O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

J.I.ABDULLAYEV, R.N.G‘ANIXO‘JAYEV,
M.H.SHERMATOV, O.I.EGAMBERDIYEV

FUNKSIONAL ANALIZ VA INTEGRAL TENGLAMALAR

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi universitetlarning mexanika yo‘nalishi bo‘yicha ta’lim olayotgan talabalar uchun darslik sifatida tasdiqlagan

TOSHKENT

EL PRESS – 2013

УДК:51(075)
KBK 22.16
A-15

J.I.Abdullayev, R.N.G‘anixo‘jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev

"Funksional analiz va integral tenglamalar"

Universitetlarning fizika-matematika fakulteti talabalari uchun darslik.

Toshkent. "EL PRESS", 2013. 458 b.

Ushbu darslik universitetlarning "Mexanika" ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib unda "Funksional analiz va integral tenglamalar" kursi to‘la qamrab olingan. Undan shuningdek universitetlarning "Matematika" ta’lim yo‘nalishi talabalari ham foydalanishlari mumkin. Darslikni yozishda mualliflar mazkur fanni bir necha yillar davomida o‘qitib orttirgan tajribalaridan foydalanganlar.

Настоящий учебник предназначен для студентов университетов, обучающихся по направлению образования "Механика" и содержит в себе полный курс, соответствующий программе "Функциональный анализ и интегральные уравнения". Им могут пользоваться также студенты университетов, обучающихся по направлению "Метематика". При написание учебника авторы использовали опыть накопленный при чтении настоящего курса.

This textbook designated to university students whose major is "Mechanics". And it contains a full course which corresponds to the program "Functional analysis and integral equations". Textbook may be used by students whose major is "Mathematics" as well. The authors used experience gained from reading the the course while writing this textbook.

УДК:51(075)
KBK 22.16 ya 73

Mas’ul muharrir:
Muminov Muxiddin Eshqobilovich, Fizika-matematika fanlari nomzodi.

Taqrizchilar:
Zokirov Botir Sobitovich, Fizika-matematika fanlari doktori.
Ikromov Isroil Akramovich, Fizika-matematika fanlari doktori, prof.
Mo‘minov Qobiljon Qodirovich, Fizika-matematika fanlari doktori, prof.

ISBN 978-9943-14-245-9

Mundarija

Kirish

Funksional analiz - matematik analiz, geometriya va chiziqli algebraning g‘oya va usullarini cheksiz o‘lchamli fazolar uchun umumlashtiruvchi fan hisoblanadi. Hozirgi kunda funksional analizning g‘oya, konsepsiya, usul va tushunchalari matematikaning barcha sohalari tomonidan tan olingan. So‘nggi yillarda differensial tenglamalar, hisoblash usullari, matematik dasturlashning talab va ehtiyojlariga javoban funksional analizning yangi chiziqli bo‘lmagan tarmog‘i paydo bo‘ldi. Zamonaviy matematikaning bu yo‘nalishi amaliyotchilar va muhandislarning o‘sib kelayotgan ehtiyojlarining bir qismini qondiradi.

Ushbu darslik Funksional analiz va integral tenglamalar fanidan namunaviy ishchi dasturga moslab tuzilgan. Darslik universitetlarning mexanika va matematika bakalavriyat yo‘nalishlari bo‘yicha ta’lim olayotgan talabalari uchun mo‘ljallab yozilgan.

Darslikning asosiy maqsadi bo‘lg‘usi mutaxassislarni funksional analizning asosiy tushunchalari va usullari bilan tanishtirish, funksional analizning asosiy boblari bo‘yicha nazariy bilimlarini shakllantirish, masalalar yechishda malaka va ko‘nikmalar hosil qilish, hamda ularda integral tenglamalar bilan ishlash mahoratini paydo qilishdan iborat.

Darslikni o‘qish jarayonida talabalar o‘zlarining matematik analiz, chiziqli algebra va geometriyadan olgan bilimlarini to‘ldiradilar, hamda ularni funksional fazolarga moslab qo‘llaydilar, ya’ni mustahkamlaydilar. Talabalar chiziqli funksional va operator tushunchalari bilan tanishadilar va ularning asosiy xossalarini o‘rganadilar. Cheksiz o‘lchamli funksional fazolarni o‘rganish jarayonida o‘quvchilar funksional analizning kuchli va nozik usullarini tushunishga biroz qiynaladilar, lekin tushunib yetganlaridan keyin o‘zlarida ilmga undovchi qandaydir ichki kuch sezadilar. Bu kuch ta’siri ularda cheksiz o‘lchamli fazolarda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lavermasligi va birlik sharning kompakt bo‘lmasligini tushunib yetganlarida namoyon bo‘ladi.

Ushbu darslik O‘zMU va SamDUda *Funksional analiz* hamda *Funksional analiz va integral tenglamalar* fanidan ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar olib boruvchi professor-o‘qituvchilarning ko‘p yillik ish tajribalari asosida yozilgan.

Darslik 9 bob va 40 paragrafdan iborat. Har bir paragraf uchun ta’rif, teorema, lemma va formulalar alohida nomerlangan. Masalan, 2.3-teorema bu 2-paragrafdagi 3-nomerli teorema degani. (1.8) belgilash esa 1-paragrafdagi 8-raqamli formula ekanligini anglatadi. $\Delta-$ belgisi teorema, lemma yoki tasdiq isboti tugaganligini bildiradi. Har paragraf oxirida mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar berilgan.

Ushbu darslikda keltirilgan nazariy ma’lumotlar fan bo‘yicha namunaviy va ishchi dasturda ko‘rsatilgan mavzularni to‘liq qamraydi va u professor-o‘qituvchilarga o‘zlarining ma’ruza matnlarini tuzishda yordam beradi. Unda tipik misollar namuna sifatida yechib ko‘rsatilgan. Har paragraf oxirida keltirilgan mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlarni yechib o‘rgangan talabalar o‘zlarida yetarli darajada bilim va ko‘nikmalar hosil qiladi. Tajribalarimizdan kelib chiqib aytishimiz mumkinki, bu kitob yosh mutaxassislarga funksional analiz va integral tenglamalar fanidan mashg‘ulotlar olib borishida katta yordam beradi. Darslik matematik tahlil va matematik fizika mutaxassisligi bo‘yicha ta’lim olayotgan magistrantlar va aspirantlar uchun ham foydalidir.

Mualliflar darslikni yaxshilashda bergan foydali maslahatlari uchun taqrizchilar B.S. Zokirov, I.A. Ikromov, Q.Q. Mo‘minovlarga, mas’ul muharrir M.E. Muminov, matnni tahrir qilish uchun bergan yordamlari uchun B.E. Davranov va I.N. Bozorovlarga o‘z minnatdorchiliklarini bildiradi. Darslik birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo‘lishi mumkin. Xato va kamchiliklar to‘g‘risidagi fikrlaringizni jabdullaev@mail.ru elektron adresiga jo‘natishlaringizni so‘raymiz.

I bob. To‘plamlar nazariyasining elementlari

Bu bob to‘plamlar nazariyasining elementlariga bag‘ishlangan bo‘lib, u besh paragrafdan iborat. 1-paragrafda to‘plamlar va ular ustida amallar keltirilgan. Bu amallarning sodda xossalari o‘rganilgan. Ikkilik munosabatlari isbotlangan. 2-paragraf akslantirishlar va to‘plamlarni sinflarga ajratishga bag‘ishlangan. Akslantirishda to‘plamlar birlashmasining (kesishmasining) asli ular aslilari birlashmasiga (kesishmasiga) tengligi haqidagi teorema isbotlangan. Xuddi shunday to‘plamlar birlashmasining tasviri ular tasvirlari birlashmasiga tengligi isbotlangan. To‘plamlar kesishmasi uchun bu xil tasdiq o‘rinli bo‘lmasligiga misol keltirilgan. To‘plamlarni sinflarga ajratish bilan akslantirishlar o‘rtasidagi bog‘lanish ochib berilgan. 3-paragrafda sanoqli to‘plamlar va ularning asosiy xossalari o‘rganilgan. Chekli yoki sanoqli sondagi sanoqli to‘plamlarning birlashmasi yana sanoqli bo‘lishi isbotlangan. Sanoqli to‘plamlarga ko‘plab misollar keltirilgan. 4-paragrafda haqiqiy sonlar to‘plamining sanoqsizligi ko‘rsatilib, kontinuum quvvatli to‘plamlarning ayrim xossalari o‘rganilgan. To‘plamlar ekvivalentligi haqidagi asosiy teoremalardan biri Kantor-Bernshteyn teoremasi isbotlangan. Oxirgi 5-paragraf to‘plamlar sistemalariga bag‘ishlangan. To‘plamlar halqasi, to‘plamlar yarim halqasi ta’rifi, misollar keltirilgan, ularning ayrim xossalari isbotlangan. $\sigma-$ algebra va $\delta-$ algebra tushunchalari kiritilib, bu tushunchalarning teng kuchli ekanligi ko‘rsatilgan. Har paragraf oxirida mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar berilgan. Bu bob kelgusi boblarga tayyorlov vazifasini o‘taydi.

1-§. To‘plamlar ustida amallar

Matematikada juda xilma-xil to‘plamlarga duch kelamiz. Haqiqiy sonlar to‘plami, tekislikdagi ko‘pburchaklar to‘plami, ratsional koeffitsiyentli ko‘phadlar to‘plami va hokazo. To‘plam tushunchasi matematikada tayanch tushunchalardan bo‘lib, unga ta’rif berilmaydi. "To‘plam" so‘zining sinonimlari sifatida "ob’ektlar majmuasi" yoki "elementlar jamlanmasi" so‘z birikmalaridan foydalaniladi.

To‘plamlar nazariyasi hozirgi zamon matematikasida juda muhim o‘ringa ega. Biz uning ayrim xossalarini o‘rganish bilan cheklanamiz.

To‘plamlarni lotin alifbosining bosh harflari $A, B, \ldots,$ ularning elementlarini esa kichik - $a, b, \ldots$ harflar bilan belgilaymiz. *a element A to‘plamga tegishli* iborasi $a \in A$ shaklda yoziladi. $a \notin A$ yozuv esa a element A to‘plamga tegishli emasligini bildiradi. Agar A to‘plamning barcha elementlari B to‘plamning ham elementlari bo‘lsa, u holda A to‘plam B to‘plamning qismi deb ataladi va $A \subset B$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, natural sonlar to‘plami haqiqiy sonlar to‘plamining qismi bo‘ladi. A va B to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, ular *teng to‘plamlar* deyiladi va $A = B$ shaklda belgilanadi. Ko‘pincha, to‘plamlarning tengligini isbotlashda $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning bajarilishi ko‘rsatiladi ([1] ga qarang). Ba’zida birorta ham elementi mavjud bo‘lmagan to‘plamlarni qarashga to‘g‘ri keladi. Masalan, $x^2 + 1 = 0$ tenglamaning haqiqiy yechimlari to‘plami, $2 \leq x < 2$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to‘plami va hokazo. Bunday to‘plamlar uchun maxsus *bo‘sh to‘plam* nomi berilgan va uni belgalashda $\emptyset$ simvoldan foydalaniladi. Ma’lumki, har qanday to‘plam bo‘sh to‘plamni o‘zida saqlaydi va har qanday to‘plam o‘zining qismi sifatida qaralishi mumkin. To‘plamlarning bo‘sh to‘plamdan va o‘zidan farqli barcha *qism to‘plamlari xos qism to‘plamlar* deyiladi.

1.1. To‘plamlar ustida amallar. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar C to‘plam faqatgina A va B to‘plam elementlaridan iborat bo‘lsa, u holda C to‘plam A va B to‘plamlarning *yig‘indisi* yoki *birlashmasi* deyiladi va $C = A \cup B$ shaklda belgilanadi (1.1-chizma).

Ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi A_α to'plamlarning yig'indisi ham shunga o'xshash aniqlanadi: A_α to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlar to'plami bu to'plamlarning yig'indisi deyiladi va bu munosabat $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ shaklda belgilanadi.

Endi A va B to'plamlar *kesishmasini* ta'riflaymiz. A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam ularning *kesishmasi* deyiladi (1.2-chizma) va $A \cap B$ shaklda belgilanadi.

1.1-chizma **1.2-chizma**

Ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlarning kesishmasi – $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ deb, A_α to'plamlarning barchasiga tegishli bo'lgan elementlar to'plami tushuniladi.

To'plamlar yig'indisi va kesishmasi aniqlanishiga ko'ra kommutativ va assotsiativdir, ya'ni

$$A \cup B = B \cup A, \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A, \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Bundan tashqari, ular o'zaro distributivlik qonunlari bilan bog'langan

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1.1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{1.2}$$

Biz (1.1) va (1.2) tengliklarning isboti murakkab bo'lmaganligi uchun ularni o'quvchiga havola qilamiz.

Endi A va B to‘plamlar *ayirmasini* ta’riflaymiz. A va B to‘plamlar ayirmasi deb A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan iborat to‘plamga aytiladi va $A \backslash B$ shaklda belgilanadi (1.3-chizma).

Ba’zan (masalan o‘lchovlar nazariyasida), A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi tushunchasini kiritish maqsadga muvofiq bo‘ladi. $A \backslash B$ va $B \backslash A$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat to‘plamga A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va $A \Delta B$ shaklda belgilanadi, ya’ni $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (1.4-chizma).

Ko‘p hollarda qandaydir universal E to‘plamning qism to‘plamlari qaraladi. Masalan, E tekislik, A tekislikdagi biror to‘plam bo‘lsin. Bu holda $E \backslash A$ ayirma A to‘plamning to‘ldiruvchi to‘plami deyiladi va A' yoki CA shaklda belgilanadi (1.5-chizmaga qarang).

1.3-chizma **1.4-chizma** **1.5-chizma**

To‘plamlar nazariyasi va uning tadbiqlarida muhim o‘rin tutadigan *ikkilik prinsipi* deb nomlanuvchi quyidagi ikki munosabatni keltiramiz:

1.1. *Yig‘indining to‘ldiruvchisi to‘ldiruvchilar kesishmasiga teng:*

$$E \backslash \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha}). \tag{1.3}$$

1.2. *Kesishmaning to‘ldiruvchisi to‘ldiruvchilar yig‘indisiga teng:*

$$E \backslash \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha}). \tag{1.4}$$

Ikkilik prinsipi shundan iboratki ixtiyoriy tenglikdan, agar bu tenglik qandaydir universal E to‘plamning qism to‘plamlari ustida bo‘lsa, ikkinchi ikkilik tenglikka o‘tish mimkin, buning uchun barcha qaralayotgan to‘plamlar ularning to‘ldiruvchilari bilan, to‘plamlar kesishmasi-birlashma bilan, birlashmasi - kesishma bilan almashtiriladi.

Biz (1.3) tenglikning isbotini keltiramiz. (1.4) tenglik shunga o‘xshash isbotlanadi.

Isbot. $x \in E \backslash \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $x \in E$ va $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ bo‘ladi. Bundan ixtiyoriy α uchun x ning A_α to‘plamga tegishli emasligiga kelamiz. Demak, x element A_α to‘plamlarning to‘ldiruvchilarida yotadi. Shunday qilib, ixtiyoriy α uchun $x \in E \backslash A_\alpha$ munosabat o‘rinli, bundan biz $x \in \bigcap\limits_{\alpha} (E \backslash A_\alpha)$ ga ega bo‘lamiz. Bu esa

$$E \backslash \bigcup_{\alpha} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha} (E \backslash A_\alpha) \tag{1.5}$$

munosabatni keltirib chiqaradi. Endi teskari munosabatni isbotlaymiz. Agar $x \in \bigcap\limits_{\alpha} (E \backslash A_\alpha)$ bo‘lsa, u holda barcha α larda $x \in E \backslash A_\alpha$ bo‘ladi va x element A_α to‘plamlarning birortasiga ham tegishli bo‘lmaydi, bu esa $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ ekanligini bildiradi. Demak, $x \in E \backslash \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ ekan. Bundan biz

$$E \backslash \bigcup_{\alpha} A_\alpha \supset \bigcap_{\alpha} (E \backslash A_\alpha) \tag{1.6}$$

munosabatga kelamiz. (1.5), (1.6) munosabatlar (1.3) tenglikni isbotlaydi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ *tenglikni isbotlang.*

2. $(E \backslash A) \Delta (E \backslash B) = A \Delta B$ *tenglikni isbotlang, bu yerda* $A \subset E$, $B \subset E$.

3. $(A \cup B) \Delta (C \cup D) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta D)$ *munosabatni isbotlang.*

4. A *va* B *to‘plamlar uchun* $A \subset B \cup (A \Delta B)$ *munosabatni isbotlang.*

5. *Agar* A_1 *va* A_2 *to‘plamlar kesishmasa,* $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ *munosabatni isbotlang.*

2-§. Akslantirishlar. To'plamlarni sinflarga ajratish

2.1. Funksiya tushunchasini umumlashtirish. Ma'lumki, matematik analizda funksiya tushunchasi quyidagicha ta'riflanadi: X sonlar o'qidagi biror to'plam bo'lsin. Agar har bir $x \in X$ songa f qoida bo'yicha aniq bir y son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f *funksiya aniqlangan* deyiladi va $y = f(x)$ shaklda yoziladi. Bunda X to'plam f funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi, bu funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlardan tashkil topgan $E(f)$ to'plam f funksiyaning *qiymatlar sohasi* deyiladi, ya'ni $E(f) = \{ y : y = f(x), \ x \in X \}$.

Agar sonli to'plamlar o'rnida ixtiyoriy to'plamlar qaralsa, u holda funksiya tushunchasining umumlashmasi, ya'ni akslantirish ta'rifiga kelamiz. Bizga ixtiyoriy X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar har bir $x \in X$ elementga biror f qoida bo'yicha Y to'plamdan yagona y element mos qo'yilsa, u holda X to'plamda aniqlangan Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f akslantirish berilgan deyiladi. Bundan keyin biz ixtiyoriy tabiatli to'plamlar bilan ish ko'ramiz (shu jumladan sonli to'plamlar bilan ham), shuning uchun ko'pgina hollarda *funksiya* termini o'rniga *akslantirish* atamasini ishlatamiz.

X to'plamda aniqlangan va Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f akslantirish uchun $f : X \to Y$ belgilashdan foydalaniladi. Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz. $\mathbb{N}$ $-$ natural sonlar to'plami, $\mathbb{Z}$ $-$ butun sonlar to'plami, $\mathbb{Q}$ $-$ ratsional sonlar to'plami, $\mathbb{R}$ $-$ haqiqiy sonlar to'plami, $\mathbb{C}$ $-$ kompleks sonlar to'plami, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ hamda $\mathbb{R}^n$ sifatida n o'lchamli arifmetik Evklid fazo belgilanadi.

Endi $f : X \to Y$ akslantirishga misollar keltiramiz. Quyida, 2.1-2.6 misollarda keltirilgan akslantirishlarning qiymatlar sohalarini toping.

2.1-misol.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| .$$

2.2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 2\,[x]$. Bu yerda $[x]$ belgi x ning butun qismi.

2.3. Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & agar\ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}. \tag{2.1}$$

2.4. Riman funksiyasi $\mathfrak{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & agar\ x = \frac{m}{n} - qisqarmas\ kasr,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & agar\ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.5. Ortogonal proyeksiyalash funksiyasi $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad P(x, y) = x$.

2.6. Sferik akslantirish $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Yechish. 2.1-misolda keltirilgan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirishning qiymatlar sohasi $E(f) = [0, \infty)$ dan iborat. Chunki barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun $|x| \geq 0$ va ixtiyoriy $y \in [0, \infty)$ uchun $f(y) = y$ tenglik o‘rinli.

2.2-misoldagi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 2\,[x]$ akslantirishning qiymatlar sohasi, aniqlanishiga ko‘ra $E(g) = 2 \cdot \mathbb{Z} := \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots, 2n, \ldots\}$ dan iborat.

Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ning qiymatlar sohasi ikki nuqtali to‘plamdan iborat, ya’ni $E(\mathfrak{D}) = \{0; 1\}$.

Riman funksiyasi $\mathfrak{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ning qiymatlar sohasi,

$$E(\mathfrak{R}) = \left\{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}.$$

Ortogonal proyeksiyalash funksiyasi $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad P(x, y) = x$ ning qiymatlar sohasi, $E(P) = \mathbb{R}$ dan iborat.

Sferik akslantirish $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ning qiymatlar sohasi, $E(S) = \mathbb{R}_+$ dan iborat. Δ

Endi $f : X \to Y$ akslantirish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz. Har bir $a \in X$ uchun unga mos qo‘yilgan $b = f(a) \in Y$ element a elementning f akslantirishdagi *tasviri yoki aksi* deyiladi. Umuman, X

to‘plamning biror A qismi berilgan bo‘lsa, A to‘plam barcha elementlarining Y dagi tasvirlaridan iborat to‘plam A to‘plamning f akslantirishdagi *tasviri yoki aksi* deyiladi va $f(A)$ simvol bilan belgilanadi. Endi $b \in Y$ ixtiyoriy element bo‘lsin. X to‘plamning b ga akslanuvchi barcha elementlaridan iborat qismi b elementning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va $f^{-1}(b)$ simvol bilan belgilanadi. $f^{-1}(b)$ to‘plam $f(x) = b$ tenglama ildizlaridan iborat. O‘z navbatida har bir $B \subset Y$ to‘plam uchun X ning B ga akslanuvchi (o‘tuvchi) qismi B to‘plamning f akslantirishdagi asli deyiladi va $f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B\}$ shaklda belgilanadi. Umuman olganda, Y to‘plam sifatida f akslantirishning qiymatlar sohasini o‘zida saqlovchi to‘plam qaraladi. Agar barcha $b \in B$ lar uchun ularning $f^{-1}(b)$ aslilari bo‘sh bo‘lsa, u holda B to‘plamning asli ham bo‘sh to‘plam bo‘ladi.

2.7. 2.1-2.2-misollarda keltirilgan akslantirishlarda $A = [0,\,3)$ to‘plamning tasviri va $B = (1,\,4)$ to‘plamning aslini toping.

Yechish. f akslantirish $[0, \infty)$ da ayniy akslantirish $f(x) = x$ bo‘lganligi uchun $f([0,\,3)) = [0,\,3)$ bo‘ladi. $g(x) = 0$, $x \in [0, 1)$ va xuddi shunday $g(x) = 2$, $x \in [1, 2)$; $g(x) = 4$, $x \in [2, 3)$ ekanligidan $g([0,\,3)) = \{0;\,2; 4\}$ ni olamiz. Endi $B = (1, 4)$ to‘plamning f akslantirishdagi aslini topamiz. Buning uchun $\{x \in \mathbb{R} : |x| \in (1, 4)\}$ yoki $1 < |x| < 4$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to‘plamini topamiz. Bu qo‘sh tengsizlikning yechimi $(-4,\,-1)\bigcup(1,\,4)$ to‘plamdan iborat. Demak, $f^{-1}(B) = (-4,\,-1)\bigcup(1,\,4)$. Xuddi shunday $g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : 2\,[x] \in (1, 4)\}$ to‘plam esa $1 < 2\,[x] < 4 \;\Leftrightarrow\; 0,5 < [x] < 2$ qo‘sh tengsizlikning yechimlaridan iborat. Sonning butun qismi ta’rifiga ko‘ra $g^{-1}(B) = [1,\,2)$. Δ

2.8. 2.3 va 2.4-misollarda keltirilgan akslantirishlarda $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ to‘plamning tasviri va $B = (1, \infty)$ to‘plamning aslini toping.

Yechish. $\mathfrak{D}$ va $\mathfrak{R}$ akslantirishlar $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ to‘plamning barcha elementlariga nolni mos qo'yadi, shuning uchun $\mathfrak{D}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathfrak{R}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \{0\}$. Dirixle va Riman funksiyalarining 1 dan katta qiymatlari mavjud emas, shuning uchun

$$\mathfrak{D}^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{D}(x) > 1\} = \mathfrak{R}^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{R}(x) > 1\} = \emptyset. \quad \Delta$$

Quyidagi tushunchalarni kiritamiz. Aniqlanish sohasi X bo'lgan $f : X \to Y$ akslantirishda $f(X) = Y$ tenglik bajarilsa, f akslantirish X to'plamni Y to'plamning *ustiga yoki syuryektiv akslantirish* deyiladi. Umumiy holda, ya'ni $f(X) \subset Y$ bo'lsa, u holda f akslantirish X to'plamni Y to'plamning *ichiga akslantiradi* deyiladi.

Agar $f : X \to Y$ akslantirishda X dan olingan har xil x_1 va x_2 elementlarga har xil $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ tasvirlar mos kelsa, u holda f *inyektiv akslantirish yoki inyeksiya* deyiladi. Bir vaqtda ham syuryektiv ham inyektiv bo'lgan $f : X \to Y$ akslantirish *biyeksiya yoki biyektiv akslantirish* deyiladi.

2.9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ akslantirishning biyeksiya ekanligini isbotlang.

Isbot. Chiziqli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirishning biyeksiya ekanligini ko'rsatish uchun ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da $ax+b = c$ tenglamaning yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatish yetarli. Yechimning mavjudligi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirishning syuryektivligini, yechimning yagonaligi esa uning inyektivligini ta'minlaydi. Bu tenglamaning yechimi yagona bo'lib u $x = \dfrac{c-b}{a}$ dir. Δ

2.10. Agar $f : X \to Y$ biyektiv akslantirish bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $f : A \to B$ $(B = f(A))$ ham biyeksiya bo'lishini isbotlang.

Isbot. $f(A) = B$ dan uning syuryektiv akslantirish ekanligi kelib chiqadi, inyektivligi esa $f : X \to Y$ ning inyektivligidan kelib chiqadi. Δ

2.1-teorema. *Ikki to'plam birlashmasining asli ular aslilarining birlashmasiga teng, ya'ni*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \tag{2.3}$$

Isbot. Aytaylik, $x \in f^{-1}(A \cup B)$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $f(x) \in A \cup B$, ya'ni $f(x) \in A$ yoki $f(x) \in B$. Bu holda x element $f^{-1}(A)$ yoki $f^{-1}(B)$ to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'ladi, ya'ni $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Bundan $f^{-1}(A \bigcup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ munosabat kelib chiqadi. Endi teskari munosabatni ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ixtiyoriy element bo'lsin, u holda x element $f^{-1}(A)$ yoki $f^{-1}(B)$ to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'ladi, ya'ni $f(x)$ A yoki B to'plamlarning kamida biriga tegishli, shunday ekan, $f(x) \in A \cup B$. Bu yerdan $x \in f^{-1}(A \cup B)$ ekanligi va natijada $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$ munosabat kelib chiqadi. Demak, (2.3) tenglik o'rinli. Δ

Quyida biz yana shunga o'xshash ikkita teorema keltiramiz. Uchala teoremaning isbot sxemasi ikki C va D to'plamlarning tengligini ko'rsatishda foydalaniladigan $C \subset D$ va $D \subset C$ munosabatlarga asoslangan.

2.2-teorema. *Ikki to'plam kesishmasining asli ular aslilarining kesishmasiga teng, ya'ni*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \tag{2.4}$$

Isbot. $x \in f^{-1}(A \cap B)$ ixtiyoriy element bo'lsin, u holda $f(x) \in A \cap B$, ya'ni $f(x) \in A$ va $f(x) \in B$, shunday ekan, $x \in f^{-1}(A)$ va $x \in f^{-1}(B)$, ya'ni $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Demak, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Endi $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ bo'lsin, u holda $x \in f^{-1}(A)$ va $x \in f^{-1}(B)$. Bundan $f(x) \in A$ va $f(x) \in B$ ga yoki $f(x) \in A \cap B$ ga ega bo'lamiz. Demak, $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Bu yerdan $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$ munosabat kelib chiqadi. Bu munosabatlar (2.4) tenglikni isbotlaydi. Δ

2.1 va 2.2-teoremalarning tasdiqlari ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar birlashmasi va kesishmasi uchun ham o'rinli, ya'ni

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha).$$

2.3-teorema. *Ikki to'plam birlashmasining tasviri ular tasvirlarining birlashmasiga teng*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \tag{2.5}$$

Isbot. $y \in f(A \cup B)$ ixtiyoriy element bo'lsin, u holda $y = f(x)$ bo'lib, x element A va B to'plamlardan aqalli biriga tegishli bo'ladi. Shunday ekan, $y \in f(A) \cup f(B)$. Bu yerdan $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Endi teskari munosabatni ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $y \in f(A) \cup f(B)$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $y = f(x)$ bo'lib, x element A va B to'plamlardan aqalli biriga tegishli bo'ladi, ya'ni $x \in A \cup B$. Bundan, $y = f(x) \in f(A \cup B)$ va demak, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Bu munosabatlardan (2.5) tenglik kelib chiqadi. Δ

2.3-teorema tasdig'i ham ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar uchun o'rinli bo'ladi, ya'ni $f(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha} f(A_\alpha)$ tenglik o'rinli.

2.1-eslatma. Umuman olganda, ikki to'plam kesishmasining aksi ular aksilarining kesishmasiga teng emas. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilamiz.

2.11. 2.5-misolda keltirilgan ortogonal proyeksiyalash akslantirishi $P(x, y) = x$ va $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \ y = 0\}$, $B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \ y = 1\}$ to'plamlar berilgan. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ tenglik to'g'rimi?

Yechish. A va B to'plamlar o'zaro kesishmaydi, ya'ni $A \cap B = \emptyset$ Ammo ularning P akslantirishdagi tasvirlari ustma-ust tushadi, ya'ni $P(A) = [0, \ 1]$, $P(B) = [0, \ 1]$ va $P(A) \bigcap P(B) = [0, \ 1]$. Ammo $P(A \bigcap B) = \emptyset$.

2.2. To'plamlarni sinflarga ajratish. Ekvivalentlik munosabatlari. Ko'pgina masalalarda berilgan to'plamni elementlarining ba'zi bir belgilariga qarab o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratiladi. Masalan, fazoni markazi koordinata boshida va radiusi r bo'lgan har xil sferalarga ajratish mumkin. Bu sferalar o'zaro kesishmaydi. Yoki bir shahar aholisini bir yilda tug‘ilganlik belgisiga ko‘ra qism to‘plamlarga ajratish mumkin. Bunday misollarning har biri *to‘plamni o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish* deyiladi.

To‘plamlarni o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish belgilari har xil bo‘lishi mumkin. Ammo bu belgilar ixtiyoriy emas. Masalan, tekislikda ikki a va b nuqtalar orasidagi masofa 1 dan kichik bo‘lsa, ularni bitta sinfga kiritsak, bu belgi tekislikni o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratmaydi, chunki a va b nuqtalar orasidagi masofa 1 dan kichik, b va c nuqtalar orasidagi masofa ham 1 dan kichik bo‘lib, a va c nuqtalar orasidagi masofa 1 dan katta bo‘lishi mumkin. Ko‘rinyaptiki, a va b nuqtalar bir sinfda, b va c ham bir sinfda. U holda bir sinfga orasidagi masofa 1 dan katta bo‘lgan a va c nuqtalar tegishli bo‘ladi. Hosil qilingan xulosa sinflarning tashkil qilinishiga zid, ya’ni tekislik bu belgi yordamida o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajralmaydi.

Endi to‘plam elementlari qanday shartlarni qanoatlantiruvchi belgilar yordamida o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajralishini qarab chiqamiz.

Biror M to‘plam va uning o‘zini-o‘ziga dekart ko‘paytmasi $M \times M$ berilgan bo‘lsin va $K \subset M \times M$ qism to‘pam bo‘lsin. Agar $(a, b) \in K$ bo‘lsa, a element b element bilan φ *munosabatda deyiladi* va $a \underset{\varphi}{\sim} b$ shaklda belgilanadi.

2.1-ta’rif. *Agar M to‘plam elementlari orasidagi φ munosabat quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, unga ekvivalentlik munosabati* deyiladi:

1. *Ixtiyoriy $a \in M$ element uchun $a \underset{\varphi}{\sim} b$ (refleksivlik);*
2. *Agar $a \underset{\varphi}{\sim} b$ bo‘lsa, u holda $b \underset{\varphi}{\sim} a$ (simmetriklik);*
3. *Agar $a \underset{\varphi}{\sim} b$ va $b \underset{\varphi}{\sim} c$ bo‘lsa, u holda $a \underset{\varphi}{\sim} c$ (tranzitivlik).*

2.4-teorema. *M to‘plamda kiritilgan φ munosabat M ni o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratishi uchun uning ekvivalentlik munosabati bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* Agar M da kiritilgan φ munosabat uni o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratsa, $a \underset{\varphi}{\sim} b$ dan a va b ning bir sinfga tegishliligi kelib chiqadi. U holda $a \underset{\varphi}{\sim} a$ va $b \underset{\varphi}{\sim} a$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $a \underset{\varphi}{\sim} b$ va $b \underset{\varphi}{\sim} c$ bo‘lsa, a, b va c lar bir sinfga tegishli bo‘ladi, ya’ni $a \underset{\varphi}{\sim} c$. Demak, bu munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo‘ladi.

Yetarliligi. M to‘plam elementlari orasida biror φ ekvivalentlik munosabati o‘rnatilgan bo‘lsin. K_a orqali a element bilan φ munosabatda bo‘lgan elementlar to‘plamini belgilasak, refleksivlikka ko‘ra $a \underset{\varphi}{\sim} a$ dan $a \in K_a$ bo‘ladi. Agar K_a va K_b sinflarni olsak, ular yoki teng yoki $K_a \cap K_b = \emptyset$ bo‘ladi. Haqiqatan ham, $c \in K_a \cap K_b$ desak, $c \underset{\varphi}{\sim} a$ va $c \underset{\varphi}{\sim} b$ bo‘ladi. Simmetriklik xossasiga ko‘ra $a \underset{\varphi}{\sim} c$ u holda tranzitivlik xossasiga ko‘ra

$$a \underset{\varphi}{\sim} b. \tag{2.6}$$

Endi $x - K_a$ sinfdan olingan ixtiyoriy element bo‘lsin, ya’ni $x \underset{\varphi}{\sim} a$, u holda (2.6) va tranzitivlik xossasiga ko‘ra $x \underset{\varphi}{\sim} b$, ya’ni $x \in K_b$. Demak, $K_a \subset K_b$. Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, K_b sinfning ixtiyoriy y elementi K_a sinfga ham qarashli bo‘ladi. Shunday qilib, agar ikki K_a va K_b sinflar hech bo‘lmaganda bitta umumiy elementga ega bo‘lsa, ular ustma-ust tushadi. Δ

To‘plamni sinflarga ajratish tushunchasi akslantirish tushunchasi bilan uzviy bog‘liq. Aytaylik, A to‘plamni B to‘plamga akslantiruvchi f akslantirish berilgan bo‘lsin. A to‘plamda aniqlangan f akslantirishda, B to‘plamda tasvirlari ustma-ust tushuvchi elementlarni bir sinfga yig‘sak, ya’ni har bir $b \in B$ uchun $\{x \in A : f(x) = b\}$ to‘plamni bir sinf desak, natijada A ni sinflarga ajratishga ega bo‘lamiz. Teskarisi, A ixtiyoriy to‘plam va uning biror bir sinflarga ajralishini qaraylik. B orqali A to‘plam ajralgan sinflar to‘plamini belgilaymiz. Har bir $a \in A$ elementga o‘zi tegishli bo‘lgan sinfni (B to‘plam elementini) mos qo‘yish bilan A ni B ga akslantirishga ega bo‘lamiz.

2.12. Ortogonal proyeksiyalash akslantirishi $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$ ni qaraymiz. Bunda OX o‘qidagi har bir $a \in \mathbb{R}$ nuqtaning asli $P^{-1}(a) = \{(a, y) : y \in \mathbb{R}\}$, OX o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan vertikal chiziqdan iborat. Shunday ekan, P proyeksiyalash akslantirishiga tekislikni parallel to‘g‘ri chiziqlardan iborat sinflarga ajratish mos keladi.

2.13. Uch o‘lchamli $\mathbb{R}^3$ fazoni uning koordinatalar boshidan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarini bir sinfga yig‘ish bilan sinflarga ajratamiz. Har bir sinf markazi koordinatalar boshida bo‘lgan $r \geq 0$ radiusli sferadan iborat bo‘ladi. Demak, $\mathbb{R}^3$ fazoni konsentrik sferalarga ajratishga bu fazoni $[0,\infty)$ yarim o‘qqa akslantiruvchi $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+,\ S(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sferik akslantirish mos keladi.

2.14. Butun qismlari bir xil haqiqiy sonlarni bir sinfga to‘plash yo‘li bilan haqiqiy sonlar to‘plamini sinflarga ajratish mumkin. Bu sinflarga ajratishga $g(x) = [x]$ (2.2-misolga qarang) akslantirish mos keladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Agar a va b haqiqiy sonlarning kasr qismlari teng bo‘lsa, ularni φ munosabatda deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo‘ladimi?*

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0,5 \cdot [x]$ *funksiya berilgan. Agar* $A = [0,\ 8]$, $B = (2,\ 3)$ *bo‘lsa,* $f(A)$ *va* $f^{-1}(B)$ *larni toping.*

3. $f : X \to [5,\ 20],\ \ f(x) = x^2 + 1$ *funksiya berilgan.* X *to‘plam qanday tanlansa,* $f-$ *ustiga (syuryektiv) akslantirish bo‘ladi?*

4. $f : X \to [0,\ \infty)\ ,\ f(x) = x^2 + 1$ *funksiya berilgan.* X *to‘plam qanday tanlansa,* $f-$ *inyektiv akslantirish bo‘ladi?*

5. $f : [0,\ \pi] \to [-1,\ 1]\,,\ f(x) = \cos x\ ,\ g : [0,\ \pi] \to [0,\ 1],\quad g(x) = \sin x\,,$

$\varphi : [0,\ \frac{\pi}{2}] \to [0,\ 1],\quad \varphi(x) = \sin x, \psi : [0,\ 3] \to [0,\ 10],\quad \psi(x) = x^2+1,$

akslantirishlar ichidan inyektiv, syuryektiv va biyektivlarini ajrating.

.

3- §. Ekvivalent to‘plamlar

3.1. Chekli va cheksiz to‘plamlar. Chekli dona elementdan iborat to‘plamga *chekli to‘plam* deyiladi, aks holda to‘plam *cheksiz* deyiladi. Har xil to‘plamlarni kuzatish jarayonida biror usul bilan berilgan to‘plam elementlari sonini hech bo‘lmaganda taxminan aytish mumkin. Masalan, ko‘pyoq uchlari sonini, ma’lum sondan oshmaydigan tub sonlar sonini, yer yuzidagi barcha suv molekulalari sonini aniq yoki taxminan aytish mumkin. Bu to‘plamlarning har biri, aniq bo‘lmasada, cheklita elementga ega. Ikkinchi tomondan elementlari soni chekli bo‘lmagan to‘plamlar ham mavjud. Masalan, natural sonlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plami, tekislikdagi doiralar to‘plami, ratsional koeffitsiyentli barcha ko‘phadlar to‘plami va hokazolar cheksiz to‘plamlarga misol bo‘ladi. Bunda, cheksiz to‘plam deganda, bu to‘plamdan bitta, ikkita, uchta va hokazo marta elementlarni olgandan keyin ham elementlari tugamaydigan to‘plam tushuniladi.

Ikki chekli to‘plam elementlari sonining tengligi, yoki biridagi elementlar soni ikkinchisidan ko‘pligini sanash bilan taqqoslash mumkin. Quyidagicha savol tug‘iladi, ikki cheksiz to‘plam elementlarini biror usul bilan taqqoslash mumkinmi? Boshqacha aytganda, tekislikdagi doiralar, sonlar o‘qidagi ratsional sonlar, $[0, 1]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar yoki fazodagi to‘g‘ri chiziqlardan iborat to‘plamlardan qaysi birining elementlari ko‘p degan savol ma’noga egami?

Ikki chekli to‘plam elementlari sonini taqqoslash usullari bilan tanishamiz. *Birinchi usul*, ular elementlarini sanash yo‘li bilan taqqoslashdir. *Ikkinchi usul*, bu to‘plamlar o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnatish yo‘li bilan taqqoslashdir.

Ravshanki, ikki chekli to‘plam o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnatish uchun, ulardagi elementlar soni teng bo‘lishi zarur va yetarlidir. Masalan, oliygohdagi biror guruh talabalari soni va auditoriyadagi stullar soni tengligini tekshirish uchun, ularni sanamasdan, har bir talabani aniq bir stulga o‘tqazish kifoya bo‘ladi. Agar har bir talabaga joy yetarli bo‘lib, birorta ham ortiqcha bo‘sh stul qolmasa, ya’ni talabalar to‘plami va stullar to‘plami o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnatilsa, bu to‘plamlardagi elementlar soni teng bo‘ladi.

Ta’kidlash lozimki, agar birinchi taqqoslash usuli faqat chekli to‘plamlar uchun yaroqli bo‘lsa, ikkinchi taqqoslash usuli cheksiz to‘plamlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

3.2. Sanoqli to‘plamlar. Cheksiz to‘plamlar ichida eng soddasi sanoqli to‘plam deb ataluvchilaridir.

3.1-ta’rif. *Agar M to‘plam bilan natural sonlar to‘plami o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, M ga sanoqli to‘plam deyiladi. Boshqacha ta’riflasak, agar M to‘plam elementlarini natural sonlar vositasida $a_1, a_2, \dots,$ $a_n, \dots$ cheksiz ketma-ketlik ko‘rinishida nomerlab chiqish mumkin bo‘lsa, M ga sanoqli to‘plam deyiladi.*

Endi sanoqli to‘plamlarga misollar keltiramiz.

3.1. Butun sonlar to‘plami $\mathbb{Z}$ va natural sonlar to‘plami $\mathbb{N}$ o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnating.

Yechish. Biyektiv moslikni quyidagi usul bilan o‘rnatish mumkin.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} 2n+1, & agar \ \ n \geq 0 \\ -2n, & agar \ \ n < 0 \end{cases}$$

ning biyektiv akslantirish ekanligi 2.9-2.10 misollardan kelib chiqadi. Demak, butun sonlar to‘plami sanoqli ekan. Δ

3.2. Barcha juft natural sonlar to‘plami va natural sonlar to‘plami o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnating.

Yechish. Biyektiv moslikni $f(2n) = n$ qoida bo‘yicha o‘rnatish mumkin.

Quyida biz uncha oddiy bo‘lmagan, lekin muhim misolni qaraymiz.

3.3. Ratsional sonlar to‘plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

Isbot. Har bir ratsional son yagona usulda

$$\alpha = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}$$

qisqarmas kasr ko'rinishida yoziladi. Ushbu ratsional son uchun $|p| + q$ uning *balandligi* deyiladi. Ravshanki, berilgan balandlikka ega bo'lgan ratsional sonlar cheklita. Masalan, 1 balandlikka faqat $0 = \frac{0}{1}$ son ega, 2 balandlikka faqat $1 = \frac{1}{1}$ va $-1 = \frac{-1}{1}$ sonlar ega, 3 balandlikka esa $2 = \frac{2}{1}, \ \frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{1}$ va $-\frac{1}{2}$ sonlari ega va hokazo. Barcha ratsional sonlarni ularning balandliklari o'sib borishi tartibida nomerlaymiz, ya'ni dastlab balandligi 1 ga teng son, keyin balandligi 2 ga teng sonlar, undan keyin balandligi 3 ga teng sonlar yoziladi va hokazo. Bu tartiblashda har bir ratsional son aniq bir nomerga ega bo'ladi, ya'ni natural sonlar to'plami va ratsional sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Bu yerdan ratsional sonlar to'plamining sanoqli ekanligi kelib chiqadi. Δ

Sanoqli to'plamlarning ba'zi umumiy xossalarini keltiramiz.

3.1-xossa. *Sanoqli to'plamning ixtiyoriy qism to'plami chekli yoki sanoqlidir.*

Isbot. Aytaylik A sanoqli to'plam, B esa uning qism to'plami bo'lsin, ya'ni $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. A ning B ga tegishli elementlari $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ lar bo'lsin. Agar $n_1, n_2, \ldots$ sonlar ichida eng kattasi mavjud bo'lsa, u holda B chekli to'plam bo'ladi, aks holda sanoqli to'plam bo'ladi, chunki uning elementlari natural sonlar bilan nomerlangan. Δ

3.2-xossa. *Chekli yoki sanoqlita sanoqli to'plamlar birlashmasi yana sanoqli to'plamdir.*

Isbot. Aytaylik $A_1, A_2, \ldots$ sanoqli to'plamlar bo'lsin. Bu to'plamlarni o'zaro kesishmasin deb talab qilamiz. Talabimiz o'rinli, chunki aks holda $A_1, A_2 \backslash A_1$, $A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), A_4 \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3), \ldots$ to'plamlar o'zaro kesishmaydi, har biri ko'pi bilan sanoqli elementga ega va bu to'plamlar yig'indisi $A_1, A_2, \ldots$

to'plamlar yig'indisiga teng. Qaralayotgan $A_1, A_2, \ldots$ to'plamlarning hamma elementlarini quyidagi cheksiz jadval ko'rinishida yozamiz:

Bu yerda birinchi satrda A_1 to'plam elementlari joylashgan, ikkinchi satrda A_2 to'plam elementlari joylashgan va hokazo. Endi jadvalning barcha elementlarini diagonal bo'yicha nomerlab chiqamiz, ya'ni birinchi element deb a_{11} ni, ikkinchi element deb a_{12} ni, uchinchi element deb a_{21} ni, to'rtinchi element deb a_{31} ni, beshinchi element deb a_{22} ni, oltinchi element deb a_{13} ni va hokazo, ya'ni quyida strelka bilan ko'rsatilgan tartibda harakat qilib, nomerlab chiqamiz:

Umuman olganda a_{mn} element $(m+1)\cdot(n+1)$ dan oshmagan nomerga ega bo'ladi. Ravshanki, bu qoida bo'yicha tartiblashda

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

to'plamning har bir elementi aniq bir nomerga ega bo'ladi. Demak, jadval ko'rinishida tasvirlangan A to'plam va natural sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslikni ko'rsatilgan usulda o'rnatish mumkin. Δ

3.3-xossa. *Har qanday cheksiz to'plam sanoqli qism to'plamga ega.*

Isbot. Aytaylik, M cheksiz to'plam bo'lsin. Undan ixtiyoriy a_1 elementni tanlaymiz. M cheksiz to'plam bo'lgani uchun unda a_1 dan farqli a_2 elementni tanlash mumkin, undan keyin a_1 va a_2 dan farqli a_3 elementni tanlaymiz, M cheksiz to'plam bo'lgani uchun bu jarayonni cheksiz davom ettirish mumkin. M cheksiz to'plam bo'lganligi uchun har bir element tanlanganidan keyin unda cheksiz ko'p element qoladi. Natijada $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ sanoqli qism to'plamga ega bo'lamiz. Δ

Bundan, sanoqli to'plamlar cheksiz to'plamlar ichida *eng minimali* bo'ladi deb aytish mumkin.

3.3. Ekvivalent to'plamlar. U yoki bu cheksiz to'plamlarni natural sonlar to'plami bilan taqqoslash natijasida sanoqli to'plam tushunchasiga keldik. To'plamlarni nafaqat natural sonlar to'plami bilan taqqoslash mumkin, balki ixtiyoriy ikki to'plamni ular o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik (biyeksiya) o'rnatish bilan taqqoslash mumkin.

3.2-ta'rif. *Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam sanoqsiz to'plam deyiladi.*

3.3-ta'rif. *Agar A va B to'plamlar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, u holda ular ekvivalent to'plamlar deyiladi va $A \sim B$ shaklida belgilanadi.*

To'plamlarning ekvivalentligi tushunchasini ham chekli to'plamlar, ham cheksiz to'plamlar uchun qo'llash mumkin. Ikkita chekli to'plam ekvivalent bo'lishi uchun ularning elementlari soni teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Endi sanoqli to'plam tushunchasini boshqacha ta'riflash mumkin: agar to'plam natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lsa, u *sanoqli to'plam* deyiladi. Ishonch hosil qilish qiyin emaski, agar ikkita to'plam uchunchi to'plamga ekvivalent bo'lsa, ularning o'zlari ham ekvivalentdir, xususan, ixtiyoriy ikkita sanoqli to'plamlar ekvivalentdir.

3.4. Ixtiyoriy ikkita $[a, b]$ va $[c, d]$ kesmalardagi nuqtalar to'plamlari ekvivalentligini isbotlang. Bu yerda $a < b$, $c < d$ deb faraz qilinadi.

Isbot. $[a, b]$ va $[c, d]$ kesmalar o'rtasidagi biyektiv moslik 3.1-chizmadan ham ko'rinib turibdi. Bu to'plamlar o'rtasida biyektiv moslikni

$$\varphi : [a, b] \to [c, d], \quad \varphi(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c$$

orqali o'rnatish mumkin. φ ning biyektiv moslik ekanligi 2.9, 2.10-misollardan kelib chiqadi.

3.1-chizma

3.5. Sonlar o‘qi $\mathbb{R}$ va $(0,\ 1)$ interval ekvivalent to‘plamlardir. Bu to‘plamlar o‘rtasida biyektiv moslikni

$$y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

funksiya yordamida o‘rnatish mumkin.

Cheksiz to‘plamlarga oid misollarni o‘rganish jarayonida ko‘rdikki, ba’zida cheksiz to‘plamlar o‘zining biror xos qism to‘plamiga ekvivalent bo‘ladi. Masalan, butun sonlar to‘plami va natural sonlar to‘plami ekvivalent, sonlar o‘qi esa $(0, 1)$ intervalga ekvivalent.

Bu holat faqat cheksiz to‘plamlarga xosdir. Haqiqatan, 3.2-banddagi 3.3-xossada ko‘rilgan cheksiz M to‘plam va uning $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = A$ sanoqli qismini qaraylik. Bu A to‘plamni $A_1 = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}, \ldots\}$ va $A_2 = \{a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$ qism to‘plamlarga ajratamiz.

3.6. M va $M \backslash A_2$ to‘plamlarni ekvivalent ekanligini isbotlang.

Isbot. A va A_1 to‘plamlar sanoqli bo‘lgani uchun, ular ekvivalentdir. Shuning uchun ular o‘rtasida $\varphi : A \to A_1$ biyektiv moslik mavjud. Bu moslikni undan keyin $A \bigcup (M \backslash A) = M$ va $A_1 \bigcup (M \backslash A) = M \backslash A_2$ to‘plamlarga quyidagicha davom ettirish mumkin, ya’ni $M \backslash A$ to‘plamning har bir elementiga o‘zi mos qo‘yiladi, ya’ni

$$\psi : M \to M\backslash A_2, \quad \psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & agar \;\; x \in A \\ x, & agar \;\; x \in M\backslash A \end{cases} .$$

Shunday qilib, M va $M\backslash A_2$ to‘plamlar o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnatildi. Lekin M va $M\backslash A_2$ to‘plamlar teng emas, ammo ular ekvivalent. Δ

Natijada biz quyidagi tasdiqqa ega bo‘lamiz.

3.1-tasdiq. *Ixtiyoriy cheksiz to‘plam o‘zining biror xos qism to‘plamiga ekvivalent bo‘ladi.*

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *O‘zbekistondagi barcha talabalar to‘plami sanoqlimi?*

2. *Barcha ratsional sonlar to‘plami sanoqlimi?*

3. *Ayirmasi chekli, keshishmasi sanoqli bo‘lgan A va B sanoqli to‘plamlarga misol keltiring.*

4. *Simmetrik ayirmasi sanoqli, kesishmasi chekli bo‘lgan A va B sanoqli to‘plamlarga misol keltiring.*

5. *A va B sonli to‘plamlarning arifmetik yig‘indisi deganda $C = \{c : c = a + b, \, a \in A, \, b \in B\}$ to‘plam tushuniladi. Agar A va B to‘plamlar sanoqli bo‘lsa, ularning arifmetik yig‘indisi ham sanoqli bo‘lishini isbotlang?*

6. $\sin x = 0,5$ *tenglamaning barcha haqiqiy ildizlari to‘plami sanoqlimi?*

7. *Barcha ratsional koeffitsiyentli ko‘phadlar to‘plami sanoqli ekanligini isbotlang.*

8. *Agar ξ son biror ratsional koeffitsiyentli ko‘phadning ildizi bo‘lsa, ξ algebraik son deb ataladi. Algebraik sonlar to‘plamining sanoqli ekanligini isbotlang.*

9. *Agar A to'plam B ga, B to'plam C ga ekvivalent bo'lsa, u holda A to'plam C ga ekvivalent bo'lishini isbotlang.*

10. *To'plamlar o'rtasida kiritilgan ekvivalentlik munosabati refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lishini isbotlang.*

4-§. Haqiqiy sonlar to'plamining sanoqsizligi

Oldingi paragraflarda sanoqli to'plamlarga misollar qaradik va cheksiz to'plamlarning ayrim xossalari bilan tanishdik. Quyidagi savol paydo bo'lishi tabiiydir: umuman olganda sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plamlar mavjudmi? Bu savolga ijobiy javob quyidagi teoremada keltirilgan.

4.1-teorema. $[0,\ 1]$ *kesmadagi haqiqiy sonlar to'plami sanoqsizdir.*

Isbot. Faraz qilaylik, $[0,\ 1]$ kesmada yotuvchi (barcha yoki ba'zi bir) haqiqiy sonlardan tuzilgan $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} = A$ sanoqli to'plam berilgan bo'lsin. U holda

$$a_1 = 0,\ a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots,$$

$$a_2 = 0,\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots,$$

$$a_3 = 0,\ a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n}\dots,$$

$$a_n = 0,\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots, \tag{4.1}$$

Bu yerda $a_{ik} - a_i$ sonning $k-$chi o'nli raqami. Endi 0 va 9 raqamlarga teng bo'lmagan $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ raqamlar ketma-ketligini quyidagi usulda tanlaymiz: b_1 raqam a_{11} ga teng emas, b_2 raqam a_{22} ga teng emas, b_3 raqam a_{33} ga teng emas va b_n raqam a_{nn} ga teng emas va hokazo. Tanlangan $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ raqamlar yordamida $[0,\ 1]$ ga tegishli bo'lgan $\beta = 0, b_1b_2b_3\dots b_n\dots$ kasrni aniqlaymiz. Aniqlanishiga ko'ra, β son $a_1, a_2, \dots,$ $a_n, \dots$ kasrlarning birortasiga ham teng emas, chunki β kasr a_1 kasrdan verguldan keyingi birinchi raqami bilan, a_2 dan verguldan keyingi ikkinchi raqami bilan va hokazo a_n dan verguldan keyingi n raqami bilan farq qiladi. Shunday qilib, $[0,\ 1]$ kesma elementlaridan tashkil topgan hech bir sanoqli to'plam $[0,\ 1]$ ni to'liq qoplay olmaydi. Δ

4.1-ta'rif. $[0,\ 1]$ *kesma va unga ekvivalent bo'lgan to'plamlar kontinuum quvvatli to'plamlar deyiladi.*

Shunday qilib, $[0,\ 1]$ kesma sanoqsiz bo'lgan to'plamga misol bo'ladi. Endi $[0,\ 1]$ kesmaga ekvivalent bo'lgan, ya'ni kontinuum quvvatli to'plamlarga misollar keltiramiz.

4.1-misol. $[0,\ 1]$ kesma va $(0,\ 1)$ intervalning ekvivalent to'plamlar ekanligini isbotlang.

Isbot. Buning uchun $(0,\ 1)$ dan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ sanoqli qism to'plamni ajratamiz va undan foydalanib, $A_1 = \{0,\ 1,\ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset [0,\ 1]$ to'plamni quramiz. Ushbu

$$\varphi : [0,\ 1] \to (0,\ 1)\,, \quad \varphi\,(x) = x, \quad x \in [0,\ 1]\,\backslash A_1$$

$$\varphi(0) = a_1, \ \ \varphi(1) = a_2, \ \ \varphi(a_n) = a_{n+2}, \ \ n \geq 1$$

akslantirish $[0, 1]$ va $(0, 1)$ to'plamlar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatadi.

4.2. 3.4-misolga asosan $[0, 1]$ kesma ixtiyoriy $[a,\ b]$ kesmaga va $(a,\ b)$ intervalga ekvivalent bo'ladi, ya'ni $[a,\ b]$ va $(a,\ b)$ to'plamlar ham sanoqsizdir.

4.3. 3.5 va 4.1-misollardan sonlar o'qidagi barcha nuqtalar to'plami $[0, 1]$ kesmaga ekvivalent ekanligi kelib chiqadi.

4.4. Tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami, sfera sirtidagi nuqtalar to'plami, uch o'lchamli fazodagi nuqtalar to'plami, sfera ichidagi nuqtalar to'plami va hokazo to'plamlarga misol keltirish mumkinki, ularning har biri $[0, 1]$ ga ekvivalentdir.

4.5. Tekislikdagi hamma to'g'ri chiziqlar to'plami $[0, 1]$ kesmaga ekvivalentdir.

4.6. Bir yoki bir nechta o‘zgaruvchining uzluksiz funksiyalari to‘plami ham $[0,\ 1]$ ga ekvivalentdir.

Sonlar o‘qida murakkabroq kontinuum quvvatli to‘plamga misol qaraymiz. Qaralayotgan bu to‘plam *Kantor to‘plami*, yoki *Kantor mukammal to‘plami* nomi bilan taniqli.

4.7. Kantor to‘plamini kontinuum quvvatli ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Kantor to‘plami quyidagicha quriladi. $E = [0,\ 1]$ bo‘lsin. Undan $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = K_1$ intervalni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to‘plamni F_1 bilan belgilaymiz. Keyin F_1 dan $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ va $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ intervallarni chiqarib tashlaymiz, ularning birlashmasini K_2 orqali, qolgan yopiq to‘plamni, ya’ni

$$F_1 \backslash K_2 = \left[0,\ \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$

to‘plamni F_2 bilan (4.1-chizma) belgilaymiz. Bu to‘rtta kesmaning har biri teng 3 qismga bo‘linib, o‘rtadagi uzunligi 3^{-3} teng bo‘lgan interval chiqarib tashlanadi. Chiqarib tashlangan

$$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \bigcup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \bigcup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \bigcup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right) \tag{4.2}$$

to‘plamni K_3 bilan $F_2 \backslash K_3$ ni esa F_3 bilan (4.1-chizma) belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, yopiq to‘plamlarning kamayuvchi F_n ketma-ketligini hosil qilamiz. Agar

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

deb belgilasak, K yopiq to‘plam bo‘ladi. U $[0,\ 1]$ kesmadan sanoqli sondagi $K_1, K_2, \dots K_n, \dots$ intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan K *to‘plam Kantor to‘plami* deyiladi.

Endi K to‘plamning strukturasini o‘rganamiz. Ravshanki, $[0,\ 1]$ kesmadan chiqarib tashlangan intervallarning oxirlari bo‘lgan

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9}, \cdots \tag{4.3}$$

nuqtalar K ga tegishli bo'ladi. Biroq K to'plam faqat shu nuqtalardan iborat emas. $[0,\ 1]$ kesmadagi K ga tegishli bo'lgan nuqtalarni quyidagicha xarakterlash mumkin. Buning uchun $[0,\ 1]$ kesmadagi har bir x ni uchlik sistemada yozamiz:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots$$

bu yerda a_n sonlar 0, 1 va 2 raqamlardan birini qabul qilishi mumkin. O'nli kasrlar holidagidek bu yerda ham ba'zi sonlarni ikki xil ko'rinishda yozish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \cdots + \frac{0}{3^n} + \cdots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$$

4.1-chizma

Endi K to'plamga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasi haqida fikr yuritamiz. Ravshanki, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ intervaldagi sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_1 son albatta 1 ga teng bo'ladi, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ va $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ intervallarga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_2 son albatta 1 ga teng bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ va $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ intervallarga tegishli sonlar uchun ularning uchlik sistemadagi yoyilmalarida a_3 son albatta 1 ga teng bo'ladi va hokazo. Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in [0,\ 1] \backslash K$ son uchun uning uchlik sistemadagi yoyilmasida qatnashuvchi $a_1,\ a_2, \dots a_n, \dots$ sonlarning kamida bittasi 1 ga teng. Aytilgan mulohazalardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: K to‘plamga kamida bir usul bilan uchlik kasr ko‘rinishida tasvirlanuvchi shunday $x \in [0,\ 1]$ sonlar kiradiki, ularga mos $a_1,\ a_2, \dots a_n, \dots$ ketma-ketlikda 1 raqami biror marta ham uchramaydi. Shunday qilib, har bir $x \in K$ uchun

$$a_1,\ a_2, \dots a_n, \dots \tag{4.4}$$

ketma-ketlikni mos qo‘yish mumkin, bu yerda a_n raqam 0 yoki 2 ni qabul qiladi. Bunday ketma-ketliklar to‘plami kontinuum quvvatli to‘plamni tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun har bir (4.4) ketma-ketlikka

$$b_1,\ b_2,\ \dots, b_n, \dots \tag{4.5}$$

ketma-ketlikni shunday mos qo‘yamizki, agar $a_n = 0$ bo‘lsa, $b_n = 0$ bo‘ladi, agar $a_n = 2$ bo‘lsa, $b_n = 1$ bo‘ladi. Har bir (4.5) ketma-ketlikni, $[0,\ 1]$ kesmadagi biror x sonning ikkilik kasr yozuvi deb qarash mumkin. Shunday qilib, K to‘plamni $[0,\ 1]$ ga biyektiv akslantirishni olamiz. Bu yerdan K ning kontinuum quvvatli to‘plam ekanligi kelib chiqadi. (4.3) ketma-ketlikdagi sonlar to‘plami sanoqli bo‘lgani uchun, ular K ni to‘la qoplamaydi. Δ

Biz ko‘rsatdikki, K kontinuum quvvatga ega, ya’ni $[0,\ 1]$ kesma bilan K to‘plam o‘rtasida biyektiv moslik mavjud. Bundan tashqari Kantorning mukammal to‘plami bir qator ajoyib xossalarga ega. Masalan:

1) Kantor to‘plamining o‘lchovi nolga teng (6.3-misolga qarang).

2) Kantor to‘plamining yakkalangan nuqtalari mavjud emas.

3) Kantor to‘plamining ichki nuqtalari mavjud emas.

4) Kantor to‘plami $[0,\ 1]$ kesmaning hech yerida zich emas.

Bu xossalarni mustaqil isbotlashni o‘quvchiga havola qilamiz.

Endi to‘plamlar nazariyasidagi asosiy teoremalardan biri Kantor –Bernshteyn teoremasini isbotlaymiz.

4.2-teorema *(Kantor–Bernshteyn). Ixtiyoriy A va B cheksiz to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar A to‘plamni B to‘plamning B_1 qism to‘plamiga biyektiv akslantiruvchi f akslantirish va B to‘plamni A to‘plamning A_1 qism to‘plamiga biyektiv akslantiruvchi g akslantirish mavjud bo‘lsa, u holda A va B to‘plamlar ekvivalentdir.*

Isbot. Umumiylikni chegaralamasdan, A va B to‘plamlar kesishmaydi deb faraz qilishimiz mumkin. Ixtiyoriy $x = x_0 \in A$ elementni olamiz va $\{x_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz. Agar B to‘plamda $g(x) = x_0$ shartni qanoatlantiruvchi x element mavjud bo‘lsa, uni x_1 deb belgilaymiz. Agar A to‘plamda $f(x) = x_1$ tenglikni qanoatlantiruvchi x element mavjud bo‘lsa, uni x_2 deb belgilaymiz. Aytaylik x_n element aniqlangan bo‘lsin. Agar n juft bo‘lsa, u holda x_{n+1} orqali B dagi shunday elementni tanlaymizki (agar bunday element mavjud bo‘lsa), $x_n = g(x_{n+1})$ shart bajarilsin, agar n toq bo‘lsa, $x_{n+1}-A$ dagi shunday elementki (agar u mavjud bo‘lsa), $f(x_{n+1}) = x_n$ shart bajarilsin. Bu yerda ikki holat sodir bo‘lishi mumkin.

1. Biror n da ko‘rsatilgan shartlarni qanoatlantiruvchi x_{n+1} element mavjud bo‘lmaydi. Bu holda n nomer x elementning *tartib soni* deyiladi.

2. Cheksiz $\{x_n\}$ ketma-ketlikka ega bo‘lamiz. Bu holda x elementning *tartibi cheksiz* deyiladi.

Endi A to‘plamni uchta to‘plamga ajratamiz. Juft tartibli elementlardan tashkil bo‘lgan qism to‘plamni A_E orqali, toq tartibli elementlardan tashkil bo‘lgan qism to‘plamni A_O orqali va cheksiz tartibli elementlardan tashkil bo‘lgan qism to‘plamni A_I orqali belgilaymiz. B to‘plamni ham xuddi shunday B_E, B_O va B_I qismlarga ajratamiz. Tushunish qiyin emaski, f akslantirish A_E ni B_O ga va A_I ni B_I ga akslantiradi, g^{-1} akslantirish esa A_O ni B_E ga akslantiradi. Shunday qilib, $A_E \cup A_I$ da f ga teng va A_O da g^{-1} ga teng ψ akslantirish A to‘plamni B to‘plamga biyektiv akslantiradi. Δ

4.1 To'plam quvvati tushunchasi. Agar ikkita chekli to'plam ekvivalent bo'lsa, ularning elementlari soni teng bo'ladi. Agar A va B to'plamlar ekvivalent bo'lsa, u holda ular *bir xil quvvatga ega* deyiladi. Shunday qilib, quvvat ixtiyoriy ikki ekvivalent to'plamlar uchun umumiylik xususiyatidir. Chekli to'plamlar uchun quvvat tushunchasi odatdagi to'plam elementlari soni tushunchasi bilan ustma-ust tushadi. Natural sonlar to'plami va unga ekvivalent to'plam quvvati uchun $\aleph_0$ (alef nol deb o'qiladi) belgi ishlatiladi. $[0,\ 1]$ kesmadagi barcha haqiqiy sonlar to'plamiga ekvivalent to'plamlar haqida, ular kontinuum quvvat ga ega deb gapiradilar. Bu quvvat uchun c yoki $\aleph$ simvol ishlatiladi. $\aleph_0$ va c orasida quvvat mavjudmi degan savol juda chuqur muammo hisoblanadi. Analizda uchraydigan cheksiz to'plamlarning deyarli barchasi yoki $\aleph_0$, yoki c quvvatga ega.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Sonlar o'qidagi oxirlari ratsional bo'lgan barcha intervallar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.*

2. *Tekislikdagi ratsional koordinatali nuqtalar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.*

3. *Ixtiyoriy cheksiz M va sanoqli A to'plamlar uchun $M \cup A \sim M$ munosabatni isbotlang.*

4. *Ikkita har xil cheksiz o'nli kasrli yoyilmalarga ega bo'lgan sonlar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.*

5. *Barcha irratsional sonlar to'plamining sanoqsiz ekanligini isbotlang.*

6. *Barcha irratsional sonlar to'plamining kontinuum quvvatga ega ekanligini isbotlang.*

7. *Koordinata boshidan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami* $[0,1]$ *to'plamga ekvivalentmi?*

5-§. To'plamlar sistemalari

5.1. To'plamlar halqasi. Elementlari to'plamlardan iborat to'plam *to'plamlar sistemasi* deyiladi. Biz asosan oldindan berilgan X to'plamning qism to'plamlaridan iborat sistemalarni qaraymiz. To'plamlar sistemalarini belgilash uchun biz gotik alifbosining bosh harflaridan foydalanamiz. Bizni asosan to'plamlar ustidagi ba'zi amallarga nisbatan yopiq bo'lgan sistemalar qiziqtiradi.

5.1-ta'rif. *Agar* $\mathfrak{S}$ *to'plamlar sistemasi simmetrik ayirma va kesishma amallariga nisbatan yopiq, ya'ni ixtiyoriy* $A,\ B \in \mathfrak{S}$ *to'plamlar uchun* $A\Delta B \in \mathfrak{S}$ *va* $A \cap B \in \mathfrak{S}$ *bo'lsa, u holda* $\mathfrak{S}$ *to'plamlar sistemasiga halqa deyiladi.*

To'plamlar halqasi quyidagi xossalarga ega.

5.1-xossa. *Agar* $\mathfrak{S}$ *to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u holda* $\mathfrak{S}$ *birlashma va ayirma amallariga nisbatan ham yopiq bo'ladi.*

Isbot. Ixtiyoriy A, B to'plamlar uchun $A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$ va $A\backslash B = A\Delta(A \cap B)$ tengliklar o'rinli. Bu tengliklardan hamda $\mathfrak{S}$ sistema halqa ekanligidan $A \cup B \in \mathfrak{S}$ va $A\backslash B \in \mathfrak{S}$ munosabatlar kelib chiqadi. Demak, halqa birlashma va ayirma amallariga nisbatan ham yopiq sistema bo'lar ekan. Δ

5.2-xossa. *Agar* $\mathfrak{S}$ *to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u holda* $\mathfrak{S}$ *chekli sondagi birlashma va kesishma amallariga nisbatan ham yopiq bo'ladi.*

Isbot. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u holda, 5.1-xossaga ko'ra $\mathfrak{S}$ sistema o'zining A_1 va A_2 to'plamlari bilan birgalikda ularning birlashmasi va kesishmasini ham saqlaydi. Chekli induktiv qadamdan keyin $\mathfrak{S}$ sistema

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^{m} B_k, \quad A_k,\, B_k \in \mathfrak{S}$$

ko'rinishdagi ixtiyoriy chekli yig'indi va kesishmani ham o'zida saqlashi kelib chiqadi. Ushbu $A \backslash A = \emptyset$ tenglik ko'rsatadiki, har qanday halqa o'zida bo'sh to'plamni saqlaydi. Faqat bo'sh to'plamdan iborat sistema mumkin bo'lgan halqalar ichida eng minimali bo'ladi. Δ

Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasida shunday $E \in \mathfrak{S}$ to'plam mavjud bo'lib, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}$ uchun $A \cap E = A$ bo'lsa, E to'plam $\mathfrak{S}$ sistemaning *birlik elementi* yoki *biri* deyiladi. Sistemaning *biri* deganda shu sistemadagi *maksimal to'plam* tushuniladi. Hamma sistemalar ham maksimal to'plamga ega bo'lavermaydi. Masalan, natural sonlar to'plamining barcha chekli qism to'plamlaridan iborat sistemasida maksimal to'plam mavjud emas.

5.2-ta'rif. *Birlik elementga ega bo'lgan to'plamlar halqasi algebra deyiladi.*

5.1-misol. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(A)-$ sistema, biri $E = A$ bo'lgan algebra bo'ladi.

5.2. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha chekli qism to'plamlaridan uzilgan sistema halqa bo'ladi. Bu halqa algebra bo'lishi uchun A chekli to'plam bo'lishi zarur va yetarli.

5.3. Ixtiyoriy bo'shmas A to'plam uchun A va $\emptyset$ to'plamlardan uzilgan $\{A, \emptyset\}$ sistema, biri $E = A$ bo'lgan algebra bo'ladi.

5.4. Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi halqa bo'ladi, ammo algebra bo'lmaydi.

5.1-teorema. *Ixtiyoriy* $\{\mathfrak{R}_\alpha\}$ *halqalar istemasi uchun ularning kesishmasi* $\mathfrak{R} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha$ *yana halqa bo'ladi.*

Isbot. $A, B \in \mathfrak{R} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha$ bo'lsin, u holda ixtiyoriy α da $A, B \in \mathfrak{R}_\alpha$ bo'ladi. $\mathfrak{R}_\alpha$ halqa bo'lganligi uchun $A \Delta B \in \mathfrak{R}_\alpha$, $A \cap B \in \mathfrak{R}_\alpha$. U holda $A \Delta B \in \mathfrak{R}$ va $A \cap B \in \mathfrak{R}$. Δ

5.2-teorema. *Ixtiyoriy bo‘shmas* $\mathfrak{S}$ *to‘plamlar istemasi uchun* $\mathfrak{S}$ *ni o‘zida saqlovchi va* $\mathfrak{S}$ *ni saqlovchi barcha* $\mathfrak{R}$ *halqalarda saqlanuvchi yagona* $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ *minimal halqa mavjud.*

Isbot. Dastlab $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$ to‘plamni uzamiz. Ma’lumki, X to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(X)$ sistema algebra bo‘ladi, ya’ni xususiy holda halqa bo‘ladi va $\mathfrak{S}$ ni o‘zida saqlaydi. Demak, $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi kamida bitta halqa mavjud ekan. Endi $\mathfrak{S}$ ni o‘zida saqlovchi hamma $\mathfrak{R}$ halqalar sistemasini $\sum$ bilan belgilaymiz. Isbotlangan 5.1-teoremaga ko‘ra $\mathfrak{B} = \bigcap\limits_{\mathfrak{R} \in \Sigma} \mathfrak{R}$ sistema halqa bo‘ladi va $\mathfrak{S}$ ni o‘zida saqlaydi. Ravshanki, izlanayotgan sistema $\mathfrak{B}$ ga teng. Haqiqatan ham, $\mathfrak{S}$ ni o‘zida saqlovchi ixtiyoriy $\mathfrak{R}^*$ halqani qarasak, kesishma $\mathfrak{R}^* \bigcap \mathfrak{A}(X)$ ham $\sum$ sistemadagi halqa bo‘ladi, demak $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}^*$. Shunday ekan, $\mathfrak{B}$ haqiqatan ham, minimallik talabini qanoatlantiradi. Bu halqa $\mathfrak{S}$ *sistema ustidagi minimal halqa* deyiladi yoki $\mathfrak{S}$ dan hosil qilingan *minimal halqa* deyiladi va $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ simvol bilan belgilanadi. Δ

5.2. To‘plamlar yarim halqasi. Ko‘pgina masalalarda, masalan, o‘lchovlar azariyasida halqa tushunchasi bilan birgalikda unga nisbatan umumiyroq bo‘lgan to‘plamlar yarim halqasi tushunchasi ham muhim ahamiyatga ega.

5.3-ta’rif. *Agar* $\mathfrak{S}$ *to‘plamlar sistemasi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, unga yarim halqa deyiladi:*

a) $\mathfrak{S}$ *bo‘sh to‘plamni saqlaydi;*

b) $\mathfrak{S}$ *to‘plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya’ni* $A, B \in \mathfrak{S}$ *munosabatdan* $A \cap B \in \mathfrak{S}$ *munosabat kelib chiqadi;*

c) $A \in \mathfrak{S}$, $A_1 \in \mathfrak{S}$ *va* $A_1 \subset A$ *ekanligidan* $\mathfrak{S}$ *sistemaning o‘zaro kesishmaydigan* $A_2, \ldots, A_n$ *cheklita elementlari mavjud bo‘lib,* $A \backslash A_1 = \bigcup\limits_{k=2}^{n} A_k$ *tasvir o‘rinli bo‘ladi.*

Agar A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to‘plamlar birlashmasidan iborat bo‘lsa, bu birlashma A to‘plamning *chekli yoyilmasi* deyiladi.

Ixtiyoriy $\mathfrak{S}$ to‘plamlar halqasi yarim halqa bo‘ladi, chunki A va $A_1(A_1 \subset A)$ to‘plamlar $\mathfrak{S}$ ga tegishli bo‘lsa, u holda $A_2 = A \backslash A_1 \in \mathfrak{S}$ bo‘lib, $A = A_1 \cup A_2$ chekli yoyilma o‘rinli bo‘ladi. Demak, har qanday halqa yarim halqa bo‘lar ekan. Quyida biz shunday yarim halqaga misol keltiramizki, u halqa bo‘la olmaydi.

5.5. Sonlar o‘qidagi barcha $[a,\ b)$ yarim ochiq intervallar sistemasi – $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo‘lishini isbotlang.

Isbot. $\mathfrak{S}$ bo‘sh $[a,\ a) = \emptyset$ to‘plamni saqlaydi. $\mathfrak{S}$ to‘plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya’ni $[a, b),\ [c, d) \in \mathfrak{S}$ munosabatdan $[a,\ b) \bigcap [c,\ d) \in \mathfrak{S}$ munosabat (5.1-chizma) kelib chiqadi. $[a,\ b) \in \mathfrak{S},\ [a_1,\ b_1) \in \mathfrak{S}$ va $[a_1,\ b_1) \subset [a,\ b)$ ekanligidan $[a,\ b) \backslash [a_1,\ b_1) = [a,\ a_1) \bigcup [b_1,\ b)$ tasvir o‘rinli hamda $[a,\ a_1)$ va $[b_1,\ b)$ lar $\mathfrak{S}$ ga (5.2-chizma) qarashli. Demak, $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo‘ladi. Δ

5.1-chizma

5.6. 5.5-misolda keltirilgan sistemaning halqa bo‘la olmasligini isbotlang.

Isbot. Buning uchun $\mathfrak{S}$ sistemaning to‘plamlar simmetrik ayirmasi amaliga nisbatan yopiq emasligini ko‘rsatish yetarli. $\mathfrak{S}$ sistemadan olingan $A = [0,\ 5)$ va $B = [1,\ 3)$ to‘plamlarning simmetrik ayirmasini qaraymiz. Bu holda $A \Delta B = [0,\ 1) \bigcup [3,\ 5)$ (5.2-chizma) bo‘lib, u $\mathfrak{S}$ sistemaga qarashli emas. Demak, $\mathfrak{S}$ sistema halqa bo‘la olmaydi. Δ

5.2-chizma

Endi yarim halqalarning ayrim xossalari bilan tanishib chiqamiz.

5.1-lemma. *$\mathfrak{S}$ yarim halqadan A to'plam va o'zaro kesishmaydigan A_1, $A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar olingan bo'lib, ularning har biri A to'plamda saqlansin. U holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlarni $A_{n+1}, \ldots, A_s \in \mathfrak{S}$ to'plamlar bilan A to'plamning chekli yoyilmasiga qadar to'ldirish mumkin, ya'ni $A = \bigcup\limits_{k=1}^{s} A_k$.*

Isbot. Lemmani matematik induksiya metodi bilan isbotlaymiz. $n = 1$ bo'lganda tasdiqning to'g'ri ekanligi yarim halqa ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Faraz qilaylik, bu tasdiq $n = m$ uchun ham to'g'ri bo'lsin. Endi $n = m+1$ ta $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ to'plamni qaraymiz, ular lemma shartlarini qanoatlantirsin. Farazimizga ko'ra, $n = m$ da

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup \ldots \cup B_p \tag{5.1}$$

tasvir o'rinli. Bu yerda $B_1, \ldots, B_p$ to'plamlar $\mathfrak{S}$ yarim halqaga qarashli. (5.1) tenglikdan $A_{m+1} \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_p$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $B_{q1} = A_{m+1} \cap B_q$, $q = 1, 2, \ldots, p$ desak, u holda $A_{m+1} = B_{11} \cup B_{21} \cup \ldots \cup B_{p1}$ tenglik o'rinli. Aniqlanishiga ko'ra $B_{q1} \subset B_q$ bo'ladi. Yarim halqa ta'rifiga ko'ra $B_q \backslash B_{q1}$ to'plamni o'zaro kesishmaydigan $B_{q2}, \ldots, B_{qr_q} \in \mathfrak{S}$ to'plamlarning chekli yoyilmasiga yoyish mumkin, ya'ni $B_q \backslash B_{q1} = B_{q2} \cup \cdots \cup B_{qr_q}$. Ravshanki, (5.1)tenglikka ko'ra quyidagi

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1} \cup \bigcup_{q=1}^{p} \left(\bigcup_{j=2}^{r_q} B_{qj} \right)$$

chekli yoyilma o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, $n = m + 1$ bo'lganda lemma tasdig'i to'g'ri ekanligi isbotlandi. Shunday ekan, ixtiyoriy n da lemma tasdig'i o'rinli. Δ

5.2-lemma. *$\mathfrak{S}$ yarim halqadan olingan har qanday cheklita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ da shunday o'zaro kesishmaydigan cheklita $B_1, \ldots, B_t$ to'plamlar sistemasi mavjudki, har bir A_k to'plam $B_1, \ldots, B_t$ to'plamlardan ba'zilari yordamida*

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s, \ M_k \subset \{1, 2, \ldots, t\}$$

yig'indi ko'rinishida tasvirlanadi.

Isbot. Bu lemmani ham matematik induksiya metodi bilan isbotlaymiz. Agar $n = 1$ bo'lsa, lemma isboti ko'rinib turibdi, chunki bu holda $t = 1$, $B_1 = A_1$. Faraz qilaylik, lemma tasdig'i $n = m$ bo'lganda o'rinli bo'lsin. Endi lemma tasdig'ining $n = m+1$ uchun to'g'riligini ko'rsatamiz. $\mathfrak{S}$ dan ixtiyoriy ravishda $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ to'plamlarni olamiz. Farazimizga ko'ra, shunday cheklita o'zaro kesishmaydigan $B_1, \ldots, B_t$ to'plamlar mavjudki, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ to'plamlar uchun

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

chekli yoyilmalar o'rinli va $M_k \subset \{1, 2, \ldots, t\}$. Endi

$$B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s, \quad s \in \{1, 2, \ldots, t\}$$

belgilashlarni kiritamiz. 5.1-lemmaga ko'ra quyidagi chekli yoyilma o'rinli

$$A_{m+1} = B_{11} \bigcup B_{21} \bigcup \ldots \bigcup B_{t1} \bigcup \bigcup_{p=1}^{q} B'_p, \quad B'_p \in \mathfrak{S},\ p = 1, 2. \ldots, q. \quad (5.2)$$

Yarim halqa ta'rifiga ko'ra esa

$$B_s = B_{s1} \cup B_{s2} \cup \ldots \cup B_{sf_s}, \qquad B_{sj} \in \mathfrak{S},$$

chekli yoyilmalar o'rinli. U holda $k = 1, 2, \ldots, m,$ bo'lganda

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} \bigcup_{j=1}^{f_s} B_{sj}$$

chekli yoyilmalar o'rinli va

$$B_{sj},\ \ B'_p,\ \ 1 \le s \le t, \ \ 1 \le j \le f_s,\ \ 1 \le p \le q$$

to'plamlar o'zaro kesishmaydi. Shunday qilib, B_{sj}, B'_p to'plamlar sistemasi $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$ to'plamlar uchun lemma shartlarini qanoatlantiradi. Δ

5.3. Yarim halqadan hosil qilingan halqa. 5.1-bandda koʻrdikki, ixtiyoriy $\mathfrak{S}$ sistema uchun uni oʻzida saqlovchi yagona minimal halqa mavjud. Ammo ixtiyoriy $\mathfrak{S}$ sistema uchun $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ ni $\mathfrak{S}$ boʻyicha hosil qilish ancha murakkabdir. Agar $\mathfrak{S}$ sistema yarim halqa boʻlsa, $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ ni hosil qilish toʻliq sharhlanishi mumkin. Ya'ni quyidagi teorema oʻrinli.

5.3-teorema. *Agar $\mathfrak{S}$ yarim halqa boʻlsa, u holda $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa A_k toʻplamlar $(A_k \in \mathfrak{S})$ boʻyicha $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ chekli yoyilmaga ega boʻlgan A toʻplamlarning $\mathfrak{X}$ sistemasi bilan ustma-ust tushadi.*

Isbot. Dastlab $\mathfrak{X}$ sistemaning halqa ekanligini koʻrsatamiz. Agar A va B lar $\mathfrak{X}$ ga tegishli boʻlgan ixtiyoriy elementlar boʻlsa, u holda quyidagi chekli yoyilmalar oʻrinli

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \;\; A_i \in \mathfrak{S}, \;\; B_j \in \mathfrak{S}.$$

$\mathfrak{S}$ yarim halqa boʻlganligi uchun $C_{ij} = A_i \bigcap B_j \in \mathfrak{S}$. 5.1-lemmaga koʻra quyidagi chekli yoyilmalar ham oʻrinli

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij} \bigcup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}; \quad B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij} \bigcup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}, \tag{5.3}$$

bu yerda $D_{ik}, \; E_{jl} \in \mathfrak{S}$. Hosil qilingan (5.3) tengliklardan $A \cap B$ va $A \Delta B$ toʻplamlarning chekli yoyilmalarga egaligi, ya'ni

$$A \bigcap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}, \quad A \Delta B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl} \right)$$

va demak, $A \cap B$ va $A \Delta B$ larning $\mathfrak{X}$ ga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\mathfrak{X}$ sistema halqa ekan va u $\mathfrak{S}$ ni oʻzida saqlaydi. Agar $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ sistema $\mathfrak{S}$ ni oʻzida saqlovchi minimal halqa boʻlsa, u holda ixtiyoriy $A \in \mathfrak{X}$ toʻplam $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, \; A_i \in \mathfrak{S}$ chekli yoyilmaga ega va $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ chekli yigʻindiga nisbatan yopiq boʻlgani uchun $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ boʻladi, ya'ni $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$. Demak, $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$. Δ

5.4. σ - algebralar. Har xil masalalarda, xususan o'lchovlar nazariyasida, sanoqlita to'plamlar kesishmasi va yig'indisini qarashga to'g'ri keladi. Shuning uchun, to'plamlar halqasi tushunchasidan tashqari, quyidagi tushunchalarni ham qarash maqsadga muvofiqdir.

5.4-ta'rif. *Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning yig'indisi $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o'zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga σ - halqa deyiladi.*

5.5-ta'rif. *Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning kesishmasi $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o'zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga δ - halqa deyiladi.*

5.6-ta'rif. *Birlik elementli σ - halqa σ - algebra deyiladi. Birlik elementli δ - halqa esa δ - algebra deyiladi.*

Shuni ta'kidlash lozimki,

$$\bigcup_n A_n = E \backslash \bigcap_n (E \backslash A_n), \quad \bigcap_n A_n = E \backslash \bigcup_n (E \backslash A_n)$$

ikkilik munosobatlaridan σ - algebra va δ - algebra tushunchalarining ustma-ust tushishi kelib chiqadi.

A cheksiz to'plamning barcha qism to'plamlari sistemasi $\mathfrak{A}(A)$, σ - algebra bo'ladi. Agar biror $\mathfrak{S}$ sistema berilgan bo'lsa, doim uni saqlovchi σ - algebra mavjud. Haqiqatan ham, agar $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$ desak, X ning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(X)$ sistema $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi σ - algebra bo'ladi. Agar $\mathfrak{B} - \mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi biror σ - algebra va $\widetilde{X}$ uning biri bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}$ to'plam $A \subset \widetilde{X}$ munosabatga bo'ysunadi, va shunday ekan, $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A \subset \widetilde{X}$. Agar $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi $\mathfrak{B} - \sigma$ - algebraning biri $\widetilde{X}$ uchun $X = \widetilde{X}$ munosabat bajarilsa, bu σ - algebra ($\mathfrak{S}$ ga nisbatan) keltirilmaydigan σ - *algebra* deyiladi.

5.4-teorema. *Ixtiyoriy bo'shmas $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi uchun (bu sistemaga nisbatan) keltirilmaydigan shunday $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})-$ σ - algebra mavjudki, bu*

σ - algebra $\mathfrak{S}$ ni saqlaydi $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi barcha σ - algebralarda saqlanadi.

Bu teorema isboti ham birinchi bandda keltirilgan 5.2-teoremaning isbotiga o'xshash olib boriladi. 5.4-teoremada keltirilgan σ - algebra $\mathfrak{S}$ sistema *ustiga qurilgan minimal σ - algebra* deyiladi.

Misol sifatida sonlar o'qidagi barcha $[a, b]$ kesmalar va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallar va (a, b) intervallardan tashkil topgan $\mathfrak{S}$ yarim halqani qarasak, u holda $\mathfrak{S}$ ustida qurilgan minimal σ - algebrani $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ bilan belgilaymiz. Bu σ - algebra elementlari *Borel to'plamlari* yoki *Borel tipidagi to'plamlar* deyiladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *σ va $\delta -$ halqalarga misollar keltiring.*

2. *Halqaning birlik elementi (biri) ga ta'rif bering.*

3. *Sonlar o'qidagi barcha ochiq va yopiq to'plamlar sistemasi yarim halqa (halqa) tashkil qiladimi?*

4. *Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi halqa (yarim halqa) tashkil qiladimi?*

5. *Sonlar o'qidagi barcha chekli to'plamlar sistemasi halqa (yarim halqa) tashkil qiladimi?*

6. *Sonlar o'qidan olingan barcha $[a, b]$ kesmalar va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallar va (a, b) intervallar sistemasi yarim halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistemaning halqa bo'la olmasligini ko'rsating.*

7. *Tekislikdagi barcha yarim ochiq $\{(x, y) : a < x \leq b,\ c < y \leq d\}$ to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi yarim halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistemaning simmetrik ayirma amaliga nisbatan yopiq emasligini ko'rsating.*

II bob. O‘lchovli to‘plamlar

Bu bob uch paragrafdan iborat. Dastlabki 6-paragrafda tekislikdagi to‘plamning Lebeg o‘lchovi tushunchasi kiritilgan. O‘lchov tushunchasi bu $-$ kesmaning uzunligi, tekislikdagi shaklning yuzasi, fazodagi jismning hajmi kabi tushunchalarning umumlashmasi natijasida paydo bo‘lgan. Bu paragrafda Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sinfi Jordan ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sinfidan kengroq ekanligi ta’kidlangan va Lebeg ma’nosida o‘lchovli bo‘lgan, ammo Jordan ma’nosida o‘lchovli bo‘lmagan to‘plamga misol keltirilgan. Lebeg o‘lchovining yarim additivlik, additivlik, sanoqli additivlik va uzluksizlik xossalari (6.6, 6.8-6.9 teoremalar) isbotlangan. Birlik kvadratdagi o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\sigma -$ algebra tashkil qilishi ko‘rsatilgan. Bu paragrafning ayrim to‘ldirishlar bandida tekislikda berilgan A to‘plamning Lebeg ma’nosida o‘lchovli bo‘lishligi ta’riflangan. Umumlashtirishlar bandida esa Lebeg-Stiltes o‘lchovlari berilgan. Paragrafning oxirgi bandida sonlar o‘qida Lebeg ma’nosida o‘lchovsiz to‘plamga misol keltirilgan. Absolyut uzluksiz, singulyar uzluksiz va diskret o‘lchovlarga ta’rif berilgan hamda ularga misollar keltirilgan.

7-paragrafda o‘lchovning umumiy ta’rifi keltirilgan. Yarim halqada berilgan o‘lchovni yarim halqadan hosil bo‘lgan minimal halqaga davom ettirish va davomning yagonaligi (7.1-teorema) isbotlangan. Additiv va $\sigma -$ additiv o‘lchovlarning umumiy xossalari keltirilgan. Additiv, ammo $\sigma -$ additiv bo‘lmagan o‘lchovga misol keltirilgan.

Bobning oxirgi, 8-paragrafida yarim halqada berilgan o‘lchovni Lebeg bo‘yicha davom ettirish masalasi qaralgan. Bu yerda ham 6-paragrafdagiga o‘xshash o‘lchovning yarim additivlik, additivlik, sanoqli additivlik va uzluksizlik xossalari isbotlangan. Birlik elementli $\mathfrak{S}_m$ yarim halqada $\sigma -$ additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsa, bu o‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomi $-\mu$ ham $\sigma -$ additiv o‘lchov bo‘lishi isbotlangan.

6-§. Tekislikdagi to‘plamning o‘lchovi

Biz bu paragrafda tekislikda Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam ta’rifini beramiz va o‘lchovli to‘plamlarning asosiy xossalarini isbotlaymiz.

6.1. Elementar to‘plam o‘lchovi. Aytaylik a, b, c va d lar ixtiyoriy sonlar bo‘lsin. Tekislikda

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq x < b, \quad a < x \leq b, \quad a < x < b$$

va

$$c \leq y \leq d, \quad c \leq y < d, \quad c < y \leq d, \quad c < y < d$$

tengsizliklarning istalgan bir jufti bilan aniqlangan to‘plamlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarni to‘g‘ri to‘rtburchaklar deb ataymiz.

Bizga $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, tengsizliklar bilan aniqlangan to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan bo‘lsin. Agar $a < b$, $c < d$ bo‘lsa, u chegaralari o‘ziga qarashli bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni, agar $a = b$ va $c < d$ yoki $a < b$ va $c = d$ bo‘lsa kesmani, agar $a = b$, $c = d$ bo‘lsa nuqtani va agar $a > b$ yoki $c > d$ bo‘lsa, bo‘sh to‘plamni aniqlaydi. Ochiq $a < x < b$, $c < y < d$ to‘g‘ri to‘rtburchak a, b, c va d larga bog‘liq ravishda chegarasi o‘ziga qarashli bo‘lmagan to‘g‘ri to‘rtburchak yoki bo‘sh to‘plam bo‘ladi. Yarim ochiq to‘g‘ri to‘rtburchaklarning har biri bir, ikki yoki uch tomonsiz to‘rtburchaklarni, ochiq, yarim ochiq oraliqlarni aniqlaydi.

$\mathfrak{S}$ deb tekislikdagi barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasini belgilaymiz.

6.1-lemma. *Tekislikdagi barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi* $\mathfrak{S}$ *yarim halqa tashkil qiladi.*

Isbot. a, b, c va d sonlari bilan aniqlanuvchi ochiq to‘g‘ri to‘rtburchak $a = b$ bo‘lganda bo‘sh to‘plamni aniqlaydi, demak $\emptyset \in \mathfrak{S}$ Ikki to‘g‘ri to‘rtburchakning kesishmasi to‘g‘ri to‘rtburchakdir (6.1-chizma), ya’ni $P_1, P_2 \in \mathfrak{S}$ dan $P_1 \cap P_2 \in \mathfrak{S}$ ekanligi kelib chiqadi. Faraz qilaylik $P = P_{abcd}$ to‘g‘ri to‘rtburchak $P_1 = P_{a_1b_1c_1d_1}$ to‘g‘ri to‘rtburchakni o‘zida saqlasin. U holda

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq b, \quad c \leq c_1 \leq d_1 \leq d$$

munosabatlar o‘rinli. $P \backslash P_1$ ayirmani quyidagicha tasvirlash mumkin.

$$P \backslash P_1 = P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5,$$

bu yerda (6.2-chizmaga qarang)

$$P_2 = P_{aa_1cd}, \quad P_3 = P_{a_1bd_1d}, \quad P_4 = P_{b_1bcd_1}, \quad P_5 = P_{a_1b_1cc_1}.$$

Demak, tekislikdagi barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi $\mathfrak{S}$ yarim halqa tashkil qilar ekan.

6.1-chizma **6.2-chizma**

6.1-ta’rif. *$\mathfrak{S}$ yarim halqadan olingan va a, b, c, d sonlari bilan aniqlangan (yopiq, ochiq yoki yarim ochiq) $P = P_{abcd}$ to‘g‘ri to‘rtburchak uchun $m(P) = (b-a)(d-c)$ sonni mos qo‘yamiz, agar P bo‘sh to‘plam bo‘lsa $m(P) = 0$ deymiz va $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ to‘plam funksiyasini o‘lchov deymiz.*

Shunday qilib, $\mathfrak{S}$ dagi har bir P to‘g‘ri to‘rtburchakka uning o‘lchovi $m(P) = (b-a)(d-c)$ son mos qo‘yildi. Bu moslik quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $m(P)$ - manfiy bo‘lmagan haqiqiy son.

2) $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ to‘plam funksiyasi additiv, ya’ni agar

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, \quad P_i \bigcap P_k = \emptyset, \quad i \neq k, \qquad P, \;\; P_k \in \mathfrak{S}$$

bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli $m(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(P_k)$.

6.3-chizma **6.4-chizma**

Maqsadimiz 1) va 2) xossalarni saqlagan holda m o‘lchovni barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi $\mathfrak{S}$ dan kengroq bo‘lgan sinfga davom ettirishdan iborat. Shu maqsadda $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ bilan $\mathfrak{S}$ yarim halqa ustiga qurilgan minimal halqani belgilaymiz.

6.2-ta’rif. $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ *halqa elementlari elementar to‘plam deyiladi.*

5.3-teoremaga ko‘ra ixtiyoriy $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ to‘plam chekli sondagi o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yig‘indisi shaklida ifodalanadi va aksincha.

5.1-xossa va halqa ta’rifiga ko‘ra quyidagi tasdiq o‘rinli.

6.1-lemma. *Ikki elementar to‘plamning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi va simmetrik ayirmasi yana elementar to‘plam bo‘ladi.*

Endi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ halqadagi to‘plamlarning, ya’ni elementar to‘plamlarning o‘lchovi tushunchasini kiritamiz.

6.3-ta'rif. *Har bir* $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ *elementar to'plamga*

$$m'(A)=\sum_{k=1}^{n} m\left(P_k\right)$$

sonni mos qo'yuvchi $m':\mathfrak{M}(\mathfrak{S})\to\mathbb{R}$ *moslikni aniqlaymiz.* $m'(A)$ *miqdorni* A *to'plamning o'lchovi deb ataymiz.*

Elementar to'plamlar sistemasi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ da aniqlangan m' funksiyaning qiymati A elementar to'plamni chekli sondagi to'g'ri to'rtburchaklar yig'indisiga yoyish usulidan bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\{P_k,\ k=1,2,\ldots,m\}$ va $\{Q_j,\ j=1,2,\ldots,n\}$ larning har biri o'zaro kesishmaydigan to'g'ri to'rtburchaklar sistemalari bo'lib, (6.3 va 6.4-chizmaga qarang)

$$A=\bigcup_{k=1}^{m} P_k=\bigcup_{j=1}^{n} Q_j$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda ikkita P_k va Q_j to'g'ri to'rtburchaklarning kesishmasi $P_k\cap Q_j$ to'g'ri to'rtburchak ekanligidan A to'plam o'zaro kesishmaydigan $P_k\cap Q_j$ to'g'ri to'rtburchaklar yig'indisi shaklida, ya'ni

$$A=\bigcup_{k=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}(P_k\bigcap Q_j)$$

ko'rinishda tasvirlanadi va

$$m'(A)=\sum_{k=1}^{m} m(P_k)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m(P_k\cap Q_j),$$

$$m'(A)=\sum_{j=1}^{n} m(Q_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m(P_k\cap Q_j)$$

tengliklar o'rinli. Oxirgi tengliklar ko'rsatadiki, A elementar to'plamning o'lchovi $m'(A)$ uning to'g'ri to'rtburchaklar yig'indisi shaklida tasvirlanish usulidan bog'liq emas ekan, ya'ni elementar to'plam o'lchovi m' ning aniqlanishi korrekt ekan.

1. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ to‘plam to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lsa, u holda $m'(A) = m(A)$ bo‘ladi.

2. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ to‘plam chekli sondagi o‘zaro kesishmaydigan A_1, A_2, $\dots, A_n$ elementar to‘plamlarning yig‘indisi shaklida tasvirlansa, ya’ni $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ u holda

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m'(A_k) \tag{6.1}$$

tenglik o‘rinli. Haqiqatan ham, $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ bo‘lganligi uchun $A_k = \bigcup\limits_{j=1}^{s_k} P_{kj}$, bu yerda $\{P_{kj}\}$ - o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi. U holda

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{s_k} P_{kj} \quad \text{va} \quad m'(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_k} m\left(P_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} m'\left(A_k\right).$$

(6.1) tenglik m' o‘lchovning *additivlik xossasini* ifodalaydi.

6.1-teorema. *Agar* $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ *va* $\{A_n\}-$ *elementar to‘plamlarning chekli yoki sanoqli sistemasi bo‘lib,* $A \subset \bigcup\limits_{n} A_n$ *bo‘lsa,*

$$m'\left(A\right) \leq \sum_{n} m'\left(A_n\right) \tag{6.2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va A elementar to‘plam uchun

$$m'\left(\bar{A}\right) \geq m'(A) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi va A to‘plamda saqlanuvchi yopiq $\bar{A}$ elementar to‘plam mavjud (6.5-chizmaga qarang, $n > \dfrac{4(b-a+d-c)}{\varepsilon}$.)

Har bir elementar A_n to‘plam uchun ochiq $\widetilde{A}_n \supset A_n$ elementar to‘plam mavjudki (6.6-chizmaga qarang)

$$m'\left(\widetilde{A}_n\right) \leq m'\left(A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{6.4}$$

tengsizlik bajariladi. $\bar{A}$ va $\widetilde{A}_n$ to‘plamlarning tanlanishiga ko‘ra $\bar{A} \subset \bigcup\limits_n \widetilde{A}_n$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

6.5-chizma **6.6-chizma**

Ochiq to‘plamlar sistemasi $\left\{\widetilde{A}_n\right\}$ dan Geyne-Borel lemmasiga ko‘ra $\bar{A}$ ni qoplovchi chekli sondagi $\widetilde{A}_{n_1}, \widetilde{A}_{n_2}, \ldots, \widetilde{A}_{n_s}$ to‘plamlarni ajratish mumkin. $\bar{A}$ to‘plam chekli sondagi to‘g‘ri to‘rtburchaklar bilan qoplangani uchun

$$m'\left(\bar{A}\right) \leq \sum_{i=1}^{s} m'\left(\widetilde{A}_{n_i}\right) \tag{6.5}$$

tengsizlik o‘rinli. (6.3) va (6.5) hamda (6.4) lardan

$$m'(A) \leq m'(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} m'\left(\widetilde{A}_{n_i}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m'\left(\widetilde{A}_n\right) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n) + \varepsilon$$

ni hosil qilamiz va $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligidan (6.2) tengsizlikning isboti kelib chiqadi. Δ

6.1-teorema tasdig‘idagi (6.2) tengsizlik, m' o‘lchovning *yarim additivlik xossasi* deyiladi.

m' o‘lchovning yarim additivlik xossasidan uning σ - additivlik xossasi kelib chiqadi, ya’ni quyidagi teorema o‘rinli.

6.2-teorema. *A elementar to'plam sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ elementar to'plamlarning yig'indisidan iborat, ya'ni $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin. U holda quyidagi tenglik o'rinli*

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n). \tag{6.6}$$

Isbot. m' o'lchovning chekli additivlik xossasiga ko'ra, ixtiyoriy $N \in \mathbb{N}$ uchun

$$m'(A) \geq m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n)$$

tengsizlik o'rinli. Agar $N \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

bo'ladi. 6.1-teoremaga ko'ra

$$m'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Oxirgi ikki munosabatdan (6.6) tenglik kelib chiqadi. Δ

6.2. Tekislikdagi to'plamlarning Lebeg o'lchovi. Geometriya va klassik analizda uchraydigan to'plamlar faqatgina elementar to'plamlardan iborat bo'lmaydi. Shu sababli o'lchov tushunchasini, uning xossalarini saqlagan holda elementar to'plamlar sistemasi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ dan kengroq to'plamlar sistemasi uchun aniqlashga harakat qilamiz.

Lebeg o'lchovi nazariyasini bayon qilish jarayonida bizga nafaqat chekli, balki cheksiz sondagi to'g'ri to'rtburchaklar birlashmalarini ham qarashga to'g'ri keladi. Bunda birdaniga cheksiz o'lchovli to'plamlarga duch kelmaslik uchun, dastlab $E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$ birlik kvadratda saqlanuvchi to'plamlar bilan chegaralanamiz.

6.4-ta'rif. *Ixtiyoriy $A \subset E$ to'plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k m(P_k) \tag{6.7}$$

son A to‘plamning tashqi o‘lchovi deyiladi. Bu yerda aniq quyi chegara A to‘plamni qoplovchi to‘g‘ri to‘rtburchaklarning barcha chekli yoki sanoqli sistemalari bo‘yicha olinadi.

6.1-eslatma. Agar $A-$ elementar to‘plam bo‘lsa, u holda $\mu^*(A) = m'(A)$. Haqiqatan ham, $A-$ elementar to‘plam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ to‘g‘ri to‘rtburchaklarning birlashmasi ko‘rinishida tasvirlansin, u holda

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m\left(P_k\right) = m'(A). \tag{6.8}$$

$\{P_k\}$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi A to‘plamni qoplaydi, shuning uchun (6.8) o‘rinli.

Ikkinchi tomondan, $\{Q_j\}$ sistema A to‘plamni qoplovchi chekli yoki sanoqli sondagi ixtiyoriy to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi bo‘lsa, 6.1-teoremaga ko‘ra $m'(A) \leq \sum\limits_j m(Q_j)$ kelib chiqadi. Shuning uchun

$$m'(A) \leq \inf \sum_j m(Q_j) = \mu^*(A). \tag{6.9}$$

Demak, (6.8) va (6.9) lardan $m'(A) = \mu^*(A)$ tenglikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib, $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ da m' va μ^* o‘lchovlar ustma-ust tushar ekan. Δ

6.3-teorema. *Agar chekli yoki sanoqli sondagi $\{A_n\}$ to‘plamlar sistemasi uchun $A \subset \bigcup\limits_n A_n$ bo‘lsa, u holda*

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$$

tengsizlik o‘rinli. Xususan, agar $A \subset B$ bo‘lsa, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va har bir A_n uchun tashqi o‘lchov ta’rifiga ko‘ra to‘g‘ri to‘rtburchaklarning shunday chekli yoki sanoqli $\{P_{nk}\}$ sistemasi mavjudki,

$$A_n \subset \bigcup_k P_{nk} \quad \text{va} \quad \sum_k m\left(P_{nk}\right) \leq \mu^*\left(A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

bo‘ladi. U holda quyidagilar o‘rinli:

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk} \quad \text{va} \quad \mu^*(A) \leq \sum_n \sum_k m\left(P_{nk}\right) \leq \sum_n \mu^*\left(A_n\right) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ sonning ixtiyoriyligidan teoremaning isboti kelib chiqadi. Δ

Ma’lumki, elementar to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ da m' va μ^* lar ustma-ust tushadi. Demak, 6.1-teorema 6.3-teoremaning xususiy holini ifodalaydi.

6.5-ta’rif. *Bizga* $A \subset E$ *to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $B \subset E$ *elementar to‘plam mavjud bo‘lib,* $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* A *Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam deyiladi. Agar* A *Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, uning o‘lchovi deb tashqi o‘lchovini qabul qilamiz.*

$\mathfrak{U}(E)$ bilan E ning barcha o‘lchovli qism to‘plamlaridan tashkil topgan sistemani belgilaymiz. μ bilan μ^* to‘plam funksiyasining $\mathfrak{U}(E)$ dagi qismini belgilaymiz, ya’ni ixtiyoriy $A \in \mathfrak{U}(E)$ uchun $\mu(A) = \mu^*(A)$. Aniqlanish sohasi $\mathfrak{U}(E)$ bo‘lgan μ to‘plam funksiyasi *Lebeg o‘lchovi* deyiladi. Shunday qilib, o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ va unda Lebeg o‘lchovi μ aniqlandi.

Bizning asosiy maqsadimiz o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ ni chekli yoki sanoqli sondagi to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasiga nisbatan yopiqligini ko‘rsatishdan, ya’ni $\mathfrak{U}(E)$ ning σ algebra tashkil qilishini isbotlashdan iborat.

6.2-eslatma. Agar (6.7) tenglikda aniq quyi chegara A to‘plamni qoplovchi barcha elementar to‘plamlar bo‘yicha olinsa, A to‘plamning Jordan ma’nosidagi *tashqi o‘lchovi hosil bo‘ladi*, u $j^*(A)$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$j^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k} \sum_{k=1}^{n} m\left(P_k\right).$$

Ushbu $j_*(A) = 1 - j^*(E \backslash A)$ miqdor A to‘plamning Jordan ma’nosidagi *ichki o‘lchovi* deyiladi. Agar $j^*(A) = j_*(A)$ bo‘lsa, u holda A Jordan ma’nosida *o‘lchovli to‘plam* deyiladi.

Shuni ta'kidlash joizki, agar A Jordan ma'nosida o'lchovli to'plam bo'lsa, u Lebeg ma'nosida ham o'lchovli to'plam bo'ladi va bu o'lchovlar o'zaro teng bo'ladi.

Hozir biz Lebeg ma'nosida o'lchovli, ammo Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol keltiramiz.

6.1-misol. $A \subset E$ birlik kvadratdagi barcha ratsional koordinatali nuqtalar to'plami bo'lsin. Uning Lebeg ma'nosida o'lchovli, ammo Jordan ma'nosida o'lchovli emasligini isbotlang.

Isbot. A va $E \backslash A$ to'plamlar E da zich bo'lganligi uchun

$$j^*(A) = 1, \quad j^*(E \backslash A) = 1$$

tengliklar o'rinli. Bu yerdan $j_*(A) = 0$ va $j^*(A) \neq j_*(A)$. Demak, A to'plam Jordan ma'nosida o'lchovli emas. Ma'lumki, A sanoqli to'plam (3.3-misolga qarang), shuning uchun uning elementlarini $(x_k,\, y_k)$, $k \in \mathbb{N}$ ko'rinishda nomerlab chiqish mumkin. Shunday ekan,

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad P_k = \{(x,\, y) : x_k \leq x \leq x_k,\ y_k \leq y \leq y_k\}\,.$$

Ikkinchi tomondan ixtiyoriy $k \in \mathbb{N}$ uchun $m(P_k) = 0$. Bu yerdan $\mu^*(A) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shuni ta'kidlash lozimki, tashqi o'lchovi nolga teng bo'lgan har qanday to'plam o'lchovli to'plamdir. Buning uchun elementar to'plam sifatida $B = \emptyset$ ni olish yetarli:

$$\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A \Delta \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Demak, A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam. Shunday qilib, A Lebeg ma'nosida o'lchovli bo'lgan, lekin Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol bo'ladi. Δ

6.4-teorema. *O'lchovli to'plamning to'ldiruvchisi o'lchovlidir.*

Isbot. Teoremaning tasdig‘i elementar to‘plamning to‘ldiruvchisi elementar to‘plam ekanligidan va

$$A\Delta B = (E\backslash A)\Delta(E\backslash B)$$

tenglikdan (1-§ dagi 2-topshiriqqa qarang) kelib chiqadi. Δ

6.5-teorema. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *halqa bo‘ladi.*

Isbot. Teoremani isbotlash uchun o‘lchovli to‘plamlarning kesishmasi va simmetrik ayirmasi yana o‘lchovli to‘plam ekanligini ko‘rsatish yetarli. A_1, A_2 o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsin. 6.5-ta’rifga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $B_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ va $B_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ elementar to‘plamlar mavjud bo‘lib, quyidagi tengsizliklar bajariladi

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

U holda $(A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$ munosabatdan va tashqi o‘lchovning yarim additivlik xossasidan

$$\mu^*((A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2)) \leq \mu^*(A_1\Delta B_1) + \mu^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon$$

ga ega bo‘lamiz. $B_1 \cap B_2$ ning elementar to‘plam ekanligidan $A_1 \cap A_2$ ning o‘lchovli to‘plam ekanligi kelib chiqadi.

Ikki to‘plam simmetrik ayirmasining o‘lchovli ekanligi

$$(A_1\Delta A_2)\Delta(B_1\Delta B_2) = (A_1\Delta B_1)\Delta(A_2\Delta B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$$

munosabatdan hamda μ^* o‘lchovning yarim additivlik xossasidan kelib chiqadi. Δ

Agar o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da birlik element mavjud bo‘lsa, u algebra tashkil qiladi. $\mathfrak{U}(E)$ da $E = \{(x, y): \ 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1\}$ to‘plam birlik element shartlarini qanoatlantiradi. Demak, o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ algebra tashkil qiladi.

6.5-teorema va 5.1-5.2 xossalardan quyidagi tasdiqlar kelib chiqadi.

6.1-natija. *Ikki o‘lchovli to‘plamning birlashmasi va ayirmasi yana o‘lchovli to‘plamdir.*

6.2-natija. *Chekli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o‘lchovli to‘plamdir.*

6.6-teorema *(O‘lchovning additivlik xossasi). Agar* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *lar o‘zaro kesishmaydigan o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, u holda*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right)$$

tenglik o‘rinli.

Teoremani isbotlashda quyidagi lemmadan foydalaniladi.

6.2-lemma. *Ixtiyoriy* A *va* B *to‘plamlar uchun*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B)$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. $A \subset B \cup (A\Delta B)$ bo‘lgani uchun 6.3-teoremaga ko‘ra

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B).$$

Bu yerdan $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$ hol uchun lemmaning isboti kelib chiqadi. Xuddi shunday, $B \subset A \cup (A\Delta B)$ munosabatdan

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B)$$

ni olamiz. Yuqoridagi iki tengsizlikdan

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B). \qquad \Delta$$

6.6-teoremaning isboti. Teoremaning isbotida biz elementar to‘plamlar uchun o‘rinli bo‘lgan $\mu^*(B) = m'(B), \ B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ tenglikdan aytmasdan foydalanib ketamiz. Teoremani $n = 2$ uchun isbotlash yetarli. Bizga A_1 va A_2

o‘zaro kesishmaydigan o‘lchovli to‘plamlar berilgan bo‘lsin. 6.5-ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday B_1 va B_2 elementar to‘plamlar mavjudki,

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon, \qquad \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. $A = A_1 \cup A_2$ va $B = B_1 \cup B_2$ deymiz. 6.1-natijaga ko‘ra A to‘plam o‘lchovli. A_1 va A_2 to‘plamlar o‘zaro kesishmaganligi uchun $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ munosabat o‘rinli (1-§ dagi 5-topshiriqqa qarang). Bu munosabatdan va 6.3-teoremadan $m'(B_1 \cap B_2) \leq 2\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi. 6.2-lemmaga ko‘ra,

$$\left.\begin{array}{l} \mu^*(A_1) - \varepsilon \leq \mu^*(B_1) = m'(B_1) \leq \mu^*(A_1) + \varepsilon \\ \mu^*(A_2) - \varepsilon \leq \mu^*(B_2) = m'(B_2) \leq \mu^*(A_2) + \varepsilon \end{array}\right\}. \qquad (6.10)$$

Endi m' o‘lchovning additivlik xossasiga hamda (6.10) ga ko‘ra,

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon. \quad (6.11)$$

Quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\mu^*(A) \geq m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq m'(B) - 2\varepsilon \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Birinchi tengsizlik 6.2-lemmadan, ikkinchi tengsizlik

$$A \,\Delta\, B \ \subset (A_1 \,\Delta\, B_1) \bigcup (A_2 \,\Delta\, B_2)$$

munosabatdan, uchinchi tengsizlik (6.11) dan kelib chiqadi. $\varepsilon > 0$ sonining ixtiyoriyligidan

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

ni hosil qilamiz. Teskari tengsizlik

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

esa $A \subset A_1 \cup A_2$ munosabatdan hamda 6.3-teoremadan kelib chiqadi. Demak,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

tenglik o‘rinli. A_1, A_2 va A to‘plamlar o‘lchovli bo‘lganligi uchun μ^* ni μ bilan almashtirish mumkin, ya’ni $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Δ

6.3-natija. *Ixtiyoriy $A \subset E$ o‘lchovli to‘plam uchun*

$$\mu\left(E \backslash A\right) = 1 - \mu(A) \tag{6.12}$$

tenglik o‘rinli.

Isbot. A va $E \backslash A$ to‘plamlar o‘zaro kesishmaydi va

$$\mu(A) + \mu(E \backslash A) = \mu(E) = 1$$

Bu yerdan (6.12) tenglik kelib chiqadi. Δ

6.7-teorema. *Sanoqli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o‘lchovli to‘plamdir.*

Isbot. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots -$ o‘lchovli to‘plamlarning sanoqli sistemasi bo‘lib, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$A_1' = A_1, \quad A_n' = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n \geq 2.$$

Ravshanki, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n'$ hamda A_n' to‘plamlar juft-jufti bilan o‘zaro kesishmaydi. 6.1 va 6.2-natijalarga ko‘ra, A_n' to‘plamlar o‘lchovli.

6.6-teoremadan hamda tashqi o‘lchovning yarim additivlik xossasidan ixtiyoriy chekli $n \in \mathbb{N}$ uchun quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k'\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k') \leq \mu^*(A).$$

Shuning uchun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n'\right)$ qator yaqinlashadi. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki,

$$\sum_{n > n_0} \mu\left(A_n'\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.13}$$

tengsizlik bajariladi. $C = \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} A'_n$ to‘plam o‘lchovli to‘plamlarning chekli yig‘indisi sifatida o‘lchovli bo‘lgani uchun, shunday B elementar to‘plam mavjudki,

$$\mu^*(C \,\Delta\, B) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.14}$$

tengsizlik bajariladi. U holda

$$A \,\Delta\, B \subset (C \,\Delta\, B) \bigcup \left(\bigcup_{n>n_0} A'_n \right)$$

munosabatdan va tashqi o‘lchovning yarim additivlik xossasidan hamda (6.13) va (6.14) lardan foydalansak,

$$\mu^*(A \,\Delta\, B) \le \mu^*(C \,\Delta\, B) + \mu^* \left(\bigcup_{n>n_0} A'_n \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kelib chiqadi. Demak, A o‘lchovli to‘plam ekan.

O‘lchovli to‘plamlarning to‘ldiruvchisi o‘lchovli ekanligidan hamda

$$\bigcap_n A_n = E \backslash \bigcup_n (E \backslash A_n)$$

tenglikdan sanoqli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning kesishmasi ham o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi. Δ

6.4-natija. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$, σ *algebra tashkil qiladi.*

Natijaning isboti 6.7-teoremadan hamda $\mathfrak{U}(E)$ sistemada $E = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ ning birlik element ekanligidan kelib chiqadi.

6.7-teorema 6.2-natijaning umumlashmasi hisoblanadi. 6.6-teoremaning umumlashmasi quyidagicha.

6.8-teorema *(O‘lchovning* $\sigma-$ *additivlik xossasi). Agar* $\{A_n\}-$ *o‘zaro kesishmaydigan o‘lchovli to‘plamlar ketma-ketligi uchun*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{6.15}$$

Isbot. Ixtiyoriy $k \in \mathbb{N}$ da $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subset A$. 6.6 va 6.3-teoremalarga ko'ra

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

Agar $k \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A) \tag{6.16}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. O'lchovning yarim additivlik xossasiga ko'ra,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{6.17}$$

(6.16) va (6.17) dan (6.15) tenglik kelib chiqadi. Δ

Yuqorida keltirilgan teorema o'lchovning *sanoqli additivlik* yoki $\sigma-$ *additivlik xossasi* deyiladi. O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasidan uning uzluksizlik xossasi kelib chiqadi.

6.9-teorema *(O'lchovning uzluksizlik xossasi). Agar o'lchovli to'plamlarning* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ *ketma-ketligi uchun* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *bo'lsa, u holda*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Isbot. $A = \emptyset$ to'plam bo'lgan holni qarash yetarli, chunki umumiy hol A_n ni $A_n \backslash A$ bilan almashtirish natijasida $A = \emptyset$ holga keltiriladi. Quyidagi

$$A_1 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_3) \cup (A_3 \backslash A_4) \cup \ldots$$

va

$$A_N = (A_N \backslash A_{N+1}) \cup (A_{N+1} \backslash A_{N+2}) \cup (A_{N+2} \backslash A_{N+3}) \cup \ldots$$

tengliklar o‘rinli va qo‘shiluvchi to‘plamlar juft-jufti bilan o‘zaro kesishmaydi. O‘lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga ko‘ra

$$\mu(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \backslash A_{n+1}\right), \tag{6.18}$$

$$\mu(A_N) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu\left(A_n \backslash A_{n+1}\right). \tag{6.19}$$

(6.18) qator yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun uning qoldig‘i (6.19) $N \to \infty$ da nolga intiladi. Shunday qilib,

$$\lim_{N\to\infty} \mu(A_N) = 0. \qquad \Delta$$

6.5-natija. *Agar* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ *o‘lchovli to‘plamlar ketma-ketligi uchun* $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *bo‘lsa, u holda*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Natijani isbotlash uchun A_n to‘plamlardan ularning to‘ldiruvchilariga o‘tish va 6.9-teoremadan foydalanish yetarli.

6.3. Ayrim to‘ldirishlar. Biz yuqorida faqat birlik kvadrat $E = \{(x,\, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ da saqlanuvchi to‘plamlarni qaradik. Bu cheklashdan xalos bo‘lish mumkin. Ma’lumki, $\mathbb{R}^2$ ni juft-jufti bilan o‘zaro kesishmaydigan

$$E_{mn} = \{(x,\, y) : m \le x < m+1, \quad n \le y < n+1\}$$

($m,\, n-$ butun sonlar) kvadratlar yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} E_{mn}.$$

6.6-ta’rif. *Agar istalgan* m, n *butun sonlar uchun* $A_{mn} = A \cap E_{mn}$ *to‘plamlar o‘lchovli bo‘lsa, u holda* A *to‘plam o‘lchovli deyiladi. Agar* A

to'plam o'lchovli bo'lsa,

$$\mu(A) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \mu(A_{mn}) \tag{6.20}$$

qator yig'indisi A to'plamning Lebeg o'lchovi deyiladi.

Agar (6.20) qator yig'indisi chekli bo'lsa, A *chekli o'lchovli to'plam* deyiladi. Aks holda A *cheksiz o'lchovli to'plam* deyiladi. Shuning uchun μ o'lchov cheksiz qiymat ham qabul qilishi mumkin. O'lchov va o'lchovli to'plamlarning yuqorida o'rnatilgan barcha xossalari bu hol uchun ham o'rinli bo'ladi. Biroq 6.9-teoremada (6.18) qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\mu(A_1) < +\infty$ shartni qo'shishimiz kerak bo'ladi. Takidlash lozimki, sanoqlita chekli o'lchovli to'plamlar yig'indisi cheksiz o'lchovga ega bo'lishi mumkin. Tekislikdagi barcha o'lchovli to'plamlar sinfini $\mathfrak{U}(\mathbb{R}^2)$ bilan belgilaymiz.

Bu paragrafda tekislikdagi to'plamlar uchun Lebeg o'lchovining qurilish usulini bayon qildik. Sonlar o'qi $\mathbb{R}$ dagi va uch o'lchamli $\mathbb{R}^3$ fazodagi to'plamlar uchun ham Lebeg o'lchovi shunga o'xshash usulda quriladi. Masalan sonlar o'qida o'lchov dastlab (a, b) intervallar, $[a, b]$ kesmalar va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallardan tashkil bo'lgan $\mathfrak{S}_1$ yarim halqada, ularning uzunligi sifatida aniqlanib, keyin $\mathfrak{S}_1$ ni saqlovchi minimal halqaga davom ettiriladi. Undan keyin esa tekislikdagiga o'xshash usulda Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlardan iborat σ algebragacha davom ettiriladi. Aynan shunga o'xshash usulda Lebeg o'lchovini istalgan $n-$ o'lchamli Evklid fazosida ham qurish mumkin. Tekislikda Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlarni kiritish jarayonida odatdagi yuza ta'rifidan kelib chiqdik. Shunga o'xshash bir o'lchamli holda Lebeg o'lchovining kiritilishi interval (kesma, yarim interval) uzunligi tushunchasiga asoslanadi.

6.4. Ayrim umumlashtirishlar. Umuman olganda o'lchov tushunchasini boshqacha usulda, ya'ni umumiyroq usulda kiritish mumkin. Bu umumiyroq usulni sonlar o'qidagi to'plamlar uchun amalga oshiramiz.

Bizga sonlar o‘qida aniqlangan kamaymaydigan o‘ngdan uzluksiz F funksiya berilgan bo‘lsin. Interval, kesma va yarim intervallarga F funksiya yordamida quyidagi sonlarni mos qo‘yamiz:

$$m((a,b)) = F(b-0) - F(a), \quad m([a,b]) = F(b) - F(a-0),$$

$$m((a,b]) = F(b) - F(a), \quad m([a,b)) = F(b-0) - F(a-0).$$

Ravshanki, bu usulda aniqlangan m interval (kesma va yarim interval) funksiyasi manfiymas va additiv. Yarim halqada kiritilgan bu o‘lchovga yuqoridagidek mulohazalarni qo‘llab, qandaydir $\mu_F(\cdot)$ o‘lchovni qurishimiz mumkin. Bunda μ_F o‘lchovga nisbatan o‘lchovli bo‘lgan to‘plamlarning $\mathfrak{U}_F$ sistemasi sanoqli yig‘indi va sanoqli kesishmaga nisbatan yopiq bo‘ladi, μ_F o‘lchov esa $\sigma-$ additiv bo‘ladi. Umuman olganda, μ_F o‘lchovga nisbatan o‘lchovli to‘plamlar sinfi F funksiyaning tanlanishiga bog‘liq. Ammo $\mathbb{R}$ da o‘ngdan uzluksis, kamaymaydigan istalgan F funksiya uchun ochiq va yopiq to‘plamlar, shuningdek, ularning istalgan sanoqli yig‘indi va sanoqli kesishmalari o‘lchovli to‘plamlar bo‘ladi. U yoki bu kamaymaydigan o‘ngdan uzluksiz F funksiya vositasida qurilgan μ_F o‘lchov *Lebeg-Stiltes o‘lchovi* deyiladi.

Bizga Lebeg o‘lchovi μ va Lebeg-Stiltes o‘lchovi μ_F berilgan bo‘lsin.

6.7-ta’rif. *Agar $\mu(A) = 0$ ekanligidan $\mu_F(A) = 0$ kelib chiqsa, μ_F absolyut uzluksiz o‘lchov deyiladi. Agar μ_F o‘lchov chekli yoki sanoqli qiymat qabul qiluvchi F funksiya yordamida aniqlansa, μ_F diskret o‘lchov deb ataladi. Agar μ_F o‘lchovda istalgan bir nuqtali to‘plam 0 o‘lchovga ega bo‘lsa va Lebeg o‘lchovi nolga teng bo‘lgan biror A to‘plam uchun $\mu_F(\mathbb{R}\backslash A) = 0$ bo‘lsa, u holda μ_F singulyar o‘lchov deyiladi.*

Ko‘rsatish mumkinki, istalgan o‘lchov absolyut uzluksiz, diskret va singulyar o‘lchovlar yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanadi va bu tasvir yagonadir.

6.5. O‘lchovsiz to‘plamning mavjudligi. Biz ko‘rsatdikki, Lebeg ma’nosida o‘lchovli bo‘lgan to‘plamlar sinfi yetarlicha keng. Tabiiy ravishda Lebeg ma'nosida o'lchovsiz to'plam mavjudmi? - degan savol paydo bo'ladi. Bu savol ijobiy yechilishini ko'rsatamiz. O'lchovsiz to'plamni qurishni sonlar o'qida amalga oshiramiz.

6.2-misol. Chegaralangan o'lchovsiz to'plamga misol keltiring.

Yechish. Buning uchun $[-1,\ 1]$ kesmaning nuqtalari orasida ekvivalentlik tushunchasini kiritamiz: agar x va y ning ayirmasi $x-y$ ratsional son bo'lsa, ular ekvivalent deyiladi. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi. Shuning uchun $[-1, 1]$ kesma o'zaro ekvivalent bo'lgan elementlardan iborat $K(x),\ \ x \in [-1, 1]$ sinflarga ajraladi. Bunda turli sinflar o'zaro kesishmaydi. Shunday qilib $[-1, 1]$ kesma o'zaro kesishmaydigan $K(x),\ \ x \in [-1, 1]$ sinflarga ajraldi. Endi bu sinflarning har biridan bittadan element tanlab olib, bu tanlab olingan elementlar to'plamini A bilan belgilaymiz.

Bu A to'plamning o'lchovsiz ekanligini isbotlaymiz. $[-1, 1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to'plamini nomerlab chiqamiz:

$$r_0 = 0,\ r_1,\ r_2, \ldots$$

A_k bilan A to'plamni r_k songa siljitishdan hosil bo'lgan to'plamni belgilaymiz, ya'ni $A_k = A + r_k = \{y : y = x + r_k,\ x \in A\}$. Xususan $A_0 = A$, A_k to'plam A to'plamdan r_k ga siljitish orqali hosil qilingani uchun ular bir vaqtda yo o'lchovli, yo o'lchovsiz to'plamlar bo'ladi. Faraz qilaylik, A o'lchovli to'plam bo'lsin. U holda uni r_k ga siljitishdan hosil bo'lgan A_k to'plam ham o'lchovli bo'ladi va $\mu(A_k) = \mu(A)$ tenglik o'rinli. Ravshanki,

$$[-1,\ 1] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Bundan, o'lchovning yarim additivlik xossasiga asosan

$$2 = \mu([-1,\ 1]) \leq \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \mu(A) + \mu(A) + \cdots + \mu(A) + \cdots .$$

Bu yerdan $\mu(A) > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ uchun $A_k \subset [-2,\ 2]$. Bundan

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset [-2,\ 2]$$

va A_k to'plamlar o'zaro kesishmaydi. O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga asosan

$$4 = \mu([-2,\ 2]) \geq \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \mu(A) + \mu(A) + \cdots + \mu(A) + \cdots .$$

Bu yerdan $\mu(A) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik A to'plamning o'lchovsiz ekanligini isbotlaydi. Δ

6.3. 4.7-misolda keltirilgan Kantor to'plami K ning Lebeg o'lchovi nolga teng ekanligini isbotlang.

Isbot. Kantor to'plami K ning o'lchovi nolga tengligi $\mu([0,\ 1]\backslash K) = 1$ tenglikdan kelib chiqadi. Barcha chiqarib tashlangan intervallar uzunliklari yig'indisi

$$\mu\left([0,\ 1]\backslash K\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots = 1.$$

Demak, $\mu(K) = 0$. Δ

6.4. Hozir biz qurilishi Kantor to'plami K bilan bog'liq bo'lgan *Kantorning zinapoya funksiyasini* (6.7-chizma) keltiramiz. Kantorning zinapoya funksiyasini $\mathfrak{K}$ bilan belgilaymiz va uni $\mathbb{R}$ da quyidagicha aniqlaymiz. $\mathfrak{K}(x) = 0,\ x \in (-\infty, 0]$ va $\mathfrak{K}(x) = 1,\ x \in [1, \infty)$. Endi $[0,\ 1]\backslash K$ da quyidagicha aniqlaymiz. $K_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ to'plam va uning chegarasida (6.7-chizmaga qarang)

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

$K_2 = K_{21} \bigcup K_{22} = \left(\frac{1}{9}, \ \frac{2}{9}\right) \bigcup \left(\frac{7}{9}, \ \frac{8}{9}\right)$ to‘plam va uning chegaralarida

$$\mathfrak{K}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & agar \ \ x \in \left[\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right], \\ \dfrac{3}{4}, & agar \ \ x \in \left[\dfrac{7}{9}, \dfrac{8}{9}\right]. \end{cases}$$

6.7-chizma

Endi

$$K_3 = \bigcup_{k=1}^{4} K_{3k} = \left(\frac{1}{3^3}, \ \frac{2}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{7}{3^3}, \ \frac{8}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{19}{3^3}, \ \frac{20}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{25}{3^3}, \ \frac{26}{3^3}\right)$$

to‘plam va uning chegaralarida

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{2k-1}{2^3}, \quad x \in \overline{K}_{3k}, \ \ k = 1, 2, 3, 4.$$

Xuddi shunday $K_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}} K_{nk}$ to‘plamning $k-$ qo‘shni intervali va uning chegarasida

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{2k-1}{2^n}, \quad x \in \overline{K}_{nk}, \ \ k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}.$$

Shunday qilib, K_n to‘plamlar va ularning chegaralarida $\mathfrak{K}$ funksiya aniqlandi. Bu $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = [0,\ 1]\backslash K$ to‘plam $[0,\ 1]$ kesmada zich. Endi $x_0 \in K$ soni $\mathfrak{K}$ funksiya aniqlanmagan biror nuqta bo‘lsin, u holda

$$\mathfrak{K}(x_0) = \sup\left\{\mathfrak{K}(x) :\ x < x_0,\ \ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right\}$$

deymiz. Hosil qilingan funksiya *Kantorning zinapoya funksiyasi* deyiladi. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathbb{R}$ da uzluksiz, monoton kamaymaydigan funksiya bo‘ladi. Xususan $\mathfrak{K}(0) = 0,\ \ \mathfrak{K}(1) = 1$.

6.5. $F(x) = 2x + 1$ funksiya yordamida qurilgan μ_F- Lebeg-Stiltes o‘lchovi absolyut uzluksiz o‘lchov bo‘ladi. Bu o‘lchov bo‘yicha $A = (1,\ 5]$ to‘plamning o‘lchovini toping.

Yechish. Ta’rifga ko‘ra

$$\mu_F(A) = F(5) - F(1) = 2 \cdot 5 + 1 - (2 \cdot 1 + 1) = 11 - 3 = 8. \qquad \Delta$$

6.6. $F(x) = [x]$ funksiya yordamida qurilgan μ_F-Lebeg-Stiltes o‘lchovi diskret o‘lchov bo‘ladi. Isbotlang.

Isbot. Chunki $F(x) = [x]$ funksiya monoton kamaymaydigan o‘ngdan uzluksiz funksiya bo‘lib, uning qiymatlar to‘plami butun sonlar to‘plami $\mathbb{Z}$ dan iborat. Butun sonlar to‘plami esa sanoqli to‘plamdir. Δ

6.7. 6.6-misolda keltirilgan μ_F-Lebeg-Stiltes o‘lchov bo‘yicha $A = (1,\ 5] \bigcup \{7;\ 8\}$ to‘plamning o‘lchovini toping.

Yechish. Hosil qilingan μ_F-Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘yicha ixtiyoriy $n \in \mathbb{Z}$ nuqtaning o‘lchovi birga teng. Chunki $\{n\} = [n,\ n]$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun, ta’rifga ko‘ra

$$\mu_F\left([n,\ n]\right) = F(n) - F(n - 0) = n - (n - 1) = 1.$$

Demak, $\mu_F(\{7;\ 8\}) = 2$. Endi $B = (1,\ 5]$ to‘plamning o‘lchovini topamiz.

$$\mu_F(B) = F(5) - F(1) = 5 - 1 = 4.$$

Berilgan A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan B va $\{7;\ 8\}$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat. O‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra

$$\mu_F(A) = \mu_F(B) + \mu_F(\{7;\ 8\}) = 4 + 2 = 6. \qquad \Delta$$

6.8. $F(x) = \mathfrak{K}(x)$, bu yerda $\mathfrak{K}(x)$ Kantorning zinapoya funksiyasi. $F(x) = \mathfrak{K}(x)$ yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi μ_F singulyar o‘lchov ekanligini isbotlang.

Isbot. μ_F- Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘yicha ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ nuqtaning o‘lchovi nolga teng. Chunki $\{a\} = [a,\ a]$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun, ta’rifga ko‘ra hamda $\mathfrak{K}(x)$ ning uzluksizligidan $\mu_F([a,\ a]) = \mathfrak{K}(a) - \mathfrak{K}(a-0) = 0.$

Bundan tashqari $A = (-\infty,\ 0) \bigcup (1,\ \infty)$ to‘plamning o‘lchovi ham nolga teng. Haqiqatan ham, o‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra

$$\mu_F(A) = \mu_F((-\infty, 0)) + \mu_F((1, \infty)) =$$

$$= \mathfrak{K}(0) - \lim_{a\to-\infty} \mathfrak{K}(a) + \lim_{a\to\infty} \mathfrak{K}(a) - \mathfrak{K}(1) = 0. \qquad (6.21)$$

6.3-misolda ko‘rsatildiki, $\mu(K) = 0$. Agar $\mu_F(\mathbb{R}\backslash K) = 0$ ekanligi ko‘rsatilsa, μ_F o‘lchovning singulyar o‘lchov ekanligi kelib chiqadi. Endi $\mu_F(\mathbb{R}\backslash K)$ ni hisoblaymiz. O‘lchovning additivlik xossasi va (6.21) tenglikka ko‘ra

$$\mu_F(\mathbb{R}\backslash K) = \mu_F((-\infty, 0)) + \mu_F((1, \infty)) + \mu_F([0, 1]\backslash K) = \mu_F([0, 1]\backslash K).$$

Dastlab, $K_n,\ n \in \mathbb{N}$ to‘plamlar uchun $\mu_F(K_n) = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\mu_F(K_1) = \mu_F\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \mathfrak{K}\left(\frac{2}{3} - 0\right) - \mathfrak{K}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Biz bu yerda $\mathfrak{K}$ funksiyaning uzluksizligidan foydalandik. Xuddi shunday

$$\mu_F(K_2) = \mu_F\left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)\right) + \mu_F\left(\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right) =$$

$$= \mathfrak{K}\left(\frac{2}{9} - 0\right) - \mathfrak{K}\left(\frac{1}{9}\right) + \mathfrak{K}\left(\frac{8}{9} - 0\right) - \mathfrak{K}\left(\frac{7}{9}\right) = 0$$

tenglik o‘rinli. $\mu_F(K_n) = 0,\ n \geq 3$ tengliklar ham shunga o‘xshash ko‘rsatiladi. Endi Lebeg-Stiltes o‘lchovi μ_F ning $\sigma-$ additivlik xossasidan foydalansak

$$\mu_F\left([0,\ 1]\setminus K\right) = \mu_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F\left(K_n\right) = 0$$

ekanligini olamiz. Shunday qilib, hosil qilingan Lebeg-Stiltes o‘lchovi $\mu_F(\cdot)$ singulyar o‘lchov ekan. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *μ_F- 6.8-misolda keltirilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘lsin. $\mu_F(K) = 1$ ekanligini isbotlang. Bu yerda $K-$ Kantor to‘plami.*

2. *μ_F- 6.8-misolda keltirilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi, A esa K ni saqlovchi ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. $\mu_F(A) = 1$ tenglikni isbotlang.*

3. *Elementar to‘plamlar sistemasida aniqlangan m' o‘lchovning additivlik xossasini isbotlang.*

4. *6.4-teoremani μ o‘lchov uchun isbotlang. Bu xossa Lebeg o‘lchovining yarim additivlik xossasi deyiladi.*

5. *$F(x) = x$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi absolyut uzluksiz o‘lchov bo‘ladimi?*

6. *$F(x) = 2[x] + 1$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi diskret o‘lchov bo‘ladimi?*

7. *Singulyar Lebeg-Stiltes o‘lchoviga misol keltiring.*

8. *Lebeg ma’nosida o‘lchovli va $[0,\ 1]$ kesmaga qarashli to‘plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra tashkil qiladimi? Javobni asoslang.*

9. *Tekislikdagi $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ to‘plam elementar to‘plam bo‘ladimi? Uning o‘lchovini toping.*

7-§. O‘lchovning umumiy tushunchasi

Bu paragrafda biz o‘lchovning umumiy ta’rifini beramiz. O‘lchovni yarim halqadan halqaga davom ettiramiz hamda uning additivlik va $\sigma-$ additivlik xossalarini isbotlaymiz. Tekislikda to‘g‘ri to‘rtburchaklar o‘lchovi tushunchasiga tayangan holda uni kengroq to‘plamlar sinfiga yoyish natijasida o‘lchovni qurdik. Bunda (jarayonda) to‘g‘ri to‘rtburchaklar o‘lchovidan elementar to‘plamlar o‘lchoviga o‘tishda to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasining yarim halqa ekanligi va yuzaning manfiymas va additiv bo‘lishi muhim rol o‘ynadi. Bundan tashqari, tekislikdagi o‘lchov Lebeg davomining $\sigma-$ additivligi ham muhimdir.

Aytilganlarga ko‘ra 6-§ da tekislikdagi to‘plamlar uchun amalga oshirilgan konstruksiyani yetarlicha umumiy abstrakt talqin qilish mumkin. Keyingi ikki paragraflar shu masalaga bag‘ishlanadi.

7.1-ta’rif. *Agar μ to‘plam funksiyasi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

1) *μ funksiyaning aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_\mu$ yarim halqa bo‘lsa;*

2) *μ funksiyaning qiymatlar sohasi haqiqiy va manfiymas bo‘lsa;*

3) *μ additiv bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}_\mu$ to‘plamning o‘zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}_\mu$ to‘plamlar bo‘yicha*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

chekli yoyilmasi uchun

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\mu : \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}$ ga o‘lchov deyiladi.

Eslatma. $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ yoyilmadan $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset)$, ya’ni $\mu(\emptyset) = 0$ tenglik kelib chiqadi.

7.1. O‘lchovni yarim halqadan undan hosil bo‘lgan minimal halqaga davom ettirish. Tekislikdagi to‘plamlar Lebeg o‘lchovini aniqlash uchun dastlabki qadam, bu o'lchovni to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi (yarim halqa) dan elementar to'plamlar sistemasi (undan hosil qilingan minimal halqa) ga davom ettirish bo'ldi. Hozir biz bu konstruksiyaga o'xshash abstrakt konstruksiyani qaraymiz.

7.2-ta'rif. *Agar m o'lchovning aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_m$ ikkinchi μ o'lchovning aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_\mu$ da saqlansa ($\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu$) va ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}_m$ to'plam uchun*

$$\mu(A) = m(A)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda μ o'lchov m o'lchovning davomi deyiladi.

7.1-teorema. *Aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_m$ yarim halqa bo'lgan har bir m o'lchov uchun aniqlanish sohasi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ($\mathfrak{S}_m$ ni o'zida saqlovchi minimal halqa) bo'lgan yagona m' davom mavjud.*

Isbot. Har bir $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to'plam uchun

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k \in \mathfrak{S}_m, \quad B_k \cap B_l = \emptyset, \quad k \neq l. \tag{7.1}$$

ko'rinishdagi yoyilma mavjud. U holda A ga

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) \tag{7.2}$$

sonni mos qo'yuvchi va $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ da aniqlangan m' to'plam funksiyasi o'lchov bo'ladi. Haqiqatan ham, (7.2) tenglik bilan aniqlangan $m'(A)$ miqdor (7.1) yoyilmaning tanlanishiga bog'liq emas, chunki ixtiyoriy ikkita

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j, \qquad B_i \in \mathfrak{S}_m, \ \ C_j \in \mathfrak{S}_m$$

yoyilmalarni qarasak, $B_i \cap C_j$ kesishmalar $\mathfrak{S}_m$ ga tegishli bo'lganligi uchun m o'lchovning additivligidan foydalanib,

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{r} m(C_j)$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Ravshanki, (7.2) tenglik bilan aniqlangan $m'(A)$ funksiya manfiymas va additiv bo'ladi. Shunday qilib, m o'lchovning $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ga davomi m' ning mavjudligi isbotlandi.

Endi bu o'lchovning yagonaligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to'plamni va uning biror

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k \cap B_l = \emptyset, \;\; k \neq l, \;\; B_k \in \mathfrak{S}_m$$

yoyilmasini olaylik. U holda m o'lchovning $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ da aniqlangan ixtiyoriy $\widetilde{m}$ davomi uchun

$$\widetilde{m}(A) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{m}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = m'(A)$$

tenglikni olamiz, ya'ni $\widetilde{m}$ o'lchov m' o'lchov bilan ustma-ust tushadi. Δ

O'lchovning manfiymaslik va additivlik xossalaridan quyidagi muhim xossalar kelib chiqadi.

7.2-teorema. *Biror $\mathfrak{S}_m$ halqada aniqlangan m o'lchov va $\mathfrak{S}_m$ ga tegishli $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda:*

I. Agar $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$ va *$A_k \bigcap A_l = \emptyset, \quad k \neq l$ bo'lsa, quyidagi tengsizlik bajariladi*

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A).$$

II. Agar $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \supset A$ bo'lsa, quyidagi tengsizlik bajariladi

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geq m(A).$$

Xususan, agar $A, B \in \mathfrak{S}_m$ va $A \subset B$ bo'lsa, $m(A) \leq m(B)$ bo'ladi.

Isbot. $\mathfrak{S}_m$ ga tegishli va o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lib, ularning barchasi $A \in \mathfrak{S}_m$ to'plamda saqlansin. U holda

m o‘lchovning additivligiga ko‘ra

$$m(A)=\sum_{k=1}^{n} m(A_k)+m\left(A\backslash\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

Bundan, $m(A\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k)\geq 0$ bo‘lganligi uchun I - xossaning isbotiga ega bo‘lamiz.

Endi ixtiyoriy $A_1,\ A_2\in\mathfrak{S}_m$ to‘plamlar uchun

$$m(A_1\cup A_2)=m(A_1)+m(A_2)-m(A_1\cap A_2)\leq m(A_1)+m(A_2)$$

tenglik o‘rinli ekanligidan foydalansak, bu yerdan chekli induktiv qadamdan so‘ng

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \tag{7.3}$$

tengsizlikni olamiz. Nihoyat, o‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra

$$m(A)=m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)-m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\backslash A\right)\leq m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

yoki (7.3) tengsizlikka ko‘ra

$$m(A)\leq\sum_{k=1}^{n} m(A_k). \qquad\qquad \Delta$$

Hozir biz halqada aniqlangan o‘lchovlar uchun I va II xossalarni isbotladik. Agar yarim halqada aniqlangan o‘lchovni qarasak, uning halqadagi davomi uchun I va II xossalar o‘rinli bo‘lganligidan, bu davomning yarim halqadagi qismi uchun ham I va II xossalar o‘rinli bo‘lib qoladi.

7.3-ta’rif. *Agar* $\mathfrak{S}_m$ *sistemada aniqlangan* m *o‘lchov va ixtiyoriy o‘zaro kesishmaydigan sanoqlita* $A_1,\ A_2,\ldots,A_n,\ldots\in\mathfrak{S}_m$ *to‘plamlar uchun* $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k=A\in\mathfrak{S}_m$ *bo‘lganda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘lsa*

$$m(A)=\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k),$$

u holda m o'lchov sanoqli additiv yoki $\sigma-$ additiv o'lchov deyiladi.

6-§ da tekislikdagi to'plamlar uchun kiritilgan m o'lchov $\sigma-$ additiv (6.8-teorema) o'lchovga misol bo'ladi. Boshqacha tabiatli $\sigma-$ additiv o'lchovga misol keltiramiz.

7.1-misol. Bizga ixtiyoriy sanoqli $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ to'plam berilgan bo'lsin. $p_n > 0$ sonlarni shunday tanlaymizki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

bo'lsin. Har bir $A \subset X$ to'plamga

$$m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n \tag{7.4}$$

sonni mos qo'yamiz. Aniqlanishiga ko'ra, $m(A)$ to'plam funksiyasi o'lchov bo'ladi va X ning barcha qism to'plamlari o'lchovli bo'ladi. Bundan tashqari, $m(X) = 1$.

Endi X ning o'zaro kesishmaydigan sanoqlita ixtiyoriy $A_1, \dots, A_n, \dots$ qism to'plamlarini olaylik va $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A$ bo'lsin. Aniqlanishiga ko'ra, $m(A)$ uchun (7.4) tenglik o'rinli va tenglik o'ng tomonidagi qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lgani uchun

$$m(A) = \sum_{x_k \in A} p_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x_k \in A_n} p_k = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

tengliklar o'rinli, ya'ni m o'lchov $\sigma-$ additiv bo'ladi.

Endi additiv bo'lib, ammo $\sigma-$ additiv bo'lmagan o'lchovga misol qaraymiz.

7.2-misol. $[0, 1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to'plamini X bilan belgilaymiz. $\mathfrak{S}_m$ orqali X ning (a, b) interval, $[a, b]$ kesma va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallar bilan kesishmalaridan iborat to'plamlar sistemasini belgilaymiz. Ko'rsatish mumkinki, $\mathfrak{S}_m$ yarim halqa bo'ladi. Agar

$$A_{ab} = X \bigcap (a, b) \ \left(\bigcap [a, b], \ \bigcap (a, b], \ \ \bigcap [a, b)\right)$$

desak, har bir A_{ab} to'plamga

$$m(A_{ab}) = b - a$$

sonni mos qo'yish mumkin. Bu to'plam funksiyasi m additiv o'lchov bo'ladi, ammo $\sigma-$ additiv bo'lmaydi. Chunki $[0,\ 1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to'plami sanoqli, ya'ni $X = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ tenglik o'rinli. Birinchidan $A_{01} = X \bigcap [0,\ 1]$ to'plam uchun $m(A_{01}) = 1$ bo'ladi, ikkinchi tomondan $A_{01} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ o'zaro kesishmaydigan sanoqlita nol o'lchovli $A_n = X \bigcap [r_n,\ r_n]$ to'plamlarning yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$m(A_{01}) = 1 \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0.$$

7 va 8-§ larda qaralayorgan o'lchovlarni $\sigma-$ additiv o'lchovlar deb hisoblaymiz.

7.3-teorema. *Agar $\mathfrak{S}_m$ yarim halqada aniqlangan m o'lchov $\sigma-$ additiv bo'lsa, u holda bu o'lchovning $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ($\mathfrak{S}_m$ ni o'zida saqlovchi minimal halqa) halqaga davomi μ ham $\sigma-$ additiv o'lchov bo'ladi.*

Isbot. $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to'plam va o'zaro kesishmaydigan $B_n \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$, $n \in \mathbb{N}$ to'plamlar berilgan bo'lib, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ tenglik bajarilsin. U holda 5.3-teoremaga ko'ra, $\mathfrak{S}_m$ da o'zaro kesishmaydigan cheklita $\{A_j,\ j = 1, 2, \ldots, l\}$ to'plamlar va o'zaro kesishmaydigan $\{B_{ns},\ s = 1, 2, \ldots, l_n\}$ to'plamlar sistemalari mavjud bo'lib, $A = \bigcup\limits_{j=1}^{l} A_j$, va $B_n = \bigcup\limits_{s=1}^{l_n} B_{ns}$, $n \in \mathbb{N}$ chekli yoyilmalar o'rinli bo'ladi.

Endi $C_{nsj} = B_{ns} \bigcap A_j$ belgilashlarni kiritamiz. Tuzilishiga ko'ra, C_{nsj} to'plamlar o'zaro kesishmaydi va $A_j = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{s=1}^{l_n} C_{nsj}$ va $B_{ns} = \bigcup\limits_{j=1}^{l} C_{nsj}$ yoyilmalar o'rinli bo'ladi. $\mathfrak{S}_m$ da aniqlangan m o'lchovning $\sigma-$ additivligidan

$$m(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{l_n} m(C_{nsj}) \quad \text{va} \quad m(B_{ns}) = \sum_{j=1}^{l} m(C_{nsj}) \qquad (7.5)$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Ikkinchi timondan $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ da berilgan μ o‘lchovning aniqlanishiga ko‘ra,

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{l} m(A_j) \quad \text{va} \quad \mu(B_n) = \sum_{s=1}^{l_n} m(B_{ns}). \tag{7.6}$$

U holda (7.5), (7.6) formulalardan

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{l} m(A_j) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{l_n} m(C_{nsj}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{l_n}\sum_{j=1}^{l} m(C_{nsj}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{l_n} m(B_{ns}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$$

tengliklar zanjirini olamiz. Bu tengliklar zanjirida qatnashayotgan barcha qatorlar absolyut yaqinlashuvchi, shuning uchun

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$$

tenglikning o‘rinli ekanligiga ega bo‘lamiz. Δ

Ko‘rsatildiki, agar yarim halqada $\sigma-$ additiv o‘lchov aniqlangan bo‘lsa, u holda uning halqaga davomi ham $\sigma-$ additiv o‘lchov bo‘ladi, shuning uchun, boshidan o‘lchovni biror halqada aniqlangan deb qarash mumkin.

7.4-teorema. *Biror $\mathfrak{S}$ halqada $\sigma-$ additiv m o‘lchov berilgan bo‘lib, A va $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to‘plamlar $\mathfrak{S}$ ga tegishli bo‘lsin. U holda:*

I_σ. Agar $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ va $i \neq j$ da $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq m(A)$$

tengsizlik o‘rinli;

II_σ (sanoqli yarim additivlik). Agar $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ bo‘lsa, u holda

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Agar A_k to'plamlar o'zaro kesishmasa va A to'plamda saqlansa, u holda 7.2-teoremaning I tasdig'iga ko'ra har bir $n \in \mathbb{N}$ da

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan $n \to \infty$ da limitga o'tsak I_σ tasdiq isbotiga ega bo'lamiz.

Endi II_σ tasdiqni isbotlaymiz. $\mathfrak{S}$ halqa bo'lgani uchun

$$B_n = (A_n \bigcap A) \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

to'plamlar $\mathfrak{S}$ ga tegishli bo'ladi. Tuzilishiga ko'ra

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad B_n \subset A_n$$

va B_n to'plamlar juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydi, shuning uchun

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k). \qquad \Delta$$

7.1-eslatma. Ko'rinib turibdiki, teoremaning I_σ tasdig'i o'rinli bo'lishi qaralayotgan o'lchovning $\sigma-$additivligiga bog'liq emas, shuning uchun ixtiyoriy additiv o'lchov uchun ham bu tasdiq o'rinli bo'ladi. Aksincha, II_σ tasdiqda o'lchovning $\sigma-$additivlik xossasi muhim ahamiyatga egadir. Haqiqatan ham, yuqorida qaralgan 7.2-misolda $\sigma-$ additiv bo'lmagan o'lchovda, o'lchovi 1 ga teng X to'plam o'lchovlari 0 ga teng bir nuqtali to'plamlar yig'indisida saqlanadi, ammo II_σ tasdiq bajarilmaydi. Bundan tashqari shunga ishonch hosil qilish mumkinki, II_σ xossa umuman olganda $\sigma-$additivlik xossasiga teng kuchli. Haqiqatan ham, $\mathfrak{S}$ yarim halqada aniqlangan biror μ o'lchov berilgan bo'lsin. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sanoqli sondagi to'plamlar $\mathfrak{S}$ dan olingan bo'lib, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar o'zaro kesishmasin va $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

tenglik bajarilsin. U holda har qanday o‘lchov I_σ xossaga ega bo‘lganligi sababli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

tengsizlik bajariladi. Bundan tashqari, agar μ o‘lchov II_σ xossaga ham ega bo‘lsa, u holda (chunki A_k lar A ni qoplaydi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A)$$

tengsizlik ham bajariladi. Shuning uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

tenglik o‘rinli. Demak, o‘lchovning sanoqli yarim additivligi uning $\sigma-$ additivligini ta’minlar ekan.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $[0,\ 1]$ *kesmadagi barcha irratsional sonlar to‘plamini* X *bilan belgilaymiz.* $\mathfrak{S}_m$ *orqali* X *ning* $(a,\ b)$ *interval,* $[a,\ b]$ *kesma va* $[a,\ b)$, $(a,\ b]$ *yarim intervallar bilan kesishmalaridan hosil bo‘lgan to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. Agar* $A_{ab} = X \bigcap (a,\ b)$ $(\bigcap [a,\ b],\ \bigcap (a,\ b],\ \bigcap [a,\ b))$ *desak, har bir* A_{ab} *to‘plamga* $m(A_{ab}) = b - a$ *sonni mos qo‘yamiz. Bu to‘plam funksiyasi* m $\sigma-$ *additiv o‘lchov bo‘ladimi?*

2. *Har bir* $A \subset \mathbb{R}$ *to‘plamga*

$$m(A) = \sum_{n \in \mathbb{N} \bigcap A} \frac{1}{2^n}$$

sonni mos qo‘yamiz. m *to‘plam funksiyasi o‘lchov bo‘lishini ko‘rsating.* $A = (-\infty,\ 0)$ *va* $B = [1,\ 4]$ *to‘plamlarning o‘lchovlarini toping.*

3. *2-misolda aniqlangan* m *o‘lchov* $\sigma-$ *additiv o‘lchov bo‘ladimi?*

8-§. O‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomi

8.1. Birli (birlik elementli) yarim halqada aniqlangan o‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomi. Agar $\mathfrak{S}_m$ yarim halqada aniqlangan m o‘lchov additivlik xossasiga ega bo‘lib, ammo $\sigma-$additiv bo‘lmasa, u holda m ning $\mathfrak{S}_m$ dan $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ga davomi bilan o‘lchovni davom ettirish jarayoni tugaydi, ya’ni m o‘lchovni $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ dan kengroq sinfga davom ettirib bo‘lmaydi. Agar $\mathfrak{S}_m$ da aniqlangan m o‘lchov $\sigma-$additiv bo‘lsa, u holda m ni $\mathfrak{S}_m$ dan $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ga nisbatan kengroq bo‘lgan va qandaydir ma’noda maksimal sinfga davom ettirish mumkin. Buni Lebeg bo‘yicha davom ettirish yordamida amalga oshirish mumkin. Bu bandda birli yarim halqada berilgan o‘lchovni Lebeg bo‘yicha davom ettirish masalasini qaraymiz, umumiy holni esa kelgusi bandda qaraymiz.

Bizga biror $\mathfrak{S}_m$ birli yarim halqada aniqlangan $\sigma-$additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsin va E to‘plam $\mathfrak{S}_m$ yarim halqaning biri bo‘lsin. E ning barcha qism to‘plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(E)$ sistemada tashqi o‘lchov deb ataluvchi μ^* funksiyani quyidagicha aniqlaymiz.

8.1-ta’rif. *Ixtiyoriy $A \subset E$ to‘plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n) \tag{8.1}$$

son A to‘plamning tashqi o‘lchovi deb ataladi. Bu yerda aniq quyi chegara A to‘plamni qoplovchi barcha chekli yoki sanoqli $\{B_n\}$, $B_n \in \mathfrak{S}_m$ to‘plamlar sistemasi bo‘yicha olinadi.

8.1-teorema *(Sanoqli yarim additivlik). Agar A va sanoqlita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to‘plamlar uchun $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsa, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli*

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Bu teorema tasdig‘ining isboti 6.3-teorema tasdig‘i isbotiga (aynan) o‘xshash amalga oshiriladi.

8.2-ta’rif. *Agar* $A \subset E$ *to‘plam va istalgan* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ *to‘plam mavjud bo‘lib,*

$$\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A *(Lebeg bo‘yicha) o‘lchovli to‘plam deyiladi.*

Faqat o‘lchovli to‘plamlar sinfida aniqlangan μ^* funksiya Lebeg o‘lchovi deb ataladi va u μ harfi bilan belgilanadi. Ravshanki, $\mathfrak{S}_m$ va $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ dan olingan to‘plamlar o‘lchovli bo‘ladi. Bunda, agar $A \in \mathfrak{S}_m$ va $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ bo‘lsa, u holda

$$\mu(A) = m(A), \qquad \mu(B) = m'(B).$$

Agar A o‘lchovli to‘plam va $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to‘plam berilgan bo‘lsa,

$$A\Delta B = (E\backslash A)\Delta(E\backslash B)$$

tenglikdan A ning to‘ldiruvchi to‘plami $E\backslash A$ ning ham o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

8.2-teorema. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *halqa bo‘ladi.*

Isbot. Ixtiyoriy A_1 va A_2 to‘plamlar uchun

$$A_1 \cap A_2 = A_1\backslash(A_1\backslash A_2) \tag{8.2}$$

va

$$A_1 \cup A_2 = E\backslash[(E\backslash A_1) \cap (E\backslash A_2)] \tag{8.3}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lgani uchun quyidagini isbotlash yetarli. Agar $A_1 \in \mathfrak{U}(E)$, $A_2 \in \mathfrak{U}(E)$ bo‘lsa, u holda $A = A_1\backslash A_2 \in \mathfrak{U}(E)$ bo‘ladi, ya’ni o‘lchovli to‘plamlarning ayirmasi o‘lchovlidir. Haqiqatan ham, A_1 va A_2 o‘lchovli to‘plamlar uchun shunday $B_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ va $B_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to‘plamlar mavjudki,

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{va} \qquad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. $B = B_1 \backslash B_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ bo‘lganligi uchun

$$(A_1 \backslash A_2) \Delta (B_1 \backslash B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

munosabatdan foydalanib, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. Demak, $A_1 \backslash A_2 \in \mathfrak{U}(E)$ u holda (8.2) va (8.3) munosabatlardan $A_1 \bigcap A_2 \in \mathfrak{U}(E)$ va $A_1 \bigcup A_2 \in \mathfrak{U}(E)$ ekanligini olamiz. A_1 va A_2 to‘plamlarning simmetrik ayirmasining o‘lchovli ekanligi

$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1)$$

tenglikdan kelib chiqadi. Δ

8.1-eslatma. $\mathfrak{S}_m$ ning birlik elementi - E o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ uchun ham birlik eliment bo‘ladi, shuning uchun o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ algebra tashkil qiladi.

8.3-teorema. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da aniqlangan μ to‘plam funksiyasi addituvdir.*

Bu teoremaning isboti 6.6-teorema isbotini so‘zma-so‘z takrorlash bilan amalga oshiriladi.

8.4-teorema. *O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da aniqlangan μ to‘plam funksiyasi $\sigma-$ addituvdir.*

Isbot. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ dan olingan A va juft-jufti bilan o‘zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to‘plamlar uchun $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsin. 8.1- teoremaga ko‘ra,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \implies \mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{8.4}$$

tengsizlik o‘rinli. 8.3-teoremaga ko‘ra, har bir n da

$$\mu(A) \geq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \tag{8.5}$$

tengsizlikni olamiz. (8.5) da $n \to \infty$ da limitga o‘tib,

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{8.6}$$

ga ega bo'lamiz. (8.5) va (8.6) lardan teorema tasdig'i kelib chiqadi. Δ

8.5-teorema. *Lebeg bo'yicha o'lchovli bo'lgan barcha to'plamlar sestemasi* $\mathfrak{U}(E)$, E *birlik elimentli* $\sigma-$ *algebradir.*

Isbot. 6.7-teorema isbotini so'zma-so'z takrorlash yordamida sanoqlita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{U}(E)$ to'plamlar uchun $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{U}(E)$ ekanligini isbotlash mumkin. Ikkinchi tomondan,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = E \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \backslash A_n)$$

tenglikka ko'ra, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{U}(E)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Δ

Tekislikdagi to'plamlarning Lebeg o'lchovi xossalariga o'xshash, o'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasidan uning uzluksizlik xossasi kelib chiqadi.

Ya'ni, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi uchun $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsa, u holda

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

bo'ladi. Xuddi shuningdek, agar biror o'lchovli to'plamlarning $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ ketma-ketligi uchun $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsa, u holda

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

tenglik o'rinli.

Shunday qilib, biz ko'rsatdikki, agar birlik elimentli $\mathfrak{S}_m$ yarim halqada $\sigma-$addituv m o'lchov berilgan bo'lsa, bu o'lchovni Lebeg bo'yicha davom ettirish natijasida $\mathfrak{U}(E)$, $\sigma-$algebrada aniqlangan $\sigma-$ addituv μ o'lchov hosil bo'ladi.

8.3-ta'rif. *O'lchovli to'plamlar sestemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *da aniqlangan va* $\mathfrak{U}(E)$ *da tashqi o'lchov* μ^* *bilan ustma-ust tushuvchi* $\mu = L(m)$ *funksiya* m *o'l-chovning Lebeg davomi deyiladi.*

8.2. Birlik elementga ega boʻlmagan yarim halqada berilgan oʻlchovni davom ettirish. Agar m oʻlchov birlik elimentga ega boʻlmagan $\mathfrak{S}_m$ yarim halqada aniqlangan boʻlsa, u holda avvalgi banddagi oʻlchovni Lebeg boʻyicha davom ettirish jarayonida baʼzi oʻzgarishlar sodir boʻladi. Aniqrogʻi, μ^* tashqi oʻlchov chekli $\sum\limits_n m(B_n)$ yigʻindiga ega boʻlgan $\bigcup\limits_n B_n \in \mathfrak{S}_m$ qoplamasi mavjud boʻlgan A toʻplamlar uchun aniqlanadi. Toʻplam oʻlchovliligi taʼrifi oʻzgarishsiz qoladi. 8.2-8.4-teoremalar va 8.3-taʼrif oʻz kuchini saqlab qoladi. Yarim halqada birlik elementning mavjudligidan 8.2-teorema isbotida foydalanilgan. Umumiy holda ham 8.2-teoremani isbotlash mumkin. Buning uchun $A_1,\ A_2 \in \mathfrak{U}(E)$ dan $A_1 \bigcup A_2 \in \mathfrak{U}(E)$ kelib chiqishini birlik elementga bogʻliqsiz ravishda koʻrsatish kerak. Bu tasdiq

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

munosabatdan kelib chiqadi. $\mathfrak{S}_m$ yarim halqada birlik element mavjud boʻlmagan holda 8.5-teorema quyidagi teoremaga almashtiriladi.

8.6-teorema. *Istalgan boshlangʻich m oʻlchov uchun Lebeg boʻyicha oʻlchovli toʻplamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ $\delta-$ halqa boʻladi. Sanoqli sondagi oʻlchovli $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ toʻplamlar birlashmasi boʻlgan $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ toʻplamning oʻlchovli boʻlishi uchun $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$ miqdorning n ga bogʻliqsiz oʻzgarmas bilan chegaralangan boʻlishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Yetarliligi.* Oʻlchovli toʻplamlarning $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sanoqli sistemasi berilgan boʻlib,

$$\sup_{n\geq 1} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = K < \infty$$

boʻlsin. Yangi

$$A_1' = A_1,\ \ A_2' = A_2 \backslash A_1,\ \ A_3' = A_3 \backslash (A_1 \bigcup A_2), \ldots, A_n' = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \ldots$$

o'lchovli to'plamlar ketma-ketligini tuzamiz. Tuzilishiga ko'ra, $A'_1, A'_2, \ldots,$ $A'_n, \ldots$ to'plamlar o'zaro kesishmaydi. Bundan tashqari, istalgan n da $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A'_k$ $= \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ tenglik o'rinli. Bundan tashqari

$$\sup_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sup_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) = \sup_n \sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k) \leq K$$

shart bajariladi. Demak, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n \in \mathbb{N}$ mavjudki,

$$\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A'_k\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A'_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $C = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A'_k$ to'plam o'lchovli bo'lgani uchun, shunday $B \in \mathfrak{S}_m$ to'plam mavjud bo'lib, $\mu^*(C\Delta B) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi.

$$A \,\Delta\, B \subset (C \,\Delta\, B) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A'_k\right)$$

munosabatdan foydalansak, $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. Demak, A o'lchovli to'plam ekan.

Zaruriyligi. Aytaylik sanoqlita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ o'lchovli to'plamlar uchun $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ to'plam o'lchovli bo'lsin va $\mu(A)$ chekli bo'lsin. U holda istalgan $n \in \mathbb{N}$ uchun $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$ munosabatdan va $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ o'lchovli to'plam bo'lgani uchun

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \mu(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \mu(A) < \infty. \qquad \Delta$$

8.1-natija. *O'lchovli to'plamlar sinfi $\mathfrak{U}(E)$ va $A \in \mathfrak{U}(E)$ to'plam berilgan bo'lsin. A to'plamning barcha $B \in \mathfrak{U}(E)$ qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}(A))$ sistema $\sigma-$ algebra bo'ladi.*

Masalan, agar $\mathfrak{U}(\mathbb{R})$ sonlar o'qidagi Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlar sinfi va $A = [a,\, b]$ ixtitoriy kesma bo'lsa, u holda $[a,\, b]$ kesmada saqlanuvchi o'lchovli to'plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra tashkil qiladi.

Lebeg o‘lchovining yana bir xossasini keltiramiz.

8.4-ta’rif. *Agar* $\mu(A) = 0$ *va* $A' \subset A$ *bo‘lishidan* A' *ning o‘lchovli ekanligi kelib chiqsa,* μ *o‘lchov to‘la deyiladi.*

Ta’rifda keltirilgan A' to‘plam uchun $\mu(A') = 0$ bo‘ladi.

Qiyinchiliksiz isbotlash mumkinki, ixtiyoriy o‘lchovning Lebeg davomi to‘la bo‘ladi. Haqiqatan ham, $A' \subset A$, $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$ bo‘lsa, $\mu(A') = 0$ bo‘ladi va $\emptyset \in \mathfrak{S}_m$ ni olsak, $\mu^*(A'\Delta\emptyset) = \mu^*(A') = 0$ bo’ladi, ya’ni A' to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

Umuman olganda $\sigma-$ algebrada aniqlangan har qanday $\sigma-$ additiv o‘lchovni to‘la o‘lchovgacha davom ettirish mumkin. Buning uchun nol o‘lchovli to‘plamning ixtiyoriy qismiga nolni mos qo‘yish kifoya qiladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $X = [0, 1]\backslash\mathbb{Q}$ *bo‘lsin.* $\mathfrak{S}_m$ *orqali* X *ning* $[a, b)$ *yarim intervallar bilan kesishmalaridan hosil bo‘lgan to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. Bu sistemaning yarim halqa ekanligini ko‘rsating.*

2. *1-topshiriqda aniqlangan* $\mathfrak{S}_m$ *yarim halqaning har bir* $A_{ab} = X \cap [a, b)$ *to‘plamiga* $m(A_{ab}) = b-a$ *sonni mos qo‘yamiz. Bu to‘plam funksiyasi o‘lchov bo‘lishini ko‘rsating.*

3. *2-topshiriqda aniqlangan* $m : \mathfrak{S}_m \to \mathbb{R}$ *o‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomini toping. Uni sonlar o‘qidagi Lebeg o‘lchovi bilan ustma-ust tushishini ko‘rsating.*

III bob. O‘lchovli funksiyalar

Bu bob ikki paragrafdan iborat. Dastlabki 9-paragraf o‘lchovli funksiyalar xossalarini tekshirishga bag‘ishlangan. O‘lchovli funksiyalar Lebeg integrali tushunchasini kiritishda asosiy manba hisoblanadi. Bu yerda o‘lchovli funksiyalar ta’riflanib, ularning asosiy xossalari isbotlangan. Jumladan, o‘lchovli funksiyalar to‘plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligi (9.1-teorema) ko‘rsatilgan. Yana, agar $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir $x \in E$ nuqtada $f(x)$ ga yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f ning o‘lchovli bo‘lishi (9.2-teorema) isbotlangan.

Bobning oxirgi, 10-paragrafida ekvivalent funksiyalarga ta’rif berilib, ularga misollar keltirilgan. Ekvivalent funksiyalarning biri o‘lchovli bo‘lsa, ikkinchisi ham o‘lchovli bo‘lishi isbotlangan. Bundan tashqari o‘lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining nuqtali, deyarli va o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishlari ta’riflanib, ular orasidagi bog‘lanishlar yoritilgan. Ma’lumki, tekis yaqinlashishdan nuqtali yaqinlashish, nuqtali yaqinlashishdan esa deyarli yaqinlashish kelib chiqadi. Deyarli yaqinlashishdan o‘lchov bo‘yicha yaqinlashish kelib chiqishi isbotlangan. O‘lchov bo‘yicha yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqadimi degan savolga ijobiy javob yo‘q ekan. O‘lchov bo‘yicha nol funksiyaga yaqinlashuvchi, lekin nolga biror nuqtada ham yaqinlasmaydigan funksiyalar ketma-ketligiga misol (10.5-misol) keltirilgan. Ammo o‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi ketma-ketlikdan deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligi (10.5-teorema) ko‘rsatilgan. Tekis yaqinlashish va deyarli yaqinlashish orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi Yegorov teoremasi (10.3-teorema) isbotlangan. O‘lchovli funksiyaning uzluksiz funksiyaga *qaysidir* ma’noda yaqin bo‘lishi haqidagi Luzin teoremasi (10.6-teorema), ya’ni funksiya o‘lchovli bo‘lishining kriteriysi keltirilgan.

9-§. O'lchovli funksiyalar va ular ustida amallar

Bu paragrafda uzluksiz funksiyaga *qaysidir* ma'noda yaqin bo'lgan (Luzin teoremasiga qarang) o'lchovli funksiya tushunchasiga ta'rif beramiz. O'lchovli funksiyalar Lebeg integrali tushunchasini kiritishda asosiy manba hisoblanadi.

Bizga $E \subset \mathbb{R}(E \subset \mathbb{R}^2)$ Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam va unda aniqlangan haqiqiy qiymatli f funksiya berilgan bo'lsin.

9.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ to'plam o'lchovli bo'lsa, f funksiya E to'plamda o'lchovli deyiladi.*

9.1-misol. $f : E \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a = const$ funksiyaning o'lchovli ekanligini ko'rsating.

Yechish. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun

$$E(f < c) = \{x \in E : f(x) < c\} = \begin{cases} E, & agar \quad c > a, \\ \emptyset, & agar \quad c \leq a \end{cases}$$

tenglik o'rinli. E va $\emptyset$ to'plamlar o'lchovli. Demak, ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < c)$ to'plam o'lchovli ekan. Ta'rifga ko'ra, $f(x) = a$ funksiya E da o'lchovli funksiya bo'ladi.

9.1-teorema. *Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda ularning yig'indisi $f+g$, ayirmasi $f-g$ va ko'paytmasi $f \cdot g$ o'lchovli bo'ladi. Agar barcha $x \in E$ lar uchun $g(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda f/g funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi.*

Teoremani isbotlashda quyidagi lemmalardan foydalanamiz.

9.1-lemma. *Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a, b \in \mathbb{R}$ lar uchun quyidagi to'plamlarning har biri o'lchovli bo'ladi:*

1) $E(f \geq a)$; 2) $E(a \leq f < b)$; 3) $E(f = a)$; 4) $E(f \leq a)$; 5) $E(f > a)$.

Isbot. Faraz qilaylik, f o'lchovli funksiya bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra, ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < a)$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

1) $E(f \geq a) = E \backslash E(f < a)$ tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamning to'ldiruvchisi o'lchovli ekanligidan $E(f \geq a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2) $E(a \leq f < b) = E(f \geq a) \bigcap E(f < b)$ tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamlar kesishmasi o'lchovli ekanligidan $E(a \leq f < b)$ to'plamning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

3) $E(f = a)$ to'plamning o'lchovli ekanligini ko'rsatamiz:

$$E(f = a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(a \leq f < a + \frac{1}{n}\right).$$

Bu yerda $E\left(a \leq f < a + \frac{1}{n}\right)$ to'plam 2) ko'rinishdagi to'plam bo'lgani uchun u - o'lchovli. O'lchovli to'plamlarning sanoqli sondagi kesishmasi (6.7-teorema) o'lchovli bo'lganligi uchun $E(f = a)$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

4) $E(f \leq a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi ta'rifdan, 3) dan hamda $E(f \leq a) = E(f < a) \bigcup E(f = a)$ tenglikdan kelib chiqadi.

5) $E(f > a) = E \backslash E(f \leq a)$ tenglikdan hamda to'ldiruvchi to'plamning o'lchovliligi (6.4-teorema) dan kelib chiqadi. Δ

9.2-lemma. *Agar ixtiyoriy* $a, b \in \mathbb{R}$ *lar uchun 9.1-lemmadagi* 1), 2), 4), 5) *ko'rinishdagi to'plamlarning birortasi o'lchovli bo'lsa, u holda* f *funksiya* E *to'plamda o'lchovli bo'ladi.*

Isbot. Biz faqat 1) ko'rinishdagi to'plamning o'lchovli ekanligidan f ning o'lchovli ekanligini keltirib chiqaramiz. Qolgan tasdiqlarning isbotini o'quvchiga mustaqil isbotlashni tavsiya qilamiz. Faraz qilaylik, $E(f \geq a)$ to'plam ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun o'lchovli bo'lsin. U holda uning to'ldiruvchi to'plami $E(f < a)$ ham o'lchovli bo'ladi. 9.1-ta'rifga asosan f o'lchovli funksiya bo'ladi. Δ

9.3-lemma. *Agar* f *va* g *lar* E *da o'lchovli funksiyalar bo'lsa, u holda* $\{x \in E : f(x) > g(x)\} = E(f > g)$ *to'plam o'lchovli bo'ladi.*

Isbot. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ sanoqli bo'lganligi uchun uning elementlarini nomerlab chiqamiz, ya'ni $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots\}$ va quyidagi tenglikni isbotlaymiz:

$$E(f > g) := \{\, x \in E : f(x) > g(x)\} =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{\, x : f(x) > r_k\} \bigcap \{\, x : g(x) < r_k\}\Big)\,. \tag{9.1}$$

Faraz qilaylik, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ ya'ni $f(x_0) > g(x_0)$ bo'lsin, u holda ratsional sonlarning zichlik xossasiga ko'ra shunday $r_k \in \mathbb{Q}$ mavjudki, $f(x_0) > r_k > g(x_0)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak,

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_k\} \bigcap \{x : g(x) < r_k\}\,.$$

Bundan

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{\, x : f(x) > r_k\} \bigcap \{\, x : g(x) < r_k\}\Big) := A$$

ekanligi, bundan esa $E(f > g) \subset A$ kelib chiqadi. Endi teskari $A \subset E(f > g)$ munosabatni ko'rsatamiz. Faraz qilaylik,

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{\, x : f(x) > r_k\} \bigcap \{\, x : g(x) < r_k\}\Big)$$

ixtiyoriy nuqta bo'lsin, u holda x_0 birlashmadagi to'plamlarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi, ya'ni shunday $k \in \mathbb{N}$ mavjudki, $x_0 \in \{x : f(x) > r_k\} \bigcap \{x : g(x) < r_k\}$. Demak, bir vaqtda $f(x_0) > r_k$ va $g(x_0) < r_k$ bo'ladi. Bundan $f(x_0) > g(x_0)$ ekanligi, ya'ni $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $A \subset E(f > g)$ ni olamiz.

Biz (9.1) tenglikni isbotladik. 9.3-lemmaning isboti (9.1) tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamlarning sanoqli birlashmasi (6.7-teorema) yana o'lchovli ekanligidan kelib chiqadi. Δ

9.1-teoremaning isboti. Teoremani bir necha qismlarga ajratib isbotlaymiz.

1) agar $f-$ o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{R}$ uchun $k \cdot f$ va $f+k$ funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi. Haqiqatan ham, ($k \neq 0$ deb hisoblaymiz $k=0$ bo'lganda $k \cdot f$ ning o'lchovli bo'lishi 9.1-misolda ko'rsatildi)

$$\{x \in E : kf(x) < c\} = \begin{cases} E(f < {}^{c}\!/_{k}), & agar \;\; k > 0, \\ E(f > {}^{c}\!/_{k}), & agar \;\; k < 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

(9.2) tenglikning o'ng tomonidagi to'plamlarning har biri o'lchovli bo'lgani uchun $k \cdot f$ funksiya o'lchovli bo'ladi. $f+k$ funksiyaning o'lchovliligi

$$\{x \in E : f(x) + k < c\} = \{x \in E : f(x) < c - k\}$$

tenglikdan kelib chiqadi.

2) Agar f va g lar E da o'lchovli funksiyalar bo'lsa, u holda 9.3-lemmaga ko'ra

$$\{x \in E : f(x) + g(x) > c\} = \{x \in E : f(x) > c - g(x)\}$$

to'plam ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da o'lchovli bo'ladi. Demak, 9.2-lemmaga ko'ra $f+g$ o'lchovli funksiya bo'ladi.

3) 1) va 2) dan kelib chiqadiki, $f + (-1)g$ o'lchovli funksiya bo'ladi.

4) Agar f o'lchovli bo'lsa, u holda $|f|$ va f^2 lar ham o'lchovli funksiyalar bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$E(|f| > c) = \begin{cases} E, & agar \; c < 0 \\ E(f < -c) \bigcup E(f > c), & agar \;\; c \geq 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

(9.3) tenglikning o'ng tomonidagi to'plamlar ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da o'lchovli bo'lganligi uchun $|f|$ o'lchovli funksiya bo'ladi.

$$E(f^2 > c) = \begin{cases} E, & agar \; c < 0 \\ E(|f| > \sqrt{c}), & agar \;\; c \geq 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

$|f|$ funksiyaning o‘lchovli ekanligidan, (9.4) tenglikning o‘ng tomonidagi to‘plamlarning ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi. Demak, f^2 o‘lchovli funksiya bo‘ladi.

5) O‘lchovli funksiyalarning ko‘paytmasi o‘lchovli ekanligi quyidagi

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

ayniyatdan, hamda 1), 2), 3) va 4) xossalardan kelib chiqadi.

6) Agar g o‘lchovli bo‘lib, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in E$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{g}$ ning o‘lchovli bo‘lishi

$$E\left(\frac{1}{g} < c\right) = \begin{cases} E(g<0) \bigcup E(g > \frac{1}{c}), & agar \;\; c > 0 \\ E\left(\frac{1}{c} < g < 0\right), & agar \;\; c < 0, \\ E(g<0), & agar \;\; c = 0 \end{cases}$$

tenglikdan kelib chiqadi. Demak, $\frac{1}{g}$ – o‘lchovli funksiya. 5-xossaga ko‘ra, $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ funksiya ham o‘lchovli bo‘ladi, bunda $g(x) \neq 0$. Δ

Shunday qilib, biz o‘lchovli funksiyalar to‘plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligini ko‘rsatdik.

Analizdan ma’lum bo‘lgan tekis va nuqtali yaqinlashish ta’riflarini keltiramiz. E o‘lchovli to‘plamda f funksiya va $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

9.2-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 > 0$ mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ va $x \in E$ larda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bo‘lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to‘plamda f funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.*

9.3-ta’rif. *Agar har bir $x \in E$ da $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ bo‘lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga nuqtali yaqinlashadi deyiladi.*

Quyidagi teorema o‘lchovli funksiyalar to‘plamining limitga o‘tish (nuqtali yaqinlashish) amaliga nisbatan ham yopiqligini ifodalaydi.

9.2-teorema. *Agar* $\{f_n\}$ *o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir* $x \in E$ *da* $f(x)$ *ga yaqinlashsa, u holda limitik funksiya* f *o'lchovli bo'ladi.*

Isbot. Shartga ko'ra, ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ o'rinli.

$$E(f < c) = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n}^{\infty} \left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \qquad (9.5)$$

tenglik [2] da isbotlangan. Teoremaning isboti (9.5) tenglikdan kelib chiqadi, chunki, sanoqli sondagi o'lchovli to'plamlarning birlashmasi va kesishmasi (6.7-teoremaga qarang) yana o'lchovli to'plamdir. Δ

Bu paragrafni quyidagi misol bilan yakunlaymiz.

9.2-misol. Agar $f : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda f funksiya E ning ixtiyoriy o'lchovli A qismida ham o'lchovli funksiya bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun

$$\{x \in A : f(x) < c\} = E(f < c) \cap A$$

tenglik o'rinli. $E(f < c)$ va A to'plamlar o'lchovli bo'lganligi uchun ularning kesishmasi bo'lgan $\{x \in A : f(x) < c\}$ to'plam ham o'lchovli bo'ladi. 9.1-ta'rifga ko'ra, f funksiya A da o'lchovli bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *O'lchovli bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.*

2. *O'lchovli bo'lmagan, lekin moduli o'lchovli bo'lgan funksiyaga misol keltiring.*

3. *(9.5) tenglikni isbotlang.*

4. *9.1-lemmada keltirilgan 2), 4) va 5) ko'rinishdagi to'plamlarning o'lchovli ekanligidan* f *ning o'lchovli ekanligini keltirib chiqaring.*

5. *Shunday* f *va* g *funksiyalarga misol keltiringki, ularning yig'indisi o'lchovli bo'lsin, lekin ayirmasi o'lchovli bo'lmasin.*

6. *Shunday f va g funksiyalarga misol keltiringki, ularning ko'paytmasi o'lchovli bo'lsin, lekin yig'indisi o'lchovli bo'lmasin.*

7. *Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D}$ ning $[0,\ 3]$ to'plamda o'lchovli ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating. $\mathfrak{D}$ funksiya (2.1) tenglik bilan aniqlanadi.*

8. *Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda $h(x) = [f(x)]$ ning o'lchovli ekanligini isbotlang. Bu yerda $[x]$ bilan x ning butun qismi belgilangan.*

10-§. O'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining yaqinlashishlari

Bu paragrafda biz ekvivalent funksiyalar, ularning ayrim xossalari va o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining turli yaqinlashishlari orasidagi bog'lanishlarni o'rganamiz.

10.1-ta'rif. *E o'lchovli to'plamda aniqlangan f va g funksiyalar uchun $\mu\left(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$ bo'lsa, f va g lar ekvivalent funksiyalar deyiladi va $f \sim g$ shaklda belgilanadi.*

10.1-misol. Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D}$ ((2.1) ga qarang), Riman funksiyasi $\mathfrak{R}$ ((2.2) ga qarang) nol funksiya $\theta(x) = 0$ hamda bir $I(x) = 1$ funksiyalar orasidan o'zaro ekvivalent funksiyalarni toping.

Yechish. Ma'lumki, $\mathbb{Q}$ sanoqli to'plam, shuning uchun $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Lebeg o'lchovi to'la o'lchov (8.4-ta'rif), shunday ekan, ixtiyoriy $A \subset \mathbb{Q}$ uchun $\mu(A) = 0$. Endi bu funksiyalarni ekvivalentlikka tekshiramiz:

$$\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \theta(x)\} = \mathbb{Q}, \qquad \{x : \mathfrak{R}(x) \neq \theta(x)\} = \mathbb{Q},$$

$$\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \mathfrak{R}(x)\} \subset \mathbb{Q}, \quad \{x : \mathfrak{D}(x) \neq I(x)\} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Bu yerdan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\mu\left(\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \theta(x)\}\right) = \mu\left(\{x : \mathfrak{R}(x) \neq \theta(x)\}\right) = \mu\left(\{\mathbb{Q}\}\right) = 0,$$

$$\mu\left(\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \mathfrak{R}(x)\}\right) = 0, \quad \mu\left(\{x : \mathfrak{D}(x) \neq I(x)\}\right) = \mu\left(\{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}\right) \neq 0.$$

Demak, $\mathfrak{D} \sim \theta$, $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \sim \theta$ bo'ladi. I bilan $\mathfrak{D}$ ekvivalent emas.

10.2-ta'rif. *Agar biror xossa E to'plamning nol o'lchovli qism to'plamidan boshqa barcha nuqtalarida bajarilsa, bu xossa E to'plamda deyarli bajariladi deyiladi.*

Agar ikkita funksiya deyarli teng bo'lsa, ular ekvivalentdir.

10.2-misol. Aytaylik, $E = A_1 \bigcup A_2$ va $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$ bo'lsin. Agar $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ va $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ funksiyalar o'lchovli bo'lsa, u holda

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & agar \;\; x \in A_1 \\ f_2(x), & agar \;\; x \in A_2 \end{cases}$$

E da o'lchovli funksiya bo'lishini isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in A_1 : f_1(x) < c\} \cup \{x \in A_2 : f_2(x) < c\}$$

to'plam o'lchovli. Demak, f funksiya E da o'lchovli. Δ

10.3-misol. Nol o'lchovli A to'plamda aniqlangan ixtiyoriy $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli bo'lishini isbotlang.

Isbot. Lebeg o'lchovi to'la o'lchov (8.4-ta'rif) bo'lganligi uchun o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamning ixtiyoriy qismi

$$\{x \in A : f(x) < c\} \subset A$$

o'lchovli, shuning uchun f funksiya A da o'lchovli funksiya bo'ladi. Δ

10.1-teorema. *Agar f funksiya E o'lchovli to'plamda aniqlangan bo'lib, o'lchovli $g : E \to \mathbb{R}$ funksiyaga ekvivalent bo'lsa, u holda f ham E da o'lchovli funksiya bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $g-$ o'lchovli va $f \sim g$ bo'lsin, ya'ni

$$A = \{x : f(x) = g(x)\}, \quad E\backslash A = \{x : f(x) \neq g(x)\}, \;\; \mu(E\backslash A) = 0.$$

10.2 va 10.3-misollarga ko‘ra,

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & agar \quad x \in E \backslash A \\ g(x), & agar \quad x \in A \end{cases}$$

E da o‘lchovli funksiya bo‘ladi. Δ

10.1. Deyarli yaqinlashish.

10.3-ta’rif. *Agar E to‘plamda aniqlangan $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligining f funksiyaga yaqinlashmaydigan nuqtalari to‘plamining o‘lchovi nol bo‘lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to‘plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashadi deyiladi, ya’ni*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

tenglik E dagi deyarli barcha x lar uchun o‘rinli, yoki

$$A = \left\{ x : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \right\}, \quad \mu(E \backslash A) = 0.$$

10.4-misol. $f_n(x) = \cos^n x, \quad E = [0,\ 2\pi]$ funksiyalar ketma-ketligining nol funksiyaga deyarli yaqinlashishini isbotlang.

Isbot. Ma’lumki, barcha $x \in (0, 2\pi) \backslash \{\pi\}$ larda $|\cos x| < 1$ tengsizlik o‘rinli hamda $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, $\cos \pi = -1$ ekanligini hisobga olsak, quyidagini olamiz

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} (\cos x)^n = \begin{cases} 0, & agar \ \ x \in (0,\ 2\pi) \backslash \{\pi\}, \\ mavjud\, emas & x = \pi, \\ 1, & agar \ \ x \in \{0,\ 2\pi\}. \end{cases}$$

Agar $A = \left\{ x : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \right\} = E \backslash \{0;\ \pi;\ 2\pi\}$ deb belgilasak, u holda

$$\mu(E \backslash A) = \mu\left(\{0;\ \pi;\ 2\pi\}\right) = 0$$

bo‘ladi. Ta’rifga asosan, $f_n(x) = \cos^n x$ funksiyalar ketma-ketligi $E = [0,\ 2\pi]$ to‘plamda $\theta(x) = 0$ funksiyaga deyarli yaqinlashadi. Δ

10.2-teorema. *Agar E to‘plamda $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f ham o‘lchovlidir.*

Isbot. $A = \left\{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}$ bo‘lsin. U holda teorema shartiga ko‘ra, $\mu(E\backslash A) = 0$ bo‘ladi. A to‘plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga nuqtali yaqinlashadi. 9.2-teoremaga ko‘ra, f funksiya A to‘plamda o‘lchovlidir. 10.3-misolga ko‘ra nol o‘lchovli to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy funksiya o‘lchovli, shuning uchun f funksiya $E\backslash A$ da o‘lchovli bo‘ladi. 10.2-misolga ko‘ra, f funksiya birlashma $A\bigcup(E\backslash A) = E$ to‘plamda ham o‘lchovlidir. Δ

Ma’lumki, tekis yaqinlashishdan nuqtali yaqinlashish, nuqtali yaqinlashishdan esa deyarli yaqinlashish kelib chiqadi. Quyidagi implikatsiyalar o‘rinli:

Yegorov teoremasi deyarli yaqinlashish bilan tekis yaqinlashish orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

10.3-teorema *(Yegorov). E chekli o‘lchovli to‘plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $E_\delta \subset E$ to‘plam mavjudki, uning uchun quyidagilar o‘rinli:*

1) $\mu(E\backslash E_\delta) < \delta$,

2) *E_δ to‘plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga tekis yaqinlashadi.*

Isbot. 10.2-teoremaga ko‘ra, f o‘lchovli funksiya bo‘ladi. Aytaylik,

$$E_n^m = \bigcap_{i\geq n} \{x : |f_i(x) - f(x)| < 1/m\}$$

bo‘lsin. E_n^m to‘plamlar barcha n va m uchun o‘lchovli bo‘ladi. E_n^m to‘plam tayinlangan n va m da barcha $i \geq n$ lar uchun $|f_i(x) - f(x)| < 1/m$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar to‘plamidan iborat. Endi

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$$

bo‘lsin. Aniqlanishiga ko‘ra E_n^m to‘plamlar har bir m da

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \cdots \subset E_n^m \subset \cdots$$

munosabatni qanoatlantiradi. O‘lchovning uzluksizlik xossasiga ko‘ra, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n^m) = \mu(E^m)$ yoki har bir m va $\delta > 0$ uchun shunday $n_0(m)$ mavjudki,

$$0 \leq \mu\left(E^m\right) - \mu\left(E_{n_0(m)}^m\right) = \mu\left(E^m \backslash E_{n_0(m)}^m\right) < \frac{\delta}{2^m}. \tag{10.1}$$

Endi

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$$

bo‘lsin. Ko‘rsatamizki, E_δ to‘plam teorema shartlarini qanoatlantiradi. Dastlab E_δ to‘plamda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning f ga tekis yaqinlashishini ko‘rsatamiz. Aytaylik, $x \in E_\delta$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy m uchun barcha $i \geq n_0(m)$ nomerlarda $|f_i(x) - f(x)| < 1/m$ tengsizlik bajariladi. Bundan E_δ to‘plamda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning f ga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

Endi $E \backslash E_\delta$ to‘plam o‘lchovini baholaymiz. Barcha m lar uchun $\mu(E \backslash E^m) = 0$. Haqiqatan ham, agar $x_0 \in E \backslash E^m$ bo‘lsa, u holda yetarlicha katta i lar uchun $|f_i(x_0) - f(x_0)| \geq 1/m$ bo‘ladi, ya’ni $\{f_n(x_0)\}$ ketma-ketlik $f(x_0)$ ga yaqinlashmaydi. Demak, $E \backslash E^m \subset E \backslash A$ munosabat o‘rinli. Bu yerda

$$A = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}.$$

Bundan, $\mu(E \backslash E^m) \leq \mu(E \backslash A) = 0$ ga kelamiz. Bu o‘z navbatida $\mu(E \backslash E^m) = 0$ ga olib keladi. Bu yerdan va (10.1) dan kelib chiqadiki,

$$\mu(E \backslash E_{n_0(m)}^m) = \mu(E^m \backslash E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}$$

bo‘ladi. Shuning uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\mu(E\backslash E_\delta) = \mu\left(E\backslash \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E\backslash E_{n_0(m)}^m)\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty}\mu(E\backslash E_{n_0(m)}^m) < \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^m} = \delta. \qquad \Delta$$

10.2. O‘lchov bo‘yicha yaqinlashish. Bizga E to‘plamda aniqlangan $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi va f o‘lchovli funksiya berilgan bo‘lsin.

10.4-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun*

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}\right) = 0$$

tenglik bajarilsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to‘plamda f funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi.

Deyarli yaqinlashishdan o‘lchov bo‘yicha yaqinlashish kelib chiqadi. Quyidagi teorema shu haqda.

10.4-teorema. *Agar $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi E $(\mu(E) < \infty)$ to‘plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlik E to‘plamda f ga o‘lchov bo‘yicha ham yaqinlashadi.*

Isbot. 10.2-teoremaga ko‘ra, limitik funksiya f o‘lchovli bo‘ladi.

$$A = \left\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}$$

bo‘lsin. Teorema shartiga ko‘ra, $\mu(E\backslash A) = 0$ bo‘ladi. Berilgan $\delta > 0$ son uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$E_k(\delta) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\},$$

$$R_n(\delta) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta), \quad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\delta).$$

O‘lchovli to‘plamlarning xossalaridan foydalanib, ko‘rsatish mumkinki, yuqorida kiritilgan barcha to‘plamlar o‘lchovli bo‘ladi. Ravshanki,

$$R_1(\delta) \supset R_2(\delta) \supset \cdots R_n(\delta) \supset \cdots .$$

O‘lchovning uzluksizlik xossasidan

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\delta)) = \mu(M) \tag{10.2}$$

tenglik kelib chiqadi. Ko‘rsatamizki, $M \subset E\backslash A$ bo‘ladi. Haqiqatan ham, $x_0 \in A$ bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_0\right) = f\left(x_0\right).$$

Limit ta’rifiga ko‘ra, berilgan $\delta > 0$ son uchun shunday n mavjudki,

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \delta$$

tengsizlik barcha $k \geq n$ lar uchun o‘rinli, ya’ni $x_0 \notin R_n(\delta)$, shunday ekan, $x_0 \notin M$. Bundan $A \subset E\backslash M \Rightarrow M \subset E\backslash A$. O‘lchovning yarim additivlik xossasidan

$$\mu(M) \leq \mu(E\backslash A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(M) = 0.$$

Demak, (10.2) dan $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n(\delta)) = 0$. $E_n(\delta) \subset R_n(\delta)$ munosabatdan va o‘lchovning yarim additivlik xossasidan

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n(\delta)\right) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi. Δ

O‘lchov bo‘yicha yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqadimi degan savol tug‘iladi. Umuman olganda o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqmas ekan. Quyidagi misol bu fikrning to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

10.5-misol. Har bir $k \in \mathbb{N}$ uchun $E = (0,\ 1]$ yarim intervalda $f_1^{(k)}$, $f_2^{(k)}$, $\ldots, f_k^{(k)}$ funksiyalarni quyidagicha aniqlaymiz

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & agar\ \dfrac{i-1}{k} < x \leq \dfrac{i}{k}, \\ 0, & agar\ x \in (0,\ 1]\backslash \left(\dfrac{i-1}{k},\ \dfrac{i}{k}\right]. \end{cases}$$

Bu funksiyalarni tartib bilan nomerlab, $\{g_n\}$ $(g_1 = f_1^{(1)},\ g_2 = f_2^{(1)}, g_3 = f_2^{(2)},\ g_4 = f_3^{(1)}, \ldots)$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. $\{g_n\}$ ketma-ketlikning E da nol funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashishini va biror nuqtada ham nolga yaqinlashmasligini isbotlang.

Isbot. Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun shunday k va i sonlar jufti topiladiki, $f_i^{(k)}(x) = g_n(x)$ tenglik bajariladi va n cheksizga intilishi bilan k ham cheksizga intiladi. Ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun

$$\mu\left(\{\, x : |g_n(x)\,| \geq \delta \,\}\right) =$$

$$= \mu\left(\left\{\, x : f_i^{(k)}(x) \geq \delta \,\right\}\right) \leq \mu\left(\left(\frac{i-1}{k},\ \frac{1}{k}\right]\right) = \frac{1}{k}$$

tengsizlik o'rinli. Bu yerdan $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E(|g_n| \geq \delta)) = 0$ ni olamiz. Demak, 10.4-ta'rifga ko'ra, $\{g_n\}$ ketma-ketlik E da nol funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi. Endi $\{g_n\}$ ketma-ketlikni E da nol funksiyaga deyarli yaqinlashmasligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x_0 \in (0,1]$ nuqtani olamiz. Shunday k_n va i_n $(k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots)$ sonlar jufti topiladiki,

$$x_0 \in \left(\frac{i_n - 1}{k_n},\ \frac{i_n}{k_n}\right]$$

bo'ladi. Bu yerdan quyidagini olamiz:

$$\lim_{n\to\infty} f_{i_n}^{(k_n)}(x_0) = 1 \neq 0.$$

Ya'ni, $\{g_n\}$ ketma-ketlik biror nuqtada ham nolga yaqinlashmaydi. Δ

10.5-teorema. *Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f ga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda undan f ga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.*

Isbot. Biz musbat va nolga intiluvchi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ ketma-ketlikni va $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ musbat sonlarni $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$ qator yaqinlashuvchi bo'ladigan qilib tanlaymiz. Indekslar ketma-ketligi $n_1 < n_2 < \ldots$ larni quyidagicha tanlaymiz: n_1 indeksni shunday tanlaymizki,

$$\mu\left(\{x : |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\}\right) < \eta_1$$

tengsizlik bajarilsin. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_1 mavjudligi $\{f_n\}$ ketma-ketlikning f ga oʻlchov boʻyicha yaqinlashuvchi ekanligidan kelib chiqadi. Endi $n_2 > n_1$ indeks shunday tanlanadiki,

$$\mu\left(\{x : |f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\}\right) < \eta_2$$

tengsizlik bajarilsin. Umuman $n_k > n_{k-1}$ indeks shunday tanlanadiki,

$$\mu\left(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}\right) < \eta_k$$

tengsizlik bajarilsin. Tanlangan $\{f_{n_k}\}$ ketma-ketlikning f ga deyarli yaqinlashuvchi ekanligini koʻrsatamiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x : \ | f_{n_k}(x) - f(x)| \ \geq \varepsilon_k\} \quad \text{va} \quad R = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Tanlanishiga koʻra, $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$. Oʻlchovning uzluksizlik xossasiga koʻra, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n) = \mu(R)$. Ikkinchi tomondan, ravshanki,

$$\mu(R_i) = \mu\left(\bigcup_{k=i}^{\infty} \{x : \ | f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu\left(\{x : \ | f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}\right) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$$

tengsizlik oʻrinli. Soʻnggi qator yaqinlashuvchi qatorning qoldigʻi boʻlganligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0$. Demak, $\mu(R) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(R_i) = 0$. Endi ixtiyoriy $x \in E \backslash R$ uchun $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ ni koʻrsatish qoldi. Faraz qilaylik, $x_0 \in E \backslash R$, yaʼni $x_0 \notin R$ boʻlsin. U holda shunday i_0 mavjudki, $x_0 \notin R_{i_0}$. Bu shuni anglatadiki, barcha $k \geq i_0$ lar uchun $x_0 \notin \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$ yaʼni $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$.

Shartga ko‘ra $\varepsilon_k \to 0$, shuning uchun $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$. Δ

Quyidagi teorema uzluksiz va o‘lchovli funksiyalar o‘rtasidagi muhim bog‘lanishni ifodalaydi.

10.6-teorema *(Luzin). $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan f funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $[a,\ b]$ da uzluksiz bo‘lgan shunday φ funksiya mavjud bo‘lib, $\mu\left(\{x \in [a,\ b] : f(x) \neq \varphi(x)\}\right) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.*

10.1-natija. *$[a,\ b]$ kesmada uzluksiz funksiya o‘lchovlidir.*

10.6-misol. $[0,\ \pi]$ kesmada aniqlangan

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,\ \pi] \setminus \mathbb{Q} \\ \cos^2(\sin x), & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

funksiya o‘lchovli bo‘ladimi?

Yechish. 10.1-natijaga ko‘ra, uzluksiz $\varphi(x) = \sin x,\ \ x \in [0,\ \pi]$ funksiya o‘lchovli bo‘ladi. Luzin teoremasi va

$$\mu\left(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}\right) = \mu([0,\ \pi] \bigcap \mathbb{Q}) = 0 < \varepsilon$$

tengsizlikdan f funksiyaning $[0,\ \pi]$ kesmada o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Agar $f : E \to \mathbb{R}$ o‘lchovli funksiya va $A \subset E-$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda f funksiyaning A to‘plamda o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.*

2. *Agar f va g funksiyalar E to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda*

$h_-(x) = \min\{f(x),\ g(x)\}$ va $h_+(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$ funksiyalarning o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

3. *Agar $f \sim g$ va $g \sim \varphi$ bo‘lsa, u holda $f \sim \varphi$ ekanligini isbotlang.*

4. *10.5-misolda keltirilgan $\{g_n\}$ ketma-ketlikdan nolga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajrating.*

5. *10.4-misol uchun Yegorov teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi* E_δ *to'plamni* $\delta = 10^{-3}$ *uchun quring.*

6. *Dirixle va Riman funksiyalari uchun Luzin teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi uzluksiz* φ *funksiyani toping.* $\mathfrak{D}$ *va* $\mathfrak{R}$ *larning aniqlanishini (2.1) va (2.2) - lardan qarang.*

7. f *funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan* f_n *funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.*

8. $f_n(x) = x^n, \; x \in [0, \; 1]$ *funksional ketma-ketlikning limitik funksiyasini toping.*

9. $f_n(x) = x^n, \; x \in [-1, \; 1]$ *funksional ketma-ketlik Dirixle yoki Riman funksiyalariga deyarli yaqinlashadimi?*

10. *Deyarli yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikning limitik funksiyasi yagona bo'ladimi? Agar yagona bo'lmasa, bu haqda o'z fikringizni ayting.*

IV bob. Lebeg integrali

Riman integrali odatda uzluksiz funksiyalar yoki uzilish nuqtalari juda ko‘p bo‘lmagan funksiyalar uchun kiritiladi. Riman integrali avval $[a,\ b]$ kesmada, keyin esa $[a,\ b]\times[c,\ d]$ to‘g‘ri to‘rtburchakda va hokazo kiritiladi. Lebeg integrali esa ixtiyoriy tabiatli to‘plamlarda bir xilda kiritiladi. Hattoki, aniqlanish sohasining hamma yerida uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar uchun ham Lebeg integralini aniqlash mumkin.

Lebeg integralining Riman integralidan asosiy farqlaridan biri shundaki, u funksiyaning aniqlanish sohasi bo‘lgan $[a,\ b]$ kesmani bo‘laklarga bo‘layotganda argument qiymatlarining yaqinligini emas, balki funksiya qiymatlarining yaqinligini hisobga oladi. Keyinchalik biz ko‘ramizki, Lebeg integrali Riman integraliga qaraganda katta imkoniyatlarga ega bo‘ladi. Avval sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta’riflanadi, keyin Lebeg integrali ixtiyoriy o‘lchovli funksiyalar sinfi uchun aniqlanadi.

Bu bob 11-14 §§lardan iborat. 11-§ da sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali kiritilgan, uning A, B va C xossalari isbotlangan. 12-§ da chekli o‘lchovli to‘plamda aniqlangan o‘lchovli funksiyalar uchun Lebeg integralining umumiy ta’rifi berilgan. Lebeg integralining asosiy xossalari (I-VIII) keltirilgan. Bu xossalar Riman integrali xossalari bilan solishtirilgan. IV, VI, VII, va VIII xossalar faqat Lebeg integrali uchun xos ekanligi ta’kidlanib, bu xossalar Riman integrali uchun to‘g‘ri emasligiga misollar keltirilgan. Bundan tashqari Lebeg integralining absolyut uzluksizlik va $\sigma-$ additivlik xossalari isbotlangan. Lebeg integralining $\sigma-$ additivlik xossasiga ma’lum ma’noda teskari teorema keltirilib isbotlangan. Manfiymas fumksiyalar uchun Chebishev tengsizligi isbotlangan. Chebishev tengsizligidan foydalanib, manfiymas funksiyaning integrali nolga tengligidan uning o‘zi nolga ekvivalent ekanligi keltirib chiqarilgan. 13-§ integral belgisi ostida limitga o‘tish alomatlariga bag‘ishlangan. Lebeg, Levi va Fatu teoremalari o‘z isbotlarini topgan. Oxirgi 14-§ da cheksiz o‘lchovli to‘plam bo‘yicha olingan Lebeg integraliga ta’rif berilgan, Lebeg va Riman integrallarini taqqoslash haqidagi teorema isbotlangan. Lebeg ma’nosida integrallanuvchi, lekin Riman ma’nosida integrallanuvchi bo‘lmagan funksiyaga misol keltirilgan.

11- §. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali

Biz 11-13-§§ larda o‘lchovli E yoki A to‘plamda aniqlangan, o‘lchovli f funksiyani qaraymiz va $\mu(E) < +\infty$ deb faraz qilamiz.

11.1-ta’rif. *Agar $f : E \to \mathbb{R}$ o‘lchovli bo‘lib, uning qiymatlari to‘plami ko‘pi bilan sanoqli bo‘lsa, u holda f sodda funksiya deyiladi.*

11.1-teorema. *Ko‘pi bilan sanoqlita har xil $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi f funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun*

$$A_n = \{x \in E : f(x) = y_n\}$$

to‘plamlarning o‘lchovli bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* f funksiya E to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, A_n to‘plamlarning o‘lchovli ekanligi 9.1-lemmadan kelib chiqadi.

Yetarliligi. A_n to’plamlarning har biri o‘lchovli ekanligidan f funksiyaning o‘lchovli ekanligini keltirib chiqaramiz.

$$E(f < c) = \bigcup_{y_n < c} A_n$$

tenglikdan va o‘lchovli to’plamlarning chekli yoki sanoqli birlashmasi o‘lchovli ekanligidan f ning E da o‘lchovli funksiya ekanligi kelib chiqadi. Δ

11.1-misol. Agar $f : E \to \mathbb{R}$ o‘lchovli funksiya bo‘lsa, u holda $g(x) = [f(x)]$ funksiya E da sodda funksiya bo‘lishini isbotlang. Bu yerda $[a]$ belgi a sonining butun qismini bildiradi.

Isbot. g funksiya faqatgina butun qiymatlar qabul qiladi. Shuning uchun uning qiymatlar to‘plami ko‘pi bilan sanoqlidir. Endi uning o‘lchovli ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $n \in \mathbb{Z}$ uchun

$$\{x \in E : g(x) = n\} = \{x \in E : n \leq f(x) < n+1\}$$

tenglik o‘rinli. 9.1-lemmaga ko‘ra $E(n \leq f < n+1)$ to‘plam o‘lchovli. 11.1-teoremaga ko‘ra g funksiya E da o‘lchovli funksiya bo‘ladi. 11.1-ta’rifga ko‘ra, g sodda funksiya bo‘ladi. Δ

11.2-misol. Sodda funksiyaning songa ko‘paytmasi yana sodda funksiya bo‘lishini ko‘rsating. Sodda funksiyalar yig‘indisi yana sodda funksiya bo‘lishini isbotlang.

Isbot. Sodda funksiyaning songa ko‘paytmasi yana sodda funksiya bo‘lishi bevosita ta’rifdan kelib chiqadi. Sodda funksiyalar yig‘indisining yana sodda funksiya bo‘lishi esa, o‘lchovli funksiyalar yig‘indisining yana o‘lchovli funksiya ekanligidan (9.1-teorema) hamda chekli yoki sanoqli sonli to’plamlarning arifmetik yig‘indisi (3-§ dagi 5-topshiriq) yana chekli yoki sanoqli to‘plam ekanligidan kelib chiqadi. Δ

11.2-teorema *(O‘lchovlilik mezoni). $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun unga tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isbot. Yetarliligi 9.2-teoremadan kelib chiqadi.

Zaruriyligi. $f-$o‘lchovli funksiya bo‘lsin. Unga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjudligini ko‘rsatamiz. 11.1-11.2 misollarga ko‘ra, har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$f_n^{but}(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \tag{11.1}$$

sodda funksiya bo‘ladi. Bundan tashqari

$$\left|f(x) - f_n^{but}(x)\right| = \left|f(x) - \frac{[nf(x)]}{n}\right| = \left|\frac{nf(x) - [nf(x)]}{n}\right| = \frac{\{nf(x)\}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, f_n^{but} ketma-ketlik f ga tekis yaqinlashadi. Δ

Dastlab cheklita $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya uchun Lebeg integrali tushunchasini kelritamiz. Ixtiyoriy $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun

$$A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\} \tag{11.2}$$

belgilash olamiz.

11.2-ta’rif. *Bizga* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *qiymatlarni qabul qiluvchi* $f : A \to \mathbb{R}$ *sodda funksiya berilgan bo‘lsin. U holda*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k)$$

yig‘indi f *sodda funksiyaning* A *to‘plam bo‘yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi*

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k).$$

Endi bizga sanoqlita $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya berilgan bo‘lsin. f funksiya uchun quyidagi formal

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \tag{11.3}$$

qatorni qaraymiz, bu yerda A_k lar (11.2) tenglik bilan aniqlanadi.

11.3-ta’rif. *Agar* (11.3) *qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda* f *sodda funksiya* A *to‘plamda Lebeg ma’nosida integrallanuvchi deyiladi.* (11.3) *qatorning yig‘indisi* f *funksiyadan* A *to‘plam bo‘yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi*

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n).$$

Bu ta’rifda y_n larning har xilligi talab qilingan. Lekin y_n larning har xilligini talab qilmasdan ham sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta’rifini keltirish mumkin. Bu quyidagi lemma yordamida amalga oshiriladi.

11.1-lemma. $A = \bigcup\limits_k B_k$, $B_i \bigcap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ *va har bir* B_k *to'plamda* f *funksiya faqat bitta* c_k *qiymat qabul qilsin.* f *sodda funksiya* A *to'plamda integrallanuvchi bo'lishi uchun*

$$\sum_k y_k \mu(B_k) \tag{11.4}$$

qatorning absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Osongina ko'rish mumkinki, har bir

$$A_n = \{x \in A : f(x) = y_n\}$$

to'plam $c_k = y_n$ bo'ladigan B_k to'plamlarning birlashmasidan iborat, ya'ni

$$A_n = \bigcup_{c_k = y_n} B_k.$$

Shuning uchun

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

O'lchovning manfiymasligidan

$$\sum_n |y_n| \, \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \, \mu(B_k)$$

ya'ni

$$\sum_n y_n \mu(A_n) \qquad \text{va} \qquad \sum_k c_k \mu(B_k)$$

qatorlar bir vaqtda absolyut yaqinlashadi yoki uzoqlashadi. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integralining ba'zi xossalarini isbotlaymiz.

A) *Additivlik xossasi. Agar* f *va* g *sodda funksiyalar* A *to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda* $f + g$ *sodda funksiya ham* A *to'plamda integrallanuvchi va quyidagi tenglik o'rinli*

$$\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu.$$

Isbot. $f+g$ ning sodda funksiya bo‘lishi 11.2-misolda isbotlangan. Integrallanuvchi f sodda funksiya f_i qiymatni $A_i \subset A$ to‘plamda, g sodda funksiya esa g_j qiymatni $B_j \subset A$ to‘plamda qabul qilsin. U holda

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_i f_i \mu(A_i), \qquad \int_A g(x)d\mu = \sum_j g_j \mu(B_j)$$

qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi. O‘lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga ko‘ra, quyidagi tengliklar o‘rinli

$$\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \bigcap B_j), \qquad \mu(B_j) = \sum_i \mu(A_i \bigcap B_j).$$

U holda quyidagi musbat hadli qatorlar

$$\sum_i \sum_j |f_i| \cdot \mu(A_i \bigcap B_j), \qquad \sum_i \sum_j |g_j| \cdot \mu(A_i \bigcap B_j)$$

yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak,

$$\sum_i \sum_j (f_i + g_j)\mu(A_i \bigcap B_j)$$

qator absolyut yaqinlashuvchi. Bundan $f+g$ sodda funksiyaning integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. 11.1-lemmaga ko‘ra,

$$\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j)\mu(A_i \bigcap B_j) = \sum_i f_i \sum_j \mu(A_i \bigcap B_j) +$$

$$+ \sum_j g_j \sum_i \mu(A_i \bigcap B_j) = \sum_i f_i \cdot \mu(A_i) + \sum_j g_j \mu(B_j) =$$

$$= \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu. \qquad \Delta$$

B) *Agar f sodda funksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{R}$ o‘zgarmas uchun $k \cdot f$ funksiya ham A to‘plamda integrallanuvchi va quyidagi tenglik o‘rinli*

$$\int_A k \cdot f(x)d\mu = k \int_A f(x)d\mu.$$

Isbot. Sodda funksiya integrali ta'rifiga ko'ra

$$\int_A k\cdot f(x)d\mu = \sum_i k\cdot f_i\mu(A_i) = k\sum_i f_i\mu(A_i) = k\int_A f(x)d\mu. \qquad \Delta$$

C) *A to'plamda chegaralangan f sodda funksiya integrallanuvchidir. Agar A da $|f(x)|\le M$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le M\cdot\mu(A).$$

Isbot. Sodda funksiya integrali ta'rifidan

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| = \left|\sum_i f_i\mu(A_i)\right| \le \sum_i |f_i|\,\mu(A_i) \le M\sum_i \mu(A_i) = M\mu(A). \quad \Delta$$

Bu paragrafni quyidagi sodda funksiyaning Lebeg integralini hisoblash bilan yakunlaymiz.

11.3-misol. $A=(0,\ 1]$ da f funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x)=n, \qquad \text{agar} \quad x\in A_n=\left(\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^{n-1}}\right], \quad n\in\mathbb{N}.$$

f sodda funksiya $A=(0,\ 1]$ to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchimi? Agar integrallanuvchi bo'lsa, uning integralini hisoblang.

Yechish. Ma'lumki,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,\,1]\,, \qquad A_n\bigcap A_m=\emptyset, \quad n\neq m.$$

va $A_n=\{x\in A: f(x)=n\}$ tenglik o'rinli. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'rifiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^{-n} \tag{11.5}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, f sodda funksiya $A=(0,\ 1]$ da integrallanuvchi bo'ladi. Bu holda musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi Dalamber alomatidan foydalanish qulay.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Demak, (11.5) qator yaqinlashuvchi. Bu yerdan f sodda funksiyaning A da Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Endi (11.5) qator yig'indisini hisoblaymiz. Uning qismiy yig'indisi S_n uchun

$$S_n = 2S_n - S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} -$$
$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n}\right) = 1 + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + \ldots +$$
$$+\left(\frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$

Bu tenglikda $n \to \infty$ da limitga o'tib, ($b_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisidan foydalaniladi)

$$\int_{(0,1]} f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

ekanligini olamiz.

Matematik analiz kursidan ma'lumki ([4] ga qarang) f funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun, uning chegaralangan bo'lishi zarur. Chegaralanmagan funksiyalar uchun Riman integrali xosmas integral ma'nosida ta'riflanadi. 11.1-misolda qaralgan f funksiya $(0,\ 1]$ da chegaralanmagan. Lebeg integrali ta'rifida funksiyaning chegaralangan bo'lishi muhim emas, ya'ni chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar uchun Lebeg integrali bir xilda ta'riflanadi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $f(x) = [x],\ \ x \in [0,\ 5) = A$ *ning sodda funksiya ekanligini ko'rsating va uning A to'plam bo'yicha olingan integralini hisoblang.*

2. *Sodda funksiyalar ko'paytmasi yana sodda funksiya bo'lishini isbotlang.*

3. *Dirixle funksiyasini $A = [0,\ 3]$ to'plamda sodda funksiya ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating. Uning integralini hisoblang.*

4. *Riman funksiyasining* $A = [0,\ 1]$ *to'plamda sodda funksiya ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating. Uning integralini hisoblang.*

12-§. Lebeg integralining xossalari

Bu paragrafda Lebeg integralining asosiy xossalari o'rganiladi. Biz doim chekli o'lchovli A $(\mu(A) < +\infty)$ to'plam va unda aniqlangan f o'lchovli funksiyani qaraymiz.

12.1-ta'rif. *Agar* A *to'plamda* f *funksiyaga tekis yaqinlashuvchi, integrallanuvchi sodda funksiyalarning* $\{f_n\}$ *ketma-ketligi mavjud bo'lsa,* f *funksiya* A *to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu \tag{12.1}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu ta'rif korrekt, ya'ni kamchiliklardan holi bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

1) Har qanday tekis yaqinlashuvchi va A to'plamda integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi uchun (12.1) limit mavjud bo'lishi kerak.

2) Berilgan f funksiya uchun (12.1) limit $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas.

3) Agar f funksiya sodda funksiya bo'lsa, bu ta'rif sodda funksiyalar uchun berilgan 11.2-ta'rif bilan usma-ust tushishi kerak.

1-3 shartlarning bajarilishini ko'rsatamiz.

1) Sodda funksiyalar uchun integralning A, B va C xossalaridan

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f_m(x)d\mu\right| \leq \left|\int_A (f_n(x) - f_m(x))\, d\mu\right| \leq$$

$$\mu(A) \cdot \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa (12.1) limitning mavjudligini isbotlaydi.

2) (12.1) limitning $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog‘liq emasligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, f ga tekis yaqinlashuvchi ikkita $\{f_n\}$ va $\{f'_n\}$ ketma-ketliklar uchun (12.1) limit har xil qiymatlar qabul qilsin. U holda $f_1, f'_1, f_2, f'_2, \ldots, f_n, f'_n, \ldots$ ketma-ketlik f ga tekis yaqinlashadi, lekin bu ketma-ketlik uchun (12.1) limit mavjud emas. Bu esa hozirgina isbotlangan 1) shartga zid.

3) shartni isbotlash uchun ixtiyoriy n da $f_n(x) = f(x)$ deb olish yetarli.

Endi 12.1-ta’rifga teng kuchli bo‘lgan quyidagi ta’rifni keltiramiz.

12.2-ta’rif. *Agar har bir* $n \in \mathbb{N}$ *uchun* (11.1) *tenglik bilan aniqlanuvchi* f_n^{but} *sodda funksiya integrallanuvchi bo‘lsa, u holda* f *funksiya* A *to‘plamda Lebeg ma’nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{but}(x)\, d\mu.$$

12.1. Lebeg integralining asosiy xossalari.

I. $f(x) = 1,\ \ x \in A$ *sodda funksiya integrallanuvchi va*

$$\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A).$$

II. *Bir jinslilik xossasi. Agar* f *funksiya* A *to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy* $k \in \mathbb{R}$ *o‘zgarmas uchun* $k \cdot f$ *funksiya ham* A *to‘plamda integrallanuvchi va quyidagi tenglik o‘rinli*

$$\int_A k \cdot f(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu.$$

Isbot. Bu xossaning isboti sodda funksiyalar uchun Lebeg integralining B xossasidan limitga o‘tish natijasida, o‘zgarmasni limit belgisi ostidan chiqarish mumkin degan qoidadan kelib chiqadi. Ya’ni, agar $\{f_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda $\{k \cdot f_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi $k \cdot f$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Demak, $k \cdot f$ funksiya integrallanuvchi va

$$\int_A k \cdot f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A k \cdot f_n(x) d\mu = k \cdot \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$$

tenglik o‘rinli. Δ

III. *Additivlik xossasi. Agar* f *va* g *funksiyalar* A *to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda* $f+g$ *funksiya ham* A *to‘plamda integrallanuvchi va quyidagi tenglik o‘rinli*

$$\int_A [f(x)+g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu.$$

Isbot. Agar $\{f_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga, $\{g_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi g funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda $\{f_n+g_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi $f+g$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Demak, $f+g$ funksiya integrallanuvchi va sodda funksiyalar uchun integralning A xossasiga ko‘ra

$$\int_A [f(x)+g(x)]\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A [f_n(x)+g_n(x)]d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_A g_n(x)\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu + \int_A g(x)\, d\mu$$

tenglik o‘rinli. Δ

Shuningdek quyidagi tenglik o‘rinli

$$\int_A f(x)\, d\mu = \int_{A_1} f(x)\, d\mu + \int_{A_2} f(x)\, d\mu, \ A = A_1 \cup A_2, \ A_1 \cap A_2 = \emptyset. \quad (12.2)$$

IV. A *to‘plamda chegaralangan* f *funksiya integrallanuvchidir.*

Isbot. Agar f funksiya A to‘plamda chegaralangan bo‘lsa, u holda (11.1) tenglik bilan aniqlanuvchi f_n^{but} sodda funksiya ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da cheklita qiymat qabul qiladi. Demak, 11.2-ta’rifga ko‘ra f_n^{but} sodda funksiya integrallanuvchi. 12.2-ta’rifga ko‘ra f ham integrallanuvchi. Δ

V. *Agar* $f(x) \geq 0, \ x \in A$ *funksiya integrallanuvchi bo‘lsa, u holda*

$$\int_A f(x)d\mu \geq 0.$$

Isbot. Bu xossa Lebeg integralining *monotonlik xossasi* deyiladi. Uning isboti sodda funksiyalar uchun to‘g‘ridan-to‘g‘ri ta’rifdan kelib chiqadi. Agar

f manfiymas funksiya bo'lsa, u holda unga tekis yaqinlashuvchi f_n^{but} sodda funksiyalar ketma-ketligi ham manfiymas. Bundan

$$\int_A f_n^{but}(x)\, d\mu = \frac{1}{n}\int_A [nf(x)]\, d\mu \geq 0.$$

Bu yerdan $n \to \infty$ da limitga o'tib, V xossaning isbotiga ega bo'lamiz. Δ

Integralning monotonlik xossasidan quyidagi tasdiq kelib chiqadi. Agar $f(x) \geq g(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_A f(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu$$

tengsizlik o'rinli. Shuningdek, agar $m \leq f(x) \leq M,\ x \in A$ bo'lsa, u holda

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\,\mu(A)$$

tengsizliklar o'rinli.

VI. *Agar* $\mu(A) = 0$ *bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $f : A \to \mathbb{R}$ *uchun*

$$\int_A f(x) d\mu = 0.$$

VI. *Agar* $f \sim g$ *(ya'ni deyarli barcha* $x \in A$ *lar uchun* $f(x) = g(x)$*) bo'lib, ulardan biri integrallanuvchi bo'lsa, u holda ikkinchisi ham integrallanuvchi va quyidagi tenglik o'rinli*

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu\,.$$

Bu tasdiqlar Lebeg integralining ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

VII. *Agar* φ *funksiya* A *to'plamda integrallanuvchi bo'lib, deyarli barcha* $x \in A$ *lar uchun* $|f(x)| \leq \varphi(x)$ *bo'lsa, u holda* f *funksiya ham* A *to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar f va φ sodda funksiyalar bo'lsa, u holda A to'plamdan o'lchovi nol bo'lgan $A_1 = \{x \in A : |f(x)| > \varphi(x)\}$ to'plamni chiqarib tashlab, qolgan A' to'plamda $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikni hosil qilamiz. A' to'plamni chekli yoki sanoqli sondagi A'_n to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida shunday tasvirlaymizki, har bir A'_n to'plamda f va φ funksiyalar o'zgarmas bo'lsin, ya'ni

$$f(x) = a_n, \quad \varphi(x) = b_n, \quad x \in A'_n.$$

Shartga ko'ra $|a_n| \le b_n$ tengsizlik bajariladi. φ funksiya integrallanuvchi bo'lganligi uchun hamda (12.2) va VI xossadan foydalanib

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \mu(A'_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu(A'_n) =$$

$$\int_{A'} \varphi(x)\, d\mu = \int_{A'} \varphi(x)\, d\mu + \int_{A_1} \varphi(x)\, d\mu = \int_A \varphi(x)\, d\mu$$

ni olamiz. Shuning uchun f ham integrallanuvchi va

$$\left| \int_A f(x)\, d\mu \right| = \left| \int_{A'} f(x)\, d\mu \right| = \left| \sum_n a_n \mu(A'_n) \right| \le \sum_n |a_n| \mu(A'_n) =$$

$$= \int_{A'} |f(x)|\, d\mu \le \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Endi umumiy holni qaraymiz.

$$f_n^{but}(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$$

sodda funksiya ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da

$$|f_n^{but}(x)| \le \varphi(x) + 1, \quad x \in A'$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, $f_n^{but}(x)$ sodda funksiya integrallanuvchi. 12.2-ta'rifga ko'ra f funksiya ham integrallanuvchi. Δ

VIII. *Quyidagi integrallar bir vaqtda mavjud yoki mavjud emas:*

$$I_1 = \int_A f(x) d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|\, d\mu.$$

Isbot. VII xossadan foydalanib, ko'rsatish mumkinki, I_2 ning mavjudligidan I_1 ning mavjudligi kelib chiqadi. Teskari tasdiq f sodda funksiya bo'lganda bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Umumiy holni qaraymiz. f funksiya A da integrallanuvchi bo'lgani uchun, unga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ integrallanuvchi, sodda funksiyalar ketma-ketligi mavjud. U holda

$$||f(x)| - |f_n(x)|| \leq |f(x) - f_n(x)|$$

tengsizlikka ko'ra, $\{|f_n|\}$ - integrallanuvchi, sodda funksiyalar ketma-ketligi $|f|$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Shunday ekan, ta'rifga ko'ra, I_2 integral mavjud. Δ

Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi shart emas.

12.1-misol. Dirixle funksiyasini $[0,\ 2]$ kesmada Lebeg va Riman ma'nolarida integrallanuvchanlikka tekshiring.

Yechish. $\mathfrak{D}$ sodda funksiya bo'lib, uning Lebeg integrali

$$\int_{[0,2]} \mathfrak{D}(x) d\mu = 1 \cdot \mu([0,2] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu([0,2] \backslash \mathbb{Q}) = 0.$$

Dirixle funksiyasi $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Buni ko'rsatish uchun $[0,\ 2]$ kesmani teng n bo'lakka $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2$ nuqtalar yordamida bo'lamiz. Ma'lumki, Dirixle funksiyasining $[x_{k-1},\ x_k]$ bo'lakchadagi aniq yuqori chegarasi M_k barcha $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun 1 ga teng, Dirixle funksiyasining bu bo'lakchadagi aniq quyi chegarasi m_k esa 0 ga teng. Bu bo'linishga mos Darbu yig'indilarini qaraymiz:

$$\Omega_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = 2, \qquad \omega_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 0 = 0.$$

Bu yerdan,

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_n = 2, \quad \lim_{n \to \infty} \omega_n = 0$$

tengliklarga kelamiz. Demak, Dirixle funksiyasi $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Δ

IV,VI, VII va VIII xossalar Lebeg integrali uchun xos. Bu xossalar Riman integrali uchun oʻrinli emas. Hozir bularga misollar keltiramiz.

12.2-masala. IV va VI xossalar Riman integrali uchun oʻrinli emasligiga misol keltiring.

Yechish. $[0,\ 2]$ kesmada Dirixle funksiyasini qaraymiz. U chegaralangan va oʻlchovli, demak IV xossaga koʻra u Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, lekin Riman ma'nosida integrallanuvchi emas (12.1-misolga qarang). $[0,\ 2]$ kesmada Dirixle $\mathfrak{D}$ va nol $\theta(x) = 0$ funksiyalarni qaraymiz. Ular $[0,\ 2]$ kesmada deyarli teng, shuning uchun VI-xossaga koʻra

$$\int_{[0,2]} \mathfrak{D}(x) d\mu = \int_{[0,2]} \theta(x) d\mu = 0.$$

Lekin nol funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi, Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D}$ esa Riman ma'nosida integrallanuvchi emas (12.1-misolga qarang). Δ

Lebeg integralining VII va VIII xossalari ham Riman integrali uchun oʻrinli emas. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin.

12.3-misol. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz:

$$\varphi(x) = 2, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & agar \ \ x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & agar \ \ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Barcha $x \in [0,\ 2]$ lar uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik oʻrinli. Lekin f funksiya $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Bu tasdiq $\mathfrak{D}$ ning Riman ma'nosida integrallanuvchi emasligiga oʻxshash isbotlanadi. Demak, VII xossa Riman integrali uchun oʻrinli emas.

f funksiya $[0,\ 2]$ toʻplamda Riman ma'nosida integrallanuvchi emas, ammo $|f(x)| = 1$ funksiya esa integrallanuvchi. Demak, VIII xossa Riman integrali uchun oʻrinli emas. Δ

12.2. Lebeg integralining $\sigma-$additivlik va absolyut uzluksizlik xossalari. Yuqorida biz Lebeg integralining xossalarini tayinlangan A toʻplam bo‘yicha keltirdik. Endi

$$F(A) = \int_A f(x)d\mu$$

ifodani o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da aniqlangan, A to‘plamning funksiyasi sifatida qarab, Lebeg integralining ayrim xossalarini isbotlaymiz.

12.1-teorema *(Lebeg integralining $\sigma-$ additivlik xossasi). O‘lchovli A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ o‘lchovli to’plamlarning birlashmasidan iborat bo‘lsin, ya’ni*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \;\; A_i \bigcap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

va f funksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsin. U holda har bir A_n to‘plam bo‘yicha f funksiyaning integrali mavjud,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu$$

qator absolyut yaqinlashadi va quyidagi tenglik o‘rinli

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu. \qquad (12.3)$$

Isbot. Avvalo teoremani $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi f sodda funksiya uchun isbotlaymiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$B_k = \{x \in A : f(x) = y_k\},$$
$$B_{nk} = \{x \in A_n : f(x) = y_k\} = B_k \bigcap A_n, \;\; B_k = \bigcup_n B_{nk}.$$

f funksiya integrallanuvchi bo‘lgani uchun $\sum\limits_k y_k \mu(B_k)$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi. U holda

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_k \mu(B_{nk}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(B_{nk}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu. \qquad (12.4)$$

To‘plam o‘lchovi manfiymas bo‘lgani uchun (12.4) tengliklar zanjiridagi barcha qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Endi f funksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lgan ixtiyoriy funksiya bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun A da integrallanuvchi shunday g sodda funksiya mavjudki, barcha $x \in A$ larda $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ yoki $|f(x)| < |g(x)| + \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Yuqorida isbotlanganiga ko‘ra g uchun

$$\int_A g(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} g(x)d\mu \tag{12.5}$$

tenglik o‘rinli va g har bir A_n da integrallanuvchi hamda (12.5) qator absolyut yaqinlashuvchi. g ning A_n to‘plamlarda integrallanuvchi ekanligidan va $|f(x)| < |g(x)| + \varepsilon$ tengsizlikdan f ning ham har bir A_n to‘plamda integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi hamda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} g(x)d\mu \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x) - g(x)|\, d\mu < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon\mu(A_n) = \varepsilon\mu(A).$$

Bu esa (12.5) bilan birgalikda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu$$

qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligiga va quyidagi bahoga olib keladi:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu \right| =$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} g(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu \right| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} g(x)d\mu \right| + \left| \int_A f(x)d\mu - \int_A g(x)d\mu \right| \leq 2\varepsilon\mu(A).$$

Bu yerda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo‘lganligi uchun (12.3) tenglik o‘rinli. Δ

12.1-natija. *Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamning ixtiyoriy o'lchovli A' qismida ham integrallanuvchi bo'ladi.*

Endi ma'lum ma'noda 12.1-teoremaga teskari hisoblanuvchi quyidagi teoremani keltiramiz.

12.2-teorema. *O'lchovli A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots,$ $A_n, \ldots$ o'lchovli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \bigcap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Har bir A_n to'plamda f funksiya integrallanuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| \, d\mu \tag{12.6}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi va (12.3) *tenglik o'rinli bo'ladi.*

Isbot. Teoremani isbotlash uchun f funksiyaning A to'plamda integrallanuvchi ekanligini ko'rsatish yetarli. (12.3) tenglik 12.1-teoremadan kelib chiqadi. Avvalo isbotni B_i to'plamlarda f_i qiymatlarni qabul qiluvchi f sodda funksiya uchun keltiramiz Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$B_i = \{x \in A : f(x) = f_i\}, \quad A_{ni} = A_n \cap B_i.$$

U holda quyidagilar o'rinli

$$\underset{n}{\cup} A_{ni} = B_i \qquad \text{va} \qquad \int_{A_n} |f(x)| \, d\mu = \sum_i |f_i| \, \mu(A_{ni}).$$

(12.6) qatorning yaqinlashuvchiligidan

$$\sum_n \sum_i |f_i| \, \mu(A_{ni})$$

qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Yaqinlashuvchi musbat hadli qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy tartibda almashtirish mumkin. Shuning uchun

$$\sum_n \sum_i |f_i| \, \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \sum_n \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \, \mu(B_i)$$

tenglik o‘rinli. Oxirgi qatorning yaqinlashuvchiligi

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_i f_i\mu(B_i)$$

integralning mavjudligini bildiradi.

Umumiy holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son va f funksiya uchun shunday g sodda funksiya mavjudki, barcha $x \in A$ uchun

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \tag{12.7}$$

tengsizlik o‘rinli. U holda VII xossaga ko‘ra, har bir A_n to‘plamda g funksiyaning integrali mavjud va

$$\int_{A_n} |g(x)|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon\mu(A_n)$$

tengsizlik o‘rinli. (12.6) qatorning yaqinlashuvchi ekanligidan, hamda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

tenglikdan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |g(x)|\, d\mu$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan g sodda funksiyaning A da integrallanuvchi ekanligi, (12.7) tengsizlikdan esa f funksiyaning A to‘plamda integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Δ

12.3-teorema *(Chebishev tengsizligi). A o‘lchovli to‘plamda manfiymas φ funksiya va $c > 0$ son berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizlik o‘rinli*

$$\mu\left(\{x \in A : \varphi(x) \geq c\}\right) \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu.$$

Isbot. Aytaylik, $A_c = \{x \in A : \varphi(x) \geq c\}$ bo‘lsin. (12.2) va V xossadan

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \int_{A_c} \varphi(x)d\mu + \int_{A\setminus A_c} \varphi(x)d\mu \geq \int_{A_c} \varphi(x)d\mu \geq c\cdot\mu(A_c)$$

ni olamiz. Bu yerdan

$$\mu(A_c) \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu$$

tengsizlik kelib chiqadi. Δ

12.2-natija. *Agar*

$$\int_A |f(x)| \, d\mu = 0$$

bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in A$ *uchun* $f(x) = 0$ *bo'ladi.*

Isbot. Chebishev tengsizligiga ko'ra ixtiyoriy n uchun

$$\mu\left(\left\{x \in A : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_A |f(x)| \, d\mu = 0$$

munosabatga egamiz. Bundan tashqari

$$\{x \in A : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

tenglik o'rinli. O'lchovning yarim additivlik xossasiga ko'ra,

$$\mu\left(\{x \in A : f(x) \neq 0\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in A : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

ga ega bo'lamiz. Bu esa natijani isbotlaydi. Δ

12.4-teorema *(Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasi). Agar* f *funksiya* A $(\mu(A) < \infty)$ *to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $\delta > 0$ *son mavjudki,* $\mu(D) < \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday* $D \subset A$ *to'plam uchun*

$$\left|\int_D f(x) d\mu\right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Agar f funksiya A to'plamda M soni bilan chegaralangan bo'lsa, teoremani isbotlash uchun $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ deb olish yetarli, chunki

$$\left|\int_D f(x) d\mu\right| < M \cdot \mu(D) < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Endi f ixtiyoriy o‘lchovli va integrallanuvchi funksiya bo‘lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_n = \{\, x \in A : n \le |f(x)\,| < n+1\}\,, \quad B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N = A \backslash B_N.$$

U holda 12.1-teoremaga ko‘ra,

$$\int_A |f(x)|\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu$$

tenglik o‘rinli. Berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun N ni shunday tanlaymizki,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu = \int_{C_N} |f(x)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin va $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2(N+1)}$ bo‘lsin. Agar $\mu(D) < \delta$ bo‘lsa, u holda

$$\left|\int_D f(x) d\mu\right| \le \int_D |f(x)|\, d\mu = \int_{D\cap B_N} |f(x)|\, d\mu + \int_{D\cap C_N} |f(x)|\, d\mu \le$$

$$\le (N+1)\mu(D) + \int_{C_N} |f(x)|\, d\mu < (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \Delta$$

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Agar f integrallanuvchi funksiya bo‘lsa, u holda $f_n(x) = \dfrac{1}{n}[nf(x)]$ sodda funksiyaning integrallanuvchi bo‘lishini isbotlang. Bu yerda $[x]$ belgi x sonning butun qismini bildiradi.*

2. *Lebeg integralining VIII xossasi Riman integrali uchun o‘rinlimi? 12.3-misoldan foydalanib javobingizni asoslang.*

3. *Agar f funksiya A to‘plamda chegaralanmagan bo‘lsa, u Lebeg ma’nosida integrallanuvchi bo‘lishi mumkinmi? 11.1-misol yordamida tushuntiring.*

4. $f(x) = [2x^2]$ *funksiyaning* $A = [0,\ 2]$ *to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.*

13-§. Lebeg integrali belgisi ostida limitga o'tish

Integral belgisi ostida limitga o'tish yoki qatorlarni hadma-had integrallash masalasi ko'plab muammolarni yechishda uchraydi. Integral belgisi ostida limitga o'tishning yetarli shartlaridan biri berilgan ketma-ketlikning tekis yaqinlishish shartidir.

13.1-teorema *(Lebeg). Agar* $\{f_n\}$ *ketma-ketlik* A *to'plamning har bir nuqtasida* f *funksiyaga yaqinlashsa va barcha* $n \in \mathbb{N}$ *lar uchun* $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ *tengsizlik bajarilib,* φ *funksiya* A *to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda limitik funksiya* f *ham* A *da integrallanuvchi bo'ladi va*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

Isbot. Teorema shartidan limitik funksiya f uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Lebeg integralining VII xossasiga ko'ra, f integrallanuvchi funksiya bo'ladi. Endi $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasiga (12.4-teorema) ko'ra, shunday $\delta > 0$ son mavjudki, agar $\mu(B) < \delta$ bo'lsa, u holda

$$\int_B \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \tag{13.1}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. 10.3-Yegorov teoremasiga ko'ra, B to'plamni shunday tanlash mumkinki, $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C = A \backslash B$ to'plamda f funksiyaga tekis yaqinlashadi. Demak, shunday N mavjudki, ixtiyoriy $n > N$ lar va ixtiyoriy $x \in C$ uchun

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)} \tag{13.2}$$

tengsizlik bajariladi. U holda

$$\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu = \int_C [f(x) - f_n(x)]\, d\mu + \int_B f(x)d\mu - \int_B f_n(x)d\mu$$

bo‘ladi. Endi

$$|f(x)| \le \varphi(x), \qquad |f_n(x)| \le \varphi(x)$$

ekanligidan hamda (13.1) va (13.2) lardan

$$\left|\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu\right| \le \int_C |f(x) - f_n(x)|\, d\mu + \int_B |f(x)|\, d\mu +$$

$$+\int_B |f_n(x)|\, d\mu \le \frac{\varepsilon}{2\mu(C)} \cdot \mu(C) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \qquad \Delta$$

13.1-natija. *Agar* $|f_n(x)| \le M = const$ *va* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *bo‘lsa, u holda integral belgisi ostida limitga o‘tish mumkin, ya’ni*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

13.1-eslatma. Nol o‘lchovli to‘plamda funksiyaning qiymatini o‘zgartirish integral qiymatiga (VI xossa) ta’sir qilmaydi, shuning uchun 13.1-teoremada $\{f_n\}$ ketma-ketlikning f funksiyaga deyarli yaqinlashishini va $|f(x)| \le \varphi(x)$ tengsizlikning ham deyarli barcha x lar uchun bajarilishini talab qilish yetarli.

13.2-teorema *(Levi). A to‘plamda monoton*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots,$$

integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\int_A f_n(x)d\mu \le K$$

tengsizlik bajarilsin. U holda A to‘plamning deyarli hamma yerida $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *chekli limit mavjud hamda f funksiya A da integrallanuvchi va integral belgisi ostida limitga o‘tish mumkin, ya’ni*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

Isbot. Faraz qilaylik, $f_1(x) \ge 0$ bo‘lsin. Umumiy hol $\overline{f_n}(x) = f_n(x) - f_1(x)$ almashtirish yordamida $\overline{f_1}(x) \ge 0$ holga keltiriladi.

$$\Omega = \left\{ x \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty \right\}$$

to‘plamni qaraymiz. Agar biz $\Omega_n^{(r)} = \{\, x \in A : \ f_n(x) > r \,\}$ to‘plamni kiritsak, u holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\Omega = \bigcap_{r=1}^{\infty} \Omega^{(r)}, \quad \Omega^{(r)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{(r)}.$$

Chebishev tengsizligiga (12.3-teorema) ko‘ra,

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leq \frac{1}{r} \int_A f_n(x) d\mu \leq \frac{K}{r}.$$

Har bir tayinlangan r da $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \ldots$ munosabat o‘rinli. O‘lchovning uzluksizlik xossasiga ko‘ra

$$\mu\left(\Omega^{(r)}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\,(\Omega_n^{(r)}) \leq \frac{K}{r}.$$

Har bir r uchun $\Omega \subset \Omega^{(r)}$ ekanligidan $\mu(\Omega) \leq \dfrac{K}{r}$ ekanligi kelib chiqadi va r ixtiyoriy bo‘lgani uchun $\mu(\Omega) = 0$ bo‘ladi.

Shu bilan monoton $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik deyarli barcha $x \in A$ larda chekli $f(x)$ limitga ega ekanligi kelib chiqadi. Endi $f^{but}(x) = [f(x)]$, $A_r = \left\{x \in A : f^{but}(x) = r\right\} = \{x \in A : r \leq f(x) < r+1\}$, $r = 0, 1, \ldots$ deb olamiz. Agar f^{but} funksiyaning A to‘plamda integrallanuvchi ekanligini ko‘rsatsak, u holda $\varphi(x) = f^{but}(x) + 1$ funksiya ham A to‘plamda integrallanuvchi bo‘ladi va 13.1-teoremadan 13.2-teoremaning tasdig‘i kelib chiqadi.

Endi f^{but} funksiyaning A to‘plamda integrallanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. $B_s = \bigcup\limits_{r=0}^{s} A_r$ deymiz. B_s da f_n va f funksiyalar chegaralangan va har doim $f^{but}(x) \leq f(x)$ bo‘lgani uchun 13.1-natijaga ko‘ra

$$\int_{B_s} f^{but}(x)\, d\mu \leq \int_{B_s} f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)\, d\mu \leq K\,.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\int_{B_s} f^{but}(x)\, d\mu = \sum_{r=0}^{s} r\mu(A_r) \leq K.$$

Bu yig‘indining chegaralanganligi

$$\sum_{r=0}^{\infty} r\mu(A_r)$$

qatorning yaqinlashuvchiligini bildiradi. Demak,

$$\int_A f^{but}(x)\, d\mu = \sum_{r=0}^{\infty} r\mu(A_r).$$

Shunday qilib, f^{but} ning A da integrallanuvchi ekanligi isbotlandi. Δ

Teoremani monoton o‘smaydigan ketma-ketliklar uchun ham isbotlash mumkin.

13.2-natija. *Agar* $\psi_n(x) \geq 0$ *bo‘lib,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu < +\infty$$

bo‘lsa, u holda A *to‘plamning deyarli barcha nuqtalarida*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

qator yaqinlashadi va qatorni hadlab integrallash mumkin, ya’ni

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu$$

tenglik o‘rinli.

13.3-teorema *(Fatu). Agar manfiymas, o‘lchovli* $\{f_n\}$ *funksiyalar ketma - ketligi* A *to‘plamning deyarli barcha nuqtalarida* f *funksiyaga yaqinlashsa va*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leq K$$

bo‘lsa, u holda f *funksiya* A *to‘plamda integrallanuvchi va*

$$\int_A f(x)\, d\mu \leq K$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$ deb belgilaymiz. φ_n o'lchovli, chunki

$$\{\, x : \varphi_n(x) < c \,\} = \bigcup_{k\geq n} \{x : f_k(x) < c\}\ .$$

Bundan tashqari $0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$ bo'lgani uchun φ_n integrallanuvchi va

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \leq \int_A f_n(x)\, d\mu \leq\ K.$$

Nihoyat, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \cdots$ deyarli barcha x lar uchun

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Shuning uchun 13.2-teoremani $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlikka qo'llab, 13.3-teoremaning isbotiga ega bo'lamiz. Δ

Lebeg va Riman integrallari orasidagi quyidagi bog'lanishni isbotlaymiz.

13.4-teorema. *Agar* $[a,\, b]$ *kesmada*

$$I = (R) \int_a^b f(x) d\mu$$

Riman integrali mavjud bo'lsa, u holda f *funksiya* $[a,\, b]$ *kesmada Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va*

$$(L) \int_{[a,\,b]} f(x) d\mu = (R) \int_a^b f(x)\, dx$$

tenglik o'rinli.

Isbot. $[a,\, b]$ kesmani

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$$

nuqtalar yordamida 2^n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu bo'linishga mos

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}, \quad \omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

Darbu yig'indilarini qaraymiz, bu yerda $M_{nk} - f$ funksiyaning $[x_{k-1},\, x_k]$ kesmadagi aniq yuqori chegarasi, m_{nk} esa shu kesmadagi aniq quyi chegarasi. Riman integralining ta'rifiga ko'ra,

$$I = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = \lim_{n\to\infty} \omega_n$$

chekli limit mavjud. Har bir $n \in \mathbb{N}$ da $\overline{f_n}$ va $\underline{f_n}$ sodda funksiyalarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\overline{f_n}(x) = M_{nk}, \text{ agar } x \in [x_{k-1},\ x_k)\,, \quad k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}, \quad \overline{f_n}(b) = f(b),$$
$$\underline{f_n}(x) = m_{nk}, \text{ agar } x \in [x_{k-1},\ x_k)\,, \quad k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}, \quad \underline{f_n}(b) = f(b).$$

Sodda funksiya integrali ta'rifiga koʻra,

$$\int_{[a,b]} \overline{f_n}(x)\, d\mu = \Omega_n, \qquad \int_{[a,b]} \underline{f_n}(x)\, d\mu = \omega_n$$

tengliklar oʻrinli. $\{\overline{f_n}\}$ ketma-ketlik oʻsmaydigan ketma-ketlik, ya'ni

$$\overline{f_1}(x) \geq \overline{f_2}(x) \geq \ldots \geq \overline{f_n}(x) \geq \ldots$$

$\{\underline{f_n}\}$ esa kamaymaydigan ketma-ketlik, ya'ni

$$\underline{f_1}(x) \leq \underline{f_2}(x) \leq \ldots \leq \underline{f_n}(x) \leq \ldots$$

boʻlgani uchun, deyarli hamma yerda

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n}(x) = \overline{f}(x) \geq f(x), \quad \lim_{n\to\infty} \underline{f_n}(x) = \underline{f}(x) \leq f(x)$$

chekli limitlar mavjud. 13.2-Levi teoremasiga koʻra

$$\int_{[a,\,b]} \overline{f}(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = I = \lim_{n\to\infty} \omega_n = \int_{[a,\,b]} \underline{f}(x) d\mu.$$

Shuning uchun

$$\int_{[a,\,b]} \left|\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right|\, d\mu = \int_{[a,\,b]} \left(\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right)\, d\mu = 0.$$

Bundan, deyarli hamma yerda $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$. Demak,

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I. \qquad \Delta$$

Bu xossadan foydalanib, Lebeg integralini hisoblash qulaydir.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Parametr* α *ning qanday qiymatlarida*

$$f_n(x) = \frac{x^\alpha}{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in [0,\ 1]$$

ketma-ketlik integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasi shartlarini qanoatlantiradi.

2. *Quyidagi* $\{g_n\}$ *ketma-ketlik integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Levi teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?*

$$g_n(x) = \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{nx^2 + 1}, \quad x \in [0,\ 1].$$

3. *Fatu teoremasi shartlari bajarilganda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$$

tenglik o'rinlimi? O'rinli bo'lmasa, misol keltiring.

4. *13.4-teorema isbotida* $[a,\ b]$ *kesma nima sababdan* 2^n *ta teng qismga bo'linganini tushuntiring. Agar* $[a,\ b]$ *kesma* n *ta teng qismga bo'linganida* $\overline{f_n}$ *ketma-ketlik o'smaydigan,* $\underline{f_n}$ *ketma-ketlik esa kamaymaydigan bo'masligi mumkin edi. Bunga misol keltiring.*

5. $[0,\ 1]$ *kesmada* $f(x) = 2^x$ *funksiya uchun* $\overline{f_n}$, $\underline{f_n}$ *sodda funksiyalarni quring.*

14-§. Cheksiz o'lchovli to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali

Shu paytgacha biz faqat chekli o'lchovli $(\mu(A) < +\infty)$ to'plamlarda Lebeg integrali va uning xossalarini o'rgandik. Lekin ko'plab masalalarni yechishda cheksiz o'lchovli to'plamda berilgan funksiyaning integralini qarashga to'g'ri keladi. Masalan, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ da berilgan funksiyaning Lebeg integralini qarashga to'g'ri keladi. Biz sanoqli sondagi chekli o'lchovli X_n to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlanishi mumkin bo'lgan hol bilan chegaralanamiz.

14.1-ta'rif. *Agar X to'plamda μ o'lchov berilgan bo'lib, X to'plamni sanoqli sondagi chekli o'lchovli to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda X da μ o'lchov $\sigma-$ chekli o'lchov deyiladi.*

$\sigma-$ chekli o'lchovlarga sonlar o'qidagi va tekislikdagi Lebeg o'lchovlari misol bo'la oladi.

$\sigma-$ chekli bo'lmagan o'lchovga misol sifatida sonlar o'qidagi μ o'lchovni quyidagicha aniqlaymiz. Har bir nuqtaning o'lchovini bir deb olamiz, ya'ni $\mu\{x\} = 1$. U holda $\mathbb{R}$ ning barcha qism to'plamlari o'lchovli bo'ladi. Agar $A \subset \mathbb{R}$ to'plam chekli bo'lsa, uning o'lchovi chekli, qolgan hammasi cheksiz o'lchovli to'plamlar bo'ladi.

14.2-ta'rif. *X to'plamni qoplovchi ketma-ketlik deb, har qanday monoton o'suvchi $(X_n \subset X_{n+1})\,\{X_n\}$ ketma-ketlikka aytiladiki, u quyidagi ikkita shartni qanoatlantiradi:*

$$1) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X, \qquad 2) \quad \mu(X_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

14.3-ta'rif. *X to'plamda $\sigma-$ chekli μ o'lchov va X da aniqlangan manfiymas f funksiya berilgan bo'lsin. Agar f funksiya ixtiyoriy chekli o'lchovli $A \subset X$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, biror qoplovchi $\{X_n\}$ ketma-ketlik uchun*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu$$

limit mavjud bo'lsa, u holda f funksiya X to'plamda integrallanuvchi deyiladi va bu limit

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu$$

f dan X to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi.

Endi f ixtiyoriy funksiya bo'lsin. Uni ikkita manfiymas funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlaymiz, ya'ni $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, bu yerda

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \geq 0, \qquad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \geq 0. \qquad (14.1)$$

14.4-ta'rif. *Agar* f_+ *va* f_- *manfiymas funksiyalar* X *to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda* f *funksiya* X *to'plamda integrallanuvchi deyiladi va*

$$\int_X f(x)d\mu = \int_X f_+(x)d\mu - \int_X f_-(x)d\mu.$$

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $F(x) = 2x+1,\ x \in \mathbb{R},\ \mu_F$ *esa* $F-$ *funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi bo'lsin.* μ_F *o'lchov* $\sigma-$ *chekli o'lchov bo'ladimi?*

2. $f(x) = \dfrac{1}{[x]^2},\ x \in A = [1, \infty)$ *funksiya* A *to'plamda integrallanuvchimi?*

V bob. Lebegning aniqmas integrali va uni differensiallash

Bu bobda biz sonlar o‘qida aniqlangan funksiyalarning Lebeg integralini qaraymiz, va bu integralni tayinlangan f da to‘plam funksiyasi sifatida o‘rganamiz.

Agar f funksiya $X \subset \mathbb{R}$ o‘lchovli to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda integral

$$\int_A f(x)\, d\mu$$

barcha o‘lchovli $A \subset X$ lar uchun mavjud va u tayinlangan f da o‘lchovli to‘plam funksiyasi bo‘ladi. Bu integral Lebegning aniqmas integrali deyiladi. X sonlar o‘qidagi oraliq bo‘lishi ham mumkin. Bu holda A to‘plam X dagi kesmadan iborat bo‘lsa, yuqoridagi integral kesma chetki nuqtalarining funksiyasi bo‘ladi. Bu holda A kesma chap chetini tayinlab,

$$\int_{[a,\, x]} f(t) d\mu$$

integralning xossalarini o‘rganamiz. Bu masala bizni sonlar o‘qida aniqlangan funksiyalarning ba’zi muhim sinflarini qarashga olib keladi. Matematik analiz kursidan ma’lumki [4], differensiallash va integrallash amallari orasida quyidagi bog‘lanish mavjud. Agar $f-$ uzluksiz funksiya, $F-$ uzluksiz hosilaga ega funksiya bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinli.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \tag{V.1}$$

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a). \tag{V.2}$$

Quyidagicha savollar tug‘iladi:

1. Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar uchun (V.1) tenglik o‘rinlimi?

2. Qanday funksiyalar sinfi uchun (V.2) tenglik o‘rinli?

Quyidagi uch paragraf shu savollarga javob berishga bag‘ishlangan.

15-§. Monoton funksiyalar

Lebeg integrali

$$\Phi(x) = \int_{[a,\,x]} f(t)d\mu \tag{15.1}$$

ning xossalarini o‘rganishni quyidagi sodda va muhim faktdan boshlaymiz. Agar f manfiymas funksiya bo‘lsa, u holda Φ monoton kamaymaydigan funksiya bo‘ladi. Har qanday integrallanuvchi f funksiya ikkita manfiymas f_+ va f_- integrallanuvchi funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlanadi

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

bu yerda f_+ va f_- lar (14.1) tenglik bilan aniqlanadi.

Shuning uchun (15.1) integral ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalarning ayirmasi shaklida ifodalanadi. Shu sababli yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan (15.1) integralni o‘rganish, monoton funksiyalarning xossalarini tekshirish masalasiga kelar ekan. Monoton funksiyalar bir qator muhim xossalarga ega. Quyida biz ularni bayon qilamiz.

Avvalo ba’zi kerakli tushunchalarni keltiramiz. h o‘zgaruvchi miqdorning haqiqiy musbat (manfiy) sonli qiymatlar qabul qilib nolga intilishini $h \to 0+$ $(h \to 0-)$ shaklda belgilaymiz.

Haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ da aniqlangan f funksiya va $x_0 \in \mathbb{R}$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar

$$\lim_{h\to 0+} f(x_0+h) \quad (\lim_{h\to 0-} f(x_0+h))$$

limit mavjud bo‘lsa, bu limitga f funksiyaning x_0 nuqtadagi *o‘ng (chap) limiti* deyiladi va $f(x_0+0)\,(f(x_0-0))$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar f funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng (chap) limiti mavjud bo‘lib,

$$f(x_0+0) = f(x_0) \quad (f(x_0) = f(x_0-0))$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, f funksiya x_0 nuqtada *o‘ngdan (chapdan) uzluksiz* deyiladi. Agar f funksiyaning x_0 nuqtada o‘ng va chap limitlari mavjud bo‘lib,

$$f(x_0+0)=f(x_0)=f(x_0-0)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, f funksiya x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi. Agarda

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$$

bo‘lsa, f funksiya x_0 nuqtada *birinchi tur uzilishga ega* deyiladi, x_0 nuqta esa f funksiyaning *birinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi.

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

qiymatga f funksiyaning x_0 *nuqtadagi sakrashi* deyiladi.

Agar f funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng va chap limitlaridan birortasi mavjud bo‘lmasa yoki birortasi cheksizga aylansa, bu nuqta f funksiyaning *ikkinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi.

15.1-ta’rif. $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan* f *funksiya shu kesmadan olingan har qanday* x_1,x_2 *lar uchun* $x_1<x_2$ *bo‘lganda*

$$f(x_1)\le f(x_2)\quad (f(x_1)\ge f(x_2))$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, f *funksiya* $[a,\ b]$ *kesmada kamaymaydigan (o‘smaymaydigan) funksiya deyiladi.*

15.2-ta’rif. $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan* f *funksiya shu kesmadan olingan har qanday* x_1,x_2 *lar uchun* $x_1<x_2$ *bo‘lganda*

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)) \tag{15.2}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, f *funksiya* $[a,\ b]$ *kesmada o‘suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi.*

Umuman, qisqalik uchun monoton funksiya deyilganda, 15.1 va 15.2-ta’riflarda keltirilgan funksiyalar tushuniladi.

Endi monoton funksiyalarning asosiy xossalarini keltiramiz.

1. $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan har qanday monoton funksiya shu kesmada chegaralangan, o'lchovli va integrallanuvchi funksiyadir.*

Isbot. Bu xossa isbotini kamaymaydigan funksiyalar uchun keltiramiz. Haqiqatan ham, kamaymaydigan funksiya ta'rifiga ko'ra

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \ \ \forall x \in [a,\ b]. \tag{15.3}$$

Har qanday o'zgarmas c son uchun $E(f < c) = \{\, x : f(x) < c \,\}$ to'plam yo kesma, yo yarim interval (yo bo'sh to'plam) bo'ladi. Faraz qilaylik, $f(x) < c$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar mavjud bo'lsin va d bu to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lsin. U holda $E(f < c)$ to'plam yoki $[a,\ d]$ kesma yoki $[a,\ d)$ yarim interval bo'ladi, bu to'plamlar o'lchovli. Demak, f o'lchovli funksiya bo'ladi. f ning integrallanuvchiligi uning chegaralanganligidan (IV xossaga qarang) kelib chiqadi.

2. *Monoton funksiya faqat birinchi tur uzilish nuqtalarga ega bo'lishi mumkin.*

Isbot. Faraz qilaylik, f kamaymaydigan funksiya, $x_0 \in [a,\ b]$ ixtiyoriy nuqta va $\{x_n\} \subset [a,\ b]$, $x_n < x_0$, $x_n \to x_0$ nuqtalar ketma-ketligi bo'lsin. U holda $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi (masalan $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar bilan). Shunday ekan, $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik kamida bitta limitik nuqtaga ega. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tartibini almashtirish yordamida x_0 ga o'sib yaqinlashuvchi $\{x_n'\}$ ketma-ketlikka almashtirsak, $\{f(x_n')\}$ monoton ketma-ketlik bo'ladi. Uning chegaralanganligidan $\{f(x_n')\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu limitni $f(x_0-0)$ deb belgilaymiz. Yaqinlashuvchi $\{f(x_n')\}$ ketma-ketlikning o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik ham $f(x_0-0)$ ga yaqinlashadi. Hosil bo'lgan $f(x_0-0)$ limit $\{x_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas. Haqiqatan ham, agar ikkinchi $\{y_n\}$, $y_n < x_0$, $y_n \to x_0$

ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = A \neq f(x_0 - 0)$$

desak, u holda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarni birlashtirishdan hosil boʻlgan $\{z_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{f(z_n)\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi emas. Bu esa yuqorida olingan ixtiyoriy $x_n \to x_0\,(x_n < x_0)$ ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik yaqinlashadi degan xulosaga zid. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0 - 0).$$

Bu $f(x_0-0)$ miqdor f funksiyaning x_0 nuqtadagi chap limiti boʻladi. Shunga oʻxshash $f(x_0+0)$ oʻng limitning mavjudligi koʻrsatiladi. Δ

3. Monoton funksiyaning uzilish nuqtalari koʻpi bilan sanoqlidir.

Isbot. $[a,\ b]$ da monoton f funksiyaning ixtiyoriy chekli sondagi sakrashlarining yigʻindisi $|f(b) - f(a)|$ dan oshmaydi. Har bir natural n uchun sakrashi $1/n$ dan katta boʻlgan uzilish nuqtalari soni cheklidir. Barcha n lar boʻyicha yigʻib, sakrashlar soni chekli yoki sanoqli ekanligiga kelamiz. Δ

Faraz qilaylik, f kamaymaydigan, chapdan uzluksiz funksiya boʻlsin. Bu funksiyaning uzilish nuqtalarini $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ orqali va funksiyaning bu nuqtalarga mos sakrashlarini $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ orqali belgilaymiz.

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n$$

orqali aniqlangan funksiya f funksiyaning *sakrash funksiyasi* deyiladi. Bu funksiya chapdan uzluksiz, kamaymaydigan funksiyadir.

$$\varphi(x) = f(x) - H(x)$$

shaklda aniqlangan funksiya uzluksiz, kamaymaydigan funksiya boʻladi (mustaqil isbotlang). Natijada biz quyidagi xossaga ega boʻlamiz.

4. Chapdan (oʻngdan) uzluksiz boʻlgan har qanday monoton funksiyani yagona usul bilan uzluksiz monoton funksiya va chapdan (oʻngdan) uzluksiz *bo‘lgan sakrash funksiyasi yig‘indisi shaklida tasvirlash mumkin. Ya’ni*

$$f(x) = \varphi(x) + H(x).$$

Monoton funksiyalar ichida eng soddasi bu sakrash funksiyalaridir. Ular quyidagicha quriladi. Bizga $[a, b]$ da chekli yoki sanoqli sondagi $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ nuqtalar berilgan bo‘lib, ularga musbat $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ sonlar mos qo‘yilgan bo‘lsin. $[a, b]$ kesmada H funksiyani quyidagicha aniqlaymiz

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

Ravshanki, H kamaymaydigan funksiya bo‘ladi. Bundan tashqari u chapdan uzluksiz va uning uzilish nuqtalari $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ lardan iborat, hamda x_n nuqtadagi sakrashi h_n ga teng. Sakrash funksiyalari ichida eng soddasi, *zinapoyasimon funksiyadir.* Bu funksiya quyidagicha quriladi. Uning uzilish nuqtalari o‘suvchi $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ ketma-ketlik nuqtalaridan iborat. Misol sifatida $f(x) = [x]$, bu yerda $[x]$ miqdor x ning butun qismi, funksiyani keltirish mumkin.

Endi monoton funksiyaning hosilasi haqidagi masalaga qaytamiz.

15.1-teorema *(Lebeg). $[a, b]$ kesmada aniqlangan har qanday monoton f funksiya shu kesmaning deyarli hamma yerida chekli hosilaga ega.*

15.1-natija. *Sakrashlar funksiyasi deyarli hamma yerda chekli hosilaga ega va bu hosila nolga teng.*

Endi yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan integraldan hosila mavjudligi haqidagi masalani qaraymiz. Ma’lumki, integral $\int_a^x \varphi(t)\, dt$ istalgan integrallanuvchi funksiya uchun ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlanadi. 15.1-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

15.2-teorema. *Istalgan integrallanuvchi φ funksiya uchun*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(t) dt \qquad (15.4)$$

hosila deyarli barcha x lar uchun mavjud.

Isbot. φ funksiyani ikkita manfiymas

$$\varphi_+(x) = \frac{|\varphi(x)| + \varphi(x)}{2}, \quad \varphi_-(x) = \frac{|\varphi(x)| - \varphi(x)}{2}$$

funksiyalarning ayirmasi shaklida tasvirlaymiz. Natijada

$$\int_a^x \varphi(t)dt = \int_a^x \varphi_+(t)dt - \int_a^x \varphi_-(t)dt \tag{15.5}$$

integral ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlanadi. Monoton funksiyaning differensiallanuvchanligi haqidagi 15.1-teoremaga ko‘ra, (15.5) ifodaning deyarli barcha x larda chekli hosilasi mavjud. Δ

Ta’kidlash joizki, biz faqat (15.4) hosilaning mavjudligini ko‘rsatdik, lekin

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi\,(t)\,dt = \varphi\,(x)$$

tenglik qanday φ lar uchun to‘g‘riligini quyida muhokama qilamiz.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Ikki monoton funksiyaning yig‘indisi monoton funksiya bo‘ladimi?*

2. *Monoton funksiyalar ko‘paytmasi monoton funksiya bo‘ladimi?.*

3. *Agar f funksiya $[a,\, b]$ da o‘suvchi funksiya bo‘lib, $f(a) = A,$ $f(b) = B$ va $g : [A,\, B] \to \mathbb{R}$ monoton funksiya bo‘lsa, u holda $g(f(x))$ funksiya $[a,\, b]$ da monoton bo‘ladimi?*

4. *Zinapoyasimon bo‘lmagan sakrash funksiyasiga misol keltiring.*

5. $[0,\, 1]$ *kesmadagi barcha ratsional nuqtalarni $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ orqali belgilab chiqamiz va f funksiyani $[0, 1]$ da quyidagicha aniqlaymiz*

$$f(x) = \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

U zinapoyasimon funksiya bo‘ladimi?

16-§. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan Lebeg integralini differensiallash masalasi, bizni monoton funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlash mumkin bo'lgan funksiyalar sinfini qarashga olib keldi. Bu paragrafda biz bu sinf funksiyalariga boshqacha ta'rif beramiz va ularning ayrim xossalarini isbotlaymiz.

16.1-ta'rif. *Bizga $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan f funksiya berilgan bo'lsin. Agar biz $[a,\ b]$ kesmani*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar bilan ixtiyoriy n qismga bo'lganimizda $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ nuqtalarni tanlab olishga bog'liq bo'lmagan va ushbu

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C \tag{16.1}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi o'zgarmas C son mavjud bo'lsa, u holda f funksiya $[a,\ b]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan funksiya deyiladi.

Har qanday monoton funksiya $[a,\ b]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan va (16.1) yig'indining chap tomoni bo'linishdan bog'liq emas va u $|f(b) - f(a)|$ ga teng.

16.2-ta'rif. *Bizga $[a,\ b]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan f funksiya berilgan bo'lsin. (16.1) yig'indilarning barcha chekli bo'linishlar bo'yicha olingan aniq yuqori chegarasi f funksiyaning $[a,\ b]$ kesmadagi to'la o'zgarishi (to'la variatsiyasi) deyiladi va $V_a^b[f]$ bilan belgilanadi, ya'ni*

$$V_a^b[f] = \sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \tag{16.2}$$

Endi o'zgarishi chegaralangan funksiyalarning ba'zi xossalarini keltiramiz.

1. *Ixtiyoriy $k \in \mathbb{R}$ son uchun quyidagi tenglik o'rinli*

$$V_a^b[k\, f] = |k|\ V_a^b[f]\ .$$

Tenglikning isboti bevosita ta’rifdan kelib chiqadi.

2. *Agar* f *va* g *o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar bo’lsa, u holda ularning yig‘indisi ham o‘zgarishi chegaralangan bo’ladi va*

$$V_a^b[f+g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g] \tag{16.3}$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. $[a,\ b]$ kesmaning ixtiyoriy

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

bo‘linishi uchun

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

tengsizlik o‘rinli. Aniq yuqori chegaralar uchun ma’lum bo‘lgan $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ tengsizlikdan foydalansak, 2-xossa isbotiga ega bo‘lamiz. Δ

3. *Ixtiyoriy* $c \in (a,\ b)$ *uchun quyidagi tenglik o‘rinli*

$$V_a^b[f] = V_a^c[f] + V_c^b[f]. \tag{16.4}$$

Isbot. Oldin $[a,\ b]$ kesmaning shunday bo‘linishlarini qaraymizki, c bo‘linish nuqtalaridan biri bo‘lsin, masalan $x_r = c$, u holda

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{r} |f(x_i) - f(x_{i-1})| +$$
$$+ \sum_{i=r+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_a^c[f] + V_c^b[f] \tag{16.5}$$

Endi $[a,\ b]$ kesmaning ixtiyoriy bo‘linishlarini qaraymiz. Agar biz bu bo‘linish nuqtalariga yana bir c nuqtani qo‘shsak, u holda

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

yig'indining qiymati kamaymaydi. Demak, (16.5) tengsizlik $[a,\ b]$ kesmaning ixtiyoriy bo'linishi uchun to'g'ri, shuning uchun

$$V_a^b[f] \leq V_a^c[f] + V_c^b[f]. \tag{16.6}$$

Ikkinchi tomondan har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $[a,\ c]$ va $[c,\ b]$ kesmalarning shunday $\left\{x_j'\right\}$ va $\left\{x_j''\right\}$ bo'linishlari mavjudki

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_{i-1}')| > V_a^c[f] - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{j=1}^{m} \left|f(x_j'') - f(x_{j-1}'')\right| > V_c^b[f] - \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu ikki bo'linishni birlashtirib, $[a,\ b]$ kesmaning shunday $\{x_j\}$ bo'linishiga ega bo'lamizki, uning uchun

$$\sum_{k=1}^{n+m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_{i-1}')| + \sum_{j=1}^{m} \left|f(x_j'') - f(x_{j-1}'')\right| > V_a^c[f] + V_c^b[f] - \varepsilon.$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun o'rinli, shuning uchun

$$V_a^b[f] \geq V_a^c[f] + V_c^b[f]. \tag{16.7}$$

(16.6) va (16.7) lardan (16.4) tenglik kelib chiqadi. Δ

Ixtiyoriy o'zgarishi chegaralangan funksiyaning $[a,\ b]$ kesmadagi to'la o'zgarishi manfiymas bo'lganligi uchun 3-xossadan quyidagi xossa kelib chiqadi.

4. $v(x) = V_a^x[f]$ *monoton kamaymaydigan funksiya.*

5. *Agar f funksiya x^* nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$v(x) = V_a^x[f]$$

ham $x^* \in (a,\ b]$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Bizga ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ berilgan bo'lsin. Endi $\delta > 0$ ni shunday tanlaymizki,

$$|f(x^*) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik ixtiyoriy $x \in (x^* - \delta,\ x^*]$ uchun o‘rinli bo‘lsin. Endi

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x^*$$

bo‘linishni shunday tanlaymizki,

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n} |\, f(x_k) - f(x_{k-1}) \,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo‘lsin va biz $x_n - x_{n-1} < \delta$ deb faraz qilishimiz mumkin. Bundan

$$|\, f(x_n) - f(x_{n-1}) \,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Natijada

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n-1} |\, f(x_k) - f(x_{k-1}) \,| < \varepsilon$$

ga ega bo‘lamiz. Bu tengsizlik o‘z navbatida

$$V_a^{x^*}[f] - V_a^{x_{n-1}}[f] < \varepsilon$$

tengsizlikni keltirib chiqaradi, ya’ni $v(x^*) - v(x_{n-1}) < \varepsilon$ o‘rinli. Biz bilamizki, v kamaymaydigan funksiya, shuning uchun barcha $x \in (x_{n-1},\ x^*)$ lar uchun $v(x^*) - v(x) < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli. Bu esa v funksiyaning x^* nuqtada chapdan uzluksiz ekanligini bildiradi. Δ

Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, agar f funksiya x^* nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘lsa, u holda v ham x^* nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘ladi. Demak, agarda f funksiya biror x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda v ham shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o‘zgarishi chegaralangan ixtiyoriy funksiya, $v(x)$ esa uning $[a,\ x]$ kesmadagi to‘la o‘zgarishi bo‘lsin. $\varphi(x) = v(x) - f(x)$ funksiyani qaraymiz.

16.1-lemma. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monoton kamaymaydigan funksiyadir.*

Isbot. Faraz qilaylik, $x' < x''$, $x', x'' \in [a,\ b]$ ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin, u holda

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [v(x'') - v(x')] - [f(x'') - f(x')]. \tag{16.8}$$

Ma'lumki,

$$|f(x'') - f(x')| \leq V_{x'}^{x''}[f] = v(x'') - v(x').$$

Shuning uchun (16.8) ning o'ng tomoni manfiymas, demak uning chap tomoni ham manfiymas. Bu esa φ ning $[a,\ b]$ da monoton kamaymaydigan funksiya ekanligini bildiradi. $f(x) = v(x) - \varphi(x)$ bo'lganligi uchun, biz quyidagi tasdiqqa keldik.

16.1-teorema. *Har qanday o'zgarishi chegaralangan funksiyani ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlash mumkin.*

Teskari tasdiq doimo o'rinli, ya'ni ikkita monoton funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlangan har qanday funksiya o'zgarishi chegaralangandir. Shuning uchun ikkita monoton funksiya ayirmasi shaklida tasvirlanuvchi barcha funksiyalar to'plami o'zgarishi chegralangan funksiyalar sinfi bilan ustma-ust tushar ekan.

16.1 va 15.1-teoremalardan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

16.2-teorema. $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan o'zgarishi chegaralangan har qanday funksiya deyarli hamma yerda chekli hosilaga ega.*

Biz sakrashlar funksiyasini quyidagicha umumlashtirishimiz mumkin. Bizga chekli yoki sanoqli $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leq b$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Har bir x_k ga ikkita g_k va h_k sonlarni mos qo'yamiz va

$$\sum_{n=1} (|g_n| + |h_n|) < \infty$$

bo'lsin deb talab qilamiz. Bundan tashqari, agar $x_1 = a$ bo'lsa, $g_1 = 0$ va $x_N = b$ bo'lsa, $h_N = 0$ deymiz.

$$H(x) = \sum_{x_n \leq x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n. \tag{16.9}$$

(16.9) ko'rinishdagi har qanday funksiyani biz sakrashlar funksiyasi deb ataymiz. H funksiyaning $[a,\ b]$ dagi to'la o'zgarishi

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|)$$

ga teng. Agar g_n va h_n sonlardan birortasi noldan farqli bo'lsa, u holda x_n nuqta H funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi, hamda

$$H(x_n) - H(x_n - 0) = g_n, \quad H(x_n + 0) - H(x_n) = h_n$$

tengliklar o'rinli. Quyidagi tasdiq o'rinli.

16.3-teorema. $[a,\ b]$ *kesmada o'zgarishi chegaralangan har qanday* f *funksiyani uzluksiz funksiya* φ *va sakrashlar funksiyasi* H *lar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin va bu tasvir yagonadir.*

Isbot. Haqiqatan ham, f funksiyani ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlaymiz

$$f(x) = v(x) - g(x).$$

Keyin ular yordamida sakrashlar funksiyasi H va uzluksiz funksiya φ ni quramiz. Masalan, v funksiya uchun (x_n uzilish nuqtalari)

$$v(x_n) - v(x_n - 0) = g_n, \quad v(x_n + 0) - v(x_n) = h_n$$

deymiz va H_v funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$H_v(x) = \sum_{x_n \le x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n.$$

Uzluksiz funksiya sifatida $\varphi_v(x) = v(x) - H_v(x)$ ni olamiz. Xuddi shunday g funksiya uchun ham H_g va φ_g larni aniqlaymiz. Natijada f funksiya uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$f(x) = H_v(x) - H_g(x) + \varphi_v(x) - \varphi_g(x).$$

Bu yerda $H_f(x) = H_v(x) - H_g(x)$ sakrash funksiyasi $\varphi_f(x) = \varphi_v(x) - \varphi_g(x)$ uzluksiz funksiya bo'ladi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Agar* f *funksiya* $[a,\ b]$ *kesmada chegaralangan hosilaga ega bo'lsa,* f *ning* $[a,\ b]$ *kesmada o'zgarishi chegaralangan bo'lishini isbotlang.*

2. $[0,\ 1]$ *kesmada aniqlangan uzluksiz*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x = 0 \\ x \cdot \sin\frac{\pi}{x}, & agar\ x \in (0, 1] \end{cases}$$

funksiyaning $[0,\ 1]$ *kesmadagi to'la o'zgarishi* $V_0^1[f] = \infty$ *ekanligini isbotlang.*

3. *Agar* f *funksiya* $[a,\ b]$ *da Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda* f *ning* $[a,\ b]$ *da o'zgarishi chegaralangan bo'lishini isbotlang.*

17-§. Absolyut uzluksiz funksiyalar

17.1. Lebegning aniqmas integralidan hosila. $15-\S$ da ko'rsatdikki,

$$\int_{[a,\,x]} f\,(t)\ d\mu = \int_a^x f\,(t)\ dt$$

Lebeg integrali x ning funksiyasi sifatida deyarli hamma yerda chekli hosilaga ega. Lekin bu hosilani integral ostidagi funksiya bilan bog'lanishini tekshirmadik. Quyidagi tasdiq o'rinli.

17.1-teorema. $[a,\ b]$ *kesmada integrallanuvchi har qanday* f *funksiya uchun deyarli barcha* $x \in [a,\ b]$ *larda*

$$\frac{d}{dx}\int_{[a,\,x]} f\,(t)\ d\mu = f\,(x)$$

tenglik o'rinli.

Bu teoremani isbotlashda biz quyidagi ta'rifdan ham foydalanamiz.

17.1-ta'rif. *Agar* $x_0 \in [a,\ b]$ *nuqta uchun shunday* ξ $(x_0 < \xi \le b)$ *nuqta mavjud bo'lib,* $g(x_0) < g(\xi)$ *bo'lsa, u holda* x_0 *nuqta* g *funksiyaning o'ngdan ko'rinmaydigan nuqtasi deyiladi.*

17.1-teorema isboti. Har bir $x \in [a,\ b]$ ga

$$\Phi(x) = \int_{[a,\, x]} f(t)\, d\mu$$

sonni mos qo‘yuvchi $\Phi : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ funksiyani qaraymiz. 15.2-teoremaga ko‘ra, bu funksiya deyarli hamma yerda chekli hosilaga ega. Dastlab, deyarli hamma yerda

$$f(x) \geq \Phi'(x) \tag{17.1}$$

tengsizlik bajarilishini ko‘rsatamiz. E orqali $f(x) < \Phi'(x)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamini belgilaymiz. Agar biror x nuqtada $f(x) < \Phi'(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda shunday $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$ ratsional sonlar mavjud bo‘lib,

$$f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x) \tag{17.2}$$

tengsizlik bajariladi. Har bir $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$ $(\alpha < \beta)$ sonlar juftiga

$$E_{\alpha\beta} = \{\, x \in [a,\ b] : f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x) \,\}$$

to‘plamni mos qo‘yamiz. U holda

$$E = \{x : f(x) < \Phi'(x)\} = \bigcup_{\{\alpha,\beta\}} E_{\alpha\beta}$$

tenglikni yozish mumkin. (17.1) tengsizlikni isbotlash uchun har bir (α, β) juftlik uchun $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ ni ko‘rsatish yetarli. U holda $E_{\alpha\beta}$ to‘plamlar ko‘pi bilan sanoqli ekanligidan $\mu(E) = 0$ kelib chiqadi. Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasiga (12.4-teorema) ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjudki, $C \subset [a,\ b]$, $\mu(C) < \delta$ to‘plam uchun

$$|\int_C f(t) d\mu| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. O‘lchovli to‘plam ta’rifiga ko‘ra,

$$E_{\alpha\beta} \subset G \subset [a,\ b] \quad \text{va} \quad \mu(G) < \mu(E_{\alpha\beta}) + \delta$$

shartni qanoatlantiruvchi G ochiq toʻplam mavjud. Endi $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ tenglikni isbotlash uchun $[a,\ b]$ da $g(x) = \Phi(x) - \beta\, x$ funksiyani aniqlaymiz. $\Phi(x)$ ning aniqlanishiga koʻra, $g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya boʻladi.

Bu $g(x) = \Phi(x) - \beta\, x$ funksiyaning barcha oʻngdan koʻrinmaydigan nuqtalari toʻplamini E orqali belgilaymiz. U holda ixtiyoriy $x_0 \in E$ uchun shunday $\xi\, (x_0 < \xi \le b)$ nuqta mavjud boʻlib, $g(x_0) < g(\xi)$ boʻladi. Agar $0 < \varepsilon < g(\xi) - g(x_0)$ desak, g ning uzluksizligiga koʻra, shunday $\delta > 0$ mavjudki, barcha $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ lar uchun $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ yoki $g(x) < g(x_0) + \varepsilon < g(\xi)$ boʻladi. Shunday ekan $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$, yaʼni x_0 E ning ichki nuqtasi boʻladi. Demak E faqat ichki nuqtalardan iborat, yaʼni E ochiq toʻplam ekan. Sonlar oʻqidagi ochiq toʻplamlar strukturasi haqidagi teoremaga koʻra, chekli yoki sanoqli sondagi $\{(a_k,\ b_k)\}$ oʻzaro kesishmaydigan intervallar mavjud boʻlib,

$$E = \bigcup_k (a_k,\ b_k)$$

yoyilma oʻrinli. Koʻrsatish mumkinki, ixtiyoriy k da

$$g(a_k) \le g(b_k) \tag{17.3}$$

tengsizlik oʻrinli. Haqiqatan ham, agar teskarisini faraz qilsak, yaʼni

$$g(a_k) > g(b_k) \tag{17.4}$$

desak, u holda $(a_k,\ b_k)$ intervalda x_0 ichki nuqta mavjud boʻlib, $g(x_0) > g(b_k)$ boʻladi. x^* orqali $(a_k,\ b_k)$ intervaldagi $g(x) = g(x_0)$ tenglikni qanoatlantiruvchi eng oʻng nuqtani belgilaymiz. $x^* \in (a_k,\ b_k) \subset E$ boʻlgani uchun shunday $\xi > x^*$ mavjudki, $g(x^*) < g(\xi)$ boʻladi. g ning uzluksizligi va x^* ning tanlanishiga koʻra, $\xi \notin (a_k, b_k)$. Ikkinchi tomondan, $\xi > b_k$ boʻlishi mumkin emas, chunki $g(\xi) > g(x^*) > g(b_k)$ dan $b_k \in E$ boʻlar edi. Bu ziddiyat koʻrsatadiki, (17.4) tengsizlik bajarilmaydi, yaʼni (17.3) tengsizlik oʻrinli.

Endi olingan natijadan $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ tenglikni isbotlashda foydalanamiz. Agar $x \in E_{\alpha\beta}$ bo‘lsa, u holda x ga yetarlicha yaqin bo‘lgan ixtiyoriy $\xi > x$ lar uchun

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x)}{\xi - x} > \beta \tag{17.5}$$

tengsizlik yoki

$$\Phi(\xi) - \beta\xi > \Phi(x) - \beta x$$

tengsizlik bajariladi. Bundan x ning $\Phi(x) - \beta\, x$ funksiya uchun o‘ngdan ko‘rinmaydigan nuqta ekanligi kelib chiqadi. O‘ngdan ko‘rinmaydigan nuqtalar to‘plami ochiq to‘plam bo‘lgani uchun x ning biror $(x - \delta,\ x + \delta) \subset G$ atrofidagi barcha nuqtalar o‘ngdan ko‘rinmaydigan nuqtalar bo‘ladi. Shuning uchun $g(x) = \Phi(x) - \beta\, x$ funksiyaning G dagi o‘ngdan ko‘rinmaydigan nuqtalari to‘plami qandaydir S ochiq to‘plamdan iborat bo‘ladi, ya’ni $E_{\alpha\beta} \subset S \subset G$. Bundan tashqari,

$$S = \bigcup_k (a_k,\ b_k)$$

va har bir k da

$$\Phi(b_k) - \beta \cdot b_k \geq \Phi(a_k) - \beta \cdot a_k$$

tengsizlik o‘rinli. U holda

$$\Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geq \beta(b_k - a_k)$$

yoki

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\, dt \geq \beta(b_k - a_k).$$

Shunga o‘xshash tengsizliklarni S ni tashkil qiluvchi barcha (a_k, b_k) intervallar bo‘yicha yig‘ib,

$$\int_S f(t)dt \geq \beta\mu(S). \tag{17.6}$$

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik bilan bir vaqtda

$$\int_S f(t)dt = \int_{E_{\alpha\beta}} f(t)dt + \int_{S \setminus E_{\alpha\beta}} f(t)dt <$$

$$< \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon \leq \alpha \cdot \mu(S) + \varepsilon + |\alpha| \cdot \delta \tag{17.7}$$

tengsizlik o‘rinli. Chunki $\mu(S) \leq \mu(G) < \mu(E_{\alpha\beta}) + \delta, \quad \mu(S \backslash E_{\alpha\beta}) < \delta$ va

$$\int_{S \backslash E_{\alpha\beta}} f(t)dt < \varepsilon.$$

(17.6) va (17.7) tengsizliklarni taqqoslab,

$$\alpha\, \mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta \geq \beta\, \mu(S)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bundan

$$\mu(S) \leq \frac{\varepsilon + |\alpha|\delta}{\beta - \alpha}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shunday qilib, $E_{\alpha\beta}$ to‘plamning o‘lchovi istalgan sondan kichik bo‘lgan ochiq to‘plam bilan qoplash mumkin. Bundan $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\mu\, \{\, x : f\,(x) < \Phi'\,(x)\, \} = 0.$$

Shuning uchun deyarli hamma yerda $f\,(x) \geq \Phi'\,(x)$ tengsizlik o‘rinli. Endi $f\,(x)$ ni $-f\,(x)$ bilan almashtirsak, deyarli hamma yerda

$$-f\,(x) \geq -\Phi'\,(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f\,(x) \leq \Phi'\,(x)\,. \tag{17.8}$$

(17.1) va (17.8)dan $f\,(x) = \Phi'\,(x)$ deyarli barcha x lar uchun o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$f\,(x) = \Phi'\,(x) = \frac{d}{dx}\int_{[a,\, x]} f\,(t)\, d\mu$$

tenglik deyarli barcha x lar uchun o‘rinli. Δ

Bobning boshida qo‘yilgan ikkita savoldan birinchisiga biz javob berdik. Endi ikkinchi savolga o‘tamiz, ya’ni uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun o‘rinli bo‘lgan Nyuton-Leybnits formulasini

$$F\,(x) = F\,(a) + \int_a^x F'\,(t)\, dt \tag{17.9}$$

Lebeg integrali uchun qanday umumlashtirish mumkin? Ya'ni (17.9) tenglik qanday funksiyalar sinfi uchun o'rinli? Biz deyarli barcha nuqtalarda chekli hosilasi mavjud bo'lgan funksiyalar sinfi bilan chegaralanamiz. Ma'lumki (16.2-teorema), o'zgarishi chegaralangan funksiya deyarli hamma yerda chekli hosilaga ega. Ikkkinchi tomondan, (17.9) tenglikning o'ng tomoni o'zgarishi chegaralangan funksiya. Shuning uchun (17.9) tenglik o'zgarishi chegaralangan funksiyalar sinfidan kattaroq to'plamda o'rinli bo'lishi mumkin emas. Har qanday o'zgarishi chegaralangan funksiya ikkita monoton kamayuvchi funksiyalar ayirmasi ko'rinishida tasvirlanadi. Shuning uchun monoton funksiyalar uchun (17.9) tenglik o'rinlimi degan savolni qo'yamiz.

Umuman olganda ixtiyoriy monoton funksiya uchun (17.9) tenglik o'rinli emas. Lekin quyidagi tasdiq o'rinli.

17.2-teorema. *Monoton kamaymaydigan f funksiyaning hosilasi integrallanuvchi va quyidagi tengsizlik o'rinli:*

$$\int_a^b f'(t)\,dt \leq f(b) - f(a). \tag{17.10}$$

Isbot. Hosila ta'rifiga ko'ra, f ning x nuqtadagi hosilasi

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi_h(x) \tag{17.11}$$

nisbatning $h \to 0$ dagi limitidir. f ning monotonligidan uning integrallanuvchanligi kelib chiqadi. Demak, har bir φ_h integrallanuvchidir. Shuning uchun (17.11) tenglikni integrallash mumkin:

$$\int_a^b \varphi_h(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

f funksiyani (b,∞) ga $f(b)$ deb davom ettirib bu integralni quyidagicha yozish mumkini

$$\int_a^b \varphi_h(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f(x)\, dx - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\, dx.$$

Bu tenglikdan $h \to 0$ da limitga o'tamiz. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Fatu teoremasiga ko'ra,

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leq \lim_{h \to 0} \int_a^b \varphi_h(x)\, dx = f(b) - f(a+0) \leq f(b) - f(a)$$

tengsizlik o'rinli. Bu yerda qat'iy tengsizlik o'rinli bo'ladigan monoton funksiyaga misol keltirish mumkin:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x \in [0,\ \ 0,5] \\ 1, & agar\ x \in (0,5,\ \ 1]. \end{cases}$$

Deyarli hamma yerda $f'(x) = 0$ ekanligdan

$$0 = \int_0^1 0 \cdot dx < f(1) - f(0) = 1$$

ni olamiz. Biror monoton uzluksiz funksiya uchun

$$\int_a^x f'(x)\, dx < f(x) - f(a) \tag{17.12}$$

tengsizlikning barcha $x \in (a,\, b)$ lar uchun bajarilishini ko'rsatish qiziq masaladir. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ (6.4-misol) uchun

$$\int_0^x \mathfrak{K}'(x)dx < \mathfrak{K}(x) - \mathfrak{K}(0) = \mathfrak{K}(x)$$

tengsizlik barcha $x \in (0,\ 1)$ larda o'rinli bo'ladi. Mustaqil isbotlang.

17.2. Absolyut uzluksiz funksiyalar. Shuni ta'kidlash lozimki, f monoton funksiya bo'lgan holda

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$$

tenglikdan $(a,\, b]$ yarim intervaldagi ixtiyoriy x uchun

$$\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a) \tag{17.13}$$

tenglik bajarilishi kelib chiqadi. Endi (17.13) tenglik o'rinli bo'ladigan funksiyalar sinfini tavsiflash uchun quyidagi ta'rifni keltiramiz.

17.2-ta'rif. *Bizga* $[a,\ b]$ *kesmada aniqlangan* f *funksiya berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $\delta > 0$ *mavjud bo'lib, soni chekli va har ikkisi o'zaro kesishmaydigan har qanday* $\{(a_k,\ b_k)\}_{k=1}^n$ *intervallar sistemasi uchun*

$$\bigcup_{k=1}^n (a_k,\ b_k) \subset [a,\ b], \quad \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

shartlar bajarilganda

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \tag{17.14}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f *funksiya* $[a,\ b]$ *kesmada absolyut uzluksiz deyiladi.*

17.2-ta'rifda $n = 1$ desak tekis uzluksiz funksiya ta'rifiga kelamiz. Ya'ni, har qanday absolyut uzluksiz funksiya tekis uzluksizdir.

Endi absolyut uzluksiz funksiyalarning ayrim xossalarini keltiramiz.

1. Absolyut uzluksiz funksiya ta'rifidagi "soni chekli" jumlani "soni chekli yoki sanoqli" jumla bilan almashtirish mumkin.

Isbot. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $[a,\ b]$ dan olingan har qanday o'zaro kesishmaydigan va uzunliklari yig'indisi δ dan kichik bo'lgan ixtiyoriy $\{(a_k,\ b_k)\}_{k=1}^n$ chekli intervallar sistemasi uchun

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \tag{17.15}$$

tengsizlik bajariladi. Endi $[a,\ b]$ dan olingan sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan va uzunliklarining yig'indisi δ dan kichik bo'lgan $\{(a_k,\ b_k)\}_{k=1}^\infty$ intervallar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun (17.15) tengsizlik o‘rinli. (17.15) tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o‘tib,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$$

tengsizlikni olamiz. Δ

2. Har qanday absolyut uzluksiz funksiya o‘zgarishi chegaralangandir.

Isbot. Funksiya absolyut uzluksiz bo‘lgani uchun quyidagilar o‘rinli:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}, \ \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

bo‘lganda

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. $[a, \ b]$ kesmani uzunligi δ dan oshmaydigan $[x_k, x_{k+1}]$ bo‘lakchalarga bo‘lamiz

$$[a, \ b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, \ x_{k+1}],$$

u holda ixtiyoriy $[x_k, \ x_{k+1}]$, $\quad (x_{k+1} - x_k < \delta)$ uchun $V_{x_k}^{x_{k+1}}[f] \leq \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli. Shuning uchun

$$V_a^b[f] = \sum_{k=1}^{n} V_{x_{k-1}}^{x_k}[f] < n \cdot \varepsilon.$$

3. Absolyut uzluksiz funksiyalar yig‘indisi, ayirmasi yana absolyut uzluksiz funksiyadir. Absolyut uzluksiz funksiyaning songa ko‘paytmasi yana absolyut uzluksiz funksiyadir.

3-xossaning isboti bevosita ta’rifdan kelib chiqadi.

4. Har qanday absolyut uzluksiz funksiyani ikkita monoton kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlash mumkin.

Isbot. f absolyut uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun u o‘zgarishi chegaralangan funksiyadir. Shuning uchun quyidagi tasvirlar o‘rinli

$$f(x) = v(x) - \varphi(x), \quad v(x) = V_a^x[f], \quad \varphi(x) = v(x) - f(x).$$

f ning absolyut uzluksizligidan v ning absolyut uzluksizligi kelib chiqadi. 3-xossaga ko'ra φ ham absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi. Δ

Quyidagi ikkita teorema absolyut uzluksiz funksiya va Lebegning aniqmas integrali orasidagi muhim bog'lanishni ifodalaydi.

17.3-teorema. *Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda*

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\, d\mu$$

funksiya $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $\{(a_k, b_k)\}_1^n \subset [a,\ b]$ o'zaro kesishmaydigan va uzunliklarining yig'indisi $\delta > 0$ oshmaydigan ixtiyoriy intervallar sistemasi bo'lsin. U holda

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{[a_k,b_k]} f(t)\ d\mu \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]} |f(t)| d\mu = \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} [a_k,b_k]} |f(t)| d\mu < \varepsilon.$$

Oxirgi tenglik Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasi (12.4-teorema) dan kelib chiqadi. Δ

17.4-teorema *(Lebeg). $F - [a,\ b]$ da absolyut uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $F'(x) = f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ da integrallanuvchi va ixtiyoriy $x \in [a,\ b]$ da quyidagi tenglik o'rinli*

$$\int_{[a,\, x]} f(t)\ d\mu = F(x) - F(a)\ .$$

17.4-teorema isbotida quyidagi lemmadan foydaliniladi.

17.1-lemma. *Agar $f-$ kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiya bo'lib, $f'(x) = 0$ tenglik deyarli barcha x lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda $f(x) = const$.*

17.4-teoremaning isboti. Teoremani $f(t) \geq 0$ bo'lgan holda isbotlash yetarli. Bu holda $F(x)$ kamaymaydigan funksiya bo'ladi.

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{[a,\,x]} f(t)\,d\mu \tag{17.16}$$

funksiyani qaraymiz. Φ ham kamaymaydigan funksiya. Haqiqatan ham, $x' < x''$ bo'lsin, u holda

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{[x',\,x'']} f(t)\;d\mu \geq 0.$$

So'nggi tengsizlik 17.2-teoremadan kelib chiqadi. $F(x)$ va

$$\int_{[a,\,x]} f(t)\,d\mu$$

lar absolyut uzluksiz funksiyalar bo'lganligi uchun Φ ham absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi. Bundan tashqari, deyarli barcha x lar uchun $\Phi'(x) = 0.$ Bobning boshida qo'yilgan 1-savolga javob berganda

$$\frac{d}{dx}\int_{[a,\,x]} f(t)d\mu = f(x), \quad \Phi^{'}(x) = f(x) - \frac{d}{dx}\int_{[a,\,x]} f(t)d\mu = 0$$

tengliklarni ko'rsatgan edik. 17.1-lemmaga ko'ra, $\Phi(x) = const.$ Ikkinchi tomondan

$$\Phi(a) = F(a) - \int_{[a,\,a]} f(t)\,dt = F(a)$$

tenglik o'rinli. Demak, (17.16) ko'ra,

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,\,x]} f(t)\,d\mu$$

tenglik o'rinli. Δ

17.3. Xulosa. 16.3-teoremaga ko'ra, ixtiyoriy o'zgarishi chegaralangan funksiyani uzluksiz o'zgarishi chegaralangan funksiya φ va sakrashlar funksiyasi H ning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin, ya'ni $f(x) = \varphi(x) + H(x)$.

Endi uzluksiz, lekin absolyut uzluksiz bo'lmagan va o'zgarishi chegaralangan φ funksiyani qaraymiz. Uning uchun deyarli hamma x larda chekli $\varphi'(x)$

hosila mavjud.

$$\psi(x) = \int_{[a,\, x]} \varphi'(t)\, d\mu$$

belgilash kiritamiz. U holda $\chi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ uzluksiz o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'ladi va deyarli barcha x lar uchun

$$\frac{d}{dx}\chi(x) = \varphi'(x) - \frac{d}{dx}\int_{[a,\, x]} \varphi'(t)\, dt = 0.$$

17.3-ta'rif. *Agar uzluksiz va o'zgarmasdan farqli o'zgarishi chegaralangan* f *funksiyaning hosilasi deyarli barcha* x *larda nolga aylansa, u singulyar funksiya deyiladi.*

Shunday qilib, biz quyidagi tasdiqqa keldik. Har qanday o'zgarishi chegaralangan f funksiya uchta funksiya yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi,

$$f(x) = H(x) + \psi(x) + \chi(x), \tag{17.17}$$

bu yerda H sakrashlar funksiyasi, χ singulyar funksiya, ψ absolyut uzluksiz funksiya.

Bu funksiyalar f funksiya yordamida o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida bir qiymatli aniqlanadi. Agar bu funksiyalardan ixtiyoriy ikkitasini $x = a$ nuqtada nolga teng deb aniqlasak, u holda (17.17) yoyilma yagonadir. Uni differensiallab, deyarli barcha x lar uchun

$$f'(x) = \psi'(x) \tag{17.18}$$

tenglikka ega bo'lamiz. (17.18) tenglikni integrallab,

$$\int_{[a,\, x]} f'(t)\; d\mu = \int_{[a,\, x]} \psi'(t)\; dt = \psi(x)$$

tenglikka kelamiz. Demak, o'zgarishi chegaralangan f funksiyaning hosilasi integrallanganda uning faqat absolyut uzluksiz qismi tiklanar ekan, f ning sakrashlar funksiyasi H, singulyar qismi χ izsiz yo'qoladi.

17.1-misol. Kantorning zinapoya funksiyasini $[0,\ 1]$ kesmada absolyut uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. 6.3-misolda ko'rsatildiki, Kantor to'plami K ning Lebeg o'lchovi nolga teng. Lebeg o'lchovi ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday, o'zaro kesishmaydigan $\{(a_k,\ b_k)\}_{k=1}^n$ invervallar sistemasi mavjudki, quyidagilar bajariladi:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n}(a_k,\ b_k), \quad \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta. \tag{17.19}$$

Ikkinchi tomondan, 6.7-misolda ko'rsatildiki ((6.16)-tenglikka qarang),

$$\mu_{\mathfrak{K}}([0,\ 1]\backslash K) = 0 \quad \text{va} \quad \mu_{\mathfrak{K}}([0,\ 1]) = \mathfrak{K}(1) - \mathfrak{K}(0) = 1.$$

Bu yerda $\mu_{\mathfrak{K}}$ Kantorning zinapoya funksiyasi yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi. Bu tenglikdan kelib chiqadiki, $\mu_{\mathfrak{K}}(K) = 1$. Endi o'lchovning yarim additivlik xossasidan hamda (17.19) dan foydalansak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mathfrak{K}(b_k) - \mathfrak{K}(a_k)\right) = \mu_{\mathfrak{K}}\left(\bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)\right) \geq \mu_{\mathfrak{K}}(K) = 1.$$

Demak, Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ absolyut uzluksiz funksiya ta'rifini qanoatlantirmaydi. $\mathfrak{K}$ absolyut uzluksiz funksiya emas. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Agar f funksiya $[a,\ b]$ kesmada Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda f ning $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz bo'lishini isbotlang.*

2. *$[a,\ b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz hosilaga ega bo'lgan f funksiyaning $[a,\ b]$ kesmadagi absolyut uzluksiz bo'lishini isbotlang.*

3. *Agar f funksiya $[a,\ b]$ da absolyut uzluksiz funksiya bo'lsa, uning tekis uzluksiz bo'lishini isbotlang.*

4. *$[a,\ b]$ kesmada tekis uzluksiz, lekin absolyut uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.*

18-§. Lebeg-Stiltes integrali

18.1. Lebeg-Stiltes o'lchovlari. Lebeg-Stiltes o'lchovlarini kiritishdan avval Lebeg o'lchovini aniqlash jarayonini eslaymiz. Sonlar o'qidagi $[a, b]$ kesmalar, (a, b) intervallar va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallar sistemasidan tashkil topgan yarim halqani $\mathfrak{S}_1$ bilan belgilaymiz; tekislikdagi tomonlari koordinata o'qlariga parallel to'g'ri to'ptburchaklar (6.1-bandga qarang) sistemasidan tashkil bo'lgan yarim halqani $\mathfrak{S}_2$ orqali belgilaymiz; tekislikdagiga o'xshash uch o'lchamli fazodagi qirralari koordinata o'qlariga parallel to'g'ri parallelepipedlar sistemasidan tashkil bo'lgan yarim halqani $\mathfrak{S}_3$ orqali belgilaymiz. Lebeg o'lchovini aniqlash (har uchchala holda ham mos ravishda) $\mathfrak{S}_1$ dagi uzunlik, $\mathfrak{S}_2$ dagi yuza, $\mathfrak{S}_3$ dagi hajm tushunchalariga asoslanib kiritilgan o'lchovlarni dastlab yarim halqani saqlovchi minimal halqaga davom ettirish va keyin yanada kengroq bo'lgan Lebeg bo'yicha o'lchovli to'plamlarning $\sigma-$ algebrasiga yoyish usuli bilan amalga oshirilgan edi. Bunda barcha ochiq va yopiq to'plamlar, ularning chekli va sanoqli birlashmalari va kesishmalari, bu birlashma va kesishmalarga to'ldiruvchi to'plamlar albatta o'lchovli to'plamlar bo'ladi. Bunday usul bilan aniqlangan Lebeg o'lchovi sanoqli additivlik va uzluksizlik xossalariga ega.

Yana sonlar o'qiga va $\mathfrak{S}_1$ yarim halqaga qaytamiz. Sonlar o'qida berilgan $F(x) = x$ funksiya yordamida $\mathfrak{S}_1$ da aniqlangan uzunlik tushunchasini (o'lchovni) quyidagicha ifodalash mumkin:

$$m((a, b)) = b - a = F(b) - F(a) = F(b - 0) - F(a),$$

$$m([a, b]) = b - a = F(b) - F(a) = F(b) - F(a - 0),$$

$$m((a, b]) = b - a = F(b) - F(a) = F(b) - F(a),$$

$$m([a, b)) = b - a = F(b) - F(a) = F(b - 0) - F(a - 0).$$

Bu usuldan $\mathfrak{S}_1$ da o‘lchovlar aniqlash uchun foydalanishimiz mumkin. Bizga sonlar o‘qida aniqlangan kamaymaydigan, o‘ngdan uzluksis F funksiya berilgan bo‘lsin. Har bir $[a,\ b],\ (a,\ b),\ (a,\ b],\ [a,\ b)$ ko‘rinishdagi oraliqlarga F funksiya yordamida mos ravishda

$$m((a,\,b)) = F(b-0) - F(a), \qquad m((a,\,b]) = F(b) - F(a), \tag{18.1}$$

$$m([a,\,b]) = F(b) - F(a-0), \qquad m([a,\,b)) = F(b-0) - F(a-0). \tag{18.2}$$

manfiymas sonlarni mos qo‘yamiz. Ishonch hosil qilish mumkinki, (18.1) - (18.2) tengliklar bilan aniqlangan oraliqlar (kesma, interval va yarim interval) funksiyasi manfiymas va additivdir. Yarim halqada kiritilgan bu o‘lchovga $6-\S$ da amalga oshirilgan mulohazalarni qo‘llab, qandaydir $\mu_F(\cdot)$ o‘lchovni qurishimiz mumkin. Sonlar o‘qidagi μ_F o‘lchovga nisbatan o‘lchovli bo‘lgan to’plamlarning $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_1, F)$ sistemasi sanoqli yig‘indi va sanoqli keshishmaga nisbatan yopiq bo‘ladi, μ_F o‘lchov esa $\sigma-$additiv bo‘ladi. Umuman olganda, μ_F o‘lchovga nisbatan o‘lchovli to‘plamlar sinfi F funksiyaning tanlanishiga bog‘liq. Ammo $\mathbb{R}$ da o‘ngdan uzluksiz kamaymaydigan F funksiya qanday tanlanmasin ochiq va yopiq to‘plamlar, shuningdek, ularning barcha chekli va sanoqli birlashma va kesishmalari, ularga to‘ldiruvchi to‘plamlar (ya’ni Borel to‘plamlari) o‘lchovli to‘plamlar bo‘ladi.

Sonlar o‘qida aniqlangan bunday μ_F o‘lchov F funksiyaning tanlanishiga bog‘liq holda ba’zi hususiyatlarga ega bo‘ladi.

Hozir μ_F o‘lchovning ba’zi bir sinflari bilan tanishamiz. Bizga Lebeg o‘lchovi μ va Lebeg-Stiltes o‘lchovi μ_F berilgan bo‘lsin.

18.1-ta’rif. *Agar Lebeg o‘chovi nolga teng bo‘lgan ixtiyoriy A to‘plam uchun $\mu_F(A) = 0$ bo‘lsa, u holda μ_F (Lebeg o‘choviga nisbatan) absolyut uzluksiz o‘lchov deyiladi.*

18.2-ta’rif. *Agar μ_F o‘lchov uchun chekli yoki sanoqli A to‘plam mavjud bo‘lib, A bilan kesishmaydigan ixtiyoriy B to‘plam uchun $\mu_F(B) = 0$*

bo'lsa (bu holat chekli yoki sanoqli qiymat qabul qiluvchi F funksiyalar uchun o'rinli), u holda μ_F diskret o'lchov deb ataladi.

18.3-ta'rif. *Agar μ_F o'lchovda istalgan bir nuqtali to'plam nol o'lchovga ega bo'lsa va Lebeg o'lchovi nolga teng bo'lgan biror A to'plam mavjud bo'lib, $\mu_F(\mathbb{R}\backslash A) = 0$ bo'lsa, u holda μ_F singulyar o'lchov deyiladi.*

Endi biror $[a, \ b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ kesmada aniqlangan kamaymaydigan, o'ngdan uzluksis F funksiyani olamiz. $[a, \ b]$ kesmada saqlanuvchi har bir $[\alpha, \ \beta]$ kesmalar, $(\alpha, \ \beta)$ intervallar va $(\alpha, \ \beta]$, $[\alpha, \ \beta)$ yarim intervallar sistemasidan tashkil bo'lgan $\mathfrak{S}_1$ yarim halqada F funksiya orqali (18.1)-(18.2) tengliklar yordamida m o'lchovni aniqlaymiz. Keyin m o'lchovni $\mathfrak{S}_1$ dan o'lchovni davom ettirishning Lebeg usulidan foydalanib, kengroq $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_1, F)$ $\sigma-$ algebraga davom ettiramiz. Bu $\sigma-$ algebra $[a, \ b]$ kesmada saqlanuvchi barcha ochiq va yopiq to'plamlarni, ularning barcha chekli va sanoqli birlashma va kesishmlarini, bu yig'indi va kesishmalarning to'ldiruvchilarini (demak, $[a, \ b]$ kesmada saqlanuvchi Borel to'plamlarini) o'zida saqlaydi.

18.4-ta'rif. *Sonlar o'qida yoki $[a, \ b]$ kesmada berilgan kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz F funksiya vositasida yuqorida aytilgan usulda qurilgan μ_F o'lchov Lebeg-Stiltes o'lchovi deb ataladi.*

Ko'rsatish mumkinki, istalgan o'lchov absolyut uzluksiz, diskret va singulyar o'lchovlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi va bu tasvir yagonadir.

18.2. Lebeg-Stiltes integrali. $[a, \ b]$ kesmada aniqlangan va kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz F funksiya yordamida hosil qilingan μ_F Lebeg-Stiltes o'lchovi berilgan bo'lsin. Bu o'lchov bo'yicha $[a, \ b]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar sinfini qaraymiz va har bir funksiyaga uning

$$\int_a^b f(x) d\mu_F$$

Lebeg integralini mos qo'yamiz. μ_F o'lchov bo'yicha aniqlangan bu integral *Lebeg-Stiltes integrali deb ataladi* va uning uchun

$$\int_a^b f(x)dF(x)$$

belgilashdan foydalaniladi.

Lebeg-Stiltes integralining ba'zi xususiy hollarini qaraymiz.

I. Bizga $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan, o'ngdan uzluksiz, kamaymay-digan sakrashlar funksiyasi F berilgan bo'lsin. U holda μ_F diskret o'lchov bo'ladi. Agar $x_i \in [a,\ b]$ nuqtalar F ning uzilish nuqtalari va h_i sonlar F funksiyaning x_i nuqtadagi sakrashi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dF(x)$$

integral $\sum f(x_i)h_i$ yig'indiga teng bo'ladi.

II. Agar F funksiya $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan kamaymaydigan absolyut uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dF(x)$$

Lebeg-Stiltes integrali $f(x)F'(x)$ funksiyaning odatdagi

$$\int_a^b f(x)F'(x)\,dx$$

Lebeg integraliga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx. \tag{18.3}$$

Integralning $\sigma-$additivlik xossasiga ko'ra, (18.3) tenglikni μ_F o'lchov bo'yicha integrallanuvchi sodda funksiyalar uchun ham umumlashtirish mumkin. Bizga f funksiyaga tekis yaqinlashuvchi, integrallanuvchi $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Umumiylikni chegaralamasdan $\{f_n\}$ ketma-ketlikni kamaymaydigan deb hisoblashimiz mumkin. U holda $\{f_n(x)F'(x)\}$ - kamaymaydigan ketma-ketlik deyarli hamma yerda $f(x)F'(x)$

funksiyaga yaqinlashadi. Demak, $\{f_n \cdot F'\}$ ketma-ketlik 13.2-teorema (Levi teoremasi) shartlarini qanoatlantiradi.

$$\int_a^b f_n(x)dF(x) = \int_a^b f_n(x)F'(x)dx \tag{18.4}$$

tenglikda $n \to \infty$ limitga o'tib,

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx \tag{18.5}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar F kamaymaydigan funksiya sakrashlar funksiyasi va absolyut uzluksiz funksiyalar yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda ixtiyoriy f integrallanuvchi (μ_F o'lchov bo'yicha) funksiya uchun uning Lebeg-Stiltes integrali qator (yoki chekli yig'indi) va odatdagi Lebeg integralini hisoblashga keltiriladi. Agar F kamaymaydigan funksiya singulyar komponentani ham saqlasa, yuqoridagi tasdiqni aytish mumkin emas.

Lebeg-Stiltes integrali tushunchasini F kamaymaydigan funksiya bo'lgan holdan Φ o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'lgan holga umumlashtirish mumkin. Aytaylik, $[a,\ b]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan Φ funksiya berilgan bo'lib, v esa uning $[a,\ x]$ kesmadagi to'la o'zgarishi bo'lsin. $15 - \S$ da olingan natijalarga ko'ra, $v(x)$, $[a,\ b]$ da kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz funksiya bo'ladi. Bundan tashqari $g = v - \Phi$ funksiya ham kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz funksiya bo'ladi. Ya'ni Φ funksiya ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi $\Phi = v - g$ ko'rinishda tasvirlanadi.

Agar f funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)dv(x) \quad \text{va} \quad \int_a^b f(x)dg(x)dx$$

Lebeg-Stiltes integrallari mavjud bo'lsa, u holda f funksiyaning Φ funksiya bo'yicha Lebeg-Stiltes integrali

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x) = \int_a^b f(x)dv(x) - \int_a^b f(x)dg(x)dx$$

tenglik yordamida aniqlanadi.

Aytaylik, Φ oʻzgarishi chegaralangan funksiya yana boshqa usulda W va h kamaymaydigan funksiyalarning $\Phi = W - h$ ayirmasi koʻrinishida tasvirlansin. Agar $\int_a^b f(x)d\Phi(x)$ Lebeg-Stiltes integrali mavjud boʻlsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dv(x) - \int_a^b f(x)dg(x)dx = \int_a^b f(x)dW(x) - \int_a^b f(x)dh(x)dx$$

tenglik oʻrinli. Mustaqil isbotlang.

Xulosa. f funksiyaning Φ oʻzgarishi chegaralangan funksiya boʻyicha Lebeg-Stiltes integralini hisoblash uchun Φ funksiyaning ikki kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi koʻrinishidagi istalgan tasviridan foydalanish mumkin.

18.1-misol. Quyidagi

$$\int_0^\infty 2^{-x}dF(x)$$

Lebeg-Stiltes integralini hisoblang. Bu yerda $A = [0,\ \infty)$ yarim oʻq, $F(x) = [x]$ funksiya esa x ning butun qismiga teng.

Yechish. Ma'lumki, $F(x) = [x]$ funksiya yordamida hosil qilingan μ_F oʻlchov diskret oʻlchov boʻladi. I ga koʻra,

$$\int_0^\infty 2^{-x}dF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\left(F(n) - F(n-0)\right)$$

tenglik oʻrinli. Agar $F(n) - F(n-0) = 1$ tenglikni e'tiborga olsak, soʻnggi qator yigʻindisini hisoblash mumkin. Bu qator $b_1 = 1$ va maxraji $q = \dfrac{1}{2}$ boʻlgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yigʻindisini ifodalaydi. Demak,

$$\int_0^\infty 2^{-x}dF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

18.2-misol. Quyidagi Lebeg-Stiltes integralini hisoblang.

$$\int_0^3 (x+1)dF(x)\,.$$

Bu yerda $A = [0,\ 3]$ kesma, $F(x) = x^2 + 3$.

Yechish. Ma'lumki, $F(x) = x^2 + 3$ funksiya yordamida hosil qilingan μ_F o'lchov absolyut uzluksiz o'lchov bo'ladi. II ga ko'ra

$$\int_0^3 (x+1)dF(x) = \int_0^3 (x+1) \cdot 2x\, dx$$

tenglik o'rinli. So'nggi integral jadval integrali bo'lib uning qiymati 20 ga teng. Demak,

$$\int_0^3 (x+1)dF(x) = 20.$$

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Lebeg-Stiltes o'lchovi qanday bo'lganda* $\int_a^b f(x)dF(x)$ *Lebeg-Stiltes integralini hisoblash masalasi, ma'lum qator yig'indisini hisoblashga keltiriladi.*

2. F *funksiya qanday shartni qanoatlantirganda* $\int_a^b f(x)dF(x)$ *Lebeg-Stiltes integralini hisoblash masalasi, odatdagi Lebeg integralini hisoblashga keltiriladi.*

3. $\int_0^1 \mathfrak{K}(x)dF(x)$ *Lebeg-Stiltes integralini hisoblang. Bu yerda* $F(x) = 2x + 1$.

4. $\int_0^1 \mathfrak{K}(x)dF(x)$ *Lebeg-Stiltes integralini hisoblang. Bu yerda* $F(x) = [3x] + 2x$.

VI bob. Metrik fazolar

Bu bob metrik fazolar va undagi asosiy tushunchalarni bayon qilishga bag'ishlangan bo'lib, 4 (19-22) paragrafdan iborat.

19-paragrafda metrik fazo ta'riflanib, ularga ko'plab misollar keltirilgan. $\mathbb{R}^n$ to'plamda har xil metrikalar kiritilgan. Metrikaning uchburchak tengsizligini isbotlashda Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklaridan foydalanilgan. O'z navbatida bu tengsizliklar ham o'z isbotlarini topgan. Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasi ham keltirilgan. Bundan tashqari gomeomorf va izomorf metrik fazolar ta'riflanib, ularga misollar keltirilgan.

20-paragraf esa metrik fazolarda yaqinlashish va undagi ochiq va yopiq to'plamlarning xossalariga bag'ishlangan. Ochiq va yopiq to'plamlarni ta'riflash uchun biz yordamchi tushunchalar - urinish nuqtasi, limitik nuqta, yakkalangan nuqta va ichki nuqta ta'riflarini berganmiz. Keyin yopiq va ochiq to'plamlarning xossalari isbotlangan. Jumladan metrik fazoda to'plam ochiq (yopiq) bo'lishining yetarli va zarur shartlari keltirilgan. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'riflanib, unga misollar keltirilgan. Metrik fazoning hamma yerida zich va hech yerda zichmas to'plamlar ta'riflanib, ularga misollar qaralgan. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$, $C[a, b]$, $C_p[a, b]$, ℓ_2 fazolarning separabel metrik fazolar bo'lishi ko'rsatilgan. Separabel bo'lmagan metrik fazoga misol keltirilgan. Sonlar o'qidagi ochiq to'plamlarning strukturasi berilgan.

21-paragraf to'la metrik fazolarga bag'ishlangan. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar orasidagi bog'lanish ochib berilgan. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_\infty$, ℓ_2, $C[a, b]$, metrik fazolarning to'laligi isbotlangan. $C_2[a, b]$ ning to'la bo'lmagan metrik fazo ekanligi isbotlangan. Metrik fazoning to'la bo'lishini ta'minlovchi ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema hamda Ber teoremasi isbotlangan. Har qanday metrik fazoni to'ldirish mumkinligi haqidagi teorema isboti bilan berilgan. Metrik fazolarda kompakt va nisbiy kompakt to‘plam tushunchalari berilgan. Asosiy funksional fazolar $C[a, b]$ va ℓ_p da kompakt (nisbiy kompakt) lik kriteriylari keltirilib, isbotlangan. Kompakt (nisbiy kompakt) va kompakt bo‘lmagan (nisbiy kompakt bo‘lmagan) to‘plamlarga misollar keltirilgan.

22-paragraf qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbiqlariga bag‘ishlangan. To‘la metrik fazolarda har qanday qisuvchi akslantirishning yagona qo‘zg‘almas nuqtasi mavjudligi isbotlangan. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining $\mathbb{R}^n$ metrik fazodagi algebraik tenglamalar sistemasiga tadbig‘i bayon qilingan. Bundan tashqari chiziqli va chiziqli bo‘lmagan integral tenglamalarni yechishda qisuvchi akslantirishlar prinsipidan qanday foydalanish mumkinligi bayon qilingan.

19-§. Metrik fazolar va ularga misollar

Analizdagi eng muhim amallardan biri bu limitga o‘tish amalidir. Bu amalning asosida sonlar o‘qida ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi yotadi. Analizda kiritilgan ko‘pgina fundamental tushunchalar sonlar o‘qining algebraik xususiyatlariga bog‘liq emas. Haqiqiy sonlar haqidagi tasavvurimizni to‘plam ma’nosida umumlashtirib, metrik fazo tushunchasiga kelamiz. Metrik fazo tushunchasi hozirgi zamon matematikasida muhim o‘rinni egallaydi.

19.1-ta’rif. *Bo‘shmas X to‘plamning ixtiyoriy x va y elementlar juftiga aniq bir $\rho(x,y)$ son mos qo‘yilgan bo‘lib, bu moslik*

1) $\rho(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X, \quad \rho(x,y)=0 \iff x=y,$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ *(simmetriklik aksiomasi),*

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ *(uchburchak aksiomasi)*

shartlarni qanoatlantirsa, ρ ga X dagi masofa yoki metrika deb ataladi. (X,ρ) juftlik metrik fazo deyiladi.

Odatda metrik fazo, ya'ni (X, ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda (X, ρ_1), $(X, \rho_2), \dots, (X, \rho_n)$ metrik fazolar mos ravishda $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ harflari bilan belgilanadi.

19.2-ta'rif. *Agar shunday $C_1 > 0$ va $C_2 > 0$ sonlar mavjud bo'lib barcha $x, y \in X$ lar uchun*

$$C_1 \rho_1(x,\, y) \le \rho_2(x,\, y) \le C_2 \rho_1(x,\, y)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, ρ_1 va ρ_2 lar ekvivalent metrikalar deyiladi.

Endi metrik fazoga bir nechta misollar keltiramiz.

19.1-misol. X qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin va har bir $x,\ y$ elementlar juftiga

$$\rho(x,\, y) = \begin{cases} 0, & agar\ \ x = y, \\ 1, & agar\ \ x \ne y \end{cases}$$

qonuniyat bo'yicha son mos qo'yilsin. Ravshanki, ρ akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Bu metrika *diskret metrika* deyiladi. Hosil bo'lgan metrik fazo *yakkalangan nuqtalar fazosi* deyiladi.

19.2. $\mathbb{R}-$ haqiqiy sonlar to'plami $\rho(x,\, y) = |x - y|$ masofa bo'yicha metrik fazo tashkil qiladi va bu metrik fazo ham $\mathbb{R}$ harfi bilan belgilanadi.

19.3. Ixtiyoriy n ta $x_1,\, x_2, \dots, x_n$ haqiqiy sonlarning tartiblangan $x = (x_1,\, x_2, \dots, x_n)$ guruhlaridan tashkil topgan to'plamda har bir x va y lar jufti (x, y) ga

$$\rho\left(x, y\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - y_k\right)^2} \tag{19.1}$$

manfiymas sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofa shartlarini qanoatlantiradi. Hosil bo'lgan metrik fazo $n-$ *o'lchamli arifmetik Evklid fazo* deyiladi. Endi (19.1) formula bilan aniqlangan ρ moslik metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

1) Barcha $x, y \in \mathbb{R}^n$ lar uchun $\rho(x,y)$ ning manfiymasligi (19.1) tenglikdan hamda haqiqiy sonning kvadrati manfiymasligidan kelib chiqadi.

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 = 0$$

tenglikdan barcha $k = 1, 2, \ldots n$ larda $x_k = y_k$ ya'ni $x = y$ kelib chiqadi. Agar $x = y$ bo'lsa, u holda (19.1) dan $\rho(x,y) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, 1-aksioma bajariladi.

2) $(a-b)^2 = (b-a)^2$ ayniyatdan

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} = \rho(y,x)$$

ni olamiz. Bu esa 2-aksiomaning bajarilishini bildiradi. Endi 3-aksiomaning bajarilishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy uchta $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1,\ z_2,\ \ldots, z_n)$ nuqtalar uchun uchburchak aksiomasi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - z_k)^2} \tag{19.2}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k - z_k = a_k + b_k$ bo'ladi va (19.2) tengsizlik

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{\mathrm{k}}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_{\mathrm{k}}^2} \tag{19.3}$$

ko'rinishni oladi. Ushbu

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

ayniyatni e'tiborga olsak,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{19.4}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. (19.4) *Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi. U holda biz

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bu munosabatdan (19.3) tengsizlik bevosita kelib chiqadi. Demak, uchburchak aksiomasi o‘rinli ekan. Hosil bo‘lgan metrik fazo $\mathbb{R}^n$ simvol bilan belgilanadi.

19.4. Yana $n-$ta haqiqiy sonlarning tartiblangan $(x_1,\,x_2,\ldots,x_n)=x$ guruhlaridan tashkil topgan to‘plamni qaraymiz va unda masofani

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \tag{19.5}$$

formula vositasida aniqlaymiz. Hosil bo‘lgan metrik fazo $\mathbb{R}_1^n$ simvol bilan belgilanadi. Bu moslik metrikaning 1-3-aksiomalarini qanoatlantirishini o‘quvchi mustaqil tekshirib ko‘rishi mumkin.

19.5. Yuqoridagi 19.3 va 19.4-misollarda keltirilgan to‘plamda elementlar orasidagi masofani

$$\rho_\infty(x,\,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k| \tag{19.6}$$

formula bilan aniqlaymiz. Metrika aksiomalarining bajarilishi oson tekshiriladi. Hosil bo‘lgan metrik fazo $\mathbb{R}_\infty^n$ simvol bilan belgilanadi.

19.6. $[a,\,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalardan tashkil topgan to‘plamni $C[a,\,b]$ bilan belgilaymiz. Bu to‘plamda

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|\,x(t)-y(t)\,| \tag{19.7}$$

akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Masofaning 1-3 aksiomalari bevosita tekshiriladi (o‘quvchiga mustaqil tekshirish uchun tavsiya etiladi). Bu metrik fazo analizda muhim ahamiyatga ega boʻlib, u ham toʻplam kabi $C[a,\, b]$ bilan belgilanadi.

19.7. Haqiqiy sonlardan tuzilgan va

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n, \ldots)$ ketma-ketliklardan tashkil topgan toʻplamni ℓ_2 bilan belgilaymiz. Bu toʻplamda masofa

$$\rho\,(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2} \tag{19.8}$$

formula bilan aniqlanadi. Har bir $x,\, y \in \ell_2$ elementlar uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$$

shartlar bajarilgani uchun va $(x_k \pm y_k)^2 \leq 2\left(x_k^2 + y_k^2\right)$ tengsizlikdan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2$$

qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Endi (19.8) formula bilan aniqlangan ρ moslikning metrika aksiomalarini qanoatlantirishini koʻrsatamiz. Ravshanki, 1 va 2-aksiomalar bajariladi. Uchburchak aksiomasi esa

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - z_k)^2} \tag{19.9}$$

koʻrinishga ega. Yuqorida zikr etilganlarga koʻra (19.9) tengsizlikdagi qatorlarning hammasi yaqinlashadi. Ikkinchi tomondan esa 19.3-misolda isbotlanganiga koʻra har bir n da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - z_k)^2}$$

tengsizlik oʻrinli. Oxirgi tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga oʻtsak, (19.9) tengsizlikning toʻgʻriligi isbotlanadi, ya'ni uchburchak aksiomasi oʻrinli.

19.8. $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha haqiqiy qiymatli funksiyalar toʻplamida

$$\rho_2\,(x,y) = \sqrt{\int_a^b\,(x\,(t) - y\,(t))^2\,dt}$$

formula yordamida masofa aniqlash mumkin. Hosil boʻlgan metrik fazo $C_2[a,\ b]$ simvol bilan belgilanadi va uzluksiz funksiyalarning *oʻrtacha kvadratik metrikali fazosi* deb ataladi. Ravshanki, ρ_2 moslik metrikaning 1 va 2-aksiomalarini qanoatlantiradi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi – Bunyakovskiyning ushbu

$$\left(\int_a^b x\,(t)\cdot y\,(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b x^2\,(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2\,(t)\,dt \qquad (19.10)$$

integral tengsizligidan foydalanib isbotlanadi. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi esa osongina tekshirish mumkin boʻlgan

$$\left(\int\limits_a^b x\,(t)\,y\,(t)\,dt\right)^2 = \int\limits_a^b x^2\,(t)\,dt\,\int\limits_a^b y^2\,(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b [x(s)y(t) - y(s)x(t)]^2 ds dt$$

ayniyatdan kelib chiqadi.

19.9. Yana $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiyalar toʻplamini qaraymiz. Bu toʻplamda ushbu

$$\rho_1\,(x,y) = \int_a^b \left|\,x\,(t) - y\,(t)\,\right|\ dt \qquad (19.11)$$

formula bilan aniqlangan akslantirish metrika shartlarini anoatlantiradi. Hosil boʻlgan metrik fazo $C_1[a,\ b]$ simvol bilan belgilanadi. ρ_1 akslantirish metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantirishini tekshirish oʻquvchiga mustaqil mashq sifatida tavsiya qilinadi.

19.10. Barcha chegaralangan $x = (x_1,\, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan tashkil topgan to'plamni qaraymiz. Bu to'plamdagi har bir x va $y = (y_1,\, y_2,\, \ldots, y_n, \ldots)$ elementlar juftiga

$$\rho\,(x, y) = \sup_{1 \le k \le \infty} |x_k - y_k| \tag{19.12}$$

sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo m harfi bilan belgilanadi. O'quvchi uchun 1-3 aksiomalarning bajarilishini tekshirish qiyin emas.

19.11. $n-$ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlaridan iborat $\mathbb{R}^n$ to'plamda har bir $p \ge 1$ son uchun

$$\rho_p\,(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{19.13}$$

formula bilan aniqlangan ρ_p moslik masofa aniqlaydi va hosil bo'lgan metrik fazo $\mathbb{R}^n_p$ simvol bilan belgilanadi. Bu misolda ham $1-$ va $2-$ aksiomalarning bajarilishini tekshirish qiyin emas. Shuning uchun $3-$ aksiomaning bajarilishini tekshirish yetarli. Qaralayotgan to'plamdan ixtiyoriy uchta $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n)$, $y = (y_1,\, y_2,\, \ldots, y_n)$, $z = (z_1,\, z_2,\, \ldots, z_n)$ nuqtalarni olib $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k - z_k = a_k + b_k$ bo'ladi va natijada $\rho_p\,(x, z) \le \rho_p\,(x, y) + \rho_p\,(y, z)$ uchburchak tengsizligi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\, a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\, a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\, b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{19.14}$$

ko'rinishni oladi. Hosil bo'lgan (19.14) tengsizlik *Minkovskiy tengsizligi* deb ataladi. Agar $p = 1$ bo'lsa, Minkovskiy tengsizligining bajarilishi ko'rinib turibdi (chunki, yig'indining moduli modullar yig'indisidan oshmaydi), shuning uchun $p > 1$ deb hisoblaymiz. Minkovskiy tengsizligining isboti *Gyolder tengsizligi* deb nomlanuvchi

$$\sum_{k=1}^{n} |\, a_k \cdot b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\, a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\, b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{19.15}$$

tengsizlikka asoslangan. Bu yerda $p > 1$ va $q > 1$ sonlar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{19.16}$$

shart bilan bog‘langan. (19.16) dan quyidagi tengliklar kelib chiqadi

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad p = \frac{q}{q-1}.$$

Ta’kidlash lozimki, (19.15) tengsizlik $a = (a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n)$ va $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nuqtalar uchun bajarilsa, u ixtiyoriy λ va μ sonlarda $\lambda a = (\lambda a_1,\ \lambda a_2, \ldots,\ \lambda a_n)$ va $\mu b = (\mu b_1, \mu b_2, \ldots, \mu b_n)$ nuqtalar uchun ham bajariladi va aksincha. Ya’ni (19.15) bir jinsli tengsizlikdir. Shunday ekan, (19.15) tenksizlikni

$$\sum_{k=1}^{n} |\, a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |\, b_k|^q = 1 \tag{19.17}$$

shartni qanoatlantiruvchi a va $b \in \mathbb{R}^n$ nuqtalar uchun isbotlash yetarli. U holda (19.15) tengsizlik (19.17) shart bajarilganda

$$\sum_{k=1}^{n} |\, a_k \cdot b_k| \le 1 \tag{19.18}$$

ko‘rinishni oladi. (19.17) shartda (19.18) tengsizlikni isbotlash uchun (ξ, η) tekislikda $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$ yoki $\xi = \eta^{q-1}$ $(\eta > 0)$ tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziqli (19.1-chizma) trapetsiya yuzini hisoblaymiz. Chizmadan ko‘rinib turibdiki, musbat a va b sonlarni qanday tanlamaylik, $ab \le S_1 + S_2$ tengsizlik o‘rinli. S_1 va S_2 yuzalarni hisoblaymiz:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

19.1-chizma

Shunday qilib, quyidagi sonli tengsizlik o‘rinli:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Agar a ni a_k ga, b ni b_k ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o‘zgartirib yig‘indi tuzsak, (19.16) va (19.17) shartlar bajarilganda (19.18) tengsizlik hosil bo‘ladi. Shunday qilib, (19.18) tengsizlik isbotlandi. Shunday ekan, umumiy (19.15) tengsizlik ham isbotlandi.

Agar $p = 2$ bo‘lsa, (19.15) Gyolder tengsizligidan (19.4) Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

Endi Minkovskiy tengsizligining isbotiga o‘tamiz. Buning uchun

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1} |a| + (|a| + |b|)^{p-1} |b|$$

ayniyatdan foydalanamiz. Bu ayniyatda $|a|$ ni $|a_k|$ ga, $|b|$ ni $|b_k|$ ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o‘zgartirib yig‘indi tuzsak, quyidagi ayniyatga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} (|\, a_k| + |\, b_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} (|\, a_k| + |\, b_k|)^{p-1} \ |\, a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|\, a_k| + |\, b_k|)^{p-1} \ |\, b_k|\,.$$

Tenglikning o‘ng tomonidagi har ikkala yig‘indiga ham Gyolder tengsizligini qo‘llasak va $(p-1)\ q = p$ ekanligini e’tiborga olsak, quyidagi tengsizlikka ega bo‘lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} (|\, a_k| + |\, b_k|)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|\, a_k| + |\, b_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left[\sum_{k=1}^{n} |\, a_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n} |\, b_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \right).$$

Bu tengsizlikning har ikkala tomonini

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|\, a_k| + |\, b_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

ga bo‘lib, isbotlanishi kerak bo‘lgan (19.14) Minkovskiy tengsizligiga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, uchburchak aksiomasi o‘rinli ekan.

Agar bu misolda $p = 2$ desak, ρ_p metrika 19.3-misoldagi metrikaga va agar $p = 1$ desak, 19.4-misoldagi metrikaga aylanadi. Koʻrsatish mumkinki, 19.5-misolda kiritilgan

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |\, x_k - y_k|$$

metrika ρ_p metrikaning $p \to \infty$ dagi limitik holati boladi, ya'ni

$$\rho_\infty(x, y) = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{19.19}$$

19.12. Hadlari

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k|^p < \infty, \quad p \ge 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan iborat va ikki nuqtasi orasidagi masofa

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{19.20}$$

formula bilan aniqlangan toʻplamni qaraymiz. Bu toʻplamni ℓ_p deb belgilaymiz. Ixtiyoriy $x, y \in \ell_p$ lar uchun har bir n da

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\, y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{19.21}$$

Minkovskiy tengsizligi oʻrinli boʻlgani va

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\, y_k|^p < \infty$$

shartlar bajarilgani uchun (19.21) da $n \to \infty$ da limitga oʻtsak,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ga ega boʻlamiz. Bundan ixtiyoriy $x, y \in \ell_p$ lar uchun (19.20) qatorning yaqinlashishiga ega boʻlamiz. (19.20) tenglik bilan aniqlangan ρ akslantirish metrikaning 1 va 2-aksiomalarini qanoatlantirishi ko‘rinib turibdi. Uchburchak aksiomasi (19.14) Minkovskiy tengsizligidan foydalanib isbotlanadi.

Endi biz $p \geq 1$ shartda Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasini beramiz.

$$\left(\int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_a^b |\,x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |\,y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (19.22)$$

Bu *Minkovskiy tengsizligi* deb ataladi. Minkovskiy tengsizligi, ya’ni (19.22) tengsizlik $[a,\ b]$ kesmada $p\ (p > 1)-$chi darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi ixtiyoriy x va y funksiyalar uchun o‘rinli.

$$\int_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (19.23)$$

tengsizlik *Gyolder tengsizligi* deb ataladi. Bu yerda $p > 1$ va $q > 1$ bo‘lib, ular (19.16) tenglikni qanoatlantiradi. Gyolder tengsizligi $[a,\ b]$ kesmada $p\ (p > 1)-$chi darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi x va $q\ (q > 1)$ chi darajasi bilan integrallanuvchi ixtiyoriy y funksiyalar uchun o‘rinli. (19.10) tengsizlik Koshi–Bunyakovskiy tengsizligining integral formasidir.

Endi V bobda xossalari o‘rganilgan o‘zgarishi chegaralangan va absolyut uzluksiz funksiyalar to‘plamini qaraymiz.

19.13. Berilgan $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar to‘plamida ikki nuqta orasidagi masofani

$$\rho(x,y) = |\,x(a) - y(a)\,| + V_a^b[x-y] \qquad (19.24)$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu yerda $V_a^b[f]-$ o‘zgarishi chegaralangan f funksiyaning $[a,\ b]$ kesmadagi to‘la o‘zgarishi (variatsiyasi). (19.24) tenglik bilan aniqlangan ρ akslantirishning metrika aksiomalarini qanoatlantirishi funksiya to‘la o‘zgarishining xossalaridan kelib chiqadi.

Masalan, uchburchak tengsizligi $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ da $x(t) - y(t) = \varphi(t)$ va $y(t) - z(t) = \psi(t)$ belgilashlar olsak, u quyidagi ko‘rinishni oladi

$$|\,\varphi\,(a)+\psi\,(a)\,|+V_a^b\,[\varphi+\psi]\leq|\,\varphi\,(a)\,|+|\,\psi\,(a)\,|+V_a^b\,[\varphi]+V_a^b\,[\psi]\,.$$

Bu esa $|a+b|\leq|a|+|b|$ tengsizlikdan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalarning

$$V_a^b[\varphi+\psi]\leq V_a^b[\varphi]+V_a^b[\psi]$$

xossasidan kelib chiqadi. Hosil qilingan metrik fazo *o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi* deyiladi va $V[a,\ b]$ orqali belgilanadi.

19.14. Berilgan $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va absolyut uzluksiz funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plamda ham ikki x va y nuqtalar orasidagi masofa $\rho\,(x,y)$, (19.24) tenglik bilan aniqlanadi. Hosil qilingan metrik fazo *absolyut uzluksiz funksiyalar fazosi* deb ataladi va $AC[a,\ b]$ orqali belgilanadi.

19.1-eslatma. $(X,\,\rho)$ metrik fazo va M uning ixtiyoriy qism to'plami bo'lsin. U holda X da aniqlangan ρ masofa, uning qismi bo'lgan M da ham masofa aniqlaydi. Shuning uchun $(M,\,\rho)$ metrik fazo bo'ladi. $(M,\,\rho)$ metrik fazo $(X,\,\rho)$ metrik fazoning *qism fazosi* deb ataladi.

19.1. Metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar

$X=(X,\,\rho)$ va $Y=(Y,d)$ – metrik fazolar, f esa X ni Y ga akslantirish bo'lsin. Shunday qilib, har bir $x\in X$ elementga yagona $y=f\,(x)\in Y$ element mos qo'yilgan bo'lsin.

19.3-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo'lib, $\rho\,(x,\,x_0)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ nuqtalar uchun*

$$d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f akslantirish $x_0\in X$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u holda f ni X da uzluksiz deb ataymiz.

Agar X va Y lar sonli to'plamlar bo'lsa, ya'ni $x-$ son, $f-$ sonli funksiya bo'lsa, u holda akslantirishning uzluksizlik ta'rifi matematik analizdan ma'lum bo'lgan funksiyaning uzluksizligi ta'rifiga aylanadi.

Ta'kidlash lozimki, agar X metrik fazodagi ρ masofani $X \times X$ metrik fazoni $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ metrik fazoga akslantirish deb qarasak, $\rho-$ uzluksiz akslantirish bo'ladi. Bu yerda $X \times X = \{(x, y) : \quad x, y \in X\}$ to'plamda (x_1, x_2) va (y_1, y_2) juftliklar orasidagi masofa

$$d\left((x_1, x_2),\ (y_1, y_2)\right) = \rho\left(x_1, y_1\right) + \rho\left(x_2, y_2\right)$$

formula yordamida aniqlanadi. Endi ρ akslantirishning uzluksizligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in X \times X$ nuqtani olamiz va mahkamlaymiz. Keyin ixtiyoriy $(x, y) \in X \times X$ nuqta olib, metrikaning uchburchak aksiomasidan foydalanamiz:

$$\rho\left(x, y\right) \leq \rho\left(x, x_0\right) + \rho\left(x_0, y\right) \leq \rho\left(x, x_0\right) + \rho\left(x_0, y_0\right) + \rho\left(y_0, y\right),$$

$$\rho\left(x_0, y_0\right) \leq \rho\left(x_0, x\right) + \rho\left(x, y\right) + \rho\left(y, y_0\right).$$

Bu ikki tengsizlikdan

$$\left|\rho\left(x, y\right) - \rho\left(x_0, y_0\right)\right| \leq \rho\left(x, x_0\right) + \rho\left(y_0, y\right)$$

ga kelamiz. Agar

$$d\left((x, y),\ (x_0, y_0)\right) = \rho\left(x, x_0\right) + \rho\left(y, y_0\right) < \varepsilon$$

desak, u holda $\left|\rho\left(x, y\right) - \rho\left(x_0, y_0\right)\right| \leq \varepsilon$ bo'ladi, ya'ni ρ uzluksiz akslantirish ekan.

Agar $f : X \to Y$ akslantirish X va Y metrik fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatsa, u holda Y ni X ga akslantiruvchi $x = f^{-1}\left(y\right)$ teskari akslantirish mavjud bo'ladi. Agar f o'zaro bir qiymatli moslik bo'lib, f va f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, u holda f *gomeomorf akslantirish* *yoki gomeomorfizm* deb ataladi, X va Y fazolar esa *gomeomorf fazolar* deb ataladi. Gomeomorf metrik fazolarga $\mathbb{R}$ va $(-1,\ 1)$ intervallarni misol sifatida qarash mumkin. Bu holda gomeomorfizmni $y = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x$ formula yordamida oʻrnatish mumkin.

Agar $X = (X, \rho)$ va $Y = (Y, d)$ metrik fazolar oʻrtasida oʻzaro bir qiymatli moslik oʻrnatuvchi f akslantirish ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ lar uchun $\rho(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$ shartni qanoatlantirsa, f akslantirish *izometriya deyiladi*, X va Y fazolar esa *izometrik fazolar* deb ataladi.

X va Y metrik fazolarning izometrikligi, ular elementlari orasidagi metrik bogʻlanishlar bir xil boʻlib, faqatgina ular elementlarining tabiatiga koʻra bir - biridan farq qilinishini bildiradi. Ular orasidagi bu farq metrik fazolar nuqtai nazaridan muhim emas. Bundan keyin oʻzaro izometrik fazolarni aynan bitta fazo deb qaraymiz.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Gyolder va Minkovskiy tengsizliklarini integral formada yozing.*

2. *(19.5) tenglik bilan aniqlangan* $\rho_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *akslantirish metrikaning* 1-3 *shartlarini qanoatlantirishini koʻrsating.*

3. *(19.7) tenglik bilan aniqlangan* $\rho : C[a,\ b] \times C[a,\ b] \to \mathbb{R}_+$ *akslantirish metrikaning* 1-3 *shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*

4. *(19.11) tenglik bilan aniqlangan* $\rho_1 : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}_+$ *akslantirish metrikaning* 1-3 *shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*

5. *(19.12) tenglik bilan aniqlangan* $\rho : m \times m \to \mathbb{R}_+$ *akslantirsh metrikaning* $1-3$ *shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*

6. *(19.19) tenglikni isbotlang.*

7. *(19.24) tenglik bilan aniqlangan* $\rho : V[a,\ b] \times V[a,\ b] \to \mathbb{R}_+$ *akslantirish metrikaning* $1-3$ *shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*

8. *Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:*

1) *Agar* $1 < p < q$ *bo'lsa,* ℓ_p *to'plam* ℓ_q *to'plamning qismi bo'ladi.*

2) *Absolyut uzluksiz funksiyalar fazosi* $AC[a,\ b]$ *o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi* $V[a,\ b]$ *ning qism fazosi bo'ladi.*

9. $\mathbb{R}^n$ *fazoda kiritilgan ixtiyoriy* ρ_1 *va* ρ_2 *metrikalarni ekvivalent ekanligini isbotlang. Xususan (19.1) va (19.13) tengliklar bilan aniqlangan* ρ *va* $\rho_p,\ p \geq 1$ *metrikalarni ekvivalent ekanligini isbotlang.*

20-§. Metrik fazolarda yaqinlashish

Biz bu paragrafda metrik fazoning asosiy tushunchalarini keltirib, ochiq va yopiq to'plamlarning xossalarini o'rganamiz.

20.1-ta'rif. *X metrik fazoda $x_0 \in X$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo'lsin. $\rho(x, x_0) < r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan ochiq shar deyiladi va u $B(x_0, r)$ orqali belgilanadi. Berilgan $x_0 \in X$ va $r > 0$ da $\rho(x, x_0) \leq r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami $B[x_0, r]$ orqali belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan yopiq shar deyiladi.*

Metrik fazolar nazariyasida markazi x_0 nuqtada va radiusi $\varepsilon > 0$ bo'lgan $B(x_0, \varepsilon)$ ochiq shar x_0 nuqtaning $\varepsilon-$ *atrofi* deyiladi va u $O_\varepsilon(x_0)$ ko'rinishda belgilanadi.

20.1-misol. Shunday metrik fazoga va undagi ikkita $B(x_1, r_1)$, $B(x_2, r_2)$ sharlarga misol keltiringki, $r_1 < r_2$ va $B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2)$ bo'lsin.

Yechish. Faraz qilaylik, $X = \mathbb{R}_+$ va $\rho(x, y) = |x - y|$ bo'lsin. Agar $B(1, 5) = \{x \in [0,\ \infty) : \ |x - 1| < 5\}$ deb markazi 1 nuqtada va radiusi 5 ga teng sharni, hamda $B(3, 4) = \{x \in [0,\ \infty) : \ |x - 3| < 4\}$ deb markazi 3 nuqtada va radiusi 4 ga teng bo‘lgan ochiq sharlarni olsak, u holda $r_2 = 5 > r_1 = 4$, ammo $[0,\ 6) = B(1,5) \subset B(3,4) = [0,\ 7)$.

20.2-ta’rif. *Agar X metrik fazoning M qism to‘plami uchun uni o‘zida saqlovchi shar mavjud bo‘lsa, M chegaralangan to‘plam deyiladi.*

20.3-ta’rif. *X metrik fazo, M uning qism to‘plami va $x \in X$ bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \bigcap M \neq \emptyset$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning urinish nuqtasi deyiladi. M ning barcha urinish nuqtalaridan iborat to‘plam M ning yopig‘i deyiladi va $[M]$ yoki $\overline{M}$ bilan belgilanadi.*

Shunday qilib, biz metrik fazo qism to‘plamlari uchun ulardan ularning yopig‘iga o‘tish amalini aniqladik. To‘plam yopig‘i amali quyidagi xossalarga ega.

20.1-teorema. Ushbu tasdiqlar o‘rinli:

1) $M \subset [M]$;

2) $[[M]] = [M]$;

3) *agar $M_1 \subset M_2$ bo‘lsa, u holda $[M_1] \subset [M_2]$;*

4) $[M_1 \bigcup M_2] = [M_1] \bigcup [M_2]$.

Isbot. M to‘plamning har bir nuqtasi uning uchun urinish nuqtasi bo‘lishi bevosita ta’rifdan kelib chiqadi, shuning uchun $M \subset [M]$.

Endi ikkinchi tasdiq isbotiga o‘tamiz. Birinchi tasdiqqa ko‘ra $[M] \subset [[M]]$. Endi $x \in [[M]]$ ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_{\varepsilon/2}(x) \bigcap [M] \neq \emptyset$, ya’ni shunday $y \in [M]$ mavjudki, $\rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Shunga o‘xshash, $O_{\varepsilon/2}(y) \bigcap M \neq \emptyset$. Ya’ni shunday $z \in M$ mavjud bo‘lib, $\rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$ bo‘ladi. U holda uchburchak aksiomasiga ko‘ra

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo‘ladi, ya’ni $O_\varepsilon(x) \bigcap M \neq \emptyset$. Bundan $x \in [M]$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday ekan, $[[M]] \subset [M]$. Demak, $[[M]] = [M]$.

Uchinchi tasdiqning isboti. $[M_1]$ to‘plamning ixtiyoriy x nuqtasini olamiz.

U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \bigcap M_1 \neq \emptyset$. Bundan $O_\varepsilon(x) \bigcap M_2 \neq \emptyset$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, x nuqta M_2 to'plamning urinish nuqtasi, ya'ni $x \in [M_2]$ ekan. Bundan $[M_1] \subset [M_2]$.

Nihoyat, to'rtinchi tasdiq isbotiga o'tamiz. Agar $x \in [M_1 \bigcup M_2]$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \bigcap (M_1 \bigcup M_2) \neq \emptyset$ bo'ladi. Bundan, $O_\varepsilon(x) \bigcap M_1 \neq \emptyset$ yoki $O_\varepsilon(x) \bigcap M_2 \neq \emptyset$ tengsizliklardan kamida bittasi bajariladi. U holda $x \in [M_1]$ yoki $x \in [M_2]$, bundan $x \in [M_1] \bigcup [M_2]$ ekan. Ya'ni $[M_1 \bigcup M_2] \subset [M_1] \bigcup [M_2]$. Ikkinchi tomondan, $M_1 \subset M_1 \bigcup M_2$ va $M_2 \subset M_1 \bigcup M_2$ bo'lgani uchun, 3-tasdiqqa ko'ra $[M_1] \subset [M_1 \bigcup M_2]$ va $[M_2] \subset [M_1 \bigcup M_2]$. Shunday ekan, $[M_1] \bigcup [M_2] \subset [M_1 \bigcup M_2]$. Demak, $[M_1] \bigcup [M_2] = [M_1 \bigcup M_2]$. Δ

20.4-ta'rif. *X metrik fazo va M uning xos qism to'plami bo'lsin. Agar $x \in X$ ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofi M ning cheksiz ko'p elementlarini saqlasa, u holda $x \in X$ nuqta M to'plamning limitik nuqtasi deyiladi.*

M ning barcha limitik nuqtalari to'plami M' bilan belgilanadi. Agar $M = M'$ bo'lsa M ga *mukammal to'plam* deyiladi.

To'plamning limitik nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

20.2. Agar $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar to'plami bo'lsa, u holda $\mathbb{R}$ ning har bir nuqtasi $\mathbb{Q}$ uchun limitik nuqta bo'ladi.

20.5-ta'rif. *Agar M to'plamga tegishli x nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \bigcap M = \{x\}$ bo'lsa, u holda x nuqta M to'plamning yakkalangan (yolg'iz) nuqtasi deyiladi.*

O'quvchi mustaqil isbotlashi mumkin bo'lgan quyidagi tasdiqlar o'rinli. M to'plamning istalgan urinish nuqtasi shu to'plamning limitik nuqtasi, yoki yakkalangan nuqtasi bo'ladi. Bu yerdan xulosa sifatida kelib chiqadiki, $[M]$ to'plam uch turdagi nuqtalardan tashkil topadi:

1) M to'plamning yakkalangan nuqtalari,

2) M ga tegishli bo'lgan, M ning limitik nuqtalari,

3) M ga tegishli bo'lmagan M ning limitik nuqtalari.

Bu xulosalardan kelib chiqadiki, M dan uning yopig'i $[M]$ ga o'tish uchun, M ga uning limitik nuqtalarini qo'shib olish bilan amalga oshiriladi, ya'ni $[M] = M \cup M'$.

20.1. Metrik fazolarda yaqinlashish

20.6-ta'rif. *X metrik fazoda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ nuqtalar ketma-ketligi va x nuqta berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ lar uchun x_n nuqta x ning $O_\varepsilon(x)$ atrofiga tegishli bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.*

Bu ta'rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin. Agar

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$$

munosabat bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga *yaqinlashadi* deyiladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'rifidan quyidagi ikki xulosa bevosita kelib chiqadi:

1) hech qanday ketma-ketlik ikkita har xil limitga ega emas;

2) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda uning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi ham x nuqtaga yaqinlashadi.

20.2-teorema. *Biror x nuqta M to'plamning urinish nuqtasi bo'lishi uchun M da x ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* x nuqta M to'plamning urinish nuqtasi bo'lsin. U holda ixtiyoriy n natural son uchun $O_{1/n}(x)$ atrofda kamida bitta $x_n \in M$ element mavjud. Bu x_n nuqtalardan tuzilgan $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlik x

nuqtaga yaqinlashadi.

Yetarliligi. Agar $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo‘lib, $n > n_0$ bo‘lganda $x_n \in O_\varepsilon(x)$ bo‘ladi, ya’ni $O_\varepsilon(x) \bigcap M \neq \emptyset$. Demak, x nuqta M ning urinish nuqtasi bo‘ladi. Δ

Agar $x - M$ to‘plamning limitik nuqtasi bo‘lsa, u holda $x_n \in O_{1/n}(x) \bigcap M$ nuqtalarni har xil qilib tanlash mumkin, chunki $O_{1/n}(x) \bigcap M-$ cheksiz to‘plam. Shunday qilib, x nuqta M to‘plam uchun limitik nuqta bo‘lishi uchun M da x ga yaqinlashuvchi har xil nuqtalardan tashkil topgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

X metrik fazoni Y metrik fazoga akslantiruvchi f akslantirish uzluksizligi tushunchasini quyidagicha ham ta’riflash mumkin. Bizga $f : X \to Y$ akslantirish va $x_0 \in X$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun unga mos keluvchi $\{y_n = f(x_n)\}$ ketma-ketlik $y_0 = f(x_0)$ nuqtaga yaqinlashsa, $f : X \to Y$ akslantirish x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi. 19-§ da keltirilgan 19.2-ta’rif bilan bu ta’rifning teng kuchli ekanligini isbotlashni o‘quvchiga qoldiramiz.

20.2. Zich to‘plamlar

20.7-ta’rif. *X metrik fazoning ikkita A va B qism to‘plamlari berilgan bo‘lsin. Agar $B \subset [A]$ bo‘lsa, u holda A to‘plam B to‘plamda zich deyiladi. Xususan, agar $[A] = X$ bo‘lsa, A to‘plam hamma yerda zich (X da zich) deyiladi. Agar A to‘plam birorta ham sharda zich bo‘lmasa (ya’ni har bir $B \subset X$ sharda A to‘plam bilan umumiy elementga ega bo‘lmagan B' shar saqlansa), u holda A hech yerda zichmas to‘plam deyiladi.*

20.3-misol. $\mathbb{Q}$ - ratsional sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ da zich to‘plamdir.

20.4. Natural sonlar to‘plami $\mathbb{N}$ haqiqiy sonlar metrik fazosi $\mathbb{R}$ ning hech yerida zichmas to‘plamdir.

Endi hamma yerda zich sanoqli qism to'plamga ega bo'lgan metrik fazolarga misollar qaraymiz. Odatda hamma yerda zich sanoqli qism to'plamga ega bo'lgan metrik fazolar *separabel metrik fazolar* deyiladi.

20.5. 19.1-misolda keltirilgan diskret fazo, hamma yerda zich sanoqli qism to'plamni fazoning elementlari sanoqli bo'lgan holda va faqat shu holda saqlaydi. Chunki, bu fazoda ixtiyoriy M uchun $[M]=M$ tenglik o'rinli. Shuning uchun diskret fazo separabel bo'lishi uchun uning sanoqli bo'lishi zarur va yetarli.

20.6. Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ separabel metrik fazodir, chunki ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ sanoqli va u $\mathbb{R}$ ning hamma yerida zich.

20.7. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_\infty$ va $\mathbb{R}^n_p\,(1<p<\infty)$ metrik fazolarning hammasida ratsional koordinatali nuqtalar to'plami sanoqli va hamma yerda zichdir. Shuning uchun $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_1, \mathbb{R}^n_\infty$ va $\mathbb{R}^n_p,\ p>1$ lar separabel metrik fazolardir.

20.8. $C[a,\ b]$, $C_1[a,\ b]$ va $C_2[a,\ b]$ metrik fazolarda ratsional koeffitsiyentli ko'phadlar to'plami sanoqli va hamma yerda zichdir. Shunday ekan, ular separabel metrik fazolardir.

20.9. ℓ_2 fazoda hadlari ratsional sonlar bo'lib, ulardan cheklitasi noldan farqli bo'lgan ketma-ketliklar to'plami sanoqli bo'ladi va u ℓ_2 ning hamma yerida zich. Demak, ℓ_2- separabel metrik fazo.

20.10. Yuqoridagi metrik fazolardan farqli o'laroq m separabel bo'lmagan metrik fazoga misol bo'ladi. Buni isbotlash uchun hadlari 0 va 1 lardan iborat barcha mumkin bo'lgan ketma-ketliklar to'plamini Φ bilan belgilaymiz. $\Phi\subset m$ va ikkita ixtiyoriy $x,y\in\Phi$ ketma-ketliklar kamida biror hadi bilan farq qilgani uchun $\rho(x,y)=1$. Ma'lumki, $\Phi-$ sanoqsiz (kontinuum quvvatli) to'plam. Φ ning elementlarini markaz qilib, radiusi $\dfrac{1}{2}$ ga teng ochiq sharlarni olamiz. Bu sharlar o'zaro kesishmaydi. Agar biror $M\subset m$ to'plam hamma yerda zich bo'lsa, har bir sharda M ning kamida bitta elementi yotadi. Sharlar soni Φ dagi elementlar soniga teng. M dagi elementlar soni esa sharlar sonidan, shuning uchun, Φ dagi elementlar sonidan kam emas. Shunday ekan, $M-$ sanoqsiz to‘plam. Demak, m ning hamma yerida zich sanoqli to‘plam mavjud emas ekan.

20.11. ℓ_p, $p \geq 1$ va c_0 fazolarda hadlari ratsional sonlar bo‘lib, ulardan cheklitasi noldan farqli bo‘lgan ketma-ketliklar to‘plami sanoqli bo‘ladi va u ℓ_p va c_0 fazolarning hamma yerida zich. Demak, ℓ_p va c_0 separabel metrik fazolar bo‘ladi.

20.3. Ochiq va yopiq to‘plamlar

20.8-ta’rif. *X metrik fazodagi M to‘plam uchun $M = [M]$ tenglik bajarilsa, M ga yopiq to‘plam deyiladi. Boshqacha aytganda, agar to‘plam o‘zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa, u yopiq to‘plam deyiladi.*

Ta’kidlash lozimki, 20.1-teoremaga ko‘ra M to‘plamning yopig‘i $[M]-$ yopiq to‘plamdir, hamda $[M]$ to‘plam M ni o‘zida saqlovchi minimal yopiq to‘plamdir.

20.12-misol. Har qanday metrik fazoda yopiq shar yopiq to‘plam bo‘ladi. Xususan, $C[a,\, b]$ fazoda ixtiyoriy $C > 0$ uchun $|f\,(x)| \leq C$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to‘plami yopiq to‘plam bo‘ladi.

20.13. $C[a,\, b]$ fazoda $|f\,(x)| < C$ (ochiq shar) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to‘plami yopiq emas, uning yopig‘i $|f\,(x)| \leq C$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to‘plamidan iborat.

20.14. Har qanday X metrik fazoda X va $\emptyset$ to‘plamlar yopiq to‘plamlardir.

20.15. Har qanday metrik fazoda chekli to‘plam yopiqdir.

20.3-teorema. *Ixtiyoriy sondagi yopiq to‘plamlar kesishmasi va chekli sondagi yopiq to‘plamlar yig‘indisi yopiqdir.*

Isbot. Ixtiyoriy sondagi F_α yopiq to‘plamlarning

$$F = \bigcap_\alpha F_\alpha$$

kesishmasini qaraymiz. F to‘plamning ixtiyoriy x limitik nuqtasini olaylik. U holda x ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofida F ning cheksiz ko'p elementi mavjud. Shunday ekan, $O_\varepsilon(x)$ da har bir F_α ning cheksiz ko'p elementi mavjud. Bu ko'rsatadiki, x nuqta har bir F_α uchun limitik nuqta bo'ladi va F_α lar yopiq bo'lgani uchun har bir α da $x \in F_\alpha$. Bundan

$$x \in F = \bigcap_\alpha F_\alpha$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni F yopiq to'plam.

Endi $F-$ cheklita yopiq to'plamlar yig'indisi, ya'ni

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

va $x \notin F$ bo'lsin. U holda $x \notin F_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ya'ni x nuqta F_k uchun limitik nuqta bo'la olmaydi. Shuning uchun x ning $O_{\varepsilon_1}(x), O_{\varepsilon_2}(x), \ldots,$ $O_{\varepsilon_n}(x)$ atroflari mavjudki, $O_{\varepsilon_k}(x)$ da F_k ning ko'pi bilan cheklita elementi bo'lishi mumkin. Agar

$$\varepsilon = \min_{1 \le k \le n} \varepsilon_k$$

desak, $O_\varepsilon(x)$ atrofda har bir F_k to'plam elementlari soni cheklitadan ko'p emas. U holda $O_\varepsilon(x)$ atrofda $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ to'plam elementlarining soni ham cheklitadan ko'p emas. Shuning uchun x nuqta F uchun limitik nuqta bo'la olmaydi. Ya'ni F ning barcha limitik nuqtalari o'zida saqlanadi. Demak, $F-$ yopiq to'plam. Δ

20.9-ta'rif. *Agar $x \in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x)$ atrof M da to'liq saqlansa ($O_\varepsilon(x) \subset M$), u holda x nuqta M to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan to'plam ochiq to'plam deyiladi. M ning barcha ichki nuqtalaridan iborat to'plam $\overset{\circ}{M}$ bilan belgilanadi.*

20.16-misol. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida ixtiyoriy (a, b) interval ochiq to'plamdir. Haqiqatan ham, agar $x \in (a, b)$ desak, $\varepsilon = \min\{x - a, \, b - x\}$ son uchun $O_\varepsilon(x) \subset (a, b)$.

20.17. $C[a,\ b]$ fazodagi g funksiyani olib, tayinlaymiz va G orqali $f(t) < g(t),\ \ t \in [a,\ b]$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. U holda G ochiq to'plam bo'ladi.

20.4-teorema. *M to'plam ochiq bo'lishi uchun uning butun fazogacha to'ldiruvchisi $X \backslash M$ yopiq bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* M ochiq to'plam bo'lsin. U holda M dan olingan har bir x nuqta o'zining biror $O_\varepsilon(x)$ atrofi bilan M ga tegishli bo'ladi, ya'ni $O_\varepsilon(x) \bigcap (X \setminus M) = \emptyset$. Shuning uchun $X \backslash M$ ga tegishli bo'lmagan nuqta $X \backslash M$ uchun urinish nuqtasi bo'la olmaydi, ya'ni $X \backslash M -$ yopiq to'plam.

Yetarliligi. $X \backslash M$ yopiq to'plam bo'lsin. U holda uning o'ziga tegishli bo'lmagan urinish nuqtasi yo'q, ya'ni har bir x uchun shunday $O_\varepsilon(x)$ atrof mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \subset M$ bo'ladi. Demak, M ochiq to'plam. Δ

20.18. Bo'sh to'plam va X fazo yopiq to'plamlardir. Ular biri-ikkinchisining to'ldiruvchisi bo'lgani uchun 20.4-teoremaga ko'ra $\emptyset$ va X lar ochiq to'plamlar ham bo'ladi.

Ikkilik prinsiplari hamda 20.3 va 20.4-teoremalar natijasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

20.5-teorema. *Ixtiyoriy sondagi ochiq to'plamlar yig'indisi va chekli sondagi ochiq to'plamlar kesishmasi yana ochiq to'plamdir.*

20.4. Sonlar o'qidagi ochiq va yopiq to'plamlar

Ixtiyoriy metrik fazoda, hattoki Evklid fazosida ham, ochiq va yopiq to'plamlar strukturasi, umuman olganda, juda murakkab. Ammo, bir o'lchamli Evklid fazosida, ya'ni sonlar o'qida barcha ochiq to'plamlarni (shu jumladan yopiq to'plamlarni) tavsiflash qiyin emas. Sonlar o'qidagi ochiq to'plamlar tavsifi quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

20.6-teorema. *Sonlar o'qidagi ixtiyoriy ochiq to'plam chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan intervallar yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi.*

Isbot. Sonlar o‘qidagi G ochiq to‘plamni qaraymiz. G to‘plam elementlari orasida ekvivalentlik munosabatini kiritamiz. Agar $x, y \in G$ nuqtalar uchun shunday (α, β) interval mavjud bo‘lib, $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$ bo‘lsa, $x \sim y$ deymiz. Ravshanki, bu munosabat refleksiv va simmetrikdir. Bundan tashqari $x \sim y$ va $y \sim z$ bo‘lgani uchun shunday (α, β) va (γ, δ) intervallar mavjud bo‘lib, $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$ va $y, z \in (\gamma, \delta) \subset G$ bo‘ladi. Bundan $\gamma < y < \beta$ va $(\alpha, \beta) \bigcap (\gamma, \delta) \neq \emptyset$ larga ko‘ra $(\alpha, \beta) \bigcap (\gamma, \delta) \subset G$ bo‘lishi kelib chiqadi. Agar $a = \min\{\alpha, \gamma\}$, $b = \max\{\beta, \delta\}$ desak, $x, z \in (a, b) = (\alpha, \beta) \bigcup (\gamma, \delta) \subset G$ bo‘ladi. Shunday ekan, $x \sim z$ ekanligi, ya’ni kiritilgan munosabatning tranzitivligi kelib chiqadi. Shuning uchun, G o‘zaro kesishmaydigan I_τ bir-biri bilan ekvivalent nuqtalarning sinflariga ajraladi, ya’ni $G = \bigcup_\tau I_\tau$. Har bir I_τ ning interval ekanligini ko‘rsatamiz. $a = \inf I_\tau$, $b = \sup I_\tau$ belgilashlarni kiritamiz. I_τ ning tuzilishiga ko‘ra $a \notin I_\tau$ va $b \notin I_\tau$. U holda $I_\tau \subset (a,\, b)$. Ikkinchi tomondan, agar $x < y$, $x, y \in I_\tau$ desak, I_τ ning tuzilishiga ko‘ra $(x, y) \subset I_\tau$. Bundan tashqari a dan o‘ng tomonda va a ga istalgancha yaqin, b dan chap tomonda va b ga ixtiyoriy yaqinlikda I_τ ning elementlari mavjud. Shuning uchun, chetlari (a, b) ga tegishli ixtiyoriy (a', b') interval I_τ da saqlanadi. Bundan $I_\tau = (a, b)$ tenglik kelib chiqadi. Bunday kesishmaydigan I_τ intervallar soni ko‘pi bilan sanoqli, chunki har bir I_τ interval kamida bitta ratsional nuqtani saqlaydi. Shuning uchun intervallar soni ratsional nuqtalar sonidan ko‘p emas. Δ

Yopiq to‘plamlar ochiq to‘plamlarning to‘ldiruvchi to‘plami bo‘lgani uchun, ixtiyoriy yopiq to‘plam sonlar o‘qidan chekli yoki sanoqlita o‘zaro kesishmaydigan intervallarni chiqarib tashlashdan hosil bo‘ladi.

20.19. $\mathbb{R}$ da sodda yopiq to‘plamlarga misol sifatida kesmalar, alohida nuqtalar va chekli shunday to‘plamlar yig‘indisini qarash mumkin.

20.20. Murakkabroq yopiq to‘plamga misol sifatida *Kantor to‘plami* ni keltirish mumkin. Kantor to‘plamining qurilishi va kontinuum quvvatli ekanligi 4.7-misolda keltirilgan. Uning o‘lchovi nol ekanligi 6.3-misolda ko‘rsatilgan. U kontinuum quvvatli, nol o‘lchovli to‘plam. Kantor to‘plamining quyidagi xossalarini isbotlang.

1) Kantor to‘plamining yakkalangan nuqtalari mavjud emas.

2) Kantor to‘plamining ichki nuqtalari mavjud emas, ya’ni $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

3) Kantor to‘plami mukammal to‘plam, ya’ni $K = K'$.

4) Kantor to‘plami $[0,\ 1]$ kesmaning hech yerida zich emas.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$ *to‘plamni* $\mathbb{R}^2$ *metrik fazoda ochiq to‘plam bo‘lishini isbotlang.*

2. $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\right\}$ *to‘plamni* $\mathbb{R}^2$ *metrik fazoda yopiq to‘plam bo‘lishini isbotlang.*

3. *Ratsional sonlar to‘plami* $\mathbb{Q}$ *ning yopig‘ini toping.*

4. $\mathbb{Q}$ *ni* $\mathbb{R}$ *ning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.*

5. *Butun sonlar to‘plami* $\mathbb{Z}$ *ni* $\mathbb{R}$ *ning hech yerida zich emasligini isbotlang.*

6. $\mathbb{Q}$ *ning barcha yakkalangan nuqtalari to‘plamini toping.*

7. $\mathbb{Z}$ *ning barcha yakkalangan nuqtalari to‘plamini toping.*

8. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *ning barcha limitik nuqtalari to‘plamini toping.*

9. *To‘plam yopig‘ining xossalarini keltiring.*

10. *Sanoqli sondagi ochiq to‘plamlarning kesishmasi ochiq to‘plam bo‘lmasligiga misol keltiring.*

11. *Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plam bo'lmasligiga misol keltiring.*

12. *Kantor to'plami* $[0, 1]$ *kesmada zichmi?* K *to'plam* $[0, 1]$ *kesmadagi biror* (a, b) *intervalda zich bo'la oladimi?*

13. *Kantor to'plamining Lebeg ma'nosida o'lchovli ekanligini ko'rsating. Uning o'lchovini toping.*

14. *Kantor to'plamining barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.*

15. *Diskret metrik fazoda ixtiyoriy* M *uchun* $M = [M]$ *tenglikni isbotlang.*

21-§. To'la metrik fazolar

Matematik analizdan ma'lumki, har qanday fundamental sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Bu tasdiq sonlar o'qining to'laligini ifodalaydi. Quyida ko'rsatiladiki, ixtiyoriy metrik fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi (21.8-misolga qarang) bo'lavermaydi.

21.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* N_ε *natural son mavjud bo'lib, barcha* $n > N_\varepsilon$ *va* $m > N_\varepsilon$ *nomerlar uchun* $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik deyiladi.*

Uchburchak aksiomasidan bevosita kelib chiqadiki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamentaldir. Haqiqatan ham, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε son mavjudki, barcha $n > N_\varepsilon$ nomerlarda $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ tengsizlik bajariladi. U holda ixtiyoriy $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Demak, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekan.

21.2-ta'rif. *Agar* X *metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* X *to'la metrik fazo deyiladi.*

21.1-misol. Yakkalangan nuqtalar fazosida faqatgina statsionar (ya'ni biror nomerdan boshlab hamma nomerlarda birgina nuqta takrorlanadigan) ketma-ketliklar fundamental va shuning uchun yaqinlashadi, ya'ni bu fazo to'la.

21.2. $\mathbb{R}-$ fazoning to'laligi matematik analiz [4] kursidan ma'lum.

21.3. $\mathbb{R}^n$ to'la metrik fazodir. Isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik, $x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) -$ $\mathbb{R}^n$ dagi ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε nomer mavjud bo'lib, barcha $p > N_\varepsilon$ va $q > N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\rho(x^{(p)}, x^{(q)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)^2} < \varepsilon. \tag{21.1}$$

Natijada har bir $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun $\left\{x_k^{(p)}\right\}$ ketma-ketlik barcha $p > N_\varepsilon$ va $q > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $\left|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni $\left\{x_k^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$ fundamental sonli ketma-ketlikdir va $\mathbb{R}$ fazo to'la bo'lganligi uchun u yaqinlashuvchi bo'ladi. Uning limitini

$$x_k = \lim_{p \to \infty} x_k^{(p)}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

orqali belgilaymiz. U holda, (21.1) tengsizlikda $p > N_\varepsilon$ deb $q \to \infty$ da limitga o'tsak

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{(p)} - x_k\right)^2} \leq \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan

$$\lim_{p \to \infty} x^{(p)} = (x_1, \, x_2, \ldots, x_n) = x. \qquad \Delta$$

21.4.-21.5. $\mathbb{R}^n_\infty$ va $\mathbb{R}^n_p$ fazolarning to'laligi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

21.6. $C[a, \ b]$ fazo to'la metrik fazodir. Isbotlang.

Isbot. $\{x_n\} \subset C[a,\ b]$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n, m > N_\varepsilon$ bo‘lganda

$$\rho\left(x_n, x_m\right) = \max_{a \le t \le b} \left| x_n\left(t\right) - x_m\left(t\right) \right| < \varepsilon \tag{21.2}$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n\}$ funksional ketma-ketlikning $[a,\ b]$ kesmada tekis yaqinlashish shartidir. Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan biror x uzluksiz funksiyaga tekis yaqinlashadi. Agar (21.2) tengsizlikda $n > N_\varepsilon$ bo‘lganda $m \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\rho\left(x_n, x\right) = \max_{a \le t \le b} \left| x_n\left(t\right) - x\left(t\right) \right| \le \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi, ya’ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik $C[a,\ b]$ fazo metrikasida x funksiyaga yaqinlashadi. Δ

21.7. ℓ_2 to‘la metrik fazodir. Isbotlang.

Isbot. $\{x^{(n)}\} \subset \ell_2$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n, m > N_\varepsilon$ bo‘lganda

$$\rho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2} < \varepsilon \tag{21.3}$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$. (21.3) dan kelib chiqadiki, ixtiyoriy k natural son uchun $\left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right| < \varepsilon$ bo‘ladi, ya’ni har bir k da $x_k^{(n)}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi fundamentaldir va shuning uchun u yaqinlashadi. Aytaylik,

$$x_k = \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

bo‘lsin. Endi x bilan yuqoridagi x_k limitlar orqali tuzilgan $(x_1,\ x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ ketma-ketlikni belgilaymiz.

Quyidagilarni ko‘rsatishimiz kerak:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, ya’ni $x \in \ell_2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(x,\ x^{(n)}\right) = 0.$

(21.3) tengsizlikka asosan har bir belgilangan N natural son uchun

$$\sum_{k=1}^{N}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o‘rinli. Bu tengsizlikning chap tomonidagi yig‘indida cheklita qo‘shiluvchi bo‘lgani uchun $n > N_\varepsilon$ ni tayinlab, $m \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\sum_{k=1}^{N}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2 \leq \varepsilon^2$$

tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlik barcha N larda o‘rinli, shuning uchun $N \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2 \leq \varepsilon^2 \tag{21.4}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo‘lgani va

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right)^2 \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - x_k^{(n)}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)^2$$

munosabatdan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi, ya’ni a) tasdiq isbotlandi. (21.4) tengsizlikda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x,\ x^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - x_k^{(n)}\right)^2} = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni ℓ_2 fazo metrikasida $x^{(n)} \to x$. b) tasdiq ham isbot bo‘ldi. Δ

21.8. $C_2[-1,\ 1]$ metrik fazo to'la emas. Isbotlang.

Isbot. Buning uchun $C_2[-1,\ 1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1,\ -1/n]\,, \\ n\,x, & x \in (-1/n,\ \ 1/n)\,, \\ 1, & x \in [1/n,\ 1] \end{cases}$$

21.1-chizma

ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik $C_2[-1,\ 1]$ fazoda fundamentaldir, chunki barcha $x \in [-1,\ 1]$ lar uchun $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ ekanligini hisobga olsak va $n < m$ desak,

$$\rho^2(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} (f_n(x) - f_m(x))^2\,dx \leq \int_{-1/n}^{1/n} 1dx = \frac{2}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Biroq $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1,\ 1]$ fazodagi birorta ham funksiyaga yaqinlashmaydi. Haqiqatan ham, $f \in C_2[-1,\ 1]$ ixtiyoriy funksiya va

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & agar\ x \in [-1,\ 0), \\ 1, & agar\ x \in [0,\ 1] \end{cases}$$

nol nuqtada uzilishga ega funksiya bo'lsin. Ko'rinib turibdiki,

$$f_n(x) - \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,\ \ -1/n] \bigcup [1/n,\ \ 1]\,, \\ n\,x + 1, & x \in (-1/n,\ 0)\,, \\ nx - 1, & x \in [0,\ 1/n). \end{cases}$$

Bundan tashqari barcha $x \in [-1,\ 1]$ lar uchun $|f_n(x) - \varphi(x)| \leq 1$. Shuning uchun

$$\int\limits_{-1}^{1} (f_n(x) - \varphi(x))^2\, dx = \int\limits_{-1/n}^{1/n} (f_n(x) - \varphi(x))^2\, dx \leq \frac{2}{n} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{21.5}$$

Agar Minkovskiy tengsizligidan foydalansak ((19.22) ga qarang),

$$\left[\int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left[\int_{-1}^{1} (f(x) - f_n(x))^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{-1}^{1} (f_n(x) - \varphi(x))^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{21.6}$$

tengsizlikka kelamiz. Endi quyidagi

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx > 0 \tag{21.7}$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Uning isbotini ikki holga ajratamiz.

1) Faraz qilaylik, $f(0) \leq 0$ bo‘lsin, u holda f ning uzluksizligiga ko‘ra shunday $\delta_1 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [0, \delta_1]$ lar uchun $f(x) < 1/2$ bo‘ladi. Bundan

$$|f(x) - \varphi(x)|^2 \geq 1/4, \qquad x \in [0,\ \delta_1] \tag{21.8}$$

tengsizlik kelib chiqadi. (21.8) tengsizlikni $[0, \delta_1]$ kesma bo‘yicha integrallab,

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx \geq \int_{0}^{\delta_1} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx > \frac{\delta_1}{4}$$

tengsizlikka kelamiz.

2) Agar biz $f(0) > 0$ deb faraz qilsak, u holda shunday $\delta_2 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [-\delta_2,\ 0)$ lar uchun $|f(x) - \varphi(x)| > 1/2$ bo‘ladi. Bundan

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx \geq \int_{-\delta_2}^{0} (f(x) - \varphi(x))^2\, dx > \frac{\delta_2}{4}.$$

Demak, (21.7) tengsizlik isbot bo‘ldi. (21.6) tengsizlikdan

$$\left[\int_{-1}^{1} (f(x) - f_n(x))^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq \left[\int_{-1}^{1}(f(x)-\varphi(x))^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}-\left[\int_{-1}^{1}(f_n(x)-\varphi(x))^2\,dx\right] \qquad (21.9)$$

ni olamiz. (21.5), (21.7) va (21.9) lardan

$$\rho(f,f_n)=\left[\int_{-1}^{1}(f(x)-f_n(x))^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

ning nolga yaqinlasha olmasligi kelib chiqadi, ya'ni $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1,\ 1]$ dagi birorta ham funksiyaga yaqinlasha olmaydi. Δ

21.9. $\ell_p,\ \ p\geq 1$ va $m,\ c,\ c_0$ fazolar to'la metrik fazolardir.

21.1. Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema

Ma'lumki, analizda ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemma keng qo'llaniladi. Metrik fazolar nazariyasida esa *ichma-ich joylashgan yopiq sharlar* haqidagi teorema deb ataluvchi quyidagi teorema shunga o'xshash muhim ahamiyatga ega.

21.1-teorema. *X metrik fazo to'la bo'lishi uchun undagi ixtiyoriy ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isbot. *Zaruriyligi.* X to'la metrik fazo bo'lsin va $B_1,B_2,B_3,\ldots$ - ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi bo'lib, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intilsin. B_n sharning markazi x_n nuqtada va radiusi r_n bo'lsin. Barcha $m>n$ lar uchun $\rho(x_n,x_m)<r_n$ va $n\to\infty$ da $r_n\to 0$ bo'lgani uchun, sharlarning markazlari ketma-ketligi $\{x_n\}$ fundamentaldir. X to'la metrik fazo bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ mavjud. Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

bo'lsin. Har bir n da barcha $m>n$ lar uchun $x_m\in B_n$. Shunday ekan, har bir n da x nuqta B_n shar uchun urinish nuqtasi bo'ladi. Barcha n larda B_n

yopiq bo'lgani uchun $x \in B_n$. U holda

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$

Yetarliligi. X da ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin. U holda bu ketma-ketlik uchun shunday n_1 nomer topiladiki, barcha $n > n_1$ larda $\rho(x_n, x_{n_1}) < \dfrac{1}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Markazi x_{n_1} nuqtada va radiusi 1 ga teng B_1 yopiq sharni olamiz. Keyin $n_2 > n_1$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_2$ larda $\rho(x_n, x_{n_2}) < \dfrac{1}{2^2}$ tengsizlik bajarilsin. Markazi x_{n_2} nuqtada va radiusi $\dfrac{1}{2}$ ga teng B_2 yopiq sharni olamiz. Tanlanishiga ko'ra, $B_2 \subset B_1$, $r_1 = 1$, $r_2 = \dfrac{1}{2}$. Endi $n_3 > n_2$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_3$ larda $\rho(x_n, x_{n_3}) < \dfrac{1}{2^3}$ tengsizlik bajarilsin. Agar shu usulda $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ nuqtalar tanlangan bo'lsa, u holda $x_{n_{k+1}}$ nuqtani shunday tanlaymizki, $n_{k+1} > n_k$ va barcha $n > n_{k+1}$ larda $\rho\left(x_n, x_{n_{k+1}}\right) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$ bo'lsin. Yuqoridagidek markazi $x_{n_{k+1}}$ da va radiusi $\dfrac{1}{2^k}$ ga teng bo'lgan yopiq sharni B_{k+1} orqali belgilaymiz. Sharlarni bunday qurish jarayonini davom ettira borib, ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligini hosil qilamiz va ularning radiuslari ketma-ketligi $\left\{r_k = \dfrac{1}{2^{k-1}}\right\}$, $k \to \infty$ da nolga intiladi. Teorema shartiga ko'ra, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$ va $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ bo'lsin. Bu sharlar ketma-ketligi umumiy nuqtaga ega va bu nuqtani x deb belgilaymiz. B_k sharlar ketma-ketligining qurilishiga ko'ra x nuqta $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikning limiti bo'ladi. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikning $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligi x nuqtaga yaqinlashgani uchun, $\{x_n\}$ ham x nuqtaga yaqinlashadi. Shunday qilib, $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Δ

21.2-teorema *(Ber teoremasi). To'la metrik fazoni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin emas.*

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

bo'lsin, bu yerda M_n larning har biri hech yerda zich bo'lmagan to'plamlar. Radiusi 1 ga teng biror B_0 yopiq sharni olamiz. Farazimizga ko'ra M_1 to'plam B_0 da zichmas. Shuning uchun radiusi $\frac{1}{2}$ dan kichik shunday yopiq $B_1 \subset B_0$ shar mavjudki, $B_1 \bigcap M_1 = \emptyset$. Hech yerda zichmas M_2 to'plam B_1 sharda ham zichmas, shunday ekan, radiusi $\frac{1}{3}$ dan kichik shunday $B_2 \subset B_1$ yopiq shar mavjudki, $B_2 \bigcap M_2 = \emptyset$ va hokazo. Jarayonni shu usulda cheksiz davom ettirib, yopiq sharlarning shunday ichma-ich joylashgan $\{B_n\}$ ketma-ketligini hosil qilamizki, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intiladi. 21.1-teoremaga ko'ra $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$. Faraz qilaylik, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ bo'lsin. B_n sharlarning tuzilishiga ko'ra ixtiyoriy n da $x \notin M_n$, shunday ekan, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ ya'ni $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Bu farazimizga zid. Δ

21.2. Metrik fazolarni to'ldirish

Agar R metrik fazo to'la bo'lmasa, uni biror usul bilan (aslini olganda yagona usul bilan) biror to'la metrik fazo ichiga joylashtirishimiz mumkin.

21.3-ta'rif. *Agar:* 1) R *metrik fazo* R^* *to'la metrik fazoning qism fazosi bo'lsa;* 2) R *to'plam* R^* *ning hamma yerida zich, ya'ni* $[R] = R^*$ *bo'lsa, u holda* R^* *metrik fazo* R *metrik fazoning to'ldirmasi deyiladi.*

21.3-teorema. *Har bir* R *metrik fazo to'ldirmaga ega va bu to'ldirma fazo* R *ning nuqtalarini qo'zg'almas holda qoldiruvchi izometriya aniqligida yagonadir.*

Isbot. Dastlab to'ldirma fazoning yagonaligini isbotlaymiz. R^* va R^{**} lar R ning ikkita to'ldirma fazolari bo'lib, ρ_1 va ρ_2 mos ravishda ulardagi masofalar bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, har bir $x^* \in R^*$ uchun shunday $\{x_n\} \subset R$

ketma-ketlik mavjud bo'lib, $\{x_n\} \to x^*$ bo'ladi. U holda

$$\lim_{m \geq n \to \infty} \rho(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \to \infty} \rho_1(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \to \infty} \rho_2(x_n, x_m) = 0$$

munosabatga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlik R, R^* va R^{**} fazolarda fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Shuning uchun, yagona $x^{**} \in R^{**}$ mavjud bo'lib, $\{x_n\} \to x^{**}$. Bu x^{**} nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas. Chunki, agar $\{x_n\} \to x^*$ va $\{y_n\} \to x^*$ bo'lsa,

$$z_n = \begin{cases} x_k, \ agar \ n = 2k - 1, \\ y_k, \ agar \ n = 2k \end{cases}$$

ketma-ketlik ham x^* ga yaqinlashadi. Tuzilishiga ko'ra, $\{z_n\}-$ fundamental va uning $\{x_k\}$ qismiy ketma-ketligi x^{**} nuqtaga yaqinlashadi. U holda $\{z_n\}$ ning o'zi ham x^{**} ga yaqinlashadi va shunday ekan, $\{y_n\}$ qismiy ketma-ketlik ham x^{**} ga yaqinlashadi. Ko'rsatilgan yo'l har bir $x^* \in R^*$ uchun yagona x^{**} ni mos qo'yadi. R^* va R^{**} o'rtasida $\varphi(x^*) = x^{**}$ moslikni o'rnatamiz. Agar $x \in R$ bo'lsa, $x \in R^*$ va $x \in R^{**}$ bo'ladi, hamda $x_n = x$ statsionar ketma-ketlik x elementga R^* va R^{**} fazolarda yaqinlashadi.

Shuning uchun, ixtiyoriy $x \in R$ uchun $\varphi(x) = x$. Bu usulda aniqlangan φ moslik R^* ni R^{**} ga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Endi φ ning izometriya ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\{x_n\} \to x^*$, $x^* \in R^*$ va $\{x_n\} \to x^{**}$, $x^{**} \in R^{**}$ va $\{y_n\} \to y^*$, $y^* \in R^*$ va $\{y_n\} \to y^{**}$, $y^{**} \in R^{**}$ bo'lsin. U holda metrikaning uzluksizlik xossasiga ko'ra

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n \to \infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$$

va

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n \to \infty} \rho_2(x_{\mathrm{n}}, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Bundan

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Demak, R^* ni R^{**} ga o‘zaro bir qiymatli akslantiruvchi φ moslik mavjud bo‘lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) barcha $x \in R$ lar uchun $\varphi(x) = x$;

2) agar $x^* \leftrightarrow x^{**}$, $y^* \leftrightarrow y^{**}$ bo‘lsa, u holda $\rho_1(x^*,y^*) = \rho_2(x^{**},y^{**})$.

To‘ldirma fazoning yagonaligi isbotlandi.

Endi to‘ldirma fazoning mavjudligini isbotlaymiz. R ixtiyoriy metrik fazo bo‘lsin. R dan olingan $\{x_n\}$ va $\{x_n'\}$ fundamental ketma-ketliklar

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = 0$$

shartni qanoatlantirsa, ular ekvivalent deb ataladi va $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ ko‘rinishda yoziladi. Tekshirish qiyin emaski, fundamental ketma-ketliklar o‘rtasida kiritilgan bu munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivdir.

Bundan kelib chiqadiki, R ning elementlaridan tuzilgan barcha fundamental ketma-ketliklar to‘plami har biri o‘zaro ekvivalent ketma-ketliklardan tashkil bo‘lgan va kesishmaydigan sinflarga ajraladi. Endi R^* fazoni aniqlaymiz. R^* ning elementlari sifatida yuqorida aniqlangan o‘zaro ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan iborat sinflarni qabul qilamiz va unda masofani quyidagicha aniqlaymiz. x^* va y^* shunday sinflardan ikkitasi bo‘lsin. Bu sinflarning har biridan ixtiyoriy ravishda bittadan vakil tanlaymiz, ya’ni $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ fundamental ketma-ketliklarni olamiz. x^* va y^* orasidagi masofani

$$\rho^*(x^*,y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{21.10}$$

usulda aniqlaymiz. Masofani bu usulda aniqlash nuqsonlardan xoli ekanligini ko‘rsatamiz, ya’ni (21.10) limit mavjud, hamda $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ vakillarning tanlanishiga bog‘liq emas.

Ushbu

$$|\,\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)\,| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \tag{21.11}$$

tengsizlik ko‘rsatadiki, agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar fundamental ketma-ketliklar bo‘lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n va m lar mavjudki,

$$|\,\rho\,(x_n, y_n) - \rho\,(x_m, y_m)\,| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $c_n = \rho\,(x_n, y_n)$ sonli ketma-ketlik Koshi kriteriysini qanoatlantiradi va shunday ekan, $\{c_n\}$ chekli limitga ega.

Bu limit $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ larning tanlanishiga bog‘liq emas. Haqiqatan ham, $\{x_n\} \in x^*$, $\{x_n^{'}\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$, $\{y_n^{'}\} \in y^*$ bo‘lsin. $\{x_n\} \sim \{x_n^{'}\}$ va $\{y_n\} \sim \{y_n^{'}\}$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n, x_n^{'}\right) = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{n\to\infty} \rho\left(y_n, y_n^{'}\right) = 0$$

bo‘ladi. U holda

$$\left|\rho\,(x_n, y_n) - \rho\left(x_n^{'}, y_n^{'}\right)\right| \leq \rho\left(x_n, x_n^{'}\right) + \rho\left(y_n, y_n^{'}\right)$$

tengsizlikdan

$$\lim_{n\to\infty} \rho\,(x_n, y_n) \; = \lim_{n\to\infty} \rho\,(x_n', y_n')$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi R^* da (21.10) formula bilan aniqlangan ρ^* akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko‘rsatamiz. Ishonch hosil qilish qiyin emaski, 1- va 2-aksiomalar bajariladi. Endi uchburchak aksiomasining bajarilishini tekshiramiz. Berilgan R fazoda uchburchak aksiomasi bajarilgani uchun ixtiyoriy, $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ va $\{z_n\} \in z^*$ fundamental ketma-ketliklar uchun, barcha n larda

$$\rho\,(x_n, z_n) \leq \rho\,(x_n, y_n) + \rho\,(y_n, z_n)$$

tengsizlik o‘rinli. Bu tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o‘tib,

$$\lim_{n\to\infty} \rho\,(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho\,(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho\,(y_n, z_n)$$

tengsizlikni olamiz, ya'ni

$$\rho^*(x^*, z^*) \leq \rho^*(x^*, y^*) + \rho^*(y^*, z^*) .$$

R metrik fazoni R^* ning qism fazosi sifatida qarash mumkinligini ko'rsatamiz.

Har bir $x \in R$ ga $\{x_n = x\}$ statsionar ketma-ketlik va unga ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan sinfni mos qo'yamiz. Bu sinf x ga yaqinlashuvchi $\{x_n\} \subset R$ ketma-ketliklardan iborat. Tuzilishiga ko'ra bu sinf bo'sh emas. Shu bilan birgalikda, agar $x, y \in R$ uchun $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ va $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ bo'lsa, u holda

$$\rho^*(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) .$$

Chunki, (21.11) ko'ra

$$|\,\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)\,| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) .$$

Shunday ekan, har bir $x \in R$ ga unga yaqinlashuvchi fundamental ketma-ketliklar sinfi x^* ni mos qo'yish bilan R ni R^* ning ichiga izometrik akslantiramiz. Bundan keyin R va uning R^* dagi aksini farq qilmay R ni R^* ning qism fazosi deb qarash mumkin. Navbat R metrik fazoning R^* ning hamma yerida zich ekanligini ko'rsatishga keldi. Ixtiyoriy $x^* \in R^*$ element va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. x^* sinfdan vakil tanlaymiz, ya'ni $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikni olamiz.

Endi N nomerni shunday tanlaymizki, $n > N$ va $m > N$ bo'lganda $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ bo'lsin. U holda $n > N$ da

$$\rho^*(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

ya'ni x^* ning ixtiyoriy $\varepsilon-$ atrofi R ning nuqtasini saqlaydi. Shunday qilib, R ning R^* dagi yopig'i R^* ga teng.

Endi R^* ning to'laligini isbotlash qoldi. Dastlab shuni ta'kidlash lozimki, R^* ning tuzilishiga ko'ra, R dan olingan ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik shu ketma-ketlikni saqlovchi $x^* \in R^*$ elementga yaqinlashadi. R fazo R^* da zich boʻlgani uchun R^* dan olingan nuqtalarning ixtiyoriy $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots$ fundamental ketma-ketligi uchun R da shunday $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ fundamental ketma-ketlik topiladiki,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n, x_n^*) = 0.$$

Buning uchun har bir n da $x_n \in R$ nuqtani $\rho^*(x_n, x_n^*) < 1/n$ shart boʻyicha tanlash yetarli. Tanlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik R da fundamental va R^* ning aniqlanishiga koʻra, biror $x^* \in R^*$ ga yaqinlashadi. U holda

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \le \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*)$$

tengsizlikka koʻra,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0,$$

ya'ni $\{x_n^*\}$ ketma-ketlik x^* ga yaqinlashadi. Δ

21.10-misol. X deb ratsional sonlar toʻplamini belgilasak, u toʻla boʻlmagan metrik fazo boʻladi. Uning toʻldirmasi X^*- haqiqiy sonlardan iborat metrik fazo boʻladi. $C_2[a,\ b]$ toʻla boʻlmagan metrik fazo boʻladi. Uning toʻldirmasi $L_2[a,\ b]$ fazodir (26-§ ning 26.18-misoliga qarang).

21.3. Metrik fazolarda kompakt toʻplamlar

Matematik analiz faniga qat'iy asos solishda va uning rivojida Bolsano-Veyershtrass teoremasi va Geyne-Borel lemmalari fundamental ahamiyatga ega. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga koʻra sonlar oʻqidagi istalgan chegaralangan cheksiz toʻplam kamida bitta limitik nuqtaga ega. Geyne-Borel lemmasiga koʻra sonlar oʻqidagi $[a,\ b]$ kesmaning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin.

Sonlar oʻqidagi chegaralangan cheksiz toʻplamlar va kesmalarning bu xossalarini metrik fazolarda umumlashtirish maqsadida biz kompaktlik tushunchasiga kelamiz.

Kompakt to‘plamlar tushunchasi metrik fazolardagi asosiy tushunchalardan biri hisoblanadi. Kompakt to‘plamlar kompakt operatorlarni ta’riflashda va ularni tekshirishda qo‘llaniladi.

Bizga X metrik fazo berilgan bo‘lsin. M va A_α to‘plamlar X ning qism to‘plamlari bo‘lsin. $\{A_{\alpha'}\}$ to‘plamlar sistemasi $\{A_\alpha\}$ to‘plamlar sistemasining qismi bo‘lsin.

21.4-ta’rif. *Agar $M \subset \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ bo‘lsa, $\{A_\alpha\}$ to‘plamlar sistemasi M to‘plamning qoplamasi deyiladi. Agar $\{A_{\alpha'}\} \subset \{A_\alpha\}$ qism sistema uchun $M \subset \bigcup\limits_{\alpha'} A_{\alpha'}$ bo‘lsa, u holda $\{A_{\alpha'}\}$ sistema M ning qism qoplamasi deyiladi. Xususiy holda, $X = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ bo‘lsa, u holda $\{A_\alpha\}$ to‘plamlar sistemasi X fazoning qoplamasi deyiladi.*

21.5-ta’rif. *Agar $K \subset X$ to‘plamning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo‘lsa, u holda K kompakt to‘plam deyiladi. Agar X fazoning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo‘lsa, u holda X kompakt metrik fazo deyiladi.*

Quyida ko‘rsatamizki, sonlar o‘qida $[a,\ b]$ kesma kompakt to‘plam bo‘lishi bilan bir qatorda $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{C}^n$ fazolarda istalgan chegaralangan yopiq to‘plam kompakt to‘plam bo‘ladi. Aksincha, sonlar o‘qi, $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{C}^n$ fazolar kompakt bo‘lmagan metrik fazolarga misol bo‘ladi.

Endi 21.5-ta’rifga ekvivalent bo‘lgan quyidagi ta’rifni keltiramiz.

21.6-ta’rif. *Agar K to‘plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa, K ga kompakt to‘plam deyiladi.*

21.7-ta’rif. *Agar M to‘plamning yopig‘i $[M]$ kompakt to‘plam bo‘lsa, yoki ixtiyoriy $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlikdan X da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa, M ga nisbiy kompakt to‘plam deyiladi.*

Endi biz $\mathbb{R}^n$ yoki $\mathbb{C}^n$ fazolardagi to‘plamlarning kompaktlik kriteriysini beramiz. Quyida θ bilan $(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ nuqta belgilangan.

21.4-teorema. $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ *metrik fazodagi* K *to'plam kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan va yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. *Yetarliligi***.** Chegaralangan va yopiq $K\subset\mathbb{R}^n$ to'plam berilgan bo'lsin. K chegaralangan to'plam bo'lganligi uchun u biror $B[\theta,r]$ sharda saqlanadi, ya'ni ixtiyoriy $x\in K$ uchun

$$\rho(x,\theta)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\leq r. \tag{21.12}$$

Endi K to'plamdan ixtiyoriy $x^{(p)}=\left(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\ldots,x_n^{(p)}\right)$ ketma-ketlik olamiz. $\{x^{(p)}\}$ ketma-ketlik hadlari ham (21.12) tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan esa $\left\{x_1^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$, $\left\{x_2^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty},\ldots,$ $\left\{x_n^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra $\left\{x_1^{(p)}\right\}$ ketma-ketlikdan biror $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_1^{\left(p_{k_1}\right)}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Chegaralangan $\left\{x_2^{\left(p_{k_1}\right)}\right\}$ ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra biror $x_2^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_2^{\left(p_{k_2}\right)}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda ham $\left\{x_1^{\left(p_{k_2}\right)}\right\}$ qismiy ketma-ketlik $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi bo'ladi. Xuddi shu yo'l bilan n-chi qadamda chegaralangan $\left\{x_n^{\left(p_{k_{n-1}}\right)}\right\}$ ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra biror $x_n^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_n^{(p_{k_n})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Natijada hosil bo'lgan $\left\{x^{(p_{k_n})}=\left(x_1^{(p_{k_n})},\ x_2^{(p_{k_n})},\ldots,x_n^{(p_{k_n})}\right)\right\}$ ketma-ketlik $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots,\ x_n^{(0)}\right)$ elementga yaqinlashadi. K yopiq to'plam bo'lganligi uchun $x^{(0)}\in K$ bo'ladi. 21.6-ta'rifga ko'ra K kompakt to'plam bo'ladi.

*Zaruriyligi***.** Bizga $\mathbb{R}^n$ metrik fazodagi K kompakt to'plam berilgan bo'lsin. $\mathbb{R}^n$ fazoning $\{B(\theta,\,n)\}_{n=1}^{\infty}$ ochiq qoplamasini olamiz. Tabiiyki, $\{B(\theta,\,n)\}_{n=1}^{\infty}$

ochiq sharlar sistemasi K to'plamni ham qoplaydi. K kompakt to'plam bo'lganligi uchun shunday chekli $\{B(\theta,\, n_i)\}_{i=1}^{l}$ qism sistema mavjudki, u ham K to'plamni qoplaydi. Agar biz $n_1,\, n_2, \ldots, n_l$ sonlarning eng kattasini n_0 bilan belgilasak, $B(\theta,\, n_0)$ ochiq shar K ni saqlaydi. Bu esa K to'plamning chegaralangan ekanligini bildiradi.

Endi K ning yopiqligini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni K yopiq bo'lmasin. U holda $\mathbb{R}^n \backslash K$ to'plamda K ning hech bo'lmaganda bitta limitik nuqtasi mavjud. Uni x^0 bilan belgilaymiz. Limitik nuqta ta'rifiga ko'ra x^0 ga yaqinlashuvchi $\{x_k\} \subset K$, ketma-ketlik mavjud. K kompakt to'plam bo'lganligi uchun $\{x_k\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi $\{x_{k_l}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. $\{x_k\}$ ketma-ketlik $x^0 \in \mathbb{R}^n \backslash K$ elementga yaqinlashganligi uchun uning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi, jumladan $\{x_{k_l}\}$ qismiy ketma-ketlik ham x^0 ga yaqinlashadi. Bundan $x^0 \in K$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik K ning yopiq to'plam ekanligini isbotlaydi. Δ

21.1-natija. $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ *metrik fazodagi* K *to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

21.2-natija. $\mathbb{R}_p^n$ $\left(\mathbb{C}_p^n\right), p \geq 1$ *metrik fazodagi* K *to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Metrik fazolarda nisbiy kompaktlik tushunchasi to'la chegaralanganlik tushunchasi bilan ustma-ust tushadi. Shu maqsadda to'la chegaralangan to'plam tushunchasini beramiz. Bizga $(X,\, \rho)$ metrik fazodan olingan $A,\; M$ to'plamlar va $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin.

21.8-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x \in M$ *uchun shunday* $a \in A$ *mavjud bo'lib,* $\rho(x,a) \leq \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* A *to'plam* M *to'plam uchun* ε *to'r deyiladi.*

A to'plam M ning qismi bo'lishi shart emas, umuman $A \bigcap M = \emptyset$ bo'lishi ham mumkin.

21.9-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M to‘plamning chekli ε to‘ri mavjud bo‘lsa, M ga to‘la chegaralangan to‘plam deyiladi.*

Har qanday to‘la chegaralangan to‘plam chegaralangan bo‘ladi, lekin teskarisi o‘rinli emas.

21.5-teorema. (X, ρ) *to‘la metrik fazodagi M to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun, uning to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarlidir* [1].

Asosiy funksional fazolardan biri $C[a, b]$ fazodir. Bu fazodagi to‘plamning kompaktlik kriteriysini keltiramiz. Paragraf so‘ngida ℓ_p, $p \geq 1$ fazodagi to‘plamlarning kompaktlik kriteriysini beramiz.

$F \subset C[a, b]$ funksiyalar oilasi berilgan bo‘lsin.

21.10-ta’rif. *Agar shunday $C > 0$ mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $\phi \in F$ va barcha $x \in [a, b]$ lar uchun $|\phi(x)| \leq C$ tengsizlik bajarilsa, u holda F funksiyalar oilasi tekis chegaralangan deyiladi.*

21.11-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lib, $|x_1 - x_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ hamda barcha $\phi \in F$ lar uchun*

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz deyiladi.

21.6-teorema *(Arsela teoremasi). $M \subset C[a, b]$ to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lishi yetarli va zarurdir.*

Isbot. *Zaruriyligi*. $M \subset C[a, b]-$ ixtiyoriy nisbiy kompakt to‘plam bo‘lsin. $C[a, b]$ to‘la metrik fazo bo‘lgani uchun 21.5-teoremaga ko‘ra, ixtiyoriy ε da M ning chekli $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ elementdan iborat $\varepsilon/3-$ to‘ri mavjud. Har bir φ_i funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi uchun u chegaralangandir, ya’ni

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi_i(x)| \leq K_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

$K = \max\limits_{1 \leq i \leq k} K_i + \dfrac{\varepsilon}{3}$ belgilash kiritamiz. $\dfrac{\varepsilon}{3}-$ to'r ta'rifiga ko'ra, har bir $\varphi \in M$ uchun birorta φ_i da

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x \in [a,b]} |\, \varphi(x) - \varphi_i(x) \,| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan kelib chiqadiki, har bir $x \in [a,\ b]$ uchun

$$|\, \varphi(x) \,| \leq |\, \varphi_i(x) \,| + \frac{\varepsilon}{3} \leq K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K.$$

Shunday qilib, M to'plam funksiyalar oilasi sifatida tekis chegaralangan ekan. Kantor teoremasiga ko'ra har bir φ_i funksiya $[a,\ b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_i > 0$ mavjud bo'lib, $|x_1 - x_2| < \delta_i$ bo'lganda

$$|\, \varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2) \,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Aytaylik, $\delta = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \delta_i$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varphi \in M$ uchun φ_i funksiyani shunday tanlaymizki, $\rho(\varphi, \varphi_i) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ bo'lsin. U holda $|x_1 - x_2| < \delta$ shart bajarilganda

$$|\, \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \,| \leq$$

$$\leq |\, \varphi(x_1) - \varphi_i(x_1) \,| + |\, \varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2) \,| + |\, \varphi_i(x_2) - \varphi(x_2) \,| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

o'rinli. Bundan M ning tekis darajada uzluksizligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Funksiyalarning $M \subset C[a,\ b]$ oilasi tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lsin. Agar biz, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M ning chekli ε to'ri mavjud ekanligini ko'rsatsak, 21.5-teoremaga ko'ra M ning nisbiy kompakt to'plam ekanligi kelib chiqadi. Hamma $\varphi \in M$ va barcha $x \in [a,\ b]$ uchun $|\, \varphi(x) \,| \leq K$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ ni shunday tanlaymizki, barcha $\varphi \in M$ lar uchun $|x_1 - x_2| < \delta$ bo'lganda $|\, \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \,| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ shart bajarilsin. Koordinatalar sistemasining OX o'qidagi $[a,\ b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

nuqtalar bilan uzunliklari $\delta > 0$ dan kichik oraliqlarga bo'lamiz va bu nuqtalar orqali OY o'qiga parallel (vertikal) to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Keyin OY o'qidagi $[-K, K]$ kesmani

$$-K = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = K$$

nuqtalar bilan uzunliklari $\frac{\varepsilon}{5}$ dan kichik oraliqlarga bo'lamiz va bu bo'linish nuqtalari orqali OX o'qiga parallel (gorizontal) to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Shunday qilib, $[a,\ b] \times [-K,\ K]$ to'g'ri to'rtburchak gorizontal tomoni δ dan kichik va vertikal tomoni $\frac{\varepsilon}{5}$ dan kichik yacheykalarga ajraladi. Har bir $\varphi \in M$ funksiyaga uchlari (x_k, y_l) nuqtalarda bo'lgan va har bir x_k nuqtada $\varphi(x_k)$ dan $\frac{\varepsilon}{5}$ dan kichik chetlangan ψ siniq chiziqni mos qo'yamiz (bunday siniq chiziq mavjud).

Bu $\psi(x)$ siniq chiziqning tanlanishiga ko'ra

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

bo'lgani uchun

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

tengsizlik bajariladi. Tuzilishiga ko'ra ψ funksiya $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada chiziqli bo'lganligi sababli, barcha $x \in [x_k, x_{k+1}]$ lar uchun

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Endi $x -$ $[a,\ b]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi va x_k esa x ga chapdan eng yaqin bo'linish nuqtasi bo'lsin. U holda

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \le \varepsilon.$$

Shunday ekan, yuqorida ko'rsatilgan usulda qurilgan barcha ψ siniq chiziqlar to'plami chekli va u M to'plam uchun ε to'r bo'ladi. 21.5-teoremaga ko'ra M nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Δ

21.11-misol. $C[a,\ b]$ fazoda

$$F=\left\{\ y\,(s)=\int_a^b K\,(s,t)\ x\,(t)\ \ dt\,,\ \ x\in B[0,1]\right\} \tag{21.13}$$

funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring. Bu yerda $B[0,1]$ to'plam $C[a,\ b]$ fazodagi markazi nol nuqtada radiusi 1 ga teng bo'lgan yopiq shar. $K(s,t)-$ $[a,\ b]\times[a,\ b]$ kvadratda aniqlangan uzluksiz funksiya.

Yechish. Arsela teoremasiga ko'ra F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatish yetarli. $K(s,t)$ funksiya $[a,\ b]\times[a,\ b]$ kvadratda uzluksiz bo'lganligi uchun u chegaralangan, ya'ni shunday $C>0$ son mavjudki, barcha $s,\ t\in[a,\ b]$ lar uchun $|K(s,t)|\leq C$ tengsizlik o'rinli. $x\in B[0,1]$ shartdan $\max\limits_{a\leq t\leq b}\ |\,x\,(t)\,|\leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y\,(s)|=\left|\int_a^b K\,(s,t)\ x\,(t)\ \ dt\right|\leq\int_a^b\ |K\,(s,t)|\ \cdot|x\,(t)|\ \ dt\leq C\cdot 1\cdot(b-a)\,.$$

Bu tengsizlik F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini isbotlaydi. Endi F funksiyalar oilasining tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz:

$$|\,y\,(s_1)-y\,(s_2)\,|=\left|\int_a^b\ K\,(s_1,t)\ x\,(t)\ \ dt-\int_a^b\ K\,(s_2,t)\ x\,(t)\ \ dt\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b\ |K\,(s_1,t)-K\,(s_2,t)\,|\ \cdot|\,x\,(t)\,|\ \ dt\leq\varepsilon\cdot 1\cdot(b-a)\,.$$

So'nggi munosabat $|s_1-s_2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $s_1,\ s_2\in[a,\ b]$ va barcha $x\in B[0,1]$ lar uchun o'rinli. Demak, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz ekan. Shunday qilib, Arsela teoremasiga ko'ra (21.13) tenglik bilan aniqlangan F funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Δ

Endi tekis chegaralangan, lekin tekis darajada uzluksiz bo'lmagan Φ funksiyalar oilasiga misol keltiramiz.

21.12. $C[0,\ 1]$ fazoda

$$\Phi=\left\{x_\alpha\,(t)=\frac{2\,\alpha\,t}{1+\,\alpha^2\,t^2},\quad \alpha\in(0,\ \infty)\right\} \tag{21.14}$$

funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Arsela teoremasiga ko‘ra (21.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini tekshirishimiz kerak. $(1-\alpha\, t)^2 = 1-2\alpha\, t+\alpha^2 t^2 \geq 0$ tengsizlikdan $|x_\alpha(t)| \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis chegaralangan ekan. Tekis darajada uzluksiz emas degan tushunchani ta’riflaymiz.

Agar biror $\varepsilon > 0$ son va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $x_\alpha \in \Phi$ va shunday $t_1,\, t_2 \in [0,\, 1]$ lar mavjud bo‘lib $|\,t_1 - t_2| < \delta$ tengsizlik bajarilganda

$$|\, x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)\,| \geq \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas deyiladi. Endi $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ va $\delta > 0-$ ixtiyoriy son bo‘lsin. Agar $\alpha > \dfrac{1}{\delta}$ va $t_1 = \dfrac{1}{\alpha},\ \ t_2 = 0$ bo‘lsa, u holda $|\,t_1 - t_2| = \dfrac{1}{\alpha} < \delta$ bo‘ladi, ammo

$$|\, x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)\,| = \frac{2\,\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}}{1+\alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2}} = 1 > \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas ekan. Shunday qilib, (21.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to‘plam emas ekan. Δ

Arsela teoremasining umumlashmasi quyidagicha. C_{MN} bilan M to‘plamni N to‘plamga akslantiruvchi barcha uzluksiz akslantirishlar to‘plamini belgilaymiz. Bu yerda M va N lar kompakt to‘plamlar.

21.7-teorema *(Arsela teoremasining umumlashmasi). $D \subset C_{MN}$ to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun D ning tekis darajada uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.*

Endi $\ell_p,\ \ p \geq 1$ fazoda to‘plamning nisbiy kompaktlik kriteriysini beramiz.

21.8-teorema. *$K \subset \ell_p$ to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning chegaralangan va $\varepsilon > 0$ son qanday bo‘lmasin, shunday n_0 nomer mavjud bo‘lib,* *ixtiyoriy* $n \geq n_0$ *va barcha* $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots, \xi_n, \ldots) \in K$ *lar uchun*

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi***.** Bizga nisbiy kompakt $K \subset \ell_p$ to'plam berilgan bo'lsin. U holda u to'la chegaralangan bo'lgani uchun, chegaralangan ham bo'ladi. Endi ikkinchi shartning bajarilishini ko'rsatamiz.

Biror $\eta > 0$ sonni olamiz va K uchun chekli $\eta-$ to'r $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k\}$ ni quramiz. Har bir $x \in K$ uchun $\eta-$ to'rga tegishli x_i elementni shunday tanlaymizki, $\rho_p(x, x_i) < \eta$ bo'lsin. Har bir $x = (\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in \ell_p$ element uchun $S_n x = (\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_n, 0,\ 0, \ldots)$ va $R_n x = (0,\ 0, \ldots, \xi_{n+1},\ \xi_{n+2}, \ldots)$ belgilashlarni kiritamiz. U holda x va $\theta = (0,\ 0, \ldots, 0,\ \ldots)$ elementlar uchun

$$\rho_p(R_n x, \theta) = \rho_p(x, S_n x) \leq \rho_p(x, x_i) + \rho_p(x_i, S_n x) \leq \rho_p(x, x_i) + \rho_p(S_n x_i, S_n x) +$$

$$+\rho_p(R_n x_i, \theta) \leq 2\rho_p(x, x_i) + \rho_p(R_n x_i, \theta) < 2\eta + \rho_p(R_n x_i, \theta)\ .$$

Aniqlanishiga ko'ra, har bir belgilangan x element uchun

$$\lim_{n\to\infty} \rho_p(R_n x, \theta) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Shuning uchun, shunday n_0 nomer mavjudki, $n \geq n_0$ bo'lganda barcha $i = 1,\ 2, \ldots, k$ lar uchun $\rho_p(R_n x_i, \theta) < \eta$ bo'ladi. Shunday ekan, $n \geq n_0$ bo'lganda

$$\rho_p(R_n x, \theta) < 3\eta.$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\eta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ desak,

$$\rho_p(R_n x, \theta) = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p$$

bo'ladi.

Yetarliligi. Chegaralangan $K \subset \ell_p$ to'plam uchun $\varepsilon > 0$ son qanday bo'lmasin, shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n \geq n_0$ va $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots, \xi_n, \ldots) \in K$ larda

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p$$

tengsizlik bajarilsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun K to'plamning chekli $\varepsilon-$ to'ri mavjudligini ko'rsatamiz. Berilgan $\varepsilon > 0$ uchun n_0 nomerni shunday tanlaymizki, barcha $x \in K$ larda

$$\rho_p\left(R_{n_0}x, \theta\right) = \left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. $K_{n_0} = \{\, S_{n_0}x : \ x \in K\}$ to'plamni qaraymiz. Har bir $x \in K$ da $\rho_p\left(R_{n_0}x, \theta\right) \leq \rho_p\left(x, \theta\right)$ o'rinli va K chegaralangan to'plam bo'lganligi sababli K_{n_0} ham chegaralangan to'plamdir.

Har bir $S_{n_0}x = (\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}, 0,\ 0, \ldots) \in K_{n_0}$ nuqtaga $(\,\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}) \in \mathbb{R}_p^{n_0}$ nuqtani mos qo'yish bilan K_{n_0} to'plamni

$$E_{n_0} = \{\ (\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}) : (\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}, 0,\ 0, \ldots) \in K_{n_0}\} \subset \mathbb{R}_p^{n_0}$$

to'plamga izometrik mos qo'yamiz. K_{n_0} chegaralangan to'plam bo'lganligi sababli E_{n_0} to'plam $\mathbb{R}_p^{n_0}$ da chegaralangan bo'ladi. U holda 21.2-natijaga ko'ra E_{n_0} nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Demak, unga izomorf bo'lgan K_{n_0} to'plam ham nisbiy kompaktdir. Shunday ekan, K_{n_0} to'plam uchun chekli $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k\}$ elementli $\dfrac{\varepsilon}{2}$ to'r mavjud. Bu to'plam K uchun ε to'r bo'ladi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x \in K$ uchun $S_{n_0}x \in K_{n_0}$ va shunday $x_i \in \{\, x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k\}$ element mavjud bo'lib,

$$\rho_p\left(S_{n_0}x, x_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. U holda

$$\rho_p\left(x,\ x_i\right) = \rho_p\left(x, S_{n_0}x\right) + \rho_p\left(S_{n_0}x,\ x_i\right) =$$

$$= \rho_p\left(R_{n_0}x, \theta\right) + \rho_p\left(S_{n_0}x, x_i\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demak, 21.5-teoremaga ko‘ra K nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *21.8-misolda keltirilgan f_n ketma-ketlikni $C_1[-1,\ 1]$ fazoda fundamentallikka tekshiring. U yaqinlashuvchi bo‘ladimi?*

2. *To‘la va to‘la bo‘lmagan metrik fazolarga misollar keltiring.*

3. *$\mathbb{R}$ metrik fazoda $B_n = \left(1 - \frac{1}{n},\ 1\right)$ ichma-ich joylashgan sharlar ketma-ketligini qaraymiz. Ularning radiuslari ketma-ketligining nolga intilishini ko‘rsating. B_n sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo‘sh ekanligini isbotlang. B_n sharlar ketma-ketligi uchun* 21.1*-teorema shartlari bajariladimi?*

4. *$C[a,\ b]$, $C_1[a,\ b]$ va $C_2[a,\ b]$ metrik fazolarni to‘lalikka tekshiring.*

5. *$C[a,\ b]$ va ℓ_2 metrik fazolarda birlik sharning nisbiy kompakt to‘plam emasligini isbotlang.*

6. *$\mathbb{R}$ metrik fazoda $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ sistema $M = (0,\ 1)$ to‘plam uchun qoplama bo‘lishini ko‘rsating. $\{A_n\}$ qoplamadan M ni qoplovchi chekli qism qoplama ajratish mumkinmi? M kompakt to‘plam bo‘ladimi?*

22-§. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbiqlari

Berilgan shartlarda tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan bog‘liq masalalarni mos metrik fazolardagi biror akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi mavjudligi va yagonaligi haqidagi masala ko‘rinishida ifodalash mumkin. Qo‘zg‘almas nuqta mavjudligi va yagonaligi belgilari ichida eng sodda va shu bilan birga juda muhim belgi - bu qisuvchi akslantirishlar prinsipi deb nomlanuvchi belgidir.

22.1-ta'rif. *X metrik fazo va uni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A akslantirish berilgan bo'lsin. Agar shunday $\alpha \in (0,\ 1)$ son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in X$ nuqtalar uchun*

$$\rho\,(Ax,\ Ay) \leq \alpha\,\rho\,(x, y) \tag{22.1}$$

tengsizlik bajarilsa, A qisuvchi akslantirish deyiladi.

Har bir qisuvchi akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, agar $x_n \to x$ $(\rho\,(x_n, x) \to 0)$ bo'lsa, u holda

$$0 \leq \rho\,(Ax_n,\ Ax) \leq \alpha\,\rho\,(x_n,\ x)$$

bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\,(Ax_n, Ax) = 0$ bo'ladi.

Agar $A : X \to X$ akslantirish uchun shunday $x \in X$ nuqta mavjud bo'lib, $Ax = x$ tenglik bajarilsa, x nuqta A akslantirishning *qo'zg'almas nuqtasi* deyiladi.

22.1-teorema *(Qisuvchi akslantirishlar prinsipi). To'la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisuvchi akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.*

Isbot. X metrik fazodan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Keyin $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, $x_3 = Ax_2 = A^3x_0, \ldots$, $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \ldots$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Ixtiyoriy $n < m$ natural sonlar uchun

$$\rho\,(x_n,\ x_m) = \rho\,(A^n x_0,\ A^m\, x_0) \leq \alpha^n \rho\,(x_0,\ x_{m-n}) \leq$$

$$\leq \alpha^n\,(\rho\,(x_0,\ x_1) + \rho\,(x_1,\ x_2) + \cdots + \rho\,(x_{m-n-1},\ x_{m-n})) \leq$$

$$\leq \alpha^n \rho\,(x_0,\ x_1)\,\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}\right) \leq \alpha^n\,\frac{1}{1-\alpha}\rho\,(x_0,\ x_1)$$

tengsizlik o'rinli. $\alpha \in (0,\ 1)$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}\ \alpha^n (1-\alpha)^{-1} \rho\,(x_0, x_1) = 0.$$

Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamentaldir. X to‘la metrik fazo va $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lgani uchun u yaqinlashuvchi. Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

bo‘lsin. U holda A akslantirishning uzluksizligiga ko‘ra

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\,.$$

Shunday qilib, A akslantirish uchun qo‘zg‘almas nuqta mavjud ekan. Uning yagonaligini isbotlaymiz. Agar

$$Ax = x, \quad Ay = y$$

desak, (22.1) tengsizlikka ko‘ra

$$\rho\,(x, y) = \rho\,(Ax,\ Ay) \leq \alpha\,\rho\,(x, y)\,.$$

Bundan $\alpha \in (0,\ 1)$ bo‘lgani uchun

$$\rho\,(x, y)\ (1-\alpha) \leq 0\ \Rightarrow \rho\,(x, y)\ = 0$$

ya’ni $x = y$ bo‘lishi kelib chiqadi. Qo‘zg‘almas nuqta yagona ekan. Δ

22.1. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbiqlari

Qisuvchi akslantirishlar prinsipini har xil tipdagi tenglamalar yechimlari mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalarni isbotlashda qo‘llash mumkin. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi $Ax = x$ tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchungina qo‘llanib qolmay, bu tenglama yechimini topish usulini ham beradi.

Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbig‘iga doir misollar qaraymiz.

22.1-misol. $\mathbb{R}^n$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishning qisuvchilik shartlarini toping.

Yechish. Qanday shartlarda A qisuvchi akslantirish bo‘ladi? Bu savolga javob fazoda qanday metrika berilishiga bog‘liq. Biz quyida uch xil variantni qaraymiz:

a) $\mathbb{R}^n_\infty$ fazo, ya’ni $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$ bo‘lsin.

$$\rho(y', y'') = \max_{1\le i\le n} |y_i' - y_i''| = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \right| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |\, a_{ij}| \ \left| x_j' - x_j'' \right| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |\, a_{ij}| \ \cdot \max_{1\le j\le n} \left| x_j' - x_j'' \right| = \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |\, a_{ij}| \right) \rho\left(x', x''\right) .$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, A qisuvchi akslantirish bo‘lishi uchun

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |\, a_{ij}| = \alpha < 1 \tag{22.2}$$

shartning bajarilishi yetarli. Shuning uchun $\mathbb{R}^n_\infty$ fazoda (22.2) shartni A akslantirishning qisuvchilik sharti sifatida qabul qilamiz.

b) $\mathbb{R}^n_1$ fazo, ya’ni $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$ bo‘lsin. U holda

$$\rho(y', y'') = \sum_{i=1}^n |\, y_i' - y_i''\,| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\, a_{ij}| \ \left| x_j' - x_j'' \right| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |\, a_{ij}| \right) \cdot \left| x_j' - x_j'' \right| \le$$

$$\le \left(\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |\, a_{ij}| \right) \cdot \sum_{j=1}^n \left| x_j' - x_j'' \right| \le \left(\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |\, a_{ij}| \right) \cdot \rho\left(x', x''\right) .$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, A akslantirish uchun qisuvchilik sharti $\mathbb{R}^n_1$ fazoda

$$\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |\, a_{ij}| = \alpha < 1 \tag{22.3}$$

ko‘rinishga ega.

c) $\mathbb{R}^n$ fazo, ya’ni

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2}$$

bo‘lsin. U holda

$$\begin{aligned}
\rho^2(y',y'') &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i'-y_i''\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_j'-x_j''\right)\right)^2\\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|\,a_{ij}|^2\right)\sum_{j=1}^{n}\left(x_j'-x_j''\right)^2\\
&\le \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\,a_{ij}|^2\right)\rho^2\left(x',x''\right).
\end{aligned}$$

Yuqorida keltirilgan tenglik va tengsizliklarga ko‘ra $\mathbb{R}^n$ fazoda A akslantirishning qisuvchilik sharti

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\,a_{ij}|^2\le\alpha<1 \tag{22.4}$$

ko‘rinishga ega.

Shunday qilib, agar (22.2) - (22.4) shartlardan birortasi bajarilsa, u holda yagona $x=(\,x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)$ nuqta mavjud bo‘lib,

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i,\quad i=1,2,\ldots,n$$

bo‘ladi. Bundan tashqari bu nuqtada ketma-ket yaqinlashishlar quyidagi ko‘rinishga ega

$$x_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k-1)}+b_i,\quad x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\,x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right),\ \ k=1,2,3\ldots.$$

Bu yerda $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ sifatida $\mathbb{R}^n$ dagi ixtiyoriy nuqtani qabul qilish mumkin.

Qaralayotgan $y=Ax$ akslantirish qisuvchi bo‘lishi uchun (22.2)-(22.4) shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi yetarli. Isbotlash mumkinki, (22.2) va (22.3) shartlar mos ravishda $\mathbb{R}^n_\infty$ va $\mathbb{R}^n_1$ fazolarda $y = Ax$ akslantirish qisuvchi bo‘lishi uchun zarur ham bo‘ladi.

Ta’kidlash lozimki, (22.2) - (22.4) shartlarning birortasi ham ketma-ket yaqinlashishlar usulining tadbig‘i uchun zarur emas.

Agar $|a_{ij}| < n^{-1}$ bo‘lsa, u holda (22.2) - (22.4) shartlarning hammasi bajariladi va ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo‘llash mumkin.

Agar $|a_{ij}| \geq n^{-1}$ bo‘lsa, u holda (22.2) - (22.4) shartlarning birortasi ham bajarilmaydi.

22.2. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining integral tenglamalarga tadbiqi

Fredholm tenglamasi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipini ushbu

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy + \varphi(x) \tag{22.5}$$

ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun qo‘llaymiz. Bu yerda K integral tenglama yadrosi, $\varphi-$ berilgan funksiya, $f-$ izlanayotgan (noma’lum) funksiya, λ esa haqiqiy parametr.

Ko‘rsatamizki, qisuvchi akslantirishlar prinsipini λ parametrning yetarlicha kichik qiymatlarida qo‘llash mumkin.

Faraz qilamiz, $K(x,y) -$ $[a,\ b]\times[a,\ b]$ kvadratda uzluksiz funksiya bo‘lsin. Shunday ekan, musbat M son mavjud bo‘lib, barcha $x,\, y \in [a,\ b]$ uchun $|K(x,y)\,| \leq M$ tengsizlik bajariladi. To‘la $C[a,\ b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy + \varphi(x) \tag{22.6}$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish berilgan bo‘lsin. U holda

$$\rho\,(g_1, g_2) = \max_{a\leq x\leq b} |g_1\,(x) - g_2\,(x)\,| \leq |\,\lambda\,|\ M\ (b-a)\cdot \max_{a\leq x\leq b} |f_1\,(x) - f_2\,(x)\,|$$

yoki

$$\rho\,(Af_1, Af_2) \leq |\lambda|\; M\;(b-a)\cdot\rho\,(f_1, f_2)\,.$$

Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{M\cdot(b-a)} \tag{22.7}$$

bo‘lganda A qisuvchi akslantirish bo‘ladi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipiga asoslanib xulosa qilamizki, (22.7) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ da (22.5) Fredholm tenglamasi yagona uzluksiz yechimga ega.

Bu yechimga intiluvchi ketma-ket yaqinlashishlar $f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$

$$f_n(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\,f_{n-1}(y)\,dy + \varphi(x)$$

ko‘rinishga ega, bu yerda f_0 sifatida ixtiyoriy uzluksiz funksiyani olish mumkin.

Chiziqlimas integral tenglamalar. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining

$$f(x) = \lambda\int_a^b K(x,y;\,f(y))\,dy + \varphi(x)$$

ko‘rinishdagi chiziqlimas integral tenglamalarga tadbiqini qaraymiz. Bu yerda K va φ funksiyalar uzluksiz bo‘lib, bundan tashqari K o‘zining 3 - chi funksional argumenti bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya’ni shunday $L > 0$ mavjud bo‘lib,

$$|K(x,y;z_1) - K(x,y;z_2)| \leq L\;|z_1 - z_2|$$

tengsizlik barcha $x, y\in[a,\ b]$ va $z_1,\,z_2$ lar uchun o‘rinli bo‘lsin. Bu holda $C[a,\ b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga

$$g(x) = \lambda\int_a^b K(x,y\,;\,f(y))\,dy + \varphi(x)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish uchun

$$\max_{a\leq x\leq b}|\,g_1\,(x) - g_2\,(x)\,| \leq |\,\lambda\,|\;\;L\;(b-a)\cdot\max_{a\leq x\leq b}|\,f_1\,(x) - f_2\,(x)\,|$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $g_1 = Af_1, \quad g_2 = Af_2$. Shunday ekan,

$$|\,\lambda\,| < \frac{1}{L \cdot (b-a)}$$

shartda A akslantirish qisuvchi bo‘ladi.

Volterra tenglamasi. Endi Volterra tipidagi

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)\, f(y)\, dy + \varphi(x) \tag{22.8}$$

tenglamani qaraymiz. Agar $y > x$ da $K(x,y) = 0$ desak, (22.8) Volterra tenglamasi (22.5) ko‘rinishdagi ikkinchi tur Fredholm tenglamasiga keladi.

Biroq Fredholm integral tenglamasi holida biz λ parametrning kichik qiymatlari bilan chegaralanishga majburmiz. Volterra tenglamasi holida qisuvchi akslantirishlar prinsipi (va ketma-ket yaqinlashishlar usuli) ni λ ning barcha qiymatlarida qo‘llash mumkin. Aniqrog‘i, qisuvchi akslantirishlar prinsipining quyidagi umumlashmasi o‘rinli.

22.2-teorema. *X to‘la metrik fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi A uzluksiz akslantirish uchun biror n da $B = A^n -$ qisuvchi akslantirish bo‘lsin. U holda $Ax = x$ tenglama yagona yechimga ega bo‘ladi.*

Isbot. $x \in X$ nuqta B akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘lsin, ya’ni $Bx = x$. U holda B qisuvchi akslantirishga ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo‘llasak,

$$Ax = ABx = AB^k x = AA^{nk} x = A^{nk+1} x = A^{nk} Ax =$$

$$= B^k Ax = B^k x_0 \to x, \; k \to \infty.$$

Chunki ixtiyoriy $x_0 \in X$, xususiy holda $x_0 = Ax$ uchun, $Bx_0, B^2x_0, \ldots,$ $B^kx_0, \ldots$ ketma-ketlik x qo‘zg‘almas nuqtaga yaqinlashadi. Shunday ekan, $Ax = x$. Bu x nuqta yagona, chunki A uchun qo‘zg‘almas bo‘lgan x nuqta $B = A^n$ uchun ham qo‘zg‘almas nuqtadir, B esa yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega. Δ

22.2. $C[a,\ b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)\, f(y)\, dy + \varphi(x) \tag{22.9}$$

formula bilan aniqlangan A akslantirishning biror darajasi qisuvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f_1 va f_2 funksiyalarni olamiz. U holda

$$|\,(Af_1)\,(x) - (Af_2)\,(x)\,| = |\,\lambda\,| \cdot \left| \int_a^x K(x,y)\ (f_1(y) - f_2(y))\ dy \right| \leq$$
$$\leq |\,\lambda\,| \cdot M(x-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)\,|\ .$$

Bu yerda $M = \max\limits_{a \leq x, y \leq b} |\,K\,(x,y)\,|$. Olingan tengsizlikdan kelib chiqadiki,

$$\left| \left(A^2 f_1\right)\ (x) - \left(A^2 f_2\right)\ (x) \right| = |\,\lambda\,|^2 \cdot M^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)\,|\ .$$

Umuman,

$$|\,(A^n f_1)\ (x) - (A^n f_2)\ (x)\,| = |\,\lambda\,|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n\,!} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)\,| =$$
$$= |\,\lambda\,|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n\,!} \cdot \rho\,(f_1, f_2)\ .$$

Ixtiyoriy λ uchun n nomerni shunday tanlash mumkinki,

$$|\,\lambda\,|^n \cdot M^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n\,!} < 1$$

tengsizlik bajariladi. U holda $B = A^n$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Δ

Shuning uchun, yuqoridagi tasdiqqa asosan (22.8) Volterra tenglamasi har qanday λ da yagona yechimga ega.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Qisuvchi akslantirish prinsipining umumlashmasini ayting.*

2. $\mathbb{R}^n$ *fazoni o'zini-o'ziga akslantiriuvchi* $y = Ax + b$ *akslantirishning qisuvchilik shartlarini toping.*

3. $C[a,\ b]$ *fazoda (22.9) tenglik bilan aniqlangan akslantirishning qisuvchilik shartlarini keltiring.*

VII bob. Chiziqli fazolar

Bu bobda biz chiziqli fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Evklid fazolari va Hilbert fazolarining xossalarini o‘rganamiz. Bu bob 6 (23-28) paragrafdan iborat.

23-§ da chiziqli fazo ta’riflanib, ularga ko‘plab misollar keltirilgan. Chiziqli fazo o‘lchami ta’riflanib, chekli va cheksiz o‘lchamli chiziqli fazolarga misollar keltirilgan. Chiziqli fazoning qism fazosi va faktor fazosi tushunchalari bayon qilingan. Faktor fazoda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari kiritilgan va faktor fazoning chiziqli fazo tashkil qilishi ko‘rsatilgan. 24-§ da chiziqli funksionallar, ularning xossalari qarab chiqilgan. Chiziqli funksionalning geometrik ma’nosi ochib berilgan. Chiziqli funksionallar va gipertekisliklar o‘rtasida biyektiv moslik o‘rnatilgan. 25-§ qavariq to‘plamlar va qavariq funksionallarning xossalarini tahlil qilishga bag‘ishlangan. Qavariq jism va qavariq funksionallar orasidagi bog‘lanish ochib berilgan. Chiziqli funksionalni davom ettirish haqidagi Xan-Banax teoremasi va Xan-Banax teoremasining kompleks varianti isbotlangan. Chiziqli normalangan fazolar mavzusi 26-§ da keltirilgan. Bu paragrafda chiziqli normalangan fazolarga ko‘plab misollar qaralgan. Normalangan fazolardagi tushunchalar metrik fazolardagi tushunchalar bilan taqqoslangan. Normalangan fazoning qism fazosi va faktor fazosiga misollar qaralgan. Navbatdagi 27-§ Evklid fazolariga bag‘ishlangan. Evklid fazolarining xarakteristik xossalari ochib berilgan. Koshi–Bunyakovskiy tengsizligi, Bessel tengsizligi, Parseval tengliklari isbotlangan. Nomdor teoremalar - Riss–Fisher, Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni haqidagi teoremalar isboti bilan berilgan. Ortogonal, ortonormal sistemalarga misollar qaralgan. Separabel Evklid fazolarida to‘la ortonormal sistema va yopiq ortonormal sistemalarning ekvivalentligi isbotlangan. Normalangan fazo Evklid fazo bo‘lishining zarur va yetarli sharti keltirilgan.

Oxirgi 28-§ Hilbert fazolariga bag‘ishlangan. Barcha separabel Hilbert fazolari o‘zaro izomorfligi isbotlangan. Hilbert fazolarining qism fazosi, qism fazoning ortogonal to‘ldiruvchisi, ortogonal qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indilari qaralgan. Xuddi shunday Hilbert fazolarining to‘g‘ri yig‘indilari ta’riflangan. Paragraf so‘ngida haqiqiy va kompleks Evklid fazolaridagi skalyar ko‘paytmalardagi tafovutlar tahlil qilingan.

23-§. Chiziqli fazolar va ularga misollar

Chiziqli fazo tushunchasi matematikada asosiy tayanch tushunchalardan hisoblanadi. Yuqoridagi belgilashlarga amal qilgan holda $\mathbb{C}$ bilan kompleks sonlar, $\mathbb{R}$ bilan haqiqiy sonlar to‘plamini belgilaymiz.

23.1-ta’rif. *Agar elementlari* $x, y, z, \ldots$ *bo‘lgan* L *to‘plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo‘lsa:*

I. Ixtiyoriy ikkita $x, y \in L$ *elementlarga ularning yig‘indisi deb ataluvchi aniq bir* $x + y \in L$ *element mos qo‘yilgan bo‘lib, ixtiyoriy* $x, y, z \in L$ *elementlar uchun*

1) $x + y = y + x$ *(kommutativlik),*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(assotsiativlik),*

3) L *da shunday* θ *element mavjud bo‘lib,* $x + \theta = x$ *(nolning mavjudligi),*

4) *shunday* $-x \in L$ *element mavjud bo‘lib,* $x + (-x) = \theta$ *(qarama-qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;*

II. ixtiyoriy $x \in L$ *element va ixtiyoriy* α *son* ($\alpha \in \mathbb{R}$ *yoki* $\alpha \in \mathbb{C}$) *uchun* x *elementning* α *songa ko‘paytmasi deb ataluvchi aniq bir* $\alpha x \in L$ *element mos qo‘yilgan bo‘lib, ixtiyoriy* $x, y \in L$ *va ixtiyoriy* α, β *sonlar uchun*

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x,$

6) $1 \cdot x = x,$

7) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x\,,$

8) $\alpha\,(x+y)=\alpha\,x+\alpha\,y$ *aksiomalar bajarilsa, u holda* L *to'plamga chiziqli fazo yoki vektor fazo deyiladi.*

Ta'rifda kiritilgan I va II amallar mos ravishda yig'indi va songa ko'paytirish amallari deyiladi. Ta'rifda foydalanilgan sonlar zahirasiga (haqiqiy sonlar $\mathbb{R}$ yoki kompleks sonlar $\mathbb{C}$) bog'liq holda chiziqli fazo *haqiqiy yoki kompleks chiziqli fazo* deyiladi.

Chiziqli fazolarga misollar keltiramiz.

23.1-misol. $L=\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plami odatdagi qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi. $L=\mathbb{C}$ kompleks sonlar to'plami ham kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan kompleks chiziqli fazo tashkil qiladi.

23.2. $L=\mathbb{R}^n\equiv\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ x_i\in\mathbb{R}\,,\ i=1,2,\ldots,n\}$. Bu yerda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi. Ixtiyoriy $x=(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ lar uchun

$$x+y=(x_1+y_1,\,x_2+y_2,\ldots,\,x_n+y_n)\ , \tag{23.1}$$

$$\alpha\,x=(\alpha\,x_1,\,\alpha\,x_2,\ldots,\,\alpha\,x_n)\,. \tag{23.2}$$

$\mathbb{R}^n-$ to'plam (23.1) va (23.2) tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi va u *$n-$ o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo* deyiladi.

23.3. $L=\mathbb{C}^n\equiv\{z=(z_1,z_2,\ldots,z_n),\ z_k\in\mathbb{C}\,,\ k=1,2,\ldots,n\}$. Bu yerda ham elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari (23.1) va (23.2) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi. $\mathbb{C}^n-$ to'plam kompleks chiziqli fazo bo'ladi va u *$n-$ o'lchamli kompleks chiziqli fazo* deyiladi.

23.4. $L=C[a,\ b]$ $-$ $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami. Funksiyalarni qo'shish va funksiyani songa ko'paytirish amallari mos ravishda

$$(f+g)\,(x)=\ f(x)+g(x) \tag{23.3}$$

va

$$(\alpha f)\ (x) = \alpha f\,(x) \tag{23.4}$$

ko‘rinishda aniqlanadi. (23.3) va (23.4) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $C[a,\ b]$ to‘plam chiziqli fazo tashkil qiladi.

23.5. $\ell_2 = \left\{ x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ – kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu yerda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n, \ldots)\ , \tag{23.5}$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots),\ \alpha \in \mathbb{C}. \tag{23.6}$$

Yig‘indi $x + y \in \ell_2$ ekanligi $|\,a + b\,|^2 \le 2\,|a|^2 + 2|\,b|^2$ tengsizlikdan kelib chiqadi. (23.5) va (23.6) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, ℓ_2 to‘plam kompleks chiziqli fazo bo‘ladi.

23.6. $c_0 = \{\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \,\}-$ nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plamda ham qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (23.5) va (23.6) tengliklar ko‘rinishida aniqlanadi va ular chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, c_0 to‘plam chiziqli fazo bo‘ladi.

23.7. $c = \left\{ x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \ldots) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \right\}$ - yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plam ham 23.5-misolda kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

23.8. $L = m-$ barcha chegaralangan ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plam ham 23.5-misolda kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

Endi IV va V bobda xossalari o‘rganilgan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar va o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar to‘plamini qaraymiz.

23.9. Berilgan $[a,\ b]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plamini $\tilde{L}_1[a,\ b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plamda elementlarni qo'shish va elementni songa ko'paytirish amallari (23.3) va (23.4) tengliklar bilan aniqlanadi. $\tilde{L}_1[a,\ b]$ to'plam funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq. Chunki, integrallanuvchi f va g funksiyalar yig'indisi $f+g$ ham integrallanuvchi va

$$\int_{[a,\ b]} [f(t)+g(t)]\ d\mu = \int_{[a,\ b]} f(t)\ d\mu + \int_{[a,\ b]} g(t)\ d\mu$$

tenglik o'rinli. Xuddi shunday integrallanuvchi funksiyaning songa ko'paytmasi yana integrallanuvchi funksiyadir. Funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari esa chiziqli fazo aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $\tilde{L}_1[a,\ b]$ to'plam chiziqli fazo bo'ladi.

23.10. Berilgan $[a,\ b]$ kesmada $p\,(p>1)-$ darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plamini $\tilde{L}_p[a,\ b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (23.3) va (23.4) tengliklar bilan aniqlanadi va $\tilde{L}_p[a,\ b]$ to'plam chiziqli fazo tashkil qiladi. Yig'indi $f+g\in\tilde{L}_p[a,\ b]$ ekanligi Minkovskiy tengsizligi

$$\left(\int_{[a,\ b]} |f(t)+g(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{[a,\ b]} |\, f(t)\,|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{[a,\ b]} |\, g(t)\,|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

dan kelib chiqadi.

23.11. Berilgan $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamini $V[a,\ b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plamda ham funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari 23.4-misoldagidek kiritiladi. Ishonch hosil qilish mumkinki, $V[a,\ b]$ to'plam funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Hosil qilingan fazo *o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi* deyiladi va bu fazo $V[a,\ b]$ bilan belgilanadi.

23.2-ta'rif. *Bizga L va L^* chiziqli fazolar berilgan bo'lsin. Agar bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,*

$$x \leftrightarrow x^* \quad \text{va} \quad y \leftrightarrow y^*, \quad (x, y \in L, \quad x^*, y^* \in L^*)$$

ekanligidan $x + y \leftrightarrow x^* + y^*$ va $\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$, $(\alpha - ixtiyoriy\, son)$ *ekanligi kelib chiqsa, u holda L va L^* chiziqli fazolar o'zaro izomorf fazolar deyiladi.*

Izomorf fazolarni aynan bitta fazoning har xil ko'rinishi deb qarash mumkin.

23.3-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoning $x_1, \ x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi uchun hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lgan $a_1, \ a_2, \ \ldots, a_n$ sonlar mavjud bo'lib,*

$$a_1 x_1 + \ a_2 x_2 + \ \cdots \ + a_n x_n = 0 \tag{23.7}$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_1, \ x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'langan deyiladi. Aks holda, ya'ni (23.7) tenglikdan

$$a_1 = \ a_2 = \ \cdots \ = a_n = 0$$

ekanligi kelib chiqsa, $x_1, \ x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan yoki chiziqli erkli deyiladi.

Agar $x_1, \ x_2, \ \ldots, x_n, \ldots$ cheksiz elementlar sistemasining ixtiyoriy chekli qism sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sistema chiziqli erkli* deyiladi.

23.4-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoda n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lib, bu fazoning ixtiyoriy $n+1$ ta elementdan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda L $n-$ o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va* $\dim L = n$ *kabi yoziladi. n o'lchamli L chiziqli fazoning ixtiyoriy n ta elementdan iborat chiziqli erkli sistemasi shu fazoning bazisi deyiladi.*

23.5-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lsa, u holda L cheksiz o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va* $\dim L = \infty$ *ko'rinishda yoziladi.*

$\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{C}^n$ fazolar n oʻlchamli chiziqli fazolardir. $L = C[a,\ b]$ fazodan boshlab 23.4-23.11 misollarda keltirilgan barcha fazolar cheksiz oʻlchamli fazolardir. Masalan, ℓ_2 fazoda

$$\{e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots)\}_{n=1}^{\infty} \tag{23.8}$$

sistema cheksiz chiziqli erkli sistemaga misol boʻladi.

23.1. Chiziqli fazoning qism fazosi

Bizga L chiziqli fazoning boʻsh boʻlmagan L' qism toʻplami berilgan boʻlsin.

23.6-ta'rif. *Agar L' ning oʻzi L da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil qilsa, u holda L' toʻplam L ning qism fazosi deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $x, y \in L'$ va $a,\ b \in \mathbb{C}\,(\mathbb{R})$ sonlar uchun $ax + by \in L'$ boʻlsa, L' ga *qism fazo* deyiladi.

Har qanday L chiziqli fazoning faqat nol elementdan iborat $\{\theta\}$ qism fazosi bor. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy L chiziqli fazoni oʻzining qism fazosi sifatida qarash mumkin.

23.7-ta'rif. *L chiziqli fazodan farqli va hech boʻlmaganda bitta nolmas elementni saqlovchi qism fazo xos qism fazo deyiladi.*

23.12-misol. $\ell_2 \subset c_0 \subset c \subset m$ fazolarning har biri oʻzidan keyingilari uchun xos qism fazo boʻladi.

23.13. Endi $[a,\ b]$ kesmada $p(p \geq 1)-$ darajasi bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosi $\tilde{L}_p\,[a,\ b]$ ni qaraymiz. Bu fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil topgan qism toʻplamni $\tilde{L}_p^{(0)}\,[a,\ b]$ koʻrinishda belgilaymiz. Ma'lumki, nolga ekvivalent funksiyalar yigʻindisi yana nolga ekvivalent boʻlgan funksiya boʻladi. Nolga ekvivalent funksiyaning songa koʻpaytmasi ham nolga ekvivalent funksiya boʻladi. Demak, $\tilde{L}_p^{(0)}\,[a,\ b]$ toʻplam $\tilde{L}_p\,[a,\ b]$ fazoning xos qism fazosi boʻladi.

23.14. Oʻzgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,\ b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,\ b]$ kesmada absolyut uzluksiz funksiyalar toʻplami $V[a,\ b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami funksiyalarni qo'shish (23.3) va songa ko'paytirish (23.4) amallariga nisbatan yopiq to'plam. Shuning uchun u $V[a,\, b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va u $AC[a,\, b]$ bilan belgilanadi.

23.15. $V[a,\, b]$ fazoda $f(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plam funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq to'plamdir. Shuning uchun u $V[a,\, b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va u $V_0[a,\, b]$ bilan belgilanadi.

23.16. Yana o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,\, b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,\, b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,\, b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Ammo ikki monoton funksiyaning yig'indisi har doim monoton funksiya bo'lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin. $x(t) = t^2 + 1\,, \quad y(t) = -2t$ funksiyalarning har biri $[0,\, 2]$ kesmada monoton funksiya bo'ladi, ammo ularning yig'indisi $x(t) + y(t) = (t-1)^2$ funksiya $[0,\, 2]$ kesmada monoton emas. Demak, $[a,\, b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,\, b]$ fazoning qism fazosi bo'la olmaydi. Demak, chiziqli fazoning har qanday qism to'plami qism fazo tashkil qilavermas ekan.

Bizga L fazoning bo'sh bo'lmagan $\{x_i\}$ qism to'plami berilgan bo'lsin. U holda L chiziqli fazoda $\{x_i\}$ sistemani o'zida saqlovchi minimal qism fazo mavjud.

Haqiqatan ham, $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi hech bo'lmaganda bitta qism fazo mavjud, bu L ning o'zi.

Ixtiyoriy sondagi qism fazolarning kesishmasi yana qism fazo bo'ladi. Haqiqatan ham, agar

$$L^* = \bigcap_i L_i$$

bo'lib $x, y \in L^*$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy i uchun $x, y \in L_i$ bo'ladi. L_i qism fazo bo'lganligi uchun $\alpha\, x + \beta\, y \in L_i$ munosabat barcha

$\alpha,\ \beta$ sonlar uchun oʻrinli. Demak, $\alpha\, x + \beta\, y \in L^*$ boʻladi.

Endi $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi L ning barcha qism fazolarini olamiz va ularning kesishmasini qaraymiz hamda uni $L\left(\{x_i\}\right)$ orqali belgilaymiz. $L\left(\{x_i\}\right)$ qism fazo $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi minimal qism fazo boʻladi. Bu $L\left(\{x_i\}\right)$ minimal qism fazo $\{x_i\}$ *sistemadan hosil boʻlgan* qism fazo yoki $\{x_i\}$ *sistemaning chiziqli qobigʻi* deyiladi.

23.2. Chiziqli fazoning faktor fazosi

Bizga L chiziqli fazo va uning L' xos qism fazosi berilgan boʻlsin. L ning elementlari orasida quyidagicha munosabat oʻrnatish mumkin.

23.8-ta'rif. *Agar $x, y \in L$ elementlar uchun $x - y$ ayirma L' ga tegishli boʻlsa, x va y ekvivalent elementlar deyiladi.*

Fazo elementlari orasida oʻrnatilgan bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Haqiqatan ham, $x - x \in L'$ (refleksivlik); $x - y \in L'$ dan $y - x = -(x - y) \in L'$ (simmetriklik); $x - y \in L'$, $y - z \in L'$ dan $x - z = (x - y) + (y - z) \in L'$ (tranzitivlik). Shuning uchun bu munosabat L ni oʻzaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va har bir sinf oʻzaro ekvivalent elementlardan tashkil topgan. Bu sinflar *qoʻshni sinflar* deyiladi. Barcha qoʻshni sinflar toʻplami L chiziqli fazoning L' qism fazo boʻyicha *faktor fazosi* deyiladi va L/L' koʻrinishda belgilanadi.

Tabiiyki, har qanday faktor fazoda yigʻindi va songa koʻpaytirish amallari kiritiladi.

Aytaylik, ξ va η lar L/L' dan olingan ixtiyoriy qoʻshni sinflar boʻlsin. Bu sinflarning har biridan bittadan vakil tanlaymiz, masalan $x \in \xi$, $y \in \eta$. ξ va η sinflarning yigʻindisi sifatida $x + y$ elementni saqlovchi ζ sinf qabul qilinadi. ξ qoʻshni sinfning α songa koʻpaytmasi sifatida $\alpha\, x$ elementni saqlovchi sinf qabul qilinadi. Natija $x \in \xi$, $y \in \eta$ vakillarning tanlanishiga bogʻliq emas, chunki, qandaydir boshqa $x' \in \xi$, $y' \in \eta$ vakillarni olsak ham

$(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in L'$ bo‘lgani uchun $x'+y' \in \zeta$ bo‘ladi. Bevosita tekshirish shuni ko‘rsatadiki, L/L' da aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazo ta’rifidagi aksiomalarni qanoatlantiradi (buni mustaqil tekshirib ko‘rishni o‘quvchiga tavsiya qilamiz). Boshqacha aytganda, L/L' faktor fazo chiziqli fazo tashkil qiladi.

Shunday qilib, har bir L/L' faktor fazo unda yuqorida ko‘rsatilgan usulda kiritilgan yig‘indi va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Shuni ta’kidlash joizki, har qanday faktor fazoda L' qism fazo L/L' faktor fazoning nol elementi bo‘ladi. Ma’lumki, L' qism fazoning elementlari o‘zaro ekvivalent va L' qism fazo L chiziqli fazoning nol elementini saqlaydi. Shuning uchun ξ va L' qo‘shni sinflarning yig‘indisi $x+\theta = x$ ($x \in \xi,\ \theta \in L'$) elementni saqlovchi qo‘shni sinfga, ya’ni ξ ga teng.

23.17. Faktor fazoga misolni tushunish nisbatan osonroq bo‘lgan $\mathbb{R}^2$ fazodan boshlaymiz. $L=\mathbb{R}^2$ fazoning $L' = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\right\}$ xos qism fazosini qaraymiz va L/L' faktor fazoning elementlarini, ya’ni qo‘shni sinflarning tavsifini beramiz. Ma’lumki, $x-y=(x_1-y_1, x_2-y_2) \in L'$ bo‘lishi uchun $x_2 = y_2$ bo‘lishi zarur va yetarli. Demak, L/L' faktor fazoning elementlari (qo‘shni sinflar) $O\,x_1$ o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlardan iborat. Masalan, $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ nuqtani o‘zida saqlovchi ξ qo‘shni sinf $O\,x_1$ o‘qiga parallel bo‘lgan $x_2 = b$ to‘g‘ri chiziqdan (23.1 a-chizma) iborat.

23.1-chizma

Xuddi shunday, (1,2) va (2,3) nuqtalarni saqlovchi qo‘shni sinflar yig‘indisi

(3,5) nuqtani saqlovchi $x_2 = 5$ to‘g‘ri chiziqdan iborat. $(1,2) \in \xi$ qo‘shni sinfning 3 ga ko‘paytmasi (3,6) nuqtani saqlovchi $x_2 = 6$ to‘g‘ri chiziqdan (23.1 b-chizma) iborat.

23.18. Ma’lumki (23.9-23.10 misollarga qarang), $[a,\ b]$ kesmada $p\,(p \geq 1)-$ darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar to‘plami chiziqli fazo tashkil qiladi va u $\tilde{L}_p\,[a,\ b]$ bilan belgilanadi. Bu fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil topgan qism fazosini $\tilde{L}_p^0\,[a,b]$ (23.13-misolga qarang) ko‘rinishda belgilaymiz. Endi $\tilde{L}_p\,[a,b]$ chiziqli fazoning $\tilde{L}_p^0\,[a,b]$ qism fazo bo‘yicha faktor fazosini qaraymiz va bu faktor fazoni $L_p\,[a,b]$ bilan belgilaymiz. Bu fazo $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va *$p-$ darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar fazosi* deyiladi.

Agar $L\ -\ n$ o‘lchamli chiziqli fazo va L' uning $k(0 < k < n)$ o‘lchamli qism fazosi bo‘lsa, u holda L/L' faktor fazo $n-k$ o‘lchamli bo‘ladi.

Bu tasdiqni isbotlaymiz. Aytaylik, $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ elementlar sistemasi L' da bazis bo‘lsin. Bu sistemani $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n \in L$ elementlar bilan L fazo bazisigacha to‘ldiramiz. Bu $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$ elementlar bir-biri bilan ekvivalent emas, aks holda $x_1,\ x_2, \ldots, x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2}, \ldots\ , x_n$ sistema chiziqli bog‘langan bo‘lar edi. Shuning uchun $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$ elementlar har xil qo‘shni sinflarga tegishli bo‘ladi. ξ_i orqali $x_{k+i},\ i \in \{1,\ 2, \ldots, n-k\}$ element tegishli bo‘lgan sinfni belgilaymiz.

Endi $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-k}$ elementlar sistemasining L/L' da bazis bo‘lishini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $\xi \in L/L'$ qo‘shni sinfni olaylik va $x \in \xi$ bo‘lsin. U holda

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2\, x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \beta_1\, x_{k+1} + \beta_2\, x_{k+2} + \cdots + \beta_{n-k} x_n$$

yoyilma o‘rinli bo‘ladi. $\xi + L' = \xi$ (har qanday L/L' faktor fazoda L' qism fazo L/L' faktor fazoning nol elementi bo‘ladi, ya’ni $\theta = L'$) bo‘lgani uchun

$$x' = x - \alpha_1 x_1 - \alpha_2\, x_2 - \cdots\ - \alpha_k x_k$$

element ξ qo‘shni sinfga tegishli va

$$x' = \beta_1\, x_{k+1} + \beta_2\, x_{k+2} + \ \cdots\ + \beta_{n-k} x_n$$

yoyilma o‘rinli bo‘ladi. Bundan

$$\xi = \beta_1\, \xi_1 + \beta_2\, \xi_2 + \ \cdots\ + \beta_{n-k} \xi_{n-k}$$

tenglik kelib chiqadi. Har qanday $(\beta_1\,, \beta_2\,, \ldots\,, \beta_{n-k}) \neq 0$ da

$$\beta_1\, x_{k+1} + \beta_2\, x_{k+2} + \ \cdots\ + \beta_{n-k} x_n \notin L'$$

bo‘lgani uchun $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-k}$ chiziqli bog‘lanmagan sistema bo‘ladi. Shunday qilib, $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-k}$ sistema chiziqli erkli va har bir $\xi \in L/L'$ sinf $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-k}$ sinflarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lganligi uchun $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-k}$ sistemaning bazis ekanligiga kelamiz. Demak, L/L' fazo $n-k$ o‘lchamli chiziqli fazo ekan.

23.9-ta’rif. *L/L' faktor fazoning o‘lchami L' qism fazoning koo‘lchami deyiladi.*

Agar L' qism fazo chekli n koo‘lchamga ega bo‘lsa, u holda L da shunday $x_1,\, x_2,\, \ldots\,, x_n$ elementlarni tanlash mumkinki, ixtiyoriy $x \in L$ element $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2\, x_2 + \ \cdots\ + \alpha_n x_n + y$ ko‘rinishda bir qiymatli ifodalanadi, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2\,, \ldots\,, \alpha_n$ sonlar, $y \in L'$. Haqiqatan ham, L/L' faktor fazo $n-$o‘lchamli bo‘lsin. Bu faktor fazoda $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ bazisni tanlaymiz va har bir ξ_k sinfdan bittadan x_k vakil olamiz. Endi $x \in L$ ixtiyoriy element bo‘lsin va ξ esa x ni saqlovchi L/L' dagi qo‘shni sinf bo‘lsin. U holda

$$\xi = \alpha_1\, \xi_1 + \alpha_2\, \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n.$$

Ta’rifga ko‘ra ξ sinfdagi har bir element, xususiy holda, x element $x_1,\ x_2,\ \ldots,$ x_n elementlarning

$$\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \ \cdots\ + \alpha_n x_n$$

chiziqli kombinatsiyasidan L' dan olingan elementgagina farq qiladi, ya'ni

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + y, \quad y \in L'.$$

Bu tasvirning yagonaligini ko'rsatamiz. Aytaylik

$$x = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \cdots + \alpha_n' x_n + y', \; y' \in L'$$

tasvir ham o'rinli bo'lsin. U holda

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_1')x_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')\, x_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')x_n + y - y'$$

tenglikka kelamiz. Bundan $\alpha_1 = \alpha_1', \; \alpha_2 = \alpha_2', \ldots, \alpha_n = \alpha_n', \; y = y'$.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Chiziqli fazoga misollar keltiring.*

2. *Chiziqli bog'langan (chiziqli bog'lanmagan) sistema ta'rifini bering.*

3. *Chiziqli fazo o'lchami ta'rifini bering.*

4. $[-1, \, 1]$ *kesmada aniqlangan uzluksiz va juft (toq) funksiyalar to'plamini* $C^{+}[-1, 1]$ $(C^{-}[-1, 1])$ *bilan belgilaymiz.* $C^{+}[-1, 1]$ $(C^{-}[-1, 1])$ *to'plam* $C[-1, 1]$ *chiziqli fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang.*

5. $\tilde{L}_p^{(0)}[a, b]$ *qism fazoning o'lchamini toping.*

6. $L_p[a, b]$ *faktor fazoning o'lchamini toping.*

24-§. Chiziqli funksionallar

Bu paragraf chiziqli funksionallar, ularning ayrim xossalariga bag'ishlangan.

24.1-ta'rif. L *chiziqli fazoda aniqlangan* f *sonli funksiya funksional deyiladi. Agar barcha* $x, y \in L$ *lar uchun*

$$f\,(x + y) = f\,(x) + f\,(y)$$

bo'lsa, f additiv funksional deyiladi.

24.2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in L$ va barcha $\alpha \in \mathbb{C}$ lar uchun*

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

bo'lsa, f bir jinsli funksional deyiladi. Agar ixtiyoriy $x \in L$ va barcha $\alpha \in \mathbb{C}$ sonlar uchun

$$f(\alpha\, x) = \bar{\alpha}\, f(x)$$

bo'lsa, u holda kompleks chiziqli fazoda aniqlangan f funksional qo'shma bir jinsli deyiladi, bu yerda $\bar{\alpha}$ soni α ga qo'shma kompleks son.

24.3-ta'rif. *Additiv va bir jinsli funksional chiziqli funksional deyiladi. Additiv va qo'shma bir jinsli funksional qo'shma chiziqli (yoki antichiziqli) funksional deyiladi.*

Chiziqli funksionallarga misollar keltiramiz.

24.1-misol. $\mathbb{R}^n -$ n o'lchamli vektor fazo va $a = (a_1,\, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tayin bir element bo'lsin. U holda

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

moslik $\mathbb{R}^n$ da chiziqli funksional bo'ladi.

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \bar{z}_k$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ akslantirish qo'shma chiziqli funksionalni aniqlaydi.

24.2. Quyidagi I va $I^* : C[a,\, b] \to \mathbb{C}$ funksionallar

$$I(x) = \int_a^b x(t)\, dt, \qquad I^*(x) = \int_a^b \overline{x(t)}\; dt$$

$C[a,\, b]$ fazodagi chiziqli va qo'shma chiziqli funksionalga misol bo'ladi.

24.3. $y_0 \in C[a,\, b]$ berilgan element bo'lsin. Har bir $x \in C[a,\, b]$ funksiyaga

$$F(x) = \int_a^b x(t)\, y_0(t)\, dt$$

sonni mos qo'yamiz. Bu funksionalning chiziqliligi integrallash amalining asosiy xossalaridan kelib chiqadi.

$$F^*(x) = \int_a^b \overline{x(t)}\, y_0(t)\, dt$$

funksional $C[a,\, b]$ fazoda qo'shma chiziqli funksional bo'ladi.

24.4. ℓ_2 fazoda chiziqli funksionalga misol keltiramiz. $k-$ tayin bir natural son bo'lsin. ℓ_2 dagi har bir $x = (x_1,\, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ uchun

$$f_k(x) = x_k$$

deymiz. Bu funksionalning chiziqliligi ko'rinib turibdi.

24.1. Chiziqli funksionalning geometrik ma'nosi

Bizga L chiziqli fazoda aniqlangan, nolmas f chiziqli funksional berilgan bo'lsin. Bu f funksional uchun $f(x) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in L$ nuqtalar to'plami uning *yadrosi* deyiladi va $Ker\, f = \{x \in L : f(x) = 0\}$ ko'rinishda belgilanadi. $Ker\, f$ to'plam L ning qism fazosi bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $x, y \in Ker\, f$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a,\, b$ sonlar uchun

$$f\,(a\,x + b\,y) = a\,f\,(x) + b\,f\,(y) = 0$$

tenglik o'rinli.

$Ker\, f$ qism fazoning koo'lchami birga teng. Haqiqatan ham, $Ker\, f$ ga qarashli bo'lmagan, ya'ni $f(x_0) \neq 0$ bo'ladigan qandaydir x_0 elementni olamiz. Bunday element mavjud, chunki $f(x) \neq 0$ (aynan nolga teng emas). Umumiylikni chegaralamasdan hisoblashimiz mumkinki, $f(x_0) = 1$ (aks holda biz $x_0/f(x_0)$ ni olgan bo'lar edik, chunki $f(x_0/f(x_0)) = 1$). Ixtiyoriy x element uchun $y = x - x_0 \cdot f\,(x)$ desak, u holda

$$f(y) = f\,(x - x_0 \cdot f\,(x)) = 0,$$

ya'ni $y \in Ker\, f$. Qaralayotgan x element $x = a\,x_0 + y$, $y \in Ker\, f$ ko'rinishda tasvirlanadi va bu tasvir yagonadir. Haqiqatan ham,

$$x = a\,x_0 + y\,, \quad y \in Ker\,f \qquad \text{va} \quad x = a'\,x_0 + y'\,, \quad y' \in Ker\,f$$

bo'lsin. U holda $(a - a')\,x_0 = y' - y$ tenglik o'rinli. Agar $a = a'$ bo'lsa, $y = y'$ ekanligi ko'rinib turibdi. Agar $a - a' \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$x_0 = \frac{y' - y}{a - a'} \in Ker\,f$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $x_0 \notin Ker\,f$ shartga zid. Bu qarama-qarshilik tasdiqni isbotlaydi. Δ

Bu yerdan kelib chiqadiki, ikkita x_1 va x_2 elementlar $Ker\,f$ qism fazo bo'yicha bitta qo'shni sinfda yotishi uchun $f(x_1) = f(x_2)$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Haqiqatan ham,

$$x_1 = f\,(x_1)\;x_0 + y_1,\;\; y_1 \in Ker\,f, \;\;\; x_2 = f\,(x_2)\;x_0 + y_2,\;\; y_2 \in Ker\,f$$

tenglikdan

$$x_1 - x_2 = (f\,(x_1) - f\,(x_2))\;x_0 + (y_1 - y_2)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu yerdan kelib chiqadiki, $x_1 - x_2 \in Ker\,f$ bo'lishi uchun $f\,(x_1) - f\,(x_2) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

$Ker\,f$ qism fazo bo'yicha har qanday ξ sinf o'zining ixtiyoriy vakili bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bunday vakil sifatida $a\,x_0$ ko'rinishdagi elementni olish mumkin. Bu yerdan ko'rinadiki, $L/Ker\,f$ qism fazoning o'lchami birga teng ekan, ya'ni $Ker\,f$ ning koo'lchami birga teng.

Chiziqli funksionalning yadrosi $Ker\,f$ o'zida nolga aylanadigan funksionalni o'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida bir qiymatli aniqlaydi.

Haqiqatan ham, f va g funksionallar yadrolari teng bo'lsin, ya'ni $Ker\,f = Ker\,g$. U holda f uchun $x_0 \in L$ elementni shunday tanlaymizki, $f(x_0) = 1$ bo'lsin. Ko'rsatamizki, $g(x_0) \neq 0$. Ixtiyoriy $x \in L$ uchun

$$x = f\;(x)\;x_0 + y,\;\; y \in Ker\,f \qquad \text{va} \quad g\,(x) = f\;(x)\;g\,(x_0) + g\,(y) = f\;(x)\;g\,(x_0)$$

tengliklarga egamiz. Agar $g(x_0) = 0$ bo'lsa, $g(x) \equiv 0$ bo'lar edi. $g(x) =$

$g(x_0)f(x)$ tenglikdan f va g funksionallarning proporsional ekanligi kelib chiqadi.

Koo'lchami birga teng bo'lgan ixtiyoriy L' qism fazo berilgan bo'lsin. U holda shunday f chiziqli funksional mavjudki, $Ker\, f = L'$ bo'ladi. Buning uchun L' qism fazoda yotmaydigan ixtiyoriy $x_0 \in L$ elementni olamiz va ixtiyoriy $x \in L$ elementni $x = a\,x_0 + y,\ \ y \in L'$ ko'rinishda yozamiz. Bunday yoyilma yagona. $f(x) = a$ tenglik yordamida aniqlanuvchi chiziqli funksionalning yadrosi $Ker\, f = L'$ bo'ladi.

L chiziqli fazoda koo'lchami birga teng bo'lgan qandaydir L' qism fazo berilgan bo'lsin. U holda L fazoning L' qism fazo bo'yicha har qanday qo'shni sinfi L' qism fazoga parallel bo'lgan gipertekislik deyiladi (xususan, L' qism fazoning o'zi θ elementni saqlovchi, ya'ni koordinata boshidan o'tuvchi gipertekislik hisoblanadi). Boshqacha aytganda, L' qism fazoga parallel bo'lgan M' gipertekislik - bu L' qism fazoni qandaydir $x_0 \in L$ vektorga parallel ko'chirishdan paydo bo'ladigan to'plam, ya'ni

$$M' = L' + x_0 = \{\, y :\ y = x + x_0,\ \ x \in L'\}\,.$$

Ko'rinib turibdiki, agar $x_0 \in L'$ bo'lsa, $M' = L'$ bo'ladi, agarda $x_0 \notin L'$ bo'lsa, u holda $M' \neq L'$.

Agar $f\ - L$ chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli funksional bo'lsa, $M_f = \{\, x \in L :\ \ f(x) = 1\}$ to'plam $Ker\, f$ qism fazoga parallel gipertekislik bo'ladi. Haqiqatan ham, $f(x_0) = 1$ bo'ladigan x_0 elementni tanlab, ixtiyoriy elementni $x = \alpha\, x_0 + y\,,\quad y \in Ker\, f$ ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Ikkinchi tomondan, agar M' $-$koo'lchami birga teng bo'lgan L' qism fazoga parallel va koordinata boshidan o'tmaydigan gipertekislik bo'lsa, u holda shunday yagona f chiziqli funksional mavjudki,

$$M' = \{x :\ f(x) = 1\}$$

boʻladi. Haqiqatan ham, $M' = L' + x_0$, $x_0 \in L$ boʻlsin. U holda har qanday $x \in L$ element yagona ravishda $x = a\,x_0 + y$, $y \in L'$ koʻrinishda tasvirlanadi. $f(x) = a$ tenglik yordamida aniqlanadigan chiziqli funksional izlanayotgan funksional boʻladi. Uning yagonaligi quyidagidan kelib chiqadi:

Agar $x \in M'$ da $g(x) = 1$ boʻlsa, u holda $y \in L'$ da $g(y) = 0$ boʻladi. Bundan

$$g(a\,x_0 + y) = a = f(a\,x_0 + y)$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, L chiziqli fazoda aniqlangan noldan farqli barcha chiziqli funksionallar bilan koordinata boshidan oʻtmaydigan L dagi barcha gipertekisliklar oʻrtasida oʻzaro bir qiymatli moslik oʻrnatildi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Chiziqli funksionalning geometrik ma'nosini tushuntiring.*

2. $C[a,b]$ *fazoda gipertekislikka misol keltiring.*

3. $C[a,b]$ *fazoda* $f(x) = x(b)$ *chiziqli funksionalni qaraymiz.* $C[a,b]$ *fazoda* $M = \{\, f \in C[a,b] : \ f(x) = 1\,\}$ *toʻplam gipertekislik boʻladimi?*

4. $f : V[a,\ b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(a)$ *chiziqli funksionalning yadrosini toping.* $Ker\, f = V_0[a,b]$ *tenglik toʻgʻrimi?*

5. $f : C[-1,\ 1] \to \mathbb{R}$ *va*

$$f\,(x) = \int_{-1}^{1} x\,(t)\ dt$$

funksionalning chiziqli ekanligini koʻrsating. Toq funksiyalar toʻplami $C^{-}[-1,\ 1] = \{\, x \in C[-1,\ 1] : \ x(-t) = -x(t)\,\}$ *uchun* $C^{-}[-1,\ 1] \subset Ker\, f$ *munosabat toʻgʻrimi?*

6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1$ *chiziqli funksionalning yadrosini toping. Bu fazoda* $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 1\right\}$ *gipertekislikni chizmada tasvirlang.*

25- §. Qavariq to‘plamlar va qavariq funksionallar

L - haqiqiy chiziqli fazo, x va y uning ikki nuqtasi bo‘lsin. U holda

$$\alpha\, x + (1-\alpha)\, y, \quad \alpha \in [0,\ 1]$$

ko‘rinishdagi barcha elementlar to‘plami x va y nuqtalarni tutashtiruvchi kesma deyiladi va u $[x,\, y]$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$[x,\, y] = \{\, \alpha\, x + (1-\alpha)\, y : \quad \alpha \in [0,\, 1]\}\,.$$

25.1-ta’rif. *Agar $M \subset L$ to‘plam o‘zining ixtiyoriy $x, y \in M$ nuqtalarini tutashtiruvchi $[x, y]$ kesmani ham o‘zida saqlasa, M ga qavariq to‘plam deyiladi.*

25.2-ta’rif. *Agar biror $x \in E$ nuqta va ixtiyoriy $y \in L$ uchun shunday $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ son mavjud bo‘lib, barcha t, $|\, t\,| < \varepsilon$ larda $x + ty \in E$ munosabat bajarilsa, $x \in E$ nuqta $E \subset L$ to‘plamning yadrosiga qarashli deyiladi. $E \subset L$ to‘plamning yadrosi $-\, J(E)$ bilan belgilanadi, ya’ni*

$$J(E) = \{x \in E :\ \exists y \in L,\ \ \forall \varepsilon = \varepsilon(y) > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\,,\ |t|\, < \varepsilon,\, x + ty \in E\}\,.$$

25.3-ta’rif. *Yadrosi bo‘sh bo‘lmagan qavariq to‘plam qavariq jism deyiladi.*

25.1-misol. $\mathbb{R}^3$ fazoda kub, shar, tetrayedr, tekislikda to‘g‘ri to‘rtburchak, doira, uchburchak qavariq jism bo‘ladi. ℓ_2 fazodagi

$$B[0,1] = \left\{ x \in \ell_2 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \le 1 \right\}$$

birlik shar qavariq jism bo‘ladi.

25.2. $\mathbb{R}^2$ da to‘g‘ri chiziq (kesma) qavariq to‘plam bo‘ladi, lekin qavariq jism bo‘lmaydi. Chunki, uning yadrosi bo‘sh to‘plam (mustaqil isbotlang).

Agar M qavariq to‘plam bo‘lsa, u holda uning yadrosi $J(M)$ ham qavariq to‘plamdir. Haqiqatan ham,

$$x,\, y \in J\,(M) \quad \text{va} \;\; z = \alpha\, x + (1-\alpha)\, y, \quad \alpha \in [0,\; 1]$$

bo'lsin. U holda ixtiyoriy $a \in L$ uchun shunday $\varepsilon_1 > 0, \; \varepsilon_2 > 0$ sonlar mavjudki, $|\,t_1| < \varepsilon_1, \;\; |\,t_2| < \varepsilon_2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $t_1, \; t_2$ larda $x + t_1 a$ va $y + t_2 a$ elementlar M to'plamda yotadi. Bundan kelib chiqadiki, barcha $|t| < \varepsilon\,, \; \varepsilon = \min\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ larda

$$\alpha \; (x + t\,a) + (1-\alpha) \; (y + t\,a) = \alpha\, x + (1-\alpha)\, y + \alpha\, t\, a + (1-\alpha)\, t\, a = z + t\, a \in M,$$

ya'ni $z \in J\,(M)\,.$

25.1-teorema. *Istalgan sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi yana qavariq to'plamdir.*

Isbot. Faraz qilaylik,

$$M = \bigcap_{\alpha} M_\alpha$$

bo'lib, barcha M_α lar qavariq to'plamlar bo'lsin, x va y lar M ning ikki ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda x va y nuqtalarni tutashtiruvchi $[x, y]$ kesma M_α larning har biriga qarashli va demak, M ga ham qarashli. Shunday qilib, M haqiqatan ham qavariq to'plam ekan. Δ

Shuni eslatib o'tamizki, qavariq jismlarning kesishmasi yana qavariq jism bo'lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin.

25.3. Tekislikdagi $P = \{\,(x, y): \;\; 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1\,\}$ va $Q = \{\,(x, y): \;\; 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le 2\,\}$ qavariq jismlarning kesishmasi

$$P \cap Q = \{\,(x, y): \;\; 0 \le x \le 1, \;\; y = 1\}$$

kesmadan iborat bo'lib, u qavariq jism emas (25.2-misolga qarang).

Qavariq to'plam tushunchasi qavariq funksional tushunchasi bilan uzviy bog'liq.

25.4-ta'rif. *Agar L haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan manfiymas p funksional*

1) $p\,(x + y) \le p\,(x) + p\,(y)\,, \quad \forall x, y \in L,$

2) $p(a\,x) = a\,p(x)$, $\forall a \geq 0$ *va* $\forall\, x \in L$ *shartlarni qanoatlantirsa,* p *ga qavariq funksional deyiladi.*

Biz bu yerda $p(x)$ miqdorni chekli deb faraz qilmaymiz, ya'ni ayrim $x \in L$ lar uchun $p(x) = \infty$ bo'lishi mumkin. Agar barcha $x \in L$ lar uchun $p(x)$ chekli bo'lsa, p *chekli funksional* deyiladi.

25.4-misol. $p : C[a,\ b] \to \mathbb{R}$ va

$$p(x) = \int_a^b |x(t)|\, dt$$

akslantirishning chekli qavariq funksional ekanligini isbotlang.

Isbot. Integralning monotonlik xossasidan, ixtiyoriy $x \in C[a,\ b]$ uchun $p(x) \geq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Endi bizga $C[a,\ b]$ fazoning ixtiyoriy x va y elementlari berilgan bo'lsin. U holda

$$p(x+y) = \int_a^b |x(t) + y(t)|\, dt \leq \int_a^b |x(t)|\, dt + \int_a^b |y(t)|\, dt = p(x) + p(y)$$

tengsizlik o'rinli. Xuddi shunday ixtiyoriy x va $\alpha \geq 0$ uchun

$$p(\alpha\, x) = \int_a^b |\alpha\, x(t)|\, dt = \alpha \int_a^b |x(t)|\, dt = \alpha\, p(x)$$

tenglik o'rinli. Demak, p qavariq funksional ekan. Uning chekli qavariq funksional ekanligi $p(x) \leq (b-a) \max |x(t)|$ tengsizlikdan kelib chiqadi. Δ

25.5. $q : C[a,\ b] \to \mathbb{R}$ va $q(x) = V_0^1[x]$ akslantirish chekli bo'lmagan qavariq funksional bo'lishini isbotlang.

Isbot. q funksionalning manfiymasligi va qavariq funksional ta'rifidagi 1-2 shartlarning bajarilishi funksiya to'la o'zgarishi xossalaridan kelib chiqadi. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar mavzusidan ma'lumki, $C[0,\,1]$ fazoning $x_0(t) = t\,\sin(1/t)$, $x_0(0) = 0$ elementi uchun $q(x_0) = V_0^1[x] = +\infty$ tenglik o'rinli. Demak, q chekli bo'lmagan qavariq funksionalga misol bo'ladi. Δ

Endi qavariq to'plamlar bilan qavariq funksionallar orasidagi bog'lanishni qaraymiz.

25.2-teorema. *Agar* $p:\ L \to \mathbb{R}_+$ *qavariq funksional va* $k > 0$ *bo'lsa, u holda*

$$E = \{\, x \in L\ :\ p\,(x) \leq k \,\}$$

qavariq to'plam bo'ladi. Agar p *funksional chekli bo'lsa, u holda* E *to'plam yadrosi nol elementni saqlaydigan,*

$$J\,(E) = \{\, x \in L\ :\ p\,(x) < k\}$$

yadroli qavariq jism bo'ladi.

Isbot. Agar $x, y \in E$ va $\alpha + \beta = 1,\ \ \alpha,\ \beta \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$p\,(\alpha\, x + \beta\, y) \leq p\,(\alpha\, x) + p\,(\beta\, y) = \alpha\, p\,(\,x) + \beta\, p\,(\,y) < k\alpha + k\beta = k,$$

ya'ni $E-$ qavariq to'plam. Endi p chekli funksional, $p(x) < k$, $t > 0$ va $y \in L$ bo'lsin. U holda

$$p\,(x \pm t\, y) \leq p\,(x) + t\, p\,(\pm y)$$

Agar $p(-y) = p(y) = 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy t uchun $x \pm t\, y \in E$ bo'ladi. Agar $p(-y)$, $p(y)$ sonlardan hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lsa, u holda

$$t < \frac{k - p\,(x)}{\max\,(p\,(y)\,, p\,(-y))}$$

shartda $x \pm t\, y \in E$ bo'ladi. Qavariq funksionalning θ nuqtadagi qiymati nolga teng bo'lgani uchun $\theta \in J(E)$. Δ

Endi $k = 1$ holni qaraymiz. U holda har qanday chekli p qavariq funksional L da $\theta \in J(E)$ bo'ladigan yagona $E = \{\, x \in L\ :\ p\,(x) \leq 1\,\}$ qavariq jismni aniqlaydi. Aksincha, E $-$yadrosi nol elementni saqlaydigan qavariq jism bo'lsin. U holda har bir $x \in L$ ga

$$p_E(x) = \inf\left\{\, r > 0 :\ \ \frac{x}{r} \in E \right\}$$

sonni mos qo'yuvchi akslantirish qavariq funksional bo'ladi (mustaqil isbotlang). Bu funksional E qavariq jism uchun *Minkovskiy funksionali* deyiladi.

25.5-ta'rif. *L haqiqiy chiziqli fazo va L_0 uning biror qism fazosi bo'lsin. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksional va L fazoda f chiziqli funksional berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in L_0$ uchun $f(x) = f_0(x)$ tenglik bajarilsa, f chiziqli funksional f_0 funksionalning L fazoga davomi deyiladi.*

Funksionalning davomi bir qiymatli emas. Funksionalning ixtiyoriy davomi maqsadga muvofiq emas. Odatda funksionalni qandaydir shartni saqlab qolgan holda davom ettirish talab qilinadi.

25.3-teorema *(Xan–Banax). Aytaylik, p – L haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional va L_0 – L ning qism fazosi bo'lsin. Agar L_0 da aniqlangan f_0 chiziqli funksional*

$$f_0(x) \leq p(x), \quad x \in L_0 \tag{25.1}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda f_0 ni L da aniqlangan va L da (25.1) *shartni qanoatlantiruvchi f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin.*

Isbot. $L_0 \neq L$ bo'lgan holda f_0 chiziqli funksionalni L_0 dan kengroq bo'lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (25.1) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirish mumkinligini ko'rsatamiz. L_0 ga qarashli bo'lmagan ixtiyoriy $z \in L$ elementni olamiz. $L^{(1)}$ bilan L_0 va z elementlardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. $L^{(1)}$ quyidagicha ko'rinishdagi elementlardan tashkil topgan

$$\{tz + x, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in L_0\} = L^{(1)}.$$

Agar f_1 funksional f_0 ning $L^{(1)}$ qism fazogacha chiziqli davomi bo'lsa, u holda

$$f_1(t\,z + x) = f_1(t\,z) + f_1(x) = t\,f_1(\,z) + f_0(x),$$

yoki $f_1(z) = c$ deb olsak,

$$f_1(t\,z + x) = t\,c + f_0(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Endi c ni shunday tanlaymizki, f_1 funksional (25.1) shartni qanoatlantirsin, ya'ni

$$f_1(t\,z+x)=t\,c+f_0(x)\le p(t\,z+x) \tag{25.2}$$

tengsizlik bajarilsin. Agar $t>0$ bo'lsa, (25.2) shart quyidagi shartga teng kuchli:

$$c+f_0\left(\frac{x}{t}\right)\le p\left(z+\frac{x}{t}\right)\quad \text{yoki}\quad c\le p\left(z+\frac{x}{t}\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right)$$

$t<0$ bo'lsa,

$$c+f_0\left(\frac{x}{t}\right)\ge -p\left(-z-\frac{x}{t}\right)\quad \text{yoki}\quad c\ge -p\left(-z-\frac{x}{t}\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

Bu ikkala shartni qanoatlantiruvchi c son har doim mavjudligini ko'rsatamiz. L_0 qism fazodan olingan ixtiyoriy y' va y'' elementlar uchun

$$-f_0(y'')+p(y''+z)\ge -f_0(y')-p(-y'-z) \tag{25.3}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham, bu tengsizlik quyidagi tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi:

$$f_0(y'')-f_0(y')=f_0(y''-y')\le p(y''-y')=$$

$$=p((y''+z)+(-y'-z))\le p(y''+z)+p(-y'-z).$$

Endi

$$c''=\inf_{y''}\left(-f_0(y'')+p(y''+z)\right),\quad c'=\sup_{y'}\left(-f_0(y')-p(-y'-z)\right)$$

deb olamiz. (25.3) tengsizlik ixtiyoriy y' va y'' lar uchun o'rinli bo'lganidan $c''\ge c'$ ekanligi kelib chiqadi. Agar c sonini $c''\ge c\ge c'$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlasak, u holda

$$f_1(t\,z+x)=t\,c+f_0(x)$$

formula bilan aniqlangan f_1 funksional chiziqli va (25.1) shartni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, biz f_0 funksionalni L_0 qism fazodan undan kengroq bo‘lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (25.1) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirdik.

Agar L chiziqli fazoda sanoqlita $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elementlar sistemasi mavjud bo‘lib, bu sistemani saqlovchi $L(\{x_k\})$ minimal qism fazo L ning o‘ziga teng bo‘lsa, u holda f_0 funksionalni

$$L^{(1)} = \{L_0, \ x_1\}, \quad L^{(2)} = \{L^{(1)}, \ x_2\}, \ldots$$

kengayib boruvchi qism fazolarda yuqoridagidek aniqlab, f_0 funksionalni L fazogacha (25.1) shartni saqlagan holda davom ettirish mumkin.

Agar chiziqli qobig‘i L ga teng bo‘ladigan sanoqli sistema mavjud bo‘lmasa, u holda teoremaning isboti Sorn lemmasi yordamida nihoyasiga etkaziladi ([1] ga qarang). Δ

25.6. $L = C[-1, \ 1]$ uzluksiz funksiyalar fazosi va uning qism fazosi $L_0 = \{x \in C[-1, \ 1] : \ \mathrm{supp} x \subset [0, \ 1]\}$ ni qaraymiz. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t) \ dt, \quad x \in L_0.$$

$L = C[-1, 1]$ chiziqli fazoda f va p funksionallarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t) \ y_0(t) \, dt + \int_{0}^{1} x(t) \ dt, \quad p(x) = 2 \max_{-1 \le t \le 1} |\, x(t) \,| \,, \quad x \in L$$

Quyidagicha savollar qo‘yamiz.

1) f_0 funksional (25.1) tengsizlikni qanoatlantiradimi?

2) f funksional f_0 funksionalning L fazogacha davomi bo‘ladimi?

3) $y_0 \in C[-1, \ 0]$ qanday tanlanganda f funksional Xan-Banax teoremasining shartlarini qanoatlantiradi?

Yechish. f_0 funksional (25.1) tengsizlikni qanoatlantiradi. Haqiqatan ham,

$$f_0\,(x) = \int\limits_{-1}^{1} x\,(t)\;dt \le \int\limits_{-1}^{1} \max_{-1\le t\le 1}\,|\,x\,(t)\,|\,dt = 2\max_{-1\le t\le 1}\,|\,x\,(t)\,| = p\,(x)\,,\;\; x\in L_0.$$

Agar $x\in L_0$, bo‘lsa u holda

$$\int_{-1}^{0} x\,(t)\;y_0(t)\,dt = 0$$

bo‘ladi. Shuning uchun, barcha $y_0\in C[-1,\;0]$ larda $f\,(x)=f_0\,(x)\,,\;x\in L_0$ tenglik o‘rinli. Demak, barcha y_0 lar uchun f funksional f_0 funksionalning L fazogacha davomi bo‘ladi. Nihoyat,

$$f\,(x) \le \max_{-1\le t\le 0}|x\,(t)|\int_{-1}^{0}|y_0\,(t)|\;dt + \int_{0}^{1}\max_{0\le t\le 1}|x\,(t)|\;dt \le$$

$$\le 2\max_{-1\le t\le 1}|x\,(t)| = p\,(x)\;,\;\;x\in L$$

tengsizlik,

$$\int_{-1}^{0}|\,y_0\,(t)\,|\;dt = c\le 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $y_0\in C[-1,0]$ larda o‘rinli. Demak, $c\in [0,\;1]$ bo‘lsa, Xan-Banax teoremasining shartlari bajariladi. Shunday qilib f_0 funksionalni (25.1) shartni saqlagan holda cheksiz ko‘p usul bilan L fazogacha davom ettirish mumkin ekan.

Endi Xan-Banax teoremasining kompleks variantini isbot qilamiz.

25.6-ta’rif. *L – kompleks chiziqli fazo va unda aniqlangan manfiymas p funksional berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x,y\in L$ va ixtiyoriy $\alpha\in\mathbb{C}$ uchun $p\,(x+y)\le p\,(x)+p\,(y)$ va $p\,(\alpha\,x)=|\alpha|\;p\,(x)$ shartlar bajarilsa, u holda p qavariq funksional deyiladi.*

25.4-teorema *(Xan-Banax). p – L kompleks chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional, f_0 esa L_0 qism fazoda aniqlangan bo‘lib,*

$$|\,f_0\,(x)\,|\le p\,(x)\,,\quad x\in L_0$$

shartni qanoatlantiruvchi chiziqli funksional bo'lsin. U holda butun L da aniqlangan va

$$f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in L_0, \quad |f(x)| \le p(x), \quad \forall x \in L$$

shartlarni qanoatlantiruvchi f chiziqli funksional mavjud.

Isbot. L va L_0 fazolarni haqiqiy chiziqli fazo sifatida qarab, mos ravishda L_R va L_{0R} bilan belgilaymiz. Tushunarliki, p funksional L_R da aniqlangan qavariq funksional bo'ladi, $f_{0R}(x) = Ref_0(x)$ esa

$$|f_{0R}(x)| \le p(x), \quad x \in L_{0R}(= L_0)$$

shartni, bundan esa $f_{0R}(x) \le p(x)$ shartni qanoatlantiruvchi L_{0R} dagi haqiqiy chiziqli funksional bo'ladi. 25.3-teoremaga ko'ra, L_R da aniqlangan va

$$f_R(x) \le p(x), \quad x \in L_R(= L),$$

$$f_R(x) = f_{0R}(x), \quad x \in L_{0R}(= L_0)$$

shartni qanoatlantiruvchi f_R chiziqli funksional mavjud. Tushunarliki,

$$-f_R(x) = f_R(-x) \le p(-x) = p(x).$$

Demak,

$$|f_R(x)| \le p(x), \quad x \in L_R(= L) \tag{25.4}$$

Endi f funksionalni L da quyidagicha aniqlaymiz

$$f(x) = f_R(x) - i\, f_R(ix).$$

Murakkab bo'lmagan hisoblashlar yordamida ko'rsatish mumkinki, $f - L$ kompleks chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli funksional bo'ladi hamda

$$f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in L_0, \qquad Ref(x) = f_R(x), \quad \forall x \in L.$$

Ixtiyoriy $x \in L$ uchun $|f(x)| \leq p(x)$ ekanligini ko'rsatsak, teorema isbot bo'ladi. Teskaridan faraz qilamiz. Biror $x_0 \in L$ uchun $|f(x_0)| > p(x_0)$ bo'lsin. $f(x_0)$ kompleks sonni $f(x_0) = \rho\, e^{i\varphi}$, $\rho > 0$ ko'rinishda yozamiz va $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$ deb olamiz. U holda

$$f_R(y_0) = Re f(y_0) = Re\left[e^{-i\varphi} f(x_0)\right] = \rho > p(x_0) = p(y_0)\,.$$

Bu esa (25.4) shartga zid. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *$V_0[a, b]$ qism fazoda aniqlangan $f_0(x) = x(b)$ funksional uchun $f : V[a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha\, x(a) + x(b)$ funksional uning davomi bo'ladimi? $p(x) = |x(a)| + |x(b)|$, $x \in V[a, b]$ funksional qavariqmi? Parametr $\alpha \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida bu funksionallar uchun 25.3-teorema shartlari bajariladi?*

2. *Yadrosi bo'sh to'plam bo'lgan qavariq to'plamga misol keltiring.*

3. *$\mathbb{R}^2$ fazoda qavariq va qavariq bo'lmagan funksionalga misol keltiring. Bu fazoda $p_1(x) = x_1^2 + x_2^2$* va *$p_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ funksionallarni qavariqlikka tekshiring.*

4. *25.6-misolda keltirilgan f_0 va f funksionallarning chiziqli ekanligini ko'rsating.*

5. *25.6-misolda keltirilgan p akslantirishning chekli qavariq funksional ekanligini ko'rsating.*

6. *Berilgan $E = \{\, x \in C[a, b] : \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| \leq 1 \,\}$ qavariq jismga mos Minkovskiy funksionalini quring.*

7. *$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x) = |x_1 + x_2|$ funksionalning chekli qavariq funksional ekanligini ko'rsating. Unga mos $E = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ p(x) \leq 1\right\}$ qavariq jismni $\mathbb{R}^2$ fazoda chizib ko'rsating.*

26-§. Chiziqli normalangan fazolar

Chiziqli fazolarda elementlarning bir-biriga yaqinligi degan tushuncha yo‘q. Ko‘plab amaliy masalalarni hal qilishda elementlarni qo‘shish va ularni songa ko‘paytirish amallaridan tashqari, elementlar orasidagi masofa, ularning yaqinligi tushunchasini kiritishga zarurat to‘g‘iladi. Bu bizni normalangan chiziqli fazo tushunchasiga olib keladi. Normalangan fazolar nazariyasi S.Banax va boshqa matematiklar tomonidan rivojlantirilgan.

26.1-ta’rif. *L chiziqli fazo va unda aniqlangan p funksional berilgan bo‘lsin. Agar p quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:*

1) $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta\,;$

2) $p(ax) = |a|\; p(x), \; \forall \alpha \in \mathbb{C}, \; \forall x \in L;$

3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, \, y \in L.$

26.2-ta’rif. *Norma kiritilgan L chiziqli fazo chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x \in L$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.*

Agar $L-$ normalangan fazoda $x, y \in L$ elementlar jufti uchun

$$\rho\,(x,y) = \|x - y\|$$

sonni mos qo‘ysak, ρ funksional metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantiradi (19.1-ta’rifga qarang). Metrika aksiomalarining bajarilishi normaning 1-3 shartlaridan bevosita kelib chiqadi. Demak, har qanday chiziqli normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Metrik fazolarda o‘rinli bo‘lgan barcha tasdiqlar (ma’lumotlar) chiziqli normalangan fazolarda ham o‘rinli.

X chiziqli normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

26.3-ta’rif. *Biror $x \in X$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in X$ elementga yaqinlashadi deyiladi.*

26.4-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$*

mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ *va* $p \in \mathbb{N}$ *larda* $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik fundamental deyiladi.*

26.3 va 26.4 ta'riflarni 20.6 va 21.1 ta'riflar bilan taqqoslang.

26.5-ta'rif. *Agar* X *chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy* $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* X *to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.*

Bu ta'rifni quyidagicha aytish mumkin: agar (X, ρ), $\rho(x, y) = \|x - y\|$ metrik fazo to'la bo'lsa, u holda X *to'la normalangan fazo* deyiladi.

Chiziqli normalangan fazolarga misollar keltiramiz.

26.1-misol. $L = \mathbb{R}$ $-$haqiqiy sonlar to'plami. Agar ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ soni uchun $\|x\| = |x|$ sonni mos qo'ysak, $\mathbb{R}$ normalangan fazoga aylanadi.

26.2. $L = \mathbb{C}$ kompleks sonlar to'plami. Bu yerda ham norma yuqoridagidek kiritiladi: $\|z\| = |z|$.

26.3. $L = \mathbb{R}^n$ $-$ n o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|, \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

funksionallar norma shartlarini qanoatlantiradi. $\mathbb{R}^n$ chiziqli fazoda $\|\bullet\|_p$ norma kiritilgan bo'lsa, uni $\mathbb{R}_p^n$, agar $\|\bullet\|_\infty$ norma kiritilgan bo'lsa, uni $\mathbb{R}_\infty^n$ deb belgilaymiz (19.3-19.5, 19.11-misollar bilan taqqoslang).

26.4. $L = \mathbb{C}^n$ $-$ n o'lchamli kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi.

26.5. $C[a, b]$ $-$ $[a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda $f \in C[a, b]$ elementning normasi (19.6-misol bilan taqqoslang)

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|,$$

tenglik bilan aniqlanadi. Xuddi 26.3-misoldagidek $C[a, b]$ chiziqli fazoda norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

formula vositasida kiritilgan bo'lsa, uni $C_1[a, b]$ (19.9-misol), agar norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$$

tenglik orqali kiritilgan bo'lsa uni $C_2[a, b]$ (19.8-misolga qarang) deb belgilaymiz.

Quyida biz chiziqli fazo va unda kiritilgan normalarni beramiz.

26.6. ℓ_2 fazoda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}\,.$$

26.7. $c_0, \; c, \; m$ fazolarda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\| = \sup_{1 \le n < \infty} |x_n|\,.$$

ℓ_2, c_0, c va m fazolarning aniqlanishi 23.5-23.8 misollarda keltirilgan.

26.8. $M[a, \; b]$ – bilan $[a, \; b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Bu to'plam odatdagi funksiyalarni qo'shish (23.3)va songa ko'paytirish ((23.4)ga qarang)amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p\,(x) = \sup_{a \le t \le b} |x\,(t)|\,, \quad x \in M\,[a, \; b] \tag{26.1}$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi va $M[a, \; b]$ chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

26.9. $C^{(n)}[a, \; b]$– bilan $[a, b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. $C^{(n)}[a, \; b]$ to'plam odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p(x) = \max_{a \le t \le b} |x(t)| + \sum_{k=1}^{n} \max_{a \le t \le b} \left| x^{(k)}(t) \right|, \quad x \in C^{(n)}[a,\ b] \tag{26.2}$$

funksional normaning 1-3 shartlarini qanoatlantiradi.

26.10. $[a,\, b]$ kesmada aniqlangan o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,\ b]$ (23.11-misolga qarang) ni qaraymiz. Bu fazoda

$$p: \ V[a,\, b] \to \mathbb{R}\,, \ \ p(x) = |x(a)| + V_a^b[x] \tag{26.3}$$

funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi va $V[a,\ b]$ chiziqli normalangan fazo bo‘ladi.

Endi Banax fazolariga misollar keltiramiz.

26.11. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$, $C[a,\, b]$, ℓ_p, $p \ge 1$, c, c_0 fazolarni to‘lalikka tekshiring.

Yechish. To‘la metrik fazolar (21-paragraf) mavzusidan ma’lumki $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$, $C[a,\ b]$, ℓ_p, $p \ge 1$, c, c_0 lar (21.3-21.7 misollarga qarang) to‘la metrik fazolar edi. Shuning uchun ular to‘la normalangan fazolar, ya’ni Banax fazolari bo‘ladi. Δ

26.12. $C_2[a,\ b]$ to‘la bo‘lmagan (21.8-misolga qarang) metrik fazo edi. Shuning uchun $C_2[a,\ b]$ to‘la bo‘lmagan normalangan fazoga misol bo‘ladi.

26.1. Normalangan fazoning qism fazosi

Biz yuqorida chiziqli fazoning qism fazosi tushunchasini kiritgan edik, ya’ni agar ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha\, x + \beta\, y \in L_0$ bo‘lsa, bo‘sh bo‘lmagan $L_0 \subset L$ qism to‘plam, qism fazo deyilar edi.

Normalangan fazolarda yopiq qism fazolar, ya’ni barcha limitik nuqtalarini o‘zida saqlovchi qism fazolar muhim ahamiyatga ega. Chekli o‘lchamli normalangan fazolarda har qanday qism fazo yopiqdir. Cheksiz o‘lchamli normalangan fazolarda qism fazolar doim yopiq bo‘lavermaydi. Quyida keltiriladigan misol fikrimizni tasdiqlaydi.

26.13. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[a, b]$ dagi barcha ko‘phadlar to‘plami qism fazo tashkil qiladi, lekin u yopiq emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$P_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

ko‘phadlar ketma-ketligini qaraymiz. Ravshanki, $\{P_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lib, uning limiti $x(t) = e^t$ ga teng. $x(t) = e^t$ funksiya esa ko‘phad emas.

Normalangan fazolarda asosan yopiq chiziqli qism fazolarni qaraymiz. Shuning uchun 23-§da kiritilgan qism fazo atamasiga o‘zgartirish kiritish tabiiydir.

26.6-ta’rif. *Agar L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to‘plamida ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo‘lsa L_0 chiziqli ko‘pxillilik deyiladi. Agar $L_0 \subset L$ qism to‘plam yopiq chiziqli ko‘pxillilik bo‘lsa, L_0 qism to‘plam L ning qism fazosi deyiladi.*

26.14. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[-1, 1]$ dagi barcha toq funksiyalar to‘plami $C^-[-1, 1]$ (23-§ning 4-chi topshirig‘iga qarang) chiziqli ko‘pxillilik tashkil qiladi va u yopiq. Haqiqatan ham, $\{x_n\}$ toq funksiyalar ketma-ketligi biror $x \in C[-1, 1]$ elementga yaqinlashsin. U holda

$$x(-t) = \lim_{n\to\infty} x_n(-t) = \lim_{n\to\infty} (-x_n(t)) = -\lim_{n\to\infty} x_n(t) = -x(t).$$

26.15. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va $x(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar to‘plamini $V_0[a, b]$ bilan belgilaymiz. Ma’lumki, $V_0[a, b]$ to‘plam $V[a, b]$ fazoning (23.15-misolga qarang) qism fazosi, ya’ni yopiq chiziqli ko‘pxillilik bo‘ladi. Bu fazoda ham x elementning normasi (26.3) tenglik bilan aniqlanadi. (26.3) tenglik $V_0[a, b]$ fazoda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\|x\| = V_a^b[x] \tag{26.4}$$

va u norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $V_0[a, b]$ to‘plam chiziqli normalangan fazo bo‘ladi.

26.16. $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va $x(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi absolyut uzluksiz funksiyalar to‘plamini $AC_0[a,\ b]$ bilan belgilaymiz. Ma’lumki, $AC_0[a,\ b]$ to‘plam $V_0[a,\ b]$ fazoning (26.15-misolga qarang) qism fazosi bo‘ladi. Shuning uchun bu fazoda ham x elementning normasi (26.4) tenglik bilan aniqlanadi va $AC_0[a,\ b]$ to‘plam chiziqli normalangan fazo hosil qiladi.

26.2. Normalangan fazoning faktor fazosi

Bizga L normalangan fazo va uning $L_0 \subset L$ qism fazosi berilgan bo‘lsin. $P = L/L_0$ faktor fazoni qaraymiz va unda normani quyidagicha aniqlaymiz. Har bir $\xi \in P$ qo‘shni sinfga

$$\|\,\xi\,\| = \inf_{x\in\xi} \|\,x\,\| \tag{26.5}$$

sonni mos qo‘ysak, bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, L/L_0 faktor fazo ham normalangan fazo bo‘lar ekan.

Agar L to‘la normalangan fazo bo‘lsa, L/L_0 faktor fazo ham (26.5) normaga nisbatan to‘la fazo bo‘ladi [1].

26.17-misol. Faktor fazoga misol keltirishni tushunish nisbatan osonroq bo‘lgan $\mathbb{R}^3$ fazodan boshlaymiz. $L = \mathbb{R}^3$ fazoning xos qism fazosi $L' = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x_3 = 0\big\}$ ni qaraymiz va L/L' faktor fazoning elementlarini, ya’ni qo‘shni sinflarning tavsifini beramiz. Ma’lumki,

$$x - y = (x_1 - x_2,\ x_2 - y_2,\ x_3 - y_3) \in L'$$

bo‘lishi uchun $x_3 = y_3$ bo‘lishi zarur va yetarli. Demak, L/L' faktor fazoning elementlari Ox_1x_2 tekislikka parallel bo‘lgan tekisliklardan iborat. Masalan, $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$ nuqtani o‘zida saqlovchi ξ qo‘shni sinf Ox_1x_2 tekisligiga parallel bo‘lgan $x_3 = c$ tekislikdan iborat. Bu faktor fazoda ξ elementning normasi

$$p(\xi) = \inf_{x\in\xi} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \inf_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |x_3|$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu faktor fazoning o‘lchami 1 ga teng va u to‘la normalangan fazo.

26.18. $L_p[a,\ b]$ faktor fazoni (23.18-misolga qarang) qaraymiz. Agar $L_p[a,\ b]$ dan olingan har bir ξ qo‘shni sinfga uning ixtiyoriy $f \in \xi$ vakili yordamida aniqlanuvchi va vakilning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmagan

$$\|\xi\| = \inf_{f\in\xi} \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \tag{26.6}$$

sonni mos qo‘ysak, bu funksional norma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $L_p[a,\ b]$, $p \geq 1$ chiziqli normalangan fazo bo‘ladi. Bu fazo $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va $p-$ chi darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi *ekvivalent funksiyalar fazosi* deyiladi. Barcha $p \geq 1$ larda $L_p[a,\ b]$ fazo to‘la normalangan fazo, ya’ni Banax fazosi bo‘ladi [1].

26.19. O‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,\ b]$ ni (26.10-misolga qarang) qaraymiz. Unda o‘zgarmas funksiyalardan iborat $L' = \{x \in V[a,\ b] : \ x(t) = const\}$ bir o‘lchamli qism fazoni olamiz. Endi $V[a, b]$ chiziqli fazoning L' qism fazo bo‘yicha faktor fazosini qaraymiz. Faktor fazo ta’rifiga ko‘ra $x,\, y \in V[a, b]$ elementlar bitta qo‘shni sinfda yotishi uchun $x(t) - y(t) \equiv const$ bo‘lishi zarur va yetarli. Boshqacha aytganda $y \in V[a,\ b]$ element x elementni saqlovchi ξ qo‘shni sinfda yotishi uchun $y(t) \equiv x(t) - C$, $C = const$ ko‘rinishda tasvirlanishi zarur va yetarli. Ma’lumki, har qanday faktor fazoda ξ elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\xi\| = \inf_{y\in\xi} \|y\| = \inf_{C\in\mathbb{R}} \left(|x(a) - C| + V_a^b[x - C] \right). \tag{26.7}$$

O‘zgarishi chegaralangan funksiyalar xossalaridan ma’lumki, istalgan C o‘zgarmas uchun

$$V_a^b[x - C] = V_a^b[x]$$

tenglik o‘rinli. $|x(a) - C|$ ning aniq quyi chegarasi esa nolga teng. Bulardan foydalanib, (26.7) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\|\xi\| = V_a^b[x], \quad x \in \xi \quad \text{va} \quad x(a) = 0. \tag{26.8}$$

Shunday qilib ξ qoʻshni sinfga, shu sinfning a nuqtada nolga aylanuvchi x elementini mos qoʻyish bilan $V[a,\ b]/L'$ faktor fazo va $V_0[a,\ b]$ (26.15-misolga qarang) fazolar oʻrtasida izomorfizm oʻrnatiladi. Demak, $V[a,\ b]/L'$ va $V_0[a,\ b]$ fazolar oʻzaro izomorf ekan.

26.20. 25.6-misolda keltirilgan

$$L_0 = \{\, x \in C[-1,\ 1] :\ \operatorname{supp} x \subset [0,\ 1] \,\}$$

qism fazoni qaraymiz. L_0 yopiq qism fazo boʻladi (mustaqil isbotlang). $C[-1,\ 1]/L_0$ faktor fazoda ξ elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\, \xi \,\| = \inf_{x \in \xi} \max_{t \in [-1,1]} |\, x\,(t)\,| = \max_{t \in [-1,0]} |\, x\,(t)\,|\,. \tag{26.9}$$

$C[-1,\ 1]$ Banax fazosi boʻlganligi uchun, $C[-1,\ 1]/L_0$ faktor fazo ham Banax fazosi boʻladi.

26.21. Shuni ta'kidlash lozimki, $L_p\,[a,b]$, $p \geq 1$ fazolar toʻla normalangan fazolar, ya'ni Banax fazolari boʻladi. Ma'lumki, har qanday normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Agar biz $C_p[a,\ b]$, $p \geq 1$ toʻla boʻlmagan metrik fazoni toʻldirsak, uning toʻldirmasi $L_p[a,\ b]$, $p \geq 1$ fazo boʻladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$, $C[a,\ b]$, ℓ_p, c, c_0 *fazolarda norma qanday kiritiladi?*

2. $L = \mathbb{R}^2$ *fazoning* $L' = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\big\}$ *xos qism fazosi boʻyicha* L/L' *faktor fazoning elementlarini tavsiflang. (2,3) nuqtani saqlovchi qoʻshni sinfning normasini toping.* $x_2 = 3$ *toʻgʻri chiziq* L/L' *faktor fazoning elementi boʻladimi?*

3. $M[a,\ b]$ *fazoda (26.1) tenglik bilan aniqlangan* $p : M[a,\ b] \to \mathbb{R}$ *funksionalning norma shartlarini qanoatlantirishini koʻrsating.*

4. $V[a,\ b]$ *fazo* $M[a,\ b]$ *fazoning qism fazosi boʻladimi?*

5. *$C^{(n)}[a, b]$ fazoda (26.2) tenglik bilan aniqlangan $p : C^{(n)}[a, b] \to \mathbb{R}$ funksionalning norma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.*

6. *$C^{(n)}[a, b]$ fazo $C[a, b]$ fazoning qism fazosi bo'ladimi?*

7. *$C^{(n)}[a, b]$, $C_1[a, b]$ va $C_2[a, b]$ normalangan fazolarning qaysilari to'la?*

8. *21-§ ning 21.8-misolida keltirilgan $\{f_n\}$ ketma-ketlikni $C_1[-1, 1]$ fazoda fundamentallikka tekshiring. U yaqinlashuvchi bo'ladimi? 21.8 misoldan foydalaning.*

9. *$M[a, b]$ chiziqli normalangan fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchimi?*

10. *$V[a, b]$ chiziqli normalangan fazo to'la normalangan fazo bo'ladimi?*

27-§. Evklid fazolari

Chiziqli fazolarda norma kiritishning sinalgan usullaridan biri, unda skalyar ko'paytma kiritishdir.

27.1-ta'rif. *Bizga L haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa, unga skalyar ko'paytma deyiladi:*

1) $p(x,x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta;$

2) $p(x,y) = p(y,x), \quad \forall x, y \in L;$

3) $p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in L;$

4) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in L.$

27.2-ta'rif. *Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi va x, y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x, y) orqali belgilanadi.*

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{27.1}$$

formula orqali aniqlanadi. Bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Skalyar koʻpaytmaning 1-4 shartlaridan normaning 1-2 shartlari bevosita kelib chiqadi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{27.2}$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Endi (27.2) tengsizlikni, ya'ni Koshi–Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz. $\lambda \in \mathbb{R}$ ning barcha qiymatlarida nomanfiy boʻlgan kvadrat uchhadni qaraymiz:

$$\phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda\ (x, y) + (y, y) =$$

$$= \lambda^2\ \| x \|^2 + 2\lambda\ (x, y) + \| y \|^2 .$$

Bu kvadrat uchhadning diskriminanti musbat emas, ya'ni

$$D = 4\left[(x, y)\right]^2 - 4\ \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 .$$

Bundan

$$\left[(x, y)\right]^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \qquad \text{ya'ni} \qquad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Endi (27.1) norma uchun uchburchak aksiomasining bajarilishini koʻrsatamiz:

$$\| x + y \|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2\,(x, y) + (y, y) \leq$$
$$\leq \| x \|^2 + 2\ \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2 .$$

Bundan $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ tengsizlik kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlaymizki, Evklid fazosida yigʻindi, songa koʻpaytirish va skalyar koʻpaytma amallari uzluksizdir, ya'ni agar $x_n \to x$, $y_n \to y$ (norma boʻyicha yaqinlashish ma'nosida), $\alpha_n \to \alpha$ (sonli ketma-ketlik sifatida) boʻlsa, u holda

$$x_n + y_n \to x + y, \quad \alpha_n x_n \to \alpha\, x, \quad (x_n, y_n) \to (x, y) .$$

Bu tasdiqlarning isboti quyidagicha:

$$\| (x_n + y_n) - (x + y) \| = \| (x_n - x) + (y_n - y) \| \leq$$

$$\leq \| x_n - x \| + \| y_n - y \| \to 0, \ \ n \to \infty;$$

$$\| \alpha_n x_n - \alpha\, x \| = \| \alpha_n x_n - \alpha\, x_n + \alpha\, x_n - \alpha\, x \| \leq \| (\alpha - \alpha_n)\, x_n \| +$$

$$+ \| \alpha\ (x_n - x) \| = | \alpha - \alpha_n | \cdot \| x_n \| + | \alpha | \cdot \| x_n - x \| \to 0, \quad n \to \infty\,;$$

$$|(x_n, y_n) - (x, y)\,| = |\,(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)\,| \leq |\,(x_n - x, y_n)\,| +$$

$$+\,|\,(x, y_n - y)\,| \leq \| x_n - x \| \ \cdot\ \| y_n \| + \| x \| \cdot \| y_n - y \| \to 0, \ \ n \to \infty\,.$$

Evklid fazolarida nafaqat vektorning normasini (ya'ni uzunligini), balki vektorlar orasidagi burchak tushunchasini ham kiritish mumkin. Noldan farqli x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{27.3}$$

formula bilan aniqlanadi. Koshi–Bunyakovskiy tengsizligiga ko‘ra (27.3) ning o‘ng tomoni moduli bo‘yicha birdan oshmaydi va demak (27.3) formula haqiqatan ham, nolmas x va y vektorlar orasidagi φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$ burchakni bir qiymatli aniqlaydi.

Agar $(x\,,\,y) = 0$ bo‘lsa, u holda x va y *vektorlar ortogonal* deyiladi va $x \perp y$ shaklda yoziladi.

27.3-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\alpha \neq \beta$ *da* $(x_\alpha,\ x_\beta) = 0$ *bo‘lsa, u holda nolmas* $\{x_\alpha\}$ *vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo‘lsa,* $\{x_\alpha\}$ *ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.*

Agar $\{x_\alpha\}$ vektorlar ortogonal sistemani tashkil qilsa, u holda $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \ \cdots\ + \alpha_n\, x_n = \theta$$

bo‘lsin. Bu tenglikning ikkala qismini x_i ga skalyar ko‘paytirib, quyidagiga ega bo‘lamiz

$$(x_i,\, \alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \ \cdots\ + \alpha_n\, x_n) = \alpha_i\, (x_i,\ x_i) = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

$(x_i,\ x_i) \neq 0$ bo'lgani uchun, barcha $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ larda $\alpha_i = 0$ bo'ladi.

27.4-ta'rif. *Agar $\{x_\alpha\}$ sistemani o'zida saqlovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o'ziga teng bo'lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to'la deyiladi.*

27.5-ta'rif. *Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa, u holda bu sistema E fazodagi ortonormal (ortogonal normalangan) bazis deyiladi.*

Ravshanki, agar $\{x_\alpha\}$ ortogonal sistema bo'lsa, u holda

$$\left\{ \|x_\alpha\|^{-1} \cdot x_\alpha \right\}$$

ortonormal sistema bo'ladi.

27.1-misol. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\}$ $-$ n o'lchamli Evklid fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Bu fazoda $\{e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)\}_{k=1}^{n}$ vektorlar sistemasi ortonormal bazisni tashkil qiladi.

27.2. Kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar fazosi, ya'ni ℓ_2 ni qaraymiz. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

ℓ_2 fazoda ortonormal bazis sifatida (23.8) tenglik bilan aniqlanuvchi $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektorlar sistemasini olish mumkin.

27.3. $C_2[a,\ b]$ fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\ g(t)\ dt. \tag{27.4}$$

Bu fazoda ortogonal (normalanmagan) bazisga

$$\frac{1}{2},\ \ \cos\frac{2\pi\, n\, t}{b-a},\ \ \sin\frac{2\pi\, n\, t}{b-a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

funksiyalardan tashkil topgan trigonometrik sistema misol bo'ladi.

27.4. $L_2[a,\ b]$ fazoda ham f va g elementlarning skalyar ko'paytmasi (27.4) tenglik bilan aniqlanadi.

27.6-ta'rif. *Agar E Evklid fazosining hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, E separabel Evklid fazosi deyiladi.*

Yuqorida keltirilgan $\mathbb{R}^n$, ℓ_2, $C_2[a,\ b]$ va $L_2[a,\ b]$ fazolar (19.3-19.6 misollarga qarang) separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi. Har qanday separabel Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema ko'pi bilan sanoqlidir. Mustaqil isbotlang.

27.1-teorema *(Ortogonallashtirish jarayoni). Bizga E Evklid fazosida chiziqli bog'lanmagan*

$$f_1,\ f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{27.5}$$

elementlar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda E Evklid fazosida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\phi_1,\ \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots \tag{27.6}$$

sistema mavjud:

1) (27.6) *ortonormal sistema.*

2) *Har bir ϕ_n element $f_1,\ f_2,\ \ldots, f_n$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni*

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \ \cdots \ + a_{nn}f_n, \quad a_{nn} > 0\,;$$

3) *har bir f_n element*

$$f_n = b_{n1}\,\phi_1 + \,b_{n2}\,\phi_2 + \ \cdots \ + \,b_{nn}\,\phi_n, \quad b_{nn} > 0$$

ko'rinishda tasvirlanadi.

4) (27.6) *sistemaning har bir elementi* 1-3 *shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi.*

Isbot. ϕ_1 element $a_{11}\, f_1$ ko‘rinishda izlanadi va a_{11}

$$(\phi_1,\, \phi_1) = a_{11}^2\, (f_1, f_1) = 1$$

shartdan aniqlanadi. Bu yerdan

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} = \frac{1}{\|\, f_1\, \|} > 0.$$

Ko‘rinib turibdiki, ϕ_1 bir qiymatli aniqlanadi. Faraz qilaylik, 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi $\phi_k,\ k \in \{1, 2, \ldots, n{-}1\}$ elementlar qurilgan bo‘lsin. Ushbu

$$\psi_n = f_n - (f_n,\, \phi_1)\, \phi_1 - (f_n,\, \phi_2)\, \phi_2 - \ \cdots\ - (f_n,\, \phi_{n-1})\, \phi_{n-1}$$

elementni kiritamiz. Ko‘rsatish mumkinki, agar $k \in \{\, 1,\, 2, \ldots,\, n-1\}$ bo‘lsa, $(\psi_n,\, \phi_k) = 0$ bo‘ladi. $(\psi_n,\, \psi_n) = 0$ tenglik (27.5) sistemaning chiziqli erkli ekanligiga zid, shuning uchun $(\psi_n,\, \psi_n) > 0$. Endi

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}}$$

deymiz. ψ_n vektorning qurilishiga ko‘ra u $f_1,\ f_2, \ldots, f_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi va demak, ϕ_n ham ularning chiziqli kombinatsiyasi, ya’ni

$$\phi_n = a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + \ \cdots\ + a_{nn} f_n, \quad \text{bu yerda} \quad a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}} > 0.$$

Bundan tashqari $(\phi_n,\, \phi_n) = 1$, $(\phi_n,\, \phi_k) = 0,\ \ (k < n)$ va

$$f_n = b_{n1}\, \phi_1 + b_{n2}\, \phi_2 + \ \cdots\ + b_{nn}\, \phi_n, \quad b_{nn} = a_{nn}^{-1} = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)} > 0,$$

ya’ni ϕ_n teorema shartlarini qanoatlantiradi. Δ

(27.5) sistemadan 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi (27.6) sistemaga o‘tish *ortogonallashtirish jarayoni* deyiladi. Ko‘rinib turibdiki, (27.5) va (27.6) sistemalardan hosil bo‘lgan qism fazolar ustma-ust tushadi. Bundan kelib chiqadiki, bu sistemalar bir vaqtda to‘la yoki to‘la emas.

27.1-natija. *Har qanday separabel Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.*

Isbot. $\{\phi_n\} \subset E$ Evklid fazosining hamma yerida zich sanoqli to'plam bo'lsin. Undan chiziqli bog'langan elementlarni chiqarib tashlab, qolgan $\{f_n\}$ sistemaga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal bazisni hosil qilamiz. Δ

27.1. Bessel tengsizligi. Yopiq ortogonal sistema

Bizga $n-$o'lchamli E Evklid fazosi va uning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal bazisi berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x \in E$ elementni

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \tag{27.7}$$

yoyilma ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $c_k = (x, e_k)$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Bu yoyilmani cheksiz o'lchamli Evklid fazolari uchun qanday umumlashtirish mumkinligini ko'rib chiqamiz. Bizga E Evklid fazosining

$$\phi_1, \ \phi_2, \ \ldots, \phi_n, \ \ldots \tag{27.8}$$

ortonormal sistemasi va $f \in E$ ixtiyoriy elementi berilgan bo'lsin. f elementga

$$c_k = (f, \ \phi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{27.9}$$

sonlar ketma-ketligini mos qo'yamiz va c_k sonlar f elementning *koordinatalari* yoki $\{\phi_n\}$ sistemadagi *Furye koeffitsiyentlari* deyiladi.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \phi_k \tag{27.10}$$

formal qator esa f elementning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema bo'yicha *Furye qatori* deyiladi.

Quyidagicha savol tug'iladi. (27.10) qator yaqinlashuvchimi? Ya'ni qatorning qismiy yig'indilari ketma-ketligi

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \, \phi_k = f_n$$

biror elementga yaqinlashadimi? Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (27.10) qatorning yig'indisi f ga teng bo'ladimi?

Bu savollarga javob berish uchun quyidagi masalani qaraymiz. Berilgan n natural son uchun $\alpha_k,\ k \in \{1,2,\ldots,n\}$ koeffitsiyentlarni shunday tanlash kerakki, f va

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \phi_k \tag{27.11}$$

yig'indi orasidagi $\| f - S_n\|$ masofa minimal bo'lsin. Bu masofa kvadratini hisoblaymiz. (27.8) ortonormal sistema bo'lgani uchun

$$\| f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \phi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \phi_k \right) =$$

$$= (f,f) - \left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \phi_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \phi_k, f \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \phi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \phi_j \right) =$$

$$= (f,f) - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ (f,\phi_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 =$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 =$$

$$= \| f \|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \ c_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Bu ifoda barcha $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ larda

$$\alpha_k = c_k \tag{27.12}$$

bo'lgan holda minimumga erishadi. Bu holda

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \, . \tag{27.13}$$

Biz isbotladikki, (27.11) ko'rinishdagi yig'indilar ichida f elementdan Furye qatorining

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \phi_k$$

qismiy yig‘indisi eng kam chetlanar ekan.

Bu tasdiqning geometrik ma’nosi shundan iboratki,

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \phi_k$$

vektor $\phi_1, \ \phi_2, \ \ldots, \phi_n$ vektorlarning barcha chiziqli kombinatsiyalariga ortogonal, ya’ni $f - S_n$ element $\phi_1, \ \phi_2, \ \ldots, \phi_n$ vektorlardan hosil bo‘lgan qism fazoga ortogonal bo‘lishi uchun (27.12) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$\| f - S_n\|^2 \geq 0$ bo‘lgani uchun (27.13) tenglikka ko‘ra

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2 .$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun o‘rinli, shunday ekan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

qator yaqinlashuvchi va

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2 . \tag{27.14}$$

So‘nggi (27.14) tengsizlik *Bessel tengsizligi* deyiladi.

27.7-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $f \in E$ *uchun*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \, \phi_k)^2 = \|f\|^2 \tag{27.15}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\{\phi_n\}$ *ortonormal sistema yopiq sistema deyiladi. (27.15) tenglik Parseval tengligi deyiladi.*

(27.13) tenglikdan kelib chiqadiki, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemaning yopiq bo‘lishi uchun, har bir $f \in E$ da

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \phi_k$$

Furye qatorining qismiy yig‘indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashishi zarur.

27.2-teorema. *Separabel Evklid fazosida har qanday to‘la ortonormal sistema yopiq va aksincha.*

Isbot. E dan olingan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to‘la ortonormal sistemani qaraymiz. Istalgan $f \in E$ uchun $c_k = (f, \phi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Furye koeffitsiyentlarini olamiz. $\{\phi_n\}$ sistema to‘la bo‘lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ songa ko‘ra, shunday $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k$ chekli yig‘indi mavjud bo‘lib,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $n \geq N$ bo‘lganda

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{N} c_k^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon.$$

Olingan bu munosabatlardan

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Parseval tengligi kelib chiqadi, ya’ni $\{\phi_n\}$ sistema yopiq ekan.

Endi $\{\phi_n\}$ $-$ E dan olingan ixtiyoriy yopiq ortonormal sistema bo‘lsin. $f \in E$ vektor qanday bo‘lmasin, uning Furye qatori $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ ning qismiy yig‘indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashadi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right) = 0.$$

Shuning uchun $\{\phi_n\}$ $-$ sistemaning barcha chekli kombinatsiyalari to‘plami E ning hamma yerida zich bo‘ladi. Ya’ni $\{\phi_n\}$ to‘la ortonormal sistema bo‘ladi. Δ

27.23. $C_2[-\pi, \pi]$ separabel Evklid fazosida $\left\{ \phi_n(t) = \pi^{-1/2} \sin n t \right\}_{n=1}^{\infty}$ sistema ortonormal bo‘ladimi? Agar $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema bo‘lsa, u to‘lami?

Yechish. Ma'lumki, $\{\pi^{-1/2}\sin n\,t\}$ trigonometrik sistema ortogonaldir. Endi $(\phi_n,\,\phi_n)=1$ tenglikni tekshiramiz.

$$(\phi_n,\,\phi_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nt\;dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2n\,t)\;dt=\frac{1}{2\pi}(2\pi-0)=1.$$

Demak, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema ekan. Endi uni to'lalikka tekshiramiz. 27.2-teoremaga ko'ra $\{\phi_n\}$ sistema to'la bo'lishi uchun uning yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir. $f_0(t)\equiv 1\in C_2[-\pi,\,\pi]$ uchun Parseval tengligi bajarilishini tekshiramiz. f_0 ning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz. Ma'lumki, toq funksiyaning $[-a,\,a]$ kesma bo'yicha olingan integrali nolga teng. Shuning uchun istalgan $n\in\mathbb{N}$ da

$$c_n=(f_0,\;\phi_n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt=0.$$

Bundan

$$2\pi=\|f_0\|^2>0=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$$

tengsizlik kelib chiqadi. Parseval tengligi bajarilmayapti, shuning uchun $\{\phi_n\}$ sistema yopiq emas, demak, u to'la bo'lmagan ortonormal sistema ekan.

27.2. To'la Evklidla Evklid fazolari. Riss-Fisher teoremasi

Bizni asosan to'la Evklid fazolari qiziqtiradi.

27.8-ta'rif. *E Evklid fazosi $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazosi deyiladi.*

27.6-misol. $C_2[a,\;b]$ to'la bo'lmagan separabel Evklid fazosi bo'ladi (21.8-misolga qarang).

27.7. ℓ_2 va $L_2[a,\;b]$ to'la separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi (21.7 va 26.18-misollarga qarang).

E – to'la separabel Evklid fazosi va $\{\phi_n\}$ undagi ortonormal sistema (to'la bo'lishi shart emas) bo'lsin. Bessel tengsizligidan kelib chiqadiki, $c_1,\,c_2,\ldots,\,c_n,\ldots$

sonlar biror f elementning Furye koeffitsiyentlari bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tag{27.16}$$

qatorning yaqinlashishi zarur.

To'la Evklid fazolarida bu shart yetarli ham ekan.

27.3-teorema *(Riss-Fisher). $\{\phi_n\} - E$ to'la Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema va $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ sonlar shunday bo'lsinki,* (27.16) *qator yaqinlashsin. U holda shunday $f \in E$ element mavjudki,*

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. E to'la Evklid fazosida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \phi_k.$$

(27.16) qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon) > 0$ mavjudki, barcha $n > n(\varepsilon)$ va $p \in \mathbb{N}$ larda

$$\| f_{n+p} - f_n\|^2 = \| c_{n+1} \, \phi_{n+1} + \cdots + c_{n+p} \, \phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni $\{f_n\}$ $-$ fundamental ketma-ketlik. E ning to'laligiga ko'ra $\{f_n\}$ ketma-ketlik biror $f \in E$ elementga yaqinlashadi. Istalgan $i \in \mathbb{N}$ uchun

$$(f, \phi_i) = (f_n, \phi_i) + (f - f_n, \phi_i) \ , \tag{27.17}$$

tenglik o'rinli. (27.17) ning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $n \geq i$ da c_i ga teng, ikkinchi qo'shiluvchi esa $n \to \infty$ da nolga intiladi, chunki

$$|(f - f_n, \phi_i)| \leq \| f - f_n\| \cdot \| \phi_i\| = \| f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty \, .$$

(27.17) tenglikning chap tomoni n ga bog‘liq emas, shuning uchun $n \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$(f,\ \phi_i) = c_i.$$

f ning aniqlanishiga ko‘ra,

$$\| f - f_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Shuning uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2. \qquad \Delta$$

Ortogonal sistemaning to‘laligi haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

27.4-teorema. *To‘la separabel Evklid fazosidagi $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema to‘la bo‘lishi uchun, E da $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo‘lgan nolmas elementning mavjud bo‘lmasligi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* Faraz qilaylik, $\{\phi_n\}$ to‘la sistema bo‘lsin, u holda 27.2-teoremaga ko‘ra u yopiq ham bo‘ladi. Agar f element $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo‘lsa, u holda uning barcha Furye koeffitsiyentlari nolga teng, ya’ni $c_n = 0$ bo‘ladi. U holda Parseval tengligiga ko‘ra,

$$(f,\ f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

ya’ni $f = \theta$.

Yetarliligi. Teskarisini faraz qilaylik, $\{\phi_n\}$ to‘la bo‘lmagan sistema bo‘lsin, ya’ni E da shunday $g \neq \theta$ element mavjud bo‘lib, $(g,\ g) > \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$, bu yerda $c_k = (g, \phi_k)$ tengsizlik bajarilsin. Riss-Fisher teoremasiga asosan, shunday $f \in E$ element mavjudki,

$$(f,\ \phi_k) = c_k, \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

tengliklar o‘rinli. Bu holda $f - g$ element barcha ϕ_k larga ortogonal bo‘ladi.

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

tengsizlikdan $f-g\neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Δ

27.8-misol. $L_2[-\pi,\,\pi]$ Evklid fazosida $\{\psi_n\,(t)=\pi^{-1/2}\cos n\,t\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistema to‘la bo‘ladimi?

Yechish. $\{\psi_n\}$ larning barchasiga ortogonal bo‘lgan $f_0(t)=1$ nolmas element mavjud. Shuning uchun, 27.4-teoremaga ko‘ra $\{\psi_n\}$ sistema to‘la emas.

27.3. Evklid fazolarining xarakteristik xossalari

Quyidagicha savolni qaraymiz. $E-$ normalangan fazo bo‘lsin. E da aniqlangan norma qanday qo‘shimcha shartlarni qanoatlantirsa, E Evklid fazosi ham bo‘ladi? Boshqacha aytganda, qanday shartlarda norma orqali unga mos skalyar ko‘paytma kiritish mumkin?

27.5-teorema. *E normalangan fazo Evklid fazosi bo‘lishi uchun, ixtiyoriy ikkita $f,\,g\in E$ elementlar uchun*

$$\|\,f+g\,\|^2+\|\,f-g\|^2=2\,\|\,f\,\|^2+2\,\|\,g\,\|^2 \tag{27.18}$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* $f+g$ va $f-g$ tomonlari f va g vektorlardan iborat parallelogramm diagonallaridir. (27.18) tenglik Evklid fazosidagi parallelogrammning ma’lum xossasini ifodalaydi, ya’ni parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig‘indisi barcha tomonlar kvadratlarining yig‘indisiga ten:

$$\begin{gathered}\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=(f+g,f+g)+(f-g,f-g)=\\ =2\,(f,f)+2\,(g,g)=2\,\|f\|^2+2\,\|g\|^2\,.\end{gathered}$$

Yetarliligi. E normalangan fazoda normaning (27.18) ayniyatidan foydalanib, E da skalyar ko‘paytma kiritish mumkinligini ko‘rsatish kifoya. Ixtiyoriy $f,\,g\in E$ elementlar uchun

$$(f,g)=\frac{1}{4}\Big(\,\|\,f+g\,\|^2-\|\,f-g\|^2\Big) \tag{27.19}$$

deymiz. Ko‘rsatish mumkinki, agar (27.18) tenglik bajarilsa, (27.19) tenglik yordamida aniqlangan funksional skalyar ko‘paytma shartlarini qanoatlantiradi. Δ

27.9-misol. $\mathbb{R}_p^n$ $-$ n o‘lchamli vektor fazoni qaraymiz. Bu fazoda x elementning normasi quyidagicha aniqlanadi (26.3-misolga qarang):

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Qanday $p \geq 1$ larda $\mathbb{R}_p^n$ normalangan fazo Evklid fazosi bo‘ladi?

Yechish. $\mathbb{R}_p^n$ dan $f = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ va $g = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ vektorlarni olamiz. U holda

$$f + g = (2, 0, 0, \ldots, 0) , \qquad f - g = (0, 2, 0, \ldots, 0) .$$

Endi (27.18) tenglikning bajarilishini tekshirib ko‘ramiz:

$$\| f + g \|_p = (2^p)^{1/p} = 2, \quad \| f - g\|_p = 2, \;\; \| f \|_p = \| g \|_p = 2^{1/p},$$

$$2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^{2/p} + 2 \cdot 2^{2/p}, \qquad 2 = 2^{2/p} .$$

So‘nggi tenglik faqat $p = 2$ da o‘rinli. Demak, faqat $p = 2$ da $\mathbb{R}_p^n$ normalangan fazo Evklid fazosi ham bo‘ladi.

27.10. $C[0, \pi/2]$ fazoni qaraymiz. Ma’lumki, bu fazoda f elementning normasi quyidagicha aniqlanadi

$$\| f \| = \max_{0 \leq t \leq \pi/2} | f (t) | . \tag{27.20}$$

Bu fazo Evklid fazosi bo‘ladimi?

Yechish. $C[0, \pi/2]$ fazodan $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$ elementlarni olamiz. U holda $\| f \| = \| g \| = 1$,

$$\| f + g \| = \max_{0 \leq t \leq \pi/2} |\cos t + \sin t| = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\| f - g \| = \max_{0 \le t \le \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1.$$

Endi (27.18) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$2 + 1 = 2(1 + 1), \quad 3 \neq 4.$$

Demak, $C[0, \pi/2]$ fazo Evklid fazosi bo‘la olmaydi. Boshqacha aytganda (27.20) tenglik bilan aniqlanuvchi normani biror bir skalyar ko‘paytma yordamida berish mumkin emas. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Shunday funksionalga misol keltiringki, skalyar ko‘paytmaning 1-sharti bajarilmasin.*

2. *Skalyar ko‘paytmaning 1-sharti bajarilib, 2-4 shartlari bajarilmaydigan funksionalga misol keltiring.*

3. *To‘la va to‘la bo‘lmagan Evklid fazolariga misollar keltiring.* ℓ_2 *va* $C_2[-1, 1]$ *fazolarni tahlil qiling.*

4. $\mathbb{R}^3$ *fazoda* $x = (1, 1, 1)$, $y = (1, 1, 0)$ $z = (1, 0, 0)$ *vektorlarni ortogonallashtiring.*

5. $C_2[a, b]$ *fazoda ortonormal sistemaga misol keltiring.*

6. $C_2[-1, 1]$ *fazoda* $f(x) = 1$ *va* $g(x) = x$ *vektorlar orasidagi burchakni toping. Uni funksiya grafiklari orasidagi burchak bilan taqqoslang.*

7. $\{ f_n(t) = \cos(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ *sistemani* $C_2[-1, 1]$ *fazoda ortogonallikka tekshiring. U ortonormal sistema bo‘ladimi?*

8. $\{ g_n(t) = \sin(n\pi x) \}_{n=1}^{\infty}$ *sistema* $L_2[-1, 1]$ *fazoda yopiq sistema bo‘ladimi?*

9. $L_2[-1,\,1]$ *Evklid fazosida* $f(x)=1$ *va* $g(x)=x$ *vektorlarning*

$$\{\,f_n\,(x)=\cos\,(n\,\pi\,x)\}\,,\; n\in\mathbb{N}$$

ortonormal sistemadagi Furye koeffitsiyentlarini toping.

10. $L_2[-1,\,1]$ *separabel Evklid fazosida*

$$2^{-1/2},\quad f_n\,(x)=\cos\,(n\,\pi\,x)\,,\quad g_n\,(x)=\sin\,(n\,\pi\,x)\,,n\in\mathbb{N}$$

ortonormal sistema to'la bo'ladimi?

11. ℓ_p *chiziqli normalangan fazo* $p\geq 1$ *ning qanday qiymatlarida Evklid fazosi bo'ladi.*

12. $L_p[a,\ b],\ p\geq 1$ *chiziqli normalangan fazo* p *ning qanday qiymatlarida Evklid fazosi bo'ladi.*

28-§. Hilbert fazolari

To'la Evklid fazolarini qarashda davom etamiz. Bizni faqat cheksiz o'lchamli Evklid fazolari qiziqtiradi, chunki chekli o'lchamli Evklid fazolari $\mathbb{R}^n$ fazoga izomorfdir.

28.1-ta'rif. *Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosi Hilbert fazosi deyiladi.*

Shunday qilib, ixtiyoriy tabiatli $f,\,g,\,\varphi,\dots$ elementlarning H to'plami Hilbert fazosi bo'lsa, u quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

1) $H-$ Evklid fazosi, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo;

2) $\rho\,(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$ metrika ma'nosida $H-$ to'la fazo;

3) H fazo - cheksiz o'lchamli, ya'ni unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

Odatda separabel Hilbert fazolari qaraladi, ya'ni H ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud.

Bundan keyin biz faqat separabel Hilbert fazolarini qaraymiz.

28.1-misol. $C_2[a,\ b]$ Evklid fazosi to'la emas (21.8 - misolga qarang), shuning uchun $C_2[a,\ b]$ Hilbert fazosi bo'la olmaydi.

28.2. ℓ_2 va $L_2[a,\ b]$ lar cheksiz o'lchamli to'la separabel Evklid fazolaridir (27.7-misolga qarang). Shuning uchun ular Hilbert fazolari bo'ladi.

28.2-ta'rif. *Agar E va E^* Evklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,*

$$x \to x^*, \quad y \to y^*, \quad x, y \in E, \ \ x^*, y^* \in E^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \qquad \lambda\, x \leftrightarrow \lambda\, x^* \quad va \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, E va E^* lar izomorf fazolar deyiladi.

Boshqacha aytganda, Evklid fazolarining izomorfligi shundan iboratki, bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, bu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Ma'lumki, $n-$ o'lchamli ixtiyoriy ikkita Evklid fazosi o'zaro izomorfdir. Cheksiz o'lchamli Evklid fazolari o'zaro izomorf bo'lishi shart emas. Masalan ℓ_2 va $C_2[a,\ b]$ fazolar izomorf emas, chunki ℓ_2 to'la, $C_2[a,\ b]$ esa to'la emas.

Quyidagi teorema o'rinli.

28.1-teorema. *Ixtiyoriy ikkita separabel Hilbert fazosi o'zaro izomorfdir.*

Isbot. Ixtiyoriy H Hilbert fazosini ℓ_2 fazoga izomorfligini ko'rsatamiz. Agar shuni ko'rsatsak, teorema isbot bo'lgan bo'ladi. H Hilbert fazosidan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistemani olamiz va $f \in H$ elementga uning Furye koeffitsiyentlari bo'lgan $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ketma-ketlikni mos qo'yamiz. Bessel tengsizligiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

Shuning uchun $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ ketma-ketlik ℓ_2 fazoning elementi bo'ladi. Teskarisi, Riss-Fisher teoremasiga ko'ra, ℓ_2 fazoning ixtiyoriy $c =$

$(c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n, \ldots)$ elementiga (ketma-ketligiga) H fazoning yagona f elementi mos keladi va uning Furye koeffitsiyentlari bo‘lib, $c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n,\, \ldots$ sonlar xizmat qiladi. O‘rnatilgan bu moslik o‘zaro bir qiymatlidir. Agar

$$f \leftrightarrow c = (c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n,\, \ldots) \qquad \text{va} \qquad g \leftrightarrow d = (d_1,\, d_2, \ldots,\, d_n,\, \ldots)$$

bo‘lsa, u holda

$$f + g \leftrightarrow c + d = (c_1 + d_1,\, c_2 + d_2, \ldots,\, c_n + d_n,\, \ldots)$$

va

$$\alpha f \leftrightarrow \alpha c = (\alpha c_1,\, \alpha c_2, \ldots,\, \alpha c_n,\, \ldots)\,.$$

Nihoyat, Parseval tengligidan

$$(f,\, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, d_n = (c, d)$$

ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$(f,\, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \qquad (g,\, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \tag{28.1}$$

va

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2\,(f, g) + (g, g) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

Bu yerdan va (28.1) dan

$$(f,\, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, d_n = (c, d)\,.$$

Shunday qilib, biz o‘rnatgan moslik izomorfizm ekan, ya’ni bu moslik chiziqli amallarni va skalyar ko‘paytmani saqlaydi. Δ

Isbotlangan teoremadan shunday xulosa kelib chiqadiki, izomorfizm aniqligida faqat ℓ_2 Hilbert fazosi mavjud ekan. Boshqacha aytganda, ℓ_2 fazo H Hilbert fazosining *koordinat ko‘rinishi* desak bo‘ladi.

H Hilbert fazosining qism fazosi deganda yopiq qism fazoni tushunamiz. Hilbert fazosining qism fazolariga misollar keltiramiz.

28.3-misol. $h \in H$ $-$ixtiyoriy element bo'lsin. h ga ortogonal bo'lgan barcha $f \in H$ elementlar to'plami qism fazo tashkil qiladi.

28.4. ℓ_2 fazoda $x_1 = x_2$ shartni qanoatlantiruvchi elementlar to'plami qism fazo tashkil qiladi.

28.5. ℓ_2 fazoning $M = \{x \in \ell_2 : \ x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots, x_{2n+1}, 0, \ldots)\}$ to'plami uning qism fazosi bo'ladi.

Hilbert fazosining har qanday qism fazosi yo chekli o'lchamli Evklid fazosi bo'ladi, yo uning o'zi Hilbert fazosini tashkil qiladi.

28.6. $L_2[-1, 1]$ Hilbert fazosida toq funksiyalardan iborat $L_2^-[-1, 1] = \{f \in L_2[-1,1] : f(-t) = -f(t)\}$ to'plam qism fazo tashkil qiladi.

28.7. $L_2[-1, 1]$ separabel Hilbert fazosida quyidagi to'plam $L_0^-[-1, \ 1] = \{f \in L_2[-1, \ 1] : \text{supp} f \subset [-1, 0]\}$ qism fazo tashkil qiladi.

Agar H Hilbert fazosi separabel bo'lsa, uning ixtiyoriy qismi ham separabel bo'ladi. Bu quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

28.1-lemma. *E separabel Evklid fazosining har qanday E' qismi yana separabeldir.*

Hilbert fazosining qism fazolari ayrim maxsus xossalarga egaki, ixtiyoriy normalangan fazoning qism fazolari bu xossalarga ega emas. Bu xossalar Hilbert fazosida kiritilgan skalyar ko'paytma va unga mos ortogonallik tushunchasiga asoslangan.

H separabel Hilbert fazosining M qism fazosi berilgan bo'lsin. Bu qism fazoning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli sistema olamiz va unga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

28.2-teorema. *H separabel Hilbert fazosining ixtiyoriy M qism fazosida shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, uning chiziqli qobig'ining yopig'i*

M ga teng.

Bizga H Hilbert fazosining M qism fazosi berilgan bo'lsin. Barcha $f \in M$ elementlarga ortogonal bo'lgan $g \in H$ elementlar to'plamini $M^{\perp} = H \ominus M$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$M^{\perp} = \{ g \in H : \ (f, g) = 0, \quad \forall f \in M \}.$$

$M^{\perp}$ ham H ning qism fazosi ekanligini isbotlaymiz. Bu to'plamning qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqligini ko'rsatamiz. Agar $g_1, \ g_2 \in M^{\perp}$ bo'lsa, u holda

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = \alpha_1 (g_1, f) + \alpha_2 (g_2, f) = 0.$$

Endi $M^{\perp}$ to'plamning yopiqligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\{g_n\} \subset M^{\perp}$ elementlar ketma-ketligi $g \in H$ elementga yaqinlashsin. U holda skalyar ko'paytmaning uzluksizligiga ko'ra, istalgan $f \in M$ uchun

$$(g, f) = \lim_{n \to \infty} (\, g_n, f) = 0.$$

Demak, $g \in M^{\perp}$, ya'ni $M^{\perp}$ yopiq qism fazo bo'lar ekan. $M^{\perp}$ qism fazo M qism fazoning *ortogonal to'ldiruvchisi* deyiladi.

Bizga H Hilbert fazosi va uning M_1 va M_2 qism fazolari berilgan bo'lsin.

28.3-ta'rif. *Agar barcha $f_1 \in M_1$ va $f_2 \in M_2$ lar uchun $(f_1, \ f_2) = 0$ bo'lsa, u holda M_1 va M_2 qism fazolar ortogonal qism fazolar deyiladi.*

28.3-teorema. *Agar $M - H$ Hilbert fazosining yopiq qism fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f \in H$ element yagona usul bilan $f = h + h'$ yig'indiga yoyiladi, bu yerda $h \in M$, $\ h' \in M^{\perp}$.*

Isbot. Avvalo, bu yoyilmaning mavjudligini isbotlaymiz. Buning uchun M da $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema olamiz va

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \quad c_n = (f, \, \phi_n)$$

deymiz. Bessel tengsizligiga ko‘ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun $h \in M$. Endi $h' = f - h$ deb olamiz. Ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$(h', \phi_n) = (f, \phi_n) - (h, \phi_n) = c_n - c_n = 0.$$

Ixtiyoriy $\xi \in M$ element uchun

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \qquad \text{va} \qquad (h', \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \phi_n) = 0,$$

ya’ni $h' \in M^{\perp}$.

Endi yoyilmaning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, boshqa bir $f = h_1 + h_1'$, $h_1 \in M$, $h_1' \in M^{\perp}$ yoyilma mavjud bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$(h_1, \phi_n) = (f, \phi_n) = c_n.$$

Bu yerdan kelib chiqadiki $h_1 = h, \quad h_1' = h'.$ Δ

28.1-natija. *$M \subset H$ qism fazoning ortogonal to‘ldiruvchisining ortogonal to‘ldiruvchisi M ning o‘ziga teng, ya’ni $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.*

Shunday qilib, H fazoning o‘zaro to‘ldiruvchi qism fazolari haqida fikr yuritish mumkin. Agar M va $M^{\perp}$ ikkita shunday bir-birini to‘ldiruvchi qism fazolar va $\{\phi_n\}$, $\{\phi_n'\}$ – mos ravishda M va $M^{\perp}$ dagi to‘la ortonormal sistema bo‘lsa, u holda $\{\phi_n\}$ va $\{\phi_n'\}$ sistemalarning birlashmasi butun H fazoda to‘la ortonormal sistema bo‘ladi.

28.2-natija. *H fazodagi har qanday ortonormal sistemani to‘la sistemagacha to‘ldirish mumkin.*

Agar $\{\phi_n\}$ sistema chekli bo‘lsa, u holda bu sistemaga kiruvchi elementlar soni $\{\phi_n\}$ sistemadan hosil qilingan M qism fazoning o‘lchamiga va $M^{\perp}$ qism fazoning koo‘lchamiga teng. Shunday qilib, quyidagiga egamiz.

28.3-natija. *n o'lchamli qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi n koo'l-chamga ega va aksincha.*

28.4-ta'rif. *Bizga H Hilbert fazosi va uning o'zaro ortogonal M_1 va M_2 qism fazolari berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $f \in H$ element*

$$f = h_1 + h_2, \quad h_1 \in M_1, \;\; h_2 \in M_2$$

ko'rinishda tasvirlansa, u holda H fazo o'zaro ortogonal M_1 va M_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyiladi deyiladi va

$$H = M_1 \oplus M_2$$

ko'rinishda yoziladi.

To'g'ri yig'indini chekli yoki sanoqli sondagi qism fazolar uchun ham umumlashtirish mumkin. Agar quyidagi shartlar bajarilsa H o'zining M_1, $M_2, \ldots,$ $M_n, \ldots$ qism fazolarining *to'g'ri yig'indisiga yoyilgan* deyiladi:
a) M_i qism fazolar juft-jufti bilan o'zaro ortogonal, ya'ni M_i dagi ixtiyoriy vektor M_k dagi barcha vektorlarga ortogonal, $i \neq k$;
b) ixtiyoriy $f \in H$ element

$$f = h_1 + h_2 + \;\cdots\; + h_n + \;\cdots\,, \qquad h_n \in M_n, \;\; n = 1, \; 2, \ldots \tag{28.2}$$

ko'rinishda tasvirlanadi, agar qo'shiluvchilar soni cheksiz bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \, h_n \, \|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko'rinishda yoziladi. Osongina ko'rsatish mumkinki, agar f uchun (28.2) yoyilma mavjud bo'lsa, u yagona va quyidagi tenglik o'rinli:

$$\| \, f \, \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| \, h_n \, \|^2 \; .$$

Qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisi bilan bir qatorda chekli yoki sanoqli sondagi Hilbert fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi haqida ham gapirish mumkin. Agar H_1 va H_2 lar ixtiyoriy Hilbert fazolari bo‘lsa, u holda ularning to‘g‘ri yig‘indisi $H = H_1 \oplus H_2$ quyidagicha aniqlanadi. H fazoning elementlari barcha (h_1, h_2), $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ juftliklardan iborat. $H = H_1 \oplus H_2$ fazoda qo‘shish, songa ko‘paytirish va skalyar ko‘paytma amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$(h_1, h_2) + (h_1', h_2') = (h_1 + h_1', h_2 + h_2'), \quad h_1, h_1' \in H_1, \ h_2, h_2' \in H_2,$$

$$\alpha(h_1, \, h_2) = (\alpha h_1, \ \alpha h_2), \ h_1 \in H_1, \ h_2 \in H_2, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

$$((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = (h_1, h_1')_{H_1} + (h_2, h_2')_{H_2}, \quad h_1, h_1' \in H_1, \ h_2, h_2' \in H_2.$$

Chekli sondagi $H_1, \, H_2, \ldots, H_n$ Hilbert fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi ham xuddi shunday aniqlanadi.

Sanoqli sondagi $H_1, \, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ Hilbert fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$$

quyidagicha aniqlanadi

$$H = \left\{ h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots), \quad h_n \in H_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \| \, h_n \, \|^2 < \infty \right\}.$$

H fazoda skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi

$$(h, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g_n), \quad h = (h_1, \ldots, h_n, \ldots), \ g = (g_1, \ldots, g_n, \ldots), \ h_n, g_n \in H_n.$$

28.8. 28.6-misolda keltirilgan $L_2^-[-1, \, 1]$ (toq funksiyalar to‘plami) qism fazoning ortogonal to‘ldiruvchisini toping.

Yechish. $L_2^+[-1, \, 1] = \{f \in L_2[-1, \, 1] : \ f(-t) = f(t)\}$ juft funksiyalardan iborat to‘plam $L_2[-1, \, 1]$ fazoning qism fazosi bo‘ladi va ular o‘zaro ortogonal, ya’ni $L_2^-[-1, \, 1] \perp L_2^+[-1, \, 1]$. Haqiqatan ham,

$$\left(f^-, f^+\right) = \int_{-1}^{1} f^-(t) \cdot f^+(t) \ dt = 0, \quad \forall f^- \in L_2^-[-1, \, 1], \ \forall f^+ \in L_2^+[-1, \, 1].$$

Bu yerdan $\left(L_2^-[-1,\,1]\right)^{\perp} \supset L_2^+[-1,\,1]$ va $\left(L_2^-[-1,\,1]\right)^{\perp} \subset L_2^+[-1,\,1]$ munosabatlar kelib chiqadi. Bulardan esa $\left(L_2^-[-1,\,1]\right)^{\perp} = L_2^+[-1,\,1]$ tenglikni olamiz.

28.1. Kompleks Evklid fazolari

Haqiqiy Evklid fazolari bilan bir qatorda kompleks Evklid fazolari ham qaraladi (ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan kompleks chiziqli fazo). Lekin haqiqiy Evklid fazolaridagi skalyar ko'paytmaning 1-4 aksiomalari kompleks Evklid fazolari uchun bir vaqtda bajarilmaydi. Haqiqiy Evklid fazolarida skalyar ko'paytmaning 1-4 aksiomalari quyidagicha edi:

1) $(x,x) \geq 0, \quad \forall x \in E; \quad (x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta,$

2) $(x,y) = (y,x), \quad \forall x,y \in E,$

3) $(\lambda x,\, y) = \lambda(x,\, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \forall x,\, y \in E,$

4) $(x_1 + x_2,\; y) = (x_1,y) + (x_2,y), \quad \forall x_1,\, x_2,\; y \in E.$

Biz 2 va 3 dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$(\lambda\, x,\, \lambda\, x) = \lambda\, (x,\, \lambda\, x) = \lambda\, (\lambda\, x,\; x) = \lambda^2\, (x,x)\,.$$

Agar λ kompleks son bo'lsa, u holda $\lambda = i$ bo'lganda, $(ix, ix) = -(x,x)$, ya'ni x va ix vektorlarning skalyar ko'paytmasi bir vaqtda musbat bo'la olmaydi, bu esa 1-shartga zid, ya'ni kompleks chiziqli fazolar holida 1, 2 va 3-shartlar bir vaqtda bajarilishi mumkin emas. Demak, kompleks chiziqli fazolarda skalyar ko'paytmaning shartlarini biroz o'zgartirish kerak.

Kompleks chiziqli fazoda skalyar ko'paytmaning shartlarini keltiramiz:

1) $(x,x) \geq 0, \quad \forall x \in E; \quad (x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta,$

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}, \quad \forall x,y \in E\,,$

3) $(\lambda x,\, y) = \lambda(x,\, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\,, \quad \forall x,\, y \in E,$

4) $(x_1 + x_2,\; y) = (x_1,y) + (x_2,y), \quad \forall x_1,\, x_2,\; y \in E.$

2 va 3 dan $(\,x, \lambda\, y) = \overline{\lambda}\,(x,y)$ kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$(\,x, \lambda\, y) = \overline{(\lambda\, y, x)} = \overline{\lambda\, (y,x)} = \overline{\lambda}\;\overline{(y,\, x)} = \overline{\lambda}\;\; (x,y)\,.$$

28.9-misol. $E=\mathbb{C}^n-$ kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k\,\overline{y_k}.$$

28.10. $\ell_2=\left\{x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\,,\ \ x_n\in\mathbb{C}:\ \ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}$ kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\,\overline{y_k}.$$

28.11. $E=C_2[a,\,b]-[a,\,b]$ kesmada aniqlangan kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(f,g)=\int_a^b f\,(t)\ \overline{g\,(t)}\,dt. \tag{28.3}$$

28.12. $E=L_2[a,\,b]-$ $[a,\,b]$ kesmada aniqlangan kompleks qiymatli va kvadrati bilan integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar sinfi. Bu fazoda ham f va g elementlarning skalyar ko‘paytmasi (28.3) tenglik bilan aniqlanadi.

Kompleks Evklid fazolarida ham elementning normasi xuddi haqiqiy Evklid fazolari holidagidek

$$\|\,f\,\|=\sqrt{(f,f)}\qquad \text{yoki}\qquad \|\,x\,\|=\sqrt{(x,x)}$$

formula bilan aniqlanadi.

Kompleks Evklid fazolarida ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi kiritilmaydi, lekin vektorlarning ortogonallik tushunchasi saqlanib qoladi. Ya’ni, agar $(x,y)=0$ bo‘lsa, u holda x va y vektorlar *o‘zaro ortogonal* deyiladi.

28.5-ta’rif. *Agar*

$$(\phi_n,\phi_m)=\begin{cases}1, & agar\ \ n=m\\ 0, & agar\ \ n\neq m\,.\end{cases}$$

bo‘lsa, nolmas $\{\phi_n\}\subset E$ *sistema ortogonal normalangan sistema deyiladi.*

Xuddi haqiqiy Evklid fazolaridagi kabi, $c_n = (f, \phi_n)$, $n \in \mathbb{N}$ sonlar $f \in E$ vektorning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemadagi *Furye koeffitsiyentlari* deyiladi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

qator f vektorning $\{\phi_n\}$ sistemadagi *Furye qatori* deyiladi. Bu yerda ham Bessel tengsizligi o'rinli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^{\,2}.$$

Kompleks Evklid fazolari holida ham Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o'z kuchini saqlaydi:

$$|\,(x, y)\,| \leq \|\,x\,\| \cdot \|\,y\,\|\,.$$

28.6-ta'rif. *Cheksiz o'lchamli to'la kompleks Evklid fazosi kompleks Hilbert fazosi deyiladi.*

Kompleks Hilbert fazolari uchun ham izomorfizm haqidagi teorema o'rinli.

28.4-teorema. *Barcha separabel kompleks Hilbert fazolari o'zaro izomorfdir.*

28.13. ℓ_2 va $L_2[a, b]$ lar separabel kompleks Hilbert fazolariga misol bo'ladi.

28.14. $L_2[-\pi, \pi]$ separabel kompleks Hilbert fazosida

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

sistema to'la ortonormal sistema bo'ladi. Mustaqil isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Hilbert fazolariga misollar keltiring.* ℓ_2 *fazo Hilbert fazosi bo'ladimi?*

2. *Separabel bo'lmagan Evklid fazosiga misol keltiring.*

3. $m-$ *chegaralangan ketma-ketliklar fazosida*

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n y_n$$

funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradimi? m *separabel Evklid fazosi bo'ladimi?*

4. ℓ_2 *fazoni ikkita ortogonal qism fazolarning to'g'ri yig'indisi shaklida yozing.*

5. $L_2[-1,\,1]$ *Hilbert fazosida* $L_2^+[-1,\,1] = \{f \in L_2[-1,\,1]: \ f(-t) = f(t)\}$ *juft funksiyalar to'plami qism fazo bo'lishini ko'rsating. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping.*

6. *28.7-misolda keltirilgan* $L_0^-[-1,\ 1]$ *qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisini toping.*

7. *Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisida skalyar ko'paytma qanday kiritiladi?*

8. ℓ_2 va $L_2[-1,\ 1]$ *Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisida skalyar ko'paytma qanday kiritiladi?*

9. *Quyidagi* $((x,f),(y,g)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\,\overline{y_n} + \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,\ x,y \in \ell_2,$ $f,\,g \in L_2[-1,\,1]$ *funksional* $\ell_2 \oplus L_2[-1,\ 1]$ *Hilbert fazosida skalyar ko'paytma bo'ladimi?*

VIII bob. Chiziqli operatorlar

Bu bob 6 paragrafdan (29-34-§§ lardan) iborat bo‘lib, unda chiziqli operatorlar va chiziqli funksionallarning asosiy xossalari o‘rganiladi. 29-§ chiziqli uzluksiz operatorlar xossalariga bag‘ishlangan bo‘lib, unda chiziqli operatorlarning asosiy xossalari isbotlangan. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrolari ta’riflanib, misollarda tushuntirilgan. Chiziqli operatorlar uchun uzluksizlik va chegaralanganlik ekvivalent tushunchalar ekanligi isbotlangan. X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz operatorlar to‘plami $-$ $L(X,Y)$ chiziqli normalangan fazo bo‘lishi ko‘rsatilgan. 30-§ da normalangan fazolarda chiziqli uzluksiz funksionallarning ayrim xossalari qaralgan. Chiziqli uzluksiz funksionalning normasini saqlagan holda butun fazogacha davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasi isbotlangan. Asosiy funksional fazolarda (ℓ_p, $C[a,b]$, $L_p[a,\ b]$) chiziqli uzluksiz funksionallarning umumiy ko‘rinishidan foydalanib, asosiy funksional fazolarga qo‘shma fazolar izomorfizm aniqligida topilgan. 31-§ chiziqli uzluksiz operatorlar fazosining xossalariga bag‘ishlangan. Unda chiziqli operatorlar ketma-ketligining tekis (norma bo‘yicha), kuchli (nuqtali) va kuchsiz yaqinlashishlari ta’riflanib, misollarda tahlil qilingan. Agar Y to‘la normalangan fazo bo‘lsa, u holda $L(X,Y)$ chiziqli normalangan fazoning Banax fazosi bo‘lishi isbotlangan. $X = C[-1,\ 1]$, $Y = C_2[-1,\ 1]$ bo‘lgan holda $L(X,Y)$ ning to‘la bo‘lmagan chiziqli normalangan fazo bo‘lishi isbotlangan. Bundan tashqari Banax-Shteynxaus teoremasi (tekis chegaralanganlik prinsipi) isbotlangan va uning yordamida X va Y lar Banax fazolari bo‘lgan holda chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi $L(X,Y)-$ ning kuchli yaqinlashishga nisbatan ham to‘la bo‘lishi ko‘rsatilgan. 32-§ teskari operatorlar, ularning asosiy xossalariga bag‘ishlangan. Bu paragrafda chiziqli operator teskarilanuvchan bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari keltirilgan. Shuningdek chegaralangan teskari operator mavjud bo'lishining yetarli, zaruriy va yetarli shartlari keltiriladi. Keltirilgan teorema shartlarining bajarilishiga doir misollar qaralgan. Navbatdagi 33-§ da Banax va Hilbert fazolarida berilgan operatorlarning qo'shmalari ta'riflanib, ularning asosiy xossalari bayon qilingan. Hilbert fazolari ℓ_2 va $L_2[a, b]$ larda ko'paytirish operatorining o'z-o'ziga qo'shmalik kriteriysi berilgan. $L_2[a, b]$ fazoda $K(x, y)$ yadro bilan aniqlanuvchi integral operatorning o'z-o'ziga qo'shmalik shartlari keltirilgan. So'nggi 34-§ da chiziqli operatorlarning spektri klassifikatsiya qilinib, ularga doir misollar qaralgan. Chiziqli uzluksiz operatorning spektri bo'sh bo'lmagan yopiq to'plam ekanligi isbotlangan. Muhim spektr, qoldiq spektr va chiziqli operatorning xos qiymatlarini topishga doir misollar qaralgan. Spektri kompleks sonlar to'plami $\mathbb{C}$ bilan ustma-ust tushuvchi chiziqli operatorga misol keltirilgan.

29-§. Chiziqli uzluksiz operatorlar

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo'ladi. Shunday qilib, bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

29.1-ta'rif. *X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi*

$$Ax = y \quad (x \in X, \quad y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni:

$$D(A) = \{x \in X: \quad Ax \quad \text{mavjud} \quad \text{va} \quad Ax \in Y\}$$

Odatda $D(A)$ ning chiziqli ko'pxillilik (26.6-ta'rifga qarang) bo'lishi talab qilinadi, ya'ni agar $x, y \in D(A)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$ bo'ladi.

29.2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x, y \in D(A)$ *elementlar va ixtiyoriy* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *sonlar uchun* $\alpha x + \beta y \in D(A)$ bo'lib,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A *ga chiziqli operator deyiladi.*

29.3-ta'rif. *Bizga* $A : X \to Y$ *operator va* $x_0 \in D(A)$ *nuqta berilgan bo'lsin. Agar* $y_0 = Ax_0 \in Y$ *ning ixtiyoriy* V *atrofi uchun,* x_0 *nuqtaning shunday* U *atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy* $x \in U \bigcap D(A)$ *lar uchun* $Ax \in V$ *bo'lsa,* A *operator* $x = x_0$ *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

29.3-ta'rifga teng kuchli quyidagi ta'riflarni keltiramiz.

29.4-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *mavjud bo'lib,* $\|x - x_0\| < \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha* $x \in D(A)$ *lar uchun*

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A *operator* $x = x_0$ *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

29.5-ta'rif. *Agar* x_0 *nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy* $\{x_n\} \subset D(A)$ *ketma-ketlik uchun* $\lim\limits_{n \to \infty} \|A x_n - A x_0\| = 0$ *bo'lsa, u holda* A *operator* x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.* Agar A operator ixtiyoriy $x \in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, A uzluksiz operator deyiladi.

29.6-ta'rif. $Ax = \theta$ *tenglikni qanoatlantiruvchi barcha* $x \in D(A)$ *lar to'plami* A *operatorning yadrosi deyiladi va u* $KerA$ *bilan belgilanadi.*

29.7-ta'rif. *Biror* $x \in D(A)$ *uchun* $y = Ax$ *bajariladigan* $y \in Y$ *lar to'plami* A *operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deyiladi va u* ImA *yoki* $R(A)$ *bilan belgilanadi.*

Matematik simvollar yordamida operator yadrosi va qiymatlar sohasini quyidagicha yozish mumkin:

$$KerA = \{\, x \in D\,(A): \;\; Ax = \theta\,\}\,,$$

$$R(A) := ImA = \{\, y \in Y: \quad \text{biror } x \in D\,(A) \;\text{ uchun }\; y = Ax\,\}\,.$$

Chiziqli operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi chiziqli koʻpxillilik boʻladi. Agar $D(A) = X$ boʻlib, A uzluksiz operator boʻlsa, u holda $KerA$ yopiq qism fazo boʻladi, ya'ni $KerA = [KerA]$. A operator uzluksiz boʻlgan holda ham $ImA \subset Y$ yopiq qism fazo boʻlmasligi mumkin.

Chiziqli operatorlarga misollar

29.1-misol. X – ixtiyoriy chiziqli normalangan fazo boʻlsin.

$$Ix = x, \;\; x \in X$$

akslantirish *birlik operator* deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu operatorning chiziqliligi va uzluksizligi quyidagi tengliklardan bevosita kelib chiqadi:

$$I(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, x + \beta\, y = \alpha\, I\, x + \beta\, I\, y, \qquad \|I\,(x - x_0)\| = \|x - x_0\|\,.$$

Qoʻshimcha qilib aytishimiz mumkinki, uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar oʻrinli:

$$D(I) = X, \quad R(I) = X, \quad KerI = \{\theta\}.$$

29.2. X va Y ixtiyoriy chiziqli normalangan fazolar boʻlsin.

$$\Theta\, : X \to Y, \quad \Theta\, x = \theta$$

operator *nol operator* deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Nol operatorning chiziqliligi va uzluksizligi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o‘rinli:

$$D(\Theta) = X,\ R(\Theta) = \{\theta\},\ Ker(\Theta) = X.$$

29.3. Aniqlanish sohasi $D(A) = C^{(1)}[a,\ b] \subset C[a,\, b]$ bo‘lgan va $C[a,\, b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi

$$A:\ C[a,\, b] \to C[a,\, b],\ (Af)\ (x) = f'\,(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator *differensiallash operatori* deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Uning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $f, g \in D(A)$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘lgan $\alpha f + \beta g$ elementga A operatorning ta’sirini qaraymiz:

$$(A\,(\alpha\, f + \beta\, g))\,(x) = (\alpha\, f\,(x) + \beta\, g\,(x))' =$$

$$= \alpha\, f'\,(x) + \beta g'\,(x) = \alpha\ (Af)\,(x) + \beta\ (Ag)\,(x)\,.$$

Biz bu yerda yig‘indining hosilasi hosilalar yig‘indisiga tengligidan, hamda o‘zgarmas sonni hosila belgisi ostidan chiqarish munkinligidan foydalandik. Demak, A operator chiziqli ekan. Uni nol nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Ma’lumki, $A\theta = \theta$, bu yerda $\theta -\ C\,[a,\, b]$ fazoning nol elementi, ya’ni $\theta\,(x) \equiv 0$. Endi nolga yaqinlashuvchi $f_n \in D\,(A)$ ketma-ketlikni tanlaymiz. Umumiylikni buzmagan holda $a = 0,\ b = 1$ deymiz.

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\, f_n\| = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$(Af_n)\ (x) = x^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\, Af_n - A\theta\,\| = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} |x^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Demak, A operator nol nuqtada uzluksiz emas ekan. 29.2-teoremaga ko‘ra differensiallash operatori aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida uzilishga ega.

Uning qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o‘rinli:

$$R(A) = C[a,b], \qquad KerA = \{const\}.$$

29.4. Endi $C[a,\, b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi B operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Bf)\,(x) = \int_a^b K\,(x,t)\, f\,(t)\; dt \tag{29.1}$$

Bu operator *integral operator* deyiladi. Bu yerda $K(x,y)$ funksiya $[a,\ b] \times [a,\ b] -$ kvadratda aniqlangan, uzluksiz. $K(x,y)$ integral operatorning *o‘zagi (yadrosi)* deyiladi. B operatorni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma’lumki, ixtiyoriy $f \in C[a,\ b]$ uchun $K(x,t)f(t)$ funksiya x va t ning uzluksiz funksiyasidir. Matematik analiz kursidan ma’lumki,

$$\int_a^b K\,(x,t)\, f\,(t)\; dt$$

integral parametr $x \in [a,b]$ ning uzluksiz funksiyasi bo‘ladi. Bulardan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)$ uchun $D(B) = C[a,\ b]$ tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Integral operatorning chiziqli ekanligi integrallash amalining chiziqlilik xossasidan kelib chiqadi, ya’ni ixtiyoriy $f,\ g \in C[a,\ b]$ va $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ lar uchun

$$(B\,(\alpha f + \beta g))\;(x) = \int_a^b K\,(x,t)\;(\alpha f\,(t) + \beta g\,(t))\;dt =$$

$$= \alpha \int_a^b K\,(x,t)\, f\,(t)\; dt + \beta \int_a^b K\,(x,t)\, g\,(t)\, dt = \alpha\;(Bf)\,(x) + \beta\,(Bg)\,(x)$$

tengliklar o‘rinli. Endi integral operator B ning uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz. $f_0 \in C[a,\ b]$ ixtiyoriy tayinlangan element va $\{f_n\} \subset C[a,\ b]$ unga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsin. U holda

$$\|\, Bf_n - Bf_0\| = \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^b K\,(x,t)\;(f_n\,(t) - f_0\,(t))\, dt \right| \le$$

$$\leq \max_{a\leq x\leq b} \, | f_n(t) - f_0(t) | \, \max_{a\leq x\leq b} \int_a^b |K(x,t)\,dt| = C\cdot \| f_n - f_0\| . \quad (29.2)$$

Bu yerda

$$C = \max_{a\leq x\leq b} \int_a^b |K(x,t)|\,dt.$$

C ning chekli ekanligi $[a, \ b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi. Agar (29.2) tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{n\to\infty} \| Bf_n - Bf_0\| \leq C\cdot \lim_{n\to\infty} \| f_n - f_0\| = 0$$

ekanligini olamiz. Agar $\| Bf_n - Bf_0\| \geq 0$ tengsizlikni hisobga olsak,

$$\lim_{n\to\infty} \| B\,f_n - B\,f_0\| = 0.$$

Shunday qilib, B integral operator ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekan.

B integral operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi integral operatorning o'zagi $-$ $K(x,y)$ funksiyaning berilishiga bog'liq. Masalan, $K(x,t)\equiv 1$ bo'lsa, B operatorning qiymatlar sohasi $Im\,B$ o'zgarmas funksiyalardan iborat, ya'ni $Im\,B = \{f\in C[a,b] : f(t) = const\}$, uning yadrosi $KerB$ o'zgarmasga ortogonal funksiyalardan iborat, ya'ni

$$KerB = \{\, f\in C\,[a, \ b] : \int_a^b f(t)\,dt = 0\,\}.$$

29.8-ta'rif. *Bizga X normalangan fazoning M to'plami berilgan bo'lsin. Agar shunday $C>0$ son mavjud bo'lib, barcha $x\in M$ uchun $\|x\|\leq C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan deyiladi.*

29.9-ta'rif. *X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A) = X$ bo'lib, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.*

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta'rif qulaydir.

29.10-ta'rif. *$A : X \to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun*

$$\|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \tag{29.3}$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

29.11-ta'rif. *(29.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya'ni*

$$\|A\| = \inf C.$$

Bu ta'rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

29.1-teorema. *X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{29.4}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

A chiziqli operator bo'lgani uchun

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \theta} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Ixtiyoriy $x \neq 0$ uchun

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha.$$

Demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$. Bundan esa

$$\|A\| \leq \alpha. \tag{29.5}$$

Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $x_\varepsilon \neq \theta$ element mavjudki,

$$\alpha \ - \ \varepsilon \leq \frac{\|A\,x_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \leq \|\,A\,\|$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun,

$$\alpha \ \leq \|A\|\,. \tag{29.6}$$

(29.5) va (29.6) lardan $\|\,A\,\| = \alpha$ tenglik kelib chiqadi. Δ

29.1-tasdiq. *Chiziqli chegaralangan A operator uchun*

$$\sup_{\|x\|=1} \|\,A\,x\,\| \ = \ \sup_{\|x\|\leq 1} \|\,A\,x\,\|$$

tenglik o'rinli.

29.1-tasdiqni mustaqil isbotlang.

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(X,\,Y)$ bilan belgilaymiz. Xususan, $X = Y$ bo'lsa $L(X,\,X) = L(X)$.

29.1-natija. *Ixtiyoriy $A \in L(X,\,Y)$ va $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ uchun*

$$\|Ax\| \leq \|A\| \tag{29.7}$$

tengsizlik o'rinli.

(29.7) tengsizlikning isboti (29.4) tengsizlikdan kelib chiqadi.

29.12-ta'rif. *$A : X \to Y$ va $B : X \to Y$ chiziqli operatorlarning yig'indisi deb, $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + Bx \in Y$ elementni mos qo'yuvchi $C = A + B$ operatorga aytiladi.*

Ravshanki, C chiziqli operator bo'ladi. Agar $A,\,B \in L(X,\,Y)$ bo'lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\,\| = \|A + B\,\| \leq \|A\,\| + \|B\,\| \tag{29.8}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\,\| = \|Ax \ + Bx\| \leq \|Ax\,\| + \|\,Bx\| \leq$$

$$\leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \leq (\|A\| + \|B\|) \|x\| .$$

Bu yerdan (29.8) tengsizlik kelib chiqadi.

29.13-ta'rif. *A chiziqli operatorning α songa ko'paytmasi x elementga αAx elementni mos qo'yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya'ni*

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

29.14-ta'rif. *$A : X \to Y$ va $B : Y \to Z$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lib, $R(A) \subset D(B)$ bo'lsin. B va A operatorlarning ko'paytmasi deganda, har bir $x \in D(A)$ ga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo'yuvchi $C = BA : X \to Z$ operator tushuniladi.*

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatorlar bo'lsa, u holda C ham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \tag{29.9}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X .$$

Bu yerdan (29.9) tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas.

Agar X va Y lar chiziqli normalangan fazolar bo'lsa, $L(X, Y)$ ham chiziqli normalangan fazo bo'ladi, ya'ni $p : L(X, Y) \to \mathbb{R}$,

$$p(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

funksional normaning 1-3 - shartlarini qanoatlantiradi.

29.2-teorema. *X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A : X \to Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:*

1) A *operator biror* x_0 *nuqtada uzluksiz;*

2) A *operator uzluksiz;*

3) A *operator chegaralangan.*

Isbot. 1) $\Longrightarrow$ 2). Chiziqli A operatorning biror x_0 nuqtada uzluksiz ekanligidan uning ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekanligini keltirib chiqaramiz.

A operator x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lganligi uchun, x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy $\left\{x_n^0\right\}$ ketma-ketlik uchun $Ax_n^0 \to Ax_0$. Ixtiyoriy $x' \in D(A)$ nuqta uchun, $x_n' \to x'$ ekanligidan $Ax_n' \to Ax'$ kelib chiqishini ko‘rsatamiz. $y_n' = x_n' - x' + x_0 \to x_0$ deymiz. U holda

$$\lim_{n\to\infty} Ay_n' = \lim_{n\to\infty} A\left(x_n' - x' + x_0\right) = \lim_{n\to\infty}\left(A\,x_n' - A\,x' + A\,x_0\right) = A\,x_0.$$

Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} A\,x_n' = A\,x'$$

ekanligini bildiradi. Demak, A operator ixtiyoriy x' nuqtada uzluksiz.

2) $\Longrightarrow$ 3). A operatorning uzluksiz ekanligidan uning chegaralanganligi kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, A chiziqli operator uzluksiz bo‘lsin, lekin chegaralangan bo‘lmasin, ya’ni ixtiyoriy $C > 0$ son uchun shunday $x_c \in D(A)$ element mavjud bo‘lib,

$$\|Ax_c\| \geq C\,\|x_c\|$$

bo‘lsin. Agar $C = n \in \mathbb{N}$ desak, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun shunday $x_n \in D(A)$ mavjudki, $\|Ax_n\| \geq n\,\|x_n\|$ tengsizlik bajariladi. Quyidagi

$$\xi_n = \frac{x}{n\,\|x_n\|}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Ko‘rinib turibdiki, $\xi_n \to \theta$, ya’ni

$$\|\xi_n - \theta\| = \left\|\frac{x_n}{n\,\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\|A\xi_n - A\theta\| = \left\|A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{n\|x_n\|}Ax_n\right\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| \geq 1.$$

Bu qarama-qarshilik A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatadi.

3) $\Longrightarrow$ 1). A chiziqli chegaralangan operatorning biror nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz. Ta'rifga ko'ra, shunday $C > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

tengsizlik bajariladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ – x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin, u holda $Ax_n \to Ax$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \to 0, \quad n \to \infty$$

ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax\| = 0.$ Δ

29.2-natija. *A chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.*

29.5-misol. Birlik va nol operatorlarning (29.1 va 29.2-misollar) chegaralangan ekanligini ko'rsatib, ularning normasini hisoblang.

Yechish. Birlik operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini hisoblaymiz. Ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\|Ix\| = \|x\|$ tenglik o'rinli. Ta'rifga ko'ra, I chegaralangan va uning normasi 1 ga teng. Endi nol operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, uning normasini topamiz. Istalgan $x \in E$ uchun $\|\Theta x\| = \|\theta\| = 0$ tenglik o'rinli. Bundan $\|\Theta\| = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Nol operator $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazoning nol elementi bo'ladi.

29.6. 29.3-misolda keltirilgan $A : C[a, b] \to C[a, b]$ differensiallash operatorining chegaralanmagan ekanligini ko'rsating.

Yechish. Buning uchun A akslantirishda $D(A) = C^{(1)}[0, 1]$ fazodagi birlik shar $B[\theta, 1]$ ning tasviri chegaralanmagan to'plam ekanligini ko'rsatish yetarli. Birlik shar $B[\theta,\ 1]$ da yotuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha tanlaymiz:

$$f_n(x) = x^n, \ \ \|f_n\| = \max_{0\leq x\leq 1} |x^n| = 1.$$

U holda

$$(Af_n)\,(x) = n\cdot x^{n-1}, \quad \|Af_n\| = \max_{0\leq x\leq 1} |n\cdot x^n| = n.$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} \|Af_n\| = \infty$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, differensiallash operatori chegaralanmagan operator ekan.

29.7. 29.4-misolda keltirilgan $B : C[a,\ b] \to C[a,\ b]$ integral operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsating.

Yechish. 29.4-misolda B operatorning uzluksiz ekanligi ko‘rsatilgan edi. 29.2-natijaga ko‘ra, u chegaralangan bo‘ladi.

29.8. $C[-1,\ 1]$ fazoda x ga ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$B : C[-1,\ 1] \to C[-1,\ 1], \quad (Bf)(x) = xf(x) \tag{29.10}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, normasini toping.

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Uzluksiz funksiyalarning ko‘paytmasi uzluksiz ekanligidan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B) = C[-1,\ 1]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi B operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\|Bf\| = \max_{-1\leq x\leq 1} |x\,f(x)| \leq \max_{-1\leq x\leq 1} |x| \cdot \max_{-1\leq x\leq 1} |f(x)| = 1\cdot\|f\|$$

Bu tengsizlikdan B operatorning chegaralangan ekanligi va $\|B\| \leq 1$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, agar $f_0(x) = 1$ desak, u holda

$$(B\,f_0)(x) = x, \ \ \|B\,f_0\| = 1, \ \ \|B\| \geq \frac{\|B\,f_0\|}{\|f_0\|} = 1$$

ni olamiz. Yuqoridagilardan $\|B\| = 1$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $L_2[-1,\ 1]$ Hilbert fazosida ham (29.10) tenglik bilan aniqlangan B operator chiziqli chegaralangan bo'lib, normasi 1 ga teng bo'ladi.

29.9. Endi ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A : \ell_2 \to \ell_2, \quad (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n \geq 1} |a_n| = a < \infty \tag{29.11}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun $Ax \in \ell_2$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \leq \sup_{n \geq 1} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = a^2 \|x\|^2. \tag{29.12}$$

Bu munosabatlardan $D(A) = \ell_2$ ekanligini olamiz. Endi uning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. A operatorning aniqlanishiga ko'ra

$$(A(\alpha x + \beta y))_n = a_n(\alpha x_n + \beta y_n) = a_n \alpha x_n + a_n \beta y_n = \alpha (Ax)_n + \beta (Ay)_n.$$

Demak, A chiziqli operator ekan. Uning chegaralangan ekanligi (29.12) tengsizlikdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (29.12) tengsizlikdan $\|A\| \leq a$ ekanligi ham kelib chiqadi. A operatorning normasi $\|A\| = a$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun ℓ_2 fazoda $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemani ((23.8) ga qarang) olamiz. A operatorning aniqlanishiga ko'ra, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o'rinli. Bundan va (29.7) dan

$$\|A\| \geq \|Ae_n\| = \|a_n e_n\| = |a_n| \cdot \|e_n\| = |a_n|$$

munosabat kelib chiqadi. Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da o'rinli bo'lgani uchun

$$\|A\| \geq \sup_{n \geq 1} |a_n| = a \tag{29.13}$$

ni olamiz. Demak, $\|A\| = a$ tenglik isbotlandi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *$L_2[-1,\ 1]$ Hilbert fazosida (29.10) tenglik bilan aniqlangan B ko'paytirish operatorining chiziqli chegaralangan ekanligini ko'rsatib, uning normasini toping.*

2. *$L_2[a,\ b]$ Hilbert fazosida (29.1) tenglik bilan aniqlangan B integral operatorning chiziqli chegaralangan ekanligini ko'rsating.*

3. *$L_2[-\pi,\ \pi]$ Hilbert fazosida (29.1) tenglik bilan aniqlangan B integral operatorning o'zagi $K(x,\,t) = \cos(x-t)$ bo'lgan holda, uning yadrosi $KerB$ va qiymatlar sohasi $R(B)$ ni tavsiflang.*

4. *29.3 va 29.8-misollarda keltirilgan operatorlar y ig'indisini toping.*

5. *Integral operator*

$$A: C[-1,\ 1] \to C[-1,\ 1],\quad (Af)(x) = \int_{-1}^{1}(1+xy)f(y)dy$$

va 29.8-misolda keltirilgan x ga ko'paytirish operatori B larning ko'paytmasini toping. $AB = BA$ tenglik to'g'rimi?

6. *Agar $A,\,B \in L(X,\,Y)$ bo'lsa, u holda $|\,\|A\| - \|B\|\,| \leq \|A-B\|$ tengsizlikni isbotlang.*

7. *Aytaylik, X chiziqli normalangan fazo bo'lsin. $p: X \to \mathbb{R}$, $p(x) = \|x\|$ akslantirishning uzluksizligini isbotlang.*

30-§. Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar

Ma'lumki, chiziqli funksional va uning nollari 24-§ da o'rganilgan edi. 25-§ da esa L_0 qism fazoda aniqlangan f_0 chiziqli funksionalni p qavariq funksionalga *bo'ysungan* holda butun L fazogacha chiziqli davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasi isbotlangan edi. Biz bu paragrafda chiziqli funksionalning normasini saqlagan holda uni butun L fazogacha davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasini isbotlaymiz, hamda funksional fazolarda chiziqli uzluksiz funksionallarning umumiy ko'rinishidan foydalanib, asosiy funksional fazolarga qo'shma fazolarni izomorfizm aniqligida topamiz.

30.1. Chiziqli funksionallar

Agar operatorning qiymatlari sonlardan iborat bo'lsa, bunday operator *funksional* deyiladi (24.1-ta'rifga qarang). Agar X chiziqli fazoda aniqlangan f funksional uchun quyidagi shartlar bajarilsa

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \ \ \forall x_1, x_2 \in X$; additivlik,

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \ (yoki \ \mathbb{R}),$ bir jinslilik

f ga *chiziqli funksional* (24.2, 24.3-ta'riflarga qarang) deyiladi.

30.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(f)$ lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, f funksional $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar f funksional ixtiyoriy $x \in D(f)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, f uzluksiz funksional deyiladi.*

30.1-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

30.2-ta'rif. *Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| = 0$ bo'lsa, u holda f funksional x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.*

$\mathbb{C}$ – kompleks sonlar to'plami ($\mathbb{R}$ – haqiqiy sonlar to'plami) Banax fazosi bo'lganligi uchun 29-§ da chiziqli operatorlar uchun o'rnatilgan teorema va tasdiqlar chiziqli funksionallar uchun ham o'rinli bo'ladi.

30.1-teorema. *X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli funksional biror $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu chiziqli funksional butun X fazoda uzluksiz.*

30.2-teorema. *X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli f funksional uzluksiz bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

Xuddi chiziqli operatorlardagidek $|f(x)| \leq M\|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi M sonlarning aniq quyi chegarasi f funksionalning normasi deyiladi va $\|f\|$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Bundan tashqari, chiziqli chegaralangan funksionalning normasi $\|f\|$ uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{30.1}$$

30.3-teorema *(Xan-Banax). E kompleks chiziqli normalangan fazo, E_0 – E ning qism fazosi va f_0 – E_0 da aniqlangan chiziqli uzluksiz funksional bo'lsin. U holda f_0 ni normasini saqlagan holda E da aniqlangan f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin, ya'ni*

$$f(x) = f_0(x), \ \ x \in E_0 \ \ va \ \ \|f\|_E = \|f_0\|_{E_0}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f : E \to \mathbb{C}$ chiziqli funksional mavjud.

Isbot. Aytaylik, $\|f_0\|_{E_0} = K$ bo'lsin. Norma aksiomalaridan bevosita kelib chiqadiki, barcha $x \in E$ larda $p(x) = K\|x\|$ tenglik bilan aniqlanuvchi akslantirish qavariq funksional bo'ladi. Bundan tashqari ixtiyoriy $x \in E_0$ uchun

$$|\, f_0(x)\,| \leq \|f_0\|_{E_0} \cdot \|x\| = K \cdot \|x\| = p(x)$$

tengsizlik o'rinli. Shunday ekan, f_0 25.3-teorema shartlarini qanoatlantiradi. U holda E da aniqlangan shunday f chiziqli funksional mavjudki, quyidagilar bajariladi:

$$f(x) = f_0(x), \ \ \forall x \in E_0, \quad |\, f(x)\,| \leq p(x) = \|f_0\| \cdot \|x\|, \ \ \forall x \in E.$$

Bu yerdan f ning chegaralanganligi va $\| f \| \le \| f_0 \|$ tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan,

$$\| f \|_E = \sup_{x\in E,\, x\neq\theta} \frac{|f(x)|}{\| x \|} \ge \sup_{x\in E_0,\, x\neq\theta} \frac{|f(x)|}{\| x \|} = \| f_0 \|_{E_0}.$$

Demak, $\| f \|_E = \| f_0 \|_{E_0}$. Δ

30.1-natija. *X chiziqli normalangan fazo va $x_0 \neq \theta$ undagi ixtiyoriy belgilangan element bo'lsin. U holda butun X da aniqlangan shunday f chiziqli funksional mavjudki,*

$$\| f \| = 1, \;\; f(x_0) = \|x_0\| \tag{30.2}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. f funksionalni bir o'lchamli $X_0 = \{\alpha x_0\}$ qism fazoda quyidagicha aniqlaymiz: $f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$. Ko'rinib turibdiki,

$$f(x_0) = \|x_0\|, \quad |f_0(x)| = |\,\alpha\,| \; \| x_0 \| = \| x \|, \;\; x = \alpha\, x_0$$

Bu yerdan $\|f_0\|_{E_0} = 1$. f_0 funksionalni butun X gacha chiziqli davom ettiramiz. Hosil bo'lgan funksional (30.2) shartlarni qanoatlantiruvchi funksional bo'ladi. Δ

Endi chiziqli funksionalning davomiga doir misol qaraymiz.

30.1-misol. $L = C[-1,\; 1]$ uzluksiz funksiyalar fazosi va uning $L_0 = \{f \in C[-1,\; 1] : \mathrm{supp} f \subset [0,\; 1]\}$ qism fazosini qaraymiz. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t)dt, \;\; x \in L_0.$$

f_0 funksionalni normasini saqlagan holda davom ettiring.

Yechish. f_0 funksionalning normasini hisoblaymiz. Agar $x \in L_0$ bo'lsa, u holda

$$\int_{-1}^{0} x(t)dt = 0$$

bo‘ladi. Shuning uchun

$$|f_0(x)| = \left|\int_{-1}^{1} x(t)dt\right| = \left|\int_{0}^{1} x(t)dt\right| \leq \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)\,| \int_0^1 dt = \|\, x\,\|_{L_0}\,.$$

Demak,

$$\|\, f_0\| \leq 1.$$

Endi $\|\, f_0\| \geq 1$ tengsizlikni ko‘rsatamiz. Buning uchun $C[-1,\ 1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1,\ 0] \\ nt, & t \in (0,\ {}^1\!/_n), \\ 1, & t \in [{}^1\!/_n,\ 1] \end{cases}$$

ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik uchun quyidagilar o‘rinli:

$$x_n \in L_0, \ \ \|x_n\| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

$$|f_0(x_n)| = \left|\int_0^1 x_n(t)dt\right| \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 dt = 1 - \frac{1}{n}. \tag{30.3}$$

(30.3) tengsizlikda n lar bo‘yicha aniq yuqori chegara olsak,

$$\|\, f_0\| \geq \sup_{n\geq 1} |f_0(x_n)| = \sup_{n\geq 1} \left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = 1$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu ikkala tengsizlikdan $\|f_0\| = 1$ tenglikni olamiz. 25.6-misoldagi kabi $C[-1,\ 1]$ chiziqli fazoda $g_y,\ \ y \in V_0[-1,\ 0]$ funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$g_y(x) = \int_{-1}^{0} x(t)y(t)dt + \int_0^1 x(t)dt\,, \quad x \in L. \tag{30.4}$$

Ma’lumki, istalgan $y \in V_0[-1,\ 0]$ uchun g_y funksional f_0 funksionalning $C[-1,\ 1]$ fazogacha davomi bo‘ladi. g_y funksional uchun Xan-Banax teoremasining tasdig‘i o‘rinlimi? Boshqacha aytganda $\|\, f_0\| = \|\, g_y\|$ tenglik qanday $y \in V_0[-1,\ 0]$ lar uchun o‘rinli? $C[a,\ b]$ fazodagi chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko’rinishi haqidagi Riss - 30.4-teorema, hamda (30.19) tenglikdan foydalansak, (30.4) ko‘rinishdagi davomlar ichida yagona g_0 funksional

f_0 funksionalning normasini saqlagan holda $L = C[-1,\ 1]$ fazogacha davomi bo'ladi. 25.6-misolda f_0 funksionalni (25.1) shartni saqlagan holda cheksiz ko'p (kontinuum) usul bilan L fazogacha davom ettirish mumkin edi.

30.2. Qo'shma fazolar

Chiziqli funksionallarning umumiy ko'rinishidan foydalanib, qo'shma fazoni ayrim hollarda izomorfizm aniqligida topish mumkin.

30.3-ta'rif. *X normalangan fazoda aniqlangan, chiziqli uzluksiz funksionallar fazosi X ga qo'shma fazo deyiladi va X^* bilan belgilanadi, ya'ni $X^* = L(X,\ \mathbb{C})$.*

Bundan keyingi 31-§ da ya'ni chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi mavzusida biz Y to'la fazo bo'lgan holda $L(X,\ Y)$ fazoning Banax fazosi bo'lishini isbotlaymiz. Shunga ko'ra (31.1-natijaga qarang) X chiziqli normalangan fazoga qo'shma bo'lgan $X^* = L(X,\ \mathbb{C})$ fazo Banax fazosi boladi. Chunki, kompleks sonlar to'plami $\mathbb{C} = Y$ to'la normalangan fazo. Qo'shma fazolarni o'rganishni eng sodda holdan, yani X fazo n o'lchamli (haqiqiy yoki compleks) chiziqli fazo bo'lgan holdan boshlaymiz.

30.2-misol. X n o'lchamli (haqiqiy yoki compleks) chiziqli fazo bo'lsin. Bu fazoda biror $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisni tanlaymiz. U holda har bir $x \in X$ vektor yagona ravishda

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \tag{30.5}$$

ko'rinishda tasvirlanadi. Agar f $-X$ da aniqlangan chiziqli funksional bo'lsa, u holda ravshanki,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \tag{30.6}$$

bo'ladi. Shunday ekan, chiziqli funksional o'zining $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis vektorlardagi qiymatlari bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bundan tashqari bu qiymatlarni ixtiyoriy berish mumkin. Ushbu $g_1, g_2, \dots, g_n$ funksionallarni

$$g_i(e_j) = \begin{cases} 0, & agar \;\; i \neq j, \\ 1, & agar \;\; i = j \end{cases}$$

deb aniqlaymiz. Ko‘rsatish mumkinki, bu funksionallar chiziqli bog‘lanmagan. Agar $x \in X$ element (30.5) ko‘rinishda bo‘lsa, u holda $g_i(x) = x_i$ tenglik bajariladi. Shuning uchun (30.6) formulani

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f(e_i)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Shunday qilib $g_1, g_2, \dots, g_n$ funksionallar X^* fazoda bazis tashkil qilar ekan, ya’ni X^* ham n o‘lchamli fazodir. X^* dagi $g_1, g_2, \dots, g_n$ bazis X dagi $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisga ikkilamchi bazis deyiladi.

X fazoda aniqlangan har xil normalar X^* fazoda har xil normalarni keltirib chiqaradi. Hozir biz X va X^* fazolarda bir-biriga mos keluvchi normalarga misol keltiramiz.

a) Yuqoridagi $n-$o‘lchamli X va X^* fazolarni qaraymiz. Har bir $x \in X$ uchun (30.5) o‘rinli bo‘lib, x ning normasi

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

formula bilan aniqlangan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $f \in X^*$ uchun

$$| f(x) | = \left| \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f(e_i) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2} \cdot \| x \|$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz, bu yerda $f_i = f(e_i), \;\; i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Agar

$$x_f = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \cdot e_i$$

desak,

$$|f(x_f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \cdot f(e_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{f_i}\right|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\overline{f_i}\right|^2} \cdot \|x_f\|\,.$$

Bundan

$$\| f \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^2}$$

tenglikni olamiz. Shunday ekan, X va X^* fazolarda

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,|^2} \qquad \text{va} \qquad \| f \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^2}$$

normalar bir-biriga mos normalar juftligi ekan.

b) Endi X fazodagi har bir $x \in X$ element uchun uning normasi

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty$$

formula bilan aniqlangan bo‘lsin. Bu normaga mos X^* fazodagi normani aniqlash uchun Gyolder tengsizligidan ((19.15) formulaga qarang) foydalanamiz. U holda har bir $f \in X^*$ chiziqli funksional va ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \qquad \text{va} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \cdot g(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i$$

desak, Gyolder tengsizligiga asosan

$$|\, f(x) \,| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^q\right)^{\frac{1}{q}} \| x \|_p$$

tengsizlik barcha $x \in X$ lar uchun o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda

$$1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{30.7}$$

Agar $x_f \in X$ elementning koordinatalarini

$$x_i = \overline{f_i} \, |\, f_i \,|^{q-2}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

ko‘rinishda tanlasak (agar $f_i = 0$ bo‘lsa, $x_i = 0$ deb olinadi), u holda

$$x_i \cdot f_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2} \cdot f_i = |f_i|^q \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

va

$$x_i \cdot f_i = |\, f_i \,|^q = |\, f_i \,|^{\frac{p}{p-1}} = \left(|\, f_i \,|^{\frac{1}{p-1}}\right)^p = \; |\, x_i \,|^p$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Chunki

$$|\, x_i \,| = |\, f_i \,|^{q-1} = |\, f_i \,|^{\frac{1}{p-1}}, \quad q - 1 = \frac{1}{p-1}.$$

U holda $x_i \cdot f_i = |\, f_i \,|^q$ va $x_i \cdot f = |\, x_i \,|^p$ tengliklarga ko‘ra

$$|f(x_f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right| = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|\, x \,\|_p \,.$$

Demak, f funksionalning normasi uchun quyidagi tenglik o‘rinli

$$\|\, f \,\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Shunday qilib, X va X^* fazolarda mos normalar juftligi

$$\|\, x \,\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|\, f \,\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i \,|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{30.8}$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan. Bu yerda p va q sonlar (30.7) munosabatni qanoatlantiradi.

c) X fazodagi har bir $x \in X$ uchun (30.5) tasvir o‘rinli bo‘lib, x ning normasi

$$\|\, x \,\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i|$$

formula bilan aniqlangan bo‘lsin. Ixtiyoriy $f \in X^*$ chiziqli funksional va barcha $x \in X$ larda

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i, \;\; f_i = f(e_i\,), \;\; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun

$$|\, f(x)\,| = \sum_{i=1}^{n} |\, f_i \cdot x_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i\,| \right) = \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i| \cdot \|\, x\,\|_1\,,$$

ya’ni

$$\|\, f\,\| \leq \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i|\,.$$

Faraz qilaylik, biror $i_0 \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ uchun $|\, f_{i_0}\,| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\, f_i|$ bo‘lsin. Agar

$$x_0 = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i_0}, 0, \ldots, 0 \right)$$

desak, $\|\, x_0\|_1 = 1$ va

$$|\, f(x_0)\,| = |\, f_{i_0}\,| = \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i| = \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i| \cdot \|\, x_0\|_1$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan

$$\|\, f\,\| = \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i|$$

tenglikka ega bo‘lamiz. So‘nggi normani biz $\|\cdot\|_\infty$ bilan belgilaymiz. Matematik analizdan ma’lumki, ((19.19) ga qarang)

$$\lim_{p\to\infty} \|\, x\,\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\leq i\leq n} |\, x_i| = \|\, x\,\|_\infty\,.$$

Shunday qilib, X va X^* chekli $n-$o‘lchamli fazolarda

$$\|\, x\,\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i|\,, \quad \|\, f\,\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i\,| \tag{30.9}$$

lar bir-biriga mos keluvchi normalar juftligini hosil qiladi. Agar biz (30.7) munosabatni saqlagan holda $q \to \infty$ da limitga o‘tsak, $p = 1$ va $q = \infty$ ni olamiz. Demak, (30.9) normalar juftligi (30.8) normalar juftligining limitik holati ekan.

d) Endi $n-$ o‘lchamli X fazoda norma

$$\|\, x\,\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\, x_i\,|$$

formula vositasida aniqlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $f \in X^*$ chiziqli funksional uchun $f_i = f(e_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (e_1, e_2, \ldots, e_n$ lar X fazoning bazisi) desak, barcha $x \in X$ lar uchun

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i$$

tenglik va

$$|\, f(x)\,| = \sum_{i=1}^{n} |\, f_i \cdot x_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |\, x_i| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i|\right) = \max_{1\leq i\leq n} |\, f_i| \cdot \|\, x\,\|_\infty \,,$$

tengsizlik o'rinli. Ikkinchi tomondan

$$x_f = \left(\frac{\overline{f_1}}{|f_1|}, \frac{\overline{f_2}}{|f_2|}, \ldots, \frac{\overline{f_n}}{|f_n|}\right), \quad \|\, x_f\,\|_\infty = 1$$

element uchun

$$|\, f(x_f)\,| = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \,\overline{f_i}}{|f_i|} = \sum_{i=1}^{n} |\, f_i\,| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i\,|\right) \cdot \|\, x_f\,\|_\infty \,.$$

U holda

$$\|\, f\,\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\, f_i\,|$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, X va X^* fazolarda

$$\|\, x\,\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\, x_i\,| \,, \qquad \|\, f\,\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\, f_i\,| \tag{30.10}$$

normalar bir-biriga mos keluvchi normalar juftligi bo'ladi. (30.10) tenglik (30.8) tenglikning $p \to \infty$ dagi limitik holatiga mos keladi.

30.3. Endi ℓ_p fazoni qaraymiz. Ma'lumki, bu fazo

$$\sum_{i=1}^{n} |\, x_i\,|^p < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = \{x_n\}$ ketma-ketliklardan iborat va unda x elementning normasi

$$\|\, x\,\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i\,|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar biz $q>1$ sonni (30.7) munosabatdan aniqlasak, u holda ℓ_p^* fazo ℓ_q fazoga izomorf bo‘ladi. Buni isbotlash uchun ℓ_q fazoning ixtiyoriy $f=\{f_n\}$ elementi yordamida ℓ_p fazoda

$$\widetilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot x_n \tag{30.11}$$

chiziqli funksionalni aniqlaymiz. Dastlab (30.11) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Ma’lumki, ixtiyoriy n natural son uchun

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i\, x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i\,|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\, x_i\,|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i\,|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|\, x\,\|_p \tag{30.12}$$

o‘rinli. Birinchi tengsizlikni yozishda biz Gyolder tengsizligidan ((19.15) formulaga qarang) foydalandik. Bu yerdan (30.11) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi hamda $\widetilde{f}$ funksional uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\left|\,\widetilde{f}\,(x)\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |\, f_i\, x_i| \le \|\, f\,\|_q\; \|\, x\,\|_p\,, \qquad \left\|\,\widetilde{f}\,\right\| \le \|\, f\,\|_q\,.$$

Demak, (30.11) tenglik bilan aniqlangan $\widetilde{f}$ funksional chiziqli va uzluksiz. Agar $x_f\in\ell_p$ elementning hadlarini

$$x_i=\overline{f_i}\;|\, f_i|^{q-2}\,,\;\; i\in\{1,\,2,\,\ldots,\,\infty\}$$

(agar $f_i=0$ bo‘lsa, $x_i=0$ deb olinadi) ko‘rinishda tanlasak, 30.1-misolning b) bandidagidek quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$x_i\, f_i=|\, f_i|^q\ge 0,\;\;\; x_i\, f_i=|\, x_i|^p\ge 0,\;\; i\in\{1,\,2,\,\ldots,\,\infty\}\,.$$

Biz $x_f\in\ell_p$ va $f=\{f_i\}\in\ell_q$ ekanligini hisobga olsak,

$$|\widetilde{f}(x_f)| = |\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_q \, \|x\|_p.$$

Demak,

$$\left\| \widetilde{f} \right\|_q = \| \, f \, \|_q \, .$$

Koʻrsatish mumkinki, ℓ_q fazodagi ixtiyoriy $\tilde{f}$ chiziqli uzluksiz funksional (30.11) koʻrinishda tasvirlanadi.

Shunday qilib ℓ_q^* va ℓ_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ fazolarning izomorfligi isbotlandi. Xususan, $p = 2$ da $\ell_2^* = \ell_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun ℓ_2 fazo oʻz-oʻziga qoʻshma fazo deyiladi. Xuddi shunday koʻrsatish mumkinki, ixtiyoriy Hilbert fazosining qoʻshmasi ham oʻziga izomorf boʻladi.

30.4. Endi ℓ_1 fazoning qoʻshmasini topamiz. 30.2-misolning c) bandidagiga oʻxshash mulohazalar qilib koʻrsatish mumkinki, ℓ_1 fazoning qoʻshmasi $\ell_\infty = m$ – chegaralangan ketma-ketliklar fazosiga izomorfdir, ya'ni $\ell_1^* = m$. Quyidagi tasdiqlarni oʻquvchiga mustaqil isbotlash uchun qoldiramiz:

$$c^* = \ell_1, \quad c_0^* = \ell_1.$$

Bu tengliklarni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

30.5. Endi $X = C[a, \, b]$ fazoga qoʻshma fazoni izomorfizm aniqligida topamiz. Ma'lumki, $[a, \, b]$ kesmada aniqlangan va $t = a$ nuqtada nolga aylanuvchi oʻzgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V_0[a, \, b]$ orqali belgilanadi (26.15-misolga qarang). Koʻrsatish mumkinki, bu toʻplam funksiyalarni qoʻshish va ularni songa koʻpaytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda x elementning normasi $\| \, x \, \| = V_a^b \, [x]$ tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda $V_a^b \, [x]$ oʻzgarishi chegaralangan x funksiyaning $[a, \, b]$ kesmadagi toʻla oʻzgarishi. Koʻrsatamizki, $(C[a, \, b])^* = V_0[a, \, b]$.

Biz $M[a, \, b]$ – bilan $[a, \, b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar toʻplamini belgilaymiz. Bu toʻplam odatdagi funksiyalarni qoʻshish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi (26.8-misolga qarang). Bu fazoda x elementning normasi

$$\| x \| = \sup_{a \le t \le b} | x(t) |$$

tenglik bilan aniqlanadi. Har bir $x \in C[a,\ b]$ funksiya chegaralangan va

$$\sup_{a \le t \le b} | x(t) | = \max_{a \le t \le b} | x(t) |$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun $C[a,\ b]$ fazoni $M[a,\ b]$ fazoning qism fazosi sifatida qarash mumkin. Endi $f \in C^*[a,\ b]$ ixtiyoriy chiziqli uzluksiz funksional bo'lsin. Normalangan fazolarda Xan-Banax teoremasiga (30.3-teoremaga qarang) ko'ra, $f \in C^*[a,\ b]$ funksionalni normasini saqlagan holda butun $M[a,\ b]$ fazoga davom ettirish mumkin. F deb f funksionalning $C[a,\ b]$ dan $M[a,\ b]$ ga davomini belgilaymiz.

Endi

$$\varphi_t(\xi) = \begin{cases} 1, & agar \ \ a \le \xi \le t, \\ 0, & agar \ \ t < \xi \le b \end{cases}$$

$t \in [a,\ b]$ funksiyalar oilasini qaraymiz. Ravshanki, ixtiyoriy $t \in [a,\ b]$ uchun $\varphi_t \in M[a,\ b]$. F funksionalning $\varphi_t \in M[a,\ b]$ elementdagi qiymatini $u(t)$ deb belgilaymiz, ya'ni $u(t) = F(\varphi_t), \quad t \in [a,\ b]$. Natijada $[a,\ b]$ kesmada u funksiya aniqlandi. Bu funksiyaning o'zgarishi chegaralangan ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $[a,\ b]$ kesmani ixtiyoriy chekli sondagi

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \tag{30.13}$$

nuqtalar bilan bo'lakchalarga ajratamiz. (30.13) bo'linishga mos

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1})|$$

yig'indini qaraymiz. Agar

$$\alpha_k = \text{sign} \left[u(t_k) - u(t_{k-1}) \right], \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

belgilashlarni kiritsak, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} |\, u(t_k) - u(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \ \alpha_k \ |\, u(t_k) - u(t_{k-1})| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \ \alpha_k \ \left| \, F(\varphi_{t_k}) - F(\varphi_{t_{k-1}}) \right| = F\left[\sum_{k=1}^{n} \ \alpha_k \left(\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\right)\right].$$

F chiziqli funksionalning chegaralanganligi va $\| \, F \, \| = \| \, f \, \|$ dan

$$\sum_{k=1}^{n} |\, u(t_k) - u(t_{k-1})| \leq \| \, F \, \| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \ \alpha_k \left(\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\right) \right\| = \| \, f \, \|$$

tenglik kelib chiqadi. So‘nggi tenglik

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \ \alpha_k \left(\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\right) \right\| = \sup_{\xi \in [a,\, b]} \left| \sum_{k=1}^{n} \ \alpha_k \left(\varphi_{t_k}(\xi) - \varphi_{t_{k-1}}(\xi)\right) \right| = 1$$

tenglikka asoslangan. Shunday qilib, (30.13) ko‘rinishdagi ixtiyoriy bo‘linishda

$$\sum_{k=1}^{n} |\, u(t_k) - u(t_{k-1})| \leq \| \, f \, \|$$

tengsizlik o‘rinli. Bundan kelib chiqadiki, $u \in V[a, \ b]$ va

$$V_a^b[u] \leq \| \, f \, \| \, . \tag{30.14}$$

$x \in C[a, \ b] -$ ixtiyoriy element bo‘lsin. Har bir n natural son uchun $[a, \ b]$ kesmani

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \ \ t_k = a + \frac{b-a}{n} k, \quad k = 1, \, 2, \, \ldots, \, n \tag{30.15}$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo‘lakka ajratamiz va

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \ x(t_k) \left[\varphi_{t_k}(t) - \varphi_{t_{k-1}}(t)\right] \tag{30.16}$$

pog‘onasimon funksiyani quramiz. U holda $F(y_n)$ quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$F(y_n) = \sum_{k=1}^{n} \ x(t_k) \left[u(t_k) - u(t_{k-1})\right].$$

Bu y_n funksiyalarning aniqlanishidan ko‘rinib turibdiki, $y_n(a) = x(a)$ va agar $t_{k-1} < t < t_k$ bo‘lsa $y_n(t) = x(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Kantor teoremasiga ko‘ra, x funksiya $[a, b]$ kesmada tekis uzluksiz funksiya bo‘ladi. Demak, $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo‘lib, $|t - t'| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $t, t' \in [a, b]$ lar uchun $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shunday ekan, n yetarlicha katta bo‘lganda $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ bo‘lgani uchun

$$\max_{t\in[a,\, b]} |\, x(t) - y_n(t)\,| = \max_{1\le k\le n}\ \max_{t\in[t_{k-1},\, t_k]} |\, x(t) - x(t_k)\,| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\{y_n\}$ ketma-ketlikning x funksiyaga $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. F uzluksiz funksional bo‘lganligi uchun

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(x).$$

Ikkinchi tomondan $[a, b]$ da uzluksiz x va $[a, b]$ da o‘zgarishi chegaralangan u funksiyalar uchun

$$\int_a^b x(t)\, du(t)$$

Riman-Stiltes integrali mavjudligi va (30.16) yig‘indi uning (30.15) bo‘linish bo‘yicha integral yig‘indisi bo‘lganligi sababli

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\ x(t_k)\,[u(t_k) - u(t_{k-1})] = \int_a^b x(t)\, du(t).$$

Ammo, $x \in C[a, b]$ bo‘lgani uchun $F(x) = f(x)$, ya’ni

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, du(t) \tag{30.17}$$

tenglik o‘rinli. Shunday qilib ixtiyoriy $x \in C[a, b]$ uchun $f(x)$ (30.17) formula bo‘yicha aniqlanadi. Riman-Stiltes integrallari uchun o‘rta qiymat haqidagi teoremaga ko‘ra ixtiyoriy $x \in C[a, b]$ uchun

$$|\, f(x)\,| = \left| \int_a^b x(t)\, du(t) \right| \le \max_{t\in[a,\, b]} |\, x(t)\,|\, V_a^b[u] \le V_a^b[u]\ \|\, x\,\|$$

tengsizlikni olamiz. Bundan

$$\| f \| \leq V_a^b [u] \tag{30.18}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi (30.14) va (30.18) tengsizliklarni taqqoslab,

$$\| f \| = V_a^b [u] \tag{30.19}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Olingan natijalardan tashqari yana shuni ta’kidlash lozimki, $\varphi_a(t) \equiv 0$ va $F(0) = 0$ bo‘lgani uchun $u(a) = F(\varphi_a) = 0$ shart o‘rinli.

Endi f funksional uchun olingan natijalarni jamlab, quyidagi F.Riss teoremasini keltiramiz.

30.4-teorema. *$C[a,\ b]$ fazoda berilgan ixtiyoriy f chiziqli uzluksiz funksional uchun shu f funksional bo‘yicha aniqlanuvchi shunday $u \in V_0\,[a,\ b]$ o‘zgarishi chegaralangan funksiya mavjudki, barcha $x \in C[a,\ b]$ larda (30.17) va (30.19) tengliklar o‘rinli.*

Ko‘rsatish mumkinki [1], har bir o‘zgarishi chegaralangan $u \in V_0\,[a,\ b]$ funksiya (30.17) tenglik yordamida yagona $f \in C^*[a,\ b]$ funksionalni aniqlaydi. Shuning uchun, $C^*[a,\ b]$ dagi chiziqli funksionallar bilan $V_0\,[a,\ b]$ o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosining elementlari o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bundan tashqari $\| f \| = \| u \|$ bo‘lgani uchun, bu moslik izomorfdir, ya’ni $C^*[a,\ b] = V_0\,[a,\ b]$.

30.6. Berilgan $[a,\ b]$ kesmada $p(p \geq 1)-$ darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar sinfini $L_p[a,\ b]$ bilan belgilaymiz (26.15-misolga qarang). Ma’lumki, $L_p[a,\ b]$ to‘la normalangan fazo, ya’ni Banax fazosidir.

Endi $p > 1$ uchun (30.7) munosabatni qanoatlantiruvchi q sonni olamiz. Isbotlamasdan quyidagi tasdiqni keltiramiz. Har bir $f \in L_p^*[a,\ b]$ funksional uchun yagona $y \in L_q[a,\ b]$ element mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in L_p[a,\ b]$

larda

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \tag{30.20}$$

tenglik bajariladi va aksincha, $y \in L_q[a,\ b]$ uchun (30.20) formula $L_p^*[a,\ b]$ ga tegishli biror funksionalni aniqlaydi. Bundan tashqari (30.20) formula $L_p^*[a,\ b]$ va $L_q[a,\ b]$ fazolar o‘rtasida izometrik moslik o‘rnatadi. Shuning uchun $L_p^*[a,\ b]$ va $L_q[a,\ b]$ fazolar o‘zaro izomorfdir, ya’ni $L_p^*[a,\ b] = L_q[a,\ b]$. Xususan, $p = 2$ da $L_2^*[a,\ b] = L_2[a,\ b]$. Shuning uchun $L_2[a,\ b]$ o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo deyiladi.

30.7. Hilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishi quyidagicha $f(x) = (x,\ y)$, ya’ni ixtiyoriy f chiziqli uzluksiz funksionalga shu fazoning yagona y elementi mos keladi, shuning uchun Hilbert fazosi o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo hisoblanadi. Xuddi shu sababli, n o‘lchamli Evklid fazosi ham o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $f_0 : c_0 \to \mathbb{C},\ f_0(x) = x_1$ *chiziqli funksionalni normasini saqlagan holda* c *fazoga chiziqli davom ettiring.*

2. *Chiziqli funksional davomi yagonami? Javobni asoslang.*

3. $f : C_2[0\ 1] \to C_2[0\ 1],\quad f(x) = x(0)$ *funksionalni chiziqli chegaralanganlikka tekshiring.*

4. *Evklid fazolarida chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?*

5. *Uzluksiz funksiyalar fazosi* $C[-1,\ 1]$ *dagi barcha toq funksiyalar to‘plami* $C^-[-1,\ 1] = L_0$ *(26.14-misolga qarang) qism fazo tashkil qiladi.* L_0 *qism fazoda* f_0 *chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:*

$$f_0(x) = \int_{-1}^1 t\, x(t)\, dt, \quad x \in L_0.$$

f_0 funksionalni normasini saqlagan holda $C[-1,\ 1]$ gacha davom ettiring.

6. *$\ell_1,\ \ell_2$ va $\ell_p,\ p \geq 1$ fazolarga qo'shma fazolarni toping.*

7. *c_0, c va m fazolarga qo'shma fazolarni toping.*

8. *$C[a, b]$ fazoga qo'shma fazoni toping.*

9. *$L_2[a, b]$ fazoga qo'shma fazoni toping.*

10. *H Hilbert fazosiga qo'shma fazoni toping.*

31-§. Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi

Mazkur paragrafda biz chiziqli uzluksiz (chegaralangan) operatorlar fazosi $L(X, Y)$ ning to'laligi haqidagi teoremani isbotlaymiz. Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli (nuqtali) va tekis (norma bo'yicha) yaqinlashish ta'riflarini beramiz. Ularni misollarda tahlil qilamiz.

31.1-ta'rif. *Agar $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar ketma-ketligi uchun shunday $A \in L(X, Y)$ operator mavjud bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} \| A_n - A\| = 0$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma bo'yicha yoki tekis yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{u} A$ shaklda belgilanadi.*

31.2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \| A_n x - Ax\| = 0$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli yoki nuqtali yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{s} A$ shaklda belgilanadi.*

31.3-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $f \in Y^*$ va barcha $x \in X$ lar uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax)$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchsiz yoki kuchsiz ma'noda $\left(A_n \xrightarrow{w} A\right)$ yaqinlashuvchi deyiladi.*

31.3-ta'rif Hilbert fazosida quyidagicha bo'ladi.

31.4-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x,\, y \in H$ *uchun* $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n x,\, y) = (Ax,\, y)$ *bo'lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz yaqinlashuvchi deyiladi.*

31.1-misol. $A_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad A_n x = (\underbrace{0,\, 0, \ldots,\, 0}_{n}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ operatorlar ketma- ketligining kuchli va kuchsiz ma'noda nol operatorga yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. ℓ_2 Hilbert fazosi bo'lganligi uchun $A_n : \ell_2 \to \ell_2$ operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma'noda nol operatorga yaqinlashishini 31.4-ta'rifdan foydalanib tekshiramiz. Ixtiyoriy $y = (y_1,\, y_2, \ldots) \in \ell_2$ uchun

$$|\,(A_n x,\ y) - (\Theta x,\ y)\,|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_{n+k}\right|^2 \leq \|\,x\,\|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\,y_k|^2 \qquad (31.1)$$

munosabat o'rinli. $y \in \ell_2$ bo'lganligi uchun

$$\|\,y\,\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\,y_k\,|^2 < \infty.$$

Shunday ekan yaqinlashuvchi qatorning qoldig'i

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\,y_k|^2$$

$n \to \infty$ da nolga intiladi. Bundan (31.1) ga ko'ra, ixtiyoriy $x,\ y \in \ell_2$ larda $|\,(A_n x,\ y) - (\Theta x,\ y)\,|$ ning $n \to \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operator Θ ga kuchsiz ma'noda yaqinlashar ekan. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma'noda yaqinlashmaydi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} \|\,A_n x - \Theta x\,\| = \lim_{n\to\infty} \|\,x\,\| = \|\,x\,\| \neq 0. \qquad \Delta$$

31.2. Quyida berilgan $P_n,\ Q_n \in L(\ell_2)$ operatorlar ketma-ketligining kuchli va tekis ma'noda birlik va nol operatorlarga yaqinlashishini teksiring.

$$P_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad P_n x = (x_1,\, x_2, \ldots, x_n,\, 0, \ldots, 0, \ldots)\,,$$

$$Q_n = I - P_n, \quad Q_n x = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots).$$

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun

$$\| Q_n x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k}|^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Chunki $x \in \ell_2$, ya'ni

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k|^2 < \infty.$$

Shunday ekan, oxirgi qatorning qoldig'i

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k}|^2$$

$n \to \infty$ da nolga intiladi. Demak, $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma'noda yaqinlashar ekan. Bundan $\{P_n = I - Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligining birlik operator I ga kuchli ma'noda yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis ma'noda yaqinlashadimi yoki yo'qmi, shuni tekshiramiz.

$$\| Q_n x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k}|^2 \leq \| x \|^2.$$

Bundan

$$\|Q_n\| \leq 1 \tag{31.2}$$

ekanligini olamiz. Ikkinchi tomondan, $Q_n e_{n+1} = e_{n+1}$. Bundan

$$\| Q_n\| \geq \| Q_n e_{n+1}\| = 1. \tag{31.3}$$

(31.2) va (31.3) dan ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $\| Q_n\| = 1$ ga kelamiz. Demak, Q_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis (norma bo'yicha) yaqinlashmaydi. Bu yerdan $\{P_n\}$ operatorlar ketma-ketligi birlik operator I ga tekis yaqinlashmasligi kelib chiqadi.

31.3. $L_2[-1/2,\ 1/2\ ]$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(A_n f) = x^n f(x)$$

formula bilan aniqlanuvchi A_n operatorlar ketma-ketligining nol operatorga tekis yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Ixtiyoriy $f \in L_2\,[-1/2,\ 1/2\,]$ uchun

$$\|\,A_n f\,\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\,x^n f(x)|^2\,dt \ \leq$$

$$\leq \max_{-1/2 \leq x \leq 1/2} |\,x^{2n}| \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|^2\,dt \ \leq \frac{1}{2^{2n}} \cdot \|\,f\,\|^2. \qquad (31.4)$$

Bundan $\|A_n\| \leq \dfrac{1}{2^{2n}}$ tengsizlikni olamiz. Agar biz $0 \leq \|\,A_n\|$ ekanligini hisobga olib, $n \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{n\to\infty} \|\,A_n - \Theta\| = 0.$$

Shunday ekan, A_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis yaqinlashadi.

Yuqorida kuchsiz yaqinlasuvchi operatorlar ketma-ketligi kuchli ma'noda yaqinlashmasligiga (31.1-misol) va kuchli ma'noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligi norma bo'yicha yaqinlashmasligiga (31.2-misol) misol keltirildi.

Quyida biz tekis yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchli ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'lishini va kuchli ma'noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlaymiz.

31.1-lemma. *Agar $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar ketma-ketligi biror $A \in L(X, Y)$ operatorga tekis yaqinlashsa, u holda $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Isbot. Lemma shartiga ko'ra $\|\,A_n - A\| \to 0, \quad n \to \infty$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\|\,A_n x - Ax\| \leq \|\,A_n - A\| \cdot \|\,x\,\|.$$

sonli tengsizlikka ega bo'lamiz. Matematik analizdan ma'lumki, tengsizliklarda limitga o'tish mumkin. Bunga ko'ra,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|\,A_n x - Ax\| \leq \lim_{n\to\infty} \|\,A_n - A\| \cdot \|\,x\,\| = 0.$$

Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma'noda ham yaqinlashar ekan. Δ

Shunga oʻxshash quyidagi tasdiqni, bevosita ta'rifdan foydalanib isbotlash mumkin.

31.2-lemma. *Agar $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar ketma-ketligi biror $A \in L(X, Y)$ operatorga kuchli ma'noda yaqinlashsa, u holda $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchsiz ma'noda ham yaqinlashuvchi boʻladi.*

Isbot. Lemma shartiga koʻra, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n x - Ax\| = 0.$$

U holda ixtiyoriy $x \in X$ va $f \in Y^*$ uchun

$$0 \le | f(A_n x) - f(Ax) | = | f(A_n x - Ax)| \le \| A_n x - Ax\| \cdot \| f \|$$

sonli tengsizlikka ega boʻlamiz. Bu tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga oʻtib,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} | f(A_n x) - f(Ax) | \le \lim_{n\to\infty} \| A_n x - Ax\| \cdot \| f \| = 0$$

munosabatni olamiz. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi kuchsiz ma'noda A operatorga yaqinlashar ekan. Δ

31.1-teorema. *Agar Y toʻla fazo boʻlsa, u holda $L(X, Y)$ fazo ham toʻla, ya'ni Banax fazosi boʻladi.*

Isbot. $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik boʻlsin, ya'ni $n, m \to \infty$ da $\| A_n - A_m\| \to 0$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\| A_n x - A_m x\| \le \| A_n - A_m\| \cdot \| x \| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Shuning uchun har bir $x \in X$ da $\{A_n x\} \subset Y$ ketma-ketlik fundamentaldir. Y toʻla fazo boʻlgani uchun $\{A_n x\}$ ketma-ketlik biror $y \in Y$ elementga yaqinlashadi. Demak, har bir $x \in X$ ga $\{A_n x\}$ ketma-ketlikning limiti boʻlgan yagona $y \in Y$ element mos qoʻyilyapti. Bu moslikni $A : X \to Y$ orqali belgilaymiz:

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x = y.$$

Endi $A \in L(X,\ Y)$ ekanligini koʻrsatamiz. Chiziqliligi:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to\infty}(A_n \alpha_1 x_1 + A_n \alpha_2 x_2) =$$
$$= \alpha_1 \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$$

Endi A ning chegaralangan ekanligini koʻrsatamiz. Shartga koʻra,

$$\| A_n - A_m\| \to 0, \ \ n,\ m \to \infty.$$

Demak, (29-§ning 6-topshirigʻiga qarang)

$$|\,\| A_n\| - \|A_m\|\,| \leq \| A_n - A_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Bundan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlikning fundamentalligi kelib chiqadi. Haqiqiy sonlar fazosi $\mathbb{R}$ toʻla boʻlganligi uchun, $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir, yaqinlashuvchi ketma-ketlik esa chegaralangan boʻladi. Ya'ni shunday $K > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $\|A_n\| \leq K$ tengsizlik bajariladi. Norma ta'rifidan

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \| x \| \leq K \cdot \| x \| \,.$$

Bundan esa

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n x\right\| = \lim_{n\to\infty} \| A_n x \| \leq K \cdot \| x \| \,.$$

Bu yerda biz normaning uzluksizligidan foydalandik. Endi $\{A_n\}$ ketma-ketlikni chiziqli operatorlar fazosi $L(X,\ Y)$ da A ga yaqinlashishini koʻrsatamiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 son mavjudki, barcha $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ va $\| x \| \leq 1$ lar uchun

$$\| A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Agar so‘nggi tengsizlikda $p \to \infty$ da limitga o‘tsak va normaning uzluksizligidan foydalansak, ixtiyoriy $n > n_0$ va $\| x \| \leq 1$ lar uchun

$$\| Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Shuning uchun ixtiyoriy $n > n_0$ da

$$\| A - A_n\| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$$

Demak, $L(X,\ Y)$ fazodagi norma ma’nosida $\lim\limits_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. Shunday qilib, $L(X,\ Y)$ to‘la fazo ekan. Δ

31.1-natija. *X chiziqli normalangan fazoga qo‘shma bo‘lgan $X^* = L(X, \mathbb{C})$ fazo Banax fazosidir.*

Isbot. Kompleks sonlar to‘plami $\mathbb{C}$ to‘la fazo, shuning uchun 31.1-teoremaga ko‘ra, $L(X, \mathbb{C})$ Banax fazosi bo‘ladi. Δ

31.4-misol. $L\,(C_2[a, b],\ C[a, b])$ fazoni to‘lalikka tekshiring.

Yechish. $Y = C[a, b]$ to‘la fazo bo‘lganligi uchun 31.1-teoremaga ko‘ra, $L\,(C_2[a, b],\ C[a, b])$ to‘la fazo, ya’ni Banax fazosi bo‘ladi. Δ

31.5. $L\,(C[a, b],\ C_2[a, b])$ fazo uchun 31.1-teorema sharti bajariladimi? U to‘lami?

Yechish. $Y = C_2[a, b]$ fazo to‘la bo‘lmagan (21.8 -misolga qarang) normalangan fazo bo‘lganligi uchun 31.1-teorema sharti bajarilmaydi. Shuning uchun biz $L\,(C[a,\ b],\ C_2[a, b])$ fazoni to‘la fazo deya olmaymiz. Aniqlik uchun $a = -1,\ b = 1$ deymiz va $L\,(C[a, b],\ C_2[a,\ b])$ fazoning to‘la emasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $C_2[-1, 1]$ fazoning to‘la emasligini ko‘rsatishda qo‘llanilgan (21.8-misol va 21.1-chizmaga qarang) uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1,\ -1/n], \\ nx, & x \in (-1,\ -1/n) \\ 1, & x \in [1/n\,,\ 1] \end{cases} \tag{31.5}$$

ketma-ketligidan foydalanib, $A_n \in L\left(C[-1,\ 1],\ C_2[-1,\ 1]\right), \quad n \in \mathbb{N}$ operatorlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$\left(A_n f\right)(x) = f_n(x)\, f(x). \tag{31.6}$$

A_n operatorning chiziqli va uzluksizligi oson tekshiriladi. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining $L\left(C[-1,\ 1],\ C_2[-1,\ 1]\right)$ fazoda fundamental ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\|\, A_n - A_m \,\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|\, A_n - A_m \,\| = \sup_{\|\, f\,\| \leq 1} \|\, A_n f - A_m f \| =$$

$$= \sup_{\|\, f\,\| \leq 1} \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2\, |\, f(x)\,|^2\, dx}. \tag{31.7}$$

(31.7) va $\|\, f\,\| = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |\, f(x)\,| \leq 1$ ekanligidan foydalansak,

$$\|\, A_n - A_m \,\| \leq \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx} = \|\, f_n - f_m \|_{C_2[-1,\ 1]} \tag{31.8}$$

tengsizlikni olamiz. $\{f_n\}$ ketma-ketlikning $C_2[-1,\ 1]$ fazoda fundamentalligi 21.8-misolda isbotlangan. (31.8) dan hamda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining fundamentalligi kelib chiqadi. Lekin $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi $L\left(C[-1,\ 1],\ C_2[-1,\ 1]\right)$ fazoda yaqinlashuvchi emas. Teskaridan faraz qilaylik, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi biror $A \in L\left(C[-1,\ 1],\ C_2[-1,\ 1]\right)$ operatorga yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $f \in C[a,\ b]$ uchun $\lim\limits_{n \to \infty} \|\, A_n f - A f \| = 0$ tenglik o‘rinli. Ikkinchi tomondan $f_0 = 1$ uchun

$$\left(A_n f_0\right)(x) = f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

tenglik o‘rinli va $\left(A f_0\right)(x) = g_0(x)$ deylik. 21.8-misolda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning birorta ham uzluksiz funksiyaga $C_2[-1,\ 1]$ fazo normasida yaqinlasha olmasligi ko‘rsatilgan edi, jumladan $\{\, A_n f_0 = f_n\}$ ketma-ketlik $g_0 = A f_0$ funksiyaga ham yaqinlasha olmaydi. Bu qarama-qarshilik $\{\, A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining yaqinlashuvchi emasligini bildiradi. Demak, $L\,(C[-1,\ 1],\ C_2[-1,\ 1])$ to'la bo'lmagan normalangan fazo ekan. Δ

Banax-Shteynxaus teoremasi yordamida ko'rsatish mumkinki, agar X va Y lar Banax fazolari bo'lsa, u holda $L(X,\,Y)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan ham to'la bo'ladi.

31.2-teorema *(Banax-Shteynxaus yoki tekis chegaralanganlik prinsipi). Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan (ya'ni har bir $x \in X$ uchun shunday $M_x > 0$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun*

$$\|\,A_n x\,\| \leq M_x \tag{31.9}$$

tengsizlik o'rinli) bo'lsa, u holda bu operatorlarning normalaridan tuzilgan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Avvalo (31.9) shart bajarilganda shunday

$$B\,[a_0,\,r_0] = \{x \in X : \|\,x - a_0\| \leq r_0\}$$

yopiq shar mavjud bo'lib, bu sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lishini (ya'ni shunday $M_0 > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyotiy $x \in B\,[a_0,\,r_0]$ va barcha $n \in \mathbb{N}$ larda $\|A_n x\| \leq M_0$ tengsizlik bajarilishini) ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, ya'ni $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik birorta ham yopiq sharda chegaralangan bo'lmasin. Ixtiyoriy $B\,[x_0,\,\varepsilon_0]$ shar olamiz. $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $B\,[x_0,\,\varepsilon_0/2]$ sharda chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_1 \in B\,[x_0,\,\varepsilon_0/2]$ element va n_1 nomer mavjudki, $\{A_{n_1} x_1\} > 1$ bo'ladi. A_{n_1} operatorning uzluksizligidan bu tengsizlik $B\,[x_1,\,\varepsilon_1] \subset B\,[x_0,\,\varepsilon_0/2]$ sharda ham bajariladi. $B\,[x_1,\,\varepsilon_1/2]$ sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_2 \in B\,[x_1,\,\varepsilon_1/2]$ element va n_2 nomer mavjudki, $\{A_{n_2} x_2\} > 2$ shart bajariladi. A_{n_2} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B\,[x_2,\,\varepsilon_2] \subset B\,[x_1,\,\varepsilon_1/2]$ sharda ham bajariladi va hokazo $k-$chi qadamda $B\,[x_{k-1},\,\varepsilon_{k-1}]$ sharning x_k nuqtasida $\{A_{n_k} x_k\} > k$ shart bajariladi. A_{n_k}

ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_k, \varepsilon_k] \subset B[x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}/2]$ sharda ham bajariladi. Demak, ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi

$$B[x_0, \varepsilon_0] \supset B[x_1, \varepsilon_1] \supset \cdots \supset B[x_k, \varepsilon_k] \supset \cdots$$

yopiq sharlar ketma-ketligining barchasiga qarashli bo'lgan $\overline{x} \in B[x_k, \varepsilon_k]$ element mavjud va barcha $k \in \mathbb{N}$ larda $\| A_{n_k}\overline{x} \| > k$ tengsizlik bajariladi. Bu esa (31.9) ga zid. Shunday qilib, $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladigan $B[a_0, r_0]$ yopiq shar mavjud. Ixtiyoriy $x \in B[\theta, 1]$ uchun $x' = r_0 x + a_0$ nuqta $B[a_0, r_0]$ sharda yotadi. Shuning uchun, ixtiyoriy n da $\|A_n x'\| \leq M_0$. Endi $x = r_0^{-1}(x' - a_0)$ tenglikdan foydalansak,

$$\|A_n x\| = \left\| A_n \left(\frac{1}{r_0}(x' - a_0) \right) \right\| = \frac{1}{r_0} \| A_n x' - A_n a_0 \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{r_0} (\| A_n x' \| + \| A_n a_0 \|) \leq \frac{1}{r_0} (M_0 + \| A_n a_0 \|) \leq \frac{1}{r_0} (M_0 + M_{a_0}) = M.$$

U holda

$$\| A_n \| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| A_n x \| \leq M. \qquad \Delta$$

31.3-teorema. *Agar X va Y lar Banax fazolari bo'lsa, u holda $L(X, Y)$ operatorlar fazosi kuchli yaqinlashishga nisbatan to'ladir.*

Isbot. Istalgan $x \in X$ da $\{A_n x\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, har bir $x \in X$ da $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x$ mavjud va biz $Ax = \lim\limits_{n \to \infty} A_n x = y$ tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorga ega bo'lamiz. Bu operatorning chiziqliligi 31.1-teorema isbotida keltirilgan. Endi uning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Har bir $x \in X$ da $\{A_n x\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, u chegaralangandir. Banax-Shteynxaus teoremasiga ko'ra, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da $\| A_n \| \leq M$ o'rinli. Bundan

$$\| Ax \| = \left\| \lim_{n \to \infty} A_n x \right\| = \lim_{n \to \infty} \| A_n x \| \leq M \cdot \| x \|.$$

Demak, $\| A \| \leq M$. Δ

31.6-misol. 31.2-misolda keltirilgan

$$P_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $P_n : \ell_2 \to \ell_2$ operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, $X = \ell_2$ va $Y = \ell_2 -$ lar Banax fazolari. P_n ning chegaralangan ekanligi oson tekshiriladi. Har bir $x \in \ell_2$ nuqtada $\{P_n x\}$ chegaralangan ekanligi

$$\| P_n x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} = \| x \| = M_x$$

munosabatdan kelib chiqadi. Δ

31.7. $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to‘la fazo bo‘ladimi?

Yechish., $X = Y = \ell_2$ lar to‘la fazolar bo‘lganligi uchun 31.3-teoremaga ko‘ra $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to‘la fazo bo‘ladi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli va tekis yaqinlashishlarini ta’riflang.*

2. *Kuchli yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligiga misol keltiring (31.2-misolga qarang).*

3. *Kuchsiz yaqinlashuvchi, lekin kuchli yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligiga misol keltiring (31.1-misolga qarang).*

4. *$L(\ell_1)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to‘la fazo bo‘ladimi? 31.3-teoremadan foydalaning.*

5. *31.2-misolda keltirilgan $Q_n : \ell_2 \to \ell_2$*

$$Q_n x = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$$

operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

6. $A_n : L_2[-\pi, \pi] \to L_2[-\pi, \pi]$,

$$(A_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos ny \, f(y)\, dy$$

operatorlar ketma-ketligini nol operatorga kuchli va kuchsiz ma'noda yaqinlashishga tekshiring.

7. $\{A_n\} \subset L\,(C[-1, 1] \to L_2[-1, 1])$ *operatorlar ketma-ketligini quyidagicha aniqlaymiz:*

$$(A_n f)(x) = f_n(x)\, f(x)$$

Bu yerda f_n *lar (31.5) tenglik bilan aniqlanadi.* A_n *operatorlar ketma-ketligining limitini toping. Limitik operatorga* A_n *operatorlar ketma-ketligi qaysi ma'noda (tekis, kuchli, kuchsiz) yaqinlashadi?*

8. $L(C_1[a, b])$ *fazo 31.1-teorema shartlarini qanoatlantiradimi?*

32-§. Teskari operatorlar

Bizga X ni Y ga akslantiruvchi A operator berilgan boʻlsin. $D(A)$ – uning aniqlanish sohasi, ImA esa uning qiymatlar sohasi boʻlsin.

32.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $y \in ImA$ *uchun* $Ax = y$ *tenglama yagona yechimga ega boʻlsa, u holda* A *teskarilanuvchan operator deyiladi.*

Agar A teskarilanuvchan operator boʻlsa, u holda ixtiyoriy $y \in ImA$ ga $Ax = y$ tenglamaning yechimi boʻlgan yagona $x \in D(A)$ element mos keladi. Bu moslikni oʻrnatuvchi operator A operatorga *teskari operator* deyiladi va A^{-1} bilan belgilanadi, hamda

$$A^{-1} : Y \to X, \quad D(A^{-1}) = ImA, \quad ImA^{-1} = D(A).$$

Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$$A^{-1} Ax = x, \;\; x \in D(A), \quad AA^{-1}y = y, \quad y \in D(A^{-1}) \tag{32.1}$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi A akslantirish X ni oʻzini-oʻziga akslantiruvchi chiziqli operator boʻlsin. Agar $B \in L(X,\ X) = L(X)$ operator uchun $BA = I$ boʻlsa, u holda B operator A operatorga *chap teskari operator* deyiladi. Xuddi shunday, $AC = I$ tenglik bajarilsa, C operator A ga *oʻng teskari operator* deyiladi.

32.1-tasdiq. *Agar A operator uchun ham chap teskari, ham oʻng teskari operatorlar mavjud boʻlsa, u holda ular oʻzaro teng.*

Isbot. A uchun B chap teskari, C oʻng teskari operatorlar boʻlsin, u holda

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \qquad \Delta$$

32.1-misol. $A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$ operatorga chap teskari operatorni toping. A oʻngga siljitish operatori deyiladi.

Yechish. $B : \ell_2 \to \ell_2$ bilan chapga siljitish operatorini belgilaymiz:

$$Bx = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Endi BA operatorning $x \in \ell_2$ elementga ta'sirini qaraymiz.

$$BAx = B(Ax) = B\,(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = Ix.$$

Demak, B operator A uchun chap teskari operator ekan.

32.2. 32.1-misolda keltirilgan $A : \ell_2 \to \ell_2$ operatorga oʻng teskari operator mavjudmi?

Yechish. Faraz qilaylik, A ga oʻng teskari operator mavjud boʻlsin. Uni $C : \ell_2 \to \ell_2$ orqali belgilaymiz. 32.1-tasdiqqa koʻra (32.1-misolga qarang) $B = C$ boʻladi, ya'ni

$$Cx = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Endi AC operatorning $x \in \ell_2$ elementga ta'sirini qaraymiz.

$$ACx = A(Cx) = A\,(x_2,\, x_3,\, \ldots, x_{n+1},\, \ldots) = (0,\, x_2,\, \ldots, x_n,\, \ldots) \neq Ix.$$

Demak, C operator A uchun o'ng teskari operator emas ekan. Bundan A uchun o'ng teskari operatorning mavjud emasligi kelib chiqadi.

32.2-tasdiq. *Agar A uchun bir vaqtda ham o'ng teskari, ham chap teskari operatorlar mavjud bo'lsa, u holda A teskarilanuvchan operator bo'ladi va $A^{-1} = B = C$ tenglik o'rinli.*

32.2 tasdiqning isboti 32.1-tasdiq va (32.1) tenglikdan kelib chiqadi.

32.1-teorema. *A chiziqli operatorga teskari bo'lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.*

Isbot. Shuni aytib o'tish kerakki, $ImA = D(A^{-1})$ chiziqli ko'pxillilikdir. Shunday ekan ixtiyoriy $\alpha_1,\ \alpha_2$ sonlar va ixtiyoriy $y_1,\ y_2 \in ImA$ elementlar uchun

$$A^{-1}\,(\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \tag{32.2}$$

tenglikning to'g'ri ekanligini ko'rsatish yetarli. $Ax_1 = y_1$ va $Ax_2 = y_2$ deymiz. A chiziqli bo'lgani uchun

$$A\,(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2. \tag{32.3}$$

Teskari operator ta'rifiga ko'ra, $x_1 = A^{-1} y_1,\quad x_2 = A^{-1} y_2$. Bu tengliklarni mos ravishda α_1 va α_2 sonlarga ko'paytirib qo'shsak,

$$\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2.$$

Ikkinchi tomondan, (32.3) dan va teskari operatorning ta'rifidan

$$\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi ikki tenglikdan (32.2) tenglikni olamiz. Δ

32.2-teorema *(Teskari operator haqida Banax teoremasi). A operator X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. U holda A^{-1} operator mavjud va chegaralangan.*

Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

32.1-lemma. *M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lsin. U holda ixtiyoriy nolmas $y \in X$ elementni*

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots$$

qatorga yoyish mumkin. Bu yerda $y_k \in M, \quad \| y_k \| \leq 3 \cdot 2^{-k} \cdot \| y \|, \quad k \in \mathbb{N}$.

Isbot. $y_1, y_2, \ldots$ elementlarni ketma-ket quramiz. M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lgani uchun, shunday $y_1 \in M$ mavjudki,

$$\| y - y_1 \| \leq \frac{\| y \|}{2}$$

bo'ladi. $y_2 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 \| \leq \frac{\| y \|}{4}$$

bo'lsin. Endi $y_3 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 - y_3 \| \leq \frac{\| y \|}{8}$$

bajarilsin. Umuman $y_n \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 - y_3 - \cdots - y_n \| \leq \frac{\| y \|}{2^n}$$

bo'lsin. Bunday tanlash mumkin, chunki M to'plam X ning hamma yerida zich. $y_n \in M$ elementlarning tanlanishiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| = 0,$$

ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

qator yaqinlashadi va uning yig‘indisi y ga teng. Endi $y_n \in M$ elementlarning normalarini baholaymiz:

$$\| y_1 \| = \| y_1 - y + y\| \leq \| y_1 - y\| + \| y \| \leq \frac{\| y \|}{2} + \| y \| \leq \frac{3}{2} \| y \| ,$$

$$\| y_2 \| = \| y_2 + y_1 - y + y - y_1 \| \leq \| y_2 + y_1 - y\| + \| y - y_1 \| \leq$$
$$\leq \frac{\| y \|}{4} + \frac{\| y \|}{2} \leq \frac{3 \| y \|}{2^2},$$

va nihoyat

$$\| y_n \| = \| y_n + y_{n-1} + \cdots + y_1 - y + y - y_1 - \cdots - y_{n-1}\| \leq$$

$$\leq \| y_n + y_{n-1} + \cdots + y_1 - y \| + \| y - y_1 - \cdots - y_{n-1} \| \leq$$
$$\leq \frac{\| y \|}{2^n} + \frac{\| y \|}{2^{n-1}} \leq \frac{3 \| y \|}{2^n}. \qquad \Delta$$

32.2-teoremaning isboti. A biyektiv akslantirish bo‘lganligi uchun A^{-1} operator mavjud va $D(A^{-1}) = Y$. Endi Y fazoda

$$M_k = \left\{y \in Y : \left\| A^{-1}y \right\| \leq k \| y \|\right\}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

to‘plamlarni qaraymiz. Y fazoning ixtiyoriy elementi M_k to‘plamlarning birortasida yotadi. Shuning uchun

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Ber teoremasiga ko‘ra, M_k to‘plamlarning birortasi qandaydir $B \subset Y$ sharda zich bo‘ladi. Faraz qilaylik, M_n to‘plam B sharda zich bo‘lsin. B shar ichida sharsimon P qatlam olamiz, ya’ni

$$P = \{z \in B : \beta < \| z - y_0\| < \alpha\}, \quad 0 < \beta < \alpha, \;\; y_0 \in M_n.$$

P qatlamni markazi nolda bo‘ladigan qilib parallel ko‘chiramiz va

$$P_0 = \{z : Y : \beta < \| z \| < \alpha\}$$

sharsimon qatlamga ega bo‘lamiz. Birorta $n_0 \in \mathbb{N}$ uchun M_{n_0} to‘plam P_0 da zich bo‘lishini ko‘rsatamiz. Agar $z \in P \cap M_n$ bo‘lsa, u holda $z - y_0 \in P_0$ bo‘ladi. Bundan tashqari

$$\left\| A^{-1}(z - y_0)\right\| \leq \left\| A^{-1}z\right\| + \left\| (-1)A^{-1}y_0\right\| = \left\| A^{-1}z\right\| + \left\| A^{-1}y_0\right\| \leq$$

$$\leq n \| z \| + n \| y_0 \| = n\left(\| z - y_0 + y_0\| + \| y_0\|\right) \leq n\left(\| z - y_0\| + 2 \| y_0\|\right) =$$
$$= n \| z - y_0\| \left(1 + \frac{2 \| y_0\|}{\| z - y_0\|}\right) \leq n \| z - y_0\| \left(1 + \frac{2 \| y_0 \|}{\beta}\right). \qquad (31.4)$$

Ma’lumki, $n\left(1 + \dfrac{2 \|y_0\|}{\beta}\right)$ miqdor z ga bog‘liq emas va biz

$$n_0 = 1 + \left[n\left(1 + \frac{2 \|y_0\|}{\beta}\right)\right]$$

deb olamiz. U holda (32.4) ga ko‘ra, $z - y_0 \in M_{n_0}$ bo‘ladi. M_n to‘plamning P qatlamda zich ekanligidan M_{n0} to‘plamning P_0 qatlamda zich ekanligi kelib chiqadi. Endi Y dan ixtiyoriy nolmas y element olamiz. Shunday λ son mavjudki, $\beta < \| \lambda y \| < \alpha$ tengsizlik o‘rinli, ya’ni $\lambda y \in P_0$ bo‘ladi. M_{n0} to‘plam P_0 qatlamda zich bo‘lgani uchun λy ga yaqinlashuvchi $y_k \in M_{n0}$ ketma-ketlik qurish mumkin. U holda $y_k/\lambda \to y$. Ravshanki, $y_k \in M_{n0}$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\lambda \neq 0$ uchun $\dfrac{y_k}{\lambda} \in M_{n0}$ bo‘ladi. Shunday qilib, M_{n0} to‘plam $Y/\{0\}$ da zich va demak, Y ning o‘zida ham zich.

Endi ixtiyoriy nolmas $y \in Y$ elementni olamiz va 32.1-lemmaga ko‘ra M_{n0} to‘plamning elementlari orqali qatorga yoyamiz:

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots, \quad \| y_k \| \leq 3 \cdot 2^{-k} \| y \|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

X fazoda $x_k = A^{-1}y_k$ elementlardan tuzilgan qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}y_k. \qquad (32.5)$$

Bu qator qandaydir $x \in X$ elementga yaqinlashadi, chunki

$$\| x_k \| = \left\| A^{-1}y_k\right\| \leq n_0 \| y_k\| \leq 3n_0\frac{\| y \|}{2^k}$$

va

$$\| x \| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \leq 3n_0 \| y \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3n_0 \| y \| .$$

(32.5) qatorning yaqinlashuvchiligidan va A ning uzluksizligidan

$$Ax = A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y.$$

Bu yerdan $x = A^{-1}y$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari

$$\left\| A^{-1}y \right\| = \| x \| \leq 3n_0 \| y \| .$$

Bu yerdan $\left\| A^{-1} \right\| \leq 3 \cdot n_0$ tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib, A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi isbotlandi. Δ

Berilgan operatorga teskari operatorning mavjudligini ko‘rsatish birmuncha osonroq, lekin teskari operatorni topish masalasi murakkab masaladir. Shuning uchun teskari operatorni topishni soddaroq holdan, ya’ni qaralayotgan fazo o‘lchami chekli bo‘lgan holdan boshlaymiz.

32.3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Ax = (x_1,\, x_2 + x_1,\, x_3)$ operatorga teskari operator mavjudmi? Agar mavjud bo‘lsa, uni toping.

Yechish. Berilgan A operatorga teskari operator mavjud bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $y \in ImA = \mathbb{R}^3$ da $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi kerak. Endi $Ax = y$ tenglikdan x ni topamiz:

$$Ax = y \iff (x_1,\, x_2 + x_1,\, x_3) = (y_1,\, y_2,\, y_3) .$$

Bundan

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - x_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

ya’ni

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = (y_1,\, y_2 - y_1,\, y_3) = A^{-1}y.$$

Shunday qilib, A operatorga teskari operator mavjud bo'lib u

$$A^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; A^{-1}x = (x_1, \, x_2 - x_1, \, x_3)$$

ko'rinishga ega. 32.1-teoremaga ko'ra, u chiziqli operator bo'ladi. Δ

32.4. 32.3 misolda qaralgan $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator teskari operatorlar haqida Banax teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $X = \mathbb{R}^3$ va $Y = \mathbb{R}^3$ lar Banax fazolari bo'lganligi uchun A akslantirishning biyeksiya ekanligini ko'rsatish yetarli. $\mathbb{R}^3$ fazodan ixtiyoriy ikkita turli $x = (x_1, x_2, x_3)$ va $y = (y_1, y_2, y_3)$ elementlarni olamiz va $Ax \neq Ay$ ekanligini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, $Ax - Ay = 0$ bo'lsin. So'nggi tenglikdan $x = y$ ekanligiga kelamiz. Bu qarama-qarshilik A akslantirishning inyektiv ekanligini ko'rsatadi. 32.3-misolda ixtiyoriy $y \in \mathbb{R}^3$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega ekanligi ko'rsatilgan edi. Bu esa A akslantirishning syuryektiv ekanligini ko'rsatadi. Demak, A biyektiv akslantirish ekan. Δ

32.1. Teskari operatorlar haqida ba'zi teoremalar

Biz bu bandda operator teskarilanuvchan bo'lishining zaruriy va yetarli shartini keltiramiz. Shuningdek teskari operator mavjud va chegaralangan bo'lishining yetarli, zarur va yetarli shartlarini keltiramiz.

32.3-teorema. $A : X \to Y$ *chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun* $Ax = \theta$ *tenglama faqat* $x = \theta$ *yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* A teskarilanuvchan bo'lsin. U holda $Ax = \theta$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi. A chiziqli bo'lgani uchun bu yechim $x = \theta$ bo'ladi.

Yetarliligi. $Ax = \theta$ tenglama faqat nol yechimga ega bo'lsin, u holda ixtiyoriy $y \in ImA$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi. Teskarisini faraz qilaylik, biror $y \in ImA$ uchun yechim ikkita bo'lsin, ya'ni $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$. U holda $A(x_1 - x_2) = \theta$ bo'ladi. Shartga ko'ra,

$x_1 - x_2 = \theta$. Bundan $x_1 = x_2$. Δ

32.4-teorema. *X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli A operator berilgan bo'lsin. ImA da chegaralangan A^{-1} operator mavjud bo'lishi uchun, shunday $m > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ lar uchun*

$$\| Ax \| \geq m \| x \| \tag{32.6}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* A^{-1} mavjud va chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\left\| A^{-1}y \right\| \leq \frac{1}{m} \| y \|, \quad \forall y \in D\left(A^{-1}\right).$$

U holda

$$\| Ax \| = \| y \| \geq m \left\| A^{-1}y \right\| = m \| x \|.$$

Demak, (32.6) shart o'rinli.

Yetarliligi. (32.6) shartdan A operatorning o'zaro bir qiymatli ekanligi kelib chiqadi. Teskarisini faraz qilaylik, (32.6) shart bajarilsinu A o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lmasin. U holda shunday $x_1,\ x_2 \in D(A)$, $x_1 \neq x_2$ elementlar mavjudki,

$$Ax_1 = y, \quad Ax_2 = y.$$

Bundan $A(x_1 - x_2) = \theta$ ekanligi kelib chiqadi. (32.6) tengsizlikka ko'ra,

$$0 \leq m \| x_1 - x_2 \| \leq \| A(x_1 - x_2) \| = 0.$$

Bu yerdan $x_1 = x_2$ qarama-qarshilikka kelamiz. Demak, A $-$o'zaro bir qiymatli akslantirish ekan. Shuning uchun, teskari A^{-1} operator mavjud. Endi A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. (32.6) tengsizlikka ko'ra,

$$\| x \| \leq \frac{1}{m} \| Ax \|.$$

Ixtiyoriy $y = Ax \in ImA$ uchun

$$\| A^{-1}y \| \leq \frac{1}{m} \| y \| .$$

Bu yerdan A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi hamda

$$\| A^{-1} \| \leq \frac{1}{m}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Δ

Endi 32.3 va 32.4-teorema shartlarining bajarilishiga doir misollar qaraymiz.

32.5-misol. $C[0,\ 1]$ fazoda x ga ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$B\,:\,C[0,\ 1] \to C[0,\ 1], \quad (Bf)(x) = x\,f(x)$$

operatorni (29.8-misolga qarang) qaraymiz. Bu operator 32.3-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? B teskarilanuvchan operator bo‘ladimi?

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi $Bf = 0$ tenglamani, ya’ni $x\,f(x) = 0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglama $C[0,\ 1]$ fazoda faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega. B operator 32.3-teorema shartlarini qanoatlantiradi. Demak, B – teskarilanuvchan operator, ya’ni B ga teskari operator mavjud.

32.6. 32.5-misolda qaralgan x ga ko‘paytirish operatori $(Bf)(x) = x\,f(x)$, $f \in C[0,\ 1]$, 32.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ma’lumki, B – chiziqli operator. B operator uchun 32.4-teoremaning (32.6) sharti bajarilmasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $C[0,\ 1]$ fazoda har bir elementining normasi 1 bo‘lgan (32.1-chizma) $\{g_n\}$ ketma-ketlikni

32.1-chizma

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & agar \quad x \in [0,\ 1/n] \\ 0, & agar \quad x \in [\,1/n,\ 1] \end{cases}$$

qaraymiz. Endi $\|\, B\, g_n \,\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|\, B\, g_n \,\| = \max_{0 \le x \le 1} |\,(B\, g_n\,)(x)| = \max_{0 \le x \le 1} |x\, g_n(x)| = \max_{0 \le x \le 1/n} \left| x - nx^2 \right| = \frac{1}{4n} \,\|\, g_n \,\|\,.$$

Istalgan $m > 0$ son uchun shunday n_0 natural son mavjudki, $\dfrac{1}{4n_0} < m$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan kelib chiqadiki,

$$\|\, B\, g_n \,\| = \frac{1}{4n} \,\|\, g_n \,\| < m \,\|\, g_n \|\,.$$

Demak, B operator uchun (32.6) tengsizlikni qanoatlantiruvchi $m > 0$ son mavjud emas. 32.5-misolda ko‘rsatildiki, B ga teskari operator mavjud, lekin 32.4-teoremaning sharti bajarilmaganligi uchun, B ga teskari operator chegaralanmagan bo‘ladi. Δ

32.7. Endi $L_2[-1,\ 1]$ Hilbert fazosini o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi

$$A\,:\, L_2[-1,\ 1] \to L_2[-1,\ 1], \quad (Af)(x) = \left(x^2 + 1\right) f(x)$$

operatorni qaraymiz. A operator 32.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? A ga chegaralangan teskari operator mavjudmi?

Yechish. A operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi A operator uchun 32.4-teoremaning (32.6) sharti bajarilishini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\|\, Af \,\|$ normani quyidan baholaymiz.

$$\|\, Af \,\|^2 = \int_{-1}^{1} \left|\, \left(x^2 + 1\right) f(x) \,\right|^2 dx \ge \int_{-1}^{1} |\, f(x)\,|^2\, dx = \|\, f \,\|^2\,.$$

Biz bu yerda $\left|x^2 + 1\right| \ge 1$ tengsizlikdan hamda integralning monotonlik xossalaridan foydalandik. So‘nggi tengsizlikdan $\|\, Af \,\| \ge \|\, f \,\|$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerda $m > 0$ son sifatida $(0,\ 1]$ dagi ixtiyoriy sonni olish mumkin. 32.4-teorema tasdig‘idan foydalansak, A ga chegaralangan teskari operator mavjudligi hamda $\left\| A^{-1} \right\| \leq 1$ tengsizlik kelib chiqadi. Aslida $\left\| A^{-1} \right\| = 1$ tenglik o‘rinli. Δ

32.5-teorema. *X – Banax fazosi va $A \in L(X)$. Agar $\| A \| \leq q < 1$ bo‘lsa, u holda $I - A$ operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

Isbot. $L(X)$ fazoda quyidagi formal qatorni qaraymiz:

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots . \tag{32.7}$$

Ma’lumki, $\left\| A^2 \right\| \leq \| A \|^2$. Xuddi shuningdek, $\| A^n \| \leq \| A \|^n$. U holda (32.7) qatorning

$$S_n = I + \sum_{k=1}^{n} A^k$$

qismiy yig‘indilari ketma-ketligi Koshi shartini qanoatlantiradi, ya’ni

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \left\| A^{n+1} + A^{n+1} + \cdots + A^{n+p} \right\| \leq$$

$$\leq q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p} \to 0, \quad n \to \infty.$$

(32.7) qatorning qismiy yig‘indilari ketma-ketligi S_n – fundamental ekan, $L(X) := L(X,\ X)$ to‘la bo‘lgani (31.1-teoremaga qarang) uchun

$$S_n \to S \in L(X).$$

Shunday qilib,

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S.$$

Bundan tashqari

$$S(I - A) = \lim_{n\to\infty} S_n(I - A) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(I + A + A^2 + \cdots + A^n - A - A^2 - \cdots - A^{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(I - A^{n+1} \right) = I.$$

Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, $(I - A)S = I$. Demak, S operator $I - A$ operator uchun teskari operator ekan. S operatorning normasi

$$\| S \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| A^n \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Demak, $S = (I - A)^{-1}$ operator chegaralangan va uning normasi

$$\| S \| = \left\| (I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1-q}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Δ

32.1-natija. *$X-$ Banax fazosi va $A \in L(X)$ bo'lib, $\| A \| \leq q < 1$ bo'lsa, u holda $I + A$ perator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

Natijaning isboti 32.5-teoremadan kelib chiqadi va

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - \cdots + (-1)^n A^n + \cdots$$

tenglik o'rinli.

32.2-lemma. *Agar $A,\ B \in L(X)$ bo'lib, $A^{-1},\ B^{-1} \in L(X)$ bo'lsa, u holda AB operatorga chegaralangan teskari operator mavjud va $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ tenglik o'rinli.*

Lemmaning isboti $A\,B\,B^{-1}A^{-1} = I, \quad B^{-1}A^{-1}AB = I$ tengliklardan hamda 32.2-tasdiqdan kelib chiqadi.

32.6-teorema. *$A \in L(X)$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lsin. Agar $A' : X \to X$ operatorning normasi*

$$\| A' \| < \frac{1}{\| A^{-1} \|}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $B = A - A'$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud.

Isbot. B operatorni quyidagicha yozib olamiz: $A - A' = A(I - A^{-1}A')$. Endi $A^{-1}A'$ operatorning normasini baholaymiz:

$$\left\| A^{-1}A' \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \cdot \| A' \| < 1.$$

32.5-teoremaga ko'ra, $I - A^{-1}A'$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud. U holda 32.2-lemmaga ko'ra, $A(I - A^{-1}A')$ operator ham teskarilanuvchan bo'ladi, hamda

$$B^{-1} = \left(I - A^{-1}A'\right)^{-1} A^{-1}, \quad \| B^{-1} \| \leq \left\| \left(I - A^{-1}A'\right)^{-1} \right\| \cdot \| A^{-1} \|$$

munosabatlar o‘rinli. Δ

32.8-misol. Parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida

$$(I - \lambda A)f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, \sin y \, f(y) \, dy, \quad f \in L_2[-\pi, \ \pi]$$

operatorga 32.5-teoremani va uning 32.1-natijasini qo‘llash mumkin?

Yechish. $A \in L(L_2[-\pi, \ \pi])$ ekanligini tekshiramiz. Shu maqsadda ixtiyoriy $f, \ g \in L_2[-\pi, \ \pi]$ elementlarni va ixtiyoriy $\alpha, \ \beta \in \mathbb{C}$ sonlarni olamiz va A operatorning $\alpha f + \beta g$ elementga ta’sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f + \beta g))(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \ \sin y \ \ (\alpha f + \beta g)(y) dy =$$

$$= \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \ \sin y \, f(y) \ dy + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \ \sin y \ g(y) \ d(y) =$$

$$= \alpha (Af)(x) + \beta (Ag)(x).$$

Biz bu yerda integralning additivlik va bir jinslilik xossalaridan foydalandik. Endi A operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\|Af\|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\|Af\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \ \sin y \, f(y) \, dy \right|^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \ dx \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \, f(y) \, dy \right|^2 . \qquad (32.8)$$

Endi Koshi-Bunyakovskiy $-$ $|(f, \, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ tengsizligidan hamda

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \ \ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

ayniyatlardan va $\cos 2x$ ning 1 ga ortogonalligidan foydalansak, (32.8) dan

$$\|Af\|^2 \leq \pi^2 \, \|f\|^2 \qquad (32.9)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (32.9) dan

$$\|Af\| \leq \pi \, \|f\| \Longleftrightarrow \|A\| \leq \pi \qquad (32.10)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Ikkinchi tomondan $f_0(x) = \sin x$ desak, u holda $(Af_0)(x) = \pi \cos x$ va $\|f_0\| = \sqrt{\pi}$, $\|Af_0\| = \pi \|f_0\|$ bo‘ladi. Ma’lumki,

$$\|A\| \geq \frac{\|Af_0\|}{\|f_0\|} = \pi$$

va (32.10) dan foydalansak, $\|A\| = \pi$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ lar uchun $\|\lambda A\| < 1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, 32.5-teorema va uning natijasiga ko‘ra, barcha $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ larda $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 32.5-teorema shartlarining bajarilishi $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo‘lishini ta’minlaydi. Lekin $\lambda \notin \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ ekanligidan $I - \lambda A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

Navbatdagi misolimiz bu fikrimizni tasdiqlaydi.

32.9. Parametr λ ning $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlarida

$$(I - \lambda A) f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, f(y) \, dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorga 32.5-teoremani qo‘llab, unga teskari operatorni toping.

Yechish. 32.8-misolda $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlar uchun $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjudligi ko‘rsatilgan edi. Bu misolga 32.5-teoremani qo‘llashimiz uchun A operatorning darajalarini hisoblashimiz kerak. Dastlab A operator kvadratini hisoblaymiz:

$$\left(A^2 f\right)(x) = A\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, f(y) \, dy\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin t \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin y \, f(y) \, dy\right) dt. \tag{32.11}$$

(32.11) tenglikda t bo‘yicha integralni hisoblash mumkin. Agar biz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t \, dt = 0$$

tenglikni hisobga olsak, $A^2 = 0$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglikdan barcha $n \geq 2$ larda $A^n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada biz, $S = I + \lambda A = (I - \lambda A)^{-1}$ ga ega bo'lamiz. Haqiqatan ham,

$$(I - \lambda A)\,(I + \lambda A) = I + \lambda A - \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

va

$$(I + \lambda A)\,(I - \lambda A) = I - \lambda A + \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

tengliklar o'rinli. Isbot jarayonidan ma'lum bo'ldiki, barcha $\lambda \in \mathbb{R}$ larda $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo'ladi.

32.10. Parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida

$$(Bf)(x) = \left(1 + x^2\right) f(x) - \lambda \int_{-1}^{1} x\, y\, f(y)\, dy, \quad f \in L_2[-1,\ 1] \qquad (32.12)$$

operatorga 32.6-teoremani qo'llash mumkin?

Yechish. B operatorni $A - \lambda A'$ ko'rinishda yozib olamiz. $A \in L(L_2[-1,\ 1])$ operator sifatida (32.7-misolga qarang)

$$(Af)(x) = \left(x^2 + 1\right) f(x),\, f \in L_2[-1,\ 1]$$

ni, $A' \in L(L_2[-1,\ 1])$ operator sifatida esa

$$(A'f)(x) = \int_{-1}^{1} x\, y\, f(y)\, dy, \quad f \in L_2[-1,\ 1]$$

ni olamiz. 32.7-misolda A operatorning teskarisi mavjud va $\left\| A^{-1} \right\| = 1$ ekanligi ko'rsatilgan edi. 32.6-teoremani (32.12) tenglik bilan aniqlangan $B = A - \lambda A'$ operatorga qo'llashimiz uchun

$$\| \lambda A' \| < \frac{1}{\| A^{-1} \|} = 1 \qquad (32.13)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladigan λ ning barcha qiymatlarini topishimiz kerak. Shu maqsadda A' operatorning normasini topamiz. Buning uchun $\| A' f \|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\| A' f \|^2 = \int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{1} x\, y\, f(y)\, dy \right|^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} x^{2}\, dx \cdot \left| \int_{-1}^{1} y\ f\,(y)\ dy \right|^{2} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{2} \|\, f\, \|^{2}. \tag{32.14}$$

Biz bu yerda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan hamda

$$\int_{-1}^{1} x^{2}\, dx = \frac{2}{3}$$

tenglikdan foydalandik. (32.14) dan

$$\|\, A' \,\| \leq \frac{2}{3} \tag{32.15}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan $f_0\,(x) = x$ desak, u holda

$$(A' f_0)\,(x) = \frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot f_0\,(x) \quad \text{va} \quad \|A' f_0\| = \frac{2}{3} \cdot \|f_0\|\,, \quad \|\, f_0\| = \frac{2}{3}$$

bo‘ladi. Ma’lumki,

$$\|\, A' \,\| \geq \frac{\|\, A'\, f_0\|}{\|\, f_0\|} = \frac{2}{3}. \tag{32.16}$$

(32.15) va (32.16) lardan $\|\, A' \,\| = \dfrac{2}{3}$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda \in \left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2} \right)$ lar uchun (32.13) ning, ya’ni $\|\, \lambda\, A' \,\| < 1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. 32.6-teoremaga ko‘ra, barcha $\lambda \in \left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2} \right)$ larda B operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 32.8-misoldagidek, $\lambda \notin \left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2} \right)$ ekanligidan B operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

32.11. Quyidagi operatorning teskarilanuvchan emasligini ko‘rsating

$$A : C\,[0,\ 1] \to C\,[0,\ 1]\,, \quad (Af)\,(x) = f\,(0)\ x + f\,(1)\ x^{2}. \tag{32.17}$$

Yechish. Ma’lumki, chiziqli operator teskarilanuvchan bo‘lishi uchun $Af = 0$ tenglama faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega bo‘lishi zarur va yetarli. (32.17) formula bilan berilgan A operator uchun $f_0\,(x) = x\ (1 - x)$ funksiyani olsak, $f_0\,(0) = f_0\,(1) = 0$ bo‘lgani uchun

$$(Af_0)\,(x) = f_0\,(0)\ x + f_0\,(1)\ x^{2} \equiv 0.$$

Demak, $Af = 0$ tenglama nolmas f_0 yechimga ega, 32.3-teoremaga ko‘ra, A operator teskarilanuvchan emas. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Teskarilanuvchan operator ta’rifini keltiring.*

2. *Chiziqli operatorga teskari operator har doim chiziqli bo‘ladimi?*

3. *Chiziqli chegaralangan operatorga teskari operator mavjud bo‘lsa, u chiziqli chegaralangan bo‘ladimi? Misollarda tushuntiring. 32.5, 32.6-misollarga qarang.*

4. *A chiziqli operatorning yadrosi* $KerA$ *nolmas elementni saqlasa, u holda* A *ga teskari operator mavjud bo‘lishi mumkinmi?*

5. *32.10-misoldagi* B *operatorga teskari operatorni toping.*

6. *32.5-misolda keltirilgan* B *operatorga teskari operatorni toping.* B^{-1} *operatorning aniqlanish sohasini toping.* $D(B^{-1}) = C\,[0,1]$ *tenglik to‘g‘rimi? Agar bu tenglik to‘g‘ri bo‘lmasa,* $D(B^{-1})$ *to‘plam* $C\,[0,1]$ *fazoning hamma yerida zichmi?*

7. *Ko‘paytirish operatori* $A : \ell_2 \to \ell_2$, $(A\,x)_n = a_n x_n$ *ning teskarilanuvchan bo‘lishining zarur va yetarli shartini toping.*

8. *Ko‘paytirish operatori* $A : \ell_2 \to \ell_2$, $(A\,x)_n = a_n x_n$ *ga chegaralangan teskari operator mavjud bo‘lishining zarur va yetarli shartini toping.*

9. *Ko‘paytirish operatori* $A : \ell_2 \to \ell_2$, $(A\,x)_n = n^{-1} x_n$ *ga teskari operatorni toping. U chegaralangan operator bo‘ladimi?*

10. *Ko‘paytirish operatori* $A : L_2\,[-1,\,1] \to L_2\,[-1,\,1]$, $(A\,f)\,(x) = [x]\,f\,(x)$ *ga teskari operator mavjudmi? Bu operatorning yadrosini to-*

ping. $\dim KerA = \infty$ *tenglik to'g'rimi? Bu yerda* $[x]$ *deb* x *sonining butun qismi belgilangan.*

33-§. Qo'shma operatorlar

Bu paragrafda biz Banax va Hilbert fazolarida aniqlangan operatorlarga qo'shma operatorlarni qaraymiz va ularning ayrim xossalarini o'rganamiz.

33.1. Banax fazosida qo'shma operatorlar

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz A operator berilgan bo'lsin, ya'ni

$$A : X \to Y, \quad y = Ax \in Y, \quad D(A) = X.$$

Bizga ixtiyoriy $g : Y \to \mathbb{C}$ chiziqli chegaralangan funksional berilgan bo'lsin. Bu funksionalning $y = Ax$ elementga ta'sirini qaraymiz $g(y) = g(Ax)$. Osongina ko'rsatish mumkinki, $g(Ax)$ funksional X da aniqlangan biror chiziqli f funksionalni aniqlaydi. Shunday qilib,

$$g(Ax) = f(x). \qquad (33.1)$$

Endi (33.1) tenglik bilan aniqlangan f funksionalning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = g(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = g(\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2) =$$

$$= \alpha_1 g(Ax_1) + \alpha_2 g(Ax_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \qquad (33.2)$$

(33.2) tenglik barcha $x_1, x_2 \in X$ va ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ lar uchun o'rinli. Demak, f chiziqli funksional ekan. Endi uning chegaralangan ekanligini (uzluksizligini) ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$|f(x)| = |g(Ax)| \leq \| g\| \cdot \| A x\| \leq \| g\| \cdot \| A \| \cdot \| x \|$$

tengsizlik o'rinli. Bu yerdan f funksionalning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Agar f funksionalning x nuqtadagi qiymatini (f, x) deb belgilasak, u holda

$$(f, x) = (g, Ax). \tag{33.3}$$

33.1-ta'rif. *Bizga X, $Y-$ chiziqli normalangan fazolar va $A : X \to Y$ chiziqli chegaralangan operator berilgan bo'lsin. Agar biror $A^* : Y^* \to X^*$ operator va barcha $x \in X,\ g \in Y^*$ lar uchun*

$$(g,\ Ax) = (A^* g,\ x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

Demak, har bir $g \in Y^*$ funksionalga (33.3) tenglik bilan aniqlanuvchi $f \in X^*$ funksionalni mos qo'yuvchi $A^* : Y^* \to X^*$ operator A operatorga *qo'shma operator* deyiladi.

Qo'shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

1. A^* operator chiziqli.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. Ixtiyoriy k son uchun $(kA)^* = kA^*$.
4. Agar A uzluksiz bo'lsa, u holda A^* ham uzluksiz bo'ladi.

Aniqrog'i, quyidagi tasdiq o'rinli.

33.1-teorema. *Agar $A \in L(X, Y)$ bo'lsa, u holda $A^* \in L(Y^*, X^*)$ bo'ladi va $\|A^*\| = \|A\|$ tenglik o'rinli.*

Isbot. Funksional hamda operator normasining xossalariga ko'ra,

$$|(A^* g, x)| = |(g, Ax)| \le \|g\|\ \|Ax\| \le \|A\|\ \|g\|\ \|x\|.$$

Bu yerdan

$$\|A^* g\| \le \|A\|\ \|g\|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak,

$$\|A^*\| \le \|A\| \tag{33.4}$$

Endi $x \in X,\ Ax \neq \theta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy element bo'lsin, $y_0 = \dfrac{Ax}{\|Ax\|} \in Y$ deymiz. Ko'rinib turibdiki, $\|y_0\| = 1.$ Xan-Banax teoremasining 30.1-natijasiga ko'ra, shunday $g : Y \to \mathbb{C}$ funksional mavjudki, $\|g\| = 1$ va $g(y_0) = \|y_0\| = 1,$ ya'ni

$$g(y_0) = g\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \frac{1}{\|Ax\|} g(Ax) = 1.$$

Bu yerdan,

$$g(Ax) = \|Ax\|$$

tenglikka ega bo'lamiz. U holda

$$\|Ax\| = g(Ax) = |\,(A^*g)(x)\,| \leq \|A^*g\| \ \|x\| \leq \|A^*\| \ \ \|g\| \ \|x\| = \|A^*\| \ \ \|x\|$$

munosabatdan

$$\|A\| \leq \|A^*\| \tag{33.5}$$

tengsizlikni olamiz. (33.4) va (33.5) munosabatlardan

$$\|A\| = \|A^*\|$$

tenglik kelib chiqadi. Δ

33.2. Hilbert fazosida qo'shma operatorlar

Ma'lumki, Hilbert fazosiga qo'shma fazo uning o'ziga izomorf, ya'ni $H = H^*$ (tenglik izomorfizm ma'nosida). Shuning uchun Hilbert fazolarida qo'shma operatorlar xossalarini o'rganish ancha qulay.

33.2-ta'rif. *H Hilbert fazosi va $A \in L(H)$ operator berilgan bo'lsin. Agar biror $A^* : H \to H$ operator va ixtiyoriy $x, y \in H$ lar uchun*

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

Bu ta'rif Banax fazosidagi qo'shma operatorning ta'rifidan biroz farq qiladi, ya'ni bu yerda $(kA)^* = \overline{k}A^*$ (3-xossaga qarang) tenglik o'rinli.

Hilbert fazosi holida A va A^* operatorlar aynan bitta fazoda aniqlangani uchun, ba'zan $A = A^*$ tenglik ham o'rinli bo'lishi mumkin.

33.3-ta'rif. *Agar* $A = A^*$ *bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy* $x, y \in H$ *uchun*

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A *operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.*

33.4-ta'rif. *Bizga* $A : H \to H$ *chiziqli operator va* $H_0 \subset H$ *qism fazo berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $x \in H_0$ *uchun* $Ax \in H_0$ *bo'lsa, u holda* H_0 *qism fazo* A *operatorga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.*

33.1-lemma. *Bizga* $A : H \to H$ *chiziqli operator va* $H_0 \subset H$ *qism fazo berilgan bo'lsin. Agar* H_0 *qism fazo* A *operatorga nisbatan invariant bo'lsa, u holda uning ortogonal to'ldiruvchisi bo'lgan* $H_0^{\perp} \subset H$ *qism fazo* A^* *operatorga nisbatan invariant bo'ladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar $y \in H_0^{\perp}$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in H_0$ uchun $(A^*y, x) = (y, Ax) = 0$, chunki $Ax \in H_0$. Demak, $A^*y \in H_0^{\perp}$. Δ

Xususiy holda, agar $A = A^*$ bo'lsa, u holda $A(H_0) \subset H_0$ ekanligidan $A(H_0^{\perp}) \subset H_0^{\perp}$ ekanligi kelib chiqadi.

Hilbert fazosida qo'shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

33.2-lemma. *Agar* $A, B \in L(H)$ *bo'lsa, u holda*

1) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$,

2) $(AB)^* = B^* A^*$,

3) $(A^*)^* = A$ *tengliklar o'rinli.*

Isbot. Birinchi tenglikni isbotlaymiz:

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) =$$

$$= \alpha(x, A^*y) + \beta(x, B^*y) = (x, \overline{\alpha} A^*y) + (x, \overline{\beta} B^*y) = (x, (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*)y).$$

Bundan $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$ tenglik kelib chiqadi.

2) ni isbotlaymiz:

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y).$$

Bundan $(AB)^* = B^*A^*$ tenglik kelib chiqadi.

3) ning isboti bevosita qo‘shma operator ta’rifidan kelib chiqadi. Δ

Endi operatorlarning Banax va Hilbert qo‘shmalarini topishga doir misollar qaraymiz.

33.1-misol. $X = Y = \ell_1$ va T o‘ngga siljitish operatori bo‘lsin (32.1-misolga qarang), ya’ni

$$Tx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, \ldots), \quad x \in \ell_1$$

bo‘lsin. T ga qo‘shma T^* operatorni toping.

Yechish. $X = \ell_1$ va $Y = \ell_1$ lar Banax fazolari bo‘lganligi uchun T operatorning Banax qo‘shmasini topamiz. Ma’lumki, $T \in L(\ell_1)$ operatorning Banax qo‘shmasi barcha $x \in \ell_1$ va $f \in (\ell_1)^*$ lar uchun

$$(T^*f)(x) = f(Tx) \tag{33.6}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi va $(\ell_1)^*$ fazoni $(\ell_1)^*$ fazoga akslantiruvchi operatordan iborat. Bizga ma’lumki, $(\ell_1)^* = m$, boshqacha aytganda har qanday $f \in (\ell_1)^*$ uchun shunday yagona $y \in m$ mavjudki,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots), \quad y \in m \tag{33.7}$$

tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun o‘rinli bo‘ladi. Xuddi shuningdek, shunday $\zeta \in m$ mavjudki,

$$(T^*f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \zeta_k, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots) \in m \tag{33.8}$$

tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. (33.7) va (33.8) tengliklarni hisobga olsak, berilgan operator uchun (33.6) shart quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \zeta_k = \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1}. \tag{33.9}$$

Bu tenglik barcha lar uchun bajariladi. Xususiy holda, (23.8) tenglik bilan aniqlanuvchi $\{e_k = (0, \ldots, 1, 0 \ldots)\}, k \in \mathbb{N}$ elementlar uchun (33.9) tenglik

$$\zeta_k = y_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

aylanadi. Shunday qilib, $T^* : m \to m$ operator

$$T^* y = T^*(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}, \ldots), \quad y \in m$$

formula bilan aniqlanar ekan.

33.1-teoremaga ko‘ra, $T \in L(X, Y)$ ekanligidan $T^* \in L(Y^*, X^*)$ ekanligi kelib chiqadi va $\|T\| = \|T^*\|$ tenglik bajariladi. Qaralayotgan misolda 33.1-teoremaning o‘rinli ekanligini tekshirib ko‘ramiz. T^* operatorning chiziqli ekanligi uning aniqlanishidan ko‘rinib turibdi. $\|T\| = \|T^*\|$ tenglik bajarilishini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 1,$$

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\|=1} \|T^* y\| = \sup_{2 \le |y_k| < \infty} |y_k| = 1.$$

33.2. ℓ_2 fazoda ko‘paytirish operatorini, ya’ni (29.9-misolga qarang)

$$A : \ell_2 \to \ell_2, (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup |a_n| = a < \infty \tag{33.10}$$

operatorni qaraymiz. Unga qo‘shma operatorni toping.

Yechish. $X = Y = \ell_2$ Hilbert fazolari bo‘lganligi uchun A ga Hilbert ma’nosidagi qo‘shma operatorni topamiz. A operatorning chiziqli va chegaralanganligi 29.9-misolda ko‘rsatilgan. A ga qo‘shma operatorni topish uchun (Ax, y) skalyar ko‘paytmani qaraymiz. ℓ_2 fazodagi skalyar ko‘paytmadan foydalansak,

$$(Ax, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (Ax)_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{\overline{a_k} y_k} = (x, A^* y)$$

Bundan

$$A^* : \ell_2 \to \ell_2, \quad (Ax)_n = \overline{a_n}\, x_n,$$

ni olamiz. Bu yerdan A ning qo‘shmasi o‘ziga teng bo‘lishi uchun $a_n,\ n \in \mathbb{N}$ sonlarning haqiqiy bo‘lishi zarur va yetarlidir degan xulosaga kelamiz. Δ

33.3. $L_2[a,\ b]$ kompleks Hilbert fazosida, $u(x)$ funksiyaga ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$(Af)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2[a,\ b]$$

operatorni qaraymiz. Bu yerda u chegaralangan va o‘lchovli funksiya. A ga qo‘shma operatorni toping.

Yechish. $X = Y = L_2[a,\ b]$ Hilbert fazolari bo‘lganligi uchun A ga Hilbert ma’nosidagi qo‘shma operatorni topamiz. u funksiyaning chegaralangan va o‘lchovli ekanligidan A operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = L_2[a,\ b]$ ekanligi va A ning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Ta’rifga ko‘ra, A operatorning qo‘shmasi hamma $f, g \in L_2[a,\ b]$ lar uchun

$$(Af, g) = (f, A^*g) \tag{33.11}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $A^* \in L(L_2[a,\ b])$ operatordan iborat. Agar biz $L_2[a,\ b]$ fazodagi skalyar ko‘paytmadan foydalansak, (33.11) tenglikni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$(Af, g) = \int_a^b (Af)(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_a^b u(x)\, f(x)\overline{g(x)}\, dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\overline{\overline{u(x)}g(x)}\, dx = (f, A^*g).$$

Bu tenglikdan

$$(A^*g)(x) = \overline{u(x)}\, g(x), \quad g \in L_2[a,\ b]$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan $A = A^*$ bo‘lishi uchun, deyarli barcha $x \in [a,\ b]$ larda $u(x) \in \mathbb{R}$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

33.4. Endi $L_2[a,b]$ Hilbert fazosida $K(x,y)$ yadro bilan aniqlanuvchi integral operatorni, ya'ni

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy, \quad f \in L_2[a,b] \tag{33.12}$$

operatorni qaraymiz. Bu yerda $K - [a,\ b] \times [a,\ b]$ kvadratda aniqlangan chegaralangan va o'lchovli funksiya. A operatorga qo'shma operatorni toping.

Yechish. K funksiyaning chegaralangan va o'lchovli ekanligidan, uning $L_2([a,\ b] \times [a,\ b])$ fazoga qarashli ekanligi kelib chiqadi. Fubini teoremasidan (37.1-teorema) foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(Af,g) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,y)f(y)dy \right\} \overline{g(x)}\, dx = \int_a^b \int_a^b K(x,y)f(y)\, dy\, \overline{g(x)}\, dx =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,y)\, \overline{g(x)}\, dx \right\} f(y)\, dy =$$

$$= \int_a^b f(x) \left\{ \overline{\int_a^b \overline{K(y,x)}\, g(y)\, dy} \right\} dx = (f, A^*g).$$

Bu yerdan

$$(A^*g)(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)}\, g(y)\, dy \tag{33.13}$$

tenglik kelib chiqadi. Xususan, (33.12) ko'rinishdagi A operator $L_2[a,b]$ fazoda o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun, deyarli barcha $x, y \in [a,b]$ lar uchun

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)} \tag{33.14}$$

tenglikning bajarilishi yetarli va zarurdir.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Banax fazosida operatorning qo'shmasi qanday ta'riflanadi?*

2. *Hilbert fazosida operatorning qo'shmasi qanday ta'riflanadi?*

3. *Yuqoridagi ta'riflarda qanday farq bor? Javobni xossalarda tushuntiring.*

4. *O'z-o'ziga qo'shma va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan operatorlarga misollar keltiring.*

5. *Hilbert fazosida birlik operatorga qo'shma operatorni toping. U o'z-o'ziga qo'shma bo'ladimi?*

6. *Chiziqli chegaralangan operatorga qo'shma operator har doim chiziqli chegaralangan bo'ladimi?*

7. $A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$ *operatorga qo'shma operatorni toping. Bu yerda* $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$. *33.2-misoldan foydalaning.*

8. $A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (0, a_1x_1, 0, a_3x_3 \ldots, 0, a_{2n-1}x_{2n-1}, \ldots)$ *operatorga qo'shma operatorni toping. Bu yerda* $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

9. $B : L_2[0,\,1] \to L_2[0,\,1], \quad (Bf)(x) = u(x)f(x)$ *operatorga qo'shma operatorni toping. Bu yerda* $u : [a, b] \to \mathbb{C}$ *uzluksiz funksiya.*

10. *O'z-o'ziga qo'shma* $A, B : L_2[0,\,1] \to L_2[0,\,1]$ *operatorlar berilgan:*

$$(Af)(x) = xf(x), \qquad (Bf)(x) = \int_0^1 xyf(y)dy.$$

AB *va* BA *operatorlarni toping. Ular o'z-o'ziga qo'shma bo'ladimi?*

11. $A : L_2[-1,\,1] \to L_2[-1,\,1]$ *operator berilgan:*

$$(Af)(x) = \int_{-1}^1 (x^2 + iy^2)f(y)dy.$$

Uning invariant qism fazolarini toping. Juft funksiyalardan iborat $L_2^+[-1,\,1] = \{f \in L_2[-1,\,1] : f(-x) = f(x)\}$ *qism fazo* A *operator uchun invariant qism fazo bo'ladimi?*

34-§. Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi

Operatorlar nazariyasida spektr tushunchasi eng muhim tushunchalardan biridir. Chiziqli operator spektrini o‘rganish matematik fizika uchun muhimdir. Masalan, kvant mexanikasida sistema Hamiltoniani - bu Hilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatordir, uning spektrini o‘rganish sistema fizik xususiyatlarini o‘rganish uchun muhimdir. Spektr tushunchasini dastlab chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun eslatamiz.

Faraz qilaylik, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin. Agar biror $\lambda \in \mathbb{C}$ son uchun

$$Ax = \lambda\, x$$

tenglama nolmas $x \in \mathbb{C}^n$ yechimga ega bo‘lsa, u holda λ son A operatorning *xos qiymati* deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa*xos vektor* deyiladi. Ma’lumki, har bir $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ chiziqli operatorga $\{a_{ij}\} - n \times n$ matritsa mos keladi va aksincha. Chiziqli algebra kursidan ma’lumki, agar λ son A operatorning xos qiymati bo‘lsa, $det(A - \lambda I) = 0$ bo‘ladi va aksincha. $n \times n$ matritsa determinanti $det(A - \lambda I)$, parametr λ ning $n-$ darajali ko‘phadi bo‘ladi va $det(A - \lambda I) = 0$ tenglama ko‘pi bilan n ta ildizga ega, ya’ni $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ chiziqli operator ko‘pi bilan n ta xos qiymatga ega. Agar λ son A operatorning xos qiymati bo‘lsa $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas va aksincha. Agar λ son A operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, ya’ni $det(A - \lambda I) \neq 0$ bo‘lsa, u holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud va u $\mathbb{C}^n$ fazoning hamma yerida aniqlangan bo‘ladi.

34.1-teorema. $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *chiziqli operator chegaralangandir.*

Isbot. $\mathbb{C}^n$ fazoda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal bazisni tanlaymiz. U holda har bir $x \in \mathbb{C}^n$ vektor yagona usulda

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$

ko‘rinishda tasvirlanadi. Agar A operator $\mathbb{C}^n$ da aniqlangan chiziqli operator bo‘lsa, u holda

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \, Ae_i$$

bo‘ladi. Shunday ekan, chiziqli operator o‘zining $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis vektorlardagi qiymatlari bilan bir qiymatli aniqlanadi. Endi Ax ning normasini baholaymiz:

$$\| \, Ax \, \| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \; \|Ae_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \cdot \|x\| \, .$$

Bu yerda

$$M = \left(\sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Demak, chekli o‘lchamli fazoda aniqlangan har qanday chiziqli operator chegaralangan bo‘lar ekan. Δ

Yuqorida aytilganlarning natijasi sifatida shuni ta’kidlash lozimki, chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki holat sodir bo‘lishi mumkin:

1) λ son uchun $Ax = \lambda \, x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya’ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;

2) λ son uchun $\mathbb{C}^n$ fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Chekli o‘lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to‘plami operatorning *spektri* deyiladi. Agar $\lambda \in \mathbb{C}$ son A operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, u A operatorning *regulyar nuqtasi* deyiladi. Umuman aytganda, chekli o‘lchamli fazolarda spektr termini kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o‘lchamli X fazoda berilgan bo‘lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1 va 2 holatlardan farqli bo‘lgan uchinchi holat ham bo‘ladi, ya’ni:

3) $(A-\lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya’ni $Ax = \lambda x$ tenglama faqat nol yechimga ega, lekin $(A-\lambda I)^{-1}$ operator X ning hamma yerida aniqlanmagan yoki

$$\overline{Im\,(A-\lambda I)} \neq X.$$

34.1-ta’rif. *Agar $\lambda \in \mathbb{C}$ son uchun $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud bo‘lib, u X ning hamma yerida aniqlangan bo‘lsa, λ soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,*

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$$

operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to‘plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

34.2-ta’rif. *A operatorning regulyar bo‘lmagan barcha nuqtalari to‘plami A operatorning spektri deyiladi va u $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.*

34.3-ta’rif. *Agar biror $\lambda \in \mathbb{C}$ son uchun $(A-\lambda I)x = 0$ tenglama nolmas $(x \neq 0)$ yechimga ega bo‘lsa, λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas yechim x esa xos vektor deyiladi.*

Ko‘rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to‘plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo‘lsa, $A-\lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas.

Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

34.4-ta’rif. *a) Barcha xos qiymatlar to‘plami A operatorning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.*

b) Agar λ xos qiymat bo‘lmasa va $\overline{Im(A-\lambda I)} \neq X$, ya’ni $A-\lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich emas. Bunday λ lar to‘plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Endi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar uchun muhim spektr ta’rifini keltiramiz.

34.5-ta'rif. *Agar biror* $\lambda \in \sigma(A)$ *son uchun nolga kuchsiz yaqinlashuvchi* $f_n \in H$ *birlik vektorlar ketma-ketligi mavjud bo'lib*

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)f_n\| = 0$$

bo'lsa, u holda λ *son* $A = A^*$ *operatorning muhim spektriga qarashli deyiladi.* A *operatorning muhim spektri* $\sigma_{ess}(A)$ *bilan belgilanadi.*

Operatorning nuqtali va qoldiq spektrlari o'zaro kesishmaydi. Nuqtali va muhim spektrlar o'zaro kesishishi mumkin.

34.2-teorema. *Agar* $A \in L(X)$ *va* $|\lambda| > \|A\|$ *bo'lsa, u holda* λ *regulyar nuqta bo'ladi.*

Isbot. $A - \lambda I$ operatorni quyidagicha yozib olamiz:

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A). \tag{34.1}$$

Teorema shartidan $\frac{1}{\lambda}A$ operatorning normasi 1 dan kichik ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun 32.5-teoremaga ko'ra, $I - \frac{1}{\lambda}A$ operatorning chegaralangan teskarisi mavjud. Bundan va (34.1) tenglikdan $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Δ

Shunday qilib, chegaralangan $A : X \to X$ operatorning spektri markazi koordinatalar boshida va radiusi $\|A\|$ ga teng yopiq doirada saqlanar ekan.

34.3-teorema. *Agar* $A \in L(X)$ *bo'lsa, u holda* $\sigma(A)$ *yopiq to'plamdir.*

Isbot. Operatorning spektri $\sigma(A)$ regulyar nuqtalar to'plamining to'ldiruvchi to'plami bo'lgani uchun, $\rho(A)$ ning ochiq to'plam ekanligini ko'rsatish yetarli. Endi $\lambda \in \rho(A)$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin, ya'ni $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan bo'lsin. U holda 32.6-teoremaga ko'ra, barcha δ, $\delta < \left(\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|\right)^{-1}$ lar uchun $A - \lambda I - \delta I$ operatorning ham chegaralangan teskarisi mavjud. Demak, $\lambda \in \rho(A)$ nuqta o'zining $\varepsilon = (\,|(A - \lambda I)^{-1}|\,)^{-1} > 0$ atrofi bilan $\rho(A)$ ga qarashli ekan. Bu esa λ nuqtaning $\rho(A)$ to'plam uchun ichki nuqta ekanligini bildiradi. λ ning ixtiyoriyligidan

$\rho(A)$ ning ochiq to‘plam ekanligi kelib chiqadi. Demak, 20.4-teoremaga ko‘ra $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ yopiq to‘plam. Δ

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiaz.

34.4-teorema. $A \in L(H)$ *o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsin: U holda:*

(a) $\sigma_{qol}(A)-$ *bo‘sh to‘plam.*

(b) $\sigma(A)$ *to‘plam* R *ning qismi, ya’ni* $\sigma(A) \subset R$.

(c) A *operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o‘zaro ortogonaldir.*

34.1-misol. $L_2[a,b]$ Hilbert fazosida erkin o‘zgaruvchi x ga ko‘paytirish operatori (33.3-misolga qarang), ya’ni

$$A : L_2[a,b] \to L_2[a,b], \quad (Af)(x) = xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Uning nuqtali, qoldiq va muhim spektrini toping.

Yechish. 33.3-misol natijasiga va $u(x) = x = \overline{x} = \overline{u(x)}$ tenglikka ko‘ra, $A = A^*$. 34.4-teoremaning (a) tasdig‘iga ko‘ra, $\sigma_{qol}(A) = \emptyset$. Ma’lumki,

$$(Af)(x) = \lambda f(x) \quad \text{ya'ni} \quad (x-\lambda)f(x) = 0 \tag{34.2}$$

tenglama ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun yagona nol yechimga ega. Demak, A operator xos qiymatlarga ega emas, ya’ni $\sigma_{pp}(A) = \emptyset$. (34.2) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligidan 32.3-teoremaga ko‘ra, $(A-\lambda I)f(x) = g(x)$ tenglamaning ixtiyoriy $g \in Im\, A$ da yagona yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Ko‘rsatish mumkinki $A - \lambda I$ operatorga teskari operator

$$(A-\lambda I)^{-1}g(x) = (x-\lambda)^{-1}g(x) \tag{34.3}$$

formula bilan aniqlanadi. Agar $\lambda \notin [a,b]$ bo‘lsa, u holda $x - \lambda \neq 0$, natijada $(A-\lambda I)^{-1}$ operator $L_2[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlangan va Banax teoremasiga ko‘ra, u chegaralangan bo‘ladi. Demak, $\lambda \notin [a,b]$ regulyar nuqta, ya’ni $\sigma(A) \subset [a,\, b]$. Lekin (34.3) formula bilan aniqlangan teskari operator

$\lambda \in [a,b]$ bo'lganda $L_2[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlanmagan. Demak, $[a,b] \subset \sigma(A)$. Bulardan, $\sigma(A) = [a,b]$. Endi A operatorning spektridagi ixtiyoriy nuqta uning muhim spektriga qarashli ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda \in [a,b)$ uchun

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n(n+1)}, & agar \quad x \in A_n := [\lambda + \dfrac{1}{n+1},\ \lambda + \dfrac{1}{n}), \\ 0, & agar \qquad\qquad x \in [a,\ b] \backslash A_n \end{cases}$$

deymiz. Ma'lum nomerdan boshlab $\lambda + \dfrac{1}{n} < b$ bo'ladi va bunday nomerlar uchun $\|f_n\| = 1$ tenglik o'rinli. Bundan tashqari har xil n va m larda $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ bo'lgani uchun $(f_n, f_m) = 0$ tenglik o'rinli, ya'ni $\{f_n\}$ ortonormal sistema ekan. Ma'lumki, ixtiyoriy ortonormal sistema nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi, shuning uchun $\{f_n\}$ ketma-ketlik ham nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi. Endi $\|(A - \lambda I)f_n\|$ norma kvadratini hisoblaymiz:

$$\|(A - \lambda I)f_n\|^2 = n(n+1) \int\limits_{\lambda + \frac{1}{n+1}}^{\lambda + \frac{1}{n}} (t - \lambda)^2 dt = \frac{3n^2 + 3n + 1}{3\,n^2(n+1)^2} \to 0, n \to \infty.$$

Demak, ta'rifga ko'ra, $\lambda \in [a,\ b)$ son A operatorning muhim spektriga qarashli ekan. $\lambda = b$ nuqtani A operatorning muhim spektriga qarashli bo'lishini o'quvchiga mustaqil isbotlash uchun qoldiramiz. Shunday qilib, A operatorning spektri faqat muhim spektrdan iborat bo'lib, u $[a,\ b]$ kesma bilan ustma-ust tushadi. Xulosa

$$\sigma_{qol}(A) = \sigma_{pp}(A) = \emptyset, \quad \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) = [a,\ b]. \qquad \Delta$$

34.2. 34.1-misolda qaralgan A operatorni $C[a,\ b]$ Banax fazosida, ya'ni

$$A : C[a,\ b] \to C[a,\ b], \quad Af(x) = xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Uning nuqtali va qoldiq spektrini toping.

Yechish. Ma'lumki, ((34.2) ga qarang) $(Af)(x) = \lambda f(x)$ ya'ni

$$(x - \lambda)f(x) = 0, \quad f \in C[a,b] \tag{34.4}$$

tenglama ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun yagona nol yechimga ega. Demak, A operator xos qiymatlarga ega emas, ya'ni $\sigma_{pp}(A) = \emptyset$. (34.4) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligidan 32.3-teoremaga koʻra $(A - \lambda I)f(x) = g(x)$ tenglamaning ixtiyoriy $g \in ImA$ da yagona yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, $A - \lambda I$ operatorga teskari operator mavjud va u (34.3) formula bilan aniqlanadi. Xuddi 34.1-misoldagi kabi koʻrsatishimiz mumkinki, $\sigma(A) = [a,\ b]$ tenglik oʻrinli. Haqiqatan ham, agar $\lambda \notin [a,\ b]$ boʻlsa, u holda (34.3) ning oʻng tomoni ixtiyoriy $g \in C[a,\ b]$ da uzluksiz funksiya boʻladai, ya'ni $D((A - \lambda I)^{-1}) = C[a,\ b]$ va teskari operatorlar haqidagi Banax teoremasiga koʻra, $(A - \lambda I)^{-1}$ operator chegaralangan boʻladi, demak λ regulyar nuqta, ya'ni $\sigma(A) \subset [a,\ b]$. Agar $\lambda \in [a,\ b]$ boʻlsa, u holda (34.3) formula bilan aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator $C[a,\ b]$ fazoning hamma yerida aniqlanmagan, bundan $[a, b] \subset \sigma(A)$. Bulardan, $\sigma(A) = [a,\ b]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $\sigma(A) = \sigma_{qol}(A)$ ekanligini koʻrsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda \in [a,\ b]$ uchun $A - \lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi

$$Im(A - \lambda I) = \{g \in C[a,\ b] : g(x) = (x - \lambda)f(x)\}$$

$C[a,\ b]$ fazoda zich emas. Haqiqatan ham, $Im(A-\lambda I)$ chiziqli koʻpxillilikdagi ixtiyoriy g uchun $g(\lambda) = 0$ shart bajariladi. Agar biz $f_0(x) \equiv 1$ desak, u holda ixtiyoriy $g \in Im(A - \lambda I)$ uchun

$$\|g - f_0\| = \max_{x \in [a,\ b]} |g(x) - f_0(x)| \geq |g(\lambda) - f_0(\lambda)| = 1$$

tengsizlik oʻrinli. Demak, $Im(A - \lambda I)$ chiziqli koʻpxillilikdan $f_0(x) \equiv 1$ elementga yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Qoldiq spektr ta'rifiga koʻra, ixtiyoriy $\lambda \in [a,\ b]$ uchun $\lambda \in \sigma_{qol}(A)$ munosabat oʻrinli. Bundan $\sigma(A) \subset \sigma_{qol}(A)$ kelib chiqadi. Teskari munosabat $\sigma(A) \supset \sigma_{qol}(A)$ doim oʻrinli. Demak, $\sigma(A) = \sigma_{qol}(A) = [a,\ b]$. Δ

34.1 va 34.2-misollarda bir xil qonuniyat boʻyicha ta'sir qiluvchi A operator har xil $L_2[a,\ b]$ va $C[a, b]$ fazolarda qaralgan. Har ikki holda ham

A operatorning spektri $[a,\ b]$ kesma bilan ustma-ust tushgan, lekin spektrning qismlarida (strukturasida) o‘zgarish bo‘ldi. Birinchi holda (34.1-misolda) $\sigma_{qol}(A) = \emptyset$ edi, ikkinchi holda $\sigma_{qol}(A) = [a,\ b]$.

34.3. Endi ℓ_2 Hilbert fazosida ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots, a_nx_n, \ldots) \tag{34.5}$$

operatorni qaraymiz (29.9, 33.2-misollarga qarang). Uning xos qiymatlarini va spektrini toping.

Yechish. $\sup\limits_{n\geq 1} |a_n| = a < \infty$ bo‘lgan holda, A ning chegaralangan ekanligi 29.9-misolda ko‘rsatilgan. Bundan tashqari $\|A\| = \sup\limits_{n\geq 1} |a_n| = a$ tenglik isbotlangan edi. $Ax = \lambda\, x$ tenglama $\lambda = a_n$ bo‘lganda $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ nolmas yechimga ega. Demak, a_n, $n \in \mathbb{N}$ sonlar A operatorning xos qiymatlari bo‘lar ekan. Agar birorta ham $n \in \mathbb{N}$ da $\lambda \neq a_n$ bo‘lsa, u holda $(A - \lambda I)$ operator teskarilanuvchan bo‘ladi va

$$(A - \lambda I)^{-1}x = -\left(\frac{x_1}{\lambda - a_1}, \frac{x_2}{\lambda - a_2}, \cdots, \frac{x_n}{\lambda - a_n}, \cdots\right). \tag{34.6}$$

Bulardan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = \sigma_{pp}(A)$ tenglik kelib chiqadi. Ma’lumki, xos qiymatlar operatorning spektriga qarashli bo‘ladi, shuning uchun

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset \sigma(A).$$

Ikkinchi tomondan chegaralangan operatorning spektri yopiq to‘plamdir, demak $\sigma_{pp}(A)$ to‘plamning yopig‘i $[\sigma_{pp}(A)]$ uchun

$$\overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}} = [\sigma_{pp}(A)] \subset \sigma(A) \tag{34.7}$$

munosabat o‘rinli. Agar $\lambda \notin [\sigma_{pp}(A)]$ bo‘lsa, u holda (34.6) tenglik bilan aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator ℓ_2 fazoning hamma yerida aniqlangan va chegaralangan bo‘ladi. Bundan $C \backslash [\sigma_{pp}(A)] \subset \rho(A)$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerdan

$$\sigma(A) \subset [\sigma_{pp}(A)]. \tag{34.8}$$

(34.7) va (34.8) munosabatlardan $\sigma(A) = [\sigma_{pp}(A)]$ ga kelamiz. Koʻrsatamizki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha limitik nuqtalari A operatorning muhim spektriga qarashli boʻladi. Buning uchun limitik nuqta λ ga yaqinlashuvchi $\{a_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikni qaraymiz. U holda

$$\|(A - \lambda I)e_{n_k}\| = \|(a_{n_k} - \lambda)e_{n_k}\| = |a_{n_k} - \lambda| \to 0, \quad k \to \infty.$$

$\{e_{n_k}\}$ ketma-ketlik ortonormal sistema boʻlganligi uchun nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi. Demak, λ son A operatorning muhim spektriga qarashli ekan. Δ

34.4. Quyidagicha savol qoʻyamiz. ℓ_2 Hilbert fazosida shunday $A : \ell_2 \to \ell_2$ chiziqli operatorga misol keltiringki, uning spektri oldindan berilgan $M \subset \mathbb{C}$ yopiq toʻplam bilan ustma-ust tushsin.

Yechish. Kompleks sonlar toʻplami $\mathbb{C}$ separabel metrik fazo boʻlgani uchun, uning hamma yerida zich sanoqli D toʻplam mavjud. U holda $M \bigcap D$ toʻplam sanoqli va M ning hamma yerida zich boʻladi. Endi $M \bigcap D$ toʻplam elementlarini $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ nomerlab chiqamiz va 34.3-misolda qaralgan, (34.5) tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorni qaraymiz. 34.3-misolda koʻrsatilganidek

$$\sigma(A) = [\sigma_{pp}(A)] = \overline{M \bigcap D} = M. \qquad \Delta$$

Bu yerda, biz $M = \mathbb{C}$ deb olishimiz ham mumkin. Demak, spektri butun kompleks sonlar toʻplami $\mathbb{C}$ bilan ustma-ust tushuvchi chiziqli operator mavjud ekan. Bu holda ta'rifga koʻra, $\rho(A) = \emptyset$ boʻladi. Shuni ta'kidlaymizki, agar $M \subset \mathbb{C}$ yopiq toʻplam chegaralangan boʻlsa, u holda spektri M bilan ustma-ust tushuvchi A operator ham chegaralangan boʻladi va aksincha.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Chekli oʻlchamli fazolarda operatorning spektri faqat chekli sondagi xos qiymatlardan iborat ekanligini koʻrsating.*

2. $A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1], \quad (Af)(x) = u(x)f(x)$ *operatorning spektrini toping. Bu yerda* $u : [a, b] \to \mathbb{C}-$ *uzluksiz funksiya.*

3. $L_2[-\pi, \pi]$ *fazoda integral operatorning xos qiymatlarini toping:*

$$(Af)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin ny \, f(y) dy.$$

4. *Birlik operatorning spektrini toping.*

5. $A : L_2[-1, 1] \to L_2[-1, 1], \ (Af)(x) = f(x) - \int_{-1}^{1} (1 + xy) f(y) dy$ *operatorning xos qiymatlarini toping.*

6. *Yuqorida keltirilgan* $A : L_2[-1, 1] \to L_2[-1, 1]$ *operatorning* λ *nuqtadagi rezolventasini toping.*

7. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *lar* A *chiziqli operatorning* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari bo'lsin.* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *larning chiziqli erkli (chiziqli bog'lanmagan) ekanligini isbotlang.*

8. *Spektri birlik doiradan iborat bo'lgan operatorga misol keltiring.*

9. *Spektri* $\emptyset$ *to'plamdan iborat bo'lgan chiziqli operator mavjudmi? Mavjud bo'lsa misol keltiring.*

10. *34.1-misolda* $\lambda = b$ *nuqtani* A *operatorning muhim spektriga qarashli ekanligini isbotlang.*

IX bob. Kompakt operatorlar va integral tenglamalar

Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi mavzusida (34-§ ga qarang) koʻrsatildiki, chekli oʻlchamli fazolarda aniqlangan A chiziqli operatorning spektri chekli sondagi xos qiymatlardan iborat. Chekli oʻlchamli fazolarda aniqlangan chiziqli operatorlardan farqli oʻlaroq, cheksiz oʻlchamli fazolardagi ixtiyoriy chiziqli operatorning spektrini toʻla oʻrganish ancha qiyin masaladir. Lekin baʼzi bir sinf operatorlarining spektrini biz toʻlaroq oʻrganishimiz mumkin. Operatorlarning bunday sinfi kompakt operatorlar deb nomlangan. Bu sinf operatorlari oʻzining xossalari boʻyicha chekli oʻlchamli operatorlarga oʻxshab ketadi va ularning spektri yetarlicha aniq izohlanadi. Shunday qilib bu bob kompakt operatorlar, ularning muhim sinfi integral operatorlar va integral tenglamalarni yechish usullariga bagʻishlangan.

Bu bob 6 paragrafdan (35-40-§§ lardan) iborat boʻlib, unda biz kompakt operatorlar va integral tenglamalarning asosiy xossalarini oʻrganamiz.35-36-§§ lar kompakt operatorlarning asosiy xossalariga bagʻishlangan boʻlib, unda Banax va Hilbert fazolaridagi kompakt operatorlarning muhim xossalari ochib berilgan. 35- § da chekli oʻlchamli fazolardagi chiziqli operatorlarning kompaktligi va chekli oʻlchamli operatorlarning kompaktligi koʻrsatilgan. Cheksiz oʻlchamli fazolarda birlik operatorning kompakt emasligi koʻrsatilgan. 36- § da esa kompakt operatorning asosiy xossalari isbotlangan. Jumladan, X Banax fazosini Y Banax fazosiga akslantiruvchi kompakt operatorlar toʻplami $-K(X,Y)$ ning toʻla normlangan fazo boʻlishi isbotlangan. Kompakt operatorga qoʻshma operatorning kompaktligi isbotlangan. Agar $\{A_n\}$ kompakt operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma boʻyicha yaqinlashsa, u hoda limitik operator A ning kompaktligi koʻrsatilgan. Paragraf oxirida Banax fazolarida aniqlangan kompakt operatorlar xossalari Hilbert fazosidagi oʻz-oʻziga qoʻshma kompakt operatorlarga taalluqli boʻlgan ayrim faktlar bilan to'ldirilgan. Xususan, bunday operatorlar uchun chiziqli algebra kursidan ma'lum bo'lgan matritsalarni diagonal ko'rinishga keltirish haqidagi teoremaga o'xshash Hilbert-Shmidt teoremasi isbotlangan.

37-38-§§ larda kompakt operator xossalari integral tenglamalarga tadbiq qilinadi. II tur Fredholm integral tenglamasi yechimining mavjudlik masalasi, T kompakt operator uchun 1 soni xos qiymat bo'lish yoki bo'lmaslik masalasi bilan bog'lanadi. Agar 1 soni T kompakt operatorning xos qiymati bo'lmasa, $u = f + Tu$ integral tenglama istalgan f uchun yagona yechimga ega bo'ladi. Agar 1 soni T kompakt operatorning xos qiymati bo'lsa, u holda $u = f + Tu$ tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f funksiya bir jinsli $g = T^*g$ tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlanadi. Bundan tashqari $u = Tu$ va $g = T^*g$ bir jinsli tenglamalarning chiziqli bog'lanmagan yechimlari soni chekli va o'zaro teng ekanligi isbotlanadi. Bu tasdiqlar Fredholmning fundamental teoremalari nomi bilan mashhurdir.

Fredholm integral tenglamasining ((39.3) ga qarang) yechimlari uch xil metod yordamida va uch xil formada beriladi. Bular:

1) Ketma-ket o'rniga qo'yish usuli bo'lib, bu usul Neyman (Nuemann), Volterra (Volterra), Liuvill (Liouville)lar tomonidan rivojlantirilgan. Bu usulda u yechim λ parametrning darajali qatori shaklida ifodalanadi va λ parametr darajasi oldidagi koeffitsiyentlar x ning funksiyasidan iborat. Bu darajali qator λ parametrning absolyut qiymati biror chekli sondan kichik bo'lgandagi barcha qiymatlarida yaqinlashadi [7], [10].

2) Ikkinchi metod Fredholmga tegishli bo'lib, u yechim λ parametr darajalaridan iborat ikkita qatorning nisbati shaklida ifodalanadi. Suratdagi qator koeffitsiyentlari x ga bog'liq bo'lib, maxrajdagi qator koeffitsiyentlari esa x ga bog'liq emas. Har ikkala qatorlarning yaqinlashish radiuslari cheksiz bo'ladi [10].

3) Uchinchi metod Hilbert va Shmidt (Schmidt) lar tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, u yechim (37.6) integral operatorning xos funksiyalari (fundamental funksiyalari) va $f(x)$ ning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanadi [1], [7]. 37 va 38-paragraflarda Hilbert-Shmidt metodi bilan misollar yechib ko‘rsatilgan.

39-paragrafda λ parametrli ikkinchi tur Fredholm integral tenglamalari yechimlari xossalari o‘rganilib, ular integral operatorlar qatnashgan integral tenglamalarni yechishga qo‘llaniladi. Chiziqli integral tenglamalarni yechishning yuqorida bayon qilingan birinchi usuli keltiriladi va u misollarga tadbiq qilinadi. Bu paragrafda $C[a,\ b]$ fazoda λ parametrli ikkinchi tur Fredholm integral tenglamalarini yechish usullari bilan shug‘ullanamiz. Dastlab Fredholm va Volterra tipidagi integral tenglamalar uchun ketma-ket o‘rniga qo‘yish usulini bayon qilamiz. Keyin esa λ parametrli ikkinchi tur Fredholm integral tenglamalarini ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan yechamiz.

40-paragrafda esa integral tenglamalarni Fredholm tomonidan berilgan yechish usulini batafsilroq bayon qilamiz.

35-§. Kompakt operatorlar

Dastlab normalangan fazodagi kompakt, nisbiy kompakt to‘plamlarga ta’rif beramiz. Chunki kompakt operatorlar shu tushunchalar asosida ta’riflanadi. Biz normalangan fazolarda kompaktlik kriteriylarini ham keltiramiz. Keyin esa asosiy tushuncha kompakt operatorga ta’rif beramiz va unga misollar keltiramiz.

Banax fazosida kompakt operatorlar. Bizga $X -$ Banax fazosi va $M \subset X$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar M to‘plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan M da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa, M ga *kompakt to‘plam* deyiladi (21.6-ta’rifga qarang). Agar N to‘plamning yopig‘i $[N]$ kompakt to‘plam bo‘lsa, u holda N *nisbiy kompakt to‘plam* deyiladi (21.7-ta'rifga qarang). To'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning to'la chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli (21.5-teoremaga qarang). Chekli o'lchamli fazolarda to'plam kompakt bo'lishi uchun (21.4-teoremaga qarang) uning chegaralangan va yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir. Asosiy funksional fazolardan biri $C[a,\ b]$ fazodir. Bu fazodagi to'plamning nisbiy kompaktlik kriteriysi Arsela teoremasi (21.6-teoremaga qarang) yordamida bayon qilingan. $\ell_p,\ p \geq 1$ fazoda to'plam nisbiy kompakt bo'lishining zarur va yetarli shartlari 21.8-teoremada keltirilgan.

Chekli o'lchamli fazolarda aniqlangan chiziqli operatorlardan farqli o'laroq, cheksiz o'lchamli fazolardagi ixtiyoriy chiziqli operatorning spektrini to'la o'rganish ancha qiyin masaladir. Lekin kompakt operatorlarning spektrini to'laroq o'rganish mumkin. Kompakt operatorlar xossalariga ko'ra chekli o'lchamli operatorlarga o'xshab ketadi va ularning spektri yetarlicha aniq tavsiflanadi. Bundan tashqari, kompakt operatorlar ko'plab tatbiqlarga ega, masalan integral tenglamalar nazariyasida. Bu nazariyaning bir qismini biz keyingi 37 – 40 - paragraflarda keltiramiz.

35.1-ta'rif. *Agar* $A \in L(X,\ Y)$ *va* $\dim ImA < \infty$ *bo'lsa, u holda* A *ga chekli o'lchamli operator deyiladi. Agar* $\dim ImA = n$ *bo'lsa, u holda* A *ga* n *o'lchamli operator deyiladi.*

35.2-ta'rif. *Bizga* $A:\ X \to Y$ *operator berilgan bo'lsin. Agar* A *operator* X *dagi har qanday chegaralangan to'plamni* Y *dagi nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa, u holda* A *kompakt operator yoki to'la uzluksiz operator deyiladi.*

Chekli o'lchamli fazolarda to'plam kompakt bo'lishi uchun (21.4-teorema) uning chegaralangan va yopiq bo'lishi yetarli va zarurdir. Demak, chekli o'lchamli fazodagi har qanday chegaralangan to'plam nisbiy kompaktdir va aksincha (21.1-natijaga qarang).

35.1-teorema. $A:\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *chiziqli operator kompaktdir.*

Isbot. $\mathbb{C}^n$ fazoda aniqlangan chiziqli A operatorning chegaralanganligi 34.1-teoremada isbotlangan edi. A chegaralangan operator bo'lganligi uchun, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga o'tkazadi. Har qanday chegaralangan to'plam esa chekli o'lchamli fazoda nisbiy kompaktdir. Demak, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ chiziqli operator kompaktdir. Δ

35.2-teorema. $A \in L(X,\, Y)$, $\dim ImA < \infty$ *bo'lsin. U holda* A *kompakt operator bo'ladi.*

Isbot. A chegaralangan operator bo'lganligi uchun ixtiyoriy chegaralangan M to'plamni yana chegaralangan $A(M)$ to'plamga akslantiradi. Ma'lumki, $A(M) \subset ImA$ va $\dim ImA < \infty$ bo'lgani uchun $A(M)$ nisbiy kompaktdir. Demak, $A-$ kompakt operator. Δ

35.1-misol. $\mathbb{C}^n$ Evklid fazosidagi $Ix = x$ birlik operatorni kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Birlik operatorning chiziqliligi 29.1-misolda ko'rsatilgan. 35.1-teoremaga ko'ra $Ix = x$, $x \in \mathbb{C}^n$ birlik operator kompakt bo'ladi. Δ

Cheksiz o'lchamli fazolarda kompaktlik talabi uzluksizlik talabidan ancha kuchliroq hisoblanadi. Hozir biz uzluksiz, lekin kompakt bo'lmagan operatorga misol keltiramiz.

35.2. H Hilbert fazosidagi $Ix = x$ birlik operatorning kompakt emasligini ko'rsating.

Yechish. Birlik operatorning uzluksizligi uning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi (29.1-misolga qarang). Endi uning kompakt emasligini ko'rsatamiz. H dagi $B[\theta,\, 1] := \{\phi \in H : \|\,\phi\,\| \leq 1\}$ birlik yopiq sharni qaraymiz. Bu to'plam chegaralangan to'plam bo'ladi, uning I akslantirishdagi tasviri (aksi) o'ziga teng. Lekin birlik shar nisbiy kompakt emas. Buni isbotlash uchun H da ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemani olamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$

uchun $\phi_n \in B[\theta,\ 1]$. Agar $n \neq m$ bo‘lsa, u holda

$$\|\phi_n - \phi_m\|^2 = (\phi_n - \phi_m,\ \phi_n - \phi_m) = (\phi_n,\ \phi_n) + (\phi_m,\ \phi_m) = 2.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki $\{\phi_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Demak, birlik shar $B[\theta,\ 1]$ nisbiy kompakt to‘plam emas ekan. Bu o‘z navbatida birlik operatorning kompakt emasligini bildiradi. Δ

Cheksiz o‘lchamli Banax fazolarida birlik sharning nisbiy kompakt to‘plam emasligi quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

35.1-lemma. *X – chiziqli normalangan fazo va $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ lar X dagi chiziqli erkli sistema bo‘lsin. X_n bilan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlarning chiziqli qobig‘idan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. U holda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ vektorlar mavjud:*

$$1)\ \|y_n\| = 1; \quad 2)\ y_n \in X_n; \quad 3)\ \rho(y_n,\ X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}.$$

Isbot. Lemma shartiga ko‘ra $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elementlar sistemasi chiziqli erkli. Shuning uchun, $x_n \notin X_{n-1}$ va X_{n-1} ning yopiq chiziqli ko‘pxillilik ekanligidan $\rho(x_n,\ X_{n-1}) = \alpha > 0$ bo‘ladi. Shunday $x^* \in X_{n-1}$ element mavjudki $\|x^* - x_n\| < 2\alpha$ bo‘ladi. U holda

$$\alpha \leq \rho\left(x_n - x^*,\ X_{n-1}\right).$$

Natijada

$$y_n = \frac{x^* - x_n}{\|x^* - x_n\|}$$

vektor 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi vekror bo‘ladi. y_1 vektor sifatida $x_1 / \|x_1\|$ vektorni olish yetarli. Δ

Bu lemmadan foydalanib, cheksiz o‘lchamli Banax fazosidagi yopiq birlik sharda yotuvchi shunday $\{y_n\}$ ketma-ketlik qurish mumkinki, $\|y_n - y_m\| >$

$1/2, \quad n \neq m$ shart bajariladi. Bunday ketma-ketlik o'zida birorta ham yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlamaydi. Demak, cheksiz o'lchamli Banax fazosidagi birlik shar nisbiy kompakt to'plam emas. Bu yerdan quyidagi natija kelib chiqadi.

35.1-natija. *Agar X – cheksiz o'lchamli Banax fazosi bo'lsa, u holda $I : X \to X, \quad Ix = x$ operator kompakt emas.*

35.3-ta'rif. *$X, \ Y$ – Banax fazolari bo'lsin. Agar $A : X \to Y$ chiziqli operator X fazodagi birlik sharni Y fazodagi nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa, A ga kompakt operator deyiladi.*

35.3-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

35.4-ta'rif. *Bizga $A \in L(X, \ Y)$ $(X, \ Y$ – Banax fazolari$)$ operator va ixtiyoriy $\{x_n\} \subset X$ chegaralangan ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, u holda A ga kompakt operator deyiladi.*

35.3-misol. Berilgan har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$A_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad A_n x = (\alpha_1 x_1, \ \alpha_2 x_2, \ \ldots, \alpha_n x_n, \, 0, \, 0, \ldots)$$

operatorning kompaktligini ko'rsating.

Yechish. A_n operatorning kompakt ekanligini ko'rsatishda 35.2-teoremadan foydalanamiz. Chunki A_n chegaralangan operator va $\dim ImA_n = n < \infty$. Haqiqatan ham,

$$\|A_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot x_k|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^2 \cdot \| \, x \, \|^2 .$$

Demak, A_n chegaralangan va uning normasi uchun

$$\|A_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

tengsizlik o'rinli. A_n operatorning qiymatlar sohasi ImA_n esa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorlar sistemasidan hosil bo'lgan qism fazo bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun $\dim ImA_n = n$. 35.2-teoremaga ko'ra, A_n kompakt operator bo'ladi. Δ

35.4. $L_p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$ fazoda quyidagi integral operatorning kompaktligini ko'rsating.

$$(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\ f(y)\ dy.$$

Yechish. Dastlab A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz.

$$\| Af \|^p = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, f(y)\ dy \right|^p dx \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(x-y)|^q\ \ dy \right\}^{\frac{p}{q}}\ dx \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^p\, dy.$$

Bu yerda biz Gyolder tengsizligidan foydalandik. p va q lar (19.16) shart bilan bog'langan. Agar $|\cos(x-y)| \leq 1$ tengsizlikni e'tiborga olsak,

$$\| Af \|^p \leq 2\pi \cdot (2\pi)^{\frac{p}{q}} \| f \|^p \quad \Longrightarrow \quad \| Af \| \leq 2\pi \cdot \| f \|$$

ga ega bo'lamiz. Bundan $\| A \| \leq 2\pi$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar biz $\cos(x-y) = \cos x\ \cos y + \sin x\ \sin y$ ayniyatdan foydalansak,

$$(Af)(x) = \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, f(y)\, dy + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, f(y)\, dy = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda

$$\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, f(y)\, dy, \quad \beta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, f(y)\, dy.$$

Demak, ixtiyoriy $g = Af$ element $\cos x$ va $\sin x$ larning chiziqli kombinatsiyasi shaklida tasvirlanadi. Bundan $\dim ImA = 2$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, 35.2-teoremaga ko'ra A operator kompakt bo'ladi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *$\mathbb{C}^n$ va ℓ_2 fazolarda birlik shar nisbiy kompakt to'plam bo'ladimi?*

2. *ℓ_p fazoda $Ax = (x_1, 2x_2, 4x_3, 0, \ldots)$ operatorning o'lchamini toping.*

3. *ℓ_2 fazodagi birlik sharning $A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = \big(x_1, 2^{-1}x_2, 3^{-1}x_3, 0, \ldots\big)$ akslantirishdagi tasvirining nisbiy kompakt to'plam bo'lishini ko'rsating.*

4. *Chekli o'lchamli operatorlarga misollar keltiring.*

36-§. Kompakt operatorlarning asosiy xossalari

Bu paragrafda biz kompakt operatorlar to'plamini chiziqli normalangan fazo tashkil qilishini ko'rsatamiz. Agar X Banax fazosini Y Banax fazosiga akslantiruvchi barcha kompakt operatorlar to'plamini $K(X, Y)$ orqali belgilaymiz va uni Banax fazosi bo'lishini isbotlaymiz.

36.1-lemma. *Agar Y Banax fazosi bo'lsa, $K(X, Y)$ to'plam $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazoda chiziqli ko'pxillilik bo'ladi.*

Isbot. Lemmani isbotlash uchun kompakt operatorlarning yig'indisi va songa ko'paytmasi yana kompakt operator bo'lishini ko'rsatish yetarli. Faraz qilaylik, $A, B \in K(X, Y)$ va $\{x_n\} \subset X$ ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin. $\{(A + B)\, x_n\} \subset Y$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatamiz. A kompakt operator bo'lgani uchun $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Ax_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. B kompakt operator bo'lgani uchun $\{Bx_{n_k}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Bx_{n_{k_l}}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Demak, $\{(A+B)x_{n_{k_l}}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Bundan $A + B$ operatorning kompakt ekanligi kelib chiqadi (35.4-ta'rifga qarang). Kompakt operatorning songa ko'paytmasi yana kompakt operator bo'lishi shunga o'xshash ko'rsatiladi. Δ

Endi $K(X, Y)$ qism fazoning yopiqligini isbotlaymiz.

36.1-teorema. *Agar Y Banax fazosi bo'lsa, u holda $K(X, Y)$ ham Banax fazosi bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\{A_n\} \subset K(X, Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin. $A_n \in K(X, Y)$ ekanligidan $A_n \in L(X, Y)$ ekanligi kelib chiqadi. $L(X, Y)$ fazoning to'laligidan (31.1-teoremaga qarang) $\{A_n\}$ fundamental ketma-ketlikning biror $A \in L(X, Y)$ operatorga yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi limitik operator A ning kompaktligini isbotlaymiz. Buning uchun chegaralangan $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik qanday bo'lmasin, $\{Ax_n\} \subset Y$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatish kifoya.

A_1 kompakt operator bo'lganligi uchun $\{A_1 x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots \tag{36.1}$$

qismiy ketma-ketlik shunday bo'lsinki, $\left\{A_1 x_n^{(1)}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsin. Endi $\left\{A_2 x_n^{(1)}\right\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. A_2 kompakt operator bo'lganligi uchun shunday $\left\{x_n^{(2)}\right\} \subset \left\{x_n^{(1)}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, $\left\{A_2 x_n^{(2)}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda $\left\{A_1 x_n^{(2)}\right\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Yuqoridagidek mulohaza yurgizib, $\left\{x_n^{(2)}\right\}$ ketma-ketlikdan shunday $\left\{x_n^{(3)}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, bunda $\left\{A_1 x_n^{(3)}\right\}$, $\left\{A_2 x_n^{(3)}\right\}$, $\left\{A_3 x_n^{(3)}\right\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz va

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \tag{36.2}$$

diagonal ketma-ketlikni olamiz. Bu ketma-ketlikni $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ operatorlar yaqinlashuvchi ketma-ketliklarga o'tkazadi. (36.2) ketma-ketlikni A operator ham yaqinlashuvchi ketma-ketlikka o'tkazishini ko'rsatamiz. Y Banax fazosi bo'lganligi uchun $\left\{Ax_n^{(n)}\right\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko'rsatish kifoya:

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| = \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)} + A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} + A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)}\right\| + \left\|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\right\| + \left\|A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\|. \qquad (36.3)$$

$\left\{x_n^{(n)}\right\} \subset X$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lganligi uchun, shunday $C > 0$ mavjudki, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da $\left\|x_n^{(n)}\right\| \leq C$ bo'ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $k \in \mathbb{N}$ sonni shunday tanlaymizki,

$$\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

tengsizlik bajarilsin. Shunday n_0 soni mavjudki, barcha $n, m > n_0$ lar uchun

$$\left\|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Bu shartlar bajarilganda (36.3) dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3C}C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C}C = \varepsilon.$$

Demak, $n, m \to \infty$ da $\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \to 0$. Bu esa $\left\{Ax_n^{(n)}\right\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko'rsatadi. Y to'la fazo bo'lganligi uchun u yaqinlashuvchi. Demak, A – kompakt operator. Δ

36.1-natija. *Agar $\{A_n\} \subset K(X, Y)$ ($Y-$ Banax fazosi) ketma-ketlik A operatorga norma bo'yicha yaqinlashsa, u holda A ham kompakt operator bo'ladi.*

Natijaning isboti 36.1-teoremaning isbotidan bevosita kelib chiqadi.

36.2-teorema. *Agar $A \in K(X)$ va $B \in L(X)$ ($X-$ Banax fazosi) bo'lsa, u holda AB va BA operatorlar ham kompakt operatorlar bo'ladi.*

Isbot. Agar $M \subset X$ to'plam chegaralangan bo'lsa, u holda $B(M)$ ham chegaralangan to'plam bo'ladi. A kompakt operator bo'lgani uchun $A(B(M))$ to'plam – nisbiy kompakt to'plamdir. Bu esa AB operatorning kompakt ekanligini isbotlaydi.

Endi BA operatorning kompaktligini ko'rsatamiz. Buning uchun chegaralangan $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik qanday bo'lmasin, $\{BAx_n\} \subset X$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatish yetarli. A kompakt operator bo‘lgani uchun $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Ax_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. B operator uzluksiz bo‘lgani uchun $\{BAx_{n_k}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak, BA kompakt operator ekan. Δ

36.2-natija. *X cheksiz o‘lchamli Banax fazosi bo‘lsin. U holda $A \in K(X)$ operatorning chegaralangan teskarisi mavjud emas.*

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik, ya’ni A^{-1} mavjud va chegaralangan bo‘lsin. U holda $I = A^{-1}A$ birlik operator cheksiz o‘lchamli X Banax fazosida kompakt bo‘lar edi, bu esa 35.1-natijaga zid. Bu qarama-qarshilik natijani isbotlaydi. Δ

36.3-teorema. *Kompakt operatorga qo‘shma operator kompaktdir.*

Isbot. Bizga X Banax fazosini o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi A kompakt operator berilgan bo‘lsin. A ga qo‘shma bo‘lgan A^* operator X^* dagi har qanday chegaralangan to‘plamni nisbiy kompakt to‘plamga akslantirishini ko‘rsatamiz. Normalangan fazodagi har qanday chegaralangan to‘plam qandaydir sharda saqlanadi, shuning uchun A^* operator X^* dagi birlik shar S^* ni (35.3-ta’rifga qarang) nisbiy kompakt to‘plamga o‘tkazishini ko‘rsatish yetarli.

X^* dagi uzluksiz funksionallarni X fazoda emas, faqat kompakt $\overline{A(S)}-$ to‘plamda aniqlangan funksional sifatida qaraymiz. Bu yerda S to‘plam X dagi birlik shar. Bu holda S^* dagi funksionallarga mos keluvchi funksiyalar to‘plami Φ tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $\|\varphi\| \leq 1$ bo‘lsa, u holda

$$\sup_{x\in\overline{A(S)}} |\varphi(x)| = \sup_{x\in A(S)} |\varphi(x)| \leq \|\,\varphi\,\| \cdot \sup_{x\in S} \|\,Ax\,\| \leq \|\,A\,\|\,,$$

$$|\,\varphi(x) - \varphi(y)\,| \leq \|\,\varphi\,\| \cdot \|\,x-y\| \leq \|\,x-y\|\,.$$

Arsela teoremasiga ko‘ra, Φ to‘plam $C\left[\overline{A(S)}\right]$ fazoda nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C\left[\overline{A(S)}\right]$ dagi Φ to‘plam X^* fazodagi

$A^*(S^*)$ to'plamga izometrik bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $g_1, g_2 \in S^*$ bo'lsa, u holda

$$\|A^*g_1 - A^*g_2\| = \sup_{x\in S} |(A^*g_1 - A^*g_2, x)| = \sup_{x\in S} |(g_1 - g_2, Ax)| =$$
$$= \sup_{z\in A(S)} |(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).$$

Φ nisbiy kompakt to'plam bo'lganligi uchun u to'la chegaralangan bo'ladi. O'z navbatida, unga izometrik bo'lgan $A^*(S^*)$ to'plam ham to'la chegaralangan bo'ladi. Demak, $A^*(S^*)$ - nisbiy kompakt to'plam. Δ

36.4-teorema. *X Banax fazosida A kompakt operator va ixtiyoriy $\rho > 0$ son berilgan bo'lsin. A operatorning absolyut qiymati bo'yicha ρ dan katta bo'lgan xos qiymatlariga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarining soni cheklidir.*

Isbot. Avvalo shuni ta'kidlaymizki, A operatorning nolmas λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan tashkil topgan X_λ invariant qism fazo chekli o'lchamli bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $X_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ qism fazoning o'lchami cheksiz bo'lganda edi, u holda A operator X_λ qism fazoda va demak, butun X da kompakt bo'lmas edi. Shu sababli, teoremaning isbotini yakunlash uchun, agar $\{\lambda_n\} -$ kompakt A operatorning nolmas, har xil xos qiymatlarining ixtiyoriy ketma-ketligi bo'lsa, u holda $\lambda_n \to 0$ ekanligini ko'rsatish yetarli. O'z navbatida λ_n^{-1} ketma-ketlik chegaralangan bo'ladigan har xil λ_n xos qiymatlarning cheksiz ketma-ketligi mavjud emasligini ko'rsatish yetarli.

Faraz qilaylik, bunday ketma-ketlik mavjud bo'lsin va x_n vektor λ_n xos qiymatga mos keluvchi xos vektor bo'lsin. Ma'lumki, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ vektorlar chiziqli erkli bo'ladi. X_n bilan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli qobig'ini belgilaymiz, ya'ni X_n to'plam

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

ko'rinishdagi elementlardan tashkil topgan. Har bir $y \in X_n$ uchun quyidagiga egamiz

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ay = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) x_k.$$

Bu yerdan ko'rinadiki,

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ay \in X_{n-1}.$$

Endi $\{y_n\}$ ketma-ketlikni shunday tanlaymizki,

$$1)\ y_n \in X_n; \quad 2)\ \|y_n\| = 1; \quad 3)\ \rho(y_n,\, X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}$$

shartlar bajarilsin (bunday ketma-ketlikning mavjudligi 35.1-lemmada isbotlangan). Agar $\left\{\lambda_n^{-1}\right\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, u holda $\left\{\lambda_n^{-1} y_n\right\}$ ketma-ketlik X da chegaralangan bo'ladi. Lekin shu bilan birga, $\left\{A(\lambda_n^{-1} y_n)\right\}$ ketma-ketlik o'zida birorta ham yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlamaydi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $n > m$ da

$$\left\| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| = \left\| y_n - \left(y_n - \frac{1}{\lambda_n} Ay_n + A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right)\right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Chunki

$$y_n - \frac{1}{\lambda_n} Ay_n + A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \in X_{n-1}.$$

Hosil qilingan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi. Δ

36.1-misol. ℓ_1 Banax fazosida

$$A : \ell_1 \to \ell_1, \ \ Ax = \left(x_1,\, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots\right)$$

operatorni qaraymiz. Uning kompaktligini ko'rsating.

Yechish. Agar biz A operatorga tekis yaqinlashuvchi kompakt operatorlar ketma-ketligi mavjud ekanligini ko'rsatsak, u holda 36.1-natijaga ko'ra, A kompakt operator bo'ladi. A_n operatorlarni quyidagicha tanlaymiz:

$$A_n : \ell_1 \to \ell_1, \ \ A_n x = \left(x_1,\, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, 0, 0, \ldots\right).$$

A_n operatorlarning chiziqliligi oson tekshiriladi. Ularning chegaralangan ekanligini koʻrsatamiz.

$$\|A_n x\| = \sum_{1\le k<n} \left|\frac{1}{k} x_k\right| \le \sum_{1\le k<\infty} |x_k| \le \| x \| .$$

Bu yerdan $\|A_n\| \le 1$ tengsizlik kelib chiqadi. 35.3-misolda koʻrsatilganidek $\dim ImA_n = n$ tenglik oʻrinli. Demak, A_n chegaralangan va $n-$ oʻlchamli operator. 35.2-teoremaga koʻra, A_n kompakt operator. Bundan tashqari A_n operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis yaqinlashadi. Haqiqatan ham,

$$\|(A - A_n)x\| = \sum_{n+1\le k<\infty} \left|\frac{1}{k} x_k\right| \le \frac{1}{n+1} \sum_{n+1\le k<\infty} |x_k| \le \frac{1}{n+1} \| x \| .$$

Bu yerdan

$$\|A - A_n\| \le \frac{1}{1+n} \to 0, \quad n \to \infty$$

ekanligini olamiz. 36.1-natijaga koʻra, A kompakt operator boʻladi. Δ

Hilbert fazolarida kompakt operatorlar. Yuqorida biz Banax fazosida aniqlangan kompakt operatorlar haqida soʻz yuritdik va ularning ba'zi xossalarini isbotladik. Hozir biz bu ma'lumotlarni Hilbert fazosidagi kompakt operatorlarga taalluqli boʻlgan ayrim faktlar bilan toʻldiramiz.

Bizga H Hilbert fazosi, uning x nuqtasi hamda $\{x_n\} \subset H$ ketma-ketligi berilgan boʻlsin.

36.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $y \in H$ *uchun* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y)$ *boʻlsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik* x *ga kuchsiz yoki kuchsiz ma'noda yaqinlashuvchi deyiladi va* $x_n \xrightarrow{w} x$ *shaklda belgilanadi.*

36.2-ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ *boʻlsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik* x *ga kuchli ma'noda yaqinlashuvchi deyiladi va* $x_n \to x$ *shaklda belgilanadi.*

Endi H Hilbert fazosida kuchsiz ma'nodagi nisbiy kompakt toʻplam ta'rifini beramiz.

36.3-ta'rif. *Agar* $M \subset H$ *toʻplamning ixtiyoriy* $\{x_n\}$ *ketma-ketligidan* *kuchsiz ma'noda yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, M ga kuchsiz ma'nodagi kompakt to'plam deyiladi.*

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

36.5-teorema. *$M \subset H$ to'plam kuchsiz ma'noda kompakt bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Biz har qanday chegaralangan to'plamni nisbiy kompakt to'plamga akslantiruvchi A operatorni *kompakt operator* deb atadik. 36.5-teoremaga ko'ra H dagi hamma chegaralangan to'plamlar (va faqat ular) - kuchsiz kompakt. Demak, Hilbert fazosidagi kompakt operatorlarni har qanday kuchsiz kompakt to'plamni nisbiy kompakt to'plamga o'tkazuvchi operator sifatida aniqlash mumkin. Va nihoyat, ayrim hollarda Hilbert fazosidagi operatorlarning kompaktligini tekshirishda quyidagi ta'rif qulay.

36.4-ta'rif. *Agar H Hilbert fazosida aniqlangan A operator har qanday kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlikni kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka akslantirsa, u holda A kompakt operator deyiladi.*

Haqiqatan ham, bu shart bajarilgan bo'lsin va $M \subset H$ chegaralangan to'plam bo'lsin. M to'plamning har qanday cheksiz qism to'plami o'zida kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlikni saqlaydi. Agar bu ketma-ketlik A operator ta'sirida kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka o'tkazilsa, u holda $A(M)-$ nisbiy kompakt.

Aksincha, $A-$kompakt operator va $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga kuchsiz ma'noda yaqinlashsin. U holda $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik o'zida kuchli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlaydi. Shu bilan birga $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik, A ning uzluksizligiga ko'ra, Ax ga kuchsiz yaqinlashadi. Bu yerdan kelib chiqadiki, $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik bittadan ortiq limitik nuqtaga ega emas. Demak, $\{Ax_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik.

Endi biz o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan kompakt operatorlarni batafsilroq o'rganamiz. Xususan, bunday operatorlar uchun chiziqli algebra kursidan ma'lum bo'lgan matritsalarni diagonal ko'rinishga keltirish haqidagi teoremaga o'xshash Hilbert-Shmidt teoremasini isbotlaymiz. Avval quyidagi ikkita tasdiqni isbotlaymiz.

36.2-lemma. *H kompleks Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan chegaralangan A operatorning barcha xos qiymatlari haqiqiydir.*

Isbot. Haqiqatan ham, $Ax = \lambda x$ tenglama $x \neq \theta$ yechimga ega bo'lsin. U holda

$$\lambda(x,\, x) = (\lambda x,\, x) = (Ax,\, x) = (x,\, Ax) = (x,\, \lambda x) = \overline{\lambda}(x,\, x).$$

Bu yerdan $\lambda = \overline{\lambda}$. Δ

36.3-lemma. *O'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonaldir.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, hamda $\lambda - \mu \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\lambda(x,\, y) = (Ax,\, y) = (x,\, Ay) = (x,\, \mu y) = \mu(x,\, y).$$

Bu yerdan $(\lambda - \mu)\,(x,\, y) = 0$, ya'ni $(x,\, y) = 0$. Demak, $x \perp y$. Δ

Endi quyidagi fundamental teoremani isbotlaymiz.

36.6-teorema *(Hilbert-Shmidt). H Hilbert fazosida kompakt, o'z-o'ziga qo'shma, chiziqli A operator berilgan bo'lib, $\{\lambda_n\}$ - uning barcha nolmas xos qiymatlari ketma-ketligi bo'lsin. U holda H fazoda shu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlardan iborat shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, har bir $\xi \in H$ element yagona usulda*

$$\xi = \sum_k c_k \phi_k + \xi'$$

ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda ξ' vektor $A\xi' = 0$ shartni qanoatlantiradi.

Bu holda

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k.$$

Agar nolmas xos qiymatlar soni cheksiz bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Bu asosiy teoremani isbotlash uchun bizga quyidagi yordamchi tasdiqlar kerak bo'ladi.

36.4-lemma. *A kompakt operator va $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik ξ elementga kuchsiz yaqinlashsin, u holda*

$$Q(\xi_n) = (A\xi_n, \xi_n) \to (A\xi, \xi) = Q(\xi).$$

Isbot. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| = |(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n) + (A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \leq$$
$$\leq |(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| + |(A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)|.$$

Ikkinchi tomondan,

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| = |(A\xi_n - A\xi, \xi_n)| \leq \|\xi_n\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|$$

va

$$|(A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)| = |(A\xi, \xi_n - \xi)| = |(\xi, A^*(\xi_n - \xi))| \leq \|\xi\| \cdot \|A^*(\xi_n - \xi)\|.$$

Ma'lumki, $\|\xi_n\|$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan va

$$\lim_{n\to\infty} (\|A(\xi_n - \xi)\| + \|A^*(\xi_n - \xi)\|) = 0,$$

bo'lganligi uchun, $n \to \infty$ da

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \to 0. \qquad \Delta$$

36.5-lemma. *A – o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator va $(A\xi, \xi) = Q(\xi)$ bo'lsin. Agar $|Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda $(\xi_0, \zeta) = 0$ ekanligidan*

$$(A\xi_0, \zeta) = (\xi_0, A\zeta) = 0$$

tengliklar kelib chiqadi.

Isbot. Ravshanki, ixtiyoriy $\xi \in H$ uchun $Q(\xi) = (A\xi, \xi) \in \mathbb{R}$. Agar $|Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda $\|\xi_0\| = 1$. Haqiqatan ham, agar $\|\xi_0\| < 1$ bo‘lsa, u holda

$$\left|Q\left(\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right)\right| = \left|\left(A\left(\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right), \frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right)\right| = \frac{1}{\|\xi_0\|^2}\left|(A\xi_0, \xi_0)\right| > \left|Q(\xi_0)\right|.$$

Bu munosabat $|Q(\xi_0)|$ ning maksimal qiymat ekanligiga zid. Endi $\zeta \in H$ vektor ξ_0 ga ortogonal bo‘lgan ixtiyoriy element bo‘lsin. Bu element yordamida ξ elementni quyidagicha quramiz

$$\xi = \frac{\xi_0 + a\zeta}{\sqrt{1 + |a|^2 \cdot \|\zeta\|^2}}.$$

Bu yerda a $-$ixtiyoriy kompleks son. $\|\xi_0\| = 1$ ekanligidan $\|\xi\| = 1$ kelib chiqadi.

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + |a|^2 \cdot \|\zeta\|^2}\left[Q(\xi_0) + 2Rea\ (A\xi_0, \zeta) + |a|^2 Q(\zeta)\right]$$

bo‘lgani uchun, yetarlicha kichik a larda

$$Q(\xi) = Q(\xi_0) + 2\,Rea\ (A\xi_0, \zeta) + O(a^2).$$

Oxirgi tenglikdan ko‘rinib turibdiki, agar $(A\xi_0, \zeta) \neq 0$ bo‘lsa, a ni shunday tanlash mumkinki, $|Q(\xi)| > |Q(\xi_0)|$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $|Q(\xi_0)|$ maksimal qiymat ekanligiga zid. Δ

36.6-lemma. *Agar $A-$ o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operator bo‘lib, $|(A\xi, \xi)| = |Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda biror λ soni uchun $A\xi_0 = \lambda\xi_0$ tenglik o‘rinli.*

Isbot. 36.5-lemmaga ko‘ra, ξ_0 vektorga ortogonal bo‘lgan

$$M_0^{\perp} := \{\xi \in H : (\xi_0, \xi) = 0\}$$

qism fazo A operatorga nisbatan invariant bo‘ladi. $A-$o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lganligi uchun $M_0^{\perp}$ qism fazoga ortogonal bo‘lgan, bir o‘lchamli

$M_0 = \{\xi \in H : \xi = \alpha\xi_0\}$ qism fazo ham A ga nisbatan (33.1-lemmaga qarang) invariant bo'ladi. Bir o'lchamli fazoda har qanday chiziqli operator songa ko'paytirish operatoridir. Demak, $A\xi_0 = \lambda\xi_0$ tenglik o'rinli. Δ

36.6-teoremaning isboti. Biz ϕ_k elementlarni ularga mos keluvchi xos qiymatlarning absolyut qiymatlari kamayib borishi tartibida induksiya bo'yicha quramiz:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots .$$

ϕ_1 elementni qurish uchun $|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$ funksionalni qaraymiz va uni birlik sharda maksimumga erishishini isbotlaymiz.

$$S_1 = \sup_{\|\xi\| \leq 1} |(A\xi, \xi)|$$

va $\xi_1, \xi_2, \ldots -$ ketma-ketlik uchun, $\|\xi_n\| \leq 1$ va

$$\lim_{n \to \infty} |(A\xi_n, \xi_n)| = S_1$$

bo'lsin. Birlik shar H da kuchsiz kompakt bo'lganligi uchun $\{\xi_n\}$ dan biror ζ elementga kuchsiz yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda $\|\zeta\| \leq 1$ va 36.4-lemmaga ko'ra

$$|(A\zeta, \zeta)| = S_1.$$

Biz ζ elementni ϕ_1 deb qabul qilamiz. 36.5-lemma isbotiga ko'ra $\|\zeta\| = \|\phi_1\| = 1$. Bu holda 36.6-lemmaga ko'ra $A\phi_1 = \lambda_1\phi_1$, bu yerdan $|\lambda_1| = |(A\phi_1, \phi_1)| = S_1$. Endi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ xos qiymatlarga mos keluvchi $\phi_1, \phi_2, \ldots,$ ϕ_n xos vektorlar qurilgan bo'lsin. $|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$ funksionalni

$$M_n^{\perp} = H \ominus M\left(\{\phi_k\}_{k=1}^n\right)$$

qism fazoda qaraymiz. $M_n^{\perp}$ qism fazo A operatorga nisbatan invariant (chunki $M\left(\{\phi_k\}_{k=1}^n\right)$ invariant va A o'z-o'ziga qo'shma operator). $|(A\xi, \xi)|$ funksional

$\phi_{n+1} \in M_n^\perp$ da maksimumga erishsin. 36.6-lemmaga ko‘ra u A operatorning xos vektori bo‘ladi, ya’ni $A\phi_{n+1} = \lambda_{n+1}\phi_{n+1}$.

Bu yerda quyidagi ikki hol bo‘lishi mumkin.

i) Chekli qadamdan so‘ng, biz shunday $M_n^\perp$ qism fazoga ega bo‘lamizki, bu fazoning barcha ξ elementlarida $(A\xi, \xi) = 0$ bo‘ladi.

ii) Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $M_n^\perp$ qism fazoda $(A\xi, \xi) \not\equiv 0$.

Birinchi holda 36.6-lemmadan kelib chiqadiki, A operator $M_n^\perp$ qism fazoni nolga o‘tkazadi, ya’ni $M_n^\perp$ qism fazo $\lambda = 0$ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlardan iborat. Bu holda qurilgan $\{\phi_n\}$ vektorlar sistemasi chekli sondagi elementdan iborat.

Ikkinchi holda xos vektorlarning $\{\phi_n\}$ ketma-ketligi hosil bo‘lib, ularning har biri uchun $\lambda_n \neq 0$. Bu holda $\lambda_n \to 0$ ekanligini ko‘rsatamiz. $\{\phi_n\}$ ketma-ketlik (har qanday ortonormal sistema kabi) nolga kuchsiz yaqinlashadi, chunki ixtiyoriy $f \in H$ uchun uning Furye koeffitsiyentlari $c_n = (f, \phi_n)$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \| f \|^2$$

munosabat o‘rinli. Qator yaqinlashishining zaruriy shartidan $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \phi_n) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. A operatorning kompaktligidan $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$ ketma-ketlik nolga kuchli ma’noda yaqinlashadi, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} \|A\phi_n\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$M^\perp = H \ominus M\left(\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}\right) = \bigcap_{n=1} M_n^\perp.$$

Faraz qilaylik, $M^\perp$ bo‘sh bo‘lmasin. Agar $\xi \in M^\perp$ va $\xi \neq 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$|(A\xi, \xi)| \leq |\lambda_n| \cdot \|\xi\|^2 .$$

Bu yerdan limitga o‘tsak,

$$(A\xi, \xi) = 0.$$

36.6-lemmani $M^\perp$ qism fazo uchun qo‘llab, $A\xi = 0$ ga ega bo‘lamiz, ya’ni $Ker A = M^\perp$. $\{\phi_n\}$ sistemaning qurilishidan ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy $\xi \in H = M \oplus M^\perp$ vektor

$$\xi = \sum_k c_k \phi_k + \xi', \quad \xi' \in M^\perp = Ker A,$$

ko‘rinishda tasvirlanadi. Bu yerdan

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k. \qquad \Delta$$

Endi H da kompakt operatorlarga misollar keltiramiz.

36.2. ℓ_2 Hilbert fazosida $\{a_n\}$ ga ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$A : \ell_2 \to \ell_2, \;\; Ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n, \ldots)$$

operatorni qaraymiz. $A \in K(\ell_2)$ bo‘lishi uchun

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{36.4}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

Isbot. *Yetarliligi.* (36.4) shart bajarilsin. Agar biz A operatorga tekis yaqinlashuvchi kompakt operatorlar ketma-ketligi mavjud ekanligini ko‘rsata olsak, u holda 36.1-natijaga ko‘ra, A kompakt operator bo‘ladi. A_n operatorlarni quyidagicha quramiz:

$$A_n : \ell_2 \to \ell_2, \;\; A_n x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n, 0, 0, \ldots).$$

35.3-misolga ko‘ra, har bir $n \in \mathbb{N}$ da A_n operatorlar kompakt. Bundan tashqari A_n operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis yaqinlashadi. Haqiqatan ham, 29.9-misolga ko‘ra

$$\|A - A_n\| = \sup_{n<k<\infty} |a_k|.$$

Bundan va (36.4) shartdan

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{n<k<\infty} |a_k| = 0.$$

Demak, 36.1-natijaga ko'ra, A kompakt operator bo'ladi.

Zaruriyligi. Faraz qilaylik, A kompakt operator bo'lsin. U holda nolga kuchsiz yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\} \subset \ell_2$ ketma-ketlik uchun Ax_n ketma-ketlik nolga kuchli yaqinlashuvchi bo'ladi. Nolga kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlik sifatida ℓ_2 fazodagi ortonormal bazis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ni ((23.8) ga qarang) olamiz. 34.3-misolga ko'ra, $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o'rinli. $\{Ae_n\}$ ketma-ketlikning nolga yaqinlashishidan

$$\lim_{n\to\infty} \|Ae_n\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n e_n\| = \lim_{n\to\infty} |a_n| \, \|e_n\| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ni olamiz. Demak, (36.4) shart bajariladi. Δ

36.3. 35.4-misolda qaralgan integral operatorni, ya'ni

$$(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, f(y)\, dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorni qaraymiz. A operator Hilbert-Shmidt teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. A operatorning kompaktligi 35.4-misolda ko'rsatilgan edi. 33.4-misolda $L_2[a, b]$ fazoda $K(x, y)$ yadroli integral operatorning qo'shmasi topilib, integral operatorning o'z-o'ziga qo'shma bo'lishining zarur va yetarli sharti (33.14) ko'rinishda bo'lishi keltirilgan edi. Qaralayotgan A operator uchun (33.14) shartning bajarilishini tekshiramiz.

Bizning holimizda $K(x, y) = \cos(x-y)$ bo'lgani uchun

$$K(x, y) = \cos(x-y) = \cos(y-x) = \overline{\cos(y-x)} = \overline{K(y, x)}$$

tenglik o'rinli. Demak, $A = A^*$. Shunday qilib, A operator Hilbert-Shmidt teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Δ

36.4. 36.3-misolda qaralgan A operatorning xos qiymat va xos funksiyalarini toping.

Yechish. Xos qiymatga nisbatan tenglama $Af = \lambda f$, ya'ni

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, f(y)\, dy = \lambda f(x)$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani quyidagicha ham yozish mumkin.

$$\lambda f(x) = \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, f(y)\, dy + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\; f(y)\, dy =$$
$$= \alpha \cos x + \beta \sin x. \tag{36.5}$$

Bu yerda

$$\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\; f(y)\, dy, \quad \beta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\; f(y)\, dy. \tag{36.6}$$

Ikki holni alohida qaraymiz: i) $\lambda = 0$, ii) $\lambda \neq 0$.

i) Bu holda $\alpha \cos x + \beta \sin x = 0$ ga ega boʻlamiz. $u_1(x) = \cos x$ va $v_1(x) = \sin x$ elementlar chiziqli bogʻlanmagan, shuning uchun $\alpha = \beta = 0$. Demak, (36.6) ga koʻra,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\; f(y)\, dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\; f(y)\, dy = 0 \tag{36.7}$$

boʻladi. (36.7) shartni qanoatlantiruvchi elementlar toʻplami A operatorning yadrosini tashkil qiladi. Boshqacha aytganda, (36.7) shartni qanoatlantiruvchi elementlar toʻplami $u_1(x) = \cos x$ va $v_1(x) = \sin x$ elementlarga ortogonal qism fazo. Bu qism fazoda

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{ u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\}_{n=2}^{\infty}, \quad \left\{ v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}_{n=2}^{\infty}$$

sistema ortonormal bazis boʻladi. Demak, $\dim Ker A = \infty$. Shunday ekan $\lambda = 0$ soni A operator uchun cheksiz karrali xos qiymat boʻladi.

Endi $\lambda \neq 0$ boʻlsin, ya'ni ii) holni qaraymiz. (36.5) dan foydalansak, $Af = \lambda f$ tenglamaning yechimi f uchun quyidagi koʻrinishni olamiz:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \cos x + \frac{\beta}{\lambda} \sin x. \tag{36.8}$$

Bu yerda α va β koeffitsiyentlar noma'lumlar, chunki ular izlanayotgan f funksiyaning integrali orqali ifodalangan. Agar biz f ning (36.8) ifodasini (36.6) ga qo'ysak, α va β noma'lumlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y \left[\dfrac{\alpha}{\lambda}\cos y + \dfrac{\beta}{\lambda}\sin y\right] dy = \dfrac{\pi\alpha}{\lambda} \\ \beta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin y \left[\dfrac{\alpha}{\lambda}\cos y + \dfrac{\beta}{\lambda}\sin y\right] dy = \dfrac{\pi\beta}{\lambda}. \end{cases}$$

Bu tenglama faqatgina $\lambda = \pi$ da nolmas yechimga ega. Bu holda α va β lar sifatida ixtiyoriy sonni olish munkin. (36.8) ga ko'ra

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{36.9}$$

element $\lambda = \pi$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya bo'ladi. Demak, $A - \pi I$ operatorning yadrosi ikki o'lchamli qism fazo ekan. Bundan $\lambda = \pi$ xos qiymatning karraligi 2 ga teng ekanligi kelib chiqadi. Δ

Agar biz 36.3-misolda qaralgan A operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo'llasak, $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi$ va $\lambda_n = 0$, $n \geq 3$ ekanligini hosil qilamiz.

Kompakt operatorlarning muhim sinfi sifatida $L_2[a, b]$ fazodagi integral operatorlarni qarash mumkin.

36.5. Har bir $x \in L_2[a, b]$ elementga

$$(Ax)(s) = \int_a^b K(s,t)\ x(t)\ dt$$

formula bo'yicha ta'sir qiluvchi A operatorni kompaktlikka tekshiring. Bu yerda $K(\cdot, \cdot)$ integral operatorning yadrosi, u $[a, b] \times [a, b]$ da uzluksiz funksiya.

Ko'rsatma. A operator uchun 37-§ dagi 37.2-teorema shartlari bajarilishini ko'rsating.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $L_2[0, 1]$ – *fazoda chekli o'lchamli operatorga misol keltiring.*

2. $A : H \to H$ *o'z-oziga qo'shma, chegaralangan operator.* m *va* M *sonlar* $(Ax,\, x)$ *funksionalning birlik shardagi aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo'lsin.* $\sigma(A) \subset [m,\ M]$ *munosabatni isbotlang.*

3. *O'z-oziga qo'shma, chegaralangan* A *operator uchun* $m,\ M \in \sigma(A)$ *munosabatni isbotlang.*

4. *Shunday o'z-oziga qo'shma, chegaralangan* A *operatorga misol keltiringki,* $\sigma(A) \cap (m,\ M) = \emptyset$ *bo'lsin.*

5. *O'z-oziga qo'shma, chegaralangan* $A : H \to H$ *operator uchun*

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax,\, x)| = S_1 = \|\, A \,\|$$

tenglikni isbotlang.

6. u $-$ $[0,\ 1]$ *kesmada uzluksiz funksiya.* $L_2[0,\ 1]$ *fazoda* $(Af)(x) = u(x)\, f(x)$ *tenglik bilan aniqlangan* A *operatorga qo'shma operatorni toping. Natijani* $u(x) = \cos x + i \sin x$ *bo'lgan holda tekshirib ko'ring.*

7. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazoda aniqlangan*

$$(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y)\ f(y)\ dy$$

operatorning o'z-oziga qo'shma va kompakt ekanligini ko'rsating. $|(Ax,\, x)| = |Q(x)|$ *funksionalning birlik shardagi aniq yuqori chegarasini toping.* A *operatorning noldan farqli xos qiymatlari sonini toping.*

8. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazoda berilgan*

$$(Af)(x) = \frac{1}{\pi}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{2^n}\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos ny\, f(y)\ dy$$

operatorning o'z-oziga qo'shma ekanligini ko'rsating. Kompaktlikka tekshiring. Noldan farqli xos qiymatlarini toping. Ularga mos xos funksiyalarning $\{\phi_n\}$ *sistemasini quring. Bu operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo'llang va* $M^{\perp}$ *qism fazoning tavsifini bering.*

37-§. Chiziqli integral tenglamalar

Funksional fazoda (masalan, $C[a,\ b]$, $L_2[a,\ b]$, $C_2[a,\ b]$) tenglama berilgan bo'lib, noma'lum element funksiyadan iborat bo'lsa, bunday tenglama *funksional tenglama* deyiladi. Agar funksional tenglamada noma'lum funksiya integral ostida bo'lsa, u holda tenglama *integral tenglama* deyiladi. Masalan,

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,\, t)\ g(\phi(t),\, t)\, dt$$

tenglama ϕ ga nisbatan integral tenglamadir, bu yerda $K(s,\, t)$, $g(s,\, t)$ – berilgan funksiyalar.

Integral tenglamadagi ifoda noma'lum funksiyaga nisbatan chiziqli bo'lgan holda tenglama *chiziqli integral tenglama* deyiladi. Quyidagi tenglamalar chiziqli integral tenglamalarga misol bo'ladi:

$$\int_a^b K(s,\, t)\ \phi(t)\, dt + f(s) = 0, \tag{37.1}$$

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,\, t)\ \phi(t)\, dt + f(s). \tag{37.2}$$

Bu yerda ϕ noma'lum funksiya, $K(s,\ t)$ va $f(s)$ ma'lum funksiyalar. (37.1) va (37.2) tenglamalar mos ravishda *birinchi va ikkinchi tur Fredholm tenglamalari* deyiladi.

Xususan, $K(s,\ t)$ funksiya $t > s$ qiymatlar uchun $K(s,\ t) = 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda (37.1) va (37.2) tenglamalar mos ravishda

$$\int_a^s K(s,\, t)\ \phi(t)\, dt + f(s) = 0, \tag{37.3}$$

$$\phi(s) = \int_a^s K(s,\, t)\ \phi(t)\, dt + f(s) \tag{37.4}$$

ko'rinishlarga ega bo'ladi. Bunday tenglamalar *birinchi va ikkinchi tur Volterra tenglamalari* deyiladi. Volterra tenglamalari Fredholm tenglamalarining xususiy holi bo'lsada, ular alohida o'rganiladi, chunki Volterra tenglamalari o'ziga xos bo'lgan xossalarga ega.

Agar (37.1)-(37.4) tenglamalarda f funksiya nolga teng bo'lsa, bu tenglamalar *bir jinsli* deyiladi.

37.1-misol. Quyidagi

$$f(s) = \int_0^s \frac{\phi(t)}{(s-t)^\alpha} dt, \quad (0 < \alpha < 1, \ f(0) = 0)$$

tenglama ϕ noma'lumga nisbatan Abel tenglamasi deyiladi. Bu tenglama Volterra tenglamalarining xususiy holi bo'lib, 1823 yilda N. Abel tomonidan qaralgan, uning yechimi

$$\phi(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}$$

ko'rinishga ega.

Biz bu yerda faqat ikkinchi tur Fredholm tenglamasini qaraymiz. $L_2[a, \ b]$ kompleks Hilbert fazosida ikkinchi tur Fredholm tenglamasini, ya'ni (37.2) tenglamani olamiz. Bu tenglamada f ma'lum, ϕ noma'lum funksiyalar bo'lib, ular $L_2[a, \ b]$ fazoning elementlari deb faraz qilinadi.

(37.2) tenglamaning *yadrosi* deb nomlanuvchi $K(s, \ t)$ funksiyadan quyidagilarni talab qilamiz, u – o'lchovli va

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, \ t)|^2 \ dsdt < \infty \tag{37.5}$$

shartni qanoatlantirsin, ya'ni $K(s, \ t)$ kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. $L_2[a, \ b]$ fazoda aniqlangan

$$(T\phi)(s) = \int_a^b K(s, \ t) \ \phi(t) \ dt \tag{37.6}$$

operatorni qaraymiz. Bu operator K *yadroli Fredholm operatori* deyiladi. (37.2) tenglamani o'rganish shu operatorning xossalarini tekshirishga keltiriladi.

Navbatdagi teoremalarni isbotlashda biz integrallash tartibini almashtirish haqidagi Fubini teoremasining natijasidan foydalanamiz. Fubini teoremasi natijasining quyidagi bayoni biz uchun qulaydir.

37.1-teorema *(Fubini). Agar* $|K(x,y)|^2$ *funksiya* $[a,b]\times[a,b]$ *kvadratda integrallanuvchi bo'lsa, u holda deyarli barcha* $x\in[a,b]$ $(y\in[a,b])$ *larda*

$$\int_a^b |K(x,\ y)|^2\,dy \quad \left(\int_a^b |K(x,\ y)|^2\,dx\right)$$

integral mavjud va quyidagilar o'rinli

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_a^b |K(x,y)|^2\,dy = \int_a^b dy\int_a^b |K(x,y)|^2\,dx.$$

37.2-teorema. *Agar* $K(x,y)$ *yadro (37.5) shartni qanoatlantirsa, u holda* $L_2[a,\ b]$ *fazoda (37.6) tenglik bilan aniqlanuvchi* T *operator kompakt va uning normasi uchun quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$\|T\|\leq\sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,dsdt.} \tag{37.7}$$

Isbot. Avvalo shuni ta'kidlaymizki, Fubini teoremasi va (37.5) shartga ko'ra, deyarli barcha s lar uchun

$$\int_a^b |K(s,t)|^2\,dt$$

integral mavjud. Boshqacha aytganda, $K(s,t)$ funksiya t ning funksiyasi sifatida deyarli barcha s larda $L_2[a,\ b]$ fazoga qarashli. Kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning ko'paytmasi integrallanuvchi bo'lgani uchun, (37.6) ning o'ng tomonidagi integral deyarli barcha s lar uchun mavjud, ya'ni $\psi(s)=(T\phi)(s)$ funksiya deyarli hamma yerda aniqlangan. $\psi\in L_2[a,\ b]$ ekanligini ko'rsatamiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra, deyarli barcha s lar uchun

$$|\psi(s)|^2=\left|\int_a^b K(s,t)\,\phi(t)\,dt\right|^2\leq$$

$$\leq\int_a^b |K(s,t)|^2\,dt\int_a^b|\phi(t)|^2\,dt=\|\phi\|^2\int_a^b|K(s,t)|^2\,dt$$

tengsizlikni olamiz. Oxirgi ifodani a dan b gacha s bo'yicha integrallab va $|K(s,\, t)|^2$ dan takroriy integralni ikki karrali integralga almashtirib, quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz

$$\|T\phi\|^2 = \int_a^b |\psi(s)|^2 ds \le \|\phi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s,\, t)|^2 \, dtds.$$

Bu yerdan $|\psi(s)|^2$ ning integrallanuvchanligi va (37.7) tengsizlik kelib chiqadi. Endi T operatorning kompaktligini ko'rsatish qoldi. $\{\psi_n\}$ sistema $L_2[a,\, b]$ fazoda to'la ortonormal sistema bo'lsin. U holda $\{\psi_m(s)\ \psi_n(t)\}$ ko'paytmalar sistemasi $L_2([a,\, b] \times [a,\, b])$ fazoda to'la ortonormal sistemani tashkil qiladi va demak,

$$K(s,\, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \psi_m(s)\ \psi_n(t)$$

yoyilma o'rinli. Endi

$$K_N(s,\, t) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} \psi_m(s)\ \psi_n(t)$$

yadroga mos Fredholm operatorini T_N bilan belgilaymiz. Bu operator kompakt, chunki u chegaralangan va $L_2[a,\, b]$ fazoni chekli $N-$ o'lchamli qism fazoga akslantiradi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $\phi \in L_2[a,\, b]$ uchun

$$(T_N \phi)(s) = \int_a^b K_N(s,\, t)\ \ \phi(t) dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} \psi_m(s)\ \int_a^b f(t) \psi_n(t)\, dt = \sum_{m=1}^{N} \psi_m(s) \sum_{n=1}^{N} a_{mn} b_n,$$

bu yerda $b_n = \int_a^b f(t)\, \psi_n(t)\, dt$. Demak, T_N operator $L_2[a,\, b]$ fazoni $\psi_1, \psi_2, \ldots,$ ψ_N funksiyalarning chiziqli qobig'i bo'lgan $N-$ o'lchamli qism fazoga akslantiradi. $K_N(s,\, t)$ funksiya $K(s,\, t)$ funksiyaning $\{\psi_m(s)\ \psi_n(t)\}$ sistema bo'yicha Furye qatorining qismiy yig'indisidan iborat. Shuning uchun, $N \to \infty$ da

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,\, t) - K_N(s,\, t)|^2 \, ds\, dt \to 0.$$

Endi (37.7) tengsizlikni $T-T_N$ operatorga qo‘llasak,

$$\|T-T_N\| \le \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)-K_N(s,t)|^2 ds dt} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Shunday qilib, $\{T_N\}$ kompakt operatorlar ketma-ketligi norma bo‘yicha T operatorga yaqinlashadi. Kompakt operatorlarning asosiy xossalari mavzusidagi 36.1-natijaga asosan T ham kompakt operator bo‘ladi. Δ

Eslatmalar.

1. 37.2-teoremaning isboti davomida biz shu narsani o‘rnatdikki, har qanday Fredholm operatori chekli o‘lchamli operatorlarning norma bo‘yicha limitidir.

2. T_1, T_2-(37.6) ko‘rinishdagi ikkita operator va K_1, K_2-ularga mos keluvchi yadrolar bo‘lsin. Agar barcha $\phi \in L_2[a,\ b]$ lar uchun $T_1\phi = T_2\phi$ bo‘lsa, u holda deyarli hamma yerda $K_1(s,t) = K_2(s,\ t)$. Haqiqatan ham, agar barcha $\phi \in L_2[a,\ b]$ lar uchun

$$(T_1\phi - T_2\phi)(s) = \int_a^b (K_1(s,t)-K_2(s,t))\,\phi(t)dt = 0$$

bo‘lsa, deyarli barcha $s \in [a,\ b]$ larda

$$\int_a^b |K_1(s,t)-K_2(s,t)|^2\, dt = 0$$

va demak,

$$\|K_1-K_2\|^2 = \int_a^b \int_a^b |K_1(s,t)-K_2(s,t)|^2 ds dt = 0.$$

Bu yerdan bizning tasdig‘imiz $K_1(s,t) = K_2(s,t)$ kelib chiqadi. Ma’lumki, $L_2\left([a,\ b]^2\right)$ fazoda ekvivalent funksiyalar bitta element sifatida qaraladi, shuning uchun aytish mumkinki, integral operatorlar bilan yadrolar o‘rtasidagi moslik o‘zaro bir qiymatlidir.

37.3-teorema. T – $K(s,\ t)$ *yadro bilan aniqlanuvchi Fredholm operatori bo‘lsin. U holda unga qo‘shma bo‘lgan* T^* *operator* $\overline{K(t,s)}$ *yadro bilan aniqlanadi.*

Isbot. Fubini teoremasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(Tf,g)=\int_a^b\left\{\int_a^b K(s,t)f(t)dt\right\}\overline{g(s)}ds=\int_a^b\int_a^b K(s,t)f(t)dt\overline{g(s)}ds=$$

$$=\int_a^b\left\{\int_a^b K(s,t)\overline{g(s)}ds\right\}f(t)dt=\int_a^b f(s)\overline{\left\{\int_a^b \overline{K(t,s)}g(t)dt\right\}}ds=(f,T^*g).$$

Bu yerdan

$$(T^*g)(s)=\int_a^b \overline{K(t,s)}g(t)dt$$

tenglik, ya'ni teoremaning tasdig'i kelib chiqadi. Δ

Xususan, (37.6) ko'rinishdagi T operator $L_2[a,\ b]$ fazoda o'z-o'ziga qo'shma, ya'ni $T^*=T$ bo'lishi uchun ((33.14) ga qarang)

$$K(s,t)=\overline{K(t,s)} \tag{37.8}$$

shartning bajarilishi yetarli va zarurdir. Haqiqiy Hilbert fazosi (va demak haqiqiy K yadro) qaraladigan holda o'z-o'ziga qo'shmalik sharti bo'lib, $K(s,\ t) = K(t,\ s)$ tenglik xizmat qiladi. (37.8) shartni qanoatlantiruvchi yadrolar simmetrik yadrolar deyiladi.

Hilbert-Shidt usuli. Endi (37.8) shartni qanoatlantiruvchi yadroli integral tenglamani o'rganamiz. Yuqorida aytilganidek, bu holda

$$(T\phi)(s)=\int_a^b K(s,t)\phi(t)dt$$

o'z-o'ziga qo'shma kompakt operator. Demak, bu operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo'llash mumkin. (37.2) tenglamani qisqacha

$$\phi=T\phi+f \tag{37.9}$$

ko'rinishda yozamiz. Hilbert-Shmidt teoremasiga asosan, T operator uchun $\{\lambda_n\}$ xos qiymatlarga mos keluvchi xos funksiyalarning shunday $\{\psi_n\}$ ortonormal sistemasi mavjudki, ixtiyoriy $\xi\in L_2[a,\ b]$ element yagona usul bilan

$$\xi=\sum_{n=1}a_n\psi_n+\xi',\quad \xi'\in Ker\,T,$$

ko‘rinishda ifodalanadi. Shunday qilib,

$$f = \sum_{n=1} b_n \psi_n + f', \;\; f' \in Ker\, T, \tag{37.10}$$

deymiz va (37.9) tenglamaning yechimini

$$\phi = \sum_{n=1} x_n \psi_n + \phi', \;\; \phi' \in Ker\, T, \tag{37.11}$$

ko‘rinishda izlaymiz. (37.10), (37.11) yoyilmalarni (37.9) ga qo‘yib,

$$\sum_{n=1} x_n \psi_n + \phi' = \sum_{n=1} x_n \lambda_n \psi_n + \sum_{n=1} b_n \psi_n + f'$$

tenglamaga kelamiz, ya’ni

$$\sum_{n=1} (1-\lambda_n) x_n \psi_n + \phi' = \sum_{n=1} b_n \psi_n + f'.$$

Bunday yoyilma yagona bo‘lganligi sababli

$$\phi' = f', \quad x_n(1-\lambda_n) = b_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Agar $\lambda_n \neq 1$ bo‘lsa, u holda $x_n = b_n(1-\lambda_n)^{-1}$ va $\lambda_n = 1$ bo‘lsa, $b_n = 0$.

Ko‘rinib turibdiki, $\lambda_n = 1$ holda $b_n = 0$ shart (37.9) tenglamaning yechimga ega bo‘lishi uchun yetarli va zarurdir. Bunday $\lambda_n = 1$ uchun x_n- ixtiyoriy. Shu bilan quyidagi teorema isbotlandi.

37.4-teorema. *Agar* 1 *soni* T *operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, u holda (37.9) tenglama ixtiyoriy* f *uchun yagona yechimga ega. Agar* 1 *soni* T *operator uchun xos qiymat bo‘lsa, u holda (37.9) tenglama yechimga ega bo‘lishi uchun* f *funksiya* 1 *soniga mos keluvchi barcha xos funksiyalarga ortogonal bo‘lishi yetarli va zarurdir. Bu holda (37.9) tenglama yechimlarining soni cheksizdir.*

37.2. $L_2[-\pi, \; \pi]$ Hilbert fazosida

$$u(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y) u(y) dy + f(x) := (T_\lambda u)(x) + f(x) \tag{37.12}$$

integral tenglama berilgan. Parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida T_λ uchun bir soni xos qiymat bo'ladi?

Yechish. Qaralayotgan integral tenglamaning yadrosi

$$K(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi}(1 + \cos x \cos y)$$

haqiqiy qiymatli va simmetriklik shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$K(x,y) = K(y,x) \quad \Longleftrightarrow \quad T_\lambda^* = T_\lambda.$$

Endi xos qiymat uchun tenglama $T_\lambda u = u$ ni qaraymiz, ya'ni:

$$\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(y)dy + \frac{\lambda}{2\pi}\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, u(y)dy = u(x). \tag{37.13}$$

Agar biz (37.13) da

$$\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} u(y)dy \quad va \quad \beta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, u(y)dy \tag{37.14}$$

belgilashlarni kiritsak, u holda $u(x)$ uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$u(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\alpha + \frac{\lambda}{2\pi}\beta\cos x. \tag{37.15}$$

(37.15) ni (37.14) ga qo'yib,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dy = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy = \pi \tag{37.16}$$

tengliklardan foydalansak, α va β larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\dfrac{\lambda}{2\pi}\alpha + \dfrac{\lambda}{2\pi}\beta\ \cos y\right) dy = \alpha\lambda, \\ \beta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y \left(\dfrac{\lambda}{2\pi}\alpha + \dfrac{\lambda}{2\pi}\beta\ \cos y\right) dy = \dfrac{\lambda}{2}\beta. \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti $\Delta(\lambda)$ ning nol bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\Delta(\lambda) = (1-\lambda)(1-\frac{\lambda}{2}) = 0. \tag{37.17}$$

(37.17) dan $\lambda = 1$ yoki $\lambda = 2$ larni olamiz. Demak, λ parametrning $\lambda_1 = 1$ va $\lambda_2 = 2$ qiymatlarida T_λ uchun 1 soni xos qiymat bo‘ladi. Endi $T_1 u = u$ va $T_2 u = u$ tenglamalarni yechamiz. Yuqorida bayon qilinganlardan bu tenglamalarning yechimlari mos ravishda $u_1(x) = C$ va $u_2(x) = C \cdot \cos x$ $(C = const)$ ekanliklari kelib chiqadi.

37.3. 37.2-misolda qaralgan (37.12) integral tenglamaga $\lambda \notin \{1;\ 2\}$ bo‘lgan holda 37.4-teoremani qo‘llang va (37.12) integral tenglamani yeching.

Yechish. Agar $\lambda \notin \{1;\ 2\}$ bo‘lsa, u holda T_λ operator uchun bir xos qiymat emas, 37.4-teoremaga ko‘ra, (37.12) integral tenglama istalgan $f \in L_2[-\pi,\ \pi]$ da yagona yechimga ega. (37.14) belgilashdan foydalansak, (37.12) tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi}\alpha + \frac{\lambda}{2\pi}\beta \cos x. \tag{37.18}$$

(37.18) ni (37.14) ga qo‘yib, (37.16) tengliklardan foydalansak, α va β larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \alpha\lambda, \\ \beta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\, y\, f(y)dy + \dfrac{\lambda}{2}\beta. \end{cases}$$

Bu sistema $\lambda \notin \{1;\ 2\}$ da yagona yechimga ega va

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{1-\lambda} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)dy, \\ \beta = \dfrac{2}{2-\lambda} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\, y\, f(y)dy. \end{cases}$$

α va β larning bu qiymatlarini (37.18) ga qo‘yib, (37.12) tenglamaning yechimini olamiz:

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{1-\lambda}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{2-\lambda}\cos x \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\, y\, f(y)dy. \tag{37.19}$$

37.4. 37.2-misolda qaralgan tenglamani $\lambda = 1$ bo‘lgan holda, ya’ni

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos x \cos y)u(y)dy + f(x) \tag{37.20}$$

tenglamani yeching.

Yechish. Agar $\lambda = 1$ bo'lsa, u holda T_λ operator uchun bir xos qiymat bo'ladi. 37.4-teoremaga ko'ra, (37.20) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f funksiya $T_1 u = u$ tenglamaning barcha yechimlariga, ya'ni $u(x) = \text{const}$ ga (37.2-misolga qarang) ortogonal bo'lishi zarur va yetarli. Demak, (37.20) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy = 0 \tag{37.21}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli. Agar biz (37.14) belgilashdan foydalansak, (37.20) tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi}\alpha + \frac{1}{2\pi}\beta\cos x. \tag{37.22}$$

(37.22) ni (37.14) ga qo'yib, (37.16) va (37.21) tengliklardan foydalansak, α va β larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha, \\ \beta = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos\, y\, f(y)dy. \end{cases}$$

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, α sifatida ixtiyoriy sonni olish mumkin. Bu qiymatlarni (37.22) ga qo'yib, (37.20) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\ \cos y\, f(y)dy + C.$$

Bu yerda $C-$ ixtiyoriy o'zgarmas son.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $L_2[-\pi,\ \pi]$ *Hilbert fazosida*

$$(Au)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)u(y)dy$$

integral operator normasini 37.2-teoremadan foydalanib baholang.

2. *37.3-teoremadan foydalanib, $L_2[-\pi,\ \pi]$ fazoda*

$$(Au)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x \sin y + i \sin x \cos y) u(y) dy$$

integral operatorga qo'shma operatorni toping.

3. $L_2[-\pi,\ \pi]$ *Hilbert fazosida quyidagi integral tenglamani yeching:*

$$u(x) = \sin x + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y u(y) dy.$$

4. *Parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos x \cos y) u(y) dy$$

integral tenglama ixtiyoriy $f \in L_2[-\pi,\ \pi]$ da yagona yechimga ega bo'ladi?

5. $L_2[-\pi,\ \pi]$ *Hilbert fazosida*

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos y u(y) dy$$

integral tenglama berilgan. Tenglama yechimga ega bo'ladigan f lar to'plamini tavsiflang. Bu to'plam qism fazo tashkil qiladimi? Agar u qism fazo tashkil qilsa, uning o'lchamini toping.

38-§. Fredholm teoremalari

Bu yerda ham yuqorida ko'rilgan

$$\phi = T\phi + f \tag{38.1}$$

tenglamani o'rganishni davom ettiramiz. Navbatdagi mulohazalarda T operatorning integral ko'rinishi emas, balki faqat uning kompaktligi muhim rol o'ynaydi. Shuning uchun H Hilbert fazosida birorta T kompakt operatorni olib, (38.1) ko'rinishdagi tenglamani o'rganamiz. Buning uchun $A = I - T$ operatorni kiritgan holda (38.1) tenglamani

$$A\phi = f \tag{38.2}$$

ko'rinishda yozamiz. (38.2) tenglama bilan bir qatorda bir jinsli bo'lgan

$$A\phi_o = \theta \tag{38.3}$$

tenglamani va bularga qo'shma bo'lgan

$$A^*\psi = g \tag{38.2*}$$

$$A^*\psi_o = \theta \tag{38.3*}$$

tenglamalarni qaraymiz. Bu yerda A^* operator A operatorga qo'shma, ya'ni $A^* = (I - T)^* = I - T^*$.

Quyida isbotlanadigan teoremalar Fredholm teoremalari deb nomlanib, shu to'rt tenglamaning yechimlari orasidagi bog'lanishlarni ifodalaydi.

38.1-teorema. *(38.2) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f vektor (38.3*) tenglamaning har bir yechimiga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. $KerA$ va ImA lar A operatorning mos ravishda yadrosi va qiymatlari sohasi, ya'ni

$$KerA = \{x \in H : Ax = \theta\},$$

$$ImA = \{y = Ax : x \in H\} = A(H)$$

ekanligini eslatamiz. Ma'lumki, A uzluksiz bo'lgani uchun $KerA$ to'plam H ning yopiq qism fazosi bo'ladi. ImA ham H ning yopiq qism fazosi ekanligini isbotlaymiz. $\{y_n\} \subset ImA$ ketma-ketlik biror $y \in H$ elementga yaqinlashuvchi bo'lsin deb faraz qilaylik. Demak,

$$y_n = Ax_n = x_n - Tx_n \to y \tag{38.4}$$

shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. x_n vektorlarni $KerA$ fazoga ortogonal deb hisoblash mumkin, aks holda x_n ning oʻrniga $x'_n = x_n - prx_n$ vektorlarni olish mumkin; bu yerda prx_n element x_n vektorning $KerA$ qism fazoga proyeksiyasi. Bundan tashqari, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangandir. Aks holda $\|x_n\| \to \infty$ deb hisoblash mumkin, demak, (38.4) ga asosan

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{y_n}{\|x_n\|} \to \theta \tag{38.5}$$

munosabat oʻrinli.

Ikkinchi tomondan $\{x_n \|x_n\|^{-1}\}$ ketma-ketlik birlik sharga tegishli boʻlgani va T kompakt operator ekanligi tufayli biror $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik uchun $T\left(x_{n_k}\|x_{n_k}\|^{-1}\right)$ ketma-ketlik biror z elementga yaqinlashuvchi boʻladi. Bundan (38.5) ga asosan $\left\{\|x_{n_k}\|^{-1} \cdot x_{n_k}\right\}$ ketma-ketlik ham shu z elementga yaqinlashuvchi boʻladi. Ravshanki, $\|z\| = 1$, (chunki $\left\|\|x_n\|^{-1} \cdot x_n\right\| = 1$),

$$Az = z - Tz =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\|^{-1} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} T\left(\|x_{n_k}\|^{-1} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} A\left(\|x_{n_k}\|^{-1} x_{n_k}\right) = \theta,$$

ya'ni $z \in KerA$. Ammo har bir x_n element $KerA$ ga ortogonal edi, demak, $z \perp KerA$. Bu ikki munosabatdan $z = \theta$ kelib chiqadi. Bu $\| z \| = 1$ tenglikka zid. Bu ziddiyat $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ekanligini koʻrsatadi. T operator kompakt boʻlgani uchun $\{Tx_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi boʻlgan $\{Tx_{n_i}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. (38.4) ga asosan $\{x_{n_i}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi boʻladi. Bu limitni x bilan belgilasak, u holda

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{i\to\infty} Ax_{n_i} = A(\lim_{i\to\infty} x_{n_i}) = Ax.$$

Bu yerdan $y \in ImA$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, ImA yopiqdir. 36.3-teoremaga asosan, T^* operator ham T bilan bir qatorda kompakt boʻlgani sababli, ImA^* ham H ning yopiq qism fazosi boʻladi.

Endi biz quyidagi munosabatlarni isbotlaymiz:

$$Ker\,A \oplus Im\,A^* = H, \tag{38.6}$$

$$Ker\,A^* \oplus Im\,A = H. \tag{38.7}$$

Ravshanki, $KerA$ va ImA^* oʻzaro ortogonal qism fazolardir. Haqiqatan, ixtiyoriy $h \in Ker\,A$ va $x \in H$ uchun

$$(h, A^*x) = (Ah, x) = (\theta, x) = 0.$$

Ma'lumki, ImA^* ga ortogonal har qanday qism fazo $(ImA^*)^\perp$ ning qismidir. Shunday ekan, $Ker\,A \subset (ImA^*)^\perp$. Agar biz $(ImA^*)^\perp \subset Ker\,A$ ekanligini koʻrsatsak, (38.6) tenglik isbot boʻlgan boʻladi. Faraz qilaylik, z vektor ImA^* ga ortogonal boʻlgan ixtiyoriy element boʻlsin, u holda barcha $x \in H$ uchun

$$(Az, x) = (z, A^*x) = 0.$$

Demak, $Az = 0$, ya'ni $z \in KerA$. Bundan $(ImA^*)^\perp \subset Ker\,A$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday, $KerA^* = (ImA)^\perp$ tenglikni koʻrsatib, (38.7) tenglikning isbotiga ega boʻlamiz. (38.7) tenglikdan 38.1-teorema bevosita kelib chiqadi, ya'ni $f \in ImA$ boʻlishi uchun $f \perp Ker\,A^*$ boʻlishi yetarli va zarurdir. Δ

Har bir k natural son uchun H^k orqali ImA^k fazoni belgilaymiz, xususan $H^1 = Im\,A$. H^k ning tuzilishidan ravshanki, $A(H^k) = H^{k+1}$ va

$$H \supset H^1 \supset H^2 \supset \cdots$$

38.1-teoremani isbotlash davomida koʻrsatilganidek, har bir H^k yopiqdir.

38.1-lemma. *Shunday j_0 natural son mavjudki, barcha $k \geq j_0$ uchun $H^{k+1} = H^k$ tenglik oʻrinli.*

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik, hamma H^k fazolar har xil boʻlsin. Bu holda shunday $\{x_k\}$ ortonormal sistema mavjudki, $x_k \in H^k$ va $x_k \perp H^{k+1}$.

Demak, ixtiyoriy $l, k\ (l > k)$ sonlar uchun

$$Tx_l - Tx_k = -x_k + (x_l + Ax_k - Ax_l).$$

Bu yerda $x_l + Ax_k - Ax_l \in H^{k+1}$ bo‘lgani uchun

$$\|Tx_l - Tx_k\|^2 = \|\, x_k\|^2 + \|\, x_l + Ax_k - Ax_l\|^2 \geq 1,$$

ya’ni $\{Tx_k\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Bu esa T operatorning kompaktligiga zid. Δ

38.2-teorema *(Fredholm alternativasi). Yo (38.2) tenglama ixtiyoriy $f \in H$ uchun yagona yechimga ega, yo (38.3) tenglamaning noldan farqli yechimi mavjud.*

Isbot. Agar $Ker A = \{\theta\}$ bo‘lsa (ya’ni (38.3) tenglama noldan farqli yechimga ega bo‘lmasa), u holda A o‘zaro bir qiymatli akslantirishdir. Shuning uchun, agar $H^1 = ImA \neq H$ deb faraz qilsak, u holda $H^2 \neq H^1, \ldots, H^{k+1} \neq H^k$ munosabatlar ixtiyoriy k uchun o‘rinlidir. Bu esa 38.1-lemmaga zid. Demak, $ImA = H$, ya’ni (38.2) tenglama ixtiyoriy f uchun yagona yechimga ega.

Agar (38.2) tenglama ixtiyoriy f uchun yagona yechimga ega bo‘lsa, u holda $Im\, A = H$ va (38.7) munosabatga asosan $Ker A^* = \{\theta\}$. Bu tenglikdan yuqoridagidek $Im\, A^* = H$ munosabat kelib chiqadi. Endi (38.6) munosabatdan foydalansak, $Ker A = \{\theta\}$, ya’ni (38.3) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Δ

38.3-teorema. (38.3) *va* (38.3*) *tenglamalarning chiziqli erkli bo‘lgan yechimlari soni chekli va o‘zaro tengdir. Boshqacha qilib aytganda,*

$$\dim\, Ker A = \dim\, Ker A^* < \infty.$$

Isbot. $Ker A$ fazoning o‘lchami cheksiz deb faraz qilaylik. Bu holda $Ker A$ da cheksiz elementli $\{x_n\}$ ortonormal sistema mavjud. $x_n \in Ker A$, ya’ni

$Ax_n = x_n - Tx_n = \theta$ bo'lgani sababli, $x_n = Tx_n$. Demak,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - x_m\| = \sqrt{2}, \; n \neq m.$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, $\{Tx_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Bu esa T ning kompaktligiga zid. Shunday qilib, $\dim KerA < \infty$ ekan. Xuddi shunday $\dim KerA^* < \infty$ ekanligi isbotlanadi. Faraz qilaylik,

$$\dim KerA = \mu, \quad \dim KerA^* = \nu$$

bo'lib, $\mu < \nu$ bo'lsin. Endi $KerA$ va $KerA^*$ fazolardan mos ravishda

$$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\mu\} \subset Ker\, A \quad va \quad \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu\} \subset Ker\, A^*$$

ortonormal basizlarni tanlab olamiz va

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j)\psi_j$$

operatorni qaraymiz. S operator A operatorga chekli o'lchamli operatorni qo'shish natijasida hosil bo'lganligi sababli, S operator uchun ham yuqorida A uchun isbotlangan barcha tasdiqlar o'rinli. Bu operator uchun $Sx = \theta$ tenglama faqat nol yechimga ega. Haqiqatan ham,

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j)\psi_j = \theta \tag{38.8}$$

bo'lsin, u holda (38.7) munosabatga asosan $Ax \perp \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j)\psi_j$. Bu yerdan va (38.8) tenglikdan

$$Ax = \theta \quad va \quad \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j)\psi_j = \theta \tag{38.9}$$

ga ega bo'lamiz. $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu\}$ sistemaning ortogonalligidan (chiziqli erkliligidan) hamda (38.9) dan barcha $j \in \{1, 2, \dots, \mu\}$ larda

$$(x, \phi_j) = 0$$

tengliklarni olamiz. Shunday qilib, bir tomondan $x \in KerA$, ya'ni x vektor $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\mu\}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidir, ikkinchi tomondan, x bu vektorlarga ortogonal. Bundan $x = \theta$. Demak, $KerS = \{\theta\}$. 38.2-teoremani S operatorga qo'llagan holda $f = \psi_{\mu+1}$ deb olsak,

$$Ay + \sum_{j=1}^{\mu}(y, \phi_j)\psi_j = \psi_{\mu+1}$$

tenglama biror y yechimga ega bo'ladi. Bu tenglikning ikkala qismini $\psi_{\mu+1}$ vektorga skalyar ko'paytirsak, $0 = 1$ ziddiyat hosil bo'ladi (chunki $ImA \perp KerA^*$ va $Ay \in ImA, \quad \psi_{\mu+1} \in KerA^*$). Demak, $\mu < \nu$ farazimiz ziddiyatga olib keldi, ya'ni $\mu \geq \nu$ ekan. Xuddi shunday, A operator o'rniga A^* operator olinsa, $\mu \leq \nu$ tengsizlik isbotlanadi. Demak, $\mu = \nu$. Δ

Yuqoridagi teoremalarda biz $T-I$ operatorga teskari operatorning mavjudlik shartlarini ko'rdik. Ravshanki, 38.1-38.3-teoremalar $T - \lambda I \quad (\lambda \neq 0)$ operatorlar uchun ham o'rinlidir. Fredholm teoremalaridan quyidagi natija kelib chiqadi.

38.1-natija. *Kompakt operatorning spektridan olingan ixtiyoriy noldan farqli son bu operator uchun chekli karrali xos qiymatdir.*

Isbot. Faraz qilaylik, nolmas $\lambda \in \sigma(T)$ bo'lsin. U holda 38.2-teoremani $T-\lambda I$ operator uchun qo'llab $(T-\lambda I)\,f = 0$ tenglama noldan farqli yechimga ega ekanligiga kelamiz. Bu yerdan $\lambda \neq 0$ soni T operatorning xos qiymati ekanligi kelib chiqadi. 38.3-teoremaga ko'ra $\dim Ker\,(T - \lambda I) = n < \infty$. Bu esa λ soni T operatorning $n-$karrali xos qiymati ekanligini bildiradi. Δ

Misol sifatida ajralgan yadroli integral tenglamalarni qaraymiz.

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt + f(s). \tag{38.10}$$

Fredholm integral tenglamasining yadrosi

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)Q_i(t) \tag{38.11}$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, u holda $K(s,\, t)$ *ajralgan yadro* deyiladi. Bu yerda $P_i,\, Q_i$ funksiyalar $L_2[a,\, b]$ fazodan olingan. Ravshanki, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ funksiyalarni chiziqli erkli deb hisoblash mumkin, aks holda $K(s,\, t)$ yadroni chiziqli erkli bo‘lgan $P_1, P_2, \ldots, P_i \; (i < n)$ lar orqali ifodalash mumkin. (38.11) tenglikdan foydalanib, (38.10) tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\phi(t)dt + f(s).$$

Agar biz

$$\int_a^b Q_i(t)\phi(t)dt = q_i,\; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

belgilashlarni kiritsak, u holda (38.10) tenglama

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) \tag{38.12}$$

ko‘rinishga keladi. ϕ funksiyaning bu ifodasini berilgan integral tenglamaga qo‘ysak,

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) \right] dt + f(s),$$

ya’ni

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i \right] \tag{38.13}$$

ko‘rinishdagi tenglikka kelamiz. Bu yerda

$$a_{ij} = \int_a^b Q_i(t)P_j(t)dt, \quad b_i = \int_a^b Q_i(t)f(t)dt.$$

Endi $P_i(s)$ funksiyalar chiziqli erkli ekanligini hisobga olsak, (38.13) munosabatdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i,\; i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{38.14}$$

Agar biz bu chiziqli tenglamalar sistemasini q_i larga nisbatan yechsak, u holda (38.12) tenglikdan $\phi(s)$ funksiya ham topiladi. Shunday qilib, ajralgan yadroli integral tenglamani yechish masalasi (38.14) chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga teng kuchli. Bunday tenglamalar yechimlarining xossalari bizga chiziqli algebra kursidan ma'lum.

Yuqorida bayon qilingan Fredholm teoremalarini chekli o'lchamli fazolarda quyidagicha bayon qilish mumkin.

38.4-teorema. $Ax = y$,

$$A = (a_{ij}),\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lishi uchun y *vektor qo'shma bir jinsli*

$$A^* z = \theta \ (A^* = (\overline{a_{ji}}))$$

tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi yetarli va zarurdir.

38.5-teorema. *Agar* A *matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda* $Ax = y$ *tenglama ixtiyoriy* y *uchun yagona yechimga ega. Agar* A *matritsaning determinanti nolga teng bo'lsa, u holda bir jinsli* $Ax = \theta$ *tenglama noldan farqli yechimga ega.*

38.6-teorema. $A = (a_{ij})$ *va* $A^* = (\overline{a_{ji}})$ *matritsalarning ranglari o'zaro teng. Xuddi shunday bir jinsli* $Ax = \theta$ *va* $A^* z = \theta$ *sistemalarning chiziqli erkli yechimlari soni ham o'zaro teng.*

Ko'rinib turibdiki, ajralgan yadroli Fredholm tenglamalari uchun Fredholmning 38.1-38.3 teoremalari yuqoridagi 38.4-38.6 teoremalardan kelib chiqadi.

38.1-misol. T operatorni $L_2[-\pi,\ \pi]$ fazoda quyidagicha aniqlaymiz

$$(Tf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y + 3 \sin x \sin y) f(y) dy. \tag{38.15}$$

Bu operatorni o'z-o'ziga qo'shma va kompaktlikka tekshiring, uning xos qiymat va xos funksiyalarini toping.

Yechish. Qaralayotgan operatorning yadrosi

$$K(x, y) = 1 + \cos x \cos y + 3 \sin x \sin y$$

haqiqiy qiymatli va (37.8) shartni qanoatlantiradi. Demak, T o‘z-o‘ziga qo‘shma operator ekan. Integral operator T ning yadrosi (37.5) shartni qanoatlantiradi, shuning uchun 37.2-teoremaga ko‘ra T kompakt operator bo‘ladi. Endi T operatorning xos qiymatlarini topamiz. Buning uchun xos qiymatga nisbatan tenglama yozamiz:

$$Tf = zf \iff \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y + 3 \sin x \sin y) f(y) dy = zf(x).$$

Bundan

$$zf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y)dy + 3 \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y)dy \qquad (38.16)$$

tenglikka kelamiz.

i) Agar (38.16) tenglikda $z = 0$ bo‘lsa, u holda 1, $\cos x$, $\sin x$ funksiyalarning chiziqli erkli ekanligidan quyidagi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y)dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y)dy = 0 \qquad (38.17)$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. (38.17) tengliklar f funksiyaning 1, $\cos x$, $\sin x$ elementlarga ortogonal ekanligini bildiradi. Ma’lumki $L_2[-\pi; \pi]$ fazoda bu elementlarga ortogonal bo‘lgan cheksiz ko‘p chiziqli erkli elementlar mavjud, bular:

$$\{\cos nx, \ \sin nx\}_{n=2}^{\infty}.$$

Demak, $Tf = 0 \cdot f$ tenglama cheksiz ko‘p chiziqli erkli yechimlarga ega ekan. Bu esa o‘z navbatida $z = 0$ soni T operator uchun cheksiz karrali xos qiymat ekanligini bildiradi.

ii) Agar (38.16) tenglikda $z \neq 0$ bo‘lsa, u holda xos funksiya f uchun quyidagi ko‘rinishni olamiz

$$f(x) = \frac{1}{z}[a + b \cos x + 3c \sin x]. \qquad (38.18)$$

Bu yerda

$$a = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy, \quad b = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y)dy, \quad c = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y)dy. \qquad (38.19)$$

f ning (38.18) ifodasini (38.19) ga qo‘yib, a, b, c larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{z} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [a + b\cos y + 3c\sin y]dy = \dfrac{2a\pi}{z}, \\ b = \dfrac{1}{z} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y[a + b\cos y + 3c\sin y]dy = \dfrac{b\pi}{z}, \\ c = \dfrac{1}{z} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin y[a + b\cos y + 3c\sin y]dy = \dfrac{3c\pi}{z}. \end{cases} \qquad (38.20)$$

Biz bu yerda $\{1, \ \cos x, \ \cos 2x, \ \sin x\}$ funksiyalar sistemasining ortogonal ekanligidan hamda

$$\cos^2 y = \frac{1}{2}[1 + \cos 2y], \quad \sin^2 y = \frac{1}{2}[1 - \cos 2y]$$

ayniyatlardan foydalandik. (38.20) tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo‘lishi uchun, uning determinanti

$$\Delta(z) = \left(1 - \frac{2\pi}{z}\right)\left(1 - \frac{\pi}{z}\right)\left(1 - \frac{3\pi}{z}\right)$$

nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Agar $z = 2\pi$ bo‘lsa, u holda $\Delta(z) = 0$ bo‘ladi. Bu holda (38.20) dan $b = c = 0$ va $a-$ ixtiyoriy son ekanligini olamiz. Endi (38.18) dan xos funksiya $f(x) = C = const$ bo‘lishiga kelamiz.

Agar $z = \pi$ bo‘lsa, u holda $\Delta(z) = 0$ bo‘ladi. Bu holda (38.20) dan $a = c = 0$ va $b-$ ixtiyoriy son bo‘ladi. (38.18) dan esa xos funksiya uchun $f(x) = C \cdot \cos x$ ko‘rinishni olamiz.

Xuddi shunday $z = 3\pi$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya $f(x) = C \sin x$ ekanligini olamiz.

Shunday qilib, biz (38.15) formula bilan aniqlangan T operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shma ekanligini ko‘rsatib, uning barcha xos qiymatlari va xos funksiyalarini topdik. $z=0$ cheksiz karrali xos qiymat, qolgan π, 2π va 3π sonlar bir karrali xos qiymatlar ekan.

38.2. T operator (38.15) tenglik bilan aniqlangan bo'lsin. Parametr $\lambda \in \mathbb{C}$ ning qanday qiymatlarida

$$Tf - \lambda f = g \tag{38.21}$$

tenglama ixtiyoriy $g \in L_2[-\pi, \pi]$ da yagona yechimga ega bo'ladi?

Yechish. $A = T - \lambda I$ operatorga 38.1-teoremani qo'llaymiz. 38.1-misoldan ma'lumki, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pi; 2\pi; 3\pi\}$ bo'lsa $Ker\,A^* = Ker\,(T - \overline{\lambda}\,I) = \{\theta\}$. Demak, barcha $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pi; 2\pi; 3\pi\}$ larda (38.21) tenglama ixtiyoriy $g \in L_2[-\pi, \pi]$ da yagona yechimga ega. Agar $\lambda = \pi$ ($\lambda = 2\pi$, $\lambda = 3\pi$) bo'lsa, u holda (38.21) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun $g \in L_2[-\pi, \pi]$ funksiya $Tu - \pi u = 0$ $(Tu - 2\pi u = 0,\ \ Tu - 3\pi u = 0)$ tenglamaning yechimi $u(x) = C\cos x$ $(u(x) = C,\ \ u(x) = C\sin x)$ funksiyaga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Ajralgan yadroli integral tenglamaga misollar keltiring.*

2. $L_2[a,\ b]$ *fazoda*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(t)u(t)dt$$

integral tenglamani yeching. Bunda φ *va* ψ *funksiyalar uzluksiz bo'lib,* $(\varphi, \psi) = 0$ *shartni qatoatlantiradi.*

3. *Parametr* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ning qanday qiymatlarida*

$$u(x) = \sin x\lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x \cos t - \sin x \sin t)u(t)dt$$

tenglama yagona yechimga ega? Qanday qiymatlarda tenglama yechimga ega emas? Qanday qiymatlarda tenglama cheksiz ko'p yechimga ega?

4. $A : L_2[-\pi,\, \pi] \to L_2[-\pi,\, \pi]$ *operator yadrosining o'lchamini toping:*

$$(Au)(x) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos(x-t)\right)u(t)dt.$$

39-§. Ketma-ket o'rniga qo'yish va ketma-ket yaqinlashishlar usuli

Ushbu paragrafda $C[a,\ b]$ fazoda berilgan Fredholm operatori

$$(T\,u)(x) = \int_a^b K(x,t)\,u(t)dt, \tag{39.1}$$

ni, Volterra tipidagi integral operatorni, ya'ni

$$(V\,u)(x) = \int_a^x K(x,t)\,u(t)dt, \tag{39.2}$$

operatorni va ular bilan bog'liq ((37.2) va (37.4) ga qarang)

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{39.3}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{39.4}$$

integral tenglamalarni qaraymiz. Butun 39-paragraf davomida f dan uzluksizlik, K dan esa uzluksizlik va simmetriklik shartlarini talab qilamiz, ya'ni:

A) $K(x,t) = K(t,x) \not\equiv 0$ va $K \in C\,([a,\ b]\times[a,\ b])$ haqiqiy qiymatli funksiya;

B) $f \in C[a,\ b]$ haqiqiy qiymatli funksiya.

Faraz qilaylik, Fredholm tipidagi integral operatorning $\mu \neq 0$ nuqtadagi rezolventasini topish talab qilingan bo'lsin, ya'ni

$$(T - \mu\,I)\,u(x) = \varphi(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \int_a^b K(x,t)\,u(t)dt - \mu\,u(x) = \varphi(x)$$

tenglamani, yoki bu yerda $\lambda = \mu^{-1}$ va $f(x) = -\mu^{-1}\varphi(x)$ deb olsak, u holda

$$u\,(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\,u(t)dt + f(x)$$

tenglamani ya'ni (39.3) ko'rinishdagi tenglamani yechish masalasi qo'yiladi.

Biz ushbu paragrafda $C[a,\ b]$ fazoda λ parametrli ikkinchi tur Fredholm integral tenglamalarini yechish usullari bilan shug'ullanamiz. Dastlab Fredholm va Volterra tipidagi integral tenglamalar uchun ketma-ket o'rniga qo'yish usulini bayon qilamiz. Keyin esa λ parametrli ikkinchi tur Fredholm integral tenglamalarini ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan yechamiz. 40-paragrafda esa integral tenglamalarni Fredholm tomonidan berilgan yechish usulini batafsil bayon qilamiz.

Dastlab integrallash chegaralari o'zgarmas bo'lgan hol, ya'ni Fredholm tipidagi operatorlar qatnashgan (39.3) tenglamani qaraymiz.

Qayd etish joizki, agar (39.3) tenglamaning biror uzluksiz $u(x)$ yechimi mavjud bo'lsa, u holda $K(x,\ t)$ uzluksiz funksiya ekanligidan $f(x)$ funksiyaning ham uzluksiz ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun biz B) shartni kiritdik.

Yadroni iteratsiyalash. Ma'lumki, (39.3) tenglik bilan aniqlangan T operator – *Fredholm operatori*, $K(x,\ t)$ esa Fredholm operatorining *yadrosi* deyiladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\left.\begin{array}{l} K_1(x,t) = K(x,t), \\ K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s)K_1(s,t)ds, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ K_n(x,t) = \int_a^b K(x,s)K_{n-1}(s,t)ds. \end{array}\right\} \tag{39.5}$$

Bu ko'rinishda qurilgan $K_1, K_2,\ \dots,\ K_n$ funksiyalarga $K(x,\ t)$ yadroni *iteratsiyalari* deyiladi. Tekshirish qiyin emaski, $K_n(x,\ t)$ iteratsiya T^n integral operatorning yadrosi bo'ladi.

(39.5) formulani ketma-ket qo'llab, K_n uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$K_n(x,t) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,s_1)K(s_1,s_2)\cdots K(s_{n-1},t)ds_{n-1}\cdots ds_1. \tag{39.6}$$

(39.6) formulaga asosan quyidagi munosabat o‘rinli

$$K_{n+p}(x,t) = \int_a^b K_n(x,s)K_p(s,t)ds. \tag{39.7}$$

39.1. Ketma-ket o‘rniga qo‘yish usuli. Endi (39.3) tenglamaning o‘ng tomonidagi $u(t)$ funksiyaning o‘rniga uning

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1 \tag{39.8}$$

ifodasini qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1]dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1 dt =$$
$$= f(x) + \lambda(T\,f)(x) + \lambda^2(T^2u)(x).$$

Bu tenglamaning o‘ng tomonidagi u ning o‘rniga, uning (39.8) ifodasini qo‘yamiz:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt +$$

$$+\lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)[f(t_1) + \lambda \int_a^b K(t_1,t_2)u(t_2)dt_2]dt_1 dt =$$
$$= f(x) + \lambda(T\,f)(x) + \lambda^2(T^2 f)(x) + \lambda^3(T^3\,u)(x).$$

Bu yerda biz yadroni iteratsiyalash formulalaridan foydalandik. Ushbu jarayonni davom ettirib, $n-$o‘rniga qo‘yishdan keyin, biz quyidagi tenglamani olamiz

$$u(x) = f(x) + \lambda(T\,f)(x) + \cdots + \lambda^n(T^n f)(x) + \lambda^{n+1}(T^{n+1}u)(x). \tag{39.9}$$

Shunday qilib, biz quyidagi cheksiz qatorni o‘rganish masalasiga kelamiz:

$$f(x) + \lambda(T\,f)(x) + \lambda^2(T^2 f)(x) + \cdots + \lambda^n(T^n f)(x) + \cdots . \tag{39.10}$$

Bizning farazimizga asosan bu qatorning har bir hadi $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz funksiyadan iborat. Demak, agar bu qator $[a,\ b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning yig‘indisi biror uzluksiz funksiyani aniqlaydi.

$K(x,\ t)$ va $f(x)$ funksiyalar mos ravishda $[a,\ b]\times[a,\ b]$ kvadrat va $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi uchun Veyershtrass teoremasiga ko‘ra quyidagilar o‘rinli:

$$|K(x,t)| \le M, \forall (x,\ t) \in [a,\ b]\times[a,\ b],\ \ |f(x)| \le M_f, \forall x \in [a,\ b]. \quad (39.11)$$

(39.10) qatorning $n+1-$chi hadidan iborat bo‘lgan $\lambda^n (T^n f)(x)$ ifodani quyidagicha yozib olamiz:

$$\lambda^n (T^n f)(x) =$$
$$= \lambda^n \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \cdots \int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \cdots dt_1 dt.$$

(39.11) ga asosan $\lambda^n (T^n f)(x)$ ni quyidagicha baholash mumkin

$$|\lambda^n (T^n f)(x)| \le |\lambda|^n M_f M^n (b-a)^n. \quad (39.12)$$

Umumiy hadi (39.12) ko‘rinishdagi bahoga ega bo‘lgan qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun

$$|\lambda| M(b-a) < 1$$

shartning bajarilishi yetarli. Demak, (39.10) qator λ parametrning

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \quad (39.13)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar (39.3) tenglama biror $u(x)$ uzluksiz yechimga ega bo‘lsa, u holda u (39.9) tenglamani ham qanoatlantiradi. u ning $[a,\ b]$ kesmada uzluksizligidan

$$|u(x)| \le M_u, \quad \forall\, x \in [a,\ b]. \quad (39.14)$$

tengsizlik kelib chiqadi. U holda

$$|\lambda^{n+1} (T^{n+1} u)(x)| \le |\lambda|^{n+1} M_u\, M^{n+1} (b-a)^{n+1}.$$

Agar (39.13) tengsizlik bajariladi deb faraz etsak, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{n+1} (T^{n+1} u)(x) = 0.$$

Agar biz (39.9) da $n \to \infty$ da limitga o'tsak

$$u(x) = f(x) + \lambda(T f)(x) + \lambda^2 (T^2 f)(x) + \cdots + \lambda^n (T^n f)(x) + \cdots$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, biz har bir n da (39.9) tenglamani qanoatlantiruvchi $u(x)$ funksiya (39.10) ko'rinishdagi qator shaklida tasvirlanishiga ishonch hosil qildik.

Bevosita o'rniga qo'yish yordamida ko'rsatish mumkinki, (39.10) qator yig'indisi bo'lgan $u(x)$ funksiya (39.3) tenglamani qanoatlantiradi. Buning uchun (39.10) qatorning yig'indisini $u(x)$ bilan belgilab, bu tenglikning ikkala qismini $\lambda K(x,\, t)$ ga ko'paytirib va hosil bo'lgan tekis yaqinlashuvchi qatorni hadlab integrallaymiz. U holda biz quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = \lambda \int_a^b K(x,t)[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)f(t_1)dt_1 + \cdots]dt =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)f(t_1)dt_1 dt + \cdots = u(x) - f(x).$$

Demak, haqiqatan ham (39.10) qatorning yig'indisi $u(x)$, (39.3) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shunday qilib, quyidagi teorema isbot qilindi.

39.1-teorema. *Agar A) va B) shartlar hamda* (39.13) *tengsizlik bajarilsa,* (39.3) *integral tenglamaning yagona uzluksiz yechimi mavjud. Bu yechim* $[a,\ b]$ *da absolyut va tekis yaqinlashuvchi* (39.10) *qator yig'indisi bilan ustma-ust tushadi.*

Ushbu

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{39.15}$$

tenglama (39.3) tenglamaning $\lambda = 1$ bo'lgan xususiy holidan iborat. Ushbu holda ham biz yuqorida keltirgan mulohazalarimiz hech bir o'zgarishsiz takrorlanadi.

Qayd etish joizki, (39.3) integral tenglama (39.13) tengsizlik bajarilmasa ham uzluksiz yechimga ega boʻlishi mumkin. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin.

$$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{3} + \int_0^1 (x+t)u(t)dt$$

integral tenglama uchun $|\lambda|M(b-a) = 2 > 1$ boʻlib, tenglama $u(x) = x$ koʻrinishdagi uzluksiz yechimga ega.

Volterra tipidagi integral tenglamalar. Endi biz Volterra tipidagi operatorlarning rezolventasini topish masalasini qaraymiz. Quyida keltirilgan tasdiqlardan shu narsa kelib chiqadiki, Volterra operatorining rezolventasi noldan farqli barcha nuqtalarda mavjud va chegaralangan boʻlar ekan.

(39.4) Volterra tenglamasining oʻng tamoniga $u(t)$ funksiyaning ifodasini ketma-ket qoʻyib, quyidagini hosil qilamiz:

$$u(x) = f(x) + \lambda(Vf)(x) + \cdots + \lambda^n(V^n f)(x) + \lambda^{n+1}(V^{n+1}u)(x). \quad (39.16)$$

Umumiy hadi $\lambda^n(V^n f)(x)$ boʻlgan

$$f(x) + \lambda(Vf)(x) + \lambda^2(V^2 f)(x) + \cdots + \lambda^n(V^n f)(x) + \cdots \quad (39.17)$$

funksional qatorni qaraymiz. (39.11) tengsizlik bajarilganda (39.17) qatorning umumiy hadini quyidagicha baholash mumkin:

$$|\lambda^n(V^n f)(x)| \le |\lambda|^n M_f M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \le |\lambda|^n M_f M^n \frac{(b-a)^n}{n!}, \quad (a \le x \le b).$$

Umumiy hadi

$$|\lambda|^n M_f M^n \frac{(b-a)^n}{n!}$$

boʻlgan musbat hadli qator λ, M_f va M larning barcha qiymatlarida yaqinlashadi. Shuning uchun (39.17) funksional qator absolyut va tekis yaqinlashadi.

Agar (39.4) integral tenglama biror uzluksiz $u(x)$ yechimga ega boʻlsa, u holda bu yechim (39.16) tenglamani ham qanoatlantiradi. (39.16) ning soʻnggi qo‘shiluvchisi $\lambda^{n+1}(V^{n+1}u)(x)$ uchun quyidagi baho ($x\in[a,\ b]$) o‘rinli:

$$|\lambda^{n+1}(V^{n+1}u)(x)| \le |\lambda|^{n+1}M_u\,M^{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le |\lambda|^{n+1}M_uM^{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Bundan quyidagi limitik munosabatni olamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^{n+1}(V^{n+1}u)(x) \equiv 0.$$

(39.16) da $n\to\infty$ da limitga o‘tib, biz (39.4) tenglamani qanoatlantiruvchi $u(x)$ funksiya (39.17) qator ko‘rinishida ifodalanishini hosil qilamiz. Xuddi yuqorida ko‘rsatilgani kabi, (39.17) qator yig‘indisi $u(x)$ funksiya (39.4) tenglamani qanoatlantirishini isbotlash mumkin. Demak, biz quyidagi tasdiqni isbotladik.

39.2-teorema. *Agar A) va B) shartlar bajarilsa, u holda barcha λ lar uchun* (39.4) *integral tenglama yagona uzluksiz yechimga ega. Bu yechim* $[a,\ b]$ *da absolyut va tekis yaqinlashuvchi* (39.17) *qator ko‘rinishida ifodalanadi.*

Bu yerda olingan natijalarni o‘zgarishsiz ravishda

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

tenglamaga $\lambda = 1$ deb tadbiq etish mumkin.

39.2. Ketma-ket yaqinlashishlar usuli. Shuni qayd etish joizki, ketma-ket yaqinlashishlar usuli yuqorida bayon qilingan ketma-ket o‘rniga qo‘yish usulidan farq qiladi. Ketma-ket yaqinlashishlar usulida $C[a,\ b]$ dan ixtiyoriy u_0 funksiyani olamiz va uni (39.3) tenglama o‘ng tomonidagi $u(t)$ ning o‘rniga qo‘yib

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\,u_0(t)dt$$

ni olamiz. Hosil qilingan $u_1(x)$ funksiya ham A) va B) shartlarga ko‘ra $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘ladi. (39.3) tenglama o‘ng tomonidagi $u(t)$ ning o‘rniga $u_1(t)$ ni qo‘yib

$$u_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt$$

ni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirish natijasida biz

$$u_0(x),\ u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots$$

funksiyalar ketma-ketligini hosil qilamiz. Agar biz (39.1) Fredholm operatori ko'rinishidan foydalansak, u holda yuqoridagi ketma-ketlikning hadlari mos ravishda quyidagi tengliklar bilan aniqlanishi kelib chiqadi:

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x) = f(x) + \lambda(T\,u_0)(x) \\ \dots\quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \quad \dots \\ u_{n-1}(x) = f(x) + \lambda(T\,u_{n-2})(x) \\ u_n(x) = f(x) + \lambda(T\,u_{n-1})(x). \end{array}\right\}$$

Bu tengliklardan $u_n(x)$ uchun quyidagini hosil qilamiz

$$u_n(x) = f(x) + \lambda(T\,f)(x) + \lambda^2(T^2 f)(x) + \cdots + \lambda^{n-1}(T^{n-1} f)(x) + R_n(x).$$

Bu yerda

$$R_n(x) = \lambda^{\,n}(T^n\,u_0)(x).$$

$u_0(x)$ funksiyaning uzluksizligidan $R_n(x)$ uchun quyidagi bahoga ega bo'lamiz:

$$|R_n(x)| \ \leq\ |\lambda|^n M_{u_0} M^n (b-a)^n.$$

Bu yerdan, (39.13) tengsizlik bajarilgan holda quyidagi limitik munosabat kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) \equiv 0.$$

(39.10) qator (39.13) shartda absolyut va tekis yaqinlashadi. Shuning uchun n ning ortishi bilan $u_n(x)$ ketma-ketlik (39.10) qator yig'indisi bo'lgan $u(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x).$$

Ushbu jarayonda hosil qilinayotgan har bir $u_n(x)$ funksiya tanlangan $u_0(x)$ funksiyaga bog'liq bo'lib, lekin $u(x)-$ limitik funksiya $u_0(x)$ funksiyaning tanlanishidan bog'liq emas.

Endi biz yechimni yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilamiz, yana bitta $v(x) \neq u(x)$ yechim mavjud bo'lsin. $u_0(x)$ sifatida shu $v(x)$ funksiyani o'zini olamiz, ya'ni $u_0(x) = v(x)$. U holda ravshanki, har bir $u_n(x)$ funksiya $v(x)$ bilan ustma-ust tushadi va o'z navbatida ularning limiti yana $v(x)$ funksiyadan iborat bo'ladi. Yuqorida ta'kidlaganimizdek, $u_n(x)$ larning limiti $u(x)$, $u_0(x)$ ning tanlanishidan bog'liq emas. Bu esa $u(x) = v(x)$ ekanligini anglatadi. Bu zidlik qaralayotgan tenglama yechimining yagonaligini isbotlaydi.

Fredholm tenglamasining Volterra tomonidan berilgan yechimi.

39.1-ta'rif. *Agar* $M(b-a) < 1$ *shart bajarilsa, ushbu*

$$-(K_1(x,t) + K_2(x,t) + \cdots + K_n(x,t) + \cdots) \tag{39.18}$$

qator absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Uning yig'indisi $k(x,\, t)$ *funksiya* $K(x,\, t)$ *yadroning o'zaro to'ldiruvchi funksiyasi deb ataladi.*

Bu yerda $K_n(x,t)$ lar (39.5) tenglik bilan aniqlanadi.

O'zaro to'ldiruvchi funksiya $k(x,\, t)$ quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:

$$K(x,t) + k(x,t) = \int_a^b K(x,s)k(s,t)ds = \int_a^b k(x,s)K(s,t)ds. \tag{39.19}$$

Haqiqatan ham,

$$-K(x,t) - k(x,t) = \int_a^b K_1(x,s)[K_1(s,t) + \cdots + K_{n-1}(s,t) + \cdots]ds =$$

$$= \int_a^b [K_1(x,s) + \cdots + K_{n-1}(x,s) + \cdots]K_1(s,t)ds.$$

Bu tengliklardagi kvadrat qavs ichidagi ifodalar (39.18) ga asosan mos ravishda $-k(s,\, t)$ va $-k(x,\, s)$ ga teng bo'lib, bu (39.19) ni isbotlaydi.

Fredholm tenglamasi, ya'ni (39.3) tenglamaning $\lambda = 1$ bo'lgan holda Volterra tomonidan berilgan yechish usulini bayon qilamiz.

Faraz qilaylik, $k(x,\, t)$ funksiya $K(x,\, t)$ yardroning o'zaro to'ldiruvchi funksiyasi, $u(x)$ esa (39.15) tenglamaning uzluksiz yechimi bo'lsin, ya'ni

$$u(t) = f(t) + \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1.$$

Bu tenglikning ikkala qismini $k(x,\ t)-$ oʻzaro toʻldiruvchi funksiyaga koʻpaytirib, t oʻzgaruvchi boʻyicha $[a,\ b]$ kesmada integrallaymiz:

$$\int_a^b u(t)k(x,t)dt = \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \int_a^b \int_a^b k(x,t)K(t,t_1)\,dt\,u(t_1)dt_1 =$$
$$= \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \int_a^b [K(x,t_1)+k(x,t_1)]\,u(t_1)dt_1.$$

Bu yerda biz (39.19) munosabatdan foydalandik. Oxirgi tenglikdan esa

$$\int_a^b k(x,t)f(t)\,dt + \int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = 0 \qquad (39.20)$$

ni olamiz. (39.15) ga asosan

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = u(x) - f(x)$$

boʻlib, uni (39.20) ga qoʻyib, quyidagi ifodani olamiz:

$$u(x) = f(x) - \int_a^b k(x,t)f(t)dt. \qquad (39.21)$$

Shunday qilib, agar (39.15) integral tenglama biror uzluksiz yechimga ega boʻlsa, u yagona boʻladi va (39.21) tenglik bilan ifodalanadi. Demak, biz quyidagi tasdiqni isbotladik.

39.3-teorema. *A), B) va $M(b-a) < 1$ shartlar bajarilsin,* (39.15) *tenglama yagona uzluksiz yechimga ega va u* (39.21) *formula bilan ifodalanadi.*

Integral tenglamalarni yechishga doir misollar. Endi biz integral tenglamalarni yuqorida keltirilgan usullar bilan yechishga doir misollar keltiramiz.

39.1-misol. Quyidagi

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(t)dt \qquad (39.22)$$

integral tenglamani ketma-ket oʻrniga qoʻyish usuli bilan yeching.

Yechish. Bu Volterra tipidagi integral tenglama, 39.2-teoremaga koʻra u barcha λ larda yagona yechimga ega. Bu integral tenglama uchun ketma-ket o‘rniga qo‘yish usulini qo‘llash mumkin. Bu misolda $f(x) = 1$. Endi $(V^n f)(x)$ larni hisoblaymiz:

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x dt = x,$$

$$(V^2 f)(x) = \int_0^x \int_0^t f(t_1)dt_1 dt = \int_0^x dt \int_0^t dt_1 = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}.$$

Xuddi shunday $(V^3 f)(x)$ ni hisoblash mumkin.

$$(V^3 f)(x) = \int_0^x dy \int_0^y dt \int_0^t ds = \int_0^x dy \int_0^y tdt = \int_0^x \frac{y^2}{2} dy = \frac{x^3}{3!},$$

va hokazo

$$(V^n f)(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Shunday qilib, qaralayotga (39.22) integral tenglama yechimi quyidagi ko‘rinishga ega ekan

$$u(x) = 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} + \cdots = e^{\lambda x}. \tag{39.23}$$

Osongina ko‘rsatish mumkinki, $u(x) = e^{\lambda x}$ funksiya istalgan λ uchun (39.22) tenglamani qanoatlantiradi.

Endi (39.22) integral tenglamani ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan yechamiz. Ravshanki, dastlabki u_0 yaqinlashish sifatida biz ixtiyoriy funksiyani tanlashimiz mumkin. $u_0(x) = 0$ deb olamiz. U holda (39.22) tenglamaning o‘ng tomonidagi $u(t)$ o‘rniga u_0 ni qo‘yib birinchi yaqinlashish $u_1(x)$ uchun $u_1(x) = 1$ ni olamiz. Endi $u(t)$ o‘rniga $u_1(t)$ ni qo‘ysak, 2-chi yaqinlashish $u_2(x) = 1 + \lambda x$ ni olamiz. Shu kabi

$$u_3(x) = 1 + \lambda \int_0^x u_2(t)dt = 1 + \lambda \int_0^x (1 + \lambda t)dt = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2.$$

Bu jarayonni davom ettirib $n + 1$ $-$qadamda

$$u_{n+1}(x) = 1 + \lambda x + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{n!}\lambda^n x^n$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikda $n \to \infty$ da limitga o'tib

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = e^{\lambda x}$$

(39.22) integral tenglama yechimini olamiz.

Demak, barcha $\lambda \in \mathbb{R}$ lar uchun (39.22) integral tenglamaga ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llash mumkin va hosil bo'lgan $\{u_n(x)\}$ ketma-ketlik (39.22) integral tenglama yechimi bo'lgan $u(x) = e^{\lambda x}$ ga yaqinlashadi.

39.2-misol. Quyidagi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(t)u(t)dt \tag{39.24}$$

integral tenglamani yeching. Bunda φ va ψ funksiyalar uzluksiz bo'lib

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt = 0 \tag{39.25}$$

shartni qatoatlantiradi.

Yechish. (39.24) integral tenglamani ketma-ket o'rniga qo'yish usuli bilan yechamiz. Buning uchun

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \varphi(t)\psi(s)u(s)ds$$

ni (39.24) ning o'ng tomonidagi $u(t)$ o'rniga qo'yamiz:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(t) \left\{ f(t) + \lambda \int_a^b \varphi(t)\psi(s)u(s)ds \right\} dt =$$

$$= f(x) + \lambda\varphi(x) \int_a^b \psi(t)f(t)dt + \lambda^2\varphi(x) \left\{ \int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt \right\} \int_a^b \psi(s)u(s)ds.$$

Agar (39.25) shartdan foydalansak $u(x)$ uchun quyidagi ifodani olamiz

$$u(x) = f(x) + \lambda\varphi(x) \int_a^b \psi(t)f(t)dt. \tag{39.26}$$

Bu tenglikning o'ng tomoni $u(x)$ ga bog'liq emas, keyingi o'rniga qo'yishlar yana (39.26) tenglikka olib keladi. Demak, ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{R}$ uchun (39.24) integral tenglamaning yechimi (39.26) ko'rinishda bo'lar ekan.

Endi (39.24) integral tenglamani ketma-ket yaqinlashishlar usulidan foydalanib yechamiz. Boshlang‘ich yaqinlashish sifatida $u_0(x) = f(x)$ ni olamiz. U holda birinchi yaqinlashish

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\varphi(x)\int_a^b \psi(t)f(t)dt \tag{39.27}$$

bo‘ladi. $u_1(x)$ ni (39.24) ning o‘ng tomoniga qo‘yib $u_2(x)$ uchun quyidagini olamiz

$$u_2(x) = f(x) + \lambda\varphi(x)\int_a^b \psi(t)\left\{f(t) + \lambda\varphi(t)\int_a^b \psi(s)f(s)ds\right\}dt =$$

$$= f(x) + \lambda\varphi(x)\int_a^b \psi(t)f(t)dt + \lambda^2\varphi(x)\left\{\int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt\right\}\int_a^b \psi(s)f(s)ds. \tag{39.28}$$

Ortogonallik sharti bo‘lgan (39.25) dan foydalanib, (39.28) dan $u_2(x) = u_1(x)$ ga kelamiz. Xuddi shunday $u_n(x) = u_1(x), \quad n \geq 3$ tenglikka kelamiz. Demak, biz (39.24) integral tenglamaga ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo‘llab, biz ikkinchi hadidan boshlab o‘zgarma bo‘lgan

$$u_n(x) = f(x) + \lambda\varphi(x)\int_a^b \psi(t)f(t)dt$$

funksional ketma-ketlikka ega bo‘ldik. Bundan

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u_1(x).$$

Demak, istalgan $\lambda \in \mathbb{R}$ da (39.24) tenglama yagona yechimga ega va u (39.27) tenglik bilan ifodalanadi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Fredholm tipidagi integral tenglamaning umumiy ko‘rinishini yozing.*

2. *Volterra tipidagi integral tenglamaning umumiy ko‘rinishini yozing.*

3. $C[-\pi,\ \pi]$ *fazoda*

$$u(x) = \sin x + \lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos t\, u(t)dt$$

integral tenglamani ketma-ket o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching.

4. *$C[-\pi,\ \pi]$ fazoda*

$$u(x) = \sin x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin t \, u(t) \, dt$$

integral tenglamani ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yeching.

5. *Parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida*

$$u(x) = \sin x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x \cos t - \sin x \sin t) u(t) dt$$

integral tenglama uchun (39.13) tengsizlik bajariladi.

40-§. Integral tenglamalarni Fredholm usuli bilan yechish

Biz bu paragrafda (39.3) integral tenglamaning Fredholm tomonidan berilgan yechish usulini bayon qilamiz. Butun 40-paragraf davomida f dan kvadrati bilan integrallanuvchanlik shartini, K dan esa 39-§ dagi A) shartning bajarilishini talab qilamiz. Bu shartda 37.2-teoremaga ko‘ra (39.1) tenglik bilan aniqlangan T operator $L_2[a, b]$ fazoda o‘z-o‘ziga qo‘shma, chegaralangan va kompakt bo‘ladi.

Endi Fredholm tomonidan berilgan yechish usulida muhim o‘rin tutadigan *Fredholm determinanti* $\Delta(\lambda)$ va *Fredholm minorini* $D(x, t; \lambda)$ ni keltiramiz:

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n, \tag{40.1}$$

$$A_n = \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \cdots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \cdots & K(t_2, t_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \cdots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

$$D(x, t; \lambda) = \lambda K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x, t), \tag{40.2}$$

$$B_n(x,t) = \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) \cdots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \cdots & K(t_1,t_n) \\ \vdots & \cdots \vdots \cdots & \vdots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n.$$

Bu funksiyalarga $K(x, y)$ yadro orqali qurilgan (39.3) integral tenglamaga mos *Fredholm determinanti va minori* deyiladi. Keyinchalik (39.3) integral tenglamaning yechimini topish jarayonida muhim ahamiyatga ega bo'ladigan Fredholmning 2 ta fundamental munosabatini keltirib utamiz:

$$D(x,t;\lambda) - \lambda K(x,t)\Delta(\lambda) = \lambda \int_a^b K(s,t)D(x,s;\lambda)ds, \tag{40.3}$$

$$D(x,t;\lambda) - \lambda K(x,t)\Delta(\lambda) = \lambda \int_a^b K(x,s)D(s,t;\lambda)ds. \tag{40.4}$$

(39.3) integral tenglamaning Fredholm tomonidan berilgan yechimi Fredholm determinanti va minori bilan uzviy bog'liq. Ushbu qatorlarning yaqinlashishini, ularning umumiy hadlarini biror yo'l bilan baholash orqali ko'rsatiladi. Buning uchun biz quyidagi Adamar teoremasidan foydalanamiz.

40.1-teorema *(Adamar). Ushbu*

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

algebraik determinantning har bir b_{ik} hadi haqiqiy bo'lib,

$$|b_{ik}| \le M, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n$$

tengsizlikni qanoatlantirsin, u holda $|B| \le M^n \sqrt{n^n}$ tengsizlik o'rinli.

Adamar teoremasi quyidagi lemma yordamida isbotlanadi.

40.1-lemma. *Agar*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots \; \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

algebraik determinantning har bir a_{ik} *hadi haqiqiy bo'lib*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2 \leq 1, \quad k = 1, \ldots, n$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, $|A| \leq 1$ *tengsizlik o'rinli.*

Bu lemmaning isbotini keltirmaymiz, lekin $n = 2$ va $n = 3$ bo'lgan hollardagi geometrik talqinini beramiz. Tekislikda bir uchi koordinata boshi $O(0,0)$ da qolgan uchlari $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ hamda $P_3(x_3, y_3)$ nuqtalarda bo'lgan parallelogrammning yuzini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. Bu parallelogrammning yuzi

$$S = |A|, \qquad A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

formula bilan hisoblanadi. Agar OP_1 va OP_2 vektorlar uzunliklari birga teng, ya'ni $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$ bo'lsa, u holda bu parallelogrammning yuzi 1 dan oshmaydi. Xuddi shunday uch o'lchamli fazoda $OP_1(x_1, y_1, z_1)$, $OP_2(x_2, y_2, z_2)$ va $OP_3(x_3, y_3, z_3)$ vektorlar yordamida hosil qilingan parallelepipedning hajmi

$$V = |A|, \qquad A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

formula yordamida hisoblanadi. Ma'lumkim birlik $|OP_i| = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$ vektorlar yordamida qurilgan parallelepipedning hajmi birdan oshmaydi. Hajm 1 ga teng bo‘lishi uchun vektorlarning ortogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir.

40.1-teoremaning isboti. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Quyidagi ikkita hol bo‘lishi mumkin.

1-hol. s_i lardan bir yoki bir nechtasi nolga teng, masalan $s_i = 0$. U holda barcha $k = 1, 2, \ldots, n$ lar uchun $b_{ik} = 0$ bo‘lib, bundan esa determinantning bitta satr elementlari nol bo‘lganligi uchun bu determinant nolga tengligini, ya’ni $B = 0$ ni olamiz. Bu holda teorema tasdig‘i bajariladi.

2-hol. s_i lardan birortasi ham nolga teng emas. U holda ixtiyoriy $i = 1, 2, \ldots, n$ uchun $s_i > 0$ o‘rinli. Endi B determinantni quyidagicha tasvirlaymiz:

$$B = \sqrt{s_1 s_2 \cdots s_n} \begin{vmatrix} \dfrac{b_{11}}{\sqrt{s_1}} & \dfrac{b_{12}}{\sqrt{s_1}} & \cdots & \dfrac{b_{1n}}{\sqrt{s_1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \; \cdots \vdots \\ \dfrac{b_{n1}}{\sqrt{s_n}} & \dfrac{b_{n2}}{\sqrt{s_n}} & \cdots & \dfrac{b_{nn}}{\sqrt{s_n}} \end{vmatrix}.$$

Uning har bir satr elementlari uchun

$$\left(\frac{b_{i1}}{\sqrt{s_i}}\right)^2 + \left(\frac{b_{i2}}{\sqrt{s_i}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b_{in}}{\sqrt{s_i}}\right) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

tenglik o‘rinli, ya’ni 40.1-lemma shartlari bajariladi. Bundan esa

$$|B| \leq \sqrt{s_1 s_2 \cdots s_n}$$

tengsizlikning o‘rinli ekanligini olamiz. Teorema shartiga asosan $|b_{ik}| \leq M$ bo‘lgani uchun $s_i \leq nM^2$ bo‘lib, bundan kerakli

$$|B| \leq M^n \sqrt{n^n}$$

tengsizlikni olamiz. Δ

Ushbu teoremadan foydalanib $K(x,t)$ yadro $|K(x,t)| \leq M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, unga mos (40.1) qator bilan aniqlanuvchi $\Delta(\lambda)$ Fredholm determinanti λ parametrning barcha qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar biz (40.1) ni darajali qator sifatida qarasak, uning yaqinlashish radiusi $R = \infty$ bo'ladi. Bundan $\Delta(\lambda)$ funksiyaning kompleks tekislikda analitik funksiya ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday (40.2) qator bilan aniqlanuvchi $D(x,t;\lambda)$ Fredholm minori ham λ parametrning barcha qiymatlarida va har bir $(x,y) \in [a,\ b] \times [a,\ b]$ da absolyut, $[a,\ b] \times [a,\ b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, uning yig'indisi bo'lgan $D(x,t;\lambda)$ funksiya $(x,\ t)$ bo'yicha uzluksiz va λ parametrning analitik funksiyasi bo'ladi.

(39.3) integral tenglamaning Fredholm tomonidan berilgan yechimi quyidagi 40.2, 40.4 va 40.5-teoremalarda o'z ifodasini topgan.

40.2-teorema. *A) shart bajarilsin va $\Delta(\lambda) \neq 0$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $f \in L_2[a,\ b]$ da (39.3) integral tenglama*

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_a^b D(x,t;\lambda) f(t) dt \tag{40.5}$$

formula bilan ifodalanuvchi yagona yechimga ega.

Isbot. Faraz qilaylik, (39.3) tenglama $u(x)$ yechimga ega bo'lsin. Uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) u(s) ds. \tag{40.6}$$

(40.6) tenglikni ikkala qismini $D(x,t;\lambda)$ ko'paytirib $t-$ o'zgaruvchi bo'yicha a dan b gacha integrallab, natijada

$$\int_a^b D(x,t;\lambda)\, u(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b D(x,t;\lambda) f(t)\, dt + \lambda \int_a^b \int_a^b D(x,t;\lambda) K(t,s) u(s) ds dt \tag{40.7}$$

tenglikni hosil qilamiz. Ikki karrali integral ostidagi ifoda t va s lar bo'yicha integrallanuvchi bo'lganligi uchun, Fubini teoremasiga (37.1-teoremaga qarang) ko‘ra, unda integrallash tartibini o‘zgartirish mumkin. Uni quyidagicha yozamiz

$$\int_a^b u(s)\left\{\lambda\int_a^b K(t,s)\,D(x,t;\lambda)\,dt\right\}ds. \tag{40.8}$$

(40.3) Fredholm fundamental munosabatiga ko‘ra (40.8) ni quyidagicha yozish mumkin

$$\int_a^b \{D(x,s;\lambda)\ -\lambda\,\Delta(\lambda)\,K(x,s)\}\ u(s)ds.$$

Bu tenglikka ko‘ra (40.7) tenglama ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi

$$\int\limits_a^b D(x,t;\lambda)\,u(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b D(x,t;\lambda)f(t)\,dt + \int\limits_a^b D(x,s;\lambda)u(s)ds - \lambda\,\Delta(\lambda)\int\limits_a^b K(x,s)u(s)ds.$$

Agar biz

$$\int_a^b D(x,t;\lambda)\,u(t)\,dt = \int_a^b D(x,s;\lambda)u(s)ds$$

ayniyatni hisobga olsak oxirgi tenglikdan quyidagini olamiz:

$$\lambda\int_a^b K(x,t)\,u(t)dt = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)\,dt.$$

$\lambda\int_a^b K(x,t)\,u(t)dt$ ning bu ifodasini (39.3) ga qo’yib

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)dt$$

ni olamiz. Demak, (39.3) tenglamaning ixtiyoriy yechimi (40.5) ko‘rinishga ega ekan. Bu 40.2-teoremani isbotlaydi. Δ

Bu teoremadan natija sifatida aytish mumkinki, agar $\Delta(\lambda)\neq 0$ bo‘lsa, (39.3) integral tenglamaga mos bir jinsli integral tenglama faqat nol yechimga ega bo‘ladi.

40.1. Bir jinsli tenglamaning yechimi. Endi (39.3) integral tenglamaga mos bir jinsli tenglamani, ya’ni

$$u(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{40.9}$$

tenglamani qaraymiz. Quyidagi tasdiq o‘rinli.

40.3-teorema. *Agar $\Delta(\lambda_0) = 0$ va $D(x,t;\lambda_0)$ aynan nol funksiya bo‘lmasa, u holda shunday $t_0 \in [a,\ b]$ mavjudki, $D(x,t_0;\lambda_0)$ funksiya*

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{40.10}$$

tenglamaning aynan nolga teng bo‘lmagan uzluksiz yechimi bo‘ladi.

Isbot. (40.10) integral tenglamaning yechimini topish uchun barcha λ larda o‘rinli bo‘lgan Fredholmning (40.4) fundamental munosabatidan foydalanamiz. Teorema shartida (40.4) munosabat

$$D(x,t;\lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x,s)D(s,t;\lambda_0)ds \tag{40.11}$$

ko‘rinishni oladi. Teorema shartiga ko‘ra $t_0 \in [a,\ b]$ ni shunday tanlash mumkunki, $D(x,t_0;\lambda_0)$ aynan nolga teng bo‘lmagan funksiya bo‘ladi. (40.11) munosabat barcha $t \in [a,\ b]$ larda, xususan, $t = t_0$ bo‘lganda ham o‘rinli, ya’ni

$$D(x,t_0;\lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x,s)D(s,t_0;\lambda_0)ds.$$

Bu esa $D(x,t_0;\lambda_0)$ funksiya (40.10) integral tenglamaning yechimi ekanligini anglatadi. Yuqorida keltirilgan Adamar teoremasidan ko‘rinadiki, $D(x,t;\lambda)$ funksiya barcha $x,t \in [a,\ b]$ larda tekis yaqinlashuvchi va hadlari uzluksiz funksiyalardan iborat qator yig‘indisi sifatida uzluksizdir. Δ

40.1-ta’rif. *Agar biror $\lambda = \lambda_0$ uchun $\Delta(\lambda_0) = 0$ bo‘lsa, λ_0 ga $K(x,\ t)$ yadroning xarakteristik soni deyiladi. (40.10) tenglamaning nolmas yechimi esa $K(x,\ t)$ yadroning λ_0 xarakteristik songa mos fundamental funksiyasi deyiladi.*

Agar $\lambda_0 -$ $K(x,\ t)$ yadroning xarakteristik soni bo‘lsa, u holda $\mu = 1/\lambda_0$ soni (39.1) tenglik bilan aniqlangan T operatorning xos qiymati bo‘ladi. $K(x,t)$ yadroning fundamental funksiyalari, T operatorning xos funksiyalari bo‘ladi.

40.3-teoremada $D(x,t;\lambda_0)$ aynan nolga teng emas shartini $\Delta'(\lambda_0)\neq 0$ shart bilan almashtirish mumkin. Buning ucnun biz barcha λ larda o'rinli bo'lgan quyidagi tenglikdan ([10] ga qarang) foydalanamiz

$$\int_a^b D(x,\,x;\lambda)dx=-\lambda\ \Delta'(\lambda). \tag{40.12}$$

Faraz qilaylik, $\Delta(\lambda_0)=0$ va $\Delta'(\lambda_0)\neq 0$ bo'lsin. Ma'lumki ((40.1) ga qarang), $\Delta(0)=1$ shuning uchun $\lambda_0\neq 0$. Agar biz (40.12) formulada $\lambda=\lambda_0$ desak, uning o'ng tomoni noldan farqli bo'ladi, shunday ekan uning chap tomoni ham nolmas bo'ladi. Bundan $D(x,\,x;\lambda_0)$ aynan nolga teng emasligi va o'z navbatida $D(x,\,t;\lambda_0)$ ning ham aynan nolga teng emasligi kelib chiqadi.

Agar $\Delta(\lambda_0)=0$ bilan birgalikda $D(x,\,t;\lambda_0)\equiv\ 0$ bo'lsa, u holda (40.10) bir jinsli tenglamaning nolmas yechimlarini topish uchun *yuqori tartibli* minorlarni qarashga to'g'ri keladi. Yuqori tartibli minorlarni kiritish uchun biz quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$K\begin{pmatrix} s_1,\ s_2,\dots,s_n\\ t_1,\ t_2,\dots,\ t_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} K(s_1,t_1) & K(s_1,t_2) & \cdots & K(s_1,t_n)\\ K(s_2,t_1) & K(s_2,t_2) & \cdots & K(s_2,t_n)\\ \vdots\ \cdots & \cdots\ \vdots & \cdots & \vdots\\ K(s_n,t_1) & K(s_n,t_2) & \cdots & K(s_n,t_n)\end{vmatrix} \tag{40.13}$$

va

$$B_n\begin{pmatrix} x_1,\ x_2,\dots,x_p\\ y_1,\ y_2,\dots,y_p\end{pmatrix}=$$

$$=\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} x_1,\ \dots,x_p,t_1,\dots,t_n\\ y_1,\ \dots,y_p,t_1,\dots,t_n\end{pmatrix}dt_1\cdots\ dt_n. \tag{40.14}$$

Xususan $n=0$ da

$$B_0\begin{pmatrix} x_1,\ x_2,\dots,x_p\\ y_1,\ y_2,\dots,y_p\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix} x_1,\ x_2,\dots,x_p\\ y_1,\ y_2,\ \dots,y_p\end{pmatrix}. \tag{40.15}$$

U holda $\Delta(\lambda)$ ning $p-$ tartibli minori quyidagicha aniqlanadi

$$D\begin{pmatrix} x_1,\, x_2, \ldots, x_p, \lambda \\ y_1,\, y_2, \ldots, y_p, \lambda \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{p+n}}{n!} B_n \begin{pmatrix} x_1,\, x_2, \ldots, x_p \\ y_1,\, y_2, \ldots, y_p \end{pmatrix} :=$$
$$= D_p(x, y; \lambda) \tag{40.16}$$

Xususiy hol $p = 1$ da $D_1(x, y; \lambda) = D(x, y; \lambda)$. Ta'kidlash joizki, agar biror $i \neq j$ uchun $x_i = x_j$ bo‘lsa, u holda (40.13) tenglik bilan aniqlangan

$$K\begin{pmatrix} x_1,\, x_2, \ldots, x_p \\ y_1,\, y_2,\, \ldots, y_p \end{pmatrix}$$

determinantning $i-$chi va $j-$chi satrlari bir xil bo‘ladi va natijada

$$K\begin{pmatrix} x_1,\, x_2, \ldots, x_p \\ y_1,\, y_2,\, \ldots, y_p \end{pmatrix} \equiv 0$$

bo‘ladi. Bundan $D_p(x, y; \lambda) \equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday biror $i \neq j$ uchun $y_i = y_j$ bo‘lsa ham $D_p(x, y; \lambda) \equiv 0$ bo‘ladi. Agar (40.13) tenglik bilan aniqlangan

$$K\begin{pmatrix} x_1,\, x_2, \ldots, x_p \\ y_1,\, y_2,\, \ldots, y_p \end{pmatrix}$$

determinantda x_i bilan x_j ning o‘rnini almashtirsak (40.13) determinantda $i-$ chi va $j-$ chi satrlarning o‘rni almashadi, bu esa (40.13) determinantning ishorasini o‘zgartiradi. Bu xossa $p-$ tartibli minor $D_p(x, y; \lambda)$ uchun ham o‘rinli, ya'ni agar biz $p-$ tartibli minor

$$D\begin{pmatrix} x_1,\, x_2, \ldots, x_p, \lambda \\ y_1,\, y_2, \ldots,\, y_p,\, \lambda \end{pmatrix} := D_p(x, y; \lambda)$$

da ((40.16) formulaga qarang) x_i bilan x_j ni o‘rnini almashtirsak, $p-$ tartibli minor $D_p(x, y; \lambda)$ ning faqat ishorasi almashadi.

Fredholmning umumlashgan fundamental munosabatlari quyidagilar:

$$D\begin{pmatrix} x_1,\, x_2, \ldots, x_p, \lambda \\ y_1,\, y_2, \ldots,\, y_p,\, \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \lambda \, K(x_\alpha, y_\beta) \; D \begin{pmatrix} x_1, \, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, \lambda \\ y_1, \, \ldots, \, y_{\beta-1}, \, y_{\beta+1}, \ldots, y_p, \lambda \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda \int_a^b K(t, y_\beta) \, D \begin{pmatrix} x_1, \, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, \lambda \\ y_1, \, \ldots, y_{\beta-1}, \; t, \; y_{\beta+1}, \ldots, \, y_p, \, \lambda \end{pmatrix} dt. \qquad (40.17)$$

$$D \begin{pmatrix} x_1, \, x_2, \ldots, x_p, \lambda \\ y_1, \, y_2, \ldots, \, y_p, \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \lambda \, K(x_\alpha, y_\beta) \; D \begin{pmatrix} x_1, \, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, \lambda \\ y_1, \, \ldots, \, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \ldots, \, y_p, \lambda \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda \int_a^b K(x_\alpha, t) \, D \begin{pmatrix} x_1, \, \ldots, x_{\alpha-1}, \, t, \, x_{\alpha+1}, \ldots, \; x_p, \lambda \\ y_1, \, \ldots, y_{\beta-1}, \, y_\beta, \, y_{\beta+1}, \ldots, \, y_p, \lambda \end{pmatrix} dt. \qquad (40.18)$$

Yuqorida keltirilgan (40.12) munosabat quyidagi umumiy munosabatning xususiy holidir

$$\int_a^b \cdots \int_a^b D \begin{pmatrix} x_1, \, x_2, \ldots, x_p, \lambda \\ x_1, \, x_2, \ldots, x_p, \lambda \end{pmatrix} dx_1 \cdots dx_p = (-1)^p \lambda^p \Delta^{(p)}(\lambda). \qquad (40.19)$$

(40.17)-(40.19) tengliklarning isboti [10] da keltirilgan. Faraz qilaylik, λ_0 soni $\Delta(\lambda) = 0$ tenglamaning ildizi bo‘lsin. Ma’lumki, $\Delta(0) = 1$ shuning uchun $\lambda_0 \neq 0$. $\Delta(\lambda)$ analitik funksiya bo‘lganligi uchun λ_0 uning chekli r karrali noli bo‘ladi, ya’ni

$$\Delta(\lambda_0) = 0, \quad \Delta'(\lambda_0) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta^{(r-1)}(\lambda_0) = 0, \quad \Delta^{(r)}(\lambda_0) \neq 0.$$

Agar biz (40.19) formulada $\lambda = \lambda_0$ va $p = r$ desak, u holda (40.19) ning o’ng tomoni nolmas bo‘ladi. Demak, uning chap tomoni ham nolmas, bu esa o‘z navbatida $p-$ tartibli $D_p(x, x; \lambda_0)$ minorning aynan nolmas ekanligini keltirib chiqaradi. Bu yerdan $D_p(x, y; \lambda_0)$ ning aynan nol funksiya emasligi kelib chiqadi. Agar λ_0 soni $\Delta(\lambda)$ funksiyaning r karrali noli bo‘lsa, u holda shunday $q \le r$ natural son mavjudki, quyidagilar bajariladi:

$$\Delta(\lambda_0) = 0, \quad D(x, y; \lambda_0) \equiv 0, \dots, \quad D_{q-1}(x, y; \lambda_0) \equiv 0$$

bo‘lib, $D_q(x, y; \lambda_0)$ aynan nolmas bo‘ladi.

40.2-ta’rif. *Yuqorida aniqlangan* q *soniga* λ_0 *xarakteristik sonning karraligi deyiladi.*

Shuni ta’kidlaymizki, simmetrik yadrolar uchun $q = r$ tenglik o‘rinli. Xususan bizning holimizda ham $q = r$ bo‘ladi.

$D_q(x, y; \lambda_0)$ aynan nolmas funksiya bo‘lganligi uchun shunday $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2', \dots, x_q = x_q'$, $\quad y_1 = y_1'$, $\quad y_2 = y_2', \dots, y_q = y_q'$ nuqtalar mavjud bo‘lib,

$$D\begin{pmatrix} x_1',\, x_2', \dots, x_q', \lambda_0 \\ y_1',\, y_2', \dots, y_q', \lambda_0 \end{pmatrix} \neq 0$$

bo‘ladi. Endi Fredholmning (40.18) umumlashgan fundamental munosabatida $\lambda = \lambda_0, \quad p = q$ va

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1', \; \dots, \; x_{\alpha-1} = x_{\alpha-1}', \quad x_\alpha = x, \quad x_{\alpha+1} = x_{\alpha+1}', \dots, \; x_q = x_q', \\ &y_1 = y_1', \; \dots, \; y_{\alpha-1} = y_{\alpha-1}', \;\; y_\alpha = y_\alpha', \;\; y_{\alpha+1} = y_{\alpha+1}', \dots, y_q = y_q' \end{aligned}$$

desak, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz

$$D\begin{pmatrix} x_1', \; \dots, x_{\alpha-1}', \; x, \; x_{\alpha+1}', \dots, x_q', \lambda \\ y_1', \, \dots, \, y_{\alpha-1}', \, y_\alpha', \, y_{\alpha+1}', \dots, \, y_q', \, \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_0 \int_a^b K(x, t)\, D\begin{pmatrix} x_1', \, \dots, x_{\alpha-1}', \; t, \; x_{\alpha+1}', \dots, x_q', \, \lambda_0 \\ y_1', \, \dots, y_{\beta-1}', \, y_\beta', \, y_{\beta+1}', \dots, \, y_q', \, \lambda_0 \end{pmatrix} dt. \qquad (40.20)$$

(40.20) tenglikning ikkala qismini noldan farqli bo‘lgan

$$D\begin{pmatrix} x_1',\, x_2', \dots, x_q', \lambda_0 \\ y_1',\, y_2', \dots, y_q', \lambda_0 \end{pmatrix} := D_q(x', y'; \lambda_0)$$

bo‘lamiz va

$$\varphi_\alpha(x,\lambda_0)=\frac{D\begin{pmatrix} x'_1,\,\dots,x'_{\alpha-1},\,x,\,x'_{\alpha+1},\dots,x'_q,\lambda_0\\ y'_1,\,\dots,y'_{\beta-1},\,y'_\beta,\,y'_{\beta+1},\dots,y'_q,\lambda_0\end{pmatrix}}{D_q(x',y';\lambda_0)} \tag{40.21}$$

belgilash kiritib, barcha $\alpha=1,\,2,\dots,q$ larda quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\varphi_\alpha(x,\lambda_0)=\lambda_0\int_a^b K(x,t)\varphi_\alpha(t,\lambda_0)\,dt. \tag{40.22}$$

(40.22) tenglik $\varphi_1(x,\lambda_0),\,\varphi_2(x,\lambda_0),\dots,\varphi_q(x,\lambda_0)$ lar bir jinsli (40.10) tenglamaning yechimlari ekanligini bildiradi. Bu yechimlar uzluksiz va (40.21) ga ko‘ra

$$\varphi_\alpha(x'_\beta,\lambda_0)=\begin{cases}1, & agar\ \ \alpha=\beta\\ 0, & agar\ \ \alpha\neq\beta.\end{cases} \tag{40.23}$$

40.1-lemma. *Bir jinsli (40.10) tenglamaning yechimlari sistemasi* $\varphi_1(x,\lambda_0),\ \varphi_2(x,\lambda_0),\ \dots,\ \varphi_q(x,\lambda_0)$ *chiziqli erklidir.*

Isbot. Faraz qilaylik,

$$C_1\,\varphi_1(x,\lambda_0)+C_2\,\varphi_2(x,\lambda_0)+\dots+C_q\,\varphi_q(x,\lambda_0)=0$$

tenglik biror $C_1,\,C_2,\dots,C_q$ sonlar uchun o‘rinli bo‘lsin. So‘nggi tenglikda $x=x'_\alpha$ desak, (40.23) ga ko‘ra $C_\alpha=0,\ \alpha=1,\,2,\,\dots,q$ ga ega bo‘lamiz. Δ

Ma’lumki bir jinsli tenglama yechimlari yig‘indisi va songa ko‘paytmasi yana yechim bo‘ladi. Shuning uchun

$$u(x)=\ C_1\,\varphi_1(x,\lambda_0)+C_2\,\varphi_2(x,\lambda_0)+\dots+C_q\,\varphi_q(x,\lambda_0) \tag{40.24}$$

funksiya ixtiyoriy $C_1,\,C_2,\dots,C_q$ sonlar uchun (40.10) bir jinsli tenglamaning yechimi bo‘ladi. Endi (40.10) bir jinsli tenglamaning ixtiyoriy yechimi (40.24) ko‘rinishga ega ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $v(x)$ bir jinsli (40.10) tenglamaning biror yechimi bo‘lsin, ya’ni

$$v(t)-\lambda_0\int_a^b K(t,s)\,v(s)\,ds\equiv\ 0 \tag{40.25}$$

bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $H(x,\, t)$ uzluksiz funksiya uchun quyidagi ayniyat o‘rinli

$$\int_a^b \left\{ v(t)H(x,t) - \lambda_0 \int_a^b K(t,s)\, v(s) H(x,t)\, ds \right\} dt \equiv\; 0. \tag{40.26}$$

(40.25) dan (40.26) ni ayirib, quyidagiga ega bo‘lamiz

$$v(x) = \lambda_0 \int_a^b N(x,t)\, v(t)\, dt, \tag{40.27}$$

bu yerda

$$\lambda_0 N(x,t) = \lambda_0 K(x,t) - H(x,t) + \lambda_0 \int_a^b K(s,t)\, H(x,s)\, ds.$$

Endi Fredholmning (40.17) umumlashgan fundamental munosabatida $\lambda = \lambda_0$, $p = q+1$ va $x_{q+1} = x,\; y_{q+1} = y$ desak va x_i bilan x_j ning o’rni almashganda $D_p(x,y;\lambda_0)$ ning ishorasi almashinishini hisobga olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\begin{aligned} D\begin{pmatrix} x,\, x_1, \ldots, x_q, \lambda_0 \\ y,\, y_1, \ldots, y_q, \lambda_0 \end{pmatrix} &= \lambda_{\,0} K(x,y)\; D\begin{pmatrix} x_1,\, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_q, \lambda_0 \\ y_1,\, \ldots, y_\beta, \ldots, y_q, \lambda_0 \end{pmatrix} - \\ &- \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_0\, K(x_\alpha, y)\, D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{\alpha-1},\, x,\, x_{\alpha+1}, \ldots, x_q,\, \lambda_0 \\ y_1, \ldots, y_{\alpha-1},\, y_\alpha,\, y_{\alpha+1}, \ldots, y_q,\, \lambda_0 \end{pmatrix} + \\ &+ \lambda_0 \int_a^b K(s,y)\, D\begin{pmatrix} x, x_1,\, \ldots, x_q, \lambda_0 \\ s,\, y_1, \ldots, y_q,\, \lambda_0 \end{pmatrix} ds. \end{aligned} \tag{40.28}$$

(40.28) tenglikda

$$x_1 = x_1',\; \ldots,\; x_q = x_q', \quad y = t,\; y_1 = y_1',\; \ldots,\; y_q = y_q'$$

almashtirish qilamiz, hamda (40.28) tenglikning ikkala qismini noldan farqli bo‘lgan

$$D\begin{pmatrix} x_1',\, x_2', \ldots, x_q', \lambda_0 \\ y_1',\, y_2', \ldots, y_q', \lambda_0 \end{pmatrix} := D_q(x', y'; \lambda_0)$$

ga bo'lamiz va

$$H(x,y) = \frac{D\begin{pmatrix} x,\, x'_1, \ldots, x'_q,\, \lambda_0 \\ y,\, y'_1,\, \ldots, y'_q,\, \lambda_0 \end{pmatrix}}{D_q(x', y'; \lambda_0)} \tag{40.29}$$

belgilash kiritib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_0 K(x'_\alpha, t)\varphi_\alpha(x, \lambda_0) =$$

$$= \lambda_0 K(x,t) - H(x,t) + \lambda_0 \int_a^b K(s,t)\, H(x,s)\, ds. \tag{40.30}$$

(40.30) tenglikning o'ng tomoni $\lambda_0 N(x,\, t)$ ga teng. (40.26) aytiyat ixtiyoriy $H(x,\, t)$ uzluksiz funksiya uchun o'rinli edi. Shuning uchun biz uni (40.29) tenglik bilan aniqlangan $H(x,\, t)$ bilan almashtiramiz. Natijada

$$\lambda_0 N(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_0 K(x'_\alpha, t)\varphi_\alpha(x, \lambda_0)$$

tenglikni olamiz. $\lambda_0 N(x,\, t)$ ning bu ifodasini (40.27) tenglikning o'ng tomoniga qo'yib,

$$v(x) = \lambda_0 \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x, \lambda_0) \int_a^b K(x'_\alpha, t)\, v(t)\, dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan $v(x)$ ning (40.24) ko'rinishda tasvirlanishi kelib chiqadi. Shunday qilib, biz Fredholmning ikkinchi fundamental teoremasini isbotladik.

40.4-teorema. *Agar $\lambda = \lambda_0$ soni $K(x,\, t)$ yadroning q karrali xarakteristik soni bo'lsa, u holda (40.10) bir jinsli tenglama q ta chiziqli bog'lanmagan $\varphi_\alpha(x, \lambda_0)$, $\alpha = 1,\, 2, \ldots, q$ yechimlarga ega bo'ladi va ixriyoriy $u(x)$ yechim ularning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida tasvirlanadi, ya'ni $u(x)$ yechim uchun (40.24) tenglik o'rinli.*

Bu chiziqli bog'lanmagan $\varphi_\alpha(x, \lambda_0)$, $\alpha = 1,\, 2, \ldots, q$ yechimlar sistemasi (40.21) tenglik bilan aniqlanadi.

40.2. Bir jinslimas tenglamaning umumiy yechimi. Hozir biz bir jinslimas (39.3) integral tenglamaning umumiy yechimini beramiz. Agar $\Delta(\lambda) \neq 0$ bo‘lsa, (39.3) integral tenglama yagona yechimga ega va u (40.5) tenglik bilan aniqlanadi. Endi (39.3) bir jinslimas integral tenglamani $\Delta(\lambda) = 0$ holda yechishga harakat qilamiz. 38.1-teoremaga ko‘ra (39.3) tenglama yechimga ega bo‘lishi uchun $f \in L_2[a,\ b]$ funksiya (40.9) bir jinsli tenglamaga qo‘shma tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli. Biz simmetrik yadrolarni ((37.8) shartga qarang), ya’ni $T = T^*$ holni qarayapmiz. Bu holda (40.9) bir jinsli tenglamaga qo‘shma tenglama (40.9) tenglamaning o‘zidan iborat. Faraz qilaylik, $\lambda = \lambda_0$ soni $K(x, t)$ yadroning q karrali xarakteristik soni bo‘lsin, u holda (40.10) bir jinsli tenglama q ta chiziqli bog‘lanmagan $\varphi_\alpha(x, \lambda_0)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, q$ yechimlarga ega bo‘ladi. Bu holda (39.3) tenglama yechimga ega bo‘lishi uchun $f \in L_2[a,\ b]$ funksiya (40.10) bir jinsli tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli, ya’ni

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_\alpha(x, \lambda_0) dx = 0, \quad \alpha = 1,\, 2,\, \ldots,\, q. \tag{40.31}$$

Faraz qilaylik, (40.31) shartlar bajarilgan bo‘lsin, u holda 38.1-teoremaga ko‘ra (39.3) tenglama yechimga ega bo‘ladi. Bu teorema yechimning mavjudligini beradi xalos. Yechimni topish esa oson masala emas. Hozir biz yechimni topishning Fredholm tomonidan berilgan usulini bayon qilamiz. Faraz qilaylik, (40.31) shartlar bajarilgan bo‘lsin. U holda

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_0 K(x'_\alpha, x) \int_a^b f(t)\, \varphi_\alpha(t, \lambda_0) dt \equiv\ 0 \tag{40.32}$$

ayniyatga ega bo‘lamiz. $\lambda_0\, K(x, x'_\alpha) = \lambda_0\, K(x'_\alpha, x)$ ifoda t ga bog‘liq bo‘lmaganligi uchun uni integral tagiga kiritish mumkin, ya’ni

$$\int_a^b \left\{ \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_0 K(x'_\alpha, x)\, \varphi_\alpha(t, \lambda_0) \right\} f(t)\, dt \equiv\ 0. \tag{40.33}$$

(40.30) dan hamda $K(x,t) = K(t,x)$ shartdan foydalanib (bu holda $H(x,t) = H(t,x)$ bo‘ladi) (40.33) ni quyidagicha yozish mumkin

$$0 \equiv \lambda_0 \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt - \int_a^b H(x,t) f(t)\, dt +$$
$$+\lambda_0 \int_a^b f(t) \left\{ \int_a^b K(x,s)\, H(s,t)\, ds \right\} dt. \tag{40.34}$$

So‘nggi qo‘shiluvchi

$$\lambda_0 \int_a^b \int_a^b f(t)\, K(x,s)\, H(s,t)\, ds\, dt$$

ni quyidagicha ham yozish mumkin: bunda t va s larni joyini almashtirib

$$\lambda_0 \int_a^b \int_a^b f(s)\, K(x,t)\, H(t,s)\, dt\, ds$$

yoki

$$\lambda_0 \int_a^b K(x,t) \left\{ \int_a^b H(t,s)\, f(s)\, ds \right\} dt.$$

Bu ifodani (40.34) ga qo’yib va birinchi va oxirgi hadlarni birlashtirib quyidagiga kelamiz:

$$0 \equiv \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t) \left\{ f(t) + \int\limits_a^b H(t,s) f(s) ds \right\} dt - \int\limits_a^b H(x,t) f(t)\, dt. \tag{40.35}$$

Agar biz

$$u_0(t) = f(t) + \int_a^b H(t,s)\, f(s) ds$$

yoki

$$u_0(x) - f(x) = \int_a^b H(x,s)\, f(s) ds \tag{40.36}$$

desak, u holda (40.35) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$u_0(x) = f(x) + \lambda_0 \int_a^b K(x,s)\; u_0(s) ds.$$

Shunday qilib, (40.31) shartlar bajarilganda (39.3) tenglamaning $\lambda = \lambda_0$ da hech bo‘lmaganda bitta (40.36) tenglik bilan aniqlanuvchi $u_0(x)$ yechimi mavjud. Endi (39.3) tenglamaning barcha yechimlarini topamiz. Faraz qilaylik, (39.3) tenglama $\lambda = \lambda_0$ da $u_0(x)$ dan farqli $u(x)$ yechimga ham ega bo'lsin. U holda $u(x) - u_0(x)$ (40.10) bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi. 40.4-teoremaga ko'ra

$$u(x) - u_0(x) = C_1\,\varphi_1(x, \lambda_0) + C_2\,\varphi_2(x, \lambda_0) + \cdots + C_q\,\varphi_q(x, \lambda_0).$$

Bu yerda $C_1,\, C_2, \ldots, C_q$ ixtiyoriy o'zgarmaslar. Ma'lumki, bir jinslimas tenglamaning umumiy yechimi, uning biror xususiy yechimi bilan bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. Shunga ko'ra (39.3) tenglamaning $\lambda = \lambda_0$ dagi umumiy yechimi

$$u(x) = f(x) + \int_a^b H(x,t)\, f(t)\, dt +$$

$$+ C_1\,\varphi_1(x, \lambda_0) + C_2\,\varphi_2(x, \lambda_0) + \cdots + C_q\,\varphi_q(x, \lambda_0) \tag{40.37}$$

bo'ladi. Shunday qilib biz Fredholmning uchinchi fundamental teoremasini isbotladik.

40.5-teorema. *Agar $\lambda = \lambda_0$ soni $K(x,\,t)$ yodroning q karrali xarakteristik soni bo'lsa, u holda (39.3) tenglama umuman olganda yechimlarga ega emas. Bu tenglama yechimga ega bo'lishi uchun (40.31) shartlarning bajarilishi zarur va yetarli. Agar (40.31) shartlar bajarilsa, u holda (39.3) tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lib, ular (40.37) formula bilan aniqlanadi. (40.37) da $C_1,\, C_2, \ldots, C_q$ ixtiyoriy o'zgarmaslar, $\varphi_\alpha(x, \lambda_0)$, $\alpha = 1,\, 2, \ldots, q$ lar (40.21) formula bilan, $H(x,t)$ funksiya (40.29) tenglik bilan aniqlanadi.*

Integral tenglamalarni yechishga doir misollar. Endi biz integral tenglamalarni Fredholm usuli bilan yechishga doir misollar qaraymiz.

40.1-misol. $L_2[-\pi,\ \pi]$ fazoda

$$u(x) = f(x) + \ \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y) u(y) dy$$

integral tenglamaga mos Fredholm determinanti va Fredholm minorini toping.

Yechish. Bu integral tenglamaning yadrosi $K(x,y) = 1+\cos x \cos y$ haqiqiy qiymatli va simmetriklik shartini qanoatlantiradi, ya'ni $K(x,y) = K(y,x)$. Endi (40.1) formula yordamida $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ koeffitsiyentlarni hisoblaymiz:

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} K(x,x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos^2 x)\,dx = 2\pi + \pi = 3\pi.$$

Xuddi shunday A_2 koeffitsiyent hisoblanadi:

$$A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} K(x,x) & K(x,y) \\ K(y,x) & K(y,y) \end{vmatrix} dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} \left[(1+\cos^2 x)\,(1+\cos^2 y) - (1+\cos x\ \cos\ y)^2\right] dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\ \cos\ y\right)\, dy = 2\pi^2 + 2\pi^2 - 0 = 4\pi^2.$$

Intrgral tenglama yadrosining rangi 2 bo'lganligi uchun, barcha $n \geq 3$ larda $A_n = 0$ bo'ladi. Shuning uchun determinant $\Delta(\lambda)$ quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda A_1 + \frac{1}{2}\lambda^2 A_2 = 1 - 3\pi\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 \cdot 4\pi^2 = (\pi\lambda - 1)(2\pi\lambda - 1). \quad (40.38)$$

Integral tenglama yadrosining rangi 2 bo'lganligi uchun, barcha $n \geq 2$ larda $B_n(x,t) = 0$ tenglik o'rinli. $B_1(x,t)$ uchun esa quyidagi

$$B_1(x,t) = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1 =$$

$$= (2\pi + \pi)\,(1 + \cos x\ \cos\ t) - 2\pi - \pi\cos x\ \cos\ t = \pi + 2\pi\cos x\ \cos\ t.$$

tenglik o'rinli. Shunday qilib $D(x,t;\lambda)$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$D(x,t;\lambda) = \lambda\, K(x,t) - \lambda^2\, B_1(x,t) = \lambda(1 + \cos\ x\ \cos\ t) -$$

$$-\lambda^2(\pi + 2\pi\cos\ x\ \cos\ t) = \lambda(1-\pi\lambda) + \lambda\,(1-2\pi\lambda)\ \cos\ x\ \cos\ t\,. \quad (40.39)$$

40.2-misol. $K(x,y) = 1 + \cos x \cos y$ yadroning xarakteristik sonlari va fundamental funksiyalarini toping.

Yechish. Yadroning xarakteristik sonlari bu $\Delta(\lambda)$ ning nollaridir. 40.1-misolda $K(x, y) = 1 + \cos x \cos y$ yadroga mos Fredholm determinanti topilgan. Uning nollari ((40.38) ga qarang) $\lambda_1 = \pi^{-1}$ va $\lambda_2 = (2\pi)^{-1}$ lardir. Demak, ular $K(x,\, y)$ yadroning xarakteristik sonlari bo'ladi. Bu λ_1 va λ_2 nuqtalarda birinchi tartibli minor $D(x, t; \lambda)$ noldan farqli bo'lganligi uchun bu xarakteristik sonlarning karraliklari birga teng, ya'ni bir jinsli tenglamaning yechimlari to'plami bir o'lchamli chiziqli fazodir. (40.39) ga ko'ra bu xarakteristik sonlarga mos keluvchi fundamental funksiyalar quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi(x, \lambda_1) = D(x, 0; \lambda_1) = -\frac{1}{\pi}\cos x, \qquad \psi(x, \lambda_2) = D(x, 0; \lambda_2) = \frac{1}{4\pi}.$$

40.3-misol. $L_2[-\pi,\ \pi]$ fazoda

$$u(x) = \sin x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y) u(y) dy. \tag{40.40}$$

Bir jinslimas integral tenglamani $\lambda = \lambda_1 = \pi^{-1}$ bo'lganda 40.5-teoremadan foydalanib yeching.

Yechish. Qaralayotgan integral tenglama yechimga ega bo'lishi uchun ozod had $f(x) = \sin x$ (40.40) ga mos bir jinsli tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir. (40.40) ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi 40.2-misol va 40.4-teoremaga ko'ra $C\varphi(x, \lambda_1)$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda ortogonallik sharti bajariladi. Haqiqatan ham,

$$C \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x, \lambda_1)\, dx = C \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \left(-\frac{1}{\pi}\cos x\right) dx = 0.$$

Endi (40.40) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun biz (40.29) tenglik bilan aniqlanuvchi $H(x, t)$ funksiyani qurishimiz kerak. Buning uchun esa bizga (40.16) tenglik bilan aniqlanuvchi ikkinchi tartibli minor $D_2(x, t; \lambda_1)$ kerak bo'ladi. Integral tenglama yadrosining rangi 2 bo'lganligi uchun, barcha $n \geq 1$ larda

$$B_n \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ t_1,\ \ t_2 \end{pmatrix} \equiv 0$$

ayniyat o'rinli. Bundan (40.16) ga ko'ra

$$D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \lambda_1 \\ t_1, \ \ t_2, \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \, B_0 \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ t_1, \ \ t_2 \end{pmatrix}$$

tenglikka kelamiz. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar shuni ko'rsatadiki

$$B_0 \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ t_1, \ \ t_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\, x_1 \, \cos\, t_1 + \cos\, x_2 \, \cos\, t_2 - \cos\, x_1 \, \cos\, t_2 - \cos\, x_2 \, \cos\, t_1$$

tenglik o'rinli. Natijada biz

$$D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \lambda_1 \\ t_1, \ \ t_2, \lambda_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \pi^{-2} \left(\cos\, x_1 \, \cos\, t_1 + \cos\, x_2 \, \cos\, t_2 - \cos\, x_1 \, \cos\, t_2 - \cos\, x_2 \, \cos\, t_1\right)$$

tenglikni olamiz. U holda $H(x, t)$ quyidagiga teng bo'ladi:

$$H(x, t) = \frac{D\begin{pmatrix} x, 0, \lambda_1 \\ t, \ 0, \lambda_1 \end{pmatrix}}{D(0, 0; \lambda_1)} = -\frac{1}{\pi} \left(\cos\, x \, \cos\, t + 1 - \cos\, x - \cos\, t\right).$$

Endi (40.36) yordamida xususiy yechim $u_0(x)$ ni topamiz:

$$u_0(x) = f(x) + \int_{-\pi}^{\pi} H(x, s) \, f(s) ds = \sin\, x + 0 = \sin\, x.$$

40.5-teoremaga ko'ra umumiy yechim

$$u(x) = u_0(x) + C \, \varphi(x, \lambda_1) = \sin\, x + C \cos\, x.$$

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. (39.3) *integral tenglamaga mos Fredholm determinanti va minori qanday aniqlanadi.*

2. $u(x) = \sin x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos x \cos t - \sin x \sin t) u(t) dt$ *integral tenglamaga mos Fredholm determinantini toping.*

3. $u(x) = \sin x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (3\cos x \cos t - 5\sin x \sin t) u(t) dt$ *integral tenglamaga mos Fredholm minorini toping.*

4. $K(x,t) = \cos x \cos t - 2\sin x \sin t$ *yadroning xarakteristik sonlari va ularga mos fundamental funksiyalarini toping.*

5. *Quyidagi*

$$u(x) = sinx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x \cos t - \sin x \sin t) u(t) dt$$

integral tenglama umumiy yechimini 40.5-teoremadan foydalanib toping.

6. *Agar* $K(x,\, t)$ *yadro* (38.11) *ko'rinishda (rangi* n *bo'lgan ajralgan yadro) bo'lsa, barcha* $k \geq n$ *larda* $A_{k+1} = 0, \quad B_k(x,t) \equiv 0$ *bo'lishini isbotlang.*

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.

2. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.

3. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O‘qituvchi. 1986.

4. Sh.O. Alimov, R.R.Ashurov. Matematik tahlil. 1-qism. Toshkent. Kamalak. 2012.

5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Москва: Наука. 1965.

6. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука. 1980.

7. Ф.Рисс, Б.Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва: Мир. 1979.

8. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg‘unboyev. Funksiyalar nazariyasi. Toshkent. 2004.

9. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg‘unboyev. Funksional analiz. Toshkent. 2008.

10. У.В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. 1958.

11. Ю.М.Березанский, Г.Ф.Ус, З.Г.Шефтель. Функциональный анализ. Киев.: Высшая школа. 1990.

12. J.I. Abdullayev, R.N. G‘anixo‘jayev, M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funksional analiz. O‘quv qo‘llanma. Toshkent-Samarqand. 2009.

Asosiy belgilashlar

Predmet ko'rsatkichi