В. Е. Гмурман

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКАДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШГА ДОИР ҚЎЛЛАНМА

СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги техника олий ўқув юртлари студентлари учун ўқув қўлланмаси сифатида рухсат этган

Русча тўлдирилган иккинчи нашридан таржима

ТОШКЕНТ — „ЎҚИТУВЧИ“ — 1980

кин бўлган ва соққаларнинг симметриклигига асосан тенг имкониятлидир.

Бизни қизиқтираётган ҳодисага (ҳеч бўлмаганда битта ёқда олти очко чиқади, тушган очколар йиғиндиси жуфт сон) қулайлик туғдирувчи натижалар қуйидаги бешта натижа бўлади (биринчи ўринда „биринчи“ соққада тушган очколар, иккинчи ўринда „иккинчи“ соққада тушган очколар ёзилган; сўнгра очколар йиғиндиси топилган):

1) 6, 2; $6+2=8$,
2) 6, 4; $6+4=10$,
3) 6, 6; $6+6=12$,
4) 2, 6; $2+6=8$,
5) 4, 6; $4+6=10$.

Изланаётган эҳтимол ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сонининг барча мумкин бўлган элементар натижалар сонига нисбатига тенг:

$$P=\frac{5}{36}.$$

2. 21 та стандарт ва 10 та ностандарт деталь солинган яшикни ташиш вақтида битта деталь йўқолган, бироқ қандай деталь йўқолгани маълум эмас. Яшикдан (ташишдан кейин) таваккалига олинган деталь стандарт деталь бўлиб чиқди: а) стандарт деталь; б) ностандарт деталь йўқолган бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. а) Равшанки, олинган стандарт деталь йўқолган бўлиши мумкин эмас, қолган ўттизта деталнинг ($21+10-1=30$) исталган бири йўқолган бўлиши мумкин, шу билан бирга уларнинг орасида 20 та деталь стандартдир ($21-1=20$).

Стандарт деталь йўқолган бўлиш эҳтимоли:

$$P=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

б) Ҳар бири ҳам йўқолиши мумкин бўлган ўттизта деталь орасида 10 та ностандарт деталь бор эди. Ностандарт деталь йўқолган бўлиши эҳтимоли:

$$P=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

3. Рақамлари ҳар хил икки хонали сон ўйланган. Ўйланган сон: а) тасодифан айтилган икки хонали сон

бўлиш; б) тасодифан айтилган, рақамлари ҳар хил икки хонали сон бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P=1/90$; б) $P=1/81$.

4. Иккита ўйин соққаси ташланган. Соққаларнинг ёқларида тушган очколар йиғиндиси еттига тенг бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=1/6$.

5. Иккита ўйин соққаси ташланган. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) чиққан очколар йиғиндиси саккизга, айирмаси эса тўртга тенг; б) чиққан очколар айирмаси тўртга тенглиги маълум бўлиб, уларнинг йиғиндиси саккизга тенг.

Жавоби а) $P=1/18$; б) $P=1/2$.

6. Иккита ўйин соққаси ташланган. Соққаларнинг ёқларида чиққан очколар йиғиндиси бешга, кўпайтмаси эса тўртга тенг бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=1/18$.

7. Танга икки марта ташланган. Ҳеч бўлмаганда бир марта „гербли“ томон тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=3/4$.

8. Қутида номерланган олтита бир хил кубик бор. Ҳамма кубиклар таваккалига битталаб олинади. Олинган кубикларнинг номерлари ортиб бориш тартибида чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=1/720$.

9. Учта ўйин соққасини ташлашда иккита соққанинг (қайсилари бўлишининг аҳамияти йўқ) ёқларида турли (олтига тенг бўлмаган) очколар чиқса, қолган бир соққада олти очко чиқиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Синовнинг элементар натижалари жами сони олтита элементдан учтадан тузиш мумкин бўлган группалашлар сонига, яъни C_6^3 га тенг.

Битта ёқда олти очко ва қолган иккита соққанинг ёқларида турли (олтига тенг бўлмаган) очколар чиқишига қулайлик туғдирувчи натижалар сони бешта элементдан иккитадан тузиш мумкин бўлган группалашлар сонига, яъни C_5^2 га тенг.

Изланаётган эҳтимол бизни қизиқтираётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сонининг мумкин

Китобнинг мазкур ўзбекча нашрини физика-математика фанлари кандидати *А. Муханов* жамоатчилик асосида таҳрир қилган.

Қўлланмада зарур назарий маълумотлар ва формулалар, типик масалаларнинг ечилишлари, мустақил ечиш учун масалаларнинг жавоблари ва кўрсатмалари берилган. Экспериментал маълумотларни статистик ишлаб чиқиш методларига катта эътибор берилган. Китобнинг русча биринчи нашри 1970 йилда босилиб чиққан эди.

Қўлланма олий техника ўқув юртларининг студентлари учун мўлжалланган бўлиб, шунингдек, амалий масалаларни ҳал этишда эҳтимоллар назарияси ва статистик методларни татбиқ этадиган инженер-техник ходимлар учун ҳам фойдали бўлиши мумкин.

Китобнинг бу нашрига қуйидаги қўшимчалар киритилди: ҳодисаларнинг энг оддий оқими, кўрсаткичли тақсимот, ишончлилик функцияси, икки тасодифий миқдор системалари, статистик гипотезаларни текшириш, бир факторли дисперсион анализ.

Пирсон критерийси X бобдан XIII бобга ўтказилди, бу критерийнинг бош тўпламнинг кўрсаткичли тақсимот, Пуассон, биномиал ва текис тақсимот қонунлари бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезаларни текшириш учун татбиқ қилинишига доир масалалар қўшилди. Нормал тақсимот ҳақидаги гипотезани график усулда текширишга доир масалалар келтирилди (XIII боб, 13-§).

Янги бўлимлар киритилиши муносабати билан 180 та масала қўшилди ва масалаларнинг номерланиши қисман ўзгартирилди.

Мазкур нашр авторнинг „Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика" китобига мос келади.

Г $\frac{20203\ \ 117}{353\,(04)-80}$ 135 — 80 1702060000

Биринчи қисм

ТАСОДИФИЙ ҲОДИСАЛАР

Биринчи боб

ЭҲТИМОЛНИНГ ТАЪРИФИ

1-§. Эҳтимолнинг классик ва статистик таърифлари

Классик таърифда *ҳодисанинг эҳтимоли*

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда m — синовнинг A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар натижалар сони, n — синовнинг мумкин бўлган элементар натижалари жами сони. Элементар натижалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли деб фараз қилинади.

А ҳодисанинг нисбий частотаси

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда m — қаралаётган A ҳодиса рўй берган синовлар сони, n — ўтказилган синовларнинг жами сони. Статистик таърифда ҳодисанинг эҳтимоли учун унинг нисбий частотаси қабул қилинади.

1. Иккита ўйин соққаси (кубик) ташланган. Соққаларнинг тушган ёқларидаги очколар йиғиндиси жуфт сон, шу билан бирга соққалардан ҳеч бўлмаганда биттасининг ёғида олти очко чиқиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. „Биринчи" ўйин соққасининг тушган ёғида бир очко, икки очко, ..., олти очко чиқиши мумкин. „Иккинчи" соққани ташлашда ҳам шунга ўхшаш олтита элементар натижа бўлиши мумкин. „Биринчи" соққани ташлаш натижаларининг ҳар бири „иккинчи" соққани ташлаш натижаларининг ҳар бири билан биргаликда бўлиши мумкин. Шундай қилиб, синовнинг мумкин бўлган элементар натижаларининг жами сони $6 \cdot 6 = 36$ га тенг. Бу натижалар ягона мум-

бўлган элементар натижаларнинг жами сонига нисбатига тенг:

$$P = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

10. Дастада 101, 102, ..., 120 билан номерланган ва ихтиёрий тахланган 20 та перфокарта бор. Перфораторчи таваккалига иккита карта олади. 101 ва 120 номерли карталар чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1/C_{20}^2 = 1/190$

11. Яшикда 1, 2, ..., 10 лар билан номерланган 10 та бир хил деталь бор. Таваккалига 6 та деталь олинган. Олинган деталлар орасида: а) № 1 деталь; б) № 1 ва № 2 деталлар бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. а) Синовнинг мумкин бўлган элементар натижалари жами сони ўнта деталдан 6 та детални олиш усуллари сонига, яъни C_{10}^6 га тенг.

Бизни қизиқтираётган ҳодисага (олинган олтита деталь орасида № 1 деталь бор ва, демак, қолган 5 та деталь бошқа номерли ҳодисага) қулайлик туғдирувчи натижалар сонини ҳисоблаб чиқайлик. Бундай натижалар сони, равшанки, қолган тўққизта деталдан 5 та детални олиш усуллари сонига, яъни C_9^5 га тенг.

Изланаётган эҳтимол қаралаётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сонининг мумкин бўлган элементар натижалар жами сони нисбатига тенг:

$$P = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{C_9^4}{C_{10}^4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 0{,}6.$$

б) Бизни қизиқтираётган ҳодисага (олинган деталлар орасида № 1 ва № 2 деталлар бор, демак, 4 та деталь бошқа номерли) қулайлик туғдирувчи натижалар сони қолган саккизта деталдан 4 та детални олиш усуллари сонига, яъни C_8^4 га тенг.

Изланаётган эҳтимол:

$$P = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{C_8^4}{C_{10}^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{3}.$$

12. Яшикда 15 та деталь бўлиб, улардан 10 таси бўялган. Йиғувчи таваккалига 3 та деталь олади. Олин-

ган деталларнинг бўялган бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = C_{10}^3/C_{15}^3 = 24/91.$

13. Конвертдаги 100 та фотокарточка орасида битта изланаётган фотокарточка бор. Конвертдан тавакалига 10 та карточка олинади. Буларнинг орасида керакли карточка ҳам бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = C_{99}^9/C_{100}^{10} = 0{,}1.$

14. Яшикда 100 та деталь бўлиб, улардан 10 таси брак қилинган. Тавакалига 4 та деталь олинган. Олинган деталлар орасида: а) брак қилинган деталлар бўлмаслиги; б) яроқли деталлар бўлмаслиги эҳтимолини топинг.

Жавоби а) $P = C_{90}^4/C_{100}^4 \simeq 0{,}65$; б) $P = C_{10}^4/C_{100}^4 \simeq 0{,}00005.$

15. Қурилма 5 та элементдан иборат бўлиб, уларнинг 2 таси эскирган. Қурилма ишга туширилганда тасодифий равишда 2 та элемент уланади. Ишга туширишда эскирмаган элементлар уланган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = C_3^2/C_5^3 = 0{,}3.$

16. Абонент, телефон номерини тераётиб номернинг охирги уч рақамини эслай олмади ва бу рақамлар турли эканлигини билгани ҳолда уларни тавакалига терди. Керакли рақамлар терилган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $P = 1/A_{10}^3 = 1/720.$

17. N та деталдан иборат партияда n та стандарт деталь бор. Тавакалига m та деталь олинган. Олинган деталлар орасида роса k та стандарт деталь бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Синовнинг мумкин бўлган элементар натижалари жами сони N та деталдан m та детални ажратиб олиш усуллари сонига, яъни N та элементдан m тадан тузиш мумкин бўлган группалашлар сони C_N^m га тенг.

Бизни қизиқтираётган ҳодисага (m та деталь орасида роса k та стандарт деталь бор) қулайлик туғдирувчи натижалар сонини ҳисоблаймиз: n та стандарт деталь орасидан k та стандарт деталии C_n^k та усул билан олиш мумкин; бунда қолган $m-k$ та деталь нострандарт бўлиши лозим: $m-k$ та нострандарт детални эса $N-n$ та ностандарт деталь орасидан C_{N-n}^{m-k} усул билан олиш мумкин. Демак, қулайлик туғдирувчи натижалар сони $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$ га тенг.

Изланаётган эҳтимол ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сонининг барча элементар натижалар сонига нисбатига тенг:

$$P=\frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^n}.$$

18. Цехда 6 эркак ва 4 аёл ишчи ишлайди. Табель номерлари бўйича таваккалига 7 киши ажратилган. Ажратилганлар орасида 3 аёл бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $P=\frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7}=0{,}5.$

19. Складда 15 та кинескоп бор бўлиб, уларнинг 10 таси Львов заводида тайёрланган. Таваккалига олинган бешта кинескоп орасида 3 таси Львов заводида тайёрланган кинескоп бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $P=C_{10}^3 \cdot C_5^2/C_{15}^5 \approx 0{,}4$

20. Группада 12 студент бўлиб, улардан 8 таси аълочи. Рўйхат бўйича таваккалига 9 студент ажратилган. Ажратилганлар орасида 5 аълочи студент бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=C_8^5 \cdot C_4^4/C_{12}^9=14/55.$

21. Қутида 5 та бир хил буюм бўлиб, уларнинг 3 таси бўялган. Таваккалига 2 та буюм олинган. Олинган иккита буюм орасида: а) битта бўялган буюм; б) иккита бўялган буюм; в) ҳеч бўлмаганда битта бўялган буюм бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P=C_3^1 \cdot C_2^1/C_5^2=0{,}6$; б) $P=C_3^2/C_5^2=0{,}3$; в) $P=0{,}9$

22. „Махфий" қулфнинг умумий ўқида 4 та диск бўлиб, уларнинг ҳар бири 5 та секторга бўлинган ва

секторларга турли рақамлар ёзилган. Дискларни улардаги рақамлар тайин тўрт хонали сон ташкил қиладиган қилиб ўрнатилган ҳолдагина қулф очилади. Дискларни ихтиёрий ўрнатишда қулфнинг очилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $P=1/5^4$.

23. Техник контрол бўлими тасодифан ажратиб олинган 100 китобдан иборат партияда 5 та брак китоб топди. Брак китоблар чиқиши нисбий частотасини топинг.

Ечилиши. A ҳодиса (брак китоблар чиқиши) нисбий частотаси A ҳодиса рўй берган синовлар сонининг ўтказилган синовлар жами сонига нисбатига тенг:

$$W(A)=\frac{5}{100}=0{,}05.$$

24. Нишонга 20 та ўқ узилган, шундан 18 та ўқ нишонга теккани қайд қилинган. Нишонга тегишлар нисбий частотасини топинг.

Жавоби. $W=0{,}9.$

25. Асбоблар партиясини синов вақтида яроқли деталларнинг нисбий частотаси 0,9 га тенг бўлиб чиқди. Агар ҳаммаси бўлиб 200 та асбоб синалган бўлса, яроқли асбоблар сонини топинг.

Жавоби. 180 та асбоб.

2-§. Геометрик эҳтимоллар

Айтайлик, l кесма L кесманинг бўлагини ташкил этсин L кесмага таваккалига нуқта қўйилган. Агар нуқтанинг l кесмага тушиш эҳтимоли бу кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг L кесмага нисбатан жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинса, у ҳолда нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли

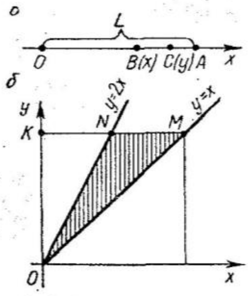
$$P=\frac{l \text{ нинг узунлиги}}{L \text{ нинг узунлиги}}$$

тенглик билан аниқланади.

Айтайлик, g ясси фигура G ясси фигуранинг бўлаги бўлсин. G фигурага нуқта таваккалига ташланган. Агар ташланган нуқтанинг g фигурага тушиш эҳтимоли бу фигуранинг юзига пропорционал бўлиб, унинг G фигурага нисбатан жойлашишига ҳам, g нинг формасига ҳам боғлиқ бўлмаса, у ҳолда нуқтанинг g фигурага тушиш эҳтимоли

$$P=\frac{g \text{ нинг юзи}}{G \text{ нинг юзи}}$$

тенглик билан аниқланади.



1- расм.

Ечилиши. B ва C нуқталарнинг координаталари $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$, $y \geqslant x$ тенгсизликларни қаноатлантириши лозим.

Тўғри бурчакли xOy координаталар системасини киритамиз. Бу системадаги OKM тўғри бурчакли учбурчакка тегишли бўлган исталган нуқтанинг координаталари юқорида кўрсатилган тенгсизликларни қаноатлантиради (1-б расм). Шундай қилиб, бу учбурчакни нуқталарининг координаталари мос равишда B ва C нуқталар координаталарининг барча мумкин бўлган қийматларидан иборат G фигура сифатида қараш мумкин.

BC кесманинг узунлиги OB кесманинг узунлигидан кичик бўлиши, яъни

$$y-x<x$$

тенгсизлик ёки худди шунинг ўзи,

$$y<2x$$

ўринли бўлиши лозим.

Сўнгги тенгсизлик G фигуранинг (OKM тўғри бурчакли учбурчакнинг) $y=2x$ тўғри чизиқдан (ON тўғри чизиқдан) пастда ётадиган нуқталарининг координаталари учун бажарилади. 1-б расмдан кўриниб турганидек, бу нуқталарнинг ҳаммаси штрихланган ONM учбурчакка тегишли.

Шундай қилиб, бу учбурчакни нуқталарининг координаталари бизни қизиқтираётган ҳодисага (BC кесманинг узунлиги OB кесманинг узунлигидан кичик) қулайлик туғдирадиган g фигура сифатида қараш мумкин.

Изланаётган эҳтимол:

$$P=\frac{g \text{ нинг юзи}}{G \text{ нинг юзи}}=\frac{ONM \text{ нинг юзи}}{OKM \text{ нинг юзи}}=\frac{1}{2}.$$

36. Ox сон ўқининг узунлиги L бўлган кесмасига таваккалига иккита $B(x)$ ва $C(y)$ нуқта қўйилган. BC

кесманинг узунлиги O нуқтадан унга энг яқин нуқтагача бўлган масофадан кичик бўлиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, кесманинг сон ўқида жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. Координаталарнинг мумкин бўлган қийматлари: $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$; қулайлик туғдирувчи қийматлар: $y-x<x$, $y>x$; $x-y<y$, $y<x$; $p=1/2$.

37. Ox сон ўқининг узунлиги L бўлган OA кесмасига таваккалига иккита $B(x)$ ва $C(y)$ нуқта қўйилган, шу билан бирга $y \geqslant x$. BC кесманинг узунлиги $L/2$ дан кичик бўлиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг сон ўқида жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. Координаталарнинг мумкин қийматлари: $0 \leqslant x \leqslant L$ $0 \leqslant y \leqslant L$, $y \geqslant x$; координаталарнинг қулайлик туғдирувчи қийматлари: $y-x<L/2$; $p=0{,}75$.

38. Ox сон ўқининг узунлиги L бўлган OA кесмасига таваккалига иккита $B(x)$ ва $C(y)$ нуқта қўйилган. BC кесманинг узунлиги $L/2$ дан кичик бўлиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг сон ўқида жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. Координаталарнинг мумкин бўлган қийматлари: $0 \leqslant x \leqslant L$; $0 \leqslant y \leqslant L$, координаталарнинг қулайлик туғдирувчи қийматлари: $y-x<L/2$, $y>x$; $x-y<L/2$; $y<x$; $p=0{,}75$.

39. Бюффон масаласи (Бюффон XVIII асрда яшаган француз табиатшуноси). Текислик бир-биридан $2a$ масофада ётган параллел тўғри чизиқлар билан бўлинган. Текисликка узунлиги $2l$ ($l<a$) бўлган игна таваккалига ташланади. Игнанинг бирор тўғри чизиқни кесиб ўтиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Қуйидаги белгилашларни киритамиз: x — игна ўртасидан унга энг яқин параллелгача бўлган масофа; φ — игнанинг бу параллел билан ташкил қилган бурчаги (2-а расм).

Игнанинг вазияти x ва φ нинг тайин қийматлари берилиши билан тўлиқ аниқланади, бунда x — 0 дан a гача бўлган қийматларни қабул қилади, φ нинг мумкин бўлган қийматлари эса 0 дан π гача ўзгаради. Бошқача айтганда, игнанинг ўртаси томонлари a ва π бўлган

Нуқтанинг V фазовий фигуранинг бўлаги бўлган v фазовий фигурага тушиш эҳтимоли ҳам шунга ўхшаш аниқланади:

$$P = \frac{v \text{ нинг ҳажми}}{V \text{ нинг ҳажми}}.$$

26. Узунлиги 20 см бўлган L кесмага узунлиги 10 см бўлган l кесма жойлаштирилган. Катта кесмага таваккалига қўйилган нуқтанинг кичик кесмага ҳам тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = 1/2$

27. Ox ўқининг узунлиги L бўлган OA кесмасига таваккалига $B(x)$ нуқта қўйилган. OB ва BA кесмаларнинг кичиги 1/3 дан ортиқ узунликка эга бўлиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг сон ўқида жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = \frac{L/3}{L} = \frac{1}{3}$.

28. Радиуси R бўлган доирага радиуси r бўлган кичик доира жойлаштирилган. Катта доирага ташланган нуқтанинг кичик доирага ҳам тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг доирага тушиш эҳтимоли доира юзига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = r^2/R^2$.

29. Текислик бир-биридан $2a$ масофада жойлашган параллел тўғри чизиқлар билан бўлинган. Текисликка радиуси $r < a$ бўлган танга таваккалига ташланган. Танга тўғри чизиқларнинг биттасини ҳам кесмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = (2a - 2r)/2a = (a - r)/a$.

30. Томони a бўлган квадратлар тўри билан қопланган текисликка радиуси $r < a/2$ бўлган танга таваккалига ташланган. Танга квадратнинг ҳеч бир томонини кесмаслик эҳтимолини топинг. Нуқтанинг ясси фигурага тушиш эҳтимоли фигуранинг юзига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = (a - 2r)^2/a^2$.

31. Бир-биридан 6 см масофада ётган параллел тўғри чизиқлар билан бўлинган текисликка радиуси 1 см бўлган доира таваккалига ташланган. Доира тўғри чизиқларнинг ҳеч бирини кесмаслик эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = (6 - 2)/6 = 2/3$.

32. Текисликда радиуслари мос равишда 5 см ва 10 см бўлган иккита концентрик айлана чизилган. Катта доирага таваккалига ташланган нуқтанинг айланалардан ҳосил бўлган ҳалқага ҳам тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг ясси фигурага тушиш эҳтимоли бу фигуранинг юзига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига эса боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = (10^2 - 5^2)/10^2 = 0{,}75$.

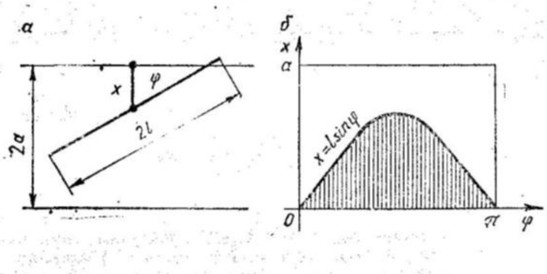
33. Радиуси R бўлган доира ичига таваккалига нуқта ташланган. Ташланган нуқта доирага ички чизилган: а) квадрат ичига; б) мунтазам учбурчак ичига тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг доира бўлагига тушиш эҳтимоли бу бўлакнинг юзига пропорционал бўлиб, унинг доирага нисбатан жойлашишига эса боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. а) $P = 2/\pi$; б) $P = 3\sqrt{3}/4\pi$.

34. Тез айланадиган диск жуфт сондаги тенг секторларга бўлиниб, секторлар бирин-кетин оқ ва қора рангларга бўялган. Дискка қарата ўқ узилган. Ўқнинг оқ секторлардан бирига тегиш эҳтимолини топинг. Ўқнинг ясси фигурага тегиш эҳтимоли бу фигуранинг юзига пропорционал деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = 0{,}5\pi R^2/\pi R^2 = 0{,}5$.

35. Ox сон ўқининг узунлиги L бўлган OA кесмасига иккита $B(x)$ ва $C(y)$ нуқта қўйилган, шу билан бирга $y \geqslant x$ (C нуқтанинг координатаси қулайлик учун y орқали белгиланган). BC кесманинг узунлиги OB кесманинг узунлигидан кичик бўлиш эҳтимолини топинг (1-a расм). Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли бу кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг сон ўқида жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.



2- расм.

тўғри тўртбурчак нуқталарининг исталган бирига тушиши мумкин (2-б расм). Шундай қилиб, бу тўғри тўртбурчакни нуқталари игна ўртасининг мумкин бўлган барча вазиятларидан иборат G фигура сифатида қараш мумкин. Равшанки, G фигуранинг юзи πa га тенг.

Энди ҳар бир нуқтаси бизни қизиқтираётган ҳодисага қулайлик туғдирувчи g фигурани, яъни ҳар бир нуқтаси ўзига энг яқин параллелни кесиб ўтадиган игнанинг ўртаси бўлиб хизмат қилиши мумкин бўлган фигурани топамиз. 2-а расмда кўриниб турганидек, игна ўзига энг яқин параллелни $x \leqslant l \sin\varphi$ шартда, яъни игнанинг ўртаси 2-б расмдаги штрихланган фигура нуқталарининг исталган бирига тушганида кесиб ўтади.

Шундай қилиб, штрихланган фигурани g фигура сифатида қараш мумкин.

g фигуранинг юзини топамиз:

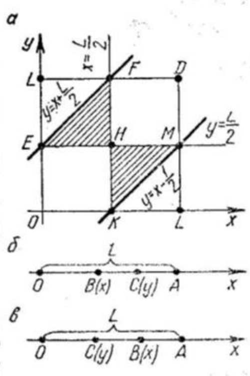
$$g \text{ нинг юзи} = \int_0^\pi l \sin\varphi \, d\varphi = -l\cos\varphi \Big|_0^\pi = 2l.$$

Игнанинг тўғри чизиқни кесиб ўтиш эҳтимоли:

$$P = \frac{g \text{ нинг юзи}}{G \text{ нинг юзи}} = \frac{2l}{\pi a}.$$

40. Ox ўқининг узунлиги L бўлган OA кесмасига иккита $B(x)$ ва $C(y)$ нуқта таваккалига қўйилган. Ҳосил қилинган учта кесмадан учбурчак ясаш мумкин бўлиши эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Учта кесмадан учбурчак ясаш мумкин бўлиши учун кесмаларнинг ҳар бири қолган икки кесманинг йиғиндисидан кичик бўлиши лозим. Учала кесманинг йиғиндиси L га тенг бўлгани учун кесмаларнинг ҳар бири $L/2$ дан кичик бўлиши лозим.



3- расм.

xOy тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз. Исталган иккита B ва C нуқтанинг координаталари

$$0 \leqslant x \leqslant L, \quad 0 \leqslant y \leqslant L$$

қўш тенгсизликларни қаноатлантириши лозим. Бу тенгсизликларни $OLDL$ квадратга тегишли бўлган исталган $M(x, y)$ нуқтанинг координаталари қаноатлантиради (3-a расм). Шундай қилиб, бу квадратни G фигура сифатида қараш мумкин бўлиб, бунда унинг нуқталарининг координаталари B ва C нуқталар координаталарининг барча мумкин бўлган қийматларидан иборат бўлади.

1. Айтайлик, C нуқта B нуқтадан ўнгроқда жойлашган бўлсин (3-$б$ расм). Юқорида эслатиб ўтилганидек, OB, BC ва CA кесмаларнинг узунликлари $L/2$ дан кичик, яъни

$$x < L/2, \quad y - x < L/2, \quad L - y < L/2$$

ёки худди шунинг ўзи,

$$x < L/2, \quad y < x + L/2, \quad y > L/2 \qquad (*)$$

тенгсизликлар ўринли бўлиши керак.

2. C нуқта B нуқтадан чапроқда жойлашган бўлсин (3-$в$ расм). Бу ҳолда ушбу тенгсизликлар ўринли бўлиши лозим:

$$y < L/2, \quad x - y < L/2, \quad L - x < L/2$$

ёки худди шунинг ўзи,

$$y < L/2, \quad y > x - L/2, \quad x > L/2. \qquad (**)$$

3-а расмдан кўриниб турганидек, (*) тенгсизликлар EFH учбурчак нуқталари координаталари учун, **) тенгсизликлар эса KHM учбурчак нуқталарининг координаталари учун бажарилади. Шундай қилиб, штрихланган учбурчакларни нуқталарининг координаталари бизни қизиқтираётган ҳодисага (учта кесмадан учбурчак ясаш мумкин), қулайлик туғдирувчи g фигура сифатида қараш мумкин.

Изланаётган эҳтимол:

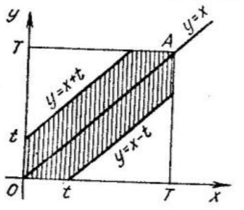
$$P = \frac{g \text{ нинг юзи}}{G \text{ нинг юзи}} = \frac{\Delta EFH \text{ нинг юзи} + \Delta KHM \text{ нинг юзи}}{\square OLDL \text{ нинг юзи}} = \frac{1}{4}.$$

41. Сигнализаторга икки қурилмадан сигналлар келади, шу билан бирга сигналлардан ҳар бирининг узунлиги T бўлган вақт оралиғини исталган моментида келиши тенг имкониятли. Сигналларнинг келиш моментлари орасидаги айирма $t\ (t < T)$ дан кичик бўлгандагина сигнализатор ишга тушади. Агар қурилмаларнинг ҳар бири биттадан сигнал юборса, сигнализаторнинг шу T вақт ичида ишга тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи ва иккинчи сигналларнинг келиш моментларини мос равишда x ва y орқали белгилаймиз. Масала шартига кўра ушбу қўш тенгсизликлар бажарилиши лозим:

$$0 \leqslant x \leqslant T, \qquad 0 \leqslant y \leqslant T.$$

xOy тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз. Бу системада юқоридаги тенгсизликларни $OTAT$ квадратга тегишли бўлган исталган нуқтанинг координаталари қаноатлантиради (4-расм). Шундай қилиб, бу квадратни G фигура сифатида қараш мумкин бўлиб, унинг нуқталарининг координаталари сигналларнинг келиш моментларининг барча мумкин бўлган қийматларини тасвирлайди.



4- расм.

Агар сигналларнинг келиш моментлари орасидаги айирма t дан кичик, яъни

$$y > x \text{ бўлганда } y - x < t$$

ва

$$x > y \text{ бўлганда } x - y < t$$

бўлса, ёки худди шунинг ўзи,

$$y > x \text{ бўлганда } y < x + t \qquad (*)$$
$$y < x \text{ бўлганда } y > x - t \qquad (**)$$

бўлса, сигнализатор ишга тушади.

(*) тенгсизлик G фигуранинг $y = x$ тўғри чизиқдан юқорида ва $y = x + t$ тўғри чизиқдан пастда ётадиган нуқталарининг координаталари учун бажарилади; (**) тенгсизлик G фигуранинг $y = x$ тўғри чизиқдан пастда ва $y = x - t$ тўғри чизиқдан юқорида ётадиган нуқталари учун ўринли бўлади.

4- расмдан кўриниб турганидек, координаталари (*) ва (**) тенгсизликларни қаноатлантирадиган нуқталар штрихланган олтибурчакка тегишлидир. Шундай қилиб, бу олтибурчакни g фигура сифатида қараш мумкин бўлиб, бунда бу фигура нуқталарининг координаталари вақтнинг сигнализатор ишлай бошлашига қулайлик туғдирадиган x ва y моментларидир.

Изланаётган эҳтимол:

$$P = \frac{g \text{ нинг юзи}}{G \text{ нинг юзи}} = \frac{T^2 - 2\frac{(T-t)^2}{2}}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2}.$$

42. Учрашув ҳақида масала. Икки студент кундузи соат 12 билан 13 орасида тайин жойда учрашишга келишиб олишди. Олдин келган студент ўртоғини 1/4 соат давомида кутиб, у келмаса кейин кетиб қолади. Агар ҳар бир студент ўзининг келиш моментини таваккалига (соат 12 билан 13 орасида) танласа, уларнинг учрашиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 7/16$.

43*. Таваккалига олинган, узунлиги L дан ортиқ бўлмаган учта кесмадан учбурчак ясаш мумкин бўлиши эҳтимолини топинг. Нуқтанинг фазовий фигурага тушиш эҳтимоли фигуранинг ҳажмига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Бизни қизиқтираётган A ҳодисани (олинган учта дарсликнинг ҳеч бўлмаганда биттаси муқовали бўлиши) бу ҳодисаларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = B + C + D.$$

Қўшиш теоремасига кўра:

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D). \qquad (*)$$

B, C ва D ҳодисаларнинг эҳтимолларини топамиз (I- боб, 1- § даги 17-масаланинг ечилишига қаранг):

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \qquad P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91},$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Бу эҳтимолларни (*) тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = 45/91 + 20/91 + 2/91 = 67/91.$$

Иккинчи усул. A ҳодиса (олинган учта дарсликдан ҳеч бўлмаганда биттаси муқовали) ва $\overline{A}$ ҳодиса (олинган дарсликларнинг биттаси ҳам муқовали эмас) қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

(қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг).

Бундан

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

$\overline{A}$ ҳодисанинг (олинган дарсликларнинг биттаси ҳам муқовали эмас) рўй бериш эҳтимоли

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 24/91 = 67/91.$$

47. Яшикда 10 та деталь бўлиб, улардан 4 таси бўялган. Йиғувчи таваккалига 3 та деталь олди. Олинган деталларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси бўялган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1 - C_6^3/C_{10}^3 = 5/6$.

48. Агар A ҳодиса B ҳодисани эргаштирса, у ҳолда $P(B) \geqslant P(A)$ бўлишини исботланг.

Исботи. B ҳодисани биргаликда бўлмаган A ва $\overline{A}B$ ҳодисаларнинг йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$B = A + \overline{A}B$$

Биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолларини қўшиш теоремасига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(B) = P(A + \overline{A}B) = P(A) + P(\overline{A}B).$$

$P(\overline{A}B) \geqslant 0$ бўлгани учун $P(B) \geqslant P(A)$.

49. Иккита биргаликда бўлмаган A_1 ва A_2 ҳодисаларнинг ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоли мос равишда p_1 ва p_2 га тенг.

Бу ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ҳодисаларни қуйидагича белгилаймиз: B_1—фақат A_1 ҳодиса рўй берди; B_2—фақат A_2 ҳодиса рўй берди.

B_1 ҳодисанинг рўй бериши $A_1\overline{A}_2$ ҳодисанинг рўй беришига тенг кучли (биринчи ҳодиса рўй берди ва иккинчи ҳодиса рўй бермади), яъни $B_1 = A_1\overline{A}_2$.

B_2 ҳодисанинг рўй бериши $\overline{A}_1A_2$ ҳодисанинг рўй беришига тенг кучли (иккинчи ҳодиса рўй берди ва биринчи ҳодиса рўй бермади), яъни $B_2 = \overline{A}_1A_2$.

Шундай қилиб, A_1 ва A_2 ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топиш учун B_1 ва B_2 ҳодисалардан қайси бири бўлса ҳам бирининг рўй бериш эҳтимолини топиш кифоя. B_1 ва B_2 ҳодисалар биргаликда эмас, шунинг учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2). \qquad (*)$$

Энди B_1 ва B_2 ҳодисалардан ҳар бирининг эҳтимолини топиш керак. A_1 ва A_2 ҳодисалар эркли, демак, A_1 ва $\overline{A}_2$ ҳодисалар, шунингдек, $\overline{A}_1$ ва A_2 ҳодисалар

Кўрсатма. Муҳокамага фазовий координаталар системасини киритинг.

Жавоби. Координаталарнинг мумкин бўлган қийматлари: $0 \leqslant x \leqslant L$; $0 \leqslant y \leqslant L$; координаталарнинг қулайлик туғдирувчи қийматлари: $x < y + z$, $y < z + x$, $z < x + y$; $P = 1/2$.

44. Таваккалига иккита x ва y мусбат сон олинган бўлиб, уларнинг ҳар бири иккидан ортиқ эмас. xy кўпайтманинг бирдан катта бўлмаслик, y/x бўлинманинг эса иккидан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. Координаталарнинг мумкин бўлган қийматлари: $0 < x \leqslant 2$, $0 < y \leqslant 2$; координаталарнинг қулайлик туғдирувчи қийматлари:

$$0 < x \leqslant \sqrt{2}/2,\ 0 < y \leqslant \sqrt{2} \text{ ва } \sqrt{2}/2 < x \leqslant 2,$$
$$1/2 \leqslant y \leqslant \sqrt{2};\ P = (1 + 3\ln 2)/8 \simeq 0{,}38.$$

45. Ҳар бири бирдан ортиқ бўлмаган иккита x ва y мусбат сон таваккалига олинган. $x + y$ йиғиндининг бирдан ортиқ бўлмаслик, xy кўпайтманинг эса 0,09 дан кичик бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. Координаталарнинг мумкин бўлган қийматлари: $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$; координаталарнинг қулайлик туғдирувчи қийматлари $0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}9$, $0{,}1 \leqslant y \leqslant 0{,}9$; $P \simeq 0{,}2$.

Иккинчи боб

АСОСИЙ ТЕОРЕМАЛАР

1-§. Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари

Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси. *Иккита биргаликда бўлмаган ҳодисадан исталган бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Натижа. Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган бир нечта ҳодисалардан исталган бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолининг йиғиндисига тенг:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси. *Иккита биргаликда бўлган ҳодисадан камида биттасининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолини айирилганига тенг:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема исталган *чекли сондаги* биргаликда бўлган ҳодисалар учун умумлаштирилиши мумкин. Масалан, учта биргаликда бўлган ҳодиса учун:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - $$
$$- P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Эркли ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси. *Иккита эркли ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтирилганига тенг:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Натижа Бир нечта эркли ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтирилганига тенг:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Боғлиқ ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси *Иккита боғлиқ ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан бирининг эҳтимолини иккинчисининг шартли эҳтимолига кўпайтирилганига тенг:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B),$$
$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Натижа. Бир нечта боғлиқ ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан бирининг эҳтимолини қолганларининг шартли эҳтимолларига кўпайтирилганига тенг, шу билан бирга, ҳар бир кейинги ҳодисанинг эҳтимоли олдинги ҳамма ҳодисалар рўй берди деган фаразда ҳисобланади:

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \ldots P_{A_1A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

бу ерда $P_{A_1A_2 \ldots A_{n-1}}$ — A_n ҳодисанинг $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ ҳодисалар рўй берди деган фаразда ҳисобланган эҳтимоли.

46. Кутубхона стеллажида тасодифий тартибда 15 та дарслик териб қўйилган бўлиб, улардан 5 таси муқовалидир. Кутубхоначи аёл таваккалига 3 та дарслик олади. Олинган дарсликларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси муқовали бўлиш (A ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи усул. Олинган учта дарсликдан ҳеч бўлмаганда биттаси муқовали бўлиш талаби қуйидаги учта биргаликда бўлмаган ҳодисадан исталган бири рўй берганда бажарилади: B — битта дарслик муқовали, иккитаси муқовасиз, C — иккита дарслик муқовали, биттаси муқовасиз, D — учала дарслик муқовали.

ҳам эркли, шу сабабли қўшиш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P(B_1) = P(A_1\bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = p_1q_2;$$
$$P(B_2) = P(\bar{A}_1A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = q_1p_2.$$

Бу эҳтимолларни (*) муносабатга қўйиб, A_1 ва A_2 ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топамиз:

$$P(B_1 + B_2) = p_1q_2 + q_1p_2.$$

50. Авария юз берганлиги ҳақида сигнал бериш учун иккита эркли ишлайдиган сигнализатор ўрнатилган. Авария юз берганда сигнализатор ишлай бошлаш эҳтимоли биринчиси учун 0,95 га, иккинчиси учун 0,9 га тенг. Авария юз берганда фақат битта сигнализатор ишлай бошлаш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 0{,}14$.

51. Икки мерган нишонга қарата ўқ узмоқда. Битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли биринчи мерган учун 0,7, иккинчи мерган учун 0,8 га тенг. Бир йўла ўқ узишда мерганлардан фақат биттасининг нишонга теккизиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 0{,}38$.

52. Иккита тўпдан бир йўла ўқ узишда нишонга битта ўқ тегиш эҳтимоли 0,38 га тенг. Агар иккинчи тўпдан битта отишда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,8 га тенг бўлса, бу эҳтимолни биринчи тўп учун топинг.

Жавоби. $P = 0{,}7$.

53. Техник контрол бўлими буюмларнинг стандартга мувофиқлигини текширади. Буюмнинг стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Текширилган иккита буюмдан фақат биттаси стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 0{,}18$.

54. Бирор физик катталикни бир марта ўлчашда берилган аниқликдан ортиқ хатога йўл қўйиш эҳтимоли 0,4 га тенг. Учта ўзаро эркли ўлчаш ўтказилган. Булардан фақат биттасида йўл қўйилган хато берилган аниқликдан ортиқ бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 0{,}432$.

55. Буюмлар партиясидан товаршунос олий нав буюмларни ажратмоқда. Таваккалига олинган буюмнинг олий нав бўлиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Текширилган учта буюмдан фақат иккитаси олий нав бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 0{,}384$.

56. Студент ўзига керакли формулани учта справочникдан изламоқда. Формуланинг биринчи, иккинчи, учинчи справочникда бўлиш эҳтимоли мос равишда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Формула а) фақат битта справочникда; б) фақат иккита справочникда; в) формула учала справочникда бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P = 0{,}188$; б) $P = 0{,}452$; в) $P = 0{,}336$.

57. Йиғувчига керакли деталнинг биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи яшикда бўлиш эҳтимоли мос равишда 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 га тенг. Деталнинг: а) кўпи билан учта яшикда; б) камида иккита яшикда бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P = 0{,}6976$; б) $P = 0{,}9572$.

58. Учта ўйин соққаси ташланган. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) тушган ёқларнинг ҳар бирида 5 очко бўлади; б) тушган ёқларнинг ҳаммасида бир хил сондаги очколар бўлади.

Жавоби. а) $P = \frac{1}{6^3}$; б) $P = 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}$.

59. 3 та ўйин соққаси ташланган. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) иккита тушган ёқда бир очко, учинчи ёқда эса бошқа сондаги очко бўлади; б) тушган иккита ёқда бир хил сондаги очко, учинчи ёқда эса бошқа сондаги очко бўлади; в) ҳамма тушган ёқларда турли сондаги очколар бўлади.

Жавоби.

а) $P = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$; б) $P=\frac{5}{12}$; в) $P=\frac{5}{9}$.

60. Тушган ёқларнинг биттасида ҳам 6 очко бўлмаслигини 0,3 дан кичик эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун нечта ўйин соққасини ташлаш керак?

Ечилиши. Ҳодисаларни қуйидагича белгилаймиз: A — тушган ёқларнинг биттасида ҳам 6 очко бўлмайди, A_i — i соққанинг тушган ёғида 6 очко бўлмайди ($i = 1, 2, \dots, n$).

Бизни қизиқтираётган A ҳодиса $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат, яъни

$$A = A_1A_2\dots A_n.$$

Исталган тушган ёқда олтига тенг бўлмаган очко бўлиш эҳтимоли

$$P(A_i)=\frac{5}{6}$$

га тенг.

A ҳодисалар биргаликда эркли, шунинг учун кўпайтириш теоремасини қўлланиш мумкин:

$$P(A) = P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\dots P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Шартга кўра $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}3$. Демак, $n \log\frac{5}{6} < \log 0{,}3$. Бу ердан $\log\frac{5}{6}<0$ ни ҳисобга олиб, $n>6{,}6$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, ўйин соққаларининг изланаётган сони

$$n\geqslant 7.$$

61. Мерганнинг битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Битта ҳам ўқ хато кетмаслигини 0,4 дан кичик эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун мерган нечта ўқ узиши керак?

Жавоби. $n \geqslant 5$.

62. Радиуси R бўлган доирага мунтазам учбурчак ички чизилган. Доира ичига таваккалига 4 та нуқта ташланган. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини то-

пинг: а) 4 та нуқтанинг ҳаммаси учбурчак ичига тушади; б) битта нуқта учбурчак ичига тушади ва ҳар бир „кичик" сегмент ичига биттадан нуқта тушади. Нуқтанинг фигурага тушиш эҳтимоли фигура юзига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига эса боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. а) $P=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; б) $P = 3!\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\cdot\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$.

63. Кесма учта тенг бўлакка бўлинган. Бу кесмага учта нуқта таваккалига ташланади. Кесманинг учала бўлагининг ҳар бирига биттадан нуқта тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби $P=3!\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

64. Ўқув залида эҳтимоллар назариясига доир 6 та дарслик бўлиб, уларнинг 3 таси муқовали. Кутубхоначи таваккалига 2 та дарслик олди. Иккала дарслик ҳам муқовали бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ҳодисаларни қуйидагича белгилаймиз: A — биринчи олинган дарслик муқовали, B — иккинчи олинган дарслик муқовали.

Биринчи дарсликнинг муқовали бўлиш эҳтимоли:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Биринчи олинган дарслик муқовали бўлиш шартида иккинчи олинган дарсликнинг муқовали бўлиш эҳтимоли, яъни B ҳодисанинг шартли эҳтимоли

$$P_A(B)=\frac{2}{5}.$$

Иккала дарслик ҳам муқовали бўлиш эҳтимоли боғлиқ ҳодисаларнинг эҳтимолларини кўпайтириш теоремасига асосан қуйидагига тенг:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=0{,}2.$$

Агар отаси қора кўзли бўлса ўғилнинг кўк кўзли бўлиш шартли эҳтимолини топамиз:

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1-0{,}39=0{,}61.$$

Агар отаси кўк кўзли бўлса, ўғилнинг қора кўзли бўлиш шартли эҳтимолини топамиз:

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})} = \frac{0{,}089}{0{,}089+0{,}782}=0{,}102.$$

Агар отаси кўк кўзли бўлса, ўғилнинг кўк кўзли бўлиш шартли эҳтимолини топамиз:

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=1-P_{\overline{A}}(B)=1-0{,}102=0{,}898.$$

72. $P(A)$ эҳтимолни ушбу эҳтимоллар бўйича топинг:

$$P(AB)=0{,}72,\quad P(A\overline{B})=0{,}18.$$

Ечилиши. A ҳодисани ушбу иккита биргаликда бўлмаган ҳодисанинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = AB + A\overline{B}.$$

Биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолларини қўшиш теоремасига кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A)=P(AB+A\overline{B})=P(A\overline{B})+P(AB)=0{,}72+0{,}18=0{,}9.$$

73. $P(A\overline{B})$ эҳтимолни берилган ушбу эҳтимоллар бўйича топинг:

$$P(A)=a,\quad P(B)=b,\quad P(A+B)=c.$$

Ечилиши. $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$ айниятдан фойдаланиб,

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=a-P(AB) \qquad (*)$$

ни топамиз. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ тенгликдан $P(AB)$ ни топамиз:

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=a+b-c. \qquad (**)$$

(**) ни (*) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A\overline{B})=a-(a+b-c)=c-b.$$

74. $P(\overline{A}\overline{B})$ эҳтимолни қуйида берилган эҳтимоллардан фойдаланиб топинг:

$$P(A)=a,\quad P(B)=b,\quad P(A+B)=c.$$

Ечилиши. $P(\overline{B})=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})$ айниятдан фойдаланиб, $P(\overline{A}\overline{B})$ ни топамиз:

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{B})-P(A\overline{B})=(1-b)-P(A\overline{B}).$$

Сўнгги тенгликка $P(A\overline{B})=c-b$ ни қўйиб (73-масалага қаранг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-b-(c-b)=1-c.$$

75. AB ҳодисанинг рўй бериши албатта C ҳодисанинг ҳам рўй беришига олиб келади. $P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$ эканлигини исботланг.

Ечилиши. Шартга кўра AB ҳодисанинг рўй бериши C ҳодисанинг рўй беришига олиб келади, шунинг учун (48-масалага қаранг):

$$P(C)\geqslant P(AB). \qquad (*)$$

Ушбу

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}),\quad P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B),$$
$$P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=1-P(\overline{A}\overline{B}).$$

айниятлардан фойдаланиб ва (*) тенгсизликни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant[P(AB)+P(A\overline{B})]+[P(AB)+P(\overline{A}B)]-P(AB)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=1-P(\overline{A}\overline{B})\leqslant 1.$$

Изоҳ. $C=AB$ бўлган хусусий ҳолда ҳам

$$P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$$

тенгсизлик ўринли бўлишига мустақил ишонч ҳосил қилишни китобхонга тавсия этамиз.

76. Ушбу тенгсизликни исботланг:

$$P_A(B)\geqslant 1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}.$$

$P(A)>0$ деб фараз қилинади.

65. Бирор жой учун июль ойида булутли кунларнинг ўртача сони олтига тенг. Биринчи ва иккинчи июлда ҳаво очиқ бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 25/31 \cdot 24/30 = 20/31$.

66. Цехда 7 эркак ишчи ва 6 аёл ишчи ишлайди. Табель номерлари бўйича таваккалига 3 киши ажратилди. Барча ажратиб олинган кишилар эркаклар бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ҳодисаларни қуйидагича белгилайлик: A—биринчи ажратилган эркак киши, B—иккинчи ажратилган эркак киши, C—учинчи ажратилган эркак киши.

Биринчи ажратилган эркак киши бўлиш эҳтимоли:

$$P(A) = \frac{7}{10}.$$

Биринчи ажратилган эркак киши шартида иккинчи кишининг эркак бўлиш эҳтимоли, яъни B ҳодисанинг шартли эҳтимоли:

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Олдин икки эркак киши ажратилиб олинганлиги шартида учинчи ажратилган киши эркак бўлиши эҳтимоли, яъни C ҳодисанинг шартли эҳтимоли:

$$P_{AB}(C) = \frac{5}{8}.$$

Ажратиб олинган кишиларнинг ҳаммаси эркак ишчилар бўлиш эҳтимоли

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

67. Яшикда 10 та деталь бўлиб, улар орасида 6 та бўялгани бор. Йиғувчи таваккалига 4 та деталь олади. Олинган деталларнинг ҳаммаси бўялган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$.

68. Яшикда 1 дан 5 гача номерланган 5 та шар бор. Таваккалига битталаб, жойига қайтариб қўймасдан, 3 та шар олинади. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) кетма-кет 1, 4, 5 номерли шарлар чиқади; б) олинган шарлар қандай тартибда чиқишидан қатъи назар 1, 4, 5 номерларга эга бўлади.

Жавоби. а) $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$; б) $P = 0{,}1$.

69. Студент программадаги 25 та саволдан 20 тасини билади. Студентнинг имтиҳон олувчи таклиф этган учта саволни билиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}$.

70. Халтачада 1 дан 10 гача номерланган 10 та бир хил кубик бор. Таваккалига биттадан 3 та кубик олинади. Бирин-кетин 1, 2, 3, номерли кубиклар чиқиш эҳтимолини қуйидаги ҳолларда топинг: а) кубиклар олингач, халтачага қайтариб солинмайди; б) олинган кубик халтачага қайтариб солинади.

Жавоби а) $P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}$; б) $P = 0{,}001$.

71. Англия ва Уэльсда аҳолини рўйхатга олиш (1891 й) маълумотларига кўра қуйидагилар аниқланган: текширилган кишиларнинг 5% ини қора кўзли оталар билан қора кўзли ўғиллар (AB), 7,9% ини қора кўзли оталар билан кўк кўзли ўғиллар ($A\overline{B}$), 8,9% ини кўк кўзли оталар билан қора кўзли ўғиллар ($\overline{A}B$), 78,2 % ини кўк кўзли оталар билан кўк кўзли ўғиллар ($\overline{A}\overline{B}$) ташкил этган. Ота билан ўғил кўзлари орасидаги боғланишни топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $P(AB) = 0{,}05$; $P(A\overline{B}) = 0{,}079$; $P(\overline{A}B) = 0{,}089$; $P(\overline{A}\overline{B}) = 0{,}782$.

Агар отаси қора кўзли бўлса, у ҳолда ўғилнинг қора кўзли бўлиш шартли эҳтимолини топамиз:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(AB) + P(A\overline{B})} = \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}079} = 0{,}39.$$

Ечилиши. 75- масалага берилган изоҳга асосан ушбу тенгсизлик ўринли:

$$P(A) + P(B) - P(AB) \leqslant 1.$$

Ушбу айниятлардан фойдаланамиз:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B),\ P(B) = 1 - P(\overline{B}).$$

(**) ни (*) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) + 1 - P(\overline{B}) - P(A) \cdot P_A(B) \leqslant 1$$

ёки

$$P(A) \cdot P_A(B) \geqslant P(A) - P(\overline{B}).$$

Тенгсизликнинг иккала қисмини $P(A)$ мусбат сонга бўлиб, узил-кесил

$$P_A(B) \geqslant 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)}.$$

га эга бўламиз.

77. ABC ҳодисанинг рўй бериши албатта D ҳодисанинг рўй беришига олиб келади. Ушбу тенгсизликни исботланг:

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(D) < 2.$$

Ечилиши. Шартга кўра ABC ҳодисанинг рўй бериши албатта D ҳодисанинг рўй беришига олиб келади, демак (48 масалага қаранг)

$$P(D) \geqslant P(ABC).$$

Шундай қилиб, агар

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC) \leqslant 2 \qquad (*)$$

тенгсизлик исботланса, у ҳолда масала шартида кўрсатилган тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

(*) тенгсизликни исботлаймиз. Ушбу айниятлардан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= P(ABC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}),\\ P(B) &= P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(AB\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}),\\ P(C) &= P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}\overline{B}C). \end{aligned}\right\} (**)$$

Тўла группа ташкил этадиган ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг, шунинг учун

$$P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(ABC) + {}$$
$$+ P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1.$$

Бу ердан

$$P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) =$$
$$= 1 - [P(\overline{A}\overline{B}C) + P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})]. \qquad (***)$$

(**) ни (*) га қўйиб ва (***) дан фойдаланиб, соддалаштиришлардан сўнг, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC) =$$
$$= 2 - [2P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(A\overline{B}\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C})].$$

Катта қавс ичидаги ҳар бир қўшилувчининг манфий эмаслигини ҳисобга олиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(D) \leqslant 2.$$

78. Иккита биргаликда бўлган ҳодисалар учун қўшиш теоремаси

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$$

исботланган деб фараз қилиб, учта биргаликда бўлган ҳодисалар учун эҳтимолларни ушбу

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

қўшиш теоремасини келтириб чиқаринг.

Ечилиши. Учта ҳодиса йиғиндисини иккита ҳодиса йиғиндисига келтирамиз:

$$A + B + C = (A + B) + C.$$

Иккита ҳодиса эҳтимолларини қўшиш теоремасидан фойдаланамиз:

$$P(A + B + C) = P[(A + B) + C] =$$
$$= P(A + B) + P(C) - P[(A + B)C] =$$
$$= P(A + B) + P(C) - P[(AC) + (BC)].$$

Иккита биргаликда бўлган ҳодиса учун қўшиш теоремасини икки марта қўллаймиз (A ва B ҳодисалар учун ва шунингдек, AC ва BC ҳодисалар учун):

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-$$
$$-\{P(AC)+P(BC)-P[(AC)(BC)]\}.$$

Энди $P[(AC)(BC)]=P(ABC)$ эканлигини ҳисобга олиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

79*. Ҳар иккитаси ўзаро эркли бўлган 3 та A, B, C ҳодисалар берилган, бироқ уларнинг учаласи бир вақтда рўй бериши мумкин эмас. Уларнинг ҳаммаси бир хил p эҳтимолга эга деб фараз қилиб, p нинг мумкин бўлган энг катта қийматини топинг.

Ечилиши. Биринчи усул. Шартга кўра

$$P(ABC)=0,\quad P(\bar A)=P(\bar B)=P(\bar C)=1-p,\ P(AB)=$$
$$=P(A)\cdot P(B)=p^2,\ P(AC)=p^2,\ P(BC)=p^2.$$

Тўла группа ташкил этадиган қуйидаги

$$A\bar B\bar C,\ B\bar A\bar C,\ C\bar A\bar B,\ ABC,\ AC\bar B,\ BC\bar A,\ AEC,\ \bar A\bar B\bar C$$

ҳодисаларнинг ҳар бирининг эҳтимолини топамиз.

$AB\bar C$ ҳодисани эҳтимолини топиш учун AB ҳодисани иккита биргаликда бўлмаган ҳодисанинг йиғиндиси кўринишида қуйидагича тасвирлаймиз:

$$AB=ABC+AB\bar C.$$

Қўшиш теоремасига кўра:

$$P(AB)=P(ABC)+P(AB\bar C).$$

Бу ердан

$$P(AB\bar C)=P(AB)-P(AbC)=p^2.$$

Шунга ўхшаш, қуйидагини ҳам топамиз:

$$P(AC\bar B)=P(BC\bar A)=p^2.$$

$A\bar B\bar C$ ҳодисанинг эҳтимолини топиш учун $A\bar B$ ҳодисани иккита биргаликда бўлмаган ҳодисанинг йиғиндиси кўринишида қуйидагича тасвирлаймиз:

$$A\bar B=A\bar BC+A\bar B\bar C.$$

Қўшиш теоремасига кўра

$$P(A\bar B)=P(A\bar BC)+P(A\bar B\bar C).$$

Бу ерда

$$P(A\bar B\bar C)=P(A\bar B)-P(A\bar BC)=p(1-p)-p^2=p-2p^2.$$

Шунга ўхшаш, қуйидагини ҳам топамиз:

$$P(B\bar A\bar C)=P(C\bar A\bar B)=p-2p^2.$$

$\bar A\bar B\bar C$ ҳодисанинг эҳтимолини топамиз: бунинг учун 1 дан тўла группа ташкил этадиган қолган ҳодисалар эҳтимоллари йиғиндисини айириш етарли:

$$P(\bar A\bar B\bar C)=1-[3(p-2p^2)+3p^2]=3p^2-3p+1.$$

Исталган эҳтимол ноль билан бир орасида ётишини ҳисобга олиб, барча топилган эҳтимоллар бу шартни қаноатлантиришини талаб этамиз:

$$\begin{cases}0\leqslant p^2\leqslant 1,\\ 0\leqslant p-2p^2\leqslant 1,\\ 0\leqslant 3p^2-3p+1\leqslant 1.\end{cases}\qquad (*)$$

Системадаги тенгсизликларнинг ҳар бирини ечиб, мос равишда қуйидагини топамиз:

$$\begin{cases}0\leqslant p\leqslant 1,\\ 0\leqslant p\leqslant 1/2,\\ 0\leqslant p\leqslant 1.\end{cases}$$

Шундай қилиб, p нинг (*) системадаги учала тенгсизликни қаноатлантирадиган энг катта мумкин бўлган қиймати 1/2 га тенг.

Иккинчи усул. $P(A+B+C)=k$ белгилаш киритамиз. Учта биргаликда бўлмаган ҳодиса учун қўшиш теоремасидан фойдаланиб ва

$$P(A)=P(B)=P(C)=p,\quad P(AB)=P(AC)=P(BC)=p^2,$$
$$P(ABC)=0,$$

эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$k=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC)=3p-3p^2.$$

85. Икки мергандан ҳар бирининг ўқни нишонга теккизиш эҳтимоли 0,3 га тенг. Мерганлар навбат билан ўқ узадилар, лекин ҳар бири иккитадан ўқ узади. Биринчи бўлиб нишонга ўқ теккизган мерган мукофот олади. Мерганларнинг мукофот олишлари эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P\approx 0{,}76$.

86. Мерганнинг учта ўқ узишда камида битта ўқни нишонга теккизиш эҳтимоли 0,875 га тенг. Унинг битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Учта ўқ узишда камида битта ўқни нишон теккизиш (A ҳодиса) эҳтимоли

$$P(A)=1-q^3$$

га тенг, бу ерда q—ўқнинг хато кетиш эҳтимоли. Шартга кўра $P(A)=0{,}875$. Демак,

$$0{,}875=1-q^3$$

ёки

$$q^3=1-0{,}875=0{,}125.$$

Бу ердан

$$q=\sqrt[3]{125}=0{,}5.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$p=1-q=1-0{,}5=0{,}5.$$

87. Тўртта ўқ узишда камида битта ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,9984 га тенг. Битта ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $p=0{,}8$.

88. Бирор физик катталик кўп марта ўлчанади. Асбобнинг кўрсатишини ўқишда хатога йўл қўйиш эҳтимоли p га тенг. Ўлчашлар натижаларининг камида биттаси нотўғри бўлишини $p>\alpha$ эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун зарур бўлган ўлчашларнинг энг кам сонини топинг.

Жавоби. $E\left[\dfrac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}\right]+1$, бу ерда $E[N]$ ифода N сонининг бутун қисми.

3-§. Тўла эҳтимол формуласи

Тўла группа ташкил этадиган, биргаликда бўлмаган $B_1, B_2, \ldots B_n$ ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) бири рўй бергандагина рўй бериши мумкин бўлган A ҳодисанинг эҳтимоли гипотезалардан ҳар бирининг эҳтимолини A ҳодисанинг тегишли шартли эҳтимолига кўпайтмалари йиғиндисига тенг:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+$$
$$+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A),\qquad (*)$$

бу ерда $P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$.

(*) тенглик *„тўла эҳтимол формуласи"* дейилади.

89. Ичида 2 та шар бўлган идишга битта оқ шар солиниб, шундан кейин идишдан тавакалига битта шар олинган. Шарларнинг дастлабки таркиби (ранги бўйича) ҳақида мумкин бўлган барча тахминлар тенг имкониятли бўлса, у ҳолда олинган шарнинг оқ рангли бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A орқали оқ шар олинганлик ҳодисасини белгилаймиз. Шарларнинг дастлабки таркиби ҳақида қуйидаги тахминлар (гипотезалар) бўлиши мумкин: B_1—оқ шарлар йўқ, B_2—битта оқ шар бор, B_3—иккита оқ шар бор.

Ҳаммаси бўлиб учта гипотеза мавжуд бўлиб, шу билан бирга улар шартга кўра тенг имкониятли ва гипотезалар эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг (чунки улар ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади) бўлгани учун гипотезаларнинг ҳар бирининг эҳтимоли $\frac{1}{3}$ га тенг, яъни

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B)_3=\frac{1}{3}.$$

Идишда дастлаб оқ шарлар бўлмаганлиги шартида оқ шар олинишининг шартли эҳтимоли

$$P_{B_1}(A)=\frac{1}{3}.$$

Идишда дастлаб битта оқ шар бўлганлиги шартида оқ шар олинишининг шартли эҳтимоли

$$P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}.$$

Бу тенгламани p га нисбатан ечиб,

$$p=\frac{1+\sqrt{1-4k/3}}{2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар $p=\frac{1-\sqrt{1-4k/3}}{2}$ бўлса, у ҳолда p максимал қиймати $p=1/2$ га ($k=3/4$ бўлганда) эришади.

Агар $p=\frac{1+\sqrt{1-4k/3}}{2}$ бўлса, у ҳолда бир қарашда $p\geqslant 1/2$ бўлиб кўринади. Лекин $p>1/2$ деб йўл қўйиш зиддиятга олиб келишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $p>1/2$ бўлиши учун $1-4k/3>0$ шарт, ёки $k=3p-3p^2$ га асосан $p^2-p+1/4>0$ шарт ўринли бўлиши керак. Бундан

$$p=\frac{1}{2}\pm\sqrt{1/4-1/4}=1/2.$$

Шундай қилиб, мумкин бўлган энг катта қиймат $p=1/2$.

2-§. Камида битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли

Айтайлик, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда эркли, шу билан бирга $P(A_1)=p_1, P(A_2)=p_2, \ldots, P(A_n)=p_n$ бўлсин; синов натижасида ҳодисаларнинг ҳаммаси ёки уларнинг бир қисми рўй бериши мумкин бўлсин ёки биттаси ҳам рўй бериши мумкин бўлмасин.

Биргаликда эркли бўлган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалардан камида биттасининг рўй беришидан иборат A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 1 дан $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ қарама-қарши ҳодисалар эҳтимоллари кўпайтмасини айрилганига тенг:

$$P(A)=1-q_1q_2\ldots, q_n.$$

Хусусан, барча n та ҳодиса бир хил p эҳтимолга эга бўлса у ҳолда бу ҳодисалардан камида биттасининг рўй бериш эҳтимоли

$$P(A)=1-q^n.$$

80. Электр занжирига эркли ишлайдиган 3 та элемент кетма-кет уланган. Биринчи иккинчи ва учинчи элементларнинг бузилиш эҳтимоллари мос равишда қуйидагига тенг:

$$p=0{,}1;\quad p_2=0{,}15;\quad p_3=0{,}2.$$

Занжирда ток бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Элементлар кетма-кет уланганлиги сабабли элементлардан камида биттаси бузилса, занжирда ток бўлмайди (A ҳодиса).

Изланаётган эҳтимол:

$$P(A)=1-q_1q_2q_3=1-(1-0{,}1)(1-0{,}15)(1-0{,}2)=0{,}388.$$

81. Қурилма ўзаро эркли ишлайдиган иккита элементни ўз ичига олади. Элементларнинг бузилиш эҳтимоллари мос равишда 0,05 га ва 0,08 га тенг. Қурилманинг бузилиши учун камида битта элементнинг бузилиши етарли бўлса, қурилманинг ишламай қолиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=0{,}126$.

82. Кўприк яксон бўлиши учун битта авиацион бомбанинг келиб тушиши кифоя. Агар кўприкка тушиш эҳтимоллари мос равишда 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 бўлган 4 та бомба ташланса, кўприкни яксон бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P\sim 0{,}95$

83. Уч тадқиқотчи бир-биридан эркли равишда бирор катталикни ўлчашмоқда. Биринчи тадқиқотчининг асбоб кўрсатишини ўқишда хатога йўл қўйиш эҳтимоли 0,1 га тенг. Иккинчи ва учинчи тадқиқотчи учун бу эҳтимол мос равишда 0,15 ва 0,2 га тенг. Бир марталик ўлчашда тадқиқотчилардан камида бирининг хатога йўл қўйиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=0{,}388$.

84. Икки спортчидан ҳар бирининг машқни муваффақиятли бажариш эҳтимоли 0,5 га тенг. Спортчилар машқни навбат билан бажарадилар, бунда ҳар бир спортчи ўз кучини икки марта синаб кўради. Машқни *биринчи бўлиб бажарган спортчи мукофот олади*. Спортчиларнинг мукофотни олишлари эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Мукофот топширилиши учун тўртта синовдан камида биттаси муваффақиятли бўлиши кифоя. Синовнинг муваффақиятли ўтиш эҳтимоли $p=0{,}5$, муваффақиятсиз ўтиш эҳтимоли эса $q=1-0{,}5=0{,}5$.

Изланаётган эҳтимол:

$$P=1-q^4=1-0{,}5^4=0{,}9375.$$

Идишда дастлаб иккита оқ шар бўлганлиги шартида оқ шар олинишининг шартли эҳтимоли

$$P_{B_3}(A)=\frac{3}{3}=1.$$

Идишдан оқ шар олинишининг изланаётган эҳтимолини тўлиқ эҳтимол формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+$$
$$+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

90. Ичида n та шар бўлган идишга битта оқ шар солинган, шундан кейин идишдан таваккалига битта шар олинган. Агар идишдаги шарларнинг дастлабки таркиби (ранги бўйича) ҳақида барча мумкин бўлган тахминлар тенг имкониятли бўлса, олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $P=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

91. Ҳисоблаш лабораториясида 6 та клавишли автомат ва 4 та ярим автомат бор. Бирор ҳисоблаш ишини бажариш давомида автоматнинг ишдан чиқмаслик эҳтимоли 0,95 га тенг; ярим автомат учун бу эҳтимол 0,8 га тенг. Студент ҳисоблаш ишини *таваккалига* танлаган машинада бажаради. Ҳисоблаш тугагунча машинанинг ишдан чиқмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=0{,}89$.

92. Пирамидада бешта *милтиқ бўлиб*, уларнинг учтаси оптик нишон билан таъминланган. Мерганнинг оптик нишонли милтиқдан ўқ узганда нишонга теккизиш эҳтимоли 0,95 га тенг; оптик нишон ўрнатилмаган милтиқ учун бу эҳтимол 0,7 га тенг. Агар мерган таваккалига олинган милтиқдан ўқ узса, ўқнинг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $P=0{,}85$.

93. Яшикда 1-заводда тайёрланган 12 та деталь, 2-заводда тайёрланган 20 та деталь ва 3-заводда тайёрланган 18 та деталь бор. 1-заводда тайёрланган деталнинг аъло сифатли бўлиш эҳтимоли 0,9 га тенг;

2-заводда ва 3-заводда тайёрланган деталлар учун бу эҳтимол мос равишда 0,6 ва 0,9 га тенг. *Таваккалига* олинган деталнинг аъло сифатли бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=0{,}78$.

94. Биринчи идишда 10 та шар бўлиб, уларнинг 8 таси оқ; иккинчи идишда 20 та шар бўлиб, уларнинг 4 таси оқ. *Ҳар бир идишдан* таваккалига биттадан шар олиниб, кейин бу икки шардан яна битта шар таваккалига олинди. Оқ шар олинганлик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=0{,}5$.

95. Учта идишнинг ҳар бирида 6 тадан қора шар ва 4 тадан оқ шар бор. Биринчи идишдан таваккалига битта шар олиниб, иккинчи идишга солинган, шундан сўнг иккинчи идишдан таваккалига битта шар олиниб, учинчи идишга солинди. Учинчи *идишдан таваккалига* олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=0{,}4$.

96. Электрон рақамли машинанинг ишлаш вақтида арифметик қурилмада, оператив хотира қурилмасида, қолган қурилмаларда бузилиш юз бериш эҳтимоллари 3 : 2 : 5 каби нисбатда. Арифметик қурилмада, оператив хотира қурилмасида ва бошқа қурилмалардаги бузилишнинг топиш эҳтимоли мос равишда 0,8; 0,9; 0,9 га тенг. Машинада юз берган бузилишнинг топилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P=0{,}87$.

4-§. Бейес формуласи

Айтайлик, A ҳодиса ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этадиган, *биргаликда* бўлмаган $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) бири рўй бериши шартидагина рўй бериши мумкин бўлсин. Агар A ҳодиса рўй берган бўлса, у ҳолда гипотезаларнинг эҳтимолларини ушбу *Бейес формулалари* бўйича қайта баҳолаш мумкин:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

бу ерда

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

97. Иккита автомат бир хил деталлар ишлаб чиқаради, бу деталлар кейин умумий конвейерга ўтади. Биринчи автоматнинг унумдорлиги иккинчи автоматнинг унумдорлигидан икки марта кўп. Биринчи автомат ўрта ҳисобда деталларнинг 60% ини, иккинчи автомат эса ўртача ҳисобда деталларнинг 84% ини аъло сифат билан ишлаб чиқаради. Конвейерда таваккалига олинган деталь аъло сифатли бўлиб чиқди. Бу детални биринчи автомат ишлаб чиқарганлиги эҳтимолини топинг.

Ечилиши. *A орқали—деталь аъло сифатли бўлиши* ҳодисасини белгилаймиз. Бу ерда иккита тахмин (гипотеза) қилиш мумкин: B_1—детални биринчи автомат ишлаб чиқарган, шу билан бирга

$$P(B_1)=\frac{2}{3}$$

(чунки биринчи автомат иккинчи автоматга қараганда икки марта кўп деталь ишлаб чиқаради);

B_2—детални иккинчи автомат ишлаб чиқарган, шу билан бирга

$$P(B_2)=\frac{1}{3}.$$

Агар детални биринчи автомат ишлаб чиқарган бўлса, деталь аъло сифатли бўлишининг шартли эҳтимоли

$$P_{B_1}(A)=0{,}6.$$

Агар детални иккинчи автомат ишлаб чиқарган бўлса, детални аъло сифатли бўлишининг шартли эҳтимоли

$$P_{B_2}(A)=0{,}84.$$

Таваккалига олинган деталнинг аъло сифатли бўлиш эҳтимоли тўла эҳтимол формуласига кўра

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)= \frac{2}{3}\cdot 0{,}6+\frac{1}{3}\cdot 0{,}84=0{,}68.$$

Олинган аъло сифатли детални биринчи автомат ишлаб чиқарган бўлиш эҳтимоли Бейес формуласига кўра

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{2/3\cdot 0{,}6}{0{,}68}=\frac{10}{17}.$$

98. Пирамидада 10 та милтиқ бўлиб, уларнинг 4 таси оптик нишон билан таъминланган. Мерганнинг оптик нишонли милтиқдан ўқ узганда нишонга теккизиш эҳтимоли 0,95 га тенг; оптик нишон ўрнатилмаган милтиқ учун бу эҳтимол 0,8 га тенг. Мерган таваккалига олинган милтиқдан нишонга ўқ теккизди. Қайси бирининг эҳтимоли аниқроқ: мерган оптик нишонли милтиқдан ўқ узганми ёки оптик нишон ўрнатилмаган милтиқдан ўқ узганми?

Жавоби. Милтиқ оптик нишонсиз бўлганлигининг эҳтимоли аниқроқ (милтиқ оптик нишонсиз бўлганлигининг эҳтимоли 24/43 га тенг, оптик нишонли бўлганлигининг эҳтимоли 19/43 га тенг).

99. Бензоколонка жойлашган шосседан ўтадиган юк машиналари сонининг ўша шосседан ўтадиган енгил машиналар сонига нисбати 3:2 каби. Юк машинанинг бензин олиш эҳтимоли 0,1 га тенг; енгил машина учун бу эҳтимол 0,2 га тенг. Бензоколонка ёнига бензин олиш учун машина келиб тўхтади. Унинг юк машина бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 3/7$.

100. Икки перфораторчи аёл турли перфораторларда бир хил комплект перфокарталар тайёрлашди. Биринчи перфораторчи аёлнинг хатога йўл қўйиш эҳтимоли 0,05 га тенг; иккинчи перфораторчи аёл учун бу эҳтимол 0,1 га тенг. Перфокарталарни текширишда хатога йўл қўйилганлиги аниқланди. Биринчи перфораторчи аёл хато қилганлигининг эҳтимолини топинг (иккала перфоратор ҳам бузилмаган деб фараз қилинади).

Жавоби. $P = 1/3$.

101. Ихтисослаштирилган касалхонага беморларнинг ўрта ҳисобда 50% и K касаллик билан, 30% и L касаллик билан, 20% и M касаллик билан қабул қилинади. K касалликни тўлиқ даволаш эҳтимоли 0,7 га

Олинган иккала стандарт деталнинг учинчи партиядан олинган бўлиш эҳтимоли Бейес формуласига кўра қуйидагига тенг:

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}=\frac{1/3\cdot 1/4}{1/3\cdot 1+1/3\cdot 9/16+1/3\cdot 1/4}=4/29.$$

106. Уч тўпдан иборат батареядан бир йўла снаряд отилди, шу билан бирга 2 та снаряд нишонга бориб тегди. Агар биринчи, иккинчи ва учинчи тўпнинг нишонга теккизиш эҳтимоли мос равишда $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}5$ бўлса, биринчи тўпнинг нишонга теккизган бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A орқали иккита тўпнинг нишонга теккизганлик ҳодисасини белгилаймиз.

Иккита тахмин (гипотеза) қиламиз: B_1—биринчи тўп снарядни нишонга теккизган; B_2—биринчи тўп снарядни нишонга теккиза олмаган.

Шартга кўра $P(B_1)=0{,}4$, демак, (B_2 ҳодиса B_1 ҳодисага қарама-қарши бўлгани учун)

$$P(B_2)=1-0{,}4=0{,}6.$$

$P_{B_1}(A)$ шартли эҳтимолни, яъни нишонга иккита снаряд текканлиги, лекин бу снарядларни бири биринчи тўпдан узилганлиги, демак, иккинчи снаряд ёки иккинчи тўпдан, ёки учинчи тўпдан (бунда иккинчи тўпдан узилган снаряд хато кетган бўлади) отилганлигининг эҳтимолини топамиз. Бу иккита ҳодиса биргаликда эмас, шу сабабли қўшиш теоремасини қўлланиш мумкин:

$$P_{B_1}(A)=p_2\cdot q_3+p_3\cdot q_2=0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}5.$$

$P_{B_2}(A)$ шартли эҳтимолни, яъни нишонга иккита снаряд текканлиги, лекин биринчи тўпдан узилган снарядни хато кетганлигининг эҳтимолини топамиз. Бошқача айтганда, иккинчи ва учинчи тўпларнинг снарядларини нишонга текканлигининг эҳтимолини топамиз. Бу иккига ҳодиса эркли, шу сабабли кўпайтириш теоремасини қўлланиш мумкин:

$$P_{B_2}(A)=p_2\cdot p_3=0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}15.$$

Биринчи тўпнинг снарядни нишонга теккизганлиги эҳтимоли Бейес формуласига кўра қуйидагига тенг:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}5}{0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}6\cdot 0{,}15}=\frac{20}{29}.$$

107. Уч мерган бир йўла ўқ узишди, бунда икки ўқ нишонга тегди. Агар биринчи, иккинчи ва учинчи мерганларнинг нишонга теккизиш эҳтимоллари мос равишда 0,6; 0,5 ва 0,4 га тенг бўлса, учинчи мерганнинг нишонга теккизганлигининг эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 10/19$.

108. Ҳисоблаш қурилмасининг бир-биридан эркли (мустақил) ишлайдиган учта элементидан иккитаси ишламай қўйди. Агар биринчи, иккинчи ва учинчи элементларнинг ишламай қўйиш эҳтимоли мос равишда 0,2; 0,4 ва 0,3 га тенг бўлса, биринчи ва иккинчи элементларнинг ишламай қўйиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A орқали иккита элементнинг ишламай қўйганлик ҳодисасини белгилаймиз.

Қуйидагича тахминлар (гипотезалар) қилиш мумкин: B_1—биринчи ва иккинчи элементлар ишламай қўйган, учинчи элемент эса бузилмаган, шу билан бирга (элементлар бир-биридан эркли ишлаши сабабли кўпайтириш теоремасини қўлланиш мумкин):

$$P(B_1)=p_1\cdot p_2\cdot q_3=0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}056;$$

B_2 — биринчи ва учинчи элементлар ишламай қолган, иккинчи элемент эса бузилмаган, шу билан бирга

$$P(B_2)=p_1\cdot p_3\cdot q_2=0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}036;$$

B_3 — иккинчи ва учинчи элементлар ишламай қўйган, биринчи элемент эса бузилмаган, шу билан бирга

$$P(B_3)=p_2\cdot p_3\cdot q_1=0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}096;$$

B_4 — фақат битта элемент ишламай қўйган; B_5—учала элемент ишламай қўйган; B_6 — битта ҳам элемент бузилмаган.

Кейинги учта гипотезанинг эҳтимолларини ҳисобламаймиз, чунки бу гипотезаларда A ҳодиса (иккита элетенг, L ва M касалликлар учун бу эҳтимол мос равишда 0,8 ва 0,9 га тенг. Касалхонага қабул қилинган бемор бутунлай соғайиб кетди. Бу бемор K касаллик билан оғриган бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 5/11$.

102. Буюмнинг стандартга мувофиқлигини икки товаршуноснинг бири текширади. Буюмнинг биринчи товаршуносга келиб тушиш эҳтимоли 0,55 га, иккинчи товаршуносга келиб тушиш эҳтимоли эса 0,45 га тенг. Стандарт буюмни биринчи товаршунос стандартга мувофиқ деб қабул қилиш эҳтимоли 0,9 га тенг; иккинчи товаршунос учун бу эҳтимол 0,98 га тенг. Стандарт буюм текширишда стандартга мувофиқ деб қабул қилинди. Бу буюмни иккинчи товаршунос текширган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P \approx 0{,}47$.

103. A ҳодиса ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этадиган биргаликда бўлмаган $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) биттасигина рўй бериши шартидагина рўй бериши мумкин. A ҳодиса рўй берганидан сўнг гипотезаларнинг эҳтимоллари қайта баҳоланди, яъни $P_A(B_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$ шартли эҳтимоллар топилди. Ушбу тенгликни исботланг:

$$\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1.$$

104. A ҳодиса ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этадиган биргаликда бўлмаган B_1, B_2, B_3 ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) биттаси рўй бериши шартида рўй бериши мумкин. A ҳодиса рўй берганидан сўнг гипотезаларнинг эҳтимоллари қайта баҳоланди, яъни бу гипотезаларнинг шартли эҳтимоли топилди, шу билан бирга

$$P_A(B_1) = 0{,}6 \text{ ва } P_A(B_2) = 0{,}3$$

бўлиб чиқди. B_3 гипотезанинг $B_A(B_3)$ шартли эҳтимоли нимага тенг?

Жавоби. $P_A(B_3) = 1 - (0{,}6 + 0{,}3) = 0{,}1$.

105. Ҳар бирида 20 тадан деталь бўлган уч партия деталь бор. Биринчи, иккинчи ва учинчи партиялардаги стандарт деталлар сони мос равишда 20, 15, 10 га тенг. Таваккалига танланган партиядан таваккалига битта деталь олинган эди, у стандарт бўлиб чиқди. Бу деталин жойига қайтариб қўйиб, иккинчи марта таваккалига битта деталь олинган эди, у ҳам стандарт деталь бўлиб чиқди. Деталларни учинчи партиядан олинганлик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A—орқали иккита синовнинг (жойига қайтариш билан) ҳар бирида стандарт деталь олинганлиги ҳодисасини белгилаймиз.

Бу ерда учга тахмин (гипотеза) қилиш мумкин: B_1—деталлар биринчи партиядан олинган; B_2—деталлар иккинчи партиядан олинган; B_3—деталлар учинчи партиядан олинган.

Деталлар таваккалига танланган партиядан олинганлиги сабабли гипотезаларнинг эҳтимоллари бир хил бўлади:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

$P_{B_1}(A)$ шартли эҳтимолни, яъни биринчи партиядан кетма-кет иккита стандарт деталь олинганлиги эҳтимолини топамиз. Бу ҳодиса муқаррар ҳодисадир, чунки биринчи партиядаги ҳамма деталлар стандарт, шунинг учун

$$P_{B_1}(A) = 1.$$

$P_{B_2}(A)$ шартли эҳтимолни, яъни иккинчи партиядан (жойига қайтариш билан) кетма-кет иккита стандарт деталь олинганлик эҳтимолини топамиз:

$$P_{P_2}(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{9}{16}.$$

$P_{B_3}(A)$ шартли эҳтимолни, яъни учинчи партиядан кетма-кет (жойига қайтариш билан) иккита стандарт деталь олинганлик эҳтимолини топамиз:

$$P_{B_3}(A) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{4}.$$

мент ишламай қўйган) мумкин бўлмаган ҳодисадир, демак, бу ҳолларда $P_{B_4}(A)$, $P_{B_5}(A)$, $P_{B_6}(A)$ шартли эҳтимоллар нолга тенг, бинобарин, $P(B_4) \cdot P_{B_4}(A)$, $P(B_5) \times \times P_{B_5}(A)$ ва $P(B_6) \cdot P_{B_6}(A)$ кўпайтмалар ҳам B_4, B_5 ва B_6 гипотезалар эҳтимолларининг ҳар қандай қийматларидан нолга тенг (пастдаги (*) муносабатга қаранг).

B_1, B_2, B_3 гипотезаларда A ҳодиса муқаррар бўлгани учун тегишли шартли эҳтимоллар бирга тенг:

$$P_{B_1}(A) = P_{P_2}(A) = P_{B_3}(A) = 1.$$

Иккита элементнинг ишламай қўйганлик эҳтимолини тўла эҳтимол формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \\ + P(B_4) \cdot P_{B_4}(A) + P(B_5) \cdot P_{B_5}(A) + P(B_6) \cdot P_{B_6}(A) = \\ = 0{,}056 \cdot 1 + 0{,}036 \cdot 1 + 0{,}096 \cdot 1 = 0{,}188. \qquad (*)$$

Биринчи ва иккинчи элементларнинг ишламай қўйганлик эҳтимолини Бейес формуласидан топамиз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}056}{0{,}188} \approx 0{,}3.$$

109*. Асбобнинг бир-биридан эркли ишлайдиган тўртта лампасидан иккитаси ишдан чиқди. Агар биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи лампаларнинг ишдан чиқиш эҳтимоллари мос равишда $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$ ва $p_4 = 0{,}4$ га тенг бўлса, биринчи ва иккинчи лампаларнинг ишдан чиққанлик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P \approx 0{,}039$.

Учинчи боб

СИНОВЛАРНИНГ ТАКРОРЛАНИШИ

1-§. Бернулли формуласи

Агар синовлар ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли қолган синовларнинг натижаларига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай синовлар *A ҳодисага нисбатан эркли* деб аталади. Бу бобнинг 1—4-§ ларида ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил эркли синовлар қаралади.

Бернулли формуласи. *Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p $(0 < p < 1)$ га тенг бўлган n та эркли синовда ҳодисанинг (қайси тартибда бўлишидан қатъи назар) роса k марта рўй бериш эҳтимоли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

ёки

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

га тенг, *бу ерда* $q = 1 - p$.

Ҳодисанинг: а) k дан кам марта; б) k дан кўп марта; в) камида k марта; г) кўпи билан k марта рўй бериш эҳтимоли ушбу формулалар бўйича топилади:

а) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$;
б) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$;
в) $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$;
г) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$.

110. Икки тенг кучли шахматчи шахмат ўйнашмоқда: тўрт партиядан иккигасини ютиш эҳтимоли кўпроқми ёки олти партиядан учтасини ютиш эҳтимоли кўпроқми (дуранг натижалар ҳисобга олинмайди)?

Ечилиши. Тенг кучли шахматчилар ўйнашмоқда, шу сабабли партияни ютиш эҳтимоли $p = 1/2$, демак, партияни ютқизиш эҳтимоли q ҳам 1/2 га тенг. Ҳамма партияларда ютиш эҳтимоли ўзгармас ва партияларни қайси тартибда ютишнинг фарқи йўқлиги сабабли Бернулли формуласини қўллаш мумкин.

Тўрт партиядан икки партияни ютиш эҳтимолини топамиз:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Олти партиядан уч партияни ютиш эҳтимолини топамиз:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

$P_4(2) > P_6(3)$ бўлгани учун олти партиядан учтасини ютишдан кўра тўрт партиядан иккитасини ютишнинг эҳтимоли каттароқ.

111. Икки тенг кучли рақиб шахмат ўйнашмоқда. Қайси бирининг ютиш эҳтимоли каттароқ: а) икки партиядан бир партияни ютишними ёки тўрт партиядан иккигасини ютишними; б) тўрт партиядан камида иккитасини ютишними ёки беш партиядан камида учтасини ютишнимн? Дуранг натижалар эътиборга олинмайди.

Жавоби. а) Икки партиядан биттасини ютиш эҳтимоли каттарок: $P_2(1) = 1/2$; $P_4(2) = 3/8$; б) тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимоли каттарок: $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - [P_4(0) + + P_4(1)] = 11/16$; $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 8/16$.

112. Танга 5 марта ташланади. „Гербли" томон а) икки мартадан кам тушиш; б) камида икки марта тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P = P_5(0) + P_5(1) = 3/16$; б) $Q = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = 13/16$.

113. Агар битта синовда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,4 га тенг бўлса, у ҳолда тўртта эркли синовда A ҳодисанинг камида уч марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_4(3) + P_4(4) = 0,1792$.

114. A ҳодиса камида тўрт марта рўй берган ҳолда B ҳодиса рўй беради. Агар ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,8 га тенг бўлган 5 та эркли синов ўтказиладиган бўлса, B ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_5(4) + P_5(5) = 0,74$.

115. Оилада 5 фарзанд бор. Бу болалар орасида: а) икки ўғил бола; б) кўпи билан икки ўғил бола; в) иккитадан ортиқ ўғил болалар; г) камида иккита ва кўпи билан учта ўғил болалар бўлиш эҳтимолини топинг. Ўғил болалар туғилиш эҳтимолини 0,51 га тенг деб олинг.

Жавоби. Изланаётган эҳтимоллар қуйидагича: а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62.

116. Узунлиги 15 см бўлган AB кесмани C нуқта орқали 2 : 1 каби нисбатда бўлинган. Бу кесмага таваккалига 4 та нуқта ташланган. Бу нуқталардан иккитаси C нуқтадан чапга, иккитаси эса ундан ўнгга тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига эса боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P_4(2) = C_4^2 (2/3)^2 (1/3)^2 = 8/27$.

117. Узунлиги a бўлган AB кесмага таваккалига 5 та нуқта ташланган. Иккита нуқта A нуқтадан x дан

кичик масофага, учта нуқта эса x дан ортиқ масофага тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P_5(2) = C_5^2 (x/a)^2 \left[\frac{(a-x)}{a}\right]^3$.

118. Кесма 4 та тенг бўлакка бўлинган. Кесмага 8 та нуқта таваккалига ташланган. Кесманинг тўртта бўлагининг ҳар бирига иккитадан нуқта тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг кесмага тушиш эҳтимоли кесманинг узунлигига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига эса боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоби. $P = C_8^2 \cdot C_6^2 C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot (1/4)^8$.

2-§. Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари

Лапласнинг локал теоремаси. *Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p $(0 < p < 1)$ га тенг бўлган n та эркли синовда ҳодисанинг (қайси тартибда бўлишидан қатъи назар) роса k марта рўй бериш эҳтимоли тақрибан*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

га тенг. Бу ерда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

x нинг мусбат қийматлари учун $\varphi(x)$ функция жадвали 1-иловада келтирилган; x нинг манфий қийматлари учун ҳам ўша жадвалдан фойдаланилади [$\varphi(x)$ — жуфт функция, демак, $\varphi(-x) = \varphi(x)$].

Лапласнинг интеграл теоремаси. *Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p(0 < p < 1)$ га тенг бўлган n та синовда ҳодисанинг камида k_1 марта ва кўпи билан k_2 марта рўй бериш эҳтимоли тақрибан*

$$P_n(k_1;\ k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

га тенг. Бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$$

— Лаплас функцияси,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

а) Шартга кўра $n = 100$; $p = 0,8$; $q = 0,2$; $k_1 = 75$, $k_2 = 90$. x' ва x'' ни ҳисоблаймиз:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,2}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Лаплас функцияси тоқ, яъни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{100}(75;\ 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1.25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Жадвалдан (2-илова) қуйидагини топамиз:

$$\Phi(2,5) = 0,4938; \qquad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{100}(75;\ 90) = 0,4938 + 0,3914 = 0,8882.$$

б) Ҳодисанинг камида 75 марта рўй бериш талаби ҳодисанинг рўй беришлари сони 75 га, ё 76 га, ..., ёки 100 га тенг бўлишини англатади. Шундай қилиб, қаралаётган ҳолда $k_1 = 75$, $k_2 = 100$ деб қабул қилиш лозим. У ҳолда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5.$$

Жадвалдан (2-илова) қуйидагини топамиз:

$$\Phi(1,25) = 0,3944; \qquad \Phi(5) = 0,5.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{100}(75;\ 100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

в) „A камида 75 марта рўй берди" ва „A кўпи билан 74 марта рўй берди" ҳодисалари қарама-қаршидир, шунинг учун бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг. Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P_{100}(0;\ 74) = 1 - P_{100}(75;\ 100) = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

126. Ҳодисанинг 2100 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,7 га тенг. Ҳодисанинг: а) ка-

мида 1470 марта ва кўпи билан 1500 марта; б) камида 1470 марта; в) кўпи билан 1469 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_{2100}(1470,\ 1500) = 0,4236$; б) $P_{2100}(1470;\ 2100) = 0,5$; $P_{2100}(0;\ 1469) = 0,5$.

127. Ҳодисанинг 21 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,7 га тенг. Синовларнинг кўпчилигида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_{21}(11\ \ 21) = 0,95945$.

128. Танга $2N$ (N катта сон!) марта ташланган. „Гербли" томонининг тушиш сони $N - \sqrt{2N}/2$ ва $N + \sqrt{2N}/2$ сонлари орасида бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0,6826$.

129. Ҳодисанинг эркли синовларнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,8 га тенг. Ҳодисанинг камида 75 марта рўй бериш эҳтимолини 0,9 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун нечта синов ўтказиш лозим?

Ечилиши. Шартга кўра $p = 0,8$; $q = 0,2$; $k_1 = 75$; $k_2 = n$; $P_n(75,\ n) = 0,9$.

Лапласнинг ушбу интеграл теоремасидан фойдаланамиз:

$$P_n(k_1;\ n) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi\left[\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right] - \Phi\left[\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right].$$

Бунга масалада берилган маълумотларни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$0,9 = \Phi\left[\frac{n - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right] - \Phi\left[\frac{75 - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 02}}\right]$$

ёки

$$0,9 = \Phi\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right] - \Phi\left[\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right].$$

Равшанки, синовлар сони $n > 75$, шунинг учун $\sqrt{n}/2 > \sqrt{75}/2 \approx 4,33$. Лаплас функцияси ўсувчи ва $\Phi(4) \approx 0,5$ бўлгани учун $\Phi(\sqrt{n}/2) = 0,5$ деб олиш мумкин. Демак,

$$0,9 = 0,5 - \Phi\left[\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right].$$

x нинг ($0 < x < 5$) мусбат қийматлари учун Лаплас функциясининг жадвали 2-иловада келтирилган. $x > 5$ қийматлар учун $\Phi(x) = 0{,}5$ деб олинади; x нинг манфий қийматлари учун ҳам Лаплас функциясининг тоқлигини $[\Phi(-x) = -\Phi(x)]$ ҳисобга олиниб ўша жадвалдан фойдаланилади.

119. Агар A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли 0,25 га тенг бўлса, бу ҳодисанинг 243 та синовда роса 70 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Масала шартига кўра $n = 243$; $k = 70$; $p = 0{,}25$; $q = 0{,}75$, $n = 243$ етарлича катта сон бўлгани учун Лапласнинг ушбу локал теоремасидан фойдаланамиз:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x),$$

бу ерда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

x нинг қийматини топамиз:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}73.$$

Жадвалдан (1-илова)

$$\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$$

ни топамиз.

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6{,}75} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231.$$

120. Агар A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли 0,6 га тенг бўлса, бу ҳодисанинг 2400 та синовда 1400 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. n катта сон бўлгани учун Лапласнинг ушбу локал теоремасидан фойдаланамиз:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x).$$

x ни ҳисоблаймиз:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\frac{40}{24} = -1{,}67.$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ функция жуфт бўлгани учун $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$.

Жадвалдан (1-илова)

$$\varphi(1{,}67) = 0{,}0989$$

ни топамиз.

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{2400}(1400) = \frac{1}{24} \cdot 0{,}0989 = 0{,}0041.$$

121. Битта ўқ узилганда нишонга тегиш эҳтимоли 0,8 га тенг. 100 та ўқ узилганда роса 75 та ўқнинг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_{100}(75) = 0{,}04565.$

122. Ўғил бола туғилиш эҳтимоли 0,51 га тенг. Туғилган 100 чақалоқнинг 50 таси ўғил бола бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_{100}(50) = 0{,}0782.$

123. Танга $2N$ марта ташланган (N — катта сон). „Гербли“ томон роса N марта тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_{2N}(N) = 0{,}5642/\sqrt{N}.$

124. Танга $2N$ марта ташланган. „Гербли“ томон „ёзувли“ томондан $2m$ марта кўп тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_{2N}(N + m) = \sqrt{2/N}\,\varphi(\sqrt{2/N}\,m).$

125. Ҳодисанинг 100 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли ўзгармас бўлиб, $p = 0{,}8$ га тенг. Ҳодисанинг: а) камида 75 марта ва кўпи билан 90 марта; б) камида 75; в) кўпи билан 74 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Лапласнинг ушбу интеграл теоремасидан фойдаланамиз:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

бу ерда $\Phi(x)$ — Лаплас функцияси,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Шундай қилиб,

$$\Phi\left[\frac{75 - 0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right] = -0{,}4. \qquad (*)$$

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(1{,}28) = 0{,}4$ ни топамиз. Бу ердан ва (*) муносабатдан, Лаплас функциясининг тоқлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{75 - 0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}} = -1{,}28.$$

Бу тенгламани $\sqrt{n}$ га нисбатан квадрат тенглама сифатида ечиб,

$$\sqrt{n} = 10$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, синовларнинг изланаётган сони $n = 100$.

130. n та тажрибанинг ҳар бирида ижобий натижа олиниш эҳтимоли 0,9 га тенг. Камида 150 та тажрибада ижобий натижа олинишини 0,98 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун нечта тажриба ўтказиш лозим?

Жавоби. $n = 177.$

3-§. Эркли синовларда нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолдан четланиши

Нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолдан четланишини баҳолаш. *Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ($0 < p < 1$) га тенг бўлган n та эркли синовда ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолидан четланиши абсолют катталигининг ε мусбат сондан ортиқ бўлмаслик эҳтимоли тақрибан Лаплас функциясининг $x = \varepsilon\sqrt{n/pq}$ даги қийматининг иккилангани га тенг:*

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

131. Ҳодисанинг 625 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,8 га тенг. Ҳодисанинг рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четланиши абсолют катталиги бўйича 0,04 дан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n = 625$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}04$.

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \leqslant 0{,}04\right)$$

эҳтимолни топиш талаб қилинмоқда. Ушбу формуладан фойдаланамиз

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \leqslant 0{,}04\right) = 2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = 2\Phi(2{,}5).$$

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$ ни топамиз. Демак,

$$2\Phi(2{,}5) = 2 \cdot 0{,}4938 = 0{,}9876.$$

Шундай қилиб, изланаётган эҳтимол тақрибан 0,9876 га тенг.

132. Ҳодисанинг 900 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,5 га тенг. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четланиши абсолют катталиги бўйича 0,02 дан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 2\Phi(1{,}2) = 0{,}7698.$

133. Ҳодисанинг 10 000 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,75 га тенг. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четланиши абсолют катталиги бўйича 0,01 дан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 2\Phi(2{,}31) = 0{,}979.$

134. Француз олими Бюффон (XVIII аср) тангани 4040 марта ташлаган, шу билан бирга „гербли“ томон 2048 марта тушган. Бюффон тажрибасини такрорлаганда танганинг „гербли“ томони тушиш нисбий частотасининг унинг „гербли“ томони тушиш эҳтимолидан четланиши абсолют катталиги бўйича Бюффон тажрибасидан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 2\Phi(0{,}877) = 0{,}6196.$

135. Ҳодисанинг эркли синовларнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,5 га тенг. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четланиши абсолют катталиги бўйича 0,02 дан ортиқ бўлмаслигини 0,7698 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун ўтказилиши керак бўлган синовлар сони n ни топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $p=0,5$; $q=0,5$; $\varepsilon=0,02$;

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0,5\right|\leq 0,02\right)=0,7698.$$

Ушбу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра

$$2\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,5\cdot 0,5}}\right)=0,7698$$

ёки

$$\Phi(0,04\sqrt{n})=0,3849.$$

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(1,2)=0,3849$ ни топамиз. Демак,

$$0,04\sqrt{n}=1,2$$

ёки

$$\sqrt{n}=30.$$

Шундай қилиб, синовларнинг изланаётган сони $n=900$.

136. Ўйин соққасини ушбу

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\leq 0,01$$

тенгсизликнинг эҳтимоли қарама-қарши тенгсизликнинг эҳтимолидан кичик бўлмаслиги учун неча марта ташлаш лозим, бу ерда m — ўйин соққасини n марта ташлашда бир очко чиқиш сони?

Ечилиши. Ушбу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $p=1/6$, $q=5/6$, $\varepsilon=0,01$. Берилган тенгсизликка қарама-қарши тенгсизликнинг, яъни $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\geq 0,1$ тенгсизликнинг юз бериш эҳтимоли

$$1-2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

га тенг.

Масала шартига асосан ушбу тенгсизлик ўринли бўлиши лозим:

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geq 1-2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

ёки

$$4\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geq 1,$$

бу ердан

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geq 0,25. \qquad (*)$$

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(0,67)=0,2486$; $\Phi(0,68)=0,2517$ ни топамиз.

Буларга чизиқли интерполяция усулини қўлланиб,

$$\Phi(0,6745)=0,25$$

ни ҳосил қиламиз.

(*) муносабатни ҳисобга олиб ва $\Phi(x)$ функциянинг ўсувчилигидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\geq 0,6745$$

ёки

$$0,01\sqrt{\frac{n}{1/6\cdot 5/6}}\geq 0,6745.$$

Бу ердан танганинг изланган ташлашлар сонини топамиз: $n\geq 632$.

137. Ҳодисанинг эркли синовларнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четланиши абсолют катталиги бўйича 0,04 дан ортиқ бўлмаслигини 0,9876 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун зарур бўлган синовлар сони n ни топинг.

Жавоби. $n=625$.

138. Идишдаги оқ ва қора шарлар нисбати 4 : 1 каби. Битта шар олиниб, унинг ранги қайд этилгандан кейин, шар идишга қайтариб солинади. Оқ шар чиқиши нисбий частотасининг, унинг эҳтимолидан четланиши абсолют катталиги бўйича 0,01 дан ортиқ бўлмаслигини 0,9722 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун зарур бўлган шар олишлар сони n ни топинг.

Жавоби. $n=378$.

натижалари эҳтимолларидан ортиқ (ёки, ҳеч бўлмаганда, кичик эмас) бўлса, у ҳолда ана шу k_0 сон *энг эҳтимолли* сон дейилади.

Энг эҳтимолли k_0 сон ушбу қўш тенгсизликдан аниқланади:

$$np-q\leq k_0<np+p,$$

бунда:

а) агар $np-q$ сон каср бўлса, у ҳолда битта энг эҳтимолли k_0 сон мавжуд бўлади;

б) агар $np-q$ сон бутун бўлса, у ҳолда иккита энг эҳтимолли сон, чунончи k_0 ва k_0+1 мавжуд бўлади;

в) агар np бутун сон бўлса, у ҳолда энг эҳтимолли сон $k=np$ бўлади.

145. Бирор қурилманинг 15 та элементининг ҳар бири синалади. Элементнинг синовга бардош бериш эҳтимоли 0,9 га тенг. Синовга бардош берадиган элементларнинг энг эҳтимолли (энг катта эҳтимолли) сонини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n=15$; $p=0,9$; $q=0,1$. Энг эҳтимолли k_0 сонни ушбу қўш тенгсизликдан топамиз:

$$np-q\leq k_0<np+p.$$

Бунга масалада берилган маълумотларни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$15\cdot 0,9-0,1\leq k_0<15\cdot 0,9+0,9$$

ёки

$$13,4\leq k_0<14,4.$$

k_0 бутун сон ҳамда 13,4 ва 14,4 сонлари орасида битта бутун сон, чунончи 14 сони бўлгани учун изланаётган энг эҳтимолли сон 14 дир.

146. Техник контрол бўлими 10 та деталдан иборат партияни текширмоқда. Деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,75 га тенг. Стандарт деб тан олинадиган деталларнинг энг эҳтимолли сонини топинг.

Жавоби. $k_0=8$.

147. Товаршунос товарлардан 24 та намунасини текширади. Намуналарнинг ҳар бирини сотишга яроқли деб тан олиниш эҳтимоли 0,6 га тенг. Товаршунос со-

тишга яроқли деб топадиган намуналарнинг энг эҳтимолли сонини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n=24$; $p=0,6$; $q=0,4$. Сотишга яроқли товар намуналарининг энг эҳтимолли сонини ушбу қўш тенгсизликдан топамиз:

$$np-q\leq k_0<np+p.$$

Бунга масалада берилган маълумотларни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$24\cdot 0,6-0,4\leq k_0<24\cdot 0,6+0,6$$

ёки

$$14\leq k_0<15.$$

$np-q=14$ бутун сон бўлгани учун энг эҳтимолли сон иккита:

$$k_0=14 \text{ ва } k_0+1=15.$$

148. Перфокартанинг нотўғри тайёрланиш эҳтимоли 0,1 га тенг. Перфораторчи тайёрлаган 19 та перфокарта орасида тўғри тайёрланган перфокарталарнинг энг эҳтимолли сонини топинг.

Жавоби. $k_0=17$, $k_0+1=18$.

149. Икки тенг кучли рақиб шахмат ўйнашмоқда. Агар $2N$ та натижали (дурангсиз) партия ўйналадиган бўлса, у ҳолда исталган шахматчи учун ютуқларнинг энг эҳтимолли сонини топинг.

Ечилиши. Маълумки, синов сони n билан ҳодисанинг битта синовда рўй бериш эҳтимоли p кўпайтмаси бутун сон бўлса, у ҳолда энг эҳтимолли сон $k_0=np$ бўлади.

Қаралаётган масалада синовлар сони n ўйналган партиялар сони $2N$ га тенг, ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли битта партияда ютиш эҳтимолига, яъни $p=1/2$ га тенг (шартга кўра рақиблар тенг кучли ўйнашади).

$np=2N\cdot 1/2=N$ кўпайтма бутун сон бўлгани учун исталган рақиб ютган партияларнинг k_0 энг эҳтимолли сони N га тенг.

150. Икки мерган нишонга қарата ўқ узишмоқда. Битта ўқ узишда биринчи мерганнинг нишонга теккиза олмаслик эҳтимоли 0,2 га, иккинчи мерган учун 0,4 га тенг. Агар мерганлар бир йўла 25 марта ўқ узишса,

139. Ҳодисанинг 400 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,8 га тенг. Шундай ε мусбат сонни топингки, ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимоли 0,8 дан четланишининг абсолют катталиги ε дан ортиқ бўлмаслигини 0,9876 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлсин.

Ечилиши. Шартга кўра $n=400$; $p=0,8$; $q=0,2$ ёки

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{400}{0,8\cdot 0,2}}\right)=0,9876$$

ёки

$$\Phi(50\varepsilon)=0,4938.$$

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(2,5)=0,4938$ ни топамиз. Демак,

$$50\varepsilon=2,5.$$

Бу ердан

$$\varepsilon=\frac{2,5}{50}=0,05.$$

140. Ҳодисанинг 900 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,5 га тенг. Шундай ε мусбат сонни топингки, ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимоли 0,5 дан четланишининг абсолют катталиги ε дан катта бўлмаслигини 0,7698 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлсин.

Жавоби. $\varepsilon=0,02$.

141. Ҳодисанинг 10000 та эркли синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,75 га тенг. Шундай ε мусбат сонни топингки, ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимоли 0,75 дан четланишининг абсолют катталиги ε дан катта бўлмаслигини 0,979 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлсин.

Жавоби. $\varepsilon=0,01$.

142. Техник контрол бўлими 900 та деталнинг стандартга мувофиқлигини текширади. Деталнинг стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Текширилган деталлар орасидаги стандарт деталлар сони m 0,9544 эҳтимол билан ётадиган чегараларини кўрсатинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n=900$; $p=0,9$; $q=0,1$ ёки

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0,9\cdot 0,1}}\right)=0,9544,$$

$$\Phi(100\varepsilon)=0,4772.$$

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(2)=0,4772$ ни топамиз. Демак,

$$100\varepsilon=2.$$

Бу ердан

$$\varepsilon=0,02.$$

Шундай қилиб, стандарт деталлар сони нисбий частотасининг 0,9 эҳтимолдан четланиши ушбу тенгсизликни 0,9544 эҳтимол билан қаноатлантиради:

$$\left|\frac{m}{900}-0,9\right|\leqslant 0,02$$

ёки

$$0,88\leqslant\frac{m}{900}\leqslant 0,92.$$

Бу ердан, текширилган 900 та деталь орасидаги стандарт деталларнинг изланаётган m сони 0,9544 эҳтимол билан қуйидаги чегараларда ётади: $792\leqslant m\leqslant 828$.

143. Техник контрол бўлими 475 та буюмнинг яроқлилигини текширади. Буюмнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,05 га тенг. Текширилган деталлар орасидаги брак деталлар сони m нинг ётадиган чегараларини 0,9426 эҳтимол билан топинг.

Жавоби. $14\leqslant m\leqslant 32$.

144. Ўйин соққаси 80 марта ташланади. Олти очко тушишлар сони m нинг ётадиган чегараларини 0,9973 эҳтимол билан топинг.

Жавоби. $3\leqslant m\leqslant 23$.

4-§. Эркли синовларда ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони

Ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони. Агар (ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлган синовларда) ҳодисанинг k_0 марта рўй бериш эҳтимоли синовларнинг бошқа, мумкин бўлган

нишонга бир марта ҳам ўқ тегмаслигининг энг эҳтимолли сонини топинг.

Ечилиши. Мерганларнинг ўқни хато кетказишлари эркли ҳодисалардир, шунинг учун эркли ҳодисаларнинг эҳтимолларини кўпайтириш теоремасини қўлланиш мумкин. Иккала мерганнинг бир йўла ўқ узишда хато кетказиш эҳтимоли:

$$p=0,2\cdot 0,4=0,08.$$

$np=25\cdot 0,08=2$ кўпайтма бутун сон бўлгани учун битта ҳам нишонга тегмайдиган бир йўла отишларнинг энг эҳтимолли сони:

$$k_0=np=2.$$

151. Икки мерган бир вақтда нишонга ўқ узишмоқда. Битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли биринчи мерган учун 0,8 га, иккинчи мерган учун 0,6 га тенг. Агар бир йўла 15 марта ўқ узиладиган бўлса, иккала мерганнинг ҳам нишонга теккизишларининг энг эҳтимолли сонини топинг.

Жавоби. $k_0=7$.

152. Ҳодисанинг битта синовда рўй бериш эҳтимоли 0,4 га тенг. Бу ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони 25 га тенг бўлиши учун нечта эркли синов ўтказилиши керак?

Ечилиши. Шартга кўра $k_0=25$; $p=0,4$; $q=0,6$. Ушбу қўш тенгсизликдан фойдаланамиз:

$$np-q\leqslant k_0<np+p.$$

Бунга масалада берилган маълумотларни қўйиб, номаълум сонни аниқлаш учун ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$0,4n-0,6\leqslant 25,\quad 0,4n+0,4>25.$$

Системанинг биринчи тенгсизлигидан қуйидагини топамиз:

$$n\leqslant\frac{25,6}{0,4}=64.$$

Системанинг иккинчи тенгсизлигидан қуйидагига эга бўламиз:

$$n>\frac{24,6}{0,4}=61,5.$$

Шундай қилиб, синовлар сони ушбу қўш тенгсизликни қаноатлантириши лозим:

$$62\leqslant n\leqslant 64.$$

153. Эркли синовларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,3 га тенг. Бу синовларда ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони 30 га тенг бўлиши учун ўтказилиши лозим бўлган синовлар сони n ни топинг.

Жавоби. $100\leqslant n\leqslant 102$.

154. Эркли синовларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,7 га тенг. Ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони 10 га тенг бўлиши учун ўтказилиши лозим бўлган синовлар сони n ни топинг.

Жавоби. $28\leqslant n\leqslant 29$.

155. Агар 49 та эркли синовда ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони 30 га тенг бўлса, синовларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ни топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n=49$; $k_0=30$. Ушбу қўш тенгсизликдан фойдаланамиз:

$$np-q\leqslant k_0<np+p.$$

Бунга масалада берилган маълумотларни қўйиб, номаълум p эҳтимолни топиш учун ушбу тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз:

$$49p+p>30,\quad 49p-(1-p)\leqslant 30.$$

Системанинг биринчи тенгсизлигидан $p>0,6$ ни топамиз. Системанинг иккинчи тенгсизлигидан $p\leqslant 0,62$ ни топамиз.

Шундай қилиб, изланаётган эҳтимол ушбу қўш тенгсизликни қаноатлантириши лозим:

$$0,6<p\leqslant 0,62.$$

156. 39 та эркли синовда ҳодиса рўй беришининг энг эҳтимолли сони 25 га тенг бўлса, ҳар бир синовда ҳодиса рўй беришининг эҳтимоли p ни топинг.

Жавоби. $0,625<p\leqslant 0,65$.

157. Батарея объектга қарата 6 та ўқ узди. Узилган битта ўқнинг объектга тегиш эҳтимоли 0,3 га тенг.

а) Объектга теккан ўқларнинг энг эҳтимолли сонини топинг; б) объектга теккан ўқлар энг эҳтимолли сонининг эҳтимолини топинг; в) объектнинг яксон қилиниши учун камида иккита ўқ тегиши етарли бўлса, унинг яксон қилиниш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n=6$; $p=0{,}3$; $q=0{,}7$.

а) Объектга теккан ўқларнинг энг эҳтимолли сонини ушбу формуладан топамиз:

$$np-q\leqslant k_0<np+p.$$

Бунга масалада берилган маълумотларни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$6\cdot 0{,}3-0{,}7\leqslant k_0<6\cdot 0{,}3+0{,}3$$

ёки

$$1{,}1\leqslant k_0<2{,}1,$$

бу ерда $k_0=2$.

б) Объектга теккан ўқлар энг эҳтимолли сонининг эҳтимолини Бернулли формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P_6(2)=C_6^2p^2q^4=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^4=0{,}324.$$

в) Объектнинг яксон қилиниши эҳтимолини топамиз. Бунинг учун шартга кўра объектга ёки 2 та, ёки 3 та, ёки 4 та, ёки 5 та, ёки 6 та ўқ тегиши кифоя. Бу ҳодисалар биргаликда эмас, шунинг учун объектнинг яксон қилиниш эҳтимоли бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндисига тенг:

$$P=P_6(2)+P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6).$$

Бироқ, аввал қарама-қарши ҳодисанинг (битта ҳам ўқ тегмаслик ёки битта ўқ тегиши) Q эҳтимолини топиш осонроқдир:

$$Q=P_6(0)+P_6(1)=q^6+C_6^1pq^5=0{,}7^6+6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^5=0{,}42.$$

Объект яксон қилинишининг изланаётган эҳтимоли:

$$P=1-Q=1-0{,}42=0{,}58.$$

158. Асбоб бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда (эркли) ишлайдиган бешта элементдан иборат. Асбобни улаш моментида элементнинг ишдан чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг. а) Ишдан чиққан элементларнинг энг эҳтимолли сонини топинг; б) ишдан чиққан элементлар энг эҳтимолли сонининг эҳтимолини топинг; в) агар асбобнинг ишдан чиқиши учун камида 4 та элементнинг ишдан чиқиши етарли бўлса, асбобнинг ишдан чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $k_0=1$; б) $P_5(1)=0{,}41$; в) $P=0{,}0067$.

5-§. Яратувчи функция

Бу бобнинг олдинги параграфларида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил бўлган синовлар кўрилди. Энди ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли турлича бўлган синовларни қараймиз.

Айтайлик, n та эркли синов ўтказилаётган бўлиб, бунда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли биринчи синовда p_1 га, иккинчи синовда p_2 га, ..., n-синовда p_n га тенг; A ҳодисанинг рўй бермаслилик эҳтимоллари мос равишда $q_1, q_2, \ldots, q_n$ га тенг; $P_n(k)$ қаралаётган A ҳодисанинг n та синовда роса k марта рўй бериш эҳтимоли бўлсин.

$P_n(k)$ эҳтимолларнинг яратувчи функцияси деб,

$$\varphi_n(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)\ldots(p_nz+q_n)$$

тенглик билан аниқланадиган функцияга айтилади.

A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли биринчисида p_1 га, иккинчисида p_2 га, ..., n-сида p_n га тенг бўлган n та эркли синовда A ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)$ яратувчи функциянинг z^k нинг даражалари бўйича ёйилмасидаги z^k олдидаги коэффициентга тенг. Масалан, $n=2$ бўлса, у ҳолда

$$\varphi_2(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)=p_1p_2z^2+(p_1q_2+p_2q_1)z+q_1q_2.$$

Бу ерда z^2 олдидаги p_1p_2 коэффициент иккита синовда A ҳодисанинг роса икки марта рўй бериш эҳтимоли $P_2(2)$ га тенг, z^1 олдидаги $p_1q_2+p_2q_1$ коэффициент A ҳодисанинг роса бир марта рўй бериш эҳтимоли $P_2(1)$ га тенг, z^0 олдидаги коэффициент, яъни озод ҳад A ҳодисанинг бир марта ҳам рўй бермаслик эҳтимоли $P_2(0)$ га тенг.

159. Қурилма эркли ишлайдиган учта элементдан иборат. Элементларнинг (t вақт ичида) бузилмасдан ишлаш эҳтимоли мос равишда $p_1=0{,}7$; $p_2=0{,}8$; $p_3=0{,}9$ га тенг. t вақт ичида: а) барча элементларнинг; б) иккита элементнинг; в) битта элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимолини; г) элементларнинг биттаси ҳам ишламаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Элементларнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоллари мос равишда $p_1=0{,}7$; $p_2=0{,}8$; $p=0{,}9$ га тенг бўлгани учун элементларнинг бузилиш эҳтимоллари ушбуга тенг:

$$q_1=0{,}3;\ q_2=0{,}2;\ q_3=0{,}1.$$

5 — 7280

Иккинчи қисм

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

Тўртинчи боб

ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

1-§. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни. Биномиал ва Пуассон қонунлари

Мумкин бўлган қийматлари айрим ажралган сонлар бўлиб (яъни мумкин бўлган иккита қўшни қиймат орасида мумкин бўлган бошқа қийматлар йўқ), уларни тайин эҳтимоллар билан қабул қиладиган миқдорга *дискрет тасодифий миқдор* дейилади. Бошқача айтганда, дискрет тасодифий миқдорнинг қийматларини номерлаб чиқиш мумкин. Дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин (кейинги ҳолда мумкин бўлган қийматлар тўплами саноқли тўплам дейилади).

Дискрет тасодифий миқдорнинг *тақсимот қонуни* (тақсимот қатори) деб, унинг мумкин бўлган қийматлари билан уларга мос эҳтимоллар рўйхатига айтилади. X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича биринчи сатри мумкин бўлган x_i қийматлардан, иккинчи сатри эса p_i эҳтимоллардан тузилган

X	x_1	$x_2\ldots x_n$
P	p_1	$p_2\ldots p_n$

жадвал кўринишида берилиши мумкин, бу ерда

$$\sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни

$$P(X=x_i)=\varphi(x_i)$$

аналитик усулда (формула кўринишида) ёки интеграл функция ёрдамида (VI боб, 1-§ га қаранг) берилиши ҳам мумкин

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини график усулда тасвирлаш мумкин, бунинг учун тўғри бурчакли координаталар системасида $M_1(x_1;\ p_1)$, $M_2(x_2;\ p_2)$, ..., $M_n(x_n;\ p_n)$ нуқталар (x_i — X нинг мумкин бўлган қийматлари, p_i — мос эҳтимоллари) ясалади ва улар тўғри чизиқ кесмалари орқали туташтирилади. Ҳосил қилинган фигура *тақсимот кўпбурчаги* дейилади.

Биномиал тақсимот қонуни деб, ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлган n та эркли синовда бу ҳодисанинг рўй беришлари сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунига айтилади; мумкин бўлган $X=k$ (ҳодисанинг рўй беришлари сони k) қийматининг эҳтимоли $P_n(k)=C_n^k\,p^kq^{n-k}$ Бернулли формуласи бўйича ҳисобланади.

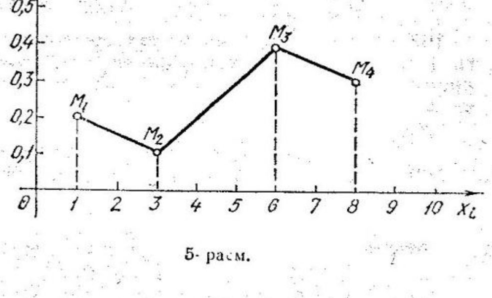
Агар синовлар сони катта бўлиб, ҳар бир синовда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p жуда кичик бўлса, у ҳолда $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ тақрибий формуладан фойдаланилади, бу ерда k — ҳодисанинг n та эркли синовда рўй бериш сони, $\lambda=np$ (ҳодисанинг n та эркли синовда рўй беришлари ўртача сони). Бу ҳолда тасодифий миқдор *Пуассон қонуни* бўйича тақсимланган дейилади.

164. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни (қатори) билан берилган:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3.

Тақсимот кўпбурчагини ясанг.

Ечилиши. Тўғри бурчакли координаталар системасини ясаймиз, бунда абсциссалар ўқи бўйлаб мумкин бўлган x_i қийматларни, ординаталар ўқи бўйлаб эса тегишли p_i эҳтимолларни қўямиз. $M_1(1;\ 0{,}2)$, $M_2(3;\ 0{,}1)$, $M_3(6;\ 0{,}4)$ ва $M_4(8;\ 0{,}3)$ нуқталарни ясаймиз. Бу нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, изланаётган тақсимот кўпбурчагини ҳосил қиламиз (5-расм).



5- расм.

Яратувчи функцияни тузамиз:

$$\varphi_3(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)(p_3 z + q_3) =$$
$$= (0{,}7z + 0{,}3)(0{,}8z + 0{,}2)(0{,}9z + 0{,}1) =$$
$$= 0{,}504z^3 + 0{,}398z^2 + 0{,}092z + 0{,}006.$$

а) Учта элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли z^3 олдидаги коэффициентга тенг:

$$P_3(3) = 0{,}504.$$

б) Иккита элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли z^2 олдидаги коэффициентга тенг:

$$P_3(2) = 0{,}398.$$

в) Битта элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли z^1 олдидаги коэффициентга тенг:

$$P_3(1) = 0{,}092.$$

г) элементларнинг биттасини ҳам ишламаслик эҳтимоли озод ҳадга тенг:

$$P_3(0) = 0{,}006.$$

Текшириш: $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1.$

160. Икки тўпдан нишонга бир йўла ўқ узилган. Нишонга теккизиш эҳтимоли биринчи тўп учун 0,8 га, иккинчи тўп учун 0,9 га тенг. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) нишонга иккига ўқ тегиш; б) нишонга битта ўқ тегиш; в) нишонга битта ҳам ўқ тегмаслик; г) нишонга камида битта ўқ тегиш.

Жавоби. а) $P_2(2) = 0{,}72$; б) $P_2(1) = 0{,}26$; в) $P_2(0) = 0{,}02$; г) $P_2(1) + P_2(2) = 0{,}98$.

161. Уч тўпдан бир йўла нишонга ўқ узилган. Нишонга теккизиш эҳтимоли биринчи тўп учун 0,8 га, иккинчи тўп учун 0,85 га, учинчи тўп учун 0,9 га тенг. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) нишонга учта ўқ тегиш; б) нишонга иккита ўқ тегиш; в) нишонга битта ўқ тегиш; г) нишонга битта ҳам ўқ тегмаслик; д) нишонга камида битта ўқ тегиш.

Жавоби. а) $P_3(3) = 0{,}612$; б) $P_3(2) = 0{,}329$; в) $P_3(1) = 0{,}056$; г) $P_3(0) = 0{,}003$; д) $P = 1 - q_1q_2q_3 = 0{,}997$.

162. Ҳисоблаш қурилмасининг тўртта элементи эркли ишлайди. t вақт ичида бузилиш эҳтимоли биринчи

элемент учун 0,2 га, иккинчи элемент учун 0,25 га, учинчи элемент учун 0,3 га, тўртинчи элемент учун 0,4 га тенг. t вақт ичида: а) тўртта элементнинг бузилиш; б) учта элементнинг бузилиш; в) иккита элементнинг бузилиш; г) битта элементнинг бузилиш; д) битта ҳам элементнинг бузилмаслик; е) кўпи билан иккита элементнинг бузилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P_4(4) = 0{,}006$; б) $P_4(3) = 0{,}065$; в) $P_4(2) = 0{,}254$; г) $P_4(1) = 0{,}423$; д) $P_4(0) = 0{,}252$; е) $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 0{,}929$.

163. Ҳар бири 3 та тўпдаң иборат икки батарея нишонга бир йўла ўқ узади. Батареяларнинг ҳар бири нишонга камида иккита ўқ теккизгандагина нишон яксон бўлади. Биринчи батареядаги тўпларнинг нишонга теккизиш эҳтимоллари 0,4; 0,5; 0,6 га тенг, иккинчи батарея тўпларининг нишонга теккизиш эҳтимоллари 0,5; 0,6; 0,7 га тенг. Икки батареядан бир йўла ўқ узилганда нишоннинг яксон қилиниш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,325.

165. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

а)

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,6;

б)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2.

Тақсимот кўпбурчагини ясанг.

166. Қурилма бир-биридан эркли ишлайдиган учта элементдан иборат. Ҳар бир элементнинг битта тажрибада ишдан чиқиш эҳтимоли 0,1 га тенг. Битта тажрибада ишдан чиққан элементлар сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Ечилиши. X дискрет тасодифий миқдор (битта тажрибада ишдан чиққан элементлар сони) ушбу мумкин бўлган қийматларга эга: $x_1 = 0$ (қурилма элементларининг биттаси ҳам ишдан чиқмаган), $x_2 = 1$ (битта элемент ишдан чиққан), $x_3 = 2$ (иккита элемент ишдан чиққан), $x_4 = 3$ (учта элемент ишдан чиққан).

Элементларнинг ишдан чиқиши бир-бирига боғлиқ эмас, элементларнинг ишдан чиқиш эҳтимоллари ўзаро тенг, шунинг учун Бернулли формуласини қўлланиш мумкин. Шартга кўра $n=3$; $p = 0{,}1$ (демак, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$) эканлигини эътиборга олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729;\ P_3(1) = C_3^1pq^2 = 3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2 = 0{,}243.$$
$$P_3(2) = C_3^2p^2q = 3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9 = 0{,}027;\ P_3(3) = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Текшириш: $0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 + 0{,}001 = 1.$

X нинг изланаётган биномиал тақсимот қонунини ёзамиз:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

167. Партияда 10% ностандарт деталь бор. Таваккалига 4 та деталь олинган. Олинган деталлар орасидаги ностандарт деталлар сонининг тақсимот қонунини ёзинг ва ҳосил қилинган тақсимотнинг кўпбурчагини ясанг.

Жавоби.

X	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

168. X дискрет тасодифий миқдор—тангани икки марта ташлашда „гербли" томон тушиш сонининг биномиал тақсимот қонунини ёзинг.

Жавоби.

X	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

169. Иккита ўйин соққаси бир вақтда 2 марта ташланади. X дискрет тасодифий миқдор—иккита ўйин соққасида жуфт очколар тушиш сонининг биномиал тақсимот қонунини ёзинг.

Жавоби

X	0	1	2
p	9/16	6/16	1/16

170. 10 та деталь солинган яшикда 8 та стандарт деталь бор. Таваккалига 2 та деталь олинган. Олинган деталлар орасидаги стандарт деталлар сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Ечилиши. X тасодифий миқдор — олинган деталлар орасидаги стандарт деталлар сони қуйидаги мумкин бўлган қийматларга эга: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Ушбу

$$P(X=k) = \frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

формулага (1-боб, 1-§, 17-масалага қаранг) кўра (N — яшикдаги деталлар сони, n — яшикдаги стандарт деталлар сони, m — олинган деталлар сони, k — олинган деталлар орасидаги стандарт деталлар сони) қуйидагиларни топамиз:

$$P(X=0) = \frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}} = \frac{1}{45};$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8\cdot 2}{45} = \frac{16}{45};$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}}{45} = \frac{28}{45}.$$

Изланаётган тақсимот қонунини тузамиз:

X	0	1	2
p	1/45	16/45	28/45

Текшириш: $1/45 + 16/45 + 28/45 = 1.$

171. Яшикдаги олтита деталь орасида 4 та стандарт деталь бор. Таваккалига 3 та деталь олинган. X дискрет тасодифий миқдор—олинган деталлар орасидаги стандарт деталлар сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоби.

X	0	1	2	3
p	0	1/5	3/5	1/5

172. Имтиҳон олувчи студентга қўшимча саволлар бермоқда. Студентнинг берилган ҳар қандай саволга жавоб бера олиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Студент берилган *саволга жавоб бера олмаган заҳоти ўқитувчи имтиҳон* олишни тўхтатади. Қуйидагилар талаб қилинади: а) X тасодифий миқдор — ўқитувчи студентга берган қўшимча саволлар сонининг тақсимот қонунини тузинг; б) студентга берилган қўшимча саволларнинг энг эҳтимолли сони k_0 ни топинг.

Ечилиши. а) X дискрет тасодифий миқдор — берилган қўшимча саволлар сони қуйидаги мумкин бўлган қийматларга эга: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ \ldots,\ x_k = k, \ldots$ Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолларини топамиз. X миқдор мумкин бўлган $x_1 = 1$ қийматни (имтиҳон олувчи фақат битта савол беради) студент биринчи саволга жавоб бера олмаган тақдирда қабул қилади. Бу мумкин бўлган қийматнинг эҳтимоли $1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Шундай қилиб, $P(X=1) = 0{,}1$.

X миқдор мумкин бўлган $x_2 = 2$ қийматни (имтиҳон олувчи фақат 2 та савол беради) студент биринчи саволга жавоб бериб (бу ҳодисанинг эҳтимоли 0,9 га тенг), иккинчи саволга жавоб бера олмаган (бу ҳодисанинг эҳтимоли 0,1 га тенг) тақдирда қабул қилади. Шундай қилиб, $P(X=2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$.

Шунга ўхшаш қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$P(X=3) = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}081, \ldots,$$
$$P(X=k) = 0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1, \ldots$$

Изланаётган тақсимот қонунини ёзамиз:

X	1	2	3	.... k ...
p	0,1	0,09	0,081	.... $0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1$ ...;

б) берилган саволларнинг энг эҳтимолли сони k_0 (X нинг энг эҳтимолли мумкин бўлган қиймати), яъни ўқитувчи берган саволларнинг энг катта эҳтимолли сони бирга тенглиги тақсимот қонунидан кўриниб турибди.

173. Мерганнинг битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Мерган ўқни хато кеткизгунига қадар унга патрон берилади. Қуйидагилар талаб қилинади: а) X дискрет тасодифий миқдор — мерганга берилган патронлар сонининг тақсимот қонунини ту-

зиш; б) мерганга берилган патронларни энг эҳтимолли сонини топиш.

Жавоби. а)

X	1	2	3	...	k ...
p	0,2	0,16	0,128	...	$0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2$ ...;

б) $k_0 = 1$.

174. Икки тўпдан уларнинг бири нишонга теккизгунга қадар навбатма-навбат ўқ узилади. Биринчи тўпнинг нишонга теккизиш эҳтимоли 0,3 га тенг, иккинчи тўпнинг нишонга теккизиш эҳтимоли эса 0,7 га тенг. Отишни биринчи тўп бошлайди. X ва Y дискрет тасодифий миқдорлар — мос равишда биринчи ва иккинчи тўплар сарф қилган ўқлар сонларининг тақсимот қонунларини топинг.

Жавоби. а)

X	1	2	3	... k ...
p	0,3	$0{,}7 \cdot 0{,}3^2$	$0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3$	... $0{,}7^{k-1} \cdot 0{,}3^k$ ...
Y	1	3	...	
p	$0{,}7^2$	$0{,}3 \cdot 0{,}7^3$	$0{,}3^2 \cdot 0{,}7^4$	... $0{,}3^{k-1} \cdot 0{,}7^{k+1}$ ...

175. Икки бомбардимончи самолёт нишонга биринчи марта теккизгунга қадар навбатма-навбат бомба ташлайдилар. Биринчи бомбардимончи самолётнинг бомбани нишонга теккизиш эҳтимоли 0,7 га, иккинчи самолётнинг бомбани нишонга теккизиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Дастлаб бомбаларни биринчи самолёт ташлайди. X дискрет тасодифий миқдор — иккала самолёт ташлаган бомбалар сони тақсимот қонунининг биринчи тўртта ҳадини тузинг (яъни X нинг мумкин бўлган 1, 2, 3 ва 4 га тенг қийматлари билан чекланинг).

Жавоби.

X	1	2	3	4
p	0,7	0,24	0,042	0,0144

176. Дарслик 100000 тиражда босиб чиқарилган. Дарсликнинг варақлари нотўғри йиғилган бўлиш эҳтимоли 0,0001 га тенг. Бутун тиражда роса бешта брак китоб бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n = 100\,000$, $p = 0{,}0001$, $k = 5$. Китоблар нотўғри йиғилган бўлишидан иборат ҳодисалар эркли, n сон катта, p эҳтимол эса кичик, шу сабабли ушбу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Пуассон тақсимотидан фойдаланамиз. λ ни топамиз:

$$\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10.$$

лар ўзаро эркли ишлайди ва ҳар бир элементнинг ишдан чиқиш эҳтимоли кичик), шу билан бирга λ параметрни (ишдан чиққан элементлар ўртача сони) топиш талаб қилинади.

Камида битта деталнинг ишдан чиқиш эҳтимоли шартга кўра 0,98 га тенг, демак (179-масаланинг, **г**) бандига қаранг),

$$1 - e^{-\lambda} = 0{,}98.$$

Бу ердан

$$e^{-\lambda} = 1 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

e^{-x} функциянинг жадвалидан $\lambda = 3{,}9$ ни топамиз. Демак, қурилма T вақт ишлаганда тахминан 4 та элемент ишдан чиқади.

182. Агар буюмлар партиясида камида битта брак буюм бўлиш эҳтимоли 0,95 га тенг бўлса, бу партиядаги брак буюмларнинг ўртача сони λ ни топинг. Текширилаётган партиядаги брак буюмлар сони Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб фараз қилинади.

Кўрсатма. $e^{-3} = 0{,}05$ деб олинг.
Жавоби. $\lambda = 3$.

183. Ҳодисанинг эркли синовларда рўй бериш сонининг Пуассон қонуни бўйича ҳисобланган эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг бўлишини исботланг. Синовлар чексиз кўп марта ўтказилади деб фараз қилинади.

Ечилиши. Пуассон қонунига асосан:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

e^x функциянинг ушбу Маклорен қаторидан фойдаланамиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Маълумки, бу қатор x нинг исталган қийматида яқинлашади, шу сабабли $x = \lambda$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$e^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Изланаётган эҳтимоллар йиғиндиси $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_n(k)$ ни топамиз бунда, $e^{-\lambda}$ ифода k га боғлиқ эмаслигини, ва демак, уни йиғинди белгисидан ташқарига чиқариш мумкинлигини ҳисобга оламиз:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Эслатма. Масалада келтирилаётган даъво тўла группа ташкил этадиган ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенглигидан бевосита келиб чиқади. Юқоридаги исботни эса биз таълим (уқтириш) мақсадида келтирдик.

3-§. Ҳодисаларнинг энг оддий оқими

Ҳодисалар оқими деб вақтнинг тасодифий моментларида рўй берувчи ҳодисалар кетма-кетлигига айтилади.

Энг оддий оқим деб (*Пуассон оқими* деб), ушбу уч хосса: стационарлик, „сўнг таъсир йўқлиги" ва ординарликка эга бўлган ҳодисалар оқимига айтилади.

Стационарлик хоссаси вақтнинг исталган оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли фақат k сонга ва вақт оралиғининг узунлиги t га боғлиқ бўлиб, унинг саноқ бошига боғлиқ бўлмаслигидан иборат. Бошқача айтганда, вақтнинг узунлиги t бўлган оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли фақат k ва t сонга боғлиқ бўлган функциядир.

„Сўнг таъсир йўқлиги" хоссаси вақтнинг исталган оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли қаралаётган оралиқнинг бошланишидан аввалги вақт моментларида ҳодисаларнинг рўй берганлиги ёки рўй бермаганлигига боғлиқ эмаслигидан иборат. Бошқача айтганда, оқимнинг аввалги тарихи ҳодисаларнинг яқин келажакда рўй бериш эҳтимолларига таъсир этмайди.

Ординарлик хоссаси вақтнинг кичик оралиғида иккита ва ундан кўп ҳодисаларнинг рўй бериши амалда мумкин эмаслигидан иборат. Бошқача айтганда, вақтнинг кичик оралиғида биттадан ортиқ ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли фақат битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига қараганда эътиборга олмаса ҳам бўладиган даражада кичик.

Оқимнинг интенсивлиги λ деб, вақт бирлиги ичида рўй берувчи ҳодисаларнинг ўртача сонига айтилади.

Агар оқимнинг ўзгармас интенсивлиги λ маълум бўлса, у ҳолда t вақт ичида энг оддий оқимнинг k та ҳодисасининг рўй бериш эҳтимоли ушбу Пуассон формуласи билан аниқланади:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Эслатма. Стационарлик хоссасига эга бўлган оқим *стационар оқим*, акс ҳолда *ностационар оқим* дейилади.

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{100000}(5)=\frac{10^5\cdot e^{-10}}{5!}=\frac{10^5\cdot 0{,}000045}{120}=0{,}0375.$$

177. Қурилма бир-биридан эркли равишда ишлайдиган 1000 та элементдан иборат. Исталган элементнинг T вақт давомида ишдан чиқиш эҳтимоли 0,002 га тенг. T вақт давомида роса 3 та элементнинг ишдан чиқиш эҳтимолини топинг.

Кўрсатма. $e^{-2}=0{,}13534$ деб олинг.
Жавоби. $P_{1000}(3)=0{,}18$.

178. Станок-автомат деталларни штамповка қилади. Тайёрланган деталнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,01 га тенг. 200 та деталь орасида роса 4 та брак деталь бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P_{200}(4)=0{,}09$.

179. Завод базага 500 та буюм жўнатди. Йўлда буюмнинг шикастланиш эҳтимоли 0,002 га тенг. Йўлда: а) роса 3 та; б) учтадан кам; в) учтадан ортиқ; г) камида битта буюмнинг шикастланиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. $n=500$ сони катта, $p=0{,}002$ эҳтимол кичик ва қаралаётган ҳодисалар (буюмларнинг шикастланиши) эркли, шу сабабли ушбу

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Пуассон формуласини қўллаш мумкин:

а) λ ни топамиз:

$$\lambda=np=500\cdot 0{,}002=1.$$

Роса 3 та ($k=3$) буюмнинг шикастланиш эҳтимолини топамиз:

$$P_{500}(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{0{,}36788}{6}=0{,}0613.$$

б) Учтадан кам деталнинг шикастланиш эҳтимолини топамиз:

$$P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=e^{-1}+e^{-1}+\frac{e^{-1}}{2}=$$

$$=\frac{5}{2}e^{-1}=\frac{5}{2}\cdot 0{,}36788=0{,}9197.$$

в) Учтадан кўп деталнинг шикастланиш эҳтимоли P ни топамиз. „Учтадан кўп деталь шикастланган" ва „кўпи билан учта деталь шикастланган" (бу ҳодисанинг эҳтимолини Q орқали белгилаймиз) ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир, шу сабабли

$$P+Q=1.$$

Бу ердан

$$P=1-Q=1-[P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)].$$

Юқорида ҳосил қилинган натижалардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P=1-[0{,}9197+0{,}0613]=0{,}019.$$

г) Камида битта буюмнинг шикастланиш эҳтимоли P_1 ни топамиз. „Камида битта буюм шикастланган" ва „буюмларнинг биттаси ҳам шикастланмаган" (бу ҳодисанинг эҳтимолини Q_1 орқали белгилаймиз) ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир, демак,

$$P_1+Q_1=1.$$

Бу ердан камида битта деталнинг шикастланган бўлиш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P_1=1-Q_1=1-P_{500}(0)=1-e^{-1}=1-0{,}36788=0{,}632.$$

180. Магазинга 1000 шиша минерал суви берилди. Ташиш вақтида шишанинг синиб қолиш эҳтимоли 0,003 га тенг. Магазинга: а) роса иккита; б) иккитадан кам; в) иккитадан кўп; г) камида битта синган шиша келтирилиш эҳтимолини топинг.

Кўрсатма. $e^{-3}=0{,}04979$ деб олинг.

Жавоби. а) $P_{1000}(2)=0{,}224$; б) $P_{1000}(0)+P_{1000}(1)=0{,}1992$; в) $P_{1000}(k>2)=0{,}5678$; г) $P=1-P_{1000}(0)=0{,}95$.

181. Қурилма катта сондаги ўзаро эркли ишлайдиган элементлардан иборат бўлиб, ҳар бир элементнинг T вақт ичида ишдан чиқиш эҳтимоли бир хил (жуда кичик). T вақт ичида камида битта элементнинг ишдан чиқиш эҳтимоли 0,98 га тенг бўлса, шу вақт ичида ишдан чиққан элементларнинг ўртача сонини топинг.

Ечилиши. Масала шартидан келиб чиқадики, ишдан чиққан элементлар сони Пуассон қонуни бўйича тақсимланган (чунки элементлар сони катта, элемент-

184. t вақт оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини аниқлайдиган

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}}{k!}\qquad(*)$$

Пуассон формуласини ҳодисалар энг оддий оқимининг математик модели сифатида қараш мумкинлигини кўрсатинг; бошқача айтганда, Пуассон формуласи энг оддий оқимнинг барча хоссаларини акс эттиришини исботланг.

Ечилиши. (*) формуладан кўриниб турибдики, λ интенсивлик берилган ҳолда t вақт ичида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли фақат k ва t нинг функциясидир, бу эса энг оддий оқимнинг стационарлик хоссасини акс эттиради.

(*) формулада қаралаётган вақт оралиғининг бошланишидан олдинги информациядан фойдаланилмайди, бу эса сўнг таъсир йўқлиги хоссасини акс эттиради.

Қаралаётган формула ординарлик хоссасини акс эттиришини кўрсатамиз. $k=0$ ва $k=1$ деб олиб, ҳодисаларнинг рўй бермаслик эҳтимолини ва битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини топамиз:

$$P_t(0)=e^{-\lambda t},\quad P_t(1)=\lambda te^{-\lambda t}.$$

Демак, биттадан кўп ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли:

$$P_t(k>1)=1-[P_t(0)+P_t(1)]=1-[e^{-\lambda t}+\lambda te^{-\lambda t}].$$

$e^{-\lambda t}$ функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасидан фойдаланиб, элементар алмаштиришлардан сўнг, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_t(k>1)=\frac{(\lambda t)^2}{2}+\ldots.$$

$P_t(1)$ ва $P_t(k>1)$ ни солиштириб кўрадиган бўлсак, t нинг кичик қийматларида биттадан кўп ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига қараганда ҳисобга олмаса ҳам бўладиган даражада кичик деган хулосага келамиз. Бу эса ординарлик хоссасини акс эттиради.

Шундай қилиб, Пуассон формуласи энг оддий оқимнинг учала хоссасини акс эттиради, шу сабабли уни

бу оқимнинг математик модели сифатида қараш мумкин.

185. Диспетчерлик пунктида бир минутда такси машиналари учун ўртача учта буюртма қабул қилинади. 2 минут ичида: а) 4 та буюртма; б) тўрттадан кам буюртма; в) камида тўртта буюртма келиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $\lambda=3$, $t=2$, $k=2$. Ушбу Пуассон формуласидан фойдаланамиз:

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

а) 2 минут ичида 4 та буюртма келиш эҳтимоли:

$$P_2(4)=\frac{6^4\cdot e^{-6}}{4!}=\frac{1296\cdot 0{,}0025}{24}=0{,}135.$$

б) „Тўрттадан кам буюртма келди" ҳодисаси қуйидаги биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг бири рўй берган тақдирдагина рўй беради: 1) 3 буюртма келди; 2) 2 та буюртма келди; 3) 1 та буюртма келди; 4) битта ҳам буюртма келмади. Бу ҳодисалар биргаликда эмас, шу сабабли биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолларини қўшиш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P_2(k<4)=P_2(3)+P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=$$

$$=\frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6\cdot e^{-6}}{1!}+e^{-6}=e^{-6}(36+18+6+1)=$$

$$=0{,}0025\cdot 61=0{,}1525.$$

в) „Тўрттадан кам буюртма келди" ва „камида тўртта буюртма келди" ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир, шу сабабли 2 минут ичида камида тўртта буюртма келиш эҳтимоли:

$$P_2(k\geqslant 4)=1-P_2(k<4)=1-0{,}1525=0{,}8475.$$

186. АТС да бир минут ичида ўртача иккита чақириқ қабул қилинади. 4 минут ичида: а) учта чақириқ; б) учтадан кам чақириқ; в) камида учта чақириқ қабул қилиниш эҳтимолини топинг. Чақириқлар оқими энг оддий оқим деб фараз қилинади.

Жавоби. а) $P_4(3)=0{,}256$; б) $P_4(k<3)=0{,}0123$; в) $P_4(k\geqslant 3)=0{,}9877$.

187. Ҳодисаларнинг энг оддий стационар оқими учун

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(k\geqslant 1)}{P(k=1)}=1$$

бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. 1. Қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенглиги ҳақидаги теоремадан фойдаланинг:

$$P_t(k=0)+P_t(k\geqslant 1)=1.$$

2. Изланаётган лимитни топишда Лопиталь қоидасидан фойдаланинг.

3-§. Дискрет тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари

Тасодифий миқдор ўртача қийматининг сонли характеристикаси бўлиб, математик кутилиш хизмат қилади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* деб, унинг мумкин бўлган барча қийматларини бу қийматларни мос эҳтимолларга кўпайтмалари йиғиндисига айтилади:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Агар тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари саноқли тўплам бўлса, у ҳолда

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i,$$

бунда тенгликнинг ўнг томонида турган қатор абсолют яқинлашади деб фараз қилинади ва барча p_i эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг.

Математик кутилиш қуйидаги хоссаларга эга.

1-хосса. *Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши шу ўзгармаснинг ўзига тенг:*

$$M(C)=C.$$

2-хосса. *Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг:*

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n).$$

3-хосса. *Ўзаро эркли тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши кўпайтувчиларининг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг:*

$$M(X_1X_2\ldots X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\ldots M(X_n).$$

4-хосса. *Биномиал тақсимотнинг математик кутилиши синовлар сонини битта синовда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига кўпайтирилганига тенг:*

$$M(X)=np.$$

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини математик кутилиш атрофида тарқоқлик характеристикалари бўлиб, жумладан, дисперсия ва ўртача квадратик четланиш хизмат қилади.

X тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* деб, четланиш квадратининг математик кутилишига айтилади:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Дисперсияни

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

формула бўйича ҳисоблаш қулай.

Дисперсия ушбу хоссаларга эга.

1-хосса. *Ўзгармас соннинг дисперсияси нолга тенг:*

$$D(C)=0.$$

2-хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини аввал квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3-хосса. *Эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчиларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг:*

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Биномиал тақсимотнинг дисперсияси синовлар сонини ҳодисанинг битта синовда рўй бериш ва рўй бермаслик эҳтимолларига кўпайтирилганига тенг:

$$D(X)=npq.$$

Тасодифий миқдорнинг *ўртача квадратик четланиши* деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

188. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг:

а) X −4 6 10; б) X 0,21 0,54 0,61
p 0,2 0,3 0,5 $\quad$ p 0,1 0,5 0,4

Ечилиши. а) Математик кутилиш X нинг барча мумкин бўлган қийматларини уларнинг эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг:

$$M(X)=-4\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}5=6.$$

Жавоби. б) $M(X)=0{,}535.$

нинг битта синовда рўй бериш эҳтимолига кўпайтирилганига тенглигини исботланг, яъни биномиал тақсимотнинг математик кутилиши $M(X)=np$ га тенглигини исботланг.

196. X дискрет тасодифий миқдор бешта ўйин соққасини ҳар бир ташлашда иккита соққада биттадан очко чиқадиган ташлашлар сони. Соққалар йигирма марта ташланса, бу тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$M(X)=nP,$$

бу ерда n — синовлар (бешта соққани ташлашлар) нинг жами сони, X — қаралаётган n та синовда бизни қизиқтираётган ҳодисанинг (бешта соққанинг иккитасида биттадан очко чиқади) рўй беришлари сони, P — қаралаётган ҳодисанинг битта синовда рўй бериш эҳтимоли.

Шартга кўра $n=20$. P ни, яъни бешта соққадан иккитасининг ёқларида бир очкодан чиқиш эҳтимолини топсак кифоя. Бу эҳтимолни Бернулли формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз, бунда бир соққанинг бир ёғида бир очко чиқиш эҳтимоли $p=1/6$, ва демак, бир очко чиқмаслик эҳтимоли $q=1-1/6=5/6$ эканлигини эътиборга оламиз:

$$P=P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{5\cdot 4\cdot 5^3}{1\cdot 2\cdot 6^5}=\frac{5^4}{3\cdot 6^4}.$$

Изланаётган математик кутилиш

$$M(X)=nP=20\cdot\frac{5^4}{3\cdot 6^4}\approx 3.$$

197. Қурилма n та элементдан иборат. Исталган элементнинг тажриба ўтказиш вақтида ишдан чиқиш эҳтимоли p га тенг. Агар жами N та тажриба ўтказиладиган бўлса, ҳар бирида роса m та элемент ишдан чиқадиган тажрибалар сонининг математик кутилишини топинг. Тажрибалар бир-бирига боғлиқ эмас деб қаралади.

Ечилиши. X орқали ҳар бирида роса m та элемент ишдан чиқадиган тажрибалар сонини белгилаймиз. Тажрибалар бир-бирига боғлиқ эмас ва бизни қизиқтираётган ҳодисанинг (битта тажрибада роса m та

элемент ишдан чиқади) эҳтимоли бу тажрибаларда бир хил бўлгани туфайли

$$M(X)=NP \qquad (*)$$

формула ўринли, бу ерда N — тажрибаларнинг жами сони, P — битта тажрибада роса m та элементни ишдан чиқиш эҳтимоли.

P эҳтимолни Бернулли формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$P=C_n^mp^mq^{n-m}. \qquad (**)$$

(**) ни (*) га қўйиб, изланаётган математик кутилишни топамиз:

$$M(X)=NC_n^mp^mq^{n-m}.$$

198. n та ўйин соққаси ташланади. Агар соққалар жами N марта ташланадиган бўлса, ҳар бирида роса m та олти очко чиқадиган ташлашлар сонининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X)=NC_n^m(1/6)^m(5/6)^{n-m}.$

199. n та ўйин соққаси ташланади. Ҳамма ёқларда чиқадиган очколар йиғиндисининг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. X орқали барча ёқларда чиқадиган очколар йиғиндисини, X_i ($i=1, 2, \ldots, n$) орқали i-соққанинг ёғида чиққан очкони белгилаймиз. У ҳолда

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$$

бўлиши равшан. Демак,

$$M(X)=M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=$$
$$=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n). \qquad (*)$$

Барча X_i миқдорлар бир хил тақсимотга, ва демак, бир хил сонли характеристикаларга, жумладан, бир хил математик кутилишларга эгалиги, яъни

$$M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)$$

эканлиги равшан.

(*) га асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X)=nM(X_1). \qquad (**)$$

189. Агар X ва Y нинг математик кутилиши маълум бўлса, Z тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг:

а) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$;
б) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

Ечилиши. а) Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб (йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчиларининг математик кутилишлари йиғиндисига тенг; ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2\cdot 3 = 11.$$

Жавоби. б) $M(Z) = 30$.

190. Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб: а) $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$ тенгликни; б) $X - M(X)$ четланишнинг математик кутилиши нолга тенглигини исботланг.

191. X дискрет тасодифий миқдор учта мумкин бўлган қийматни қабул қилади: $x_1 = 4$ ни $p_1 = 0{,}5$ эҳтимол билан, $x_2 = 6$ ни $p_2 = 0{,}3$ эҳтимол билан ва x_3 ни p_3 эҳтимол билан. $M(X) = 8$ ни билган ҳолда x_3 ни ва p_3 ни топинг.

Жавоби. $x_3 = 21$; $p_3 = 0{,}2$.

192. X дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг рўйхати берилган:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,$$

шунингдек, бу миқдорнинг ва унинг квадратининг математик кутилишлари маълум:

$$M(X) = 0{,}1,\quad M(X^2) = 0{,}9.$$

Мумкин бўлган x_1, x_2 ва x_3 қийматларга мос p_1, p_2 ва p_3 эҳтимолларни топинг.

Ечилиши. X нинг барча мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенглигидан фойдаланиб, ва шунингдек, $M(X) = 0{,}1$, $M(X^2) = 0{,}9$ ни

ҳисобга олиб, қуйидаги номаълум эҳтимолларга нисбатан учта чизиқли тенглама системасини ҳосил қиламиз:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,\quad (-1)p_1 + 0\cdot p_2 + 1\cdot p_3 = 0{,}1,$$
$$(-1)^2 p_1 + 0^2\cdot p_2 + 1^2\cdot p_3 = 0{,}9.$$

Бу системани ечиб, изланаётган номаълум эҳтимолларни топамиз:

$$p_1 = 0{,}4,\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}5.$$

193. Дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг рўйхати берилган:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

Шунингдек, бу миқдорнинг ва унинг квадратининг математик кутилишлари маълум:

$$M(X) = 2{,}3,\quad M(X^2) = 5{,}9.$$

X нинг мумкин бўлган қийматларига мос эҳтимолларни топинг.

Жавоби. $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.

194. 10 та деталдан иборат партияда 3 та ностандарт деталь бор. Таваккалига 2 та деталь олинган. X дискрет тасодифий миқдор — олинган иккита деталь орасидаги ностандарт деталлар сонининг математик кутилишини топинг.

Кўрсатма. 1-боб, 1-§, 17-масаланинг ечилишидан фойдаланинг.

Жавоби. $M(X) = \frac{3}{5}$.

195. A ҳодисанинг битта синовда рўй бериш сонининг математик кутилиши A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенглигини исбот қилинг.

Кўрсатма. X дискрет тасодифий миқдор — ҳодисанинг битта синовда рўй бериш сони фақат иккита мумкин бўлган қийматга эга: $x_1 = 1$ (A ҳодиса рўй берди) ва $x_2 = 0$ (A ҳодиса рўй бермади).

б) X дискрет тасодифий миқдор — ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлган n та эркли синовда шу ҳодисанинг рўй беришлари сонининг математик кутилиши синовлар сонини ҳодиса-

Шундай қилиб, X_1 миқдорнинг математик кутилишини, яъни биринчи соққада чиқиши мумкин бўлган очколар сонининг математик кутилишини топсак кифоя. Бунинг учун X_1 нинг тақсимот қонунини топамиз:

X_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$M(X_1)$ ни топамиз:

$$M(X_1) = 1\cdot 1/6 + 2\cdot 1/6 + 3\cdot 1/6 + 4\cdot 1/6 + 5\cdot 1/6 + 6\cdot 1/6 = 7/2. \qquad (***)$$

(***) ни (**) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X) = \frac{7}{2}n.$$

200. Техник контрол бўлими буюмларнинг стандартга мувофиқлигини текширмоқда. Буюмнинг стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Ҳар бир партияда 5 та буюм бор. 50 партия буюм текширилиши лозим. X дискрет тасодифий миқдор — ҳар бирида роса 4 та стандарт буюм бўлган партиялар сонининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X) = 50\cdot C_5^4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1 \approx 16$.

201. 1) Агар $Y = aX + b$ бўлса, $M(Y) = aM(X) + b$ ни;

2) агар $Y = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_iX_i) + b$ бўлса, $M(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_iM(X_i) + b$ ни исботланг.

202. Мумкин бўлган қийматлари тўла группа ташкил этадиган биргаликда бўлмаган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг эҳтимолларидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши энг кичик қийматга барча ҳодисаларнинг эҳтимоллари бир хил бўлганда эришишини исботланг.

Ечилиши. X нинг мумкин бўлган қийматлари шартга кўра A_i ҳодисаларнинг p_i эҳтимолларига тенг.

мумкин бўлган p_i қийматнинг эҳтимоли ҳам p_i га тенг. Шундай қилиб, X қуйидаги тақсимотга эга:

X	p_1	$p_2 \ldots p_n$
p	p_1	$p_2 \ldots p_n$

X нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X) = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2. \qquad (*)$$

Қаралаётган ҳодисалар тўла группа ташкил этади, шунинг учун

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Дифференциал ҳисобдан маълумки, агар эркли ўзгарувчилар йиғиндиси ўзгармас бўлса, у ҳолда ўзгарувчилар квадратларининг йиғиндиси энг кичик қийматига ўзгарувчилар тенг бўлган ҳолдагина эга бўлади. Биз кўраётган масалага нисбатан бу нарса қуйидагини англатади: агар тўла группа ташкил этадиган ҳодисаларнинг ҳаммасининг эҳтимоллари ўзаро тенг бўлса, (*) йиғинди, яъни $M(X)$ математик кутилиш энг кичик қийматга эга бўлади, ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

203. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши унинг мумкин бўлган энг кичик ва энг катта қийматлари орасида ётишини исбот қилинг.

Ечилиши. X ушбу

X	x_1	$x_2 \ldots x_n$
p	p_1	$p_2 \ldots p_n$

тақсимот қонуни билан берилган дискрет тасодифий миқдор бўлсин.

X нинг энг кичик ва энг катта мумкин бўлган қийматларини m ва M орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n \leqslant Mp_1 + Mp_2 + \ldots + Mp_n = M(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = M.$$

Шундай қилиб,

$$M(X) \leqslant M. \qquad (*)$$

Шунга ўхшаш,

$$M(X) \geqslant m \qquad (**)$$

ни ҳам келтириб чиқариш осон.

(*) ва (**) ни бирлаштириб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m \leqslant M(X) \leqslant M.$$

204. X дискрет тасодифий миқдор k та мусбат қиймат $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ни мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ га тенг эҳтимоллар билан қабул қилади. Мумкин бўлган қийматлар ортиб бориш тартибида ёзилган деб фараз қилиб,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=x_k$$

бўлишини исбот қилинг.

Ечилиши. $P(X^{n+1}=x_i^{n+1})=P(X=x_i)=p_i$ ва $P(X^n=x_i^n)=p_i$ ни эътиборга олиб,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^{n+1}p_1+\ldots+x_{k-1}^{n+1}p_{k-1}+x_k^{n+1}p_k}{x_1^n p_1+\ldots+x_{k-1}^n p_{k-1}+x_k^n p_k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_k^{n+1}p_k\left[\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n+1}\cdot\frac{p_1}{p_k}+\ldots+\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n+1}\cdot\frac{p_{k-1}}{p_k}+1\right]}{x_k^n p_k\left[\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n}\cdot\frac{p_1}{p_k}+\ldots+\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n}\cdot\frac{p_{k-1}}{p_k}+1\right]}=$$

$$=x_k\frac{\frac{p_1}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n+1}+\ldots+\frac{p_{k-1}}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n+1}+1}{\frac{p_1}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{n}+\ldots+\frac{p_{k-1}}{p_k}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{n}+1}$$

ни ҳосил қиламиз.

X нинг мумкин бўлган қийматлари шартга кўра ортиб бориш тартибида ёзилганлиги, яъни $x_i < x_k$ ($i=1, 2, \ldots, k-1$) бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^{n+1}=0 \text{ ва } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_i}{x_k}\right)^{n}=0.$$

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=x_k.$$

205. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар эркли, мусбат ва бир хил тақсимланган бўлса, у ҳолда

$$M\left[\frac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right]=\frac{1}{n}$$

эканлигини исботланг.

Ечилиши. Ушбу тасодифий миқдорларни киритамиз:

$$Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n},\quad Y_2=\frac{X_2}{X_1+X_2+\ldots+X_n},\ \ldots,$$
$$Y_n=\frac{X_n}{X_1+X_2+\ldots+X_n}. \qquad (*)$$

Бу касрларнинг махражлари нолга тенг бўла олмайди, чунки X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ миқдорлар мусбат.

Шартга кўра X_i миқдорлар бир хил тақсимланган, шу сабабли Y_i миқдорлар ҳам бир хил тақсимланган, демак, улар бир хил сонли характеристикаларга, жумладан, бир хил математик кутилишларга эга:

$$M(Y_1)=M(Y_2)=\ldots=M(Y_n). \qquad (**)$$

Сўнгра

$$Y_1+Y_2+\ldots Y_n=1$$

эканлигини кўриш осон, демак,

$$M(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)=M(1)=1.$$

Йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг, шунинг учун

$$M(Y_1)+M(Y_2)+\ldots+M(Y_n)=1.$$

(**) га асосан

$$nM(Y_1)=1.$$

Бундан

$$M(Y_1)=\frac{1}{n}.$$

(*) ни эътиборга олган ҳолда, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M\left[\frac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right]=\frac{1}{n}.$$

X^2 нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

X^2 нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X^2)=25\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2=15{,}3.$$

Изланаётган дисперсияни топамиз:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=15{,}3-(-0{,}3)^2=15{,}21.$$

Изланаётган ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15{,}21}=3{,}9.$$

211. Ушбу тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг:

а)

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
p	0,05	0,1	0,25	0,6

Жавоби. а) $D(X)\cong 8{,}545$; $\sigma(X)\cong 2{,}923$;
б) $D(X)\cong 248{,}35$. $\sigma(X)\cong 15{,}77$.

212. X дискрет тасодифий миқдор фақат иккита мумкин бўлган x_1 ва x_2 қийматга эга, шу билан бирга бу қийматлар тенг эҳтимолли. X миқдорнинг дисперсияси мумкин бўлган қийматлар айирмаси ярмининг квадратига тенг эканлигини исботланг:

$$D(X)=\left[\frac{x_2-x_1}{2}\right]^2.$$

Ечилиши. X нинг математик кутилишини топамиз, бунда мумкин бўлган x_1 ва x_2 қийматларнинг эҳтимоллари ўзаро тенг эканлигини, яъни уларнинг ҳар бири 1/2 га тенглигини ҳисобга оламиз:

$$M(X)=x_1\cdot\frac{1}{2}+x_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

X^2 нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X^2)=x_1^2\cdot\frac{1}{2}+x_2^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}.$$

X нинг дисперсиясини топамиз:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\left[\frac{x_1+x_2}{2}\right]^2=\left[\frac{x_2-x_1}{2}\right]^2.$$

213. A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг. X дискрет тасодифий миқдор — A ҳодисанинг бешта эркли синовда рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. Ҳодисанинг эркли синовларда рўй бериш сонининг дисперсияси (ҳар бир синовда ҳодисанинг эҳтимоли бир хил бўлганда) синовлар сонини ҳодисанинг рўй бериш ва рўй бермаслик эҳтимолларига кўпайтирилганига тенг:

$$D(X)=npq.$$

Шартга кўра $n=5$; $p=0{,}2$; $q=1-0{,}2=0{,}8$.

Изланаётган дисперсия:

$$D(X)=npq=5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}8.$$

214. Бирор қурилмадаги элементнинг ҳар бир тажрибада ишдан чиқиш эҳтимоли 0,9 га тенг. X дискрет тасодифий миқдор — элементнинг ўнта эркли тажрибада ишдан чиқиш сонининг дисперсиясини топинг.

Жавоби. $D(X)=0{,}9$.

215. X дискрет тасодифий миқдор — иккита эркли синовда A ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг. A ҳодисанинг бу синовларда рўй бериш эҳтимоли бир хил ва $M(X)=1{,}2$ эканлиги маълум.

Ечилиши. Биринчи усул. X миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бундай: $x_1=0$ (ҳодиса рўй бермади), $x_2=1$ (ҳодиса бир марта рўй берди) ва $x_3=2$ (ҳодиса икки марта рўй берди).

Мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолларини Бернулли формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$P_2(0)=q^2;\quad P_2(1)=C_2^1\,pq=2pq;\quad P_2(2)=p^2.$$

X нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

мумкин бўлган қийматлари	0	1	2
эҳтимоллари	q^2	$2pq$	p^2

$M(X)$ ни топамиз:

$$M(X)=2pq+2p^2=2p(q+p)=2p.$$

Шартга асосан $M(X)=1{,}2$, яъни $2p=1{,}2$. Бу ердан $p=0{,}6$, ва демак, $q=1-0{,}6=0{,}4$.

Изланаётган дисперсия:

$$D(X)=npq=2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}48.$$

206. Агар X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 тасодифий миқдорлар эркли, мусбат ва бир хил тақсимланган бўлса, у ҳолда

$$M\left[\frac{X_1+X_2+X_3}{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}\right]=\frac{3}{5}$$

бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. Математик кутилиш белгиси остида турган касрни уч касрнинг йиғиндиси кўринишида тасвирланг ва 205-масаланинг ечимидан фойдаланинг.

207. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган ушбу X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг:

X	0	1	2	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	...

Ечилиши. X нинг мумкин бўлган қийматлари саноқли тўплам бўлган ҳол учун математик кутилишнинг таърифига биноан:

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

$k=0$ бўлганда йиғиндининг биринчи ҳади нолга тенг бўлишини ҳисобга олиб, k нинг энг кичик қиймати сифатида бирни қабул қиламиз:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k\cdot(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

$k-1=m$ деб олиб,

$$M(X)=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}$$

ни ҳосил қиламиз. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{\lambda}$ эканлигини эътиборга олиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X)=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

Шундай қилиб,

$$M(X)=\lambda,$$

яъни Пуассон тақсимотининг математик кутилиши бу тақсимотнинг λ параметрига тенг.

208. X ва Y тасодифий миқдорлар эркли. Агар $D(X)=5$, $D(Y)=6$ эканлиги маълум бўлса, $Z=3X+2Y$ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. X ва Y миқдорлар эркли бўлгани учун $3X$ ва $2Y$ миқдорлар ҳам эркли. Дисперсиянинг хоссаларидан фойдаланиб (эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчиларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг; ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(Z)=D(3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)=$$
$$=9D(X)+4D(Y)=9\cdot 5+4\cdot 6=69.$$

209. X ва Y тасодифий миқдорлар эркли. Агар $D(X)=4$, $D(Y)=5$ эканлиги маълум бўлса, $Z=2X+3Y$ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Жавоби. $D(Z)=61$.

210. Ушбу

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Ечилиши. Дисперсияни унинг таърифига асосланиб ҳисоблаш мумкин, лекин биз мақсадга тезроқ олиб келадиган

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

формуладан фойдаланамиз.

X нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X)=-5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3.$$

Иккинчи усул. $M(X)=np$ формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $M(X)=1{,}2$; $n=2$. Демак $1{,}2=2p$. Бундан $p=0{,}6$; демак, $q=0{,}4$.

Изланаётган дисперсияни топамиз:

$$D(X)=npq=2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}48.$$

Равшанки, иккинчи усул мақсадга тезроқ олиб келади.

216. Агар иккита эркли синовда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил ва $M(X)=0{,}9$ эканлиги маълум бўлса, бу синовларда A ҳодисанинг рўй беришлари сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Жавоби. $P(X)=0{,}495$.

217. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил бўлган эркли синовлар ўтказилмоқда. Агар учта эркли синовда A ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсияси 0,63 га тенг бўлса, бу ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}7$.

218. X дискрет тасодифий миқдор фақат иккита мумкин бўлган x_1 ва x_2 қийматга эга бўлиб, $x_2>x_1$. X нинг x_1 қийматни қабул қилиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Математик кутилиш ва дисперсия маълум: $M(X)=1{,}4$; $D(X)=0{,}24$. X миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ечилиши. Дискрет тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг, шунинг учун X нинг x_2 қийматни қабул қилиш эҳтимоли $1-0{,}6=0{,}4$ га тенг.

X нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X	x_1	x_2	
p	0,6	0,4	(*)

x_1 ва x_2 ни топиш учун бу сонларни ўзаро боғлайдиган иккита тенглама тузиш лозим. Шу мақсадда биз маълум математик кутилиш ва дисперсияни x_1 ва x_2 орқали ифодалаймиз.

$M(X)$ ни топамиз:

$$M(X)=0{,}6x_1+0{,}4x_2.$$

Шартга кўра $M(X)=1{,}4$, демак,

$$0{,}6x_1+0{,}4x_2=1{,}4. \qquad (**)$$

x_1 ва x_2 ни боғлайдиган битта тенгламани ҳосил қилдик. Иккинчи тенгламани ҳосил қилиш учун бизга маълум дисперсияни x_1 ва x_2 орқали ифодалаймиз.

X^2 нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X^2	x_1^2	x_2^2
p	0,6	0,4

$M(X^2)$ ни топамиз:

$$M(X^2)=0{,}6x_1^2+0{,}4x_2^2.$$

Дисперсияни топамиз:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0{,}6x_1^2+0{,}4x_2^2-1{,}4^2.$$

Бунга $D(X)=0{,}24$ ни қўйиб, элементар алмаштиришлардан сўнг

$$0{,}6x_1^2+0{,}4x_2^2=2{,}2 \qquad (***)$$

ни ҳосил қиламиз.

(**) ва (***) ни бирлаштириб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}0{,}6x_1+0{,}4x_2=1{,}4,\\ 0{,}6x_1^2+0{,}4x_2^2=2{,}2.\end{cases}$$

Бу системани ечиб, ушбу иккита ечимни ҳосил қиламиз:

$$x_2=1;\quad x_2=2 \quad \text{ва} \quad x_1=1{,}8;\quad x_2=0{,}8.$$

Шартга кўра $x_2>x_1$, шунинг учун масалани фақат биринчи ечим:

$$x_1=1;\quad x_2=2 \qquad (****)$$

қаноатлантиради.

(****) ни (*) га қўйиб, изланаётган тақсимот қонунини ҳосил қиламиз:

X	1	2
p	0,6	0,4

219. X дискрет тасодифий миқдор фақат иккита мумкин бўлган x_1 ва x_2 қийматга эга, шу билан бирга $x_1<x_2$. X нинг x_1 қийматни қабул қилиш эҳтимоли 0,2

га тенг. Математик кутилиш $M(X)=2{,}6$ ни ва ўртача квадратик четланиш $\sigma(X)=0{,}8$ ни билган ҳолда X нинг тақсимот қонунини топинг.

Жавоби.

X	1	3
p	0,2	0,8

220. X дискрет тасодифий миқдор фақат учта мумкин бўлган $x_1=1$, x_2 ва x_3 қийматларга эга, шу билан бирга $x_1<x_2<x_3$. X нинг x_1 ва x_2 қийматларни қабул қилиш эҳтимоли мос равишда 0,3 ва 0,2 га тенг. X миқдорнинг математик кутилиши $M(X)=2{,}2$ ва дисперсияси $D(X)=0{,}76$ ни билган ҳолда унинг тақсимот қонунини топинг.

Жавоби.

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

221. n та ўйин соққаси ташланди. Барча тушган ёқларда чиқиши мумкин бўлган очколар йиғиндисининг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. X орқали барча ёқларда чиққан очколар йиғиндисидан иборат дискрет тасодифий миқдорни, X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ орқали i-соққанинг ёғида чиққан очкони белгилаймиз. У ҳолда

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Барча X_i миқдорлар бир хил тақсимот қонунига эгалиги равшан, демак, улар бир хил сонли характеристикаларга, жумладан, бир хил дисперсияларга эга, яъни

$$D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_n). \qquad (*)$$

Қаралаётган тасодифий миқдорлар эркли бўлгани сабабли уларнинг йиғиндисини дисперсияси қўшилувчиларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг:

$$D(X)=D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=$$
$$=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

(*) га асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X)=n\,D(X_1). \qquad (**)$$

Шундай қилиб, X_1 тасодифий миқдорнинг дисперсиясини, яъни „биринчи" соққада чиқиши мумкин бўлган очколар сонининг дисперсиясини ҳисобласак кифоя. Шунн ҳисоблаймиз. X_1 нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$M(X_1)$ ни топамиз:

$$M(X_1)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

X_1^2 нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X_1	1	4	9	16	25	36
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$M(X_1^2)$ ва $D(X_1)$ ни топамиз:

$$M(X_1^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6},$$

$$D(X_1)=M(X_1^2)-[M(X_1)]^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}. \qquad (***).$$

Изланаётган дисперсияни топамиз, бунинг учун (***) ни (*) га қўямиз:

$$D(X)=\frac{35}{12}n.$$

222.* Ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли $p\,(0<p<1)$ га тенг. Синовлар ҳодиса рўй бергунга қадар ўтказилади. а) X дискрет тасодифий миқдор — ҳодиса рўй бергунга қадар ўтказилиши лозим бўлган синовлар сонининг математик кутилишини топинг; б) X миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. а) X миқдор ҳодиса рўй бергунга қадар ўтказилиши лозим бўлган синовлар сонининг тақсимот қонунини тузамиз:

X	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
p	p	qp	q^2p	$\ldots$	$q^{k-1}p$	$\ldots$

(*)

Бу ерда $q=1-p$ — қаралаётган ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли. $M(X)$ ни топамиз:

$$M(X)=1\cdot p+2\cdot qp+3\cdot q^2p+\ldots+k\cdot q^{k-1}p+\ldots=$$
$$=p\,(1+2q+3q+\ldots+kq^{k-1}+\ldots)=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=$$
$$=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Тенгсизликнинг ўнг томонига $[M(X)]^2$ қўшиб ва айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M\left[X-\frac{x_l+x_k}{2}\right]^2=D(X)+\left[M(X)-\frac{x_l+x_k}{2}\right]^2>D(X). \quad (**)$$

(**) ва (*) ни бирлаштириб, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$M\left[X-\frac{x_l+x_k}{2}\right]^2\geqslant D(X).$$

225. Агар X тасодифий миқдорнинг энг кичик ва энг катта мумкин бўлган қийматлари мос равишда a ва b га тенг бўлса, бу тасодифий миқдорнинг дисперсияси бу қийматлари айирмаси ярмининг квадратидан ортиқ бўлмаслигини исботланг:

$$D(X)\leqslant\left[\frac{b-a}{2}\right]^2.$$

Ечилиши. Ушбу тенгсизликдан фойдаланамиз (224-масалага қаранг):

$$D(X)\leqslant M\left[X-\frac{a+b}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Энди

$$M\left[X-\frac{a+b}{2}\right]^2\leqslant\left[\frac{b-a}{2}\right]^2$$

ни исботлаймиз. (Бу ердан ва (*) дан исботланаётган тенгсизликнинг тўғрилиги келиб чиқади.) Шу мақсадда математик кутилишни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$M\left[\frac{b-a}{2}\right]^2=M\left[X-\frac{a+b}{2}+(b-X)\right]^2=$$
$$=M\left[X-\frac{a+b}{2}\right]^2+M\,[(b-X)(X-a)].$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчи манфий эмас (бу фикр b — энг катта ва a — энг кичик мумкин бўлган қийматлар эканлигидан келиб чиқади), шу сабабли биринчи қўшилувчи бутун йиғиндидан ортиқ эмас:

$$M\left[X-\frac{a+b}{2}\right]^2\leqslant M\left[\frac{b-a}{2}\right]^2.$$

Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши ўзгармаснинг ўзига тенг эканлигини ҳисобга олиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M\left[X-\frac{a+b}{3}\right]^2\leqslant\left[\frac{b-a}{2}\right]^2.$$

226. Агар X ва Y эркли тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда

$$D(XY)=D(X)\cdot D(Y)+n^2D(X)+m^2D(Y)$$

бўлишини исбот қилинг, бу ерда $m=M(X)$ ва $n=D(Y)$.

Ечилиши. Дисперсияни ҳисоблаш формуласига кўра

$$D(XY)=M[(XY)^2]-[M(XY)]^2.$$

X ва Y эркли миқдорлар бўлгани учун X^2 ва Y^2 ҳам эркли миқдорлар бўлишини ва эркли тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(XY)=M[X^2\cdot Y^2]-[M(X)\cdot M(Y)]^2=$$
$$=M(X^2)\,M(Y^2)-m^2n^2. \qquad (*)$$

Дисперсиянинг таърифига асосан

$$D(X)=M(X^2)-m^2,\quad D(Y)=M(Y^2)-n^2.$$

Бу ердан

$$M(X^2)=D(X)+m^2,\quad M(Y^2)=D(Y)+n^2. \qquad (**)$$

(**) ни (*) га қўйиб, соддалаштиргандан сўнг узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(XY)=D(X)\,D(Y)+n^2D(X)+m^2D(Y).$$

227. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг:

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}$	$\ldots$

Ечилиши. $D(X)=M(X^2)-[M(X)^2]$ формуладан фойдаланамиз $M(X)=\lambda$ бўлгани учун (207-масалага қаранг)

$$D(X)=M(X^2)-\lambda^2. \qquad (*)$$

X^2 тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзамиз, бунда X^2 нинг k^2 қийматни қабул қилиш эҳтимоли X

Шундай қилиб,

$$M(X) = \frac{1}{p}.$$

Тушунтириш. $1 + 2q + 3q^2 + \ldots + kq^{k-1} + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2}$ эканлигини кўрсатамиз. $0 < q < 1$ бўлгани учун

$$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

даражали қаторни (q га нисбатан) ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин ва қатор ҳадларининг ҳосилалари йиғиндиси қатор йиғиндисининг ҳосиласига тенг, яъни

$$S' = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + kq^{k-1} + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2}. \qquad (**)$$

б) X миқдорнинг дисперсиясини

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

формула бўйича излаймиз. $M(X) = \frac{1}{p}$ ни ҳисобга олиб,

$$D(X) = M(X^2) - \frac{1}{p^2} \qquad (***)$$

ни ҳосил қиламиз. $M(X^2)$ ни топсак кифоя. (*) тақсимотдан фойдаланиб, X^2 нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X^2	1^2	2^2	3^2	$\ldots$	k^2	$\ldots$
P	p	qp	q^2p	$\ldots$	$q^{k-1}p$	$\ldots$

$M(X^2)$ ни топамиз:

$$M(X^2) = 1^2 \cdot p + 2^2 \cdot qp + 3^2 \cdot q^2p + \ldots + k^2 \cdot q^{k-1}p + \ldots =$$
$$= p(1^2 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + \ldots + k^2 \cdot q^{k-1} + \ldots) =$$
$$= p \cdot \frac{1+q}{(1-q)^3} = p \cdot \frac{1 + (1-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Шундай қилиб,

$$M(X^2) = \frac{2-p}{p^2}. \qquad (****)$$

Изланаётган дисперсияни топамиз, бунинг учун (****) ни (***) га қўямиз:

$$D(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Тушунтириш. Ушбу

$$1^2 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + \ldots + k^2 \cdot q^{k-1} + \ldots \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

тенгликнинг тўғрилигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$\int_0^q (1^2 + 2^2q + 3^2q^2 + \ldots + k^2q^{k-1} + \ldots)\, dq =$$
$$= [q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + kq^k + \ldots]_0^q =$$
$$= q(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + kq^k + \ldots) = \frac{q}{(1-q)^2} \quad [(**) \text{ га қаранг}].$$

Тенгликнинг иккала қисмини q бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$1^2 + 2^2q + 3^2q^2 + \ldots k^2q^{k-1} + \ldots = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

223. Бирор элементнинг ишончлилигини текшириш мақсадида то элемент ишдан чиқмагунча кўп марта синов ўтказилади. Қуйидагиларни топинг: а) X дискрет тасодифий миқдор — ўтказилиши лозим бўлган синовлар сонининг математик кутилишини; б) X нинг дисперсиясини. Элементнинг ҳар бир тажрибада ишдан чиқиш эҳтимоли 0,1 га тенг.

Кўрсатма. 222- масаланинг натижаларидан фойдаланинг.
Жавоби. а) $M(X) = 10$, б) $D(X) = 90$.

224. $M\left[X - \frac{x_l + x_k}{2}\right]^2 \geqslant D(X)$ тенгсизликни исботланг, бу ерда x_l ва x_k — қаралаётган X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган исталган иккита қиймати.

Ечилиши. 1) $\frac{x_l + x_k}{2} = M(X)$ деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$M\left[X - \frac{x_l + x_k}{2}\right]^2 = D(X). \qquad (*)$$

2) $\frac{x_l + x_k}{2} \neq M(X)$ деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$M\left[X - \frac{x_l + x_k}{2}\right]^2 > D(X)$$

бўлишини исбот қиламиз.

Тенгсизликнинг чап қисмини математик кутилишнинг хоссасидан фойдаланиб ўзгартирамиз:

$$M\left[X - \frac{x_l + x_k}{2}\right]^2 = M(X^2) - 2\frac{x_l + x_k}{2} \cdot M(X) + \left[\frac{x_l + x_k}{2}\right]^2.$$

k қийматни қабул қилиш эҳтимолига тенглигини (бу X нинг мумкин бўлган қийматлари манфий эмаслигидан келиб чиқади) ҳисобга оламиз:

X^2	0^2	1^2	2^2	$\ldots$	k^2	$\ldots$
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\ldots$

X^2 нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Бундан $k = 0$ да биринчи ҳад нолга тенг бўлишини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1) + 1] \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \right].$$

$k - 1 = m$ десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$M(X^2) = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right].$$

Энди

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda \qquad \text{(207- масалага қаранг),}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

ларни эътиборга олиб,

$$M(X^2) = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda \qquad (**)$$

ни ҳосил қиламиз.

(**) ни (*) га қўямиз:

$$D(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Шундай қилиб, Пуассон тақсимотининг дисперсияси λ параметрга тенг.

4-§. Назарий моментлар

X тасодифий миқдорнинг **k-тартибли** *бошланғич моменти* деб, X^k миқдорнинг математик кутилишига айтилади:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Жумладан, биринчи тартибли бошланғич момент математик кутилишга тенг:

$$\nu_1 = M(X).$$

X тасодифий миқдорнинг ***k-тартибли марказий моменти*** деб, $[X - M(X)]^k$ миқдорнинг математик кутилишига айтилади:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k.$$

Жумладан, биринчи тартибли марказий момент нолга тенг:

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0;$$

Иккинчи тартибли марказий момент дисперсияга тенг:

$$\mu_2 = M[X - M(X)]^2 = D(X).$$

Марказий моментларни уларни бошланғич моментлар билан боғлайдиган формулалардан фойдаланиб, ҳисоблаш мақсадга мувофиқдир:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3;$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

228. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	1	3
p	0,4	0,6

Биринчи, иккинчи ва учинчи тартибли бошланғич моментларни топинг.

Ечилиши. Биринчи тартибли бошланғич моментни топамиз:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,2.$$

X^2 миқдорнинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X^2	1	9
p	0,4	0,6

Иккинчи тартибли бошланғич моментни топамиз:

$$\nu_2 = M(X^2) = 1\cdot 0,4 + 9\cdot 0,6 = 5,8.$$

X^3 миқдорнинг тақсимот қонунини ёзамиз:

X^3	1	27
p	0,4	0,6

Учинчи тартибли бошланғич моментни топамиз:

$$\nu_3 = M(X^3) = 1\cdot 0,4 + 27\cdot 0,6 = 16,6.$$

229 X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Биринчи, иккинчи ва учинчи тартибли бошланғич моментларни топинг.

Жавоби. $\nu_1 = 3,9$; $\nu_2 = 16,5$; $\nu_3 = 74,1$.

230. X дискрет тасодифий миқдор

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

тақсимот қонуни билан берилган. Биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли марказий моментларни топинг.

Ечилиши. Биринчи тартибли марказий момент нолга тенг:

$$\mu_1 = 0.$$

Марказий моментларни ҳисоблаш учун марказий моментларни бошланғич моментлар орқали ифодаланадиган формулалардан фойдаланиш қулай, шунинг учун аввал бошланғич моментларни топамиз:

$$\nu_1 = M(X) = 1\cdot 0,1 + 2\cdot 0,3 + 4\cdot 0,6 = 3,1;$$
$$\nu_2 = M(X^2) = 1\cdot 0,1 + 4\cdot 0,3 + 16\cdot 0,6 = 10,9;$$
$$\nu_3 = M(X^3) = 1\cdot 0,1 + 8\cdot 0,3 + 64\cdot 0,6 = 40,9;$$
$$\nu_4 = M(X^4) = 1\cdot 0,1 + 16\cdot 0,3 + 256\cdot 0,6 = 158,5.$$

Марказий моментларни топамиз:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40,9 - 3\cdot 3,1\cdot 10,9 + 2\cdot 3,1^3 = -0,888;$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 158,5 - 4\cdot 40,9\cdot 3,1 + 6\cdot 10,9\cdot 3,1^2 - 3\cdot 3,1^4 = 2,7777.$$

231. X дискрет тасодифий миқдор

X	3	5
p	0,2	0,8

тақсимот қонуни билан берилган. Биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли марказий моментларни топинг.

Кўрсатма. Аввал бошланғич моментларни топинг ва марказий моментларни улар орқали ифодаланг.

Жавоби. $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0,64$; $\mu_3 = -0,12$; $\mu_4 = 1,33$.

232. Иккинчи тартибли марказий момент (дисперсия) $\mu_2 = M[X - M(X)]^2$ исталган $C \neq M(X)$ да оддий иккинчи тартибли момент $\mu_2' = M[X - C]^2$ дан кичиклигини кўрсатинг.

Ечилиши. Ёзувни соддалаштириш мақсадида $M(X) = m$ белгилашни киритамиз. Математик кутилиш белгиси остида m ни қўшамиз ва айирамиз:

$$\mu_2' = M[X - C]^2 = M[(X - m) + (m - C)]^2 =$$
$$= M[(X - m)^2 + 2(m - C)(X - m) + (m - C)^2].$$

Йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг, шунинг учун

$$\mu_2' = M[X - m]^2 + M[2(m - C)(X - m)] + M[m - C]^2.$$

$2(m - C)$ катталикни математик кутилиш белгисидан ташқари чиқариб, $(m - C)^2$ ўзгармаснинг математик кутилиши шу ўзгармаснинг ўзига тенглигини ва таърифга кўра $M[X - m]^2 = \mu_2$ лигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mu_2' = \mu_2 + 2(m - C)\cdot M[X - m] + (m - C)^2.$$

236. X тасодифий миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши учланган ўртача квадратик четланишдан кичик бўлиш эҳтимолини Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, баҳоланг.

Жавоби. $P\ |X - M(X)| < 3\sigma \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9}$.

237. Ушбу шаклдаги

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Чебишев тенгсизлигини исботланг.

Кўрсатма. $|X - M(X)| < \varepsilon$ ва $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ ҳодисалар қарама-қарши эканлигидан фойдаланинг.

238. Чебишев тенгсизлигининг 237-масалада келтирилган шаклидан фойдаланиб, X тасодифий миқдорнинг ўзининг математик кутилишидан четланиши иккиланган ўртача квадратик четланишдан кичик бўлмаслиги эҳтимолини баҳоланг.

Жавоби. $P(|X - M(X)| \geq 2\sigma) \leq \sigma^2/4\sigma^2 = 1/4$.

239. Агар $D(X) = 0,004$ бўлса, Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, $|X - M(X)| < 0,2$ нинг эҳтимолини баҳоланг.

Жавоби. $P(|X - M(X)| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,004}{0,04} = 0,9$.

240. $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9$ ва $D(X) = 0,009$ берилган. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, ε ни топинг.

Жавоби. $\varepsilon = 0,3$.

241. Қурилма ўзаро эркли ишлайдиган 10 та элементдан иборат. Ҳар бир элементнинг T вақт ичида ишдан чиқиш эҳтимоли 0,05 га тенг. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, T вақт ичида ишдан чиққан элементлар сони билан шу вақт ичида ишдан чиққан элементларнинг ўртача сони (математик кутилиши) орасидаги айирманинг абсолют қиймат бўйича: а) иккидан кичик бўлиш; б) иккидан кичик бўлмаслик эҳтимолини баҳоланг.

Ечилиши. а) X орқали дискрет тасодифий миқдорни — қаралаётган T вақт ичида ишдан чиққан элементлар сонини белгилаймиз. У ҳолда

$$M(X) = np = 10\cdot 0,05 = 0;$$
$$D(X) = npq = 10\cdot 0,05\cdot 0,95 = 0,475.$$

Чебишев тенгсизлигидан фойдаланамиз:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Бунга $M(X) = 0,5$; $D(X) = 0,475$, $\varepsilon = 2$ ларни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|X - 0,5| < 2) \geq 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88.$$

б) $|X - 0,5| < 2$ ва $|X - 0,5| \geq 2$ ҳодисалар қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг. Демак,

$$P(|X - 0,5| > 2) \leq 1 - 0,88 = 0,12.$$

242. Ёритиш тармоғига 20 та лампочка параллел уланган. T вақт ичида лампочканинг ёниш эҳтимоли 0,8 га тенг. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, T вақт ичида ёнган лампочкалар билан шу вақт ичида ёнган лампочкаларнинг ўртача сони (математик кутилиши) орасидаги айирманинг абсолют қиймати: а) учдан кичик бўлиш; б) учдан кичик бўлмаслик эҳтимолини баҳоланг.

Жавоби. а) $P(|X - 16| < 3) \geq 0,36$; б) $P(|X - 16| \geq 3) \leq 0,64$.

243. A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли 1/2 га тенг. Агар 100 та эркли синов ўтказиладиган бўлса, A ҳодисанинг рўй беришлари сони X нинг 40 дан 60 гача бўлган оралиқда ётиш эҳтимолини Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, баҳоланг.

Ечилиши. X дискрет тасодифий миқдор — қаралаётган A ҳодисанинг 100 та эркли синовда рўй бериш сонининг математик кутилишини ва дисперсиясини топамиз:

$$M(X) = np = 100\cdot\frac{1}{2} = 50;\ D(X) = npq = 100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 25.$$

$X-m$ четланишнинг математик кутилиши нолга тенглигини ҳисобга олиб,

$$\mu_2' = \mu_2 + (m-C)^2$$

га эга бўламиз, бу ердан

$$\mu_2 = \mu_1' - (m-C)^2.$$

Бу тенгликдан иккинчи тартибли марказий момент исталган $C \neq m$ да иккинчи тартибли оддий моментдан кичик деган хулосага келамиз.

233. Учинчи тартибли марказий момент бошланғич моментлар билан

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

тенглик орқали боғланганлигини исбот қилинг.

Ечилиши. Марказий моментнинг таърифига кўра

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3.$$

Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб ва $M(X)$ ўзгармас катталик эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mu_3 = M[X^3 - 3X^2 \cdot M(X) + 3X \cdot M^2(X) - M^3(X)] =$$
$$= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^2(X) \cdot M(X) - M[M^3(X)] =$$
$$= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^3(X) - M^3(X) =$$
$$= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 2M^3(X). \qquad (*)$$

Бошланғич моментнинг таърифига кўра

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2), \quad \nu_3^3 = M(X^3). \qquad (**)$$

(**) ни(*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

234. Тўртинчи тартибли марказий момент бошланғич моментлар билан

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

тенглик орқали боғланганлигини исбот қилинг.

235. $X = X_1 + X_2$ бўлсин, бу ерда X_1 ва X_2 эркли тасодифий миқдорлар бўлиб, улар мос равишда μ_3^1 ва μ_3^2 учинчи тартибли марказий моментларга эга. $\mu_3 =$

$= \mu_3^1 + \mu_3^2$ эканлигини исбот қилинг, бу ерда μ_3 кўрилаётган X миқдорнинг учинчи тартибли марказий моменти.

Ечилиши. Ёзувни соддалаштириш мақсадида математик кутилишларни қуйидагича белгилаймиз:

$$M(X_1) = a_1, \qquad M(X_2) = a_2.$$

у ҳолда

$$M(X) = M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = a_1 + a_2.$$

Учинчи тартибли марказий моментнинг таърифига кўра:

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3 = M[(X_1 + X_2) - (a_1 + a_2)]^3 =$$
$$= M[(X_1 - a_1) + (X_2 - a_2)]^3.$$

Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб (йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг, ўзаро эркли тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг)

$$\mu_3 = M[(X_1 - a_1)^3 + 3(X_1 - a_1)^2 \cdot (X_2 - a_2) +$$
$$+ 3(X_1 - a_1) \cdot (X_2 - a_2)^2 + (X_2 - a_2)^3] =$$
$$= M[X_1 - a_1]^3 + M[3(X_1 - a_1)^2] \cdot M[X_2 - a_2] +$$
$$+ M[3(X_2 - a_2)^2] \cdot M[X_1 - a_1] + M[X_2 - a_2]^3$$

ни ҳосил қиламиз.

Математик кутилишнинг четланишини (тасодифий миқдор ва унинг математик кутилиши орасидаги айирмалар) нолга тенглигини ҳисобга олиб, яъни $M[X_1 - a_1] = 0$ ва $M[X_2 - a_2] = 0$ га асосан узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$\mu_3 = M[X_1 - a_1]^3 + M[X_2 - a_2]^3 = \mu_3^1 + \mu_3^2.$$

Бешинчи боб
КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ

1-§. Чебишев тенгсизлиги

Чебишев тенгсизлиги. X тасодифий миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланишининг абсолют қиймат бўйича ε мусбат сондан кичик бўлиш эхтимоли $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ дан кичик эмас:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Ҳодиса рўй беришнинг берилган сони билан $M(X) = 50$ математик кутилиш орасидаги максимал айирмани топамиз:

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10.$$

Ушбу шаклдаги Чебишев тенгсизлигидан фойдаланамиз:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Бунга $M(X) = 50$, $D(X) = 25$, $\varepsilon = 10$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|X - 50| < 10) \geqslant 1 - \frac{25}{10^2} = 0{,}75.$$

244. Ҳар бир синовда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 1/4 га тенг. Агар 800 та синов ўтказиладиган бўлса, A ҳодисанинг рўй бериш сони X нинг 150 дан 250 гача бўлган оралиқда ётиш эхтимолини Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб баҳоланг.

Жавоби. $P(|X - 200| < 50) > 1 - 150/50^2 = 0{,}94$.

245. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8.

Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, $|X - M(X)| < 0{,}2$ ни баҳоланг.

Ечилиши. X миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсиясини топамиз:

$$M(X) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}54;$$
$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 =$$
$$= (0{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}8) - 0{,}54^2 = 0{,}0144.$$

Ушбу шаклдаги Чебишев тенгсизлигидан фойдаланамиз:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Бунга $M(X) = 0{,}54$, $D(X) = 0{,}0144$, $\varepsilon = 0{,}2$ ни қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|X - 0{,}54| < 0{,}2) \geqslant 1 - \frac{0{,}0144}{0{,}04} = 0{,}64.$$

246. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, $|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4}$ бўлиш эҳтимолини баҳоланг.

Жавоби. $P(|X - 0{,}44| < \sqrt{0{,}4}) \geq 1 - 0{,}364/0{,}4 = 0{,}909$

2-§. Чебишев теоремаси

Чебишев теоремаси. *Агар $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ жуфт-жуфт эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги чекли математик кутилишларга эга бўлиб, бу миқдорларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлса (бирор C ўзгармасдан катта бўлмаса), бу тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати уларнинг математик кутилишларининг арифметик ўртача қийматига эҳтимол бўйича яқинлашади, яъни ε исталган мусбат сон бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Хусусан, дисперсиялари текис чегараланган, бир хил математик кутилиши a га эга бўлган ҳамда жуфт-жуфт эркли бўлган тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг арифметик ўртача қиймати a математик кутилишга эҳтимол бўйича яқинлашади, яъни ε исталган мусбат сон бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

247. Эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/2n^2$	$1 - 1/n^2$	$1/2n^2$

Бу кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми?

Ечилиши. Тасодифий миқдорлар кетма-кетлигига Чебишев теоремасини қўллаш мумкин бўлиши учун бу миқдорлар жуфт-жуфт эркли бўлиши, чекли математик кутилишларга ва текис чегараланган дисперсияларга эга бўлиши етарли.

Берилган тасодифий миқдорлар эркли бўлгани учун улар жуфт-жуфт эрклидир, яъни Чебишев теоремасининг биринчи шарти бажарилади.

Математик кутилишларнинг чекли бўлиши лозимлиги ҳақидаги талабнинг бажарилишини текшириб кўрамиз:

$$M(X_n) = -n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} = 0.$$

Шундай қилиб, ҳар бир тасодифий миқдор чекли (нолга тенг) математик кутилишга эга, яъни теореманинг иккинчи шарти бажарилади.

Дисперсияларнинг текис чегараланган бўлиши лозимлиги ҳақидаги талабнинг бажарилишини текшириб кўрамиз:

X_n^2 нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

$$\begin{array}{cccc} X_n^2 & n^2\alpha^2 & 0 & n^2\alpha^2 \\ p & 1/2n^2 & 1-1/n^2 & 1/2\,n^2 \end{array}$$

ёки, бир хил мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолларини қўшсак,

$$\begin{array}{ccc} X_n^2 & n^2\alpha^2 & 0 \\ p & 1/n^2 & 1-1/n^2 \end{array}$$

$M(X_n^2)$ математик кутилишни топамиз:

$$M(X_n^2) = n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \alpha^2.$$

Сўнгра, $M(X_n) = 0$ эканлигини ҳисобга олган ҳолда $D(X_n)$ дисперсияни топамиз:

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = \alpha^2.$$

Шундай қилиб, берилган тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари α^2 сон билан текис чегараланган, яъни учинчи талаб ҳам бажарилади.

Шундай қилиб, теореманинг барча талаблари бажарилади, демак, қаралаётган тасодифий миқдорлар кетма-кетлигига Чебишев теоремасини қўллаш мумкин.

248. Эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги X_1, $X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

$$\begin{array}{ccc} X_n & a & -a \\ p & \dfrac{n}{2n+1} & \dfrac{n+1}{2n+1}. \end{array}$$

Бу кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми?

Жавоби. Қўллаш мумкин. X_n ларнинг математик кутилишлари чекли ва $-a\,(2n+1)$ га тенг; дисперсиялар a^2 сон билан текис чегараланган.

249. Эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги X_1, $X_2 \ldots X_n, \ldots$ ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

$$\begin{array}{ccc} X_n & n+1 & -n \\ p & \dfrac{n}{2n+1} & \dfrac{n+1}{2n+1} \end{array}$$

а) Чебишев теоремасини дисперсиялар текис чегараланган бўлиши лозимлиги ҳақидаги талабнинг бажарилмаслигига ишонч ҳосил қилинг;

б) бундан қаралаётган кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаб бўлмайди деб хулоса чиқариш мумкинми?

Жавоби. n ортиши билан $D(X_n) = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{n+1}$ дисперсиялар чексиз ортади; б) йўқ, бундай хулоса чиқариб бўлмайди, чунки дисперсияларнинг текис чегараланган бўлиши лозимлиги талаби фақат етарли шартдир, лекин зарур шарт эмас.

250*. Эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги X_1, $X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

$$\begin{array}{cccc} X_n & -n\alpha & 0 & n\alpha \\ p & \dfrac{1}{2^n} & 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} & \dfrac{1}{2^n} \end{array}$$

Бу кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми?

Ечилиши. X_n тасодифий миқдорлар эркли бўлгани учун улар ўз-ўзидан жуфт-жуфт эркли ҳамдир, яъни Чебишев теоремасининг биринчи талаби бажарилади.

3-хосса. *Агар X тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда $x \leqslant a$ бўлганда $F(x) = 0$; $x \geqslant b$ бўлганда $F(x) = 1$.*

Натижа. *Қуйидаги лимит муносабатлар ўринли:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

252. X тасодифий миқдор қуйидаги интеграл функция билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \text{ бўлганда,} \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & -1 < x \leqslant \frac{1}{3} \text{ бўлганда,} \\ 1 & x > \frac{1}{3} \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Синов натижасида X миқдорнинг $(0, 1/3)$ интервалда ётган қийматни қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. X нинг (a, b) интервалда ётган қийматни қабул қилиш эҳтимоли интеграл функциянинг бу интервалдаги орттирмасига тенг:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Бу формулага $a = 0$, $b = 1/3$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=1/3} - \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=0} = \frac{1}{4}.$$

253. X тасодифий миқдор бутун Ox ўқда

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$$

интеграл функция билан берилган. Синов натижасида X миқдорнинг $(0, 1)$ интервалда ётадиган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(0 < X < 1) = \frac{1}{4}$.

254. X тасодифий миқдор қуйидаги интеграл функция билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \quad \text{бўлганда,} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}, & -2 < x \leqslant 2 \text{ бўлганда,} \\ 1 & x > 2 \quad \text{бўлганда.} \end{cases}$$

Синов натижасида X миқдорнинг $(-1; 1)$ интервалда ётган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(-1 < X < 1) = 1/3$.

255. X узлуксиз тасодифий миқдор (бирор қурилманинг бузилмасдан ишлаш вақти) нинг интеграл функцияси

$$F(x) = 1 - e^{-x/T} \quad (x \geqslant 0)$$

га тенг. Қурилманинг $x \geqslant T$ вақт ичида бузилмасдан ишлаш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(X \geqslant T) = 1 - P(X < T) = 1 - P(0 < X < T) = 1/e$.

256. X тасодифий миқдор

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}5\,x - 1, & 2 < x \leqslant 4 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 4 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

интеграл функция билан берилган. Синов натижасида X миқдорнинг: а) 0,2 дан кичик қиймат; б) учдан кичик қиймат; в) учдан кичик бўлмаган қиймат; г) бешдан кичик бўлмаган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. а) $x \leqslant 2$ бўлганда $F(x) = 0$ бўлгани учун $F(0{,}2) = 0$, яъни $P(X < 0{,}2) = 0$;

б) $P(X < 3) = F(3) = [0{,}5x - 1]_{x=3} = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$;

в) $X \geqslant 3$ ва $X < 3$ ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун

$$P(X \geqslant 3) + P(X < 3) = 1.$$

Бу ерда $P(X < 3) = 0{,}5$ ни ҳисобга олиб, [б) бандга қаранг], қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(X \geqslant 3) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$

г) қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг, шунинг учун

$$P(X \geqslant 5) + P(X < 5) = 1.$$

Бу ердан, масала шартига кўра $x > 4$ бўлганда $F(x) = 1$ бўлишини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0.$$

$M(X_n) = 0$ эканлигини текшириб кўриш осон, демак, математик кутилишларнинг чекли бўлиш талаби ҳам бажарилади.

Дисперсияларининг текис чегараланган бўлиш талабининг бажарилишини текшириб кўриш қолди. Ушбу

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2$$

формула бўйича, $M(X_n) = 0$ ни ҳисобга олиб,

$$D(X_n) = \frac{n^2}{2^{n-1}}\alpha^2$$

ни топамиз (ҳисобларни бажаришни китобхонга тавсия қиламиз).

Вақтинча, n ни узлуксиз ўзгаради деб фараз қиламиз (бу фактни таъкидлаб кўрсатиш мақсадида n ни x орқали белгилаймиз) ва

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2^{x-1}}$$

функциянинг экстремумини текширамиз.

Бу функциянинг биринчи ҳосиласини нолга тенглаб, $x_1 = 0$ ва $x_2 = \frac{2}{\ln 2}$ критик нуқталарни топамиз.

Биринчи нуқтанинг таъсири бўлмагани учун (n нолга тенг қийматни қабул қилмайди) уни ташлаб юборамиз: $\varphi(x)$ функция $x_2 = \frac{2}{\ln 2}$ нуқтада максимумга эга бўлишини кўриш осон. $\frac{2}{\ln 2} \simeq 2{,}9$ ва n бутун сон эканлигини ҳисобга олиб, $D(X_n) = \frac{n^2}{2^{n-1}}\alpha^2$ дисперсияни 2,9 сонига (чапдан ва ўнгдан) энг яқин бутун сонлар учун, яъни $n = 2$ ва $n = 3$ учун ҳисоблаймиз.

$n = 2$ бўлганда $D(X_2) = 2\alpha^2$ бўлиб, $n = 3$ бўлганда $D(X_3) = \frac{9}{4}\alpha^2$. Равшанки,

$$\frac{9}{4}\alpha^2 > 2\alpha^2.$$

Шундай қилиб, мумкин бўлган энг катта дисперсия $\frac{9}{4}\alpha^2$ га тенг, яъни X_n тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари $\frac{9}{4}\alpha^2$ сон билан текис чегараланган.

Шундай қилиб, Чебишев теоремасининг барча талаблари бажарилади, демак, қаралаётган кетма-кетликка бу теоремани қўллаш мумкин.

251. Эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X_n	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p	1/3	1/3	1/3

Бу кетма-кетликка Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми?

Жавоби. Қўллаш мумкин: $M(X_n) = 0$; $D(X_n) = 2$.

Эслатма. X_n тасодифий миқдорлар эркли ва бир хил тақсимланган бўлгани учун Хинчин теоремасини биладиган китобхон математик кутилишни ҳисоблаши ва унинг чекли эканлигига ишонч ҳосил қилиш билан чекланиши мумкин.

Олтинчи боб

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ЭҲТИМОЛЛАРИНИНГ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ

1-§. Тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотининг интеграл функцияси

Тақсимотнинг интеграл функцияси деб, ҳар бир x қиймат учун X тасодифий миқдорнинг x дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимолини аниқлайдиган $F(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$F(X) = P(X < x).$$

Кўпинча, „интеграл функция“ термини ўрнида „тақсимот функцияси“ терминидан фойдаланилади.

Интеграл функция қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. *Интеграл функциянинг қийматлари* [0, 1] *кесмага тегишли:*

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

2-хосса. *Интеграл функция камаймайдиган функция,* яъни $x_2 > x_1$ бўлса, у ҳолда $F(x_2) \geqslant F(x_1)$.

1-натижа. *X тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалда ётган қийматни қабул қилиш эҳтимоли интеграл функциянинг шу интервалдаги орттирмасига тенг:*

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

2-натижа. *Узлуксиз тасодифий миқдорнинг битта тайин қийматни, масалан, x_1 қийматни қабул қилиш эҳтимоли нолга тенг:*

$$P(X = x_1) = 0.$$

257. X тасодифий миқдор қуйидаги интеграл функция билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ бўлганда,} \\ x^2, & 0 < x < 1 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 1 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Тўртта эркли синов натижасида X миқдорнинг роса уч марта (0,25; 0,75) интервалда ётадиган қийматни қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = P(0{,}25 < X < 0{,}75) = 0{,}5$; $P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 0{,}25$.

258. X тасодифий миқдор бутун Ox ўқда

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

интеграл функция билан берилган. Ушбу шартни қаноатлантирадиган мумкин бўлган x_1 қийматни топинг: синов натижасида X миқдор x_1 дан катта қийматни 1/4 эҳтимол билан қабул қилади.

Ечилиши. $X \leqslant x_1$ ва $X > x_1$ ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун

$$P(X \leqslant x_1) + P(X > x_1) = 1.$$

Демак,

$$P(X \leqslant x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Сўнгра, $P(X = x_1) = 0$ бўлгани учун

$$P(X \leqslant x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = \frac{3}{4}.$$

Интеграл функциянинг таърифига асосан:

$$P(X < x_1) = F(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{2}.$$

Демак,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{2} = \frac{3}{4}$$

ёки

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Бу ердан

$$x_1/2 = 1 \text{ ёки } x_1 = 2.$$

259. X тасодифий миқдор бутун Ox ўқда

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

интеграл функция билан берилган. Ушбу шартни қаноатлантирувчи мумкин бўлган x_1 қийматни топинг: синов натижасида X миқдор x_1 дан катта қийматни 1/6 эҳтимол билан қабул қилади.

Жавоби. $x_1 = 2\sqrt{3}$.

260. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3.

$F(x)$ интеграл функцияни топинг ва унинг графигини чизинг.

Ечилиши. 1. Агар $x \leqslant 2$ бўлса, $F(x) = 0$. Ҳақиқатан, X миқдор 2 дан кичик қийматларни қабул қилмайди. Демак, $x \leqslant 2$ бўлганда $F(x) = P(X < x) = 0$.

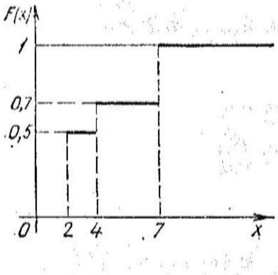
2. Агар $2 < x \leqslant 4$ бўлса, $F(x) = 0{,}5$. Ҳақиқатан, X миқдор 2 қийматни 0,5 эҳтимол билан қабул қилиши мумкин.

3. Агар $4 < x \leqslant 7$ бўлса, $F(x) = 0{,}7$. Ҳақиқатан, X миқдор 2 қийматни 0,5 эҳтимол билан ва 4 қийматни 0,2 эҳтимол билан қабул қилиши мумкин; демак, X бу қийматларнинг қайси бири бўлишидан қатъи назар бирини (биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолларини қўшиш теоремасига кўра) $0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$ эҳтимол билан қабул қилиши мумкин.

4. Агар $x > 7$ бўлса, $F(x) = 1$. Ҳақиқатан, $X \leqslant 7$ ҳодисаси муқаррар ҳодиса ва унинг эҳтимоли бирга тенг.

Шундай қилиб, изланаётган интеграл функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}5, & 2 < x \leqslant 4 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}7, & 4 < x \leqslant 7 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 7 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$



6-расм.

Бу функциянинг графиги 6-расмда келтирилган.

261. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3.

Интеграл функцияни топинг ва унинг графигини ясанг.

Жавоби.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<3 \text{ бўлганда,}\\ 0{,}2, & 3<x\leqslant 4 \text{ бўлганда,}\\ 0{,}3, & 4<x\leqslant 7 \text{ бўлганда,}\\ 0{,}7, & 7<x\leqslant 10 \text{ бўлганда,}\\ 1, & x>10 \text{ бўлганда.}\end{cases}$$

2-§. Узлуксиз тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотининг дифференциал функцияси

Эҳтимоллар тақсимотининг дифференциал функцияси деб, интеграл функциядан олинган биринчи тартибли ҳосилага айтилади:

$$f(x)=F'(x)$$

Кўпинча, „дифференциал функция" термини ўрнига „эҳтимол зичлиги" термини ишлатилади.

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тегишли қийматини қабул қилиш эҳтимоли

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади.

Дифференциал функцияни билган ҳолда интеграл функцияни

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

формула бўйича топиш мумкин.

Дифференциал функция қуйидаги хоссаларга эга.

1-хосса. *Дифференциал функция манфий эмас, яъни,*

$$f(x)\geqslant 0.$$

2-хосса. *Дифференциал функциядан $-\infty$ дан ∞ гача олинган хосмас интеграл бирга тенг:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Хусусан, агар тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx=1$$

бўлади.

262. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \text{ бўлганда,}\\ \sin x, & 0<x\leqslant \pi/2 \text{ бўлганда,}\\ 1, & x>\pi/2 \text{ бўлганда}\end{cases}$$

интеграл функцияси берилган. $f(x)$ дифференциал функцияни топинг.

Ечилиши. Дифференциал функция интеграл функциядан олинган биринчи ҳосилага тенг:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ бўлганда,}\\ \cos x, & 0<x\leqslant \pi/2 \text{ бўлганда,}\\ 0, & x>\pi/2 \text{ бўлганда.}\end{cases}$$

$x=0$ да $F'(x)$ биринчи тартибли ҳосила мавжуд эмаслигини эслатиб ўтамиз.

263. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \text{ бўлганда,}\\ \sin 2x, & 0<x\leqslant \frac{\pi}{4} \text{ бўлганда,}\\ 1, & x>\pi/4 \text{ бўлганда}\end{cases}$$

интеграл функцияси берилган. $f(x)$ дифференциал функцияни топинг.

Жавоби. $(0, \pi/4)$ интервалда $f(x)=2\cos 2x$; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$.

264. X узлуксиз тасодифий миқдор $(0, \pi/3)$ интервалда $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$ дифференциал функция билан

269. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 1 \text{ бўлганда,}\\ x-1/2, & 1<x\leqslant 2 \text{ бўлганда,}\\ 0, & x>2 \text{ бўлганда}\end{cases}$$

дифференциал функцияси берилган. $F(x)$ интеграл функцияни топинг.

Жавоби. $F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \text{ бўлганда,}\\ 1/2(x^2-x), & 1<x\leqslant 2 \text{ бўлганда,}\\ 0 & x>2 \text{ бўлганда.}\end{cases}$

270. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant \pi/6 \text{ бўлганда,}\\ 3\sin 3x, & \pi/6<x\leqslant\pi/3 \text{ бўлганда,}\\ 0, & x>\pi/3 \text{ бўлганда}\end{cases}$$

дифференциал функцияси берилган. $F(x)$ интеграл функцияни топинг.

Жавоби.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant\pi/6 \text{ бўлганда,}\\ -\cos 3x, & \pi/6<x\leqslant\pi/3 \text{ бўлганда,}\\ 1, & x>\pi/3 \text{ бўлганда.}\end{cases}$$

271. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси бутун Ox ўқда

$$f(x)=\frac{4C}{e^x+e^{-x}}$$

тенглик билан берилган. C ўзгармас параметрни топинг.

Ечилиши. $f(x)$ дифференциал функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

шартни қаноатлантириши лозим.

Бу шартнинг берилган функция учун бажарилишини талаб қиламиз:

$$4C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=1.$$

Бу ердан

$$C=\frac{1}{4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}}.$$

Дастлаб, ушбу аниқмас интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}=\operatorname{arctg} e^x.$$

Сўнгра, хосмас интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{e^x+e^{-x}}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} e^x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} e^x\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}e^a]+\lim_{b\to\infty}[\operatorname{arctg}e^b-\operatorname{arctg}1]=\pi/2.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\frac{\pi}{2}.$$

(**) ни(*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$C=1/2\pi.$$

272. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси бутун Ox ўқда

$$f(x)=\frac{2C}{1+x^2}$$

тенглик билан берилган. C ўзгармас параметрни топинг.

Жавоби. $C=1/2\pi$.

273. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси $(0, \pi/2)$ интервалда $f(x)=C\sin 2x$ га тенг; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. C ўзгармас параметрни топинг.

Жавоби. $C=1$.

берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. X нинг $(\pi/6, \pi/4)$ интервалга тегишли қийматини қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Шартга кўра $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{4}$, $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$. Демак, изланаётган эҳтимол

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 3x\,dx=\frac{\sqrt{2}}{9}.$$

(тушириб қолдирилган ҳисоблашларни китобхон мустақил бажариб кўриши мумкин).

265. Узлуксиз тасодифий миқдор $(0, \infty)$ интервалда

$$f(x)=\alpha e^{-\alpha x}(\alpha>0)$$

дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. X нинг $(1, 2)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(1<X<2)=(e^{\alpha}-1)/e^{2\alpha}$.

266. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси $(-\pi/2, \pi/2)$ интервалда $f(x)=\frac{\pi}{2}\cos^2 x$ га тенг; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. X нинг учта эркли синовда роса икки марта $(0, \pi/4)$ интервалда ётадиган қийматни қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p=P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi+2}{4\pi}$; $P_3(2)=C_3^2\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\cdot\frac{3\pi-2}{4\pi}$.

267. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ бўлганда},\\ \cos x, & 0<x\leqslant\pi/2 \text{ бўлганда},\\ 0, & x>\pi/2 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

$F(x)$ интеграл функцияни топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Агар $x\leqslant 0$ бўлса, $f(x)=0$, демак,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx=0.$$

Агар $0<x\leqslant\pi/2$ бўлса,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^x\cos x\,dx=\sin x.$$

Агар $x>\pi/2$ бўлса,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{x} 0\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1.$$

Шундай қилиб, изланаётган интеграл функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ бўлганда},\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi/2 \text{ бўлганда},\\ 1, & x>\pi/2 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

268. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ бўлганда},\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi/2 \text{ бўлганда},\\ 0, & x>\pi/2 \text{ бўлганда}\end{cases}$$

дифференциал функцияси берилган. $F(x)$ интеграл функцияни топинг.

Жавоби.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ бўлганда},\\ 1-\cos x, & 0<x\leqslant\pi/2 \text{ бўлганда},\\ 1, & x>\pi/2 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

274. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси $(0, 1)$ интервалда $f(x)=C\,\mathrm{arctg}\,x$ тенглик билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. C ўзгармас параметрни топинг.

Жавоби. $C=(\pi-\ln 4)/4$.

3-§. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари

Мумкин бўлган қийматлари бутун Ox ўққа тегишли б[illegible]лган *X узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши*

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда $f(x)$—дифференциал функ[illegible]ия. Интеграл абсолют яқинлашади, деб фараз қилинади.

Хусусан, агар барча мумкин бўлган қийматлар (a, b) инт[illegible]валга тегишли бўлса, у ҳолда

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Математик кутилишнинг юқорида дискрет тасодифий миқдорлар учун кўрсатилган барча хоссалари узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам сақланади.

Агар $Y=\varphi(X)$ мумкин бўлган қийматлари бутун Ox ўққа тегишли бўлган X тасодифий аргументнинг функцияси бўлса, у ҳолда

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\,dx.$$

Хусусан, мумкин бўлган қийматлар (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$M[\varphi(X)]=\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx.$$

Агар тақсимот эгри чизиғи $x=c$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда

$$M(X)=c.$$

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг $M_0(X)$ *модаси* деб, унинг шундай мумкин бўлган қийматига айтиладики, бу қийматга дифференциал функциянинг максимуми мос келади.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг $M_e(X)$ *медианаси* деб, унинг

$$P(X<M_e(X))=P(X>M_e(X))$$

тенглик билан аниқланадиган мумкин бўлган қийматига айтилади

Геометрик нуқтаи назардан медианани қуйидаги нуқта сифатида талқин қилиш мумкин: бу нуқтадаги $f(x)$ ордината тақсимот эгри чизиғи билан чегараланган юзни тенг иккига бўлади.

Мумкин бўлган қийматлари Ox га тегишли бўлган *X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2f(x)\,dx,$$

тенглик билан ёки бу тенгликка тенг кучли бўлган

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx-[M(X)]^2$$

тенглик билан аниқланади.

Хусусан, агар барча мумкин бўлган қийматлар (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$D(X)=\int_a^b(x-M(X))^2f(x)\,dx$$

ёки

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Дисперсиянинг юқорида дискрет миқдорлар учун кўрсатилган барча хоссалари узлуксиз миқдорлар учун ҳам сақланади

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши дискрет тасодифий миқдор учун таърифланганн каби таърифланади:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Агар $Y=\varphi(X)$ берилган X тасодифий аргументнинг функцияси, шу билан бирга барча мумкин бўлган қийматлар бутун Ox ўққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)-M[\varphi(x)])^2f(x)\,dx$$

ёки

$$D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)f(x)\,dx-[M[\varphi(x)]]^2.$$

Хусусан, барча мумкин бўлган қийматлар (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$D[\varphi(x)] = \int_a^b (\varphi(x) - M[\varphi(x)]^2 f(x)\,dx$$

ёки

$$D[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi^2(x) f(x)\,dx - \{M[\varphi(X)]\}^2.$$

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг k-тартибли бошланғич назарий моменти

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади.

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг k-тартибли марказий назарий моменти

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади.

Хусусан, агар барча мумкин бўлган қийматлар (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$\nu_k = \int_a^b x^k f(x)\,dx; \quad \mu_k = \int_a^b (x - M(X))^k f(x)\,dx.$$

Равшанки, агар $k=1$ бўлса, у ҳолда $\nu_1 = M(X)$, $\mu_1 = 0$; агар $k=2$ бўлса, у ҳолда $\mu_2 = D(X)$.

Марказий моментлар бошланғич моментлар орқали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

275. X тасодифий миқдор $(0, 1)$ интервалда $f(x) = 2x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Е ч и л и ш и. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Бу формулага $a=0$, $b=1$, $f(x) = 2x$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X) = 2\int_0^1 x \cdot x\,dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}\,x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

276. X тасодифий миқдор $(0, 2)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{2}x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X) = 4/3$.

277. X тасодифий миқдор $(-c, c)$ интервалда

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$$

дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Е ч и л и ш и. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Бу формулага $a = -c$, $b = c$, $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$ ни қўйиб,

$$M(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{x\,dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда интеграл остидаги функция тоқ ва интеграллаш чегаралари координаталар бошига нисбатан симметрик эканлигини ҳисобга олиб, интеграл нолга тенг деган хулосага келамиз. Демак,

$$M(X) = 0.$$

Агар тақсимот эгри чизиғини $x = 0$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эканлиги ҳисобга олинадиган бўлса, бу натижани дарҳол ҳосил қилиш мумкин.

Е ч и л и ш и. а) $f(x) = 2\cos 2x$ функция $(0, \pi/4)$ интервалда максимумга эга эмаслигига ишонч ҳосил қилиш осон, шунинг учун X модага эга эмас.

б) $M_e(X) = m_e$ медианани медиананинг ушбу таърифига асосланиб топамиз:

$$P(X < m_e) = P(X > m_e)$$

ёки худди шунинг ўзи

$$P(X < m_e) = \frac{1}{2}.$$

Шартга кўра X нинг қийматлари мусбат эканлигини ҳисобга олиб, бу тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$P(0 < X < m_e) = \frac{1}{2}$$

ёки

$$2\int_0^{m_e} \cos 2x\,dx = \sin 2m_e = \frac{1}{2}.$$

Бу ердан

$$2m_e = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Демак, изланаётган медиана

$$m_e = \frac{\pi}{12}.$$

286. X тасодифий миқдор $(2, 4)$ интервалда

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$$

дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг модасини, математик кутилишини ва медианасини топинг.

Е ч и л и ш и. Дифференциал функцияни қуйидаги кўринишда ифодалаб оламиз:

$$f(x) = \frac{3}{4}(x - 3)^2 + \frac{3}{4}.$$

Бундан кўринадики, $x = 3$ бўлганда дифференциал функция максимумга эришади, демак, $M_0(X) = 3$. (Албатта, максимумни дифференциал ҳисоб методлари билан топиш ҳам мумкин эди.)

Тақсимот эгри чизиғи $x = 3$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлгани учун $M[X] = 3$ ва $M_e(X) = 3$.

287. X тасодифий миқдор $(3, 5)$ интервалда

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4}$$

дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг модасини, математик кутилишини ва медианасини топинг.

Жавоби. $M_0(X) = M(X) = M_e(X) = 4$.

288. X тасодифий миқдор $(-1, 1)$ интервалда

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$$

дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг: а) модасини; б) медианасини топинг.

Жавоби. а) X модага эга эмас (дифференциал функция максимумга эга эмас); б) $M_e(X) = 0$ (тақсимот эгри чизиғи $x = 0$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик).

289. X тасодифий миқдор $x \geq 0$ бўлганда

$$f(x) = \frac{n}{x_0}x^{n-1}e^{-x^n/x_0}$$

дифференциал функция билан берилган (Вейбулл тақсимоти); $x < 0$ бўлганда $f(x) = 0$. X миқдорнинг модасини топинг.

Жавоби. $M_0(X) = \left[\frac{(n-1)x_0}{n}\right]^{1/n}.$

290. *Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши унинг энг катта ва энг кичик мумкин бўлган қийматлари орасида ётишини исботланг.*

Е ч и л и ш и. X ушбу $[a, b]$ кесмада $f(x)$ дифференциал функция билан берилган узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин, бу кесмадан ташқарида $f(x) = 0$, у ҳолда

$$a \leq x \leq b.$$

$f(x) \geq 0$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$a f(x) \leq x f(x) \leq b f(x)$$

278. X тасодифий миқдор

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

дифференциал функция (Лаплас тақсимоти) билан берилган. X миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X) = 0$.

279. X тасодифий миқдор $(0, 1)$ интервалда $f(x) = c(x^2 + 2x)$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. а) c параметрни топинг; б) X миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. а) $c = 3/4$; б) $M(X) = 11/16$.

280. Ушбу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ бўлганда}, \\ x/4, & 0 < x \leqslant 4 \text{ бўлганда}, \\ 1 & x > 4 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

интеграл функция билан берилган X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. X нинг дифференциал функциясини топамиз:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ бўлганда}, \\ 1/4 & 0 < x \leqslant 4 \text{ бўлганда}, \\ 0, & x > 4 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

Изланаётган математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = \int_0^4 x f(x) dx = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{x^2}{8} \Big|_0^4 = 2.$$

281. Мумкин бўлган қийматлари манфиймас X тасодифий миқдор

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha |x|} (\alpha > 0)$$

интеграл функция билан берилган. X миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X) = 1/\alpha$.

282. X тасодифий миқдор $(0, \pi)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. $Y = \varphi(X) = X^2$ функциянинг математик кутилишини (дастлаб Y нинг дифференциал функциясини топмасдан) топинг.

Ечилиши. X тасодифий аргументнинг $\varphi(X)$ функциясининг математик кутилишини ҳисоблаш формуласи

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$$

дан фойдаланамиз, бу ерда a ва b — X нинг мумкин бўлган қийматлари ётадиган оралиқнинг чегаралари. Бу формулага $\varphi(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$ ни қўйиб ва бўлаклаб интеграллаб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X^2) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x^2 \sin x \, dx = \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

283. X тасодифий миқдор $(0, \pi/2)$ интервалда $f(x) = \cos x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. $Y = \varphi(X) = X^2$ функциянинг математик кутилишини (Y нинг дифференциал функциясини топмасдан) топинг.

Жавоби. $M(X^2) = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = \frac{\pi^2 - 8}{4}$.

284. X тасодифий миқдор $(0, 1)$ интервалда $f(x) = x + 0{,}5$ дифференциал функция билан берилган, бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. $Y = X^3$ функциянинг математик кутилишини (дастлаб Y нинг дифференциал функциясини топмасдан) топинг.

Жавоби. $M(X^3) = 13/40$.

285. X тасодифий миқдор $(0, \pi/4)$ интервалда $f(x) = 2 \cos 2x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг: а) модасини; б) медианасини топинг.

ни ҳосил қиламиз. Бу қўш тенгсизликни a дан b гача бўлган оралиқда интеграллаймиз:

$$a \int_a^b f(x) \, dx \leqslant \int_a^b x f(x) \, dx \leqslant b \int_a^b f(x) \, dx.$$

Энди

$$\int_a^b f(x) \, dx = 1, \quad \int_a^b x f(x) \, dx = M(X)$$

эканлигини ҳисобга олиб узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a \leqslant M(X) \leqslant b.$$

291. Агар

$$\lim_{x \to -\infty} [xF(x)] = 0 \text{ ва } \lim_{x \to \infty} [x(1 - F(x)] = 0$$

бўлса, у ҳолда

$$M(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] \, dx - \int_{-\infty}^{0} F(x) \, dx$$

бўлишини исботланг.

Кўрсатма. Қуйидагига эгамиз:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x) \, dx + \int_0^{\infty} x f(x) \, dx.$$

$f(x)$ ни биринчи қўшилувчида $F'(x)$ орқали, иккинчи қўшилувчида эса $[1 - F(x)]'$ орқали алмаштиринг.

292. X тасодифий миқдор $(-c, c)$ интервалда

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}}$$

дифференциал функция билан берилган, бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X нинг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. Дисперсияни

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) \, dx$$

формула бўйича ҳисоблаймиз. Бунга $M(X) = 0$ (тақсимот эгри чизиғи $x = 0$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик), $a = -c$, $b = c$, $f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}}$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^{c} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{c} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}.$$

$x = c \sin t$ алмаштириш бажариб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) = \frac{c^2}{2}.$$

293. X тасодифий миқдор $(-3, 3)$ интервалда

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{9 - x^2}}$$

дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. а) X нинг дисперсиясини топинг; б) қайси бири эҳтимоллироқ: синаш натижасида $X < 1$ бўлишими ёки $X > 1$ бўлишими?

Жавоби: а) $D(X) = 4{,}5$; б) $P(-3 < X < 1) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3}$;

$$P(1 < X < 3) = 0{,}5 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3}.$$

294. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \, dx - [M(X)]^2$$

формула бўйича ҳисобланишини мумкинлигини исботланг.

Кўрсатма. Ушбу

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) \, dx$$

формуладан ва

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx = M(X), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1$$

тенгликлардан фойдаланинг.

295. X тасодифий миқдор $(0, \pi)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ дифференциал функция билан берилган: бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X нинг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. Дисперсияни

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2$$

формуладан фойдаланиб топамиз Бу формулага $M(X) = \pi/2$ ни (тақсимот эгри чизиғи $x = \pi/2$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик), $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx - \left[\frac{\pi}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Буни икки марта бўлаклаб интеграллаб,

$$\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx = \pi^2 - 4 \qquad (**)$$

ни топамиз. (**) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

296. X тасодифий миқдор (0,5) интервалда

$$f(x) = \frac{2}{25}x$$

дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X нинг дисперсиясини топинг.

Жавоби: $D(X) = 25/18$.

297. X тасодифий миқдор

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \text{ бўлганда}, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leqslant 2 \text{ бўлганда}, \\ 1, & x > 2 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

интеграл функция билан берилган. X миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. Дифференциал функцияни топамиз:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \text{ бўлганда}, \\ 1/4, & -2 < x \leqslant 2 \text{ бўлганда}, \\ 0, & x > 2 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

Математик кутилишини топамиз:

$$M(X) = \int_{-2}^{2} x f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x\cdot\frac{1}{4}\,dx = 0$$

(интеграл остидаги функция тоқ, интеграллаш чегаралари координаталар бошига нисбатан симметрик).

$M(X) = 0$ эканлигини ҳисобга олган ҳолда, изланаётган дисперсияни топамиз:

$$D(X) = \int_{-2}^{2}[x - M(X)]^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x^2\cdot\frac{1}{4}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{4}{3}.$$

298. X тасодифий миқдор

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^2}, & x \geqslant x_0 \text{ бўлганда } (x_0 > 0) \\ 0, & x < x_0 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

интеграл функция билан берилган. X нинг математик кутилишини, дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Кўрсатма. Аввал дифференциал функцияни топинг; сўнгра

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2$$

формуладан фойдаланинг.

Жавоби. $M(X) = 3x_0/2$. $D(X) = 3x_0^2/4$; $\sigma(X) = \sqrt{3}x_0/2$.

299. X тасодифий миқдор $(0, \pi)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. $Y = \varphi(X) = X^2$ функциянинг дисперсиясини дастлаб Y нинг дифференциал функциясини топмасдан ҳисобланг.

ни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^2\cdot x^n\cdot e^{-x}\,dx -$$

$$-(n+1)^2 = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+2}e^{-x}\,dx - (n+1)^2 = \frac{\Gamma(n+3)}{n!} -$$

$$-(n+1)^2 = \frac{(n+2)!}{n!} - (n+1)^2 = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} -$$

$$-(n+1)^2 = n + 1.$$

Шундай қилиб $D(X) = n + 1$.

302. X тасодифий миқдор $x \geqslant 0$ бўлганда

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha e^{-x/\beta} \quad (\alpha > -1,\ \beta > 0)$$

дифференциал функция (гамма-тақсимот) билан берилган; $x < 0$ бўлганда $f(x) = 0$. X миқдорнинг: а) математик кутилишини; б) дисперсиясини топинг.

Кўрсатма. $y = x/\beta$ алмаштириш бажаринг ва гамма-функциядан фойдаланинг

Жавоби. $M(X) = (\alpha+1)\beta$; б) $D(X) = (\alpha+1)\beta^2$.

303. Исталган узлуксиз тасодифий миқдор учун биринчи тартибли марказий момент нолга тенг эканлигини исботланг.

Ечилиши. Биринчи тартибли марказий моментнинг таърифига кўра

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)]f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx - M(X)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Сўнгра

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = M(X) \quad \text{ва} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

бўлишини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mu_1 = M(X) - M(X) = 0.$$

304. Ушбу иккинчи тартибли оддий

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty}(x - c)^2 f(x)\,dx$$

момент $c = M(X)$ бўлганда энг кичик қийматга эга бўлишини исботланг.

Ечилиши. μ_2' ни бундай алмаштирамиз:

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty}(x - c)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)) +$$

$$+ (M(X) - c)]^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)]^2 f(x)\,dx +$$

$$+ 2[M(X) - c]\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)]f(x)\,dx +$$

$$+ [M(X) - c]^2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)]f(x)\,dx = \mu_1 = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)]^2 f(x)\,dx = \mu_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

тенгликларни эътиборга олиб,

$$\mu_2' = \mu_2 + [M(X) - c]^2 \qquad (*)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу ердан кўриниб турибдики, μ_2' энг кичик қийматга $c = M(X)$ бўлганда эришади, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

(*) дан $\mu_2 = \mu_2' - [M(X) - c]^2$ келиб чиқишини эслатиб ўтамиз, яъни иккинчи тартибли марказий момент $c \neq M(X)$ бўлганда исталган иккинчи тартибли оддий моментдан кичик.

305. X тасодифий миқдор (0, 2) интервалда $f(x) = 0{,}5x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. Биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли бошланғич ва марказий моментларини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x) f(x)\,dx-[M[\varphi(X)]]^2.$$

Бунга

$\varphi(x)=x^2,\ f(x)=\frac{1}{2}\sin x,\quad a=0,\quad b=\pi,\quad M[\varphi(X)]=$ $=M[X^2]=\frac{\pi^2-4}{2}$ ни қўйиб (282-масалага қаранг) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^4\sin x\,dx-\left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Бўлаклаб интеграллаб,

$$\int_0^\pi x^4\sin x\,dx=\pi^4-12\pi^2+48 \qquad (**)$$

ни топамиз: (**) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$D(X^2)=\frac{\pi^4-16\pi^2+80}{4}.$$

300. X тасодифий миқдор $(0,\ \pi/2)$ интервалда $f(x)=\cos x$ дифференциал функция билан берилган, бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. $Y=\varphi(X)=X^2$ функциянинг дисперсиясини дастлаб Y нинг дифференциал функциясини топмасдан ҳисобланг.

Кўрсатма. Ушбу

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x) f(x)\,dx-[M[\varphi(X)]]^2$$

формуладан ва $M(X^2)=\frac{\pi^2-8}{4}$ (283-масалага қаранг) эканлигидан фойдаланинг.

Жавоби. $D(X^2)=20-2\pi^2$.

301. X тасодифий миқдор $x\geqslant 0$ бўлганда $f(x)=$ $=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$ дифференциал функция билан берилган; $x<0$ бўлганда $f(x)=0$. X нинг а) математик кутилишини; б) дисперсиясини топинг.

Ечилиши. а) математик кутилишни топамиз:

$$M(X)=\int_0^\infty x f(x)\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x\cdot x^n e^{-x}\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx.$$

Гамма-функция деб аталадиган ва ушбу тенглик билан аниқланадиган функциядан фойдаланамиз:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx. \qquad (*)$$

Кўриб турибмизки, гамма-функция белгиси остида турган аргумент (бутун сон n) интеграл белгиси остида турган x ҳарфининг даража кўрсаткичидан бирга ортиқ. Демак,

$$\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx=\Gamma(n+2). \qquad (**)$$

(**) ни (*) га қўйиб,

$$M(X)=\frac{\Gamma(n+2)}{n!} \qquad (***)$$

ни ҳосил қиламиз. Гамма-функциянинг ушбу хоссасидан фойдаланамиз:

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Кўриб турибмизки, бутун сонли аргументнинг гамма-функцияси бирга камайтирилган аргументнинг факториалига тенг. Демак,

$$\Gamma(n+2)=(n+1)! \qquad (****)$$

(****) ни (***) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X)=\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=n+1;$$

б) дисперсияни топамиз. Бунда

$$M(X)=n+1,\quad \int_0^\infty x^{n+2}e^{-x}dx=\Gamma(n+3)$$

Ечилиши. Ушбу

$$\nu_k=\int_0^2 x^k f(x)\,dx$$

формулага кўра бошланғич моментларни топамиз:

$$\nu_1=\int_0^2 x\cdot(0{,}5\,x)\,dx=\frac{4}{3};\ \nu_2=\int_0^2 x^2\cdot(0{,}5x)\,dx=2;$$

$$\nu_3=\int_0^2 x^3\cdot(0{,}5x)\,dx=3{,}2;\quad \nu_4=\int_0^2 x^4\cdot(0{,}5x)\,dx=\frac{16}{3}.$$

Марказий моментларни топамиз. Исталган тасодифий миқдорнинг биринчи тартибли марказий моменти нолга тенг: $\mu_1=0$.

Марказий моментларни бошланғич моментлар орқали ифодалайдиган

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2;\ \mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3,$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4$$

формулалардан фойдаланамиз. Бу формулаларга юқорида топилган бошланғич моментларни қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\mu_2=2/9,\quad \mu_3=-8/135,\quad \mu_4=16/135.$$

306. X тасодифий миқдор $(0,\ 1)$ интервалда $f(x)=2x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. Биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли бошланғич ва марказий моментларни топинг.

Жавоби.
$\nu_1=2/3,\ \ \nu_2=1/2,\ \ \nu_3=2/5,\ \ \nu_4=1/3;\ \ \mu_1=0,\ \ \mu_2=1/18,$
$\mu_3=-1/135,\ \ \mu_4=1/135.$

4-§. Текис тақсимот

Эҳтимолларнинг *текис тақсимоти* деб, X узлуксиз тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари тегишли бўладиган $(a,\ b)$ интервалда дифференциал функция ўзгармас қийматини сақлаган, чунончи $f(x)=\frac{1}{b-a}$ бўлган тақсимотга айтилади; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$.

307. Текис тақсимотнинг дифференциал функцияси $(a,\ b)$ интервалда C га тенг ўзгармас қийматни сақлайди; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. C ўзгармас параметрнинг қийматини топинг.

Жавоби. $C=1/(b-a)$.

308. Амперметр шкаласининг бўлим баҳоси 0,1 A га тенг. Стрелканинг кўрсатиши энг яқин бутун бўлинмагача яхлитланади. Кўрсаткичларни ўқишда 0,02 A дан ортиқ хатога йўл қўйилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Яхлитлаш хатосини иккита қўшни бутун бўлинма орасидаги интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдор сифатида қараш мумкин. Текис тақсимотнинг дифференциал функцияси:

$$f(x)=\frac{1}{b-a},$$

бу ерда $b-a$ — қаралаётган X нинг мумкин бўлган қийматлари жойлашган интервалнинг узунлиги; бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$. Қаралаётган масалада X нинг мумкин бўлган қийматлари ётадиган интервалнинг узунлиги 0,1 га тенг, шунинг учун

$$f(x)=\frac{1}{0{,}1}=10.$$

Агар санаш хатоси (0,02; 0,08) интервалда ётадиган бўлса, хато 0,02 дан ортиқ бўлишини тушуниш осон.

Ушбу

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(0{,}02<X<0{,}08)=\int_{0{,}02}^{0{,}08}10\,dx=0{,}6.$$

309. Ўлчов асбоби шкаласининг бўлим баҳоси 0,2 га тенг. Асбобнинг кўрсатиши энг яқин бутун бўлинмагача яхлитланади. Асбобнинг кўрсатишини ўқишда: а) 0,04 дан кичик; б) 0,05 дан ортиқ хато қилиниш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P(0<X<0{,}04)+P(0{,}16<X<0{,}20)=0{,}4;$
б) $P(0{,}05<X<0{,}15)=0{,}5.$

310. Бирор маршрутдаги автобуслар қатъий жадвал бўйича қатнайди. Ҳаракат интервали 5 мин. Бекатга келган йўловчи навбатдаги автобусни 3 мин дан кам кутиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(2 < X < 5) = 0{,}6$.

311. Электр соатнинг минут стрелкаси ҳар бир минутнинг охирида сакраб силжийди. Шу онда соатнинг кўрсатаётган вақти ҳақиқий вақтдан 20 сек дан ортиқ фарқ қилмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(0 < X < 1/3) + P\left(\frac{2}{3} < X < 1\right) = 2/3$.

312. Текис тақсимот қонуни (a, b) интервалда $f(x) = \frac{1}{b-a}$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. $F(x)$ интеграл функцияни топинг.

Жавоби.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ бўлганда}, \\ (x-a)/(b-a), & a < x < b \text{ бўлганда}, \\ 1, & x > b \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

313. (a, b) интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Текис тақсимот дифференциал функциясининг графиги $x = \frac{a+b}{2}$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик, шунинг учун
$$M(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Шундай қилиб, (a, b) интервалда текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши бу интервал учлари йиғиндисининг ярмига тенг. Шу натижанинг ўзини, албатта
$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$$
формула бўйича ҳам ҳосил қилиш мумкин эди.

314. (2, 8) интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X) = 5$.

315. (a, b) интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:
$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

Бу формулага $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $M(X) = \frac{a+b}{2}$ (313-масалага қаранг) ни қўйиб ва элементар алмаштиришларни бажариб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:
$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ўртача квадратик четланиш дисперсиядан олинган квадрат илдизга тенг:
$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

316. (2, 8) интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоби. $D(X) = 3$; $\sigma(X) = \sqrt{3}$.

317. Текис тақсимланган X тасодифий миқдор $(a-l,\ a+l)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{2l}$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X нинг математик кутилишини ва дисперсиясини топинг.

Жавоби. $M(X) = a$ (тақсимот „эгри чизиғи" $x = a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик) $D(X) = l^2/3$.

318. Доиранинг диаметри x тақрибий ўлчанган, шу билан бирга $a \leqslant x \leqslant b$. Диаметрни (a, b) интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдор деб қараб, доира юзининг математик кутилишини ва дисперсиясини топинг.

Ечилиши. 1. Доира юзи $Y = \varphi(X) = \frac{\pi X^2}{4}$ тасодифий миқдорнинг математик кутилишини
$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$$

X нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли
$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$
бу ерда $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$ — Лаплас функцияси.

Четланишнинг абсолют қиймати δ мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли:
$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Хусусан, $a = 0$ бўлганда
$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$
тенглик ўринли.

Нормал тақсимотнинг *асимметрияси, эксцесси, модаси ва медианаси* мос равишда қуйидагича:
$$A_s = 0,\ E_k = 0,\ M_0 = a,\ M_e = a,$$
бу ерда $a = M(X)$.

322. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $a = 3$ га, ўртача квадратик четланиши $\sigma = 2$ га тенг. X нинг дифференциал функциясини ёзинг.

Жавоби. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/8}$.

323. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини $M(X) = 3$, $D(X) = 16$ ни билган ҳолда ёзинг.

Жавоби. $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/32}$.

324. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдор
$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}$$
дифференциал функция билан берилган. X нинг математик кутилишини ва дисперсиясини топинг.

Жавоби. $M(X) = 1$; $D(X) = 25$.

325. Нормалланган нормал тақсимотнинг
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-x^2/2}\,dx$$
интеграл функцияси берилган. $f(x)$ дифференциал функцияни топинг.

Жавоби. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

326. Нормал тақсимот дифференциал функциясининг a ва σ параметрлари мос равишда X нинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши бўлишини исботланг.

Кўрсатма. $M(X)$ ва $D(X)$ ни топишда янги $z = \frac{x-a}{\sigma}$ ўзгарувчини киритиш ва $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}$ Пуассон интегралидан фойдаланиш лозим.

327. Ушбу
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$
Лаплас функцияси тоқ, яъни
$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$
эканлигини исботланг.

Кўрсатма. Ушбу
$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-z^2/2}dz$$
тенгликда $z = -t$ деб олинг.

328. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда 10 ва 2 га тенг. Синаш натижасида X нинг (12, 14) да ётадиган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

формула бўйича ҳисоблаймиз. Бу формулага $\varphi(x)=\frac{\pi x^2}{4}$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$ ни қўйиб ва интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M\left[\frac{\pi X^2}{4}\right]=\frac{\pi(b^2+ab+a^2)}{12}.$$

2. Доира юзининг дисперсиясини

$$D[\varphi(x)]=\int_a^b \varphi^2(x)\,f(x)\,dx-[M[\varphi(X)]]^2$$

формула бўйича топамиз. Бу формулага $\varphi(x)=\frac{\pi x^2}{4}$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$ ни қўйиб ва интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D\left[\frac{\pi X^2}{4}\right]=\frac{\pi^2}{720}(b-a)^2(4b^2+7ab+4a^2).$$

319. Кубнинг қирраси x тақрибий ўлчанган, шу билан бирга $a\leqslant x\leqslant b$. Кубнинг қиррасини $(a,\ b)$ интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдор сифатида қараб, куб ҳажмининг математик кутилишини ва дисперсиясини топинг.

Жавоби. $M(X^3)=\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}$;

$$D(X^3)=\frac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2.$$

320. X ва Y тасодифий миқдорлар эркли ва X миқдор $(a,\ b)$ интервалда, Y миқдор $(c,\ d)$ интервалда текис тақсимланган.
XY кўпайтманинг математик кутилишини топинг.

Кўрсатма. 313-масаланинг ечимидан фойдаланинг.
Жавоби. $M(XY)=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$.

321. X ва Y тасодифий миқдорлар эркли, шу билан бирга X миқдор $(a,\ b)$ интервалда, Y миқдор $(c,\ d)$ интервалда текис тақсимланган. XY кўпайтманинг дисперсиясини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$D(XY)=M[(XY)^2]-[M(XY)]^2=M(X^2Y^2)-[M(XY)]^2.$$

Эркли тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши кўпайтувчиларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг бўлгани учун

$$D(XY)=M(X^2)\cdot M(Y^2)-[M(X)\cdot M(Y)]^2. \qquad (*)$$

$M(X^2)$ ни

$$M[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx$$

формула бўйича топамиз. Бу формулага $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$ ни қўйиб ва интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X^2)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}. \qquad (**)$$

Шунга ўхшаш қуйидагини топамиз:

$$M(Y^2)=\frac{c^2+cd+d^2}{3}. \qquad (***)$$

$M(X)=\frac{a+b}{2}$, $M(Y)=\frac{c+d}{2}$ ни, шунингдек, (**) ва (***) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(XY)=\frac{(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)}{9}-\frac{(a+b)^2(c+d)^2}{4}.$$

5-§. Нормал тақсимот

Агар дифференциал функция

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

кўринишда бўлса, X узлуксиз тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимоти *нормал тақсимот* дейилади, бу ерда a — X нинг математик кутилиши, σ—ўртача квадратик четланиши.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Бунга $\alpha=12$, $\beta=14$, $a=10$ ва $\sigma=2$ ни қўйиб,

$$P(12<X<14)=\Phi(2)-\Phi(1)$$

ни ҳосил қиламиз. Жадвалдан (2-иловага қаранг)

$$\Phi(2)=0{,}4772,\quad \Phi(1)=0{,}3413$$

ни топамиз.
Изланаётган эҳтимол:

$$P(12<X<14)=0{,}1359.$$

329. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши мос равишда 20 ва 5 га тенг. Синов натижасида X нинг (15, 25) да ётадиган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(15<X<25)=0{,}6826$.

330. Автомат деталларни штамповка қилади. Деталнинг нормал тақсимланган узунлиги X (лойиҳадаги узунлиги) контрол қилинади. X нинг математик кутилиши 50 мм. Тайёрланган деталларнинг узунлиги амалда 32 мм дан кичик эмас ва 68 мм дан катта эмас. Тавакалига олинган деталнинг узунлиги: а) 55 мм дан ортиқ; б) 40 мм дан кичик бўлиши эҳтимолини топинг.

Кўрсатма. Аввал $P(32<X<68)=1$ тенгликдан σ ни топинг.
Жавоби. а) $P(55<X<68)=0{,}0823$; б) $P(32<X<40)=0{,}0027$.

331. Валнинг диаметрини ўлчаш систематик (бир хил ишорали) хатоларсиз ўтказилади. Ўлчашларнинг нисбий хатолари X ўртача квадратик четланиши $\sigma=10$ мм бўлган нормал қонунга бўйсунади. Ўлчаш абсолют қиймати бўйича 15 мм дан ортиқ бўлмайдиган хато билан ўтказилишининг эҳтимолини топинг.
Ечилиши. Тасодифий хатоларнинг математик кутилиши нолга тенг, шунинг учун

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формулани қўллаш мумкин. Бу формулага $\delta=15$, $\sigma=10$ ни қўйиб,

$$P(|X|<15)=2\Phi(1{,}5)$$

ни топамиз. Жадвалдан (2-илова)

$$\Phi(1{,}5)=0{,}4332$$

ни топамиз. Изланаётган эҳтимол:

$$P(|X|<15)=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664.$$

332. Бирор моддани тарозида тортиш систематик хатоларсиз ўтказилади. Тарозида тортишнинг тасодифий хатолари ўртача квадратик четланиши $\sigma=20$ г бўлган нормал қонунга бўйсунади. Тарозида тортиш абсолют қиймати бўйича 10 г дан ошмайдиган хато билан ўтказилишининг эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(|X|<10)=2\Phi(0{,}5)=0{,}383$.

333. Ўлчашнинг тасодифий хатолари ўртача квадратик четланиши $\sigma=20$ мм ва математик кутилиши $a=0$ бўлган нормал қонунга бўйсунади. Учта эркли ўлчашдан камида биттасининг хатоси абсолют қиймат бўйича 4 мм дан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P\simeq 0{,}41$.

334. Автомат шарчалар тайёрлайди. Агар шарча X диаметрининг лойиҳадаги ўлчамидан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,7 мм дан кичик бўлса, шарча яроқли ҳисобланади. X тасодифий миқдор $\sigma=0{,}4$ мм ўртача квадратик четланиш билан нормал тақсимланган деб ҳисоблаб, тайёрланган юзта шарчадан нечтаси яроқли бўлишини топинг.
Ечилиши. X—четланиш (шарча диаметрининг лойиҳадаги ўлчамдан) бўлгани учун $M(X)=a=0$.
Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Бу формулага $\delta=0{,}7$, $\sigma=0{,}4$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|X|<0{,}7)=2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right)=2\Phi(1{,}75)=2\cdot 0{,}4599=0{,}92.$$

Шундай қилиб, 0,7 мм дан кичик четланишнинг эҳтимоли 0,92 га тенг. Бундан, 100 та шарчадан тахминан 92 таси яроқли бўлиши келиб чиқади.

335. Автомат тайёрлаган деталнинг контрол қилинаётган ўлчамининг лойиҳадаги ўлчамдан четланиши 10 мм дан ортиқ бўлмаса, у яроқли ҳисобланади. Контрол қилинаётган ўлчамнинг лойиҳадаги ўлчамдан тасодифий четланишлари ўртача квадратик четланиши $\sigma=5$ мм ва математик кутилиши $a=0$ бўлган нормал қонунга бўйсунади. Автомат неча процент яроқли деталь тайёрлайди?

Жавоби. Тахминан 95%.

336. Бўйи 30 м ва эни 8 м бўлган кўприк бўйлаб унинг устидан учиб ўтадиган самолёт бомбалар ташлайди. X ва Y тасодифий миқдорлар (кўприкнинг вертикал ва горизонтал симметрия ўқларидан бомба тушган жойгача бўлган масофалар) эркли ва нормал тақсимланган бўлиб, уларнинг ўртача квадратик четланишлари мос равишда 6 м ва 4 м га, математик кутилишлари эса нолга тенг: а) кўприкка ташланган битта бомбанинг нишонга тушиш эҳтимолини топинг; б) агар иккита бомба ташланган бўлса, кўприкнинг яксон бўлиш эҳтимолини топинг, бунда кўприкнинг яксон бўлиши учун битта бомба тушиши кифоя эканлиги маълум.

Жавоби.

а) $P(|X| < 15)\cdot P(|Y| < 4) = 2\Phi(2{,}5)\cdot 2\Phi(1) = 0{,}6741$;

б) $P = 1-(1-0{,}6741)^2 = 0{,}8938$.

337. X тасодифий миқдор $a=10$ математик кутилиш билан нормал тақсимланган. X нинг $(10,\ 20)$ интервалга тушиш эҳтимоли 0,3 га тенг. X нинг $(0,\ 10)$ интервалга тушиш эҳтимоли нимага тенг?

Ечилиши. Нормал эгри чизиқ $x=a=10$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлгани учун юқоридан нормал эгри чизиқ, пастдан $(0,\ 10)$ ва $(10,\ 20)$ интерваллар билан чегараланган юзлар ўзаро тенг. Бу юзлар сон жиҳатдан X нинг тегишли интервалга тушиш эҳтимолига тенг бўлгани учун:

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0{,}3,$$

338. X тасодифий миқдор $a=25$ математик кутилиш билан нормал тақсимланган. X нинг $(10,\ 15)$ интервалга тушиш эҳтимоли 0,2 га тенг. X нинг $(35,\ 40)$ интервалга тушиш эҳтимоли нимага тенг?

Жавоби. $P(35 < X < 40) = P(10 < X < 15) = 0{,}2$.

339. Ушбу

$$P(|X-a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$$

тенгликни, яъни берилган t да Лаплас функциясининг иккиланган қиймати нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг $X-a$ четланиши абсолют қиймати бўйича σt дан кичик бўлиш эҳтимолини аниқлашини исботланг.

Кўрсатма. $\delta/\sigma = t$ деб, $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуладан фойдаланинг.

340. Қуйидаги „уч сигма" қоидасини исботланг: нормал тақсимланган тасодифий миқдор четланишининг абсолют қиймати бўйича ўртача квадратик четланишнинг учланганидан кичик бўлиш эҳтимоли 0,9973 га тенг.

Кўрсатма. $t=3$ деб, 339-масаланинг ечимидан фойдаланинг.

341. X тасодифий миқдор $a=10$ математик кутилиш ва $\sigma=5$ ўртача квадратик четланиш билан нормал тақсимланган. Синов натижасида X нинг 0,9973 эҳтимол билан тушадиган интервалини топинг.

Жавоби $(a-3\sigma,\ a+3\sigma) = (-5,\ 25)$.

342. X тасодифий миқдор $\sigma=5$ мм ўртача квадратик четланиш билан нормал тақсимланган. Синов натижасида X нинг 0,9973 эҳтимол билан тушадиган интервалининг узунлигини топинг.

Жавоби. $6\sigma = 30$ мм.

343. Станок-автомат валчалар тайёрлайди, бунда валчаларнинг диаметри X контрол қилинади. X ни $a=10$ мм математик кутилиш ва $\sigma=0{,}1$ мм ўртача квадратик четланиш билан нормал тақсимланган тасодифий миқдор деб ҳисоблаб, тайёрланган валчаларнинг диаметрлари 0,9973 эҳтимол билан ётадиган интервални топинг.

Жавоби. (9,7; 10,3).

$= 1 - e^{-0{,}4x}$ интеграл функция билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг λ параметрини топинг.

Жавоби. а) $\lambda = 2$; б) $\lambda = 0{,}4$.

349. Агар X узлуксиз тасодифий миқдор кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлса, X нинг $(a,\ b)$ интервалга тушиш эҳтимоли $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ га тенг бўлишини кўрсатинг.

Ечилиши. Биринчи усул. X миқдор

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x \geq 0)$$

интеграл функция билан берилган бўлсин. У ҳолда X нинг $(a,\ b)$ интервалга тушиш эҳтимоли қуйидагича бўлади (VI боб, 1-§ га қаранг):

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = [1-e^{-\lambda b}] - [1 - e^{-\lambda a}] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Иккинчи усул. X миқдор $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$ дифференциал функция билан берилган бўлсин. У ҳолда (VI боб, 2-§ га қаранг).

$$P(a < X < b) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = \lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x}\right)\Big|_a^b = -\,[e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

350. X узлуксиз тасодифий миқдор $x \geq 0$ бўлганда $f(x) = 3e^{-3x}$ дифференциал функция билан берилган кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган; $x < 0$ бўлганда $f(x) = 0$. Синов натижасида X нинг (0,13; 0,7) интервалга тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Шартга кўра $a = 0{,}13$; $b = 0{,}7$; $\lambda=3$ эканлигини ҳисобга олиб ва e^{-x} функциянинг қийматлари жадвалидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-3\cdot 0{,}13} - e^{-3\cdot 0{,}7} = e^{-0{,}39} - e^{-2{,}1} = 0{,}677 - 0{,}122 = 0{,}555.$$

351. X узлуксиз тасодифий миқдор $x \geq 0$ бўлганда

$$f(x) = 0{,}04 \cdot e^{-0{,}04x}$$

дифференциал функция билан берилган кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган; $x < 0$ бўлганда $f(x) = 0$. Синов натижасида X нинг $(1,\ 2)$ интервалга тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(1 < X < 2) = 0{,}038$.

352. Узлуксиз тасодифий миқдор $x \geq 0$ бўлганда $F(x) = 1 - e^{-0{,}6x}$ интеграл функция билан берилган кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган; $x < 0$ бўлганда $F(x) = 0$, X нинг синов натижасида $(2,\ 5)$ интервалга тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(2 < X < 5) = 0{,}252$.

353. Ушбу кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилишини топинг.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0);\ f(x) = 0 (x < 0).$$

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

$x < 0$ бўлганда $f(x) = 0$ ва $x \geq 0$ бўлганда $f(x) = e^{-\lambda x}$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$M(X) = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx$$

ни ҳосил қиламиз. Ушбу формула бўйича бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_0^{\infty} u\,dv = uv\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v\,du,$$

бунда $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$ деймиз, у ҳолда $du = dx$, $v = \frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}$ ва ҳисоблашларни бажариб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(\lambda) = \frac{1}{\lambda};$$

344. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдор

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

дифференциал функция билан берилган. X нинг модасини ва медианасини топинг.

Ечилиши. $M_0(X)$ мода деб, X нинг шундай мумкин бўлган қийматига айтиладики, бу қийматда дифференциал функция максимумга эга бўлади. Қуйидагиларга ишонч ҳосил қилиш осон: $x=a$ бўлганда $f'(a)=0$, $x<a$ бўлганда $f'(x)>0$, $x>a$ бўлганда $f'(x)<0$. Шундай қилиб, $x=a$ нуқта максимум нуқтаси, демак,

$$M_0(X) = a.$$

$M_e(X)$ медиана деб, X нинг шундай мумкин бўлган қийматига айтиладики, бу қийматда $f(x)$ ордината тақсимот эгри чизиғи билан чегараланган юзни тенг иккига бўлади. Нормал эгри чизиқ ($f(x)$ функциянинг графиги) $x=a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлгани учун $f(a)$ ордината нормал эгри чизиқ билан чегараланган юзни тенг иккига бўлади. Демак, $M_e(X)=a$.

Шундай қилиб, нормал тақсимотнинг модаси ва медианаси a математик кутилиш билан бир хил бўлади.

345. X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлиб, бунда математик кутилиш $a=0$ га, ўртача квадратик четланиш σ га тенг. X нинг (α, β) $(\alpha>0, \beta>\alpha)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли энг катта бўладиган ҳолда σ нинг қийматини топинг.

Кўрсатма. Ушбу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\beta/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha/\sigma} e^{-z^2/2}\,dz = \varphi(\sigma)$$

формуладан фойдаланинг; $\varphi'(\sigma) = 0$ тенгламадан σ ни топинг.

Жавоби. $\sigma = \sqrt{\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2(\ln\beta - \ln\alpha)}}$.

6-§. Кўрсаткичли тақсимот ва унинг сонли характеристикалари

Кўрсаткичли (экспоненциал) тақсимот деб, X узлуксиз тасодифий миқдорнинг

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ бўлганда;} \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \text{ бўлганда} \end{cases} \qquad (*)$$

дифференциал функция билан тавсифланадиган эҳтимоллари тақсимотига айтилади, бу ерда λ — ўзгармас мусбат катталик.

Кўрсаткичли тақсимотнинг интеграл функцияси:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ бўлганда,} \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \text{ бўлганда.} \end{cases} \qquad (**)$$

Кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тушиш эҳтимоли:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши, дисперсияси ва ўртача квадратик четланиши мос равишда қуйидагича:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Шундай қилиб, кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши ўзаро тенг.

346. Агар кўрсаткичли тақсимотнинг параметри $\lambda = 5$ бўлса, унинг дифференциал функциясини ва интеграл функциясини топинг.

Ечилиши. $\lambda = 5$ ни (*) ва (**) муносабатларга қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ бўлганда,} \\ 5e^{-5x}, & x \geqslant 0 \text{ бўлганда,} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ бўлганда,} \\ 1-e^{-5x} & x \geqslant 0 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

347. Агар кўрсаткичли тақсимотнинг параметри $\lambda = 6$ бўлса, унинг дифференциал ва интеграл функциясини топинг.

Жавоби. $(0, \infty)$ интервалда $f(x) = 6e^{-6x}$; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$; $(0, \infty)$ интервалда $F(x) = 1 - e^{-6x}$, бу интервалдан ташқарида $F(x) = 0$.

348. а) $x<0$ бўлганда $f(x)=0$; $x \geqslant 0$ бўлганда $f(x) = 2e^{-2x}$ дифференциал функция билан берилган; б) $x<0$ бўлганда $F(x)=0$; $x \geqslant 0$ бўлганда $F(x) =$

яъни кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши λ га тескари катталикка тенг.

354. $f(x) = 5 \cdot e^{-5x}$ $(x \geqslant 0)$ дифференциал функция билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X) = 0{,}2$.

355. $F(x) = 1 - e^{-0{,}1x}$ $(x \geqslant 0)$ интеграл функция билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(X) = 10$.

356. $x<0$ бўлганда $f(x)=0$, $x \geqslant 0$ бўлганда $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ кўрсаткичли тақсимотнинг: а) дисперсиясини; б) ўртача квадратик четланишини топинг.

Ечилиши. а) Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

$x<0$ бўлганда $f(x)=0$ ни ва $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ ни (353-масалага қаранг) эътиборга олиб,

$$D(X) = \lambda\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Икки марта бўлаклаб интеграллаб,

$$\lambda\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

ни топамиз. Демак, изланаётган дисперсия

$$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

яъни кўрсаткичли тақсимотнинг дисперсияси λ^2 га тескари катталикка тенг.

б) Ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda},$$

яъни кўрсаткичли тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши λ га тескари катталикка тенг.

357. $f(x) = 10e^{-10x}$ $(x \geqslant 0)$ дифференциал функция билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоби. $D(X) = 0{,}01$; $\sigma(X) = 0{,}1$.

358. $F(x) = 1 - e^{-0{,}4x}$ $(x \geqslant 0)$ интеграл функция билан берилган кўрсаткичли тақсимотнинг дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоби. $D(X) = 6{,}25$; $\sigma(X) = 2{,}5$.

359. Кўрсаткичли тақсимотнинг дифференциал функцияси $x<0$ бўлганда $f(x)=0$, $x \geqslant 0$ да $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ кўринишда эканлиги студентнинг ёдида бор. Лекин у C нинг нимага тенг эканлигини хотирлай олмади. C ни топиш талаб қилинади.

Кўрсатма. Дифференциал функциянинг $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ хоссасидан фойдаланинг.

Жавоби. $C = \lambda$.

360. Кўрсаткичли тақсимотнинг учинчи тартибли назарий марказий моменти $\mu_3 = M[X - M(X)]^3$ ни топинг.

Кўрсатма. 353 ва 356-масалаларнинг ечимларидан фойдаланинг.

Жавоби. $\mu_3 = 2/\lambda^3$.

361. Кўрсаткичли тақсимотнинг асимметрияси $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$ ни топинг.

Кўрсатма. 353 ва 360-масалаларнинг ечилишларидан фойдаланинг.

Жавоби. $A_s = 2$.

362. Кўрсаткичли тақсимотнинг тўртинчи тартибли назарий марказий моменти $\mu_4 = M[X - M(X)]^4$ ни топинг.

Жавоби. $\mu_4 = 9/\lambda^4$.

363. Кўрсаткичли тақсимотнинг эксцесси $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3$ ни топинг.

Жавоби. $E_k = 6$.

364. T узлуксиз тасодифий миқдор — интенсивлиги λ бўлган энг оддий оқимнинг (IV боб, 2-§ га қаранг) иккита кетма-кет ҳодисасининг рўй бериши орасидаги вақт $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geqslant 0)$ кўрсаткичли тақсимотга эгалигини исботланг.

Ечилиши. Айтайлик, t_0 моментда оқимнинг A_1 ҳодисаси рўй берган бўлсин. $t_1 = t_0 + t$ бўлсин (яққол кўриш мақсадида вақт ўқини чизишни ва унда t_0, t_1 нуқталарни белгилашни тавсия этамиз).

Агар оқимнинг A_1 ҳодисадан кейин келадиган камида битта ҳодисаси (t_0, t_1) интервалнинг *ичида ётадиган интервалда*, масалан, (t_0, t_2) интервалда рўй берса, у ҳолда иккита кетма-кет ҳодисанинг рўй бериши орасидаги T вақт t дан кичик, яъни $T < t$ бўлади.

$P(T < t)$ эҳтимолни топиш учун „(t_0, t_1) интервалнинг ичида оқимнинг камида битта ҳодисаси рўй берди" ва „(t_0, t_1) интервалнинг ичида оқимнинг битта ҳам ҳодисаси рўй бермади" ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалар эканлигини эътиборга оламиз (уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг).

t вақт ичида оқимнинг битта ҳам ҳодисасининг рўй бермаслик эҳтимоли

$$P_t(0) = \frac{(\lambda t)^0 \cdot e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

Демак, қарама-қарши ҳодисанинг бизни қизиқтираётган эҳтимоли:

$$P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

ёки [интеграл функциянинг таърифи $F(t) = P(T < t)$ га кўра]

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

365. Энг оддий оқимнинг интенсивлиги $\lambda = 5$ берилган. T узлуксиз тасодифий миқдор — оқимнинг иккита кетма-кет ҳодисасининг рўй бериши орасидаги вақтнинг: а) математик кутилишини; б) дисперсиясини; в) ўртача квадратик четланишини топинг.

Кўрсатма. 364-масаланинг ечилишидан фойдаланинг.

Жавоби а) $M(T) = 0{,}2$; б) $D(T) = 0{,}04$; в) $\sigma(T) = 0{,}2$.

366. Шосседа автомобилларнинг техник ҳолатини текшириш учун контрол пункти ташкил этилган. Машиналар оқими энг оддий оқим ва машиналарнинг контрол пункти олдидан ўтиш вақти (соат ҳисобида) $f(t) = 5e^{-5t}$ кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. T тасодифий миқдор — контролёрнинг навбатдаги машинани кутиш вақтининг математик кутилишини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Кўрсатма. Контролёрнинг машинани кутиш вақти ва машинанинг контрол пункти олдидан ўтиш вақти бир хил тақсимланган.

Жавоби $M(T) = \sigma(T) = 0{,}2$ соат. Контролёр навбатдаги машинани ўртача 12 мин кутади.

7-§. Ишончлилик функцияси

Элемент деб, „содда" ёки „мураккаб" бўлишидан қатъи назар бирор қурилмага айтилади. Элемент вақтнинг бирор $t_0 = 0$ моментида ишлай бошласин, t моментда эса у бузилсин. T орқали узлуксиз тасодифий миқдор—элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлигини, λ орқали эса бузилишлар интенсивлигини (вақт бирлиги ичида бузилишлар ўртача сонини) белгилаймиз.

Кўпинча, элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги кўрсаткичли тақсимотга эга бўлиб, бу тақсимотнинг

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$$

интеграл функцияси давомийлиги t бўлган вақт ичида элементнинг бузилиш эҳтимолини *аниқлайди.*

$R(t)$ ишончлилик функцияси деб, элементнинг давомийлиги t бўлган вақт ичида бузилмасдан ишлаш эҳтимолини аниқлайдиган ушбу функцияга айтилади:

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

367. Элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t}$ $(t > 0)$ кўрсаткичли тақсимотга эга. Давомийлиги $t = 50$ соат бўлган вақт ичида: а) элементнинг бузилиш эҳтимолини; б) элементнинг бузилмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. а) $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t}$ интеграл функция элементнинг давомийлиги t бўлган вақт ичида бузилиш эҳтимолини аниқлагани учун $t = 50$ ни интеграл функцияга қўйиб, элементнинг бузилиш эҳтимолини топамиз:

$$F(50) = 1 - e^{-0{,}01 \cdot 50} = 1 - e^{-0{,}5} = 1 - 0{,}606 = 0{,}394;$$

11—7280

сивлиги. Ишончлиликнинг кўрсаткичли қонунининг ушбу характеристик хоссасини исботланг: вақтнинг давомийлиги t бўлган интервалда элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли қаралаётган интервалнинг бошланишидан олдинги ишлаш вақтига боғлиқ бўлмасдан, балки фақат интервалнинг давомийлиги (берилган бузилишлар интенсивлиги λ да) t га боғлиқ бўлади.

Ечилиши. Ҳодисаларни қуйидагича белгилаймиз: A — элементнинг давомийлиги t_0 бўлган $(0, t_0)$ интервалда бузилмасдан ишлаши; B — элементнинг давомийлиги t бўлган $(t_0, t_0 + t)$ интервалда бузилмасдан ишлаши. У ҳолда AB — элементнинг давомийлиги $t_0 + t$ бўлган $(0, t_0 + t)$ интервалда бузилмасдан ишлаши.

$R(t) = e^{-\lambda t}$ формула бўйича бу ҳодисаларнинг эҳтимолларини топамиз:

$$P(A) = e^{-\lambda t_0},\ P(B) = e^{-\lambda t},\ P(AB) = e^{-\lambda(t_0 + t)} = e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Дастлабки $(0, t_0)$ интервалда бузилмасдан ишлаганлиги шартида элементнинг $(t_0, t_0 + t)$ интервалда бузилмасдан ишлашининг шартли эҳтимолини топамиз:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t}.$$

Ҳосил қилинган формулада t_0 иштирок этмасдан, балки фақат t иштирок этмоқда, ана шунинг ўзи элементнинг олдинги интервалда ишлаш вақти унинг кейинги интервалда бузилмасдан ишлаш эҳтимолининг катталигига таъсир этмасдан, бу эҳтимол кейинги $(t_0, t_0 + t)$ интервалнинг давомийлиги t га боғлиқлигини билдиради, ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Бошқача айтганда, вақтнинг давомийлиги t бўлган интервалида элементнинг бузилмасдан ишлашининг дастлабки интервалда бузилмасдан ишлаган деган фаразда ҳисобланган $P_A(B)$ шартли эҳтимоли $P(B)$ шартсиз эҳтимолга тенг.

Еттинчи боб
БИР ВА ИККИ ТАСОДИФИЙ АРГУМЕНТ ФУНКЦИЯСИНИНГ ТАҚСИМОТИ

1-§. Бир тасодифий аргументнинг функцияси

Агар X тасодифий аргументнинг ҳар бир мумкин бўлган қийматига Y тасодифий аргументнинг битта мумкин бўлган қиймати мос келса, у ҳолда Y ни *X тасодифий аргументнинг функцияси* дейилади ва бундай ёзилади: $Y = \varphi(X)$.

Агар X дискрет тасодифий миқдор ва $Y = \varphi(X)$ функция монотон бўлса, у ҳолда X нинг турли қийматларига Y нинг турли қийматлари мос келади, шу билан бирга X ва Y нинг мос қийматларининг эҳтимоллари бир хил бўлади. Бошқача айтганда, Y нинг мумкин бўлган қийматлари

$$y_i = \varphi(x_i)$$

тенгликдан топилади, x_i — аргумент X нинг мумкин бўлган қийматлари; Y нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i)$$

тенгликдан топилади.

Агар $Y = \varphi(X)$ монотон функция бўлмаса, у ҳолда, умуман айтганда, X нинг турли қийматларига Y нинг бир хил қийматлари мос келиши мумкин (X нинг мумкин бўлган қийматлари $\varphi(x)$ функция монотон бўлмайдиган интервалга тушганда шундай бўлади). Бундай ҳолда Y нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолларини топиш учун X нинг Y бир хил қиймат қабул қиладиган қийматларининг эҳтимолларини қўшиш лозим. Бошқача айтганда, Y нинг такрорланадиган қийматининг эҳтимоли X нинг Y бир хил қиймат қабул қиладиган мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари йиғиндисига тенг.

Агар X ушбу $f(x)$ дифференциал функция билан берилган узлуксиз тасодифий миқдор ва $y = \varphi(x)$ дифференциалланувчи қатъий ўсувчи ёки қатъий камаювчи функция бўлиб, унга тескари функция $x = \psi(y)$ бўлса, у ҳолда Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$$

тенгликдан топилади.

Агар $y = \varphi(x)$ функция X нинг мумкин бўлган қийматлари интервалида монотон бўлмаса, у ҳолда бу интервални $\varphi(x)$ функция монотон бўладиган интервалларга ажратиб, монотонлик интервалларининг ҳар бири учун $g_i(y)$ дифференциал функцияларни топиш, кейин эса $g(y)$ ни

$$g(y) = \sum g_i(y)$$

йиғинди кўринишида ифодалаш лозим.

Масалан, $\varphi(x)$ функция иккита интервалда монотон бўлиб, бу интервалларда тегишли тескари функциялар $\psi_1(y)$ ва $\psi_2(y)$ га тенг *бўлса, у ҳолда*

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi_2'(y)|.$$

373. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5.

$Y = 3X$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

б) „элемент бузилади“ ва „элемент бузилмайди“ ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун элементнинг бузилмаслик эҳтимоли:

$$P = 1 - 0{,}394 = 0{,}606.$$

Шу натижанинг ўзини бевосита ишончлилик функцияси $R(t) = e^{-\lambda t}$ дан фойдаланиб топиш ҳам мумкин, бу функция элементнинг давомийлиги t бўлган вақт ичида бузилмаслик эҳтимолини аниқлайди:

$$R(50) = e^{-0{,}01 \cdot 50} = e^{-0{,}5} = 0{,}606.$$

368. Элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги $F(t) = 1 - e^{0{,}03t}$ кўрсаткичли тақсимотга эга. Давомийлиги $t = 100$ соат бўлган вақт ичида: а) элементнинг бузилиш эҳтимолини; б) элементнинг бузилмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $F(100) = 0{,}95$; б) $R(100) = 0{,}05$.

369. Иккита эркли ишлайдиган элемент синалмоқда. Биринчи элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги $F_1(t) = 1 - e^{0{,}02t}$ кўрсаткичли тақсимотга, иккинчи элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги $F_2(t) = 1 - e^{0{,}05t}$ кўрсаткичли тақсимотга эга. Давомийлиги $t = 6$ соат бўлган вақт ичида: а) иккала элементнинг бузилиш эҳтимолини; б) иккала элементнинг бузилмаслик эҳтимолини; в) фақат битта элементнинг бузилиш эҳтимолини; г) камида битта элементнинг бузилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. а) биринчи элементнинг бузилиш эҳтимоли:

$$P_1 = F(6) = 1 - e^{-0{,}02 \cdot 6} = 1 - e^{-0{,}12} = 1 - 0{,}887 = 0{,}113.$$

Иккинчи элементнинг бузилиш эҳтимоли:

$$P_2 = 1 - e^{-0{,}05 \cdot 6} = 1 - e^{-0{,}3} = 1 - 0{,}741 = 0{,}259.$$

Иккала элементнинг бузилиш эҳтимоли эркли ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремасига асосан:

$$P_1 P_2 = 0{,}113 \cdot 0{,}259 = 0{,}03.$$

б) Биринчи элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли:

$$q_1 = R_1(6) = e^{-0{,}02 \cdot 6} = e^{-0{,}12} = 0{,}887.$$

Иккинчи элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли:

$$q_2 = R_2(6) = e^{-0{,}05 \cdot 6} = e^{-0{,}3} = 0{,}741.$$

Иккала элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли:

$$q_1 q_2 \cdot 0{,}887 \cdot 0{,}741 = 0{,}66.$$

в) Фақат битта элементнинг бузилиш эҳтимоли:

$$P_1 q_2 + P_2 q_1 = 0{,}113 \cdot 0{,}741 + 0{,}259 \cdot 0{,}887 = 0{,}31.$$

г) Камида битта элементнинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоли:

$$P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}66 = 0{,}34.$$

370. Бир-биридан эркли ишлайдиган учта элемент синалмоқда. Элементларнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган: биринчи элемент учун $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$, иккинчи элемент учун $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$, учинчи элемент учун $F_3(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$. Вақтнинг (0, 5) соат интервалида: а) фақат битта элементнинг бузилиш эҳтимолини; б) фақат иккита элементнинг бузилиш эҳтимолини; в) учала элементнинг бузилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) 0,445; б) 0,29; в) 0,05.

371. Бир-биридан эркли ишлайдиган учта элемент синалмоқда. Элементларнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган: биринчи элемент учун $f_1(t) = 0{,}1\,e^{-0{,}1t}$, иккинчи элемент учун $f_2(t) = 0{,}2e^{-0{,}2t}$, учинчи элемент учун $f_3(t) = 0{,}3e^{-0{,}3t}$. Вақтнинг (0, 10) соат интервали ичида: а) камида битта элементнинг; б) камида иккита элементнинг бузилиш эҳтимолини топинг.

Кўрсатма. 370-масалани ечишда ҳосил қилинган натижалардан фойдаланинг.

Жавоби. а) 0,95; б) 0,35.

372. Ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни деб,

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

тенглик билан аниқланадиган ишончлилик функциясига айтилади, бу ерда λ мусбат сон—бузилишлар интен-

Ечилиши. $Y = 3X$ миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1 = 3 \cdot 1 = 3;\; y_2 = 3 \cdot 3 = 9;\; y_3 = 3 \cdot 5 = 15.$$

Кўриб турибмизки, X нинг турли мумкин бўлган қийматларига Y нинг турли мумкин бўлган қийматлари мос келади. Бу $y = \varphi(x) = 3x$ функция монотонлигидандир.

Y нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолларини топамиз. $Y = y_1 = 3$ бўлиши учун X миқдор $x_1 = 1$ қийматни қабул қилиши етарли. $X = 1$ ҳодисанинг эҳтимоли эса шартга кўра 0,4 га тенг; демак, $Y = y_1 = 3$ ҳодисанинг ҳам эҳтимоли 0,4 га тенг.

Y нинг қолган мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолларини шунга ўхшаш топамиз:

$$P(Y=9) = P(X=3) = 0{,}1;$$
$$P(Y=15) = P(X=5) = 0{,}5.$$

Y нинг изланаётган тақсимот қонунини ёзамиз:

Y	3	9	15
p	0,4	0,1	0,5.

374. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	3	6	6
p	0,2	0,1	0,7

$Y = 2X + 1$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Жавоби.

Y	7	13	21
p	0,2	0,1	0,7.

375. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	−1	−2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

$Y = X^2$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ечилиши. Y нинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1,$$
$$y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4,$$
$$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1,$$
$$y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4.$$

Шундай қилиб, X нинг турли қийматларига Y нинг бир хил қийматлари мос келади. Бу X нинг мумкин бўлган қийматлари $Y = X^2$ функция монотон бўлмаган интервалга тегишли эканлигидандир.

Y нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолларини топамиз. Y миқдор $Y = 1$ қийматни қабул қилиши учун X миқдор $X = 1$ ёки $X = -1$ қийматни қабул қилиши етарли. Сўнгги икки ҳодиса биргаликда эмас, уларнинг эҳтимоллари мос равишда 0,3 ва 0,2 га тенг. Шу сабабли $Y = 1$ ҳодисанинг эҳтимоли қўшиш теоремасига кўра:

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$$

$Y = 4$ мумкин бўлган қийматнинг эҳтимолини шунга ўхшаш топамиз:

$$P(Y=4) = P(X=-2) + P(X=2) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5.$$

Y миқдорнинг изланаётган тақсимот қонунини ёзамиз:

Y	1	4
p	0,5	0,5

376. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

$Y = \sin X$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзинг.

Жавоби.

Y	$\sqrt{2}/2$	1
p	0,3	0,7.

377. Мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлган X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ дифференциал функцияси берилган. $Y = 3X$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. $y = 3x$ дифференциалланувчи ва қатъий ўсувчи функция бўлгани учун

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)| \qquad (*)$$

формулани қўллаш мумкин, бу ерда $\psi(y)$ функция $y = 3x$ функцияга тескари функция.

$\psi(y)$ ни топамиз:

$$\psi(y) = x = \frac{y}{3}.$$

$f[\psi(y)]$ ни топамиз:
$$f[\psi(y)] = f\left(\frac{y}{3}\right). \qquad (**)$$
$\psi'(y)$ ҳосилани топамиз:
$$\psi'(y) = \left(\frac{y}{3}\right)' = \frac{1}{3}.$$
Равшанки,
$$|\psi'(y)| = \frac{1}{3}. \qquad (***)$$
Изланаётган дифференциал функцияни топамиз, бунинг учун (**) ни ва (***) ни (*) га қўямиз:
$$g(y) = \frac{1}{3} f\left(\frac{y}{3}\right).$$
x (a, b) интервалда ўзгаргани ва $y = 3x$ бўлгани учун
$$3a < y < 3b.$$

378. Мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлган X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ дифференциал функцияси берилган. Агар а) $Y = -3x$; б) $Y = AX + B$ бўлса, Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. а) $g(y) = \frac{1}{3} f\left[-\frac{y}{3}\right]$, $(-3b < y < -3a)$; б) $g(y) = \frac{1}{|A|} f\left[\frac{y-B}{A}\right]$, $A > 0$ бўлганда $(Aa + B < y < Ab + B)$, $A < 0$ бўлганда $(Ab + B < y < Aa + B)$.

379. X тасодифий миқдор
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$
Коши қонуни бўйича тақсимланган. $Y = X^3 + 2$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $g(y) = \frac{1}{3\pi\left[(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3}\right]}$.

380. Мумкин бўлган қийматлари $(0, \infty)$ интервалга тегишли бўлган X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ дифференциал функцияси берилган. Агар а) $Y = e^{-x}$; б) $Y = \ln X$; в) $Y = X^3$; г) $Y = \frac{1}{X^2}$; $Y = \sqrt{X}$ бўлса, Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Жавоби: а) $g(y) = \frac{1}{y} f\left[\ln \frac{1}{y}\right]$, $(0 < y < 1)$; б) $g(y) = e^{y} f[e^{y}]$ $(-\infty < y < \infty)$; в) $g(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f\left[\sqrt[3]{y}\right]$, $(0 < y < \infty)$, г) $g(y) = \frac{1}{2y\sqrt{y}} f\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]$, $(0 < y < \infty)$; д) $g(y) = 2yf(y^2)$, $(0 < y < \infty)$.

381. Мумкин бўлган қийматлари $(-\infty, \infty)$ интервалга тегишли бўлган X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ дифференциал функцияси берилган. Агар а) $Y = X^2$; б) $Y = e^{-X^2}$; в) $Y = |X|$; г) $Y = \cos X$; д) $Y = \operatorname{arctg} X$; е) $Y = \frac{1}{1 + X^2}$ бўлса, Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. а) $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right]$, $(0 < y < \infty)$;

б) $g(y) = \frac{1}{2y\sqrt{\ln \frac{1}{y}}}\left[f\left(\sqrt{\ln \frac{1}{y}}\right) + f\left(-\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right)\right]$, $(0 < y < 1)$;

в) $g(y) = f(y) + f(-y)$, $(0 < y < \infty)$;

г) $g(y) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\left[f(2\pi k + \arccos y) + f(2\pi k - \arccos y)\right]$, $(-1 < y < 1)$;

д) $g(y) = \frac{1}{\cos^2 y} f(tg\, y)$, $(-\pi/2 < y < \pi/2)$;

е) $g(y) = \frac{1}{2y^2\sqrt{\frac{1}{y} - 1}}\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right)\right]$, $(0 < y < \infty)$.

382. xOy тўғри бурчакли координаталар системасида $A(4; 0)$ нуқтадан (ихтиёрий t бурчак остида) Oy ўқни кесиб ўтадиган нур таваккалига ўтказилган. Ўтказилган нурнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси ординатаси y нинг эҳтимоллари тақсимотининг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Текшириш:
$$\int_{-1}^{1} g(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

384. X тасодифий миқдор $(0, \pi/2)$ интервалда текис тақсимланган. $Y = \sin X$ тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $(0, 1)$ интервалда $g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - y^2}}$; бу интервалдан ташқарида $g(y) = 0$.

385. X тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{\pi}$; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. $Y = \operatorname{tg} X$ тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

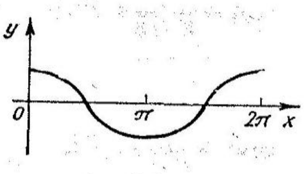
Жавоби. $g(y) = \frac{2}{\pi(1 + y^2)}$, $(-\infty < y < \infty)$.

386. X тасодифий миқдор $(0, 2\pi)$ интервалда текис тақсимланган. $Y = \cos X$ тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ дифференциал функциясини топамиз: $(0, 2\pi)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}$; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$.

$y = \cos x$ тенгламадан $x = \psi(y)$ тескари функцияни топамиз. $y = \cos x$ функция $(0, 2\pi)$ интервалда монотон эмас, шунинг учун бу интервални функция монотон бўладиган $(0, \pi)$ ва $(\pi, 2\pi)$ интервалларга ажратамиз (8-расм). $(0, \pi)$ интервалда тескари функция $\psi_1(y) = \arccos y$; $(\pi, 2\pi)$ интервалда тескари функция $\psi_2(y) = -\arccos y$.

Изланаётган дифференциал функцияни
$$g(y) = f[\psi_1(y)]\cdot|\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)]\cdot|\psi_2'(y)|$$
тенгликдан топиш мумкин.



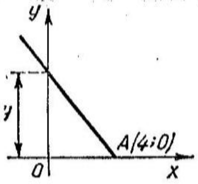
8- расм.

Тескари функцияларнинг ҳосилаларини топамиз
$$\psi_1'(y) = (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$
$$\psi_2'(y) = (-\arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$
Ҳосилаларнинг модулларини топамиз:
$$|\psi_1'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad |\psi_2'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \qquad (**)$$
$f(x) = \frac{1}{2\pi}$ ни ҳисобга олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:
$$f[\psi_1(y)] = \frac{1}{2\pi}, \quad f[\psi_2(y)] = \frac{1}{2\pi}. \qquad (***)$$
(**) ва (***) ни (*) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:
$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}}.$$
$y = \cos x$, шу билан бирга $0 < x < 2\pi$ бўлгани учун $-1 < y < 1$. Шундай қилиб, $(-1, 1)$ интервалда изланаётган дифференциал функция
$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}};$$
бу интервалдан ташқарида $g(y) = 0$.

Текшириш:
$$\int_{-1}^{1} g(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin 1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

387. X тасодифий миқдор $(-\pi/2, \pi/2)$ интервалда текис тақсимланган. $y = \cos X$ тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $(0, 1)$ интервалда $g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - y^2}}$, бу интервалдан ташқарида $g(y) = 0$.



7-расм.

Ечилиши. t бурчакни $(-\pi/2, \pi/2)$ интервалда текис тақсимланган тасодифий миқдор сифатида қараш мумкин, бунда бу интервалда унинг дифференциал функцияси

$$f(t) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi}$$

бўлиб, қаралаётган интервалдан ташқарида $f(t)=0$.

7-расмдан, y ордината t бурчак билан қуйидагича боғланганлиги келиб чиқади:

$$y = 4\,\mathrm{tg}\,t.$$

Бу функция $(-\pi/2, \pi/2)$ интервалда монотон ўсади, шу сабабли изланаётган $g(y)$ дифференциал функцияни топиш учун

$$g(y) = f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)| \qquad (*)$$

формулани қўлланиш мумкин, бу ерда $\psi(y)$ функция $y = 4\,\mathrm{tg}\,t$ функцияга тескари функция.

$\psi(y)$ ни топамиз:

$$\psi(y) = t = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{4}.$$

$\psi'(y)$ ни топамиз:

$$\psi'(y)=\frac{4}{16+y^2}.$$

Демак,

$$|\varphi'(y)| = \frac{4}{16+y^2}. \qquad (**)$$

$f[\psi(y)]$ ни топамиз. $f(t)=\frac{1}{\pi}$ бўлгани учун

$$f[\psi(y)] = \frac{1}{\pi}. \qquad (***)$$

(**) ва (***) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$g(y)=\frac{4}{\pi(16+y^2)},$$

бунда $-\infty<y<\infty$ (бу сўнгги ифода $y=4\,\mathrm{tg}\,t$ ва $-\pi/2<t<\pi/2$ эканлигидан келиб чиқади).

Текшириш:

$$g(y)\,dy = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2} = \frac{4}{\pi}\cdot 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2} = \frac{4\cdot2\cdot\pi}{\pi\cdot4\cdot2}=1.$$

383. X тасодифий миқдор $(-\pi/2,\pi/2)$ интервалда текис тақсимланган. $Y=\sin X$ тасодифий миқдорнинг (y) дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ дифференциал функциясини топамиз. X миқдор $(-\pi/2,\pi/2)$ интервалда текис тақсимланган, шунинг учун бу интервалда

$$f(x)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\pi}$$

бўлиб, қаралаётган интервалдан ташқарида $f(x)=0$.

$Y=\sin X$ функция $(-\pi/2,\pi/2)$ интервалда монотон, демак, бу интервалда у

$$x=\psi(y)=\arcsin y$$

тескари функцияга эга.

$\psi'(y)$ ҳосилани топамиз:

$$\psi'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Изланаётган дифференциал функцияни

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$$

формула бўйича топамиз.

$f(x)=\frac{1}{\pi}$ ни (демак, $f[\psi(y)]=\frac{1}{\pi}$ ни) ва $|\psi'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ни ҳисобга олиб,

$$g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

ни ҳосил қиламиз; $y=\sin x$, шу билан бирга $-\pi/2<x<\pi/2$ бўлгани учун $-1<y<1$. Шундай қилиб, $(-1, 1)$ интервалда

$$g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

бу интервалдан ташқарида $g(y)=0$.

388. X тасодифий миқдор a га тенг математик кутилиш ва σ га тенг ўртача квадратик четланиш билан нормал тақсимланган. $Y=AX+B$ чизиқли функция ҳам нормал тақсимланганлигини, шу билан бирга

$$M(Y)=Aa+B,\quad \sigma(Y)=|A|\sigma$$

бўлишини исботланг.

Ечилиши. X тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини ёзамиз:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

$y=Ax+B$ функция монотон бўлгани учун

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)| \qquad (*)$$

формулани қўлланиш мумкин. $Y=AX+B$ тенгламадан $x=\psi(y)$ ни топамиз:

$$\psi(y)=\frac{y-B}{A}. \qquad (*)$$

$f[\psi(y)]$ ни топамиз:

$$f[\psi(y)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left[\frac{y-B}{A}-a\right]^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(Aa+B)]^2}{2(A\sigma)^2}}. \qquad (**)$$

$\psi'(y)$ ни топамиз:

$$\psi'(y)=\left[\frac{y-B}{A}\right]'=\frac{1}{A}.$$

$|\psi'(y)|$ ни топамиз:

$$|\psi'(y)|=\frac{1}{|A|}. \qquad (**)$$

(**) ва (***) ни (*) га қўйиб, қуйидаг га эга бўлам з:

$$g(y)=\frac{1}{(|A|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(Aa+B)]}{2(A\sigma)^2}}$$

Бу ердан кўриниб турибдики, $Y=\ X+B$ функ ия нормал тақсимланган, шу билан бирга $M(Y)=Aa\cdot\ B$ ва $\sigma(Y)=|A|\sigma$, шуни исботлаш талаб илинган эди

389. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг $f(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}$, $(-\infty<x<\infty)$ дифференциал функцияси берилган. $Y=X^2$ тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. $y=x^2$ тенгламадан тескари функцияни топамиз. $(-\infty, -\infty)$ интервалда $y=x^2$ функция монотон эмаслиги сабабли бу интервални $(-\infty, 0)$ ва $(0, \infty)$ интервалларга ажратамиз, бу интервалларда қаралаётган функция монотон бўлади. $(-\infty, 0)$ интервалда тескари функция $\psi_1(y)=-\sqrt{y}$; $(0, \infty)$ интервалда тескари функция $\psi_2(y)=\sqrt{y}$.

Изланаётган дифференциал функцияни

$$g(y)=f[\psi_1(y)]\,|\psi_1'(y)|+f[\psi_2(y)]\cdot\psi_2'(y)| \qquad (*)$$

тенгликдан топиш мумкин.

Тескари функцияларнинг ҳосилаларини топамиз:

$$\psi_1'(y)=-\frac{1}{2\sqrt{y}},\qquad \psi_2'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Ҳосилаларнинг модулларини топамиз:

$$|\psi_1'(y)|=\frac{1}{2\sqrt{y}},\qquad |\psi_2'(y)|=\frac{1}{2\sqrt{y}}. \qquad (**)$$

Энди $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $\psi_1(y)=-\sqrt{y}$, $\psi_2(y)=\sqrt{y}$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f[\psi_1(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2},\quad f[\psi_2(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}. \qquad (***)$$

(**) ва (***) ни (*) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}.$$

$y=x^2$, шу билан бирга $-\infty<x<\infty$ бўлгани учун $0<y<\infty$.

Шундай қилиб, изланаётган дифференциал функция $(0, \infty)$ интервалда

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2},$$

бу интервалдан ташқарида $g(y)=0$.

Текшириш:

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2}dy.$$

$y = t^2$ десак, у ҳолда $dy = 2\,tdt$; қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt.$$

Пуассон интеграли

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

ни ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

390. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ дифференциал функцияси берилган. $Y = \frac{1}{2}X^2$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $(0, \infty)$ интервалда $g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-y}$, бу интервалдан ташқарида $g(y) = 0$.

391. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$ дифференциал функция берилган. $Y = \frac{1}{4}X^2$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $(0, \infty)$ интервалда $g(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-2y/\sigma^2}$, бу интервалдан ташқарида $g(y) = 0$.

392. X тасодифий миқдор $(0, \pi)$ интервалда $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. $Y = \varphi(X) = X^2$ тасодифий миқдорнинг аввал $g(y)$ дифференциал функциясини аниқлаб, кейин унинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Аввал Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топамиз. $y = \varphi(x) = x^2$ функция $x(0 < x < \pi)$ нинг қаралаётган қийматларида қатъий ўсувчи бўлгани учун $g(y)$ дифференциал функцияни

$$g(y) = f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$$

формула бўйича топамиз, бу ерда $\psi(y) = \sqrt{y}$ функция $y = x^2$ функцияга тескари функция. Бу формулага $\varphi(y) = \sqrt{y}$ ни қўйиб ва $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $|\psi'(y)| = |(\sqrt{y})'| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$g(y) = \frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}$$

ни ҳосил қиламиз.

Y миқдорнинг изланаётган математик кутилишини топамиз, бунда Y нинг мумкин бўлган қийматлари $(0, \pi^2)$ интервалга тегишли [$y = x^2$ ва $0 < x < \pi$ бўлгани учун $0 < y < \pi^2$] эканлигини ҳисобга оламиз:

$$M(Y) = \int_0^{\pi^2} yg(y)dy = \frac{1}{4}\int_0^{\pi^2}\frac{y\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy.$$

$y = t^2$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб,

$$M(Y) = \frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\sin t\,dt$$

ни ҳосил қиламиз. Буни икки марта бўлаклаб интеграллаб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(Y) = M(X^2) = \frac{\pi^2-4}{2}.$$

Ечилиши. Интеграл функциянинг таърифига кўра

$$G(y) = P(Y < y).$$

$y = 3x + 2$ функция ўсувчи бўлгани сабабли $X < x$ тенгсизлик бажарилганда $Y < y$ тенгсизлик ҳам бажарилади, шунинг учун

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < x) = F(x). \qquad (*)$$

$y = 3x + 2$ тенгламадан x ни ифодалаб оламиз:

$$x = \frac{y-2}{3}. \qquad (**)$$

(**) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$G(y) = F\left(\frac{y-2}{3}\right).$$

398. X тасодифий миқдорнинг $F(x)$ интеграл функцияси берилган. $Y = -\frac{2}{3}X + 2$ тасодифий миқдорнинг $G(y)$ интеграл функциясини топинг.

Ечилиши. Интеграл функциянинг таърифига асосан

$$G(y) = P(Y < y).$$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$ функция камаювчи бўлгани сабабли $X > x$ тенгсизлик бажарилганда $Y < y$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Шу сабабли

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > x).$$

$X < x$ ва $X > x$ ҳодисалар қарама-қарши бўлгани сабабли бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг:

$$P(X < x) + P(X > x) = 1.$$

Бу ердан

$$P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x),$$

демак,

$$G(y) = 1 - F(x). \qquad (*)$$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$ тенгламадан x ни ифодалаб оламиз:

$$x = \frac{3(2-y)}{2}. \qquad (**)$$

(**) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$G(y) = 1 - F\left[\frac{3(2-y)}{2}\right].$$

399. X тасодифий миқдорнинг $F(x)$ интеграл функцияси берилган. Агар а) $Y = 4X + 6$; б) $Y = -5X + 1$; в) $Y = aX + b$ бўлса, Y тасодифий миқдорнинг $G(y)$ интеграл функциясини топинг.

Жавоби. а) $G(y) = F\left[\frac{y-6}{4}\right]$; б) $G(y) = 1 - F\left[\frac{1-y}{5}\right]$;

в) $a \geq 0$ бўлганда $G(y) = F\left[\frac{y-b}{a}\right]$; $a < 0$ бўлганда $G(y) = 1 - F\left[\frac{y-b}{a}\right]$.

2-§. Икки тасодифий аргументнинг функцияси

Агар X ва Y тасодифий миқдорларнинг мумкин бўлган қийматларининг ҳар бир жуфтига Z тасодифий миқдорнинг битта мумкин бўлган қиймати мос келса, у ҳолда Z ни *иккита X ва Y тасодифий аргументнинг функцияси* дейилади ва бундай ёзилади:

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Агар X ва Y дискрет эркли тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда $Z = X + Y$ функциянинг тақсимотини топиш учун Z нинг барча мумкин бўлган қийматларини топиш лозим, бунинг учун X нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини Y нинг мумкин бўлган қийматларининг ҳаммаси билан қўшиб чиқиш лозим. Z нинг ана шу мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари эса X ва Y нинг қўшилаётган қийматларининг эҳтимоллари кўпайтмаларига тенг.

Агар X ва Y эркли узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлса у, ҳолда $Z = X + Y$ йиғиндининг $g(z)$ дифференциал функцияси (аргументлардан камида биттасининг дифференциал функцияси $(-\infty, \infty)$ интервалда битта формула билан берилади деган шартда)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)\,dx$$

формула бўйича ёки бунга тенг кучли

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)\,dy$$

формула бўйича топилиши мумкин, бу ерда f_1 ва f_2—аргументларнинг дифференциал функциялари; агар аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий бўлмаса у ҳолда $Z = X + Y$ миқдорнинг $g(z)$ дифференциал функциясини

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)\,dx$$

Эслатма. Юқорида келтирилган ечиш усули ўргатиш мақсадини кўзда тутади. Ушбу формула мақсадга анча тезроқ олиб келади.

$$M[X^2]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx=\frac{\pi^2-4}{2}.$$

Бу изоҳ 393-масалага ҳам тааллуқлидир.

393. X тасодифий миқдор $(0,\ \pi/2)$ интервалда $f(x)=\cos x$, бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$ дифференциал функция билан берилган.

$Y=\varphi(X)=X^2$ функциянинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. $M(Y)=(\pi^2-8)/4$.

394. X тасодифий миқдор $(0,\ \pi)$ интервалда $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$ дифференциал функция билан берилган. $Y=\varphi(X)=X^2$ функциянинг дисперсиясини $g(y)$ дифференциал функциядан фойдаланиб топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$D(Y)=\int_c^d y^2g(y)\,dy-[M(Y)],^2$$

бу ерда c ва d лар Y нинг мумкин бўлган қийматлари ётадиган чегаралар. Бу формулага $g(y)=\sin\sqrt{y}/4\sqrt{y}$, $M(Y)=(\pi^2-4)/2$ (392-масалага қаранг) ни қўйиб ва $c=0$, $d=\pi$ (чунки $y=x^2$ ва $0<x<\pi$ бўлгани учун $0<y<\pi^2$) эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(Y)=D(X^2)=\int_0^{\pi^2}y\cdot\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}\,dy-\left[\frac{\pi^2-4}{2}\right]^2. \qquad (*)$$

Аввал $y=t^2$ ўрнига қўйиш ёрдамида, сўнгра тўрт марта бўлаклаб интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi^2}y\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy=\frac{\pi^4}{2}-6\pi^2+24. \qquad (**)$$

$(**)$ ни $(*)$ га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X^2)=\frac{\pi^4-16\pi^2+80}{4}.$$

395. X тасодифий миқдор $(0,\ \pi/2)$ интервалда $f(x)=\cos x$, бу интервалдан ташқарида $f(x)=0$ дифференциал функция билан берилган; $Y=\varphi(X)=X^2$ функциянинг дисперсиясини топинг.

Кўрсатма. Дастлаб $Y=X^2$ миқдорнинг $g(y)=\cos\sqrt{y}/2\sqrt{y}$ дифференциал функциясини топинг; сўнгра

$$D(Y)=\int_0^{\pi^2/4}y^2g(y)\,dy-[M(Y)]^2$$

формуладан фойдаланинг, бу ерда $M(Y)=(\pi^2-8)/4$ (393-масалага қаранг). Интегрални ҳисоблашда аввал $y=t^2$ ўрнига қўйишдан фойдаланинг, кейин эса бўлаклаб интегралланг.

Жавоби. $D(X^2)=20-2\pi^2$.

396. Кубнинг қирраси тақрибий ўлчанган, шу билан бирга $a\leqslant x\leqslant b$. Кубнинг қиррасини $(a,\ b)$ интервалда текис тақсимланган X тасодифий миқдор сифатида қараб: а) куб ҳажмининг математик кутилишини; б) куб ҳажмининг дисперсиясини топинг.

Кўрсатма. Дастлаб $Y=X^3$ тасодифий миқдорнинг

$$g(y)=\frac{1}{3(b-a)y^{2/3}}$$

дифференциал функциясини топинг. Сўнгра

$$M(Y)=\int_{a^3}^{b^3}yg(y)\,dy,\quad DY=\int_{a^3}^{b^3}y^2g(y)\,dy-[M(Y)]^2$$

формулалардан фойдаланинг.

Жавоби. $M(Y)=\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}$;

$$D(Y)=\frac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2.$$

397. X тасодифий миқдорнинг $F(x)$ интеграл функцияси берилган. $Y=3X+2$ тасодифий миқдорнинг $G(y)$ интеграл функциясини топинг.

формула бўйича ёки бунга тенг кучли

$$g(z)=\int_0^z f_1(z-y)f_2(y)\,dy$$

формула бўйича топилади.

Иккала $f_1(x)$ ва $f_2(y)$ дифференциал функция чекли интервалларда берилган ҳолда $Z=X+Y$ миқдорнинг $g(z)$ дифференциал функциясини топиш учун аввал $G(z)$ интеграл функцияни топиш, кейин эса уни z бўйича дифференциаллаш мақсадга мувофиқдир:

$$g(z)=G'(z).$$

Агар X ва Y мос равишда $f_1(x)$ ва $f_2(y)$ дифференциал функциялар билан берилган эркли тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда $(x;\ y)$ тасодифий нуқтанинг D соҳага тушиш эҳтимоли дифференциал функциялар кўпайтмасидан шу D соҳа бўйича олинган икки каррали интегралга тенг:

$$P[(X,\ Y)\subset D]=\iint_{(D)}f_1(x)f_2(y)\,dx\,dy.$$

400. X ва Y дискрет ркли тасодифий ми дорлар ушбу тақсимотлар билан ерилган:

X	1	3;		Y	2	4
P	0,3	0,7		P	0,6	0,4

$Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг тақсимотини пинг.

Ечилиши. $Z=X+Y$ миқдорнинг тақси отини тузиш учун Z нинг барча мумкин бўлган қиймат рини ва уларнинг эҳтимолларини топиш лозим.

Z нинг барча мумкин бўлган қийматлари X нинг ҳар бир мумкин бўлган қиймати билан Y нинг арча мумкин бўлган қийматлари йиғиндиларидан ибо ат:

$$z_1=1+2=3;\qquad z_2=1+4=5;$$
$$z_3=3+2=5;\qquad z_4=3+4=7.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолла ини топамиз. $Z=3$ бўлиши учун X миқдор $x_1=1$ қийм тни ва Y миқдор $y_1=2$ қийматни қабул қилиши етарл Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимоллари бери ган тақсимот қонунларига кўра мос равишда 0,3 ва 0, га тенг. X ва Y аргументлар эркли бўлгани учун $X=1$ ва $Y=2$ ҳодисалар эркли, ва демак, уларнинг би галикда рўй бериш эҳтимоли (яъни $Z=3$ ҳодисан нг эҳтимоли) кўпайтириш теоремасига кўра $0{,}3\cdot0{,}6=$ 18 га тенг.

Шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$P(Z=1+4=5)=0{,}3\cdot0{,}4=0{,}12;$$
$$P(Z=3+2=5)=0{,}7\cdot0{,}6=0{,}42;$$
$$P(Z=3+4=7)=0{,}7\cdot0{,}4=0{,}28.$$

Аввал биргаликда бўлмаган $Z=z_2=5$, $Z=z_3=5$ ҳодисаларнинг эҳтимолларини қўшиб $(0{,}12+0{,}42=0{,}54)$ изланаётган тақсимотни ёзамиз:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

Текшириш: $0{,}18+0{,}54+0{,}28=1$.

401. X ва Y дискрет тасодифий миқдорлар ушбу тақсимот қонунлари билан берилган:

а)	X	10	12	16,	Y	1	2
	P	0,4	0,1	0,5'	P	0,2	0,8;
б)	X	4	10,		Y	1	7
	P	0,7	0,3'		P	0,8	0,2.

$Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Жавоби.

а)	Z	11	12	13	14	17	18
	P	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40;
б)	Z	5	11	17			
	P	0,56	0,38	0,06			

402. X ва Y эркли тасодифий миқдорлар

$$f_1(x)=e^{-x}\,(0\leqslant x<\infty),$$

$$f_2(y)=\frac{1}{2}e^{-y/2}\,(0\leqslant y<\infty)$$

дифференциал функциялар билан берилган. Бу қонунларнинг композициясини, яъни $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. Аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий бўлмаганлиги учун

$$f(z)=\int_0^z f_1(x)f_2(z-x)\,dx$$

формулани қўллаш мумкин.

Демак,

$$f(z)=\int_0^z e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{-(z-x)/2}\right]dx.$$

Элементар алмаштиришларни бажариб,

$$f(z)=e^{-z/2}[1-e^{-z/2}]$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $z\geqslant 0$, чунки $Z=X+Y$ ҳамда X ва Y нинг мумкин бўлган қийматлари манфий эмас.

Шундай қилиб, $(0,\infty)$ интервалда $f(z)=e^{-z/2}[1-e^{-z/2}]$, бу интервалдан ташқарида $f(z)=0$.

Текшириш мақсадида $\int_0^\infty f(z)\,dz=1$ эканлигига ишонч ҳосил қилишни китобхонга тавсия қиламиз.

403. X ва Y тасодифий миқдорлар

$$f_1(x)=\frac{1}{3}e^{-x/3}\ (0\leqslant x<\infty),$$

$$f_2(y)=\frac{1}{5}e^{-y/5}(0\leqslant y<\infty)$$

дифференциал функциялар билан берилган. Бу қонунларнинг композициясини, яъни $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-z/5}(1-e^{-2z/15}), & z>0 \text{ бўлганда},\\ 0, & z<0 \text{ бўлганда}.\end{cases}$

404. X ва Y эркли нормал тақсимланган тасодифий миқдорлар

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$$

дифференциал функциялар билан берилган. Бу қонунларнинг композицияси, яъни $Z=X+Y$ миқдорнинг дифференциал функцияси ҳам нормал қонундан иборатлигини исботланг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(z-x)\,dx.$$

У ҳолда

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}e^{-(z-x)^2/2}\,dx.$$

Элементар ҳисоблашларни бажариб,

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-z^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2-zx)}\,dx$$

ни ҳосил қиламиз.

Интеграл белгиси остида турган кўрсаткичли функциянинг даража кўрсаткичини тўла квадратга тўлдириб, $e^{z^2/4}$ ни интеграл белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-z^2/2}e^{z^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-z/2)^2}\,dx.$$

Тенгликнинг ўнг томонида турган Пуассон интеграли $\sqrt{\pi}$ га тенглигини ҳисобга олиб, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/4}.$$

Текшириш мақсадида, $\int_{-\infty}^{\infty}g(z)dz=1$ эканлигига ишонч ҳосил қилишни китобхонга тавсия қиламиз. Бунинг учун $z=\sqrt{2t}$ ўрнига қўйишдан фойдаланиш ва $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$ Пуассон интегралини ҳисобга олиш лозим.

Қаралаётган масалада

$$M(Z)=M(X)+M(Y)\ \text{ва}\ \sigma(z)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$$

эканлигига ҳам ишонч ҳосил қилиш осон эканлигини қайд этиб ўтамиз. Бу формулалар умумий нормал қонунлар учун ҳам (яъни математик кутилиши нолдан фарқли ва ўртача квадратик четланиши бирга тенг бўлмагач) ўринли эканлигини исботлаш мумкин.

$g(z)=G(z)'$ дифференциал функцияни топамиз:

$$g(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0 \text{ бўлганда},\\ z/4, & 0<z<2 \text{ бўлганда},\\ 1-z/4, & 2<z<4 \text{ бўлганда},\\ 0, & z>4 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

$g(z)$ дифференциал функциянинг графиги 10-расмда тасвирланган.

Тақсимотнинг $g(z)$ эгри чизиғи билан чегараланган юзнинг бирга тенглигига ишонч ҳосил қилишни китобхоннинг ўзига тавсия қиламиз.

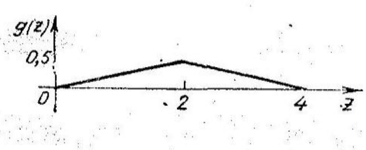
406. X ва Y эркли текис тақсимланган тасодифий миқдорларнинг дифференциал функциялари берилган: $(0,\ 1)$ интервалда $f_1(x)=1$, бу интервалдан ташқарида $f_1(x)=0$; $(0,\ 1)$ интервалда $f_2(y)=1$, бу интервалдан ташқарида $f_2(y)=0$. $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини ва интеграл функциясини топинг. $g(z)$ дифференциал функциянинг графигини ясанг.

Жавоби.

$$G(z)=\begin{cases}0, & z<0 \text{ бўлганда},\\ z^2/2, & 0<z<1 \text{ бўлганда},\\ 1-(2-z)^2/2, & 1<z<2 \text{ бўлганда},\\ 1, & z>2 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

$$g(z)=\begin{cases}0, & z<0 \text{ бўлганда},\\ z, & 0<z<1 \text{ бўлганда},\\ 2-z, & 1<z<2 \text{ бўлганда},\\ 0, & z>2 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

407. X ва Y эркли текис тақсимланган тасодифий миқдорларнинг дифференциал функциялари берилган: $(1,\ 3)$ интервалда $f_1(x)=\frac{1}{2}$, бу интервалдан ташқарида $f_1(x)=0$; $(2,\ 6)$ интервалда $f_2(y)=\frac{1}{4}$, бу интервалдан ташқарида $f_2(y)=0$. $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини ва интеграл функциясини



10- расм.

топинг. $g(z)$ дифференциал функциянинг графигини ясанг.

Жавоби:

$$G(z)=\begin{cases}0, & z<3 \text{ бўлганда},\\ (z-3)^2/16, & 3<z<5 \text{ бўлганда},\\ \frac{z}{4}-1, & 5<z<7 \text{ бўлганда},\\ 1-(9-z)^2/16, & 7<z<9 \text{ бўлганда},\\ 1, & z>9 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

$$g(z)=\begin{cases}0, & z<3 \text{ бўлганда},\\ (z-3)/8, & 3<z<5 \text{ бўлганда}\\ \frac{1}{4}, & 5<z<7 \text{ бўлганда},\\ (9-z)/8, & 7<z<9 \text{ бўлганда},\\ 0, & z>9 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

Саккизинчи боб

ИККИТА ТАСОДИФИЙ МИҚДОР СИСТЕМАСИ

1- §. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни

Икки ўлчовли тасодифий миқдор деб, мумкин бўлган қийматлари $(x,\ y)$ сонлар жуфти бўлган $(X,\ Y)$ тасодифий миқдорга айтилади. Бир вақтда қаралаётган X ва Y ташкил этувчилар икки тасодифий миқдор *системасини* ташкил этади.

Икки ўлчовли тасодифий миқдорни xOy текисликда $M(X,\ Y)$ тасодифий нуқта ёки OM тасодифий вектор сифатида талқин этиш мумкин

Дискрет икки ўлчовли тасодифий миқдор деб, ташкил этувчилари дискрет бўлган миқдорга айтилади.

Узлуксиз икки ўлчовли тасодифий миқдор деб, ташкил этувчилари узлуксиз бўлган миқдорга айтилади.

Икки ўлчовли тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни деб, мумкин бўлган қийматлари билан уларнинг эҳтимоллари орасидаги мосликка айтилади.

Дискрет икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни: а) мумкин бўлган қийматлар билан уларнинг эҳтимолларини ўз ичига олган икки йўлли жадвал кўринишида; б) аналитик кўринишда, масалан, интеграл функция кўринишида берилиши мумкин.

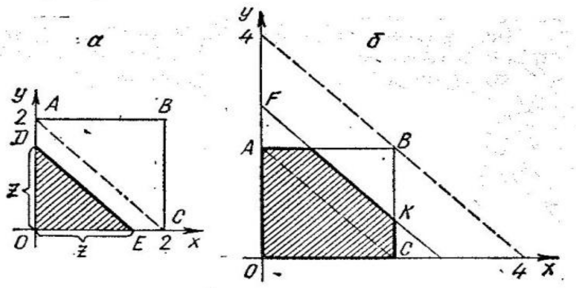
Икки ўлчовли тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотининг интеграл функцияси деб, ҳар бир $(x,\ y)$ сонлар жуфти учун X нинг x дан кичик ва Y нинг y дан кичик қиймат қабул қилиши эҳтимолини аниқлайдиган $F(x,\ y)$ функцияга айтилади:

$$F(x,\ y)=P(X<x,\ Y<y).$$

405. X ва Y эркли текис тақсимланган тасодифий миқдорларнинг дифференциал функциялари берилган: (0, 2) интервалда $f_1(x)=\frac{1}{2}$, бу интервалдан ташқарида $f_1(x)=0$; (0, 2) интервалда $f_2(y)=\frac{1}{2}$, бу интервалдан ташқарида $f_2(y)=0$. $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини ва интеграл функциясини топинг.

$g(z)$ дифференциал функциянинг графигини ясанг.

Ечилиши. Шартга кўра X нинг мумкин бўлган қийматлари $0<x<2$ тенгсизлик билан, Y нинг мумкин бўлган қийматлари $0<y<2$ тенгсизлик билан аниқланади. Бу ердан мумкин бўлган $(x; y)$ тасодифий нуқталар $OABC$ квадратда жойлашганлиги келиб чиқади (9- a расм).



9- расм.

Интеграл функциянинг таърифига асосан

$$G(Z)=P(Z<z)=P(X+Y<z).$$

$x+y<z$ тенгсизликни xOy текисликнинг $x+y=z$ тўғри чизиқдан пастда ётадиган $(x;\ y)$ нуқталари қаноатлантиради (бу тўғри чизиқ Ox ва Oy ўқларида z га тенг кесмалар ажратади); агар фақат мумкин бўлган x ва y қийматлар олинадиган бўлса у ҳолда $x+y<z$ тенгсизлик $OABC$ квадратда $x+y=z$ тўғри чизиқдан пастда ётадиган нуқталар учунгина бажарилади.

Иккинчи томондан, X ва Y миқдорлар эркли бўлгани учун

$$G(z)=\iint_{(s)} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy=\frac{1}{4}\iint_{(s)} dx\, dy=\frac{1}{4}S,$$

бу ерда $S-OABC$ квадратнинг $x+y=z$ тўғри чизиқдан пастда ётадиган қисми юзининг катталиги. Равшанки, S юзнинг катталиги z нинг қийматига боғлиқ. Агар $z\leqslant 0$ бўлса, у ҳолда $S=0$, яъни

$$G(z)=\frac{1}{4}\cdot 0=0.$$

Агар $0<z<2$ бўлса, у ҳолда (9- a расм)

$$G(z)=\frac{1}{4}S_{\triangle ODE}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z^2}{2}=\frac{z^2}{8}.$$

Агар $2<z<4$ бўлса, у ҳолда (9- $б$ расм)

$$G(z)=\frac{1}{4}S_{OAHKC}=1-\frac{(4-z)^2}{8}.$$

$OAHKC$ фигуранинг юзи $OABC$ квадратнинг юзи (бу, юза равшанки, $2^2=4$ га тенг) билан HBK тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи орасидаги айирма сифатида топилган:

$$S_{\triangle HBK}=\frac{HB^2}{2},$$

шу билан бирга $HB=2-AH=2-AF=2-(z-2)=4-z$.

Агар $z>4$ бўлса, у ҳолда

$$G(z)=\frac{1}{4}S_{OABC}=\frac{1}{4}\cdot 4=1.$$

Шундай қилиб, изланаётган интеграл функция қуйидагича:

$$G(z)=\begin{cases} 0, & z\leqslant 0 \text{ бўлганда},\\ z^2/8, & 0<z<2 \text{ бўлганда},\\ 1-(4-z)^2/8, & 2<z<4 \text{ бўлганда},\\ 1, & z>4 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

Геометрик нуқтаи-назардан бу тенгликни қуйидагича талқин этиш мумкин: $F(x,\ y)$ қаралаётган (X, Y) тасодифий нуқтанинг учи $(x,\ y)$ нуқтада бўлган ҳамда бу учдан чапда ва пастда ётган чексиз квадрантга тушиш эҳтимолидир.

Кўпинча, „интеграл функция" термини ўрнига „тақсимот функцияси" термини ишлатилади.

Интеграл функция қуйидаги хоссаларга эга.

1-хосса. *Интеграл функциянинг қийматлари ушбу қўш тенгсизликни қаноатлантиради:*

$$0\leqslant F(x,\ y)\leqslant 1.$$

2-хосса. *Интеграл функция ҳар бир аргумент бўйича камаймайдиган функциядир:*

$$F(x_2, y)\geqslant F(x_1, y), \text{ агар } x_2>x_1 \text{ бўлса},$$
$$F(x,\ y_2)\geqslant F(x,\ y_1), \text{ агар } y_2>y_1 \text{ бўлса}.$$

3-хосса. *Қуйидаги лимит муносабатлар ўринли:*

1) $F(-\infty,\ y)=0$; 3) $F(-\infty,\ -\infty)=0$;
2) $F(x,\ -\infty)=0$; 4) $F(\infty,\ \infty)=1$.

4-хосса. а) $y=\infty$ *бўлганда системанинг интеграл функцияси X ташкил этувчининг интеграл функциясига айланади:*

$$F(x,\ \infty)=F_1(x);$$

б) $x=\infty$ *бўлганда системанинг интеграл функцияси Y ташкил этувчининг интеграл функциясига айланади:*

$$F(\infty,\ y)=F_2(y).$$

Интеграл функциядан фойдаланиб, тасодифий нуқтанинг $x_1<X<x_2$, $y_1<Y<y_2$ тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини аниқлаш мумкин:

$$P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)=[F(x_2,\ y_2)-F(x_1,\ y_2)]-[F(x_2,\ y_1)-F(x_1, y_1)].$$

Узлуксиз икки ўлчовли тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотининг дифференциал функцияси деб, интеграл функциядан олинган иккинчи тартибли аралаш ҳосилага айтилади:

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Кўпинча, „дифференциал функция" термини ўрнига „эҳтимолнинг икки ўлчовли зичлиги" термини ишлатилади.

Дифференциал функцияни тасодифий нуқтанинг томонлари Δx ва Δy бўлган тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолининг бу тўғри тўртбурчак юзига нисбатининг шу иккала томон нолга интилгандаги лимити сифатида қараш мумкин; геометрик нуқтаи назардан дифференциал функцияни сирт сифатида талқин қилиш мумкин бўлиб, бу сирт *тақсимот сирти* деб аталади.

Дифференциал функцияни билган ҳолда интеграл функцияни

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,\ y)\, dx\, dy$$

формула бўйича топиш мумкин.

$(X,\ Y)$ тасодифий нуқтанинг D соҳага тушиш эҳтимоли

$$P[(X,\ Y)\subset D]=\iint_{(D)} f(x,\ y)\, dx\, dy$$

тенглик билан аниқланади.

Дифференциал функция қуйидаги хоссаларга эга.

1-хосса. *Дифференциал функция манфий эмас:*

$$f(x,\ y)\geqslant 0.$$

2-хосса. *Дифференциал функциядан олинган чегаралари чексиз икки каррали хосмас интеграл бирга тенг:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\, dx\, dy=1.$$

Хусусан, $(X,\ Y)$ нинг барча мумкин бўлган қийматлари чекли D соҳага тегишли бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(D)} f(x,\ y)\, dx\, dy=1.$$

408. Дискрет икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг эҳтимоллари тақсимоти берилган:

Y \ X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

X ва Y ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунларини топинг.

Ечилиши. Эҳтимолларни „устунлар бўйича" қўшиб, X нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолларини ҳосил қиламиз:

$$p(3)=0{,}27;\ p(10)=0{,}43;\ p(12)=0{,}30.$$

X ташкил этувчининг тақсимот қонунини ёзамиз:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Текшириш: $0{,}27+0{,}43+0{,}30=1$.

Шунга ўхшаш эҳтимолларни „сатрлар бўйича" қўшиб Y ташкил этувчининг тақсимот қонунини топамиз:

Y	4	5
p	0,55	0,45

Текшириш: $0,55+0,45=1$.

409. Дискрет икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг эҳтимоллари тақсимоти берилган:

$Y \backslash X$	2,6	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунларини топинг.

Жавоби.

X	26	30	41	50;	Y	1,3	2,7
p	0,14	0,42	0,19	0,25;	p	0,29	0,71

410. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг

$$F(x, y)=\begin{cases} \sin x\cdot\sin y, & 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant\pi/2 \text{ бўлганда}, \\ 0 & , x<0 \text{ ёки } y<0 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

интеграл функцияси берилган. (X, Y) тасодифий нуқтанинг $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)=[F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)]-$$
$$-[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)].$$

Бунда $x_1=0$, $x_2=\pi/4$, $y_1=\pi/6$, $y_2=\pi/3$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P=\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right]-$$
$$-\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0,26.$$

411. (X, Y) тасодифий нуқтанинг $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри

тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топинг. Интеграл функцияси маълум:

$$F(x, y)=\begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ бўлганда}, \\ 0 & , x<0 \text{ ёки } y<0 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

Жавоби. $P=3/128$.

412. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси берилган:

$$F(x, y)=\begin{cases} 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ бўлганда}, \\ 0 & , x<0 \text{ ёки } y<0 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

Системанинг дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\ln 3\cdot(3^{-x}-3^{-x-y}),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}.$$

Шундай қилиб, изланаётган дифференциал функция

$$f(x, y)=\begin{cases} \ln^2 3\cdot 3^{-x-y}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ бўлганда}, \\ 0 & , x<0 \text{ ёки } y<0 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

Текшириш мақсадида

$$\ln^2 3\int_0^\infty\int_0^\infty 3^{-x-y}\,dx\,dy=1$$

бўлишига ишонч ҳосил қилишни китобхонга тавсия этамиз.

413. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси берилган:

$$F(x, y)=\begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x>0,\ y>0 \text{ бўлганда}, \\ 0 & , x<0,\ y<0 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

Системанинг дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $f(x, y)=8e^{-4x-2y}$, $x>0$, $y>0$ бўлганда; $f(x, y)=0$, $x<0$ ёки $y<0$ бўлганда.

13 – 7280

бу квадрантдан ташқарида $F(x, y)=0$: а) системанинг дифференциал функциясини топинг; б) (X, Y) тасодифий нуқтанинг учлари $A(1; 3)$, $B(3; 3)$, $C(2; 8)$ нуқталарда бўлган учбурчакка тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) Биринчи квадрантда $f(x, y)=\ln^2 2\cdot 2^{-x-y}$, бу квадрантдан ташқарида $f(x, y)=0$; б) $P=5/3\cdot 2^{12}$.

2-§. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор ташкил этувчилари эҳтимолларининг шартли тақсимот қонунлари

X ва Y ташкил этувчилар дискрет ва уларнинг мумкин бўлган қийматлари $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ бўлсин.

X ташкил этувчининг $Y=y_j$ бўлгандаги (j индекс X нинг барча мумкин бўлган қийматларида бир хил қиймат қабул қилади) шартли тақсимоти деб, ушбу шартли эҳтимоллар тўпламига айтилади:

$$p(x_1\,|\,y_j),\ p(x_2\,|\,y_j),\ \ldots,\ p(x_n\,|\,y_j).$$

Y ташкил этувчининг шартли тақсимоти шунга ўхшаш аниқланади.

Ташкил этувчиларнинг шартли эҳтимоллари мос равишда қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$p(x_i\,|\,y_j)=\frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)},\quad p(y_j\,|\,x_i)=\frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Ҳисоблашларни тўғрилигини текшириш учун шартли тақсимотларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенглигига ишонч ҳосил қилиш мақсадга мувофиқдир.

421. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор берилган:

$Y \backslash X$	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0,8$	0,05	0,12	0,03

а) Ташкил этувчиларнинг шартсиз тақсимот қонунларини топинг; б) X ташкил этувчининг Y ташкил этувчи $y_1=0,4$ қиймат қабул қилади, деган шартда шартли тақсимот қонунини топинг; в) $X=x_2=5$ шартда Y нинг шартли тақсимот қонунини топинг.

Ечилиши. а) „Устунлар бўйича" эҳтимолларни жамлаб, X нинг тақсимот қонунини топамиз:

X	2	5	8
p	0,20	0,42	0,38

Эҳтимолларни „сатрлар бўйича" жамлаб, Y нинг тақсимот қонунини топамиз:

Y	0,4	0,8
p	0,80	0,20

б) Y ташкил этувчи $y_1=0,4$ қиймат қабул қилади деган шартда X нинг мумкин бўлган қийматларининг шартли эҳтимолларини топамиз:

$$p(x_1\,|\,y_1)=\frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)}=\frac{0,15}{0,80}=\frac{3}{16};$$

$$p(x_2\,|\,y_1)=\frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)}=\frac{0,30}{0,80}=\frac{3}{8};$$

$$p(x_3\,|\,y_1)=\frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)}=\frac{0,35}{0,80}=\frac{7}{16}.$$

X нинг изланаётган шартли тақсимот қонунини ёзамиз:

X	2	5	8
$p(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16

Текшириш: $3/16+3/8+7/16=1$.

в) Шунга ўхшаш Y нинг шартли тақсимот қонунини топамиз:

Y	0,4	0,8
$p(Y\,|\,x_2)$	5/7	2/7

Текшириш: $5/7+2/7=1$.

422. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор берилган:

$Y \backslash X$	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

414. (X, Y) тасодифий миқдорлар системасининг дифференциал функцияси берилган:

$$f(x, y) = \frac{1}{(16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Системанинг интеграл функциясини топинг.

Кўрсатма. Ушбу формуладан фойдаланинг:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Жавоби.

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{4\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{5\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{5} + \frac{1}{10}\right).$$

415. Иккита тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси берилган: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; квадратда, $f(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$, бу квадратдан ташқарида $f(x, y) = 0$. Системанинг интеграл функциясини топинг.

Жавоби. Берилган квадратда

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x + y)],$$

бу квадратдан ташқарида $F(x, y) = 0$.

416. $x^2 + y^2 = R^2$ доирада дифференциал функция $f(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2})$; бу доирадан ташқарида $f(x, y) = 0$; а) C ўзгармасни топинг; б) агар $R = 2$ бўлса, (X, Y) тасодифий нуқтанинг радиуси $r = 1$, маркази координаталар бошида бўлган доирага тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. а) Дифференциал функциянинг иккинчи хоссасидан фойдаланамиз:

$$\iint_{(D)} C(R - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy = 1.$$

Бу ердан

$$C = \frac{1}{\iint_{(D)} (R - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy}.$$

Қутб координаталарга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$C = \frac{1}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R - \rho)\rho\, d\rho} = \frac{3}{\pi R^3}.$$

б) Шартга кўра $R = 2$, демак, $C = 3/8\pi$ ва $f(x, y) = \frac{3}{8\pi}\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Тасодифий нуқтанинг радиуси $r = 1$, маркази координаталар бошида бўлган доирага (D_1 соҳа) тушиш эҳтимоли:

$$P[(X, Y) \subset D_1] = \frac{3}{8\pi}\iint_{(D_1)} (2 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy.$$

Қутб координаталарга ўтиб, изланаётган эҳтимолни ҳосил қиламиз:

$$P = \frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - \rho)\rho\, d\rho = \frac{1}{2}.$$

417. (X, Y) тасодифий миқдорлар системасининг тақсимот сирти маркази координаталар бошида бўлган R радиусли ярим шардан иборат. Системанинг дифференциал функциясини топинг.

Кўрсатма. Қутб координаталарга ўтинг.

Жавоби. Маркази координаталар бошида бўлган R радиусли доиранинг ичида $f(x, y) = \frac{3}{2\pi R^3}\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$, бу доирадан ташқарида $f(x, y) = 0$.

418. Иккита тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси берилган: $f(x, y) = \frac{C}{(9 + x^2)(16 + y^2)}$. C ўзгармасни топинг.

Жавоби. $C = 12/\pi^2$.

419. (X, Y) тасодифий миқдорлар системасининг дифференциал функцияси берилган: $f(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$. C ўзгармасни топинг.

Кўрсатма. Қутб координаталарга ўтинг.

Жавоби. $C = 2/\pi$.

420. Биринчи квадрантда иккита тасодифий миқдор системасининг интеграл функцияси берилган:

$$F(x, y) = 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y};$$

а) $Y = 10$ шартда X нинг шартли тақсимот қонунини топинг; б) $X = 6$ шартда Y нинг шартли тақсимот қонунини топинг.

Жавоби. а)

X	3	6
$p(X \mid 10)$	5/7	2/7

; б)

Y	10	14	18
$p(Y \mid 6)$	5/14	5/28	13/28

3-§. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор ташкил этувчиларининг дифференциал функцияларини ва шартли дифференциал функцияларини топиш

Ташкил этувчилардан бирининг дифференциал функцияси системанинг дифференциал функциясидан олинган чегаралари чексиз хосмас интегралга тенг; бунда интеграллаш ўзгарувчиси иккинчи ташкил этувчига мос келади:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

Бу ерда ташкил этувчилардан ҳар бирининг мумкин бўлган қийматлари бутун сон ўқига тегишли деб фараз қилинади; агар мумкин бўлган қийматлар чекли интервалга тегишли бўлса, у ҳолда интеграллаш чегаралари сифатида тегишли чекли сонлар олинади.

X ташкил этувчининг берилган $Y = y$ қийматдаги $\varphi(x \mid y)$ *шартли дифференциал функцияси* деб, системанинг дифференциал функциясини Y ташкил этувчининг дифференциал функциясига нисбатига айтилади:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy}.$$

Шунга ўхшаш, *Y ташкил этувчининг шартли дифференциал функцияси:*

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy}.$$

Агар X ва Y ташкил этувчиларнинг шартли дифференциал функциялари уларнинг шартсиз дифференциал функцияларига тенг бўлса, у ҳолда бундай миқдорлар *эрклидир.*

Агар барча мумкин бўлган (x, y) қийматлар тегишли бўлган соҳада дифференциал функция ўзгармас қийматини сақласа, у ҳолда икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимоти *текис тақсимот* деб аталади.

423. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)}.$$

а) Ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топинг; б) ташкил этувчиларнинг шартли дифференциал функцияларини топинг.

Ечилиши. а) X нинг дифференциал функциясини топамиз:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)}\, dy.$$

Интеграллаш ўзгарувчиси y га боғлиқ бўлмаган $e^{-x^2/2}$ кўпайтувчини интеграл белгисидан ташқарига чиқарамиз ва қолган даража кўрсаткични тўла квадратга тўлдирамиз; у ҳолда

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \cdot e^{-x^2/2} \cdot e^{x^2/10} \cdot \sqrt{2/5} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{5/2}y + \sqrt{2/5}x)^2}\, d\left(\sqrt{5/2}y + \sqrt{2/5}x\right).$$

Пуассон интеграли $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ ни ҳисобга олиб, X нинг дифференциал функциясини ҳосил қиламиз:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} \cdot e^{-0,4x^2}$$

Шунга ўхшаш, Y нинг дифференциал функциясини ҳосил қиламиз:

$$f_2(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-2y^2}.$$

б) Ташкил этувчиларнинг шартли дифференциал функцияларини топамиз. Элементар ҳисоблашларни бажариб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(x+y)^2},$$

$$\psi(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,1(x+5y)^2}.$$

424. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси қуйидагича:

$$f(x,\ y)=Ce^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

а) C ўзгармасни топинг; б) ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топинг; в) ташкил этувчиларнинг шартли дифференциал функцияларини топинг.

Жавоби. а) $C=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$; б) $f_1(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}e^{-0{,}75x^2}$, $f_2(y)=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}e^{-3y^2};$$

в) $\varphi(x\mid y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+y)^2}$, $\psi(x\mid y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-0{,}25(x+4y)^2}$.

425. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$ квадратда $f(x,\ y)=\cos x\cos y$; бу квадратдан ташқарида $f(x,\ y)=0$. X ва Y ташкил этувчиларнинг эркли эканлигини исбот қилинг.

Кўрсатма. Ташкил этувчиларнинг шартли дифференциал функциялари мос шартсиз дифференциал функцияларга тенг эканлигига ишонч ҳосил қилинг.

426. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли тасодифий миқдор симметрия маркази координаталар бошида ҳамда томонларининг узунлиги $2a$ ва $2b$ бўлиб, координата ўқларига параллел тўғри тўртбурчак ичида текис тақсимланган: а) системанинг дифференциал функциясини топинг; б) ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топинг.

Жавоби. Берилган тўғри тўртбурчак ичида $f(x,\ y)=\frac{1}{4ab}$, бу тўғри тўртбурчакдан ташқарида $f(x,\ y)=0$; б) $|x|<a$ бўлганда $f_1(x)=\frac{1}{2a}$, $|x|>a$ бўлганда $f_1(x)=0$, $|y|<b$ бўлганда $f_2(y)=\frac{1}{2b}$; $|y|>b$ бўлганда $f_2(y)=0$.

427*. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор учлари $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 4)$, $B(3;\ 4)$, $C(6;\ 0)$ нуқталарда

бўлган тўғри бурчакли трапеция ичида текис тақсимланган: а) системанинг дифференциал функциясини топинг; б) ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топинг.

Жавоби. Трапеция ичида $f(x,\ y)=\frac{1}{18}$, ундан ташқарида $f(x,\ y)=0$; б)

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ бўлганда},\\ \frac{2}{9}, & 0<x<3 \text{ бўлганда},\\ -\frac{2}{27}x+\frac{4}{9}, & 3<x<6 \text{ бўлганда},\\ 0, & x>6 \text{ бўлганда};\end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}0, & y<0 \text{ бўлганда},\\ -\frac{1}{24}y+\frac{1}{3}, & 0<y<4 \text{ бўлганда},\\ 0, & y>4 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

428. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор учлари $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 8)$, $B(8;\ 0)$ бўлган тўғри бурчакли учбурчак ичида текис тақсимланган: а) системанинг дифференциал функциясини топинг; б) ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини ва шартли дифференциал функцияларини топинг.

Жавоби.

а) $f(x,\ y)=\frac{1}{32}$; б) $f_1(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}x$ $(0<x<8)$, $f_2(y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}y$ $(0<y<8)$; $\varphi(x\mid y)=\frac{1}{8-y}$ $(0<y<8)$, $\psi(y|x)=$

$$=\frac{1}{8-x}\ (0<x<8).$$

Кўрсатилган интервallардан ташқарида барча функциялар нолга тенг.

429*. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор учлари $A(-6;\ 0)$, $B(-3;\ 4)$, $C(3,\ 4)$, $D(6,\ 0)$ нуқталарда бўлган трапеция ичида текис тақсимланган: а) системанинг дифференциал функциясини топинг;

430. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган:

$$f(x,\ y)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2} & (x>0,\ y>0),\\ 0 & (x<0 \text{ ёки } y<0);\end{cases}$$

а) X ва Y ташкил этувчиларнинг математик кутилишларини топинг; б) ташкил этувчиларнинг дисперсияларини топинг.

Ечилиши. а) Олдин X нинг дифференциал функциясини топамиз:

$$f_1(x)=\int_0^\infty f(x,y)\,dy=4xe^{-x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}dy=2xe^{-x^2}\quad(x>0).$$

Шунга ўхшаш,

$$f_2(y)=2ye^{-y^2}\quad(y>0)$$

ни ҳосил қиламиз.

X ташкил этувчининг математик кутилишини топамиз:

$$M(X)=\int_0^\infty xf_1(x)\,dx=\int_0^\infty x\cdot(2xe^{-x^2}dx).$$

Икки марта бўлаклаб интеграллаб ва $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$

Пуассон интегралини ҳисобга олиб, $M(X)=\sqrt{\pi}/2$ ни ҳосил қиламиз; равшанки, $M(Y)=\sqrt{\pi}/2$;

б) X нинг дисперсиясини топамиз:

$$D(X)=\int_0^\infty x^2f_1(x)\,dx-[M(X)]^2=$$

$$=\int_0^\infty x^2(2xe^{-x^2}dx)-\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^2=1-\frac{\pi}{4}.$$

Равшанки, $D(Y)=1-\frac{\pi}{4}$.

431. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган:

$$f(x,\ y)=\begin{cases}36xye^{-(x^2+y^2)} & (x>0,\ y>0),\\ 0 & (x>0 \text{ ёки } y<0).\end{cases}$$

Ташкил этувчиларнинг математик кутилишларини ва дисперсияларини топинг.

Жавоби. $M(X)=M(Y)=\sqrt{3\pi}/6$; $D(X)=D(Y)=(4-\pi)/12$.

432. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган: $0\leqslant x\leqslant\pi/4$, $0\leqslant y\leqslant\pi/4$ квадратда $f(x,\ y)=2\cos x\cos y$; бу квадратдан ташқарида $f(x,\ y)=0$. Ташкил этувчиларнинг математик кутилишларини топинг.

Жавоби. $M(X)=M(Y)=(\pi+4-4\sqrt{2})/4$.

433. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган: $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$ квадратда $f(x,\ y)=\frac{1}{2}\sin(x+y)$, бу квадратдан ташқарида $f(x,\ y)=0$. Ташкил этувчиларнинг математик кутилишларини ва дисперсияларини топинг.

Жавоби. $M(X)=M(Y)=\pi/4$, $D(X)=D(Y)=(\pi^2+8\pi-32)/16$

434. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган: $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$ квадратда $f(x,\ y)=\frac{1}{4}\sin x\sin y$, бу квадратдан ташқарида $f(x,\ y)=0$; а) ташкил этувчиларнинг математик кутилишларини ва дисперсияларини топинг; б) корреляцион моментини топинг.

Жавоби. а) $M(X)=M(Y)=\pi/2$, $D(X)=D(Y)=\pi^2-4$; б) $\mu_{xy}=0$.

435. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг эркли ташкил этувчиларининг дифференциал функциялари берилган:

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ бўлганда},\\ 5e^{-5x}, & x>0 \text{ бўлганда};\end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}0, & y<0 \text{ бўлганда},\\ 2e^{-2y}, & y>0 \text{ бўлганда}.\end{cases}$$

а) Системанинг дифференциал функциясини топинг; б) системанинг интеграл функциясини топинг.

Кўрсатма. Агар системанинг ташкил этувчилари эркли бўлса, у ҳолда системанинг дифференциал ва интеграл функциялари мос.

б) ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топинг.

Жавоби. а) $f(x,\ y)=\frac{1}{36}$;

б)
$$f_1(x)=\begin{cases} 0,\ x<-6 \text{ бўлганда}, \\ \frac{1}{27}x+\frac{2}{3},\ -6<x<-3 \text{ бўлганда}, \\ \frac{1}{9},\ -3<x<3 \text{ бўлганда}, \\ -\frac{1}{27}x+\frac{2}{9},\ 3<x<6 \text{ бўлганда}, \\ 0,\ x<6 \text{ бўлганда}, \end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} 0,\ y<0 \text{ бўлганда}, \\ -\frac{1}{24}y+\frac{1}{3},\ 0<y<4 \text{ бўлганда}, \\ 0,\ y>4 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

4-§. Иккита узлуксиз тасодифий миқдор системасининг сонли характеристикалари

Ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини билган ҳолда уларнинг математик кутилишларини ва дисперсияларини топиш мумкин:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx,\quad M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx-[M(X)]^2;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}[y-M(Y)]^2 f_2(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)\,dy-[M(Y)]^2.$$

Баъзан системанинг дифференциал функцияларини ўз ичига оладиган ушбу формулалардан фойдаланиш қулай бўлади (икки каррали интеграллар системанинг мумкин бўлган қийматлари соҳасидан олинади):

$$M(X)=\iint x f(x,y)\,dx\,dy,\ M(Y)=\iint y f(x,\ y)\,dx\,dy;$$

$$D(X)=\iint[x-M(X)]^2 f(x,\ y)\,dx dy=\iint x^2 f(x,\ y)\,dx\,dy-[M(X)]^2,$$

$$D(Y)=\iint[y-M(Y)]^2 f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint y^2 f(x,y)\,dx\,dy-[M(Y)]^2.$$

$(X,\ Y)$ системанинг $k+s$ *-тартибли бошланғич моменти* деб, X^kY^s кўпайтманинг математик кутилишига айтилади:

$$\nu_{k,s}=M[X^k Y^s].$$

Хусусан,

$$\nu_{1,0}=M(X),\ \nu_{1,0}=M(Y).$$

$(X,\ Y)$ системанинг $(k+s)$*-тартибли марказий моменти* деб, мос равишда k-тартибли ва s-тартибли четланишлар кўпайтмасининг математик кутилишига айтилади:

$$\mu_{k,s}=M[X-M\{(X)]^k[Y-M(Y)]^s\}.$$

Хусусан,

$$\mu_{1,0}=M[X-M(X)]=0,\ \mu_{0,1}=M[(Y-M(Y)]=0;$$

$$\mu_{2,0}=M[X-M(X)]^2=D(X),\ \mu_{0,2}=M[Y-M(Y)]^2=D(Y).$$

$(X,\ Y)$ системанинг μ_{xy} *корреляцион моменти* деб, $(1+1)$-тартибли $\mu_{1,1}$ марказий моментга айтилади:

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\}.$$

X ва Y миқдорларнинг *корреляция коэффициенти* деб корреляцион моментнинг бу миқдорларнинг ўртача квадратик четланишлари кўпайтмасига нисбатига айтилади:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Корреляция коэффициенти ўлчамсиз миқдордир, шу билан бирга $|r_{xy}|\leqslant 1$. Корреляция коэффициенти X ва Y орасидаги ч и з и қ л и б о ғ л а н и ш зичлигини баҳолаш учун хизмат қилади: корреляция коэффициентининг абсолют қиймати бирга қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучлироқдир; корреляция коэффициентининг абсолют қиймати нолга қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучсиздир.

Агар иккита X ва Y тасодифий миқдорнинг корреляцион моменти нолдан фарқли бўлса, бу миқдорлар *корреляцияланган* дейилади.

Агар иккита X ва Y тасодифий миқдорнинг корреляцион моменти нолга тенг бўлса, бу миқдорлар *корреляцияланмаган* дейилади.

Иккита корреляцияланган миқдор, шунингдек, боғлиқ ҳамдир; агар иккита миқдор боғлиқ бўлса, улар корреляцияланган бўлиши ҳам, корреляцияланмаган бўлиши ҳам мумкин.

Иккита миқдорнинг эрклилигидан уларнинг корреляцияланмаганлиги келиб чиқади, лекин бу миқдорларнинг корреляцияланмаганлигидан уларнинг эрклилиги ҳақида хулоса чиқариш мумкин эмас (нормал тақсимланган миқдорлар учун корреляцияланмаганликдан эрклилилик келиб чиқади).

X ва Y узлуксиз тасодифий миқдорлар учун корреляцион момент ушбу формулалардан топилиши мумкин:

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[X-M(X)][Y-M(Y)]f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy-M(X)\cdot M(Y).$$

равишда ташкил этувчиларнинг дифференциал ва интеграл функциялари кўпайтмасига тенг.

Жавоби.

а) $f(x,\ y)=\begin{cases} 0,\ x<0 \text{ ёки } y<0 \text{ бўлганда}, \\ 10e^{-(5x+2y)},\ x>0,\ y>0 \text{ бўлганда}; \end{cases}$

б) $F(x,\ y)=\begin{cases} 0,\ x<0,\ y<0 \text{ бўлганда}, \\ (1-e^{-5x})(1-e^{-2y}),\ x>0 \text{ ёки } y>0 \text{ бўлганда}. \end{cases}$

436. $(X,\ Y)$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор маркази координаталар бошида бўлган r радиусли доира ичида текис тақсимланган. X ва Y нинг боғлиқлигини, лекин корреляцияланмаганлигини исботланг.

К ў р с а т м а. Ташкил этувчиларнинг шартсиз ва шартли дифференциал функцияларини таққосланг, корреляцион моментнинг нолга тенглигига ишонч ҳосил қилинг.

Жавоби.

$$f_1(x)=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^3-x^2},\ \varphi(x/y)=\frac{2}{2\sqrt{r^2-x^2}};$$

$$f_2(y)=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2},\ \psi(y/x)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}.$$

437. Агар $(X,\ Y)$ тасодифий миқдорлар системасининг дифференциал функцияларидан бири фақат x га, иккинчиси эса фақат y га боғлиқ бўлган иккита функциянинг кўпайтмаси кўринишида тасвирланиши мумкин бўлса, у ҳолда X ва Y миқдорлар эркли бўлишини исбот қилинг.

Е ч и л и ш и. Шартга кўра

$$f(x,\ y)=\varphi(x)\cdot\psi(y). \qquad (*)$$

Ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топамиз:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dy=\varphi(x)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy, \qquad (**)$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx=\psi(y)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx. \qquad (***)$$

(**) дан $\varphi(x)$ ни ва (***) дан $\chi(y)$ ни ифодалаб оламиз:

$$\varphi(x)=\frac{f_1(x)}{\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy},\quad \psi(y)=\frac{f_2(y)}{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx}.$$

(*) га асосан

$$f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx}.$$

Система дифференциал функциясининг иккинчи хоссасига кўра

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dxdy=1.$$

Буни эътиборга оламиз, демак,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)dy=1.$$

У ҳолда узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Шундай қилиб, қаралаётган икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси ташкил этувчиларнинг дифференциал функциялари кўпайтмасига тенг. Бундан эса X ва Y нинг эрклилиги келиб чиқади, ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

438. Агар X ва Y ушбу $Y=aX+b$ чизиқли боғланиш билан боғланган бўлса, у ҳолда корреляция коэффициентининг абсолют қиймати бирга тенглигини исботланг.

Е ч и л и ш и. Корреляция коэффициентининг таърифига кўра

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y},$$

бу ерда

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}. \qquad (*)$$

Y нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(Y)=M[aX+b]=aM(X)+b. \qquad (**)$$

(**) ни (*) га қўйиб, элементар алмаштиришлардан сўнг, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mu_{xy}=aM[X-M(X)]^2=aD(X)=a\sigma_x^2.$$

Сўнгра

$$Y - M(Y) = (aX + b) - (aM(X) + b) = a[X - M(X)]$$

эканлигини ҳисобга олиб, Y нинг дисперсиясини топамиз:

$$D(Y) = M[Y - M(Y)]^2 = a^2M[X - M(X)]^2 = a^2 \cdot \sigma_x^2.$$

Бу ердан

$$\sigma_y = |a|\,\sigma_x.$$

Демак, корреляция коэффициенти:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{a \cdot \sigma_x^2}{\sigma_x \cdot (|a| \cdot \sigma_x)} = \frac{a}{|a|}.$$

Агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда $r_{xy} = 1$; агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда $r_{xy} = -1$.

Шундай қилиб $|r_{xy}| = 1$, ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

Учинчи қисм

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Тўққизинчи боб

ТАНЛАНМА МЕТОД

1-§. Танланманинг статистик тақсимоти

X (дискрет ёки узлуксиз) белгининг миқдорий хусусиятини ўрганиш учун бош тўпламдан n ҳажмли $x_1, x_2 \ldots x_n$ танланма олинган бўлсин. X нинг кузатилган x_i қийматлари *вариантлар*, ортиб бориш тартибида ёзилган варианталар кетма-кетлиги эса *вариацион қатор* дейилади.

Танланманинг статистик тақсимоти деб вариацион қаторнинг x_i варианталари ва уларга мос n_i частоталар (барча частоталар йиғиндиси танланманинг ҳажми n га тенг) ёки w_i нисбий частоталар рўйхатига (барча нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг) айтилади.

Танланманинг статистик тақсимоти интерваллар кетма-кетлиги ва уларга мос частоталар кўринишида ҳам берилиши мумкин (интервалнинг частотаси сифатида бу интервалга тушган варианталарнинг частоталари йиғиндиси олинади).

439. Танланма

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

частоталар тақсимоти кўринишида берилган.

Нисбий частоталар тақсимотини топинг.

Ечилиши. Танланманинг ҳажмини топамиз:

$$n = 1 + 3 + 6 = 10.$$

Нисбий частоталарни топамиз:

$$w_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1;\ w_2 = \frac{3}{10} = 0{,}3;\ w_3 = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Изланаётган нисбий частоталар тақсимотини ёзамиз:

x_i	2	5	7
w_i	0,1	0,3	0,6

Текшириш: $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1.$

14—7280

Нисбий частоталар полигони деб, кесмалари (x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k) нуқталарини туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади, бу ерда x_i — танланманинг варианталари ва w_i — уларга мос нисбий частоталар.

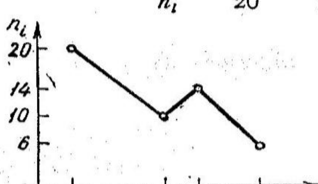
Б. X белгининг узлуксиз тақсимоти

Белги узлуксиз тақсимланган ҳолда белгининг барча кузатилган қийматлари ётган интервални узунлиги h бўлган қатор қисмий интервалларга бўлинади ва i-интервалга тушган варианталарнинг частоталари йиғиндиси n_i топилади. *Частоталар гистограммаси* деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{n_i}{h}$ нисбатларига (частота зичлиги) га тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади. i-қисмий тўғри тўртбурчакнинг юзи $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$. i-интервалга тушган варианталарнинг частоталари йиғиндисига тенг. Гистограмманинг юзи барча частоталар йиғиндисига, яъни танланма ҳажми n га тенг.

Нисбий частоталар гистограммаси деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{w_i}{h}$ нисбат (нисбий частота зичлиги) га тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади. i-қисмий тўғри тўрбурчакнинг юзи $h \cdot \frac{w_i}{h} = w_i$ га, яъни i-интервалга тушган варианталарнинг нисбий частоталари йиғиндисига тенг. Нисбий частоталар гистограммасининг юзи барча нисбий частоталар йиғиндисига, яъни бирга тенг.

443. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар полигонини ясанг:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6



12- расм.

Ечилиши. Абсциссалар ўқида x_i варианталарни, ординаталар ўқида эса уларга мос n_i-частоталарни қўямиз. (x_i, n_i) нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, изланаётган частоталар полигонини ҳосил қиламиз (12- расм).

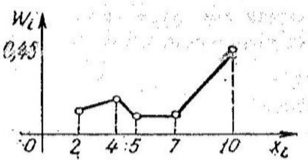
444. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар полигонини ясанг:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20;

б)

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25.



13- расм.

445. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича нисбий частоталар полигонини ясанг:

а)	x_i	2	4	5	7	10;
	w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45;
б)	x_i	1	4	5	8	9;
	w_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1;
в)	x_i	20	40	65	80;	
	w_i	0,1	0,2	0,3	0,4.	

Ечилиши. а) абсциссалар ўқида x_i варианталарни, ординаталар ўқида эса мос келувчи w_i нисбий частоталарни қўямиз; (x_i, w_i) нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, изланаётган нисбий частоталар полигонини ҳосил қиламиз (13- расм).

446. $n = 100$ ҳажмли танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар гистограммасини ясанг:

Интервал номери	Қисмий интервал	Интервалдаги варианталар частоталари йиғиндиси	Частота зичлиги
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	1—5	10	2,5
2	5—9	20	5
3	9—13	50	12,5
4	13—17	12	3
5	17—21	8	2

Ечилиши. Абсциссалар ўқида $h = 4$ узунликдаги берилган интервалларни ясаймиз. Бу интервалларнинг

440. Танланма

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

частоталар тақсимоти кўринишида берилган. Нисбий частоталар тақсимотини топинг:

Жавоби.

x_i	4	7	8	12
w_i	0,25	0,10	0,15	0,50

2-§. Тақсимотнинг эмпирик функцияси

Тақсимотнинг *эмпирик функцияси* (танланманинг тақсимот функцияси) деб. ҳар бир x қиймат учун $X < x$ ходисанинг нисбий частотасини аниқлайдиган $F^*(x)$ функцияга айтилади:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

бу ерда n_x — x дан кичик варианталар сони, n — танланма ҳажми.

Эмпирик функция қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. *Эмпирик функциянинг қийматлари* $[0; 1]$ *кесмага тегишли.*

2-хосса. $F^*(x)$ *камаймайдиган функция.*

3-хосса. *Агар x_1 энг кичик варианта, x_k эса энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x<x_1$ бўлганда $F^*(x)=0$, $x>x_k$ бўлганда $F^*(x)=1$.*

441. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича унинг эмпирик функциясини топинг:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Ечилиши. Танланманинг ҳажмини топамиз:

$$n = 10 + 15 + 25 = 50.$$

Энг кичик варианта бирга тенг, демак,

$$F^*(x) = 0, \quad x \leqslant 1 \text{ бўлганда.}$$

$X<4$ қиймат, чунончи $x_1 = 1$ қиймат 10 марта кузатилган, демак, $1 < x \leqslant 4$ бўлганда

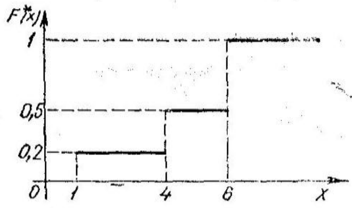
$$F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2.$$

$x<6$ қийматлар, чунончи $x_1=1$ ва $x_2=4$ қийматлар $10+15=25$ марта кузатилган, демак. $4 < x \leqslant 6$ бўлганда

$$F^*(x) = \frac{25}{50} = 0{,}5.$$

$x=6$ энг катта варианта бўлгани учун $x>6$ бўлганда

$$F^*(x) = 1.$$



11-расм.

Изланаётган эмпирик функцияни ёзамиз:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}2, & 1 < x \leqslant 4 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}5, & 4 < x \leqslant 6 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 6 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 11-расмда тасвирланган.

442. Танланманинг қуйида берилган ушбу тақсимоти бўйича унинг эмпирик функциясини топинг:

а)

x_i	2	5	7	8;
n_i	1	3	2	4

б)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3.

Жавоби. а)

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}1, & 2 < x \leqslant 5 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}4, & 5 < x \leqslant 7 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}6, & 7 < x \leqslant 8 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 8 \text{ бўлганда;} \end{cases}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 4 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}4, & 4 < x \leqslant 7 \text{ бўлганда,} \\ 0{,}7, & 7 < x \leqslant 8 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 8 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

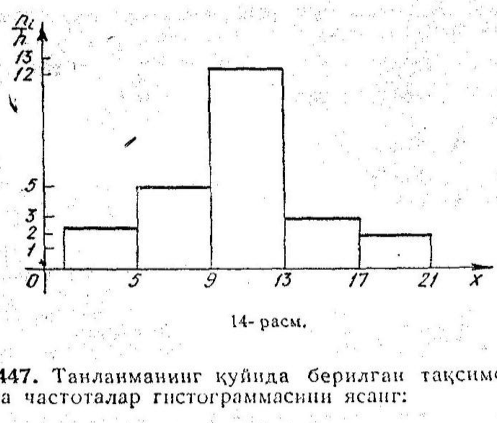
3-§. Полигон ва гистограмма

А. X белгининг дискрет тақсимоти

Частоталар полигони деб, кесмалари $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$ нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади, бу ерда x_i — танланманинг варианталари ва n_i — уларга мос частоталар.

устида абсциссалар ўқига параллел ва ундан тегишли частота зичликлари $\frac{n_i}{h}$ га тенг масофада бўлган кесмалар ўтказамиз. Масалан, (1, 5) интервалнинг устида абсциссалар ўқига параллел қилиб, $\frac{n_i}{h} = \frac{10}{4} = 2{,}5$ масофада кесма ясаймиз. Қолган кесмалар ҳам шунга ўхшаш ясалади.

Изланаётган частоталар гистограммаси 14-расмда тасвирланган.



14-расм.

447. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар гистограммасини ясанг:

а)

Интервал номери	Қисмий интервал	Интервалдаги варианталар частоталарининг йиғиндиси	Частота зичлиги
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	2—7	5	
2	7—12	10	
3	12—17	25	
4	17—22	6	
5	22—27	4	

Жадвалнинг давоми

б)

Интервал номери	Қисмий интервал	Интервалдаги варианталар частоталарининг йиғиндиси	Частота зичлиги
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	3—5	4	
2	5—7	6	
3	7—9	20	
4	9—11	40	
5	11—13	20	
6	13—15	4	
7	15—17	6	

Кўрсатма. Аввал ҳар бир интервал учун n_i/h частота зичлигини топинг ва жадвалнинг сўнгги устунини тўлдиринг.

448. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича нисбий частоталар гистограммасини ясанг:

Интервал номери	Қисмий интервал	Қисмий интервалдаги варианталар частоталарининг йиғиндиси
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0—2	20
2	2—4	30
3	4—6	50
		$n = \Sigma n_i = 100$

Ечилиши. Нисбий частоталарни топамиз:

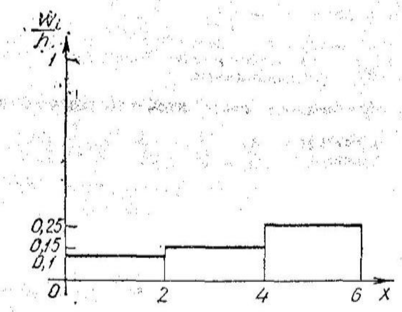
$$w_1 = \frac{20}{100} = 0{,}2; \quad w_2 = \frac{30}{100} = 0{,}3; \quad w_3 = \frac{50}{100} = 0{,}5.$$

Интервалнинг узунлиги $h = 2$ эканлигини ҳисобга олиб, нисбий частоталар зичлигини топамиз:

$$\frac{w_1}{h} = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1; \quad \frac{w_2}{h} = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15; \quad \frac{w_3}{h} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25.$$

Абсциссалар ўқида берилган қисмий интервалларни белгилаймиз. Бу интервалларнинг устида абсциссалар ўқига параллел ва ундан тегишли нисбий частота зичликлари тенг масофада кесмалар ўтказамиз. Масалан, (0, 2) интервалнинг устида абсциссалар ўқига параллел ва ундан 0,1 *масофада ётадиган кесма ўтказамиз;* қолган кесмалар ҳам шунга ўхшаш ясалади.

Изланаётган нисбий частоталар гистограммаси 15-расмда тасвирланган.



15-расм.

449. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича нисбий частоталар гистограммасини ясанг:

а)

Интервал номери	Қисмий интервал	Қисмий интерваллаги варианталар частоталарининг йиғиндиси
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	10—15	2
2	15—20	4
3	20—25	8
4	25—30	4
5	30—35	2
		$n = \Sigma n_i = 20$

б)

Интервал номери	Қисмий интервал	Қисмий интерваллаги варианталар частоталарининг йиғиндиси
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2—5	6
2	5—8	10
3	8—11	4
4	11—14	5
		$n = \Sigma n_i = 25$

Кўрсатма. Аввал ҳар бир интервалнинг нисбий частота зичлигига мос нисбий частоталарни топинг.

Ўнинчи боб

ТАҚСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИНГ СТАТИСТИК БАҲОЛАРИ

1-§. Нуқтавий баҳолар

Нуқтавий баҳо деб, битта сон билан аниқланадиган статистик баҳога айтилади.

Силжимаган баҳо деб, танланманинг ҳажми исталганча бўлганда ҳам математик кутилиши баҳоланаётган параметрга тенг *бўлган нуқтавий баҳога айтилади.*

Силжиган баҳо деб, математик кутилиши баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган нуқтавий баҳога айтилади.

Бош ўртача қийматнинг (математик кутилишнинг) силжимаган баҳоси бўлиб,

$$\overline{x}_т = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$$

танланма ўртача қиймат хизмат қилади, бу ерда x_i — танланманинг вариантаси, n_i — вариантанинг частотаси, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — танланма ҳажми.

1-эслатма. Агар дастлабки x_i варианталар катта сонлар бўлса, у ҳолда ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида ҳар бир вариантадан бир хил C сонни айириш, яъни $u_i = x_i - C$ шартли *варианталарга ўтиш мақсадга мувофиқдир* (C *сифатида танланма* ўртача қийматга яқин сонни олиш фойдалидир бош, ўртача қиймат номаълум бўлгани учун C сони „чамалаб“ танланади). У ҳолда

ёки

$$\sum n_i u_i = \sum n_i x_i - C\sum n_i = \sum n_i x_i - C$$

Бу ердан

$$\sum n_i x_i = Cn + \sum n_i u_i.$$

Демак,

$$\frac{\Sigma n_i x_i}{n} = C + \frac{\Sigma n_i u_i}{n}$$

ёки

$$\overline{x}_т = C + \frac{\Sigma n_i u_i}{n},$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

453. $n = 10$ ҳажмли *танланманинг берилган* тақсимоти бўйича ўртача танланма қийматни топинг:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Ечилиши. Дастлабки варианталар катта сонлар, шунинг учун шартли варианталарга ўтамиз: $u_i = x_i - 1270$. Натижада шартли варианталар тақсимотини ҳосил қиламиз:

u_i	−20	0	10
n_i	2	5	3

Ечилиши. Изланаётган ўртача танланма қийматни топамиз:

$$\overline{x}_т = C + \frac{\Sigma n_i u_i}{n} = 1270 + \frac{2 \cdot (-20) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269.$$

454. $n = 20$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича ўртача танланма қийматни топинг:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Кўрсатма. $u_i = x_i - 2620$ *шартли варианталарга ўтинг.*

Жавоби. $\overline{x}_т = 2621$.

455. $n = 41$ ҳажмли танланма бўйича бош дисперсиянинг $D_т = 3$ силжиган баҳоси топилган. Бош тўплам дисперсиясининг силжимаган баҳосини топинг.

Ечилиши. Изланаётган силжимаган баҳо тузатилган дисперсияга тенг:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_т = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3,075.$$

456. $n = 51$ ҳажмли танланма бўйича бош дисперсиянинг $D_т = 5$ силжиган баҳоси топилган. Бош тўплам дисперсиясининг силжимаган баҳосини топинг.

Жавоби. $s^2 = 5,1$.

457. Стерженнинг узунлигини битта асбоб билан беш марта ўлчаш (систематик хатоларсиз) натижасида қуйидаги натижалар олинган (мм ҳисобида): 92; 94; 103; 105; 106. а) стержень узунлигининг ўртача танланма қийматини топинг; б) асбоб хатолигининг танланма ва тузатилган дисперсияларини топинг.

Ечилиши. а) танланма ўртача қийматни топамиз:

$$\overline{x} = 92 + \frac{0 + 2 + 11 + 13 + 14}{5} = 92 + 8 = 100.$$

б) Танланма дисперсияни топамиз:

$$D_т = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x}_т)^2}{n} =$$

$$= \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2}{5} + \frac{(105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34.$$

Тузатилган дисперсияни топамиз:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_т = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5.$$

458. Бирор физик катталикни битта асбоб билан тўрт марта (систематик хатоларсиз) ўлчаш натижасида қуйидаги натижалар олинган: 8; 9; 11; 12. а) ўлчаш натижаларининг ўртача танланма қийматини топинг; б) асбоб хатолигининг танланма ва тузатилган дисперсияларини топинг.

Жавоби. а) $\overline{x}_т = 10$; б) $D_т = 2,5$; $s^2 = \frac{10}{3}$.

$$\bar{x}_т = C + \frac{\sum n_i u_i}{n},$$

Бош дисперсиянинг силжиган баҳоси бўлиб, танланма дисперсия хизмат қилади:

$$D_т = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_т)^2}{n};$$

бу силжиган баҳодир, чунки

$$M[D_т] = \frac{n-1}{n} D_б.$$

Ушбу формула қулайроқдир:

$$D_т = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n}\right]^2.$$

2-эслатма. Агар дастлабки x_i варианталар катта сонлар бўлса, у ҳолда ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида барча варианталардан ўртача танланма қийматга тенг ёки унга яқин бўлган бир хил сонни айириш, яъни $u_i = x_i - C$ шартли варианталарга ўтиш мақсадга мувофиқдир (бунда дисперсия ўзгармайди). У ҳолда

$$D_т(X) = D_т(u) = \overline{u^2} - [\bar{u}]^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2.$$

3-эслатма. Агар дастлабки варианталар вергулдан кейин k та хонали ўнли касрлар бўлса, у ҳолда касрлар устида амаллар бажаришдан қутилиш мақсадида дастлабки варианталарни ўзгармас $C = 10^k$ сонга кўпайтирилади, яъни $u_i = Cx_i$ шартли варианталарга ўтилади. Бунда дисперсия C^k марта ортади. Шу сабабли дисперсияни шартли варианталарда топгандан сўнг, уни C^2 га бўлиш лозим:

$$D_т(X) = \frac{D_т(u)}{C^2}.$$

Бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси бўлиб, тузатилган танланма дисперсия хизмат қилади:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_т = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_т)^2}{n-1}.$$

Ушбу формула қулайроқдир:

$$s_X^2 = \frac{\sum n_i x_i^2 - \frac{[\sum n_i x_i]^2}{n}}{n-1}.$$

Бу формула шартли варианталарда ушбу кўринишни олади:

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n-1},$$

шу билан бирга агар, $u_i = x_i - C$ бўлса, у ҳолда $s_X^2 = s_u^2$, агар $u_i = Cx_i$ бўлса, у ҳолда $s_X^2 = \frac{s_u^2}{C^2}$.

4-эслатма. Маълумотлар сони катта бўлганда кўпайтмалар методидан (XI боб, 1-§ га қаранг) ёки йиғиндилар методидан (XI боб, 2-§ га қаранг) фойдаланилади.

450. Бош тўпламдан $n=50$ ҳажмли танланма олинган:

варианта	x_i	2	5	7	10
частота	n_i	16	12	8	14.

Бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳосини топинг.

Ечилиши. Бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳоси ўртача танланма қиймат бўлади:

$$\bar{x}_т = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{16\cdot 2 + 12\cdot 5 + 8\cdot 7 + 14\cdot 10}{50} = 5,76.$$

451. Бош тўпламдан $n=60$ ҳажмли танланма олинган:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳосини топинг.

Жавоби. $\bar{x}_т = 4$.

452. n ҳажмли танланма дастлабки варианталарининг тақсимоти берилган:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	....	n_k

Қуйидагини исботланг:

$$\bar{x}_т = C + \frac{\sum n_i u_i}{n},$$

бу ерда $u_i = x_i - C$ шартли варианталар.

Ечилиши. $u_i = x_i - C$ бўлгани учун $n_i u_i = n_i(x_i - C)$; бу тенгликнинг ўнг ва чап томонларини i нинг барча қийматлари бўйича жамлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum n_i u_i = \sum n_i (x_i - C)$$

459. Қуйида таваккалига олинган 100 студентнинг бўйини ўлчаш натижалари (см ҳисобида) келтирилган.

Бўйи	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Студентлар сони	10	14	26	28	12	8	2

Текширилган студентлар бўйининг ўртача танланма қийматини ва танланма дисперсиясини топинг.

Кўрсатма. Интервалларнинг ўрталарини топинг ва уларни варианталар сифатида қабул қилинг.

Жавоби. $\bar{x}_т = 166$, $D_т = 33,44$

460. $n=10$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Ечилиши. Варианталар — нисбатан катта сонлар, шунинг учун $u_i = x_i - 191$ шартли варианталарга ўтамиз (биз варианталардан ўртача танланма қийматга энг яқин сон $C = 191$ ни айирдик). Натижада шартли варианталар тақсимотини ҳосил қиламиз:

u_i	−5	1	3
n_i	2	5	3

Изланаётган танланма дисперсияни топамиз:

$$D_т = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2 = \frac{2\cdot 5^2 + 5\cdot 1^2 + 3\cdot 3^2}{10} - \left[\frac{2\cdot(-5) + 5\cdot 1 + 3\cdot 3}{10}\right]^2 = 8,2 - 0,16 = 8,04.$$

461. $n = 100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Кўрсатма. $u_i = x_i - 360$ шартли варианталарга ўтинг.

Жавоби. $D_т(X) = D_т(u) = 167,29$.

462. $n = 100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

Кўрсатма. $u_i = x_i - 2844$ шартли варианталарга ўтинг.

Жавоби. $D_T(X) = D_T(u) = 12603$.

463. $n = 10$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Ечилиши. Касрлар устида амаллар бажаришдан қутилиш учун $u_i = 100\,x_i$ шартли варианталарга ўтамиз. Натижада қуйидаги тақсимотни ҳосил қиламиз:

n_i	1	4	8
x_i	5	3	2

Шартли варианталарнинг танланма дисперсиясини топамиз.

$$D_т(u) = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2.$$

Бу формулага шартли варианталарни ва уларнинг частоталарини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D_T(u) = 7,21.$$

Дастлабки варианталарнинг изланаётган танланма дисперсиясини топамиз:

$$D_T(X) = \frac{D_T(u)}{100^2} = \frac{7,21}{10\,000} = 0,0007.$$

464. $n = 50$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

Кўрсатма. $u_i = 10x_i$ шартли варианталарга ўтинг.

Жавоби. $D_T(X) = \frac{D_T(u)}{10^2} = \frac{31,644}{100} = 0,32.$

465. $n = 50$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма дисперсияни топинг:

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

Кўрсатма. $u_i = 10x_i - 195$ шартли варианталарга ўтинг.

Жавоби. $D_T(X) = \frac{D_T(u)}{10^2} = \frac{59,16}{100} = 0,5916.$

466. $n=10$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича тузатилган танланма дисперсияни топинг:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Ечилиши. $u_i = x_i - 104$ шартли вариантларга ўтамиз. Натижада ушбу тақсимотни ҳосил қиламиз:

n_i	−2	0	4
x_i	2	3	5

Шартли вариантларнинг тузатилган танланма дисперсиясини ушбу формуладан фойдаланиб топамиз:

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n-1}.$$

Бу формулага шартли вариантларни, уларнинг частоталарини ва танланма ҳажмини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$s_u^2 = 9{,}49.$$

Дастлабки ҳамма вариантлар бир хил $C = 104$ сонга камайтирилган эди, шунинг учун дисперсия камаймади, яъни изланаётган дисперсия шартли вариантлар дисперсиясига тенг:

$$s_X^2 = s_u^2 = 9{,}49.$$

467. $n = 100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича тузатилган танланма дисперсиясини топинг:

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

Кўрсатма. $u_i = x_i - 1275$ шартли вариантларга ўтинг.

Жавоби. $s_X^2 = s_u^2 = 170{,}42.$

468. $n = 10$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича тузатилган танланма дисперсияни топинг:

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

Ечилиши. Касрлар устида амаллар бажаришдан қутилиш учун $u_i = 100x_i$ шартли вариантларга ўтамиз. Натижада ушбу тақсимотни ҳосил қиламиз:

u_i	1	5	9
n_i	2	3	5

Шартли вариантларнинг тузатилган танланма дисперсиясини ушбу формула бўйича топамиз:

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n-1}.$$

Бу формулага масаладаги берилганларни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$s_u^2 = 85{,}28.$$

Дастлабки вариантларнинг тузатилган танланма дисперсиясини топамиз:

$$s_X^2 = \frac{s_u^2}{100^2} = \frac{85{,}28}{10\,000} \simeq 0{,}0085.$$

469. $n = 20$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича тузатилган танланма дисперсияни топинг:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Кўрсатма. $u_i = 10x_i$ шартли вариантларга ўтинг.

Жавоби. $s_X^2 = \frac{s_u^2}{10^2} = \frac{5{,}25}{100} = 0{,}0525.$

470. $n = 10$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича тузатилган танланма дисперсияни топинг:

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

Кўрсатма. $u_i = 10x_i - 268$ шартли вариантларга ўтинг.

Жавоби. $S_X^2 = s_u^2/100 = 489/\ 100 = 4{,}89.$

2-§. Интервалли баҳолар

Интервалли баҳо деб, баҳоланаётган параметрни қоплайдиган интервалнинг учлари бўлган иккита сон билан аниқланадиган баҳога айтилади.

Ишончли интервал деб, баҳоланаётган параметрни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган интервалга айтилади.

Бош тўпламнинг нормал тақсимланган X миқдорий белгисининг a математик кутилишини x_T танланма ўртача қиймат бўйи-

тақсимланган бош тўпламнинг ўртача квадратик четланиши маълум: $\sigma = 1{,}2$.

Ечилиши. Бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг аниқлигини ифодалайдиган

$$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

формуладан фойдаланамиз. Бу ердан

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}. \qquad (*)$$

Шартга кўра $\gamma = 0{,}975$ ёки $2\Phi(t) = 0{,}975$; демак, $\Phi(t) = 0{,}4875$. Жадвалдан (2-илова) $t = 2{,}24$ ни топамиз. $t = 2{,}24$, $\sigma = 1{,}2$ ва $\delta = 0{,}2$ ни (*) га қўйиб, изланаётган танланма ҳажми $n = 81$ ни ҳосил қиламиз.

477. Танланманинг шундай минимал ҳажмини топингки, нормал тақсимланган бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг аниқлиги 0,925 ишончлилик билан 0,2 га тенг бўлсин. Бош тўпламнинг ўртача квадратик четланиши маълум: $\sigma = 1{,}5$.

Жавоби. $n = 179$.

478. Бош тўпламдан $n = 10$ ҳажмли танланма олинган:

варианта	x_i	−2	1	2	3	4	5
частота	n_i	2	1	2	2	2	1

Бош тўпламнинг нормал тақсимланган X белгисининг a математик кутилишини танланма ўртача қиймат бўйича 0,95 ишончлилик билан ишончли интервал ёрдамида баҳоланг.

Ечилиши. Танланма ўртача қийматни ва тузатилган ўртача квадратик четланишни мос равишда ушбу формулалар бўйича топамиз:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum n_i x_i}{n},\quad s = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n-1}}.$$

Бу формулаларга масалада берилганларни қўйиб,

$$\bar{x}_T = 2,\ s = 2{,}4$$

ни ҳосил қиламиз.

t_γ ни топамиз. Жадвалдан (3-илова) фойдаланиб, $\gamma = 0{,}95$ ва $n = 10$ бўйича $t_\gamma = 2{,}26$ ни топамиз.

Изланаётган

$$\bar{x}_T - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ишончли интервални топамиз. Бунга $\bar{x}_T = 2$; $t_\gamma = 2{,}26$; $s = 2{,}4$; $n = 10$ ни қўйиб, изланаётган $0{,}3 < a < 3{,}7$ ишончли интервални ҳосил қиламиз, у номаълум a математик кутилишни 0,95 ишончлилик билан қоплайди.

479. Бош тўпламдан $n = 12$ ҳажмли танланма олинган:

варианта	x_i	−0,5	−0,4	−0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
частота	n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Бош тўпламнинг нормал тақсимланган белгисининг a математик кутилишини 0,95 ишончлилик билан ишончли интервал ёрдамида баҳоланг.

Жавоби. $-0{,}04 < a < 0{,}88$.

480. Бирор физик катталикни бир хил аниқликда 9 марта ўлчаш маълумотлари бўйича ўлчаш натижаларининг танланма ўртача қиймати $\bar{x}_T = 30{,}1$ ва тузатилган ўртача квадратик четланиши $s = 6$ топилган. Ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматини ишончли интервал ёрдамида $\gamma = 0{,}99$ ишончлилик билан баҳоланг.

Ечилиши. Ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати унинг a математик кутилишига тенг. Шу сабабли масала математик кутилишни (σ номаълум бўлганда)

$$\bar{x}_T - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ишончли интервал ёрдамида баҳолашга келтирилади. Бу ерда t_γ дан бошқа барча катталиклар маълум. t_γ ни топамиз. Жадвалдан (3-илова) $\gamma = 0{,}95$ ва $n = 9$ бўйича $t_\gamma = 3{,}36$ ни топамиз.

$\bar{x} = 30{,}1$, $t_\gamma = 3{,}36$, $s = 6$, $n = 9$ ни (*) га қўйиб, ушбу изланаётган интервални ҳосил қиламиз:

$$23{,}38 < a < 36{,}82.$$

481. Бирор физик катталикни бир хил аниқликда 16 марта ўлчаш маълумотлари бўйича ўлчаш натижаларининг ўртача арифметик қиймати $\bar{x}_T = 42{,}8$ ва тузатил-

ча баҳолаш учун σ ўртача квадратик четланиш маълум бўлганда

$$\bar{x}_T - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ишончли интервал хизмат қилади, бу ерда $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ баҳонинг аниқлиги; n — танланма ҳажми; t — ушбу $\Phi(t)$ Лаплас функцияси (2-илова) аргументининг $\Phi(t) = \gamma/2$ бўладиган қиймати; σ номаълум бўлганда (ва танланма ҳажми $n > 30$ бўлганда) юқоридаги баҳо учун

$$\bar{x}_T - t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}$$

интервал хизмат қилади, бу ерда s — тузатилган ўртача квадратик четланиш; t_γ ни жадвалдан (3-илова) берилган n ва γ бўйича топилади.

Нормал тақсимланган X миқдорий белгининг σ ўртача квадратик четланишини s тузатилган танланма ўртача квадратик четланиш бўйича γ ишончлилик билан баҳолаш учун ушбу ишончлилик интерваллари хизмат қилади:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (q < 1 \text{ бўлганда}),$$
$$0 < \sigma < s(1+q) \quad (q > 1 \text{ бўлганда}),$$

бу ерда q ни жадвалдан (4-илова) берилган n ва γ бўйича топилади.

471. Бош тўпламнинг нормал тақсимланган X белгисининг номаълум a математик кутилишини 0,95 ишончлилик билан баҳолаш учун ишончлилик интервалини топинг. Бош ўртача квадратик четланиш $\sigma = 5$, танланма ўртача қиймат $\bar{x}_T = 14$ ва танланма ҳажми $n = 25$ берилган.

Ечилиши. Ушбу ишончлилик интервалини топиш талаб этилмоқда:

$$\bar{x}_T - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (*)$$

Бу ерда t дан бошқа барча катталиклар маълум. t ни топамиз. $2\Phi(t) = 0,95$ муносабатдан $\Phi(t) = 0,475$ ни ҳосил қиламиз. Жадвалдан (2-илова) $t = 1,96$ ни топамиз. $t = 1,96$, $\bar{x}_T = 14$, $\sigma = 5$, $n = 25$ ни (*) га қўйиб, узил-кесил ушбу изланаётган ишончлилик интервалини ҳосил қиламиз:

$$12,04 < a < 15,96.$$

472. Бош тўпламнинг нормал тақсимланган X белгисининг номаълум a математик кутилишини 0,99 ишончлилик билан баҳолаш учун ишончлилик интервалини топинг. Бош ўртача квадратик четланиш σ, танланма ўртача қиймат $\bar{x}_T$ ва танланма ҳажми n берилган:

а) $\sigma = 4$, $\bar{x}_T = 10,2$, $n = 16$; б) $\sigma = 5$, $\bar{x}_T = 16,8$, $n = 25$.

Жавоби. а) $7,63 < a < 12,77$; б) $14,23 < a < 19,37$.

473. Ўлчаш тасодифий хатолигининг ўртача квадратик четланиши $\sigma = 40$ м бўлган битта асбобда тўпдан нишонгача бўлган масофалар бир хил аниқликда 5 марта ўлчанган. Ўлчаш натижаларининг ўртача арифметик қиймати $\bar{x}_T = 2000$ м ни билган ҳолда тўпдан нишонгача бўлган ҳақиқий a масофани $\gamma = 0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончлилик интервалини топинг.

Жавоби. $1960,8 < a < 2039,2$.

474. Кўп сондаги электр лампалар партиясидан олинган танланмада 100 та лампа бор. Танланмадаги лампанинг ўртача ёниш давомийлиги 1000 соатга тенг бўлиб чиқди. Лампанинг ўртача ёниш давомийлигининг ўртача квадратик четланиши $\sigma = 40$ соат эканлиги маълум. Жами партиядаги лампанинг ўртача ёниш давомийлиги a ни 0,95 ишончлилик билан баҳолаш учун ишончлилик интервалини топинг.

Жавоби. $992,16 < a < 1007,84$.

475. Станок автомат валчалар штамповка қилади. $n = 100$ ҳажмли танланма бўйича тайёрланган валчалар диаметрларининг танланма ўртача қиймати ҳисобланган. Диаметрларнинг ўртача квадратик четланиши маълум: $\sigma = 2$ мм. Танланма ўртача қийматнинг тайёрланган валчалар диаметрларининг математик кутилишини 0,95 ишончлилик билан баҳолаш аниқлиги δ ни топинг.

Жавоби. $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392$ мм.

476. Танланманинг шундай минимал ҳажмини топингки, бош тўпламни a математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича 0,975 ишончлилик билан баҳосининг аниқлиги $\delta = 0,3$ га тенг бўлсин. Нормал

ган ўртача квадратик четланиши $s = 8$ топилган. Ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматини $\gamma = 0,999$ ишончлилик билан баҳоланг.

Жавоби. $34,66 < a < 50,94$.

482. Бош тўпламдан олинган $n = 16$ ҳажмли танланма маълумотлари нормал тақсимланган миқдорий белгининг тузатилган ўртача квадратик четланиши $s = 1$ топилган. σ бош ўртача квадратик четланишни 0,95 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Ечилиши. Масала ушбу ишончлилик интервалини топишга келтирилади:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \text{ (агар } q < 1 \text{ бўлса)} \qquad (*)$$

ёки

$$0 < \sigma < s(1+q) \text{ (агар } q > 1 \text{ бўлса).}$$

$\gamma = 0,95$ ва $n = 16$ маълумотлар бўйича жадвалдан (4-илова) $q = 0,44$ ни топамиз. $q < 1$ бўлгани учун $s = 1$, $q = 0,44$ ни (*) муносабатга қўйиб, ушбу ишончли интервални топамиз:

$$0,56 < \sigma < 1,44.$$

483. Бош тўпламдан олинган n ҳажмли танланма маълумотлари бўйича нормал тақсимланган белгининг тузатилган ўртача квадратик четланиши s топилган. Агар: а) $n = 10$, $s = 5,1$, б) $n = 50$, $s = 14$ бўлса, σ ўртача квадратик четланишни 0,999 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Жавоби. а) $0 < \sigma < 14,28$; б) $7,98 < \sigma < 20,02$.

484. Бирор фи ик катталикни битт асбоб билан (систематик хатос з) 12 марта ўлчанга бунда ўлчаш тасодифий хатола ининг s тузатилган ў тача квадратик четланиши 0,6 га енг бўлиб чиқди. сбобнинг аниқлигини 0,99 ишон лилик билан топинг.

Ечилиши. А бобнинг аниқлиги ў чаш хатоларининг ўртача квад атик четланиши била характерланади. Шу сабабли асала σ ни берилган $= 0,99$ ишончлилик билан қоп йдиган

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \qquad (*)$$

ишончли интерва ни топишга келтирил ди.

$\gamma = 0,99$ ва $n = 12$ маълумотлар бўйича жадвалдан (4-иловага қаранг) $q = 0,9$ ни топамиз. $s = 0,6$, $q = 0,9$ ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$0,06 < \sigma < 1,14.$$

485. Бирор физик катталикни битта асбоб билан (систематик хатосиз) 10 марта ўлчанган, бунда ўлчаш тасодифий хатоларининг ўртача квадратик четланиши 0,8 га тенг бўлиб чиқди. Асбобнинг аниқлигини 0,95 ишончлилик билан топинг.

Жавоби. $0,28 < \sigma < 1,32$.

Ўн биринчи боб

ТАНЛАНМАНИНГ ЙИҒМА ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ

1-§. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар методи

А. Тенг узоқлашган варианталар

Танланма тенг узоқлашган варианталар ва мос частоталар тақсимоти кўринишида берилган бўлсин. Бу ҳолда танланма ўртача қийматни ва танланма дисперсияни ушбу формулалар бўйича

$$\bar{x}_T = M_1^* h + C, \quad D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2]\, h^2$$

кўпайтмалар методи билан топиш қулайдир, бу ерда h — қадам (иккита қўшни варианта орасидаги айирма); C — сохта ноль (энг катта частотага эга бўлган варианта);

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} \text{ — шартли варианта;}$$

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} \text{ — биринчи тартибли шартли момент;}$$

$$M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} \text{ — иккинчи тартибли шартли момент.}$$

Кўпайтмалар методидан амалда қандай фойдаланиш 486-масалада кўрсатилган.

486. $n = 100$ ҳажмли танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг:

варианта x_i	12	14	16	18	20	22
частота n_i	5	15	50	16	10	4

Ечилиши. 1-ҳисоблаш жадвалини тузамиз, бунинг учун:

1) варианталарни биринчи устунга ёзамиз;

2) частоталарни иккинчи устунга ёзамиз; частоталар йиғиндисини (100 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

3) C сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган вариантани (16) ни оламиз (C сифатида устуннинг тахминан ўртасида жойлашган исталган вариантани олиш мумкин); учинчи устуннинг сохта ноль жойлашган сатрга тегишли бўлган катагига 0 ни ёзамиз; нолнинг устига кетма-кет -1, -2 ни, нолнинг остига эса 1, 2, 3 ни ёзамиз;

4) n_i частоталарнинг u_i шартли варианталарга кўпайтмаларини тўртинчи устунга ёзамиз; манфий сонлар йиғиндисини (-25 ни) алоҳида, мусбат сонлар йиғиндисини (48 ни) алоҳида топамиз; бу сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндисини (23 ни) тўртинчи устуннинг пастки катагига ёзамиз;

5) частоталарнинг шартли варианталар квадратларига кўпайтмаларини, яъни $n_i u_i^2$ ларни бешинчи устунга ёзамиз (учинчи ва тўртинчи устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириб чиқиш қулайроқдир: $u_i \cdot n_i u_i = n_i u_i^2$), бу устун сонлари йиғиндисини (127) ни бешинчи устуннинг пастки катагига жойлаштирамиз;

6) частоталарнинг битта орттирилган шартли варианталар квадратларига кўпайтмаларини, яъни $n_i(u_i+1)^2$ ларни олтинчи контрол устунга ёзамиз; бу устундаги сонлар йиғиндисини (273 ни) олтинчи устуннинг пастки катагига ёзамиз.

Натижада 1-ҳисоблаш жадвалини ҳосил қиламиз. Ҳисоблашларни текшириш учун

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$$

айниятдан фойдаланилади.

Текшириш:

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = 273, \quad \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 127 + 2\cdot 23 + 100 = 273.$$

Контрол йиғиндиларнинг бир хил эканлиги ҳисоблашлар тўғри бажарилганлигидан далолат беради.

Биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{23}{100} = 0{,}23; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{127}{100} = 1{,}27.$$

Қадамни (исталган иккита қўшни варианта орасидаги айирмани) топамиз: $h = 14 - 12 = 2$.

Изланаётган танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни топамиз, бунда сохта ноль (энг катта частотага эга бўлган варианта) $C = 16$ эканлигини ҳисобга оламиз:

$$\overline{x}_T = M_1^* h + C = 0{,}23\cdot 2 + 16 = 16{,}46;$$
$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = [1{,}27 - 0{,}23^2]\cdot 2^2 = 4{,}87.$$

1-жадвал

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
12	5	-2	-10	20	5
14	15	-1	-15	15	—
16	50	0	-25	—	50
18	16	1	16	16	61
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
			48		
	$n = 100$		$\sum n_i u_i = 23$	$\sum n_i u_i^2 = 127$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 273$

487. Танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қийматни ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг.

а) варианта x_i 18,6 19,0 19,4 19,8 20,2 20,6;
частота n_i 4 6 30 40 18 2

б) варианта x_i 65 70 75 80 85.
частота n_i 2 5 25 15 3

Жавоби. а) $\overline{x}_T = 76{,}2$ $D_T = 18{,}56$; б) $\overline{x}_T = 19{,}672$, $D_T = 0{,}169$.

Кўрсатма. 10—35 интервални узунлиги $h = 5$ бўлган 5 та қисмий интервалга ажратинг. $x = 15$ вариантанинг частотасини, яъни 6 частотани иккинчи ва учинчи қисмий интерваллар орасида баравардан тақсимланг (чунки 15 варианта интервалнинг чегарасига тушади.

Жавоби. а) $\overline{y}_T = 24{,}35$, $D_T = 31{,}83$, б) $D'_T = 29{,}75$.

2-§. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг йиғиндилар методи

Танланма тенг узоқликдаги варианталар ва уларга тегишли частоталар тақсимоти кўринишида берилган бўлсин. Бу ҳолда 1-§ да кўрсатилганидек, танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни *ушбу формулалар бўйича топиш мумкин:*

$$\overline{x}_T = M_1^*\cdot h + C, \quad D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

Йиғиндилар методидан фойдаланишда биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментлар ушбу формулалар бўйича топилади:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}, \quad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n},$$

бу ерда $d_1 = a_1 - b_1$, $s_1 = a_1 + b_1$, $s_2 = a_2 + b_2$. Шундай қилиб, пировардида a_1, a_2, b_1, b_2 сонларни ҳисоблаш лозим. Бу сонларни амалда қандай ҳисоблаш 492-масалада кўрсатилган.

492. $n = 100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қийматни ва танланма дисперсияни йиғиндилар методи билан топинг:

варианта x_i 48 52 56 60 64 68 72 76 80 84
частота n_i 2 4 6 8 12 30 18 8 7 5

Ечилиши. 2-ҳисоблаш жадвалини тузамиз, бунинг учун:

1) варианталарни биринчи устунга ёзамиз;

2) частоталарни иккинчи устунга ёзамиз; частоталар йиғиндисини (100 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

3) C сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган вариантани (68 ни) танлаймиз (C сифатида устуннинг тахминан ўртасида жойлашган исталган вариантани олиш мумкин); сохта нолни ўз ичига олган сатрнинг катакларига ноллар ёзамиз; тўртинчи устунда ҳозиргина ёзилган нолнинг устига ва остига яна биттадан ноль ёзамиз.

4) учинчи устуннинг ноль устида қолган тўлдирилмаган катакларига (энг тепадаги катакдан бошқалари-

2-жадвал

1	2	3	4
x_i	n_i	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$
48	2	2	2
52	4	6	8
56	6	12	20
60	8	20	40
64	12	32	0
68	30	0	0
72	18	38	0
76	8	20	37
80	7	12	17
84	5	5	5
	$n = 100$	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$

га) кетма-кет жамланган частоталар: 2; $2 + 4 = 6$; $6 + 6 = 12$; $12 + 8 = 20$; $20 + 12 = 32$ ни кетма-кет ёзамиз; барча жамланган частоталарни қўшиб, $b_1 = 72$ сонини ҳосил қиламиз; бу сонни учинчи устуннинг юқоридаги катагига ёзамиз. Учинчи устуннинг нолдан пастда тўлдирилмасдан қолган катакларига (энг пастки

Б. Тенг узоқликда бўлмаган варианталар

Агар дастлабки варианталар тенг узоқликда бўлмаса, у ҳолда танланманинг барча варианталари ётадиган интервални узунлиги h бўлган бир нечта тенг қисмий интервалларга бўлинади (ҳар бир қисмий интервал камида 8—10 та вариантани ўз ичига олиши керак). Сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади, ана шу қийматлар тенг узоқликдаги варианталар кетма-кетлигини ҳосил қилади. Ҳар бир интервал ўртасининг частотаси сифатида тегишли қисмий интервалга тушган варианталарнинг частоталари йиғиндиси олинади.

Танланма дисперсияни ҳисоблашда группалаш натижасида юзага келган хатони камайтириш мақсадида (айниқса, интерваллар сони кичик бўлганда) Шеппард тузатмаси киритилади, чунончи ҳисобланган дисперсиядан қисмий интервал узунлиги квадратининг ўн иккидан бири айирилади. Шундай қилиб, дисперсия Шеппард тузатмасини эътиборга олинганда

$$D'_T = D_T - \frac{1}{12}h^2$$

формула бўйича ҳисобланади.

488. $n = 100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	26	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Ечилиши. 2 — 26 интервални узунлиги $h = 6$ бўлган қуйидаги тўртта қисмий интервалга бўламиз:

$$2 - 8; \quad 8 - 14; \quad 14 - 20; \quad 20 - 26.$$

Қисмий интервалларнинг ўрталарини янги y_i варианталар сифатида олиб, тенг узоқликдаги варианталарни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = 5, \ y_2 = 11, \ y_3 = 17, \ y_4 = 23.$$

$y_1 = 5$ вариантанинг n_1 частотаси сифатида биринчи интервалга тушган варианталарнинг частоталари йиғиндисини оламиз: $n_1 = 3 + 5 + 10 = 18$.

Қолган варианталарнинг частоталарини ҳам шунга ўхшаш ҳисоблаб, тенг узоқликдаги варианталар тақсимотини ҳосил қиламиз:

y_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

Кўпайтмалар методидан фойдаланиб,

$$\overline{y}_T = 15,86, \ D_T = 45,14$$

ни топамиз.

Қисмий интерваллар сони камлигини (4 та) эътиборга олиб, Шеппард тузатмасини ҳисобга оламиз:

$$D'_T = D_T - \frac{1}{12}h^2 = 45,14 - \frac{6^2}{12} = 42,14.$$

Бу ўринда, дастлабки варианталар бўйича ҳисобланган танланма дисперсия тақрибан 42,6 га тенглигини қайд этиб ўтамиз.

489. Тенг узоқликда бўлмаган варианталар тақсимотининг дисперсиясини ҳисоблашда танланма узунлиги $h = 12$ бўлган 5 та интервалга бўлинди. Тенг узоқликдаги варианталарнинг (қисмий интервалларнинг ўрталарининг) танланма дисперсияси $D_T = 52,4$. Танланма дисперсияни Шеппард тузатмасини ҳисобга олган ҳолда топинг.

Жавоби. $D'_T = 40,4$.

490. а) $n = 50$ ҳажмли танланманинг тенг узоқликда бўлмаган варианталари тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг:

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

б) танланма дисперсияни Шеппард тузатмасини ҳисобга олган ҳолда топинг.

Кўрсатма. 6 — 26 интервални узунлиги $h = 4$ бўлган 5 та қисмий интервалга бўлинг.

Жавоби. а) $\overline{y}_T = 15,68$, $D_T = 32$; б) $D'_T = 30\frac{1}{3}$.

491. а) $n = 100$ ҳажмли танланманинг тенг узоқликда бўлмаган варианталари тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг:

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	15	10	8	7	5

б) танланма дисперсияни Шеппард тузатмасини ҳисобга олган ҳолда топинг.

катакдан бошқаларига) жамланган частоталар: 5; 5 + + 7 = 12; 12 + 8 = 20; 20 + 18 = 38 ни кетма-кет ёзамиз; барча жамланган частоталарни қўшиб, $a_1 = 75$ сонини ҳосил қиламиз; бу сонни учинчи устуннинг пастки катагига ёзамиз;

5) тўртинчи устун шунга ўхшаш тўлдирилади, бунда учинчи устуннинг частоталари жамланади; нолнинг тепасида жойлашган барча жамланган частоталарни қўшиб, $b_2 = 70$ сонини ҳосил қиламиз, уни тўртинчи устуннинг юқоридаги катагига ёзамиз; нолнинг тагида жойлашган жамланган частоталар йиғиндиси a_2 сонга тенг, уни тўртинчи устуннинг пастки катагига ёзамиз.

Натижада 2-ҳисоблаш жадвалини ҳосил қиламиз. d_1, s_1, s_2 ни топамиз:

$$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3;$$
$$s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147;$$
$$s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129.$$

Биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни топамиз:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{3}{100} = 0,03;$$

$$M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n} = \frac{147 + 2 \cdot 129}{100} = 4,05.$$

Қадам (иккита қўшни варианта орасидаги айирма) $h = 4$ ва сохта ноль $C = 68$ эканлигини ҳисобга олиб, изланаётган танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблаймиз:

$$\overline{x}_T = M_1^* h + C = 0,03 \cdot 4 + 68 = 68,12;$$
$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [4,05 - 0,03^2] \cdot 4^2 \approx 64,78.$$

493. $n = 100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни йиғиндилар методи билан топинг.

а) варианта x_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75;
частота n_i	4	6	8	15	25	20	8	7	5	2;
б) варианта x_i	122	128	134	140	146	152	158	164	170	176;
частота n_i	7	8	12	16	4	20	13	10	7	3

в) варианта x_i	12	14	16	18	20	22;
частота n_i	5	15	50	16	10	4;
г) варианта x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2
	11,4	11,6	11,8	12,0		
частота n_i	2	3	8	13	25	20
	12	10	6	1		

Жавоби. а) $\overline{x}_T = 51,1$, $D_T = 101,29$; б) $\overline{x}_T = 147,62$, $D_T = 212,3$; в) $\overline{x}_T = 16,46$, $D_T = 4,87$; г) $\overline{x}_T = 11,114$; $D_T = 0,14$.

3- §. Эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцесси

Эмпирик тақсимотнинг *асимметрияси* ва *эксцесси* мос равишда ушбу тенгликлар билан аниқланади:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3}, \quad e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3;$$

бу ерда σ_T — танланма ўртача квадратик четланиш; m_3 ва m_4 — учинчи ва тўртинчи тартибли марказий эмпирик моментлар:

$$m_3 = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_T)^3}{n}, \quad m_4 = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_T)^4}{n}.$$

Бу моментларни h қадамли тенг узоқликдаги варианталар бўлган ҳолда (қадам исталган икки қўшни варианта орасидаги айирмага тенг) ушбу формулалар бўйича ҳисоблаш қулай:

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3] \cdot h^3,$$
$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4] \cdot h^4,$$

бу ерда $M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n}$ k-тартибли шартли моментлар;

$u_i = \frac{x_i - C}{h}$ шартли варианталар. Бунда x_i — дастлабки варианталар, C — сохта ноль яъни энг катта частотага эга бўлган варианта (ёки вариацион қаторнинг тахминан ўртасида жойлашган исталган варианта).

Шундай қилиб, асимметрия ва эксцессни топиш учун шартли моментларни ҳисоблаш зарур, буни эса *кўпайтмалар методи* ёки *йиғиндилар методи* асосида бажариш мумкин.

А. Кўпайтмалар методи

494. $n=100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича асимметрия ва эксцессни кўпайтмалар методи билан топинг:

варианта x_i	12	14	16	18	20	22
частота n_i	5	15	50	16	10	4

Ечилиши. Кўпайтмалар методидан фойдаланамиз. 3-ҳисоблаш жадвалини тузамиз. Шу бобнинг 1-§ идаги 486-масалани ечишда ҳисоблаш жадвалининг 1 — 5-устунларини қандай қилиб тўлдириш кўрсатилган эди, шунинг учун қисқача тушунтириш билан чекланамиз.

6-устунни тўлдириш учун 3- ва 5-устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириш қулайдир.

7-устунни тўлдириш учун 3- ва 6-устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириш қулайдир.

8-устун ҳисоблашларни

$$\sum n_i(u_i+1)^4=\sum n_i u_i^4+4\sum n_i u_i^3+6\sum n_i u_i^2+4\sum n_i u_i+n$$

айният ёрдамида текшириш учун хизмат қилади.

3-ҳисоблаш жадвалини келтирамиз.

3-жадвал

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
12	5	−2	—10	20	—40	80	5
14	15	−1	—15	15	—15	15	—
16	50	0	—25	—	—55	—	50
18	16	1	16	16	16	16	256
20	10	2	20	40	80	160	810
22	4	3	12	36	108	324	1024
			48		204		
	$n=100$		$\Sigma n_i u_i = 23$	$\Sigma n_i u_i^2 = 127$	$\Sigma n_i u_i^3 = 149$	$\Sigma n_i u_i^4 = 595$	$\Sigma n_i (u_i+1)^4 = 2145$

Текшириш.

$$\sum n_i(u_i+1)^4=2145,$$

$$\sum n_i u_i^4+4\sum n_i u_i^3+6\sum n_i u_i^2+4\sum n_i u_i+n=$$
$$=595+4\cdot 149+6\cdot 127+4\cdot 23+100=2145.$$

Текширишда йиғиндиларнинг бир хиллиги ҳисоблашларнинг тўғрилигидан далолат беради.

Учинчи ва тўртинчи тартибли шартли моментларни топамиз (биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментлар 486-масалада ҳисобланган эди: $M_1^*=0,23$, $M_2^*=1,27$):

$$M_3^*=\frac{\sum n_i u_i^3}{n}=\frac{149}{100}=1,49;\quad M_4^*=\frac{\sum n_i u_i^4}{n}=\frac{595}{100}=5\ 95.$$

Учинчи ва тўртинчи тартибли марказий эмпирик моментларни ушбу формула бўйича топамиз:

$$m_3=[M_3^*-3M_1^*M_2^*+2(M_1^*)^3]h^3,$$
$$m_4=[M_4^*-4M_1^*M_3^*+6(M_1^*)^2M_2^*-3(M_1^*)^4]h^4.$$

Буларга $h=2$ ва $M_1^*=0,23$, $M_2^*=1,27$, $M_3^*=1,49$, $M_4^*=5,95$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m_3=5,124,\qquad m_4=79,582.$$

$D_T=4,86$ эканлигини ҳисобга олиб (486-масалага қаранг), изланаётган асимметрия ва эксцессни топамиз:

$$a_s=\frac{m_3}{\sigma_T^3}=\frac{5,124}{(\sqrt{4,87})^3}=0,49;$$

$$e_k=\frac{m_4}{\sigma_T^4}-3=\frac{79,582}{(\sqrt{4,87})^4}-3=0,36.$$

495. $n=100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича асимметрия ва эксцессни кўпайтмалар методи билан топинг:

а) x_i 2 6 3,0 3,4 3,8 4,2; n_i 8 20 45 15 12;

б) x_i 1 6 11 16 21; n_i 5 25 40 20 10

Жавоби. а) $a_s=0,145$, $e_k=-0,337$; б) $a_s=0,18$, $e_k=-0,45$.

16—7280

$$d_3=a_3-b_3=27-42=-15;$$
$$s_1=a_1+b_1=75+72=147;\ s_2=a_2+b_2=59+70=129,$$
$$s_3=a_3+b_3=27+42=69,\quad s_4=a_4+b_4=5+14=19.$$

Биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли шартли моментларни топамиз:

$$M_1^*=\frac{d_1}{n}=\frac{3}{100}=0,03,\ M_2^*=\frac{s_1+2s_2}{n}=$$
$$=\frac{147+2\cdot 129}{100}=4,05,$$

$$M_3^*=\frac{d_1+6d_2+6d_3}{n}=\frac{3+6(-11)+6\cdot(-15)}{100}=-1,53;$$

$$M_4^*=\frac{s_1+14s_2+36s_3+24s_4}{n}=\frac{147+14\cdot 129+36\cdot 69+24\cdot 19}{100}=48,93.$$

Учинчи ва тўртинчи тартибли марказий эмпирик моментларни топамиз:

$$m_3=[M_3^*-3M_1^*M_2^*+2(M_1^*)^3]\cdot h^3=$$
$$=[-1,53-3\cdot 0,03\cdot 4,05+2\cdot(0,03)^3]\,4^3=-121,248,$$
$$m_4=[M_4^*-4M_1^*M_3^*+6(M_1^*)^2M_2^*-3(M_1^*)^4]\,h^4=$$
$$=[48,93-4\cdot 0,03\cdot(-1,53)+$$
$$+6\cdot(0,03)^2\cdot 4,05-3(0,03)^4]\cdot 4^4=49,135.$$

$\sigma_T=\sqrt{D_T}=\sqrt{64,78}$ лигини ҳисобга олиб (D_T дисперсия илгари топилган эди, 492-масалага қаранг), изланаётган асимметрия ва эксцессни топамиз:

$$a_s=\frac{m_3}{\sigma_T^3}=\frac{-121,248}{(\sqrt{(64,78)^3}}=-0,23,\ e_k=\frac{m_4}{\sigma_T^4}=\frac{49,134}{(\sqrt{64,78})^4}=0,01.$$

497. $n=100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича асимметрия ва эксцессни йиғиндилар методи билан топинг:

а)	x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
	n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1
б)	x_i	12	14	16	18	20	22				
	n_i	5	15	50	16	10	4				

Жавоби а) $a_s=-0,01$, $e_k=-0,24$, б) $a_s=0,49$, $e_k=0,36$.

Ўн иккинчи боб

КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Чизиқли корреляция

Агар Y нинг X га ва X нинг Y га регрессия чизиқларининг иккаласи ҳам тўғри чизиқлар бўлса у ҳолда корреляцияни *чизиқли корреляция* дейилади.

Y нинг X га регрессия *тўғри чизиғининг танланма тенгламаси*

$$\overline{y}_x-\overline{y}=r_T\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})\qquad (*)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\overline{y}$ шартли ўртача қиймат, $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ текширилаётган X ва Y белгиларнинг танланма ўртача қийматлари; σ_x ва σ_y танланма ўртача квадратик четланишлар; r_T — танланма корреляция коэффициенти, бунда

$$r_T=\frac{\Sigma n_{xy}xy-n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

X нинг Y га регрессия *тўғри чизиғининг танланма тенгламаси* қуйидаги кўринишга эга:

$$\overline{x}_y-\overline{x}=r_T\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y}).\qquad (**)$$

Агар X ва Y белгилар устидаги кузатиш маълумотлари тенг узоқликдаги вариантали корреляцион жадвал кўринишида берилган бўлса, у ҳолда

$$u_i=\frac{x-C_1}{h_1},\quad v_j=\frac{y_j-C_2}{h_2}$$

шартли вариантaларга ўтиш мақсадга мувофиқдир, бу ерда C_1 берилган x вариантaларнинг „сохта ноли" (янги саноқ боши): сохта ноль сифатида вариацион қаторнинг тахминан ўртасида жойлашган вариантани қабул қилиш мақсадга мувофиқдир (сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган вариантани қабул қилишга келишиб олайлик); h_1 — қадам, яъни X нинг иккита қўшни вариантаси орасидаги айирма; C_2 — текширилаётган Y вариантaларининг сохта ноли; h_2 — текширилаётган Y вариантaларининг қадами.

Бу ҳолда танланма корреляция коэффициенти қуйидагича:

$$r_T=\frac{\Sigma n_{uv}uv-n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

бунда $\sum n_{uv}uv$ қўшилувчини 7-ҳисоблаш жадвалидан фойдаланиб (бундан буён 468-масаланинг ечилишига қаранг) ҳисоблаш қулай-

Б. Йиғиндилар методи

496. $n = 100$ ҳажмли танланманинг берилган тақсимоти бўйича асимметрия ва эксцессни йиғиндилар методи билан топинг:

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Ечилиши. Йиғиндилар методидан фойдаланамиз, бунинг учун 4-ҳисоблаш жадвалини тузамиз. Бу бобнинг 2-§ ида 492-масалани ечишда ҳисоблаш жадвалининг 1—4-устунларининг қандай қилиб тўлдирилиши кўрсатилган эди, шунинг учун қисқача тушунтириш билан чекланамиз.

5-устунни тўлдириш учун сохта нолни (68 ни) ўз ичига олган сатрнинг катагига ноль ёзамиз; бу нолнинг устига ва тагига яна иккитадан ноль қўямиз.

Нолларнинг устидаги катакларга жамланган частоталарни ёзамиз; бунинг учун 4-устуннинг катакларини юқоридан пастга томон қўша борамиз; натижада қуйидаги жамланган частоталарга эга бўламиз: 2; $2 + 8 = 10$; $2 + 8 + 20 = 30$. Жамланган частоталарни қўшиб, $b_3 = 2 + 10 + 30 = 42$ сонини ҳосил қиламиз, уни бешинчи устуннинг юқоридаги катагига ёзамиз.

Нолларнинг тагига жамланган частоталарни ёзамиз, бунинг учун 4-устуннинг частоталарини пастдан юқорига жамлаб борамиз; натижада қуйидаги жамланган частоталарга эга бўламиз: 5; $5 + 17 = 22$. Жамланган частоталарни қўшиб, $a_3 = 5 + 22 = 27$ сонини ҳосил қиламиз, уни бешинчи устуннинг пастки катагига ёзамиз.

6-устун шунга ўхшаш тўлдирилади, бунда 5-устуннинг частоталарини қўшамиз. Нолларнинг тепасида жойлашган жамланган частоталарни қўшиб, $b_4 = 2 + 12 = 14$ сонини ҳосил қиламиз, уни олтинчи устуннинг юқори катагига ёзамиз. Нолларнинг тагига жойлашган жамланган сонларни қўшиб (бизнинг масалада фақат битта қўшилувчи бор) $a_4 = 5$ сонини ҳосил қиламиз, уни олтинчи устуннинг пастки катагига ёзамиз.

Натижада 4-ҳисоблаш жадвалини ҳосил қиламиз.

Текшириш: учинчи устундаги нолнинг бевосита устида, ундан чапда ва унинг тагида турган сонлар йиғиндиси танланма ҳажмига тенг бўлиши лозим ($32 + 30 + 38 = 100$), поғонавий чизиқнинг (қора кесмалар билан кўрсатилган) иккита зинасининг устида турган икки соннинг йиғиндиси мос равишда олдинги поғонанинг устида турган b_i сонларга тенг бўлиши лозим („зинапоя“дан юқорига томон чиқилганда): $32 + 40 = 72 = b_1$; $40 + 30 = 70 = b_2$; $30 + 12 = 42 = b_3$.

Юқоридан пастга олиб тушадиган „зинапоянинг поғоналари“ тагида турган икки сон йиғиндиларининг устма-уст тушиши ҳам шунга ўхшаш текширилади: $38 + 37 = 75 = a_1$; $37 + 22 = 59 = a_2$; $22 + 5 = 27 = a_3$. Кўрсатилган йиғиндиларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси устма-уст тушмаганда ҳисоблашлардаги хатони излаш лозим

$d_k (i = 1, 2, 3)$ ва $s_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ни топамиз:

$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3$, $d_2 = a_2 - b_2 = 59 - 70 = -11$,

4-жадвал

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$	$b_3 = 42$	$b_4 = 14$
48	2	2	2	2	2
52	4	6	8	10	12
56	6	12	20	30	0
60	8	20	40	0	0
64	12	32	0	0	0
68	30	0	0	0	0
72	18	38	0	0	0
76	8	20	37	0	0
80	7	12	17	22	0
84	5	5	5	5	5
	$n = 100$	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$	$a_3 = 27$	$a_4 = 5$

дир. $\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u, σ_v каттакликлар ё кўпайтмалар методи билан (маълумотлар сони катта бўлганда) ёки бевосита

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n}, \quad \bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n}, \quad \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}$$

формулалар бўйича топилиши мумкин. Бу катталикларни билган ҳолда регрессия тенгламалари (*) ва (**) га кирадиган катталикларни ушбу формулалар бўйича топиш мумкин:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1, \quad \bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2, \quad \sigma_x = \sigma_u h_1, \quad \sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Чизиқли корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун танланма корреляция коэффициенти $r_т$ хизмат қилади; $|r_т|$ бирга қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучлироқ, $|r_т|$ нолга қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучсиздир.

498. Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини 5-корреляцион жадвалда келтирилган маълумотлар бўйича топинг.

Ечилиши. Сохта ноллар сифатида $C_1 = 30$ ва $C_2 = 36$ ни танлаб (бу варианталарнинг ҳар бири тегишли вариацион қаторнинг ўртасида жойлашган), шартли варианталардаги 6-корреляцион жадвални тузамиз: $\bar{u}$ ва $\bar{v}$ ни топамиз:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n} = \frac{4 \cdot (-2) + 14 \cdot (-1) + 46 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 20 \cdot 2}{100} = 0{,}34;$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v v}{v} = \frac{10 \cdot (-2) + 18 \cdot (-1) + 44 \cdot 0 + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{100} = -0{,}04.$$

5-жадвал

Y \ X	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

6-жадвал

v \ u	−2	−4	0	1	2	n_v
−2	4	6	—	—	—	10
−1	—	8	10	—	—	18
0	—	—	32	3	9	44
1	—	—	4	12	6	22
2	—	—	—	1	5	6
n_u	4	14	46	16	28	$n = 100$

Ёрдамчи $\overline{u^2}$ ва $\overline{v^2}$ катталикларни топамиз:

$$\overline{u^2} = \frac{\sum n_u u^2}{n} = \frac{4 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 20 \cdot 4}{100} = 1{,}26;$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_v v^2}{n} = \frac{10 \cdot 4 + 18 \cdot 1 + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 4}{100} = 1{,}04.$$

σ_u ва σ_v ни топамиз:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1{,}26 - 0{,}34^2} = 1{,}07;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2} = \sqrt{1{,}04 - 0{,}04^2} = 1{,}02.$$

$\sum n_{uv} u v$ ни топамиз, бунинг учун 7-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

7-жадвалдаги сўнгги устуннинг сонларини қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_v v \cdot U = \sum n_{uv} uv = 82.$$

Ҳисоблашларни текшириш мақсадида сўнгги сатрдаги сонлар йиғиндисини топамиз:

$$\sum_u u \cdot V = \sum n_{uv} u v = 82.$$

Йиғиндиларнинг бир хиллиги ҳисоблашларнинг тўғри бажарилганлигини кўрсатади.

7-жадвални тузишга доир тушунтиришлар.

1. n_{uv} частотанинг u вариантага кўпайтмасини, яъни $n_{uv}u$ ни бу частотани ўз ичига олган катакнинг юқори ўнг бурчагига ёзилади. Масалан, биринчи сатр катакларининг юқори ўнг бурчакларида $4\cdot(-2)=-8$; $6\cdot(-1)=-6$ кўпайтмалар ёзилган.

2. Бир сатр катакларининг юқори ўнг бурчакларида жойлашган барча сонлари қўшилади ва уларнинг йиғиндисини „U устуннинг" шу сатрдаги катагига ёзилади. Масалан, биринчи сатр учун

$$U=-8+(-6)=-14.$$

3. Ниҳоят, v вариантани U га кўпайтирилади ва ҳосил бўлган кўпайтмани „vU устуннинг" тегишли катагига ёзилади. Масалан, жадвалнинг биринчи сатрида $v=-2$, $U=-14$, демак,

$$vU=(-2)\cdot(-14)=28.$$

4. „vU устуннинг" барча сонларини қўшиб, $\sum\limits_{v} vU$ йиғиндини ҳосил қилинади, у изланаётган $\sum n_{uv}uv$ йиғиндига тенг бўлади. Масалан, 7-жадвал учун $\sum\limits_{v} vU=82$; демак, изланаётган йиғинди $\sum n_{uv}uv=82$.

Текшириш мақсадида шунга ўхшаш ҳисоблашлар устунлар бўйича ҳам ўтказилади: $n_{uv}v$ кўпайтмаларни частотанинг қийматини ўз ичига олган катакнинг пастки чап бурчагига ёзилади; битта устун катакларининг пастки чап бурчакларига жойлаштирилган барча сонларни қўшилади ва уларнинг йиғиндисини „V сатрга" жойлаштирилади, ниҳоят, ҳар бир u вариантани V га кўпайтирилади ва натижани сўнгги сатрнинг катакларига ёзилади.

Сўнгги сатрнинг ҳамма сонларини қўшиб, $\sum\limits_{u} uV$ йиғиндини ҳосил қилинади, у ҳам изланаётган $\sum n_{uv}uv=82$ йиғиндига тенг. Масалан, 7-жадвал учун $\sum\limits_{u} uV=82$; демак, $\sum n_{uv}uv=82$.

Изланаётган танланма корреляция коэффициентини топамиз:

$$r_T=\frac{\sum r\, n_{uv}uv-n\bar{u}\,\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}=\frac{82-100\cdot 0{,}34\cdot(-0{,}04)}{100\cdot 1{,}07\cdot 1{,}02}=0{,}76.$$

h_1 ва h_2 қадамларни (исталган икки қўшни варианта орасидаги айирмани) топамиз:

$$h_1=25-20=5;\qquad h_2=26-16=10.$$

$C_1=30$ ва $C_2=36$ эканлигини ҳисобга олиб, $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ ни топамиз:

$$\bar{x}=\bar{u}h_1+C_1=0{,}34\cdot 5+30=31{,}70;$$
$$\bar{y}=\bar{v}h_2+C_2=(-0{,}04)\cdot 10+36=35{,}60.$$

σ_x ва σ_y ни топамиз:

$$\sigma_x=h_1\cdot\sigma_u=5\cdot 1{,}07=5{,}35;$$
$$\sigma_y=h_2\cdot\sigma_v=10\cdot 1{,}02=10{,}2.$$

7-жадвал.

v \ u	−2	−1	0	1	2	$U=\sum n_{uv}\cdot u$	$v\cdot U$
−2	$\boxed{-8}$ 4 / −8	$\boxed{-6}$ 6 / −12				−14	28
−1	—	$\boxed{-8}$ 8 / −8	$\boxed{0}$ 10 / −10			−8	8
0	—	—	$\boxed{0}$ 32 / 0	$\boxed{3}$ 3 / 0	$\boxed{18}$ 9 / 0	21	24
1	—	—	$\boxed{0}$ 4 / 4	$\boxed{12}$ 12 / 12	$\boxed{12}$ 6 / 6	24	24
2	—	—	—	$\boxed{1}$ 1 / 2	$\boxed{10}$ 5 / 10	11	22
$V=\sum n_{uv}\cdot v$	−8	−20	−6	14	16		$\sum\limits_{v} v\cdot U=82$
$u\cdot V$	16	20	0	14	32	$\sum\limits_{u} u\cdot V=82$	Текшириш

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}$$

Бу ерда

$$\sigma_{\bar{y}_x}=\sqrt{D_{\text{гр. аро}}}=\sqrt{\frac{\sum n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2}{n}},$$

$$\sigma_y=\sqrt{D_{\text{ум}}}=\sqrt{\frac{\sum n_y(y-\bar{y})^2}{n}},$$

бунда n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси) (n_x — текширилаётган X белгининг x қийматини частотаси; n_y — текширилаётган Y белгининг $\bar{y}$ қийматини частотаси; $\bar{y}_x$ — текширилаётган Y белгининг шартли ўртача қиймати; $\bar{y}$ қаралаётган Y белгининг умумий ўртача қиймати.

X нинг Y га танланма корреляцион нисбати шунга ўхшаш аниқланади.

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x}.$$

500. 8-корреляцион жадвалда келтирилган маълумотлар бўйича $\bar{y}_x=Ax^2+Bx+C$ регрессия танланма тенгламасини топинг.

Корреляцион боғланиш кучини танланма корреляцион нисбат бўйича баҳоланг.

8-жадвал

Y \ X	2	8	6	n_y
25	20	—	—	20
45	—	30	1	31
110	—	31	48	49
n_x	20	31	49	$n=100$

Ечилиши. 9-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

9-жадвал

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1 000	2 000
3	31	47,1	93	279	837	2 511	4380	4 380	13 141
5	49	108,67	245	1225	6125	30 625	5325	26 624	133 121
Σ	100		378	1584	7122	33456	7285	32 004	148 262

9-жадвалнинг сўнгги сатрида турган сонларни (*) га қўйиб, номаълум A, B ва C коэффициентларга нисбатан тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$33456A+7122B+1584C=148262,$$
$$7122A+1584B+378C=32004,$$
$$1584A+378B+100C=7285.$$

Бу системани ечиб (масалан, Гаусс методи билан),

$$A=2{,}94,\quad B=7{,}27,\quad C=-1{,}25$$

ни топамиз. Топилган коэффициентларни регрессия тенгламаси

$$\bar{y}_x=Ax^2+Bx+C$$

га қўйиб, узил-кесил

$$\bar{y}_x=2{,}94x^2+7{,}27x-1{,}25$$

ни ҳосил қиламиз.

η_{xy} танланма корреляцион нисбатни ҳисоблаш учун, даставвал, $\bar{y}$ умумий ўртача қийматни, σ_y умумий ўртача квадратик четланишни ва $\sigma_{\bar{y}_x}$ группалараро ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\bar{y}=\frac{\sum n_y y}{n}=\frac{20\cdot 25+31\cdot 45+49\cdot 110}{100}=72{,}85;$$

Топилган катталикларни (*) муносабатга қўйиб, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг изланаётган тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\overline{y}_x - 35{,}60 = 0{,}76 \cdot \frac{10{,}2}{5{,}35}(x - 31{,}70)$$

ёки узил-кесил

$$\overline{y}_x = 1{,}45x - 10{,}36.$$

499. Қуйидаги корреляцион жадвалларда келтирилган маълумотлар бўйича Y нинг X га ва X нинг Y га регрессия тўғри чизиқларининг танланма тенгламаларини топинг.

а)

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	—	—	—	—	—	—	3
120	3	4	3	—	—	—	—	—	10
140	—	—	5	10	8	—	—	—	23
160	—	—	—	1	—	6	1	1	9
180	—	—	—	—	—	—	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n = 50$

б)

Y \ X	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17
200	—	—	1	8	7	—	—	16
225	—	—	—	—	3	3	—	6
250	—	—	—	—		1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

в)

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	—	—	—	—	—	6	1	7
120	—	—	—	—	—	4	2	6
140	—	—	8	10	5	—	—	23
160	3	4	3	—	—	—	—	10
180	2	1	—	1	—	—	—	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

Жавоби а) $\overline{y}_x = 1{,}92x + 101{,}6$, $\overline{x}_y = 0{,}12y + 3{,}7$; б) $\overline{y}_x = 4x + 57{,}8$, $\overline{x}_y = 0{,}\ldots - 3{,}1$; в) $\overline{y}_x = -2{,}15x + 181{,}8$, $\overline{x}_y = -0{,}33y + 65{,}7$

2-§. Эгри чизиқли корреляция

Агар р рессия графиги эгри чизиқ билан ифодаланса, у ҳолда корреля яни *эгри чизиқли корреляция* дейилади. Хусусан, иккинчи та ибли параболик корреляция бўлган ҳолда Y нинг X га *регресси инниг танланма тенгламаси*

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$$

кўринишда бўлади. Номаълум A, B ва C параметрларни қуйидаги тенгламал системасидан (масалан, Гаусс методи билан) топилади:

$$\begin{cases} \left(\sum n_x x^4\right) A + \left(\sum n_x x^3\right) B + \left(\sum n_x x^2\right) C = \sum n_x \overline{y}_x x^2, \\ \left(\sum n_x x^3\right) A + \left(\sum n_x x^2\right) B + \left(\sum n_x x\right) C = \sum n_x \overline{y}_x x, \\ \left(\sum n_x x^2\right) A + \left(\sum n_x x\right) B + \quad nC \quad = \sum n_x \overline{y}_x. \end{cases} \qquad (*)$$

X нинг Y га регрессиясининг танланма тенгламаси

$$\overline{x}_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1$$

ҳам шунга ўхшаш топилади.

Y нинг X га корреляциясининг кучини (зичлигини) баҳолаш учун ушбу *танланма корреляцион нисбат* (группалараро ўртача квадратик четланишнинг X белгининг умумий ўртача квадратик четланишига нисбати) хизмат қилади:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\text{гр-аро}}}{\sigma_{\text{ум}}}$$

ёки (бошқача белгилашларда)

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \overline{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{20(25 - 72{,}85)^2 + 31(45 - 72{,}85)^2 + 49(110 - 72{,}85)^2}{100}} =$$

$$= 37{,}07;$$

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\overline{y}_x - \overline{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{20(25 - 72{,}85)^2 + 31(47{,}1 - 72{,}85)^2 + 49(108{,}67 - 72{,}85)^2}{100}} =$$

$$= 33{,}06.$$

Изланаётган танланма корреляцион нисбатни топамиз:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{33{,}06}{37{,}07} = 0{,}89.$$

501. Қуйида келтирилган корреляцион жадваллардаги маълумотлар бўйича $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ регрессия танланма тенгламасини ва η_{yx} танланма корреляцион нисбатни топинг.

а)

Y \ X	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1			20
3	1	20				21
5	3	5	10	2		20
10			7	12		19
17					20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n = 100$

б)

Y \ X	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1			21
13	2	14				16
40		3	22	2		27
80				15		15
200					21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n = 100$

в)

Y \ X	0	4	5	n_y
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
n_x	50	54	46	$n = 150$

г)

Y \ X	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5				25
11	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
35			8	13	7	28
50				5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	$n = 150$

, нолинчи гипотеза рад қилинади; агар критерийнинг кузати-
ган қиймати гипотезанинг қабул қилиниш соҳасига тегишли
, гипотеза қабул қилинади.

Критик нуқталар (чегаралар) $k_{кр}$ деб, критик соҳани гипо-
нинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадиган нуқталарга
ади.

Ўнг томонлама критик соҳа деб, $K > k_{кр}$ тенгсизлик билан
ланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — мусбат сон.
Чап томонлама критик соҳа деб, $K < k_{кр}$ тенгсизлик билан
ланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — мусбат сон.
Бир томонлама критик соҳа деб, ўнг томонлама ёки чап
нлама критик соҳага айтилади.

Икки томонлама критик соҳа деб, $K < k_1$, $K > k_2$ тенгсиз-
ар билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_2 >$
. Хусусан, критик нуқталар нолга нисбатан симметрик бўлса, у
а икки томонлама критик соҳа ($k_{кр} > 0$ деган фаразда)

$$K < -k_{кр},\ K > k_{кр}$$

сизликлар билан ёки бунга тенг кучли бўлган

$$|K| > -k_{кр}$$

сизлик билан аниқланади.

Критик соҳани топиш учун қийматдорлик даражаси α берила-
а қуйидаги муносабатларга асосланиб, критик нуқталар изла-
:

а) ўнг томонлама критик соҳа учун

$$P(K > k_{кр}) = \alpha\ (k_{кр} > 0);$$

б) чап томонлама критик соҳа учун

$$P(K < k_{кр}) = \alpha (k_{кр} < 0);$$

в) икки томонлама критик соҳа учун

$$P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}\ (k_{кр} > 0),$$

$$P(K < -k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}.$$

. Нормал бош тўпламларнинг икки дисперсиясини қослаш

Нормал бош тўпламлардан олинган n_1 ва n_2 ҳажмли эркли тан-
малар бўйича s_x^2 ва s_y^2 тузатилган танланма дисперсиялар топил-
. Бу дисперсияларни таққослаш талаб қилинади.

1- қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тўп-
илар бош дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) =$
$D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$
ганда текшириш учун критерийнинг кузатиладиган қиймати
затилган катта дисперсиянинг кичигига нисбати)*

$$F_{кузат} = \frac{s^2_{кат}}{s^2_{кич}}$$

*ни ҳисоблаш ва Фишер — Снедекор тақсимотининг критик нуқ-
талари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k_1 =$
$= n_1 - 1$ ва $k_2 = n_2 - 1$ озодлик даражалари сонлари (k_1 — кат-
та тузатилган дисперсиянинг озодлик даражалари сони) бўйи-
ча $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ критик нуқтани топиш лозим.*

*Агар $F_{кузат} < F_{кр}$ бўлса, **нолинчи гипотезани рад этишга
асос йўқ.***

*Агар $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлса, **нолинчи гипотеза рад қилинади.***

2- қоида. *Конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$ бўлганда
$F_{кр}(\alpha/2, k_1, k_2)$ критик нуқтани $\alpha/2$ қийматдорлик даражаси (бе-
рилгандан икки марта кичик) ва k_1, k_2 озодлик даражалари
сонлари бўйича (k_1—катта дисперсиянинг озодлик даражалари
сони) изланади.*

*Агар $F_{кузат} < F_{кр}$ бўлса, **нолинчи гипотезани рад этишга
асос йўқ.***

*Агар $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлса, **нолинчи гипотеза рад қилинади.***

503. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 =$
$= 11$ ва $n_2 = 14$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича
тузатилган танланма дисперсиялар $s_X^2 = 0{,}76$ ва $s_Y^2 = 0{,}38$
топилган. $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражасида бош дис-
персияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$
нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X) >$
$> D(Y)$ бўлганда **текширинг.**

Ечилиши. Катта тузатилган дисперсиянинг кичи-
гига нисбатини топамиз:

$$F_{кузат} = \frac{0{,}76}{0{,}38} = 2.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $D(X) > D(Y)$ кўри-
нишга эга, шунинг учун критик соҳа ўнг томонлама-
дир.

Жадвалдан (7-илова) $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даража-
си ва $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$ ва $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 =$
$= 13$ озодлик даражалари сонлари бўйича

$$F_{кр}(0{,}05;\ 10;\ 13) = 2{,}67$$

критик нуқтани топамиз.

$F_{кузат} < F_{кр}$ бўлгани учун **бош дисперсияларнинг
тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос
йўқ.** Бошқача айтганда, **тузатилган танланма дисперсия-
ларнинг фарқи муҳим эмас.**

504. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 =$
$= 9$ ва $n_2 = 16$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича
$s_X^2 = 34{,}02$ ва $s_Y^2 = 12{,}15$ тузатилган танланма диспер-

Дисперсияларни таққослаймиз. Катта тузатилган дис-
персиянинг кичигига нисбатини топамиз (дисперсиялар-
нинг ҳар бири 10^2 марта ортди, лекин уларнинг нисба-
ти ўзгармади):

$$F_{кузат} = \frac{s^2_X}{s^2_Y} = \frac{s^2_u}{s^2_v} = \frac{14{,}8}{10} = 1{,}48.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $D(X) \neq D(Y)$ кўри-
нишга эга, шу сабабли критик соҳа икки томонлама-
дир. У ҳолда, 2-қоидага мувофиқ, критик нуқтани из-
лашда қийматдорлик даражасини берилгандан икки мар-
та кичик қилиб олиш лозим.

Жадвалдан (7- илова) $\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$ қийматдорлик
даражаси ва $k_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$, $k_2 = n_2 - 1 = 4 -$
$- 1 = 3$ озодлик даражалари сонлари бўйича $F_{кр}(0{,}05;$
$4;\ 3) = 9{,}12$ критик нуқтани топамиз.

$F_{кузат} < F_{кр}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг
тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос
йўқ. Бошқача айтганда, тузатилган дисперсияларнинг
фарқи муҳим эмас, ва демак, иккала метод бир хил
ўлчаш аниқлигини таъминлайди.

508. Икки станок-автоматнинг аниқлигини таққослаш
учун иккита намуна (танланма) олинган бўлиб, уларнинг
ҳажмлари $n_1 = 10$ ва $n_2 = 8$. Олинган буюмларнинг тек-
ширилаётган ўлчамини ўлчаш натижасида қуйидаги
натижалар олинган:

x_i	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1,38	1,40	1,42
y_i	1,11	1,12	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38		

Агар қийматдорлик даражасини $\alpha = 0{,}1$ қилиб ва кон-
курент гипотеза сифатида $H_1: D(X) \neq D(Y)$ ни олинса,
станоклар бир хил аниқликка эга $[H_0: D(X) = D(Y)]$
деб ҳисоблаш мумкинми?

Кўрсатма. Ҳисоблашларни соддалаштириш учун $u_i = 100x_i -$
$- 124$, $v_i = 100y_i - 126$ шартли вариантларга ўтинг.

Жавоби. $s_u^2 = 188{,}67$; $s_v^2 = 124{,}84$; $F_{кузат} = 1{,}51$; $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 7) =$
$= 3{,}63$. **Шундай қилиб, станокларнинг аниқлиги ҳар хил деб ҳи-
соблашга асос йўқ.**

3-§. Нормал тўпламнинг тузатилган танланма дисперсиясини гипотетик бош дисперсияси билан таққослаш

s^2 тузатилган танланма дисперсия топилган танланманинг ҳаж-
мини n билан белгилаймиз.

1- қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тўп-
лам номаълум дисперсияси σ^2 нинг гипотетик (тахмин қилинаёт-
ган) қиймати σ_0^2 га тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ни конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ бўлганда текшириш
учун критерийнинг кузатилган қиймати*

$$\chi^2_{кузат} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

*ни ҳисоблаш ва χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвали-
дан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1$ озодлик
даражаси сони бўйича $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ **критик нуқтани топиш лозим.***

*Агар $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ **бўлса, нолинчи гипотезани рад қилишга
асос йўқ.***

*Агар $\chi^2_{кузат} > \chi^2_{кр}$ **бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.***

2-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ бўлганда чап кри-
тик нуқта $\chi^2_{чап\ кр}\left(1 - \frac{\alpha}{2},\ k\right)$ **ни ва ўнг критик нуқта**
$\chi^2_{ўнг\ кр}\left(\frac{\alpha}{2},\ k\right)$ ни топилади.*

*Агар $\chi^2_{чап\ кр} < \chi^2_{кузат} < \chi^2_{ўнг\ кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани
рад этишга асос йўқ.*

*Агар $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{чап\ кр}$ ёки $\chi^2_{кузат} > \chi^2_{ўнг\ кр}$ бўлса, нолинчи
гипотеза рад қилинади.*

3-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ бўлганда $\chi^2_{кр}(1 - \alpha,$
$k)$ критик нуқтани топилади.*

*Агар $\chi^2_{кузат} > \chi^2_{кр}(1 - \alpha;\ k)$ бўлса, нолинчи гипотезани рад
этишга асос йўқ.*

*Агар $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}(1 - \alpha;\ k)$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қи-
линади.*

Эслатма. Агар озодлик даражалари сони $k > 30$ бўлса, у
ҳолда $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ критик нуқтани ушбу Уилсон—Гильферти тенгли-
гидан топиш мумкин:

$$\chi^2_{кр}(\alpha;\ k) = k \cdot \left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3,$$

бу ерда z_α ни Лаплас функциясидан (2-илова) фойдаланиб, қуйида-
ги тенгликдан топилади:

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{1 - 2\alpha}{2}.$$

y \ x	7	8	9	n_y
200	41	7		48
300	1	52	1	54
400		8	40	48
n_x	42	67	41	$n = 150$

Жавоби. а) $\bar{y}_x = 0{,}66x^2 + 1{,}23x + 1{,}07$, $\eta_{yx} = 0{,}96$; б) $\bar{y}_x = 320x^2 - 13{,}01x + 9{,}09$, $\eta_{yx} = 0{,}99$; в) $\bar{y}_x = 1{,}53x^2 + 1{,}95x + 1$, $\eta_{yx} = 0{,}86$; г) $\bar{y}_x = 1{,}59x^2 + 3{,}33x + 9{,}4$, $\eta_{yx} = 0{,}83$; д) $\bar{y}_x = -1{,}52x^2 + 121{,}94x - 576{,}61$, $\eta_{yx} = 0{,}83$.

502. Корреляцион жадвалда келтирилган маълумотлар бўйича $\bar{x}_y = Ay^2 + By + C$ регрессия тенгламасини ва η_{xy} танланма корреляцион нисбатни аниқланг.

а)

y \ x	6	30	60	n_y
1	15			15
3	1	14		15
4		2	18	20
n_x	16	16	18	$n = 50$

б)

y \ x	1	9	19	n_y
0	13			13
2	2	10		12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	$n = 50$

Жавоби. а) $\bar{x}_y = 2{,}8y^2 + 0{,}02y + 3{,}18$, $\eta_{xy} = 0{,}96$; б) $\bar{x}_y = 2{,}29y^2 - 1{,}25y + 1$, $\eta_{xy} = 0{,}92$.

Ўн учинчи боб

СТАТИСТИК ГИПОТЕЗАЛАРНИ СТАТИСТИК ТЕКШИРИШ

1-§. Асосий маълумотлар

Статистик гипотеза деб, номаълум тақсимотнинг кўринишн ҳақидаги ёки маълум тақсимотларнинг параметрлари ҳақидаги гипотезага айтилади.

Нолинчи (асосий) гипотеза деб, қўйилган H_0 гипотезага айтилади.

Конкурент (альтернатив) гипотеза деб, нолинчи гипотезага зид H_1 гипотезага айтилади.

Гипотезани текшириш натижасида икки тур хатога йўл қўйилиши мумкин.

Биринчи тур хато шундан иборатки, бунда тўғри гипотеза рад қилинади. Биринчи тур хатонинг эҳтимоли *қийматдорлик даражаси* дейилади ва α билан белгиланади.

Иккинчи тур хато шундан иборатки, бунда нотўғри гипотеза қабул қилинади. Иккинчи тур хатонинг эҳтимолини β орқали белгиланади.

Статистик критерий (ёки оддийгина критерий) деб, гипотезани текшириш учун хизмат қиладиган K тасодифий миқдорга айтилади.

Кузатиладиган (эмпирик) қиймат $K_{\text{кузат}}$ деб, критерийнинг танланмалар бўйича ҳисобланган қийматига айтилади.

Критик соҳа деб, критерийнинг нолинчи гипотеза рад қилинадиган қийматлари тўпламига айтилади.

Гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси (йўл қўйиладиган қийматлар соҳаси) деб, критерийнинг нолинчи гипотеза қабул қилинадиган қийматлари тўпламига айтилади.

Статистик гипотезаларни текширишнинг асосий принципи: агар критерийнинг кузатилаётган қиймати критик соҳага тегишли

сиялар ҳисобланган. 0,01 қийматдорлик даражасида тузатилган дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0 : D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $D(X) > D(Y)$ бўлганда текширинг.

Жавоби. $F_{\text{кузат}} = 2{,}8$; $F_{\text{кр}}(0{,}01;\ 8;\ 15) = 2{,}64$. Нолинчи гипотеза рад қилинади.

505. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 = 14$ ва $n_2 = 10$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $s_X^2 = 0{,}84$ ва $s_Y^2 = 2{,}52$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган.

$\alpha = 0{,}1$ қийматдорлик даражасида бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0 : D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Катта тузатилган дисперсиянинг кичигига нисбатини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{2{,}52}{0{,}84} = 3.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $D(X) \neq D(Y)$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир. Критик нуқтани излашда, 2-қоидага мувофиқ, қийматдорлик даражасини берилгандан икки марта кичик қилиб олиш лозим.

Жадвалдан (7-илова) $\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 14 - 1 = 13$ озодлик даражалари сонлари бўйича $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 9;\ 13) = 2{,}71$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} > F_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз.

506. Нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 = 9$ ва $n_2 = 6$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $D_T(X) = 14{,}4$ ва $D_T(Y) = 20{,}5$ танланма дисперсиялар топилган. 0,1 қийматдорлик даражасида бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0 : D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ бўлганда текширинг.

Кўрсатма. Аввал ушбу формулалар бўйича тузатилган дисперсияларни топинг:

$$s_X^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot D_T(X), \quad s_Y^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot D_T(Y).$$

Жавоби. $F_{\text{кузат}} = 1{,}52$; $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 5;\ 8) = 3{,}69$. Шундай қилиб, бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

507. Бир физик катталикни икки метод билан ўлчанган. Бунда қуйидаги натижалар олинган:

а) биринчи ҳолда $x_1 = 9{,}6$; $x_2 = 10{,}0$; $x_3 = 9{,}8$; $x_4 = 10{,}2$; $x_5 = 10{,}6$;

б) иккинчи ҳолда $y_1 = 10{,}4$; $y_2 = 9{,}7$; $y_3 = 10{,}0$; $y_4 = 10{,}3$.

Агар қийматдорлик даражаси $\alpha = 0{,}1$ қилиб олинадиган бўлса, иккала метод бир хил ўлчаш аниқлигини беради, деб ҳисоблаш мумкинми? Ўлчаш натижалари нормал тақсимланган ва танланмалар эркли деб ҳисобланади.

Ечилиши. Ўлчашларнинг аниқлиги ҳақида дисперсияларнинг катталиклари бўйича фикр юритамиз. Ундай бўлса, нолинчи гипотеза $H_0 : D(X) = D(Y)$ кўринишга эга. Конкурент гипотеза сифатида $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ гипотезани қабул қиламиз.

Танланма дисперсияларни топамиз. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида

$$u_i = 10x_i - 100, \quad v_i = 10y_i - 100$$

шартли вариантaларга ўтамиз. Натижада қуйидаги шартли вариантaларни ҳосил қиламиз:

u_i	-4	0	-2	2	6
v_i	4	-3	0	3	

Тузатилган танланма дисперсияларни топамиз:

$$s_u^2 = \frac{\sum u_i^2 - \frac{\left[\sum u_i\right]^2}{n_1}}{n_1 - 1} = \frac{(16 + 4 + 4 + 36) - \frac{2^2}{5}}{5 - 1} = 14{,}8;$$

$$s_v^2 = \frac{\sum v_i^2 - \frac{\left[\sum v_i\right]^2}{n_2}}{n_2 - 1} = \frac{(16 + 9 + 9) - \frac{4^2}{4}}{4 - 1} = 10.$$

509. Нормал бош тўпламдан $n = 21$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $s^2 = 16,2$ тузатилган танланма дисперсия топилган. 0,01 қийматдорлик даражасида конкурент гипотеза сифатида $H_1: \sigma^2 > 15$ гипотезани қабул қилиб, $H_0: \sigma = \sigma_0^2 = 15$ нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатиладиган қийматини топамиз:

$$\chi^2_{кузат} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1)\cdot 16,2}{15} = 21,6.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $\sigma^2 > 15$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа ўнг томонламадир (1-қоида). Жадвалдан (5-илова) 0,01 қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1 = 21 - 1 = 20$ озодлик даражаси сони бўйича $\chi^2_{кр}(0,01;\ 20) = 37,6$ критик нуқтани топамиз.

$\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлгани учун бош дисперсиянинг $\sigma_0^2 = 15$ гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, тузатилган дисперсия (16,2) билан гипотетик бош дисперсия (15) орасидаги фарқ муҳим эмас.

510. Нормал бош тўпламдан $n = 17$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $s^2 = 0,24$ тузатилган танланма дисперсия топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида конкурент гипотеза сифатида $H_1: \sigma^2 > 0,18$ ни қабул қилиб $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,18$ нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $\chi^2_{кузат} = 21,33$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 16) = 26,3$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

511. Нормал бош тўпламдан $n = 31$ ҳажмли танланма олинган:

варианталар x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12,0
частоталар n_i	1	3	7	10	6	3	1

0,05 қийматдорлик даражасида конкурент гипотеза сифатида $H_0: \sigma^2 > 0,18$ ни қабул қилиб, $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,18$ нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. $u_i = 10x_i - 11$ шартли варианталарни қабул қилинг; аввал $s_u^2 = \dfrac{\sum n_i u_i^2 - \dfrac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n-1}$ ни, кейин эса $s_x^2 = \dfrac{s_u^2}{10^2}$ ни ҳисобланг.

Жавоби. $s_x^2 = 0,27$; $\chi^2_{кузат} = 45,0$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 30) = 43,8$. Нолинчи гипотеза рад қилинади. Тузатилган танланма дисперсия гипотетик дисперсиядан муҳим фарқ қилади.

512. *Станок-автоматнинг ишлаш аниқлиги* буюмларнинг текшириладиган ўлчамининг дисперсияси бўйича текширилади, бу ўлчам $\sigma_0^2 = 0,1$ дан ортиқ бўлмаслиги лозим. Таваккалига олинган буюмлар орасидан намуна олиниб, қуйидаги ўлчаш натижалари ҳосил қилинган:

намуна олинган буюмларнинг текшириладиган ўлчами	x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
частота	n_i	2	6	9	7	1

0,05 қийматдорлик даражасида станокнинг талаб қилинадиган аниқликни таъминлаш-таъминламаслигини текширинг.

Ечилиши. Нолинчи гипотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,1$. Конкурент гипотеза сифатида $H_1: \sigma^2 \neq 0,1$ ни қабул қиламиз.

Тузатилган танланма дисперсияни топамиз. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида шартли варианталарга ўтамиз. Танланма ўртача қиймат тахминан 3,9 га тенглигини эътиборга олиб, $u_i = 10x_i - 39$ деймиз. Частоталар тақсимоти ушбу кўринишни олади:

u_i	-9	-4	-1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

Шартли варианталарнинг ёрдамчи

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n-1}$$

дисперсиясини топамиз; бунга масаладаги маълумотларни қўйиб, $s_u^2 = 19,91$ ни ҳосил қиламиз.

4-§. Дисперсиялари маълум бўлган иккита бош тўпламнинг ўртача қийматларини таққослаш (катта эркли танланмалар)

n ва m орқали катта ($n > 30$, $m > 30$) катта эркли танланмаларнинг ҳажмларини белгилаймиз. Улар бўйича мос танланма ўртача қийматлар $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ топилган. $D(X)$ ва $D(Y)$ бош дисперсиялар маълум.

1-қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари маълум бўлган иккита нормал бош тўплам математик кутилишларининг (бош ўртача қийматларнинг) тенглиги ҳақидаги (катта танланмалар бўлган ҳолда) $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилган қиймати*

$$Z_{кузат} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$$

ни ҳисоблаш ва Лаплас функциясининг жадвалидан $z_{кр}$ критик нуқтани

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

тенглик бўйича топиш лозим.

Агар $|Z_{кузат}| > z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|Z_{кузат}| < z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

2-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$ бўлганда $z_{кр}$ критик нуқтани Лаплас функцияси жадвали бўйича*

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

тенгликдан топилади.

Агар $Z_{кузат} < z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{кузат} > z_{кр}$ бўлса нолинчи гипотеза рад қилинади.

3-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1: M(X) < M(Y)$ бўлганда, $z_{кр}$ „ёрдамчи нуқтани" 2-қоида бўйича топилади.*

Агар $Z_{кузат} > -z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{кузат} < -z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

516. Нормал бош тўпламлардан олинган $n = 40$ ва $m = 50$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\bar{x} = 130$ ва $\bar{y} = 140$ танланма ўртача қийматлар топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X) = 80$, $D(Y) = 100$. 0,01 қийматдорлик даражасида конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатиладиган қийматини топамиз:

$$Z_{кузат} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{130 - 140}{\sqrt{\frac{80}{40} + \frac{100}{50}}} = -5.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X) \neq M(Y)$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Ўнг критик нуқтани топамиз:

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,01}{2} = 0,495.$$

Лаплас функцияси жадвалидан (2-илова) $z_{кр} = 2,58$ ни топамиз. $|Z_{кузат}| > z_{кр}$ бўлгани учун, 1-қоидага мувофиқ, нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, танланма ўртача қийматларнинг фарқи муҳим.

517. $n = 30$ ҳажмли танланма бўйича биринчи станокда тайёрланган буюмларнинг ўртача оғирлиги $\bar{x} = 130$ г топилган; $m = 40$ ҳажмли танланма бўйича иккинчи станокда тайёрланган буюмларнинг ўртача оғирлиги $\bar{y} = 125$ г топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X) = 60$ г², $D(Y) = 80$ г². 0,05 қийматдорлик даражасида нолинчи H_0: $M(X) = M(Y)$ гипотезани конкурент гипотеза $M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш талаб қилинади. X ва Y тасодифий миқдорлар нормал тақсимланган ва танланмалар эркли деб фараз қилинади.

Жавоби: $Z_{кузат} = 2,5$; $z_{кр} = 1,19$. Нолинчи гипотеза рад қилинади. Буюмларнинг ўртача оғирликларининг фарқи муҳим.

518. $n = 50$ ҳажмли танланма бўйича биринчи автоматда тайёрланган валчалар диаметрининг ўртача ўлчами $\bar{x} = 20,1$ мм топилган; $m = 50$ ҳажмли танланма бўйича 2-автомат тайёрлаган валчалар диаметрининг ўртача ўлчами $\bar{y} = 19,8$ мм топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X) = 1,750$ мм², $D(Y) = 1,375$ мм². 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш талаб қилинади. X ва Y тасодифий миқдор-

Изланаётган тузатилган дисперсияни топамиз:

$$s^2_X = \frac{s^2_u}{10^2} = \frac{19{,}91}{100} = 0{,}2.$$

Критерийнинг кузатилган қийматини топамиз:

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \frac{(n-1)\, s^2_X}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\cdot 0{,}2}{0{,}1} = 48.$$

Конкурент гипотеза $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир (2-қоида).

Жадвалдан (5-илова) критик нуқталарни топамиз: чап критик нуқта:

$$\chi^2_{\text{кр}}\left(1-\frac{\alpha}{2};\ k\right) = \chi^2_{\text{кр}}\left(1-\frac{0{,}05}{2};\ 24\right) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}975;\ 24) = 12{,}4;$$

ўнг критик нуқта:

$$\chi^2_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};\ k\right) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}025;\ 24) = 39{,}4.$$

$\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{ўнг кр}}$ га эгамиз, демак, нолинчи гипотезани рад этамиз; станок керакли аниқликни таъминламайди, уни созлаш лозим.

513. Турли йиғувчиларнинг қурилмани йиғиш вақтини узоқ вақт хронометраж қилиш натижасида бу вақтнинг дисперсияси $\sigma_0^2 = 2$ мин^2 эканлиги аниқланди. Янги йиғувчининг ишини 20 марта кузатиш натижалари қуйидагича:

битта қурилмани йиғиш вақти (минут ҳисобида)	x_i	56	58	60	62	64
частота	n_i	1	4	10	3	2

0,05 қийматдорлик даражасида янги йиғувчи бир меъёрда ишламоқда деб ҳисоблаш мумкинми (у сарф қиладиган вақтнинг дисперсияси қолган йиғувчилар сарф қиладиган вақтнинг дисперсиясидан муҳим фарқ қилмаслик маъносида)?

Кўрсатма. Нолинчи гипотеза $H_0: \sigma_0^2 = \sigma^2 = 2$; конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; $u_i = x_i - 60$ деб қабул қилинг ва s_u^2 ни ҳисобланг.

Жавоби. $s_u^2 = s_X^2 = 4$; $\chi^2_{\text{чап кр}}(0{,}975,\ 19) = 8{,}91$; $\chi^2_{\text{ўнг кр}}(0{,}025;\ 19) = 32{,}9$; $\chi^2_{\text{кузат}} = 38$. Нолинчи гипотеза рад қилинади; янги йиғувчи бир меъёрда ишламайди.

514. Агар контрол қилинаётган ўлчам дисперсиянинг 0,2 дан ортиқлиги муҳим бўлмаса, буюмлар партияси қабул қилинади, $n = 121$ ҳажмли танланма бўйича топилган тузатилган танланма дисперсия $s_X^2 = 0{,}3$ га тенг бўлиб чиқди. 0,01 қийматдорлик даражасида партияни қабул қилиш мумкинми?

Ечилиши. Нолинчи гипотеза: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}2$. Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 > 0{,}2$.

Критерийнинг кузатиладиган қийматини топамиз:

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \frac{(n-1)\cdot s^2_X}{\sigma_0^2} = \frac{120\cdot 0{,}3}{0{,}2} = 180.$$

Конкурент гипотеза $\sigma^2 > 0{,}2$ кўринишга эга, демак, критик соҳа ўнг томонламадир. Жадвалда (5-илова) $k = 120$ озодлик даражалари сони бўлмагани учун критик нуқтани тақрибан

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha;\ k) = k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3$$

Уилсон—Гильферти тенглигидан топамиз.

Дастлаб (шартга кўра $\alpha = 0{,}01$ эканлигини ҳисобга олиб), $z_\alpha = z_{0{,}01}$ ни топамиз:

$$\Phi(z_{0{,}01}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}01}{2} = 0{,}49.$$

Лаплас функцияси жадвалидан (2-илова) чизиқли интерполяциялашдан фойдаланиб, $z_{0{,}01} = 2{,}326$ ни топамиз. $k = 120$, $z_\alpha = 2{,}326$ ни Уилсон—Гильферти формуласига қўйиб, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 120) = 158{,}85$ ни ҳосил қиламиз. (Бу яқинлашиш анча яхши: батафсилроқ жадвалларда 158,95 қиймат келтирилган.) $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад қиламиз. Партияни қабул қилиш мумкин эмас.

515. Қийматдорлик даражаси сифатида $\alpha = 0{,}05$ ни қабул қилиб, 514-масалани ечинг.

Жавоби. $z_{0{,}05} = 1{,}645$; $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 120) = 146{,}16$. Партия брак қилинади.

лар нормал тақсимланган ва танланмалар эркли деб фараз қилинади.

Жавоби. $Z_{\text{кузат}} = 1{,}2$; $z_{\text{кр}} = 1{,}96$. Кузатиш маълумотлари нолинчи гипотезага мувофиқ келмоқда; танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим эмас.

5-§. Дисперсиялари номаълум ва бир хил бўлган иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматларини таққослаш (кичик эркли танланмалар)

Кичик эркли танланмаларнинг ҳажмларини n ва m орқали белгилаймиз ($n < 30$, $m < 30$), улар бўйича тегишли $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ танланма ўртача қийматлар ҳамда S_X^2 ва S_Y^2 тузатилган танланма дисперсиялар топилган. Бош дисперсиялар номаълум бўлса-да, лекин улар бир хил деб фараз қилинади.

1-қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари номаълум, лекин бир хил бўлган икки нормал бош тўпламнинг математик кутилишларининг (бош ўртача қийматларнинг) тенглиги ҳақидаги (кичик эркли танланмалар бўлган ҳолда) $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилаётган қиймати*

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n-1)\,s_X^2 + (m-1)\,s_Y^2}}\cdot\sqrt{\frac{n\cdot m\,(n+m-2)}{n+m}}$$

ни ҳисоблаш ҳамда Стъюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (6-илова) жадвалнинг юқори сатрида жойлашган α қийматдорлик даражаси ва $k = n+m-2$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том.кр}}(\alpha,\ k)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том. кр}}(\alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|T_{\text{кузат}}| > t_{\text{икки том. кр}}(\alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

2-қоида. *Конкурент гипотеза $M(X) > M(Y)$ бўлганда жадвалдан (6-илова) жадвалнинг пастки сатрида жойлаштирилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n+m-2$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{ўнг том. кр}}(\alpha,\ k)$ критик нуқта топилади.*

Агар $T_{\text{кузат}} < t_{\text{ўнг том. кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} > t_{\text{ўнг том. кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

3-қоида. *Конкурент гипотеза $M(X) < M(Y)$ бўлганда 2-қоида бўйича $t_{\text{ўнг том. кр}}$ критик нуқтани топилади ва $t_{\text{чап том. кр}} = -t_{\text{ўнг том. кр}}$ деб олинади.*

Агар $T_{\text{кузат}} > -t_{\text{ўнг том. кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} < -t_{\text{ўнг том. кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

519. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n = 12$ ва $m = 18$ ҳажмли иккита кичик эркли танланма бўйича $\overline{x} = 31{,}2$, $\overline{y} = 29{,}2$ ўртача танланма қийматлар ҳамда $s_X^2 = 0{,}84$ ва $s_Y^2 = 0{,}40$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Тузатилган дисперсиялар турлича, шунинг учун аввал дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги гипотезани Фишер—Снедекор критерийсидан фойдаланиб текшириб кўрамиз (2-§ га қаранг).

Катта дисперсиянинг кичигига нисбатини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{0{,}84}{0{,}40} = 2{,}1.$$

s_X^2 дисперсия s_Y^2 дисперсиядан анча катта, шу сабабли конкурент гипотеза сифатида $H_1: D(X) > D(Y)$ гипотезани оламиз. Бу ҳолда критик соҳа ўнг томонламадир. Жадвалдан (7-илова) $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k_1 = n - 1 = 12 - 1 = 11$ ва $k_2 = m - 1 = 18 - 1 = 17$ озодлик даражалари сонлари бўйича $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 11;\ 17)$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} < F_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги фараз бажарилади, шу сабабли ўртача қийматларни таққослаймиз.

Стъюдент критерийсининг кузатиладиган қиймати

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)\,s_Y^2}}\cdot\sqrt{\frac{n\cdot m\,(n+m-2)}{n+m}}$$

ни ҳисоблаймиз. Бу формулага мос катталикларнинг сон қийматларини қўйиб, $T_{\text{кузат}} = 7{,}8$ ни ҳосил қиламиз.

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X) \neq M(Y)$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир. 0,05 қийматдорлик даражаси ва $k = n + m - 2 = 12 +$

$+ 18 - 2 = 28$ озодлик даражалари сони бўйича жадвалдан (6-илова) $t_{\text{икки том.кр}}(0{,}05;\ 28) = 2{,}05$ критик нуқтани топамиз.

$T_{\text{кузат}} > t_{\text{икки том.кр}}$ бўлгани учун ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, танланма ўртача қийматларнинг фарқи муҳим.

520. Нормал бош тўпламлардан олинган $n = 10$ ва $m = 8$ ҳажмли иккита кичик эркли танланма бўйича $\overline{x} = 142{,}3$ ва $\overline{y} = 145{,}3$ танланма ўртача қийматлар ҳамда $s_X^2 = 2{,}7$ ва $s_Y^2 = 3{,}2$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,01 қийматдорлик даражасида $H_0 : M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текширинг.

Кўрсатма. Аввал Фишер—Снедекор критерийсидан фойдаланиб, дисперсияларнинг тенглигини текширинг.

Жавоби. $F_{\text{кузат}} = 1{,}23$; $F_{\text{кр}}(0{,}01;\ 7;\ 9) = 5{,}62$. Дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ. Қуйидагига эгамиз: $|T_{\text{кузат}}| = 3{,}7$; $t_{\text{икки том.кр}}(0{,}01;\ 16) = 2{,}92$. Ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза рад қилинади.

521. Бир хил созланган икки станокда тайёрланган икки партия буюмдан $n = 10$ ва $m = 12$ ҳажмли кичик танланмалар ажратилган. Қуйидаги натижалар олинган:

биринчи станокда тайёрланган буюмнинг контрол қилинадиган ўлчами	x_i	3,4	3,5	3,7	3,9
частота (буюмлар сони)	n_i	2	3	4	1
иккинчи станокда тайёрланган буюмнинг контрол қилинадиган ўлчами	y_i	3,2	3,4	3,6	
частота	m_i	2	2	8	

0,02 қийматдорлик даражасида буюмларнинг ўртача ўлчамининг тенглиги ҳақидаги $H_0 : M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш талаб қилинади. X ва Y тасодифий миқдорлар нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Ечилиши. Ушбу

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} \text{ ва } \overline{y} = \frac{\sum m_i y_i}{m}$$

формулалар бўйича танланма ўртача қийматларни топамиз: $\overline{x} = 3{,}6$, $\overline{y} = 3{,}5$.

Тузатилган дисперсияларни ҳисоблашни соддалаштириш учун

$$u_i = 10x_i - 36,\quad v_i = 10y_i - 35$$

шартли вариантларга ўтамиз.

Ушбу

$$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n-1} \quad \text{ва} \quad s_v^2 = \frac{\sum m_i v_i^2 - \frac{[\sum m_i v_i]^2}{m}}{m-1}$$

формулалар бўйича $s_u^2 = 2{,}67$ ва $s_v^2 = 2{,}54$ ни топамиз. Демак,

$$s_X^2 = \frac{s_u^2}{10^2} = \frac{2{,}67}{100} = 0{,}0267,$$

$$s_Y^2 = \frac{s_v^2}{10^2} = \frac{2{,}54}{100} = 0{,}0254.$$

Шундай қилиб, тузатилган дисперсиялар турлича; бу параграфда қаралаётган критерийда эса бош дисперсиялар бир хил деб фараз қилинади, шунинг учун Фишер—Снедекор критерийсидан фойдаланиб, дисперсияларни таққослаш зарур. Конкурент гипотеза сифатида $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ ни олиб, уни текширамиз (2-§, 2-қоидага қаранг).

Критерийнинг кузатиладиган қийматини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{0{,}0267}{0{,}0254} = 1{,}05.$$

Жадвалдан (7-илова) $F_{\text{кр}}(0{,}01; 9; 11) = 4{,}63$ ни топамиз.

$F_{\text{кузат}} < F_{\text{кр}}$ бўлгани учун дисперсиялар фарқи муҳим эмас ва демак, бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги фараз бажарилади, деб ҳисоблаш мумкин.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$U_{\text{кузат}} = \frac{(\overline{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(27{,}56 - 26) \cdot \sqrt{100}}{5{,}2} = 3.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $a \neq a_0$ кўринишида, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенгликдан топамиз:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}05}{2} = 0{,}475.$$

Лаплас функцияси жадвалидан (2-илова) $u_{\text{кр}} = 1{,}96$ ни топамиз. $U_{\text{кузат}} > u_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, танланма ва гипотетик бош ўртача қийматлар фарқи муҳим.

524. Ўртача квадратик четланиши $\sigma = 40$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан $n = 64$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\overline{x} = 136{,}5$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,01 қийматдорлик даражасида $H_0 : a = a_0 = 130$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : a \neq 130$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $U_{\text{кузат}} = 1{,}625$; $u_{\text{кр}} = 2{,}57$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

525. 524-масалани конкурент гипотеза $H_1 : a > 130$ бўлганда ечинг.

Жавоби. $u_{\text{кр}} = 2{,}33$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

526. Кучли таъсир этувчи токсик дори таблеткасининг ўртача оғирлиги $a_0 = 0{,}50$ мг бўлиши лозимлиги аниқланган. Олинган дори партиясидаги 125 та таблеткани текшириш бу партиядаги таблетканинг ўртача оғирлиги $\overline{x} = 0{,}53$ мг эканлигини кўрсатди. 0,01 қийматдорлик даражасида $H_0 : a = a_0 = 0{,}50$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : a \neq 0{,}50$ бўлганда текшириш талаб қилинади. Фармацевтика заводидан келтириладиган таблеткаларнинг оғирлигини ўлчаш бўйича ўтказилган кўп карра тажрибалар натижасида таблеткаларнинг оғирлиги $\sigma = 0{,}11$ мг ўртача квадратик четланишли нормал тақсимланганлиги топилган.

Жавоби. $U_{\text{кузат}} = 3$; $u_{\text{кр}} = 2{,}57$. Таблеткаларнинг ўртача оғирлиги йўл қўйиладиган оғирликдан муҳим фарқ қилади: дорини беморларга бериш мумкин эмас.

Б. Бош тўпламнинг дисперсияси номаълум

Агар бош тўпламнинг дисперсияси номаълум бўлса (масалан, кичик танламаларда), у ҳолда нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$T = \frac{(\overline{X} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$$

тасодифий миқдор қабул қилинади, бу ерда $S = \sqrt{\dfrac{\sum n_i x_i^2 - \frac{[\sum n_i x_i]^2}{n}}{n-1}}$ — тузатилган ўртача квадратик четланиш. T миқдор $k = n - 1$ озодлик даражали Стьюдент тақсимотига эга.

1-қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида (дисперсияси номаълум нормал тўпламнинг) a номаълум бош ўртача қийматнинг a_0 гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0 : a = a_0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : a \neq a_0$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилаётган қиймати*

$$T_{\text{кузат}} = \frac{(\overline{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$$

ни ҳисоблаш ва Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том кр.}}(\alpha, k)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $|T_{\text{кузат.}}| < t_{\text{икки том кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|T_{\text{кузат}}| > t_{\text{икки том кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1 : a > a_0$ бўлганда ўнг томонлама критик соҳанинг $t_{\text{ўнг том кр}}(\alpha, k)$ критик нуқтаси жадвалнинг (6-илова) пастки сатрида жойлаштирилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1$ озодлик даражалари сони бўйича топилади.*

Агар $T_{\text{кузат}} < t_{\text{ўнг том кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} > t_{\text{ўнг том кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

3-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1 : a < a_0$ бўлганда даставвал „ёрдамчи“ $t_{\text{ўнг том кр}}(\alpha, k)$ критик нуқта топилади ва чап томонлама критик соҳанинг чегараси $t_{\text{чап том кр}} = -t_{\text{ўнг том кр}}$ деб олинади.*

Агар $T_{\text{кузат}} > -t_{\text{ўнг том кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} < -t_{\text{ўнг том кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

527. Нормал бош тўпламдан олинган $n = 16$ ҳажмли танланма бўйича $\overline{x} = 118{,}2$ танланма ўртача қиймат ва $s = 3{,}6$ тузатилган ўртача квадратик четланиш топил-

Ўртача қийматларни таққослаймиз, бунинг учун Стьюдент критерийсининг кузатилган қиймати

$$T_{\text{кузат}}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n-1)\,s_X^2+(m-1)s_y^2}}\cdot\sqrt{\frac{n\cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

ни ҳисоблаймиз. Бу формулага унга кирадиган катталикларнинг сонли қийматларини қўйиб, $T_{\text{кузат}}=0{,}72$ ни ҳосил қиламиз.

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X)\neq M(Y)$ кўринишга эга, шунинг учун критик соҳа икки томонламадир. 0,02 қийматдорлик даражаси ва $k=n+m-2=10+12-2=20$ озодлик даражаси сони бўйича жадвалдан (6-илова) $t_{\text{икки том.кр}}(0{,}02;20)=2{,}53$ критик нуқтани топамиз.

$T_{\text{кузат}}<t_{\text{икки том.кр}}$ бўлгани учун ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Шундай қилиб, буюмларнинг ўртача ўлчамлари жиддий фарқ қилмайди.

522. 0,05 қийматдорлик даражасида X ва Y нормал бош тўпламларнинг бош ўртача қийматларини тенглиги ҳақидаги $H_0: M(X)=M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X)>M(Y)$ бўлганда ушбу $n=10$ ва $m=16$ ҳажмли кичик эркли танланмалар бўйича текшириш талаб қилинади:

x_i	12,3	12,5	12,8	13,0	13,5	y_i	12,2	12,3	13,0
n_i	1	2	4	2	1	m_i	6	8	2

Кўрсатма. Аввал бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X)=D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X)>D(Y)$ бўлганда текширинг (2-§ га қаранг).

Жавоби: $\overline{x}=12{,}8$; $\overline{y}=12{,}35$ $s_X^2=0{,}11$; $s_Y^2=0{,}07$; $F_{\text{кузат}}=1{,}57$; $F_{\text{кр}}(0{,}05;9;15)=2{,}59$; $T_{\text{кузат}}=1{,}71$; $t_{\text{ўнг том. кр}}(0{,}05;24)=1{,}71$.

Ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги гипотезани қабул қилиш ёки рад этишга асос йўқ. Танланмаларнинг ҳажмини орттириб, тажрибани такрорлаш лозим.

-§. Нормал тўпламнинг танланма ўртача қиймати билан гипотетик бош ўртача қийматини таққослаш

. Бош тўпламнинг дисперсияси маълум

1-қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида маълум σ исперсияли нормал тўпламнинг a бош ўртача қийматининг a_0 гипотетик (тахмин қилинаётган) ўртача қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0: a=a_0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: a\neq a_0$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилаётган қиймати*

$$U_{\text{кузат}}=\frac{(\overline{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

ни ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвали бўйича икки томонлама критик соҳанинг $u_{\text{кр}}$ критик нуқтасини ушбу тенгликдан топиш лозим:

$$\Phi(u_{\text{кр}})=\frac{1-\alpha}{2}.$$

Агар $|U_{\text{кузат}}|<u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|U_{\text{кузат}}|>u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

2-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1: a>a_0$ бўлганда ўнг томонлама критик соҳанинг критик нуқтаси ушбу тенглик бўйича топилади:*

$$\Phi(u_{\text{кр}})=\frac{1-2\alpha}{2}.$$

Агар $U_{\text{кузат}}<u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{\text{кузат}}>u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

3-қоида. *Конкурент гипотеза $H_1: a<a_0$ бўлганда аввал $u_{\text{кр}}$ критик нуқта 2-қоида бўйича топилади, кейин эса чап томонлама критик соҳанинг чегараси қуйидагича деб фараз қилинади:*

$$u'_{\text{кр}}=-u_{\text{кр}}.$$

Агар $U_{\text{кузат}}>-u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{\text{кузат}}<-u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

523. Ўртача квадратик четланиши $\sigma=5{,}2$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан $n=100$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\overline{x}=27{,}56$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: a=a_0=26$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: a\neq 26$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

ган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: a=a_0=120$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: a\neq 120$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$T_{\text{кузат}}=\frac{(\overline{x}-a_0)\cdot\sqrt{n}}{s}=\frac{(118{,}2-120)\cdot\sqrt{16}}{3{,}6}=-2.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $a\neq a_0$ кўринишда, шунинг учун критик соҳа икки томонламадир.

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (6-илова) жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган $\alpha=0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k=n-1=16-1=15$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том кр}}(0{,}05;15)=2{,}13$ критик нуқтани топамиз.

$|T_{\text{кузат}}|<t_{\text{икки том кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, $\overline{x}=118{,}2$ танланма ўртача қиймат $a_0=120$ гипотетик бош ўртача қийматдан муҳим фарқ қилмайди.

528. Конкурент гипотеза сифатида $H_1: a<a_0=120$ ни қабул қилиб, 497-масалани ечинг.

Жавоби. $T_{\text{кузат}}=-2$; $-t_{\text{ўнг том. кр}}=-1{,}75$. Нолинчи гипотезани рад этамиз.

529. Станок-автомат тайёрлайдиган буюмларнинг контрол қилинадиган ўлчами лойиҳада $a=a_0=35$ мм. Тасодифий олинган 20 та деталнн ўлчаш қуйидаги натижаларни берди:

контрол қилинадиган ўлчам	x_i	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
частота (буюмлар сони)	n_i	2	3	4	6	5

0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: a=a_0=35$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: a\neq 35$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Танланмадаги буюмларнинг ўртача ўлчамини топамиз:

$$\overline{x}=\frac{\sum n_ix_i}{n}=\frac{2\cdot 34{,}8+3\cdot 34{,}9+4\cdot 35{,}0+6\cdot 35{,}1+5\cdot 35{,}3}{20}=35{,}07.$$

Тузатилган дисперсияни топамиз. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида $u_i=10x_i-351$ шартли варианта-

ларга ўтамиз. Натижада қуйидаги тақсимотни ҳосил қиламиз:

u_i	-3	-2	-1	0	2
n_i	2	3	4	6	5

Шартли варианталарнинг тузатилган дисперсиясини топамиз:

$$s_u^2=\frac{\sum n_iu_i^2-\frac{[\sum n_iu_i]^2}{n}}{n-1}=\frac{44-\frac{[-6]^2}{20}}{19}=2{,}221.$$

Демак, дастлабки варианталарнинг тузатилган дисперсияси:

$$s_X^2=\frac{2{,}221}{10^2}=0{,}022.$$

Бу ердан „тузатилган“ ўртача квадратик четланиш:

$$s_X=\sqrt{0{,}022}=0{,}15.$$

Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$T_{\text{кузат}}=\frac{(\overline{x}-a_0)\cdot\sqrt{n}}{s}=\frac{(35{,}07-35{,}0)\cdot\sqrt{20}}{0{,}15}=2{,}15.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $a\neq a_0$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир. Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (6-илова) бу жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган $\alpha=0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k=n-1=20-1=19$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том кр}}(0{,}05;19)=2{,}09$ критик нуқтани топамиз. $T_{\text{кузат}}>t_{\text{икки том. кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, станок буюмларнинг лойиҳадаги ўлчамини таъминламайди, уни созлаш лозим.

7-§. Дисперсиялари номаълум бўлган нормал бош тўпламларнинг иккита ўртача қийматини таққослаш (боғлиқ танланмалар)

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, шу билан бирга уларнинг дисперсиялари номаълум бўлсин. Бу тўпламлардан бир хил n ҳажмли танланмалар олинган бўлиб, уларнинг варианталари мос равишда x_i ва y_i ларга тенг.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$d_i = x_i - y_i$ — бир хил номерли варианталар айирмаси,

$\overline{d} = \frac{\sum d_i}{n}$ — бир хил номерли варианталар айирмаларининг ўртача қиймати,

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{[\sum d_i]^2}{n}}{n-1}}$$ — „тузатилган" ўртача квадратик четланиш.

Қоида. *Берилган* α *қийматдорлик даражасида номаълум дисперсияли нормал тўпламлар иккита ўртача қийматининг тенглиги ҳақидаги* $H_0 : M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ *нолинчи гипотезани конкурент гипотеза* $H_1 : M(\overline{X}) \neq M(\overline{Y})$ *бўлганда текшириш учун (бир хил ҳажмли боғлиқ танланмалар бўлган ҳол) критерийнинг*

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\overline{d} \cdot \sqrt{n}}{s_d}$$

кузатилган қийматини ҳисоблаш ва Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан бу жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган α *қийматдорлик даражаси ва* $k = n - 1$ *озодлик даражалари сони бўйича* $t_{\text{икки том кр.}}(\alpha; k)$ *критик нуқтани топиш лозим.*

Агар $|T_{\text{кузат.}}| < t_{\text{икки том кр.}}$ *бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.*

Агар $|T_{\text{кузат.}}| > t$ *бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.*

530. 6 та деталь иккита асбоб билан бир хил тартибда ўлчанган ва қуйидаги натижалар олинган (мм нинг юзлик улушларида):

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 6,\ x_5 = 8,\ x_6 = 10;$$
$$y_1 = 10,\ y_2 = 3,\ y_3 = 6,\ y_4 = 1,\ y_5 = 7,\ y_6 = 4.$$

0,05 қийматдорлик даражасида ўлчаш натижаларининг фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқланг. Ўлчаш натижалари нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Ечилиши. $d_i = x_i - y_i$ айирмаларни топамиз, биринчи сатрдаги сонлардан иккинчи сатрдаги сонларни айириб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$d_1 = -8,\ d_2 = 0,\ d_3 = -1,\ d_4 = 5,\ d_5 = 1,\ d_6 = 6.$$

$\sum d_i = 3$ эканлигини ҳисобга олиб, танланма ўртача қийматни топамиз:

$$\overline{d} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

$\sum d_i^2 = 126$ ва $\sum d_i = 3$ эканлигини ҳисобга олиб, s_d „тузатилган" ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{[\sum d_i]^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{126 - \frac{9}{6}}{6-1}} = \sqrt{24{,}9}.$$

Критерийнинг кузатиладиган қийматини топамиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\overline{d} \cdot \sqrt{n}}{s_d} = \frac{0{,}5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{24{,}9}} = 0{,}25.$$

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (6-илова) бу жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган 0,05 қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том кр.}}(0{,}05;\ 5) = 2{,}57$ критик нуқтани топамиз. $T_{\text{кузат.}} < t_{\text{икки том кр.}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, ўлчаш натижаларининг ўртача қийматлари муҳим фарқ қилмайди.

531. Химиявий модданинг 10 та намунаси иккита аналитик тарозида бир хил тартибда тортилган ва қуйидаги натижалар олинган (мг ҳисобида):

x_i	25	30	28	50	20	40	32	36	42	38
y_i	28	31	26	52	24	36	33	35	45	40

0,01 қийматдорлик даражасида тортиш натижаларининг фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқланг. Тортиш натижалари нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Жавоби: $\overline{d} = -0{,}9$; $\sum d_i^2 = 65$, $s_d = 2{,}69$; $T_{\text{кузат.}} = -1{,}06$; $t_{\text{икки том кр.}}(0{,}01;\ 9) = 3{,}25$. Тортиш натижаларининг фарқи муҳим эмас.

532. 9 спортчининг жисмоний тайёргарлиги спорт мактабига киришдан олдин ҳамда бир ҳафталик машқлардан сўнг текширилди. Текшириш натижалари балл ҳисобида қуйидагича бўлди (биринчи сатрда ҳар бир спортчининг мактабга киришдан олдин олган баллари, иккинчи сатрда эса машқлардан сўнг олган баллари кўрсатилган):

x_i	76	71	57	49	70	69	26	65	59
y_i	81	85	52	52	70	63	33	83	62

2-қоида. *Конкурент гипотеза* $H_1 : p > p_0$ *бўлганда ўнг томонлама критик соҳанинг критик нуқтаси* $u_{\text{кр.}}$ *ни*

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$$

тенгликдан топилади.

Агар $U_{\text{кузат}} < u_{\text{кр}}$ *бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.*

Агар $U_{\text{кузат}} > u_{\text{кр}}$ *бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.*

3-қоида. *Конкурент гипотеза* $H_1 : p < p_0$ *бўлганда аввал „ёрдамчи"* $u_{\text{кр}}$ *критик нуқтани 2-қоида бўйича топилади, кейин эса чап томонлама критик соҳанинг чегараси* $u'_{\text{кр}} = u_{\text{кр}}$ *деб олинади.*

Агар $U_{\text{кузат}} > -u_{\text{кр}}$ *бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.*

Агар $U_{\text{кузат}} < -u_{\text{кр}}$ *бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.*

Эслатма. Қониқарли натижаларни $np_0q_0 > 9$ тенгсизликнинг бажарилиши таъминлайди.

535. 100 та эркли синов бўйича $\frac{m}{n} = 0{,}14$ нисбий частота топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0 : p = p_0 = 0{,}20$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : p \neq 0{,}20$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$ эканлигини ҳисобга олиб, критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$U_{\text{кузат}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}} = \frac{(0{,}14 - 0{,}20) \cdot \sqrt{100}}{\sqrt{0{,}20 \cdot 0{,}80}} = -1{,}5.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $p \neq p_0$ кўринишга эга, шунинг учун критик соҳа икки томонламадир. $u_{\text{кр}}$ критик нуқтани топамиз:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2 = (1 - 0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

Лаплас функцияси жадвалидан (2-илова) $u_{\text{кр}} = 1{,}96$ ни топамиз.

$|U_{\text{кузат}}| < u_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, кузатилаётган нисбий частота 0,14 нинг 0,20 гипотетик эҳтимолдан фарқи муҳим эмас.

536. 505-масалани конкурент гипотеза

$$H_1 : p < p_0$$

бўлганда ечинг.

Ечилиши. Шартга кўра конкурент гипотеза $p < p_0$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа чап томонламадир. Аввал „ёрдамчи" нуқтани — ўнг томонлама критик соҳанинг чегарасини топамиз. (2-қоида):

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45.$$

Лаплас функцияси жадвалидан $u_{\text{кр}} = 1{,}65$ ни топамиз. Демак, чап томонлама критик соҳанинг чегараси $u'_{\text{кр}} = -1{,}65$. $U_{\text{кузат}} > u'_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ (3-қоида).

537. Агар партиядаги буюмнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,02 дан ортиқ бўлмаса, партия қабул қилинади. Таваккалига олинган 480 та буюмдан 12 таси нуқсонли бўлиб чиқди. Партияни қабул қилиш мумкинми?

Ечилиши. H_0 нолинчи гипотеза $p = p_0 = 0{,}02$ кўринишда. Конкурент гипотеза сифатида $H_1 : p > 0{,}02$ гипотезани ва $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражасини қабул қиламиз.

Буюмнинг брак бўлиш нисбий частотасини топамиз:

$$\frac{m}{n} = \frac{12}{480} = 0{,}025.$$

Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$U_{\text{кузат}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}} = \frac{(0{,}025 - 0{,}02) \cdot \sqrt{400}}{\sqrt{0{,}02 \cdot 0{,}98}} = 0{,}71.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $p > p_0$ кўринишда, шунинг учун критик соҳа ўнг томонламадир.

Ўнг томонлама критик соҳанинг $u_{\text{кр}}$ критик нуқтасини топамиз (2-қоида):

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45.$$

Лаплас функцияси жадвалидан (2-илова) $u_{\text{кр}} = 1{,}645$ ни топамиз.

$U_{\text{кузат}} < u_{\text{кр}}$ бўлгани учун партиядаги буюмнинг брак

0,05 қийматдорлик даражасида спортчиларнинг жисмоний тайёргарлигининг яхшиланганлиги муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб қилинади. Баллар сони нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Жавоби.

$$\overline{d} = -\frac{39}{9};\quad \sum d_i^2 = 673;\quad s_d = 7{,}94;\quad T_{\text{кузат}} = -1{,}64;$$

$t_{\text{икки том. кр}}$ (0,05; 8) = 2,31. Жисмоний тайёргарлик яхшиланган деб ҳисоблашга асос йўқ.

533. Химия лабораториясида 8 та намунани икки усул билан бир хил тартибда анализ қилинди ва қуйидаги натижалар олинди (биринчи сатрда бирор модданинг ҳар бир намунадаги биринчи усул билан аниқланган миқдори, процент ҳисобида; иккинчи сатрда эса унинг иккинчи усул билан аниқланган миқдори кўрсатилган):

x_i	15	20	16	22	24	14	18	20
y_i	15	22	14	25	29	16	20	24

0,05 қийматдорлик даражасида анализ натижаларининг ўртача қийматларининг фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб этилади. Анализ натижалари нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Жавоби. $\overline{d} = -2;\ \sum d_i^2 = 66;\ s_d = \sqrt{\frac{34}{7}};\ T_{\text{кузат.}} = -2{,}57;$ $t_{\text{икки том кр.}}$ (0,05; 7) = 2,36. Ўлчаш натижаларининг фарқи муҳим.

534. Иккита лабораторияда ишлов берилмаган пўлатнинг 13 та намунасидаги углерод миқдори битта усул билан бир хил тартибда аниқланган. Анализларда қуйидаги натижалар олинган* (биринчи сатрда ҳар бир намунадаги углероднинг биринчи лабораторияда ҳосил қилинган миқдори процент ҳисобида, иккинчи

*Налимов В. В. Применение математической статистики при анализе вещества, Физматгиз, 1960.

сатрда эса унинг иккинчи лабораторияда ҳосил қилинган миқдори, процент ҳисобида кўрсатилган):

x_i	0,18	0,12	0,12	0,08	0,08	0,12	0,19	0,32	0,27
y_i	0,16	0,09	0,08	0,05	0,13	0,10	0,14	0,30	0,31
x_i	0,22	0,34	0,14	0,46					
y_i	0,24	0,28	0,11	0,42					

0,05 қийматдорлик даражасида анализ натижаларининг ўртача қийматларининг фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб этилади.

Ўлчаш натижалари нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Жавоби. $\overline{d} = 0{,}018;\ \sum d_i^2 = 0{,}0177;\ s_d = 0{,}034;\ T_{\text{кузат.}} = 1{,}89;$ $t_{\text{икки том. кр.}}$ (0,05; 12) = 2,18. Анализ натижаларининг фарқи муҳим эмас.

8-§. Кузатилаётган нисбий частотани ҳодиса рўй беришининг гипотетик эҳтимоли билан таққослаш

Етарлича катта n сондаги эркли синовлар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас, лекин номаълум бўлсин. Бу синовлар бўйича $\frac{m}{n}$ нисбий частота топилган бўлсин. Берилган α қийматдорлик даражасида номаълум p эҳтимолнинг p_0 гипотетик эҳтимолга тенглигидан иборат нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

1-қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида номаълум p эҳтимолнинг p_0 гипотетик эҳтимолга тенглиги ҳақидаги $H_0: p = p_0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: p \neq p_0$ бўлганда текшириш учун критерийнинг*

$$U_{\text{кузат.}} = \frac{(m/n - p_0)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

кузатилган қийматини ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвалидан

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

тенглик бўйича $u_{\text{кр.}}$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $|U_{\text{кузат.}}| < u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|U_{\text{кузат.}}| > u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

бўлиш эҳимоли 0,02 дан ортиқ эмаслиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Шундай қилиб, партияни қабул қилиш мумкин.

538. Агар партиядаги буюмнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,03 дан ортиқ бўлмаса, партия қабул қилинади. Таваккалига олинган 400 та буюмдан 18 таси брак бўлиб чиқди. Партияни қабул қилиш мумкинми?

Кўрсатма. Нолинчи гипотеза сифатида $H_0: p = p_0 = 0{,}03$ гипотезани, конкурент гипотеза сифатида эса $H_1: p > 0{,}03$ ни қабул қилинг; қийматдорлик даражаси: $\alpha = 0{,}05$.

Жавоби. $U_{\text{кузат}} = 1{,}76;\ u_{\text{кр}} = 1{,}645$. Партияни қабул қилиб бўлмайди.

539. Завод мўлжалдаги буюртмачиларга реклама каталогларини жўнатади. Тажриба каталог олган ташкилотнинг реклама қилинган буюмни буюртириш эҳтимоли 0,08 га тенглигини кўрсатди. Завод янги яхшиланган 1000 та каталог жўнатди ва 100 та буюртма олди. Янги рекламанинг олдингисидан самарадорлиги муҳим деб ҳисоблаш мумкинми?

Кўрсатма. Нолинчи гипотеза сифатида $H_0: p = p_0 = 0{,}08$ гипотезани, конкурент гипотеза сифатида $H_1: p > 0{,}08$ гипотезани қабул қилинг; қийматдорлик даражаси $\alpha = 0{,}05$.

Жавоби. $U_{\text{кузат}} = 2{,}32;\ u_{\text{кр}} = 1{,}645$. Нолинчи гипотеза рад қилинади. Янги рекламанинг олдингисидан самарадорлиги муҳим.

540. Узоқ вақт давомида кузатишлар шуни кўрсатдики, A дорини истеъмол қилган беморнинг бутунлай соғайиб кетиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Янги B дори 800 беморга тайинланган эди, бунда улардан 600 киши бутунлай соғайиб кетишди. Беш процентлик қийматдорлик даражасида янги дорининг A доридан самарадорлиги муҳим деб ҳисоблаш мумкинми?

Кўрсатма. Қуйидагича қабул қилинг:

$$H_0: p = 0{,}8,\quad H_1: p \neq 0{,}8.$$

Жавоби. $U_{\text{кузат}} = 1{,}77;\ u_{\text{кр}} = 1{,}96$. Янги дорининг олдинги доридан самарадорлиги муҳим деб ҳисоблашга асос йўқ.

9-§. Нормал бош тўпламларнинг бир нечта дисперсияларини турли ҳажмли танланмалар бўйича таққослаш. Бартлетт критерийси

Айтайлик, $X_1, X_2, \ldots, X_l$ бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан, умуман айтганда, турли n_i ҳажмли танланмалар олинган бўлсин (баъзи ҳажмлар бир хил бўлиши ҳам мумкин; агар барча танланмалар бир хил ҳажмли бўлса, у ҳолда кейинги параграфда келтирилган Кочрен критерийсидан фойдаланган маъқул). Танланмалар бўйича $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган.

α қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани, яъни бош дисперсияларнинг ўзаро тенглиги ҳақидаги

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l)$$

гипотезани текшириш талаб қилинади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$k_i = n_i - 1$ — дисперсиянинг озодлик даражалари сони;

$k = \sum_{i=1}^{l} k_i$ — озодлик даражалари сонлари йиғиндиси;

$\overline{s^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2}{k}$ — тузатилган дисперсияларнинг озодлик даражалари сонлари бўйича вазний ўртача арифметик қиймати:

$$V = 2{,}303\left[k\lg\overline{s^2} - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2\right];\quad C = 1 + \frac{1}{3(l-1)}\left[\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right].$$

$B = \dfrac{V}{C}$ — тасодифий миқдор (Бартлетт критерийси) бўлиб, агар ҳар бир танланманинг ҳажми $n_i > 4$ бўлса, у дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезанинг ўринлилиги шартида тақрибан озодлик даражаси $l-1$ бўлган χ^2 каби тақсимланган.

Қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тўпламлар дисперсияларининг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш учун Бартлетт критерийсининг кузатилаётган*

$$B_{\text{кузат}} = \frac{V}{C}$$

қийматини ҳисоблаш ва χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан α қийматдорлик даражаси ва $l-1$ (l — тан-

ланмалар сони) озодлик даражаси сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{кр}$ (α; $l-1$) критик нуқтасини топиш лозим.

Агар $B_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $B_{кузат} > \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1-эслатма. C ўзгармасни ҳисоблашга шошилмаслик керак. Аввал V ни топиш ва уни $\chi^2_{кр}$ билан таққослаб кўриш лозим; агар $V < \chi^2_{кр}$ бўлса, у ҳолда ўз-ўзидан $B = \frac{V}{C} < \chi^2_{кр}$ ҳам бўлади (чунки $C > 1$), ва демак, C ни ҳисоблаш зарур эмас.

Агар $V < \chi^2_{кр}$ бўлса, у ҳолда C ни ҳисоблаш ва кейин B ни $\chi^2_{кр}$ билан таққослаш лозим.

2-эслатма. Бартлетт критерийси тақсимотларнинг нормал тақсимотдан четланишларига жуда сезгир, шунинг учун бу критерий бўйича ҳосил қилинган натижаларга жуда эҳтиёт бўлиб ёндошиш лозим.

3-эслатма. Бош дисперсиянинг баҳоси сифатида дисперсияларнинг бир жинслилиги шартида тузатилган дисперсияларнинг озодлик даражалари сонлари бўйича олинган вазний арифметик ўртача қиймати олинади:

$$\overline{s^2} = \frac{\sum k_i s_i^2}{k}.$$

541. Нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 = 9$, $n_2 = 13$ ва $n_3 = 15$ ҳажмли учта эркли танланма бўйича тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлиб, улар мос равишда 3,2; 3,8 ва 6,3 га тенг. 0,05 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. 10-ҳисоблаш жадвалини тузамиз (8-устунни ҳозирча тўлдирмаймиз, чунки C ни ҳисоблаш лозим бўлиши ҳали маълум эмас).

Ҳисоблаш жадвалидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\overline{s^2} = \frac{\sum k_i s_i^2}{k} = \frac{159,4}{34} = 4,688; \quad \lg s^2 = 0,6709;$$

$$V = 2,303\,[k \lg \overline{s}^2 - \sum k_i \lg s_i^2] = 2,303[34 \cdot 0,6709 - 22,1886] = 1,43.$$

10-жадвал

1	2	3	4	5	6	7	8
Танланма номери	Танланма ҳажми	Озодлик даражалари сони	Тузатилган дисперсиялар				
i	n_i	k_i	s_i^2	$k_i s_i^2$	$\lg s_i^2$	$k_i \lg s_i^2$	$\frac{1}{k_i}$
1	9	8	3,2	25,6	0,5051	4,0408	
2	13	12	3,8	45,6	0,5798	6,9576	
3	15	14	6,3	88,2	0,7993	11,1902	
$\sum$		$k = 34$		159,4		22,1886	

Жадвалдан (5-илова) 0,05 қийматдорлик даражаси ва $l - 1 = 3 - 1 = 2$ озодлик даражалари сони бўйича $\chi^2_{кр}(0,05;\ 2) = 6,0$ критик нуқтани топамиз.

$V < \chi^2_{кр}$ бўлгани учун ўз-ўзидан $B_{кузат} = \frac{V}{C} < \chi^2_{кр}$ бўлади (чунки $C > 1$) ва демак, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, танланма дисперсияларининг фарқи муҳим эмас.

542. 541-масалада берилган маълумотлар бўйича қаралаётган бош тўпламларнинг бош дисперсиясини баҳолаш талаб қилинади.

Ечилиши. Бундан олдинги масалани ечиш натижасида дисперсияларнинг бир жинслилиги аниқланган эди, шунинг учун бош дисперсиянинг баҳоси сифатида тузатилган дисперсияларнинг озодлик даражалари сонлари бўйича вазний арифметик ўртача қийматини қабул қиламиз:

$$D_б^* = \overline{s}^2 = \frac{\sum k_i s_i^2}{k} = \frac{159,4}{34} \simeq 4,7.$$

543. Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезани $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 20$ ҳажмли танланмалар бўйича текшириш учун Бартлетт критерийсидан фойдаланиш мумкинми?

Жавоби. Мумкин эмас (ҳар бир танланманинг ҳажми 4 дан кичик бўлмаслиги лозим).

10-§. Нормал бош тўпламларнинг дисперсияларини бир хил ҳажмли танланмалар бўйича таққослаш. Кочрен критерийси

Айтайлик, $X_1, X_2, ..., X_l$ бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан бир хил n ҳажмли l та эркли танланма олинган ва улар бўйича s_1^2, s_2^2, ..., s_l^2 тузатилган танланма дисперсиялар топилган, бу дисперсиялар барчасининг озодлик даражалари сони $k = n - 1$.

Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани, яъни бош дисперсияларнинг ўзаро тенглиги ҳақидаги

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_l)$$

гипотезани текшириш талаб қилинади.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида Кочрен критерийсини—максимал тузатилган дисперсиянинг барча тузатилган дисперсиялар йиғиндисига нисбатини қабул қиламиз:

$$G = \frac{s^2_{max}}{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_l^2}.$$

Бу тасодифий миқдорнинг тақсимоти фақат озодлик даражаси сони $k = n - 1$ ва танланмалар сони l га боғлиқ. Нолинчи гипотезани текшириш учун ўнг томонлама критик соҳани қурилади.

Қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тақсимланган тўпламлар дисперсияларининг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун*

$$G_{кузат} = \frac{s^2_{max}}{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_l^2}$$

критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ва Кочрен тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (8-илова) $G_{кр}(\alpha;\ k;\ l)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $G_{кузат} < G_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $G_{кузат} > G_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

Эслатма. Дисперсиялар бир жинсли бўлган шартда бош дисперсиянинг баҳоси сифатида тузатилган дисперсияларнинг ўртача арифметик қиймати олинади.

548. Нормал бош тўпламлардан олинган бир хил $n = 17$ ҳажмли тўртта эркли танланма бўйича тузатилган танланма дисперсиялар: 0,21; 0,25; 0,34; 0,40 топилган.

а) 0,05 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш (критик соҳа ўнг томонламадир); б) бош дисперсияни баҳолаш талаб қилинади.

Ечилиши. Кочрен критерийсининг кузатилган қийматини — максимал тузатилган дисперсиянинг барча дисперсиялар йиғиндисига нисбатини топамиз:

$$G_{кузат} = \frac{0,40}{0,21 + 0,25 + 0,34 + 0,40} = \frac{1}{3}.$$

Кочрен тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (8-илова) 0,05 қийматдорлик даражаси, $k = n - 1 = 17 - 1 = 16$ озодлик даражалари сони ва танланмалар сони $l = 4$ бўйича $G_{кр}(0,05;\ 16;\ 4) = 0,4366$ критик нуқтани топамиз.

$G_{кузат} < G_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, тузатилган танланма дисперсияларнинг фарқи муҳим эмас.

б) дисперсияларнинг бир жинслилиги аниқланганлиги учун бош дисперсиянинг баҳоси сифатида тузатилган дисперсияларнинг арифметик ўртача қийматини қабул қиламиз:

$$D_б^* = \frac{0,21 + 0,25 + 0,34 + 0,40}{4} = 0,3.$$

549. Нормал бош тўпламлардан олинган бир хил $n = 37$ ҳажмли олтита эркли танланма бўйича 2,34; 2,66; 2,95; 3,65; 3,86; 4,54 тузатилган танланма дисперсиялар топилган.

Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани: а) 0,01 қийматдорлик даражасида; б) 0,05 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $k = 36$; $l = 6$; $G_{кузат} = 0,2270$; а) $G_{кр}(0,01;\ 36;\ 6) = 0,2858$; б) $G_{кр}(0,05;\ 36;\ 6) = 0,2612$. Иккала ҳолда ҳам дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

550. Барча тузатилган дисперсияларни бир хил сонга кўпайтиришдан Кочрен критерийсининг кузатилган қиймати ўзгармаслигини исботланг.

551. Нормал бош тўпламлардан олинган бир хил $n = 37$ ҳажмли бешта эркли танланма бўйича „тузатилган" ўртача квадратик четланишлар: 0,00021; 0,00035; 0,00038; 0,00062; 0,00084 топилган.

544. Нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 = 17$, $n_2 = 20$, $n_3 = 15$, $n_4 = 16$ ҳажмли тўртта эркли танланма бўйича тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлиб, улар мос равишда 2,5; 3,6; 4,1; 5,8 га тенг. а) 0,05 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш; б) бош дисперсияни баҳолаш талаб қилинади.

Жавоби: а) $k = 68$; $\sum k_i s_i^2 = 252,8$; $\sum k_i \lg s_i^2 = 36,9663$; $V = 2,8$; $B_{кузат} < 2,8$; $\chi^2_{кр}(0,05; 3) = 7,8$. Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. б) $D_б^* = 3,7$.

545. Тўрт тадқиқотчи параллел равишда қотишмадаги углероднинг процент миқдорини аниқлашмоқда, бунда биринчи тадқиқотчи 25 та намунани, иккинчи тадқиқотчи 33 та намунани, учинчи тадқиқотчи 29 та намунани, тўртинчи тадқиқотчи 33 та намунани анализ қилди. „Тузатилган" танланма ўртача квадратик четланишлар мос равишда 0,05; 0,07; 0,10; 0,08 га тенг бўлиб чиқди.

0,01 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади. Қотишмадаги углероднинг процент миқдори нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Кўрсатма. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида $r_i = 100\, s_i$ деб олинг.

Жавоби. $k = 116$; $\sum k_i r_i^2 = 7016$; $\overline{r^2} = 60,48$; $\sum k_i \lg r_i^2 = 201,4344$; $V = 12,0475$; $C = 1,0146$; $B_{кузат} = 11,87$; $\chi^2_{кр}(0,01; 3) = 11,3$. Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотеза рад қилинади.

546. Буюмларга ишлов беришнинг 4 та усули таққосланмоқда. Контрол қилинадиган параметрнинг дисперсияси энг кичик бўлган усул энг яхши деб ҳисобланади. Биринчи усул билан 20 та буюмга, иккинчи усул билан 20 та буюмга, учинчи усул билан 20 та буюмга, тўртинчи усул билан 14 та буюмга ишлов берилган. Тузатилган танланма дисперсиялар мос равишда 0,00053; 0,00078; 0,00096; 0,00062 га тенг. 0,05 қийматдорлик даражасида бу усуллардан бирини афзал

кўриш мумкинми? Контрол қилинадиган параметр нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Кўрсатма. Ҳисоблашларни осонлаштириш учун $r_i^2 = 100000\, s_i^2$ деб олинг.

Жавоби. $k = 65$; $\overline{r^2} = 74,68$; $\sum k_i \lg r_i^2 = 121,0550$; $V = 1,62$; $B_{кузат} < 1,62$; $\chi^2_{кр}(0,05, 3) = 7,8$. Бу усулларнинг бирини қолганларидан афзал кўришга асос йўқ.

547. Уч станокнинг ҳар бирида буюмларга ишлов бериш аниқлигини таққослаш талаб қилинади. Шу мақсадда биринчи станокда 20 та буюмга, иккинчи станокда 25 та буюмга, учинчи станокда 26 та буюмга ишлов берилди. Контрол қилинаётган ўлчамнинг берилган ўлчамдан четланишлари X, Y ва Z қуйидагича бўлиб чиқди: (мм нинг ўндан бир улушларида): биринчи станокдаги буюмлар учун

четланишлар	x_i	2	4	6	8	9.		
частота	n_i	5	6	3	2	4'		

иккинчи станокдаги буюмлар учун

четланишлар	y_i	1	2	3	5	7	8	12,
частота	m_i	2	4	4	6	3	5	1'

учинчи станокдаги буюмлар учун

четланишлар	z_i	2	3	4	7	8	10	14
частота	p_i	3	5	4	6	3	2	3

а) 0,05 қийматдорлик даражасида станоклар бир хил аниқликни таъминлайди, деб ҳисоблаш мумкинми? Четланишлар нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

б) Учинчи станокни текширмасдан (бу станок учун четланишлар дисперсияси энг катта), биринчи ва иккинчи станоклар буюмларга бир хил аниқликда ишлов беришни таъминлашига Фишер—Снедекор критерийси ёрдамида ишонч ҳосил қилинг.

Жавоби. а) $s_X^2 = 3,66$; $s_Y^2 = 7,92$; $s_Z^2 = 13,92$; $\overline{s^2} = 9,02$; $\sum k_i s_i^2 = 613,32$; $\sum k_i \lg s_i^2 = 61,5151$; $V = 7,92$ $C = 1,02$; $B_{кузат} = 7,76$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 2) = 6,0$.

Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотеза рад қилинади. Станоклар бир хил аниқликни таъмин этмайди;

б) $F_{кузат} = 2$; $F_{кр}(0,05;\ 19) = 2,11$.

0,05 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. Аввал барча ўртача квадратик четланишларни 10^5 га кўпайтиринг.

Жавоби. $k = 36$; $l = 5$; $G_{кузат} = 0,4271$; $G_{кр}(0,05;\ 36;\ 5) = 0,3066$. Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотеза рад қилинади.

552. Тўртта қадоқловчи автомат бир хил оғирликни тортишга созланган. Ҳар бир автоматда 10 тадан намуна тортиб олинган, кейин эса шу намуналарни аниқ тарозида тортилган ва ҳосил қилинган четланишлар бўйича тузатилган дисперсиялар: 0,012; 0,021; 0,025; 0,032 топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида автоматлар бир хил аниқликда тортиб беради, деб ҳисоблаш мумкинми? Қайд қилинаётган оғирликнинг талаб қилинаётган оғирликдан четланиши нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Жавоби. $k = 9$; $l = 4$; $G_{кузат} = 0,3556$; $G_{кр}(0,05;\ 9;\ 4) = 0,5017$. Автоматлар бир хил аниқликда тортишни таъминлайди.

553. Уч лабораториянинг ҳар бирида қотишмадаги углероднинг процент миқдорини аниқлаш учун 10 тадан намуна анализ қилинди, бунда тузатилган танланма дисперсиялар қуйидагича бўлиб чиқди: 0,045; 0,062; 0,093.

0,01 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Қотишмадаги углероднинг процент миқдори нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Жавоби. $k = 9$; $l = 3$; $G_{кузат} = 0,465$. $G_{кр}(0,01;\ 9;\ 3) = 0,6912$. Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

554. Станокнинг ишлаш турғунлиги (бузилмаслиги) буюмларнинг контрол қилинаётган ўлчамининг катталиги бўйича текширилмоқда. Шу мақсадда ҳар 30 минутда 20 та буюмдан иборат намуна олиб турилди, ҳаммаси бўлиб, 15 та намуна олинди. Олинган деталларни ўлчаш натижасида тузатилган дисперсиялар топилган (уларнинг қийматлари 11-жадвалда келтирилган).

11-жадвал

Намуна номери	Тузатилган дисперсия	Намуна номери	Тузатилган дисперсия	Намуна номери	Тузатилган дисперсия
1	0,082	6	0,109	11	0,112
2	0,091	7	0,121	12	0,109
3	0,162	8	0,091	13	0,110
4	0,143	9	0,156	14	0,156
5	0,121	10	0,110	15	0,164

0,05 қийматдорлик даражасида станок турғун ишламоқда деб ҳисоблаш мумкинми?

Кўрсатма. Жадвалдан фойдаланиб (8-илова), чизиқли интерполяцияланг.

Жавоби. $k = 19$; $l = 15$; $G_{кузат} = 0,089$; $G_{кр}(0,05;\ 19;\ 15) = 0,1386$. Станок турғун ишламоқда.

11-§. Танланма корреляция коэффициентининг қийматдорлиги ҳақидаги гипотезани текшириш

Икки ўлчовли (X, Y) бош тўплам нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламдан n ҳажмли танланма олинган ва у бўйича танланманинг корреляция коэффициенти $r_т \neq 0$ топилган. Бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги $H_0: r_б = 0$ нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Нолинчи гипотеза қабул қилинадиган бўлса, бу нарса X ва Y нинг корреляцияланмаганлигини, акс ҳолда эса корреляцияланганлигини билдиради.

Қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида икки ўлчовли нормал тасодифий миқдорнинг бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги $H_0: r_б = 0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: r_б \neq 0$ бўлганда текшириш учун*

$$T_{кузат} = \frac{r_т \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_т^2}}$$

критерийнинг кузатилган қийматини ҳисоблаш ва Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 2$ озодлик даражалари сони бўйича икки томонлама критик соҳанинг $t_{кр}(\alpha, k)$ критик нуқтасини топиш лозим.

Агар $|T_{кузат}| > t_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Агар $|T_{кузат}| < t_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

555. Икки ўлчовли (X, Y) нормал тўпламдан олинган $n = 100$ ҳажмли танланма бўйича $r_т = 0,2$ танланма корреляция коэффициенти топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : r_б \neq 0$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган (эмпирик) қийматини топамиз:

$$T_{кузат} = \frac{r_т\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_т^2}} = \frac{0,2\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0,2^2}} = 2,02.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $r_б \neq 0$ кўринишга эга, шунинг учун критик соҳа икки томонламадир.

Стъюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (6-илова) жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган $\alpha = 0,05$ қийматдорлик даражаси ва $k = n - 2 = 100 - 2 = 98$ озодлик даражалари сони бўйича икки томонлама критик соҳанинг $t_{кр}(0,05;\ 98) = 1,665$ критик нуқтасини топамиз.

$T_{кузат} > t_{кр}$ бўлгани учун бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, корреляция коэффициентининг нолдан фарқи муҳим; демак, X ва Y корреляцияланган.

556. Икки ўлчовли (X, Y) нормал бош тўпламдан олинган $n = 62$ ҳажмли танланма бўйича танланма корреляция коэффициенти $r_т = 0,3$ топилган. 0,01 қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : r_б \neq 0$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $k = 60$; $T_{кузат} = 2,43$; $t_{кр}(0,01;\ 60) = 2,66$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ; X ва Y — корреляцияланмаган тасодифий миқдорлар.

557. Икки ўлчовли (X, Y) нормал бош тўпламдан олинган $n = 120$ ҳажмли танланма бўйича $r_т = 0,4$ танланма корреляция коэффициенти топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : r_б \neq 0$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $k = 118$; $T_{кузат} = 4,74$; $t_{кр}(0,05;\ 118) = 1,66$. Нолинчи гипотеза рад қилинади. X ва Y — корреляцияланган тасодифий миқдорлар.

558. Икки ўлчовли (X, Y) нормал бош тўпламдан олинган $n = 100$ ҳажмли танланма бўйича 12-корреляцион жадвал тузилган.

12-жадвал

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	—	—	—	—	6
45	—	6	2	—	—	—	8
55	—	—	5	40	5	—	50
65	—	—	2	8	7	—	17
75	—	—	—	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Қуйидагилар талаб қилинади: а) танланма корреляция коэффициентини топиш; б) 0,05 қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : r_б \neq 0$ бўлганда текшириш.

Ечилиши. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2},$$

шартли вариантларга ўтамиз, бу ерда C_1 ва C_2 — сохта ноллар (сохта ноль сифатида вариацион қаторнинг тахминан ўртасида жойлашган вариантани олиш фой-

Қуйидагилар талаб қилинади: а) танланма корреляция коэффициентини топиш; б) 0,01 қийматдорлик даражасида $r_б$ бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : r_б \neq 0$ бўлганда текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. Қуйидаги шартли вариантларга ўтинг:

$$u_i = \frac{x_i - 17}{5}, \quad v_i = \frac{y_i - 130}{10}.$$

Жавоби. $\overline{u} = -0,11$; $\sigma_u = 0,948$, $\overline{v} = 0,25$, $\sigma_v = 0,994$, $\sum n_{uv}uv = 73$; $r_т = 0,8$; а) $T_{кузат} = 13,2$. $t_{кр}(0,01;\ 98) = 2,64$. Нолинчи гипотеза рад қилинади: X ва Y корреляцияланган.

560. Икки ўлчовли (X, Y) нормал бош тўпламдан олинган $n = 100$ ҳажмли танланма бўйича 15-корреляцион жадвал тузилган.

15-жадвал

Y \ X	12	22	32	42	52	62	72	n_y
65	—	—	—	—	10	6	2	18
70	—	—	—	—	—	4	1	5
75	—	—	2	7	4	2	—	15
80	—	—	1	25	—	—	—	26
85	—	4	6	—	1	—	—	11
90	1	5	8	2	—	—	—	16
95	1	2	6	—	—	—	—	9
n_x	2	11	23	31	15	12	3	$n = 10$

Қуйидагилар талаб қилинади: а) танланма корреляция коэффициентини топиш; б) 0,001 қийматдорлик даражасида $r_б$ бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H : r_б \neq 0$ бўлганда текшириш.

Кўрсатма.

$$u_i = \frac{x_i - 42}{10}, \quad v_i = \frac{y_i - 80}{5}$$

шартли вариантларга ўтинг.

Жавоби. $\overline{u} = -0,03$, $\sigma_u = 1,321$, $\overline{v} = -0,09$, $\sigma_v = 1,877$; $\sum n_{uv}uv = -206$, $r_т = -0,83$; $T_{кузат} = -14,73$, $t_{кр} = (0,001;\ 98) = 3,43$. Нолинчи гипотеза рад қилинади; демак, X ва Y корреляцияланган.

561. Икки ўлчовли (X, Y) нормал бош тўпламдан олинган $n = 100$ ҳажмли танланма бўйича 16-корреляцион жадвал ҳосил қилинган.

Қуйидагилар талаб қилинади: а) танланма корреляция коэффициентини топиш; б) 0,05 қийматдорлик даражасида $r_б$ бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : r_б \neq 0$ бўлганда текшириш.

16-жадвал

Y \ X	100	105	110	115	120	125	n_y
35	4	—	6	7	8	3	28
45	5	5	2	10	—	—	22
55	6	7	—	—	2	3	18
65	—	6	5	4	—	2	17
75	5	1	2	4	3	—	15
n_x	20	19	15	25	13	8	$n = 100$

Кўрсатма. Қуйидагича шартли вариантларга ўтинг:

$$u_i = \frac{x_i - 115}{5}, \quad v_i = \frac{y_i - 45}{10}.$$

дали; мазкур ҳолда биз $C_1 = 25$, $C_2 = 55$ ни оламиз) $h_1 = u_{i+1} - u_i$, яъни иккита қўшни варианта орасидаги айирма (қадам); $h_2 = v_{i+1} - v_i$.

Шартли варианталардаги корреляцион жадвални амалда бундай тузилади: биринчи сатрда $C_1 = 25$ сохта ноль ўрнига ноль ёзилади; нолдан чап томонга кетма-кет -1, -2, -3 ни, нолдан ўнг томонга эса 1, 2, 3 ни ёзилади. Шунга ўхшаш, биринчи устунда $C_2 = 55$ сохта нолнинг ўрнига ноль ёзилади; устига кетма-кет -1, -2, -3, нолнинг тагига эса 1, 2, 3 ёзилади. Частоталар дастлабки варианталардаги корреляцион жадвалдан кўчириб ёзилади. Натижада 13- корреляцион жадвал ҳосил қилинади.

13- жадвал

v \ u	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	5	1	—	—	—	—	6
-1	—	6	2	—	—	—	8
0	—		5	40	5	—	50
1	—	—	2	8	7	—	17
2	—	—	—	4	7	8	19
n_u	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Танланма корреляция коэффициентини шартли варианталар бўйича топиш формуласидан фойдаланамиз:

$$r_{\text{т}} = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v}.$$

Бу формулага кирувчи $\overline{u}$, $\overline{v}$ ва σ_u, σ_v катталикларни кўпайтмалар методи билан ёки бевосита ҳисоблаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\overline{u} = -0{,}03;\ \overline{v} = 0{,}35;\ \sigma_u = 1{,}153;\ \sigma_v = 1{,}062.$$

Ҳисоблаш жадвалидан (498- масала, 7- жадвалга қаранг) фойдаланиб, $\sum n_{uv}uv = 99$ ни топамиз.

Демак, танланма корреляция коэффициенти

$$r_{\text{т}} = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{99 - 100\cdot(-0{,}03)\cdot 0{,}35}{100\cdot 1{,}153\cdot 1{,}062} = 0{,}817.$$

б) бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширамиз.

Критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{r_{\text{т}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{т}}^2}} = \frac{0{,}817\cdot\sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0{,}817^2}} = 14{,}03.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $r_б \neq 0$ кўринишга эга, демак, критик соҳа икки томонламадир. Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (6- илова) бу жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k = n - 2 = 100 - 2 = 98$ озодлик даражалар сони бўйича икки томонлама критик соҳанинг $t_{\text{кр}}(0{,}05;\ 98) = 1{,}665$ критик нуқтасини топамиз.

$T_{\text{кузат}} > t_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, корреляция коэффициентининг нолдан фарқи муҳим, демак, X ва Y тасодифий миқдорлар корреляциялашган.

559. Икки ўлчовли (X, Y) нормал бош тўпламдан олинган $n = 100$ ҳажмли танланма бўйича 14- корреляцион жадвал тузилган.

14- жадвал

Y \ X	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	—	—	—	—	6
120	—	6	2	—	—	—	8
130	—	—	3	50	2	—	55
140	—	—	1	10	6	—	17
150	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

Жавоби. а) $\overline{u} = -0{,}81$, $\sigma_u = 1{,}758$, $\overline{v} = 0{,}69$, $\sigma_v = 1{,}563$; $\sum n_{uv}uv = -91$, $r_{\text{т}} = -0{,}13$. б) $T_{\text{кузат}} = -1{,}3$, $t_{\text{кр}}(0{,}05; 98) = 1{,}665$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ: X ва Y корреляциялашмаган.

12- §. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани Пирсон критерийси бўйича текшириш

А. Эмпирик тақсимот тенг узоқликдаги варианталар кетма-кетлиги ва уларга мос частоталар кўринишида берилган

Эмпирик тақсимот тенг узоқликдаги варианталар кетма-кетлиги ва уларга мос частоталар кўринишида берилган бўлсин:

$$\begin{array}{llll} x_i & x_1 & x_2 \ldots x_N \\ n_i & n_1 & n_2 \ldots n_N \end{array}$$

X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани Пирсон критерийсидан фойдаланиб текшириш талаб қилинади.

1- қоида. *Берилган α қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун қуйидагиларни бажариш лозим:*

1. *$\overline{x}_{\text{т}}$ танланма ўртача қийматни ва $\sigma_{\text{т}}$ танланма ўртача квадратик четланишни бевосита (кузатишлар сони кичик бўлганда) ёки соддалаштирилган усул (кузатишлар сони катта бўлганда) масалан, кўпайтмалар ёки йиғиндилар методи билан ҳисобланади.*

2. *Ушбу назарий частоталар ҳисобланади:*

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_{\text{т}}}\cdot\varphi(u_i),$$

бу ерда n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси), h — қадам (иккита қўшни варианта орасидаги айирма),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_{\text{т}}}{\sigma_{\text{т}}},\qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}.$$

3. *Эмпирик ва назарий частоталар Пирсон критерийси ёрдамида таққосланади. Бунинг учун:*

а) ҳисоблаш жадвали тузилади (18- жадвалга қаранг), бу жадвал бўйича критерийнинг кузатилаётган қиймати ҳисобланади:

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \sum\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'};$$

б) χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k = s - 3$ (s — танланма

группалари сони) озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$ критик нуқтаси топилади.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, эмпирик ва назарий частоталар фарқи муҳим эмас (тасодифий).

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади. Бошқача айтганда, эмпирик ва назарий частоталар фарқи муҳим.

Эслатма. Кичик частоталарни ($n_i < 5$) бирлаштириш лозим; бу ҳолда уларга мос назарий частоталарни ҳам қўшиш лозим. Агар частоталар бирлаштирилган бўлса, у ҳолда озодлик даражалари сонини $k = s - 3$ формула бўйича топишда s сифатида танланманинг частоталарини бирлаштиришдан сўнг қолган группалари сонини олиш лозим.

562. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани Пирсон критерийси ёрдамида текширишда озодлик даражалари сони нима учун $k = s - 3$ формула бўйича топилади?

Ечилиши. Пирсон критерийсидан фойдаланишда озодлик даражалари сони $k = s - 1 - r$, бу ерда r — танланма бўйича баҳоланадиган параметрлар сони. Нормал тақсимот иккита параметр: a математик кутилиш ва σ ўртача квадратик четланиш билан баҳоланади. Бу параметрларнинг иккаласи ҳам танланма бўйича баҳоланганлиги учун (a нинг баҳоси сифатида танланма ўртача қиймат, σ нинг баҳоси сифатида танланма ўртача квадратик четланиш қабул қилинади) $r = 2$, демак, $k = s - 1 - 2 = s - 3$.

563. Пирсон критерийсидан фойдаланиб, 0,05 қийматдорлик даражасида X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезанинг $n = 200$ ҳажмли танланманинг ушбу эмпирик тақсимоти билан мувофиқ келиш-келмаслигини текширинг:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	16	26	25	30	26	21	24	20	13

Ечилиши. 1. Кўпайтмалар методидан фойдаланиб, $\overline{x}_{\text{т}} = 12{,}63$ танланма ўртача қийматни ва $\sigma_{\text{т}} = 4{,}695$ танланма ўртача квадратик четланишни топамиз.

2. $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_т = 4{,}695$ эканлигини ҳисобга олиб, назарий частоталарни ушбу формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_т} \cdot \varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4{,}695} \cdot \varphi(u_i) = 85{,}2 \cdot \varphi(u_i).$$

17-ҳисоблаш жадвалини тузамиз ($\varphi(u)$ функциянинг қийматлари 1-иловада жойлаштирилган).

17-жадвал

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_т}{\sigma_т}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 85{,}2 \cdot \varphi(u_i)$
1	5	−1,62	0,1074	9,1
2	7	−1,20	0,1942	16,5
3	9	−0,77	0,2966	25,3
4	11	−0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Эмпирик ва назарий частоталарни таққослаймиз.
а) 18-ҳисоблаш жадвалини тузамиз, ундан

$$\chi^2_{кузат} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

18-жадвал

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	15	9,1	−5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	3,6
3	25	25,3	−0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	−2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	−7,9	62,41	1,9
6	21	29,8	−8,8	77,44	2,3
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,0
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
$\sum$	200				$\chi^2_{кузат} = 20{,}0$

18-жадвалдан $\chi^2_{кузат} = 20{,}0$ ни топамиз.

б) χ^2 тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (5-илова) $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$ критик нуқтасини топамиз.

$\chi^2_{кузат.} > \chi^2_{кр}$ бўлгани учун бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, эмпирик ва назарий частоталар фарқи муҳимдир.

564. Пирсон критерийсидан фойдаланиб, 0,05 қийматдорлик даражасида X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезанинг $n = 200$ ҳажмли танланманинг ушбу тақсимоти билан мувофиқ келиш-келмаслигини текширинг:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Жавоби. $k = 8$, $\chi^2_{кузат} = 7{,}71$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 8) = 15{,}5$. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад қилишга асос йўқ.

565. Пирсон критерийсидан фойдаланиб, 0,01 қийматдорлик даражасида n_i *эмпирик ва* n_i' *назарий* частоталар орасидаги фарқ тасодифийми ёки муҳимлигини аниқланг. Назарий частоталар X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезага асосланиб ҳисобланган:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n_i'	6	18	36	76	39	18	7.

Ечилиши. $\chi^2_{кузат} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ Пирсон критерийсининг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз. 19-ҳисоблаш жадвалини тузамиз. 19-жадвалдан критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз: $\chi^2_{кузат} = 3{,}068$.

χ^2 тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (5-илова) 0,01 қийматдорлик даражаси ва $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi_{кр}(0{,}01;\ 7) = 13{,}3$ критик нуқтасини топамиз.

терваллари сони) озодлик даражасининг сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{кр}(\alpha;\ k)$ критик нуқтаси топилади.

Агар $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлса, бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $\chi^2_{кузат} > \chi^2_{кр}$ бўлса, гипотеза рад қилинади.

2-эслатма. Кичик сондаги эмпирик частоталарни ($n_i < 5$) ўз ичига олган интервалларни бирлаштириб юбориш, бу интервалларнинг частоталарини эса қўшиш лозим. Агар интервалларни бирлаштирилган бўлса, у ҳолда озодлик даражаси сонини $k = s - 3$ формула бўйича топишда s сифатида бирлаштиришдан кейин қолган интерваллар сонини олиш лозим.

567. 0,05 қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезанинг 20-жадвалда берилган $n = 100$ ҳажмли танланманинг эмпирик тақсимоти билан мувофиқ келиш-келмаслигини Пирсон критерийсидан фойдаланиб текширинг.

20-жадвал

Интервал номери	Интервал чегараси		Частота	Интервал номери	Интервал чегараси		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	3	8	6	5	23	28	16
2	8	13	8	6	28	33	8
3	13	18	15	7	33	38	7
4	18	23	40				$n = 100$

Ечилиши. 1. Танланма ўртача қиймат ва танланма ўртача квадратик четланишни кўпайтмалар методи билан топамиз. Бунинг учун берилган интервалли тақсимотдан тенг узоқликдаги варианталар тақсимотига ўтамиз, бунда x_i^* варианта сифатида интервал учларининг ўртача арифметик қийматини оламиз:

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Натижада ушбу тақсимотни ҳосил қиламиз:

x_i^*	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,7
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Кўпайтмалар методи бўйича тегишли ҳисоблашларни бажариб, ушбу танланма ўртача қиймат ва танланма ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$x^* = 20{,}7,\ \sigma^* = 7{,}28.$$

2. $\bar{x}^* = 20{,}7$, $\sigma^* = 7{,}28$, $\frac{1}{\sigma^*} = 0{,}137$ ни ҳисобга олиб, $(z_i,\ z_{i+1})$ интервалларни топамиз. Бунинг учун 21-ҳисоблаш жадвалини тузамиз (биринчи интервалнинг чап учини $-\infty$ га, сўнгги интервалнинг ўнг учини эса ∞ га тенг деб қабул қиламиз).

3. P_i назарий эҳтимолларни ва $n_i' = n \cdot P_i = 100P_i$ назарий частоталарни топамиз. Бунинг учун 22-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

21-жадвал

i	Интервал чегаралари		$x_i - \bar{x}^*$	$x_{i+1} - \bar{x}^*$	Интервал чегаралари	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$
1	3	8	—	−12,7	$-\infty$	−1,74
2	8	13	−12,7	−7,7	−1,84	−1,06
3	13	18	−7,7	−2,7	−1,06	−0,37
4	18	23	−2,7	2,3	−0,37	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	—	1,69	∞

22-жадвал

i	Интервал чегаралари		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i' = 100P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	—	−1,74	−0,5000	−0,4591	0,0409	4,09
2	−1,74	−1,06	−0,4591	−0,3554	0,1037	10,37
3	−1,06	−0,37	−0,3554	−0,1443	0,2111	21,11
4	−0,37	0,32	−0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69		0,4545	0,5000	0,0455	4,55
$\sum$					1	100

$\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлгани учун бош тўпламнинг нормал қсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос қ. Бошқача айтганда, эмпирик ва назарий частоталар асидаги фарқ муҳим эмас (тасодифий).

19-жадвал

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	−2	4	0,224
3	40	36	4	16	0,448
4	72	76	−4	16	0,208
5	36	39	−3	9	0,234
6	18	18	—	—	—
7	10	7	3	9	1,287
$\sum$	$n = 200$				$\chi^2_{кузат} = 3{,}068$

56. Пирсон критерийсидан фойдаланиб, 0,05 қийматдорлик даражасида n_i эмпирик частоталар билан X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезага асосланиб ҳисобланган n'_i назарий частоталар орасидаги фарқнинг тасодифий ёки муҳимлигини аниқланг:

а) n_i 5 10 20 8 7;
n'_i 6 14 18 7 5;

б) n_i 6 8 13 15 20 16 10 7 5;
n'_i 5 9 14 16 18 16 9 6 7;

в) n_i 14 18 32 70 20 36 10;
n'_i 10 24 34 80 18 22 12;

г) n_i 5 7 15 14 21 16 9 7 6;
n'_i 6 6 14 15 22 15 8 8 6;

Жавоби. а) тасодифий; $k = $, $\chi^2_{кузат} = 2{,}47$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2) = 6{,}0$;
б) тасодифий; $k = $, $\chi^2_{кузат} = 1{,}52$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$;
в) муҳим; $k = 4$, $\chi^2_{кузат} = 13{,}93$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$;
г) тасодифий; $k = 6$, $\chi^2_{кузат} = 0{,}83$, $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$.

Б. Эмпирик тақсимот бир хил узунликдаги интерваллар кетма-кетлиги ва уларга мос частоталар кўринишида берилган

Эмпирик тақсимот (x_i, x_{i+1}) интерваллар кетма-кетлиги ва уларга мос n_i частоталар (n_i — i-интервалга тушган частоталар йиғиндиси) кетма-кетлиги кўринишида берилган бўлсин:

$$\begin{array}{cccc} (x_1, x_2) & (x_2, x_3) & \ldots & (x_s, x_{s+1}) \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_s \end{array}$$

Пирсон критерийсидан фойдаланиб, x бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

2-қоида. *α қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун қуйидагиларни бажариш лозим:*

1. $\overline{x}$ танланма ўртача қиймат ва $\sigma_т$ танланма ўртача квадратик четланишини, масалан, кўпайтмалар методи билан ҳисоблаш, бунда x^*_i варианталар сифатида интервал учларининг ўртача арифметик қиймати олинади:

$$x^*_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

2. X ни нормалаш, яъни $Z = \frac{X - \overline{x}^*}{\sigma^*}$ тасодифий миқдорга ўтиш ва интервалларнинг учларини ҳисоблаш:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}^*}{\sigma^*}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}^*}{\sigma^*},$$

бунда Z нинг энг кичик қийматини, яъни z_1 ни $-\infty$ га тенг, энг катта қийматини, яъни z_s ни эса ∞ га тенг деб олинади.

3. Ушбу назарий частоталар ҳисобланади:

$$n'_i = n \cdot P_i,$$

бу ерда n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси) $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ эса X нинг (x_i, x_{i+1}) интервалларга тушиш эҳтимоли, $\Phi(z)$ — Лаплас функцияси.

4. Эмпирик ва назарий частоталарни Пирсон критерийси ёрдамида таққослаш. Бунинг учун:

а) ҳисоблаш жадвали тузилади (18-жадвалга қаранг), бу жадвал бўйича Пирсон критерийсининг кузатилаётган қиймати топилади:

$$\chi^2_{кузат} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i};$$

б) χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k = s - 3$ (s танланма ин-

4. Пирсон критерийсидан фойдаланиб, эмпирик ва назарий частоталарни таққослаймиз:

а) Пирсон критерийсининг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз. Бунинг учун 23-ҳисоблаш жадвалини тузамиз, 7 ва 8-устунлар ҳисоблашларини

$$\chi^2_{кузат} = \sum \frac{n_i^2}{n'_i} - n$$

формула бўйича контрол қилиш учун хизмат қилади,

Текшириш: $\sum \frac{n_i^2}{n'_i} - n = 113{,}22 - 100 = 13{,}22 = \chi^2_{кузат}$.

Ҳисоблашлар тўғри бажарилган.

б) χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан (5-илова) $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ (s — интерваллар сони) озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$ критик нуқтасини топамиз.

23-жадвал

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	2,37	5,6169	0,5416	64	6,1716
3	15	21,11	−6,11	37,3321	1,7684	22[illegible]	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	−5,58	31,1364	1,4428	25[illegible]	11,8628
6	8	11,32	−3,32	11,0224	0,9737	6[illegible]	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	4[illegible]	10,7692
$\sum$	100	100			$\chi^2_{кузат} = 13{,}22$		113,22

$\chi^2_{кузат} > \chi^2_{кр}$ бўлгани учун X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этамиз; бошқача айтганда, эмпирик ва назарий частоталарнинг фарқи муҳим. Бу кузатиш маълумотлари бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотеза билан мувофиқ келмаслигини англатади.

558. Берилган 0,05 қийматдорлик даражасида X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани берилган эмпирик тақсимот билан мувофиқ келиш-келмаслигини Пирсон критерийсидан фойдаланиб текширинг.

а)

Интервал номери	Интервал чегараси		Частота	Интервал номери	Интервал чегараси		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	−20	−10	20	5	20	30	40
2	−10	0	47	6	30	40	16
3	0	10	80	7	40	50	8
4	10	20	89				$n = 300$

б)

Интервал номери	Интервал чегараси		Частота	Интервал номери	Интервал чегараси		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				$n = 100$

в)

Интервал номери	Интервал чегараси		Частота	Интервал номери	Интервал чегараси		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	6	16	8	6	56	66	8
2	16	26	7	7	66	76	6
3	26	36	16	8	76	86	7
4	36	46	35				
5	46	56	15				$n = 100$

г)

Интервал номери	Интервал чегараси		Частота	Интервал номери	Интервал чегараси		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				$n = 120$

Жавоби. а) Мувофиқ келади; $\overline{x^*} = 10,4$; $\sigma = 13,67$;, $k = 4$; $\chi^2_{кузат} = 5,4$; $\chi^2_{кр}(0,05.\ 4) = 9,5$.

б) К ў р с а т м а. Биринчи иккита ва сўнгги иккита интервалнинг кичик сондаги частоталарини ва шунингдек, бу интервалларнинг ўзларини ҳам бирлаштириб юборинг.

Жавоби. Мувофиқ келади; $\overline{x}^* = 12,04$; $\sigma^* = 4,261$; $k = 9 - 3 = 6$; $\chi^2_{кузат} = 1,3$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 6) = 12,6$;

в) мувофиқ келмайди; $\overline{x}^* = 42,5$; $\sigma^* = 17,17$; $k = 5$; $\chi^2_{кузат} = 14$, $\chi^2_{кр}(00,5;\ 5) = 11,1$;

г) мувофиқ келади; $\overline{x}^* = 27,54$; $\sigma^* = 10,44$; $k = 6$; $\chi^2_{кузат} = 5,4$ $\chi^2_{кр}(0,05;\ 6) = 12,6$.

13-§. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани график усулда текшириш. Тўғриланган диаграммалар методи

А. Группаланган маълумотлар

X бош тўпламдан олинган танланманинг эмпирик тақсимоти (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{k-1}, x_k) интерваллар ва уларга мос n(n_i—интервалга тушган варианталар сони) частоталар кетма-кетлиги кўринишида берилган бўлсин. X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани график усулда текшириш талаб қилинади.

Аввал, X тасодифий миқдорнинг p-квантили тушунчасини киритамиз. Агар p эҳтимол берилган бўлса, у ҳолда x нинг p-квантили (квантил) деб, $F(x)$ интеграл функция аргументининг шундай u_p қийматига айтиладики, бу қиймат учун $X < u_p$ ҳодисанинг эҳтимоли p нинг берилган қийматига тенг.

Масалан, X миқдор нормал тақсимланган ва $p = 0,975$ бўлса, у ҳолда $u_p = u_{0,975} = 1,96$. Бу эса $P(X < 1,96) = 0,975$ эканлигини билдиради.

Қуйидагини эслатиб ўтамиз: умумий ва нормаланган нормал тақсимотларнинг интеграл функциялари

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

тенглик* билан боғланганлиги учун

$$F(x_p) = F_0\left(\frac{x_p - a}{\sigma}\right)$$

ва демак,

$$u_p = \frac{x_p - a}{\sigma}.$$

1-қоида. *X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани интерваллар ва уларга мос частоталар кетма-кетлиги кўринишида берилган эмпирик тақсимот бўйича график усулда текшириш учун қуйидагиларни бажариш лозим:*

1. *24-ҳисоблаш жадвалини тузиш.*

Квантилларни махсус жадваллардан топиш қулай.**

24-жадвал

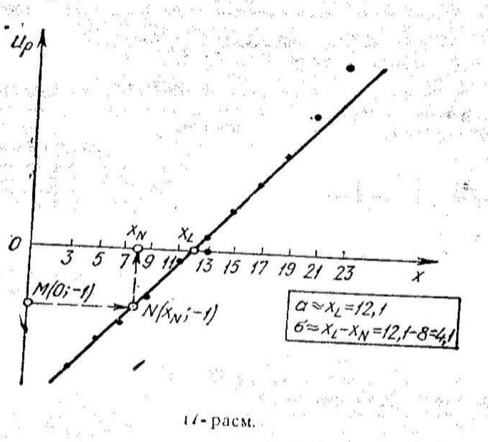
1	2	3	4	5	6	7
Интервал номери	Интервалнинг уңг учи	Частота	Жамланган частота	Нисбий жамланган частота	Нисбий жамланган частота %	Квантиллар
i	x_i	n_i	$\sum_{r=1}^{i} n_r$	$P_i = \frac{\sum n_r}{n}$	$P_i \cdot 100\ \%$	u_{p_i}

Ҳисоблаш жадвалининг 6-устунида нисбий жамланган частоталар 100 га кўпайтирилган, чунки Янко жадвалларида бу частоталар процентларда кўрсатилган.

2. *$(x; u)$ тўғри бурчакли координаталар системасида $(x_1; u_1)$, $(x_2; u_2)$, ... нуқталарни ясаш лозим (квантиллардаги p белги ёзишни соддалаштириш мақсадида тушириб қолдирилган). Агар бу нуқталар бирор тўғри чизиқ яқинида ётадиган бўлса, у ҳолда X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ; агар ясалган нуқталар тўғри чизиқдан узоқда бўлса, у ҳолда гипотеза рад қилинади.*

* Г м у р м а н В. Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. „Ўқитувчи", Т., 1977, XII боб, 2-§, 2-эслатмага қаранг.

**Я р о с л а в Я н к о. Математико-статистические таблицы. Госстатиздат, 1961, 2-жадвалга қаранг.



17-расм.

a математик кутилишнинг баҳоси сифатида ясалган тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси L нинг $x_L = 12,1$ абсциссасини қабул қиламиз.

σ ни баҳолаймиз, бунинг учун вертикал ўқнинг $M(0; -1)$ нуқтаси орқали $u = -1$ тўғри чизиқни ўтказамиз ва унинг ясалган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси N ни топамиз: N нуқтадан Ox ўққа

25-жадвал

Интервал номери	Интервал чегаралари		Частота	Интервал номери	Интервал чегаралари		Частота
i	x_{i-1}	x_i	n_i	i	x_{i-1}	x_i	n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				$n = 100$

26-жадвал

Интервал номери	Интервалнинг уңг учи	Частота	Жамланган частота	Нисбий жамланган частота	Нисбий жамланган частота, %	Квантиллар
i	x_i	n_i	$\sum_{r=1}^{i} n_r$	$P_i = \frac{\sum n_r}{n}$	$P_i \cdot 100$	u_{p_i}
1	3	2	2	0,02	2	−2,054
2	5	4	6	0,06	6	−1,555
3	7	6	12	0,12	12	−1,175
4	9	10	22	0,22	22	−0,772
5	11	18	40	0,40	40	−0,253
6	13	20	60	0,60	60	0,253
7	15	16	76	0,76	76	0,706
8	17	11	87	0,87	87	1,126
9	19	7	94	0,94	94	1,555
10	21	5	99	0,99	99	2,326
11	23	1	100	1,00	100	3,09

перпендикуляр туширамиз; бу перпендикуляр асосининг абсциссаси $x_N = 8$. Ўртача квадратик четланишнинг баҳоси сифатида абсциссалар айирмасини оламиз:

$$\sigma = x_L - x_N = 12,1 - 8 = 4,1.$$

Ҳосил қилинган баҳолар анча қўпол, албатта. Аслида эса $a = 12,04$, $\sigma = 4,261$.

571. X бош тўпламдан $n = 120$ ҳажмли танланма олинган бўлиб, у бир хил узунликдаги интерваллар ва уларга мос частоталар кетма-кетлиги кўринишида берилган (27-жадвал).

27-жадвал

Интервал номери	Интервал чегараси		Частота	Интервал номери	Интервал чегараси		Частота
i	x_{i-1}	x_i	n_i	i	x_{i-1}	x_i	n_i
1	5	10	7	6	30	45	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
							$n = 100$

1-эслатма. „Биринчи“ ва „охирги“ $(x_i; u_i)$ нуқталар $u=\frac{x-a}{\sigma}$ тўғри чизиқдан сезиларли даражада четланиши мумкин.

2-эслатма. Агар ясалган нуқталар тўғри чизиқнинг яқинида бўлиб қолса, у ҳолда нормал тақсимотнинг a ва σ параметрларини график усулда баҳолаш осон.

a математик кутилишнинг баҳоси сифатида ясалган тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $Z(x_L;0)$ нинг абсциссасини қабул қилиш мумкин.

σ ўртача квадратик четланишнинг баҳоси сифатида $Z(x_L;0)$ нуқта билан ясалган тўғри чизиқнинг $u=-1$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси $N(x_L, -1)$ нинг абсциссалари айирмаси $\sigma=x_L-x_N$ ни қабул қилиш мумкин (16-расм).

3-эслатма. Эҳтимоллик қоғозига эга бўлинганда квантилларни излашга ҳожат қолмайди; тегишли ўққа жамланган нисбий частоталар бевосита қўйилаверади.

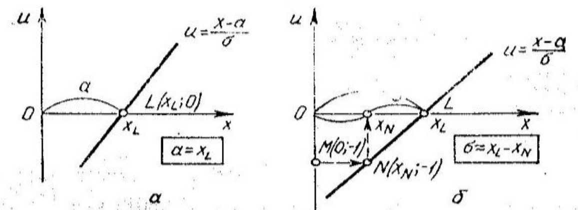
569. Айтайлик, тўғриланган диаграммалар методи X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани тасдиқлаётган бўлсин, яъни $(x_i; u_i)$ нуқталар

$$u=\frac{x-a}{\sigma} \qquad (*)$$

тўғри чизиқ яқинида бўлсин.

а) Нима учун нормал тақсимотнинг a математик кутилишининг баҳоси сифатида (*) тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси L нинг x_L абсциссасини олиш мумкин (16-$а$ расм)?

б) Нима учун нормал тақсимотнинг σ ўртача квадратик четланишининг баҳоси сифатида абсциссалар айирмаси x_L-x_N ни қабул қилиш мумкин (16-$б$ расм)?



16-расм.

Ечилиши. а) (*) тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси L да ордината $u=0$, абсцисса $x=x_L$ (16-$а$ расм). $u=0$, $x=x_L$ ни (*) тенгламага қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$0=\frac{x_L-a}{\sigma}.$$

Бу ердан $a=x_L$.

б) N орқали (*) тўғри чизиқнинг шундай нуқтасини белгилаймизки, унинг ординатаси $u=-1$ бўлсин; бу нуқтанинг абсциссасини x_N орқали белгилаймиз. N нуқтанинг координаталарини (*) тенгламага қўямиз:

$$-1=\frac{x_N-a}{\sigma}.$$

Бу ердан

$$\sigma=a-x_N.$$

$a=x_L$ эканлигини эътиборга олиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sigma=x_L-x_N.$$

570. X бош тўпламдан $n=100$ ҳажмли танланма олинган бўлиб, у бир хил узунликдаги интерваллар кетма-кетлиги ва уларга мос n_i частоталар (n_i i-интервалга тушган варианталар сони) кўринишида берилган. Эмпирик тақсимот 25-жадвалда берилган.

Қуйидагилар талаб қилинади: а) X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани тўғриланган диаграммалар методи билан текшириш; б) X нинг математик кутилишини ва ўртача квадратик четланишини график усулда баҳолаш.

Ечилиши. а) 1. 26-ҳисоблаш жадвалини тузамиз. 7-устундаги квантиллар Я. Янконинг китобида келтирилган 2-жадвалдан олинган.

2. Тўғри бурчакли координаталар системасида $(x_i; u_{pi})$ нуқталарни ясаймиз (17-расм). Ясалган нуқталар тўғри чизиққа яқин жойлашган, шунинг учун x нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, танланмадаги маълумотлар бу гипотезага мувофиқ келади.

б) Тахмин қилинаётган нормал тақсимотнинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланишининг баҳоларини график усулда топамиз.

Қуйидагилар талаб қилинади: а) X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани тўғриланган диаграммалар методи билан текшириш; б) X нинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланишини график усулда баҳолаш.

Кўрсатма. Қуйидаги квантиллар жадвалидан фойдаланинг:

нисбий жамланган частота, %	5,8	12,5	25,0	40,0	59,1	75,0	86,6	95	100
квантиллар	−1,57	−1,15	−0,67	−0,25	0,23	0,67	1,11	1,6	3,00

Жавоби а) X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотеза танланма билан мувофиқ келади, б) $a=27,5$; $\sigma=10,4$.

572. X бош тўпламдан 28-жадвал билан берилган $n=100$ ҳажмли танланма олинган.

28-жадвал

Интервал номери	Интервал чегараси		Частота	Интервал номери	Интервал чегараси		Частота
i	x_{i-1}	x_i	n_i	i	x_{i-1}	x_i	n_i
1	6	16	8	5	46	56	35
2	16	26	16	6	56	66	6
3	26	36	7	7	66	76	5
4	36	46	15	8	76	86	8
							$n=100$

X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани тўғриланган диаграммалар методи билан текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. Қуйидаги квантиллар жадвалидан фойдаланинг:

нисбий жамланган частота, %	8	24	31	46	81	87	92	100
квантиллар	−1,405	−0,706	−0,496	−0,100	0,878	1,126	1,405	3,09

Жавоби. X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотеза танланмага мувофиқ келмайди.

Б Интерваллар бўйича группаланмаган маълумотлар

Айтайлик, танланманинг эмпирик тақсимоти ортиб бориш тартибида жойлашган x_i варианталар кетма-кетлиги кўринишида, яъни вариацион қатор ва уларга мос n_i частоталар кўринишида берилган бўлсин. X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани график усулда текшириш талаб қилинади.

2-қоида. X бош тўпламдан олинган ва интерваллар бўйича группаланмаган n ҳажмли танланма асосида X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун қуйидаги ишларни бажариш лозим:

1. 29-ҳисоблаш жадвалини тузиш. 4-устунни тўлдиришда частоталар йиғиндисидан 1/2 ни айириш қабул қилинганлигини аввалдан кўрсатиб ўтамиз 7-устунни тўлдириш учун керакли квантилларни жадвалдан топилади.*

29-жадвал

1	2	3	4	5	6	7
Варианталар номери	Варианта	Частота	Жамланган частота	Нисбий жамланган частота	Нисбий жамланган частота, %	Квантиллар
i	x_i	n_i	$N_i=\sum_{r=1}^{i} n_r-\frac{1}{2}$	$F^*(x_i)=\frac{N_i}{n}$	$P_i=F^*(x_i)\times 100$	u_{p_i}

2. Тўғри бурчакли координаталар системасида $(x_1; u_1)$, $(x_2; u_2)$, ..., $(x_k; u_k)$ нуқталарни (u олдидаги p белги ёзувни соддалаштириш мақсадида тушириб қолдирилган) ясаш керак. Агар бу нуқталар бирор тўғри чизиққа яқин ўтган бўлса, (X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотеза ўринли бўлган ҳолда бу тўғри чизиқнинг тенгламаси $u=\frac{x-\bar{x}}{\sigma_T}$) X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ; акс ҳолда гипотеза рад қилинади.

4-эслатма. Интерваллар бўйича группаланган танланмалар учун келтирилган 1—3-эслатмалар бу ерда ҳам ўз кучида қолади.

573. X бош тўпламдан интерваллар бўйича группаланмаган $n=50$ ҳажмли танланма олинган (биринчи сатрда варианталар, иккинчи сатрда эса мос частоталар кўрсатилган):

x_i	1,40	1,52	1,63	1,69	1,73	1,78	1,89	1,92	1,95
n_i	1	1	1	1	2	1	1	1	1
x_i	1,98	1,99	2,03	2,07	2,12	2,16	2,20	2,23	2,26	2,31
n_i	1	1	2	1	3	2	1	1	1	3
x_i	2,36	2,40	2,44	2,47	2,50	2,52	2,55	2,60	2,64
n_i	3	3	1	1	1	1	1	1	3
x_i	2,71	2,74	2,78	2,86	2,93	3,02	3,30		
n_i	1	1	2	1	2	1	1		

* Ярослав Янко. Математико-статистические таблицы Госстатиздат, 1961, 2-жадвалга қаранг.

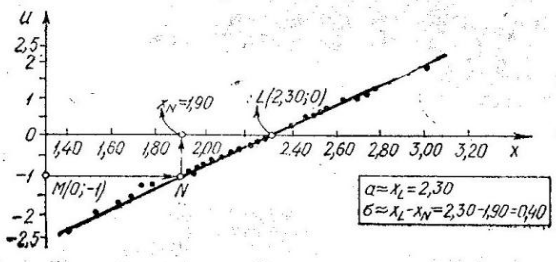
Қуйидагилар талаб қилинади: а) X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани тўғриланган диаграммалар методи билан текширинг; б) X нинг математик кутилишини ва ўртача квадратик четланишини график усулда баҳолаш.

Ечилиши. 1. 30-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

30-жадвал

1	2	3	4	5	6	7
Варианта номери	Варианта	Частота	Жамланган частота минус $\frac{1}{2}$	Нисбий жамланган частота	Нисбий жамланган частота %	Квантиллар
i	x_i	n_i	$N_i=\sum_{r=1}^{i} n_r-\frac{1}{2}$	$F^*(x_i)=\frac{N_i}{n}$	$P_i=F^*(x_i)\times 100$	u_{p_i}
1	1,40	1	0,5	0,01	1	−2,326
2	1,52	1	1,5	0,03	3	−1,881
3	1,63	1	2,5	0,05	5	−1,645
4	1,69	1	3,5	0,07	7	−1,476
5−6	1,73	2	5,5	0,11	11	−1,227
7	1,78	1	6,5	0,13	13	−1,126
8	1,89	1	7,5	0,15	15	−1,036
9	1,92	1	8,5	0,17	17	−0,954
10	1,95	1	9,5	0,19	19	−0,878
11	1,98	1	10,5	0,21	21	−0,806
12	1,99	1	11,5	0,23	23	−0,739
13−14	2,03	2	13,5	0,27	27	−0,613
15	2,07	1	14,5	0,29	29	−0,553
16−18	2,12	3	17,5	0,35	35	−0,385
19−20	2,16	2	19,5	0,39	39	−0,279
21	2,20	1	20,5	0,41	41	−0,228
22	2,23	1	21,5	0,43	43	−0,176
23	2,26	1	22,5	0,45	45	−0,126
24−26	2,31	3	25,5	0,51	51	0,025
27−29	2,36	3	28,5	0,57	57	0,176
30−32	2,40	3	31,5	0,63	63	0,332
33	2,44	1	32,5	0,65	65	0,385
34	2,47	1	33,5	0,67	67	0,440
35	2,50	1	34,5	0,69	69	0,496
36	2,52	1	35,5	0,71	71	0,553
37	2,55	1	36,5	0,73	73	0,613
38	2,60	1	37,5	0,75	75	0,674
39−41	2,64	3	40,5	0,81	81	0,878
42	2,71	1	41,5	0,83	83	0,954
43	2,74	1	42,5	0,85	85	1,036
44−45	2,78	2	44,5	0,89	89	1,227
46	2,85	1	45,5	0,91	91	1,341
47−48	2,93	2	47,5	0,95	95	1,645
49	3,02	1	48,5	0,97	97	1,881
50	3,30	1	49,5	0,99	99	2,326

2. Тўғри бурчакли координаталар системасида (x_i, u_i) нуқталарини ясаймиз (18-расм). Ясалган нуқталар тўғри чизиққа яқин ётибди, шу сабабли X нинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ; танланма маълумотлари бу гипотезага мувофиқ келади.



18-расм.

б) тахмин қилинаётган нормал тақсимотнинг математик кутилишини ва ўртача квадратик четланишини 18-расмдан фойдаланиб, график усулда топамиз.

a математик кутилишнинг баҳоси сифатида ясалган тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси L нинг абсциссаси $x_L = 2{,}30$ ни оламиз.

σ ни баҳолаймиз, бунинг учун вертикал ўқнинг M (0; −1) нуқтасидан $u = -1$ тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг ясалган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси N ни топамиз; N нуқтадан Ox ўққа перпендикуляр туширамиз; бу перпендикуляр асосининг абсциссаси $x_N = 1{,}90$. σ ўртача квадратик четланишнинг баҳоси сифатида абсциссалар айирмасини оламиз:

$$\sigma = x_L - x_N = 2{,}30 - 1{,}90 = 0{,}40.$$

574. X бош тўпламдан $n = 50$ ҳажмли танланма олинган. Қуйидаги жадваллар тузилган (биринчи сатрда вариантлар, иккинчи сатрда эса тегишли частоталар кўрсатилган):

576. 200 элементнинг ишлаш давомийлигини синаш натижасида 31-жадвалда келтирилган эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи устунда вақт интерваллари соат ҳисобида, иккинчи устунда частоталар, яъни мос интервал орасидаги вақт давомида ишлаган элементлар сони кўрсатилган).

31-жадвал

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0−5	133	15−20	4
5−10	45	20−25	2
10−15	15	25−30	1

0,05 қийматдорлик даражасида элементларнинг ишлаш вақти кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. 1. Барча элементларнинг ўртача ишлаш вақтини топамиз (битта элементнинг ўртача ишлаш вақти сифатида бу элемент тегишли бўлган интервалнинг ўртасини қабул қиламиз);

$$\bar{x}_т = \frac{133\cdot 2{,}5+45\cdot 7{,}5+15\cdot 12{,}5+4\cdot 17{,}5+2\cdot 22{,}5+1\cdot 27{,}5}{200} = \frac{1000}{200} = 5.$$

2. Тахмин қилинаётган кўрсаткичли тақсимот параметрининг баҳосини топамиз:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}_т} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Шундай қилиб, тахмин қилинаётган кўрсаткичли тақсимотнинг дифференциал функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$f(x) = 0{,}2\,e^{-0{,}2x} \qquad (x > 0).$$

3. X нинг интервалларнинг ҳар бирига тушиш эҳтимолини ушбу формула бўйича топамиз:

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}.$$

Масалан, биринчи интервал учун

$$P_1 = P(0 < X < 5) = e^{-0{,}2\cdot 0} - e^{-0{,}2\cdot 5} = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321.$$

X нинг қолган интервалларга тушиш эҳтимолини ҳам шунга ўхшаш топамиз:

$P_2 = 0{,}2326$; $P_3 = 0{,}0855$; $P_4 = 0{,}0315$; $P_5 = 0{,}0116$; $P_6 = 0{,}0043$.

4. Назарий частоталарни ушбу формула бўйича топамиз:

$$n'_i = n \cdot P_i = 200 \cdot P_i,$$

бу ерда P_i—X нинг i-интервалга тушиш эҳтимоли.

Масалан, биринчи интервал учун:

$$n'_1 = 200 \cdot P_1 = 200 \cdot 0{,}6321 = 126{,}42.$$

Қолган назарий частоталарни шунга ўхшаш ҳисоблаймиз:

$n'_2 = 46{,}52$; $n'_3 = 17{,}10$; $n'_4 = 6{,}30$; $n'_5 = 2{,}32$; $n'_6 = 0{,}86$.

5. Пирсон критерийси ёрдамида эмпирик ва назарий частоталарни таққослаймиз. Бунинг учун 32-ҳисоблаш жадвалини тузамиз, бунда кичик сондаги частоталарни ($4+2+1=7$) ва уларга мос назарий частоталарни қўшиб юборамиз ($6{,}30 + 2{,}32 + 0{,}86 = 9{,}48$).

32-жадвал

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	133	126,42	6,58	43,2964	0,3425
2	45	46,52	−1,52	2,3104	0,0497
3	15	17,10	−2,10	4,4100	0,2579
4	7	9,48	−2,48	6,1504	0,6488
Σ	$n=200$				$\chi^2_{кузат} = 1{,}30$

Эслатма. Кичик сондаги частоталарни бирлаштирилган ҳолда ҳисоблашларни соддалаштириш учун бу кичик сондаги частоталарни ўз ичига олган интервалларнинг ўзларини ҳам битта интервалга бирлаштириш мақсадга мувофиқдир. Масалан, мазкур масалада охирги учта интервални бирлаштириб, битта (15; 30) интервални ҳосил қиламиз. Бу ҳолда назарий частота қуйидагича:

$$n'_4 = n \cdot P(15 < X < 30) = 200 \cdot 0{,}0473 = 9{,}46.$$

x_i	−20,0	−17,0	−14,1	−11,5	−10,5
n_i	1	1	1	1	1

x_i	−9,0	−8,0	−6,5	−5,5;
n_i	1	1	1	1;

x_i	−4,0	−3,0	−1,5	−1,0	0,0	0,5;
n_i	1	1	1	1	1	2;

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,5	4,0	4,5;
n_i	1	1	2	1	1	2	1;

x_i	5,0	6,0	6,5	7,0	7,5	8,5	9,5	10,0	10,5	11,0	12,0	12,5;
n_i	2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1;

x_i	13,0	14,0	14,5	17,0	18,0	19,0	19,5	21,0	23,5
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1.

Қуйидагилар талаб қилинади: а) X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани тўғриланган диаграммалар методи билан текшириш; б) X нинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланишини график усулда баҳолаш.

Кўрсатма. Қуйидаги квантиллар жадвалидан фойдаланинг (биринчи сатрда нисбий частота минус 1/2 % ҳисобида, иккинчи сатрда эса тегишли квантиллар кўрсатилган):

1	3	5	7	9	11	13	15
−2,326	−1,881	−1,645	−1,476	−1,341	−1,227	−1,126	−1,036
17	19	21	23	25	27	31	33
−0,954	−0,878	−0,806	−0,739	−0,674	−0,613	−0,496	−0,440
35	39	41	43	47	49	53	55
−0,885	−0,279	−0,228	−0,176	−0,075	−0,025	−0,075	0,126

57	61	65	69	71	73	75	77	79	
0,176	0,279	0,385	0,496	0,553	0,613	0,674	0,739	0,806	
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
0,878	0,954	1,036	1,126	1,227	1,341	1,476	1,645	1,881	2,326

Жавоби. а) X бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ; б) $a = 4,16$; $\sigma = 9,8$.

14-§. Бош тўпламнинг кўрсаткичли тақсимланганлиги ҳақидаги гипотазани текшириш

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг эмпирик тақсимоти $x_i — x_{i+1}$ интерваллар ва уларга мос n_i частоталар кетма-кетлиги кўринишида берилган, шу билан бирга $\sum n_i = n$ (n — танланма ҳажми). Пир-

сон критерийсидан фойдаланиб, x тасодифий миқдорнинг кўрсаткичли тақсимотга эгалиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Қоида. *α қийматдорлик даражасида узлуксиз тасодифий миқдорнинг кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун қуйидаги ишларни бажариш лозим:*

1. *Берилган эмпирик тақсимот бўйича $\overline{x}_т$ танланма ўртача қийматни топиш. Бунинг учун i-интервалнинг „вакили" сифатида унинг ўртаси $x_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ни олиб, тенг узоқликдаги варианталар ва уларга мос частоталар кетма-кетлигини ҳосил қилинади.*

2. *Кўрсаткичли тақсимот λ параметрининг баҳоси сифатида танланма ўртача қийматга тескари*

$$\lambda^* = \frac{1}{\overline{x}_т}$$

катталикни қабул қилиш:

3. *X нинг (x_i, x_{i+1}) қисмий интервалларга тушиш эҳтимолини*

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$$

формула бўйича топиш.

4. *Ушбу*

$$n_i' = n \cdot P_i$$

назарий частоталарни ҳисоблаш, бу ерда $n = \sum n_i$ — танланма ҳажми.

5. *Эмпирик ва нарий частоталарни Пирсон критерийси ёрдамида таққослаш, бунда озодлик даражалари сони учун $k = s - 2$ олинади, s — танланманинг дастлабки интерваллари сони; агар кичик сонли частоталарни, ва демак, интервалларнинг ўзларини ҳам группаланган бўлса, у ҳолда s — группалашдан кейин қолган интерваллар сони.*

575. Нима учун бош тўпламнинг кўрсаткичли тақсимоти ҳақидаги гипотезани Пирсон критерийси бўйича текширишда озодлик даражалари сони $k = s - 2$ тенглик билан аниқланади, бу ерда s — танланманинг интерваллари сони?

Ечилиши. Пирсон критерийсидан фойдаланишда озодлик даражалари сони $k = s - 1 - r$ дир, бу ерда r — танланма бўйича баҳоланаётган параметрлар сони. Кўрсаткичли тақсимот битта λ параметр билан аниқланади. Бу параметр танланма бўйича аниқланаётгани учун $r = 1$, ва демак, озодлик даражалари сони. $k = s - 1 - 1 = s - 2$.

Жадвалда эса охирги учта интервалга мос назарий частоталар йиғиндиси 9,48 келтирилган. натижалардаги бироз фарқ сонларнинг яхлитланганлиги билан тушунтирилади.

32-жадвалдан $\chi^2_{кузат} = 1,30$ ни топамиз. χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан (5-илова) $\alpha = 0,05$ қийматдорлик даражаси ва $k = s - 2 = 4 - 2 = 2$ озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{кр}(0,05; 2)$ критик нуқтасини топамиз.

$\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлгани учун x нинг кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, кузатиш маълумотлари бу гипотеза билан мувофиқ келади.

577. 450 лампани синаш натижасида уларнинг ёниш давомийлигининг эмпирик тақсимоти ҳосил қилинган бўлиб, у 33-жадвалда келтирилган (биринчи устунда интерваллар соат ҳисобида, иккинчи устунда эса n_i частоталар, яъни ёниш вақти тегишли интервал орасида бўлган лампалар сони кўрсатилган).

33-жадвал

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0 — 400	121	1600 — 2000	45
400 — 800	95	2000 — 2400	36
800 — 1200	76	2400 — 2800	21
1200 — 1600	56		$n = 450$

Лампаларнинг ёниш вақти кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани 0,01 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $k = 5$; $\overline{x}_т = 1000$; $\lambda = 0,001$; назарий частоталар: 148,36; 99,45; 66,64; 44,68; 29,97; 20,07; 13,46;
$\chi^2_{кузат} = 36,43$; $\chi^2_{кр}(0,01; 5) = 15,1$. Кўрсаткичли тақсимот ҳақидаги гипотеза рад этилади.

578. 1000 та элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтини синаш натижасида 34-жадвалда келтирилган эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи устунда вақт интерваллари соат ҳисобида, иккинчи устунда эса n_i

частота, яъни i-интервалда бузилган элементлар сони кўрсатилган).

34-жадвал

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0 — 10	365	40 — 50	70
10 — 20	245	50 — 60	45
20 — 30	150	60 — 70	25
30 — 40	100		$n = 1000$

Элементларнинг бузилмасдан ишлаш вақти кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани 0,01 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $k = 5$; $\overline{x}_T = 20$; $\lambda = 0,05$; назарий частоталар: 393,47; 238,65; 144,75; 87,79; 53,26; 32,29; 19,59. $\chi^2_{кузат} = 11,10$; $\chi^2_{кр}(0,01, 5) = 15,1$. Элементларнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг кўрсаткичли тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

579. 800 томошабиннинг кўргазмага келган вақтларини қайд этиш (саноқ боши сифатида кўргазманинг очилиш вақти қабул қилинган) натижасида 35-жадвалда келтирилган эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи устунда вақт интерваллари, иккинчи устунда эса n_i частоталар, яъни тегишли интервал орасида келган томошабинлар сони кўрсатилган).

35-жадвал

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0 — 1	259	4 — 5	70
1 — 2	167	5 — 6	47
2 — 3	109	6 — 7	40
3 — 4	74	7 — 8	34
			800

Томошабинларнинг кўргазмага келиш вақтининг кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган ҳақидаги гипотезани 0,01 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $k=6$; $\overline{x}_T=2{,}5$; $\lambda=0{,}4$; назарий частоталар: 191,76; 176,80; 118,48; 79,44; 53,28; 35,68; 23,92; 16,00; $\chi^2_{кузат}=65{,}1$; $\chi^2_{кр}(0{,}01;$ $6)=16{,}8$. Томошабинларнинг кўргазмага келиш вақтининг кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотеза рад қилинади.

15-§. Бош тўпламнинг биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш

n та тажриба ўтказилган. Ҳар бир тажриба N та синовдан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил. A ҳодисанинг ҳар бир тажрибада рўй бериш сони қайд этилади. Натижада X тасодифий миқдор — A ҳодисанинг рўй беришлари сонининг ушбу тақсимоти ҳосил қилинган (биринчи сатрда A ҳодисанинг битта тажрибада рўй бериш сони x_i; иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни ҳодиса x_i марта рўй берган тажрибалар сони кўрсатилган):

x_i	0	1	2 . . .	N
n_i	n_0	n_1	n_2 . . .	n_N

Пирсон критерийсидан фойдаланиб, X дискрет тасодифий миқдорнинг биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Қоида. *X дискрет тасодифий миқдорнинг (A ҳодисанинг рўй бериш сони) биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани* α қийматдорлик даражасида текшириш учун қуйидаги ишларни бажариш лозим:

1. *Бернулли формуласидан фойдаланиб, N та синовда роса i та A ҳодиса рўй бериш эҳтимоли P_i ни топиш ($i=0, 1, 2, \ldots s$, бу ерда s—битта тажрибада A ҳодиса рўй беришининг кузатилган максимал сони, яъни ($s < N$).*

2. *Ушбу назарий частоталарни топиш:*

$$n'_i = n \cdot P_i,$$

бу ерда n — тажрибалар сони.

3. *Эмпирик ва назарий частоталарни Пирсон критерийси бўйича таққослаш, бунда озодлик даражалари сони $k=s$ деб олинади (бу ерда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p берилган, яъни у танланма бўйича топилмаган ва кичик сондаги частоталар бирлаштирилмаган деб фараз қилинади).*

Агар p эҳтимол танланма бўйича баҳоланган бўлса, у ҳолда $k=s-1$. Агар, бундан ташқари, кичик сондаги частоталарни бирлаштирилган бўлса, у ҳолда s — частоталарни бирлаштирилгандан кейин танланмада қолган группалар сони.

580. $n=100$ та тажриба ўтказилган. Ҳар бир тажриба $N=10$ та синовдан иборат бўлиб, уларнинг ҳар

бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p=0{,}3$ га тенг эди. Натижада қуйидаги эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи сатрда A ҳодисанинг битта тажрибада рўй бериш сони x_i, иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни A ҳодиса x_i марта рўй берган тажрибалар сони кўрсатилган):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

X дискрет тасодифий миқдорнинг (A ҳодисанинг рўй бериш сони) биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани 0,05 қийматдорлик даражасида такшириш талаб қилинади.

Ечилиши. 1. Қуйидаги

$$P_i = P_N(i) = C_N^i p^i q^{N-i}$$

Бернулли формуласидан фойдаланиб, A ҳодисанинг $N=10$ синовда роса i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) марта рўй бериш эҳтимоли P_i ни топамиз:

$p=0{,}3$, $q=1-0{,}3=0{,}7$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$P_0 = P_{10}(0) = 0{,}7^{10} = 0{,}0282;$$
$$P_1 = P_{10}(1) = 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 = 0{,}1211.$$

Шунга ўхшаш қуйидагиларни ҳисоблаймиз: $P_2=0{,}2335$; $P_3=0{,}2668$; $P_4=0{,}2001$; $P_5=0{,}1029$.

2. $n'_i=n \cdot P_i$ назарий частоталарни топамиз. $n=100$ ни эътиборга олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$n'_0=2{,}82;\ n'_1=12{,}11;\ n'_2=23{,}35;\ n'_3=26{,}68;$$
$$n'_4=20{,}01;\ n'_5=10{,}29.$$

3. Эмпирик ва назарий частоталарни Пирсон критерийсидан фойдаланиб таққослаймиз. Бунинг учун 36-ҳисоблаш жадвалини тузамиз. $n_0=2$ частота кичик бўлгани учун (бешдан кичик) уни $n_1=10$ частота билан бирлаштирамиз ва жадвалга $2+10=12$ ни ёзамиз, бирлаштирилган 12 частотага мос назарий частота сифатида тегишли назарий частоталар йиғиндиси $n_0+n_1=2{,}82+12{,}11=14{,}93$ ни ёзамиз.

Жавоби. $p^*=0{,}2$; $k=2$; назарий частоталар: 65,54; 81,92; 40,96; 10,24; 1,28; 0,06; $\chi^2_{кузат}=4{,}65$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2)=6{,}0$. X нинг биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

16-§ Бош тўпламнинг текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг эмпирик тақсимоти s та $x_{i-1}-x_i$ интерваллар ва уларга мос n_i частоталар кетма-кетлиги кўринишида берилган, бунда $\Sigma n_i=n$ (танланма ҳажми). Пирсон критерийсидан фойдаланиб X тасодифий миқдорнинг текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Қоида. *X тасодифий миқдорнинг текис тақсимланганлиги, яъни*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & (a,\ b)\ \textit{интервалда}, \\ 0, & (a,\ b)\ \textit{интервалдан ташқарида} \end{cases}$$

қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун қуйидагиларни бажариш лозим:

1. *X нинг мумкин бўлган қийматлари кузатилган интервалнинг чегаралари бўлмиш a ва b параметрларни ушбу формулалар бўйича баҳолаш (a^* ва b^* орқали параметрларнинг баҳолари белгиланган):*

$$a^*=\overline{x}_T-\sqrt{3}\sigma_T,\ b^*=\overline{x}_T+\sqrt{3}\sigma_T.$$

2. *Тахмин қилинаётган тақсимотнинг*

$$f(x)=\frac{1}{b^*-a^*}$$

дифференциал функциясини топиш:

3. *Назарий частоталарни топиш:*

$$n'_1=nP_1=n\cdot[f(x)\cdot(x_1-a^*)]=n\cdot\frac{1}{b^*-a^*}(x_1-a^*);$$

$$n'_2=n'_3=\ldots=n'_{s-1}=n\cdot\frac{1}{b^*-a^*}(x_i-x_{i-1}),\ (i=2, 3, \ldots, s-1);$$

$$n'_s=n\cdot\frac{1}{b^*-a^*}(b^*-x_{s-1}).$$

4. *Пирсон критерийсидан фойдаланиб эмпирик ва назарий частоталарни баҳолаш, бунда озодлик даражалари сони $k=s-3$ деб олинади, s—танланма бўлинган интерваллар сони.*

584. Текис тақсимланган X тасодифий миқдорнинг a ва b параметрлари нима учун

$$a^*=\overline{x}_T-\sqrt{3}\sigma_T,\ b^*=\overline{x}_T+\sqrt{3}\sigma_T$$

формулалар бўйича баҳоланади?

Ечилиши. Маълумки, X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланишининг баҳолари сифатида мос равишда $\overline{x}_T$ танланма ўртача қийматини ва σ_T танланма ўртача квадратик четланишини қабул қилиш мумкин.

Шунингдек, текис тақсимот учун математик кутилиш ва ўртача квадратик четланиш мос равишда қуйидагига тенглиги ҳам маълум (VI боб, 313-315- масалаларга қаранг):

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Шу сабабли текис тақсимот параметрларининг баҳолари учун ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{b^*-a^*}{2}=\overline{x}_T, \\ \dfrac{b^*-a^*}{2\sqrt{3}}=\sigma_T, \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} b^*+a^*=2\overline{x}_T, \\ b^*-a^*=2\sqrt{3}\sigma_T. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a^*=\overline{x}_T-\sqrt{3}\sigma_T,\ b^*=\overline{x}_T+\sqrt{3}\sigma_T.$$

585. X бош тўпламнинг текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани Пирсон критерийсидан фойдаланиб баҳолашда нима учун озодлик даражалари сони $k=s-3$ тенгликдан аниқланади, бу ерда s—танланманинг интерваллари сони?

Ечилиши. Пирсон критерийсидан фойдаланишда озодлик даражалари сони $k=s-1-r$ қилиб олинади, бу ерда r—танланма бўйича аниқланадиган параметрлар сони. Текис тақсимот иккита a ва b параметрлар билан аниқланади. Бу иккита параметр танланма бўйича аниқ-

36-жадвал

i	n_i	n_i'	n_i-n_i'	$(n_i-n_i')^2$	$\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$
1	12	14,93	—2,93	8,5849	0,5750
2	27	23,35	3,65	13,3225	0,5706
3	32	26,68	5,32	28,3024	1,0608
4	23	20,01	2,99	8,9401	0,4468
5	6	10,29	—4,29	18,4041	1,7886
Σ	$n=100$				$\chi^2_{кузат}=4,44$

36-жадвалдан $\chi^2_{кузат}=4,44$ ни топамиз.

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалида $\alpha=0,05$ қийматдорлик даражаси ва $k=5-1=4$ озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{кр.}(0,05;\ 4)=9,5$ критик нуқтасини топамиз.

$\chi^2_{кузат}<\chi^2_{кр}$ бўлгани учун X нинг биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

581. Тўртта тангани бир йўла ташлашдан иборат тажриба 100 марта такрорланди. X дискрет тасодифий миқдор – тушган „герблар“ сонининг эмпирик тақсимоти қуйидагича бўлиб чиқди (биринчи сатрда битта ташлашда тушган „герблар“ сони x_i, иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни x_i та „герб“ тушган ташлашлар сони белгиланган):

$$\begin{array}{cccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ n_i & 8 & 20 & 42 & 22 & 8 \end{array}$$

X тасодифий миқдорнинг биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани 0,05 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. „Герб“ тушиш эҳтимолини $p=0,5$ деб қабул қилинг.

Жавоби. $k=4$; назарий частоталар: 6,25; 25,00; 37,50; 25,00, 6,25; $\chi^2_{кузат}=2,88$; $\chi^2_{кр}(0,05;\ 4)=9,5$. X нинг биномиал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

582. Техник контрол бўлими ҳар бирида $N=10$ тадан буюм бўлган $n=100$ та партияни текшириб, X дискрет тасодифий миқдор – ностандарт буюмлар сонининг қуйидаги эмпирик тақсимотини ҳосил қилди (биринчи сатрда битта партиядаги ностандарт буюмлар сони x_i, иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни орасида x_i та ностандарт буюм бўлган партиялар сони кўрсатилган):

$$\begin{array}{ccccccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ n_i & 2 & 3 & 10 & 22 & 26 & 20 & 12 & 5 \end{array}$$

X тасодифий миқдорнинг биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани 0,01 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.

Кўрсатмалар. 1. Аввал ностандарт буюмлар чиқиш нисбий частотасини топинг ва уни таваккалига олинган буюмнинг ностандарт бўлиш эҳтимолининг баҳоси p^* сифатида қабул қилинг.

2. Эмпирик ва назарий частоталарни Пирсон критерийси ёрдамида таққослаш учун эмпирик частоталар $(2+3=5)$ ни ва уларга мос назарий частоталар $(0,60+4,03=4,63)$ ни бирлаштириш лозим; частоталарни бирлаштирилгандан сўнг танланманинг группалари сони $s=7$ бўлишини эътиборга олинг.

3. Битта параметр (p эҳтимол) танланма бўйича баҳоланган эди, шу сабабли озодлик даражалари сонини аниқлашда s дан бирни эмас, балки иккини айириш лозим: $s-2=7-2=5$.

Жавоби. $p^*=0,4$; $k=5$; назарий частоталар: 0,60; 4,03; 12,09, 21,50; 25,08; 20,07, 11,15; 4,25. $\chi^2_{кузат}=0,63$; $\chi^2_{кр}(0,01;\ 5)=15,1$. X нинг биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

583. Кутубхонада ҳар бирида 5 тадан китоб бўлган 200 та танланма олинган. Йиртилган китоблар сони қайд этилган. Натижада қуйидаги эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи сатрда битта танланмадаги йиртилган китоблар сони x_i; иккинчи сатрда n_i частота, яъни x_i та йиртилган китобни ўз ичига олган танланмалар сони кўрсатилган):

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ n_i & 72 & 77 & 34 & 14 & 2 & 1 \end{array}$$

Пирсон критерийсидан фойдаланиб, X дискрет тасодифий миқдорнинг (йиртилган китоблар сони) биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани 0,05 қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. 582-масалага доир кўрсатмаларни эътиборга олинг.

ланганлиги учун $r=2$, ва демак, озодлик даражалари сони $k=s-1-2=s-3$.

586. $n=200$ та синов ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса вақтнинг турли моментларида рўй берган. Натижада 37-жадвалда келтирилган эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи устунда вақт интерваллари минут ҳисобида, иккинчи устунда эса тегишли частоталар, яъни A ҳодисанинг интервалда рўй бериш сони кўрсатилган); 0,05 қийматдорлик даражасида ҳодисаларнинг рўй бериш вақти текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

37-жадвал

Интервал $x_{i-1}-x_i$	Частота n_i	Интервал $x_{i-1}-x_i$	Частота n_i
2—4	21	12 - 14	14
4—6	16	14—16	21
6—8	15	16 - 18	22
8—10	26	18 - 20	18
10—12	22	20—22	25

Ечилиши. 1. Текис тақсимот a ва b параметрларининг баҳоларини ушбу формулалар бўйича топамиз:

$$a^*=\overline{x}_т-\sqrt{3}\,\sigma_т,\quad b^*=\overline{x}_т+\sqrt{3}\,\sigma_т.$$

$\overline{x}_т$ танланма ўртача қиймат ва $\sigma_т$ танланма ўртача квадратик четланишнинг баҳоларини ҳисоблаш учун варианталар (X нинг кузатилаётган қийматлари) сифатида интервалларнинг ўрталари x^*_i ларни қабул қиламиз. Натижада тенг узоқлашган варианталарнинг ушбу эмпирик тақсимотини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_i^* & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 \\ n_i & 21 & 16 & 15 & 26 & 22 & 14 & 21 & 22 & 18 & 25 \end{array}$$

Масалан, кўпайтмалар методидан фойдаланиб, $\overline{x}_т=12,21$, $\sigma_т=5,81$ ни топамиз. Демак,

$$a^*=12,21-1,73\cdot5,81=2,16,$$
$$b=12,21+1,73\cdot5,81=22,26.$$

2. Тахмин қилинаётган текис тақсимотнинг дифференциал функциясини топамиз:

$$f(x)=\frac{1}{b^*-a^*}=\frac{1}{22,26-2,16}=0,05.$$

3. Назарий частоталарни топамиз:

$$n_1'=n\cdot f(x)\cdot(x_1-a^*)=200\cdot0,05\cdot(4-2,16)=18,4;$$
$$n_2'=200\cdot0,05\cdot(x_2-x_1)=10\cdot(6-4)=20.$$

Учинчи—тўққизинчи интервалларнинг узунликлари иккинчи интервалнинг узунлигига тенг, шу сабабли бу интервалларга мос назарий частоталар ва иккинчи интервалнинг назарий частотаси бир хил, яъни

$$n_3'=n_4'=n_5'=n_6'=n_7'=n_8'=n_9'=20;$$
$$n_{10}'=200\cdot0,05\cdot(b^*-x_9)=10\cdot(22,6-20)=22,6.$$

4. Пирсон критерийсидан фойдаланиб эмпирик ва назарий частоталарни таққослаймиз бунда озодлик даражалари сонини $k=s-3=10-3=7$ деб қабул қиламиз. Бунинг учун 38-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

38-жадвал

i	n_i	n_i'	n_i-n_i'	$(n_i-n_i')^2$	$\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i}$
1	21	18,4	2,6	6,76	0,37
2	16	20	—4	16,00	0,80
3	15	20	—5	25	1,25
4	26	20	6	36	1,80
5	22	20	2	4	0,20
6	14	20	—6	36	1,80
7	21	20	1	1	0,05
8	22	20	2	4	0,20
9	18	20	—2	4	0,20
10	25	22,6	2,4	5,76	0,25
					$\chi^3_{кузат}=6,92$

Ҳисоблаш жадвалидан $\chi^2_{кузат}=6,92$ ни ҳосил қиламиз.

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан (5-илова) $\alpha=0,05$ қийматдорлик даражаси ва $k=s-3=10-3=7$ озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 7) = 14{,}1$ критик нуқтасини топамиз.

$\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлгани учун X нинг текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда кузатиш маълумотлари бу гипотеза билан мувофиқ келади.

587. 800 та пўлат шарчанинг оғирлигини тортиш натижасида 39-жадвалда келтирилган эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи устунда оғирлик интервали грамм ҳисобида, иккинчи устунда эса частота, яъни оғирликлари бу интервалга тегишли бўлган шарчалар сони кўрсатилган).

0,01 қийматдорлик даражасида шарчаларнинг оғирлиги X текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

39-жадвал

$x_{i-1}-x_i$	n_i	$x_{i-1}-x_i$	n_i
20,0—20,5	91	23,0—23,5	79
20,5—21,0	76	23,5—24,0	73
21,0—21,5	75	24,0—24,5	80
21,5—22,0	74	24,5—25,0	77
22,0—22,5	92		
22,5—23,0	83		$n = 800$

Жавоби. $\overline{x}_T = 22{,}47$; $\sigma_T = 1{,}44$; $a^* = 19{,}98$; $b^* = 24{,}96$; $f(x) = 0{,}2$; $k = 7$; $\chi^2_{кузат} = 4{,}38$; $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 7) = 18{,}5$. X нинг текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

588. Бирор жойда ҳавонинг ўртача суткалик температураси 300 кун давомида қайд этиб борилган. Кузатишлар натижасида 40-жадвалда келтирилган эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи устунда температура интервали градус ҳисобида, иккинчи устунда эса n_i частота, яъни ўртача суткалик температураси бу интервалга тегишли бўлган кунлар сони кўрсатилган).

40-жадвал

$x^0_{i-1}-x^0_i$	n_i	$x^0_{i-1}-x^0_i$	n_i
—40—(—30)	25	0—10	40
—30—(—20)	40	10—20	46
—20—(—10)	30	20—30	48
—10—0	45	30—40	26

0,05 қийматдорлик даражасида ҳавонинг суткалик ўртача температураси текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $\overline{x}_T = 1{,}5$ $\sigma_T = 21{,}31$ $a^* = -35{,}37$; $b^* = 38{,}37$; $f(x) = 0{,}011$; $k = 5$; $\chi^2_{кузат} = 7{,}75$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 5) = 11{,}1$. Температуранинг текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

589. Бензоколонкага 10 соат давомида келган автомашиналарни қайд этиб бориш натижасида 41-жадвалда келтирилган эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи устунда вақт интервали соат ҳисобида, иккинчи интервалда эса частота, яъни бу интервал орасида келган машиналар сони кўрсатилган). Жами 200 машина қайд этилган.

41-жадвал

$x_{i-1}-x_i$	n_i	$x_{i-1}-x_i$	n_i
8—9	12	13—14	6
9—10	40	14—15	11
10—11	22	15—16	33
11—12	16	16—17	18
12—13	28	17—18	14

0,01 қийматдорлик даражасида машиналарнинг келиш вақти текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Жавоби. $\overline{x}_T = 12{,}71$; $\sigma_T = 2{,}85$; $a^* = 7{,}76$; $b^* = 17{,}66$; $f(x) = 0{,}101$; $k = 7$; $\chi^2_{кузат} = 53{,}43$; $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 7) = 18{,}5$. Вақтнинг текис тақсимланганлиги ҳақидаги гипотеза рад қилинади. Кузатиш маълумотлари бу гипотезага мувофиқ келмайди.

17-§. Бош тўпламнинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш

X дискрет тасодифий миқдорнинг эмпирик тақсимоти берилган. Бош тўпламнинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани Пирсон критерийсидан фойдаланиб текшириш талаб қилинади.

Қоида. *X тасодифий миқдорнинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани α қийматдорлик даражасида текшириш учун қуйидаги ишларни бажариш лозим:*

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан (5-илова) $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k = 4 - 2 = 2$ озодлик даражалари сони бўйича ўнг томонлама критик соҳанинг

$$\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2) = 6{,}0$$

критик нуқтасини топамиз.

$\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлгани учун X тасодифий миқдорнинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

591. 200 яшик консерванинг стандартга мувофиқ-мувофиқмаслигини текшириш натижасида қуйидаги эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи сатрда битта яшикдаги ностандарт банкалар сони x_i, иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни ичида x_i та стандартга мувофиқ бўлмаган банкали яшиклар сони кўрсатилган):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

0,05 қийматдорлик даражасида X тасодифий миқдор — ностандарт банкалар сонининг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. Кейинги икки группадаги кичик сонли частоталарни бирлаштиринг.

Жавоби. $k = 2$; $\lambda = \overline{x}_T = 0{,}5$; назарий частоталар: 121,31; 60,65; 15,16; 2,52; 0,32; $\chi^2_{кузат} = 9{,}27$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2) = 6{,}0$. X нинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

592. Беда уруғи партиясини бегона ўтлар уруғи билан қанчалик ифлосланганлигини аниқлаш мақсадида тасодифий олинган 1000 та намуна текширилган ва қуйидаги эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи сатрда битта намунадаги бегона ўтлар уруғи сони x_i, иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни орасида x_i та бегона ўт уруғи бўлган намуналар сони кўрсатилган):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

0,01 қийматдорлик даражасида X тасодифий миқдорнинг (бегона ўтлар уруғи сони) Пуассон қонуни

бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. Кейинги икки группадаги кичик сонли частоталарни бирлаштиринг.

Жавоби. $k = 4$; $\lambda = \overline{x}_T = 0{,}9$; назарий частоталар: 406,6; 365,9; 164,7; 49,4; 11,1; 2,3; $\chi^2_{кузат} = 9{,}27$; $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 4) = 13{,}3$. X нинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

593. $n = 1000$ та синовдан иборат эксперимент ўтказилган бўлиб, бу синовларнинг ҳар бирида бирор ҳодисанинг рўй бериш сони x_i ни қайд этиш натижасида ушбу эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи сатрда ҳодисанинг рўй бериш сони x_i; иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни ҳодисанинг x_i марта рўй бериши кузатилган синовлар сони кўрсатилган):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	505	336	125	24	8	2

0,05 қийматдорлик даражасида X тасодифий миқдор — ҳодисанинг рўй бериш сонининг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. Кейинги икки группанинг частоталарини бирлаштиринг.

Жавоби. $k = 3$; $\lambda = \overline{x}_T = 0{,}7$; назарий частоталар: 496,6; 347,6; 121,7, 28,4, 5,0, 0,7; $\chi^2_{кузат} = 10{,}29$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$. X нинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этамиз.

594. Шиша буюмли 500 контейнерни текшириш натижасида шикастланган буюмлар сони X нинг қуйидаги эмпирик тақсимотга эгалиги аниқланди (биринчи сатрда битта контейнердаги шикастланган буюмлар сони x_i, иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни ичида x_i та шикастланган буюм бўлган контейнерлар сони кўрсатилган):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

0,01 қийматдорлик даражасида X тасодифий миқдор — шикастланган буюмлар сонининг Пуассон қонуни

1. Берилган эмпирик тақсимот бўйича $\overline{x}_T$ танланма ўртача қийматни топиш.

2. Пуассон тақсимоти λ параметрининг баҳоси сифатида танланма ўртача қийматни қабул қилиш:

$$\lambda = \overline{x}_T.$$

3. Пуассон формуласи бўйича (ёки тайёр жадваллардан) n та синовда роса i та ҳодиса рўй бериш эҳтимоли P_i ни топиш ($i=0,1,2,\ldots,r$, бу ерда r—кузатилган ҳодисаларнинг максимал сони; n—танланма ҳажми).

4. Назарий частоталарни ушбу формулалар бўйича топиш

$$n'_i = n\cdot P_i.$$

5. Пирсон критерийсидан фойдаланиб эмпирик ва назарий частоталарни таққослаш, бунда озодлик даражалари сони $k = s-2$ деб олинади, s—танланма турли группалари сони (агар кам сонли частоталарни бир группага бирлаштирилган бўлса, s—частоталар бирлаштирилгандан сўнг қолган танланма группалар сони).

590. Техник контрол бўлими бир хил буюмлардан иборат $n=200$ та партияни текшириб, қуйидаги эмпирик тақсимотни ҳосил қилди (биринчи сатрда битта партиядаги стандарт бўлмаган буюмлар сони x_i; иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни ичида x_i та стандарт бўлмаган буюмлар партиялари сони кўрсатилган):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	11[illegible]	56	22	4	2

0,05 қийматдорлик даражасида стандарт бўлмаган буюмлар сони X нинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. 1. Танланма ўртача қийматни топамиз:

$$\overline{x}_T = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{116\cdot 0 + 56\cdot 1 + 22\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2\cdot 4}{200} = 0{,}6.$$

2. Пуассон тақсимоти λ параметрининг баҳоси сифатида танланма ўртача қийматни қабул қиламиз: $\lambda = 0{,}6$. Демак, тахмин қилинаётган

$$P_n(i) = \frac{\lambda^i\cdot e^{-\lambda}}{i!}$$

Пуассон қонуни қуйидаги кўринишга эга:

$$P_{200}(i) = \frac{(0{,}6)^i\cdot e^{-0{,}6}}{i!}.$$

3. $i = 0, 1, 2, 3, 4$ деб, 200 та партиядаги i та стандарт бўлмаган буюм чиқиш эҳтимоли P_i ларни топамиз:

$P_0 = P_{200}(0) = 0{,}5488$; $P_1 = P_{200}(1) = 0{,}3923$; $P_2 = P_{200}(2) = 0{,}0988$; $P_3 = P_{200}(3) = 0{,}0198$; $P_4 = P_{200}(4) = 0{,}0030$.

4. Назарий частоталарни ушбу формула бўйича топамиз:

$$n'_i = n\cdot P_i = 200\,P_i.$$

Бу формулага P_i эҳтимолларнинг 3-пунктда топилган қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$n'_0 = 200\cdot 0{,}5488 = 109{,}76.$$

Шунга ўхшаш қуйидагини топамиз:

$$n'_1 = 65{,}86;\quad n'_2 = 19{,}76;\quad n'_3 = 3{,}96;\quad n'_4 = 0{,}60.$$

5. Пирсон критерийси ёрдамида эмпирик ва назарий частоталарни таққослаймиз. Бунинг учун 42-ҳисоблаш жадвалини тузамиз. 1-эслатмани эътиборга олиб, (12-§ га қаранг) кичик сондаги частоталарни $(4+2=6)$ ва уларга мос назарий частоталарни бирлаштириб $(3{,}96 + 0{,}60 = 4{,}56)$, бирлаштириш натижасини 42-жадвалга ёзамиз.

42-жадвал

1	2	3	4	5	6
i	n_i	n'_i	$n_i-n'_i$	$(n_i-n'_i)^2$	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n_i}$
0	116	109,76	6,24	38,9376	0,3548
1	56	65,86	−9,86	97,2196	1,4762
2	22	19,76	2,24	5,0176	0,2539
3	6	4,56	1,44	2,0736	0,4547
Σ	200				$\chi^2_{кузат} = 2{,}54$

Ҳисоблаш жадвалидан Пирсон критерийсининг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$\chi^2_{кузат} = 2{,}54.$$

бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма Кейинги уч группа частоталарини бирлаштиринг.

Жавоби. $k = 4$; $\lambda = \overline{x}_T = 1$; назарий частоталар: 183,95, 183,95 91,95, 30,65, 7,65, 1,55, 0,25, 0,04; $\chi^2_{кузат} = 8{,}38$; $\chi^2_{кр}(0{,}01;\ 4) = 13{,}3$. X нинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

595. Борткевич масаласи. Пруссия армиясида тагларидаги отларнинг ҳалок бўлиши натижасида нобуд бўлган кавалеристлар (отлиқ аскарлар) сони ҳақида йигирма йил давомида олинган 200 та ахборот асосида ушбу эмпирик тақсимот ҳосил қилинган (биринчи сатрда битта ахборотда келтирилган ҳалок бўлган кавалеристлар сони x_i, иккинчи сатрда эса n_i частота, яъни x_i кавалерист ҳалок бўлганлиги ҳақида хабар берилган ахборотлар сони кўрсатилган):

x_i	10	1	2	3	4
n_i	109	65	22	3	1

0,05 қийматдорлик даражасида X тасодифий миқдорнинг—ҳалок бўлган кавалеристлар сонининг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш талаб қилинади.

Кўрсатма. Кичик сондаги 3 ва 1 частоталарини бирлаштиринг.

Жавоби. $k = 2$; $\lambda = \overline{x}_T = 0{,}61$; назарий частоталар: 108,7, 66,3, 20,2, 4,1, 0,7; $\chi^2_{кузат} = 0{,}34$; $\chi^2_{кр}(0{,}05;\ 2) = 6{,}0$. X нинг Пуассон қонуни бўйича тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани рад этишга асос йўқ.

Ўн тўртинчи боб

БИР ФАКТОРЛИ ДИСПЕРСИОН АНАЛИЗ

1-§. Ҳамма даражаларда синовлар сони бир хил

Нормал тақсимланган X миқдорий белгига F фактор таъсир кўрсатаётган бўлиб, у p та $F_1, F_2, \ldots, F_p$ даражаларга эга бўлсин. Ҳар бир даражада q тадан синов ўтказилган. Кузатиш натижалари бўлган x_{ij} сонлар 43-жадвал кўринишида ёзилган, бу ерда $i(i = 1, 2, \ldots,)$ q— синов номери, $j(j = 1, 2, \ldots, p)$—фактор даражаси номери.

43-жадвал

Синов номери	Фактор даражалари			
i	F_1	F_2	...	F_p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
...	...	...	...	...
q	x_{q1}	x_{q2}	...	x_{qp}
Группавий ўртача қиймат $\overline{x}_{грj}$	$\overline{x}_{гр1}$	$\overline{x}_{гр2}$	...	$\overline{x}_{грp}$

Масала бундай қўйилади: группавий бош дисперсиялар номаълум бўлса-да, лекин улар бир хил деган фаразда группавий ўртача қийматларининг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани α қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади. Бу масалани ечиш учун қуйидаги катталиклар киритилади: белгининг кузатилаётган қийматларининг умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратларининг *умумий йиғиндиси:*

$$S_{умум} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij}-\overline{x})^2;$$

группавий ўртача қийматларнинг умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратларининг *фактор йиғиндиси* („группалар орасидаги" тарқоқликни характерлайди):

$$S_{факт} = q\sum_{j=1}^{p}(\overline{x}_{грj}-\overline{x})^2;$$

группадаги кузатилган қийматларнинг ўз группавий ўртача қийматидан четланишлари квадратларининг *қолдиқ йиғиндиси* („группалар ичидаги" тарқоқликни характерлайди):

$$S_{қолд} = \sum_{i=1}^{q}(x_{i1}-\overline{x}_{гр1})^2 + \sum_{i=1}^{q}(x_{i2}-\overline{x}_{гр2})^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q}(x_{ip}-\overline{x}_{грp})^2.$$

Қолдиқ йиғиндини амалда ушбу формула бўйича топилади:

$$S_{қолд} = S_{умум} - S_{факт}.$$

билан 0,01 қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари 47- жадвалда келтирилган.

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} - 100$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 21567{,}48$; $S_{факт} = 11945{,}60$; $S_{қолд} = 9622$; $s^2_{факт} = 2389$; $s^2_{қолд} = 229$; $F_{кузат} = 10{,}43$; $F_{кр}(0{,}01;\ 5;\ 42) = 2{,}44$. Группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза рад қилинади.

47- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари					
i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	100	92	74	68	64	69
2	101	102	87	80	83	71
3	126	104	88	83	83	80
4	128	115	93	87	84	80
5	133	119	94	96	90	81
6	141	122	101	97	96	82
7	147	128	102	106	101	86
8	148	146	105	127	111	99
$\overline{x}_{гр}$	128	116	93	93	89	81

599. Учта даражанинг ҳар бирида 4 тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари 48- жадвалда келтирилган.

48- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари		
i	F_1	F_2	F_3
1	25	30	21
2	32	24	22
3	31	26	34
4	30	20	31
$\overline{x}_{грj}$	32	25	27

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} - 28$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 296$; $S_{факт} = 104$; $S_{қолд} = 192$; $s^2_{факт} = 52$; $s^2_{қолд} = 21{,}3$; $F_{кузат} = 2{,}44$; $F_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$. Группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

600. Факторнинг тўртта даражасининг ҳар бирида тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари 49- жадвалда келтирилган.

49- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	51	52	56	54
2	59	58	56	58
3	53	66	58	62
4	59	69	58	64
5	63	70	70	66
6	69	72	74	67
7	72	74	78	69
$\overline{x}_{грj}$	60,9	65,9	64,3	62,9

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} - 63$ деб олинг. 1- эслатмадан фойдаланинг.

Жавоби. $S_{умум} = 1539$; $S_{факт} = 95$; $S_{қолд} = 1444$; $s^2_{факт} = 31{,}67$; $s^2_{қолд} = 60{,}17$. Группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ

601. Факторнинг учта даражасининг ҳар бирида 4 тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Танланмалар дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари 50- жадвалда келтирилган.

Умумий ва фактор йиғиндиларни ҳисоблаш учун ушбу формулалар қулайроқдир:

$$S_{умум} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} R_j\right]^2}{pq},$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{p} R_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} R_j\right]^2}{pq},$$

бу ерда $P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ — белгининг F_j даражада кузатилган қийматларининг квадратлари йиғиндиси; $R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$ эса белгининг F_j даражада кузатилган қийматлари йиғиндиси.

Агар белгининг кузатилган қийматлари нисбатан катта сонлар бўлса, у ҳолда ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида ҳар бир кузатилган қийматдан тахминан умумий ўртача қийматга тенг бўлган бир хил C сон айирилади. Агар камайтирилган қийматлар $y_{ij} = x_{ij} - C$ бўлса, у ҳолда

$$S_{умум} = \sum_{j=1}^{p} Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{pq},$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{p} T_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{pq},$$

бу ерда $Q_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$ — белгининг F_j даражадаги камайтирилган қийматларининг квадратлари йиғиндиси, $T_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$ — белгининг F_j даражадаги камайтирилган қийматлари йиғиндиси.

Ҳисоблаб топилган фактор ва қолдиқ йиғиндиларни тегишли озодлик даражалари сонига бўлиб, фактор ва қолдиқ дисперсиялар топилади:

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1}, \quad s^2_{қолд} = \frac{S_{қолд}}{p(q-1)}.$$

Ниҳоят, фактор ва қолдиқ дисперсиялар Фишер — Снедекор критерийси бўйича таққосланади (XIII боб, 2- § га қаранг).

Агар $F_{кузат} < F_{кр}$ бўлса, группавий ўртача қийматларнинг фарқи муҳим эмас.

Агар $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлса, группавий ўртача қийматларнинг фарқи муҳим.

1- эслатма. Агар фактор дисперсия қолдиқ дисперсиядан кичик бўлиб чиқса, у ҳолда шунинг ўзидан группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезанинг ўринли эканлиги бевосита келиб чиқади, шу сабабли кейинги ҳисоблашлар (дисперсияларни F критерий ёрдамида таққослаш) ортиқчадир.

2- эслатма. Агар x_{ij} кузатилган қийматлар вергулдан кейин k хонали ўнли касрлар бўлса, у ҳолда

$$y_{ij} = 10^k x_{ij} - C$$

бутун сонларга ўтган маъқул, бу ерда C — ушбу $10^k x_{ij}$ сонларнинг тахминан ўртача қиймати. Бунда фактор ва қолдиқ дисперсияларнинг ҳар бири 10^k марта ортади, лекин уларнинг нисбати ўзгармасдан қолади.

596. F факторнинг учта даражасининг ҳар бирида 4 тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги гипотезани 0,05 қийматдорлик даражасида текширинг. Танланмалар дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари 44- жадвалда келтирилган.

44- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари		
i	F_1	F_2	F_3
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
$\overline{x}_{грj}$	35	25	27

Ечилиши. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида ҳар бир кузатилган x_{ij} қийматдан $\overline{x} = 29$ умумий ўртача қийматни айирамиз, яъни камайтирилган $y_{ij} = x_{ij} - 29$ қийматларга ўтамиз. Масалан, $y_{11} = x_{11} - 29 = 38 - 29 = 9$; $y_{21} = x_{21} - 29 = 36 - 29 = 7$ ва ҳоказо.

45- ҳисоблаш жадвалини тузамиз. 45- жадвалнинг якуний устунидан фойдаланиб, четланишлар квадратларининг умумий ва фактор йиғиндиларини топамиз, бунда факторнинг даражалари сони $p = 3$ ва ҳар бир

50- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари		
i	F_1	F_2	F_3
1	27	24	22
2	23	20	21
3	29	26	36
4	29	30	37
$\overline{x}_{грj}$	28	25	29

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} - 27$ деб олинг. 1-эслатмадан фойдаланинг.

Жавоби. $S_{умум} = 334$; $S_{факт} = 32$; $S_{қолд} = 302$ $s^2_{факт} = 16$; $s^2_{қолд} = 33{,}56$. Группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

2-§. Синовлар сони турли даражаларда бир хил эмас

Агар синовлар сони F_1 даражада q_1 га, F_2 даражада q_2 га, ..., F_p даражада q_p га тенг бўлса, у ҳолда четланишлар квадратларининг умумий йиғиндисини синовлар сони барча даражаларда бир хил бўлган ҳолдаги каби ҳисобланади (1-§ га қаранг). Четланишлар квадратларининг фактор йиғиндисини ушбу формуладан топилади:

$$S_{факт} = \frac{T_1^2}{q_1} + \frac{T_2^2}{q_2} + \dots + \frac{T_p^2}{q_p} - \frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{n},$$

бу ерда $n = q_1 + q_2 + \dots + q_p$ — синовлар жами сони.

Қолган ҳисоблашлар синовлар сони бир хил бўлган ҳолдаги каби олиб борилади:

$$S_{қолд} = S_{умум} - S_{факт},$$

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1}, \quad s^2_{қолд} = \frac{S_{қолд}}{n-p}.$$

602. Факторнинг биринчи даражасида 4 та, иккинчи даражасида 4 та, учинчи даражасида 3 та ва тўртинчи даражасида 2 та, жами 13 та синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Танланмалар

дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб фараз қилинади. Синов натижалари 51-жадвалда келтирилган.

51- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1,38	1,41	1,32	1,31
2	1,38	1,42	1,33	1,33
3	1,42	1,44	1,34	—
4	1,42	1,45	—	—
$\overline{x}_{грj}$	1,40	1,43	1,33	1,32

Ечилиши. 2-эслатмадан (1-§) фойдаланиб, $y_{ij} = x_{ij} - 138$ бутун сонларга ўтамиз.

52-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

52- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари								Якуний устун
	F_1		F_2		F_3		F_4		
i	y_{i1}	y^2_{i1}	y_{i2}	y^2_{i2}	y_{i3}	y^2_{i3}	y_{i4}	y^2_{i4}	
1	0	0	3	9	−6	36	−7	49	
2	0	0	4	16	−5	25	−5	25	
3	4	16	6	36	−4	16	—	—	
4	4	16	7	49	—	—	—	—	
$S_j = \sum y^2_{ij}$		32		100		77		74	$\sum S_j = 293$
$T_j = \sum y_{ij}$	8		20		−15		−12		$\sum T_j = -9$
T_j^2	64		400		225		144		

52-жадвалнинг якуний устуни ва пастки сатридан фойдаланиб, четланишлар квадратларининг умумий ва фактор йиғиндиларини топамиз:

$$S_{умум} = \sum S_j - \frac{[\sum T_j]^2}{n} = 293 - \frac{9^2}{13} = 293 - 6{,}23 = 286{,}77;$$

даражадаги синовлар сони $q = 4$ эканлигини ҳисобга оламиз:

$$S_{умум} = \sum_{j=1}^{p} S_j - \frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{pq} = 428 - 0 = 428;$$

45- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари						Якуний устун
	F_1		F_2		F_3		
i	y_{i1}	y^2_{i1}	y_{i2}	y^2_{i2}	y_{i3}	y^2_{i3}	
1	9	81	−9	81	−8	64	
2	7	49	−5	25	−7	49	
3	6	36	−3	9	2	4	
4	2	4	1	1	5	25	
$S_j = \sum y^2_{ij}$		170		116		142	$\sum S_j = 428$
$T_j = \sum y_{ij}$	24		−16		−8		$\sum T_j = 0$
T_j^2	576		256		64		$\sum T_j^2 = 896$

$$S_{факт} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{p} T_j^2}{q} - \frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{pq} = \frac{896}{4} - 0 = 224.$$

Четланишлар квадратларининг қолдиқ йиғиндисини топамиз:

$$S_{қолд} = S_{умум} - S_{факт} = 428 - 224 = 204.$$

Фактор дисперсияни топамиз; бунинг учун $S_{факт}$ ни озодлик даражалари сони $p - 1 = 3 - 1 = 2$ га бўламиз:

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1} = \frac{224}{2} = 112.$$

Қолдиқ дисперсияни топамиз; бунинг учун $S_{қолд}$ ни озодлик даражалари сони $p(q-1) = 3(4-1) = 9$ га бўламиз:

$$s^2_{қолд} = \frac{S_{қолд}}{p(q-1)} = \frac{204}{9} = 22{,}67.$$

Фактор ва қолдиқ дисперсияларни Фишер — Снедекор критерийси ёрдамида таққослаймиз (XIII боб, 2-§ га

қаранг). Бунинг учун аввал критерийнинг кузатилган қийматини топамиз:

$$F_{кузат} = \frac{s^2_{факт}}{s^2_{қолд}} = \frac{112}{22{,}67} = 4{,}94.$$

Суратнинг озодлик даражалари сони $k_1 = 2$, махражники эса $k_2 = 9$ ва қийматдорлик даражаси $\alpha = 0{,}05$ эканлигини ҳисобга олиб, жадвалдан (7-илова) $F_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$ критик нуқтани топамиз.

$F_{кузат} > F_{кр}$ бўлгани учун группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда, группавий ўртача қийматларнинг фарқи „умуман" муҳим.

597. F факторнинг бешта даражасининг ҳар бирида 4 тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида $\overline{x}_{грj}$ группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Танланмалар дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади. Синов натижалари 46-жадвалда келтирилган.

46- жадвал

Синов номери	Фактор даражалари			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	36	56	52	39
2	47	61	57	57
3	50	64	59	63
4	58	66	58	61
5	67	66	79	65
$\overline{x}_{грj}$	51,6	62,6	61,0	57,0

Кўрсатма. $y_{ij} = x_{ij} - 58$ деб олинг.

Жавоби. $S_{умум} = 1850{,}55$; $S_{факт} = 360{,}15$; $S_{қолд} = 1490{,}40$; $s^2_{факт} = 120$; $s^2_{қолд} = 93$; $F_{кузат} = 1{,}29$; $F_{кр}(0{,}05,\ 3;\ 16) = 3{,}24$ Группавий ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ

598. Факторнинг олтита даражасининг ҳар бирида 8 тадан синов ўтказилган. Дисперсион анализ методи

$t_\gamma = (\gamma, n)$ қийматлар жадвали

3-илова

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,99
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3 92				

$g = g(\gamma, n)$ қийматлар жадвали

4-илова

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

5-илова

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари

k озодлик даражалари сони	α қийматдорлик даражаси					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12 6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4 57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Стъюдент тақсимотининг критик нуқталари

k озодлик даражалари сони	α қийматдорлик даражаси (и[illegible] томонли критик соҳа)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4 59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,05	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	α қийматдорлик даражаси (б[illegible] томонли критик соҳа)					

F Фишер—Снедекор тақсимотининг критик нуқталари
(k_1—катта дисперсия озодлик даражалари сони,
k_2—кичик дисперсия озодлик даражалари сони)

α = 0,01 қийматдорлик даражаси

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16 26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4.16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

α = 0,05 қийматдорлик даражаси

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6.16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38