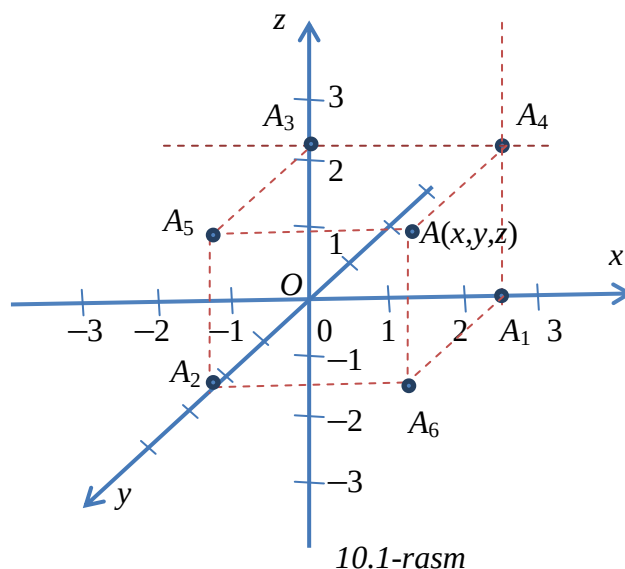


10-BOB

FAZODA DEKART KOORDINATALARI VA VEKTORLAR

1-§. Fazoda Dekart koordinatalarini kiritish. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesma o'rtasining koordinatalari

Fazoda o'zaro perpendikular, O nuqtada kesishadigan uchta koordinata o'qini o'tkazamiz va bu koordinatalarning har birida musbat yo'nalishni aniqlaymiz (10.1-rasm). Shu tartibda tavsiflangan koordinata o'qlarining joylashuviga to'g'ri burchakli **koordinatalar sistemasi** deyiladi.



Fazoda A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtadan Ox , Oy va Oz o'qlariga perpendikularlar to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz (10.1-rasm). U holda A_1 nuqtaga Ox o'qda x koordinata, A_2 nuqtaga Oy o'qda y koordinata, A_3 nuqtaga esa Oz o'qda z koordinata mos keladi. Aniqlangan uchta x , y va z sonlarni A nuqtaga mos qo'yamiz. Bu x , y va z sonlarini A nuqtaning **koordinatalari** deb ataymiz va $A(x;y;z)$ ko'rinishda yozamiz.

Yuqoridagi usulga o'xshash harakatlar bilan tekislikdagi har bir nuqtaga alohida $(x;y;z)$ sonlar uchtalikni mos qo'yish mumkin. Buning aksi ham o'rinli, ya'ni har bir sonlar uchtaligiga fazoda faqat bitta nuqta mos keladi. Haqiqatan,

agar $(x;y;z)$ sonlar uchraligi berilgan bo'lsa, Ox o'qda O nuqtadan, x ning ishorasiga bog'liq holda, musbat yoki manfiy yo'nalishda uzunligi $|x|$ bo'lgan kesmani joylashtiramiz. Oy o'qda uzunligi $|y|$ bo'lgan kesmani, Oz o'qda esa uzunligi $|z|$ bo'lgan kesmani joylashtiramiz. So'ngra bu kesmalarning oxiridan, mos ravishda, Ox , Oy va Oz o'qlarga perpendikularlar o'tkazamiz va ularning kesishish nuqtasi koordinatalari $(x;y;z)$ bo'lgan nuqtadan iborat bo'ladi.

Bunda x koordinata nuqtaning *abssissasi*, y koordinata esa *ordinatasi*, z koordinatasi *oplikatasi* deyiladi. Mos ravishda, Ox o'q – *abssissa o'qi*, Oy o'q esa *ordinata o'qi*, Oz o'q esa *oplikata o'qi* deyiladi. Koordinata o'qlarining kesishish nuqtasi O – to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining *boshi* deyiladi va unga to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi deyiladi.

Agar fazoda berilgan A_1 nuqta Ox o'qda yotsa, uning koordinatalari $A_1(x;0;0)$ bo'ladi. Agar A_2 nuqta Oy o'qda yotsa, uning koordinatalari $A_2(0;y;0)$ bo'ladi. Agar A_3 nuqta Oz o'qda yotsa, uning koordinatalari $A_3(0;0;z)$ bo'ladi. Agar A_4 nuqta xOz tekisligida yotsa, uning koordinatalari $A_4(x;0;z)$ bo'ladi. Agar A_5 nuqta yOz tekisligida yotsa, uning koordinatalari $A_5(0;y;z)$ bo'ladi. Agar A_6 nuqta xOy tekisligida yotsa, uning koordinatalari $A_6(x;y;0)$ bo'ladi. Koordinatalar boshi bo'lgan O nuqtaning koordinatalari $O(0;0;0)$ bo'ladi (10.1-rasm).

Fazoda ikki nuqta orasidagi masofa va kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalari biz planimetriyada o'rgangan kabi bo'ladi.

$A(x_A; y_A; z_A)$ va $B(x_B; y_B; z_B)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagiga teng bo'ladi:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

AB kesmani $\frac{AC}{CB} = \lambda$ nisbatda bo'luvchi $C(x_C; y_C; z_C)$ nuqtaning koordinatalari quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

Xususan, $\lambda=1$ bo'lganda $C(x_C; y_C; z_C)$ nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'ladi va u quyidagicha:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

1-masala. $A(1; 2; 3)$ nuqta berilgan. Bu nuqtadan koordinata o'qlarigacha bo'lgan masofalarni va koordinata tekisliklariga tushirilgan perpendikularlar asoslarini toping.

Yechish.

- 1) a) $A_x \in OX \Rightarrow z = 0, y = 0 \Rightarrow A_x = (1; 0; 0);$
 b) $A_y \in OY \Rightarrow z = 0, x = 0 \Rightarrow A_y = (0; 2; 0);$
 d) $A_z \in OZ \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow A_z = (0; 0; 3).$
- 2) a) $A_{xy} \in OXY \Rightarrow z = 0 \Rightarrow A_{xy} = (1; 2; 0);$
 b) $A_{xz} \in OXZ \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A_{xz} = (1; 0; 3);$
 d) $A_{yz} \in OYZ \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_{yz} = (0; 2; 3).$

2-masala. $A(1; 2; 3)$ nuqtadan: 1) koordinata tekisliklarigacha; 2) koordinata o'qlarigacha; 3) koordinata boshigacha bo'lgan masofalarni toping.

Yechish.

$$1. \text{ a) } A_{xy} \in OXY \Rightarrow z = 0 \Rightarrow A_{xy} = (1; 2; 0),$$

$$AA_{xy} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$\sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = 3;$$

$$\text{b) } A_{xz} \in OXZ \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A_{xz} = (1; 0; 3),$$

$$AA_{xz} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (-3 + 3)^2} = 2;$$

$$\text{d) } A_{yz} \in OYZ \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_{yz} = (0; 2; -3),$$

$$AA_{yz} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 2)^2 + (-3 + 3)^2} = 1.$$

$$2. \text{ a) } AA_x \in OX \Rightarrow z = 0, y = 0 \Rightarrow A_x = (1; 0; 0),$$

$$AA_x = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (-3 + 3)^2} = 2;$$

$$\text{b) } AA_y \in OY \Rightarrow z = 0, x = 0 \Rightarrow A_y = (0; 2; 0),$$

$$AA_y = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 2)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{10};$$

$$d) AA_z \in OZ \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow A_z = (0; 0; -3),$$

$$AA_z = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{5}.$$

3. Koordinatalar boshida $x = 0, y = 0, z = 0$ bo'lgani uchun

$O(0; 0; 0)$ bo'ladi. Bundan:

$$AO = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{14}.$$

3-masala. $A(0; 0; 1), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1)$ nuqtalardan bir xil masofada va yz tekisligidan 2 birlik masofada yotuvchi nuqtalarni toping.

Yechish.

$$D_1A = \sqrt{(2-0)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{4 + y^2 + z^2 - 2z + 1},$$

$$D_1B = \sqrt{(2-0)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} = \\ = \sqrt{4 + y^2 - 2y + z^2 + 1},$$

$$D_1C = \sqrt{(2-1)^2 + (y-0)^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + z^2 + 1},$$

$$D_1A = BD_1 \Rightarrow 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = \\ = 4 + y^2 - 2y + z^2 + 1 \Rightarrow -2y + \Rightarrow -2z = 2y \Rightarrow y = z,$$

$$D_1A = BD_1 \Rightarrow 4 + y^2 - 2y + z^2 + 1 = y^2 + z^2 + 1 \Rightarrow \\ 4 - 2y = 0 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2, y = z \Rightarrow z = 2.$$

$D_1(2; 2; 2)$ izlanayotgan nuqta. U yz tekislikdan 2 birlik yuqorida joylashgan, D_2 nuqta esa D_1 ga koordinata boshiga nisbatan simmetrik.

Demak, $D_1(2; 2; 2); D_2(-2; -2; -2)$.

4-masala. Uchlari: $A(6; 7; 8), B(8; 2; 6), C(4; 3; 2), D(2; 8; 4)$ nuqtalar bo'lgan $ABCD$ to'rtburchakning romb ekanligini isbotlang.

Yechish. Hamma tomonlari teng parallelogramm romb deb atalishini bilamiz. $ABCD$ to'rtburchakning parallelogramm ekanligini ko'rsatish uchun yuqoridagi masala kabi mulohaza yuritib, uning diagonallarining o'rtalari bir nuqtada yotishini ko'rsatamiz:

AC kesma o'rtasining koordinatalari:

$$x = \frac{6+4}{2} = 5, \quad y = \frac{7+3}{2} = 5, \quad z = \frac{8+2}{2} = 5.$$

BD kesma o'rtasining koordinatalari:

$$x = \frac{8+2}{2} = 5, \quad y = \frac{2+8}{2} = 5, \quad z = \frac{6+4}{2} = 5 \text{ bo'ladi.}$$

$ABCD$ to'rtburchakning diagonallari bir nuqtada kesishib, teng ikkiga bo'lingani uchun $ABCD$ to'rtburchak parallelogramm bo'ladi. Uning romb ekanligini ko'rsatamiz.

$$AB = \sqrt{(8-6)^2 + (2-7)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33},$$

$$BC = \sqrt{(4-8)^2 + (3-2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}.$$

Bundan: $AB = BC$.

Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari tengligidan CD va AD ham tengligi kelib chiqadi. Demak, $ABCD$ to'rtburchak – romb.

5-masala. $ABCD$ parallelogrammning uchta uchi koordinatalari berilgan, to'rtinchi D uchining koordinatalarini toping:

$$A(2;3;2), \quad B(0;2;4), \quad C(4;1;0).$$

Yechish. D nuqtaning koordinatalari $(x;y;z)$ bo'lsin. Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linishini bilamiz. Kesmaning o'rtasini topish formulasidan: AC va BD diagonallar o'rtasining koordinatalarini tenglashtirsak:

$$\frac{x+0}{2} = \frac{2+4}{2}, \quad \frac{y+2}{2} = \frac{3+1}{2}, \quad \frac{z+4}{2} = \frac{2+0}{2}.$$

Bundan $x = 6, \quad y = 2, \quad z = -2$ ni topamiz.

Demak, $D(6;2;-2)$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

10.1. Quyidagi nuqtalardan qaysi biri Ox , Oy , Oz o'qlariga tegishli?

$A(0;9;0); B(2;0;0); C(1;0;2); E(0;0;-4); P(0;3;0); M(0;-4;0); N(2;0;0); F(0;0;4);$
 $Q(0;9;0); P(-1;0;1); K(5;0;0).$

10.2. Quyidagi nuqtalardan qaysi biri yz , xz , xy tekislikda yotadi?

$A(0;9;-7); B(2;0;-8); C(2;0;6); E(1;0;-4); P(2;3;5); M(3;-4;0); N(2;3;0).$

10.3. Agar kesmaning bir uchi $A(1;-5;4)$, o'rtasi $S(4;-2;3)$ nuqtada bo'lsa, ikkinchi uchining koordinatalari qanday bo'ladi?

10.4. Uchlari $A(1;-2;4)$ va $B(3;-4;2)$ nuqtalardan bo'lgan kesma o'rtasining koordinatalarini toping.

10.5. $A(2;-1;0)$ va $B(-2;3;2)$ nuqtalar berilgan. Koordinata boshidan AB kesmaning o'rtasigacha bo'lgan masofani toping.

10.6. $A(x;0;0)$ nuqta $B(1;2;3)$ va $C(-1;3;4)$ nuqtalardan teng uzoqlikdaligi ma'lum bo'lsa, x ni toping.

10.7. $A(x;0;0)$ nuqta $B(1;2;3)$ va $C(-1;3;6)$ nuqtalar teng uzoqlikdaligi ma'lum bo'lsa, x ni toping.

10.8. $A(x;0;0)$ nuqta $B(0;1;2)$ va $C(3;1;0)$ nuqtalardan teng uzoqlikdaligi ma'lum bo'lsa, x ni toping.

10.9. $A(0;y;0)$ nuqta $B(1;2;3)$ va $C(-1;3;4)$ nuqtalardan teng uzoqlikdaligi ma'lum bo'lsa, y ni toping.

10.10. $A(0;y;0)$ nuqta $B(0;2;2)$ va $C(3;1;0)$ nuqtalardan baravar uzoqlikdaligi ma'lum bo'lsa, y ni toping.

10.11. x ning qanday qiymatida $M(x;0;0)$ nuqta $M_1(1;2;-3)$ va $M_2(-2;1;3)$ nuqtalardan baravar uzoqlashgan?

10.12. Uchlari $A(4;5;1)$, $B(2;3;0)$ va $C(2;1;-1)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning BD medianasi uzunligini toping.

10.13. Uchlari $A(4;5;1)$, $B(2;3;0)$ va $C(2;-1;-3)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning BD medianasi uzunligini toping.

10.14. $A(3;8;3\sqrt{33})$ nuqtadan Ox o'qqacha bo'lgan masofani toping.

10.15. ABC uchburchakning $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$ uchlari berilgan. Uchburchak ichki B burchagi bissektrisasining uzunligini toping.

10.16. Uchta $A(-1;2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(0;-1;1)$ nuqta berilgan. Berilgan nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan va xOy tekislikda yotuvchi nuqtani toping.

10.17. Berilgan uchta $O(0;0;0)$, $A(4;0;0)$, $B(0;6;0)$ nuqtadan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtani toping.

10.18. ABC uchburchak $A(4;-2;1)$, $B(-2;0;3)$, $C(3;-2;4)$ uchlarining koordinatalari berilgan. Uchburchakning C uchidan tushirilgan medianasi uzunligini toping.

10.19. ABC uchburchak $A(3;2;-1)$, $B(5;6;-1)$, $C(1;-2;-4)$ uchlarining koordinatalari berilgan. Berilgan uchburchak medianalari kesishgan nuqtaning koordinatalarini toping.

10.20. ABC uchburchakning $A(6;-4;2)$, $B(3;2;3)$, $C(3;-5;-1)$ uchlari berilgan. Uning turini aniqlang.

10.21. $ABCD$ parallelogrammning uchta $A(1;-3;0)$, $B(-2;4;1)$, $C(-3;1;1)$ uchi berilgan. Parallelogramm AC va BD diagonallarining uzunliklarini toping.

10.22. $ABCD$ parallelogramm uchta $A(1;3;2)$, $B(2;1;3)$, $C(7;1;-4)$ uchining koordinatalari berilgan bo'lsa, uning to'rtinchi D uchining koordinatalarini toping.

10.23. Ox o'qda $C(1;2;-1)$ va $D(2;-1;1)$ nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtani toping.

10.24. K, M, N nuqtalar AB kesmani to'rtta teng qismga bo'ladi. Agar $K(2;3;2)$ va $N(-4;5;-6)$ nuqtalar ma'lum bo'lsa, A , M , B nuqtalarning koordinatalarini toping.

10.25. Ox o'qda $A(-1;3;-2)$ va $B(-2;5;-3)$ nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtani toping.

10.26. AB kesmaning $A(-2;2;5)$ va $B(4;2;-1)$ uchlari koordinatalari ma'lum. C va D nuqtalar AB kesmani uchta teng qismga bo'ladi. C va D nuqtalarning koordinatalarini toping.

10.27. Berilgan $A(-2;0;4)$, $B(1;2;0)$, $C(0;-3;5)$, $D(-5;-2;0)$, $E(3;1;0)$ nuqtalardan qaysilari: a) xOy tekislikka; b) yOz tekislikka; c) xOz tekislikka tegishli bo'ladi?

10.28. Berilgan $A(-1;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(2;0;0)$, $D(0;0;-5)$, $E(0;7;0)$, $F(0;0;2)$, $F(0;-3;0)$ nuqtalardan qaysilari: a) Ox o'qqa; b) Oy o'qqa; c) Oz o'qqa tegishli bo'ladi?

10.29. Agar ABC uchburchakning $A(-1;-2;1)$, $B(3;1;1)$, $C(-1;1;4)$ uchlari ma'lum bo'lsa, uning perimetrini toping.

10.30. $ABCD$ parallelogramm uchta $A(-2;-4;3)$, $B(3;1;7)$, $C(4;2;-5)$ uchining koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning D uchi koordinatalarini toping.

10.31. Uchlari $A(1;-1;-3)$, $B(2;1;-2)$, $C(-5;2;-6)$ nuqtalarda yotgan $\triangle ABC$ berilgan bo'lsa, uning ichki A burchagi AD bissektrisasi uzunligini toping.

10.32. Uchlari $A(9;3;-5)$, $B(2;10;-5)$, $C(2;3;2)$ nuqtalarda yotgan $\triangle ABC$ berilgan bo'lsa, uning perimetrini toping.

10.33. Fazoda $A(3;0;-1)$, $B(-4;1;0)$, $C(5;-2;-1)$ nuqtalar berilgan. yOz tekislikda A , B , C nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtani toping.

10.34. $A(3;-5;6)$ va $B(-1;2;-3)$ nuqtalardan xOz tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

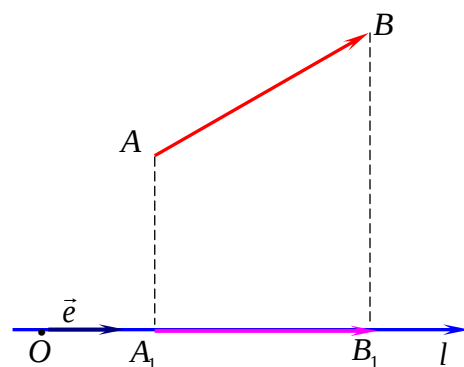
10.35. $C(-2;-1;3)$ va $D(0;3;4)$ nuqtalardan xOz tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

10.36. $E(-8;4;1)$ va $F(5;2;-7)$ nuqtalardan yOz tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

2-§. Fazoda vektorlar. Vektorlar ustida amallar. Komplanar vektorlar

Planimetriya kursida tekislikda vektorlar haqidagi tushunchalar bilan tanishgan edik. Fazoda ham vektorlar ustida amallar, ikki vektorning skalar ko'paytmasi xuddi tekislikdagidek bo'ladi. Endi vektorlar haqida bilimlarimizni kengaytiramiz.

1-ta'rif. Sanoq boshini aniqlovchi nuqtasi va birlik vektori berilgan to'g'ri chiziqqa **$o'q$** deyiladi. $\vec{e}$ birlik vektor va O nuqta l o'qni bir qiymatli aniqlaydi.



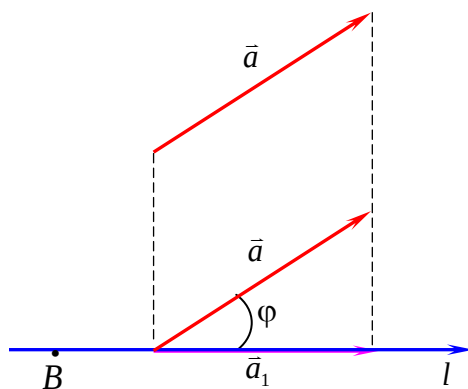
10.2-rasm

A nuqtadan l o'qqa tushirilgan AA_1 perpendikularning A_1 asosiga A nuqtaning l o'qdagi proyeksiyasi deyiladi (10.2-rasm).

$\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB} \neq 0$) ixtiyoriy vektor bo'lsin. A_1 va B_1 bilan mos ravishda $\overrightarrow{AB}$ vektor boshi va oxirining l o'qdagi proyeksiyalarini belgilaymiz.

$\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorga $\overrightarrow{AB}$ vektorning l o'qdagi *tashkil etuvchisi* deyiladi.

2-ta'rif. $\overrightarrow{AB}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasi deb $\pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$ songa aytiladi va $\text{Pr}_l \overrightarrow{AB}$ bilan belgilanadi. Bu son $\overrightarrow{A_1B_1}$ tashkil etuvchi va l o'q bir tomonga yo'nalgan bo'lsa, musbat ishora bilan, aks holda manfiy ishora bilan olinadi va quyidagicha yoziladi (10.2-rasm):



10.3-rasm

$$\text{Pr}_l \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|.$$

3-ta'rif. $\vec{a}$ vektor bilan uning l o'qdagi tashkil etuvchisi $\vec{a}_1$ vektor orasidagi φ burchakka $\vec{a}$ vektor bilan l o'q orasidagi burchak (ikki $\vec{a}$ va $\vec{a}_1$ vektor orasidagi burchak) deyiladi.

Ravshanki, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (10.3-rasm).

Vektorning o'qdagi proyeksiyasining asosiy xossalarini keltiramiz.

1-xossa. $\text{Pr}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$.

1-natija. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi:

- 1) vektor l o'q bilan o'tkir burchak tashkil qilsa, musbat bo'ladi;
- 2) vektor l o'q bilan o'tmas burchak tashkil qilsa, manfiy bo'ladi;
- 3) vektor l o'q bilan to'g'ri burchak tashkil qilsa, nolga teng bo'ladi.

2-natija. Teng vektorlarning bitta o'qdagi proyeksiyalari teng bo'ladi.

2-xossa. Bir nechta vektor yig'indisining berilgan o'qdagi proyeksiyasi vektorlarning shu o'qdagi proyeksiyalari yig'indisiga teng, masalan,

$$\text{Pr}_l (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{Pr}_l \vec{a} + \text{Pr}_l \vec{b} + \text{Pr}_l \vec{c}.$$

3-xossa. Vektor songa ko'paytirilsa, uning o'qdagi proyeksiyasi ham shu songa ko'payadi, ya'ni

$$\text{Pr}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot \text{Pr}_l \vec{a}.$$

3-natija. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasining o'qdagi proyeksiyasi bu vektorlar o'qdagi proyeksiyalarining mos chiziqli kombinatsiyasiga teng, **masalan,**

$$\text{Pr}_l(k\vec{a} + n\vec{b}) = k \text{Pr}_l \vec{a} + n \text{Pr}_l \vec{b}.$$

Uch o'lchovli R^3 fazoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlarni olamiz va $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlardan

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$$

vektorni tuzamiz. Bunda $\vec{a}$ vektorga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlarga bu chiziqli kombinatsiyaning **koeffitsiyentlari** deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar uchun kamida bittasi nolga teng bo'lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar topilsa va bu sonlar uchun

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0 \quad (10.1)$$

tenglik bajarilsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar sistemasiga **chiziqli bog'liq vektorlar** deyiladi.

5-ta'rif. Agar (10.1) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar sistemasiga **chiziqli erkli vektorlar** deyiladi.

6-ta'rif. Istalgan uchta chiziqli erkli $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarga **fazodagi bazis vektorlar** deyiladi.

1-teorema. Uch o'lchovli fazodagi istalgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlar bo'yicha yagona ko'rinishda yoyish mumkin, ya'ni

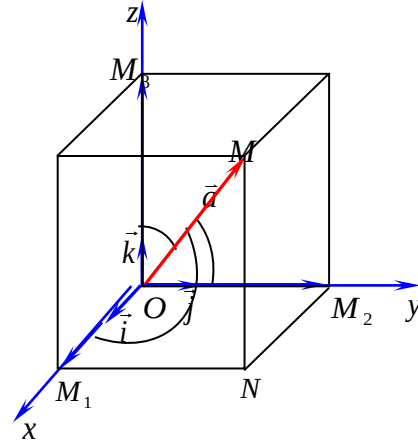
$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3. \quad (10.2)$$

Isbot. Bunda $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi **affin koordinatalari** bo'ladi, ya'ni $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$.

Fazodagi bazis sifatida o‘zaro perpendikular bo‘lgan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birlik vektorlarni olaylik. Bunday bazis *ortonormallashtirilgan bazis* deyiladi. Bunda $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorlar bazis *ortlari* deb ataladi.

Fazoda ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni olib, uning boshini koordinatalar boshiga keltiramiz, ya’ni $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorni hosil qilamiz (10.4-rasm).

$\vec{a}$ vektorning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini topamiz. Buning uchun $\overrightarrow{OM}$ vektorning oxiridan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o‘tkazamiz va ularning



10.4-rasm

koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda M_1 , M_2 , M_3 orqali belgilaymiz. Bu tekisliklar koordinata tekisliklari bilan birgalikda diagonallaridan biri $\overrightarrow{OM}$ vektor bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepipedni hosil qiladi.

Bunda

$$\text{Pr}_x \vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|, \text{Pr}_y \vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|, \text{Pr}_z \vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|.$$

Bir nechta vektorlarni qo‘shish qoidasiga ko‘ra

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}.$$

Yoki $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3}$ ni hisobga olsak,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \quad (10.3)$$

Shuningdek,

$$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i}, \overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j}, \overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k}. \quad (10.4)$$

$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y va a_z orqali belgilaymiz, ya’ni $|\overrightarrow{OM_1}| = a_x$, $|\overrightarrow{OM_2}| = a_y$, $|\overrightarrow{OM_3}| = a_z$.

U holda (10.3) va (10.4) tengliklardan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (10.5)$$

(10.5) tenglik $\vec{a}$ vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ **bazis bo'yicha yoyilmasi** deb yuritiladi. a_x, a_y, a_z sonlarga $\vec{a}$ vektorning **dekart koordinatalari** (yoki oddiygina **koordinatalari**) deyiladi va $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ kabi yoziladi.

$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ vektor koordinatalari bo'yicha uning uzunligini aniqlaymiz.

To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonali haqidagi teorema asosan (10.4-rasm):

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2.$$

Bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (10.6)$$

ya'ni vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadratlarining yig'indisining kvadrat ildiziga teng ekan.

Koordinatalar bilan berilgan $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ va $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ vektorlarning yig'indisini topamiz.

Vektorning o'qdagi proyeksiyasi xossalariga ko'ra:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}, \quad (10.7)$$

bo'ladi.

Vektorni songa ko'paytirish uchun uning koordinatalarini shu songa ko'paytiramiz.

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}. \quad (10.8)$$

$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ vektor $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ vektorga parallel bo'lsa, $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ bo'ladi. Bundan $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$. Natijada, $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$ ekanligi kelib chiqadi. Bu ikki vektorning kollineyarlik sharti bo'ladi.

Agar ikki vektor teng bo'lsa, ularning mos koordinatalari ham teng bo'ladi.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases} \quad (10.9)$$

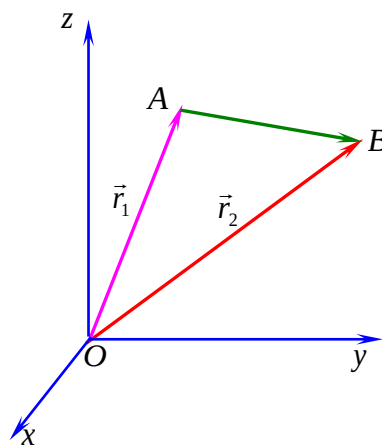
Shunday qilib:

1) vektorlar qo‘shilganida (ayrilganida) ularning mos koordinatalari qo‘shiladi (ayriladi);

2) vektor songa ko‘paytirilganida uning barcha koordinatalari shu songa ko‘payadi;

3) teng vektorlarning mos koordinatalari teng bo‘ladi va aksincha.

Koordinatalar boshiga qo‘yilgan va oxiri M nuqta bo‘lgan $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vektorga M nuqtaning *radius vektori* deyiladi. $M(x; y; z)$ nuqta radius vektorining koordinatalari $r = \{x; y; z\}$ bo‘ladi.



10.5-rasm

Boshi $A(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada va oxiri $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtada bo‘lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni qaraymiz. A va B nuqtalarning radius vektorlari, mos ravishda, $r_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$ va $r_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$ bo‘ladi.

10.5-rasmga ko‘ra $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Bundan (10.7) tenglikka asosan

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

yoki

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}. \quad (10.10)$$

Shunday qilib, vektorning koordinatalari uning oxiri va boshining mos koordinatalari ayirmasiga teng.

(10.10) tenglikdan $\overrightarrow{AB}$ vektorning modulini topamiz:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (10.11)$$

$\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi A va B nuqtalar orasidagi masofani aniqlaydi. Shu sababli (10.11) tenglikka **ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi** deyiladi.

1-misol. Parallelogrammning uchta ketma-ket uchi berilgan: $A(-1;3;1)$, $B(-2;-5;3)$, $C(0;-1;1)$. BD diagonal uzunligini toping.

Yechish. Parallelogramm D uchning $x; y; z$ koordinatalarini parallelogramm uchun $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ekanidan aniqlaymiz. $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarni (10.10) formula ko‘rinishida yozamiz:

$$\overrightarrow{AD} = \{x + 1; y - 3; z - 1\}, \quad \overrightarrow{BC} = \{0 - (-2); -1 - (-5); 1 - 3\} = \{2; 4; -2\}.$$

U holda $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ tenglikdan $x + 1 = 2$, $y - 3 = 4$, $z - 1 = -2$, ya’ni $D(1; 7; -1)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

$\overrightarrow{BD}$ vektorning koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{BD} = \{1 - (-2); 7 - (-5); -1 - 3\} = \{3; 12; -4\}.$$

U holda

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{6 + 144 + 16} = 13.$$

$A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma berilgan bo‘lsin.

AB kesmani berilgan $\lambda > 0$ nisbatda bo‘luvchi, ya’ni $\frac{AC}{CB} = \lambda$ tenglikni ta’minlaydigan $C(x; y; z)$ nuqtani topish masalasini yechamiz.

Masalaning shartiga ko‘ra $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{CB}$ vektorlar kollinear, ya’ni $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$.

U holda

$$\overrightarrow{AC} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \quad \overrightarrow{CB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}$$

inobatga olinsa,

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Bu tengliklardan x, y, z larni topamiz:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (10.12)$$

(10.12) formulaga *kesmani berilgan* λ *nisbatda bo'lish formulasi* deyiladi.

(10.12) tengliklardan $\lambda = 1$ da kesma o'rtasining koordinatalarini topish formulalari kelib chiqadi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (10.13)$$

2-masala. Uchta nuqta berilgan: $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$.

Agar: 1) AB va CD vektorlar teng; 2) AB va CD vektorlarning yig'indisi nolga teng ekani ma'lum bo'lsa, $D(x, y, z)$ nuqtani toping.

Yechish. AB va CD vektorlarning koordinatasini topaylik:

$$AB = AB(-1 - 1; 1 - 0; 2 - 1) = AB(-2; 1; 1).$$

$$CD = CD(x - 0; y - 2; z + 1) = CD(x; y - 2; z + 1)$$

1) $AB = CD$ bo'lgani uchun AB va CD vektorlarning koordinatalari teng bo'ladi. Bundan $x = -2$, $y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$,

$$z + 1 = 1 \Rightarrow z = 0.$$

Shunday qilib, D izlanayotgan nuqtaning koordinatalari:

$$D(-2; 3; 0) \text{ bo'ladi.}$$

2) $AB + CD = 0$ bo'lgani uchun $(O(0; 0; 0))$.

$$x - 2 = 0, \text{ bundan } x = 2. (y - 2) + 1 = 0, \text{ bundan } y = 1,$$

$$(z + 1) + 1 = 0, \text{ bundan } z = -2.$$

Bulardan $D = D(2; 1; -2)$ ekanligi kelib chiqadi.

3-masala. m va n ning qanday qiymatlarida berilgan vektorlar kollinear bo'ladi:

$$1) \vec{a}(2; n; 3), \vec{b}(3; 2; m);$$

$$2) \vec{a}(m; 2; 5), \vec{b}(1; -1; m);$$

$$3) \vec{a}(m; n; 2), \vec{b}(6; 9; 3)?$$

Yechish. Kollinearlik shartidan mos proporsiyalarni tuzamiz. Bulardan foydalanib, m va n ni topamiz.

$$x_{\vec{a}} : x_{\vec{b}} = y_{\vec{a}} : y_{\vec{b}} = z_{\vec{a}} : z_{\vec{b}}$$

- 1) $2:3 = n:2 = 3:m$ shart bajariladi, $2:3 = 3:m$ dan $m = 3 \cdot 3:2 = \frac{9}{2}$,
 $2:3 = n:2$ dan $n = 2 \cdot 2:3 = \frac{4}{3}$;
- 2) $m:1 = 2:(-1) = 5:n$, $m:1 = 2:(-1)$ dan $m = -2$, $2:(-1) = 5:n$
dan $n = -\frac{5}{2}$;
- 3) $m:6 = n:9 = 2:3$, $m:6 = 2:3$ dan $m = 6 \cdot 2:3 = 4$, $n:9 = 2:3$ dan
 $n = 2 \cdot 9:3 = 6$;

4-masala. n ning qanday qiymatlarida berilgan vektorlar perpendikular bo'ladi.

- 1) $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(1; 3; n)$; 3) $\vec{a}(n; -2; 1)$, $\vec{b}(n; 2n; 4)$;
2) $\vec{a}(n; -2; 1)$, $\vec{b}(n; -n; 1)$; 4) $\vec{a}(4; 2n; -1)$, $\vec{b}(-1; 1; n)$?

Yechish. Perpendikularlik sharti $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ quyidagi tenglamani beradi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_{\vec{a}} \cdot x_{\vec{b}} = y_{\vec{a}} \cdot y_{\vec{b}} = z_{\vec{a}} \cdot z_{\vec{b}}.$$

- 1) $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(1; 3; n)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot n = 0 \Rightarrow 3n - 1 = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{3};$$

- 2) $\vec{a}(n; -2; 1)$, $\vec{b}(n; -n; 1)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = n^2 + (-n) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(n - 1)^2 = 0 \Rightarrow n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1;$$

- 3) $\vec{a}(n; -2; 1)$, $\vec{b}(n; 2n; 4)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = n^2 + (-2) \cdot (2n) + 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(n - 2)^2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

- 4) $\vec{a}(4; 2n; -1)$, $\vec{b}(-1; 1; n)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-1) + 2n \cdot 1 + (-1) \cdot n = 0 \Rightarrow n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4.$$

5-masala. Uchta nuqta berilgan: $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$.

z o'qida shunday $D(0; 0; c)$ nuqtani topingki, bunda $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ vektorlar perpendikular bo'lsin.

Yechish. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlarning koordinatalarini topaylik.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(-2; 1; 1), \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}(0; -2; c + 1).$$

Perpendikularlik shartidan:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (c + 1) = 0.$$

Shuning uchun $c = 1$. Soʻralgan $D \in \overrightarrow{OZ}$ nuqtaning koordinatasi $D(0; 0; 1)$ boʻladi.

6-masala. Birlik uzunlikdagi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar juft-jufti bilan 60° li burchak tashkil etadi.

1) $\vec{a}$ va $\vec{b} + \vec{c}$;

2) $\vec{a}$ va $\vec{b} - \vec{c}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Barcha vektorlarning juft-jufti bilan skalar koʻpaytmasi $(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $(\vec{a} \cdot \vec{c})$, $(\vec{b} \cdot \vec{c})$ ga teng va $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

$$1) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}} = \sqrt{1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$2) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{c}) = 0, \text{ bundan.}$$

$$(\text{chunki } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}))$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b} - \vec{c}|} = 0, \quad \varphi = 90^\circ.$$

7-masala. Uchta nuqta berilgan: $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$. ACB uchburchakning ACB burchagining kosinusini toping.

Yechish. $\angle C = \angle ACB$ burchak $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakka teng. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni topamiz.

$$\vec{a} = \vec{a}(0 - 3; 1 - 1; -1 - 0) = (-3; 0; -1)$$

$$\vec{b} = \vec{b}(1 - 3; -1 - 1; 2 - 0) = (-2; -2; 2).$$

$$\text{Bundan } |\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 0 - 2 = 4, \quad \cos \angle ACB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sqrt{\frac{2}{15}}.$$

8-masala. ABC uchburchakning A uchidan uchburchak tekisligiga AD perpendikular chiqarilgan. Agar ABD burchak α ga, ABC burchak esa β ga teng bo'lsa, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{BD}$ vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusini toping.

Yechish. Masalaning berilishida keltirilgan. D nuqtadan BC tomonga $DE \perp BC$ perpendikular tushiramiz va BD tomonni m ga teng deb olamiz. U holda BAD uchburchakdan BA tomonni topib, $BA = BD \cdot \cos \angle ABC = m \cdot \cos \alpha$ va $\triangle BAE$ dan BE tomonni topamiz:

$$BE = BA \cdot \cos \beta = m \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Bundan ko'rinadiki, $AE \perp BC$ bo'lgani uchun

$$\cos \varphi = (BE \wedge BD) = m \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta : m = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\text{Javob: } \cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

7-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan uchta va undan ortiq vektorlarga **komplanar vektorlar** deyiladi. Agar bu vektorlarning boshlang'ich nuqtalarini birlashtirilsa, bu vektorlar bir tekislikda yotadi.

2-teorema. Fazoda uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun bu vektorlar komplanar bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, ularning komplanarligini isbotlaymiz. Chiziqli bog'lanishning ta'rifiga asosan, kamida noldan farqli α, β, γ sonlar uchun

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Aniqlik uchun α noldan farqli bo'lsin, unda avvalgi tenglikdan

$$\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \vec{a} - \frac{\beta}{\gamma} \vec{b}$$

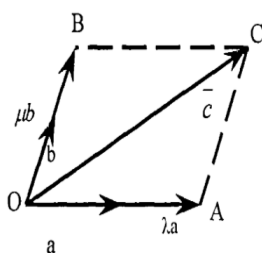
tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikda $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}, \mu = \frac{\beta}{\gamma}$ belgilashlarni kiritib $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning boshi bitta umumiy O nuqtaga

joylashtirilgan bo'lsa, oxirgi tenglikdan $\vec{c}$ vektor $\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonaliga tengligi kelib chiqadi. Bu esa ular bitta tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlardir.

Endi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. Ularning chiziqli bog'liqligini isbotlaymiz.

Berilgan uchta vektor orasida kollinear vektorlar bo'lgan holni chiqarib tashlaymiz. Vektorning kollinearlik xossasiga asosan, ushbu vektorlar jufti chiziqli bog'liq bo'lar edi va berilgan uchta vektorning ham chiziqliligi kelib chiqar edi. Shuning uchun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar orasida hech bir jufti kollinear bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz. Vektorlarni bitta tekislikka ko'chirib, ularning boshlarini O nuqtaga joylashtiramiz.



10.6-rasm

Keyin $\vec{c}$ vektorning C uchi orqali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, $\vec{a}$ vektor yotgan to'g'ri chiziqlarning $\vec{b}$ vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini A deb belgilaymiz va $\vec{b}$ vektor yotgan to'g'ri chiziqlarning $\vec{a}$ vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini B deb belgilaymiz. Vektorlarni qo'shishning parallelogramm qoidasiga ko'ra $\vec{c}$ vektor $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ vektorlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB} \text{ tenglik o'rinlidir.}$$

$\vec{OA}$ vektor noldan farqli $\vec{a}$ vektorga kollinear, demak, shunday λ haqiqiy son topiladiki $\vec{OA} = \lambda\vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, $\vec{OB} = \mu\vec{b}$ tenglik ham o'rinli. Bu tenglikdan $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ tenglik kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + (-1)\vec{c} = 0$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikdagi λ , μ va -1

sonlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganligi sababli, oxirgi tenglik $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning chiziqli bog'liqligini ifodalaydi.

1-natija. Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lmasa, ular chiziqli erkli bo'ladi.

2-natija. Ixtiyoriy uchta komplanar bo'lmagan vektorlar orasida ikkita kollinear vektorlar bo'la olmaydi. Shuningdek, ular orasida nol vektor ham bo'lmaydi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

10.37. Agar $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar qanday shartni qanoatlantiradi? javob: $\vec{a} \perp \vec{b}$

10.38. $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ va $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ bo'lsa, $|\vec{a} - \vec{b}|$ ni hisoblang. javob: 22

10.39. Oxy tekislikda $A(4;1)$, $B(2;3)$, $(0;5)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ vektorning $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ va $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ vektorlar bo'yicha chiziqli kombinatsiyasini toping. javob: $\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$

10.40. Tekislikda uchta $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ va $\vec{c} = \{7; -4\}$ vektorlar berilgan. Har bir vektorning qolgan ikki vektor bo'yicha chiziqli kombinatsiyasini toping. javob: $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$

10.41. $\vec{a} = \{-1; 5; -2\}$ va $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$ vektor berilgan. $3\vec{a} - 2\vec{b}$ va $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

10.42. $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 1\}$ va $\vec{c} = \{0; -3; -2\}$ vektorlar berilgan. $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ va $3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$ vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

10.43. Nuqtalar orasidagi masofani toping:

1) $A(3;1)$ va $B(-3;9)$;

2) $A(5;3)$ va $B(2;-1)$.

10.44. Ikkita qo'shni uchlari $A(-1;4)$ va $B(3;-7)$ nuqtalarda yotuvchi kvadratning yuzini toping. javob: 137

10.45. Tomonlari $\vec{a} = \{-1; 0; 7\}$ va $\vec{b} = \{5; -4; -5\}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallarining uzunliklarini toping.

10.46. $\overrightarrow{AB} = \{2; 6; 4\}$ va $\overrightarrow{AC} = \{4; 2; -2\}$ bo'lsa, ABC uchburchakning CP medianasi uzunligini toping. javob: $\sqrt{26}$

10.47. Agar $\vec{a} = \{2; -1; 1\}$ vektorning boshi $A(3; -2; -4)$ bo'lsa, uning oxirining koordinatalarini toping.

10.48. Agar $\vec{a} = \{2; 4; -1\}$ vektorning oxiri $B(-1; 3; -4)$ bo'lsa, uning boshining koordinatalarini toping. Javob: $(-3; -1; 5)$

10.49. A va B nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini toping:

- 1) $A(-4; -9; 6)$, $B(8; 6; -10)$; 2) $A(6; -1; 9)$, $B(2; -4; -3)$.

10.50. $A(2; -1; 0)$, $B(1; -1; 2)$, $C(0; 5; 3)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ vektorning uzunligini toping. javob: $(-2; 6; 3)$

10.51. $M_1(-1; -2)$ va $M_2(3; 4)$ nuqtalar berilgan. M_1M_2 to'g'ri chiziqda yotuvchi va M_2 nuqtaga nisbatan M_1 nuqtaga 3 marta yaqin bo'lgan $M(x; y)$ nuqtani toping.

10.52. Uchlari $A(2; 4)$ va $B(8; 7)$ nuqtalarda joylashgan AB kesmani $2:3$ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatasini toping. javob: $(14/5; 38/5)$

10.53. Uchlari $A(4; 1; -3)$, $B(1; 4; -2)$, $C(1; 10; -8)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning AD medianasi uzunligini toping.

10.54. Parallelogrammning uchta ketma-ket uchlarining koordinatalari berilgan: $A(-1; 1)$, $B(1; 6)$, $C(5; 2)$. To'rtinchi D uchning koordinatalarini toping. javob: $(3; -3)$

10.55. α ning qanday qiymatlarida $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi?

- 1) $\vec{a} = \{1; 1; \alpha\}$, $\vec{b} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{c} = \{3; 0; 1\}$; 2) $\vec{a} = \{\alpha; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{5; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 5; 4\}$.

3-§. Vektorning skalar ko'paytmasi

1-ta’rif. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning skalar ko‘paytmasi deb bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko‘paytmasiga teng songa aytiladi va u $\vec{a}\vec{b}$ (yoki $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki $(\vec{a}, \vec{b})$) kabi belgilanadi, ya’ni

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (10.14)$$

bu yerda φ – $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak (bunda vektorlarning boshi bir nuqtaga qo‘yiladi).

Skalar ko‘paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Ko‘paytuvchilarning o‘rin almashtirish xossasi:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.$$

Isbot. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b}\vec{a}.$

2-xossa. Skalar ko‘paytuvchiga nisbatan guruhlash xossasi:

$$(\lambda \vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b}).$$

3-xossa. Qo‘shishga nisbatan taqsimot xossasi:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$$

4-xossa. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikular bo‘lsa, u holda ularning skalar ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi. Shuningdek, teskari tasdiq o‘rinli: agar $\vec{a}\vec{b} = 0$ ($|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$) bo‘lsa, u holda $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo‘ladi.

Xususan: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$

5-xossa. Vektorning skalar kvadrati uning uzunligi kvadratiga teng, ya’ni $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Xususan: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1.$

1-misol. $|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 6, \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ bo‘lsin.

$(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 4\vec{b})$ ko‘paytmani toping.

Yechish. Avval 3-xossadan foydalanib qavslarni ochamiz va keyin skalar ko‘paytmaning ta’rifi va xossalariidan foydalanib, topamiz:

$$(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 4\vec{b}) = 3\vec{a} \cdot 2\vec{a} - \vec{b} \cdot 2\vec{a} + 3\vec{a} \cdot 4\vec{b} - \vec{b} \cdot 4\vec{b} = 6\vec{a}^2 + 10\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 6|\vec{a}|^2 + 10|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} - 4|\vec{b}|^2 = \\
&= 6 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 6^2 = 96 + 120 - 144 = 72.
\end{aligned}$$

Ikkita $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ va $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ vektor berilgan bo'lsin. U holda bu vektorlarni $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birlik vektorlar orqali ifodalab, skalar ko'paytmaning xossalarini va $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorlarning skalar ko'paytmalarini hisobga olib, topamiz:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x\vec{i}\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\vec{k} + \\
&+ a_yb_x\vec{j}\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\vec{k} = \\
&= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.
\end{aligned}$$

Demak,

$$\vec{a}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \quad (10.15)$$

ya'ni koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

2-misol. $\vec{a} = \{4; -2; 3\}$, $\vec{b} = \{2; 1; -3\}$ bo'lsin. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ko'paytmani toping.

Yechish. (10.15) formulaga ko'ra

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -3.$$

Endi koordinatalari bilan berilgan $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ va $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ vektorlar orasidagi φ burchak kosinusini topamiz. (10.14) va (10.15) formulalarga ko'ra:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (10.16)$$

yoki

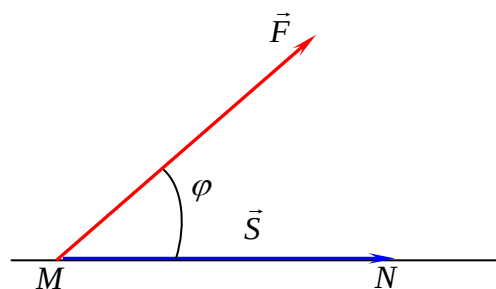
$$\cos \varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (10.17)$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsin. U holda $\cos \varphi = 0$ bo'lgani uchun (10.17) tenglikdan

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0 \quad (10.18)$$

kelib chiqadi.

$\overrightarrow{MN}$ vektor bilan φ burchak tashkil etuvchi $\vec{F}$ kuch ta'sirida moddiy nuqta M nuqtadan N nuqtaga to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chayotgan bo'lsin (10.7-rasm).



Fizika kursidan ma'lumki, $\vec{F}$ kuchning $\overrightarrow{MN} = \vec{S}$ ko'chishdagi bajargan ishi

10.7-rasm

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi \quad \text{yoki} \quad A = \vec{F} \vec{S}$$

formula bilan aniqlanadi.

Demak, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida o'zgarmas kuchning bajargan ishi kuch vektori va ko'chish vektorining skalar ko'paytmasiga teng. Bu esa **skalar ko'paytmaning mexanik ma'nosini** anglatadi.

3-misol Moddiy nuqta $A(1; -2; 2)$ nuqtadan $B(5; -5; -3)$ nuqtaga $\vec{F} = \{2; -1; -3\}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chgan. Quyidagilarni toping:

- 1) $\vec{F}$ kuchning bajargan ishini;
- 2) $\vec{F}$ kuchning ko'chish yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini.

Yechish. Avval moddiy nuqta ko'chish vektorini, uning va $\vec{F}$ kuchning uzunligini topamiz:

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = \{4; -3; -5\}, \quad |\vec{S}| = \sqrt{16 + 9 + 25} = 5\sqrt{2},$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

U holda:

$$1) A = \vec{F} \vec{S} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-5) = 26 \text{ (ish b.)};$$

$$2) \cos \varphi = \frac{\vec{F} \vec{S}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{S}|} = \frac{26}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{13\sqrt{7}}{35}, \quad \varphi = \arccos \frac{13\sqrt{7}}{35}.$$

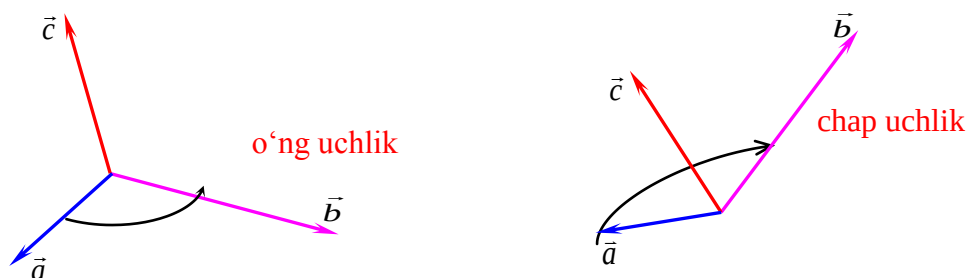
Mustaqil ishlash uchun masalalar

Agar uchta vektordan qaysi biri birinchi, qaysi biri ikkinchi va qaysi biri uchinchi o'ringda joylashganligi ko'rsatilgan bo'lsa, bu vektorlarga **tartiblangan uchlik** deyiladi. Bu holda vektorlar joylashish tartibida yoziladi.

1-ta'rif. Komplanar bo'lmagan vektorlar tartiblangan uchligining uchinchi vektori uchidan qaralganda birinchi vektordan ikkinchi vektorga qisqa burilish soat mili yo'nalishiga teskari bo'lsa, bunday uchlikka **o'ng uchlik**, agar soat mili yo'nalishida bo'lsa, **chap uchlik** deyiladi (10.8-rasm).

2-ta'rif. $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga **vektor ko'paytmasi** deb quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

- 1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikular, ya'ni $\vec{c} \perp \vec{a}$ va $\vec{c} \perp \vec{b}$;

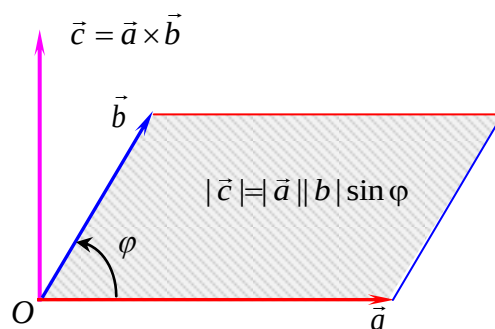


10.8-rasm

2) $\vec{c}$ vektorning uzunligi son jihatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat bo'lgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, bu yerda $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $[\vec{a}, \vec{b}]$ kabi belgilanadi (10.9-rasm).



10.9-rasm

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rinlari almashtirilsa, vektor ko'paytma ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartiradi, ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Isbot. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra $\vec{a} \times \vec{b}$ va $\vec{b} \times \vec{a}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega (parallelogrammning yuzi o'zgarmaydi), kollinear, ammo qarama-qarshi yo'nalgan, chunki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ vektorlar ham $\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a}$ vektorlar ham o'ng uchlik tashkil qiladi. Demak, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

2-xossa. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

3-xossa. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

4-xossa. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shuningdek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ($|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$) bo'lsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

1-misol. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmalarini toping.

Yechish. Bunda vektor ko'paytmaning ta'rifidan quyidagi tengliklar bevosita kelib chiqadi:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Haqiqatan ham, masalan, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ tenglik o'rinli, chunki:

- 1) $\vec{k} \perp \vec{i}, \vec{k} \perp \vec{j}$;
- 2) $|\vec{k}| = |\vec{i}| |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1$;
- 3) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

Shuningdek, 1- xossaga ko'ra

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Vektor ko'paytmaning 4- xossasiga ko'ra: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$.

Ikkita $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ va $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ vektor berilgan bo'lsin.

U holda, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmalari formulalaridan foydalansak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + \\ &+ a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + \\
&\quad + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k},
\end{aligned}$$

ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \quad (10.19)$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (10.20)$$

Bu formula koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning vektor ko'paytmasi bo'ladi.

2-misol. $\vec{a} = \{3; -1; -2\}, \vec{b} = \{0; -2; 4\}$ bo'lsin. $\vec{a} \times \vec{b}$ ko'paytmani toping.

Yechish. $\vec{a} \times \vec{b}$ ko'paytmani (10.19) formula bilan topamiz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 0\vec{j} - 6\vec{k} - 0\vec{k} - 4\vec{i} - 12\vec{j} = -8\vec{i} - 12\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Demak,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -8\vec{i} - 12\vec{j} - 6\vec{k}.$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, vektor ko'paytmaning 4- xossasiga ko'ra $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ yoki

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = 0$$

bo'ladi.

Bundan

$$a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_x b_z - a_z b_x = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

yoki

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad (10.21)$$

ya'ni kollinear vektorlarning koordinatalari proporsional bo'ladi va aksincha, proporsional koordinatalarga ega vektorlar kollinear bo'ladi.

3-misol. m, n ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = \{-2; 3; n\}$ va $\vec{b} = \{m; -6; 2\}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

Yechish. Ikki vektorning kollinearlik shartiga ko'ra

$$\frac{-2}{m} = \frac{3}{-6} = \frac{n}{2}.$$

Bundan $m = 4, n = -1$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

10.67. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmalarini toping:

- 1) $\vec{a} = \{2; -2; 1\}, \vec{b} = \{8; 4; 1\};$ 2) $\vec{a} = \{3; 5; -8\}, \vec{b} = \{6; 3; -2\}.$

10.68. $\vec{a} = \{-1; 2; 3\}$ va $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$ vektorlar berilgan. Vektor ko'paytmalarni toping:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b};$ 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (3\vec{b} - \vec{a}).$

10.69. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning juft-jufti bilan vektor ko'paytmagini toping.

- 1) $\vec{a} = \{1; 1; \alpha\}, \vec{b} = \{0; 1; 0\}, \vec{c} = \{3; 0; 1\};$ 2) $\vec{a} = \{\alpha; 3; 1\}, \vec{b} = \{5; -1; 2\}, \vec{c} = \{-1; 5; 4\}.$

10.70. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini toping:

- 1) $\vec{a} = \{1; -2; 1\}, \vec{b} = \{3; 2; 1\}, \vec{c} = \{-1; 0; 1\};$ 2) $\vec{a} = \{1; 3; 3\}, \vec{b} = \{-1; 2; 0\}, \vec{c} = \{1; 2; -3\}.$

5-§. Fazoda harakat. Fazoviy shakllarning o'xshashligi. Fazoda

simmetriya. Parallel ko'chirish

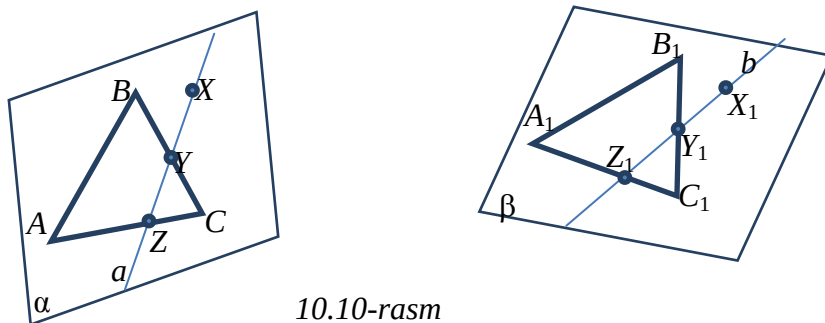
Fazoda harakat xuddi tekislikdagi harakat kabi aniqlanadi.

1-ta'rif. Nuqtalar orasidagi masofalar saqlanadigan almashtirishga *harakat* deyiladi.

Tekislikdagi harakat singari fazodagi harakatda to'g'ri chiziqlar to'g'ri chiziqlarga, yarim to'g'ri chiziqlar yarim to'g'ri chiziqlarga, kesmalar kesmalarga o'tishi va yarim to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar saqlanishini isbotlash mumkin.

3-teorema. Fazodagi harakat *tekisliklarni tekisliklarga* o'tkazadi.

Isbot. α – ixtiyoriy tekislik bo'lsin. Unda bir to'g'ri chiziqda yotmagan istalgan uchta A, B, C nuqtani belgilaymiz. Bu nuqtalar harakat natijasida bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta A_1, B_1, C_1 nuqtalarga o'tadi, bu nuqtalar orqali β tekislikni o'tkazamiz (10.10-rasm).



10.10-rasm

Qaralayotgan harakatda α tekislik β tekislikka o'tishini isbot qilamiz. X nuqta α tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Bu nuqta orqali α tekislikda ABC uchburchakni ikkita Y va Z nuqtada kesib o'tuvchi biror to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. a to'g'ri chiziqli harakat natijasida biror b to'g'ri chiziqqa o'tadi. a to'g'ri chiziqdagi Y va Z nuqtalar b to'g'ri chiziqdagi Y_1 va Z_1 nuqtalarga o'tadi. Y_1 va Z_1 nuqtalar $A_1B_1C_1$ uchburchakka tegishli, demak, Y_1 va Z_1 nuqtalar β tekislikka tegishli.

Shunday qilib, b to'g'ri chiziqli β tekislikda yotadi. X nuqta harakat tufayli b to'g'ri chiziqdagi, ya'ni β tekislikdagi X_1 nuqtaga o'tadi.

2-ta'rif. Ikkita geometrik jism harakat natijasida ustma-ust tushsa, *ular teng geometrik jismlar* deyiladi.

3-ta'rif. Fazoda berilgan F geometrik jismning ixtiyoriy X va Y nuqtalariga o'tadigan F' geometrik jismning X' va Y' nuqtalari uchun $X'Y' = kXY$ bo'lsa, F geometrik jismni almashtirish *o'xshashlik almashtirishi* deyiladi.

Xuddi tekislikdagi kabi fazoda fazodagi o'xshashlik almashtirishi to'g'ri chiziqlar to'g'ri chiziqlarga, yarim to'g'ri chiziqlar yarim to'g'ri chiziqlarga, kesmalar kesmalarga o'tishi va yarim to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar saqlanishini isbot qilish mumkin.

4-ta'rif. Ikki geometrik jism o'xshashlik almashtirishi bilan biri ikkinchisiga o'tsa, bu ikki geometrik jism ***o'xshash*** deyiladi.

Fazoda eng sodda o'xshashlik almashtirishi gomotetiya bo'ladi. Tekislikdagi kabi O markazga nisbatan k gomotetiya koeffitsiyentli gomotetiya – bu, ixtiyoriy X nuqtani OX nurning $OX'=kOX$ bo'ladigan X' nuqtaga o'tkaziladi.

Fazoda gomotetik almashtirishi gomotetiya markazidan o'tmagan istalgan tekislikni parallel tekislikka ($k=1$ da o'ziga) o'tkazadi.

Ba'zan masalalar yechishda fazoda ixtiyoriy berilgan nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtaning koordinatalari so'raladi. Fazoda nuqtalar

1) koordinata boshiga nisbatan; 2) koordinata o'qlariga nisbatan; 3) koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik bo'lishi mumkin.

Fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x; y; z)$ nuqtaga koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqta koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$A(x; y; z).$$

Fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x; y; z)$ nuqtaga koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalar koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} A'(x; -y; -z) & - Ox \text{ o'qqa nisbatan,} \\ A'(-x; y; -z) & - Oy \text{ o'qqa nisbatan,} \\ A'(-x; -y; z) & - Oz \text{ o'qqa nisbatan.} \end{cases} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

Fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x; y; z)$ nuqtaga koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalar koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} A'(x; y; -z) & - xy \text{ tekislikka nisbatan,} \\ A'(-x; y; z) & - yz \text{ tekislikka nisbatan,} \\ A'(x; -y; z) & - xz \text{ tekislikka nisbatan.} \end{cases}$$

Fazoda parallel ko'chirish deb shunday almashtirishga aytiladiki, unda jismning ixtiyoriy $(x;y;z)$ nuqtasi $(x+a;y+b;z+c)$ nuqtaga o'tadi, bunda a,b,c sonlar barcha $(x;y;z)$ nuqtalar uchun bir xil. Fazoda parallel ko'chirish

$$x'=x+a; y'=y+b; z'=z+c$$

formulalar bilan beriladi, bu formulalar parallel ko'chirishda $(x;y;z)$ nuqta o'tadigan nuqtaning x',y',z' koordinatalarini ifodalaydi.

1-masala. Agar $x'=x+a; y'=y+b; z'=z+c$ parallel ko'chirishda $A(1;0;2)$ nuqta $A'(2;1;0)$ nuqtaga o'tsa, parallel ko'chirish formulasidagi a, b, c ning qiymatini toping.

Yechish. Parallel ko'chirish formulalariga A va A' nuqtalarning koordinatalarini, ya'ni $x=1, y=0, z=2, x'=2, y'=1, z'=0$ larni qo'yib, $2=1+a, 1=0+b, 0=2+c$ tenglamalarni hosil qilamiz, bu tenglamalardan a, b, c larni topamiz:

$$a=1, b=1, c=-2.$$

Xuddi tekislikdagi singari parallel ko'chirishning quyidagi xossalari o'rinli:

1. Parallel ko'chirish harakatdir.
2. Parallel ko'chirishda nuqtalar parallel yoki ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar bo'yicha bir xil masofaga ko'chadi.
3. Parallel ko'chirishda har xil to'g'ri chiziq unga parallel to'g'ri chiziqqa yoki o'ziga o'tadi.
4. A va A' nuqtalar qanday bo'lmasin, A nuqtani A' nuqtaga o'tkazadigan yagona parallel ko'chirish mavjud.

Bundan tashqari, fazoda quyidagi xossa ham o'rinli:

Fazoda parallel ko'chirishda har bir tekislik o'ziga yoki o'ziga parallel bo'lgan tekislikka o'tadi.

Haqiqatan, α – ixtiyoriy tekislik bo'lsin. Bu tekislikda kesishuvchi ikkita a va b to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Parallel ko'chirishda a va b to'g'ri chiziqlar o'ziga yoki a_1 va b_1 to'g'ri chiziqlarga o'tadi. α tekislik a_1 va b_1 to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi α_1 tekislikka o'tadi. Agar α_1 tekislik α tekislik bilan ustma-ust tushmasa, u holda α tekislikka parallel bo'ladi.

2-masala. Parallel ko'chirishda $A(2;1;-1)$ nuqta $A'(1;-1;0)$ nuqtaga o'tadi. Koordinatalar boshi qanday nuqtaga o'tadi?

Yechish. Nuqtani parallel ko'chirish formulasi $x' = x + a$,

$y' = y + b$, $z' = z + c$ dan a , b , c larni topamiz:

$$1 = 2 + a, \quad -1 = 1 + b, \quad 0 = 1 + c,$$

bundan: $a = -1, \quad b = -2, \quad c = 1.$

Demak, koordinatalar boshi ($O(0;0;0)$ bo'lgani uchun) $O'(-1;-2;1)$ nuqtaga o'tadi.

3-masala. A nuqtani B nuqtaga, C nuqtani D nuqtaga o'tkazadigan parallel ko'chirish mavjudmi? Bunda:

- 1) $A(2;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;-2;1)$, $D(2;-3;0)$;
- 2) $A(-2;3;5)$, $B(1;2;4)$, $C(4;-3;6)$, $D(7;-2;5)$;
- 3) $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(3;-2;2)$, $D(2;-3;1)$.

Yechish. 1) Parallel ko'chirish formulasiga ko'ra:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c.$$

A ni B ga parallel ko'chiruvchi o'zgarmaslar

$$\begin{aligned} 1 &= 2 + a, & 0 &= 1 + b, & 1 &= 0 + c, \\ a &= -1, & b &= -1, & c &= 1. \end{aligned}$$

C ni D ga parallel ko'chiruvchi o'zgarmaslar

$$\begin{aligned} 2 &= 3 + a, & -3 &= -2 + b, & 0 &= 1 + c, \\ a &= -1, & b &= -1, & c &= -1. \end{aligned}$$

Parallel ko'chirish mavjud emas. Chunki A ni B ga ko'chiruvchi o'zgarmaslar C ni D ga ko'chiruvchi o'zgarmaslarga teng emas.

2) Parallel ko'chirish formulasiga ko'ra A ni B ga

ko'chirishda $1 = -2 + a, \quad 2 = -3 + b, \quad 4 = 5 + c,$

$$a = 3, \quad b = 5, \quad c = -1.$$

C ni D ga ko'chirishda

$$\begin{aligned} 7 &= 4 + a, & -2 &= -3 + b, & 5 &= 6 + c, \\ a &= 3, & b &= 1, & c &= -1. \end{aligned}$$

bo'lgani uchun parallel ko'chirish mavjud emas.

3) Parallel ko'chirish formulasiga ko'ra, A ni B ga ko'chirishda o'zgarmaslar

$$-1 = 0 + a, \quad 0 = 1 + b, \quad 1 = 2 + c,$$

$$a = -1, \quad b = -1, \quad c = -1.$$

C ni D ga parallel ko'chirishdagi o'zgarmaslar

$$2 = 3 + a, \quad -3 = -1 + b, \quad 1 = 2 + c,$$

$$a = -1, \quad b = -1, \quad c = -1.$$

A ni B ga, C ni D ga parallel ko'chirish mavjud. Chunki A ni B ga va C ni D ga ko'chirishda a , b , c o'zgarmaslar teng.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

10.71. Oxy tekisligiga nisbatan (1;2;3) nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.

10.72. Oyz tekisligiga nisbatan (1;2;3) nuqtada simmetrik bo'lgan nuqtani toping.

10.73. Oy o'qiga nisbatan (2; -3;5) nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.

10.74. Oxy tekisligiga nisbatan (1;4;3) nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.

10.75. Koordinatalar boshiga nisbati (1;2;3) nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.

10.76. Oxz tekislikka nisbatan (1;2;3) nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.

10.77. Koordinata boshiga nisbatan quyidagi nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping:

$$A(2;3;4), B(0;5;2), C(-4;9;5), D(-3; -2; -11).$$

10.78. Oxz tekisligiga nisbatan quyidagi nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping:

$$A(1;3; -4), B(2;5;2), C(-4;3;5), D(3; -2; -1).$$

10.79. Oyz tekisligiga nisbatan quyidagi nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping:

$$A(2;3;4), B(2; -5;2), C(4;3; -5), D(3;5;l).$$

10.80. Oxy tekisligiga nisbatan quyidagi nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping:

$$A(1;2;4), B(2; -5;1), C(4;3; -5), D(-3; -2;3).$$

10.81. Oyz tekisligiga nisbatan quyidagi nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping:

$$A(4; -3;4), B(-2; -5;1), C(-4;l; -5), D(-l;5;2).$$

10.82. Oxz tekisligiga nisbatan quyidagi nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping:

$$A(1; -1;4), B(2; -4;1), C(-l;l; -5), D(-l;5;l), E(-1; -1; -3), F(-2; -4;6), N(3;1;6), L(1;5; -1).$$

10.83. Oyz tekisligiga nisbatan quyidagi nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping:

$$A(1;1;4), B(2;4;1), C(l;l;5), D(-l; -5; -l), E(-1;1;-3), F(2; -4;6), N(3;1; -6), L(-1; -5; -1).$$

10.84. $A(3;4;-1)$, $B(-3;2;5)$ nuqtalar berilgan. Shu A va B nuqtalarga koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalarning koordinatalarini toping.

10.85. $M(3;2;2)$ va $N(2; -4;l)$ nuqtalar berilgan. Shu M va N nuqtalarga Ox , Oy va Oz o'qlarga nisbat simmetrik nuqtalarning koordinatalarini yozing.

10.86. $E(5; -2;2)$, va $F(3;6;7)$ nuqtalar berilgan. Shu E va F nuqtalarga xOy , xOz , yOz tekisliklarga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalarning koordinatalarini yozing.

10.87. Uchlari $A(3;-2;1)$, $B(3;0;2)$ va $C(1;2;5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning BD medianasi va AC tomoni orasidagi burchakning kattaligini toping.

- 10.88. $\triangle ABC$ va $A(3;-1;2)$, $B(0;2;1)$, $C(1;3;1)$ uchlar berilgan. Uchburchakning B burchagi kosinusi aniqlang.
- 10.89. Parallel ko'chirishda $A(-1;2;3)$ nuqta $B(3;-1;5)$ nuqtaga o'tadi. Parallel ko'chirish formulalari ($x'=x+a$; $y'=y+b$; $z'=z+c$) dagi a , b , c larning qiymatlarini toping.
- 10.90. $A(-2;3;5)$, $B(5;2;3)$, $C(4;-3;6)$, $D(7;-2;5)$ nuqtalar berilgan. A nuqtani B nuqtaga, C nuqtani esa D nuqtaga o'tkazuvchi parallel ko'chirish mavjudmi?
- 10.91. Agar $A(-1;3;1)$, $B(5;2;3)$, $C(2;-2;5)$, $D(8;-3;7)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, A nuqtani B nuqtaga, C nuqtani esa D nuqtaga o'tkazuvchi parallel ko'chirish mavjudmi?

6-§. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamasi

Tekislikka doir masalalar, jumladan, tekislik tenglamalarini keltirib chiqarish, ikki tekislikning fazoda o'zaro joylashishini ifodalash, nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish masalalari tekislikdagi to'g'ri chiziqqa doir shu kabi masalalar singari yechiladi. Shu sababli biz tekislik tenglamalarining ko'rinishi va nomlanishini, ikki tekislikning fazoda o'zaro joylashish formulalarini va nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish formulasini isbotsiz keltirish bilan chegaralanamiz.

x, y, z o'zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi fazodagi biror tekislikni ifodalaydi va, aksincha, fazodagi har qanday tekislik x, y, z o'zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi.

Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalari va fazodagi ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishini hamda fazodagi to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashishini ifodalovchi formulalar tekislikdagi to'g'ri chiziqning shu kabi tenglama va formulalari singari hosil qilinadi. Shu sababli ularni isbotsiz keltiramiz:

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}. \quad (10.22)$$

Bu yerda: p, q, r – fazoda berilgan vektorning koordintalari, x, y, z – fazoda berilgan ixtiyoriy nuqtaning, x_0, y_0, z_0 – berilgan nuqtaning koordinatalari. Bu tenglamaga berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektorga parallel to‘g‘ri chiziqlarning tenglamasi ham deyiladi.

To‘g‘ri chiziqlarning parametrik tenglamasi

$$x = x_0 + pt, y = y_0 + qt, z = z_0 + rt; \quad (10.23)$$

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = t \text{ deb belgilasak, undan } x = x_0 + pt, \quad y = y_0 + qt, \quad z = z_0 + rt$$

formula kelib chiqadi. Bunga to‘g‘ri chiziqlarning **parametrik tenglamasi** deyiladi.

Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (10.24)$$

Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektorga perpendikular tekislik tenglamasi:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \quad (10.25)$$

Bu yerda: A, B, C – berilgan vektorning koordinatalari, x, y, z – ixtiyoriy nuqtaning, x_0, y_0, z_0 – berilgan nuqtaning koordinatalari.

Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.26)$$

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (10.27)$$

Bu yerda a, b, c , mos ravishda, tekislikning Ox, Oy, Oz o‘qlari bilan kesish nuqtalari, ya’ni koordinata boshidan kesish nuqtasigacha bo‘lgan masofa.

Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari:

$$(10.25) \text{ dan } Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 \Rightarrow$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

By yerda $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ belgilash kiritsak, tekislikning umumiy tenglamasi kelib chiqadi.

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (10.28)$$

1) $By + Cz + D = 0$, $Ax + Cz + D = 0$, $Ax + By + D = 0$ – mos ravishda Ox o‘qqa, Oy o‘qqa, Oz o‘qqa parallel tekislik tenglamasi;

2) $Ax + By + Cz = 0$ – koordinatalar boshidan o‘tuvchi tekislik tenglamasi;

3) $By + Cz = 0$, $Ax + By = 0$, $Ax + Cz = 0$ – mos ravishda Ox o‘qdan, Oy o‘qdan, Oz o‘qdan o‘tgan tekislik tenglamasi;

4) $Cz + D = 0$, $By + D = 0$, $Ax + D = 0$ – mos ravishda Oxy tekislikka, Oxz tekislikka, Oyz tekislikka parallel tekislik tenglamasi;

5) $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ – mos ravishda Oxy , Oyz , Oxz tekislik tenglamasi.

1-misol. $M_0(3;4;5)$ nuqtadan o‘tuvchi va normal vektori $\vec{n} = \{-1; -3; 2\}$ bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $z_0 = 5$, $A = -1$, $B = -3$, $C = 2$.

U holda (10.1) tenglamadan topamiz:

$$(-1) \cdot (x - 3) + (-3) \cdot (y - 4) + 2 \cdot (z - 5) = 0$$

yoki

$$x + 3y - 2z - 5 = 0.$$

2-misol. Ox , Oy va Oz o‘qlarda, mos ravishda, 2, -4 va 6 ga teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra: $a = 2$; $b = -4$; $c = 6$.

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasidan topamiz:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-4)} + \frac{z}{6} = 1, \quad 6x - 3y + 2z - 12 = 0.$$

Nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligiga *nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (10.29)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $M_1(3;0;3)$, $M_2(0;4;0)$ va $M_3(0;4;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Avval berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ 0-3 & 4 & 0-3 \\ 0-3 & 4 & -3-3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bundan

$$-12 \cdot (x-3) - 9 \cdot y + 0 \cdot (z-3) = 0$$

yoki

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

$M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $4x + 3y - 12 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = 4$$

Tekislikning fazodagi o'rnini turli parametrlar bilan (masalan, tekislikning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bilan) bir qiymatli aniqlanishi mumkin. Shu sababli parametrlariga ko'ra tekislikning turli tenglamalari keltirib chiqariladi:

Tekisliklar $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Fazoda to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishishi sifatida qarasak, to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (10.30)$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

10.92. Tekislik tenglamalarini tuzing:

- 1) $M_0(2; -2; 1)$ nuqtadan va O_x o'qdan o'tuvchi;
- 2) $M_0(-1; 2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi va O_y o'qqa perpendikular;
- 3) $M_0(3; 4; -2)$ nuqtadan o'tuvchi va O_{xy} tekislikka parallel;
- 4) $M_1(-3; 2; 1)$, $M_2(3; 0; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi va O_y o'qqa parallel;
- 5) koordinatalar boshidan va $M_1(-1; 3; 2)$, $M_2(2; 4; -3)$ nuqtalardan o'tuvchi.

10.93. Oz o'qqa parallel, O_x va O_y o'qlardan 3 va 4 kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

10.94. $M(2; -3; 1)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

10.95. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing:

- 1) $M_1(2; 1; -1)$, $M_2(3; 1; 0)$, $M_3(-1; 2; -1)$; 2) $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(4; 1; 3)$, $M_3(1; 2; -1)$.

10.96. $M(2; -2; 3)$ nuqtadan $\overline{OM}$ ga perpendikular o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzing.

10.97. $5x - 3y - 2z - 30 = 0$ tekislik koordinata o'qlarida qanday kesmalar ajratadi?

10.98. $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(-1; 3; 2)$ nuqtalardan o'tuvchi va O_x , O_z o'qlarida teng musbat kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

10.99. $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(0; 2; 1)$ nuqtalardan o'tuvchi va $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$ vektorga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

10.100. $M(2; 1; 3)$ nuqtadan o'tuvchi va $2x - 3y + z + 5 = 0$ tekislikka parallel tekislik topilsin.

10.101. $M(1; -2; 4)$ nuqtadan o'tuvchi hamda $x - 2y + 5z - 2 = 0$ va $2x + 3y - z + 4 = 0$ tekisliklarga perpendikular tekislikning tenglamasini tuzing.

10.102. $M(4; 3; 1)$ nuqtadan $3x - 4y + 12z + 14 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

10.103. $M(3;0;1)$ nuqtaning $2x+9y-6z+33=0$ tekislikdan chetlashishini toping.

10.104. $A(2;-3;0)$ va $B(-1;2;3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

10.105. Berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing:

1) $M_1(1;1;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s} = \{2;3;-1\}$ vektorga parallel;

2) $M_2(2;-3;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qqa parallel;

3) $M_3(2;-1;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $6x+2y-4z-5=0$ tekislikka perpendikular.

10.106. $M_0(2;-3;5)$ nuqtadan o'tuvchi berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:

$$1) \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}; \quad 2) x=3+2t, y=-1+3t, z=1-t;$$

10.107. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{m} = \frac{z+3}{m+1}$ to'g'ri chiziq va $3x+y-3z-1=0$ tekislik parallel.

m ni toping.

7-§. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Tekisliklar orasidagi burchak. Ikki yoqli burchak va uning chiziqli burchagi

Fazoda ikki to'g'ri chiziq $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ va $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagi formula bilan topiladi:

$$\cos \varphi = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \quad (10.31)$$

Bundan ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti quyidagicha aniqlanadi:

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0. \quad (10.32)$$

Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (10.33)$$

1-misol. $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$ va $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$ to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tmas burchakni toping.

Yechish. To'g'ri chiziqlar tenglamalarini kanonik shaklga keltiramiz:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}.$$

U holda (10.29) formuladan topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O'tmas burchak uchun $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'ladi. Bundan $\varphi = 135^\circ$.

Fazoda $\frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$ to'g'ri chiziq va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik formulalari bilan berilgan bo'sa, ular orasidagi burchak quyidagi formula bilan topiladi:

$$\sin \varphi = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \quad (10.34)$$

Bindan to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikularlik sharti quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}. \quad (10.35)$$

To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik sharti esa quyidagicha aniqlanadi:

$$Ap + Bq + Cr = 0. \quad (10.36)$$

2-misol. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x - y - z + 9 = 0$ tekislik orasidagi o'tkir burchakni toping.

Yechish. Izlanayotgan burchakni (10.34) formula bilan topamiz:

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Bundan $\varphi = 30^\circ$.

3-misol. m ning qanday qiymatida $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{m} = \frac{z+3}{m+1}$ to'g'ri chiziq va

$3x + y - 3z - 1 = 0$ tekislik parallel bo'ladi?

Yechish. m ning izlanayotgan qiymatini to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartidan topamiz: $3 \cdot 3 + 1 \cdot m + (-3) \cdot (m+1) = 0$. Bundan $m = 3$.

Fazoda ikki tekislik orsidagi burchak ikki yoqli burchak bo'ladi. Bundan ikki tekislik orasidagi burchak kattaligi ikki yoqli burchakning kattaligi bilan bihil ekanligi kelib chiqadi.

Fazoda $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ikki tekislik tenglamasi berilgan bo'lsa, bu tekisliklar orasidagi burchak formulasi:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (10.37)$$

Bundan ikki tekislikning perpendikularlik sharti:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (10.38)$$

Ikki tekislikning parallellik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (10.39)$$

Ikki tekislikning ustma-ust tushishi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (10.40)$$

4-misol. $x + y + z - 1 = 0$, $x - 2y + 3z - 1 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $\vec{n}_1 = \{1;1;1\}$, $\vec{n}_2 = \{1;-2;3\}$.

$$\text{U holda} \quad \cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 1(-2) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

Bundan $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

10.108. Tekisliklar orasidagi burchakni toping:

1) $2x - 3y + z - 8 = 0$ va $3x - 6z + 5 = 0$;

2) $x + 2y - 3z - 4 = 0$ va $2x + 3y - z + 4 = 0$.

10.109. m va n ning qanday qiymatlarida tekisliklar parallel bo'ladi:

1) $3x - 5y - nz - 2 = 0$, $mx + 2y - 3z + 11 = 0$;

2) $nx - 6y - 6z + 4 = 0$, $2x + my + 3z - 8 = 0$?

10.110. m ning qanday qiymatlarida tekisliklar perpendikular bo'ladi:

1) $4x - 7y + 2z - 3 = 0$, $-3x + 2y + mz + 5 = 0$;

2) $x - my + z = 0$, $2x + 3y + mz - 4 = 0$?

10.111. $x = -2 + 3t, y = 0, z = 3 - t$ va $x = -1 + 2t, y = 0, z = -3 + t$ to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchakni toping.

10.112. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x + 2y - 9 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

10.113. $M(1; -1; -1)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular tekislik tenglamasini tuzing:

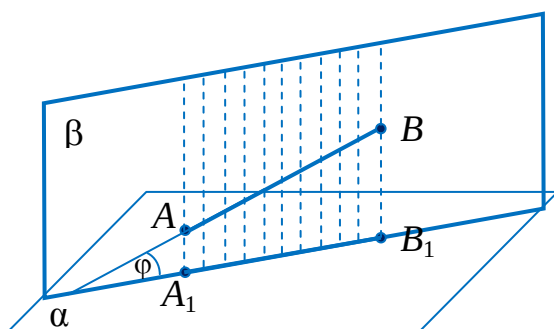
1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+2}{4}$;

2) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-2}$.

8-§. Ko'pburchak ortogonal proyeksiyasining yuzi

AB to'g'ri chiziq kesmasining yaqqol tasviri va uni α tekisligiga ortogonal proyeksiyalash 10.11-rasmda ko'rsatilgan. AB to'g'ri chiziq kesmasining ortogonal

proyeksiyasini parallel proyeksiyalashning xossalari inobatga olgan holda ko'rib chiqamiz. O'zaro parallel bo'lgan AA_1 va BB_1 proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar mos ravishda A va B nuqtalar orqali o'tib, α proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuvchi β tekislikni hosil qiladi.



10.11-rasm

α va β tekisliklarining o'zaro kesishish chizig'i A va B nuqtalarning α proyeksiya tekisligidagi A_1 va B_1 proyeksiyalari orqali o'tadi. A_1B_1 to'g'ri chiziq AB to'g'ri chiziqning α proyeksiyalar tekisligidagi yagona proyeksiyasi hisoblanadi.

AB to'g'ri chiziq kesmasi va uning A_1B_1 proyeksiyasining uzunliklari o'rtasida

$$|A_1B_1| = |AB|\cos\varphi$$

bog'liqlik mavjud bo'lib, bu yerda φ – to'g'ri chiziq bilan proyeksiyalar tekisligi orasidagi burchakdir. Agar $\varphi=0^\circ$ bo'lsa, kesma haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi; $\varphi=90^\circ$ bo'lganda esa kesma nuqta ko'rinishida proyeksiyalanadi. Qolgan vaziyatlarda kesmaning proyeksiyasi kesmaning haqiqiy kattaligidan kichik bo'ladi.

To'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o'lchamini aniqlash va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko'p uchraydi.

4-teorama. Ko'pburchakning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi ko'pburchak yuzini uning tekisligi bilan proyeksiyasi tekisligi orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng.

Isbot. Avval uchburchak va uning biror tomonidan o'tuvchi tekislikdagi proyeksiyasini qarab chiqamiz (10.12-rasm). ABC uchburchakning α tekislikdagi

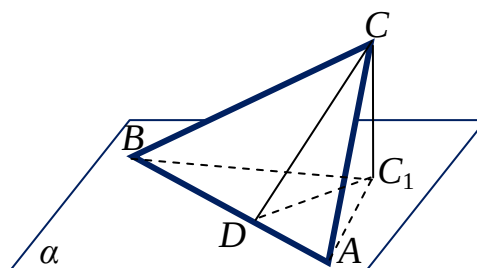
proyeksiyasi ABC_1 uchburchakdan iborat bo'ladi. ABC uchburchakning CD balandligini o'tkazamiz. Uch perpendikular teoremasiga ko'ra C_1D kesma ABC_1 uchburchakning balandligi bo'ladi. CDC_1 burchak ABC uchburchak tekisligi bilan proyeksiya tekisligi α orasidagi φ burchakka teng. Quyidagilarga egamiz:

$$C_1D = CD \cos \varphi, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD, \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D.$$

Bundan

$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos \varphi = S_{ABC} \cos \varphi. \quad (10.41)$$

Shunday qilib, qarayotgan holda teorema o'rinli. α tekislik o'rniga unga parallel ixtiyoriy tekislik uchun ham teorema o'rinli.



10.12-rasm

Endi umumiy holni qarab chiqamiz. Berilgan ko'pburchakni uchburchaklarga ajratamiz. Proyeksiya tekisligiga parallel tomoni bo'lmagan uchburchakni umumiy tomoni proyeksiya tekisligiga parallel bo'lgan uchburchaklarga ajratamiz. Bo'linish natijasida ajratgan har bir uchburchak uchun va uning proyeksiyasi uchun (10.41) tenglikni qo'llaymiz. Bu tengliklarni hammasini hadma-had qo'shamiz. Bundan chap tomonda ko'pburchak proyeksiyasining yuzini o'ng tomonda esa ko'pburchak yuzini $\cos \varphi$ ga ko'paytirilgani hosil bo'ladi.

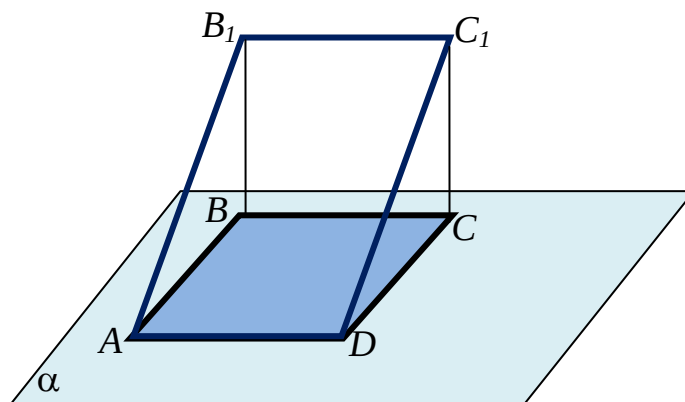
1-masala. To'g'ri to'rtburchakning yuzi $18\sqrt{3}$ ga teng. Uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi kvadratdan iborat. Tekislik va to'g'ri to'rtburchak yotgan tekislik orasidagi burchak 30° ga teng. Kvadratning yuzini toping.

Yechish. AB_1C_1D to'g'ri to'rtburchakning α tekislikdagi proyeksiyasi $ABCD$ kvadratdan iborat bo'lsin (10.13-rasm). Shartga ko'ra AB_1C_1D to'g'ri

to'rtburchakning tekislik bilan orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi $\angle B_1AB = 30^\circ$ ga teng. $S_{ABCD} = S_{AB_1C_1D} \cdot \cos \alpha$ formulaga ko'ra kvadratning yuzini

topamiz: $S_{ABCD} = S_{AB_1C_1D} \cdot \cos \alpha = 18\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 18\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27$.

Demak, kvadratning yuzi $S_{ABCD} = 27$.



9.13-rasm

Mustaqil ishlash uchun masalalar

10.114. Umumiy asosi AB bo'lgan teng yonli ABC va ABD uchburchaklar turli tekisliklarda yotadi, ular orasidagi burchak φ ga teng. Agar:

- 1) $AB=24$ sm, $AC=13$ sm, $AD=37$ sm, $CD=35$ sm;
- 2) $AB=32$ sm, $AC=65$ sm, $AD=20$ sm, $CD=63$ sm bo'lsa, $\cos \varphi$ ni toping.

10.115. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari 7 sm va 24 sm ga teng. To'g'ri burchakning uchidan gipotenuza orqali o'tuvchi va uchburchak tekisligi bilan 30° li burchak tashkil etuvchi tekislikkacha masofani toping.

10.116. Tomoni a ga teng bo'lgan teng tomonli uchburchak berilgan. Uchburchak tekisligi bilan: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ga teng burchak tashkil qilgan tekislikka tushirilgan uning ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.

10.117. Umumiy asosi AB bo'lgan teng yonli ABC va ABD uchburchaklar turli tekisliklarda yotadi. Agar: 1) $AB=24$ sm, $AC=13$ sm, $AD=37$ sm, $CD=35$ sm; 2) $AB=32$ sm, $AC=65$ sm, $AD=20$ sm, $CD=63$ sm bo'lsa,

1) ABC uchburchakning ABD uchburchak tekisligiga ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.

2) ABD uchburchakning ABC uchburchak tekisligiga ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.

10.118. Teng yonli uchburchakning asosi yon tomonidan 1,5 marta katta. Uchburchak asosiga tushirilgan balandlik α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Uchburchakning asosi bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$ ga teng bo'lsa, uchburchakning yon tomoni bu α tekislik bilan qanday burchak tashkil qiladi?

10.119. Rombning o'tkir burchagi 60° ga teng, rombning tomoni α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Rombning kichik diagonali bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ga teng bo'lsa, romb va α tekislik orasidagi ikki yoqli burchakning kattaligini toping.

10.120. To'g'ri burchakli uchburchakda bir katet ikkinchi bir katetidan ikki marta katta. Uchburchakning kichki kateti α tekislikda yotadi, katta kateti esa bu α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Agar $\sin \varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}$ bo'lsa, uchburchakning gipotenuzasi bu α tekislik bilan qanday burchak tashkil qiladi?

10.121. To'g'ri to'rtburchakda bir tomoni ikkinchi tomonidan ikki marta katta. To'g'ri to'rtburchakning katta tomoni α tekislikda yotadi, to'g'ri to'rtburchakning diagonali bu α tekislik bilan φ burchakni tashkil qiladi. Agar $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ bo'lsa, to'g'ri to'rtburchak va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni toping. javob: 45°

10.122. Teng yonli uchburchakda asosiga tushgan balandlik asosi uzunligiga teng. Uchburchakning yon tomoni α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Uchburchakning asosi bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ga teng bo'lsa, uchburchak tekisligi va α tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni toping. javob: 30°

10.123. Teng yonli uchburchakning ikki yon tomoni α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi, uchinchi tomoni esa bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$ bo'lsa, uchburchak tekisligi va α tekis orasidagi ikki yoqli burchakni toping. javob: 30°

10.124. Kvadratning diagonalini α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi, kvadratning bir tomoni bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$ bo'lsa, kvadrat tekisligi va α tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni toping. javob: 60°

10.125. Teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakning kateti α tekisligi bilan φ burchak hosil qiladi. Uchburchakning gipotenuzasi bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$ bo'lsa, bu uchburchak tekisligi va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni toping. javob: 30°

10.126. Kvadratning bir tomoni α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Kvadratning diagonalini esa bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{10}$ bo'lsa, kvadrat tekisligi va α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak sinusining qiymatini toping. javob: 0,2

10.127. Teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi 120° ga teng. Uchburchakning yon tomonlari α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Uchburchakning asosi bu α tekislikda yotadi. Agar $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$ bo'lsa, uchburchak tekisligi va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak kattaligini toping. javob: 45°

10.128. Teng yonli trapetsiyada katta asosi qolgan barcha tomonlaridan ikki marta katta. Trapetsiyaning yon tomoni α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Trapetsiya asosi α tekislikda yotadi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{0,43}$ bo'lsa, trapetsiyaning diagonalini va α tekislik orasidagi burchak kosinusning qiymatini toping. javob: 0,9

10.129. Rombning bir tomoni α tekislikda yotadi va kichik diagonalini bu α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Rombning o'tmas burchagi 120° ga teng.

Agar $\cos \varphi = \frac{\sqrt{19}}{8}$ bo'lsa, rombning tekisligi va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burcha kosinusning qiymatini toping. javob: 0,25

10.130. Teng yonli trapetsiyada katta asosi qolgan barcha tomonlaridan ikki marta katta. Trapetsiyaning diagonalini α tekislik bilan φ burchak hosil qiladi. Trapetsiya asosi α tekislikda yotadi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{0,79}$ bo'lsa, trapetsiya tekisligi va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak kosinusning qiymatini toping. javob: 0,4

10.131. Rombning bir tomoni α tekislikda yotadi. Rombning o'tkir burchagi 60° ga teng. Rombning katta diagonalini bu α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Agar $\cos \varphi = \frac{\sqrt{19}}{5}$ bo'lsa, rombning tekisligi va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak kosinusini toping. javob: 0,2

10.132. Parallelogrammning bir tomoni ikkinchi bir tomonidan ikki marta katta va o'tkir burchagi 60° ga teng. Parallelogrammning katta tomoni α tekislikda yotadi. Parallelogrammning katta diagonalini bu α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{\frac{103}{112}}$ bo'lsa, parallelogramm tekisligi va α tekisligi orasidagi ikki yoqli burchak kosinusini toping. javob: 0,5

10.133. To'g'ri burchakli trapetsiyada yon tomoni kichik asosga teng va katta asosi bilan 60° hosil qiladi. Trapetsiyaning katta diagonalini α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Trapetsiyaning asosi bu α tekislikda yotadi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{0,76}$ bo'lsa, trapetsiya va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak kosinusini toping. javob: 0,2

10.134. Parallelogrammning bir tomoni ikkinchisidan ikki marta katta va o'tkir burchagi 60° ga teng. Parallelogrammning bir kichik tomoni α tekislikda yotadi. Parallelogrammning katta diagonalini bu α tekislik bilan φ burchak hosil qiladi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{\frac{67}{112}}$ bo'lsa, parallelogrammning kichik diagonalini va bu α tekislik orasidagi burchak kosinusini toping. javob: 0,25

10.135. Teng yonli trapetsiyaning balandligi kichik asosiga teng va katta asosidan uch marta kichik. Trapetsiyaning diagonali α tekislik bilan φ burchak hosil qiladi. Trapetsiya asosi bu α tekislikda yotadi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{0,818}$ bo'lsa, trapetsiya va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak kosinusning qiymatini toping. javob: 0,3

10.136. Parallelogrammning kichik diagonali bir tomoniga perpendikular va bu tomondan 3 marta uzun. Parallelogrammning katta diagonali α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Parallelogrammning kichik tomoni bu α tekislikda yotadi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{\frac{17}{26}}$ bo'lsa, parallelogramm va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni toping. javob: 45° .

10.137. Parallelogrammda bir diagonali tomoniga perpendikular va unga teng. Parallelogrammning katta tomonlaridan biri α tekislikda yotadi. Parallelogrammning katta diagonali α tekislik bilan φ burchak tashkil qiladi. Agar $\cos \varphi = \sqrt{0,936}$ bo'lsa, parallelogramm va bu α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak kosinusning qiymatini toping. javob: 0,6.