5-Ma'ruza mashg'ulot.
IKKI VA UCH NOMA'LUMLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI. KRAMER FORMULALARI. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI MATRITSAVIY VA GAUSS USULLARIDA YECHISH

Mashg'ulot rejasi
1. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish.
3. Kroneker-Kapelli teoremasi.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish.
5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
6. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.

Asosiy tushuncha va atamalar: Chiziqli tenglamalar sistemasi(ChTS),tenglamalar sistemasining yechimi, yagona yechim, sistema birgalikda, aniq bo'lmagan sistema,ekvivalent sistema, birgalikda bo'lmagan sistema, sistema matrisasi, kengaytirilgan matrisa, Kroneker-Kapelli teoremasi, bir jinsli sistema, bosh o'zgaruvchilar, noma'lumlarni yo'qotish, teskari qadam, Gauss usulining xususiyati, sistema birgalikda va aniqmas, sistema birgalikda emas, Gauss usulining Jordan modifikasiyasi usuli.

1.ChTS haqida umumiy tushunchalar.

Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi hamma tenglamalar chiziqli (1-darajali) bo'lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga ma'lum sonlar majmuini qo'yganda, sistemaning hamma tenglamalari ayniyatga aylansa, bunday sonlar majmuiga tenglamalar sistemasining yechimi (ildizi) deyiladi. Bunday sonlar majmui bitta bo'lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lib, bu sistema aniqlangan (tayin, muayyan) deb ataladi va bu tenglamalar sistemasi birgalikda deyiladi. Birgalikda bo'lgan sistema bittadan ko'p yechimga ega bo'lsa, bunday sistema aniq bo'lmagan sistema deyiladi.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

Tenglamalar sistemasi birorta ham yechimga ega bo'lmasa, bunday sistemaga birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0dan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi (bu xossadan kelgusida ko'p foydalaniladi).

Fan va texnikaning ko'p sohalarida bo'lganidek, iqtisodiyotning ham ko'p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini tuzishga iqtisodiyotdan misol qaraymiz.

1-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval.

xom ashyo xillari	Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari			xom ashyo zahirasi
	1	2	3	
1	5	12	7	2000

2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish: Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun 5 x_1 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda 12 x_2, 7 x_3 bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi: 5 x_1+ 12 x_2+ 7 x_3=2000. Yuqoridagiga o'xshash 2,3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$
$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch nomalumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

5 x_1+ 12 x_2+ 7 x_3=2000 ,

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070 \end{cases}$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070.$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'ldi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishni umumiy holda qaraymiz.

2.Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qaraymiz. Ushbu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz, natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (1)$$

tenglama hosil bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2- tenglamani a_{11} ga hadma-had ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shib ushbuni hosil qilamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \quad (2)$$

$$\left(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

bo'lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1) va (2) tengliklarni

$$\Delta x=\Delta_1, \quad \Delta y=\Delta_2$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta\neq 0$ bo'lsa,

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo'ladi, yoki determinantlar orqali yozsak

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Bu formulalarga Kramer formulalari deyiladi, bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

Shunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Endi sistemaning determinanti 0 ga teng, ya'ni

$$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0 \quad yoki \quad a_{11}a_{22}=a_{21}a_{12}$$

bo'lsin. Bu holda 1-tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffisiyentlari 2-tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffisiyentlariga proporsionaldir. Haqiqatan, koeffisiyentlardan biri, masalan a_{11} noldan farqli bo'lsin deb $\frac{a_{22}}{a_{11}}=\lambda$ bilan belgilasak, bundan $a_{21}=\lambda a_{11}$ bo'ladi. U holda $a_{11}a_{22}=a_{21}a_{12}$ tenglikdan $a_{11}a_{22}=\lambda a_{11}a_{12}$ bo'lib, $a_{22}=\lambda a_{12}$ kelib chiqadi. Bularni hisobga olib, berilgan sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ \lambda(a_{11}x+a_{12}y)=b_2 \end{cases} \tag{3}$$

ko'rinishda yozish mumkin. bunda ikkita xususiy hol bo'lishi mumkin:

1) ikkala Δ_1 va Δ_2 determinantlar 0 ga teng, ya'ni $\Delta_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=0$, $\Delta_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=0$ bundan $b_2=\lambda b_1$, chunki $a_{22}=\lambda a_{12}$.

Bu holda $a_{21,}$ a_{22}, b_2 sonlar $a_{11,}$ a_{12}, b_1 sonlarga proporsional bo'lib, berilgan tenglamalar sistemasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

Shunday qilib, sistemaning ikkinchi tenglamasi, birinchi tenglamasidan uning ikkala qismini λ ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi, ya'ni u 1-tenglamaning natijasidir. Bu holda berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'ladi. Masalan, y ga ixtiyoriy qiymatlar berib, x ning tegishli qiymatini $x = \dfrac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$ tenglikdan topamiz.

2) Δ_1 va Δ_2 determinantlardan hyech bo'lmaganda bittasi 0 dan farqli, masalan, $\Delta_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \neq 0$ bo'lsin. U holda $b_2 a_{11} \neq b_1 a_{21}$ bo'ladi, demak $b_2 \neq \lambda b_1$.

bu holda (3) sistemadan ma'lum bo'ladiki, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ tenglama birinchi $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ tenglamaga qarama-qarshidir. Demak, berilgan sistema yechimga ega emas, ya'ni birgalikda emas.

Endi uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema noma'lumlari koeffisiyentlaridan ushbu determinantni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

bunga (4) ***<u>sistemaning determinanti</u>*** yoki aniqlovchisi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (4) sistema yagona

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \tag{5}$$

yechimga ega bo'ladi, bunda

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

(5) formulaga ham ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasidagidek ***Kramer formulalari*** *deyiladi*. Kramer formulalari n noma'lumli n ta tenglamalar sistemasi uchun ham umumlashtiriladi.

Endi misollar qaraymiz:

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Bu sistemaning determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-3)\cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0 .$$

Demak, berilgan tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18\cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33.$$

Shunday qilib, $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{55}{11} = 5, x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{33}{11} = 3$.

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema determinantini tuzib, uning uchinchi satri elementlarini (-1)ga ko’paytirib, 1 satr mos elementlariga qo’shib, hosil bo’lgan determinantni 1-satr elementlari bo’yicha yoyib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Oxirgi 3-tartibli determinantda 1- ustun elementlarini (-2)ga ko’paytirib 3- ustun mos elementlariga qo’shib, hamda 3- ustun elementlari bo’yicha yoyib

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

ni hosil qilamiz. $\Delta \neq 1$, demak, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. Endi boshqa determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta x_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 .$$

(Bu determinantlarni hisoblab ko'rishni o'quvchiga havola etamiz).
Shunday qilib, Kramer formulalariga asosan,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{-3}{1} = -3, \quad x_4 = \frac{4}{1} = 4$$

bo'ladi.

Topilgan yechimni tenglamalar sistemasiga bevosita qo'yib uning to'g'riligiga ishonamiz.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Oldin sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 4 + 18 - 24 - 4 = 0.$$

Sistema determinanti 0 ga teng, bunda ikki hol bo'lishi mumkin. Tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmasligi yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin. Buni aniqlash uchun i Δ_1, Δ_2, Δ_3 yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ikkinchi va birinchi tenglamalarni solishtirib, ikkinchi tenglama birinchi tenglamadan ikkiga ko'paytirish bilan hosil bo'lganligini payqaymiz. Demak, berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \tag{6}$$

tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi. Bu sistemaning birorta noma'lumiga ixtiyoriy qiymatlar berish bilan cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz, masalan, $x_3 = 1$ bo'lsin, uni oxirgi sistemaga qo'ysak, sistema hosil bo'lib, $x_1 = -\frac{5}{11}$, $x_2 = \frac{18}{11}$ bo'ladi. Bu holda $\left(\frac{-5}{11}, \frac{18}{11}, 1\right)$ yechim hosil bo'ladi. $x_3 = -2$ bo'lsin, buni (6) sistemaga qo'yib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

bundan, $x_1=\frac{10}{11}$, $x_2=-\frac{3}{11}$ bo'lib, $\left(\frac{10}{11},\ -\frac{3}{11},\ -2\right)$ yechimni olamiz.

Shunday qilib, noma'lumlarning biriga ixtiyoriy qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlarni olamiz.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistema determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lib, yordamchi determinantlar ham $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ bo'ladi. Bu tenglamalar sistemasi yechimga ega emas, chunki 1-tenglama bilan 3-tenglama o'zaro ziddir, ya'ni 1-tenglamani -3 ga ko'paytirib 3- tenglamaga hadma-had qo'shsak, 0=-3 tenglik hosil bo'lib, bu tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lmasligini bildiradi.

3.Kroneker-Kapelli teoremasi.

Ushbu

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

umumiy ko'rinishdagi, yani n ta nomalumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Berilgan sistema noma'lumlari koeffisiyentlaridan A matrisani hamda bu matrisaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni birlashtirib, ikkinchi V matrisani tuzamiz, ya'ni bular ushbu ko'rinishshda bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ --- & ------ \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ --- & ------ & -- \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A matrisaga (1) sistemaning matrisasi, B matrisaga sistemaning kengaytirilgan matrisasi deyiladi. Quyidagi teorema o'rinli.

1- teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lishi uchun sistema matrisasi A ning rangi sistema kengaytirilgan B matrisasining rangiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. (1) sistema birgalikda bo'lsin. $k_1, k_2, \ldots, k_s$ uning yechimlaridan biri bo'lsin. Bu sonlarni sistemadagi noma'lumlar o'rniga qo'yib, s ta ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlar B matrisaning oxirgi ustuni qolgan barcha ustunlarining mos ravishda koeffisiyetlar bilan ko'paytmasidan olingan yig'indisi ekanligini ko'rsatadi. B matrisaning har qanday boshqa ustuni A matrisaga ham kiradi va shuning uchun u matrisaning barcha ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Aksincha, A matrisaning har qanday ustuni B matrisani ham ustuni bo'ladi, ya'ni bu matrisaning ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bundan A va B matrisalarning ustunlari sistemasi o'zaro ekvivalent ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun bu matrisalarning rangi bir xil bo'ladi, ya'ni $r(A) = r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A va B matrisalar bir xil rangga ega bo'lsin. Bundan A matrisa ustunlarining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasi B matrisada ham maksimal chiziqli erkli sistema bo'lib qolishligi kelib chiqadi. Shunda qilib A matrisa ustunlari sistemasi orqali B matrisaning oxirgi ustuni chiziqli ifodalanadi. Demak, shunday $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar majmui mavjud bo'ladiki, A matrisaning bu sonlar bilan ko'paytirishdan olingan ustunlari yig'indisi ozod hadlardan iborat ustunga teng, ya'ni $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar (1) sistemaning yechimi bo'ladi, shunday qilib, A va B matrisalar ranglarining bir xilda bo'lishidan (1) sistemaning birgalikda bo'lishi kelib chiqadi. Teorema to'liq isbotlandi.

Kroneker-Kapelli teoremasi yechim mavjud ekanligini tasdiqlaydi, lekin bu sistemaning barcha yechimlarini amalda topish uchun usulni bermaydi. Endi, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

A matrisaning rangi B matrisaning rangiga teng bo'lib, $r(A) = r(B) = k$ bo'lsin. Bunda k son A matrisaning chiziqli erkli satrlarining maksimal soniga teng bo'lib, k noma'lumlar soniga teng bo'lsa, u holda sistema tenglamalari soni noma'lumlari soniga teng va uning determinanti noldan farqli bo'ladi, bunday sistemaning yechimi yagona bo'lib uni Kramer qoidasi bo'yicha topish mumkin bo'ladi.

Endi matrisalarning rangi k noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni $k < n$ bo'lsin. Bu holda k- tartibli minor noldan farqli bo'ladi. Sistema tenglamalarining har qaysisida $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ noma'lumli hadlarini tenglamalarning o'ng tomoniga o'tkazamiz va bu noma'lumlar uchun biror $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ qiymatlari majmuini tanlab olib k noma'lumli k ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Hosil bo'lgan sistemaga Kramer qoidasini qo'llash mumkin va yagona $c_1, c_2, \ldots, c_k$ yechim majmui mavjud bo'ladi. Sistema tenglamalarining o'ng tomoniga o'tkazilgan noma'lumlarni ***ozod* noma'lumlar** deb ataymiz. Chap tomondagi nomalumlar **bosh(bazis) o'zgaruvchilar,** Ozod noma'lumlar uchun $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ sonlarni ixtiyoriy tanlab olishiiz mumkin bo'lganligi uchun hosil bo'lgan sistemaning cheksiz ko'p turlicha yechimlari shu yo'l bilan hosil qilinadi. Shunday qilib, bu holda cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz.

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ noma'lumlarning $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma'lumlar qatnashgan yechimiga ***umumiy yechim*** deb ataladi, chunki boshqa cheksiz ko'p yechimlar $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma'lumlarga ixtiyoriy qiymatlar majmuini berish bilan olinadi.

Tenglamalar sistemasini yechishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan matrisa tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning rangi 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

bo'lib,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

bo'ladi. Kengaytirilgan matrisa

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 12 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

ning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A) = 2,\ r(B) = 3$ bo'lib, $r(A) \neq r(B)$ bo'ladi, demak isbotlangan teoremaga asosan sistema birgalikda emas.

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan tuzilgan matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

bo'lib, $r(A) = 2$, chunki $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, lekin

3-tartibli minori yo'q. Kengaytirilgan matrisaning rangi ham 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = -144 + 40 - 14 + 112 - 24 + 30 = 0.$$

Birinchi ikkita tenglamaning chap qismlari chiziqli erkli, bu ikkita tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlar uchun ushbu qiymatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Bu yechim 3-tenglamani ham qanoatlantiradi.

4. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish

Endi matrisalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga o'tamiz.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

n noma'lumli, n ta tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - & - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

belgilashlarni kiritamiz. Endi (1) sistemani matrisalarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib,

$$AX = B \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\det A \neq 0$ bo'lsa, teskari matrisa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX = A^{-1}B$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, noma'lum X matrisa $A^{-1}B$ matrisaga teng bo'ladi, ya'ni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (13) tenglamalar sistemasini yechishning ***matrisaviy yozuvini*** bildiradi.

1-misol. Matrisalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4,. \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \qquad (3)$$

ko'rinishda yozamiz. Endi A matrisaning determinantini hisoblaymiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot9+1\cdot4\cdot1+1\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot1-1\cdot1\cdot9-1\cdot4\cdot3=2\,.$$

A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo'lganligi uchun, unga teskari yagona A^{-1} matrisa mavjud va tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi. Endi A^{-1} teskari matrisani topish uchun Δ determinant elementlarining hamma algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=18-12=6,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=-5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=8,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

Teskari A^{-1} matrisani topish formulasiga asosan,

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2{,}5&4&-1{,}5\\0{,}5&-1&0{,}5\end{pmatrix}$$

(3) tenglikning ikki tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1}AX=A^{-1}B$ yoki $X=A^{-1}B$ bo'lib, ya'ni

$$X=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2{,}5&4&-1{,}5\\0{,}5&-1&0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot4+(-3)\cdot4+1\cdot2\\-2{,}5\cdot4+4\cdot4+(-1{,}5)\cdot2\\0{,}5\cdot4-1\cdot4+0{,}5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Shunday kilib, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ yoki $x_1=2\,,x_2=3\,,x_3=-1.$

(Topilgan yechimlarni tenglamalar sistemasiga bevosita qo'yib, yechimning to'g'riligini tekshirib ko'rish mumkin).

5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

(1) tenglamalar sistemasida ozod hadlar 0 lardan iborat bo'lsa, bunday sistemaga ***bir jinsli sistema*** deyiladi, yani

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0\end{aligned}\right\}$$

bo'lib, birjinsli sistema doimo birgalikda.

Bir jinsli sistema 0 dan farqli yechimga egaligini aniqlash muhimdir.

2-teorema. Bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo’lishi uchun sistema matrisasining rangi noma’lumlar sonidan kichik bo’lishi zarur va yetarlidir.

1-natija. Bir jinsli sistemada noma’lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo’lsa, sistema 0 dan farqli yechimlarga ham ega bo’lishi mumkin.

2-natija. n noma’lumli n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi 0 dan farqli yechimlarga ega bo’lishi uchun sistemaning determinanti 0 ga teng bo’lishi zarur va yetarlidir.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasini va uning kengaytirilgan matrisasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B matrisada oxirgi ustunni saqlab elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda B matrisa rangini aniqlash bilan A matrisaning ham rangini aniqlash imkoniyati tug’iladi. Shunday qilib, B matrisaning rangi 2 ga teng, A matrisaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda bo’ladi. Ma’lum bo’ldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinasiyasidan iborat. Shuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

to’rt noma’lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo’lamiz. Ikkita noma’lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma’lumki, x_1, x_2 noma’lumlarga nisbatan yechish mumkin emas, chunki ularning koeffisiyentlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan yechish mumkin, ya’ni

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4, \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4 \end{cases}$$

x_2, x_3 larni ***<u>bosh (bazis) o’zgaruvchilar</u>,*** x_1, x_4 lar esa ozod(erkin) o’zgaruvchilar bo’ladi. Bu sistemani yechib $x_3 = -1,\ x_2 = 2 - x_1 - x_4$ ni aniqlaymiz. x_1, x_4 o’zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko’p yechimlar to’plamiga ega bo’lamiz. Masalan, $x_1 = 0,\ x_4 = 1$ bo’lganda $x_1 = 0,\ x_2 = 1$, $x_3 = -1,\ x_4 = 1$ yechim hosil bo’ladi va hokazo. Tekshirib ko’rish mumkinki, bu yechim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo'shib, to'rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo'lgan matrisaning ranggi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Shunday kilib, A matrisaning rangi 3 ga teng, noma'lumlar soni to'rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma'lumlar koeffisiyentidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo'lgani uchun x_4 ni o'ng tomonga o'tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4, \; x_2 = \frac{43}{21}x_4, \; x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo'yib yechimning to'g'riligiga ishonish mumkin**.**

6. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng ko'p ishlatiladigan usullaridan biri Gauss usulidir. Uning mohiyatini uch noma'lumli uchta chiziqli tenglama uchun ko'rsatamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1)$$

Bunda $a_{11} \neq 0$ bo'lsin. Birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo'lamiz va uni $-a_{21}$, $-a_{31}$ ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo'shamiz. Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ \alpha_{23}x_1 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{11}$, $\alpha_{23} = a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{21}}$ va h.k.

$a_{11} = 0$ bo'lib, boshqa tenglamalarda nomalumlar oldidagi koeffisiyentlari orasida no'ldan farqlilari bo'lsa, u holda bu tenglamalardan birini birinchi tenglamaning o'rni bilan almashtiramiz, keyin yuqoridagi amallarni bajaramiz. Bu birinchi qadam bo'ladi. Demak, birinchi qadamda birinchi tenglamada x_1 - noma'lum qolib, qolgan tenglamalardan ketma-ket x_1 - ***noma'lumni yo'qotamiz***. Ikkinchi qadamda birinchi tenglama o'z o'rnida qolib, ikkinchi va uchinchi tenglama uchun yuqoridagi amallarni bajaramiz, ya'ni ikkinchi tenglamada x_2 noma'lumni qoldirib, uchinchi tenglamadan uni yo'qotamiz. Shunday qilib, bu amallar natijasida (1) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \alpha'_{13}x_3 = \beta'_1, \\ \alpha'_{22}x_2 + \alpha'_{23}x_3 = \beta'_2, \\ \alpha'_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases} \quad (2)$$

ko'rinishga keladi. Endi hamma noma'lumlarni so'nggi tenglamadan boshlab ***teskari qadam*** bilan topish qoldi.

6-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko'paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9 - 4\cdot 6, \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10 - 3\cdot 6 \end{cases}$$

ya'ni

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 7x_2 - 8x_3 = -15, \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \end{array} \right\}$$

bo'ladi. Shu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o’z o’rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo’lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma’lumni yo’qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko’paytirib uchinchi tenglamaga qo’shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7}. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo’ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1$, $x_2 = 1$ bo’ladi. $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak x_1 =1 bo’ladi. Shunday qilib, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. Jo’rayev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari.1,2-qism. Toshkent, 1995.
2. Soatov Yo.U. Oliy matematika, Toshkent, 1993.
3. Minorskiy V.P. Oliy matematikadan masalalar to’plami. 1988.
4. Tojiyev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. T. «O’zbekiston» 2002
5. Sirajdinov S.X., Mamatov M.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T. O’qituvchi nashriyoti 1980

Qo’shimcha

6. Фадеев Д.К, Соминский И.С «Сборник задач по высшей алгебре» М. «Наука» 1977
7. О.Н Цубербиллер «Задачи и упражнения по аналитической геометрии» М. «Наука» 1966
8. A.Sadullayev, G. Xudoyberganov, X. Mansurov, A. Vorisov, R. G’ulomov. «Matematik analizdan misol va masalalar to’plami» T. «O’zbekiston» 1992
9. Филиппов Л.Б. «Сборник задач по дифференциальным уравнениям» М. «Наука» 1979
10. Г.Самнер. «Математика для географов». М. «Прогресс» 1981
11. Ю.И.Гильдербанд. «Лекции по высшей математике для биологов». Новосибирск. 1974.
12. А.И.Кареев, З.М.Аксютина, Т.И.Савельев. Курс высшей математики для экономических вузов. М. «Высшая школа» I,II, 1982, 1983
13. Jobborov N. «Oliy matematika», T. O’zMU 2005.
14. Курганов К.А. Варианты домашних и контрольных работ по высшей математике. УзМУ, 2005.
15. М.Ш. Кремер.Высшая математика для экономистов. ЮНИТИ 1997.
16. **http:// www.a-geometry.narod.ru**
17. **http://allmath.ru/highermath/mathanalis/**
18. **http://www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/**