21-AMALIY MASHG‘ULOT

Ish vaqti va bosqichlari	O‘qituvchi faoliyatining mazmuni	Talabalar faoliyatining mazmuni
I-Bosqich O‘quv mashg‘ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mashg‘ulot mavzusi bo‘yicha tushuncha berish. 1.2. Mavzuning avvalgi o‘tilgan mavzu bilan aloqadorligi bo‘yicha tushuncha berish	Tinglaydilar, yozadilar
II-Bosqich Asosiy (65 daqiqa)	2.1.Amaliy mashg‘ulot mavzusiga oid nazariy ma’lumot berish. 2.2. Mavzuga oid amaliy topshiriqlar bajarish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.
III-Bosqich Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Amaliy mashg‘ulotni yakunlash 3.2. Talabalarga mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.

21-mavzu. Bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari

Bizga chiziqli bir jinsli tenglama berilgan:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad (1)$$

Erkli o‘zgaruvchini almashtirish bilan bu tenglamani o‘zgarmas koeffisientli chiziqli tenglamaga olib kelish masalasi bilan shug’ullanamiz. $t = u(x)$ almashtirish bajaraylik. U holda:

$$y' = y'_t t'_x = y'_t u'(x)$$

$$y'' = y''_{t^2}[u'(x)]^2 + y'_t u''(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = y^{(n)}_{t^{(n)}}[u'(x)]^n + \ldots + y'_t u^{(n)}(x)$$

Bu hisoblashlar ko‘rsatadiki yuqoridagi almashtirishdan keyin (1) tenglama $y^{(n)}_{t^n}[u'(x)]^n + \ldots + p_n(x)y = 0$ ko‘rinishni oladi. Buni $[u'(x)]^n$ ga bo‘lamiz: $y^{(n)}_{t^n} + \ldots + \dfrac{p_n(x)}{[u'(x)]^n}y = 0$. Bu yerda $u(x)$ funksiyani shunday tanlash kerakki y oldidagi koeffisient o‘zgarmas songa aylansin. $\dfrac{p_n(x)}{[u'(x)]^n} = \dfrac{1}{c^n}$ desak, u holda $u'(x) = c\sqrt[n]{p_n(x)}$ yoki $u(x) = c\int\sqrt[n]{p_n(x)}dx$. Shunday qilib, agar (1) tenglama erkli o‘zgaruvchini almashtirish bilan o‘zgarmas koeffisisentli tenglamaga aylansa u holda almashtirirsh fomulasi

$$t = c\int\sqrt[n]{p_n(x)}dx \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lishi zarur.

Endi **Eylerning chiziqli tenglamasini** qaraymiz:

$$D(y) \equiv x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad (3)$$

bu yerda $a_1, a_2, ..., a_n$ - o‘zgarmas haqiqiy sonlar. Bu tenglamani (1) tenglama bilan taqqoslab $p_n(x) = \frac{a_n}{x^n}$ ekanligini ko‘ramiz. (2)ni hisobga olib (3) tenglamada $t = c\int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}} dx$ yoki $c = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ deb olib, $t = \ln x$ almashtirish bajaramiz. U holda:

$$y' = y'_t \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = y''_{t^2} \frac{1}{x^2} - y'_t \frac{1}{x^2}$$

$$y''' = y'''_{t^3} \frac{1}{x^3} - 3y''_{t^2} \frac{1}{x^3} + 2y'_t \frac{1}{x^3}$$

....

$$y^{(n)} = y^{(n)}_{t^n} \frac{1}{x^n} + ... + (-1)(n-1)!\, y'_t \frac{1}{x^n}$$

Bu hisoblashlar ko‘rsatadiki $x^i y^{(i)}$ ifoda $y'_t, y''_{t^2}, ..., y^{(i)}_{t^i}$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat va (3) tenglamada ularni mos ravishda qo‘ysak o‘zgarmas koeffisientli tenglama hosil bo‘ladi.

Misol. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $t = \ln x$ almashtirish bajarsak: $y' = y'_t \cdot \frac{1}{x}$, $y'' = y''_{t^2} \frac{1}{x^2} - y'_t \frac{1}{x^2}$. Bularni berilgan tenglamaga qo‘yamiz: $y''_{t^2} - y'_t - 2y'_t + 2y = 0$ yoki $y''_{t^2} - 3y'_t + 2y = 0$. Bu o‘zgarmas koeffisientli tenglamaning harakteristik tenglamasi: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Demak $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Almashtirish formulasi bo‘yicha x o‘zgaruvchini qaytaramiz: $y = C_1 x + C_2 x^2$.

Javob: $y = C_1 x + C_2 x^2$.

Oldingi maruzamizda ko‘rdikki o‘zgarmas koeffisientli tenglamaning hususiy yechimlari $e^{\lambda t}$ ko‘rinishida bo‘lar edi. (3) Eyler tenglamasini hususiy yechimi ko‘rinishini aniqlash uchun yuqoridagi $t = \ln x$ almastirishdan foydalanaylik: $e^{\lambda t} = e^{\lambda \ln x} = x^\lambda$.

(3) tenglamaning hususiy yechimini $y = x^\lambda$ ko‘rinishda qidiramiz. U holda:

$$y^{(k)} = \lambda(\lambda - 1)...(\lambda - k + 1)x^{\lambda - k} \qquad (k = 1, ..., n)$$

$y = x^\lambda$ funksiyani va uning hosislalarini (3) tenglamaning chap qismiga qo‘yamiz:

$$D(x^\lambda) = [\lambda(\lambda - 1)...(\lambda - n + 1) + a_1\lambda(\lambda - 1)...(\lambda - n + 2) + ... + a_{n-1}\lambda + a_n]x^\lambda.$$

Bundan ko‘rinadiki $y = x^{\lambda}$ eyler tenglamsini hususiy yechimi bo‘lishi uchun λ

$$P(\lambda) \equiv \lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+2) + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

tenglamaning ildizi bo‘lishi zarur va yetarli. Bu tenglama **Eyler tenglamasining harakteristik tenglamasi**, uning idizlari esa **harakteristik sonlari** deyiladi.

Faraz qilaylik harakteristik tenglamaning ildizlari turlicha bo‘lsin. u holda Eyler tenglamasining n ta hususiy yechimiga ega bo‘lamiz:

$$y_1 = x^{\lambda_1},\ y_2 = x^{\lambda_2},\ \dots,\ y_n = x^{\lambda_n} \qquad (4)$$

Bu yechimlar $(0, +\infty)$ intervalda chiziqli erkli. Agar barcha $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ildizlar haqiqiqy bo‘lsa, u holda (4) yechimlar haqiqiy bo‘lib Eyler tenglamasining **umumiy yechimi** $y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + ... + C_n x^{\lambda_n}$ formula bilan ifodalanadi.

Agar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ildizlar orasida $a + ib$ kompleks son bor bo‘lsa, u holda unga $x^{a+ib} = x^a[\cos(b\ln x) + i\sin(b\ln x)]$ kompleks yechim mos keladi. Demak $x^a\cos(b\ln x)$ va $x^a\sin(b\ln x)$ funksiyalar haqiqiqy yechimlardan iborat. Bu vaqtda $a - ib$ ham harakteristik tenglamaning ildizi bo‘lib unga ham aynan yuqoridagi haqiqiqy yechimlar mos keladi. Umumiy yechim formulasida $a \pm ib$ kompleks sonlar juftligiga mos $x^a[C_1\cos(b\ln x) + C_2\sin(b\ln x)]$ qo‘shiluvchi qatnashadi.

Endi λ_1 son harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo‘lsin, ya’ni

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = ... = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0.$$

$D(x^{\lambda}) \equiv P(\lambda)x^{\lambda}$ ayniyatni λ bo‘yicha m marta differensiallaymiz:

$$D(x^{\lambda}(\ln x)^m) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i P^{(i)}(\lambda) x^{\lambda}(\ln x)^{m-i}$$

Bundan $x^{\lambda_1}(\ln x)^m$ $(m = 1, ..., k-1)$ funksiyalar Eyler tenglamasining hususiy yechimlari ekanligi kelib chiqadi. Demak λ_1 - harakteristik tenglamaning haqiqiy k karrali ildizi bo‘lsa, Eyler tenglamasining umumiy yechim formulasida bu ildizga mos $[C_1 + C_2\ln x + ... + C_k(\ln x)^{k-1}]x^{\lambda_1}$ qo‘shiluvchi qatnashadi.

Yuqoridagidek mulohazalar yuritib $a \pm ib$ kompleks sonlar harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo‘lsa, Eyler tenglamasining umumiy yechimida bu ildizlarga mos

$$\{[C_1 + ... + C_k(\ln x)^{k-1}]\cos(b\ln x) + [C_1 + ... + C_k(\ln x)^{k-1}]\sin(b\ln x)\}x^{\lambda_1}$$

qo‘shiluvchi qatnashishini ko‘rsatish mumkin.

Chebishev tenglamasini qaraymiz:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \qquad (5)$$

Bu tenglama $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, +\infty)$ intervallarning har birida mavjudlik va yagonalik teoremalarini qanoatlantiradi. Biz (5) tenglamaning $(-1, +1)$ intervaldagi umumiy yechimini quramiz. (2) formulaga ko‘ra quyidagiga egamiz:

$$t = c\int \sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}dx$$

Bu yerda $c = -\frac{1}{n}$ deb olsak $t = \arccos x$ yoki $x = \cos t$ almashtirish formulasi hosil bo‘ladi. Bundan

$$y' = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = -y'_t \frac{1}{\sin t}$$

$$y'' = y''_{t^2} \frac{1}{\sin^2 t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^3 t}$$

Bularni (5) tenglamaga qo‘ysak $y''_{t^2} - y'_t \frac{\cos t}{\sin t} + y'_t \frac{\cos t}{\sin t} + n^2 y = 0$ yoki

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0$$

o‘zgarmas koeffisientli tenglamani hosil qilamiz. Uning umumiy yechimi $y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$ formulaga ega. Bundan **Chebishev tenglamasining umumiy yechimini** hosil qilamiz: $y = C_1 \cos n \arccos x + C_2 \sin n \arccos x$.

Misol va masalalar:

1. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ tenglamani yeching.
2. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ tenglamani yeching.