

9-BOB

**STEREOMETRIYA AKSIOMALARI. FAZODA TO‘G‘RI
CHIZIQLAR, TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING O‘ZARO
JOYLASHUVI**

1-§. Stereometriya aksiomalari

Stereometriyani o‘rganishni uning aksiomalaridan boshlaymiz.

1-aksioma. Tekislik qanday bo‘lishidan qat’i nazar, unga tegishli va unga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.

2-aksioma. Agar ikkita har xil tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, bu tekisliklar shu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab o‘zaro kesishadi.

3-aksioma. Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta nuqtadan tekislik o‘tkazish mumkin va u yagonadir.

Planimetriyada qaralayotgan barcha shakllar joylashgan bitta tekislik mavjud edi. Stereometriyada esa tekislik cheksiz ko‘p, shu munosabat bilan planimetriyaning ba’zi aksiomalari ifodasini stereometriya aksiomalari kabi aniqlash talab etiladi.

1. Tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziq bu tekislikni ikkita yarimtekislikka ajratadi.
2. Tekislikka tegishli yarim to‘g‘ri chiziqdan berilgan yarimtekislikka 180° dan kichik bo‘lgan berilgan gradus o‘lchovli burchak qo‘yish mumkin va faqat bitta.
3. Uchburchak qanday bo‘lmasin berilgan tekislikda undagi berilgan yarim to‘g‘ri chiziqqa nisbatan berilgan vaziyatda joylashgan shu uchburchakka teng uchburchak mavjud.
4. Tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib bo‘lmaydi.

Yuqorida keltirilgan aksiomalar yordamida ba’zi teoremlarni isbotlaymiz.

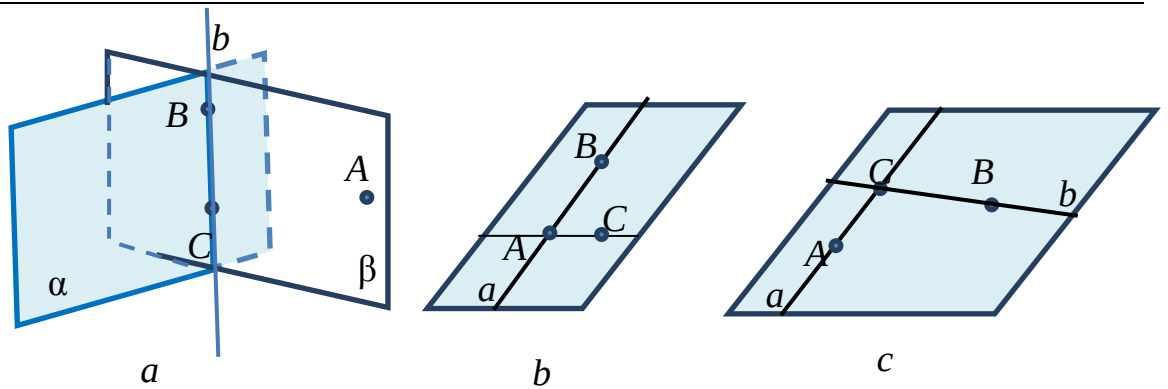
1-teorema. (*To‘g‘ri chiziqning tekislikda yotishlik sharti.*) Agar to‘g‘ri chiziqning ikkita nuqtasi tekislikka tegishli bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq shu tekislikda yotadi.

Isbot. To'g'ri chiziqning B va C nuqtalari α tekislikda yotsin (9.1- a rasm). U holda 1-aksiomaga ko'ra α tekislikda yotmaydigan biror A nuqta topiladi. Bitta to'g'ri chiziqda yotmagan A, B, C nuqtalardan, 3-aksiomaga ko'ra, yagona β tekislik o'tkazish mumkin. Modomiki, $A \notin \alpha$ ekan, α va β har xil tekisliklardir. Lekin α va β tekisliklar umumiy C nuqtaga ega, shu sababli 2-aksiomaga ko'ra, ular C nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Ikkinchi tomondan, α va β tekisliklar umumiy B nuqtaga ega, shu sababli ular B nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Shunday qilib, α va β tekisliklar B va C nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi, lekin B va C nuqtalar b to'g'ri chiziqda yotadi. Modomiki, ikkita bar xil B va C nuqtadan yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin ekan, α va β tekisliklar B va C nuqtalar yotgan b to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Demak, BC to'g'ri chiziqning barcha nuqtalari α tekislikka tegishli bo'ladi.

Agar berilgan α va β tekisliklar ikkita, mos ravishda, B va C nuqtalardan o'tuvchi har xil to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesishadi, deb faraz qilsak, α va β tekisliklar ustma-ust tushishi lozim, bu esa yasalishiga ko'ra mumkin emas.

2-teorema. *(To'g'ri chiziq va nuqtadan o'tuvchi tekislik mavjudligi.)* Berilgan to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin.

Isbot. a – berilgan to'g'ri chiziq va C unda yotmagan berilgan nuqta bo'lsin. Berilgan a to'g'ri chiziqda (planimetriya aksiomasiga ko'ra), hech bo'lmaganda, ikkita A va B nuqta topiladi. A, B va C nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi (9.1- b rasm). 3-aksiomaga ko'ra, bitta to'g'ri chiziqda yotmagan uchta A, B va C nuqtadan yagona tekislik o'tkazish mumkin. 1-teoremaga muvofiq berilgan a to'g'ri chiziq shu tekislikda yotadi.



9.1-rasm

3-teorema. (Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi tekislik mavjudligi.) Berilgan kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin.

Isbot. Berilgan a va b to'g'ri chiziqlar C nuqtada kesishsin, ya'ni $a \cap b = C$ va $C \in a, C \in b$ bo'lsin. Planimetriya aksiomalariga ko'ra, a to'g'ri chiziqda, hech bo'lmaganda, yana bitta A nuqta va b to'g'ri chiziqda esa B nuqta topiladi (9.1-c rasm). Bu A, B, C nuqtalar har xil va bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. 3-aksiomaga ko'ra, A, B, C nuqtalar orqali yagona α tekislik o'tkazish mumkin. 1-teoremaga ko'ra a va b to'g'ri chiziqlar α tekislikda yotadi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

9.1. A, B, C va D nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. AB va CD to'g'ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlang.

9.2. Berilgan ikki to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasidan bu to'g'ri chiziqlar bilan bir tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

9.3. A, B, C nuqtalar ikkita turli tekislikning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

9.4. Juft-jufti bilan kesishuvchi uchta tekislik berilgan. Agar bu tekisliklarning kesishmasidagi ikki to'g'ri chiziq kesishsa, u holda uchinchi to'g'ri chiziq ularning kesishish nuqtasidan o'tishini isbotlang.

9.5. a to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadigan ikki tekislik va shu tekisliklarning birida yotib, ikkinchisini kesib o'tuvchi b to'g'ri chiziq berilgan. a va b to'g'ri chiziqlar kesishishini isbotlang.

9.6. To'rtta nuqta bir tekislikda yotmaydi. Ulardan qandaydir uchasi bir to'g'ri chiziqda yotishi mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

9.7. To'g'ri chiziq orqali ikkita turli tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

9.8. Kesishmaydigan ikkita tekislik berilgan. Bu tekisliklardan birini kesuvchi to'g'ri chiziq ikkinchisini ham kesib o'tishini isbotlang.

9.9. A nuqtada kesishuvchi ikkita turli to'g'ri chiziq berilgan. Berilgan ikki to'g'ri chiziqni kesib o'tadigan va A nuqtadan o'tmaydigan hamma to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotishini isbotlang.

9.10. Berilgan to'g'ri chiziqni kesib o'tadigan va to'g'ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan o'tadigan hamma to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotishini isbotlang.

9.11. Agar AB va CD to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa, AC va BD to'g'ri chiziqlar ham bir tekislikda yotmasligini isbotlang.

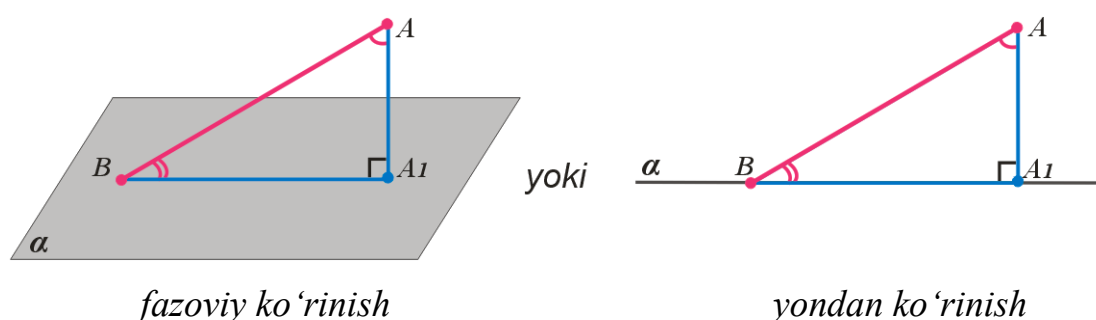
9.12. Bir tekislikda yotmaydigan to'rtta nuqta berilgan. Bu nuqtalarning uchtasidan o'tuvchi nechta turli tekislik o'tkazish mumkin? Javobingizni tushuntiring.

9.13. Bir to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqtadan tekislik o'tkazish mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

9.14. To'rtta nuqta berilgan. Bu nuqtalarning istalgan ikkitasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqning qolgan ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan kesishmasligi ma'lum. Berilgan to'rtta nuqtaning bir tekislikda yotmasligini isbotlang.

2-§. Perpendikular va og‘ma. Uch perpendikular haqidagi teorema

Tekislikda yotmaydigan nuqta bilan tekislikning ixtiyoriy nuqtasini tutashtiruvchi kesmalarga **og‘malar** deyiladi (9.2-rasm). Tekislikda yotmaydigan nuqta bilan tekislikning eng yaqin nuqtasini tutashtiruvchi kesmaga esa tekislikka tushirilgan **perpendikular** deyiladi. Tekislikda yotmagan nuqta orqali tekislikka yagona balandlik va cheksiz ko‘p og‘ma o‘tkazish mumkin. Og‘ma va uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchakka og‘ma va tekislik orasidagi burchak deyiladi.



9.2-rasm

AA_1 – balandlik;

AB – og‘ma;

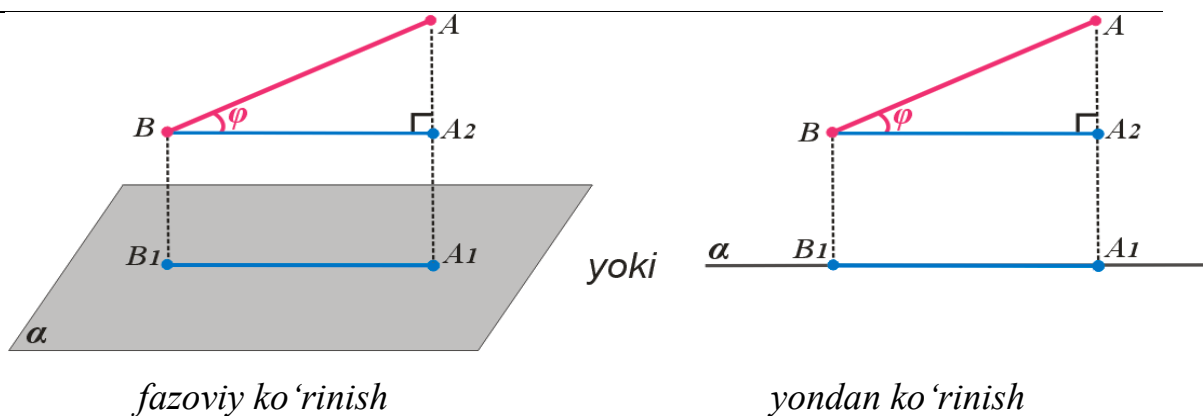
A_1B – og‘maning tekislikdagi proyeksiyasi;

$\angle A$ – balandlik va og‘ma orasidagi burchak;

$\angle B$ – og‘ma va tekislik orasidagi burchak.

Tekislik bilan kesishmaydigan va fazoda berilgan uzunligi AB bo‘lgan kesmaning uchlaridan tekislikkacha bo‘lgan masofalar ma’lum bo‘lsa, kesma va tekislik orasidagi burchakni hamda kesmaning tekislikdagi proyeksiyasini aniqlash mumkin (9.3- rasm).

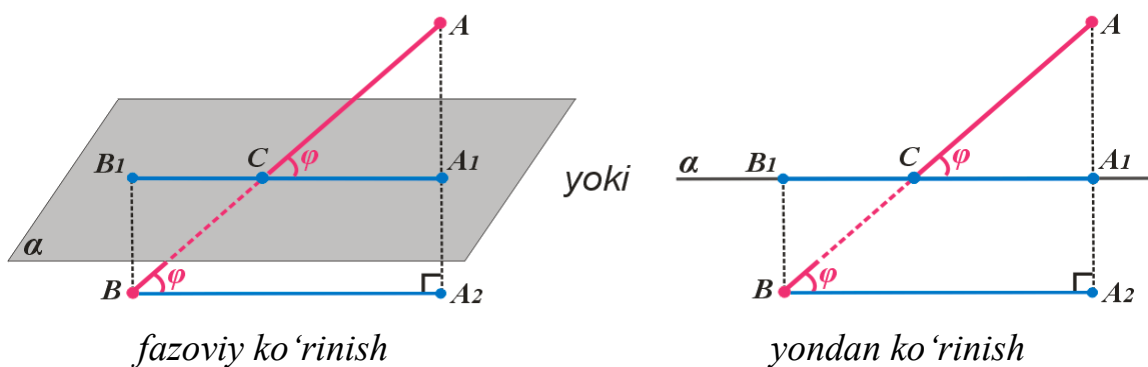
$$\sin \varphi = \frac{AA_2}{AB} = \frac{AA_1 - BB_1}{AB}, \quad A_1B_1 = \sqrt{AB^2 - AA_2^2}$$



9.3-rasm

Tekislik bilan kesishadigan va fazoda berilgan uzunligi AB bo'lgan kesmaning uchlaridan tekislikkacha bo'lgan masofalar ma'lum bo'lsa, kesma va tekislik orasidagi burchakni hamda kesmaning tekislikdagi proyeksiyasini aniqlash mumkin (9.4-rasm).

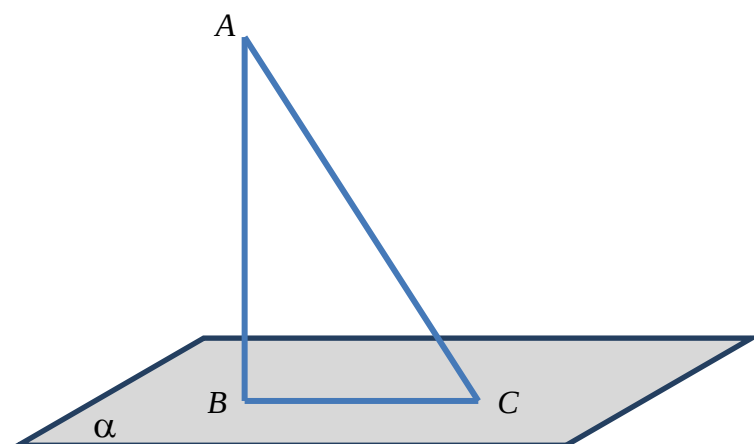
$$\sin \varphi = \frac{AA_2}{AB} = \frac{AA_1 + BB_1}{AB}, \quad A_1B_1 = \sqrt{AB^2 - (AA_1 + BB_1)^2}$$



9.4-rasm

Berilgan A nuqtadan α tekislikka AB perpendikular va AC og'ma o'tkazilgan bo'lsin (9.5-rasm). Perpendikular va og'malar tekislikni kesib o'tadigan B va C nuqtalarni tutashtirib, α tekislikka AC og'maning proyeksiyasi deb ataladigan BC kesmani hosil qilamiz va quyidagicha belgilaymiz:

$$pr_{\alpha} AC = BC. \quad (1)$$

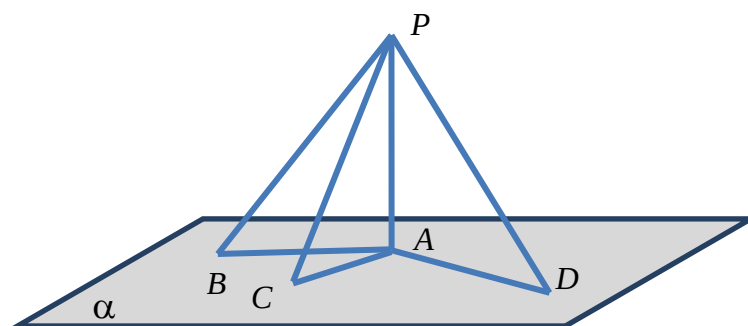


9.5-rasm

4-teorema. Agar α tekislikdan tashqarida yotuvchi P nuqtadan bu tekislikka PA perpendikular va $PB, PC, \dots$ og'malar o'tkazilgan bo'lsa:

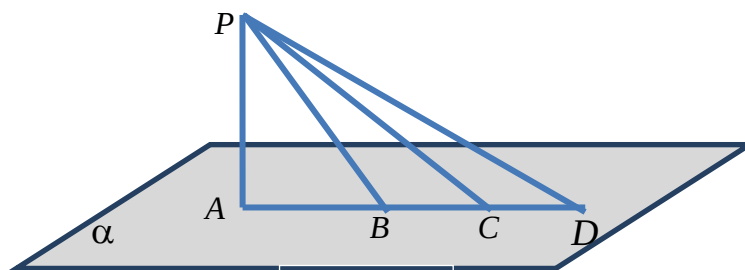
- 1) proyeksiyalari teng og'malar teng bo'ladi;
- 2) ikkita og'madan qaysi birining proyeksiyasi katta bo'lsa, o'sha og'ma katta bo'ladi.

Isbot. Agar barcha uchburchaklar tekisliklarini $\triangle PAB$ tekisligining ustiga yotqizsak (9.6-rasm), fazodagi teorema planimetriyadagi teoremaga keltiriladi. U holda barcha og'malarning proyeksiyalari bitta AD to'g'ri chiziqda yotadi. Planimetriyada isbotlangan teorema bo'yicha $AD > AB > AC$ dan $PD > PB > PC$ bo'lishi kelib chiqadi.



9.6-rasm

PA – to'g'ri burchakli uchburchakning kateti, $PD, PB, PC, \dots$ gipotenuzalardan iborat (9.7-rasm), shuning uchun PA kesmaning uzunligi shu P nuqtadan o'tkazilgan ixtiyoriy og'maning uzunligidan kichik bo'ladi.

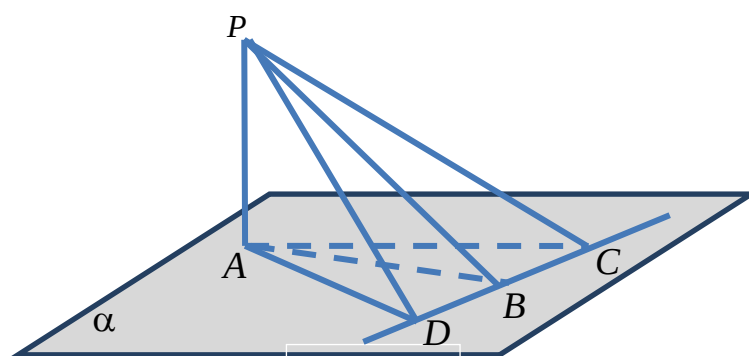


9.7-rasm

5-teorema (*uch perpendikular haqida*). Tekislikda og‘maning asosi orqali uning proyeksiyasiga perpendikular ravishda o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq og‘maning o‘ziga ham perpendikular bo‘ladi.

Isbot. Berilgan α tekislikka PA perpendikular va PB og‘ma o‘tkazilgan bo‘lsin (9.8-rasm). A va B nuqtalarni tutashtirib, PB og‘maning α tekislikka AB proyeksiyasini olamiz. B nuqtadan α tekislikka AB ga perpendikular CD to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va $CD \perp PB$ bo‘lishini isbotlaymiz.

CD to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy, o‘zaro teng $BC=BD$ kesmalarni joylashtiramiz. U holda, o‘zaro teng AC va AD proyeksiyalarga ega bo‘lgan fazodagi og‘malar sifatida, $PC=PD$ bo‘ladi. Endi $\triangle PCD$ teng yonli uchburchak bo‘ladi va shuning uchun uning PB medianasi balandlik ham bo‘ladi.



9.8-rasm

Yuqoridagi rasmdan foydalanib, isbotlangan tasdiqqa teskari teoremani ham isbotlash mumkin.

6-teorema (*teskari teorema*). Tekislikda PB og‘maning asosi orqali og‘maga perpendikular ravishda o‘tkazilgan CD to‘g‘ri chiziq og‘maning AB proyeksiyasiga ham perpendikular bo‘ladi.

Isbotini mustaqil ravishda amalga oshirish tavsiya etiladi.

1-masala. Berilgan nuqtadan tekislikka uzunliklari 10 sm va 17 sm bo'lgan ikkita og'ma o'tkazilgan. Bu og'malar proyeksiyalarining ayirmasi 9 sm bo'lsa, og'malarning proyeksiyalari topilsin (9.9-rasm).

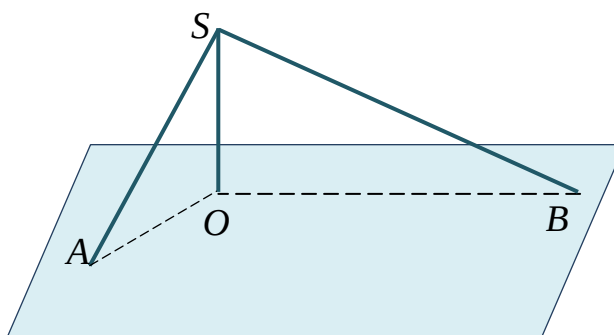
Yechish. $OB=x$, $OA=y$ bo'lsin.

$$x - y = 9. \quad (1)$$

$$\Delta SOB \text{ dan: } SO^2 = BS^2 - OB^2 = 289 - x^2.$$

$$\Delta SOA \text{ dan: } SO^2 = AS^2 - AO^2 = 100 - y^2, \text{ bundan}$$

$$289 - x^2 = 100 - y^2. \quad (2)$$



9.9-rasm

(2) va (1) ni birgalikda yechamiz:

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x^2 - y^2 = 189 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ (x - y)(x + y) = 189 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x = 30, x = 15, y = 6.$$

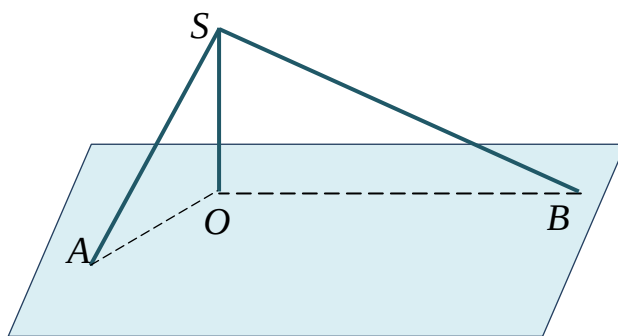
Shunday qilib, $OB=15$ sm, $OA=6$ sm.

2-masala. Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Agar og'malar 1:2 nisbatda bo'lib, ularning proyeksiyalari 1 sm va 7 sm bo'lsa, og'malarning uzunliklari topilsin (9.10- rasm).

Yechish. $BS=x$ bo'lsin, u holda $AS = \frac{1}{2}x$.

$$\Delta AOS \text{ va } \Delta BOC \text{ dan: } SO^2 = AS^2 - AO^2 = BS^2 - OB^2.$$

$$\text{Demak, } \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = x^2 - 49, \quad \frac{x^2}{4} - 1 = x^2 - 49. \text{ Bundan, } x=8 \text{ sm.}$$



9.10-rasm

Shunday qilib, $SA=4$ sm, $SB=8$ sm.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

9.15. Agar a to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular bo'lsa, α tekislikda a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lmagan to'g'ri chiziqlar mavjudmi?

9.16. Agar l to'g'ri chiziq α tekislikdagi a va b to'g'ri chiziqlarga perpendikular bo'lsa, l to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular bo'ladimi?

9.17. Berilgan A nuqtadan tekislikka AB perpendikular va AC og'ma o'tkazilgan. Agar $AB=16$ sm, $AC=20$ sm bo'lsa, og'maning α tekislikka proyeksiyasini toping. javob: 12 sm.

9.18. Perpendikular bilan og'ma orasidagi burchak 60° ga teng. Perpendikularning uzunligi 20 ga teng. Og'maning uzunligini toping. javob:40.

9.19. Tekislikka o'tkazilgan perpendikular bilan og'ma orasidagi burchak 30° . Perpendikularning uzunligi 10 ga teng. Og'maning uzunligini toping. javob:

$$\frac{20}{\sqrt{3}}.$$

9.20. Bitta nuqtadan tekislikka og'ma va perpendikular o'tkazilgan. Og'maning uzunligi 10 sm, perpendikularniki esa 6 sm. Og'maning tekislikdagi proyeksiyasi necha santimetr? javob: 8

9.21. Tekislikka tushirilgan og'ma bilan perpendikular orasidagi burchak 60° , og'maning uzunligi 20 sm. Perpendikularning uzunligini toping. javob:10

9.22. Bitta nuqtadan tekislikka ogʻma va perpendikular oʻtkazilgan. Ogʻmaning uzunligi 5 sm, perpendikularniki 4 sm. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi necha santimetr? javob: 3sm

9.23. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 20 ga, perpendikular uzunligi 15 ga teng. Ogʻma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: 25

9.24. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{12}{13}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 13 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 5

9.25. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 7 ga, perpendikularning uzunligi 24 ga teng. Ogʻma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arctg \frac{7}{24}$

9.26. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 24 ga, perpendikularning uzunligi 7 ga teng. Ogʻma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{7}{25}$

9.27. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻma va tekislik orasidagi burchak $\arccos \frac{3}{5}$ ga, ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 18 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 24

9.28. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻma va tekislik orasidagi burchak $\arccos 0,28$ ga, ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 7 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 24

9.29. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{24}{25}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 50 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 7

9.30. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻma va tekislik orasidagi burchak $\arccos 0,96$ ga, ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 24 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob:7

9.31. Tekislikka tushirilgan ogʻmaning uzunligi 50 ga, uning tekislikdagi proyeksiyasi esa 14 ga teng. Ogʻma va tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{7}{25}$

9.32. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{7}{25}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 50 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob:24

9.33. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻma va tekislik orasidagi burchak $\arccos \frac{4}{5}$ ga, ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 24 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob:18

9.34. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 12 ga, perpendikularning uzunligi 16 ga teng. Ogʻma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob:

9.35. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{5}{13}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 13 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob:12

9.36. Tekislikka tushirilgan ogʻmaning uzunligi 30 ga, uning tekislikdagi proyeksiyasi esa 18 ga teng. Ogʻma va tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{4}{5}$

9.37. Tekislikka tushirilgan ogʻmaning uzunligi 25 ga, uning tekislikdagi proyeksiyasi esa 7 ga teng. Ogʻma va tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{7}{25}$

9.38. Tekislikka tushirilgan ogʻmaning uzunligi 50 ga, uning tekislikdagi proyeksiyasi esa 48 ga teng. Ogʻma va tekislik orasidagi burchakni toping. javob:

$$\arccos \frac{24}{25}$$

9.39. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{12}{13}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 26 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob:5

9.40. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻma va tekislik orasidagi burchak $\arccos 0,96$ ga, ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 48 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 14

9.41. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 8 ga, perpendikularning uzunligi esa 15 ga teng. Ogʻma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{15}{17}$

9.42. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 9 ga, perpendikularning uzunligi 40 ga teng. Ogʻma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arctg \frac{9}{40}$

9.43. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻma va tekislik orasidagi burchak $\arccos \frac{3}{5}$ ga teng. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 36 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 48

9.44. Tekislikka ogʻma perpendikular tushirilgan. Ogʻma va tekislik orasidagi burchak $\arccos \frac{4}{5}$ ga, ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 48 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob:36

9.45. Tekislikka ogʻma va perpendikular tushirilgan. Ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 40 ga, perpendikularning uzunligi 9 ga teng. Ogʻma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arctg \frac{9}{40}$

9.46. Tekislikka tushirilgan ogʻmaning uzunligi 75 ga, uning tekislikdagi proyeksiyasi esa 60 ga teng. Ogʻma va tekislik orasidagi burchakni toping.

javob: $\arccos \frac{4}{5}$

9.47. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{20}{29}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 58 ga teng. Perpendikularning uzunligini

toping. javob: 42

9.48. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{11}{61}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 122 ga teng. Perpendikularning uzunligini

toping. javob: 120

9.49. Tekislikka tushirilgan ogʻmaning uzunligi 75 ga, uning tekislikdagi proyeksiyasi esa 72 ga teng. Ogʻma va tekislik orasidagi burchakni toping.

javob: $\arccos \frac{24}{25}$

9.50. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{16}{65}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 130 ga teng. Perpendikularning uzunligini

toping. javob: 126

9.51. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{12}{37}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 74 ga teng. Perpendikularning uzunligini

toping. javob: 70

9.52. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{24}{25}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 75 ga teng. Perpendikularning uzunligini

toping. javob: 21

9.53. Tekislikka tushirilgan ogʻma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{5}{13}$ ga teng. Ogʻmaning uzunligi 39 ga teng. Perpendikularning uzunligini

toping. javob: 36

9.54. Tekislikka og'ma va perpendikular tushirilgan. Og'maning tekislikdagi proyeksiyasi 11 ga, perpendikularning uzunligi 60 ga teng. Og'ma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arctg \frac{11}{60}$

9.55. Tekislikka og'ma va perpendikular tushirilgan. Og'maning tekislikdagi proyeksiyasi 60 ga, perpendikularning uzunligi 11 ga teng. Og'ma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arctg \frac{11}{60}$

9.56. Tekislikka tushirilgan og'ma va perpendikular orasidagi burchak $\arcsin \frac{7}{25}$ ga teng. Og'maning uzunligi 75 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 72

9.57. Tekislikka og'ma va perpendikular tushirilgan. Og'ma va tekislik orasidagi burchak $\arccos \frac{4}{5}$ ga teng. Og'maning tekislikdagi proyeksiyasi 36 ga teng. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 27

9.58. Tekislikka og'ma va perpendikular tushirilgan. Og'maning tekislikdagi proyeksiyasi 21 ga, perpendikularning uzunligi 20 ga teng. Og'ma va perpendikular orasidagi burchakni toping. javob: $\arctg \frac{21}{20}$

9.59. Tekislikka tushirilgan og'maning uzunligi 75 ga, uning tekislikdagi proyeksiyasi esa 60 ga teng. Og'ma va tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{12}{15}$

9.60. K nuqtadan P tekislikka perpendikular va og'ma o'tkazilgan. Ular orasidagi burchak 45° . Perpendikularning uzunligi 12 sm bo'lsa, og'maning uzunligi topilsin. javob: $12\sqrt{2}$

9.61. A nuqtadan α tekislikka $AC=6$ sm perpendikular va $AD=9$ sm og'ma o'tkazilgan. Perpendikularning og'madagi proyeksiyasi uzunligi topilsin. javob: 4

9.62. Bir nuqtadan tekislikka uzunliklari 4 va 8 bo'lgan ikkita og'ma tushirilgan. Og'malar proyeksiyalarining nisbati 1:7 kabi. Berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob: $\sqrt{15}$

9.63. Bir nuqtadan tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Og'malarning uzunliklari 2:1 kabi nisbatda, ularning proyeksiyasi 7 va 1 ga teng. Berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob: $\sqrt{15}$

9.64. Bir nuqtadan tekislikka uzunliklari 23 va 33 bo'lgan ikkita og'ma tushirilgan. Agar og'malar proyeksiyalarining nisbati 2:3 kabi bo'lsa, berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob:3

9.65. Berilgan A nuqtadan α tekislikka ikkita $AB=17$ sm va $AC=13$ sm og'malar o'tkazilgan. Agar AB og'maning berilgan tekislikka proyeksiyasi 15 sm bo'lsa, AC kesmaning tekislika proyeksiyasi uzunligini toping. javob: $\sqrt{105}$

9.66. Bir nuqtadan tekislikka ikkita og'ma tushirilgan. Agar og'malar uzunliklarining nisbati 5:6 ga, og'malarga mos proyeksiyaning uzunliklari 4 va $3\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob:3

9.67. Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Og'malar uzunliklari 3:5 kabi nisbatda bo'lib, ularning proyeksiyalari $\sqrt{33}$ va 17 ga teng. Og'malarning uzunligini toping. javob:12;20

9.68. Tekislikdan a masofada joylashgan nuqtadan tekislikka ikkita og'ma tushirildi. Og'malarning har biri bilan tekislik orasidagi burchak 45° ga teng. Agar og'malar orasidagi burchak 60° ga teng bo'lsa, og'malarning uchlari orasidagi masofa qancha? javob: $a\sqrt{2}$

9.69. Berilgan nuqtadan tekislikka ikkita og'ma va perpendikular tushirildi. Og'malarning proyeksiyalari 27 va 15 ga teng hamda ulardan biri ikkinchisidan 6 ga uzun bo'lsa, perpendikularning uzunligini toping. javob: 36

9.70. Tekislikdan b masofada joylashgan nuqtadan tekislikka ikkita og'ma tushirilgan. Bu og'malar tekislik bilan 30° va 45° li burchak, o'zaro to'g'ri burchak tashkil qiladi. Og'malarning oxiridagi masofani toping. javob: $b\sqrt{6}$

9.71. K nuqtadan P tekislikka ikkita: $KA=16$ sm, $KB=10$ sm og'ma o'tkazilgan. KA og'ma P tekislik bilan 30° li burchak tashkil etishi ma'lum bo'lsa, KB og'maning P tekislikdagi proyeksiyasi uzunligi topilsin. javob: javob:6

9.72. K nuqtadan P tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Og'malarning har biri P tekislik bilan 45° li burchak tashkil qiladi va K tekislikkacha bo'lgan masofa a ga teng. Og'malarning proyeksiyalari orasidagi burchak 120° bo'lsa, og'malarning uchlari orasidagi masofa topilsin. javob: $a\sqrt{3}$

9.73. Nuqtadan tekislikka uzunliklari 10 va 15 sm bo'lgan og'malar tushirilgan. Birinchi og'maning tekislikdagi proyeksiyasi 7 sm bo'lsa, ikkinchi og'maning proyeksiyasi necha santimetr bo'ladi? javob: $\sqrt{174}$

9.74. Bir nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular va 2 ta og'ma o'tkazilgan. Agar og'malarning uzunliklari 41 va 50 ga, ularning to'g'ri chiziqdagi proyeksiyalari nisbati 3:10 kabi bo'lsa, perpendikularlarning uzunligini aniqlang. javob:40

3-§. Fazoda parallel, kesishuvchi va ayqash to'g'ri chiziqlar

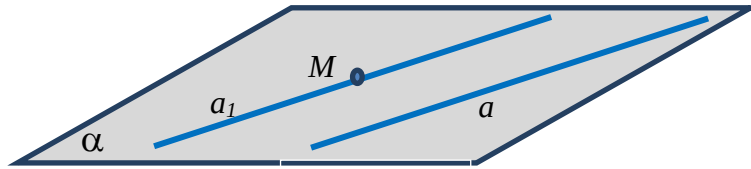
Fazoda to'g'ri chiziqlarni $a, b, c, \dots$, tekisliklarni esa $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, burchaklarni φ, φ_i ($i=1, 2, 3, \dots$) bilan belgilaymiz. a va b to'g'ri chiziqlarning parallelligi $a \parallel b$ kabi, a va b to'g'ri chiziqlarning perpendikularligi $a \perp b$, a to'g'ri chiziq α tekislikka tegishli bo'lsa $a \in \alpha$, tegishli bo'lmasa $a \notin \alpha$ kabi yoziladi.

1-ta'rif. Fazodagi ikkita a va b to'g'ri chiziq bir tekislikda yotsa va kesishmasa, ular *parallel to'g'ri chiziqlar* deyiladi.

7-teorema. Fazoning berilgan to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtasidan shu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

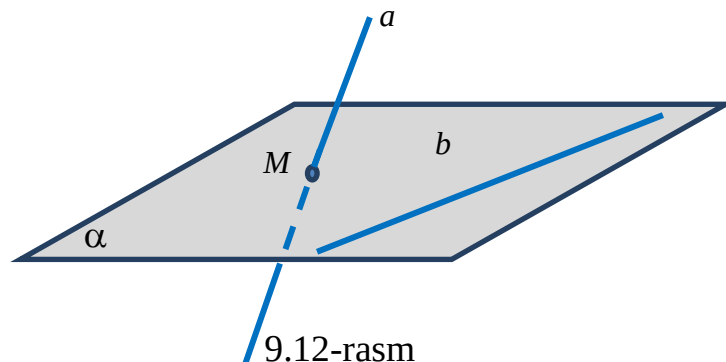
Isbot. a — berilgan to'g'ri chiziq va M — bu to'g'ri chiziqda yotmagan nuqta bo'lsin (9.11-rasm). a to'g'ri chiziq va M nuqta orqali α tekislik o'tkazamiz. So'ngra α tekislikda M nuqta orqali a to'g'ri chiziqqa parallel a_1 to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Ular uchun tekislikdagi barcha xulosalar o'rinli. Jumladan, berilgan M nuqta orqali berilgan to'g'ri chiziqqa parallel yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Haqiqatan, agar berilgan M nuqta orqali va a to'g'ri chiziqqa parallel ravishda o'tkazilgan boshqa a_2 to'g'ri chiziq mavjud deb faraz qilsak, a va a_2

to'g'ri chiziqlar orqali α_1 tekislik o'tkazish mumkin. Ikkinchi tomondan, α_1 tekislik a to'g'ri chiziq va M nuqta orqali o'tadi, demak, avvalgi paragrafda isbotlanganiga ko'ra, u α tekislik bilan ustma-ust tushadi. Bundan, parallel to'g'ri chiziqlar aksiomasi bo'yicha a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishi kelib chiqadi.



9.11-rasm

Bizga α tekislik hamda ikkita a va b to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. a to'g'ri chiziq α tekislik bilan A nuqtada kesishsin, b to'g'ri chiziq esa α tekislikda yotsin, lekin u A nuqta orqali o'tmasin (9.12-rasm). a va b to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazish mumkin emas, chunki, aks holda, b to'g'ri chiziq va A nuqta orqali ikkita har xil tekisliklar o'tkazish mumkin bo'ladi: ulardan biri — a to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi α tekislik bo'lsa, ikkinchisi esa a to'g'ri chiziq unda yotadigan tekislikdir. Bunday bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib, fazodagi to'g'ri chiziqlar uch xil bo'lishi mumkin:



9.12-rasm

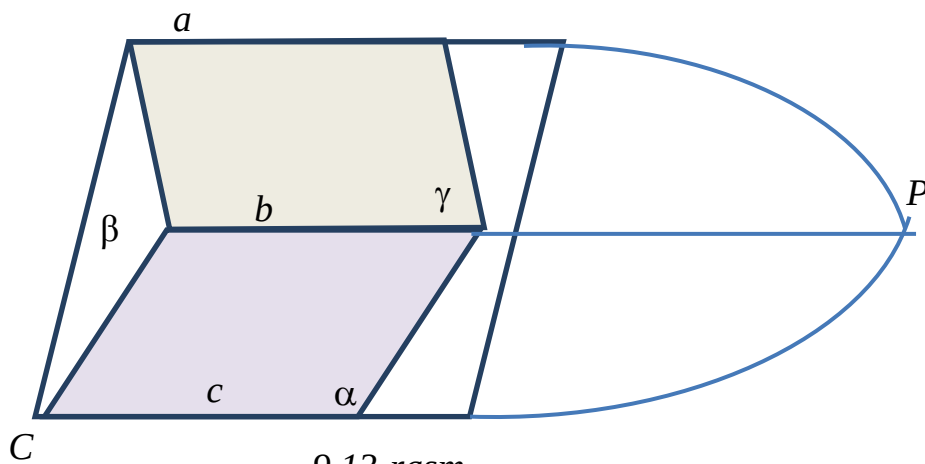
1. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar.
2. Parallel to'g'ri chiziqlar.
3. Parallel bo'lmagan va kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar.

2-ta'rif. Fazodagi o'zaro parallel bo'lmagan va kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar **ayqash to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

8-teorema (*to'g'ri chiziqlarning parallellik alomati*). Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ikkita to'g'ri chiziq o'zaro paralleldir.

Isbot. Faraz qilaylik, $a \parallel b$ va $b \parallel c$ bo'lsin. $a \parallel c$ bo'lishini isbotlaymiz. a va c to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishmaydi, chunki, aks holda, a va c to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi orqali bitta b to'g'ri chiziqning o'ziga parallel ikkita har xil a va c to'g'ri chiziq o'tishi kerak edi, lekin bunday bo'lishi mumkin emas.

a va c to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lsin, deb faraz qilaylik. Parallel a va b to'g'ri chiziqlar orqali γ tekislik, parallel b va c to'g'ri chiziqlar orqali esa α tekislik o'tkazamiz (9.13-rasm).



9.13-rasm

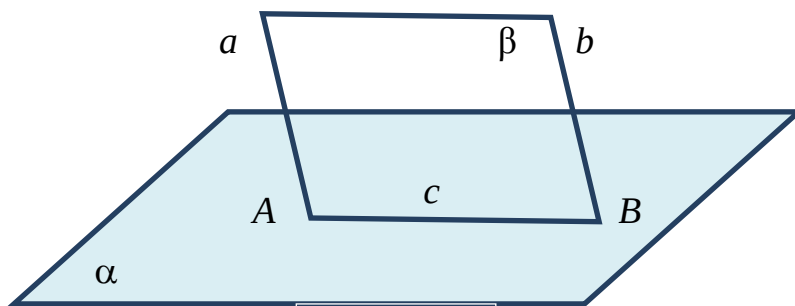
a to'g'ri chiziq va c to'g'ri chiziqning biror C nuqtasi orqali β tekislik o'tkazamiz. α va β tekisliklarning kesishish chizig'i m to'g'ri chiziq bo'lsin. U holda b , c , m to'g'ri chiziqlar bitta α tekislikda yotadi, bunda $c \parallel b$ bo'ladi. Shu sababli c to'g'ri chiziq bilan kesishuvchi m to'g'ri chiziq unga parallel b to'g'ri chiziqni biror P nuqtada kesib o'tishi lozim. m va b to'g'ri chiziqlar, mos ravishda, β va γ tekisliklarda yotadi. Shu sababli ular uchun umumiy P nuqta ularning kesishish chizig'i bo'lgan a to'g'ri chiziqda yotadi. Lekin bunda a va b to'g'ri chiziqlar, teoremaning shartiga zid ravishda, umumiy P nuqtaga ega bo'ladi.

Demak, a va c to'g'ri chiziqlar kesishuvchi ham, ayqash ham bo'lishi mumkin emas, ular faqat parallel bo'ladi, ya'ni $a \parallel c$.

Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi ikkita va undan ko'p kesmalar o'zaro *parallel* deyiladi.

1-masala. Agar ikki parallel to'g'ri chiziqlardan biri tekislikni kesib o'tsa, ikkinchisi ham shu tekislikni kesib o'tadi.

Yechish. $a \parallel b$ bo'lib, a to'g'ri chiziq α tekislikni A nuqtada kesib o'tsin (9.14-rasm). Ikkita parallel a va b to'g'ri chiziq orqali yagona β tekislik o'tkazish mumkin. α va β tekisliklar umumiy A nuqtaga ega, shu sababli ular, 2-aksiomaga binoan, c to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.



9.14- rasm

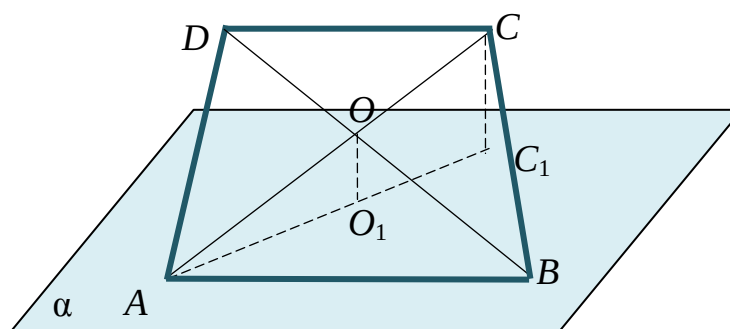
β tekislikda yotgan c to'g'ri chiziq a to'g'ri chiziqni A nuqtada kesib o'tadi. Demak, c to'g'ri chiziq a to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan b to'g'ri chiziqni B nuqtada kesib o'tadi. Modomiki, AB to'g'ri chiziqning A va B nuqtalari α tekislikda yotgan ekan, AB to'g'ri chiziqning o'zi ham α tekislikda yotadi.

Shuningdek, B nuqta b to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lganligidan, b to'g'ri chiziq, haqiqatan ham, α tekislikni B nuqtada kesib o'tadi.

2-masala. Trapetsiyaning bitta asosi orqali ikkinchi asosidan a masofada yotuvchi tekislik o'tkazilgan. Agar trapetsiyaning asoslari uzunliklari $m:n$ kabi nisbatda bo'lsa, trapetsiyaning diagonallari kesishish nuqtasidan shu tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin.

Yechish. C va O nuqtalardan α tekislikkacha perpendikular to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Masala shartiga ko'ra, $\rho(CD, \alpha) = a$. A va C_1 nuqtalarni tutashtirib, ACC_1 va AOO_1 uchburchaklar hosil qilamiz. $\triangle ACC_1 \sim \triangle AOO_1$ (chunki $OO_1 \parallel CC_1$, $\angle A$ umumiy). U holda, $\frac{OO_1}{CC_1} = \frac{AO}{AC}$, bu yerdan

$$OO_1 = \frac{AD}{AC} \cdot CC_1 = \frac{AD}{AC} \cdot a. \quad (1)$$



9.15-rasm

Ikkinchi tomondan, $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, chunki $\angle DOC = \angle AOB$,

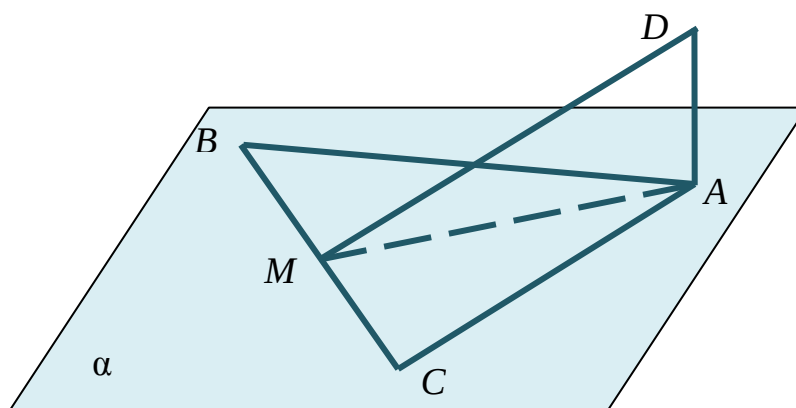
$\angle ODC = \angle OBA$, u holda $\frac{AO}{OC} = \frac{m}{n}$. Bu yerdan,

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AC-AO} = \frac{1}{\frac{AC}{AO}-1} = \frac{m}{n}, \quad \frac{AC}{AO} - 1 = \frac{m}{n}, \quad \frac{AC}{AO} = \frac{m+n}{m} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{m}{m+n}.$$

Bu ifodani (1) ga qo'ysak, $OO_1 = \frac{a \cdot m}{m+n}$ ekanligi kelib chiqadi.

3-masala. Teng tomonli uchburchakning (ABC) uchidan uchburchak tekisligigacha AD perpendikular tushirilgan. Agar $AD = 13$ sm, $BC = 6$ sm bo'lsa, D nuqtadan BC tomongacha bo'lgan masofa topilsin.

Yechish. $DM \perp BC$ izlangan masofa. Uch perpendikular haqidagi teoreмага ko'ra, $MA \perp BC$. Bizga ma'lumki, teng tomonli uchburchak balandligi shu tomonni teng ikkiga bo'ladi.



9.16-rasm

Demak, $BC = 6 \Rightarrow BM = CM = 3$. U holda,

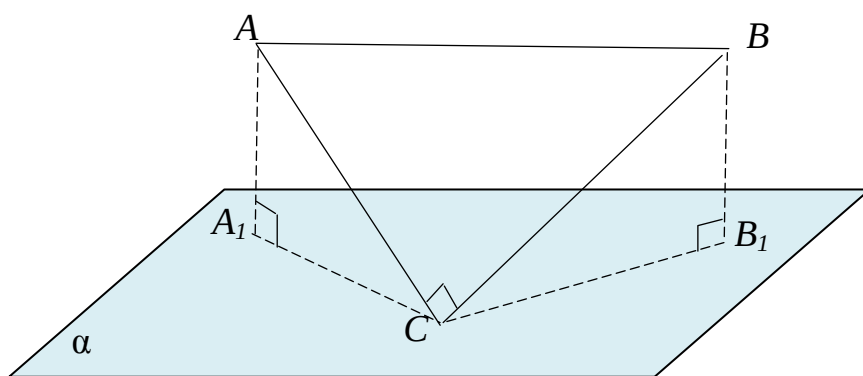
$$MA = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{27}.$$

$$\triangle ADM \text{ dan: } DM = \sqrt{AD^2 + MA^2} = \sqrt{169 + 27} = 14 \text{ sm};$$

$$DM = 14 \text{ sm.}$$

4-masala. To'g'ri burchakli ABC uchburchakning C to'g'ri burchagi uchidan gipotenuzaga parallel va undan 1 m masofada tekislik o'tkazilgan. Katetlarning bu tekislikdagi proyeksiyasi 3 sm va 5 sm bo'lsa, berilgan gipotenuza topilsin (9.17-rasm).

Yechish. Masala shartiga ko'ra, $AA_1 = BB_1 = 1$ sm. $A_1C = 3$ sm, $B_1C = 5$ sm.



9.17- rasm

$$\triangle AA_1C \text{ dan: } AC = \sqrt{AA_1^2 + A_1C^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

$$\triangle BB_1C \text{ dan: } BC = \sqrt{BB_1^2 + B_1C^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}.$$

$$\triangle ABC \text{ dan: } AB = \sqrt{10 + 26} = \sqrt{36} = 6.$$

Demak, uchburchakning katetlari $\sqrt{10}$, $\sqrt{26}$ va gipotenuzasi 6 sm ekan.

5-masala. Asosi 6 sm va yon tomoni 5 sm bo'lgan teng yonli uchburchak berilgan. Ichki chizilgan doiraning markazidan uchburchak tekisligiga uzunligi 2 sm bo'lgan perpendikular chiqarilgan. Bu perpendikularning oxiridan uchburchakning tomonlarigacha bo'lgan masofa topilsin (9.18-rasm).

Yechish. $PO = MO = NO = r$ va $PO \perp AB$, $MO \perp AC$, $NO \perp BC$.

$PO = pr_\alpha PS$, $MO = pr_\alpha MS$, $NO = pr_\alpha NS$ va uch perpendikular haqidagi teorema ko'ra, $PS = MS = NS$.

Uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi r ni

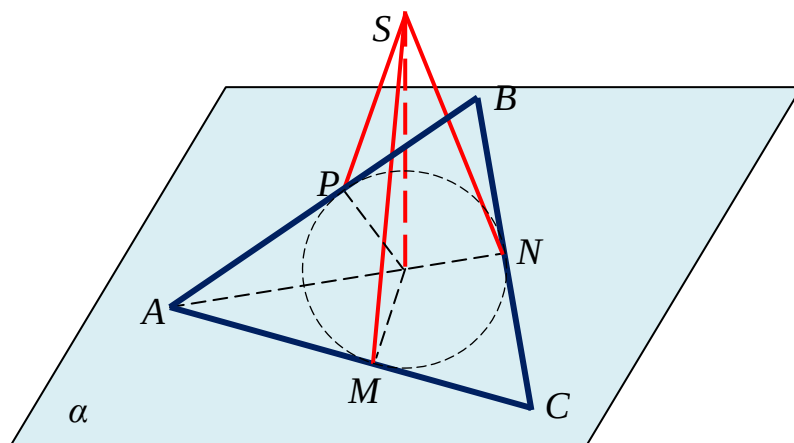
$$r = \frac{2S}{a + b + c}$$

formuladan topamiz.

ABC — teng yonli uchburchak bo'lgani uchun $AN \perp BC$. $AB = AC$ bo'lgani uchun $BN = NC = \frac{BC}{2} = 3$ sm.

$$\triangle ANC \text{ dan : } AN = \sqrt{AC^2 - NC^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12, \text{ u holda } r = \frac{2 \cdot 12}{5+5+6} = \frac{3}{2}.$$



9.18-rasm

$$\triangle ONS \text{ dan: } NS = \sqrt{ON^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ sm.}$$

Demak, $NS=MS=PS=2,5$ sm ekan.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

9.75. Berilgan nuqtadan tekislikka uzunliklari 13 sm va 37 sm bo'lgan ikkita og'ma o'tkazilgan. Og'malarning tekislikdagi proyeksiyalari nisbati 1:7 kabi bo'lsa, tekislikdan berilgan nuqtachacha bo'lgan masofani toping. javob: 12

9.76. A nuqtadan α tekislikka ikkita $AB=17$ m va $AC=10$ m og'ma o'tkazilgan. Ular proyeksiyalarining ayirmasi 9 m bo'lsa, A nuqtadan α tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin.

9.77. α tekislik va uni kesib o'tmaydigan $AB=13$ sm kesma berilgan. Agar kesmaning uchlaridan α tekislikkacha bo'lgan masofalar $AA_1=5$ sm, $BB_1=8$ sm

bo'lsa, AB kesma yotuvchi to'g'ri chiziqlarning α tekislik bilan tashkil qilgan burchak sinusini toping. javob:3/13

9.78. α tekislik va uni kesib o'tmaydigan $AB=9$ sm kesma berilgan. Agar kesmaning uchlaridan α tekislikkacha bo'lgan masofalar $AA_1=7$ sm, $BB_1=11$ sm bo'lsa, AB kesma yotuvchi to'g'ri chiziqlarning α tekislik bilan tashkil qilgan burchagi sinusini toping. javob:4/5

9.79. AB kesmaning A uchidan α tekislik o'tkazilgan, B uchidan va o'rtasidagi C nuqtadan o'zaro parallel BB_1 va CC_1 kesmalar o'tkazilgan. Bu kesmalar α tekislikni B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o'tadi. Agar $BB_1=12$ sm bo'lsa, CC_1 kesmaning uzunligi topilsin.

9.80. AB kesmaning A uchidan tekislik o'tkazilgan, kesmaning B uchidan va C nuqtasidan o'zaro parallel kesmalar o'tkazilgan va ular tekislik bilan, mos ravishda, B_1 va C_1 nuqtalarda kesishadi. Agar $BB_1=16$ dm va $AC:AB=3:5$ kabi bo'lsa, CC_1 kesmaning uzunligi topilsin. javob:9,6

9.81. AB kesma α tekislikni kesib o'tmaydi va uning A va B uchlari tekislikdan, mos ravishda, 5 sm va 3 sm uzoqlikda joylashgan. Shu kesmaning o'rtasidan α tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob:4

9.82. AB kesma α tekislikni kesib o'tadi. Uning uchlari tekislikdan 2 va 4 ga teng masofada joylashgan. Kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi 6 ga teng. Kesma va tekislik orasidagi burchakni toping. javob:45°

9.83. AB kesmaning A oxiridan tekislik o'tkazilgan. Shu kesmaning B oxiridan va C nuqtasidan tekislikni B_1 va C_1 nuqtalarda kesuvchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Agar $CC_1=15$ va $AC:BC=2:3$ bo'lsa, BB_1 kesmaning uzunligini toping. javob:38,5

9.84. AB kesma α tekislikni O nuqtada kesib o'tadi. Agar $AO:OB=3:2$ bo'lib, B nuqtadan α tekislikkacha bo'lgan masofa 8 ga teng bo'lsa, A nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob: 12

9.85. AB kesmaning A oxiridan tekislik o'tkazilgan. Shu kesmaning B oxiridan va C nuqtadan tekislikni B_1 va C_1 nuqtalarda kesuvchi parallel to'g'ri

chiziqlar o'tkazilgan. Agar $AB=8$ va $CC_1:AC=3:4$ bo'lsa, BB_1 kesmaning uzunligini toping. javob:6

9.86. $AB=50$ sm kesmaning uchlaridan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofalar $AC=30$, $BD=44$ sm. AB kesmaning bu tekislikdagi proyeksiyasi uzunligi topilsin. javob:48

9.87. $CD=26$ sm kesmaning uchlari α tekislikdan 18 sm va 8 sm uzoqlikda bo'lsa, shu kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi uzunligi topilsin. javob:24

9.88. Uzunligi 15 sm bo'lgan kesmaning uchlari α tekislikdan 3 sm va 6 sm uzoqlikda yotishi ma'lum bo'lsa, kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi uzunligi topilsin. javob: $6\sqrt{6}$

9.89. $AB=26$ sm kesmaning uchlari P tekislikdan 6 sm va 8 sm uzoqlikda joylashgan bo'lib, AB kesma tekislikni kesib o'tadi. AB kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi uzunligi topilsin. javob: $4\sqrt{30}$

9.90. Kesma tekislikni kesib o'tadi va uning uchlari tekislikdan 3 sm va 12 sm uzoqlikda bo'lsa, kesmaning o'rta nuqtasi tekislikdan qanday uzoqlikda joylashgan? javob:4,5

9.91. Tekislik bilan kesishmaydigan kesmaning uchlari tekislikdan 30 sm va 50 sm uzoqlikda yotadi. Shu kesmani 3:7 kabi nisbatda bo'luvchi nuqta tekislikdan qanday uzoqlikda yotadi? javob: 36 yoki 44

9.92. Uzunligi 8 sm bo'lgan AB kesma α tekislikni kesib o'tmaydi va uning uchlari α tekislikdan, mos ravishda, $AA_1=2$ sm va $BB_1=6$ sm masofalarda joylashgan. AB to'g'ri chiziqning α tekislik bilan hosil qilgan burchagini toping. javob: 30°

9.93. a uzunlikdagi AB kesma P tekislikda yotadi, har birining uzunligi b bo'lgan AC va BD kesmalar P tekislikda yotmaydi. AC kesma P tekislikka perpendikular, AB kesmaga perpendikular bo'lgan BD kesma P tekislik bilan 30° li burchak hosil qilsa, CD kesmaning uzunligi topilsin.

9.94. Uzunligi a bo'lgan kesma α tekislikni kesib o'tadi. Agar kesmaning uchlari α tekislikdan q va p uzoqlikda yotishi ma'lum bo'lsa, kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi topilsin. javob: $\sqrt{a^2 - (p+q)^2}$

9.95. P tekislikka parallel AB kesmaning uchlaridan P tekislikka AC perpendikular va BD og'ma o'tkazilgan. Agar $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$ bo'lsa, CD kesmaning uzunligi topilsin. javob: $\sqrt{c^2 - b^2}$

9.96. BC kesma α tekislikni kesib o'tadi va uning uchlari α tekislikdan, mos ravishda, b va c ($b > c$) masofada joylashgan. Kesmaning A o'rtasidan α tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob: $\frac{b-c}{2}$

9.97. Berilgan A nuqtadan l to'g'ri chiziqqa perpendikular va ikkita og'ma o'tkazilgan. Og'malarning uzunliklari 41 sm va 50 sm, ularning l dagi proyeksiyalari esa 3:10 kabi nisbatda. Perpendikularning uzunligini toping. javob: 9

9.98. Og'malarning uzunliklari a_1 va a_2 , ularning proyeksiyalari uzunliklari $r:q$ kabi nisbatda. Perpendikularning uzunligini toping. javob: $\sqrt{\frac{a_1^2 q^2 - a_2^2 p^2}{q^2 - p^2}}$

9.99. Uzunliklari 10 va 15 bo'lgan ikki kesmaning uchlari o'zaro parallel tekisliklarda yotadi. Birinchi kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi $\sqrt{19}$ sm bo'lsa, ikkinchi kesmaning proyeksiyasi necha santimetr bo'ladi? javob: 12

9.100. α va β tekisliklar 45° burchak ostida kesishadi. α tekislikdagi A nuqtadan β tekislikkacha bo'lgan masofa 2 ga teng. A nuqtadan tekisliklarning kesishish chizig'igacha bo'lgan masofani toping. javob: $2\sqrt{2}$

9.101. α va β tekisliklar orasida burchak 60° ga teng. α tekislikdagi A nuqtadan tekisliklarning kesishish chizig'igacha bo'lgan masofa 3 ga teng. A nuqtadan β tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

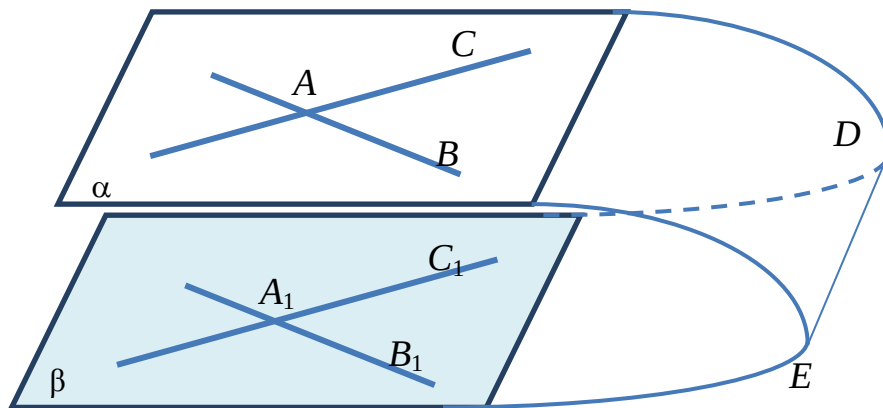
9.102. Ikkita parallel tekislik orasida olingan kesmalarning nisbati 2:3 kabi bo'lib, tekisliklar bilan nisbati 2 ga teng bo'lgan burchaklar tashkil etadi. Shu burchaklardan kattasining kosinusini toping. javob: $-\frac{7}{9}$

9.103. P nuqtadan o'tkazilgan ikkita to'g'ri chiziq uchta parallel tekislikni A_1, A_2, A_3 va B_1, B_2, B_3 nuqtalarda kesib o'tadi. Agar $A_1A_2=4, B_2B_3=9, A_2A_3=B_1B_2$ bo'lsa, A_1A_3 va B_1B_3 kesmalarning uzunliklari topilsin. javob: 10;15

4-§. Fazoda tekisliklarning kesishishi, parallelligi va perpendikularligi

1-ta'rif. Agar ikkita tekislik cheksiz davom ettirilganda ham kesishmasa, ular *parallel tekisliklar* deyiladi.

9-teorema (ikki tekislikning parallellik alomati). Agar bir tekislikdagi kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq ikkinchi tekislikdagi kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi (9.19-rasm).



9.19-rasm

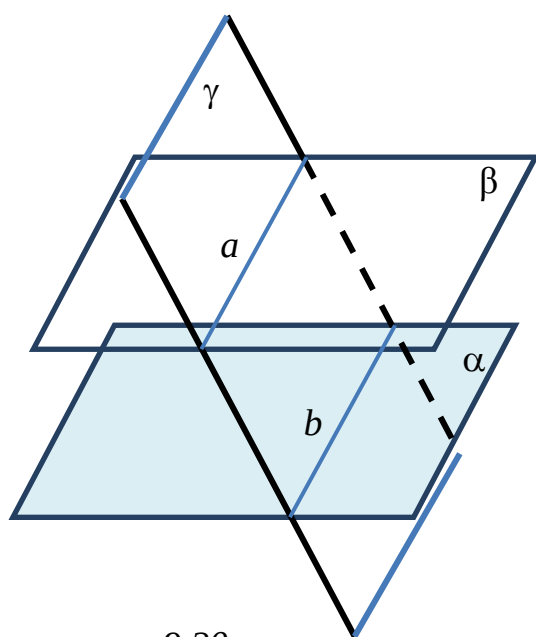
Isbot. Modomiki, $AC \parallel A_1C_1, A_1C_1 \subset \beta$ ekan, $AC \parallel \beta$ bo'ladi.

Shunga o'xshash, $AB \parallel \beta, A_1C_1 \parallel \alpha, A_1B_1 \parallel \alpha$ bo'ladi. Isbotni teskarisini faraz qilish yo'li bilan o'tkazamiz. α va β tekisliklar DE to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin, deb faraz qilamiz. U holda, yuqorida isbotlangan teoremaga muvofiq, tekisliklar kesishgan DE to'g'ri chiziq bir vaqtning o'zida bitta A nuqta orqali o'tuvchi ikkita AB va AC to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. Bunday bo'lishi mumkin emas, demak, farazimiz noto'g'ri. Bundan $\alpha \parallel \beta$ ekani kelib chiqadi.

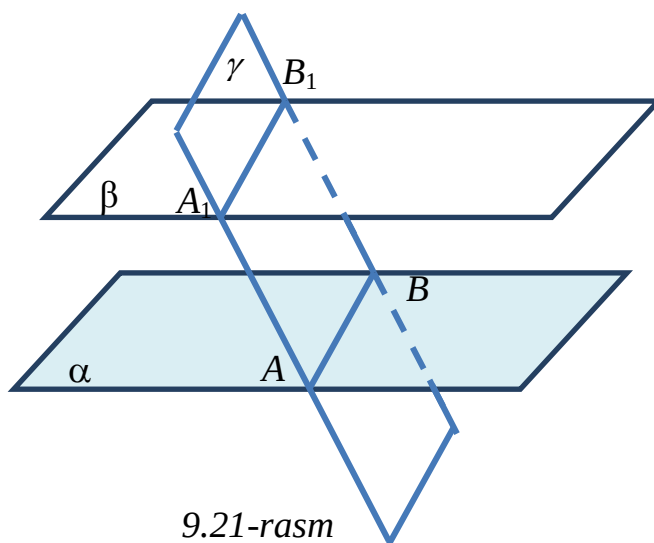
Endi parallel tekisliklarning xossalarini qaraymiz.

10-teorema. Agar ikkita parallel tekislik uchinchi tekislik bilan kesishsa, ularning kesishish chiziqlari parallel bo‘ladi (9.20-rasm).

Isbot. α va β tekisliklar γ tekislik bilan a va b to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesishsin. Demak, a va b to‘g‘ri chiziqlar bitta γ tekislikda yotadi, lekin ular kesishmaydi, chunki, aks holda, α va β tekisliklar kesishishi lozim bo‘ladi, bu esa shartga ziddir. Shunday qilib, a va b to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi va kesishmaydi, demak, $a \parallel b$ ekan.



9.20-rasm

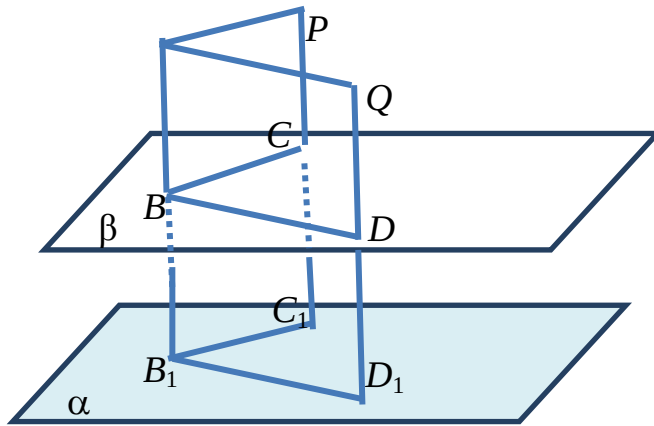


9.21-rasm

11-teorema. Parallel to‘g‘ri chiziqlarning parallel tekisliklar orasida joylashgan kesmalari teng bo‘ladi.

Isbot. α va β – parallel tekisliklar hamda AA_1 va BB_1 – tekisliklar orasida joylashgan parallel kesmalar bo‘lsin (9.21-rasm). Kesmalarning A va B uchlari α tekislikda, A_1 va B_1 uchlari esa β tekislikda yotadi. Parallel AA_1 va BB_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali α va β tekisliklar bilan AB va A_1B_1 to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesishadigan γ tekislik o‘tkazamiz. U holda AA_1B_1B to‘rtburchak – parallelogramm bo‘ladi va shu sababli $AA_1=BB_1$.

12-teorema. Agar to‘g‘ri chiziq ikkita parallel tekislikning biriga perpendikular bo‘lsa, ikkinchisiga ham perpendikular bo‘ladi.

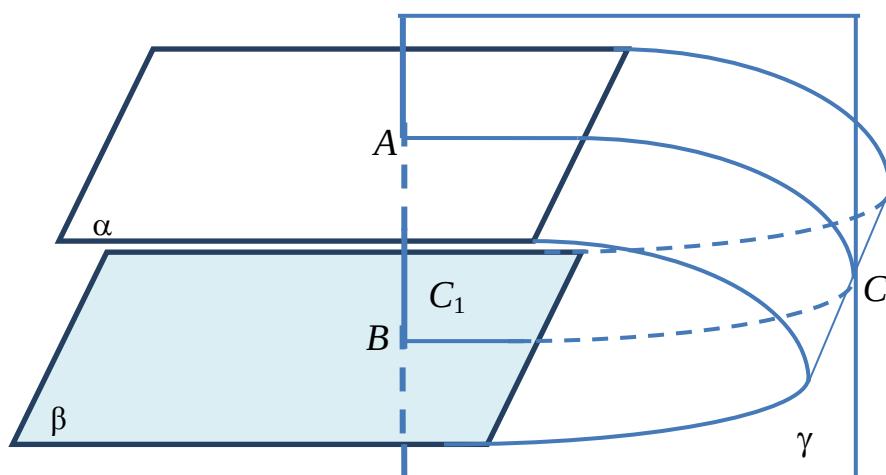


9.22- rasm

Isbot. BB_1 to'g'ri chiziq orqali parallel tekisliklarni parallel $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$ to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadigan ikkita har xil P va Q tekislik o'tkazamiz (9.22-rasm). Shartga ko'ra $BB_1 \perp \alpha$, shu sababdan $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp BD$ bo'ladi. U holda BB_1 to'g'ri chiziq B_1C_1 va B_1D_1 to'g'ri chiziqlarga ham perpendikular bo'ladi. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularlik alomatiga ko'ra, $BB_1 \perp \beta$ bo'lishi kelib chiqadi.

13-teorema (teskari teorema). Agar ikki tekislik bitta to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.

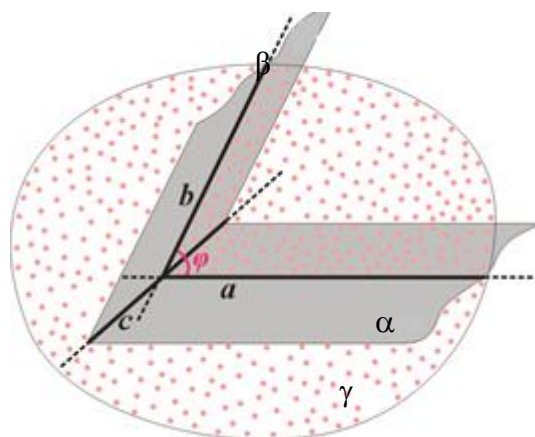
Isbot. α , β tekisliklar berilgan va $AB \perp \alpha$, $AB \perp \beta$ bo'lsin (9.23-rasm). Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni α va β tekisliklar kesishsin. AB to'g'ri chiziq va α , β tekisliklar kesishish chizig'ining ixtiyoriy C nuqtasi orqali γ tekislik o'tkazamiz. γ tekislik α tekislikni AC to'g'ri chiziq bo'yicha, β tekislikni esa BC to'g'ri chiziq bo'yicha kesib o'tadi. $AB \perp \alpha$ bo'lganligidan, $AB \perp AC$ bo'ladi.



9.23-rasm

Shunday qilib, γ tekislikda C nuqtadan AB to'g'ri chiziqqa ikkita CA va CB perpendikularlar o'tkazildi, bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, α va β tekisliklar parallel.

Parallel bo'lmagan tekisliklar kesishuvchi bo'ladi. Tekisliklar to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Kesishish chizig'i bir vaqtning o'zida har bir tekislikka tegishlidir. Kesishuvchi ikki tekislik orasidagi burchakni topish uchun ularning kesishish chizig'iga perpendikular holda uchinchi tekislik o'tkaziladi.

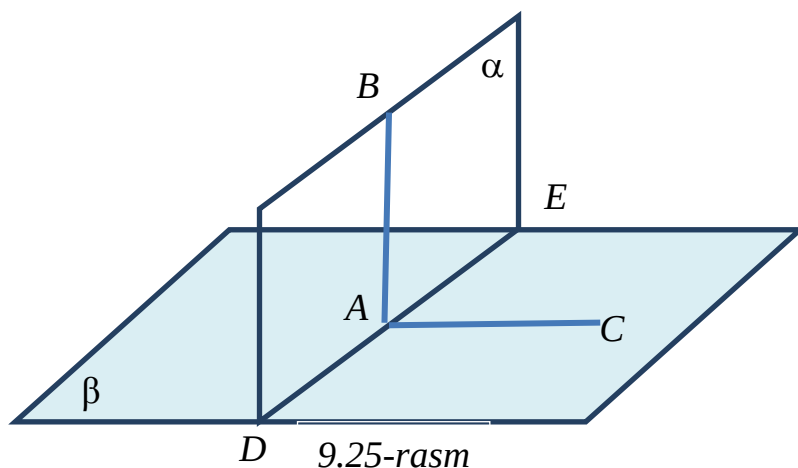


9.24-rasm

Uchinchi tekislik ikkita kesishuvchi tekislikni kesadigan chiziqlar orasidagi burchakka kesishuvchi ikki tekislik orasidagi **ikki yoqli burchak** deyiladi (9.24-rasm). Rasmda kesishuvchi α va β tekisliklar orasidagi burchak a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakdir.

2-ta'rif. Agar ikkita tekislik o'zaro kesishganda ikki yoqli to'g'ri burchak hosil qilsa, ular **o'zaro perpendikular tekisliklar** deyiladi.

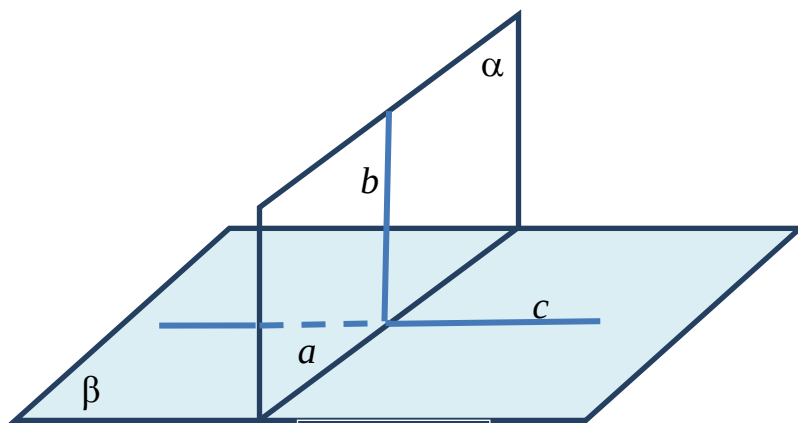
14-teorema (ikki tekislikning perpendikularlik alomati). Agar tekislik boshqa bir tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq orqali o'tsa, bu tekisliklar perpendikular bo'ladi.



9.25-rasm

Isbot. α va β tekisliklar DE to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin (9.25-rasm). β tekislikda A nuqta orqali DE to'g'ri chiziqqa perpendikular AC to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Shartga ko'ra, $AB \perp \beta$ bo'lganligidan, $AB \perp DE$ va $AE \perp AC$ bo'ladi. Demak, $\angle BAC$ to'g'ri burchakdan iborat. U holda unga mos ikki yoqli burchak ham to'g'ri burchakdan iborat. Ya'ni α va β tekisliklar o'zaro perpendikular bo'ladi.

15-teorema. Ikkita perpendikular tekislikning birida yotuvchi to'g'ri chiziq, shu tekisliklar kesishgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, u ikkinchi tekislikka ham perpendikular bo'ladi.

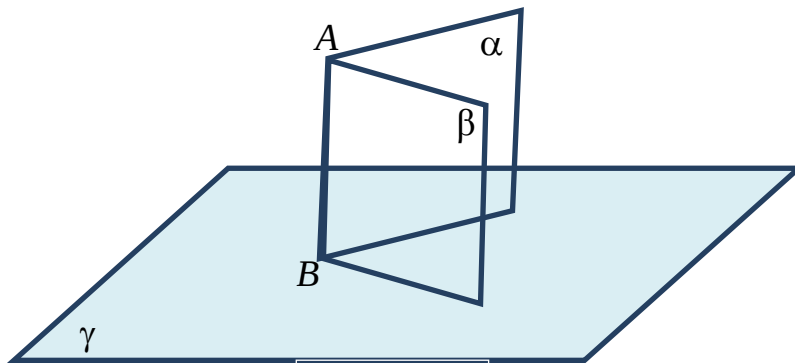


9.26-rasm

Isbot. $\alpha \perp \beta$ bo'lsin va ular c to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin, ya'ni $\alpha \cap \beta = c$ (9.26-rasm). β tekislikda $b \perp c$ to'g'ri chiziq o'tkazilgan va $b \perp \alpha$ ekanligini isbotlash talab qilinadi.

α tekislikda b to'g'ri chiziq va α tekislik kesishgan nuqtadan $a \perp c$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. a va b to'g'ri chiziqlarning har ikkalasi ham α va β tekisliklar o'zaro kesishadigan c to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi. Demak, a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak α va β tekisliklar orasidagi burchakka teng. Shartga ko'ra, $\alpha \perp \beta$ bo'lganligidan, a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak 90° ga teng bo'ladi. Shunday qilib, b to'g'ri chiziq β tekislikda yotuvchi ikkita c va a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishi va, demak, b to'g'ri chiziq α tekislikning o'ziga ham perpendikular bo'lishi kelib chiqadi.

Natija. Agar ikkita tekislik uchinchi tekislikka perpendikular bo'lsa, ular kesishadigan to'g'ri chiziq ham shu tekislikka perpendikular bo'ladi (9.27-rasm).



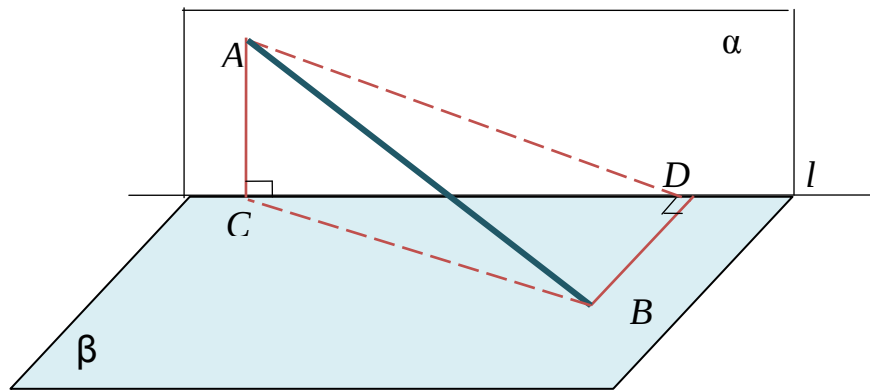
9.27-rasm

1-masala. Ikki o'zaro perpendikular tekislikda yotuvchi A va B nuqtalardan tekisliklarning kesishish to'g'ri chizig'iga AC , BD perpendikular tushirilgan. Agar $AC = a$, $AD = b$, $CD = c$ bo'lsa, AB kesmaning uzunligi topilsin (9.28-rasm).

Yechish. $\triangle BDC$ dan: $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{c^2 + b^2}$.

$\triangle ABC$ dan: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Javob: $AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



9.28-rasm

2-masala. Teng tomonli ABC uchburchakning A, B uchlaridan uchburchak tekisligiga AA_1, BB_1 perpendikularlar chiqarilgan. Agar $AB = 2$ sm, $CA_1 = 3$ sm, $CB_1 = 7$ sm bo'lsa va A_1B_1 kesma uchburchak tekisligini kesib o'tmasa, C uchdan A_1B_1 kesmaning o'rtasigacha bo'lgan masofa topilsin (9.29-rasm).

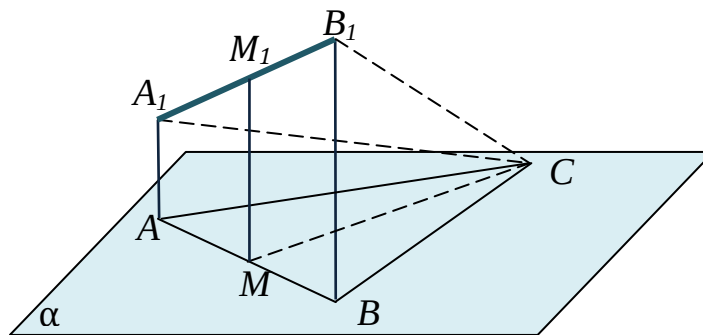
Yechish. $AA_1 \perp \alpha \Rightarrow AA_1 \perp AB_1, \quad AA_1 \perp AC; \quad BB_1 \perp \alpha \Rightarrow BB_1 \perp BC, \quad BB_1 \perp AB.$

$$\Delta AA_1C \text{ dan: } AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - BC^2} = \sqrt{5} \text{ sm.}$$

$$\Delta BB_1C \text{ dan: } BB_1 = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \sqrt{49 - 4} = 3\sqrt{5} \text{ sm.}$$

$AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$ bo'lganidan, ABB_1A_1 — trapetsiya. U holda MM_1 shu trapetsiyaning o'rta chizig'i, demak,

$$AA_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}.$$



9.29-*rasm*

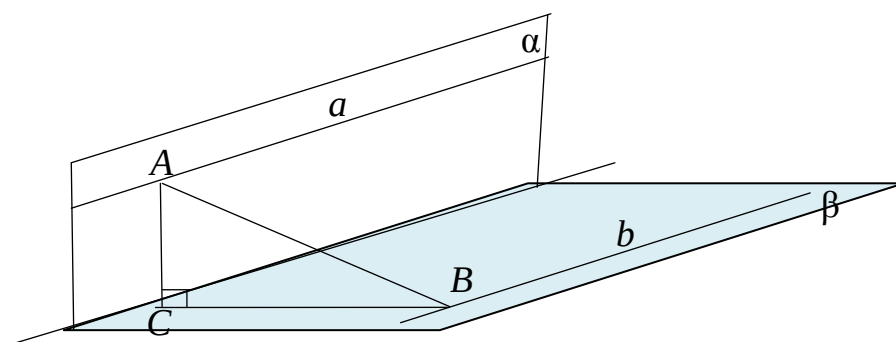
$$\Delta BCM_1 \text{ dan: } M_1C = \sqrt{BC^2 - BM_1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \text{ sm.}$$

$$\Delta CMM_1 \text{ dan: } MC = \sqrt{MM_1^2 + M_1C^2} = \sqrt{20 + 3} = \sqrt{23} \text{ sm.}$$

3-masala. O‘zaro perpendikular bo‘lgan α va β tekisliklar c to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. α tekislikda $a \parallel b$ to‘g‘ri chiziq, β tekislikda $b \parallel c$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Agar a va c to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa 1,5 sm, b va c to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa 0,8 sm ga teng bo‘lsa, a , b to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping (9.30-rasm).

Yechish. $A \in \alpha$ nuqta olamiz. $AC \perp c$ va $CB \perp c$ perpendikular o‘tkazamiz. $AC \perp \beta$, shuning uchun uch perpendikular haqidagi teorema ko‘ra $AB \perp b$. Bundan $a \parallel b$, demak, AB umumiy perpendikular, ya‘ni $AB = \rho(a, b)$.

Demak, $\rho(a, b) = AB = \sqrt{1,5^2 + 0,8^2} = 1,7$ sm.

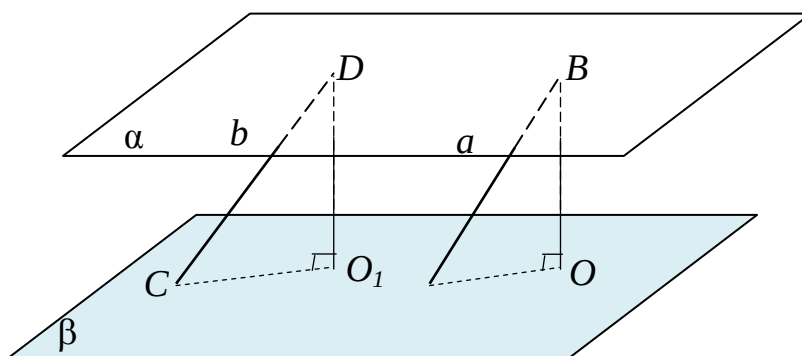


9.30-rasm

4-masala. a va b uzunlikdagi ikkita og‘ma α va β parallel tekisliklarga tayanib turadi. a kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi c bo‘lsa, b kesmaning proyeksiyasi topilsin (9.31-rasm).

Yechish: $\triangle ABC$ dan: $BO = \sqrt{a^2 - c^2}$, $\alpha \parallel \beta \Rightarrow BO = DO_1 = \sqrt{a^2 - c^2}$.

$\triangle ABO_1$ dan: $pr_{\beta} b = CO_1 = \sqrt{b^2 - a^2 + c^2}$.



9.31-rasm

Mustaqil ishlash uchun masalalar

9.104. Yig'indisi c ga teng bo'lgan ikkita kesmaning uchlari ikki parallel tekislikka tiraladi, ularning proyeksiyalari, mos ravishda, a va b ga teng. Shu kesmalarning uzunliklari topilsin. javob: $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}; \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$

9.105. Uchlari ikkita parallel tekislikda joylashgan kesmalar uzunliklarining nisbati 2:3 kabi. Kesmalar tekisliklar bilan tashkil qilgan burchaklarining o'lchovlari 2:1 kabi nisbat bo'lsa, shu burchaklar topilsin. javob: $\arccos \frac{1}{3}; 2\arccos \frac{1}{3}$

9.106. α va β tekisliklar berilgan bo'lib, α tekislikning A va B nuqtalaridan β tekislikka $AC=37$ sm va $BD=125$ sm og'malar o'tkazilgan. Agar AC og'maning β tekislikdagi proyeksiyasi 12 sm bo'lsa, BD kesmaning proyeksiyasi uzunligi topilsin. javob:120

9.107. AB va CD o'zaro kesishgan ikki tekislikdagi parallel kesmalar: AE va DK tekisliklarning kesishish chizig'iga o'tkazilgan perpendikular bo'lsin. Agar $AD=5$ sm, $EK=4$ sm bo'lsa, AB va CD to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin. javob:3

9.108. 120° ga teng bo'lgan ikki yoqli burchakning yoqlaridagi A va B nuqtalardan burchakning qirrasiga $AC=1$ sm va $BD=8$ sm perpendikularlar o'tkazilgan. Agar $AB=16$ sm bo'lsa, CD kesmaning uzunligi topilsin. javob: $\sqrt{183}$

9.109. 60° li ikki yoqli burchakning bitta tomonida M nuqta olingan va M nuqtadan ikki yoqli burchakning ikkinchi tomonigacha bo'lgan masofa c ga teng. M nuqtadan ikki yoqli burchakning qirrasigacha bo'lgan masofa topilsin. javob: $\frac{2c\sqrt{3}}{3}$

9.110. 120° li ikki yoqli burchakning ichki qismida M nuqta olingan bo'lib, M nuqtadan ikki yoqli burchakning har bir tomonigacha bo'lgan masofalar p ga

teng. M nuqtadan ikki yoqli burchakning qirrasigacha bo'lgan masofalar topilsin.

javob: $\frac{2p\sqrt{3}}{3}$

9.111. A nuqta to'g'ri ikki yoqli burchakning yoqlaridan 3 dm va 4 dm uzoqlikda yotadi. A nuqtadan ikki yoqli burchakning qirrasigacha bo'lgan masofa topilsin. javob:5

9.112. Muntazam ABC uchburchak α tekislikda yotadi va $AB=4$ sm. Uchburchakning C uchidan α tekislikka $CK=3$ sm perpendikular o'tkazilgan. Hosil bo'lgan $\triangle ABK$ ning perimetri va yuzini toping. javob: $P=14; S=2\sqrt{21}$

9.113. Muntazam uchburchakning uchlari P tekislikdan 10, 15, 17 sm uzoqlikda joylashgan. Uchburchakning markazidan P tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin. javob:14

9.114. Muntazam ABC uchburchakning AC tomoni orqali tekislik o'tkazilgan. Uchburchakning BD medianasi tekislik bilan 60° li burchak tashkil etadi. AB to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak sinusini toping. javob: $3/4$

9.115. Muntazam ABC uchburchakning C uchi muntazam ABD uchburchakning markaziga proyeksiyalanadi. ABC va ABD uchburchaklar orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{1}{3}$

9.116. Muntazam $\triangle ABC$ ning AB tomoni α tekislikda yotadi, $\triangle ABC$ ning tekisligi α tekislik bilan 60° li burchak hosil qiladi. Agar $AB=4$ sm bo'lsa, bu uchburchakning α tekislikka proyeksiyasining yuzini hisoblang. javob: $2\sqrt{3}$

9.117. Teng tomonli uchburchakning tomonlari 3 sm. Uchburchak tekisligidan tashqarida uning uchlari 2 sm masofada yotuvchi nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping. javob:1

9.118. Muntazam ABC uchburchak to'g'ri burchakli ABC_1 uchburchakka proyeksiyalandi. Shu uchburchaklarning tekisliklari orasidagi burchakni toping.

javob: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$

9.119. Muntazam $\triangle ABC$ ning C uchidan uchburchak tekisligiga CK perpendikular o'tkazilgan. Agar $CK=13$, $AB=6$ bo'lsa, K nuqtadan AB tomonigacha bo'lgan masofani toping. javob:14

9.120. ABC muntazam uchburchakning AC tomoni orqali α tekislik o'tkazilgan. Uchburchakning BD balandligi tekislik bilan 30° li burchak tashkil qiladi. AB to'g'ri chiziq bilan α tekislik orasidagi burchak sinusini toping. javob:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}$$

9.121. Teng tomonli uchburchakning tomoni 6 sm. Uchburchakning har bir uchidan 4 sm uzoqlikdagi nuqta bilan uning tekisligi orasidagi masofa topilsin. javob:2

9.122. Teng tomonli uchburchakning tomoni 6 sm. Uchburchakning O markazidan uchburchak tekisligiga $OK=1$ sm perpendikular o'tkazilgan. K nuqtadan uchburchakning tomonigacha bo'lgan masofa topilsin. javob:2

9.123. To'g'ri burchakli $\triangle ABC$ ning C uchidan gipotenuzaga parallel va undan h masofada yotgan tekislik o'tkazilgan. Uchburchak katetlarining bu tekislikka proyeksiyalari a va b ga teng bo'lsa, gipotenuzaning uzunligini toping. javob: $\sqrt{a^2 + b^2 + 2h^2}$

9.124. Asosi 6 sm, yon tomoni 5 sm bo'lgan teng yonli uchburchak berilgan. Uchburchakka ichki chizilgan doiraning markazidan uchburchak tekisligiga uzunligi 2 sm bo'lgan perpendikular o'tkazilgan. Bu perpendikular oxiridan uchburchak tomonlarigacha bo'lgan masofani toping. javob:2,5

9.125. ABC uchburchakning to'g'ri burchakli B uchidan uchburchak tekisligiga perpendikular to'g'ri chiziq b o'tkazilgan. $AB=3$, $BC=4$, b va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping. javob:2,4

9.126. ABC uchburchakning to'g'ri burchakli uchi C dan uchburchakka perpendikular a to'g'ri chiziq o'tkazilgan. $AC=15$, $BC=20$. a va AB to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping. javob:12

9.127. $\triangle ABC$ da $\angle B = 90^\circ$ bo'lib, $BC=a$. Uchburchakning A uchidan uchburchak tekisligiga AD perpendikular shunday o'tkazilganki, D va C nuqtalar

orasidagi masofa m ga teng. D nuqtadan BC katetgacha bo'lgan masofa topilsin.

javob: $\sqrt{\frac{a^2 + m^2}{2}}$

9.128. $\triangle ABC$ da $AB=6$ m, $AC=5$ m bo'lib, uning AC tomonidan uchburchak tekisligi bilan 45° li burchak tashkil etuvchi tekislik o'tkazilgan. $\triangle ABC$ ning shu tekislikdagi proyeksiyasi yuzi hisoblansin.

9.129. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 12 ga teng. Bu uchburchakning uchlaridan 10 ga teng masofada uchburchak tekisligidan tashqarida nuqta berilgan. Shu nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping. javob:8

9.130. Uchburchakning tomonlari 10, 17 va 21 ga teng. Uchburchakning katta burchagi uchidan uchburchak tekisligiga perpendikular o'tkazilgan bo'lib, uning uzunligi 15 ga teng. Bu perpendikularning tekislik bilan kesishgan uchidan uchburchakning katta tomonigacha bo'lgan masofani aniqlang. javob:17

9.131. Teng yonli ABC uchburchakning ($AB=AC$) A uchidan uchburchak tekisligiga uzunligi 16 ga teng bo'lgan AD perpendikular o'tkazildi. D nuqtadan BC tomonigacha bo'lgan masofa $2\sqrt{113}$ ga teng. ABC uchburchakning BC tomoniga o'tkazilgan balandligi qanchaga teng? javob:14

9.132. To'g'ri burchakli $\triangle ABC$ da katetlar 15 sm va 20 sm. To'g'ri burchakning C uchidan (ABC) tekislikka $CD=35$ sm perpendikular o'tkazilgan. D nuqtadan AB gipotenuzagacha bo'lgan masofa topilsin. javob:37

9.133. To'g'ri burchakli $\triangle ABC$ ning C to'g'ri burchagi uchidan gipotenuzaga parallel tekislik o'tkazilgan. Gipotenuza $AB=12$ sm hamda AC va BC katetlarning tekislikdagi proyeksiyalari, mos ravishda, 6 sm va 10 sm bo'lsa, gipotenuzadan tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin. javob:2

9.134. $\triangle ABC$ ning uchlaridan α tekislikkacha bo'lgan masofalar 2 dm, 2,5 dm va 4,5 dm. Uchburchak medianalarining kesishish nuqtasidan tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin. javob:3

9.135. $\triangle ABC$ teng yonli va $AC=6$ sm, $AB=BC=5$ sm. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing O markazidan uchburchak tekisligiga $OK=2$ sm perpendikular o'tkazilgan. K nuqtadan uchburchakning tomonlarigacha va B uchigacha bo'lgan masofalar topilsin. javob: $\frac{\sqrt{41}}{2}$

9.136. Uchburchakning tomonlari 51, 30 va 27 sm. Uchburchakning kichik burchagi uchidan uchburchak tekisligiga perpendikular o'tkazilgan va uning uzunligi 10 sm. Perpendikularning uchlaridan uchburchakning o'sha uchi qarshisidagi tomonigacha bo'lgan masofalar topilsin. javob:24;26

9.137. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagi uchidan uchburchak tekisligiga uzunligi 16 sm bo'lgan perpendikular o'tkazilgan. Uchburchakning katetlari 15 va 20 sm bo'lsa, perpendikularning uchlaridan gipotenuzagacha bo'lgan masofalar topilsin. javob:12;20

9.138. To'g'ri burchakli teng yonli uchburchakning kateti orqali tekislik o'tkazilgan. Uchburchakning ikkinchi kateti shu tekislikka 45° li burchak ostida og'madan iborat bo'lsa, uchburchakning gipotenuzasi va tekislik orasidagi burchak topilsin. javob: 30°

9.139. Ikkita teng yonli uchburchak umumiy asosga ega bo'lib, ularning tekisliklari orasidagi burchak 60° . Umumiy asosning uzunligi 12 sm, bitta uchburchakning yon tomoni 10 sm, ikkinchi uchburchakning yon tomonlari o'zaro perpendikular. Uchburchakning uchlari orasidagi masofa topilsin. javob: $2\sqrt{13}$

9.140. $\triangle ABC$ ning tomonlari 13, 14 va 15 sm. Uchburchakning bitta tomoni orqali uchburchak tekisligi bilan 30° li burchak hosil qiluvchi tekislik o'tkazilgan. Uchburchakning shu tekislikdagi proyeksiyasi yuzi hisoblansin. javob: $42\sqrt{3}$

9.141. $\triangle ABC$ to'g'ri burchakli bo'lib, uning gipotenuzasi 24 sm. Fazodagi P nuqta $\triangle ABC$ ning uchlaridan bir xil 13 sm uzoqlikda yotsa, P nuqtadan (ABC) tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin. javob:5

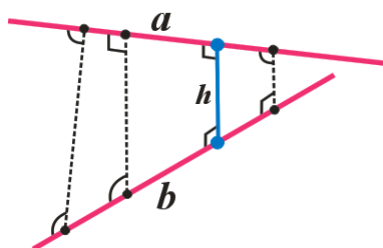
9.142. Teng yonli $\triangle ABC$ ning AC asosi α tekislikda yotadi, B uchi esa α tekislikdan 3 sm uzoqlikda joylashgan. Agar uchburchakning asosi $AC=18$ sm,

uchburchak tekisligi va α tekislik orasidagi burchak 45° bo'lsa, $\triangle ABC$ ning yuzi hisoblansin. javob:54

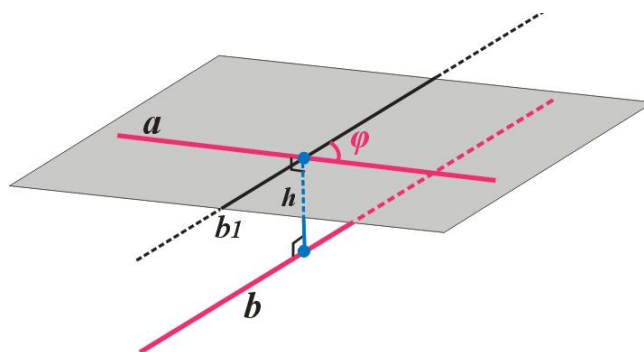
5-§. To'g'ri chiziqlar va tekislik orasidagi burchak, parallellik va perpendikularlik shartlari

Cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlarning yonma-yon joylashishi tekislikni hosil qiladi. Tekislikning ixtiyoriy yon tomonidan turib qaralganda u to'g'ri chiziq bo'lib ko'rinadi.

1-tarif. Ayqash to'g'ri chiziqlarning bir-biriga eng yaqin nuqtalarini tutashtiruvchi kesmaga ayqash *to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa* deyiladi (9.32-rasm). Bu kesma ayqash to'g'ri chiziqlarning umumiy va yagona perpendikularidir. Ayqash to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy boshqa nuqtalarini tutashtiruvchi kesma to'g'ri chiziqqa burchak ostida kesishadi va uning uzunligi umumiy perpendikular uzunligidan katta bo'ladi.



9.32-rasm

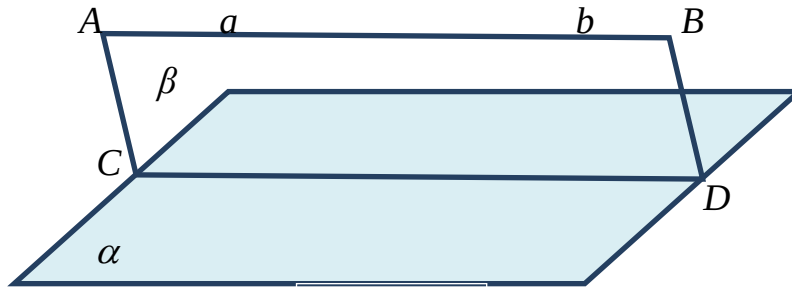


9.33-rasm

Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash uchun ulardan biri orqali ikkinchisiga parallel qilib tekislik o'tkaziladi. Ikkinchi to'g'ri chiziq tekislikka proyeksiyalanadi. Proyeksiya va birinchi to'g'ri chiziqning kesishish burchagiga ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deyiladi (9.33-rasm). Rasmda a to'g'ri chiziq orqali b to'g'ri chiziqqa parallel qilib α tekislik o'tkazilgan hamda b to'g'ri chiziq a to'g'ri chiziqqa proyeksiyalangan. Bunda b_1 proyeksiya to'g'ri chizig'i hosil bo'lgan. b_1 va a to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak berilgan a va b ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak hisoblanadi.

2-ta’rif. Agar to‘g‘ri chiziq va tekislik cheksiz davom ettirilganda ham kesishmasa, ular **parallel** deyiladi.

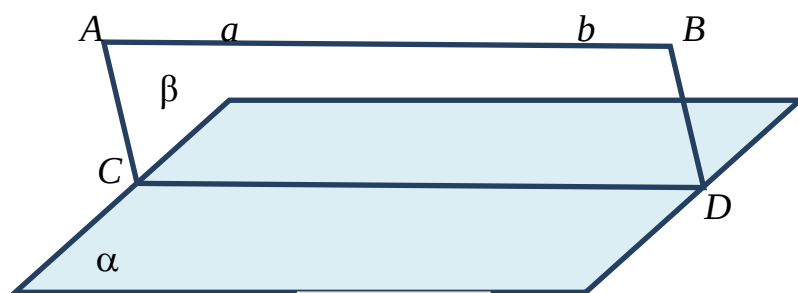
16-teorema (to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik alomati). Agar to‘g‘ri chiziq tekislikda yotgan biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u tekislikka ham parallel bo‘ladi.



9.34-rasm

Isbot. Teoremaning shartiga ko‘ra $AB \parallel CD$, $CD \subset \alpha$ (9.34-rasm). Shu sababli AB va CD to‘g‘ri chiziqlar orqali β tekislik o‘tkazish mumkin. U holda $\alpha \cap \beta = CD$ bo‘ladi hamda α va β tekisliklarning barcha umumiy nuqtalari CD to‘g‘ri chiziqda yotadi. AB to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan qandaydir P nuqtada kesishadi, deb faraz qilaylik. AB to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotganligidan, P nuqta β tekislikka tegishli bo‘ladi. Ikkinchi tomondan, P nuqta α tekislikka tegishli. P nuqta α va β tekisliklarga tegishli bo‘lganligidan, u tekisliklarning kesishish chizig‘i – CD to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lishi kerak. Shunday qilib, AB va CD to‘g‘ri chiziqlar P umumiy nuqtaga ega, ya’ni ular kesishadi. Bu esa teoremaning shartiga zid. Bundan farazimizning noto‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi. Demak, AB to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan kesishmaydi, ya’ni ular parallel bo‘ladi.

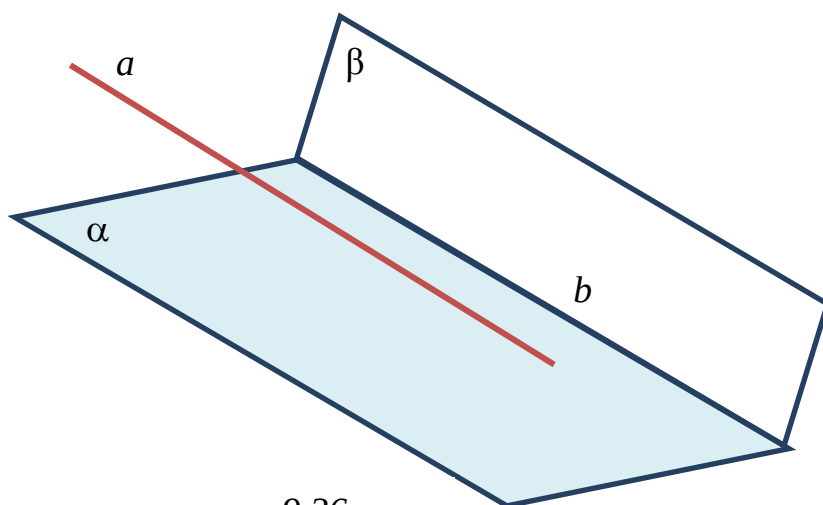
17-teorema. Agar tekislik boshqa tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq orqali o‘tib, shu tekislikni kesib o‘tsa, kesishish chizig‘i berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi (9.35-rasm).



9.35-rasm

Isbot. Modomiki, AB va CD to'g'ri chiziqlar bitta β tekislikda yotgan ekan, parallel to'g'ri chiziqlar uchun birinchi shart bajariladi. AB va CD to'g'ri chiziqlar kesishmaydi, chunki, aks holda, AB to'g'ri chiziq CD bilan kesishgach, u α tekislik bilan kesishishi lozim. Shartga ko'ra esa AB to'g'ri chiziq va α tekislik kesishmaydi. Demak, farazimiz noto'g'ri, shunday qilib, $AB \parallel CD$.

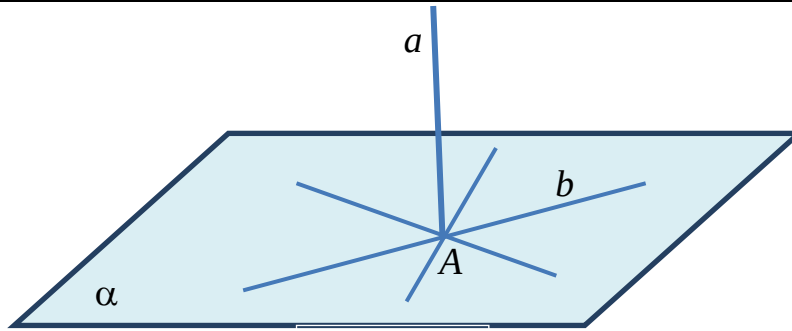
Natija. Agar a to'g'ri chiziq kesishuvchi α va β tekisliklarning har biriga parallel bo'lsa (9.36-rasm), u tekisliklarning kesishish chizig'i b ga ham parallel bo'ladi. $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ munosabatlardan $a \parallel b$ ekanligi kelib chiqadi.



9.36-rasm

3-ta'rif. Agar fazoda berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak 90° ga teng bo'lsa, ular **o'zaro perpendikular to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

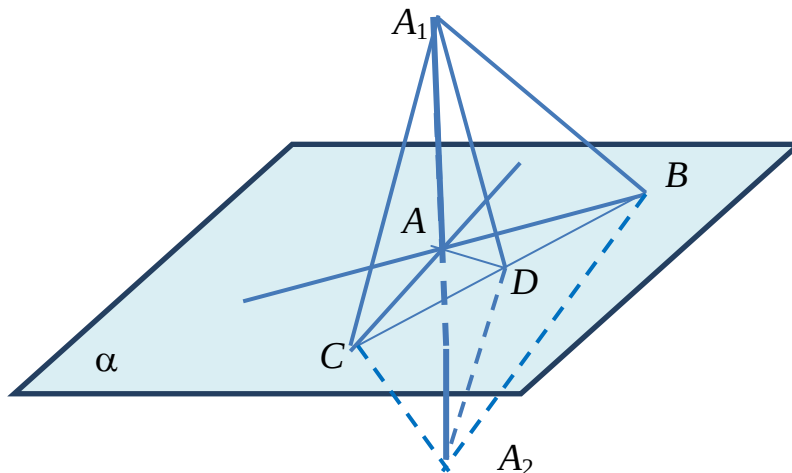
4-ta'rif. Agar a to'g'ri chiziq, α tekislikdagi u bilan kesishish nuqtasi A orqali o'tuvchi ixtiyoriy b to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, a to'g'ri chiziq α **tekislikka perpendikular** deyiladi (9.37- rasm). $b \in \alpha$ va $a \perp b \Rightarrow a \perp \alpha$.



9.37-rasm

18-teorema (*to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularlik alomati*). Agar to'g'ri chiziq tekislikdagi kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikular bo'ladi.

Isbot. a to'g'ri chiziqning α tekislik bilan kesishish nuqtasi A orqali a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan ikkita AB va AC to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan bo'lsin (9.38-rasm). a to'g'ri chiziq α tekislikdagi A nuqta orqali o'tuvchi yana bitta AD to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishini isbotlash lozim bo'ladi.

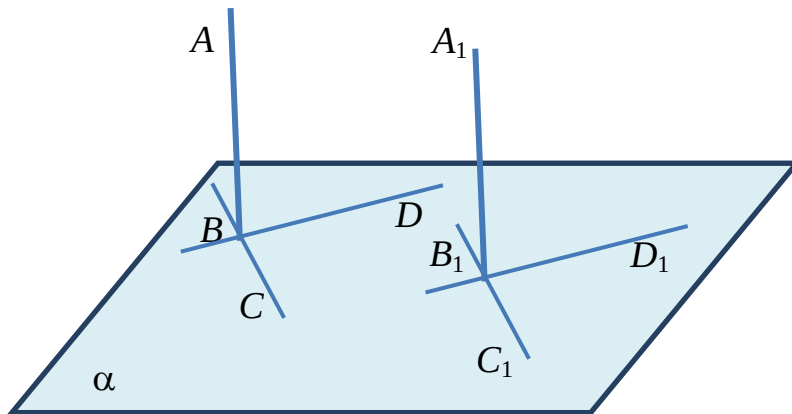


9.38-rasm

α tekislikda AB va AC to'g'ri chiziqlarni, masalan, B va C nuqtalarda kesib o'tuvchi BC to'g'ri chiziq o'tkazamiz, u AD to'g'ri chiziq bilan D nuqtada kesishadi. a to'g'ri chiziqdagi A nuqtaning har xil tomonlarida o'zaro teng $AA_1=AA_2$ kesmalarni joylashtiramiz. So'ngra A_1 va A_2 nuqtalarni B , C va D nuqtalar bilan tutashtiramiz. Natijada, ikkita teng yonli A_1A_2B va A_1A_2C uchburchaklarni hosil qilamiz: teng proyeksiyalarga ega og'malar sifatida, $A_1B=A_2B$ va $A_1C=A_2C$. U holda tomonlari teng uchburchaklar sifatida,

$\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$ bo'ladi. Bundan, $\angle A_1CB = \angle A_2CB$ bo'lishi kelib chiqadi. Endi ΔA_1CD va ΔA_2CD larni taqqoslaymiz. Ularda CD — umumiy tomon, $A_1C = A_2C$ hamda $\angle A_1CD = \angle A_2CD$, shuning uchun ular ikki tomoni va ular orasidagi burchagi bo'yicha o'zaro teng. Bundan $A_1D = A_2D$ bo'lishini olamiz. Uchta tomonlari bo'yicha $\Delta A_1AD = \Delta A_2AD$ bo'ladi. Bundan $\angle A_1AD = \angle A_2AD$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu burchaklar — qo'shni burchaklar bo'lganligidan, ularning har biri 90° ga teng, ya'ni $A_1A_2 \perp AD$.

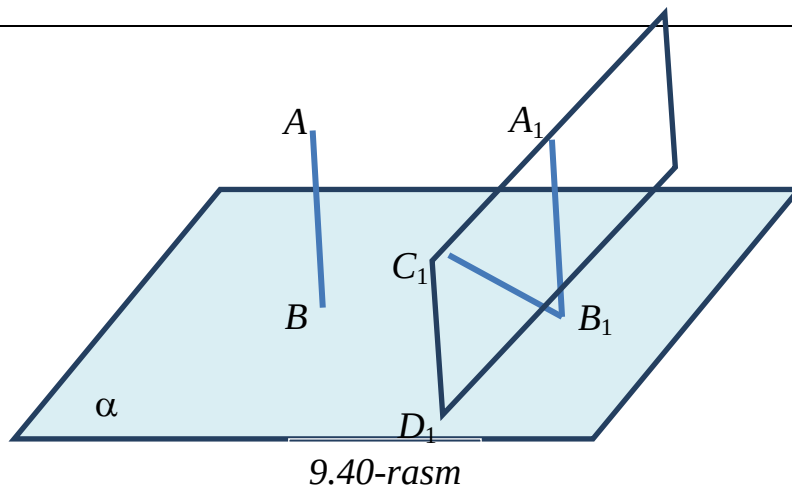
19-teorema. Agar tekislik o'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning bittasiga perpendikular bo'lsa, u ikkinchi to'g'ri chiziqqa ham perpendikular bo'ladi.



9.39-rasm

Isbot. α tekislik va $AB \perp A_1B_1$ berigan hamda $AB \perp \alpha$ bo'lsin (9.39-rasm). α tekislikda B nuqta orqali ikkita BC va BD to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. α tekislikda B_1 nuqta orqali $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1D_1 \parallel BD$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Shartga ko'ra, $AB \perp \alpha$ bo'lgandan, $AB \perp BC$, $AB \perp BD$ bo'ladi. U holda, mos tomonlari parallel burchaklar sifatida, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, $\angle A_1B_1D_1 = \angle ABD$ bo'ladi. To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikularlik alomatidan, $A_1B_1 \perp \alpha$ bo'lishi kelib chiqadi.

20-teorema (teskari teorema). Agar ikkita to'g'ri chiziq bitta tekislikka perpendikular bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.



9.40-rasm

Isbot. Teskarisini faraz qilish yo'lini tutamiz. $AB \perp \alpha$, $A_1B_1 \perp \alpha$, lekin A_1B_1 to'g'ri chiziq AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'lmasin (9.40-rasm). B_1 nuqta orqali $B_1C_1 \parallel BA$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Yuqorida isbotlangan teoremadan $B_1C_1 \perp \alpha$ bo'lishi kelib chiqadi. Kesishuvchi A_1B_1 va B_1C_1 to'g'ri chiziqlar orqali β tekislikni o'tkazamiz. Bunda α va β tekisliklarning kesishish chizig'i B_1D_1 bo'ladi. $A_1B_1 \perp \alpha$, $B_1C_1 \perp \alpha$ bo'lganligidan, $A_1B_1 \perp B_1D_1$ va $B_1C_1 \perp B_1D_1$ bo'ladi. Shunday qilib, B_1 nuqtadan bitta B_1D_1 to'g'ri chiziqqa ikkita perpendikular o'tkazilganligini olamiz. Bunday bo'lishi mumkin emas, demak, farazimiz noto'g'ri va $A_1B_1 \parallel AB$ bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

9.143. To'g'ri to'rtburchakning yuzi 72 ga teng. Uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi kvadratdan iborat. Tekislik va to'g'ri to'rtburchak yotgan tekislik orasidagi burchak 60° ga teng. Kvadratning perimetrini toping. javob:24

9.144. $ABCD$ kvadratning O markazi orqali kvadrat tekisligiga OF perpendikular o'tkazilgan. Agar $FB=5$, $BC=6$ bo'lsa, BCF va $ABCD$ tekisliklar orasidagi burchakni aniqlang. javob: $\arccos \frac{3}{4}$

9.145. $ABCD$ kvadratning A uchidan AK perpendikular o'tkazilgan. Agar $AB=3$ dm, $BK=4$ dm bo'lsa, K nuqtadan kvadratning C uchigacha bo'lgan masofa topilsin. javob: 5

9.146. $ABCD$ kvadratning tomoni a ga teng. Kvadratning O markazidan uning tekisligiga OK perpendikular o'tkazilgan va $OK=b$. K nuqtadan kvadratning uchlarigacha bo'lgan masofa topilsin. javob: $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$

9.147. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning A uchidan uning tekisligiga AK perpendikular o'tkazilgan. K nuqtadan to'rtburchakning uchlarigacha bo'lgan masofalar $KB=6$, $KC=9$, $KD=7$ sm bo'lsa, KA kesmaning uzunligi topilsin. javob:2

9.148. Rombning diagonallari 60 va 80 sm. Diagonallarning kesishish nuqtasidan romb tekisligiga uzunligi 45 sm bo'lgan perpendikular o'tkazilgan, Perpendikularning uchlaridan rombning tomonigacha bo'lgan masofalar topilsin. javob:51

9.149. Teng yonli trapetsiya diagonallarining kesishgan nuqtasi O dan uzunligi 15 ga teng ON perpendikular tushirildi. Trapetsiyaning diagonallari 12 ga teng va kichik asosi katta asosidan ikki marta qisqa. N nuqta trapetsiya katta asosining uchidan qanday masofada joylashgan? javob:17

9.150. $ABCD$ trapetsiyaning AD asosi R tekislikda yotadi, BD asosi esa tekislikdan 5 sm uzoqlikdadir. Agar $AO:BC=7:3$ kabi bo'lsa, shu trapetsiya diagonallarining kesishish nuqtasi M dan P tekislikkacha bo'lgan masofalar topilsin.

9.151. Trapetsiyaning asoslaridan biri ikkinchisidan ikki marta katta. Trapetsiyaning o'rta chizig'i α tekislikka parallel va undan 13 sm masofada o'tadi. Trapetsiya diagonallari kesishish nuqtasi esa bu tekislikdan 15 sm masofada yotadi. Trapetsiyaning asoslaridan α tekislikkacha bo'lgan masofalar topilsin. javob:7;19

9.152. Teng yonli trapetsiyaning asoslari 16 sm va 30 sm. M nuqta trapetsiyaning har bir tomonidan 11 sm uzoqlikda yotsa, M nuqtadan trapetsiya tekisligigacha bo'lgan masofa topilsin. javob:1

9.153. Doiraning markazidan uning tekisligiga perpendikular o'tkazilgan. Agar perpendikularning uzunligi 8 sm, doiraning yuzi 36π sm² bo'lsa,

perpendikularning ustki uchidan aylananing nuqtasigacha bo'lgan masofa topilsin.

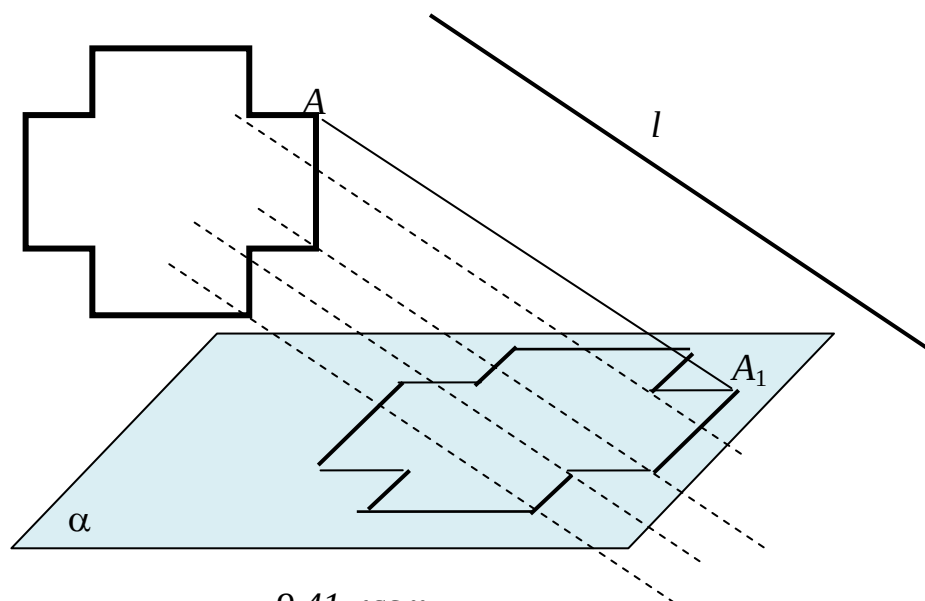
javob:10

9.154. Fazoda ikkita o'xshash uchburchak berilgan. Ulardan birining yuzi 336 sm^2 , ikkinchisining tomonlari esa $a=13 \text{ sm}$, $b=14 \text{ sm}$, $c=15 \text{ sm}$. Birinchi uchburchakning tomonlarini toping.

9.155. α tekislik l to'g'ri chiziqli bilan φ burchak tashkil qiladi. α tekislikni l to'g'ri chiziqli atrofida φ_1 burchakka burish natijasida β tekislikka o'tadi. α va β tekisliklar orasidagi burchak qanday topiladi?

6-§. Fazoviy jismlarning tekislikda tasvirlanishi

Fazoviy jismlarni tekislikda tasvirlash uchun, odatda, parallel proyeksiyalashdan foydalaniladi. Jismni tasvirlashning bu usuli quyidagilardan iborat. Chizma tekisligi α ni kesib o'tuvchi ixtiyoriy l to'g'ri chiziqlini olamiz va jismning ixtiyoriy A nuqtasidan l ga parallel qilib to'g'ri chiziqli o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlining chizma tekisligi bilan kesishgan A_1 nuqtasi A nuqtaning tasviri bo'ladi (9.41-rasm). Jismning har bir nuqtasining tasvirini shu tarzda yasab, shu jismning tasvirini hosil qilamiz. Fazoda jismni tekislikda tasvirlashning bunday usuli jismning uzoqdan qaralganda namoyon bo'lgan tasviriga mos keladi.

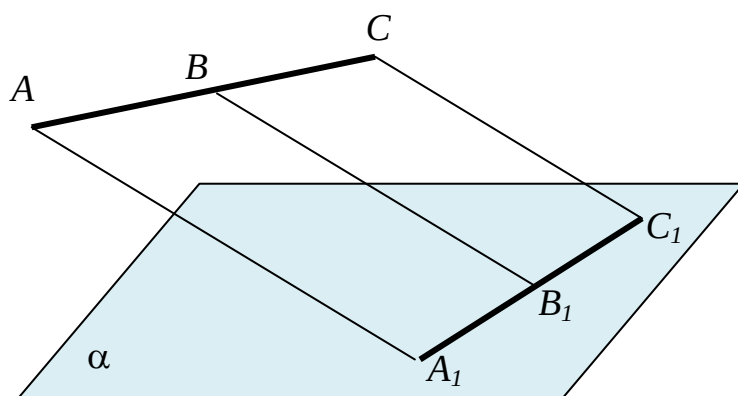


9.41-rasm

Jismni yasashning yuqorida keltirilgan bayonidan uni tekislikda tasvirlashning ba'zi xossalari aytib o'tamiz.

Jismning to'g'ri chiziqli kesmalari chizma tekisligida yana kesma bilan tasvirlanadi (9.42-rasm).

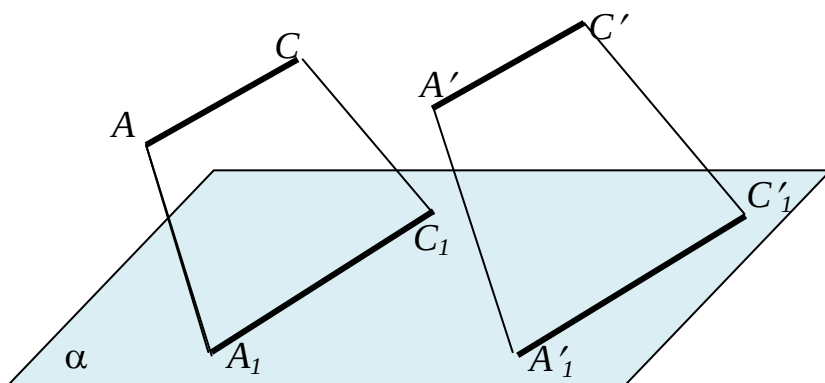
Haqiqatan, AC kesma nuqtalarini proyeksiyalovchi hamma to'g'ri chiziqlar chizma tekisligi α ni A_1C_1 to'g'ri chiziq bo'yicha kesuvchi bitta tekislikda yotadi. AC kesmaning ixtiyoriy B nuqtasi A_1C_1 kesmaning B_1 nuqtasi bilan tasvirlanadi.



9.42-rasm

Jismning parallel kesmalari chizma tekisligida parallel kesmalar bilan yoki bir to'g'ri chiziqda yotuvchi kesmalar bilan tasvirlanadi (9.43-rasm).

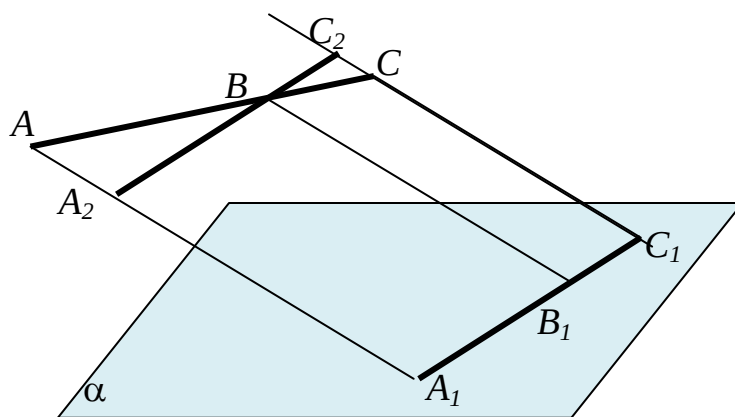
Haqiqatan, AC va $A'C'$ jismning parallel kesmalari bo'lsin. A_1C_1 va $A'_1C'_1$ to'g'ri chiziqlar parallel, chunki ular parallel tekisliklarning α tekislik bilan kesishishidan hosil qilingan. Bu tekisliklardan birinchisi AC va AA_1 to'g'ri chiziqlar orqali, ikkinchisi $A'C'$ va $A'A'_1$ to'g'ri chiziqlar orqali o'tadi.



9.43-rasm

Bitta to'g'ri chiziq yoki parallel to'g'ri chiziqlar kesmalarining nisbati parallel proyeksiyalashda saqlanadi. Masalan, $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$ ekanini ko'rsatamiz (9.44-rasm).

B nuqta orqali A_1C_1 ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. BAA_2 va BCC_2 uchburchaklar o'xshash. Uchburchaklarning o'xshashligidan $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$ proporsiya hosil bo'ladi.



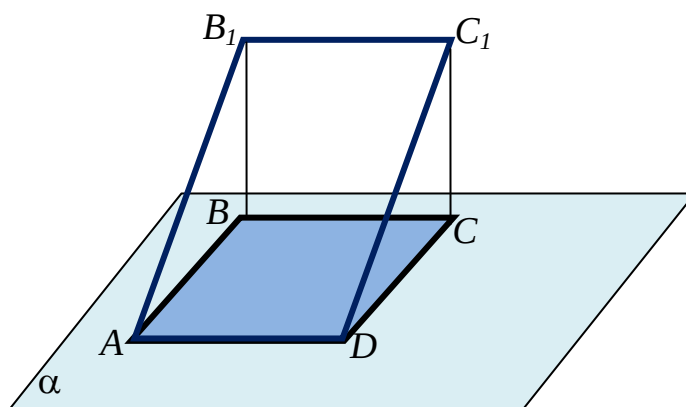
9.44-rasm

1-masala. To'g'ri to'rtburchakning yuzi $18\sqrt{3}$ ga teng. Uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi kvadratdan iborat. Tekislik va to'g'ri to'rtburchak yotgan tekislik orasidagi burchak 30° ga teng. Kvadratning perimetrini toping.

Yechish. AB_1C_1D to'g'ri to'rtburchakning α tekislikdagi proyeksiyasi $ABCD$ kvadratdan iborat bo'lsin (9.45-rasm). Shartga ko'ra AB_1C_1D to'g'ri to'rtburchakning tomonlari $AB_1 = a$, $AB = b$ va ular orasidagi burchak

$\angle B_1AB = 30^\circ$ ga teng. Bundan $a = b \cos 30^\circ = b \frac{\sqrt{3}}{2}$, $S_{AB_1C_1D} = ab = \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 = 18\sqrt{3} \Rightarrow b = 6$, $a = 3\sqrt{3}$.

Demak, kvadratning perimetri $P = 4a = 4 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.



9.45-rasm

Mustaqil ishlash uchun masalalar

9.156. Muntazam ABC uchburchakning AC tomoni orqali tekislik o'tkazilgan. Uchburchakning BD medianasi tekislik bilan 60° li burchak tashkil etadi. AB to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak sinusini toping. javob: $\frac{3}{4}$

9.157. Muntazam ABC uchburchakning C uchi muntazam ABD uchburchakning markaziga proyeksiyalanadi. ABC va ABD uchburchaklar orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{1}{3}$

9.158. Muntazam $\triangle ABC$ ning AB tomoni α tekislikda yotadi, $\triangle ABC$ ning tekisligi α tekislik bilan 60° li burchak hosil qiladi. Agar $AB=4$ sm bo'lsa, bu uchburchakning α tekislikka proyeksiyasining yuzini hisoblang.

9.159. Teng tomonli uchburchakning tomonlari 3 sm. Uchburchak tekisligidan tashqarida uning uchlaridan 2 sm masofada yotuvchi nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping. javob: 1

9.160. Muntazam ABC uchburchak to'g'ri burchakli ABC_1 uchburchakka proyeksiyalanadi. Shu uchburchaklarning tekisliklari orasidagi burchakni toping.

9.161. ABC muntazam uchburchakning AC tomoni orqali α tekislik o'tkazilgan. Uchburchakning BD balandligi tekislik bilan 30° li burchak tashkil qiladi. AB to'g'ri chiziq bilan α tekislik orasidagi burchak sinusini toping. javob: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

9.162. Teng tomonli uchburchakning tomoni 6 sm. Uchburchakning har bir uchidan 4 sm uzoqlikdagi nuqta bilan uning tekisligi orasidagi masofa topilsin. javob:2

9.163. Teng tomonli uchburchakning tomoni 6 sm. Uchburchakning O markazidan uchburchak tekisligiga $OK=1$ sm perpendikular o'tkazilgan. K nuqtadan uchburchakning tomonigacha bo'lgan masofa topilsin. javob: $\sqrt{2}$

9.164. To'g'ri burchakli $\triangle ABC$ ning C uchidan gipotenuzaga parallel va undan h masofada yotgan tekislik o'tkazilgan. Uchburchak katetlarining bu tekislikka proyeksiyalari a va b ga teng bo'lsa, gipotenuzaning uzunligini toping.

9.165. Asosi 6 sm, yon tomoni 5 sm bo'lgan teng yonli uchburchak berilgan. Uchburchakka ichki chizilgan doiraning markazidan uchburchak tekisligiga uzunligi 2 sm bo'lgan perpendikular o'tkazilgan. Bu perpendikular oxiridan uchburchak tomonlarigacha bo'lgan masofani toping. javob:2,5

9.166. ABC uchburchakning to'g'ri burchakli B uchidan uchburchak tekisligiga perpendikular to'g'ri chiziq b o'tkazilgan. $AB=3$, $BC=4$, b va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping. javob:2,4

9.167. $\triangle ABC$ da $\angle B=90^\circ$ bo'lib, $BC=a$. Uchburchakning A uchidan uchburchak tekisligiga AD perpendikular shunday o'tkazilganki, D va C nuqtalar orasidagi masofa m ga teng. D nuqtadan BC katetgacha bo'lgan masofa topilsin.

9.168. $\triangle ABC$ da $AB=6$, $AC=5$ sm bo'lib, uning AC tomonidan uchburchak tekisligi bilan 45° li burchak tashkil etuvchi tekislik o'tkazilgan. $\triangle ABC$ ning shu tekislikdagi proyeksiyasi yuzi hisoblansin.

9.169. To'g'ri to'rtburchakning yuzi 72 ga teng. Uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi kvadratdan iborat. Tekislik va to'g'ri to'rtburchak yotgan tekislik orasidagi burchak 60° ga teng. Kvadratning perimetrini toping.

9.170. $\triangle ABC$ ning tomonlari 13, 14 va 15 sm. Uchburchakning bitta tomoni orqali uchburchak tekisligi bilan 30° li burchak hosil qiluvchi tekislik o'tkazilgan. Uchburchakning shu tekislikdagi proyeksiyasi yuzi hisoblansin.

9.171. Ikkita teng yonli uchburchak umumiy asosga ega bo'lib, ularning tekisliklari orasidagi burchak 60° . Umumiy asosning uzunligi 12 sm, bitta uchburchakning yon tomoni 10 sm, ikkinchi uchburchakning yon tomonlari o'zaro perpendikular. Uchburchakning uchlari orasidagi masofa topilsin.