**N.Turgunov, I.Gafarov**

# CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

QISQA KURSI

**O'quv qo'llanma**

N.Turgunov, I.Gafarov

# CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAHSUS TA’LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN MUHANDISLIK-QURILISH INSTITUTI

N.Turgunov, I.Gafarov

# CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

Toshkent - 2018

## Annotatsiya

Ushbu o'quv qo'llanma oliy texnika o'quv yurtlarining oliy matematika fani dasturi asosida yozilgan va bakalavrlar Davlat tahlim standartlari talablariga mos keladi.

O'quv qo'llanmada oliy algebraning bahzi tushunchalari, vektorlar algebrasi, analitik geometriyaning boshlang'ich analizlari, tekislikdagi to'g'ri chiziq va uning asosiy masalalari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, fazoda tekislik va to'g'ri chiziq, ularning asosiy masalalari va ikkinchi tartibli sirtlar nazariyasi misol va masalalari bilan bayon qilingan.

Qo'llanmaning har bir bobida mavzuga taalluqli nafaqat yechimlari bilan birga misol va masalalar balki mustaqil yechish uchun misol va masalalar tavsiya qilingan, ularning javoblari berilgan.

O'quv qo'llanmaning har bir mavzusi zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan.

Kitob oliy tahlim muassasalarining talabalari va o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

## Аннотация

Настоящее учебное пособие написано на основе учебной программы по высшей математике для технических высших учебных заведений и соответствует требованиям государственных образовательных стандартов бакалавриатов.

В учебном пособии изложены некоторые понятия высшей алгебры, векторная алгебра, начальный анализ аналитической геометрии, прямые в плоскости и их основные задачи, кривые второго порядка, прямая и плоскость в пространстве и их основные задачи, и теория поверхностей второго порядка.

В каждой главе кроме примеров и задач с решениями предложены примеры и задачи для самостоятельного решения и их ответы.

Каждая тема учебного пособия изложена на основе анализа современных зарубежных литератур и технологий обучения.

Учебное пособие рассчитано для студентов и преподавателей высших технических учебных заведений.

## Annotation

This manual was written on the basic of the curriculum in higher mathematics for technical higher educational institution and complies with the requirements of state educational standards.

The manual outlines some concepts of higher algebra, vector algebra, initial analysis of analytic geometry, straight lines in the plane and their main tasks, second order curves, a straight line and their main tasks, and the theory of second-order surfaces.

In each chapter, in addition to examples and tasks for self-study and their answers are offered.

Each theme of the manual is based on the analysis of modern literature and learning technologies.

The manual is designed for students and teachers of higher technical educational institutions.

## SO'Z BOSHI

O'zbek tiliga davlat tili maqomi berilishi, lotin alifbosiga o'tish, “Ta'lim to'g'risida” gi qonun va yangi davlat ta'lim standartlari qabul qilinishi oliy o'quv yurtlari oldiga bir qator yangi talablarni vujudga keltirdi. Jumladan, talabalar uchun yaratilgan o'quv adabiyotlarni qaytadan ko'rib chiqish, ularni takomillashtirish taqozo etilmoqda, lotin alifbosida darslik va o'quv qo'llanmalar yaratish zaruriyati paydo bo'lmoqda.

Mazkur o'quv qo'llanma oliy texnika o'quv yurtlarida o'qiyotgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, amaldagi yangi bakalavr mutaxassisligi bo'yicha “Oliy matematika” rejasi asosida yozilgan.

O'quv qo'llanmaning oliy texnika o'quv yurtlari uchun yozilgan boshqa o'quv qo'llanmalardan farqi uning yozilishida, o'quv rejada o'quv soatlarining kamligini hisobga olinganligida, mavzularning bayon qilinishida, ularning sodda misol va masalalar bilan ta'minlanganligidadir.

O'quv qo'llanmada analitik geometriya bilan birga, oliy va vektorlar algebrasining ba'zi tushunchalari birgalikda bayon qilingan, chunki bu tushunchalar fundamental tushunchalar bo'lib, nafaqat analitik geometriya kursida, balki matematikaning boshqa bo'limlarida ham muhim rol o'ynaydi.

O'quv qo'llanma 9 bobdan iborat bo'lib, har bir bob mustaqil bir nechta paragraflarga ajratilgan, unda oliy algebraning ba'zi tushunchalari, vektorlar algebrasi, analitik geometriyaning boshlang'ich analizlari, tekislikda to'g'ri chiziq va uning asosiy masalalari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, fazoda tekislik va to'g'richiziq, ularning asosiy masalalari va ikkinchi tartibli sirtlar nazariyasi misol va masalalari bilan bayon qilingan.

Qo'llanmada har bir paragrafda mavzuga taalluqli nafaqat yechimlari bilan birga misollar, balki mustaqil yechish uchun misol va masalalar tavsiya qilingan, ularning javoblari berilgan.

O'quv qo'llanmada mualliflarining fikricha murakkabroq bo'lgan mustaqil yechish uchun berilgan ba'zi bir misol va masalalarni hal qilish uchun foydali maslahatlar ham berilgan. Mustaqil yechish uchun berilgan misol va masalalar talabalarda mustaqil fikrlash ko'nikmasini hosil qilishga mo'ljallangan.

Mualliflar mazkur o'quv qo'llanma to'g'risida bildirilgan tanqidiy fikr-mulohazarlarni chuqur minnatdorchilik va samimiyat bilan qabul qiladilar.

# I. CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI

## 1-BOB. Ikkinchi, uchinchi tartibli determinantlar. Tenglamalar sistemasi.

### 1 - §. Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi. Ikkinchi tartibli determinantlar.

Ushbu tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \qquad (1)$$

berilgan bo'lsin. Bu yerda $x$ va $y$ noma'lum sonlar, $a_{ij}$ $(i = 1,2; j = 1,2)$ lar noma'lumlarning koeffitsientlari, $b_1$ va $b_2$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

***Ta'rif.*** Tenglamalar sistemasining yechimi deb sistemaga kiruvchi harqaysi tenglamaning yechimi bo'lgan tartiblangan sonlar juftiga aytiladi.

(1) sistemaning yechimini topamiz. Buning uchun (1) sistemadagi birinchi tenglamani $a_{22}$ ga, ikkinchisini esa - $a_{12}$ ga ko'paytirib va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shib

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunga o'xshash, mos ravishda birinchi va ikkinchi tenglamani $\left(-a_{21}\right)$, $a_{11}$ ga ko'paytirib, so'ngra olingan tenglamalarni qo'shib, quyidagini olamiz:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 . \qquad (3)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sonni $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ko'rinishda yozish qabul qilingan va unga ikkinchi tartibli determinant deyiladi. Demak,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta . \qquad (4)$$

Determinantni tashkil qiladigan $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar uning elementlari deyiladi. Ikkinchi tartibli determinant ikkita satrga va ikkita ustunga ega. Istalgan elementning belgilanishida birinchi indeks shu element turgan satr tartibini, ikkinchi indeks esa ustun tartibini ko'rsatadi, demak, $i$ va $j$ indekslar $a_{ij}$ element turadigan satr va ustunning tartib raqamini ko'rsatadi. Masalan, $a_{12}$ element birinchi satr, ikkinchi ustun elementi.

$a_{11}, a_{22}$ elementlar bosh diagonalni, $a_{12}, a_{21}$ elementlar esa qo'shimcha (yordamchi) diagonalni tashkil etadi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinant bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan qo'shimcha diagonal elementlari ko'paytmasini ayrilganiga teng ekan.

**1 - misol.** Quyidagi ikkinchi tartibli determinantni hisoblang. Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 = 18 + 8 = 26.$$

(4) formulaga asosan (2) va (3) tengliklarning o'ng tomonida turgan ayirmalarni ikkinchi tartibli determinantlar ko'rinishida yozishimiz mumkin:

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_x, \; a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_y. \qquad (5)$$

Bu belgilashlarda (2) va (3) tenglamalarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y. \end{cases} \qquad (6)$$

Uch hol bo'lishi mumkin:

1. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, sistema birgalikda va aniq sistema bo'lib, uning yagona yechimi

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad (7)$$

formulalar bo'yicha topiladi. (7) ga Kramer formulalari deyiladi.

**2 - misol.** Quyidagi tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ 2x + 5y = 19. \end{cases}$$

Yechish. Bu yerda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \neq 0.$$

Demak, sistema birgalikda va aniq sistema. Uning yagona yechimi (7) formulalar bilan topiladi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 19 & 5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{90 - 76}{7} = 2; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}}{7} = \frac{57 - 36}{7} = 3.$$

2. Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, lekin $\Delta_x$ va $\Delta_y$ lardan kamida bittasi nolga teng bo'lmasa, u holda (6) formulalardan (1) sistema birgalikda emas, ya'ni bitta ham yechimga ega emasligi kelib chiqadi.

3. Agar $\Delta = 0$ va $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$ bo'lsa uholda (6) formulalardan (1) sistema birgalikdagi aniqmas sistema ekanligi, ya'ni cheksiz ko'p yechimlarga ega ekani kelib chiqadi. Bu holda sistema bitta tenglamaga keladi, ikkinchi tenglama esa bu tenglamaning natijasidan iborat bo'ladi.

Sistemaning birgalikda bo'lmaslik shartini

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

ko'rinishda, aniqmaslik shartini esa

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

**3 - misol.** Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 6x - 2y = 4. \end{cases}$$

Yechish. Determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0, \; \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0, \; \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

Sistema aniqmas, demak, cheksiz ko'p yechimlarga ega. Agar ikkinchi tenglamani 2 ga qisqartirsak, sistema ushbu bitta tenglamaga keladi:

$$3x - y = 2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

Noma'lum $x$ ga ixtiyoriy $(x \in R)$ qiymatlar berib, $y$ ning mos qiymatlarini hosil qilamiz. Masalan, $x=0$ da $y=-1$ ni, $x=1$ da $y=1$ ni va h.k.

## 2-§. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi. Uchinchi tartibli determinantlar.

Endi ushbu uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Uning yechimi quyidagilardan iborat:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - b_1a_{32}a_{23} - a_{33}a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}} \\ y &= \frac{a_{11}b_2a_{33} + a_{13}a_{21}b_3 + a_{31}b_1a_{23} - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - a_{33}a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}} \\ z &= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + b_1a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}b_2 - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}b_2 - b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(1) ni yuqoridagi kabi qisqacha yozish uchun uchinchi tartibli determinant tushunchasini kiritamiz:

***Ta'rif.*** Uchinchi tartibli determinant deb,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

simvol bilan belgilanuvchi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} \qquad (4)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Ushbu belgilarni kiritamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

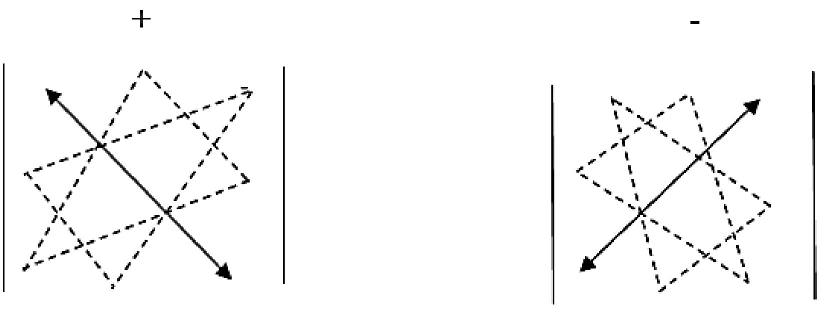
(1) sistema noma'lumlarining koeffitsientlaridan tuzilgan (3) determinantga sistema determinant deb ataladi. (5) determinantlar (3) determinantdan unda mos ravishda birichi, ikkinchi yoki uchinchi ustun elementlarini ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil bo'ladi. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (1) sistemaning yagona yechimi Kramer formulalari bo'yicha topiladi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (6)$$

Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning bir necha usuli mavjud.

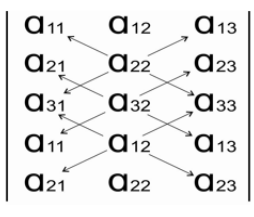
1. Uchburchak usuli. Quyidagi ikkita sxemaga e'tibor bering:

Bosh diagonal va unga asosi parallel bo'lgan teng yonli uchburchaklarning uchlaridagi elementlar ko'paytmalari $(+)$ ishora bilan, yordamchi diagonal va unga asosi parallel bo'lgan teng yonli uchburchaklarning uchlaridagi elementlarning ko'paytmalari $(-)$ ishoralar bilan olinib, natijalar qo'shilsa, uchinchi tartibli determinant qiymati kelib chiqadi (1-chizma).




**1 - chizma**

2. Sarrius usuli. Bu usulda determinant ostiga (yoki yoniga) ikki satr (yoki ustun) elementlarini qo'shimcha yozib, quyidagi sxema bo'yicha hisoblanadi (2-chizma).




**2- chizma**

Determinantning xossalari.

1. Determinantning satr elementlarini ustun elementlari bilan almashtirishdan uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Determinantning ikkita parallel satr yoki ustun elementlarini o'zaro almashtirganda determinant qiymatining ishorasi o'zgaradi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Agar determinant ikkita bir xil elementli satr yoki ustunga ega bo'lsa, uning qiymati nolga teng.

4. Determinantning biror satr yoki ustun elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Determinantning biror satr yoki ustun elementlariga boshqa parallel satr yoki ustunning elementlarini ixtiyoriy bir xil songa ko'paytirib qo'shishdan determinant qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

## Algebraik to'ldiruvchilar va minorlar

***Ta'rif.*** Uchinchi tartibli determinantdagi birorta elementning *minori* deb berilgan determinantda berilgan element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan ikkinchi tartibli determinantga aytiladi. Determinant $a_{ij}$ elementining minori

$M_{ij}\ \left(i,j=1,2,3\right)$ bilan belgilanadi. Masalan, $a_{21}$ elementning minori $M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ son bo'ladi.

***Ta'rif.*** Berilgan elementning algebraic to'ldiruvchisi deb uning $\left(-1\right)^k$, $\left(k=i+j\right)$, ga ko'paytirilgan minoriga aytiladi. Determinantning tegishli elementi minorining ishorasi quyidagi jadvaldan topiladi:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

$a_{ij}$ elementning algebraic to'ldiruvchisi $A_{ij}$ bilan belgilanadi. Masalan, $a_{11}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi $A_{11}=\left(-1\right)^2\cdot M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ son bo'ladi.

Determinant biror satr yoki ustun elementlari bilan ularning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni ushbu tenglik o'rinli:

$$\begin{aligned} &\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}, \quad \Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}, \\ &\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}, \quad \Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}, \\ &\Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}, \quad \Delta=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}. \end{aligned} \tag{7}$$

Determinantning (7) formulalarning biri bo'yicha yozilishi uning satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi deb ataladi.

**4 - misol.** Ushbu sistemani yeching.

$$\begin{cases} 2x-3y+5z=1, \\ x+y-2z=-4, \\ 3x-y-z=-2. \end{cases}$$

Yechish. Sistema determinantini tuzamiz va uni hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2+18-5-15-3-4=18-29=-11\neq 0.$$

Endi $\Delta_x$, $\Delta_y$ va $\Delta_z$ larni tuzamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 27; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 45; \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 14.$$

Bularni (6) ga qo'yib, sistema yechimini topamiz:

$$x = -\frac{27}{11}, \ y = -\frac{45}{11}, \ z = -\frac{14}{11}.$$

**5 - misol.** Ushbu sistemani yeching.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ x + 3y - z = 7, \\ 3x - y - 4z = 12. \end{cases}$$

Yechish. $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -37 \neq 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 12 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -111;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & 12 & -4 \end{vmatrix} = -37; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 37.$$

Kramer qoidasidan foydalanib, $x, y, z$ larni topamiz:

$$x = \frac{-111}{-37} = 3; \quad y = \frac{-37}{-37} = 1; \quad z = \frac{37}{-37} = -1.$$

**6 - misol.** Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6, \\ x + 2y - z = 3, \\ 5x + 3y + 2z = 8. \end{cases}$$

Yechish. Sistema determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -28 \neq 0; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Bu holda Kramer formulasini qo'llab bo'lmaydi, chunki $x = \Delta_x / 0;\ \ y = \Delta_y / 0;\ \ z = \Delta_z / 0$ larga ega bo'lamiz.

Ikkinchi tomondan, sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamadan:

$$\begin{array}{r} 3x - y + 4z = 6 \\ + \\ 4x + 8y - 4z = 12 \\ \hline 7x + 7y = 18. \end{array}$$

Ikkinchi va uchinchi tenglamadan:

$$\begin{array}{r} 2x + 4y - 2z = 6 \\ + \\ 5x + 3y + 2z = 8 \\ \hline 7x + 7y = 14. \end{array}$$

Hosil qilingan bu ikki tenglama o'zaro zid tenglamadir. Demak, sistema birgalikda bo'lmagan sistema, ya'ni sistema yechimga ega emas.

**7 - misol.** Ushbu sistemani yeching.

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6, \\ x + 2y - z = 3, \\ 5x + 3y + 2z = 12. \end{cases}$$

Yechish. $\Delta$, $\Delta_x$, $\Delta_y$ va $\Delta_z$ larni tuzamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 12 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu holda ham Kramer usulini qo'llab bo'lmaydi. Lekin birinchi va ikkinchi tenglamadan

$$\begin{array}{r} 3x - y + 4z = 6 \\ + \\ 4x + 8y - 4z = 12 \\ \hline 7x + 7y = 18 \end{array}$$

Ikkinchi va uchinchi tenglamadan:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 2x+4y-2z=6 \\ 5x+3y+2z=12 \end{array} \\
\hline
7x+7y=18
\end{array}
$$

Shunday qilib, $x+y=\dfrac{18}{7}$ bo'lsa, $x=2$ desak, $y=\dfrac{18}{7}-2=\dfrac{4}{7}$, $z=x+2y-3=2+\dfrac{8}{7}-3=\dfrac{1}{7}$. Demak, bitta yechim $\left(2;\dfrac{4}{7};\dfrac{1}{7}\right)$ bo'ladi. $x$ ga boshqa qiymat $(\forall x\in R)$ berib, yana bir yechim toppish mumkin va h. k., ya'ni sistemaning yechimi cheksiz ko'pdir.

Ushbu uch noma'lumli uchta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$
\begin{cases}
a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\
a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0, \\
a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0.
\end{cases} \qquad (8)
$$

Determinantlar $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0,$ chunki ular nollardan iborat ustunga ega. Shu sababli bir jinsli sistema $\Delta\neq 0$ bo'lganda birgina nol yechim $x=0, y=0, z=0$ ga ega, $\Delta=0$ bo'lganda esa cheksiz ko'p yechimlarga ega.

**8 - misol.** Ushbu sistemaning yechimini toping.

$$
\begin{cases}
3x-y+2z=0, \\
2x+3y-5z=0, \\
x=y=z-0.
\end{cases}
$$

Yechish. Sistema determinanti

$$
\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=9+5+4-6+15+2=35-6=29\neq 0.
$$

Demak, sistemaning yagona yechimi: $x=0, y=0, z=0$.

**9 - misol.** Ushbu sistemani yeching.

$$
\begin{cases}
2x-y+3z=0, \\
x+2y-5z-0, \\
3x+y-2z=0.
\end{cases}
$$

Yechish. Sistema determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8+15+3-18+10-2 = 28-28 = 0 .$$

Demak, sistemaning noldan farqli yechimi mavjud. Bu yechim quyidagicha topiladi. Sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalarini qo'shib

$$3x + y - 2z = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Demak, uchinchi tenglama birinchi va ikkinchi tenglamalarning natijasi. U holda sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

ko'rinishga keladi. Bu sistemaning yechimlari

$$x = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = -k, \quad y = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = 13 \cdot k,$$

$$z = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot k = 5 \cdot k$$

formulalar bilan topiladi. Bu yerda $k$ ga ixtiyoriy qiymatlar berib, sistemaning cheksiz ko'p yechimlari topiladi.

## 3 - §. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bo'yicha yechish

Agar chiziqli tenglamalar sistemasida noma'lumlar va tenglamalar soni uchtadan ortiq bo'lsa, sistemaning yechimini toppish uchun Kramer qoidasidan foydalanish mashaqqatli ishga aylanadi, chunki bu ish bir nechta to'rtinchi, beshinchi va h.k. tartibli determinantlarni hisoblash bilan bog'liq. Bunday hollarda tenglamalar sistemasini Gaus s usuli yordamida yechish qulaydir. Gauss usuli shundan iboratki, u almashtirishlar yordamida (ikkinchi tenglamadan boshlab) noma'lumlarni ketma – ket chiqarib, so'nggi tenglamada faqat bitta noma'lumni qoldiradi. Usulni bir misol orqali tushuntiramiz.

**10 - misol.** Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} x-3y+5z-7t=12, \\ 3x-5y+7z-t=0, \\ 5x-7y+z-3t=4, \\ 7x-y+3z-5t=16. \end{cases}$$

Yechish. Birinchi qadam. Ikkinchi tenglamadan boshlab qolgan hamma tenglamalarda $x$ ni yo'qotamiz. Buning uchun birinchi tenglamani $(-3)$ ga ko'paytirib ikkinchi tenglamaga qo'shamiz, $(-5)$ ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz, keyin esa $(-7)$ ga ko'paytirib to'rtinchi tenglamaga qo'shamiz. Natijada sistema teng kuchli ushbu sistemaga o'tadi:

$$\begin{cases} x-3y+5z-7t=12, \\ y-2z+5t=-9, \\ y-3z+4t=-7, \\ 5y-8z+11t=-17. \end{cases}$$

Ikkinchi qadam. Uchinchi tenglamadan boshlab $y$ noma'lumni sistemaning uchinchi va to'rtinchi tenglamalaridan chiqarishdan iborat. Buning uchun shu sistemaning ikkinchi tenglamasini (-1) ga ko'paytiramiz va uchinchi tenglamaga qo'shamiz, keyin esa (-5) ga ko'paytirib to'rtinchi tenglamaga qo'shamiz. Buning natijasida ushbu teng kuchli sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x-3y+5z-7t=12, \\ y-2z+5t=-9, \\ -z-t=2, \\ z-7t=14. \end{cases}$$

Uchinchi qadam. To'rtinchi tenglamadan $z$ noma'lumni chiqaramiz. Buning uchun uchinchi tenglamani to'rtinchi tenglamaga qo'shamiz. Natijada ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x-3y+5z-7t=12, \\ y-2z+5t=-9, \\ z+t=-2, \\ -8t=16. \end{cases}$$

Bu sistemaga uchburchakli sistema deb ataladi. So'nggi tenglamadan $t=-2$ ni topamiz va bu qiymatni sistemaning uchinchi tenglamasiga qo'yib, $z=0$ ni olamiz. $t=-2$ va $z=0$ qiymatlarni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib, $y=1$ ni olamiz. Endi $t=-2$, $z=0$, $y=1$ larni birinchi tenglamaga qo'yamiz va $x=1$ ni topamiz. Shunday qilib, sistema yechimi: $x=1$, $y=1$, $z=0$, $t=-2$.

Gauss usulining xususiyati shundaki, unda sistemaning birgalikdalik masalasini oldindan aniqlab olish talab qilinmaydi.

1. Agar sistema birgalikda va aniq bo'lsa, u holda birgina yechimga olib keladi.

2. Agar sistema birgalikda va aniqmas bo'lsa, u holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo'ladi. Bunda tenglamalar soni noma’lumlar sonidan bittaga kam bo'lib qoladi.

3. Agar sistema birgalikda bo'lmasa, u holda biror qadamda chiqarilayotgan noma’lum bilan birgalikda qolgan barcha noma’lumlar ham chiqariladi, o'ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

**11 - misol.** Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 3x-y+4z=6, \\ 5x+3y+2z=12. \end{cases}$$

Yechish. 10 – misoldagi ishlarni takrorlab, sistemani

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ -7y+7z=-3, \\ -7y+7z=-3 \end{cases}$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu sistemaning so'nggi ikki tenglamasi bir xil. Shu sababli berilgan sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 7y-7z=3 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchlidir. Demak, sistema birgalikda bo'lsada, lekin aniqmas, ya'ni u cheksiz ko'p yechimga ega. Haqiqatan, noma'lum $z$ ga ixtiyoriy masalan, $z=\frac{4}{7}$ qiymat berib, $y$ ning unga mos $y=1$ qiymatini hosil qilamiz. $z=\frac{4}{7}$ va $y=1$ qiymatlarni berilgan sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, $x=\frac{11}{7}$ ni topamiz, yoki $z=0$ qiymat berib $y=\frac{3}{7}$, $x=\frac{15}{7}$ larni olamiz va h.k.

**12 - misol.** Ushbu sistemani yeching.

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1. \end{cases}$$

Yechish. Birinchi tenglamani (-2) ga ko'paytirib ikkinchi tenglamaga qo'shamiz, keyin esa birinchi tenglamani (-3) ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz. Natijada

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 0=-5, \\ -5y-10z=-11 \end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. $0\neq -5$ ziddiyat sistemaning birgalikda emasligini ko'rsatadi.

## Mustaqil yechish uchun mashqlar

Quyidagi determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}$;  2. $\begin{vmatrix} 1 & -tg\alpha \\ ctg\alpha & 1 \end{vmatrix}$;  3. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$

J: 1) 45; 2) 2; 3) 7.

4. Tenglamani yeching. $\begin{vmatrix} 2 & (x-4) \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0$

J: 10.

5. $a$ ning qanday qiymatlarida quyidagi determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix}$$

J: $a=\pm 2$.

Quyidagi uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

6. $\begin{vmatrix} 18 & 9 & 27 \\ 6 & 12 & 12 \\ 13 & 26 & 39 \end{vmatrix}$;  7. $\begin{vmatrix} 43 & 86 & 43 \\ -1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;  8. $\begin{vmatrix} 1 & 297 & 313 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

J: 6) 2106; 7) 0; 8) -3.

9. Vandermon determinantini hisoblang. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$

J: $\Delta = (y-x)(z-x)(z-y).$

Quyidagi determinantlarni hisoblang.

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$ 11. $\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix};$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$

J: 10) 18; 11) 0; 12) $(a+b+c)\cdot(b-a)(c-a)(c-b).$

Quyidagi tenglama va tengsizliklarni yeching.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 3x \\ 4 & x+22 \end{vmatrix} = 0;$ 14. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0;$

J: 13) $x=2$; 14) $x_1=-4,\ x_2=-1$; 15) $x \in (-10; \infty)$.

Quyidagi determinantlarni yoyish usulidan foydalanib hisoblang.

16. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$ 17. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}.$

J: 16) 900; 17) 12.

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemalarini Kramer qoidasidan foydalanib yeching.

18. $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$ J: $x=1,\ \ y=2,\ \ z=3$.

19. $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$ J: $x=1,\ \ y=1,\ \ z=1$.

20. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8, \\ 2x + 4y - 5z = 11, \\ 4x - 3y + 2z = 1. \end{cases}$ J: $x=2,\ \ y=3,\ \ z=1$.

21. $\begin{cases} 2ax-3by+cz=0, \\ 3ax-6by+5cz=2abc, \\ 5ax-4by+2cz=3abc. \end{cases}$ J: $x=bc,\ y=ac,\ z=ab.$

Ushbu tenglamalar sistemasida $y$ ni toping.

22. $\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ y+2z+3t=20, \\ z+2t+3x=14, \\ t+2x+3y=12. \end{cases}$ J: y=2

Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasining noldan farqli yechimlarini toping.

23. $\begin{cases} 3x+4y+2z=0, \\ x-y+4z=0, \\ 5x+2y+10z=0. \end{cases}$ J: cheksiz ko'p: 1.(-18; 20), 2.(-36;20), h.k

24. $\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ x+y+z=0, \\ 3x-2y+2z=0. \end{cases}$ J: $x=-4t,\ y=-t,\ z=5,\ \left(t\in R\right).$

25. $a$ ning qanday qiymatlarida $\begin{cases} a^2x+3y+2z=0, \\ ax-y+z=0, \\ y+4z=0. \end{cases}$ sistemaning noldan farqli yechimlari mavjud va ularni toping.

J: 1. $a=0$ da $x=t,\ y=0,\ z=0;$ 2. $a=-2$ da $x=5t,\ y=-8t,\ z=2t,\ \left(\forall t\in R\right).$

Quyidagi bir jinsli uch noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasining yechimini toping.

26. $\begin{cases} 3x+4y+2z=0, \\ 5x+2y+10z=0. \end{cases}$ J: $x=18t,\ y=-10t,\ z=-7t,\ \left(t\in R\right).$

27. $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x+4y+6z=0. \end{cases}$ J: $x=-2y-3z,\ \left(y\in R,\ z\in R\right).$

28. $\begin{cases} 3x+2y+2z=0, \\ 5x+2y+3z=0. \end{cases}$ J: $x=2t,\ y=t,\ z=-4t\ \left(t\in R\right).$

## 2-BOB. Matritsalar va ular ustida amallar

### 1-§. Matritsa. Matritsaning turlari

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini olaylik. Bu sistema noma'lumlarining koeffitsientlaridan tuzilgan quyidagi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \\ ..................... \\ a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

sonlar jadvaliga $m \times n$ o'lchamli ($m$ ta satrli va $n$ ta ustunli) to'g'ri burchakli matritsa deb ataladi. (2) jadvaldagi $a_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n}\right)$ sonlar uning elementlari deb ataladi. $i$ va $j$ indekslar $a_{ij}$ element turadigan satr va ustunning tartib raqamini ko'rsatadi. Masalan, $a_{45}$ - to'rtinchi satr, 5 – ustun elementi deb o'qiladi va h. k. Ozod hadlarniham qo'shib tuzilgan

$$B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} & b_2 \\ ..................... & \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3} \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (3)$$

matritsaga kengaytirilgan matritsa deyiladi. $A$ matritsaning mos satr va ustunlarini almashtirib,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\, a_{22} \ldots a_{m2} \\ .................. \\ a_{1n}\, a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

matritsani tuzamiz. $A^T$ matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi.

Yozuvni qisqartirish maqsadida (1) matritsa ko'pincha ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$A=\left(a_{ij}\right),\ \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$$

yoki

$$A=\left\|a_{ij}\right\|,\ \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right).$$

Agar $n=1$ bo'lsa, u holda ustun matritsaga ega bo'lamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Agar (2) matritsada $m=n$ bo'lsa, ya'ni matritsaning satrlar soni ustunlari soniga teng bo'lsa, uholda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2n} \\ .................. \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

matritsaga $n\times n$ o'lchovli yoki $n$ - tartibli kvadrat matritsa deb ataladi. Har bir $n$- tartibli $A$ kvadrat matritsa uchun shu matritsaning elementlaridan tuzilgan $n$ - tartibli determinantni hisoblash mumkin. Bu determinant $\det A$ yoki $\Delta(A)$ orqali belgilanadi.

Agar $\det A\neq 0$ bo'lsa, (5) matritsaga xos masmatritsa deb ataladi. Kvadrat matritsaning $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ elementlariga bosh diagonal elementlari, $a_{1n},a_{2n-1},...,a_{n1}$ elementlarga esa yordamchi diagonal elementlari deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ \ 0\ \ \ 0...0 \\ 0\ \ a_{22}\ \ 0...0 \\ .................. \\ 0\ \ 0\ \ \ 0...a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

kvadrat matritsaga diagonal matritsa deb ataladi. Bunda $\det A=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot ...a_{nn}$. Agar (6) matritsada $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=a\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a & 0 \ldots 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots a \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Kvadrat matritsaga skalyar matritsa deyiladi. Ravshanki, $\det A = a^n$. Agar (7) matritsada $a = 1$ bo'lsa, uholda

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

skalyar matritsaga birlik matritsa deb ataladi. Ravshanki, $\det E = 1$. Barcha elementlari nolga teng bo'lgan matritsaga nol matritsa deyiladi va u $Q$ bilan belgilanadi:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

Agar $A = A^T$ shart bajarilsa, u holda $A$ kvadrat matritsasi simmetrik matritsa deb ataladi. Simmetrik matritsaning bosh diagonaliga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari jufti – jufti bilan o'zaro teng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

## 2-§. Matritsalar ustida amallar

1. Agar ikkita $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalar bir xil o'lchamli hamda $i$ va $j$ indekslarning barcha qiymatlari uchun $a_{ij}=b_{ij}$ bo'lsa, $A$ va $B$ matritsalar teng, ya'ni $A=B$ bo'ladi.

2. Bir xil o'lchamli $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$matritsalarning yig'indisi deb, elementlari quyidagi

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

tenglik bilan aniqlangan o'sha o'lchamli $C=A+B$ matritsaga aytiladi:

$c_{11}\&c$

(9)

Demak, bir xil o'lchamli matritsalarni qo'shishda bu matritsalarning mos indeksli elementlarini qo'shish lozim.

**1 - misol.** Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

matritsalar yig'indisini toping.

Yechish. $$C=A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 5 & -1 & -2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Ikki matritsaning ayirmasi ham shunga o'xshash aniqlanadi.

**2 - misol.** Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -5 & 1\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

matritsaning ayirmasini toping.

Yechish. $$C=A-B=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&-2&-3\\4&3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3&-2\\4&-5&1\\1&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&5\\-2&3&-4\\3&6&-3\end{pmatrix}.$$

3. $A=(a_{ij})$ matritsaning $\lambda$ songa ko'paytmasi deb, elementlari $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ tenglik bilan aniqlangan o'sha o'lchamli $C=\lambda\cdot A$ matritsaga aytiladi. Demak,

$$C=\lambda\cdot A=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\lambda a_{13}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\lambda a_{23}\\\lambda a_{31}&\lambda a_{32}&\lambda a_{33}\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

**3 - misol.** Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&2&1\\5&0&1\end{pmatrix}$$

matritsani 4 soniga ko'paytiring.

Yechish. $$C=4\cdot A=4\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\4&2&1\\5&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12&8\\16&8&4\\20&0&4\end{pmatrix}.$$

Yuqoridagi ko'rsatilgan amallar chiziqli amallar bo'lganligi sababli, quyidagi xossalar o'rinlidir:

$1^0$. $A+B=B+A$; $\qquad$ $4^0$. $\mu(\lambda A)=\lambda(\mu A)$;

$2^0$. $(A+B)+C=A+(B+C)$; $\qquad$ $5^0$. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

$3^0$. $A+Q=Q+A=A$; $\qquad$ $6^0$. $(\lambda+\mu)A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$

bu yerda $\lambda,\mu$ - sonlar, $A,B,C$ - matritsalar, $Q$ - nol matritsa.

**4 - misol.** $A=\begin{pmatrix}4&2\\-3&5\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}0&-3\\4&6\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. $2\cdot A-B$ matritsani toping.

Yechish. 1. $2\cdot A$ matritsani topamiz:

$$2\cdot A=2\cdot\begin{pmatrix}4&2\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4\\-6&10\end{pmatrix}.$$

2. Endi $C=2\cdot A-B$ matritsani topamiz:

$$C=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. $m\times k$ o'lchamli $A=(a_{ij})$ matritsaning $k\times n$ o'lchamli $B=(b_{ij})$ matritsaga ko'paytmasi deb, $m\times n$ o'lchamli shunday $C=A\cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning elementi $A$ matritsa $i$ - satri elementlarini $B$ matritsa $j$ - ustunning mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...a_{ik}b_{kj}\,. \qquad (11)$$

Bu qoida ko'payuvchi matritsaning ustunlari soni ko'paytuvchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lgan holda o'rinlidir. Shu sababli ikki matritsaning ko'paytmasi, umuman aytganda, o'rin almashtirish qonuniga bo'ysinmaydi, ya'ni

$$A\cdot B\neq B\cdot A\,.$$

Matritsalarni ko'paytirishning xossalari:

$1^0$. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;

$2^0$. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

$3^0$. $(\lambda A)\cdot B=\lambda(A\cdot B)$;

$4^0$. $A\cdot E=E\cdot A=A$;

$5^0$. $A\cdot Q=Q\cdot A=Q$

bu yerda $A,B,C$ biror matritsalar bo'lib, ular uchun yuqoridagi amallar o'rinli, $E$ - birlik matritsa, $Q$ - nol matirtsa, $\lambda$ - biror son.

**5 - misol.** Ushbu matritsalarni ko'paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $A\cdot B$ ko'paytma mavjud, chunki $A$ matritsaning ustunlari soni 3ga teng, $B$ matritsaning satrlari soni esa 3ga teng. (11) formuladan ko'paytma-matritsaning elementlarini topamiz:

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=3\cdot1+1\cdot2+1\cdot1=6;$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0=2;$$
$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=3\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1=-1;$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1=6;$$
$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0=1;$$
$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}=2\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot1=1;$$
$$c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1=8;$$
$$c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}=1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0=-1;$$
$$c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}=1\cdot(-1)+2\cdot1+3\cdot1=4$$

Demak,

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2&-1\\6&1&1\\8&-1&4\end{pmatrix}.$$

**6 - misol.** Agar $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&1\\3&0&1\\3&7&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$ bo'lsa $A\cdot B$ ko'paytmani toping.

Yechish. Matritsalarni ko'paytirish qoidasi bajaril yapti. U holda:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&1\\3&0&1\\3&7&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot3+(-1)\cdot2+2\cdot1&0\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot0\\2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1&2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0\\3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1&3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0\\3\cdot3+7\cdot2+1\cdot1&3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\9&3\\10&3\\24&10\end{pmatrix}$$

Bu misolda $B\cdot A$ ko'paytma mavjud emas, chunki $B$ matritsaning ustunlari soni $A$ matritsaning satrlari soniga teng emas.

## 3-§. Teskari matritsa

Endi teskari matritsa deb ataladigan matritsani qaraymiz, bu tushuncha faqat kvadrat matritsa uchun kiritiladi.

***Ta'rif.*** Agar $A$ kvadrat matritsa bo'lsa, u holda unga teskari matritsa deb $A^{-1}$ bilan belgilangan va

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E \qquad (12)$$

shartni qanoatlantiradigan matritsaga aytiladi.

Teorema. $A$ kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun $A$ matritsa xosmas matritsa bo'lishi, ya'ni uning determinant noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

$\det A \neq 0$ shartda $A$ matritsaga $A^{-1}$ teskari matritsa quyidagi formula bilan topiladi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

bu yerda $A_{ij}\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}\right)$ lar $a_{ij}\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}\right)$ elementlarning algebraik to'ldiruvchilari, $\Delta = \det A$.

$A$ matritsaga teskari $A^{-1}$ matritsani toppish uchun quyidagi ishlarni bajarish zarur:

1. $A$ matritsaning determinantini hisoblaymiz.

2. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, determinantning barcha $a_{ij}$ elementlari uchun $A_{ij} = (-1)^k M_{ij}$ algebraik to'ldiruvchilarni topib, yangi

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21}\ \ldots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22}\ \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}\ A_{2n}\ \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

matritsani tuzamiz. Bu matritsa $A$ matritsaga biriktirilgan matritsa deb ataladi.

3. $\widetilde{A}$ matritsaning barcha elementlarini $\Delta = \det A$ ga bo'lamiz.

**7 - misol.** Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani tuzing.

Yechish. 1. Bu matritsaning determinantini topamiz:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=4-12-1=-9\neq 0.$$

Demak, $A$ matritsa xosmas matritsa. Unga teskari $A^{-1}$ matritsa mavjuddir.

2. Har bir elementning algebraik to'ldiruvchisini topamiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=-(6-0)=-6,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}=3-0=3,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4$$

Endi $\widetilde{A}$ matritsani tuzamiz: $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}.$

3. Hosil qilingan matritsani $-1/9$ ga ko'paytiramiz, u holda

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/9&4/9&-2/9\\6/9&-2/9&1/9\\-3/9&1/9&4/9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3&4/9&-2/9\\2/3&-2/9&1/9\\-1/3&1/9&4/9\end{pmatrix},$$

matritsa hosil bo'ladi. Haqiqatdan ham, $A\cdot A^{-1}=E$ ekanligini tekshirib ko'ramiz.

$$E=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3&4/9&-2/9\\2/3&-2/9&1/9\\-1/3&1/9&4/9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\\ 1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+0\cdot\frac{1}{9} & 3\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+1\cdot\frac{1}{9} & 0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+2\cdot\frac{1}{9}\\ 1\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+2\cdot\frac{1}{9} & 3\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+2\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{1}{9} & 0\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{4}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Demak, $A^{-1}$ matritsa $A$ matritsaga teskari matritsa.

## 4-§. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasini yechishning matritsa usuli

Ushbu tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (15)$$

Noma'lumlarning koeffitsientlaridan tuzilgan sistemaning kvadrat matritsasini hamda noma'lumlar va ozod hadlar matritsa-ustunlarini qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

U holda matritsalarni ko'paytirish qoidasidan va matritsalarning tengligi Ta'rifi dan foydalanib, (15) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

yoki

$$A \cdot X = B \, . \qquad (16)$$

(16) tenglik oddiy matritsaviy tenglama deb ataladi.

Agar $A$ matritsa xosmas matritsa, ya'ni $\det A \neq 0$ bo'lsa uholda (16) tenglama quyidagicha yechiladi.Uning ikkala tomonini $A$ matritsaga teskari $A^{-1}$ matritsaga ko'paytiramiz:

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \, .$$

Lekin $A^{-1} \cdot A = E$ va $E \cdot X = X$ bo'lganligi uchun matritsaviy tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda hosil qilamiz:

$$X = A^{-1} \cdot B \, . \qquad (17)$$

**8 - misol.** Ushbu matritsaviy tenglamani yeching

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 1. $A$ matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot4+(-1)\cdot1\cdot2+(-2)(-1)\cdot0-2\cdot1\cdot0-(-1)\cdot1\cdot3-(-2)\cdot(-1)\cdot4=$$

$$=12-2+3-8=5\neq0,$$

demak, $A$ matritsa xosmas matritsa.

2. Algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5;\quad A_{21}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4;\quad A_{31}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{11}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1;$$

3. $\tilde{A}$ matritsani tuzamiz:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

4.Endi $\tilde{A}$ matritsani $\Delta=1/5$ ga ko'paytirib $A^{-1}$ matritsani hosil qilamiz:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

5. (17) formuladan $X$ matritsani topamiz:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+\frac{4}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot15\\ 2\cdot5+\frac{12}{5}\cdot0+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot15\\ 0\cdot5+\frac{12}{5}\cdot0+\frac{1}{5}\cdot15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Demak,

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\text{, ya'ni } x_1=2, x_2=1,\ x_3=3\,.$$

**9 - misol.** Ushbu tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Yechish. Sistemani matritsaviy tenglama ko'rinishiga keltiramiz

$$AX = B,$$

bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Endi $A$ matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

va $A_{11} = 3;\ A_{12} = -6;\ A_{13} = 3;\ A_{21} = -4;\ A_{22} = 2;\ A_{23} = -1;\ A_{31} = 2;\ A_{32} = -1;\ A_{33} = -4$ ni topamiz. U holda teskari matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistemaning yechimi $x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5$.

## 5-§. Matritsaning rangi

Ushbu $m\times n$ o'lchamli matritsani qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\ldots a_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\ldots a_{2k}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\, a_{i2}\ldots a_{ik}\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2}\ldots a_{mk}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Bu matritsada ixtiyoriy $k$ ta satr va $k$ ta ustunni ajratamiz. Ajratilgan satrlar va ustunlarning kesishmasida turgan elementlar $k$-tartibli kvadrat matritsa hosil qiladi. Uning determinanti berilgan matritsaning $k$-tartibli minori deb ataladi.

Masalan, ushbu

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun uchinchi tartibli minorlardan biri

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinant bo'lib, u $A$ matritsaning birinchi, ikkinchi, uchinchi satrlarini va birinchi, ikkinchi, uchinchi ustunlarini ajratishdan hosil bo'ladi.

***Ta'rif.*** Agar $A$ matritsaning $r$-tartibli minorlari ichida hech bo'lmaganda bittasi nolga teng bo'lmay, $r+1$-tartibli hamma minorlari $0$ ga teng bo'lsa, butun $r$ soni $A$ matritsaning rangi deyiladi va bunday yoziladi: $r(A)$ yoki $rang\, A = r$.

**10 - misol.** Ushbu matritsaning rangini toping.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

**Yechish.** Matritsaning yagona to'rtinchi tartibli va hamma uchinchi tartibli minorlari nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}=\ldots=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 13 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

Ikkinchi tartibli minorlari esa noldan farqli, demak, matritsaning rangi 2ga teng, ya'ni $r(A)=2$. Bu misoldan ko'rinadiki, matritsa rangini toppish bir nechta turli tartibli determinantlarni hisoblashga olib keladi. Bu ishni osonlashtirish uchun maxsus usullardan foydalaniladi. Quyida keltirigan qulayroq usul matritsani elementar almashtirish tushunchasiga asoslangan. Matritsani quyidagi almashtirishlar elementar almashtirishlar deb ataladi:

1. Matritsaning biror satri (ustuni) elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish;

2. Matritsaning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satri (ustuni) ning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish;

3. Matritsaning satrlari (ustunlari) o'rnini almashtirish;

4. Matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lgan satrini (ustunini) tashlab yuborish.

Biri ikkinchisidan elementar almashtirishlar orqali hosil qilinadigan matritsalar ekvivalent matritsalar deb ataladi. Ekvivalent matritsalar, umuman aytganda, bir-biriga teng bo'lmasa-da, ularning ranglari teng bo'ladi. Bundan matritsalarning rangini hisoblashda foydalaniladi.

11 - misol. Matritsaning rangini hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Yechish.** Berilgan matritsaning ikkinchi ustun elementlarini $-1$ ga ko'paytirib birinchi ustun elementlariga qo'shib, ushbu matritsani hosil qilamiz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

Endi uchinchi satrni ikkinchi satrga, to'rtinchi satrni esa uchinchi satrga qo'shib,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 18 & 6 \\ 1 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz.

$A_2$ matritsaning ikkinchi va uchinchi satr elemetlarini mos ravish da $1/3$ va $1/6$ ga ko'paytirib,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz.

$A_3$ matritsaning birinchi va ikkinchi satridan uchinchi satrini ayrib,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz. $A_4$ matritsada nollar dan iborat satrlarni tashlab yuborib,

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$A$ ga ekvivalent $A_5$ matritsani hosil qilamiz. $A_4$ matritsaning rangi ikkiga tengligi ravshan. Demak, berilgan matritsaning rangi ham ikkiga teng, ya'ni $r(A) = 2$.

## 6 - §. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish. Kroneker-Kapelli teoremasi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss metodi bilan yechishda mazkur sistemaning birgalikda emasligini aniqlash haqidagi savolga faqat hisoblashlarning oxiridagina javob berish mumkin bo'ladi. Biroq ko'pincha chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdami yoki birgalikdamasligini aniqlash haqidagi masalani yechimlarining o'zini topmasdan hal etish muhim bo'ladi.

Umumiy ko'rinishdagi, ya'ni istalgan $n$ sondagi noma’lumli istalagan $m$ sondagi chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ........................................ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (18)$$

Bunda umuman aytganda $m \neq n$.

Quyida (18) sistemaning birgalikda bo'lish alomatini keltiramiz. Buning uchun sistema koeffitsientlaridan tuzilgan ushbu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{....................} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

matritsani va

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{........................} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (20)$$

kengaytirilgan matritsani qaraymiz. Bu matritsalarning ranglari $r = (A) \leq r(B)$ tengsizlik bilan bog'langan ligi ravshan.

1-teorema. (Kroneker – Kapelli teoremasi). (18) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun sistema matritsasi (19) bilan kengaytirilgan matritsa (20)ning ranglari teng, ya'ni $r(A)=r(B)$ bo'lishi zarur va yetarli.

Agar $A$ va $B$ matritsalarning ranglari noma'lumlar soniga teng, ya'ni $r(A)=r(B)=n$ bo'lsa, u holda (18) sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar bu matritsaning ranglari o'zaro teng bo'lib, lekin noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni $r(A)=r(B)<n$ bo'lsa, u holda (18) sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'ladi.

Endi $b_1=b_2=...=b_m=0$ bo'lgan bir jinsli sistemani qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0, \\ .......................................... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \qquad (21)$$

Bu sistema birgalikda, chunki $B$ matritsa $A$ matritsadan faqat elementlari nollardan iborat ustuni bilan farq qiladi va shu sababli $r(A)=r(B)$. (21) sistemani $x_1=0,\ x_2=0,\ ...\ ,\ x_n=0$ qiymatlar doimo qanoatlantiradi. (21) bir jinsli sistema qachon nol yechimdan farqli yechimlarga ega bo'lishi haqidagi savolga quyidagi teorema javob beradi.

2 - teorema. Bir jinsli tenglamalar sistemasini nolmas yechimga ega bo'lishi uchun $A$ matritsaning $r(A)$ rangi noma'lumlar soni $n$ dan kichik, ya'ni $r(A)<n$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

**12 - misol.** Ushbu sistema birgalikda bo'lsa, uning yechimini toping.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3+x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$$

Yechish. Sistema matritsasining rangini hisoblaymiz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, $r(A)=2$, chunki $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Endi kengaytirilgan $B$ matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2\\ 2 & 0 & 0 & 4 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Demak, $r(B)=2$, chunki $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Sistema birgalikda, chunki $r(A)=r(B)=2$. Rang noma'lumlar sonidan kichik $\left(r(A)=r(B)=2<4\right)$ bo'lgani uchun sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega. Bu yechimlarni topamiz. Uchinchi tenglamani tashlab yuborish mumkin, chunki u birinchi va ikkinchi tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasi. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ minor $x_3$ va $x_4$ noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan. Shu sababli sistema

$$\begin{cases}x_3+x_4=1+2x_2-x_1,\\ x_3-x_4=-1-x_1+2x_2\end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases}x_3=-x_1+2x_2,\\ x_4=1\end{cases}$$

ko'rinishni oladi. $x_1$ va $x_2$ larga ixtiyoriy qiymatlarni, masalan, $x_1=0,\ x_2=1$ qiymatlarni berib $x_3=2,\ x_4=1$ qiymatlarni topamiz. Demak, cheksiz ko'p yechimlaridan biri $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=1$.

## Mustaqil ish topshiriqlari.

1. Agar $A=\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$ bo'lsa, $2A+B$ ni toping.

J: $\begin{pmatrix}-1 & -10 & 5\\ 6 & -1 & 6\end{pmatrix}$.

2. Agar $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 3 & -2\\ -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 5\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ bo'lsa, $3A-2B$ ni toping.

J: $\begin{pmatrix} 18 & -10 \\ 13 & -16 \\ -11 & 15 \end{pmatrix}$.

3. Agar $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $2A+3B-C$ ni toping.

J: $2\cdot\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Agar $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A\cdot B$ ko'paytmani toping.

J: $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Agar $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A\cdot B$ ko'paytmani toping.

J: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \\ 12 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Agar $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A\ +2B$ ni hisoblang.

J: $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Agar $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A\cdot B-B\cdot A$ ni hisoblang.

J: $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -7 \\ 6 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Agar $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A^2+3A$ ni toping.

J: $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 42 \\ 10 & 4 & 44 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Ushbu sistemani matritsaviy usulda yeching: $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

J: $x=2,\ y=3,\ z=4$.

10. Ushbu sistemani matritsaviy usulda yeching: $\begin{cases} 2x+3y+4z=15, \\ x+y+5z=16, \\ 3x-2y+z=1. \end{cases}$

J: $x=0,\ y=1,\ z=3$.

11. Ushbu matritsaviy tenglamani yeching: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$

J: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

12. Ushbu matritsaviy tenglamani yeching: $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

J: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. Ushbu $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ tenglamani yeching.

J: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Quyidagi matritsalarning rangini hisoblang:

14. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ J: $r(A)=2$.

15. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ J: $r(A)=2$

16. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ J: $r(A)=3$.

Quyidagi bir jinsli sistemani yeching:

17. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$

J: $x_3=-\frac{5}{2}x_1+5x_2$, $x_4=\frac{7}{2}x_1-7x_2$.

18. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=0, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=0. \end{cases}$

J: $x_2=x_1-13x_4+x_5$, $x_3=5x_4-x_5$.

Ushbu matritsali

19. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 14 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

bir jinsli sistemani yozing va yechimini toping.

## 3-BOB. Vektorlar va ular ustida amallar

### 1-§.Vektorlar va ular ustida amallar

1. Skalyar va vektor miqdorlar.

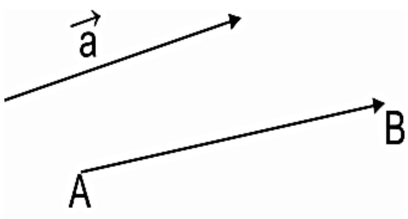
Son qiymatlari bilangina aniqlanuvchi miqdorlar skalyar miqdorlar deb ataladi. Skalyar miqdorga kesma uzunligi, burchak, yuz, hajm, vaqt, massa, temperatura, zichlik, ish va shu kabi miqdorlar misol bo'la oladi. Skalyar miqdorlar lotin yoki grek alifbosining oddiy harflari $a, b, m, p, x, y, A, B, S, T, \ldots$ bilan belgilanadi.

Skalyar miqdorlar bilan bir qatorda boshqa xil miqdorlar ham borki, ular son qiymatlari bilan to'la aniqlana olmaydi. Masalan, kuchning ta’sirini xarakterlash uchun uning miqdorini bilishning o'zigina yetmaydi, kuchning qanday yo'nalishda ta’sir qilayotganligini ham bilish kerak.

Harakat, kuch, tezlik, tezlanish, kuch momenti, elektr va magnit maydonning kuchlanishi va shu kabi o'zining berilishi uchun son qiymati ustiga fazodagi yo'nalishini ham ko'rsatishni talab qiladigan miqdorlar *vektor* miqdorlar yoki *vektorlar* deb ataladi.

Vektorlarni ko'rsatmali tasvirlash uchun geometric vektorlar, ya'ni uzunligi va yo'nalishi ma’lum bo'lgan kesmalar ishlatiladi.

Vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilaymiz, bunda birinchi harf vektorning bosh nuqtasini ikkinchi harf esa uning oxirgi nuqtasini belgilaydi. Vektorni, shuningdek, $\vec{a}$ bitta harf bilan ham belgilaymiz (1-chizma).

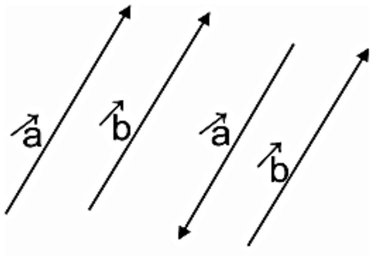



**1- chizma**

Vektorning uzunligini, uning moduli yoki absolyut miqdori deb ataladi va $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi oxiri bilan ustma – ust tushgan vektor nol vektor deb ataladi va $\vec{o}$ bilan belgilanadi. Bunday vektor tayin yo'nalishga ega emas, uning moduli $|\vec{o}| = o$.

Vektorlar yotgan to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel yoki ustma – ust tushgan bo'lsa, ular *collinear vektorlar* deyiladi. Kollinear vektorlar bir xil yo'nalishli $\left(\vec{a} \upuparrows \vec{b}\right)$, qarama – qarshi yo'nalishli $\left(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}\right)$ bo'lishi mumkin (2 - chizma).




**2- chizma**

Agar ikki vektor quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) uzunliklari teng bo'lsa;

2) ular kollinear bo'lsa;

3) yo'nalishlari bir xil bo'lsa, ular teng deb hisoblanadi.

Bir tekislikda yotgan yoki bir tekislikka parallel bo'lgan vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

Agar komplanar vektorlarning boshlari umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular bitta tekislikda yotishini ko'rsatish qiyin emas.

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ vektorlar qarama – qarshi vektorlar deb ataladi.

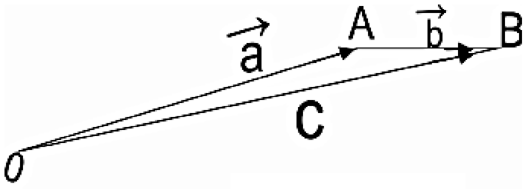
Vektor ustida chiziqli amallar.

Vektor ustida chiziqli amallar deb, vektorlarni qo'shish va ayirish hamda vektorlarni songa ko'paytirishga aytiladi.

## Vektorlarni qo'shish usullari

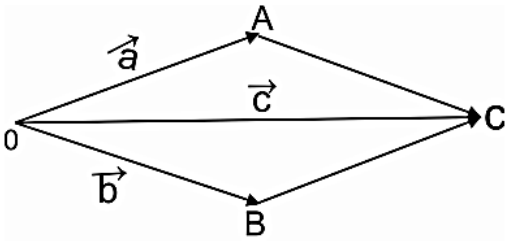
Noldan farqli ikkita ixtiyoriy $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $O$ nuqtani olamiz va $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ vektorni yasaymiz, so'ngra $A$ nuqtaga $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ vektorni qo'yamiz.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}$ deb $\overrightarrow{OA}$ vektorning boshini $\overrightarrow{AB}$ vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$ vektorga aytiladi (3-chizma).



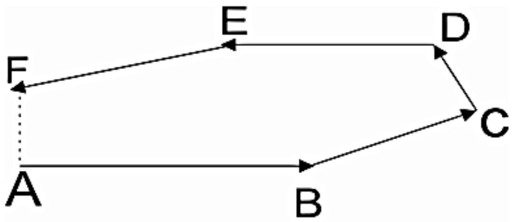

**3- chizma**

Vektorlarni bunday qo'shish usuli uchburchak usuli deyiladi.




**4-chizma**

Biror $O$ nuqtaga $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlarni qo'yamiz va $OABC$ parallelogramm yasaymiz (4-chizma). Parallelogrammning $O$ uchidan o'tkazilgan diagonali $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ vektor, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ vektordir. Vektorlarni bunday qo'shish usuli parallelogram usuli deb ataladi.




**5- chizma**

Qo'shiluvchi vektorlar soni ko'p bo'lgan holda, uchburchak qoidasini umumlashtirib, “ko'pburchak qoidasi”ni hosil qilamiz: bir necha vektor yig'indisini yasash uchun ixtiyoriy nuqtadan birinchi qo'shiluvchiga teng vektor yasaymiz, birinchi qo'shiluvchining oxiridan ikkinchi qo'shiluvchini yasaymiz, ikkinchining oxiridan uchinchi qo'shiluvchini yasaymiz va sho' birinchi qo'shiluvchi vektorning boshini oxirgi vektorning uchi bilan tushintiruvchi vektor – berilgan vektorlar yig'indisi bo'ladi, ya'ni bo'g'inlari qo'shiluvchi vektorlardan iborat bo'lib siniq chiziqning yopuvchisi yig'indi vektor bo'ladi.

Agar qo'shiluvchi vektorlardan oxirgisining uchi birinchisining boshiga to'g'ri kelib qolsa, yig'indi vektorning uzunligi nolga teng bo'ladi. Bunday vektor nol-vektor deyiladi.

Vektorlarni qo'shish sonlarni qo'shishning asosiy qonunlariga bo'ysunadi:

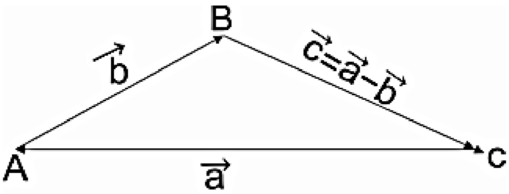
1. o'rin almashtirish qonuniga:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

2. gruppalash qonuniga:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Ikkita ixtiyoriy $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning ayirmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, $\vec{c}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorning yig'indisi $\vec{a}$ vektorga teng bo'ladi (6-chizma).




**6- chizma**

## Vektorni skalyarga (songa) ko'paytirish

$\vec{a}$ vektor va $\lambda \neq 0$ skalyar berilgan bo'lsin.

***Ta'rif.*** $\vec{a}$ vektorni $\lambda$ skalyarga ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, $\lambda > 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalishdagi, $\lambda < 0$ bo'lganda esa unga qarama – qarshi yo'nalgan hamda $\lambda\vec{a}$ bilan belgilanadigan $\vec{b}$ vektorga aytiladi. Shunday qilib, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $\vec{b} \parallel \vec{a}$ va $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$. Bu amal ko'paytirish amalining asosiy xossalariga ega.

1. O'rin almashtirish xossasi:

$$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda.$$

2. Skalyar songa ko'paytirishga nisbatan guruhlash xossasi:

$$k\left(\lambda\vec{a}\right)=(\lambda\cdot k)\vec{a}.$$

3. Skalyarlarni (sonlarni) qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi:

$$(k+\lambda)\vec{a}=k\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{a}.$$

4. Vektorlarni qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi:

$$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

$\vec{a}\neq\vec{o}$ vektorlarni $\lambda\neq 0$ songa bo'lishni doimo $\vec{a}$ vektorni $1/\lambda$ songa ko'paytirish deb tushunamiz.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ - ikki kollinear vektor bo'lsa, shunday $\lambda$ skalyarni topish mumkin bo'ladiki, buni $\vec{a}$ vektorga ko'paytirilganda $\vec{b}$ vektor hosil bo'ladi, ya'ni $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Demak, $\lambda$ sonini $\vec{b}$ va $\vec{a}$ vektorlarining nisbati deyish mumkin: $\dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}=\lambda$ yoki $\vec{b}:\vec{a}=\lambda$.

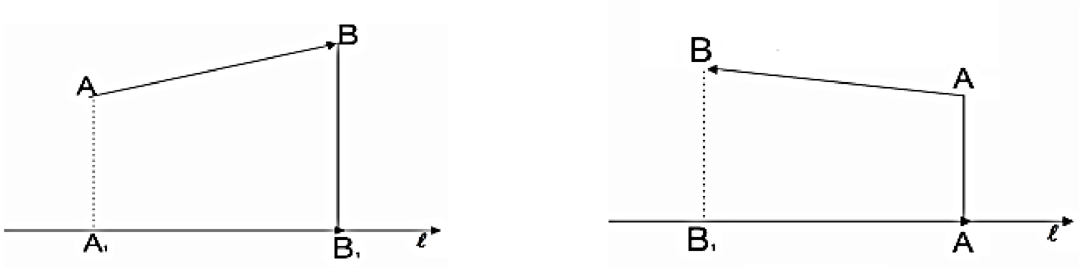
Agar $\vec{a}$ vektorni o'zining moduliga bo'lsak, u holda $\vec{a}$ vektor yo'nalishidagi $\vec{a}^{\,0}$ birlik vektorni hosil qilamiz: $\vec{a}^{\,0}=\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$, bundan $\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\vec{a}^{\,0}$, demak, istalgan $\vec{a}$ vektorniuning moduli $\left|\vec{a}\right|$ va o'sha yo'nalishli $\vec{a}^{\,0}$ birlik vektorga ko'paytmasi sifatida ifodalash mumkin.

3. Vektorlarning proektsiyalari.

O'q deb, shunday to'g'ri chiziqqa aytiladiki, unda musbat yo'nalish va uzunlik birligi tanlab olingan bo'ladi. O'q birlik vektor bilan tugalanilanadi.

$M$ nuqtaning berilgan o'qdagi proektsiyasi deb, shu $M$ nuqtadan o'qqa tushirilgan perpendikulyarning asosiga aytiladi.

$\overrightarrow{AB}$ vektor boshining ($A$ nuqta) proektsiyasini uning oxirining ($B$ nuqta) proektsiyasi bilan tutashtiruvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorning o'qdagi tashkil etuvchisi yoki komponentasi deyiladi. $\overrightarrow{AB}$ vektorning $\ell$ o'qqa proektsiyasi deb uning $\overrightarrow{A_1B_1}$ tashkil etuvchisining $\ell$ o'q yo'nalishida yoki unga qarama – qarshi yo'nalganligiga qarab, musbat yoki manfiy ishora bilan olin gan uzunligiga aytiladi (7-chizma).




**7-chizma**

Vektorning $\ell$ o'qqa proektsiyasi bunday belgilanadi: $np_{\ell}\overrightarrow{AB}$. Demak,

$$np_{\ell}\overrightarrow{AB} = \pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$$

## Proektsiyalarning asosiy xossalari

1. $\vec{a}$ vektorning $\ell$ o'qqa proektsiyasi $\vec{a}$ vektor modulining bu vektor bilan o'q orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$np_{\ell}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi, \qquad \varphi = \left(\vec{a},^{\wedge}\ell\right).$$

2. Vektorning o'qdagi proektsiyasi skalyar miqdordir.

3. Ikki vektor yig'indisining o'qqa proektsiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qqa proektsiyalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$np_{\ell}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_{\ell}\vec{a} + np_{\ell}\vec{b}.$$

4. $\lambda$ o'zgarmas sonni proektsiyadan tashqariga chiqarish mumkin:

$$np_{\ell}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\ell}\vec{b}.$$

## 2-§. Vektorning koordinatalari.

***1-ta'rif.*** $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlarning mos $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ...\overrightarrow{a_n}$ vektorlarga ko'paytmalari yig'indisiga, ya'ni

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$$

ifodaga vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb ataladi.

***2-ta'rif.*** Orasida noldan farqlilari ham bo'lgan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar mavjud bo'lsaki, ular uchun vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi nolga teng, ya'ni

$$\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0 \qquad (1)$$

bo'lsa, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar chiziqli bog'liq deb ataladi.

Agar (1) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar chiziqli erkli deb ataladi.

Shunday qilib, bir nechta vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ulardan hech bo'lmaganda birini qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatdan ham, masalan, (1) tenglikda $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsa, uholda

$\overrightarrow{a_1} = \mu_2 \overrightarrow{a_2} + \mu_3 \overrightarrow{a_3} + \ldots + \mu_n \overrightarrow{a_n}$ ga ega bo'lamiz. Bu yerda $\mu_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \mu_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \mu_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$

Agar $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ bo'lsa, bu tenglik $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollenear bo'lishi uchun zarur va yetarlidir. Bundan kollenear vektorlar orasida hamma vaqt chiziqli bog'lanish mavjud ekanligi kelib chiqadi.

Demak, ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor chiziqli erkli bo'lishi uchun ular kollenear bo'lmasligi zarur va kifoyadir.

Uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor komplanar vektorlar bo'lishi uchun ular orasida $\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}$ chiziqli bog'lanish mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir. Demak, uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor chiziqli erkli bo'lishi uchun ular nokomplanar bo'lishi zarur va kifoyadir.

Fazodagi har qanday to'rtta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ va $\vec{d}$ vektor chiziqli bog'liqdir, ya'ni

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{b} + \alpha_2 \vec{c} + \alpha_3 \vec{d} \ .$$

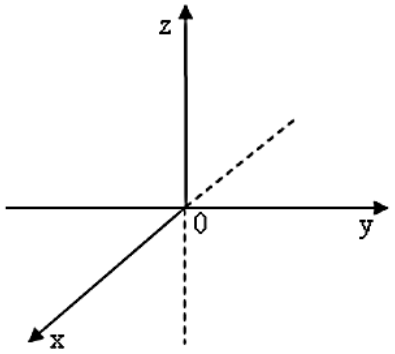
***3-ta'rif.*** Istalgan $\vec{a}$ vektorni $n$ ta chiziqli erkli $\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}, \ldots, \overrightarrow{\ell_n}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda bu vektorlar fazoning bazisi deb ataladi.

Bazisni hosil qiladigan vektorlar soni fazoning o'lchami deyiladi. Bazisga kiruvchi vektorlar bazis vektorlar deyiladi.

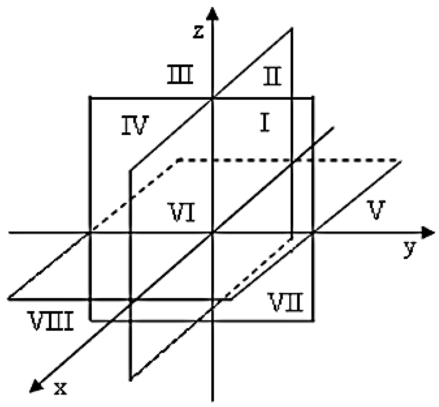
### Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi

***Ta'rif.*** Umumiy O nuqtada kesishadigan va bir xil masshtab birligiga ega bo'lgan uchta o'zaro perpendikulyar Ox, Oy, Oz o'qlar fazoda to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi. Bu sistema $Oxyz$ ko'rinishida belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi, Ox- abstsissa o'qi, Oy- ordinata o'qi, Oz- applikata o'qi deyiladi (8-chizma).

Ox, Oy va Oz o'qlar orqali o'tgan tekisliklarga koordinata tekisliklari deyiladi va ular fazoni sakkiz qismga (oktantlarga) ajratadi (9-chizma).

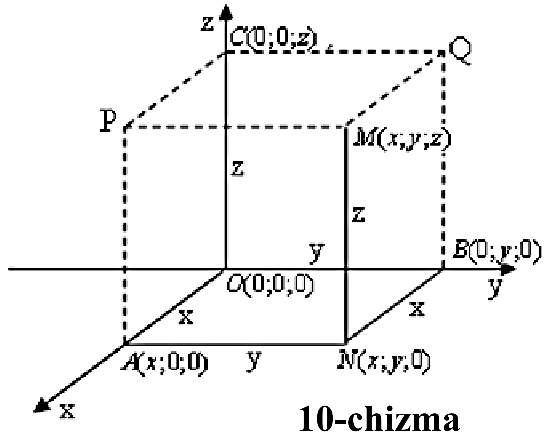



**8-chizma**




**9-chizma**

Faraz qilaylik, M – fazodagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. M nuqta orqali Ox, Oy, Oz koordinata o'qlariga perpendikulyar tekisliklar o'tkazib, M nuqtaning $OA = x,\ OB = y,\ OC = z$ to'g'ri burchakli koordinatalarini topamiz (10-chizma). x – son M nuqtaning abstsissasi, y – son M nuqtaning ordinatasi, z – son esa M nuqtaning aplikatasi deb ataladi. M nuqta koordinatalari yordamida $M(x; y; z)$ ko'rinishda yoziladi.




**10-chizma**

Demak, fazodagi xar bir nuqta tartiblangan $(x; y; z)$ uchlikni aniqlaydi va aksincha, uchta x, y, z sonlardan iborat $(x; y; z)$ tartiblangan uchlik berilgan bo'lsa, fazoda unga mos bitta nuqta topiladi.

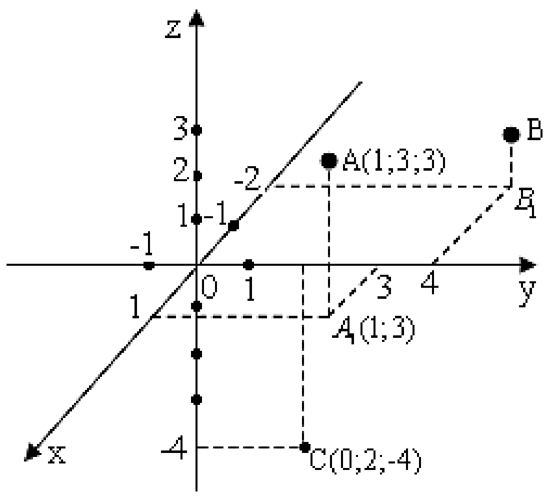
Quyidagi jadvalda nuqta koordinatalarining ishoralaridan kelib chiqib, uning qaysi oktantga tegishli bo'lishi ko'rsatilgan.

| koordinatalar / oktantlag | x - abstsissa | y - ordinata | z - aplikata |
|---|---|---|---|
| I | + | + | + |
| II | - | + | + |
| III | - | - | + |
| IV | + | - | + |
| V | + | + | - |
| VI | - | + | - |
| VII | - | - | - |
| VIII | + | - | - |

Misol. $A(1;3;3)$, $B(-2;4;1)$, $C(0;2;-4)$ nuqtalar yasalsin.

Yechish. A nuqtaning koordinatalari musbat. Demak, nuqtani birinchi oktantda izlash kerak. B nuqtaning koordinatalari $x=-2<0$, $y=4>0$, $z=1>0$. Demak, uni II oktantda izlash kerak. C nuqtanig koordinatalari esa $x=0$, $y=2>0$, $z=-4<0$. Demak, C nuqta V va IV oktantlarning chegarasi $yOz$ tekisligida yotadi. Nuqtani yasash quyidagi tartibda bajariladi:

1. $Oxyz$ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi chiziladi.
2. O'qlarga masshtab kiritiladi;
3. Ox o'qda nuqtaning abstsissasi topiladi va topilgan nuqtadan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkaziladi;
4. Oy o'qda nuqtaning ordinatasi topiladi va topilgan nuqtadan Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi izlanayotgan nuqtaning Oxy tekislikdagi proektsiyasi $(x;y)$ bo'ladi.



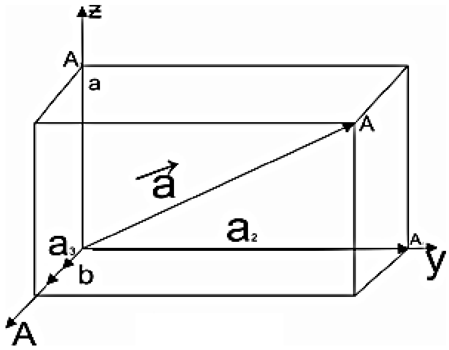

**11-chizma**

5. $(x;y)$ nuqtadan izlanayotgan nuqtaning aplikatasiga teng bo'lgan Oz o'qqa parallel kesma o'tkaziladi. Kesmaning fazodagi uchi izlanayotgan nuqta bo'ladi.

A, B va C nuqtalarning fazodagi o'rni 11 – chizmada ko'rsatilgan.

Endi $Oxyz$ fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik (12 - chizma).

O'qlarning har birida yo'nalishi o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma – ust tushadigan birlik vektor olamiz, ularni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilaymiz. Bu uchala o'zaro perpendikulyar birlik vektorortlar deb ataladi. Ular nokomplanar bo'lganligi uchun bazisi tashkil qiladi.




12 - chizma

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ vektorning koordinata o'qlardagi proektsiyalarini mos ravishda $a_x, a_y, a_z$ orqali belgilaymiz:

$$a_x = OA_1 = np_{ox}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y = OA_2 = np_{oy}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta, \qquad (2)$$

$$a_z = OA_3 = np_{oz}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Bu yerda $\alpha, \beta$ va $\gamma$ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi burchaklari. $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$, vektorlar $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ vektorning $O_x, O_y, O_z$ o'qlar bo'yicha tashkil etuvchilaridir. Istalgan vektorni uning uzunligini o'sha yo'nalishdagi birlik vektorga ko'paytmasi sifatida ifodalash mumkin bo'lgani uchun $\vec{a}$ vektorning o'qlardagi tashkil etuvchilari

$$\overrightarrow{OA_1} = a_x\vec{i},\ \overrightarrow{OA_2} = a_y\vec{j},\ \overrightarrow{OA_3} = a_z\vec{k}$$

bo'ladi. Biroq, $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{oA_2} + \overrightarrow{oA_3}$, shusababli uzil – kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (3)$$

(3) formula $\vec{a}$ vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisi vektorlar yoki koordinata o'qlari bo'yicha yoyilmasini beradi. $\vec{a}$ vektorning $a_x, a_y, a_z$ proektsiyalari uning to'g'ri burchakli dekart koordinatalari deyiladi va u quyidagi cha yoziladi:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

Agar vektorning boshi koordinatalar boshida, oxiri esa $A(x, y, z)$ nuqtada bo'lsa, u holda $a_x = x,\ a_y = y,\ a_z = z$ bo'ladi va (3) formula endi quyidagi ko'rinishni oladi:

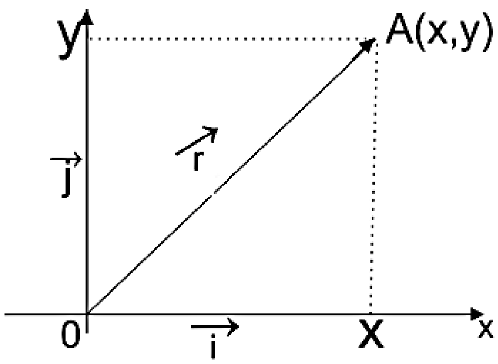
$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ yoki } \vec{a} = \{x, y, z\}.$$

Koordinatalar boshidan $Oxyz$ fazoning ixtiyoriy $A$ nuqtasiga yo'naltirilgan vektor $A$ nuqtaning radius – vektori deyiladi va $\vec{r}$ bilan belgilanadi:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$Oxyz$ tekislikdagi ixtiyoriy $A$ nuqtaning radius – vektori esa $\overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ bo'ladi (13-chizma).

Agar $\vec{a}$ vektorning boshi $A(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada, oxiri $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtada bo'lsa, u holda $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlari bo'yicha quyidagi yoyilmasini olamiz:




**13-chizma**

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \quad (3)$$

Vektorning moduliuning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari kvadratlarining yig'indisidan olingan kvadrat ildizga teng, ya'ni

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (4)$$

Haqiqatdan, $\vec{a}$ vektor koordinata o'qlaridagi proektsiyalari bilan berilgan bo'lsin. U holda $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ vektor parallelepipedning diagonali bo'lgani uchun (12-chizma) to'g'ri burchakli parallelepiped diagonalining uzunligi haqidagi teoremaga asosan:

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2.$$

Biroq $|\overrightarrow{OA_1}| = a_x$, $|\overrightarrow{OA_2}| = a_y$, $|\overrightarrow{OA}| = a_z$, shu sababli

$$\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

kelib chiqadi.

(4) formulaga asosan $\vec{AB}$ vektorning moduli uchun

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5)$$

formulani topamiz.

(2) formulaga asosan $\vec{a} = \vec{OA}$ vektorning $O_x, O_y$ va $O_z$ koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (6)$$

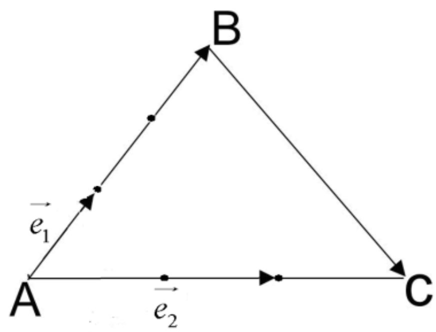
formulalar bo'yicha topiladi. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ larga $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deb ataladi. Istalgan vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig'indisi birga teng, ya'ni

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ko'rish osonki, istalgan $\vec{a}^{\,0}$ birlik vektorning koordinata o'qlari bo'yicha yoyilmasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\vec{a}^{\,0} = \vec{i}\cdot\cos\alpha + \vec{j}\cdot\cos\beta + \vec{k}\cdot\cos\gamma. \quad (7)$$

Agar vektorlarning koordinata o'qlari bo'yicha yoyilmalari ma'lum bo'lsa, u holda vektorlar ustidagi chiziqli amallarni ularning proektsiyalari ustidagi arifmetik amallar bilan almashtirish mumkin. Masalan, agar




**14-chizma**

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

bo'lsa, u holda

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k},$$
$$\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x\right)\vec{i}+\left(a_y\pm b_y\right)\vec{j}+\left(a_z\pm b_z\right)\vec{k}. \quad (8)$$

**1- misol.** Berilgan $np_\ell\vec{a}=-2,\ np_\ell\vec{b}=1$. Hisoblang:

$$1.\ np_\ell\left(2\vec{a}+\vec{b}\right);\quad 2.\ np_\ell\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right).$$

Yechish. Proektsiyalarning xossalaridan foydalanib, topamiz:

1. $np_\ell\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2np_\ell\vec{a}+np_\ell\vec{b}=2\cdot(-2)+1=-4+1=-3;$

2. $np_\ell\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)=3np_\ell\vec{a}-2np_\ell\vec{b}=3\cdot(-2)-2\cdot1=-8$.

**2-misol.** Agar $|\vec{a}|=6$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektorning $y$ bilan $60^\circ$ burchak tashkil etuvchi $\ell$ o'qdagi proektsiyasini toping.

Yechish. Formula bo'yicha $np_\ell\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=6\cdot\cos60^\circ=3$ ni topamiz.

**3-misol.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ vektorlarning $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ bazisidagi yoyilmasini toping.

Yechish. 14 – chizmadan $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{e_1}$,

$$\overrightarrow{AC}=1,5\overrightarrow{e_2}\Rightarrow\overrightarrow{CA}=-1,5\overrightarrow{e_2},$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=1,5\overrightarrow{e_2}-3\overrightarrow{e_1}.$$

**4-misol.** Agar $A(-1;-2),\ B(4;5)$ bo'lsa, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish. (3) formulaga ko'ra

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\left(4-(-1)\right)\vec{i}+\left(5-(-2)\right)\vec{j}=5\vec{i}+7\vec{j}.$$

Demak, $\vec{a}=\{5;7\}$.

**5-misol.** Agar $A(2;-3),\ B(1;4)$ bo'lsa, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklarining kosinuslarini toping.

Yechish. 1. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorni $\vec{i}$ va $\vec{j}$ birlik vektorlar orqali ifodalaymiz:

$$\vec{a}=(1-2)\vec{i}+\left(4-(-3)\right)j=-\vec{i}+7\vec{j}$$

2. Endi $\vec{a}$ vektorning modulini topamiz:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

3. (6) formuladan foydalanib $\cos\alpha$ va $\cos\beta$ ni topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -0{,}1\sqrt{2};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = 0{,}7\sqrt{2},$$

bunda $\alpha = \left(\vec{a},^\wedge ox\right)$, $\beta = \left(\vec{a},^\wedge oy\right)$.

**6-misol.** $\vec{a} = \{3;5\}$ va $\vec{b} = \{2;-7\}$ vektorlar berilgan.

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $4\vec{a}$; 4) $-0{,}5\vec{b}$ larni toping.

Yechish. (8) formula bo'yicha topamiz:

1) $\vec{a}+\vec{b} = \{3;5\} + \{2;-7\} = \{3+2;5-7\} = \{5;-2\}$;

2) $\vec{a}-\vec{b} = \{3-2;\ 5+7\} = \{1;12\}$;

3) $4\vec{a} = \{4\cdot 3;\ 4\cdot 5\} = \{12;20\}$;

4) $-0{,}5\vec{b} = \{-0{,}5\cdot 2;\ -0{,}5\cdot(-7)\} = \{-1;\ 3{,}5\}$.

## 3-§. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi.

***Ta'rif.*** $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, bu vektorlar modullarining ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng songa aytiladi.

Skalyar ko'paytma $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra,

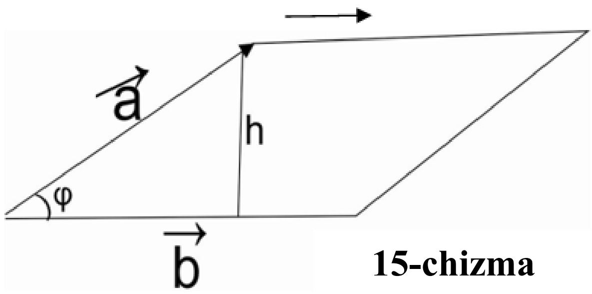
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi, \qquad (9)$$

bunda $\varphi = \left(\vec{a},^\wedge \vec{b}\right)$, $0 \le \varphi \le 180^\circ$.

Agar $\vec{a} = \vec{b}$ bo'lsa, skalyar ko'paytma $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ko'rinishida bo'lib, uni $\vec{a}^{\,2}$ kabi belgilaymiz. U holda (9) dan

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 = a^2$$

kelib chiqadi. Demak, $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati uning uzunligining kvadratiga teng ekan. 15-chizmadan:



**15-chizma**

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi \text{ va } np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$$

ekanligini hisobga olsak:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\, np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\, np_{\vec{b}}\vec{a}$ ni hosil qilamiz.

Bundan $np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ifodani topamiz. Agar $\vec{a}$ birlik vektor, ya'ni $|\vec{a}| = 1$ bo'lsa, u holda

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

bo'ladi. Demak, vektorning birlik vektorga proektsiyasi bu vektoorlarning skalyar ko'paytmasiga teng.

Skalyar ko'paytmasining ba’zi xossalari.

1. O'rin almashtirish xossasi, ya'ni

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2. Skalyar ko'paytuvchiga nisbatan gruhlash xossasi, ya'ni

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right).$$

3. Taqsimot xossasi, ya'ni

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

4.Agar $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ bo'lsa, u holda yo $\vec{a} = 0$, yoki $\vec{b} = 0$, yoular orasidagi burchak kosinusi nolga teng, ya'ni $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi, son jihatdan, to'g'ri chiziqli yo'l uchastkasida o'zgarmas kuchning bajarganishiga teng. Agar vektorlar koordinata formasida, ya'ni

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ va } \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda ularning skalyar ko'paytmasi

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z \qquad (10)$$

formula bo'yicha ifodalanadi, chunki

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0.$$

Agar $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'lsa, u holda (10) formula

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0 \qquad (11)$$

ko'rinishni oladi. (11)ga ikki vektorning perpendikulyarlik sharti deyiladi.

Agar $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bo'lsa, $\varphi=0^\circ$ bo'ladi. U holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear. Ikki vektorning kollinearlik shartidan:

$$a_x=\lambda b_x;\ a_y=\lambda b_y;\ a_z=\lambda b_z$$

Bundan esa

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda \qquad (12)$$

ni hosil qilamiz. (12) ga ikki vektorning parallellik sharti deyiladi.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ta'rifi $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ dan

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (13)$$

ni topamiz. Agar bu vektorning bazisi vektorlari bo'yicha yoyilmalari mahlum, ya'ni

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

bo'lsa, u holda (4), (10) formulalardan foydalanib (13) formulaning quyidagi ko'rinishini hosil qilamiz:

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (14)$$

(13) va (14) formula ikki vektor orasidagi burchakni toppish formulasidir.

**7-misol.** $\vec{c}$ vektorning uzunligini hisoblang, bunda $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b},\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ hamda $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=60^\circ$ ga teng.

Yechish. $\vec{c}^{\,2}=|\vec{c}|^2$ dan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^{\,2}}=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}-4\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{|\vec{a}|^2-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+4|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{9-4\cdot3\cdot4\cdot\cos60^\circ+4\cdot16}=\sqrt{9-48\cdot\frac{1}{2}+64}=\sqrt{49}=7$$

**8-misol.** $m$ ning qanday qiymatida $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ vektor $\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}-m\vec{k}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi?

Yechish. Vektorlarning perpendikulyarlik sharti (11) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$2\cdot1+3\cdot(-5)+(-1)\cdot m=0,$$

bundan $m=-13$ sonni topamiz. Demak, $m=-13$ da $\vec{a}\perp\vec{b}$ ga, ya'ni ular orasidagi burchak $\varphi=\pi/2$.

**9-misol.** $\vec{m}$ va $\vec{n}$ lar o'zaro $120^\circ$ burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ va $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$ vektorlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Vektorlar orasidagi burchak $\varphi$ ni (13) formulaga asosan topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{(2\vec{m}+4\vec{n})(\vec{m}-\vec{n})}{\sqrt{(2\vec{m}+4\vec{n})^2}\sqrt{(\vec{m}-\vec{n})^2}}=\frac{2\vec{m}^2-2\vec{m}\cdot\vec{n}+4\vec{n}\cdot\vec{m}-4\vec{n}^2}{\sqrt{4\vec{m}^2+16\vec{m}\cdot\vec{n}+16\vec{n}^2}\cdot\sqrt{\vec{m}^2-2\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^2}}=$$

$$=\frac{2-2\cos120^\circ+4\cos120^\circ-4}{\sqrt{4+16\cos120^\circ+16}\cdot\sqrt{1-2\cos120^\circ+1}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2},\ \varphi=120^\circ.$$

Eslatma. $|\vec{m}|=1,\ |\vec{n}|=1,\ \cos120^\circ=-\frac{1}{2}$.

**10-misol.** Harakatdagi $M$ nuqta yo'lining o'qlardagi proektsiyalari: $S_x=2м,\ S_y=1м,\ S_z=-2м$. Ta'sir etuvchi $\vec{F}$ kuchning proektsiyalari $F_x=5$ kg, $F_y=4$ kg va $F_z=3$ kg. $F$ kuchning bajargan ishi $A$ va $\vec{F}$ kuch bilan $\vec{S}$ yo'l orasidagi burchak hisoblansin.

Yechish. Fizikadan ma'lumki, $\vec{F}$ kuchning $S$ uchastkada bajaradigan $A$ ishi $A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$ ga teng. Agar ko'chish vektori $\vec{S}$ ni kiritadigan bo'lsak, u holda $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ ni hosil qilamiz. Bundan

$$A = F_x \cdot S_x + F_y \cdot S_y + F_z \cdot S_z = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 8 \text{ kg m} = 80 \text{ n m} = 80 \text{ dj}$$

ni topamiz. (14) formuladan esa $\vec{F}$ va $\vec{S}$ vektorlar orasidagi burchakni topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \cdot \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}} = \frac{8}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{15}.$$

## 4-§. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi.

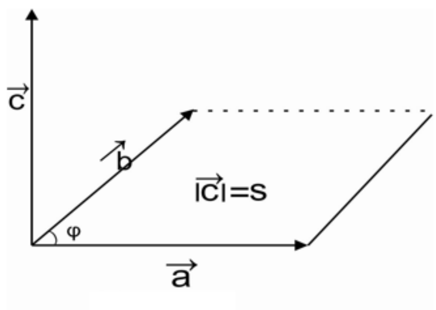
Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ deb, quyidagi uchta xususiyatga ega bo'lgan uchinchi $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ ning son qiymati, ya'ni moduli son jihatdan shu vektorlardan tuzilgan parallelogram yuziga teng, ya'ni

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot Sin\varphi; \qquad (15)$$

2. $\vec{c}$ vektorning yo'nalishi parallelogram yuziga perpendikulyar, ya'ni $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ bo'ladi;

3. $\vec{c}$ vektorning yo'nalishi shundayki, agar uning oxiridan qaralsa, u holda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga tomon eng qisqa yo'l bilan burilish soat strelkasi aylanishiga qarama – qarshi yo'nalishda ko'rinadi, ya'ni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng uchlikni hosil qiladi (16 - chizma).




16- chizma

Endi vektor ko'paytmaning asosiy xossalarini ko'rib chiqamiz:

1. Vektor ko'paytma o'rin almashtirish xossasiga ega emas, ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Vektor ko'paytma skalyar ko'paytuvchiga nisbatan gruppalash xossasiga ega, ya'ni

$$\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda \vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \vec{b}\right).$$

3. Vektor ko'paytma taqsimot qonuniga ega, ya'ni

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}\,.$$

4. Ikkita collinear vektorning vektor ko'paytmasi nolga teng.

**11-misol.** $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ va $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini hisoblang.

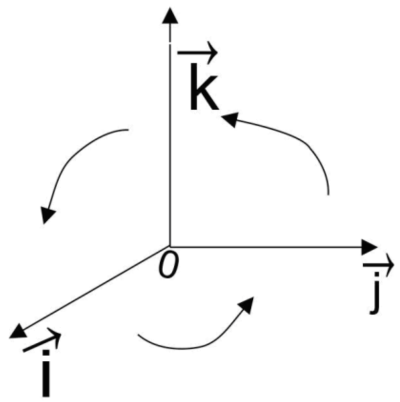
Yechish. Quyidagiga egamiz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right) \times \left(3\vec{p} - \vec{q}\right) = 3\left(\vec{p} \times \vec{p}\right) - \left(\vec{p} \times \vec{q}\right) + 6\left(\vec{q} \times \vec{p}\right) - 2\left(\vec{q} \times \vec{q}\right) = 7\left(\vec{q} \times \vec{p}\right),$$

chunki 1 va 4 xossalardan:

$$\vec{p} \times \vec{p} = 0,\;\; \vec{q} \times \vec{q},\;\; \vec{p} \times \vec{q} = -\vec{q} \times \vec{p}\,.$$

**12-misol.** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ o'ng uchlik tashkil qiluvchi bazi vektorlarning vektor ko'paytmalarini hisoblang (17 - chizma).




**17-chizma**

Yechish. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar birlik vektorlar va ular o'ng uchlikni hosil qilganligi uchun, vektor ko'paytmaning ta'rifi va 1, 4 xossalarga ko'ra:

$$\begin{aligned}
&\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},\\
&\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},\\
&\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0.
\end{aligned}$$

Endi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis vektorlar bo'yicha yoyilma shaklida berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},\;\; \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\,.$$

U holda $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor ko'paytma uchun 12 – misolning natijalaridan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)\vec{i}\ \ \left(b_z a_x-b_x a_z\right)\vec{j}+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)\vec{k}\ ,$$

yoki

$$a\times b=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\ ,$$

yoki

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

**13-misol.** Uchlari $A(2;3;1),\ B(5;6;3),\ C(7;1;10)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning yuzini hisoblang.

Yechish. $\Delta ABC$ ning tomonlari bilan ustma – ust tushadigan $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni qaraymiz:

$$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},\ \ \overrightarrow{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+9\vec{k}\ .$$

Vektor ko'paytmaning ta'rifidan

$$S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Dastlab $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ vektor ko'paytmani topamiz:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix}=31i-17\vec{j}-21\vec{k}\ .$$

Demak, $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|31\vec{i}-17\vec{j}-21\vec{k}\right|=\sqrt{31^2+\left(-17\right)^2+\left(-21\right)^2}=\sqrt{1691}\ .$

Uchburchakning yuzi parallelogram yuzini yarmiga teng bo'lganligi sababli

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1691}\approx 20,56\ \text{kv.b.}$$

**14-misol.** Qattiq jismda $A(4;-1;3)$ nuqta qo'zg'almas. Uning $B(0;3;5)$ nuqtasiga $\vec{F}\{2;0;1\}$ kuch qo'yilgan. $\vec{F}$ kuchning $A$ nuqtaga nisbatan moment topilsin.

Yechish. Mexanikadan mahlumki, $B$ nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuchning $A$ nuqtaga nisbatan moment $\overrightarrow{M} = m_A\left(\vec{F}\right)$ $\overrightarrow{AB}$ va $\vec{F}$ vektorlarning vektorli ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F} \ . \qquad (17)$$

Bu vektorlarning proektsiyalari orqali ifodasi:

$$\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{F} = 2\vec{i} + \vec{k} \ .$$

Endi (17) formuladan $\overrightarrow{M}$ - momentni topamiz:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k} \, .$$

Momentning son qiymati esa

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12 \ .$$

Demak, $\overrightarrow{M} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}, \quad M = 12$ kgm.

## 5-§. Uch vektorning aralash ko'paytmasi.

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan, ushbu ko'paytmani tuzamiz:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \qquad (18)$$

Bu yerda birinchi ikkita vektorni vektor ko'paytiriladi va hosil bo'lgan $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektor uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytiriladi. Bunday ko'paytirish uchta vektorning aralash ko'paytmasi deyiladi. Demak, aralash ko'paytma, biror son bo'ladi.

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'zlarining koordinatalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}; \ \vec{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\}, \ \ \vec{c} = \left\{c_x, c_y, c_z\right\} \ .$$

U holda

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (19)$$

ni hosil qilamiz.

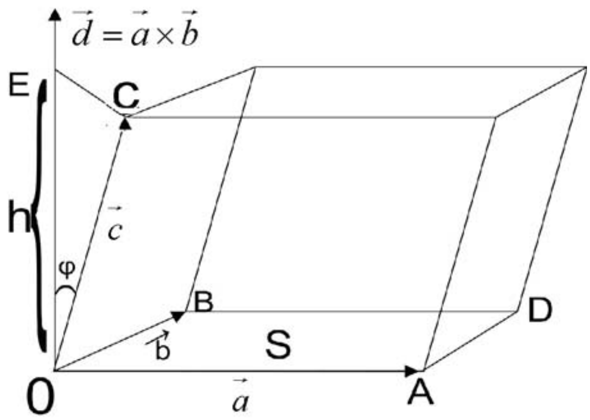
(19) formuladan foydalanib, $\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ekanligini isbotlash mumkin.

Quyidagi formulalarni shunga o'xshash xosil qilish mumkin:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}.$$

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$

Vektorlar komplanar bo'lsin va o'ng uchlikni tashkil qilsin.




**18-chizma**

U holda $OADB$ tekislikdan $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ vektorning yo'nalishi $\vec{c}$ vektorning yo'nalishida bo'ladi. Endi $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarda parallelepiped yasaymiz va uning $V$ hajmini topamiz (18 - chizma).

Quyidagi belgilarni kiritamiz: $S=\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ parallelepiped asosining yuzi, $h=\left|\vec{c}\right|\cos\varphi$ - uning balandligi, $\varphi=\left(\vec{c},\hat{}\ \vec{d}\right)$. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi=S\cdot h.$$

Biroq $S\cdot h$ ko'paytma qaralayotgan parallelepipedning xajmi $V$ ga teng. Demak, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=V$ yoki

$$V=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (20)$$

Agar $\varphi>\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\cos\varphi<0$ va $|\vec{c}|\cos\varphi=-h$. Demak, bu holda $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-V$. Shunday qilib,

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (21)$$

Agar $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ bo'ladi yoki

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0. \qquad (22)$$

(22) tenglik uchta vektorning komplanarlik shartidir.

**15-misol.** $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ va $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ vektorlar komplanar ekanligini ko'rsating.

Yechish. Bu vektorlarning aralash ko'paytmasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=6\cdot 0=0,$$

chunki determinantning 1 va 3 – ustun elementlari proportsionaldir. Demak, berilgan vektorlar komplanardir.

**16-misol.** Uchlari $O(0;0;0),\ A(5;2;0),\ C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan parallelepipedning hajmini toping.

Yechish. Ushbu vektorlarni qaraymiz:

$$\overrightarrow{OA}=5\vec{i}+2\vec{j},\ \overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}.$$

Ularning aralash ko'paytmasini hisoblaymiz:

$$\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=4(25-4)=84.$$

Demak, $V = 84$ kubbirlik.

Determinantni hisoblashda uning uchinchi ustuni elementlari bo'yicha yoyilmasidan foydalandik.

## Mustaqil ish topshiriqlari.

1.Ikkita $\overrightarrow{F_1}$ va $\overrightarrow{F_2}$ kuchlarning teng tahsir etuvchisi $\vec{R}$ ning modulini va teng ta'sir etuvchining $\overrightarrow{F_1}$ va $\overrightarrow{F_2}$ kuchlar bilan tashkil etgan burchaklarini toping, bunda $F_1 = 4H$ va $F_2 = 6H, \quad \varphi = 60^\circ$.

J: $R = 8,72H, \ \alpha = 36^\circ 35', \ \beta = 23^\circ 24'$.

2.Uchlari $A(7;7), \ B(4;3), \ C(3;4)$ nuqtalarda bo'lgan $\Delta ABC$ ning peremetri topilsin.

J: $p = 10 + \sqrt{2}$.

3. Uchlari $A(2;-1;3), B(1;1;1)$ va $C(0;0;5)$ nuqtalarda bo'lgan $\Delta ABC$ ning burchaklari topilsin.

J: $\angle B = \angle C = 45^\circ$.

4. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ vektorlar berilgan $np_{\vec{b}}\vec{a}$ va $np_{\vec{a}}\vec{b}$ aniqlansin.

J: $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}, \ np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

5. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \dfrac{4\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) + 3\vec{k}}{5}$ vektorning modulini hisoblang va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

J: $a = \dfrac{3}{5}; \ \cos\alpha = \dfrac{1}{3}; \quad \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{2}{3}$.

6. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c}$ ni hisoblang, agar $\left|\vec{a}\right| = 4, \ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{2}, \ \left|\vec{c}\right| = 3, \ \left(\vec{a},^\wedge \vec{b}\right) = 120^\circ, \ \left(\vec{b},^\wedge \vec{c}\right) = 45^\circ$.

J: $-3$.

7. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzini toping.

J: S = 49.

8. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan birlik vektorni toping.

J: $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\left(\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right)$.

9. $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k},\ \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ vektorlarning komplanar ekanligini ko'rsating.

10.Uchlari $A(2;2;2),\ B(4;3;3),\ C(4;5;4)$ va $D(5;5;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakli piramidaning hajmini toping.

J: $V = 7/6$.

11.Agar $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ va $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ ekani ma’lum bo'lsa, $\vec{p}$ va $\vec{q}$ birlik vektorlar qanday burchak tashkil qiladi.

J: $\left(\vec{p},\hat{\ }\vec{q}\right) = 60^\circ$.

12. $\vec{F} = (2;-1)$ kuch qo'yilgan nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanib, $M(1;-2)$ vaziyatdan $N(5;5)$ vaziyatga ko'chishida shu kuch bajargan ishni hisoblang.

J: $A = 11$ (ishbirligi).

13. $\vec{F} = (-2;-3;2)$ kuch va uning qo'yilish nuqtasi $A(-1;3;-1)$ berilgan. Koordinatalar boshiga nisbatan kuch momentini va moment bilan koordinata o'qlari orasidagi burchaklarning kosinusini toping.

J: $m_0\left(\vec{F}\right) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 9\vec{k},\ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{106}},\ \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{106}},\ \cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{106}}$.

14. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = -\vec{j} + \vec{k}$ vektorlarda parallelogram yasalgan. Uning diagonallari orasidagi o'tkir burchakni toping.

J: $\arccos\sqrt{5}/5$.

15. $\vec{a}$ vektor koordinata o'qlari bilan $\alpha, \beta, \gamma$ o'tkir burchak hosil qiladi: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Agar $\left|\vec{a}\right| = 3$ bo'lsa, uning koordinatalarini toping.

J: $\vec{a} = \left\{ 3/\sqrt{2}; 3/2; 3/2 \right\}$.

16. $xOz$ tekislikka nisbatan $M(2;4;-5)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan N nuqta topilsin.

J: $N(2;4;5)$.

17.Oy o'qqa nisbatan $A(2;-3;5)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan B nuqtani toping.

J: $B(-2;-3;-5)$.

18.Agar kesmaning bir uchi $A(1;-5;4)$ o'rtasi $C(4;-2;3)$ nuqtada bo'lsa, ikinchi uchining koordinatalari qanday bo'ladi.

J: $B(7;1;2)$.

19. $A(2;-1;0)$ va $B(-2;3;2)$ nuqtalar berilgan. Koordinata boshidan $AB$ kesmaning o'rtasigacha bo'lgan masofani toping.

J: $d = \sqrt{2}$.

# II. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA

## 4-BOB. Tekislikda koordinatalar sistemasi.

### 1-§. Tekislikda koordinatalar sistemasi. Koordinatalarni almashtirish. Qutb koordinatalar sistemasi.

Oliy matematikaning geometrik figuralarni algebraik ifoda etuvchi va aksincha, algebraik ifodalarga geometrik ma'no beruvchi tarmog'i analitik geometriya deb ataladi. Demak, analitik geometriya fani geometriyani algebra va matematik analiz bilan uzviy bog'laydi.

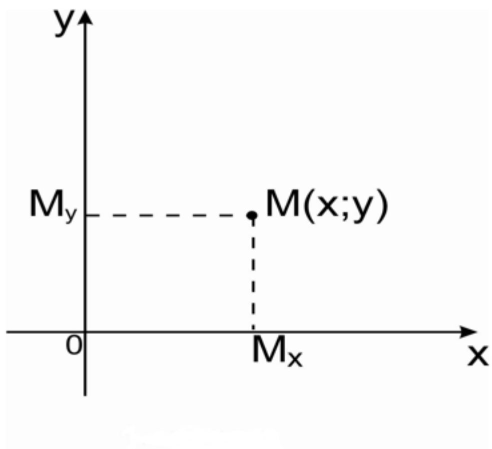
Analitik geometriya ikki qismga bo'linadi:

1. tekislikda analitik geometriya;

2. fazoda analitik geometriya.

Analitik geometriya zaminida algebra vositalari bilan geometric masalalarni yechish imkonini beradigan koordinatalar metodi yotadi. Bu metod birinchi marta fransuz matematigi R. Dekart (1596 - 1650) tomonidan yaratilgan.

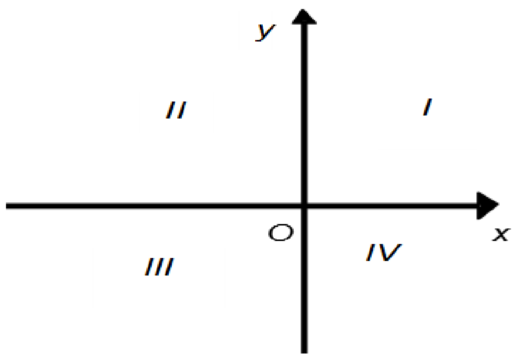
***Ta'rif.*** Tekislikda o'zaro perpendikulyar ikki to'g'ri chiziq, ularda ko'rsatilgan yo'nalishlar va qabul qilingan masshtab birligi birgalikda tekislikdagi to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi (1-chizma).



1- chizma

$Ox$ o'qni abstsissalar o'qi (gorizontal o'q), $Oy$ o'qni ordinatalar o'qi (vertical o'q), ularni birgalikda koordinatalar o'qi, koordinata o'qlarining kesishish nuqtasini, ya'ni $O$ nuqtani koordinatalar boshi deb ataymiz. Koordinatalar o'qi joylashgan tekislikni esa koordinatalar tekisligi deyiladi va $Oxy$ ko'rinishda belgilanadi.

Koordinatalar tekisligidagi har bir nuqta haqiqiy sonlarning birgina tartiblangan jufti $(x;y)$ koordinatalari bilan ifoda etiladi va aksincha, haqiqiy sonlarning har bir tartiblangan jufti $(x;y)$ ga $Oxy$ tekislikda birgina nuqta mos keladiki, uning abstsissasi $x$ ga, ordinatasi $y$ ga teng bo'ladi.



2-chizma

Masalan, $Oxy$ tekislikda $M$ nuqta berilgan bo'lsin (1-chizma). Uning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. $M$ nuqtani $Ox$ o'qdagi proektsiyasi $M_x$ nuqta, $Oy$ o'qdagi proektsiyasi $M_y$ nuqta bo'ladi. $M_x$ nuqtadan $Oy$ o'qqacha masofani $OM_x = x$, $M_y$ nuqtadan $Ox$ o'qqacha masofani $OM_y = y$ bilan belgilasak, $M$ nuqtaning vaziyati $M\left(x;y\right)$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $x$ $M$ nuqtaning abstsissasi, y esa $M$ nuqtaning ordinatasi deb ataladi. Topilgan $x$ va $y$ sonlarga $M$ nuqtaning koordinatalari deyiladi.

Koordinata o'qlari butun tekislikni to'rt bo'lakka, ya'ni to'rt chorakka bo'ladi (2 - chizma).

Bu choraklarda nuqta koordinatalarining ishorasi quyidagicha bo'ladi.

| choraklar | Koordinatalarning ishoralari | |
|---|---|---|
| | $x$ (abstsissa) | y (ordinata) |
| I | $x>0$ | $y>0$ |
| II | $x<0$ | $y>0$ |
| III | $x<0$ | $y<0$ |
| IV | $x>0$ | $y<0$ |

Agar nuqta abstsissa o'qida joylashgan bo'lsa, $y=0$ bo'ladi, ya'ni $A(x,0)$. Ordinata o'qidagi nuqtalar uchun $x=0$, ya'ni $A(0,y)$ bo'ladi.

Agar nuqta koordinatalar boshida joylashgan bo'lsa, uning har ikkala koordinatasi nolga teng bo'ladi, ya'ni $A(0,0)$.

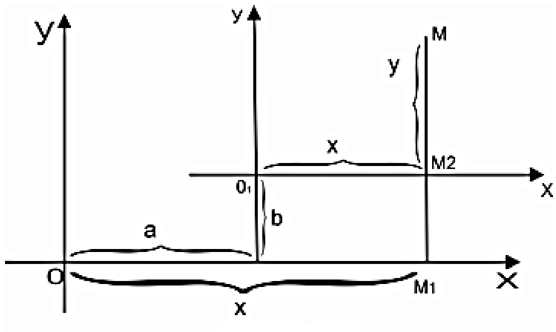
**1. Koordinatalarni almashtirish.**

1. Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish.

$Oxy$ koordinatalar sistemasida $M(x;y)$ nuqta berilgan.

Agar bu sistema boshini $O(0;0)$ dan $O_1(a;b)$ nuqtaga, o'qlarini esa $Oxy$ ga mos ravishda parallel ko'chirsak, u holda yangi $O_1XY$ sistemada $M$ nuqtaning o'rni

$$x = X + a, \quad y = Y + b, \ (1)$$



3-chizma

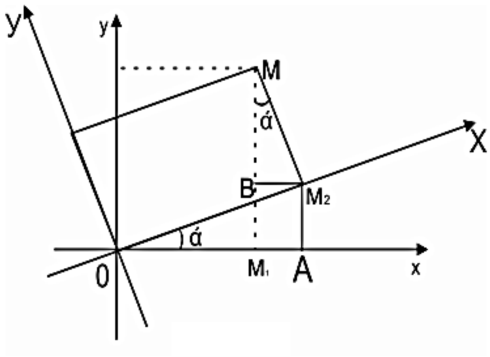
yoki

$$X = x - a, \quad Y = y - b \ (2)$$

tengliklar bilan topiladi. Bu yerda (1) tenglik $M$ nuqtaning yangi sistemadagi koordinatalarini toppish imkoniyatini beradi (3- chizma). (2) ni parallel ko'chirish formulasi deyiladi.

## 2. Kordinatalar o'qlarini burish.

Endi $Oxy$ sistemani $O$ nuqta atrofida musbat yo'nalishda $\angle M_1OM = \alpha$ burchakka buramiz va hosil bo'lgan yangi sistemada $M$ ning koordinatalarini topamiz (4 - chizma).




4-chizma

Quyidagi belgilashlarni kritamiz:

$OM_1 = x, \quad M_1M = y, \quad OM_2 = X, \quad M_2M = Y.$

4-chizmadan quyidagilarni topamiz:

$$x = OM_1 = OA - BM_2 = X \cdot \cos\alpha - Y\sin\alpha,$$

$$y = M_1M = M_1B + BM = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Shunday qilib,

$$x = X \cdot Cos\alpha - Y \cdot Sin\alpha,$$

$$y = Y \cdot Cos\alpha + X \cdot Sin\alpha. \qquad (3)$$

(3) dan $X$ va $Y$ ni topamiz. Buning uchun birinchi tenglikni $Cos\alpha$ va ikkinchisini $Sin\alpha$ ga ko'paytirib, hosil bo'lgan natijalarni qo'shsak

$$X = xCos\alpha + ySin\alpha$$

ni, so'ng birinchi tenglikni $-Sin\alpha$ ga, ikkinchisini esa $Cos\alpha$ ga ko'paytirib qo'shsak

$$Y = -xSin\alpha + yCos\alpha$$

ni hosil qilamiz. Demak,

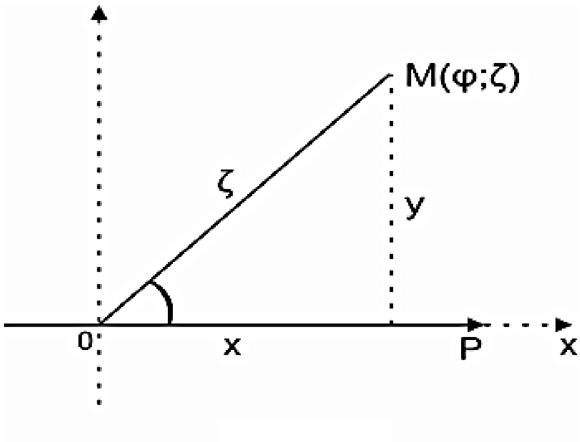
$$X = x \cdot Cos\alpha + y \cdot Sin\alpha,$$

$$Y = -x \cdot Sin\alpha + y \cdot Cos\alpha. \qquad (4)$$

(3) yoki (4) formulalarga koordinata o'qlarini burish formulasi deb ataladi.

## 2. Qutb koordinatalar sistemasi.

Tekislikda $O$ nuqta – qutb va $OP$ nur – qutb o'qi berilgan bo'lsin (5 - chizma). U holda $M$ nuqtaning tekislikdagi vaziyati qabul qilingan o'lchov birliklarida ifodalangan $OM - r$ radius – vektorning uzunligi va radius – vektor bilan qutb o'qi orasidagi $\varphi = \angle MOP$ qutb burchagi bilan aniqlanadi. Nuqtaning qutb koordinatalari bunday yoziladi: $M(\varphi; r)$.



5-chizma

Agar $M$ nuqta qutb bilan ustma – ust tushsa, $r = 0$ bo’ladi, $\varphi$ ning qiymati esa aniqlanmagan bo'ladi. Tekislikning istalgan boshqa nuqtasi uchun $r > 0$, $\varphi$ ning qiymati esa $2\pi$ ga karrali qo'shiluvchiga aniqlikda aniqlanadi.

Agar qutbni Dekart koordinatalari sistemasining boshi, $OP$ qutb o'qini esa $Ox$ o'q deb qabul etsak, ixtiyoriy $M$ nuqtaning Dekart sistemasidagi $(x; y)$ koordinatalari orasidagi bog'lanish

$$x = rCos\varphi, \quad y = rSin\varphi; \qquad (5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (6)$$

tenglamalar bilan ifodalanadi.

**1-misol.** Nuqtaning dastlabki sistemadagi koordinatalari $x = -2$ va $y = -3$, o'qlarning yo'nalishini saqlaga $n$ holda yangi boshlang'ich nuqtaning koordinatalari $x_0 = 3$ va $y_0 = -1$. Nuqtaning yangi sistemadagi koordinatalarini toping.

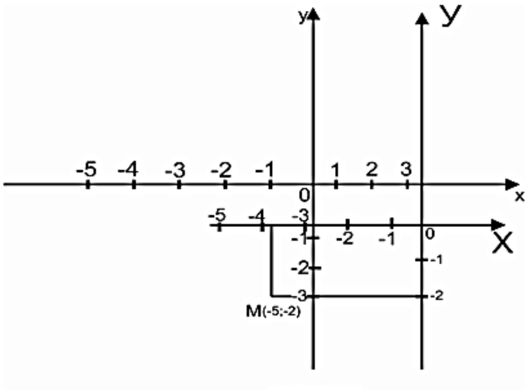
Yechish. $X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$ formula bo'yicha topamiz:

$$X = -2 - 3 = -5, \quad Y = -3 - (-1) = -2.$$

Demak, nuqtaning yangi sistemadagi koordinatalari $M(-5;-2)$ (6 - chizma).

**2-misol.** Nuqtaning yangi sistemadagi koordinatalari $X = 3$ va $Y = -1$. O'qlarning yo'nalishini o'zgartirmagan holda yangi boshlang'ich nuqtaning koordinatalari $x_0 = 2$ va $y_0 = -3$.

Nuqtaning dastlabki sistemadagi koordinatalarini toping. Yechish. $x = X + x_0$ va $y = Y + y_0$ formula bo'yicha quyidagilarni hosil qilamiz: $x = 3 + 2 = 5, \quad y = -1 + (-3) = -4$.



6-chizma

Demak, nuqtaning dastlabki sistemadagi koordinatalari $M(5;-4)$.

**3-misol.** O'qlarining yo'nalishi bir xil bo'lgan ikki $Oxy$ va $O_1x_1y_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan biror nuqtaning koordinatalari ma'lum: $(-2;3)$ va $(-7;6)$. Bu sistemalardan har birining boshi koordinatalarini boshqasiga nisbatan toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $x = -2, \quad y = 3$ va $x_1 = -7, \; y_1 = 6$ deb olsak, u holda $-2 = -7 + x_0, \; 3 = 6 + y_0$ dan $x_0 = 5 \; y_0 = -3$ ni topamiz. Demak, $Oxy$ sistemada yangi boshlang'ich nuqtaning koordinatalari bunday: $O(5;-3)$.

Endi, $x$ bilan $x_1$ ning, $y$ bilan $y_1$ ning o'rinlarini almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$-7 = -2 + x_{01}, \; 6 = 3 + y_{01}.$$

Bundan $x_{01}=-5,\ y_{01}=3$ ni topamiz. Demak, $O_1x_1y_1$ sistemada yangi boshlang'ich nuqtaning koordinatalari bunday: $O_1(-5;3)$.

**4-misol.** $M\left(-2\sqrt{3};4\right)$ nuqta berilgan. Koordinatalar boshini o'zgartirmasdan o'qlarni $60^0$ ga burgandagi yangi koordinatalar sistemasida berilgan nuqtaning koordinatalarini toping.

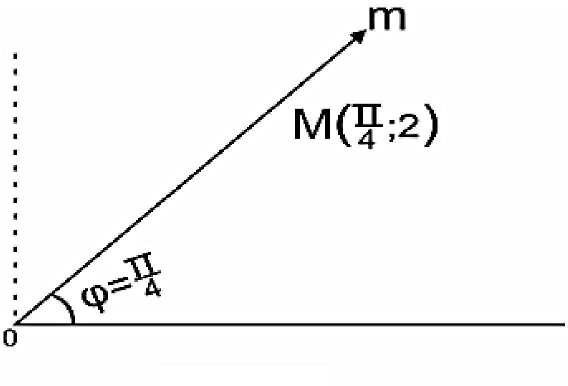
Yechish. Koordinata o'qlarini burish formulasiga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$X=-2\sqrt{3}\,Cos60^0+4Sin60^0=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{3},$$

$$Y=2\sqrt{3}\,Sin60^0+4Cos60^0=3+2=5.$$

Demak, berilgan nuqtaning $OXY$ koordinatalar sistemasidagi koordinatalari $M\left(\sqrt{3};5\right)$.

**5-misol.** Qutb koordinatalar sistemasida $M\left(\pi/4;2\right)$ nuqtani yasang. Yechish. $O$ qutb orqali $Op$ qutb o'qiga $\pi/4$ burchak ostida $Om$ nur o'tkazamiz. $Om$ nurda ikki masshtab birligiga teng qilib $OM$ kesmani ajratamiz. $M$ nuqta izlanayotgan nuqtadir (7-chizma).



7-chizma

**6-misol.** To'g'ri burchakli koordinatalari $\left(-3;3\sqrt{3}\right)$ bo'lgan nuqtaning qutb koordinatalarini toping.

Yechish. Qutb koordinatalariga o'tish formulalariga ko'ra

$$r=\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=6,\quad tg\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{-3}=-\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\varphi=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-arctg\sqrt{3}=\pi-\pi/3=2\pi/3.$$

Demak, nuqtaning qutb koordinatalar sistemasidagi koordinatalari $\left(2\pi/3;6\right)$.

**7-misol.** $A\left(\pi/3;4\right)$ nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalarini toping.

Yechish. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga o'tish formulasidan

$$x = r\cos\varphi = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2,$$

$$y = r\sin\varphi = 4\sin\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Demak, $Oxy$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida $A$ nuqtaning koordinatalari $\left(2;2\sqrt{3}\right)$, ya'ni $A\left(2;2\sqrt{3}\right)$.

## 2-§. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Ko'pburchak yuzi.

### 1. Ikki nuqta orasidagi masofa.

Agar ikki $A\left(x_1,y_1\right)$ va $B\left(x_2,y_2\right)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, ular orasidagi masofa $d$ ushbu

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \qquad (1)$$

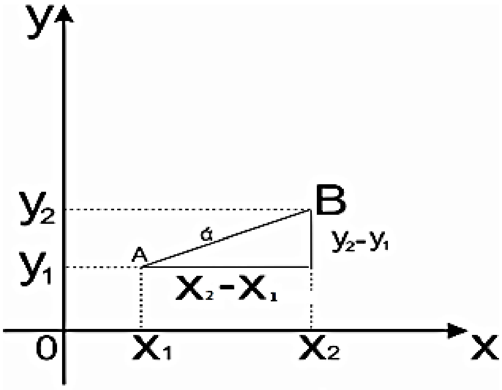
formula bilan topiladi (8-chizma). Koordinatalar boshidan *M (x; y)* nuqtagacha bo'lgan masofa

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

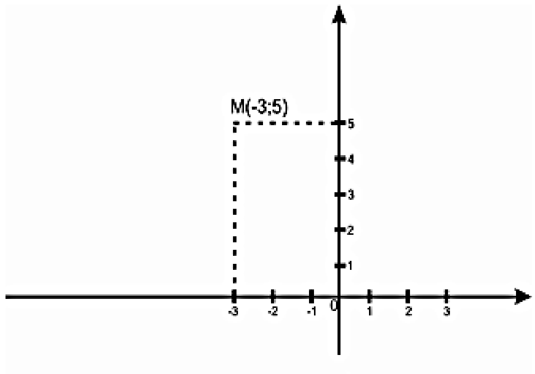
formula bilan aniqlanadi.

**8-misol.** $M\left(-3;5\right)$ nuqtani yasang.

Yechish. $Ox$ o'qidan uzunligi $\left|-3\right|$ga teng bo'lgan $\left|OA\right|$ kesmani ajratamiz. $Oy$ o'qidan uzunligi 5ga teng bo'lgan $\left|OB\right|$ kesmani ajratamiz. $A$ nuqtadan $Oy$ o'qiga parallel to'g'ri chiziq, $B$ nuqtadan esa $Ox$ o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu ikki to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi, $M$ nuqta bo'ladi (9-chizma).




8-chizma




9-chizma

**9-misol.** $A(2;-3)$ va $B(-1;1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. $x_1=2, \quad y_1=-3, \quad x_2=-1 \quad y_2=1$ qiymatlarni (1) formulaga qo'yib izlangan masofani topamiz:

$$d=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Demak, berilgan nuqtalar orasidagi masofa, ya'ni $AB$ kesmaning uzunligi 5 ga teng ekan.

**10-misol.** $Ox$ o'qida joylashgan va $A(3;2)$, $B(1;-6)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtani toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, izlanayotgan $C$ nuqtaning ordinatasi nolga teng, ya'ni $C\,(x;0)$. (1) formula yordamida $AC$ va $BC$ kesmalarning uzunliklarini topamiz:

$$|AC|=\sqrt{(x-3)^2+4}, \qquad |BC|=\sqrt{(x-1)^2+36}.$$

Masalaning shartiga ko'ra

$$|AC|=|BC| \quad \text{yoki} \ \sqrt{(x-3)^2+4}=\sqrt{(x-1)^2+36}$$

Bu tenglikdan, tenglamaning yechimi sifatida $x=-6$ ni topamiz. Demak, izlanayotgan $C$ nuqtaning koordinatalari $x=-6$, $y=0$, ya'ni $C(-6;0)$.

## 2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

Agar ikki $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqta berilgan bo'lsa, ular bilan bir to'g'ri chiziqda yotgan har qanday uchinchi $C(x;y)$ nuqtaning koordinatalari ushbu

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \text{ va } y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad (1)$$

formula bilan aniqlanadi.

Haqiqatdan, $AB$ kesmani $\lambda=\frac{m}{n}$ nisbatda bo'luvchi $C$ nuqta uchun $\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda$. U holda

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda, \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda.$$

Bundan

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \text{ ni}$$

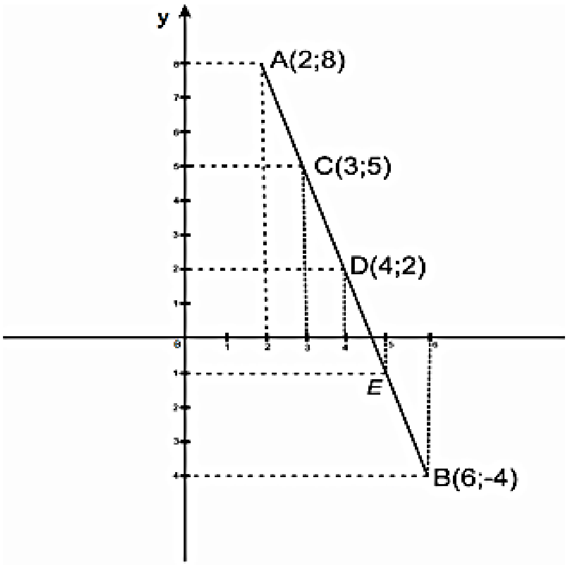
topamiz. Agar $C(x;y)$ nuqta $AB$ kesmani teng ikkiga bo'lsa, u holda $\lambda=1$ bo'ladi va $C(x;y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi.

**11-misol.** $A(2;8)$ va $B(6;-4)$ nuqtalar bilan chegaralangan $AB$ kesma 4 ta teng bo'lakka bo'lingan. $C,D$ va $E$ nuqtalarning koordinatalarini toping.

Yechish. $AB$ kesma teng to'rt bo'lakka bo'lingan.




**10-chizma**

Shuning uchun:

$$\lambda = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{1}{3},\ \lambda = \frac{|AD|}{|DB|} = 1,\ \lambda = \frac{|AE|}{|EB|} = 3.$$

(2) formuladan foydalanib $C, D$ va $E$ nuqtalarning koordinatalarini topamiz:

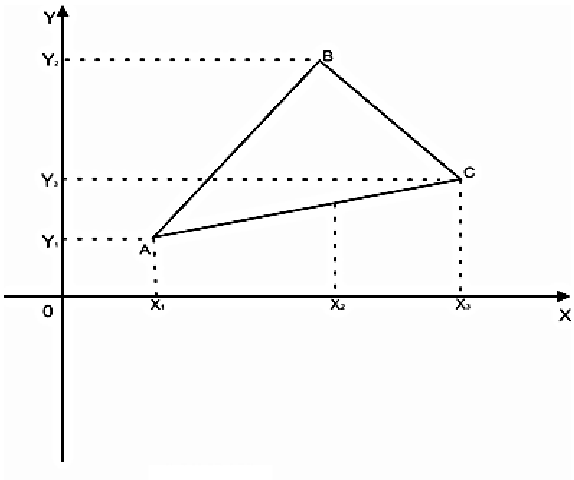
$$x_C = 3,\ y_C = 5;\ x_D = 4,\ y_D = 2;\ x_E = 5,\ y_E = -1.$$

Demak, $C(3;5), D(4;2),\ E(5;-1)$.

### 3. Uchburchak va ko'pburchakning yuzi.

Agar uchburchakning uchala uchi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ *ва* $C(x_3; y_3)$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, uning yuzi quyidagi formula bilan topiladi:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\right]\right|. \quad (1)$$




11-chizma

Haqiqatdan, 11-chizmadan

$$S_{\Delta ABC} = \left|S_1 + S_2 - S_3\right|,$$

bunda $S_1 - x_1ABx_2$ trapetsiyaning yuzi, $S_2 - x_2BCx_3$ trapetsiyaning yuzi, $S_3 - x_1ACx_3$ trapetsiyaning yuzi.

Endi, har bir trapetsiyaning yuzini hisoblaymiz:

$$S_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}\cdot\left(x_2 - x_1\right),\ S_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}\cdot\left(x_3 - x_2\right),\ S_3 = \frac{y_1 + y_3}{2}\cdot\left(x_3 - x_1\right).$$

Shunday qilib,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left[\left(y_1 + y_2\right)\left(x_2 - x_1\right) + \left(y_2 + y_3\right)\left(x_3 - x_2\right) - \left(y_1 + y_3\right)\left(x_3 - x_1\right)\right],$$

yoki

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\left(x_1y_2 - x_2y_1\right) + \left(x_2y_3 - x_3y_2\right) + \left(x_3y_1 - x_1y_3\right)\right]\right|,$$

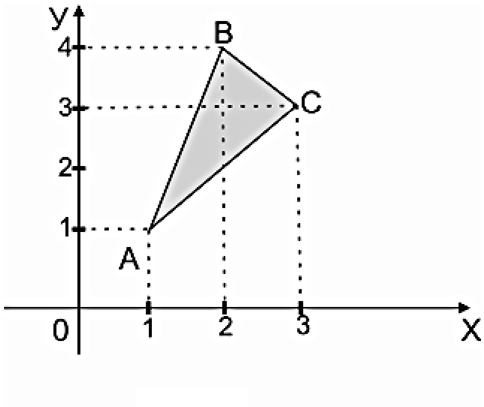
yoki

$$S_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right]. \ (2)$$

Uchburchakning yuzini hisoblashda natijaning absolyut qiymati olinadi. Huddi shunday usul bilan ko'p burchak yuzini ham uning uchlarining koordinatalari orqali quyidagi fomula yordamida hisoblash mumkin:

$$S=\frac{1}{2}\left[(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)+\ldots+(y_n+y_1)(x_1-x_n)\right]. \quad (3)$$

**12-misol.** Uchlari $A(1;1),\ B(2;4),\ C(3;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.




12-chizma

Yechish. Shartga ko'ra:

$x_1=1,\ y_1=1,\ x_2=2,\ y_2=4,\ x_3=3,\ y_3=3.$ formulaga asosan

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[(1\cdot 4-2\cdot 1)+(2\cdot 3-3\cdot 4)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(3\cdot 1-1\cdot 3)\right]\right|=\frac{1}{2}\left|[2-6]\right|=2\,кв.б.$$

**13-misol.** Uchlari $A(L;0), B(2;0)$ va $C(0;y)$ nuqtalarda yotgan uchburchakning yuzi 18kv. Birlikka teng bo'lsa, $C(0;y)$ nuqtani toping.

Yechish. $C(x_1=0;y_1=y),\ A(x_2=4;y_2=0),\ B(x_3=2;y_3=0)$ desak, u holda (1) formuladan

$$\frac{1}{2}\left|\left[(0\cdot 0-4\cdot y)+(4\cdot 0-2\cdot 0)+(2\cdot y-0\cdot 0)\right]\right|=18$$

$$2y=36, \qquad y=18.$$

Demak, $C(0;18)$.

## Mustaqil ish topshiriqlari.

1. $Ox$ o'qida koordinatalar boshidan va $A(-4;3)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtaning koordinatalarini toping.

J: $\left(-25/8;0\right)$.

2. Uchlari $A(-5;-2)$, $B(1;6)$ *ва* $C(7;-2)$ nuqtalarda yotgan uchburchakning perimetrini toping.

J: $p=32$.

3. Uchburchak tomonlarining o'rtalari $D(1;0)$, $E(4;2)$ *ва* $G(3;-3)$ nuqtalarda bo'lsa, uning uchlarining koordinatalarini toping.

J: $A(2;5)$, $B(-5;0)$, $C(6;-1)$.

4. $AB$ kesma teng uch bo'lakka bo'lingan. Bo'linish nuqtalari: $C(1;1)$ va $D(4;-2)$ bo'lsa, kesma uchlarining koordinatalarini toping.

J: $A(-2;4), B(7;-5)$.

5. $A(1;4)$ va $B(5;0)$ nuqtalar orasidagi $AB$ kesmaning o'rtasidan $D(3;-2)$ nuqtagacha bo'lgan masofani toping.

J : $d=4$.

6. $M_1(2;-1)$ va $M_2(-5;6)$ nuqtalarga bir tomonga yo'nalgan parallel $F_1=4$ kg va $F_2=3$ kg kuchlar qo'yilgan. Ularning teng ta’sir etuvchisi $R$ qo'yilgan $C(x_c;y_c)$ nuqta topilsin.

J: $C(-1;2)$.

7. Uchlari $A(1;-1)$, $B(6;4)$, $C(2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak shaklidagi yupqa plastinkaning og'irlik markazi topilsin.

J: $(3;3)$.

8. $A(-3;-1)$ va $B(4;6)$ nuqtalarga mos ravishda 30 va 40 kg. parallel kuchlar ta’sir etadi. $AB$ kesmada o'sha kuchlarning teng ta'sir etuvchisining qo'yilgan nuqtasi topilsin.

J: $(1;3)$ - agar $\vec{F_1}\uparrow\uparrow\vec{F_2}$ bo'lsa, $(25;27)$ -agar $\vec{F_1}\uparrow\downarrow\vec{F_2}$ bo'lsa.

9. Uchburchakning uchlari: $A(-4;4)$ $B(2;0)$ va $C(2;-6)$ nuqtalarda berilgan. $CD$ medGananing uzunligini toping.

J: $|CD| = 5$.

10. Uchlari $A(0;-3)$, $B(0;8)$ va $C(-4;-6)$ nuqtalarda yotgan $ABC$ uchburchakning yuzini va $CD$ balandligini toping.

J: $S = 22$ kv.b. $|CD| = h = 4$.

11. Uchlari $A(-8;5)$, $B(-4;11)$, $C(3;9)$, $D(4;2)$ va $E(-2;-3)$ nuqtalarda yotgan beshburchakning yuzini toping.

J: $S = 99$ kv.b.

12. Uchburchakning uchlari berilgan: *A*(-8;5)*,* *B*(-4;11) va *C*(3;8). Bu uchburchak medianalarining kesishgan nuqtasini toping.

J: $(-3;8)$.

13. Uchlari *A*(-2;-3)*,* *B*(3;-3), *C*(1;4) va *D*(-4;2) nuqtalarda yotgan to'rtburchakning yuzini va $AC, BD$ diagonallarining uzunligini toping.

J: $S = 32$ kv.b. $|AC| = \sqrt{58}, |BD| = \sqrt{74}$.

14. $A(4;-2)$ nuqta berilgan. O'qlarni: $1)\ 45^0;\ 2)\ 30^0$ ga burganda yangi koordinatalar sistemasida berilgan nuqtaning koordinatalarini toping.

J: $1)\left(\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right)$, $2)\ \left(2\sqrt{3}-1;-2-\sqrt{3}\right)$.

15. Quyidagi nuqtalarning to'g'ri burchakli koordinatalarini toping: $1)\left(\pi/2;2\right)\quad 2)\ \left(-\pi/3;2\sqrt{3}\right)$.

J: $1)(0;2),\ 2)\ \left(\sqrt{3};-3\right)$.

16. Quyidagi nuqtalarning qutb koordinatalarini toping: $1)\ A\left(-\sqrt{3};-1\right),\ 2)\ B(1;-1)$.

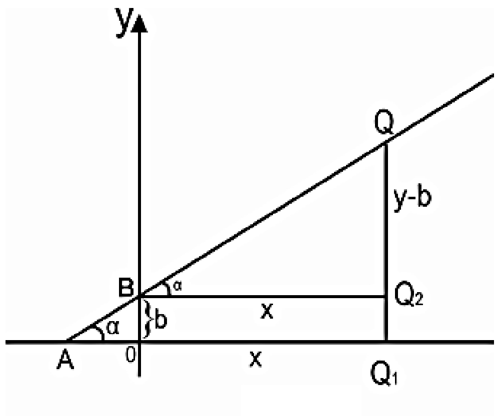
J: $1)\left(-\dfrac{5\pi}{6};2\right),\ 2)\left(-\dfrac{\pi}{4};\sqrt{2}\right)$.

## 5-BOB. Tekislikda to'g'ri chiziqlar.

### 1-§. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Faraz qilaylik, $Oxy$ koordinatalar sistemasida $L$ to'g'ri chiziq $Oy$ o'qni kesib o'tgan nuqtaning ordinatasi $OB=b$ kesma va $Ox$ o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan $\alpha$ burchagi bilan berilgan bo'lsin (1-chizma).

$L$ chiziqda ixtiyoriy $Q(x;y)$ nuqta olamiz.



1-chizma

U holda $\Delta BQ_2Q$ dan $tg\alpha=\dfrac{y-b}{x}$

ni topamiz. Bu tenglik dan $y=kx+b$ (1)

ga ega bo'lamiz. Bunda $k=tg\alpha$ $L$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi. (1) ifodaga esa tekislikdagi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deb ataladi.

Quyidagi xususiy hollarni qarab chiqamiz:

1. $b=0$ bo'lsa (1) tenglama

$$y=kx \qquad (2)$$

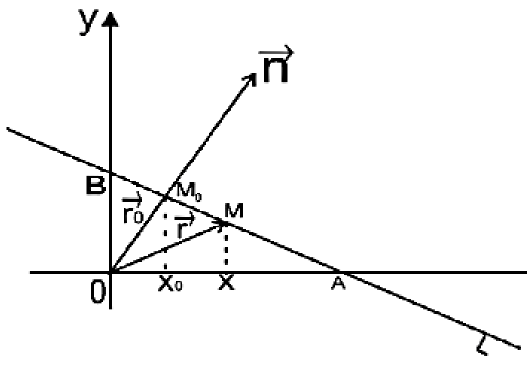
ko'rinishga keladi. (2) ga koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deb ataladi.

2. $b\neq 0,\ \alpha=0$ bo'lsa, $k=tg\alpha=tg0^0=0$ bo'lib, (1) $y=b$ ko'rinishga keladi; $y$ ordinatalar o'qidan $b$ kesma kesib, $Ox$ ga parallel bo'lgan $BQ_2$ to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

### 2-§. To'g'ri chiziqning vektor tenglamasi.

Faraz qilaylik, $L$ to'g'ri chiziq $Oxy$ tekislikdagi to'g'ri chiziq bo'lsin (2-chizma).

$M_0(x_0;y_0)$ - shu to'g'ri chiziqdagi nuqta, $\vec{n}=\{A,B\}$ esa $L$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan (normal) vektor bo'lsin. Agar $M(x;y)$ nuqta $L$ to'g'ri chiziqdagi $M_0$ noldan farqli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u holda




2-chizma

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}. \quad (3)$$

$\overrightarrow{M_0M}$ vektor $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar. Shu sababli, ularning skalyar ko'paytmasi

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \text{ yoki } \vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}\right)=0 \quad (4)$$

(4) tenglama to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.

### 3-§. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Agar (4) tenglamani koordinata shaklida yozsak, u holda

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

yoki

$$Ax+By+C=0, \quad C=-(Ax_0+By_0). \quad (5)$$

tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasining xususiy hollarini qarab chiqamiz:

1. $C=0$ bo'lsa, (5) tenglama

$$Ax+Bx=0$$

ko'rinishga keladi. Bu koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $\left(y=kx,\ k=-{}^{A}\!/_{B}\right)$.

2. $A=0$ bo'lsa, (5) tenglama

$$By+C=0 \text{ yoki } y=-{}^{C}\!/_{B}$$

ko'rinishga keladi. Bu $Ox$ o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi.

3. $B=0$ bo'lsa, (5) tenglama

$$Ax+C=0 \text{ yoki } x=-C/A$$

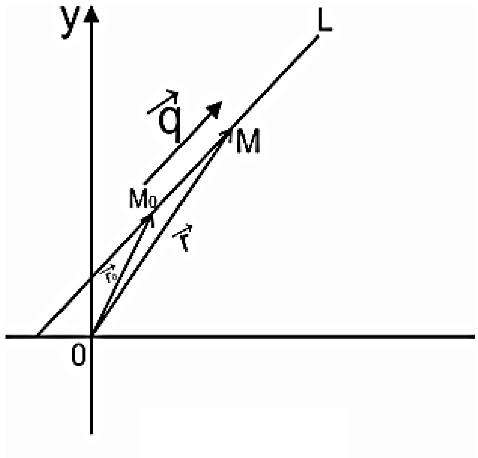
ko'rinishga keladi. Bu $Oy$ o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi.

### 4-§. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

$M_0(x_0;y_0)$ - to'g'ri chiziqning berilgan nuqtasi, $\vec{q}=\{m;n\}$ esa to'g'ri chiziqqa parallel vektor bo'lsin. Agar $M(x;y)$ to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u holda

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}$$

va $\vec{q}=m\vec{i}+n\vec{j}$ vektorlar collinear vektorlar bo'ladi. (3-chizma)



3-chizma

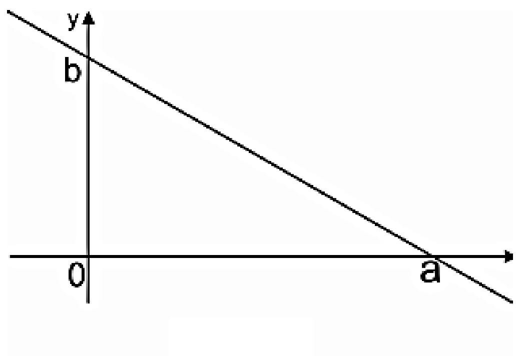
Vektorlarning kollinearlik shartidan:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (6)$$

(6) tenglamaga to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi. $\vec{q}$ vektorga esa $L$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

### 5-§. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.

$Oxy$ koordinatalar sistemasida $L$ to'g'ri chiziq $Ax+By+C=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Tenglamani $Ax+By=-C$ ko'rinishga keltirib, har ikkala tomonini $-C\neq 0$ ga bo'lamiz va $a=-C/A, b=-C/B$ belgilashlarni kiritib, tenglamani



4-chizma

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (7)$$

ko'rinishga keltiramiz. (7) tenglamaga to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb ataladi. Bu yerda $a$ va $b$ lar to'g'ri chiziqning $Ox$ va $Oy$ o'qlar bilan kesishish nuqtalarining mos holda abstsissa va ordinatasi (4-chizma).

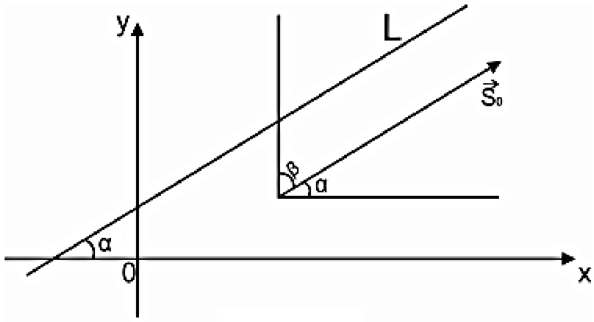
**1-misol.** $3x-4y+2=0$ to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini kesmalardagi tenglamasiga almashtiring.

Yechish. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$3x-4y=-2; \qquad \frac{3x}{-2}-\frac{4y}{-2}=1; \qquad \frac{x}{-\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1.$$

## 6-§. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

$Oxy$ tekislikda $Oy$ o'qqa parallel bo'lmagan $L$ to'g'ri chiziqni qaraylik. Uning holati $Ox$ o'q bilan $L$ to'g'ri chiziq orasidagi $\alpha$ burchak va shu to'g'ri chiziqda yotgan $M_0(x_0;y_0)$ nuqta berilishi bilan to'la aniqlanadi. Haqiqatdan, yo'naltiruvchi vektor sifatida $L$ to'g'ri chiziq kabi $Ox$ o'q bilan $\alpha$ burchak tashkil qiladigan $\vec{S}^0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta$ birlik vektorni olamiz. Ravshanki, $\cos\beta=\sin\alpha$ bo'lgani uchun $\vec{S}^0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha$.



5-chizma

Shuning uchun (6) tenglamada $m=\cos\alpha, n=\sin\alpha$ deb olish kerak. U holda (6) tenglama $\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\sin\alpha}$ shaklda yoziladi.

Bu tenglamani $y-y_0$ ga nisbatan yechib $y-y_0=tg\alpha\left(x-x_0\right)$ ni hosil qilamiz. $tg\alpha=k$ deb belgilaymiz. U holda oxirgi tenglama quyidagi

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right) \qquad (8)$$

ko'rinishga keladi. (8) tenglama berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini deyiladi.

**2-misol.** $M_1\left(2;1\right)$ nuqtadan o'tib, $Ox$ o'q bilan $\alpha=\pi/3$ burchak hosil qiladigan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini topamiz:

$$k=tg\alpha=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

(8) formula bo'yicha izlanayotgan

$$y+1=\sqrt{3}\left(x-2\right) \text{ yoki } y=\sqrt{3}x-\left(1+2\sqrt{3}\right)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Endi $Oxy$ tekislikda ikkita $M_1\left(x_1;y_1\right)$ va $M_2\left(x_2;y_2\right)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzamiz. Uning yo'nal tiruvchi vektori sifatida $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni olamiz. U holda

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}.$$

$m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$ deb, (6) formuladan foydalanib

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (9)$$

ga ega bo'lamiz. (9) tenglama berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.

**3-misol.** $M_1\left(1;2\right)$ va $M_2\left(-2;3\right)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. (9) formulada $x_1=1,\ y_1=2,\ y_1=2,\ x_2=-2$ va $y_2=3$ deb olib,

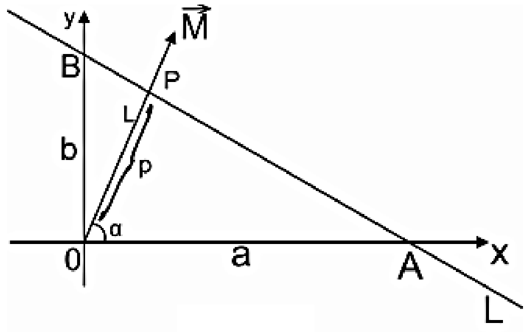
$$\frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{-2-1} \text{ yoki } x+3y-7=0$$

ni hosil qilamiz.

## 7-§. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

Faraz qilaylik, koordinatalar boshidan o'tmaydigan $L = AB$ to'g'ri chiziq berilgan va uning tenglamasi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ shakldа bo'lsin.

Koordinatalar boshidan $L$ to'g'ri chiziqqa $OP$ perpendikulyar tushiramiz.




6-chizma

U holda, 6-chizmadan:

$$OA = a,\ OB = b,\ OP = p,\ \angle AOP = \alpha$$

$\Delta AOP$ dan

$$\frac{OP}{OA}=\cos\alpha; \qquad OA=\frac{OP}{\cos\alpha}=\frac{P}{\cos\alpha}.$$

$\Delta OBP$ dan

$$\frac{OP}{OB}=\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha; \quad OB=\frac{OP}{\sin\alpha}=\frac{P}{\sin\alpha}.$$

Bularga ko'ra:

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\alpha}}=1 \qquad \text{yoki} \qquad x\cdot\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

yoki $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=o$ (10)

(10) ga to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi. (10) tenglamada:

1. $x$ va $y$ koeffitsientlarining kvadratlari yig'indisi hamma vaqt 1 ga teng bo'ladi, ya'ni $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$;

2. ozod had $p$ - koordinatalar boshidan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar $OP$ ning uzunligi.

To'g'ri chiziqning

$$Ax + By + C = 0 \qquad (*)$$

umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun (*) tenglamaning ikki tomonini biror (hozircha noma’lum) $M$ songa ko'paytiramiz:

$$M \cdot A \cdot x + M \cdot B \cdot y + M \cdot C = 0 \qquad (11)$$

Agar to'g'ri chiziq tenglamasi normal ko'rinishga kelgan bo'lsa,

$$(M \cdot A)^2 + (M \cdot B)^2 = 1$$

bo'lishi kerak. Bundan

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (12)$$

ni topamiz. $M$ ga normallashtiruvchi ko'paytuvchi deyiladi. $M$ ning ishorasi tenglamadagi ozod had $C$ ning ishorasiga teskari qilib olinadi.

**4-misol.** $3x - 4y + 17 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamasini normal ko'rinishga keltiring.

Yechish. (12) formuladan $M$ ni topamiz:

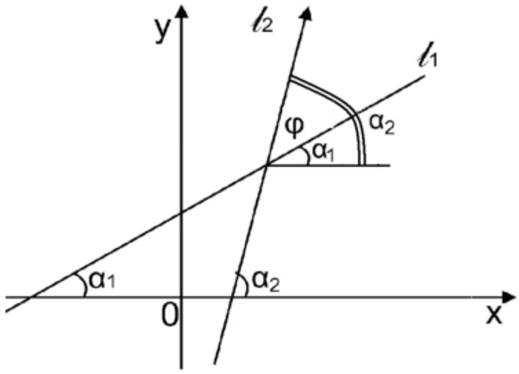
$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{9+16}} = \pm\frac{1}{5}.$$

$C = 17 > 0$ bo'lgani uchun, $M = -\frac{1}{5}$. Tenglamaning normal shakli

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{17}{5} = 0.$$

Haqiqatdan, $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

## 8-§. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.



7-chizma

$C$ nuqtada kesishadigan $\ell_1 : y = k_1 x + b_1$ va $\ell_2 : y = k_2 x + b_2$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin (7 - chizma). Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi $\varphi$ burchakning tangensini topamiz. 7-chizmadan:

$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)$, bundan

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

Biroq, $tg\alpha_1 = k_1, \quad tg\alpha_2 = k_2$, shuning uchun

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (13)$$

(13) ga ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasi deyiladi.

**5-misol.** $y = 2x - 5$ va $x - 3y + 12 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $y = 2x - 5$ dan $k_2 = 2$ ni, $x - 3y + 12 = 0$ dan $y = \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3}$ ni aniqlaymiz. U holda

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Bundan $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ni topamiz.

Agar $\ell_1 \perp \ell_2$ bo'lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lib, $tg\frac{\pi}{2} = \infty$ yoki $ctg\frac{\pi}{2} = 0$. (13) formuladan

$ctg\varphi = ctg\frac{\pi}{2} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \qquad (14)$$

(14) ga ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti deyiladi.

Agar $\ell_1 \parallel \ell_2$ bo'lsa, $\varphi = 0$ bo'lib (13) dan

$$tg0^\circ = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0$$

yoki $$k_1 = k_2. \qquad (15)$$

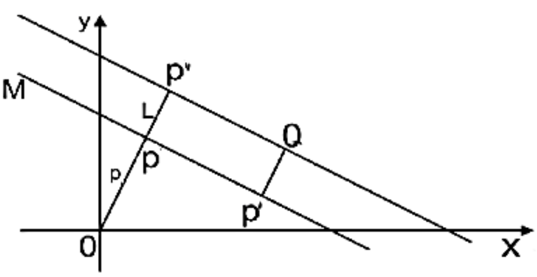
(15) ga ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti deyiladi.

**6-misol.** $M_1(-3;-1)$ nuqta orqali o'tuvchi va $2x + y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini $y = -2x + 3$ ko'rinishga keltiramiz, bundan $k_1 = -2$ ekanligi kelib chiqadi. Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi $y + 1 = k_2(x + 3)$. To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lganligi sababli $k_1 \cdot k_2 = -1$, bundan $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$ ni topamiz. Demak, $y + 1 = \frac{1}{2}(x + 3)$ yoki $x - 2y + 1 = 0$.

## 9-§. Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.

$Oxy$ tekislikda $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq va $Q(x_0; y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. $Q$ nuqtadan berilgan to'g'richiziqgacha bo'lgan $d = QP'$ masofani topamiz. Buning uchun $\rho = OP$ ni topamiz:




8-chizma

$$\rho = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (C > 0).$$

$QP' = PP''$ ni olib (8-chizma), $QP'' \parallel MN$ ni o'tkazamiz. $QP''$ to'g'ri chiziq tenglamasi:

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right) \text{ yoki}$$

$$y - y_0 = -\frac{A}{B}\left(x - x_0\right) \text{ yoki}$$

$$Ax + By - \left(Ax_0 + By_0\right) = 0. \qquad (16)$$

(16) tenglamani normal shaklga keltiramiz. U holda. Uning normali

$$OP'' = \frac{Ax_0 + By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

bo'ladi. Endi $d = QP'$ ni topamiz:

$$d = QP' = PP'' = OP'' - OP = \frac{Ax_0 + By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$C$ ning ishorasi har xil $(+)$ yoki $(-)$ bo'lishini e'tiborga olsak:

$$d = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

yoki

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (17)$$

bo'ladi.

(17) ga berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasi deyiladi.

**7-misol.** $M\left(6;8\right)$ nuqtadan $4x + 3y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofani toping.

Yechish. (17) formuladan:

$$d = \frac{4\cdot 6 + 3\cdot 8 + 2}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{50}{\sqrt{25}} = \frac{50}{5} = 10.$$

**8-misol.** Ikkita parallel $4x + 3y - 8 = 0$ va $4x + 3y - 33 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. $\ell_1 : 4x+3y-8=0,\ \ell_2 : 4x+3y-33=0$ bo'lsin. $\ell_1$ da $y=0$ deb, $x=2$ ni topamiz, demak, $M(2;0)\in \ell_1$

Endi $M$ nuqtadan $\ell_2$ to'g'ri chiziqgacha masofani topamiz:

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 0-33|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{25}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5\,.$$

Demak, izlanayotgan masofa: $d=5$.

**Mustaqil ish topshiriqlari.**

1. Koordinata o'qlari orasiga olingan $3x-4y-24=0$ to'g'ri chiziq kesmasining uzunligini hisoblang.

J: $10$.

2. Koordinatalar boshidan va $M(2;3)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

J: $3x-2y=0$.

3. Berilgan $M_0(-2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan $\vec{AB}=\{4;2\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

J: $2x+y+7=0$.

4. Quyidagi to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalardagi tenglamasiga almashtiring: $2x+3y-6=0$.

J: $x/3+y/2=1$.

5. $3x+2y+6=0$ to'g'ri chiziqning $Ox$ o'qqa og'ish burchagini hisoblang.

J: $\alpha=\pi-arctg(1,5)$.

6. Shunday to'g'ri chiziq tenglamasini tuzingki, uning uchun $b=-2$, $Ox$ o'qqa og'ish burchagi esa $\alpha=30^\circ$ bo'lsin.

J: $x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$.

7. $4x+3y-36=0$ to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan uchburchakning yuzini toping.

J: $54$.

8. $2x+2y-5=0$ to'g'ri chiziqning $Ox$ o'qni musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

J: $135^\circ$.

9. Yorug'lik nuri $A(3;10)$ nuqtadan chiqib, $2x+y-6=0$ to'g'ri chiziqdan qaytadi va qaytgandan keyin $B(7;2)$ nuqtadan o'tadi. Tushayotgan va qaytgan nurning tenglamalarini tuzing.

J: $3x-y+1=0$ va $x+3y-13=0$.

10. $A(-1;3)$ va $B(2;5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

J: $2x-3y+11=0$.

11. $6x-2y+5=0$ va $4x+2y-7=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

J: $\alpha = \pi/4$.

12. $M_0(2;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $y=3x-4$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

J: $y=3x-5$.

13. $M_0(1;-2)$ nuqtadan o'tib, $5x+y-4=0$ to'g'ri chiziq bilan $45^\circ$ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

J: $2x+3y+4=0$.

14. $y=kx$ to'g'ri chiziq $A(-2;3)$ nuqtadan o'tadi. Uning burchak koeffitsientini toping.

J: $k=-3/2$.

## 6-BOB. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

Ikki noma’lumli ikkinchi darajali algebraik tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziq ikkinchi tartibli egri chiziq deyiladi.

Umumiy holda bu tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

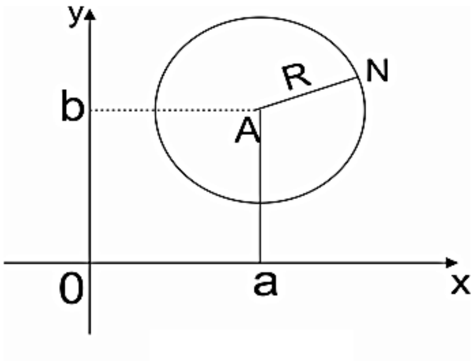
bu yerda $A, B, C, D, E$ va $F$ lar haqiqiy o'zgarmas sonlardir, bundan tashqari $A, B$ yoki $C$ lardan kamida bittasi noldan farqli. (1) tenglama bilan ifoda qilinuvchi sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlarga aylana, ellips, giperbola va parabolalar misol bo'la oladi.

Biz shularning har biriga alohida – alohida to'xtab o'tamiz.

## 1-§. Aylana va uning tenglamasi.

***Ta'rif.*** Markaz deb ataluvchi nuqtadan barobar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning to'plamiga aylana deyiladi.

$Oxy$ koordinatalar sistemasida aylananing radiusi $R$ va markazi $A(a; b)$ nuqtada bo'lsin. $N(x; y)$ aylanadagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin (1-chizma).Ta'rifga ko'ra $AN = R$. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan




1-chizma

$$AN = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \qquad (2)$$

(2) tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, $AN = R$ ekanligini e’tiborga olsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (3)$$

kelib chiqadi.

(3) tenglama $x$ va $y$ nisbatan ikkinchi darajali. Demak, aylana ikkinchi tartibli egri chiziq ekan.

Endi (3) tenglamadagi qavslarni ochib chiqaylik:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$

yoki

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (4)$$

(4) ni (1) bilan solishtirsak, aylana tenglamasi ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasida

$$A = C = 1, \quad B = 0, \quad D = -a, \quad E = -b, \quad F = a^2 + b^2 - R^2$$

bo'lgan holga to'g'ri kelishini ko'ramiz.

Shunday qilib, (4) tenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (5)$$

**1-misol.** $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ tenglama aylanani ifodalashini ko'rsating.

Yechish. Bu tenglamada $x^2 - 2x$ va $y^2 + 4y$ hadlar gruppasini ajratib ularning har birini to'la kvadratgacha to'ldiramiz. U holda tenglama

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 - 4 - 11 = 0$$

yoki

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

ko'rinishni oladi. Demak, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ tenglama markazi $O_1(1;-2)$ nuqtada, radiusi $R = 4$ bo'lgan aylana tenglamasi ekan.

**2-misol.** $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 22 = 0$ tenglama hech qanday chiziqni aniqmasligini ko'rsating.

Yechish. Tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = -4.$$

Bu tenglama hech qanday chiziqni aniqlamaydi, chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa musbat.

Agar $A = 1, \ B = 0, \ C = 1, \ D = 0, \ E = 0, \ F = -R^2$ bo'lsa, (1) tenglama

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (6)$$

ko'rinishga keladi. (6) tenglama radiusi $R$ va markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana tenglamasidir.

Agar $x_1$ va $y_1$ aylananing biror nuqtasining koordinatalari bo'lsa, u holda bu nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi aylananing (3) yoki (6) tenglama bilan berilishiga qarab,

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2 \quad (7)$$

yoki

$$xx_1+yy_1=R^2 \quad (8)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

**3-misol.** Koordinatalar boshidan $x^2+y^2-10x-4y+25=0$ aylanaga o'tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin.

Yechish. Koordinatalar boshidan o'tuvchi har qanday to'g'ri chiziqning tenglamasi $y=kx$. Burchak koeffitsientini shunday tanlash kerakki, $y=kx$ to'g'ri chiziq va berilgan aylana ikkita ustma-ust tushgan kesishish nuqtasiga ega bo'lsin. Ikkala tenglamani birgalikda yechamiz:

$$\begin{cases} y=kx, \\ x^2+y^2-10x-4y+25=0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamada $y$ ni yo'qotamiz. U holda

$$(1+k^2)x^2-2(5+2k)x+25=0$$

tenglamani hosil qilamiz. To'g'ri chiziq aylanaga uringanda bu tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng bo'lishi kerak, ya'ni tenglamaning diskriminanti nolga teng bo'lishi kerak:

$$D=(5+2k)^2-25(1+k^2)=0$$

Bu tenglamani yechib, $k_1=0$ va $k_2={}^{20}\!/_{21}$ ni topamiz. Izlanayotgan urinmalarning tenglamalari:

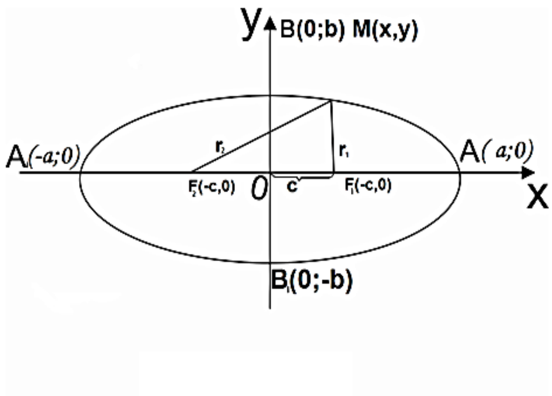
$$y=0 \text{ va } 20x-21y=0$$

bo'ladi.

## 2-§. Ellips va uning kanonik tenglamasi. Ellipsning ekstsentrisiteti va direktrisalari.

***Ta'rif.*** Ellips deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha (fokuslargacha) masofalarining yig'indisi $F_1F_2 = 2c$ dan katta o'zgarmas $2a$ miqdorga teng nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ellipsning tenglamasini tuzish uchun koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz. Berilgan $F_2$ va $F_1$ fokuslardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abstsissalar o'qi, fokuslar o'rtasidan tik o'tuvchi to'g'ri chiziqni ordinatalar o'qi deb olamiz (2 -chizma).




2-chizma

**Koordinatalar sistemasi**

Bunday tanlab olinganda koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlari bilan, koordinatalar boshi esa uning simmetriya markazi bilan ustma – ust tushadi. U holda ellipsning ta'rifiga asosan:

$$F_1M + F_2M = 2a\,. \qquad (9)$$

Berilgan ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad (10)$$

(10) ni (9) ga keltirib qo'yamiz:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

yoki

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (11)$$

(11) tenglamaning ikki tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

soddalashtirsak

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bo'ladi. Bu tenglamani yana bir marta kvadratga ko'taramiz va ixchamlaymiz:

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right). \quad (12)$$

$F_1MF_2$ uchburchakda

$$MF_1 + MF_2 > F_1F_2$$

bo'ladi. $MF_1 + MF_2 = 2a,\ F_1F_2 = 2c$ ekanligini e'tiborga olsak: $2a > 2c,\ a > c$ yoki $a^2 > c^2$, bundan $a^2 - c^2 > 0,$ ya'ni ayirma musbat son. Buni $b^2$ bilan belgilaymiz, ya'ni:

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Demak, (12) tenglik

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ko'rinishni oladi. Buning ikkala tomonini $a^2b^2$ ga bo'lsak, ellipsning tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

ko'rinishga keladi. (13) tenglama ellipsning kononik tenglamasi deyiladi. (13) tenglamadan ellipsning ikkinchi tartibli chiziq ekani ko'rinadi.

**Ellipsning shaklini uning tenglamasiga ko'ra tekshirish.**

Ellipsning (13) tenglamasiga $x$ va $y$ ning kvadratlarigina kiradi, shu sababli $(x;y)$ nuqta ellipsning nuqtasi bo'lsa, $(\pm x;\pm y)$ nuqtalar ham ellipsning nuqtalari bo'ladi. Demak, ellips koordinata o'qlariga va koordinatalar boshiga nisbatan simmterik joylashgan. Ellips shaklini birinchi chorakda (kvadrantda) tekshirishning o'zi kifoya, boshqa choraklardagi shaklini simmetriyadan foydalanib tasavvur qilish oson.

Birinchi chorakdagi nuqtalalar uchun (13) tenglamani $y$ ga nisbatan yechamiz:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (14)$$

Bu yerda $y$ o'zgaruvchi $x$ ning funktsiyasidir. Funktsiyaning aniqlanish sohasi

$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad \text{yoki} \quad |x| \leq a.$$

Demak, $x$ o'zgaruvchi $0$ dan $+a$ gacha o'sib borishi mumkin. $x = 0$ da esa $y = b$ bo'lib, $x = a$ da esa $y = a$ bo'ladi, ya'ni $x$ abstsissa $0$ dan $a$ gacha o'sib borganda, $y$ ordinate $b$ dan $0$ gacha kamayib boradi. Demak, $B\breve{A}$ yoy ellipsning birinchi chorakdagi yoyi bo'ladi. Endi simmetriyaga asoslanib, ellipsning 2,3 va 4 chorakdagi yoylari $B\breve{A}_1$, $\breve{A}_1B_1$ va $\breve{B}_1A$ yoylar ekanini ko'rish qiyin emas. Demak, ellips 2- chizmada ko'rsatilgandek yopiq shakldan iborat ekan.

Koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlari deyiladi. Simmetriya o'qlarining kesishgan nuqtasi ellipsning markazi deyiladi. Fokuslar yotgan simmetriya o'q ellipsning fokal o'qi deyiladi. (13) tenglama bilan berilgan ellips uchun fokal o'q $Ox$ o'q bo'lib, ellipsning markazi koordinatalar boshidir. $|MF_1|$ va $|MF_2|$ kattaliklar fokal radiuslar deb ataladi va $r_1$, $r_2$ bilan belgilanadi.

Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishgan nuqtalari uning uchlari deyiladi. 2-chizmada ko'rsatilgan $A(a;o)$, $A_1(-a;o)$, $B(o;b)$, va $B_1(o;-b)$ nuqtalar ellipsning uchlari. $AA_1 = 2a$ ellipsning katta o'qi, $BB_1 = 2b$ ga esa uning kichik o'qi deyiladi (bunda $a > b$). $a$ va $b$ lar yarim o'qlar deyiladi.

Agar (13) tenglamada $a = b$ deb olinsa, tenglama

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglama markazi koordinata boshida bo'lgan va radiusi $a$ ga teng bo'lgan aylananing tenglamasidir. Demak, aylana ellipsning xususiy holi ekan.

## Ellipsning ekstsentrisiteti va direktrisalari.

***Ta'rif.*** Ellips fokuslari orasidagi masofa $2c$ ning katta o'q uzunligi $2a$ nisbati ellipsning ekstsentrisiteti deyiladi va u $\varepsilon$ harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (15)$$

$c < a$ bo'lganligi uchun $\varepsilon < 1$ bo'ladi. (15) formuladan ko'rinadiki, $b$ - ortaborsa $\varepsilon$ kichiklasha boradi va $a = b$ bo'lganda $\varepsilon = 0$ bo'lib, ellips aylanadan iborat bo'ladi. Agar $b$ ning qiymati $a$ dan nolgacha kamaysa, $\varepsilon$ $0$ dan $1$gacha o'sib boradi. $\varepsilon = 1$da, ellips ikkilangan kesmaga aylanadi.

Ellipsdagi nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar uning fokal radius – vektorlari ($r_1$ va $r_2$) deyiladi. Ellipsning ixtiyoriy $M(x; y)$nuqtasi uchun

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x \quad (16)$$

va ellipsning ta'rifiga asosan

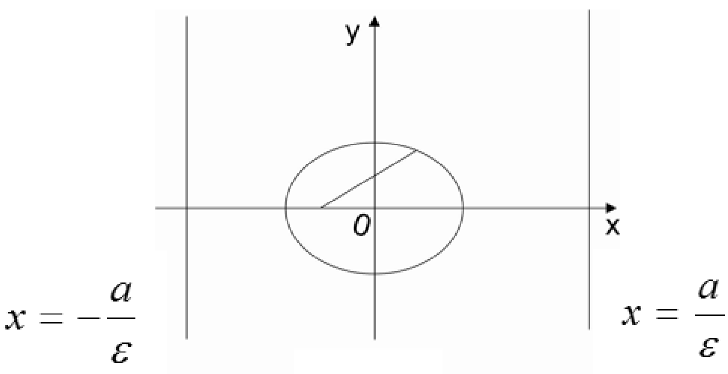
$$r_1 + r_2 = 2a$$

ya'ni ellipsning har qanday nuqtasining fokal radius – vektorlarinig yig'indisi uning katta o'qiga teng.

Ellipsning kichik o'qiga parallel va markazdan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ masofa uzoqlikdan o'tgan ikki to'g'ri chiziq ellipsning direktrisalari deyiladi (3 - chizma). Demak, ellips direktrisalarining tenglamasi

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ va } x = \frac{a}{\varepsilon} \quad (17)$$

bo'ladi.




3-chizma

Ellipsda $\varepsilon < 1$ bo'lgani sababli $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Demak, direktrisalar ellipsning $A$ va $A_1$ uchlaridan tashqarida joylashgan.

Ellipsning har qanday nuqtasidan fokusgacha bo'lgan ($r_1$ yoki $r_2$) masofaning shu nuqtadan mos direktrisagacha bo'lgan ($d_1$ yoki $d_2$) masofaga nisbati ellipsning ekstsentrisitetiga teng:

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \quad \text{va} \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \quad .$$

Shunday qilib, ellipsni berilgan nuqtadan va berilgan to'g'ri chiziqdan masofalarining nisbati birdan kichik o'zgarmas miqdorga teng bo'lgan nuqtalarning geometric o'rni deb, ta'riflash mumkin.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \qquad (18)$$

**4-misol.** $2x^2 + 4y^2 = 8$ ellips fokuslarining koordinatalari, ekstsentrisiteti va abstsissasi 1ga teng bo'lgan nuqtasining fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Ellips tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Demak, $a = 2, \;\; b = \sqrt{2}.$ $c^2 = a^2 - b^2$ formulaga binoan $c = \pm\sqrt{2}$ ni topamiz. U holda $F_1(\sqrt{2},0)$, $F_2(-\sqrt{2},0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari bo'ladi. Ellipsning ekstsentrisiteti:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(16) formulalarga binoan $x = 1$ bo'lgani sababali

$$r_1 = a - \varepsilon x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}, \qquad r_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}.$$

**5-misol.** Agar $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsga urinma bo'lsa, $A^2a^2+B^2b^2=C^2$ tenglikning bajarilishi isbot qilinsin.

Yechish. Ellipsga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi:

$$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1 \text{ yoki } x_0b^2x+y_0a^2y-a^2b^2=0$$

Agar $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq ellipsga urinma bo'lsa, u holda $x_0b^2x+y_0a^2y-a^2b^2=0$ va $Ax+By+C=0$ tenglamalarning koeffitsientlari proportsional bo'ladi, ya'ni

$$\frac{x_0b^2}{A}=\frac{y_0a^2}{B}=-\frac{a^2b^2}{C}$$

Bundan $x_0$ va $y_0$ ning qiymatlarini ellips tenglamasiga keltirib qo'yamiz:

$$\frac{A^2a^4}{a^2C^2}+\frac{B^2b^4}{b^2C^2}=1$$

yoki

$$A^2a^2+B^2b^2=C^2 \qquad (19)$$

**6-misol.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning koordinata o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi urinmasining tenglamasi yozilsin.

Yechish. Koordinata o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $x+y-m=0$. $m$ ni (19) formuladan topamiz:

$$m^2=a^2+b^2 \quad \text{yoki} \quad m=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Demak, urinma tenglamasi

$$x+y-\sqrt{a^2+b^2}=0.$$

## 3 - §. Giperbola va uning kanonik tenglamasi. Giperbolaning asimptotalari, ekstsentrisiteti va direktrisalari.

***Ta'rif.*** Giperbola deb shunday nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladiki, ularning har biridan berilgan ikki $F_1$ va $F_2$ nuqtagacha (fokuslargacha) masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a\left(0<2a<F_1F_2\right)$ miqdordan iboratdir.

Giperbolaning tenglamasini keltirib chiqarish uchun koordinatalar sistemasini ellips uchun qanday olgan bo'lsak, bu yerda ham shunda yolamiz, ya'ni $F_1$ va $F_2$ fokuslardan o'tgan to'g'ri chiziqni abstsissalar o'qi, ularning o'rtasidan o'tgan tik chiziqni ordinatalar o'qi deb qabul qilamiz.

Fokuslar orasidagi masofani $F_1F_2=2c$ orqali belgilaymiz, bu yerda $F_1(c;0)$, $F_2(-c;\,0)$.

Ta'rifga asosan:

$$MF_2-MF_1=\pm 2a \qquad (20)$$

(agar $MF_2>MF_1$ bo'lsa, $+$ ishora, $MF_2<MF_1$ bo'lsa, - ishora olinadi). $M(x;y)$ nuqta giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi, u holda

$$MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Bu qiymatlarni (20) ifodaga keltirib qo'ysak,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Bu giperbolaning tanlab olingan Dekart sistemasidagi tenglamasidir. Uni soddalashtirish uchun ikkinchi ildizni o'ng tomonga olib o'tib, ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz va o'hshash hadlarini ixchamlab

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni ikkala tomonini yana bir marta kvdratga ko'tarib, soddalashtirsak

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right) \quad (21)$$

tenglik hosil bo'ladi. $F_2MF_1$ uchburchakda

$$MF_2 - MF_1 < F_2F_1 \text{ yoki } 2a < 2c$$

$$\text{yoki } a < c \text{ yoki } a^2 < c^2 \text{ yoki } c^2 - a^2 > 0.$$

Demak, $c^2 - a^2$ musbat bo'lgan son, uni $b^2$ belgilab, ya'ni $b^2 = c^2 - a^2$ (21) tenglikni

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (22)$$

ko'rinishga keltiramiz. (22) ifodaning ikkala tomonini $a^2b^2$ ga bo'lib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (23)$$

tenglikni hosil qilamiz. (23) tenglikka giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

**Giperbolaning shaklini uning tenglamasiga ko'ra tekshirish.**

Giperbola tenglamasiga $x$ va $y$ o'zgaruvchilarninng kvadratlari kiradi, shuning uchun agar $(x, y)$ nuqta giperbola nuqtasi bo'lsa, $(\pm x; \pm y)$ nuqtalar ham giperbolaning nuqtalar ibo'ladi, demak, giperbola koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik ikkinchi tartibli chiziqdir. Koordinata o'qlari uning simmetriya o'qlari, koordinatalar boshi esa simmetriya markazi deyiladi. Fokuslardan o'tgan simmteriya o'qi uning fokal o'qi deyiladi. Giperbolaning $Oy$ o'q bilan umumiy nuqtasi yo'q, chunki $x = 0$ bo'lsa, (23) tenglamadan $-\frac{y^2}{a^2} = 1$ bo'lishi kelib chiqadi. Buning bo'lishi mumkin emas. Shu sababli giperbola $Oy$ ordinatalar o'qini kesmaydi.

$B_1(o;b)$ va $B_2(o;-b)$ nuqtalar mavhum uchlar, $B_1B_2 = 2b$ kesma mavhum o'q deb ataladi. Agar $y = 0$ bo'lsa u holda (23) dan $x = \pm a$ kelib chiqadi. Demak, giperbola chizig'i $Ox$ abstsissalar o'qini $A_1(a;o)$ va $A_2(-a;o)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bu nuqtalar giperbolaning haqiqiy uchlari deb ataladi. $A_1A_2 = 2a$ kesmaga giperbolaning haqiqiy o'qi, $a$ va $b$ lar esa haqiqiy va mavhum yarim o'qlari deyiladi.

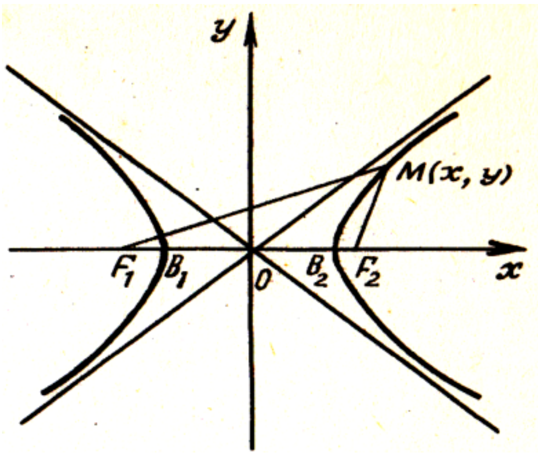
(23) tenglamadan $y$ ni topamiz:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ .$$

Bu tenglikda $y$ haqiqiy son bo'lishi uchun

$$x^2 - a^2 \geq 0 \text{ yoki } |x| \geq a$$

bo'lishi kerak. $x$ o'zgaruvchi $a$ dan $+\infty$ gacha o'sib borganda (24) tenglikdan $y$ ning $a$ dan $+\infty$ gacha o'zgarishi, $x$ o'zgaruvchi $-a$ dan $-\infty$ gacha kamayganda $y$ koordinata $0$ dan $\pm\infty$ gacha o'zgarishi kelib chiqadi. Demak, giperbola ikki tomonga qarab cheksiz kengayib ketgan ikki juft muntazam tarmoqlardan iborat chegaralanmagan chiziq (4-chizma).




**4-chizma**

## Giperbolaning asimptotalari.

Giperbolaning muhim xususiyatlaridan biri shundaki, uning nuqtalari giperbola chizig'i bo'yicha markazdan yetarli uzoqlashganda asimptota deb atalgan to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib boradi, ya'ni $x \to \infty$ da $d = MN \to 0$ di (4 - chizma).

Umuman olganda giperbola ikkita asimptotaga egadir, ularning teng lamalari:

$$y = \frac{a}{b}x \text{ va } y = -\frac{b}{a}x\ .$$

Bu asimtotalarning burchak koeffitsientlari $\pm\frac{b}{a}$ bo'lgani sababli ular tomonlari $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'trburchak diogonallari bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Bu fikrdan giperbolani yasashda foydalanish ancha qulaylik tug'diradi.

**Giperbolaning ekstsentrisiteti.**

Giperbolaning fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o'qqa nisbati uning ekstsentrisiteti deyiladi va u $\varepsilon$ orqali belgilanadi, ya'ni

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad (26)$$

Giperbolada $c > a$ bo'lganligi uchun $\varepsilon > 1$ bo'ladi.

Agar $a$ ni o'zgarmas deb, $b$ ning qiymatini kichiklashtirib borsak, u holda $\varepsilon$ ning qiymati kamayib birga yaqinlashib boradi. Bu holda giperbolaning shakli o'tkirlashib boradi. Agar $b$ kattalashib borsa, $\varepsilon$ birdan ancha katta qiymatlar oladi va bu holda giperbola kengayib boradi.

**Giperbolaning fokal radiuslari va direktrisalari.**

Giperbolaning istalgan $M(x;y)$ nuqtasidan uninng $F_1(c;o)$ va $F_2(-c;o)$ fokuslarigacha bo'lgan masofalari shu $M$ nuqtaning fokal radiuslari deyiladi.

Giperbola fokal radiuslari $r_1$ va $r_2$ bilan belgilanadi.

O'ng tarmoqning nuqtalari uchun fokal – radius vektorlar quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$r_1 = \varepsilon x + a, \qquad r_2 = -\varepsilon x + a. \ (27)$$

Chap tarmoqning nuqtalari uchun:

$$r_1 = -\varepsilon x + a, \qquad r_2 = -\varepsilon x - a \ (28)$$

formulalarga egamiz. Giperbola ixtiyoriy nuqtasining fokal radius – vektorlarining ayirmasi uning haqiqiy o'qiga teng, ya'ni:

$$r_1 - r_2 = 2a \text{ (o'ng tarmoq uchun)}$$

$$r_1 - r_2 = 2a \text{ (chap tarmoq uchun)}$$

Giperbolaning direktrisalari deb, uning fokal o'qi va perpendikulyar va markazdan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ masofada o'tgan ikkita to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Ularning tenglamalari

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ va } x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Giperbolada $\varepsilon > 1$ bo'lgani sababli $\frac{a}{\varepsilon} < a$ bo'ladi. Demak, giperbolaning direktrisalari uning $O$ markazi bilan $A_1$ va $A_2$ uchlari orasiga joylashgan.

Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo'lgan masofaning mos direktrisagacha bo'lgan masofaga nisbati giperbolaning ekstsentrisitetiga teng, ya'ni:

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon; \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

(23) tenglama bilan berilgan giperbolaning $(x_1; y_1)$ nuqtasidan o'tkazilgan urinmaning tenglamasi:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1. \qquad (29)$$

**7-misol.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbolaning abstsissasi 8 ga teng. Ordinatasi musbat bo'lgan nuqtasining fokal radiuslari hisoblansin.

Yechish. Abstsissasi $x = 8$, ordinatasi musbat $(y > 0)$ bo'lgan nuqta birinchi chorakda yotadi va giperbolaning o'ng tarmog'ida bo'ladi. Shuning uchun $r_1 = \varepsilon x - a$, $r_2 = \varepsilon x + a$ formulalardan foydalanib, nuqtaning fokal radiuslarini topamiz. Giperbola tenglamasiga ko'ra: $a = 4$, $b = 3$.

Demak, $\varepsilon = \frac{\sqrt{16+9}}{a} = \frac{5}{4}$. Bu qiymatlarga asosan:

$$r_1=\frac{5}{4}\cdot 8-4=6,\qquad r_2=\frac{5}{4}\cdot 8+4=14.$$

**8-misol.** Giperbola direktrisalari orasidagi masofa uning fokuslari orasidagi masofadan 3 marta kichik. Giperbolaning mavhum o'qi 4 ga teng. Giperbolaning ekstsentrisiteti va direktrisalari tenglamalari tuzilsin.

Yechish. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofa $2c$, direktrisalari orasidagi masofa $2\frac{a}{\varepsilon}$.

Masalaning shartiga ko'ra:

$$3\left(\frac{2a}{\varepsilon}\right)=2c \text{ yoki } 3a=\varepsilon\cdot c.$$

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ dan $3a=\frac{c^2}{a}$ yoki $\frac{c^2}{a^2}=3$, bundan $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$ yoki $\varepsilon=\sqrt{3}$.

Direktrisalar tenglamasi:

$$x=\frac{a}{\varepsilon},\qquad x=-\frac{a}{\varepsilon},$$

Demak, $a$ ni toppish kerak. Giperbola uchun $c^2=a^2+b^2$, demak, $\frac{a^2+b^2}{a^2}=3$ yoki $b^2=2a^2$. Masalaning shartiga ko'ra $2b=4$, bundan $b=2$, demak, $2a^2=4,\ a=\pm\sqrt{2}$. $a$ va $\varepsilon$ qiymatlarini direktrisa tenglamalariga qo'yamiz:

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ yoki } \sqrt{3}x\pm\sqrt{2}=0.$$

**9-misol.** Agar $Ax+Bx+C=0$ to'g'ri chiziq $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaga urinma bo'lsa, $A^2a^2-B^2b^2=C^2$ tenglikning bajarilishi isbot qilinsin.

Yechish. Giperbolaga $M_0\left(x_0;y_0\right)$ nuqtada urinuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi (29 - formuladan)

$$b^2x_0x-a^2y_0y-a^2b^2=0.$$

U holda $b^2x_0x-a^2y_0y-a^2b^2=0$ va $Ax+Bx+C=0$ chiziqlarning koeffitsientlari proportsional bo'ladi:

$$\frac{b^2x_0}{A}=-\frac{a^2y_0}{B}=-\frac{a^2b^2}{C}.$$

Bundan $x_0$ va $y_0$ ni topamiz:

$$x_0=-\frac{Aa^2}{C},\quad y_0=\frac{Bb^2}{C}.$$

$x_0$ va $y_0$ ning qiymatlarini giperbola tenglamasiga keltirib qo'yamiz:

$$\frac{A^2a^4}{a^2C^2}-\frac{B^2b^4}{b^2C^2}=1$$

yoki

$$A^2a^2-B^2b^2=C^2 \qquad (30)$$

**10-misol.** Giperbola $x-y-2=0$ to'g'ri chiziqqa $M(4;2)$ nuqtada urinadi. Shu giperbolaning tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra:

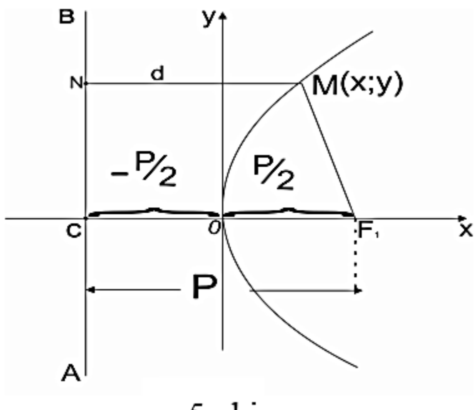
$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ x_0=4,\ y_0=2.$$

$x_0=-\frac{Aa^2}{C},\ y_0=\frac{Bb^2}{C}$ formuladan $a^2=8,\ b^2=4$ ni topamiz. Demak, giperbolaning tenglamasi:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1.$$

## 4 - §. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

***Ta'rif.*** Parabola deb ixtiyoriy nuqtasidan focus deb ataluvchi nuqtasigacha va direktrisa deb ataluvchi to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofalar teng bo'lgan nuqtalarning to'plamiga aytiladi.



5-chizma

Bu ta'rifga asoslanib, parabolaning Dekart sistemasidagi tenglamasini keltirib chiqaramiz.

Agar abstsissalar o'qi deb, $F$ fokusdan $AB$ direktrisaga tushirilgan perpendikulyarni qabul qilsak, koordinatalar boshini esa, direktrisa bilan fokusning o'rtasiga joylashtirsak (5-chizma), bu holda

$$OF = \frac{P}{2} \text{ va } F\left(\frac{P}{2};0\right) \text{ bo'ladi.}$$

Parabolaning ta'rifiga ko'ra:

$$FM = MN \qquad (31)$$

Yasashga binoan $N$ nuqtaning koordinatalari $\left(-\frac{P}{2},y\right)$. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan:

$$FM = \sqrt{\left(x-\frac{P}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \left|x+\frac{P}{2}\right| = MN .$$

Bularni (31) tenglikka qo'yamiz:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko'tarib va natijani ixchamlasak

$$y^2 = 2px \qquad (32)$$

tenglama hosil bo'ladi. (32) tenglamaga parabolaning kononik tenglamasi deyildi.

**11 - §. Parabolaning shaklini uning tenglamasiga ko'ra tekshirish.**

(32) tenglamadan $y = \pm\sqrt{2px}$ ni topamiz. Demak, $y$ ning qiymat haqiqiy bo'lishi uchun $x$ ga faqat musbat qiymat berishga to'gri keladi$(p>0)$. Agar $x=0$ bo'lsa, $y=0$ bo'lib, parabola koordinata boshidan o'tadi. $x$ ning mumkin bo'lgan har bir qiymatiga $y$ ning ishora bo'yicha qarama – qarshi ikkita qiymati mos keladi, ya'ni $|y_1| = |y_2|$. Shu sababli $Ox$ o'qi parabolaning simmetriya deb ataladi. $O(0;0)$ nuqta uning boshi deyiladi.

Parabola tenglamasidan ko'rinadiki, $x \in [0;+\infty)$ bo'lganda $y$ koordinata $0$ dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Demak, parabola chegaralanmagan ikkinchi tartibli egri chiziq.

Parabola ixtiyoriy nuqtasining fokal radius – vektori

$$r = x + \frac{P}{2} \qquad (33)$$

bo'ladi va parabolaning ta'rifiga ko'ra,

$$\frac{r}{d} = 1, \qquad (34)$$

bu yerda $d$ - parabola nuqtasining direktrisagacha bo'lgan masofadir. Parabolaning ekstsentrisitetini birga teng deb hisoblash mumkin, ya'ni $\varepsilon = 1$. Parabola asimptotalarga ega emas.

Agar parabolaning fokal o'qi $Oy$ o'qi sifatida olinsa, parabola tenglamasi ushbu ko'rinishni oladi:

$$x^2 = 2py \qquad (35)$$

Parabolaga uning $(x_0; y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma

$$yy_0 = p(x + x_0) \qquad (36)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

**11-misol.** Parabolaning fokusi $F(5;0)$ berilgan. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish. Parabolaning $p$ parametrini topamiz. $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ bo'lganligi sababli $\frac{p}{2} = 5$, bundan $p = 10$. Buni (32) tenglamaga qo'ysak, parabola tenglamasini

$$y^2 = 20x$$

ko'rinishda hosil qilamiz.

**12-misol.** Parabola $M_0(3;5)$ nuqtadan o'tadi. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish. $M_0(3;5)$ nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi:

$$25 = 2p \cdot 3; \quad 6p = 25; \quad p = 4\frac{1}{6}.$$

Demak,

$$y^2 = 2 \cdot \frac{25}{6} x \text{ yoki } y^2 = \frac{25}{3} x$$

parabolaning kanonik tenglamasi bo'ladi.

**13-misol.** Agar $Ax + Bx + C = 0$ to'g'ri chiziq $y^2 = 2px$ parabolaga urinma bo'lsa, $B^2 p = 2AC$ tenglikning bajarilishi isbot qilinsin.

Yechish. (36) tenglamani

$$px - y_0 y + px_0 = 0$$

ko'rinishga keltiramiz. U holda $px - y_0 y + px_0 = 0$ va $Ax + Bx + C = 0$ chiziqlarning paralleligidan ularning koeffitsientlari proportsional bo'ladi:

$$\frac{P}{A} = -\frac{y_0}{B} = +\frac{Px_0}{C}.$$

Bundan $x_0 = \frac{C}{A}$ va $y_0 = -\frac{PB}{A}$ ni topamiz. $x_0$ va $y_0$ ni (32) tenglamaga qo'yib

$$B^2 p = 2AC$$

ni topamiz.

**Mustaqil ish topshiriqlari.**

1. Aylana tenglamasi quyidagi ko'rinishda berilgan: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$. Aylananing markazi va radiusini toping.

J: $(-1;3)$, $R = \sqrt{5}$.

2. Markazi $M(1;2)$ nuqtada va radiusi 5 birlikka teng bo'lgan aylanma tenglamasini tuzing.

J: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

3. $M(2;6)$ nuqtadan $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$ aylanaga o'tkazilgan urinmaning uzunligi topilsin.

J: $d=4$.

4. Katta o'qi 8 va kichik o'qi 6 bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

J: $x^2/_{16}+y^2/_{9}=1$.

5. Agar ellips yarim o'qlarining yig'indisi 10 ga teng bo'lib, uning fokuslari orasidagi masofa $4\sqrt{5}$ ga teng bo'lsa, uning tenglamasini tuzing.

J: $x^2/_{36}+y^2/_{16}=1$.

6. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ ellipsning $2x-y-9=0$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari topilsin.

J: $(3;-3)$, $\left(\frac{69}{13};\frac{21}{13}\right)$.

7. Tenglamasi $16x^2-25y^2-400=0$ bo'lgan giperbolaning ekstsentrisiteti va asimptotalarini toping.

J: $\varepsilon=\frac{\sqrt{41}}{5}$, $y=\pm\frac{4}{5}$.

8. $c=7$, $\varepsilon=\frac{7\sqrt{6}}{12}$ bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

J: $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=1$.

9. $(2;-5)$ nuqtadan $x^2-4y^2=4$ giperbolaning asimptotalariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsin.

J: $x-2y-12=0$ va $x+2y+8=0$.

10. Parabola $(4;6)$ nuqtadan o'tadi. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

J: $y^2=9x$.

11. $y^2=4x$ parabolaning direkrisasi tenglamasi va fokusining koordinatalarini toping.

J: $x=-1$, $F(1;0)$.

12. $y^2 = 2px$ parabolaning $x - 2y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa urinishi ma’lum. Parabolaning parametri hisoblansin. J: $p = \frac{5}{2}$.

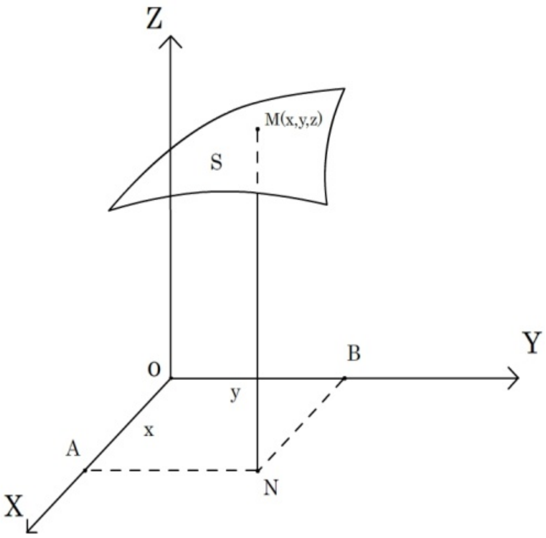
# III. FAZODAGI ANALITIK GEOMETRIYA

## 7-BOB. Tekislik.

Sirt tenglamasi. Faraz qilaylik, $F(x, y, z) = 0$ tenglama berilgan bo'lsin. Ma’lumki, bu tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday $(x, y, z)$ sonlar uchligi uning yechimi deb ataladi. Bu tenglamaning yechimini hosil qilish uchun uchta $x, y, z$ harflardan ikkitasiga ixtiyoriy sonli qiymatlar berish yetarli, u xolda mos uchinchi harf qiymati tenglamadan aniqlanadi.

$x, y, z$ larni $n$ uqtaning koordinatalari deb qaraymiz. U holda $F(x, y, z) = 0$ tenglamaning xar bir yechimi fazodagi nuqtani aniqlaydi, yechimlarning to'plami esa nuqtalarning qandaydir $S$ o'rnini (sirt) aniqlaydi (1 - chizma). Bu holda $S$ sirt $F(x, y, z) = 0$ tenglamaga ega deb aytiladi.

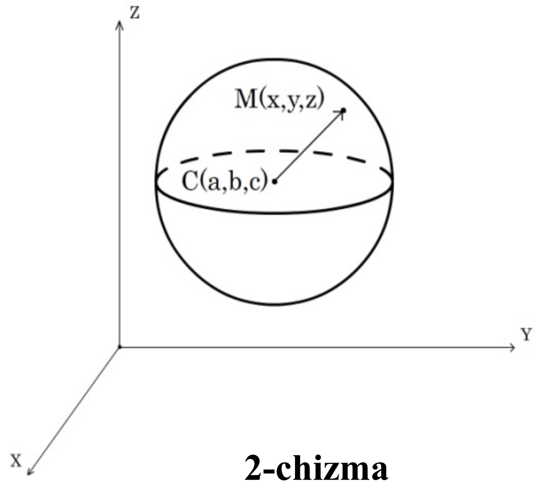
***Ta'rif.*** $S$ sirtning barcha nuqtalarining koordinatalari (faqat shu nuqtalarning koordinatalari) qanoatlantiradigan $F(x, y, z) = 0$ tenglama $S$ sirtning tenglamasi deb ataladi.




**1-chizma**

**1-misol**. Markazi $C(a, b, c)$ nuqtada va radiusi $R$ ga teng bo'lgan sfera sirtining tenglamasini tuzing.

Sferik sirtning barcha nuqtalari koordinatalari qanoatlantiradigan tenglamani topish talab qilinganligi uchun bu nuqtalarning umumiy xossasidan kelib chiqamiz. Bu sirtning barcha nuqtalari (va faqat shu nuqtalar) sferaning markazi




**2-chizma**

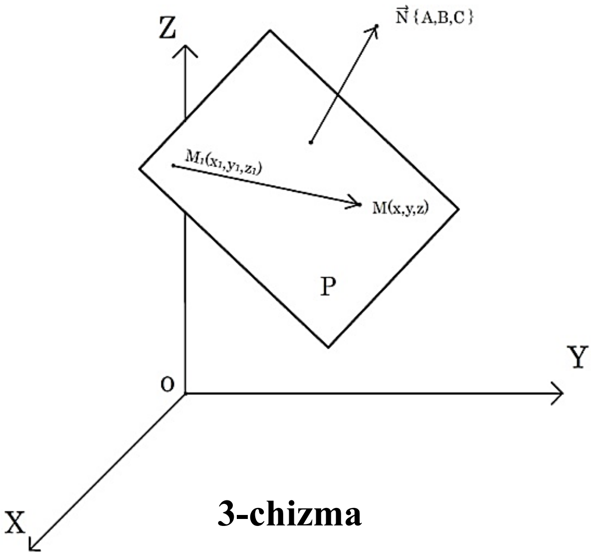
$C$nuqtadan birxil $R$ masofada yotadi. Shuning uchun ixtiyoriy $M(x, y, z)$ uchun $|\overline{CM}| = cM = R$ bo'lishi zarur va yetarli.

Bu yerdan $CM^2 - R^2$ yoki $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ (1)

tenglama sferik sirt tenglamasi bo'ladi.

## 1-§.Berilgan nuqtadan o'tgan va berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.

Faraz qilaylik, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi va $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tib hamda $\vec{N}\{A, B, C\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan $P$ tekislik berilgan bo'lsin (3 - chizma). Tekislikka perpendikulyar bo'lgan vektor tekislikning normal vektori deb ataladi. Bitta nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan yagona tekislik o'tkazish mumkin bo'lgani sababli tekislikning $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtasi va $\vec{N}\{A, B, C\}$ normal vetori berilgan koordinatalar sistemasida tekislikningv xolatini to'la aniqlaydi. Faraz qilaylik, $M(x, y, z)$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Bu nuqta $P$ tekislikda (3 - chizma) $\overline{M_1M} \perp \vec{N}$ shart bajarilgandagina yotadi, buning uchun, ma'lumki,




**3-chizma**

$$\vec{N} \cdot \overline{M_1M} = 0 \quad (2)$$

shart bajarilishi kerak.

$\overline{M_1M}$ vektor $\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ koordinatalarga, $\vec{N}$ esa $\{A, B, C\}$ koordinatalarga ega bo'lsa, ma'lumki (2) shart koordinatalar ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (3)$$

(3) tenglama $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{N}\{A, B, C\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan $P$ tekislik tenglamasi bo'ladi.

$A, B, C$ larning har xil qiymatlarida (3) tenglama $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tuvchi barcha tekisliklarning to'plamini aniqlaydi, shuning uchun ham berilgan $M_1$ nuqtadan o'tuvchi tekisliklarning dastasining tenglamasi deb ataladi.

Ko'rinib turibdiki (3) tenglama $x, y, z$ larga nisbatan birinchi tartibli tenglama. Dekart koordinatalar sistemasida har qanday berilgan tekislik ustida qandaydir $M_1$ nuqta olish va $\vec{N}$ normal vektor tanlay olish mumkin bo'lgani uchun ixtiyoriy tekislik 1 – tartibli tenglama bilan aniqlanadi.

**2-misol**. $M_1(2; -1; 3)$ va $M_2(4; 5; 8)$ nuqtalar berilgan. $M_1$ nuqtadan o'tuvchi va $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $M_1$ nuqtadan o'tuvchi tekisliklar dastasi $A(x-2)+B(y+1)+c(z-3)=0$ ko'rinishda bo'ladi. Axtarilayotgan tekislikning normal $\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}$ vektori $\{4-2;\ 5-(-1); 8-3\}=\{2;6;5\}$ koordinatalarga ega. Ularni dasta tenglamasidagi $A, B, c$ lar o'rniga quyib, quyidagini xosil qilamiz.

$2(x-2)+6(y+1)+5(z-3)=0$ yoki $2x+6y+5z-13=0$.

Bu axtarilayotgan tekislik tenglamasi bo'ladi.

Tekislikning umumiy tenglamasi. Uning xususiy xollarini tekshirish.

Avvalgi qismda biz ixtiyoriy tekislik 1 – tartibli tenglama bilan aniqlanishini ko'rsatdik. Endi teskari tasdiqni, ya'ni ixtiyoriy 1 – tartibli

$$Ax+By+cz+D=0 \qquad (4)$$

tenglama tekislikni aniqlanishini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan, (4) tenglikda $A, B, c$ koeffitsientlardan kamida bittasi $0$ dan farqli bulsin, aks holda (4) tenglik tenglama bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, $C \neq 0$. U holda (4) tenglamani

$$A(x-0)+B(y-0)+C\left[z-\left(-\frac{D}{C}\right)\right]=0 \qquad (5)$$

ko'rinshda yozib olish mumkin. Oldingi qismdagi tasdiqga ko'ra (5) tenglama, mos ravishda (4) tenglama $\left(0; 0; -\frac{D}{C}\right)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{N}\{A, B, C\}$ vektorga perpendikulyar tekislikni aniqlaydi va bu tekislik yagona.(4) tenglama tekislikning umumiy tenglamasi deb ataladi. Quyida uning xususiy hollarini ko'rib chiqamiz.

1. $D=0$ bo'lsin. U holda (4) tenglama

$$Ax+By+cz=0 \qquad (6)$$

ko'rinishga keladi va koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislikni aniqlaydi, chunki $(0;0;0)$ nuqtaning koordinatalari (6) tenglamani $A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 \equiv 0$ ayniyatga aylantiradi.

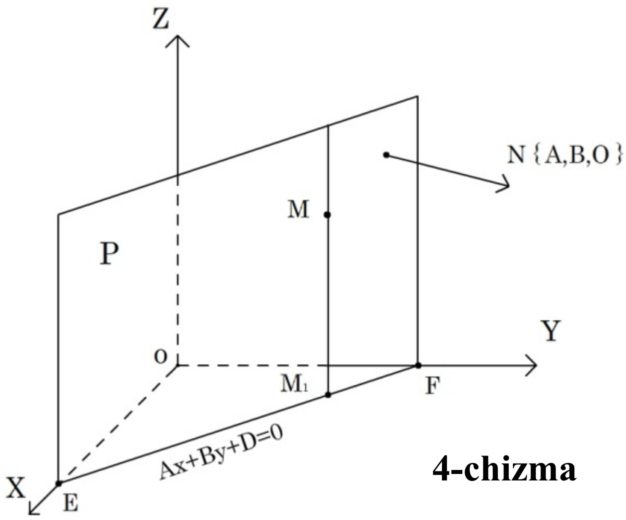
2. $C = 0$ bo'lsin. U holda (4) tenglama

$$Ax + By + D = 0 \qquad (7)$$

ko'rinishga keladi.

Bu tekislikning $\vec{N}\{A, B, C\}$ normal vektorning $Oz$ o'qiga $C$ proektsiyasi 0 ga teng. Shuning uchun $\vec{N} \perp Oz$, tekislik esa $Oz$ o'qiga parallel.

Faraz qilaylik, $EF$ to'g'ri chiziq $P$ tekislikning $OXY$ tekislikdagi izi bo'lsin (4 - chizma). $EF$ to'g'ri chiziq $P$ tekislikda yotgani uchun uning ixtiyoriy nuqtasining $x$ va $y$ koordinatalari (7) tenglamani qanoatlantiradi. Bundan kelib chiqadiki, (7) tenglama $OXY$ tekislikda $EF$ to'g'ri chiziqning tenglamasi ekan (4 – chizma).




**4-chizma**

Demak, $z$ ni uz ichiga olmagan $Ax + By + D = 0$ tenglama fazoda $Oz$ o'qiga parallel tekislikni aniqlaydi.

3. $C = 0$ va $D = 0$ bo'lsin. U holda (4) tenglama $Ax + By = 0$ (8) ko'rinishga ega bo'ladi. Avvalgi holga ko'ra bu tekislik $Oz$ o'qiga parallel bo'lishi kerak va shu bilan birga bu o'qning $O$ nuqtasidan o'tadi. Bundan kelib chiqadiki, tekislik $Oz$ o'qidan o'tadi.

4. $B = 0$ va $C = 0$ bo'lsin. U holda (4) tenglama $Ax + D = 0$ yoki $x = -\dfrac{D}{A} = a$ ko'rinishga ega bo'ladi va $Oz$ o'qiga ham, $Oy$ o'qiga ham parallel bo'lgan tekislikni, ya'ni $OYZ$ tekislikka parallel tekislikni aniqlaydi.

(4) tenglamaning bitta yoki ikkita koeffitsienti 0 ga teng bo'lgan boshqa barcha xususiy hollari yuqorida ko'rib chiqilgan holga o'xshash bo'ladi. Masalan, $A = 0$ bo'lganda $By + Cz + D = 0$ tenglama 2 – holda ko'rilgan holga o'xshash $Ox$ o'qiga parallel tekislikni aniqlaydi.

5. Endi faraz qilaylik, (4) tenglamada barcha uchta koeffitsient $B, C, D$ yoki $A, C, D$ yoki $A, B, D$ nolga teng bo'lsin. U holda koordinata tekisliklari tenglamalarini hosil qilamiz:

$Ax = 0$ yoki $x = 0$ $- OYZ$ tekislik tenglamasi;

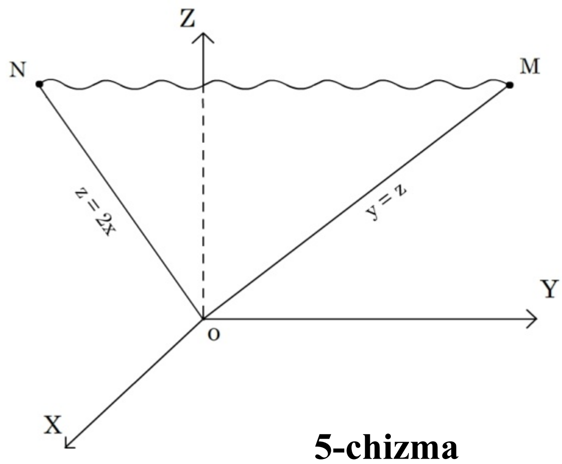
$By = 0$ yoki $y = 0 - OXZ$ tekislik tenglamasi;

$Cz = 0$ yoki $z = 0 - OXY$ tekislik tenglamasi.

$A = B = c = 0$ bo'lgan hol geometrik ma'noga ega emas.

Misollar.

**3-misol.** $2x + y - z = 0$ tekislikni yasang. Yechish. Tekislik koordinata boshidan o'tadi. Tekislikni yasash uchun uning ikkita koordinata tekisliklardagi izlarining tenglamalarini topamiz:



**5-chizma**

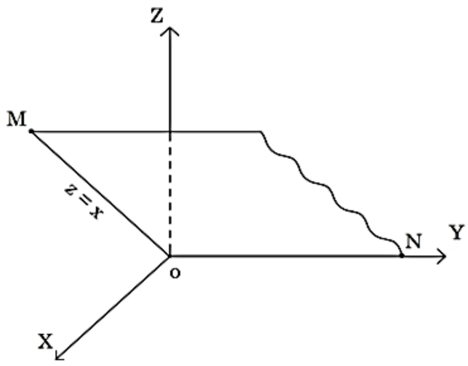
$OYZ(x = 0)$ tekislikdagi izi $y = z - oYZ$ burchakdagi $OM$ bissektrisa (tekislik tenglamasida $x = 0$ deb olamiz);

$OXZ(y = 0)$ tekislikdagi izi: $z = 2x - oN$ to'g'ri chiziq (5 - chizma).

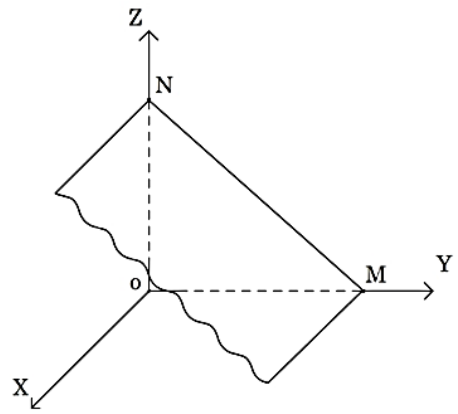
**4-misol.** $y + 2z - 4 = 0$ tekislikni yasang.

Tekislik $Ox$ o'qiga parallel. Uning $OYZ$ tekislikdagi $MN$ izining (6 - chizma) tenglamasi ham $y + 2z - 4 = 0$ ko'rinishda bo'ladi. $OY$ o'qidagi $M$ nuqtani, tenglamada $z = 0$ qo'yib, $y = OM = 4$ ekanligini topamiz. $N$ nuqta uchun $y = 0$ qo'yib, $z = ON = 2$ ekanligini topamiz. So'ngra berilgan tekislikning koordinat tekisliklaridagi $\frac{MN, \frac{MM_1}{\square}}{OX}$ va $\frac{\frac{NN_1}{\square}}{OX}$ izlarini o'tkazamiz.

**5-misol.** $z = x$ tekislikni yasang. Bu tekislik $OY$ o'qi orqali o'tadi. Uning $OXZ$ koordinat tekisligidagi $OM$ izi $OXZ$ koordinata burchagi $z = x$ bessektrisasi bo'ladi (7 - chizma).




7-chizma




6-chizma

## 2-§. Tekislikning vektor ko'rinishidagi tenglamasi.

Yuqorida $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik tenglamasida $A, B, C$ koeffitsientlar $\vec{N}\{A,B,C\}$ normal vektorning koordinatalari ekanligini, $x, y, z$ lar esa tekislikning ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtasining koordinatalari yoki $\overline{OM}=\vec{r}\{x,y,z\}$ radius–vektorning koordinatalari ekanligini ko'rdik. Bundan $Ax+By+Cz$ ifodani $\vec{N}$ va $\vec{r}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi sifatida ifodalashimiz mumkin. U holda tekislikning (4) tenglamasini

$$\vec{N}\cdot\vec{r}+D=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi.

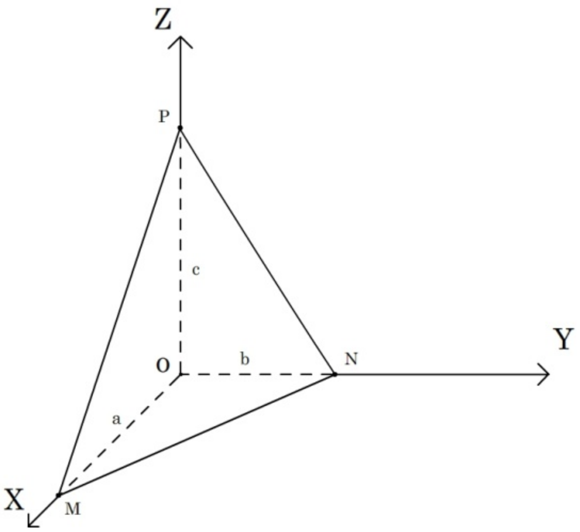
(4 ) tenglama tekislikning vektor ko'rnishidagi tenglamasi deb ataladi.

## 3-§. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.

Faraz qilaylik, tekislik koordinata o'qlarining birortasiga ham parallel bo'lmasin (8-chizma) hamda koordinata o'qlaridan 0 ga teng bo'lmagan $|OM|=a$, $|ON|=b$ va $|OP|=c$ kesmalar ajratsin. Bu tekislik tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (9)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $A, B, C$ va $D$ koeffitsientlardan birortasi ham nolga teng emas. $M(a,0,0)$, $N(0,b,0)$ va $P(0,0,c)$ nuqtalar tekislikda yotgani uchun ularning koordinatalari tekislikning (9) tenglamasini qanoatlantiradi.




$$\left.\begin{aligned} A\cdot a+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0,\\ A\cdot 0+B\cdot b+C\cdot 0+D=0,\\ A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot c+D=0.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

(10) tenglikdan $A, B$ va $C$ koeffitsientlarni aniqlaymiz.

$A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}$ va topilgan ifodalarini (9) tenglamaga qo'yamiz.

**8 - chizma**

$$-\frac{Dx}{a} - \frac{Dy}{b} - \frac{Dz}{c} + D = 0 \quad . (11)$$

(11) tenglamaning barcha hadlarini $-D \neq 0$ ga qisqartirib va ozod hadni o'ng tomonga o'tkazib, tekislik tenglamasini

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (12)$$

ko'rinishda hosil qilamiz.

(12) tenglama tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb ataladi.

**6-misol**. $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ tekislik tenglamasi kesmalarga nisbatan tenglamasi ko'rinishga keltiring.

Yechish. Tekislikni koordinata o'qlaridan ajratadigan kesmalarning $a\,b$ va $c$ qiymatlarini topamiz.

$y = 0, z = 0$ bo'lganda $x = a = 6$ ekanligini,

$x = 0, z = 0$ bo'lgan da $y = b = -4$ ekanligini,

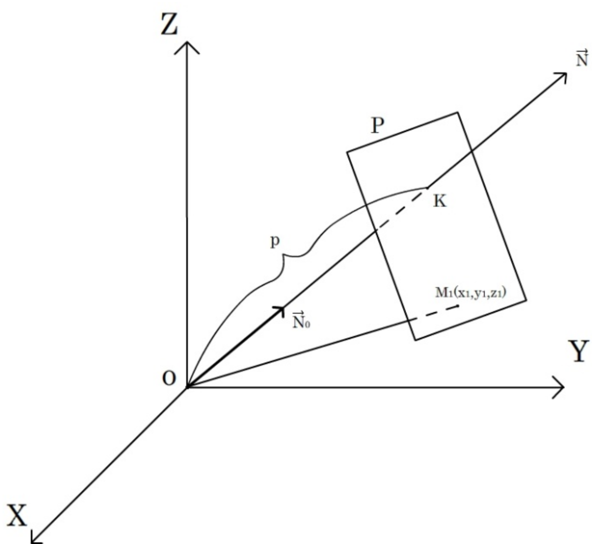
$x = 0, y = 0$ bo'lganda $z = c = 3$ ekanligini aniqlaymiz.

Kesmalarga nisbatan tenglama $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{3} = 1$ ko'rinishda bo'ladi.

Tekislikning koordinata o'qlardan ajratgan kesmalari bo'yicha tekislikni yasash qulay bo'ladi.

## 4-§. Tekislikning normal tenglamasi.

Faraz qilaylik, koordinata boshidan $P$ tekislikgacha bo'lgan $p$ masofa va koordinata boshidan tekislikka yo'naltirilgan $\vec{N}$ normal vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan $\alpha, \beta, \gamma$ burchaklar berilgan bo'lsin 9 – chizma.



Manashu berilgan parametrlar bo'yicha tekislik tenglamasini tuzamiz.

Faraz qilaylik, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $P$ tekislikning biror nuqtasi, $\vec{N_0}$ esa $\vec{N}$ vektor yo'nalishining birlik vektori bo'lsin. U holda $\vec{N_0}$ normal vektor

**9 - chizma**

$$\{1 \cdot \cos\alpha, 1 \cdot \cos\beta, 1 \cdot \cos\gamma\}$$

koordinatalarga ega bo'ladi va $P$ tekislikning tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin (IIqism)

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0,$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma) = 0 \qquad (13)$$

$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma$ yig'indi $\overrightarrow{OM_1}\{x_1; y_1; z_1\}$ va $\vec{N_0}\{\cos\alpha; \cos\beta, \cos\gamma\}$ vektorning skalyar ko'paytmasini koordinatalar orqali ifodasini beradi:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{N_0} = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1 \cdot \cos\gamma.$$

Ammo $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{N_0} = \overrightarrow{N_0} \cdot \text{np}_{\overrightarrow{N_0}}\overrightarrow{OM} = 1 \cdot \overrightarrow{OK} = p$ bo'lgani uchun $x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p$ ekanligi kelib chiqadi.

(13) tenglama

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (14)$$

ko'rinishga keladi.

(14) tenglama tekislikning normal tenglamasi deb ataladi. $p$ koordinata boshidan $P$ tekislikkacha bo'lgan masofa, $\alpha, \beta, \gamma$ esa koordinata boshidan tekislikga yo'naltirilgan tekislikning normal vektorining koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchak ekanligini eslatib o'tamiz (agar tekislik koordinata boshidan o'tgan bo'lsa u holda normal vektorni tekislikdan biror tomonga yoki unga qarama – qarshi tomonga yo'naltirish mumkin) shu bilan birga masofa singari har doim $p \geq 0$.

Normal tenglama bilan berilagan tekislikning normal vektori birlik vektor, umumiy tenglama bilan berilgan tekislikning normal vektorining uzunligi $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ga teng. Shuning uchun tekislikning umumiy tenglamasini normal tenglamaga aylantirish uchun uning ikkala qismini $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ga bo'lish kerak (yoki, boshqacha aytganda normallashtiruvchi ko'paytuvchi deb atalmish $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ kasrga ko'paytirish kerak), $-p < 0$ bo'lgani uchun ildiz oldidagi ishorani hosil bo'ladigan tenglamaning ozod hadi manfiy bo'ladigan qilib tanlab olinadi.

**7-misol**. $2x - y + 2z + 6 = 0$ tenglamani normal ko'rinishga keltiring.

Yechish. $M = -\frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = -\frac{1}{3}$; demak, berilgan tenglamaning normal tenglamasi $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 2 = 0$ ko'rinishda bo'ladi.

## 5-§. Ikki tekislik orasidagi burchak. Ularning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.

Faraz qilaylik, ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar berilgan bo'lsin.

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Bu tekisliklardan tashkil topgan ikki yoqli burchakning $\varphi$ chiziqli burchagi tekisliklarning $\overrightarrow{N_1}\{A_1;\ B_1, C_1\}$ va $\overrightarrow{N_2}\{A_2;\ B_2, C_2\}$ normal vektorlariga perpendikulyar bo'lgan tomonlarga ega bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, $\varphi$ burchak yoki $\overrightarrow{N_1}$ va $\overrightarrow{N_2}$ vektorlar orasidagi burchakga teng bo'ladi yoki uni $180^0$ gacha to'ldiradi. Shuning uchun

$$Cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \qquad (15)$$

Agar tekisliklar parallel bo'lsa, u holda $\overrightarrow{N_1}$ va $\overrightarrow{N_2}$ vektorlar ham parallel (kollinear) bo'ladi, bundan kelib chiqadiki ularning mos koordinatalari proportsional bo'ladi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (16)$$

Teskari tasdiq ham o'rinli, ya'ni tekisliklarning normal vektorlarining mos koordinatalari proportsional bo'lsa, tekisliklar o'zaro parallel bo'ladi. Shuning uchun (16) tenglik tekisliklarni parallelligining zarur va yetarlilik sharti bo'ladi.

Agar tekisliklar perpendikulyar bo'lsa, u holda $\overrightarrow{N_1}$ va $\overrightarrow{N_2}$ vektorlar ham perpendikulyar bo'ladi, ma'lumki perpendikulyar vektorlarning skalyar kupaytmasi $0$ga teng bo'ladi:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad . \qquad (17)$$

Teskari tasdiq ham o'rinli. Shuning uchun (17) tenglik tekisliklarning perpendikulyarligini zaruriy va yetarli sharti bo'ladi.

**8-misol**. $2x - 3y - z + 4$ =0 va $x - 2y + 3z + 7 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $\cos\varphi = \pm\dfrac{2+6-3}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+4+9}} = \pm\dfrac{5}{14} \approx \pm 0,357;$

$$\varphi_1 \approx 69^0 5^1, \varphi_2 \approx 110^0 55^1.$$

## 6-§. Nuqtadan tekislikgacha bo'lgan masofa.

Faraz qilaylik, $M_0(x_0 ; y_0; z_0)$ nuqtadan

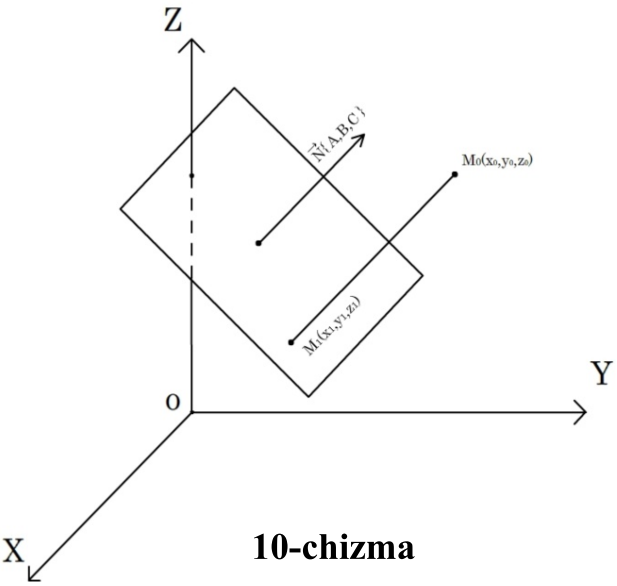
$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (18)$$

tekislikgacha bo'lgan masofani topish talab etilayotgan bo'lsin. $M_0$ nuqtadan tekislikga $M_0M_1$ perpendikulyar tushiramiz.

Talab qilinayotgan $d = |M_1M_0|$ masofa $\overrightarrow{M_1M_0}$ vektorning moduli (uzunligi) bo'ladi. Tekislikning normal vektori $\vec{N}\{A; B; C\}$ va $\overrightarrow{M_1M_0}$ vektor parallel bo'lgani uchun skalyar ko'paytmaning xossasiga ko'ra

$$\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M_0} = \pm|N|\cdot d \qquad (19)$$

$M_1$ nuqtaning koordinatalari $x_1, y_1, z_1$ bo'lsin, u holda $\overrightarrow{M_1M_0}$ vektor $\{x_0 - x_1;\ y_0 - y_1;\ z_0 - z_1\}$ koordinatalarga ega bo'ladi va (19) tenglik koordinatalar orqali




**10-chizma**

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = \pm|\vec{N}|\cdot d$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Hosil qilingan tenglikning chap tomonidagi qavslarni ochib hamda $D$ ni qo'shib va ayiramiz, natijada

$$Ax_0 + By_0 + cz_0 + D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = \pm|\vec{N}| \cdot d \quad (20)$$

tenglikni hosil qilamiz. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqta (18) tekislikda yotadi, shuning uchun $Ax_1 + By_1 + cz_1 + D \equiv 0$ (20) tenglik $Ax_0 + By_0 + cz_0 + D = \pm|\vec{N}| \cdot d$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdan

$$d = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + cz_0}{|\vec{N}|} \quad (21)$$

ekanligini topamiz.

$|\vec{N}|$ $\vec{N}\{A;B;C\}$ vektorning uzunligi, shuning uchun

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ .$$

(21) formulani absolyut qiymat belgisi yordamida $\pm$ ishorasiz ham yozish mumkin:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(21) formulada qanday xolatda “+” ishora va qanday xolatda “-” ishora olinishiga aniqlik kiritamiz. $Ax + By + cz + D = 0$ tekislik fazoni ikki qismga ajratadi. Skalyar ko'paytma xossasidan kelib chiqadiki, $\vec{N}$ va $\overline{M_1M_0}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lgandagina (19) va (21) formulalarda “+” ishora olinadi, ya'ni $M_0$ nuqta fazoning $N$ normal vektor tekislikdan chiqqan yo'nalishi qismda joylashgan bo'lsa (10-chizma). Bundan kelib chiqadiki chiqqan yo'nalishi fazoning bu qismidagi nuqtalarda $Ax + By + cz + D > 0$, qolgan qismidagi nuqtalarda esa $Ax + By + cz + D < 0$ bo'ladi.

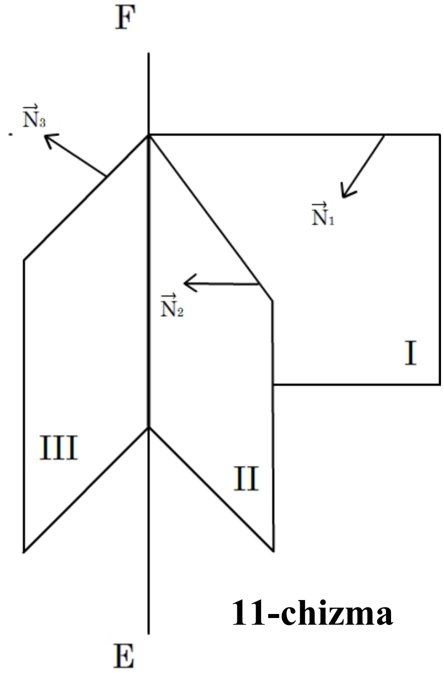
**9-misol.** $M_1(2;0;8)$, $M_2(2;0;2)$ va $O(0;0;0)$ nuqtalardan $2x - 2y + z - 6 = 0$ tekislikgacha bo'lgan masofalarni toping.

Yechish. $d_1 = \dfrac{|2\cdot 2 - 0 + 1\cdot 8 - 6|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{|+6|}{3} = 2,\ d_2 = \dfrac{|2\cdot 2 - 0 + 1\cdot 2 - 6|}{3}$ =0,

$$d_3 = \frac{|-6|}{3} = 2\ .$$

$M_1$ nuqta fazoning tekislikdan $\vec{N}\{2;-2;1\}$ vektor yo'nalgan qismida yotadi (chunki $2\cdot 0-2\cdot 0+1\cdot 8-6=6>0$), $O$ nuqta fazoning qarama – qarshi qismida yotadi, $M_2$ nuqta esa tekislikni o'zida yotadi.

## 7-§. Uch tekislikning kesishish nuqtasi.




**11-chizma**

Uch tekislikning kesishish nuqtasini topish uchun tekisliklarning tenglamalarini birgalikda sistema qilib yechish kerak.

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Faraz qilaylik, bu sistemaning determinanti

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

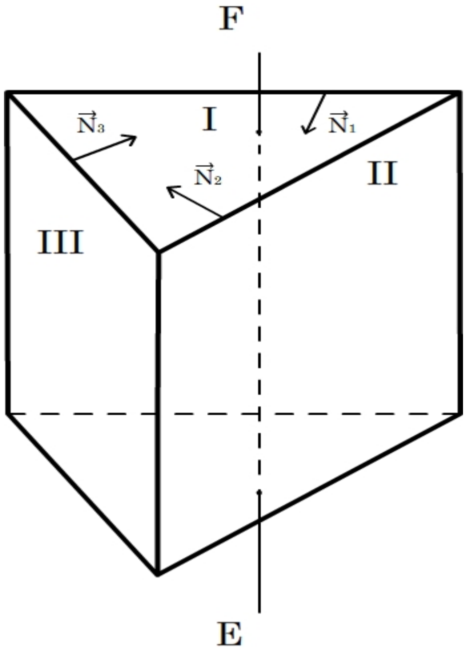
U holda determinantlar nazariyasidan ma’lumki (1-BOB,2-§) $x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ formulalar yordamida (22) tekisliklarning yagona kesishish nuqtasi topiladi.

Endi faraz qilaylik, (22) sistemaning determinanti nolga teng bo'lsin: $\Delta=0$. Geometrik nuqtai nazardan bu tekisliklarning $\overrightarrow{N_1}\{A_1,B_1,C_1\}$, $\overrightarrow{N_2}\{A_2,B_2,C_2\}$ va $\overrightarrow{N_3}\{A_3,B_3,C_3\}$ normal vektorlari collinear va shuning uchun bitta to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lishi (ekanligi) kelib chiqadi. Bunday xolat ikki holda bo'lishi mumkin: 1) tekisliklar bitta $EF$ to'g'ri chiziqdan o'tadi (11-chizma) (xususiy holda, ikkita yoki uchta tekisliklar ustma – ust tushadi). Bu holda tekisliklarning cheksiz ko'p to'plamda kesishish nuqtalari mavjud bo'ladi. (22) Sistema aniqlanmagan bo'ladi. 2) birorta ham tekislikda yotmagan qandaydir $EF$ to'g'ri chiziqqa barcha tekisliklar parallel (12-chizma) (xususiy holda ikkita yoki uchta tekislik o'zaro parallel). Bu holda barcha uchta tekisliklarning umumiy kesishish nuqtasi bo'lmaydi. (22) sistema birgalikda emas.

## 8-§. Tekislik tenglamasini tuzish uchun misollar.

**10-misol.** $M(1;2;6)$ nuqtadan va $Ox$ o'qidan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Axtarilayotgan tenglama $By + cz = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi (III). Tenglamaga $M$ nuqtaning koordinatalarini qo'yib $2в + 6c = 0$ yoki $B = -3C$ tenglikni hosil qilamiz. Bu holda tekislik tenglamasi $-3Cy + Cz = 0$ ko'rinishga keladi. Tenglamani $-C$ ga qisqartirib, ($3y - z = 0$) ekanligini hosil qilamiz.




**12 - chizma**

**11-misol.** $M_1(2;-1;3)$ va $M_2(4;1;5)$ nuqtalardan o'tib, Ox o'qiga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $M_1$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$A(x-2) + B(y+1) + c(z-3) = 0$

ko'rinishda bo'ladi (II). Axtarilayotgan tekislik $Ox$ o'qiga parallel bo'lgani uchun (III) $A = 0$ bo'lib, uning tenglamasi

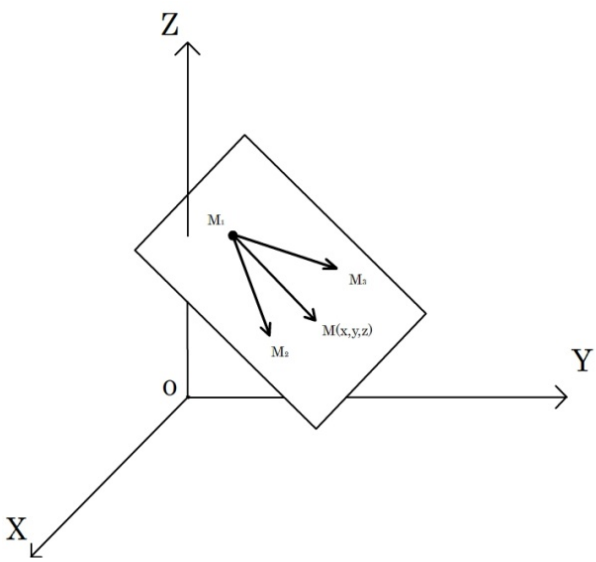
$$B(y+1) + c(z-3) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamaga ikkinchi $M_2(4;1;5)$ nuqtaning koordinatalarini qo'yib $2в + 2c = 0$ yoki $C = -B$ ekanligini topamiz. Bu holda tekislik tenglamasi $B(y+1) - в(z-3) = 0$ ko'rinishga keladi. Tenglamani $B$ ga qisqartirib $y - z + 4 = 0$ tenglamani hosil qilamiz.

**12-misol.** $M_1(2;-1;3)$, $M_2(4;1;5)$ va $M_3(1;2;-4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $M(x;y;z)$ axtarilayotgan tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (13-chizma).

$\overrightarrow{M_1M}=\{x-2;y+1;z-3\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{4-2;1-(-1);5-3\}=\{2;2;2\}$,



$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{1-2;\ 2-(-1);\ -4-3\} = \{-1;3;\ -7\}$$

vektorlar shartga ko'ra axtarilayotgan tekislikda yotishi kerak, ya'ni komplanar. **13-chizma**
Vektorlarning komplanarlik shartidan

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 .$$

Determinantni 1 – satri bo'yicha yoyish natijasida

$$-20(x-2) + 12(y+1) + 8(z-3) = 0$$

ekanligini hosil qilamiz. Tenglamani chap tomonini soddalashtirib

$$5x - 3y - 2z - 7 = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Natijani $M_1, M_2$ va $M_3$ nuqtalarning har birini koordinatalarini hosil qilingan tenglamaga qo'yib tekshirish mumkin.

Yechishning 2-usuli. Axtarilayotgan tekislik $M_1(2;\ -1;3)$ nuqtadan o'tgani uchun tekislik tenglamasini

$$A(x-2) + B(y+1) + C(z-3) = 0 \quad (23)$$

ko'rinishida yozib olamiz. $M_2(4;1;5)$ va $M_3(1;2;-4)$ nuqtalar bu tekislikda yotadi. Bundan kelib chiqadiki,

$A(4-2) + B(1+1) + C(5-3) = 0;$

$A(1-2) + B(2+1) + C(-4-3) = 0,$

yoki

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ -A + 3B - 7C &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasidan $B = \frac{3}{2}\cdot C$ va $A = -\frac{5}{2}C$ ekanligini topamiz. Topilgan ifodalarni (23) tenglamaga qo'yamiz:

$$-\frac{5}{2}C\cdot(x-2) + \frac{3}{2}C\cdot(y+1) + C(z-3) = 0$$

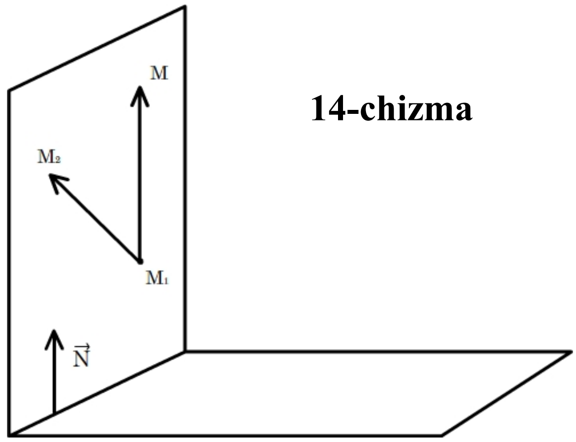
Oxirgi tenglamani $C$ ga qisqartirib va natijani soddalashtirib

$$5x - 3y - 2z - 7 = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

**13-misol.** $M_1(2;\ -1;3)$ va $M_2(4;1;5)$ nuqtalardan o'tib $x+2y+3z+4=0$ tekislikga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan tekislikning $\vec{N}\{1;2;3\}$ normal vektorini axtarilayotgan tekislikga joylashtirish mumkin (14-chizma). $M(x;y;z)$ axtarilayotgan tekislikdagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}$ va $\vec{N}$ vektorlar komplanar bo'ladi, ya'ni $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ shart bajarilishi kerak.



**14-chizma**

Oxirgi tenglamani chap tomonidagi determinantni hisoblab $x-2y+z-7=0$ tenglamani hosil qilamiz.

**14-misol.** $M_1(2;\ -1;3)$ nuqtadan o'tib $x+2y+3z=0$ va $4x-y+2z-5=0$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan tekisliklarning $\vec{N_1}(1;2;3)$ va $\vec{N_2}\{4;\ -1;2\}$ normal vektorlarini axtarilayotgan tekislikga joylashtirish mumkin. $M(x,y,z)$ axtarilayotgan tekislikdagi ixtiyoriy nuqta bo'lgan. U holda $\overline{M_1M}, \overline{N_1}$ va vektorlar komplanar bo'ladi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Oxirgi tenglamani chap tomonidagi determinantni hisoblab $7x+10y-9z+23=0$ axtarilayotgan tekislik tenglamasi hosil qilamiz.

## Mustaqil ish uchun masalalar.

1. a) x Oz tekislikka parallel va $(2;-5;3)$ nuqtadan o'tuvchi;

b) $Oz$ o'qidan va $(-3;1;\ -2)$ nuqtadan o'tuvchi;

s) $Ox$ o'qiga parallel va $(4;0;\ -2\ ),\ (5;1;7)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi tuzilsin.

J: a) $y+5=0$; b) $x+3y=0$; s) $9y-z-2=0$.

2. Quyidagi tekisliklarning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari hisoblansin.

a) $2x-3y-z+12=0$; d) $x-4z+6=0$;

b) $5x+y-3z-15=0$; e) $5x-2z+z=0$;

s) $x-y+z-1=0$; f) $x-7=0$;

J: a) $-6;\ 4;\ 12$; b) $3;\ 15;\ -5$; s) $1;\ -1;\ 1$;

d) $-6;\ \infty;\ \frac{3}{2}$; (tekislik $Oy$ tekiligiga parallel);

e) $0;0;0$; f) $7;\ \infty;\ \infty$ (tekislik $yOz$ tekiligiga parallel).

3. Quyidagi tekisliklarning tenglamalari normal shaklga keltirilsin.

a) $2x-9y+6z-22=0$; b) $10x+2y-11z+60=0$;

s) $6x-6y+7z+33=0$

J: a) $2/11\,x-9/11\,y+6/11\,z-2=0$; b) $-\frac{2}{3}x-\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-4=0$;

s) $-\frac{6}{11}x+\frac{6}{11}y+\frac{7}{11}z-3=0$.

4. Koordinatalar boshidan 15x-10y+6z-190=0 tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

J: $d=10$

5. $x-y+\sqrt{2}\cdot z-5=0$ tekislik bilan $yOz$ tekisligi orasidagi burchak topilsin.

J: $\varphi=\frac{\pi}{3}$

6. Uchlari quyidagi nuqtalarda yotgan piramidaning balandligi $h_s$ topilsin: $S(0;6;4)$

$A(3;5;3)$, $B(-2;11;5)$, $C(1;-1;4)$.

J: $h_s=3$.

7. Oynaning vaziyati $2x-6y+3z-42=0$ tenglama bilan aniqlanadi. A$(3;-7;5)$ nuqtaga bu oynaga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtaning vaziyati aniqlansin.

J: $A^1\left(\frac{9}{7};-\frac{13}{7};\frac{17}{7}\right)$.

8. Quyidagi shartlarga asosan tekislikning tenglamasi tuzilsin:

a) tekislik $(-2;7;3)$ nuqtadan o'tadi va $x-4y+5z-1=0$ tekislikka parallel;

b) tekislik koordinatalar boshidan o'tadi va quyidagi ikki tekislikka perpendikulyar: $2x - y + 5z + 3 = 0$ va $x + 3y - z - 7 = 0$;

s) tekislik $L(0;0;1)$ va $N(3;0;0)$ nuqtalardan o'tadi va $xOy$ tekisligi bilan $60^0$ li burchak tashkil etadi.

J: a) $x - 4y + 5z + 15 = 0$; b) $2x - y - z = 0$;

s) $x \pm \sqrt{26} \cdot y + 3z - 3 = 0$.

9. $11x - 2y - 10z + 15 = 0$ va $11x - 2y - 10z - 45 = 0$ tekisliklar orasidagi masofa hisoblansin.

J: $d = 4$

10. $3x - 6y - 2z + 35 = 0$ tekislikdan uch birlik masofada unga parallel bo'lgan tekislikning tenglamasi tuzilsin.

J: $3x - 6y - 2z + 35 = 0$ va $3x - 6y - 2z - 7 = 0$

11. Koordinatalar boshidan va $A(3;-2;1)$, $B(1;4;0)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi tuzilsin.

J: $4x - y - 14z = 0$

12. Tetraedrning uchlari berilgan: $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$ va $D(4;1;2)$. Shu tetraedrning yoqlarini tenglamalari tuzilsin.

J: $x - 3y - z + 2 = 0$ (ABC); $x - 4y - z + 2 = 0$ (ABD);

$2x - 8y - 3z + 6 = 0$ (ACD); $2x - 11y - 3z + 9 = 0$ (BCD).

13. Quyidagi uchta tekisliklarning kesishish nuqtasi topilsin:

a) $5x + 8y - x - 7 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$, $2x - 3y + 2z - 9 = 0$;

b) $x - 4y - 2z + 3 = 0$, $3x + y + z - 5 = 0$, $-3x + 12y + 6z - 7 = 0$;

s) $2x - y + 5z - 4 = 0$, $5x + 2y - 13z + 23 = 0$, $3x - z + 5 = 0$.

J: a) $(3; -1; 0)$;

b) uchala tekislikning kesishish nuqtasi yo'q, chunki I va III tekisliklar o'zaro parallel;

s) kesishish nuqtasi aniqmas: uchala tekislik bitta to'g'ri chiziq orqali o'tadi.

14. $4x - y + 3z - 1 = 0$ va $x + 5y - z + 2 = 0$ tekisliklarning kesishish chizig'i orqali shunday tekislik o'tkazingki, u tekislik:

a) koordinatalar boshidan o'tsin; b) $(1;1;1)$ nuqtadan o'tsin;

s) *Oy* o'qiga parallel bo'lsin; d) $2x-y+5z-3=0$ tekislikka perpendikulyar bo'lsin.

J: a) $9x+3y+5z=0;$ b) $23x-32y+26z-17=0;$

s) $21x+14z-3=0;$ d) $7x+14y+5=0$ .

## 8-BOB. Fazodagi to'g'ri chiziq.

Fazodagi chiziq tenglamalari. Fazodagi ixtiyoriy $L$ chiziqni qandaydir sirtlarning kesishish nuqtalarining geometrik o'rni sifatida qaraymiz. Faraz qilaylik,bu sirtlar to'g'ri burchakli koordinatalarda

$$\left.\begin{matrix} F_1(x;y;z)=0; \\ F_2(x;y;z)=0. \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqta bu sirtlarning $L$ kesishish chizig'ida yotishi uchun uning koordinatalari (1) ning har bir tenglamasini qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun ham (1) tenglamalar $L$ chiziqning tenglamalari deb ataladi.

Shunday qilib, fazodagi chiziq to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida $x, y, z$ o'zgaruvchili ikkita tenglamalar sistemasi yordamida aniqlanadi.

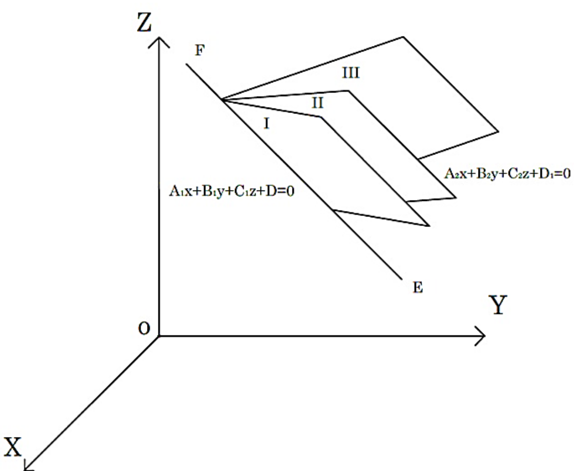
Masalan, $\begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=10, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

ikki sfera tenglamalari birgalikda $Oxy$ tekislikda yotuvchi markazi koordinatalar boshida radiusi esa birga teng bo'lgan aylanani aniqlaydi.

### I-§.To'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari, tekisliklar dastasi.

Birinchi tartibli ikkita

$$\left.\begin{matrix} (I)A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ (II)A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{matrix}\right\} \quad (2)$$



tenglamalar sistemasi $x, y, z$ o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlar proportsional bo'lmaganda (I) va (II) tekisliklarning kesishish chizig'i sifatida qandaydir $EF$ to'g'ri chiziqni aniqlaydi (1-chizma). (2) tenglamalar to'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari deb ataladi.

(2) tenglamalardan ikkinchisini $k$ ga ($k$ o'zgaruvchi parametr) ko'paytirib, birinchisi bilan qo'shib

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k\left(A_2x + B_2y + C_2z\right) = 0 \quad \text{(III)}$$

tenglamani hosil qilamiz. Ixtiyoriy $k$ da $(k \neq 0)$ tenglama $x, y, z$ larga nisbatan birinchi

**1-chizma**

tartibli bo'lgani uchun qandaydir tekislikni aniqlaydi. Bu tekislik $EF$ to'g'ri chiziqdan o'tadi (1-chizma). Haqiqatda, (III) tenglamaga $EF$ chiziqning ixtiyoriy $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasining koordinatalarini qo'yib,

$$\underbrace{A_1x_0 + B_1 \cdot y_0 + C_1z_0 + D_1}_{0} + k \cdot \underbrace{A_2x_0 + B_2 \cdot y_0 + C_2z_0 + D_2}_{0} = 0 + k \cdot 0 \equiv 0$$

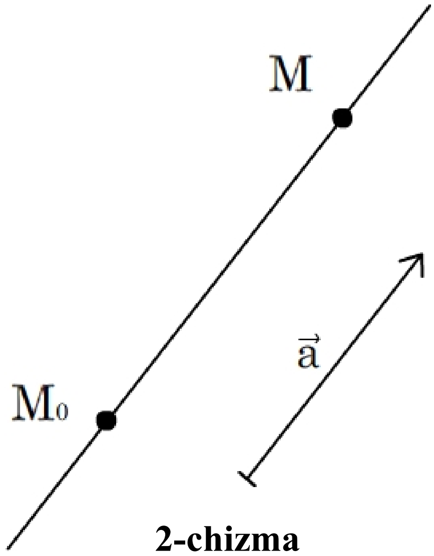
ayniyatni hosil qilamiz. Aksincha, $EF$ chiziq orqali o'tuvchi ixtiyoriy $P$ tekislik qandaydir $k$ da (III) tenglama bilan aniqlanadi. $k$ ning bunday qiymatini $EF$ to'g'ri chiziqda yotmagan $P$ tekislikning biror $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtasining koordinatalarini (III) tenglamaga qo'yish natijasida topiladi.

(III) tenglama (2) to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasi deb ataladi.

## 2-§. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

Masalalarni hal qilishda (2) tenglamalar har doim ham qulay bo'lmaydi, shuning uchun to'g'ri chiziq tenglamasining maxsus ko'rinishidan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, qandaydir $L$ to'g'ri chiziq va shu to'g'ri chiziqda yotgan yoki unga parallel bo'lgan *o* dan farqli $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsin (2 - chizma) $\vec{a}$ vektor berilgan chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb ataladi. Berilgan $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan $\vec{a} = \{l; m; n\}$ yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini keltirib chiqaramiz.



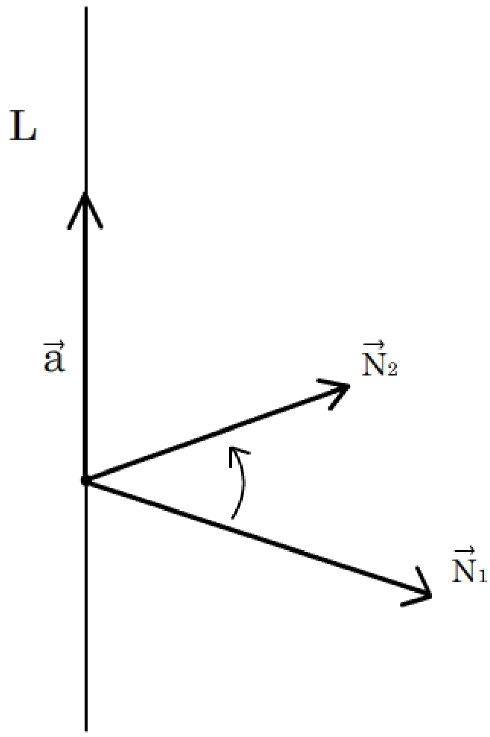
**2-chizma**

Faraz qilaylik, $M(x; y; z)$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Bu nuqta to'g'ri chiziqda $\overline{M_0M} - \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ vektor $\vec{a} = \{l; m; n\}$ yo'naltiruvchi vektorga kollinear, ya'ni $\overline{M_0M}$ vektorning koordinatalari $\vec{a}$ vektorning koordinatalariga proportsional

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (3)$$

bo'lgandagina yotadi. (3) tenglamalar axtarilayotgan tenglamalar bo'ladi. Ular to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari deb ataladi.

To'g'ri chiziqlarning tenglamalari kanonik (3) formada berilganda ko'pincha masalalar oson yechiladi, shuning uchun umumiy ko'rinishdagi (2) tenglamalar sistemasini bu shaklarga keltirabilish juda muhimdir. Bunga quyidagicha erishish mumkin: 1) to'g'ri chiziqqa tegishli biror $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta topiladi. Buning uchun noma'lum $x_0; y_0; z_0$ koordintalardan biriga sonli qiymat berib uni (1) tenglamalardagi mos o'zgaruvchi o'rniga qo'yiladi, qolgan ikki koordinatalar (1) tenglamalarni birgalikda yechish natijasida aniqlanadi;



**3-chizma**

2) yo'naltiruvchi $\vec{a} = \{l; m; n\}$ vektor topiladi, $L$ to'g'ri chiziq (I) va (II) tekisliklarning kesishishi orqali aniqlangani uchun, u $\vec{N_1}$ va $\vec{N_2}$ normal vektorlarning har biriga perpendikulyar bo'ladi (3 - chizma). Shuning uchun $\vec{a}$ vektor sifatida $\vec{N_1}$ va $\vec{N_2}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy vektorni olish mumkin, masalan ularning $\vec{a} = [\vec{N_1}, \vec{N_2}]$ vektor ko'paytmasini $\vec{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ va $\vec{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ vektorlarning koordinatalari ma'lum bo'lgani uchun (3-bob, 4-§) $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini topamiz:

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} = \{l; m; n\}.$$

$$1 - \text{misol.} \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0, \end{cases}$$

to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari topilsin.

Yechish. Masalan, $x_0 = 1$ deb hisoblab,

$$\begin{cases} 2y_0 + 4z_0 - 8 = 0, \\ y_0 - 3z_0 + 1 = 0, \end{cases}$$

sistemasidan $y_0 = 2, z_0 = 1$ ekanligini topamiz. Shunday qilib, to'g'ri chiziqning $M_0(1; 2; 1)$ nuqtasi topildi. Endi $\vec{a}$ yo'naltiruvchi vektorlarni aniqlaymiz. $\vec{N_1} = \{3; 2; 4\}$, $\vec{N_2} = \{2; 1; -3\}$ bo'lgani uchun

$\vec{a} = [\vec{N_1}, \vec{N_2}] = \{-10; 17; -1\}$, ya'ni $l = -10, m = 17, n = -1$ bo'ladi. $x_0, y_0, z_0$ va $l, m, n$ larning topilgan qiymatlarini (3) ga qo'yib to'g'ri chiziqning

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}$$

kanonik tenglamasini topamiz.

## 3-§. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Ba'zan to'g'ri chiziqni kanonik ko'rinishda emas, balki boshqacha ko'rinishi ba’zi masalalarni yechishda qulay bo'ladi. Faraz qilaylik, $L$ to'g'ri chiziq (3) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Teng nisbatlarning har birini $t$ orqali belgilaymiz.

U holda

$$\frac{x-x_0}{e}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

bu yerdan

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt \qquad (4)$$

(4) tengliklar $L$ to'g'ri chiziqning $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o'tib, $\vec{a}=\{l;m;n\}$ yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan parametrik tenglamalari deb ataladi. (4) tenglamalarda $t$ ni ixtiyoriy o'zgaruvchi parametr sifatida $(-\infty<t<+\infty)$, $x,y,z$ larni $t$ ning funktsiyalari sifatida qaraladi. $t$ o'zgarganda $x,y,z$ qiymatlar o'zgaradi, natijada $M(x;y;z)$ nuqta berilgan to'g'ri chiziq bo'yicha xarakatda bo'ladi.

Parametrik tenglamalar ayniqsa to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishish nuqtasini topishda qulay. Faraz qilaylik, parallel bo'lmagan $\pi$ tekislik va $L$ to'g'ri chiziq mos ravishda

$$Ax+By+Cz+D=0$$

va

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq bilan tekislik kesishish nuqtasini topish uchun $L$ ning tenglamalaridan $x,y,z$ lar uchun ifodalarni $\pi$ tenglamasiga qo'yamiz. Ayniy almashtirishlar natijasida $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$ tenglikni hosil qilamiz, bu yerda tekislik to'g'ri chiziqqa parallel bo'lmagani uchun kasr maxraji noldan farqli. $t$ ning topilgan qiymatini to'g'ri chiziq tenglamalariga qo'yib $L$ to'g'ri chiziq bilan $\pi$ tekislik kesishish nuqtasi $M(x;y;z)$ ni topamiz.

Mexanikada (4) tenglamalar $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan chiqqandan so'ng $t$ sekund oralig'ida $\vec{v}\{l;m;n\}$ tezlik bilan tekis harakatlanayotgan $M(x;y;z)$ nuqtaning koordinatalarini aniqlaydi.

Ba’zi bir xususiy hollarda aniqlik kiritamiz. Agar $\vec{a}\{l;m;n\}$ yo'naltiruvchi vektorning koordinatalaridan biri nolga teng bo'lsa, masalan, $l=0$ u holda (3) tenglamalar

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad (5)$$

mumkin bo'lmagan $0$ ga bo'lishni o'z ichiga olgan ko'rinishga keladi. (4) tenglamalarga e'tibor bersak, ulardan birinchisi $l=0$ da $x=x_0$ ko'rinishga keladi, bu esa berilgan to'g'ri chiziq $x=x_0$ yoki $x-x_0=0$ tekislikda yotishini bildiradi. Bundan kelib chiqadiki, berilgan to'g'ri chiziq

$$\left.\begin{array}{c} x-x_0=0; \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n} \end{array}\right\} \quad (6)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Shunday qilib, ko'rilayotgan holda (5) tenglamalarni (6) tenglamalar o'rinli bo'ladi shart ostida saqlab qolamiz (tushunamiz).

Xuddi shunday, $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{n}$ tenglamalarni $\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0, \end{cases}$ yoki $\begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0, \end{cases}$

tenglamalar sistemasi o'rinli bo'ladi deb tushunish kerak. Bu sistema $Oz$ o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Xususiy holda, $Oz$ o'qi $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ sistema bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, to'g'ri chiziq berilgan $A_1(x_1;y_1;z_1)$ va $B_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan o'tsin. Uning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\overline{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ vektorni olish mumkin. To'g'ri chiziqning (3) kanonik tenglamalari

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (7)$$

ko'rinishga keladi.

(7) tenglamalar berilgan ikki $A_1(x_1;y_1;z_1)$ va $B_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari deb ataladi.

**2-misol.** $A(3;-1;0)$ va $B(4;1;-1)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Axtarilayotgan to'g'ri chiziqning tenglamasini (7) formulalarga asosan topamiz:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

## 4-§. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

## Parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Ta'rifga ko'ra $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ va $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ ikki to'g'ri chiziq orasidagi $\varphi$ burchak ularning yo'naltiruvchi $\vec{a}_1\{l_1;m_1;n_1\}$ va $\vec{a}_2\{l_2;m_2;n_2\}$ vektorlari orasidagi burchakka teng. Ikki vektor orasidagi burchak formulasiga ko'ra

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

ekanligini topamiz.

Parallellik sharti. Ikki to'g'ri chiziq $\vec{a}_1\parallel\vec{a}_2$ bo'lgandagina, ya'ni

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

shartlar bajarilgandagina parallel bo'ladi.

Perpendikulyarlik sharti. Ikki to'g'ri chiziq $\vec{a}_1\perp\vec{a}_2$ bo'lgandagina, ya'ni $l_1l_2+m_1m_2+\ n_1n_2$ shartlar bajarilgandagina o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

**3-misol**. $M(2;\,-3;4)$ nuqtadan o'tib, $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+5}{2}$ va $\frac{x-8}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{1}$ to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Axtarilayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini $\frac{x-2}{e}=\frac{y+3}{m}=\frac{z-4}{n}$ ko'rinishda yozib olish mumkin. $l,m,n$ larni to'g'ri chiziqni berilgan to'g'ri chiziqlarga perpendikulyarlik $l-m+2n=0,\ 3l-2m+n=0$ shartlaridan topamiz. Buning uchun masalan, $n$ ga 1 qiymat berib

$$\begin{cases}l-m=-2\\3l-2m=-1\end{cases}$$

sistemani yechish orqali $l=3;\ m=5;\ n=1$ ekanligini topamiz.

Demak, axtarilayotgan to'g'ri chiziq tenglamalari

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{1}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Yechishning 2-usuli. Berilgan to'g'ri chiziqlar $\vec{a}_1=\{1;-1;2\}$ va $\vec{a}_2=\{3;-2;1\}$ yo'naltiruvchi vektorlarga ega. Axtarilayotgan to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar bo'lgani uchun uning yo'naltiruvchi vektori sifatida $[\vec{a_1}, \vec{a_2}]$ vektor ko'paytmani olish mumkin:

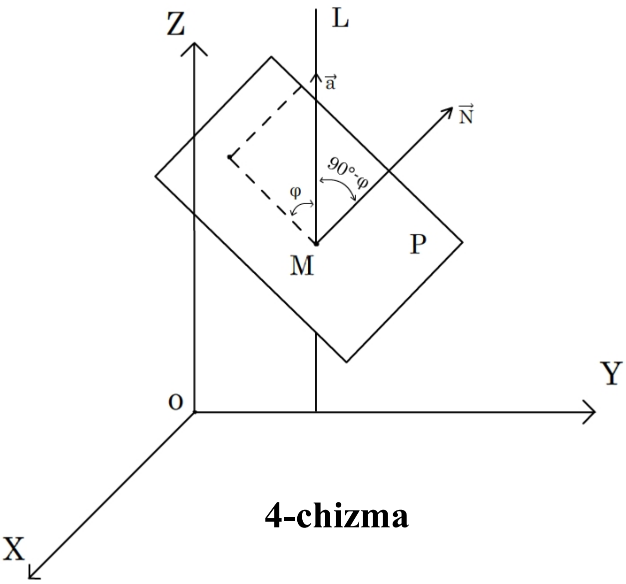
$$[\vec{a_1}, \vec{a_2}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3i + 5j + k .$$

Bu yerda naxtarilayotgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari $l = 3, m = 5, p = 1$ bo'ladi.

Demak, axtarilayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{1}$

## 5-§. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi $\varphi$ burchak deb to'g'ri chiziq va uning tekislikdagi proektsiyasi orasidagi burchakka aytiladi (4 - chizma). Faraz qilaylik, $L$ to'g'ri chiziq $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y \quad y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ tenglamalar yordamida, tekislik $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan va ular orasidagi $\varphi$ burchakni topish talab etilyapti.




**4-chizma**

To'g'ri chiziqning $\vec{a}\{l; m; n\}$ yo'naltiruvchi va berilgan tekislikning $\vec{N}\{A; B; C\}$ normal vektorini $L$ to'g'ri chiziqning $P$ tekislik bilan kesish nuqtasi *M* (4-chizma) nuqtaga qo'yamiz. Agar $\vec{a}$ va $\vec{N}$ vektorlar tekislikning bir tomoniga yo'naltirilgan bo'lsa (4 – chizmadagi singari), u holda ular orasidagi burchak $90^0 - \varphi$ ga teng, agarda $\vec{a}$ va $\vec{N}$ vektorlar tekislikning har xil tomoniga yo'naltirilgan bo'lsa, u holda ular orasidagi burchak $90^0 + \varphi$ ga teng bo'ladi. Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning orasidagi burchakni topish formulasiga ko'ra

$$\cos(90^0 \pm \varphi) = \frac{(\vec{a}, \vec{N})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{N}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Bu yerdan

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8)$$

Parallellik sharti. To'g'ri chiziq va tekislik $\vec{a} \perp \vec{N}$ bo'lgandagina, ya'ni

$$Al + Bm + Cn = 0$$

shart bajarilganda parallel bo'ladi.

Perpendikulyarlik sharti. To'g'ri chiziq va tekislik $\vec{a} \parallel \vec{N}$ bo'lgandagina, ya'ni

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

shartlar bajarilganda perpendikulyar bo'ladi.

**4-misol.** $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ z = 5 - 3x \end{cases}$

to'g'ri chiziq va $x - 3y - 2z + 5 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamalarining har biridan $x$ ni topish orqali uning $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{-3}$ kanonik ko'rinishini yozib olamiz.

U holda (8) formulaga ko'ra

$$\sin\varphi = \frac{|1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3)|}{\sqrt{1 + 9 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{7} \approx 0,143$$

$\varphi$ burchak $0^0$ dan $180^0$ gacha chegarada joylashgan, shuning uchun $\varphi \approx 8^0 13^1$ yoki $171^0 47^1$.

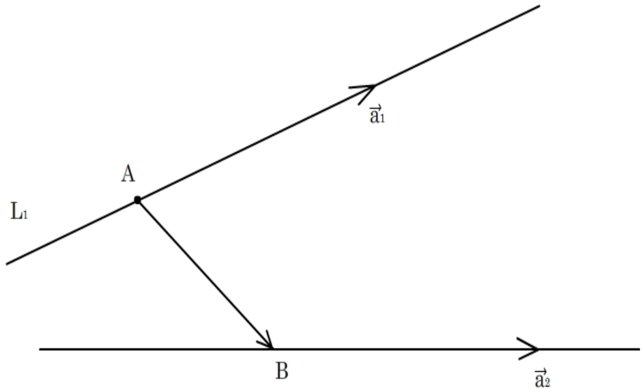
## 6-§. Ikki to'g'ri chiziqning bitta tekislikda joylashuvi sharti.

Faraz qilaylik, ikkita to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin:

$(L_1)$ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$;

$(L_2)$ $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$.

$L_1$ to'g'ri chiziqda $A(x_1;y_1;z_1)$ nuqta $L_2$ to'g'ri chiziqda esa $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqta yotibdi; $\overline{a_1}\{l_1;m_1;n_1\}$ vektor $L_1$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, $\overline{a_2}\{l_2;m_2;n_2\}$ vektor esa $L_2$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori (5 - chizma). Agar $\overline{AB}, \overrightarrow{a_1}$ va $\overrightarrow{a_2}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda $L_1$ va $L_2$ to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi va aksincha. Buning uchun esa $\overline{AB}, \vec{a_1}$ va $\overrightarrow{a_2}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni



**5-chizma**

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Shunday qilib, agar (9) shart bajarilsa, u holda to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi, (9) shart bajarilmasa, u holda to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi.

**5-misol.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1}$ va $\frac{x+2}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$ to'g'ri chiziqlar kesishishadimi?

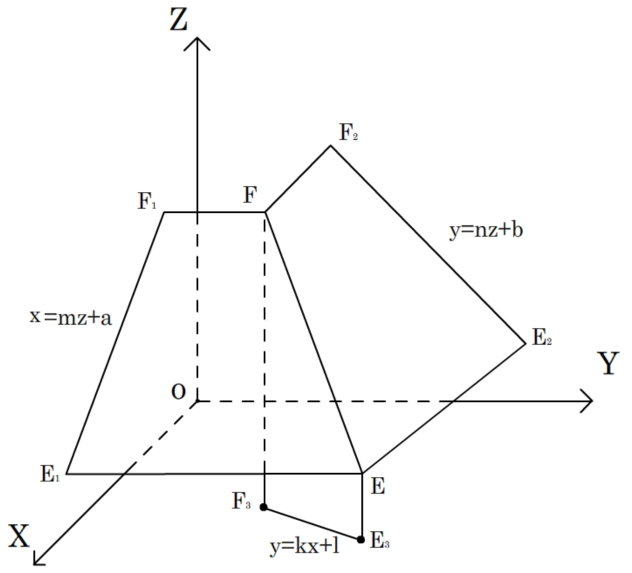
Yechish. $\begin{vmatrix} -2-1 & 2+2 & 1+1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -89 \neq 0$.

Bundan kelib chiqadiki, to'g'ri chiziqlar ayqash.

## 7-§. Proektsiyalardagi to'g'ri chiziq tenglamalari.

Faraz qilaylik, $EF$ to'g'ri chiziq

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$



tenglamalar bilan berilgan bo'lib, $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ nisbatlar orasidagi tenglamalari bo'lmasin (6-chizma).

Birinchi tenglamani $B_2$ ga, ikkinchisini esa $-B_1$ ga ko'paytirib, hadma – had qo'shish natijasida $y$ ni o'z ichiga olmagan tenglama hosil qilish mumkin. Uni

$$x = m \cdot z + a \qquad (11)$$

ko'rinishda yozib olamiz. (11) tenglama $Oy$ o'qiga parallel tekislikni aniqlaydi.

(11) tenglama (10) tenglamalarni natijasi bo'lgani uchun (10) tenglamalarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari tenglamani ham qanoatlantiradi, bundan kelib chiqadiki (10) to'g'ri chiziqda yotgan ixtiyoriy nuqta (11) tekislikda ham yotadi. Shunday qilib, $EF$ to'g'ri chiziq (11) tekislikda yotadi (6 -chizma). Bu tekislik $(EFE_1F_1)$ $EF$ to'g'ri chiziqni $y = 0$ ( ya'ni $OXZ$ tekislik) tekislikka proektsiyalaydi.

Xuddi shunday, (10) tenglamalardan $x$ yoki $z$ ni yo'qotib, $EF$ to'g'ri chiziqni $x = 0$ va $z = 0$ tekisliklar prooektsiyalovchi $EFE_2F_2$ va $EFE_3F_3$ tekisliklarning

$$y = nz + b, \qquad (12)$$

$$y = kx + l, \qquad (13)$$

tenglamalarini hosil qilamiz.

$E_1F_1$, $E_2F_2$ va $E_3F_3$ proektsiyalarning o'zlarining tenglamalari mos ravishda

$$\left.\begin{array}{r} x = mz + a; \\ y = 0; \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y = nz + b; \\ x = 0; \end{array}\right\} \quad \text{va} \quad \left.\begin{array}{r} y = kx + l; \\ z = 0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

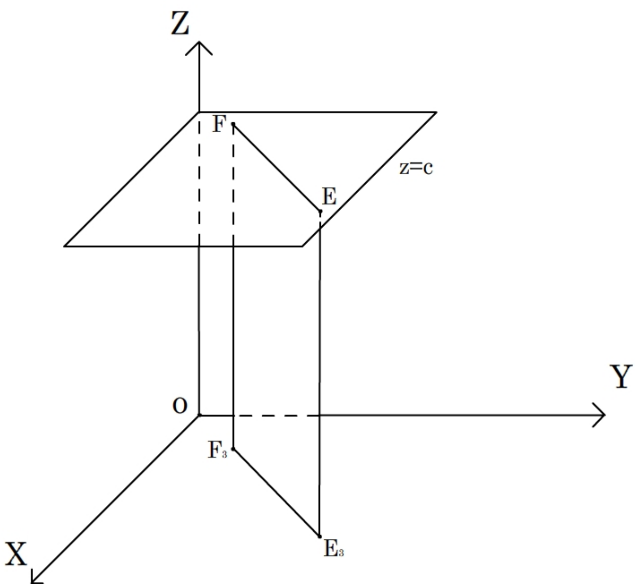
ko'rinishda bo'ladi.

(11), (12) va (13) proektsiyalovchi tekisliklar tenglamalarining ixtiyoriy ikkitasining sistemasi, masalan,

$$\left.\begin{array}{r} x = mz + a, \\ y = nz + b, \end{array}\right\} \qquad (15)$$

proektsiyadagi to'g'ri chiziq tenglamalari deb ataladi.

Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ bo'lsa, u holda (10) tenglamalardan $y$ ni yo'qota turib bir vaqtda




**6-chizma**

$x$ ni ham yo'qotamiz. $z = c$ tenglamani hosil qilamiz. To'g'ri chiziq $z = c$ gorizontal tekislikda joylashgan bo'ladi (7-chizma). Shundan so'ng (10) tenglamalardan $z$ ni yo'qotib $y = kx + l$ ekanligini topamiz. Bu holda (10) to'g'ri chiziqning proektsiyalarda tenglamalari $\left.\begin{array}{r} z = c; \\ y = kx + l. \end{array}\right\}$ ko'rinishida bo'ladi.

Tenglamalariga ko'ra to'g'ri chiziqni yasash uchun uning koordinata tekisliklaridagi izlarini (ya'ni, koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini) topish kerak. Buning uchun to'g'ri chiziq tenglamalarida yoki $z = 0$, yoki $y = 0$, yoki $x = 0$ deb olish kerak. Masalan, (15) tenglamalardan $EF$ to'g'ri chiziqning $z = 0$ tekisligidagi izi $(a; b; 0)$ nuqta ekanligini topamiz.

Umuman, ta'kidlab o'tish joizki, ixtiyoriy chiziq tenglamalaridan $z$ ni yo'qotib, $z = 0$ tekisligidagi chiziqning proektsiyasi topiladi, chiziq tenglamalarida $z = 0$ ni qo'yib, so'ngra $x$ va $y$ larga nisbatan sistemani yechib esa chiziqning $z = 0$ tekisligida izini topiladi.

**6-misol**. $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y - 8z + 6 = 0, \\ x + y + z - 7 = 0. \end{array}\right\}$

chiziq berilgan. Uning proektsiyalardagi tenglamalarini yozing va koordinata tekisliklaridagi izlarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamalardan avval $y$ ni, keyin $x$ ni yo'qotib

$$\left.\begin{array}{r} x = z + 3; \\ y = -2z + 4, \end{array}\right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziqning proektsiyalardagi tenglamalari. Topilgan tenglamalarda navbati bilan $z = 0, y = 0$ va $x = 0$ qo'yib, mos ravishda chiziqning va $Oxy, Oxz$ va $Oyz$ tekisliklaridagi $(3; 4; 0), (5; 0; 2)$ va $(0; 10; -3)$ izlarini topamiz.

**Mustaqil yechishga doir masalalar.**

1. To'g'ri chiziqning quyidagi tenglamalari kanonik shaklga keltirisin:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0; \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

J: $\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}$.

2. Uchlarining koordinatalari quyida berilgan tetraedrning qirralarining tenglamalari yozilsin: $A(0;0;2), B(4;0;5), C(5;3;0), D(-1;4;-2)$.

J:

$$\frac{x}{4}=\frac{z-2}{3}, y=0;\ x-4=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{-5};\ \frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-2};\ -x=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-4};\ \frac{x-4}{-5}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-7};\ \frac{x-5}{-6}=\frac{y-3}{1}=$$

.

3. Quyida to'g'ri chiziqlar bilan tuzilgan burchak topilsin:

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$; va $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$

J: $\cos\varphi=\frac{72}{77}$.

4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak topilsin: $\begin{cases}3x-4y-2z=0,\\ 2x+y-2z=0\end{cases}$ va $\begin{cases}4x+y-6z-2=0,\\ y-3z+2=0.\end{cases}$

J: $\cos\varphi=\frac{98}{195}$.

5. $(2;-5;3)$ nuqtadan

a) $z$ o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilsin;

b) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazilsin;

s) $\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\ 5x+4y-z-7=0.\end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chizilsin.

J: a) $\begin{cases}x-2=0,\\ y+5=0;\end{cases}$ b) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9}$; s) $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}$.

6. $A(2;3;1)$ nuqtadan $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning tenglamalari tuzilsin.

J: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

7. Koordinata boshidan $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tushirilsin.

J: $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$.

8. $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ to'g'ri chiziq bilan $3x+5-z-2=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

J: $(0;0;-2)$.

9. $2x+y-3z+1=0$ tekislik bilan $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$ va $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamalari tuzilsin.

J: $\frac{3x-14}{-5}=\frac{3y+10}{7}=\frac{3z-7}{-1}$.

10. $A$ koeffitsientining qanday qiymatida $Ax+3y-5z+1=0$ tekislik $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi?

J: $A=-1$.

11. $(3;-2;4)$ nuqtadan $5x+3y-7z+1=0$ tekislikka perpendikulyar tushirilsin.

J: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$.

12. $A(4;-3;1)$ nuqtaning $x+2y-z-3=0$ tekislikdagi proektsiyasi topilsin.

J: $(5;-1;0)$

13. $(3;1;-2)$ nuqtadan va $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislikning tenglamasi tuzilsin.

J: $8x-9y-22z-59=0$.

14. $\frac{x}{4}=\frac{x-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ to’g’ri chiziqning x-3z+8=0 tekislikdagi proeksiyasi topilsin.

J: $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$

15. Quyidagi ikki parallel to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislikning tenglamasi tuzilsin: $\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ va $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$.

J: $17x-13y-16z-10=0$.

16. $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ to'g'ri chiziq orqali $x+y-z+15=0$ tekislikka parallel tekislik o'tkazilsin.

J: $x+y-z+3=0$.

17. $P(7;9;7)$ nuqtadan $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

J: $d=\sqrt{22}$.

18. Quyidagi ikki parallel to'g'ri chiziq orasidagi masofa topilsin: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ va $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

J: $d=3$.

19. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin: $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$ va $\frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}$.

J: $d=13$.

20.Uchburchakning uchlari berilgan: $A(4;1;-2), B(2;0;0), C(-2;3;-5)$. Uning $B$ uchidan unga qarshi yotgan tomonga tushirilgan balandlikning tenglamasi tuzilsin.

J: $\frac{x-2}{74}=\frac{y}{57}=\frac{z}{-110}$.

21. Qirrasining uzunligi birga teng bo'lgan kub berilgan. Buning bir uchidan, shu uchidan o'tmaydigan diagonaligacha bo'lgan masofa topilsin.

J: $d=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

22. Quyidagi to’g’ri chiziqni koordinata tekisliklariga proeksalovchi tekisliklarning tenglamalari yozilsin.

$$\begin{cases} 5x+8y-3z+9=0 \\ 2x-4y=z-1=0 \end{cases}$$

J: 11x4y+6=0; 9x-z+7=0; va 36y-11z+23=0

23. Quyidagi to'g'ri chiziqning koordinata tekisliklaridagi proektsiyalari qanday tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} 3x+2y-z+5=0, \\ x-y-z+1=0; \end{cases}$$

J: $\begin{cases} 2x+3y+4=0; \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y+2z+2=0; \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-3z+7=0; \\ y=0. \end{cases}$

24. Quyidagi to'g'ri chiziqning izlari topilsin:

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0. \end{cases}$$

J: $A(-1; 7{,}5; 0)$, $B(2; 0; 3)$, $C(0; 5; 1)$.

25. Quyidagi to'g'ri chiziqning $2x + 3y + z - 6 = 0$ tekislikdagi proektsiyasining tengamasi tuzilsin:

$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

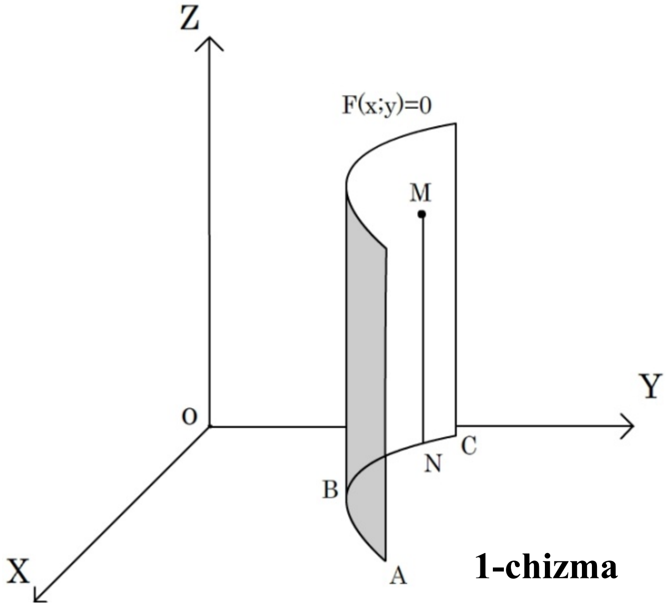
J: $\begin{cases} 4x - 3y + z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + z - 6 = 0. \end{cases}$

# 9-BOB. Ikkinchi tartibli sirtlar.

## 1--§. Yasovchilari koordinata o'qlarining biriga parallel bo'lgan silindrik sirtlar.

Berilgan chiziqni kesuvchi parallel to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni silindrik sirt deb ataladi.

Yasovchilari $Oz$ o'qiga parallel, $ABC$ yo'naltiruvchi chizig'i esa $Oxy$ tekislikda yotuvchi silindrik sirtni ko'rib chiqamiz (1-chizma). Ma'lumki, $ABC$ chiziqning $N$ ixtiyoriy nuqtasining $x$ va $y$ koordinatalari qandaydir



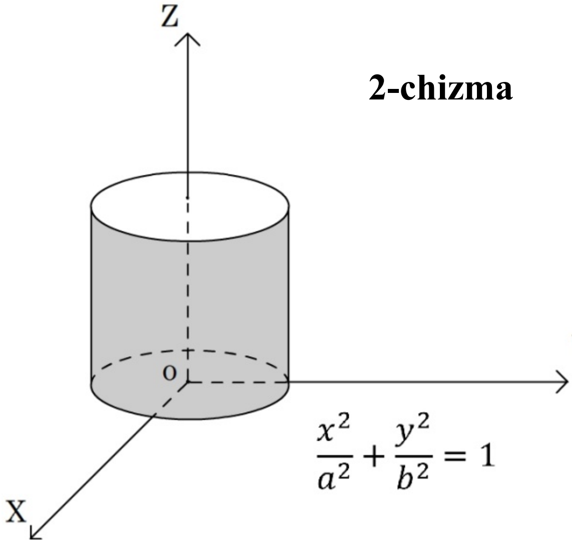
1-chizma

$F(x;y) = 0$ (1)

tenglamani qanoatlantiradi. Ammo fazoda xuddi shu (1) tenglamani $ABC$ chiziqning $N(x;y;0)$ nuqtasi bilan bitta $MN$ vertikal to'g'ri chiziqda yotgan ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtaning koordianatalari ham qanoatlantiradi, chunki $M$ nuqta $N$ nuqta singari $x$ va $y$ koordiantalarga ega, $z$ esa (1) tenglamada ishtirok etmaydi.

$NM$ vertikal chiziqlarning geometrik o'rni berilgan silindrik sirt bo'ladi. Uning har bir $M(x;y;z)$ nuqtasining koordinatalarini aniqlaganimizdek (1) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha, agar $M(x;y;z)$ nuqtaning $x$ va $y$ koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, u holda $M$ nuqta bu silindrik sirtda yotadi, chunki bu nuqta $ABC$ yo'naltiruvchining biror $N$ nuqtasi bilan bitta vertikal chiziqda yotadi.

2-chizma



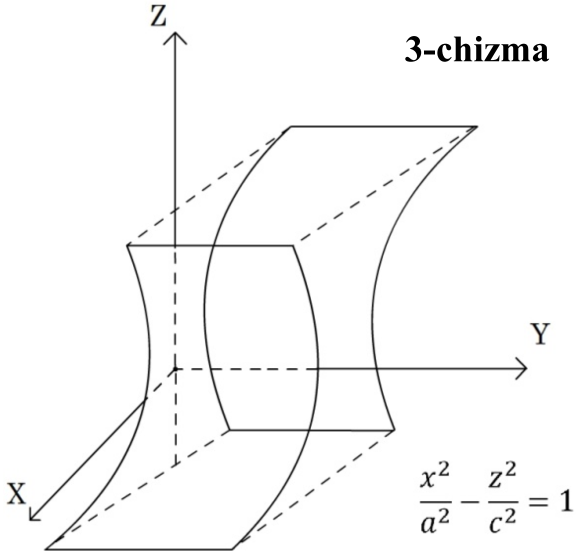

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Shunday qilib, $z$ ni o'z ichiga olmagan $F(x;y)=0$ tenglama fazoda $Oz$ o'qiga parallel yasovchilar va $Oxy$ tekislikda xuddi shu $F(x;y)=0$ tenglama bilan aniqlanadigan $ABC$ yo'naltiruvchiga ega bo'lgan silindrik sitrni $z=0$ tekislik bilan kesishuvchi orqali aniqlanadi, ya'ni

$$\left.\begin{array}{r} F(x;y)-0, \\ z=0, \end{array}\right\}$$

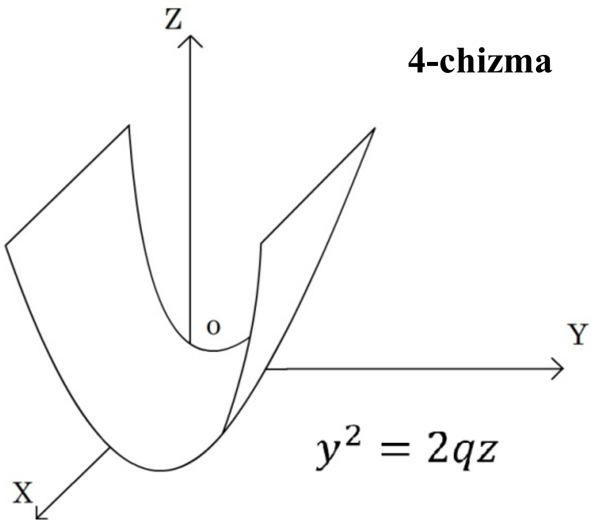
ikkita tenglamalar sistemasi orqali aniqlanadi.

Xuddi shunday, $y$ ni yoki $x$ ni o'z ichiga olmagan tenglamalar mos ravishda $Oy$ o'qiga yoki $Ox$ o'qiga parallel yasovchili $F(x;y)=0$ yoki $F(y;z)=0$ silindrik sirtlarni aniqlaydi.




Masalan. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama tekislikda ellipsni, fazoda esa yasovchilari Oz o'qiga parallel va $Oxy$ tekislik bilan shu ellips bo'yicha kesishuvchi silindrik sirtni aniqlaydi. Bunday sirt elliptik silindir deb ataladi (2-chizma).

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ tenglama fazoda yasovchilari $Oy$ o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirtni aniqlaydi. Bu sirtning $Oxz$ tekislik bilan kesishiish chizig'i giperbola bo'ladi, uning bu tekislikdagi tenglamasi ham $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ko'rinishda bo'ladi. Bu sirt giperbolik silindr deb ataladi (3 - chizma).




3) $y^2=2qz$ tenglama $Oyz$ tekislik bilan $y^2-2qz$ parabola bo'yicha kesishuvchi, yasovchilari $Ox$ o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirtni aniqlaydi. Bu sirt parabolik tsilindr deb ataladi (4-chizma).

Elliptik, giperbolik va parabolik silindrlar koordinatalarga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamalarga ega va shu munosabat bilan ikkinchi tartibli silindrlar deb ataladi.

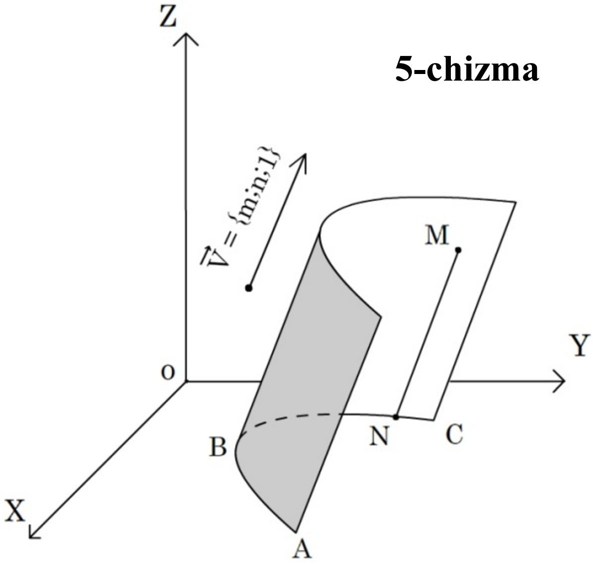
### 2-§. Yasovchilari berilgan $\vec{v}=\{m;n;1\}$ vektorga parallel bo'lgan silindrik sirt.

Bunday sirtning yo'naltiruvchisi sifatida

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) = 0,\\ z = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

tenglamalar bilan berilgan $Oxy$ tekisligidagi qandaydir $ABC$ chiziqni olamiz (5-chizma). Ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqta olib va undan $\vec{\upsilon}=\{m;n;1\}$ vektorga parallel $MN$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz, bu yerda $N(x_0;y_0;0)$ to'g'ri chiziq bilan $Oxy$ tekislik kesishish nuqtasi. $\overline{MN}$ va $\vec{v}$ vektorlarning parallelik shartidan $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-0}{1}$ ekanligini, bu yerdan esa quyidagilarni topamiz:

$$x_0 = x - mz,\ y_0 = y - nz. \quad (3)$$

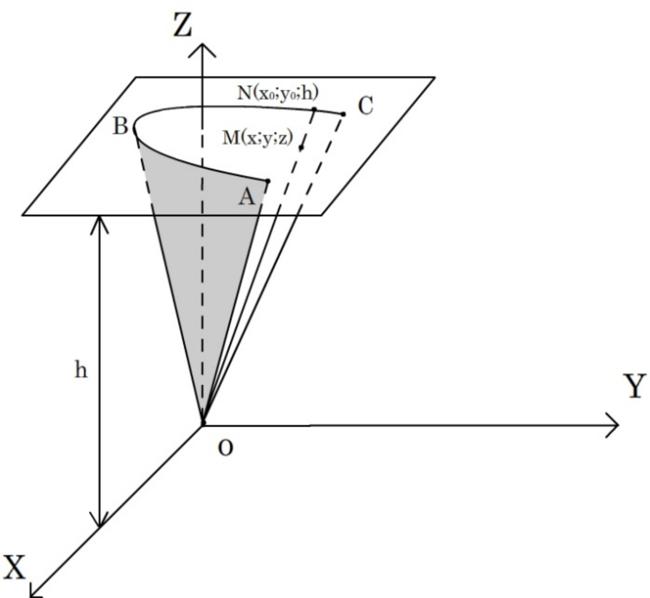



5-chizma

$M(x;y;z)$ nuqta berilgan silindirik sirtda yotishi uchun $N(x_0;y_0;0)$ nuqta $ABC$ yo'naltiruvchida yotishi zarur va yetarli, ya'ni $N$ nuqtaning $x_0, y_0$ kooordinatalari (2) tenglamalarning birinchisini qanoatlantirishi kerak. (2) tenglamalarning birinchisiga $x$ va $y$ lar o'rniga (3) tenglamalardagi $x_0$ va $y_0$ larning ifodalarini qo'yib

$$F(x - mz, y - nz) = 0 \quad (4)$$

ekanligini topamiz.




(4) tenglama yasovchilari $\vec{\upsilon}=\{m;n;1\}$ vektorga parallel va

yo'naltiruvchisi $Oxy$ tekislikda $F(x,y)=0$ tenglama bilan berilgan silindrik sirt bo'ladi.

$m=n=0$ bo'lganda yasovchilari $Oz$ o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirtning xususiy holini hosil qilamiz.

Masalan. $y^2-2px, z=0$ yo'naltiruvchi va yasovchilari $\vec{\upsilon}=\{m;n;1\}$ vektorga parallel bo'lgan silindrik sirt tenglamasi

$(y-nz)^2=2p(x-mz)$ bo'ladi.

## 3-§. Konik sirtlar.

Konik sirt deb berilgan nuqtadan (konus uchi) o'tuvchi va berilgan chiziq bilan (yo'naltiruvchi) kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rniga aytiladi. Konusning uchi sifatida koordinata boshini, yo'naltiruvchi sifatida esa $z=h$ tekisligida

$$\left.\begin{matrix} F(x,y)=0, \\ z=h \end{matrix}\right\} \qquad (5)$$

tenglamalar bilan berilgan chiziqni olamiz.

Konik sirtda ixtiyoriy $M(x;y;z)$ (6– chizma) nuqta olamiz, bu nuqta va koordinata boshidan o'tuvchi $OMN$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz, bu yerda $N(x_0;y_0;h)$ nuqta $OMN$ to'g'ri chiziq bilan $z=h$ tekislik kesishish nuqtasi. $\overline{OM}$ va $\overline{ON}$ vektorlarning parallelik shartidan

$\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{h}{z}$, bu yerdan

$$x_0=\frac{xh}{z}, y_0=\frac{yh}{z}. \qquad (6)$$

$M(x;y;z)$ nuqta konus sirtida yotishi uchun $N(x_0;y_0;z_0)$ nuqta yo'naltiruvchi chiziqda yotishi zarur va yetarli, ya'ni $x_0$ va $y_0$ koordinatalar (5) tenglamalarning birinchisini qanoatlantirishi kerak. (5) tenglamalarning birinchisidagi $x$ va $y$ ular o'rniga (6) tenglamalardagi $x_0$ va $y_0$ ifodalarni qo'yib,

$$F\left(\frac{xh}{z},\frac{yh}{z}\right)=0 \qquad (7)$$

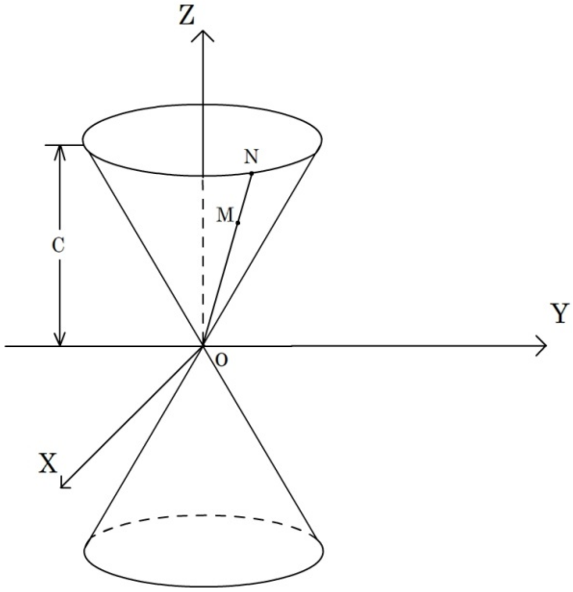
tenglamani hosil qilamiz. (7) tenglama uchi koordinatalar boshida bo'lgan konik sirtning tenglamasi bo'ladi. Agar (7) algebraik tenglama bo'lsa, u holda uning barcha hadlari $x, y, z$ larga nisbatan bir xil darajada bo'ladi, ya'ni uchi koordinatalar boshidan bo'lgan konik sirt tenglamasi $x, y, z$ larga nisbatan bir jinsli bo'lishi kerak.

Misol. Uchi koordinatalar boshida, yo'naltiruvchisi

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=c$ bo'lgan konik sirt tenglamasini yozing.

Yechish. Faraz qilaylik, $M(x;y;z)$ sirtning ixtiyoriy nuqtasi, $N(x_0;y_0;c)$ esa yo'naltiruvchining mos nuqtasi bo'lsin.

$\overline{OM}$ va $\overline{ON}$ vektorlarning parallellik shartidan (7-chizma) $\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{c}{z}$, bu yerdan esa $x_0=\frac{cx}{z}, y_0=\frac{c\cdot y}{z}$ Bu ifodalarni yo'naltiruvchining birinchi tenglamasiga qo'yib $\frac{x^2c^2}{a^2z^2}+\frac{y^2c^2}{b^2z^2}=1$ yoki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ ekanligini topamiz. Bu sirt ikkinchi tartibli sirt deb ataladi.



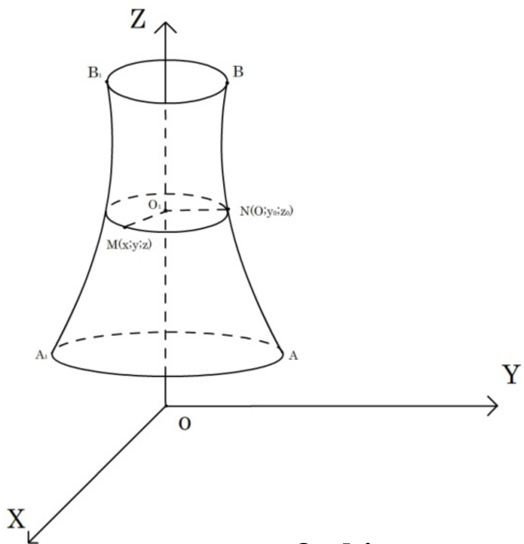

**7-chizma**

## 4-§. Aylanma sirt.

Faraz qilaylik, $OYZ$ tekislikda yotuvchi $AB$ egri chiziq

$$\left.\begin{aligned} F(y,z)=0,\\ x=0,\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. (8) chiziqni $Oz$ o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtni (8-chizma) ko'rib chiqamiz. Sirtda ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqta olamiz. Bu nuqta (8) chiziqning biror $N(0;y_0;z_0)$



nuqtasini $Oz$ o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan gorizontal aylanada yotadi. $N(0;y_0;z_0)$ va $M(x;y;z)$ nuqtalarning koordinatalarini solishtirib,

$$z_0 = z,\ y_0 = O_1N = O_1M = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (9)$$

ekanligini topamiz. $N(0;y_0;z_0)$ nuqta (8) chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari (8) tenglamalarni qanoatlantiradi. (8) tenglamalarning birinchisidagi $y$ va z lar o'rniga (9) tenglamalardagi $y_0$ va $z_0$ ifodalarni qo'yib, axtarilayotgan aylanma sirt

$$F(\sqrt{x^2 + y^2},\ z) = 0 \qquad (10)$$

tenglamasini hosil qilamiz.

Xuddi shunday, (8) chiziqni $Oy$ o'qi atrofida aylantirish natijasida tenglamasi

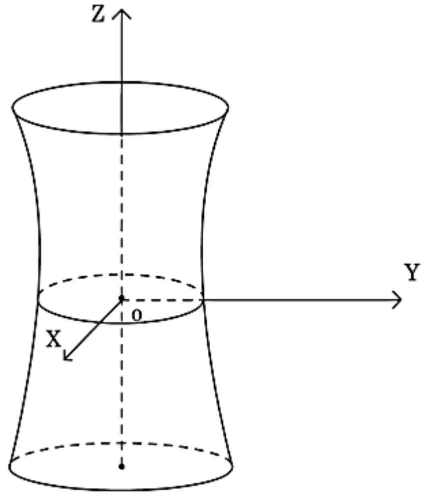
$$F(y,\sqrt{x^2 + y^2}) = 0 \qquad (11)$$

bo'lgan sirtni hosil qilamiz.

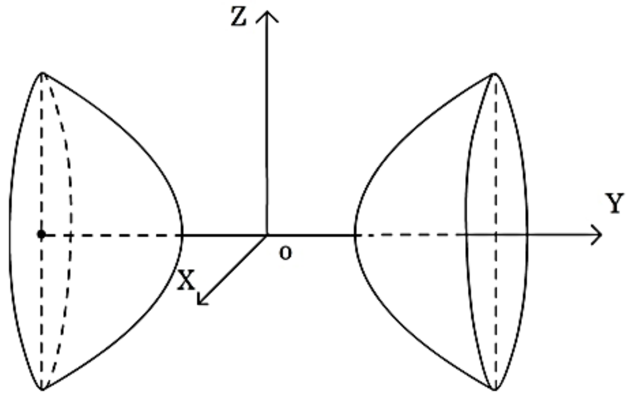
**1-misol**. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0$ giperbolani 1) $Oz$ o'qi atrofida,

2) $Oy$ o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt tenglamasini yozing.

Yechish. 1) (10) formulaga ko'ra giperbola tenglamasidagi $y$ ni $\sqrt{x^2 + y^2}$ ga almashtiramiz, natijada $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ni hosil qilamiz. Bu aylanma sirt bir pallali giperboloid deb ataladi (9 - chizma).




**9-chizma**




**10-chizma**

2) (11) formulaga ko'ra giperbola tenglamasidagi $z$ ni $\sqrt{x^2+z^2}$ ga almashtiramiz, natijada $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ni hosil qilamiz. Bu aylanma sirt ikki pallali giperboloid deb ataladi (10-chizma).

## 5-§. Ellipsoid.

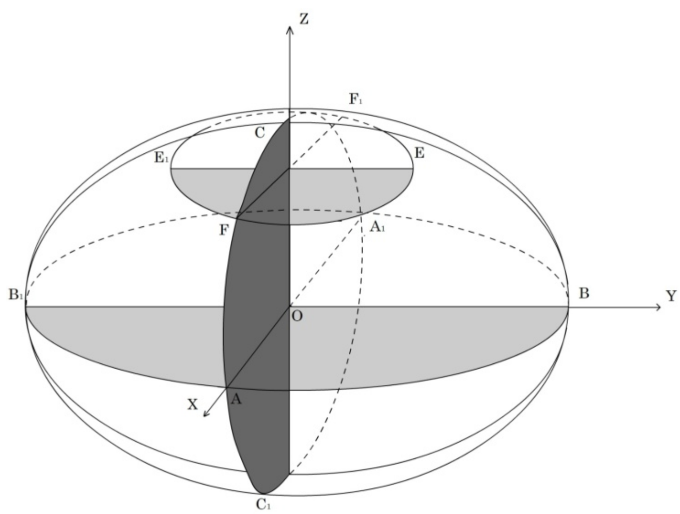
Kanonik (eng sodda) tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (12) ko'rinishda bo'lgan sirtga ellipsoid deb ataladi. Tekisliklar orqali kesimlar bo'yicha ellipsoid formasini tekshiramiz.

1) Ellipsoidning (12) tenglamasida $z=0$ deb hisoblab uning $Oxy$ tekisligi bilan kesimini topamiz. Bu kesimining tenglamalari

2) $z=0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bo'ladi. Bu yarim o'qlari $OA=a$ va $OB=b$ bo'lgan ellips (11-chizma).

Xuddi shunday ellipsoidning boshqa kesimlarini topamiz:

3) $Oyz$ tekisligi orqali:






**11-chizma**

$x = 0, \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ -yarim o'qlari $OB = b$ va $OC = c$ bo'lgan $BCB_1C_1$ ellips;

4) $Oxz$ tekisligi orqali: $y = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ - $CAC_1A_1$ ellips.

5) $z = h$ tekisligi orqali: $z = h, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$ yoki. $z = h, \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$

yarim o'qlari $O_1F = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ va $O_1E = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ bo'lgan $FEF_1E_1$ ellips. $(|h| \leq c)$.

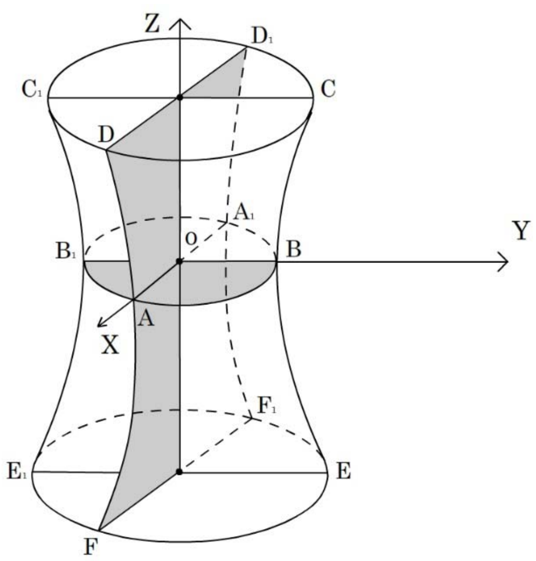
$OA = a, OB = b$ va $OC = c$ kesmalar ellipsoidning yarim o'qlari deb ataladi.Agar $a = b \neq c$ bo'lsa, u holda (12) tenglama $Oxy$ tekislikka parallel bo'lgan $z = h$ tekisligi orqali barcha gorizontal kesimlari ($|h| \leq c$ bo'lganda) radiusi $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ ga teng bo'lgan aylanalar bo'ladi. $a = b = c$ bo'lganda (12) tenglama radiusi $a$ ga teng bo'lgan sferani aniqlaydi.

## 6-§. Bir pallali giperboloid va uning kanonik tenglamasi.

1. Kanonik (eng sodda) tenglamasi

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (13) ko'rinishda bo'lgan sirtga bir pallali giperboloid deb ataladi.

Yuqoridagi tekshiruvlarga o'xshash (13) giperboloid formasini tekisliklar orqali kesimlari bo'yicha tekshiramiz.




**12 - chizma**

1) $Oxy$ tekisligi orqali kesimi: $z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Bu yarim o'qlari $OA = a$ va $OB = b$ bo'lgan $ABA_1B_1$ ellips (12- chizma).

2) $Oxy$ tekisligiga parallel $z = \pm h$ tekisliklar orqali kesim:

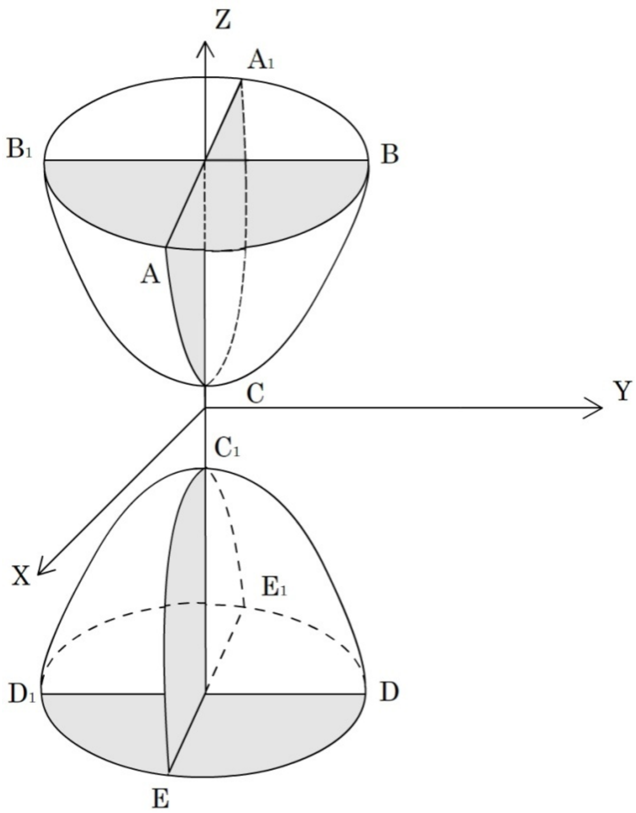
$z = \pm h, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$ -h ixtiyoriy haqiqiy bo'lganda

$$O_1D = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \text{ va } O_1C = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

yarim o'qlarga ega bo'lgan $DCD_1C_1$ va $FEF_1E_1$ ellipslar.

3) $Oyz$ tekisligi orqali kesim: $x = 0, \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - OB = b$ haqiqiy yarim o'qqa va $EBC, E_1B_1C_1$ shohchalarga ega bo'lgan giperbola.

4) $Oxz$ tekisligi orqali kesim: $y = 0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - OA = a$ haqiqiy o'qqa va $FAD, F_1A_1D_1$ shohchalarga ega bo'lgan giperbola. $a = b$ bo'lganda (13) tenglama barcha gorizontal kesmlari radiuslari $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ bo'lgan aylanalardan iborat bo'lgan aylanma bir pallali giperboloidni aniqlaydi.




**13 - chizma**

## 7-§. Ikki pallali giperboloid va uning kanonik tenglamasi

Kanonik (eng sodda) tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (14) ko'rinishda bo'lgan sirtga ikki pallali giperboloid deb ataladi.

(14) ikki pallali giperboloid formasini tekisliklar orqali kesimlari bo'yicha tekshiramiz.

1) $Oxy$ tekisligi orqali kesim:

$$z=0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=-1$$

- mavhum ellips ( $Oxy$ tekilik (14) sirt bilan kesishmaydi).

2) $z=\pm h$ tekisliklar bilan kesimlar:

$$z=\pm h, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

$-|h|\geq c$ shart ostida $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ va $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ haqiqiy yarim o'qlarga ega bo'lgan $ABA_1B_1$ va $EDE_1D_1$ ellipslar. Bu holda kesuvchi tekislik C$(0;0;c)$ nuqtadan quyida yoki $C_1(0;0;-c)$ nuqtadan yuqorida joylashmagan bo'ladi (13 - chizma).

3) $Oyz$ tekisligi orqali kesim:

$$x=0, \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$-BcB_1, DC_1D_1$ shohchalarga ega bo'lgan giperbola; giperbolaning haqiqiy yarim o'qi $c$ ga, mavhum yarim o'qi $b$ ga teng bo'ladi.

4) $Oxz$ tekisligi orqali kesiim:

$$y=0, \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

$-AcA_1, EC_1E_1$ shohchalarga ega bo'lgan giperbola; giperbolaning haqiqiy yarim o'qi $c$ ga, mavhum yarim o'qi $a$ ga teng bo'ladi.

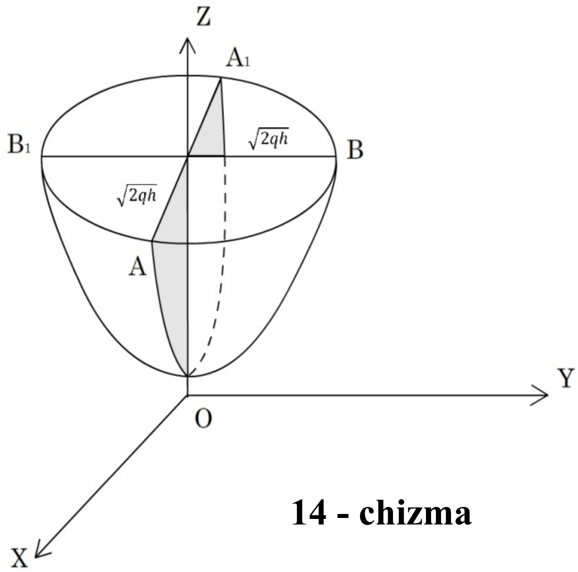
$a=b$ bo'lganda (14) tenglama aylanma ikki pallali giperboloidni aniqlaydi, uning gorizontal kesimlari $|h|\geq c$ bo'lganda haqiqiy $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ radiusli aylanalardan iborat bo'ladi.

### 8-§. Elliptik paraboloid va uning kanonik tenglamasi.

1. Kanonik (eng sodda) tenglamasi

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ ($pq>0$ bo'lganda) (15)

ko'rinishda bo'lgan sirtga elliptik paraboloid deb ataladi.



**14 - chizma**

Elliptik paraboloid formasini $p>0$ va $q>0$ bo'lganda odatdagiday tekisliklar orqali kesimlari bo'yicha tekshiramiz (14 - chizma).

1) $Oxy$ tekisligi orqali kesim:

$z=0,\quad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0-(0;0;0)$ nuqta.

2) $z=h$ tekisligi orqali kesim: $z=h,\quad \frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1-h>0$ bo'lganda $\sqrt{2ph}$ va $\sqrt{2qh}$ yarim o'qlarga ega bo'lgan $ABA_1B_1$ ellips.

$Oyz$ tekisligi orqali kesim: $x=0, y^2=2qz-BOB_1$ parabola.

3) $Oxz$ tekisligi orqali kesim: $y=0, x^2=2pz-AOA_1$ parabola (14 - chizma). $p=q$ bo'lganda (15) tenglama $z=h>0$ tekiliklari orqali barcha kesimlari radiuslari $\sqrt{2ph}$ bo'lgan aylanalardan iborat aylanma $x^2+y^2=2pz$ paraboloidni aniqlaydi.

## 9-§. Giperbolik paraboloid va uning kanonik tenglamasi.

2. Kanonik (engsodda) tenglamasi

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (16)$$

($pq>0$ bo'lganda)

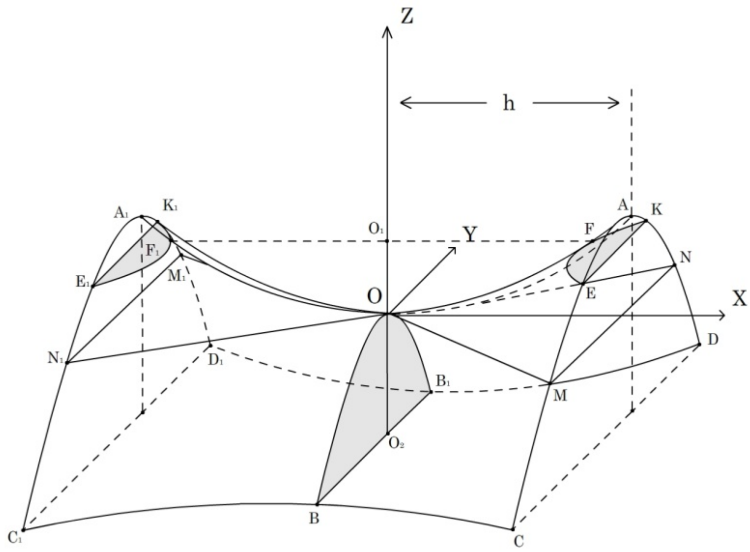
ko'rinishda bo'lgan sirtga giperbolik paraboloid deb ataladi.

$p > 0$ va $q > 0$ bo'lganda (16) giperbolik paraboloid formasini ham tekisliklar orqali kesimlari bo'yicha tekshiramiz.

1) $Oxz$ tekisligi orqali kesim: $y = 0, x^2 = 2pz - AOA_1$ parabola (15 – chizma).

2) $Oyz$ tekisligi orqali kesim: $x = 0, y^2 = -2qz$ shoxchalari quyiga yo'nalgan $BOB_1$ parabola.

3) $x = \pm h$ tekisliklar orqali kesimlar:



**15 - chizma**

$$x = \pm h, \qquad z = -\frac{y^2}{p} + \frac{h^2}{2p}$$

$BOB_1$ ga o'xshagan, ammo $Ox$ o'qidan $\frac{h^2}{2p}$ ga yuqoriga ko'tarilgan $A$ va $A_1$ uchlarga ega bo'lgan $CAD$ va $C_1A_1D_1$ parabolalar.

4) $Oxy$ tekisligi orqali kesim:

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \quad \text{yoki} \quad y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$$

-$MOM_1$ va $NON_1$ to'g'ri chiziqlar juftligi.

5) $z = l > 0$ tekislik orqali kesim:

$$z = l, \qquad \frac{x^2}{2pl} - \frac{y^2}{2ql} = 1$$

- $EFK$, $E_1F_1K_1$ shohchalarga va $O_1F = \sqrt{2pl}$ haqiqiy o'qqa ega bo'lgan giperbola.

6) $z = -m < 0$ tekislik orqali kesim:

$$z = -m, \qquad \frac{y^2}{2qm} - \frac{x^2}{2pm} = 1$$

- $CBC_1$, $DB_1D_1$ shoxchalarga va $O_2B = \sqrt{2qm}$ haqiqiy o'qqa ega bo'lgan giperbola.

Giperbolik paraboloid kesimlarida ellipslar bo'lmagani uchun bu sirt aylanma sirt bo'la olmaydi.

## 10-§. Bir pallali giperboloid va giperbolik paraboloidlarning to'g'ri chiziqli yasovchilari.

1. Bir pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (17)$$

tenglamasini

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

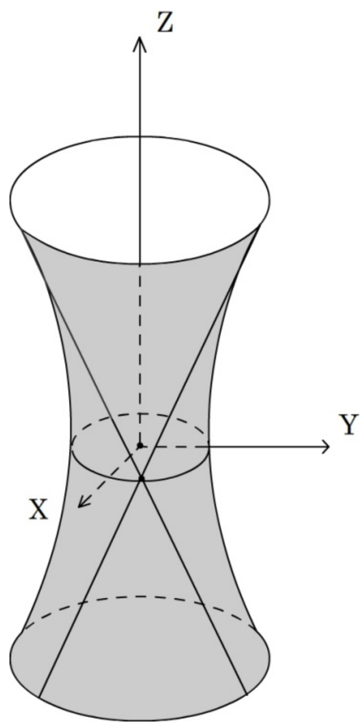
ko'rinishida yozib olamiz.

Oxirgi tenglamaning chap va o'ng qismlarini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \qquad (18)$$

Quyidagi tenglamalar sistemasini ko'rib chiqamiz:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\cdot\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$



**16 - chizma**

(19) tenglamalar 1 – tartibli tenglamalar bo'lgani uchun berilgan $\alpha$ va $\beta$ larda esa to'g'ri chiziqlarni, ixtiyoriy $\alpha$ va $\beta$ larda esa to'g'ri chiziqlarning dastasini aniqlaydi. (19) to'g'ri chiziqda yotgan ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamalarni qanoatlantiradi, bundan kelib chiqadiki, ular (19) tenglamalarni ko'paytmasidan hosil bo'lgan tenglamani ham, ya'ni giperboloidning (18) tenglamasini qanoatlantiradi. Bu esa (19) to'g'ri chiziqda yotgan ixtiyoriy nuqta (18) yoki (17) giperboloidda yotishini ko'rsatadi, ya'ni (19) to'g'ri chiziqlar to'laligicha (17) giperboloidda yotadi (16 – chizma).

(18) tenglamadan quyidagi sistemani ham hosil qilish mumkin:

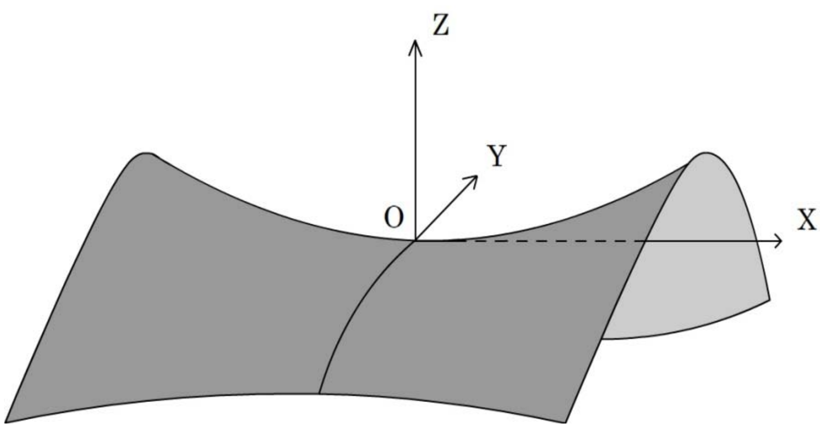
$$\left.\begin{aligned}\gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\delta\cdot\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\gamma\left(1+\frac{y}{b}\right).\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

(20) to'g'ri chiziqlar ham bir vaqtda *o* ga teng bo'lmagan ixtiyoriy $\gamma$ va $\delta$ larda to'laligicha (17) giperboloidda yotadi. Umuman, giperboloidning har bir $M$ nuqtasidan (19) to'g'ri chiziqlar dastasidan yagona $AMB$ va (20) to'g'ri chiziqlar dastasidan yagona $CMD$ to'g'ri chiziq o'tishini ko'rsatish mumkin. (19) va (20) to'g'ri chiziqlar (17) bir pallali giperboloidning to'g'ri chiziqli yasovchilari deb ataladi.

2. Giperbolik paraboloid tenglamasini

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\,(p>0,q>0) \qquad (21)$$

quyidagi $\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{p}}\right)=2z$ (22) ko'rinishda yozib olamiz.




**17-chizma**

(22) tenglamani

$$\left.\begin{aligned} \alpha\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{p}}\right)&=2\beta \\ \beta\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{p}}\right)&=\alpha\cdot z \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

yoki

$$\left.\begin{aligned} \gamma\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{p}}\right)&=\delta\cdot z \\ \delta\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{p}}\right)&=2\gamma \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

ko'rinishlarda qanoatlantiramiz.

Xuddi bir pallali giperboloid uchun o'rinli bo'lgani singari (23) va (24) to'g'ri chiziqlar (21) giperbolik paraboloidda to'la yotadi. Bu to'g'ri chiziqlar giperbolik paraboloidning to'g'ri chiziqli yasovchilari deb ataladi. (17 - chizma).

## 11-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning klassifikatsiyasi.

$x, y, z$ o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi tartibli

$$Ax^2+By^2+cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Kx+Ly+Mz+N=0 \qquad (25)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt ikkinchi tartibli sirt deb ataladi. (25) tenglamaning chap qismi ba'zi bir shartlar bajarilgan birinchi darajali ko'paytuvchilarga $(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1\cdot z+\delta_1)=0$ ajraladi va bu holda (25) tenglama bir juft tekisliklarni aniqlaydi (xususiy holda bu tekisliklar ustma – ust tushishi mumkin).

Ba'zi bir hollarda (25) tenglama bitta nuqtani aniqlashi mumkin; masalan $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$ tenglama $(a; b; c)$ bitta nuqtani aniqlaydi. Ba'zi bir hollarda esa (25) tenglama birorta ham nuqtani aniqlamaydi; masalan $x^2+y^2+z^2=-1$ tenglama hech qanday $x, y, z$ larning haqiqiy qiymatlarida qanoatlantirmaydi.

Ko'rib chiqilgan oxirgi uchta holdan tashqari, (25) tenglama koordinatalarni almashtirish yo'li bilan yuqorida ko'rib chiqilgan to'qqizta ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalarini biriga keltirilishi mumkin.

1. Ikkinchi tartibli markaziy sirtlar.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - ellipsoid

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - bir pallali giperboloid

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ - ikki pallali giperboloid

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - elliptik silindr

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - giperbolik silindr

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ - ikkinchi tartibli konus

Bu oltita ikkinchi tartibli markaziy sirtlarning tenglamalarini

$$Ax^2+By^2+cz^2=F \qquad (26)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin.

2. Markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli sirtlar.

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{q}=2z\ (pq>0)$ - elliptik paraboloid

8) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (pq>0)$ - giperbolik paraboloid

9) $y^2=2qx$ - parabolik silindr.

Bu uchta ikkinchi tartibli markazga ega bo'lmagan sirt tenglamalarini $Ax^2+By^2=2Dz\ (D\neq 0)$ ko'rinishda yozib olish mumkin.

**Mustaqil yechish uchun masalalar**

1. Quyidagi ma'lumotlardan foydalanib, shar sirtining tenglamasini yozing:

a) sharning markazi $(2;-1;3)$ nuqtada va radiusi $R=6$;

b) sharning markazi $(0;0;0)$ nuqtada va o'zi $(6;-2;3)$ nuqtadan o'tadi;

s) markazi $(1;4;-7)$ nuqtada va o'zi $6x+6y-7z+42=0$ tekislikka urinadi.

d) markazi $(6;\ \ 8;3)$ nuqtada va o'zi $Oz$ o'qiga urinadi.

J: a) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$; b) $x^2+y^2+z^2=49$;

s) $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121;$

d) $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=100.$

2. Quyidagi sferalardan har biri markazining koordinatalari va radiusining uzunligini toping.

a) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0;$

b) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0;$

s) $x^2+y^2+z^2-6x+10=0;$

d) $x^2+y^2+z^2-4x+12y-2z+41=0;$

e) $36x^2+36y^2+36z^2-36x+24y-72z-95=0.$

J: a) $(3;-4;-1), R=0;$ b) $(-1;2;0), R=3;$ s) $R=\sqrt{-1}$ bo'lgani uchun sfera mavhum; d) $R=0;$ bitta haqiqiy nuqta $(2;-6;1);$ ye) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{3};1\right);\ R=2.$

3.Quyidagi aylananing markazi va radiusi topilsin:

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36,\\ 3x+y-z-9=0.\end{cases}$$

J: $(1;6;0),\ r=5.$ Ko'rsatma. Aylana – sharning tekislik bilan kesimi sifatida berilgan; bu aylananing markazini topish uchun sferaning markazidan kesuvchi tekislikka perpendikulyar o'tkazib, bularning kesishish nuqtasini topamiz. Aylana radiusi $r$ ni esa $r=\sqrt{R^2-d^2}$ formuladan topamiz; bunda $R-$ sferaning radiusi, $d-$ sfera markazidan kesuvchi tekislikkacha bo'lgan masofa.

4. $Ox$ o'qi orqali $(x+5)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=16$ sferaga urinma tekisliklar o'tkazilsin.

J: $3y+4z=0$ va $5y-12z=0.$ Ko'rsatma. $Ox$ o'qi orqali o'tuvchi har qanday tekislikning tenglamasi $By+Cz=0$ ko'rinishda bo'ladi. $B$ va $C$ koeffitsientlarni shunday topish kerakki, bu tekislikning sfera markazi $(-5;8;-1)$ dan masofasi radius uzunligi 4 ga teng bo'lsin, ya'ni bu koeffitsientlarning nisbati $\frac{8B-C}{\sqrt{B^2+C^2}}=\pm4$ tenglamadan topiladi.

5.Uchi koordinatalar boshida, yo'naltiruvchisi quyidagi tenglamalar bilan berilgan konusning tenglamasini tuzing:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9 \\ z=4 \end{cases}$$

J: $2x^2+2y^2-z^2=0$. Ko'rsatma. Izlanayotgan konusning yasochisi koordinatalar boshidan o'tganligi uchun $y$ quyidagi tenglama bilan ifodalanadi: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{1}$ yoki $x=mz$ va $y=nz$. Bu ikki tenglamadan va yo'naltiruvchining tenglamasidan $x,y$ va $z$ ni yo'qotib, yasovchining burchak koeffitsientlari orasidagi munosabat topiladi.

6.Konusning yo'naltiruvchisi

$$\begin{cases} 3x^2+6y^2-z=0, \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lib uning uchi $(-3;0;0)$ nuqtada bo'lsa, konusning tenglamasini tuzing.

J: $3x^2+123y^2+23z^2-18xy-22xz+50yz+18x-54y-66z+27=0$

7.

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$$

egri chiziqdan o'tuvchi va yasovchisi: a) $x$ o'qiga parallel, b) $x=y, z=c$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan silindrning tenglamasini tuzing.

J: a) $2y^2+2z^2-2yz+12y-10z-3=0$;

b) $(x-y)^2+3z^2-8(x-y)-8z-26=0$.

8. Silindrining yo'naltiruvchisi $\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ x=2z, \end{cases}$ tenglamalar bilan berilgan, yasovchisi esa yo'naltiruvchining tekisligiga perpendikulyar. Bu silindrning tenglamasini tuzing.

J: $(2x+z)^2-10(2x+z)+25y^2=0$.

9. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ ellipsoidning bosh kesimlari, uchlari va o'qlarining uzunliklari topilsin.

J: $x0y$ tekisligidagi kesim $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; $y0z$ tekisligidagi kesim $\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$; $x0z$ tekisligidagi kesim $\frac{x^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$;.

Ellipsoidning uchlari

$A(6;0;0);\ A_1(-6;0;0);\ B(0;+4;0);\ B_1(0;-4;0);\ C(0;0;3);\ C_1(0;0;-3)$ o'qlarning uzunligi: $2a=12;\ 2b=8;\ 2c=6$

10. Sirtning to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini toping:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1,\ \frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2};$

b) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1,\ x-3=y-1=\frac{z-6}{3};$

s) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-z^2=1,\ \frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1};$

d) $4z=x^2-4y^2,\ \frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$

J: $a)$ $(0;0;2)$ va $(2;-3;0)$; b) $(4;2;9)$; $c)$ to'g'ri chiziq sirtda yotadi; d) $(4;1;3)$

11. $(2;1;-1)$ nuqtadan $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ sirtning shunday vatarini o'tkazinki, bu vatar shu nuqtada tengikkiga bo'linsin.

J: Bunday vatarlardan sanoqsiz ko'pini o'tkazish mumkin: bularning hammasi $28x+225y-400z-1201=0$ tekislikda yotadi. Ko'rsatma. Izlangan to'g'ri chiziq $\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z+1}{1}$. Bularni berilgan sirtning tenglamasi bilan birgalikda yechib ( $x$ va $y$ koordinatalarni yo'qotamiz) va masalaning manabunday $\frac{z_1+z_2}{2}=-1$ ifodalash mumkin bo'lgan shartini e’tiborga olib, birgina $228m+225n-400=0$ munosabatni hosil qilamiz, buni izlangan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientlarni qanoatlantirishi kerak. Bu koeffitsientlari keyingi tenglikdan va to'g'ri chiziqning tenglamalaridan yo'qotib, izlangan to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rnini hosil qilamiz.

12. $(5;1;2)$ nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, u $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ sirtni faqat nuqtada kesib o'tsin.

J: Bunday to'g'ri chiziqlardan sanoqsiz ko'pini o'tkazish mumkin; ularning geometrik o'rni $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}-(z-2)^2=0$ konusdan iborat.

13. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ paraboloidda $3x+2y-4z=0$ tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli yasovchilar topilsin.

J: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$ va $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Ko'rsatma. To'g'ri chiziqli yasovchilar

$\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=k\\ \frac{x}{4}-\frac{y}{2}=\frac{z}{k}\end{cases}$ tenglamalar bilan aniqlanadi; bularni kanonik ko'rinishga keltiramiz: $\frac{x-2k}{2}=\frac{y-k}{-1}=\frac{z}{k}$, bundagi $k$ parametrni to'g'ri chiziqning $3x+\alpha y-4z=0$ tekislik bilan parallelik shartidan foydalanib topamiz.

14. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$ sirtga $(6;2;6)$ nuqtada urinuvchi tekislikning tenglamasi tuzilsin.

J: $4x-12y+9z-6=0$

15. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z$ paraboloidga urinma va $x-y-2z=0$ tekislikka parallel bo'lgan tekisliklar topilsin.

J: $x-y-2z-2=0$ .

16. $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ silindrga o'tkazilgan urinma tekislikning $x$ va $y$ o'qlaridan kesgan kesmalarining nisbati $a:b=5:4$ bo'lsa, urinma tekislikning tenglamasini tuzing.

J: $4x+5y\pm 40=0$. Ko'rsatma. Berilgan silindrga urinuvchi hamma tekisliklar $z$ o'qiga paralleldir.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I. Sprinder-Verlag Italia, Milan 2008.

2. Д.Т. Писменный. Конспект лекций по высшей математике: польный курс- М: Айрис-пресс, 2009.

3. T. Jo’rayev, A. Sa’dullayev, G. Xudoyberganov, X. Mansurov, A. Vorisov. Oliy matematika asoslari. 1-qism. T., “O’zbekiston”, 1998.

4. Soatov Yo.U. Oliy matematika. I-tom, T.: O’qituvchi, 1992.

5. Xurramov Sh.R. Oliy matematika. Misollar. Nazorat topshiriqlari. 1-qism. T.: Fan va texnologiyalar, 2015.

6. В.С. Шипачев. Высшая математика. Базовый курс. М.: Юрист. 2002. -447 с.

## MUNDARIJA

## СОДЕРЖАНИЕ

**7-глава. Плоскость.**



**8-глава. Прямые в пространстве.**



**9-глава. Поверхности второго порядка.**

## CONTENTS

**7-chapter. Plane.**



**8- chapter. Straight lines in space.**



**9-chapter. Second order surfaces.**

N. Turgunov, I. Gafarov

# CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

Oliy o’quv yurtlari uchun o’quv qo’llanma

Muharrir ___________
Sahifalovchi __________
Musahhih ____________