

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

NIZOMIY NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

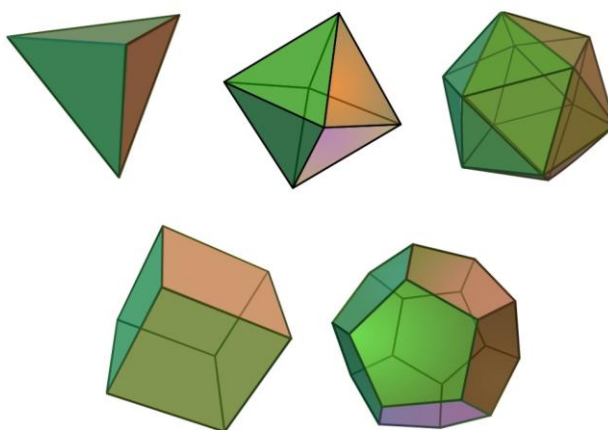
"GEOMETRIYA"

fani bo‘yicha

“TOPOLOGIK FAZOLAR USTIDA AMALLAR, UZLUKSIZ
AKSLANTIRISHLAR VA AJRIMLILIK AKSIOMALARI ”

mavzusi yuzasidan

QO‘SHMA TRENING KURSI



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

**NIZOMIY NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI**

«TASDIQLANDI»

O'quv ishlarini bo'yicha prorektor


F.G. Sharipov
«» 2025 y.

«TASDIQLANDI»

O'quv ishlarini bo'yicha prorektor


Z.Y. Raxmanov
«» 2025 y.

“Matematika” (GulDU)

“Matematika” (O'zMPU)

"GEOMETRIYA"

fani bo'yicha

**“TOPOLOGIK FAZOLAR USTIDA AMALLAR, UZLUKSIZ
AKSLANTIRISHLAR VA AJRIMLILIK AKSIOMALARI ”**

mavzusi yuzasidan qo'shma

TRENING KURSI

O'zMPU "Matematika" kafedrası bilan GulDU "Matematika" kafedrası hamkorligida "Geometriya (Topologiya va differensial geometriya)" moduli bo'yicha trening kursiga

Taqriz

O'zMPU Umumiy matematika kafedrası professori, f.-m.f.d. Jurayev Tursunboy Fayziyevich hamda GulDU Matematika kafedrası dotsenti, f.-m.f.f.d.(PhD) Eshniyozov Abdumalik Iskandarovichlar tomonidan bakalavriat talabalarining "Geometriya (Topologiya va differensial geometriya)" moduli bo'yicha trening kursi O'zMPU ning 60110600- "Matematika va informatika" ta'lim yo'nalishidagi "Geometriya" fani o'quv jarayoni uchun tuzigan bo'lib, Geometriya fani pedagogika universitetlari va matematika-informatika yo'nalishida asosiy ixtisoslik fanlaridan biridir. Geometriyaning topologiya va differensial geometriya bo'limi juda ko'pgina tadbirlarga ega bo'lib talabalarda fazoviy tasavvurlarini keng rivojlantiradi.

Bu trening kursda quyidagi mavzular atroflicha bayon qilingan:

Topologiya fani haqida;

Metrik fazolar haqida ;

Topologik fazolar;

Uzluksiz akslantirishlar va gomeomorfizmlar;

To'plamda topologiya kiritishning turli usullari;

Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari;

Bundan tashqari glossary, trening kurs bo'yicha savol va mashqlar va trening kurs bo'yicha adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

Yuqoridagilarni hisobga olgan holda men, bu tajribali professor o'qituvchiarimiz tomonidan yaratilgan trening kursini dars jarayonida qo'llashni tavsiya etaman

GulDU "Matematika" kafedrası
dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi



GulDU “Matematika” kafedrası bilan O’zMPU “Matematika” kafedrası hamkorligida “Geometriya (Topologiya va differensial geometriya)” moduli bo’yicha trening kursi natijalarining amaliyotda qo’llanilganligi haqida

DALOLATNOMA

GulDU Matematika kafedrası dotsenti, f.-m.f.f.d.(PhD) Eshniyozov Abdumalik Iskandarovich hamda O’zMPU Matematika kafedrası professori, f.-m.f.d. Jurayev Tursunboy Fayziyevichlar tomonidan bakalavriat talabalarining “Geometriya (Topologiya va differensial geometriya)” moduli bo’yicha trening kursi O’zMPU ning 60110600- “Matematika va informatika” ta’lim yo’nalishidagi “Geometriya” fani o’quv jarayoni tarkibiy qismiga kiritilgan.

Shuningdek, mazkur trening kursi bo’yicha amaliy natijalar bakalavr yo’nalishlari bo’yicha matematika sohasidagi ko’nikma va malakalarini rivojlantirish hamda mutaxassislik fanlari bilan bog’lash, kelajakda nazariya va amaliyot uyg’unligini ta’minlashga imkoniyat yaratadi.

Geometriya fani bo’yicha GulDU va O’zMPU kafedralari hamkorligida tayyorlangan va amaliyotga joriy etilgan mazkur trening kurs natijalarining samaradorligi va ular asosida ishlab chiqilgan tavsiyalarning amaliyotga tadbiiq etilishi yuzasidan erishilgan ijobiy natijalar talabalarning geometriya sohalari bo’yicha o’zlashtirishlarida o’z aksini topmoqda.

**GulDU o’quv ishlari bo’yicha
prorektori, f.f.d. professor**



F.G.Sharipov

**Axborot texnologiyalari va fizika-matematika
fakulteti dekani, p.f.d., dots**



D.X.Turdibayev

“Matematika” kafedrası mudiri, p.f.f.d., dots.



O.G.Gaimnazarov

**Geometriya fani ma’ruzaehisi,
“Matematika” kafedrası dotsenti, f.-m.f.f.d**



ANNOTATSIYA

Ushbu trening kursida pedagogika universitetida o‘qitiladigan “Geometriya” fani va unga mos Guliston davlat universitetida o‘qitiladigan “Differensial geometriya va topologiya” fanining “Topologik fazolar ustida amallar, uzluksiz akslantirishlar va ajrimlilik aksiomalari” mavzusi batafsil bayon qilingan. Talabanning nazariy va amaliy bilimlarini oshirish uchun yetarli miqdorda tushunchalar berilgan.

Tuzuvchilar: f.-m.f.f.d.(PhD) dots. A.I.Eshniyozov (GulDU)

f.-m.f.d. prof. T.F.Jurayev (OzMPU)

Taqrizchilar: f.-m.f.n. prof. R.Madraximov (OzMPU)

f.-m.f.n. dots. X.Narjigitov (GulDU)

MUNDARIJA

I. GEOMETRIYA (TOPOLOGIYA)		
1§.	Topologiya fani haqida..	5
2§.	Metrik fazolar haqida.....	6
II. TOPOLOGIK FAZOLAR USTIDA AMALLAR VA UZLUKSIZ AKSLANTIRISHLAR.		
1§.	Topologik fazolar.....	14
2§.	Uzluksiz akslantirishlar va gomeomorfizmlar.....	16
3§.	To'plamda topologiya kiritishning turli usullari.	20
III. TOPOLOGIK FAZODA AJRIMLILIK AKSIOMALARI.		
1§.	Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari	16
	Glossary.....	32
	Trening kurs bo'yicha savol va mashqlar.....	41
	Trening kurs bo'yicha adabiyotlar ro'yxati.....	43

I. GEOMETRIYA (TOPOLOGIYA)

1§. Topologiya fani haqida.

Topologiya fani umumiylik nuqtai nazaridan geometriya va matematik analiz fanlarining asosiy tushunchalarini qayta ko'rib chiqish natijasida vujudga kelgan. Topologiya fani matematikaning deyarli yosh, lekin muhim qismidir. Topologiyaga quyidagicha ta'rif berish mumkin: **topologiya** — matematikaning geometrik bo'limi bo'lib, uzluksizlikni tadqiq qiluvchi, ya'ni uzluksiz akslantirishlarni o'rganuvchi sohasi hisoblanadi. Qisqacha qilib aytganda, funksiyaning uzluksizligi tushunchasga ko'ra, metrik fazo va topologik fazolar hamda ularning uzluksiz akslantirishlarni anglatadi. Geometrik nuqtai nazardan ikki sonning ayirmasi moduli uni sonlar o'qi R da nuqtalar orasidagi masofadan iborat ekanligini bildiradi.

1906-yilda fransuz matematigi M. Freshe fanga metrik fazo tushunchasini kiritganidan so'ng ixtiyoriy tabiatli to'plamda ikki nuqta orasidagi masofani ma'lum shartlar asosida aniqlash imkoni tug'ildi.

Akslantirish $f: X \rightarrow Y$ ning biror nuqtadagi uzluksizlik shartini olaylik, bunda nuqtaning yetarli "yaqin" nuqtalari obrazning yetarli "yaqin" nuqtalariga o'tadi. Bu fikrni geometrik tasavvur nuqtai nazardan ifodalaymiz: X metrik fazo x_0 nuqtasining (xususiyl holda R — to'g'ri chiziq) ε atrofi $O_\varepsilon(x_0)$ deb fazoning x_0 nuqtadan $\varepsilon > 0$ dan katta bo'lmagan uzoqlikda yotgan nuqtalari to'plamini bildiradi, ya'ni $O_\varepsilon(x_0) = \{x: \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ (to'g'ri chiziqda x_0 nuqtaning ε atrofi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervaldan iborat).

Akslantirishning x_0 nuqtasidagi uzluksizligi quyidagi ko'rinishni oladi: ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $x \in O_\varepsilon(x_0)$ nuqtalar uchun $f(x) \in O_\delta f(x_0)$ o'rinli bo'laveradi.

Bu esa, $f: X \rightarrow Y$ akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, x_0 nuqtaning yetarli "zich" atrofidagi nuqtalari obrazi $f(x_0)$ nuqtaning yetarli "zich" atrofidagi nuqtalariga akslanadi demakdir. Bundan ko'rinadiki, akslantirishning nuqtadagi

uzluksizligini aniqlash uchun nuqtalar orasidagi masofa yetarli emas, balki nuqtaning atrofi tushunchasidan foydalanish ma'qul bo'ladi.

1914-yilda nemis matematigi F. Xausdorf o'zining "To'plamlar nazariyasi" kitobida birinchi bo'lib nuqtaning atrofi tushunchasini aksiomalashtirib, topologik (atroflar orqali aniqlangan) fazoning ta'rifini ifodalab berdi. Keyinchalik topologik fazolarning nisbatan soddaroq ta'riflari keltirildi.

Shuni jiddiy ta'kidlashimiz kerakki, metrik fazolar tabiiy ravishda topologik fazoni tashkil qiladi. Topologik fazolarga uzluksiz akslantirishlarning mavjud bo'lishi uchun tabiiy muhit sifatida qaralib, uning asosida topologiyaning umumiy topologiya deb ataluvchi bir tarmog'i vujudga keldi va barqaror rivojlanib bormoqda. Topologiyaning boshqa tarmoqlaridan farqli o'laroq umumiy geometrik topologiya uning umumiy va sof topologik xossalarini o'rganadi.

2§. Metrik fazolar haqida.

Matematikaning ko'p qo'llaniladigan tushunchalari-dan biri metrik fazo tushunchasidir. Bu tushuncha matematikaga birinchi bor fransuz matematigi M. Freshe tomonidan 1906-yilda kiritildi.

Metrik fazo — bu biror bo'sh bo'lmagan to'plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlash ma'lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma'lum bir shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi shart bo'ladi. Bu shartlar masofa (yoki metrika) aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tatbiq etiladi. Qolaversa, barcha fanlarda ham turli-tuman ko'rinishda ishlatiladi. Fazoda (to'plamda) ikki nuqta orasidagi masofa ma'lum bo'lsa, nuqtalarning o'zaro "yaqin"ligini, nuqta va to'plamning, qolaversa, ikkita to'plam (figura) "yaqin"ligini aniqlasa bo'ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalarini o'rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Bo'sh bo'lmagan X to'plam va R haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin.

1.2.1.-ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, $\rho: X \times X \rightarrow R$ akslantirish X to'plamda metrika deyiladi:

($\rho 1$). $\forall x, y \in X, \rho(x, y) \geq 0$;

($\rho 2$). $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

($\rho 3$). $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$ (simmetriklik aksiomasi);

($\rho 4$). $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (uchburchak aksiomasi).

Agar X to'plam va ρ akslantirish metrika tashkil qilsa, ular birgalikda metrik fazo deyiladi va (X, ρ) ko'rinishda yoziladi. Metrikani (X, ρ) metrik fazoda ikki element yoki ikki nuqta orasidagi masofa deb tushuniladi.

1.2.2-misol. X to'plam sifatida R^1 – sonlar to'g'ri chizig'i yoki X – haqiqiy sonlar to'plami R^1 ni olsak hamda ixtiyoriy x va y sonlar uchun $\rho(x, y) = |x - y|$ desak, u holda, ma'lumki, bu ρ metrikaning hamma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $(R^1, |x - y|)$ metrik fazo tashkil qiladi.

1.2.3-misol. R^n — ko'p o'lchovli sonlar fazosi. X sifatida $\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in R^1, i = \overline{1, n}\}$ ko'rinishdagi to'plamni olaylik. Bu to'plamning ikki x va y elementlari orasidagi metrikaning (masofani) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ formula bilan aniqlaymiz, bu yerda $x = (x_1, \dots, x_n) \in X, y = (y_1, \dots, y_n) \in X$.

Ma'lumki, bu ρ metrika tashkil qiladi. Bu fazo n – o'lchovli sonlar fazosi deb yuritiladi va R^n ko'rinishda belgilanadi.

Xususiylashtirish holda, agar $n = 2$ bo'lsa, R^2 da Evklid tekisligidagi metrika $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $n = 3$ bo'lsa, R^3 da Evklid fazosidagi metrika $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ ko'rinishlarda bo'ladi.

1.2.4-izoh. Bu X to'plamda ko'p hollarda metrika $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$ ko'rinishda ham aniqlanadi.

1.2.5-misol. l_ρ — fazo. X to'plam sifatida $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ ko'rinishdagi haqiqiy sonlardan tashkil topgan, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^\rho < +\infty$ shartni qanoatlantiruvchi barcha sonli ketma-ketliklar to'plamini olaylik. Bu yerda $\rho \geq 1$ shartni qanoatlantiruvchi tayin son. Bu to'plamda ikki x va y elementlar orasidagi masofa (metrika)ni

$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^{\rho} \right\}^{\frac{1}{\rho}}$ ko‘rinishda aniqlaymiz, bu yerda $x_i \in R, \forall i = \overline{1, \infty}$. Tekshirib, ishonch hosil qilish mumkinki, bu (X, ρ) metrik fazo bo‘ladi. Bu fazo l_{ρ} ko‘rinishda belgilanadi. Agar $\rho = 2$ bo‘lsa, l_2 fazo ko‘p hollarda **Gilbert** fazosi deb yuritiladi.

1.2.6-misol. Diskret metrik fazo. Faraz qilaylik, X bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. X to‘plamda ikki element: x va y orasidagi metrika (masofa)ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x=y; \\ 1, & \text{agar } x \neq y. \end{cases}$$

Bu $\rho(x, y)$ metrika tashkil qiladi va diskret metrika deyiladi. (X, ρ) fazo diskret metrik fazo deb yuritiladi.

Shuni aytish kerakki, bu ko‘rinishda fazoni metrikalashtirish doim ham mazmunli bo‘lavermaydi. Shu sababli doimo fazoni diskret bo‘lmagan metrika bilan ta‘minlash mazmunliroq bo‘ladi va ko‘p o‘rganiladi.

1.2.7-izoh. Agar A to‘plam (X, ρ) metrik fazoning ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan to‘plamostisi bo‘lsa, A to‘plamning ixtiyoriy x_1 va x_2 elementlari uchun bu ikki element orasidagi masofani (metrikani) $\rho_A(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$ deb olsak, u holda A to‘plamostida metrika bo‘ladi. Bu metrika ρ_A indutsirlangan metrika deb yuritiladi. (A, ρ_A) metrik fazo esa, (X, ρ) metrik fazoning fazoostisi deb yuritiladi. Agar A va B to‘plamlar (X, ρ) ning bo‘sh bo‘lmagan to‘plamostilari bo‘lsa, bu A va B to‘plamlar orasidagi masofa sifatida $\rho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y)$ son qabul qilingandir.

Xususiyl holda $\rho(x_0, A) = \inf_{x \in A} \rho(x_0, x)$ soni x_0 nuqtadan A to‘plamgacha bo‘lgan masofa deb ataladi. Xullas, M to‘plamning diametri deb $diam M = \sup_{x, y \in M} \rho(x, y)$ songa aytiladi.

Bu yerda $M \subset X$.

Nihoyat, agar $diam M < \infty$ o‘rinli bo‘lsa, M to‘plam chegaralangan to‘plam deyiladi. Metrik fazolarga doir misollar ba’zi hollarda matematik analizga doir masalalarni hal qilishda yuzaga chiqmoqda.

1.2.6-misol. $[0,1]$ kesmada uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plamini olaylik. Bu to'plam $C_{[0,1]}$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $x(t), y(t)$ funksiyalar $C_{[0,1]}$ ning ixtiyoriy uzluksiz funksiyalari bo'lsa, ular orasidagi masofani $\rho(x, y) = \max_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|$ shaklda aniqlaymiz. Matematik analiz kurslaridan ham ma'lumki, bu ρ funksiya $C_{[0,1]}$ da metrika tashkil qiladi. $C_{[0,1]}$ uzluksiz funksiyalar fazosi deb ataladi.

II. TOPOLOGIK FAZOLAR USTIDA AMALLAR VA UZLUKSIZ AKSLANTIRISHLAR.

1§. Topologik fazolar

Ixtiyoriy “tabiatli” bo'sh bo'lmagan X to'plam va $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ sistema (shu X to'plamning to'plamostilardan tashkil topgan) berilgan bo'lsin.

1.3.1-ta'rif. Agar τ sistema (to'plamostilar oilasi) quyidagi:

1) $\emptyset, X \in \tau$;

2) τ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall A \subset \tau$ uchun $\bigcup_{\alpha \in A^1} U_\alpha \in \tau$; $\alpha^1 A^1$;

3) τ sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall \alpha_i \in A, i = \overline{1, S} \quad \bigcap_{i=1}^S U_{\alpha_i} \in \tau$ shartlarni qanoatlantirsa, τ sistema X to'plamdagi topologiya, $(X; \tau)$ juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi. $(X; \tau)$ topologik fazo tashkil qilsa, τ sistemaning elementlari ochiq to'plamlar deb ataladi. Bu ta'rifdagi 1–3-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta'rifdan ma'lumki, X to'plam qanday bo'lishidan qat'i nazar, topologik fazodagi ochiq to'plamlar turlicha bo'lishi mumkin ekan. Ko'p hollarda, agar $(X; \tau)$ topologik fazo bo'lsa, τ sistema topologik struktura, X to'plam esa, $(X; \tau)$ topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi – eltuvchisi deb ataladi.

1.3.2-misol. Ikki — a va b elementlardan iborat X to'plam berilgan deylik. τ sistema sifatida bo'sh to'plam, X to'plamning o'zini va $\{a\}$ dan tashkil topgan to'plamlar oilasini olamiz, ya'ni $\tau = \{\emptyset; \{a, b\}; \{a\}\}$. Bu τ sistema ta'rifdagi 1–3-

shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Demak, $(X; \tau)$ juftlik topologik fazodir. Bu fazo topologik sodda qurilganiga qaramasdan, muhim va qiziqarli jihatlarga ega bo'lganligi uchun maxsus nom bilan “bog‘lamli ikki nuqta” deb yuritiladi.

1.3.2-misolda, agar τ ni $\{-\emptyset: \{a; b\}, \{b\}\}$ ko‘rinishida olsak ham, τ sistema topologiya tashkil qiladi.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan to‘plamga doimo turlicha topologiya kiritish, ya’ni aniqlash imkoni mavjuddir. Topologiyalarning aniqlanishidan ma’lum bo‘lmoqdaki, ulardagi ochiq to‘plamlar ham turlicha bo‘lishi (topologiyaga qarab) mumkin ekan. Ya’ni, bir topologik strukturaga nisbatan ochiq bo‘lgan to‘plam ikkinchi strukturaga nisbatan ochiq bo‘lmasligi mumkin.

1.3.3-misol. X ixtiyoriy, albatta, bo‘sh bo‘lmagan to‘plam deylik. $\tau_0 = \{\emptyset; X\}$ to‘planmani olamiz. Bevosita tekshirib ko‘rish mumkinki, $(X; \tau_0)$ juftlik topologik fazo tashkil qiladi. Ya’ni, ta’rifdagi 1–3-shartlar o‘rinli. Bu topologik fazo trivial yoki antidisret topologik fazo deb yuritiladi.

1.3.4-misol. Ixtiyoriy cheksiz X to‘plam berilgan bo‘lsin. To‘plamostilar oilasi τ sifatida $\emptyset, X$ va shunday $U_\alpha \subset X$ to‘plamostilarni olamizki, $X \setminus U_\alpha$ to‘plam chekli to‘plamdan iborat bo‘lsin, ya’ni $\tau = \{\emptyset; X; U_\alpha : X \setminus U_\alpha = CU_\alpha \text{ chekli, } \alpha \in A\}$. Bu yerda CU_α bilan U_α to‘plamostining X gacha bo‘lgan to‘ldiruvchisi $X \setminus U_\alpha$ kabi belgilanadi. To‘plamlar ustida bajariladigan amallardan ma’lumki, bu τ to‘plamlar oilasi ham topologiya tashkil qiladi. Bu topologik fazo Zarisskiy fazosi deb ataladi.

Eslatma: bu yerda $\emptyset$ o‘sh to‘plamosti ham chekli (nol) to‘plam hisoblanadi.

1.3.5-misol. X o‘plam sifatida sonlar o‘qini, ya’ni haqiqiy sonlar to‘plami – R^1 ni olaylik. R^1 dagi topologiya esa, quyidagi to‘plamostilar oilasidan tashkil topsin. Bo‘sh to‘plam $\emptyset$ ixtiyoriy intervallar va ularning $U = U_\alpha(a_\alpha; b_\alpha)$ ko‘rinishdagi birlashmasi. Ya’ni,

$$\tau = \{\cup(a, b); U_\alpha(a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in A, a, b, U_\alpha(a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in A, \}$$

Haqiqiy o'zgaruvchilarning funksiyalar nazariyasi kursidan ma'lumki, bu τ sistema ham topologiya ta'rifidagi 1–3-aksiomalarni qanoatlantiradi. Bunday aniqlangan topologiya to'g'ri chiziqdagi tabiiy topologiya deb yuritiladi.

1.3.6-misol. X to'plam sifatida R^2 Evklid tekisligini olaylik. Ochiq to'plam sifatida R^2 ning ixtiyoriy nuqtasi va markazi shu nuqtada bo'lgan radiusi yetarlicha kichik bo'lgan ochiq doiralarni, bo'sh to'plamni qarasak, bu barcha ochiq to'plam oilasi topologiya tashkil qiladi.

1.3.7-misol. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy X to'plam berilgan bo'lsin. Topologiya sifatida X to'plamning jami to'plamostilarini olaylik, ya'ni $\{U : U \subseteq X, U - \text{ixtiyoriy to'plamosti}\}$. Bu topologik struktura ham X da topologiya tashkil qiladi. Bu topologiya τ_1 topologiya deb qabul qilingan. Bu (X, τ_1) topologik fazo diskret topologik fazo deyiladi.

2-§. Uzluksiz akslantirishlar va gomeomorfizmlar

Uzluksiz akslantirishlar topologiyani eng asosiy va ko'p qo'llaniladigan tushunchalaridan biri hisoblanadi.

X va Y lar har xil topologik fazolar deylik.

1.8.1-ta'rif. Agar $f : X \rightarrow Y$ akslantirishda, $y_0 = f(x_0)$ obrazning ixtiyoriy V atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u $f(U) \subset V$ ni qanoatlantirsa, u holda f akslantirish X topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasida uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, y_0 nuqta atrofining proobrazi x_0 nuqta uchun atrof bo'la oladi.

Agar $f : X \rightarrow Y$ akslantirish X fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, f akslantirish X fazoda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz akslantirishga trivial misol sifatida $i_x : X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni olish mumkin. Bu akslantirish X ning har bir x nuqtasiga yana shu $i(x) = x$ nuqtasini mos qo'yadi.

Bundan ko'rinadiki, u har bir nuqtada uzluksizdir.

1.8.2-misol. Agar $\sin: R^1 \rightarrow R^1$ ni olsak, ya'ni har bir $x \in R^1$ ga $\sin x$ ni mos qo'ysak, bu akslantirish uzluksizdir.

1.8.3-misol. Agar $\arctg: R^1 \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$ akslantirishni olsak, bu akslantirish uzluksiz va biektiv akslantirishdir. Bunga teskari akslantirish $tg: (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}) \rightarrow R^1$ ham uzluksizdir.

Uzluksiz akslantirishlar quyidagi asosiy xossaga ega bo'lib, bu xossa ularni to'la tavsiflaydi.

1.8.4-teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y dagi ixtiyoriy ochiq $V \subset Y$ to'plamning $f^{-1}(V)$ proobrazi (asli) X fazoda ochiq to'plam bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bizga ma'lumki, ochiq to'plamlarning to'ldiruvchisi yopiq bo'lganligidan va uzluksiz akslantirishlar ta'rifidan quyidagini tasdiqlash mumkin.

1.8.5-teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y fazodagi ixtiyoriy yopiq to'plamning proobrazi X fazoda yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Uzluksiz akslantirishga misol sifatida quyidagini aytishimiz mumkin: ixtiyoriy $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda X fazo diskret fazo bo'lsa, yoki Y antidiskret fazo bo'lsa, bu akslantirish doimo uzluksiz bo'ladi.

Bulardan xulosa qilib aytishimiz mumkinki, $f: X \rightarrow Y$ ning uzluksiz bo'lishi bu fazolardagi topologiyalarga bog'liq ekan. Masalan, bir X to'plamda ikki xil topologiyani olsak, u holda $i_x: X \rightarrow Y$ ayniy akslantirish doimo uzluksiz bo'lavermaydi.

Uzluksiz akslantirishlarning oddiy, biroq muhim xossalaridan biri shuki, bir necha uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasi yana uzluksiz akslantirishdan iborat bo'ladi.

1.8.6-teorema. Agar $f: X \rightarrow Y$ va $g: Y \rightarrow Z$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsa, u holda ularning kompozitsiyasi $h = gof: X \rightarrow Z$ uzluksiz bo'ladi.

Topologiyani ko'pgina masalalarini bayon qilishda ochiq va yopiq akslantirishlar sinfi juda muhim ahamiyatga egadir.

1.9.1-ta'rif. Agar uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda, X dagi har bir ochiq to'plamning (mos ravishda yopiq to'plamning) aksi Y to'plamda ochiq (mos ravishda yopiq) to'plam bo'lsa, ochiq (mos ravishda yopiq) akslantirish deyiladi.

Bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq akslantirishga misol sifatida $i_x: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni olsak, $i_x: A \rightarrow X$ shaklidagi joylashtirishda doimo ochiq to'plamning aksi ochiq, yopiq to'plamning aksi yopiq to'plamdir, bunda $A \subset X$.

Ochiq akslantirishlarning muhim sinfi sifatida ochiq to'plamlarda aniqlangan kompleks o'zgaruvchili golomorf funksiyalar sinfini ko'rsatish mumkin. Bundan tashqari, topologik guruhda aniqlangan gomeomorfizmlar ham mavjuddir.

1.9.2-misol. Ixtiyoriy $f: [a, b] \rightarrow R^1$ uzluksiz akslantirishni olsak, bu akslantirish doimo yopiq akslantirish bo'ladi. Lekin u doimo ochiq akslantirish bo'lavermaydi.

1.9.3-misol. $P: R^2 \rightarrow R$ proeksiyalashni olsak, bu akslantirish $p(x_1; x_2) = x_1$ formula bilan aniqlanadi va ochiq akslantirish bo'ladi. Ya'ni, markazi (x_1, x_2) nuqtada bo'lgan ochiq doira proeksiyasi markazi x_1 da bo'lgan intervaldan iboratdir. Agar R^2 da $x_1 x_2 = 1$ giperbolani olsak, bu giperbola yopiq to'plamdir.

Yopiq to'plamlarga misol keltirganda tekislikdagi ixtiyoriy ikkinchi tartibli chiziq yopiq to'plam ekanligini ta'kidlagan edik. Bu to'plamlardan ba'zilarining proeksiyasi $R^1 \setminus \{0\}$ dan iborat bo'lib, bu yopiq to'plam emas. Demak, bu akslantirish yopiq akslantirish emas.

1.9.4-misol. Agar $f: R^1 \rightarrow R^1$ uzluksiz funksiyani $f(x) = 1/(1+x^2)$ formula bilan aniqlasak, bu uzluksiz akslantirish bo'lib, ochiq ham, yopiq ham emasdir. Shundan $f(R^1) = (0; 1]$ to'plam R^1 da ochiq ham, yopiq ham emasligi ma'lum bo'ladi.

1.9.5-teorema. Uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirish ochiq bo'lishi uchun X fazoda ixtiyoriy x_0 nuqtaning U atrofi aksi (obrazi) $y_0 = f(x_0)$ nuqta uchun Y fazoda ochiq atrof bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ochiq va yopiq akslantirishlar ta'rifini quyidagicha keltirishimiz mumkin.

1.9.6-teorema. Ochiq (yopiq) akslantirishlar kompozitsiyasi ochiq (yopiq) akslantirish bo‘ladi.

Akslantirishning yopiq bo‘lishi uchun quyidagi fakt ham o‘rinlidir.

1.9.7-teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish yopiq bo‘lishi uchun ixtiyoriy $A \subset X$ to‘plam uchun $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Topologiya fanida gomeomorf akslantirish tushunchasi muhim o‘rinlardan birini egallaydi. Gomeomorf akslantirish topologik strukturalarni farqlashsiz o‘rganishni tavsiya etadi. Bu akslantirish natijasida topologiyaning fundamental masalasi – qaysi topologik strukturalar o‘zaro izomorf ekanligi aniqlanadi.

1.10.1-ta’rif. Agar f va f^{-1} lar bir vaqtda o‘zaro uzluksiz bo‘lsa, $f: X \rightarrow Y$ biektiv akslantirish gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm (ba’zi hollarda topologik akslantirish) deyiladi.

Topologik fazo X bilan topologik fazo Y lar orasida kamida bitta gomeomorf (topologik) $f: X \rightarrow Y$ akslantirish mavjud bo‘lsa, birinchisi ikkinchisiga gomeomorf yoki topologik ekvivalent deyiladi. Topologik ekvivalent yoki gomeomorf fazolar $X \approx Y$ yoki $X_{top} Y$ ko‘rinishda belgilanadi.

Gomeomorfizmga $id_X: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni trivial misol qilib keltirsa bo‘ladi. Shuning bilan birga, tekshirib ko‘rish mumkinki, to‘g‘ri chiziqda aniqlangan ixtiyoriy monoton funksiya ham gomeomorf akslantirish bo‘ladi.

1.10.2-misol. R^n fazoda radiusi 1 ga teng bo‘lgan B ochiq sharni olsak, $f: R^n \rightarrow B$ akslantirishni $f(x) = x/(1+|x|)$ formula bilan aniqlasak, bu yerda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n; \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Bu akslantirish biektivdir. Teskari akslantirish $f^{-1}: B \rightarrow R^n$ esa, $f^{-1}(x) = x/(1-\|x\|)$ formula bilan aniqlanadi. f va f^{-1} lar uzluksizdir. Shu sababli f –gomeomorfizm.

Agar X topologik fazo Y topologik fazoning birorta to‘plamostisiga gomeomorf bo‘lsa, ya’ni $f: X \rightarrow Y_0 \subset Y$ gomeomorfizm bo‘lsa, u holda X fazo Y fazoga topologik joylashgan yoki X fazo Y fazoda topologik yotadi yoxud Y fazo X

fazoni o'zida saqlaydi, deyiladi. Bunday gomeomorfizm joylash yoki joylashtirish deyiladi.

Topologik fazolarning gomeomorf akslantirishlarda o'zgarmay qoladigan xossalari ularning topologik xossalari deb yuritiladi. Shu sababli topologiyani shunday akslantirishlarda fazoning topologik xossalarini o'rganuvchi fandır, desak ham bo'ladi.

1.10.3-teorema. $f: X \rightarrow Y$ ochiq (mos ravishda yopiq) biektiv akslantirish gomeomorfizmdir.

1.10.4-natija. $f: X \rightarrow Y$ biektiv akslantirish gomeomorfizm bo'lishi uchun $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Shuni aytib o'tish kerakki, gomeomorfizmni ikki fazo orasidagi munosabat sifatida qarasak, gomeomorfizm munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

Gomeomorfizm tushunchasidan kengroq bo'lgan lokal gomeomorfizm tushunchasini ham bilish talab etiladi.

1.10.5-ta'rif. Agarda ixtiyoriy x va $y = f(x)$ juftlik uchun shunday $U(x)$ va $V(y)$ atroflar topilib, $f: U(x) \rightarrow V(y)$ gomeomorfizm bo'lsa, bu $f: X \rightarrow Y$ akslantirish lokal gomeomorfizm deyiladi.

1.10.6-misol. $f: \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ akslantirishni $f(x) = x^2$ formula bilan olsak, u lokal gomeomorfizmni tashkil qiladi.

3-§. To'plamda topologiya kiritishning turli usullari

Birorta bo'sh bo'lmagan X to'plamda ma'lum bir τ topologiyani kiritish uchun uning barcha ochiq to'plamlarini ko'rsatish doimo ham shart bo'lavermaydi. Buning uchun uning biron-bir ochiq to'plamlari jamlanmasini ko'rsatish yetarlidir. Ochiq to'plamlar jamlanmasi ma'lum bir xossalarga ega bo'ladi. Bu xossalar shu τ topologiyaning bazasini aniqlaydi.

1.7.1-ta'rif. Agar X fazoning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan U ochiq to'plami β jamlanmaga tegishli bo'lgan elementlarning birlashmasidan iborat bo'lsa, (X, τ)

topologik fazoning ochiq to'plamlaridan tashkil topgan β to'plamlar jamlanmasi τ topologiyani bazasi yoki fazoning *bazasi* deyiladi.

Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, har bir (X, τ) fazo bazaga ega. Ma'lumki, barcha ochiq to'plamlardan tashkil topgan jamlanma uning bazasini tashkil qiladi.

1.7.2 -ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilganda, bu atrof bilan M to'plamning kesishmasi faqat x_0 nuqtadan iborat, ya'ni $U \cap M = \{x_0\}$ bo'lsa, x_0 topologik fazoning M to'plamostisining *yakkalangan nuqtasi* deyiladi.

(X, τ) topologik fazo va $x_0 \in X$ uning nuqtasi bo'lsin.

1.7.3-ta'rif. Birorta x_0 nuqtaning (X, τ) fazodagi atrofi deb shunday $A(x) \subset X$ to'plamostiga aytiladiki, u quyidagi ikki shartni qanoatlantiradi:

- 1) $x \in A(x)$;
- 2) shunday $U \in \tau$ topiladiki, $x \in U \subset A(x)$.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, (X, τ) topologik fazoning ixtiyoriy x_0 nuqtasi uchun x to'plamning o'zi atrof bo'la oladi.

Birorta nuqtaning barcha atroflaridan tashkil topgan to'plamlar oilasiga kelsak, bu oila quyidagi xossalarga egadir:

- 1) ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi yana X ning atrofidan iborat bo'ladi;
- 2) ixtiyoriy chekli sondagi elementlarining kesishmasi yana x ning atrofi bo'ladi;
- 3) x nuqtaning birorta atrofini o'zida saqlagan ixtiyoriy to'plam x nuqtaning atrofi bo'ladi.

Shuni ta'kidlashimiz kerakki, x fazo birorta nuqtasining ochiq atrofi deb shu nuqtani o'zida saqlagan ixtiyoriy ochiq to'plamga aytiladi.

1.7.1-teorema. (X, τ) topologik fazoda A to'plam ($A \neq \emptyset$) ochiq to'plam bo'lishi uchun mazkur A to'plam har bir nuqtasining atrofini o'zida saqlashi zarur va yetarlidir.

Topologik fazo bazasi ta'rifidan va nuqtaning atrofi tushunchasidan ayon bo'ladiki, fazoning barcha yakkalangan nuqtalari (agar shunday nuqtalar mavjud bo'lsa) baza elementlari safiga kirar ekan.

1.7.2-teorema. (X, τ) topologik fazoning ochiq to'plamlaridan tashkil topgan β jamlanma fazoning bazasi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in X$ nuqtaning atrofi U uchun shunday $V \in \beta$ topilib, $x \in V \subset U$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremadan ma'lum bo'ladiki, topologik fazo bazasi quyidagi ikki xossaga ega:

1⁰. β jamlanmaga tegishli barcha elementlarning birlashmasi butun X fazodan iborat.

2⁰. β jamlanmaning ixtiyoriy ikki elementi U, V va ixtiyoriy $x \in U \cap V$ uchun shunday $W \in \beta$ topiladiki, $x \in W \subset U \cap V$ shart o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, bu ikki xossadan ko'rinadiki, birorta β ochiq to'plamlar sistemasi β, X fazoning bazasi bo'lishi uchun yuqoridagi ikki xossaga ega bo'lishi zarur ekan. Bu ikki xossa X to'plamdagi topologiyaning bazasini to'la xarakterlaydi. Demak, baza orqali ham topologiyani kiritish mumkin ekan.

1.7.3-teorema. Bo'sh bo'lmagan X to'plamda yuqoridagi ikki 1⁰–2⁰-shartlarni qanoatlantiruvchi β to'plamlar sistemasi aniqlangan bo'lsin. U holda X to'plamda shunday yagona τ topologiya mavjud bo'ladiki, bu τ topologiya uchun β sistema baza bo'ladi.

Mabodo birorta X to'plamning to'plamostilari sistemasi $V = \{V_\alpha : \}$ berilgan va agar bu sistema elementlari uchun $X = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$, $V_\alpha \in V$, $V_\alpha \subset X$ shart o'rinli bo'lsa, V sistema X to'plamning qoplamasini deyiladi.

Agar qoplamaning elementlari ochiq to'plamlardan tashkil topgan bo'lsa, u qoplama ochiq qoplama deb yuritiladi.

Agarda $\{S_\alpha\}$ to'plamostilar sistemasi X to'plamning ixtiyoriy qoplamasi bo'lsa, tabiiy savol tug'iladi: qanday shart bajarilsa, to'plamning ixtiyoriy qoplamasiga ko'ra X to'plamda biron-bir topologiyani aniqlash mumkinmi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

1.7.4-teorema. $\{S_\alpha\}$ sistema X fazoning qoplamasi bo'lsin. $\{V = \bigcap_{\alpha \in k} S_\alpha : k - \text{ixtiyoriy chekli to'plam}\}$ jamlanma tabiiy topologiya vujudga keltiradi va V sistema τ topologiyaning bazasini tashkil qiladi.

Demak, X to'plamning qoplamasi $\{S_\alpha\}$ ushbu to'plamda topologiya tashkil qilar ekan. Bu topologiyada $V = (\bigcap_{\alpha \in k} S_\alpha)$ ko'rinishdagi barcha mumkin bo'lgan birlashmalar va bo'sh to'plam ochiq to'plamlar sinfini tashkil qiladi.

1.7.4-ta'rif. (X, τ) topologik fazoning ochiq to'plamlaridan tashkil topgan $\nu = \{W_\alpha\}$ sistemaning ixtiyoriy sondagi chekli elementlari kesishmasi τ topologiya bazasini tashkil qilsa, u topologik fazoning old bazasi deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, topologiyaning ixtiyoriy bazasi old baza bo'la oladi. Lekin buning teskarisi har doim ham o'rinli emas.

1.7.7-misol. Endi $X = R^1$ to'g'ri chiziq yoki haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. $S_\alpha = \{x : x < \alpha; \alpha \in R^1\}$ va $S_\beta = \{x : x > \beta; \beta \in R^1\}$ to'plamlar sistemasini olaylik. Bu to'plamlar sistemasi sonlar chizig'i R^1 dagi tabiiy topologiyaning old bazasini tashkil qiladi.

1.7.1-misol. R^n — n o'lchamli vektor fazo bo'lsin. Bu R^n fazoda topologiyaning bazasi sifatida $B = \{V_{a;b}\}$ ko'rinishdagi elementlardan tashkil topgan $V_{a;b} = \{x \in R^n : a_i < \xi_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$ sistemani olamiz, bu yerda ξ_i — vektorning koordinatasi $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$; $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$; $b = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ lar R^n dagi ixtiyoriy vektorlar, bunda $a_i < b_i$ bo'lsa, R^n fazodagi $V_{a;b}$ ko'rinishdagi to'plamlar R^n ning ochiq parallelipedi deb yuritiladi.

Agar to‘plamning yopig‘ini olish amalini $C\ell M = \overline{M}$ bilan belgilasak va bu amalni birorta bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamda qo‘llasak, shu to‘plamda topologiya aniqlashning yana bir usuli kelib chiqadi. Bu usul, ya‘ni to‘plamning yopig‘ini olish amali buyuk polyak topologi K. Kuratovskiy tomonidan yaratilgan.

1.7.5-teorema. (Topologiyani Kuratovskiy operatori orqali kiritish).

Ixtiyoriy X to‘plamda qo‘llaniladigan ixtiyoriy Kurotovskiy operatori $C\ell$ shu to‘plamda ma‘lum bir τ topologiyaga asos soladi, aynan $\tau = \{U\}$ ning har bir U elementi uchun $C\ell(X \setminus U) = X \setminus U$ teginish o‘rinli va ixtiyoriy $M \subset X$ to‘plamosti uchun $\overline{M} = C\ell M$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1.7.2-misol. Ixtiyoriy sanoqsiz X to‘plam berilgan bo‘lsin. X to‘plamda $C\ell$ to‘plamning yopig‘i amalini quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy sanoqlidan katta bo‘lmagan M to‘plam uchun $C\ell(M) = M$, agar M sanoqsiz bo‘lsa, $C\ell(M) = M$ deb olamiz. Tekshirib ko‘rish bunday aniqlangan amal to‘plamning yopig‘ini olishning hamma shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsatadi. Ya‘ni:

- 1) $C\ell(M \cup N) = C\ell(M) \cup C\ell(N)$;
- 2) $M \subset C\ell(M)$;
- 3) $C\ell(C\ell(M)) = C\ell(M)$;
- 4) $C\ell(\emptyset) = \emptyset$ shartlar o‘rinlidir.

Bu misolda X to‘plamda yopiq to‘plam sifatida faqat va faqat $C\ell(M) = M$ tenglikni qanoatlantiruvchi to‘plamlarni e‘lon qilsak. Bu X da ma‘lum bir topologiyani aniqlaydi.

Ixtiyoriy topologik X fazodagi τ topologiya uning birorta to‘plamostisida tabiiy ravishda qanday to‘la ma‘lum topologiyani (indutsirlangan) aniqlaydi? $(X; \tau)$ topologik fazoda $A \subset X$ bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plamostisini olamiz. Quyidagi $\tau_A = \{U \cap A = U_A : U \in \tau\}$ to‘plamlar oilasini qaraylik. Tekshirib ko‘rish mumkinki, τ_A

sistema A to'plamda topologik strukturaning (topologik fazo barcha aksiomalarining) shartlarini qanoatlantiradi. Bu to'plamlar oilasi τ_A fazoning to'plami A da topologiyani tashkil qiladi. (A, τ_A) topologik fazo $(X; \tau)$ topologik fazoning fazoostisi deb yuritiladi. τ_A topologiya esa, indutsirlangan topologiya deb ataladi. Boshqacha aytganda, $(X; \tau)$ fazodagi τ topologiya A to'plamostiga singdirilgan (nasliy o'tgan yoki τ topologiya bilan sug'orilgan) topologiya deb ham atashimiz mumkin. Mabodo B to'plam A to'plamning to'plamostisi bo'lsa, yuqoridagilardan ma'lum bo'ladiki, B to'plamostisida ikkita— τ_B va τ_A indutsirlangan topologiyalar vujudga keladi. Tekshirib, amin bo'lish mumkinki, bu indutsirlangan topologiyalar ustma-ust tushadi. Bundan ko'rinadiki, B da indutsirlangan topologiya o'zini qamrab olgan fazoostiga bog'liq emas. Bu esa, topologiyani indutsirlash tranzitivlik xossasiga ega ekanligidan dalolatdir.

1.7.6-teorema. A to'plamning to'plamostisi A fazoda yopiq to'plam bo'lishi uchun bu to'plam A topologik fazoda birorta yopiq to'plam bilan A to'plamning kesishmasidan iborat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Aytaylik, A to'plam X ning fazoostisi va $B \subset A$ bo'lsin. Agar B to'plam X fazoda ochiq to'plam bo'lsa, albatta, u A fazoda ham ochiq to'plam bo'ladi. Buning aksi doim ham o'rinli bo'lavermaydi.

1.7.3-misol. R^2 fazoda “chegarasiz” doirani olaylik. Bu to'plam o'zi yotgan fazoda ochiq to'plam bo'ladi. Biroq R^3 fazoda ochiq to'plam bo'la olmaydi, hatto bu to'plamning R^3 da birorta ichki nuqtasi ham mavjud emas.

1.7.5-ta'rif. Agar X topologik fazoning A va B to'plamlari uchun $\bar{A} \cap B = \emptyset$ va $A \cap \bar{B} = \emptyset$ shart o'rinli bo'lsa, bu to'plamlar X fazoda topologik ayri (ajratilgan) yoki X fazoda ayri deyiladi.

Isbotlash mumkinki, agar U va V lar X fazoning ixtiyoriy ochiq (yoki yopiq) to'plamlari bo'lsa, u holda $A=U \setminus V$ va $B=V \setminus U$ lar X fazoning ayri to'plamlari bo'ladi.

Bo'sh bo'lmagan X to'plamda ekvivalent munosabat R aniqlangan bo'lsin. Bu holda X to'plam o'zaro kesishmaydigan ekvivalent sinflarga ajraladi. $\{D_\alpha\}$ —barcha ekvivalent sinflar to'plami bo'lsin. Bu to'plamni $X/R = \{D_\alpha\}$ ko'rinishda belgilaymiz, bu yerda R —ekvivalent munosabatidir.

1.7.6-ta'rif. X/R to'plam X to'plamning R ekvivalentlik munosabati hosil qilgan yoki *aniqlagan faktor to'plami* deyiladi.

Faraz qilaylik, (X, τ) topologik fazo va bu X to'plamda R ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. U holda X ning X/R faktor to'plamida tabiiy ravishda topologiyani quyidagicha aniqlashimiz mumkin: $V \subset \{D_\alpha\}$ (bu yerda V to'plam D_α ning elementlaridan tashkil topgan) ochiq to'plam faqat va faqat, agar ularning birlashmasi $\bigcup_\alpha D_\alpha \cap Y$ to'plam sifatida (X, τ) fazoda ochiq to'plam bo'lsa ochiq, agar $\bigcup_\alpha D_\alpha \cap V$ to'plam (X, τ) fazoda ochiq to'plam bo'lsagina $V \subset \{D_\alpha\}$ to'plamosti ochiq bo'ladi. Bu ochiq to'plamlarga bo'sh $\emptyset$ to'plamni ham kiritamiz. Bu oddiy aniqlangan ochiq to'plamlar jamlanmasi X/R to'plamda topologiya tashkil qiladi va bu topologiya faktor topologiya deb atalib, τ_R ko'rinishda belgilanadi, ya'ni $(X/R, \tau_R)$ topologik fazo faktor fazo deb yuritiladi.

III. TOPOLOGIK FAZODA AJRIMLILIK AKSIOMALARI.

1-§. Topologik fazolarning ajrimlilik aksiomalari.

Yuqorida keltirilgan misol va mashqlardan ma'lumki, shunday "yomon tuzilgan" topologik fazolar mavjudki, alohida olingan nuqta yopiq to'plamosti bo'lmisligi mumkin, chekli to'plam limit nuqtaga ega bo'lishi mumkin, bitta yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligi ikkita har xil nuqtalarga yoki fazoning har bir nuqtasiga yaqinlashishi mumkin. Bunday hollar klassik tahlil (analiz) nuqtai nazaridan aynigan vaziyatlarning (situatsiyalarning) uchrab turishidan, topologik fazo ta'rifida asosidagi 1^0-4^0 aksiomalarining juda umumiy ekanligidan darak beradi. Shu tufayli fazolarning juda umumiy bo'lgan xossalari ajratiladi. Shulardan kelib chiqqan holda, topologik fazoning aksiomalariga turli xarakterdagi chegaralar qo'yish maqsadga muvofiqdir. Bu xildagi talablarga birinchi va ikkinchi sanoqlilik aksiomalari va ajrimlilik aksiomalarini kiritish bo'ladi. Natijada, bunday topologik fazolar matematikaning turli bo'lim va tatbiqlarida juda keng qo'llaniladi. Uchrayotgan turli matematik muammolarda topologik fazolar qo'shimcha xususiyatlarga ega bo'lmoqda.

2.5.1-ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtasi uchun kamida birining ikkinchisini o'z ichiga olmaydigan atrofi mavjud bo'lsa, T_0 fazo yoki **Kolmogorov fazosi** deyiladi.

Agar bu ta'rifda har ikkala ixtiyoriy nuqtalar birorta atrofga ega bo'lib, biri ikkinchisini o'zida saqlamasa, ma'lum bo'ladiki, bunday fazolar sinfi nisbatan tordir.

Bu fazolar sinfi T_1 fazo yoki erishilgan, istilo qilingan yoki egallangan fazo deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinadiki, ixtiyoriy T_1 fazo X da ixtiyoriy bir nuqtali to'plam yopiq to'plamdir va buning teskarisi ham o'rinlidir. Yana shuni isbot qilish mumkinki, agar x_0 nuqta birorta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi M ning cheksiz ko'p turli nuqtalarini o'zida saqlaydi.

Haqiqatan ham, x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u M ning $x_1, x_2, \dots, x_n$ chekli nuqtalarini o'zida saqlasa, u holda X fazo T_1 bo'lganligi sababli x_i ning shunday U_i atroflari topiladiki, ular x_i nuqtalardan boshqasini o'z ichiga olmaydi.

Endi $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ to'plamni ko'raylik. Ma'lumki, U to'plam x_0 nuqtaning atrofi bo'ladi. Bu to'plam M ning x_0 nuqtadan boshqa nuqtalarini o'zida saqlamaydi. Bundan ko'rinadiki, x_0 nuqta M ning limit nuqtasi emas. Bu ziddiyat ta'rifning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Kolmogorov fazosiga misol sifatida bog'lamli “qo'sh nuqtani” keltirish mumkin. Bu fazo erishilgan fazo bo'la olmaydi. Kolmogorov fazosiga trivial topologiyali ixtiyoriy fazolar ham kiradi.

2.5.2-misol. Haqiqiy sonlar to'plami R^1 ni olaylik. Bu haqiqiy to'g'ri chiziqda topologiya bazasi sifatida $a < x < +\infty$ nurlarni olamiz. Bu ko'rinishdagi nurlar bazaning shartlarini qanoatlantiradi. Bunday baza R^1 da topologiya tashkil qiladi. Bu topologik R^1 fazo T_0 fazo aksiomasini qanoatlantiradi, lekin T_1 fazo bo'la olmaydi. Agar turli ikki $x_1, x_2 \in R^1$ haqiqiy sonlarni olsak, ravshanki, bir vaqtda ikkinchisini o'zida saqlamaydigan x_1 va x_2 nuqtalarning birorta atrofi topilmaydi. Demak, bunday topologiyali R^1 fazo Kolmogorov fazosi bo'ladi.

2.5.3-ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki har xil nuqtasi o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, u T_2 fazo yoki **Xausdorf fazosi** (yoki Xausdorf topologiyali fazo) deyiladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy Xausdorf fazosi T_1 fazo bo'ladi, lekin buning teskarisi doimo ham o'rinli emas. Ta'rifdan yana shuni anglash mumkinki, fazoning Xausdorf fazosi bo'lishi nasliy xususiyatga ega, ya'ni uning ixtiyoriy fazoostisi ham Xausdorof fazosiniki bo'lishidir. Xausdorf fazosining yana bir muhim xossasi—bu fazoda ixtiyoriy ketma-ketlikning limiti yagona bo'ladi. x_n ketma-ketlik limitining ikki x^1 va x^2 nuqtalari bo'lib, u^1 va u^2 ularning o'zaro kesishmaydigan atroflari deylik. Ketma-ketlik limitining ta'rifiga ko'ra, bu atroflarning biri ketma-ketlikning chekli elementlarini o'zida saqlaydi. Bu ta'rifning shartiga ziddir.

Xausdorf fazolariga misol sifatida ixtiyoriy metrik fazoni olish mumkin. Zariskiy topologiyasini olsak, bu topologiya ham T_1 fazo bo'ladi, lekin T_2 fazo bo'lolmaydi.

2.5.4-misol. To'g'ri chiziqda $[0,1]$ kesmani olaylik. Bu to'plamda ochiq to'plam sifatida bo'sh to'plam, $[0,1]$ kesmaning o'zi va $[0,1]$ kesmadan sanoqlidan ko'p bo'lmagan nuqtalarni chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plamlarni qaraylik.

Agar hosil bo'lgan topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtalarini olsak, bu nuqtalar ikkinchisini o'zida saqlamaydigan atrofga egadir. Bu fazoning erishilgan T_1 fazo ekanligini ko'rsatadi. Lekin ikki ixtiyoriy har xil nuqtalar o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega emas. Bu fazoning Xausdorf fazosi emasligidan darak beradi.

2.5.5-ta'rif. Agar X fazoning ixtiyoriy yopiq to'plami A va ixtiyoriy $x_0 \in A$ nuqtasi X fazoda shunday ochiq o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, X topologik fazo T_3 topologik fazo deyiladi,

Agar X topologik fazo X bir vaqtda ham T_1 fazo, ham T_3 fazolar bo'lsa, u holda u regulyar fazo deyiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, regulyar fazo Xausdorf fazosi bo'lar ekan. Lekin buning aksi doimo o'rinli emas.

Regulyar fazolarga ixtiyoriy metrik fazolar misol bo'ladi, xususi holda R^n fazo ham regulyar fazodir.

2.5.6-misol. Aytaylik, X barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'lib, τ topologiya atroflar natijasida (orqali) aniqlangan bo'lsin. Bu topologiyada nol nuqtadan boshqa barcha nuqtalarning atrofi, to'g'ri chiziqdagi nuqtaning interval ko'rinishidagi atrofini olamiz. Nol nuqtaning atrofi deb uning to'g'ri chiziqdagi interval ko'rinishdagi atrofidan sonlar o'qining $\left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ nuqtalari chiqarib tashlangan to'plamlarini olamiz. Ya'ni, $u(0) = (a, b) \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ ixtiyoriy $0 \in (a, b) \subset R$.

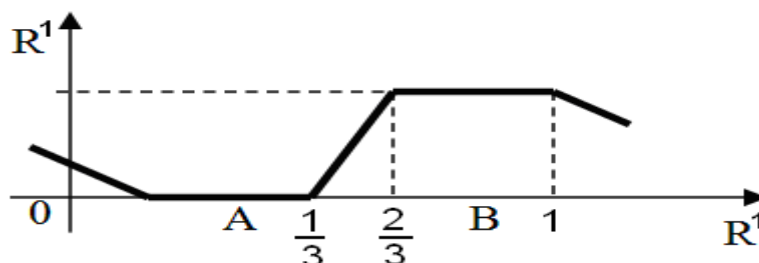
Agar $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ to'plamni olsak, A to'plam sonlar o'qida yopiq to'plamlardir. Nol nuqta va A to'plam bu yerda o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo'lmaydi. Ya'ni, shunday aniq atroflar mavjud emas. Bu fazoning regulyar fazo

emasligini ko'rsatadi. Lekin bu fazoda ixtiyoriy ikki har xil nuqta o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega. Demak, bu topologik fazo Xausdorf fazosi ekan.

Endi elementlari soni ikkitadan ortiq to'plamlardagi trivial topologiyani ko'rsak, bu fazolar T_3 fazoga sodda misol bo'la oladi, lekin ular regulyar fazo emas, chunki bunday fazolar T_1 fazo emasdir.

Regulyar fazolarning xossalriga keladigan bo'lsak, fazoning regulyarligi – bu nasliy xarakterga ega, ya'ni regulyar fazolarning ixtiyoriy to'plamostisi ham regulyar bo'ladi. Bundan xususiy holda kelib chiqadiki, regulyar fazolarning to'g'ri ko'paytmasi regulyar bo'lsa, uning har bir ko'paytuvchisi regulyar bo'ladi. Nihoyat, regulyar fazolar ixtiyoriy oilasining Tixonov ko'paytmasi ham regulyar fazo bo'ladi. Shuni aytish mumkinki, regulyar fazodagi faktor-topologiya doimo regulyar fazo bo'lavermaydi.

2.5.7-ta'rif. Agar X topologik fazoning ikki A va B to'plamostilari uchun butun X fazoda aniqlangan shunday haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya $f : X \rightarrow [0,1]$ mavjud bo'lsa va u funksiya uchun barcha $x \in A$, $f(x)=0$ va $f(x)=1$ barcha $x \in B$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda ular X da funksional ayri deyiladi (2.5.1-rasm).



2.5.1-rasm

Ravshanki, A va B to'plamlarning X fazoda funksional ayri ekanligidan ularning shu X fazoda ayri ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar A va B lar X fazoda funksional ayri bo'lsa, $U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right)$ va $f^{-1}\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = B$ to'plamlar A va B to'plamlarning o'zaro kesishmaydigan atroflari bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, shunday Xausdorf, qolaversa, regulyar fazolar borki, bu fazolarda juft ikki nuqta funksional ayri emas. Bunga sabab shunday regulyar

fazolar mavjudki, bu fazolarda aniqlangan konstant funksiyadan boshqa funksiya mavjud bo'lmaydi.

2.5.8-ta'rif. Agar fazoning ixtiyoriy x_0 nuqtasi va bu nuqtani o'zida saqlamaydigan bo'sh bo'lmagan F yopiq to'plam funksional ayri bo'lsa, X topologik fazo $T_{3/2}$ fazo deyiladi.

Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 fazo, ham $T_{3/2}$ fazo bo'lsa, uni Tixonov fazosi yoki to'kis regulyar (butkul regulyar) fazo deyiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, Tixonov fazosi regulyar fazo bo'ladi.

Har bir metrik fazo, xususiyl holda R^n fazo ham, Tixonov fazosi bo'ladi.

Tixonov fazolarining xossaligidan biri – bu fazo ham nasliy xususiyatga ega, ya'ni bu fazoning ixtiyoriy to'plamostisi ham Tixonov fazosi bo'lishidir.

Shuni ta'kidlash mumkinki, har bir egallangan (marraviy), fazo to'la regulyar fazo bo'lishi uchun ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqtasi va uning ixtiyoriy ochiq atrofi U uchun $f : X \rightarrow [0,1]$, $f(x_0)=0$, $f(X \setminus U)=1$ shartlarni qanoatlantiruvchi shunday uzluksiz funksiyaning mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.

Topologik fazolarning muhim sinflaridan yana biri normal topologik fazolardir.

2.5.9-ta'rif. Agar X fazoning ixtiyoriy ikki bo'sh bo'lmagan kesishmaydigan yopiq F_1 va F_2 to'plamlarining o'zaro kesishmaydigan $U(F_1)$ va $U(F_2)$ ochiq atroflari mavjud bo'lsa, X topologik fazo T_4 fazo deyiladi.

Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 , ham T_4 fazo bo'lsa, bunday topologik fazolarga normal topologik fazolar deyiladi.

Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, normal topologik fazolar regulyar va to'la regulyar fazo bo'ladi. Buning teskarisi o'rinli bo'lavermaydi. T_1 fazolar sinfi ichidagi $T_{3/2}$ fazolar sinfi T_3 fazolar sinfi bilan T_4 fazolar sinfi orasidagi oraliq sinfdir. Shu sababli belgilashlarda ham butkul regulyar fazolar sinfi $T_{3/2}$ bilan belgilanadi.

Yuqoridagi topologik fazolarga o'xshab, normal fazolar sinfi nasliy xususiyatga ega emas, ya'ni bu fazolarning ixtiyoriy to'plamostisi normal fazo bo'lavermaydi. Normal fazolar sinfida uzluksiz akslantirishlarning bir oilasi mavjud

bo'lib, bu uzluksiz akslantirishlar o'lcham nazariyasi va topologiyaning boshqa deyarli barcha jabhalarida figuralarning geometrik xossalari bilan bog'liq muammolarida va funksiyalarni davomlashtirish masalalarini yechishda, fazoning gomologik o'lchamini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Bu masalaning asosini Urison teoremasi (Urison lemmasi) tashkil qiladi.

2.5.10-Urison lemmasi. Ixtiyoriy normal X fazoning o'zaro kesishmaydigan yopiq A va B to'plamlari uchun shunday uzluksiz $f: X \rightarrow [0,1]$ funksiya mavjudki, uning uchun $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ va har bir $x \in X$ uchun shartlar o'rinlidir.

Isbot. X normal fazo, A va B lar uning ixtiyoriy yopiq to'plamlari va $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. Har bir $r = k/2^n$, $k=0,1,\dots,2^n$ ratsional songa shunday $G_{(r)}$ ochiq to'plamni mos qo'yamizki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $A \subset G_{(0)}$, $X \setminus B = G_{(1)}$;
- 2) agar $r < r'$ bo'lsa, $\overline{G_{(r)}} \subset \overline{G_{(r')}}.$

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi ochiq to'plamlar sistemasini n – ko'rsatkichga nisbatan induksiya metodi bilan ko'ramiz.

$n=0$ bo'lsin. Bu holda, X fazo normal bo'lganligi tufayli A va B larning $U(A)$ va $U(B)$ kesishmaydigan ochiq atroflari mavjud bo'ladi. Ularni $G_{(0)}=U(A)$ va $G_{(1)}=X \setminus B$ qilib belgilaymiz.

$k=n-1$ uchun $G_{(r)}$ ochiq to'plamlar sistemasi qurilgan bo'lsin.

Endi n uchun $G_{(n)}$ to'plamni qurishimiz kerak. $2m/2^n = m/2^{n-1}$ bo'lganligi sababli $G_{(r)}$ to'plamni $r=k/2^n$ n – toq son uchun ko'rishimiz yetarli bo'ladi. Aytaylik, $k=2m+1$ bo'lsin, u holda $(k+1)/2^n = (m+1)/2^{n-1}$, $(k-1)/2^n = m/2^{n-1}$ va induksiya shartiga ko'ra, $\overline{G_{(k-1/2^n)}} \subset \overline{G_{(k+1/2^n)}}$ ifodaga egamiz. Ravshanki, $\overline{G_{(k-1/2^n)}}$, $X - G_{(k+1/2^n)}$ lar yopiq va kesishmaydi. X fazoning normalligi tufayli $\overline{G_{(k-1/2^n)}}$ ning ochiq atrofi mavjudki, bu ochiq to'plam $X - G_{(k+1/2^n)}$ ning ochiq atrofi bilan kesishmaydi. $V = G_{(k/2^n)}$ belgilashni kiritamiz. Aniqki, $\overline{G_{(k-1/2^n)}} \subset \overline{G_{(k/2^n)}}$, $\overline{G_{(k/2^n)}} \subset \overline{G_{(k+1/2^n)}}$ lar o'rinli, shu bilan induksiya tugaydi.

$G_{(r)}$ to'plamlarning aniqlanish sohasini quyidagicha kengaytiramiz:

$$G(r) = \begin{cases} \theta, & \text{agar } r > 0 \\ X, & \text{agar } r < 1 \end{cases} \text{ bo'lsa:}$$

Endi $\varphi: X \rightarrow [0,1]$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $x \in G(0)$ bo'lsa $\varphi(x) = 0$, va $\varphi(x) = \sup\{r: x \in G(r)X - G(r)\}$. Bu φ funksiyaning uzluksizligini ko'rsatishimiz kerak. Shunga erishish maqsadida ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqta va $N > 0$ uchun x_0 nuqtaning shunday $O_{N(x_0)}$ atrofini ko'ramizki, u uchun

$|\varphi(x_0) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{2^N}$, $x \in O_N(x_0)$ o'rinli bo'lsin. Aytaylik, r_0 son $k/2^n$ ko'rinishda bo'lib,

$\varphi(x_0) < r_0 < \varphi(x_0) + \frac{1}{2}N + 1$ (1) shartni qanoatlantirsin. Belgilaymiz:

$U_N(x_0) = \overline{G(r_0) \setminus G(r_0 - \frac{1}{2}N)}$. Bu holda $x_0 \in U_N(x_0)$, chunki $r_0 < \varphi(x_0)$ va

$r_0 - \frac{1}{2}N + 1 \leq \varphi(x_0)$. Agar $x \in U_N(x_0)$ bo'lsa, u holda $x \in G(r_0)$. Shu sababli $\varphi(x) \leq r_0$.

Bundan tashqari, $x \in \overline{X - G(r_0 - \frac{1}{2}N)} \subset X - G(r_0 - \frac{1}{2}N)$, shu sababli $r_0 - \frac{1}{2}N \leq \varphi(x)$.

Demak, $r_0 - \frac{1}{2}N \leq \varphi(x) \leq r_0$.

(1) va (2) larni solishtirsak, quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x)| < \frac{1}{2}N, x \in U_N(x_0)$$

Bu φ ning uzluksizligini ko'rsatadi. Funksiyaning qurilishiga ko'ra, $\varphi|_A \equiv 0$; $\varphi|_B \equiv 1$ va $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

Bunday qurilgan funksiya Urison funksiyasi deyiladi. Urisonning bu lemmasi quyidagiga ekvivalentdir.

Normal X fazoning ixtiyoriy kesishmaydigin va bo'sh bo'lmagan A va B yopiq to'plamlari uchun shunday $\varphi_{a,\varepsilon}(x)$ uzluksiz funksiya mavjud bo'ladiki, u quyidagi shartni qanoatlantiradi: $\varphi_{a,\varepsilon}(x)|_A \equiv a$; $\varphi_{a,\varepsilon}(x)|_B = \varepsilon$; $a \leq \varphi_{a,\varepsilon}(x) \leq \varepsilon$, $x \in X$. Bu yerda a, b ($a < b$) ixtiyoriy haqiqiy sonlardir. Haqiqatan ham, agar $\varphi_{a,\varepsilon}(x)$ Urison funksiyasi bo'lsa, u holda $\varphi_{a,\varepsilon}(x) = (\varepsilon - a)\varphi(x) + a$ izlangan funksiya bo'ladi.

2.5.11-teorema. Normal X fazoning ixtiyoriy yopiq A to'plamida berilgan ixtiyoriy chegaralangan $\varphi: A \rightarrow R$ uzluksiz funksiya uchun shunday $\Phi: X \rightarrow R$ uzluksiz funksiya mavjudki, uning uchun quyidagi o'rinli:

$$\Phi|_A \equiv \varphi \text{ va } \sup\{\Phi(x), x \in X\} = \sup\{\varphi(x), x \in A\}.$$

Isbot. Izlanayotgan uzluksiz $F_{(x)}$ funksiyani funksiyalar ketma-ketligining limiti ko‘rinishida quramiz.

$$\begin{aligned} \text{Aytaylik: } \varphi_0 = \varphi \text{ va } a_0 = \sup\{|\varphi(x)| : x \in A\} \quad A_0 = \left\{x : \varphi_0(x) \leq -\frac{a_0}{3}\right\}, \\ B_0 = \left\{x : \varphi_0(x) \geq \frac{a_0}{3}\right\} \end{aligned} \quad \text{bo‘lsin}$$

Ravshanki, A_0 va B_0 to‘plamlar yopiq va o‘zaro kesishmaydi. Urison lemmasiga ko‘ra, shunday uzluksiz funksiya $g_0 : X \rightarrow R$ mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_0(x)| \leq \frac{a_0}{3} \text{ va } g_0(x) = \begin{cases} -\frac{a_0}{3} & \text{agar, } x \in A_0 \text{ bo‘lsa} \\ \frac{a_0}{3} & \text{agar, } x \in B_0 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

Endi A to‘plamda φ_1 funksiyani $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - g_0(x)$ ko‘rinishda aniqlaymiz. U holda φ_1 funksiya uzluksiz va $a_1 = \sup\{|\varphi_1(x)| : x \in A\} \leq \frac{2}{3}a_0$ o‘rinli. Shunga o‘xshab, quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$A_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \leq -\frac{a_1}{3}\right\}, \quad B_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \geq \frac{a_1}{3}\right\}.$$

Endi yana Urison funksiyasi g_1 ni olamiz, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_1(x)| \leq \frac{a_1}{3} \text{ va } g_1(x) = \begin{cases} -\frac{a_1}{3}, & \text{agar } x \in A_1 \text{ bo‘lsa} \\ \frac{a_1}{3}, & \text{agar } x \in B_1 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

A to‘plamda $\varphi_2(x)$, funksiyani $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - g_1(x)$ ko‘rinishda ko‘ramiz va $a_2 = \sup(A)\{|\varphi_2(x)| : x \in A\} \leq \frac{2}{3}a_1$ deb olamiz. Shu yo‘sinda A to‘plamda uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning $\varphi_0 = \varphi; \varphi_1; \varphi_2; \dots, \varphi_n, \dots$ ketma-ketligi va X da uzluksiz $g_0; g_1; g_2; \dots, g_n, \dots$ funksiyalar ketma-ketligiga ega bo‘lib, ular quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - g_n(x), \quad |g_n(x)| \leq \frac{a_n}{3}; a_{n+1} \leq \frac{2}{3}a_n.$$

Bu yerda $a_n = \sup\{|\varphi_n(x)| : x \in A\}$ $n = 0, 1, 2, \dots$, bundan $|\varphi_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n a_0$, $|\varphi_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n \cdot \frac{a_0}{3}$

larga ega bo'lamiz. Oxirgi tengsizliklardan $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ qator X da birorta uzluksiz

funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu yig'indini $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$

bilan belgilaymiz va quyidagi baholashga ega bo'lamiz: $|\Phi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n \frac{a_0}{3} = a_0$. Endi

$x \in A$ bo'lsin, u holda $S_n(x) = g_0(x) + \dots + g_n(x)$ qisman yig'indi $\varphi_{n+1}(x)$ funksiyalarning qurilishiga ko'ra $\varphi_0(x) - \varphi_n(x)$ ga teng. Lekin $\varphi_n(x) \rightarrow 0$, u holda har bir $x \in A$ uchun $\Phi(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x)$. Demak, $\Phi(x)$ izlangan funksiya ekan.

2.5.12-natija. Normal X fazo ning ixtiyoriy yopiq A to'plamostisida berilgan har bir uzluksiz $\varphi : A \rightarrow I^n$ akslantirishni $\Phi : X \rightarrow I^n$ akslantirishgacha uzluksiz davomlashtirish mumkin.

Glossariy

Termin	O'zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Topologik fazo	Ixtiyoriy "tabiatli" bo'sh bo'lmagan X to'plam va $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ sistema (shu X to'plamning to'plamostilardan tashkil topgan) berilgan bo'lsin. 1.3.1-ta'rif. Agar τ sistema (to'plamostilar oilasi) quyidagi: 1) $\emptyset, X \in \tau$; 2) τ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall A \subset A$ uchun $\bigcup_{\alpha^1 \in A^1} U_{\alpha^1} \in \tau; \alpha^1 A^1;$ 3) τ sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall \alpha_i \in A, i = \overline{1, S}$ $\bigcap_{i=1}^S U_{\alpha_i} \in \tau$ shartlarni qanoatlantirsa, τ sistema X to'plamdagi topologiya, $(X; \tau)$ juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi.	Given a X set. Its τ subsets is called a topology on system, if the following conditions are met: The union of an arbitrary family of sets belonging to τ, owned τ, that is $U_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in A \text{ if then } \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau.$ The intersection of a finite family of sets belonging to τ, owned τ, that is $U_i \in \tau \ i = 1, 2, \dots, n, \text{ if then } \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau.$ $X, \emptyset \in \tau$ The pair (X, τ) is called a topological space τ. The sets belonging, called open sets.
Nol o'lchamli topologik fazo	Agarda p ning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday V atrof topilsa va u $V \subset U$ hamda $FrV = \emptyset$ shartni qanoatlantirsa,	If for any X in p there exists a V, as, topological protsranstvo X at points called zero-dimensional (dimension zero)

	X topologik fazo $p \in X$ nuqtada nol o'lchamli fazo deyiladi (o'lchami nol).	
n o'lchamli topologik fazo	Bo'sh to'plam va faqat bo'sh to'plam -1 o'lchamga ega. Agar x_0 nuqta chegarasi $\leq n-1$ o'lchamga ega bo'lgan shunday turli kichik atroflarga ega bo'lsa, topologik fazo X o'zining $x_0 \notin X$ nuqtasida o'lchami $\leq n(n \geq 0)$ ga ega deyiladi. Topologik fazo, agar o'zining har bir nuqtasida $\leq n$ o'lchamga ega bo'lsa, uning o'lchami $\leq n(n \geq 0)$ deyiladi va $\dim X \leq n$ ko'rinishda yoziladi. Agar X fazo $\dim X \leq n$ bo'lib, $\dim X > n-1$ bo'lsa, $\dim X = n$ deyiladi.	For any normal (in particular, metrizable) space Lebesgue dimension is the smallest integer such that for every finite open cover of the space there is inscribed in it (open end) Floor space is called the multiplicity. zero-dimensional in the sense $\dim$, if every finite open cover, you can enter an open cover, the elements- cerned not intersect.
T_1 va T_3 fazolar	Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtasi birorta atrofga ega bo'lib, biri ikkinchisini o'zida saqlamasa bunday fazolar sinfi T_1 fazo deyiladi. Agar X fazoning ixtiyoriy yopiq to'plami A va ixtiyoriy $x_0 \in \bar{A}$ nuqtasi X fazoda shunday ochiq o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, X topologik fazo T_3 topologik fazo deyiladi.	T_1 in a topological space for every two different points of each point has an open neighborhood not containing the other. T_3 in a topological space every point and it does not contain a closed set have disjoint open neighborhoods.
Regulyar fazo	Agar X topologik fazo X bir	If a topological space is T_1 and T_3 both a

	vaqtda ham T_1 fazo, ham T_3 fazolar bo'lsa, u holda u regulyar fazo deyiladi.	space and the space is called regular
Fazoning ind o'lchami	X regulyar fazo va n-manfiy bo'lmagan butun son berilgan bo'lsin. 3.4.1-ta'rif. i1) $indX = -1$ faqat va faqat, $X = \emptyset$ bo'lsa; i2) agar ixtiyoriy $x \in X$ va uning ixtiyoriy atrofi V uchun shunday ochiq $U \subset X$ topilsa va $x \in U \subset V$ hamda $indF_U \leq n-1$ o'rinli bo'lsa, $indX \leq n$; i3) agar $indX \leq n$ tengsizlik o'rinli va $indX \leq n-1$ tengsizlik bajarilmasa, $indX = n$; i4) agar $ind \leq n$ tengsizlik hech bir n uchun o'rinli bo'lmasa, $indX = \infty$. I1) – I4) shartlar har bir normal X fazo uchun $IndX$ sonni mos keltirmoqda, $indX$ son regulyar fazoning Menger-Urison o'lchami yoki kichik induktiv o'lchami deyiladi.	X umpteenth regular space and non-negative integers. Definition 3.4.1. i1), and only; i2), a voluntary and optional surrounding V, since, if and when necessary; i3) fails if the corresponding inequality and inequality; i4), if the inequality in any capacity. I1) -i4) shartlarhar normal space for the number, and regular space called Menger size or small size inductive kick.
$T_{3/2}$ fazo	Agar X fazoning ixtiyoriy x_0 nuqtasi va bu nuqtani o'zida saqlamaydigan bo'sh bo'lmagan F yopiq to'plam funksional ayri bo'lsa, X topologik fazo $T_{3/2}$	If X is a space at any point x , and this point can not stay away from the loss of functionality is called a $T_{3/2}$ topological space.

	fazo deyiladi.	
Tixonov fazosi	Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 fazo, ham $T_{3/2}$ fazo bo'lsa, uni Tixonov fazosi yoki to'kis regulyar (butkul regulyar) fazo deyiladi. Tixonov fazosi regulyar fazo bo'ladi.	If the space X is a space at the same time T_1 and $T_{3/2}$ space this space of Tikhonov
Topologik fazoning dim o'lchami	X Tixonov fazosi, n butun son va $n \geq -1$ bo'lsin. d1) agar X fazoning ixtiyoriy funksional ochiq chekli qoplamasiga karrasi $\leq n$ bo'lgan funksional ochiq chekli qoplama chizish mumkin bo'lsa; $\dim X \leq n$ bo'ladi. d2) agar $\dim X \leq n$ o'rinli, lekin $\dim X \leq n-1$ o'rinli bo'lmasa; $\dim X = n$ bo'ladi. d3) agar $\dim X \leq n$ tengsizlik barcha n lar uchun bajarilmasa, $\dim X = \infty$; bo'ladi. d1) – d3) shartlar har bir Tixonov fazosi X ga $\dim X$ sonni mos keltirmoqda. $\dim X$ son X Tixonov fazosining Chex-Lebeg o'lchami	For any normal (in particular, metrizable) space X dimension Lebesgue is the smallest integer n such that there exists a refinement for every finite open cover of the space in it (finite open) cover of multiplicity $n + 1$
T_4 fazo	Agar X fazoning ixtiyoriy ikki bo'sh bo'lmagan kesishmaydigan yopiq F_1 va F_2 to'plamlarining o'zaro kesishmaydigan $U(F_1)$ va $U(F_2)$ ochiq atroflari mavjud	The T_4 topological space every two disjoint closed sets have disjoint open neighborhoods.

	bo'lsa, X topologik fazo T_4 fazo deyiladi.	
Normal fazo	Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 , ham T_4 fazo bo'lsa, bunday topologik fazolarga normal topologik fazolar deyiladi.	If space X is a topological space and at the same time that T_1 and T_4 such a space is called normal.
Topologik fazo bazasi	Agar X fazoning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan U ochiq to'plami β jamlanmaga tegishli bo'lgan elementlarning birlashmasidan iborat bo'lsa, (X, τ) topologik fazoning ochiq to'plamlaridan tashkil topgan β to'plamlar jamlanmasi τ topologiyaning bazasi yoki fazoning bazasi deyiladi.	Base topology (the base of a topological space topology base, open base) - a family of open subsets of a topological space X such that any open set in X is a union of members of this family.
Bog'lamli topologik fazo	Agar X to'plamni o'zining bo'sh bo'lmagan ikkita o'zaro kesishmaydigan ochiq to'plamostilari birlashmasi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lmasa, X topologik fazo bog'lamli topologik fazo deyiladi. Ya'ni, $X \neq U_1 \cup U_2$ $U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset$ – bo'sh to'plam, U_1, U_2 ochiq to'plamlardir.	A topological space is said to be connected if it can be represented as a union of two non-empty disjoint open subsets. Otherwise, the space is said to be connected.
Chiziqli bog'lamli fazo	Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki nuqtasini yo'l orqali tutashtirish mumkin bo'lsa, X fazo chiziqli	The linearly connected space - is a topological space in which any two points can be joined by a continuous curve.

	bog‘lamli fazo deyiladi.	
Bir bog‘lamli fazo	Agar X chiziqli bog‘lamli va ixtiyoriy nuqtasida $\pi(X, x) = \{1\}$ o‘rinli bo‘lsa, x topologik fazo bir bog‘lamli deyiladi, Demak, tortiluvchan fazolar bir bog‘lamli ekan.	A simply-connected space - linearly connected topological space in which any closed path can be continuously shrunk to a point. Example: the sphere is simply connected, and the surface of the torus is not simply connected, because the circle on the torus, shown in red in the figure, can not be contracted to a point.
Ko‘pxillikning triangulyasiyasi	Agar quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa, X fazoning chekli sondagi $R = \{(T_i, \varphi_i) : i = \overline{1, k}\}$ topologik uchburchaklardan tashkil topgan to‘plami ikki o‘lchamli ko‘pxillikning triangulyasiyasi deyiladi: 1) $X = \bigcup_{i=1}^K T_i$; 2) $T_i, T_j = \emptyset$ yoki $T_i \cap T_j$ kesishma T_i va T_j larning umumiy qirrasidan yoki umumiy uchidan iborat bo‘lsa, bu yerda $\forall i, j \in \{1, k\}, K = \{T_i : i = \overline{1, k}\}$ triangulyasiya.	A triangulation of a topological manifold is presenting it as the union of a set of simplices, with different simplices adjacent right and face of any simplex can not be incident to the brink of the same simplex.
Bog‘lamli triangulyasiyasi	Agar K uchburchaklarning ixtiyoriy ikki uchini qirralaridan tuzilgan yo‘l orqali tutashtirish mumkin bo‘lsa, u holda X bog‘lamli deyiladi.	If K is a voluntary aspect can be created by connecting the two ends of the triangle, then X is called connected.
Yopiq sirt	Bog‘lamli triangulyasiyasi ikki o‘lchamli ko‘pxilliklar yopiq sirt deyiladi.	The connected two-dimensional manifold triangulation revoked surface.

Eyler xarakteristikasi	Har qanday triangulyasiyalangan P sirt uchun $\chi(P) = l - k + f$ sonni aniqlaymiz. Bu yerda l triangulyasiyaning uchlari, k qirralari va f ko'pburchaklar sonidir. $\chi(P)$ son P sirtning Eyler xarakteristikasi deyiladi.	For the end of the cell complex (in particular for finite simplicial complex) Euler characteristic can be defined as the alternating sum $\chi = k_0 - k_1 + k_2 - \dots$, where k_n denotes the number of cells of dimension n .
Ochiq qoplama	(X, τ) topologik fazo va $U = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar $X = \bigcup_{\alpha} \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ o'rinli bo'lsa, U sistema X ning qoplamasi deyiladi. Agar qoplamaning elementlari ochiq to'plamlar bo'lsa, u qoplama ochiq qoplama deyiladi.	Given a topological space (X, τ) , where X - any set, and τ - certain topology on X . Then the family of open sets is called an open cover, if $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
Kompakt topologik fazo	Agar topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan (qoplama elementlari ochiq to'plamlar), chekli qoplamaosti ajratib olish mumkin bo'lsa, bu topologik fazo kompakt deyiladi.	If a topological space with the optional cover (cover open names) may be limited, it is called a topological space is compact.
Lokal kompakt	Agar X topologik fazoning har bir $x \in X$ nuqtasi yopig'ining kompakt bo'ladigan atrofi mavjud bo'lsa, bunday fazolarga lokal kompakt fazo deyiladi. Lokal kompakt fazolarga R^n fazoni ko'rsatishimiz mumkin.	Compact space - is a topological space in which any surface open sets there is a finite sub-covering.

Chiziq ta'rifi	Bir o'lchamga ega bog'langan va kompakt metrik fazolar chiziq deyiladi. Kompakt bo'lmagan hollarda esa chiziqni quyidagicha ta'riflash mumkin: Bir o'lchamli lokal kompakt chekli dizyunkt yopiq bog'lamli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lgan metrik fazolarga chiziq deyiladi.	The reference to the size of a compact metric space and is called direct. Section CD, the line can be described as follows: A one-dimensional locally compact closed final compound dizyunkt package, which consists of a combination of a metric space is called a line.
Kovariant funktor	A va B kategoriyalar berilgan bo'lsin. A kategoriyaning har bir X obektiga B kategoriyaning $F(X)$ obektini va A kategoriyaning har bir $f:X_1 \rightarrow X_2$ morfizmiga B kategoriyaning $(f):T(X_1) \rightarrow T(X_2)$ morfizmini mos keltiruvchi $F:A \rightarrow B$ akslantirish berilgan bo'lib, agar u 1. $F(1_x)=1_{F(x)}$ 2. $F(gf)=F(g)F(f)$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda u kovariant funktor deyiladi.	Covariant) functor from category to category - the mapping between classes of objects and sets of morphisms between all possible pairs of objects, such that
Spektr	Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, kichik $\mathfrak{S}=(\sigma, M)$ kategoriya teskari spektr deyiladi: 1) σ to'plamdagi old tartib qisman tartiblangan bo'lsa; 2) qisman tartiblangan σ to'plam yuqoriga yo'nalgan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy ikki $X, Y \in \sigma$ obektlar uchun shunday	Let A - operator acting in a Banach space E over . The number λ is called regular for the operator A, if the operator is called the resolvent of A, defined on all of E and continuous. The set of regular values of A is called the resolvent set of the operator , and the complement of the resolvent set - the spectrum of this operator

	$Z \in \sigma$ topilsa va uning uchun $X \leq Z$ va $Y \leq Z$ o'rinli bo'lsa; 3) $[X; Y]$ to'plam bitta elementdan ortiq bo'lmasa.	
Funktor uzluksizligi	Agar ixtiyoriy S spektr uchun $F(\lim S) = \lim F(S)$ o'rinli bo'lsa, F funktor uzluksiz deyiladi.	Let $\mathcal{C}$ - category with the outside $\mathcal{D}$. Single - covariates functor called F . continuous if for every chart with any small circuit $\mathcal{C}$, the equality $F(\lim_{\mathcal{C}} S) = \lim_{\mathcal{C}} F(S)$ More details last equality means that if $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ - the limit of the diagram J , where $\mathcal{D}$ - morphisms included within the definition $\mathcal{C}$, the limit of the diagram J . The functor is continuous if and only if it commutes with the works of all the families of objects and morphisms of pairs of cores $\mathcal{C}$. Every main functor from the category of sets is continuous $\mathcal{C}$.

Trening kurs bo'yicha nazorat savollari va topshiriqlar.

1) Shunday bog'lanishli to'plamlar keltiring ularning birlashmasi boglanishli to'plam bo'lmasin.

2) Shunday bog'lanishli to'plamlar keltiring ularning kesishmasi boglanishli to'plam bo'lmasin.

3) Agar X fazoda M - bog'lanishli to'plam berilgan bo'lsa, u holda $[M]$ yopig'i ham bog'lanishli to'plam bo'lishini ko'rsating. Agar $M \cap Y = [M] \cap X$ bo'lsa, u holda Y ham bog'lanishli to'plam ekanligini isbotlang.

4) Shunday chiziqli bog'lanishli to'plamlar keltiring ularning birlashmasi chiziqli boglanishli to'plam bo'lmasin.

5) Shunday chiziqli bog'lanishli to'plamlar keltiring ularning kesishmasi chiziqli boglanishli to'plam bo'lmasin.

6) R^n fazodagi har qanday qavariq to'plam bog'lanishli to'plam bo'lishini isbotlang.

7) R^n fazodagi har qanday ochiq bog'lanishli to'plam chiziqli bog'lanishli bo'lishini isbotlang.

8) Cheksiz to'plamda kuchsiz T_1 topologiya kiritilgan bo'lsin, u holda bu topologik fazoning bog'lanishli bo'lishini isbotlang.

9) O'zaro kesishuvchi bog'lanishli to'plamlar oilasining birlashmasi bog'lanishli to'plam bo'lishini isbotlang.

10) Agar $A \cap B \neq \emptyset$ va $A \cup B$ - bog'lanishli to'plamlar bo'lsin. A va B - to'plamlar bog'lanishli to'plam bo'ladimi? Agar bu ikki to'plamlar ochiq (yopiq) to'plam bo'lsachi?

11) Agar $A \cap B \neq \emptyset$ va $A \cup B$ - chiziqli bog'lanishli to'plamlar bo'lsin. A va B - to'plamlar chiziqli bog'lanishli to'plam bo'ladimi? Agar bu ikki to'plamlar ochiq (yopiq) to'plam bo'lsachi?

12) Chiziqli bog'lanishli to'plamning yopig'i chiziqli bog'lanishli to'plam bo'ladimi?

13) Uzluksiz akslantirishda har bir nuqtaning asli boglanishli to'plam bo'lsa u holda bog'lanishli to'plamning asli bog'lanishli

1) X - xausdorf fazo va uzluksiz $f : X \rightarrow X$ akslantirish berilgan bo'lsin. Barcha qo'zg'almas nuqtalar to'plami (ya'ni x nuqta uchun $f(x) = x$) yopiq to'plam bo'lishini ko'rsating.

2) X xausdorf fazo bo'lishi uchun $\Delta = \{(x, y) : x \neq y\} \subset X \times X$ to'plamning $X \times X$ ko'paytmada yopiq bo'lishi zarur va etarli ekanligini isbotlang.

3) Xausdorf Y fazoga akslantiruvchi $f : X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi

uchun $\Gamma f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$ grafikning $X \times Y$ fazoda yopiq bolishi zarur va etarli ekanligini isbotlang.

4) Chekli sonli sonli kompakt fazolarning birlashmasi kompakt bo'lishini isbotlang.

5) Metrik fazodagi har qanday kompakt to'plam sanoqli zich to'plam ostiga ega bo'lishini ko'rsating.

6) Xausdorf fazodagi har qanday o'zaro kesishmaydigan ikki kompakt to'plamlar kesishmaydigan atrolarga ega bo'lishini isbotlang.

7) Regulyar fazodagi kesishmaydigan ikki yopiq to'plamlarning biri kompakt bo'lsa, u holda ular kesishmaydigan atroflarga ega bo'lishini ko'rsating.

8) Sorgenfrey to'g'ri chizig'i kompakt bo'ladimi?

9) Sorgenfrey to'g'ri chizig'ining kompakt to'plam ostilarini ko'rsating?

10) Nemiskiy tekisligi kompakt bo'ladimi?

11) Nemiskiy tekisligining kompakt to'plam ostilarini ko'rsating? to'plam bo'ladimi?

Trening kurs bo'yicha adabiyotlar ro'yxati

- [1] Jo'rayev T.F. "Topologiyaga kirish. Faktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar." T.2012 240 bet.
- [2] Jo'rayev T.F. Geometriyaning tanlangan boblari, T. Navruz, 2017, 301 b.
- [3] Sadovnichiy Yu.V., Beshimov R.B., Juraev T.F. Topologiya, Tashkent, Universitet, 2021. 200 str.
- [4] Narmanov A.Ya, Sharipov A.S., Aslanov J.O. Differensial geometriya va topologiya kursidan masalalar to'plami T. Universitet, 2014, 200s.
- [5] Виро О.Я, Иванов О.А, Несветаев Н.Ю, Харламов В.М, Элементарная топология. М. МСНМО, 2008, 354с.
- [6] Jurayev T.F. Geometriya (Topologiya elementlari) Darslik. Toshkent "Metodist" nashriyoti 2023 yil. 232 bet.