

3-BOB

SIRKUL VA CHIZG'ICH YORDAMIDA YASASH USULLARI

1-§. Uchburchak elementlarini yasash

Yasashga doir masalalarda berilgan chizmachilik asboblari yordamida geometrik shakllarni yasash haqida so'z boradi. Bunday asboblarning ko'pincha masshtabli bo'linmalarga ega bo'lmagan chizg'ich va sirkuldir. Masalani yechish faqat shaklni chizishdan iborat bo'lmay, balki bu ishni qanday amalga oshirish va tegishli isbotni berishdan iboratdir. Agar shaklni yasash usuli ko'rsatilsa hamda ko'rsatilgan yasashlarni bajarish natijasida talab qilingan xossalarga ega shakl hosil qilinishi isbotlansa, masala yechilgan bo'ladi. Nuqtalar to'plam tushunchasi geometriyaning asosiy va yetakchi tushunchalaridan biridir.

Yasashga doir masalalarda sirkul yordamida aylana chizilganligi sabab aylana haqida tushuncha beramiz.

1-ta'rif. Tekislikda belgilangan nuqtadan bir xil masofada joylashgan nuqtalar to'plamiga **aylana** deyiladi.

Tekislikdan belgilangan nuqtani *aylana markazi*, aylana markazidan aylanagacha bo'lgan masofaga *aylana radiusi* deyiladi. Aylana markazi O va markazi R bilan belgilanadi. Aylananing ixtiyoriy nuqtasidan markazgacha bo'lgan masofa R teng.

Nuqtalar to'plamlarini topishga doir masalalar yechish jarayonida har bir masalani yechishga yordam beradigan tushunchalarni chuqur va puxta bilish kerak.

Yasashga doir masalada berilgan xossalarga ega bo'lgan nuqtalardan bir nechtasini amaliy ravishda yasab, ularning joylashishidagi qonuniyatni aniqlay olish va bu qonuniyatning haqiqatan to'g'riligini isbotlash zarur.

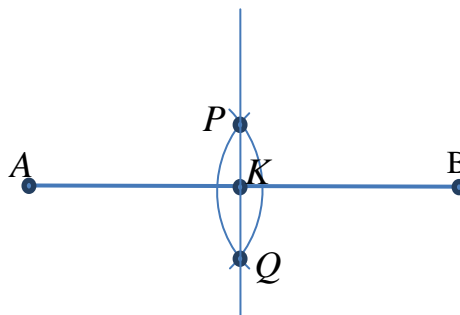
Yasalgan nuqtalardan har bittasining o'rnini shu nuqtani yasashda qatnashgan geometrik miqdorlarga bog'liq bo'lishini, masalaning shartida berilgan shartlardan har biri tekshirilishi kerak.

Shakllarni yasashga doir masalalar geometriya fanida muhim o'rin tutadi.

Dastavval uchburchakning elementlari vazifasini o'taydigan shakllarni yasash bilan shug'ullanamiz.

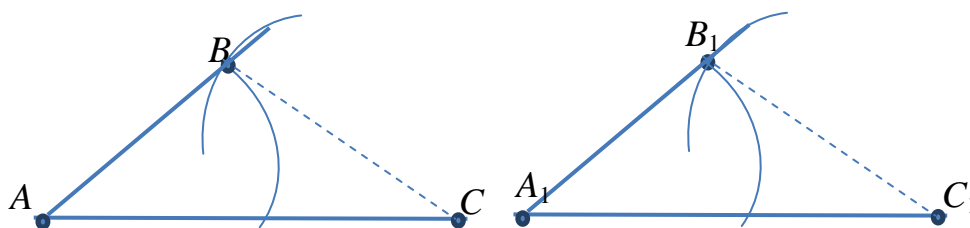
1-masala. Kesmani teng ikkiga bo'lish. Berilgan AB kesmani chizg'ich yordamida (bo'lmasdan) teng ikkiga bo'lish talab qilinadi.

Yasash. Bu masalani yechish uchun AB kesmaning yarmidan katta bo'lgan radiusni tanlaymiz. So'ngra A va B nuqtalarni markaz qilib, tanlangan radiusli yoylarni chizamiz, ular P va Q nuqtalarda kesishadi (3.1-rasm). P va Q nuqtalardan PQ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. AB va PQ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi K berilgan AB kesmaning o'rtasi bo'ladi: $AK=KB$. (Buning isboti maktab geometriya kursida ham keltirilgan.)



3.1-rasm

2-masala. Berilgan burchakka teng burchak yasash. $\angle BAC$ berilgan. Unga teng bo'lgan $\angle B_1A_1C_1$, ni yasash talab qilinadi (3.2-rasm).

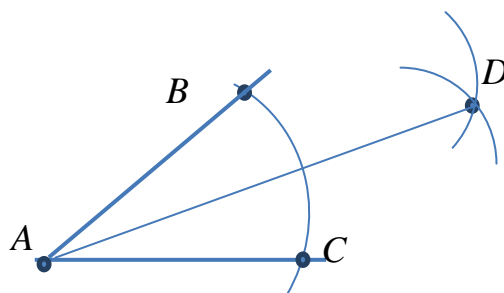


3.2-rasm

Yasash. AC va A_1C_1 nurlar berilgan bo'lsin. Sirkulning oyog'ini A nuqtaga qo'yib, ixtiyoriy radiusli BC yoyni chizamiz. So'ngra, radiusni o'zgartirmasdan, sirkulning oyog'ini A_1 nuqtaga qo'yib, A_1C_1 nurni C_1 nuqtada kesib o'tadigan yoyni chizamiz.

Sirkul yordamida C va B nuqtalar orasidagi masofani o'lchaymiz. Sirkul yoyilmasini o'zgartirmasdan, uning oyog'ini C_1 nuqtaga qo'yamiz va C_1B_1 yoyda B_1 nuqtani shunday belgilaymizki, unda $C_1B_1=CB$ tenglik o'rinli bo'lsin. Nihoyat, A_1 va B_1 nuqtalardan $\angle B_1A_1C_1$ ning ikkinchi tomonidan iborat bo'lgan A_1B_1 nurni o'tkazamiz. Bunda $\angle B_1A_1C_1=\angle BAC$ bo'ladi. Bu burchaklarning tengligi $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ ning tengligidan kelib chiqadi (ular uchta tomonlari bo'yicha teng uchburchaklardir).

3-masala. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish. $\angle BAC$ berilgan va uni teng ikkiga bo'lish, boshqacha aytganda, burchakning bissektrisasini yasash talab qilinadi. (3.3-rasm)

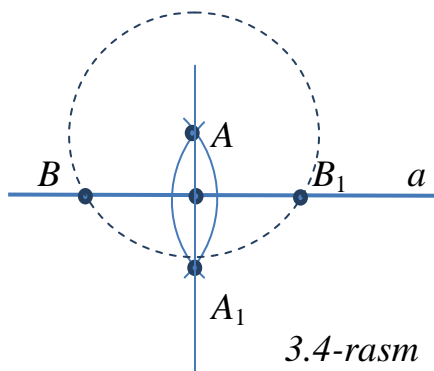


3.3-rasm

Yasash. Sirkulning oyog'ini A nuqtaga qo'yib, burchakning tomonlarini C va B nuqtalarda kesib o'tadigan, ixtiyoriy radiusli BC yoyini chizamiz (3.3- rasm). So'ngra sirkulning oyog'ini B nuqtaga qo'yamiz. C va B nuqtalar orasidagi masofaning yarmidan kattaroq radiusni tanlab, BC yoyning har xil tomonlarida belgi qo'yamiz. Sirkul yoyilmasini o'zgartirmasdan (ya'ni radiusni o'zgarmas qoldirib), uning oyog'ini B nuqtaga qo'yamiz va belgini shunday qo'yamizki, har ikkala belgi ham D nuqtada kesishsin. Nihoyat, A va D nuqtalarni tutashtirib, $\angle BAC$ ni teng ikkiga bo'luvchi AD nurni, ya'ni bissektrisanini hosil qilamiz.

Tekshirish. Haqiqatan, B va C nuqtalarni D nuqta bilan tutashtiramiz. U holda ikkita $\angle ABD$ va $\angle ACD$ hosil bo'ladi va ular o'zaro teng, chunki AD - umumiy tomon, yasashga ko'ra $AB=AC$, $BD=DC$. Bundan $\angle BAD=\angle CAD$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, AD nur $\angle BAC$ ning bissektrisasidan iborat.

4-masala. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular tushirish. Masalada berilgan A nuqtadan berilgan a to'g'ri chiziqqa perpendikular tushirish talab qilinadi (3.4-rasm).



3.4-rasm

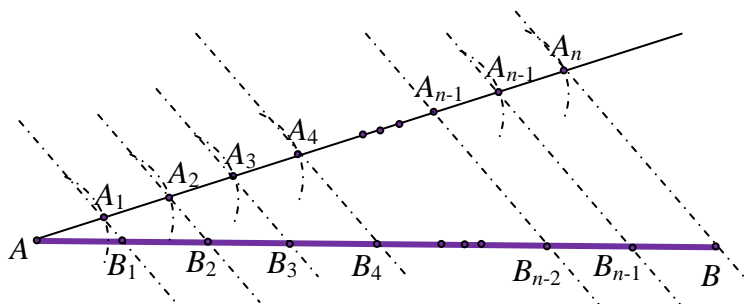
Yasash. A nuqta berilgan a to'g'ri chiziqda (uni B_1B deb belgilaymiz) yotmasin. Sirkulning oyog'ini A nuqtaga qo'yib, A nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofadan kattaroq radiusli yoy chizamiz. Bu yoy berilgan a to'g'ri chiziq bilan ikkita B_1 va B nuqtada kesishadi. Sirkulning oyog'ini B nuqtaga qo'yib, BA kesmaning uzunligiga teng radiusli yoy chizamiz va berilgan B_1B to'g'ri chiziqning har ikkala tomonlaridan ikkita belgilar qo'yamiz. Radiusni o'zgartirmasdan, sirkulning oyog'ini B_1 nuqtaga qo'yamiz va yuqoridagi kabi berilgan to'g'ri chiziqning har xil tomonida ikkita belgini qo'yamiz. Ravshanki, belgilar A va A_1 nuqtalarda kesishadi. So'ngra AA_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz va u izlanayotgan perpendikular bo'ladi.

Tekshirish. Haqiqatan, yasalishiga ko'ra $AB_1=AB$, $AB_1=A_1B_1$, $A_1B_1=A_1B$, $A_1B=AB$. Demak, ABA_1B_1 to'rtburchak rombdan iborat. Rombning diagonallari (chizmada AA_1 va BB_1) xossasidan ularning o'zaro perpendikular bo'lishi va O kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linishi ma'lum. Demak, talab qilingan $AO \perp BB_1$ shart olinadi.

5-masala. Kesmani teng n bo'lakka bo'lish. Berilgan AB kesmani chizg'ich yordamida (bo'lmasdan) teng n ta bo'lakka bo'lish talab qilinadi.

Yasash. Berilgan AB kesmaning A uchidan biror nur olib, uning A nuqtasidan sirkul yordamida R radiusli aylana chizamiz. Aylananing nur bilan

kesishgan A_1 nuqtasida radiusni o'zgartirmasdan ikkinchi aylanani chizamiz. Shu usulda nurga ketma-ket n ta uzunligi R ga teng bo'lgan kesmalarni joylab chiqamiz (3.5-rasm). Aylanalarning nur bilan kesishgan nuqtalarini $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ bilan belgilaymiz.



3.5-rasm

Nurda belgilangan A_n nuqta va AB kesmaning ikkinchi uchidagi B nuqtadan A_nB to'g'ri chiziq o'tkazamiz. A_nB to'g'ri chiziqqa parallel qilib, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ nuqtalardan to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning AB kesma bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$ orqali belgilasak, bu nuqtalar AB kesmani teng n ta bo'lakka bo'ladi. $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B$ kesmalar o'zaro teng.

Tekshirish. Burchakning bir tomonidagi $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ kesmalar yasalishiga ko'ra teng va $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}$ to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lgani uchun, Fales teoremasiga asosan burchakning ikkinchi tomonidagi $AB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{n-1}B$ kesmalar ham o'zaro teng bo'ladi.

Shu usul bilan berilgan kesmani berilgan nisbatda bo'lish mumkin.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

3.1. 5 va 8 uzunlikdagi kesmalar berilgan bo'lsa, 13; 3; 2; 18, 11 uzunlikdagi kesmalarni yasang.

3.2. a va b ($a > b$) uzunlikdagi kesmalar berilgan bo'lsa, $a+b$; $a-b$; $2a+4b$, $b+3a$ uzunlikdagi kesmalarni yasang.

3.3. 30° va 40° li burchaklar berilgan bo'lsa, 10° , 20° , 35° , 50° , 60° , 70° o'lchovli burchaklarni yasang.

3.4. α va β burchaklar berilgan bo'lsa, $\alpha+\beta$, $2\alpha-\beta$, $\alpha+2\beta$, $3\beta-2\alpha$ burchaklarni yasang.

3.5. Berilgan uch nuqtaning ikkitasidan o'tkazilgan to'g'ri chiziqqa parallel qilib uchinchi nuqtadan to'g'ri chiziq o'tkazing.

3.6. Berilgan to'g'ri chiziqda shunday nuqta topingki, uni to'g'ri chiziq tashqarisida berilgan nuqta bilan tutashtiruvchi kesma va shu to'g'ri chiziq berilgan kattalikdagi burchak hosil qilsin.

3.7. Faqat sirkuldan foydalanib, berilgan kesmani davom ettirmasdan uning davomida yotuvchi nuqtani toping.

3.8. Ma'lum uzunlikdagi kesmani berilgan burchak tomonlari orasiga burchakning tomonlarini kesib o'tuvchi ma'lum to'g'ri chiziqqa parallel (yoki bu kesma burchakning bir tomoni bilan ma'lum burchak tashqil etadigan) qilib joylang.

3.9. Berilgan burchak tomonlari orasiga ma'lum uzunlikdagi kesma uchlarini burchak tomonlaridan teng kesmalar ajratadigan qilib joylashtiring.

3.10. Berilgan nuqtadan berilgan burchak tomonlaridan teng kesmalar ajratadigan to'g'ri chiziq o'tkazing.

3.11. Berilgan burchakning uchidan uning tashqarisida yotuvchi hamda burchak tomonlari bilan teng burchaklar hosil qiluvchi to'g'ri chiziq o'tkazing.

3.12. Burchak va nuqta berilgan. Shu berilgan nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, uning berilgan burchak tomonlari orasidagi kesmasi burchakning bir tomonida shu to'g'ri chiziq ajratgan kesmaga teng bo'lsin.

3.13. Berilgan nuqtadan berilgan ikki parallel to'g'ri chiziq orasidagi kesmasi ma'lum uzunlikda bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazing.

3.14. Berilgan burchak tomonlarini ma'lum uzunlikdagi kesmalar hosil qilib kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazing

3.15. Uchburchakning asosiga parallel qilib uchburchak yon tomonlarini kesganda, bir yon tomonning pastki kesmasi ikkinchisining ustki kesmasiga teng bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazing

3.16. To'g'ri burchakni teng uchga bo'ling.

3.17. Sirkul va chizg'ich yordamida quyidagi burchaklarni yasang: 15° , $22^\circ 30'$, 60° , 75° , 105° , $112^\circ 30'$, 120° , 135° , 150° .

3.18. O'rta perpendikular tushunchasidan foydalanmay, berilgan to'g'ri chiziqqa uning berilgan nuqtasidan perpendikular chiqaring,

3.19. Berilgan A nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, berilgan B va C nuqtalardan u to'g'ri chiziqqacha masofalar teng bo'lsin.

3.20. Berilgan A nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, berilgan B va C nuqtalardan bu to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikularlar orasidagi masofa berilgan kesmaga teng bo'lsin.

3.21. Berilgan ikki nuqtaning har biridan bittadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, ularning berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishuvidan teng tomonli uchburchak hosil bo'lsin.

3.22. Burchak ichidagi nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, uning burchak tomonlari orasida qolgan kesmasi shu nuqtada teng ikkiga bo'linsin.

3.23. Berilgan aylanaga shunday ikki urinma o'tkazingki, ular o'zaro berilgan burchak ostida kesishsin.

3.24. Aylana ichida berilgan nuqtadan shunday vatar o'tkazingki, u vatar shu nuqtada teng ikkiga bo'linsin.

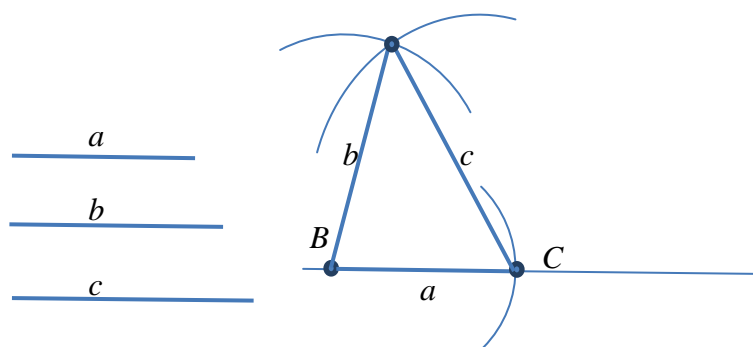
2-§. Ayrim elementlari berilgan uchburchaklarni yasash. Ayrim nuqtalari berilgan uchburchaklarni yasash

Uchburchak yasashga doir masalalar bir necha turlarga bo'linadi.

1. Berilgan ikki burchagi va bitta chiziqli elementi bo'yicha uchburchak yasash.
2. Ikki tomonning nisbati, bu tomonlar orasidagi burchagi va biror chiziqli elementi bo'yicha uchburchak yasash.
3. Shakli uchta tomonining berilgan nisbati orqali, kattaligi esa asosiy chiziqli elementlaridan biri orqali aniqlanuvchi uchburchak yasash.
4. Shaklning ikki tomonining nisbati va bu tomonlardan kattasi qarshisidagi burchak orqali, kattaligi esa chiziqli elementlaridan biri orqali aniqlanadigan uchburchaklar yasash.

Uchburchak yasash uchun uchta element berilishi kerak.

1-masala. Berilgan uchta tomoni bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning uchta a , b , c tomoni berilgan, uni yasash talab qilinadi (3.5-rasm).



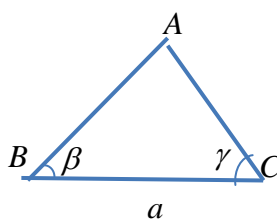
3.6-rasm

Yasash. Biror nur olib, uning B nuqtasidan uzunligi a ga teng bo'lgan BC kesmani, ya'ni $BC - a$ kesmani qo'yamiz (3.6- rasm). B nuqtani markaz qilib, sirkul bilan b radiusli, C nuqtani markaz qilib esa c radiusli aylanalar chizamiz. Shu aylanalar yo'plarining kesishgan nuqtasi uchburchakning A nuqtasidan iborat

bo'ladi. A nuqtani B va C nuqtalar bilan tutashtirib, talab qilingan $\triangle ABC$ ni hosil qilamiz.

Tekshirish. Masala uchburchakning barcha tomonlari uchun uchburchak tengsizligi bajarilgandagina yechimga ega bo'ladi.

2-masala. Bir tomoni va unga yopishgan burchaklari bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning a tomoni va ikkita, unga yopishgan $\angle B = \beta$ va $\angle C = \gamma$ burchaklari berilgan, uni yasash talab qilinadi (3.7-rasm).

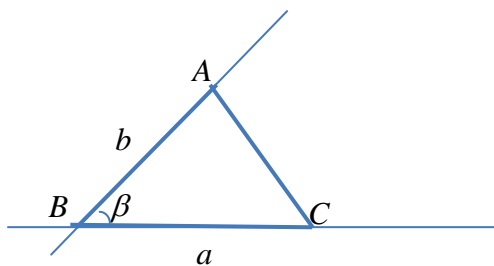


3.7-rasm

Yasash. Biror to'g'ri chiziq olib, uning B nuqtasidan uzunligi a ga teng $BC=a$ kesmani qo'yamiz. BC nurda uchi B nuqtada bo'lgan $\angle ABC = \beta$ burchakni sirkul (yoki transportir) yordamida yasaymiz. Shunga o'xshash, CB nurda uchi C nuqtada bo'lgan $\angle ACB = \gamma$ yasaymiz. Yasalgan AB va CA nurlar kesishib, uchburchakning A uchini beradi.

Tekshirish. Uchi berilgan nuqtada bo'lib, berilgan yo'nalishdagi burchakni yagona yo'l bilan yasash mumkin bo'lganligidan, masala yagona yechimga ega bo'ladi.

3-masala. Ikkita tomoni va ular orasidagi burchagi bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning $BA=c$, $BC=a$ tomonlari va ular orasidagi β burchak berilgan. Bu uchburchakni yasash talab qilinadi.

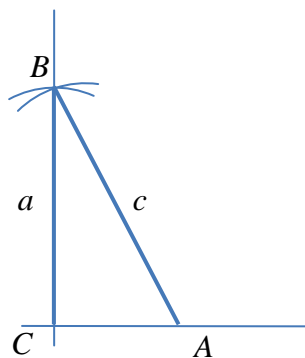


3.8-rasm

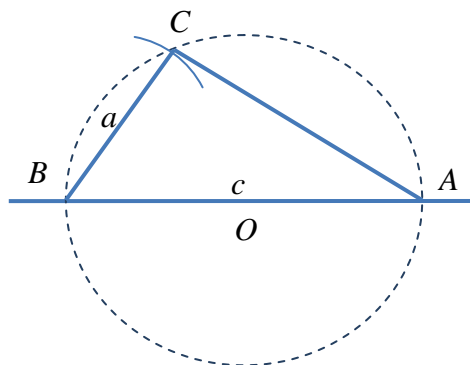
Yasash. Biror to'g'ri chiziqqa $BC=a$ kesmani qo'yamiz (3.8-rasm). BC nurda sirkul yordamida uchi B nuqtada bo'lgan $\angle ABC=\beta$ ni yasaymiz. So'ngra, BC nurda $BA=b$ kesmani qo'yamiz va A nuqtani C nuqta bilan tutashtirib, talab qilingan $\triangle ABC$ ni olamiz.

4-masala. Gipotenuzasi va kateti bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasash. Uchburchakning c gipotenuzasi va a kateti berilgan, uni yasash talab qilinadi.

Yasash. 1-usul. C nuqtada kesishuvchi ikkita o'zaro perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazamiz (3.9-a rasm). Ularning birida C uchdan $CB=a$ kesmani qo'yamiz. B nuqtadan $R=c$ radiusli yoy chizamiz. Yoyning to'g'ri burchakning ikkinchi tomoni bilan kesishish nuqtasi to'g'ri burchakli uchburchakning A uchidan iborat bo'ladi.



3.9- a rasm

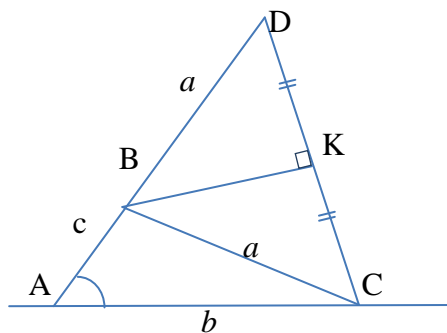


3.9- b rasm

2- usul. Biror to'g'ri chiziqda $BA=c$ kesmani qo'yamiz (3.9-b rasm). Kesmani teng ikkiga bo'lamiz va uning O o'rtasini belgilaymiz: $OA=OB$. Markazi O nuqtada va radiusi $R=AO$ bo'lgan yarim aylana chizamiz. So'ngra B (yoki A) nuqtani markaz qilib, yasalgan yarim aylana bilan kesishadigan $r=a$ radiusli yoyni chizamiz. Ularning kesishish nuqtasi uchburchakning C nuqtasidan iborat bo'ladi. C nuqtani A va B nuqtalar bilan tutashtirib, talab qilingan $\triangle ABC$ ni olamiz. Bu uchburchakda $\angle ACB=90^\circ$, chunki u diametrga tiralgan markaziy burchakdan iborat, $AB=c$ gipotenuza, $BC=a$ katetdir.

5-masala. Tomoni, burchagi va qolgan ikki tomoni yig'indisi berilgan uchburchakni yasash. Uchburchakning b tomoni, A burchagi va qolgan ikki tomonining $a+c$ yig'indisi berilgan, uni yasash talab qilinadi.

Tahlil. Yuqorida ko'rib o'tilganiga muvofiq, ikkita $AC=b$ va $AD=a+c$ tomonlar va ular orasidagi $\angle A$ bo'yicha $\triangle ADC$ ni yasash mumkin (3.10-rasm). Agar B izlanayotgan uchburchakning uchidan iborat bo'lsa, $\triangle BCD$ teng yonli bo'ladi va DC tomonga o'tkazilgan BK balandlik mediana ham bo'ladi. Demak, $\triangle ABC$ izlanayotgan uchburchak bo'ladi.



3.10-rasm

Yasash. Biror to'g'ri chiziqda A nuqtani tanlab olamiz va unda $AC=b$ kesmani joylashtiramiz. AC to'g'ri chiziqda uchi A nuqtada bo'lgan $\angle CAD$ ni yasaymiz. Bu burchakning AD tomonida $AD=a+c$ kesmani joylashtiramiz. So'ngra DC kesmaning o'rtasi K ni topamiz va u orqali $KB \perp DC$ o'tkazamiz. AD tomon va KB perpendikularning kesishish nuqtasi $\triangle ABC$ ning uchinchi B uchidan iborat bo'ladi.

Isbot. $\triangle ABC$ da yasalishi bo'yicha $AC=b$ va $\angle A$ berilgan. $\triangle BCD$ esa teng yonli: $BC=BD=a$, ya'ni $AB+BC=AB+BD=c+a$. Demak, $\triangle ABC$ masalaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

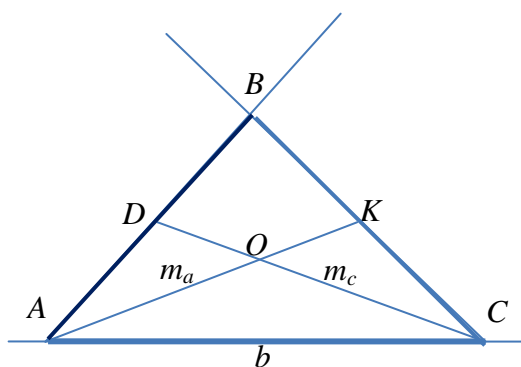
Tekshirish. Masala, uchburchak tengsizligiga muvofiq, $a+c>b$ bo'lganda yechimga ega bo'ladi.

6-masala. Asosi va ikkita yon tomoniga o'tkazilgan medianalari bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning asosi $AC=b$ va yon tomonlariga

o'tkazilgan m_a , m_c medianalari berilgan. Uchburchakni yasash talab qilinadi (3.11-rasm).

Tahlil. $\triangle ABC$ yasalgan va unda $AC=b$, $AK=m_a$, $CD=m_c$ deb faraz qilamiz. AK va CD medianalar O nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida uchburchakning uchidan hisoblaganda, 2:1 kabi nisbatda bo'linadi, ya'ni $AO = \frac{2}{3}m_a$ va $CO = \frac{2}{3}m_c$.

Shunday qilib, $\triangle AOC$ ning uchta tomoni ham ma'lum va uni yasash mumkin.



3.11-rasm

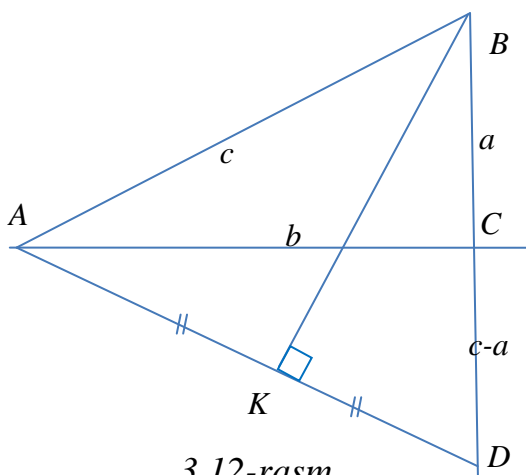
Yasash. Uchta tomoni bo'yicha $\triangle AOC$ ni yasaymiz. Biror to'g'ri chiziqda $AC=b$ kesmani joylashtiramiz. Radiusi $AO = \frac{2}{3}m_a$ va markazi A nuqtada hamda radiusi $CO = \frac{2}{3}m_c$ va markazi C nuqtada bo'lgan yoylarni chizamiz. Bu yoylar O nuqtada kesishadi. AO kesmaning davomida $OK = \frac{1}{3}m_a$ kesmani, CO kesmaning davomida esa $OD = \frac{1}{3}m_c$ kesmani joylashtiramiz. Hosil qilingan K va D nuqtalar, mos ravishda, BC va AB tomonlarning o'rtalari bo'ladi. So'ngra, AD va CK to'g'ri chiziqlarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasida $\triangle ABC$ ning B nuqtasini olamiz.

Isbot. Yasashga ko'ra, $AC=b$, $AK=m_a$, $CD=m_c$, $AD=DB$, $KC=KB$. Demak, talab qilingan $\triangle ABC$ uchburchak yasaldi.

Tekshirish. Masala uchburchak tengsizligi, ya'ni bu holda $\frac{2}{3}(m_a + m_c) > b$ tengsizlik bajarilganda yagona yechimga ega. Aks holda uning yechimi mavjud emas.

7-masala. Kateti va gipotenuzasi bilan ikkinchi kateti ayirmasi bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasash. Uchburchakning $AC=b$ kateti hamda $AB=c$ gipotenuza va ikkinchi katet $BC=a$ orasidagi ayirma berilgan. Uni yasash talab qilinadi (3.12-rasm).

Tahlil. $\triangle ADC$ izlanayotgan to'g'ri burchakli uchburchak bo'lsin. Shartga ko'ra $AC=b$ katet hamda $AB=c$ gipotenuza va $BC=a$ ikkinchi katet orasidagi $c-a$ ayirma berilgan. $c-a$ ayirmaning chizmada ko'rsatish uchun BC katetni BA gipotenuzada B uchdan joylashtirish mumkin. Biz teskarisini amalga oshiramiz, ya'ni BA gipotenuzani BC nurda B uchdan joylashtiramiz va $BD=c$ kesmani hosil qilamiz. U vaqtda $CD=BD-BC=c-a$ bo'ladi. A va D nuqtalarni tutashtirib, ikkita $AC=b$ va $CD=c-a$ kateti ma'lum bo'lgan to'g'ri burchakli $\triangle ACD$ hosil qilamiz. Shuning uchun $\triangle ACD$ ni yasash mumkin. B uch qanday topiladi? Ravshanki, $\triangle ABD$ teng yonli (chunki, $AB=BD$) va shuning uchun BK balandlik mediana ham bo'ladi.



Yasash. Ikkita kateti bo'yicha to'g'ri burchakli $\triangle ABD$ ni yasaymiz va $CD=c-a$ katetni DC yo'nalishda AC tomondan boshqa tomonga davom ettiramiz. To'g'ri burchakli $\triangle ACD$ ning AD gipotenuzasi o'rtasi bo'lgan K nuqtadan $KB \perp AD$

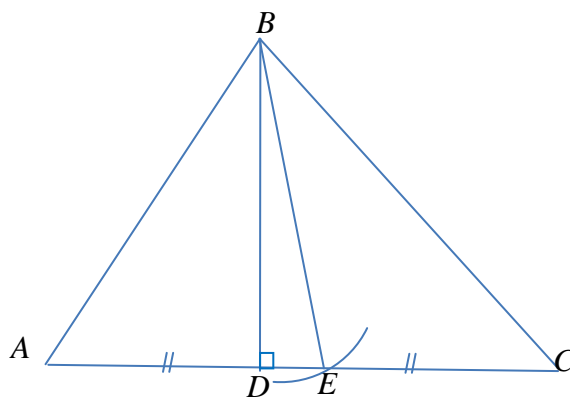
o'tkazamiz. Unda B nuqta KB va DC to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'ladi. So'ngra B nuqtani A nuqta bilan tutashtirib, izlangan to'g'ri burchakli $\triangle ABC$ ni olamiz.

Isbot. Yasalgan $\triangle ABC$ masalaning shartlarini qanoatlantiradi, chunki $AB=BD$ va $BD-BC=AB-BC=CD$.

Tekshirish. Masala uchburchakning ikki tomoni uzunliklari ayirmasi uchinchi tomoni uzunligidan kichik bo'lganda, ya'ni $c-a < b$ bo'lganda yechimga ega bo'ladi va u yagonadir.

8-masala. Asosi, balandligi va medianasi bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning $AC=b$ asosi, $BD=h$ balandligi va $BE=m_b$ medianasi berilgan, uni yasash talab qilinadi (3.13- rasm).

Tahlil. Asosi $AC=b$ bo'lgan $\triangle ABC$ yasalgan bo'lsin. Unda $BD=h$ balandlik, $BE=m_b$ mediana o'tkazamiz. U holda $\triangle BDE$ to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi hamda uning BD kateti va BE gipotenuzasi ma'lum bo'lib, E nuqta $\triangle ABC$ asosining o'rtasi bo'lganligidan $AE = EC = \frac{b}{2}$.



3.13-rasm

Yasash. To'g'ri $\angle BDE$ ni yasaymiz va to'g'ri burchakning tomonlaridan birida to'g'ri burchakning D uchidan $BD=h$ kesmani joylashtiramiz va $\triangle ABC$ ning B uchini hosil qilamiz. B nuqtani markaz deb olib, $BE=m_b$ radiusli yoyni to'g'ri burchakning DE tomoni bilan kesishguncha chizamiz. So'ngra DE to'g'ri

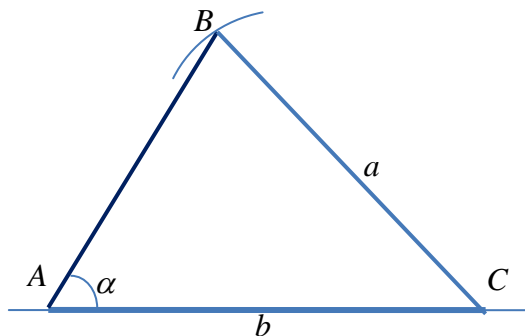
chiziqdagi E nuqtadan $AE = EC = \frac{b}{2}$ kesmalarni qo'yamiz. A va C nuqtalarni B nuqta bilan tutashtiramiz. Shuning bilan $\triangle ABC$ yasaldi.

Isbot. Yasashga ko'ra, $AC = EA + EC = b$, $BD = h$, $BE = m_b$ hamda $BD \perp AC$, shu sababli, $\triangle ABC$ izlanayotgan uchburchakdan iborat.

Tekshirish. Agar $m_b > h$ bo'lsa, masalaning yechimi mavjud va yagonadir.

9-masala. Ikki tomoni va ulardan birining qarshisidagi burchak bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning a , b tomonlari va a tomoni qarshisidagi α burchak berilgan. Uchburchakni yasash talab qilinadi.

Tahlil. $\triangle ABC$ yasalgan va $AC = b$, $CB = a$, $\angle A = \alpha$ bo'lsin (3.14-rasm). α burchakni yasash mumkin. C nuqtaning holati ma'lum. U holda B nuqta markazi C nuqtada bo'lib, radiusi $CB = a$ bo'lgan aylanaga tegishli bo'ladi.



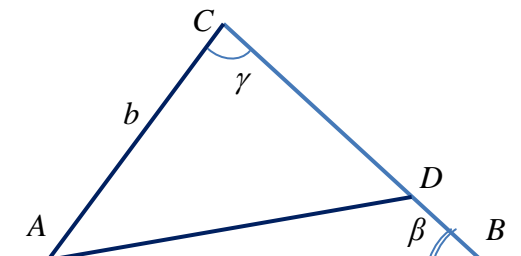
3.14-rasm

Yasash. Biror to'g'ri chiziqda $AB = b$ kesmani joylashtiramiz. Uchi A nuqtada bo'lgan AC tomonda $\angle BAC = \alpha$ ni yasaymiz. C uchini markaz qilib, $CB = a$ radiusli aylana chizamiz. Aylana yoyining α burchakning AB tomoni bilan kesishish nuqtasi $\triangle ABC$ ning B uchidan iborat bo'ladi.

Isbot. $\triangle ABC$ izlangan uchburchak bo'ladi, chunki yasalishiga ko'ra $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$ va $CB = a$ tomon α burchak qarshisida yotadi.

Tekshirish. α burchak va berilgan kesmalarni yagona ravishda yasash mumkin bo'lganligidan masala yagona yechimga ega.

10-masala. Ikkita burchagi va tomonlari ayirmasi bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning ikkita $\angle B = \beta$ va $\angle C = \gamma$ burchagi hamda a va b tomonlarining $a-b$ ayirmasi berilgan, uni yasash talab qilinadi (3.15- rasm).



3.15-rasm

Tahlil. $\triangle ABC$ izlangan uchburchak bo'lsin. Uning BC tomonida B uchidan boshlab $BD = a-b$ kesmani joylashtiramiz hamda A va D nuqtalarni tutashtiramiz. Modomiki, $BC = a$ ekan, $CD = a - (a-b)$, ya'ni $AC = CD$ bo'ladi. Demak, $\triangle ACD$ teng yonli va

$$\angle CAD = \angle CDA = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \text{ va } \angle ADB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Shunday qilib, $\triangle ABD$ da BD tomoni va unga yopishgan ikkita burchak ma'lum, shuning uchun uni yasash mumkin.

Yasash. Biror to'g'ri chiziqda $BD = a-b$ kesmani joylashtiramiz va BC tomondagi B nuqtada $\angle DBA = \beta$ ni, D nuqtada esa $\angle ADB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ ni yasaymiz. U holda DA va BA lar A nuqtada kesishadi. DA tomonda uchi A nuqtada bo'lgan $\angle CAD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ ni yasaymiz. So'ngra BD ni davom ettiramiz va u holda C uch AC va BC to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'ladi: $AD \cap DC = C$, $\triangle ABC$ esa izlangan uchburchakdir.

Isbot. Yasalishiga ko'ra $\angle CBA = \beta$, $\angle ADB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ holda $\angle CAD = 180^\circ - \gamma - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)$ bo'ladi. Shuningdek, yasalishiga ko'ra $\angle CAD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

Endi $\angle ADC$ ning kattaligini $\triangle ADB$ ning tashqi burchagini aniqlaymiz:

$$\angle ADC = \angle DAB + \angle ABD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

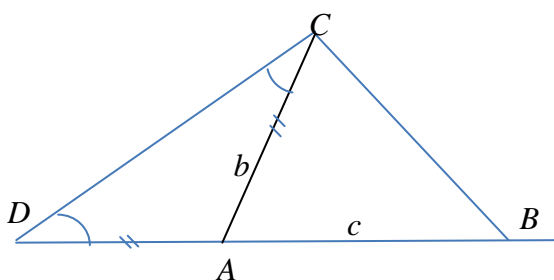
Modomiki, $\angle CAD = \angle CDA = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ ekan, $\triangle ADC$ teng yonli va

$\angle ADC = 180^\circ - 2\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \gamma$. Shunday qilib, $\triangle ABC$ izlangan uchburchakdan iborat.

Tekshirish. Kesma va burchaklar yagona ravishda yasalishi mumkinligidan, masala yagona yechimga ega.

11-masala. Ikki burchagi va ikki tomoni yig'indisi bo'yicha uchburchak yasash. Uchburchakning ikkita A va B burchagi hamda uning ikkita b va c tomoni uzunliklari yig'indisi $b+c$ berilgan, uni yasash talab qilinadi (3.16 -rasm).

Tahlil. Masala yechilgan bo'lsin. AB tomonning davomida $AD=AC$ kesmani joylashtiramiz, hamda D va C nuqtalarni tutashtiramiz. Hosil bo'lgan $\triangle ACD$ teng yonli bo'ladi va uning tashqi burchagidan iborat va shuning uchun, $\angle ACD = \angle ADC = \frac{\angle A}{2}$. $\triangle BCD$ da $BD=b+c$ tomon va ikkita unga yopishgan $\angle CBD = \angle B$, $\angle CBD = \frac{\angle A}{2}$ ma'lum.



3.16 -rasm

Yasash. Biror to'g'ri chiziqda $BD=b+c$ kesmani qo'yamiz. Uchlari B va D nuqtalarda bo'lgan $\angle CBD = \angle B$ va $\angle CDB = \frac{\angle A}{2}$ burchaklarni yasaymiz. Bu burchaklarning BC va DC tomonlari C nuqtada kesishadi. CD nurda uchi C

nuqtada bo'lgan $\angle ABD = \frac{\angle A}{2}$ burchakni yasaymiz. Bu burchakning CA tomoni BD tomon bilan kesishishi natijasida $\triangle ABC$ ning A uchini beradi.

Isbot. Yasalishiga ko'ra $\angle CAB = \angle B$, $BD = b + c$. Modomiki, $\angle ACD = \angle ADC = \frac{\angle A}{2}$ ekan, $\triangle ACD$ teng yonli bo'ladi va $AD = AC$.

U holda $AC + AB = b + c$ va $\angle CAB = 2\angle ACD = \angle A$. Demak, $\triangle ABC$ izlangan uchburchakdir.

Tekshirish. Agar $\angle A + \angle B < 180^\circ$ bo'lsa, berilgan nurda berilgan burchakni yagona tarzda yasash mumkin bo'lganligidan, masala yagona yechimga ega bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

3.25. Berilgan gipotenuza bo'yicha teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak yasang.

3.26. Asosi va unga tushirilgan balandlik bo'yicha teng yonli uchburchak yasang.

3.27. Berilgan balandligi bo'yicha teng tomonli uchburchak yasang.

3.28. Bir tomoni, shu tomoniga o'tkazilgan medianasi va shu tomon yonidagi bir burchagi bo'yicha uchburchak yasang.

3.29. Bir kateti va ikkinchi katetiga o'tkazilgan medianasi berilgan to'g'ri burchakli uchburchak yasang.

3.30. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu tomonning uchidan chiqqan medianasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.31. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va ikkinchi burchagining bissektrisasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.32. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu burchakning bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

3.33. Bir burchagi, shu burchagi uchidan chiqqan balandligi bilan

bissektrisasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.34. Bir tomoni, shu tomonga yopishgan burchagi uchidan o'tkazilgan balandligi bilan bissektrisasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.35. Bir tomoni, unga o'tkazilgan medianasi va bu mediana bilan ikkinchi tomoni orasidagi burchagi bo'yicha uchburchak yasang.

3.36. Ikki tomoni, ulardan biri bilan shu tomonga o'tkazilgan medianasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

3.37. Ikki burchagi va ulardan birining bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

3.38. Ikki burchagi va uchinchi burchagi uchidan tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

3.39. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va asosiga tushirilgan balandligining asosda hosil qilgan kesmalaridan biri bo'yicha uchburchak yasang.

3.40. Balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri, shu kesma-ga mos tomoni va shu tomon qarshisidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

3.41. Asosiga tushirilgan balandlikning asosda hosil qilgan kesmalari va asosga tushirilgan medianasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.42. Asosga tushirilgan balandlik va shu balandlikning asosda hosil qilgan kesmalari bo'yicha uchburchak yasang.

3.43. Asosi, unga tushirilgan balandligi va asosidagi burchaklardan biri (yoki bir yon tomoni) bo'yicha uchburchak yasang.

3.44. Asosi, unga tushirilgan balandligi va medianasi berilgan uchburchak yasang.

3.45. Asosi, asosiga va bir yon tomoniga tushirilgan balandliklari berilgan uchburchak yasang.

3.46. Asosi, uchidagi burchagi va yon tomoniga tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

3.47. Asosi va yon tomonlariga tushirilgan balandliklari bo'yicha uchburchak yasang.

3.48. Asosiga tushirilgan balandligi, uchidagi burchagi va bir yon tomoni bo'yicha uchburchak yasang.

3.49. Balandligi, asosiga yopishgan bir burchagi va bir yon tomoni bo'yicha uchburchak yasang.

3.50. Asosiga o'tkazilgan balandligi va medianasi, bir yon tomoni (yoki balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri) bo'yicha uchburchak yasang.

3.51. Ikki tomoni va ularning biriga o'tkazilgan medianasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.52. Uchidagi burchagi, uning bissektrisasi va yon tomoniga tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

3.53. Asosi, unga yopishgan burchagi va ichki chizilgan aylanasining radiusi berilgan uchburchak yasang.

3.54. Ikki tomoni va uchinchi tomoniga tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

3.55. Balandligi, uning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri va shu kesmaga mos yon tomoniga o'tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

3.56. Balandligi, uning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri va shu kesmaga yopishgan burchagining bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

3.57. Balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri, shu kesmaga yopishgan burchagi va shu burchakning bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

3.58. Balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri, shu kesmaga yopishgan burchagi va bu burchak uchidan chiqqan yon tomoni bilan unga o'tkazilgan mediana orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

3.59. Bir tomonining bir uchidagi burchagi, uning ikkinchi uchidan o'tkazilgan balandligi va shu tomon bilan unga o'tkazilgan medianasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

3.60. Uchidagi burchagi, bir yon tomoniga o'tkazilgan balandligi va ikkinchi yon tomoniga o'tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

3.61. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va asosi bilan unga o'tkazilgan medianasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

3.62. Bir burchagining bissektrisasi, shu burchagi uchidan o'tkazilgan balandligi va bir yon tomoni (yoki bir burchagi) bo'yicha uchburchak yasang.

3.63. Balandligi, uning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri va uchidagi burchagining bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

3.64. Ikki tomoniga o'tkazilgan medianalari, ular orasidagi burchagi bo'yicha uchburchak yasash.

3.65. Ikki tomoniga o'tkazilgan medianalari bilan shu tomonlardan biri berilgan uchburchak yasang.

3.66. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu burchagi uchidan o'tkazilgan medianasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.67. Ikki tomoni va uchinchi tomoniga o'tkazilgan medianasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.68. Berilgan uchta medianasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.69. Bir katetiga o'tkazilgan medianasi bilan gipotenuzasi bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasang.

3.70. Berilgan kesmani parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazish usulidan boshqa usul bilan teng uchga bo'ling.

3.71. Asosi, balandligi va bir yon tomoniga o'tkazilgan medianasi bo'yicha uchburchak yasang.

3.72. Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni berilgan ikki burchagi bo'yicha yasang.

3.73. Berilgan aylanaga tashqi chizilgan uchburchakni berilgan ikki burchagi bo'yicha yasang.

3.74. Tashqi chizilgan aylanasi radiusi, uchidagi burchagi va balandligi berilgan uchburchak yasang.

3.75. Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni, ikki tomonining yig'indisi va ulardan birining qarshisidagi burchagi bo'yicha yasang.

3.76. Berilgan aylanaga tashqi chizilgan to'g'ri burchakli teng yonli uchburchak yasang.

3-§. O'xshashlik va gomotetiya yordamida uchburchaklar yasash

Bir shaklni unga o'xshash boshqa kattalikdagi shaklga akslantirish masalasi kundalik hayotimizda tez-tez uchraydi. Masalan, biror bino yoki shahar chizmasini ma'lum masshtabda tuzish, biror hududning geografik xaritasini masshtab asosida kichraytirib chizish. Yasashga doir geometrik masalalarning birmunchasini yechishda ham ana shu masala bilan shug'ullanishga to'g'ri keladi.

Bunday ishlarni bajarish har qanday shaklning shaklini o'zgartirmay, uning kattaligini o'zgartirish – gomotetiya orqali o'rganiladi.

1-ta'rif. S nuqta va $k \neq 0$ son berilgan bo'lsa, S dan boshqa har qanday M nuqtaga quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi M_1 nuqtani mos keltiruvchi akslantirish **gomotetik akslantirish** yoki **gomotetiya** deyiladi.

- 1) M_1 nuqta SM chiziqda yotadi;
- 2) $SM_1:SM=k$ yoki $SM_1=k \cdot SM$;
- 3) k musbat bo'lganda, M_1 va M nuqtalar S nuqtadan bir tomonda, k manfiy bo'lganda esa M_1 va M nuqtalar S nuqtadan turli tomonda yotadi. M_1 nuqta M nuqtaga **gomotetik mos nuqta** deyiladi.

Bunda S nuqta gomotetiya **markazi** va k esa gomotetiya **koeffitsiyenti** deyiladi.

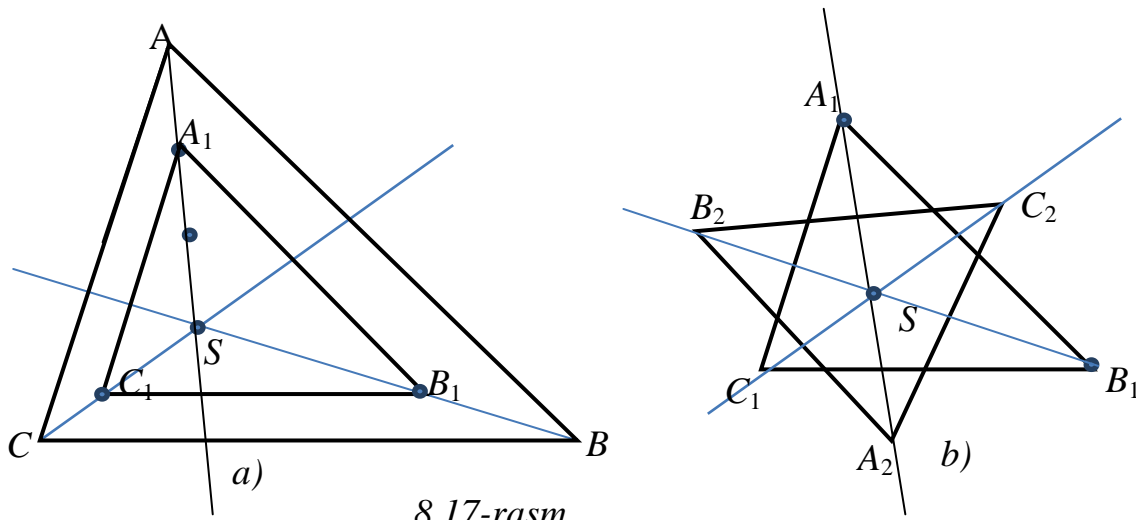
2-ta'rif. F shaklni tashkil etuvchi barcha nuqtalari berilgan S markaz va $k \neq 0$ ko'effitsiyent bilan gomotetik akslantirishdan hosil bo'lgan to'plam F shaklning gomotetik shakli deyiladi va F_1 bilan belgilanadi.

Gomotetiyaning xossalari.

1. To'g'ri chiziq nuqtalarini gomotetik akslantirilganda ular yana to'g'ri chiziqqa o'tadi, ya'ni har qanday to'g'ri chiziq gomotetik shakli yana to'g'ri chiziq bo'ladi.
2. Gomotetiya nur yana nurga akslanadi.
3. Gomotetiya burchak kattaligi saqlanadi.
4. Gomotetiya to'g'ri chiziqlarning paralleligi saqlanadi.
5. Gomotetiya natijasida kesmaning uzunigi $|k|$ marta o'zgaradi.

2-masala. Berilgan ABC uchburchakni uning ichida berilgan S nuqtaga nisbatan $k = \pm \frac{2}{3}$ ko'effitsiyentlar bo'yicha gomotetik akslantiring.

Yechish. Berilgan S nuqtani uchburchakning A , B va C uchlari bilan tutashtirib, ularni $k = \frac{2}{3}$ ko'effitsiyent bo'yicha akslantiramiz. Hosil bo'lgan A_1 , B_1 va C_1 nuqtalarni o'zaro tutashtirib ABC uchburchakka gomotetik mos $A_1B_1C_1$ uchburchak hosil bo'ladi.



8.17-rasm

A_1, B_1 va C_1 nuqtalarning har birini S nuqtaga nisbatan simmetrik akslantirib A_2, B_2 va C_2 nuqtalarni topamiz. A_2, B_2 va C_2 nuqtalarni o'zaro tutashtirib ABC uchburchakka gomotetik mos $A_2B_2C_2$ uchburchak hosil bo'ladi (8.17-*b* rasm).

Mustaqil ishlash uchun masalalar

3.77. Aylana tashqarisida berilgan nuqtadan bu aylanaga shunday kesuvchi o'tkazingki, uning tashqi qismi ichki qismiga teng bo'lsin.

3.78. O'zaro kesishuvchi ikki aylananing kesishish nuqtalaridan biri orqali shunday kesuvchi o'tkazingki, bundan hosil bo'lgan ikki vatarning yig'indisi berilgan kesmaga teng bo'lsin.

3.79. Aylana va unda A, B va C nuqtalar berilgan. Bu aylanaga shunday uchburchak ichki chizingki, uning bissektrisalari davom ettirilganda aylana bilan A, B va C nuqtalarda kesishsin.

3.80. Bundan oldingi masaladagi bissektrisalar o'rniga balandliklarni oling.

3.81. Aylana va undan N, V va M nuqtalar berilgan; aylanaga shunday ichki uchburchak chizingki, uning bir uchidan chiquvchi balandlik, bissektrisa va medianasi (davom ettirilganda) mos ravishda N, V va M nuqtalarda aylana bilan kesishsin.

3.82. Berilgan m to'g'ri chiziqqa parallel qilib shunday kesma chizingki, u berilgan a kesmaga teng bo'lib, uning bir uchi berilgan aylanada va ikkinchi uchi boshqa bir berilgan to'g'ri chiziqda yotsin.

3.83. Berilgan uchburchakka tashqi chizilgan shunday uchburchak yasangki, u berilgan ikkinchi uchburchakka o'xshash bo'lsin.

3.84. Berilgan ikki uchburchakdan biriga o'xshash va ikkinchisiga tengdosh bo'lgan uchburchak yasang.

3.85. Berilgan uchburchakka tengdosh bo'lgan teng tomonli uchburchak yasang.

3.86. Teng tomonli uchburchakka ichki chizilgan shunday uchta doira chizingki, ularning har biri qolgan ikkitasiga urinishi bilan birga uchburchakning ikki tomoniga ham urinsin.

3.87. A , B , C nurlar berilgan. Shunday aylana chizingki, uning markazi B da yotib, o'zi A nurga urinsin va C nurdan berilgan a uzunlikdagi vatar ajratsin.

3.88. Uchta R_1 , R_2 , R_3 aylana berilgan. Shunday uchburchak yasangki, uning uchlari berilgan aylanalarda yotib, tomonlari esa markazlar chiziqlariga parallel bo'lsin.

3.89. Berilgan A va B nuqtalar orqali o'tuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan a to'g'ri chiziq bilan kesishganda hosil bo'lgan vatar yoyining balandligi berilgan h kesmaga teng bo'lsin.

3.90. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan a to'g'ri chiziqdan berilgan h masofada yotsin.

3.91. Berilgan M nuqtadan o'tib, berilgan A aylanaga urinuvchi shunday aylana chizingki, uning berilgan a to'g'ri chiziq bilan kesishishi natijasida hosil bo'lgan yoyining balandligi berilgan h kesmaga teng bo'lsin.

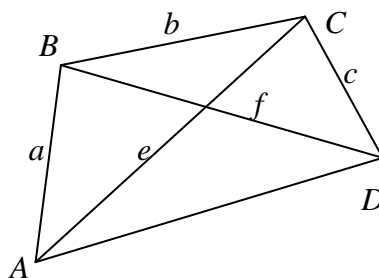
3.92. Berilgan M nuqtadan o'tib, berilgan A aylanaga urinuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan a to'g'ri chiziqdan berilgan h masofada yotsin

3.93. Berilgan M nuqtadan o'tib, berilgan a to'g'ri chiziqqa urinuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan A aylanadan berilgan k masofada yotsin.

4-§. To'rtburchaklar va aylanalarga oid geometrik yasashlar

Qavariq to'rtburchakni yasash uchun kamida uning beshta elementi ma'lum bo'lishi va bulardan kamida ikkitasi chiziqli element bo'lishi shart.

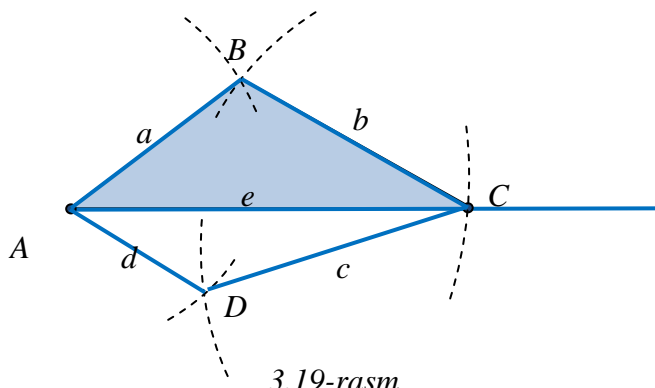
To'rtburchakning tomonlarini 3.18-rasmda ko'rsatilgandek $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ va $AD=d$, uning diagonalari $AC=e$, $BD=f$, burchaklari $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ bilan belgilashni shart qilib olamiz. Tahlil chizmada yordamchi shaklni bo'yalgan holatda ko'rsatamiz.



3.18-rasm

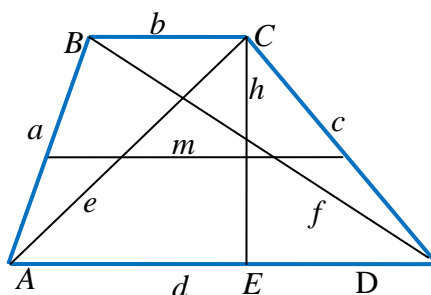
1-masala. To'rtta tomoni va bitta diagonalidan foydalanib, to'rtburchak yasang.

Yasash. To'rt burchakning a, b, c, d va e elementlari berilgan bo'lsin. a, b , va e kattaliklaridan foydalanib ABC uchburchakni yasaymiz. Buning uchun A nuqtadan chiquvchi nurda sirkul yordamida A nuqtani markaz qilib to'rtburchak diagonalining uzunligi e ga teng radiusli aylana chizamiz, aylana va nurning kesish nuqtasini C bilan belgilaymiz. A va C nuqtalarni markaz qilib mos ravishda radiusi a va b ga teng bo'lgan aylanalar chizamiz. Bu aylanalarning kesishish nuqtasini B bilan belgilaymiz (3.19-rasm). A va C nuqtalarni markaz qilib mos ravishda radiusi d va c ga teng bo'lgan aylanalar chizamiz. Bu aylanalarning kesishish nuqtasini D bilan belgilaymiz. Hosil bo'lgan A, B, C va D nuqtalarni o'zaro birlashtirsak, $ABCD$ to'rtburchakni hosil qilamiz. Bu izlanayotgan to'rtburchak bo'ladi.



3.19-rasm

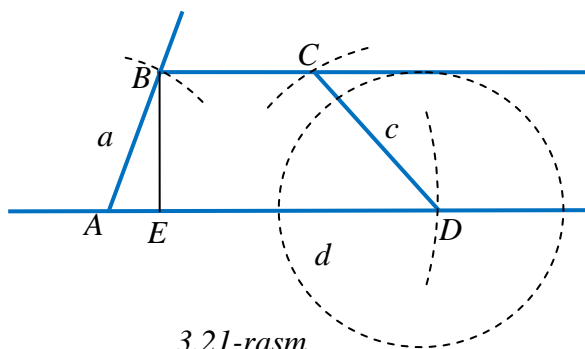
Har xil tomonli trapetsiyani yasash uchun kamida uning to'rtta elementi berilgan va bulardan ikkitasi trapetsiya burchaklari bo'lib, ular bir-biriga bog'liq bo'lmasligi kerak. Trapetsiyaning elementlarini ham to'rtburchak elementlari kabi belgilab, uning balandligini h , o'rta chizig'ini m harfi bilan ko'rsatamiz (3.20-rasm).



3.20-rasm

2-masala. Uch tomoni a , c , d va A burchagiga ko'ra trapetsiya yasang.

Yasash. Buning uchun A nuqtadan chiquvchi nurda sirkul yordamida A nuqtani markaz qilib radiusi d ga teng aylana chizamiz, aylana va nurning kesish nuqtasini D bilan belgilaymiz (3.21-rasm).

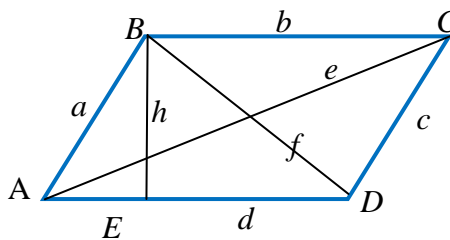


3.21-rasm

A nuqtada $\angle A$ burchakka teng burchakni yasaymiz. $\angle A$ burchakning ikkinchi tomonida A nuqtani markaz qilib radiusi a ga teng aylana chizamiz va burchak tomoni bilan kesish nuqtasini B bilan belgilaymiz. B nuqtadan AD tomonga BE perpenkular to'g'ri chiziq o'kazamiz. D nuqtani markaz qilib radiusi BE ga teng bo'lgan aylana chizamiz. B nuqtadan aylanaga urinma o'tkazamiz. D nuqtani markaz qilib radiusi c ga teng bo'lgan aylana chizamiz va aylana urinmasi

bilan kesishish nuqtasini C bilan belgilaymiz. Topilgan A , B , C va D nuqtalar izlanayotgan trapetsiyaning uchlari bo'ladi.

Parallelogramm yasash uchun kamida uning uchta elementi ma'lum bo'lishi va ulardan ikkitasi chiziqli element bo'lishi kerak. Parallelogramm elementlarini ham yuqoridagi kabi belgilaymiz (3.22-rasm).

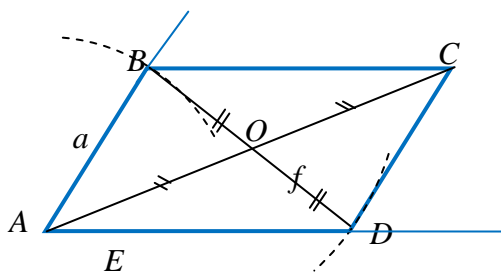


3.22-rasm

Parallelogramning xususiy ko'rinishi bo'lgan to'g'ri to'rtburchak va romb yasash uchun ularni aniqlovchi ikkita mustaqil geometrik ma'lumot berilishi (kamida bittasi chiziqli element) kerak. Bu shakllar ta'rifini e'tiborga olganda, ularni aniqlovchi shartlarni ham, parallelogramdagi singari, uchta deb hisoblash mumkin, chunki rombdagi uning tomonlari tengligi, to'g'ri to'rtburchakda burchaklarining to'g'riligi ma'lum uchinchi elementlardir.

3-masala. Uch tomoni a , f va A burchagiga ko'ra parallelogram yasang.

Yasash. Buning uchun A nuqtadan chiquvchi nur berilgan bo'lsin. A nuqtada $\angle A$ burchakka teng burchakni yasaymiz. $\angle A$ burchakning ikkinchi tomonida A nuqtani markaz qilib radiusi a ga teng aylana chizamiz va burchak tomoni bilan kesish nuqtasini B bilan belgilaymiz (3.23-rasm).



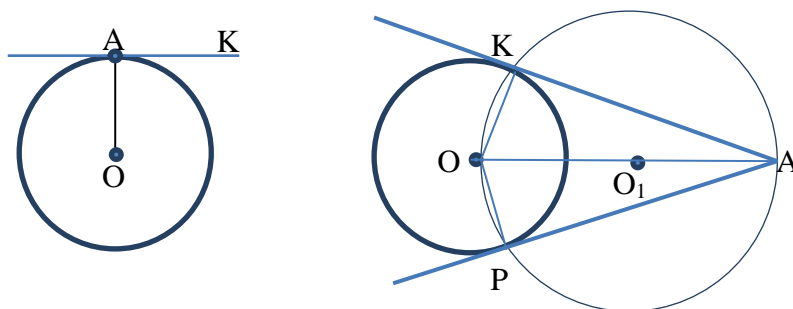
3.23-rasm

Sirkul yordamida B nuqtani markaz qilib radiusi f ga teng aylana chizamiz, aylana va A nuqtadan chiquvchi nurning kesish nuqtasini D bilan belgilaymiz.

Parallelogramning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linishini hisobga olib, BD kesmaning o'rtasini topamiz va O bilan belgilaymiz. O nuqtaga nisbatan A nuqtaning simmetrik nuqtasini topamiz va C bilan belgilasak, topilgan A, B, C va D nuqtalar parallelogramning uchlari bo'ladi.

4-masala. Berilgan nuqtadan berilgan aylanaga urinma to'g'ri chiziq o'tkazish.

Tahlil. Agar berilgan A nuqta aylanada yotsa (3.24-rasm) aylananing urinish nuqtasiga o'tkazilgan radiusi urinmaga perpendikular bo'ladi. Agar A nuqta aylanadan tashqarida yotsa, urinmaning va urinish nuqtasida o'tkazilgan radiusning xossasiga ko'ra, to'g'ri burchakli $\triangle OAK$ ni yasash zarur. Bunda ichki chizilgan $\angle AKO$, agar u diametrga tiralgan bo'lsa, to'g'ri burchakdan iborat.



3.24-rasm

Yasash. Agar A nuqta aylanada yotsa, bu nuqtaga aylananing radiusini o'tkazamiz. So'ngra A nuqta orqali o'tkazilgan radiusga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Agar A nuqta aylanadan tashqarida yotsa, A nuqtani O markaz bilan tutashtiramiz. AO kesmani diametr deb olib, berilgan aylana bilan K va P nuqtalarda kesishadigan aylana yasaymiz. So'ngra izlanayotgan urinmalardan iborat AK va AP to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz.

Isbot. Agar A nuqta aylanaga tegishli bo'lsa, AK to'g'ri chiziqning OA radiusga perpendikularligidan, aylana va AK to'g'ri chiziq A nuqtadan boshqa umumiy nuqtalarga ega bo'lmasligi kelib chiqadi. Agar A nuqta aylanadan

tashqarida yotsa, OK va OP radiuslarni o'tkazib, biz ikkita to'g'ri burchakli $\triangle AOK$ va $\triangle AOP$ ni olamiz, chunki AO diametrga tiralgan yo'ylar bo'lgani uchun

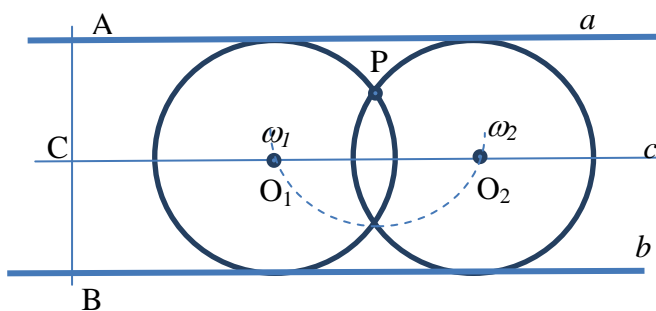
$$\angle AKO = \angle APO = \frac{\pi}{2}.$$

Modomiki, $AK \perp OK$, $AP \perp OP$ ekan, AK va AP to'g'ri chiziqlar berilgan aylana bilan bittadan umumiy K va P nuqtalarga ega bo'ladi.

Tekshirish. Agar A nuqta aylanaga tegishli bo'lsa, masala yagona yechimga ega bo'ladi. Agar A nuqta aylanadan tashqarida yotsa, masala ikkita yechimga ega, ya'ni ikkita AK va AP urinmani o'tkazish mumkin bo'ladi. Agar A nuqta aylana bilan chegaralangan doirada yotsa, masala yechimga ega emas.

5-masala. Berilgan nuqtadan ikkita parallel to'g'ri chiziqqa uringan holda o'tuvchi aylana yasash.

Tahlil. a va b parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa d bo'lsin (3.25-rasm). U holda izlanayotgan aylananing radiusi $\frac{d}{2}$ bo'lishi shart. Aylananing markazi quyidagi ikki shartni qanoatlantirishi zarur: 1) u a va b to'g'ri chiziqlarning har biridan teng uzoqlikda joylashishi; 2) aylananing markazi berilgan P nuqtadan masofada joylashishi.



3.25-rasm

Yasash. a to'g'ri chiziqning ixtiyoriy A nuqtasidan b to'g'ri chiziqqa AB perpendikular o'tkazamiz, ya'ni $AB \cup b = B$. AB kesmaning o'rtasi C ni topamiz va C nuqtadan AB kesmaga perpendikular c to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra P nuqtadan radiusi $\frac{d}{2}$ bo'lgan aylana o'tkazamiz. Bu aylananing c to'g'ri chiziq

bilan kesishish nuqtasi O_1 (va O_2) izlanayotgan $(O_1; \frac{d}{2})$ aylananing markazi bo'ladi.

Isbot. Modomiki, to'g'ri chiziq berilgan a va b to'g'ri chiziqlardan $\frac{d}{2}$ masofada joylashgan ekan, $(O_1; \frac{d}{2})$ aylana ham a to'g'ri chiziqqa, ham b to'g'ri chiziqqa urinadi. Yasashga ko'ra, $PO_1 = \frac{d}{2}$ bo'lganligidan, yasalgan aylana P nuqtadan o'tadi.

Tekshirish. Agar P nuqta a va b to'g'ri chiziqlar orasida yotsa, masala ikkita $(O_1; \frac{d}{2})$ va $(O_1; \frac{d}{2})$ yechimga ega bo'ladi. Agar P nuqta a yoki b to'g'ri chiziqda yotsa, masala yagona yechimga ega bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

3.94. Bir tomoni, diagonal bilan ikkinchi qo'shni tomonining ayirmasi berilgan to'g'ri turtburchak yasang.

3.95. Bir tomoni bilan diagonalining yig'indisi berilgan kvadrat yasang.

3.96. Diagonal bilan bir tomonining ayirmasi berilgan kvadrat yasang.

3.97. Diagonallarining yig'indisi va diagonal bilan bir tomoni orasidagi burchagi berilgan romb yasang.

3.98. Diagonallarining ayirmasi va diagonal bilan bir tomoni orasidagi burchagi berilgan romb yasang.

3.99. Diagonal bilan tomonining yig'indisi va bir burchagi berilgan romb yasang.

3.100. Diagonal bilan tomonining ayirmasi va bir burchagi berilgan romb yasang.

3.101. Bir tomoni va diagonallarining yig'indisi berilgan romb yasang,

3.102. Bir tomoni va diagonallarining ayirmasi berilgan romb yasang.

3.103. Bir tomoni, diagonallarining yig'indisi va diagonallari orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

3.104. Bir tomoni, diagonallarining ayirmasi va diagonallari orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

3.105. Bir tomoni, unga qo'shni bo'lgan ikkinchi tomoni bilan bir diagonalining yig'indisi va bir burchagi berilgan parallelogramm yasang.

3.106. Bir tomoni, unga qo'shni bo'lgan ikkinchi tomoni bilan bir diagonalining ayirmasi va bir burchagi berilgan parallelogramm yasang.

3.107. Perimetri, bir diagonali va shu diagonali bilan bir tomoni orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

3.108. Perimetri, bir burchagi va bir diagonali berilgan parallelogramm yasang.

3.109. Berilgan parallel ikki to'g'ri chiziqqa urinib, quyidagi shartlardan birini qanoatlantiruvchi aylana chizing:

I. Berilgan nuqtadan o'tsin.

II. Berilgan uchinchi to'g'ri chiziqqa urinsin.

III. Berilgan aylanaga urinsin.

3.110. Uchta teng aylanaga ichki (yoki tashqi) urinuvchi aylana chizing.

3.111. Qarama-qarshi ikki uchi ma'lum ikki nuqtada bo'lib, uchinchi uchi berilgan aylanada yotuvchi romb yasang.

3.112. Ma'lum radiusli va berilgan A nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan B nuqtadan unga o'tkazilgan urinma ma'lum a kesmaga teng bo'lgan aylana chizing.

3.113. Ma'lum R radiusli va berilgan O nuqtadan o'tib, berilgan ikkinchi O_1 nuqtadan ma'lum φ burchak ostida ko'rinuvchi aylana chizing.

3.114. Markazi berilgan shunday aylana chizingki, berilgan ikkinchi nuqtadan unga o'tkazilgan urinma ma'lum uzunlikda bo'lsin.

3.115. Asosi va ikki balandligi berilgan parallelogramm yasang.

3.116. Berilgan radius bilan berilgan to'g'ri chiziqning ma'lum nuqtasida urinuvchi aylana chizing.

3.117. Berilgan radius bilan shunday aylana chizingki, u kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa urinsin.

3.118. Berilgan A nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqning ma'lum B nuqtasida urinuvchi aylana chizing.

3.119. Berilgan burchakning tomonlariga urinuvchi shunday aylana chizingki, u burchakning bir tomoniga oldindan berilgan nuqtada urinsin.

3.120. Berilgan radius bilan berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi aylana chizing.

3.121. Berilgan radius bilan berilgan nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizing.

3.122. Berilgan radius bilan berilgan ikki aylanaga urinuvchi aylana chizing.

3.123. Berilgan radius bilan berilgan nuqtadan o'tib, kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqdan teng vatarlar ajratuvchi aylana chizing.

3.124. Berilgan radius bilan berilgan aylanaga urinib, kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqdan teng vatarlar ajratuvchi aylana chizing.

3.125. Berilgan radius bilan berilgan aylanaga urinib, berilgan to'g'ri chiziqdan ma'lum uzunlikdagi vatar ajratuvchi aylana chizing.

3.126. Berilgan radius bilan kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqning biriga urinib, ikkinchisidan ma'lum uzunlikdagi vatar ajratuvchi aylana chizing.

3.127. Asosi, balandligi va bir diagonali berilgan parallelogramm yasang.

3.128. Bir tomoni va ikki diagonali berilgan parallelogramm yasang.

3.129. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va ikki yon tomoni berilgan trapetsiya yasang.

3.130. Ikki asosi va diagonali berilgan teng yonli trapetsiya yasang.

3.131. Asoslarining ayirmasi, yon tomonlari va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

3.132. Asoslarining ayirmasi, bir yon tomoni, bir burchagi va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

3.133. Asoslarining ayirmasi, asosidagi ikkita burchagi va bir

diagonali berilgan trapetsiya yasang.

3.134. Asoslarining ayirmasi, yon tomonlarining yig'indisi, bir burchagi va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

3.135. Asosi, ikki diagonali va diagonallari orasidagi burchagi berilgan trapetsiya yasang.

3.136. Ikki asosi, bir diagonali va diagonallari orasidagi burchagi berilgan trapetsiya yasang.

3.137. Ikki asosi, diagonali va shu diagonalning katta asos bilan hosil qilgan burchagi berilgan trapetsiya yasang.

5-§. Nostandard geometrik yasashlar

Tekislikdagi nuqtalarning to'plamlarini topish uchun xossasi ko'rsatilgan nuqtalardan bir nechta sirkul va chizg'ich yordamida topiladi. Bu nuqtalarning bir-biriga nisbatan vaziyati ularning biror tanish F shaklning nuqtalari ekanligidan darak berishi mumkin. F shakl xossalari ko'rsatilgan nuqtalarning to'plami bo'lishi uchun uning har qanday nuqtasi masala shartida berilgan xossaga ega bo'lishi va o'sha xossali hamma nuqtalar F shaklda yotishi shart, yoki F shaklga qarashli bo'lmagan nuqtalar masala shartida ko'rsatilgan xossaga ega bo'lmasligi va bu xil xossaga ega bo'lmagan nuqtalar F shaklda yotmasligi kerak.

1-masala. Shunday nuqtalar to'plami topilsinki, bu nuqtalarning har biridan berilgan kesma to'g'ri burchak ostida ko'rinsin.

Biror M nuqtadan AB kesmaning ikki uchiga qarashdan hosil bo'lgan MA va MB nurlar "qarash nurlari" deb, M nuqta esa "qarash nuqtasi" deb ataladi; qarash nurlari orasida hosil bo'lgan $AMB = \alpha$ "qarash burchagi" deyiladi. Bu holda " AB kesma M nuqtadan α burchak ostida ko'rinadi" deb aytadilar.

Qarash burchagi faqat 0° bilan 180° oralig'ida o'zgarishi mumkin: qarash nuqtasi kesmadan uzoqlashgan sari qarash burchagi kichraya boradi va aksincha, qarash nuqtasi kesmaga yaqinlashgan sari qarash burchagi kattalasha boradi.

Yechish. AB kesmani diametr qilib chizilgan aylananing hamma nuqtalaridan AB diametr to'g'ri burchak ostida ko'rinishi isbot qilamiz. Buning uchun aylananing ixtiyoriy X nuqtasini olib, uni berilgan kesmaning A va B uchlari bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan AXB burchak diametriga tiraluvchi ichki chizilgan burchak bo'lib, bunday burchaklarning to'g'ri burchak ekanligi oldindan ma'lum. Demak, X nuqtadan AB kesma to'g'ri burchak ostida ko'rinadi.

Shunday qilib, aylananing (A va B nuqtalaridan boshqa) hamma nuqtalari masalada berilgan xossaga ega.

Xulosa. Berilgan AB kesma to'g'ri burchak ostida ko'rinadigan nuqtalar to'plami berilgan kesmani diametr qilib chizilgan aylanadan iboratdir.

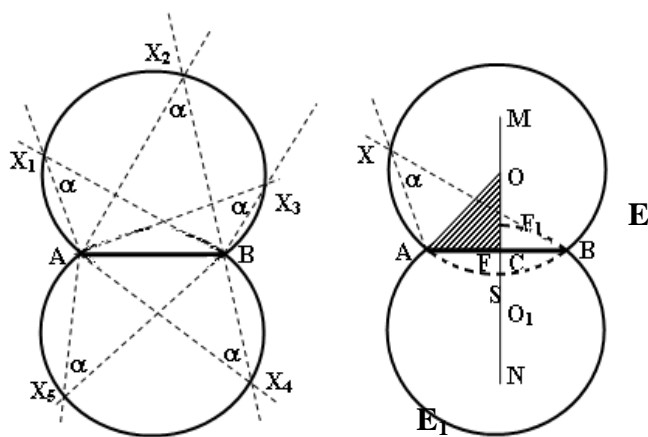
Eslatma. Topilgan to'plamga berilgan A va B nuqtalar kirmaydi, chunki bu nuqtalardan AB kesma 90° li burchak ostida ko'rinmaydi.

2-masala. Shunday nuqtalarning to'plami topilsinki, berilgan kesma bu nuqtalarning har biridan berilgan α burchak ostida ko'rinsin.

Tahlil. Aylananing bir vatariga tiraluvchi ichki burchaklari o'zaro teng ekanligidan foydalansak, bu nuqtalar to'plami sektor yoyini tashqil qiladi. Berilgan kesmani uchburchakning bir tomoni deb uchburchakka tashqi aylana chizamiz. Masalada berilganlar yordamida bu uchburchakni yasab, uning yordamida esa izlanuvchi aylanani chizish mumkin bo'lgani uchun bu uchburchakni yordamchi shakl deb hisoblaymiz (3.26-rasm).

Shunday qilib, masalada berilgan xossaga ega bo'lgan har qanday X nuqtaning ma'lum aylanada yotishi aniqlanadi. Endi bu aylananing chizilishini ko'ramiz.

Isbot. Endi chizilgan aylanalarda yotuvchi hamma nuqtalar ko'rsatilgan xossaga egami yoki yo'qmi degan savolga javob beramiz. Buning uchun O markazli aylananing AEB yoyida ixtiyoriy bir X nuqtani olib, uni A va B nuqtalar bilan tutashtiramiz (3.26-rasm).



3.26-rasm

AXB burchak ichki chizilgan bo'lgani uchun u o'zi tiralgan AFB yoyning yarmi bilan o'lchanadi; bu yoyning yarmi esa AS yoydan iborat bo'lib, bu yoyga AOS markaziy burchak tiralgandir. Bu burchak esa berilgan α ga teng, chunki to'g'ri burchakli AOC uchburchakning ikkinchi o'tkir burchagi, yasalishicha, $90^\circ - \alpha$ ga teng edi.

Shuning uchun X nuqtadan AB kesma berilgan α burchak ostida ko'rinadi, ya'ni bu nuqta masalada berilgan xossaga egadir. Lekin aylananing ASB yoyiga qarashli hech qanday nuqta ($\alpha \neq 90^\circ$ bo'lsa) masalaning talabiga javob bera olmaydi, chunki bu ASB yoyning nuqtasini A va B nuqtalar bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan ichki chizilgan burchak AEB yoyning yarmi bilan o'lchangani uchun berilgan α burchakka teng bo'lmaydi, ya'ni ASB yoyning nuqtasidan berilgan AB kesma berilgan burchak ostida ko'rinmaydi.

Xuddi shunday muhokamalar orqali O_1 markazli aylananing AE_1B yoyidagi nuqtalarning masala talabiga javob bera olishiga va AF_1B yoyidagi nuqtalarning esa masala talabiga javob bera olmasligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, yuqoridagi topilgan ikki aylananing hamma nuqtalari ham ko'rsatilgan xossaga ega bo'lmay, balki ularning AEB va AE_1B yoylarida yotgan nuqtalarigina masalaning talabiga javob beradi.

Shunday qilib, masalaning to'liq javobi quyidagidan iborat bo'ladi.

Berilgan kesma berilgan burchak ostida ko'rinuvchi nuqtalar to'plami berilgan burchakni sig'diruvchi ikkita teng segmentning berilgan kesma bilan tortilib turuvchi yoylaridan iborat bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

3.138. Berilgan a va b to'g'ri chiziqlar orasiga berilgan l uzunlikdagi AB kesmani berilgan c to'g'ri chiziqqa parallel qilib joylashtiring.

3.139. Berilgan M nuqtadan berilgan $a||b$ va $c||d$ to'g'ri chiziqlarga uning har ikki parallellar orasidagi kesmalari bir-biriga teng bo'lgan kesuvchi o'tkazing.

3.140. Bir uchi berilgan bir aylanada va ikkinchi uchi berilgan ikkinchi aylanada yotuvchi, berilgan nuqtada teng ikkiga bulimuvchi kesma chizing.

3.141. Berilgan to'rt tomoni bo'yicha AC diagonalini A burchagini teng ikkiga bo'ladigan $ABCD$ to'rtburchak yasang.

3.142. Burchak va uning ichida bir nuqta berilgan. Bir uchi berilgan nuqtada, qolgan ikki uchi burchak tomonlarida yotuvchi va perimetri eng kichik uchburchak yasang.

3.143. Berilgan uchburchakka bir uchi ma'lum nuqtada bo'lgan eng kichik perimetrli ichki uchburchak chizing.

3.144. Ikki qo'shni tomoni va shu tomonlarning umumiy bo'lmagan uchlaridagi ikki burchagi berilgan hamda aylanaga tashqi chizilgan to'rtburchak yasang.

3.145. Berilgan M nuqtadan o'tib, berilgan a va b to'g'ri chiziqlarga urinuvchi aylana chizing va quyidagi savollarga javob bering:

I. Berilgan to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lsa, masala qanday yechiladi?

II. Berilgan nuqta bissektrisada yotsa, masala qanday yechiladi?

3.146. Berilgan ABC uchburchakning A uchidan o'tuvchi l to'g'ri

chiziqda shunday X nuqta topingki, bu nuqtadan uchburchakning AB va AC tomonlari bir xil burchak ostida ko'rinsin.

3.147. ABC uchburchakning BC tomonida D nuqta berilgan. Shu uchburchakka shunday DXY ichki uchburchak chizingki, uning DX va XY tomonlari AB tomon bilan teng burchaklar tashkil qilsin hamda uning DY va XY tomonlari AC tomon bilan teng burchaklar hosil qilsin.