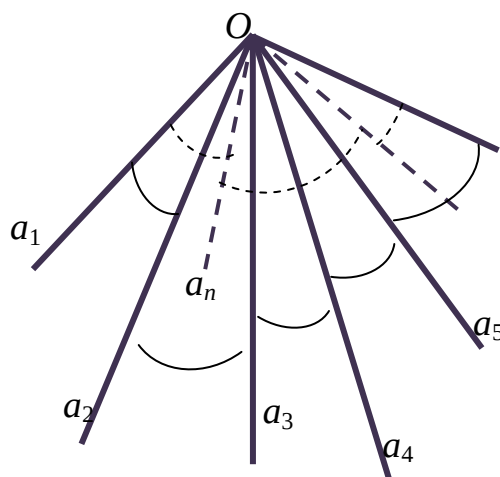


11-BOB

KO'PYOQLAR VA ULARNING SIRTLARI

1-§. Ko'pyoqli burchak. Uchyoqli burchak. Ko'pyoqlar

Fazodagi ixtiyoriy O nuqtadan bitta tekislikda yotmaydigan n ta $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ yarimto'g'ri chiziqlar o'tkazilgan bo'lsin. Ikkita yarim to'g'ri chiziq orqali tashkil qilingan burchak **yassi burchak (tekis burchak)** bo'ladi. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ yarim to'g'ri chiziqlar juft-juft ravishda n ta $(a_1a_2), (a_2a_3), (a_3a_4), \dots, (a_na_1)$ yassi burchak tashkil qiladi. Bu yassi burchaklardan tashkil topgan shakl **ko'pyoqli burchak** deyiladi (11.1-rasm).



11.1-rasm

Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ yarim to'g'ri chiziqlar **ko'pyoqli burchakning qirralari**, $(a_1a_2), (a_2a_3), (a_3a_4), \dots, (a_na_1)$ to'g'ri chiziqlar juftlari orasidagi yarimtekisliklar ko'pyoqli burchakning **yoqlari** deyiladi. Yassi burchaklarning umumiy uchi bo'lgan O uchi **ko'pyoqning uchi** deb aytiladi. $n=3$ bo'lganda **uchyoqli burchak** hosil bo'ladi (11.2-rasm).

O – uch yoqli burchakning **uchi**, a, b, c yarim to'g'ri chiziqlar uning **qirralari**, tekis burchaklar va qirralar bilan chegaralangan tekisliklar qismlari uch yoqli burchakning **yoqlari (tomonlari)** deyiladi. Uch yoqli burchaklar yoqlarining

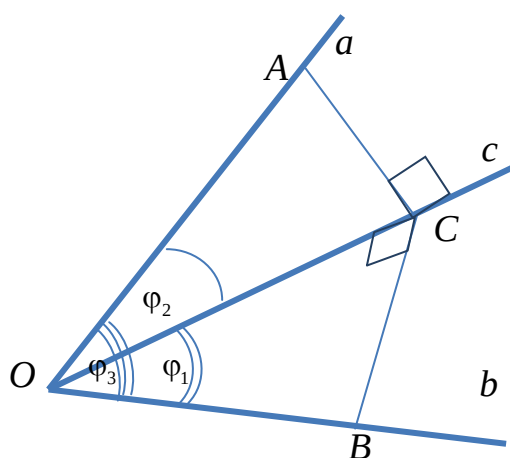
(tomonlarining) har bir jufti ikki yoqli burchak hosil qiladi. Ular a qirradagi, b qirradagi va c qirradagi ikki yoqli burchaklarni tashkil qiladi.

1-teorema (*kosinuslar formulasi*). Agar $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – uch yoqli burchakning yassi burchaklari, A, B, C – ular qarshisidagi ikki yoqli burchaklar bo'lsa,

$$\cos \varphi_3 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \angle C$$

munosabat o'rinli.

Isbot. Uch yoqli burchakning c qirrasida ixtiyoriy C nuqtani olamiz va $CB \perp c, CA \perp c$ kesmalarni o'tkazamiz (11.2-rasm).



11.2-rasm

Bunda A va B nuqtalar CA va CB perpendikularlarning a va b qirralar bilan kesishgan nuqtalaridir. A va B nuqtalarni tutashtirib, $\triangle ABC$ ni hosil qilamiz. Kosinuslar teoremasiga ko'ra, $\triangle ABC$ dan $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle C$ va $\triangle ABO$ dan $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \varphi_3$ munosabatlarga ega bo'lamiz. Bu tengliklarning ikkinchisidan birinchisini ayiramiz:

$$AO^2 + BO^2 - AC^2 - BC^2 + 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle C - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \varphi_3 = 0. \quad (1)$$

$\triangle ABC$ va $\triangle ABO$ to'g'ri burchakli bo'lganligidan,

$$AO^2 - AC^2 = OC^2 \text{ va } BO^2 - BC^2 = OC^2 \quad (2)$$

bo'ladi. U holda (1) va (2) tengliklardan $AO \cdot BO \cdot \cos \varphi_3 = OC^2 + AC \cdot BC \cdot \cos \angle C$ tenglikni hosil qilamiz.

$$\frac{OC}{OA} = \cos \varphi_2, \quad \frac{OC}{OB} = \cos \varphi_1, \quad \frac{AC}{OA} = \sin \varphi_2, \quad \frac{BC}{OB} = \sin \varphi_1$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\cos \varphi_3 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \angle C \quad (3)$$

ga ega bo'lamiz. (3) tenglik uch yoqli burchak uchun *kosinuslar formulasi* deyiladi.

2-teorema (*sinuslar formulasi*). Agar $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – uch yoqli burchakning yassi burchaklari, A, B, C – ular qarshisidagi ikki yoqli burchaklar bo'lsa (11.2-rasm),

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \angle A} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \angle B} = \frac{\sin \varphi_3}{\sin \angle C} \quad (4)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. (3) formuladan $\cos \angle C$ ni topamiz:

$$\cos \angle C = \frac{\cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}.$$

Bundan

$$\begin{aligned} \sin^2 \angle C &= 1 - \cos^2 \angle C = 1 - \left(\frac{\cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2} \right)^2 = \frac{\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 - (\cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)^2}{\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{(1 - \cos^2 \varphi_1)(1 - \cos^2 \varphi_2) - (\cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)^2}{\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}{\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2} \end{aligned}$$

ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikning ikki tomonini $\sin^2 \varphi_3$ ga bo'lamiz:

$$\frac{\sin^2 \angle C}{\sin^2 \varphi_3} = \frac{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}{\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_3}. \quad (5)$$

(5) tenglikning o'ng tomoni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ miqdorlarga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun,

$$\frac{\sin^2 \angle A}{\sin^2 \varphi_1} = \frac{\sin^2 \angle B}{\sin^2 \varphi_2} = \frac{\sin^2 \angle C}{\sin^2 \varphi_3}$$

tenglikni hosil qilamiz.

1-natija. Uchyoqli burchakning har bir yassi burchagi uning qolgan ikkita yassi burchagi yig'indisidan kichik.

2-natija. Uchyqli burchak yassi burchaklarining yig‘indisi 360° dan kichik.

Masala. Uchyqli burchakning c qirrasidagi ikki yoqli burchagi to‘g‘ri, b qirrasidagi ikki yoqli burchagi φ ga teng, (bc) yassi burchak esa φ_1 ga teng (φ , $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$). Qolgan ikkita yassi burchakni toping: $\varphi_3 = \angle(ab)$, $\varphi_2 = \angle(ac)$.

Yechish. A qirraning ixtiyoriy A nuqtasidan b qirraga AB perpendikular va c qirraga AC perpendikular tushiramiz. Uch perpendikular haqidagi teorema ko‘ra, CB kesma b qirraga o‘tkazilgan perpendikulardir.

To‘g‘ri burchakli OAB , OCB , AOC va ABC uchburchaklardan quyidagini hosil qilamiz:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = AB : OB = \frac{BC}{\cos \varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = AC : OC = BC \operatorname{tg} \varphi : \frac{BC}{\sin \varphi_1} = \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi_1.$$

Eslatma, φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ burchaklar orasida hosil qilingan

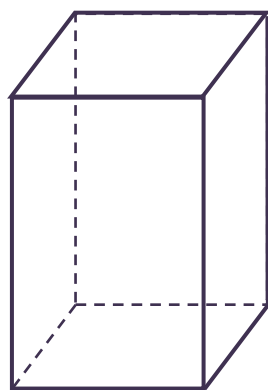
$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \varphi}, \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi_1 \text{ munosabatlar ikki burchakni bilgan holda qolgan}$$

ikkitasini topishga imkon beradi.

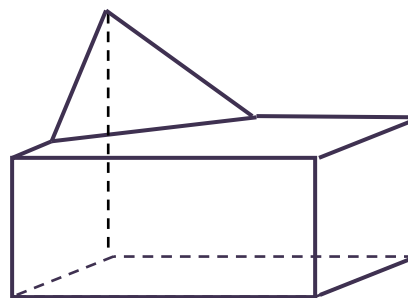
Geometrik jismlarning katta guruhini ko‘pyoqlar tashkil qiladi.

Yoqlari chekli sondagi ko‘pburchaklardan iborat jismga **ko‘pyoq** deyiladi. Ko‘pyoq qo‘shni yoqlarining umumiy tomonlari uning **qirralari** deyiladi. Ko‘pyoqning bitta nuqtada uchrashadigan yoqlari ko‘pyoqli burchak tashkil qiladi va bunday ko‘p yoqli burchaklarning uchlari ko‘pyoqning **uchlari** deyiladi.

1-ta’rif. Ko‘pyoqning o‘zi uning har bir yog‘idagi ko‘pburchak tekisligining bir tomonida yotsa, bunday ko‘pyoq **qavariq** (11.3-a rasm), aks holda **botiq ko‘pyoq** (11.3-b rasm) deyiladi. Masalan, prizma, kub, parallelepiped, piramida qavariq ko‘pyoqlardir.



a)



b)

11.3-rasm

Bundan keyin biz faqat qavariq ko'pyoqlarning xossalarini o'rganamiz.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

11.1. Ikki yoqli burchakning yoqlarida yotgan A va B nuqtalardan burchakning qirrasiga AA_1 va BB_1 perpendikular tushirilgan. 1) agar $AA_1=3$, $BB_1=4$, $A_1B_1=6$, $AB=7$ bo'lsa, ikki yoqli burchak φ ni toping; 2) Agar $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ va ikki yoqli burchak φ ga teng bo'lsa, AB kesmaning uzunligini toping.

11.2. (abc) uch yoqli burchakning c qirrasidagi ikki yoqli burchagi to'g'ri, b qirrasidagi ikki yoqli burchagi 60° ga teng, (bc) yassi burchagi esa 45° ga teng. Qolgan ikkita yassi burchakni toping.

11.3. Uch yoqli burchakning bitta yassi burchagi 30° ga, unga yopishgan ikki yoqli burchaklari 60° ga teng. Qolgan ikkita yassi burchakni va 30° li burchak tekisligi bilan qarshidagi qirra tashkil etadigan burchakni toping.

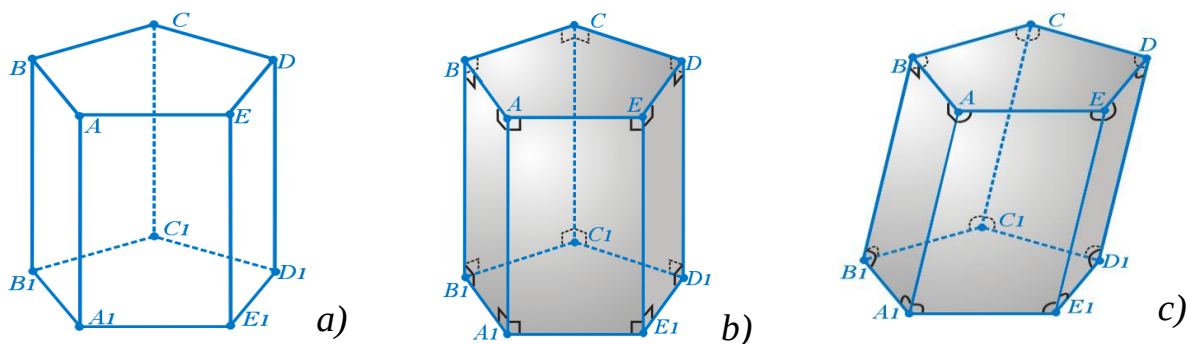
11.4. Uch yoqli burchakning ikkita yassi burchagi 45° ga teng, uchinchi burchagi esa 30° ga teng. Yassi 45° burchaklar qashisida yotgan ikki yoqli burchaklarni va 30° li tekislik bilan qarshidagi qirra orasidagi burchakni toping.

2-§. Prizma. Prizma kesimlarini yasash va tekislikda tasvirlash. To'g'ri prizma. Prizmaning sirti

Ikkita parallel tekislik va bu tekisliklarda yotuvchi ikkita teng ko'pburchak berilgan bo'lsin. Bu ko'pburchaklarning mos uchlarini parallel kesmalar bilan tutashtirib ko'pyoq hosil qilaymiz.

1-ta'rif. Ikkita asosi ko'pburchak qolgan yoqlari parallelogrammlardan iborat ko'pyoqqa **prizma** deyiladi (11.4-a rasm). Asoslari muntazam ko'pburchaklar bo'lib, yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'lgan prizma **muntazam prizma** deyiladi.

Prizmaning asoslar bir-biriga parallel va tengdir. Ko'pburchak tomonlari **asos qirralari** deyiladi. Ko'pburchaklarning mos uchlarini tutashtiruvchi kesmalar prizmaning **yon qirralari** deyiladi. Agar prizmaning yon qirralari uning asoslariga perpendikular bo'lsa, bunday prizмага **to'g'ri prizma** (11.4-b rasm), aks holda **og'ma prizma** (11.4-c rasm) deyiladi. Ko'pyoqning bitta yog'ida yotmagan ixtiyoriy ikkita uchini tutashtiruvchi kesmalar uning **diagonallari** deyiladi. Asoslar orasidagi masofaga prizmaning **balandligi** deyiladi. Yon qirralar va ko'pburchak tomonlaridan iborat to'rtburchakka prizmaning **yon yog'i** deyiladi. Yon yoqlar to'g'ri prizmada to'g'ri to'rtburchak shaklida, og'ma prizmada esa parallelogramm shaklida bo'ladi. To'g'ri prizmada balandlik yon qirraga teng bo'ladi.



11.4.-rasm

Prizmaning asosidagi ko'pburchakning tomoni n ta bo'lsin, u holda prizmaning $3n$ ta qirradi, $2n$ ta uchi, n ta yon yog'i va $n+2$ ta yog'i mavjud

bo'ladi ($n \geq 3$). To'g'ri prizmaning balandlik o'rtasidan o'tuvchi asoslarga parallel bo'lgan bitta simmetriya tekisligi mavjud.

2-ta'rif. Prizma yon yoqlari yuzalarining yig'indisiga **yon sirti** deyiladi va u quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

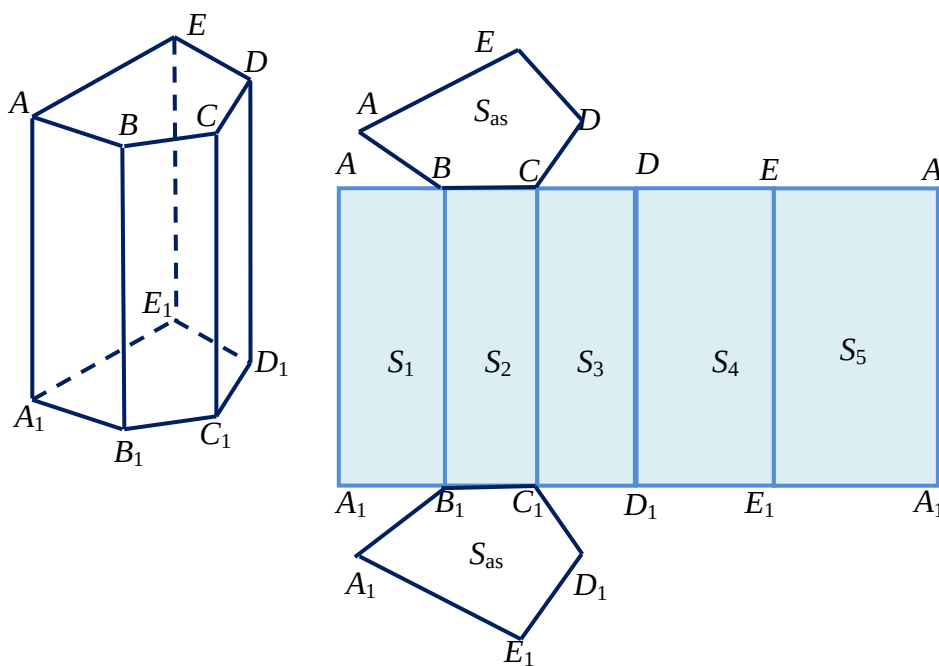
$$S_{yon} = p_{as}H.$$

Bu yerda: p_{as} – prizma asosi perimetri, h – prizmaning balandligi.

Prizmaning to'la sirti uning yon sirti va ikkita asos yuzlarining yig'indisidan iborat bo'ladi (11.5-rasm).

$$S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{as}.$$

Xususiyl holda to'g'ri prizmaning balandligi uning yon qirrasiga teng bo'ladi.

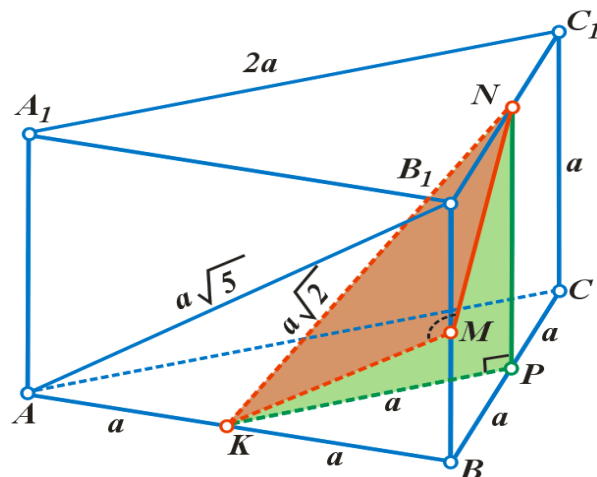


11.5-rasm

1-masala. Muntazam uchburchakli prizmaning asos tomoni yon qirrasidan ikki marta katta bo'lsa, ikkita yon yoqlarining kesishmaydigan diagonallari orasidagi burchakni toping.

Yechish. $ABCA_1B_1C_1$ muntazam uchburchakli prizma berilgan bo'lsin, bu yerda $AA_1=a$, $AB=2a$. AB_1 va BC_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish

kerak. Buning uchun AB , BB_1 va B_1C_1 qirralarning o'rtasini, mos ravishda, K , M va N bilan belgilaymiz. U holda KM va MN kesmalar ABB_1 va BB_1C_1 uchburchaklarning o'rta chizig'i bo'lgani uchun $KM \parallel AB_1$ va $MN \parallel BC_1$. Demak, kesishmaydigan AB_1 va BC_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak KM va MN to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng.



11.6-rasm

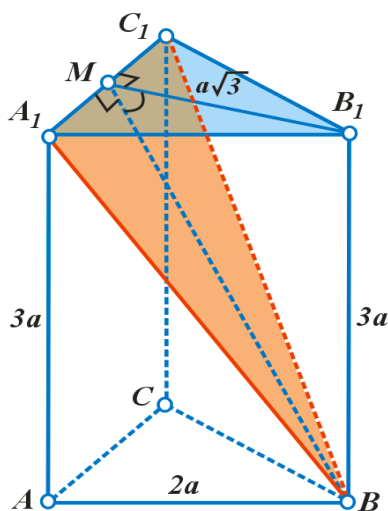
P nuqta N nuqtaning ABC uchburchakdagi proyeksiyasi bo'lsin, u holda P nuqta BC qirraning o'rtasi, KP kesma esa ABC uchburchakning o'rta chizig'i, $KP = \frac{1}{2}AC = a$. KPN to'g'ri burchakli uchburchakdan $KN = \sqrt{2}a$,

$$KM = MN = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$$\text{Kosinuslar teoremasiga ko'ra, } \cos \angle KMN = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - 2a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{5}.$$

2-masala. $ABCA_1B_1C_1$ uchburchakli muntazam prizma berilgan. Prizmaning yon qirradi AA_1 va asosining tomoni 3:2 kabi nisbatda. ABC va A_1BC_1 tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Prizmaning asoslari parallel bo'lgani uchun ABC va A_1BC_1 tekisliklar orasidagi burchak $A_1B_1C_1$ va A_1BC_1 tekisliklar orasidagi burchakka teng. Bu tekisliklar A_1C_1 chiziq bo'ylab kesishadi.



11.7-rasm

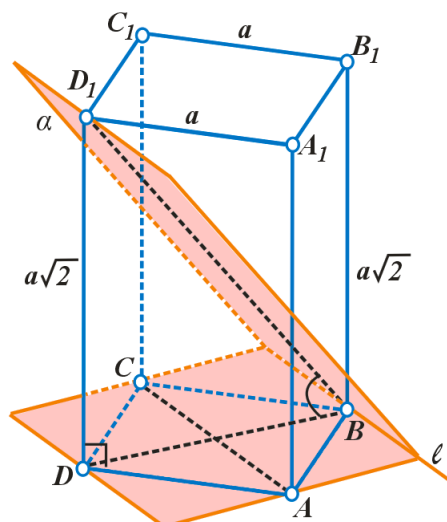
M nuqta A_1C_1 qirraning o'rtasi bo'lsin. U holda $B_1M \perp A_1C_1$ va $BM \perp A_1C_1$. BMB_1 chiziqli burchak biz qidirayotgan ikki yoqli burchak bo'ladi.

$BB_1 = AA_1 = 3a$, u holda $A_1B_1 = AB = 2a$ va $B_1M = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$. Demak,

$\operatorname{tg} \angle BMB_1 = \frac{BB_1}{B_1M} = \frac{3a}{\sqrt{3}a} = \sqrt{3}$ va $\angle BMB_1 = 60^\circ$ bo'ladi.

3-masala. $ABCD$ asosli $ABCD A_1B_1C_1D_1$ to'rtburchakli muntazam prizmaning BD_1 diagonalini orqali AC to'g'ri chizig'iga parallel qilib α tekislik o'tkazilgan. Agar $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{2}$ bo'lsa, prizma asosi va α tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni toping.

Yechish. ABC tekislik va α tekisligi AC ga parallel bo'lgan l to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. l to'g'ri chiziq B nuqtadan o'tadi. DB kesma D_1B ning ABC tekisligidagi proyeksiyasi bo'lsa, $BD \perp AC$ bo'lgani uchun $DB \perp l$ bo'ladi. Uch perpendikular haqidagi teoremaga asosan $D_1B \perp l$. DBD_1 burchak qidirilayotgan ikki yoqli burchak bo'ladi.



11.8-rasm

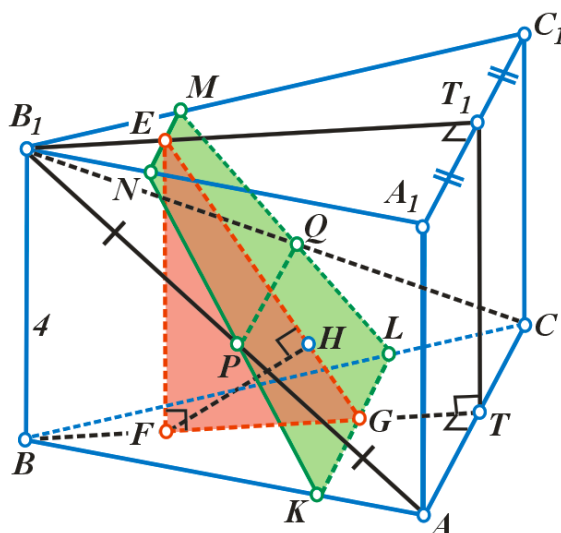
$AB=a$ deb belgilasak, masala shartiga ko'ra $DD_1 = AA_1 = a\sqrt{2}$ bo'ladi. DBD_1 to'g'ri burchakli uchburchakdan: $\operatorname{tg}\angle DBD_1 = \frac{DD_1}{DB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$. Natijada $\angle DBD_1 = 45^\circ$ kelib chiqadi.

4-masala. Asosi ABC uchburchakdan iborat $ABCA_1B_1C_1$ to'g'ri prizma asosining tomonlari $AB=BC$ va medianasi $BT=9$ bo'lsin. ABC uchburchak medianalari kesishish nuqtasi O , ABB_1A_1 va BCC_1B_1 yon yoqlarining, mos ravishda, markazlari P va Q nuqtalar orqali tekislik o'tkazilgan. Agar $AA_1=4$ bo'lsa, C uchidan shu tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. PQ kesma AC qirraga parallel bo'lgani uchun, AB_1C uchburchakning o'rta chizig'i bo'ladi. Demak, PQ kesma ABC va $A_1B_1C_1$ tekisliklarga ham parallel. OPQ tekislik asosni PQ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqda kesadi. K va L nuqtalar, mos ravishda, OPQ tekislikning AB va BC qirralar bilan kesishish nuqtasi bo'lsin. U holda $\frac{AK}{KB} = \frac{CL}{LB} = \frac{OT}{OB} = \frac{1}{2}$.

M va N nuqtalar OPQ tekislikning B_1C_1 va A_1B_1 qirralar bilan kesishish nuqtalari bo'lsin. $A_1B_1C_1$ asos medianasi B_1T_1 va NM to'g'ri chiziq kesishish nuqtasi E bo'lsin. U holda B_1PN va AKP uchburchaklar tengligidan:

$$\frac{B_1M}{MC_1} = \frac{B_1N}{NA_1} = \frac{AK}{KB} = \frac{1}{2}.$$



11.9-rasm

NB_1M va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning o'xshash koeffitsiyenti $\frac{B_1N}{A_1B_1} = \frac{1}{3}$,

demak, $B_1E = \frac{1}{3}B_1T_1 = \frac{1}{3}BT = 3$.

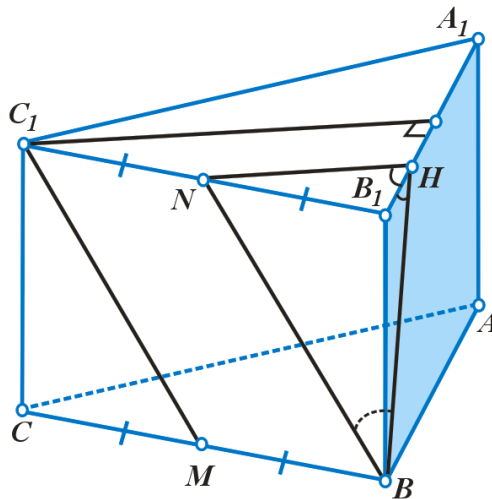
E nuqtadan BT to'g'ri chiziqqa EF perpendikular o'tkazamiz. U holda $EF = BB_1 = 4$, $OF = BO - BF = BO - B_1E = 6 - 3 = 3$, $OE = \sqrt{OF^2 + EF^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

FH – EFO to'g'ri burchakli uchburchakning balandligi bo'lsin. U holda $FH \perp EO$ va $FH \perp AC$, demak, FH – OPQ tekislikka perpendikular. $OF \cdot EF = OE \cdot FH$ tenglikdan F nuqtadan OPQ tekislikkacha masofa $FH = \frac{OF \cdot EF}{EO} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$.

BC kesma va OPQ tekislikning kesishish nuqtasi L bo'lsa, $\frac{BL}{LC} = 2$. C nuqtadan OPQ tekislikkacha masofa B nuqtadan OPQ tekislikkacha bo'lgan masofadan ikki marta kichik. F – BO kesmaning o'rtasi, demak, qidirilgan masofa FH kesma uzunligiga teng.

5-masala. $ABCA_1B_1C_1$ muntazam uchburchakli prizmada yon qirrasining asos tomoniga nisbati $1:\sqrt{2}$. M nuqta BC qirraning o'rtasi. C_1M to'g'ri chiziq va AA_1B_1 tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. N – B_1C_1 qirraning o'rtasi bo'lsin. BMC_1N parallelogramm bo'lgani uchun $NB \parallel C_1M$. Demak, qidirilayotgan burchak NB og'ma va AA_1B_1 tekislik orasidagi burchak.



11.10-rasm

N nuqtadan A_1B_1 chiziqqa NH perpendikular o‘tkazamiz. $NH \perp A_1B_1$ va $NH \perp A_1B$ bo‘lgani uchun NH to‘g‘ri chiziq AA_1B tekislikka perpendikular. Demak, qidirilayotgan burchak NBH .

$CC_1=a$ bo'lsa, $A_1B_1=a\sqrt{2}$ bo'ladi. NH perpendikular $A_1B_1C_1$ teng yonli uchburchakning C_1 uchidan tushirilgan balandligidan ikki marta kichik:

$$NH = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

 BB_1N to'g'ri burchakli uchburchakdan

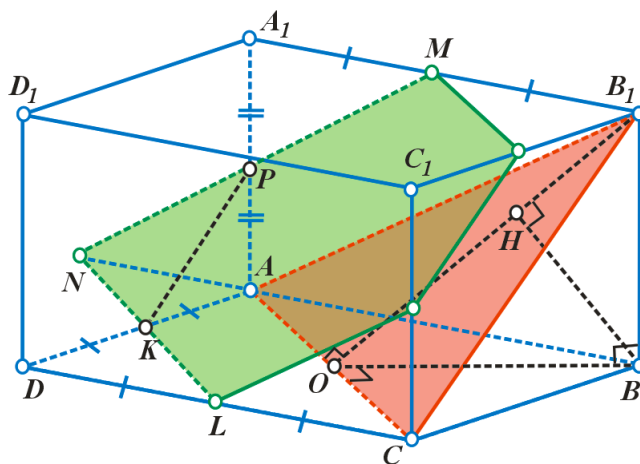
$$BN = \sqrt{NB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Demak, $NH = \frac{1}{2}BN$ va natijada $\angle NBH = 30^\circ$.

6-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ muntazam prizmaning asosi $ABCD$ bo'lsin. K, L, M nuqtalar, mos ravishda, AD, CD va $A_1 B_1$ qirraning o'rtalari. Agar $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{6}$ bo'lsa, BB_1 to'g'ri chiziqli va KLM tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. KL va AB to'g'ri chiziqlar N nuqtada, MN va AA_1 to'g'ri chiziq esa P nuqtada kesishsin. U holda P nuqta KLM tekislikda yotadi, AKN uchburchak DKL uchburchakka, APN esa A_1PM uchburchakka teng. Demak, P nuqta AA_1 qirraning o'rtasi. KL va PM , mos ravishda, ADC va AA_1B_1 uchburchaklarning o'rta chizig'i, shuning uchun $KL \parallel AC$ va $PM \parallel AB_1$, ya'ni AB_1C tekislikdagi ikkita kesishuvchi AC va AB_1 chiziqlarga parallel bo'lgan KLM tekislikdagi KL va PM

ikki to'g'ri chiziq. Bundan bu ikki tekislikning parallelligi kelib chiqadi, BB_1 chiziq va KLM tekislik orasidagi burchak shu chiziq bilan AB_1C tekislik orasidagi burchakka teng.



11.11-rasm

O – $ABCD$ kvadratning markazi, BH – OBB_1 to‘g‘ri burchakli uchburchakning balandligi bo‘lsin. U holda BH to‘g‘ri chiziq AB_1C tekislikka perpendikular. HB_1 – BB_1 ning AB_1C tekislikdagi proyeksiyasi. $\angle BB_1H$ – BB_1 to‘g‘ri chiziq va AB_1C tekislik orasidagi burchak bo‘ladi.

$$BB_1=AA_1=a \text{ bo'lsa, } AB=a\sqrt{6} \text{ va } BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB\sqrt{2}=a\sqrt{3}.$$

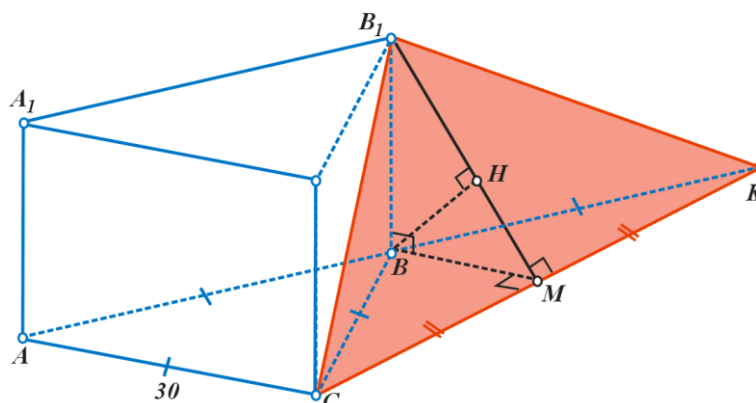
Demak, $\operatorname{tg} \angle BB_1H = \operatorname{tg} \angle BB_1O = \frac{BO}{BB_1} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$. Bundan $\angle BB_1H = 60^\circ$.

7-masala. $ABCA_1B_1C_1$ muntazam uchburchakli prizma asosining tomoni 30 ga, yon qirralari 20 ga teng. BA_1 va CB_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. B_1 uchidan BA_1 qirraga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va AB to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtani K bilan belgilaymiz. U holda BA_1B_1K – parallelogramm, undan $KB_1 \parallel BA_1$ va $KB_1=BA_1=CB_1$ ekani kelib chiqadi. BA_1 to'g'ri chiziq KB_1C tekislikka parallel, BA_1 va CB_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa BA_1 to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan KB_1C tekislikkacha bo'lgan masofaga teng. B nuqtadan KB_1C tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz.

$B_1M - KB_1C$ teng yonli uchburchakning balandligi bo'lsin. U holda $BM - KBC$ teng yonli uchburchakning balandligi, demak, $BH - MBB_1$ to'g'ri burchakli

uchburchakning balandligi KB_1C tekislikdagi B_1M va KC to'g'ri chiziqlarga perpendikular. Bundan BH to'g'ri chizig'i KB_1C tekislikka perpendikular.



11.12-rasm

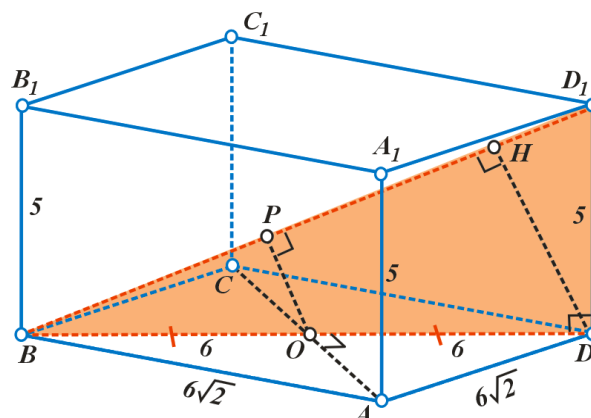
BM – AKC uchburchakning o'rta chizig'i, shuning uchun $BM = \frac{1}{2}AC = 15$.

Pifagor teoremasiga ko'ra: $MB_1 = \sqrt{BM^2 + BB_1^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

Natijada $BH = \frac{BM \cdot BB_1}{MB_1} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

8-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ to'g'ri prizmaning asosi tomoni $6\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan $ABCD$ kvadratdan iborat. Yon qirralari 5 ga teng. AC va BD_1 chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. $ABCD$ kvadratning markazi O nuqtadan BD_1 to'g'ri chiziqqa perpendikular o'tkazamiz. AC to'g'ri chiziq BDD_1 tekislikdagi kesishuvchi BD va DD_1 to'g'ri chiziqlarga perpendikular bo'lgani uchun BDD_1 tekislikka ham perpendikular bo'ladi. Bundan AC to'g'ri chiziq OH ga perpendikular va OH kesma AC va BD_1 chiziqlarga umumiy perpendikular.



11.13-rasm

$DP - BDD_1$ to'g'ri burchakli uchburchakning balandligi, katetlari $DD_1 = 5$,
 $BD = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$ va gipotenuzasi $BD_1 = \sqrt{DD_1^2 + BD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Bundan $DP = \frac{DD_1 \cdot BD}{BD_1} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$, $OH - PBD$ uchburchakning o'rta chizig'i

bo'lgani uchun $OH = \frac{1}{2} DP = \frac{30}{13}$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

11.5. Prizma asosi teng yonli uchburchakdan iborat, bu uchburchakning yon tomoni 5 ga va asosi 8 ga teng. Agar prizma balandligi asosdagi uchburchakning asosiga tushgan balandlik uzunligiga teng bo'lsa, prizma yon sirtini toping. javob: 54

11.6. To'g'ri parallelepipedning balandligi 7 ga teng, asosining tomonlari uzunliklari 4 va 6 ga teng. Bu parallelepiped yon sirtining yuzini toping. javob: 126

11.7. Uchburchakli muntazam prizma asosining tomoni uzunligi 1 ga va yon sirti esa $3\sqrt{15}$ ga teng bo'lsa, prizma yon yog'ining diagonali uzunligini toping. javob: 4

11.8. Uchburchakli muntazam prizma asosining tomoni uzunligi $\sqrt[4]{3}$ ga va yon qirradi uzunligi $\sqrt[4]{27}$ ga teng bo'lsa, prizmaning to'la sirtini toping. javob: 10,5

11.9. To'g'ri prizmaning asosi muntazam uchburchakdan iborat bo'lib, uning yuzi $9\sqrt{3}$ ga teng. Agar prizma balandligi asosi tomonidan 3 marta katta bo'lsa, prizma yon sirtini toping. javob: 324

11.10. To'g'ri prizmaning asosi tomonlari 25, 26 va 29 ga teng. Agar prizmaning yon sirti 1620 ga teng bo'lsa, prizmaning balandligi uzunligini toping. javob: 20,25

11.11. To'g'ri prizmaning asosi teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat bo'lib, yuzi 18 ga teng. Agar prizmaning balandligi $2 - \sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, prizma yon sirtini toping. javob: 12

11.12. Prizmaning asosi kvadratdan iborat bo'lib, tomoni uzunligi $\sqrt{4-\sqrt{3}}$ ga teng. Prizmaning bitta yon yog'i ham kvadrat, qolganlari esa o'tkir burchagi 60° li rombdan iborat. Prizmaning to'la sirti yuzini toping. javob: 13

11.13. Uchburchakli muntazam prizmaning yon qirralari bo'yicha ikkinchi yon yog'iga perpendikular o'tkazilgan. Kesimning yuzi $\sqrt{3}$ ga va asosining tomoni uzunligi $\sqrt[4]{3}$ ga teng bo'lsa, prizmaning to'la sirti yuzini toping. javob: 7,5

11.14. To'g'ri prizmaning asosi rombdan iborat. Diagonal kesimlari yuzlari 3 va 4 ga teng bo'lsa, prizmaning yon sirti yuzini toping. javob: 10

11.15. To'rtburchakli muntazam prizmaning diagonal $2\sqrt[4]{3}$ ga teng va asos tekisligi bilan 45° burchak tashkil qiladi. Prizma asoslarining qarama-qarshi tomonlari bo'yicha o'tkazilgan kesim yuzini toping. javob: 3

11.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'rtburchakli muntazam prizmaning B_1 uchi va AC diagonalini orqali tekislik o'tkazilgan. Agar $AB = \sqrt[4]{2}$ va bu tekislik asos bilan hosil qilgan burchagi 45° ga teng bo'lsa, bu kesim yuzini aniqlang. javob: 1

11.17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmaning A , C va D_1 uchlari orqali tekislik o'tkazilgan, bu tekislik asos tekisligi bilan 60° li burchak hosil qiladi. Agar prizmaning asos tomoni uzunligi 4 ga teng bo'lsa, bu tekislikning hosil qilgan kesimi yuzini toping. javob: 16

11.18. Prizmaning asosi tomoni uzunligi 1 ga teng kvadratdan iborat. Bitta yon yog'i ham kvadrat, qolganlari esa o'tkir burchagi 60° ga teng rombdan iborat. Prizma to'la sirtining yuzini toping. javob: $4 + \sqrt{3}$

11.19. To'g'ri prizmaning asosi tomonlari 5, 5 va 8 ga teng uchburchakdan iborat. Asosining katta tomoni va unga qarama-qarshi yon qirrasining o'rtasidan o'tkazilgan tekislik asos tekisligi bilan 30° li burchak hosil qiladi. Bu kesimning yuzini toping. javob: $8\sqrt{3}$

11.20. To'g'ri prizmaning balandligi 8 ga teng, asosi teng yonli, o'tkir burchagi 45° li trapetsiyadan iborat. Trapetsiyaning bir asosi ikkinchisidan 6 ga

ko'p va o'rta chizig'i 8 ga teng. Bu prizma to'la sirtining yuzini toping. javob: $176 + 48\sqrt{2}$

11.21. Uchburchakli muntazam prizmaning barcha qirralari 1 ga teng. Yuqorigi asosi bir uchining asosdagi proyeksiyasi asosining medianalari kesishgan nuqtasida. Bu prizmaning yon sirtini toping. javob: $1 + \sqrt{3}$

11.22. $ABCA_1B_1C_1$ to'g'ri prizmaning ACB_1 tekisligi ABC asosga 45° da og'gan. Agar $\angle ABC = 90^\circ$, $BC = 15$ bo'lsa, prizmaning yon sirtini toping. javob: 720

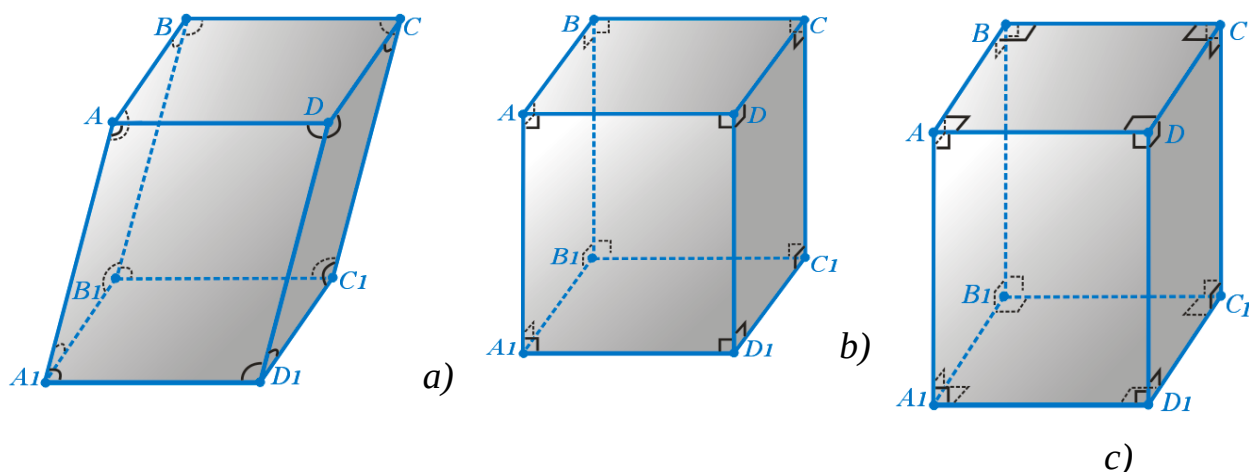
11.23. $ABCA_1B_1C_1$ prizmaning asosi muntazam uchburchak bo'lib, tomoni uzunligi 2 ga teng. $\angle AA_1C = \angle A_1AB = 60^\circ$ va $AA_1 = 1$ ma'lum bo'lsa, prizmaning balandligini toping. javob: $\sqrt{\frac{2}{3}}$

11.24. To'rtburchakli muntazam prizma asosining tomoni 117 ga teng. Yon qirrasi esa $2\sqrt{13}$ ga teng. Asosi tomoni va u bilan kesishmaydigan diagonal orasidagi masofani toping. javob: 6

3-§. Parallelepiped. To'g'ri parallelepiped

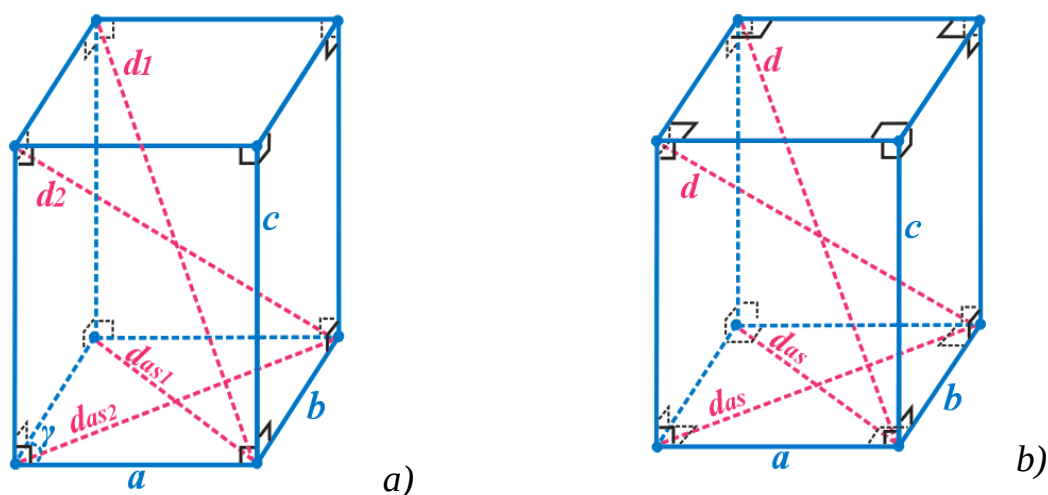
1-ta'rif. Asosi parallelogramm bo'lgan prizмага **parallelepiped** deyiladi (11.14-rasm).

Agar prizmaning yon qirrasi asos tekisligiga perpendikular bo'lsa, bunday parallelepipedga **to'g'ri parallelepiped** (11.14-b rasm), aks holda **og'ma parallelepiped** (11.14-c rasm) deyiladi. Agar to'g'ri parallelepipedning asosi to'g'ri to'rtburchak bo'lsa, bunday parallelepipedga **to'g'ri burchakli parallelepiped** deyiladi. To'g'ri burchakli parallelepipedning barcha qirralari orasidagi burchak 90° ga teng.



11.14-rasm

Parallelepipedning 12 ta qirrasi, 8 ta uchi, 4 ta yon yog'i va 6 ta yog'i bo'ladi. Agar parallelepiped to'g'ri bo'lsa, u holda uning yon qirralari o'rtasidan asoslarga parallel bo'lgan bitta simmetriya tekisligi o'tadi.



11.15-rasm

Odatda, parallelepipedning asosdagi qirralari a, b bilan, yon qirrasi esa c bilan belgilanadi.

To'g'ri parallelepipedning asosi parallelogramm bo'lgani uchun diagonallari uzunliklari har xil bo'ladi (11.15-a rasm).

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{d_{as1}^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma + c^2}, \\ d_2 = \sqrt{d_{as2}^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma + c^2}. \end{cases}$$

Bu yerda d_1 va d_2 parallelepipedning diagonallari, d_{as1} va d_{as2} parallelogrammning diagonallari.

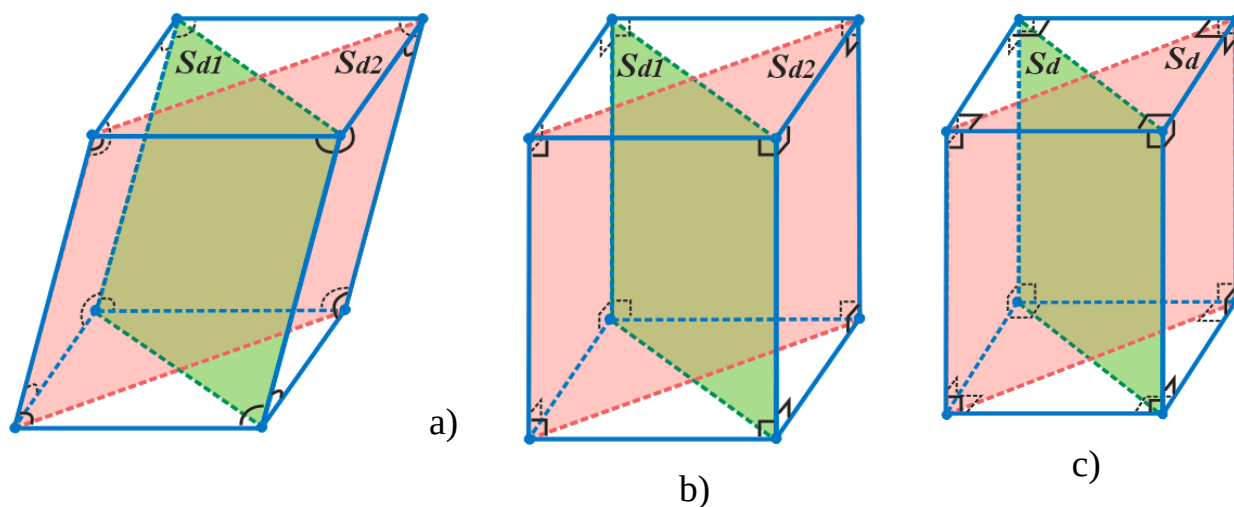
To'g'ri parallelepipedning diagonallari va qirralari orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

$$d_2^2 + d_1^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2), \quad d_2^2 - d_1^2 = 4ab \cos \gamma.$$

To'g'ri burchakli parallelepipedning asosi to'g'ri to'rtburchak bo'lgani uchun diagonallar uzunliklari o'zaro teng bo'ladi (11.15-b rasm).

$$d = \sqrt{d_{as}^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Parallelepipedning qarama-qarshi qirralari orqali tekislik o'tkazish natijasida diagonal kesim hosil bo'ladi. Og'ma parallelepipedda diagonal kesimlar turli parallelogrammlardir. To'g'ri parallelepipedda ham asos diagonallari turlicha bo'lgani uchun parallelepiped diagonal kesimlari turli to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'ladi. Faqatgina to'g'ri burchakli parallelepipedlarda diagonal kesimlar bir xil to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi (11.16-rasm).



11.16-rasm

To'g'ri va to'g'ri burchakli parallelepipedlarning yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi. Og'ma parallelepipedning yon yoqlari esa parallelogrammlardan iborat bo'ladi.

To'g'ri burchakli parallelepipedning yon sirti quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$S_{yon} = p_{as} h = 2(a + b)c.$$

Parallelepipedning to'la sirtini yon sirt va asoslar sirtlari tashkil etadi.

$$S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{as}.$$

Xususiyl holda to'g'ri parallelepipedning to'la sirti quyidagicha bo'ladi:

$$S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{as} = 2(a+b)c + 2ab \sin \gamma.$$

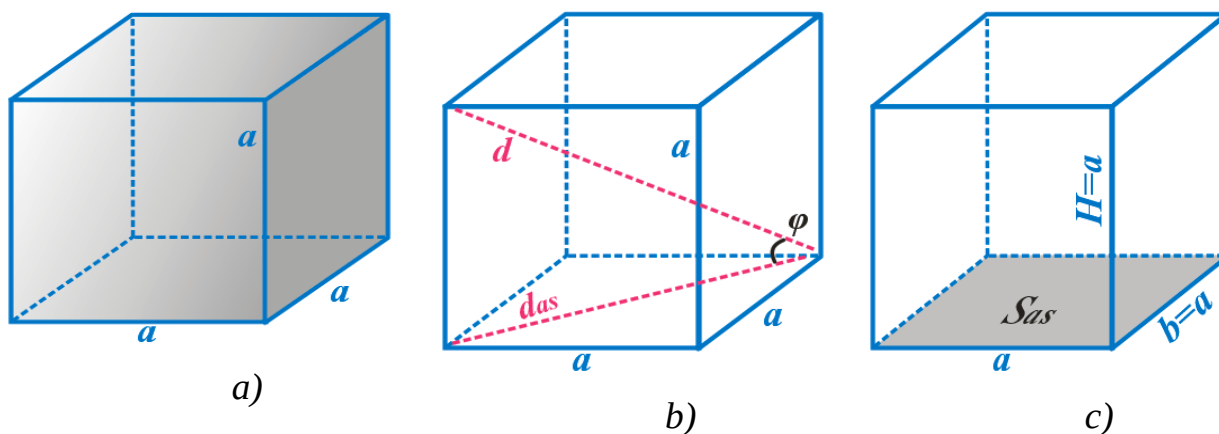
Xususiyl holda, to'g'ri burchakli parallelepipedning to'la sirti quyidagicha bo'ladi:

$$S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{as} = 2(ab + ac + bc),$$

bu yerda S_{as} – parallelepiped asosining yuzi, S_{yon} – parallelepiped yon sirti, $S_{to'la}$ – parallelepipedning to'la sirti, γ – parallelepiped asosining o'tkir burchagi.

2-ta'rif. Barcha qirralari o'zaro teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedga **kub** deyiladi (11.17-a rasm).

Kubning 12 ta qirralari, 8 ta uchi, 4 ta yon yog'i va 6 ta yog'i bor. Kub 9 ta simmetriya tekisligiga ega.



11.17-rasm

Qirralari a ga teng bo'lgan kubning diagonalini quyidagicha topiladi:

$$d = \sqrt{3}a.$$

Kubning diagonalini va kubning ixtiyoriy yog'i diagonalini orasidagi burchak quyidagicha bo'ladi (11.17-b rasm):

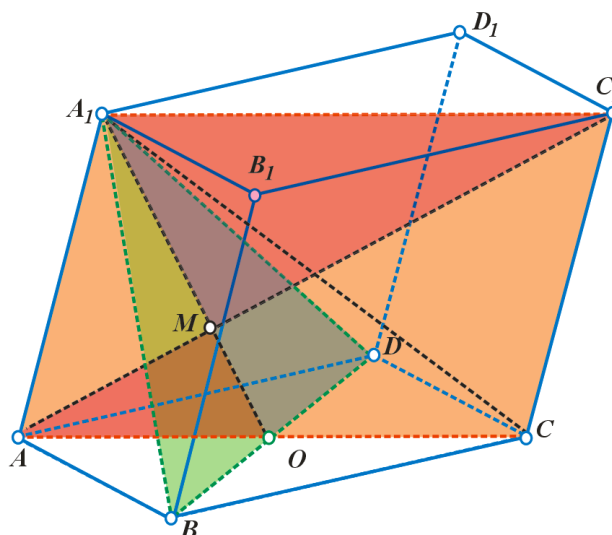
$$\cos \varphi = \frac{d_{as}}{d} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kubning barcha yoqlari o'zaro teng bo'lgan kvadratlardan iborat. Kubning to'la sirti uning 6 ta yog'i yuzlarining yig'indisiga teng:

$$S = 6a^2.$$

1-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ parallelepipedda AC_1 diagonalini $BA_1 D$ uchburchakning medianalari kesishish nuqtasidan o'tib, A nuqtadan hisoblaganda 1:2 kabi nisbatda bo'linishini isbotlang.

Yechish. O nuqta $ABCD$ parallelogrammning markazi bo'lsin. U holda AC_1 kesma $BA_1 D$ uchburchakning medianasi. A_1 va O nuqtalar $BA_1 D$ va $AA_1 C_1 C$ tekisliklarning umumiy nuqtalari bo'lgani uchun bu tekisliklar $A_1 O$ chiziq bo'ylab kesishadi. AC_1 va $A_1 O$ to'g'ri chiziqlar $AA_1 C_1 C$ tekislikda yotadi va qandaydir M nuqtada kesishadi. U holda M nuqta AC_1 to'g'ri chiziq va $BA_1 D$ tekislikning kesishish nuqtasi bo'ladi.



11.18-rasm

AMO va $C_1 M A_1$ uchburchaklarning o'xshashligidan:

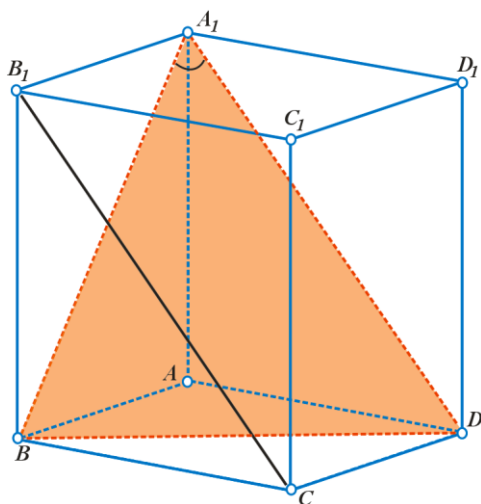
$$\frac{AM}{MC_1} = \frac{OM}{MA_1} = \frac{OA}{A_1 C_1} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{2}.$$

M nuqta $BA_1 D$ uchburchakning $A_1 O$ medianasida yotadi va uni 1:2 kabi nisbatda bo'ladi. Bundan M nuqta $BA_1 D$ uchburchakning medianalari kesish nuqtasi.

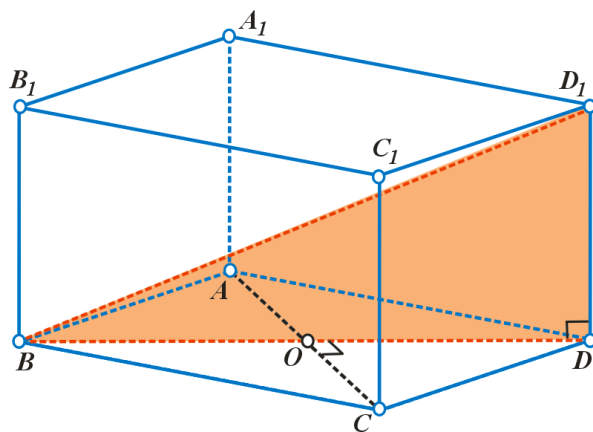
2-masala. Kub yon yoqlarining kesishmaydigan diagonalari orasidagi burchakni toping.

Yechish. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kub berilgan bo'lsin. BA_1 va CB_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topamiz (11.19-rasm). $DA_1 \parallel CB_1$ bo'lgani uchun

kesishmaydigan BA_1 va CB_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak BA_1 va DA_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Bu yerda BA_1D burchak BA_1D teng tomonli uchburchakning burchagi bo'lgani uchun 60° ga teng. Demak, BA_1 va CB_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak 60° teng ekan.



11.19-rasm



11.20-rasm

3-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ to'g'ri parallelepipedning asosi $ABCD$ rombdan iborat. BD_1 va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

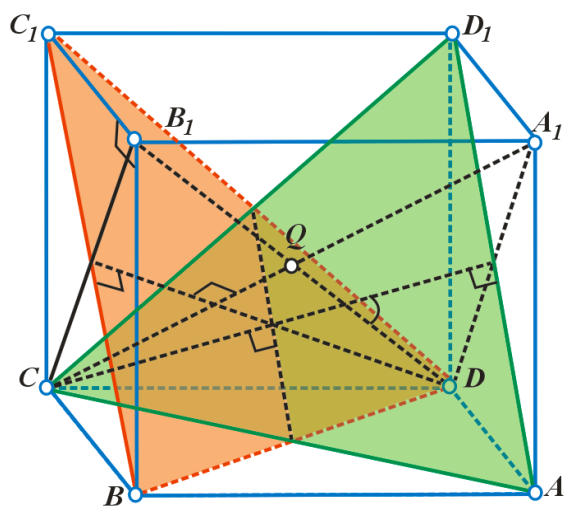
Yechish. $ABCD$ rombning BD diagonalini parallelepiped BD_1 diagonalining ortogonal proyeksiyasi bo'ladi (11.20-rasm). Romb diagonallari perpendikular bo'lgani uchun, uch perpendikular haqidagi teoremaga ko'ra, $BD_1 \perp AC$. BD_1 va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak 90° ga teng.

4-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kub berilgan. BD_1D va AD_1C tekislik orasidagi burchakni toping.

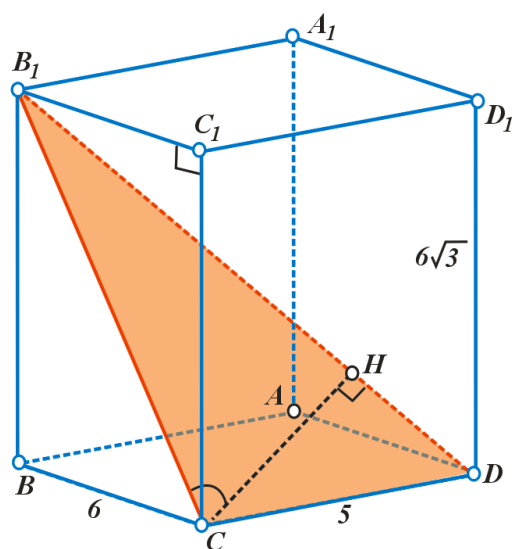
Yechish. CA_1 to'g'ri chiziq BC_1D tekislikka, B_1D to'g'ri chiziq esa AD_1C tekislikka perpendikular (11.21-rasm). Demak, BC_1D va AD_1C tekisliklar orasidagi burchak CA_1 va B_1D to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng, ya'ni A_1B_1CD to'g'ri to'rtburchak diagonalari orasidagi burchakka teng.

Kub qirrasining uzunligi $2a$, CA_1 va B_1D to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi Q bo'lsin. Unda $CA_1 = 2a\sqrt{3}$, $QD = QC = \frac{1}{2}CA_1 = a\sqrt{3}$.

$$CQD \text{ teng yonli uchburchakdan } \cos \angle CQD = \frac{3a^2 + 3a^2 - 4a^2}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$



11.21-rasm



11.22-rasm

5-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedning qirralari $AB=5$, $BC=6$, $AA_1 = 6\sqrt{3}$ ga teng. Parallelepipedning C uchidan DB_1 diagonaligacha bo'lgan masofani toping.

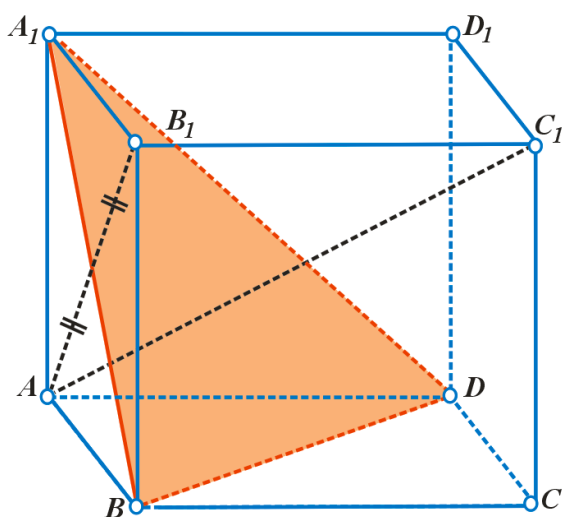
Yechish. DC to'g'ri chiziqlarning BCC_1 tekislikka perpendikularligidan $DC \perp CB_1$ bo'ladi. $CC_1 B_1$ va DCB_1 to'g'ri burchakli uchburchaklardan (11.22-rasm).:

$$CB_1 = \sqrt{36 + 108} = 12 \text{ va } DB_1 = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

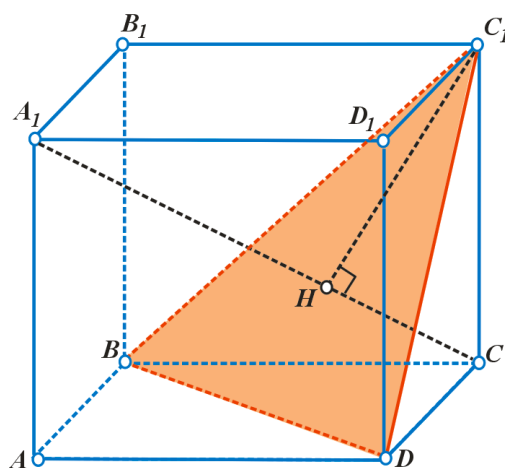
C uchidan DB_1 diagonalga tushirilgan perpendikularning asosi H bo'lsin. U holda CH kesma DCB_1 to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzaga tushirilgan balandligi bo'ladi. $CH = \frac{CD \cdot CB_1}{DB_1} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$.

6-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ birlik kubning B_1 uchidan $BA_1 D$ tekisligigacha masofani toping.

Yechish. AB_1 kesma $BA_1 D$ tekislikning BA_1 to'g'ri chizig'i orqali teng ikkiga bo'linadi (11.23-rasm). B_1 va A nuqtalar $BA_1 D$ tekislikdan bir xil uzoqlikda. A nuqtadan $BA_1 D$ tekislikkacha bo'lgan masofa AC_1 diagonalning $1:3$ qismiga teng, ya'ni $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



11.23-rasm



11.24-rasm

7-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubda AA_1 qirra va $BC_1 D$ yoqi orasidagi burchakni toping.

Yechish. $AA_1 \parallel CC_1$ bo'lgani uchun qidirilayotgan burchak CC_1 qirra va $BC_1 D$ yoqi orasidagi burchakka teng (11.24-rasm)..

Kubning qirradi a ga teng bo'lsin. CA_1 diagonal $BC_1 D$ tekislik bilan H nuqtada kesishsin. CA_1 diagonal $BC_1 D$ tekislikka perpendikular, $C_1 H$ – CC_1 ning $BC_1 D$ tekislikdagi proyeksiyasi, $CC_1 H$ qidirilayotgan burchak bo'ladi. Bundan tashqari CA_1 diagonal $BC_1 D$ tekislik bilan kesishish nuqtasida C uchidan boshlab hisoblaganda 1:2 kabi nisbatda bo'linadi. CHC_1 to'g'ri burchakli uchburchakdan

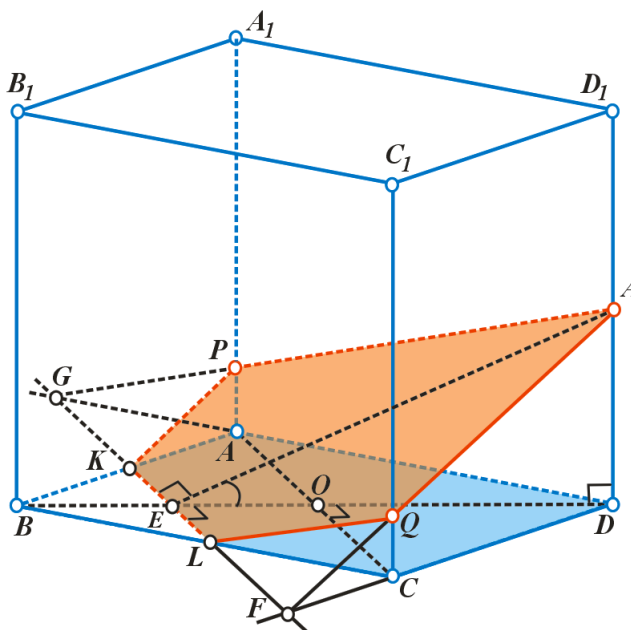
$$\sin \angle CC_1 H = \frac{CH}{CC_1} = \frac{\frac{1}{3} CA_1}{CC_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bundan $\angle CC_1 H = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ ekani kelib chiqadi.

8-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning yog'i birga teng. AB , AD , CC_1 qirralarining o'rtalaridan o'tkazilgan kesim yuzini toping.

Yechish. K , L va M , mos ravishda, berilgan kubning AB , AD va CC_1 qirralarining o'rtasi bo'lsin. F va G nuqtalar, mos ravishda, KL to'g'ri chiziqlarining CD va BC to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari. U holda BB_1 va KLM tekislikning MG chizig'i bilan P nuqtada kesishadi. Shunga o'xshash Q nuqta tekislikning DD_1

qirradi bilan kesishish nuqtasi. U holda qidirilayotgan kesim $KPMQL$ beshburchakni tashkil qiladi.



11.25-rasm

O – $ABCD$ yoqning markazi, E – KL va AC kesmalarning kesish nuqtasi bo'lsin. E va M nuqtalar AA_1C_1 tekislik va kesim uchun umumiy nuqtalar bo'lib, ME to'g'ri chiziqda kesishadi. LM – ABD uchburchakning o'rta chizig'i, bundan $CE \perp KL$ va $CE = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

CC_1 qirra ABC tekislikka perpendikular, ME ning ABC tekislikdagi proyeksiyasi CE , CEM burchak ABC va kesuvchi tekislik orasidagi chiziqli burchak bo'ladi. CEM to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$ME = \sqrt{CM^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos \angle CEM = \frac{CE}{ME} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

$KBCDL$ beshburchak $KPMQL$ kesimning ABC tekislikdagi proyeksiyasi,

$$S_{KBCDL} = S_{ABCD} - S_{\triangle AKL} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{\triangle ABD} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \quad \text{proyeksiyaning yuzi haqidagi}$$

$$\text{teoremaga asosan } S_{KPMQL} = \frac{S_{KBCDL}}{\cos \angle CEM} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{\sqrt{11}}} = \frac{7\sqrt{11}}{24}.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

11.25. Kub yon sirtining yuzi 3 ga teng bo'lsa, kubning diagonal uzunligini toping. javob: 1,5

11.26. To'la sirti 3 ga teng bo'lgan kub yon yog'ining diagonalini toping. javob:1

11.27. Kub qirrasining uzunligi $5\sqrt{2}$ ga teng. Kubning diagonalari kesimidan bu kesimni kesmaydigan qirragacha bo'lgan masofani toping. javob:5

11.28. Kubning yuqorigi va pastki asoslarining diagonalari bo'yicha o'tkazilgan kesim yuzi $16\sqrt{2}$ ga teng bo'lsa, kub qirrasining uzunligini toping. javob:4

11.29. Kubning uchta qo'shni bo'lmagan uchlari orqali o'tkazilgan kesimning yuzi $18\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, kub qirrasining uzunligini toping. javob:6

11.30. Kubning diagonal uzunligi $3\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, kubning to'la sirtini toping. javob: 54

11.31. To'g'ri parallelepipedning balandligi 7 ga teng, asosining tomonlari uzunliklari 4 va 5 ga teng. Bu parallelepipedning yon sirti yuzini toping. javob: 126

11.32. To'g'ri parallelepiped yon yog'ining diagonalari asos tekisligi bilan 30° va 60° burchak hosil qiladi. φ burchak parallelepipedning diagonal va asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagi bo'lsa, $\sqrt{\frac{10}{3}}\text{tg}\varphi$ ni hisoblang. javob: 1

11.33. To'g'ri parallelepipedning asosi diagonal 3 ga teng va asosi tomoni bilan 45° burchak hosil qiladi. Bu asos tomoni va unga qarama-qarshi ustki asos tomonidan o'tkazilgan tekislik asos tekisligi bilan 45° burchak hosil qiladi. Parallelepipedning yon sirti yuzini toping. javob: 18

11.34. To'g'ri parallelepiped asosining tomonlari 3 va 4 ga teng. Parallelepipedning diagonal asos tekisligi bilan 45° burchak hosil qiladi. Parallelepipedning yon sirtini toping. javob: 70

11.35. To'g'ri parallelepipedning diagonal $5\sqrt{2}$ ga teng bo'lib, asos tekisligi bilan 45° burchak hosil qiladi. Agar parallelepipedning asosi yuzi 12 ga teng bo'lsa, yon sirti yuzini toping. javob: 70

11.36. To'g'ri parallelepipedning asosi tomonlari 3 va 4 ga teng to'g'ri to'rtburchakdan iborat. Parallelepipedning diagonal va asos tekisligi orasidagi burchakning tangensi $\frac{1}{33}$ ga teng bo'lsa, parallelepipedning to'la sirtini toping. javob: 26

11.37. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning A , C_1 uchlari va $D_1 D$ qirrasining o'rtasidan o'tuvchi kesimning yuzi $50\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, kub qirrasining uzunligini toping. javob: 10

11.38. Parallelepipedning bir uchidan chiquvchi qirralari oxirlaridan o'tkazilgan tekislikning asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagining kosinusi $\frac{1}{8}$ ga teng. Parallelepipedning asosi tomonlari uzunligi 3 va 4 ga teng bo'lsa, hosil bo'lgan kesim yuzini toping. javob: 60

11.39. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning $A_1 D_1$, $D_1 D$ qirralari o'rtasi va B_1 uchidan tekislik o'tkazilgan. Agar kub qirrasining uzunligi $4\sqrt{5}$ ga teng bo'lsa, hosil bo'lgan kesim yuzini toping. javob: 90

11.40. To'g'ri burchakli parallelepipedning asos diagonal 5 ga teng va u asosning katta tomoni bilan hosil qilgan burchagi kosinusi 0,8 ga teng. Bu asos tomoni va yuqori asosdagi unga qarama-qarshi tomon orqali o'tkazilgan tekislik asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagining kosinusi 0,3 ga teng. Bu tekislikning o'tishidan hosil bo'lgan kesim yuzini toping. javob: 40

11.41. Kubning asosi tomoni orqali asos tekisligi bilan 30° burchak hosil qiluvchi kesim o'tkazilgan. Agar kubning qirrasi uzunligi $\sqrt[4]{3}$ ga teng bo'lsa, hosil bo'lgan kesim yuzini toping. javob: 2

11.42. To'g'ri parallelepipedning asosi tomonlari 3 va 4 ga teng. Parallelepipedning diagonal asos tekisligiga 45° da og'gan. Parallelepipedning yon sirtini toping. javob: 70

11.43. Qirrasi 2 ga teng kubning barcha diagonallari yig'indisini toping.
javob: $8\sqrt{3}$

11.44. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning qirrasi $\sqrt{3}$ ga teng. CB_1 va $A_1 B$ ayqash chiziqlar orasidagi masofani toping. javob: 1

11.45. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ da CB_1 diagonal va ABC tekislik orasidagi burchakni toping. javob: $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$

4-§. Piramida. Piramida va uning kesimlari. Kesik piramida. Piramida va kesik piramidaning sirti

1-ta'rif. Bitta yog'i ixtiyoriy ko'pburchakdan, qolgan yoqlari uchburchaklardan iborat ko'pyoqqa **piramida** deyiladi. Ko'pburchakka **piramida asosi**, ko'pburchak tekisligida yotmagan nuqtaga **piramida uchi** deyiladi. Piramida uchini ko'pburchak uchlari bilan tutashtiruvchi kesmalarga piramidaning **yon qirralari** deyiladi. Piramida uchidan asos tekisligiga tushirilgan perpendikularga **piramida balandligi** deyiladi. Piramida uchidan asos tomoniga tushirilgan perpendikularga **apofema** deyiladi (11.26-rasm).

AB – asosining tomoni;

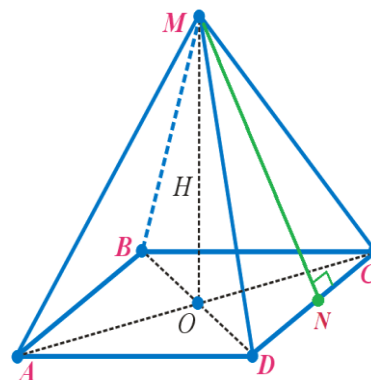
MO – balandlik;

$ABCD$ – piramida asosi;

MN – apofema;

$\angle AMO$ – balandlik va yon qirra orasidagi burchak;

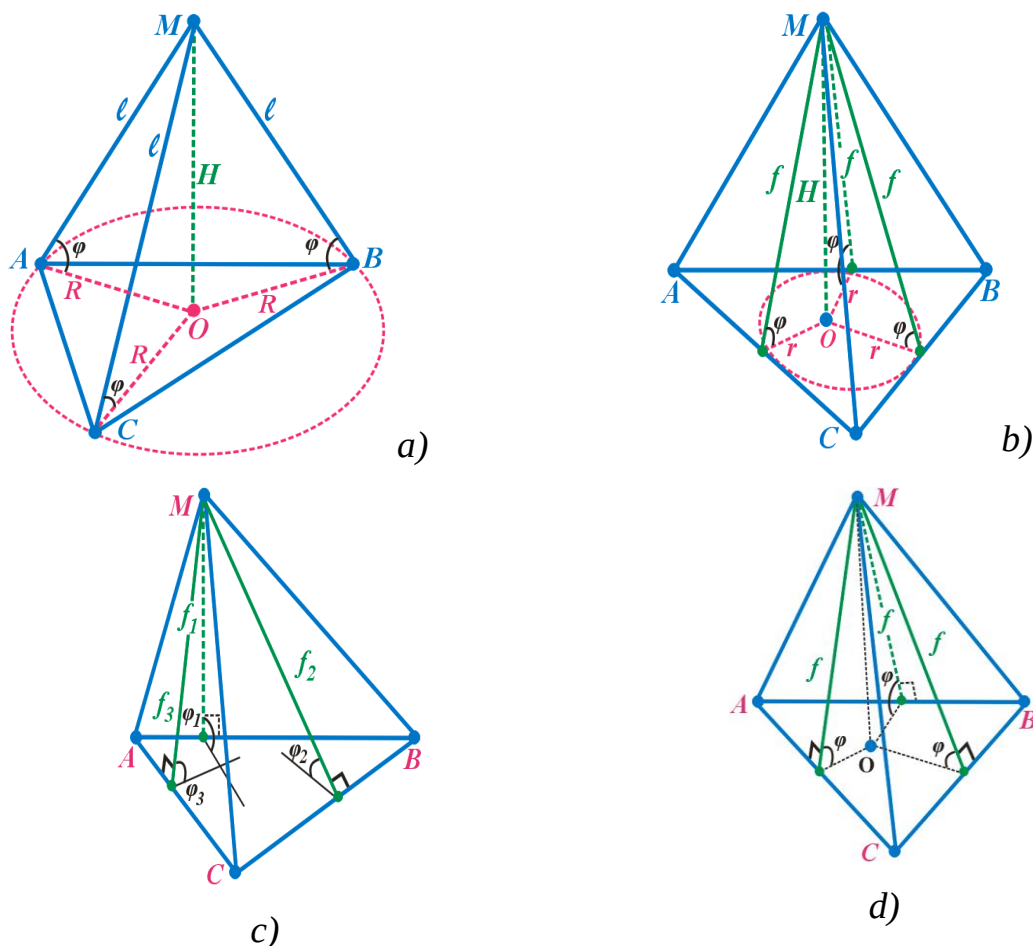
$\angle MAO$ – yon qirra va asos tekisligi orasidagi burchak.



11.26-rasm

Ko'pburchakning n ta uchi bo'lsa, piramidaning $2n$ ta qirrasi, $n+1$ ta uchi, n ta yon yog'i va $n+1$ ta yog'i bo'ladi.

3-teorama. Agar piramidaning barcha qirralari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil etsa, u holda bu piramidaning balandligi uning asosiga tashqi chizilgan aylana markaziga tushadi. Bunda piramidaning barcha qirralari o'zaro teng bo'ladi (11.27-a rasm).



11.27-rasm

4-teorama. Agar piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil etsa, u holda bu piramidaning balandligi uning asosiga ichki chizilgan aylana markaziga tushadi. Bunda piramidaning barcha apofemalari o'zaro teng bo'ladi, asosdagi ikki yoqli burchaklar o'zaro teng bo'ladi (11.27-b rasm).

Piramida yon yoqlari yuzalarining yig'indisi uning yon sirtini tashkil etadi. Umumiy holda piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida hisoblanadi (11.27-c rasm):

$$S_{yon} = \frac{1}{2}(a f_a + b f_b + c f_c + \dots).$$

Apofemalar teng bo'lganda piramidaning yon sirti piramida asosi perimetri va apofema ko'paytmasining yarmiga teng bo'ladi (11.27-d rasm):

$$S_{yon} = \frac{p_{as} \cdot f}{2}.$$

Agar piramidaning asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar berilgan bo'lsa, yon sirt va asos yuzi burchak kosinuslari orqali bog'lanadi (11.27-c rasm):

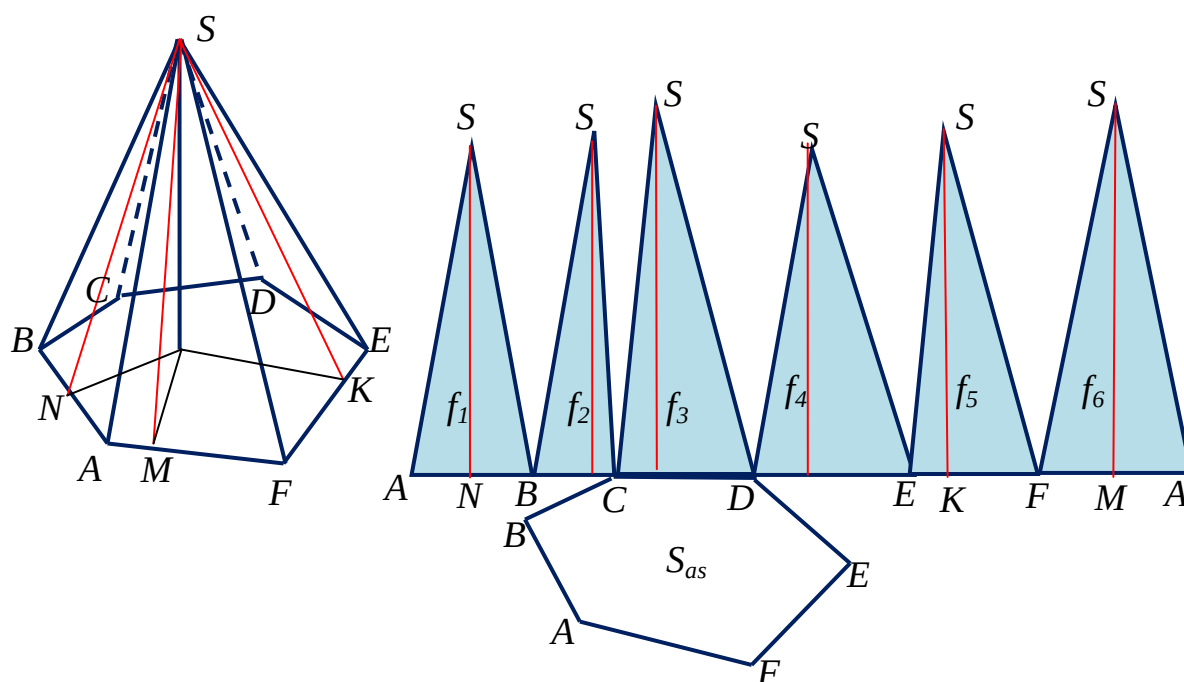
$$S_{as} = S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2 + S_3 \cos \varphi_3 + \dots$$

Agar piramidaning asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar o'zaro teng bo'lsa, yon sirt va asos yuzi burchak kosinusi orqali bog'lanadi (11.27-d rasm):

$$S_{as} = S_{yon} \cdot \cos \varphi.$$

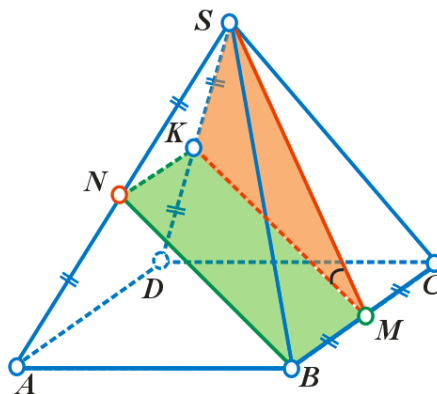
Piramidaning to'la sirti uning yon sirti va asos yuzining yig'indisidan iborat (11.28-rasm):

$$S_{to'la} = S_{as} + S_{yon}.$$



11.28-rasm

1-masala. $SABCD$ muntazam to'rtburchakli piramidaning barcha qirralari teng. BC qirraning o'rtasi M nuqta, SA qirraning o'rtasi N nuqta bo'lsa, SM va BN to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.



11.29-rasm

Yechish. Piramidaning barcha qirralari uzunligi a ga teng bo'lsin. SD yon qirraning o'rtasini K bilan belgilaymiz. NK kesma ASD uchburchak uchun o'rta chiziq bo'ladi. Shuning uchun $NK = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BM$ va $NK \parallel AD \parallel BM$. Bundan $BMKN$ parallelogramm ekanligi kelib chiqadi. U holda $MK \parallel BN$ ekanligidan SM va BN kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak SM va MK to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng. SMK uchburchakning M burchagini topamiz, bunda $MK = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ va $SK = \frac{a}{2}$.

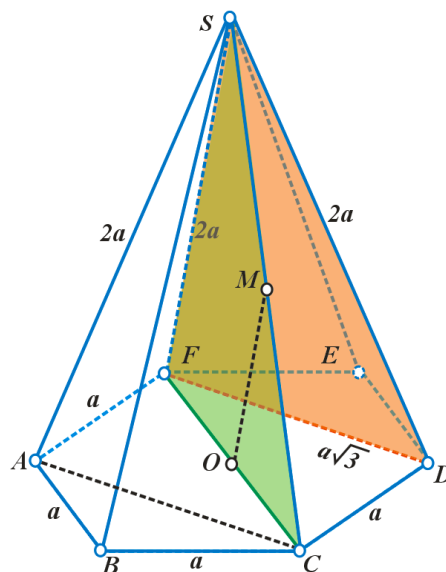
$$\text{Kosinuslar teoremasiga ko'ra: } \cos \angle SMK = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{5}{6}.$$

2-masala. $SABCDEF$ oltiburchakli muntazam piramidaning yon qirralari asos tomonlaridan ikki baravar katta. O nuqta asos markazi, M nuqta SC yon qirraning o'rtasi bo'lsa, OM va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Piramida asosining tomonini $AB=a$, yon qirrasini $SA=2a$ deb belgilaymiz. Kesishmaydigan OM va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, mos ravishda, ularga parallel bo'lgan, kesishuvchi SF va FD to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng.

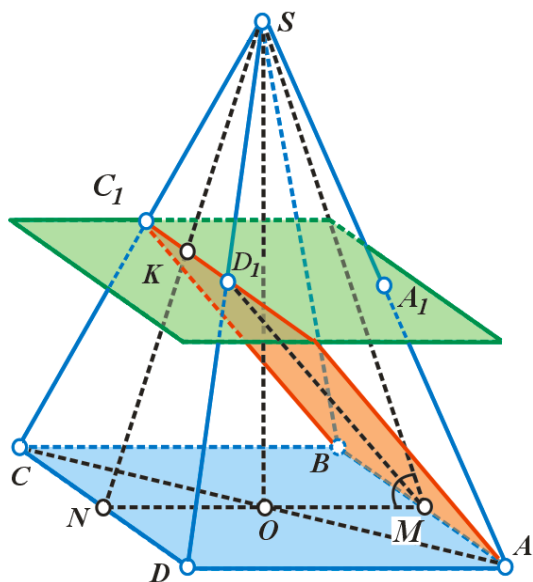
OM kesma CSF uchburchak uchun o'rta chiziq bo'ladi. FDS teng yonli uchburchakda tomonlari $SF = SD = SA = 2a$ va $DF = \sqrt{3}a$ bo'lgani uchun, izlanayotgan burchak kosinusi:

$$\cos \angle DFS = \frac{\frac{1}{2}DF}{SF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



11.30-rasm

3-masala. $ABCD$ asosli $SABCD$ to'rtburchakli muntazam piramida berilgan. Balandligi asosining markazi bo'lgan O nuqtadan o'tadi. AS yon qirrasining o'rtasi A_1 orqali asos tekisligiga parallel qilib α tekislik o'tkazilgan. SC yon qirraning o'rtasi C_1 nuqta va AB orqali β tekisligi o'tkazilgan. Agar $AB:BC:SA=8:6:13$ berilgan bo'lsa, α va β tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakni toping.



11.31-rasm

Yechish. α tekislik asos tekisligiga parallel bo'lgani uchun, α tekislik va CSD tekislik bilan kesishish chizig'i C_1D_1 asos tomoni CD ga parallel, qidirilayotgan burchak asos tekisligi va β tekislik orasidagi burchakka teng.

α tekislik SD yon qirra bilan D_1 nuqtada kesishsin. U holda C_1D_1 kesma CSD uchburchakning o'rta chizig'i bo'ladi. K nuqta C_1D_1 kesma va SCD uchburchak medianasi SN ning kesishish nuqtasi.

AB qirraning o'rtasi M nuqta bo'lsin. MSN tekislik piramidaning balandligidan o'tadi. MK va SO medianalar P nuqtada kesishadi va SO ni $OP:PS=1:2$ nisbatda bo'ladi.

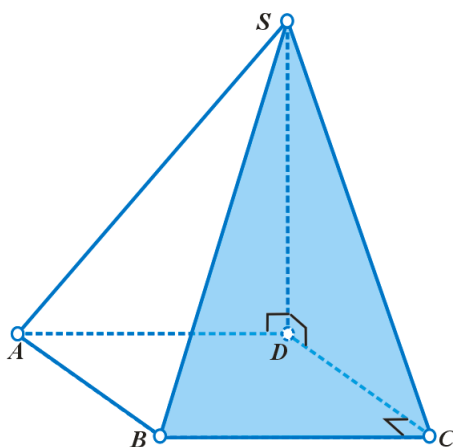
AB to'g'ri chiziqli MSN tekislikka perpendikular va bu tekislikda yotgan SM va NM kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ham perpendikular. Demak, qidirilayotgan burchak KMN burchakka teng.

$AB=8a$ deb belgilasak, $BC=6a$ va $SA=13a$ bo'ladi. Pifagor teoremasiga ko'ra ABC va AOS to'g'ri burchakli uchburchaklar uchun $AC=10a$ va $SO=12a$ bo'ladi. U holda $PO = \frac{1}{3}SO = 4a$ va $OM = \frac{1}{2}MN = 3a$, bundan

$$\operatorname{tg} \angle KMN = \operatorname{tg} \angle PMO = \frac{PO}{OM} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}.$$

5-masala. $ABCD$ asosi to'g'ri to'rtburchakdan iborat $SABCD$ piramidaning SD yon qirradi asos tekisligiga perpendikular. BSC va CSD tekislik orasidagi burchak topilsin.

Yachish. BC to'g'ri chiziqli CSD tekislikka perpendikular bo'lgani uchun bu tekislikdagi CD va SD to'g'ri chiziqlarga ham perpendikular bo'ladi. BSC tekislik CSD tekislikka perpendikular bo'lgan BC to'g'ri chiziqli orqali o'tadi. Bundan bu tekisliklarning perpendikularligi kelib chiqadi.

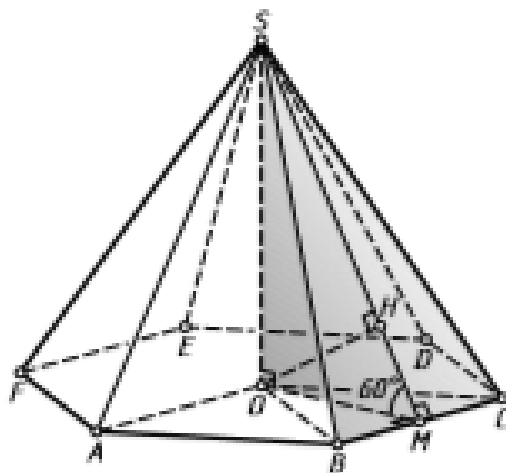


11.32-rasm

6-masala. $SABCDEF$ muntazam oltiburchakli piramida berilgan. Asosining tomonlari 4 ga teng, yon yog'i asos tekisligi bilan 60° burchak tashkil qiladi. A uchidan BSC tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. O nuqta piramida asosining markazi bo'lsin. OA to'g'ri chiziqli BSC tekislikka parallel, A va O nuqtalar bu tekislikdan bir xil uzoqlikda joylashgan. O nuqtadan BSC tomonda yotgan SM apofemaga OH perpendikular tushiramiz. U holda OH kesma BSC tekislikka perpendikular, OMS burchak piramidaning BC qirrasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi. Shartga ko'ra $\angle OMS = 60^\circ$. To'g'ri burchakli OHM uchburchakdan

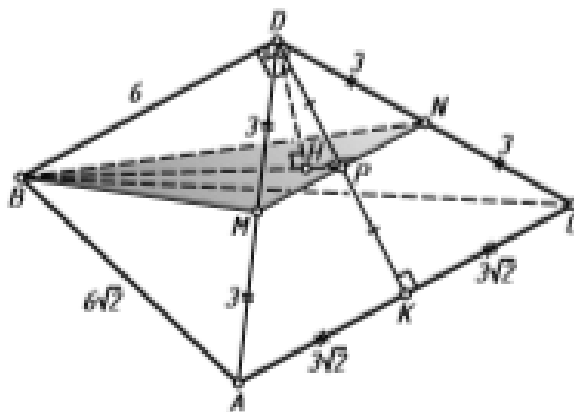
$$OH = OM \sin \angle OMS = \frac{BC \sqrt{3}}{2} \sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



11.33-rasm

7-masala. $DABC$ muntazam piramidaning DA , DB va DC yon qirralari o'zaro perpendikular. Agar piramida asosining tomonlari $6\sqrt{2}$ bo'lsa, piramidaning B uchi, DA va DC qirralarning o'rtalaridan tekislik o'tkazilgan. C uchidan shu tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. ADC yoqning DK medianasi va NM o'rta chizig'i kesishish nuqtasi P bo'lsin. U holda P nuqta DK ning o'rtasi. N – DC qirraning o'rtasi bo'lgani uchun C va D nuqtalar BNM tekislikdan bir xil uzoqlikda joylashgan. D nuqtadan shu tekislikkacha bo'lgan masofani topish kerak.



11.34-rasm

ADB teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan $DB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$, demak,

$DA=DC=DB=6$. BD chiziq ADC tekislikdagi kesishuvchi DA va DC to'g'ri chiziqlarga perpendikularligidan ADC tekislikka perpendikularligi kelib chiqadi. DH – BPD to'g'ri burchakli uchburchakning balandligi. $DH \perp BP$ va $DH \perp MN$ bo'lgani uchun BNM ga ham perpendikular bo'ladi. Demak, D nuqtadan BNM tekislikkacha masofa DH kesma uzunligiga teng.

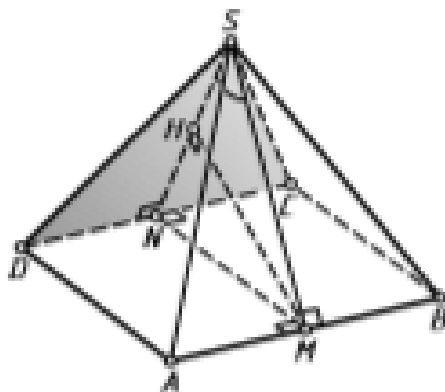
$$DP = \frac{1}{2} DK = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad BP = \sqrt{BD^2 + DP^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Natijada,

$$DH = \frac{DB \cdot DP}{BP} = \frac{6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 2.$$

8-masala. $SABCD$ to'rtburchakli muntazam piramidaning apofemasi asosining tomoniga teng. Piramida ASB yog'ining apofemasi va CSD tekislik orasidagi burchakni toping.

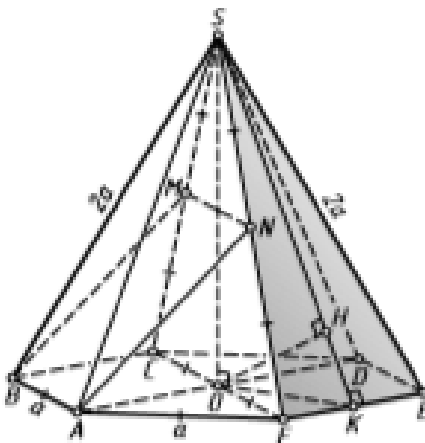
Yechish. AB va CD qirralarning o'rtalari, mos ravishda, M va N bo'lsin. MSN teng yonli uchburchakning MH balandligini o'tkazamiz. MH to'g'ri chizig'i CSD tekislikdagi ikkita kesishuvchi SN va CD to'g'ri chiziqlarga perpendikularligidan CSD tekislikning o'ziga ham perpendikular bo'ladi. SM ning CSD tekisligidagi proyeksiyasi SH , MSN burchak MS va CSD tekislik orasidagi burchak. NSM uchburchak teng tomonli bo'lgani uchun $\angle MSN = 60^\circ$ bo'ladi.



11.35-rasm

9-masala. $SABCDEF$ oltiburchakli piramidaning yon qirrasini asos tomonidan ikki marta katta. M – SC yon qirrasining o'rtasi. BM to'g'ri chiziqli va ESF tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. $AB=a$, $SC=2a$ deb belgilasak. O – piramida asosining markazi, N – SF qirraning o'rtasi bo'lsin. NM – CSF uchburchakning o'rta chizig'i, shuning uchun $NM \parallel CF \parallel AB$ va $NM = \frac{1}{2}CF = AB = a$. Demak, $ABNM$ – parallelogramm, shuning uchun $AN=BM$ va $AN \parallel BM$. BM to'g'ri chiziqli va ASF tekislik orasidagi burchak AN to'g'ri chiziqli va ASF tekislik orasidagi burchakka teng.



11.36-rasm

AO to'g'ri chiziqli ESF tekislikka parallelligidan, A nuqta va ESF tekislik orasidagi masofa, O nuqta va ESF tekislik orasidagi masofaga teng. H – O nuqtadan ESF uchburchakning SK medianasiga tushirilgan perpendiklarning

asosi bo'lsin. U holda OH – ESF tekislikka perpendikular. Demak, qidirilayotgan burchak sinusi $\frac{ON}{AN}$ nisbatga teng.

$$SOK \text{ to'g'ri burchakli uchburchakdan } SO = \frac{CF\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \quad OK = \frac{OF\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

OH kesma shu uchburchakning to'g'ri burchagidan tushirilgan balandligi,

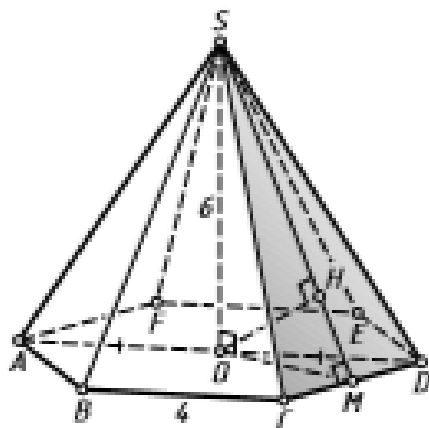
$$OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{3a}{\sqrt{15}}. \text{ Uchburchak medianasi formulasiga ko'ra:}$$

$$AN = \frac{1}{2} \sqrt{2SA^2 + 2AF^2 - SF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8a^2 + 2a^2 - 4a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

U holda qidirilgan burchak sinusi $\frac{OH}{AN} = \frac{\frac{3a}{\sqrt{15}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$

10-masala. $SAB CDEF$ oltiburchakli muntazam piramida asosining tomoni 4 ga, SO balandligi 6 ga teng. AF va SC to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. AF qirra CD qirruga parallel, AF to'g'ri chiziq CSD tekislikka parallel, shuning uchun AF va SC to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa AF to'g'ri chizig'ining ixtiyoriy nuqtasidan CSD tekislikkacha bo'lgan masofaga teng. CSD tekislikka og'ma bo'lgan AD ning o'rtasi O bo'lgani uchun, A nuqtadan CSD tekislikkacha bo'lgan masofa O nuqtadan CSD tekislikkacha bo'lgan masofadan ikki marta katta.



11.37-rasm

SM – CSD teng yonli uchburchakning balandligi, OH esa SOM to'g'ri burchakli uchburchakning balandligi bo'lsin. U holda OH kesma SCD tekislikka perpendikular bo'ladi.

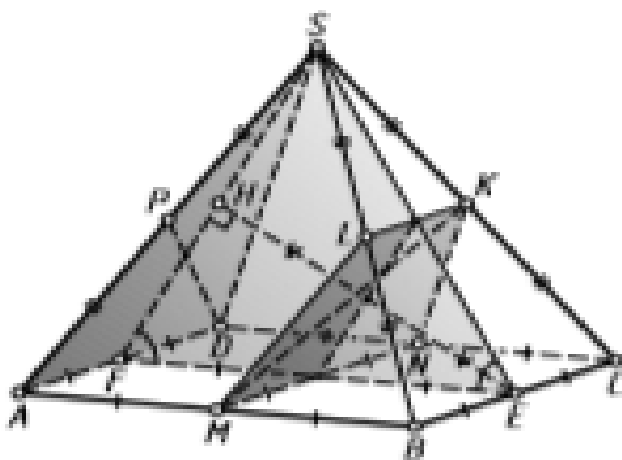
$$SOM \text{ to'g'ri burchakli uchburchakdan } SO=6, OM = \frac{OC\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \angle OSM = \frac{OM}{SO} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Demak, } \angle OSM = 30^\circ \text{ bo'lgani uchun } OH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

A nuqtadan CSD tekislikkacha masofa yoki AF va SC to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa 6 ga teng.

11-masala. $SABCD$ to'rtburchakli muntazam piramida. M , K va P nuqtalar AB , SC va SA qirralarning o'rtalari. Agar asosining tomoni $4\sqrt{3}$ va yon yog'i asos tekisligi bilan 60° burchak tashkil qilsa, MK va DP to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. L va N , mos ravishda, SB va CD qirralarning o'rtalari bo'lsin. U holda $MN \parallel BC \parallel KL$ bo'ladi, K , L , M va N nuqtalar bir tekislikda yotadi. Bu tekislik ASD tekislikka parallel, chunki bu tekisliklardagi MN va ML kesishuvchi chiziqlar, mos ravishda, AD va AS kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga parallel. Kesishmaydigan MK va DP to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa shu ikki tekislik orasidagi masofaga teng.

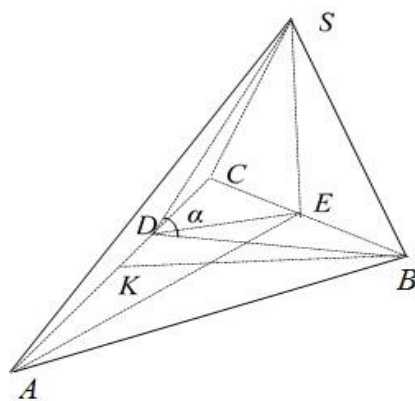


11.38-rasm

E va F nuqtalar, mos ravishda, BC va AD qirralarning o'rtalari. Unda $\angle FES=60^\circ$ bo'lgani uchun ESF uchburchak teng tomonli. Uchburchakning EH balandligi ASD tekislikka perpendikular va KLM tekislikka parallel. Bu balandlik KLM tekislikda teng ikkiga bo'linadi, tekisliklar orasidagi masofa EH ning yarmiga teng. $\frac{1}{2}EH = \frac{1}{2} \frac{EF\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

12-masala. Piramidaning asosi muntazam uchburchakdan iborat, yon yoqlaridan biri asosiga perpendikular, qolgan ikkitasi asosga burchak ostida og'gan. Yon qirralar asosga qanday og'gan?

Yechish: (ACS) va (ABS) yoqlar asosga bir xil burchak ostida og'gani uchun S uchidan BC tomonga tushirilgan perpendikular BC ning o'rtasiga tushadi. S uchidan AC tomonga SD perpendikular o'tkazamiz. SE – perpendikular, SD – og'ma, DE – proyeksiya. Uch perpendikularlar haqidagi teorema ko'ra, $DE \perp AC$, u holda, $\alpha = \angle SDE$, $AB = a$ parametr kiritamiz.



11.39-rasm

$$\triangle CDE \text{ dan: } DE = CE \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4},$$

$$\triangle BCK \text{ dan: } BK = BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AE = BK.$$

$$\triangle DEC \text{ dan: } SE = DE \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

SE ning ABC ga perpendikularligidan $y = (\angle CS^{\wedge} ABC) = \angle SCE$ va $x = (\angle AS^{\wedge} ABC) = \angle SAE$ bo'ladi.

$$\triangle SCE \Rightarrow \operatorname{tgy} = \frac{SE}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\triangle ASE \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{SE}{AE} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

Javob: $x = \arctg\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha\right), y = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha\right).$

13-masala. Piramida asosining gipotenuzasi a ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Har bir yon qirrasi asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Piramidaning balandligini toping.

Yechish: Piramidaning har bir yon qirrasi asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil etgani uchun S nuqtadan tushirilgan SO perpendikular, ABC to'g'ri burchakli bo'lganidan O nuqta uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bo'ladi.

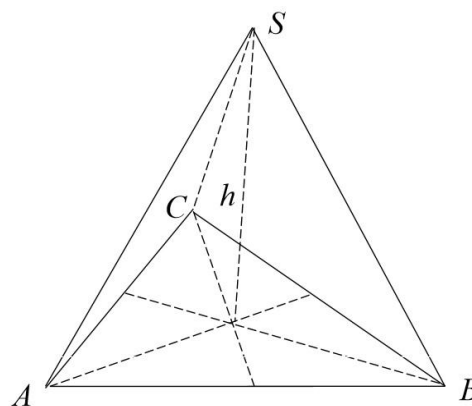
Demak, $R = AO = \frac{a}{2}, SO \perp (ABC)$

ekanligidan, $AO = pr_{(ABC)} AS$, bundan

$\beta = (AS \wedge ABC) = \angle SAO.$

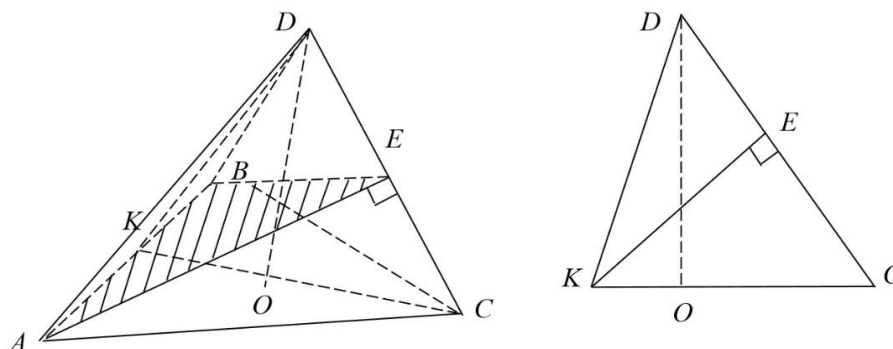
$\triangle AOS \Rightarrow \frac{SO}{AO} = \operatorname{tg}\beta, \therefore SO = \frac{a}{2} \operatorname{tg}\beta, SO = H$

Javob: $H = \frac{a}{2} \operatorname{tg}\beta.$



11.40-rasm

14-masala. Uchburchakli muntazam piramida asosining tomoni orqali unga qarshi yotgan yon qirraga perpendikular tekislik o'tkazilgan. Agar asosining tomoni a , piramidaning balandligi h bo'lsa, kesim yuzini toping.



11.41-rasm

Yechish: $\triangle ABE$ teng yonli, chunki piramida muntazam:

$BE = AE$, bundan $AK = KB$, u holda:

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot KE = \frac{a}{2} KE. \quad (1)$$

$$KE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ bundan } OC = \frac{2}{3} \cdot KC = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\triangle CDO \text{ dan: } CD = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3h^2 + a^2}{3}}.$$

$\triangle CDK$ ning yuzini ikki xil usul bilan topamiz:

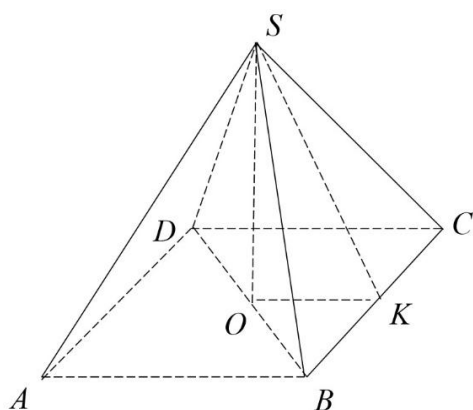
$$S_{\triangle DKC} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot KE \Rightarrow OD \cdot KC = CD \cdot KE \Rightarrow$$

$$KE = \frac{OD \cdot KC}{CD} = \frac{h \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3h^2 + a^2}{3}}} = \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$

$$\text{Demak, (1) ga ko'ra } S_{\text{kesim}} = \frac{3a^2h}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$

$$\text{Javob: } S_{\text{kesim}} = \frac{3a^2h}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$

15-masala. To'rtburchakli muntazam piramidaning yon sirti $14,76m^2$ ga, to'la sirti $18m^2$ ga teng. Piramida asosining tomonini va balandligini toping.



11.42-rasm

Yechish: $S_{\text{to'la}} = S_{\text{asos}} + S_{\text{yon}}$ formulaga

ko'ra:

$$S_{\text{asos}} = S_{\text{to'la}} - S_{\text{yon}} \quad (1)$$

$AB = x$ deb belgilaymiz. U holda, $S_{\text{asos}} = a^2$ va

$$(1) \text{ ga ko'ra } x^2 = 18 - 14,76 = 3,24 \quad x = 1,8m.$$

$$\text{Ikkinchi tomondan, } SK = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{h^2 + 0,81}.$$

U holda

$$S_{\text{yon}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SK = 2 \cdot 1,8 \cdot \sqrt{h^2 + 0,81} = 3,6 \cdot \sqrt{h^2 + 0,81} = 14,76 \Rightarrow$$

$$\sqrt{h^2 + 0,81} = 4,1 \Rightarrow h^2 + 0,81 = 16,81, h^2 = 16, h = 4m.$$

Javob: $1,8m, 4m$.

Agar piramidaning asosiga parallel tekislik bilan kesilganda ikkita geometrik jism hosil bo'ladi. Kesimning yuqori qismida yangi piramida hosil bo'ladi. Pastki qismida hosil bo'lgan geometrik jismga **kesik piramida** deyiladi. Kesik piramidaning asoslari o'xshash ko'pburchaklar bo'lib, yon yoqlari esa trapetsiyalardan iboratdir. O'xshash ko'pburchaklarning mos uchlarini tutashtiruvchi kesmalar kesik piramidaning **yon qirralari** hisoblanadi. Asoslar orasidagi masofaga kesik piramidaning **balandligi** deyiladi. Asoslarning mos tomonlari orasidagi masofaga kesik piramidaning **apofemasi** deyiladi (11.43-rasm).

11.43-rasmga ko'ra quyidagicha belgilash kiritamiz:

$OO_1 = h$ – kesik piramida balandligi;

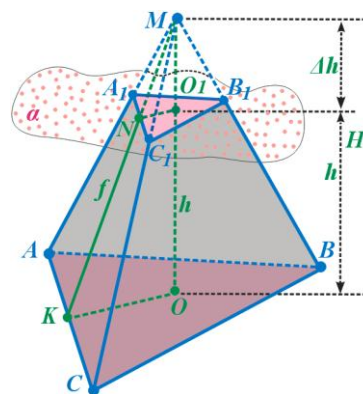
$MO = H$ – butun piramida balandligi;

$MO_1 = \Delta h$ – kesib olingan piramida balandligi;

$NK = f$ – kesik piramida apofemasi;

$S_{ABC} = Q$ – katta asos yuzi;

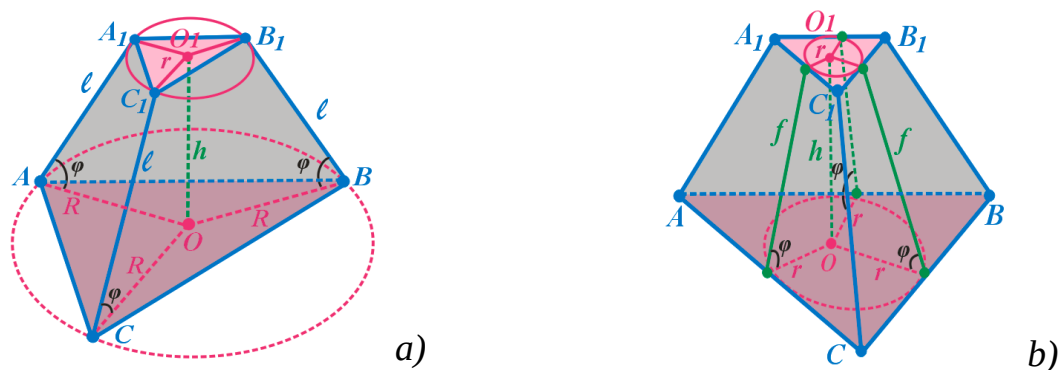
$S_{A_1B_1C_1} = q$ – kichik asos yuzi.



11.43-rasm

Umumiy holda berilgan kesik piramidaning yon yoqlari teng yonli bo'lmagan trapetsiyalardan iborat bo'ladi. Agar kesik piramidaning barcha yon qirralari o'zaro teng bo'lsa, u holda uning barcha yon yoqlari teng yonli va o'zaro teng trapetsiyalar bo'ladi.

Agar kesik piramida balandligi uning asoslariga tashqi chizilgan aylana markaziga tushsa, u holda bu piramidaning barcha yon qirralari o'zaro teng bo'lib, bu qirralar asoslar bilan bir xil burchak tashkil etadi. Umumiy holda yon qirralar uzunliklari turlicha bo'lib, ular asoslar bilan turlicha burchakka og'adi. Eng uzun qirra eng kichik burchakka va eng kichik qirra eng katta burchakka og'adi (11.44-a rasm).



11.44-rasm

Agar kesik piramida balandligi uning asoslariga ichki chizilgan aylana markaziga tushsa, u holda bu piramidaning barcha apofemalari o'zaro teng bo'lib, bu apofemalar asoslar bilan bir xil burchak tashkil etadi. Umumiy holda apofemalar uzunliklari turlicha bo'lib, ular asoslar bilan turlicha burchak tashkil etadi. Eng uzun apofema eng kichik burchakka va eng kichik apofema eng katta burchakka og'adi (11.44-b rasm).

Kesik piramida yon yoqlari yuzalarining yig'indisi uning yon sirtini tashkil qiladi. Umumiy holda kesik piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida aniqlanadi ((11.44-a rasm):

$$S_{yon} = \frac{a_1 + b_1}{2} f_1 + \frac{a_2 + b_2}{2} f_2 + \frac{a_3 + b_3}{2} f_3 + \dots$$

Agar kesik piramidaning barcha apofemalari o'zaro teng bo'lsa, u holda uning yon sirti asoslar perimetrlari o'rta arifmetigi bilan apofemasi ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$S_{yon} = \frac{p_1 + p_2}{2} f.$$

Kesik piramida to'la sirti yon sirti va asoslar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi:

$$S_{to'la} = S_{yon} + Q + q.$$

Agar kesik piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligiga bir xil burchak ostida og'ishsa, yon sirt va asos yuzalari orasida quyidagi bog'lanish mavjud bo'ladi:

$$Q = q + S_{yon} \cdot \cos \alpha.$$

Kesik piramida asoslari o'xshash ko'pburchaklar bo'lib, o'xshashlik koeffitsiyenti quyidagicha bo'ladi:

$$k = \frac{H}{\Delta h} = \sqrt{\frac{Q}{q}}.$$

Agar kesik piramidaning katta asosi yuzi Q , kichik asosi yuzi q va balandligi h ma'lum bo'lsa, kesilmagan katta piramidaning balandligi H va ustidan kesib olib tashlangan kichik piramidaning balandligi Δh quyidagicha bo'ladi (11.43-rasm):

$$H = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{q}} \cdot h, \quad \Delta h = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{q}} \cdot h.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

11.46. To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 7 ga va asos tomoni uzunligi 8 ga teng bo'lsa, yon qirrasi uzunligini toping. javob:9

11.47. Muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi 6 ga teng kvadratdan iborat, qirrasi uzunligi esa 5 ga teng. Bu piramidaning to'la sirtini toping. javob: 84

11.48. Uchburchakli piramidaning yon yoqlari to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat bo'lib, yon qirrasi uzunligi $\sqrt{3-\sqrt{3}}$ ga teng bo'lsa, piramidaning to'la sirtini toping. javob: 3

11.49. Uchburchakli kesik piramidaning asosi tomonlari uzunliklari 3 va 7 ga teng. Kesik piramidaning qirrasi uzunligi $2\sqrt{5}$ ga teng. Piramidaning yon sirtini toping. javob: 60

11.50. Uchburchakli kesik piramidaning asosi tomonlari uzunliklari 3 va 5 ga teng. Kesik piramidaning qirrasi uzunligi $\sqrt{17}$ ga teng. Piramidaning yon sirtini toping. javob: 48

11.51. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosiga parallel tekislik uning balandligini teng ikkiga bo'ladi. Agar kesim yuzi 36 ga teng bo'lsa, asosi tomoni uzunligini toping. javob: 12

11.52. Uchburchakli muntazam piramidaning asosiga parallel tekislik uning balandligini 2:1 nisbatda bo'ladi (asosidan hisoblaganda). Agar asosining tomoni uzunligi $6\sqrt[4]{3}$ ga teng bo'lsa, kesim yuzini toping. javob:3

11.53. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi $13\sqrt{5}$ ga teng. Asos tekisligiga parallel tekisli balandlikni uchidan boshlab hisoblaganda, 1:4 nisbatda bo'ladi, kesim yuzini toping. javob: 33,8

11.54. Piramidaning asosi rombdan iborat bo'lib, tomoni uzunligi $15\sqrt{3}$ ga va o'tkir burchagi 30° ga teng. Asosiga parallel tekislik uning balandligini uchidan, hisoblaganda, 4:1 nisbatda bo'lsa, kesim yuzini toping. javob: 216

11.55. Piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib, kateti uzunligi 35 ga teng. Asosiga parallel tekislik uning balandligini, uchidan hisoblaganda, 2:3 ga teng nisbatda bo'ladi. Agar kesimning yuzi 126 ga teng bo'lsa, asosidagi uchburchakning ikkinchi kateti uzunligini toping. javob:45

11.56. To'rtburchakli piramidada asosiga parallel tekislik piramida balandligini teng ikkiga bo'ladi. Piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib, bir kateti uzunligi 5 ga teng. Agar kesimning yuzi 133 ga teng bo'lsa, asosining ikkinchi kateti uzunligini toping. javob: 106,4

11.57. Piramidaning uchidan 5 masofada asosiga parallel tekislik o'tkazilgan. Hosil bo'lgan kesim va asosining yuzi, mos ravishda, 16 va 25 ga teng bo'lsa, piramida balandligining uzunligini toping. javob: 6,25

11.58. Piramidaning asosiga parallel kesim uning balandligini 1:1 nisbatda bo'ladi. Piramida asosining yuzi kesim yuzidan 381 ga ko'p. Piramida asosning yuzini toping. javob: 508

11.59. Uchburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi 1 ga va yon sirti yuzi $0,5\sqrt{3}$ ga teng. Piramidaning balandligini toping. javob: 0,5

11.60. Uchburchakli muntazam piramidaning yon sirti va asosining yuzi nisbati $\sqrt{3}$ ga teng. Uchidagi yassi burchagi α ga teng bo'lsa, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ni toping.

javob:1

11.61. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi $\sqrt[4]{3}$ ga teng. Asosidagi ikki yoqli burchagi esa 60° ga teng bo'lsa, piramidaning to'la sirtini toping. javob:9

11.62. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning yon qirrasi va kichik asosining tomoni uzunligi $\sqrt{3\sqrt{3}-5}$ ga teng. Yon qirrasi va katta asosining tomoni orasidagi burchak 60° ga teng bo'lsa, kesik piramidaning to'la sirtini toping. javob:2

11.63. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning yon qirrasi 2 ga teng. Katta asosining tomoni uzunligi 3 ga va piramidaning balandligi $\sqrt{2}$ ga teng. Kesik piramidaning diagonal kesimi yuzini toping. javob:4

11.64. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning balandligi $\sqrt{3}$ ga va yon qirrasi uzunligi $\sqrt{5}$ ga teng. Katta asosining tomoni uzunligi 4 ga teng. Piramida yon sirtining yuzini toping. javob: 24

11.65. Piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat bo'lib, o'tkir burchagi 45° ga teng. Piramidaning yon qirrasi asos tekisligi bilan 60° burchak tashkil qiladi. Agar piramidaning balandligi 12 ga teng bo'lsa, piramidaning asosi yuzini toping. javob:48

11.66. Beshburchakli piramidaning barcha yon qirralari asos tekisligi bilan 60° burchak tashkil qiladi va qirralar uzunligi 6 ga teng. Piramidaning asosiga tashqi chizilgan doiraning radiusini toping. javob:3

11.67. Oltiburchakli piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan 30° burchak hosil qiladi. Piramidaning balandligi $6\sqrt{3}$ ga teng. Piramidaning asosiga ichki chizilgan doiraning radiusini toping. javob: 18

11.68. $SABC$ uchburchakli piramidada SA qirra asosga perpendikular. Agar $AB=17$, $BC=8$ va $AC=10$ bo'lsa, ABC va SBC uchburchak tekisliklari orasidagi burchakni toping. javob: 60°

11.69. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirrasi 2 ga teng. Piramidaning to'la sirti $3\sqrt{3}$ ga teng. Piramidaning balandligini toping. javob: $\sqrt{1+\sqrt{5}}$

11.70. Uchburchakli muntazam piramidaning uchidagi yassi burchagi 60° ga va asosi tomoni 9 ga teng. Bu piramidaning to'la sirtini toping. javob: $81\sqrt{3}$

11.71. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi 10 ga teng kvadratdan iborat. Barcha yon yoqlari asosiga 60° burchak ostida og'gan. Bu piramidaga tashqi chizilgan sharning radiusini toping. javob: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

11.72. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirralari 6 ga teng va o'zaro perpendikular bo'lsa, piramidaning balandligini toping. javob: $4\sqrt{3}$

11.73. To'rtburchakli muntazam piramidaning asosi tomoni uzunligi $2\sqrt{2}$ ga va yon qirrasi uzunligi $2\sqrt{5}$ ga teng. Asosi tomoni markazidan asosi tomoniga ayqash joylashgan qirra markazigacha bo'lgan masofani toping. javob: 3

11.74. Piramidaning uchidan 5 ga teng masofada asosiga parallel tekislik o'tkazilgan. Agar hosil bo'lgan kesim va asos yuzi 16 va 25 ga teng bo'lsa, piramidaning balandligini toping. javob: 6,25

11.75. Piramidaning asosiga parallel tekislik asosini 1:1 nisbatda bo'ladi. Asos yuzasi kesim yuzidan 381 ga ko'p. Piramidaning asos yuzini toping. javob: 508

11.76. Muntazam piramidaning asosi ABC muntazam uchburchakdan iborat. Asosi tomoni uzunligi $4\sqrt{2}$ ga teng. $SC=2$ yon qirrasi asos tekisligiga perpendikular. E va D nuqtalar BC va AB tomonlar o'rtasi, SE va CD chiziqlar orasidagi burchak va masofani toping. javob: 45° ; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11.77. $ABCD$ muntazam tetraedrda ABC va ABD yoqlari orasidagi burchakni toping. javob: $\arccos \frac{1}{3}$

11.78. $ABCD$ muntazam tetraedrda AD va CM chiziqlar orasidagi burchakni toping, bunda CM medianasi asosning AB tomoniga tushgan. javob: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$

11.79. To'rtburchakli muntazam piramidaning bir yoqdagi ikkita qirralari orasidagi burchagi 60° ga va qirra uzunligi 4 ga teng. Piramidaning balandligi o'rtasidan yon yog'iga perpendikular tekislik o'tkazilgan. Hosil bo'lgan kesim yuzi $\sqrt{2}S$ ga teng bo'lsa, S ni toping. javob: 10

5-§. Qavariq ko'pyoqlar uchun Eyler formulasi. Muntazam ko'pyoqlar

Ko'pyoqning yoqlari soni Y , uchlari soni U va qirralari soni Q lar orasidagi munosabat quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

5-teorema (Eyler teoremasi). Ixtiyoriy qavariq n yoq uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$Y+U-Q=2.$$

Quyidagi jadvaldan bu tasdiqni yaqqol ko'rish mumkin:

Ko'pyoq	Y	U	Q
Tetraedr	4	4	6
Parallelepiped	6	8	12
Olti burchakli prizma	8	12	18
O'n bir yoq	11	11	20
O'n ikki yoq	12	18	28

6-teorema. Qavariq ko'pyoq tekis burchaklarining soni uning qirralari sonidan ikki marta ko'p.

Natijalar.

1. Ko'pyoq tekis burchaklarining soni har doim juftdir.

2. Agar ko‘pyoqning har bir uchida bir xil k sondagi qirralar tutashsa,

$$U \cdot k = 2Q$$

munosabat o‘rinli.

3. Agar ko‘pyoqning barcha yoqlari bir xil n tomonli ko‘pburchaklardan tashkil topgan bo‘lsa,

$$Y \cdot n = 2Q$$

munosabat o‘rinli.

7-teorema. Qavariq ko‘pyoqning yoqlari soni Y va qirralari soni Q bo‘lgan ko‘pyoq tekis burchaklarining yig‘indisi uchun

$$360^\circ(Y - Q)$$

munosabat bajariladi.

Agar ko‘pyoq modelini tayyorlash talab qilinsa, u tekis ko‘pburchaklarni – ko‘pyoqning yoqlarini bir-biriga yopishtirish natijasida hosil qilinadi. Bunda faqat ko‘pburchaklar majmuyiga ega bo‘libgina qolmasdan, qaysi ko‘pburchaklarni o‘zaro yopishtirish zarurligini ham bilish lozim bo‘ladi. Biror ko‘pyoq yoqlariga teng ko‘pburchaklar majmuyi, qaysi tarafini, mos ravishda, yopishtirish kerakligi ko‘rsatilgan holda, ko‘pyoqning yoyilmasi deyiladi. Ko‘pyoq berilganda uning yoyilmasini yasash mumkin. Teskari masala esa, ya’ni berilgan yoyilma bo‘yicha ko‘pyoqni yasash, quyidagi shartlar bajarilganda yechimga ega bo‘ladi:

1) yoyilmaning har bir tomoniga qolgan tomonlarning faqat bittasi mos kelishi;

2) agar α va β yoqlari umumiy A uchga ega bo‘lsa, qolgan yoqlardan faqat o‘sha A uchga ega bo‘lganlarini tanlab olish zarur;

3) yoqlarni bir-biriga yopishtirish ketma-ketligi ko‘rsatilishi mumkin bo‘lishi;

4) yoyilmaning uchlari, yoqlari va qirralari soni Eyler tenglamasini qanoatlantirishi, ya’ni $Y + U - Q = 2$ shart bajarilishi;

5) ko‘pburchaklarning yopishtiriladigan tomonlari bir xil uzunliklarga ega bo‘lishi;

6) yoyilmaning har bir uchida tekis burchaklarning yig'indisi 360° dan kichik bo'lishi.

1-ta'rif. Qavariq ko'pyoqning yon yoqlari o'zaro teng muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lib, uning har bir uchida bir xil sondagi qirralar tutashsa, u **muntazam ko'pyoq** deyiladi.

Muntazam ko'pyoqlarning asosan besh xil turi mavjud bo'lib, har biri o'z nomiga ega.

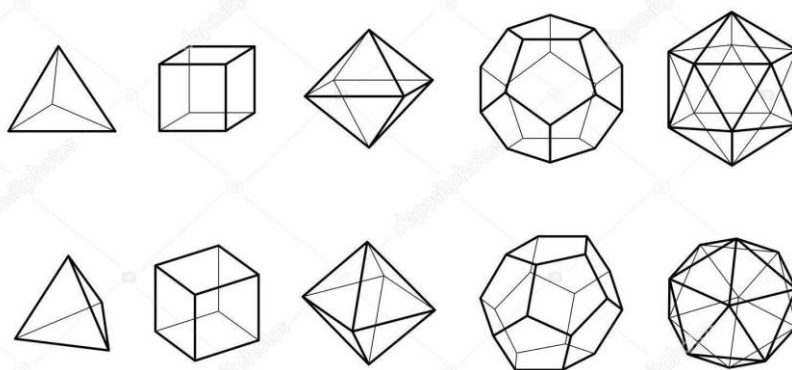
Tetraedr – barcha yoqlari o'zaro teng muntazam uchburchaklardan iborat uchburchakli piramida.

Kub – barcha yoqlari kvadratlardan iborat prizma.

Oktaedr – barcha sakkizta yog'i o'zaro teng muntazam uchburchaklardan iborat ko'pyoqdir. Uni asoslari kvadratlardan iborat bo'lib, yon yoqlari o'zaro teng muntazam uchburchaklar bo'lgan ikkita muntazam piramidani bir-biriga birlashtirish bilan yasash mumkin.

Ikosaedr – barcha yigirmata yog'i o'zaro teng muntazam uchburchaklardan iborat ko'pyoq.

Dodekaedr – barcha o'n ikkita yog'i o'zaro teng muntazam beshburchaklardan iborat ko'pyoq.



11.45-rasm

Mustaqil ishlash uchun masalalar

11.80. Qavariq ko'pyoqning har bir uchidan uchtdan qirra chiqadi. Agar bu ko'pyoqning qirralar soni: a) 12; b) 15 ga teng bo'lsa, uning nechta uchi va yog'i bor?

11.81. 13 ta yog‘i va har bir yog‘ida 13 tadan qirrasi bo‘lgan ko‘pyoq mavjudmi?

11.82. Qavariq ko‘pyoqning har bir uchidan to‘rttadan qirra chiqadi. Agar bu ko‘pyoqning qirralar soni 12 ga bo‘lsa, uning nechta uchi va yog‘i bor?

11.83. Muntazam tetraedr; b) kub; c) oktaedr; d) dodekaedr; e) ikosaedrning uchlari, qirralari va yoqlari sonini toping va bu ko‘pyoqlar uchun Eyler tenglamasining o‘rinli bo‘lishini tekshiring.

11.84. Uchlari soni 8 ta, qirralari soni esa 12 ta bo‘lgan muntazam ko‘pyoqning yoqlari sonini toping va uning nomini aniqlang.

11.85. Uchlari soni 6 ta qirralari soni esa 12 ta bo‘lgan muntazam ko‘pyoqning yoqlari sonini toping va uning nomini aniqlang.

11.86. Uchlari soni 10 ta yoqlari soni esa 7 ta bo‘lgan ko‘pyoqning qirralari sonini toping.

11.87. Uchlari soni 14 ta, qirralari soni esa 21 ta bo‘lgan ko‘pyoqning yoqlari sonini toping.