## 5-§. Metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar

**5.1. Uzluksiz akslantirish, misollar.** $(X,\rho_X)$ va $(Y,\rho_Y)$ metrik fazolar bo‘lib, $T:X\to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin.

*1-ta’rif.* Agar $M$ to‘plamdagi $x_0$ nuqtaga $X$ da yaqinlashuvchi bo‘lgan ixtiyoriy $\{x_n\}\subset M$ ketma-ketlik uchun ushbu $Tx_n\to Tx_0$ munosabat $Y$ da bajarilsa, u holda $T$ akslantirish $x_0$ nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

*2-ta’rif.* Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $\rho_X(x_0,x)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ lar uchun $\rho_Y(T(x_0),T(x))<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $T$ akslantirish $x_0$ nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

*3-ta’rif.* Agar $b=T(x_0)$ nuqtaning ixtiyoriy $V$ atrofi uchun $X$ fazoda $x_0$ nuqtaning $T(U)\subset V$ shartni qanoatlantiruvchi $U$ atrofi mavjud bo‘lsa, u holda $T$ akslantirish $x_0$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

Bu uchala ta’rifning teng kuchliligi, yoki boshqacha aytganda ekvivalentligi matematik analiz kursidagi funksiya uzluksizligi kabi isbotlanadi.

*Misol.* $C[0;1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi $T:x\to x(1)$ akslantirish ixtiyoriy $a$ «nuqta»da uzluksiz bo‘ladi, bu yerda $x$ va $a$ «nuqtalar» $[0;1]$ kesmada uzluksiz funksiyalar.

Haqiqatan, $\varepsilon>0$ son berilgan bo‘lsin. U holda $\delta=\varepsilon$ deb olamiz. Endi $\rho_C(a,x)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-a(t)|$, $\rho_R(Ta,Tx)=|x(1)-a(1)|\ \le\ \rho_C(a,x)$ bo‘lganligi sababli, $\rho_C(a,x)<\delta$ shartdan $\rho_R(Ta,Tx)<\varepsilon$ tengsizlikning kelib chiqishi ravshan.

$C_1[0;1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi $T:x\to x(1)$ akslantirish $\theta(t)\equiv 0$ nuqtada uzluksiz emas.

Haqiqatan, $x_n(t)=t^n$ ketma-ketlik $C_1[0;1]$ fazoda $\theta(t)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi, lekin $Tx_n=\ x_n(1)=1$, $T\theta=0$, demak $\{Tx_n\}$ ketma-ketlik $T\theta$ ga yaqinlashmaydi.

*4-ta’rif.* Agar $T$ o‘z aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda $T$ *uzluksiz akslantirish* deyiladi.

Xususan $Y=\mathbb{R}$ bo‘lgan holda, uzluksiz akslantirish uzluksiz *funksional* deyiladi.

$C[0;1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi $T(x)=x(1)$ akslantirish uzluksiz funksionalga misol bo‘ladi.

**5.2. Izometriya, uning uzluksizligi.** $(X,\rho_X)$ va $(Y,\rho_Y)$ metrik fazolar va $T:X\to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin.

5-*ta’rif*. Agar $X$ fazodan olingan ixtiyoriy $a$ va $b$ nuqtalar uchun $\rho_X(a,b)=\rho_Y(T(a),T(b))$ tenglik bajarilsa, u holda $T$ *izometrik akslantirish* yoki *izometriya* deyiladi.

Ravshanki, har qanday izometriya uzluksiz akslantirish bo‘ladi.

Tekislikdagi har qanday harakat izometriyaga misol bo‘ladi.

5.**3. Uzluksiz akslantirishning xossalari.**

**1-teorema**. *Aytaylik $T: X\to Y$ akslantirish $X$ fazoning $a$ nuqtasida, $f:Y\to Z$ akslantirish $Y$ fazoning $b=T(a)$ nuqtasida uzluksiz bo‘lsin. U holda $X$ ni $Z$ ga akslantiruvchi $x\to F(T(x))$ murakkab akslantirish $a$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

**Isboti**. $Z$ fazo $c=F(T(a))$ nuqtasining ixtiyoriy $W$ atrofini olamiz. $F$ akslantirish $b=T(a)$ nuqtada uzluksiz va $c= F(b)$ bo‘lganligi sababli, $b$ nuqtaning $F(V)\subset W$ shartni qanoatlantiruvchi $V$ atrofi mavjud. Shunga o‘xshash, $T$ akslantirish $a$ nuqtada uzluksiz bo‘lganligi sababli, bu nuqtaning $T(U)\subset V$ shartni qanoatlantiruvchi $U$ atrofi mavjud. U holda $F(T(U))\subset T(V)\subset W$ ga ega bo‘lamiz. Bu esa, $x\to F(T(x))$ akslantirishning $a$ nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlaydi.

2**-teorema**. Agar $T$ akslantirish $X$ metrik fazoni $Y$ metrik fazoga aks ettiruvchi uzluksiz akslantirish bo‘lsa, u holda $Y$ fazodan olingan ixtiyoriy ochiq to‘plamning $X$ fazodagi proobrazi ochiq, yopiq to‘plamniki esa yopiq bo‘ladi.

**Isboti**. Aytaylik $G$ to‘plam $Y$ da ochiq bo‘lsin. $X$ fazodagi $D=T^{-1}(G)$ to‘plamning barcha nuqtalari ichki nuqta ekanligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik $a\in D$ va $T(a)=b$ bo‘lsin. U holda $b\in G$ va $G$ ochiq bo‘lganligidan $b$ nuqta $G$ to‘plamning ichki nuqtasi bo‘ladi. Shuning uchun bu nuqtaning $G$ ga to‘laligicha tegishli bo‘lgan $V$ atrofi mavjud. $T$ akslantirishning $a$ nuqtada uzluksizligidan $a$ nuqtaning shunday $U$ atrofi mavjud bo‘lib, $T(U)\subset V$ bo‘ladi. U holda $T(U)\subset G$, bundan esa $U\subset D=T^{-1}(G)$ kelib chiqadi. Bu esa ixtiyoriy

$a \in D$ nuqtaning $D$ ga tegishli atrofi mavjudligi, ya’ni $a$ ichki nuqta ekanligini isbotlaydi. Shuning uchun $D$ ochiq to‘plam.

Yopiq to‘plamning to‘ldiruvchisi ochiq ekanligidan, $Y$ fazoda biri ikkinchisiga to‘ldiruvchi to‘plamlarning proobrazlari, $X$ fazoda ham biri ikkinchisiga to‘ldiruvchi bo‘lishidan va teoremaning isbot qilingan qismidan ikkinchi qismning isboti kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Uzluksiz akslantirishda, ochiq to‘plamning obrazi har doim ham ochiq bo‘lmaydi. Masalan, $x \to \sin x$ uzluksiz akslantirishda $(-\pi;\pi)$ intervalning obrazi $[-1;1]$ kesmadan iborat.

*Tekshirish savollari*

1. Uzluksiz akslantirishni ta’riflang.
2. Uzluksiz akslantirishga misollar keltiring.
3. Uzluksiz akslantirishga berilgan ta’riflarning ekvivalentligini isbotlang.
4. Izometriya nima?
5. Uzluksiz akslantirishning xossalarini ayting.

*Mashqlar*

1. $\mathbb{R}_2^2$ fazoni o‘ziga o‘tkazuvchi $(x,y) \to (2x-3y+4,\ -x+4y)$ akslantirish berilgan. a) (2,3) nuqtaning obrazini; b) (–4,4) nuqtaning obrazini; c) $y=x$ to‘g‘ri chiziq obrazini; d) abstsissalar o‘qining proobrazini toping.

2. $C[0,1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga o‘tkazuvchi

$F\colon y \to \int_0^1 (x^2 - y^3(x))dx$ akslantirish berilgan. $F(\sin\pi x)$ ni toping. $F^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ga tegishli ikkita element ko‘rsating.

3. $\mathbb{R}_2^2$ fazoni $C[0,1]$ ga o‘tkazuvchi $F\colon(x,y) \to \varphi(t) = xt^2 - 2yt$ akslantirish berilgan. (–1,1) nuqtaning obrazini toping. Quyidagi a) $f(t)=3t^2+4t$; b) $f(t)=5t^2-2$; c) $f(t)=\sin t$ funksiyalarning proobrazlarini toping.

4. Quyidagi $C[a;b] \to \mathbb{R}$ funksionallarni uzluksizlikka tekshiring:

$$a)\ F(y)=\max_{a\le x\le b} y(x); \quad b)\ F(y)=\min_{a\le x\le b} y(x); \qquad c)\ F(y)=\int_a^b y(x)dx\,.$$

## 6-§. To‘la metrik fazolar. To‘ldiruvchi fazo

**6.1. Fundamental ketma-ketliklar.** Matematik analiz kursidan ma’lumki, ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun u Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli. Bu xossa matematikada katta ahamiyatga ega bo‘lib, haqiqiy sonlar to‘plamining to‘laligini ko‘rsatadi.

Haqiqiy sonlar to‘plamining bu xossasi har qanday metrik fazo uchun o‘rinlimi? - degan savol tug‘iladi. Bu savolga javob berish uchun quyidagi ta’rifni kiritamiz.

*1-ta’rif*. Agar $(X,\rho)$ metrik fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantirsa, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n(\varepsilon)$ nomer mavjud bo‘lib, $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ tengsizlik barcha $n, m\geq n(\varepsilon)$ uchun bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

**1-teorema**. *Har qanday fundamental ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi.*

**Isboti**. Ta’rifga ko‘ra $\varepsilon=1$ uchun $n(\varepsilon)$ nomer mavjud bo‘lib, $\rho(x_n,x_m)<1$ tengsizlik barcha $n, m\geq n(\varepsilon)$ qiymatlar uchun bajariladi. Xususan, $k>n(\varepsilon)$ va $n\geq k$ uchun ham $\rho(x_n,x_k)<1$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Endi $k$ ni tayinlab olamiz, u holda markazi $x_k$ nuqtada radiusi

$$r=max(\rho(x_1,x_k), \rho(x_2,x_k), \dots, \rho(x_{k-1},x_k), 1)$$

bo‘lgan shar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlarini o‘z ichiga oladi, ya’ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

**2-teorema**. *Ixtiyoriy yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo‘ladi*.

**Isboti**. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $a$ nuqtaga yaqinlashsin. U holda $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n(\varepsilon)$ nomer topilib, barcha $n\geq n(\varepsilon)$ uchun $\rho(x_n,a)<\varepsilon/2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Demak, $n, m \geq n(\varepsilon)$ lar uchun $\rho(x_n,x_m)\leq \rho(x_n,a)+\rho(a,x_m)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ munosabat o‘rinli. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligini isbotlaydi. Teorema isbot bo‘ldi.

**6.2. To‘la metrik fazoning ta’rifi, misollar.**

*2-ta’rif*. Agar $X$ metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda *X to‘la metrik fazo* deyiladi.

*Misollar*: 1) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|y-x|$; $(\mathbb{R},\rho)$-to‘la metrik fazo bo‘lishi ravshan;

2) $X=\mathbb{R}_2^n$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$; $(\mathbb{R}_2^n,\rho)$-to‘la metrik fazo bo‘ladi, uning to‘laligini ko‘rsatishni o‘quvchiga qoldiramiz;

3) $X=\mathbb{Q}$, $\rho(r_2,r_1)=|r_2-r_1|$; $(\mathbb{Q},\rho)$- to‘la bo‘lmagan metrik fazoga misol bo‘ladi, chunki, masalan $\left\{r_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ratsional sonlar ketma-ketligi fundamental bo‘lib, $\mathbb{Q}$ da yaqinlashuvchi emas, ya’ni uning limiti $e$, ratsional son emas;

4) $C[a,b]$ to‘la metrik fazo bo‘ladi. Uning to‘laligini ko‘rsatish uchun undagi istalgan $\{x_n(t)\}$ fundamental ketma-ketlikning [$a$,b] kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyaga yaqinlashishini ko‘rsatishimiz kerak.

Aytaylik $\{x_n(t)\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. $C[a,b]$ fazodagi yaqinlashish funksiyalarning tekis yaqinlashishiga ekvivalent ekanligi ma’lum. Har bir $t\in[a,b]$ nuqtada $\{x_n(t)\}$ sonli ketma-ketlik fundamental bo‘lganligi sababli yaqinlashuvchi bo‘ladi. Uning limitini $x_0(t)$ bilan belgilaymiz. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $x_0(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun $x_0(t)$ funksiya uzluksiz bo‘ladi, Demak, $x_0(t)\in C[a,b]$ bo‘ladi.

### 6.3. Ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi

Matematik analiz kursida ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi, haqidagi teorema o‘rganilgan edi. Bu teorema to‘la metrik fazolar uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

**3-teorema**. *$(X,\rho)$ to‘la metrik fazoda ($\overline{S}_n=\overline{S}_n(a_n,\varepsilon_n)$) yopiq sharlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, ular uchun quyidagi shartlar bajarilsin:* $\overline{S}_{n+1}\subset\overline{S}_n$

*$(n=1,2,\ldots)$ va $n\to\infty$ da $\varepsilon_n\to 0$. U holda bu sharlarning umumiy qismi birgina nuqtadan iborat bo'ladi.*

**Isboti**. Berilgan $\overline{S}_n$ sharlarning markazlaridan iborat bo'lgan quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (1)$$

Teorema shartiga ko'ra $a_{n+p}\in\overline{S}_n$ $(p=1,2,\ldots)$. Shuning uchun $\rho(a_{n+p},a_n)\le\varepsilon_n$ yoki $n\to\infty$ da $\rho(a_{n+p},a_n)\to 0$ bo'ladi.

Demak, (1) ketma-ketlik fundamental. $X$ to'la metrik fazo bo'lganligi uchun bu ketma-ketlik biror $a\in X$ elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Endi, ixtiyoriy $\overline{S}_m$ yopiq sharni olamiz ($m$-tayin natural son); u holda $a\in\overline{S}_m$, chunki $(a_m,\ a_{m+1},\ldots)$ nuqtalar ketma-ketligi (1) ketma-ketlikning qism ketma-ketligi bo'lganligi uchun $a$ nuqtaga yaqinlashadi. Bu ketma-ketlikning har bir hadi $\overline{S}_m$ ga tegishli va $\overline{S}_m$ yopiq bo'lganligi uchun $a\in\overline{S}_m$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ . Demak, $a\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{S}_m$ bo'ladi.

Endi $a$ nuqtaning yagonaligini isbotlash uchun teskarisini faraz qilamiz: $\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{S}_m$ ga $a$ nuqtadan farqli yana biror $b$ element ham tegishli bo'lsin.

U holda $0<\ \rho(a,b)\ \le\rho(a,a_n)+\rho(a_n,b)\le 2\varepsilon_n$ va $n\to\infty$ da $\varepsilon_n\to 0$ bo'lganligi uchun $\rho(a,b)=0$, ya'ni $a=b$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

**4-teorema**. *Agar $(X,\rho)$ metrik fazoda, 3-teorema shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday yopiq sharlar ketma-ketligi bo'sh bo'lmagan umumiy qismga ega bo'lsa, u holda $X$ to'la metrik fazo bo'ladi.*

### 6.4. To'ldiruvchi fazo haqidagi teorema

Quyida funksional analizning asosiy qoidalaridan biri bo'lgan to'ldiruvchi fazo haqidagi teorema isbotini keltiramiz.

*3-ta'rif*. Agar $(X,\rho)$ metrik fazo uchun shunday $(X^*,\rho^*)$ to'la metrik fazo mavjud bo'lib, $X$ fazo $X^*$ ning hamma yerida zich (ya'ni $\overline{X}\supset X^*$) bo'lsa, u holda $(X^*,\rho^*)$ metrik fazo *$(X,\rho)$ fazoning to'ldiruvchisi* deyiladi.

*Misol*. $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar to'plami $\rho(r,q)=|q-r|$ metrikaga nisbatan to'la emas. Ammo $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plami $\rho(x,y)=|y-x|$ metrikaga nisbatan to'la metrik fazo. Shuningdek, bilamizki $\mathbb{Q}$ to'plam $\mathbb{R}$ da zich, ya'ni $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, demak $\mathbb{R}$ fazo $\mathbb{Q}$ fazoning to'ldiruvchisi bo'ladi.

5-**teorema**. *Ixtiyoriy $(X,\rho)$ metrik fazo to'ldiruvchiga ega bo'lib, u $X$ ning elementlarini o'z o'rnida qoldiruvchi izometriya aniqligida yagona bo'ladi, ya'ni har qanday ikki to'ldiruvchi fazoning birini ikkinchisiga aks ettiruvchi va $X$ fazoning har bir nuqtasini o'z o'rnida qoldiruvchi izometriya doim mavjud.*

**Isboti**. Avval, agar to'ldiruvchi fazo mavjud bo'lsa, uning yagonaligini isbotlaymiz. Aytaylik $(X^*,\rho_1)$ va $(X^{**},\rho_2)$ fazolar $(X,\rho)$ fazoning to'ldiruvchilari bo'lsin. Bizning maqsadimiz uchun quyidagi:

1) $\varphi$ - izometriya;
2) ixtiyoriy $x\in X$ uchun $\varphi(x)=x$

xossalarga ega bo'lgan $\varphi\colon X^*\to X^{**}$ akslantirishning mavjudligini ko'rsatish yetarli.

Bunday $\varphi$ izometriyani quyidagicha aniqlaymiz. Aytaylik $x^*\in X^*$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. To'ldiruvchi fazoning ta'rifiga asosan $x^*$ ga yaqinlashuvchi va $X$ ning elementlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. Bu ketma-ketlik $X^{**}$ fazoga ham tegishli. $X^{**}$ to'la bo'lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik biror $x^{**}\in X^{**}$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo'ladi. O'z-o'zidan ravshanki, $x^{**}$ nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tanlashga bog'liq emas. Akslantirishni $\varphi(x^*)=x^{**}$ ko'rinishda aniqlaymiz. Ravshanki, ixtiyoriy $x\in X$ uchun $\varphi(x)=x$.

Endi faraz qilaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar $X$ fazodagi fundamental ketma-ketliklar bo'lib, ular $X^*$ fazoda mos ravishda $x^*$ va $y^*$ nuqtalarga, $X^{**}$ fazoda mos ravishda

$x^{**}$ va $y^{**}$ nuqtalarga yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda metrikaning uzluksizligiga asosan

$$\rho_1(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),$$

$$\rho_2(x^{**},y^{**})=\lim_{n\to\infty}\rho_2(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),$$

munosabatlar, ya’ni $\rho_1(x^*,y^*)=\rho_2(x^{**},y^{**})$ tenglik o‘rinli. Shunday qilib, $\varphi$ biz izlagan izometriya bo‘ladi.

Endi to‘ldiruvchi fazoning mavjudligini isbotlaymiz. $X$ metrik fazoda $\{x_n\}$ va $\{x'_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=0$ bajarilsa, biz ularni *ekvivalent* deymiz va $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$ ko‘rinishda belgilaymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabat bo‘ladi. Demak, $X$ fazodagi fundamental ketma-ketliklar to‘plami o‘zaro ekvivalent bo‘lgan, ketma-ketliklar sinflariga ajraladi. Endi biz $(X^*,\rho)$ fazoni quyidagicha aniqlaymiz.

$X^*$ ning elementlari deb, o‘zaro ekvivalent bo‘lgan fundamental ketma-ketliklar sinflariga aytamiz.

Agar $x^*,\ y^*\in X^*$ ikki sinf bo‘lsa, biz ularning har biridan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ fundamental ketma-ketliklarni olib, $X^*$ fazoda metrikani

$$\rho(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n) \qquad (1)$$

ko‘rinishda aniqlaymiz. (Buning metrika bo‘lishini mustaqil isbotlang).

Endi $X$ ni $X^*$ ning qism fazosi deb hisoblash mumkinligini ko‘rsatamiz.

Ixtiyoriy $x\in X$ elementga shu elementga yaqinlashuvchi bo‘lgan fundamental ketma-ketliklar sinfini mos qo‘yamiz. Bu sinf bo‘sh emas, chunki bu sinf statsionar bo‘lgan (ya’ni hamma $x_n$ elementlari $x$ ga teng bo‘lgan) ketma-ketlikni o‘z ichiga oladi. Agar $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\ y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ bo‘lsa, u holda $\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$. Shu tarzda har bir $x\in X$ ga yuqorida aytilgan sinfni mos qo‘ysak, $X$ ni $X^*$ ga izometrik akslantirish hosil bo‘ladi. Shuning uchun $X$ ni uning $X^*$ dagi tasviri bilan aynan teng deb hisoblaymiz.

$X$ ni $X^*$ ning hamma erida zich ekanligini isbotlaymiz. Aytaylik $x^*\in X^*$ ixtiyoriy element va $\varepsilon>0$ bo‘lsin. $x^*$ sinfga tegishli bo‘lgan biror $\{x_n\}\in x^*$

fundamental ketma-ketlikni olamiz. $n_0$ natural son shunday bo‘lsinki, ushbu $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ tengsizlik ixtiyoriy $n,m>n_0$ lar uchun bajarilsin. U holda $m$ bo‘yicha limitga o‘tsak, $\rho(x_n,x^*)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_m)\leq\varepsilon$ tengsizlik ixtiyoriy $n>n_0$ uchun bajariladi. Demak, $x^*$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $X$ ning elementi mavjud, ya’ni $X$ ning yopilmasi $X^*$ ga teng.

Nihoyat, $X^*$ ning to‘la ekanligini isbotlaymiz. Avval shuni aytish kerakki, $X^*$ ning ta’rifiga ko‘ra $X$ ning elementlaridan hosil bo‘lgan ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ fundamental ketma-ketlik $X^*$ ning biror $x^*$ elementiga yaqinlashadi, aniqrog‘i, shu elementni o‘z ichiga oluvchi sinf bilan aniqlangan $x^*$ elementga yaqinlashadi. $X$ fazo $X^*$ fazoda zich bo‘lgani tufayli $X^*$ ning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, \ldots$ fundamental ketma-ketlik uchun unga ekvivalent bo‘lgan va $X$ ning elementlaridan tuzilgan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ketlik mavjud. Buni ko‘rsatish uchun $x_n$ sifatida $X$ ning ushbu $\rho(x_n,x^*_n)<\dfrac{1}{n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy elementini olsa bo‘ladi. O‘osil bo‘lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik $X$ da fundamental, va demak, biror $x^*$ elementga yaqinlashuvchi bo‘ladi. Shuningdek, bu holda $\{x^*_n\}$ ketma-ketlik ham $x^*$ ga yaqinlashadi. Teorema isbot bo‘ldi.

*Tekshirish savollari*

1. Qanday ketma-ketlik fundamental deyiladi?
2. Fundamental ketma-ketlikka misollar keltiring.
3. Fundamental bo‘lmagan ketma-ketlikka misollar keltiring.
4. To‘la metrik fazoga ta’rif bering.
5. To‘la metrik fazoga misollar keltiring.
6. To‘ldiruvchi fazoga ta’rif bering.
7. To‘ldiruvchi fazoga misollar keltiring.
8. Izometriya nima?
9. Qachon ikki metrik fazo izometrik deyiladi?
10. Qanday ketma-ketliklar ekvivalent deyiladi? Misollar keltiring.

11. Teorema isbotini qismlarga ajrating (rejasini yozing).

*Mashqlar*

1. Sonlar o‘qida $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini isbotlang.

2. $y_n(x)=x^n$ funksiyalar ketma-ketligi *a)* $C[-0,5;0,5]$; *b)* $C[0;1]$ fazoda fundamental ketma-ketlik bo‘ladimi?

3. $\mathbb{R}_2^n$ fazoning to‘laligini isbotlang.

4. $\mathbb{R}_1^n$ fazoning to‘laligini isbotlang.

5. $C[a;b]$ fazoning ko‘phadlardan iborat qism fazosi to‘la bo‘ladimi?