7-§. Qisqartirib akslantirish prinsipi

7.1. **Akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi.**

Aytaylik (X,ρ) metrik fazoni o‘z-o‘ziga aks ettiruvchi T akslantirish berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar X fazoda shunday a nuqta topilib, $T(a)=a$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda a nuqta *T akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi* deyiladi.

Misollar. 1) Sonlar o‘qini o‘ziga aks ettiruvchi $T: x\to x^2$ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari $x=x^2$ tenglama yechimlaridan, ya’ni 0 va 1 dan iborat.

2) $\begin{cases} u = 2x+3y-2 \\ v = x+y+1 \end{cases}$ formulalar tekislikni o‘z-o‘ziga akslantiradi. Bu akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari $\begin{cases} x = 2x+3y-2 \\ y = x+y+1 \end{cases}$ sistemaning yechimidan, ya’ni (-1;1) nuqtadan iborat.

3) Agar $y(x)$ funksiya $[0;1]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $y^2(x)-y(x)-x^2$ funksiya ham [0;1] kesmada uzluksiz funksiya bo‘ladi. Shuning uchun $T(y)= y^2- -y - x^2$ formula bilan aniqlangan akslantirish $C[0;1]$ fazoni o‘z-o‘ziga akslantiradi.

Bu akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari $y^2(x)-y(x)-x^2=y(x)$ funksional tenglama yechimlaridan, ya’ni $y=1+\sqrt{1+x^2}$ va $y=1-\sqrt{1+x^2}$ funksiyalardan iborat bo‘ladi.

7.2. Qisqartirib akslantirish.

(X,ρ) metrik fazoni o‘z-o‘ziga aks ettiruvchi T akslantirish berilgan bo‘lsin.

2-ta’rif. Agar X fazodan olingan ixtiyoriy x va y nuqtalar uchun

$$\rho(Tx,Ty)\le \alpha\rho(x,y) \qquad (1)$$

tengsizlikni va $0<\alpha<1$ shartni qanoatlantiradigan α son mavjud bo‘lsa, u holda T *qisqartirib akslantirish* deyiladi.

Misol: $X=[0;1/3]$, $\rho(x,y)=|y-x|$, $T(x)=x^2$ bo‘lsin. Agar x_1 va x_2 kesmaning ixtiyoriy nuqtalari bo‘lsa, u holda

$\rho(Tx_1,Tx_2)=|x_2^2-x_1^2|=|x_2+x_1|\cdot|x_2-x_1|\le {}^2/_3\cdot|x_2-x_1|= {}^2/_3\cdot\rho(x_1,x_2)$

bo‘ladi. Demak, T akslantirish qisqartirib akslantirish ekan.

1-teorema. *Agar T qisqartirib akslantirish bo‘lsa, u holda T uzluksiz bo‘ladi.*

Isboti. Aytaylik a nuqta X fazoning ixtiyoriy nuqtasi va $\varepsilon>0$ bo‘lsin. U holda $\rho(x,a)<\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ lar uchun (1) tengsizlikka ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\rho(Tx,Ta)\le\alpha\rho(x,a)<\alpha\varepsilon<\varepsilon$$

Bu esa ixtiyoriy a nuqtada T akslantirishning uzluksiz ekanligini isbotlaydi. Teorema isbot bo‘ldi.

7.3. Qisqartirib akslantirish prinsipi.

2-teorema. *(X,ρ) to‘la metrik fazoda aniqlangan har qanday T qisqartirib akslantirish, yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega, ya’ni $Tx=x$ tenglamaning yagona yechimi mavjud.*

Isboti. Aytaylik a_0 nuqta X fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. T akslantirish X fazoni o‘z-o‘ziga akslantirgani uchun a_0 nuqtaning obrazi ham X fazoga tegishli bo‘ladi. Bu nuqtani a_1 bilan belgilaymiz, ya’ni $a_1=T(a_0)$. Endi a_1 nuqtaning obrazini topib, uni a_2 bilan belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib X fazoning elementlaridan tuzilgan quyidagi ketma-ketlikka ega bo‘lamiz:

$$a_1=T(a_0),\ a_2=T(a_1)=T^2(a_0),\ \ldots,\ a_{n+1}=T(a_n)=T^n(a_0),\ \ldots \quad (2)$$

Bu ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko‘rsatamiz.

(1) va metrikaning uchburchak tengsizliklaridan, ixtiyoriy n va m natural sonlar $(m>n)$ uchun

$$\rho(a_n,a_m)=\rho(T^n(a_0),T^m(a_0))=\rho(T^n(a_0),T^m(a_{m-n}))\le\alpha^n\cdot\rho(a_0,a_{m-n})\le$$
$$\le\alpha^n\cdot(\rho(a_0,a_1)+\rho(a_1,a_2)+\ldots+\rho(a_{m-n-1},a_{m-n}))\le\alpha^n\cdot(\rho(a_0,a_1)+ +\alpha\rho(a_0,a_1)+\ldots+$$
$$+\alpha^{m-n-1}\rho(a_0,a_1))\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(a_0,a_1),$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Endi $\alpha<1$ bo‘lganligi sababli, n yetarlicha katta bo‘lganda bu tengsizlikning o‘ng tomonini istalgancha kichik qilish mumkin.

Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo‘ladi. Bundan $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ va X fazoning to‘laligidan $a\in X$ kelib chiqadi. T uzluksiz akslantirish bo‘lganligidan $T(a)=T(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} T(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=a.$ Demak, a qo‘zg‘almas nuqta ekan.

Endi qo‘zg‘almas nuqtaning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik qo‘zg‘almas nuqta ikkita $T(a)=a$ va $T(b)=b$ bo‘lsin. U holda $\rho(a,b)=\rho(T(a),T(b))\le\alpha\cdot\rho(a,b)$ bo‘ladi. Bundan $\rho(a,b)=0$ va demak, $a=b$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekshirish savollari

1. Qo‘zg‘almas nuqtaga ta’rif bering
2. Qisqartirib akslantirishni ta’riflang va misollar keltiring.
3. Qisqartirib akslantirishning uzluksizligini isbotlang.
4. Qisqartirib akslantirish haqidagi asosiy teoremaning isboti rejasini tuzing va shu asosda isbotlang.

Mashqlar

1. Tekislikni o‘ziga akslantiruvchi $\begin{cases} u = x(y-1) - 2y^2 + 5y + x - 3, \\ v = -x(y+1) + 5 \end{cases}$ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalarini toping.

2. To‘g‘ri chiziqni o‘ziga akslantiruvchi $f(x)=5x^2+2x+3-2\sin x$ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasining mavjudmasligini ko‘rsating.

3. $f(x)=\sin x$ funksiya sonlar o‘qida qisqartib akslantirish bo‘ladimi?

4. $\begin{cases} u = 0{,}7x + 0{,}8y, \\ v = 0{,}2x - 0{,}05y \end{cases}$ sistema bilan aniqlangan $f:(x,y)\to(u;v)$ akslantirish tekislikni *a)* $\mathbb{R}_2^2$; *b)* $\mathbb{R}_1^2$ fazo deb qaralsa, qisqartirib akslantirish bo‘ladimi?

5. $f(x)=\sqrt[3]{1000-x}$ funksiya [9;10] kesmani o‘ziga akslantirishini ko‘rsating. Bu qisqartirib akslantirish bo‘ladimi?

8-§. Qisqartirib akslantirishning tatbiqlari

8.1. Differensial va integral tenglamalarga tatbiqi

Uzluksiz $y=y(x)$ funksiyalardan tuzilgan $C[a,b]$ fazoda

$$Ay=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

akslantirish berilgan bo‘lsin. Bu yerda $f(x,y)$ uzluksiz funksiya bo‘lib, $G=\{(x;y): a\le x\le b,\ M<y\le N,\ a,\ b,\ M$ va N berilgan sonlar$\}$ sohada Lipshits shartini qanoatlantiradi, ya’ni G sohadan olingan ixtiyoriy ikkita $(x_1;y_1)$ va $(x_2;y_2)$ nuqta uchun quyidagi munosabat bajariladi:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,$$

bu yerdagi L soni G soha bilan aniqlanuvchi va $(x;y_1),\ (x;y_2)\in G$ nuqtalarga bog‘liq bo‘lmagan musbat son.

Yuqoridagi A akslantirishning $|x-x_0|$ yetarlicha kichik bo‘lganda qisqartirib akslantirish ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan y va y_1 funksiyalar $C[a,b]$ fazoning ixtiyoriy elementlari bo‘lsin. U holda

$$\rho(Ay,Ay_1)=\max_{x\in[a;b]}|Ay-Ay_1|\le\max_{x\in[a;b]}\int_{x_0}^{x}|f(x,y)-f(x,y_1)|\cdot|dx|\le$$

$$\le\max_{x\in[a;b]}\int_{x_0}^{x}L\,|y-y_1|\cdot|dx|=|x-x_0|\cdot\max_{x\in[a;b]}|y-y_1|=\theta\rho(y,y_1),$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Shuningdek $|x-x_0|<1/L$ bo‘lganda, $\theta=L|x-x_0|<1$ bo‘ladi.

$C[a,b]$ fazoning to‘laligidan A akslantirishning yagona qo‘zg‘almas nuqtasi mavjudligi kelib chiqadi.

Demak $y=Ay$ tenglamaning yoki

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad (1)$$

integral tenglamaning quyidagi

a) $f(x,y)$ funksiya L o‘zgarmas songa ko‘ra Lipshits shartini qanoatlantiradi;

b) $|x-x_0|<1/L$ (2)

shartlarni qanoatlantirganda yagona uzluksiz yechimi mavjud.

(1) integral tenglama $y_0=y(x_0)$ boshlang'ich shart bilan berilgan

$$y'=f(x,y) \qquad (3)$$

differensial tenglamaga teng kuchli bo'lganligi sababli, yuqoridagi mulohazalardan (3) differensial tenglamaning (2) shartlar bajarilganda yechimining mavjudligi va yagonaligi kelib chiqadi.

8.2. Algebradagi tatbiqi. Quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$x=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k+b_i\,,\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (4)$$

Bu tenglamalar sistemasini n o'lchamli vektor fazodagi $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ vektor va $T=(a_{ij})$ matritsa orqali ifodalab, $x=Tx$ ko'rinishda yozish mumkin. n o'lchamli vektor fazoda quyidagi metrikani qaraymiz: $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$, bu yerda $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$. U holda ixtiyoriy ikkita $x'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ va $x''=(x_1'',x_2'',\ldots,x_n'')$ nuqta uchun

$$\rho(Tx',Tx'')=\rho(y',y'')=\max_{1\le i\le n}|y'_i-y''_i|=\max_{1\le i\le n}\Big|\sum_k a_{ik}\ (x'_k-x''_k)\Big|\le$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\sum_k|\ a_{ik}\ |\cdot|x'_k-x''_k|\ \le\max_{1\le i\le n}\sum_k|\ a_{ik}\ |\cdot\max_{1\le k\le n}|x'_k-x''_k|=\rho(x'_k,x''_k)\cdot\max_{1\le i\le n}\sum_k|\ a_{ik}\ |$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan T akslantirish qaralayotgan metrikaga nisbatan qisqartirib akslantirish bo'lishi uchun

$$\sum_k|\ a_{ik}\ |\le\alpha<1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (5)$$

tengsizliklarning o'rinli bo'lishi yetarli ekan. Demak, (4) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lishi uchun (5) tengsizliklarning o'rinli bo'lishi yetarli.

8.3. Matematik analizdagi tatbiqi.

Quyida, oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

3-teorema. *Aytaylik $f(x,y)$ funksiya $G=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ -\infty<y<+\infty)\}$ sohada x bo'yicha uzluksiz va y bo'yicha musbat, chegaralangan hosilaga ega* *bo'lsin:*$0<m\leq f_y'\leq M$. *U holda* $f(x,y)=0$ *tenglama* $[a;b]$ *kesmada yagona uzluksiz yechimga ega.*

Isboti. $C[a;b]$ fazoni o'z-o'ziga aks ettiruvchi $Ay=y-\frac{1}{M}f(x,y)$ akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirishning qisqartirib akslantirish ekanligini ko'rsatamiz. Agar y_1 va y_2 funksiyalar $C[a;b]$ fazoning elementlari bo'lsa, u holda

$$\rho(Ay_1,Ay_2)=|Ay_1-Ay_2|=|(y_1-\frac{1}{M}f(x,y_1))-(y_2-\frac{1}{M}f(x,y_2))|=$$

$$=|(y_1-y_2)-\frac{1}{M}f'_y(x,y_1+\theta(y_2-y_1))(y_1-y_2)|\leq|1-\frac{m}{M}||y_1-y_2|=\theta\rho(y_1,y_2)$$

bo'ladi. Bu yerda $0<\theta<1$.

Demak, ixtiyoriy $y_0\in C[a;b]$ nuqta uchun $y_1=Ay_0$, $y_2=Ay_1$, … ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$ funksiya $f(x,y)=0$ tenglamaning $[a;b]$ kesmadagi yagona uzluksiz yechimi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Tekshirish savollari

1. Differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani ayting. Qanday qilib differensial tenglamani taqribiy yechish mumkin?

2. n noma'lumli n ta tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligining yetarli sharti R^n fazodagi metrikalarga qanday bog'liq?

3. Oshkormas funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremani isbotlang.

Mashqlar

1. Berilgan a musbat sonning kvadrat ildizini hisoblashda ixtiyoriy $x_0\geq\sqrt{a}$ uchun $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$ formula bilan qurilgan ketma-ketlik yaqinlashishidan foydalanish mumkinligini isbotlang.

2. Quyidagi rekurrent formulalar bilan berilgan ketma-ketliklarning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang va limitini hisoblang:

a) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$, ($x_0$=1);

b) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}}$, ($x_0$=–5)

3. $f(x) \in C[a;b]$ bo‘lsin. $y(x)+{}^1/_2 \sin y(x)+f(x)=0$ tenglama yagona $y(x) \in C[a;b]$ yechimga ega ekanligini isbotlang.

II-BOB. SEPARABELLIK VA KOMPAKTLILIK

Ushbu bobda metrik fazolarning, sonlar o‘qidagi kabi o‘xshash xossalarini o‘rganamiz.

1-§. Separabel fazo. $\mathbb{R}^n$, C[*a*,*b*] va l_p fazolarning separabelligi.

1-ta’rif. (X,ρ) metrik fazoda *M*, *N* to‘plamlar uchun $\overline{M}\supset N$ bo‘lsa, *M* to‘plam *N to‘plamda zich* deyiladi. Xususan, agar *M* to‘plam *X* da zich bo‘lsa, u holda *M hamma yerda zich* to‘plam deyiladi.

1-misol. Agar $(\mathbb{R},\rho)$ metrik fazoda $M=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $N=[0,1]$ bo‘lsa, u holda $\overline{M}=[0,1]\supset N$ bo‘ladi. Ta’rifga ko‘ra *M* to‘plam *N* to‘plamda zich.

2-misol. Yuqoridagi misolda *N* sifatida $[0,1]\cap J$ to‘plamni qaraymiz. Bu holda ham *M* to‘plam $N=[0,1]\cap J$ da zich bo‘ladi.

3-misol. Agar $(\mathbb{R},\rho)$ metrik fazoda $M=[0,1]\cap J$, $N=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ (yoki $N=[0,1]$, yoki $N=[0,\frac{1}{2}]$) bo‘lsa, ravshanki $\overline{M}\supset N$ bo‘ladi. Ta’rifga ko‘ra *M* to‘plam *N* da zich bo‘ladi.

2-ta’rif. Agar *M* to‘plam hech bir sharda zich bo‘lmasa, u holda *M* to‘plam *hech qaerda zich emas* deyiladi. Ya’ni, agar ixtiyoriy *S* sharning ichida *M* to‘plam bilan kesishmaydigan S_1 shar topilsa, *M* to‘plam *hech qaerda zich emas* deyiladi.

4-misol. $(\mathbb{R}^n,\rho)$ metrik fazoda $M=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ to‘plam, bu yerda $e_k=(0,0,...,1,0,...,0)$ hech qaerda zich emas.

5-misol. $(\mathbb{R}^n,\rho)$ metrik fazo ixtiyoriy chekli to‘plam, hech qaerda zich bo‘lmagan to‘plamga misol bo‘ladi.

3-ta’rif. Agar (X,ρ) metrik fazoning hamma yerida zich bo‘lgan sanoqli yoki chekli to‘plam mavjud bo‘lsa, u holda *X separabel fazo* deyiladi.

6-misol. $\mathbb{R}^n$ separabel fazo bo‘ladi. Haqiqatdan ham, $\mathbb{R}^n$ fazoda koordinatalari ratsional sonlardan iborat bo‘lgan nuqtalar to‘plami sanoqli bo‘lib, $\mathbb{R}^n$ ning hamma yerida zich.

7-*misol*. C[a,b] metrik fazo separabel fazo bo‘ladi. Haqiqatdan ham, koordinatalari ratsional sonlardan iborat bo‘lgan ko‘phadlar to‘plami P_r sanoqli to‘plam va bu to‘plam ko‘phadlar to‘plami P da zich, P esa matematik analizdagi Veyershtrass teoremasiga ko‘ra C[a,b] da zich. Bu esa C[a,b] ning separabel fazo ekanligini ko‘rsatadi.

Endi l_p fazoning separabel ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $\overline{D} = l_p$ bo‘ladigan $D = \{x = (x_1, x_2, ...),\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < \infty\}$ sanoqli to‘plamning mavjudligini isbotlash yetarli.

Aytaylik, $x \in l_p$ bo‘lsin. Bu elementga l_p fazoda ushbu ko‘rinishdagi sanoqli to‘plamni mos qo‘yamiz:

$$x^{(1)} = (x_1, 0, 0, ...),$$
$$x^{(2)} = (x_1, x_2, 0, 0, ...),$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$x^{(n)} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...),$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Bunda $\rho(x, x^{(n)}) = (\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k{}^p)^{\frac{1}{p}}$ bo‘lib, u etralicha katta n ni tanlash evaziga oldindan berilgan ε musbat sondan kichik qilib olinishi mumkin.

$x^{(n)}$ nuqtalar to‘plami bilan bir qatorda quyidagicha aniqlanadigan $\overline{x}^{(n)}$ musbat nuqtalar to‘plamini qaraymiz:

$$\overline{x}^{(1)} = (r_1, 0, 0, ...),$$
$$\overline{x}^{(2)} = (r_1, r_2, 0, 0, ...),$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\overline{x}^{(n)} = (r_1, r_2, ..., r_n, 0, ...),$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

bu yerda $r_1, r_2, ..., r_n$ ratsional sonlar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|x_1 - r_1| < \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{1}{p}}},$$

$$|x_2 - r_2| < \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{2}{p}}},$$

. . . .

$$|x_n - r_n| < \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{n}{p}}},$$

. . . .

Bunday tanlashni har doim bajarish mumkin.

$$\rho(x^{(n)}, \overline{x}^{(n)}) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - r_i|^p)^p < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^p}{2^{p+i}}} < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{2^p}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ikkinchi tomondan, yetarlicha katta n-larda $\rho(x, x^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ o‘rinli. Demak, $\rho(x, \overline{x}^{(n)}) \leq \rho(x, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, \overline{x}^{(n)}) < \varepsilon$ yetarlicha katta n larda o‘rinli. Bundan x nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $\overline{x}^{(n)}$ nuqtalar mavjud. Bunday nuqtalar to‘plami l_p fazo, demak, l_2 fazo ham separabel fazo ekan.