mumkin. A_1 nuqtani qolgan nuqtalar bilan $n-1$ ta to'g'ri chiziq bilan tutashtirishimiz mumkin. Jami nuqtalar n ta bo'lgani sababli, masala shartini qanoatlantiradigan to'g'ri chiziqlar soni $n(n-1)$ ta bo'lishi kerak. Ammo bunday sanashda biz har bir to'g'ri chiziqni ikki marta

sanab chiqqanimiz bois n ta nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib $\frac{n(n-1)}{2}$ ta to'g'ri chiziq o'tishini hosil qilamiz.

1. Tekislikda 6 ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta to'g'ri chiziqlar o'tadi?

2. Tekislikda 10 ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta to'g'ri chiziqlar o'tadi?

3. n ta to'g'ri chiziq eng ko'pi bilan $\frac{n(n-1)}{2}$ ta nuqtada kesishadi.

Yechilishi: Ravshanki, n ta to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalari soni eng katta bo'lishi uchun quyidagi holat bo'lishi kerak (rasmga qarang).



1) Har bir to'g'ri chiziq qolgan to'g'ri chiziqlardan har biri bilan kesishadi.

2) Xech qanday uchta to'g'ri chiziq bitta umumiy nuqtaga ega emas.

Ikkita to'g'ri chiziq **bitta nuqtada** kesishadi. Shuning uchun n ta to'g'ri chiziqdan ikkitasini guruhlab jami kesishish nuqtalari sonini topishimiz mumkin:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1) \cdot n}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

1. 6 ta to'g'ri chiziqlar ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

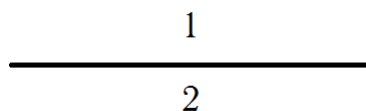
2. Bir-biri bilan ustma -ust tushmaydigan 7 ta to'g'ri chiziq ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

3. 10 ta to'g'ri chiziqlar ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

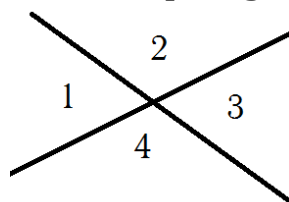
4. Hech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega bo'lmaydigan va o'zaro kesishadigan n ta to'g'ri chiziq tekislikni eng ko'pi bilan $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ ta qismga ajratadi.

Yechilishi: Bir nechta berilgan to'g'ri chiziqqa bittasini qo'shsak tekislik qismlari nechtaga ko'payishini aniqlaymiz.

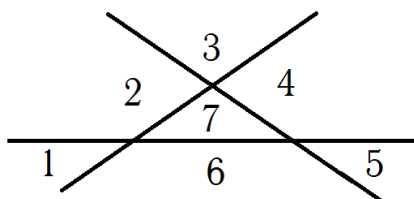
Masalan: Bitta to'g'ri chiziq tekislikni 2 ta qismga ajratadi.



Ikkita to'g'ri chiziq tekislikni 4 ta qismga ajratadi.



Uchta to'g'ri chiziq tekislikni 7 ta qismga ajratadi.



ikkita o'zaro kesishadigan to'g'ri chiziqqa uchinchi to'g'ri chiziqni qo'shsak, mavjud to'rtta tekislik qismlardan uchtasi yangi to'g'ri chiziq bilan teng ikkiga bo'linadi. Demak, hosil bo'lgan tekislik qismlari soni $7 = 4 + 3$ ga teng bo'ladi.

Xulosa: Umumiy holda, $n-1$ ta to'g'ri chiziqqa n -chi to'g'ri chiziqni qo'shsak, mavjud tekislik qismlaridan $n-1$ tasi yangi to'g'ri chiziq bilan teng ikkiga bo'linadi. Shuning uchun yangi hosil bo'lgan tekisliklar qismlari soni n ga ko'payadi. Demak, n ta o'zaro kesishadigan to'g'ri chiziqlardan hech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega bo'lmasa tekislikni

$2 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n) = 1 + \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ ta qismga ajratadi.

1. Hech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega bo'lmaydigan va o'zaro kesishadigan 6 ta to'g'ri chiziq tekislikni eng ko'pi nechta qismga ajratadi?

2. Hech qaysi uchta umumiy nuqtaga ega bo'lmaydigan va o'zaro kesishadigan 10 ta to'g'ri chiziq tekislikni eng ko'pi nechta qismga ajratadi?

5. Bitta nuqtada kesishadigan n ta to'g'ri chiziq tekislikni nechta qismga ajratadi?

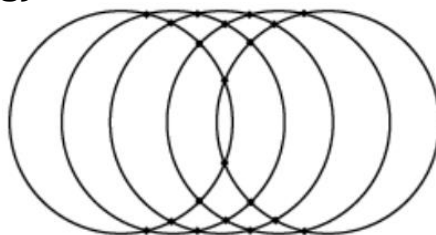
Yechilishi. Bitta to'g'ri chiziq tekislikni ikki qismga ajratganligi sababli n ta to'g'ri chiziq tekislikni $2n$ ta qismga ajratadi: $N = 2n$.

1. Bitta nuqtada kesishadigan 7 ta to'g'ri chiziq tekislikni nechta qismga ajratadi?

2. Bitta nuqtada kesishadigan 9 ta to'g'ri chiziq tekislikni nechta qismga ajratadi?

6. n ta aylana eng ko'pi bilan $n(n-1)$ ta nuqtada kesishadi.

Yechilishi: Ravshanki, n ta aylanalarning kesishish nuqtalari soni eng katta bo'lishi uchun quyidagi holat bo'lishi kerak (rasmga qarang).



1) Har bir aylana qolgan aylanalardan har biri bilan kesishadi.

2) Xech qanday uchta aylana bitta umumiy nuqtaga ega emas.

Bu holatda har bir aylana qolgan aylanalardan bilan $2(n-1)$ ta kesishish

nuqtadaga ega. Demak, jami bo'lib $n(n-1)$ ta nuqtaga ega bo'lamiz.

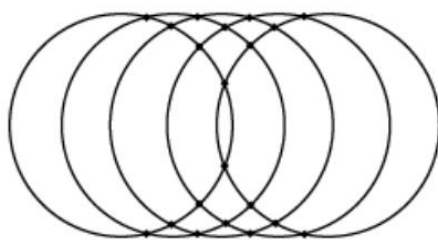
1. Markazlari har xil nuqtalarda bo'lgan 3 ta aylana ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

2. Markazlari har xil nuqtalarda bo'lgan 4 ta aylana ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

3. Markazlari har xil nuqtalarda bo'lgan 5 ta aylana ko'pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

7. n ta aylana tekislikni eng ko'pi bilan $n(n-1)+2$ ta qismga ajratadi.

Yechilishi: Bir nechta berilgan aylanaga bittasini qo'shsak tekislik qismlari nechtaga ko'payishini aniqlaymiz.



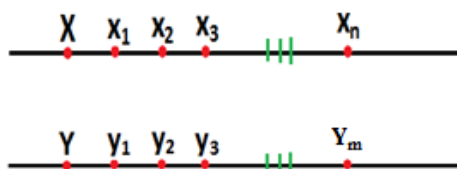
Masalan: Ikkita o'zaro kesishadigan aylanaga uchinchi aylanani qo'shsak, mavjud to'rtta tekislik qismlari yangi aylana bilan teng ikkiga bo'linadi. Demak, hosil bo'lgan tekislik qismlari soni $8 = 4 + 4$ ga teng bo'ladi. Endi shu uchta aylanaga to'rtinchisini qo'shsak mavjud oltita tekislik qismlari yangi aylana bilan teng ikkiga bo'linadi. Demak, hosil bo'lgan tekislik qismlari soni $14 = 8 + 6$ ga teng bo'ladi.

XULOSA

Umumiy holda, $n-1$ ta aylanaga n -chi aylanani qo'shsak, mavjud tekislik qismlaridan $n-1$ tasi yangi aylana bilan teng ikkiga bo'linadi. Shuning uchun yangi hosil bo'lgan tekisliklar qismlari soni $2(n-1)$ ga ko'payadi. Demak, n ta o'zaro kesishadigan aylanalardan xech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, tekislikni

1) 2; 2) $4=2+2$; 3) $8=4+4$; 4) $14=8+6$; 5) $22=14+8$; 6) $32=22+10 \dots$
 $2+2+4 + 6+ \dots +2(n-1) = 2[1+(1+2+3+\dots+(n-1))] = n(n-1) + 2$
 ta qismga ajratadi.

8. Tekislikda X va Y to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishmaydi. X to'g'ri chiziqda n ta Y to'g'ri chiziqda m ta nuqta belgilangan. Belgilangan nuqtalar bir-biri bilan tutashtirilganda quyidagi shakllar hosil bo'ladi:



1. Kesmalar soni $\longrightarrow N_{\bullet-\bullet} = C_n^1 \cdot C_m^1 = n \cdot m$

2. Vektorlar soni $\longrightarrow N_{\square} = 2 \cdot C_n^1 \cdot C_m^1 = 2 \cdot n \cdot m$

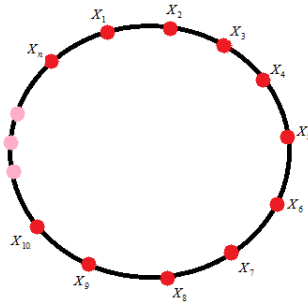
3. Uchburchaklar soni

$$N_{\Delta} = C_n^1 \cdot C_m^2 + C_m^1 \cdot C_n^2 = n \cdot C_m^2 + m \cdot C_n^2 = n \frac{m(m-1)}{2} + m \frac{n(n-1)}{2}$$



4. To'rtburchaklar soni $N_{\square} = C_n^2 \cdot C_m^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2}$

1. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan X va Y to'g'ri chiziqlar berilgan. X to'g'ri chiziqdan 5 ta, Y to'g'ri chiziqdan 6 ta nuqta belgilangan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta **kesma** mavjud?
2. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan X va Y to'g'ri chiziqlar berilgan. X to'g'ri chiziqdan 4 ta, Y to'g'ri chiziqdan 7 ta nuqta belgilangan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta **vektor** mavjud?
3. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan X va Y to'g'ri chiziqlar berilgan. X to'g'ri chiziqdan 3 ta, Y to'g'ri chiziqdan 4 ta nuqta belgilangan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta **uchburchak** mavjud?
4. Ikkita parallel to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, ularning bittasida 5 ta, ikkinchisida 3 ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo'lgan nechta **uchburchak** mavjud?
5. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan X va Y to'g'ri chiziqlar berilgan, X to'g'ri chiziqda 2 ta, Y to'g'ri chiziqda 4 ta nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta **to'rtburchak** mavjud?
6. Ikkita parallel chiziqning birida 8 ta, ikkinchisida 11 ta nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda bo'lgan **qavariq to'rtburchaklar** sonini toping.
7. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan X va Y to'g'ri chiziqlar berilgan. X to'g'ri chiziqdan 2 ta, Y to'g'ri chiziqdan 6 ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo'lgan jami nechta **to'rtburchak** yasash mumkin?
8. Tekislikda kesishmaydigan X va Y to'g'ri chiziqlar berilgan. X to'g'ri chiziqda 2 ta, Y to'g'ri chiziqda 8 ta nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta **to'rtburchak** mavjud?
9. Aylanada n ta nuqta berilgan bo'lsa, u holda bu nuqtalarni tutashtirib quyidagi shakllarni hosil qilsa bo'ladi.



1. Vatarlar soni $\bullet \text{---} \bullet$ $N_{\text{---}} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, n \geq 2, n \in N$

2. Vektorlar soni $\bullet \text{---} \rightarrow$ $N_{\square} = 2C_n^2 = n(n-1), n \geq 2, n \in N$

3. Uchburchaklar soni \triangle $N_{\triangle} = C_n^3, n \geq 3, n \in N$

4. To'rburchaklar soni \square $N_{\square} = C_n^4, n \geq 4, n \in N$

5. Ko'pburchaklar soni pentagon $N_k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; n \geq k \geq 5; n, k \in N$

1. Aylanada n ta nuqta belgilangan. Har bir nuqta qolgan har bir nuqta bilan tutashtirilsa, har bir holda jami **nechta kesma** hosil bo'ladi?

2. Bir aylanada yotgan 5 ta nuqta ustidan **nechta vatar** o'tkazish mumkin?

3. Aylanada 5 ta har xil nuqta belgilangan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta har xil **uchburchak** chizish mumkin?

4. Aylanada yotuvchi 20 ta turli nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda yotuvchi **uchburchaklar** sonini hisoblang.

5. Aylanada 6 ta har xil nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan jami nechta har xil **uchburchak** chizish mumkin?

6. Aylanada yotuvchi 20 ta turli nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda yotuvchi **qavariq to'rtburchaklar** sonini hisoblang.

7. Aylanada yotuvchi 20 ta turli nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda yotuvchi **qavariq beshburchaklar** sonini hisoblang.

10. Tekislikda n ta nuqta berilgan bo'lsa, u holda bu nuqtalarni tutashtirib quyidagi shakllarni hosil qilsa bo'ladi:

1) Tekislikda n ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchtasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta **kesma** hosil qilsa bo'ladi?

$$N_{\dots} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 2, \quad n \in N$$

1. Tekislikda 9 ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta *kesma* hosil qilsa bo'ladi?

2. Tekislikda 12 ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta *kesma* hosil qilsa bo'ladi?

2) Tekislikda n ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta *vatar* hosil qilsa bo'ladi?

$$N_{\square} = 2C_n^2 = n(n-1), \quad n \geq 2, \quad n \in N$$

1. Tekislikda 6 ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta *vatar* hosil qilsa bo'ladi?

2. Tekislikda 11 ta nuqta shunday joylashganki, ulardan hech qaysi uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo'lib nechta *vatar* hosil qilsa bo'ladi?

3) Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan n ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *uchburchak* hosil qilsa bo'ladi?

$$N_{\Delta} = C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

1. Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 13 ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *uchburchak* hosil qilsa bo'ladi?

2. Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 17 ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *uchburchak* hosil qilsa bo'ladi?

4) Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan n ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *to'rtburchak* hosil qilsa bo'ladi?

$$N_{\square} = C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)!}{4!(n-4)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24}, \quad n \geq 4,$$

$$n \in N$$

1. Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 5 ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *to'rtburchak* hosil qilsa bo'ladi?

2. Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 7 ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *to'rtburchak* hosil qilsa bo'ladi?

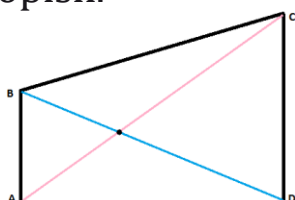
5) Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan n ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *ko'pburchak* hosil qilsa bo'ladi?

$$N_k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n \geq k \geq 5; \quad n, k \in N$$

1. Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 8 ta nuqta berilgan. Uchlari berilgan nuqtalarda bo'lgan jami nechta *beshburchak* mavjud?

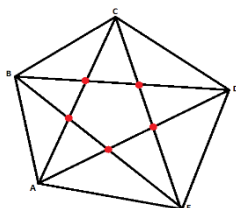
2. Tekislikda ixtiyoriy uchta bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan 10 ta nuqta berilgan. Uchlari shu nuqtalarda bo'lgan jami nechta har xil *oltiburchak* mavjud?

6) Hech qaysi uchta diagonal bir nuqtada kesishmaydigan ko'pburchaklarning diagonalari nechta nuqtada kesishishini topish.



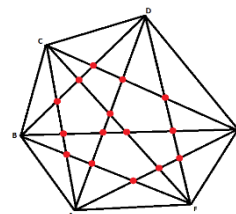
1) $C_n^4 = C_4^4 = 1$

2)



$C_n^4 = C_5^4 = 5$

3) $C_n^4 = C_6^4 = 15$



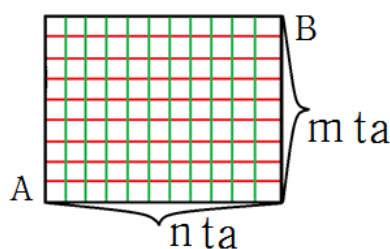
$$N_d = C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!}; \quad n \geq 4; \quad n \in N$$

1. Qavariq *oltiburchakning* diagonalari nechta nuqtada kesishadi? Hech qaysi uchta diagonal bitta nuqtada kesishmaydi, deb faraz qilinadi.

2. Qavariq *yettiburchakning* diagonalari nechta nuqtada kesishadi? Hech qaysi uchta diagonal bitta nuqtada kesishmaydi, deb faraz qiling.

3. Qavariq *sakkizburchakning* diagonallari nechta nuqtada kesishadi? Hech qaysi uchta diagonal bitta nuqtada kesishmaydi, deb faraz qiling.

7) A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo'llar sonini topish?
 Agar to'g'ri to'rtburchakning o'lchamlari $x \times y$ bo'lsa, u $x \cdot y$ ta kvadratchalarga ajratilgan bo'lsa, u holda A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo'llar soni quyidagicha bo'ladi: $N_{A \rightarrow B} = C_{m+n-2}^{n-1} = C_{m+n-2}^{m-1}$



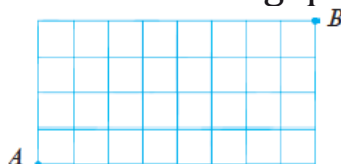
Yechilishi:

$N_g = y + 1 = m$ ta – Gorizontaal parallel chiziqlari soni

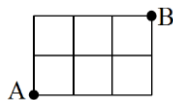
$N_v = x + 1 = n$ ta – Vertikal parallel chiziqlar soni

$$N_{A \rightarrow B} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-2}^{n-1} = C_{m+n-2}^{m-1}$$

1. O'lchamlari 8×4 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak $8 \cdot 4 = 32$ ta kvadratchalarga bo'lingan. Kvadratchalarning tomonlari bo'yicha yurganda A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo'llar soni nechta?

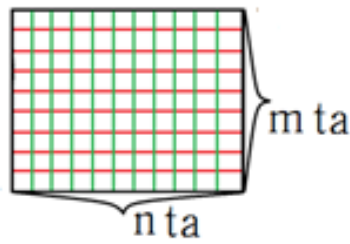


2. O'lchamlari 3×2 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak $3 \cdot 2 = 6$ ta kvadratchalarga bo'lingan. Kvadratchalarning tomonlari bo'yicha yurganda A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo'llar soni nechta?



8). To'g'ri to'rtburchaklar sonini topish.

Agar to'g'ri to'rtburchakning o'lchamlari $x \times y$ bo'lsa, u $x \cdot y$ ta kvadratchalarga ajratilgan bo'lsa, u holda jami to'g'ri to'rtburchaklar soni quyidagiga teng bo'ladi:



$N_g = y+1 = m$ ta – Gorizontaal parallel chiziqlari soni

$N_v = x+1 = n$ ta – Vertikal parallel chiziqlar soni

$$N_{\square} = C_n^2 \cdot C_m^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2} - \text{To'g'ri to'rtburchaklar soni}$$

9x10 to'g'ri to'rtburchak birlik kvadratlarga bo'lingan bo'lsa, bu shaklda nechta to'g'ri to'rtburchak bor?

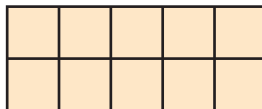
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

$$N_g = 9+1 = 10 = n \quad N_v = 10+1 = 11 = m$$

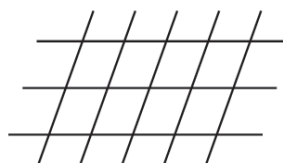
$$N_{\square} = C_n^2 \cdot C_m^2 = C_{10}^2 \cdot C_{11}^2 = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{10!}{9!2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 2475 \text{ ta to'g'ri}$$

to'rtburchaklar bor!

1. Ushbu shaklda nechta turli to'rtburchak bor?



2. Quyidagi shakl yordamida nechta turli parallelogram yasash mumkin?



GLOSSARIY

Grafik – funksiyani tasvirlash usullaridan biri.

Davriy kasr – cheksiz oʻnli kasr

Darajali funksiya - koʻrinishidagi funksiya.

Diagonal matrisa – diagonal elementlaridan boshqa elementlari nol boʻlgan kvadrat matrisa.

Integral hisob – matematik analizning integrallar,ularning xossalari,hisoblash usullari va tadbirlarini oʻrganadigan boʻlimi.

Isbot – tasdiqning toʻgʻriligi aniqlanadigan mushohadalar zanjiri.

Kanonik tenglama – sodda tenglama.

Kvadrat matrisa - satrlari soni ustunlari soniga teng matrisa.

Kvadratik forma – ikkinchi darajali bir jinsli koʻphad.

Matematik iqtisod (iqtisodiyotda matematika) – iqtisodiy ob'ektlar va jarayonlarning matematik modellari va ularni tadqiq etish usullari boʻlgan nazariy fan.

Matrisa – elementlari ixtiyoriy toʻgʻri toʻrtburchak shaklidagi jadval.

Minor – element turgan satr va ustunni oʻchirishdan hosil boʻlgan determinant.

Normal – chiziqning berilgan nuqtasigan shu nuqtagagi urinmaga perpendikulyar oʻtuvchi toʻgʻri chiziq.

Parabola – konus kesimlaridan biri.

Teorema – isbot talab qiluvchi mulohaza.

Chizikli algebra - chekli chizikli fazolarda chizikli akslanishlarni oʻrganuvchi algebra boʻlimi.

Zaruriy va yetarli shartlar – teoremlarni yozish va talqin qilish shakli.

Zaruriy shart - xulosadan shart kelib chiqadi.

Yetarli shart – shartdan xulosa kelib chiqadi.

Глоссарий

График – один из способов представления функции.

Периодическая дробь – бесконечная десятичная дробь

Градуированная функция-функция вида.

Диагональная матрица-это квадратная матрица, элементы которой, кроме диагоналей, равны нулю.

Интегральное исчисление-раздел математического анализа,изучающий интегралы,их свойства, методы исчисления и приложения.

Доказательство-цепочка наблюдений, в ходе которых определяется правильность утверждения.

Каноническое уравнение-простое уравнение.

Квадратная Матрица - Матрица, количество строк которой равно количеству столбцов.

Квадратичная форма – это однородный многочлен второй степени.

Математическая экономика (математика в экономике) – теоретическая наука, представляющая собой математические модели экономических объектов и процессов и методы их исследования.

Матрица-таблица прямоугольной формы с элементами произвольной прямой.

Минор-определитель, образованный удалением строки и столбца, в которых находится элемент.

Нормаль-прямая, проходящая от заданной точки прямой перпендикулярно плоскости в данной точке.

Парабола-одно из конических сечений.

Теорема-рассуждение, требующее доказательства.
пространства.

Линейная алгебра-раздел алгебры, изучающий линейные отражения в конечномерных линейных пространствах.

Необходимые и достаточные условия – форма записи и интерпретации теорем.

Необходимость - из заключения следует условие.

Достаточность-из достаточного условия следует вывод.

Glossary

A graph - one of the ways to represent a function.

Periodic fraction – infinite decimal fraction

A graded function - a function of the form.

A diagonal matrix - a square matrix whose elements, except diagonals, are zero.

Integral calculus - a branch of mathematical analysis that studies integrals, their properties, calculus methods and applications.

Proof - a chain of observations, during which the correctness of the statement is determined.

The canonical equation - a simple equation.

A square matrix - a matrix whose number of rows - equal to the number of columns.

A quadratic form - a homogeneous polynomial of the second degree.

Mathematical economics (mathematics in economics) - a theoretical science that represents mathematical models of economic objects and processes and methods of their research.

A matrix - a rectangular table with elements of an arbitrary straight line.

Minor - a determinant formed by deleting the row and column in which the element is located.

Normal - a straight line passing from a given point of a straight line perpendicular to the plane at this point.

A parabola - one of the conic sections.

A theorem - a reasoning that requires proof.

Linear algebra - a branch of algebra that studies linear reflections in finite-dimensional linear spaces.

Necessary and sufficient conditions – the form of writing and interpretation of theorems.

Necessity - a condition follows from the conclusion.

Sufficiency-a conclusion follows from a sufficient condition.

ADABIYOTLAR

1. Alimov Sh. A. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari, oʻrta maktabning 10-11 sinflari uchun darslik. Toshkent, "Oʻqituvchi", 1996- yil va keyingi nashrlari.
2. Kolmogorov A. N. tahriri ostida. Algebra va analiz asoslari. 10-11 sinflar uchun darslik. Toshkent, "Oʻqituvchi", 1992-yil.
3. Vafojev R. H. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun oʻquv qoʻllanma. Toshkent, "Oʻqituvchi", 2001-yil.
4. Abduhamidov A. U. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun sinov darsligi. Toshkent, "Oʻqituvchi", 2001 yil.
5. A.A.Abdushukurov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. "Universitet", 2010
6. Sirojiddinov S.X., Mamatov M.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent.; Oʻqituvchi, 1980.
7. Abdishukurov A.A., Azlarov T.A., Djamirzaev A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar toʻplami. Toshkent., 2003.
8. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач: Учебное пособие / М.С.Спирина.- М.: Academia, 2018.-176 с.
9. X.Norjigitov va boshqalar. Elementar matematika. Oʻquv qoʻllanma. Toshkent, "Brok class servis", 2022 yil.
10. A.I.Eshniyazov, O.N.Dushaboyev va S.B.Bozorov. Ehtimollar nazariyasidan misollar yechish. Oʻquv qoʻllanma. Toshkent, "Metodist", 2024 yil.

MUNDARIJA

I-BOB. ALGEBRAIK TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR.....	3
1.1. Tenglama. Tenglamaning ildizi. Algebraning asosiy teoremasi.....	3
1.2. Umumlashgan Viyet teoremasi. Kvadrat uchhadni ko'paytuvchilarga ajratish.....	7
1.3. Bikvadrat tenglamalarni yechish. Tenglamalarda o'zgaruvchini almashtirish usuli. Qaytma tenglamalar	9
1.4. Determinant haqida tushuncha. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss va Kramer usullarida yechish.....	16
1.5. Tenglamalar sistemalarini yechishning maxsus usullari.....	22
1.6. Tenglamalarga olib kelinadigan matnli masalalar.....	27
1.7. Tengsizliklarning umumiy xossalari.....	39
1.8. Parametrli chiziqli tenglama.....	45
II-BOB. KOMPLEKS SONLAR.....	52
2.1. Kompleks son tushunchasi.....	52
2.2. Kompleks sonning trigonometrik shakli.....	56
2.3. Muavr formulasi.....	57
2.4. Ildiz chiqarish.....	60
III-BOB. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI.....	62
3.1. Kombinatorikaning asosiy qoidalari.....	62
3.2. O'rin almashtirishlar.....	71
3.3. Takrorsiz o'rin almashtirishlar	73
3.4. Takrorli o'rin almashtirish.....	74
3.5. O'rinlashtirishlar.....	81
3.6. Takrorlanuvchi o'rinlashtirishlar.....	83
3.7. Kombinasiyalashlar (gruppalashlar).....	87
3.8. Takrorlanuvchi kombinasiyalashlar.....	97
3.9. Kombinatorikaning geometriyaga tadbiqlari	108
Glossariy.....	119
Adabiyotlar.....	122

СОДЕРЖАНИЕ

I-Глава. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ	3
1.1. Понятие множеств.....	3
1.2. Действие над множествами	6
1.3. Примеры из теории множеств	9
1.4. Множества и логические операции.....	10
1.5. Декартово умножение множеств	13
1.6. Примеры декартова умножения множеств	14
II-Глава. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ.....	16
2.1. Основные правила комбинаторики	16
2.2. Перестановка	25
2.3 Перестановка без повторение	27
2.4. Перестановка с повторениями	28
2.5. Размещения.....	35
2.6. Размещения без повторения	38
2.7. Комбинация.....	42
2.8. Комбинация без повторения	52
2.9. Комбинация с повторениями	54
2.10. Приложения комбинаторики к геометрии	67
III-Глава. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	80
3.1. Основные понятия теории вероятностей	80
3.2. События и операции над ними.....	90
3.3. Различные определения вероятности	92
3.4. Свойства вероятности	97
3.5. Условная вероятность.....	103
3.6. Вероятность появления хотя бы одно событие	107
3.7. Полная формула вероятности	109
3.8. Формула Байеса	111
3.9. Схема Бернулли. Биномиальное распределение	119
3.10. Наибольшее вероятное число	124
3.11. Численные характеристики случайных величин	129
3.12. Различные задачи по комбинаторике и теории вероятностей	130
Глоссарий.....	132
Литература.....	138

CONTENT

I-Chapter. SET THEORY	3
1.1. The concept of sets	3
1.2. Action on sets	6
1.3. Examples from set theory	9
1.4. Sets and logical operations.....	10
1.5. Cartesian set multiplication	13
1.6. Examples of Cartesian set multiplication	14
II-Chapter. ELEMENTS OF COMBINATORICS.....	16
2.1. Basic rules of combinatorics	16
2.2. Permutation	25
2.3 Permutation without repetition	27
2.4. Permutation with repetitions	28
2.5. Accommodations.....	35
2.6. Placements without repetition	38
2.7. Combination.....	42
2.8. Combination without repetition	52
2.9. Combination with repetitions	54
2.10. Applications of combinatorics to geometry	67
III-Chapter. ELEMENTS OF PROBABILITY THEORY	80
3.1. Basic concepts of probability theory	80
3.2. Events and operations on them	90
3.3. Various definitions of probability	92
3.4. Probability properties	97
3.5. Conditional probability	103
3.6. Probability of at least one event occurring	107
3.7. Full probability formula	109
3.8. Bayes Formula	111
3.9. Bernoulli scheme. Binomial distribution	119
3.10. Highest probable number	124
3.11. Numerical characteristics of random variables	129
3.12. Various tasks in combinatorics and probability theory	130
Glossary.....	132
Literature.....	138

**O.G.GAIMNAZAROV
O.N.DUSHABOEV
U.T.JALILOV**

MATEMATIKADAN MASALALAR TO'PLAMI

O'quv qo'llanma