8-BOB
TEKISLIKDA GEOMETRIK ALMASHTIRISHLAR

1- §. Parallel ko‘chirish

Gcometriyaning asosiy masalalaridan biri xossalari berilgan shakllarni yasash hisoblanadi. Odatda, berilgan shaklga teng shaklni yoki unga o‘xshash shakl yasash talab etiladi. Shuning uchun berilgan shakllardan boshqa shaklarga o‘tish qoidalarini o‘rganish muhim ahamiyatga ega.

Bizga biror F shakl berilgan bo‘lsin. F shaklning har bir A nuqtasiga biror B nuqta mos qo‘yiladi. F shaklning A nuqtalariga mos B nuqtalar to‘plami F_1 shaklni hosil qiladi. Bu moslik shakl *almashtirish* deyiladi.

Agar F va F_1 shakllarning nuqtalari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, F_1 shakl F shaklni almashtirish natijasida *hosil qilingan* deyiladi, yoki F_1 shakl berilgan almashtirishda F shaklning *aksi ham* deyiladi.

Almashtirishlardan eng muhimlari – shakllarning barcha geometrik xususiyatlarini, avvalo, nuqtalar orasidagi masofalarni, burchaklarni, yuzlarni saqlanishi, kesmalarning joylashuvini va h.k. saqlovchi almashtirishlar hisoblanadi.

1-ta’rif. F shaklni nuqtalar orasidagi masofani saqlagan holda F_1 shaklga almashtirish *harakat (ko‘chish)* deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar X va Y lar F shaklning nuqtalari, X_1 va Y_1 nuqtalar F_1 shaklning ularga mos nuqtalari bo‘lsa, harakatda ular orasidagi masofalar teng bo‘ladi: $XY=X_1Y_1$

Harakatda nuqtalar orasidagi masofalar saqlanganligidan, ular bilan aniqlanadigan barcha xossalar saqlanishi kelib chiqadi. Harakatning asosiy xossalarini ko‘rib o‘tamiz.

1-xossa. Harakatda bitta to‘g‘ri chiziqda yotgan uchta nuqta boshqa bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtaga o‘tadi. Agar bunda B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsa, B_1 nuqta A_1 va C_1 nuqtalar orasida yotadi.

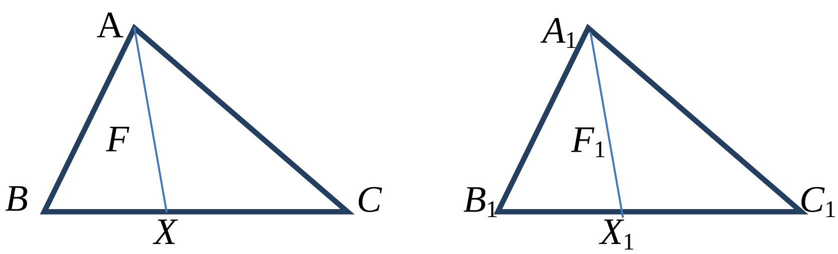
Isbot. A, B, C nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotsin. U holda ulardan biri qolgan ikkitasining orasida yotadi. B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsin, ya’ni $AB+BC=AC$ munosabat bajarilsin.

Harakatning ta’rifidan, A nuqtaga A_1 nuqta, B nuqtaga B_1 nuqta va C nuqtaga C_1 nuqta mos qo‘yilgan bo‘lsin. Harakatda masofalar o‘zgarmaganligidan $A_1B_1=AB$, $A_1C_1=AC$ va $B_1C_1=BC$ bo‘ladi va $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$ bajariladi. Oxirgi tenglik esa B_1 nuqtaning A_1 va C_1 orasida yotishini anglatadi.

2-xossa. AB kesmaning harakatida A va B nuqtalarga A_1 va B_1 nuqtalar mos keladi.

Isbot. 1-xossada isbotlanganiga o‘xshash, harakatda AB kesmaning ixtiyoriy X nuqtasiga A_1B_1 kesmaning X_1 nuqtasi mos kelishi va bunda nuqtalarning tartibi saqlanishiga ishonch hosil qilish mumkin. Shuningdek, harakatda A_1B_1 kesmaning ixtiyoriy Y_1 nuqtasiga AB kesmaning shunday Y nuqtasi mos kelib, unda $A_1Y_1=AY$ tenglik bajarilishini ko‘rsatish mumkin. Demak, harakatda AB kesma A_1B_1 kesmaga o‘tar ekan.

3-xossa. Harakatda uchburchak yana uchburchakka o 'tadi.



8.1-rasm

Isbot. Yuqorida isbotlanganiga muvofiq, harakatda A nuqta A_1 nuqtaga, BC kesma B_1C_1 kesmaga hamda AB va AC kesmalar, mos ravishda, A_1B_1 va A_1C_1 kesmalarga o‘tadi (8.1-rasm). ΔABC ning A uchini BC tomonning ichki X nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesmalar bilan to‘ldiriladi. Isbot qilinganiga ko‘ra, harakatda AX kesma A_1X_1 kesmaga o‘tadi, bunda X_1 shu kesmaning ichki nuqtasidan iborat. Barcha A_1X_1 kesmalar $\Delta A_1B_1C_1$ ni to‘ldiradi. $\Delta A_1B_1C_1$ berilgan harakatda ΔABC o‘tgan uchburchakdir.

4-xossa. Harakatda burchaklarning kattaliklari saqlanadi.

Isbot. Burchak A nuqtadan chiqqan AB va AC nurlardan hosil qilingan bo‘lsin. Agar harakatda A, B, C nuqtalar, mos ravishda, A_1 B_1, C_1 nuqtalarga o‘tsa, $\angle A_1B_1C_1=\angle ABC$ bo‘lishini isbotlash talab qilinadi.

Agar A, B, C nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, mos tomonlari o‘zaro teng bo‘lgan ΔABC va $\Delta A_1B_1C_1$ larni olamiz, ya’ni $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, bundan ularning mos burchaklari ham o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni $\angle B_1A_1C_1=\angle BAC$.

Agar A, B, C nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotsa, A_1, B_1, C_1 nuqtalar ham (harakatda) bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi. Agar A nuqta BC kesmada yotsa, A_1 nuqta B_1C_1 kesmada yotadi va $\angle A=\angle A_1=180°$.

Agar A nuqta BC kesmaning davomida yotsa, A_1 nuqta ham B_1C_1 kesmaning davomida yotadi va bu holda $\angle B_1A_1C_1=\angle BAC=0°$.

5-xossa. Ketma-ket bajarilgan ikkita harakat yana harakatdan iborat bo‘ladi.

Isbot. Birinchi harakat F shaklni F_1 shaklga, ikkinchi harakat esa shaklni F_2 shaklga o‘tkazsin deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, birinchi harakatda F shaklning A nuqtasi F_1 shaklning A_1 nuqtasiga, ikkinchi harakatda esa F_1 shaklning A_1 nuqtasi F_2 shaklning A_2 nuqtasiga o‘tsin. Harakatda A_1, va A_1A_2 masofalar saqlanganligidan, AA_2 masofa ham saqlanadi. Shunday qilib, A nuqtaning A_2 nuqtaga o‘tishi ham harakat bo‘ladi.

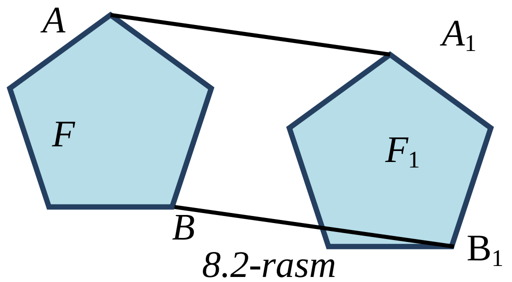
Harakatda A nuqta A_1 nuqtaga o‘tsin, deb faraz qilaylik. A_1 nuqtani yana A nuqtaga o‘tkazadigan harakat, boshlang‘ich harakatga *teskari harakat* deyiladi.

6-xossa. Harakatga teskari harakat yana harakatdan iborat.

Isbot. Harakat nuqtalar orasidagi masofalarni saqlab, turli nuqtalarni turli nuqtalarga o‘tkazadi. Shu sababli, teskari almashtirish mavjud bo‘ladi. U, nuqtalar orasidagi masofalarni saqlaganligidan, yana harakatdan iborat.

2-ta’rif. Agar almashtirish bajarilganda nuqtalar parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha o‘zgarmas masofaga siljisa, bunday almashtirish *parallel ko‘chirish* deyiladi.

Parallel ko‘chirishda F shaklning A va B nuqtalari F_1 shaklning A_1 va B_1 nuqtalariga o‘tsin. U holda AA_1 va BB_1 to‘g‘ri chiziqlar kesmalari o‘zaro tengdir (8.2-rasm).



8.2-rasm

Parallel ko‘chirish quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar qanday bo‘lishidan qat’iy nazar A nuqta B nuqtaga o‘tadigan yagona parallel ko‘chirish mavjud.

2-xossa. Ikkita ketma-ket parallel ko‘chirish yangi parallel ko‘chirishni beradi.

3-xossa. Parallel ko‘chirishga teskari almashtirish parallel ko‘chirishdan iborat.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

8.1. Aylana diametrining qarama-qarshi uchlari A va B orqali AC va BD parallel vatarlar o‘tkazildi. CD kesma shu doiraning diametri ekanligini isbotlang.

8.2. E va F nuqtalar $ABCD$ parallelogrammning mos ravishda AD va BC parallel tomonlarining o‘rtalari bo‘lsa. BE va FD chiziqlari AC diagonalini uchta teng qismga bo‘lishini isbotlang.

8.3. Uchburchakning medianalarini uchidan boshlab hisoblaganda 1:2 nisbatda bo‘linadigan nuqtalar orqali uchburchak tomonlariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Ushbu chiziqlarning kesishish nuqtalarida uchlari bo‘lgan uchburchak berilgan uchburchakka teng ekanligini isbotlang.

8.4. Uchburchakka ichki aylana chizilgan va unga uchburchakning yon tomonlariga parallel ravishda urinma o‘tkazilgan. Hosil bo‘lgan olti burchakning qarama-qarshi tomonlari teng ekanligini isbotlang.

8.5. *ABCD* to‘rtburchaklarida *B* burchagi *D* burchagiga teng, *AC* diagonali esa boshqa diagonalni teng ikkiga bo‘ladi. Berilgan to‘rtburchak parallelogramm ekanligini isbotlang.

8.6. *O* nuqta ABCD parallelogrammning markazi. *AOB, BOC, COD, DOA* uchburchaklar ichiga chizilgan aylanalar markazlari rombning uchlari ekanligini isbotlang. Qaysi holatda bu romb kvadrat bo‘ladi?

8.7. Parallelogrammning tashqarisida uning yon tomonlarida muntazam uchburchaklar qurilgan. Bu uchburchaklarning markazlari parallelogramm uchlari ekanligini isbotlang.

8.8. *ABCD* parallelogramm va ixtiyoriy *M* nuqtasi berilgan. Parallelogrammning *A, B, C, D* uchlari orqali mos ravishda *MC, MD, MA, MB* chiziqlariga parallel ravishda to‘g‘ri chiziqlar chizilgan. Bu chiziqlar bir nuqtada kesishishini isbotlang.

8.9. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq va to‘g‘ri burchakning *O* uchi bu to‘g‘ri chiziqlarga simmetriya markazi bo‘lsin. Ushbu to‘g‘ri chiziqlar burchakning tomonlari bilan *M* va *N* nuqtalarda kesishsin. *O* nuqtadan chiziqqacha masofa burchak tomoni tanloviga bog‘liq emasligini isbotlang.

8.10. Uchburchakning ortomarkazining uchburchak tomonlari o‘rtalariga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtalar uchburchakka tashqi chizilgan aylanada joylashganligini isbotlang.

8.11. Orolda joylashgan *A* nuqtadan *B* nuqtagacha telefon aloqasi zarur. Daryodan o‘tmasdan, qanday qilib telefon kabelining uzunligini aniqlash mumkin?

8.12. Olti burchakning qarama-qarshi tomonlari parallel va tengdir. Ushbu olti burchakning simmetriya markazi borligini isbotlang.

8.13. To‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlarining o‘rta nuqtalarini va uning diagonallarining o‘rta nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar bir nuqtada kesishishini va bu nuqtada teng ikkiga bo‘linishini isbotlang.

8.14. Aylanada to‘rtta nuqta berilgan. Har ikki nuqtada uchlari bo‘lgan kesmalarning o‘rtasidan shu kesmalarga perpendikular to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Shu oltita perpendikular bir nuqtada kesishishini isbotlang.

8.15. Aylanada ikkita ixtiyoriy *AB* va *CD* vatar, *CD* vatarda *P* nuqta berilgan. Aylanada shunday *M* nuqta topingki, *AM* va *BM* kesmalar *CD* vatardagi *P* nuqtada teng ikkiga bo‘linsin.

8.16. Ikkala aylananing umumiy nuqtasi orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq hosil qilingan vatarlarning ayirmasi *a* ga teng. Shu to‘g‘ri chiziqni o‘tkazing.

8.17. *ABC* uchburchakda *AM* va *CK* medianalar o‘tkazilgan. *BAM* va *BCK* burchaklar 30 ° ga teng. *ABC* uchburchakning muntazam ekanligini isbotlang.

8.18. *ABC* uchburchak va *P* nuqta berilgan. P_1, P_2, P_3 nuqtalar *P* nuqtaning *BC, CA, AB* kesmalardagi mos ortogonal proyeksiyalari. Q_1, Q_2, Q_3 nuqtalari *BC, CA, AB* kesmalarning o‘rta nuqtalariga nisbatan P_1, P_2, P_3 nuqtalariga simmetrikdir. *BC*, *CA* va *AB* kesmalarga Q_1, Q_2 va Q_3 nuqtalardan o‘tkazilgan perpendikular bir nuqtada kesilishini isbotlang.

8.19. Agar uchburchakda ikkita medianasi teng bo‘lsa, u teng yonli bo‘lishini isbotlang.

8.20. Trapetsiya tomonlari yig‘indisi uning asoslari farqidan, trapetsiya diagonallari yig‘indisi esa asoslari yig‘indisidan katta ekanligini isbotlang.

8.21. *M* nuqta *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchak ichkarisida olingan. Diagonallari *AB* va *BC* teng, perpendikular va tomonlari *AM*, *BM*, *CM*, *DM* ga teng bo‘lgan qavariq to‘rtburchak borligini isbotlang.

8.22. *ABC* teng yonli uchburchak *AB* asosining davomida ixtiyoriy *M* nuqta olinadi. *M* nuqtadan *AC* va *BC* chiziqlarigacha bo‘lgan masofalarining farqi ushbu nuqta tanlanishiga bog‘liq emasligini isbotlang.

8.23. Agar trapetsiyaning barcha tomonlari uzunligi ma’lum bo‘lsa, trapetsiya asoslarining o‘rta nuqtalarini tutashtiruvchi kesma uzunligini toping.

8.24. Ikkita teng aylana K nuqtada tashqi tomondan urinadi. Ushbu aylanalarning KA va KB vatarlari perpendikular. Agar aylanalarning radiusi r ga teng bo‘lsa, AB uzunligini toping.

8.25. Ikkita teng aylana P va Q nuqtalarida kesishadi. Ularning markaziy chizig‘iga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq ularni o‘z navbatida A va B, C va D ($AB=CD$) nuqtalarida kesadi. APC burchagi qiymati ushbu chiziq tanlanishiga bog‘liq emasligini isbotlang.

8.26. $ABCD$ to‘rtburchagi, $\vec{u}$ va $\vec{v}$ vektorlari berilgan bo‘lsa, $A_1=T_{\vec{u}}(A), C_1=T_{\vec{u}}(C),\ B_1=T_{\vec{v}}(B),\ D_1=T_{\vec{v}}(D)$ bo‘lsa, $A_1B_1C_1D_1$ to‘rtburchak berilgan to‘rtburchakka tengligini isbotlang.

8.27. H nuqta ABC uchburchagi ortomarkazi bo‘lsa, $AB^2+CH^2=4R^2$ ekanligini isbotlang, bu yerda: R – uchburchak tashqi chizilgan aylana radiusi.

8.28. BC va AD asoslari bo‘lgan $ABCD$ trapetsiyasida A va B burchaklarning bissektrisalari M nuqtada, C va D burchaklarning bissektrisalari N nuqtada kesishadi, isbotlang $|AB+CD-BC-AD|=2MN$.

8.29. Ixtiyoriy ABC uchburchagi AB eng katta tomoni bilan berilgan. uchburchak tashqarisida AC va BC tomonlariga ixtiyoriy AA_1C_1C va BB_2C_2C parallelogrammlar qurilgan. A_1C_1 va B_2C_2 chiziqlari D nuqtasida kesishadi, AB tomonida, shuningdek, uchburchak tashqarisida ABB_3A_3 parallelogramm $AA_3=DC$ qilib qurilgan. Ushbu parallelogramm maydoni dastlabki ikkita parallelogramm maydonlarining yig‘indisiga teng ekanligini isbotlang (Papp teoremasi).

8.30. A va B nuqtalari o‘rtasida ikkita daryo oqadi. Ushbu ko‘priklar orqali A dan B gacha bo‘lgan yo‘l eng qisqa bo‘lishi uchun daryolar bo‘ylab ko‘priklarni qayerga qurish kerak?

8.31. Ushbu ikki aylananing kesishish nuqtasi orqali shu to‘g‘ri chiziqning aylanalar ichiga yopilgan qismi shu a kesimga teng bo‘lishi uchun to‘g‘ri chiziq torting.

8.32. To‘rt tomoni bo‘ylab to‘rtburchak va ikkita qarama-qarshi tomonni o‘z ichiga olgan chiziqlar orasidagi burchakni yasating.

2-§. Simmetrik shakllar. O‘qqa nisbatan simmetriya va markaziy simmetriya va uning xossalari

«Simmetriya» yunoncha so‘z bo‘lib, o‘zbek tiliga tarjimasi «o‘lchovlik» yoki «o‘lchovlilik» degan ma’noni beradi. Arxitektura, rassomchilik, haykaltaroshlikda ham simmetriya moslik, tenglik va go‘zallik ma’nosida ishlatiladi.

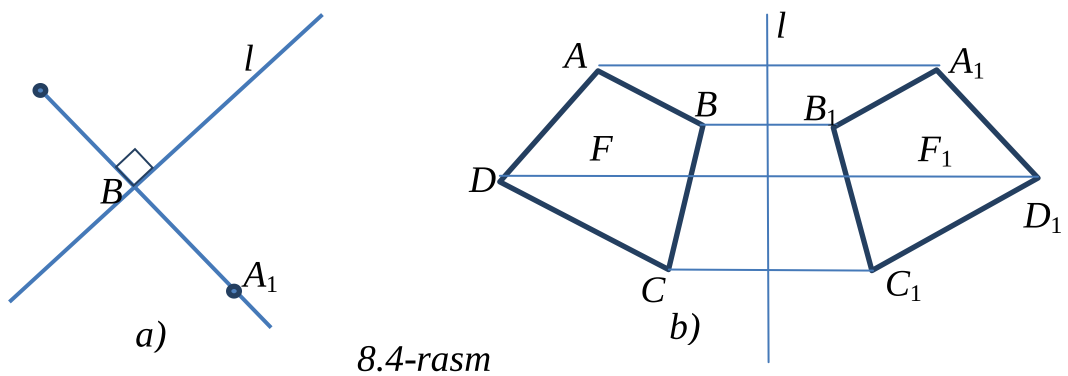
Kundalik hayotda simmetriyaga juda ko‘plab duch kelamiz. Daraxt barglari shakli, kapalak qanotlarining uning tanasiga nisbatan joylashuvi va inson a’zolarining tanaga nisbatan joylashuvi va hokazolar simmetriyaga yorqin misol bo‘ladi.

Ko‘pgina geometrik tushunchalar singari, shakllarning simmetriyasi tushunchasi ham atrofni o‘rab turgan dunyo (tabiat) obyektlarini kuzatish natijasida paydo bo‘lgan. Ularning ko‘plari yuqori darajadagi aniqliqda biror simmetriyaga ega ekaniga ishonch hosil qilish mumkin. Simmetriya san’atda, texnikada, turmushda ko‘plab uchraydi. Masalan, ko‘pgina binolarning old tomonlari va ustidan ko‘rinishlari simmetrik bo‘ladi. Gilamdagi naqshlar – gullar, jiyakdagi gullar, mexanizmlarning ko‘pgina turlari, masalan, g‘ildiraklar yoki shesternalar simmetrik bo‘ladi. Yashayotgan joyingizdagi chiroyli qurilgan imorat, tosh yotqizilgan maydon yoki kafel bilan bezatilgan devorga ahamiyat bering.

Bunday simmetriyaga ega bo‘lgan shakllar *simmetrik shakllar* deb ataladi. Bu simmetriyani hosil qiluvchi qonun esa *simmetriya* deb ataladi. Simmetriya –

geometriya fanining bir qismi bo‘lib, uni to‘la o‘rganish uchun chuqur matematik bilimlarga ega bo‘lish lozim. Biz esa uning boshlang‘ich tushunchalari bo‘lgan «O‘qqa nisbatan simmetriya va markaziy simmetriya» bilan tanishamiz.

Bizga tekislikda l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin (8.4-*a* rasm). Ma’lumki, l to‘g‘ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi. Yarim tekisliklarning birida A nuqta olaylik va u nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqa perpendikular AB to‘g‘ri chiziqni o‘tkazaylik. Bunda $B \in l$. So‘ngra AB to‘g‘ri chiziqning ikkinchi yarim tekisligidagi bo‘lagida AB kesmaga teng BA_1 kesma qo‘yamiz. Hosil qilingan A_1 nuqta, A nuqtaga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan *simmetrik nuqta* deyiladi. l to‘g‘ri chiziq esa *simmetriya o‘qi* deb ataladi.



8.4-rasm

Simmetriya o‘qida yotgan nuqtalar o‘z-o‘ziga simmetrik nuqtalar deb qaraladi. Biz ko‘rgan holda B nuqtaga simmetrik nuqta shu B nuqtaning o‘zidir.

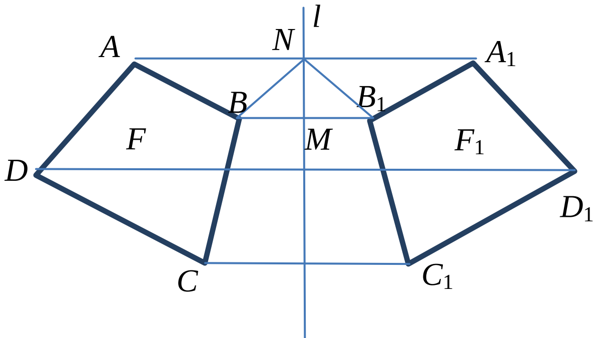
Endi biror F shaklni qaraylik (8.4-*b* rasm). Shakl nuqtalardan tashkil topgan bo‘ladi.

Ta’rif. Agar F_1 shaklning har bir nuqtasi biror l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan F shaklning nuqtalariga simmetrik bo‘lsa, bunday shakllar l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan *simmetrik shakllar* deb ataladi, l esa *simmetriya o‘qi* deyiladi.

O‘zaro simmetrik shakllardan biri ikkinchisining simmetrik aksi deb nomlanadi. Albatta, agar F shakl F_1 shaklning simmetrik aksi bo‘lsa, F_1 shakl ham F shaklning *simmetrik aksi* bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziqqa nisbatan ikkita simmetrik geometrik shakl o‘zaro tengdir.

1-teorema. Shakl o‘qqa nisbatan simmetrik akslantirilganda uning nuqtalari orasidagi masofa o‘zgarmaydi, ya’ni saqlanadi.



8.5- rasm

Isbot. F shaklning l o‘qqa nisbatan simmetrik aksi F_1 bo‘lsin (8.5- rasm). F shaklning ixtiyoriy A va B nuqtalarini olaylik. Ularga simmetrik bo‘lgan nuqtalarni mos ravishda A_1 va B_1 bilan belgilaymiz. $AB=A_1B_1$ ekanini isbot qilishimiz kerak. Isbot qilish uchun AA_1 kesmani l o‘qi bilan kesishgan nuqtasini N bilan, BB_1 ning l o‘qi bilan kesishgan nuqtasini M bilan belgilaymiz. So‘ngra N nuqtani B va B_1 bilan tutashtiruvchi NB va NB_1 kesmalarni o‘tkazamiz. Hosil bo‘lgan BMN va B_1NM to‘g‘ri burchakli uchburchaklar o‘zaro teng, chunki ularda MN katet umumiy hamda B va B_1 simmetrik nuqtalar bo‘lgani uchun $BM=MB_1$. Bundan $NB=CB_1$ va $\angle BNM=\angle B_1NM$ kelib chiqadi.

Endi ABN va A_1B_1N uchburchaklarni solishtiramiz. Bularda $AN=A_1N$, chunki A_1 nuqta A ga simmetrik. Yuqorida $NB=NB_1$ ekanini isbot qildik.

$\angle BNA=\angle B_1NA_1$, chunki ular o‘zaro teng bo‘lgan burchaklarni 90° ga to‘ldiruvchi burchaklar, ya’ni $\angle BNA=90°-\angle BNM$ va $\angle B_1NA_1=90°-\angle B_1NM$. Demak, qaralayotgan ABN va A_1B_1N uchburchaklarda mos ikki tomon va ular orasidagi burchak teng ekan. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra bu uchburchaklar teng. Bundan $AB=A_1B_1$ ekani kelib chiqadi.

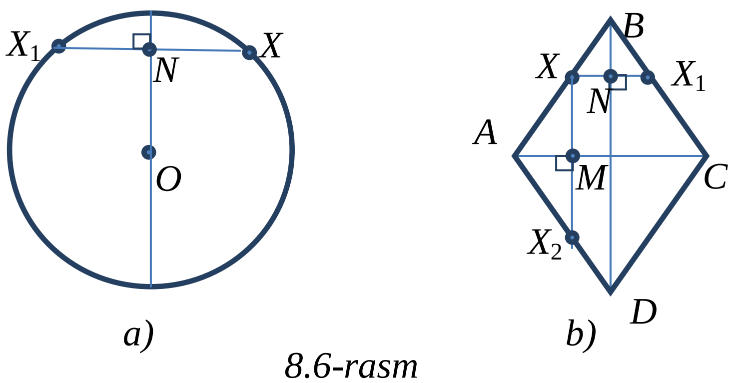
Shakl biror l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan o‘ziga o‘zi simmetrik bo‘lishi mumkin. Bu degani, uning har bir X nuqtasiga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik

X_1 nuqta uning o‘zida yotadi. U holda l to‘g‘ri chiziq shaklning *simmetriya o‘qi* deyiladi, shaklni esa *simmetriya o‘qiga* ega deyiladi.

Simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan shakllarga misollar keltiramiz.

1-masala. Aylananing ixtiyoriy diametri simmetriya o‘qi bo‘ladi.

Yechish. Haqiqatan ham, aylanada yotgan ixtiyoriy X nuqta olaylik. X nuqtadan aylana diametriga perpendikular o‘kazamiz va bu perpendikular aylanani X_1 nuqtada kesib o‘tadi. XX_1 vatar diametr bilan N nuqtada kesishsin. XX_1 vatar diametrga perpendikular bo‘lgani uchun, diametrga perpendikular vatar xossasiga ko‘ra kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi. $XN=NX_1$, ya’ni X va X_1 nuqtalar diametrga nisbatan simmetrik. Demak, diametr aylananing simmetriya o‘qi bo‘ladi (8.6-*a* rasm).



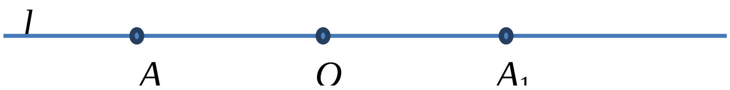
8.6-rasm

2-masala. Rombning diagonallari simmetriya o‘qi bo‘ladi.

Yechish. Rombning AB tomonidan ixtiyoriy X nuqtani olib BD diagonalga o‘tkazilgan perpendikular, BD diagonalni N va BC tomonni X_1 nuqtada kesib o‘tsin (8.6-*b* rasm). BNX va BNX_1 uchburchaklarni taqqoslaymiz. BN tomoni umumiy, rombning diagonali burchak bissektrisasi bo‘lgani uchun $\angle XBN=\angle X_1BN$ va $\angle N=90°$, uchburchak tengligining alomatiga ko‘ra $\Delta XBN=\Delta X_1BN$. Bundan $XN=X_1N$ kelib chiqadi.

Shu usul bilan ikkinchi diagonalni simmetriya o‘qi ekanini isbotlash mumkin. Bunda rombning AB tomonidan ixtiyoriy X nuqtani olib AC diagonalga o‘tkazilgan perpendikular, AD tomonni X_2 nuqtada kesib o‘tadi va $XM=X_2M$ bo‘ladi.

Tekislikda O nuqtadan o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziqni qaraylik (8.7- rasm). To‘g‘ri chiziqdagi A va A_1 nuqtalar uchun $AO=OA_1$ shart bajarilsa, ya’ni A va A_1 nuqtalar O nuqtadan teng uzoqlikda bo‘lsa, A_1 nuqta A nuqtaning O nuqtaga nisbatan *simmetrik nuqtasi* deb ataladi. Buning aksi ham to‘g‘ri, ya’ni A_1 nuqta A ning simmetrik nuqtasi. Bunda O nuqta *simmetriya markazi* deb ataladi.

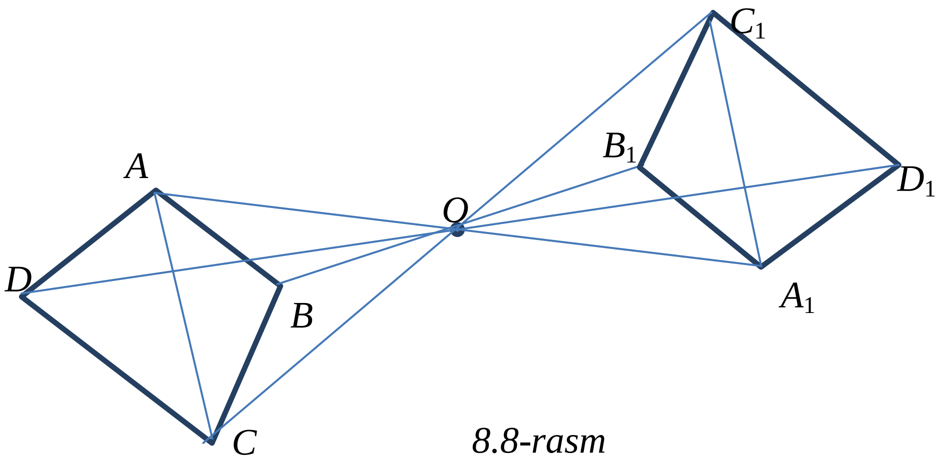


8.7-rasm

Ta’rif. Agar F_1 shaklning har bir nuqtasi F shaklning mos nuqtalarining O nuqtaga nisbatan simmetrik nuqtasi bo‘lsa, F va F_1 shakllar O nuqtaga nisbatan *simmetrik shakllar* deb ataladi. O nuqta F va F_1 shakllarning *simmetriya markazi* deb ataladi. Bu holat nuqtaga nisbatan ham simmetriya deyiladi.

2-teorema. Nuqtaga nisbatan simmetrik shakllarda mos nuqtalar orasidagi masofalar teng.

Isbot. F va F_1 markaziy simmetrik shakllar bo‘lib, A va B nuqtalar F shaklning ixtiyoriy nuqtasi hamda A_1 va B_1 nuqtalar F_1 shaklning A va B ga mos kelgan simmetrik nuqtalari bo‘lsin (8.8-rasm). $AB=A_1B_1$ ekanini isbot qilish kerak.



8.8-rasm

Isbot qilish uchun ABO va A_1B_1O uchburchaklarni taqqoslaymiz. Bu uchburchaklarda $AO=A_1O$ va $BO=B_1O$, chunki A, B va A_1, B_1 nuqtalar markaziy simmetrik nuqtalar. Shuningdek, $\angle AOB=\angle A_1OB_1$, chunki vertikal burchaklar. Demak, taqqoslanayotgan uchburchaklarda ikkita mos tomonlar va ular orasidagi burchak teng. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra: $ABO=A_1B_1O$. Bundan mos tomonlar bo‘lgani uchun $AB=A_1B_1$.

Agar A, B nuqtalar O dan o‘tuvchi bir to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lsa, $AB=A_1B_1$ ekani markaziy simmetriya ta’rifidan kelib chiqadi.

F va unga simmetrik bo‘lgan F_1 shakl berilgan bo‘lsin (8.8- rasm). Bu shakllarga tegishli uchta A, B, C va ularning aksi bo‘lgan A_1, B_1, C_1 nuqtalarni qaraylik. Bu nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmasin. U holda ABC va $A_1B_1C_1$ lar mos tomonlarining uzunliklari teng (yuqorida isbot qilingan teoremaga ko‘ra).

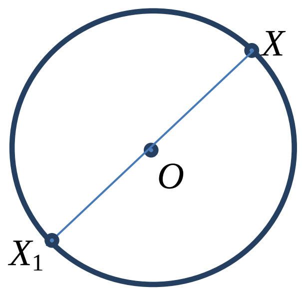
Uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko‘ra: $ABC=A_1B_1C_1$. Bundan uchburchaklarning burchaklari ham teng ekani kelib chiqadi.

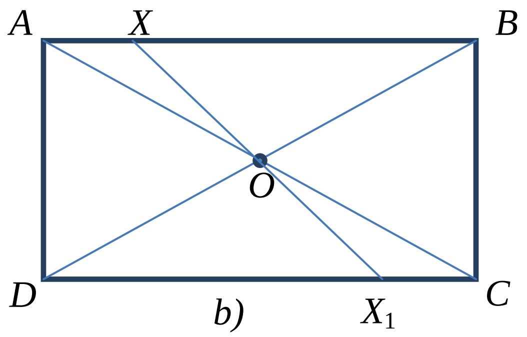
3-teorema. Nuqtaga nisbatan simmetriyada kesmalar orasidagi burchak saqlanadi.

Xuddi shunga o‘xshash teoremani o‘qqa nisbatan simmetrik shakllar uchun ham ko‘rsatish mumkin.

Biror O markazga nisbatan simmetriyada o‘ziga o‘zi akslanadigan shakl *markaziy simmetrik shakl* deyiladi (bu shakl simmetriya markaziga ega deb ham aytiladi). O nuqta esa shaklning *simmetriya markazi* deyiladi.

Aylana o‘zining markaziga nisbatan simmetrik. Haqiqatan ham, O markazli aylanada yotgan ixtiyoriy X nuqta olaylik. X nuqtadan O nuqta orqali aylananing XX_1 diametrini o‘tkazamiz. O markaz XX_1 kesmaning o‘rtasi, ya’ni X va X_1 nuqtalar O nuqtaga nisbatan simmetrik. Demak, O nuqta aylananing simmetriya markazi bo‘ladi (8.9- rasm).





8.9-rasm

To‘g‘ri to‘rtburchak diagonalining o‘rtasi uning simmetriya markazidir.

Isbot. *O* nuqta *ABCD* to‘g‘ri to‘rt burchak diagonalining o‘rtasi bo‘lsin (8.9-*b* rasm).

O markazli simmetriyada *AB* kesma unga parallel bo‘lgan va *C* nuqtadan o‘tadigan to‘g‘ri chiziqqa, ya’ni *CD* to‘g‘ri chiziqqa akslanadi (to‘g‘ri to‘rt burchakda $AB \| DC$). Bunday simmetriyada *CB* to‘g‘ri chiziq *AD* to‘g‘ri chiziqqa akslanadi.

Demak, *O* markazli simmetriyada *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziqlarning akslari mos ravishda *CD* va *AB* to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi. *B* nuqta *AB* va *CB* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. Shuning uchun *O* markazli simmetriyada uning aksi *AB* va *CB* to‘g‘ri chiziqlar akslarining kesishish nuqtasi, ya’ni *D* nuqta bo‘ladi. Demak, *B* va *D* nuqtalar *O* markazga nisbatan simmetrikdir.

Shunday qilib, *O* markazli simmetriyada to‘g‘ri to‘rt burchakning *A, B, C* va *D* uchlari mos ravishda *C, D, A* va *B* uchlarga, ya’ni *A* uchi *C* uchga, *B* uchi *D* uchga, *C* uchi *A* uchga, *D* uchi *B* uchga akslanadi.

Demak, *ABCD* parallelogramm ham *O* markazli simmetriyada o‘ziga akslanadi, binobarin, parallelogramm diagonalining o‘rtasi (*O* nuqta) bu parallelogrammning simmetriya markazi bo‘ladi.

Natija. Parallelogramm diagonallari ularning kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.

Isbot. *A* va *C* (shuningdek, *B* va *D*) uchlar *O* nuqtaga nisbatan markaziy simmetrik.

Demak, *AO* va *CO*, *BO* va *DO* kesmalar teng, ya’ni *O* nuqta *AC* va *BD* diagonallarni teng ikkiga bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

8.33. Ikkita konsentrik aylanalar berilgan. Aylana markazi bilan bitta to‘g‘ri chiziqda yotgan ushbu doiralarning ikkita nuqtasi orqali ixtiyoriy aylana chizilsa, bu aylana konsentrik aylanalarni yana boshqa ikki nuqtada kesib o‘tadi. Bu ikki nuqta va konsentrik aylana markazi bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

8.34. Uchburchak ichki chizilgan aylana bilan konsentrik va bu aylanani o‘z ichiga olgan aylana uchburchak tomonlarini *A* va *B*, *C* va *D*, *E* va *F* nuqtalarda kesib o‘tadi. *AB=CD=EF* ekanligini isbotlang.

8.35. Agar uchburchakning ortomarkazi va ichki chizilgan aylananing markazi ustma-ust bo‘lsa, u holda uchburchakning muntazam bo‘lishini isbotlang.

8.36. Agar uchburchakning ortomarkazi uning og‘irlik markazi bilan mos tushsa, u holda uchburchak muntazam bo‘lishini isbotlang.

8.37. *A*, *B*, *C* nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. *M* nuqta bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli emas. *MA*, *MB*, *MC* diametrli aylanalarning yana bitta umumiy nuqtasi borligini isbotlang.

8.38. Uchburchaklar ortomarkazi uning tomonlariga nisbatan simmetrik nuqtalari uchburchakka tashqi chizilgan aylanada yotishini isbotlang.

8.39. Agar *H ABC* uchburchagi ortomarkazi bo‘lsa, u holda *HAB*, *HBC*, *HCA* uchburchakka tashqi chizilgan aylanalar tengdir. Buni isbotlang.

8.40. Uchburchaklar ortomarkaziga uning qirralarini o‘z ichiga olgan chiziqlarga nisbatan nosimmetrik nuqtalar, bissektrisalari shu uchburchakning balandliklari bilan bir xil chiziqlarda yotgan uchburchakning tepalari ekanligini isbotlang.

8.41. M nuqta aylananing AB diametrida yotadi. CD vatar M orqali o‘tadi va AB ni 45° burchak ostida kesib o‘tadi. CM^2+DM^2 yig‘indisi M nuqta tanlanishiga bog‘liq emasligini isbotlang.

8.42. Markazi ko‘rsatilmagan doirada ikkita parallel teng bo‘lmagan vatarlar chizilgan. Faqat bitta o‘lchagich yordamida ushbu vatarlarni ikkiga bo‘ling.

8.43. Kesishgan ikkita to‘g‘ri chiziq berilgan. Sirkul va chizg‘ich yordamida ushbu to‘g‘ri chiziqlarning simmetriya o‘qini tuzing, sirkuldan faqat ikki marta foydalaning.

8.44. Berilgan to‘g‘ri chiziqdan tashqarida joylashgan nuqta orqali sirkul va chizg‘ich yordamida sirkuldan faqat ikki marta foydalanib, shu chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni o‘tkazing.

8.45. m to‘g‘ri chiziq, bir yarim tekislikda m ga tegishli bo‘lmagan M nuqta va aylana berilgan. Ushbu chiziqda P nuqtadan aylanagacha MP masofa va P dan aylanaga urinish nuqtasigacha masofalar yig‘indisi eng kichik bo‘ladigan P nuqtani toping.

8.46. Sizga m to‘g‘ri chiziq va aylana berilgan. m to‘g‘ri chiziqda X nuqtani toping, shunda m to‘g‘ri chiziq va X nuqta orqali aylanaga o‘tkazilgan urinma boshqa urinmaga nisbatan simmetrik bo‘lsin.

8.47. AB yo‘l va BC daryoni o‘tkir burchak bilan kesishadi. Xabarchi ABC burchak ichidagi P nuqtada joylashgan. Uning oti chanqagan va xabarchi AB yo‘lga chiqishga shoshilmoqda. Tezroq yo‘lga chiqish uchun xabarchi otini daryoning qayerida sug‘orishi kerak?

8.48. Uning ikki tomonining berilgan o‘rta nuqtalaridan va shu ikki tomonning biriga qarama-qarshi burchakning bissektrisasi yotadigan to‘g‘ri chiziqdan uchburchak yasang.

8.49. Tomoni, shu tomonga tushgan balandligi va tutash burchaklarning farqiga bo‘yicha uchburchak yasang.

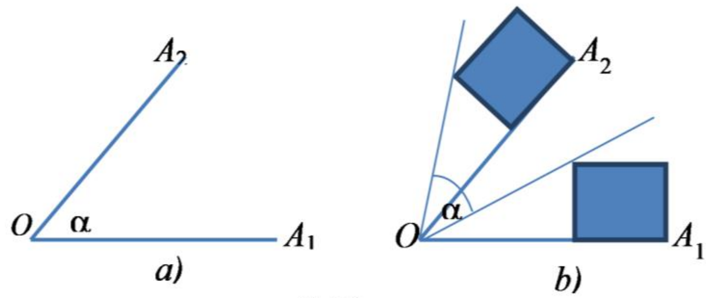
8.50. *AB* va *AD* tomonlarini hamda *B* va *D* uchlaridagi burchaklarni bilib, ichki aylana chizishingiz mumkin bo‘lgan *ABCD* to‘rtburchakni yarating.

8.51. *ABCD* to‘rtburchakli billiard stolida ikkita *M* va *N* shar bor, *M* sharni *AB* va *BC* tomonlaridan qaytgan holda *N* sharga urishi uchun qanday turtish kerak?

8.52. Uchi *O* bo‘lgan o‘tmas burchak ichida *P* va *Q* nuqtalar berilgan. *AC*=*BC*, *AB* tomoni burchakning bir tomoniga, *C* uchi ikkinchi tomonida, *AC* va *BC* tomonlari esa *P* va *Q* nuqtalarini o‘z ichiga oladigan qilib *ABC* uchburchakni yarating.

3-§. Ixtiyoriy burchakka burish. Simmetriyalar kompozitsiyalari

1-ta’rif. Tekislikda berilgan qo‘zg‘almas *O* nuqtadan chiqadigan har bir nurni α burchakka buriladigan almashtirishga *O* nuqta atrofida *burish* deyiladi. α esa *burish burchagi* deyiladi. O nuqta *burish markazi* deyiladi.

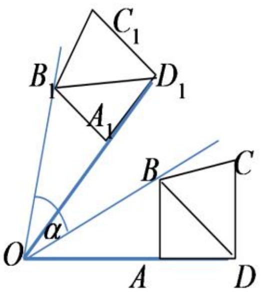


8.10-rasm

OA_1 nurning A_1 nuqtasi (8.10- rasm) α burchakka burishda shunday A_2 nuqtaga o‘tadiki, unda OA_1=OA_2 munosabat bajariladi.

1-xossa. Burish – bu harakatdir.

Isbot. Tekislikda *F* shaklni burish natijasida F_1 shakl hosil bo‘lgan bo‘lsin. *A* va *B* nuqtalar *F* shaklning ixtiyoriy nuqtasi hamda A_1 va B_1 nuqtalar F_1 shaklning *A* va *B* ga mos kelgan simmetrik nuqtalari bo‘lsin (8.11-rasm). AB=A_1B_1 ekanini isbot qilish kerak.



8.11-rasm

O markazli simmetriyada burish buchagi

$$\angle AOA_1=\angle AOB+\angle OBA_1=\angle BOA_1+\angle A_1OB_1=\angle BOB_1=\alpha$$

tenglik o‘rinli, bundan $\angle AOB_1=\angle A_1OB_1$ tenglik kelib chiqadi. ΔAOB va ΔA_1OB_1 larda $OA=OA_1$, $OB=OB_1$ va $\angle AOB_1=\angle A_1OB_1$ bo‘lgani uchun, uchburchak tengligining ikki tomon va ular orasidagi burchak tengligi alomatiga ko‘ra bu uchburchaklarning tengligi kelib chiqadi. ΔAOB va ΔA_1OB_1 lar teng bo‘lgani uchun ularning uchinchi tomonlari $AB=A_1B_1$.

Shu usul bilan $AD=A_1D_1$ va $BD=B_1D_1$ tengligini isbotlaymiz. Bundan ΔABD va $\Delta A_1B_1D_1$ tengligi kelib chiqadi va $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$ burchaklar ham teng. Demak, burishda kesma uzunligi va burchak kattaligi o‘zgarmas ekan.

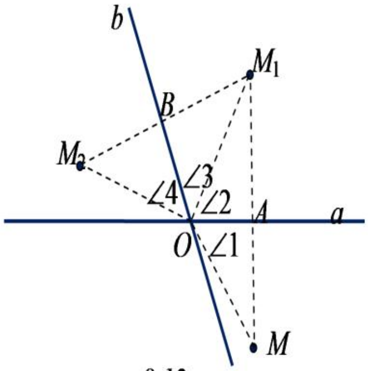
O‘qlar parallel bo‘lmagan, ketma-ket bajarilgan ikkita simmetrik almashtirish nuqta atrofida burishga teng.

Agar ikki to‘g‘ri chiziq φ burchak ostida kesishsa, ularga nisbatan ketma-ket bajarilgan simmetrik almashtirish shu o‘qlarning kesishgan nuqtasiga nisbatan 2φ aylantirishga teng kuchli bo‘ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun 8.12-rasmda berilgan O nuqtada o‘zaro φ burchak hosil qilib kesishuvchi a va b o‘qlar tekisligida ixtiyoriy M nuqtani olib uning a o‘qqa nisbatan topilgan simmetrik M_1 nuqtani b o‘qqa nisbatan simmetrik M_2 nuqtasini topamiz. M nuqtani O nuqta atrofida 2φ burchak miqdorida burish natijasida uning M_2 nuqtaga o‘tishini ko‘rsatuvchi quyidagi ikki shartning mavjudligini isbotlasak kifoya:

$$MO=M_2O \text{ va } \angle MOM_2=2\varphi.$$

Simmetrik nuqtalarning xossalariga ko‘ra quyidagi tengliklar o‘rinli: $MO=M_1O=M_2O$, $\angle 1=\angle 2$ va $\angle 3=\angle 4$.

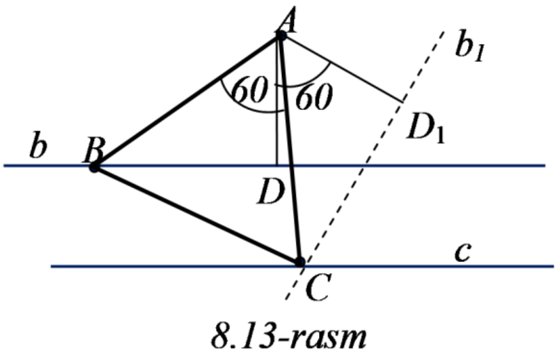
Shuning uchun quyidagilarni yozamiz: $\angle(a,b)=\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4=\varphi$, $\angle MOM_2=(\angle 2+\angle 3)+(\angle 1+\angle 4)=2\varphi$.



8.12-rasm

1-masala. Bir uchi berilgan *A* nuqtada, *B* va *C* uchlari esa mos ravishda berilgan *b* va *c* parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi teng tomonli *ABC* uchburchak yasang.

Tahlil. *ABC* uchburchak izlangan teng tomonli uchburchak deb faraz qilaylik (8.13-rasm).



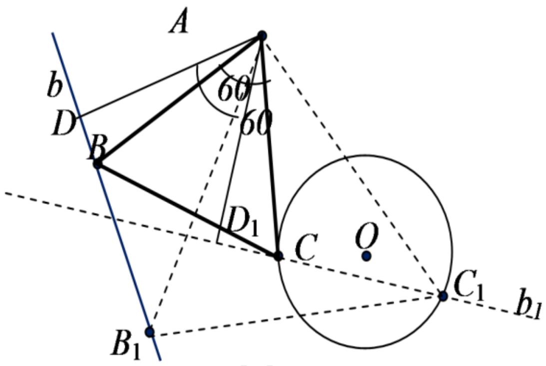
8.13-rasm

ABC uchburchakning *AB* tomonini, *b* to‘g‘ri chiziqni *A* nuqta atrofida 60° burchak miqdorida shunday burishni amalga oshiraylikki, *AB* tomon *AC* tomonni ustiga tushsin. Bu holda uchburchakning *b* to‘g‘ri chiziqdagi *B* uchi *C* uchiga tushib, *b* to‘g‘ri chiziq esa *C* nuqtadan o‘tuvchi b_1 vaziyatga keladi. Demak, uchburchakning *C* uchi *c* va b_1 to‘g‘ri chiziqlarning kesish nuqtasida bo‘lar ekan.

Yasash. Berilgan to‘g‘ri chiziqlardan birini, masalan, *b* to‘g‘ri chiziqni *A* nuqta atrofida 60° ga burchakka buramiz. Bundan hosil bo‘lgan b_1 to‘g‘ri chiziq bilan *c* to‘g‘ri chiziqning kesish nuqtasi izlanayotgan uchburchakning *C* nuqtasi bo‘ladi. Topilgan *C* nuqtani *A* nuqta atrofida 60° li burchakka burib, *b* to‘g‘ri chiziqda b nuqtani topamiz.

2-masala. Bir uchi berilgan *A* nuqtada, ikkinchi uchi berilgan *b* to‘g‘ri chiziqlarda, uchinchi uchi esa berilgan (*O*,*r*) aylanada yotuvchi teng tomonli *ABC* uchburchak yasang.

Tahlil. *ABC* izlangan uchburchak *ABC* uchburchak bo‘lsin (8.14-rasm). Bu uchburchakni yasash uchun *b* to‘g‘ri chiziqdagi *B* uchini va (*O*,*r*) aylanadagi *C* uchini topish kerak.



8.14-rasm

Bundagi *C* nuqtani *B* nuqtaning *A* markaz atrofida burishdan hosil qilamiz. Demak, bu ikki nuqtadan biri ma’lum bo‘lsa, ikkinchisini topa olamiz. *B* nuqta *b* to‘g‘ri chiziqda yotib *C* nuqta esa berilgan aylanada yotgani uchun *B* nuqtani *b* to‘g‘ri chiziqni burish natijasida aylana bilan kesish nuqtasini olish mumkin. Shuning uchun *b* to‘g‘ri chiziqni *A* nuqta atrofida 60° miqdorida burchakka burish, bundan hosil bo‘lgan b_1 to‘g‘ri chiziqning aylana bilan kesishish nuqtasi *C* ni topamiz.

Yasash. Berilgan *b* to‘g‘ri chiziqni berilgan *A* nuqta atrofida $\varphi=60°$ ga burib, b_1 to‘g‘ri chiziqni hosil qilamiz. b_1 to‘g‘ri chiziq bilan aylananing kesish nuqtasi *C* ni *A* nuqta atrofida $\varphi=60°$ burchakka burib, *b* to‘g‘ri chiziqdagi *B* nuqtani topamiz. Topilgan *B* va *C* nuqtalarni *A* nuqta bilan tutashtiramiz. *ABC* va AB_1C_1 uchburchak biz izlayotgan uchburchak bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

8.53. *ABC* uchburchakning *AB* va *BC* tomonlarida mos ravishda *ABPQ* va *BCMN* kvadratlar chizilgan. *ABC* uchburchagi *AB* chiziqdan turli yarim tekisliklarda joylashgan bo‘lib, *BCMN* kvadrat – shu uchburchakka nisbatan bir xil yarim tekislikda qurilgan. *PN* va *AC* kesmalari teng va perpendikular ekanligini isbotlang.

8.54. Muntazam uchburchakning markazi orqali ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi, ularning orasidagi burchak 60° ga teng. Ushbu chiziqlarning uchburchak bilan kesishgan bo‘laklari tengligini isbotlang.

8.55. Kvadrat markazidan ikkita perpendikular chiziq o‘tkaziladi. Ularning kvadrat tomonlari bilan kesishish nuqtalari qandaydir kvadratning tepalari ekanligini isbotlang.

8.56. *M*, *P*, *N*, *Q* nuqtalari kvadrat tomonlarini o‘z ichiga olgan ketma-ket to‘g‘ri chiziqlarga tegishli. Agar *MN* va *PQ* kesmalar perpendikular bo‘lsa, u holda ular teng ekanligini isbotlang.

8.57. Muntazam beshburchak diagonallarining tomonlari bilan kesishish nuqtalar ham muntazam beshburchakning uchlari ekanligini isbotlang.

8.58. *M*, *N*, *P*, *Q* nuqtalari mos ravishda *ABCD* kvadratining *AB*, *BC*, *CD*, *DA* tomonlarining o‘rta nuqtalari. *AN*, *BP*, *CQ*, *DM* chiziqlarining kesishish nuqtalari kvadrat uchlari ekanligini isbotlang.

8.59. $\angle B=60°$ bo‘lgan *ABCD* romb berilgan. *a* chiziq *BC* va *CD* tomonlarni *M* va *N* nuqtalarda kesib o‘tadi, shunday qilib *CM*+*CN* yig‘indisi romb tomoni uzunligiga teng bo‘ladi. *AMN* uchburchagi muntazam ekanligini isbotlang.

8.60. *ABCD* kvadrat ichida ixtiyoriy *P* nuqta olinadi *A, B, C, D* uchlari orqali navbati bilan *PB, PC, PD, PA* chiziqlariga perpendikular chiziladi. Ushbu perpendikularlarning bir nuqtada uchrashishini isbotlang.

8.61. *ABC* to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga uning tashqarisida markazi *O* bo‘lgan kvadrat qurilgan. *SO* nurlanish *ACB* to‘g‘ri burchakning bissektrisasi ekanligini isbotlang.

8.62. *ABCD* parallelogrammning *AB* va *BC* tomonlarida, mos ravishda *H* va *K* nuqtalar tanlanadi, shunda $KA=KB$ va $HC=CB$ bo‘ladi. *KDH* uchburchagi teng burchakli ekanligini va *K, A, D, C, H* nuqtalar bitta aylanada yotishini isbotlang.

8.63. Uning tashqarisidagi *ABC* uchburchakning *AB* va *AC* tomonlarida *ABDE* va *ACPQ* kvadratlari qurilgan. Buni isbotlang:

1) *ABC* uchburchakning *AK* medianasi *QE* to‘g‘ri chiziqqa perpendikular va $AK=QE/2$;

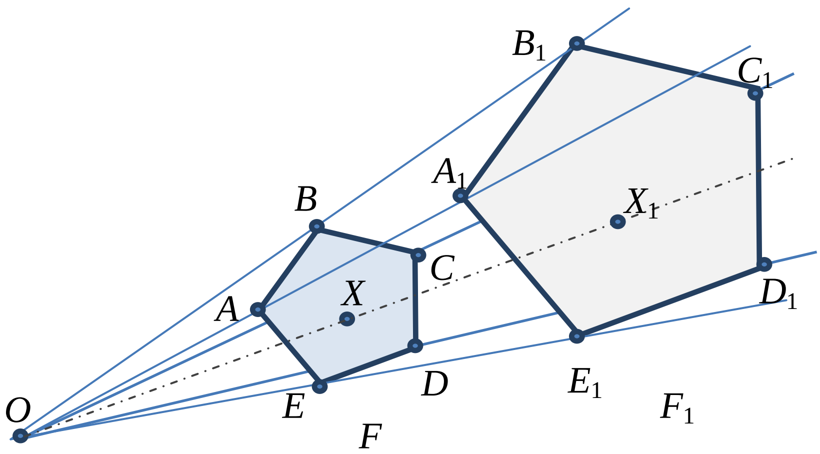
2) *AQE* uchburchakning *AM* medianasi *BC* chiziqqa perpendikular va $AM=BC/2$.

8.64. Muntazam *ABC* uchburchakka tashqi chizilgan aylananing *AB* yoyida *M* nuqta olinadi, $MC=MA+MB$ ekanligini isbotlang.

8.65. Ikkita bir xil yo‘naltirilgan *ABCD* va $AB_1C_1D_1$ teng kvadratlari umumiy *A* uchiga ega, BB_1, CC_1, DD_1 chiziqlari bir nuqtada kesishishini isbotlang.

4-§. Gomotetiya. Gomotetik ko‘pburchaklar va shakllar. Gomotetiyalar kompozitsiyalari

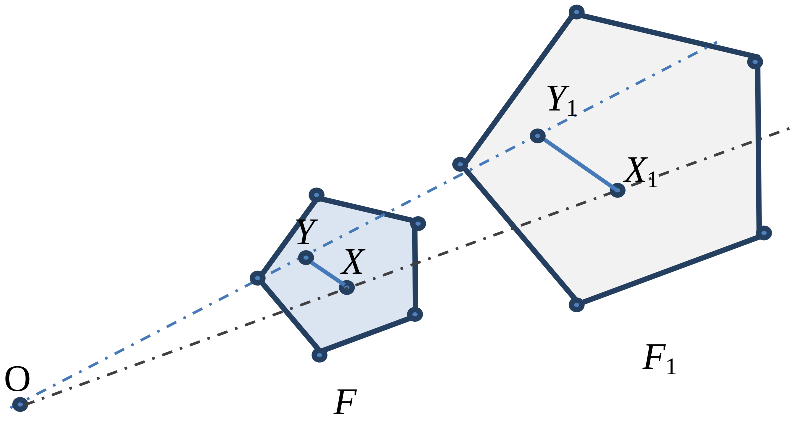
Aytaylik, *F*-shakl, *O*-nuqta va *k*-musbat son berilgan bo‘lsin. *F* shaklning istalgan *X* nuqtasi orqali *OX* nur o‘tkazamiz va bu nurda uzunligi $k \cdot OX$ bo‘lgan OX_1 kesmani qo‘yamiz (8.15-rasm). Shu *F* shaklning har bir *X* nuqtasiga X_1 nuqtani mos qo‘yadigan almashtirish *o‘xshash almashtirish* deyiladi. Bunda, *O* nuqta *gomotetiya markazi*, k soni *gomotetiya koeffitsiyenti*, *F* va gomotetiya natijasida F shakl almashadigan F_1 shakllar esa o‘zaro *gomotetik shakllar* deyiladi. Eng sodda o‘xshash almashtirishlardan biri *gomotetiya*dir.



8.15-rasm

4-teorema. Gomotetiya o‘xshashlik almashtirishi bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy O markazli, k koeffitsiyentli gomotetiyada F shaklning X va Y nuqtalari X_1 va Y_1 nuqtalarga o‘tsin (8.16-rasm). U holda, gomotetiya ta’rifiga ko‘ra, XOY va X_1OY_1 uchburchaklarda $\angle O$ umumiy va $\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k$ bo‘ladi.

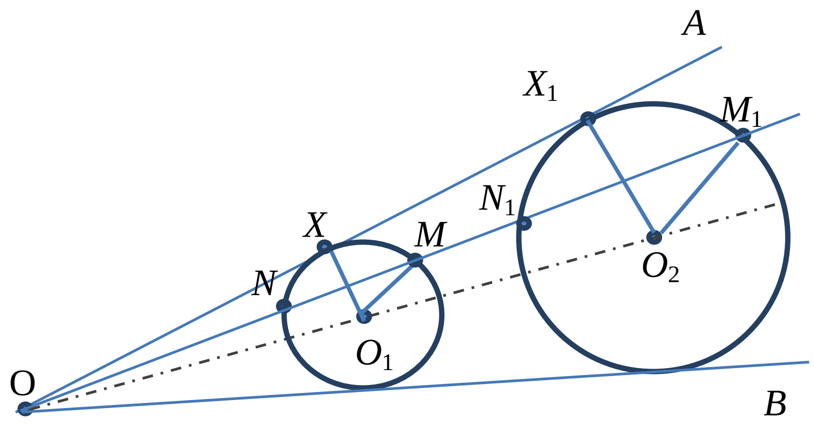


8.16-rasm

Demak, XOY va X_1OY_1 uchburchaklar ikki tomoni va ular orasidagi burchagi bo‘yicha o‘xshash bo‘ladi. Shuning uchun $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{OY_1}{OY} = k \Rightarrow X_1Y_1 = k \cdot XY$.

Natija. Har qanday ko‘pburchakka gomotetik shakl berilgan ko‘pburchakka o‘xshash ko‘pburchakdir.

1-masala. *AOB* burchak tomonlariga urinuvchi ikkita aylana gomotetik bo‘lishini va *O* nuqta bu gomotetiya uchun markaz ekanini isbotlang.



8.17-rasm

Yechish. Markazlari O_1 va O_2 bo‘lgan aylanalar *AOB* burchak tomonlariga urinsin (8.17-rasm). Bu aylanalarning gomotetik ekanligini isbotlaymiz.

Aylanalar *OA* nurga mos ravishda *X* va X_1 nuqtalarda urinsin. U holda $\Delta OXO_1 \sim \Delta OX_1O_2$ (chunki $\angle XOO_1 = \angle X_1OO_2$ va $\angle OXO_1 = \angle OX_1O_2 = 90°$). Bundan, $\frac{OX_1}{OX} = \frac{OO_2}{OO_1}$.

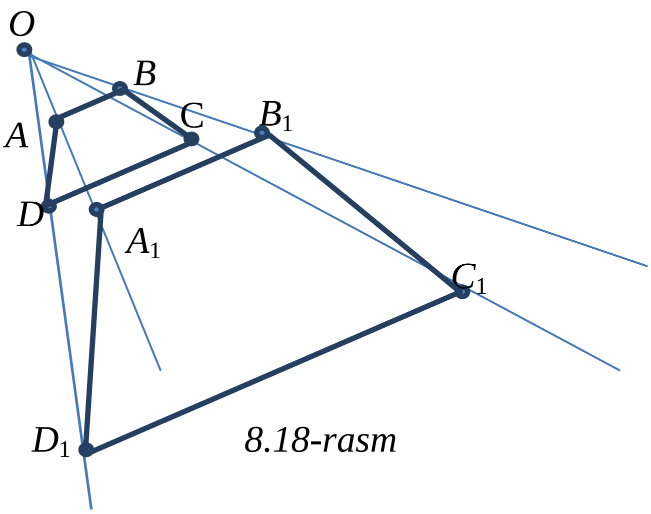
O‘ng tomondagi nisbatni $k = \frac{OO_2}{OO_1}$ bilan belgilaymiz, markazi *O* bo‘lgan gomotetiyani qaraymiz. Aytaylik, bu gomotetiyada O_1 markazli aylananing istalgan *M* nuqtasi M_1 nuqtaga almashgan bo‘lsin. U holda,

$$O_2M_1 = k \cdot O_1M \text{ yoki } O_2M_1 = \frac{O_2X_1}{O_1X} \cdot O_1M .$$

Bundan, $O_1X = O_1M$ bo‘lgani uchun $O_2X_1 = O_2M_1$ tenglikni hosil qilamiz. Bu M_1 nuqta markazi O_2 bo‘lgan aylanada, radiusi O_2X_1 ga teng bo‘lgan aylanada yotishini bildiradi. Demak, qaralayotgan aylanalar o‘zaro gomotetik ekan.

2-masala. Berilgan *ABCD* to‘rtburchakka gomotetiya koeffitsiyenti 3 ga teng bo‘lgan to‘rtburchak yasang.

Yechish. Tekislikda ixtiyoriy *O* nuqtani olamiz. Undan va to‘rtburchakning uchlaridan o‘tuvchi *OA, OB, OC* va *OD* nurlarni o‘tkazamiz. Bu nuqtalarda *O* nuqtadan $OA_1=3OA$, $OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ va $OD_1=3OD$ kesmalarni qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan $A_1B_1C_1D_1$ to‘rtburchak izlangan to‘rtburchakdir (8.18-rasm).



8.18-rasm

Isbot. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ ekanligini isbotlaymiz.

1. *Mos tomonlarning proporsionalligi.*

$\Delta AOD \sim \Delta A_1OD_1 \Rightarrow \dfrac{A_1D_1}{AD}=\dfrac{OD_1}{AD}=\dfrac{OA_1}{OA}=3;$

$\Delta COD \sim \Delta C_1OD_1 \Rightarrow \dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{OD_1}{OD}=\dfrac{OC_1}{OC}=3.$

Bu ikki tenglikdan $\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{A_1D_1}{AD}$ ekani kelib chiqadi. To‘rtburchaklarning boshqa mos tomonlari proporsionalligini xuddi shunga o‘xshash isbotlanadi.

2. *Mos burchaklarining tengligi.*

O‘xshash uchburchaklarning mos burchaklari teng bo‘lgani uchun, $\angle A_1D_1O=\angle ADO$, $\angle C_1D_1O=\angle CDO$.

U holda, $\angle A_1D_1C_1=\angle A_1D_1O+\angle C_1D_1O=\angle ADO+\angle CDO=\angle ADC$, ya’ni to‘rtburchakning mos $A_1D_1C_1$ va ADC burchaklari teng. Xuddi shunga o‘xshash to‘rtburchakning boshqa mos burchaklari tengligi isbotlanadi.

Demak, $ABCD$ va $A_1B_1C_1D_1$to‘rtburchaklar o‘xshash ekan.

Tomonlari ixtiyoriy sonda bo‘lgan ko‘pburchakka o‘xshash ko‘pburchak ham shu kabi yasaladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

8.66. Berilgan nuqta to‘rtburchak tomonlarining o‘rta nuqtalariga nisbatan simmetriya ostida tasvirlari parallelogramm uchlari ekanligini isbotlang.

8.67. Ikki aylananing urinish nuqtasi orqali doiralarni *A, B* va *C, D* nuqtalarda ikkinchi marta kesib o‘tuvchi ikkita ixtiyoriy chiziqlar o‘tkazilib, bunda *A* va *B* nuqtalar bir aylanada, *C* va *D* nuqtalar esa ikkinchisida yotadi. $AB \| CD$ ekanligini isbotlang.

8.68. Ikki doiraning urinish nuqtasi orqali kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan bo‘lib, doiralarni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar orqali o‘tkazilgan urinmalar parallel ekanligini isbotlang.

8.69. *ABC* uchburchak berilgan. A_1, B_1, C_1 nuqtalar mos ravishda *A, B, C* nuqtalarning tasvirlari bo‘lib, o‘z navbatida, markazi ixtiyoriy *P* nuqta bilan simmetriya tashkil etadi. A_1, B_1, C_1 nuqtalari va *BC, CA, AB* tomonlarining o‘rtalaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishishini isbotlang.

8.70. Doirada barcha vatarlar umumiy oxiriga ega bo‘lib, bir xil nisbatda bo‘lingan. Nuqtalarning bo‘linish to‘plamini toping.

8.71. Har qanday trapetsiyada asoslarning o‘rta nuqtalari, diagonallarning kesishish nuqtasi va yon tomonlarini o‘z ichiga olgan to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bitta to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

8.72. Trapetsiya diagonallarining kesishish nuqtasi orqali asoslarga parallel ravishda to‘g‘ri chiziq o‘tkazildi. Yon tomonlari orasidagi to‘g‘ri chiziqning chegaralangan qismi diagonallarning kesishishi bilan ikkiga bo‘linishini isbotlang.

8.73. *AB* va *CD* asoslari bo‘lgan *ABCD* trapetsiyada diagonallari *O* nuqtada kesishadi. *AOB* va *COD* uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar urinishini isbotlang.

8.74. Ikkita doira *A* nuqtada tashqi tomondan urinadi, umumiy urinma esa doiralardagi *B* va *C* nuqtalarda urinadi. *BAC* burchak to‘g‘ri burchak ekanligini isbotlang.

8.75. Ikki doiralar tashqi (ichki) tarzda urinishadi. Bir doirani boshqasiga aks ettiruvchi musbat (manfiy) koeffitsiyentga ega bo‘lgan gomotetiya markazi orqali *A* va *B* gomotetik nuqtalarida aylanalarni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazildi. Doiralar urinish nuqtasidan *AB* kesma to‘g‘ri burchak ostida ko‘rinishini isbotlang.

8.76. Ikkita doira ichki tomondan *A* nuqtada urinsin. Katta doiraning *MN* vatari kichik doiradagi *P* nuqtada urinadi. *AP* nur *MAN* burchak bissektrisasi ekanligini isbotlang. Doiralarning tashqi urinish holati uchun o‘xshash teoremani shakllantiring va isbotlang.

8.77. Ikkita doira *A* nuqtada ichki tomondan urinadi. Kesim aylanalarni ketma-ket joylashgan *M*, *N*, *P*, *Q* nuqtalarida kesadi. *MAP* va *NAQ* burchaklari tengligini isbotlang.

8.78. Ikkita doira tashqi tomondan urinadi. To‘g‘ri chiziq ularni ketma-ket *M*, *N*, *P*, *Q* nuqtalarida kesib o‘tadi. Urinish nuqtadan *MQ* va *NP* kesmalar burchak ostidagi burchaklar yig‘indisi 180° ga teng bo‘lishini isbotlang.

8.79. Ikki doirani kesuvchi kesma uzunliklari ko‘paytmasi doiralarning gomotetiya markazidan doiralarning ikki gomotetik bo‘lmagan nuqtalarigacha kesuvchining tanloviga bog‘liq emasligini isbotlang.