4-mashg‘ulot

Mavzu: Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

To’la differensial tenglamalar va unga keltiriladigan tenglamalar

Reja

1. Chiziqli differensial tenglama
2. Bernilli tenglamasi
3. Rikkati tenglamasi
4. To’liq differensialli tenglama
5. Integrallovchi ko’paytuvchi

1-reja. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (1)$$

ko’rinishdagi tenglamani aytamiz.

Teorema. Agar $a(x)$ va $b(x)$ funksiyalar biror I intervalda uzluksiz bo’lsa u holda $\Gamma = \{(x, y) : x \in I, -\infty < y < \infty\}$ sohaning ihtiyoriy olingan (x_0, y_0) nuqtasidan (1) tenglamaning faqat bitta integral chizig’i o’tadi va bu chiziq

$$y = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)dt \right] e^{A(x)}, \quad e^{A(x)} = \int_{x_0}^{x} a(t)dt \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi.

Isbot. $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ funksiya Γ sohada Koshi teoremasining barcha shartlarini qanoalntiradi, yani $f(x, y)$ va $\frac{\partial f}{\partial y} = a(x)$ funksiyalar bu sohada uzluksizdir. Demak, Koshi teoremasiga ko’ra Γ sohaning ihtiyoriy olingan (x_0, y_0) nuqtasidan (1) tenglamaning faqat bitta integral chizig’i o’tadi. Endi (2) funksiya izlanayotgan yechim ekanini ko’rsatamiz. $y(x_0) = y_0$ ekani ravshan. (2) funksiyni hosilasini hisoblaymiz:

$$y' = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t) dt \right] e^{A(x)} a(x) + e^{-A(x)} b(x) e^{-A(x)} = a(x) y + b(x)$$

Bu tengliklar (2) funksiya (1) tenglamani kanoatlantirishini ko'rsatadi. Teorema isbotlandi.

(2) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilishning **o'zgarmasni variatsiyalash** usuli bilan tanishamiz. $y' = a(x)y$ tenglama (1)ga mos bir jinsli tenglama deb ataladi. Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo'lib uning umumiy yechini yozaylik: $y = Ce^{A(x)}$. (1) tenglamani umumiy yehimini

$$y = C(x) e^{A(x)} \qquad (3)$$

ko'rinishda qidiramiz. (3) funksiyani va uning hosilasini (1)ga qo'yamiz:

$$C'(x) e^{A(x)} + C(x) e^{A(x)} a(x) = a(x) C(x) e^{A(x)} + b(x).$$

Bundan

$$C'(x) = e^{-A(x)} b(x), \quad C(x) = C + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t) dt.$$

$C(x)$ ning topilgan ifodasini (3)ga qo'ysak (1) tenglamanaing **umumiy yechimi** hosil bo'ladi:

$$y = \left[C + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t) dt \right] e^{A(x)}. \qquad (4)$$

(1) tenglamani umumiy yechimini **integallovchi ko'paytuvchi** usulida ham hosi qilish mumkin. $\mu(x) = e^{-A(x)}$ funksiya (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deyiladi. (1)ni bu funksiyaga ko'paytiramiz:

$$e^{-A(x)} y' - e^{-A(x)} a(x) y = e^{-A(x)} b(x);$$

$$\left(e^{-A(x)} y \right)' = e^{-A(x)} b(x);$$

$$e^{-A(x)} y = C + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t).$$

Ohirgi tenglikni $e^{A(x)}$ ifodaga ko'paytirsak (4) umumy yechim hosil bo'ladi.

Misol. $y' - \frac{2}{x}y = x$ tenglamani o'zgarmasni variatsiyalash usulida umumiy yechimini topamiz. Unga mos bir jinsli tenglama $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = Cx^2$. Berilgan tenglamani umuiy yechimini $y = C(x)x^2$ ko'rinishda qidiramiz.

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x}\cdot C(x)x^2 = x$$

$$C'(x) = \frac{1}{x}, \quad C(x) = \ln|x| + C$$

Bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz: $y = x^2(\ln|x| + C)$

Endi tenglamani integrallovchi ko'paytuvchi usulida yechamiz. Uni $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$ ifodaga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x}, \qquad \left(\frac{1}{x^2}y\right)' = \frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{x^2}y = \ln|x| + C, \qquad y = x^2(\ln|x| + C).$$

Javob: $y = x^2(\ln|x| + C)$.

2-reja. Bernulli tenglamasi deb

$$y' = a(x)y + b(x)y^m \qquad (5)$$

ko'rinishdagi tenglamani aytamiz. Agar $m = 0$ bo'lsa bu tenglama (1) ko'rinishni oladi. Agar $m = 1$ bo'lsa (5) tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadan iborat. Biz $m \neq 0$ va $m \neq 1$ bo'lgan holda (5) tenglamani integrallash ketma-ketligini ko'rib chiqamiz. (5)ni y^m ga bo'lamiz:

$$y^{-m}y' = a(x)y^{1-m} + b(x)$$

No'ma'lum funksiyani $z = y^{1-m}$ formula bilan almashtiramiz ($z' = (1-m)y^{-m}y'$):

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x).$$

Bu tenlama $z$ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir va biz uni integralalshni yuqorida ko'rib o'tdik.

Ta’kidlash joizki $m>0$ bo’lgan holda (1) tenglama hamma vaqt $y=0$ yechimga ega bo’ladi. Agar $m<1$ bolsa bu yechim mahsus yechimdan, aks holda hususiy yechimdan iborat.

Misol. $y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}y^2$ tenglamani qaraymiz. Uni y^2 ga bo’lamiz:

$$y^{-2}y'-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{1}{x}$$

Bu yerda $y^{-1}=z$ almashtirish bajaramiz, natijada: $z'+\frac{1}{x}z=\frac{1}{x}$. Bu chiziqli tenglamani umumiy yechimi $z=\frac{1}{x}(C+x)$. Bundan $y=\frac{x}{C+x}$. Berilgan tenglamaning bu umumiy yechimga kirmagan $y=0$ hususiy yechimi ham mavjud.

Javob: $y=\frac{x}{C+x}$, $y=0$.

3-reja. Rikkati tenglamasi deb

$$y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x) \qquad (6)$$

ko’rinishdagi tenglamani aytamiz. Agar $a(x)\equiv 0$ bo’lsa bu tenglama (1) ko’rinishni olai. Agar $c(x)\equiv 0$ bo’lsa (6) tenglama Bernulli tenglamasidan iborat bo’ladi.

Teorema. Agar Rikkati tenglamasining bitta hususiy yechimi ma’lum bo’lsa u holda uni kvadraturalarda integrallash mumkin.

Isbot. $y=y_1(x)$ funksiya (6) tenglamani qanoatlantirsin. U holda

$$y_1'(x)\equiv a(x)y_1^2+b(x)y_1+c(x) \qquad (7)$$

ayniyat o’rinli. (6) tenglamada $y=z+y_1(x)$ almashtirish bajaramiz:

$$z'+y_1'(x)=a(x)[z+y_1(x)]^2+b(x)[z+y_1(x)]+c(x).$$

Bu va (7) tenglikdan $z'=[2a(x)y_1(x)+b(x)]z+a(x)z^2$ Bernulli tenglamasi hosil bo’ladi va uni kvadraturalara integrallanishi bizga ma’lum. Teorema isbotlandi.

Teorema isbotida ko'rdikki Rikkati tenglamasi Bernulli tenglamasining $m=2$ bo'lgan holiga aylanadi. Misollar yechish vaqtida agar birdan $y=\frac{1}{z}+y_1(x)$ almashtirish bajarilsa Rikkati tenglamasini yechish chiziqli tenglamani integrallashga keladi.

Misollar yechish vaqtida (6) tenglamani hususiy yechimi berilmagan bo'lsa ba'zan uni biror ko'rinishda izlab topish mumkin bo'ladi. Bunda $a(x), b(x), c(x)$ funksiyalarning ko'rinishi hisobga olinadi.

Misol. $y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1$ tenglamani qaraymiz. Bu erda $y = x$ hususiy yechim. $y=\frac{1}{z}+x$ almashtirish bajaramiz, u holda $z' + 3x^2z = -x$ bundan

$$z = e^{-x^2}\left(C - \int xe^{x^2}dx\right).$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini yozamiz:

$$y = x + \frac{e^{x^2}}{C - \int e^{x^2}xdx}.$$

Javob: $y = x + \dfrac{e^{x^2}}{C - \int e^{x^2}xdx}$, $y = x$.

4-reja. Agar

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning chap tomoni Γ sohada biror $U(x,y)$ funksiyaning to'liq differensialidan iborat bo'lsa, y'ani

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa (1) tenglama Γ sohada **to'liq differensialli** deyiladi. To'liq differensialli tenglamani $dU(x,y) = 0$ ko'rinishda yozish mumkin. Bunga ko'ra uning **umumiy yechimi** $U(x,y) = C$ ko'rinishga ega.

Misol. Ushbu $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$ tenglamani to'liq differensialli bo'lishini tekshiramiz va umumiy yechimini topamiz. Buning uchun uning chap tomonini differensial ostiga kiritishga harakat qilamiz:

$$x^3dx+ydx+xdy-ydy=0; \qquad d\left(\frac{x^4}{4}\right)+d(xy)-d\left(\frac{y^2}{2}\right)=0;$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}\right)=0.$$

Demak berilgan tenglama to'liq differensialli ekan va uning umumiy yechimi:

$$\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C$$

Javob: $\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C$.

Har doim ham berilgan tenglamani to'liq differensialli bo'lishini to'g'ridan to'g'ri tekshirish oson kechmaydi. Bizga quyidagi teorema bu ishda qo'l keladi.

Teorema. (1) tenglama Γ sohada to'liq differensialli bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (3)$$

ayniyat Γ sohada o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. (1) tenglama to'liq differensialli bo'lsin. U holda (2) tenglik o'rinli. Ushbu

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y),\ \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y) \qquad (4)$$

ayniyatlardan birinchisini y bo'yicha ikkinchisini x bo'yicha differensiallaymiz: $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Bu tengliklarning chap qismlari aynan tengligidan (3) ayniyat o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. (3) ayniyat o'rinli bo'lsin. (2) tenglikni qanoatlantiruvchi $U(x,y)$ funksiya mavjudligini ko'rsatamiz, yanada aniqrog'i bu funksiyani quramiz. Uni quyidagi ko'rinishda qidiraylik:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)\,, \qquad (5)$$

bunda $\varphi(y)$ ihtiyoriy differensiallanuvchi funksiya, $(x_0,y_0)\in\Gamma$. Bu funksiya (4) tenkliklardan birinchisini qanoatlantirishi ravshan. $\varphi(y)$ funksiyani shunday tanlaylikki (4)ning ikkinchi tengligi ham o'rinli bo'lsin:

$$N(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(y)$$

Bu erda (3) ayniyatdan foydalanamiz:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)$$

Bunga ko'ra: $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C$. Buni (5)ga olib borib qo'ysak izlanayotgan $U(x,y)$ funksiya hosil bo'ladi: $U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C$. Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremaga ko'ra (3) tenglik o'rinli bo'lsa (1) tenglamaning **umumiy yechimi**

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=C$$

formula bilan ifodalanadi. Agar teorema isbotida $U(x,y)$ funksiyani $U(x,y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+\phi(x)$ ko'rinishda qidirganimizda (1) tenglamaning umumiy yechimini

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=C$$

formulasiga ega bo'lar edik.

Misol. Yana $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$ tnglamani qaraymiz. Bu erda

$$M = x^3 + y\,,\; N = x - y\,,\; \frac{\partial M}{\partial y} = 1\,,\; \frac{\partial N}{\partial x} = 1;$$

(3) shart o’rinli. Umumiy integralni

$$\int_0^x (x^3 + y)dx + \int_0^y (-y)dy = C$$

formuladan foydalanib hosil qilamiz. **Javob:** $\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C$

5-reja. Yuqorida ko’rdikki to’liq differensialli tenglamani integrallash juda oson. Bu erda shunday savol tug’iladi: to’liq differensialli bo’lmagan tnglamani to’liq differensialli tenglamaga keltirish mumkinmi?

Agar (1) tenglamani $\mu(x, y)$ funksiyaga ko’paytirsak hosil bo’lgan

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \qquad (6)$$

tenglama to’liq differensialli bo’lsa $\mu(x, y)$ni (1) tenglamaning integrallovchi ko’paytuvchisi deb ataymiz. (6) tenglamaniny umumiy yechimi (1) tenglama uchun ham **umumiy yechim** bo’ladi. Demak to’liq differensialli bo’lmagan tenglamani integrallovchi ko’paytuvchisini topa olsak uni integrallay olamiz. Endi (1) tenlamani faqat x ga bog’liq integrallovchi ko’paytuvchisini qidiramiz.

$$\mu(x)M(x, y)dx + \mu(x)N(x, y)dy = 0$$

tenglama to’liq differensialli bo’lishi uchun $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ tenglik o’rinli bo’lishi zarur va yetarli. Bunga ko’ra:

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{d\mu}{dx} N\,;$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \cdot dx$$

Bu tenglikni chap tomoni faqat x ga bog’liq. Demak yuqoridagi tenglik ma’noga ega bo’lishi, ya’ni (1) tenglama $\mu(x)$ ko’rinishdagi integraloovchi ko’paytuvchiga ega bo'lishi uchun $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=p(x)$ kasr faqat x ga bog'liq bo'lishi zarur. Bu holda integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ formula bilan aniqlanadi.

Yuqoridagiga o'xshash mulohazalar yuritib (1) tenglama $\mu(y)$ ko'rinishdagi integraloovchi ko'paytuvchiga ega bo'lishi uchun $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=q(y)$ kasr faqat y ga bog'liq bo'lishi zarurligini va integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(y)=e^{\int q(y)dy}$ formula bilan topilishini aniqlash mumkin.

Takidlash joizki (1) tenglama $\mu(x,y)$ integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsa uning **mahsus yechimi** $\dfrac{1}{\mu(x,y)}=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyalar orasidan qidiriladi.

Misol. $(xy^2-y)dx+xdy=0$ tenglamani qaraylik. Bu yerda

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{2(xy-1)}{xy^2-y}=\frac{2}{y}$$

Demak berilgan tenglama $\mu(y)=e^{\int\frac{2dy}{y}}=y^{-2}$ integrallovchi ko'paytuvchiga ega. Berilgan tenglamani y^{-2} ga ko'paytiramiz:

$$(x-\frac{1}{y})dx+\frac{x}{y^2}dy=0$$

Bu tenglamaning umumiy yechimini yozamiz: $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{y}=C$. Berilgan tenglama mahsus yechimga ega, chunki $\dfrac{1}{\mu(x,y)}=y^2=0$ tenglikni va tenglamani o'zini $y=0$ funksiya qanoatlantiradi.

Javob: $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{y}=C$, $y=0$.