

15-BOB

FAZOVIY JISMLARNING KOMBINATSIYALARI

Agar konusning to'la sirti va unga ichki chizilgan shar radiusi ma'lum bo'lsa, u holda konus hajmi

$$V = \frac{1}{3} S_{to'la} \cdot r$$

ga teng.

1-§. Ko'pyoqlarning kombinatsiyalari

Bu mavzuda ko'pyoqlilarning kombinatsiyalari bilan bog'liq masalalarni yechish imkoniyatlarini ko'rib chiqamiz. Bu masalalarni yechishdagi qiyinchiliklar, ko'p jihatdan, fazoviy jismlarning tekislikda tasvirlari yetarli darajada ravshan emasligi va natijada qo'shimcha konstruksiyalarni bajarishning murakkabligi bilan bog'liq. Fazoviy jismlarning uch o'lchovli modellarini yaratishda, ular ustida turli harakatlarni bajarishda kompyuter dasturlaridan foydalanish qulaylik yaratadi, bu esa o'quvchilarning fazoviy tasavvurlarini rivojlantirishga va murakkab masalalarni yechishga yordam beradi. Fazoviy tasvirlar haqidagi tasavvurlar, qo'shimcha konstruksiyalarni amalga oshirish qobiliyati faqat fazoviy jismlar haqida tasavvurga ega bo'lgandan keyingina paydo bo'ladi.

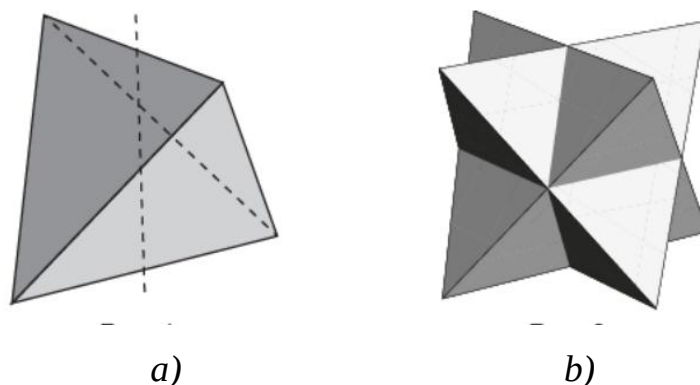
1-masala. Tetraedr ikkita qarama-qarshi qirralarining o'rtalari orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq atrofida 90° ga aylantirilgan. Berilgan tetraedr va aylantirilgan tetraedrning kesishishidan hosil bo'lgan geometrik jism qanday ko'pyoqli bo'ladi? Tetraedrning qirralari 1 ga teng bo'lsa, shu ko'pyoqlining hajmini toping.

Yechish. 15.1-a rasmda oddiy tetraedr va qarama-qarshi qirralarning o'rta nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq tasviri ko'rsatilgan.

Berilgan va aylantirilgan tetraedraning umumiy qismi – oktaedr ekanligini ko‘rish oson, uning uchlari berilgan tetraedr qirralarining o‘rta nuqtasidir (15.1-b rasm).

Bu oktaedr asl tetraedrda to‘rtta tetraedrni kesib tashlash yo‘li bilan olinadi, ularning qirralari asl tetraedrning qirralarining yarmiga teng. Har bir shunday kesilgan tetraedrning hajmi $1/8$ ga teng.

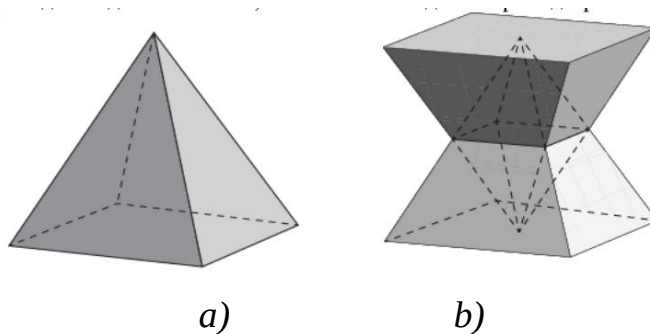
Shuning uchun, oktaedrning hajmi $1/2$ ga teng.



15.1-rasm

2-masala. To‘rtburchakli muntazam piramida (15.2-a rasm) balandlikning o‘rtasiga nisbatan simmetrik tarzda aks ettirilgan. Berilgan va simmetrik ko‘chirilgan piramidalarning umumiy qismi qanday ko‘pyoqli bo‘ladi? Piramidaning hajmi 1 ga teng bo‘lsa, hosil bo‘lgan ko‘pyoqlining hajmini toping.

Yechish. Berilgan va simmetrik ko‘chirilgan piramidalar kesishmasi 15.2-b rasmda ko‘rsatilgan. Ularning umumiy qismi – umumiy asosi to‘rtburchak bo‘lgan ikkita muntazam to‘rtburchakli piramidalardan tashkil topgan ko‘pburchak. Har bir piramidaning qirralari berilgan piramida qirralarining yarmiga teng.



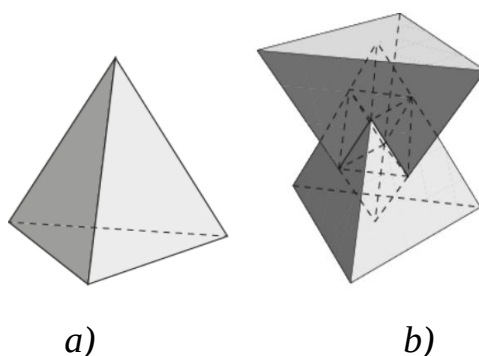
15.2-rasm

Bu piramidalarning hajmi $1/8$ ga teng.

Umumiy qismning kerakli hajmi $1/4$ ga teng.

3-masala. Muntazam tetraedr (15.3-a rasm) uning balandligining o'rtasiga nisbatan simmetrik tarzda aks ettirilgan. Berilgan va simmetrik ko'chirish natijasida hosil qilingan tetraedrning umumiy qismi qanday ko'pyoqli? Agar berilgan tetraedrning hajmi 1 bo'lsa, hosil bo'lgan ko'pyoqlining hajmini toping.

Yechish. Berilgan va simmetrik ko'chirilgan tetraedr 15.3-b rasmda ko'rsatilgan. Ularning umumiy qismi oktaedr va ikkita tetraedrdan tashkil topgan ko'pyoqli bo'lib, uning qirralari berilgan tetraedrning qirrasidan uch baravar kichikdir. Bu tetraedrlarning har birining hajmi $1/27$, oktaedrning hajmi $4/27$ ga teng.

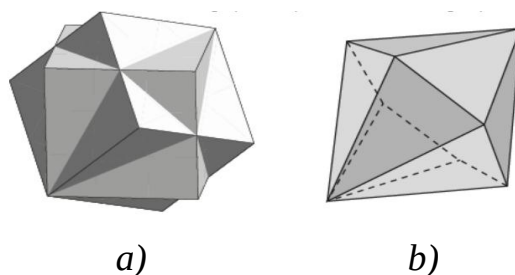


15.3-rasm

Qidirilayotgan umumiy qismning hajmi $2/9$ ga teng.

4-masala. Birlik kub diagonalini o'z ichiga olgan to'g'ri chiziq atrofida 60° burchakka aylantirilgan. Berilgan va aylantirish natijasida hosil bo'lgan kublarning umumiy qismi qanday ko'pyoqli? Hosil bo'lgan ko'pyoqlining hajmini toping.

Yechish. Berilgan va aylantirish natijasida hosil bo'lgan kublarning tasviri 15.4-b rasmda berilgan.



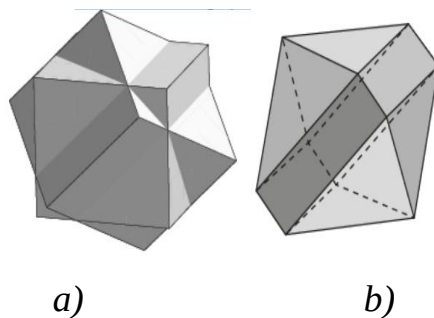
15.4-rasm

Bu kublarning umumiy qismi – umumiy asosli ikkita muntazam oltiburchakli piramidadan tashkil topgan ko‘pburchak (15.4-*b* rasm).

U dastlabki kubdan oltita teng uchburchakli piramidani kesib olish yo‘li bilan olinadi. Ularning asoslarining yuzlari $1/8$ ga teng, balandliklari 1 ga teng. Bu ularning hajmlari $1/24$ ga teng ekanligini bildiradi. Shuning uchun umumiy qismning hajmi $3/4$ ga teng.

5-masala. Birlik kub uning qarama-qarshi ikki qirrasining o‘rta nuqtalari orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq atrofida 90° burchakka burilgan. Berilgan va burilgan kubning umumiy qismi qayday ko‘pburchak? Uning hajmini toping.

Yechish. Berilgan va aylantirilgan kublar 15.5-*a* rasmda ko‘rsatilgan.



15.5-rasm

Bu kublarning umumiy qismi – ikkita muntazam to‘rtburchakli piramidalar va muntazam to‘rtburchakli prizmadan tashkil topgan ko‘pyoqli (15.5-*b* rasm).

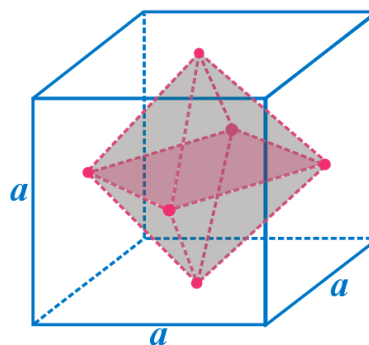
Bu piramidalar asoslarining tomonlari 1 ga, balandliklari esa $1/2$ ga teng.

Demak, piramidalarning har birining hajmi $1/6$ ga teng. Prizma asoslarining qirralari 1 ga, balandligi esa $\sqrt{2}-1$ ga teng. Shuning uchun prizmaning hajmi $\sqrt{2}-1$ ga teng.

Demak, hosil qilingan ko‘pyoqlining hajmi $\sqrt{2}-\frac{2}{3}$ ga teng.

6-masala. Kubning yoqlari markazlarini tutashtirish natijasida oktaedr deb ataluvchi ko‘pyoq hosil bo‘ladi. Oktaedr hajmi kub hajmidan necha marta katta?

Yechish. Oktaedr asoslari umumiy bo'lgan ikkita to'rtburchakli muntazam piramidadir (15.6-rasm). Agar kubning qirrasi a ga teng bo'lsa, u holda oktaedrning qirrasi $b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ga teng bo'ladi.



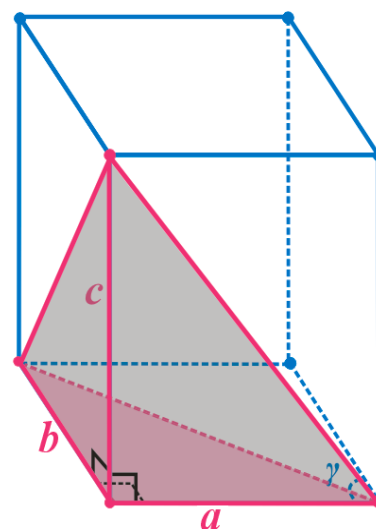
15.6-rasm

Piramida asosi yuzi $S_{piram} = b^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{S_{kub}}{2}$, balandligi esa $h_{piram} = \frac{a}{2}$ bo'ladi.

Shunda piramida hajmi $V_{pir} = \frac{1}{3} S_{pir} h_{pir} = \frac{1}{3} \frac{a^2}{2} \frac{a}{2} = \frac{1}{12} a^3 = \frac{1}{12} V_{kub}$ bo'ladi. Oktaedr hajmi esa piramida hajmining ikkilanganiga teng bo'ladi, ya'ni $V_{oktaedr} = 2V_{pir} = \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{6} V_{kub}$ bo'ladi. Demak, oktaedr hajmi kub hajmidan 6 marta kichik bo'lar ekan.

7-masala. O'zaro 90° burchak ostida kesishuvchi, qirralari uzunliklari a, b, c ga teng bo'lgan piramidaning hajmi nimaga teng?

Yechish. Piramida asosida o'zaro 90° burchak ostida kesishuvchi a va b qirralar asosda $S_{piram} = \frac{1}{2} ab$ yuza hosil qiladi. Piramida balandligi $H = c$ bo'lgani uchun uning hajmi $V_{pir} = \frac{1}{3} S_{as} H = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{6} V_{paral}$ bo'ladi.



15.7-rasm

Demak, o'zaro 90° burchak ostida kesishuvchi piramida hajmi bu piramidani qamragan to'g'ri burchakli parallelepiped hajmining $1/6$ qismiga teng bo'lar ekan (15.7-rasm).

Muqtaqil ishlash uchun masalalar

15.1. To'g'ri parallelepipedning BB_1 yon qirrasi orqali uning yon yoqlariga perpendikular ikkita kesim o'tkazilgan. Kesimlarning yuzlari S_1 va S_2 ga teng bo'lib, asosning perimetri $2r$ ga teng. Asosi parallelepiped asosida, uchi BB_1 qirraning o'rtasida bo'lgan piramidaning hajmini hisoblang.

15.2. Parallelepipedning asosi tomoni 5 sm bo'lgan $ABCD$ kvadratdan iborat. Uning yon qirrasi $AA_1=5$ sm va asosining AB va AD tomonlari bilan 60° li burchak hosil qiladi. Asosi parallelepiped asosida, uchi BD_1 diagonalining o'rtasida bo'lgan piramida hajmini toping.

15.3. To'g'ri burchakli parallelepiped asosining tomonlari 6 va 8 ga teng. Uning diagonalini asos tekisligiga 30° li burchak ostida og'ishgan. Parallelepiped asosining AC diagonalini va B_1 uchi orqali o'tuvchi tekislik bilan kesilgan. Hosil bo'lgan ko'pyoqning hajmini toping.

15.4. To'g'ri burchakli parallelepiped asoslarining tomonlari 6 va 13 ga, balandligi 8 ga teng. Asosining katta tomoni va parallelepipedning diagonalari kesishgan nuqtasi orqali o'tuvchi tekislik bilan ikki qismga ajratilgan. Hosil bo'lgan ko'pyoqning hajmini toping.

15.5. To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalini d ga teng va bitta yoq bilan 30° li, ikkinchi yoq bilan 45° li burchak tashkil qiladi. Parallelepipedning diagonal kesimi va unda yotmagan uchidan tashkil topgan ko'pyoq hajmini hisoblang.

15.6. To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalini asos tekisligi bilan 45° li burchak tashkil etadi va asosining tomonlaridan biri 6 ga teng. Agar parallelepipedning balandligi 10 ga teng bo'lsa, uchlari parallelepiped yoqlarining markazida bo'lgan ko'pyoq hajmini toping.

15.7. Uchburchakli to'g'ri prizma asosining tomonlari 36, 29 va 25 ga, to'la sirti esa 1620 ga teng. Prizmaning asosi va unda yotmagan uchidan iborat piramida toping.

15.8. Uchburchakli to'g'ri prizmaning asosi tomonlari 29, 25 va 6 ga, yon qirrasi esa asosining katta balandligiga teng. Prizmaning ostki asosi va yuqori

asosiga ichki chizilgan aylana markazidan tashkil topgan piramidaning hajmini toping.

15.9. Asosining tomonlari 10, 17 va 21 bo'lgan uchburchakli to'g'ri piramidaning yon qirrasi asosining kichik balandligiga teng. Piramida balandligining o'rtasidan asosga parallel tekislik o'tkazilgan, tekislik hosil qilgan kesimdan hosil bo'lgan prizmaning hajmini toping.

15.10. To'g'ri prizmaning balandligi 50 ga, asosining tomonlari 13, 37 va 40 ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat. Uchi prizmaning yoqlari markazida bo'lgan ko'pyoq hajmini va sirtini toping.

15.11. Uchburchakli to'g'ri prizmaning yon qirrasi 15 sm, asosining tomonlari 25, 39 va 40 sm. Yon qirrasi va asosning o'rta balandligi orqali o'tkazilgan kesimning yuzi hisoblansin.

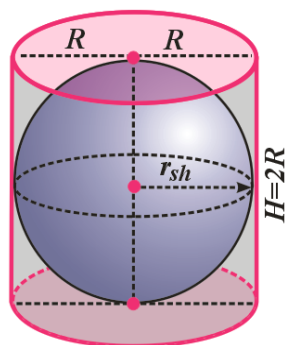
2-§. Aylanish jismlarining kombinatsiyalari

Ushbu mavzuda aylanish jismlarining kombinatsiyalariga oid masalalarni o'rganamiz.

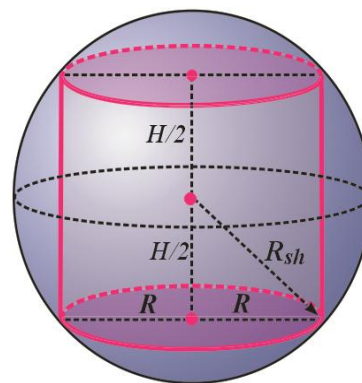
1-ta'rif. Silindr yon sirti va asoslariga urinadigan sharga silindrga **ichki chizilgan shar** deyiladi.

Silindrga ichki shar chizish uchun uning o'q kesimi kvadrat ($H = 2R$) bo'lishi kerak. Silindr va unga ichki chizilgan sharning o'q kesimi berilgan bo'lsa, kvadratga ichki chizilgan aylana hosil bo'ladi. Ichki chizilgan shar radiusi silindr radiusiga teng bo'ladi (15.8-rasm):

$$r_{sh} = R = \frac{H}{2}.$$



15.8-rasm



15.9-rasm

2-ta'rif. Silindr asoslari aylanalariga urinadigan sharga silindrga **tashqi chizilgan shar** deyiladi.

Har qanday to'g'ri silindrga tashqi shar chizish mumkin. Silindr va unga tashqi chizilgan sharning o'q kesimi berilgan bo'lsa, to'g'ri to'rtburchakka tashqi chizilgan aylana hosil bo'ladi. Tashqi chizilgan shar radiusi silindr o'q kesimi diagonalining yarmiga teng bo'ladi (15.9-rasm):

$$R_{sh} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}.$$

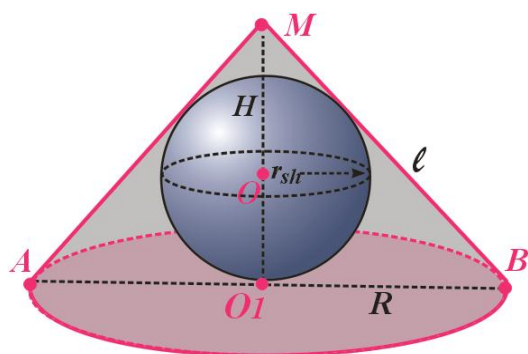
Radiusi R_{sh} bo'lgan sharga ichki chizilgan eng katta hajmli silindrning radiusi R , balandligi H va hajmi $V_{\max}$ larni aniqlash formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$H = \frac{2}{\sqrt{3}} R_{sh}, \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}} R_{sh}, \quad V_{\max} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R_{sh}^3.$$

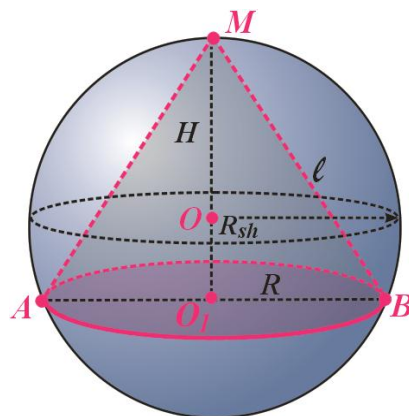
3-ta'rif. Konus yon sirti va asosiga urinadigan sharga konusga **ichki chizilgan shar** deyiladi.

Har qanday konusga ichki shar chizish mumkin. Konus va unga ichki chizilgan sharning o'q kesimi berilgan bo'lsa, teng yonli uchburchakka ichki chizilgan aylana hosil bo'ladi. Asosining radiusi R va balandligi H bo'lgan konusga ichki chizilgan shar radiusi quyidagicha bo'ladi (15.10-rasm):

$$r_{sh} = \frac{RH}{R + \ell} \quad \text{yoki} \quad r_{sh} = \frac{RH}{R + \sqrt{R^2 + H^2}}.$$



15.10-rasm



15.11-rasm

4-ta’rif. Konus uchiga va asosi aylanasi ga urinadigan sharga konusga **tashqi chizilgan shar** deyiladi.

Har qanday konusga tashqi shar chizish mumkin. Konus va unga tashqi chizilgan sharning o‘q kesimi berilgan bo‘lsa, teng yonli uchburchakka tashqi chizilgan aylana hosil bo‘ladi. Asosining radiusi R va balandligi H bo‘lgan konusga tashqi chizilgan shar radiusi quyidagicha bo‘ladi (15.11-rasm):

$$R_{sh} = \frac{\ell^2}{2H} \quad \text{yoki} \quad R_{sh} = \frac{R^2 + H^2}{2H}.$$

Radiusi R_{sh} bo‘lgan sharga ichki chizilgan eng katta hajmli konusning radiusi R , balandligi H va hajmi $V_{\max}$ larni aniqlash formulalari quyidagicha bo‘ladi:

$$H = \frac{2}{3} R_{sh}, \quad R = \frac{2\sqrt{2}}{3} R_{sh}, \quad V_{\max} = \frac{16\pi}{81} R_{sh}^3.$$

5-ta’rif. Kesik konus yon sirti va asoslariga urinadigan sharga kesik konusga **ichki chizilgan shar** deyiladi.

Kesik konus va unga ichki chizilgan sharning o‘q kesimi berilgan bo‘lsa, teng yonli trapetsiyaga ichki chizilgan aylana hosil bo‘ladi. Kesik konusga ichki shar chizish uchun uning o‘q kesimidagi teng yonli trapetsiyaga ichki aylana chizish kerak bo‘ladi. Kesik konusga ichki shar chizish uchun kesik konus yasovchisi asoslar radiuslari yig‘indisiga teng bo‘lishi kerak:

$$\ell = R + r.$$

Kesik konusga ichki chizilgan shar radiusi quyidagicha bo'ladi (15.12-rasm):

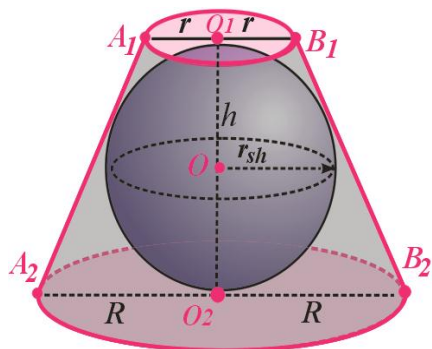
$$r_{sh} = \sqrt{Rr}.$$

Isbot. Planimetriya bo'limidan bizga ma'lumki, teng yonli trapetsiyaga ichki aylana chizish mumkin bo'lsa, uning balandligi asoslariga o'rta proporsional bo'ladi, ya'ni $h^2 = ab$. Bu yerda trapetsiyaning asoslari $a = 2r$, $b = 2R$ va balandligi $h = 2r_{sh}$ ekanligini e'tiborga olsak, $4r_{sh}^2 = 2r \cdot 2R$. Bundan $r_{sh} = \sqrt{rR}$ hosil bo'ladi.

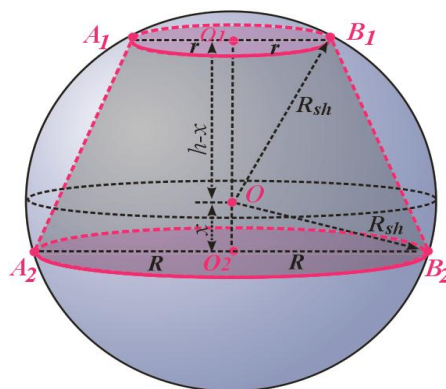
6-ta'rif. Kesik konus asoslari aylanalariga urinadigan sharga kesik konusga **tashqi chizilgan shar** deyiladi.

Har qanday to'g'ri kesik konusga tashqi shar chizish mumkin. Kesik konus va unga tashqi chizilgan sharning o'q kesimi berilgan bo'lsa, teng yonli trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana hosil bo'ladi. Tashqi chizilgan aylana markazidan katta asosgacha bo'lgan masofa quyidagicha bo'ladi (15.13-rasm):

$$x = \frac{R^2 - r^2}{2h} - \frac{h}{2}.$$



15.12-rasm



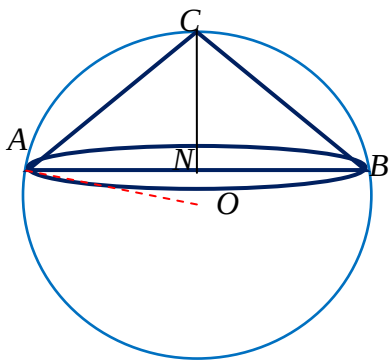
15.13-rasm

Kesik konusga tashqi chizilgan aylana radiusi quyidagicha bo'ladi:

$$R_{sh} = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R^2 - r^2}{2h} - \frac{h}{2} \right)^2}.$$

1-masala. Sharga konus ichki chizilgan. Konusning yasovchisi asosining diametridan $\frac{\sqrt{2}}{2}$ marta kichik. Shar hajmining konus hajmiga nisbatini toping.

Yechish. Sharning radiusini $AO=R$ deb belgilash kiritib, konusning AC yasovchini va AN radiusini R orqali ifodalaymiz. Shartga ko'ra $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ABC teng yonli uchburchakda CN balandlik o'tkazamiz va CAN to'g'ri burchakli uchburchakda $\sin \angle A = \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{2AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle A = \angle B = 45^\circ$ va $\angle C = 90^\circ$. Bundan AB sharning diametri bo'lgani uchun, $CN=CO=AN=R$ ekanligi kelib chiqadi.



15.14-rasm

Sharning hajmi $V_{\text{shar}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Konusning balandligi va radiusi shar radiusiga

reng: $V_{\text{konus}} = \frac{1}{3}S_{\text{asos}}H = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3$.

Demak, shar hajmining konus hajmiga nisbatini:

$$\frac{V_{\text{shar}}}{V_{\text{konus}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^3} = 4.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

15.1. O'q kesimi kvadratdan iborat silindrga ichki chizilgan sharning hajmi $\frac{9\pi}{16}$ ga teng. Silindrning yon sirtini toping.

15.2. Teng tomonli silindrga radiusi 3 ga teng bo'lgan shar ichki chizilgan. Silindr va shar sirtlari orasidagi jismning hajmini toping.

15.3. Teng tomonli silindrga shar ichki chizilgan. Agar sharning hajmi $10\frac{2}{3}\pi$ ga teng bo'lsa, silindrning yon sirtini toping.

15.4. Silindrga shar ichki chizilgan. Silindrning hajmi 16π ga teng bo'lsa, sharning hajmini toping.

15.5. Teng tomonli silindrga shar ichki chizilgan. Agar silindrning hajmi $4\sqrt{3}\pi$ ga teng bo'lsa, shar sirtini toping.

15.6. Hajmi 432π ga teng bo'lgan silindrning o'q kesimi kvadratdan iborat. Silindrga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.

15.7. Silindrning balandligi h va asosining radiusi r . Silindrga tashqi chizilgan sfera sirtining yuzi topilsin.

15.8. Konusning balandligi 6 ga, yasovchisi 10 ga teng. Konusga ichki chizilgan sharning radiusini toping.

15.9. Yasovchisi 10 ga, asosining radiusi 6 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan sharning radiusini toping.

15.10. Balandligi 6 ga, yasovchisi 10 ga teng konusga ichki chizilgan sharning sirtini toping.

15.11. O'q kesimi teng tomonli uchburchakdan iborat konusga diametri d ga teng sfera ichki chizilgan. Konusning to'la sirtini toping.

15.12. Yasovchisi 5 ga, asosining diametri 6 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.

15.13. Radiusi 4 ga teng bo'lgan sharga balandligi 9 ga teng bo'lgan konus tashqi chizilgan. Konus asosining radiusini toping.

15.14. Konus asosining yuzi 9π ga, yon sirtining yuzi 15π ga teng. Shu konusga ichki chizilgan sferaning radiusini toping.

15.15. Konusning yasovchisi 20 ga, asosining diametri 24 ga teng. Unga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.

15.16. Balandligi 9 ga, yasovchisi 18 ga teng konusga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.

15.17. Radiusi 2 ga teng shar konusga ichki chizilgan. Konus yasovchisi va balandligi orasidagi burchak 30° ga teng. Konus yon sirtining yuzini toping.

15.18. Yasovchi 15 ga, asosining radiusi 9 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan sharning radiusini toping.

15.19. Sharga ichki chizilgan konusning balandligi 3 ga, asosining radiusi $3\sqrt{3}$ ga teng. Sharning radiusini toping.

15.20. Sharga ichki chizilgan konusning asosi sharning eng katta doirasidan iborat. Sharning hajmi konusning hajmidan necha marta katta?

15.21. Sharga konus ichki chizilgan. Konusning yasovchisi asosining diametriga teng. Shar hajmining konus hajmiga nisbatini toping.

15.22. Balandligi 3 ga, yasovchisi 6 ga teng bo'lgan konusga tashqi chizilgan sharning radiusini toping.

15.23. Sharga ichki chizilgan konusning o'q kesimi teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Konusning hajmi shar hajmining qanday qismini tashkil etadi?

15.24. Radiusi 5 ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning balandligi 4 ga teng. Konusning hajmini toping.

15.25. Radiusi 10 ga teng bo'lgan sferaga balandligi 18 ga teng bo'lgan konus ichki chizilgan. Konusning hajmini toping.

15.26. Kesik konusning yon sirti 10π ga, to'la sirti 18π ga teng. Konusning to'la sirti unga ichki chizilgan shar sirtidan qanchaga ortiq?

15.27. Sharga balandligi asosining diametriga teng bo'lgan konus ichki chizilgan. Agar konus asosining yuzi 2,4 ga teng bo'lsa, shar sirtining yuzini toping.

15.28. Sharga konus ichki chizilgan. Konusning yasovchisi asosining radiusiga teng. Shar hajmining konus hajmiga nisbatini toping.

15.29. Sharga ichki chizilgan konusning asosi sharning katta doirasiga teng. Konus o'q kesimining yuzi 36 ga teng. Sharning hajmini toping.

15.30. Radiusi 15 ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning balandligi 12 ga teng. Konusning hajmini toping.

15.31. Radiusi 6 ga teng bo'lgan shar konusga ichki chizilgan. Konus yasovchisi va balandligi orasidagi burchak 30° ga teng. Konus sirtining yuzini toping.

15.32. Balandligi $\sqrt{3}$ ga, yasovchisi $2\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan konusga tashqi chizilgan sharning radiusini toping.

15.33. Konusning yasovchisi 10 ga, asosining diametri 16 ga teng. Unga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.

15.34. Balandligi 10 ga, yasovchisi 20 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.

15.35. Yasovchi 24 ga, asosining radiusi 5 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan sharning radiusini toping.

15.36. Sharga ichki chizilgan konusning asosi sharning katta doirasiga teng. Konus o'q kesimining yuzi 9 ga teng. Sharning hajmini toping.

15.37. Sharga konus shunday ichki chizilganki, konusning yasovchisi asosining diametriga teng. Konusning to'la sirti shar sirti yuzining necha foizini tashkil etadi?

15.38. Teng tomonli konusga shar tashqi chizilgan. Shar sirtining konusning to'la sirtiga nisbatini toping.

15.39. Teng tomonli konusga ichki va tashqi shar chizilgan. Ichki chizilgan shar hajmi tashqi chizilgan shar hajmining necha foizini tashkil etadi?

15.40. Sferaga balandligi asosining diametriga teng bo'lgan konus ichki chizilgan. Agar sfera sirtining yuzi 125 ga teng bo'lsa, konus asosining yuzini toping.

15.41. Sharga balandligi asosining diametriga teng bo'lgan konus ichki chizilgan. Agar konus asosining yuzi 3,6 ga teng bo'lsa, shar sirtining yuzini toping.

15.42. Sharga ichki chizilgan konusning asosi sharning katta doirasiga teng. Konus o'q kesimining yuzi 48 ga teng. Sharning hajmini toping.

15.43. Radiusi 24 ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning balandligi 16 ga teng. Konusning hajmini toping.

15.44. Radiusi 16 ga teng bo'lgan shar konusga ichki chizilgan. Konus yasovchisi va balandligi orasidagi burchak 30° ga teng. Konus sirtining yuzini toping.

15.45. Konusning yasovchisi l va asos tekisligi bilan a burchak tashkil qiladi. Konusga tashqi chizilgan sharning hajmi hisoblansin.

15.46. Konusning o'q kesimi muntazam uchburchakdan iborat. Konusga tashqi va ichki chizilgan sferalar yuzlarning nisbati topilsin.

15.47. Sharga tashqi chizilgan kesik konusning yasovchilari o'rtalaridan o'tuvchi tekislik bilan shu kesik konus hosil qilgan kesimning yuzi 4π ga teng. Kesik konusning yasovchisini toping.

15.48. Kesik konusga shar ichki chizilgan. Konus ustki asosining yuzi 36π ga, ostki asosining yuzi esa 64π ga teng. Shar sirtining yuzini toping.

15.49. Kesik konusning yon sirti 20π ga, to'la sirti 36π ga teng. Konusning to'la sirti unga ichki chizilgan shar sirtidan qanchaga ko'p?

15.50. Kesik konus asoslarining yuzlari 9π va 25π ga teng. Agar bu konusga sharni ichki chizish mumkin bo'lsa, konusning yon sirtini toping.

15.51. Kesik konusga shar ichki chizilgan. Agar kesik konus asoslarining yuzlari π va 4π ga teng bo'lsa, shu konus yon sirtining yuzini toping.

15.52. Kesik konusning yasovchisi 13 sm, asoslaridan birining radiusi 4 sm. Agar shu kesik konusga sharni ichki chizish mumkin bo'lsa, uning yon sirti yuzi va hajmi hisoblansin.

15.53. Radiusi 12 sm bo'lgan sharga kesik konus tashqi chizilgan. Kesik konus asoslarining radiuslari nisbati 4:9 kabi bo'lsa, uning hajmi hisoblansin.

15.54. Radiusi 6 sm bo'lgan sharga yasovchisi 15 sm bo'lgan kesik konus tashqi chizilgan. Shar va kesik konus urinish chizig'ining uzunligi topilsin.

15.55. Asosining radiusi 9 sm bo'lgan konusga shar ichki chizilgan. Ularning urinish chizig'idan tekislik o'tkazilgan va bu tekislik konusning hajmini, uchidan hisoblaganda, 8:117 nisbatda bo'ladi. Sharining radiusi topilsin.

15.56. Konusga shar ichki chizilgan. Shar va konus urinish nuqtalaridan hosil bo'lgan aylananing radiusi r , konusning balandligi va yasovchisi orasidagi burchak α . Konusning hajmi hisoblansin.

15.57. Sharga konus ichki chizilgan. Konusning o'q kesimi yuzi $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}}$, konusning balandligi va yasovchisi orasidagi burchagi 45° ga teng. Sharining hajmini toping. javob: 4

15.58. O'q kesimi teng tomonli uchburchakdan iborat bo'lgan konusga ichki shar chizilgan. Agar sharining hajmi $\frac{32}{3}$ ga teng bo'lsa, konusning hajmini toping. javob: 24

15.59. Konusning asosi doirasi kubning asosiga ichki chizilgan doira, konusning uchi esa kubning yuqori asosi markazidan iborat. Agar kubning hajmi $\frac{444}{\pi}$ ga teng bo'lsa, konusning hajmini toping. javob: 37

15.60. Konusning asosi doirasi muntazam to'rtburchakli prizma asosiga ichki chizilgan doira, konusning uchi esa muntazam to'rtburchakli prizmaning yuqori asosi markazidan iborat. Agar konusning hajmi 17π ga teng bo'lsa, prizmaning hajmini toping. javob: 204

15.61. Konusning balandligi $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ va yasovchisi esa $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ ga teng. Markazi konusning asosida bo'lgan yarimshar konusga ichki chizilgan, shu sharining yon sirtini toping. javob: 2,4

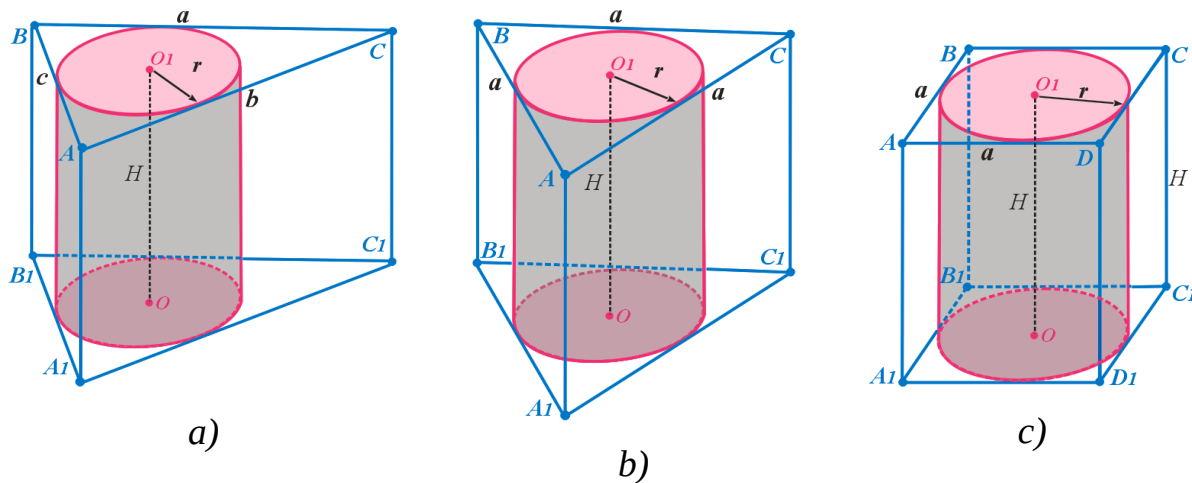
15.62. Konusning o'q kesimi uchidagi burchagi 60° ga teng. Konusga ichki chizilgan sharining hajmi $\frac{4}{5}$ ga teng. Konusning hajmini toping. javob: 1,8

Aylanish jismlari va ko'pyoqlarning kombinatsiyalarini o'rganamiz.

1-ta'rif. Prizma yoqlariga urinadigan silindrga prizma **ichki chizilgan silindr** deyiladi.

To'g'ri prizma ichki va tashqi chizilgan silindrlar to'g'ri silindrlar bo'ladi. Og'ma prizma ichki va tashqi chizilgan silindrlar og'ma silindrlar bo'ladi. Biz faqat to'g'ri prizma va silindrlar haqida so'z yuritamiz.

Ichki chizilgan silindrning radiusi prizma asosi ko'pburchagiga ichki chizilgan aylana radiusiga, silindrning balandligi esa prizma balandligiga teng bo'ladi. Xususan, prizma asosining tomonlari a, b, c bo'lgan uchburchak bo'lganda ichki chizilgan silindr radiusi $r = \frac{2S}{a+b+c}$ ga, muntazam uchburchak bo'lganda $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ga, kvadrat bo'lganda $r = \frac{a}{2}$ ga teng bo'ladi (15.15-rasm).



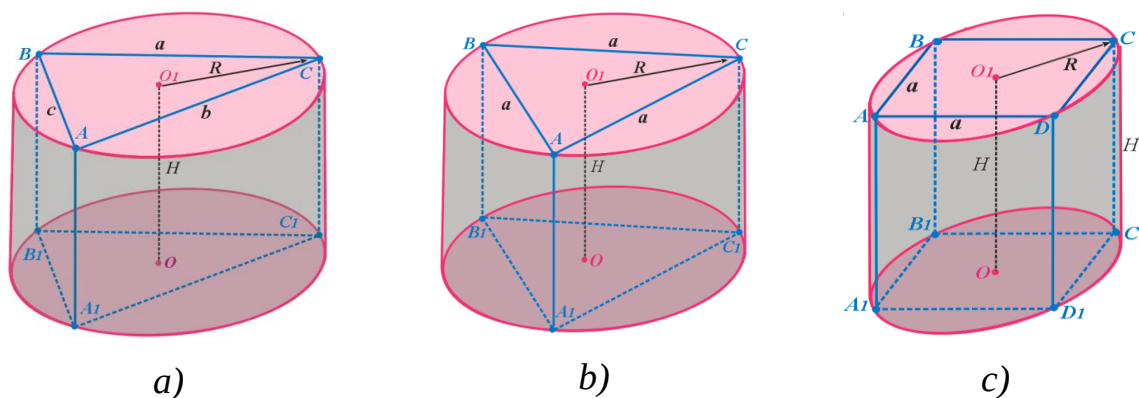
15.15-rasm

Asosi parallelogramm yoki to'g'ri to'rtburchaklar bo'lgan prizma ichki silindr chizib bo'lmaydi. Asosi romb yoki kvadrat bo'lgan prizma esa ichki silindr chizish mumkin.

2-ta'rif. Prizma yon qirralariga urinadigan silindrga prizma **tashqi chizilgan silindr** deyiladi.

Tashqi chizilgan silindrning radiusi prizma asosi ko'pburchagiga tashqi chizilgan aylana radiusiga, silindrning balandligi esa prizma balandligiga teng bo'ladi. Xususan, prizma asosi tomonlari a, b, c bo'lgan uchburchak bo'lganda tashqi chizilgan silindr radiusi $R = \frac{abc}{4S}$ ga, muntazam uchburchak bo'lganda

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ga, kvadrat bo'lganda $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ga teng bo'ladi (15.16-rasm)



15.16-rasm

Asosi parallelogramm yoki romb bo'lgan prizмага tashqi silindr chizib bo'lmaydi. Asosi to'g'ri to'rtburchak yoki kvadrat bo'lgan prizмага esa tashqi silindr chizish mumkin.

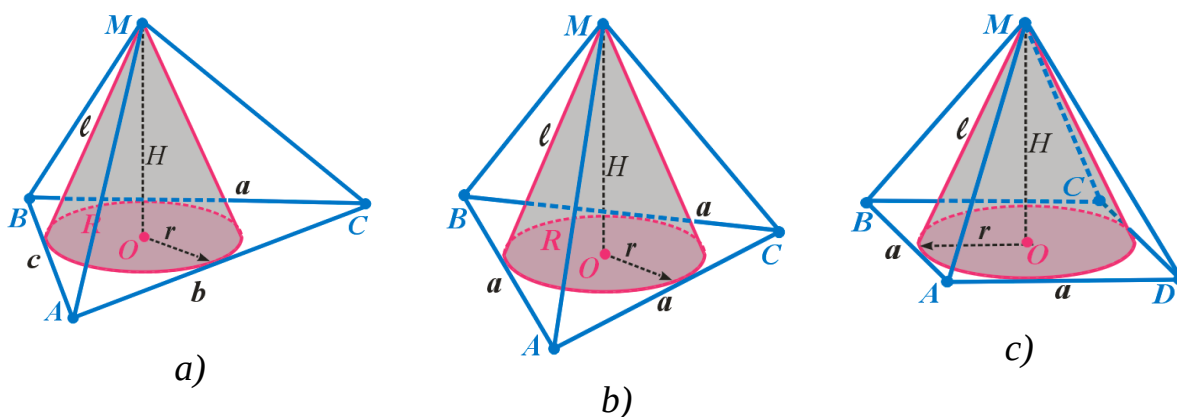
3-ta'rif. Piramida yoqlariga urinadigan konusga piramidaga **ichki chizilgan konus** deyiladi.

To'g'ri piramidaga ichki va tashqi chizilgan konuslar to'g'ri konuslar bo'ladi. Og'ma piramidaga ichki va tashqi chizilgan konuslar og'ma konuslar bo'ladi. Biz faqat to'g'ri piramida va konuslarni haqida so'z yuritamiz.

Ichki chizilgan konusning radiusi piramida asosi ko'pburchagiga ichki chizilgan aylana radiusiga, konusning balandligi esa piramida balandligiga teng bo'ladi. Piramida apofemasi konus yasovchisiga aylanadi. Xususan, piramida asosi tomonlari a, b, c bo'lgan uchburchak bo'lganda ichki chizilgan konus radiusi

$r = \frac{2S}{a+b+c}$ ga, muntazam uchburchak bo'lganda $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ga, kvadrat bo'lganda

$r = \frac{a}{2}$ ga teng bo'ladi (15.17-rasm).

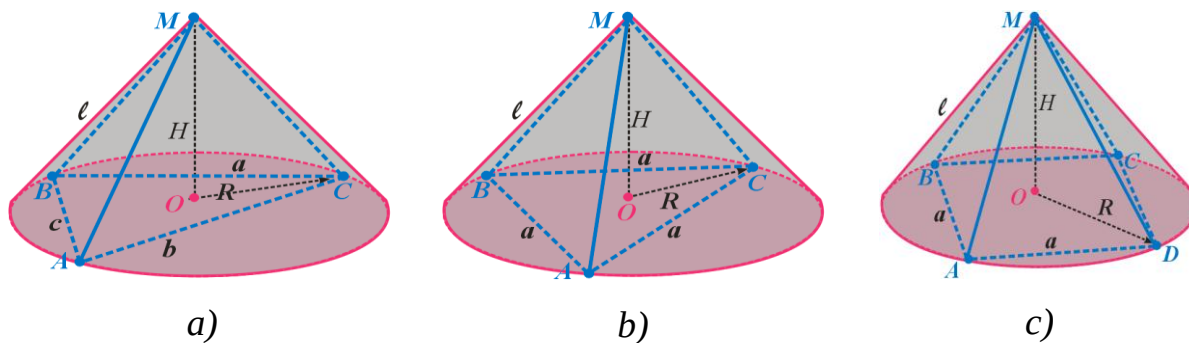


15.17-rasm

Asosi parallelogramm yoki to'g'ri to'rtburchaklar bo'lgan piramidaga ichki konus chizib bo'lmaydi. Asosi romb yoki kvadrat bo'lgan piramidaga esa ichki konus chizish mumkin.

4-ta'rif. Piramida yon qirralariga urinadigan silindrga piramidaga **tashqi chizilgan konus** deyiladi.

Tashqi chizilgan konusning radiusi piramida asosi ko'pburchagiga tashqi chizilgan aylana radiusiga, konusning balandligi esa piramida balandligiga teng bo'ladi. Piramida yon qirralari konus yasovchisiga aylanadi.



15.18-rasm

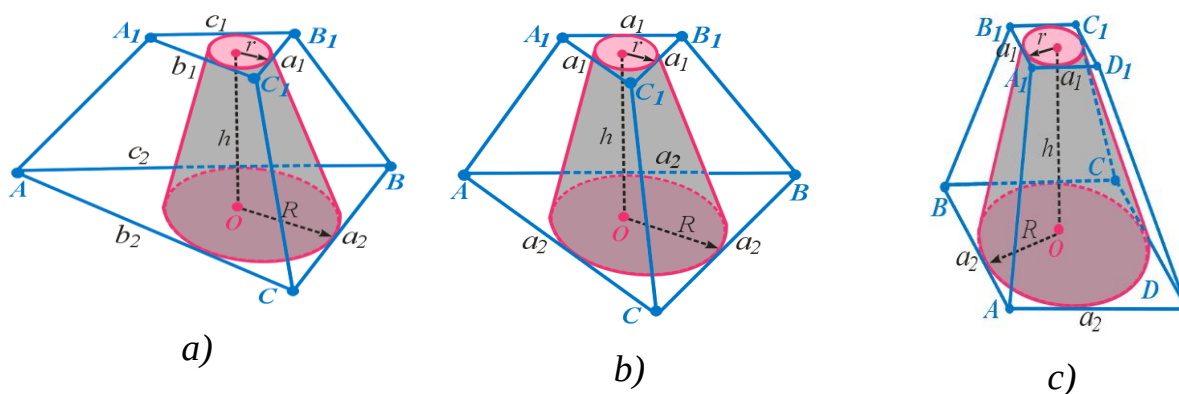
Xususan, piramida asosi tomonlari a, b, c bo'lgan uchburchak bo'lganda tashqi chizilgan konus radiusi $R = \frac{abc}{4S}$ ga, muntazam uchburchak bo'lganda $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ga, kvadrat bo'lganda $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ga teng bo'ladi (15.18-rasm).

Asosi parallelogramm yoki romb bo'lgan piramidaga tashqi konus chizib bo'lmaydi. Asosi to'g'ri to'rtburchak yoki kvadrat bo'lgan piramidaga esa tashqi konus chizish mumkin.

5-ta'rif. Kesik piramida yoqlariga urinadigan kesik konusga kesik piramidaga *ichki chizilgan kesik konus* deyiladi.

To'g'ri kesik piramidaga ichki va tashqi chizilgan kesik konuslar to'g'ri kesik konuslar bo'ladi. Og'ma kesik piramidaga ichki va tashqi chizilgan konuslar og'ma kesik konuslar bo'ladi. Biz faqat to'g'ri kesik piramida va to'g'ri kesik konuslar haqida so'z yuritamiz.

Kesik piramida va kesik konuslar umumiy balandlikka ega bo'lib, ichki chizilgan kesik konusning asoslar radiuslari kesik piramida asoslariga ichki chizilgan aylana radiuslariga teng bo'ladi. Xususan, kesik piramida asoslari tomonlari a_1, b_1, c_1 va a_2, b_2, c_2 bo'lgan uchburchak bo'lganda ichki chizilgan kesik konus asoslari radiuslari $r = \frac{2q}{a_1 + b_1 + c_1}$ va $r = \frac{2Q}{a_2 + b_2 + c_2}$ bo'ladi, bu yerda q va Q kesik piramidaning, mos ravishda, ustki va ostki asoslarining yuzi. Muntazam uchburchak bo'lganda esa $r = \frac{a_1}{2\sqrt{3}}$ va $R = \frac{a_2}{2\sqrt{3}}$ ga, kvadrat bo'lganda esa $r = \frac{a_1}{2}$ va $R = \frac{a_2}{2}$ ga teng bo'ladi (15.19-rasm).



15.19-rasm

Asoslari parallelogramm yoki to'g'ri to'rtburchaklar bo'lgan kesik piramidaga ichki konus chizib bo'lmaydi. Asoslari romb yoki kvadrat bo'lgan kesik piramidaga esa ichki konus chizish mumkin.

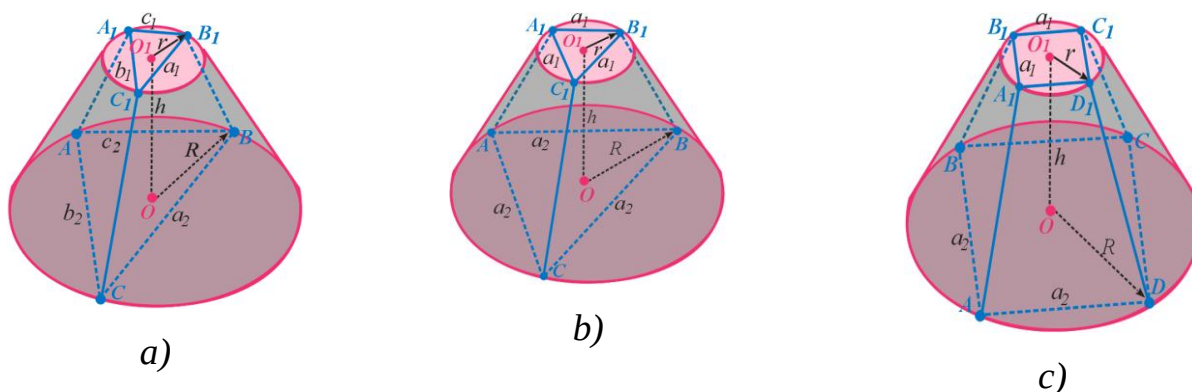
6-ta'rif. Kesik piramida qirralariga urinadigan kesik konusga kesik piramidaga **tashqi chizilgan kesik konus** deyiladi.

Kesik piramida va kesik konuslar umumiy balandlikka ega bo'lib, tashqi chizilgan kesik konusning asoslar radiuslari kesik piramida asoslariga tashqi chizilgan aylana radiuslariga teng bo'ladi. Xususan, kesik piramida asoslari tomonlari a_1, b_1, c_1 va a_2, b_2, c_2 bo'lgan uchburchak bo'lganda tashqi chizilgan

kesik konus asoslari radiuslari $r = \frac{a_1 b_1 c_1}{4q}$ va $Q = \frac{a_2 b_2 c_2}{4Q}$, muntazam uchburchak

bo'lganda $r = \frac{a_1}{\sqrt{3}}$ va $R = \frac{a_2}{\sqrt{3}}$ ga, kvadrat bo'lganda $r = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ va $R = \frac{a_2}{\sqrt{2}}$ ga teng

bo'ladi (15.20-rasm).

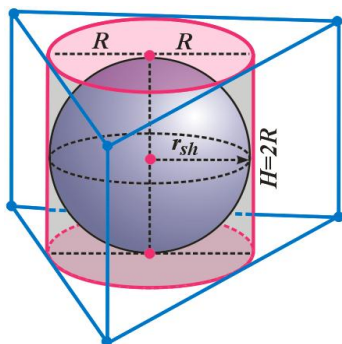


15.20-rasm

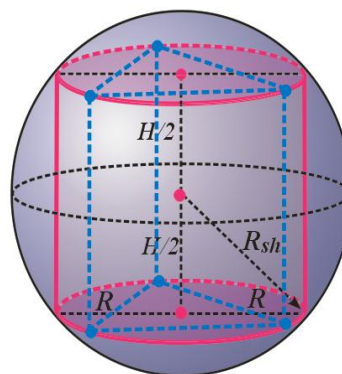
Asoslari parallelogramm yoki romb bo'lgan kesik piramidaga tashqi kesik konus chizib bo'lmaydi. Asoslari to'g'ri to'rtburchak yoki kvadrat bo'lgan kesik piramidaga esa tashqi kesik konus chizish mumkin.

7-ta'rif. Prizma yon yoqlari va asoslariga urinadigan sharga prizma *ichki chizilgan shar* deyiladi.

Prizmaga ichki chizilgan shar bir vaqtning o'zida bu prizma ichki chizilgan silindrga ham ichki chizilgan shar hisoblanadi. Shuning uchun ichki chizilgan shar radiusi – bu ichki chizilgan silindr asosining radiusiga teng bo'lib, bu radius esa prizma balandligining yarmiga teng bo'ladi (15.21-rasm).



15.21-rasm

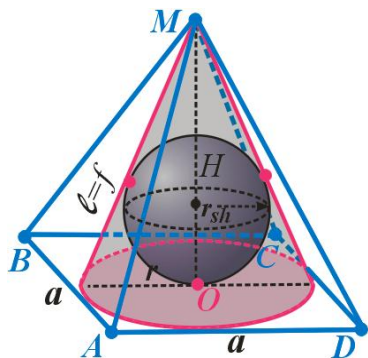


15.22-rasm

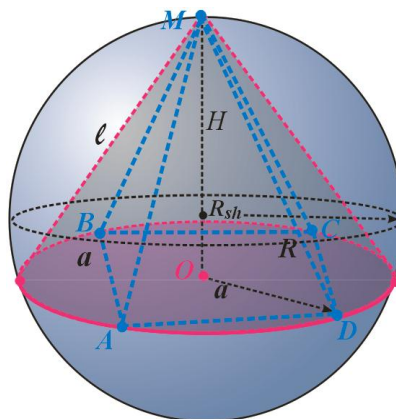
8-ta'rif. Prizma uchlariga urinadigan sharga prizma *tashqi chizilgan shar* deyiladi.

Prizmaga tashqi chizilgan shar bir vaqtning o'zida bu prizma tashqi chizilgan silindrga ham tashqi chizilgan shar hisoblanadi. Shuning uchun tashqi chizilgan shar radiusi silindr asosining radiusi va balandlik orqali quyidagicha bog'lanadi (15.22-rasm):

$$R_{sh} = \sqrt{R_{slind}^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}.$$



15.23-rasm



15.24-rasm

9-ta’rif. Piramida yon yoqlari va asosiga urinadigan sharga piramidaga **ichki chizilgan shar** deyiladi.

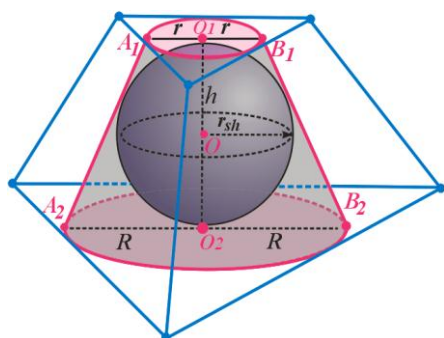
Piramidaga ichki chizilgan shar bir vaqtning o‘zida bu piramidaga ichki chizilgan konusga ham ichki chizilgan shar hisoblanadi. Shuning uchun piramidaga ichki chizilgan shar radiusi konusga ichki chizilgan shar radiusiga teng bo‘ladi (15.23-rasm).

10-ta’rif. Piramida uchi va asos aylanasi ga urinadigan shar piramidaga **tashqi chizilgan shar** deyiladi.

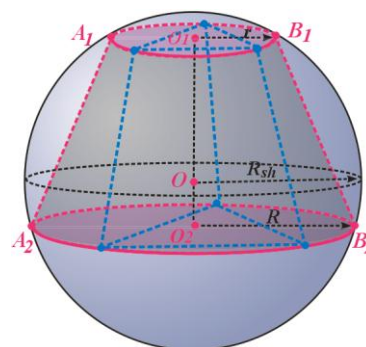
Piramidaga tashqi chizilgan shar bir vaqtning o‘zida bu piramidaga tashqi chizilgan konusga ham tashqi chizilgan shar hisoblanadi (15.24-rasm).

11-ta’rif. Kesik piramida yon yoqlari va asoslariga urinadigan sharga kesik piramidaga **ichki chizilgan shar** deyiladi.

Kesik piramidaga ichki chizilgan shar bir vaqtning o‘zida bu kesik piramidaga ichki chizilgan kesik konusga ham ichki chizilgan shar hisoblanadi. Shuning uchun kesik piramidaga ichki chizilgan shar radiusi kesik konusga ichki chizilgan shar radiusiga teng bo‘ladi (15.25-rasm).



15.25-rasm



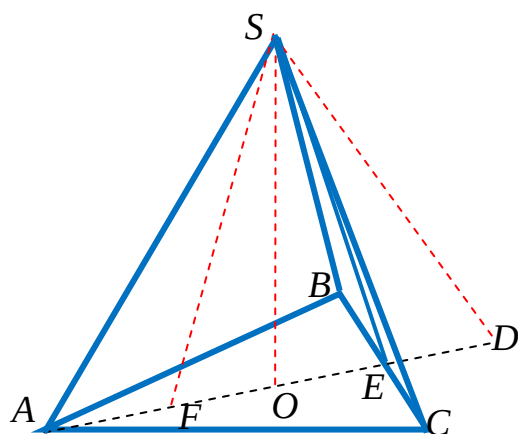
15.26-rasm

12-ta'rif. Kesik piramida uchlariga urinadigan sharga kesik piramidaga *tashqi chizilgan shar* deyiladi.

Kesik piramidaga tashqi chizilgan shar bir vaqtning o'zida bu piramidaga tashqi chizilgan konusga ham tashqi chizilgan shar hisoblanadi (15.26-rasm).

1-masala. Uchburchakli muntazam piramidaning qirrasi 13 ga va balandligi 12 ga teng bo'lsa, bu piramidaga tashqi va ichki chizilgan sharning radiusini toping.

Yechish. Piramidaning asosi ABC muntazam uchburchak bo'lib, uning tomoni a deb belgilasak (15.27-rasm). Piramidaning balandligi uning medianalari kesishish nuqtasiga tushadi. $AO = \frac{2h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $OE = \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.



15.27-rasm

Piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusi ASD teng yonli uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusiga teng.

$$AS^2 = AO^2 + SO^2 \Rightarrow$$

$$AO = \sqrt{AS^2 - SO^2} = \sqrt{169 - 144} = 5, \quad AD = 2AO = 10.$$

Bundan

$$R = \frac{AS \cdot AD \cdot SD}{4S_{ASD}} = \frac{AS \cdot AD \cdot SD}{4 \cdot \frac{SO \cdot AD}{2}} = \frac{13 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{169}{24}.$$

Piramidaga ichki chizilgan sharning radiusi ESF teng yonli uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusiga teng. $EO = \frac{AS}{2} = 2,5$, $EF = 2EO = 5$.

$$\text{Bundan } r = \frac{2S_{ESF}}{P_{ESF}} = \frac{2 \frac{SO \cdot EF}{2}}{ES + FS + EF} = \frac{2 \frac{12 \cdot 5}{2}}{13 + 13 + 5} = \frac{60}{31}.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

15.63. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi va yon yog'i orasidagi burchagi 30° ga teng. Agar piramidaga ichki chizilgan sharning radiusi 1 ga teng bo'lsa, piramidaning asos tomoni uzunligini toping. javob: 6

15.64. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi va yon yog'i orasidagi burchagi 30° ga teng. Agar piramidaga ichki chizilgan sharning radiusi $2\sqrt{21}$ ga teng bo'lsa, piramidaning yon qirradi uzunligini toping. javob: 42

15.65. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi va yon yog'i orasidagi burchagi 30° ga teng. Agar piramidaga ichki chizilgan sharning radiusi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, piramidaning hajmini toping. javob: 81

15.66. Uchburchakli muntazam piramidaning apofemasi $\sqrt[4]{3}$ ga teng. Piramidaga ichki chizilgan shar markazi piramida uchidan shar radiusidan ikki marta uzoq masofada joylashgan. Piramidaning asos yuzini toping. javob: 2,25

15.67. Uchburchakli muntazam piramidaning apofemasi 5 ga va balandligi 4 ga teng bo'lsa, bu piramidaga ichki chizilgan sharning radiusini toping. javob: 1,5

15.68. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi va yon yog'i orasidagi burchagi 30° ga teng. Agar piramidaga ichki chizilgan sharning radiusi $\sqrt[4]{3}$ ga teng bo'lsa, piramidaning yon sirtini toping. javob: 54

15.69. Uchburchakli muntazam piramidaga ichki chizilgan sharning radiusi piramida balandligidan 3 marta kichik. Piramidaning yon yog'i va asos tekisligi orasidagi burchak kosinusini toping. javob: 0,5

15.70. Uchburchakli muntazam piramidaning barcha qirralari uzunliklari $\sqrt{1,5}$ ga teng bo'lsa, piramidaga ichki chizilgan sharning radiusini toping. javob: 0,25

15.71. Muntazam tetraedrga ichki chizilgan sharning radiusi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, bu tetraedrning hajmini toping. javob: 72

15.72. Muntazam tetraedrga ichki chizilgan sharning radiusi $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ga teng bo'lsa, bu tetraedrning qirrasi uzunligini toping. javob: 8

15.73. Uchburchakli muntazam piramidaning qirrasi $\sqrt{3}$ ga teng va asos tekisligi bilan 60° hosil qiladi. Bu piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusini toping. javob: 1

15.74. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirrasi asos tekisligi bilan 30° burchak hosil qiladi. Bu piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusi 4 ga teng bo'lsa, bu piramidaning balandligini toping. javob: 2

15.75. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi 1 ga va tashqi chizilgan sharning radiusi 8 ga teng bo'lsa, piramidaning balandligi va yon qirrasi orasidagi burchakni toping. javob: 0,25

15.76. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi 2 ga va tashqi chizilgan sharning radiusi 1,25 ga teng bo'lsa, yon yog'i va asos tekisligi orasidagi burchakning tangensini toping. javob: 4

15.77. Uchburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni $\sqrt{3}$ ga va yon qirrasi $\sqrt{5}$ ga teng bo'lsa, bu piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusini toping. javob: 1,25

15.78. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirrasi uzunligi 1 ga va tashqi chizilgan sharning radiusi 1 ga teng bo'lsa, piramidaning asosi tomoni uzunligini toping. javob: 1,5

15.79. Uchburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi $\sqrt{6}$ ga va tashqi chizilgan sharning radiusi $\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, piramidaning yon qirrasi uzunligini toping. javob: 2

15.80. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi $\sqrt{\frac{11}{3}}$ va bu piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusi uzunligi $2,5\sqrt{\frac{3}{11}}$ ga teng bo'lsa, bu piramidaning apofemasi uzunligini toping. javob: 2

15.81. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirrasi uzunligi $\sqrt{10}$ ga va tashqi chizilgan sharning radiusi $5\sqrt{\frac{3}{26}}$ ga teng bo'lsa, bu piramidaning apofemasi uzunligini toping. javob: 3

15.82. Uchburchakli muntazam piramidaning apofemasi uzunligi $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ga va asosi tomoni uzunligi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, bu piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusini toping. javob: 1

15.83. Yasovchisi 15 ga teng konusga ichki ravishda asosi tomonlari 6, 8 va 10 ga teng bo'lgan uchburchakli piramida chizilgan. Konusning yon sirtini hisoblang. javob: 75π

15.84. To'rtburchakli muntazam piramidada asosi tomoni $2\sqrt{3}$ ga va balandligi $\sqrt{3}$ ga teng. Bu piramidaga ichki chizilgan sferaning radiusini toping. javob: $\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$

15.85. Oltiburchakli prizмага ichki chizilgan sharning radiusi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, prizmaning yon sirtini yuzini toping. javob: 18

15.86. Muntazam tetraedrga ichki chizilgan sharning radiusi 1 ga teng bo'lsa, tetraedrning qirrasi uzunligini toping. javob: $2\sqrt{\frac{2}{3}}$

15.87. Sharning tashqarisiga prizma chizilgan. Prizma asosi, diagonallari 6 va 8 ga teng bo'lgan rombdan iborat. Prizmaning to'la sirtini toping. javob: 72

15.88. Kesik konus ichiga shar ichki chizilgan. Agar konus asosi radiuslari 8 va 2 ga teng bo'lsa, sharning radiusini toping. javob: 4

15.89. Piramidaning asosi kvadratdan iborat va kvadratning tomoni uzunligi $a = 2\sqrt{21}$ ga teng. Piramidaning balandligi asosining bir tomonidan o'tadi va uzunligi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ga teng. Bu piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusini toping. javob: $4\sqrt{3}$

15.90. To'g'ri prizмага ichki ravishda yon sirti 5π ga teng silindr chizilgan. Prizma asosi o'tkir burchagi 60° ga teng rombdan iborat. Silindr o'qidan prizma yon yog'ining diagonaligacha bo'lgan masofa $5\sqrt{3}$ ga teng. Prizmaning hajmini toping. javob: 100

15.91. Uchburchakli muntazam prizma ichiga ikkita shar chizilgan. Birinchi shar prizмага ichki chizilgan va ikkinchi sharning radiusi $3 - \sqrt{5}$ ga teng. Ikkinchi shar esa prizma asosiga, prizma ikki yon yog'iga va birinchi sharga urinadi. Birinchi sharning radiusini toping. javob: 2

15.92. $SABCD$ to'rtburchakli muntazam piramida bo'lib, 10 radiusli sfera piramidaning A va S uchidan o'tib, SC qirrasini S uchidan hisoblaganda 1:7 nisbatda bo'ladi. Agar piramidaning yon qirradi uzunligi 20 ga teng bo'lsa, piramidaning balandligini toping. javob: 15

15.93. $\sqrt{3}$ radiusli sfera piramidaning barcha yon yoqlariga asos tomonlaridagi nuqtalarda urinadi. Piramidaning asosi rombdan iborat. Rombning tomoni 4 ga teng va bir burchagi 135° ga teng. Piramidaning hajmini toping. javob: $16\sqrt{2}$

15.94. Uchburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni 2 ga teng. Yon qirradi 3 ga teng. Bu piramidaga ichki chizilgan sferaning radiusini toping. javob: 12

15.95. Konusning asosi radiusi 2 ga teng, konus balandligining o'rtasidan asos tekisligiga parallel tekislik o'tkazilgan kesim yuzini toping. javob: π

15.96. Konusning balandligi $2\sqrt{3}$ va konusning yasovchisi asos tekisligi bilan 60° hosil qiladi. Konusning yon sirtini toping. javob: 8π

15.97. Silindrning o'q kesimi diagonalasi asos tekisligiga 45° da oqqan. Silindr asosining yuzi 100π ga teng. Silindrning yon sirti yuzini toping. javob: 400π

15.98. Konusning o'q kesimi teng yonli uchburchak. Konusning to'la sirti 18 ga teng. Konusning asosi yuzini toping. javob: 6

15.99. Konusning o'q kesimi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Konusning asosi yuzasi 9π ga teng. Konusning yon sirti yuzini toping. javob: $9\pi\sqrt{2}$

15.100. Sharning kesimi yuzi 80π ga va kesim markazidan 8 ga teng uzoqlikda. Sharning hajmini toping. javob: 1304π

15.101. Shar va tekislik kesimi chizig'i uzunligi 12π va shar diametri esa 16 ga teng. Shar markazidan kesim tekisligigacha bo'lgan masofani toping. javob: $2\sqrt{7}$

15.102. Radiusi 13 ga teng bo'lgan shar markazidan 4 va 12 masofada, ikkita o'zaro perpendikular kesimlar o'tkazilgan. Bu kesimlarning umumiy vatari uzunligini toping. javob: 6

15.103. Silindr asosi aylanasi uzunligi 8π ga teng. O'q kesimi diagonalasi esa 10 ga teng. Silindrning hajmini toping. javob: 96π

15.104. Silindrning o'q kesimi diagonalalari o'zaro perpendikular va silindr balandligi 10 ga teng bo'lsa, silindrning yon sirti yuzini toping. javob: 100π

15.105. Sharning hajmi $\frac{256\pi}{3}$ ga teng bo'lsa, sharning to'la sirtini toping. javob: 64π

15.106. Konusning yasovchisi 6 ga teng. Yon sirtining yoyilmasidagi hosil bo'lgan burchak 60° bo'lsa, konusning hajmini toping. javob: $\pi\sqrt{35}$

15.107. Konusning yasovchisi asos tekisligi bilan 60° burchak hosil qiladi. Konusning asosi markazidan konus yasovchisigacha bo'lgan masofa 8 ga teng. Konusning hajmini toping. javob: 256π

15.108. Silindr va konus asoslari umumiy va asos radiusi $6\sqrt{3}$ ga teng. O'q kesimi uchidagi burchagi 120° ga teng. Silindr va konus hajmlari teng bo'lsa, silindrning yon sirti yuzini toping. javob: $24\sqrt{3}\pi$

15.109. Radiusi 9 ga teng yarimsharga o'q kesimi kvadratdan iborat va o'qi yarimsharning aylanish o'qidan iborat silindr ichki chizilgan. Bu silindrning hajmini toping. javob: $\frac{5832\pi\sqrt{5}}{100}$

15.110. Kesik konusning asos radiuslari 5 va 2 ga teng. Konusning balandligi 4 ga teng. Kesik konus yon sirti yoyilganda hosil bo'lgan markaziy burchakni toping. javob: 216

15.111. Kesik konusning asos radiuslari 50 va 10 ga teng. Bu konusning yasovchisi orqali o'tgan tekislik asos yoyining 90° ni qamrab oladi va asos tekisligi bilan 60° hosil qiladi. Bu kesimning yuzini toping. javob: 75

15.112. 60° li ikki yoqli burchakning yoqlariga urinadigan sfera ichki chizilgan. Agar sferaning markazidan ikki yoqli burchakning qirrasigacha bo'lgan masofa 26 ga teng bo'lsa, sferaning radiusini toping. javob: 13

15.113. Konusning o'q kesimi uchidagi burchagi 60° ga teng. Konusning sirti yoyilmasidagi markaziy burchakni toping. javob: 180

15.114. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning AD_1 va $D_1 B_1$ diagonallarida olingan E va F nuqtalar uchun $D_1 E = \frac{1}{3} AD_1$ hamda $D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1$ tengliklar o'rinli. EF kesma uzunligini toping. Javob $\frac{\sqrt{6}}{3}$

15.115. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning AD_1 va $D_1 B_1$ diagonallarida olingan E va F nuqtalar uchun $D_1 E = \frac{1}{3} AD_1$ hamda $D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1$ tengliklar o'rinli. D_1 nuqtadan EF kesmagacha bo'lgan masofani toping. Javob $\frac{\sqrt{2}}{3}$

15.116. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubda $\tilde{N}_1$ uchidan $AB_1 C$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping. Javob: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15.117. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubda $\dot{A}_1$ uchidan BDC_1 tekislikkacha bo'lgan masofani toping. javob: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

15.118. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubda $\dot{A}_1 \tilde{N}_1$ va AD_1 diagonallar orasidagi masofani toping. Javob: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15.119. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ to'rtburchakli kesik piramidaning asosi tomonlari a va b ($a > b$) ga hamda balandligi h ga teng. Bu piramidaning BD_1 diagonal va asosining katta diagonal AC orasidagi masofani toping. javob: $\frac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$

15.120. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning BD_1 diagonal va yog'ining AB_1 diagonal orasidagi masofani toping. javob: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

15.121. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning CD va $C_1 D_1$ qirralarida olingan E va F nuqtalar uchun $DE = \frac{1}{3}DC$ hamda $C_1 F = \frac{1}{3}C_1 D_1$ tengliklar o'rinli. AE va DF chiziqlar orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{2}{\sqrt{130}}$

15.122. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning DD_1 , BC , AA_1 va $B_1 C_1$ qirralari o'rtalari E , F , P , Q nuqtalar. EF va PQ chiziqlar orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{1}{3}$

15.123. $ABCA_1 B_1 C_1$ muntazam prizmaning barcha qirralari uzunliklari 1 ga teng. AB_1 chiziq va $\dot{A} \dot{A}_1 \tilde{N}_1 \tilde{N}$ tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$

15.124. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning AD_1 chizig'i va $A_1 EF$ tekislik orasidagi burchakni toping, bunda E nuqta $C_1 D_1$ qirrasining o'rtasi, F nuqta esa DD_1 qirrada va uni $D_1 F = 2DF$ tarzda bo'ladi. javob: $\arcsin \frac{5}{\sqrt{58}}$

15.125. Oltiburchakli muntazam $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ prizmaning barcha qirralari uzunligi a ga teng. AB_1 chiziq va ACE_1 tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arcsin \frac{2\sqrt{26}}{13}$

15.126. To'rtburchakli muntazam $SABCD$ piramidaning barcha qirralari uzunliklari a ga teng. ASB yon yog'ining apofemasi SF ning o'rtasi E nuqta bo'lsa, DE chiziq va ASC tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arcsin \frac{3}{\sqrt{30}}$

15.127. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning AB_1C va BC_1D tekisliklari orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{1}{3}$

15.128. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning AD_1E va D_1FC tekisliklar orasidagi burchakni toping, bunda E va F nuqtalar, mos ravishda, $\hat{A}_1 \hat{A}_1$ va $\hat{A}_1 \hat{N}_1$ qirralar o'rtalari. javob: 60°

15.129. Oltiburchakli muntazam $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ prizmaning asosi tomoni uzunligi 1 ga va yon qirralari uzunligi 2 ga teng. BA_1D_1 va AA_1E_1 tekisliklar orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \sqrt{\frac{12}{19}}$

15.130. $ABCA_1B_1C_1$ muntazam prizmaning barcha qirralari uzunliklari 1 ga teng. $\hat{A}_1 \hat{A}_1 \hat{N}$ va $\hat{A}_1 \hat{A}_1 \hat{N}$ tekisliklar orasidagi burchakning kosinus qiymatini toping. javob: $\frac{5}{7}$

15.131. To'rtburchakli muntazam prizmaning d diagonalini yon yog'i tekisligi bilan α burchak hosil qiladi. Prizmaning yon sirti yuzini toping. javob: $4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$

15.132. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubda M nuqta B_1C_1 qirraning o'rtasi, N nuqta esa B_1D diagonalda olingan va $B_1N = 2ND$ o'rinli. M, N nuqtalardan o'tuvchi va A_1C_1 chiziqqa parallel bo'lgan kubning kesimi yuzini toping. javob: $\frac{27\sqrt{57}}{160}$

15.133. Uchburchakli og'ma $ABCA_1B_1C_1$ prizmaning yon qirralari uzunligi 6 ga teng. Yon yoqlariga perpendikular o'tkazilgan kesim uchburchakdan iborat bo'lib,

uning tomonlari 9:10:17 nisbatda. Agar A_1ABC piramidaning hajmi 288 ga teng bo'lsa, bu prizma yon sirtining yuzini toping. javob: 432

15.134. Birlik kubning yon yog'i diagonalida olingan M va N nuqtalar uchun $MN = \frac{1}{2}$, bu diagonalga ayqash diagonalda olingan P va Q nuqtalar uchun $PQ = \frac{1}{3}$ bo'lsa, $MNPQ$ tetraedrning hajmini toping. javob: $\frac{1}{72}$

15.135. $ABCD$ piramidada $AB=4$, $BC=5$, $AD=6$, $BD=7$, $\tilde{N}A=8$ qirradagi ikki yoqli burchak 60° ga teng bo'lsa, $ABCD$ ning hajmini toping. javob: $\frac{153\sqrt{35}}{64}$

15.136. n burchakli muntazam piramidaning yon qirrasi uzunligi l ga teng. Bu piramida hajmining eng katta qiymatini toping. javob: $\frac{n}{9\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot l^3$