I-BOB. METRIK FAZOLAR

1-§. Metrik fazo ta'rifi va misollar

1.1. Metrik fazoning ta'rifi.

1-ta'rif. Agar biror X to'plamning o'zini o'ziga to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi $X\times X$ ni $\mathbb{R}_+=[0;+\infty)$ ga aks ettiruvchi $\rho(x,y)$ funksiya berilgan bo'lib, u

1) $\rho(x,y)\geq 0$; $\rho(x,y)=0$ munosabat faqat $x=y$ bo'lganda bajariladi;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (simmetriklik aksiomasi);

3) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ (uchburchak aksiomasi)

shartlarni qanoatlantirsa, u holda X to'plam *metrik fazo* deyiladi.

Kiritilgan $\rho(x,y)$ funksiya *metrika,* yuqoridagi shartlar esa *metrika aksiomalari* deyiladi.

Odatda metrik fazo (X,ρ) ko'rinishda belgilanadi.

1.2. Metrik fazoga misollar. 1) Haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'i: $X=\mathbb{R}$. Bu to'plamda x va y sonlar orasidagi masofa $\rho(x,y)=|y-x|$ bo'yicha hisoblanadi.

2) n–o'lchamli Evklid fazosi: $X=\mathbb{R}^n$, va undagi $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$ formula yordamida hisoblanadi. Bu metrik fazo $\mathbb{R}_2^n$ orqali belgilanadi.

Xususan $n=2$ bo'lganda bu metrik fazo Evklid tekisligi deyiladi.

3) n–o'lchamli fazoning $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ nuqtalari orasidagi masofa $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|$ deb aniqlansa, u metrik fazo bo'ladi va $\mathbb{R}_1^n$ orqali belgilanadi.

4) n–o'lchamli fazoning $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ nuqtalari orasidagi masofa $\rho(x,y)=\max\limits_{1\leq k\leq n}|y_k-x_k|$ kabi aniqlansa, u metrik fazo bo'ladi va $\mathbb{R}_\infty^n$ orqali belgilanadi.

5) $X=l_2=\{x=(x_1, x_2, \dots, x_n,\dots), x_i\in\mathbb{R}$ va $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty\}$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-x_i)^2}$;

6) $X=C[a;b]$ – $[a;b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plamida metrikani quyidagicha kiritamiz: $\rho(x,y)=\max\limits_{[a;b]}|y(t)-x(t)|$. Bu funksiyaning metrika bo‘lishini tekshirish qiyin emas.

Metrika aksiomalaridan birinchi va ikkinchisining o‘rinliligi ravshan. Uchburchak aksiomasini tekshiramiz. Ixtiyoriy $t\in[a;b]$ nuqta va $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalar uchun ushbu munosabat bajariladi:

$$|x(t)-y(t)| = |(x(t)-z(t)) + (z(t)-y(t))| \le |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|.$$

Bu tengsizlikdan

$\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|\le \max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|+\max\limits_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)|$ bo‘lishi kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlik

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

ekanligini bildiradi.

7) $C[a;b]$ da metrikani quyidagicha ham kiritish mumkin: $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|y-x|\,dt$. Bu metrik fazo $C_1[a;b]$ orqali belgilanadi.

8) $[a;b]$ kesmada kvadrati bilan integrallanuvchi uzluksiz funksiyalar to‘plamida $\rho(x,y)=(\int\limits_a^b(y-x)^2dt)^{\frac{1}{2}}$ funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradi [2]. Bu metrik fazo $C_2[a;b]$ orqali belgilanadi.

Bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plamda metrika kiritish mumkinmi degan savolga quyidagi misol ijobiy javob beradi.

9) X- bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. $x, y\in X$ uchun

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, \text{ agar } x\neq y \text{ bo'lsa,}\\ 0, \text{agar } x=y \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

shart bilan funksiya aniqlaymiz. Bu funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradi.

Bunday aniqlangan metrik fazo *trivial metrik fazo*, metrika esa, *trivial metrika* deyiladi.

Tekshirish savollari

1. Metrika aksiomalarini ayting.
2. Metrik fazo nima?
3. Metrik fazolarga misollar keltiring.

Mashqlar

1. Tekislikdagi $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar uchun $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ kabi aniqlangan funksiya metrika bo‘ladimi?

2. To‘g‘ri chiziqda quyidagi a) $\rho(x,y)=x^3-y^3$; b) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$; c) $\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|$ funksiyalarning qaysi biri metrika bo‘ladi?

3. Agar $M=\{a,b,c\}$ to‘plamda $\rho(a,c)=\rho(c,a)=\rho(a,b)=\rho(c,b)=2$, $\rho(b,c)=\rho(b,a)=1$ kabi aniqlangan ρ funksiya metrika bo‘ladimi? ρ uchburchak aksiomasini qanoatlantiradimi?

4. Agar $M=\{a,b,c\}$ to‘plamda $\rho(a,b)=\rho(b,c)=1$ shartni qanoatlantiruvchi ρ metrika berilgan bo‘lsa, u holda $\rho(a,c)$ qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin?

5. Metrika aksiomalari quyidagi

1) $\rho(x,y)=0$ munosabat faqat $x=y$ bo‘lganda bajariladi;

2) $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(y,z)$

ikkita aksiomaga ekvivalent ekanligini isbotlang.

6. Aylanada $r(A,B)$ - vatar bo‘yicha va $\rho(A,B)$- yoy bo‘yicha metrika kiritish mumkinligini tekshiring. Bu metrikalarning birini ikkinchisi orqali qanday ifodalash mumkin?

7. Uch o‘lchamli fazoda, koordinatalar boshidan chiquvchi nurlar to‘plami ikki nur orasidagi masofa sifatida, ular tashkil qilgan burchaklardan kichigining radian o‘lchovi olinsa metrik fazo bo‘lishini ko‘rsating.

8. Ko‘phadlar fazosida $\rho(P_1,P_2)=|P_1(0)-P_2(0)|$ funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradimi?

9. Aytaylik, (X,ρ)-metrik fazo, biror A to‘plam va $f:A\to X$ akslantirish berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x,y\in A$ uchun quyidagicha aniqlangan $\rho_1(x,y)=\rho(f(x),f(y))$

funksiyani qaraymiz. Bunday aniqlangan funksiya A to‘plamda metrika bo‘lishi uchun f akslantirishning in’ektiv bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

10. Butun sonlar to‘plamida quyidagicha $\rho(a,b)=\begin{cases} 0, & \text{agar } a=b \text{ bo'lsa}, \\ \dfrac{1}{3^k}, & \text{agar } a\neq b \text{ bo'lsa} \end{cases}$

kabi aniqlangan funksiya metrika bo‘lishini isbotlang, bu yerda k soni $a–b$ ayirma qoldiqsiz bo‘linadigan 3 ning eng katta darajasi. ρ(5,7), ρ(7,–2), ρ(7,25) larni hisoblang.

11. Natural sonlar to‘plamida

a) $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{xy}$; b) $\rho(a,b)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x=y \text{ bo'lsa}, \\ 1+\dfrac{1}{x+y}, & \text{agar } x\neq y \text{ bo'lsa} \end{cases}$ funksiyalar metrika bo‘ladimi?

12. Agar X to‘plamda ρ metrika bo‘lsa, u holda $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ funksiya ham X to‘plamda metrika bo‘lishini isbotlang.

13. Aytaylik f funksiya $[0;\infty)$ da aniqlangan va 1) $f(0)=0$; 2) $[0;\infty)$ da o‘suvchi; 3) ixtiyoriy $x,y\in[0;\infty)$ uchun $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ shartlarni qanoatlantirsin.

Agar ρ metrika bo‘lsa, u holda $\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$ ham metrika bo‘lishini isbotlang.

14. Aytaylik f funksiya $[0;\infty)$ da aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, 1) $f(0)=0$; 2) $[0;\infty)$ da o‘suvchi; 3) $(0;\infty)$ oraliqda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud va $f''(x)<0$ shartlarni qanoatlantirsin.

Agar ρ metrika bo‘lsa, u holda

$$\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$$

ham metrika bo‘lishini isbotlang.

15. Agar ρ_1 va ρ_2 biror X to‘plamda aniqlangan metrikalar bo‘lsa, u holda ixtiyoriy α_1 va α_2 musbat sonlar uchun $\rho(x,y)=\alpha_1\rho_1(x,y)+\alpha_2\rho_2(x,y)$ funksiya ham X to‘plamda metrika bo‘lishini isbotlang.

2-§. Metrik fazoda ba'zi bir geometrik tushunchalar

2.1. Ochiq va yopiq sharlar, nuqtaning ε atrofi

Aytaylik (X,ρ) metrik fazo bo'lsin. Kelgusida, metrik fazo elementi va metrik fazo nuqtasi tushunchalari bir xil ma'noda ishlatiladi.

1-ta'rif. Biror $x_0 \in X$ nuqta va $r>0$ son uchun ushbu

$$S(x_0,r)=\{ x\in X: \rho(x ,x_0)<r \}$$

to'plam X fazoda *ochiq shar*;

$$\bar{S}(x_0,r)=\{x\in X: \rho(x ,x_0)\leq r\}$$

to'plam *yopiq shar* deyiladi.

x_0 nuqta sharning *markazi*; r son sharning *radiusi* deyiladi.

Zaruriyat tug'ilganda $\{x\in X: \rho(x,x_0)= r\}$ to'plamni ham ishlatamiz, u x_0 markazli, r radiusli *cfera* deyiladi.

2-ta'rif. $S(x_0,\varepsilon)$ ochiq shar x_0 nuqtaning *ε-atrofi* deyiladi va $O_\varepsilon(x_0)$ kabi belgilanadi.

Nuqta atrofining ba'zi xossalarini o'rganamiz.

1^o. Har bir nuqta o'zining ixtiyoriy atrofiga tegishli bo'ladi.

Haqiqatan, agar $\varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda $\rho(a,a)=0 < \varepsilon$ bo'lishi ravshan. Demak, $a\in O_\varepsilon(a)$.

2^o. Huqtaning ixtiyoriy ikki atrofi kesishmasi ham atrof bo'ladi.

Haqiqatan, agar $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ bo'lsa, u holda $O_{\varepsilon_1}(a)\cap O_{\varepsilon_2}(a)= O_{\varepsilon_1}(a)$ bo'ladi.

3^o. Agar $x\in O_\varepsilon(a)$ bo'lsa, u holda x nuqtaning $O_\varepsilon(a)$ da yotuvchi atrofi mavjud.

Haqiqatan, aytaylik $\rho(a,x)=d$ bo'lsin. $x\in O_\varepsilon(a)$ bo'lganligidan $\delta=\varepsilon-d>0$ bo'ladi. Endi, $y\in O_\delta(x)$ olamiz. Metrikaning uchburchak aksiomasiga ko'ra

$$\rho(a,y)\leq\rho(a,x)+\rho(x,y)<d+\delta=d+(\varepsilon-d)=\varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $y\in O_\varepsilon(a)$. Bundan $O_\delta(x)\subset O_\varepsilon(a)$ kelib chiqadi.

4^0. Bir-biridan farqli ikki nuqtaning kesishmaydigan atroflari mavjud.

Haqiqatan aytaylik, $a,b\in X$, $a\neq b$ va $\rho(a,b)=r$ bo‘lsin. Agar $\varepsilon=r/3$ bo‘lsa, $O_\varepsilon(a)$ va $O_\varepsilon(b)$ atroflarning kesishmasligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, bu atroflar umumiy x nuqtaga ega bo‘lsin. U holda $\rho(a,x)<\varepsilon$, $\rho(b,x)<\varepsilon$ va $\rho(a,b)\leq \leq\rho(a,x)+\rho(b,x)<2\varepsilon={}^{2r}/_3 <r$. Bu esa shartga zid.

2.2. Chegaralangan to‘plam.

3-ta’rif. Agar (X,ρ) metrik fazodagi M to‘plam biror shar ichida joylashgan bo‘lsa, bu to‘plam *chegaralangan* deyiladi.

Bu ta’rifning quyidagi ta’rifga ekvivalent ekanligini tekshirish murakkab emas:

Agar (X,ρ) metrik fazodagi M to‘plamga tegishli barcha x va y nuqtalar uchun, $\rho(x,y)<K$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi K musbat son mavjud bo‘lsa, u holda M to‘plam chegaralangan deyiladi.

Agar bir to‘plamda ikki xil metrika berilgan bo‘lsa, u holda qaralayotgan M to‘plam bir metrikaga nisbatan chegaralangan, ikkinchi bir metrikaga nisbatan chegaralanmagan bo‘lishi mumkin.

Masalan, natural sonlar to‘plami $\rho(n,m)=|n-m|$ metrikaga nisbatan chegaralanmagan, lekin

$$\rho_1(n,m)=\begin{cases} 0, & \text{agar } m=n, \\ 1+\dfrac{1}{m+n}, & \text{agar } m\neq n \end{cases}$$

metrikaga nisbatan chegaralangandir.

Ravshanki, 1 dan farqli barcha n larda $\rho_1(1,n)<2$ bo‘ladi, ya’ni bu metrikaga nisbatan barcha natural sonlar to‘plami, markazi 1 nuqtada radiusi 2 ga teng ochiq sharga tegishli bo‘ladi.

2.3. To‘plamning urinish, limit nuqtalari

4-ta’rif. Agar $x_0\in X$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to‘plamning x_0 dan farqli elementi mavjud bo‘lsa, u holda x_0 nuqta M ning *limit nuqtasi* deyiladi.

Misollar. 1) $(\mathbb{R}^n,\rho)$ metrik fazodagi $S(x_0,r)$ ochiq sharning limit nuqtalari to‘plami $\bar{S}(x_0,r)$ yopiq shardan iborat bo‘ladi.

2) Endi $(\mathbb{R},\rho)$ metrik fazodagi, ya’ni sonlar o‘qidagi ba’zi to‘plamlarni qaraymiz:

a) $E_1=\mathbb{N}$ natural sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamning birorta ham limit nuqtasi mavjud emas.

b) $E_2=\{1/n : n=1,2,\dots\}$ bo‘lsin. Bu to‘plamning birgina limit nuqtasi 0 bor va $0\notin E_2$.

c) $E_3=(0;1)$. Bu to‘plamning limit nuqtalari [0;1] kesmaning barcha nuqtalaridan iborat.

d) $E_4=(0;1)\cap Q$ bo‘lsin. Bu to‘plamning limit nuqtalari ham [0;1] kesmaning barcha nuqtalaridan iborat.

5-ta’rif. Agar $x_0\in X$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to‘plamning kamida bitta element mavjud bo‘lsa, x_0 nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi.

Limit nuqta urinish nuqtasi bo‘ladi, lekin aksinchasi har doim ham o‘rinli emas. Masalan, chekli to‘plamning har bir nuqtasi urinish nuqta bo‘ladi, ammo u limit nuqta bo‘la olmaydi. Yuqoridagi E_1 va E_2 to‘plamlarning barcha nuqtalari urinish nuqtalardir.

2.4. To‘plamning yopilmasi

6-ta’rif. M to‘plamning urinish nuqtalari to‘plami $\overline{M}$ bilan belgilanib, M ning *yopilmasi* deyiladi.

Misol. $(\mathbb{R}^2,\rho)$ metrik fazoda $S(x_0,r)$ ochiq sharga tegishli ratsional koordinatali nuqtalar to‘plamining yopilmasi $\bar{S}(x_0,r)$ yopiq shardan iborat bo‘ladi.

Teorema. *Ixtiyoriy M, M_1 va M_2 to‘plamlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinlidir:*

1) $M\subset\overline{M}$ *;*

2) $\overline{M}=\overline{\overline{M}}$ *;*

3) Agar $M_1 \subset M_2$ *bo'lsa, u holda* $\overline{M}_1 \subset \overline{M}_2$ *bo'ladi;*

4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

Isboti. Birinchi xossa to'plamning urinish nuqtasi ta'rifidan kelib chiqadi.

Ikkinchi xossani isbotlaymiz. Birinchi xossaga asosan $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Shuning uchun $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ munosabatni isbotlash yetarli. $x \in \overline{\overline{M}}$ bo'lsin. U holda bu nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $\overline{M}$ ga tegishli x_1 nuqta topiladi; so'ng x_1 nuqtaning radiusi $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1) > 0$ bo'lgan atrofini olamiz. Agar $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ bo'lsa, u holda

$\rho(z,x) \leq \rho(z,x_1) + \rho(x_1,x) < \varepsilon,$

ya'ni $z \in O_\varepsilon(x)$ bo'ladi. Shunday qilib, $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Ammo $x_1 \in \overline{M}$, demak, x_1 ning ε_1-atrofida M ga tegishli x_2 nuqta mavjud. Shuning uchun $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Lekin $O_\varepsilon(x)$ shar x nuqtaning ixtiyoriy atrofi bo'lgani uchun $x \in \overline{M}$.

Uchinchi xossa o'z-o'zidan ravshan.

To'rtinchi xossani isbotlaymiz. Aytaylik $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ bo'lsin, u holda x nuqtaning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofida $M_1 \cup M_2$ ga tegishli x_1 element mavjud. Agar $x \notin \overline{M_1}$ va $x \notin \overline{M_2}$ bo'lsa, u holda x ning shunday $O_{\varepsilon_1}(x)$ va $O_{\varepsilon_2}(x)$ atroflari mavjudki, bu atroflar mos ravishda M_1 va M_2 to'plamlar bilan kesishmaydi. Endi $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ deb olsak, u holda x nuqtaning $O_\varepsilon(x)$ atrofi $M_1 \cup M_2$ to'plam bilan kesishmaydi. Bu esa x ning tanlanishiga zid. Demak, x nuqta $\overline{M_1}$ yoki $\overline{M_2}$ to'plamlardan kamida bittasiga tegishli, ya'ni

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Teskari munosabatning o'rinligi $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ va $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ munosabatlardan hamda uchinchi xossadan kelib chiqadi.

Tekshirish savollari

1. Metrik fazoda ochiq (yopiq) sharlarni ta'riflang.
2. Nuqtaning atrofi qanday aniqlanadi?
3. Nuqta atrofining qanday xossalari bor?
4. Limit nuqtani ta'riflang.

5. Urinish nuqtani ta’riflang.

6. To‘plamning yopilmasi qanday aniqlanadi?

7. To‘plam yopilmasi xossalarini ayting.

Mashqlar

1. Biror metrik fazoda ikkita har xil radiusli ochiq sharlar ustma-ust tushishi mumkinmi?

2. Biror metrik fazoda radiusi 3 ga teng bo‘lgan shar radiusi 2 ga teng bo‘lgan sharning xos qismi bo‘lishi mumkinmi?

3. Biror metrik fazoda $r>0$ radiusli shar bo‘sh to‘plam bo‘lishi mumkinmi?

4. Tekislikdagi kabi, agar c nuqta a va b nuqtalardan farqli va $\rho(a,b)=\rho(a,c)+\rho(c,b)$ bo‘lsa, u holda c nuqta a va b nuqtalar orasida yotadi deb aytamiz.

a) Agar c nuqta a va b nuqtalar orasida, d nuqta esa a va c nuqtalar orasida yotsa, u holda d nuqta a va b nuqtalar orasida yotishini isbotlang.

b) Agar c nuqta a va b nuqtalar orasida yotsa, u holda a nuqta c va b nuqtalar orasida yotmasligini isbotlang.

c) Agar c nuqta a va b nuqtalar orasida, d nuqta esa a va c nuqtalar orasida yotsa, u holda c nuqta d va b nuqtalar orasida yotishini isbotlang.

d) Metrik fazoning nuqtalari orasida, har doim shu fazoning kamida bitta nuqtasi yotadimi?

5. X metrik fazoda $[a,b]$ kesma deb shu fazoning a, b va bu nuqtalar orasida yotadigan barcha nuqtalardan tashkil topgan to‘plamga aytiladi. 1–§ dagi 2 b), c); 7; 10; 11 misollarda va trivial metrik fazoda kesmalar qanday bo‘ladi? Bu kesmalar chegaralanganmi?

6. Agar $\{a,b\}\neq\{c,d\}$ bo‘lsa, u holda $[a,b]\neq[c,d]$ ekanligini isbotlang.

7. Aytaylik c nuqta a va b nuqtalar orasida yotsin. Har doim $[a,b]=[a,c]\cup[c,d]$ munosabat o‘rinlimi?

8. $\mathbb{R}_2^2$ tekislikda har qanday to‘g‘ri to‘rtburchakning chegaralangan to‘plam ekanligini ko‘rsating.

9. Metrik fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralangan to‘plam ekanligini isbotlang.

10. To‘g‘ri chiziqdagi $x_n=(-1)^n+{}^1/_n$ $(n\in\mathbb{N})$ nuqtalar to‘plamining urinish va limit nuqtalarini toping.

11. E to‘plam $\mathbb{R}_2^2$ tekislikdagi ratsional koordinatali nuqtalar to‘plami bo‘lsa, uning yopilmasini toping.

12. $\mathbb{R}_2^2$ tekislikda faqat ikkita: $A(1,3)$, $B(3,0)$ limit nuqtaga ega bo‘lgan E to‘plamgi misol keltiring.

3-§. Metrik fazodagi ochiq va yopiq to‘plamlar

3.1. Yopiq to‘plam va uning xossalari, misollar.

(X,ρ) metrik fazo bo‘lsin. Bunda $M \subset X$ to‘plam olamiz.

1-ta’rif. Agar $M = \overline{M}$ bo‘lsa, u holda *M yopiq to‘plam* deyiladi.

Ixtiyoriy (X,ρ) metrik fazoda $\bar{S}(x_0, r)$ yopiq shar, X ning o‘zi, bo‘sh to‘plam va har bir chekli to‘plam yopiq to‘plamlarga misol bo‘ladi.

Shuningdek $(\mathbb{R},\rho)$, $\rho(a,b)=|b-a|$ to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $[c,d]$ kesma yopiq to‘plamdir.

1-teorema. *a) Chekli sondagi yopiq to‘plamlarning birlashmasi yana yopiq to‘plam bo‘ladi;*

b) Ixtiyoriy sondagi yopiq to‘plamlarning kesishmasi yopiq to‘plam bo‘ladi.

Isboti. a) bu xossani ikki to‘plam uchun isbotlash yetarli. Aytaylik F_1 F_2 yopiq to‘plamlar bo‘lsin, ya’ni $\bar{F}_1 = F_1$ va $\bar{F}_2 = F_2$ o‘rinli. U holda 2-§ dagi teoremaning 4) xossaga ko‘ra $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2$. Demak, ta’rifga ko‘ra $F_1 \cup F_2$ yopiq to‘plam.

b) Aytaylik ixtiyoriy sondagi $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yopiq to‘plamlar sistemasi berilgan va x ularning kesishmasi $F=\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ to‘plamning urinish nuqtasi bo‘lsin. U holda x ning ixtiyoriy atrofida F ning kamida bitta, masalan, x_1 elementi mavjud va kesishmaning xossasiga ko‘ra α ning barcha qiymatlari uchun $x_1 \in F_\alpha$ bo‘ladi. Demak, ixtiyoriy α uchun $x \in \overline{F_\alpha} = F_\alpha$, ya’ni $x \in \cap F_\alpha = F$ bo‘ladi. Demak, F yopiq to‘plam. Teorema isbot bo‘ldi.

3.2. Ochiq to‘plam va uning xossalari, misollar.

(X,ρ) metrik fazo, $M \subset X$ biror to‘plam bo‘lsin.

2-ta’rif. Agar x nuqtaning M to‘plamda butunlay joylashgan biror atrofi mavjud bo‘lsa, u holda x nuqta M to‘plamning *ichki nuqtasi* deyiladi.

Agar M to‘plamning hamma nuqtalari ichki bo‘lsa, u *ochiq to‘plam* deyiladi.

Ixtiyoriy (X,ρ) metrik fazoda $S(x_0,r)$ ochiq shar, $\mathbb{R}$ da $(a;b)$ interval ochiq to‘plamga misol bo‘ladi.

$\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar to‘plami ochiq to‘plam emas, chunki ratsional son ichki nuqta bo‘la olmaydi, ya’ni, ixtiyoriy ratsional sonning har bir atrofi faqat ratsional sonlardan iborat emas.

Shu kabi irratsional sonlar to‘plami ham ochiq to‘plam emas.

Bu to‘plamlarning $\mathbb{R}$ da yopiq to‘plam emasligini ham ko‘rish qiyin emas.

2-teorema. *Biror $G\subset X$ to‘plamning ochiq bo‘lishi uchun uning to‘ldiruvchisi, $F=X\backslash G=CG$ yopiq bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isboti. *Zaruriyligi*. Aytaylik G ochiq to‘plam bo‘lsin. U holda har bir $x\in G$ nuqta butunlay G da joylashgan atrofga ega. Demak, bu atrof F bilan kesishmaydi. Bundan ko‘rinadiki, F ning birorta ham urinish nuqtasi G ga kirmaydi. Demak F yopiq to‘plam.

Yetarliligi. Aytaylik $F=X\backslash G$ yopiq to‘plam bo‘lsin. U holda G dan olingan ixtiyoriy nuqta F bilan kesishmaydigan, demak G da butunlay joylashgan atrofga ega, ya’ni G ochiq to‘plam.

Natija. *Bo‘sh to‘plam $\varnothing$ va X fazo ham ochiq, ham yopiq to‘plamlardir.*

3-teorema. Ixtiyoriy sondagi ochiq to‘plamlarning birlashmasi va chekli sonidagi ochiq to‘plamlarning kesishmasi ochiq to‘plam bo‘ladi.

Isboti. Ushbu $\bigcap\limits_{\alpha}(X\backslash G_\alpha)=X\backslash(\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha)$ va $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(X\backslash G_i)=X\backslash(\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i)$ tengliklardan va yuqorida isbotlangan teoremalardan kelib chiqadi.

Tekshirish savollari

1. Qanday to‘plam yopiq to‘plam deyiladi?
2. Yopiq to‘plamga misollar keltiring.
3. Qanday to‘plam ochiq to‘plam deyiladi?
4. Ochiq to‘plamga misollar keltiring.
5. Ochiq va yopiq to‘plamlar orasida qanday bog‘lanish mavjud?
6. Ochiq ham, yopiq ham bo‘lmagan to‘plamlarga misollar keltiring.

Mashqlar

1. Metrik fazoda yopiq sharning yopiq to‘plam ekanligini isbotlang.

2. Metrik fazoda ochiq sharning ochiq to‘plam ekanligini isbotlang.

3. Tekislikda musbat koordinatali nuqtalar to‘plami ochiq to‘plam bo‘ladimi? Javobingizni asoslang.

4. $C[a;b]\supset E=\{f|\ \ A<f(x)<B\}$ to‘plamning ochiq to‘plam ekanligini ko‘rsating.

5. Quyidagi $\begin{cases} x+y>5; \\ x^2+y^2<100 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan *A* to‘plamning R_2^2 fazoda ochiq to‘plam ekanligini isbotlang.

6. Quyidagi $\begin{cases} x+3y-2z\le 6; \\ x^2+y^2+z^2\ge 25 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan *A* to‘plamning $\mathbb{R}_2^3$ fazoda yopiq to‘plam ekanligini isbotlang.

7. Quyidagi $\begin{cases} y\ge x^2+1; \\ x^2+y^2<64 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan *A* to‘plamning $\mathbb{R}_2^2$ fazoda ochiq ham, yopiq ham emasligini isbotlang.

8. *C[a,b]* fazodagi ko‘phadlar to‘plami ochiq ham, yopiq ham emasligini isbotlang.

4-§. Metrik fazoda yaqinlashish tushunchasi

4.1. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar.

1-ta'rif. (X,ρ) metrik fazoda biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ nomer topilib, barcha $n>n_0(\varepsilon)$ lar uchun $\rho(x_n,x)<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik X fazoning x elementiga *yaqinlashadi* deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ yoki $x_n \to x$ orqali belgilanadi.

Bu x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik X fazoning hech bir nuqtasiga yaqinlashmasa, u *uzoqlashuvchi* ketma- ketlik deyiladi.

Ravshanki, metrik fazodagi ketma-ketlik limiti ta'rifini sonli ketma-ketlik limiti ta'rifiga keltirish mumkin:

Agar $n\to\infty$ da $\rho(x_n ,x)\to 0$, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$ bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik X fazoning x elementiga yaqinlashadi deyiladi.

Metrik fazoning elementlari sonlardan, sonli kortejlardan, geometrik fazo nuqtalaridan, chiziqlardan, funksiyalardan, umuman istalgan tabiatli bo'lishi mumkin. Shu sababli ketma-ketlik limitining yuqorida keltirilgan ta'rifi keng tatbiqqa ega.

Misol. $x_n(t)=t^n$ funksiyalar ketma-ketligi $C_1[0;1]$ fazoda $\theta(t)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi.

Haqiqatdan ham, bu fazoda $\rho(x_n,\theta)=\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, demak $n\to\infty$ da $\rho(x_n,x)\to 0$ bo'lishi ravshan.

Funksiyalarning ushbu ketma-ketligi $C[0;1]$ fazoda $\theta(t)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashmaydi, chunki bu holda $\rho(x_n,\theta = \max\limits_{1\le t\le 1} t^n=1$ bo'ladi, ya'ni $\rho(x_n ,x)\not\to 0.$

4.2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik xossalari.

1-teorema. *Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat bitta limitga ega.*

Isboti. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ikkita, ya'ni $x_n\to x$ va $x_n\to y$, $x\neq y$ bo'lsin. U holda metrikaning uchburchak aksiomasiga ko'ra,

$$0 \le \rho(x,y) \le \rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)$$

bo‘ladi.

Ammo, bu tengsizlikning o‘ng tomoni $n \to \infty$ da 0 ga intiladi, demak, $\rho(x,y)=0$, bundan $x=y$ kelib chiqadi.

2-teorema. *$\rho(x,y)$ metrika x va y elementlarning uzluksiz funksiyasi, ya'ni $x_n \to x$ va $y_n \to y$ bo‘lsa, u holda $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ bo‘ladi.*

Isboti. Avval ixtiyoriy to‘rtta $x, y, z, u \in X$ elementlar uchun

$$|\rho(x,y)-\rho(z,u)| \le \rho(x,z)+\rho(y,u) \qquad (1)$$

tengsizlikning o‘rinli ekanligini isbotlaymiz.

Uchburchak aksiomasidan foydalanib,

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,u)+\rho(u,y) \qquad (2)$$

tengsizliklarni yozish mumkin. Bundan

$$\rho(x,y) - \rho(z,u) \le \rho(x,z) + \rho(u,y)$$

Bu tengsizlikda x, y larni mos ravishda z, u lar bilan almashtirib,

$$\rho(z,u) - \rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(u,y) \qquad (3)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi.

(1) tengsizlikda z va u ni mos ravishda x_n va y_n bilan almashtirilsa,

$$|\rho(x,y) - \rho(x_n,y_n)| \le \rho(x,x_n) + \rho(y,y_n)$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. Bu tengsizlikning o‘ng tomoni, teorema shartiga ko‘ra nolga intiladi, bundan esa $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ kelib chiqadi.

Quyidagi teorema ravshan.

3-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlikning ixtiyoriy $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketligi ham shu x ga yaqinlashadi.*

4-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma- ketlik x ga yaqinlashsa va $x_0 \in X$ tayin bir element bo‘lsa, u holda $\{\rho(x_n, x_0)\}$ sonlar to‘plami chegaralangan bo‘ladi.*

Isboti. $\{\rho(x_n,x)\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lganligi sababli, u chegaralangan bo‘ladi. Uning yuqori chegarasini K bilan belgilaymiz. Metrikaning uchburchak aksiomasiga ko‘ra

$$\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x)+\rho(x, x_0) \le K+\rho(x, x_0)=K_1.$$

Teorema isbot bo‘ldi.

4.3**. Ba’zi metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasining ma’nolari.**

1) Trivial metrik fazoda ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun bu ketma-ketlikning hamma elementlari biror hadidan boshlab bir-biriga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

2) n–o‘lchamli Evklid fazosida $\{x_k\}$ ketma-ketlikning x elementga yaqinlashishi uchun, x_k vektor koordinatalari, mos ravishda x vektor koordinatalariga yaqinlashishi zarur va yetarli.

Haqiqatan ham, agar $\mathbb{R}_2^n$ da $\rho(x_k,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i)^2}\to 0$ $(k\to\infty)$ bo‘lsa, u holda $x_i^{(k)}\to x_i$,i=1,2,…,n $(k\to\infty)$ bo‘ladi.

3) $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $C[a;b]$ fazoning elementlari va $x_n(t)\to x(t)\in C[a;b]$, ya’ni

$$\rho(x_n,x)=\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0,\ n\to\infty$$

bo‘lsin. Bundan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon)$ natural son topiladiki, $t\in[a;b]$ bo‘lganda

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, $t\in[a;b]$ ning barcha qiymatlari uchun $n>n_0$ bo‘lganda

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning $x(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashishini bildiradi. Va aksincha, $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $[a;b]$ kesmada $x(t)$ ga tekis yaqinlashsa, u holda $\rho(x_n,x)\to 0$ bo‘ladi. Demak, $C[a;b]$ fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish matematik analizdan ma’lum bo‘lgan tekis yaqinlashish tushunchasi bilan ustma-ust tushar ekan.

Tekshirish savollari

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikni ta’riflang.
2. Ketma-ketlik limitining yagonaligi haqidagi teoremani isbotlang.

3. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ va $C[0;1]$ fazolarda yaqinlashuvchi ketma-ketliklarga misollar keltiring.

Mashqlar

1. Agar $x_n \to a$ va $\rho(x_n, y_n) \to 0$ bo‘lsa, u holda $y_n \to a$ ekanligini isbotlang.

2. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligi ko‘rsatilgan fazoda $f(x) \equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadimi?

1) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, a) $C[0;1]$; b) $C_1[0;1]$;

2) $f_n(x) = xe^{-nx}$, a) $C[0;10]$; b) $C_1[0;10]$;

3) $f_n(x) = n^{-\frac{1}{8}}\sqrt{2nxe^{-\frac{1}{2}nx^2}}$, a) $C[0;1]$; b) $C_2[0;1]$;

4) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, a) $C[-\pi;\pi]$; b) $C_1[-\pi;\pi]$;

3. $\mathbb{R}_2^n$, $\mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}_\infty^n$ fazolarda metrikaga nisbatan yaqinlashish bilan birgalikda koordinatalari bo‘yicha yaqinlashish tushunchasi ham qaraladi. Agar $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}_m = x_m$ $(m=1,\ldots,n)$ bo‘lsa, u holda $(x^{(k)}) = ((x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \ldots, x^{(k)}_n))$ nuqtalar ketma-ketligi $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtaga koordinatalar bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi. $M_n = \left(\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{2n}{n+1}\right)$ nuqtalar ketma-ketligi koordinatalar bo‘yicha qanday nuqtaga yaqinlashadi? Bu ketma-ketlik $\mathbb{R}_2^n$, $\mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}_\infty^n$ fazolarda shu nuqtaga yaqinlashadimi?

4. $\mathbb{R}_2^n$ fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketlikning koordinatalar bo‘yicha ham yaqinlashuvchi va aksincha, koordinatalar bo‘yicha yaqinlashuvchi ketma-ketlikning metrika bo‘yicha ham yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.