
5-BOB

AYLANALAR

1-§. Aylana. Aylanada burchaklar va yoylar

1-ta’rif. Tekislikda belgilangan nuqtadan bir xil masofada joylashgan nuqtalar to‘plamiga **aylana** deyiladi.

2-ta’rif. Tekislikda belgilangan nuqtadan bir xil masofada joylashgan geometrik shakl **aylana** deyiladi.

3-ta’rif. Tekislikda ma’lum bir xossaga ega bo‘lgan nuqtalar to‘plamiga shu nuqtalarning **geometrik o‘rni** deyiladi. Har qanday shakl bu nuqtalarning geometrik o‘rnidan iborat bo‘ladi.

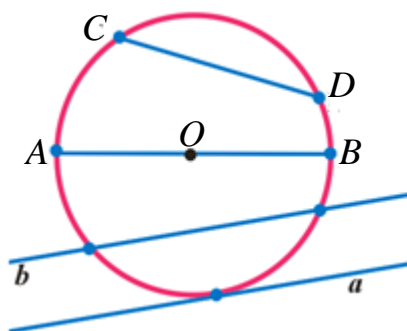
4-ta’rif. Tekislikdan belgilangan nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o‘rniga **aylana** deyiladi.

Tekislikdan belgilangan nuqtani **aylana markazi**, aylana markazidan aylanagacha bo‘lgan masofaga **aylana radiusi** deyiladi. Aylana markazi O va radiusi R bilan belgilanadi.

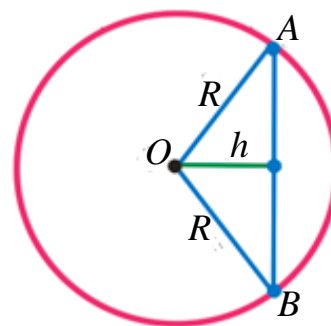
5-ta’rif. Aylananing ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmaga **vatar**, markazidan o‘tuvchi vatarga **diametr** deyiladi. Diametr d bilan belgilanadi. Ta’rifga asosan $d = 2R$ ($AB = 2AO$) (5.1-rasm).

6-ta’rif. Agar to‘g‘ri chiziqlarning bitta nuqtasi aylanaga tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq **urinma** deyiladi;

7-ta’rif. Agar to‘g‘ri chiziqlarning ikkita nuqtasi aylanaga tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqqa **kesuvchi** deyiladi.



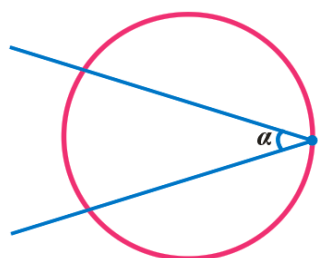
5.1-rasm



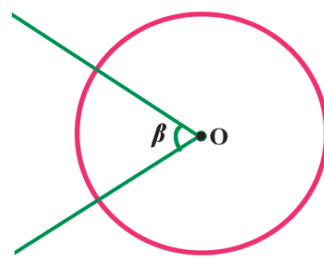
5.2-rasm

Radiusi R ga teng bo'lgan aylana markazidan uzunligi l ga teng vatargacha masofa $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ bo'ladi (5.2-rasm).

8-ta'rif. Uchi aylanada yotuvchi va tomonlari aylanani kesib o'tuvchi burchakka aylanaga *ichki chizilgan burchak* deyiladi. Uchi aylana markazida yotuvchi burchakka *markaziy burchak* deyiladi (5.3-rasm).



a)



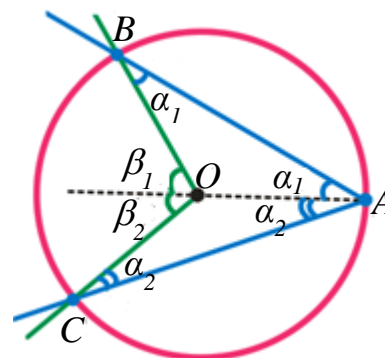
b)

5.3-rasm

1-teorema. Ichki chizilgan burchak unga mos markaziy burchakning yarmiga teng (5.4-rasm).

$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Isbot. Rasmda $OA = OB = OC = R$. $\triangle AOB$ teng yonli uchburchak bo'lgani uchun $\angle ABO = \angle OAB = \alpha_1$ va $\triangle AOC$ teng yonli uchburchak bo'lgani uchun $\angle ACO = \angle OAC = \alpha_2$ bo'ladi. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchagi



yig'indisi uchinchi tashqi burchagiga teng

5.4-rasm

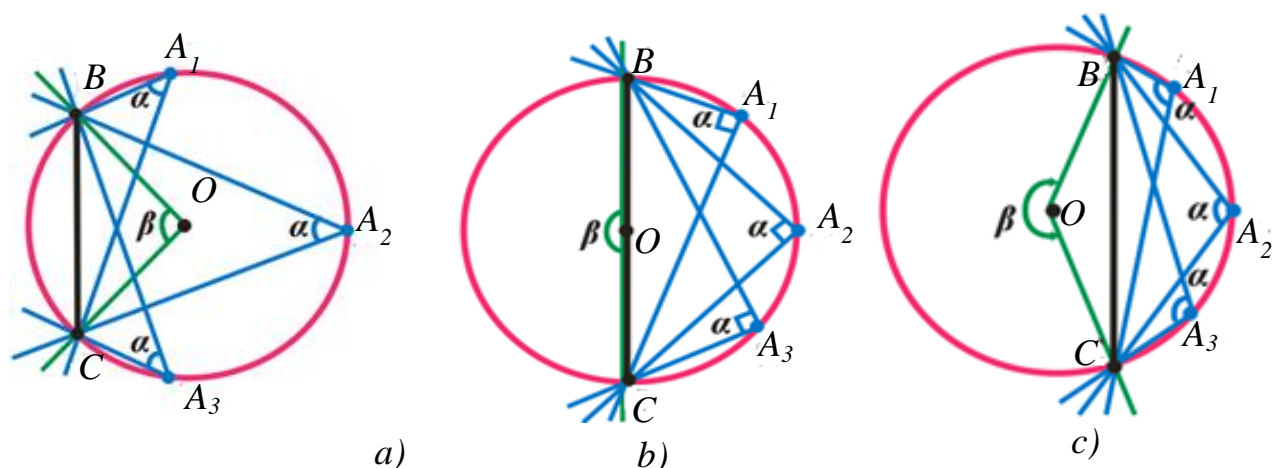
ekanligini bilgan holda $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_1 = 2\alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_2 = 2\alpha_2 \end{cases}$ deb yozish mumkin. $\angle BOC = \beta$

ekanligidan $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$ kelib chiqadi. Demak, $\alpha = \frac{\beta}{2}$

bo'lar ekan.

Yuqoridagi formuladan shunday xulosa kelib chiqadiki, BC vatarga aylanadagi A nuqtadan qaralgandagi ko'ringan burchak aylana markazi O nuqtadan qaralgandagi ko'ringan burchakning yarmiga teng bo'lar ekan. Hisob-kitoblar shuni ko'rsatadiki, BC vatarning bir tomonidagi yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham unga mos keluvchi markaziy burchakning yarmiga teng bo'lgan bir xil burchak ostida ko'rinar ekan. Jumladan, BC vatarga aylananing katta yoyidan, kichik yoyidan turib hamda diametrga qaralgan hollarni ko'rib chiqamiz:

- BC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan, shuningdek, A_1, A_2, A_3 nuqtalardan qaralganda bir xil o'tkir burchak ostida ko'rinadi, ya'ni bunda $\alpha < \pi/2$, $\beta < \pi$ bo'ladi (5.5-a rasm);
- BC diametrga yarim aylananing ixtiyoriy nuqtasidan, shuningdek, A_1, A_2, A_3 nuqtalardan qaralganda bir xil to'g'ri burchak ostida ko'rinadi, ya'ni bunda $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi$ bo'ladi (5.5-b rasm);
- BC vatarga kichik yoyning ixtiyoriy nuqtasidan, shuningdek, A_1, A_2, A_3 nuqtalardan qaralganda bir xil o'tmas burchak ostida ko'rinadi, ya'ni bunda $\alpha > \pi/2$, $\beta > \pi$ bo'ladi (5.5-c rasm).



5.5-rasm

2-teorema. Urinma va vatar orasidagi burchak vatarni tutib turuvchi markaziy burchakning yarmiga teng (5.6-rasm).

$$\varphi = \frac{\beta}{2}.$$

Isbot. Aylana ixtiyoriy AB vatarining B nuqtasidan a urinma o'tkazilgan bo'lsin. Rasmda $OA = OB = R$. Shuning uchun $\triangle AOB$ teng yonli uchburchak bo'lib, uning asosidagi burchaklari $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\pi - \beta}{2}$ ga teng.

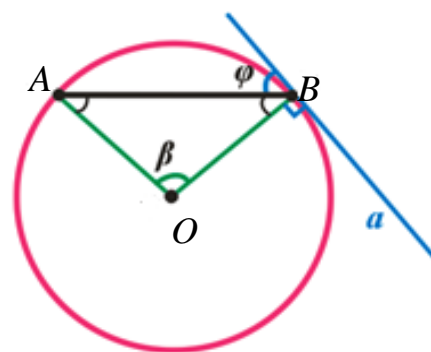
Urinma radiusga har doim perpendikular bo'ladi.

Shuning uchun $\angle OBA + \varphi = \frac{\pi}{2}$, bundan vatar va

urinma orasidagi burchak

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \angle OBA = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{\beta}{2}$ ga teng bo'ladi.

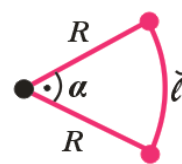
Aylanadan ajratilgan egri chiziqli qismga **aylana yoyi** deyiladi.



5.6-rasm

Aylanadan radius uzunligiga teng uzunlikdagi yoy ajratuvchi markaziy burchakning kattaligiga 1 rad burchak deyiladi. Aylana yoyi uzunligi markaziy burchakka proporsional. Shunga ko'ra $\tilde{\ell} \sim R$, $\rightarrow \tilde{\ell} = \alpha' R$ bo'ladi.

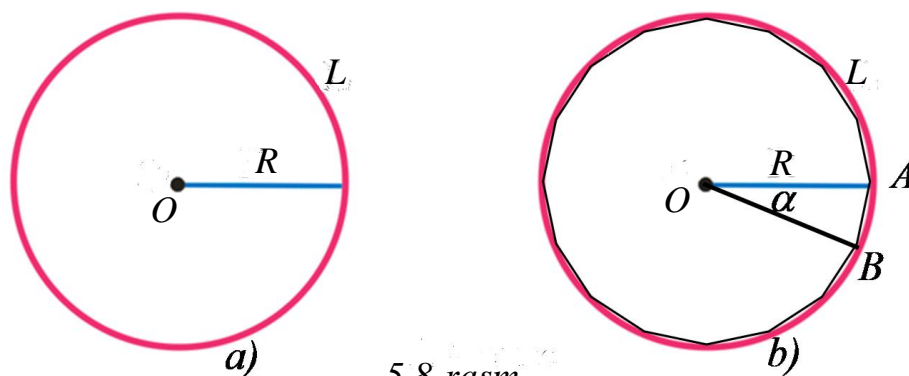
Markaziy burchagi α^r ga teng bo'lgan yoyning uzunligini topish formulasi quyidagicha bo'ladi (5.7-rasm):



5.7-rasm

$$\tilde{\ell} = \alpha^r R. \left(\tilde{\ell} = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ R \right)$$

Aylana uzunligini uning diametriga nisbati 3 dan biroz kattaroq, ya'ni $\frac{L}{2R} = \pi \approx 3,1415926...$ bo'lishini qadimda Yunoniston mutafakkirlari ham bilishgan. Bu kattalik ixtiyoriy o'lchamdagi katta-kichik aylanalar uchun bajarilishi isbotlangan. Shunga ko'ra aylana uzunligini aniqlash formulasini chiqarish mumkin.



5.8-rasm

3-teorema. Aylana uzunligi

$$L = 2\pi R.$$

ga teng.

Isbot. Bu usulda 5.8-b rasmdan foydalanamiz. Bunda $\triangle OAB$ teng yonli uchburchak uchidagi burchak $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ga teng bo'ladi (5.8-a rasm). Ko'pburchak tomoni $AB = a$ ni unga tashqi chizilgan aylana radiusi R orqali ifodalasak, u $a = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ ga teng bo'ladi. Ko'pburchak perimetri tomonlar yig'indisiga teng, ya'ni $p = na = n \cdot 2R \sin \frac{\pi}{n} = 2Rn \sin \frac{\pi}{n}$ ga teng bo'ladi. Ko'pburchak tomonlari cheksiz ko'p bo'lganda ko'pburchak va aylana orasida farq yo'qolib boradi. Bunda

ko'pburchak perimetri taxminan aylana uzunligiga teng bo'ladi. Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} p = L$

yoki $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 R n \sin \frac{\pi}{n} \right) = 2 \pi R \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right)$ bo'ladi. Endi biz $\frac{\pi}{n} = \varphi$ deb belgilash

kiritsak hamda 1-ajoyib limit $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) = 1$ ekanini e'tiborga olsak, u holda aylana

uzunligi uchun $L = 2 \pi R \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right) = 2 \pi R \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) = 2 \pi R \cdot 1 = 2 \pi R$ natija kelib

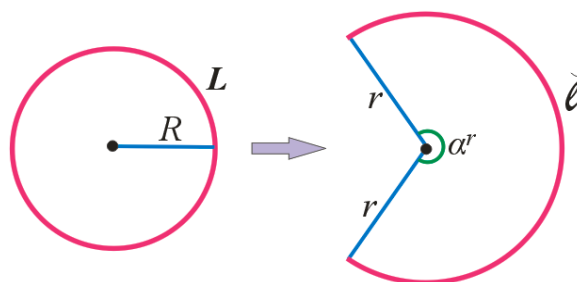
chiqadi.

Uzunligi L bo'lgan aylanani yoyib markaziy burchagi α^r bo'lgan yoy shakliga keltirilsa, hosil bo'lgan yoy radiusi quyidagicha bo'ladi (5.9-rasm):

$$r = \frac{L}{\alpha^r} = \frac{2\pi R}{\alpha^r}.$$

Isbot. Aylana uzunligi L yoy uzunligi $\tilde{\ell} = \alpha^r \cdot r$ ga teng bo'ladi, ya'ni

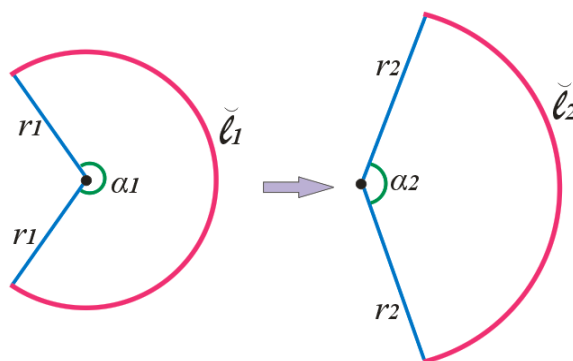
$$\tilde{\ell} = \alpha^r \cdot r = L, \Rightarrow r = \frac{L}{\alpha^r} = \frac{2\pi R}{\alpha^r} \text{ bo'ladi.}$$



5.9-rasm

Markaziy burchagi α_1 , radiusi r_1 bo'lgan birinchi yoyni markaziy burchagi α_2 , radiusi r_2 bo'lgan yoy shakliga keltirilsa, berilgan kattaliklarni bog'lovchi ifoda quyidagicha bo'ladi (5.10-rasm):

$$\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2.$$



5.10-rasm

Isbot. Ikkala yoyning ham uzunliklari bir xil, ya'ni $\tilde{\ell}_1 = \tilde{\ell}_2$. Shunga ko'ra $\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$ bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

5.1. Vatar aylanani 5:7 nisbatda bo'ladi. Bu vatarga tiralgan kichik yoydagi burchakning kattaligini toping. javob: 75°

5.2. Aylanadagi bir nuqtadan o'tkazilgan urinma va vatar orasidagi burchakni toping, bunda vatar aylanani 3:7 nisbatda bo'ladi. javob: 54° va 126°

5.3. Radiusi 5 ga teng bo'lgan aylanaga ichki burchak chizilgan, bu burchak aylananing 10 ga teng vatarini tortib turadi. Bu burchakning kattaligini toping. javob: 90°

5.4. Aylanaga ichki chizilgan burchak markaziy burchakdan 20° ga kichik, bu ichki burchakning kattaligini toping. javob: 20°

5.5. Ichki burchak aylananing $\frac{1}{12}$ qismli yoyini tortib turadi, bu ichki burchakning kattaligini toping. javob: 15°

5.6. AB va AC vatarlardan hosil qilingan burchak $\angle ABC = 60^\circ$ hamda $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{BC}$ bo'lsa $\overset{\frown}{AB}$ ning gradusdagi kattaligini toping. javob: 160°

5.7. AB vatar aylanani 80° li kichik va katta yoylarga ajratadi. Katta yoyni ikkinchi AC vatar teng ikkiga bo'ladi. $\angle BAC$ ni toping. javob: 70°

5.8. AB vatar va BC diametr orasidagi burchakni aniqlang, AB vatar 54° ni tortib turadi. javob: 63°

5.9. AB va AC vatarlar mos ravishda 116° va 24° ni tortib tursa, $\angle BAC$ ning qiymatini toping. javob: 110°

5.10. AB va BC vatarlar hosil qilgan burchak $\angle ABC = 96^\circ$ ga teng. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ bo'lsa, $\overset{\frown}{AB}$ ning gradusdagi kattaligini toping. javob: 84°

5.11. Aylana 3:8:4 nisbatda yoylarga bo'lingan bo'linish nuqtalari tutashtirilib hosil qilingan uchburchakning katta burchagini toping. javob: 96°

5.12. AB va BC vatarlar o'zaro perpendikular. BC yoy 46° ni tortib tursa $\angle BCA$ ning qiymatini toping. javob: 67°

5.13. AB va BC vatarlar mos ravishda 168° va 144° ni tortib turadi, hamda bu vatarlar aylana markazidan bir tomonda joylashgan bo'lsa, $\angle ABC$ ning qiymatini toping. javob: 12°

5.14. Vatar aylanani ikkita farqi 40° bo'lgan yoylarga ajratadi. Bu vatarga tiralgan katta ichki burchakni toping. javob: 100°

5.15. AB va BC vatarlar orasidagi burchak kattaligi 164° ga teng. Agar $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ teng bo'lsa, AB vatarga tiralgan markaziy burchakni toping. javob: 16°

2-§. Aylanaga urinma va kesuvchi. Aylana vatarlari va ularning xossalari

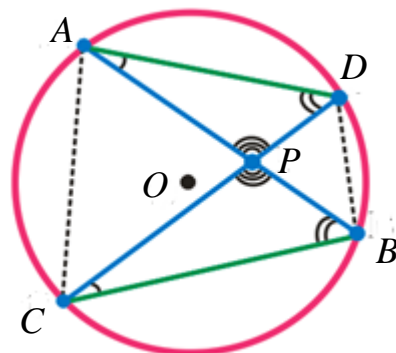
AB va CD vatarlar aylana ichida P nuqtada kesishsin (5.11-rasm). Bu yerda quyidagilarni eslatib o'tamiz:

- 1) P – vatarlar kesishish nuqtasi;
- 2) PA va PB – birinchi AB vatarning kesishgandagi qismlari (kesmalari);
- 3) PC va PD – ikkinchi CD vatarning kesishgandagi qismlari (kesmalari).

4-teorema. Ikki vatar aylana ichida kesishganda hosil bo'lgan kesmalardan birinchi vatar kesmalarining ko'paytmasi ikkinchi vatar kesmalarining ko'paytmasiga teng bo'ladi (5.11- rasm).

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Isbot. BD vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham bir xil burchak ostida ko‘rinadi, shuningdek, A va C nuqtalardan qaralganda ham shunday. Demak, $\angle DAP = \angle BCP$ ekan. AC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham bir xil burchak ostida ko‘rinadi, shuningdek, B va D nuqtalardan qaralganda ham. Demak, $\angle ADP = \angle CBP$ ekan.



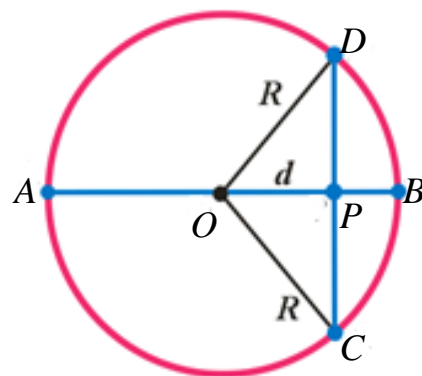
5.11-rasm

O‘zaro vertikal bo‘lgani uchun $\angle APD = \angle CPB$ bo‘ladi. Shunday qilib, $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ ekan. Demak, bu o‘xshash uchburchaklarning mos tomonlari proporsional bo‘lishi kerak. Ya’ni $\frac{PD}{PB} = \frac{PA}{PC} = \frac{AD}{BC}$, $\rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$ bo‘ladi.

Agar vatarlardan biri, aytaylik AB vatar aylana diametri bo‘lsa, u holda AB vatar CD vatarga perpendikular bo‘lib, CD vatarni teng ikkiga bo‘ladi. Agar bu vatarlar kesishish nuqtasi P nuqta R radiusli aylana markazidan biror d masofada joylashgani ma’lum bo‘lsa, u holda vatarlar uzunliklari quyidagicha bo‘ladi (5.12-rasm):

$$AB = 2R, \quad CD = 2\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Isbot. AB vatar markazdan o‘tgani uchun u diametr hisoblanadi. Shuning uchun uning uzunligi $AB = 2R$ bo‘ladi. Rasmdan $OA = OB = OC = OD = R$, $PA = R + d$, $PB = R - d$, $PC = PD$ bo‘ladi. Kesishuvchi vatarlar formulasiga binoan $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, $\Rightarrow (R + d)(R - d) = PC^2$, $\Rightarrow R^2 - d^2 = PC^2$, $\Rightarrow PC = \sqrt{R^2 - d^2}$ bo‘ladi. Bundan esa $CD = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ formula kelib chiqadi.



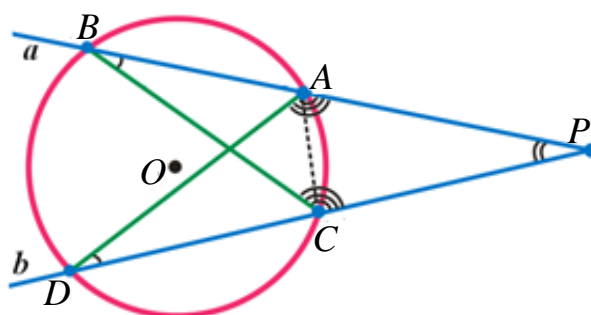
5.12-rasm

Aylanadan tashqarida ixtiyoriy P nuqta olaylik. Bu nuqtadan aylanani kesib o'tuvchi ikkita a va b nurlar o'tkazaylik. Aylanani a nur A va B nuqtalarda, b nur esa C va D nuqtalarda kesib o'tsin (5.13-rasm).

6-teorema. Birinchi kesuvchining aylanani birinchi kesish nuqtasigacha va ikkinchi kesish nuqtasigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi ikkinchi kesuvchining aylanani birinchi kesish nuqtasigacha va ikkinchi kesish nuqtasigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Isbot. AC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham bir xil burchak ostida ko'rinadi, shuningdek, B va D nuqtalardan qaralganda ham shunday. Demak, $\angle ADP = \angle CBP$ ekan.



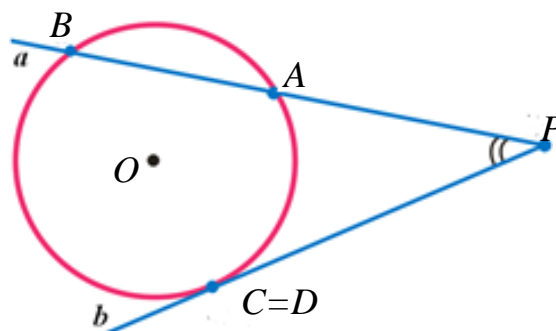
5.13-rasm

Umumiy bo'lgani uchun $\angle APD = \angle CPB$ bo'ladi. Ikkita burchagi teng bo'lgach uchinchi burchaklari ham teng bo'ladi, ya'ni $\angle DAP = \angle BCP$ bo'ladi. Shunday qilib, $\triangle DPA \sim \triangle BPC$ ekan. Demak, bu o'xshash uchburchaklarning mos tomonlari proporsional bo'lishi kerak. Bundan esa

$$\frac{PA}{PC} = \frac{DA}{BC} = \frac{PD}{PB}, \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD \text{ natija kelib chiqadi.}$$

7-teorema. Agar P nuqtadan chiquvchi b nur aylanaga urinib o'tsa, u holda C va D nuqtalar bitta nuqtaga tushib qoladi. Bunda formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$PA \cdot PB = PC^2 \text{ yoki } PC = \sqrt{PA \cdot PB}.$$

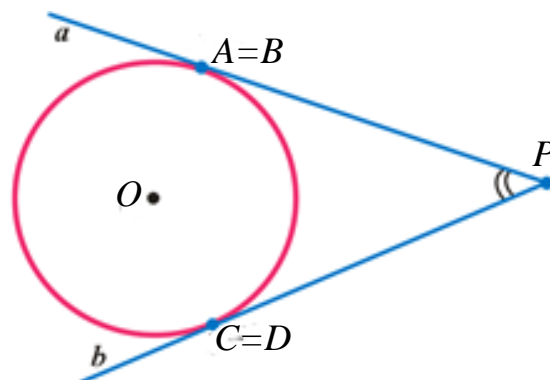


5.14-rasm

Isbot. C va D nuqtalar bitta nuqtaga tushgani uchun $PC = PD$ bo‘ladi. Shuning uchun $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PC^2$ bo‘ladi. Bundan $PC = \sqrt{PA \cdot PB}$ kelib chiqadi (5.14-rasm).

Agar a nur ham aylanaga urinib o‘tsa, u holda A va B nuqtalar ham bitta nuqtaga tushib qoladi. Bunda yuqoridagi formulalardan $PA = PC$ kelib chiqadi.

Demak, aylanadan tashqarida olingan nuqtadan aylanaga faqat ikkita urinma o‘tkazish mumkin ekan hamda bu nuqtadan urinish nuqtalarigacha bo‘lgan masofalar o‘zaro teng bo‘lar ekan (5.15-rasm).



5.15-rasm

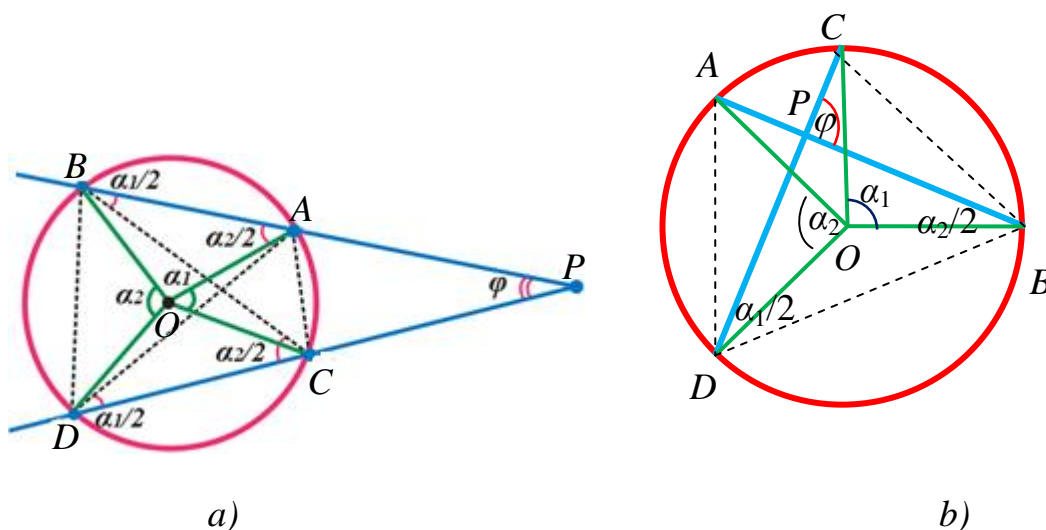
8-teorema. Agar P uchi aylanadan tashqarida bo‘lgan burchak tomonlari aylanani kesuvchi bo‘lib, aylananing burchak ichida yotgan yoylarini tutib turuvchi markaziy burchaklar α_1 va α_2 ma’lum bo‘lsa, burchak kattaligi φ quyidagicha bo‘ladi (5.16-a rasm):

$$\varphi = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

Isbot. AC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham shu vatarga mos markaziy burchakning yarmiga teng bo‘lgan bir xil burchak ostida ko‘rinadi, shuningdek, B va D nuqtalardan qaralganda ham shunday.

Demak, $\angle ADP = \angle CBP = \frac{\alpha_1}{2}$ ekan. BD vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham shu vatarga mos markaziy burchakning yarmiga teng bo‘lgan bir xil burchak ostida ko‘rinadi, shuningdek, A va C nuqtalardan qaralganda ham shunday. Demak, $\angle BAD = \angle DCA = \frac{\alpha_2}{2}$ ekan. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchagi yig‘indisi uchinchi tashqi burchagiga teng. Shunga

ko‘ra $\triangle PAD$ dan $\angle APD + \angle ADP = \angle BAD$, $\Rightarrow \varphi + \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_2}{2}$, $\Rightarrow \varphi = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ formula kelib chiqadi.



5.16-rasm

9-teorema. Ikki vatar aylana ichida kesishganda hosil bo‘lgan burchak ichida yotgan yo‘llarini tutib turuvchi markaziy burchaklar α_1 va α_2 ma’lum bo‘lsa, vatarlar orasidagi burchak kattaligi φ quyidagicha bo‘ladi:

$$\varphi = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}.$$

Isbot. AB va CD vatarlar P da kesishgan bo‘lsin (5.16-b rasm). AD vatar katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham shu vatarga mos markaziy burchakning yarmiga teng bo‘lgan burchak ostida ko‘rinadi. Demak,

$$\angle ABD = \frac{\angle AOD}{2} = \frac{\alpha_2}{2}.$$

CB vatar katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham shu vatarga mos markaziy burchakning yarmiga teng bo‘lgan burchak ostida ko‘rinadi. Demak,

$$\angle CDB = \frac{\angle COB}{2} = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchagi yig'indisi uchinchi tashqi burchagiga teng. Shunga ko'ra $\triangle PBD$ dan $\angle ABD + \angle CDB = \angle APD$
 $\Rightarrow \varphi = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ formula kelib chiqadi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

5.16. Bir nuqtadan o'tkazilgan urinma va kesuvchining uzunligi 20 sm va 40 sm ga teng hamda kesuvchi aylana markazidan 8 sm masofada o'tadi. Bu aylananing radiusini toping. javob: 17 sm

5.17. Uzunligi 10π ga teng bo'lgan aylana radiusi 20 ga teng bo'lgan yoy shakliga keltirilgan. Hosil bo'lgan yoyning markaziy burchagini toping. javob: $\frac{\pi}{2}$

5.18. R radiusli AOB sektorning AO va BO tomonlari hamda AB yoyiga urinuvchi ichki aylana chizilgan. Agar $AOB=90^\circ$ bo'lsa, ichki chizilgan aylana radiusini toping. javob: $R(\sqrt{2}-1)$

5.19. ABC uchburchakni B uchida BC tomoniga tegib, A uchidan o'tuvchi aylana markazi AC tomonda yotadi. $BC=8$ sm, $AC=9$ sm bo'lsa, aylana uzunligini toping. javob: $\frac{17\pi}{9}$

5.20. Aylanada yotgan B nuqtadan BA vatar va BC diametr o'tkazilgan. BA vatar 46° li yoyni tortib turadi. Vatar va diametr orasidagi burchakni toping. javob: 67°

5.21. AB va CD vatar M nuqtada kesishadi. $\angle CMB=73^\circ$. $\overset{\frown}{AC}=110^\circ$. $\overset{\frown}{BD}$ ni toping. javob: 104°

5.22. Aylananing vatari uni 5:13 nisbatda bo'ladi. Bu vatarga tiriluvchi ichki burchaklarning kattaligi topilsin. javob: $50^\circ; 130^\circ$

5.23. Aylananing vatari uni 2:7 nisbatda bo'ladi. Bu vatarning oxirlaridan 2 ta urinma o'tkazilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning burchaklari topilsin. javob: $40^\circ; 40^\circ; 100^\circ$

5.24. Aylana 5:9:10 nisbatda bo'lingan va bo'linish nuqtalaridan aylanaga urinmalar o'tkazilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning katta buchagini toping. javob: 105°

5.25. Aylanaga tashqaridagi nuqtadan, unga uzunligi 12 sm bo'lgan kesuvchi va uzunligi kesuvchining aylana ichidagi kesmasining $\frac{2}{3}$ qismiga teng bo'lgan urinma o'tkazilgan. Urinmaning uzunligini toping. javob: 6

5.26. Radiusi 11 sm bo'lgan aylana markazidan 7 sm uzoqlikda bo'lgan P nuqta berilgan. Bu nuqta orqali uzunligi 18 sm ga teng bo'lgan vatar o'tkazilgan. Bu vatar P nuqtada qanday uzunlikdagi kesmalarga bo'linadi? javob: 6; 12

5.27. Aylananing vatari 10 sm ga teng. Vatarning bir uchidan aylanaga urinma, ikkinchisidan esa urinmaga parallel bo'lgan kesuvchi o'tkazilgan. Agar kesuvchining aylana ichidagi kesmasi 12 sm ga teng bo'lsa, aylananing radiusini toping. javob: 6, 25

5.28. Tomonlari 10, 24 va 26 bo'lgan uchburchak berilgan. Ikkita kichik tomon, markazi katta tomonda yotgan aylanaga urinmalardir. Aylananing radiusini toping. javob: $\frac{120}{17}$

5.29. Aylanada yotmagan A nuqtadan unga urinma va kesuvchi o'tkazilgan. A nuqtadan urinish nuqtasigacha bo'lgan masofa 16 sm ga teng. A nuqtadan kesuvchining aylana bilan kesishish nuqtalaridan birigacha bo'lgan masofa 32 sm ga teng. Agar kesuvchi aylananing markazidan 5 sm uzoqlikda bo'lsa, uning radiusini toping. javob: 13

5.30. Radiusi 2 sm bo'lgan aylanada AB vatar OC radiusga perpendikular va M kesishish nuqtasida uni markazdan hisoblaganda 1:2 nisbatda ikki qismga bo'ladi. Vatar uzunligini toping. javob: $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

5.31. Aylana markazidan vatargacha bo'lgan masofa $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ga teng hamda bu masofa aylana radiusdan ikki marta kichik bo'lsa, bu vatar uzunligini toping. javob: 15

5.32. Aylanadagi markaziy 120° ga tiralgan vatar uzunligi $7\sqrt{12}$ ga teng bo'lsa, bu aylananing radiusini toping. javob: 14

5.33. Radiusi $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ga teng bo'lgan aylananing markazidan aylana radiusiga teng bo'lgan vatargacha bo'lgan masofani toping. javob: 5,25

5.34. Radiusi $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ga teng bo'lgan aylananing markazidan markaziy burchagi 90° ga teng vatarigacha bo'lgan masofani toping. javob: 1,25

5.35. 120° li yoyga tiralgan vatar uzunligi $3\sqrt{3}$ ga teng. Aylana markazidan bu vatargacha bo'lgan masofani toping. javob: 1,5

5.36. $\frac{3\sqrt{2}}{16}$ radiusli aylanadagi 90° li yoyni tortib turuvchi vatar uzunligini toping. javob: 0,375

5.37. $3\sqrt{27}$ radiusli aylanadagi 60° li yoyni tortib turuvchi vatar uzunligini toping. javob: $9\sqrt{3}$

5.38. Aylana markazidan vatargacha bo'lgan masofa $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ga teng hamda bu masofa vatar uzunligidan ikki marta kichik bo'lsa, bu vatar uzunligini toping. javob: $7\sqrt{2}$

5.39. Aylanadan tashqaridagi nuqtadan aylanaga uzunliklari 13 ga teng ikkita urinma o'tkazilgan, bu urinmalarning aylanaga uringan nuqtalari orasidagi masofa 24 ga teng bo'lsa, bu aylananing radiusini toping. javob: 31,2

5.40. Radiusi 7,5 ga teng aylanaga aylanadan tashqaridagi nuqtadan o'tkazilgan urinmalar uzunligi 10 ga teng. Bu nuqtadan urinish nuqtalarini tutashtiruvchi vatargacha bo'lgan masofani toping. javob:8

5.41. Aylanadagi AB vatarning uchlaridan aylanaga o'tkazilgan urinmalar C nuqtada kesishadi. Agar $AC=12$ va $AB=14,4$ bo'lsa, $\triangle ABC$ ning C uchidan AB tomonigacha bo'lgan masofani toping. javob: 9,6

5.42. O'tkir burchak ichiga burchak tomonlariga urinuvchi radiusi 1,3 ga teng bo'lgan aylana ichki chizilgan, burchak tomonlariga urinish nuqtalarini tutashtiruvchi vatar uzunligi 2,4 ga teng. Bu burchak uchidan ushbu vatargacha bo'lgan masofani toping. javob: 2,88

5.43. Radiusi 17 ga teng aylananing uzunligi 30 ga teng vatarining ikki uchidan aylanaga o'tkazilgan urinmalar A nuqtada kesishadi. Bu A nuqtadan berilgan vatargacha bo'lgan masofani toping. javob: 28,125

5.44. Aylana markazidan 15 ga teng masofadagi A nuqtadan aylanaga B nuqtada urinuvchi urinma va aylanaga kesuvchi o'tkazilgan, kesuvchi aylanani A nuqtaga yaqin bo'lgan C nuqtada kesadi. $\angle BAC=30^\circ$ ga teng bo'lsa, BC kesma uzunligini toping. javob: 7,5

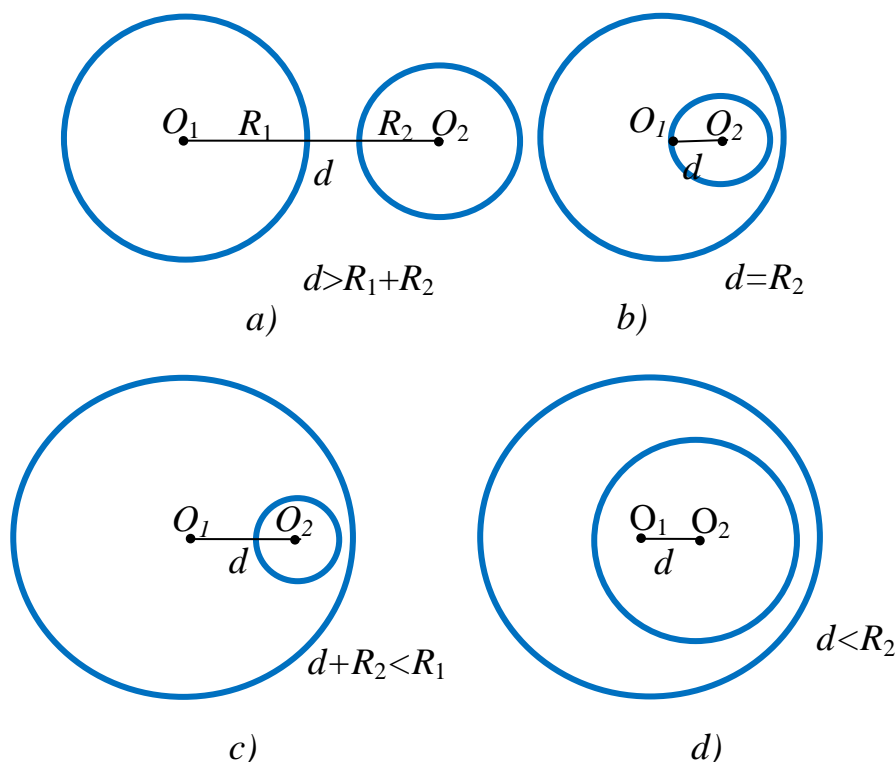
3- §. Aylanalarning o'zaro joylashuvi

Ma'lumki, aylananing markazi va radiusi berilgan bo'lsa, u holda yagona aylana chizish mumkin. Shuning uchun aylana o'z markazi va radiusi bilan to'la aniqlanadi. Agar ikkita aylana berilsa-chi, ya'ni ikki aylana markazlari va radiuslariga qarab o'zaro qanday joylashishi mumkin? Bu masalaning mumkin bo'lgan barcha hollarini ko'rib chiqamiz.

Tekislikda ikki aylana (O_1, R_1) va (O_2, R_2) tasvirlangan, deylik. Aylanalarning O_1 va O_2 markazlari orasidagi masofa $O_1O_2=d$, $R_2 < R_1$ bo'lsin. Endi birinchi aylana

suriladi, bunda O_1 va O_2 markazlari orasidagi masofa o'zgarishiga qarab, quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1. Ikki aylana umumiy nuqtaga ega emas, ya'ni aylanalar kesishmaydi. Bunda ham radiuslar kattaligiga qarab, bir necha hollar bo'ladi (5.17-rasm).

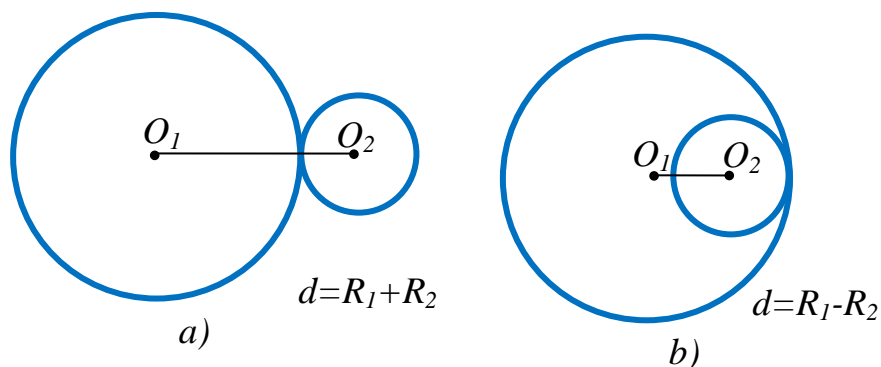


5.17-rasm

2. Ikki aylana bitta umumiy nuqtaga ega. Agar aylanalar bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, aylanalar bir-biriga urinadi deb ataladi. Ularning umumiy nuqtasi urinish nuqtasi deyiladi. Agar aylanalarning markazlari ularning umumiy urinish nuqtasidan turli tomonda yotsa, ya'ni markazlar orasidagi masofa radiuslar yig'indisiga teng ($d = R_1 + R_2$) bo'lsa, ular tashqi tomondan urinadi deyiladi (5.18-a rasm).

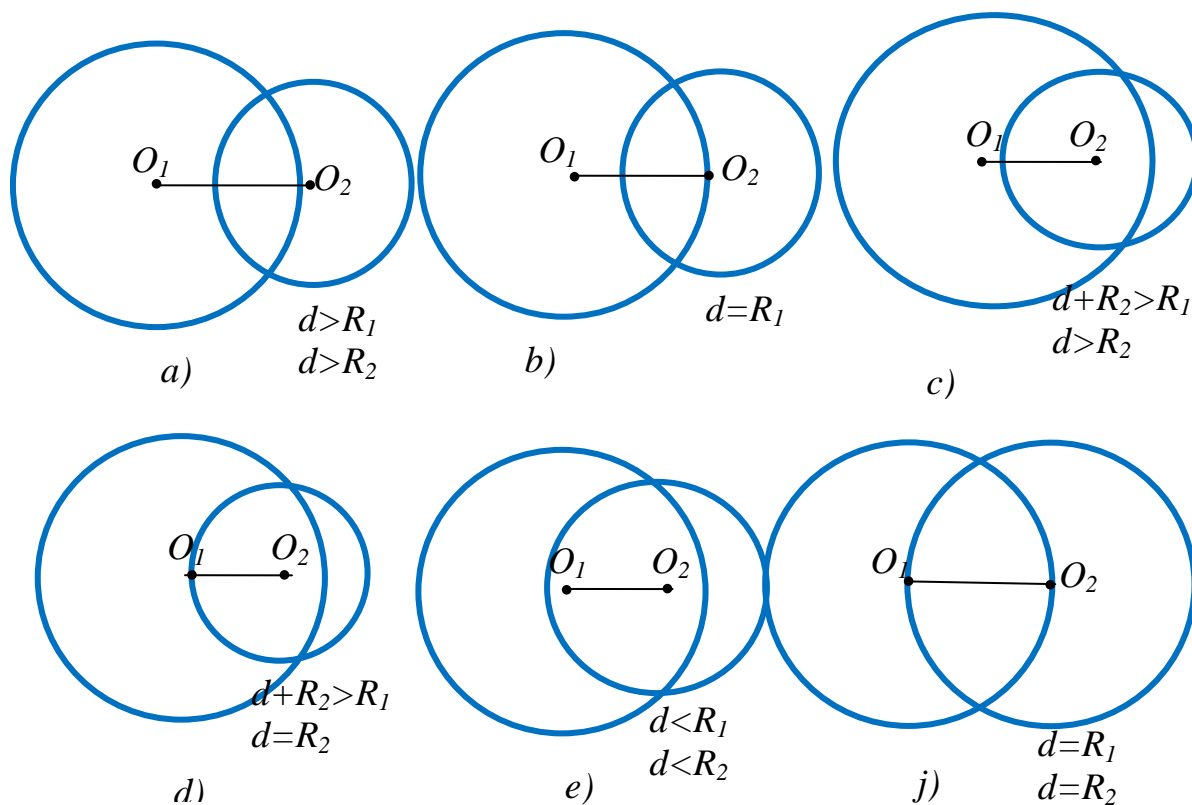
Agar aylanalarning markazlari ularning umumiy urinish nuqtasidan bir tomonda yotsa, ya'ni markazlar orasidagi masofa radiuslar ayirmasiga teng ($d = R_1 - R_2$, yoki $d + R_2 = R_1$) bo'lsa, ular ichki tomondan urinadi deyiladi (5.18-b rasm).

Bunda kichik radiusli aylananing urinish nuqtasidan boshqa hamma nuqtalari katta radiusli aylananing ichki sohasiga joylashgan bo‘ladi.



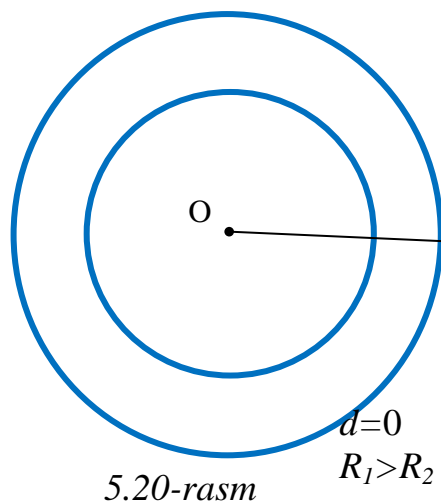
5.18-rasm

3. Ikki aylana ikkita umumiy nuqtaga ega. Agar aylanalar ikkita umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, aylanalar kesishadi yoki kesishuvchi aylanalar deb ataladi. Bunda $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$ bo‘ladi (5.19-rasm).



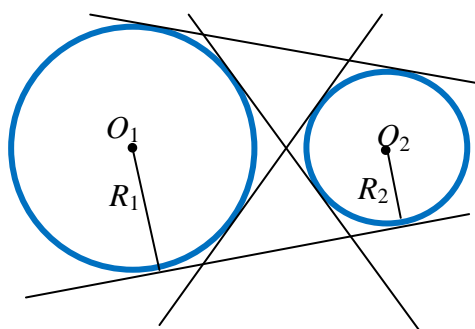
5.19-rasm

4. Umumiy markazga ega bo'lgan aylanalar konsentrik aylanalar deb ataladi. Bu holda, ya'ni $d=0$ bo'lganda aylanalarning markazlari ustma-ust tushadi (5.20-rasm).



Shunday qilib, R_1 , R_2 va d orasidagi munosabatlarga bog'liq holda: ikki aylana umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi, bir yoki ikki umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Kesishuvchi aylanalarning kesishish nuqtalarini tutashtiruvchi vatar shu aylanalarning markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulardir.

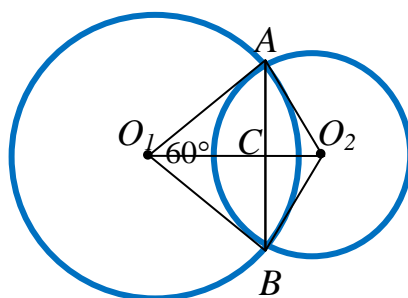
To'g'ri chiziq berilgan ikkita aylanaga urinsa, bu to'g'ri chiziq aylanalarga o'tkazilgan **umumiy urinma** deyiladi (5.21-rasm).



Aylanalarning joylashishiga qarab 4, 3, 2 yoki bitta urinma o'tkazish mumkin. Masalan, 5.17-a rasmda 4 ta, 5.18-a rasmda 3 ta, 5.19-rasmda 2 ta, 5.18-

b, c, d rasmda 1 ta umumiy urinma o'tkazish mumkin, 5.17- b, c, d va 5.20-rasmlarda umumiy urinma o'tkazib bo'lmaydi.

1-masala. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 60° va 120° larda ko'rinadi. Aylanalarning markazlari umumiy vatardan turli tomonda va kichik aylananing radiusi 7 ga teng bo'lsa, aylanalarning markazlari orasidagi masofani toping.

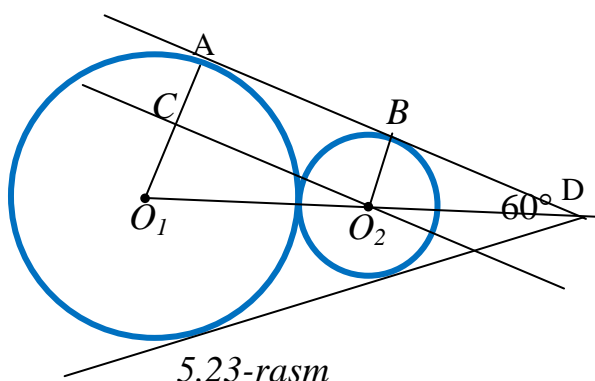


5.22-rasm

Yechish. AB umumiy vatar bo'lib, u 60° burchak qarshisida yotadi (5.22-rasm). $\triangle ABO_1$ ning ikki tomoni radiusdan iborat teng yonli va uchidagi O_1 burchagi 60° bo'lgani uchun teng tomonli uchburchak bo'ladi, katta aylana radiusiga teng $AB=R$. Ikkinchi tomondan AB vatar $\triangle ABO_2$ da 120° li burchak qarshisida yotgani uchun $AB=r\sqrt{3}=7\sqrt{3}$ ga teng. O_1O_2 va AB kesmalarning kesishish nuqtasini C deb belgilasak, O_1C kesma $\triangle ABO_1$ muntazam uchburchakning balandligi bo'lgani uchun $O_1C=\frac{\sqrt{3}}{2}R=\frac{\sqrt{3}}{2}7\sqrt{3}=10,5$ ga teng. CO_2 kesma $\triangle ABO_1$ teng yonli uchburchakning balandligi va $CO_2=\frac{r}{2}=\frac{7}{2}=3,5$ ga teng.

Bundan $O_1O_2=O_1C+CO_2=10,5+3,5=14$.

2-masala. Ikkita aylana tashqi tarafdin urinadi. Ularning umumiy urinmalari orasidagi burchak 60° ga teng. Kichik aylaning radiusi 13,5 ga teng bo'lsa, katta aylananing radiusini toping.



Yechish. Katta aylana radiusini R va kichik aylana radiusini r bilan belgilaymiz. Aylanalarga o'tkazilgan umumiy urinmalar aylanalarni A va B nuqtalarda urinadi (5.23-rasm). AB urinmaga parallel CO_2 chiziq o'tkazamiz natijada O_1CO_2 to'g'ri burchakli uchburchak hosil boladi. Bu yerda $O_1O_2=R+r$, $O_1C=R-r$ ga teng. Parallel to'g'ri chiziqlarning alomatiga ko'ra O_1CO_2 to'g'ri burchakli uchburchakda $\angle O_1O_2C=30^\circ$ ga teng. Chunki O_1O_2 chiziq $\angle D$ ning bissektrisasi va $\angle O_1O_2C=\angle O_2DB$. To'g'ri burchakli uchburchakda 30° qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng. $\frac{O_1C}{O_1O_2} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{R-13,5}{R+13,5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2R-27 = R+13,5 \Rightarrow R=40,5$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

5.45. Diametr uchlari urinmadan 1,6 m va 0,6 m masofada joylashgan. Diametr uzunligini toping. javob:1,2

5.46. Radiuslari 27 va 13 sm bo'lgan aylana markazlari orasidagi masofa 50 sm. Aylanalarga umumiy urinma uzunligini toping. javob:48;30

5.47. Radiusi 4 sm bo'lgan doirada AB vatar shunday o'tkazilganki, vatar uzunligi va A nuqtadan o'tuvchi urinmagacha bo'lgan B nuqta orasidagi masofa yig'indisi 6 sm. Vatar uzunligini toping. javob: $\frac{48-12\sqrt{2}}{7}$

5.48. Radiuslari 10 m, 2 m va 3 m bo'lgan aylanalar bir-biriga teginadi. Berilgan aylanalarning markazlaridan o'tuvchi aylana radiusini toping. javob: 6,5

5.49. Ikkita aylana tashqi tarafdan urinadi. Ularning umumiy urinmalari orasidagi burchak 60° ga teng. Kichik aylananing radiusi 13,5 ga teng bo'lsa, katta aylananing radiusini toping. javob: 40,5

5.50. 60° li burchak ichida tashqi ravishda urinuvchi ikkita aylana burchak tomonlariga uringan holda ichki chizilgan. Agar katta aylananing radiusi 23 ga teng bo'lsa, aylanalarning o'zaro urinish nuqtasidan burchak tomonigacha bo'lgan masofani toping. javob: 11,5

5.51. Ikkita teng radiusli aylanalar o'zaro kesishadi. Bu aylanalarning radiuslari va umumiy vatarlari uzunliklari mos ravishda 17 va 16 ga teng bo'lsa, bu aylanalarning markazlari orasidagi masofani toping. javob: 30

5.52. Ikkita aylana tashqi tarafdan urinadi. Bu aylanalarning umumiy urinmasi ularning markazlaridan o'tuvchi chizig'i bilan 30° burchak hosil qiladi. Aylanalarning tashqi umumiy urinish nuqtasidan umumiy urinmasigacha bo'lgan masofa 14,25 ga teng bo'lsa, katta aylanning radiusini toping. javob: 28,5

5.53. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 90° va 60° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va aylanalarning markazlari orasidagi masofa $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ga teng bo'lsa, katta aylananing radiusini toping. javob: 0,5

5.54. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 90° va 120° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va umumiy vatarning uzunligi $3+\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, aylanalarning markazlari orasidagi masofani toping. javob: $2+\sqrt{3}$

5.55. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 60° va 90° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda

va aylanalarning markazlari orasidagi masofa $3(\sqrt{3}+1)$ ga teng bo'lsa, katta aylananing radiusini toping. javob: 6

5.56. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 90° va 120° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va umumiy vatarning uzunligi $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ga teng bo'lsa, aylanalarning markazlari orasidagi masofani toping. javob: $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

5.57. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 60° va 120° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va kichik aylananing radiusi 7 ga teng bo'lsa, aylanalarning markazlari orasidagi masofani toping. javob: 14

5.58. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 60° va 120° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va kichik aylananing radiusi 19 ga teng bo'lsa, aylanalarning markazlari orasidagi masofani toping. javob: 38

5.59. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 90° va 60° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va aylanalarning markazlari orasidagi masofa $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ ga teng bo'lsa, aylanalarning umumiy vatar uzunligini toping. javob: 2

5.60. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 90° va 60° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va aylanalarning markazlari orasidagi masofa $9(\sqrt{3}+1)$ ga teng bo'lsa, aylanalarning umumiy vatar uzunligini toping. javob: 18

5.61. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 90° va 120° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda

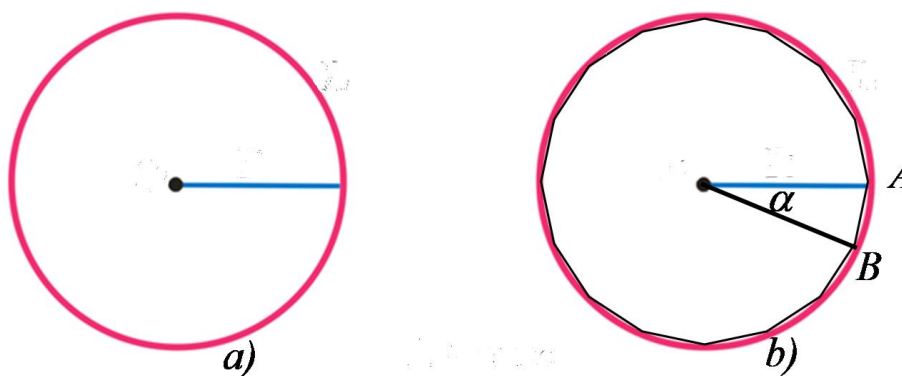
va aylanalarning markazlari orasidagi masofa $2(\sqrt{3}+1)$ ga teng bo'lsa, kichik aylananing radiusi uzunligini toping. javob: 4

5.62. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy vatari aylana markazlaridan 90° va 120° larda ko'rinadi. Aylanalar markazlari umumiy vatardan turli tomonda va aylanalarning markazlari orasidagi masofa $\frac{7(\sqrt{3}+1)}{4}$ ga teng bo'lsa, kichik aylananing radiusi uzunligini toping. javob: 3,5

4-§. Doira va uning bo'laklari. Doira segmentiga ichki chizilgan aylanalar

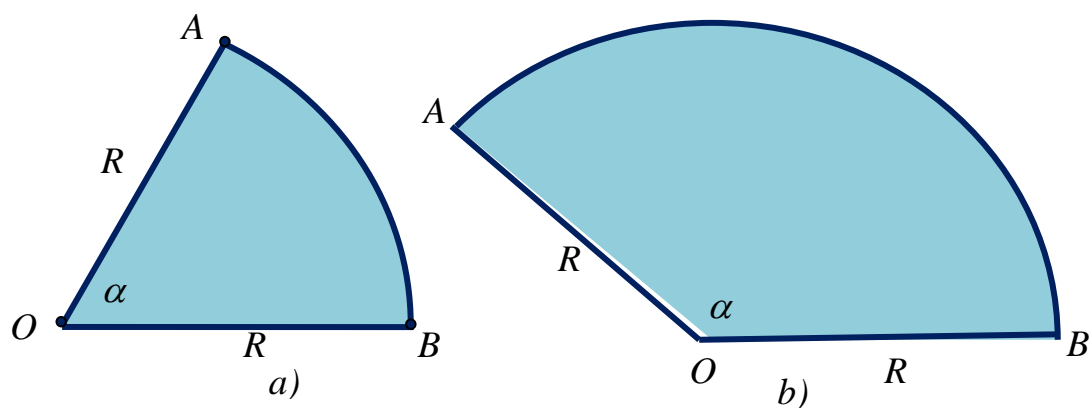
Aylana tekislikni ikki qismga: tashqi va ichki qismga ajratadi. Ba'zida bu qismlar aylananing ichki va tashqarisi deb ham yuritiladi. Aylana ichida yotgan nuqtalardan aylana markazigacha bo'lgan masofa radiusdan kichik bo'ladi.

1-ta'rif. Tekislikning aylana va shu aylana bilan chegaralangan qismiga *doira* deb aytiladi.



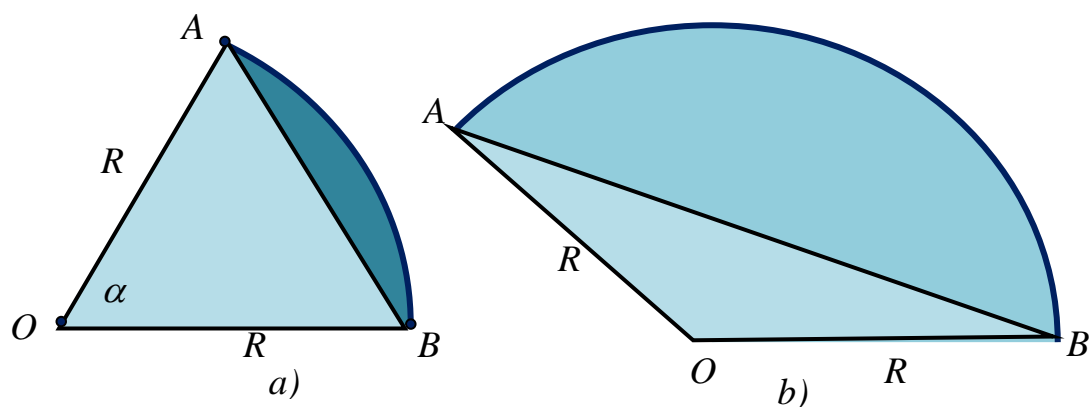
5.24-rasm

2-ta'rif. Doiraning yoyi va bu yoy oxirlarini doira markazi bilan tutashtiruvchi ikkita radiusi bilan chegaralangan qismi *sektor* deyiladi. Sektorning chegarasi bo'lgan yoy *sektor yoyi* deyiladi.



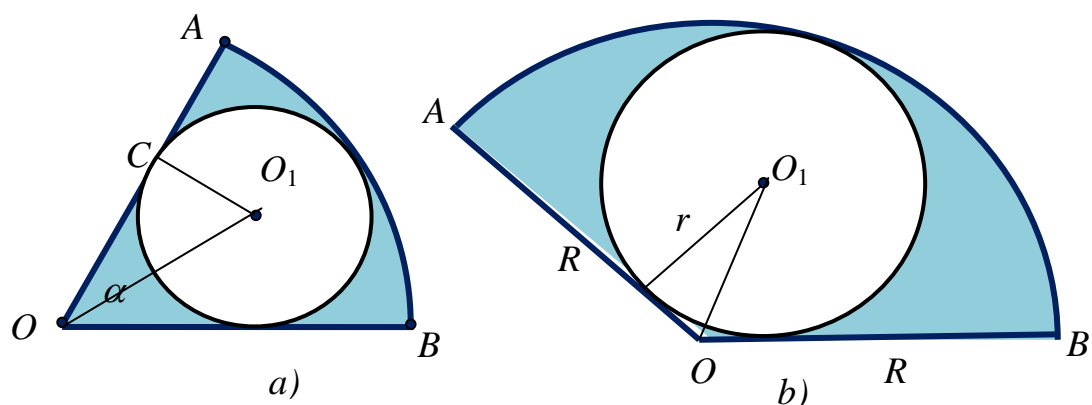
5.25-rasm

3-ta’rif. Doiraning yoyi va bu yoy oxirini tutashtiruvchi vatari bilan chegaralangan qismi **segment** deyiladi. Segmentning chegarasi bo‘lgan yoy **sektor yoyi** deyiladi.



5.26-rasm

4-ta’rif. Sektor yoyi va bu yoy oxirlarini doira markazi bilan tutashtiruvchi ikkita radiusiga urinuvchi aylana **sektorga ichki chizilgan aylana** deyiladi.



5.27-rasm

1-masala. Aylana sektoriga ichki chizilgan aylana radiusi sektor radiusi va markaziy burchak kattaligi orqali quyidagicha ifodalanadi:

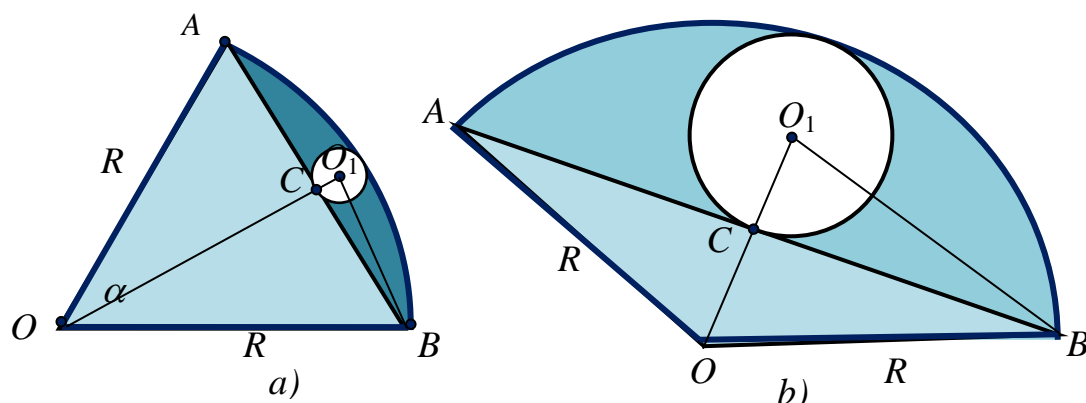
$$r = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Isbot. R radiusli markazi O nuqtada boʻlgan aylana sektoriga aylana ichki chizilgan. Ichki aylana markazi O_1 nuqtada boʻlsin. Shu aylana radiusi r ni sektor radiusi orqali ifodasini topish talab qilingan. $\triangle O_1OC$ toʻgʻri burchakli uchburchakda $\angle C = 90^\circ$, $\angle O = \frac{\alpha}{2}$ ga teng (5.27- rasm). Oʻtkir burchak sinusi

taʼrifiga koʻra $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{CO_1}{OO_1} = \frac{r}{R-r} \Rightarrow (R-r) \sin \frac{\alpha}{2} = r \Rightarrow R \sin \frac{\alpha}{2} = r + r \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$r = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

3-taʼrif. Segment yoyi va bu yoy oxirini tutashtiruvchi vatariga urinuvchi aylana **segmentga ichki chizilgan aylana** deyiladi.



5.28-rasm

2-masala. Aylana segmentiga ichki chizilgan aylana radiusi sektor radiusi va markaziy burchak kattaligi orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$x_{1,2} = \frac{R}{2} \left(1 \pm \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Isbot. R radiusli markazi O nuqtada bo'lgan aylana segmentiga aylana ichki chizilgan. Ichki aylana markazi O_1 nuqtada bo'lsin. Shu aylama radiusi r ni segment radiusi orqali ifodalaymiz. Aylanalarning markazlarini tutashtiruvchi O_1O va AB vatar C nuqtada kesishadi va ular o'zaro perpendikular. $\triangle OO_1B$ uchun BC balandlik vazifasini bajaradi. Pifagor teoremasiga ko'ra

$$\begin{cases} BC^2 = BO_1^2 - CO_1^2, \\ BC^2 = OB^2 - (OO_1 - CO_1)^2 \end{cases} \Rightarrow BO_1^2 - CO_1^2 = OB^2 - (OO_1 - CO_1)^2 \Rightarrow$$

$$BO_1^2 - r^2 = R^2 - (R - 2r)^2 \Rightarrow BO_1^2 - r^2 = 4rR - 4r^2 \Rightarrow BO_1^2 = 4rR - 3r^2.$$

$$BO_1^2 - CO_1^2 = BC^2 \Rightarrow BO_1^2 = r^2 + \frac{BA^2}{4}.$$

$$4rR - 3r^2 = r^2 + \frac{BA^2}{4} \Rightarrow 16r^2 - 16rR + BA^2 = 0.$$

$$\triangle OAB \text{ uchun kosinus teoremasidan } BA^2 = 2R^2(1 - \cos \alpha) = 4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Ikkita tenglikdan BA ning qiymatlarini tenglashtiramiz:

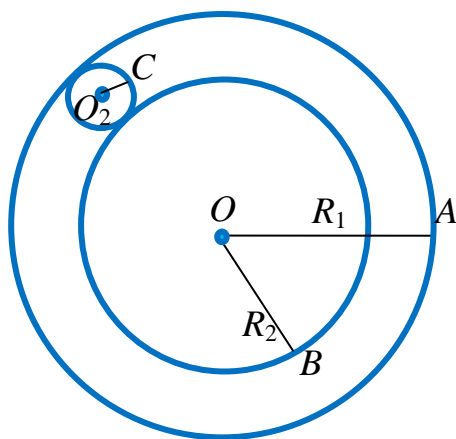
$$16r^2 - 16rR + 4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow 4r^2 - 4rR + R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Hosil bo'lgan kvadrat tenglamaning ildizini topamiz:

$$x_{1,2} = \frac{4R \pm \sqrt{16R^2 - 16R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{8} = \frac{R \pm R \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2} = \frac{R}{2} \left(1 \pm \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

4-ta'rif. Halqada berilgan ikki aylanaga urinuvchi aylana **halqaga ichki chizilgan aylana** deyiladi.

Bu aylana halqaning katta aylanasi ichki, kichik aylanasi tashqi urinadi (5.29-rasm). $OA=R_1$, $OB=R_2$ va ichki aylana radiusi $O_2C=r$.



5.29-rasm

Mustaqil ishlash uchun masalalar

5.63. $\frac{\sqrt{2}+1}{8}$ radiusli 90° li AOB sektorga ichki chizilgan aylana sektorning AO , BO kesmalariga va AB yoyiga urinadi. Bu ichki chizilgan aylananing radiusini toping. javob: 0,125

5.64. 18,6 radiusli 60° li AOB sektorga ichki chizilgan aylana sektorning AO , BO kesmalariga va AB yoyiga urinadi. Bu ichki chizilgan aylananing radiusini toping. javob: 6,2

5.65. C va D nuqtalar AB vatardan bir tomonda aylanada olingan. Agar $\angle ACB=86^\circ$ bo'lsa, ADB burchakning qiymatini toping. javob: 86°

5.66. C va D nuqtalar AB vatardan turli tomonda aylanada olingan. Agar $\angle ACB=118^\circ$ bo'lsa ADB burchakning qiymatini toping. javob: 62°

5.67. B , D , N nuqtalar O markazli aylanada olingan. $\angle BND=68^\circ$ bo'lsa, BOD burchakning qiymatini toping. javob: 136°

5.68. AB vatar 46° ni tortib turadi. Bu vatarning oxirlaridan o'tkazilgan urinmalar orasidagi burchakni toping. javob: 134°

5.69. O markazli aylananing B nuqtasidan aylanaga urinma o'tkazilgan. Agar $AB = 6\sqrt{3}$, $\angle ABO=30^\circ$ bo'lsa, aylananing radiusini toping. javob: 6

5.70. Aylanada tashqaridagi nuqtadan aylanaga urinma va kesuvchi o'tkazilgan. Urinma kesuvchidan 2 ga kichik, kesuvchining aylana tashqarisidagi kesmasi esa 6,4 ga teng. Urinmaning uzunligini toping. javob: 8

5.71. $ABCD$ to'rtburchak aylanaga ichki chizilgan. $\angle DAB=88^\circ$, $\angle ADB=30^\circ$, $\angle DBC=54^\circ$. AB va DC tomonlar davom ettirilganda O nuqtada kesishadi. AOD burchakning qiymatini toping. javob: 28°

5.72. $ABCD$ to'rtburchak aylanaga ichki chizilgan. AC va BD diagonallari O nuqtada kesishadi. $\angle ABC=98^\circ$, $\angle BCA=22^\circ$, $\angle ACD=40^\circ$ bo'lsa, COD burchakning qiymatini toping. javob: 80°

5.73. Uchburchak ABC da, AC tomonga D nuqtada urinuvchi, BC tomonga B nuqtada urinuvchi aylana AB tomonni E nuqtada kesib o'tadi. $\angle DBC=62^\circ$, $\angle DBE=28^\circ$ bo'lsa, BAC burchakning kattaligini toping. javob: 34°

5.74. Aylaning bir nuqtasidan uzunliklari $\sqrt{7}$ va $2\sqrt{3}$ ga teng ikkita vatar o'tkazilgan. Agar vatarlarning o'rtalarini tutashtiruvchi kesma uzunligi 2,5 ga teng bo'lsa, aylananing radiusini toping. javob: $\sqrt{7}$

5.75. Radiusi 9 ga teng bo'lgan aylanada vatar o'tkazilgan. Vatarning bir uchidan aylanaga urinma o'tkazilgan, vatarning ikkinchi uchidan bu urinmagacha bo'lgan masofa 12,5 ga teng. Bu vatarning uzunligini toping. javob: 15

5.76. AP vatarni K nuqta 12 va 14 kesmalarga ajratadi. Aylana markazidan bu K nuqtagacha bo'lgan masofa 11 ga teng. Bu aylananing radiusini toping. javob: 17

5.77. Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga ikkita urinma o'tkazilingan urinmalar orasidagi burchak 60° ga teng. Urinish nuqtalari orasidagi masofa esa $2\sqrt{3}$ ga teng bo'lsa, bu aylana radiusini toping. javob: 2

5.78. Uchburchak ABC da AB , AC , BC tomonlari 10, 17 va 21 ga teng. Bu uchburchakka ichki aylana chizilgan A uchidan aylananing urinish nuqtalarigacha bo'lgan eng qisqa masofani toping. javob: 3

5.79. Ikkita aylananing umumiy AB vatarini davom ettirsak, bu aylanalarning umumiy urinmasi MN ni K nuqtada kesadi. $KA=3$ va $AB=9$ bo'lsa, MN ning uzunligini toping. javob: 12

5.80. Aylananing AB va CD vatarlari to'g'ri burchak ostida kesishadi. $AD=6$ va $BC=8$ bo'lsa, aylananing radiusini toping. javob: 5

5.81. Radiusi uzunligi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan aylana diametrining bir uchidan aylanaga urinma va ikkinchi uchidan esa 120° ni tortib turuvchi vatar o'tkazilgan. Vatar urinmani kesguncha davom ettirilgan, kesuvchining aylanadan tashqi qismi uzunligini toping. javob: 1

5.82. Ikkita radiuslari 4 va 9 ga teng aylanalar tashqi tarafdan C nuqtada urinadi. Bu aylanalarga umumiy urinma o'tkazilgan, bu urinma aylanalarga A va B nuqtalarda urinadi. AB kesma uzunligini toping. javob: 12

5.83. 60° li burchak uchiga o'zaro urinuvchi ikkita aylana chizilgan. Katta aylana radiusining kichik aylana radiusiga nisbatini toping. javob: 3:1

5.84. Burchak ichiga ikkita urinuvchi aylanalar chizilgan, aylanalarning burchak tomonlariga uringan nuqtalarini tutashtiruvchi vatarlari 4 va 12 ga teng. Bu burchakning gradus qiymatini toping. javob: 60°

5.85. Ikkita kesishuvchi aylananing umumiy AB vatari uzunligi 48 ga teng. A nuqtaga boruvchi ikki aylana radiuslari o'zaro perpendikular. Katta aylana radiusi 40 ga teng bo'lsa, kichik aylana radiusi uzunligini toping. javob: 30

5.86. Ikkita 15 va 13 radiusli aylanalar A va B nuqtada kesishadi. Aylana markazlari AB vatardan bir tomonda joylashgan. Aylanalar markazlari orasidagi masofa 4 ga teng bo'lsa, umumiy AB vatarning uzunligini toping. javob: 24

5.87. Ikkita aylana ichki ravishda urinadi. Kichik aylana markazidan o'tuvchi chiziq katta aylanani M va K nuqtada kesadi. Kichik aylana o'zini B va C da kesib o'tadi. $MB:BC:CK=7:8:5$ nisbat va katta aylanalar radiusi R va r ma'lum bo'lsa, $\frac{32R}{r}$ ni toping. javob: 115

5.88. Uchburchak ABC da AB va BC tomonlarda olingan D va E nuqtalar uchun, $AD:BD=11$ va $CE:EB=2$, hamda BAE burchakning kattaligi BCD burchakning kattaligiga teng, ABC burchak esa 60° ga teng. Uchburchak ABC ga tashqi chizilgan aylana radiusi va ichki chizilgan aylana radiuslari nisbatini toping. javob: $\sqrt{3}+1$

5.89. AB kesma aylana diametri, C nuqta esa aylanadan tashqarida, AC va BC kesmalar aylanani D va M nuqtalarda kesadi. Agar DCM uchburchak yuzining ACB uchburchak yuziga nisbati 1:4 bo'lsa, ACB burchakning kosinus qiymatini toping. javob: 0,5

5.90. $ABCD$ to'rtburchak O markazli aylanaga ichki chizilgan. AO radius BO radiusga, CO radius esa DO radiusga perpendikular. C uchidan AD tomonga tushirilgan perpendikular uzunligi 9 ga teng. BC tomon uzunligi AD tomon uzunligidan ikki marta kichik. AOB uchburchakning yuzini toping. javob: 22,5

5.91. Radiuslari 3 va 1 ga teng ikkita aylana tashqi ravishda urinadi. Bu aylanlarning urinish nuqtasidan ularning umumiy urinmasigacha bo'lgan masofani toping. javob: 0; 1,5

5.92. Ikkita aylana tashqi ravishda A nuqta urinadi. A nuqta va bu aylanalar o'tkazilgan umumiy urinmaning aylanalar bilan urinish nuqtalarini

tutashtiruvchi vatarlar uzunligi 6 va 8 teng bo'lsa, katta aylana radiusini toping.

javob: $\frac{20}{3}$

5.93. Radiuslari 4 va 1 ga teng aylanalar tashqi ravishda urinadi. Bu aylanalarning umumiy urinmasiga va bu aylanalarga urinuvchi aylananing radiusini toping. javob: $\frac{4}{9}$

5.94. 60° burchak ichiga o'zaro kesishuvchi ikkita aylana chizilgan. Bu aylanalarning umumiy nuqtalaridan o'tkazilgan ularga urinmalar o'zaro perpendikular. Agar bu aylanalarning umumiy vatari uzunligi 3 ga teng bo'lsa, kichik aylana radiusi uzunligini toping. javob: $\sqrt{7} - 1$