1-BOB
GEOMETRIYA AKSIOMATIKASI

1-§. Planimetriya aksiomalari

Geometriya – geometrik shakllar va ularning xossalarini o‘rganuvchi fan. “Geometriya” so‘zi yunonchadan “Geos – yer” hamda “Metros – o‘lchayman”, ya’ni yer o‘lchayman degan ma’noni bildiradi.

Geometriya ikki qismga bo‘lib o‘rganiladi:

1. Planimetriya.
2. Stereometriya.

Planimetriya – geometriyaning tekislikdagi shakllarni o‘rganadigan, stereometriya esa fazodagi shakllarni o‘rganadigan qismi. Planimetriyada bir o‘lchamli chiziqlar va ikki o‘lchamli tekis shakllar, ya’ni kesma, to‘g‘ri chiziq, nur kabi chiziqlar hamda burchak, uchburchak, to‘rtburchak, ko‘pburchak, aylana va doiralar kabi tekis shakllar va ular bilan bog‘liq masalalar, ikki o‘lchamli Dekart koordinatalar sistemasi, shuningdek, vektorlar va ular ustida amallar o‘rganiladi.

Geometriyaning boshlang‘ich tushunchalari:

- Nuqta;
- To‘g‘ri chiziq;
- Tekislik.

Geometriya fanini o‘rganishda asosan fikrlar ketma-ketligidan foydalaniladi. Buning uchun har qanday yangi fikr avvalgi fikrlarga asoslanishi va ularga zid bo‘lmasligi kerak.

Bu bog‘liqlikni saqlash qulay bo‘lishi uchun ta’rif va teoremalardan foydalaniladi.

Aytilgan fikrning ma’nosini bizga ma’lum bo‘lgan so‘zlar yordamida ifodalovchi jumla ta’rif deyiladi. Oxiri *“ataladi”* yoki *“deyiladi”* kabi so‘zlar bilan tugallangan jumla ta’rif bo‘ladi.

1-ta’rif. Isbotlash talab etiladigan tasdiqqa **teorema deb** ataladi. Biror fikrning haqligini, to‘g‘riligini yoki ma’qulligini tan oluvchi jumlaga tasdiq deyiladi.

2-ta’rif. Avvaldan ma’lum fikrlar asosida tasdiqni to‘g‘ri ekanligini asoslash **teoremaning isboti deb** ataladi.

3-ta’rif. Isbot talab etilmaydigan haqiqat **aksioma** deyiladi.

Miloddan avvalgi IV asrga kelib, asosan, geometriya fani bo‘yicha bilimlar to‘plash davri yakun topdi va ularni tartib bilan bayon qilishga urinishlar qilindi.

Shu davrda to‘plangan bilimlar majmuini o‘z ichiga olgan, Evklid tomonidan yozilgan “Negizlar” bilimlarning tizimga tushirilganligi bo‘yicha barchaga manzur bo‘ldi. Kitobdagi materialning qat’iyligi uning keyingi yigirma asr mobaynida asosiy darslik bo‘lib xizmat qilishini ta’minladi. “Negizlar” o‘n uchta kitobdan iborat bo‘lib, ularning har birida teoremalar ketma-ket bayon qilingan. Xususan, geometriyaga birinchi, to‘rtinchi, oltinchi, o‘n birinchi va o‘n ikkinchi kitoblar bag‘ishlangan. Birinchi kitob ta’riflar, aksiomalar va postulatlarni o‘z ichiga oladi. Evklid ular yordamida matematik tushunchalar, ta’rifni kiritgan. Masalan, “Nuqta – qismlarga ega bo‘lmagan narsa”, “Chiziq – ensiz uzunlik” va hokazo. Bu tasdiqlar ko‘p marta tanqid qilinganligiga qaramasdan, ulardan mukammal ta’riflar haligacha berilgan emas. Hozirgi vaqtda bu nazariya obyektlari va ularning xossalarini bayon qilish uchun aksiomalar sistemasi ishlatiladi.

Evklid miqdorlarning tengligi yoki tengsizligi munosabatlarini kirituvchi tasdiqlarni aksiomalar deb ataydi. “Negizlar”da beshta aksioma berilgan.

- ✓ Bitta narsaga teng bo‘lgan narsalar o‘zaro tengdir.
- ✓ Teng miqdorlarga teng miqdorlar qo‘shilsa, yana teng miqdorlar hosil bo‘ladi.
- ✓ Teng miqdorlardan teng miqdorlar ayirilganda qoldiqlar ham teng bo‘ladi.
- ✓ O‘zaro bir-biriga joylashadigan narsalar o‘zaro tengdir.

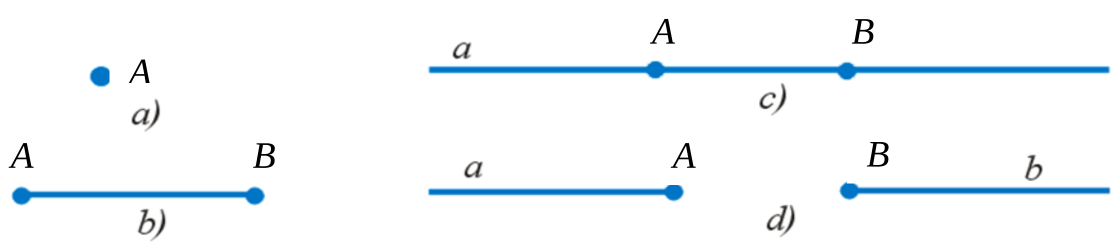
- ✓ Butun qismdan kattadir.

Bundan tashqari Evklid geometriyasida postulat tushunchasidan foydalanilgan. **Postulat** (lotincha Postulatum-talab) – biror ilmiy nazariyada isbotsiz qabul qilingan, lekin biror asosi mavjud bo‘lgan tamoyil yoki qoidadan iborat.

Evklid geometriya tuzilishi imkoniyati haqida beshta postulatlarni alohida ajratgan.

- ✓ Ikki nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.
- ✓ To‘g‘ri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.
- ✓ Ixtiyoriy nuqtadan istalgan radiusli aylana o‘tkazish mumkin.
- ✓ To‘g‘ri burchaklar o‘zaro tengdir.
- ✓ Agar bir tekislikda yotgan ikkita to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishsa va ichki bir tomonli burchaklarning yig‘indisi 180^0 dan kichik bo‘lsa, bu ikki to‘g‘ri chiziqlar shu tomondan kesishadi.

Qalam yoki ruchkaning uchini oq qog‘ozga qattiq bosganimizda qog‘ozda qolgan izini ***nuqta*** deb ataymiz (1.1-*a* rasm). Nuqta ko‘zimizga biror o‘lchamga egadek ko‘rinsada, biz uni o‘lchamsiz deb qabul qilamiz. Nuqtalar lotin alifbosining katta harflar bilan belgilanadi. Ikki nuqtadan o‘tuvchi chiziqni ***to‘g‘ri chiziq*** deb ataymiz, to‘g‘ri chiziqning boshi ham, oxiri ham mavjud emas (1.1-*c* rasm).



1.1-rasm

4-ta’rif. To‘g‘ri chiziqning boshi ham oxiri ham bo‘lmaydi. Bir nuqtadan boshlanib cheksiz davom etuvchi to‘g‘ri chiziq ***nur*** deyiladi (1.1-*d* rasm). Nurning boshlang‘ich nuqtasi mavjud bo‘lib, lekin oxirgi nuqtasi mavjud emas. Berilgan nuqta nurning boshlanish nuqtasi deyiladi. To‘g‘ri chiziqda olingan ixtiyoriy nuqta to‘g‘ri chiziqni ikkita nurga ajratadi, ya’ni to‘g‘ri chiziq bir-birining davomlari bo‘lgan ikkita nurdir. Bu nurlar o‘zlarini bir-biri bilan to‘ldiradi. Nur va to‘g‘ri chiziqlar lotincha kichik $a,b,c,\ldots$ harflar bilan belgilanadi.

5-ta’rif. To‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi va ular orasida yotgan nuqtalardan iborat qismiga ***kesma*** deb aytiladi. Bu nuqtalar orasidagi masofa uzunligiga esa ***kesma uzunligi*** deyiladi (1.1-*b* rasm). Kesmaning boshi va oxiri mos ravishda lotincha katta harflar bilan belgilanadi. Masalan, A va B nuqtalarni tutashtiruvchi kesma AB yoki a ko‘rinishida belgilanadi, bu esa shu kesmaning uzunligini aniqlaydi.

Endi planimetriya aksiomalarini qaraymiz.

1-aksioma. Har qanday to‘g‘ri chiziqni olmaylik, shu to‘g‘ri chiziqqa tegishli va tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.

2-aksioma. Har qanday ikki nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va faqat bitta.

3-aksioma. Ikkita turli to‘g‘ri chiziq yo kesishmaydi, yoki faqat bitta nuqtada kesishadi.

4-aksioma. To‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.

5-aksioma. To‘g‘ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi.

6-aksioma. Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Kesma uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan qismlari uzunliklarining yig‘indisiga teng: $AB = AC + CD + DB$ (1.2-rasm).

1.2-rasm

7-aksioma. Istalgan yarim to‘g‘ri chiziqqa uning boshlang‘ich nuqtasidan berilgan uzunlikda yagona kesma qo‘yish mumkin.

6-ta'rif. Ikki kesmaning nisbati deb, shu kesmalarning bir xil uzunlik o'lchov birliklari bilan ifodalanganda, ulardan biri ikkinchisidan necha marta katta yoki kichikligini ko'rsatuvchi songa aytiladi.

Masalan, *a* va *b* kesmalar mos ravishda 3 m va 15 dm bo'lsin. Kesmalarning nisbati bo'linma (kasr) shaklida ifodalanadi. *a* kesmaning o'lchov birligini *b* kesmaning o'lchov birligiga o'tkazamiz:

a=3m=30 dm.

$$\frac{a}{b}=\frac{30}{15}=2 \text{ yoki } \frac{b}{a}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$$

7-ta'rif. Nisbatlari teng bo'lgan kesmalar **proporsional kesmalar** deyiladi. *a*, *b*, *c* va *d* kesmalar berilgan bo'lsin. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ bo'lsa, bu kesmalar *a* va *c* kesmalar *b* va *d* kesmalarga proporsional deyiladi.

Masala. *AB* kesmaning uzunligi 18,2 sm bo'lsa, kesmani 3:4 nisbatda bo'ling.

1.3-rasm

Yechish. 1.3-rasmda *AB* kesma uzunligi *AC* va *CB* kesmalar yig'indisiga teng, *AC* va *CB* kesmalar nisbati 3:4 ga teng.

$$\begin{cases} |AB|=|AC|+|CB| \\ \dfrac{|AC|}{|CB|}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{3x}{4x} \end{cases} \Rightarrow 3x+4x=18{,}2 \Rightarrow 7x=18{,}2 \Rightarrow x=2{,}6.$$

Bundan $|AC|=3x=3\cdot 2{,}6=7{,}8$, $|CB|=4x=4\cdot 2{,}6=10{,}4$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1.1. *AB*, *CD* kesmalar *l* to'g'ri chiziqni kesib o'tadi, *AD* kesma *l* to'g'ri chiziqni kesib o'tmasa, *AC* va *BC* kesma *l* to'g'ri chiziqni kesib o'tadimi?

1.2. Agar $B \in AC$, AB=7,2 sm, AC=2 dm bo‘lsa, BC ni toping.

1.3. Agar $M \in AB$, $N \in AB$, AB=5, AM=2,2 va BN=3,6 bo‘lsa, MN ni toping.

1.4. To‘g‘ri chiziqdagi A, B, C nuqtalar uchun AB=600 m, BC=200 m bo‘lsa, AC ni toping.

1.5. To‘g‘ri chiziqdagi A, B, C va D nuqtalar uchun AB=2, AC=CB, 2AD=3BD bo‘lsa, CD ni toping.

1.6. AB, BC va CD kesmalar l to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tsa, AC va AD kesma l to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadimi?

1.7. AB=21 sm bo‘lsa, berilgan kesmani 3:4 nisbatda bo‘ling. javob: 9;12

1.8. Uzunligi 18 m kesma 5:7 nisbatda bo‘lingan bo‘lsa, kesmaning kichigini uzunligini toping. javob: 7,5

1.9. Uzunligi 12 m kesma 5:3:7 nisbatda bo‘lingan bo‘lsa, kesmaning kichigini uzunligini toping. javob: 2,4

1.10. Kesma 5:3:4 nisbatda bo‘lingan bo‘lib, eng katta bo‘lak 6 sm bo‘lsa, kesmaning uzunligini toping. javob: 14,4

1.11. AC to‘g‘ri chiziqda A va C nuqtalar orasida B nuqta yotadi. Agar BC=7,4 sm bo‘lib, AB kesmaning uzunligi AC kesmaning uzunligidan 3 marta kichik bo‘lsa, AC topilsin.(sm) javob: 11,1

1.12. AC to‘g‘ri chiziqda A va C nuqtalar orasida B, D nuqta yotadi. Agar $AB:BD:DC=3:3:4$ nisbatda va $AC = 15$ bo‘lsa, B, D nuqtalar ajratgan kesmalarning uzunligini toping. javob: 4,5;4,5;6

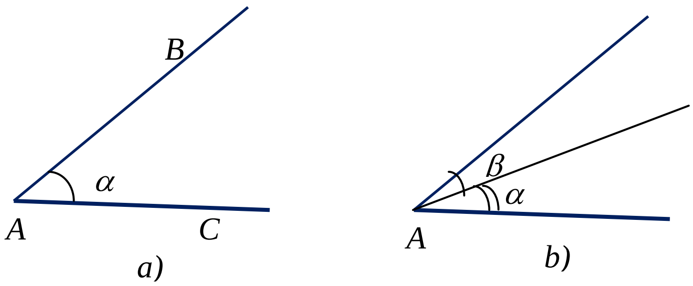
1.13. AC to‘g‘ri chiziqda A va C nuqtalar orasida B, D nuqta yotadi. Agar $AB:BD:DC=3:2:4$ nisbatda va AB=6 bo‘lsa, BD va DC kesmalarning uzunligini toping. javob: 4;8

1.14. AE to‘g‘ri chiziqda A va E nuqtalar orasida B, C, D nuqta yotadi. Agar $AB:BC=3:2$, $AB:CD=6:5$, $AC:CE=3:2$ nisbatda va CE=8 bo‘lsa, AE kesmaning uzunligini toping. javob: 20

1.15. Nur va uzunliklari AB=1,2 sm, CD=2,8 sm bo‘lgan kesmalar berilgan. Bu kesmalardan foydalanib shu nurga uzunligi *a)* 4 sm; *b)* 1,6 sm; *c)* 0,4 sm; *d)* 2,6 sm bo‘lgan kesmalarni qo‘ying.

2-§. Burchaklar

1-ta’rif. Bir nuqtadan chiquvchi ikkita nurdan iborat shaklga ***burchak*** deyiladi. Bir nuqtadan chiquvchi nurlar qanchalik bir-biridan tez uzoqlashsa, nurlar orasidagi burchak ham shuncha katta bo‘ladi. Burchakning kattaligi ***gradus*** orqali ifodalanadi.



1.4-rasm

Burchak $\angle A=\angle BAC=\alpha$ orqali ifodalanadi va shu burchakning kattaligini ifodalaydi (1.4-*a* rasm).

8-aksioma. Har qanday burchak noldan katta tayin gradus o‘lchoviga ega. Yoyiq burchak 180° ga teng. Burchakning gradus o‘lchovi o‘zining tomonlari orasidan o‘tuvchi har qanday nur yordamida ajratilishidan hosil qilingan burchaklarning gradus o‘lchovlari yig‘indisiga teng: $\angle A=\alpha+\beta$ (1.4-*b* rasm).

9-aksioma. Istalgan yarim to‘g‘ri chiziq hosil qilgan tayin yarim tekislikka berilgan gradus o‘lchovi 180° dan kichik yagona burchakni qo‘yish mumkin.

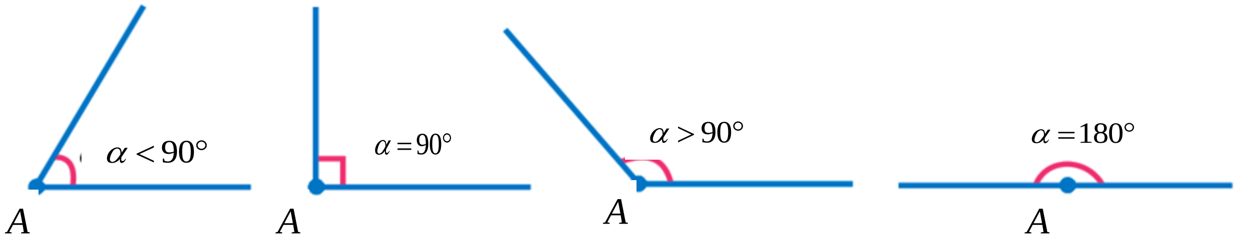
Burchakning kattaligiga qarab bir necha turlarga bo‘linadi (1.5-rasm).

Agar burchak 90° dan kichik $(\alpha<90°)$ bo‘lsa, bunday burchakka ***o‘tkir burchak*** deyiladi.

Agar burchak 90° ga teng $(\alpha=90°)$ bo‘lsa, bunday burchakka ***to‘g‘ri burchak*** deyiladi.

Agar burchak 90° dan katta $(\alpha > 90°)$ bo‘lsa, bunday burchakka ***o‘tmas burchak*** deyiladi.

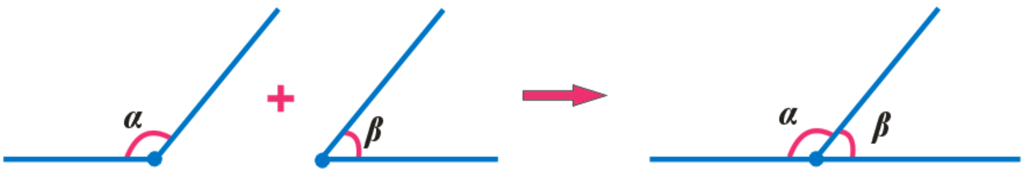
Agar burchak 180° ga teng $(\alpha = 180°)$ bo‘lsa, bunday burchakka ***yoyiq burchak*** deyiladi.



1.5-rasm

Yuqoridagilardan tashqari o‘zaro qo‘shni va o‘zaro vertikal bo‘lgan burchaklar ham mavjuddir.

2-ta’rif. Agar ikkita burchakning bir tomoni umumiy bo‘lib, qolgan tomonlari esa bir-birlarining davomlari bo‘lsa, bunday burchaklarga ***o‘zaro qo‘shni burchaklar*** deyiladi (1.6-rasm).



1.6-rasm

1-masala. Nisbati $\frac{2}{3}$ ga teng bo‘lgan o‘zaro qo‘shni burchaklarni toping.

Yechish.

1-usul

Burchaklarni α va β harflari bilan belgilab, ularning nisbatini $\frac{2}{3}$ ga tenglaymiz. Tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasi sifatida qo‘shni burchaklar yig‘indisi olinadi.

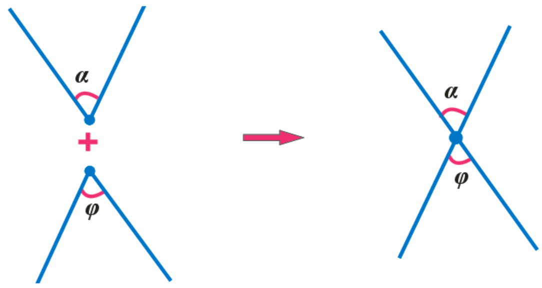
$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3} \\ \alpha + \beta = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\beta + \beta = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}\beta \\ \frac{5}{3}\beta = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}\beta = \frac{2}{3}\cdot 108^0 = 72^0 \\ \beta = \frac{3}{5}\cdot 180^0 = 108^0 \end{cases}.$$

2-usul

Burchaklarni $\alpha = 2x$ va $\beta = 3x$ deb olish orqali ishlash mumkin.

$\begin{cases} \alpha = 2x \\ \beta = 3x \end{cases}$, $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 5x = 180^0$, $\Rightarrow x = 36^0$. Demak, $\alpha = 2x = 72^0$ va $\beta = 3x = 180^0$ ekan.

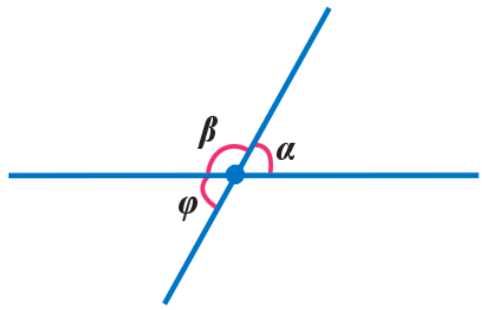
3-ta'rif. Agar ikkita burchakning tomonlari bir-birlarining davomlari bo'lsa, bunday burchaklarga ***o'zaro vertikal burchaklar*** deyiladi (1.7- rasm).



1.7-rasm

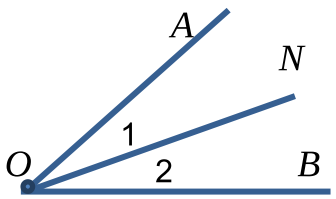
2-masala. Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan hosil bo'lgan burchaklardan biri 40^0 ga teng bo'lsa, qolgan burchaklarni toping (1.8-rasm).

Yechish. Aytaylik $\alpha = 40^0$ bo'lsin. U holda o'zaro vertikal bo'lgani uchun $\varphi = \alpha = 40^0$, o'zaro qo'shni bo'lgani uchun $\beta = \pi - \alpha = 180^0 - 40^0 = 140^0$ bo'ladi. Shunday qilib, ikkita to'g'ri chiziq kesishganda o'zaro vertikal burchaklar bo'lgan ikkita 40^0 va ikkita 140^0 burchaklar bor ekan.



1.8-rasm

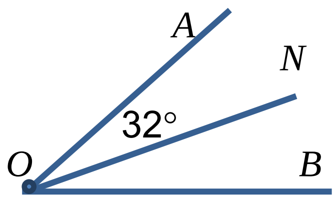
4-ta'rif. Burchakni teng ikkiga bo'luvchi nur **bissektrisa** deyiladi.



ON-bissektrisa

∠1=∠2

1.9-rasm



1.10-rasm

3-masala. Burchak bissektrisasi tomoni bilan 32° burchak tashkil qilsa, berilgan burchak kattaligini toping.

Yechish. Ta’rifga ko‘ra burchak bissektrisasi berilgan burchakni teng ikkiga bo‘ladi. Shuning uchun berilgan $\angle AOB=2\angle AON=2\cdot 32°=64°$ (1.10-rasm).

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1.16. Qo‘shni burchaklardan biri ikkinchisidan 20° ga katta. Shu qo‘shni burchaklarni toping. javob: 80°, 100°

1.17. Qo‘shni burchaklardan biri ikkinchisidan 4 marta kichik bo‘lsa, shu burchaklardan kattasini toping. javob:144°

1.18. O‘ziga qo‘shni bo‘lgan burchakning 3/7 qismiga teng burchakni toping. javob: 54°

1.19. O‘ziga qo‘shni burchakning 44% iga teng bo‘lgan burchakning kattaligini aniqlang. javob:55°

1.20. α va β qo‘shni burchaklar. Agar $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{7}$ bo‘lsa, β va α burchaklar ayirmasini toping. javob:100°

1.21. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan qo‘shni burchaklarning gradus o‘lchovlari 5:7 nisbatda bo‘lsa, shu burchaklarni toping. javob:75°,105°

1.22. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklarning kattaliklari nisbati 7:5 ga teng. Shu burchaklardan kichigini toping. javob:75°

1.23. Ikki qo‘shni burchakning ayirmasi 28° ga teng. Shu burchaklardan kichigini toping. javob:76°

1.24. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklarning biri 50° ga teng. Qolgan burchaklarni toping. javob:130°,50°,130°

1.25. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan qo‘shni burchaklar 1:17 nisbatda bo‘lsa, shu burchaklarni toping. javob:10°,170°

1.26. Qo‘shni burchaklardan biri ikkinchisidan 8 marta katta. Katta burchakning kattaligi topilsin. javob:160°

1.27. Qo‘shni burchaklarning kattaliklari 4:5 kabi nisbatda. Qo‘shni burchaklardan kichigi topilsin. javob:80°

1.28. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan qo‘shni burchaklar 7:8 nisbatda bo‘lsa, shu burchaklarni toping. javob:84°,96°

1.29. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan qo‘shni burchaklarning gradus o‘lchovlari 3:7 nisbatda bo‘lsa, shu burchaklarni toping. javob: 54°, 126°

1.30. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan burchakning kattaliklari nisbati 7:3 ga teng. Shu burchaklardan kichigini toping. javob:54°

1.31. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan 3 tasining yig‘indisi 200°. Ularning kattasi kichigidan necha foiz ortiq? javob: 700%

1.32. Berilgan burchak va unga qo‘shni bo‘lgan ikkita burchaklar yig‘indisi $19\pi/16$ ga teng. Berilgan burchakning kattaligini toping. javob:$13\pi/16$

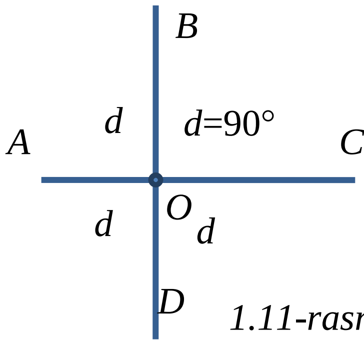
1.33. Bir nuqtadan 3 ta to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Hosil bo‘lgan 6 ta burchakning o‘zaro vertikal bo‘lmagan 3 tasi α, β, γ ga teng. $\alpha + \beta + \gamma$ ni toping. javob:180°

1.34. Burchakning bissektrisasi uning tomoni bilan 15° li burchak tashkil etsa, burchakning o‘zini toping. javob:30°

1.35. Burchakning bissektrisasi uning tomoni bilan 20° li burchak tashkil etsa, burchakni o‘zini toping. javob:40°

3-§. To‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi. Perpendikular va og‘malarning xossalari

1-ta’rif. Agar qo‘shni burchaklar o‘zaro teng bo‘lsa, qo‘shni burchaklarning umumiy tomoni ustma-ust tushmagan tomonlardan tuzilgan to‘g‘ri chiziqqa **perpendikular** deyiladi.

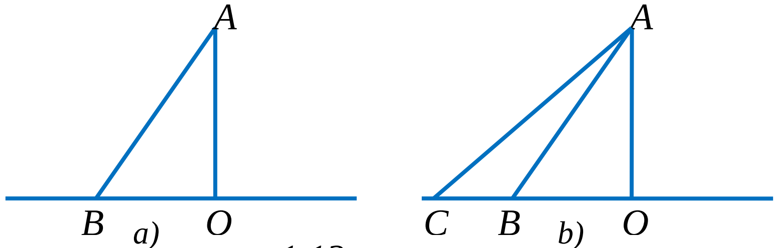


1.11-rasm

AC to‘g‘ri chiziqning (1.11-rasm) *BD* to‘g‘ri chiziqqa perpendikularligi $AC \perp BD$ ko‘rinishida yoziladi. $\perp$ – perpendikularlik belgisi, *O* nuqta perpendikularning asosi deyiladi.

2-ta’rif. Qo‘shni burchaklar teng bo‘lmasa, umumiy tomon umumiy bo‘lmagan tomonlardan tuzilgan to‘g‘ri chiziqqa **og‘ma** deyiladi. Burchakning uchi bo‘lgan nuqta mos ravishda perpendikularning yoki og‘maning asosi deyiladi.

a to‘g‘ri chiziqdan tashqarida yotgan *A* nuqtadan perpendikular va og‘ma tushirilgan bo‘lsin. *AO* – perpendikular, *O* – perpendikularning asosi, *AB* – og‘ma. *BO* og‘maning asosi (1.12-*a* rasm).



1.12-rasm

Kesmaning to‘g‘ri chiziqqa proyeksiyasi deb, shu kesmaning oxirlaridan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning asoslari orasidagi kesmaga aytiladi. Ravshanki, proyeksiyalanayotgan kesma to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsa, uning shu to‘g‘ri chiziqqa proyeksiyasi nuqta bo‘ladi.

1-teorema. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular berilgan nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan har qanday og‘madan kichik. To‘g‘ri chiziqqa og‘malar o‘tkazilgan bo‘lsa, proyeksiyasi katta bo‘lgan og‘ma kattadir.

Isbot. AO perpendikular, 1.12-*b* rasm AB va AC og‘malar bo‘lsin. AB va AC og‘malarning proyeksiyalari $OB<OC$ tengsizlikni qanoatlantiradi. $AO<AB$, $AC>AB$ tengsizliklarni isbot qilishimiz kerak.

ΔAOB da $\angle O$ – to‘g‘ri burchak, $\angle B$ – o‘tkir burchak, ya’ni $\angle B<\angle O$. Bundan uchburchakning katta burchagi qarshisida katta tomon yotishiga ko‘ra $AO<AB$.

Endi $AB<AC$ ni isbot qilaylik. ΔABC da $\angle ABC$ o‘tmas burchak, chunki u $\angle ABO$ o‘tkir burchakka qo‘shni burchak. ΔABC da $\angle ACB$ o‘tkir burchak, chunki u to‘g‘ri burchakli ΔAOC ning to‘g‘ri burchagidan boshqa ichki burchagi. Bulardan $\angle ABC>\angle ACB$. Bundan $AC>AB$ kelib chiqadi.

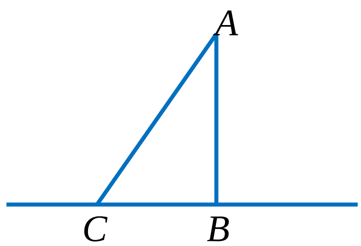
Agar og‘malar O nuqtadan turli tomonlarda o‘tkazilgan bo‘lsa, ulardan birining proyeksiyasiga teng proyeksiyali og‘mani O nuqtadan bir tomonda hosil qilishimiz va shu tomondagi og‘ma bilan taqqoslashimiz mumkin.

Quyidagi teoremalarni isbotlash o‘quvchilarga tavsiya qilinadi.

2-teorema. To‘g‘ri chiziqqa bir nuqtadan tushirilgan ikki og‘maning qaysi biri katta bo‘lsa, shu og‘maning proyeksiyasi katta bo‘ladi. Proyeksiyalari teng bo‘lgan og‘malar teng, aksincha, og‘malar teng bo‘lsa, ularninig proyeksiyalari ham teng bo‘ladi.

Isbot. a to‘g‘ri chiziqdan tashqarida yotgan A nuqtadan perpendikular va og‘ma tushirilgan bo‘lsin (1.13-rasm).

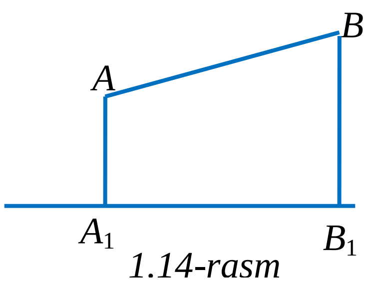
AO – perpendikular, *O* – perpendikularning asosi, *AB* – og‘ma, *B* – og‘ma asosi, *AB* og‘maning proyeksiyasi *OB* kesmadan iborat.



1.13-rasm

Kesmaning to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasi deb, shu kesmaning oxiridan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning asoslari orasidagi kesmaga aytiladi (1.14-rasm).

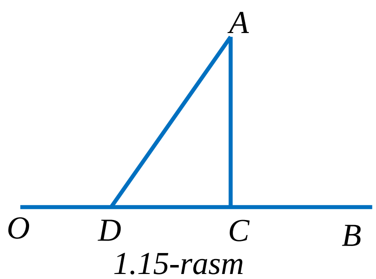
Chizmada $A_1 B_1$ kesma, *AB* kesmaning to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasidir. Agar proyeksiyalanayotgan kesma to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsa, uning shu to‘g‘ri chiziqqa proyeksiyasi nuqta bo‘ladi.



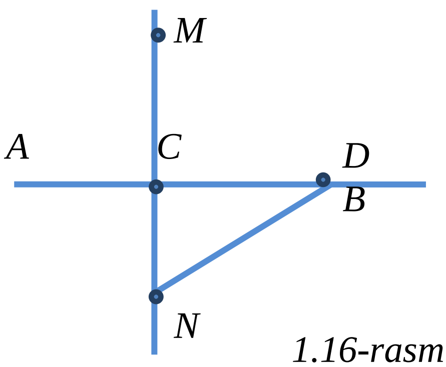
1.14-rasm

3-teorema. Biror nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular shu nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan har qanday og‘madan qisqadir.

Isbotini o‘quvchilarning o‘zlariga havola etamiz.



1.15-rasm



1.16-rasm

4-teorema. To‘g‘ri chiziq tashqarisida yotgan nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa faqat bitta perpendikular tushirish mumkin.

Isbot. Berilgan to‘g‘ri chiziqni AB, berilgan nuqtani M deymiz (1.16-rasm). Tekislikni AB to‘g‘ri chiziq bo‘yicha bukib, M nuqta olgan vaziyatni N deymiz va MN o‘tkazamiz.

Bu holda $\angle ACN=\angle ACM$. Bular qo‘shni bo‘lgani uchun to‘g‘ri burchaklardir; $MN\perp AB$. AB da C dan boshqa C nuqta olaylik; MD va ND o‘tkazsak, $\angle MDC$ va $\angle NDC$ hosil bo‘ladi. Agar tekislikni AB chiziq bo‘yicha buksak, D nuqta qo‘zg‘almaydi, M nuqta esa N nuqta ustiga tushadi.

$\angle MDC=\angle NDC$. Lekin bular to‘g‘ri burchak emas, chunki ularning yig‘indisi yoyiq burchak tashkil etmaydi, M va N orqali faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. AB to‘g‘ri chiziqqa faqat bitta perpendikular o‘tkazish mumkin $MN\perp AB$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1.36. Burchakning bissektrisasi uning tomoni bilan 45° burchak tashkil etsa, berilgan burchakning kattaligini toping. javob:90°

1.37. Qo‘shni burchaklar bissektrisalari orasidagi burchakni toping. 90

1.38. $\angle ACD = 80°$, $\angle DCE = 42°$ hamda CE nur CA va CD nurlar orasidan o‘tadi. $\angle ACE$ topilsin. javob:38°

1.39. $\angle AOC = 48°$ $\angle COD = 27°$ hamda OC nur va OA va OD nurlar orasidan o‘tsa, $\angle AOD$ topilsin. javob:75°

1.40. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki almashinuvchi burchaklarning yig‘indisi 70°, tashqi o‘tmas burchakni toping. javob:145°

1.41. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki bir tomonlama burchaklar 2:7 nisbatda, bu burchaklardan kattasini toping. javob:140°

1.42. *CAB* va *BAD* burchaklar qo‘shni. Agar $\angle CAB$-$\angle BAD$=20° bo‘lsa, *A* nuqtadan *CD* to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular *AK* va $\angle CAB$ burchakni bissektrisasi orasidagi burchakni toping. javob:40°

1.43. *ABC* va *CBD* burchaklar qo‘shni, bunda birinchi burchak ikkinchisidan 4 marta katta. *B* nuqtadan *BC* to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular va *CBD* burchakning bissektrisasi orasidagi burchakni toping. javob: 108°

1.44. *ABC* burchak *CBD* burchakdan 16° ga ko‘p, hamda bu burchaklar qo‘shni. *B* nuqtadan *AD* to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular va *CBD* burchakning bissektrisasi orasidagi burchakni toping. javob:49°

1.45. *CAB* va *BAD* burchaklar qo‘shni, agar $\angle CAB$-$\angle BAD$=-24° bo‘lsa, *A* nuqtadan *AB* to‘g‘ri chiziqqa va *CD* to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan perpendikularlar orasidagi o‘tkir burchakni toping. javob: 78°

1.46. *CAB* va *BAD* burchaklar qo‘shni, *CAB* burchak bissektrisasi va *A* nuqtadan *CD* to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular orasidagi burchak 12° ga teng bo‘lsa, *BAD* burchakni toping. javob:24°

1.47. Agar burchak o‘zining qo‘shni ikkita burchagi yig‘indisidan 4 marta kichik bo‘lsa, bu burchakni toping. javob: 60°

1.48. Uchburchakning ikkita tashqi burchagi yig‘indisi 237° ga teng bo‘lsa, uchinchi ichki burchagining qiymatini toping. javob: 57°

1.49. Burchak va unga qo‘shni ikkita burcha yig‘indisi 192° ga teng bo‘lsa, bu burchakning qiymatini toping. javob: 168°

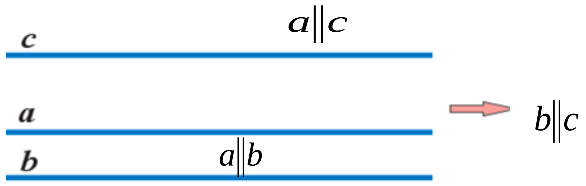
1.50. *ABC* burchakning uchidan bu burchak bissektrisasiga perpendikular *BD* to‘g‘ri chiziq o‘tkazilingan, agar bu *BD* tog‘ri chiziq burchakning bir tomoni bilan 156° hosil qilsa, *ABC* burchakning qiymatini toping. javob:132°

4-§. Parallel to‘g‘ri chiziqlar

1-ta’rif. Tekislikda kesishmaydigan ikki to‘g‘ri chiziqqa ***parallel to‘g‘ri chiziqlar*** deyiladi. To‘g‘ri chiziqlarni lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik belgisi $\|$ bilan belgilanadi, masalan, $a\|b$ kabi belgilanadi (1.17-rasm).

Agar o‘zaro parallel bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziqning biri uchinchi boshqa bir to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ikkinchisi ham shu to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi, ya’ni agar $a\|b$ va $a\|c$ bo‘lsa, u holda $b\|c$ bo‘ladi (1.18-rasm).

1.17-rasm



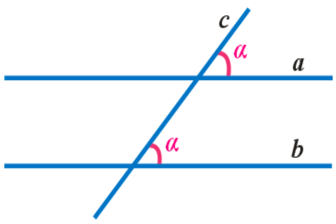
1.18-rasm

Tekislikda o‘zaro parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar albatta kesishuvchi bo‘ladi.

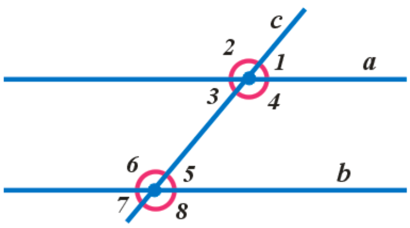
2-ta’rif. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka ularning ***kesishish burchagi*** deyiladi.

Agar o‘zaro parallel bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvchi uchinchi to‘g‘ri chiziq parallel to‘g‘ri chiziqlardan birini qanday burchak ostida kesib o‘tsa, u holda ikkinchisini ham xuddi shunday burchak ostida kesib o‘tadi (1.19-rasm).

Aytaylik a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lib, c to‘g‘ri chiziq esa ularni kesuvchi bo‘lsin. c to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqni kesganda $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ burchaklar, c to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqni kesganda esa $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ burchaklar hosil bo‘ladi (1.20-rasm).



1.19-rasm



1.20-rasm

3-ta'rif. Parallel to'g'ri chiziqlar orasida yotgan burchaklarga ***ichki burchaklar***, parallel to'g'ri chiziqlar tashqarisida yotgan burchaklarga esa ***tashqi burchaklar*** deyiladi.

$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ – ichki burchaklar

$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$ – tashqi burchaklar

4-ta'rif. Kesuvchi to'g'ri chiziqning bir tarafida yotgan burchaklarga ***bir tomonli burchaklar***, kesuvchi to'g'ri chiziqning turli tarafida yotgan burchaklarga esa ***almashinuvchi burchaklar*** deyiladi.

$\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$ yoki $\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$ – bir tomonli burchaklar

$\angle 1, \angle 3, \angle 5, \angle 7$ yoki $\angle 2, \angle 4, \angle 6, \angle 8$ – almashinuvchi burchaklar

5-ta'rif. Kesuvchi to'g'ri chiziqning bir tarafida va parallel to'g'ri chiziqlar orasida yotgan burchaklarga ***ichki bir tomonli burchaklar***, kesuvchi to'g'ri chiziqning bir tarafida va parallel to'g'ri chiziqlar tashqarisida yotgan burchaklarga esa ***tashqi bir tomonli burchaklar*** deyiladi.

$\angle 4$ va $\angle 5$ yoki $\angle 3$ va $\angle 6$ – ichki bir tomonli burchaklar

$\angle 1$ va $\angle 8$ yoki $\angle 2$ va $\angle 7$ – tashqi bir tomonli burchaklar

5-teorema. Agar ikki parallel to'g'ri chiziqlar uchinchi to'g'ri chiziq bilan kesishganda hosil bo'lgan ichki bir tomonli burchaklar yig'indisi 180^0 ga teng bo'ladi va aksincha ichki bir tomonli burchaklar yig'indisi 180^0 ga teng bo'lsa, bu ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi.

$\angle 4 + \angle 5 = 180^0$ yoki $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$

$\angle 1 + \angle 8 = 180^0$ yoki $\angle 2 + \angle 7 = 180^0$

6-ta'rif. Kesuvchi to'g'ri chiziqning turli tarafida va parallel to'g'ri chiziqlar orasida yotgan burchaklarga ***ichki almashinuvchi burchaklar***, kesuvchi to'g'ri chiziqning turli tarafida va parallel to'g'ri chiziqlar tashqarisida yotgan burchaklarga esa ***tashqi almashinuvchi burchaklar*** deyiladi.

$\angle 3$ va $\angle 5$ yoki $\angle 4$ va $\angle 6$ – ichki almashinuvchi burchaklar

$\angle 1$ va $\angle 7$ yoki $\angle 2$ va $\angle 8$ – tashqi almashinuvchi burchaklar

6-teorema. Agar ikki parallel to'g'ri chiziqlar uchinchi to'g'ri chiziq bilan kesishganda hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar o'zaro teng, va aksincha ichki almashinuvchi burchaklar o'zaro teng bo'lsa, bu ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi.

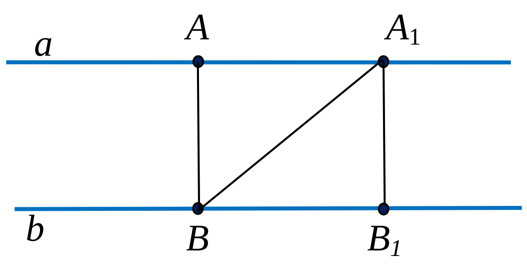
$$\angle 3 = \angle 5 \text{ yoki } \angle 4 = \angle 6$$

$$\angle 1 = \angle 7 \text{ yoki } \angle 2 = \angle 8$$

7-ta'rif. Berilgan nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning uzunligi shu nuqtadan to'g'ri chiziqqacha **masofa** deyiladi.

5-teorema. To'g'ri chiziqning istalgan ikki nuqtasidan unga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqqacha masofalar teng bo'ladi.

Isbot. a va b parallel to'g'ri chiziqlar bo'lsin (1.21-rasm). a to'g'ri chiziqda ikkita A va A_1 nuqtalarni belgilaymiz, hamda ulardan b to'g'ri chiziqqa AB va A_1B_1 perpendikularlarni tushiramiz. ABA_1 va B_1A_1B uchburchaklar gipotenuzasi va o'tkir burchagiga teng.



1.21-rasm

Ularda BA_1 gipotenuza umumiy, AA_1B va B_1BA_1 o'tkir burchaklar esa a va b to'g'ri chiziqlar hamda BA_1 kesuvchi hosil qilgan ichki almashuvchi burchaklar bo'lgani uchun teng. ABA_1 va B_1A_1B uchburchaklar tengligidan AB va A_1B_1 tomonlar tengligi, ya'ni a to'g'ri chiziqning A va A_1 nuqtalardan b to'g'ri chiziqqacha masofalar teng degan natija chiqadi.

Ko'rinib turibdiki, to'g'ri chiziqning barcha nuqtalaridan unga parallel to'g'ri chiziqqacha masofalar teng ekan. Shu sababli parallel to'g'ri chiziqlarni bir xil uzoqlikdagi to'g'ri chiziqlar deyiladi. Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa deb ularning biridagi ixtiyoriy nuqtadan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha masofaga aytiladi. Ikkita parallel to'g'ri chiziqlarning o'rtasida joylashgan parallel kesmalar o'zaro teng bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1.51. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki almashinuvchi burchaklarning yig‘indisi 70°, tashqi o‘tmas burchakni toping. javob:145°

1.52. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki bir tomonlama burchaklar 2:7 nisbatda, bu burchaklardan kattasini toping. javob:140°

1.53. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki bir tomonli burchaklarning ayirmasi 70°, tashqi o‘tmas burchakni toping. javob:125°

1.54. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki bir tomonlama burchaklar 4:5 nisbatda, bu burchaklardan kattasini toping. javob:100°

1.55. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki bir tomonli burchaklarning bissektrisalari kesishidan hosil bo‘lgan burchakni toping. javob:90°

1.56. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan biri 90° bo‘lsa, qolgan burchaklarning kattaligini toping. javob:90°

1.57. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki bir tomonli burchaklar farqi 30° bo‘lsa, bu burchaklarni toping. javob:75°,105°

1.58. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan biri 55° bo‘lsa, qolganlarini toping. javob:55°,125°

1.59. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan biri ikkinchisidan ikki marta katta bo‘lsa, qolganlarini toping. javob:60°,120°

1.60. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan tashqi bir tomonli burchaklar farqi 50° bo‘lsa, bu burchaklarning kichigini toping. javob:65°

1.61. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ichki bir tomonli burchaklar farqi 40° bo‘lsa, bu burchaklarni toping. javob:70°,110°

1.62. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan biri 105° bo‘lsa, qolganlarini toping. javob:75°,105°

1.63. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan biri ikkinchisidan uch marta katta bo‘lsa, qolganlarini toping. javob:45°,135°

1.64. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan tashqi bir tomonli burchaklar 4:5 nisbatda bo‘lsa, bu burchaklarning kichigini toping. javob:80°