

13-BOB

KO'PYOQLARNING HAJMLARI

1-§. Hajm tushunchasi. Parallelepipedning hajmi

Tekislikda shakllar uchun yuz tushunchasi kiritilgani kabi, fazoviy geometrik jismlar uchun hajm tushunchasi kiritiladi. Geometrik jismni chekli sondagi uchburchakli piramidalarga ajratish mumkin bo'lsa, u sodda geometrik jism deyiladi. Sodda geometrik jismning hajmi u egallab turgan fazoning sonli qiymatini aniqlaydi.

Dast avval hajm aksiomalarini keltiramiz:

- ✓ har bir o'lchanayotgan sodda geometrik jismning hajmi nomanfiy miqdordir;
- ✓ agar jismni umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan sodda jismlarga ajratish mumkin bo'lsa, jismning hajmi uni tashkil etuvchi sodda jismlar hajmlari yig'indisiga teng;
- ✓ teng jismlar teng hajmlarga ega;
- ✓ qirrasi uzunlik birligiga teng bo'lgan kubning hajmi birga teng.

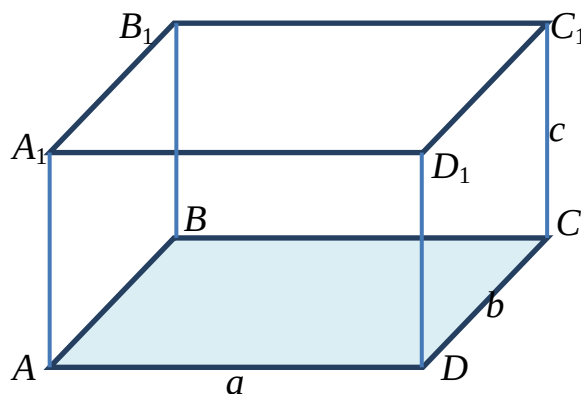
Ko'pyoqlilarning hajmini o'lchash berilgan birlik kubdan shu jism ichiga nechtasini joylash mumkinligini bildiradi. Agar kubning qirrasi 1 sm ga teng bo'lsa, u holda uning hajmi 1 sm^3 , agar kubning qirrasi 1 m ga teng bo'lsa, uning hajmi m^3 bo'ladi.

1-teorema. To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi uning uchta o'lchami: uzunligi a , eni b va balandligi c ko'paytmasiga teng:

$$V=a \cdot b \cdot c.$$

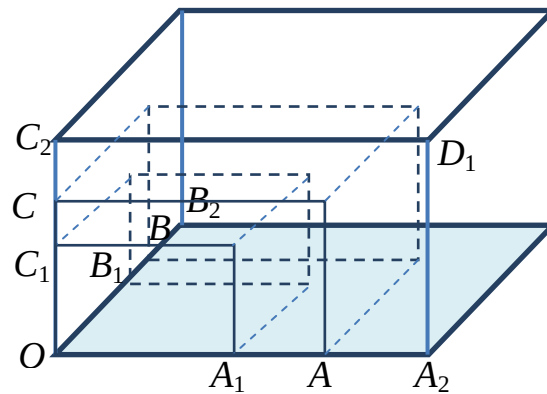
Isbot. Faraz qilaylik, a, b, c lar butun sonlar bo'lsin. a, b, c qirralarning har birini birlik kesmalarning butun soniga bo'lib chiqamiz (13.1- rasm). So'ngra bo'linish nuqtalaridan parallelepipedning yoqlariga parallel tekisliklar o'tkazamiz. Natijada parallelepiped birlik kublarga bo'linadi (ya'ni chiziqli o'lchamlari 1 ga

teng bo'lgan kublar). Unda parallelepipedning asosidagi birinchi qatorda bunday kublarning soni $a \cdot b$ ta bo'ladi. Modomiki, parallelepipedning balandligi c ga teng ekan, bunday qatorlar soni c ta bo'ladi. Shunday qilib, parallelepipedning hajmi $V = a \cdot b \cdot c$ bo'ladi.



13.1-rasm

To'g'ri burchakli parallelepipedning a, b, c o'lchamlari kasr sonlar orqali ifodalangan bo'lsin. Bu kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz, u holda ular $\frac{A}{n}, \frac{B}{n}, \frac{C}{n}$ ko'rinishda yoziladi. Endi o'lchamlar butun sonlar bilan ifodalanishi uchun eski o'lchov birligining $\frac{1}{n}$ qismiga teng bo'lgan yangi o'lchov birligi kiritamiz. Buning natijasida hajm birligi ham o'zgarib, eski hajm birligining $\frac{1}{n^3}$ qismiga teng bo'ladi. Natijada hajm uchun $V = \frac{A}{n} \cdot \frac{B}{n} \cdot \frac{C}{n}$ yoki $V = a \cdot b \cdot c$ ifodani hosil qilamiz.



13.2-rasm

To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ irratsional sonlar bilan ifodalangan bo'lsin (13.2-rasm). Irratsional son cheksiz o'nli kasr bo'lishi mumkin. Bu kasrlarning n ta o'nli raqamli taqribiy qiymatlarini, avval kami bilan a_n , b_n , c_n ko'rinishda, so'ngra ko'pi bilan a'_n , b'_n , c'_n ko'rinishda olamiz. Bu kesmalarni parallelepipedning qirralarida O nuqtadan boshlab joylashtiramiz: $OA_1 = a_n$, $OB_1 = b_n$, $OC_1 = c_n$ va $OA_2 = a'_n$, $OB_2 = b'_n$, $OC_2 = c'_n$. Bunda $OA_1 < OA < OA_2$, $OB_1 < OB < OB_2$, $OC_1 < OC < OC_2$ munosabatlar bajariladi. So'ngra biz ikkita qo'shimcha parallelepiped yasaymiz. Ulardan birining qirralari OA_1, OB_1, OC_1 , ikkinchisining esa OA_2, OB_2, OC_2 bo'ladi. Bunda ularning birinchisi berilgan parallelepipedning ichida yotadi, ikkinchisi esa berilgan parallelepipedni o'z ichida saqlaydi.

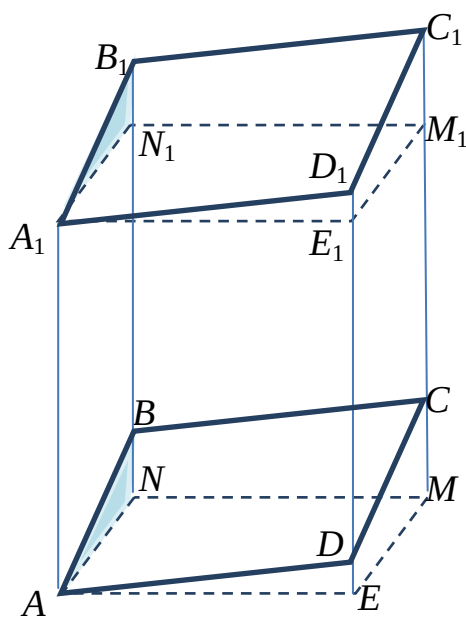
Yangi hosil qilingan to'g'ri burchakli parallelepipedlarning o'lchamlari ratsional sonlar bilan ifodalanganligidan, ularning V_1 va V_2 hajmlari, mos ravishda, $V_1 = a_n b_n c_n$ va $V_2 = a'_n b'_n c'_n$ bo'ladi hamda $V_1 < V_2$ munosabat o'rinli. Berilgan to'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi V uchun $V_1 < V < V_2$ tengsizlik bajariladi. Endi biz n ni cheksiz orttirib boramiz. Buning natijasida V_1 hajm ortib boradi, V_2 hajm esa kamayib boradi. Algebradan ma'lumki, ular umumiy limitga ega bo'ladi va bu limit a , b , c irratsional sonlarning ko'paytmasiga teng, ya'ni $V = a \cdot b \cdot c$.

To'g'ri burchakli parallelepipedning yon qirrasini balandligiga teng bo'lgani uchun, uning hajmi asosining yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng:

$$V = S_{asos} H.$$

2-teorema. Og'ma parallelepipedning hajmi shunday to'g'ri parallelepipedning hajmiga tengki, uning asosi og'ma parallelepipedning perpendikular kesimidan iborat, balandligi esa og'ma parallelepipedning yon qirrasiga tengdir.

Isbot. Berilgan $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ og'ma parallelepipedning A_1 uchidan AA_1 qirrasiga perpendikular tekislik o'tkazamiz (13.3-rasm). Kesimda og'ma parallelepipedning perpendikular kesimidan iborat $A_1 N_1 M_1 E_1$ to'rtburchak hosil bo'ladi. Og'ma parallelepipedning qirralarini davom ettirib, $ANME$ asosli to'g'ri parallelepipedni hosil qilamiz. AA_1 qirra $ANME A_1 N_1 M_1 E_1$ to'g'ri parallelepipedning balandligi vazifasini bajaradi.



13.3-rasm

Bundan og'ma parallelepipedning hajmi $V = S_{ANME} \cdot AA_1$ bo'ladi.

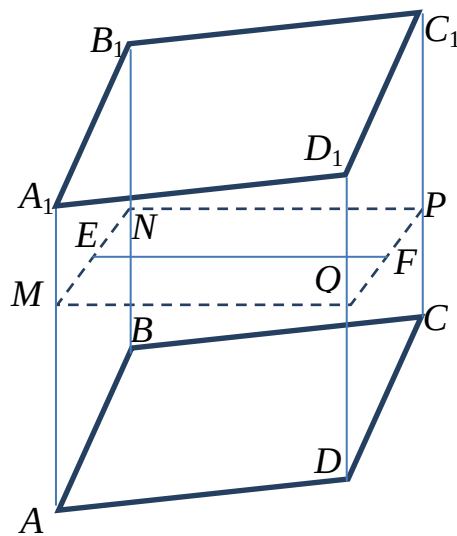
3-teorema. Ixtiyoriy parallelepipedning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

Isbot. Bizga $MNPQ$ perpendikular kesim o'tkazilgan $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ og'ma parallelepiped (13.4-chizma) berilgan bo'lsin. Bu parallelepiped asosi $MNPQ$ to'rtburchakdan, balandligi esa AA_1 qirranga teng bo'lgan to'g'ri parallelepipedga tengdoshdir. Uning hajmi uchun yuqorida isbotlanganiga ko'ra,

$$V = S_{MNPQ} \cdot AA_1$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Agar EF kesma $MNPQ$ to'rtburchakning balandligi bo'lsa, $V = EF \cdot MN \cdot AD$ bo'ladi. Modomiki, $EF \perp MN$ va EF parallelepiped perpendikular kesim tekisligida yotar ekan, EF parallelepipedning balandligidan iborat bo'ladi. Endi $AA_1 \perp EF$ bo'lganligidan, parallelepipedning hajmi $V = S_{AA_1B_1B} \cdot EF$ yoki $V = S_{asos} \cdot H$ bo'ladi.



13.4- rasm

1-masala. To'g'ri parallelepipedning asosi tomonlari 3 va 4 ga hamda ular orasidagi burchak 60° ga teng bo'lgan parallelogrammdan iborat. Agar parallelepipedning katta diagonali uzunligi $\sqrt{49}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping.

Yechish. $ABCD$ parallelogrammda $AB=3$, $AD=4$ va $\angle A = 60^\circ$ bo'lsa, uning diagonalini kosinuslar teoremasidan topamiz:

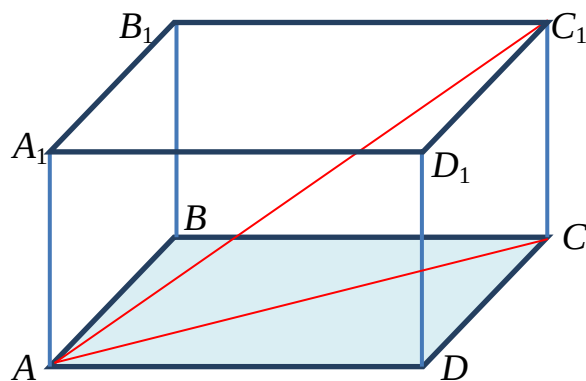
$$AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = 9 + 16 + 12 = 37 \Rightarrow AC = \sqrt{37}.$$

ACC_1 to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \Rightarrow CC_1^2 = 49 - 37 = 12 \Rightarrow CC_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

To'g'ri parallelepipedning hajmini $V = S_{asos} \cdot H$ formuladan topamiz:

$$S_{asos} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ va } V = S_{asos} \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 54.$$



13.5-rasm

Mustaqil ishlash uchun masalalar

13.1. Kub yog'ining diagonal $2\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, kubning hajmini toping.
javob:8

13.2. Kub asosining yuzi 9 ga teng bo'lsa, kubning hajmini toping. javob:
27

13.3. Kubning hajmi $2\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, kub yog'iga tashqi chizilgan doiraning radiusini toping. javob:1

13.4. To'g'ri parallelepipedning balandligi uzunligi $\sqrt{3}$ ga teng va parallelepipedning diagonallari asos tekisligi bilan 45° va 60° hosil qiladi. To'g'ri parallelepipedning asosi rombdan iborat. Bu parallelepipedning hajmini toping.
javob: 1,5

13.5. To'g'ri parallelepipedning asosi tomonlari 2 va 8 ga teng va bu tomonlar orasidagi burchak kattaligi 30° ga teng. Agar parallelepipedning yon sirti 10 ga teng bo'lsa, parallelepipedning hajmini toping. javob:4

13.6. To'g'ri parallelepipedning asosi tomonlari 1 va 4 ga hamda ular orasidagi burchak 60° ga teng bo'lgan parallelogrammdan iborat. Agar parallelepipedning katta diagonal uzunligi $\sqrt{33}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 12

13.7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning $A_1 B_1$, $B_1 B$ va $D_1 C_1$ qirralarining o'rtalaridan tekislik o'tkazilgan. Agar hosil bo'lgan kesim yuzi $8\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, bu kubning hajmini toping. javob: 64

13.8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning $A_1 B_1$, $D_1 C_1$ qirralari o'rtalari va B qirrasi orqali tekislik o'tkazilgan. Agar hosil bo'lgan kesim yuzi $\frac{9\sqrt{5}}{2}$ ga teng bo'lsa, bu kubning hajmini toping. javob: 27

13.9. To'g'ri parallelepipedning diagonal 13 ga, yon yoqlari diagonalari esa $4\sqrt{10}$ va $3\sqrt{17}$ ga teng bo'lsa, bu parallelepipedning hajmini toping. javob: 144

13.10. Parallelepipedning asosi tomonlari 2 va 8 ga teng, bu tomonlar 30° burchak tashkil qiladi. Parallelepipedning yon sirti 10 ga teng. Parallelepipedning hajmini toping. javob: 4

13.11. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning $A_1 C_1 D$ uchlaridan tekislik o'tkazilgan, bu tekislik kubning hajmini qanday nisbatda bo'ladi? javob: 1:5

13.12. To'g'ri parallelepipedning diagonal 1 ga teng bo'lib, bir yon yog'i bilan 30° va ikkinchi yon yog'i bilan 45° burchak tashkil qiladi. Parallelepipedning hajmini toping. javob: $\frac{\sqrt{2}}{8}$

13.13. Agar to'g'ri parallelepipedning diagonal 13 ga, yon yog'ining diagonalari $4\sqrt{10}$ va $3\sqrt{17}$ ga teng bo'lsa, parallelepipedning hajmini toping. javob: 144

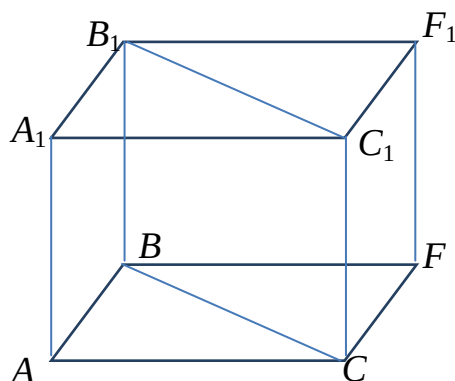
2-§. Prizmaning hajmi

Ko'pburchakli prizmaning hajmini topish uchburchakli prizmaning hajmini topishga keltiriladi. Shuning uchun dast avval uchburchakli prizmaning hajmini topish bilan shug'ullanamiz.

4-teorema. Uchburchakli prizmaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

Isbot. Bizga AC_1 uchburchakli prizma berilgan bo'lsin (13.6-rasm). Uning BB_1 qirrasi orqali $AA_1 C_1 C$ yog'iga parallel tekislik o'tkazamiz; CC_1 qirrasi orqali esa $AA_1 B_1 B$ yog'iga parallel tekislik o'tkazamiz. So'ngra prizma asoslari

tekisliklarini davom ettirib, hajmi $V = S_{ABFC} \cdot H$ bo'lgan $ABFCA_1B_1F_1C_1$ parallelepipedni hosil qilamiz.



13.6-rasm

Parallelepipedning BB_1C_1C diagonal kesimi uni ikkita tengdosh uchburchakli prizмага bo'ladi, chunki $\triangle ABC = \triangle BFC$ va ularning asoslari tekisliklari o'zaro paralleldir. Shuning uchun berilgan uchburchakli prizmaning hajmi

$$V = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} S_{ABFC} \cdot H$$

bo'ladi. Lekin $\frac{1}{2} S_{ABFC} = S_{\triangle ABC}$ bo'lganligidan,

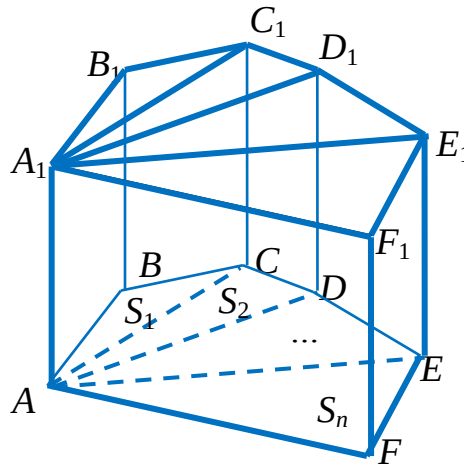
$$V = S_{\triangle ABC} \cdot H.$$

Agar bizga ko'pburchakli (masalan, n burchakli) prizma berilgan bo'lsa, uning bitta (masalan, AA_1) qirrasidan diagonal kesimlar o'tkazib, prizmani uchburchakli prizmalarga bo'lamiz (13.7-rasm). Yuqorida isbotlangan teoremdan foydalanib, prizmaning hajmi uchun $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ formulani hosil qilamiz yoki

$$V_{prizma} = S_1 H + S_2 H + \dots + S_n H = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) H = S_{asos} \cdot H.$$

Demak, ixtiyoriy prizmaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

$$V_{prizma} = S_{asos} \cdot H$$

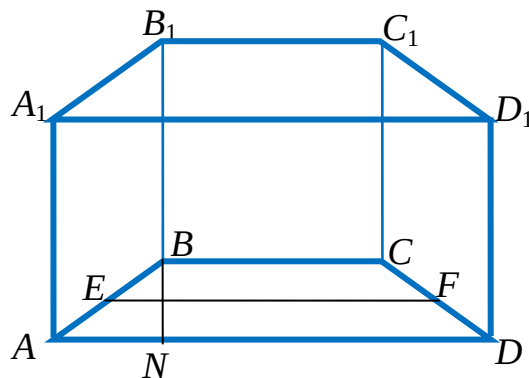


13.7-rasm

1-masala. To'g'ri prizmaning asosi teng yonli trapetsiyadan iborat bo'lib, trapetsiyaning yon tomoni 4 ga, o'rta chizig'i $2\sqrt{2}$ ga va o'tkir burchagi 45° ga teng. Agar to'g'ri prizma balandligi 6 ga teng bo'lsa, To'g'ri prizma hajmini toping. javob: 20

Yechish. Teng yonli trapetsiyaning yuzini topamiz. Shartga ko'ra $AB=4$, $EF=2\sqrt{2}$, $AA_1 = H = 6$ ga teng (13.8-rasm). ABN to'g'ri burchakli uchburchakdan $BN = AB \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$. Bundan trapetsiyaning yuzi:

$$S_{asos} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BN = EF \cdot BN = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8.$$



13.8-rasm

Prizmaning hajmini $V_{prizma} = S_{asos} \cdot H$ formula yordamida topamiz:

$$V_{prizma} = S_{asos} \cdot H = 8 \cdot 6 = 48.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

13.14. To'g'ri prizma asosi rombdan iborat bo'lib, rombning tomoni uzunligi 2 ga va o'tkir burchagi 30° ga teng. To'g'ri prizmaning balandligi 3 ga teng bo'lsa, To'g'ri prizma hajmini toping. javob:6

13.15. To'g'ri prizma asosi trapetsiyadan iborat bo'lib, trapetsiyaning o'rta chizig'i 7 ga va balandligi 4 ga teng. To'g'ri prizmaning balandligi 0,5 ga teng bo'lsa, To'g'ri prizma hajmini toping. javob: 14

13.16. To'g'ri prizmaning asosi uchburchakdan iborat bo'lib, uchburchakning ikki tomoni 5 va 4 ga, ular orasidagi burchak esa 30° ga teng. To'g'ri prizmaning balandligi 0,2 ga teng bo'lsa, To'g'ri prizmaning hajmini toping. javob:1

13.17. To'g'ri prizmaning asosi teng yonli trapetsiyadan iborat bo'lib, trapetsiyaning yon tomoni 2 ga, o'rta chizig'i $2\sqrt{2}$ ga va o'tkir burchagi 45° ga teng. Agar To'g'ri prizma balandligi 5 ga teng bo'lsa, To'g'ri prizma hajmini toping. javob: 20

13.18. To'g'ri prizmaning asosi to'g'ri burchakli to'rtburchakdan iborat bo'lib, tomonlari 3 va 4 ga teng. To'g'ri prizma balandligi to'g'ri to'rtburchak diagonaliga teng. To'g'ri prizma hajmini toping. javob: 60

13.19. To'g'ri prizmaning asosi kvadratdan iborat bo'lib, tomoni uzunligi $\sqrt{2}$ ga teng. Agar To'g'ri prizma balandligi asosi diagonalidan ikki marta uzun bo'lsa, To'g'ri prizma hajmini toping. javob: 4

13.20. To'g'ri prizmaning asosi tomonlari $\sqrt{11}$ va 3 ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat bo'lib, bu tomonlar orasidagi burchak sinusi $\frac{\sqrt{11}}{6}$ ga teng. Agar To'g'ri prizmaning yon qirrasi 4 ga teng bo'lsa, To'g'ri prizmaning hajmini toping. javob: 11

13.21. To'g'ri prizmaning asosi teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat va bu uchburchakning gipotenuzasi $2\sqrt{2}$ ga teng. Agar To'g'ri prizma balandligi asosidagi uchburchak kateti uzunligiga teng bo'lsa, To'g'ri prizma hajmini toping. javob: 4

13.22. To'g'ri prizma asosi teng tomonli uchburchakdan iborat bo'lib, bu uchburchakning yuzi $9\sqrt{3}$ ga teng. Agar prizma balandligi asosi tomoni uzunligidan $\sqrt{3}$ marta katta bo'lsa, prizma hajmini toping. javob: 162

13.23. To'g'ri prizma asosi teng yonli uchburchakdan iborat, bu uchburchakning yon tomoni 5 ga va asosi 6 ga teng. Agar prizma balandligi asosidagi uchburchakning asosiga tushgan balandlik uzunligiga teng bo'lsa, prizma hajmini toping. javob: 48

13.24. To'g'ri prizma asosi teng yonli trapetsiyadan iborat. Bu trapetsiyaning yon tomoni 5 ga, asoslari esa 7 va 9 ga teng. Agar prizmaning balandligi 12 ga teng bo'lsa, prizmaning hajmini toping. javob: $192\sqrt{2}$

13.25. Agar to'g'ri prizmaning asosi tomonlari 3, 4 va 6 ga, balandligi 0,5 ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 6,5

13.26. Uchburchakli muntazam to'g'ri prizmaning asosi tomoni 2 ga teng. Yon sirti asosi yuzlari yig'indisiga teng bo'lsa, prizmaning hajmini toping. javob: 1

13.27. Og'ma prizmaning asosi tomonlari 3 va 6 ga hamda ular orasidagi burchak 45° ga teng bo'lgan parallelogrammdan iborat. Prizmaning yon qirrasi uzunligi $4\sqrt{2}$ ga teng bo'lib, asos tekisligiga 30° og'gan. Prizmaning hajmini toping. javob: 36

13.28. To'rtburchakli muntazam to'g'ri prizma diagonalasi asos tekisligi bilan 45° burchak tashkil qiladi. Asosining tomoni uzunligi $\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, bu prizmaning hajmini toping. javob: 4

13.29. Oltiburchakli muntazam to'g'ri prizmaning katta diagonalasi 4 ga teng va yon qirrasi bilan 30° burchak tashkil qiladi. Bu prizmaning hajmini toping. javob: 9

13.30. Og'ma prizmaning asosi muntazam uchburchakdan iborat bo'lib, uning tomoni uzunligi 2 ga teng. Prizmaning yon qirrasi uzunligi asos uzunligiga teng va asos tekisligi bilan 60° burchak tashkil etadi. Bu prizma hajmini toping. javob: 3

13.31. To'g'ri prizmaning asosi tomoni uzunligi 2 ga teng muntazam uchburchakdan iborat. Yon sirtining yuzi asoslari yuzlari yig'indisiga teng. Prizmaning hajmini toping. javob:1

13.32. Uchburchakli to'g'ri prizmaning ikkita yog'i yuzlari 3 va 4 ga hamda bu yog'lar asoslari orasidagi burchak 30° ga teng. Agar yon qirrasi uzunligi 1 ga teng bo'lsa, prizmaning hajmini toping. javob:3

13.33. To'g'ri prizmaning asosi teng yonli, bu uchburchakning asosi uzunligi $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ ga teng va uchidagi burchagi 45° bo'lib, prizma yon sirtining yuzi asoslari yuzlari yig'indisiga teng bo'lsa, bu prizmaning hajmini toping. javob: 0,125

3-§. Piramida va kesik piramidaning hajmi

5-teorema. Piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng:

$$V = \frac{1}{3} S_{as} h,$$

bunda, S – piramida asosining yuzi, h – balandligi.

Bu piramidani shunday asosga va shunday balandlikka ega bo'lgan prizma bilan to'ldiramiz (13.6-rasm). Bu prizma uchta: berilgan piramida hamda yana ikkita $ACBB_1$ va AB_1C_1C piramidalardan tashkil topgan. $ACBB_1$ va AB_1C_1C piramidalarning balandliklari umumiy bo'lib, asoslari CC_1B_1 va B_1BC teng uchburchaklardan iborat. Shuning uchun ularning hajmlari ham teng bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, piramidalarning B_1 uchidan tushirilgan balandliklari umumiy bo'lib, asoslari AA_1C_1 va ACC_1 teng uchburchaklardan iborat. Shuning uchun ularning ham hajmlari teng bo'ladi.

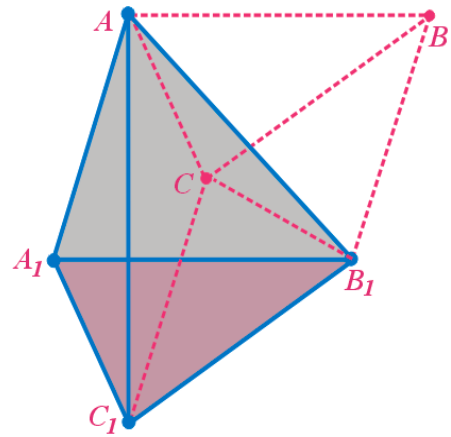
Demak, har uchala piramidalar hajmlari o'zaro teng ekan. Ularning hajmlari yig'indisi prizma hajmiga teng ekanligini hisobga olsak,

$$V_{prizma} = V_{AA_1B_1C_1} + V_{B_1ABC} + V_{CAB_1C_1},$$

$OABC$ uchburchakli piramidaning hajmi

$$V_{AA_1B_1C_1} = V_{B_1ABC} = V_{CAB_1C_1} = \frac{1}{3}V_{prizma} = \frac{1}{3}S_{as}h$$

bo'ladi.



13.6-rasm

6-teorema. Ixtiyoriy piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi

ko'paytmasining uchdan biriga teng: $V = \frac{1}{3}S_{as}h.$

Isbot. Piramida asosidagi ko'pburchakni uchburchaklarga ajratamiz va 5-teoremadan foydalanib isbotlaymiz.

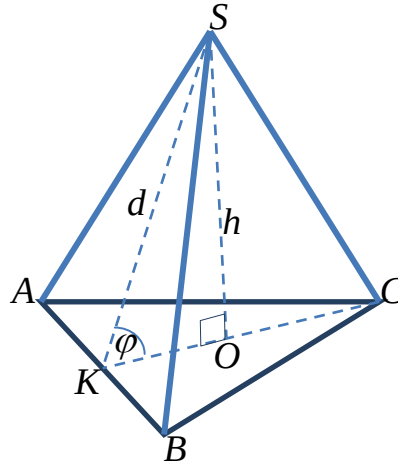
7-teorema. Agar S_1 va S_2 – tetraedr ikkita yog'ining yuzlari, bu yoqlar kesishadigan qirraning uzunligi – a , φ esa bu yoqlar orasidagi ikki yoqli burchak bo'lsa, tetraedrning hajmi

$$V = \frac{2S_1S_2 \sin \varphi}{3a}$$

bo'ladi.

Isbot: $SABC$ tetraedrda $S_{ABC} = S_1$, $AB=a$ hamda ABC va ASB tekisliklar orasidagi burchak φ bo'lsin. ASB yon yoqning $SK = d$ balandligini o'tkazamiz (13.7-rasm). U holda $S_2 = \frac{1}{2}ad$ va $d = \frac{2S_2}{a}$ bo'ladi. Piramidaning $SO=h$ balandligini o'tkazamiz. U holda $\triangle SKO$ to'g'ri burchakli va $\angle SKO = \varphi$ bo'ladi. Bu uchburchakdan piramidaning balandligini topamiz:

$$h = d \sin \varphi = \frac{2S_2 \sin \varphi}{a}$$



13.7-rasm

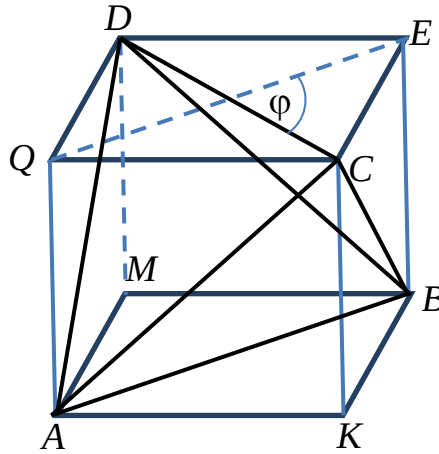
Piramida asosi ABC ning yuzi S_1 bo'lganligidan, uning hajmi uchun talab qilingan formulani hosil qilamiz. $V = \frac{1}{3} S_{ABC} h = \frac{1}{3} S_1 \cdot \frac{2S_2 \sin \varphi}{a} = \frac{2S_1 S_2 \sin \varphi}{3a}$.

8-teorema. Agar tetraedr ikkita qarama-qarshi qirrasining uzunliklari a va b ga, ular orasidagi masofa d ga hamda berilgan qirralar orasidagi burchak φ ga teng bo'lsa, uning hajmi

$$V = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot d \cdot \sin \varphi$$

bo'ladi.

Isbot: Faraz qilaylik, berilgan $ABCD$ tetraedrda $AB=a$, $CD=b$ tomonlar ma'lum bo'lsin. Berilgan tetraedrni $AKBMQCED$ parallelepipedgacha to'ldiramiz. Buning uchun tetraedrning har bir qirrasidan qarama-qarshi qirraga parallel tekislik o'tkazamiz. Masalan, AD qirradan BC qirraga parallel $AQDM$ tekislik o'tkazamiz. AB va CD ayqash chiziqlar orasidagi φ burchakni ko'rsatish uchun AB to'g'ri chiziqni o'ziga parallel ravishda CD to'g'ri chiziq bilan kesishguncha harakatlantiramiz (ko'chirib boramiz) (13.8-rasm).



13.8-rasm

Tetraedrning $AKBM$ va $QCED$ yon yoqlarining yuzlari $\frac{1}{2}ab \sin \varphi$ ga tengdir.

Bu parallel tekisliklar orasidagi masofa d ga teng bo'lganligidan, parallelepipedning hajmi

$$V_{par} = \frac{1}{2}abd \sin \varphi$$

bo'ladi.

Agar parallelepipeddan to'rtta $ABCK$, $DEBC$, $AQDC$, $ABMD$ piramidalarni ajratib olsak, $ABCD$ tetraedrni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan, piramidaning hajmi parallelepiped hajmining oltidan bir qismini tashkil qiladi. Shuning uchun tetraedrning hajmi

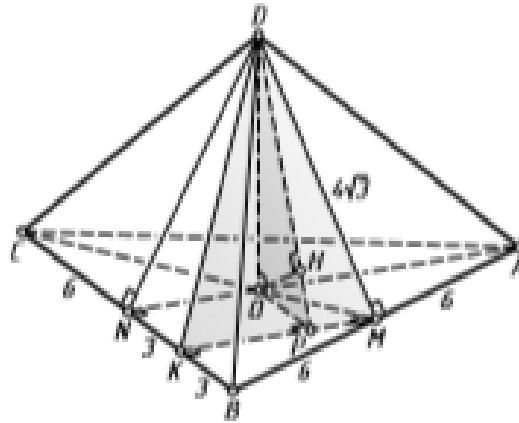
$$V = V_{par} - 4 \frac{1}{6}V_{par} = \frac{1}{3}V_{par} = \frac{1}{6}abd \sin \varphi$$

bo'ladi, bundan talab qilingan formulani hosil qilamiz.

1-masala. Uchburchakli muntazam $DABC$ piramida asosining tomoni 12 ga teng. M va N nuqtalar, mos ravishda, AB va CB qirralarning o'rtalari, $DM = 4\sqrt{3}$. DM va AN chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. *I usul.* O – piramida asosining markasi bo'lsin. U holda

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad OM = \frac{1}{3}CM = 2\sqrt{3}, \quad DO = \sqrt{DN^2 - OM^2} = \sqrt{48 - 12} = 6.$$



13.9-rasm

K – BN kesmaning o'rtasi. MK – ANB uchburchakning o'rta chizig'i, $MK \parallel AN$. P – O nuqtaning MK chiziqdagi proyeksiyasi, $OP \parallel BC$, $OPKN$ – to'g'ri to'rtburchak, demak, $OP=KN=3$.

AN to'g'ri chiziq DMK tekislikda yotuvchi MK to'g'ri chiziqqa parallel, demak, AN to'g'ri chiziq DMK tekislikka ham parallel bo'lib, ular orasidagi masofa AN va DM chiziqlar orasidagi chiziqqa teng.

DPO to'g'ri burchakli uchburchakdan $OP=3$, $DO=6$,

$$DP = \sqrt{DO^2 + OP^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}.$$

OH – shu uchburchakning gipotenuzaga tushirilgan balandligi. OH – DMK tekislikka perpendikular. Qidirilayotgan masofa OH ga teng.

$$OH = \frac{OP \cdot DO}{DP} = \frac{3 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

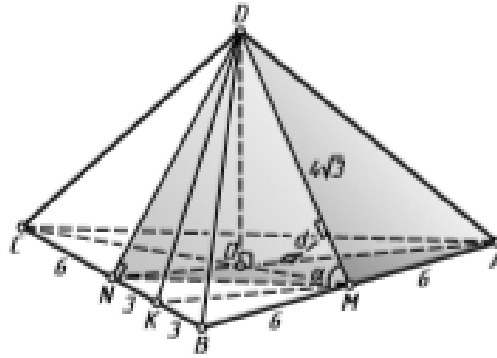
II usul. O – piramida asosining markazi bo'lsin. U holda

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad OM = \frac{1}{3}CM = 2\sqrt{3}, \quad DO = \sqrt{DN^2 - OM^2} = \sqrt{48 - 12} = 6.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{144\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 72\sqrt{3}.$$

K – BN kesmaning o'rtasi bo'lsin. MK – ANB to'g'ri burchakli uchburchakning o'rta chizig'i, shuning uchun $MK = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,

$$DK^2 = DN^2 + KN^2 = 48 + 9 = 57.$$



13.11-rasm

$$\text{Kosinuslar teoremasiga ko'ra } \cos \angle DMK = \frac{DM^2 + MN^2 - DK^2}{2DM \cdot MK} = \frac{48 + 27 - 57}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{va } \sin \angle DMK = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$DAMN$ piramidaning hajmi berilgan piramida hajmidan 4 marta kichik, chunki ANM uchburchak yuzi ABC uchburchak yuzidan 4 marta kichik. U holda $V_{DAMN} = 18\sqrt{3}$. Boshqa tomondan d qidirilayogan masofa bo'lsa, piramida hajmi quyidagicha bo'ladi:

$$V_{DAMN} = \frac{1}{6} DM \cdot AN \cdot d \sin \angle DMK \text{ yoki } 18\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Bundan topilishi kerak bo'lgan masofa: $d = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

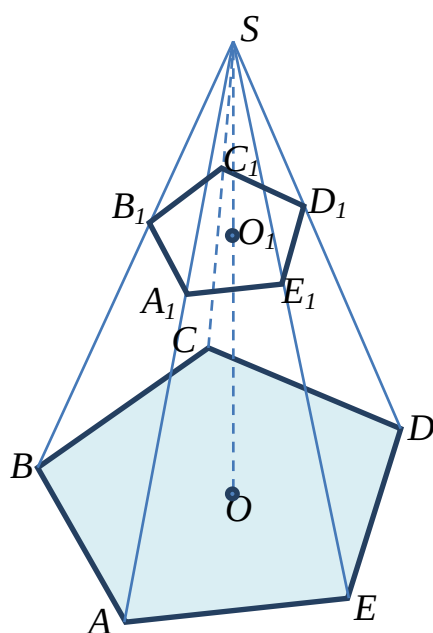
9-teorema. S_1 va S_2 – kesik piramidaning asoslarining yuzlari, h – uning balandligi bo'lsa, kesik piramidaning hajmi

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartiga ko'ra, $S_1 = S_{ABCDE}$, $S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1E_1}$ va $h = OO_1$.

Kesik piramidani uchi S nuqtada bo'lgan to'la piramidagacha to'ldiramiz (13.12-rasm). To'la piramidaning SO balandligini x orqali belgilaymiz: $SO = x$. Kesik piramidaning hajmini ikkita. $SAB...E$ va $SA_1B_1...E_1$ piramidalar V_1 va V_2 hajmlarining ayirmasi kabi topamiz: $V = V_1 - V_2$.



13.12- rasm

Piramidalarning hajmlari, mos ravishda,

$$V_1 = V_{SAB...E} = \frac{1}{3} S_1 x, \quad V_1 = V_{SA_1B_1...E_1} = \frac{1}{3} S_2 (x-h)$$

bo'ladi. Piramidada parallel kesimlarning xossasidan,

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h} \right)^2$$

munosabatni yozamiz, bundan

$$\frac{x}{x-h} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} \text{ yoki } x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$$

Endi kesik piramidaning hajmini topamiz:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left(S_1 \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2 \left(\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h \right) \right) = \frac{1}{3} h \left(\frac{S_1\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - \frac{S_2\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_1} + S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} h \frac{(\sqrt{S_1})^3 - (\sqrt{S_2})^3}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \end{aligned}$$

ifodani hosil qilamiz.

2-masala. Qirradi l bo'lgan tetraedr (barcha qirralari teng bo'lgan uchburchakli piramida)ning balandligini va hajmini aniqlang (11.13-rasm).

Yechish: Tetraedrning barcha yoqlari muntazam uchburchaklar bo'lib, tetraedr apofemasi muntazam uchburchakning balandligiga teng, ya'ni $f = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ bo'ladi. Uchburchak asosiga ichki chizilgan aylana radiusi $r = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ ga teng. Pifagor teoremasiga asosan, tetraedr balandligi

$$H = \sqrt{f^2 - r^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2 - \frac{1}{12}l^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}l$$

bo'ladi.

$$\text{Tetraedr hajmi } V = \frac{1}{3}S_{as}H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}l = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3 \text{ bo'ladi.}$$

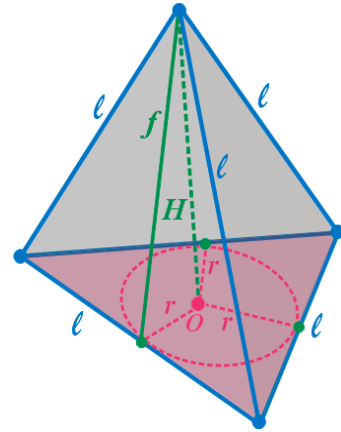
Demak, qirrasi l bo'lgan tetraedrning balandligini va hajmi quyidagicha bo'lar ekan (11.13-rasm):

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}l, \quad V = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3.$$

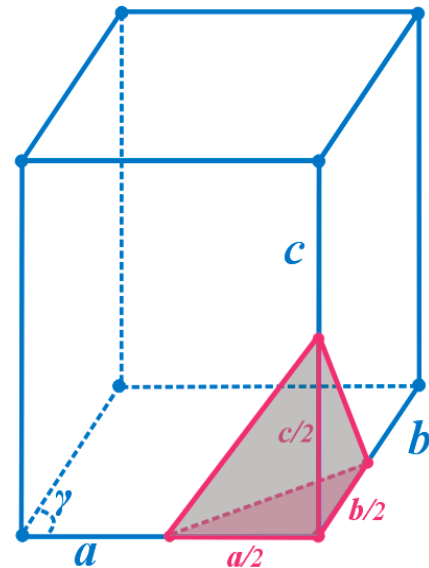
3-masala. Parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesib olingan piramida hajmi berilgan parallelepiped hajmidan necha marta kichik?

Yechish. Aytaylik, parallelepipedning asosi tomonlari a va b bo'lgan parallelogramm, yon qirrasi c , asosga tushirilgan balandlik esa H bo'lsin. Bu parallelepiped asosining yuzi $S_{paral} = ab \sin \varphi$ ekanini hisobga olsak, uning hajmi $V_{paral} = ab \sin \varphi \cdot H = abH \sin \varphi$ bo'ladi.

Bu parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesishdan hosil qilingan piramida qirralari $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ ga, balandligi $\frac{H}{2}$ ga



11.13-rasm



11.14-rasm

teng bo'ladi. Piramida asos yuzi $S_{piram} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{8} ab \sin \varphi = \frac{1}{8} S_{paral}$ bo'ladi.

Piramida hajmi $V_{pir} = \frac{1}{3} S_{piram} h_{piram} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} ab \sin \varphi \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{48} ab H \sin \varphi = \frac{1}{48} V_{paral}$ bo'ladi.

Demak, parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesib olingan piramida hajmi berilgan parallelepiped hajmidan 48 marta kichik bo'lar ekan (11.14-rasm).

Mustaqil ishlash uchun masalalar

13.34. To'rtburchakli piramidaning asosi. Tomoni uzunligi 3 ga va o'tkir burchagi 45° ga teng rombdan iborat. Agar piramidaning balandligi $\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, bu piramidaning hajmini toping. javob:3

13.35. Uchburchakli piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat bo'lib, bu uchburchakning kichik kateti 3 ga va bitta o'tkir burchagi 30° ga teng. Agar piramidaning balandligi asosining gipotenuzasi uzunligiga teng bo'lsa, piramidaning hajmini toping. javob:3

13.36. Tetraedrning qirrasi uzunligi $3\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob:9

13.37. Muntazam piramidaning hajmi 171 ga teng. Boshqa bir muntazam piramidaning balandligi ushbu piramida balandligiga teng, asos tomoni uzunligi esa 3 marta kichik bo'lsa, ikkinchi piramidaning hajmini toping. javob: 19

13.38. Uchburchakli piramidaning asosi gipotenuzasi 8 ga va o'tkir burchagi 45° ga teng to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Agar piramidaning balandligi 3 ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 16

13.39. To'rtburchakli muntazam piramidaning barcha qirralari uzunliklari $3\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 18

13.40. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi va asos tomoni uzunligi $\sqrt[4]{3}$ ga teng. Piramidaning hajmini toping. javob: 0,25

13.41. Uchburchakli muntazam kesik piramidaning asos tomonlari uzunligi 12 va 4 ga teng. Agar piramidaning balandligi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 52

13.42. Uchburchakli muntazam kesik piramidaning asos tomonlari uzunliklari 3 va 1 ga teng. Agar bu piramidaning balandligi 3 ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: $\frac{13\sqrt{3}}{4}$

13.43. Uchburchakli kesik piramidaning asosi teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Bu uchburchaklarining gipotenuzasi uzunligi 7 va 5 ga teng. Agar piramidaning balandligi 12 ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 109

13.44. Uchburchakli kesik piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat bo'lib, bu uchburchakning o'tkir burchagi 30° ga teng va gipotenuzalari uzunligi esa 6 va 4 ga teng. Agar u piramidaning balandligi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 9,5

13.45. Kesik piramidaning asosi tomoni rombdan iborat, romblarning tomonlari uzunliklari 6 va 4 ga teng. O'tkir burchagi esa 60° ga teng. Agar piramidaning balandligi $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 37

13.46. Kesik piramidaning asoslari teng yonli uchburchakdan iborat bo'lib, bu uchburchaklarning uchidagi burchagi esa 120° ga teng. Uchburchaklarning yon tomonlari uzunliklari esa 12 va 5 ga teng. Agar piramidaning balandligi $\frac{1}{7\sqrt{3}}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 229/84

13.47. Oltiburchakli muntazam kesik piramidaning asosi tomonlari uzunliklari 4 va 2 ga teng. Agar piramidaning balandligi $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 14

13.48. Uchburchakli kesik piramidaning asosi teng yonli uchidagi burchagi 60° ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat. Asosidagi teng yonli uchburchakning

asosiga tushirilgan balandliklari 3 va 4 ga teng. Bu piramidaning balandligi $15\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 185

13.49. Piramidaning hajmi 120 ga teng. Asosiga parallel tekislik piramidaning balandligini teng ikkiga bo'ladi. Hosil bo'lgan kesik piramidaning hajmini toping. javob: 105

13.50. Uchburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi 6 ga teng, asosidagi ikki yoqli burchagi 45° ga teng. Bu piramidaning hajmini toping. javob: 9

13.51. Piramidaning uchidagi barcha yassi burchaklari to'g'ri burchak va piramidaning balandligi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, piramidaning hajmini toping. javob: 4,5

13.52. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirradi uzunligi 4 ga teng va asos tekisligi bilan 60° burchak tashkil qiladi. Piramidaning hajmini toping. javob: 6

13.53. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni $\sqrt{3}$ ga va asosidagi ikki yoqli burchagi 60° ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 1,5

13.54. To'rtburchakli muntazam piramida asosining diagonali piramidaning yon qirradi uzunligiga teng va ularning uzunligi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 0,75

13.55. To'rtburchakli muntazam piramidaning yon qirradi asos tekisligi bilan 45° ga teng burchak hosil qiladi. Diagonal kesimi 36 ga teng bo'lsa, bu piramidaning hajmini toping. javob: 144

13.56. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi $3\sqrt{2}$ ga teng. Agar diagonal kesimi yuzi asos yuziga teng bo'lsa, piramidaning hajmini toping. javob: $18\sqrt{2}$

13.57. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning asosi diagonalari 8 va 5 ga teng. Yon qirralari asos tekisligi bilan 45° ga teng burchak tashkil qiladi. Kesik piramidaning hajmini toping. javob: 32,25

13.58. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning diagonal 18 ga teng, asosining tomoni uzunliklari 14 va 10 ga teng. Bu kesik piramidaning hajmini toping. javob:872

13.59. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning asosi tomonlari $4\sqrt{2}$ va $\sqrt{2}$ ga teng, yon yog'ining asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagi 60° ga teng bo'lsa, bu piramidaning hajmini toping. javob: 42

13.60. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asosining yuzlari 1 va 4 ga va hajmi 21 ga teng bo'lsa, to'la piramidaning hajmini toping. javob: 24

13.61. To'rtburchakli kesik piramidaning asoslari tomonlari uzunliklari 1 va 3 ga teng. Piramidaning yon sirti piramidaning to'la sirti yuzining yarmiga teng. Bu kesik piramidaning hajmini toping. javob: 3,25

13.62. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning balandligi 3 ga va katta asosining tomoni uzunligi $9\sqrt{2}$ ga teng, yon qirradi asos tekisligi bilan 45° burchak hosil qiladi. Kesik piramidaning hajmini toping. javob: 342

13.63. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning katta asosi yuzi 16 ga va yon qirrasining uzunligi $\sqrt{9,5}$ ga teng. Piramidaning balandligi 3 ga teng. Kesik piramidaning hajmini toping. javob: 37

13.64. Piramidaning yon qirradi asos tekisligiga 30° burchak ostida og'gan. Piramidaning asosi uchburchakdan iborat bo'lib, tomonlari uzunliklari $\sqrt{3}$, 2 va 3 ga teng. Piramidaning hajmini toping. javob: 0,5

13.65. Piramidaning asosi rombdan iborat bo'lib, bu rombning o'tkir burchagi 60° ga teng. Yon yoqlari asos tekisligi bilan 60° ga og'gan holda joylashgan. Agar asosiga ichki chizilgan aylananing radiusi $\sqrt[4]{3}$ ga teng bo'lsa, piramidaning hajmini aniqlang. javob:8

13.66. Piramidaning asosi teng yonli uchburchakdan iborat bo'lib, bu uchburchakning asosi 6 ga va asosiga tushgan balandligi 9 ga teng. Barcha yon qirralari 13 ga teng bo'lsa, bu piramidaning hajmini toping. javob: 108

13.67. Piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat bo'lib, gipotenuzasi $2\sqrt{3}$ ga va o'tkir burchagi 30° ga teng. Piramidaning yon qirralari asos tekisligi bilan 45° burchak hosil qiladi. Bu piramidaning hajmini toping. javob: 1,5

13.68. To'rtburchakli piramidaning asosi diagonallari $2\sqrt{3}$ ga va diagonallari orasidagi burchagi 60° ga teng. Barcha yon qirralari asos tekisligi bilan 45° hosil qiladi. Bu piramidaning hajmini toping. javob: 3

13.69. Piramidaning asosi uchburchakdan iborat bo'lib, tomonlari uzunliklari 2, $\sqrt{3}$ va 2 ga teng. Yon qirralari asos tekisligi bilan 60° burchak tashkil qiladi. Piramidaning hajmini toping. javob:1

13.70. Piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Uchburchak katetlaridagi yon yoqlari asos tekisligi bilan 30° va 60° li burchak hosil qiladi. Bu piramidaning barcha qirralari teng. Agar piramidaning balandligi 3 ga teng bo'lsa, uning hajmini toping. javob: 18

13.71. Piramidaning asosi tomoni 5, 6 va 5 ga teng uchburchakdan iborat. Yon yoqlari asos tekisligi bilan 45° burchak tashkil qiladi. Piramidaning hajmini toping. javob:6

13.72. To'rtburchakli piramidaning asosi to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lib, asosining yuzi $\sqrt{27}$ ga teng. Piramidaning barcha qirralari teng va asos tekisligi bilan 45° burchak tashkil qiladi. Asosining diagonallari orasidagi burchagi 60° ga teng. Piramidaning hajmini toping. javob: 3

13.73. To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 6 ga teng, ikkita qo'shni yon yoqlari orasidagi burchak esa 60° ga teng bo'lsa, piramidaning hajmini toping. javob:144

13.74. To'rtburchakli muntazam piramidaning barcha qirralari $\sqrt{2}$ ga teng. Bu piramidaning hajmini toping. javob: $\frac{2}{3}$

13.75. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirralari asos tekisligi bilan 45° burchak hosil qiladi va asosining balandligi uzunligi $3\sqrt{6}$ ga teng. Bu piramidaning hajmini toping. javob: 72

13.76. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosi markazidan yon yog'igacha bo'lgan masofa 4 ga teng, yon qirrasi esa 3 ga teng. Bu piramidaning hajmini toping. javob: 9

13.77. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosiga parallel tekislik uning hajmini teng ikkiga bo'ladi. Agar piramidaning balandligi $\sqrt[3]{2}$ ga teng bo'lsa, bu tekislik piramida uchidan qanday masofada o'tkazilingan? javob:1

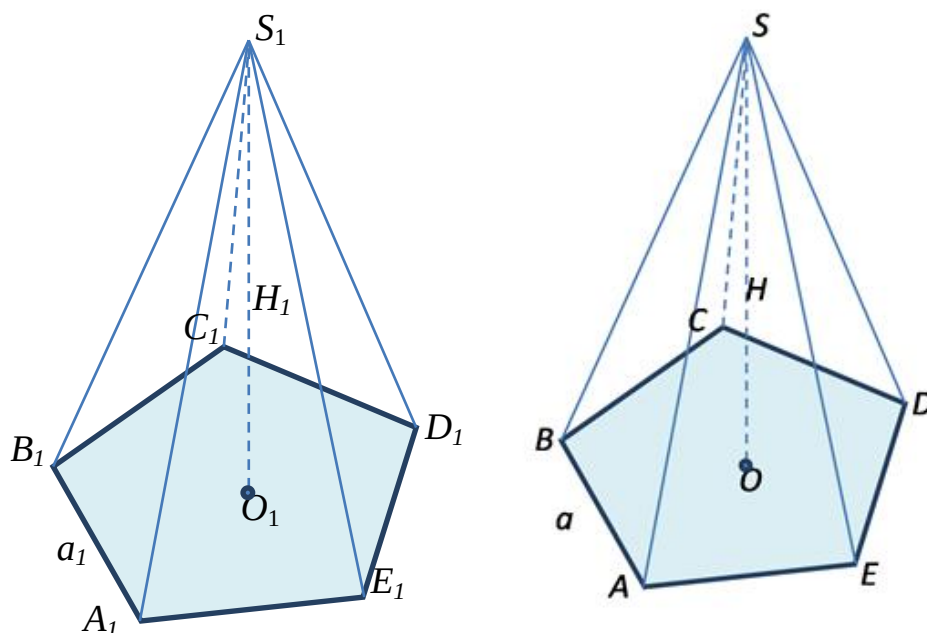
4-§. O'xshash jismlar hajmlari. Tengdosh jismlar hajmlari

F jism berilgan bo'lib, u shunday $F_1, F_2, \dots, F_n$ uchburchakli piramidalar ajratilgan bo'lsinki, F jism hajmi bu piramidalar hajmlari yig'indisiga teng bo'lsin. Shuningdek, ko'effitsiyenti k ga teng bo'lgan o'xshashlik almashtirishi berilgan bo'lib, F jism bu almashtirishda G jismga o'tsin. Unda bu o'xshashlik almashtirishi $F_1, F_2, \dots, F_n$ piramidalarni $G_1, G_2, \dots, G_n$ piramidalar o'tkazadi va ular o'z navbatida G jismni tashkil qiladi. Shu bois, G jismning hajmi bu piramidalar hajmlari yig'indisidan iborat bo'ladi (13.17-rasm). F_i va G_i ($i=1, 2, \dots, n$) uchburchakli piramidalar o'xshash bo'lgani uchun ularning balandliklari nisbati k ga, asoslarining yuzlari nisbati esa k^2 ga teng bo'ladi. U holda ularning hajmlari nisbati k^3 ga teng bo'ladi. F jism F_i piramidalardan, G jism G_i piramidalardan ($i=1, 2, \dots, n$) tashkil topgani uchun F va G jismlarning hajmlari nisbati ham k^3 ga teng bo'ladi. Ma'lumki, k o'xshashlik almashtirishi ko'effitsiyenti F jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofaning bu nuqtalarga mos kelgan G jismning nuqtalari orasidagi masofalar nisbatiga teng. U holda k soni F va G jismlarning mos chiziqli o'lchamlari nisbatiga teng bo'ladi.

10-teorema. Ikki o'xshash jismning hajmlari nisbati ularning mos chiziqli o'lchamlari nisbatining kubiga teng. Xususiyl holda, o'xshash piramidalar uchun (13.17-rasm)

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 = k^3, \quad \frac{V_1}{V} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^3 = k^3,$$

bu yerda: a va a_1 – o'xshash piramidalar asosining mos tomonlari, H va H_1 – balandliklari, V va V_1 – hajmlari, k esa o'xshashlik koeffitsiyenti.

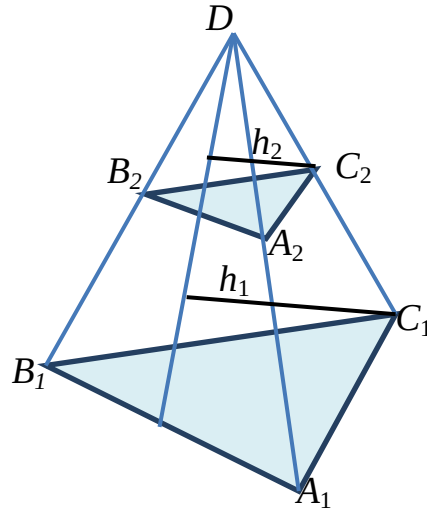


13.17- rasm

11-teorema. Fazoda D nuqtadan o'tuvchi uchta to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, ularning bittasida A_1 va A_2 ; ikkinchisida B_1 va B_2 ; uchinchisida C_1 va C_2 nuqtalar olingan bo'lsin. Agar $DA_1B_1C_1$ tetraedrning hajmi V_1 , $DA_2B_2C_2$ tetraedrning hajmi V_2 bo'lsa,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{DA_1}{DA_2} \cdot \frac{DB_1}{DB_2} \cdot \frac{DC_1}{DC_2}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.



13.18- rasm

Isbot. C_1 va C_2 nuqtalardan, mos ravishda, DA_1B_1 va DA_2B_2 tekisliklarga perpendikularlar tushiramiz (13.18-rasm). Hosil qilingan to'g'ri burchakli uchburchaklarning o'xshashligidan

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{DC_1}{DC_2}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$DA_1B_1C_1$ va $DA_2B_2C_2$ tetraedrlarning hajmlari, mos ravishda,

$$V_1 = \frac{1}{3} h_1 S_{\Delta A_1 B_1 D} \text{ va } V_2 = \frac{1}{3} h_2 S_{\Delta A_2 B_2 D}$$

bo'ladi. Agar $\angle A_1 D B_1 = \angle A_2 D B_2 = \alpha$ deb belgilasak,

$$S_{\Delta A_1 B_1 D} = \frac{1}{2} A_1 D \cdot B_1 D \sin \alpha, \quad S_{\Delta A_2 B_2 D} = \frac{1}{2} A_2 D \cdot B_2 D \sin \alpha$$

va natijada

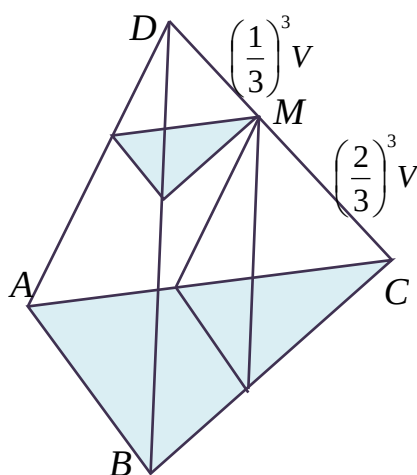
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{\Delta A_1 B_1 D}}{S_{\Delta A_2 B_2 D}} \frac{h_1}{h_2} = \frac{DA_1}{DA_2} \cdot \frac{DB_1}{DB_2} \cdot \frac{DC_1}{DC_2}$$

talab qilingan munosabatga kelamiz.

2-masala. Qirrasining o'lchovi birga teng bo'lgan tetraedrning qirradan uni 1:2 nisbatda bo'luvchi nuqta olingan. Shu nuqta orqali tetraedrning ikkita yog'iga parallel ikkita tekislik o'tkazilgan. Bu tekislik tetraedr ikkita uchburchakli piramida ajratadi. Tetraedrning qolgan qismining hajmini toping.

Yechish. Qirradi 1 ga teng tetraedrning balandligi $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ga teng, asosining yuzi $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Hajmi esa $V = \frac{1}{3} \cdot S_{as} H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

M nuqta berilgan $DABC$ tetraedrning CD qirrasida olingan bo'lsin, qaysiki CD qirrani $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$ nisbatda bo'luvchi. Birinchi tekislik M nuqtadan ABC tekislikka parallel o'tkazilgan. Bu tekislik tetraedrdan o'xshashlik koeffitsiyenti $\frac{DM}{DC} = \frac{1}{3}$ bo'lgan tetraedr ajratadi.



13.19-rasm

Ajratilgan tetraedrning hajmi $\left(\frac{1}{3}\right)^3 V = \frac{1}{27} V$ ga teng. Ikkinchi tekislik M nuqtadan ABD tekislikka parallel qilib o'tkazilgan. U berilgan tetraedrdan o'xshashlik koeffitsiyenti $\frac{CM}{DC} = \frac{2}{3}$ bo'lgan tetraedr ajratadi. Ajratilgan tetraedrning

hajmi $\left(\frac{2}{3}\right)^3 V = \frac{8}{27} V$ bo'ladi. U holda tetraedrning qolgan qismining hajmi

$$V - \frac{1}{27} V - \frac{8}{27} V = \frac{18}{27} V = \frac{2}{3} V = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

13.78. Agar kubning qirrasi 10% ga kamaytirilsa, uning hajmi necha foiz kamayadi?

13.79. Kub yog'ining yuzi 2 marta orttirilsa, uning hajmi necha marta ortadi?

13.80. Agar kubning har bir qirrasi 2 sm ga uzaytirilsa, uning hajmi 152 sm kubga ortadi. Berilgan kubning qirrasini toping. javob: 4

13.81. Kub har bir yog'ining yuzi 27 marta orttirilsa, uning hajmi necha marta ortadi?

13.82. To'rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 6 sm, balandligi 4 sm. Piramida uchidan hisoblangan balandligining $\frac{1}{3}$ qismidan tekislik o'tkazilgan. Hosil bo'lgan kichik piramida hajmini toping. javob: 16/9

13.83. To'rtburchakli muntazam piramidaning hajmi 19200 ga, balandligi esa 9 ga teng. O'xshash to'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 4 ga teng bo'lsa, uning hajmini toping.