ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР НАЗАРИЯСИ

фани бўйича ўқув услубий мажмуа.

Гулистон-2011

С.Қосимов “Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси” фани бўйича замонавий педагогик технология асосида ёзилган мажмуа, 80 бет, Гулистон 2011 й.

ГулДУнинг ўқув-методикасининг (2-сонли байённомаси, 26.10.2010 й)
йиғилиши қарори билан нашрга тавсия этилган.

Ушбу мажмуа ҳозирги дастур асосида жойлашган бўлиб, 5440100-физика ва 5460100-математика таълим йўналиши бўйича таълим олаётган талабалар учун мўлжалланган. Бу ўқув услубий мажмуада: Комплекс текислик, узлуксиз ва аналтик функциялар, функцияни дифференциаллаш ва интеграллаш, қаторлар, чегирма ва уни қўллаш, мавзуларини баён қилган. Ҳар бир мавзуда мисоллар ечилган назорат ва мустақил топшириқлар берилган.

Тузувчи: Физика математика фанлари номзоди, доц. С.Қосимов.

Тақризчи: Физика математика фанлари номзоди, доц.Г. Ғоймназаров.
С.Қосимов. Учобно-методический комплекс по предмету., Теория функции комплексного переменого, Гулистан 2011, 80 стр.

Учебно-методический комплекс подкотовлен на основе дейстувющей программой и предназначен для студентов обучающие по специальности 5440100-физика, 5460100-математика
В учебное методическом комплекс изложены темы: комплексый плоскости, кирывий и области функции, дифференцруюмисть, интегрируемости функции ряды, вычеты и их приложения

Мундарижа.

Кириш

Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси (КЎФН), математиканинг амалда кўп қўлланиладиган тармоқларидан бири. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси мавзуларига бағишланган ушбу мажмуа тўққизта влоҳида маърузаларни ўз ичига олади. Биринчи маърузада комплекс текислик ва шу текисликдаги берилган функциянинг асосий хоссаларига бағишланган.

Иккинчи маърузада конформ акслантирувчи элементлар функциялар қаралган. Бу функцияларнинг турли хил акслантириш соҳалари кўрсатилган. Шулар ичида энг муҳими Жуковский функцияси ёрдамида акслантиришдир. Бу функция бирлик доирани турли соҳаларга акслантиради.

Учинчи маъруза комплекс функциядан олинган интешралга Коши теоремаси, интеграл формуласи ва Тейлор қатори коэффициентлари учун. Ниҳорят охирги маърузаларда махсус нуқталар синфи аниқланган, бу нуқта атрофида функция Лоран қаторига ёйилиши кўрсатилган. Охирги мавзу чегирмалар назарияси ва уни қўллашга бағишланган.

Мажмуа КЎФН дастурига мос келади.

Фаннинг мақсади: Математика йўналиши бўйича тахсил олаётган талабаларни комплекс ўзгарувчили функцияларнинг асосий хоссаларини ва бу хоссаларни алоҳида қўллашни ўргатишдир.

1. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанини мақсад ва вазифалари.

1.1. **Фаннинг вазифаси:** Комплекс ўзгарувчили функцияни дифференциаллаш, интеграллашни ва хосмас интегралларни ҳисоблашга қўллаш билан чуқур таништиришдир.

1.2. Фаннинг якунида талабалар, функцияни регулярликка топширилади, функциялар ёрдамида акслантиришлар бажарилади, интегралларни ҳисобланади.

1.3. Фанни ўрганишда ҳақиқий ўзгарувчили функцияларнинг хоссаларидан фойдаланилади.

Фаннинг мазмуни.

Лекция мавзулари, кўриладиган масалалар ва вақт.

№	Мавзу	Кўриладиган масалалар	Вақт, соат
1.	Комплекс текислик.	Комплекс сонлар устида амаллар. Комплекс текислик. Стерегрaфик акслантириш. Комплекс текисликда чизиқлар ва соҳалар.	4
2.	Комплекс ўзгарувчили функция.	Функциянинг лимити ва узликсизлиги, дифференциалланувчанлиги. Коши-Риман шарти.	4

		Гомоморф функция тушунчаси. Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси. Конформ акслантириш.	4
3.	Элементар функциялар ёрдамида акслантириш.	Чизиқли функция. Каср-чизиқли функция ва унинг асосий хоссалари.	4
		Жуковский функцияси. Даражали ва кўрсаткичли функция.	4
		Логорифмик, тригонометрик ва тескари тригонометрик функциялар.	4
4.	Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интеграл.	Асосий лемма. Коши теоремаси.	2
		Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Кошининг интеграл формуласи. Коши типидаги интеграл.	4
		Морера теоремаси. Гармоник функциялар. Модулнинг максимум принципи. Шварц леммаси.	4
5.	Даражали қаторлар. Тейлор қатори.	Даражали қатор. Коши-Адамар теоремаси. Яқинлашиш соҳаси. Тейлор қатори. Функцияни Тейлор қаторига ёйиш.	4
		Коши тенгсизлиги. Лиувилл теоремаси. Ягоналик теоремаси. Бутун ва мероморф функциялар.	4
6.	Лоран қатори. Чегирмалар назариячси.	Лоран қатори, унинг тўғри ва бош қисми.	2
		Махсус нуталар, улар атрофида функциянинг ҳолати. Чегирма. Чегирман ҳисоблаш.	4
		Чегирмалар назариясининг тадбиқлари. Жордан леммаси. Аргумент принципи. Руше теоремаси.	4
	Жами:		52

Талабаларнинг мустақил ишлари.

№	Мавзу	Кўриладиган масалалар	Вақт соат
1	Комплекс сонлар	Комплекс сонларни қўшиш ва айиришни геометрик ифодалаш 1/а сонли геометрик ифодаси. Комплекс сонларни кўпайтириш	

		ва бўлишни геометрик ифодаланг. Сонлар кетма-кетлигининг лимити. Чегараланган ва чегараланмаган кетма-кетликлар. Лимитнинг асосий хоссалари. Коши критерияси. Қатор. Қатор яқинлашишнинг зарурий шарти. Қаторнинг абсолют яқинлашиши.	8
2	Акслантиришлар	Юқори ярим текисликнинг ўзини-ўзига акслантириш. Доирани ўз-ўзига акслантириш. Гиперболик функция. Тескари тригонометрик функция. Тескари функция. Кўрсаткичли функциянинг Риман сирти. Логарифмик функциянинг Риман сирти синус ва арксинусни Риман сирти.	8
3	Интеграл	Логарифмик функцияни интеграл орқали ифодалаш Коши типидаги интегралнинг чегаравайй қиймати. Сохоцкий формуласи. Пуассон ва Шварц интеграллар.	8
	Жами:		24

Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар.

№	Мавзу	Машқлар	Вақт, соат
1	Комплекс аргументли функциялар	30-34, 80-85, 60-70	4
2	Интеграл	40-50, 60-70	4
3	Қаторлар	140-150	2
4	Чегирмани қўллаш	170-180, 236-244	4

Асосий адабиётлар:

1. Саъдуллаев А, Худайберганов Г, Ворисов А.К., Мансуров Х.Т., Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ). 3 қисм, “Ўзбекистон” 2000.
2. Шабат. Введение в комплекснўй анализ. М., Наука 1985.

Фанниуг рейтинг ишланмаси ва баҳолаш мезони.

1.Рейтинг ишланмаси.

Назорат турлари.	Назорат сони	Ажратилган балл	Жами.
1.Жорий назорат: 1.Амалий машғулотларни бажариш.	10	2	20
2.Уйга вазифани бажариш.	10	2	20
3.Мустақил иш (реферат)	1	10	10
Жами			**50**
2.Оралиқ назорат:			
1.Ёзма иш	2	10	20
Жами			**20**
3.Якуний назорат:			
1.Тест ёки ёзма иш	1	30	30
Жами			100

4.2.Баҳолаш мезонлари.

1.Жорий баҳолаш бўйича:

1.1.Амалий машғулотларга қатнашиб,берилган топшириқларни тўла бажарган талабага 2 балл,агар тўла бўлмаса, 1,2-1,8 балл берилади.
1.2.Уйга вазифани тўла бажарган талабага 2 балл,тўла бажармаган бўлса бажарилиш сифатига қараб 1,5-1,8 балл берилади.
1.3.Мустақил ишлар учун,1-пункт мустақил ишлари талабалар учун ихтёрий мавзуда бажарилади, бажарилган ишларнинг сифатига қараб жами 6,5 балл берилади,2-пункт мустақил ишларида талабаларга мавзулар ажратиб берилади, жами 5 балл. .

2.Оралиқ назорат

1 Назорат ишлари икки мара олинади, берилган топшириқларни тўла бажарган талабага 10 балл,агар тўла бўлмаса 1-9 балл берилади.

3.Якуний назорат

1Якуний назорат ёзма иш шаклида олинади, максимум 15 баллгача тўпланиши мумкин.

КОМПЛЕКС ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР НАЗАРИЯСИ ФАНИ БЎЙИЧА ТАЪЛИМ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИНИ ИШЛАБ ЧИҚИШНИНГ КОНЦЕПТУАЛ АСОСЛАРИ

Билим олиш жараёни билан боғлиқ таълим сифатини белгиловчи ҳолатлар: дарсни юқори илмий-педагогик даражада ташкил этилиши, муаммоли машғулотлар ўтказиш, дарсларни савол-жавоб тарзида қизиқарли ташкил қилиш, илғор педагогик технологиялардан ва мультимедиа қўлланмалардан фойдаланиш, тингловчиларни мустақил фикрлашга ундайдиган, ўйлантирадиган муаммоларни улар олдига қўйиш, талабчанлик, тингловчилар билан индивидуал ишлаш, ижодкорликка йўналтириш, эркин мулоқотга киришишга, илмий изланишга жалб қилиш ва бошқа тадбирлар таълим устуворлигини таъминлайди. Таълим самарадорлигини орттиришда фанлар бўйича таълим технологиясини ишлаб чиқишнинг концепцияси аниқ белгиланиш ва унга амал қилиши ижобий натижа беради. Фанни ўқитишнинг мақсади ва таълим бериш технологиясини лойиҳалаштиришдаги асосий концептуал ёндашувлар қуйидагилардан иборат.

Фаннинг мақсади. 5440100-физика, 5460100-математика таълим йўналишларида таҳсил олаётган талабаларга комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанини тўлароқ очиб бериш, унинг қўллаш билан таништиришдир.

Фанни ўқитишнинг вазифалари. Комплекс текислик, стреогарфик акслантириш, космплекс ўзгарувчили функция ва унинг ҳосиласи, интеграли. қторлар тўғрисида тушунчалар беришдир.

Шахсга йўналтирилган таълим. Ўз моҳиятига кўра таълим жараёнининг барча иштирокчиларини тўлақонли ривожланишларини кўзда тутади. Бу эса таълимни лойиҳалаштирилаётганда, албатта, маълум бир таълим олувчининг шахсини эмас, аввало, келгусидаги мутахассислик фаолияти билан боғлиқ ўқиш мақсадларидан келиб чиққан ҳолда ёндошишга эътибор қаратишни амалга оширади. Ҳар бир талабанинг шахс сифатида касбий такомиллашувини таъминлайди. Таълимнинг марказига билим олувчи қўйилади.

Тизимли ёндошув. Таълим технологияси тизимнинг барча белгиларини ўзида мужассам этмоғи лозим: жараённинг мантиқийлиги, унинг барча бўғинларини ўзаро боғланганлиги, яхлитлиги билим олиш ва касб эгаллашнинг мукаммал бўлишига ҳисса қўшади.

Фаолиятга йўналтирилган ёндошув. Шахснинг жараёнли сифатларини шакллантиришга, таълим олувчининг фаолиятини жадаллаштириш ва интенсивлаштириш, ўқув жараёнида барча қобилият ва имкониятларни, ташаббускорликни очишга йўналтирилган таълимни ифодалайди. Эгалланган билимларнинг кўникма ва малакага айланиши, амалиётда татбиқ этилишига шароит яратади.

Диалогик ёндошув. Бу ёндошув ўқув жараёни иштирокчиларининг психологик бирлиги ва ўзаро муносабатларини яратиш заруриятини билдиради. Ўқитувчи ва талабанинг ҳамкорликдаги таълимий фаолият юритишига замин яратади.

Ҳамкорликдаги таълимни ташкил этиш. Демократлилик, тенглик, таълим берувчи ва таълим олувчи ўртасидаги субъектив муносабатларда ҳамкорликни, мақсад ва фаолият мазмунини шакллантиришда эришилган натижаларни баҳолашда биргаликда ишлашни жорий этишга эътиборни қаратиш зарурлигини билдиради. Таълим жараёнида “субъект-субъект” муносабатлари таркиб топади.

Муаммоли таълим. Таълим мазмунини муаммоли тарзда тақдим қилиш орқали таълим олувчи фаолиятини активлаштириш усулларидан бири. Бунда илмий билимни объектив қарама-қаршилиги ва уни ҳал этиш усулларини, диалектик мушоҳадани шакллантириш ва ривожлантиришни, амалий фаолиятга уларни ижодий тарзда қўллашни таъминлайди. Муаммоли савол, вазифа, топшириқ ва вазиятлар яратиш ва уларга ечим топиш жараёнида онгли, ижодий, мустақил фикрлашга ўргатилади.

Ахборотни тақдим қилишнинг замонавий воситалари ва усулларини қўллаш - ҳозирги ахборот коммуникация технология васиталари кучли ривожланган шароитда улардан тўғри ва самарали фойдаланиш, ахборотларни танлаш, саралаш, сақлаш, қайта ифодалаш кўникмалари ҳосил қилинади. Бу жараёнда компьютер саводхонлиги алоҳида аҳамият касб этади.

Ўқитишнинг методлари ва техникаси. Маъруза (кириш, мавзуга оид визуаллаш, тақдимот, баҳс) муаммовий усул, кейс-стади, пинборд, лойиҳа ва амалий ишлаш усуллари. Интерфаол усулларни мавзунинг мазмунига мос ҳолда танлаш ва улардан самарали фойдаланишга ўргатади.

Ўқитиш воситалари: ўқитишнинг анъанавий воситалари (дарслик, маъруза матни, кўргазмали қуроллар, харита ва бошқалар) билан бир қаторда – компьютер ва ахборот технология воситалари кенг кўламда татбиқ этилади.

Коммуникация усуллари: тингловчилар билан оператив икки ёқлама (тескари) алоқага асосланган бевосита ўзаро муносабатларнинг йўлга қўйилиши.

Тескари алоқа усуллари ва воситалари: кузатиш, блиц-сўров, жорий, оралиқ ва якунловчи назорат натижаларини таҳлили асосида ўқитиш диагностикаси амалга оширилади. Таълим жараёнида кафолатланган натижага эришиш таъминланади.

Бошқариш усуллари ва тартиби: ўқув машғулоти босқичларини белгилаб берувчи технологик харита кўринишидаги ўқув машғулотларини режалаштириш, қўйилган мақсадга эришишда ўқитувчи ва тингловчининг биргаликдаги ҳаракати, нафақат аудитория машғулотлари, балки аудиториядан ташқари мустақил ишларнинг назорати ҳам тартибли йўлга қўйилади.

Мониторинг ва баҳолаш: ўқув машғулотида ҳам бутун курс давомида ҳам ўқитишнинг наитижаларини режа асосида назорат ва таҳлил қилиб борилади. Курс охирида ёзма, оғзаки ёки тест топшириқлари ёрдамида тингловчиларнинг билимлари баҳоланади. Баҳоларнинг ҳаққоний бўлишига, ошкоралигига алоҳида эътибор қаратилади.

1-Мавзу: Комплекс текислик. Комплекс текисликда эгри чизиқ ва соҳа
Фанни ўқитиш технологияси:
“Комплекс текислик. Комплекс текисликда эгри чизиқ ва соҳа” мавзусидаги маъруза машғулотининг технологик харитаси

Т\р	Босқич ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Тайёрлов босқичи:** **1.1.Дарс мақсади:** Комплекс сонни киритиш ва ҳақиқий сон билан алоқа ўрнатиш. 1.1.2. Комплекс текислик тузиш. 1.1.3. Комплекс сонни тригонометрик кўринишда ифодалаш. 1.1.4. Сфера ва текислик орасида бир қийматли мослик ўрнатиш. **1.2. Идентив ўқув мақсади:** 1.2.1. Комплекс сонни текисликда жойлаштиради. 1.2.2. Комплекс сонни тригонометрик кўринишда ёзади. 1.2.3. Комплекс сонни оргументи ва модулини ҳисоблайди: 1.2.4. Комплекс текислик ва сфера нуқталари орасида мослик ўрнатади. **1.3. Асосий тушунча ва иборалар:** Комплекс сон мавҳум бирлик, комплекс сонниng модули ва оргументи, комплекс сонниng тригонометрик кўриниши, бир қийматли мослик, кенгайтирилган текислик, стереографик акслантириш. **1.4.Дас шакли:** Маъруза **1.5. Фойдаланилган метод ва усуллар:** суҳбат маъруза, тақдимот.	Ўқитувчи 10 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи:** 2.1. Мавзу эълон қилинади. 2.2. Маъруза бошланади, асосий қисмлари баён қилинади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Талабаларга муаммоли савол берилади. 3.2. Талабаларнинг фикри эшитилади, бахс ташкиллаштирилади. 3.3.Умумий хулоса чиқарилади ва тўғрилиги текширилади. 3.4. Умумий хулоса қилинади.	Ўқитувчи-талаба 40 минут

4	**Мустаҳкамлаш ва баҳолаш босқичи:** 4.1. Талабалрга бериладиган саволлар - Комплекс сон нима? - Ҳақиқий сондан фарқи нимада? - Тригонометрик кўринишини ёзиб кўрсат. - Кенгайтирилган текислик қандай? - Стреографик акслантириш қандай бажарилади? - Акслантириш формулаларини биласанми?	Ўқитувчи 10 минут
	Энг фаол талаба баҳоланади (баҳолаш мезони асосида) 42.	
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Талабалар билими таҳлил қилинади. 5.2. Мустақил иш топшириқлари берилади. Комплекс текислик ва Декорт кордикарт системасини таққосланг. Қандай кўринишдаги комплекс сонлар устидаги амаллар енгиллашади? 5.3. Ўқитувчи ўз фаолиятини таҳлил қилади ва тегишли ўзгартиришлар киритади.	Ўқитувчи 10 минут

Асосий саволлар.

1. Комплекс текистлик.
2. Комплекс текисликда эгри чизиқ ва соҳа.

Мавзуга оид таянч тушунчалар ва иборалар

Комплекс сон, мавхум бирлик,комплекс соннинг модули ва аргументи, комплекс соннинг тригонометрик шакли, бир кийматли мослик,кенгайтирилган текислик, стереографик акслантириш,эгри чизиқ,соҳа.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Комплекс сонни турли кўринишларда ифодалаш.
2.Комплекс сонни текисликда тасвирлаш.
3.Сфера ва текисликнинг нуқталарини ўзаро мос келтирувчи формулаларни келтириб чиқариш.
4.Чексиз узоқлашган нуқтани киритиш.
5.Эгри чизиихларни турларини аниқлаш.
6.Боғламли соҳаларни тушунтириш.

1-савол бўйича дарс мақсади:

1.Комплекс сонни киритиш ва ҳакикий сон билан алоқа ўрнатиш.
2.Комплекс текисликни тузиш ва бошқа текисликлардан фарқини тушунтириш.
3.Комплекс сонни алгебраик ва тригонометрик кўринишлари орасидаги боғланишни ўрганиш.

Идентив ўкув мақсадлари.

1. Комплекс сонни қисмларини изохлайди.
2. Стереографик акслантиришни бажаради.

1-савол баёни:

$z = x + yi$ кўринишидаги сонлар тўпламини қарайлик, бу ерда x ва y ҳакикий сонлар.Бу тўпламни С билан белгилаймиз.

$z = x + yi$ сонга комплекс сон дейилади, х га комплекс соннинг ҳакикий кисми дейилади ва $x = \operatorname{Re} z$ каби белгиланади.(Rez- лотинчаси Realis-ҳакикий сўзининг бошланғич ҳарфлари), y га эса комплекс соннинг мавҳум қисмнинг коэффицентли дейилади ва $y = imz$ каби белгиланади.(Im-лотинча imaginarius мавҳум сузининг бошланғич ҳарфлари) $i^2 = -1$га мавҳум бирлик дейилади.

С тўпламда ҳам туртта арифметик амал , ҳакикий сонлар тўпламидагидек бажарилади. Ҳақиқий сонли комплекс сонга кўпайтириш эса векторлар назариясидаги каби бажарилади. Арифметик амалларга нисбатан С комплекс сонлар майдонини ташкил қилади.

$z = x + yi$ С комплекс сонга Е вклид текислигидаги (х,у) нуқтани мос келтирамиз, x - ҳакикий Ох ўкка yi эса ордината ўки, масштаб бирлиги сифатида i мавҳум бирлик олинади.

Агар $z = x + yi$ вектор берилса , яъни С ни вектор майдон деб ҳаралса, унга комплекс текисликлар, радиус вектор мос келади,шу векторнинг учи комплекс сонга мос келади.

Векторнинг узунлиги $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ дан иборат бўлади ва бунга комплекс соннинг модули деб юритилади. Векторнинг обцисса ўки билан ҳосил қилган бурчакни эса φ билан белгилаймиз. φ arctgy/x. Бунга комплекс соннинг аргументи дейилади ва argz кўринишда ҳам белгиланади. Бу ерда argz даврий булиб, 2πк даврга эга,к∈Z,яъни $z = 0$ нукта учун аргумент аникланмаган.ONZ тўгри бурчакли учбурчакдан:

$$x = |z|\cos\varphi, \quad y = |z|\sin\varphi, \qquad (1.1)$$

ларни топамиз. Бу эса координаталар билан комплекс соннинг модули ва аргументи орасидаги боғланишни ифодалайди.

(1.1)ни этиборга олиб $z = x + iy$ комплекс сонни куйидагича ёзиш мумкин:

$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi \quad (1.2)$$

(1,2) га комплекс соннинг тригонометрик кўриниши дейилади.

Стереографик акслантириш.

Координаталари (ξ, η, ς) бўлган Евклид фазосида маркази (0,0,1/2) нуқтада бўлиб. радиуси ½ га тенг бўлган S сфера оламиз

S сферани C комплекс текислик устига шундай ҳўямизки, текисликнинг x обциссаси фазонинг ξ ўқи билан, ордината ўқи y эса η ўқи билан усстма-уст тушсин. ς ўқи эса текисликдаги координат бошидан ўтиб. Текисликка перпендикуляр бўлсин.

S сферанинг шимолий қутби P(0,0,1) нуқта бўлсин. P(0,0,1) нуқтадан S сферанинг M(ξ,η,ς) нуқтаси орқали ўтувчи нур чиқарамиз.PM нурнинг C комплекс текислик билан кесишиш нуқтасини $z = x + yi$ билан белгилаймиз. P(0,0,1), M(ξ,η,ς) ва $z = x + yi$ нуқталар
битта тўғри чизиқда ётганлиги учун

$$\xi / x = \eta / y = (\varsigma - 1)/(-1).$$

Бундан, $x = \xi/(1-\varsigma), \quad y = \eta/(1-\tau), \quad z = (\xi + i\eta)/(1-\varsigma)$ (2.1)

S сферанинг тенгламаси $\xi + \eta + (\varsigma - 1/2) = 1/4$

ёки $$\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2 - \varsigma = 0$$

$$|z| = (\xi^2 + \eta^2)/(1-\varsigma)^2$$

эканлигини эътиборга олиб, (2.1) дан

$$|z|^2 = \varsigma/(1-\varsigma)\ , \ \varsigma = |z|^2/(1 = |z|)^2$$

формулани топамиз. ς нинг қийматини (2.3) дан (2.2) га қўямиз:

$$\xi = x/(1+|z|^2), \ \eta = y/(1+|z|^2) \qquad (2.4)$$

(2.3) ва (2.4) формулаларга стереографик акслантириш формулалари дейилади. S сферанинг P(0,0,1) шимолий қутбига “чексиз узоқлашган нуқта $z = \infty$ мос келади

C текисликка $z = \infty$ киритилса, кенгайтирилган текислик дейилади ва $\overline{C}$ каби белгиланади. S сферага Риман сфераси дейилади.

Назорат топшириқлари:

1.Комплекс текисликни Декарт координат системаси билан солиштириш.
2.Қайси кўринишдаги комплекс сон устида амалларни бажариш осонлашишини аниқлаш.

2-савол бўйича дарс мақсади:

Талабаларга эгри чизаҳларни турларга ажратишни ўргатиш. Соҳаларнинг фарқини тушунтириш. Функциянинг асосий хоссаларини исботлаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.Эгри чизиқ турларини билади.
2.Соҳани чиза олади.
3.Функциянинг хоссаларини тушунтиради.

2-савол баёни:

С текисликда Г эгри чизиқ $z(t) = x(\iota) + iy(\iota)$ тенглама билан берилган бўлсин. Агар $x(\iota)$ ва $y(\iota)$ узилиш нуқталарига эга бўлса, унга мос эгри чизиқ узилишга эга бўлади.

Агар $x(\iota)$ ва $y(\iota)$ узликсиз бўлса Г эгри чизиқ ҳам узликсиз бўлади. Узликсиз эгри чизиқ каррали нуқталарга эга бўлиши мумкин.

Таъриф 2.1. Агар Г эгри чизиқ карали нуқталарга эга бўлмаса. Бу чизиқҳа Жордан чизиғи дейилади. Жордан чизиғининг параметрик тенгламаси

$$x = x(t),$$
$$y = y(t)$$
$$\iota \in [\alpha, \beta]$$

бўлсин. Агар $x(\alpha) = y(\alpha), x(\beta) = y(\beta)$ бўлса, у ҳолда Жордон чизиғи ёпиқ дейилади. Ёпиқ Жордон чизиғи С текисликни иккита қисмга бўлади, ички ва ташқи қисмларга Жордан чизиғи билан чегараланган соҳа шундай хусусиятга эгаки,унинг ичида ихтиёрий ёпиқ чизиқ олсак,у билан чегараланган соҳа берилган соҳага тегишли бўлади. Бундай хусусиятга эга бўлган соҳага бир боғламли соҳа дейилади, акс ҳолда кўп боғламли соҳа дейилади. Баъзи ҳолларда Жордан эгри чизиғидан фойдаланиш қийин бўлади. Бу ҳолларда қўшимча шартлар киритилади.

Таьриф2.2. Агар Г эгри чизиқ тенгламаси учун $z'(\iota)$ узликсиз (чекка нуқталарида бир томонли) хосилага эга бўлса, Г силлиқ эгри чизиқ дейилади. Эгри чизиқнинг силлиқлиги шу эгри чизиққа ўтказилган уринманинг мавжудлиги ва эгри чизиқ бўйича ҳаракатланганда уринма ҳам узликсиз айланишига эквивалентдир. Силлиқ бўлаклардан иборат эгри чизиққа бўлакли силлиқ эгри чизиқ дейилади.

Таьриф 2.3. Агар ихтиёрий $\alpha = \iota_1 \prec \iota_2 \prec \iota_3 \prec \ldots \prec \iota_{m=1} = \beta$ бўлиниш учун

$$\sum_{k=1}^{n} | z(\iota_{k=1}) - z(\iota_k) | \qquad (2.1)$$

йиғинди чегараланган бўлса, $z = x(t) + iy(t)$ (2.2)

тенгламага мос келувчи Г эгри чизиқ тўғриланувчи дейилади. Ҳар қандай $\iota_{1,}, \iota_2, ..., \iota_n$ бўлиниш учун олинган (2.1) йиғиндининг юқори чегараси Г эгри чизиқ ёйининг узунлиги дейилади.

Таьриф 2.4. Агар Г эгри чизиқ (2.2) тенглама билан берилган бўлиб,

$$z(\iota) = c_1 + c_2(\iota - \iota_0) + ...,$$

даражали қатор яқинлашса, Г эгри чизиқ аналитик эгри чизиқ дейилади.Чекли сондаги аналитик эгри чизиқлардан тузилган чизиққа бўлакли аналитик эгри чизиқ дейилади. С комплекс текисликда D тўплам берилган бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon \succ 0$ сон учун $\rho(z.z_0) \prec \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи z ларга z_0 нуқтанинг атрофи дейилади ва $O_\varepsilon(Z_0)$ каби белгиланади. $z_0 \in D$ нуқта D тўпламга ўз атрофи билан тегишли бўлса, z_0 нуқта Dтўпламнинг ички нуқтаси дейилади. Ҳамма нуқталари ички нуқталардан иборат тўплам D очиқ тўплам дейилади. Агар z_0 нуқтанинг атрофида D га тегишли ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд бўлса, z_0 нукта D тўпламнинг чегара нуқтаси дейилади. Ҳамма нуқталари чегара нуқталардан иборат тўпламга, D тўпламнинг чегараси дейилади. D ва унинг чегарасидан ташкил топган тўпламга ёпиқ тўплам дейилади.

Таьриф2.5. D тўпламга соҳа дейилади агар қуйидаги шартлар бажарилса:

1.D очиқ бўлса,

2.D нинг ихтиёрий иккита нуқтасини шу тўпламдан чиқмайдиган синиқ чизиқ билан туташтириш мумкин бўлса.

Кенгайтирилган комплекс текисликдан ташқари ҳамма текистликлар чегараланган бўлади. Лекин ҳар қандай соҳа ташқи нуқталарга эга бўлавермайди. Масалан: D соҳанинг чегараси бир неча нуқталардан иборат бўлса, унинг ташқи нуқтаси мавжуд эмас.

Мисол. $|z\text{-}a| \prec R$ тенгсизлик билан берилгааан соҳа бир боғламли.

Мисол.$r \succ |z-a| \prec R$ ҳолқа икки боғламли соҳадир.

Назорат топшириқлари:

1.1.1.Комплекс соннинг кўринишини ёзинг.
1.1.2.Комплекс сонни қақиқий ва мавҳум қисмларга ажратинг.
1.1.3.Мавҳум бирлик нима,?
1.1.4.Комплекс сонни модули формуласини келтириб чиқаринг.
1.1.5.Комплекс соннинг аргументи формуласини келтириб чиқаринг.
1.2.1..Комплекс соннинг тригонометрик кўринишини ёзинг.
1.2.2..Стереографик акслантириш нима?
1.2.3..Текислик нуқтасига сфера нуқтасини мос келтирувчи формулаларни келтириб чиқаринг.
1.2.4..Сфера нуқталарига текистлик нуқталарини мос келтирувчи формулаларни келтириб чиқаринг.
2.1.1..Текисликдаги эгри чизиқ турларини тенгламаларига кўра Аниқланг.
2.1.2.Эгри чизиқ тенгламаларига қандай шартлар қўйилади?
2.1.3..Нуқтани атрофии деганда нима тушунилади?
2.1.4..Ички,ташҳи,чегара тухҳаларни Аниқланг.
2.2.1.Жордан чизиғини чизиб кўрсатинг.
2.2.2.Мусбат ва манфий йўналишларни Аниқланг.
2.2.3..Соҳани таърифини айтинг.
2.2.4..Кўп боғламли соҳани тушунтиринг.

Мавзу бўйича ечимини кутаётган муаммолар:

1.Комплекс сонни сферада тасвирлаш.
2.Чегараси силлиқ бўлмаган соҳаларда функциянинг ҳоссаларини ўрганиш.
3.Турли сиртларнинг тенгламаларини тузиб, тахлил қилиш.

в) Амалий машғулотни тузилиши:

1-амалий машғулот.Комплекс текислик.

Дарснинг мақсади:

1.Комплекс соннинг модули ва аргументини ҳисоблаш.
2.Комплекс сонни текисликда тасвирлаш.

Идентив ўқув мақсадлари:
1.1.Комплекс соннинг модули ва аргументини ҳисоблайди.
1.2 Комплекс сонни текисликда тасвирлайди.

Амалий машғулотни бажариш учун намуналар:

Мисол 1. $z=\frac{(1+i)(1-2i)}{1-i}$ соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг.

Ечиш. Сурат ва махражини мажражининг ҳўшмасига кўпайтирамиз.:

$$\frac{(1+i)(1-2i)}{1-i}=\frac{(1+i)(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2(1-2i)}{1-i^2}=i-2i^2=i+2$$

Мисол 2. $z=2-i$ ни текисликда тасвирланг.

Ечиш. Комплекс текисликда (2;-1) нуқтани белгилаймиз.

Мисол 3. $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ ни тригонометрик кўринишда ёзинг.

Ечиш. $REz=x=1-\cos\alpha, \operatorname{Im} z=y=\sin\alpha,$ Комплекс соннинг модули ва аргументини топиш формулаларидан фойдаланамиз:

$$r=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\phi=arctg\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=arctg\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=arctgtg(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})=\frac{\pi-\alpha}{2}$$

Демак, $z=2\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2})$.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар:[1],1-боб,1-9,14-19 машқларнинг а) бўлимлари.
Уйга вазифа учун машқлар: [1],1-боб,1-9,14-19машқларнинг б) бўлимлари.

Адабиётлар.

1.Саъдуллаев А., Худойберганов Г.,Мансуров Ҳ.,Ворисов А.,Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм,Т.,»Ўзбекистон»,2000.

2-амалий машғулот. Комплекс текисликда эгри чизиқ ва соҳа.

Дарснинг мақсади.

1. Текисликда эгри чизиқларни тенгламаларига кўра чизиш.
2. Текисликда соҳаларни тасвирлаш.

Идентив ўқув мақсадлари.

2.1. Текисликда эгри чизиқни тенглама асосида чизади.
2.2. Берилган соҳаларни текисликда тасвирлайди.

Амалий машғулотни бажариш учун номуналар.

Мисол 1. $z = \begin{matrix} e^{\pi i t}, 0 \le t < 1, \\ t-2, 1 \le t \le 3 \end{matrix}$ тенглама билан берилган эгри чизиқни чизинг.

Ечиш.Модули ва аргументини топамиз: $z = e^{\pi i t} = \cos\pi t + i\sin\pi t,$

$$|z| = \sqrt{\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t} = 1, \ 0 \le \phi < \pi \ .$$

Демак, эгри чизиқ бирлик айлананинг юқори ярим текисликдаги бўлаги.
Энди функциянинг иккинчи тармоғини қараймиз; $z = x - 2$, $1 \le \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z = 0,$ яъни ҳақиқий ўқдаги [-1,1] кесмадан иборат.

Мисол 2. $0 < |z+i| < 2,$ шартни қаноатлантирувчи нуҳиаларнинг геометрик ўрнини топинг.

Ечиш. $0 < \sqrt{x^2 + (e+1)^2}$ <2, $0 \prec x^2 + (y+1)^2 \prec 4$.

Демак, соҳа маркази(0,-1) нуқтада бўлиб, радиуси 2 га тенг бўлган доиранинг zҳ0 нуқтадан ташқарии қисми.
Ўқув хонасида бажариш учун машқлар: [1],1-боб,40-50 машқларнинг тоҳлари,70-80 машқларнинг а) бўлумлари.
Уйга вазифа учун машқлар:[1],1-боб,40-50 жуфтлари,70-80 б)бўлумлари.

Адабиёт.

1.Саъдуллаев А., Худойбершанов Г.,Мансуров Ҳ.,Ворисов А., Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм,Т.»Ўзбекистон»2000.

2-Мавзу: Комплекс ўзгарувчили функция

Фанни ўқитиш технологияси:

“Комплекс ўзгарувчили функция” мавзусидаги маъруза машғулотининг технологик харитаси

Т\р	Босқич ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Тайёрлов босқичи:** **1.1.Дарс мақсади:** Комплекс ўзгарувчили функцияни аниқлаш, лимитини ҳисоблаш, узлуксизликка текшириш. Хоссаларини ўрганиш. **1.2. Идентив ўқув мақсади:** 1.2.1. Комплекс ўзгарувчили функцияни билади. 1.2.2. Лимитни ҳисоблайди. 1.2.3. Узлуксизликка текширади. 1.2.4. Хоссаларни ҳисоблайди. **1.3. Асосий тушунча:** Комплекс функцияни аниқлаш соҳаси, қийматлар соҳаси, лимит, узлуксиз хоссалар.. **1.4.Дарс шакли:** Маъруза **1.5. Фойдаланиладиган метод ва усуллар:** тақдимот, бахс, мунозара, ақлий ҳужум. **1.6. Керакли жиҳоз ва воситалар:** Компьютер, видиопроектор.	Ўқитувчи 10 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи:** 2.1. Мавзу эълон қилинади. 2.2. Ҳақиқий ўзгарувчили функция сўралади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Талабалардан функция тушунчаси сўралади. 3.2. Функция ҳақида, лимит ва узлуксизлик ҳақида бахс ташкил қилинади. 3.3.Хоссалар исбот қилинади. 3.4. Функциянинг амалий тадбиқи айтилади.	Ўқитувчи-талаба 45 минут
4	**Мустаҳкамлаш ва баҳолаш босқичи:** 4.1. Функцияни таърифлаш. 4.2. Лимит қандай ҳисобланади? 4.3. Узлуксизликни таърифини беринг. 4.4.Узлуксиз функция хоссаларини исботланг.	Ўқитувчи 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсадга эришилганлик таҳлил қилинади. 5.2. Мустақил иш вазифа сифатида уйга берилади. 5.3. Ўқитувчи ўз фаолиятини таҳлил қилади ва тегишли ўзгартиришлар киритади.	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

1.Комплекс ўзгарувчили функция тушунча.
2.Узликсиз функциянинг хоссаларини исботлаш.

Таянч тушунчалар ва иборалар.

Текислик,соҳа,функция,аниқланиш соҳаси ,қийматлар соҳаси,бир қийматли .кўп қийматли, биряпроқли.

Мавзуга оид муоммалар:

1.Комплекс ўзгарувчили функциянинг хоссаларини амалий аҳамиятини аниқлаш.
2.Биряпроқли функциянинг хоссаларини амалда қўллаш.

Асосий савол.

1-савол бўйича дарс мақсади:

1.Комплекс ўзгарувчили функцияни Аниқлаш .
2.Узлуксиз функциянинг хоссаларини исботлаш.

Идентив ўқув мақсадлар:

1.1Комплекс ўзгарувчили функциянинг таърифини билади.
1.2.Узликсиз функциянинг хоссаларини исботлайди.

Асосий саволнинг баёни:

С комплекс текисликда D тўплам берилган бўлсин.

Таьриф 2.6. Агар D тўпламда олинган ҳар бир $z = x + iy$ комплекс сонга бирор ҳонун ёки ҳоида ёрдамида ааниқ бир wҳuқiv комплекс сон мос келтирилса, у ҳолда D тўпламда функция берилган дейилади ва $w = f(z)$ каби белгиланади. z га эркли ўзгарувчи ёка аргумент дейилади, w га эса эрксиз ўзгарувчи ёки функция дейилади. D га функциянинг Аниқланиш соҳаси дейилади. Агар аргументнинг ҳарбир қийматига, функциянинг бита қиймати мос келса, $w = f(z)$ функция бир қийматли дейилади. Масалан $w = z$ $w = \frac{1}{z}$ бир қийматли функциялиар,$w = \sqrt{z}$ икки қийматли функция.

Комплекс ўзгарувчили функциянинг геометрик маъносссини аниқлаймиз Бунинг учун $z = x + iy$ нинг қийматларига мос келувчи нуқталарни z текислиги деб, $w = u(x, y) + iv(x, y)$ f(z) функциянинг z ўзгарувчи z_0 нуқтага интилгаандаги лимити дейилади ва $\lim f\ (z) = A$ каби белгиланади. Таьриф 2.9 га мос келувчи нуқталарни w текислиги деб оламиз. Шундай қилиб,$w = f(z)$ функционал муносабат ёрдамида z текисликдан D тўпламни оламиз ва w текисликдаги G тўпламга акслантирамиз. Бу эса D тўпламни G тўпламга акслантириш дейилади.

Таьриф 2.7.Агар бирор z_0 нуқтанинг исталган $O_\varepsilon(z)$ атрофида D га тегишли энг камида бита нуқта бўлса, z_0 нуқта D нинг лимит нуқтаси дейилади. f(z) функция D соҳада анииҳланган бўлиб, z_0 нуқта D ссоҳанинг лимит нуқтаси бўлсин.

Таьриф 2.8. Исталганча кичик $\varepsilon \succ 0$ сон учун шундай $\delta \succ 0$ сони топиш мумкин бўлсаки. $|z-z_0| \prec \delta$ бўлганда $|f(z) - A| \prec \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A комплекс сон $f(z)$ функциянинг $z \to z_0$ интилгандаги лимити дейилади.

Таьриф 2.9. Исталганча кичик $\varepsilon \succ 0$ сон учун , шундай $\delta \succ 0$ сони топиш мумкин бўлсаки,$|z-z_0| \prec \delta$ бўлганда, $|f(z)-f(z_0)| \prec \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, f(z) функция z_0 нуқтада узлуксиз дейилади ва $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ каби белгиланади.Математик анализ курсидаги ҳақиқий ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги бошқа таърифлар ҳам ўринлидир. Агар f(z) функция D соҳанинг ҳарбир нуқтасида уҳликсиз бўлса, бу функция D соҳада узлуксиз дейилади. Функциянинг Аниқланиш соҳаси d ёпиқ соҳа ёки чека нуқталари ҳам кирувчи эгри чизиқ бўлган ҳолда функциянинг асосий хоссаларини келтирамиз.

Хосса-1. D ёпиқ соҳада узликсиз бўлган функция шу соҳада чегараланган бўлади яъни шундай M мусбат сон мавжудки $|f(x)| \prec M$ бажарилади.

Хосса-2. D ёпиқ соҳада узликсиз функция f(z) нинг модули шу соҳада энг катта ёки энгкичик қийматларни қабул қилади, яъни шундай z_1 ва z_2 нкҳталар мавжудки қуйидааааааагилар бажарилади:

$$|f(z_1)| \geq |f(z)|, |f(z_2) \leq |f(z_2)|$$

Хосса-3. D соҳада узликсиз бўлган f(z) функция шу соҳада текис узлуксиз бўлади,яъни шундай z_1 ва z_2 нуқталар учун $|z_1-z_2| \prec \delta$ бўлганда,$|f(z_1) - f(z_{22})| \leq \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Бу хоссаларинг исботи математик анализ курсидагидек бажарилади.

Назорат топшириқлари:

1.Комплекс ўзгарувчили функциянинг Аниқлани ш ва қийматлар соҳаларини тахлил қилиш.

2.Функциянинг хоссаларини кўп ўзгарувчили функциянинг хоссалари билан солиштириш.

Мавзу бўйича ечимини кутаётган муоммалар:

1.Комплекс ўзгарувчили функциянинг хоссаларидан амалда фойдаланиш.

2.Функциянинг биряпроқли бўлишининг янги шартларини келтириб чиқариш.

3-Мавзу: Комплекс ўзгарувчили функциянинг хосиласи. Коши-Риман шарти. Аналитик функция

Фанни ўқитиш технологияси:

“Комплекс ўзгарувчили функция хосиласи. Коши-Риман шарти. Аналитик функция” мавзусидаги маъруза машғулотининг технологик харитаси

Т\р	Босқич ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Тайёрлов босқичи:** **1.1.Дарс мақсади:** Функциядан Коши-Риман шартини келтириб чиқариш. Аналитик функцияни таърифлаш, моноген функциядан фарқлаш **1.2. Идентив ўқув мақсади:** 1.2.1. Функциядан ҳосила олади. 1.2.2. Коши-Риман шартини келтириб чиқаради. 1.2.3. Аналитик функцияни таърифлайди. 1.2.4. Моноген функцияни билади. **1.3. Асосий тушунча:** Ҳосилани ҳисоблаш, Коши-Риман шарти, аналитик функция, моноген функция. **1.4.Дарс шакли:** Маъруза **1.5. Фойдаланиладиган метод ва усуллар:** тақдимот, бахс, мунозара, суҳбат, ақлий ҳужум. **1.6. Керакли жиҳоз ва воситалар:** компьютер, видиопроектор.	Ўқитувчи 10 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи:** 2.1. Мавзу эълон қилинади. 2.2. Ҳосилани ҳисоблашсўралади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Ҳосилани ҳисоблашсўралади. 3.2. Хусусий ҳосилалар олинади. 3.3. Коши-Риман шарти исботланади. 3.4. Моноген функция аниқланади.	Ўқитувчи-талаба 45 минут
4	**Мустаҳкамлаш ва баҳолаш босқичи:** 4.1. Функцияни ҳосила олиш сўралади. 4.2. Хусусий ҳосила олинади. 4.3. Коши-Риман шарти исботланади. 4.4. Моноген функция таърифланади.	Ўқитувчи 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсад ва вазифа бажарилганлиги аниқланади. 5.2. Мустақил ишлар уйга вазифа қилиб берилади.	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

1.Дифференциалланувчи функция.
2. Коши –Риман шарти.

Мавзуга оид таянч тушунчалар ва иборалар:

Орттирма, дифференциал, ҳосила, хусусий ҳосила,Коши-Риман тенгликлари, моноген функция, аналитик функция,зарурий ва етарли шарт.

Мавзуга оид муоммалар:

1.Комплекс ўзгарувчили функция ҳосиласининг таърифи ҳақиқий ўзгарувчили функцияникидан нимаси билан фарқ қилади.
2.Моноген ва аналитик функциялар қандай фарқланади?

1-асосий савол бўйича дарс мақсади:

1.Ҳосиланинг таърифини бериш.
2.Функциянинг дифференциаллувчилик шартини келтириб чиқариш.

Идентив ўқув мақсадлар:

1.1. Ҳосиланинг таърифини билади.
1.2. Функциянинг дифференциалланувчилик шартини келтириб чиқаради.

1-асосий саволнинг баёни:

$w = f(z)$ функция $D \subset C$ соҳада берилган бўлсин, z га Δz орттирма берамиз,z, $z + \Delta z \in D$, у ҳолда функция f(z), $\Delta w = \Delta u + \Delta v = f(z + \Delta z) - f(z)$ орттирма қабул қилади.

Таъриф 3.1.Агар z ихтиёрий йўл билан нолга интилганда $\Delta w \setminus \Delta z$ нисбат чекли лимитга интилса, шу лимитга f(z) функциянинг z нуқтадаги ҳосиласи дейилади ва f'(z) белгиланади.. яъни

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w \setminus \Delta z =' f'(z) \qquad (3.1)$$

Таъриф 3.2. Агар f(z) функция $z \in D$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, z нуқтада моноген функция дейилади. Лимитнинг таърифига кўра, (3.1) тенглик қуйидаги иборага тенг кучли: ихтиёрий $\varepsilon \succ 0$ учун $\delta \succ 0$ мавжудки $|\Delta z| \prec \delta$ бўлганда

$$|\Delta w \setminus \Delta z - f(z)| \prec \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликдан моноген функциянинг узлуксизлиги келиб чиқади.

(3.1) тенгсизликни лимитнинг таърифига кўра қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta w = f''(z).\Delta z + \alpha z \qquad (3.2)$$

таъриф3.3. (3.2) тенгликнинг бош қисмига f(z) функциянинг дифференциали дейилади ва dw каби белгиланади; $dw = f'(z)\Delta z$ $w = z$ кўринишда бўлса,$dw = dz$ бўлади, натижада дифференциал қуйидагича бўлади

$$dw = f'(z)dz \qquad (3.3)$$

Бунга f(z) функциянинг дифференциали дейилади.

Шундай қилиб, z ҳосиласи мавжуд бўлган функция шу нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва аксинча. Дифференциалланувчи функция z нуқтада ҳосилага эга бўлади.

Мисол. $w = z\operatorname{Re} z$ функция $z = 0$ нуқтада моноген эканлигини, аммо аналитик эмаслигини, яъни $z = 0$ нуқтанинг атрофида бу функциянинг ҳосиласи мавжуд эмас.

Ҳақиқатдан, $\Delta w \setminus \Delta z = [(z + \Delta z)\operatorname{Re}(z + \Delta z) - zrez] \setminus \Delta z,\ z = 0$ бўлганда

$$\Delta w / \Delta z = \Delta z \operatorname{Re} \Delta z / \Delta z \qquad \lim \Delta w / \Delta z = \lim \operatorname{Re} \Delta z = 0$$

z# 0, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w / \Delta z = \lim\limits_{\Delta z \to 0} [z \operatorname{Re} z + \Delta z Rz + z \operatorname{Re} \Delta z + \Delta z \operatorname{Re} \Delta z - z \operatorname{Re} z] / \Delta z$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \Delta x \to 0, \Delta y = 0$, деб оламиз

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w / \Delta z = \lim_{\Delta x \to 0} [\Delta x \operatorname{Re} z + z\Delta x + \Delta x \operatorname{Re} \Delta x] / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (\operatorname{Re} z +$$
$$+ z + \operatorname{Re} \Delta z) = z + \operatorname{Re} z$$

Энди $\Delta x = 0$ бўлиб, $\Delta\ y \to 0$ бажарилсин, у ҳолда

$$\lim \Delta w / \Delta z = \lim_{\Delta y \to 0} [\Delta y \operatorname{Re} z.0 + i\Delta y.0] / i\Delta y = \lim(\operatorname{Re}\ z + 0 + 0) = \operatorname{Re} z$$

демак, z#0 руҳтада ҳосиласи мавжуд бўлмаганлиги учун $w = z\operatorname{Re} z$ функция аналитик эмас

Назорат топшириқлари:

1.1.1.Комплекс ўзгарувчили функциянинг таърифини беринг.

1.1.2.Комплекс ўзгарувчили функциянинг аниқланиш ва қийматлар соҳаси қандай тасвирланади,?

1.1.3.Лимит нуқтанинг таърифини беринг.

1.14.Функциянинг лимити неча хил таърифланади?

1.1.5. Функция лимитининг бирорта таърифини айтинг.

1.2.1.Функция нинг узликсизлиги ҳақида нечта таърифи бор?

1.2.2..Узликсизлик ҳақидаги таърифни айтинг.

1.2.3.Ёпиқ сиҳада узликсиз балган функциянинг асосий ҳоссалари нечта?

2-асосий савол бўйича дарснинг мақсади:

2.1.Коши-Риман шартини келтириб чиқариш.

2.2. Функция аналитик бўлишини зарурий ва етарли шартини исботлаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1. Коши-Риман шартини келтириб чиқаради.

2.2. Аналитик функциянинг зарурий ва етарли шартини исботлай олади.

2-савол баёни:

Теорема 2.1. Агар $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функция $z \in D$ нуқтада моноген бўлса,u(x,y), v(x,y) функцияларнинг хусусий ҳосилалари мавжуд бўлиб,

$$\partial u \big/ \partial x = du \ / dy, \qquad \partial u / \partial y, \partial v / \partial y = -\partial v / \partial x \qquad \text{(C-R)}$$

тенгсизлик бажарилади. Юқорироидаги тенгламалар системасига Коши-Риман шарти дейилади.

Исботи. $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ Ҳосиланинг таърифига кўра

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} [(u(x+\Delta x, y) - u(x,y)) / \Delta x + i(v(x+\Delta x, y) - v(x,y)) / \Delta x] =$$
$$= \partial u / \partial x + i\partial v / \partial x$$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta X = 0}} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i\,\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right] = \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

Бу тенгликларнинг чап томонлари тенг бўлганлиги учун ўнг томонларини ҳам тенглаштирамиз. Натижада (C-R) келиб чиқади.

Таъриф 2.4. D соҳада берилган бирқийматли $w = f(z)$ функция $z \in D$ нуқтада ва унинг атрофида дифференциалланувчи бўлса , бу функция z нуқтада аналитик (голоморф) дейййилади. D соҳанинг ҳар бир нуқтасида аналитик бўлган функция шу соҳада аналитик дейилади.

Коши – Риман шартининг бажарилиши функциянинг аналитик бўлишлиги учун етарлими деган савол туғилади. Бундай эмаслигини кўрсатувчи қуйидаги мисолни келтирамиз.

$$f(z) = \begin{matrix} e^{-\frac{1}{z^4}, z \neq 0} \\ 0, z = 0 \end{matrix}$$

Бу функция фақат $z = 0$ нуқтада ҳосилага эга бўлиб, бошқа нуқталарда ҳосилага эга эмас, таърифга кўра аналитик бўлмайди.

Теорема2.2. $f(z) = u + iv$ функциянинг D соҳада аналитик бўлишлиги учун u(x,y),v(x,y) функциялар дифференциалланувчи бўлиб. (C-R) шартининг бажарилиши зарурва етарли.

Исботи. Зарурлиги Теорема2.1.дан келиб чиқади.

Етарлилиги. u(x,y),v(x,y) функциялар дифференциалланувчи бўлганлигидан:

$$\Delta г = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \eta_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta_2(x, y, \Delta x, \Delta y),$$

бунда η_1 ва η_2 лар $||\Delta я| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар. (C-R) шартидан фойдаланамиз:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \eta_1(x, y, \Delta x, \Delta y),$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \eta_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$$

Ихтиёрий $z \in D$ нуқтада ҳосила мавжудлигини кўисатамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{u'_x(\Delta x + i\Delta y) + v'_x(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} +$$

$$+ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta x + i\Delta y} = (u'_x + iv'_x)\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = u'_x + iv'_x = f'(z)$$

Чекли ҳосила мавжуд бўлганлиги учун wҳf(z) функция D соҳада аналитик бўлади. Агар f(z) ва g(z) функциялар аналитик бўлса. Уларнинг йиғиндиси, айирмаси,кўпайтмаси ва ҳам аналитик бўлади.
Аналитик функцияларнинг суперпозициялари ҳам аналитик бўлади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Коши-Риман шартини ҳутб координат системасида ифодалаш.
2.Коши-Риман шартининг гидромеҳаник маьносини аниқлаш.

3- савол бўйича дарс мақсади:

3.1.Ҳосила модулининг геометрик маъносини аниқлаш.
3.2.Ҳосила аргумантининг геометрик маъносини тушунтириш.

Идентив ўқув мақсадлари:

3.1.Ҳосила модулининг геометрик маъносини билади.
3.2. Ҳосила аргументи геометрик маъносини тушунтираолади.

3-асосий савол баёни:

D сахода $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (2.3) функция $f(z_0)$#0 (2.4) шартни қаноатлантирсин. (2.4) тенгсизликдан z_0 нуқта атрофида f(z) функциянинг биряпроқлилиги келиб чиқади.

Энди γ эгри чизиқ. z_0 нуқтадан ўтувчи $z = z(t)$, $\iota \in [\alpha, \beta]$ тенглама билан берилган силлиқ Жордан чизиғи бўлсин. $z(\iota_0)$#0 (2.5). γ эгри чизиқнинг (2.3) ёрдамидаги акси w_0 нуқтадан ўтувчи $\Gamma = f(\gamma)$ эгри чизиқ бўлиб,унинг тенгламаси
$w = f(z(t))$ кўринишда бўлади. Бунда $w' = f(z)z'(t)$ ва (2.3) (2.4) тенгсизликларга кўра
W'#0 , яъни Γ эгри чизиқ учун уринма мавжуд.

$$\arg f(z_0) = \arg w^{'}(z_0) - \arg z^{'}(t_0) \qquad (2.5)$$

Демак (2.3) ёрдамида акслантирилганда $f^{'}(z_0)$ нинг аргументи γ эгри чизиқни z_0 нуқта атрофида буриш бурчагига тенг

γ_1 эгри чизиқ z_0 нуқтадан ўтувчи γ дан фарқли Жордано чизиқи бўлиб, $z_1 = z_0(\tau), \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$ тенглама билан берилган бўлсин $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ унинг W текисликдаги акси: $\omega_1 = f[z_1(t)], z_1(\tau_0) = z_0$

Юқоридаги мулоҳазаларга кўра

$$\arg f^{/}(z_0) = \arg \omega_1^{/}(\tau_0) - \arg z_1^{/}(\tau_0) \qquad (2.6)$$

(2.5) ва (2.6) тенгликларни солиштирамиз.

Демак, z_0 нуқтадаги γ_0 ва γ_1 эгри чизиқлар орасидаги бурчак w_0 нуқтадан чиқувчи эгри чизиқлар Γ ва Γ_1 акслари орасидаги бурчакка тенг.

Хосса-1.Агар z_0 нуқтада $f'(z_0) \neq 0$ бўлса, (5.1) ёрдамида акслантирганда бурчак
Катталиги ва йўналиши бўйича сақланади.

$dz_0 = [x'(t_0) + iy'(t_0)]dt, d\omega_0 = [u'(z(t_0) + iv'(z(t_0))]dt$ бўлиб

$|dz_0| = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = ds_0, |d\omega_0| = \sqrt{u'^2 + v'^2}dt = d\sigma_0$ бўлганлигидан

$|f'(z_0)| = \left|\frac{d\omega_0}{dz_0}\right| = \frac{d\sigma_0}{ds_0}$ тенглик ўринли. Бу ерда ds_0 в

ва $d\tau_0$ лар z_0 ва w_0 нуқталардаги γ ва Γ эгри чизиқларнинг элементлар. $|f'(z_0)|$ га z_0
нуқтадан чиқувчи ҳар қандай γ эгри чизиқнинг чўзилиш коэффиценти дейилади.

Хосса-2 Агар z_0 нуқтада $f'(z_0) \neq 0$ бўлса, (5.1)ёрдамида акслантирганда z_0 нуқтадан ҳар хил йўналишда чиҳган эгри чизиқлар бир хил чўзилишга эга.

Конформ акслантиришлар.

Таъриф2.5. (z) текисликда берилган Д соҳани w текисликдаги G соҳага (2.3) функция ёрдамида акслантирганда хосса-1 ва хосса-2 ҳар бир $z \in D$ нуқта учун бажарилса, у ҳолда бу акслантириш конформ акслантириш дейилади.

Агар конформ акслантиришда бурчакнинг катталиги сақланиб, йўналиши ўзгарса бундай акслантиришга иккинчи тур конформ акслантириш дейилади. Иккинчи тур конформ акслантиришга $\omega = \overline{f(t)}$ мисол бўлади.

Ҳосила модули ва аргементининг геометрик маъносидан қуйидаги тасдиқ ўринлилиги келиб чиқади: Тасдиқ: агар (2.3) ёрдамида акслантирилганда , бурчакнинг сақланиши (хосса-1) ва чўзилиш хусусияти (хосса-2) ҳар бир $z \in D$ нуқта учун бажарилса,у ҳолда $\omega = f(z)$ функция D да аналитик бўлиб, $f'(z) \neq 0$ тенгсизлик бажарилади.

Функция дифференциалининг геометрик маъносини кўрсатиш учун

$$dw = f'(z_0)\Delta z \approx \Delta w$$

деб оламиз, бунда $f'(z_0) \neq 0$,z_0га w_0 мос келади. Демак z_0 нуқта атрофида f(z) акслантиришни

$$w-w_0 \approx f'(z_0)(z - z_0) \qquad (2.7)$$

чизиқли олмаштириш билан олмаштириш мумкин.

Демак, z_0 нуқта атрофида акслантириш, чизиқли бўлиб, конформ акслантириш, яъни юқори тартибли чексиз кичик миқдоригача ўз шаклини сақловчи акслантириш бўлади.

Масалан: $\omega = f(z),\ f'(z_0) \neq 0$ акслантириш $|z - z_0| \leq r$ доирани, $|\omega - \omega_0| \leq |f'(z_0)|$ r доирага акслантиради.

Таъриф2.6. Агар конформ акслантириш натижасида бурчакнинг катталиги сақланиб йўналиши тескарисига алмашса, бу акслантиришга иккинчи тур конформ акслантириш дейилади.

Мисол: $\omega = \overline{z}$ функция иккинчи тур конформ акслантиришни беради.

Муҳакама учун саволлар:

1.Коши-Риман шартларини бошқа координат системасида ёзинг.
2.Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъносини тахлил қилинг.
3.Конформ акслантиришни тахлил қилинг.

Назорат топшириқлари.

1.1.Коши-Риман шартини келтириб чиқаринг.
1.2..Моноген функциянинг таърифини айтинг.
1.3.Аналитик функциянинг таърифини айтинг.
1.4.Моноген функция аналитик бўлмаслигига мисол келтиринг.

Мавзу бўйича ечилиши кутилаётган илмий муаммолар:

1.Коши-Риман шартини амалда қўллаш.
2.Ҳосила модули ва аргументини геометрияга тадбиқи.
3.Конформ акслантириш картографияга тадбиқ қилиш.

а) Амалий машғулотнинг тузилиши:

1-топшириқ.Комплекс ўзгарувчили функция.

Дарснинг мақсади:

1.Комплексўзгарувчили функцияни аниқлаш.
2.Комплекс ўзгарувчили функциянинг узлуксизлигини текшириш.
3.Комплекс ўзгарувчили функцияни текис узликсизликка текшириш

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1.Комплекс ўзгарувчили функцияни билади.
1.2.Функциянинг узлуксизликка текширади.
1.3.Функциянинг текис узлуксизлигини аниқлайди.

Амалий машғулотни бажариш учун номуналар..

Мисол1. $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ функцияни $E=\{|z|>2\}$ соҳада биряпроқлиликка текширинг.

Ечиш. $z_1 \neq z_2$ бўлганда, $f(z_1)\neq f(z_2)$ ‘эканлигини кўрсатамиз.
Тескарисини фараз ҳиламиз. яъни $f(z_1)=f(z_2)$ бўлсин.У ҳолда

$\dfrac{1}{z_1+2}=\dfrac{1}{z_2+2}, z_1=z_2$ тенглик бажарилади. Бу эса фаразимизга зитдир. Демак. Берилган функция биряпроқли бўлади.

Мисол 2. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ функцияни узликсизликка текширинг.

Ечиш. z_0 ихтиёрий нуқта бўлсин.

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z_0^2-1}=\frac{1}{(z_0-1)(z_0-1)}.$$

Демак берилган функция комплекс текисликнинг $z_0\neq \pm 1$ нуқталарда узликсиз бўлади.

Мисол 3. $f(z)=\dfrac{1}{z}$ функцияни текис узликсизликка текширинг.

$z\in(0<|z|<\infty$

Ечиш. $z_1=\dfrac{1}{n+1}, z_2=\dfrac{1}{n}$ деб оламиз, у ҳолда$|f(z_1)-f(z_2)|=n+1-n=1,$
Берилган функция текис узлуксиз эмас.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар.
[1] 2-боб, 1-20, 23-28,42-46 тоҳлари.

Уйга вазифа учун машқлар
[1],2-боб, 1-20,23-28,43-46 жуфтлари

2-амалий машғулот. Функциянинг дифференциалланувчилиги. Коши-Риман шарти.

Дарснинг мақсади.

1. Функцияни дифференциаллашга доир мисоллар ечиш.
2. Коши-Риман шартини текшириш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1. Функция дифференциалини ҳисоблайди.
2.2. Коши-Риман шартини текширади.

Амалий машғулотни бажариш учун номуналар.

Мисол1. $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$,функцияни дифференциалланувчиликка текширинг.

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(\operatorname{Re} z)^2, u=(\operatorname{Re} z)^2=x^2, v=\operatorname{Im} z=y=0$$

Ечиш. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0$

Демак фақат $z=0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

Мисол. 2. $w=z^2+2z$ функцияни $z=i$ нуқтадаги чўзилиш коэффициенти ва бурилиш бурчагини топинг.

Ечиш.Берилган функцияни дифференциаллаймиз: $w'=2z+2$.
Маълумки, акслантиришнинг чўзилиш коэффициенти ҳосиланинг берилган нуқтадаги модулига тенг: $R(\phi)=|w'(i)|=|2+2i|=2|1+i|=2\sqrt{2}$.
Чўзилиш бурчаги эса ҳосиланинг шу нуқтадаги аргументига тенг:

$$\alpha(\phi)=\arg w'(i)=\arg(2+2i)=arktg\frac{2}{2}=arktg1=\frac{\pi}{4}$$

Мисол 3. $f(z)=z+\frac{1}{z}$ функцияни $E=\left\{|z-i|<\sqrt{2}\right\}$ соҳада конформликка текширинг.

Ечиш. Функция конформбўлишлиги учун унинг ҳосиласи нолдан фарқи бўлиши кифоя: $f'(z)=-\frac{1}{z^2}\neq 0$.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар: [1],2-боб,68-83,108-117 тоҳлари.

Уйга вазифа учун машқлар:[1],2-боб,68-83,108-117 жуфтлари.

Адабиёт.

1.Саъдуллаев А.,Худойберганов Г., Мансуров Ҳ.,Ворисов А.,Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм.Т.2000.

В) Мустақил иш топшириқлари:

1-топшириқ.Комплекс ўзгарувчили функция.

1.1.Ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялирнинг ҳийматлар соҳасини таққосланг ва чизмада кўрситинг.

1.2.Ёпиқ соҳада узлуксиз функциянинг ҳоссаларини тахлил қилинг.

2-топшириқ.Дифференциалланувчи функция. Коши-Риман шарти.

2.1.Ҳақиқий ва комплексўзгарувчили функцияларнинг ҳосилалари таърифларини таққосланг.

2.2.Аналитик ва моноген функцияларнинг фарқини аниқланг.

3-топшириқ.Ҳосила модули ва аргументи. Конформ акслантириш.

3.1.Ҳосила аргументининг акслантиришдаги ўрнини кўрсатинг.

3.2.Конформ акслантиришнинг амалда қўллаш соҳаларини аниқланг.

4-топшириқ.Машқларни мустақил бажариш.

[1],1-боб 23-27,57-59,81-87,2-боб, 21,22,29-31,48,49,84-87,188-194,221-225.

Машқлар учун адабиёт.

1.Саъдуллаев А. Худойберганов Г. Мансуров Ҳ. Ворисов А. Тўйсиев Т. Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами 3-қисм Т.»Ўқитувчи»2000.

г) Модул бўйича якуний машғулот:

Модул бўйича асосий хулосалар.

1.Комплексўзгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги ҳақиқий ўзгарувчили функциядагидек таърифланади.

2.Ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функцияларнинг ҳосилалари таърифлари орасида фарқ мавжуд.

3.Ҳар қандай моноген функция аналитик бўлавермайди.

4.Коши-Риман шарти амалий аҳамиятга эга.

5.Конформ акслантириш олимлар томонидан табиат ҳодисаларини ўрганишда фойдаланилган.

Адабиётлар.

1.Худойберганов Г. Ворисов А. Мансуров Ҳ. Комплекс анализ (маърузалар)- Т.»Университет» 1998.

2.Маҳсудов ш. Салоҳиддинов М. Сирожиддинов С.
Комплексўзгарувчининг функциялари назарияси.-Т.»Ўқитувчи».1979.

3.Сидоров Ю.В. Фёдоров М.В. Шабунин М.И.
Лекции по теории функций комплексного переменного.М.»Наука» 1976.

4.Шабат Б.В. Введение в комплексний анализ.М «Наука»1976.

5.Лаврентьев М.А. ШабатБ.В. Методи теории функций комплексного переменного.аука» 1973.

6.Привалов И.И.Введение в теории функциикомплексного переменного.М. Госиздат физ-мат. литератури.1977.

4 – Мавзу: Чизиқли функция. Каср – чизиқли функция.

Фанини ўқитиш технологияси:

“Чизиқли функция. Каср – чизиқли функция” мавзусидаги маъруза машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Чизиқли функция ёрдамида акслантириш. Каср-чизиқли функция, унинг хоссалари. Ангармоник муносабат. 1.2. Идентив мақсадлар: 1.2.1. Чизиқли функцияни билади. 1.2.2. Чизиқли функцияни ёрдамида акслантиради. 1.2.3. Каср чизиқли функцияни кўрсатади. 1.2.4. Каср чизиқли функция хоссаларини исботлайди. 1.2.5. Ангормоник муносабатни тузади. **1.3. Асосий тушунчалар**: Чизиқли функция, акслантириш, каср чизиқли функция, доира, доиравий хосса, айлана, айланага нисбатан симметрия, ангормоника, бир қийматли акслантириш.	Ўқитувчи 10 минут

	1.4. **Дарс шакли**: Маьруза. **1.5. Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, мунозара, ақлий ҳужум, сухбат. **1.6. Керакли жиҳоз ва воситалар**: Компьютер, видеопроектор.	
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган масалалар тушунтирилилади. 2.2.Чизиқли функция ва каср-чизиқли функция сўралади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Чизиқли функция ёзилади, акслантириш бажарилади, мисоллар келтирилади. 3.2. Каср-чизиқли функция ёзилади, анализ қилинади, мисоллар кўрсатилади. 3.3. Каср-чизиқли функциянинг доиравий ва симметриклик хоссалари исботланади. 3.4. Каср-чизиқли функцияни тузиш учун ангормоник муносабат ўрнатилади.	Ўқитувчи – талаба 45 минут
4	**Мустаҳкамлаш ва баҳолаш учун саволлар:** 4.1. Чизиқли функция ва у ёрдамида акслантириш сўралади. 4.2. Каср чизиқли функцияни таҳлил қилинг. 4.3. Хоссаларни исботланг. 4.4. Ангормоник муносабатни тузинг. 4.5. Талабалар баҳоланади.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсад ва вазифалар таҳлил қилинади, ҳулоса чиқарилади. 5.2. Мустақил иш сифатида чизиқли ва каср чизиқли функцияларни ўрганиш учун берилади.	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

1.Чизиқли функция.

2.Каср чизиқли функция.

Мавзуга оид таянч тушунчалар ва иборалар:

Чизиқли функция, каср-чизиқли функция, доиравий хосса, айланага нисбатан симметриклик хоссаси, бир қийматли акслантириш.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Ўзаро бирқийматли акслантирувчи функцияларни Аниқлаш.

2.Турли соҳаларни ўзаро акслантириш.

1-дарс бўйича савол мақсади:

1.Чизиқли функция ёрдамида акслантиришни бажариш.

2. Кенгайтирилган текисликларни ўзаро бир қийматли акслантириш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1.Чизиқли функциянинг кўринишини аниқлай олади.

1.2. Чизиқли функция ёрдамида акслантиришни бажаради.

1- асосий саволнинг баёни.

Таъриф. $\omega = az + b, (a \neq 1)$ функция бутун чизиқли функция дейилади. Бу функциялар ёрдамида акслантиришни кўрамиз.Аввало ҳёйидаги учта хусусий ҳолларни кўрамиз.1) $\omega = z + C, 2) \omega = e^{i\alpha} z, 3) \omega = kz, k > 0$

1) $\omega = z + c, \omega = 1.$ Демак, акслантириш конформ акслантириш бўлади.Маълумки иккита комплекс сон параллелограм ҳоидасига асосан ҳўшилади, шу сабабли ҳар бир z нуқта с веторга ўзгаради. Демак, ҳар қандай эгри чизиқ ёки текис фигура С сонга кўчирилади.

1-мисол. $\omega = z + c,$ С нуқтага параллел кўчирилади.

2) $\omega = e^{i\alpha} z, \omega' = e^{i\alpha}, \alpha \in R$

$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi) = re^{i\varphi}$

$\omega = re^{i(\varphi+\alpha)}, |\omega| = r = |z|$

$\arg\omega = \arg z + \alpha$

Демак, бу акслантиришда модул ўзгармайди аргумент α га ўзгаради. яъни, акслантиршида α бурчакка бурилади.

3) $\omega = kre^{i\varphi}, k > 0, z = re^{i\varphi}$

$|\omega| = k|z| = kr, \arg\omega = \varphi = \arg z$

яъни, аргумент ўзгармайди, модул эса к сонга ўзгаради,чўзилиш хоссаси мавжуд бўлади.

$\omega = az + b, a = ke^{i\alpha}$ деб оламиз, $\omega = ke^{i\alpha} z + b$

Демак, умумий ҳол юқоридаги учта ҳолга келтириб акслантирилади.

Мисол. 2-3iz буни $\omega = 3e^{\frac{3\pi z}{2}} + 2$ кўринишида ёзамиз.Демак,z нуқтани $\frac{3\pi}{2}$ бурчакка буриб, 3 га чўзилади ва 2 бирликка параллел кўчирилади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Чизиқли акслантиришнинг қўллаш соҳаларини аниқлаш.

2.Чизиқли функция ёрдамида акслантиришни геометрияга қўллаш.

2-савол бўйича дарс мақсади:

1.Каср-чизиқли функциянинг хоссаларини исботлаш.

2.Каср-чизиқли функцияни тузиш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1.Каср-чизиқли функциянинг ҳоссаларини исботлайди.

2.2.Каср-чизиқли функцияни тузади.

2-асосий саволнинг баёни.

$\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (3.2) каср-чизиқли функция берилган бўлсин. Ҳосиласини оламиз.

$$\omega' = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

Демак, $ad-bc \neq 0$ бўлса (3.2) функция $\overline{C}$ кенгайтирилган текисликни $\overline{C}$ кенгайтирилган текисликга конформ аксланлантирилади.

$$w_2 - w_1 = \frac{bc-ad}{(cz_1+d)} \cdot \frac{z_2 - z_1}{(cz_2+d)} \qquad (1.3)$$

шарт бажарилгандан бу аксланлантириш бир варақли ҳам бўлади. Бунда $z=-d/c$ га $w=\infty$ га $w=a/c$ (3.4) мос келади деб оламиз.

Эслатма.Чексиз узоқлашган $z=\infty$ нуқтанинг атрофида конформ аксланлантириш деганда, бурчакнинг сақланиш хоссасини тушунамиз.

Таъриф. 1.1. ∞ нуқтадан ўтувчи γваγ_1 эгри чизиқлар орасидаги бурчак деб $w=1/z$ аксланлантириш ёрдамида wҳ0 нуқтада кесувчи Г ва $Г_1$ эгри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади.

Теорема. 1.1. (3.1) каср-чизиқли функция кенгайтирилган z текисликдаги ихтиёрий айланани w текисликдаги айланага аксланлантирилади. Бу ерда (6.3) ўринли деймиз.

Исботи. Кенгайтирилган z текисликда айлананинг умумий тенгламасини оламиз.

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$$

$x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ алмаштиришлар бажарамиз

$$Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha}\overline{z} + D = 0, \alpha = \frac{B-iC}{2}$$

(1.1) ни $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cz+d)}$ кўринишида ёзамиз.Ўхшаш алмаштиришлар: параллел кўчириш,чўзиш (ҳисҳартириш), бурчакка буриш, бажарилганда фигура ўзгармаганлиги учун $z = \dfrac{1}{w}$ алмаштириш бажарамиз.

$$A\frac{1}{w\overline{w}}+\frac{\alpha}{w}+\frac{\overline{\alpha}}{w}+D=0, Dw\overline{w}+\alpha\overline{w}+\overline{\alpha}w+A=0$$

Бу эса (3.5) каби w текисликдаги айлананинг тенгламаси

Эслатма. Хусусий ҳолда айлана тўғри чизиқ бўлиши мумкин. Тўғри чизиқни ҳам радиуси исталганча катта бўлган айлана деб оламиз.

Таъриф 1.3. Маркази O нуқтада бўлиб, радиуси R бўлган айлана радиусидаги ва радиус давомидаги z_0 ва z нуқталар учун* $z_0z^*z_0z=R^2$ (3.6)

тенглик бажарилса, бу z ва z^* нуқталар γ айланага нисбатан симметрик нуқталар дейилади.

Теорема 1.2. z ва z^* нуқталарнинг γ айланага нисбатан симметрик бўлиши учун, бу нуқталардан ўтувчи (Г) айланалар боғлами γ га ортогонал бўлиши етарли ва зарурдир.

Исботи. Зарурлиги. z ва z' нуқталар γ айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлсин. Г эса унинг акси. Элементар геометриядан маълумки

$|z-z_0||z'-z_0|=R^2$, яъни γ айлананинг радиуси Г айланага уринма бўлади. Демак,

γ ва Г айланалар ортогонал айланалар.

Етарлилиги.Г айлана γ айланага ортогонал бўлсин. У ҳолда zва z* нуқталар z_0 дан чиқувчи нурда етади ва элементар геометрия теоремасига кўра $|z^*-z_0||z-z_0|=R^2$ бўлади, яъни z ва z^* нуқталар γ айланага нисбатан симметрик бўлади.

Теорема 1.3. Ҳар қандай каср-чизиқли функция z текисликдаги айланага нисбатан симметрик z ва z^* нуқталарни, w текисликдаги Г айланага нисбатан симметрик w ва w^* нуқталарга акслантиради.

Исботи. z ва z^*нуқталардан ўтувчи (Г) айланалар боғламини оламиз. Теорема 1.1. кўра (1.1) функция γ айланага γ' айланага (Г) айланмалар боғламини w ва w^* дан ўтувчи (Γ') айланалар боғламига акслантиради.Теорема 1.2. га кўра w ва w^* нуқталар γ' га нисбатан симметрик бўлади. Теорема исботланди.

Таъриф 1.4. Иккита z ва z^*нуқталар C айланага нисбатан симметрик деймиз, агар уларнинг иккаласи ҳам C айлананинг марказидан чиқувчи нурида ётиб орасидаги масофаларнинг кўпайтмаси C айлананинг радиуси квадратига тенг бўлса.

Симметрик нуқталарни топиш учун, агар zайлана ичида ётса, шу нуқтадан z ва z_0 нурга перпендикуляр ўтказиб C айлана билан кесишиш нуқтасини ς билан белгилаймиз. ς Дан айланага уринма ўтказамиз, уринма билан нурнинг кесишиш нуқтаси z^*, z нуқтага симметрик нуқта бўлади агар z айлана ташқарисида бўлса, у ҳолда юқоридаги чизишни тескарисидан бошлаш керак. $\Delta z_0 z\varsigma$ ва $\Delta z_0 \varsigma z^*$ ларнинг ўхшашликларидан $\frac{R}{z_0 z} = \frac{z_0 z^*}{R}$ бундан $|z - z_0||z' - z_0| = R^2$ (3.7) келиб чиқади.

Теорема 1. z ва z^* нуқталар C айланага нисбатан симметрик бўлишлиги учун шу нуқталардан ўтувчи ҳар қандай Г айлана C айланага ортогонал бўлиши етарли ва зарурдир.

Зарурлиги. z ва z^* нуқталар C га нисбатан симметрик бўлсин, Г бу нуқталардан ўтувчи ихтиёрий айлана. Элементар геометриядан маълумки Г айланага ўтказилган уринманинг квадрати $z - z_0$ ва $z' - z_0$ лар узунликларнинг кўпайтмасига тенг.

яъни, Г айланага уринма z_0 T, C айлананинг радиуси бўлади.

Етарлилиги. Z,z^* нуўталардан ўтувчи айлана C га ортогонал бўлсин. У ҳолда z ва z^* битта нурда ётади ва элементар геометрияга асосан $|z - z_0||z' - z_0| = R^2$ бўлади. Демак, z ва z^* симметрик бўлади.

Таъриф1. 2. z нуқтани C айланага нисбатан симметрик бўлган z^* ўтказувчи акслантиришга инверсия дейлади.

Теорема 1. 2. Каср чизиқли функция C га нисбатан симетрик бўлган z ва z^* нуқталарни C нинг акси C^*га нисбатан симметрик бўлган w ва w^* нуқталарга ўтказади.

Бу теореманинг исботи олдинги теоремалар ёрдамида бажарилади.

Каср-чизақли функцияни тузиш.

Шуни таъкидлаймизки, фақат чизиқли ва каср-чизиқли функциялар кенгайтирилган комплекс текисликни кенгайтирилган комплекс текисликка акслантиради.

(1.2) каср-чизиқли функция тўртта a,b,c,d коеффициентларга эга. Улардан нолдан фарқли бирортасига (1.2) нинг сурат ва махражини бўлсак, учта комплекс параметр ҳосил бўлади. Шунинг учун муҳим ахамиятга эга бўлган каср-чизиқли функцияни тузишда,z текисликдаги учта берилган z_1, z_2, z_3нуқталарга w текисликда

w_1, w_2, w_3 нуқталар мос келсин деб оламиз. Юқоридаги берилган нуқталар ёрдамида каср-чизиқли функцияларни тузамиз ва қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\frac{w - w_1}{ww - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \qquad (1.6)$$

(1.6) тенгламани w га нисбатан ечиб, γ айланада берилган учта z_1, z_2, z_3 нуқталарни Г айланадаги w_1, w_2, w_3 нуқталарга акслантирувчи каср-чизиқли функцияларни топамиз. (1.6) ни кўпайтма шаклида ёзамиз:

$$\frac{\mathrm{w} - \mathrm{w}_1}{w - w_2} \cdot \frac{\mathrm{w}_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{\mathrm{z}_3 - z_2}{z_3 - z_1} \qquad (1.7)$$

Агар z_k ёки w_k лардан бирортаси чексизга тенг бўлса, шу нуқта қатнашган

Касрнинг сурат ва махражини бир билан олмаштириш зарур. Масалан $z_1 = w_3 = \infty$ бўлса, (1.7) қуйидагича бўлади:

$$\frac{\mathrm{w} - \mathrm{w}_1}{\mathrm{ww} - \mathrm{w}_2} \frac{1}{1} = \frac{1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{1}$$

(1.6) ёрдамида топилган каср-чизаҳли функция Теорема 1.1 га кўра айланани айланага акслантиради.Агар z ваwксликдаги нкҳталарнинг тартиби ўзгармаса айлана айлана ичига аксланади, агар w текисликдаги нуқталар тартиби тескарисига олмашса, айлана ташқарисига акслантирилади.

Каср-чизиқли функция айлананинг қайси томонига акслантиришининг аниқлашни яна бир йўли каср-чизиқли функцияга zтекисликдаги айлана ичидаги нуқтани қўйиб кўришдир. W текисликдаги айлана ичидаги нуқта ҳосил бўлса , айлана айлана ичига аксланади , акс ҳолда айлана тошҳарисига аксланади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Чизиқли функцияни учбурчак учун қўллаш.

2.Каср-чизиқли функциянинг айланани тўғри чизиқҳа ўтказиш ҳиссасини тахлил қилиш.

3.Каср-чизиқли функция ҳоссаларини ўрта мактаб геометрияси билан алоқасини ўрнатиш.

Назорат саволлари:

1.1.Чизиқли функцияни ёзинг.

1.2.Чизиқли функциядаги ўзгармасларга қўйилган шартларни тушунтиринг.

1.3.Чизиқли функция ёрдамиди акслантирилганда қандай амаллар кетма-кет бажарилади?

1.4.Чизиқли функция ёрдамида акслантиришнибажаринг.

2.1.Каср-чизиқли функциянинг кўринишини ёзинг.

2.2.Каср-чизиқли функциянинг коэффициентлари қандай муносаьатда бўлади?

2.3.қандай шарт бажарилганда чекли нуқта чексизга ўтади?

2.4.қандай шарт бажарилганда чексиз чекли нуқтага ўтади?

Мавзу бўйича ечимини кутаётган илмий муоммалар:

1.Какср-чизиқли функциянинг сферик олмаштириш бажаргандаги ҳоссаларини аниқлаш.

2.Каср-чизиқли функциянинг кўринишларини турли соҳаларни акслантиришда топиш.

3.Кўп ўзгарувчили функция учун каср-чизиқли функциянинг кўринишини келтириб чиқариш.

б) Амалий машғулотни тузулиши.

1-амалиймашғулот.Чизиқли функция ёрдамида акслантириш.

Дарс мақсади.

1.Чизиқли функцияни тузуш.
2.Чизиқли функция ёрдамида акслантиришни бажариш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1.Чизиқли функцияни билади.
1.2.Чизиқли функция ёрдамида акслантиради.

Амалий машғулотга номуналар.

Мисол 1. $D=\left\{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}<1\right\}$ соҳана $w=-iz+3$ чизиқли функция ёрдамида акслантиринг.

Ечиш. $w=u(x,y)+v(x,y), z=x+iy$ деб оламиз $u+iv=-i(x+iy)+3=-ix+y+3$ тенглик бажарилади. Бундан $u=y+3, v=-x, y=u-3, x=-v$. Берилган соҳага қўямиз:

$$\frac{v^2}{16}+\frac{(u-3)^2}{9}<1$$

Демак,берилган функция ёрдамида акслантирилганда эллипс (3*0) нуқтага нисбатан симмертик жойлашган эллипсга аксланади.

Мисол 2. $\mathrm{D}=\{\mathrm{Re} z<1\}$ соҳани $w=\frac{z}{z-2}$ каср-чизиқли функция ёрдамида акслантиринг.

Ечиш.Берилган тенгликдан z ни топамиз ва ҳақиқий ҳамда мавҳум қисмларга ажратамиз.

$$x+iy=\frac{2u+2iv}{u+iv-1}=\frac{(2u+2iv)(u-1-iv)}{(u-10^2+v^2},$$

$$x=\mathrm{Re}\, z=\frac{2u(u-1)+2v^2}{(u-1)^2+v^2}<1$$

Охирги тенгсизликдан қуйидагини топамиз:$u^2+v^2<1$.Демак, D соҳанинг акси маркази координата бошида бўлиб, радиуси бирга тенг бўлган айлана.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар:[1],3-боб,1-24,35-85 тоҳлари.

Уйга вазифа учун машқлар:[1],3-боб,1-24,35-85 жуфтлари.

2-амалий машғулот.Каср-чизиқли функцияни тузиш.

Дарснинг мақсади:

1.Ҳарбир текисликда учтадан нуқталар берилганда каср-чизиқли функцияни тузиш.
2.Нуқта ва йўналиш берилганда каср-чизиқли функцияни тузиш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1.Акслантирилувчи текисликларда учтадан туҳталар берилганда каср-чизиқли функцияни тузади.
2.2.Текисликда нуқта ва ундан чиқувчи йўналиш берилганда каср-чизиқли функцияни тузади.

Амалий машғулотни бажариш учун номуни

Мисол 1. $w(-1)=0, w(i)=2i, w(1+i)=1-i$ шартларни қаноатлантирувчи каср-чизиқли функцияни тузинг.

Ечиш.Ангармоник муносабатдан фойдаланамиз:

$$\frac{w-2i}{w}\frac{1-i}{1-3i}=\frac{(z-i)(2+i)}{z+1},\frac{w-2i}{w}=5\frac{(z-i)(1-i)}{(z+1)(1-i)}$$

Охирги тенгликданизланган каср-чизиқли функцияни топамиз:

$$w=-\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}.$$

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар:[1],3-боб,100-110,124-136 тоқлари.
Уйга вазифаучун машқлар:[1],3-боб,100-110,124-136 жуфтлари.

Адабиёт

1.Саъдуллаев А. Худойберганов Г. Мансуров Ҳ. Ворисов А. Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм Т.»Ўқитувчи».2000.

5– Мавзу: Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар ёрдамида акслантириш.

Фанни ўқитиш технологияси:

“Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар ёрдамида акслантириш. Даражали ва радикал функциялар” мавзусидаги маъруза машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Комплекс ўзгарувчи кўрсаткичли ва тригонометрик функцияларни олиш, хоссаларини исботлаш, акслантиришларни бажариш.комплекс оргументли даражали ва радикал функциялар асосида акслантириш. **1.2. Идентив мақсадлар**: 1.2.1. Комплекс ўзгарувчи кўрсаткичли ва тригонометрик функцияларни ҳақиқий ўзгарузчидан фарқини билади. 1.2.2. Функцияларни хоссаларни исботлайди. 1.2.3. Акслантирувчи Риман сиртини аниқлайди. 1.2.4 . Квадрат функция ёрдамида акслантиришни бажаради. 1.2.5. Квадрат илдиз ёрдамида акслантиришни икўрсатади. **1.3. Асосий тушунчалар**: Кўрсаткичли функция, тригонометрик функцияРиман сирти, ўлчови, даражали функция, радикал функция, хоссалар акслантириш. **1.4. Дарс шакли**: Маъруза.	Ўқитувчи 10 минут

	1.**5. Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, мунозара, сухбат, ақлий ҳужум. **1.6. Керакли жиҳоз ва воситалар**: Компьютер, видеопроектор.	
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи:** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган масалалар тушунтирилилади. 2.2. Хақиқий ва комплекс ўзгарувчи кўрсаткичли ва тригонометрик функцияларнинг фарқи нимада? Сўралади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Кўрсаткичли функция таърифланади, хоссалари ўрганилади. 3.2. Тригонометрик функциялар таърифланиб, хоссалари кўрилади. 3.3. Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар орасида боғланиш ўрнатилади. 3.4. Даражали функция ёрдамида акслантириш бажарилади. 3.5. Радикал функция ёрдамида акслантириш берилади.	Ўқитувчи – талаба 45 минут
4	**Мустахкамлаш ва бахолаш учун саволлар:** 4.1. Кўрсаткичли функция таърифланади, хоссалари сўралади. 4.2. Тригонометрик ва кўрсаткичли функция алоқаси аниқланади. 4.3. Хақиқий ва комплекс ўзгарувчи функциялар фарқи сўралади. 4.4. Даражали функция акси топилади. 4.5. Радикал функция учун Риман сирти сўралади.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсад ва вазифалар тахлил қилинади, ҳулосачиқарилади. 5.2. Маъруза мустақил ўқишга берилади.	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар.

1. Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар.
2. Даражали ва радикал функциялар.

Мавзуга оид таянч тушунчалар ва иборалар.

Кўрсаткичли функция, тригонометрик функциялар, логарифмик функциялар, даражали функция , радикал функция, тармоҳланиш нуқтаси, бир япроҳли акслантириш.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Кўрсаткичли функциянинг соҳани акслантирувчи сиртни тасвирлаш.
2.Радикал функциянинг бирқийматли тармоҳларини топиш.

1-савол бўйича дарс мақсади:
1. Кўрсаткичли функция ёрдамида акслантириш.
2. Тригонометрик функция ёрдамида акслантириш.

Идентив ўқув мақсадлари:
4.1. Кўрсаткичли функция ёрдамида акслантиришни бажаради.
4.2. Тригонометрик функкйия ёрдамида акслантиришни билади.

1-савол баёни.

Математик анализ курсидаги каби e^z кўрсаткичли функцияни

$$e^z = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n \qquad (2.1)$$

лимит ёрдамида аниқлаймиз.
Ихтиёрий $z \in C$ учун бу лимитнинг мавжутлигини исбот ҳиламиз.
Даражага кўтариш ҳоидасига кўра

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\arg tg\left(\frac{y}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)$$

$\frac{x^2+y^2}{n^2}$ ифода 2x/ n га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик бўлганлигидан ташлаб юборамиз: $\arg tg\left(\frac{y}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ чексиз кетма-кетликни $\frac{\mathrm{y}}{(\mathrm{n}+\mathrm{x})}$ билан алмаштирамиз, натижада

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^2\right| = e^x, \lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y$$

Демак, модул ва аргументнинг лимити мавжуд бўлгани учун (4.1) нинг ҳам лимити мавжуд бўлади, (4.1) ни қуйидагича ёзамиз

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (2.2)$$

Кўрсаткичли функциянинг асосий хоссаларини

келтирамиз. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{k+1}\right)1}{\frac{1}{k}1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$ бўлгани учун

$$1 + z + \frac{z^2}{21} + ... + \frac{z^n}{n1} + ...$$

1. e^z функция C текислигида аналитик.
2. $e^z = e^x$
3. $x_k + iy_k, k = 1{,}2$ учун $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ (2.3) формула ўринли бўлади.

Исботи .Ўнг томонини оламиз.

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) +$$
$$+ i\sin(y_1 + y_2)$$

4. e^z даврий функция бўлиб, энг кичик даври 2 п i

Исботи. (4.2) да $z_2 = 2\pi i$ деб оламиз.Эйлер формуласига кўра

$$e^{2\pi u} = cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$ бўлгани учун

$$e^{я+2\pi u} = e^я e^{2\pi i} = e^z, e^{z+T} = e^z$$

,деб олиб, функциянинг ихтиёрий даврини топамиз: $T + T_1 + iT_2 + 2\pi i$

z текислик e^z функция ёрдамида чексиз кўп мусбат ўқ бҳйича кесилган ва устма-уст қўйилшан w текисликларни бирини ўнг ҳирғоғини иккинчисининг чап ҳирғоғига елимлашдан ҳосил бўлган Риман сиртига биряпроқли акслантиради.

Тригонометрик функциялар

Cosz,sinz тригонометрик функцияларни қуйидаги қаторлар ёрдамида аниқлаймиз:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{21} + \frac{z^4}{41} - ... + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)1} + ...,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{31} + \frac{z^5}{51} = ... + (-1)^{n=1}\frac{z^{2n-1}}{(2n=1)1} + ...$$

Бу тенглаклардан қуйидаги Эйлер формулаларини келтириб чиқармиз:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Синус ва косинус функцияларнинг насбати ни олиб тангенс ва котангенс функцияларни аниқлаш мумкин.

Синус ва косинус функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1.Агар $y=0$ деб олсак, ҳақиқий ўзгарувчили функция ҳосил бўлади.

2.Косинус ва синус функциялар учун ҳўшиш формулалари ўринли бўлади.

3.Косинусва синус функциялар комплекс текисликда аналитик бўлади.

Комплексўзгарувчили функциянинг қийматлар соҳаси бирдан катта ҳам ьўлиши мумкин. Масалан $z=1$ деб олсак,

$$\sin i=\frac{e=e^{-1}}{2i}\approx 1{,}1752i, \cos=\frac{e+e^{-1}}{2}=1{,}54308$$

яьни уларнинг қиймати модул жихатдан бирдан катта.

$w=\sin z$ функция ёрдамида $-\frac{\pi}{2}\prec x\prec\frac{\pi}{2}$ йўл $-\infty$ дан -1 гача ва 1дан $+\infty$ гача ҳирҳидган бутун w текистликка акслантирилади. Z текислик эса чексиз кўп

W текистликлардан тузилган Риман сиртига акслантирилади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Кўрсаткичли функциянингтурли таърифларини таққослаш.

2.Кўрсаткичли функция ёрдамида акслантиришни бажариш.

2-асосий савол бўйича дарс мақсади:

1.Даражали функция ёрдамида акслантиришри бажариш.

2.Радикал функция ёрдамида акслантиришни бажариш.

Идентив ўқув мақсадлар:

2.1. Даражали функция ёрдамида акслантиришни билади.

2.2. Радикал функция ёрдамида акслантиришни билади.

2-саволнинг баёни:

Ушбу $w=e^{n}$ функция ёрдамида z текислигини w текислигига акслантиришни кўрамиз. $z=0$ ва $z=\infty$ нуқталарга wҳ0ва wҳ ∞ нуқталар мос келади.Бошқа нуқталарнинг қандай аксланишини кўрсатиш учун z ва w ларни қуйидагичоламиз:

$$z=\rho e^{i\theta}=r^{n}e^{in\phi}\text{,бунда } \rho=r^{n}, \theta=n\phi \qquad (2.3)$$

Демак, даражали функция ёрдамида z текисликдаги маркази координит бошида бўлиб, радуиси r радиусли айланалар оиласини w текисликдаги r^{n} радиусли айланалар оиласига акслантиради. Координат бошидан чиҳиб, абцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ϕ бурчак ҳосил ҳилувчи нурлар $w=0$ нуқтадан чиқувчи абцисса ўқи билан $\theta=\mathrm{n}\phi$ бурчак ҳосил ҳилувчи нурга aксланади.

$0 \prec \phi \prec \frac{2\pi}{n}$ катталикдаги бурчак мусбат ўқ бўйича қирқилган w текисликка аксланади. z текислигини n та устма-уст

қўйилган, абцисса ўқининг мусбат йўналиши бўйича қирқилган ва чап ҳамда ўнг қирғоқлари кетма-кет бир бирига елимлашдан ҳосил бўлган Риман сиртига аксланади.

Энди $z = \sqrt[n]{w}$ (2,4) радикал функция ёрдамида акслантиришни кўрамиз. z ва w ларнинг қийматларини ҳутб координат системасида оламиз:

$$r = \sqrt[m]{\rho},\ \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad (2.5)$$

ҳосил бўлади, буерда $k = 1,2\ldots.$ Агар z нинг $z_0, z_1,$ z_{n-1} лардан иборат n та нуқталарни олсак, уларга w текислигида модули $r = \sqrt[n]{\rho}$ бўлиб, аргументлари

$$\phi_0 = \frac{\theta}{n}, \phi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \ldots.$$

лардан иборат кўпбурчакнинг учлари мос келади.

z текислигида берилган барчаклар:

$$0 \prec \phi \prec \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \prec \phi \prec \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n} \prec \phi \prec \frac{2n\pi}{n}$$

бурчакнинг ҳарбири битта w текисликка аксланади.

Демак, z текисликни n та w текислигидан ташкил топган Риман сиртига ўзаро бир қийматли акслантириш мумкин.Бу сирт абцисса ўқининг мусбат йўралиши бўйича қирқилган бўлади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили кўрсаткичли функцияларнинг ҳоссаларини таққослаш.

2.Тригонометрик функциялар ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили бўлганда улар орасидаги фарқ қандай?

Назорат саволлари.

1.1.Кўрсаткичли функцияни ёзинг.

1.2.Ҳақиқий вакомплекс ўзгарувчили кўрсаткичли функцияларнинг таърифларини солиштиринг.

1.3.Кўрсаткичли функциянингнечта ҳоссаси бор?

1.4.Кўрсаткичли функциянинг ҳоссаларини ёзинг.

1.5.Кўрсаткичли функциянинг даврийлик ҳоссасини исботланг.

1.6.Кўрсаткичли функциянинг биряпроқлилик соҳасини аниқланг.

Мавзу бўйича ечимини кутиётган илмий муоммалар:

1.Кўп комплекс ўзгарувчили элементар функциялар ёрдамида акслантиришни бажариш.

2.Кўпўзгарувчили функцияларнингҳавариҳликка текшириш.

3.Элементар функциялар ёрдамида акслантиришни амалиётда қўллаш.

Б)Амалий машғулотлар тузилиши:

1-амалий машғулот.Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар.

Дарснинг мақсади:

1.Кўрсаткичли ва тргонометрик функцияларнинг ҳоссаларини текшириш.
2.Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар ёрдамида акслантиришни бажариш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1.Кўрсаткичли ва тригонометрик функцияларнинг ҳоссаларини тешира олади.
1.2.Кўрсаткичли функция ёрдамиди акслантиришни бажаради.
1.3.Тригонометрик функция ёрдамида акслантиришни бажаради.

Амалий машғулотга номуналар:

Мисол 1. $D=\{0<\operatorname{Im} z<2\pi, \operatorname{Re} z>0\}$ тўпламни $w=e^z$ функцияёрдамида акслантиринг.

Ечиш. z ни алгебраик кўринишда,w ни эса тригонометрик кўринишда оламиз. $\rho e^{i\phi}=e^{x+iy}=e^x e^{iy}, \rho=e^x, \phi=y, \rho>1{,}0<\phi<2\pi$

Демак, берилган функция биринчи чоракда жойлашган ярим йўлакни абцисса ҳинингмусбат ярми бўйича кесилган бирлик доиранинг ташқарисига аксланади.

Мисол 2. $w=chz$функцияни биряпроқлиликка текширинг.

Учиш. Эйлер формуласидан фойдаланамиз:

$$chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

Ҳосиласини оламиз ва ҳақиқий қисми мусбат бўладиган хвау нинг қийматлар соҳасинитопамиз:

$$\operatorname{Re} w'=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{2}=\frac{e^x\cos y-e^{-x}\cos y}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cos y$$

Кўпайтма нолдан катта бўлишлигиучун ҳарбир кўпайтувчи нолдан катта бўлишлиги керак: $\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-e^{-x}\succ 0, \cos y\succ 0, e^{2x}\succ 1, x\succ 0{,}0<y<\pi$

Демак, берилган функциянинг биряпроқлилик соҳаси биринчи чоракда жойлашган ярим йўлакдан иборат.

Мисол 3. $D=\left\{|z|<2{,}0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$ соҳани **Ошибка! Ошибка внедренного объекта.** w=z^2 ёрдамида акслантиринг.

Ечиш. w,z ларни тригонометрик кўринишда оламиз:

$$w=\rho e^{i\phi}, z=re^{i\varphi}, \rho e^{i\phi}=r^2e^{i2\varphi}, \rho=r^2, \phi=-2\varphi, \varphi=\frac{-\phi}{2},$$

$$|w|<4{,}0<-\frac{\phi}{2}<\frac{\pi}{2}, -\pi<\phi<0$$

Демак, берилган функция D соҳани марази координат бошида бўлиб. Радуиси 4 га
Тенг бўлган доиранинг пастки ярмига аксланади.

Мисол 4. $D = \{\operatorname{Im} z \succ 0, |\operatorname{Im} z|^2 \succ 4\operatorname{Re} z + 4\}$ соҳани $w = \sqrt{z}$ функциянинг $w_0 = (\sqrt{z})_0$ тармоғи ёрдамиди $w(-1) = i$ шарт бажарилганда акслантиринг.

Ечиш. $w = u + iv$ бўлсин. w_0 тармоғи $G = C \setminus R^+$ соҳани $D = \{0 < \arg w < \pi\}$ соҳага акслантиради. Imz>0,0<argz<π бўлганлигидан, $u = \sqrt{r}\cos\frac{\arg z}{2,}, u > 0$ бўлади.

$(\operatorname{Im} z)^2 > 4\operatorname{Re} z + 4, |z|^2 > (\operatorname{Re} z + 2)^2, |z| > 1$ бўлади . Бундан |w|>1,Imz>1,Rez>0 келиб чиқади. Демак, берилган функциянинг тармоғи
D саҳони биринчи чоракнинг 0<Imw<1 йўлакдан ташҳори қисмига акслантиради.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар:
142-161,171-200,211-240,250-280,291-310,324-350 тоҳлари.

Уйга вазифа учун машқлар:
142-161,171-200,211-240.250-280,291-310.324-350.

6 – Мавзу: Жуковский функцияси.

Фанини ўқитиш технологияси:

“Жуковский функцияси” мавзудаги маъруза машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Жуковский функцияси ёрдамида акслантириш. **1.2. Идентив мақсадлар**: 1.2.1. Жуковский функцияни билади. 1.2.2. Жуковский функцияни таҳлил қилади. 1.2.3. Жуковский функцияси ёрдамида фигурани акслантиради. **1.3. Асосий тушунчалар**: Текислик, функцияни, акслантириш, амални аҳамияти. **1.4. Дарс шакли**: Маьруза. **1.5 . Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, сухбат, мунозара, тақдимот. **1.6. Кеpакли жихоз ва воситалар**: компьютер, циркул, видеопроектор.	Ўқитувчи 10 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган саволлар тушунтирилилади. 2.2. Функцияни аниқланиш ва қийматлар соҳаси сўралади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Функциянинг кўриниши ёзилади .	Ўқитувчи – талаба 40 минут

	3.2. Айлананинг акси топилади. 3.3. Эллипснингўқлари аниқланади. 3.4. Функциянинг амалда қўлланилиши тахлил қилинади	
4	**Мустахкамлаш ва баҳолаш учун саволлар:** 4.1. Жуковский функциясини ёзинг. 4.2. Жуковский ким, нима қилган. 4.3. Айланани аксини топинг. 4.4. Функциянинг қўлланилишини айтинг.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсад ва вазифаларни бажарилганлиги тахлил қилинади. 5.2. Мустақил топшириқлар уйга вазифа сифатида берилади (функцияни қўллаш) 5.3. Фаол қатнашган талабалар баҳоланади.	Ўқитувчи 10 минут

Асосий саволлар

1.Жуковский функцияси.
2.Жуковский фуркциясининг биряпроқлиҳ соҳаси.

Таянч тушунча ва иборалар:

Жуковский функцияси. Хоссалари, акслантириш биряпроқлилиҳ соҳаси.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Жуковский функциясининг келиб чиҳиш тарихини аниқлаш.
2.Жуковский функциясини қўллаш соҳаларини топиш.

Дарснинг мақсади;

1. Жуковский функциясини таҳлил қилиш.
2. Жуковский функцияси ёрдамида акслантириш.

Идентив ўқув мақсадлари;

1. 1.Жуковский функциясининг ҳақиқий ва мавҳум қисмларга ажратиш.
1.2.Жуковский функцияси ёрдамида акслантириш.

1-**саволнинг баёни.**

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (3.1)$$

функцияга Жуковский функцияси дейилади. Бу функция билан акслантириш ҳачон бир қийматли бўлишини кўрамиз. $z_1 \neq z_2$ бўлсин.

$$\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)\neq\frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right)$$ деб оламиз.

Бу тенгликдан z₁z₂ҳ1 шарт бажарилса, акслантириш ўзаро бир қийматли мослик бўлмаслиги келиб чиқади. Демак, $|z|<1, |z|>1,$ соҳалар учун $z_1z_2\neq 1$ шарт бажарилади.

Энди (5.1) ни маъносини кўриб чиқамиз.

$z=re^{i\varphi}, w=u+iv$ бўлсин.

$$u+iv=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left[(r+\frac{1}{r})\cos\varphi+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right]$$

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi, v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

|z|ҳr айлананинг w текисликдаги аксини кўрамиз. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин. r<1, r>1 а) r<1 бўлсин

$$a_r=\frac{1}{2}\left(r+r^{-1}\right), b_r=-\frac{1}{2}\left(r-r^{-1}\right) \qquad (3.2)$$

(1.2) белгилаймиз. У ҳолда (5.2) ни қўйидагича ёзамиз.

$$u=a_r\cos\varphi, v=-b_r\sin\varphi \qquad (3.3)$$

бу эллипснинг параметрик тенгламалари. Фокслари $c=\sqrt{a_r^2-b_r^2}$ формулага асосан
$(\pm 1{,}0)$ нуқталарда жойлашган.

Демак, z текисликдаги zҳr айланани W текисликдаги акси (3.3) эллипсдан иборат бўлар экан. Энди эллипсдаги мусбат йўналишни аниқлаймиз. Агар $z=re^{i\varphi}$ нуқта айлана бўйича мусбат йўналишда ҳаракат қилиб бир марта айланиб чиҳса, φ бурчак 0 дан 2п гача ўзгаради.

Муҳакама учун саволлар:

1.Жуковский функциясини умумлаштириш.
2.Жуковский функциясининг аэродинамикада фойдаланишини тахлил қилиш.

2-савол бўйича дарс мақсади:

1.Жуковский функцияси ёрдамида акслантиришни бажариш.
2.Биряпроқлилик соҳасини аниқлаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1.Жуковский функцияси ёрдамида акслантиради.
2.2.Биряпроқлилик соҳасини билади.

2-савол баёни.

Аналитик геометриядан маълумки эллипснинг параметрик тенгламалари

$$x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi, a > 0, b > 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$$

буни (3.3) билан солиштирсак $a_r > 0, -b_r > 0, b_r < 0$ бўлади, яъни эллипсдаги нуқта соат стрелкаси бўйича ҳаракат қилади.

$$a_r \to \infty, b_r \to \infty,$$

Агар $r \to 0$ са (3.2) га асосан $a_r - b_r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2r} = r \to 0$

Яъни $a_r = b_r$ бўлади. Эллипс катталашиб бориб, айлана шаклига олади.Агар $r \to 1$ са ,(3.2) дан $a_r \to 1, b_r \to 0$ (3.4) яъни эллипс [-1;1] кесмага тортилади. Демак, |z доира OU ўқнинг [-1;1] кесмадан ташқари қисмига акcланади.

Энди | $u = \cos, v = 0$ (3.5) бўлади.$|z| = 1$ |устки қисмида $0 \le \varphi \le 2\pi$ Бўлиб,(3.5) га асосан $1 \ge u \ge -1, v = \infty$ бўлади. Айлананинг пастги ярмида эса$\pi \le \varphi \le 2\pi$ бўлиб, $\le u \le 1, v = 0$ шарт бажарилади. Демак, $|z| = 1$айлананинг акс и икки ҳаватли -1$\le г \le 1$ айлананинг юқори қисмига [-1,1]кесманинг пастки ҳирғоғи,пастки ҳирғоғи мос келади.

Б) $r \succ 1$ бўлсин

$$\frac{1}{2}(rҳ\frac{1}{r}) \succ 0, \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \succ 0$$

тенгсизликлар бажарилганлиги учун |z|ҳr айлана ьилан эллипс йўналишлари мос келади. $r \to 1$ да $a_r \to 1, b_r \to 0$ бўлади, яъни эллипи [-1,1] кесмага тортилади.$r \to \infty$ бўлса,

$$a_r \to \infty, b_r \to \infty, a_r - b_r = \frac{1}{r} \to 0$$

яъни эллипс катталашиб бориб айланага максимал яҳинлашади.
Шундай қилиб, $|z| \succ 1$доира ташқарисини (5.1) формула ёрдамида [-1,1] кесма ташқарисига акслантирилади. |z| айлананинг акси икки ҳавотли Кесмадан иборат бўлиб, ийлананинг устки қисмига кесманинг ҳам устки қисми, Айлананинг пастки қисмига кесманинг ҳам пастки ҳирғоғига мос келади.

Демак (5.1) формула бипан z текисликни акслантиришда ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш учун [-1,1] кесмадакесишадиган иккита w текислиги мос келади. wҳ± 1нуқта Жуковский функциясининг тармоҳланиш нуқтаси дейилади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Жуковский ҳақида нимани биласиз?
2.Жуковский функциясининг келиб чиҳиш тарихини айтинг.
3.Жуковский функцияси учун Риман сирти қандай тузилади?
4.Акслантиришнинг амалий ахамиятини айтинг.

Назорат саволлари:

1.1.Жуковский функциясининг кўринишини ёзинг.
1.2.Жуковский функциясининг ҳаҳмҳИй ва мавҳум қисмларга ажратинг.
1.3.Жуковский функциясининг параметрик кўринишини Аниқланг.

1.4.Жуковский функциясининг махсус нуқталарини тпинг.
1.5.Жуковский функцияси ёрдамида айлана қандай фигурага аксланади?
2.1.Жуковский функцияси ёрдамида айлана ичи қандай фигурага аксланади?
2.2.Жуковский функцияси ёрдамида айлана ташқариси қандай фигурага аксланади ?
2.3.Жуковский функцияси ёрдамида бирлик айлана қандай фигурага аксланади?
2.4.Жуковский функцияси ёрдамида комплекс текислик қандай соҳага аксланади?
2.5.Жуковский функциясининг биряпроқлилик соҳасини Аниқланг.
2.6.Жуковский функцияси қандай соҳаларга ҳўлланилади?

Мавзу бўйича ечимини кутаётган илмий муоммалар:
1.Жуковский функциясини паст учувчи тайёраларни яратишда қўллаш.
2.Сувости лоткаларининг формаларини мукаммаллаштиришда Жуковский функциясидан фойдаланиш.

б)Амалий машғулотлар тузилиши:
1-амалий Машғулот.Жуковский функцияси.
Машқларни бажариш учун номуналар.

Мисол 1.Жуковский функцияси ёрдамида $D=\{1<|z|<R, \operatorname{Im} z>0\}$ соҳанинг аксини топинг.

Ечиш. $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ Жуковский функциясини ҳаҳиҳй ва мавҳум қисмларини топамиз: $u=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\phi,$

$v=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\phi$. Бунда $0<\phi<\pi$

Косинус ва синус функцияларнинг олдидаги коэффициентларини чап томонга ўтказамиз
Ва квадратга кўтариб ҳўшамиз, натижада қуйидаги эллипсга келамиз:

$$\frac{4u^2}{(r+\frac{1}{r})^2}+\frac{4v^2}{(r-\frac{1}{r})^2}=1$$

Демак, Жуковский функцияси берилган соҳани эллипснинг юқори ярмига акслантиради.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар: [1],3-боб,171-190 тоҳлари.

Уйга вазифа учун машқлар:171-190 жуфтлари.

Адабиёт

1.Саъдуллаев А., Худойберганов Г.,Мансуров Ҳ.,Ворисов А.,Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.3-қисм. Т.»Ўқитувчи».2000.

в)Мустақил иш топшириқлари:

1-топширик. Чилиҳли ва каср-чизиқли функциянинг ҳоссаларини тахлил қилиш.

1.1 Чизиқли функция ёрдамида акслантирилганда бурилиш бурчак ва чўўзилиш коэффициентларини аниқланг.

1.2.Чексиз узоқлашган нуқта атрофиникаср-чизиқли функция ёрдамида акслантиришни бажаринг.

1.3.Каср-чизиқли функциянинг ҳоссаларини элементар геометриянинг симметрия
тушунчасига тадбиқ қилиш.

2-топшириқ.Даражали ва радикал функциялар.

2.1.Даражали функция ёрдамида акслантиришни конформликка текширинг.

2.2.Кўп қийматли функциядан бирқийматли тармоҳни ажратишни кўрсатинг.

2.3.Радикал функция ёрдамида акслантиришни бажаринг.

3-топшириқ Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар.

3.1.Кўрсаткичли функция ёрдамида акслантиришни бажаринг.

3.2.Ҳақиқий вакомплекс аргументли функцияларнинг ҳоссалари орасидаги фарқни Аниқланг.

3.3.Синус функцияни биряпроқлик соҳасини топинг.

4-топшириқ.Жуковский функцияси.

4.1.Жуковскиц функциясининг ҳоссаларини Аниқланг.

4.2.Жуковский функцияси ёрдамида акслантиришни тахлил қилинг.

4.3.Жуковский функциясини гидродинамик маьносини тушунтиринг.

5-топшириқ.Машиҳларни ечинг.[1],3-боб,162-166,205-210,241-246.319-323,352-360.

Машқлар тўплами:

1.Саъдуллаев А.,Худойберганов Г.,Мансуров Ҳ..Ворисов А., Тўйчиев Т. Математик анализдан мисол вамасалалар тўплами. 3-қисм Т.»Ўқитувчи».2000.

Модул бўйича якуний машғулот:

1.чизиқли функция бирор фигурани ҳисиш,кенгайтириш ёки бирор бурчакка буриш учун ишлатилади.

2.Каср-чизиқли функция тўғри чизиқли ёки айланма ҳаракатларни бир-бирига ўтказади.

3.Кўрсаткичли ва даражали функциялаврнинг ҳоссалари ҳақиқий ўзгарувчили функциянинг ҳоссаларини умумлааштиради.

4.Синус ва косинус функцияларнинг қийматлари комплекс соҳада модул бўйича бирдан катта бўлиши ҳам мумкин.

5.Комплекс аргументли функциялар керакли акслантиришларни бажариш учун ишлатилади.

6.Жуковский функцияси z текисликни [-1,1] кесма бўйича туташтирилган иккита w текисликка акслантиради.

Адабиётлар

1.Худойберганов Г.,Ворисов А.,Мансуров Ҳ.Комплекс анализ.(Маърузалар тўплами) Т.»Университет»1998.
2.Маҳсудов Ш.,Салохиддинов М.,Сирожиддинов С.,Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси.Т.1976.
3.Шабат Б.В.Введение вкомплекснўй анализ.М.»Наука»1976.
4.Лаврентьев М.,А.Методў теории функций комплексного переменного.М.»Наука»1976

7 – Мавзу: Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интеграл.

Фанини ўқитиш технологияси:

“Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интеграл” мавзудаги маъруза машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Комплекс ўзгарувчили функциялардан интеграл олиш, интегрални ҳақиқий ва мавҳум қисмларига ажратиш. Интегрални хисоблашни кўрсатиш.интегралнинг хоссаларини исботлаш. **1.2. Идентив ўқув мақсадлар**: 1.2.1. Йиғинди ёрдамида интегрални таърифлайди. 1.2.2. Интегрални хисоблайди. 1.2.3. Интегралнинг Ньютон-Лейбнис формуласини келтириб чиқаради . 1.2.4. Интегралнинг хоссаларини исботлайди. **1.3**. **Асосий тушунчалар**: Интеграл, интеграл йиғинди, эгри чизиқ, Ньютон-Лейбнис формуласи. Интегралнинг асосий хоссалари. **1.4**. **Дарс шакли**: Маьруза. **1.5. Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, сухбат, мунозара, ақлий хужум. **1.6. Керакли жихоз ва воситалар**: Компьютер, видеопроектор.	Ўқитувчи 5 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган саволлар тушунтирилилади. 2.2. Интеграл қандай таърифланиши сўралади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гурухда ишлаш босқичи:** 3.1. Интеграл йиғинди тузилади . 3.2.Йиғиндидан лимитга ўтиб, интеграл маърифланади. 3.3. Ньютон-Лейбнис формуласи келтириб чиқарилади.	Ўқитувчи – талаба 50 минут

	3.4. Интегралнинг хоссалари исботланади.	
4	**Мустахкамлаш ва бахолаш учун саволлар:** 4.1. Йиғиндидан лимитга ўтилади. 4.2. Интеграл иккита қисмга ажратилади. 4.3. Интегралнинг хоссалари келтирилади. 4.4. Интегрални хисоблаш мисолда бажарилади.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсад ва вазифаларни бажарилганлиги тахлил қилиниб хулоса чиқарилади. 5.2. Талабалар баҳоланади. 5.3. Мустақил иш вазифа сифатида уйга берилади (интегралнинг хоссалари).	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

1.Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интеграл ва унинг хоссалари.
2.Ньютон-Лейбниц формуласи.

Мавзуга оид таянч тушунча ва иборалар:

эгри чизиқ,интеграл,интегралнинг асосий хоссалари,мавжудлиги,Ньютон-Лейбниц формуласи,Бошланғич функция.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Интегрални амалиётда қўллаш.
2.Интегрални кўп ўзгарувчили функциялар учун умумлаштириш.

1-савол бўйича дарс мақсади::

1. Комплекс текисликда интегралнинг таърифи
2. Интегралнинг асосий хоссалари.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1Эгри чизиқли интегралнинг таърифини билади.
1.2Эгри чизиқли интегралнинг хоссаларини исботлайди.

1-саволнинг баёни

С комплекс текисликда тўғриланувчи Г Жордан чизиғини оламиз.Г нинг бошланғич нуқтаси α охирги нуқтаси β бўлиб, α дан β га йўналган бўлсин.

$f(z)=u(x,y)+v(x,y)$ функция Γ да берилган ва узликсиз бўлсин. Γ да кетма-кет келган $z_k = x_k + y_k \quad k=1,2....n$ нуқталарни оламиз. қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$s=\sum_{k=0}^{n} f\,(\varsigma_k)\Delta z_k \qquad (1.1)$$

бу ерда $\varsigma_k = \xi_k + i\eta_k \in z_k z_{k+1} \subset \Gamma, \Delta z_k = z_{k+1} - z_{k,} z_0 = \alpha, z_{n+1} = \beta$

(2.1) йиғиндининг қуйидагича ёзамиз:

$$s = s_1 +$$

$$+is_2 = \sum_{k=0}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=0}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,$$

$\lambda = \frac{\max}{k} | \Delta z_k |$ Эгри чизиқли интеграл таърифига кўра: $\lim_{\lambda \to 0} s_1 = \int_\Gamma u(x,y)dy - v(x,y)dx$, $\lim_{\lambda \to 0} s_2 = \int_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx$

Г эгри чизиқ силлиқ ва $f(z)$ функция узликсиз бўлганлиги учун

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx \quad (1.2)$$

Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интеграл қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\int_{\Gamma^+} f(z)dz = \int_{\Gamma^-} f(z)dz$

Буерда «-« интеграллаш тескари йўналишда эканлигини кўрсатади.

2.Агар $f_k(z), k = 1,2,...n$, Г да узликсиз функция бўлиб, $c_{k,} k = 1,2,..., n$ ўзгармас бўлса, у ҳолда

$$\int_\Gamma \sum_{л=1}^{n} c_k f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_\Gamma f_k(z)dz \quad (1.3)$$

3.Агар тўғриланувчи Г чизиғи $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ қисмлардан иборат бўлса, у ҳолда

$$\int_\Gamma f(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)dz$$

4.Агар $f(z)$ узлуксиз бўлси, $|f(z)|$ интегралланувчи бўлади ва

$$/\int_\Gamma f(z)dz | \le \int_\Gamma | f(z) || dz | \le \max_{z\in\Gamma} | f(z) | l$$

тенгсизлик бажарилади. Бунда,l, Г эгри чизиқнинг узунлиги.

5.Агар $\{f_k(z)\}$ узликсиз функциялар кетма-кетлиги $f(z)$ функцияга текис яқинлашса, $f(z)$ интегралланувчи ва қуйидаги лимит мавжуд

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Gamma f_k(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$$

6. Г эгри чизиқ $z = z(\iota), \iota \in [\alpha, \beta]$ параметрик тенглама билан берилган бўлиб, $f(z)$ функция Г да узликсиз бўлсин, уҳолда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(\iota)]z'(\iota)d\iota$$

Мисол1. Γ эгри чизиқ айлана, $\iota \in [0,2\pi]$, $f(z) = (z-a)^n$, $n \in Z$, функциядан олинган интегрални хисобланг.

Ечиш. $\int\limits_{\Gamma} (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\iota} d\iota, n \neq -1,$ бўлсин.

$$\int\limits_{\Gamma} (z-a)^n dz = r^{n+1} i \{ \int\limits_0^{2\pi} \cos(n+1)\iota d\iota + i \int\limits_0^{2\pi} \sin(n=1)\iota d\iota \} = 0,$$

n-1 бўлсин,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d(re^{i\iota})}{re^{i\iota}} = i \int\limits_0^{2\pi} \frac{re^{i\iota} d\iota}{re^{i\iota}} = i \int\limits_0^{2\pi} d\iota = 2\pi i$$

Демак $$\int\limits_{\Gamma} (z-a)^n dz = \{0, n \neq -1, 2\pi i, n = -1\} \qquad (1.4)$$

Муҳакама учун саволлар:

1.Ҳақиқий ва комплекс функциялардан олинган интегралларни таққослаш.
2.Ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаш.

2-асосий савол: бўйича дарс мақсади:

1.Комплекс текисликда аниқмас интегралниисботлаш.
2.Ньютон –Лейбниц формуласини келтириб чиқариш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1.Комплекс текасликда аниқмас интегрални билади.
2.2.Ньютон-Лейбниц формуласини келтириб чиқаради.

2-саволни баёни:

$w = f(z)$ функция D саҳода узликсиз бўлсин. D соҳада z_0 ва z нуқталарни туташтурувчи силлаҳ бўлакли Γ эгри чизиқ оламиз,

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\varsigma) d\varsigma \qquad (1.5)$$

интегрални қараймиз.

Теорема1.1.(1.5) интеграл $f(z)$ функциянинг бошланғичи бўлади, яъни $F'(z) = f(z)$ тенглик бажарилади.

Исбот. Z нуқтанинг ихтиёрий кичик атофида $z + \Delta z$ нуқтани оламиз

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma-\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma]=\frac{1}{\Delta z\int}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma$$

$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\varsigma$ эканлилигини эътиборга олсак,

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\varsigma)-f(z)]d\varsigma$$

$f(z)$ функция z нуқтада узликсиз бўлганлиги учун таърифга кўра ихтиёрий $\varepsilon\succ 0$ учун $\delta\succ 0$ топиладики $|\varsigma-я/\prec\delta$ бўлганда $|f(\varsigma)-f(z)|\prec\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)|\prec\varepsilon.$$

Лимитнинг таърифидан

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z), F'(z)=f(z)$$

Теореми исботланди.

Ихтиёрий ўзгармас С учун

$$\Phi(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma+C \qquad (1.6)$$

функцияни оламиз. $\Phi(z_0)-C$ бўлади. Буни (1.6) га ҳўямиз,

$$\Phi(z)=\int_{я_0}^{я} f(\varsigma)d\varsigma+\Phi(z_0), \int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma=\Phi(z)-\Phi(z_0) \qquad (1.7)$$

(2.6) га аниқмас интеграл дейилади.(1.7) Ньютон –Лейбниц формуласи.

Мисол2. Γ силлиқ-бўлакли эгри чизиқ z_0ва z нуқталарни туташтирсин,

У ҳолда, $$\int_{\Gamma} z^n dz=\frac{1}{n+1}[z^{n+1}-z^n]. \qquad (1.8)$$

Бунда n$\neq -1$ бўлса Γ эгри чизиқ z_0 нуқтадан ўтмайди.

Ечиш. Γ нинг тенгламаси $z=z(\iota), \iota\in[\alpha,\beta]$ бўлсин

1. $$\int_{\Gamma} z^n dz=\int_{\alpha}^{\beta} z^n z'(\iota)d\iota=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{n+1}\frac{d}{dz}[z(\iota)]^{n+1}d\iota=\frac{1}{n+1}(z^{n+1}-z_0^{n+1})$$

Демак, z^n дан олинган интеграл интеграллаш йўлига боғлиҳ эмас.

Муҳакама учун чаволлар:

2.1.Ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялардан олинган интегралларнинг фарқи нимада?

2.2.Ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган интеграл қандай ҳисобланади?

Назорат саволлари

1.1.қандай функцияни интеграллаш мумкин.
1.2.Интеграл йиғинди қандай тузулади?
1.3.Интеграл йиғиндини ёзинг.
1.4.Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интегрални келтириб чиқаринг.
1.5.Ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялардан олинган эгри чизиқли интегралларни солиштиринг.
2.1.Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интегралнинг нечта ҳоссалари мавжуд.
2.2.Ўрта қиймат ҳақидаги интегрални ёзинг.
2.3.Интегрални ҳисоблаш формуласини келтириб чиҳоринг.

8 – Мавзу: Коши теоремаси. Кошининг интеграл формуласи

Фанини ўқитиш технологияси:

“Коши теоремаси. Кошининг интеграл формуласи” мавзусидаги маъруза машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Гурсс леммасини исботлаш. Коши теоремасини исботлаш. Кошининг интеграл формуласини келтириб чиқариш. Формула аналитик функцияни ифодалашни аниқлаш. **1.2. Идентив ўқув мақсадлар**: 1.2.1. Соҳага ёпиқ синиқ чизиқ чизилади. 1.2.2. Гурс леммасини исботлайди. 1.2.3. Коши теоремасини исботлайди. 1.2.4. Коши формуласини келтириб чиқаради. 1.2.5. Формула аналитик функцияни беришини текширади. **1.3**. **Асосий тушунчалар**: Синиқ чизиқ. Соҳа, лемма, теорема, интеграл, кўп боғламли соҳа, анолитик функция. **1.4. Дарс шакли**: Маьруза. **1.5. Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, сухбат, мунозара, ақлий хужум. **1.6. Керакли жихоз ва воситалар**: чизғич, компьютер, видеопроектор.	Ўқитувчи 10 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган масалалар тушунтирилилади.	Ўқитувчи 5 минут

	2.2. Ёпиқ соҳада интеграл олиниши сўралади. 2.3. Кўпбоғламли соҳани кўрсатилиши сўралади.	
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Соҳа аниқланиб, синиқ чизиқ чизилади. 3.2. Эгри чизиқ ва синиқ чизиқ интеграллари таққосланади. 3.3. Синиқ чизиқ билан соҳа учбурчакларга ажратилади. 3.4. Учбурчак бўйича олинган интеграл нол бўлиши исботланади. 3.5. Коши теоремаси исботланади. 3.6. Кошининг интеграл формуласи келтириб чиқарилади. 3.7. Мураккаб соҳа учун формула фойдаланилади.	Ўқитувчи – талаба 50 минут
4	**Мустахкамлаш ва бахолаш учун саволлар:** 4.1. Бирбоғламли ва кўпбоғламли соҳалар сўралади. 4.2. Гурсс леммаси нима деб савол берилади. 4.3. Коши теоремаси сўралади. 4.4. Коши формуласининг исботи аниқланади. 4.5. Талабаларнинг жавоблари баҳоланади.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Қўйилган мақсад ва вазифаларни бажарилганлиги тахлил қилинади.. 5.2. Мустақил иш топшириқлари уйга вазифа сифатида берилади (Коши типидаги интегрални ўзлаштириш).	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

1.Коши теоремаси.

2.Коши интеграли

Таянч тушунчалар ва иборалар:

Интеграл, ёпиқ эгри чизиқ бўйича интеграл, аналитик функциядин олинган интеграл, узликсиз функциядан олинган интеграл.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган хосмас интеграл.

2.Узлуксиз функция учун Коши интегралини исботлаш.

1-асосий савол бўйича дарс мақсади:

1.Учбурчак учун Коши теоремасини исботлаш.

2.Ихтиёрий соҳа учун Коши теоремасини исботлаш.

Идентив ўқув мақсадлар:

3.1 Учбурчак учун Коши теоремасини исботлайди.

3.2 Ихтиёрий соҳа учун Коши теоремасини тушунтиради.

1-саволни баёни.

Лемма2.1(Гурс) Агар $f(z)$ функция D соҳада узликсиз бўлиб, Γ силлиқ-бўлакли эгри чизиқ D да тўла ётса, ихтиёрий $\varepsilon \succ 0$ сон учун D соҳада учлари Γ да ётувчи P кўпбурчак мавжудки

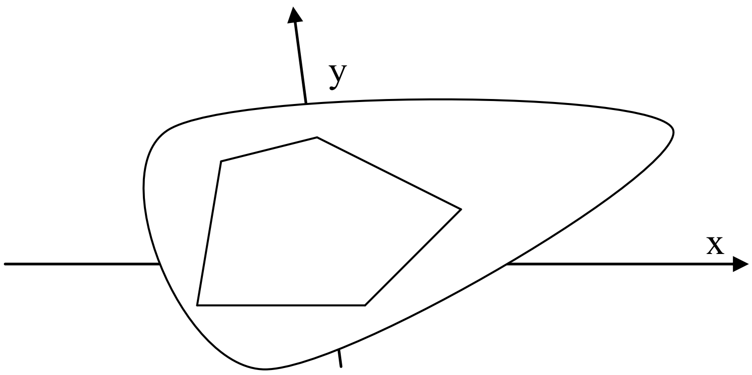
$$|\int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma_P} f(z)dz| \prec \varepsilon \qquad (2.1)$$

тенгсизлик бажарилади. Бунда Γ_P билан P кўпбарчакнинг периметрини белгиладик.

Исбот. D да ётувчи Γ ни ўз ичига олувчи ёпиқ G ёпиқ соҳани оламиз. G соҳада узликсаз бўлган $f(z)$ функция Кантор теоремасига кўра текис узлуксиз бўлади. Яъни $\varepsilon \succ 0$ учун $\delta \succ 0$ сон мавжудки $|z' - z''| \prec \delta$ бўлганда

$$|f(z') - f(z'')| \prec \varepsilon \qquad (2.2)$$

тенгсизлик бажарилади.



Чизма-1.

Γ эгри чизиқни $z_1, z_2, ..., z_n$ нуқталар ёрдамида $\Gamma_к$ бўлакларга бўламиз. $\Gamma_к$ нинг узунлиги $\delta_к$ бўлсин $\delta_к \prec \delta$ бўлсин.Учлари $z_1, z_2, ..., z_n$ нуқталарда бўлган P кўпбурчак оламиз. δ ни шундай танлаймизки P кўпбурчак D соҳада жойлашсин.

(2.8) формулада $\Gamma = \Gamma_к$ деб олсак, n ҳ0 бўлганда

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} dz = z_{k+1} - z \quad = \Delta z_k \,, z_{n+1} = z_1 \qquad (2.3)$$

Интегралнинг асосий хоссалари ва (2.3) формуладан фойдаланамиз, натижада

$$|\int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \; = |\sum_{k=1}^{n} \int \int_{\Gamma_k} [f(z) - f(z_k)dz| \prec \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.4)$$

Юқоридагидек мулаҳоза юритиб

$$|\int\limits_{\Gamma_P} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k| \prec \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.5)$$

тенгсизликни исботлаш мумкин. Охирги иккита тенгсизликлар ёрдамиди (2.1) тенгсизлик исботланади.

Теорема2.1 (Коши) Агар $f(z)$ функция D бирбоғламли соҳада аналитик бўлиб , Γ `ёпиқ силлиқ-бўлакли Жордан чизиғи D соҳада тўла жойлашган бўлса , у ҳолда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0 \qquad (2.6)$$

Исбот. Аввало Γ эгри чизиқ D да ётувчи учбурчак томонларининг узунлиги деб оламиз (2.8) формулада nҳ0 ва nҳ1 бўлсин, натижада

$$\int\limits_{\Gamma_\Delta} \mathrm{dz} = \int\limits_{\Gamma_\Delta} \mathrm{zdz} = 0 \qquad (2.7)$$

$$\int\limits_{\Gamma_\Delta} f(z)dz = 0 \qquad (2.8)$$

эканлигини кўрсатамиз.

$$|\int\limits_{\Gamma_\Delta} f(z)dz| \succ M \qquad (3.9)$$

бўлсин. Δ учбурчакнинг томонларини ўрталарини туташтириб ,
4та $\Delta_к, k = 1,2,3,4$
тенг учбурчаклареа ажратамиз Уларнинг ичидан энг камида биттаси, масалан Δ_1 учун

$$|\int\limits_{\Gamma_{\Delta_1}} f(z)dz| \geq M \qquad (2.10)$$

тенгсизлик бажарилсин. Юқоридаги каби Δ_1 ни ҳам тенг 4 бўлакка бўламиз, шундай давом эттириб к ҳадамда

$$|\int\limits_{\Gamma_{\Delta_k}} f(z)dz \geq \frac{M}{4^k} \qquad (2.11)$$

тенгсизлик бажарилади.$\{\Delta_к\}$ учбурчаклар кетма-кетлиги учун $z_0 \in D$ умумий нуқта мавжуд.. $f(z)$ функция аналитик бўлганлиги учун $\varepsilon \succ 0$ бўлганда $\delta \succ 0$ мавжудки қуйидаги шарт |z-z$_0$|$\prec \delta$,бажарилганда

$$|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)| \prec \varepsilon \qquad (2.12)$$

тенгсизлик бажарилади.Бирор номердан бошлаб учбурчаклар кетма-кетлиги (2.11) доирада ётади. Юқорида келтирилган тенгсизликларга кўра$|\int_{\Gamma_{\Delta_k}} f(z)dz|=|\int_{\Gamma_\Delta}[f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)]dz|\prec\varepsilon$ (2.13)

$$\int_{\Gamma_{\Delta_\kappa}}|z-z_0|\backslash dz\backslash\prec\varepsilon\frac{l}{4^k}$$

Демак М$\prec\varepsilon$ бўлади.ε исталганча кичик бўлганлиги учун Мҳ0 яъни (2.8)тенглик бажарилади.
D ла ётувчи Р кўпбурчакни чекли сондаги учбурчакларга ажратамизва қуйидаги тенгликка эга бўламиз

$$\int_{\Gamma_P} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_{\Delta_k}} f(z)dz$$

Ўнг томон нол бўлганлиги учун чап томони ҳам нолга тенг бўлади.:

$$\int_{\Gamma_P} f(z)dz=0 \tag{2.14}$$

Гурс леммасига асосан $\int_{\Gamma} f(z)dz=0$ тенглик бажарилади. Теорема исботланди.

Эслатма. Коши теоремасини D ёпиқ сиҳада узликсиз ва унинг ичида аналитик бўлган f(z) функция учун ҳам исботлаш мумкин.
D соҳа nқ1 боғламли соҳа бўлсин $\Gamma_0,\Gamma_1,...\Gamma_n$ чизиқлар билан чегараланган бўлиб,Γ_0 ҳолганларини ўз ичида соҳласин.

Теорема3.2 Агар $f(z)$ функция D кўпбоғламли соҳада аналитик бўлса

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma_0} f(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(z)dz \tag{2.15}$$

тенглик бажарилади.

Исботи. Γ_κ ёпиқ эгри чизиқларни γ_κ кесмалар билан туташтирамиз

Натижада кўпбоғламли соҳа иккита ёпиқ соҳаларга ажралади. Коши теоремасига биноан

$$\int_{\Gamma'} f(z)dz=\int_{\Gamma''} f(z)dz=0$$

Буерда Γ'ва Γ'' чизиқлар ажратилган соҳаларнинг чегаралари.

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(z)dz=\int_{\Gamma'} f(z)dz+\int_{\Gamma''} f(z)dz=0$$

Бунда γ_κкесмалар бўйича олинган интеграллар икки марта ҳарама -ҳарши йўналишлар бўйича олинганлиги учун нолга тенг бўлади.

Муҳакама учун саволлар:

1.1. Агар функция аналитик бўлмаса ундан олинган интегралнимага тенг ьўлади?

1.2 Коши интегралини ихтиёрий эгри чизиқ бўйичаолинганинтеграл билан солиштиринг.

2-савол бўйича дарс мақсади:

1.Кошининг интеграл формуласини келтириб чиқариш.
2.Коши интеграли аналитик функцияни ифодалашини кўрсатиш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1. Коши интегралини билади.
2.2. Интегрални аналитик функцияни ифодалашини исботлайди.

2-асосий савол баёни:

Теорема3.3.(Коши) Агар $f(z)$ функция силлиқ-бўлакли Г ёпиқ эгри чизиқ чегараланган D соҳада аналитик бўлиб, Г да узликсиз бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{2\pi I}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{z-t}=\begin{cases} f(z), z\in D \\ 0, z\notin D \end{cases}$$

Исботи. U_r, z нуқтанинг атрофи деб оламиз. D_{r}x$D\setminus U_r$, γ_r ,D_r нинг чегараси, γ_r ,U_r нинг чегараси. Теорема3.1 га асосан

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(t)dt}{t-z}=0$$

Демак,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(t)dt}{t-z} \qquad (2.16)$$

қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{dt}{t-z}$f(z)

$$f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(t)-f(z)}{t-z}dt$$

Ўнг томондаги айирма функция узлуксиз бўлганлиги учун исталганча кичик бўлади ва $r\to 0$ да нолга тенг бўлади.Демак,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(t)dt}{t-z} \text{ (3.16) га асосан } f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

Теорема исботланди.

Агар Г эгри чиизиҳ очиҳ ёки ёпиқ бўлиб, $f(z)$ функция Г да узликсиз бўлса ҳам Коши интеграли ўринли бўлади. Бунга Коши типидаги интеграл дейилади ва

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z} \qquad (2.17)$$

кўринишда белгиланади.

Теорема2.4 C текисликнинг Г эгри чизиқдан тошҳари нуқталарида (2.17) функция аналитик бўлади.

Исбот.Исбот қилиш учун $F(z)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд эканлигини
текшириш кифоя. z га Δz орттирма берамиз ва қуйидаги тенгликни тузамиз

$$\frac{\mathrm{F(z+\Delta z)\text{ - }F(z)}}{\Delta \mathrm{z}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)(t-z-\Delta \mathrm{z})} \qquad (2.18)$$

$\Delta z\to 0$да лимитга ўтамиз, натижада

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}$$

формула ҳосил бўлади. (2.18)формуладан лимитга ўтиш ҳонуний эканлигини кўрсатамиз.

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{\Delta z f\{t)dt}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)}\right|\prec\frac{|\Delta z|}{}$$

$$\frac{lM}{2\pi d^2} \qquad (2.19)$$

Бунда l,Γ эгри чизиқнинг узунлиги. $\mathrm{M}=\max_{t\in\Gamma}|f(t)|$.

Юқордагидек мулаҳаза юритиб, математик индукция метода ёрдамида қуйидаги тенгликка эга бўламиз

$$F^{(n)}(z)=\frac{n|}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}$$

Муҳакама учун чаволлар:

2.1.Ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялардан олинган интегралларнинг фарқи нимада?

2.2 Ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган интеграл қандай ҳисобланади?

Назорат саволлари:

1.1.Гурс леммасини айтинг.
1.2.Гурс леммасини исботланг.
1.3.Ёпиқ контурни чизинг.
1.4.Коши теоремасини шартларини аниқланг.
1.5.Коши теоремасини натижасини айтинг.
1.6.Коши теоремасини исботланг.
1.7.Кўп боғламли соҳани чизинг.
1.8.Кўп боғламли соҳа учун Коши теоремасини исботланг.

Муҳакама учун саволлар:

1.Узлуксиз ваузлукли функциялар учун Коши теоремасини исботлаш мумкинми?
2.Коши интеграли ёрдамида функциянинг қиймати қандай нуқталарда аниқланади?

9 – Мавзу: Тейлор қатори. Лиувилл ва Марера теоремалари.

Фанини ўқитиш технологияси:

“Тейлор қатори. Лиувилл ва Марера теоремалари Лиувилл ва Марера теоремалар” мавзусидаги машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Қатор,Тейлор қатори, қаторга ёйиш Коши тенгсизлиги, Лиувилл теоремаси, итеграл, анолитик функция. **1.2. Идентив мақсадлар**: 1.2.1. Аналитик функцияни билади. 1.2.2. Функцияни Тейлор қаторига ёяди. 1.2.3. Коши тегсизлигини келтириб чиқаради. 1.2.4. Лиувилл теоремасини исботлайди. 1.2.5. Морера теоремасини текширади. **1.3**. **Асосий тушунчалар**: Аналитик функция, қаторга ёйиш, тенгсизлик, интеграл тўла тенг голоморф функция. **1.4**. **Дарс шакли**: Маьруза. 1.**5. Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, сухбат, мунозара, ақлий хужум. **1.6. Керакли жихоз ва воситалар**: Компьютер, видеопроектор.	Ўқитувчи 10 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган саволлар тушунтирилилади. 2.2. Коши теоремаси сўралади. Коэффициентларни ҳисоблаш формуласи сўралади.	Ўқитувчи 5 минут

3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Қатор ёзилади, коэффициентларни ҳисоблаш формуласи келтириб чиқарилади. 3.2. Коши тенгсизлиги ҳисобланади. 3.3. Теоремалар исботланади	Ўқитувчи – талаба 50 минут
4	**Мустахкамлаш ва баҳолаш учун саволлар:** 4.1. Функция қаторга ёйилади. 4.2. Қатордар хосилалар олинади. 4.3. Коэффициентлар хисобланади. 4.4. Умумий коэффициент баҳоланади. 4.5. Теоремалар сўралади. 4.6. Талабалар иши баҳоланади.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсад ва вазифаларни бажарилганлиги тахлил қилинади. 5.2. Мустақил топшириқлар уйга вазифа сифатида берилади (даражали ва Тейлор қаторларини иаққослаш)	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

1.Тейлор қатори.

2.Лиувилл ва Марера теоремалари.

Мавзуга оид таянч тушунчалар ва иборалар.

Даражали қатор, Тейлор қатори. Коши тенгсизлиги. Лиувилл теоремаси. Марера теоремаси.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Тейлор қаторини кўп ўзгарувчили функция учун аниқлаш.

2.Аналитик функцияни ифодалавчи теоремаларни жамлаш.

1-савол бўйича дарс мақсади:

1.Функцияни Тейлор қаторига ёйиш

2.Лиувилл ва Марера теоремаларини исботлаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1.Функцияни Тейлор қаторига ёйади.

1.2.Лиувилл ва Морера теоремаларини исботлайди.

1-савол баёни

Даражали қаторнинг умумий кўриниши

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (3.1)$$

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+\mathrm{c_n}(z-z_0)^n+...$$
$$f'(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+\mathrm{c_n}(z-z_0)^n+...$$
$$f''(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+\mathrm{c_n}(z-z_0)^n+...$$
…………………………………………………………………………………
$$f^{(n)}(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+\mathrm{c_n}(z-z_0)^n+...$$
…………………………………………………………………………………

Бу қаторларнинг яҳинлашиш доираси (3.1) қаторнинг яҳинлашиш доираси каби бўлади.

Агар юқоридаги қаторларда $z=z_{1\,0}$ деб олсак

$$c_0=f(z_0), c_1=f'(z_0),,,,, f^{(n)}(z_0)\frac{1}{n|} \tag{3.2}$$

Агар даражали қаторнинг коэффициентлари (3.2) муносабатлар билан аниқланган бўлса. Бундай қаторга Тейлор қатори дейилади.ва унинг кўриниши қуйидагича бўлади

$$f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+,,,,+\frac{f^{9n)}(z_0)}{n|}(z-z_0)^n+,,,,, \tag{3.3}$$

шундай қилиб ҳарқандай даражали қатор яҳинлашиш доираси ичида Тейлор қатори бўлади. Тейлор қаторининг коэффициентлари интеграллар ёрдамида ҳам ҳисобланади. Тейлор қаторининг яҳинлашиш доирасининг маркизи z_0нуқтада бўлсин ва z нуқта шудоира ичида ётсин, у ҳолда Коши интегралига асосан

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z} \tag{3.4}$$

Бунда С яҳинлашиш доирасининг чегараси. (3.4) ни n марта кетма-кет дифференциаллаймиз ва $z=z_0$ деб оламиз:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z_0},\ f^{(n)}(z_0)=\frac{n|}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}$$

(4.2) формулаларга кўра қуйидагиларни топамиз:

$$c_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{t-z_0}, c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}, n=1,2,,,,$$

Юқорида кўрдикки ҳарқандай аналитик функцияни Тейлор қаторига ёйиш мумкин, бу тасдиқнинг тескариси ҳам мавжуд.

Теорема3.1.(Тейлор.) D соҳада аналитик бўлган $f(z)$ функцияни шу соҳанинг ҳарбир нуқтаси атрофида Тейлор қаторига ёйиш мумкин.

Исбот. $Z_{0,}$ D соҳада ётувчи ихтиёрий нуқта бўлсин, γ эса z_0 ни саҳловчи Радиуси dга тенг бўлган айлана. Кошининг интеграл формуласига кўра

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)(1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} \qquad (3.5)$$

Ихтиёрий z учун $|z-z\quad|\prec d$ бўлганидан $|\frac{z-z_0}{t-z_0}|=\delta\prec 1, t\in\gamma$ интеграл тагидаги каср геометрик қаторнинг йиғиндисидир:

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{z-z_0}{t-z_0})^k$$

Буни (3.5) формулага қўямиз

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\tfrac{f(t)}{t-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{t-z_0})^k\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(z-z_0)^k \qquad (3.6)$$

Буерда

$$c_л=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1,}},k=0,1,2,.... \qquad (3.7)$$

Демак аналитик функция аниқланиш соҳасининг ихтиёрий нуқтаси атрофида (3.6) қаторга ёйилади ва унинг коэффициенти (3.7) формула ёрдамида ҳисобланади. Теорема исботланди.

Муҳакама учун саволлар:

1.Тейлор қаторининг асосий хоссаларини топиш.

2.қатор коэффицентларини баҳолаш

2-асосий савол бўйича дарс мақсади:

1.Коши тенгсизлигини келтириб чиқариш.

2.Марера теоремасини исботлаш.

Идентив ўқув маҳсалар:

2.1.Коши тенгсизлигини келтириб чиқаради.

2.2.Марера теоремасини исботлайди.

2-савол баёни:

(3.1)даражали қаторнинг S(z) йиғиндиси $|z-z_0|\prec R$, доирада чегараланган бўлсин. яъни

$$|S(z)|\prec M, M-\text{мусбат сон} \qquad (3.8)$$

(3.7) га асосан Тейлор қаторининг коэффициентлари қуйидагича ҳисобланади:

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}} \qquad (3.9)$$

буерда $\gamma \mid t - z_0 \mid \prec \delta, \delta \prec R$ доиранинг чегараси.

(3.8) дан фойдаланиб. (3.9) ни баҳолаймиз

$$| c_k | \leq - \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\delta}{\delta^{k+1}} M = \frac{M}{\delta^k}$$

$\delta \to R$ да лимитга ўтамиз ва қуйидаги Коши тенгсизлигига келамиз.

$$| c_k | \leq \frac{M}{R^k} \tag{3.10}$$

Теорема3.2.(Лиувилл)Агар $f(z)$ функция $\overline{C}$ кенгайтирилган комплекс текисликда аналитик ва чегараланган бўлса., у ўзгармас бўлади.

Исбот. $f(z)$ функция $\overline{C}$ текисликда аналитик бўлганлиги учун (3.10) тенгсизликдан $R \to \infty$ да лимитга ўтамиз. Натижада $c_k = 0, k = 1,2,,,,$ Демак, $f(z) = c_0$ -ўзгармас. Теорема исботланди.

Теорема3.3.(Морера) Агар $f(z)$ функция D соҳада узлуксиз бўлиб, шу сиҳада тўла жойлашган Г ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган интеграл нолга тенг бўлса , $f(z)$ функция аналитик бўлади.

Исбот.Теореманинг шарти Коши теоремасини ифодалайди шунинг учун

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

интеграл интеграллаш йўлига боғлиҳ эмас ва $F'(z) = f(z)$ тенглик бажарилади. Чап томондаги функция аналитик бўлганлиги учун ўнг томондаги ҳам аналитик бўлади. Теорема исботланди.

Таьриф3.1.Агар $f(z)$ функция z_0 нуқта атрофида яҳинлашувчи даражали қаторга ёйилган бўлса, голоморф функция дейилади.

Теорема3.3. $f(z)$ функцияниг z нуқтада аналитиклик ва голоморфлик таърифлари эквивалентдир.

Исбот. $f(z)$ функция z_0 нуқтада голоморф бўлсин , у ҳолда бу функция таърифга кўра яҳинлашувчи даражали қаторнинг йиғиндиси бўлади, шунинг учун у аналитик бўлади.

$f(z)$ функция z_0 нуқтада аналитик бўлсин, уни яҳинлашувчи даражали қаторга ёйиш мумкин бўлади. Демак $f(z)$ функция z нуқтада голоморф. Теорема исботлани.

Муҳакама учун саволлор:

1.Ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялар учун Тейлор қаторини солиштиринг.
2.Ҳақиқий снлар тўпламида Тейлор қатори коэффициенти қандай ҳисобланади.

Назорат саволлари:

1.1.Функционал кетма-кетликни ёзинг.

1.2.Функционал кетма-кетликни яҳинлашишини текширинг.
1.3.Даражали қаторни ёзинг .
1.4.Тейлор қаторини тузинг.
1.5.Даражали ва Тейлор қаторини таққосланг.
1.6.Тейлор қаторининг коэффициентларини ҳисоблаш формулаларини келтириб чиқаринг.
2.1.Голоморф функциянинг таърифини беринг.
2.2.Коши тенгсизлигини исботланг.
2.3.Лиувилл теоремасини исботланг.

Мавзу бўйича ечимини кутаётган илмий муаммолар:

1.Тейлор қаторини амалий масалаларни ечишга қўллаш.
2.Ажралмаган махсус нкҳта атрофида функциянинг қийматини интеграл ёрдамида ифодалаш.
3.Морера теоремасини кўпўзгарувчили функция учун исботлаш.

Б)Амалий машғулотнинг тузулиши: (10соат)

1-амалий машғулот.Интегрални хоссалари.Ньютон –Лейниц формуласи.

Дарснинг мақсади.

1.Интегрални хоссалари ёрдамида ҳисоблаш.
2.Интегрални Ньютон-Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1.Хссалар ёрдамида интегрални ҳисоблайди.
1.2.Интегрални Ньютон-Лейниц формуласи ёрдамида ҳисоблайди.
Амалий Машғулотни бажариш учун намуналар.

Мисол 1.Агар γ боши $z_1 = -2$ нуқтада ,охири $z_2 = 2$ нуқтада бўлган $\{|z| = 2, \operatorname{Im} z \le 0\}$

Айлана бўлаги бўлса.$\int\limits_\gamma (2x - 3iy)dz$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш.$\int\limits_\gamma (2x-3iy)dz = \int\limits_{|z|<2} (2x-3y)dz + \int\limits_2^{-2} 2xdx = |x = 2\cos t, 2\sin t, dz = 2i|$

$$e^{it}dt] = 8i\int\limits_{-\pi}^{0}\cos t e^{it}dt - 12i\int\limits_{-\pi}^{0} \sin t e^{it}dt + x^2\int_2^{-2} = 8i\int\limits_{-\pi}^{0}(\cos t + i\cos t\sin t)dt -$$

$$-12\int\limits_{-\pi}^{0}\sin t\cos t + i\sin t)dt = -2\pi i$$

Мисол 2. $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-4}$,интегрални ҳисобланг $\gamma \wedge x = \cos t, y = 2\sin t -$ эллипс.

Ечиш. $z - 4 = x + iy - 4 = 3\cos t - 4 + 2\sin t, dz = 3d\cos t = 2id\sin t.$

$$\text{Jҳ}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3d\cos t}{3\cos t - 4 + 2i\sin t} + 2i\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\sin t}{3\cos t - 4 + 2i\sin t} = \ln(3\cos t - 4 + 2i\sin t)_0^{2\pi} = 0$$

Мисол 3. $\int\limits_{0}^{\ln 2} ze^{z}dz$ интегрални Ньютон-Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисобланг.

Ечиш. $\int\limits_{0}^{\ln 2} ze^{z}dz = \begin{array}{c} u = z, dv = e^{z}dz \\ du = dt, v = e^{z} \end{array} = (ze^{z} - e^{z})_{0}^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1.$

2-амалий Машғулот.Коши теоремаси.Коши интеграли.

Дарснинг мақсади:

1.Коши теоремасини қўллашю

2.Коши интегралини ҳисоблаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1.Коши теоремасини ҳўллайди.

2.2.Коши интегралини ҳисоблайди.

Амалий машғулотни бажариш учун намуна.

Мисол 1. $\int\limits_{|z+2|=2} \frac{zdz}{z^2-1}$ интегрални Коши формуласидан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. Jҳ $\int\limits_{|z+2|=2} \frac{zdz}{(z+1)(z-1)} = 2\pi i \frac{-1}{-1-1} = \pi i$

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар:1-30, 43-50 тоҳлари.

Уйга вазифа:1-30,43-50 жуфтлари.

3-амалий машғулот.Тейлор қатори.Морера теоремаси.

Дарснинг мақсади:

1.Функцияни Тейлор қаторига ёйиш.

2.Морера теоремасини исботлаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

3.1.Функцияни Тейлор қаторига ёйолади.

3.2.Морера теоремасини исботлайди.

Амалий машғулотни бажариш учун намуналар:

Мисол 1. $f(z) = \int\limits_{0}^{z} e^{t^2}dz$ функцияни a ҳ0 нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйинг.

Ечиш.Кўрсаткичли функциянинг Тейлор қаторига ёйиш формуласидан фойдаланамиз.

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \ldots + \frac{t^{2n}}{nI} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}, \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Ўқув хонасида ишлаш учун Машқлар 73-97,115-150 тоҳлари.

Уйга вазифаучун Машқлар 73-97, 115-150 жуфтлари.

в) Мустақил иш топшириқлари:

1-топшириқ.Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интегрални тахлил қилиш.

1.1.Интегралнинг хоссаларини тахлил қилиш.

1.2.Бошланғич функциянинг топишни ҳақиқий вакомплекс ўзгарувчили функциялар учун солиштириш.
1.3.Ньютон-Лейбниц формуласини эгри чизиқ учун исботлаш.

2-топшириқ.Коши теоремаси ва Коши интегралини тахлил қилиш:
2.1.Коши теоремаси қандай шартлар бажарилганда ўринли бўлади?
2.2.Коши интегралидан қандай фойдаланилади?

3-топшириқ.Тейлор қаторининг тахлили.
3.1.Тейлор ва даражали қаторлприни хусусий ҳолими?
3.2.Тейлор қаторининг йиғиндисини топиш йўлларини Аниқланг.
3.3.қандай функцияни Тейлор қаторига ёйиш мумкин?

г)Модул бўйича якуний машғулот.(хулоса).

1.Комплекс ўзгарувчили функциядан олинган интегралнинг хоссалари эгри чизиқли ҳақиқий функциядан олинган интегралнинг хоссаларига ўхшаш.

2.Комплекс функциядан олинган интеграл функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларидан олинган эгри чизиқли интегралга келтириб ҳисобланади.

3.Силлиқ ва ёпиқ эгри чизиқбўйича олинган интеграл нолгатенг,агар интеграл тагидаги функция соҳада узликсиз бўлиб.чегарасида узликсиз бўлса.

4.Функциянинг аналитик бўлмаган нуқтадаги қиймати Коши интеграли ёрдамида ҳисобланади.

Адабиётлар

1.Худойберганов Г., Ворисов А.,Мансуров Ҳ. Комплекс анализ(маърузалар).-Т.»Университет»,1998.
2.МаҳсудовШ.,Салоҳиддинов М., Сирожиддинов С. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси.-Т.,»Ўқитувчи»1979.
3.Сидоров Ю.В., Федарюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функции комплексного переменного. М.,»Наука». 1976.
4.Привалов И.И. Введение в теории функции комплексного переменного.М.,»Наука».2001.
5.Шабат Б.В. Введение в комплекснўй анализ.2-нашри,1-ҳ,М.,»Наука»1976

10 – Мавзу: Функционал кетма-кетликлар. Анолитик функционал қатори. Лоран қатори.

Фанини ўқитиш технологияси:

“Функционал кетма-кетликлар. Анолитик функциялар қатори, Лорн қатори” мавзусидаги машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Функционал кетма-кетлик умумий ҳади лимитини ҳисоблаш, яқинлашишини текшириш. Аналитик функцияни қаторга ёйиш, коэффициентларини хисоблаш **1.2. Идентив мақсадлар**:	Ўқитувчи 10 минут

	1.2.1. Функцияни таърифлайди. 1.2.2. Кетма-кетликни тузади. 1.2.3. Умумий ярим лимитни олади. 1.2.4. Аналитик функцияни таърифлайди. 1.2.5. Қатор коэффициентларини ҳисоблайди. **1.3. Асосий тушунчалар**: функция, кетма-кетлик, қатор, аналитик функция коэффициент, чекли йиғинди, умумий йиғинди. **1.4. Дарс шакли**: Маьруза. 1.**5. Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, сухбат, мунозара, ақлий хужум. **1.6. Керакли жихоз ва воситалар**: Компьютер, видеопроектор.	
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган саволлар тушунтирилилади. 2.2. Аналитик функция талабалардан сўралади. 2.3. Қаторнинг турлари аниқланади.	Ўқитувчи 5 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1. Қаторларни кўриниши ёзилади. 3.2. Коэффициентларни хисоблаш формулалари аниқланади. 3.3. Аналитик функция ва Лоран қатори таққосланади. 3.4. Қаторнинг яқинлашиши аломатлари сўралади.	Ўқитувчи – талаба 50 минут
4	**Мустахкамлаш ва бахолаш учун саволлар:** 4.1. Функционал кетма-кетлик кўриниши қандай? 4.2. Кетма-кетликнинг лимитини топинг. 4.3. Анолитик функциялар қаторини ёзинг. 4.4. Қаторнинг коэффициентларини хисобланг. 4.5. Лоран қатори қандай соҳада яқинлашади? 4.6. Лоран қатори қисмлари қандай. 4.7. Фаол қатнашган талабалар баҳоланади.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1. Мақсад ва вазифаларни бажарилганлиги тахлил қилинади. 5.2. Мустақил топшириқлар уйга вазифа сифатида берилади. (чексиз узоқлашган нуқта атрофида Лоран қатори)	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

Функсионал кетма-кетликлар.

Аналитик функсиялар қатори.

Таянч тушунчалар ва иборалар

Функсионал кетма-кетлик, функсионал кетма-кетликнинг яҳинлашиши, қисмий йиғинди, йиғинди, аналитик функсиялар қатори, Вейерштрасс теоремаси, ягоналик теоремаси, Морера теоремаси.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Функсионал кўп ўзгарувчили кетма-кетликлар.

2.Аналитик функсиялар қаторининг ўзига хос хоссаларини аниқлаш

1-савол бўйича дарс мақсади:

1.Функсионал кетма-кетликнинг асосий белгиларини исботлаш

2.Функсионал қаторнинг яҳинлашиш белгисини кўрсатиш

Идентив укув мақсадлар:

1.Функсионал кетма-кетликнинг лимитини топа олади.

2.Функсионал қаторнинг яҳинлашишини текшира олади.

1-асосий саволнинг баёни

$\{U_n(z)\}$ функсионал кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\{U_n(z_0)\}$ сонли кетма-кетлик яҳинлашса, $\{U_n(z)\}$ функсионал кетма-кетлик z_0 нуқтада яҳинлашади дейилади.

$\{U_n(z)\}$ функсионал кетма-кетлик М тўпламда яҳинлашсин. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z) = U(z)$ бўлади.

Энди $U_1(z), \mathrm{U}_2(z), \ldots\ldots, \mathrm{U}_n(z), \ldots\ldots$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликдан

$$U_1(z) + U_2(z) + \ldots\ldots + U_n(z) + \ldots. \qquad (1.1)$$

баждани қараймиз. Бу ифодага функсионал қатор дейилади ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ каби белгиланади.

Демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) = U_1(z) + U_2(z) + \ldots\ldots + U_n(z) + \ldots\ldots \qquad (1.2)$$

(1.2) қаторнинг қисмий йиғиндиларини тузамиз.

$S_1 = U_1(z),\ \mathrm{S}_2(z) = \mathrm{U}_1(z) + \mathrm{U}_2(z), \ldots\ldots, \mathrm{S}_n(z) = \mathrm{U}_1(z) + \mathrm{U}_2(z) + \ldots. + \mathrm{U}_n(z)$

Таъриф 1.1. Агар $n \to \infty$ да $\{S_n(z)\}$ функсионал кетма-кетлик $E \in C$ тўпламда яҳинлашувчи бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ бўлса, у ҳолда (1.2) қатор Е тўпламда яҳинлашувчи дейилади. С(з) еса (1.2) қаторнинг йиғиндиси дейилади.

Таъриф 14.2. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай n_0 сон топилсаки, $\forall n > n_0$ ва $\forall z \in E$ учун

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, (1.2) қатор Е С(з) йиғиндига текис яҳинлашади дейилади.

Теорема 1.1. (Вейерштрасс аломати) Агар (1.2) қаторнинг ҳар бир $U_k(z), k = 1,2,\ldots.$ ҳади Е тўпламда

$$|U_n(z)| \le a_n, \ (\text{n}=1,2,3.....)$$

тенгсизликни қаноатлантириб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...+ a_n + ... \qquad (1.3)$$

сонли қатор яҳинлашувчи бўлса, (1.2) қатор Е тўпламда текис яҳинлашади.
Исбот.

$$|U_1(z)| + |U_2(z)| + ...+ |U_n(z)| + ...$$

қатор абсолют яҳинлашади, у ҳолда

$$|S(z) - S_n(z)| \le |U_{n+1}| + |U_{n+2}| + ... < a_{n+1} + a_{n+2} + ...$$

(1.3) сонли қатор яҳинлашгани учун унинг ҳолдиғи $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ ихтиёрий $\varepsilon > 0$ дан кичик, демак, $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ яъни (1.2) қатор текис яҳинлашади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Функсионал кетма-кетликка қўйилган шартларни умумлаштириш.
2.Функсионал қаторнинг янги хоссаларини топиш

2-савол бўйича дарс мақсади.

Аналитик фуннксиялар қатори йиғиндисининг аналитиклигини исботлаш.
Аналитик функсиялар қаторининг текис яҳинлашишини кўрсатиш.
қаторни ҳадлаб дифференсиаллаш мумкинлигини исботлаш.

Идентив ўқув мақсади:

Аналитик функсиялар қатори йиғиндисини ҳисоблаш.
Аналитик функсиялар қаторини ҳадлаб дифференсиаллаш шартини аниқлаш

2-асосий савол баёни

Математик анализ курсидан маълумки, ҳадлари (а,в) оралиҳда дифференсиалланувчи бўлган

$$f_1(x) + f_2(x) + ...+ f_n(x) + ...$$

қатор ф(х) га текис яҳинлашса, қаторнинг йиғиндиси ф(х) дифференсиалланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин. Агар ф(х) ҳосила мавжуд бўлганида ҳам $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ тенглик ҳамма вахт бажарилмайди. қўшимча шартлар қўйиш талаб ҳилинади. Комплекс анализда еса қуйидаги теорема ўринли бўлади.

ТЕОРЕМА 1.2. (Вейерштрасс). Агар

$$f_1(z) + f_2(z) + ...+ f_n(z) + ... \qquad (1.4)$$

қатор ҳадлари D соҳада аналитик бўлиб, $\overline{G}$ ёпиқ соҳада текис яҳинлашса, (1.1) нинг йиғиндиси D да аналитик бўлади ва қаторни дифференсиаллашдан ҳосил бўлган

$$f_1^{(p)}(z) + f_2^{(p)}(z) + ...+ f_n^{(p)}(z) + ...$$

қатор ҳам $\overline{G}$ ёпиқ соҳада текис яҳинлашади ҳамда

$$f^{(p)}(z) = f_1^{(p)}(z) + f_2^{(p)}(z) + ...+ f_n^{(p)}(z) + ... \qquad (1.5)$$

тенглик бажарилади.

ИСБОТИ. Ҳадлари узлуксиз бўлган қатор (1.4) яқинлашса, унинг йиғиндиси $\varphi(z)$ D соҳада узлуксиз бўлади, яъни

$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ...$ (1.6) узлуксиз функсия.

$z_0 \in D$ ихтиёрий нуқта. z_0 нуқнани ўз ичига олувчи D да тўла ётувчи D_γ соҳа оламиз, унинг чегараси Г силлиқ бўлакли егри чизиқ бўлсин. $\xi \in \gamma$ ва $z \in D$ ихтиёрий нуқталар учун (1.6) дан қатор текис яқинлашувчи бўлганидан қуйидагигa ега бўламиз:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \tag{1.7}$$

Кошининг интеграл формуласига кўра

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = f(z)$$

Бундан $\varphi(z)$ нинг з нуқтада аналитик еканлиги келиб чиқади. $z_0 \in D$ ихтиёрий бўлганлиги учун $\varphi(z)$ функсия D соҳада ҳам аналитик бўлади.

(1.4) қатор текис яқинлашганлигидан, юқоридаги каби (14.6)ни $\frac{p!}{2\pi i(\xi - z)^{p+1}}$ га кўпайтириб, γ бўйича ҳадлаб интеграллаймиз.

$$\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{p+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_k(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{p+1}} \tag{1.8}$$

бу ерда $z \in D_\gamma$ ихтиёрий нуқта. (13.5) тенгликни еътиборга олсак, (1.5) келиб чиқади.

$z \in D_\gamma$ ихтиёрий нуқта бўлганлиги учун (14.5) тенглик D соҳада ҳам ўринли бўлади. Енди (14.2) тенгликни ўнг томонини $\overline{D}_\gamma$ да текис яқинлашишини кўрсатамиз.

$d \succ 0$ сонни шундай танлаймизки, $|\xi - z_i| \le 2d$ доира D соҳага тегишли бўлсин.(1.4) қатор $|\xi - z_i| \le 2d$ айланада текис яқинлашганлигидан, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун $N(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўладики, $n \succ N$ ни қаноатлантирувчи н лар учун

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(z)\right| < \varepsilon \tag{1.9}$$

бўлади.

(1.2) қаторнинг ҳолдиғи учун, (1.4) текис яқинлашганлигидан, (13.5) ни еътиборга олсак, $|\xi - z_i| \le 2d$ айлана

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = 2d} \frac{f_{n+k}(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{p+1}},$$

бу тенгликдан (1.9) га кўра $|z - z_0| < d$ тенгсизликни қаноатлантирувчи я лар

ТЕОРЕМА. (Морера). $\varphi(z)$ функсия D соҳада Аниқланган ва узлуксиз бўлиб, γ D да ётувчи силлиқ (бўлакли силлиқ) чизиқ бўлсин. Агар
$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = C$
бўлса, у ҳолда ф(з) D соҳада анлитик бўлади.

ИСБОТ. Теорема шарти бажарилса, яъни D соҳада $\varphi(z)$ узлуксиз бўлса,

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$$

мавжуд ва дифференсиалланувчи. Демак, $\varphi(z)$ аналитик, у ҳолда $F'(z)$ ҳам аналитик бўлади. $F^{'}(z) = \varphi(z)$ бўлганлигидан $\varphi(z)$ ҳам D соҳада аналитик бўлади.

ТЕОРЕМА 13.1. дан натижа сифатида қуйидаги теоремани исбот қилиш мумкин.

ТЕОРЕМА 14..3. Агар D соҳада анлитик бўлган ф(з) ва φ(з) функсиялар учун энг камида битта $z_0 \in$ $\varphi(z)$ лимитга ега бўлган $E \in D$ тўпламда ўзаро тенг бўлса, D соҳада ҳам $f(z) = \varphi(z)$ бўлади.

ИСБОТИ. Е тўпламда $\{z_n\}$ кетма-кетликни ўзида сақлайди ва $f(z_n) = \varphi(z_n)$ (1.10) тенглик бажарилади. Теорема 13.1 га кўра $|z - z_0| < \delta$ Δd атрофда $\varphi(z)$ ва $\varphi(z)$ функсиялар даражали қаторга ёйилади:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (14.11) \qquad \varphi(\mathrm{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{b_k} (z - z_0)^k \quad (14.12)$$

Бирор н номердан бошлаб з лар $|z - z_0| < \delta$ доирада ётади, чунки z_0 лимит нуқта (1.11) ва (1.12) да $z = z_n$ деб олиб, (1.10) га хўямиз. $n \to \infty$ лимитга ўтиб, $a_0 = b_0$ ни топамиз.

Демак, $|z - z_0| < \delta$ доирада $\{z_k\}$ кетма-кетлик нуқталари учун

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1} \qquad (1.13)$$

(1.13) дан $n \to \infty$ да $a_i = b_i$ ни топамиз. Шундай давом еттириб, $a_k = b_k$ еналигини кўрсатиш мумкин, яъни $|z - z_0| < \delta$ доиранинг ҳамма нуқталарида $f(z) = \varphi(z)$

Z_0 нуқта D соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. z_0 ва z_0' нуқталарни D да ётувчи узлуксиз егри чизиқ билан туташтирамиз. $C(\delta, \tau) : |z - \tau| = \delta_1$ айланани қараймиз, $\tau \in L$, δ_1 еса L билан D соҳанинг Г чегараси орасидаги масофадан кичик.

$C(\delta_1, \tau)$ айлана марказини L эгри чизиқ бўйича z_0 нуқтадан z_0' нуқтагача силжитамиз. Юқоридаги каби мулоҳаза юритиб, $f(z_0') = \varphi(z_0')$ тенгликка келамиз. z_0' нуқта D соҳада ихтиёрий бўлганлиги сабабли шу соҳада $f(z)=\varphi(z)$ тенглик бажарилади.

ТАЪРИФ 1.3. $f(z_0)=0$ тенглик бажарилса, $z_0 \in D$ нуқта $\varphi(z)$ функциянинг ноли дейилади. $\varphi(z)$ функциянинг D соҳадаги ноллари чекли ёки чексиз кўп бўлади. Ноллар тўплашнинг лимит нуқтаси чегара нуқта бўлади, акс ҳолда теорема 1.13 га функсия D соҳада $\varphi(z) \equiv 0$ бўлади. Демак, маркази нолда бўлган айланалар олиш мумкинки, бу айланалар ичида бошқа ноллар бўлмайди. Шу сабабли z_0 ажралган нуқта атрофида $\varphi(x)$ функсияни Тейлор қаторига ёйиш мумкин:

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, a_ь \neq 0, m \geq 1 \tag{1.14}$$

м сонга нолнинг тартиби (каралиси) дейилади. $z_0 = D$ га м каррали нол дейилади, агар $f^{(k)}(z_0)=0$ бўлиб, мҳ1 бўлса, з нуқта оддий нол дейилади.

Мавзу1:Функционал қатор.

Лоран қатори. (6 соат)

Асосий саволлар:

1.Функционал қатор.

2. Лоран қатори.

Мавзуга оид таянч иборалар ва тушунчалар:

Функционал кетма-кетлик, функционал кетма-кетликнинг яқинлашиши, қисмий йиғинди, йиғинди, аналитик функциялар қатори, Вейерштрасс теоремаси, ягоналик теоремаси.

Мавзуга иод муоммалар:

1.Функционал қаторнинг текис яқинлашишини текшириш.

2.Функционал қаторнинг йиғиндисини топиш.

1-савол бўйича дарс мақсади:

1.Функционал қаторни яқинлашишини текшириш.

2.Функционал қаторни текис яқинлашиш белгисини исиботлаш.

Идентив укув мақсадлари:

1.Функционал қаторни яқинлашишини текширади.

2.Функционал қаторнинг текис яқинлашиш белгисини исботлайди.

1-асосий саволнинг баёни

$\{U_n(z)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\{U_n(z_0)\}$ сонли кетма-кетлик яқинлашса, $\{U_n(z)\}$ функционал кетма-кетлик z_0 нуқтада яқинлашади дейилади.

$\{U_n(z)\}$функционал кетма-кетлик М тўпламда яқинлашсин. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z)=U(z)$ бўлади.

Энди $U_1(z), \mathrm{U}_2(\mathrm{z}),....., \mathrm{U}_\mathrm{n}(\mathrm{z}),.....$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликдан

$$U_1(z)+U_2(z)+.....+U_n(z)+.... \qquad (1.1)$$

қаторни қараймиз. Бу ифодага функционал қатор дейилади ва $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ каби белгиланади.

Демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) = U_1(z)+U_2(z)+......+U_n(z)+..... \qquad (1.2)$$

(1.2) қаторнинг қисмий йиғиндиларини тузамиз.

$S_1 = U_1(z),\ \mathrm{S}_2(\mathrm{z}) = \mathrm{U}_1(\mathrm{z})+\mathrm{U}_2(\mathrm{z}),......, \mathrm{S}_\mathrm{n}(\mathrm{z}) = \mathrm{U}_1(\mathrm{z})+\mathrm{U}_2(\mathrm{z})+....+\mathrm{U}_\mathrm{n}(\mathrm{z})$

Таъриф 1.1. Агар $n \to \infty$ да $\{S_n(z)\}$ функционал кетма-кетлик $E \in C$ тўпламда яқинлашувчи бўлиб, $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ бўлса, у ҳолда (1.2) қатор E тўпламда яқинлашувчи дейилади. S(z) эса (1.2) қаторнинг йиғиндиси дейилади.

Таъриф 1.2. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай n_0 сон топилсаки, $\forall n > n_0$ ва $\forall z \in E$ учун

$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, (1.2) қатор S(z) йиғиндига текис яқинлашади дейилади.

Теорема 1.1. (Вейерштрасс аломати) Агар (1.2) қаторнинг ҳар бир $U_k(z), k = 1,2,....$ ҳади E тўпламда

$$|U_n(z)| \le a_n,\ (\mathrm{n} = 1,2,3.....)$$

тенгсизликни қаноатлантириб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...+ a_n + ... \qquad (1.3)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, (1.2) қатор E тўпламда текис яқинлашади.

Исбот.

$$|U_1(z)| + |U_2(z)| + ...+ |U_n(z)| + ...$$

ҳам қатор абсолют яқинлашади, у ҳолда

$$|S(z) - S_n(z)| \le |U_{n+1}| + |U_{n+2}| + ...< a_{n+1} + a_{n+2} + ...$$

(1.3) сонли қатор яқинлашгани учун унинг қолдиғи $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ ихтиёрий $\varepsilon > 0$ дан кичик, демак, $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ яъни (1.2) қатор текис яқинлашади.

Аналитик функциялар қатори

Математик анализ курсидан маълумки, ҳадлари (а,в) оралиқда дифференциалланувчи бўлган

$$f_1(x) + f_2(x) + ...+ f_n(x) + ...$$

қатор f(x) га текис яқинлашса, қаторнинг йиғиндиси f(x) дифференциалланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин. Агар f(x) ҳосила мавжуд бўлганида ҳам

$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ тенглик ма вақт бажарилмайди. қшимча шартлар қўйиш талаб қилинади. Комплекс анализда эса қуйидаги теорема қринли бўлади.

ТЕОРЕМА 1.2. (Вейерштрасс). Агар

$$f_1(z)+f_2(z)+......+f_n(z)+..... \qquad (1.4)$$

.

қатор ҳадлари Д соҳада аналитик бўлиб, $\overline{G}$ ёпиқ соҳада текис яқинлашса, (1.1) нинг йиғиндиси Д да аналитик бўлади ва қаторни дифференциаллашдан ҳосил бўлган

$$f_1^{(p)}(z)+f_2^{(p)}(z)+......+f_n^{(p)}(z)+.....$$

қатор ҳам $\overline{G}$ ёпиқ соҳада текис яқинлашади ҳамда

$$f^{(p)}(z)=f_1^{(p)}(z)+f_2^{(p)}(z)+......+f_n^{(p)}(z)+..... \qquad (1.5)$$

тенглик бажарилади.

ИСБОТИ. Ҳадлари узлуксиз бўлган қатор (1.4) яқинлашса, унинг йиғиндиси f(z) D соҳада узлуксиз бўлади, яъни

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+......+f_n(z)+..... \qquad (1.6)$$ узлуксиз функция.

Аналитик функциянинг ягоналиги

нуқталар учун (1.6) дан қатор текис яқинлашувчи бўлганидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} \qquad (1.7)$$

Кошининг (12.7) интеграл формуласига кўра

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=f(z)$$

Бундан f(z) нинг z нуқтада аналитик эканлиги келиб чиқади. $z_0\in D$ ихтиёрий бўлганлиги учун f(z) функция Д соҳада ҳам аналитик бўлади.

(1.4) қатор текис яқинлашганлигидан, юқоридаги каби (1.6)ни $\frac{p!}{2\pi i(\xi-z)^{p+1}}$ га кўпайтириб, γ бўйича ҳадлаб интеграллаймиз.

$$\frac{p!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{p+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_k(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{p+1}} \qquad (1.8)$$

бу ерда $z\in D_\gamma$ ихтиёрий нуқта. (13.5) тенгликни эътиборга олсак, (14.5) келиб чиқади.

$z\in D_\gamma$ ихтиёрий нуқта бўлганлиги учун (1.5) тенглик Д соҳада ҳам ўринли бўлади. Энди (1.2) тенгликни ўнг томонини $\overline{D}_\gamma$ да текис яқинлашишини кўрсатамиз.

$z_0\in\overline{D}$ ва d>0 сонни шундай танлаймизки, $|\xi-z_i|\le 2d$ доира Д соҳага тегишли бўлсин.(14.4) қатор $|\xi-z_i|\le 2d$ айланада текис яқинлашганлигидан, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун $N(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўладики, n>N ни қаноатлантирувчи n лар учун

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(z)\right| < \varepsilon \qquad (1.9)$$

бўлади.

(1.2) қаторнинг қолдиғи учун, (1.4) текис яқинлашганлигидан, (1.5) ни эътиборга олсак, $|\xi - z_i| \le 2d$ айлана

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = 2d} \frac{f_{n+k}(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{p+1}},$$

бу тенгликдан (1.9) га кўра $|z - z_0| < d$ тенгсизликни қаноатлантирувчи z лар учун

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}^{(p)}(z)\right| \le \frac{p!}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = 2d} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(\xi)\right| |d\xi|}{|\xi - z|^{p+1}} < \frac{p! 4\pi d}{d^{p+1}} = \frac{2p!\varepsilon}{d^p}$$

ТЕОРЕМА. (Морера). f(z) функция Д соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, L Д да ётувчи силлиқ (бўлакли силлиқ) чизиқ бўлс $z_0 \in D$ ихтиёрий нуқта. z_0 нуқпани ўз ичига олувчи Д да тўла ётувчи D_γ соҳа оламиз, унинг чегараси L силлиқ бўлакли егри чизиқ бўлсин. $\xi \in \gamma$ ва $z \in D$ ихтиёрий учун

$\int_\gamma f(z)dz = C$ бўлса, у ҳолда f(z) Д соҳада анлитик бўлади.

Исбот. Теореманинг шарти бажарилса,яъни D соҳада f(z) узлуксиз бўлса'

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

мавжуд ва дифференциалланувчи. Демак, F(z) аналитик, у ҳолда $F'(z)$ ҳам аналитик бўлади. $F'(z)$қf(z) бўлганлигидан f(z) ҳам Д соҳада аналитик бўлади.

ТЕОРЕМА 1.1. дан натижа сифатида қуйидаги теоремани исбот қилиш мумкин.

ТЕОРЕМА 1..3. Агар Д соҳада анлитик бўлган f(z) ва φ(z) функциялар учун энг камида битта $z_0 \in$ Д лимитга эга бўлган $E \in$Д тўпламда ўзаро тенг бўлса, Д соҳада ҳам $f(z) = \varphi(z)$ бўлади.

ИСБОТИ. Е тўпламда $\{z_n\}$ кетма-кетликни ўзида сақлайди ва $f(z_n) = \varphi(z_n)$ (1.10) тенглик бажарилади. Теорема 13.1 га кўра $|z - z_0| < \delta$ Δd атрофда f(z) ва ϕ (z) функциялар даражали қаторга ёйилади:

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ (1.11) $\varphi(\mathrm{z})=\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{b_k}(z-z_0)^k$ (1.12)

Бирор n номердан бошлаб z лар $|z-z_0|<\delta$ доирада ётади, чунки z_0 лимит нуқта (1.11) ва (1.12) да $z=z_n$деб олиб, (14.10) га қўямиз. $n\to\infty$ лимитга ўтиб, $a_0=b_0$ ни топамиз.

Демак, $|z-z_0|<\delta$ доирада $\{z_k\}$ кетма-кетлик нуқталари учун

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_n-z_0)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_n-z_0)^{k-1} \qquad (1.13)$$

(1.13) дан $n\to\infty$ да $a_i=b_i$ ни топамиз. Шундай давом эттириб, $a_k=b_k$ эналигини кўрсатиш мумкин, яъни $|z-z_0|<\delta$ доиранинг ҳамма нуқталарида $f(z)=\varphi(z)$

Чизма-1

Z_0 нуқта Д соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. z_0 ва z_0' нуқталарни Д да ётувчи узлуксиз эгри чизиқ билан туташтирамиз. $C(\delta,\tau):|z-\tau|=\delta_1$ айланани қараймиз, $\tau\in L$, δ_1 эса L билан Д соҳанинг Г чегараси орасидаги масофадан кичик.

$C(\delta_1,\tau)$ айлана марказини L эгри чизиқ бўйича z_0 нуқтадан z_0' нуқтагача силжитамиз. Юқоридаги каби мулоҳаза юритиб, $f(z_0')=\varphi(z_0')$ тенгликка келамиз. z_0' нуқта Д соҳада ихтиёрий бўлганлиги сабабли шу соҳада $f(z)=\varphi(z)$ тенглик бажарилади.

ТАЪРИФ 1.3. $f(z_0)=0$ тенглик бажарилса, $z_0\in$Д нуқта f(z) функциянинг ноли дейилади.

f(z) функциянинг Д соҳадаги ноллари чекли ёки чексиз кўп бўлади. Ноллар тўплашнинг лимит нуқтаси чегара нуқта бўлади, акс ҳолда теорема 1.3 га кўра функция Д соҳада f(z)қ0 бўлади. Демак, маркази нолда бўлган айланалар олиш мумкинки, бу айланалар ичида бошқа ноллар бўлмайди. Шу сабабли z_0 ажралган нуқта атрофида f(z) функцияни Тейлор қаторига ёйиш мумкин:

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, a_ь \neq 0, m \geq 1 \qquad (1.14)$$

m сонга нолнинг тартиби (карралиси) дейилади. $z_0 \in$Д га m каррали нол дейилади, агар $f^{(k)}(z_0)=0$ бўлиб, mқ1 бўлса, z нуқта оддий нол дейилади.

Муҳакама учун саволлар:

1.1.а-нуқта қандай нуқта

1.2.Аналитик функциялар қатори билан Тейлор қаторини солиштиринг.

1.3.Тейлор қатори ва даражали қаторни таққосланг

Назорат топшириқлари

1.1.Функционал кетма-кетликни ёзинг.

1.2.Функционал кетма-кетликни лимитини топинг.

1.3.Функционал кетма-кетлик қачон яқинлашувчи дейилади?

1.4.Функционал қаторни ёзинг.

1.5.қаторни қисмий йиғиндисини топинг.

1.6.қачон қатор яқинлашувчи дейилади?

1.7.қаторнинг йиғиндисини топинг.

2.1.қачон қатор текс яқинлашувчи дейилади?

2.2.Вейерштрасс теоремасини исботланг.

2.3.Аналитик функциялар қаторини ёзинг.

2.4.Вейештрасснинг биринчи теоремасини исботланг.

2.5.Аналитик функциянинг ягоналигини исботланг.

2.6.Функциянингноли таърифини беринг.

2.8.Функциянинг оддий нолини аниқланг.

2.9.Функциянинг карали нолини аниқланг.

.

2-савол бўйича дарс мақсади:

1.Лоран қаторини келтириб чиқариш.

2.Функцияни Лоран қаторига ёйиш.

Идентив ўқ ув мақсадлари:

2.1.Лоран қаторини келтириб чиқаради.

2.2.Функцияни Лоран қаторига ёйади.

2-асосий савол баёни:

$(z-z_0)$ нинг манфий даражалари бўйича олиган

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-z_k)^k \qquad (1.15)$$

даражали қаторни қараймиз.

Бу қатор $|z-z_0|>0$ бўлганда комплекс текисликнинг z нуқталари учун маънога эга, $z-z_0=\frac{1}{\xi}$ деб олсак, (1.15)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\xi^{-k} \qquad (1.16)$$

кўринишни олади.

Агар $|z|\le r$ доира (1.16) нинг яқинлашиш доираси бўлса, (1.15) қатор $(z-z_0)\le\varepsilon=\frac{1}{r}$ доирада абсолют яқинлашади ва унинг йиғиндиси

$$S_2(z)=S^*\left(\frac{1}{(z-z_0)}\right)$$

бу ерда $S^*(z)$ (1.16) қаторнинг йиғиндиси. $|z-z_0|<\rho,\rho>r$ доира ташқатисида (1.15) қатор текис яқинлашганлиги учун Вейерштрасс теоремасига кўра комплекс текисликнинг $|z-z_0|>r$ шартни қаноатлантирувчи қисмида $S_2(z)$ функция аналитик бўлади.

Агар

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_k)^k \qquad (1.17)$$

қатор $|z - z_0| < R$доирада яқинлашса, (1.15) қатолр $|z - z_0| \le r$ доиранинг ташқарисида яқинлашса ва уларнинг йиғиндисини мос равишда S_1 ва S_2 десак, $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ йиғинди $k!r < |z - z_0| < R$ халқада аналитик ҳамда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (1.18)$$

қаторнинг йиғиндиси бўлади. (1.18) қатор Лоран қатори дейилади. Бу тасдиққа тескари тасдиқ ҳам мавжуд.

ТЕОРЕМА .1.4. К халқада аналитик f(z) функцияни ҳар бир $z \in K$ нуқтада

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z) \qquad (1.19)$$

қатор кўринишида ёзиш мумкин, бунда

$$a_k = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, k \in Z, \gamma : |\xi - z_0| = \delta, r < \delta < R \qquad (1.20)$$

ИСБОТИ. $z \in K$ бўлсин, $K_1 : r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$ халқАни қараймиз. Кошининг интеграл формуласига кўра:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{d\xi}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \cdot \frac{d\xi}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} \qquad (1.21)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \qquad (1.22) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} \qquad (1.23)$$

қаторлар $|\xi - z_0| = R_1$ ва $|\xi - z_0| = r_1$ бўлгани учун ς га нисбатан текис яқинлашади. Бу қаторларни (1.21) га қўямиз.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R_1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{-k}} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \qquad (1.24)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R_1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, k = 0,1,2 \ldots, a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, k = -1,-2, \ldots\ldots$$

Интеграл тагидаги $f(\xi)(\xi - z_0)^{-k-1}$ ифодалар $\xi \in K$ учун аналитик бўлади. Коши теоремасига кўра:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, k = 0,1,2....,a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, k = -1,-2,........$$

бу ерда γ маркази я нуқта бўлиб, К халқада ётувчи ихтиёрий айлана, буларни (1.24) га қўямиз.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

Шундай қилиб, Лоран теоремаси тўлиқ исботланди. (1.19) Лоран қатори дейилади.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = f_1(z - z_0) \qquad (1.25)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = f_2\left(\frac{1}{z - z_0}\right) \qquad (1.26)$$

қаторларга мос равишда Лоран қаторининг тўғри ва бош қисмлари дейилади. $a_k = 0, k = -1,-2,....$ бўлганда (1.19) Тейлор қатори келиб чиқади.

Функциянинг Лоран қаторига ёйилмасининг ягоналиги

Олдинги мавзуда $K:\{r < |z - z_0| < r\}$ хлқада аналитик бўлган функция шу халқада 0Лоран қаторига ёйиш мумкин эканлигини кўрдик. Бу қаторнинг коэффициентлари

$$C_k = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, n = \ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$$

интеграл ёрдамида ҳисобланади.

ТЕОРЕМА 1.5.. f(z) функция К халқада аналитик бўрса, бу функциянинг

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^k \qquad (1.27)$$

Лоран қаторига ёйилмаси ягонадир.

ИСБОТ. Тескарисини фараз қиламиз. f(z) функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси иккита (1.15) дан ва

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_n'(z - z_0)^k \qquad (1.28)$$

қатордан иборат деб оламиз. (1.27) ва (1.28) ларнинг ўнг томонларини тенглаштирамиз

$$\sum_{K=\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{K=-\infty}^{\infty} c_n^{\backslash}(z-z_0)^n$$

бу тенгликнинг икала томонини $(z-z_0)^{-ь-1}$ (m белгиланган бутун сон)га кўпайтирамиз

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{\backslash}(z-z_0)^{n-m-1}$$

(1.27)ва (1.28) қаторлар $c:\{|z-z_0|=\rho,(r<\rho<R)\}$ айланада текис яқинлашади, шу сабабли айлана бўйича интегралаш мумкин

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{n-m-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{\backslash} \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{n-m-1}dz \qquad (1.29)$$

бу ерда

$$\int_{|Z-Z_0|=\rho} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 0, k \neq -1; \\ 2\pi i, k=-1. \end{cases}$$

дан фойдаланамиз.Натижада $c_n = c_n^{\backslash}$ келиб чиқади Теорема исботи бўлди.

f(z) функция учун чексиз узоқлашган нуқта $z=\infty$ ажралган махсус нуқта. бўлсин, яъни исталгант ката ε сони мавжудки$|z|>\varepsilon$ соханииг ∞ нуқтадан бошқа хамма нуқталарда f(z) аналитик функция $z=\frac{1}{\xi}$ алмаштириш бажарсак $f(\frac{1}{\xi})$ функция $|\xi| = \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$

доиранинг $\xi=0$ дан ташқарии нуқталардан аналитик бўлиб $\xi=0$ нуқта $f(\frac{1}{\xi})$функция учун ажралган махсус нуқта бўлади. Бу ну4қта атрофида Лоран қатори қуйдагича бўлади

$$f(\frac{1}{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\xi^{-k} \qquad (1.30)$$

$\xi=\frac{1}{z}$ эканлигини эътборга олсак f(z) функциянинг чексиз узоқлашган нуқта атрофидаги Лоран қаторига эга бўламиз:

$$f(\frac{1}{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \qquad (1.31)$$

(15.16) қаторнинг биринчи қўшилувчисига $z=\infty$ нуқта атрофида аналитик бўлган f(z) функциянинг бош қисми, иккинчи қўшилувчи эса тўғри қисми дейилади. $f(z) = \lim\limits_{S\to 0} f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ тенглик бажарилганлигидан бош қисми нолга тенг бўлса, нуқта бартараф қилиш мумкин бўлган нуқта бўлади.

Агар $z=\infty$ нуқта m тартибли қутб н уеқта бўлса, бу нуқта атрофида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} + a_{-1} z + a_{-2} z^2 + \ldots.. + a_{-m} z^m$$

ҳосил бўлади.

Агар муҳим махсус нуқта бўлса, Лоран қаторининг бош қисми тўла қатнашади. ТЕОРЕМА 1.6. К халқада f(z) аналитик бўлиб,

$$\max_{z\in\gamma_\rho} f(z) = M, \gamma_\rho = \{|z - z_0| = \rho, r < \rho < R\}$$

у ҳолда Лоран қаторининг коэффициентлари учун

$$|C_n| \le \frac{M}{\rho^n}, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\ldots.. \qquad (1.32)$$

тенгсизлик бажарилади.

ИСБОТИ. Лоран қаторининг коэффициентлари

$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ ни баҳолаймиз.

$$C_n = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{|f(\xi)||d\xi|}{|\xi - z_0|^{n+1}} \le$$

$$\le \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} |dt| = \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$$

Демак, $|C_n| \le \frac{M}{\rho^n}$

Муҳакама учун саволлар:

1.Аналитик функциялар қатори билан ҳақиқИй ўзгарувчили узликсиз функциялар қатори хоссалари орасидаги фарқларни кўрсатинг.

2.Тейлор ва Лоран қаторларини таққосланг.

3.Қ андай функцияни Лоран қаторига ёйиш мумкин?:

Назорат саволлари:

1.1.Лоран қаторини ёзинг.

1.2.Лоран қаторини аниқланиш соҳасини чизинг.

1.3.Лоран қатори қаерда яқинлашади?

1.4.Лоран теоремасини исботланг.

1.5 Лоран қаторининг тўғри қисмини ёзинг.

.1.6.Лоран қаторининг бош қисмини ёзинг.

2.1.қандай яункцияни Лоран қаторига ёйиш мумкин?

2.2.Лоран қаторига ёйиш усулини кўрсатинг.

2.3.Функциянинг Лоран қаторига ёйилмасини ягонлигини исботланг.

2.4.қандай нуқтага чексиз узоқлашган нуқта дейилади.

2.5.Чексиз узоқлашган нуқтада Лоран қатори ёйилмасини топинг.

Мавзу бўйича ечимини кутаётган муаммолар:

1.Махсус нуқталар сони биттадан ортиқ бўлганда Лоран қаторини тузиш.

2.Кўпқийматли функцияларни Лоран қаторига ёйиш.

3.Функцияни чексиз кўпайтма орқали ифодалаш.

4.Қатор ва чексиз кўпайтма орасидаги боғланишни ўрнатиш.

Б) Амалий Машғулотни тузилиши.

1-амалий Машғулот.Функционал қаторлар.

Дарс мақсади:

1.Функционал қаторнинг яқинлашишини текшириш.

2.Функция ноллари тартибини Аниқлаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1.1.Функционал қаторнинг яқинлашишини текширади.

1.2.Функциянинг нолларини топади.

Амалий машғулотни бажариш учун номуналар:

Мисол 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n\,|}{(z+1)(z+3)(z+5)\ldots(z+2n+1)}$.

қаторнинг абсолют яқинлашишини текширинг. Бунда $\operatorname{Re} z \succ \frac{1}{2}$.

Ечиш. қаторнинг умумий ҳадини оламиз: $u_n = \frac{2^n n\,|}{(z+1)(z+2)\ldots(z+2n+1)}$

Даламбер аломатидан фойдаланамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)\,|\,(z+1)(z+3)\ldots(z+2n+1)}{2^n n\,|\,(z+1)(z+3)\ldots(z+2n+3)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{|z+2n+3|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac{1}{n})}{|z|(\frac{1n}{}}$$

$$к\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac{1}{n})}{|z|(\frac{1}{n}+\frac{2}{z}+\frac{3}{zn}\,|} = \frac{2|z|}{2|z|} = 1.$$

Демак,берилган қатор берилган соҳада яқинлашувчи бўлади.

Мисол 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{e^z-n}$, қа торни $D=\{|z|\le R<\infty\}$ соҳада текис яқинлашишини кўрсатинг.

Ечиш. Даламбер аломатидан фойдаланамиз:

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}\left|\frac{n-e^{-n}}{n+1-e^{-R}}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-\frac{e^{-R}}{n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{e-R}{n}}\right| = \frac{1}{2}<1$$

Демак, қатор берилган соҳада текис яқинлашади.

Мисол 3.f(z)қ$\frac{\sin^3 z}{z}$ функциянинг барча нолларини топинг ва тартибини аниқланг.

Ечиш. $Sinz = z - \frac{z^3}{3|} + \frac{z^5}{5|} - ... = z$ g(z), g(z)$\neq 0$ дан фойдаланамиз:

$$f(z) = \frac{z^3 g(z)^3}{z} = z^2 g^3(z).$$

Демак,zқ0 нуқта иккинчи тартибли нол бўлади.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар: [1],5-боб,52-70,293-310 тоқлари.

Уйга вазифа учун машқлар:[1],5-боб.52-70.293-310 жуфтлари.

Мисоллар тўплами

1.Саъдуллаев А.,Худойберганов Г.,Мансуров Ҳ.,Ворисов А., Тўйчиев Т.

Математик анализ курсидан мисол ва масалалат тўплами.3-қисм. Т.,»Ўқитувчи»,2000

2-топшириқ. Лоран қатори.

Дарснинг мақсади.

1.Лоран қаторини келтириб чиқариш.

2.Функцияни Лоран қаторига ёйиш.

Идентив фқув мақсадлари:

2.1.Лоран қаторини келтириб чиқаради.

2.2.Функцияни Лоран қаторига ёйади.

Амалий машғулотни бажариш учун номуналар.

Мисол 1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$ Лоран қаторининг яқинлашиш нуқталари тўпламини топинг.

Ечиш. $c_n = 2^{-|n|}, R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-|n|}}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2.$

$$c_{-n} = 2^{-|-n|} = 2^{-|n|}, r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-|n|}} = \frac{1}{2}.$$

Демак,берилган қатор ½<|z|<2 ҳалқада яқинлашувчи бўлади.

Мисол 2.f(z)к$\frac{1}{1-z^2}$ функцияни $D=\{2<|z-1|<\infty\}$ ҳалқада Лоран қаторига ёйинг.

Ечиш.

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}=-\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1+2}\right)=\frac{1}{2-2z}-\frac{1}{4(1+\frac{z-1}{2}}$$

$$\frac{1}{2-2z}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(z-1)^n$$

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар:[1]. 5-боб,394-410,416-430 тоқлари.

Уйга вазифа учун машқлар: [1],5-боб 394-410 жуфтлари.

Машқлар тўплами

1.Саъдуллаев А.,Худойберганов Г.,Мансуров Ҳ.,Ворисов А.,Тўйччиев Т.

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.3-қисм,Т.»Ўқитувчи»,2000.

в)Мустоқил иш топшириқлари:

1-топшириқ.Функционал қаторни текшириш.

1.1.Функционал қаторни яқинлашишини текшириш.

1.2.Функционал қаторни текис яқинлашишини текшириш.

2-топшириқ.Лоран қаторини тахлили.

2.1.Лоран қаторини яқинлашиш ҳалқасини аниқлаш.

2.2.Лоран қаторининг бўлакларини тахлил қилиш.

2.3.Функцияни Лоран қаторига ёйиш йўлларини кўрсатиш.

3-топшириқ.Мисолларни мустоқил ечиш.

[1].5-боб,70-75,311-315,411-415,431-435.

Машқлар тўплами

1.Саъдуллаев А.,Худойберганов Г.,Мансуров Ҳ.,Ворисов А.,Тўйчиев Т.

Математик анализ фанидан мисол ва масалалар тўплами.3-қисм,Т.»Ўқитувчи»,2000.

11 – Мавзу: Махсус кукталар синфи. Чегирмалар назарияси.

Фанини ўқитиш технологияси:

“Махсус кукталар синфи. Чегирмалар назарияси” мавзусидаги машғулотининг технологик харитаси.

№	Босқичлар ва бажариладиган иш мазмуни	Амалга оширувчи шахс, вақт
1	**Машғулотга тайёргарлик босқичи:** **1.1. Дарс мақсади**: Махсус нуқталар синфини тузиш. Махсус нуқта атрофида функция ҳолатини аниқлаш. Чегирмани таърифлаш. Чегирмани хисоблаш. Чегирмани интеграл хисоблашда қўллаш. **1.2. Идентив мақсадлар**: 1.2.1 Тўғри нуқтани билади. 1.2.2 Махсус нуқталарни таърифлайди. 1.2.3 Нол ва махсус нуқталарда функционал ҳолатини текширади. 1.2.4 Чегирмани аниқлайди. 1.2.5 Чегирмани хисоблаш формулаларини билади. 1.2.6 Чегирмани интегралларга қўллайди. **1.3. Асосий тушунчалар**: тўғри нуқта, махсус нуқта, қутб нуқта, чегирма, теорема, интеграл, хосмас интеграл. **1.4. Дарс шакли**: Маьруза. 1.**5. Фойдаланиладиган методлар ва усуллар**: тақдимот, бахс, сухбат, мунозара, ақлий хужум. **1.6. Керакли жихоз ва воситалар**: Компьютер, видеопроектор.	Ўқитувчи 10 минут
2	**Ўқув машғулотини ташкил қилиш босқичи** 2.1. Мавзу ва кўриб чиқиладиган саволлар тушунтирилилади. 2.2. Талабалардан тўғри нуқта, нол нуқта сўралади.	Ўқитувчи 10 минут
3	**Гуруҳда ишлаш босқичи:** 3.1 Нол нуқта, тўғри нуқта, махсус нуқта таққосланади. 3.2 Нуқталар атрофида функцияларнинг ҳолати аниқланади. 3.3 Чегирма аниқланади. 3.4 Чегирмани хисоблаш формулалари кўрсатилади. 3.5 Хосмас интеграл турлари ёзилади. 3.6 Интеграллар чегирма ёрдамида хисобланади. 3.7 Руше теоремаси исботланади. 3.8 Алгебра теоремаси учун қўлланилади.	Ўқитувчи – талаба 45 минут
4	**Мустахкамлаш ва бахолаш учун саволлар:** 4.1 Махсус нуқталар синфи сўралади. 4.2 Махсус нуқталарда функциянинг ҳолати аниқланади. 4.3 Чегирмани хисоблаш формулалари аниқланади. 4.4 Руне теоремасини алгебрага қўлланилиши таълаб қилинади. 4.5 Хосмас интегралнинг кўринишлари топилади. 4.6 Интегрални чегирма ёрдамида хисоблаш белгиланади. 4.7 Талабалар иши баҳоланади.	Ўқитувчи – талаба 10 минут
5	**Ўқув машғулотини якунлаш босқичи:** 5.1 Мақсад ва вазифаларни бажарилганлиги тахлил қилинади. 5.2 Мустақил иш топшириқлар уйга вазифа сифатида берилади. (алгебранинг асосий теоремасини исботлаш)	Ўқитувчи 5 минут

Асосий саволлар:

1.:Махсус нуқталарнинг асосий хусусиятлари. .

2.Чегирма ва унинг қўлланилиши.

Таянч тушунчалар:

Тўғри нуқта, махсус нуқта, яккалангван махсус нуқта, қутб нуқта, муҳим махсус нуқта, чексиз нуқта,чегирма.чегирмани хисоблаш,хосмас интеграл, хосмас интегрални хисоблаш.

Мавзуга оид муаммолар:

1.Махсус нуқталарни ноллар билан алоқасини ўрнатиш.

2.Махсус нуқта атрофида функциянинг ҳолатини текшириш.

3.Чегирманинг қўллаш соҳасини аниқлаш..

4.Чегирмани хосмас интегралларни хисоблашда қў

1-савол бўйича дарс мақсади:

1. Яккаланган махсус нуқтанинг турларини аниқлаш.
2. Яккаланган махсус нуқталар атрофида функциянинг ҳолатини текшириш.

Идентив ўқув мақсадлар:

1. Махсус нуқталарни турларга ажратади.
2. Махсус нуқталар атрофида функциянинг ҳолатини текширади.

1-асосий савлнинг баёни

ТАЪРИФ 2.1. $z_0 \in E$ нуқтада f(z) функция аналитик бўлса, бу нуқта тўғри нуқта дейилади.

ТАЪРИФ 2.2. z_0 нуқтанинг $|z - z_0| < \delta$ атрофида f(z) функция аналитик, z нуқтада аналитик бўлмаса, z нуқта ажралган махсус нуқта дейилади.

(1.5) Лоран қаторининг манфий даражали ҳадлари қатнашмаса, чекли йиғинди бўлса ёки чексиз бўлса, z нуқта бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқта, қутб нуқта ёки муҳим махсус нуқта дейилади.

z_0 бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқта бўлса, $\theta < |z - z_0| < \delta$ атрофда f(z) функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \qquad (2.1)$$

даражали қатор билан ифодаланади, $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$, яъни z нуқта атрофида f(z) чегараланган бўлади.

z_0 нуқта f(z) нинг қутб нуқтаси бўлсин. (1.5) Лоран қаторининг бош қисмини энг катта даражаси m бўлсин, яъни

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{m}a_{-k}(z-z_0)^{-k} \qquad (2.2)$$

m га z_0 қутбнинг тартиби дейилади. $m=1$ бўлса, қутб оддий дейилади. (2.2) ни $(z-z_0)^m$ га кўпайтирамиз

$$F(z)=(z-z_0)^m f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{k+m}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{-k}(z-z_0)^{m-k}+a_{-m}$$

Бу функция учун z нуқта $k=1$ да бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқта бўлади, шу сабабли $\lim\limits_{z\to z_0}F(z)=a_{-m}\neq 0$. Лимитнинг таърифига кўра $|a_{-m}|>\varepsilon$ ихтиёрий мусбат сон учун $\eta>0$ сон мавжудки, $0<|z-z_0|<\delta$ соҳада $|f(z)|>\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади, натижада

$$|f(z)|>\frac{\varepsilon}{|z-z_0|^m} \qquad (2.3), \text{ яъни } \lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$$

Демак, z қутб атрофида f(z) функция чегараланмаган бўлади.

ТТЕОРЕМА 2.1. Агар $z_0\in$ Д нуқта Д соҳада аналитик бўлган f(z) функциянинг m тартибли ноли бўлса, z_0 нуқтанинг $|z-z_0|<\delta$ атрофида $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ функция аналитик бўлади, z_0 нуқта эса F(z) учун m тартибли қеп, бўлади.

ИСБОТИ. f(z) функция Д соҳада аналитик бўлганлиги учун $|z-z_0|<\delta$ атрофда Тейлор қаторига ёйилади:

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty}b_k(z-z_0)^k=(z-z_0)^m\varphi(z),\varphi(z_0)=b_m\neq 0\,.$$

Шундай $|z-z_0|<\delta$ атроф мавжудки, $\varphi(z)\neq 0$ шу атрофдаги

$$F(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}$$

функция z_0 дан бошқача нуқталарида аналитик бўлади ва $\varphi(z)$ функция $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ Тейлор қаторига ёйилади. Демак,

$$F(z)=\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m} + \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + ...+ \frac{a_{m-1}}{z-z_0} \qquad (2.4)$$

$a_0=\dfrac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$ бўлгани учун (2.4) дан z_0 нуқта $\dfrac{1}{f(z)}$ функция учун қеп, уеқта бўлади.

ТЕОРЕМА 2.2. $z=z_0$ нуқта f(z) функция учун m тартибли қутб, бўлсин, уҳолда $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ функция учун m тартибли нол бўлади

ИСБОТИ. Zқz_0 f(z) функция учун m тартибли қутб нуқта бўлсин. (16.3) га кўра $|z-z_0|<\delta$ соха мавжудки $f(z)\neq 0$ бўлиб $\dfrac{1}{f(z)}$ шу сохада аналитик бўлади. (2.2) ни икала томонинига $(z-z_0)^m$ кўпайтириб

$$\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z) \quad \text{деб олсак}$$

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{\varphi(z)}, 0<|z-z_0|<\delta \quad \text{ва}$$

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+m} + a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)+....a_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=a_{-m}\neq 0$$

бўлгани учун $|z-z_0|<\delta$ атрофда $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ функция аналитик $\dfrac{1}{\varphi(z_0)}=\dfrac{1}{a_m}\neq 0$ Демак,

$1/f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(1/f(z))$ десак $1/f(z)$ функция $|z-z_0|<\delta$ нуқта атрофида аналитик ва z_0 нуқта m тартибли ноль бўлади.

Теорема.

Агар f(z) функция учун z нуқта муҳим махсус нуқта бўлиб, шу нуқта атрофида

$f(z)\neq 0$ ва аналитик бўлса, бу нуқта $F(z)=\frac{1}{f(z)}$ функция учун ҳам муҳим махсус нуқта бўлади.

ИСБОТИ. zқz$_0$ нуқта f(z) учун муҳим махсус нуқта бўлсин. (1.11) ва (1.12) формулаларга асосан

$$f(z)=f_1(z-z_0)+f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

(1.12) қатор кенгайтирилган z текисликда z$_0$ нуқтадан ташқарии бирга нуқталарда яқинлашади, шунинг учун

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k=f_2(\zeta),\zeta=\frac{1}{z-z_0}$$

қатор > текислигининг $\zeta=\infty$ дан ташқари нуқтасида яқинлашади. Лиувилл теоремасига кўра $f_2(\zeta)$ қатор чегараланмаган, натижада $\zeta=\infty$ нуқтага яқинлашувчи $\{\zeta_k\},k=1,2...$ кетма-кетлик мавжудки $\lim\limits_{k\to\infty}f(\zeta_k)=\infty$,

$\{z_k\},k=1,2...,z_k=\frac{1}{\zeta_k}+z_0$ кетма-кетлик учун бунда

$\lim\limits_{k\to\infty}f_2\left(\frac{1}{z_{k-}z_0}\right)=\infty,$ $\qquad\lim\limits_{k\to\infty}f_1(z-z_0)=0$

Демак, $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=\infty$ (2.5)

Теорема 2.3 (Сохоцкий). Агар zқz$_0$ нуқта f(z) функция учун муҳим махсус нуқта бўлса, ихтиёрий $A\in C$ сон учун $\{z_k\},z_k\to z_0$ кетма-кетлик мавжудки $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=A$ тенглик бажарилади.

ИСБОТИ. $A=\infty$ бўлсин $0<|z-z_0|<\delta$ сохада f(z) чегараланмаган, акс ҳолда z$_0$ йўқотилиши мумкин бўлган махсус нуқта z$_1$ топиладики f(z$_1$)>1 бўлади. Шунга ўхшаш $0<|z-z_0|<\frac{1}{2}$ атрофда z$_2$ нуқта мавжуд, f(z$_2$)>2, ва ҳаказо.

$0<|z-z_0|>\frac{1}{n}$ атрофда z$_n$ нуқта мавжудки f(z$_n$)>n бўлди. Натижада

$z_n\to z_0$ ва $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=\infty$

$A \neq \infty$ бўлсин. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин. $\{z_n\}$ кетма-кетлик мавжуд ва f(z_n)қA. Бу ҳолда теорема исбот бўлади, $0 < |z - z_0| < \delta$ атроф мавжуд бўлсинки f(z)$\neq A$

Бу атрофда $\varphi(z) = \frac{1}{(f(z) - A)}$ функция аналитик бўлади. z_0 нуқта $\varphi(z)$ учун ҳам муҳим махсус нуқта бўлади, акс ҳолда $f|z| = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ функция $0 < |z - z_0| < \delta$ атрофда чегараланган ёки чексизга тенг бўлар эди.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A, \lim_{n\to\to\infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = H$$

f(z) функция учун чексиз узоқлашган нуқта $z = \infty$ ажралган махсус нуқта бўлсин, яъни истслган ката E сони мавжудки $|z| > E$ соханинг $z < \infty$ нуқтадан бошқа ҳамма нуқталарида f(z) аналитик функция. $z = \frac{1}{\zeta}$ алмаштириш бажарсак функция $f\left(\frac{1}{\zeta}\right), |\zeta| = \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{E}$ доиранинг $\zeta = 0$ дан ташқарии нуқталарида аналитик бўлиб, sқ0 нўқта $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ функция учун ажралган махсус нуқта бўлади. Бу нуқта атрофида Лоран қатори қўйидагича бўлади

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^{-k}$$

$\zeta = \frac{1}{z}$ эканлигини эътиборга олсак f(z) функциянинг чексиз узоқлашган нуқта атрофида Лоран қаторига эга бўламиз

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \qquad (2.5)$$

(2.5) қаторнинг биринчи қўшилувчиси $z = \infty$ нуқта атрофида аналитик бўлган f(z) функциянинг бош қисми, иккинчи қўшилувчи эса тўғри қисми дейилади.

$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\zeta\to 0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ тенглик бажарилганидан бош қисми нолга

тенг бўлса $z=\infty$ нуқта бартараф қилиш мумкин бўлган нуқта бўлади. Агар $z=\infty$ нуқта тартибли қутб нуқта бўлса, бу нуқта атрофида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} + a_{-1}z + a_{-2}z^2 + \ldots + a_{-m} z^m$$

ҳосил бўлади.

Агар $z=\infty$ муҳим махсус нуқта бўлса, Лоран қаторининг бош қисми тўла қатнашади.

Муҳакама учун саволлар:

1.Махсус нуқталарни тахлил қилиш.

2.Махсус нуқталар атрофида функцияни текшириш.

Назорат саволлари:

1.1.қандай нуқта тўҳри нуқта дейилади?

1.2.Махсус нуқта таърифини айтинг.

1.3.Яккаланган махсус нуқта ни тушунтиринг.

1.4.Бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқтанианиқланг.

1.5.Бартараф қилиш мумкин бўлган нуқта атрофидафункцияни текширинг.

1.6.қандай нуқтани қутб нуқта дейилади?

1.7.қутб нуқтанинг тартиби қандай аниқланади?

2.1.қутб нуқта атрофида функцияни текширинг.

2.2.Муҳим махсус нуқтанинг таърифини беринг.

2.3.Сохоцкий теоремасини айтинг.

2.4.Функциянинг ноли ва қутби орасидаги боҳланишни ифодалавчи теоремани исботланг.

2.5.Чексиз узоқлашган махсус нуқтани аниқланг.

2.6.Чексиз узоқлашган нуқта атрофида функциянинг ҳолатини тахлил қилинг.

2-асосий савол бўйича дарс мақсади:

1.Чегирманинг хисоблаш формулаларини келтириб чиқариш.

2.Чегирмани интегрални хисоблашга қўллаш.

Идентив ўқув мақсадлари:

2.1.Чегирмани хисоблаш формулаларини билади.

2.2.Чегирмани интегрални хисоблашга қўллайди.

2-асосий савол баёни.

Аналитик функциянинг хоссаларинини махсус нуқта атрофида текшириш алоҳида аҳамиятга эга бўлиб, кўп Амалий аҳамиятга эга бўлади.

Масалан: Аналитик функцияни вектор майдонинг комплекс потенциал деб қарасак, масалан суюқликнинг оқиш тезлиги бўлса, махсус нуқталарни бирорта манба уюртма деб қараш мумкин. Бундай масалаларни ҳал қилишда чегирма тушунчаси аҳамиятга эга.

z_0 нуқта f(z) аналитик функциянинг ажралган махсус нуқтаси бўлсин. γ ёпиқ силлиқ-булакли Жордана чизиғи f(z) нинг аналитик сохасида жойлашган бўлиб, z_0 ни ўз ичига олган бўлсин. γ Билан чегараланган Д сохада бошқа махсус нуқталар бўлмасин.

Таъриф 2.3. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dx$ интегралга f(z) функциянинг z_0 махсус нуқта бўйича чегирмаси дейилади ва $\underset{z=z_0}{чег}\, f(z)$ каби белгиланади.

Демак, $$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \underset{я=я_0}{чег}\, f(z)$$

Коши теоремасига кўра интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаганлиги учун γ ни $|z-z_0|<\delta$ айлана деб оламиз.

Теорема 2.4. (Коши) f(z) функция Д соханинг $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ажралган махсус нуқталаридан ташқарида аналитик бўлсин. Д да тўла жойлашган Г ёпиқ силлиқ -бўлакли Жордана чизиғи махсус нуқталарини ўз ичига олган бўлсин. У ҳолда

$$\int\limits_{Г} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{к}{чег}\, f_k(z) \qquad (2.6)$$

Исботи. Марказлари $z_1, z_2,, \ldots z_n$ нуқталарда бўлган исталган кичик δ радиусли $\gamma_k : |z-z_k| = \delta$ айланалар оламиз. Бу айланаларнинг соат мили бўйича йўналишларини γ_k^- Билан белгилаймиз.

f(z) функция $Г \cup \bigcup\limits_{1}^{к} \gamma_к^-$ эгри чизиқлар билан чегараланган сохада аналитик бўлади, Коши теоремасига кўра

$$\int\limits_{Г\cup\bigcup\limits_{1}^{к}\gamma_к^-} f(z)dz = 0 \quad \text{ёки} \quad \int\limits_{Г} f(z)dz + \sum_{r=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0$$

Йиғиндини ўнг томонга ўтказиб, γ_k^- айланалар йўналишини ўзгартирамиз, интегралнинг хоссасидан фойдаланиб, унинг ишорасини алмаштирамиз

$$\int\limits_{Г} f(z)dz = -\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz \qquad (2.7)$$

Таъриф 2.4. га кўра

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \underset{z=z_k}{чег} f(z)$$

Буни (2.7) га қўйсак, (2.6) келиб чиқади. Теорема исботланди.

Чегирмани хисоблаш.

Теорема 2.5.. f(z) функциянинг $z_0 \in C$ ажралган махсус нуқтага нисбатан чегирмаси f(z) функциянинг Лоран қаторига ёйилмасидаги бош қисмининг биринчи коэффицентига тенг, яъни

$$\underset{z=z_0}{чег} f(z) = C_{-1} \qquad (2.8)$$

Исботи. f(z) функция z нуқта атрофидаги Лоран қатори орқали ифодани

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = 2\pi i C_{-1}$$

Бу қатор $\gamma : |z-z_0| = \delta$ айланада δ исталганча кичик бўлганда текис яқинлашади. Бу қаторни γ бўйича интеграллаймиз ва интегралнинг ҳисоблаш формуласидан фойдаланамиз(мавзу-3), у ҳолда

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_n \int_{\gamma} (z-z_0)^n dz$$

Таъриф 2.4. га кўра

$$\underset{z=z_0}{чег} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz = C_{-1}$$

Натижа. $z \in C$ ажралган махсус нуқтада чегирма нолга тенг.

Энди чегирмаларни ҳисоблаш учун фрмулалар келтириб чиқамиз. z нуқта биринчи тартибли қутб бўлсин. Бу нуқта атрофида f(z) функцияни Лоран қаторга ёйилмаси қўйидагича бўлади.

$$f(z) = \frac{C_{-}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$$

икала томонини (z-z_0) га кўпайтириб $z \to z_0$ да лимитга ўтамиз

$$C_{-} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \qquad (2.9)$$

z_0 нуқта атрофида $f(z) = \dfrac{\varphi}{\phi}$ кўринишида бўлсин. Бу ерда $\varphi(z)$ ва $\phi(z)$ функциялар z нуқтада аналитик ва бу шартлар бажарилганда z нуқта оддий қутб бўлади.(2.6) дан фойдаланамиз.

$$C_{-} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)\varphi(z)}{\phi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\phi'(z_0)} \qquad (2.10)$$

f(z) функция учун z нуқта n тартибли қутбга нуқта бўлсин, у ҳолда $0 < |z - z_0| = \delta$ сохада f(z) функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси қўйидагича бўлади.

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{C_{-n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$$

Тенгликнинг икала томонини $(z - z_0)^n$ га кўпайтирамиз, бу эса ўнг томонида манфий даража бўлмаслиги учун бажарилади. C ни кўрсатиш учун n-1 марта дифферинциаллаймиз. Охирида $z \to z_0$ да лимитга ўтамиз.

$$C_{-1} = \frac{1}{(n-1)1} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] \qquad (2.11)$$

Муҳим махсус нуқталарда чегирмаларни ҳисоблаш учун формулалар йўқ, бу ҳолда Лоран қаторининг бош қисмини топиш керак бўлади.

Чексиз узоқлашган нуқтага нисбатан чегирманинг ҳисоблашни кўрамиз.

Таъриф 2.5. f(z) функциянинг $z = \infty$ ажралган махсус нуқтага нисбатан чегирмаси деб

$$\underset{\infty}{\text{чег}}\, a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k^-} f(z) dz \qquad (2.12)$$

ифодага айтилади, бунда $\gamma_k^- : |z| < R$ систeмаланган катата радиусли айлана, йўналиши соат мили бўйича γ_k^- нинг йўналиши, айлана бўйича ҳаракат қилганда, чексиз узоқлашган нуқтанинг атрофи $R < |z| < \infty$ чап томонида қоладиган қилиб олинган, $z = \infty$
нуқта атрофида Лоран қаторини оламиз

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$$

ва γ_k^- бўйича интеграллаймиз.

$$\int f(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{\gamma_k^-} z^k dz = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{\gamma_k^+} z^k dz$$

$\gamma_k^- = 2\pi i(-C_{-1})$ чунки кқ-1 бўлса нолга тенг.

Демак, $\underset{\infty}{чег}\, f(z) = -C_{-1}$ (2.13)

Теорема 2.6. Агар f(z) функция С комплекс текисликнинг чекли $z_1, z_2,,.z_n$ нуқталаридан ташқарии ҳамма нуқталарида аналитик бўлса, чексиз узоқлашган нуқта ва чекли махсус нуқталарга нисбатан чегирмалар йиғиндиси нолга тенг:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underset{z_k}{чег} f(z) + \underset{\infty}{чег}\, f(z) = 0 \quad (2.14)$$

Исботи. $\gamma_k^- : |z| = R$ айлана радиусини исталганча катта қилиб оламизки, $z_1, z_2,,.z_n$ махсус нуқталар шу айлана ичида ётиши ва айлана соат мили бўйича йўналган бўлсин. Чегирмалар ҳақида Коши теоремасига кўра

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k-1}^{\infty} \underset{z_k}{чег}\, f(z)$$

(2.10) формулага кўра

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z)dz = -\underset{\infty}{чег}\, f(z)$$

Демак, $-\underset{\infty}{чег}\, f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{z_k}{чег}\, f(z), \sum_{k=1}^{\infty} \underset{z_k}{чег}\, f(z) + \underset{\infty}{чег}\, f(z) = 0$

Теорема исботланди.

$\varphi(z)$ функция силлиқ-бўлакли Г ёпиқ Жордан чизиғи билан Д сохада узлуксиз ва Д сохада аналитик бўлсин, f(z) функция эса $\beta_k \in D, k = \overline{1,n}$ чекли сондаги қутблардан ташқарии Д соханинг ҳамма нуқталарида аналитик бўлсин, ДN соханинг $\alpha_k \in D$ нуқталарида f(t)қ0. Ноль ва қутбларнинг карралик тартибларини мос равишда λ_k ва μ_k билан белгилаймиз.

Функция $\phi(z)=\varphi(z)*\frac{f'(z)}{f(z)}$, α_k,β_k D соҳанинг нуқталаридан ташқари ҳамма нуқталарида аналитик.

Юқоридаги шартлардан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\phi(\alpha_k)-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\phi(\beta_k) \qquad (2.15)$$

α_k функциянинг ноли бўлганлиги учун унинг атрофида

$$f(z)=(z-\alpha_k)^{\lambda_k}f_1(z)$$

тенглик бажарилади. Бунда α_k нинг атрофида f(z) функция аналитик ва $f_1(\alpha_k)\neq 0$

$$f'(z)=\lambda_k(z-\alpha_k)^{\lambda k}f_1(z)=(z-\alpha_k)^{\lambda_k}f_1\ (z)$$

$$\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\lambda_k}{z-\alpha_k}\phi(z)+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\phi(z),$$

$\phi(z)=\phi(\alpha_k)+\ldots$кўринишда Тейлор қаторига ёйилганидан $\phi(z)$ функциянинг α_k атрофида ёйилмасининг $\frac{1}{z-\alpha_k}$ олдидаги коэффициенти $\phi(\alpha_k)\lambda_k$ бўлади.Юқоридаги каби β_k қутб нуқта атрофида $f(z)=\frac{1}{(z-\beta_k)^{\mu_k}}f_2(z)$ кўринишда ёзиш мумкин: $f_2(z)\neq 0$бўлганлиги учун $f_2(z),\beta_k$қутб аторфида аналитик,

$\phi(z)$ функциянинг ёйилмасида $\frac{1}{z-\beta_k}$ олдидаги коэффициент $\frac{\phi(\beta_k)}{\mu_k}$ бўлади.

Чегирма ҳақидаги Коши теоремасига кўра $\phi(z)$ функциянинг барча қутбларга кўра чегирмаси

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\phi(\alpha_k)-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\phi(\beta_k)$$

бўлади, яъни (2.15) тенглик бажарилади.

Теорема2.7. $f(z)$ функция юқори ярим текисликдаги $z_1,z_2,\ldots,z_n$ қутблардан ташқари, ярим текисликнинг ҳамма нуқталарида ва ҳақиқий ўқда аналитик бўлсин.

Чексиз узоқлашган нуқта эса $f(z)$ функциянинг энг камида иккинчи тартибли ноли бўлсин. У ҳолда

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{rez}\,f(z) \qquad (2.16)$$

Исботи. Маркази координат бошида бўлиб,радиуси R га тенг бўлган юқори ярим текисликдаги К ярим айланани шундай катта оламизки $z_1,z_2,\ldots,z_n$ қутблар К нинг ичида

ётсин. Натижада ҳақиқий ўқнинг (-R,R) кесмасидан ва К айланадан иборат ёпиқ кўнтурга эга бўламиз. Чегирма ҳақидаги Коши теоремасига кўра

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{K} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} rezf(z) \qquad (2.17)$$

Чап томондаги иккинчи интегралнинг нолга интилишини кўрсатамиз. (2.15) га кўра $f(z)$функциянинг zқ∞ нуқта атрофида Лоран қаторига ёйилмасидан

исталганча катта R учун $|f(z)| \leq \frac{M}{R^2}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

$$\left|\int_{K} f(z)dz\right| \leq \int_{K} |f(z)dz| < \frac{\pi RM}{R^2} = \frac{\pi M}{R} \qquad (2.18)$$

$R \to \infty$ да лимитга ўтамиз ва (2.16) га эга бўламиз.

Энди

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi)d\phi = \sum_{k=1}^{n} rezR[\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})]\frac{dz}{z} \qquad (2.19)$$

формулани келтириб чиқарамиз. Бунда R(cost,sint),рационал функция. Чегирма $|z|<1$

доирадаги махсус нуқталар бўйича олинган. $z = e^{i\phi}$ олмаштириш бажарамиз: $d\phi = \frac{dz}{iz}$

$$\cos\phi = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \sin\phi = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

Буларни (2.19) нинг чап томонига қўйамиз.

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi)d\phi = \int_{|z|=1} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})]\frac{dz}{iz}$$

Чегирма ҳақидаги Коши теоремасигадан фойдаланиб (2.19) ни келтириб чиқарамиз

Эслатма.Агар махсус нуқталардан баъзилари ҳақиқий ўқнинг устида бўлса,шу нуқтанинг пастки ярим тексликдаги атрофини оламиз.

Муҳакама учун саволлар:

2.1.Чегирмани ҳисоблаш формулаларини тахлил қилинг.
2.2.Чегирмани қўллаш соҳаларини аниқланг.
2.3.Муҳим махсус нуқтада чегирмани ҳисоблаш мумкинми?

Назорат саволлари

1. 1.Чегирманинг таърифини айтинг.
1.2.Чегирмани Лоран қатори коэффициенти билан алоқасини ўрнатинг.
1.3.Чегирмани асссссосий теоремасини ёзининг.
1.4.Чегирманинг асосий теоремасини исботланг.
1. 5.Чегирмани оддий қутбдаги қийматини топинг.

1. 6.Каср шаклда берилган функциянинг чегирмасини ҳисобланг

1.7.Каррали қутбда чегирмани ҳисоблаг.

1.8.Чексиз узоқлашган нуқтага нисбатан чегирмани ҳисобланг.

2.1.Чегирмалар йиғиндиси ҳақидаги теоремани исботланг.

2.2..Чегирма ёрдамида ёпиқ кўнтур бўйича олинган интегрални ҳисобланг.

2.3.Чегирма ёрдамида хосмас интегрални ҳисобланг.

2.4.Чегирма ёрдамида тригонометрик ифодалардан олинган интегрални хисобланг.

2.5 Чегирма ёрдамида кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратиш

Мавзу бўйича ечимини кутаётган илмий муоммалар:

1.Ажралмаган махсус нуқтада функциянинг ҳолатини текшириш.

2.Чексиз кўп махсус нуқталарда чегирмани ҳисоблаш.

3.Тормоқланиш нуқталарда чегирмани ҳисоблаш.

4.Чегирмани қатор йиғиндисини ҳисоблашда қўллаш.

в)Амалий машғулотлар тузулиши:.

1-амалий машғулот.Ажралган маҳсус нуқталар синфи.

Дарс мақсади.

1.Маҳсус нуқталар тартибини аниқлаш.

2.Маҳсус нуқта атрофида функцияни текшириш.

. Идентив ўқув мАқсадлари:

1.1.Маҳсус нуқталар тартмбмни аниқлайди.

1.2.Маҳсус нуқта атрофида функцияни текширади.

Амалий машғулотни бажариш учун номуналар.

Мисол 1. $f(z)=\frac{1}{1-\sin z}$ функция учун $a=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$ қутб нуқта эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. $\underset{z\to a}{Lim}f(z)=\lim\limits_{z\to a}\frac{1}{1-\sin z}=\frac{1}{1-\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}=\frac{1}{1-1}=\infty$

Мисол 2. $f(z)=\sin\frac{\pi}{z^2+1}$ функция учун $a=-i$ ўта муҳим махсус нуқта эканлигини

Кўрсатинг.

Ечиш. $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\lim\limits_{z\to a}\sin\frac{\pi}{z^2+1}=\lim\limits_{z\to -i}\sin\frac{\pi}{(z-i)(z+i)}$ мавжуд эмас.

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлаар:[1],5-боб,493-529 тоқлари.

Уйга вазифа учун машқлар:[1],5-боб,493-529 жуфтлари.

2-амалий машғулот.Чегирма тушунчаси.

Дарс мақсади

1.Чегирмани ҳисоблашга доир мисоллар ечиш.

2.Чегирмани хосмас интегралга қўллаш.

Идентив ўқув мақсадлари.

2.1.Чегирмани ҳисоблайолади.

2.2.Чегирмани хосмас интегрални текширишга қўллайди.

Амалий машғулотни бажариш учун номуналар.

Мисол 1. $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$ функциянинг барча чекли махсус нуқталаридаги чегирмаларини ҳисобланг.

Ечиш. $z=1$ учунчи тартибли қутб бўлади.

$$rezf(z)=\underset{z=1}{rez}\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}[(z-1)\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}(\pi\cos\pi z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}(\pi^2\sin\pi z)=0.$$

Ўқув хонасида ишлаш учун машқлар:[1],6-боб,1-79 тоқлари.

Уйга вазифа:[1],6-боб.1-79 жуфтлари.

[1].Саъдуллаев А.,Худойберганов Г., Мансуров Ҳ.,Ворисов А., Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.3-қисм-Т.,»Ўзбекистон» 2000.

в) Мустоқил иш топшириқлари.

1-топшириқ.Махсус нуқталар синфини тахлил қилиш.

1.1.Бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқтани тахлили.

1.2.қутб нуқта тартибини аниқлаш.

1.3.Муҳим махсус нуқтани тахлил қилиш.

2-топшириқ.Чегирма ҳақида.

2.1.Чегирманинг ҳисоблаш формулаларини аниқлаш.

2.2.Чеирманинг асосий теоремасини тахлил қилиш.

2.3.Чегирмани қўллаш соҳаларини кўрсатиш.

3-топшириқ.Мустоқил ечиш учунмашқлар.[1],6-боб,208-225 машқлар.

[1].Саъдуллаев А.,Худойберганов Г.,Мансуров Ҳ.,Ворисов А.,Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.3-қисм,-Т.»Ўзбекистон».2000.

г)Модул бўйича якуний машғулот(хулоса).

1.Комплекс функциялар кетма-кетлиги ҳақиқий ўзгарувчили функциялар кетма-кетлиги каби хоссаларга эга.

2.Аналитик функциялар қатори ўзига хос хусусиятларга эга.

3.Лоран қатори ёрдамида махсус нуқталар синфи аниқланади.

4.Махсус нуқталар турига қараб улар атрофида функциялар турли ҳолатда бўлади.

5.Чегирма турли хосмас интегралларни ҳисоблашга қўлланилади.

Адабиётлар

1.Худойберганов Г.,Ворисов А., Мансуров Ҳ. Комплекс анализ (маъруза лар)-Т.»Университет».1998.

2.Мақсудов Ш.,Салоҳиддинов М.,Сирожиддинов С.Комплекс ўзгарувчили функциялари назарияси.-Т.»Ўқитувчи».1979.

3.Сидоров Ю.В.,ФедорюкМ.В.,Шабунин М.И.Лекции по теории функции комплексного переменного.М.,»Наука»,1976.
4.Привалов И.И. Введение в теории функции комплексного переменного.М.»Наука»2001.
5.Шабат Б.В.Введение в комплекснўй анализ-М.»Наука»1976.

Комплекс ўзгарувчили функциялар назариясидан тузилган тестлар.

2-вариант

1.Комплекс соннинг алгебраик кўринишини аниқланг.
A) $z = x + yi$
B) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
C) $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$
D) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

2.Комплекс сонниг триганометрик кўринишини аниқланг
A) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
B) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
C) $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$
D) $z = x + yi$

3.Комплекс соннинг модулини топинг.
A) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
B) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $z = x + yi$
C) $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$
D) $z = x + yi$

4.Комплекс соннинг алгебраик ва триганометрик кўринишлари орасидаги алоқани кўрсатинг.
A) $x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$
B) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
C) $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$
D) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $z = x + yi$

5.Комплекс текислик ва текисликдаги декарт координаталар системаси нимаси билан фарқ қилади.
A) ордината ўқи билан.
B) абцисса ўқи билан.
C)координата маркази билан.

D)йўналиши билан.

6.Муавр формуласини кўрсатинг.
A) $(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$
B) $z^n = r^n(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)$
C) $z^n = r^n(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)^n$
D) $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

7)Комплекс сонни даражага кўтариш формуласини кўрсатинг.
A) $z^n = r^n(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)$
B) $(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$
C) $z^n = r^n(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)^n$
D) $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

8)Комплекс сондан илдиз чиқариш формуласини кўрсатинг.
A) $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$
B) $(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$
C) $z^n = r^n(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)^n$
D) $z^n = r^n(\cos n\varphi + is\sin n\varphi)$

9)Стереографик акслантиришни аниқланг.
A) бирлик шарли текисликка
B)ярим сферали текиссликка.
C) ярим шарли текисликка
D)бирлик сферали текисликка

10)Чексиз узоқлашган нуқтани аниқланг.
A) текисликнинг сфера шимолий қутбига мос келувчи нуқтаси.
B)текисликнинг сфера жанубий қутбига мос келувчи нуқтаси.
C) текисликнинг сфера марказига мос нуқтаси.
D)сферанинг симметрик нуқтасига мос келувчи нуқта.

11)Жордан чизиғи деб қандай чизиққа айтилади?.
A) узлуксиз ва каррали нуқтаси мавжуд эмас
B)узлуксиз
C) узлукли
D)силлиқ

12)соҳа деб қандай тўпламга айтиладт?.

A) очиқ ва ихтиёрий иккита нуқтасини шу тўпламда ётувчи силлиқ чизиқ билан тутуштиришмумкин бўлса
B) очиқ
C)ёпиқ
D)ёпиқ ва ихтиёрий иккита нуқтасини шу тўпламда ётувчи силлиқ чизиқ билан тутуштириш мумкин бўлса

13)Функциянинг z_0 нуқтада узлуксизлигини кўрсатинг.
A)$|z-z_0|<\delta$ бўлса $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ бўлади
B) $|z'-z''|<\delta$ бўлса $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$ бўлади
C) $|\Delta z|<\delta$ бўлса $|\Delta f(z)|<\varepsilon$ бўлади
D) $|z-z_0|<\delta$ бўлса $|f(z)-A|<\varepsilon$ бўлади

14)Функциянинг текис узлуксизлигини кўрсатинг.
A) $|z'-z''|<\delta$ бўлса $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$ бўлади
B) $|z-z_0|<\delta$ бўлса $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ бўлади
C) $|\Delta z|<\delta$ бўлса $|\Delta f(z)|<\varepsilon$ бўлади
D) $|z-z_0|<\delta$ бўлса $|f(z)-A|<\varepsilon$ бўлади

15)Функциянинг z_0 нуқтада лимитга эга эканлигини кўрсатинг.
A) $|z-z_0|<\delta$ бўлса $|f(z)-A|<\varepsilon$ бўлади
B) $|z'-z''|<\delta$ бўлса $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$ бўлади
C) $|\Delta z|<\delta$ бўлса $|\Delta f(z)|<\varepsilon$ бўлади
D) $|z-z_0|<\delta$ бўлса $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ бўлади

16)Функциянинг диференциалланувчи бўлишлик шартини кўрсатинг.
A) $df = f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z$
B) $df = f'(z)\Delta z+\alpha$
C) $df = f'(z)dz$
D) $df = f'(z)+\alpha$

17)Функциянинг дифференциалини аниқланг.
A) $df = f'(z)dz$
B) $df = f'(z)\Delta z+\alpha$
C) $df = f'(z)+\alpha$
D) $df = f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z$

18)Бирор нуқтада моноген функция аналитик бўладими?
A) йўқ
B) ҳа

C)баъзан
D)баъзи нуқтада

19)Аналитик функция моноген бўладими?
A)ҳа
B)йўқ
C)баъзан
D)баъзи нуқтада

20)Коши-Риман шартини кўрсатинг.
A) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$
B) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y};\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}$
C) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$
D) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$
21) $W=f(z)$ функция аналитик бўлиши учун нечта шарт бажарилиши зарур ва етарли.
A) 2
B) 1
C) 3
D) 4

22) $f(z)=u+i\vartheta$ функция аналитик бўлиши учун қандай шартларни бажарилиши зарур ва етарли.
A) Коши-Риман шарти ва $\partial u\,,\partial \vartheta$ нинг мавжудлиги
B) Коши-Риман шарти ва $\partial \vartheta$ нинг мавжудлиги
C) Коши-Риман шарти ва ∂u нинг мавжудлиги
D) Коши-Риман шартининг бажарилиши

23) $f(z)=z\operatorname{Re}z$ функция $z=0$ нуқтада
A)моноген
B)аналитик
C)узлуксиз
D)узлукли

24) Жумлани тўлдиринг.

Агар $f(z)$функция учун $f(z_0)\neq 0$ учун шарт бажарилса акслантиришда z_0 нуқтадан чиқувчи.....
A) эгри чизиқлар орасидаги бурчаклар сақланади
B)эгри чизиқлар орасидаги бурчаклар камаяди.

C) эгри чизиқлар орасидаги бурчаклар ошади.
D)эгри чизиқлар орасидаги юурчакнинг йўналиши ўзгаради.

25) Жумлани тўлдиринг.
Агар $f(z)$ функция D соҳада аналитик бўлиб, $f(z_0) \neq 0$ бўлса
A) тескари функчия z_0 атрофида аналитик
B)тескари функция Dда аналитик
C) D соҳада тескари функция нолдан фарқли
D) Dда тескари мавжуд

26)Комформ акслантиришнинг нечта ҳусусияти мавжуд
A)2
B)1
C)3
D)4

27)Комформ акслантириш нечта турга бўлинади?
A)2
B)1
C)3
D)4
28) Жумлани тўлдиринг.
Комформ акслантиришда эгри чизиқнинг бурчак коэффициентига
A)ҳосила аргументи қўшилади
B) ҳосила аргументи айрилади
C) ҳосила аргументига кўпаяди
D) ҳосила аргументига тенг бўлади

29) Жумлани тўлдиринг.
Комформ акслантиришда
A)эгри чизиқлар орасидаги бурчак сақланади
B) эгри чизиқнинг узунлиги сақланади
C) эгри чизиқнинг узунлиги бир ҳил ўзгаради
D) эгри чизиқлар орасидаги бурчак сақланади ва унинг узунлиги ҳосила модулига ўзгаради.

30)Чизиқли функция ёрдамида акслантирипшда нотўғри тасдиқни аниқланг.
A) комплекс текислик кенгайтирилган текисликка аксланади
B) кенгайтирилган текислик кенгайтирилган текисликка аксланади
C)тўғри чизиқ тўғри чизиққа аксланади
D)айлана айланага аксланади

31)Чизиқли функция ёрдамида қандай акслантиришлар бажарилади.
A) бурчакка бурилиб параллел кўчирилади

B) бурчак бурилиб чўзилади
C) параллел кўчирилади
D) фақат бурчакка бурилади

32)Каср-чизиқли функция ёрдамида акслантириш комформ бўлишлиги учун қандай шартт бажрилиш керак?
A) $a:b=c:d$
B) $a:b\neq c:d$
C) $a:c=b:d$
D) $a:c\neq b:d$

33) Каср-чизиқли алмаштиришнинг асосий ҳоссалари нима?
A)2
B)1
C)3
D)4

34) Каср-чизиқли функция ёрдамида акслантирилганда қайси нуқта чексиз узоқлашган нуқтага аксланади?
A) $z=d:c$
B) $z=b:a$
C) $z=c$
D) $z=a$

35)Айлана тенгламасини кўрсатинг
A) $Az\overline{z}+Bz+C\overline{z}+D=0$
B) $Az^2+B\overline{z}+Cz+D=0$
C) $Az\overline{z}+Bz^2+C\overline{z}+D=0$
D) $Az\overline{z}+Bz+C\overline{z}^2+D=0$

36)Агар z ва $\dot{z}$ нуқталар C айланага нисбатан симметрик бўлса, шу нуқтадан ўтувчи Г айланага с айланага нисбатан қандай жойлашган?
A)улар ортогонал
B)симметрик
C)кесишади
D)устма-уст тушади

2-вариант

1)Жумлани тўлдиринг.
Каср-чизиқли функция ёрдамида акслантирилганда
A)айлана-айланага
B)айлана-тўғри чизиққа
C)айлана элипссга
D)эллипс айланага

2)Каср-чизиқли функция ёрдамида акслантиришда С айланага нисбатан симметрик нуқталар

A)Г айланага нисбатан симетрик нуқталарга

B)айлана марказига

C)айлана устига

D)айлана ичига

3) R радиусли айланага нисбатан z ва $\dot{z}$ нуқталарнинг симетриклик шартини кўрсатинг.

A) $|z_0 - z||z_0 - \dot{z}| = R^2$

B) $|z - \bar{z}||z^{\bullet} - \dot{\bar{z}}| = R^2$

C) $|z_0 - z| : |z_0 - \dot{z}| = R^2$

D) $|z_0 - z| + |z_0 - \dot{z}| = R^2$

4)Каср-чизиқли функцияни тузиш учун ҳар бир текисликда нечтадан нуқталар берилиши зарур.

A)3

B)2

C)4

D)5

5)Қайси функция юқори ярим текисликни бирлик доирага акслантиради.

A) $\frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}$

B) $e^{i\theta}\frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}$

C) $e^{-i\theta}\frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}$

D) $k\frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0}$

6)Қайси функция бирлик доирани бирлик доирага акслантиради?

A) $e^{i\theta}\frac{z - \bar{z}_0}{1 - \bar{z}\bar{z}_0}$

B) $e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}\bar{z}_0}$

C) $e^{i\theta}\frac{\bar{z} - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$

D) $e^{i\theta}\frac{\bar{z} - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$

7) $W = e^z$ кўрсаткичли функция қандай аниқланади?
A)лимит ёрдамида
B)логарфм ёрдамида
C)учбурчак ёрдамида
D)ҳосила ёрдамида

8)Кўрсаткичли функция ёрдамида ҳақиқий ўзгарувчили функциядан нимаси билан фарқ қилади?
A)даврийлиги билан
B)монотонлиги билан
C)тоқлиги билан
D)жуфтлиги билан

9) $W = z^w$ функция C текисликни нимага акслантиради?
A) n япроқли Риман сиртига
B) $W -$ текмслигига
C)кўпбурчакка
D)кенгайтирилган текисликка

10) $W = z^n$ ёрдамида z ва W лар қандай кўринишда олинади.
A)иккаласи ҳам тригонометрик кўринишда
B) z тригонометрик, W алгебраик кўринишда
C)иккаласи ҳам алгебраик кўринишда
D) z алгебраик, W тригонометрик кўринишда

11)Кўрсаткичли функция Z текислигини нимага акслантиради?
A)чексиз кўп япроқли Риман сиртига
B)Риман сиртига
C)кўпбурчакка
D)Риман сферасига

12) $W = e^z$ функция қаерда аналитик.
A) $\overline{C}$ кенгоайтирилган текисликда
B)C комплекс текисликда
C)айланада
D)тўғри чизиқда

13) $W = \sin z$ функция қандай аниқланади?
A)даражали қатор ёрдамида
B)лимит ёрдамида
C)тўғри бурчакли учбурчак ёрдамида
D)ихтиёрий учбурчак ёрдамида

14)Ҳақиқий вак комплекс ўзгарувчили синус функция нимаси билан фарқ қилади?
A) қийматлар соҳаси билан
B)тоқлиги билан
C)даврийлиги билан
D)жуфтлиги билан

15)$u+i\vartheta=Lnz$ функция манфий ўқ билан кесилган z текисликни қандай соҳага бир япроқли аксалантиради?
A)$-\pi<\vartheta<\pi$
B)$-\pi<u<\pi$
C) $0<u<\pi$
D) $0>u>-\pi$

16)Тригонометрик функциялар қайси функциялар билан боғланган?
A)кўрсаткичли
B)даражали
C)логарифмик
D)чизиқли

17)Тескари тригонометрик функциялар қайси функция билан боғланган?
A)логарифмик
B)кўрсаткичли
C)даражали
D)чизиқли

18)Жуковский функциясини кўрсатинг.
A) $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$
B) $\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$
C) $\frac{1}{2}\left(\bar{z}-\frac{1}{z}\right)$
D) $\frac{1}{2}\left(\bar{z}+\frac{1}{z}\right)$

19)Жуковский функцияси бирлик айланани нимага акслантиради?
A)$[-1;1]$ кесмага
B)бирлик айланага
C)$(-1;1)$ ораликқа
D)$[r;-r]$ кесмага

20)Жуковский функцияси $z=re^{i\varphi}, r\neq 1$айланани нимага акслантиради?
A)эллипсга

B)айланага
C)гиперболага
D)параболага

21)Жуковский функцияси бирлик доира ичкарисини қаерга акслантиради?
A)эллипс ташқарисига
B)Эллиппс ичига
C)доира ичига
D)доира ташқарисига

22) Жуковский функцияси координат бошидан чиқувчинурни қандай чизиққа акслантиради?
A)параболанинг қисмига
B)нурга
C)гиперболанинг қисмига
D)эллипсга

23)Жуковский функцияси юқори ярим текисликни қандай фигурага акслантиради?
A) қуйи ярим текисликка
B)юқори ярим текисликка
C) $[-1;1]$ кесма ташқарисига
D) $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$ оралиқ ташқарисига

24) Жуковский функцияси қуйи ярим текисликни қандай фигурага акслантиради?
A)юқори ярим текисликка
B) $[-1;1]$ кесма ташқарисига
C)қуйи ярим текисликка
D) $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$ оралиқ ташқарисига

25)Комплекс функциядан олинган интегрални аниқлашда нимадан фойдаланилади?
A)ҳақиқий ўзгарувчили функциядан олинган эгри чизиқли интегралдан
B)каррали нтегралдан
C)сирт интегралидан
D)қуйи Дарбу интегралидан

26)Агар Г эгри чизиқ $z=(t), t\in[\alpha+\beta]$ тенглама билан берилса қайси текислик ўринли?
A) $\int\limits_{A} f(z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt$

B) $\int_A f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]dt$

C) $\int_A f(z)dz = \int_A^\alpha f[z(t)]dt$

D) $\int_A f(z)dz = \int_A f[z(t)]z'(t)dt$

27) $\int_A (z-a)^n dz, n \neq -1$ бўлганда нимага тенг?.Г-айлана.

A)0
B)1
C)2
D)3

28) $\int_A (z-a)^n dz, n = -1$ бўлганда нимага тенг?. $\Gamma - z = a + ze^{it}$

A) $2\pi i$
B) $-\pi i$
C) πi
D) $-2\pi i$

29)Бошланғич функцияни кўрсатинг?

A) $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$

B) $F(z) = \int_{z_1}^{z_2} f(t)dt$

C) $F(z) = \int_a^b f(t)dt$

D) $F(z) = \int f(t)dt$

30)интегралнинг нечта асосий ҳоссалари мавжуд
A)5
B)3
C)4
D)2

31)қуйидагиларнинг қайсилари нотўғри?
A) $\int_A f(z)dz = -\int_A f(z)dz$
B) $\int_A Cf(z)dz = C\int_A f(z)dz$

C) $\int_A f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f(z)dz$

D) $\int_A f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(z)dz$

32)агар $f(x)$ функция Г ёпиқ силлиқ чизиқ билан чегараланган бўлса, $\int_{\Gamma} f(z)dz$ нимага тенг?

A)0
B)1
C)π
D)πi

33)Г ёпиқ силлиқ чизиқ бўйича олинган интегрални ички чизилган синиқ чизиқ бўйича олинган интеграл билан алмаштириш учун қандай шарт қўйилади?
A)функция ёпиқ соҳада узлуксиз
B)синиқ чизиқнинг бўғинлар сони
C)эгри чизиқнинг узунлиги
D)интегралнинг ҳоссалари

34)Коши интегралининг мавжудлиги учун B соҳадаги $f(z)$ функцияга қандай шартлар қўйилади?
A) $f(z)$ Dда аналитик $\overline{D}$да узлуксиз
B) $f(z)$ Dда узлуксиз
C) $f(z)$ D да аналитик
D) $f(z)$ Dда моноген

35)Кошининг интеграл формуласи нимани аниқлайди?
A)функциянинг соҳа ичидаги қийматини
B)функциянинг чегарадаги қийматини
C)функциянинг соҳа ичидаги нуқтадаги қийматини
D) $2\pi\vartheta$ га тенг.

36)Соҳа ташқарисидаги нуқтада Коши интегралининг қиймати нимага тенг?
A) $2\pi i$
B) 2
C) 0
D) 1

Глоссарий

1. $z = x + iy$ комплекс ўзгарувчи

2. x, y хақиқий ўзгарувчилар.

3. $i -$мавжуд бирлик.

4. $C -$комплекс текислик.

5. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплекс ўзгарувчининг модели.

6. $\gamma = arctg\dfrac{y}{x}$ комплекс ўзгарувчининг аргументи.

7. $z = |z|(\cos\gamma + i\sin\gamma)$-комплекс ўзгарувчининг тригонаметрик кўриниши.

8. $\Delta z -$комплекс ўзгарувчининг орттирмаси.

9. Δw-комплекс w функциянинг орттирмаси.

10. $dz -$комплекс ўзгарувчининг дифференциали.

11. $<(>)$ тенгсизлик белгиси.

12. rec чегирма белгиси.