ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Э.Ю.Сафаров, Д.Н.Раҳмонов

УДК 528. ББК. 26.17

М А Т Е М А Т И К К А Р Т О Г Р А Ф И Я

Олий таълим муассасаларининг 5311500 – «Геодезия, картография ва кадастр» бакалавриат таълим йўналиши бўйича таълим олаётган талабалари учун

ўқув қўлланма

Тошкент
2018

Э.Ю.Сафаров, Д.Н.Раҳмонов. Математик картография. Ўқув қўлланма.

Ушбу ўқув қўлланма олий таълим муассасаларининг 5311500 – «Геодезия, картография ва кадастр» йўналиши бўйича таълим олаётган талабаларга мўлжалланган бўлиб, унда картографик проекцияларнинг умумий назарияси, проекциялар классификацияси; эллипсоид сиртини шарда ва текисликда тасвирлаш йўллари баён қилинган. Конусли, азимутал, цилиндрик, псевдоконусли, псевдоазимутал ва бошқа проекциялар назарияси кўриб чиқилган. Қўлланмада картографик проекцияларни излаш усуллари ҳамда илк маротаба математик картографияда ГИС-технологияларидан фойдаланиш масалалари ёритилган.

Ўқув қўлланмадан талабалар, магистрантлар, катта илмий ходим изланувчилар ва умумий ўрта таълим муассасаларининг ўқитувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

В учебном пособии, предназначенном бакалаврам, обучающимися по направлению образования 5311502 – Геодезия, картография и кадастр (наука), изложены общая теория картографических проекций и их классификация, показано отображение поверхности эллипсоида на шар и плоскость. Рассмотрена теория конических, азимутальных и перспективных, цилиндрических, псевдоконических, псевдоазимутальных и других проекций. Описаны методы изыскания картографических проекций и впервые освещены вопросы использования ГИС-технологий в математической картографии.

Учебное пособие может быть использовано студентами, магистрами, старшими научными сотрудниками исследователями, а также преподавателями средних общеобразовательных школ.

In the manual intended to bachelors, trainees on a direction of education 5311502 - the Geodesy, cartography and a cadastre (science), are stated the general theory of cartographical projections and their classification, display of a surface ellipsoid on a sphere and a plane is shown. The theory of conic, azimuthal and perspective, cylindrical, pseudo-conic, pseudo-azimuthal and other projections is considered. Methods of research of cartographical projections are described and for the first time questions of use of GIS technologies in mathematical cartography are covered.

The manual can be used by students, masters, the senior scientific employees researchers, and also teachers of average comprehensive schools.

Тақризчилар: ***Саййидқосимов С.С. – Тошкент Давлат техника университети профессори***

Мусаев И.М. – ТИМИ Геодезия ва геоинформатика кафедраси мудири, т.ф.н., доцент

Масъул муҳаррир: Эгамбердиев А. – Мирзо Улуғбек номидаги ЎзМУ доценти, г.ф.н.

Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Илмий Кенгашининг 2018 йил /////// июлдаги мажлиси қарори баённома № // билан нашрга тавсия этилган

КИРИШ

Карталарни халқ хўжалигининг турли соҳаларида илмий ва амалий тавсифдаги вазифаларни ҳал қилишда, ахборотлар манбаи ва яхши йўл кўрсатувчи ҳамда таълим воситаси сифатида кенг миқёсда фойдаланилиши, карталарни тузишнинг давлат миқёсидаги муҳим масала эканлигидан далолат беради.

Кўплаб ҳолатларда карталардан фойдаланишда улар орқали турли хил ўлчашларни амалга оширишни назарда тутади, бунинг натижасида илмий ва ишлаб чиқариш билан боғлиқ масалаларни ҳал қилишда талаб қилинган муҳим қонуниятлар олиниши мумкин. Ўлчашларни бажариш карталарнинг математик асослари билан чамбарчас боғлиқдир. Бу масалаларни ечиш математик картография курсида ўрганилади.

Ҳозирда республикасининг 9 та олий таълим муассасаларида 5311500 - “Геодезия, картография ва кадастр” бакалавриатура йўналиши бўйича таҳсил оладиган талабалар учун “***Математик картография”*** фани айни пайтда асосий курслардан бири ҳисобланади.

Математик картографиянинг ўрганиш предмети – карталарни математик асоси ишлаб чиқишдир, математик асосни лойиҳалаш эса карталарни тузиш жараёнининг биринчи босқичи ҳисобланади. Бу вазифани ҳал қилишда маълум аниқликдаги математик қонуниятлардан фойдаланилади, картага олинаётган юза ва текислик координата нуқталари ўртасидаги ўзаро боғлиқлик ўрнатилади, яъни у ёки бу картографик проекция танлаб олинади ва унга тўғри келадиган картографик тўр (кўпинча меридианлар ва параллеллар) тузиб чиқилади, шу билан бир қаторда, масштаблар, уларни қиймати, картани компоновкасининг геометрик ўлчамлари, разграфкаси ва номенклатураси масалалари қараб чиқилади.

Математик картографиянинг асосий вазифалари қуйидагилардан ташкил топади:

– энг аввало, нисбатан энг яхши картографик проекцияларни олиш учун математик картография назариясини ривожлантириш;

– турли хилдаги картографик проекцияларни, уларнинг мазмун–моҳияти, ўзаро боғлиқги ва амалиётда улардан фойдаланишнинг мақсадга мувофиқлигини тадқиқ қилинади;

– мавжуд картографик проекцияларни такомиллаштириш ва фан ва ишлаб чиқариш талаблари асосида янгиларини, турли хилдаги мавзули ва комплекс карталарни яратиш учун ишлаб чиқиш;

– янги картографик проекцияларни излаб топиш усулларини такомиллаштириш;

– кўп варақли карталарнинг математик элементларини (компоновкаси, разгрфкаси ва номенклатурасини) ишлаб чиқиш;

– картографик проекцияларнинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолатда, карталар бўйича турли хилдаги ўлчашларни бажариш усуллари ва воситаларини ривожлантириш;

– карталарни тузишда ҳал келадиган математик характердаги вазифаларни ўрганиш ва ечиш;

– математик картографияда автоматлаштириш назарияси ва методларини ишлаб чиқиш ва бошқалар.

Юқорида келтирилган вазифаларни анъанавий методлар ва воситалар ҳамда замонавий техника ва ГИС технологиялари асосида ҳал этиш ҳақидаги билимларни олиш, картографик проекциялар обзори ва геоинформатика ҳақидаги маълумотларни китоб ўз ичига олади. Қўлланма охирида математик картографияни шаклланиши тарихи, ҳозирги ҳолати ва истиқболлари ҳақида маълумот берилган.

Ҳозиргача ўзбек тилида математик картографиядан ўқув қўлланма ёки дарслик яратилмаган. Китобга мазкур таълим йўналишининг янги ўқув режаси ва фанни намунавий ўқув дастури асос қилиб олинди. Маъруза ва амалий машғулотларда Ўзбекистонда ва бошқа яқин ва узоқ хориж мамлакатларида нашр этилган картографик проекциялардан кенг фойдаланилди, бу эса фанда амалий топшириқларни ўз вақтида бажариш, проекциялар ҳақида билимларни пухта эгаллаш учун замин бўлади. Маърузаларни мавзуи дастурда кўрсатилган ҳамма билимларни ўз ичига қамраб олган.

Ўқув қўлланма XV бобдан иборат.

Китобни ёзишда математик картографияга оид кўпгина дарсликлар ва ўқув қўлланмаларидан, маълумотнома (справочник), илмий ва хорижий адабиётлардан фойдаланилди. Шу билан бирга муаллифлар ўзларининг мазкур фан соҳасидаги кўп йиллик илмий, илмий-услубий ва педагогик тажрибаларига таяндилар.

Қўлланмани яратишда муаллифлар республикамиз олий таълим муассасаларида математик картография ва картография фанларидан дарс берадиган профессор-ўқитувчилар, соҳа ишлаб чиқариш корхоналари етакчи мутахассисларининг фикр ва мулоҳазаларини ҳам эътиборга олдилар.

I БОБ.
КАРТОГРАФИК ПРОЕКЦИЯЛАРНИНГ УМУМИЙ НАЗАРИЯСИ. ТЕКИСЛИКДА АЙЛАНМА ЭЛЛИПСОИДНИ ТАСВИРЛАШ

1–§. Текисликда эллипсоидни (сферани) тасвирлаш бўйича асосий тушунчалар

Картага олинаётган юзалар (Ер, Ой, планеталар ва уларнинг йўлдошлари) мураккаб шаклга эга. Уларни текисликда тавсирлаш учун табиий юзадан математик текисликка ўтиш керак, яъни табиий юза математик тенгламалар билан ифодаланиши зарур. Математик картографияда картага олинаётган юза сифатида, одатда, сфера ёки айланма эллипсоид қабул қилинади, унинг кичик ўқи Ернинг айланиш ўқига мос келади, деб қабул қилинади.

Карталарни тузишда айланма эллипсоид ёки сфера юзалари текисликда акс эттирилади. Бундай юзаларни бирортаси ҳам текисликда узилишсиз ёйилиши мумкин эмас, шу сабабли, картага олишда картографик проекциялардан фойдаланилади, уларда юзани текисликда акс эттирилиши маълум бир математик қонуниятлар асосида амалга оширилади. Бу қонуниятлар картага олинаётган юза ва текисликнинг нуқталари координаталари ўртасидаги функционал боғлиқликни ўзида ифодалайди. Картографик юзани бундай тасвирлаш асоси сифатида географик ёки геодезик координаталар тизими ва координата чизиқлари - меридианлар ва параллеллар олинади.

Меридианлар чизиқлари юзани унинг айланиш ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесиш йўли орқали ҳосил қилинади (айланма эллипсоидда меридианлар эллипсларидан ташкил топади, шарда эса – доиралардан), параллеллар чизиқлари – айланиш ўқига перпендикуляр ҳолатда, картага олинаётган юзани текислик билан кесишиши йўли асосида ҳосил қилинади (параллеллар доира кўринишида бўлади).

Юзада меридиан ва параллелларнинг жойлашиши эгри чизиқли географик (ёки геодезик) координаталар асосида аниқланади: узоқлик – λ ва кенглик – φ (ёки L ва B). Меридианлар тенгламаси: $\lambda = const$, параллеллар тенгламаси: $\varphi = const$. Қайд этилганларни ҳисобга олиб, картографик проекциялар умумий тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda), \tag{1}$$

бунда φ ва λ – картага олинаётган юзада жойлашган айрим нуқталарнинг географик координаталари; x ва y – ушбу нуқталарнинг проекция текислигидаги тўғри бурчакли координаталари, улар f_1 ва f_2 функциялар билан аниқланади. Бу функцияларда бир хил маънога эга бўлишлик ва узлуксизлик шарти амал қилади (ўзининг хусусий ҳосилалари билан биргаликда).

Проекцияларнинг хусусиятлари (1) тенгламада келтирилган f_1 ва f_2 функциялар хоссалари ва тавсифларига боғлиқ. Бундай функциялар жуда кўп бўлиши мумкин, шу сабабли, картографик проекцияларнинг турлари ҳам кўп. (1) формуладан кенгликни (φ) чиқариб ташлаб, проекцияда меридианлар тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$F_1(x, y, \lambda) = 0,$$

шунингдек, узоқликни (λ) чиқариб ташлаб параллеллар тенгламаси

$$F_2(x, y, \varphi) = 0,$$

Агар $\varphi = \varphi_0 = const,$ тенгликни киритсак, у ҳолда (1) тенгламадан параллеллар тенгламасининг параметрик шаклини ҳосил қиламиз:

$$x = f_1(\varphi_0, \lambda); \; y = f_2(\varphi_0, \lambda).$$

худди шундай, $\lambda = \lambda_0 = const$ тенглик орқали меридианларнинг параметрик тенгламасини оламиз:

$$x = f_1(\varphi, \lambda_0); \; y = f_2(\varphi, \lambda_0).$$

Проекцияда меридиан ва параллел чизиқларининг тасвири *картографик тўр* дейилади. Агар проекция қуйидаги $x = f_1(\varphi)$ ва $y = f_2(\lambda)$ тенгламалар асосида ифодаланса, у ҳолда картографик тўр нисбатан оддий кўринишга эга бўлади. Бундай ҳолатда параллел ва меридианлар ўзаро перпендикуляр бўлган иккита тўғри чизиқ сифатида акс эттирилади.

Агар $x = f_1(\varphi)$ ва $y = f_2(\varphi, \lambda)$ тенгликлар бўлса, у ҳолда параллеллар Y ўқига параллел тўғри чизиқлар, меридианлар эса – эгри чизиқлар билан кўрсатилади. Агар $x = f_1(\varphi, \lambda)$ ва $y = f_2(\lambda)$ тенгликлар амал қилса, у ҳолда меридианлар X ўқига параллел тўғри чизиқлар, паралеллар эса эгри чизиқлар кўринишида тасвирланади.

Агар $x = f_1(\varphi, \lambda)$ ва $y = f_2(\varphi, \lambda)$ бўлганда турли хилдаги картографик проекцияларни ҳосил қилишимиз мумкин, бунда уларнинг кўриниши f_1 ва f_2 функцияларга боғлиқ бўлади.

Картага олинаётган юзанинг қисмлари чўзилиши ёки сиқилиши у ёки бу картографик проекцияларда чизиқ, майдон ва бурчак хатоликларини юзага келишига сабаб бўлади, бу хатоликлар тасвирнинг хусусиятларига боғлиқ бўлади. Айрим проекцияларда майдон хатолиги, бошқа бир проекцияларда эса бурчак хатолигини юқотиш мумкин, бироқ чизиқ хатолиги барча проекцияларда учрайди (чизиқ хатолиги картанинг фақат алоҳида нуқталари ёки айрим чизиқларида бўлмаслиги мумкин).

Ҳар қандай картани *асосий масштаби* бўлади, у картага олинаётган юзанинг (ёки уни қисмларининг) текисликда акс эттирилишини умумий кичрайтирилиш даражасини кўрсатади. Бу масштаб картада ёзиб қўйилади, бироқ бу масштаб фақат алоҳида нуқталарда ёки айрим чизиқларда сақланади, холос.

Картографик проекцияларни тадқиқ қилишда бош масштаб μ_0 билан белгиланади, уни қиймати бирга тенг деб олинади ҳамда картографик проекция хусусиятига таъсир этмайди. Масштаб картада ўзгарувчан қиймат бўлганлиги сабабли, амалиётда картада чизиқ ва майдонларни берилган нуқтада ёки йўналиш бўйича хусусий масштаблари тушунчаси киритилади.

Узунлик хусусий масштаби (μ) – проекцияда чексиз кичик кесманинг (ds') картага олинаётган юзадаги тегишли чексиз кичик кесмага (ds) нисбатини ифодалайди:

$$\mu = ds' / ds. \qquad (2)$$

Узунлик хусусий масштаби географик координаталар функцияси бўлиб, картага олинаётган юзада нуқтанинг жойлашиш ҳолатини, шунингдек, йўналиш азимутини белгилаб беради, бунинг асосида хусусий масштаб аниқланади:

$$\mu = F_1(\varphi, \lambda, \alpha).$$

Соддалаштириш мақсадида кейинчалик хусусий масштабни берилган йўналиш бўйича масштаб, деб номлаш киритилади. Масалан,

- меридианлар учун: α = 0 ёки 180°, μ = m – меридианлар бўйича масштаб;

- параллеллар учун: α = 90° ёки 270°, μ = n – параллеллар бўйича масштаб.

Узунлик хатолиги (υ_μ) – фоиз ҳисобида ифодаланиб, хусусий масштаб ва 1 қиймати ўртасидаги фарқни билдиради, масалан:

m = 1,58; $\upsilon_m = (m – 1)\ 100$ = +58%;

n = 0,78; $\upsilon_n = (n – 1)\ 100$ = – 22%,

яъни, узунлик хатолиги мусбат ва манфий қийматга эга бўлиши мумкин. Узунликнинг хусусий масштаби μ = 0 ҳолатда тасвир йўқолади.

Майдон хусусий масштаби (p) – картада чексиз кичик (элементар) участканинг (dF') картага олинаётган юзадаги тегишли участкасига (dF) нисбатини ифодалайди:

$p = dF'/dF.$

Ўз навбатида, $dF' \neq dF$, бироқ шундай кўринишдаги проекциялар ҳам мавжуд бўлиши мумкинки, бунда уларнинг ҳар бир нуқтасида $dF' = dF$ тенглик ўринли, бу проекциялар тенг майдонли проекциялар дейилади. Майдоннинг хусусий масштаби фақат тасвирланаётган нуқтанинг географик ўрнига боғлиқ бўлади:

$$p = F_2(\varphi, \lambda).$$

Кейинчалик майдон хусусий масштабини оддий кўринишда, майдон масштаби деб номлаймиз.

Майдон хатолиги (υ_p) – майдон масштаби ва 1 қиймат ўртасидаги фарқланиш бўлиб, фоиз ўлчамида аниқланади, масалан:

$p = 2{,}42$; $\upsilon_p = (p – 1)\ 100 = + 142\%$.

Айрим ҳолатларда узунлик ва майдон хатолиги (μ – 1), (p – 1) қийматлари фарқланишлари ёки бўлинишида биринчи (асосий) қисм (μ – 1) қийматни ифодалаб берувчи lnμ – масштаб логарифми чалғитувчи қиймат билан ифодаланиши мумкин.

Хатоликларнинг учинчи тури – бу *бурчаклар хатолиги*; бу проекциядаги бурчак (u') қиймати ва картага олинаётган юзадаги тегишли бурчаклар (u) қийматлари ўртасидаги фарқни ўзида акс эттиради. Ўз навбатида, $u' \neq u$ тенглик ўринли, бироқ баъзи проекциянинг ҳар бир нуқтасида $u' = u$ тенглик амал қилади, бунда проекциялар тенг бурчакли проекциялар дейилади.

Бурчак хатолиги $\Delta u = u' - u$ тенгламаси географик координаталар ва йўналиш азимутлари функцияси ҳисобланади:

$$\Delta u = F_3(\varphi, \lambda, \alpha).$$

Проекциянинг ҳар бир нуқтасида бурчакларнинг максимал даражадаги хатолиги мавжуд бўлиб, бу қиймат ω билан ифодаланади:

$$\omega = \Delta u_{\max} = 2(\alpha - \beta),$$

бунда β – проекцияда кўрсатилган йўналиш бўйича α азимутнинг ифодаланиши.

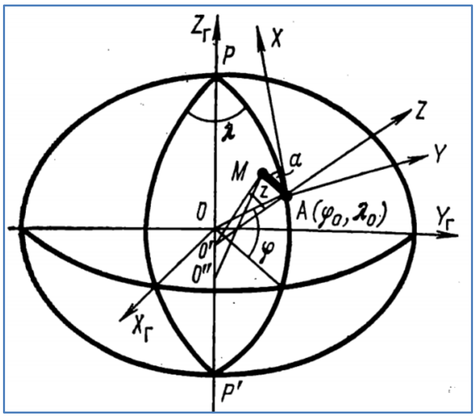
Хатоликлар қийматлари картографик проекцияларнинг муносиблигини баҳолашда асосий мезонлардан бири ҳисобланади.

2 – §. Математик картографияда фойдаланиладиган асосий координаталар тизимлари.

Географик (геодезик) ва геоцентрик координаталар тизимлари

Эллипсоидда (*сферада*) кўрсатиш мумкин бўлган параметрик чизиқларнинг чексиз даражада кўплигидан келиб чиқиб, географик параллеллар ва меридианлар синфини танлаймиз, улар географик координаталар тизимини ташкил этади: яъни $\varphi = const$ ва $\lambda = const.$

Эллипсоиднинг ихтиёрий *A* (φ, λ) нуқтасидан ушбу юзага нисбатан *A0′* нормал (*нормал* – эгри чизиқ ёки сиртнинг бирор нуқтасидан ўтган уринмага шу нуқта орқали ўтказилган тик чизиқ) ўтказамиз (1–расм).



1–расм. **Геоцентрик ва топоцентрик фазовий координаталар тизимлари**

Берилган нормал орқали эллипсоидда чексиз даражада кўплаб нормал кесмалар ўтказилиши мумкин, ўтказилган ушбу кесмалардан иккита асосийсини танлаб оламиз: *PAP′* меридиан текислиги билан мос тушувчи кесма – меридиан деб номлананади ва биринчи кесмага ортогонал бўлган кесма - биринчи вертикал кесимаси деб номланади.

Ушбу нормал кесмалар эгрилик радиуси Менье теоремасига мувофиқ қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$M = a(1-e^2)/(1-e^2\sin 2\varphi)^{3/2};$$

$$N = a/(1-e^2\sin 2\varphi)^{1/2}, \qquad (3)$$

бу ерда $e=\sqrt{(a^2-b^2)/a^2}$ – биринчи эксцентриситет, a ва b – мос ҳолатда айланма эллипсоидни катта ва кичик ярим ўқлари.

Энди фараз қилайлик, $0X_rY_rZ_r$ геоцентрик фазовий координаталар тизими берилган бўлсин, бунда унинг боши Ер маркази билан (айланма эллипсоид маркази билан) устма – уст тушади, Z_r ўқи Ернинг шимолий қутбига йўналтирилган, X_r ўқи – Гринвич меридианининг экватор билан кесишиш нуқтасига мос келади, Y_r ўқи эса – шарқ томонга йўналтирилган.

Бу ҳолатда, (*3*) тенгламани ҳисобга олиб, геоцентрик ва географик координаталар тизими ўртасидаги боғлиқликни қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$X_r = N\cos\varphi\cos\lambda;$$

$$Y_r = N\cos\varphi\sin\lambda;$$

$$Z_r = N(1-e^2)\sin\varphi.$$

(4)

Горизонтал топоцентрик ва қутбий сфероидик (*сферик*) координаталар тизими

Горизонтал топоцентрик координаталар тизими (1–расмга қаранг) – бошланғич қисми янги қутб нуқтаси – Q_0 (φ_0, λ_0) билан устма – уст тушадиган, X ўқи Q_0 нуқта меридианида ётувчи ва шимолий қутбга йўналган, Z ўқи эллипсоид юзасида Q_0 нуқтада $0'Q_0$ нормал билан устма – уст жойлашган ва Y ўқи чап томонгача координаталар тизимини тўлдирадиган координаталар тизимини ифодалайди. Q_0 (φ_0, λ_0) қутб нуқтаси учун A (φ_0, λ_0) нуқта қабул қилинади, ўз навбатида бу картага олинаётган худуд ўрта нуқтасини ифодалайди.

Янги қутб нуқтасининг Q_0 (φ_0, λ_0) кенглиги, узоқлигини ҳисобга олган ҳолда ва ушбу нуқтада биринчи вертикалнинг N_0 кесишиш радиуси эгрилигини эътиборга олиб, топоцентрик ва геоцентрик координаталар тизими ўртасидаги боғлиқликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z + N_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^2 N_0 \sin\varphi_0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r + N_0 e^2 \sin\varphi_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

бу ерда A – координаталарни ўзгартириш матрицаси,

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\lambda_0 \sin\varphi_0 - \sin\lambda_0 \cos\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ -\sin\lambda_0 \sin\varphi_0 \cos\lambda_0 \sin\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 0 \sin\varphi_0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

бу ерда ${}^tA$ – A га нисбатан матрицанинг транспонирланишини ифодалайди.

(6) тенгламага (4) тенгламадаги қийматларни қўйиш орқали ва (7) тенгламадаги ${}^tA$ қийматни ҳисобга олган ҳолатда, горизонтал топоцентрик координаталарни ҳисоблаш учун қуйидаги формулаларни келтириб чиқарамиз:

$$\begin{aligned} X &= N[\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)] + e^2(N_0\sin\varphi_0 - N\sin\varphi)\cos\varphi_0; \\ Y &= N\cos\varphi\sin(\lambda-\lambda_0); \\ Z &= N[\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)] + e^2(N_0\sin\varphi - N\sin\varphi)\sin\varphi_0 - N_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Қутбий сфероид координаталар тизимини киритамиз: z = *const*, a = *const*, бу ерда a – Q_0 қутб нуқтасидаги нормал текисликлар ўртасидаги бурчак, z – $0'Q_0$ нормал ва тегишли нормал текислик бўйлаб ётувчи M_i

эллипсоид юзасида жойлашган жорий нуқтага нисбатан *0′* нуқтадан йўналиш ўртасидаги бурчаклар (1–расмга қаранг). *M0′* = N'_0 қийматни киритамиз ва келтирилган расм асосида қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$X = N'_0 \sin z \cos a;$$

$$Y = N'_0 \sin z \sin a;$$

$$Z = N'_0 \cos z - N_0. \qquad (9)$$

Агар *M* нуқтадан эллипсоидга нисбатан *M0″* нормал ўтказиладиган бўлса, у *0″* нуқтада эллипсоидни айланиш ўқини кесиб ўтса, у ҳолда *0′0″M* учбурчак ҳосил бўлади. Ушбу *M* нуқтада кенглик қийматини ҳисобга олган ҳолда, томонлар қийматлари қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$0'M = N'_0;\ 0''M = N;\ 0'0'' = e^2(N\sin\varphi - N_0\sin\varphi_0)$$

ва (*3*) формуладан *N* қийматини косинуслар теоремаси асосида ҳосил қиламиз:

$$N'_0 = N_0\left\{1 - \frac{e^2}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2\left[1 + \frac{e^2}{4}(5\sin^2\varphi + \sin^2\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0 - 4)\right] + \ldots\right\}. \quad (10)$$

Шунга ўхшаш кўринишда,

$$N_0 = N'_0\left\{1 + e^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)\sin\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{e^2}{2}\left[\sin\varphi\sin\varphi_0(\sin\varphi + \sin\varphi_0) + (\sin\varphi - \sin\varphi_0)(3\sin^2\varphi - 1)\right] + \ldots\right\}. \quad (11)$$

(*8*), (*9*) тенгламаларни тенглаштириш орқали ва (*10*), (*11*) тенгламаларни ҳисобга олиб, қутбий *z*, *a* сфероидик координаталар ва географик (геодезик) *φ* ва *λ* координаталар ўртасидаги боғлиқлик формаласини келтириб чиқарамиз:

$$\sin z \cos a = t_1 + e^2\tau\left[(t_1\sin\varphi - \cos\varphi_0) + \frac{e^2}{2}(t_1t_2 - 2t_3\cos\varphi_0)\right];$$

$$\sin z \sin a = t_4\left[1 + e^2\tau(\sin\varphi + \frac{e^2}{2}t_2)\right]; \qquad (12)$$

$$cosz = t_5 + e^2\tau\left[(t_5 \sin\varphi - \sin\varphi_0) + \frac{e^2}{2}(t_2 t_5 - 2t_3 \sin\varphi_0)\right],$$

бу ерда

$$t_1 = \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0);$$

$$t_2 = \sin\varphi\sin\varphi_0(\sin\varphi + \sin\varphi_0) + (\sin\varphi - \sin\varphi_0)(3\sin^2\varphi - 1);$$

$$t_3 = \sin^2\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi_0(\sin\varphi - \sin\varphi_0); \qquad (13)$$

$$t_4 = \cos\varphi\sin(\lambda - \lambda_0);$$

$$t_5 = \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0);$$

$$\tau = \sin\varphi - \sin\varphi_0.$$

Кўплаб ҳолатларда ҳисоблашларни бажариш давомида (*10*) – (*12*) формулаларда фақат e^2 қийматгача ҳисоблаш етарли ёки қутбий сфероид координаталарни тегишли сферик координаталарга алмаштирилади, бунда e^2, e^4,... ҳолатда барча қисмлар нолга тенг бўлади деб фараз қилинади.

Қутбий геодезик координаталар тизими

A (φ, λ) нуқтанинг қутбий геодезик координаталари деб қутбдан $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$ ушбу нуқтагача бўлган геодезик чизиқ узунлиги *s* ва Q_0 нуқтада Q_0A чизиқнинг азимутига α айтилади (2–расм). Бу тизимда координаталар чизиқлари синфи сифатида қуйидагилар олинади:

$\alpha = const$ – Q_0 қутбдан чиқувчи геодезик чизиқлар тутами;

$s = const$ – геодезик чизиқ ҳисобланмайдиган ва мураккаб кўринишдаги иккиланган эгри чизиқлардан ташкил топган, биринчи синфга ортогонал бўлган геодезик доиралар.

Эллиптик координаталар

Ҳар қандай картографик юзани қуйидаги тенглама ёрдамида аниқлаш мумкин:

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

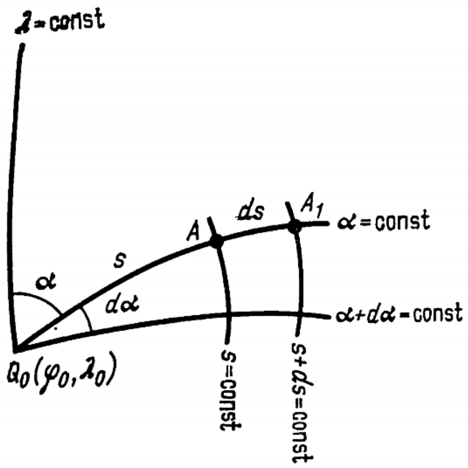
бу ерда *x, y, z* – тўғри бурчакли фазовий координаталар:

$$x = F_1(u, \upsilon);$$

$$y = F_2(u, \upsilon);$$

$$z = F_3(u, \upsilon);$$

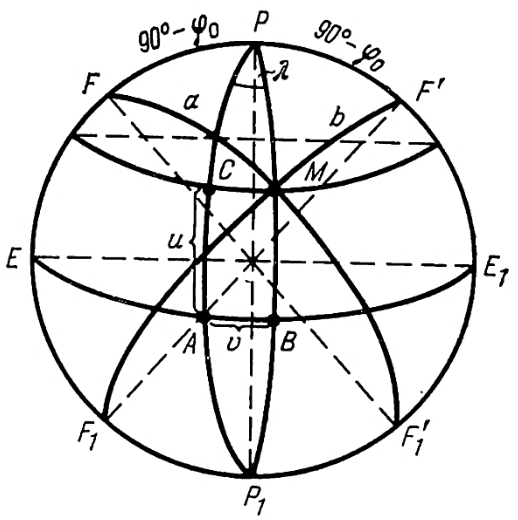
Мустақил ўзгарувчилар ҳисобланган – *u* ва *υ* қийматлар эгри чизиқли координаталар бўлиб, картага туширилаётган юзада нуқтанинг ўрнини белгилаб беради.



Эллиптик координаталар тизимини софокус тавсифга эга бўлган иккита сферик эллипслар тизими юзага келтиради.

2–расм. **Қутбий геодезик координаталар тизими.**

3–расмдаги *F* фокус *MC* сферик эллипси фокуси, унинг иккинчи фокуси *F'* нуқтада бўлади, *MB* сферик эллипс учун биринчи фокус *F*, иккинчи фокуси F_1 нуқтада жойлашади.



3–расм. **Кооординаталар тизими.**

Ихтиёрий ҳолатдаги *M* нуқтанинг жойлашиш ҳолати унинг яқин жойлашган фокусидан узоқлашиши билан аниқланади: яъни *FM = a* ва *FM =*

b. Агар расм текислигига перпендикуляр ҳолатда $PCAP_1$ бошланғич меридиан текислигида жойлаштирилган M нуқтанинг λ узоқлиги берилган бўлса, шунингдек, ушбу нуқтанинг кенглиги – φ билан ифодаланса, у ҳолда сферик тригономерия формулалари бўйича (марказий бурчак унга таянувчи ёй билан ўлчанишини ҳисобга олган ҳолатда) қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$cos a = \sin\varphi \sin\varphi_0 - \cos\varphi \cos\varphi_0 \sin\lambda;$$

$$cos b = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \sin\lambda; \qquad (14)$$

бу ерда φ_0 – фокус нуқтасининг кенглиги.

Эллиптик координаталар учун $AC = u$ ёйни ва $AB = \upsilon$ ёйни қабул қиламиз. a ва b қийматларни билган ҳолатда, қуйидаги формулалар ёрдамида u ва υ эллипс координаталарни топиш мумкин:

$$\sin u \sin\varphi_0 = \cos\frac{a+b}{2};$$

$$\qquad (15)$$

$$\sin\upsilon \cos\varphi_0 = \sin\frac{a-b}{2}.$$

Натижада, назорат формуласи қуйидаги кўринишда бўлади: $\cos u \cos\upsilon = \cos\varphi \cos\lambda.$

Келтирилган формулалардан эллиптик координаталар шар сиртида сферик эллипслар фокусларининг (F, F', $F1$, F'_1) жойлашиш ҳолатига боғлиқлиги кўринади. Бу белгиси бўйича эллиптик координаталар турли хил тизимларга ажратилади (хусусий ҳолатда Гюй, Пирс, Адамс координаталари). Бу координаталар ёрдамида ишлаб чиқилган проекциялар кейинги бобларда қараб чиқилади.

Уч ўқли эллипсоид координаталари тизими

Уч ўқли эллипсоидни тадбиқ этилиши бўйича олимлар томонидан геодезик координаталар тизимига турли хилда таърифлар берилган. Н.Е.Беспалов уч ўқли эллипсоидни φ кенглиги сифатида уни айланиш ўқи ва юзасига тушадиган нормал ўртасидаги 90° гача тўлдириладиган бурчакни, меридианни эса – эгрини, уни нуқтасида барча нормаллар баъзиларига нисбатан эллипсоидга перпендикуляр, ҳар бир меридиан учун доимий, экватор текислигидаги тўғри чизиқни олишни таклиф қилади.

У шимолий йўналиш чизиғи сифатида – уринма ҳолатида ҳар қандай нуқтаси шимолга (ёки жанубга) томон йўналган эгри чизиқни танлайди. Ляма қуйидаги формулалар орқали ифодаланадиган уч ўқли эллипсоиднинг u ва υ эллиптик координаталаридан фойдаланишни таклиф қилади.

$$u = b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 u;$$

$$\upsilon = b^2 - (b^2 - c^2)\cos^2 \upsilon,$$

бу ерда a, b, c – ўч ўқли эллипсоиднинг ярим ўқлари.

Ўч ўқли эллипсоиднинг фазовий коодинаталарда қуйидаги тенгламасини ҳисобга оладиган бўлсак,

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 1,$$

ушбу координаталарни эллиптик координаталар билан боғлиқлигини қуйидаги кўринишда ифодалашимиз мумкин:

$$X^2 = a^2\,\frac{(a^2 - u)(a^2 - \upsilon)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)};$$

$$Y^2 = b^2\,\frac{(b^2 - u)(b^2 - \upsilon)}{(b^2 - c^2)(b^2 - c^2)};$$

$$Z^2 = c^2\,\frac{(c^2 - u)(c^2 - \upsilon)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Агар белгилашларни киритган ҳолда

$$\lambda^2 = (a^2 - b^2)/(a^2 - c^2);\ \lambda^2{}_1 = (b^2 - c^2)/(a^2 - c^2);\ \lambda^2 + \lambda^2{}_1 = 1,$$

тенгликни ҳосил қиламиз:

$$X = a \sin u\Delta';$$

$$Y = b\cos u \cos \upsilon;$$

$$Z = c\sin \upsilon\Delta,$$ бунда

$$\Delta' = \sqrt{1-\lambda_1^2 \sin^2 \upsilon}; \quad \Delta = \sqrt{1-\lambda_1^2 \sin^2 u}.$$

Ф.Н.Красовский ва Н.А.Беспалов тадқиқотларидан *X, Y, Z* фазовий тўғри бурчакли координаталар ва геодезик – *φ, λ* координаталар ўртасидаги ўзаро боғлиқлик формулалари қуйидаги кўринишда келтирилади:

$$X = acos\varphi \cos\lambda / W;$$

$$Y = a(1-e^2)\cos\varphi \cos\lambda / W;$$

$$Z = a(1-e^2)\sin\varphi / W,$$

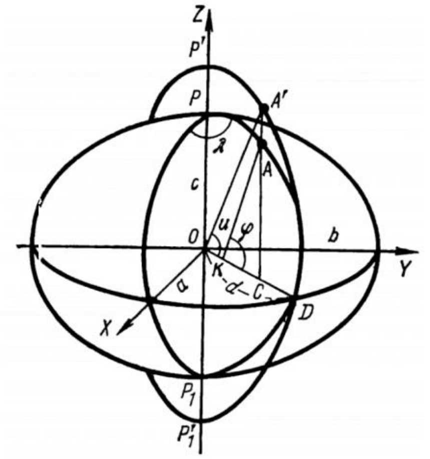
бу ерда

$$W = \sqrt{1-e\sin^2\varphi - e_a^2\cos^2\varphi \sin^2\lambda},$$

$$e^2 = (a^2-c^2)/a^2; \quad e_a^2 = (a^2-b^2)/a^2;$$

бу ерда *e* ва e_a – мос ҳолатда, биринчи қутбий ва экваториал эксцентриситетлар.

Иккинчи фикрларга мувофиқ, шартли-геодезик ва геодезик кенгликлар, геодезик узоқлик, шунингдек, келтирилган кенглик тушунчалари киритилган. *Геодезик узоқлик λ* деб эллипсоид ўқи орқали ўтувчи, бошланғич ва жорий пунктларни текисликлари ўртасидаги икки қиррали бурчакга айтилади.



Кенглик тушунчасини киритиш учун олайлик *AK* чизиқ (4–расм) *A* нуқтада PDP_1 эллипснинг нормали бўлсин.

4–расм. **Ўч ўқли эллипсоид координаталари тизими.**

d ва c ярим ўқлар билан берилган айланма эллипсоид учун бу нормал бир вақтнинг ўзида унинг юзасида A нуқтага нисбатан нормал ҳисобланиши мумкин ва шунингдек, φ бурчак ушбу нуқтада геодезик кенглик сифатида олиниши мумкин. Бироқ, уч ўқли эллипсоидда AK нуқта унинг юзаси учун нормал ҳисобланмайди, φ бурчак – геодезик кенглик эмас. Шу сабабли, A нуқтада PAP_1 эллипсга нисбатан AK нормал ва $0D$ чизиқ ўртасидаги φ бурчакни шартли – геодезик кенглик сифатида белгилаймиз. A нуқтада уч ўқли эллипсоид юзасини кесиб ўтувчи нормал ва экватор текислиги ($Z = 0$) орасмидаги φ бурчак *геодезик кенглик* дейилади.

PDP_1 меридиан текислигида $d = 0D$ радиусли доирани ўтказамиз. Бунда, айланма эллипсоидга ўхшаш кўринишда $0A'$ чизиқ ва $0D$ ўртасида u бурчакни ўч ўқли эллипсоид ушбу нуқтасини келтирилган кенглиги деб номлаймиз. Ўч ўқли эллипсоид юзасида қуйидаги параметрик тенгламаларни келтирамиз:

$$X = d\cos u\cos\lambda;$$

$$Y = d\cos u\sin\lambda;$$

$$Z = c\sin u.$$

4-расмга мувофиқ, бунда

$$d = ab(a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda)^{-1/2}.$$

Қуйидаги тенгликни киритиш орқали

$$p^2 = 1 - c^2/d^2,$$

шартли–геодезик ва келтирилган геодезик кенгликлар ўртасидаги боғлиқлик формуласини ҳосил қиламиз:

$$\cos^2 u = \cos^2\varphi/(1 - p^2\sin^2\varphi);$$

$$tg\varphi = \frac{d}{c}tgu.$$

Ўч ўқли эллипсоид юзасига нисбатан нормал тенгламасини ёзиш орқали берилган нуқтада ва текисликда (*Z=0*) геодезик кенглик қийматини аниқлаш учун тенгламани аналитик геометрия формулалари бўйича келтириб чиқарамиз:

$$\sin\varphi = d^2\sin^2 u / \sqrt{c^2\cos^2\lambda(d_\lambda + d^2) + d^4\sin^2 u},$$

ёки

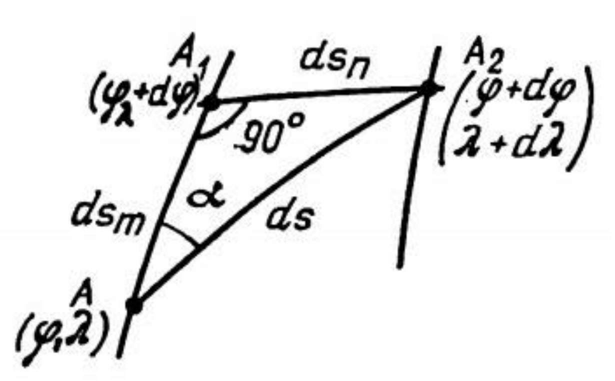
$$\sin\varphi = \sin\varphi / \sqrt{1 + (d_\lambda / d)^2\cos^2\varphi},$$

бу ерда

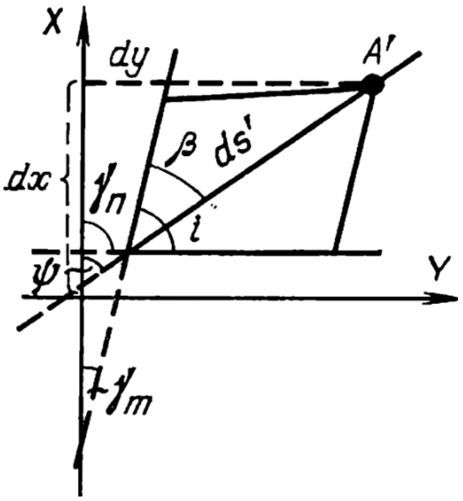
$$d_\lambda \;\, / \, d = -\sin 2\lambda \frac{a^2 - b^2}{2}(a^2\sin^2\lambda + \left|b^2\cos^2\lambda\right)^{-1}.$$

Қайд қилиш жоизки, уч ўқли эллипсоидни ва нисбатан кўп даражала текисликларни бошқа юзаларда тасвирлаш масаласини, шунингдек геодезик ва бошқа масалаларни юзалар координаталари тизимидан фойдаланиб ечиш келгусида янги тадқиқотларни ўтказилишини талаб этади.

3–§. Хусусий масштаблар формулаларини келтириб чиқариш. Меридианлар ва паралеллар бўйича масштаблар



5–расм. **Элементар сфероидик учбурчак.**



6–расм. **Проекцияда азимутни тасвирлаш.**

Узунлик хусусий масштаби формула билан (2) $\mu = ds'/ds$ аникланади. Элементар сфероидик учбурчакдан (5-расм),

$$ds' = \sqrt{dx^2 + dy^2};\; ds = \sqrt{ds_m^2 + ds_n^2}$$

Бу учбурчакдан меридианнинг чексиз кичик ёйи

$$ds_m = Md\varphi. \tag{16}$$

бу ерда M — меридиан эгрилик радиуси; параллелни чексиз кичик ёйи

$$\mathrm{ds_n} = \mathrm{rd}\,\lambda \tag{17}$$

бунда r — параллел радиуси эгрилиги.

M қийматини (3) формуладан олиб,

$$\mu^2 = (\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2)/(\mathrm{M d}\varphi^2 + \mathrm{r}^2\mathrm{d}\,\lambda^2). \tag{18}$$

(1) формуладан дастлабки ҳосилаларни олиб,

$dx = x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda;$

$dy = y_\varphi d\varphi + y_\lambda d\lambda$; қуйидагича ёзиш мумкин

$$d^2s' = dx^2 + dy^2 = x_\varphi^2 d\varphi^2 + 2x_\varphi x_\lambda d\varphi d\lambda + x_\lambda^2 d\lambda^2 + y_\varphi^2\, d\varphi^2 +$$
$$+2y_\varphi y_\lambda d\varphi d\lambda + y_\lambda^2\; d\lambda^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + \mathrm{g}\mathrm{d}\lambda^2. \tag{19}$$

Охирги формулада Гаусс коэффициентлари ишлатилган:

$$ex_\varphi^2 + y_\varphi; \qquad x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda; \tag{20}$$

$g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2$; $h = \sqrt{eg - f^2} = x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi$.

(19) формулани (18) масштаб формуласига қўйиб,

$$\mu^2 = \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + \mathrm{g}\mathrm{d}\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + r^2\mathrm{d}\lambda^2} \text{ оламиз.} \tag{21}$$

Формулага (21) ёрдамчи функция киритамиз $u = \frac{d\varphi}{d\lambda}$

сурат ва махражни λ^2 бўлсак, унда

$$\mu^2 = \frac{eu^2 + 2fu + \mathrm{g}}{M^2u^2 + r^2}. \tag{22}$$

Элементар сфероидик учбурчакдан ёрдамчи функция u қийматини топамиз (5-расм)

$tg\alpha = ds_n/ds_m = rd\,\lambda/\mathrm{Md}\varphi = \mathrm{r/Mu};$

$$u = \frac{r}{M} = ctg\alpha \qquad (23)$$

(22) формулага қуйиб,

$$\mu^2 = \frac{\left[e\frac{r^2}{M^2} = ctg^2\alpha + 2f\frac{r}{M}ctg\alpha + g\right]}{[r^2(ctg^2\alpha + 1)]} =$$

$$= \frac{e}{M^2}cos^2\alpha + 2\frac{f}{Mr}cos\alpha\ sin\alpha + \frac{g}{r^2}sin^2\alpha.$$

Охирги формулани соддалаштириш учун қуйидаги белгилашни киритамиз,

$$\mathrm{P} = \mathrm{eM}^2; \quad \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{Mr}}; \quad \mathrm{R} = \mathrm{g}/\mathrm{r}^2 \qquad (24)$$

ва узунлик масштаби умумий формуласини оламиз:

$$\mu^2 = \mathrm{P}\cos^2\alpha + \mathrm{Q}\sin 2\alpha + \mathrm{R}\sin^2\alpha. \qquad (25)$$

Агар $\alpha = 0(180°)$, $\mu^2 = \mathrm{m}^2 = \mathrm{P}$, меридианлар масштаби

$$\mathrm{m} = \sqrt{\mathrm{e}}/\mathrm{M} \qquad (26)$$

α= 90° (270°), $\mu^2 = \mathrm{n}^2 = \mathrm{R}$, параллеллар масштаби

$$\mathrm{n} = \sqrt{\mathrm{g}}/\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{g}}/\mathrm{N}\cos\varphi. \qquad (27)$$

Шар учун

$$m = \sqrt{e}/R; \quad n = \sqrt{g}/Rcos\varphi.$$

4–§. Проекцияда азимут формулаларини келтириб чиқариш. Меридиан ва параллеллар ўртасидаги бурчак. Тўрнинг ортогоналлик шартлари

Текисликдаги элементар сфероидик трапециянинг тасвирини қараб чиқамиз (6-расм). Бу трапециянинг томонлари сифатида меридианлар ва параллелларнинг элементар ёйлари олинади. Хохлаган азимут йўналишини (α) проекцияда β орқали белгилаймиз.

X ўқининг мусбат йўналиши ва ds' элементар кесма билан ғарбий меридиан ва жанубий параллел тасвиридан ҳосил қилинган ψ, γ_m ва γ_n бурчакларни аниқлаймиз. 6-расмдан

$$tg\psi = dy/dx = (y_{\varphi}\ d\varphi + j_{\lambda} d\lambda)/(\mathrm{x}_{\varphi}\mathrm{d\varphi} + \mathrm{x}_{\lambda}\mathrm{d\lambda})$$

Меридианга λ = const, параллелга φ = const, қабул қилинганда, қуйидаги тенглик олинади

$tgy_m = y_{\varphi}/x_{\varphi}; \quad tgy_n = y_{\lambda}/x_{\lambda}.$

Элементар қисм азимути ds'

$\beta = \psi - y_m$

Маълумки,

$tg\beta = \frac{tg\psi - tgy_m}{1+tg\psi\ tgy_m}$

Охирги формулага tg ψ ва tg y_m қўйилганда,

$tg\beta = \frac{x_{\varphi}y_{\varphi}d\varphi + x_{\varphi}y_{\lambda}d\lambda - x_{\varphi}y_{\varphi}d\varphi - x_{\lambda}y_{\varphi}d\lambda}{x_{\varphi}^2 d\varphi + x_{\varphi}x_{\lambda}d\lambda + y_{\varphi}^2 d\varphi + x_{\varphi}y_{\lambda}d\lambda}$

Маълум ўзгартиришлар ва қийматлар (20) формуладан олиниб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз

$tg\beta = \frac{(x_{\varphi}y_{\lambda} - x_{\lambda}y_{\varphi})d\lambda}{(x_{\varphi}^2 + y_{\varphi}^2)d\varphi + (x_{\varphi}x_{\lambda} + y_{\varphi}y_{\lambda})d\lambda} = \frac{hd\lambda}{ed\varphi + fd\lambda}$

Ёрдамчи функция $u = d\varphi/d\lambda$ киритилгандан кейин,

$tg\beta = h/(eu + f)$ ҳосил бўлади. (28)

Охирги тенгликга (23) дан қийматни қўйсак,

$u = \frac{r}{M}\mathrm{ctg}\alpha$ оламиз

$tg\beta = Mh/(er\ ctg\alpha + Mf)$ (29)

ёки

$tg\beta = Mhtg\alpha/(er + Mftg\alpha)$ (30)

6-расмга асосланиб, меридианлар и параллеллар тасвири орасидаги бурчак (i) қийматини олиш мумкин

$i = y_n - y_m$, сўнгра

$tgi = \frac{tg\ y_n - tgy_m}{1+tg\ y_n tgy_m} = \frac{y_{\lambda}/x_{\lambda} - y_{\varphi}x_{\varphi}}{1+(y_{\lambda}/x_{\lambda})(y_{\varphi}x_{\varphi})}.$

Тенглик умумий махражга келтирилгандан сўнг

$tgi = (x_{\varphi}y_{\lambda} - x_{\lambda}y_{\varphi})/(x_{\varphi}x_{\lambda} + y_{\varphi}y_{\lambda}).$

Олинган натижа Гаусс коэффициентлари орқали ифодаланганда

$tgi = h/f.$ (31) тенглик олинади.

Охирги формулани бошқа йўл билан ҳам олиш мумкин.

α=90° бўлганда проекциядаги β азимутни меридианлар ва параллеллар орасидаги текисликдаги i бурчак сифатида қабул қилиш мумкин

$$tgi = tg\beta_{\alpha=90°} = h/f. \quad (31)$$

Бурчак i = 90°+ε, бу ерда ε — меридианлар ва параллеллар орасидаги бурчакнинг 90° дан фарқланиши бўлиб, бу қиймат картографик тўрнинг ортогонал эмаслигини характерлайди.

Агар tgi = tg (90°+ε) =h/f, унда i соат йўналиши бўйича ҳисобланганда (биринчи чоракда)

$$tg\varepsilon = -f/h \quad (32)$$

Картографик тўр ортогонал бўлиши учун ε нолга тенг бўлиши керак, бу фақат қуйидаги шарт бажарилганда мумкин $f = 0.$ Тўрнинг ортогоналлик шарти қуйидаги кўринишга эга

$$f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0 \quad (33)$$

Математик картографиянинг алоҳидаги масалаларини ўрганишда нафақат tg f қийматни, балки бошқа тригонометрик функциялар қийматини ҳам билиш фойдали. Маълумки,

$$sin^2 i = tg^2 i/(1 + tg^2\, i) = h^2/(f^2 + h^2) = h^2/eg$$

$$sini = h/\sqrt{eg}. \quad (34)$$

sin i бурчаги мусбат бўлади, агар у азимут каби йўналиш бўйича ўлчанса,

$$cos^2 i = 1/(1 + tg^2 i) = \frac{f^2}{(f^2+h^2)} = \frac{f^2}{eg}$$

$$cosi = f/\sqrt{eg} \quad (35)$$

Охирги формула i бурчак қийматини аниқлаш имконини беради: агар f>0, то i<90°; f<0, i>90°; f = 0, i = 90° ва тўр ортогал бўлганда, яъни олдин олинган далил - картографик тўрни ортоганал эканлиги исботланади.

Агар азимутнинг проекциядаги формуласи маълум бўлса, унда узунлик масштаби формуласини текисликдаги координата ва азимут функцияларидан олиш мумкин. (22) формуладан

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{M^2u^2 + r^2}{eu^2 + 2fu + g}.$$

(28) формуладан қийматларни суратга қўйиб, оламиз

$$u = \frac{h}{e} ctg\beta - \frac{f}{e}.$$

ва махражга қўйилганда

$eu^2 + 2fu + g = h^2/e\ sin^2\beta$. ҳосил бўлади.

Унда

$$sin^2\beta = \frac{tg^2\beta}{1+tg^2\beta} = \frac{h^2}{e^2u^2+2fue+f^2+h^2} = \frac{h^2}{e(eu^2+2fu+g)}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{esin^2\beta}{h^2}\left[M^2\left(\frac{h}{e}ctg\beta - \frac{f}{e}\right)^2 + r^2\right] == \frac{e\ sin^2\beta}{h^2}\left(\frac{M^2h^2}{e^2}ctg^2\beta - 2\frac{M^2hf}{e^2}ctg\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{M^2f^2+e^2r^2}{e^2}\right) = \frac{M^2}{e}cos^2\beta - 2\frac{M^2f}{eh}cos\beta sin\beta + \frac{M^2f^2+e^2r^2}{eh^2}sin^2\beta.$$

Белгилаймиз

$$\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{e}} = \mathrm{P}_1; \quad -\frac{\mathrm{M}^2\mathrm{f}}{\mathrm{eh}} = \mathrm{Q}_1; \quad \frac{\mathrm{M}^2\mathrm{f}^2+\mathrm{e}^2\mathrm{r}^2}{\mathrm{eh}^2} = \mathrm{R}_1; \text{ унда} \qquad (36)$$

$$1/\mu^2 = \mathrm{P}_1\cos^2\beta + 2\mathrm{Q}_1\cos\beta\sin\beta + \mathrm{R}_1\sin^2\beta \qquad (37)$$

ёки

$$1/\mu^2 = P_1cos^2\beta + 2Q_1cos\beta sin\beta + R_1sin^2\beta.$$

Олинган формулани (25) формула билан таққосласак, кўплаб умумийликларни аниқлаш мумкин.

5–§. Берилган нуқтада узунлик масштаби ўзгаришини тадқиқ қилиш. Асосий йўналишлар

Узунлик масштабининг азимутга боғлиқлиги (*25*) формуладан маълум, узунлик масштабининг экстремал қийматини аниқлаш учун азимут бўйича масштаб ҳосиласини олиш ва уни нолга тенглаштириш керак. Ҳосила нолга тенг бўлганда азимут қиймати (α) стационар қиймат деб номланади, унда эстримум ҳолат қайд қилиниши мумкин.

$$d\mu^2 / d\alpha = -2P\cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2Q\cos 2\alpha_0 +$$
$$+ 2R\cos\alpha_0 \sin\alpha_0 = (R-P)\sin 2\alpha_0 + 2Q\cos 2\alpha_0 = 0,$$

бу ерда $\alpha_0 -$ $d\mu^2 / d\alpha = 0$ тенгламанинг асоси ҳисобланади, яъни α азимутнинг хусусий қийматини ифодалайди. Ундан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$tg 2\alpha_0 = 2Q/(P-R) = 2Mfr/(er^2 - gM^2). \qquad (38)$$

Ҳосил қилинган сонли қиймат – $tg 2\alpha_0$ иккита α_0 қиймат учун ва ишораси бўйича бир хилда бўлиб, бир-биридан 90^o бурчак остида ва 0^o ҳамда 180^o оралиғида жойлашиши билан фарқланади. Ушбу α_0 нинг қийматлари учун узунлик масштаби минимал ва максимал бўлиши мумкинлигини исботлаймиз.

α_0 бўйича μ^2 қийматдан иккинчи ҳосилани топамиз:

$$d^2\mu^2 / d\alpha_0^2 = (R-P)\cos 2\alpha_0 - 4Q\sin 2\alpha_0 = 2\cos 2\alpha_0 (R - P - 2tg 2\alpha_0).$$

α_0 азимут учун ва $\alpha_0 +$ 90^o ҳолатда иккинчи ҳосиланинг қарама – қарши ишорага эга бўлишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас, бунда қавс ичида келтирилган ифода ишорага таъсир кўрсатмайди. Ўз навбатида, берилган нуқтанинг тасвирланишида иккита ўзаро перпендикуляр ҳолатдаги йўналишлар мавжуд бўлиб, бу йўналишлар бўйича узунлик масштаблари максимал ва минимал қийматларга эга ҳисобланади. Ушбу йўналишларнинг проекцияда қандай бурчак остида кесишишини таҳлил қиламиз.

Проекцияда α_0 азимут β_0 азимутга ва ($\alpha_0 +$ 90^o) азимут эса – β_1 азимутга мос келади. (*29*) тенгламага мувофиқ қуйидаги тенглик ўринли:

$$t\beta_0 = Mh/(erctg\alpha_0 + Mf)$$
$$tg\beta_1 = Mh/(-ertg\alpha_0 + Mf).$$

Агар, $\beta_1 = \beta_0 + 90^{\circ}$ тенглик ўринли ҳисобланса, у ҳолда ушбу азимутларнинг ҳосила тангенси қиймати минус бирга тенг бўлиши керак:

$$t\beta_0 tg\beta_1 = \frac{M^2h^2}{-e^2r^2 + Mfer(ctg\alpha_0 - tg\alpha_0) + M^2f^2} = -1.$$

Маълумки,

$$ctg\alpha_0 - tg\alpha_0 = 2ctg2\alpha_0.$$

(*38*) формуладан

$2ctg2\alpha_0 = (er^2 - gM^2)/Mfr,$ ундан:

$$t\beta_0 tg\beta_1 = \frac{M^2h^2}{-e^2r^2 + e^2r^2 - egM^2 + M^2f^2} = \frac{h^2}{f^2 - eg} - 1,$$

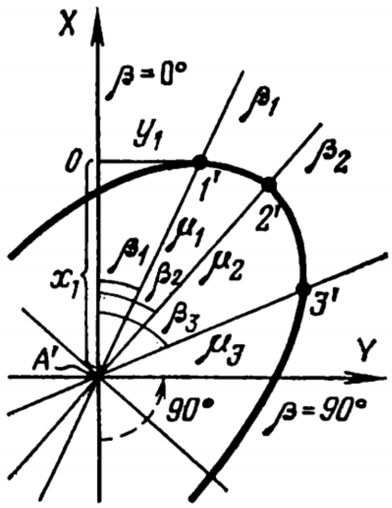
ўз навбатида, $\beta_1 = \beta_0 + 90^{\circ}$ тенглик кучга эга бўлади.

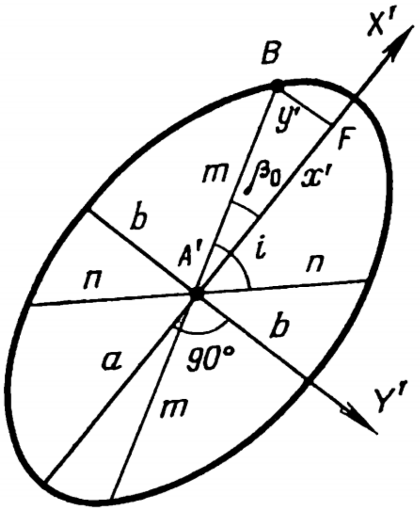
Картага олинаётган юзада иккита ўзаро перпендикуляр ҳолатда жойлашган йўналишлар мавжуд, улар проекцияда ҳам ўзаро перпендикуляр ҳолатда бўлади. Буларни *асосий йўналишлар* сифатида қабул қиламиз ва бу йўналишлар бўйича масштаблар экстремал ҳисобланади. Агар карта тўри ортогонал бўлса, у ҳолда асосий йўналишлар меридианлар ва параллеллар билан мос тушади.

6–§. Хатоликлар эллипси. Экстремал масштаблар. Узунлик хатолиги ўлчамлари

Маркази *A* нуқтада бўлган чексиз даражада кичик радиусга эга, картага олинаётган доира юзасини қараб чиқамиз ва бу доиранинг проекцияда қандай тасвирланишини ўрганамиз. Берилган нуқтада узунликнинг хусусий масштаби α азимутга боғлиқ; картага олинаётган юзада α_1 азимут проекцияда β_1 азимутга мос келади (7–расм), ушбу йўналиш бўйича масштабни μ_1 билан белгилаймиз; α_2 азимут проекцияда β_2 азимутга мос келади, бу йўналиш бўйича узунлик масштаби μ_2 билан ифодалаймиз ва ҳ.к.

Картага олинаётган юзада берилган A нуқтанинг тасвири бўлган A' нуқтадан меридиан тасвири билан ташкил этилувчи йўналишни ўтказамиз, бу йўналиш X ўқ сифатида қабул қилинади, бурчаклар β_1, β_2 ва ҳоказо қийматлар билан ифодаланади.





7–расм. **Хатоликлар эллипсини қуриш схемаси.**

8–расм. **Хатоликлар эллипси элементлари**

Ушбу йўналишларда μ_1, μ_2 ва ҳ.к. узунликнинг хусусий масштаблари сон қийматларига тенг бўлган кесмаларни туширамиз. Кесимларнинг охирги нуқталарини туташтириш орақли, узунлик масштабининг азимутга боғлиқлигини кўрсатиб берувчи эгри чизиқни ҳосил қиламиз.

Тўғри бурчакли координаталар бошланғич нуқтаси сифатида A' нуқтани ясси қутбли координаталар учун қутбларни киритган ҳоатда (β ва μ) қабул қилиб, қуйидаги тенгламани ёзишимиз мумкин:

$$x = \mu\cos\beta;\ \ y = \mu\sin\beta, \tag{39}$$

бундан

$$\cos\beta = x/\mu;\ \ \sin\beta = y/\mu. \tag{40}$$

(*40*) тенгламадаги қийматни (*39*) тенгламага қўйиш орқали, A' нуқтада белгиланган координаталар тизимининг марказий эгри чизиғи иккинчи тартибдаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$P_1x^2 + 2Q_1xy + R_1y^2 = 1.$$

Келтирилган охирги тенгламани тадқиқ қилиб, дискриминант қийматини топамиз

$$P_1R_1 - Q_1^2 = \frac{M^2r^2}{h^2} > 0$$

ва ўрганилаётган эгри чизиқ эллипс эканлигини аниқлаймиз. Демак, умумий ҳолатда (чексиз кичик қисмларга ўхшашлик сақланмаган тасвир шароитида) картага туширилувчи юзада чексиз даражадаги кичик доира проекцияда чексиз даражада кичик эллипс билан тасвирланади. Ушбу чексиз даражада кичик ўлчамдаги эллипсга мос келувчи якуний ўлчамдаги эллипс *эллипс хатолиги* деб номланади. Эллипс хатолиги тушунчаси математик картографияга Тиссо томонидан киритилган.

Бу эллипснинг ярим ўқлари қиймати экстремал масштабларга, туташ ярим диаметрлари эса – меридиан ва параллеллар бўйича масштабларга мос келади (8–расм). Эллипсоиднинг (*сфера*) меридиан ва параллеллари ҳар доим ўзаро перпендикуляр. Бунда проекция афинавий ўзгартириш тавсифларига эга бўлиб, йўналиш текислигида ўзаро перпендикуляр ҳолатда тасвирланувчи эллипс хатолиги диаметри бошқа диаметрларга параллел ҳолатдаги хордани (*хорда* – эгри чизиқнинг иккита нуқтасини туташтирувчи тўғри чизиқ) икки қисмга ажратади, яъни туташ кўринишда қайд қилинади.

Хатоликлар эллипсининг меридианлар ва параллеллар чизиқларига нисбатан ориентирланишини аниқлаш учун эллипснинг қуйидаги кўринишдаги умумий тенгламасидан фойдаланамиз:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Бунга (*39*) формуладаги x ва y қийматларни қўйиш орқали, хусусий ҳолатда (меридианлар учун) $\mu = m$ ва $\beta = -\beta_0$ (соат стрелкаси йўналишига қарма–қарши йўналишда) шарти бўйича қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\frac{m^2\cos^2\beta_0}{a^2} + \frac{m^2\sin^2\beta_0}{b^2} = 1.$$

Тригонометрик функциялар назариясидан маълумки,

$\cos^2\beta_0 = 1/(1+tg^2\beta_0);\ \sin^2\beta_0 = tg^2\beta/(1+tg^2\beta_0),$ ундан

$$\frac{m^2}{a^2(1+tg^2\beta_0)} + \frac{m^2 tg^2\beta_0}{b^2(1+tg^2\beta_0)} = 1;$$

$$a^2(m^2-b^2)tg^2\beta_0 = b^2(a^2-m^2);$$

$$tg\beta_0 = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2-b^2}}. \qquad (41)$$

Проекцияни хохлаган нуқтасида эллипсни тузиш учун юқорида келтирилган олтита қийматни билиш керак: яъни – *m, n, a, b, i* (ёки *ε*) ва β_0. Эллипсга нисбатан Апполоний қоидасини тадбиқ этиш орқали, экстремал масштаб билан меридиан ва параллеллар бўйича масштаб ўртасидаги боғлиқликни топиш мумкин.

1–қоида. Эллипсни туташган ярим диаметрлари квадратлари йиғиндиси – доимий қиймат бўлиб, унинг ярим ўқлари квардратлари йиғиндисига тенг:

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2.$$

2–қоида. Эллипсни туташ ярим диаметрлари асосида тузилган параллелограммнинг майдони – доимий қиймат бўлиб, унинг ярим ўқлари асосида тузиб чиқилган тўғрибурчак майдонига тенг:

$$mn\sin i = ab. \qquad (42)$$

Келтирилган тенгламаларни биргаликда ечамиз (келтирилган охирги тенгламанинг ҳар иккала қисмини иккига кўпайтириш орқали)

$$m^2 + n^2 + 2mn\sin i = (a+b)^2;$$

$$m^2 + n^2 - 2mn\sin i = (a-b)^2$$

ва *A* ва *B* нинг янги ифодаланишларни киритамиз:

$$A = a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\sin i};$$

$$B = a - b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\sin i}.$$

Бу ҳолатда асл экстремал масштаблар қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$a = (A + B)/2; \;\; b = (A - B)/2. \qquad (43)$$

$\sin i$ қиймати (*34*) формуладан маълум.

Ҳозирги вақтда проекциянинг алоҳидаги нуқталарида хатоликларни тавсифлаш учун кўп ҳолатларда *изокола*лардан фойдаланилади, изоколаалар – тенг хатоликли чизиқлар бўлиб, улар картада турли хил хатоликларнинг қиймати ва тақсимланиш характери ҳақида кўргазмали тасаввурга эга бўлишни таъминлайди.

Хатоликларни аниқлашда берилган йўналиш бўйича нуқтада узунлик хатолигига нисбатан ўлчовларни барча йўналишлар бўйича нуқталардаги узунлик хатоликларидан, бутун картага олинаётган ҳудуд бўйича узунликлар хатоликлари ўлчамларидан фарқлаш муҳим ҳисобланади.

Берилган нуқтада узунлик хатолиги ўлчовини ε қиймат билан белгилашни қабул қиламиз. Бу қийматни асосий йўналиш бўйича узунликни ўртача квадратли хатолиги бўйича тавсифлаш мумкин:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2\right] = \frac{1}{2}(\upsilon_a^2 + \upsilon_b^2) = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b)$$

ёки барча йўналишлар бўйича олсак, у ҳолда

$$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mu - 1)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\upsilon_\alpha^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^2 \mu d\alpha.$$

Бутун картага олинаётган ҳудудда узунлик хатолиги ўлчови қуйидаги формула билан аниқланиши мумкин:

$$E_1^2 = \frac{1}{F}\int_F \varepsilon_1^2 dF \quad \text{ёки} \quad E_2^2 = \frac{1}{F}\int_F \varepsilon_2^2 dF\,,$$

бу ерда F – тасвирланаётган ҳудуд майдони. қиймат E_1^2 *Эйри мезони*, E_2^2 – *Иордан мезони* дейилади.

Картографик проекцияларнинг муносиблигини баҳолаш учун юқорида кўрсатиб ўтилган ҳоҳлаган мезонлардан биридан фойдаланиш мумкин. Картография амалиётида интеграл йиғинди билан алмаштирилади, бунда тасвирланаётган ҳудуд *ΔF* участкаларга бўлинади ва ҳар бир участка учун ε қиймати ҳисоблади. Унда узунлик ўртача квадрат хатолиги формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$E = \sqrt{\frac{\Delta F}{F} \sum \varepsilon^2}.$$

7–§. Майдонлар хусусий масштаби

Майдонлар хусусий масштаби таърифидан келиб чиқиб:

$$p = dF' / dF.$$

Картага олинаётган юзада чексиз қийматдаги кичик меридиан ва параллеллар ёйлари билан чегараланган элементар трапеция майдони (9 *а* – расм) қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$dF = ds_m ds_n.$$

Текисликда 9*б*–расм орқали

$$dF' = ds'_m ds'_n \sin i.$$

Бундан майдон масштаби тенгламаси

$$p = \frac{ds'_m}{ds_m} \cdot \frac{ds'_n}{ds_n} \sin i = mn \sin i. \tag{44}$$

(42) формуладан $p = ab$ тенгликни оламиз.

Маълумки, $i = 90^\circ + \varepsilon$ унда:

$$p = mn \cos \varepsilon. \tag{45}$$

Келтирилган формулаларда майдон хусусий масштаби узунлик хусусий масштаблари орқали ифодаланган. Агар (*44*) формулага узунликнинг хусусий масштаби ва меридиан ва параллеллар ўртасидаги синус бурчак қиймати қўйилса, у ҳолда майдон хусусий масштаби формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$p = \frac{\sqrt{e}}{M} \cdot \frac{\sqrt{g}}{r} \cdot \frac{h}{\sqrt{eg}} = \frac{h}{Mr}. \qquad (46)$$

8–§. Бурчаклар максимал хатолиги

Картага олинаётган юзада иккита йўналиш асосида ҳосил бўлувчи u бурчак (10*а*–расм), текисликда акс эттирилишида (10*б*–расм) u' қийматни олади:

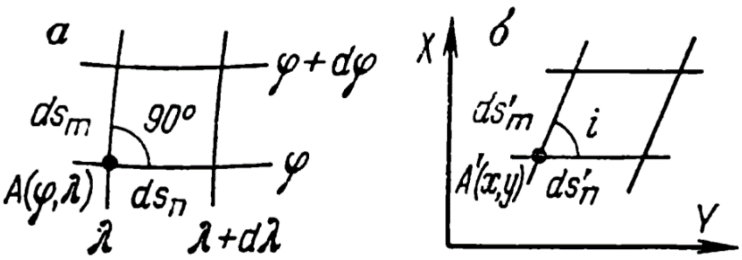
$$u = 180^\circ - 2\alpha; \quad u' = 180^\circ - 2\beta.$$

Бунда бурчак хатолиги қуйидаги тенглик билан ифодаланади:

$$u' - u = \Delta u = 2(\alpha - \beta),$$

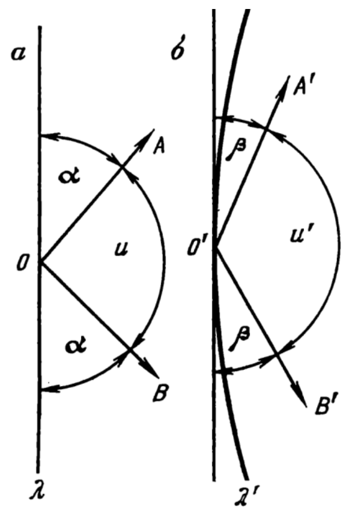
ундан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\Delta u / 2 = \alpha - \beta.$$



9–расм. **Элементар сферик трапециялар**,
а – юзада; б – текисликда.

Ортогонал тўр ($f = 0$) билан ифодаланувчи проекция учун (*30*) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:



10–расм. **Иккита йўналиш ўртасидаги бурчак,**
а – юзада; б – текисликда.

$$tg\beta = \frac{M\sqrt{eg}}{er} tg\alpha = \frac{M}{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{g}}{r} tg\alpha = \frac{n}{m} tg\alpha = \frac{b}{a} tg\alpha.$$

Келтирилган охирги тенгламанинг ўнг ва чап қисмларини $tg\alpha$ қийматидан айириб ташлаш ва $tg\alpha$ қийматга қўшиш орқали қуйидаги тengликларни ҳосил қиламиз

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{a-b}{a} tg\alpha;$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{a+b}{a} tg\alpha,$$

кейин юқоридаги тенгламани қуйидаги тенгламага бўлиш орқали, бир вақтнинг ўзида ўзаро фарқланишни ва тангенслар йиғиндиси қийматини уларнинг қийматига қуйида келтирилган, маълум бўлган тенгламадан келиб чиққан ҳолатда ўрин алмаштиришни амалга оширамиз

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}.$$

Бу ҳолатда қуйидаги тенгликлар ҳосил қилинади:

$$\sin(\alpha - \beta) / \sin(\alpha - \beta) = (a-b)/(a+b);$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\frac{\Delta u}{2} = \frac{a-b}{a+b} \sin(\alpha + \beta).$$

Агар қуйидаги тенглик қиймати амал қилса, у ҳолда Δu қиймати нисбатан юқорида бўлиши мумкин

$$\sin(\alpha + \beta) = 1.$$

Нисбатан катта қийматдаги бурчак хатолигини ω билан ифодалаймиз. Бу ҳолатда

$$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b). \qquad (47)$$

бу ердан

$$\cos(\omega/2) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)} = 2\sqrt{ab}/(a+b);$$

$$tg(\omega/2) = (a-b)/2\sqrt{ab}; \qquad (48)$$

$$tg\frac{\omega}{4} = \sqrt{\left(1-\cos\frac{\omega}{2}\ \right)/\left(1+\cos\frac{\omega}{2}\right)} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})/(\sqrt{a}+\sqrt{b});$$

$$tg\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \left(1+tg\frac{\omega}{4}\right)/\left(1-tg\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{a/b}. \qquad (49)$$

Амалиётда бурчак хатолигини аниқлаш учун ҳисоблашларни амалга ошириш осонроқ бўлган формуладан фойдаланилади. Жумладан, тенг қийматга эга проекцияларни ҳисоблашда тангенслар формуласидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлиб, бунда $p=1$ шароитда бу формула нисбатан оддий кўринишга эга бўлади.

9–§. Текисликда эллипсоидни тенг майдонли ва тенг бурчакли тасвирлаш

Математик картографияда тенг бурчакли ва тенг майдонли проекциялардан кенг миқёсда фойдаланилади. Тенг бурчакли тасвирлашнинг асосий шарти – чексиз кичик қисмларда ўхшашликларни таъминлашдир, демак узунлик масштаби йўналишга боғлиқ эмас. Агар, узунлик масштаби йўналишга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда унинг азимут бўйича ҳосиласи (α) нолга тенг бўлади:

$$d\mu^2/d\alpha = (R-P)\sin 2\alpha + 2Q\cos 2\alpha = 0.$$

Бу тенглик фақат $Q=0$ ва $P=R$ ҳолатлардагина амал қилади.

(*24*) тенгламага мувофиқ ҳолатда, қуйидаги тенгликлар олинади:

$$f/Mr = 0; \quad e/M^2 = g/r^2 \qquad (50)$$

ёки қуйидаги тенгликлар амал қилади:

$$f=0; \quad m^2 = n^2; \quad m=n.$$

Демак тенг бурчакли проекцияларда картографик тўр ортогонал бўлиб, масштаб $m=n=a=b$ йўналишга боғлиқ бўлади ва бурчак хатолиги проекцияда қайд қилинмайди, $\omega=0$.

Агар, (*50*) формулада *e, f* ва *g* қийматлар ўз ўрнига қўйилса, у ҳолда қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0;$$

$$\frac{1}{M^2}(x_\varphi^2 + y_\varphi^2) = \frac{1}{r^2}(x_\lambda^2 + y_\lambda^2).$$

Биринчи тенгламадан y_λ қийматни олиб, уни иккинчи тенгламага қўйиш орқали қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$x_\lambda = \pm\frac{r}{M}y_\varphi,$$

x_λ қийматни аниқлаш орқали, топамиз:

$$y_\lambda = \pm\frac{r}{M}x_\varphi.$$

Ҳосил қилинган тенгламаларда *h* қийматнинг мусбат қийматга эга бўлишини қайд қилинувчи ишорани танлаймиз. Тенг бурчакли проекция тенгламасининг якуний ҳолатдаги кўриниши *Коши–Риман тенгламаси* деб номланади:

$$x_\lambda = -\frac{r}{M}y_\varphi; \quad y_\lambda = +\frac{r}{M}x_\varphi. \qquad (51)$$

Тенг майдонли тасвирлашда картада тегишли майдонга картага олинаётган юзанинг тегишли майдони нисбатлари ўзгармас ҳолатда сақланади. Бунда майдон масштаби $p = const = 1$ билан белгиланади. (*46*) формуладан келиб чиққан ҳолатда

$p = h/Mr = 1$ олиш мумкин, бундан эллипсоид учун

$$h = Mr \qquad (52)$$

($p = const$ ҳолат учун $h = kMr$, бу ерда k – доимий коэффицент), шар юзаси учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$h = R^2\cos\varphi.$$

Назорат саволлари

1. Меридиан ва параллеллар чизиқлари қандай ҳосил қилинади?

2. Меридиан ва параллеллар тенгламасини ёзиб беринг.

3. Узунлик хусусий масштабига таъриф беринг.

4. Уч ўқли эллипсоид координаталари тизими ҳақида тушунча беринг.

5. Картографик тўр ортогоналлик шарти формуласини ёзинг.

6. Текисликда эллипсоидни тенг майдонли ва тенг бурчакли тасвирлаш деганда нимани тушунасиз, изоҳ беринг.

II БОБ.
ШАР СИРТИДА АЙЛАНМА ЭЛЛИПСОИДНИ ТАСВИРЛАШ

10–§. Шар сиртида айланма эллипсоидни тасвирлаш ҳақидаги асосий тушунчалар

Картографик проекциялар эллипсоидни бевосита текисликда тасвирлаш йўли билан ёки икки марталик тасвирлаш усули билан ҳосил қилиниши мумкин, бунда эллипсоид дастлаб шар юзасида тасвирланади, кейин эса шар текисликда акс эттирилади.

Картографик амалиётда икки марталик тасвирлаш усули проекциядаги хатоликларни камайтириш, уларни янада яхширoқ даражада проекцияда тақсимланиш, меҳнат ва вақтни тежаш нуқтаи назаридан олиб қаралганда, нисбатан оддий ва самарали усул ҳисобланади. Кўрсатиб ўтилган юзаларда тавсирлашнинг вазифаларини ҳал қилишнинг асосий қоидаларини қараб чиқамиз.

Олайлик, S эллипсоидда битта боғламли Δ_1 ёпиқ соҳа (худуд) ажратилган бўлсин, у шар юзасида тегишли Δ_2 соҳа унга мос келсин ва уларда қуйидаги координаталар тизими белгилансин: биринчи соҳада – геодезик координаталар тизими $\varphi = const$ ва $\lambda = const$ қабул қилинсин, иккинчи соҳада эса – географик координаталар тизими қабул қилинсин, $\varphi' = const$ ва $\lambda' = const$.

Биринчи соҳанинг ҳар бир нуқтаси иккинчи соҳанинг битта нуқтасига мос тушиши талабини белгилаймиз, унда ушбу нуқтанинг чексиз қийматда кичик ds силжиши натижасида иккинчи соҳада тегишли нуқтанинг чексиш кичик қийматга ($d\sigma$) силжиши ёки аксинча ҳолат шарти таъминланиши талаби қондирилади, деб ҳисоблаймиз. У ҳолда, эллипсоиднинг шар юзасида тасвирланиши тенгламаси умумий ҳолатда қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\varphi' = f_1(\varphi, \lambda); \quad \lambda' = f^2(\varphi, \lambda),$$

бу ерда f_1, f_2 – бир хил қийматга эга бўлган, узлуксиз ва мустақил функциялар.

Ҳозирги пайтда бу кўринишда тавсирлашларнинг кўплаб ҳар хил усуллари ишлаб чиқилган, масалан, геодезик тасвирлаш (жумладан, Бессель усули ҳам), нормаллар бўйича мос келиш усули ва ҳ.к. Нисбатан оддий усул сифатида қутб сиқилишини эътиборга олмаса ҳам бўладиган ва эллипсоид ва шарнинг кенглик ва узоқлик қийматлари тенг деб ҳисобланадиган усул кўрсатиб ўтилади, яъни: $\varphi' = \varphi$ ва $\lambda' = \lambda.$ Бу ҳолатда эллипсоиднинг ўрнини босадиган шар радиусини хатоликни камайтириш учун картага олинаётган ҳудуднинг ўрта параллелларининг ўрта эгрилик радиуси (φ_0) сифатида аниқиланади:

$$R = \sqrt{M_0 N_0},$$

ёки ушбу ҳудудни четки параллелларидаги – $\varphi_{ж}$ ва $\varphi_{ш}$ ўртача эгрилик радиуси сифатида аниқланади:

$$R = \sqrt{R_{ж} R_{ш}}.$$

Айрим ҳолатларда шар ер эллипсоиди ҳажмига тенг деб олинади ва бундай вазиятда

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

бу ерда M, N – меридиан кесманинг ва биринчи вертикалнинг кесмаси эгрилик радиуслари қийматлари бўлиб, (*3*) формула билан аниқланади; a ва b – айланма эллипсоидни ярим ўқлари.

Тасвирлашнинг кўрсатиб ўтилган усули майда масштабли карталарни тузишда фойдаланилиши мумкин, бундай тасвирлашда хатоликларни ҳисобга олмаслик мумкинлиги белгиланади. Математик картографияда тенг бурчакли, тенг майдонли ва тенг оралиқли тасвирлаш усуллари нисбатан кенг тарқалган.

Нисбатан кўп ҳолатларда фойдаланиладиган усулларда эллипсоид ва шар экватор текисликлари ва уларнинг марказлари ўзаро мос тушади, деб тахмин қилинади, эллипсоиднинг параллеллари шар параллелари сифатида тасвирланади; уларнинг ўрта меридианлари ўзаро мос тушади ва нолга тенг узоқликда, қолган бошқа барча меридианлар узоқлиги пропорционал, яъни эллипсоиднинг меридианлари ва параллеллари шар сиртида ортогонал ҳолатда тасвирланади, ўз навбатида, тасвирдаги асосий йўналишлар меридианлар ва параллеллар билан мос тушади. Бу усуллардан ташқари, айрим ҳолатларда ўқ (ўрта) меридиан узунлиги сақланиши билан биргаликдаги тасвирлаш усулидан фойдаланилади. Охирги вақтларда шар юзасида эллипсоидни перспектив тасвирлаш усулларидан фойдаланиш ривожланиб бормоқда.

Бундай тасвирлашда ҳисоблаш аниқлиги e^4 қисмгача аниқликда сақланишида (математик картография ва фотограмметрияда мутлоқо кўпчилик масалаларнинг ечимлари учун тўлиқ ҳолатда етарли бўлган даражада) меридиан ва параллеллар ҳам шар юзасида ортогонал тасвирланади. Эллипсоид (*ds*) ва шарнинг (*dσ*) чизиқли элементлари квадрат қийматларини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2;$$

$$d\sigma^2 = R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda'^2,$$

бунда: R – шар радиуси; $R\cos\varphi'$ – шарда параллел эгрилиги радиуси. Бу ҳолатда, узунлик хусусий масштаблари ҳоҳлаган йўналишларда қуйидаги кўринишга эга:

$$\mu^2 = \frac{R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda'^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2},$$

Меридианлар бўйлаб йўналишда эса:

$$m = \frac{R d\varphi'}{M d\varphi},$$

Параллеллар бўйлаб йўналишда

$$n = \frac{R\cos\varphi' d\lambda'}{N\cos\varphi d\lambda} = \alpha\frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi}, \qquad (53)$$

бу ерда: α – узоқликнинг пропорционаллик коэффиценти.

Юқорида кўрсатиб ўтилган тасвирлаш усуллари формулаларини ҳосил қиламиз. Бунда фақат ўрта меридианга нисбатан меридианлар ва параллеллар симметрик ҳолатда тасвирланилиши вазиятлари қараб чиқилади.

11–§. Шар сиртида эллипсоидни тенг бурчакли тасвирлаш

Тенг бурчаклилик шартини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$m = n = \mu$$

ёки (53) формулани ҳисобга олган ҳолатда

$$\frac{Rd\varphi'}{Md\varphi} = \alpha\frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi};$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi} = \alpha\frac{Md\varphi}{r} = \alpha\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}.$$

Ушбу дифференциал тенгламани интегралланиши тенг бурчакли тасвирлаш усуллари гуруҳини олиш имконини беради. Улардан айримларини қараб чиқамиз. Бунинг учун дастлаб, (3) тенгламани ҳисобга олган ҳолатда, юқорида келтирилган дифференциал тенгламани қайтадан ёзишни қуйидаги кўринишда амалга оширамиз:

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \alpha\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi} - \frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Суръатда e^2 қийматни $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$ қийматга кўпайтириш орқали ва $\sin\psi = e\sin\varphi$ ифодани киритиш билан тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \alpha\frac{\left[(1-e^2\sin^2\varphi) - e^2\cos^2\varphi\right]d\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} = \alpha\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - \alpha e\frac{d\varphi}{\cos\psi}.$$

Ушбу дифференциал тенгламани интеграллаш ва жадвалли интегрални ҳисобга олиб,

$$\int \frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \ln tg(45^\circ + \varphi'/2),$$

қуйидаги тенгламни ҳосил қиламиз:

$$\ln tg(45^\circ + \psi'/2) + \ln C = \alpha \ln tg(45^\circ + \varphi/2) - \frac{e}{2}\alpha \times \ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi} + \ln C$$

ёки

$$tg(45^\circ + \varphi'/2) = CU^\alpha, \qquad (54)$$

бу ерда

$$U = \frac{tg(45^\circ + \varphi/2)}{tg^e(45^\circ + \psi/2)} = tg(45^\circ + \varphi/2)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}. \qquad (55)$$

$q' = \ln tg(45^\circ + \varphi'/2)$ ва $q = \ln U$ қийматлар мос равишда – шар ва эллипсоид юзаларининг *изометрик кенгликлари* деб аталади. Изометрик узоқликлар геодезик узоқликлар билан мос тушади. (*54*), (*55*) формулалар асосида аниқ тенг бурчакли тасвирлаш усулларини осонлик билан ҳосил қилиш мумкин.

Мольвейде тенг бурчакли тасвирлаш усули 1807 йилда тавсия этилган, бунда тасвир қуйидаги кўринишдаги бошланғич шартлар билан тавсифланади: узунлик экваторда сақланади, эллипсоид ва сфера узоқликлари $\varphi = 0$ шароитда $\varphi' = 0$.

Тенг бурчакли тасвирлашда сферик кенглик қиймати тахминий формула ёрдамида аниқланиши мумкин (e^4 қисмгача аниқлик билан).

$$\varphi' = \varphi - A\sin 2\varphi + B\sin 4\varphi, \qquad (56)$$

бу ерда Красовский эллипсоиди учун

$$A = \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24}e^4 = 692{,}23'';$$

$$B = \frac{5}{48} e^4 = 0{,}96''.$$

(56) формула бўйича сферик кенглик қийматини аниқлиги 0,1" ни ташкил қилади.

Сфероид ва сферик кенгликлар қийматлари ўртасидаги нисбатан катта фарқланиш $\varphi = 45^\circ$ кенгликдаги параллелларда кузатилади ва 11' бўлади. Бутун секунд сферик кенглик қиймати махсус жадвалдан олиниши мумкин. Узунликнинг хусусий масштаби формуласи қаторлар бўйича парчаланишдан фойдаланиш асосида ҳам келтириб чиқарилиши мумкин. Бунда e^2 қисмларгача аниқликда

$$m = n = \frac{R}{a}(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi).$$

Узунликнинг 0,3% қийматдаги максимал хатолиги қутбларда кузатилади. Ушбу аниқлик даражасида майдонлар хусусий масштаблари қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$p = m^2 = \frac{R^2}{a^2}(1 + e^2\sin^2\varphi),$$

бу ерда шар радиуси $R = a;$ a – ер эллипсоидининг катта ярим ўқи. Маълумки, Красовский эллипсоиди учун $R = a = 6378245$ м га тенг.

Агар бошланғич белгилашларда узунлик экваторда эмас, балки φ_k кенгликли параллелларда сақланади, деган шарти қўйилса, унда келтирилган формулалар ҳаққоний ҳисобланади, шар радиуси эса қуйидаги тенглама асосида аниқланади:

$$R = a\left(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_k\right).$$

Бу ҳолатда изоколалар параллеллар билан мос тушади.

Шунингдек, Гаусс томонидан ишлаб чиқилган тенг бурчакли тасвирлаш усули ҳам мавжуд, бу усулни у 1825 йилда тавсия қилган. У

Мольвейде усулидан фарқ қилади, бунда узунлик экваторда сақланмасдан, балки тасвирланаётган соҳанинг φ_0 ўрта параллелларида сақланади. Гаусс формулалари В.П.Морозов томонидан қайта ўзгартирилган ва бу формулалар ЭҲМ ёрдамида ечиш учун қулай шаклга келтирилган.

Айтиш мумкинки, икки марталик тасвирлаш усулида проекцияларни олишда эллипсоиддан шар юзасига ўтишда маълум даражала аниқликдаги тахминий формулалар (*56*) асосида амалга оширилади. Бу усулни нисбатан аниқроқ формулалари сфероидик геодезия дарсликларида келтирилган.

12–§. Эллипсоидни шар сиртида тенг майдонли ва тенг оралиқли тасвирлаш

Тенг майдонли тасвирлаш шарти бўйича

$$p = mn = 1.$$

(*53*) тенгламани ҳисобга олган ҳолатда ва сфера учун географик кенгликни φ'' билан белгилаб оламиз

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha}{R^2} Mr d\varphi = \frac{\alpha}{R^2} MN \cos\varphi d\varphi.$$

(*3*) формуладан *M, N* қийматларни қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2} \frac{(1-e^2)\cos\varphi d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2};$$

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2}(1-e^2)(1+2e^2\sin^2\varphi+3e^4\sin^4\varphi+\ldots)\cos d\varphi.$$

Интеграллашдан кейин:

$$\sin\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2}(1-e^2)\left(\sin\varphi+\frac{2}{3}e^2\sin^3\varphi+\frac{3}{5}e^4\sin^5\varphi\ldots\right)+C.$$

α доимий қийматни, шарнинг *R* радиусини ва интеграллаш доимийсини *C* аниқлаш шартларга боғлиқ ҳолатда шар юзасида эллипсоид юзасини тенг майдонли тасвирлаш усуллари гуруҳларини ҳосил қилиш мумкин.

Қуйидаги бошланғич шартлар қабул қилинган усулни қараб чиқамиз: экваторда ва қутбда кенгликлар $\varphi_0'' = \varphi_0 = 0, \quad \varphi_{90}'' = 90^\circ$ барча узоқликлар $\lambda'' = \lambda,$ унда $\alpha = 1$ ва $C = 0.$

Шар радиусини эллипсоид ва шар юзалари майдони тенглиги шартидан келиб чиқиб аниқлаймиз, бунда қуйидаги тенглик олинади:

$$R^2 = a^2(1-e^2)\left(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{4}e^4+...\right) = a^2\left(1-\frac{e^2}{3}-\frac{e^4}{15}+...\right);$$

$$R = a\left(1-\frac{e^2}{6}-\frac{17}{360}e^4+...\right).$$

Бу қийматни $\sin\varphi''$ формулага қўйиш орқали

$$\sin\varphi'' = \sin\varphi\left[a_1''+\sin^2\varphi(a_3''+a_5''\sin^2\varphi+...)\right],$$

бунда

$$a_1'' = 1-\frac{2}{3}e^2-\frac{7}{45}e^4+...; \qquad a_3'' = \frac{2}{3}e^2-\frac{4}{9}e^4+...; \qquad a_5'' = \frac{3}{5}e^4+...$$

Ушбу формулалар бўйича φ'' нуқтанинг сферик кенглиги қийматини геодезик кенгликлар бўйича (e^4 қисмгача аниқликда) осонлик билан ҳисоблаб чиқиш мумкин. Кўрсатиб ўтилган формулаларни бошқача кўринишда ёзиш ҳам мумкин:

$$\sin\varphi'' = \sin[(\varphi''-\varphi)+\varphi].$$

$(\varphi''-\varphi) = \Delta\varphi$ қийматни кичиклигини ҳисобга олиб, $\Delta\varphi$ даража бўйича Тейлор қаторига бўлиб чиқамиз, ҳосил қилинган қатор бўйича амалларни бажарамиз ва унинг таркибидаги даража функцияларни каррали аргументга алмаштирамиз. Ўзгартиришлардан кейин e^6 қисмгача аниқликда қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\varphi'' = \varphi - A_1\sin 2\varphi + B_1\sin 4\varphi - ..., \tag{57}$$

бу ерда

$$A_1 = \frac{e^2}{2} + \frac{31}{180}e^4 + ...; \quad B_1 = \frac{17}{360}e^4 + ...$$

Красовский эллипсоиди элементларини ҳисобга олган ҳолда ёзиш мумкин:

$$A_1 = 461{,}81''; \quad B_1 = 0{,}44''.$$

Мос ҳолда, тенг майдонли тасвирлашда шар радиуси $R = 6371116$ м га тенг. Ушбу проекцияда узунликнинг хусусий масштаблари (*53*) формула бўйича топилиши мумкин. Шундай қилиб, параллеллар бўйича узунликнинг хусусий масштаби қуйидаги формула билан аниқланади:

$$n = R\cos\varphi'' / N\cos\varphi,$$

Ньютон биноми бўйича e^4 аниқликда қайта ўзгартиришдан кейин тенглик олинади:

$$n = 1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi + ...$$

$$p = mn = 1$$

тенг майдонли тасвирлаш бўлгани учун, унда

$$m = 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi + ...$$

Энг катта бурчак хатолиги формула билан ҳисобланади:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{e^2}{3}\cos^2\varphi...$$

ёки қуйидаги тенглик билан:

$$\omega = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi.$$

φ ва φ'' кенглик тафовути $\varphi = 45^\circ$ параллелда 7'43,8" га тенг бўлади. Ушбу тасвирлашдаги изоколалар олдингиси каби параллеллар билан мос тушади. Узунлик, майдонлар ва бурчакларнинг максимал хатолиги экватор нуқтасида ($\varphi = 0$) юзага келади ва қийматлари

$$n_э = 0{,}99; \quad m_э = 1{,}001; \quad \omega = 3{,}84'.$$

Шар юзасида эллипсоидни тенг оралиқли тасвирлашда узунликни меридианлар бўйича сақланиши ёки параллелларда сақланиши шартидан келиб чиққан ҳолатда ҳосил қилинади.

Меридианлар бўйича тенг оралиқли тасвирлаш шарти

$$m = 1.$$

(53) формуладан φ', λ' қийматларни φ''', λ''' қийматларга алмаштиришдан қуйидаги дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$d\varphi''' = \frac{M}{R} d\varphi,$$

Буни интеграллаш орқали (радиан ўлчовида):

$$\varphi''' = \frac{s}{R} + C,$$

бу ерда R – шар радиуси; C – интеграллаш доимийси; s – берилган кенглик φ параллелидан экваторгача меридиан ёйи узунлигини ифодалаб, сфероидик геодезияда маълум бўлган қуйидаги тенглама билан аниқланади:

$$s = \frac{a}{1+n'}\left[\left(1+\frac{n'^2}{4}+\frac{n'^4}{64}+\ldots\right)\varphi - \left(\frac{3}{2}n' - \frac{3}{16}n'^3 - \ldots\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{15}{16}n'^2 - \frac{15}{64}n'^4 + \ldots\right)\times \sin 4\varphi - \ldots\right],$$

бу ерда $n' = (a-b)/(a+b)$; a, b – эллипсоиднинг ярим ўқлари.

φ''' қийматни махсус жадвалдан олиш ҳам мумкин. Шар радиусини (R) аниқлаш учун шарда ва эллипсоидда экватордан қутбгача меридианлар ёйи узунлиги тенг бўлган ҳолатни оламиз.

Бу ҳолатда қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$R = \frac{s_0^{90}}{90^\circ}\rho = \frac{a}{1+n'}\left(1+\frac{n'^2}{4}+\frac{n'^4}{64}+\ldots\right).$$

Красовский эллипсоидига нисбатан $R = 6367558{,}5$ м га тенг.

Параллеллар бўйича узунлик ва майдон хусусий масштаблари (e^2 қисмгача аниқликда ҳисоблаш сақланган ҳолатда) қуйидаги формула бўйича аниқланиши мумкин:

$$n = p = \frac{R\cos\varphi'''}{N\cos\varphi} = 1 - \frac{e^2}{4}\cos 2\varphi + ...$$

Бурчак хатолигининг нисбатан йирик қийматда бўлиши қуйидаги тенглик билан ифодаланади:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = (N\cos\varphi - R\cos\varphi''')/(N\cos\varphi + R\cos\varphi''')$$

ёки (e^2 қисмгача аниқликда):

$$\omega = \frac{e^2}{4}\rho\cos 2\varphi.$$

Параллеллар бўйича тенг оралиқли тасвирлаш шарти

$$n = 1.$$

(*53*) тенгламадан қуйидаги дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\cos\varphi''' = \alpha\frac{N\cos\varphi}{R}.$$

(*3*) формуладан келиб чиқиб, *N* қийматни ҳисобга олган ҳолда, қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$\cos\varphi''' = \frac{\alpha a}{R}\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}e^4\sin^4\varphi + ...\right)\cos\varphi.$$

$\alpha,\ R$ қийматларга боғлиқ ҳолатда ва берилган бошланғич параллеллар асосида параллеллар бўйлаб тенг оралиқли тасвирлаш гуруҳларини олиш мумкин.

Бунда қуйидаги бошланғич шартлар қабул қилинган фақат битта усулни қараб чиқамиз: эквтор ва қутб кенглиги $\varphi_0''' = \varphi_0 = 0,\ \varphi_{90}''' = \varphi_{90} = 90^\circ$; узоқлик – $\lambda''' = \lambda$. Бунда, $\alpha = 1$ ва $R = a$.

Асосий формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} = \cos\varphi\left(1+\frac{e^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{3}{5}e^4\sin^4\varphi+...\right).$$

Бу ердан:

$tg\varphi''' = (1-e^2)^{1/2}tg\varphi,$ яъни бундай тасвирлашда кенглиги – φ''' келтирилган кенгликдан u ташкил топади. Меридианлар бўйича узунлик ва майдон хусусий масштаблари формуласини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$m = p = Rd\varphi''' / Md\varphi = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} / \sqrt{1-e^2} = 1+\frac{e^2}{2}\cos^2\varphi+\frac{e^4}{8}(3-2\sin^2\varphi-\sin 4\varphi)...$$

Бурчак хатолигининг нисбатан катта қиймати

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n}$$

ёки (e^4 қисмгача аниқликда):

$$\omega = \frac{e^2}{2}\rho\cos^2\varphi.$$

ҳисобланади.

Қараб чиқилган тенг бурчакли, тенг майдонли ва тенг оралиқли тасвирлаш усулларидан ташқари шунга ўхшаш бошқа усуллар ҳам ишлаб чиқилган. Масалан, тасвирни ҳосил қилиш шартларини қуйидагича ифодалаб

$$m_0 = 1; \quad (dm/ds)_0 = 0; \quad (d^2m/ds^2)_0 = 0;$$

$$n_0 = 1; \quad (dn/ds)_0 = 0; \quad (d^2n/ds^2)_0 = 0;$$

К.Гаусс, И.Фришауф ва Н.И.Бауман томонидан мос ҳолатда эллипсоиднинг шар юзасида тенг бурчакли (Гausснинг иккинчи усули), тенг майдони ва тенг оралиқли (меридианлар бўйлаб) тасвирлаш усуллари ишлаб чиқилган, бунда узунликнинг нисбий хатолиги қийматлари берилган нуқтадан параллелгача бўлган нисбатан кичик масофанинг учунчи даражаси қийматида ифодаланади.

Тенг бурчакли ва бошқа тасвирлаш усуллари кенг кўламда Н.Я.Цингер, В.П.Морозов ва бошқа олимларнинг ишларида келтирилган.

13–§. Эллипсоид меридианлари ва параллелларининг сферадаги тасвирларига мос тушмайдиган айрим тасвирлаш усуллари

Ўқ меридиан узунлиги сақланган ҳолда тенг бурчакли тасвирлаш

Бошланғич шартлар сифатида қуйидагиларни киритамиз:

– тасвир ўрта меридианга нисбатан симметрик жойлашган;

– ўрта меридианлар узоқлиги – $\lambda_0 = \lambda_0' = 0,$ тасвирланаётган худуд узоқлиги бўйича кичик қийматдаги чўзилишга эга;

– ўрта (ўқ) меридиан ёйлари узунлиги сақланади;

– экватор ва қутб кенгликлари $\varphi_0' = \varphi_0 = 0,\ \varphi_{90}' = \varphi_{90} = 90^\circ$;

– тасвирлаш тенг бурчакли тавсифга эга.

Биринчи ва иккинчи шартни ҳисобга олган ҳолда, (*1*) тенгламани $e = \lambda - \lambda_0$ даража бўйича Тейлор қаторлари қисмларига ажратамиз:

$$\varphi = \varphi_м' + a_2 e^2 + a_4 e^4 + ...;$$

$$\lambda = a_1 e + a_3 e^3 + a_5 e^5 + ...$$

Учинчи шартга мувофиқ,

$$\varphi_м' = s / R,$$

бу ерда s – маълум бўлган формула асосида аниқланувчи меридиан ёйининг узунлиги

$$s = \frac{a}{1+n'}\left[\left(1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + ...\right)\varphi - \left(\frac{3}{2}n' - \frac{3}{16}n'^3 + ...\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{15}{16}n'^2 - \frac{15}{64}n'^4 + ...\right)\sin 4\varphi\right] + ...;$$

Шар радиуси – R, тўртинчи шартга мувофиқ

$$R = \frac{a}{1+n'}\left(1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + ...\right).$$

s ва R қийматни ҳисобга олганда φ'_m ни ҳисоблаш формуласи қуйидагича

$$\varphi'_m = \varphi - \left(\frac{3}{2}n' - \frac{3}{16}n'^3 - ...\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{15}{16}n'^2 - \frac{15}{64}n'^4 - ...\right)\sin 4\varphi$$

Тенг бурчакли тасвирлаш шарти бўйича:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial e}=\frac{N\cos\varphi\partial\varphi''}{\cos\varphi'\partial s};\qquad \frac{\partial\varphi'''}{\partial e}=\frac{N\cos\varphi\partial\lambda}{\cos\varphi'\partial s}$$

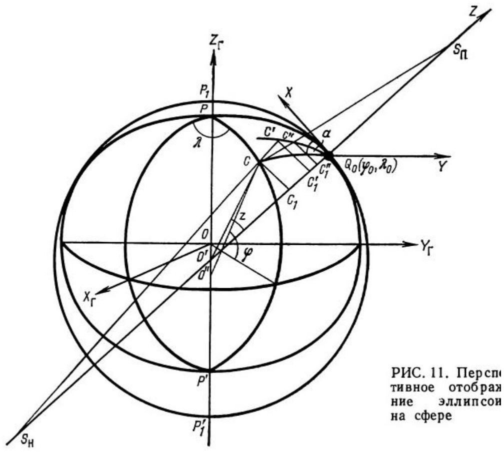
Параллеллар ва меридианлар тенгламасини дифференциллаб $\varphi=f_1$ (a,e), $\lambda=f_2\,(a,e)$ ва олинган ҳосилани тенг бурчаклилик шартига қўямиз. Сўнгра Тейлор қаторига ажратамиз

$$cos\varphi=cos[\varphi_m-(\varphi_m\ -\ \varphi)]$$

ва cos φ қийматни унинг қаторлари қиймати билан алмаштирамиз. Шунда чап ва ўнг томон бир хил даражали коэффициентларини тенглаштириб $a_{i\,,}\varphi',\lambda',\varphi$ ва е коэффициентлар қийматларини тенг бурчаклик шарти бўйича олиш мумкин.

Қаторнинг кенглиги 12^0 бўлганда В.П.Морозов формуласи бўйича координатларни 0,0001" хатоликда ҳисоблаб чиқишимиз мумкин. Узунлик ва майдон хусусий масштабларини картографик проекциялар умумий назарияси формулаларидан ва (53) ифодани назарда тутиб топиш мумкин.

Берилган нуқтада эллипсоидни шар сиртига тегиб турганда, шар сиртида эллипсоидни перспектив тасвирлаш усулининг умумий ҳолатини кўриб чиқамиз. Шар сиртида эллипсоидни тасвирлашда, ботиқлик томондан картага олинаётган юзага қаралгандаги тасвир - негатив, қавариқлик томондан эса – позитив дейилади.



Шар сиртида эллипсоидни перспектив негатив тасвирлаш. Масалан, берилган нуқтада $Q_0(\varphi_0,\lambda_0)$ айланма эллипсоид шар сиртига уринма, бу нуқта сферик координата тизими қутби бўлсин (11-расм).

11-расм. **Сферада эллипсоидни перспектив тасвирлаш**

Координата тизимини қайта ўзгартиришни бажарамиз:

- геоцентрик координат тизимидан $OX_{г}Y_{г}Z_{г}$ топоцентрик горизонтал тизимга Q_0XYZ ўтамиз, унда қутб бош нуқтаси $Q_0\varphi_0\lambda_0$ бўлади;

- топоцентрик координата тизимидан OXYZ қутбий сферик координата тизимига ўтамиз $z = const,\ a = const$, бунда z — O' нуқтадаги бурчак, у $O'Q_0$ йўналиш бўйича Q_0 нуқтада эллипсоид сиртига туширилган нормал ва эллипсоид сирти орасидаги бурчак, $O'C$ нормал текисликда Q_0CO' ўтувчи чизиқ, у $C(\varphi, \lambda)$ нуқта орқали ўтади. a — нормал текислик азимути.

Белгилашлар киритамиз:

$O'Q_0 = N_0;\ \ O'C = N'_0; S_HO' = D_H;\ S_{п}O' = D_{п}; S_{п}Q_0 = H.$

бунда $S_{п}$ — позитив, S_H— негатив тасвирлаш учун.

Ушбу ҳолатда геодезик ва қутбий сфероидик координаталари боғлиқлиги e^4 қисмгача аниқликда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sin z \cos a = t_1 + e^2\tau(t_1 \sin\varphi - \cos\varphi_0) + ...;$$

$$\sin z \cos a = t_4(1 + e^2\tau \sin\varphi) + ...;$$

$$\cos z = t_5 + e^2\tau(t_5 \sin\varphi - \cos\varphi_0) + ...,$$

бу ерда e – эллипсоиднинг биринчи эксцентриситети; t_1, t_4, t_5, τ – қийматларни (*13*) формуладан қаранг.

Учбурчаклардан $S_HC'C'_1$ ва S_HCC_1 ёзиш мумкин

$$sin\ z_{сф} = \frac{N_0 \sin z}{D + N_0 \cos z}(cos\ z_{сф} + \frac{D}{R}).$$

Белгилашларни киритиб

$$t_o = Dsin\ z/(N'_0 + Dcos\ z); k = \frac{N'_0}{R} - 1 = N'_0/N'_0 - 1.$$

ва $\Delta z =\ z_{сф} - z$ нинг қиймати z қийматидан камлигини эътиборга олиб, sin $z_{сф}$ ни Тейлор қаторига ажратсак, шунда оламиз

$$z_{сф} = z + t_o k\left\{1 + \frac{1}{2}t_0^2 k\left[1 + k\ (t_0^2 + \frac{1}{3})\right]\right\} + \ .\ .\ .\ ,$$

бунда

$$\frac{N_0}{N'_0} = 1 + \frac{e^2}{2}\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2\left\{1 + \frac{e^2}{4}[(3sin^4\varphi_0 - 4\right) +\right.$$

$$+\sin\varphi\ (-2sin\,\varphi_0 + 7\ \sin\varphi\ \ )\ ]\ \}.$$

e^4 ҳаднинг аниқлиги бўйича ҳисобласак, унда оламиз

$$z_{\text{сф}} = z - \frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\ cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0(\sin z - 1)]^2 \times \frac{D\sin z}{N_0 + D\cos z} + \ldots\ .\ .\ .$$

$$N'_0 = N_0\left\{1 - \frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0(\cos z - 1)]^2\right\} + .\ .\ .$$

Ушбу даражадаги аниқликда вертикаллар (μ_1) ва альмукантаратлар бўйлаб (μ_2) узунликнинг хусусий масштаблари, қабул қилинган сфероид координаталар тизими (*z, a*) ҳисобга олинган ҳолда, қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланиши мумкин:

$$\mu_1 = \left\{1 + \frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2\right\}\frac{dz_{сф}}{dz};$$

$$\mu_2 = \left\{1 + \frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2\right\}\frac{dz_{сф}}{\sin z}.$$

$Z_{сф}$ ва узунликнинг хусусий масштабини ҳисоблаш бўйича олинган формулалардан, мавжуд қоидага мувофиқ (*D* қиймат), турли хилдаги умумий перспектив тасвирлашларни олиш мумкин. Масалан, сфера марказидан лойиҳани амалга оширишда $D = 0$ қийматда, бу ҳолатда:

$$z_{сф} = z;\quad \mu_1 = \mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2,$$

яъни e^4 даража аниқлигида эллипсоидни шар юзасида перспектив тасвирланиши, берилган нуқтада эллипсоидга уринма ҳолатида, тенг бурчакли тасвирлашдир.

Бу В.В.Каврайский келтирган марказий перспектива хоссалари хулосаларини умумлаштириш имконини беради ва шар юзасида эллипсоиднинг ҳар қандай перспектив тасвирланишида кўриш нуқтаси шар марказида жойлашганда ва ушбу марказни унинг айланиш ўқи бўйлаб эллипсоид марказидан узоқлашишига ҳамда қутбий сферик координаталар тизимида қутбининг жойлашиш ҳолатига боғлиқ бўлмаган ҳолда тенг бурчакли тасвирлашни юзага келтиради (e^2 қисмгача аниқликда).

Майдон хусусий масштаби ва бурчаклар хатолигини ҳам худди шундай даражадаги аниқликда топиш учун картографик проекцияларнинг умумий назариясида маълум формулалардан фойдаланиш мумкин

$p=\mu^2=1+e^2[\sin z\cos a\cos\ \varphi_0+\sin\ \varphi_0(\cos z-1)]^2.$ ω=0.

Эллипсоидни шар сиртида перспектив позитив тасвирлаш

$S_п CC_1$ ва $S_п C''C''_1$ учбурчаклардан (11-расм)

$$\sin z_{сф}=\frac{N'_0 \sin z}{D-N_0\cos z}\left(\frac{D}{R}-\cos\ z_{сф}\right).$$

Белгилашларни киритамиз

$$t'_0=\frac{D\sin z}{N'_0-D\cos z};\qquad K'=\frac{e^2}{2}(\sin\varphi-\sin\varphi_0)^2$$

ва $\Delta z=\ z_{сф}-z$, даражаси бўйича $\sin\ z_{сф}$ ни қаторга ажратиб оламиз

$$z_{сф}=z+t'_0K'\left\{1-\frac{1}{2}t'_0K'\left[1-K'\left(t'^2_0+\frac{1}{3}\right)\right]\right\}+\ldots$$

e^4 ҳадгача аниқлик даражада олинганда, охирги тенглик

$$z_{сф}=z+\frac{e^2}{2}(\sin\varphi-\sin\varphi_0)^2\frac{D\sin z}{N_0-D\cos z}\qquad 58)$$

Узунлик хусусий масштабларини худди шундай аниқлик даражасида топамиз. Келтирилган формулаларни ўзгартириш орқали оламиз

$$\mu_1=1+\frac{e^2}{2}\tau\left[\tau+\frac{2\tau_1 D\sin z}{N_0-D\cos z}+\frac{D\tau(N_0\cos z-D)}{(N_0-D\cos z)^2}\right]+\ .\ .\ .\ ;$$

$$\mu_2=1+\frac{e^2}{2}\tau^2\left(1+\frac{D}{N_0-D\cos z}\right)+\ .\ .\ .\ ;$$

бунда

$\tau=\sin z\cos a\cos\varphi_0-sin\varphi_0(1-\cos z);$

τ_1=$\cos z\cos a\cos\varphi_0-\sin z\ \ sin\varphi_0.$

Майдонлар хусусий масштаби ва бурчак хатолиги энг катта қиймати қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$p = \mu_1 \mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2}\tau\left[2\tau + \frac{D(\tau + 2\tau_1 \sin z)}{N_0 - D\cos z} + \frac{D\tau(N_0 \cos z - D)}{(N_0 - D\cos z)^2}\right] + \ . \ . \ . \ ;$$

$$\omega = 2arcsin\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) = \frac{e^2 \tau D}{2(N_0 - D\cos z)}\left[(2\tau_1 sin\tau - \tau) + \frac{\tau(N_0 cos\, z - D)}{N_0 - D\cos z}\right]$$

Ҳозирда илмий ва ишлаб чиқаришга оид амалий масалаларни ечишда аэро ва космик фотосуратлар кенг қўлланилмоқда, шунингдек, стерео ва ортофотосуратлар ҳам, уларни идеал моделлари бўлиб позитив ва негатив тасвирли перспектив-азимутал проекциялар ҳисобланади.

Ушбу бўлимда қараб чиқилган, шар юзасида эллипсоидни перспектив ва бошқа усуллар асосида тасвирлашлар кўрсатилган азимутал ва бошқа проекцияларни олишни таъминлайди, эллипсоидни иккиланган тасвирини берилган аниқликда олишни, меҳнат ва вақтни бирмунча қисқартиради, ва энг асосийси, фойдаланилаётган қутбий сферик координаталар тизимида берилган қутб нуқтасининг жойлашиш ҳолатига боғлиқ бўлмайди, қараб чиқилаётган тасвирлашнинг бошланғич ҳамда белгиланган шартларидан қатъий назар проекцияларни олиш имкони яратилади.

Назорат саволлари

1. Изометрик кенглик ва изометрик узоқликларга тушунча беринг ва формулаларини келтиринг.

2. Шар сиртида эллипсоидни тасвирлашни қандай усуллари мавжуд, уларни изоҳланг..

3. Гаусс томонидан ишлаб чиқилган тенг бурчакли тасвирлаш усулини тушунтиринг.

4. Узунлик, майдон ва бурчаклар максимал хатолиги ҳақида тушунчалар беринг.

5. Тенг оралиқли тасвирлаш шартларини тушунтиринг, формулаларни ёзинг.

III БОБ.
КАРТОГРАФИК ПРОЕКЦИЯЛАР ТАСНИФИ

Картографик проекцияларни учта белгиси бўйича таснифлашни караб чиқамиз: хатоликлари хусусияти бўйича (картографик тасвирнинг хоссалари бўйича); меридиан ва параллеллар нормал тўри кўриниши ҳамда картографик тўрнинг ориентирланиши бўйича.

14–§. Хатолик хусусиятлари бўйича картографик проекцияларни таснифлаш

Хатолиги хусусияти бўйича проекциялар – тенг бурчакли, тенг майдонли ва ихтиёрий турларга бўлинади. Тенг бурчакли проекцияларда тасвирнинг чексиз даражада кичик қисмларининг ўхшашлиги сақланади, у ўз навбатида узунликнинг хусусий масштаби $m = n = a = b = \mu$ йўналишга боғлиқ бўлмайди, бурчак хатолиги йўқ – $\omega = 0$, майдон масштаби узунлик масштаби квадратига тенг бўлади – $p = a^2$.

Тенг бурчаклилик шарти: $f = 0;\ m = n$ ёки

$$x_\lambda = -\frac{r}{M} y_\varphi; \quad y_\lambda = +\frac{r}{M} x_\varphi;$$

шар сирти учун

$$x_\lambda = -\cos\varphi y_\varphi; \ \ y_\lambda = +\cos\varphi x_\varphi.$$

Тенг бурчакли проекцияларда чекли участкалар ўлчамини тасвирлашда узунликнинг хусусий масштаблари ўзгариши чекли участкаларни хатоликда тасвирланишига сабаб бўлади. Бу проекцияларда майдон хатолиги жуда катта қийматда бўлади.

Тенг майдонли проекцияларда картага олинаётган юза ва унинг текисликдаги майдони нисбатлари доимий ҳолатда сақланади. Бунда майдонлар нисбатлари ўзгармаслиги нафақат чексиз даражадаги кичик майдонларда, балки охирги ўлчамдаги участкаларда ҳам ўзгармаслиги кузатилади.

Бу проекцияларда майдонлар хусусий масштаби

$p = mn\sin i = ab = h/Mr = const,$

лекин кўплаб ҳолатда p = 1, шу сабабли тенг майдонлилик шарти h = Mr, шар сиртида эса $h = M^2 cos\varphi$.

Узунликнинг экстремал масштаблари бир-бирига тескари пропорционал:

a = 1/b , b = 1/a.

Бурчаклар максимал хатолигини тангенслар формуласи бўйича ҳисоблаш мақсадлидир, бу тенг майдонли проекцияларда қўйидаги кўринишга эга

$tg(\omega/2) = (a - b)/2. \quad tg(45° + \omega/4) = a.$

Агар картографик проекция ёки тенг бурчакли, ёки тенг майдонли хусусиятга эга бўлмаса, унда у ихтиёрий проекцияларга тегишли бўлади. Бу проекцияларда ҳам бурчак ҳам майдон хатолиги кузатилади. Ихтиёрий проекциялар гуруҳида тенг орлиқли проекцияларни ажратиш мумкин, уларда узунлик хусусий экстремал масштаби битта асосий йўналиш бўйича сақланади, яъни a =1 ёки b=1.

Бу проекцияларда мувофиқ равишда $p = b$ ёки $p = a$.

Бурчак максимал хатолигини ҳисоблаш учун умумий формуладан $\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b)$ фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Агар, тенг оралиқли проекция тўри ортогонал ва асосий йўналишлар меридианлар ёки параллелларга мос тушса, унда бу проекция – меридианлар бўйича тенг оралиқли ёки параллеллар бўйича тенг оралиқли проекция дейилади.

Математик картография назарияси ва амалиёти тадқиқотлари ривожланиши натижасида проекциялар хусусиятлари ва уларни имкониятларини баҳолаш тушунчалари ўзгариб бормоқда ва уларга аниқлик киритилмоқда. Ихтиёрий проекциялардан кенг кўламда фойдаланиш натижасида айнан ушбу проекцияларни баҳолашга нисбатан тадбиқ этилувчи мезонларга бўлган эҳтиёж ортиб бормоқда.

Хатолик характери ҳозирги вақтгача миқдор жиҳатдан баҳоланмаган ва интуитив равишда аниқланиб келинган. Г.И.Конусова томонидан амалга оширилган тадқиқотларда хатолик тавсифини турли хилдаги хатоликларнинг нисбатлари сифатида аниқлаш мумкинлиги кўрсатилган. Хатолик қиймати тавсифларида ягона кўрсаткич сифатида проекциянинг ҳар қандай нуқтасида $\bar{\rho}$ вектор таклиф этилган бўлиб, бунда проекция майдон (*p – 1*) ва шакл хатоликлари (*ω – 1*) билан ифодаланади, бунда $\omega = a/b$. Тенг бурчакли ва тенг майдонли проекциялар векторлари ортогонал, ўзаро мустақил ҳолатда бўлиб, шундай базисни ташкил қиладики, унга нисбатан ҳар қандай ҳоҳлаган проекцияда $\bar{\rho}(p-1, \omega-1)$ вектор қийматини аниқлаш мумкин.

Вектор узунлиги: $\rho = \sqrt{(p-1)^2 + (\omega-1)^2}$

бу тенглик бир вақтнинг ўзида шакл ва майдон хатоликларини компекс ҳисоблаш учун қабул қилинади.

Шакл ва майдон хатолиги нисбатлари α бурчак қиймати билан аниқланиб, унинг учун:

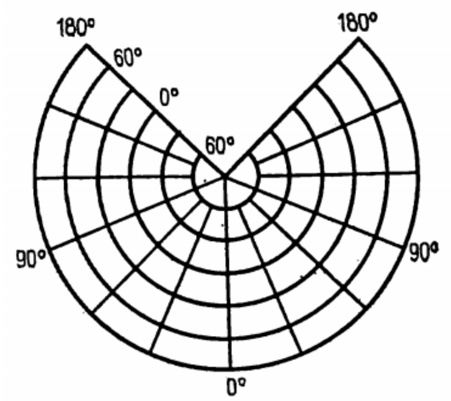
$$tg\alpha = (\omega-1)/(p-1); \ \sin\alpha = (\omega-1)/\rho; \ \cos\alpha = (p-1)/\rho.$$

Тенг бурчакли проекция вектори билан биргаликда, ҳоҳлаган проекцияда $\bar{\rho}$ вектор асосида ҳосил қилинган α бурчак Г.И.Косунова томонидан берилган нуқтадаги хатолик тавсифи ўлчови сифатида фойдаланилиши мумкинлиги тавсия этилади. Турли хил проекцияларда хатолик тавсифлари 0 дан 2π қийматгача ўзгариши мумкин. Тенг бурчакли, тенг оралиқли ва тенг майдонли проекцияларда картага олинаётган ҳудуд доирасида доимий хатолик тавсифларига эга бўлиб, уларнинг қиймати мос равишда $0, \pi/4, \ \pi/2$ га тенг бўлади.

15–§. Меридиан ва параллеллар нормал тўрининг кўриниши бўйича проекцияларни таснифлаш

Нормал тўр – бу меридиан ва параллелларни шундай тўрини ифодалайдики, бунда фойдаланилаётган координаталар тизимидаги қутб географик қутб билан устма–уст тушади; тўрининг бундай кўринишга эга проекциялар – *нормал проекциялар* дейилади. Нормал тўрли картографик проекциялар қуйидаги синфларга ажратилади: конусли, цилиндрик, азумутал, псевдоконусли, псевдоцилиндрик, псевдоазимутал, ярим конусли ва шартли проекциялар.

Нормал конусли проекция (12–расм) бунда картографик тўр меридианлари - тўғри, тегишли меридианнинг узоқлигидаги фарқига пропорционал равишдаги бурчакларда бир нуқтада кесишган чизиқлар; параллеллари эса – концентрик айлана ёйларидан иборат, уларнинг маркази меридианлар қўшилиш нуқтасида жойлашади.

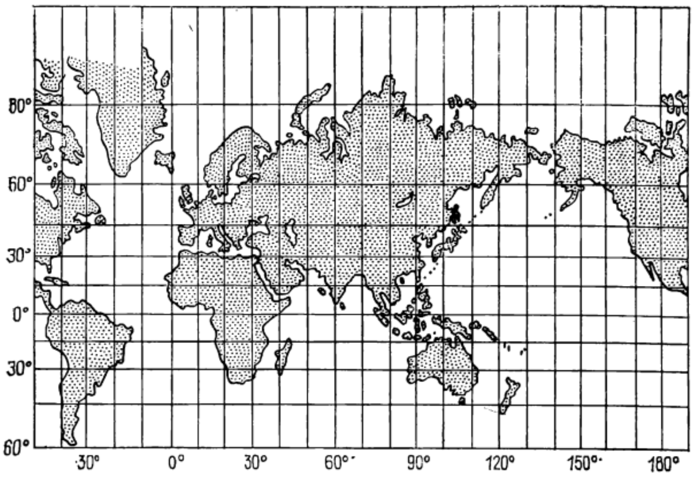


12–расм. **Нормал конусли проекция.**

Бунда хусусий масштаблар ва хатоликлар фақат кенглик қийматига боғлиқ бўлади, шу сабабли, изоколалар параллеллар билан мос тушади ва концентрик айлана (доира) кўринишига эга бўлади.

Агар конусли проекцияни ҳосил қилишда геометрик усулдан фойдаланилса (конус юзаси текисликда чизиқли тартибда лойиҳаланса), у ҳолда перспектив конусли проекцияни ҳосил қиламиз. Агар тасаввур қилайлик, меридианларни кесишиш нуқтаси чексиз узоқлашса, у ҳолда параллеллар тўғри чизиқларга айланади ва конусли проекция ўрнига цилиндрик проекция олинади.

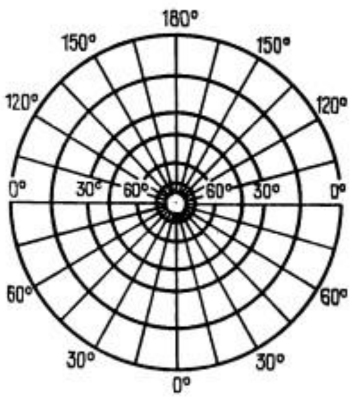
Нормал цилиндрик проекция нисбатан оддий кўринишдаги картографик тўрга эга (13–расм); бунда меридианлар тенг тақсимланган параллел тўғри чизиқлар, параллеллар эса – меридианларга ортогонал бўлган параллел тўғри чизиқлар билан тасвирланади.



13–расм. **Нормал цилиндрик проекция.**

Хусусий масштаблар ва хатоликлар фақат кенглик функциялари бўлади, шу сабабли изоколалар параллеллар билан устма–уст тушади ва тўғри чизиқ кўринишида бўлади. Цилиндрик проекциялар конусли проекциялар каби геометрик йўл билан ҳосил қилиниши ҳам мумкин; бундай проекциялар *перспектив-цилиндрик проекциялар* дейилади.

Азимутал проекцияларда нормал тўр меридианлари – тўғри чизиқ, меридианлари узоқлик бурчагига мос келадиган бир нуқтада кесишадиган чизиқлар, параллеллари – маркази меридианлар кесишиш нуқтасида жойлашган концентрик айланалардир (14-расм).

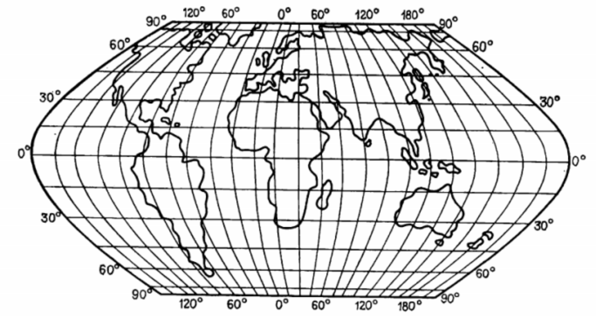


14-расм. **Нормал азимутал проекция.**

Бу проекцияларни ҳам геометрик йўл билан тузиш мумкин, унда чизиқли перспектив усули қўлланилади, булар персектив-азимутал ёки оддий перспектив проекциялар дейилади. Азимутал ва перспектив-азимутал проекцияларда хусусий масштаб ва изоколалар фақат кенглик функцияси бўлиб, улар параллеллар ёки альмукантаратлар билан устма-уст тушади ҳамда айлана шаклда ўтади. Бу проекциялар доира шаклдаги худудларни майда масштабли картага олишда ишлатилади.

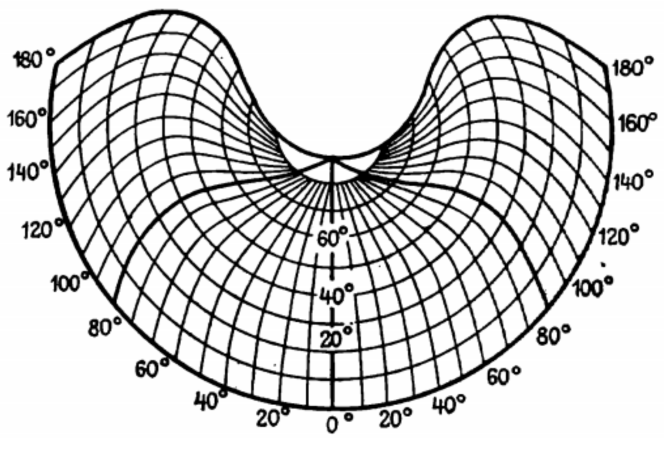
Псевдоцилиндрик проекцияларда (15–расм) параллеллар – тўғри чизиқлар, ўқ меридианга нисбатан препендикуляр тўғри чизиқлар, меридианлар эса – ўқ меридианга нисбатан симметрик эгри (синусоид, эллипс) чизиқлардан ташкил топади.

Проекция тўри ортогонал эмас, шу сабабли хатолик тавсифига кўра псевдоцилиндрик проекциялар фақат тенг майдонли ва ихтиёрий проекциялар бўлиши мумкин. Узунлик ва майдон хатоликлари изоколалари тўғри чизиқлар бўлиб, параллеллар билан устма–уст тушади, меридианлар узунлиги ва бурчак хатолиги изоколалари – ўқ меридиан ва экваторга нисбатан симметрик гиперболик эгри чизиқлардир.



15–расм. **Псевдоцилиндрик проекция.**

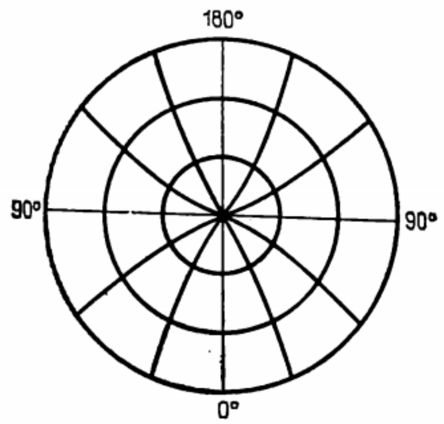
Псевдоконусли проекцияларда (16–расм) нормал тўр параллеллари – концентрик айлана ёйлари, меридианлари эса – тўғри ўқ чизиқга нисбатан симметрик эгри чизиқлардир.



16–расм. **Псевдоконусли проекция.**

Проекция тўри ортогонал эмас, шу сабабли, хатолиги бўйича фақат тенг майдонли ва ихтиёрий проекциялар бўлиши мумкин; ортогоналлик тавсифлари ўқ меридианда ва φ_0 кенглик қиймати билан биргаликдаги ўрта параллелларда сақланади. Изоколалар ўқ меридианга нисбатан жуфт ҳолатда симметрик кўринишга эга бўлиб, эгри чизиқлардир.

*Псевдоазимутал проекциялар*ни (17–расм) собиқ иттифоқ картографиясида пайдо бўлганига нисбатан унчалик узоқ вақт бўлгани йўқ (чўзиқ изоколаларга эга проекциялар). Бу проекцияларда нормал тўр параллеллари концентрик айланалар, меридианлари - эгри, 2 тасидан ташқари, улар симметрия ўқлари сифатида хизмат қиладиган ўзаро перпендикулярлар.



17–расм. **Нормал псевдоазимутал проекция.**

Яримконусли проекциялар замонавий картография амалиётида, айниқса, дунё карталарини тузишда кенг қўлланилади. Бундай проекцияларда параллеллар эксцентрик айлана ёйлари кўринишида акс эттирилади, меридианлар эса – тўғри чизиқли ўқ меридиан ва экваторга нисбатан симметрик жойлашган эгри чизиқлардан иборат. Изоколалар мураккаб эгри чизиқлар кўринишида бўлиб, ўқ меридиан ва экваторга нисбатан симметрик ҳолатда жойлашади; уларнинг шакли проекцияни ҳосил қилишда белгиланган қўшимча шартларга боғлиқ бўлади. Яримконусли проекциялардан бири – айланали проекциялар бўлиб, уларда параллеллар ва меридианлар эксцентрик айлана ёйлари кўринишида тасвирланади.

Меридианлар ва параллеллар нормал тўри кўриниши бўйича проекцияларнинг таснифланиши якунида айтиш керакки, қараб чиқилган синфлардан ташқари яна бошқа катта ҳажмдаги ҳосила проекцияларни синфи мавжудлигини (шартли), бунда проекциялар берилган шартларга мувофиқ, мавжуд проекцияларнинг кўринишини ўзгартириш асосида ҳосил қилинади. Проекцияларни бундай турлари узлуксиз равишда тўлдириб борилмоқда.

Юқорида келтирилган, В.В.Каврайский томонидан ишлаб чиқилган тасниф маълум устунликга эга, у ўзини оддийлиги ва кўргазмалиги билан ажралиб туради. Бироқ унда фақат параллеллари доимий эгри чизиқлардан иборат проекциялар қараб чиқилган. Ҳозирги пайтда карталарни тузишда фойдаланилаётган бошқа кўплаб проекциялар бу таснифда ўз ўрнини топмаган.

Сўнгги пайтларда собиқ иттифоқ олимлари томонидан янги классификациялар ишлаб чиқилган. Масалан, Г.А.Мещеряков томонидан картографик проекцияларни дифференциал тенгламалари кўриниши бўйича таснифлаш таклиф қилинган – бу билан у генетик таснифлаш асосини яратган. Бу классификация етарли даражада тўлиқ, бироқ кўргазмалик тавсифлари пастлиги билан чегараланади, чунки бу классификация меридианлар ва параллеллар тўрлари хусусиятлари билан боғланмаган.

МИИГАиКни “Картография” кафедрасида картографик проекцияларни меридиан ва параллелларининг нормал тўри кўриниши бўйича таснифлашнинг янги усуллари ишлаб чиқилмоқда, унда муаллифлар фикрига кўра, классификация иложи борича барча кўп миқдордаги мавжуд картографик проекцияларни ўз ичига қамраб олиши кераклиги қайд қилиб ўтилади.

Бу кўплик ўз таркибига иккита кичик кўпликларни (гуруҳларни) қамраб олади, жумладан, биринчиси доимий (ўзгармас) эгриликли параллеллар бўйича тузилган проекциялар, иккинчиси эса – ўзгарувчан эгриликка эга бўлган параллеллар проекцияларни.

Биринчи гуруҳ қуйидаги учта оилага бўлинади: биринчиси, параллеллари тўғри, иккинчиси – концентрик айланали, учинчиси – эксцентрик айланалардан ташкил топган проекциялар. Ҳар бир оила меридианлар кўриниши бўйича тегишли синфларга ажратилади. Биринчи оила (тўғри чизиқли параллеллар билан ифодаланувчи) ўз таркибига тўртта синфни қамраб олади.

1. Цилиндрик проекциялар, умумий формуласи:

$$x = f(\varphi); \quad y = \beta\lambda,$$

бу ерда β – проекция параметри.

2. Умумлаштирилган цилиндрик проекциялар:

$$x = f_1(\varphi); \quad y = f_2(\lambda).$$

Бу синфни иккита кичик синфларга ажратиш мумкин – тўри меридиан ўқига нисбатан симметрик ва ассиметрик бўлган проекциялар.

3. Псевдоцилиндрик проекциялар:

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi, \lambda).$$

Бу проекциялар синфини ҳам иккита кичик синфларга ажратиш мумкин, бунда ҳам тўрнинг меридиан ўқига нисбатан симметриклик ҳолатлари ҳисобга олинади.

4. Цилиндрик–конусли проекциялар – бу проекцияларда параллеллар тўғри чизиқлар тутамлари билан ифодаланиб, меридианлари – концентрик айланалар бўлиб тасвирланади.

Иккинчи оила (концентрик параллеллар) ўз таркибига бешта синфни қамраб олади.

1. *Конусли проекциялар*:

$$\rho = f(C, \varphi); \qquad \delta = \alpha\lambda;$$

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$q = const,$$

бунда α ва C – проекция параметрлари.

Қутб нуқтасида тасвирнинг узилиши кузатилади.

2. Умумлаштирилган конусли проекциялар, уларда қутб бурчаги формуласидан ($\delta = f_2(\lambda)$) ташқари, барча келтирилган формулалар сақланади. Бунда ҳам қутб нуқтасида узилиш кузатилади.

Бу синф проекцияларини иккита кичик синфларга ажратиш мумкин, бунда ўрта меридианга нисбатан тўрларнинг симметриклиги эътиборга олинади.

3. Псевдоконусли проекциялар:

$\rho = f_1(\varphi);\qquad \delta = f_2(\varphi, \lambda);$

$x = q - \rho\cos\delta;\ \ y = \rho\sin\delta;$

$q = f_2\ (\varphi).$

Бу синф иккита кичик синфдан иборат бўлиб, биринчисида тўр ўрта тўғри меридианга нисбатан симметрик, иккинчисида – асимметрик кўринишда бўлади. Бунда меридиан ҳам тўғри ҳам эгри тасвирланиши мумкин.

4. Азимутал проекциялар:

$\rho = f_1(\varphi);\ \ \delta = \lambda;$

$x = \rho\cos\delta;\ \ y = \rho\sin\delta;$

5. Псевдоазимутал проекциялар - 0° узоқликли меридианлар – тўғри чизиқлар; 90°, 180° и 270° – тўғри ёки эгри чизиқлар. Бу проекцияларнинг умумий формулалари:

$\rho = f_1(\varphi);\ \ \delta = f_2(\varphi, \lambda) = \lambda + F(\varphi)\sin k\lambda;$

$x = \rho\cos\delta;\ \ y = \rho\sin\delta;$

бунда k — бутун сон.

Бу синф иккита кичик синфга бўлинади: биринчида 0° и 180° узоқликдаги меридианларга нисбатан картографик тўр симметрик, иккинчида — тўр асимметрик.

Учинчи синфга (эксцентрик параллелли) иккита синф проекциялари киради.

1. Умумлашган ярим конусли проекциялар:

$\rho = f_1(\varphi);\ \ \delta = f_3\ (\varphi, \lambda);$

$x = q - \rho\cos\delta;\ \ y = \rho\sin\delta;$

$q = f_2(\varphi)$.

Бу синф ўз таркибига тўртта кичик синфни қамраб олади. Кичик синфларга ажратиш асосини картографик тўрнинг симметриклик хусусиятлари ташкил қилади: бунда тўғри чизиқли меридианга нисбатан, экваторга нисбатан, меридиан ва экваторга нисбатан (ёки унинг ассиметриклиги бўйича).

2. Ярим конусли проекциялар:

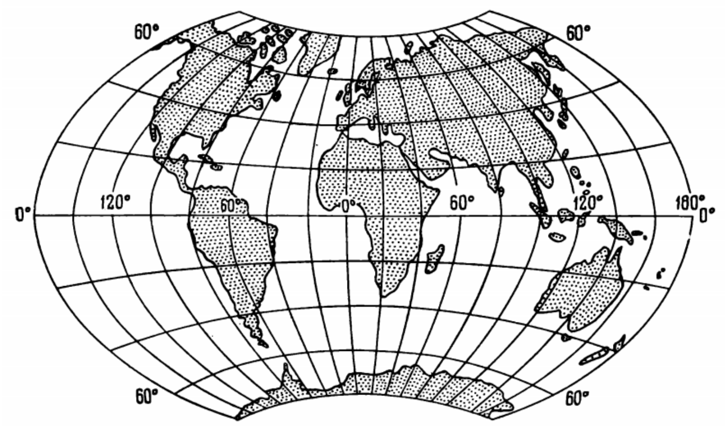
$$\rho = Nctg\varphi; \quad \delta = f(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$q = ks + Nctg\varphi,$$

бу ерда s – меридиан ёйининг узунлиги; k – коэффицент.

Бу синф ўз таркибига иккита кичик синфни қамраб олиб, бу кенжа синфларга ажратиш асосини тўрнинг меридиан ўқига нисбатан симметриклиги ташкил қилади (18–расм).



18–расм. **Ярим конусли проекция.**

Проекцияларнинг иккинчи кичик кўплиги ўз таркибига учта оилани қамраб олади. Бу бўлиниш асосини қутбнинг тасвирланиши ва тенгламаларнинг кўриниши ташкил қилади. Биринчи оила (қутбда тасвирнинг узилиши мавжуд эмаслиги) ўз ичига иккита синфни қамраб олади.

1. Ярим азимутал проекциялар – бунда параллеллар эллипслар, меридианлар эса – эллипслар марказидан чиқувчи тўғри ёки эгри чизиқлар тутами билан тасвирланади. Бу проекциялар учун умумий тенгламалар қуйидаги кўринишга эга:

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda); \quad \delta = f(\varphi, \lambda);$$

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta.$$

2. Умумлашган ярим азимутал проекциялар – буларда параллеллар ихтиёрий эгриликдаги чизиқлар, меридианлар эса – қутб нуқтасидан чиқадиган тўғри ёки эгри чизиқлар тутамидан иборат бўлади. Проекциялар умумий тенгламалари ярим азимутал проекциялар синфидагига ўхшаш бўлади.

Иккинчи оилага тааллуқли проекциялар (уларда қутб доирасида узилиш қайд қилинади) ўз таркибига тўртта проекциялар синфини қамраб олади, уларни умумлаштирилган ярим конусли проекциялар деб аташ ҳам мумкин: уларда эллипссимон параллеллар, параболик ва гиперболик параллеллар, шунингдек, ҳоҳлаган эгриликга эга бўлган параллеллар мавжудлигини қайд қиламиз.

Бундай проекциялар умумий тенгламалари:

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda); \quad \delta = f_3(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$q = f_2(\varphi).$$

Умумлаштирилган ярим конусли проекцияларнинг барча синфлари гиперболик параллелларга эга бўлган проекциялардан ташқари, тўрнинг симметриклик тавсифлари белгиси бўйича тўртта кичик синфга ажратилади, гиперболик параллелларга эга проекциялар эса – иккита кичик синфга (ушбу белгиси бўйича) ажратилади.

Учинчи оила ярим цилиндрик проекцияларни иккита синфини ўз ичига олади, бунда ҳам қутб доирасида узилиш мавжуд бўлади, бироқ проекция тенгламаси фақат тўғри бурчакли координаталар тизимида ифодаланади (булар цилиндрик проекцияларга хос):

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda).$$

Бу проекцияларда меридиан ва параллеллар ихтиёрий эгриликдаги эгри чизиқлар билан тасвирланади.

Проекциялар синфлари тўғри бурчакли координаталарининг берилиш усули асосида ажратилади. Биринчи синфга тўғри бурчакли координаталари аналитик кўринишда берилган проекциялар киритилади, иккинчи синфга – тўғри бурчакли координаталари жадвал кўринишида берилган проекциялар киритилади. Ярим цилиндрик проекциялар синфларининг ҳар бири ўз таркибига тўртта кичик синфларни қамраб олади, бундай проекциялар тўрларининг симметриклиги бўйича ажралиб туради.

Проекцияларнинг ушбу қараб чиқилган таснифи нафақат барча мавжуд бўлган проекцияларни ўз ичига қамраб олади, балки келгусида ишлаб чиқилиши мумкин бўлган бошқа проекцияларни ҳам ўз ичига олиши мумкин.

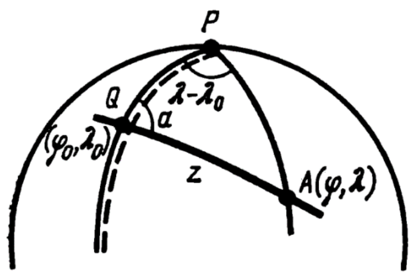
16–§. Картографик тўрнинг ориентирланганлиги бўйича проекцияларни таснифлаш. Географик координалар тизимидан қийшиқ ва кўндаланг сферик координаталар тизимига ўтиш; бу тизимларда қутбларни танлаш

Нормал проекциялардан ташқари қийшиқ ва кўндаланг проекциялар ҳам мавжуд. Бундай бўлиниш асосига сферик координалар тизимида қутб кенглиги қиймати (φ_0) қабул қилинган. $\varphi_0 = 90^\circ$ бўлганда нормал проекция, $\varphi_0 = 0^\circ$ – кўндаланг проекция ва $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ - ҳолатда қийшиқ проекциялар олинади.

Нормал проекцияларда нормал тўр асосийси билан устма-уст тушади, яъни жойлашиш ҳолати картага олинаётган юза географик координаталари (φ, λ) билан ифодаланувчи параллеллар ва меридианлар тўрига мос тушади. Қийшиқ ва кўндаланг проекцияларда нормал тўр асосийга мос келмайди. Бундай проекцияларда нормал тўр вертикаллар ва альмукантаратлар тўрларидан ташкил топади.

Вертикаллар – қийшиқ ёки кўндаланг тизим $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ қутб нуқталари кесишадиган катта айланалар ҳисобланади. Картага олинаётган юзада вертикалларнинг жойлашиш ўрни азимут (α) билан аниқланади, бу қиймат жорий ва бошланғич вертикаллар текислиги ўртасида жойлашган икки қиррали бурчакга тенг. Бошланғич вертикал деб қийшиқ ёки кўндаланг координаталар тизими қутб меридиани билан мос келувчи λ_0 узоқликка эга бўлган вертикалга айтилади (19–расм).

Альмукантаратлар – вертикалларга перпендикуляр жойлашган кичик айланалар; уларнинг картага олинаётган юзада жойлашиш ҳолати зенит масофаси z координатаси билан аниқланади, бу қиймат нормал координаталар тизимининг қутбидан (Q) жорий альмукантаратгача бўлган вертикал ёйига тенг.



19–расм. **Қийшиқ тизимнинг z ва *a* сферик координаталари.**

Вертикаллар ва альмукантаратлар тўрини аралаш ҳолатдаги меридианлар ва параллеллар тўри сифатида қараб чиқиш мумкин, бунда географик қутб (P) қийшиқ ёки кўндаланг координаталар тизими (Q) қутби билан алмаштирилади. Қийшиқ ва кўндаланг проекцияларда картага олинаётган юза сифатида радиуси (R) шар юзаси қабул қилинади, унинг қиймати берилган шартларга мос ҳолда аниқланади (масалан, шар радиуси сифатида ер эллипсининг тенг майдонли юзаси) ёки картага олинаётган юзанинг ўрта эгрилик радиусига, тенг деб ҳисобланади.

Географик координаталардан сферик қутбий қийшиқ ва кўндаланг координаталар тизимига ўтиш сферик тригонометриянинг маълум формулалари бўйича амалга оширилади:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda);$$

$$\sin a \sin z = \cos\varphi \sin(\lambda_0 - \lambda); \qquad (59)$$

$$\cos a \sin z = \sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda).$$

Иккинчи (*59*) формулани учинчисига бўлиш орқали

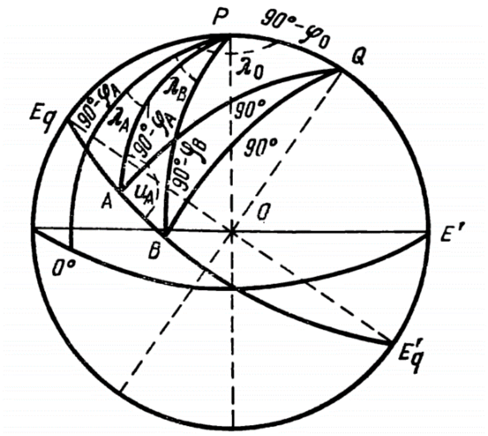
$$tga = \frac{\cos\varphi\sin(\lambda_0 - \lambda)}{\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda_0 - \lambda)} \qquad (60)$$

ёки ҳисоблашларга қулай бўлиши учун

$$ctga = tg\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda_0 - \lambda) - \sin\varphi_0 ctg(\lambda_0 - \lambda). \qquad (61)$$

Қишиқ ва кўндаланг қутбий сферик координаталарга ўтиш учун қутб координаталарини $Q - \varphi_0, \lambda_0$ аниқлаш талаб қилинади, бунда учта усулдан фойдаланилади. Биринчи усул кўплаб азимутал ва перспектив-азимутал проекциялар учун қўлланилади: бунда қутб тасвирланаётган ҳудуднинг марказий нуқтаси билан мос тушади; қутб координаталари бевосита карта ёки глобусдан олинади ёки тасвирланаётган ҳудуд чегарасида жойлашган нуқталарнинг кенглиги ва узоқлиги қийматлари бўйича ҳисоблаб топилади.

Иккинчи усул қийшиқ ва кўндаланг цилиндрик проекциялар учун ишлаб чиқилган, бунда қутб координаталари қутбдан 90^0 бурилувчи (қийшиқ ёки кўндаланг тизим экватори) катта айлана ёйи жойлашишига мос ҳолатда аниқлаш назарда тутилади. Кўндаланг проекцияларда бу катта айлана меридиан билан устма – уст тушади (20–расм).



20–расм. **Берилган иккита нуқта (А, В) бўйича қийшиқ қутб координаталар тизимини ҳисоблаш чизмаси.**

Бу проекцияларда

$\varphi_0 = 0; \qquad \lambda_0 = \lambda_{ўр} \pm 90°,$

бунда $\lambda_{ўр}$ — ўрта меридиан узоқлиги.

Агар узоқликни ўрта меридиандан ҳисобласак, унда $\lambda_0 = \pm 90°$.

Қийшиқ координата тизими қутбини аниқлаш учун иккита учбурчакни ечиш керак. Дастлаб АРВ учбурчакдан u_1 бурчакни қуйидаги формула билан аниқлаймиз

$tg\, u_1 = tg(\lambda_2 - \lambda_1) \cos x \cos ex\ (x - \varphi_1)$,

бунда x — ёрдамчи u_1 бурчак ва

$tg\, x = sec(\lambda_2 - \lambda_1)\ tg\varphi_2$,

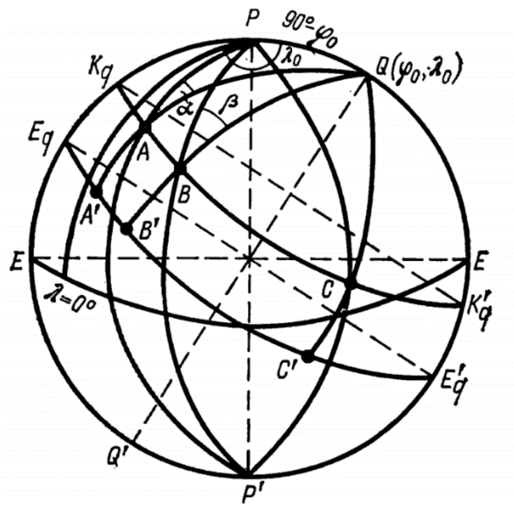
кейин APQ учбурчакдан φ_0 ва λ_0 ни қуйидаги формула билан аниқлаймиз

$\sin \varphi_0 = \cos \varphi_1 \sin u_1$

$$tg\ (\lambda_0 - \lambda_1) = cosec\ \varphi_1 ctg\, u_1. \qquad (62)$$

Учинчи ҳолатда қийшиқ тизимнинг қутб координаталарини аниқлаш тасвирланувчи ҳудуднинг ўртасидан ўтувчи кичик айлана асосида амалга оширилади. Бу усул қийшиқ конусли проекцияларни олишда фойдаланилади ва замонавий картография амалиётида кам ишлатилади. Бироқ қутб координаталарини олишнинг бу усулини ўрганиш назарий жиҳатдан қизиқиш уйғотади.

Тасвирланаётган ҳудуднинг ўрта қисмидан ўтувчи кичик айлананинг йўналишини билган ҳолда, кичик айланага перпендикуляр ҳолатда жойлашган ва φ_1, λ_1, φ_2, λ_2, φ_3, λ_3 координаталар билан белгиланувчи минимал даражада учта нуқтадан ўтувчи катта айланаларнинг кесишиш нуқтасини топиш талаб қилинади.



21–расмда ушбу учта нуқта кичик айланада $K_qK'_q$ жойлашиб, қийшиқ тизимнинг қутб $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ жойлашиш ўрнини аниқлаб беради; катта айлана – $E_qE'_q$ ушбу қийшиқ тизим экватори бўлиб, у кичик айланага $K_qK'_q$ параллел.

21–расм. **Берилган учта нуқта бўйича (A, B, C) қутб координаталарини ҳисоблаш чизмаси.**

Берилган *PAQ, PBQ, PCQ* учбурчаклардан

$$\cos z_k = \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1);$$
$$\cos z_k = \sin\varphi_0 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_0 - \lambda_2); \qquad (63)$$
$$\cos z_k = \sin\varphi_0 \sin\varphi_3 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_3 \cos(\lambda_0 - \lambda_3).$$

Ушбу учта тенгламада учта ноъмалум – z_k, φ_0, λ_0 қиймат мавжуд.

Ҳақиқий φ_0, λ_0 қийматларга нисбатан тенгламани ечиш орқали қийшиқ тизим қутб координаталарини аниқлаймиз:

$$tg(\lambda_0 - \lambda_1) = \frac{(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_3)[\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)]}{(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_3)\cos\varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) - (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)} -$$

$$- \frac{(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)[\cos\varphi_1 - \cos\varphi_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)]}{(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_3)\cos\varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) - (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}; \qquad (64)$$

$$tg\varphi_0 = \frac{\cos\varphi_2 \cos(\lambda_0 - \lambda_2) - \cos\varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1)}{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2}.$$

φ_0 кенгликни аниқлашни назорат қилиш ишлари бир жуфт нуқталар орқали, масалан, биринчи ва учинчи ёки иккинчи ва учинчи нуқталар асосида бажарилиши мумкин.

Назорат саволлари

1. Тенг бурчакли проекцияларга тушунча беринг ва формулаларини келтиринг.

2. Ихтиёрий проекцияларда қандай хатоликлар мавжуд, уларнинг қийматлари қандай аниқланади?

3. Нормал конусли проекцияни қандай тушунасиз, унинг тўрини чизиб кўрсатинг.

4. Азимутал ва псевдоцилиндрик проекцияларда нормал тўрнинг кўриниши қандай, бу проекциялар хатолиги бўйича қайси проекциялар синфига тегишли?

5. МИИГАиКни “Картография” кафедрасида картографик проекцияларни таснифлаш усулларини асосий жиҳатларини айтиб беринг.

6. Цилиндрик, конусли, азимутал проекциялар формулаларини келтиринг ва уларга қисқача изоҳ беринг.

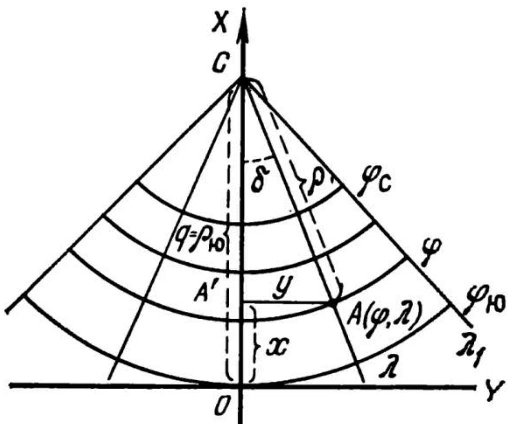
7. Вертикаллар ва альмукантаратлар чизиқлари моҳияти нимада, чизмаларда кўрсатинг.

IV БОБ.
КОНУСЛИ ПРОЕКЦИЯЛАР

17–§. Конусли проекцияларнинг асосий қоидалари ва умумий формулалари

Нормал конусли проекцияларда меридианлар битта нуқтада туташадиган бир-бирига мос келадиган узоқликларининг фарқи билан мос бурчакларга пропорционал бўлган тўғри чизиқлар билан тасвирланади, параллеллар эса – маркази меридианлар кесишиш нуқтасида бўлган концентрик ёйлардан иборат (12–расм). Қийшиқ ва кўндаланг проекцияларда вертикаллар ва альмукантаратлар худди шундай кўринишда бўлиб, меридиан ва параллеллари мураккаб эгри чизиқлар билан тасвирланади. Амалий жиҳатдан, нормал конусли проекциялар асосан, ишлаб чиқаришда кўпроқ фойдаланилади.

Умумий кўринишда конусли проекциялар тенгламалари ясси тўғри бурчакли (*x, y*) ва қутбий координаталар билан (ρ – қутб радиуси, δ – қутб бурчаги) ифодаланади. Бу координата тизимида қутб сифатида меридианларни кесишиш нуқтаси қабул қилинади, қутбий ўқ сифатида эса – ўрта меридиан олинади, ундан λ узоқлик фарқлари қийматлари ҳисоби бошланади (22–расм).



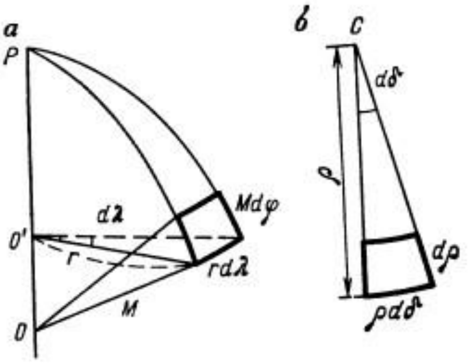
22–расм. **Нормал конусли проекцияда координаталар тизими.**

Тўғри бурчакли координаталар боши сифатида картанинг жанубий параллеллида ўрта меридианда жойлашган *O* нуқтани қабул қиламиз, бу ҳолатда:

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta; \qquad (65)$$

$$\delta = \alpha\lambda; \qquad \rho = f(\varphi), \qquad (66)$$

бу ерда, $q = const$ – қутбий координата тизими қутби ва тўғри бурчакли координаталар боши ўртасидаги масофа; ρ – фақат кенглик функцияси бўйича ўзгарадиган параллелл радиуси. α - параметр, у ҳар доим бирдан кичик бўлади, яъни параллеллар тўлиқ бўлмаган айланалар билан тасвирланади (12–расм). Агар, $\alpha = 1$ бўлса, у ҳолда конусли проекциялар азимутал проекцияларга, агар $\alpha = 0$ бўлса цилиндрик проекцияларга айланади.



23-расм. **Чексиз кичик трапеция.**
а – эллипсоидда; б – конусли проекцияда

Қутб радиуси ρ қийматини белгилайдиган функция тури дастлаб қуйилган тасвирлаш шартлари билан боғлиқ ҳолда аниқланади: яъни, меридианлар бўйича тенг бурчакли, тенг майдонли ёки тенг ораликли тасвирлашлар бўйича. Функциянинг турига боғлиқ ҳолатда иккинчи параметр аниқланади. Тенг бурчакли ва тенг ораликли проекцияларда бу қиймат маълум даражада геометрик маънога эга - у проекциядаги экватор радиусини белгилайди.

Нормал конусли проекцияларда меридианлар ва параллеллар тўри ортогоналлигини эътиборга олсак, унда асосий йўналишлар меридиан ва параллелар билан устма – уст тушади ва m меридиан ва n параллеллар бўйича узунлик хусусий масштаблари экстремал бўлади. Узунлик хусусий масштаби таърифидан келиб чиққан ҳолда ва 23–расмдан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi};$$

$$n = \frac{\rho d\delta}{rd\lambda} = \frac{\alpha\rho}{r}. \qquad (67)$$

Бунда минус ишора φ қиймати ортиши билан ρ радиус қиймати камайиб боришини билдиради. Майдон масштаби

$$p = mn.$$

Бурчакларнинг нисбатан энг катта хатолиги қиймати қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Тасвирланаётган ҳудуднинг ўлчами ва конусли проекция параметрларини аниқлаш усулларига биноан, проекцияда битта ёки иккита параллеллар мавжуд бўлиб, уларнинг узунлиги хатосиз тасвирланади; бундай параллеллар – *асосий параллеллар* дейилади. m, n, p, ω формулалар таҳлили шуни кўрсатадики, бу проекцияларда хатолик қиймати фақат кенгликга боғлиқ бўлади, шу сабабли изоколалар параллеллар билан мос тушади ва айлана ёйиларидан иборат бўлади.

Нормал конусли проекциялар, айниқса, параллеллар бўйлаб чўзилган ва ўрта кенгликларда жойлашган ҳудудларни тасвирлаш учун жуда қулай. Бироқ улар нафақат ўрта, балки жанубий ва шимолий кенгликларда жойлашган, турли хил шаклга эга бўлган ҳудудларни тасвирлаш учун ҳам кенг миқёсда фойдаланилади (фақат қутб ҳудудларини эмас).

18–§. Тенг бурчакли нормал конусли проекциялар

Тенг бурчакли нормал конусли проекцияларда қутб радиуси ρ тенг бурчакли тасвирлашнинг асосий шартидан келиб чиқган ҳолда аниқланади:

$$m = n.$$

(67) формулани ҳисобга олиб, қуйидаги тенгламани оламиз

$$-\frac{d\rho}{Md\varphi} = \frac{\alpha\rho}{r} \quad \text{ёки} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha\frac{Md\varphi}{r} \qquad (68)$$

Интеграллашгандан сўнг

$$\ln\rho = \ln C - \alpha\int\frac{Md\varphi}{r}, \qquad (69)$$

бунда C — интеграллаш доимийси.

Интеграл $\int \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi} = q$ эллисоидни тенг бурчакли тасвирлашни барча натижаларида учрайди.

Интеграллашгандан сўнг, оламиз

$$\int \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi} = ln\,U, \qquad (70)$$

бунда

$$U = \frac{tg(45°+\varphi/2)}{tg^{e}(45°+\psi/2)};$$

$$\sin\psi = e\sin\varphi.$$

e — эллипсоидни биринчи эксцентриситети.

Унда (69) формула қуйидаги кўринишни олади

$\ln\rho = lnC - \alpha\ln U$, бундан

$$\rho = C/U^{\alpha}. \qquad (71)$$

φ = 0 бўлганда (ψ= 0 бўлади) функция U бирга тенг. Унда (71) формуладан

$$\rho_{\varphi=0} = C,$$

яъни параметр C проекцияда экватор радиусига тенг. Агар φ = 90° бўлса, функция U чексиз ва $\rho_{\varphi=90°}$=0, яъни географик қутб нуқта бўлиб тасвирланади. (65), (66), (67) ва (71) формулалар асосида нормал тенг бурчакли конусли проекциялар формулаларини оламиз:

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = C/U^{\alpha}; \quad \delta = \alpha\lambda; \qquad (72)$$

$$\alpha = const; \quad C = const;$$

$$m = n = \alpha\rho/r = \alpha C/rU^{\alpha};$$

$$p = m^2;\ \omega = 0.$$

Агар ер юзаси сфера сифатида қабул қилинса, унда

$$U = tg(45° + \varphi/2);$$

$$\rho = Ctg^{\alpha}(45° + \varphi/2)\,;$$

$m = n = \ \alpha\rho/R\ cos\ \varphi\ .$

α ва С параметрлар хатоликлар қиймати ва уларни тақсимланишига таъсир қилади. Уларни аниқлаш усулларини кўриб чиқишдан аввал, n масштабни экстремумлигини текширамиз ва минимал масштабли параллел кенглигини φ_0 топамиз. Бунинг учун n ни φ бўйича дифференциллаймиз:

$n_\varphi = \alpha(\rho_\varphi r - r_\varphi\, \rho)/r^2.$

(68) тенгликни эътиборга олиб

$\rho_\varphi = -\alpha\rho M/r.$

(3) формула асосида

$$r_\varphi = (N\cos\varphi\ )_\varphi = N\varphi\cos\varphi - Nsin\ \varphi =$$

$$\frac{\alpha e^2\sin\varphi\cos^2\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} - \frac{a\sin\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} =$$

$$= \frac{a\sin\varphi(e^2\cos^2\varphi + e^2\sin^2\varphi - 1)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = -Msin\ \varphi,\ \ (73)$$

унда

$n_\varphi = \frac{\alpha\rho}{r}\frac{M}{r}(\sin\varphi - \alpha).$

Олинган ҳосила нулга тенг бўлади, қачонки α = sin φ_0.

Кенглик бўйича иккинчи ҳосила

$(n_{\varphi\varphi})_0 = n_0\frac{M_0}{N_0},$

мусбат, шунинг учун φ_0 кенгликдаги параллел бўйича n_0 масштаб минимал. Шундай қилиб, тенг бурчакли конусли проекцияларда экстремум тенгламаси қуйидагича бўлади

$$\sin\varphi_0 = \alpha \qquad (74)$$

Тенг бурчакли проекцияларда ҳоҳлаган нуқтада узунликнинг хусусий масштаби йўналишга боғлиқ эмаслигини эътиборга олсак, унда хатолик эллипси чексиз кичик радиусли айлана бўлади. Узунлик масштаби ва параллеллар оралиқлари φ_0 қийматли параллелдан ҳар иккала томон бўйлаб ўсиб боради, бироқ бунда экваторга нисбатан қутбга томон ўсиш тезроқ қайд қилинади.

α ва С параметрларни аниқлашнинг бир нечта усулларини қараб чиқамиз.

1. Берилган асосий φ_0 кенгликли параллелда n_0 узунлик хусусий масштаби (одатда, тасвирланаётган ҳудуд учун ўрталикда) нисбатан кичик қийматда, ёки бирга тенг. α параметрни экстримум тенгламасидан (*74*), *С* параметрни эса – (*72*) формула асосида топамиз, бунда қабул қилинган – $n_0 = 1$ шарт ҳисобга олинади:

$\alpha C / r_0 U_0^{\alpha} = 1$, бундан:

$C = r_0 U_0^{\alpha} / \alpha.$

Берилган битта асосий параллелга эга тенг бурчакли конусли проекциялар кенглик бўйлаб чўзилиши 6 – 8° дан ошмайдиган ҳудудларни тасвирлашда фойдаланилади. Бундай ҳолатда узунлик хатолиги 0,2% дан ошмайди.

2. φ_0 кенгликли асосий параллелда n_0 хусусий масштаби нисбатан кичик қийматли ва бирга тенг бўлади, четки параллелларда $\varphi_{ж}$ ва $\varphi_{ш}$ кенгликларда хусусий масштаблар ўзаро тенг, яъни $n_{ж} = n_{ш}$. α ни аниқлаш учун иккинчи шартдан ($n_{ю}$=$n_{с}$) фойдаланамиз ҳамда (67) формулани ишлатамиз

$\alpha C / r_{ю} U_{ю}^{\alpha} = \alpha C / r_c U_c^{\alpha}$,

ундан

$r_{ю} U_{ю}^{\alpha} = r_c U_c^{\alpha}$.

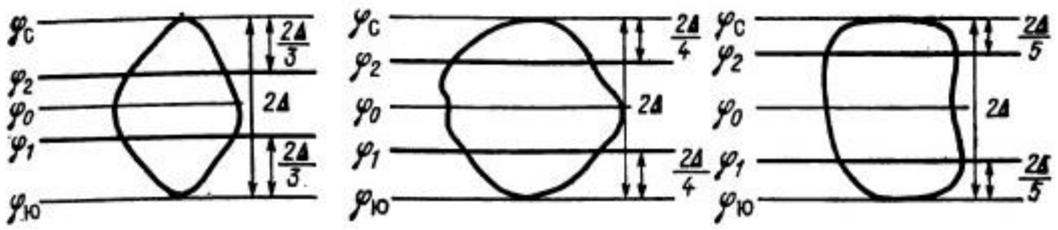
логарифмлашдан кейин

$\alpha = (lg\, r_{ю} - lg\, r_c)/(\lg U_c - 1g\ \ U_{ю})$.

lg U нинг қийматини махсус жадвалдан оламиз.

α қийматини билган ҳолда φ_0 кенгликни (74) формула билан аниқлаймиз, n_0 = 1 шарти бўйича С қийматини (72) формуладан топамиз.

3. n_1 ва n_2 хусусий масштаблар берилган кенгликлари φ_1 ва φ_2 иккита асосий параллелларда бирга тенг (n_1= n_2 =1).



24-расм. **Конусли проекцияларда асосий параллеллар кенглигини аниқлаш усуллари**

n_1=n_2 бўлгани учун

$\alpha C/r_1 U_1^{\alpha} = \alpha C/r_2 U_2^{\alpha}$,

бундан

$\alpha = (lg\, r_1 - lg\, r_2)/(lg U_2 - lg\, U_1)$.

α ни билган ҳолда (74) формуладан φ_0 топиш мумкин.

С параметрни бош параллелларда узунлик хусусий масштаблари бирга тенглик шарти бўйича топамиз, унда

$C = r_1 U_1^{\alpha}/\, \alpha = r_2 U_2^{\alpha}/\alpha$.

В.В.Каврайский бош параллеллар кенглигини қуйидаги формуллар бўйича аниқлашни таклиф этади

$\varphi_1 = \varphi_{ж} + 2\Delta/K; \quad \varphi_2 = \varphi_{ш} - 2\Delta/K$,

бунда 2Δ=$\varphi_{ш} - \varphi_{ж}$. К қиймат чегара чизиғи шаклига боғлиқ (24-расм), чегара ромб шаклида бўлганда К=3, доиралида - К=4, тўғри бурчаклида - К=5.

Иккита асосий параллелларга эга бўлган тенг бурчакли конусли проекция «*ўрта*» ўлчамли, кенглиги 10 – 30^{o} га чўзилган ҳудудларни тасвирлашда ишлатилади. Фақат жуда кам ҳолатларда, майдонни тасвирлашга нисбатан юқори даражада талаблар қўйилганда тенг оралиқли конусли проекцияларга ўтишга тўғри келади, бунда майдон хатолиги тахминан тенг бурчакли проекцияга нисбатан солиштирилганда икки марта кам бўлади.

4. Кенглиги $\varphi_ж$ ва $\varphi_ш$ бўлган четки параллелларда узунлик хусусий масштаблари $n_ж$ ва $n_ш$ бир-бири тенг ва улар бирдан шунчалик катта-ки, минимал хусусий масштаб n_0 бирдан қанча кичик бўлса, яъни $1{:}\,n_0$ - $n_ж$:1 ёки 1:n_0=$n_ш$:1.

Биринчи шарт бўйича

$$\alpha = (lg r_ж - \lg r_ш)/(\lg U_ш - \lg U_ж).$$

α ни билган ҳолда φ_0 ни (74) формула билан топамиз.

Иккинчи шарт қуйидаги тенгламаларга олиб келади $n_ж n_0 = 1$ ва $n_ш\, n_0 = 1.$ (72) формуладан,

$$\frac{\alpha^2 C^2}{r_ж U_ж^\alpha r_0 U_0^\alpha} = 1, \qquad \frac{\alpha^2 C^2}{r_ш U_ш^\alpha r_0 U_0^\alpha} = 1.$$

ундан

$$C = \frac{1}{\alpha}\sqrt{r_ж r_0 U_ж^\alpha U_0^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{r_ш r_0 U_ш^\alpha U_0^\alpha}.$$

Бундай ҳолатда асосий параллелларнинг кенглиги берилмайди ва ҳисоблаш натижаси каср сон бўлади. Бу усулни В.В.Каврайский таклиф қилган.

5. Узунлик ўртача квадрат хатолиги энг кичик бўлганда. Барча тасвирланаётган худуд кенглиги бўйича бир хил бўлган $\Delta\varphi$ (1° кенглик олинганда қўлай) ва λ=$\lambda_ш - \lambda_{?}$ узоқликга чўзилган элементар зоналарга бўлинади. Ҳар бир зона майдони унинг геометрик вазни сифатида олинади:

$$p = M\Delta\varphi r\lambda = MNcos\,\varphi\, arc^2 1° \cdot \lambda.$$

Хатолик меъёри сифатида масштаб натурал логарифми олинади, бу узунлик масштаби формуласини (72) логарифмлашдан олинади:

$$v = \ln\mu = \ln(\alpha C) - ln\, r - \alpha\ln U.$$

Узунлик хатолиги ўртача квадратик қиймати формула билан ифода этилади

$E = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}}.$

Белгилаймиз

$\ln(\alpha C) = \beta; -\ln U = a;$ 1=b ; $-\ln r = h.$ унда

$v = \alpha a + \beta b + h,$ бундай тенгламалар сони кенглик зоналари сонига тенг. α ва β номаълумлар кичик квадратлар усули билан $[pvv]$ = min шарти асосида нормал тенгламалар тизимини ечиш орқали топилади

$$(aa) = [paa] = p_1a_1a_1 + p_2a_2a_2 + \ . \ . \ . \ ;$$

$$(aa) = [pab] = p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \ . \ . \ . \ ;$$

Нормал тенгламаларни ечиб, топамиз

$$\alpha = [(ah)(bb) - (bh)(ab)]/[(aa)(bb) - (ab)^2];$$

$$\beta = [(bh)(aa) - (ah)(ab)]/[(aa)(bb) - (ab)^2];$$

$$\lg C = mod\ \beta - \lg\alpha.$$

19–§. Тенг майдонли нормал конусли проекциялар

Тенг майдонли тасвирлаш шарти (p = 1) бўйича ортогонал тўрли проекцияларда mn = 1 бўлади.

Хусусий масштаблар қийматини m ва n (67) формуладан қўйиб, оламиз

$-\frac{\alpha\rho d\rho}{Mrd\varphi} = 1,$ ундан

$$\rho d\rho = -\frac{Mr}{\alpha}d\varphi. \qquad (75)$$

Бу тенгликни интеграллаб:

$$\rho^2 = -\frac{2}{\alpha}\int_0^\varphi Mrd\varphi = C - \frac{2}{\alpha}S,$$

бунда S = $\int_0^\varphi Mrd\varphi$ – узоқлиги бир радиан ва экватордан то кенглиги φ параллелгача чузилган сфероидик трапеция майдони.

Агар $C = \frac{2}{\alpha}c$ олинса, унда

$$\rho^2 = \frac{2}{\alpha}(c - S). \qquad (76)$$

бунда c — проекцияни иккинчи параметри.

$\varphi = 90°$ бўлганда радиус $\rho \neq 0$, чунки (79) ва (80) формулалардан $c \neq S$. Демак, тенг майдонли проекцияларда қутб нуқта эмас, балки қутбий ёй бўлиб тасвирланади.

(65), (66), (67), (76) тенгламалар асосида эллипсоид учун нормал тенг майдонли конусли проекциялар формулаларини оламиз:

$$x = q\text{-}\rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho^2 = \frac{2}{\alpha}(c\text{-}S); \qquad \delta = \alpha\lambda;$$

$$\alpha = const; \qquad c = const; \tag{77}$$

$$n = \frac{\alpha\rho}{r}; \qquad m = \frac{1}{n} = \frac{r}{\alpha\rho};$$

$$p{=}1\ ; \quad tg\left(45° + \frac{\omega}{4}\right) = a$$

Узунлик хусусий масштабини экстремум бўйича текширамиз. Кенглик бўйича биринчи ҳосила

$$n_\varphi = \frac{\alpha(\rho_\varphi r - r_\varphi\rho)}{r^2},$$

(75) ва (73) формулалардан

$$\rho_\varphi = -Mr/\alpha\rho; \qquad r_\varphi = -M\,sin\,\varphi,$$

бундан

$$n_\varphi = \alpha\left(\frac{-Mr^2/\alpha\rho + \rho Msin\,\varphi}{r^2}\right) = \frac{\alpha\rho}{r}\frac{M}{r}\left(\sin\varphi\ \frac{r^2}{\alpha\rho^2}\right).$$

Биринчи ҳосила нолга тенг бўлади фақат φ_0 да, яъни

$$\sin\varphi_0 - r_0^2/\alpha\rho_0^2 = 0.$$

Унда экстремум тенгламаси

$$\rho_0 = r_0/\sqrt{\alpha\sin\varphi_0}. \tag{78}$$

Иккинчи ҳосила φ_0 кенгликли параллелда $(n_{\varphi\varphi})_0 > 0$ ва масштаб n_0 минимал бўлади.

Меридианлар бўйлаб хусусий масштаб (m) параллеллар узунлик масштабига (n) тескари пропорционал ва бу қиймат ҳар иккала томон бўйлаб φ_0 параллеллардан узоқлашиши билан камайиб боради, бироқ қутбга йўналишда бу камайиш тезроқ бўлади. Ўз навбатида, мос равишда қутбга томон параллеллар ўртасидаги ўзаро оралиқлар экваторга нисбатан тезроқ камайиб бориши кузатилади.

α ва C параметрларни аниқлашнинг иккита усулини қараб чиқамиз.

1. Берилган φ_0 кенгликда асосий параллелнинг n_0 хусусий масштаби минимал ва бирга тенг, яъни

$n_0 = \alpha\rho_0 / r_0 = 1.$

(78) экстремум тенгламасидан фойдаланиб, оламиз

$\frac{\alpha r_0}{r_0\sqrt{\alpha \sin \varphi_0}} = 1$, ундан биринчи параметр

$\alpha = sin\varphi_0$. бундан

$\rho_0 = N_0 ctg\, \varphi_0.$

α ва ρ_0 билган ҳолда, (76) формуладан иккинчи параметрни оламиз:

$C = \alpha\, \rho_0^2/2 + S_0.$ (79)

2. Узунлик хусусий масштаби n_1 ва n_2 иккита φ_1 ва φ_2 кенгликли асосий параллелларда бирга тенг, яъни n_1= 1 ва n_2= 1. Унда (77) тенгламага биноан

$(\alpha p_1)^2 = r_1;\ (\alpha p_2)^2 = r_2^2$,

(77) формуладан ρ_1^2 ва ρ_2^2 қуямиз ва биринчи тенгликдан иккинчисини айирамиз:

$2\alpha(S_2 - S_1) = r_1^2 - r_2^2$. бундан

$\alpha = (r_1^2 - r_2^2)/2(S_2 - S_1).$

a ни билан ҳолда, бош параллелларнинг ρ_1 и ρ_2 қутбий радиусларини топиш мумкин

$\rho_1 = r_1/\alpha;\quad \rho_2 = r_2/\alpha$

ва иккинчи параметр

$c = \frac{\alpha\rho_1^2}{2} + S_1 = \frac{\alpha\rho_2^2}{2} + S_2.$ (80)

Агар ер юзаси R радиусли сфера сифатида қабул қилинса, унда

$\rho^2 = \frac{2R^2}{\alpha}(c - \sin\varphi);$

1) $\alpha = \sin\varphi_0;$ 2) $\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2R^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)};$

$c = \frac{\alpha\rho_0^2}{2R^2} + sin\,\varphi_0.$ $c = \frac{\alpha\rho_1^2}{2R^2} + sin\,\varphi_1 = \frac{\alpha\rho_2^2}{2R^2} + sin\,\varphi_{2.}$

20–§. Меридианлар бўйича тенг оралиқли нормал конусли проекциялар

Бундай проекцияда қутб радиуси ρ барча меридианларнинг узунлиги сақланиб қолиши шарти асосида аниқланади:

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi} = 1.$$

Унда $d\rho = -Md\varphi$ (81)

ва интеграллашдан кейин

$\rho = -s + C = C - s$ (82)

бунда s — экватордан φ кенгликли параллелгача бўлган меридиан ёйи узунлиги, C — проекцияда экватор радиусини ифодалайдиган параметр (φ=0 s =0 ва $\rho_{экв} = C$). Қутб радиуси $\rho = C - s_0^{90°}$ айлана ёйи бўлиб тасвирланади.

Меридианлари бўйича тенг оралиқли нормал конусли проекциялар умумий формулари (82), (65), (66), (67) формулалар асосида олинганда қуйидаги кўринишга эга

$x = q - \rho\cos\delta;\quad y = \rho\sin\delta;$

$\rho = C - s;\quad \delta = \alpha\lambda;$

$\alpha = const;\quad C = const;$ (83)

$m = 1;\quad n = \alpha(C - s)/r;$

$p = n;\quad \sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b).$

n узунлик хусусий масштабини экстремум бўйича тадқиқ қиламиз. (81) ва (83) формулалардан

$\rho_\varphi = -M;\quad r_\varphi = -Msin\,\varphi,$ унда

$$n_{\varphi} = \alpha \frac{-Mr + M\rho \sin \varphi}{r^2} = \frac{\alpha\rho}{r}\frac{M}{r}\left(-\frac{r}{\rho} + \sin \varphi\right) = n\frac{M}{r}\left(\sin \varphi - \frac{r}{\rho}\right).$$

Биринчи ҳосила нулга тенг бўлади фақат φ_0, яъни

$\sin \varphi_0 - r_0/\rho_0 = 0.$

Унда экстремум тенгламаси

$$\rho_0 = C - s_0 = N_0 ctg\, \varphi_0. \tag{84}$$

Иккинчи ҳосила $(n_{\varphi\varphi})_0 > 0$, унда φ_0 кенгликли параллелда хусусий масштаб n_0 минимал бўлади:

$$n_0 = \alpha N_0 ctg\, \varphi_0 / N_0 \cos \varphi_0 = \alpha / \sin \varphi_0 \tag{85}$$

α ва С параметрларни аниқлаш усулларини кўриб чиқамиз.

1. n_0 масштаб берилган φ_0 кенгликда бош параллелларда энг кичик ва бирга тенг, яъни $n_0 = 1$. (85) формулани ҳисобга олиб

$n_0 = \alpha / \sin \varphi_0 = 1;$

$\alpha = \sin \varphi_0,$

$C = s_0 + N_0 ctg\, \varphi_0.$

2. n_1 ва n_2 узунлик хусусий масштаблари берилган кенгликлардаги φ_1 ва φ_2 бош параллелларда бирга тенг, яъни $n_1 = 1$ ва $n_2 = 1$. Унда

$\alpha(C - s_1)/r_1 = 1;\ \ \alpha(C - s_2)/r_2 = 1;$ бундан

$C = s_1 + r_1/\alpha; \qquad C = s_2 + r_2/\alpha;$

биринчи формуладан иккинчисини айириб α параметрни топамиз:

$s_2 - s_1 = (r_1 - r_2)/\alpha; \quad \alpha = (r_1 - r_2)/(s_2 - s_1).$

3. Параллеллар бўйича узунлик хатоси ўртача квадратик қиймати энг кичик. Тенг бурчакли конусли проекцияда ҳам ўхшаш равишда ҳудуд узоқлик $\lambda = \lambda_{ш} - \lambda_{▯}$ бўйича чўзилган элементар кенглик зоналарга бўлинади.

Ҳар бир зона геометрик вазни

$p = M\Delta\varphi r\lambda.$

Бу проекцияда хатолик меъёри сифатида қабул қилинади:

$v = n - 1 = \alpha C/r - \alpha s/r - 1.$

Унда параллеллар бўйлаб узунлик хатолиги ўртача квадратик қиймати

$$E_n = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}}.$$

$\beta = \alpha C;\ \ -s/r = a;\ l/r = b; l = h,$ оламиз

$$\alpha a + \beta b - h = v.$$

Олинган тенгламалар сони зоналар сонига тенг бўлади.

Бу тенгламаларни минимум шарти бўйича ечиб $[pvv]$, α ва β, сўнгра $C = \beta/\alpha$ қийматларни топамиз.

В.В.Каврайский собиқ иттифоқ ҳудудида қутб доирасидан жанубга томон узунлик хатолиги ўртача квадратик қиймати минимал, шарти асосида α ва C параметрларни аниқлаган. α ва C қийматларни олиш асосида n хусусий масштаб ҳисоблаб чиқилган, кейин эса n ўзгариш графиги асосида бош параллелларнинг кенглиги аниқланган. Олинган қийматларни бутун градусларгача яхлитлаш орқали, В.В.Каврайский α ва C қийматларини иккинчи усул формулалари ёрдамида яна қайтадан аниқлаган. Асосий параллеллар кенглиги $\varphi_1 = 47^\circ$ ва $\varphi_2 = 62^\circ$ бўлган.

4. Собиқ иттифоқ худуди учун Ф.Н.Кросовскийнинг меридианлар бўйича тенг оралиқли проекциясида қатор (минтақа) майдони сақланади, унинг чўзилиши маълум; φ_1 ва φ_2 кенгликли бу қатор четки параллелларида узунлик хусусий масштаблари (n_1=n_2) тенглиги сақланади; бутун худуд бўйлаб параллеллар бўйича узунлик хатолиги квадратлари йиғиндиси энг кичик қиймат олади. 20^0 кенглик бўйича қатор узунлиги берилган, α ва φ_1 параметрлар қуйидаги шарт бўйича топилган

$$E_n = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}}=\min,$$

бунда $v = n - 1$, р – кенглиги φ бўлган параллеллар узоқлашиши, уларни геометрик вазнини билдиради. Меридианлар бўйича узунлик хусусий масштаби бу шарт бўйича нолга тенг эмас. Проекциянинг асосий формулаларини келтирамиз, бунда ер юзаси радиуси R = 1 бўлган сфера сифатида олинади

ρ=ρ_1+$m(\varphi_1-\varphi)$=ρ_2+$m(\varphi_2-\varphi)$, бунда $\varphi_{1,}$ φ_2 — қаторни (минтақа) четки параллеллари кенглиги,

$\varphi_1 = 73^{\circ}28'42''$; $\varphi_2 = 39^{\circ}28'42''$

$\varphi_{2-}\varphi_1$=20=34°; $\varphi_m = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$=66°28'42" ;

$\rho_1 = cos\varphi_1/\sqrt{\alpha\cos\theta sin\ \varphi_m}$; ρ_2 =cos$\varphi_2/\sqrt{\alpha\cos\theta\ sin\varphi_m}$;

α = 0,851568 ; $n = \alpha\rho/cos\varphi$;

$m = \frac{sin\theta}{\theta}\sqrt{\frac{\sin\varphi_m}{\alpha\cos\theta}}$ = 0,99703

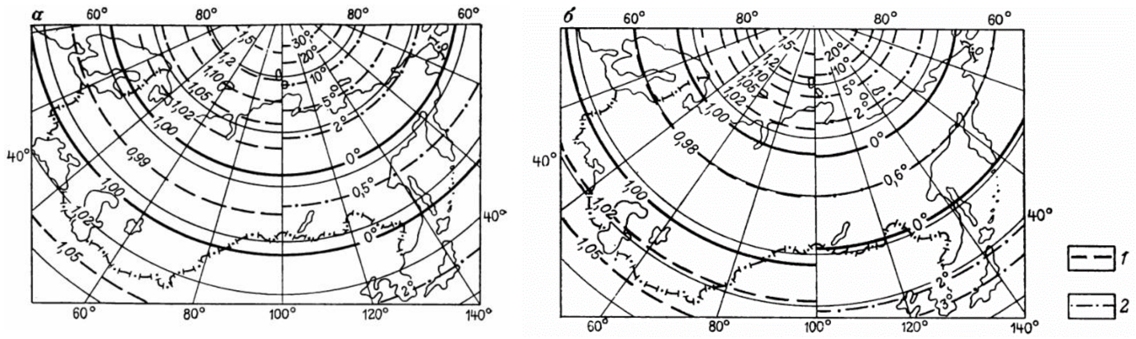
1–жадвалда собиқ иттифоқ карталари учун Каврайский ва Красовский томонидан ишлаб чиқилган тенг ораliқли конусли проекцияларда узунлик, майдон хусусий масштаблари ва бурчаклар хатолиги энг катта қийматлари келтирилган.

Келтирилган 1–жадвалдан кўриш мумкинки, Красовский проекциясида 80–параллелда узунликлар ва бурчаклар хатолиги Каврайский проекциясига нисбатан солиштирилганда, деярли икки марта кичик қийматга эгалиги кўринади. Ҳар иккала проекцияда хатоликларни тақсимланиши 25–расмда кўрсатилган.

1–жадвал

Проекциялар параметрлари	Каврайский маълумотлари		Красовский маълумотлари	
α C (км) m	0,8118238 10575,2 1,00000		0,8515680 5968,3 0,99703	
φ_0 (градус)	n	ω	n	ω
30	1,065	3°38'	1,084	4°45'
40	1,020	1 07	1,031	1 56
50	0,995	0 18	0,998	0 05
60	0,996	0 15	0,987	0 35
70	1,041	2 19	1,010	0 45
80	1,235	12 03	1,136	7 28

Каврайский проекциясини собиқ иттифоқ худуди учун қўллаш керак, қачонки унинг материкли қисмини минимал хатоликда тасвирлаш учун, Красовский проекциясини эса – нафақат материкли қисмни, балки қутб бассейни районини ҳам минимал хатоликда тасвирлаш учун ишлатса бўлади.



25–расм. **Тенг оралиқли конусли проекцияларда изоколалар – р (1) ва ω (2).** *а – Каврайский маълумотлари; б – Красовский маълумотлари.*

21–§. Қийшиқ ва кўндаланг конусли проекциялар

Нормал конусли проекциялар кўпроқ параллеллар бўйлаб чўзилган ҳудудларни тасвирлаш учун қулай. Агар ҳудуд параллел билан устма – уст тушмайдиган, кичик айлана бўйлаб чўзилган бўлса, яъни альмукантарат бўйлаб чўзилган, унда қийшиқ ёки кўндаланг конусли проекциялардан фойдаланиш мумкин.

Бу проекцияларда ер юзаси R радиусли сфера сифатида қабул қилинади, бунда вертикаллар ва альмукантаратлар чизиқлари билан мос тушувчи z ва a қутбли сферик координаталар тизими киритилади. Қийшиқ проекцияларда қутбли сферик координаталар қутб φ_0 кенглиги $0 < \varphi_0 < 90^\circ$, кўндаланг проекцияларда - $\varphi_0 = 0$ бўлади.

Қийшиқ ва кўндаланг конусли проекцияларда вертикаллар битта нуқтадан азимутлари фарқига пропорционал бўлган бурчак остида ўтувчи тўғри чизиқлар билан ифодаланади, альмукантаратлар эса – маркази вертикаллар туташадиган нуқтада бўлган концентрик айлана ёйлари. Қутб меридиани Q (бир вақтнинг ўзида у қутб вертикали P ҳам ҳисобланади) тўғри чизиқ билан тасвирланади ва проекциянинг абсцисса ўқи сифатида қабул қилинади, бунда у эгри чизиқлар билан тасвирланувчи қолган бошқа меридианлар ва параллеллар учун симметрия ўқи ҳисобланади.

Одатда, тўри бурчакли координаталар боши сифатида нисбатан кичик кенгликли параллеллар ва абсцисса ўқининг кесишиш нуқталари олинади. Қийшиқ ва кўндаланг конусли проекцияларда асосий йўналишлар вертикаллар ва альмукантаратлар билан мос тушади, шу сабабли вертикаллар ва альмукантаратлар бўйича узунлик масштаблари (μ_1, μ_2) экстремал бўлади.

Қийшиқ ва кўндаланг конусли проекцияларни ҳисоблаш жараёни бир нечта босқичлардан ташкил топади:

- эллипсоиддан сферага ўтиш ва сфера радиусини *R* танлаш;
- қийшиқ ёки кўндаланг тизим қутб координаталарини (φ_0, λ_0) аниқлаш;
- географик (φ, λ) координаталардан *z, a* координаталарга ўтиш;
- ρ, δ; x, y координаталарни, масштаблар ва бурчаклар хатолигини ҳисоблаш.

Қийшиқ ва кўндаланг конусли проекцияларнинг умумий формуласини (*65*), (*66*), (*67*) формулалар бўйича келтириб чиқариш мумкин, бунда φ ва λ қийматлар ўрнига ($90^\circ - z$) ва a қийматлар қўйилади. Улар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$
\begin{aligned}
&x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;\\
&\rho = f(z); \qquad \delta = \alpha a;\\
&\mu_1 = d\rho / Rdz; \quad \mu_2 = \alpha\rho / R\sin z;\\
&p = \mu_1\mu_2; \ \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b);\\
&\alpha = const.
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Келтирилган (*86*) формуладан кўриш мумкинки, қийшиқ ва кўндаланг конусли проекцияларда хатолик фақат *z* зенит масофага боғлиқ бўлади, изоколалар – альмукантаратлар билан устма – уст тушувчи концентрик айлана ёйларидир. Қутб радиуси ρ тасвирлаш шартларига боғлиқ ҳолатда топилади.

Қийшиқ ва кўндаланг тенг бурчакли конусли проекциялар учун мос раившда z_0, ёки z_1 ва z_2 қийматларда берилган зенит масофада битта ёки иккита асосий альмукантаратлар белгиланиши бўйича формулаларни келтирамиз, бунда $\mu_2 = 1$ шарти бажарилади:

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = Ctg^{\alpha}\frac{z}{2}; \quad \delta = \alpha a;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha Ctg^{\alpha}\frac{z}{2} / R\sin z;$$

$$\alpha = const.$$

1) $\alpha = \cos z_0; \; C = Rtgz_0 ctg^{\cos z_0}\frac{z_0}{2}.$

2) $\alpha = (\lg\sin z_1 - \lg\sin z_2)/\left(\lg ctg\frac{z_2}{2} - \lg ctg\frac{z_1}{2}\right); \quad C = R\sin z_1 ctg\frac{z_1}{2}/\alpha.$

Қийшиқ ва кўндаланг тенг бурчакли конусли проекциялар аэронавигация маршрутли карталарини тузишда ишлатилиши мумкин.

Назорат саволлари

1. Нормал тенг бурчакли конусли проекциялар формулаларини келтиринг, уларга изоҳлар беринг.

2. α ва С параметрларни аниқлаш усуллари моҳияти нимада, энг муҳим формулаларни келтиринг ва қисқача изоҳ беринг.

3. Тенг майдонли нормал конусли проекцияларда узунлик хусусий масштаблари қандай аниқланади?

4. Тенг оралиқли нормал конусли проекцияларга тушунча беринг ва асосий формулаларини келтиринг.

5. Қийшиқ ва кўндаланг конусли проекциялар ҳақида нималарни биласиз, уларни ҳисоблаш жараёни қандай босқичлардан иборат?

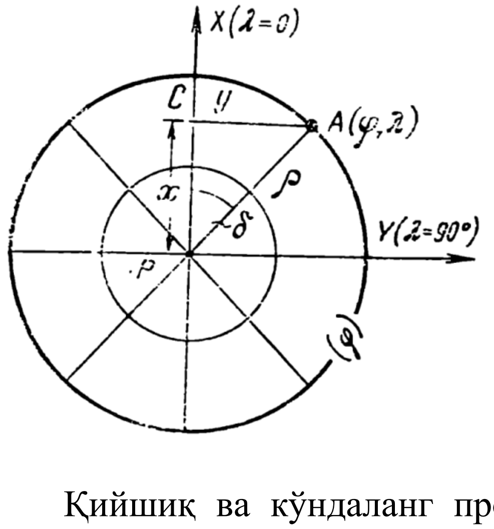
V БОБ.
АЗИМУТАЛ ВА ПЕРСПЕКТИВ-АЗИМУТАЛ ПРОЕКЦИЯЛАР

22–§. Азимутал проекцияларнинг асосий қоидалари ва умумий формулалари

Азимутал проекцияларни конусли проекцияларнинг хусусий ҳолати сифатида қараш мумкин, бунда параметр α бирга тенг. Азимутал проекциялар кўп ҳолатларда майда масштабли карталар учун ишлатилади, шу сабабли Ер ёки бошқа планеталар юзаси одатда сфера радиуси сифатида R қабул қилинади. Агар проекциялардан ўрта ва йирик масштабли карталарни тузишда фойдаланилса, у ҳолда ер юзаси эллипсоид сифатида ҳам қабул қилиниши мумкин.

Азимутал проекциялар нормал ($\varphi_0 = 90°$), қийшиқ ($0° < \varphi_0 < 90°$) ва кундаланг ($\varphi_0 = 0°$) турларга бўлинади. Сферик координата тизимида қутб Q (φ_0, λ_0) учун картага олинаётган худуд марказидаги нуқта танланади.

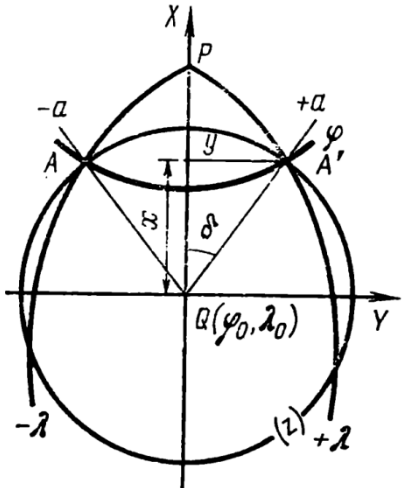
Нормал азимут проекцияларда (26–расм) меридианлар тўғри чизиқлар бўлиб тасвирланади, улар тегишли меридианлар узоқлиги фарқи қийматига тенг бурчак остида битта нуқтада кесишади, параллеллар эса маркази меридианлар кесишиши нуқтасида жойлашган концентрик айлана чизиқлардан иборат. Параллеллар оралиқлари қабул қилинган тасвирлаш характери ёки тасвир текислигида юза бўйлаб нуқталарни лойиҳалаш (*перспектив-азимутал проекцияда*) усуллари асосида аниқланади.



26–расм. **Нормал азимутал проекция координаталари тизими.**

Қийшиқ ва кўндаланг проекцияларда вертикал ва альмукантаратлар тўри ҳам шундай кўринишда бўлади, бунда меридианлар ва параллеллар кўпинча эгри чизиқлар бўйлаб тасвирланади (27–расм).

Қийшиқ ва кўндаланг азимутал проекцияларни ҳосил қилиш бир нечта босқичларни ўз ичига олади:



27–расм. **Қийшиқ ва кўндаланг азимутал проекцияларда координаталар тизими**

1) йирик ва ўрта масштабли карталар учун – эллипсоиддан шарга ўтиш (II бобга қаранг), майда масштабли карталар учун – шар радиусини R танлаш;

2) қутбий сферик координаталар полюси Q координаталарини φ_0 ва λ_0 аниқлаш;

3) географик координаталардан (φ ва λ) (59), (60), (61) формулалар орқали қийшиқ ёки кўндаланг қутбий сферик координаталар (z ва a) тизимига ўтиш;

4) проекцияни координаталари, хусусий масштаблари ва бурчак хатоликларини ҳисоблаш.

Азимутал проекцияларда иккита координат тизими ишлатилади – қутбий (ρ ва δ) ва тўғри бурчакли (x, y) (26-расм).

Азимутал проекцияларнинг умумий формуласидан келиб чиқиб, қийшиқ проекциялар учун қуйидагиларни олиш мумкин:

$$x = \rho \cos \delta \,; \quad y = \rho \sin \delta \,;$$

$$\rho = f(z); \quad \delta = a$$

$$\mu_1 = d\rho / Rdz = \rho z / R \,; \quad \mu_2 = \rho / R\, sin\, z \,; \qquad (87)$$

$$\rho = \mu_1 \mu_2 \,; \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{ ёки } \mathrm{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sqrt{a/b}$$

бунда μ_1 — вертикаллар бўйича узунлик хусусий масштаблари; μ_2 — альмукантаратлар бўйича узунлик хусусий масштаблари; a ва b — узунлик экстремал хусусий масштаблари. Нормал азимутал проекциялар формулалари (87) бўйича z ни $(90° - \varphi)$, a ни λ га алмаштириш натижасида олинади.

Қутб радиуси ρ қийматини аниқловчи функция тасвирлашнинг берилган шартига боғлиқ ҳолда аниқланади, яъни вертикаллар бўйича (меридианлар бўйича) тенг бурчакли, тенг майдонли, тенг оралиқли ёки бошқа хатоликга боғлиқ ҳолда аниқланади. Азимутал проекцияларда вертикаллар ва альмукантаратлар ўзаро перпендикулярлигини инобатга олсак, улар билан асосий йўналишлар мос тушади ва μ_1, μ_2 масштаблар экстремал бўлади ($\mu_1 = b,\ \mu_2 = a$). Масштаблар ва хатоликлар фақат зенит масофаси (кенглик) функциялари ҳисобланади, шу сабабли изоколалар альмукантаратлар (параллеллар) билан устма – уст тушади ва айлана кўринишида бўлади. Азимутал проекциялар айлана тузилишга эга ҳудудларни тасвирлашда анча қулай.

(*87*) формула асосида аниқланувчи проекцияларда, проекциянинг марказий нуқтасида барча хатоликлар мавжуд эмас ва ундан узоқлашиш билан уларнинг қиймати ортиб боради. Хатоликларни бир текисда тақсимланиши учун ρ қийматни ҳисоблашда формулага редукцион коэффицент – $k < 1$ киритилиши мумкин, у марказий нуқтада узунлик масштабига тенг. Бунда асосий масштаб асосий альмукантарат бўйлаб (нормал проекциялар учун – асосий параллелларда) сақланади.

Нормал азимутал проекциялар қутбий худудларни, шимолий ва жанубий ярим шарларни тасвирлаш учун фойдаланилади. Кўплаб ҳолатларда қийшиқ ва кўндаланг проекциялар материклар, ғарбий ва шарқий ярим шарлар ва Ер юзасининг бошқа қисмлари ҳамда планеталар қисмларини картага олишда қўлланилади.

23–§. Тенг бурчакли азимутал проекциялар

Тенг бурчакли азимутал проекцияларда қутб радиуси берилган нуқтада узунлик хусусий масштаби йўналишга боғлиқ эмас, шарти асосида аниқланади, яъни

$$\mu_1 = \mu_2.$$

(87) формуладан бу шартни μ_1 ва μ_2 қийматини қўйиб, оламиз

$d\rho/Rdz = \rho/R\ sin\ z$; $\qquad d\rho/\rho = dz/sin\ z$.

Бу тенгликни интеграллаб

$\lg\rho = \lg \mathrm{tg}\,\frac{z}{2} + \ln \mathrm{C}$, натижада,

$\rho = C\ tg\frac{z}{2}$, бунда C — интеграл доимийси.

μ_2 формуласига ρ нинг қийматини қўйиб μ узунлик хусусий масштаби қийматини топамиз

$$\mu = \left(C\ tg\frac{z}{2}\right)/R\ sin\ z = \left(C\ sec^2\frac{z}{2}\right)/2R$$

марказий нуқтада ($z = 0$) узунлик хусусий масштаби бирга тенг шарти бўйича С параметрни топамиз. Унда

$$C = 2R$$

Бу ҳолат учун тенг бурчакли азимутал проекция формулалари:

$$x = \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$
$$\rho = 2R\ tg\ (z/2); \qquad \delta = a; \tag{88}$$
$$\mu = sec^2(z/2); \qquad p = \mu^2; \qquad \omega = 0\ .$$

Агар узунлик хусусий масштаби зенит масофаси z_k бўлган бош альмукантаратда бирга тенг шарти қўйилса, унда

$C = 2R\ cos^2(z_k/2)$.

$cos^2(z_k/2) = k$, белгилаб, оламиз

$C = 2Rk$,

k — редукция коэффициенти. Унда ρ, μ ва p аниқлаш (87) формула қуйидагича бўлади:

$\rho = 2Rk\, tg\ (z/2)$;

$\mu = k\, sec^2(z/2)$; $p = \mu^2$.

$z = 0$ бўлганда $k = \mu$, яъни $k -$ проекциянинг марказий нуқтасида узунлик масштаби.

Агар (88) формуладаги z ни (90°— φ) га, a ни λ га алмаштирсак, унда тенг бурчакли нормал азимутал проекция формуласини оламиз, бундай ҳолатда географик қутбда узунлик хусусий масштаби бирга тенг бўлади:

$x = \rho \cos \delta$; $y = \rho \sin \delta$;

$\rho = 2R\, tg\ (45° - \varphi/2)$; $\delta = \lambda$; (89)

$m = n = sec^2(45° - \varphi/2)$; $p = m^2$.

Хатоликларни бир текис тақсимланиши учун формулаларга редукцион коэффициент қиймати киритилиши мумкин

$k = cos^2(45° - \varphi_k/2)$.

Унда (89) формула қуйидаги кўринишда бўлади

$\rho = 2Rk\, tg(45° - \varphi/2)$;

$m = n = ksek^2(45° - \varphi/2)$

бунда φ_k — хаоликнинг барча турлари нулга тенг бўлган бош параллел кенглиги, $k -$ географик қутб нуқтасида узунлик масштаби.

Тенг бурчакли азимутал проекцияларда альмукантаратлар (параллеллар) ўртасидаги масофа проекциянинг марказий нуқтасидан узоқлашиш билан ортиб боради. Шарнинг нормал тенг бурчакли азимутал проекцияси юлдузлар осмони картасини тузишда ишлатилади.

24–§. Эллипсоиднинг тенг бурчакли азимутал проекциялари

Бу проекцияларни олишнинг учта усулини қараб чиқамиз:

1. Қутбий худудларни тасвирлаш учун эллипсоидни тенг бурчакли азимутал проекцияси. Бу проекция тенг бурчакли конусли проекцияларнинг

$\alpha = 1$ ҳолатдаги битта хусусий ҳолати. Бунда (*71*) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$x = \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = \frac{C}{U}; \quad \delta = m^2$$

$$m = n = C / rU; \ \ p = m^2;$$

$$C = r_0 U_0,$$

бу ерда r_0 ва U_0 асосий параллелни берилган φ_0 кенглиги бўйича аниқланади, унинг хусусий масштаби бирга тенг деб олинади.

2. Айланали ҳудудларни (қутбий худудлардан ташқари) тасвирлаш учун эллипсоидни тенг бурчакли азимутал проекцияси. $\alpha = 1$ шароитда тенг бурчакли Лагранж проекциясининг (Лагранж проекцияси кейинроқ қараб чиқилади) хусусий ҳолати ҳисобланган проекция формуласини келтирамиз:

$$x = \frac{k\sin\delta}{1+\cos\delta\cos\lambda}; \quad y = \frac{k\cos\delta\sin\lambda}{1+\cos\delta\cos\lambda};$$

$$m = n = \frac{k\cos\delta}{r(1+\cos\delta\cos\lambda)}; \quad p = m^2;$$

$$tg(45^\circ + \delta/2) = \beta U.$$

бу ерда, β ва k – қуйидаги формула билан аниқланадиган проекция параметрлари

$$\beta = \frac{1+\sin\varphi_0}{1-\sin\varphi_0}U_0; \quad k = m_0 r_0 (1+\sec\delta_0),$$

$$tg(\delta/2) = \sin\varphi_0,$$

φ_0 – берилган параллел (ўрта) кенглиги.

3. Қийшиқ қутбий сфероид координаталар тизимидан фойдаланиш орқали ҳосил қилинган эллипсоиднинг тенг бурчакли азимутал проекцияси.

Қутбий ва геодезик координаталар формулаларини ҳисобга олган ҳолатда, эллипсоидни юзаси чизиқли элементи квадрати (e^4 аниқликда ҳисоблашда) қуйидаги кўринишда ифодаланади

$$ds^2 = P^2(dz^2 + \sin^2 z da^2), \tag{90}$$

бу ерда

$$P = N_0\left\{1 - \frac{e^2}{2}\left[\sin z \cos a \cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)\right]^2\right\} + ...;$$

N_0 – қутб нуқтасида биринчи вертикалнинг кесишиш эгрилик радиуси; z ва a – (*59*) ва (*60*) ёки (*61*) формулалар бўйича аниқланади. (87) и (90) формулаларни эътиборга олиб, вертикаллар ва альмукантаратлар бўйлаб чўзилган узунлик хусусий масштабини қуйидаги тенглик билан аниқлаш мумкин

$$\mu_1 = d\rho/Pdz\ ; \qquad \mu_2 = \rho/Psin\, z. \tag{91}$$

Тенг бурчаклик шартини ёзиб $\mu_1 = \mu_2,\ f = 0$, оламиз

$d\rho/\rho = dz/\sin z.$

Дифференциал тенгламалар қутбда узунлик хусусий масштаби шарти бўйича бирга тенглиги ҳисобга олиниб интегралланганда, оламиз

$\rho = 2N_0 tg(z/2)$

(90), (91) тенгликлар ҳисобга олиниб, узунлик хусусий масштаби

$\mu = sec^2\frac{z}{2}\left\{1 + \frac{e^2}{2}[\sin z \cos a\ cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2\right\} + \cdots;$

Бу проекция формуласи:

$x = \rho\cos\delta;\quad y = \rho\sin\delta\ ;$

$P = 2N_0 tg\frac{z}{2};\quad \delta = a\ ;$

$\mu = sec^2\frac{z}{2}\left\{1 + \frac{e^2}{2}[\sin z \cos a\ cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2\right\} + \cdots;$

$$tg\ a = t_4/(t_1 - e^2\tau\ cos\varphi_0)\ ; \tag{92}$$

$\sin z \cos a = t_1 + e^2\tau(t_1\sin\varphi - cos\varphi_0);$

$\sin z \sin a \ = t_4(1 + e^2 \tau \sin \varphi);$

$\cos z = t_5 + e^2 \tau (t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0);$

бунда

$t_1 = \sin \varphi \, cos\varphi_0 - cos\varphi \, sin\varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$;

$t_4 = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0);$

$t_5 \sin \varphi \, sin\varphi_0 + \cos \varphi \, cos\varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0);$

$\tau = \sin \varphi - \sin \varphi_0,$

φ_0, λ_0— янги қутб нуқтаси географик координаталари.

Бу проекция айлана кўринишдаги ўрта ва йирик масштабли ҳар қандай ҳудудни картага олишда қўлланилиши мумкин.

25–§. Тенг майдонли азимутал проекциялар

Бу проекцияларда узунлик хусусий масштаби проекциянинг марказий нуқтасида бирга тенг, қутб радиуси ρ қуйидаги тенг майдонлилик тенгламаси шарти билан аниқланади:

$$\rho = \mu_1 \mu_2 = 1.$$

(87) формуладан узунлик хусусий масштаби қийматини қўйгандан сўнг

$\frac{dp}{Rdz} \frac{\rho}{R \sin z} = 1$, ундан

$\rho d\rho = R^2 \sin z dz.$

Бу тенгликни интеграллаб, оламиз

$\rho^2/2 = C - R^2 \cos z.$

Интеграллаш доимийси C ни проекциянинг марказий нуқтаси $(z = 0)$ $\rho = 0$ шарти бўйича аниқлаймиз, унда $C = R^2$ ва

$\rho^2 = 2R^2(1 - \cos z) = 4R^2 sin^2(z/2);$

$\rho = 2Rsin(z/2).$ (93)

Тенг майдонли азимутал проекция формуласи

$x = \rho \cos \delta$; $\quad y = \rho \sin \delta;$

$\rho = 2Rsin\,(z/2); \ \ \delta = a;$

$$\mu_1 = \cos(z/2);\ \mu_2 = \sec(z/2); \quad (94)$$

$$p = 1; \quad tg(45^\circ + \omega/4) = \sec(z/2).$$

Бундай ҳолда проекциянинг марказий нуқтасида ҳеч қандай хатолик тури кузатилмайди.

Агар узунлик хусусий масштаби μ_2 зенит масофаси z_k бўлган бош альмукантаратда бирга тенг шарти қўйилса, унда майдон масштаби ўзгармас бўлади, лекин бирга тенг бўлмайди.

Бу ҳолат учун (94) формула қуйидагича бўлади

$$\rho = 2Rksin(z/2);\ \delta = a;$$

$$\mu_1 = kcos\ (z/2);\ \mu_2 = ksec\ (z/2);$$

$$\rho = k^2;\ tg(45^\circ + \omega/4) = \sec(z/2).$$

Бунда редукция коэффициенти $k = \cos(z_k/2)$ проекция марказий нуқтасидаги узунлик масштабига тенг, чунки $z = o$; $k = \cos(z_k/2) = 1$

(94) формуладаги z_kни $(90^\circ - \varphi)$ га ва α ни λ га алмаштириб, тенг майдонли нормал азимутал проекция учун оламиз

$$x = \rho\cos\delta\ ; \quad y = \rho\sin\delta\ ;$$

$$\rho = 2Rsin\ (45^\circ - \varphi/2); \quad \delta = \lambda;$$

$$m = cos\ (45^\circ - \varphi/2); \ \ n{=}sec\ (45^\circ - \varphi/2);$$

$$p = 1;\ tg\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = sec\ (45^\circ - \varphi/2);$$

Бу ҳолатда хатоликни ҳеч қандай тури географик қутбда кузатилмайди (φ = 90°).

Тенг майдонли азимутал проекцияларда (*Ламберт проекцияси*) альмукантаратлар (*параллеллар*) ўртасидаги масофа проекциянинг марказий нуқтасидан $\sin\dfrac{z}{2}$ қийматга пропорционал ҳолатда узоқлашиш билан камайиб боради. Қийшиқ ва тенг майдонли азимутал проекциялар ярим шарлар ва материклар (Антарктидадан ташқари) карталарини тузишда кенг фойдаланилади.

26–§. Вертикаллар (меридианлар) бўйича тенг оралиқли азимутал проекциялар

Бу проекция учун узунлик хусусий масштаби вертикаллар бўйича бирга тенг деган шарти қўйилади.

$\mu_1 = d\rho/Rdz = 1.$

Интеграллашгандан сўнг

$\rho = Rz + C$

бунда С — интеграл доимийси. $z = O,\ \rho = O$ тенг, унда С = 0, шу сабабли $\rho = Rz$, яъни қутбий радиус ρ вертикални тўғриланган ёйига тенг ва альмукантаратлар орасидаги масофа ўзгармас. Унда вертикаллар бўйича тенг оралиқли азимутал проекция формулалари қуйидагича бўлади

$$x = \cos\delta;\ y = \sin\delta;$$

$$\rho = Rz;\ \delta = a; \qquad (95)$$

$$\mu_1 = 1;\ \mu_2 = z/\sin z;$$

$$\rho = \mu_2;\ \sin(\omega/2) = (\mu_2 - 1) - (\mu_2 + 1).$$

Бундай ҳолатда проекциянинг марказий нуқтасида ($z = o$) хатоликнинг ҳеч қандай тури кузатилмайди.

Агар бош альмукантаратда (z_k) узунлик хусусий масштаби бирга тенг шарти қўйилса, унда вертикаллар бўйича узунлик хусусий масштаби ўзгармас бўлади, лекин қиймати бирдан кам бўлади:

$\mu_1 = \sin z_k/z_k.$

Унда (95) формула қуйидаги кўринишда

$$\rho = Rkz;\ \ \delta = a;$$

$$\mu_1 = k = (\sin z_k)/z_k\,;\ \ \mu_1 = k(z/\sin z);$$

$$\rho = \mu_1\mu_2;\ \ \sin(\omega/2) = (\mu_2 - k)/(\mu_2 + k).$$

Меридианлари бўйича тенг оралиқли нормал проекция учун:

$$x = \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = R(90^\circ - \varphi);\ \delta = \lambda.$$

$$n = p = (90^\circ - \varphi)/\cos\varphi; \quad \sin(\,\omega/2) = (n-1)/(n+1).$$

Агар бош параллелда φ_k хусусий масштаб $n_k = 1$ шарти қўйилса, унда

$$\rho = kR(90^\circ - \varphi); \;\; m = k = cos\varphi_k \,/(90^\circ - \varphi_k).$$

Вертикаллар (меридианлар) бўйича тенг оралиқли азимутал проекция кўпинча *Постел проекцияси* дейилади. Бу проекцияда вертикаллар (меридианлар) узунлиги хатоликсиз тасвирланади, ундан марказий нуқтадан ҳоҳлаган бошқа нуқтагача бўлган масофани аниқлаш талаб қилинадиган махсус карталарни тузишда фойдаланиди. Нормал проекциялардан Арктика ва Антарктика карталарини тузишда фойдаланилади.

27–§. Сферани перспектив-азимутал проекцияларининг умумий назарияси

Перспектив-азимутал проекцияларда картага олинаётган юза сфера радиуси – R ёки айланма эллипсоид сифатида қабул қилинади. Тасвир текисликга кўриш нуқтасидан чизиқли перспектив тасвирлаш қонунияти асосида лойиҳаланади; бунда кўриш нуқтаси сфера диаметрларидан бирининг давоми сифатида жойлаштирилади. Бу диаметр асосий ҳисобланади ва лойиҳалашнинг асосий нури билан устма – уст тушади. Тасвир текислиги асосий диаметрга перпендикуляр жойлашган бўлиб, ўз навбатида тасвирланаётган ҳудудни марказий нуқтасига нисбатан юзага уринма бўлади. Ушбу нуқта билан қутбли сферик координаталар ($Q(\varphi_0, \lambda_0)$) қутби мос тушади.

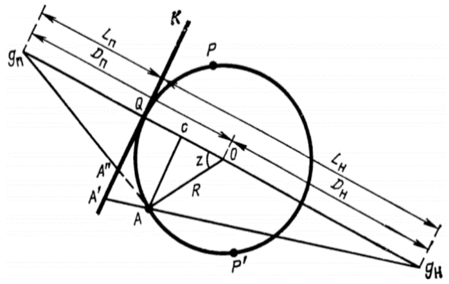
Перспектив-азимутал проекциялар негатив ва позитив тасвирли проекцияларга бўлинади. Негатив проекцияларда тавсир текислиги *К* сферанинг кузатиш нуқтасидан ($g_н$) нисбатан узоқ масофада жойлашган қисмлари лойиҳаланади (28–расм). Позитив тасвирли проекцияларда эса кузатиш нуқтасига (g_n) қараган сферанинг қисми тасвири лойиҳаланади.

Агар кўриш нуқтасидан тасвир текислигигача масофа L қиймат билан, кўриш нуқтасидан сфера марказигача бўлган мосафа эса D билан белгиланса, у ҳолда негатив тасвирли перспектив-азимутал проекцияда

$$L_н = D + R,$$

перспектив-азимутал проекциялар позитив тасвирида

$$L_п = D - R.$$



28–расм. **Негатив ва позитив тасвирли перспектив проекцияларни ҳосил қилиш схемаси.**

D масофага кўра перспектив-азимутал проекциялар гномоннк (D = 0), стереографик (D = R), ташқи ($R < D < \infty$) ва ортографнк (D = ∞) проекцияларга бўлинади.

Қутбий сферик координта тизими қутби кенглиги φ_0 қиймати бўйича перспектив-азимутал проекциялар нормал ($\varphi_0 = 90^0$), қийшиқ (0°<φ_0<90°), кўндаланг (φ_0= 0) проекцияларга бўлинади.

Вертикаллар ва альмукантаратлар тўри бунда ҳам азимутал проекцияларга ўхшаш тасвирланади. Асосий тенгламалар азимутал проекцияларга ўхшаш, бироқ қутбий радиус геометрик йўл билан топилади. Энг умумий ҳолатда қийшиқ ташқи проекциялар учун р нинг қийматини негатив ва позитив тасвирлаш учун топамиз, (28-расмга қаранг). Негатив тасвирлаш учун $g_H Q A'$и $g_H C A$ учбурчаклардан оламиз

$QA'/CA = g_H Q / g_H C;$

ΔOCA: $CA = R sin\, z$; $OC = R\cos z$, унда

$g_H Q = L_H;\ \ g_H O = D_H;\ \ g_H C = D_H + R cos\ z\ унда$

$$\frac{\rho_H}{R sin\, z} = \frac{L_H}{D + R\cos z};\ \rho_H = \frac{L_H R sin\, z}{D + R\cos z} = \frac{(D+R) R sin\, z}{D + R\cos z}. \quad (96)$$

Позитив тасвирлашда ўхшаш учбурчаклардан $g_п$QA ' ва $g_п$CA оламиз

$QA''/CA = g_n Q / g_п C;$

Қийматларни қўйиб

$g_{п}Q = L_n$, $g_n O = D$; $g_{п}C = D - R\cos z$ оламиз

$\rho_{п} = \frac{L_{п} R\sin z}{D - R\cos z} = \frac{(D-R)R\sin z}{D - R\cos z}$.

Азимутал проекциялар умумий формулаларини қўллаб (87), негатив ва позитив тасвирли перспектив-азимутал проекциялар формулаларини оламиз:

$x = \rho\cos\delta$; $y = \rho\sin\delta$;

$\delta = a$.

$$\rho_H = \frac{(D+R)R\sin z}{D+R\cos z};\ \rho_{п} = \frac{(D-R)R\sin z}{D-R\cos z}; \qquad (97)$$

$$(\mu_1)_H = \frac{(D+R)(D\cos z+R)}{(D+R\cos z)^2}; \qquad (\mu_1)_{П} = \frac{(D-R)(D\cos z-R)}{(D-R\cos z)^2};$$

$$(\mu_2)_H = \frac{D+R}{D+R\cos z}; \qquad (\mu_2)_{П} = \frac{D-R}{D-R\cos z};$$

$p = \mu_1\mu_2$; $\sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$.

Изоколалар айлана кўринишда бўлиб альмукантаратлар билан мос тушади, шунинг учун перспектив-азимутал проекциялар айлана шаклга эга ҳудудларни тасвирлашда ишлатилади. Позитив тасвирли ташқи проекциялар фотокамеранинг оптик ўқи картага олинаётган юзага нисбатан перпендикуляр ҳолатда жойлашганда, ёки эгилиш бурчаги мавжуд бўлганда аэрокосмик суратлардан картографик тўрни тузишда фойдаланиши мумкин. Сфера учун кенг миқёсда фойдаланилаётган негатив тасвирлаш перспектив-азимутал проекцияларни хусусий ҳолатини қараб чиқамиз.

28–§. Гномоник, стереографик ва ортографик проекциялар

Г н о м о н и к проекция.

Бу проекцияда кузатиш нуқтаси сфера марказида жойлашади. (97) формулага D = 0 қийматини қўйиб, оламиз

$x = \rho\cos\delta$; $y = \rho\sin\delta$;

$\rho = R\,tg\,z$; $\delta = a$;

$$\mu_1 = sec^2 z\ ;\quad \mu_2 = \sec z; \qquad (98)$$

$$\rho = \mu_1\mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2) = tg^2(z/2).$$

Кўндаланг проекцияда x, y координаталар формулалар билан аниқланади

$$x = R\, tg\, \varphi \sec\lambda\, ; \quad y = R\, tg\, \lambda\, .$$

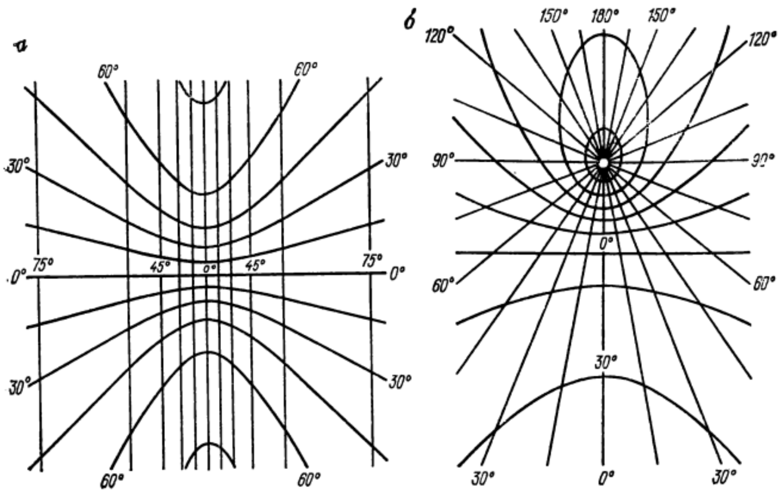
z ни (90°—φ) ва a ни λ га алмаштириб, (98) формуладан нормал проекция формулаларини олиш мумкин

$$x = R\, ctg\, \varphi \cos\lambda \;\; ; \;\; y = R\, ctg\, \varphi \sin\, \lambda \;\; ;$$

$$m = cosec^2\varphi; \quad n = cosec\, \varphi;$$

$$p = mn\, ;\, \sin(\omega/2) = tg^2(45^0 - \varphi/2).$$

Альмукантаратлар (*параллеллар*) ўртасидаги масофа марказий нуқтадан узоқлашган сари тезлик билан ўсиб боради. Кўндаланг ва қийшиқ гномоник проекцияларда меридианлар ва экватор тўғри чизиқлар билан ифодаланади (29–расм).



29–расм. **Гномоник проекциялар:** *а – кўндаланг; б – қийшиқ.*

Қийшиқ проекцияларда φ_0 кенгликли марказий параллел парабола, $\varphi > \varphi_0$ кенглик қийматига эга бўлганпареллаллар эллипс, $\varphi_0 > \varphi$ бўлганда – гиперболага ўхшаш тасвирланади.

Сферада энг қисқа масофа чизиги (*ортодромия*) катта айлана ёйи ҳисобланади. Бу айлана маркази сфера маркази билан устма–уст тушади, демак гномоник проекция кузатиш нуқтасида, ортодромия бу проекцияда тўғри чизиқ бўлиб тасвирланади. Бу муҳим ҳисобланган хосса ортодромиянинг оралиқ нуқталарини аниқлашда ва ҳар қандай бошқа проекцияда тузилган ортодромияни бу картага ўтказишда қўлланилади.

С т е р е о г р а ф и к   проекциялар

Бу проекцияларда кузатиш нуқтаси сферада жойлашади, яъни D= R. Унда (96) формуладан

$\rho = (2R\sin z)/(1+\cos z) = 2R\, tg(z/2)$.

Проекцияни умумий формулалари:

$x = \rho\cos\delta$; $y = \rho\sin\delta$;

$\rho = 2Rtg(z/2)$; $\delta = a$.

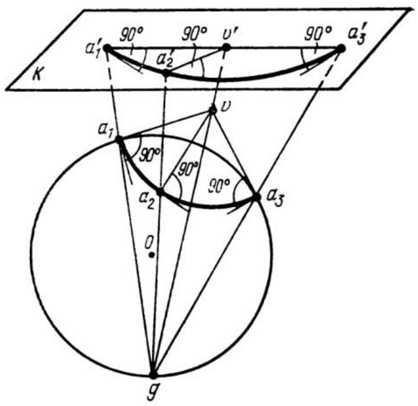
$\mu = sec^2(z/2)$; $\rho = \mu^2$; $\omega = 0$.

(88) формуладан кўринадики, стереографик проекция тенг бурчакли азимутал проекцияга ўхшаш. Нормал проекцияни ҳисоблаш учун қуйидаги формулалардан фойдаланилади

$x = \frac{2R\cos\varphi\, cos\lambda}{1+\sin\varphi}$;

$y = \frac{2R\,\mathrm{cjs}\,\varphi\, sin\,\lambda}{1+\sin\varphi}$.

Стереографик проекция муҳим хоссага эга – сферада ҳар қандай айлананинг якуний ҳолатдаги ўлчамлари проекцияда айлана бўлиб тасвирланади. Буни геометрик жиҳатдан исботлаймиз.

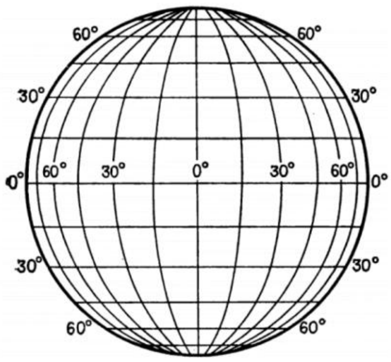


30–расм. **Стереографик проекциянинг асосий хоссасини исботлаш схемаси.**

Сферада чекланган ўлчамлар қиймати $a_1a_2a_3$ билан ифодаланувчи айланани оламиз (30–расм). Ушбу айлана бўйича сферага уринма конус υ юқорида $a_1\upsilon$, $a_2\upsilon$ ва $a_3\upsilon$ ясамаларга эга, булар a_1, a_2, a_3 уринма нуқталарга перпендикуляр. Лойиҳалашда тасвир текислиги проекция тепасидаги $a_1'a_2'a_3'$ эгри текисликни ва ясама конусни оламиз. Тасвирлаш тенг бурчакли, шунда ясама ва уринма проекциялар ўртасидаги бурчак 90° га тенг, демак, $a_1'a_2'a_3'$ эгри бир нуқтада туташувчи нормалларга эга, яъни булар айланалар.

Стереографик проекцияни бу хоссаси сферик астрономия масалаларини график жиҳатдан ечиш учун фойдаланилади. Проекция тўрини осонлик билан тузиб чиқиш мумкин, бунда меридианлар ва параллеллар айланалар, ўқ меридиан эса – тўғри чизиқ билан тасвирланади.

Ортографик проекциялар



Бу проекцияда кўриш нуқтаси чексизликда ($D=\infty$) жойлашади, яъни лойиҳалаш параллел нурлар тутами бўйлаб амалга оширилади.

31–расм. **Кўндаланг ортографик проекция.**

Агар (96) формулани сурати ва махражини D га бўлсак, оламиз

$\rho = R\sin z.$

Унда ортографик проекция формуласи:

$$x = \rho\cos\delta\,; \quad y = \rho\sin\delta;$$
$$\rho = R\sin z\,; \quad \delta = a; \qquad (99)$$
$$\mu_1 = \cos z; \;\; \mu_2 = 1\,.$$
$$\rho = \mu_1 = \cos z; \quad \sin(\omega/2) = \; tg^2(z/2).$$

Альмукантаратлар бўйича тенг ораликли (параллеллар бўйича нормал) ортографик проекцияда хусусий масштаб $\mu_2 = 1.$ Кўндаланг проекцияни ҳисоблаш учун қуйидаги формулалар ишлатилади

$$x = R\sin\varphi\,; \;\; y = R\cos\varphi\sin\lambda;$$
$$n = \cos\lambda\,; \quad m = \sqrt{cos^2\varphi + sin^2\varphi sin^2\lambda;}$$
$$\rho = \cos\varphi\cos\lambda; \;\; \sin(\omega/2) = (m-n)/(m+n).$$

Нормал проекция учун:

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda.$$

$y = R\cos\varphi\sin\lambda.$

$m = \sin\varphi$; $n = 1$; p=m;

$\sin(\omega/2) = tg^2(45° - \varphi/2).$

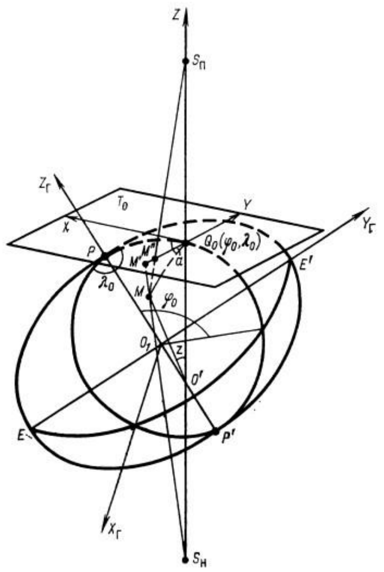
Нормал проекцияда параллеллар ўртасидаги масофа қийшиқ ва кўндаланг проекцияларда альмукантаратлар бўйича кузатилгани каби тезда камайиб боради (31–расм).

Қийшиқ ва кўндаланг ортографик проекциялар картага олинаётган юзаларни сфериклик кўринишини анча мукаммал ифодалайди. Кўндаланг проекцияларда параллеллар ўзаро параллел тўғри чизиқлар билан, меридианлар эса – эллипс ёйлари билан тасвирланади. Бу проекция Ой картасини тузишда ишлатилган.

29–§. Эллипсоиднинг перспектив-азимутал проекциялари

Горизонтал тасвир текислигида эллипсоидни негатив ва позитив тасвирли перспектив-азимутал проекцияси.

Перспектив-азимутал проекциядан картография амалиётида фойдаланишда Ер шар сифатида қабул қилинади. Бироқ қатор ўрта ва йирик масштабли ҳудудлар (1 млн км^2 дан ортиқ) карталарини тузишда эллипсоиднинг қутбий сиқилишини ҳисобга олиш керак.



32–расм. **Горизонтал тасвир текислигида перспектив-азимутал проекцияни тасвирлаш**

Олайлик айланма эллипсоид юзасида (32–расм) янги қутбнинг $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ нуқтаси берилган бўлсин, унга уринма тексилик – T_0 ва нормал – $Q_0 0'$ ўтказилсин; Q_0 нуқтада фазовий тўғри бурчакли топоцентрик Q_0XYZ координаталар тизими ўрнатилган бўлсин, X ўқи Q_0P меридиан бўйлаб шимолга томон йўналтирилган бўлиб, Z ўқи $Q_0 0'$ нормал билан мос тушсин, Y ўқи эса – тизимни чап томон бўйлаб тўлдиради.

Белгилаймиз

$$S_H O' = D_H;\quad S_п O' = D_п;\ O'Q_0 = N_0;\ Q_0 S_п = H; O'M = N'_0;$$

бунда S_H, $S_п$— негатив ва позитив тасвирлашда лойиҳалаш (кузатиш) нуқтаси; N_0 - Q_0 (φ_0, λ_0) қутб нуқтасида биринчи вертикал кесма эгрилиги радиуси.

Изланган проекцияни олиш учун z, *a* қутбий сфероидик координата тизимидан фойдаланамиз (2-§ га қаранг), (12, 13) формулаларда бу тизимнинг географик координата тизими билан боғлиқлигини e^4 даражада ҳисоблаш формулалари келтирилган. 32-расмдан негатив ($р_н$) ва позитив ($р_п$) тасвирлаш қутбий радиуслари қиймати

$$\rho_H = (N_0 + D)\frac{N'_0 \sin z}{D + N'_0 \cos z};$$

$$\rho_п = \frac{N'_0 \sin z}{D - N'_0 \cos z}; \tag{100}$$

унда

$$N_0' = N_0\left[1 - \frac{e^2}{2}(\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)\right]^2 + \cdots =$$

$$N_0\left[1 - \frac{e^2}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2\right] + \ldots \tag{101}$$

(*92*), (*100*) формулаларни ҳисобга олган ҳолатда, e^4 аниқлик даражасида *x*, *y* тўғри бурчакли проекция координаталари қуйидаги кўринишни олади:

– негатив тасвирли перспектив–азимутал проекциялар учун

$$X_н = \frac{N_0(N_0 + D_н)}{D_н + N_0 t_5}\left\{t_1 + \frac{e^2}{2}\tau\left[2(t_1 \sin\varphi - \cos\varphi_0) - (\tau D_н + t_6)\frac{t_1}{D_н + N_0 t_5}\right] + \ldots\right\};$$

$$Y_н = \frac{N_0(N_0 + D_н)}{D_н + N_0 t_5}\left\{t_4\left[1 + \frac{e^2}{2}\tau(2\sin\varphi - \frac{\tau D_н + t_6}{D_н + N_0 t_5})\right] + \ldots\right\}; \tag{102}$$

Перспектив тасвирли перспектив-азимутал проекцияларда

$$X_n=\frac{HN_0(N_0+D_н)}{D_н-N_0t_5}\left\{t_1+\frac{e^2}{2}\tau\left[2(t_1\sin\varphi-\cos\varphi_0)-(\tau D_н-t_6)\frac{t_1}{D_н-N_0t_5}\right]+...\right\};\qquad(103)$$

$$Y_n=\frac{HN_0}{D_n-N_0t_5}\left\{t_4\left[1+\frac{e^2}{2}\tau\left(2\sin\varphi-\frac{\tau D_n-t_6}{D_n-N_0t_5}\right)\right]+...\right\},$$

бу ерда t_1, t_4, t_5, τ (*92*) формула ёрдамида аниқланади,

$$t_6=2N_0(t_5\sin\varphi-\sin\varphi_0);$$

$$D=N_0+H.$$

Хусусий масштаблар ва нисбатан катта қийматдаги бурчак хатолиги учун (*90*) тенглама ва картографик проекцияларнинг умумий формулаларидан фойдаланилади:

$$\mu_1=\frac{1}{P}(x_z^2+y_z^2)^{1/2};$$

$$\mu_2=\frac{1}{P\sin z}(x_a^2+y_a^2)^{1/2},\qquad(104)$$

бунда

$$P=N_0\left(1-\frac{e^2}{2}\tau^2\right).$$

(*102*), (*103*) тенгламаларни z ва a қийматлар бўйича дифференциаллаш ва (*104*) формулани ҳисобга олиш орқали, вертикаллар ва альмукантаратлар бўйлаб узунлик хусусий масштабларини аниқлаш учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

– негатив тасвирли перспектив-азимутал проекциялар учун

$$\mu_1=(N_0+D)\frac{D\cos z+N_0}{(D+N_0\cos z)^2}\left\{1-\frac{e^2}{2}\times\left[t_z\frac{\sin z(D+N_0\cos z)}{D\cos z+N_0}-\tau^2\frac{N_0\cos z}{D+N_0\cos z}\right]\right\};(105)$$

$$\mu_2=\frac{N_0+D}{D+N_0\cos z}\left(1+\frac{e^2}{2}\tau^2\frac{N_0\cos z}{D+N_0\cos z}\right),$$

бу ерда

$$t_z = \frac{2\tau}{D+N_0\cos z}\left[D(\cos z\cos a\cos\varphi_0 - \sin z\sin\varphi_0) + \frac{\tau D N_0\sin z}{2(D+N_0\cos z)}\right];$$

Позитив тасвирли перспектив-азимутал проекциялар учун қуйидаги тенгламлар ўринли

$$\mu_{1r} = \frac{H(D\cos z - N_0)}{(D-N_0\cos z)^2}\left\{1-\frac{e^2}{2}\times\left[p_z\frac{\sin z(D-N_0\cos z)}{D\cos z - N_0} + \tau^2\frac{N_0\cos z}{D-N_0\cos z}\right]\right\}; \quad (106)$$

$$\mu_{2r} = \frac{H}{D-N_0\cos z}\left(1-\frac{e^2}{2}\tau^2\frac{N_0\cos z}{D-N_0\cos z}\right), \quad (107)$$

бу ерда

$$P_z = \frac{2\tau}{D-N_0\cos z}\left[D(\cos z\cos a\cos\varphi_0 - \sin z\sin\varphi_0) - \frac{\tau D N_0\sin z}{2(D-N_0\cos z)}\right].$$

Майдон хусусий масштаби ва нисбатан бурчак хатолиги йирик қийматлари юқоридаги аниқлик даражасида қуйидаги тенгламалар билан аниқланиши мумкин:

$$p = \mu_1\mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2-\mu_1)/(\mu_2-\mu_1). \quad (108)$$

Келтирилган ушбу формулалар лойиҳалаш нуқталарининг ($S_н$ ва $S_п$) жойлашиш ҳолатига (яъни D масофадан узоқлиги асосида) боғлиқ равишда, эллипсоиднинг негатив ва позитив кўринишли кўплаб перспектив-азимутал проекцияларини ҳосил қилиш, шу билан бир қаторда, сферани гномоник, ортографик ва стереографик проекцияларига мос вариантларини олиш имконини ҳам беради.

Марказий перспектива учун D = 0.

(102), (105) ва (108) формулалар кўринишни олади

$$x = N_0\left\{t_1 + \frac{e^2}{2}\tau[2(t_1\sin\varphi - \cos\varphi_0) - t_1t_6/N_0t_5]\right\}\frac{1}{t_5};$$

$$y = N_0\left\{t_4\left[1+\frac{e^2}{2}\tau(2\sin\varphi - t_6/N_0t_5)\right]\right\}\frac{1}{t_5};$$

$$\mu_1 = sec^2z(1+e^2\tau^2/2); \quad \mu_2 = sec^2z(1+\tau^2e^2/2);$$

$$\rho = sec^3z(1+e^2\tau^2); \quad \sin(\omega/2) = (\sec z - 1)/(\sec z + 1) = tg^2(z/2)$$

Бу проекцияда энг қисқа масофа эгри бўлиб тасвирланади. Эллипсоидни ортографик проекцияси учун $D \to \infty$.

Юқоридаги формулалардан

$$x = N_0 \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin\varphi + \cos\varphi_0) - \tau\, t_1] \right\};$$

$$y = N_0 \left\{ t_4 \left[1 + \frac{e^2}{2} \tau (2 \sin\varphi - \tau) \right] \right\};$$

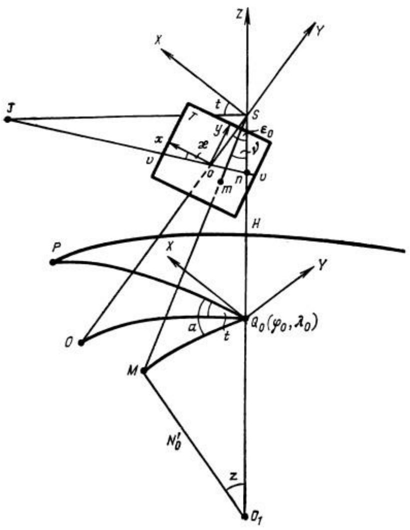
$$\mu_1 = \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos a \cos\varphi_0 - sinztgzsin\varphi_0)];$$

$$\mu_2 = p = 1;$$

$$sin\frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos a \cos\varphi_0 - \sin z\; tg\; z \sin\varphi_0)]}{1 + \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos a \cos\varphi_0 - \sin z\; tg\; z \sin\varphi_0)]}$$

Кўрсатиб ўтилган проекциядан нафақат картографик масалаларни ечишда, балки йирик ҳудудлар ўрта масштабли ортофотосуратларини олишда ҳам фойдаланса бўлади.

Қийшиқ тасвир текислигида ташқи перспектив-азимутал проекцияни позитив тасвирлаш (аэро – ва космофотосуратлар проекциялари)



33–расм. **Қийшиқ тасвир текислигида перспектив-азимутал проекцияни позитивли тасвирлаш**

Айтайлик, (*103*) формула бўйича горизонтал тасвир текислигида ва ташқи перспектив-азимутал проекцияни позитивли тасвирлаш тўғри бурчакли координатали X, Y ҳисобланган ва позитив фотосуратни тегишли ички ва ташқи ориентирлаш элементлари қиймати маълум бўлсин (33–расм). Ички ориентирлаш элементларига фотоаппарат объективининг фокус масофаси, фотосуратдаги асосий *O* нуқтанинг тўғри бурчакли координалари – x_0, y_0 кабилар киритилади.

Ташқи ориентирлаш элементларига қуйидагилар киритилади:

– чизиқли элементлар: геодезик координаталар – φ_0, λ; надир нуқтаси (қутб нуқтаси) Q ва фотосуратга олиш баландлиги (ёки лойиҳаташтириш баландлиги) – H кабилар.

– бурчакли элементлар: t – «асосий вертикал текислиги – фотосуратга олиш текислиги» йўналиши азимути; ε_0 – бош оптик нур ва S кўриш нуқтасидан эллипсоидга нисбатан ўтказилган нормал ўртасидаги бош вертикал текислигидаги бурчак; $\varkappa$ – сурат абсцисса ўқи ва бош вертикал орасидаги бурчак - бош вертикал ва сурат текисликлари кесишиш чизиғи ўртасидаги бурчак.

Фотосуратнинг тўғри бурчакли координаталарини аниқлаш масаласи (қийшиқ тасвир текислигида қараб чиқилаётган проекция) қуйидагича ечилиши мумкин. Q_0XYZ координаталар тизимини параллел ҳолатда шундай буриш керак-ки, бунда унинг бошланиши S нуқтада жойлашсин ва бу координаталар тизими t, ε_0, $\varkappa$ бурчакка буриш амалга оширилсин.

Агар X, Y координаталарни (*103*) формула ёрдамида аниқлашда сфероид a қиймат ўрнига $a' = a - t$ қийматдан фойдаланилса ва ўз навбатида, абсцисса ва ордината ўқлари (x, y) t бурилиш ҳисобга олинган ҳолда ҳисобланса, унда қолган ε_0, $\varkappa$ бурчакларни ҳисобга олган ҳолатда координаталарнинг ўзгартирилиши матрицаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_0 \cos\varkappa & -\sin\varepsilon_0 \sin\varkappa & -\sin\varepsilon_0 \\ \sin\varkappa & \cos\varkappa & 0 \\ \sin\varepsilon_0 \cos\varkappa & -\sin\varepsilon_0 \sin\varkappa & -\cos\varepsilon_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Фотосуратнинг қийшиқ тасвир текислигидаги x, y нуқталарининг координаталари (координата боши асосий нуқтада) ва горизонтал тексиликда X, Y нуқталарнинг координаталари (координата бош қутб нуқтасида Q - надир нуқтасида) маълумки, гомографик мосликда жойлашади:

$$x = -f\,\frac{a_1 X + b_1 Y - c_1 H}{a_3 X + b_3 Y - c_3 H}; \qquad y = -f\,\frac{a_2 X + b_2 Y - c_2 H}{a_3 X + b_3 Y - c_3 H};$$

$$X = -H\,\frac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f}; \qquad Y = -H\,\frac{b_1 x + b_2 Y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f},$$

бу ерда: a_i, b_i, c_i – (*109*) формула ёрдамида аниқланувчи йўналтирувчи косинуслар; *f, H* – фокус масофаси ва лойиҳалаш (суратга олиш) баландлиги.

Кенгайтирилган ҳолда бу формула қуйидагича бўлади

$$x = f\,\frac{(X\cos\varepsilon_0 - H sin\,\varepsilon_0)\cos\varkappa + Y\sin\varkappa}{X\cos\varepsilon_0 + H sin\,\varepsilon_0}; \tag{110}$$

$$y = f\,\frac{-(X\cos\varepsilon_0 - H sin\,\varepsilon_0)\cos\varkappa + Y\sin\varkappa}{X\cos\varepsilon_0 + H sin\,\varepsilon_0};$$

$$X = H\,\frac{(\cos\varepsilon_0\,\cos\varkappa)x - (\cos\varepsilon_0\,\sin\varkappa)y + f sin\,\varepsilon_0}{-(\sin\varepsilon_0\,\cos\varkappa)x + (\sin\varepsilon_0\,\sin\varkappa)y + f cos\varepsilon_0}; \tag{111}$$

$$Y = H\,\frac{x\,sin\,\varkappa + y\cos\varkappa}{-(\sin\varepsilon_0\,\cos\varkappa)x + (\sin\varepsilon_0\,\sin\varkappa)y + f cos\varepsilon_0}.$$

Агар координата бошини x, y надир нуқтага *n* қийшиқ тасвирлаш текислигига Т кўчирилса, ҳамда альмукантаратлар бўйлаб узунлик хусусий масштаби ушбу нуқтада бирга тенг деб олинса, координаталарни метрда ифодалаш учун қуйидаги белгилашни киритиб

$$tg\,\beta = X/H$$

ва Ерни айланма эллипсоид сифатида эмас, балки шар сифатида қабул қилсак, унда (110) формуладан оламиз.

$$x = X\,\frac{\cos\beta}{\cos(\beta - \varepsilon_0)}; \qquad y = Y\,\frac{\cos\beta\cos\varepsilon_0}{\cos(\beta - \varepsilon_0)};$$

бу формулаларни хусусий ҳолат учун Н.М.Волков таклиф этган.

Энди хусусий масштаблар ва проекциянинг бошқа тавсифларини аниқлаш масалаларини қараб чиқамиз. Ўз текислигида ясси координаталар тизимини бурилиши ва силжиши бўлишига қарамасдан проекциянинг хатолик қийматлари ўзгармайди, бурчак $\varkappa$ = 0 бўлганда (*110*) тенглик амал қилади. Бу қийматларни *z* ва *a* бўйича дифференциаллаб ва (*104*), (*105*) формулаларга ҳосила қийматларини қўйиш билан вертикаллар бўйлаб қийшиқ тасвирлаш текислигида (перспектив фотосурат) узунлик хусусий масштабини аниқлаш (*e*[4] қисмгача даражада аниқликда) учун қуйидаги тенгламни ҳосил қиламиз:

$$\mu_1 = \mu_{1r} k^2 (1 - \sin^2 a \sin^2 \varepsilon_0)^{1/2}, \tag{112}$$

бунда μ_{1r} қиймат (*106*) тенглама бўйича аниқланади

$$k = H/(H\cos\varepsilon_0 + X\sin\varepsilon_0); \tag{113}$$

альмукантаратлар бўйлаб

$$\mu_2 = \mu_{2_\text{г}} k^2 [\sin^2 a] + (\cos a \cos \varepsilon_0 + \frac{p}{h}\sin \varepsilon_0)^2 +$$
$$+2\frac{p_a}{p}\sin a \sin \varepsilon_0 (\frac{p}{h}\cos \varepsilon_0 \text{-} \cos a \sin \varepsilon_0)]^{1/2}, \tag{114}$$

бунда

$$\frac{\rho_a}{\rho} = e^2 \tau \frac{D \sin z \sin a \cos \varphi_0}{D - N_0 \cos z}$$

μ_2, k, ρ — (107), (113), (91) формулалар бўйича аниқланади.

Асосий вертикал нуқталари учун (112), (114) тенгликдан олиш мумкин

$\mu_1 = \mu_{1_\text{г}} k^2$; $\mu_2 = \mu_{2_\text{г}} k$.

Хусусан, асосий нуқтада *o*, нул хатоликли нуқталар c ва надир n нуқтаси учун оламиз

$\mu_{1\,o} = \mu_{1_\text{г}} cos^2 \varepsilon_0$; $\quad \mu_{2\,o} = \mu_{2_\text{г}} cos^2 \varepsilon_0$;

$\mu_{1\,c} = \mu_{1\,c_\text{г}}$; $\quad \mu_{2\,c} = \mu_{2\,c_\text{г}}$;

$\mu_{1\,c} = sec^2 \varepsilon_0$; $\quad \mu_{2\,n} = \sec \varepsilon_0$;

Демак, надир нуқтасида фақат тасвир текислигининг ε_0 бурчак қиялиги ҳисобига хатолик мавжуд бўлади, ноль хатоликли нуқталарда – фақат юзани сфероидик (*сферик*) тасвирланиши ҳисобига хатолик вужудга келади, асосий нуқта ва проекциянинг бошқа қолган барча нуқталарида керлтирилган ҳар иккала омилнинг таъсири ҳисобига хатолик қайд қилинади.

Проекция нуқталарида бурчак максимал хатолиги ва майдон хусусий масштаблари қийматлари e^4 даражадаги аниқликда қуйида келтирилган, олдиндан маълум бўлган формулалар билан аниқланади:

$$p = \mu_1\mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1).$$

Ушбу проекцияни перспектив аэрофотосурат идеал модели деб ҳисобласак, унинг борган сари кенг кўламда фойдаланилиши кузатилмоқда. Тескари ўзгартириш усулини қараб чиқамиз, яъни қийшиқ тасвир текислигида (перспектив фотосурат) тўғри бурчакли *x, y* координаталар бўйича эллипсоид юзасида нуқталарининг географик координаталарини аниқлаш усулини. Кетма – кет ҳисоблаш (e^4 даражадаги аниқликда) қуйидаги кўринишга бўлади. *x, y* координаталар қийматларидан фойдаланиб, (*111*) формула бўйича тўғри бурчакли *X, Y* координаталарни ҳисоблаймиз ва кейин қуйидаги қийматларни топамиз:

$$ctga = X/Y; \quad \rho = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad tg\nu = \rho/H.$$

33-расмга биноан, ёзамиз

$$z = arcsin\left(\frac{H+N_0}{N_0'}\sin v\right) - v, \tag{115}$$

бунда қабул қилинган аниқлик бўйича

$$\mathrm{N}_0^{'} = \mathrm{N}_0\left[1\text{-}\frac{\mathrm{e}^2}{2}(\sin\varphi\text{-}\sin\varphi_0)^2\right] = {'}\mathrm{N}_0\left\{1\text{-}\frac{\mathrm{e}^2}{2}\left[\sin \mathrm{z}\cos \mathrm{a}\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos \mathrm{z}\text{-}1\right]^2\right\}.$$

биринчи умумлаштиришни назарда тутиб $\mathrm{N}_0^{'} = \mathrm{N}_0$, оламиз

$$\mathrm{z}^{(1)} \approx \arcsin[(1 + \mathrm{H}/\mathrm{N}_0)\sin \mathrm{v}]|\text{-v}. \tag{116}$$

(92) формуладан фойдаланиб, қаторни умумлаштириб оламиз

$$\sin\varphi = \left[1 + \mathrm{e}^{'2}(\sin\varphi_0\text{-t}_0)\,\mathrm{t}_0\right]\mathrm{t}_0, \tag{117}$$

бунда e, $\mathrm{e}^{'}$ — эллипсоид биринчи ва иккинчи эксцентриситетлари,

$$t_0 = \frac{\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \cos z\sin\varphi_0 - e^2\sin\varphi_0}{1-e^2}. \tag{118}$$

(118) формулага $z^{(1)}$ қийматини (116) олиб қўйсак, унда $t_0^{(1)}$ ни кейин эса (117) формула билан $\varphi^{(1)}$ қийматни топамиз. (101) формулани ҳисобга олиб ва унга $\varphi^{(1)}$ қийматини қўйиб, $N_0^{1\,(2)}$ (115 дан) топамиз, (118), (117) қиймати $z^{(2)}, t_0^{(2)}, \varphi^{(2)}$ иккинчи итерация (қайтариш). Кейин шунга ўхшаш $z^{(3)}$, $\varphi^{(3)}$ топамиз; сўнгра $z^{(4)}$, φ^4 ва бошқаларни ҳам

$\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)} \leq \delta$ бўлганда, бунда δ — йўл қўйиларли қиймат.

Нуқталар узоқлигини аниқлаш учун (92) формуладан

$\lambda = \lambda_0 + arcsin[t_1'(1 - e^2 t_2')]$, бунда

$t_1' = \sin z \sin a \sec \varphi$;

$t_2' = \sin \varphi\,(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$.

30–§. Азимутал проекцияларнинг умумлашган формулалари

Азимутал проекцияда (жумладан, перспектив-азимутал проекцияларда) ρ қутб радиуси формуласини таҳлил қилиш асосида турли хил хатоликли проекцияларни олиш имконини берувчи умумлашган формулалар тавсия қилинган. Масалан, Г.А.Гинзбург қуйидаги умумлашган формулани тавсия этади:

$$\rho = R[L_1 \sin(z/k_1) + L_2 tg(z/k_2)].$$

Параметрлар L ва k ўзгарувчан қийматлари билан бир қатор маълум ва турли хилдаги оралиқ проекциялар формулаларини олишимиз мумкин. Масалан, $L_1 = 0$ ва $L_2 = k_2$ бўлганда проекцияларни «тангенсли тармоқ» учун р тенгламани оламиз (бу ерда параметр к индекси чиқариб ташланади):

$\rho = Rk\ tg(z/k)$

Шубҳасиз, k = 2 бўлганда проекция тенг бурчакли азимутал (стереографик), k = 1 гномоник бўлади. $\_L_2 = 0, L_1 = k$ бўлганда проекцияни "синус тармоқ" учун р ни формуласини оламиз:

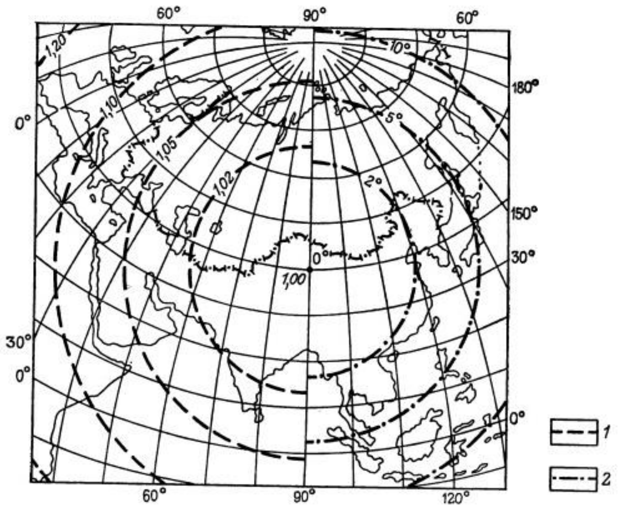
$\rho = Rk \sin(z/k)$.

k = 2 ҳолат учун тенг майдонли азимутал проекцияни; k = 1 - ортографик; k = 2, 7-3 га яқин бўлганда майдон хатолиги катта бўлмаган проекцияларни (34-расм); k = 1,2-1,5 – картага олинаётган текисликни сфериклик хусусиятини берувчи проекцияларни оламиз. «Синус тармоқ»га тегишли проекцияларда

$$\mu_1 = \cos(z/k)\,; \quad \mu_2 = k\sin(z/k)\operatorname{cosec} z.$$

Азимутал проекцияларни умумлашган ρ формуласини А.К.Маловичко таклиф этган:

$$\rho = R[2\sin(z/2)]^k[2\,tg(z/2)]^{(1-k)}\,.$$



k = 1/2 бўлганда Брейзинг проекциясини оламиз, унда ρ қиймат тенг бурчакли ва тенг майдонли азимутал проекциялардаги ρ ни ўртача геометрик қийматлари орқали топилади:

$$\rho = 2R\sqrt{tg(z/2)\ \sin(z/2)}\ .$$

34-расм. **«Синус тармоқ»ли азимутал проекцияларда** p (1) **ва** ω (2) **изоколалари**

Назорат саволлари

1. Азимутал проекциялар φ_0 қиймати бўйича қандай турларга бўлинади, уларни картографик тўри қандай кўринишда?

2. Азимутал проекциялар координата тизимларини тушунтиринг.

3. Тенг бурчакли азимутал проекция формулаларини ёзинг, уларга қисқача изоҳ беринг.

4. Тенг майдонли азимутал проекциялар хусусиятини ифодаланг ва формулаларини келтиринг.

5. Негатив ва позитив тасвирли перспектив проекциялар ҳақида маълумотлар беринг, улар қандай ҳосил қилинади.

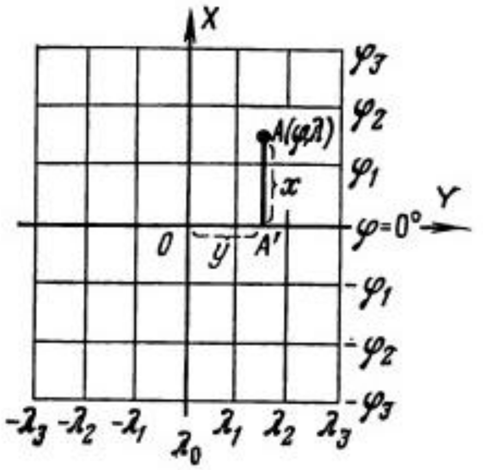
6. Гномоник, стереографик ва ортографик проекциялар қандай олинади, уларни бир-биридан фарқларини формулалар орқали кўрсатинг.

VI БОБ.
ЦИЛИНДРИК ПРОЕКЦИЯЛАР

31–§. Цилиндрик проекцияларнинг асосий қоидалари ва умумий формулалари

Цилиндрик проекцияларнинг нормал тўри оддий кўринишга эга, бунда барча меридианлар бир – биридан бир хил масофадаги узоқликда жойлашган, ўзаро параллел тўғри чизиқлардан ташкил топади, параллеллар – меридианларга перпендикуляр ҳолатда жойлашган тўғри чизиқлар сифатида тасвирланади; улар орасидаги масофа проекциянинг хоссаларига боғлиқ ҳолда ўзгаради.

Бу проекцияларни тўғри бурчакли координаталари: $x = f(\varphi)$; $y = \beta\lambda$, бунда проекция параметри $\beta = const$. X ўқи сифатида меридианлардан бири, Y ўқи сифатида эса экватор ёки параллеллардан бири олинади (35-расм).



35-расм. **Цилиндрик проекция (тенг майдонли).**

Проекция абсциссасини аниқлаб берувчи функциялар тасвирнинг тенг бурчакли, тенг майдонли ёки тенг оралиқли каби тавсифлари шарти асосида топилади; ўз навбатида, цилиндрик проекциялар меридианлари бўйича тенг бурчакли, тенг майдонли ёки тенг оралиқли тавсифларга эга бўлиши мумкин. Бундан ташқари, картографик амалиётда хатолиги тавсифига кўра иҳтиёрий проекциялар ҳам ажратилади. Бу проекцияларда картага туширилувчи юза эллипсоид ёки сфера сифатида қабул қилинади.

Нормал цилиндрик проекцияда асосий йўналишлар меридианлар ва параллеллар билан устма – уст тушади, шу сабабли меридиан ва параллеллар бўйлаб масштаблар экстремал бўлади. Эллипсоидни нормал цилиндрик проекциялари умумий формулалари қуйидагилар:

$$x = f(\varphi); \quad y = \beta\lambda;$$

$m = \sqrt{e}/M = dx/Md\varphi,$ чунки $e = (dx/d\varphi)^2;$

$n = \sqrt{g}/r = \beta/r,$ чунки $g = (dy/d\lambda)^2 = \beta^2$ (119)

$$p = mn = \beta dx/Mrd\varphi;$$

$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b)$ ёки $tg(45° + \omega/4) = \sqrt{a/b}$,

бунда a ва b — узунлик экстремал масштаблари; β=const. β параметрни олишда бош масштаб кенглиги $\pm\,\varphi_k$ бўлган паралелда ўзгармас деган шарти қўйилади:

$n_k = \beta/r_k = 1$, бундан

$\beta = r_k,$ (120)

бунда r_k — асосий параллеллар радиуслари.

Агар $\varphi_k = 0°$, унда $\beta = a$, бунда a —эллипсоидни катта ярим ўқи.

Нормал цилиндрик проекцияларда изоколалар кенглик функцияси бўлади, шунинг учун улар параллеллар билан устма-уст тушади ва тўғри чизиқлар кўринишида бўлади. Нормал цилиндрик проекцияларни географик экватор бўйлаб чўзилган худудлар карталарини тузишда фойдаланиш мақсадлидир.

32–§. Нормал тенг бурчакли цилиндрик проекциялар, уларнинг хоссалари ва қўлланилиши

Бу проекцияларда x абсцисса ўқи узунлик масштаби йўналишга боғлиқ эмаслиги шарти асосида аниқланади:

$$m = n.$$

Масштаблар қийматини қўйиб, оламиз

$dx/Md\varphi = \beta/r$. Унда

$$dx = \beta\frac{Md\varphi}{r} = \beta\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}$$

бундан

$x = \beta \int \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}.$

(70) тенгликни эътиборга олиб,

$x = \frac{\beta}{mod} \lg U + C,$

бунда С —интеграл доимийси.

Агар ўқ Y экватор билан устма-уст тушса, унда С = 0 ва

$x = \frac{\beta}{mod} \lg U$ бунда

$U = \frac{tg(45° + \varphi/2)}{tg^e(45° + \psi/2)};$

$\sin\psi = e \sin\varphi\,; \quad mod = lne\,.$

Шар сирти учун

$x = \frac{\beta}{mod} lg\ tg(45° + \varphi/2).$

Нормал тенг бурчакли цилиндрик проекциялар формулалари:

$x = \frac{\beta}{mod} lg\ U$; y=βλ

$m = n = \beta/r; \quad \beta = r_k;$ (121)

$p = m^2; \quad \omega = 0$

Тенг бурчакли цилиндрик проекциялар *Меркатор проекциялари* дейилади; улар бир – биридан β параметри билан фарқланади, бу параметр абсцисса қиймати ва хатоликлар тақсимланишига таъсир кўрсатади. Проекцияда кенгликлари $\pm\varphi_k$ бўлганда $\beta = r_k$ иккита бош параллел бўлиши мумкин ва биттаси асосий, унда $\beta = a$ (эллипсоидни катта ярим ўқи) ёки $\beta = R$ (шар радиуси).

Узунлик минимал масштаби экваторда бўлади, шу сабабли кенглик қиймати оширилиши билан параллеллар ўртасидаги масофа ортиб боради. Бу проекцияларда географик қутбни тасвирлаш мумкин эмас, унинг тасвири бу ҳолатда чексизликка томон йўналади.

Нормал тенг бурчакли циindрик проекциялар денгиз карталарини тузишда фойдаланилади, чунки улар локсодромиклик хусусиятга эга. *Лаксодромия* – картага олинаётган юза текислиги меридианларини бир хил бурчак остида кесиб ўтадиган чизиқ. Тенг бурчакли цилиндрик проекцияларда локсодромиялар тўғри чизиқлар билан тасвирланади. Локсодромиялар ва ортодромиялар *ҳолат чизиқлари* деб аталади; улардан карталар бўйича амалий масалаларни ечишда фойдаланилади. Ҳолат чизиқлари бўйича Г.М.Кирьяков қизиқарли тадқиқотларни олиб борган ва уларнинг хоссалари баҳоланган.

Меркатор проекциясида x абсцисса меридианлар қисми деб номланади ва D' (минут ҳисобида) билан белгиланади:

$$x = D' = \frac{a}{\mathrm{mod}} \lg U,$$

бунда: a = 3437747 денгиз мили (д.м.); a/mod = 7915,705 д.м.

$$y = a\lambda = \lambda.$$

Денгиз навигациясида масофа денгиз милида ўлчанади (1 мил = 1852 м). Оддий тенг бурчакли цилиндрик проекция – бу битта асосий параллелга эга сфера проекцияси ҳисобланади (Меркатор проекцияси).

Бу проекция формулалари:

$$x = \frac{R}{mod} lg\ tg(45° + \varphi/2); \qquad y = R\lambda; \tag{122}$$

$$m = n = \sec\varphi; \qquad p = sec^2\varphi; \qquad \omega = 0.$$

Формулалар таҳлили шуни кўрсатадики, масштаб экватор яқинида секинроқ ўзгаради, демак, нормал цилиндрик проекциялардан экваториал зона карталарини ёки параллеллар бўйлаб чўзилган тор полосаларни (жумладан, йирик масштабли денгиз) карталарини тузишда фойдаланиш анча қулай.

Майда масштабли карталарни тузишда тенг бурчакли цилиндрик проекциялар картага олинаётган юзада экватор чизиғи бўйлаб чўзилган, йирик худудларни тасвирлашда ва бутун дунё обзор карталарини тузишда фойдаланилиш мақсадга мувофиқ. Картага олинаётган юзада локсодромия ва тенг бурча $tg\alpha = ds_n/ds_m = rd\lambda/Md\varphi$,

Бундан

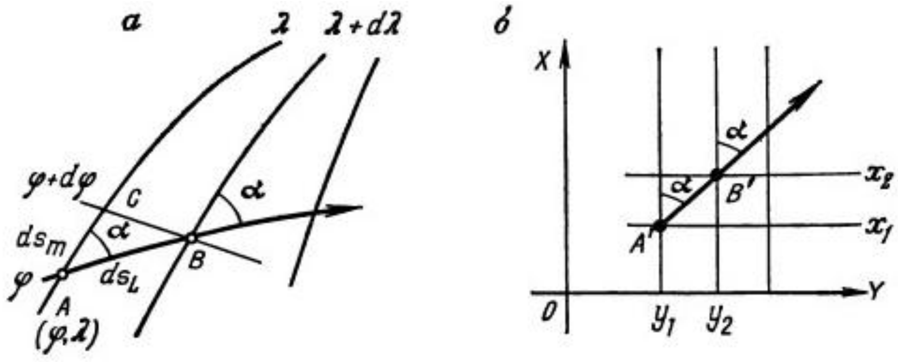
$d\lambda = tg\alpha \frac{Md\varphi}{r}$;

$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda = tg\alpha \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}$.

Интеграллашдан сўнг

$\lambda_B - \lambda_A = tg\alpha(lnU_B - \ln U_A)$;

кли цилиндрик проекция тенгламасини оламиз (36 а, б-расмлар):



36-расм. **Локсодромия ва унинг тасвири.** *а) эллипсоидда; б) юзада*

Шар юзасида U ўрнига $tg(45° + \varphi/2)$ қўямиз ва A нуқтани ($\varphi_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$), бошланғич ҳисоблаб, локсодромия формуласини сфера учун оламиз

$\lambda = tg\,\alpha \ln tg\,(45° + \varphi/2)$, бундан

$tg(45° + \varphi/2) = e^{\lambda\, ctg\, \alpha}$,

бунда е — натурал логарифм асоси. Демак, локсодромия — қутбда асимптотик нуқта спиралли эгри. Тенг бурчакли цилиндрик проекцияда

$tg\,\alpha = (y_B - y_A)/(x_B - x_A)$,

яъни тўғри чизиқ тенгламасини оламиз.

Локсодромия – икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа эмас, унинг тахминий узунлигини қуйидаги формула билан аниқлаш мумкин:

$$s_L = s_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sec\alpha.$$

33–§. Меридианлари бўйича нормал тенг майдонли ва тенг оралиқли цилиндрик проекциялар

Тенг майдонли проекцияларда абсцисса х майдонли нисбатни сақлаш шарти бўйича топилади

$$p = mn = 1$$

(119) формуладан

$$p = \frac{\beta dx}{Mrd\varphi} = 1, \qquad \text{унда} \qquad dx = \frac{Mr}{\beta} d\varphi.$$

Тенг майдонли цилиндрик проекциядан майда масштабли обзор карталарни тузишда фойдаланилади, шу сабабли картографик юзани сфера сифатида қабул қилиш мақсадга мувофиқ, унда

$dx = \frac{R^2 \cos\varphi}{\beta} d\varphi$, ва интеграллашдан сўнг

$$x = \frac{R^2}{\beta} \sin\varphi + C.$$

Y ўқи экватор билан устма-уст тушганлиги сабабли, интеграллаш доимийси C нулга тенг, унда

$$x = \frac{R^2}{\beta} \sin\varphi.$$

Тенг майдонли цилиндрик проекциялар формулалари:

$$x = \frac{R^2}{\beta} \sin\varphi; \qquad y = \beta\lambda;$$

Иккита асосий параллелли проекцияларда $\beta = r_k = R\cos\varphi_k$;

$$x = R\sec\varphi_k \sin\varphi; \qquad y = R\lambda\cos\varphi_k;$$

Битта асосий параллелли проекцияларда $\varphi_k = 0$ бўлганда $\beta = R$

$$x = R\sin\varphi; \qquad y = R\lambda;$$

$$n = \beta/r = r_k/r; \qquad m = 1/n = r/\beta;$$

$$p = 1; \qquad tg(45° + \omega/4) = a,$$

бунда $\beta = const,\ \ a$ — узунлик максимал масштаби.

Иккита асосий параллелли проекцияларда масштаб ушбу параллелларда бирга тенг ($\pm\varphi_k$), битта асосий параллелли проекцияларда – экваторда. Масштаб параллеллар бўйлаб экватордан қутбга томон ортиб боради, меридианлар бўйича эса камайиб боради, шу сабабли параллеллар ўртасидаги масофа экватордан узоқлашиш билан камайиб боради. Географик қутб чизиқ билан тасвирланади. Экватор узунлиги сақланувчи ($\beta = R$) тенг майдонли цилиндрик проекциялар – *изоцилиндрик проекциялар* деб номланади. Бундай проекция формулалари

$$x = R\sin\varphi; \; y = R\lambda;$$

$$n = \sec\varphi; \quad m = \cos\varphi;$$

$$p = 1; \qquad tg(45^\circ + \omega/4) = \sec\varphi.$$

Меридианлар бўйича тенг ораликли цилиндрик проекцияларда абсцисса барча меридианларнинг узунлиги сақланиб қолиши керак, шарти бўйича аниқланади:

$$m = dx / Rd\varphi = 1; \quad dx = Rd\varphi,$$

Бунда қуйидаги тенглик ўринли

$x = R\varphi + C,$ бу ерда: C – интеграллаш доимийси.

Агар Y ўқи экватор билан мос тушса, у ҳолда $C = 0$ ва $x = R\varphi$, яъни проекциянинг абсцисса ўқлари меридианларнинг тўғриланган ёйларига тенг бўлади. Бу проекцияларнинг умумий формулалари

$$x = R\varphi; \; y = R\lambda;$$

$$m = 1; \; n = p = \beta / r = r_k / r;$$

$$\sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b),$$

бунда: a ва b – узунликнинг экстремал масштаблари

Агар $\beta = r_k = R\cos\varphi_k$ бўлса, у ҳолда

$$x = R\varphi; \; y = R\lambda\cos\varphi_k;$$

Агар $\varphi_k = 0$ бўлса, $\beta = R$ бўлганда

$x = R\varphi;\ y = R\lambda$

Келтирилган охирги формулалар *квадрат проекция* деб номланувчи проекцияни таърифлайди; бу проекцияда бурчак хатолиги ва масштаблар қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$m = 1;\ n = p = \sec\varphi;$$

$$\sin(\omega/2) = (\sec\varphi - 1)/(\sec\varphi + 1) = tg^2(\varphi/2).$$

34–§. Берилган ҳатоликлар тақсимланиши бўйича ихтиёрий цилиндрик проекциялар

Берилган хатолик қийматларининг тақсимланиши бўйича цилиндрик проекциялар Н.А.Урмаев томонидан таклиф қилинган, бу билан у биринчилардан бўлиб математик картографиянинг тескари масаласини - «*берилган хатолик ёки масштаблари бўйича проекциялар тенгламаларини қидириш*»ни таърифлаб берган.

Цилиндрик проекцияларда меридианлар бўйича масштаблар кенглик функцияси ҳисобланади. Агар

$m = dx/d\varphi$ қабул қилинса ва унинг баъзи нуқталари қиймати берилса, унда абсциссани интеграллаб топиш мумкин

$x = \int m d\varphi.$

Масалани қўлай ва осон ечиш мақсадида масштабни кенгликга нисбатан жуфт қўпҳад кўринишида тасаввур қилиш мумкин

$m = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + \ . \ . \ . \ . \ ,$

бунда a_0, a_2 ва a_4 — коэффициентлар, уларни уч номаълумли учта тенгламани ечиш орқали топиш мумкин, ёки интерполяция йўли билан. Мисол сифатида Н.Л.Урмаев таклиф этган ихтиёрий цилиндрик проекцияни олишни кўриб чиқамиз. $f(z)$ функцияни z аргументга нисбатан қийматини

Ньютоннинг тақсимланган айирмалар интерполяция формуласи орқали олиш мумкин

$$f(z) = f(a_0) + (z - a_0)f_{01} + (z - a_0)(z - a_1)f_{012} + \dots\ ,$$

бунда f_{01} ва f_{012} — биринчи ва иккинчи тақсимланган айирмалар:

$$f_{01} = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}; \qquad f_{12} = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1};$$

$$f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{a_2 - a_0} = \left[\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}\right] / (a_2 - a_0).$$

Кенглиги $\varphi_0 = 0°$, $\varphi_1 = 60°$ ва $\varphi_2 = 80°$ параллелларда масштаблар $m_0 = 1$, $m_1 = 1{,}5$; $m_2 = 2{,}0$.

Тақсимланган айирмаларни ҳисоблаш қуйидаги жадавлага мувофиқ амалга оширилади:

φ. градус	a	$f(a) = m$	f_{01}, f_{02}	$f_{01\,2}$
0	0	1.0		
			+ 1/72	+1/16 128
60	36	1.5		
			+ 1/56	
80	64	2.0		

a аргумент сифатида градусларни ўнлаб квадратида (тўр частотаси $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10°$) ифодаланган параллеллар кенглигини оламиз, $f(\alpha)$ функция сифатида - m масштаб қийматини.

Аргумент z сифатида $\varphi / arc\ 10°$ қийматни қабул қиламиз. Унда

$$m = 1 + \frac{z^2}{72} + \frac{z^2(z^2 - 36)}{16\,128} = 1 + \frac{188z^2}{16\,128} + \frac{z^4}{16\,128}$$

ва интеграллашдан кейин

$$x = z + \frac{188z^3}{48\,384} + \frac{z^5}{80\,640}.$$

Проекцияни тўғри бурчакли координаталарини муайян юза карта масштаби учун қуйидаги қийматларини оламиз:

$$x_{\text{см}} = R(\mu_0 100)x \quad \text{ва} \quad y_{\text{см}} = R(\mu_0 100)\lambda\ arc\ 1°.$$

35 – §. Қийшиқ ва кўндаланг цилиндрик проекциялар

Кўндаланг цилиндрик проекциялардан меридианлар бўйлаб чўзилган ҳудудлар карталарини тузишда, қийшиқ цилиндрик проекциялардан эса – ихтиёрий ориентирланган катта айланалар бўйлаб чўзилган ҳудудларни картага олишда фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

Қийшиқ ва кўндаланг цилиндрик проекцияларда картага олиш юзаси сифатида сфера қабул қилинади. Проекцияларни олиш ишлари қуйидаги босқичлардан иборат:

– эллипсоиддан шар юзаси текислигига ўтиш (йирик масштабли карталар учун) ёки шар радиусини (R) аниқлаш;

– қутб ($Q(\varphi_0, \lambda_0)$) координаталарини аниқлаш;

– географик координаталар тизимидан қийшиқ ёки кўндаланг қутбий сферик координаталар тизимига ўтиш;

– проекциялар координаталари, масштаблари ва бурчак хатоликлари қийматларини ҳисоблаш.

Йирик масштабли карталар учун, масалан, аэронавигация карталари учун қийшиқ ва кўндаланг проекцияларни олишда кўпинча тенг бурчакли проекциялардан фойдаланилади, бунда эллипсоиддан шар юзаси текислигига ўтиш тенг бурчакли тасвирлаш шарти асосида бажарилиши талаб қилинади. Бунда сферик кенглик қиймати картографик жадваллардан олиниши мумкин. Шар радиуси (R) қиймати ҳам ушбу шартлар асосида топилади.

Кўндаланг проекцияларда қутб кенглиги $\varphi_0 = 0$, узоқлик – $\lambda_0 = \pm 90^\circ$.

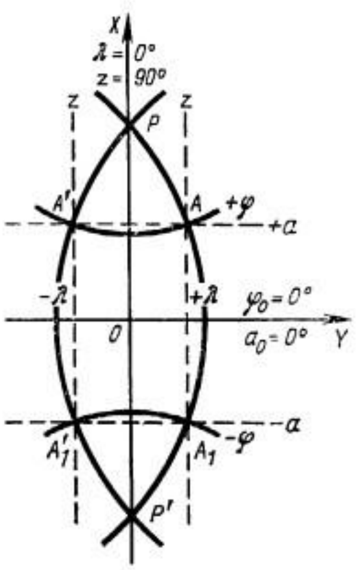
Географик координаталардан кўндаланг координаталар тизимига ўтиш қуйидаги формулалар асосида амалга оширилади

$$\cos z = \cos\varphi \cos(90^\circ - \lambda) = \cos\varphi \sin\lambda;$$

$$tga = ctg\varphi \sin(90^\circ - \lambda) = ctg\varphi \cos\lambda.$$

Қийшиқ проекцияларда бошланғич вертикал сифатида қийшиқ координаталар тизими қутбий меридиани билан мос келувчи вертикал олинади. Кўндаланг проекцияларда бошланғич вертикал географик экватор билан устма-уст тушади, яъни 90^{o} га бурилган (37 – расм), шу сабабли, азимутни аниқлаш формуласининг ўнг қисми тескари қийматга алмаштирилиши керак:

$$tga = tg\varphi \sec\lambda.$$



37–расм. **Кўндаланг цилиндрик проекцияларда координаталар тизими**

Кўндаланг цилиндрик проекцияларда тўғри бурчакли координаталарни ҳисоблаш формулалари тўғри проекциялар формулалар каби ҳосил қилиниши мумкин (вертикаллар ва алмакантаратлар бўйича масштаблардан фойдаланиш орқали тенг бурчакли, тенг майдонли ёки тенг ораликли тасвирлаш шарти асосида), бироқ бунда нормал проекциялар формулаларидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ, λ қийматни a ва φ қийматни ($90^{\circ} - z$) алмаштириб, ҳамда бир вақтнинг ўзида проекция тўрини 90^{o} га буриш орқали иш юритилади.

Тенг бурчакли кўндаланг цилиндрик проекцияларни ҳосил қилиш учун Меркатор проекцияси формуласидан (*122*) фойдаланмамиз, бунда юқори кўрсатиб ўтилган мураккаб бўлмаган ўзгартиришдан кейин формула тенг бурчакли кўндаланг цилиндрик проекция формуласига мос тушади, бу *Гаусс – Ламберт проекцияси* деб номланади (38 – расм),

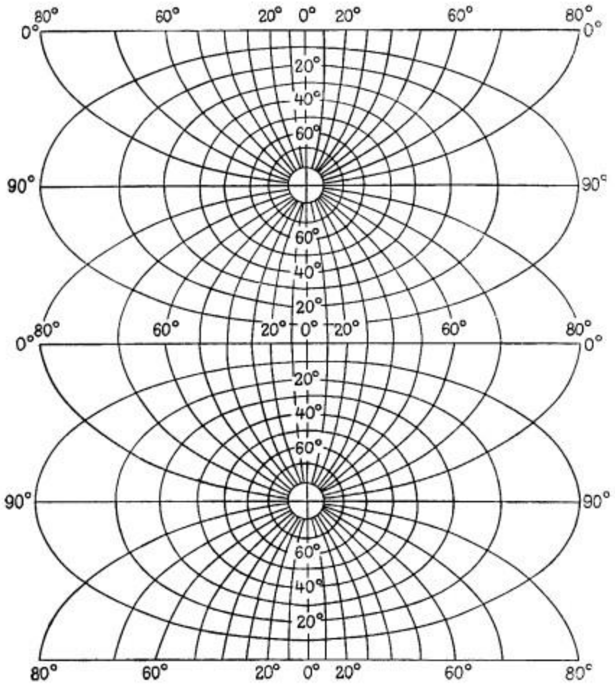
$$x = Ra;\ y = \frac{R}{\mathrm{mod}} \lg ctg \frac{z}{2};$$

$$\mu = \cos ecz;\ p = coec^{2} z;$$

$$\omega = 0,$$

бу ерда μ – узунлик масштаби.

Шунга ўхшаш квадрат проекцияни қўллаб, Кассини—Зольднер номи билан машҳур бўлган вертикаллар бўйича тенг оралиқли кўндаланг цилиндрик проекция тенгламаларини оламиз (39-расм):



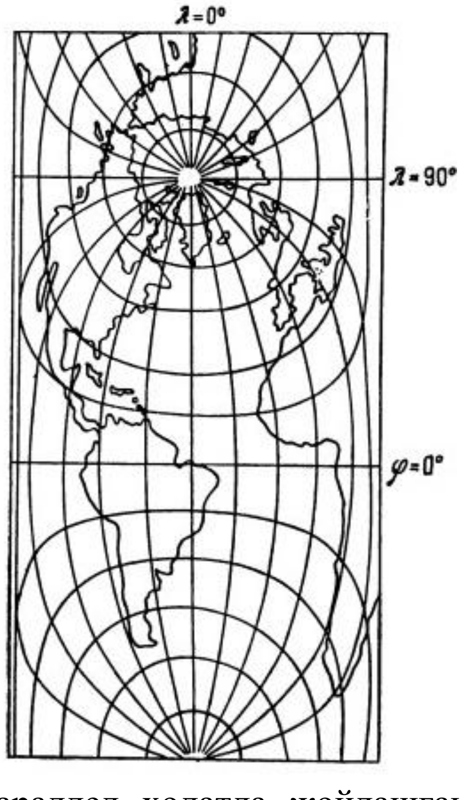
38 – расм. **Тенг бурчакли кўндаланг цилиндрик проекция**

$x = Ra;\quad y = R\left(90°—z\right);$

$\mu_1 = 1;\quad \mu_2 = p = cosecz;$

$sin\,(\quad /2) = tg^2(45°—z/2),$

бунда μ_1 ва μ_2, — мос равишда вертикаллар ва альмукантаратлар масштаблари. Бу проекция Зольднер геодезик координаталарига асос сифатида танланган.



39-расм. **Вертикаллар бўйича тенг оралиқли кўндаланг цилиндрик проекция**

Кўндаланг цилиндрик проекцияларда (37–расмга қаранг) тўғри чизиқли ўқ меридиан кўндаланг координаталар тизимининг экватори билан мос тушади, қолган альмукантаратлар – ўқ меридианга параллел ҳолатда жойлашган тўғри чизиқлар билан тасвирланади; вертикаллар ўқ меридианга перпендикуляр тўғри чизиқлар бўлиб, бошланғич вертикал $a=0$ географик экватор билан устма – уст тушади. Хатолик зенит масофасига боғлиқ, шу сабабли изоколалар альмукантаратлар билан мос тушади ва тўғри чизиқ кўринишида бўлади.

Қийшиқ цилиндрик проекциялар картага олинаётган юзада меридианга нисбатан ўткир ёки ўтмас бурчак остида чўзилган ҳолатда жойлашган узун полосаларни тасвирлашда фойдаланиш тавсия этилади. Бу проекцияларни олиш учун қуйидагилар талаб қилинади:

– йирик масштабли карталар учун эллипсоиддан шар юзасига ўтиш ёки майда масштабли карталарни тузишда шар радиусини (R) аниқлаш;

– III бобда келтирилган формулалар бўйича қийшиқ тизим қутб координаталарини ҳисоблаш $Q(\varphi_0, \lambda_0)$: қийшиқ тизим экватори йўналишини аниқлаб берувчи, ёрдамчи бурчакни – u_1 аниқлаш, кейин эса – (*62*) формула бўйича φ_0 ва λ_0 координаталарни аниқлаш. Одатда, координаталар қийматлари бутун градуслargача яхлитланади;

– географик координаталардан қийшиқ тизим қутбий сферик координаталар тизимига ўтишни амалга ошириш. Бундай ўтиш (*59*) ва (*60*) ёки (*61*) формулалар бўйича бажарилади.

Агар, φ_0 ва λ_0 қийматлар беш градусга каррали бўлса ва картографик тўр частотаси ҳам бешга ёки ўнг градусга тенг бўлса, у ҳолда географик координаталардан қийшиқ тизимнинг қутбий сферик координаталар тизимига ўтишни «Картографик жадвал» (ЦНИИГАиК ишлари тўплами, Москва, «Геодезиздат» нашриёти, 1960 йил, 132 – сон) таркибида келтирилган тайёр *z* ва *a* қийматлардан олиш мумкин.

z ва *a* қийматлар аниқланиши орқали қуйидаги формулалар бўйича проекцияни тўғри бурчакли координаталари ва масштабларини ҳисоблашга ўтилади:

$$x = f(z);\ y = \beta a;$$

$$\mu_1 = -\beta / R dz;\ \mu_2 = \beta / R \sin z;\ p = \mu_1 \mu_2;$$

$$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b) \text{ ёки } tg(45^\circ + \omega/4) = \sqrt{a/b};$$

$$\beta = R\sin z_k \text{ ёки } \beta = R.$$

a ва b – экстремал масштаблар.

Проекциялар вариантлари аниқ формулалари юқорида келтирилган умумий формулалардан тенг бурчакли, тенг майдонли ёки тенг оралиқли тасвирлаш шарти асосида абсцисса қийматларини аниқлаш йўли билан ёки нормал проекциялар формулаларини мураккаб бўлмаган тарзда ўзгартириш йўли билан ҳосил қилиниши мумкин. Масалан, кўплаб ҳолатларда аэронавигацион карталарни тузиб чиқишда фойдаланилувчи тенг бурчакли қийшиқ цилиндрик проекциялар формулалари тенг бурчакли нормал цилиндрик проекциялар формулалари асосида, φ қийматни $(90^\circ - z)$ қийматга ва λ қийматни a қийматга ўрин алмаштириш орқали ҳосил қилиниши мумкин. (*122*) формулада кўрсатилган ўзгартиришлар амалга оширилгандан кейин,

$$x = \frac{\beta}{\mathrm{mod}} \lg ctg(z/2); \; y = \beta a;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \beta / R\sin z;$$

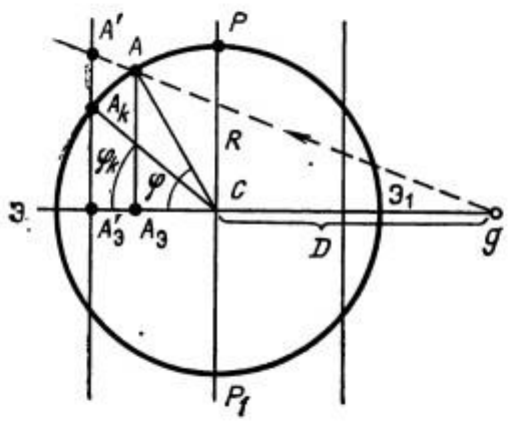
$$p = \mu^2; \; \omega = 0;$$

$$\beta = R\sin z_k \text{ ёки } \beta = R.$$

36 – §. Перспектив-цилиндрик проекциялар

Юқорида кўрсатиб ўтилганидек, цилиндрик проекциялар геометрик йўл билан ҳам ҳосил қилиниши мумкин, улар цилиндрик проекцияларга тегишли бўлган барча умумий хоссаларга эга бўлади. Бу проекцияларни ҳосил қилиш масаласини қараб чиқамиз.

Қутб ўқи картага олинаётган юза (сфера) билан устма – уст тушувчи цилиндрни тасаввур қиламиз. Бу цилиндр сферани кесиб ўтиши ёки экватор бўйича ўринма ҳосил қилиши мумкин. Ҳосил қилинган цилиндрда карта тўри частотаси берилган қиймати билан мувофиқликда ҳар бир меридиан текислигида алоҳида кўринишда, перспектив проекция усули билан меридианлар ёйини лойиҳалаймиз (40–расм).



40–расм. **Нормал перспектив-цилиндрик проекцияни ҳосил қилиш**

Бунда кўриш нуқтасини лойиҳалаётганда ҳаёлий кўринишда экватор текислиги бўйича силжитишни амалга оширамиз, бу ҳолатда битта меридиандан бошқасига томон ҳаракатлантириш бажарилади, барча ҳолатда шар марказидан бир хил масофа сақлаб қолинади. Бир хил ном билан аталувчи меридианлар ва параллеллар чизиқлари билан лойиҳаланаётганда нуқтани туташтириш орқали ва цилиндрнинг ён юзасини бураш асосида карталаш тўри текислигида нормал перспектив-цилиндрик проекцияни ҳосил қиламиз.

Агар X ўқини меридианлардан бири ва Y ўқи экватор ёки параллел равишда энг кичик кенгликда бўлса, у ҳолда бу проекциянинг тўғри бурчакли координаталари учун формулалар қуйидаги шаклга эга бўлади

$x = f(\varphi); \qquad y = \beta\lambda.$

Меридианлар ва параллеллар ушбу проекцияда иккита тизимли ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар билан ифодаланади; меридианлар орасидаги масафалар нормал цилиндрик проекциялардаги каби аниқланади, параллеллар ороасидаги эса – перспектив проекциялар методи бўйича. Нормал перспектив-цилиндрик проекцияларни олишда картага олинаётган юзани айланма эллипсоид сифатида қабул қилиш мумкин, лекин бу проекциялар майда масштабли обзор карталар учун фodaланилиши мақсадли, шунинг учун фақат шар проекцияларини кўриб чиқиш билан чегараланамиз.

Абсцисса x қийматини геометрик йўл билан топамиз. 40-расмдан А нуқта g кўриш нуқтасидан ҳосил этувчи цилиндр сиртига лойиҳаланмоқда, A_k нуқта шарни φ_k кенгликли параллел билан кесиб ўтади. Бунда кўриш нуқтаси шар марказидан D масофада жойлашган. Агар $A'_э$ нуқтани тўғри бурчакли координаталар боши билан туташтирсак, A' нуқта А нуқтанинг проекцияси, $A'_э$ кесма эса тасвирланаётган А нуқтанинг абсциссаси бўлади.

$gAA_э$ и $gA'A'_э$ ўхшаш учбурчаклардан

$x = \frac{AA_э \cdot A'_э g}{A_э g}$, яъни

$A'_э g = D + A'_э C.$

$\Delta AA_э C$ дан

$AA_э = R\sin\varphi$; $\quad A_э C = R\cos\varphi$, унда

$x = \frac{R\sin\varphi(D+\cos\varphi_k)}{D+\cos\varphi}.$

Агар $D/R = k$, унда

$x = \frac{R\sin\varphi(k+\cos\varphi_k)}{D+\cos\varphi}.$

$(k+\cos\varphi_k)$ қиймат проекцияни олишда ўзгармас, уни C билан белгилаб, оламиз

$x = CR\frac{\sin\varphi}{k+\cos\varphi}.$

Агар $\varphi_k = 0$ (цилиндр тегишли бўлади), унда $C = k + 1.$

Нормал перспектив-цилиндрик проекциялар умумий формулалари:

$x = CR\frac{\sin\varphi}{k+\cos\varphi}$; $\quad y = \beta\lambda$;

$m = dx/Rd\varphi = C(1 + k\cos\varphi)/(k+\cos\varphi)^2$; $\quad n = \beta/r$;

$p = mn$; $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = (a-b)/(a+b)$,

бунда a ва b — узунлик экстремал масштаби.

$C = k + \cos\varphi_k$; $\quad \beta = R\cos\varphi_k$ бўлганда кесувчи цилиндр,

$C = k + 1;\quad \beta = R$ бўлганда уринма.

Проекциялар тўри ортогонал, шу сабабли m ва n масштаблар экстремал. Хатоликлар хусусияти бўйича перспектив-цилиндрик проекциялар ихтиёрий ҳисобланади. Улар бир-биридан φ_k параллел кенглиги ва кўриш нуқтаси D шар C марказидан g узоқлиги билан фарқ қилади.

Бир нечта хусусий ҳолатларни кўриб чиқамиз.

$k = 0$ — гномоник проекциялар усули бўйича лойиҳалашда; $\varphi_k = 0°$ — уринма цилиндр;

$x = Rtg\varphi;\qquad y = R\lambda;$

$m = sec^2\varphi;\qquad n = sec\varphi;$

$p = sec^3\varphi;\qquad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = tg^2(\varphi/2).$

Бу вариант анча маълум ҳисобланган Уэтч проекциясига тегишли.

$k = 1$ — стерографик проекция методи бўйича лойиҳалашда.

φ_k= 0° — уринма цилиндр;

$x = 2Rtg(\varphi/2);\qquad y = R\lambda;$

$m = sec^2(\varphi/2);\qquad n = sec\varphi;$

$p = sec^2(\varphi/2)sec\,\varphi;\qquad \sin(\omega/2) = (a - b)/(a - b),$

бунда a ва b — узунлик экстремал масштаби. Бу вариант Браун проекцияга тегишли.

3. $k = 1$.

$\varphi_k = 45°$ — кесувчи цилиндр;

$x = (1 + \cos\varphi_k)\,Rtg(\varphi/2);\qquad y = R\cos\varphi_k\lambda\,;$

$m = \frac{(1+cos\varphi_k)}{2}sec^2(\varphi/2);\qquad n = cos\varphi_k sec\varphi;$

$p = mn;\qquad \sin(\omega\,/2) = (a - b)/(a + b),$

бунда a ва b — узунликлар экстремал масштаблари.

Бу вариант Голл проекцияси номи билан маълум. φ_k = 30° бўлганда I т. БСАМ дунё карталарини тузиш учун ишлатилган.

Нормал перспектив-цилиндрик проекцияларда хатолик фақат кенглик қийматларига боғлиқ, шу сабабли изоколалар параллелар билан устма – уст тушади ва тўғри чизиқ кўринишига эга ҳисобланади. Проекцияларда иккита параметр мавжуд – k ва φ_k, бу параметрлар тўр кўринишига (пераллеллар ва меридианлар ўртасидаги масофанинг ўзгариши) ва хатоликнинг тақсимланишига ўз таъсирини кўрсатади.

Қийшиқ перспектив-цилиндрик проекцияларда меридианлар ва параллеллар тўри нормал билан устма – уст тушмайди. Мeридиналар ва параллеллар эгри чизиқлар бўлиб, вертикаллар ва альмукантаратлар эса ўзаро пепендикуляр кўринишдаги тўғри чизиқлар тизими билан тасвирланади. Бу проекциялар юқорида кўрсатилган усуллар билан ҳосил қилиниши мумкин, бироқ бунда тасвир текислигига лойиҳалашда кўриш нуқтаси экватор текислигида эмас, балки зенит масофаси $z = 90^\circ$ бўлган альмукантарат текислигида жойлашади. Қийшиқ перспектив-цилиндрик проекцияларнинг умумий формулаларини φ қийматни $(90^\circ - z)$ қийматга ва λ қийматни a қийматга алмаштириш йўли билан, нормал перспектив-цилиндрик проекциялар тенгламаларидан оддий усулда олиш мумкин:

$$x = CR\frac{\cos z}{k + \sin z};\; y = \beta a;$$

$$\mu_1 = C(1 + k\sin z)/(k + \sin z)^2;\; \mu_2 = \beta / R\sin z;$$

$$p = \mu_1\mu_2;\; \sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b),$$

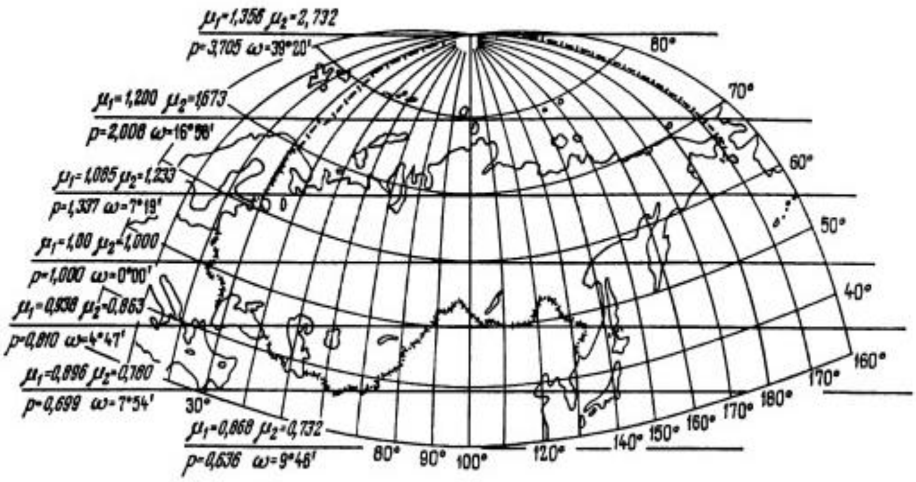
бу ерда a ва b – узунликнинг экстремал масштаблари.

$C = k + \sin z_k$; $\beta = R\sin z_k$ ҳолатда кесувчи цилиндр кузатилади,

$C = k + 1$; $\beta = R$ ҳолатда уринма цилиндр қайд қилинади.

Хатолик фақат z координаталарга боғлиқ, шу сабабли изоколалар альмукантаратлар билан устма–уст тушади ва тўғри чизиқли меридианга перпендикуляр бўлган, ўзаро параллел ҳолатдаги тўғри чизиқлардан ташкил топади. Қийшиқ перспектив-цилиндрик проекциялар ўқув карталарини тузиб чиқиш учун ишлаб чиқилган.

Қараб чиқилаётган проекцияларда қуйидаги учта қиймат мавжуд: φ_0, k ва z_k, бу қийматлар тўр кўриниши ва хатолик қийматлари тақсимланишига ўз таъсирини кўрсатади. Танлаш йўли билан бу параметрларни параллеллар эгри чизиқли, картографик тўр ўлчамлари ва хатоликларнинг қайта тақсимланишига ўрин алмаштириш мумкин.



41-расм. **Қийшиқ кўндаланг-цилиндрик проекция (М.Д.Соловьев варианти)**

Бу проекциялардан картада тасвирланувчи ҳудуд маълум бир аниқ ўлчамдаги рамка билан чегараланган вазиятларда фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

Қийшиқ перспектив-цилиндрик проекцияларнинг вариантларидан бири М.Д.Соловьев томонидан ишлаб чиқилган бўлиб (41–расм), мактаб карталарини тузиб чиқишда кенг миқёсда фойдаланилган, бундай карталарда географик қутб ва Шимолий Муз океани тўлиқ тасвирланади.

($\varphi_0 = 75^\circ$, $\lambda_0 = -80^\circ$, $k = 1$ ва $z_k = 45^\circ$).

Назорат саволлари

1. Эллипсоид нормал цилиндрик проекциялари формулаларини ёзинг.

2. Меркатор проекцияларининг қандай хусусиятлари бор, уларни изоҳланг.

3. Локсодромиялар ва ортодромиялар чизиқларига таъриф беринг, уларни моҳиятини тушунтиринг.

4. Тенг майдонли ва тенг оралиқли цилиндрик проекциялар қандай проекция турига киради ва қайси карталарни тузишда фойдаланилади?

5. Н.Л.Урмаев таклиф этган ихтиёрий цилиндрик проекциялар хусусиятини таърифланг ва проекция тўғри бурчакли координаталарини аниқлашни тушунтиринг.

6. Қийшиқ ва кўндаланг цилиндрик проекцияларни олиш ишларини нечта босқичга бўлиш мумкин?

7. Нормал перспектив цилиндрик проекцияларда хатоликлар қандай тақсимланган, уларни картографик тўри қандай кўринишга эга бўлади?

VII БОБ.
ПСЕВДОЦИЛИНДРИК ПРОЕКЦИЯЛАР

37 – §. Асосий қоидалар ва умумий формулалар

Псевдоцилиндрик проекцияларнинг нормал тўри қуйидагича кўринишга эга: параллеллари тўғри, меридианлари эса эгри чизиқлар. Бундай проекцияларни кўриниши ўзгарган нормал цилиндрик проекция сифатида қараб чиқиш мумкин, уларда проекцияни барча меридианлари (ўқ меридиандан ташқари) эгри чизиқлар билан тасвирланади. Тўғри бурчакли координаталар тизимида проекциянинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi, \lambda).$$

бунда координата боши экваторнинг ўқ меридиан билан кесишиш нуқтасида жойлашади (42–расм).

Псевдоцилиндрик проекцияларда картага олинаётган юза тўлиқ тасвирланади, зарур бўлган ҳолатларда узоқлик бўйича юзани бир қисмини қайта қўшиб тасвирлаш ҳам мумкин. Географик қутбни параллелларга параллел бўлган нуқталар ёки чизиқлар билан кўрсатиш мумкин, улар *қутб чизиқлари* дейилади.

Меридианлари кўпинча эллипс ёки синусоид каби чизиқлар кўринишида тасвирланади, бироқ меридианлари парабола, гипербола ва бошқа кўринишда бўлган чизиқлардан ташкил топган псевдоцилиндрик проекциялар ҳам мавжуд.

Псевдоцилиндрик проекцияларда тўр ортогонал эмас:

tg ε = $-f/h = -y_\varphi y_\lambda / x_\varphi x_\lambda = -y_\varphi / x_\varphi$ бундан

$$Y\varphi =— x_\varphi \, tg \, \varepsilon. \qquad (123)$$

Умумий формуладан меридиан ва параллеллар бўйича хусусий масштабни аниқлаймиз $m = \sqrt{e/M;}\ \ n = \sqrt{g/r}.$

Псевдоцилиндрик проекциялар учун $e = x_\varphi^2 + \ y_\varphi^2$

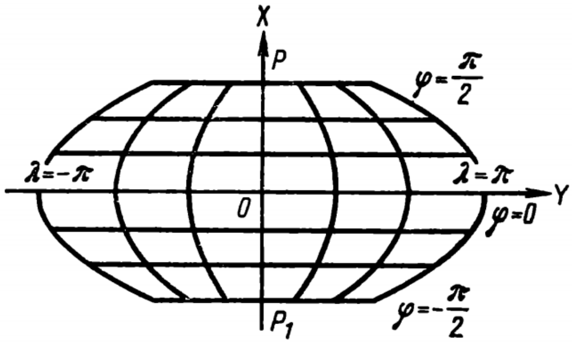
ёки (123) формулани ҳисобга олиб,

$e = x_{\varphi}^{2}(1 + tg^{2}\,\varepsilon) = x_{\varphi}^{2}\,sec^{2}\,\varepsilon$, бундан

$m = \frac{x\varphi}{M}\sec\varepsilon\,;\ g = x_{\lambda}^{2} + y_{\lambda}^{2};\ x_{\lambda}^{2} = 0$, чунки $g = y_{\lambda}^{2}$

g ни қийматини параллеллар масштаби формуласига қўйиб, оламиз $n = \frac{y\lambda}{r} = \frac{y\lambda}{N\cos\varphi} = \frac{y\lambda}{N}\sec\varphi$.

Майдон масштаби $p = mn\,cos\,\varepsilon = x_{\varphi}\,x_{\lambda}/Mr$.



42–расм. **Псевдоцилиндрик проекциялар координаталари тизими**

Қараб чиқилаётган проекцияларда асосий йўналишлар меридиан ва параллеллар билан мос тушмайди, шунинг учун меридиан ва параллеллар бўйлаб масштаблар экстремал эмас. Экстремал масштаблар – a ва b (*43*) формула бўйича аниқланади. Бу проекцияларда бурчаклар максимал хатолигини қуйидаги формула бўйича аниқлаш мақсадга мувофиқ:

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{B}{2p} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^{2}+n^{2}-2p}{p}}.$$

Ўз навбатида, псевдоцилиндрик проекциялар майда масштабли карталарни тузиш учун фойдаланилади, шу сабабли, одатда, картага олинаётган юза радиуси (R) сфера сифатида қабул қилинади. Псевдоцилиндрик проекцияларнинг сфера учун умумий тенгламаси:

$$x = f(\varphi);\quad y = F(\varphi;\lambda);$$

$$tg\varepsilon = -y_{\varphi}/x_{\varphi};$$

$$m = \frac{x_{\varphi}}{R}\sec\varepsilon;\quad n = \frac{y\lambda}{R\cos\varphi} = \frac{y\lambda}{R}\sec\varphi; \qquad (124)$$

$$p = \frac{x_\varphi y\lambda}{R^2 \cos\varphi}; \quad tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

Хатоликлар характери бўйича псевдоцилиндрик проекциялар тенг майдонли ва ихтиёрий турларга бўлинади; тенг майдонли проекциялар нисбатан кенг тарқалган. Агар майдон масштаби қуйидаги тенглама билан ифодаланса,

$p = \frac{x_\varphi y_\lambda}{Mr} = k^2$, бунда k – доимий қиймат, у ҳолда

$y = \frac{k^2 Mr}{x_\varphi}$. тенглама интеграллашдан кейин:

$y = \frac{k^2 Mr}{x_\varphi}\lambda + F(\varphi)$, бу ерда F – φ кенгликни ихтиёрий функцияси. $\lambda = 0$ ва $y = 0$ бўлганда X ўқи меридиан билан устма – уст тушади, $F(\varphi) = 0$ бўлади. Кўп ҳолатларда $k = 1$ тенглик ўринли унда:

$$y = \frac{Mr}{x_\varphi}\lambda.$$

Шар учун $y = \frac{R^2 \cos\varphi}{x_\varphi}$. (*125*)

Келтирилган охирги ифода тенг майдонли псевдоцилиндрик проекцияларни барчасига хос.

38 – §. Тенг майдонли псевдоцилиндрик проекциялар

Псевдоцилиндрик проекциялар анчадан буён маълум, уларни олишда олимлар томонидан картографик тўрни ҳосил қилишнинг турли усуллари тавсия қилинган. Собиқ иттифоқ олимлари В.В.Каврайский ва Н.А.Урмаевлар тенг майдонли псевдоцилиндрик проекцияларни олишни янги, умумлашган усулини таклиф қилишган. Меридианлар ва географик қутб тасвирланишидан келиб чиқган ҳолда, параметрик кўринишдаги псевдоцилиндрик проекцияларда тўғри бурчакли координаталар тенгламаси қуйидагича бўлади:

– меридианлари синусоидал проекциялар учун

$$x = C\alpha; \qquad (126)$$

$$y = (A\cos\alpha + B)\lambda; \qquad (127)$$

– меридианлари эллиптик проекцияларда

$$x = C\sin\alpha;$$

$$y = (A\cos\alpha + B)\lambda, \qquad (128)$$

бунда *A, B, C* – тўр ўлчамларини тавсифловчи параметрлар; $a = f(\varphi)$.

Тенг майдонли псевдоцилиндрик проекцияларни ҳосил қилиш учун учта шартни қўямиз:

1. *Чеклилик шарти*, бу шарт кенглик $(\varphi = 0^\circ)$ ва кенгликнинг ёрдамчи функцияси (α) ўртасидаги боғлиқликни белгилаб беради: бунда $\varphi = 0^\circ$ ҳолатда $\alpha = 0^\circ$; $\varphi = \pi/2$ да эса – $\alpha = \pi/2$ га тенг.

2. *Тўрнинг бир ўлчамдалик шарти* (умумий ҳолат учун, яъни қутби чизиқ кўринишида бўлган проекциялар учун):

$$x_p = y_p = y_э/2.$$

Агар қутб нуқта билан тасвирланса, у ҳолда $y_p = 0$.

3. *Тенг майдонлилик шарти* [(*125*) формула асосида]

$$y = \frac{R^2\cos\varphi}{x_\varphi}\lambda.$$

Ўрнатилган шартлардан келиб чиқиб, *A, B* ва *C* параметрлар ўртасидаги нисбатлар аниқланади; кейин эса – бу параметрлар картага олинаётган юзанинг элементлари орқали ифодаланади ва ниҳоят, кенглик ва ёрдамчиси функция (α) ўртасидаги боғлиқлик топилади.

Формулаларни келтириб чиқаришда ординаталарнинг иккита тенгламасидан фойдаланилади: параметрик кўринишдаги умумий тенгламалардан, бошқаси – тенг майдонлилик шартидан. Ихтиёрий псевдоцилиндрик проекцияларни ҳосил қилиш учун тенг майдонлилик шарти ўрнига бошқа шартлардан фойдаланилади.

39 – §. Тенг майдонли синусоидал қутби нуқта кўринишидаги псевдоцилиндрик проекциялар

Проекция синусоидал, шу сабабли (126) формуладан $x = \alpha C$. Географик қутблар нуқта бўлиб тасвирланади, унда (127) формуладан $y = A\lambda cos\,\alpha$. Проекция тенг майдонли, шунинг учун (125) формуладан

$$y = \frac{R^2\,cos\,\varphi}{x_\varphi}\lambda$$

Қараб чиқилаётган проекция учун *тўрнинг бир ўлчамдалик шартидан* келиб чиқиб

$$x_p = y_з/2$$

Картага олинаётган бутун юзани тасвирлаш учун

$x_p = C\frac{\pi}{2};\ y_з = A\pi.$ унда

$c\frac{\pi}{2} = \frac{A\pi}{2}$; $C = A$ бундан

$y = C\lambda\,cos\,\alpha$ - ординаталар қийматини тенглаб:

$$Ccos\,\alpha = R^2\,cos\,\varphi/x_\varphi = R^2 cos\varphi/C\alpha_\varphi$$

$C^2\cos\alpha d\alpha = R^2 cos\,\varphi d\varphi$ интеграллаб

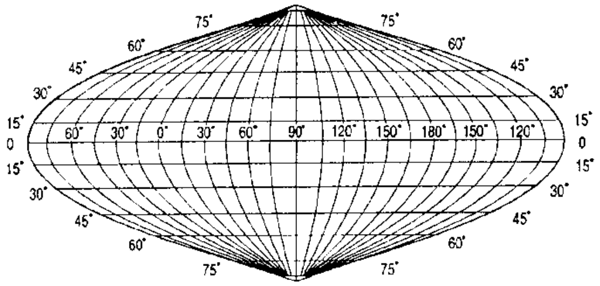
$$C^2 sin\,\alpha = R^2\,sin\,\varphi + C_1$$

Агар $\varphi = 0$ ва $\alpha = 0$ унда интеграллаш доимийси нулга тенг:

$$C^2 sin\,\alpha = R^2 sin\,\varphi. \qquad (129)$$

Агар $\varphi = \pi/2$ ва $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $C^2 = R^2$ қийматини (129) формулага қўйиб, унда оламиз $sin\alpha = sin\varphi$; $\alpha = \varphi$.

Олинган натижалани (124) формулага қўйиб, тенг майдонли синусоидал псевдоцилиндрнк проекция тенгламасини ёзамиз, бу эса Сансон проекцияси номи билан маълум.



43-расм. **Тенг майдонли синусоидал псевдоцилиндрик Сансон проекцияси**

$x = R\varphi$; $y = R\lambda\, cos\varphi$

$tg\, \varepsilon = \lambda\, sin\, \varphi$;

$m = sec\varepsilon$; $m_0 = 1$; $n = 1$;

$p = 1$; $tg(\frac{\omega}{2})$=tg$\varepsilon/2$.

Сансон проекциясида (43-расм) барча параллеллар ва ўқ меридиан узунликлари сақланади. Меридианлар бўйича масштаб ва бурчаклар хатолиги кенглик ва узоқлик функциялари ҳисобланади (қуйида узунлик масштаблари қийматлари келтирилган), меридианлар узунлиги хатолигини ва бурчак хатолигини ифодалайдиган изоколалар гипербола эгри чизиқлари бўлиб, экватор ва ўқ меридианга нисбатан симметрик ҳолатда жойлашади. Майда масштабли дунё карталари Сансон проекциясида тузилади, ундан атлас карталарини яратиш учун кўпроқ фойдаланилади.

φ, градус	0	15	30	45	60
0	1.0	1.000	1.000	1.000	1.000
15	1.0	1.002	1.009	1.020	1.036
30	1.0	1,009	1.034	1.074	1,129
45	1.0	1.017	1.066	1.144	1.244
60	1.0	1,025	1,098	1.209	1,350

40 – §. Қутби чизиқ кўринишида бўлган тенг майдонли синусоидал псевдоцилиндрик проекциялар

Бундай проекцияларда географик қутблар параллелларга параллел бўлган қутбий чизиқлар билан тасвирланади, бу чизиқларнинг узунлиги экватор узунлигидан икки марта қисқа бўлади (15–расм). Проекция синусоидал, (126) формуладан $x = \alpha C$. Географик қутблар чизиқ сифатида тасвирланади, шу сабабли (128) формуладан $y = (A\, cos\, \alpha + B)\lambda$. Проекция тенг майдонли, (125) формуладан $y = \frac{R^2 \cos\varphi}{x_\varphi}\lambda$. Қараб чиқилаётган проекция учун тўрнинг *бир ўлчамдалик* шарти асосида

$x_p = y_p = y_з/2;$

$x_p = C\frac{\pi}{2}$; $y_p = B\pi;$ $y_з = (A+B)\pi;$

$C\frac{\pi}{2} = B\pi = \frac{A+B}{2}\pi;$

$A = B = C/2.$

Унда

$y = \frac{C}{2}(cos\,\alpha + 1)\lambda$;

$y = \frac{R^2 \cos\varphi}{x_p}\lambda = \frac{R^2 cos\varphi}{C(\frac{d\alpha}{d\varphi})}\lambda.$

Ординаталар қийматини тенглаштириб, дифференциал тенгламани оламиз: $\frac{C^2}{2}(1 + cos\,\alpha)d\alpha = R^2 cos\,\varphi d\varphi$, интеграллашдан сўнг

$\frac{C^2}{2}(\alpha + sin\alpha) = R^2 \sin\varphi.$

Интеграллаш доимийси нулга тенг, чунки $\varphi = 0$ вa $\alpha = 0$. Агар $\varphi = \pi/2$ ва $\alpha = \pi/2$

$\frac{C^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = R^2$. ундан

$C = \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}};\ \ A = B = R/\sqrt{\pi + 2}$

Олинган С ни қийматини (131) формулага қўйиб

$$\alpha + \sin\alpha = \frac{\pi + 2}{2}\sin\varphi \qquad (132)$$

бу ерда α – радиан ўлчамида.

Келтирилган охирги тенглама трансцендент ҳисобланади ва фақат яқинлаштириш (кетма–кет яқинлаштириш усулида) натижасида ечимига эга. Берилган ва ҳақиқий қийматлар аниқланишида, одатда, жадвалда улар умумлаштирилади, шу сабабли α қийматни аниқлаш усули жуфт жадвал усули деб ҳам номланади. Биринчи жадвал бўйича α қиймат асосида φ

қиймат топилади, бу қиймат бутун градуслар қийматида бўлмайди. Иккинчи жадвалга бутун градусли кенглик қиймати киритилади: φ_1, φ_2, φ_3 ва ҳ.к. интерполяция йўли билан α қиймати ҳар бир кенглик учун топилади.

Қуйидаги жадвалда α қиймати келтирилган.

φ, градус	"	15	30	45	60	75	90
a	0	19°15'	38° 12'	56°25'	72°49'	85°11'	90°00'

Қутблари чизиқ бўлган тенг майдонли синусоидал псевдоцилиндрик проекция формулалари (бу проекцияни Эккерт проекцияси дейишади, лекин бу проекция тенг майдонли псевдоцилиндрнк проекциянинг хусусий ҳолати сифатида қаралади):

$$x = \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}}\alpha \, ; \qquad y = \frac{2R\lambda}{\sqrt{\pi+2}} cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha + sin + \alpha = \frac{\pi+2}{2} sin\varphi \, ; \qquad tg\,\varepsilon = \frac{\lambda}{2} sin\varphi;$$

$$m = \frac{\sqrt{\pi+2}}{2} sec^2\frac{\alpha}{2} \cos\varphi \sec\varepsilon; \qquad n = \frac{2}{\sqrt{\pi+2}} cos^2\frac{\alpha}{2} \sec\varphi;$$

$$p = 1; \qquad tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2} + n^2 - 2.$$

Проекцияда паралеллар бўйича узунлик хатоси фақат кенглик функциясидир, шу сабабли бу турдаги хатоликни тавсифлаб берувчи изоколалар параллеллар билан устма – уст тушади ва тўғри чизиқ кўринишида бўлади. Меридианлар бўйича узунлик хатолиги ва бурчак хатолиги кенглик ва узоқликка боғлиқ, бу турдаги хатоликларни тавсифловчи изоколалар гипербола эгри чизиқларидан ташкил топган бўлиб, ўқ меридианга ва экваторга симметрик ҳолатда жойлашади. Қараб чиқилган ушбу проекциялар урушгача собиқ иттифоқда географик атласларни тузишда кенг қўлланилган.

41 – §. Каврайскийнинг тенг майдонли синусоидал псевдоцилиндрик проекцияси

Бу проекция юқорида қараб чиқилган тенг майдонли синусоидал қутби чизиқ бўлган проекцияга жуда яқин. Проекцияни олиш учун В.В.Каврайский томонидан иккита қўшимча шарт белгиланган, яъни параметр $B=0$ ва кенглик функцияси $\alpha=\pi/3$ бўлганда $\varphi=\pi/2$ Проекция синусоидал, шунинг учун

$x = C\ \alpha;\qquad y = a\ \lambda\ cos\ \alpha.$

Тўрни *бир ўлчамлилик* шартига асосан

$x_p = y_p = y_e/2;$

$x_p = c\left(\frac{\pi}{3}\right);\qquad y_p = A\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right);\qquad y_з = A\pi;$

$C\left(\frac{\pi}{3}\right) = A\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{A}\pi/2,$

$A = \frac{2}{3}C.$

Проекция тенг майдонли, шунинг учун,

$y = \frac{R^2 cos\ \varphi}{x_\varphi}\lambda.$

Ординатлар тенгламасидан

$\frac{2}{3}C\cos\alpha = R^2\ \cos\frac{\varphi}{C}\ \frac{d\alpha}{d\varphi}$ дифференциал тенгламаларни оламиз

$\frac{2}{3}C^2\cos\ \alpha d\alpha = R^2\cos\varphi d\varphi.$

Интеграллашгандан кейин

$\frac{2}{3}C^2\sin\alpha\ = R^2\ sin\varphi,$

Бунда интеграллаш доимийси нулга тенг, чунки $\varphi = 0$; $\alpha = 0$. $\varphi = \frac{\pi}{2}; \alpha = \frac{\pi}{3}$ бўланда, ундан $C^2 = \sqrt{3R^2}$.

(135) ни (134) га қўйиб, φ ва α қийматлари орасидаги муносабат топилади:

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.$

Ёрдамчи функция α қийматини топиш осон, бунинг учун махсус жадвалларни тузиш шарт эмас, чунки Каврайский проекциясида меридианлар эгрилиги ўзгариши анча секин, 40-§ да қараб чиқилган проекцияга нисбатан.

Тенг майдонли синусоидал Каврайский проекцияси формулалари:

$x = R\sqrt[4]{3}\,\alpha;\; y = \frac{2}{3}R\sqrt[4]{3}\,\lambda\, cos\,\alpha$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi;\;\; tg\varepsilon = \frac{2}{3}\,\lambda\sin\varphi\;;$

$m = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}\sec\alpha\, cos\,\varphi\;\, sec\;\,\varepsilon;\quad n = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\cos\alpha\sec\varphi\,;$

$p = 1;\quad tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$

42 – §. Қутблари нуқта бўлган тенг майдонли эллиптик псевдоцилиндрик проекциялар

Қараб чиқилаётган проекция *Мольвайде проекцияси* деб номланади. Проекцияни картографик тўри 44–расмда келтирилган. Бунда барча меридианлар эллипслардан иборат, фақат тўғри чизиқли ўқ меридиан ва айлана кўринишидаги $\lambda = 90^\circ$ меридианни ҳисобга олинмаганда.

Проекция тўри бутун ер юзасини кўргазмали тасвирлашни таъминлайди, шунинг учун ҳозиргача ундан океанлар карталарини ҳамда атласларда дунёни обзор карталарини тузишда фойдаланилади. Проекция эллиптик, шу сабабли (127) формуладан

$x = C\sin\alpha.$

Географик қутб нуқта бўлиб тасвирланади, (128) формуладан $y = A\lambda\cos\alpha$. Проекция тенг майдонли, (125) формуладан

$y = \frac{R^2 cos\varphi}{x_\varphi}\lambda\;.$

Тўрнинг *бир ўлчамлилик* шартидан

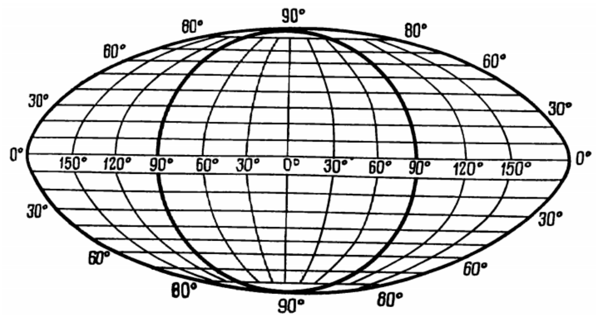
$x_p = y_з/2$ бўлади, чунки

$x_p = C\;;\qquad y_з\; = A\pi$

$C = \frac{A\pi}{2}\;;\;\;\; A = 2C/\pi$ унда

$y = \frac{2C}{\pi}\lambda\cos\alpha$ ва тенг майдонлиликдан

$y = \frac{R^2\cos\varphi}{x_p}\lambda = \frac{R^2\cos\varphi}{C\cos\alpha\,(\frac{d\alpha}{d\varphi})}\;\lambda.$



$$\frac{2C}{\pi}\cos\alpha = \frac{R^2\cos\varphi}{C\cos\alpha(\frac{d\alpha}{d\alpha})}.$$

44 – расм. **Қутби нуқта бўлган тенг майдонли эллиптик псевдоцилиндрик проекция**

Ўзгарувчилари ажратилган дифференциал тенглик ва уни қайта тузиб

$\frac{2C^2}{\pi}\ cos^2\,\alpha d\alpha = R^2 cos\,\varphi\ d\ \varphi;$

$\frac{C^2}{\pi}(1+\cos 2\alpha)\ d\ \alpha = R^2\cos\varphi d\varphi$ интеграллашдан сўнг

$\frac{C^2}{2\pi}(2\alpha + sin 2\alpha) = R^2 sin\varphi.$

Интеграллаш доимийси нулга тенг, чунки $\varphi = 0$; $\alpha = 0$, унда, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \pi/2$, бундан $\frac{C^2}{2} = R^2$ қийматини (137) формулага қўйиб, Мольвейде тенгламасини оламиз.

$2\alpha + sin 2\alpha = \pi sin\varphi,$

бу кенглик φ ни α ёрдамчи функцияси билан алоқасини характерлайди. Бу тенглик трансцендент; у кетма-кет яқинлаштириш усули орқали ечилади (40-§ га қаранг). Мольвейде проекцияси формулалари:

$x = \sqrt{2}R\sin\alpha\,;\qquad y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\ \lambda\ cos\ \alpha;$

$2\ \alpha + \sin 2\ \alpha = \pi\ sin\ \varphi\,;\qquad tg\varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi}\ tg\ \alpha;$

$m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sec\alpha\cos\varphi\ sec\ \varepsilon\,;\qquad n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cos\alpha\sec\varphi;$

$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 +\ n^2 - 2.}$

2-жадвал.

Мольвейда проекциясида узунликлар хусусий масштаблари ва бурчак хатолиги қийматлари

φ, градус	*n*	Белгиси	λ, градусда			
			0	30	60	90
0	0.900	*T*	1,111	1,111	1,111	1,111

		ω, градус	12.0	12.0	12,0	12,0
30	0,951	T	1,052	1.063	1.096	1.150
		ω, градус	5.8	10.5	18.5	26,7
60	1.165	T	0,858	0,922	I.0&1	1,326
		ω, градус	17.4	25.7	40.7	55,7
90	3,665	T	0.273	1,305	2,568	3.840
		ω, градус	180.0	180,0	180,0	180.0

43 – §. Каврайскийнинг ихтиёрий эллиптик псевдоцилиндрик проекцияси

Проекция эллиптик, шунда

$x = C\sin\alpha.$

Ўқ меридиан узунлиги бу проекцияда хатосиз тасвирланиши шарти қўйилса, унда $x = R\varphi$, бундан

$sin\,\alpha = \frac{R\varphi}{C};$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{R^2\varphi^2}{C^2}} = \frac{1}{C}\sqrt{C^2 - R^2\,\varphi^2}. \qquad (139)$$

$cos\,\alpha$ ни $y = A\,\lambda\cos\alpha$ формулага қўйиб, оламиз

$y = \frac{A\lambda}{C}\sqrt{C^2 - R^2\varphi^2}.$

Тўрнинг *бир ўлчамлилик* шартидан

$y_p = \frac{y_э}{2} = \frac{A\lambda}{C}\sqrt{C^2 - R^2\frac{\pi^2}{4}} = \frac{A\lambda}{2C}\sqrt{4C^2 - R^2\pi^2};$

$y_э = \frac{A\lambda}{C}\sqrt{C^2}; \qquad \sqrt{C^2} = \sqrt{4C^2 - R^2\pi^2};$

$3C^2 = R^2\pi^2; \qquad C = R\pi/\sqrt{3}.$

Меридианлардан бири айлана шаклида, бу меридиан учун $C = A\lambda_1$, бунда λ_1— унинг узоқлиги. Бу тенгликни (140) формулага қўйиб,

$y = \frac{\lambda R}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\pi^2 - 3\varphi^2}{3}}.$

Айлана бўлиб тасвирланадиган (λ_1) меридиан узоқлигини, параллелларда берилган $\pm\varphi_k$ кенгликда хусусий масштаб $n_k = 1$ шарти билан аниқлаш мумкин, яъни бу параллеллар узунлиги картада хатоликсиз тасвирланади:

$$\lambda_1 = \sqrt{\pi^2 - 3\varphi_k^2}/\sqrt{3}\cos\varphi_k$$

Агар λ_1 узоқлик қиймати берилса, унда хатосиз тасвирланадиган $\pm\varphi_k$ параллеллар кенглигини оламиз. В.В.Каврайский проекция учун λ_1 = 120° қабул қилди. Бундай шартда кенглиги $\varphi_k = \pm 35°31'34"$ бўлган иккита параллеллар узунлиги сақланади (45-расм).

Каврайский проекциясининг умумий формулалари:

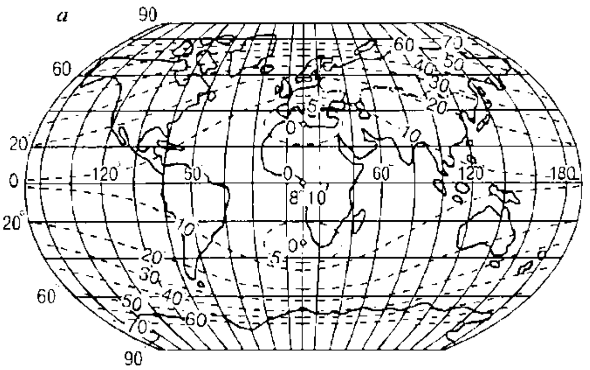
$$x = R\varphi; \qquad y = \frac{\lambda R}{\lambda_1\sqrt{3}}\sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2};$$

$$tg\varepsilon = \frac{\lambda\sqrt{3}\varphi}{\lambda_1\sqrt{\pi^2-3\varphi^2}}; \tag{141}$$

$$m = sec\,\varepsilon; \qquad n = \frac{\sqrt{\pi^2-3\varphi^2}}{\lambda_1\sqrt{3}\cos\varphi} = p;$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2-2p}{p}} \ .$$

Одатда, проекция соддалашган формулар асосида ҳисобланади:



$$x = R\varphi; \qquad y = \frac{\lambda}{\lambda_1}k\,cos\alpha;$$

$$\sin\alpha = \sqrt{3}\,\varphi/\pi; \qquad k = R\pi/\sqrt{3};$$

$$tg\,\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_1}tg\alpha; \qquad m_0 = 1;$$

45-расм. **В.В.Каврайскийнинг ихтиёрий эллиптик псевдоцнлиндрик проекцияси.**

$$m = \sec\varepsilon\,; \qquad n_э = \pi/\lambda_1\sqrt{3} = 0{,}866026;$$

$$n = n_э\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = p; \quad tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2-2p}{p}},$$

бунда $\lambda_1 = \frac{2}{3}\pi$; k — айланали меридиан радиуси.

3-жадвал.

Каврайский проекциясида узунликлар хусусий масштаби ва бурчак хатолиги қийматлари

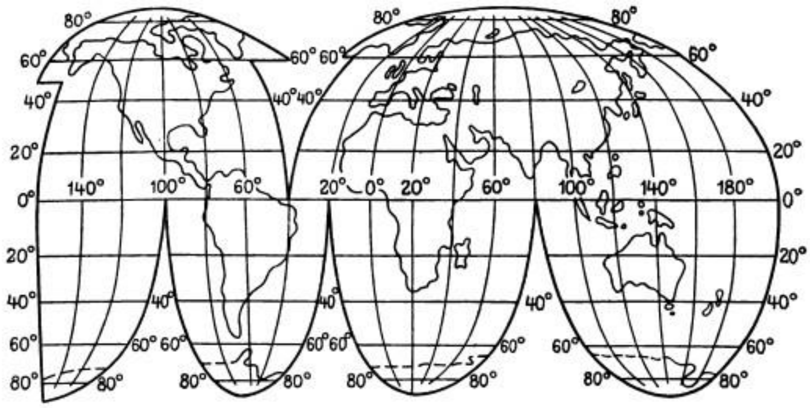
φ, градус	n=p	Белгиси	λ, градус							
				0	20	40	80	120	160	180
0	0.866	m ω, градус	m, ω градус	1.000 8.2	1.000 8.2	1.000 8.2	1.000 8.2	1.000 8.2	1.000 8.2	1.000 8.2
20	0.904	m ω, градус	m, ω градус	1.000 5.7	1.001 6.1	1.002 7.0	1.009 9.7	1.019 13.1	1.034 16.6	1.042 18.5
40	1.043	m ω, градус	m, ω градус	1.000 2.4	1.002 4.6	1.010 8.1	1.038 15.7	1.083 23.2	1.144 30.5	1.180 34.1
60	1.414	m ω, градус	m, ω градус	1.000 19.8	1.007 20.5	1.027 22.7	1.106 29.6	1.225 38.0	1.374 46.8	1.458 51.2
80	3.183	m ω, градус	m, ω градус	1.000 62.9	1.020 63.1	1.078 63.8	1.283 66.2	1.567 69.9	1.894 74.5	6.067 76.9

Қараб чиқилаётган проекцияда изоколалар турли шаклларга эга: жумладан, параллеллар узунлиги хатолиги ва майдон хатолигини тавсифловчи изоколалар тўғри чизиқ кўринишида бўлиб, параллеллар билан устма – уст тушади; меридианлар узунлиги хатолиги ва бурчак хатолигини тавсифловчи изоколалар эса – гипербола кўринишидаги эгри чизиқлардан иборат бўлиб, ўқ меридианга ва экваторга нисбатан симметрик ҳолатда жойлашади.

44 – §. Гуд усулининг псевдоцилиндрик проекцияларда қўлланилиши

Псевдоцилиндрик проекциялардаги хатоликлар таҳлили шуни кўрсатадики, уларни қиймати юқори кенгликларда сезиларли даражада ошади. Англиялик олим Гуд бутун картага олинаётган юзани тасвирлашда псевдоцилиндрик проекциялардан фойдаланишни таклиф этган, бу тасвирланаётган ҳудуднинг алоҳида қисмлари учун ишлаб чиқилган алоҳида тизимни ўз ичига олади. Ҳар бир қисм (континент ёки океан) учун ўқ меридиан шундай кўринишда танланадики, бунда хатолик қиймати жуда катта бўлмаслиги талаб қилинади, сўнгра – барча алоҳида қисмлар экватор бўйича бирлаштирилади. Бу бирлаштириш натижасида дунё картаси учун ҳосил қилинган проекцияда континентлар (қитъалар) кам хатолик билан тасвирланади, бироқ океанларда тасвир узилишлари юзага келади, ёки аксинча проекция олиниши мумкин.

Кўпинча ўқ меридиани узоқлиги қитьалар карталари учун Шимолий Америкага λ_0 = — 100°; Жанубий Америкага λ_0 = — 60°; Евроосиё учун λ_0 = + 60°; Африкага λ_0 = + 20°; Австралия учун λ_0 = + 140° танланади. Гуд усулида хохлаган псевдоцилиндрик проекция олиниши мумкин (46-расм).



46-расм.

Мольвейда—Гуд проекцияси.

Назорат саволлари

1. Псевдоцилиндрик проекцияларнинг сфера учун умумий тенгламасини ёзинг ва унга изоҳ беринг.

2. Тенг майдонли синусоидал псевдоцилиндрнк проекция тенгламасини олишни тушунтиринг.

3. Сансон проекцияси хусусиятлари қандай, проекция тўрини чизинг.

4. Мольвейде проекцияси тўри қандай кўринишга эга, уни формулаларини келтиринг.

5. В.В.Каврайскийнинг ихтиёрий эллиптик псевдоцилиндрик проекцияси формулаларини ёзинг ва изоҳлаб беринг.

VIII БОБ.
ПСЕВДОКОНУСЛИ ВА ПСЕВДОАЗИМУТАЛ ПРОЕКЦИЯЛАР

45 – §. Псевдоконусли проекцияларнинг асосий қоидалари ва умумий формулалари

Псевдоконусли проекцияларда параллеллар концентрик айлана ёйларидан, меридианлар – ўрта меридиан тўғри чизиқ, қолганлари унга нисбатан симметрик эгрилар, уларни маркази параллеллар марказига мос келади (16–расм). Таърифга асосан бундай проекцияларни умумий формулари

$$x = q - \rho\cos\delta\,; \qquad y = \rho\sin\delta\,;$$

$$\rho = \mathrm{f}(\varphi); \qquad \delta = F(\varphi, \lambda), \tag{143}$$

бунда q=const — жанубий параллелнинг текисликдаги қутбий масофаси.

(143) тенгликни φ ва λ бўйича дефференциялаб, ҳосила натижасини картографик проекциялар умумий назарияси тенгламаларига қўйиб, оламиз

$$f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = \rho^2\delta_\varphi\delta_\lambda;$$

$$h = x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi = -\rho\rho_\varphi\delta_\lambda; \tag{145}$$

$$tg\varepsilon = -f/h = (\rho\delta_\varphi)/\rho_\varphi\,;$$

$$n = \frac{1}{r}(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)^{1/2} = \frac{\rho\delta_\lambda}{r};$$

$$p = h/Mr = -(\rho\rho_\varphi\delta_\lambda)/Mr;$$

$$m = \frac{p}{n}\sec\varepsilon = -\frac{\rho_4}{M}\sec\varepsilon;$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2}{p} - 2};$$

$$a = (A+B)/2; \qquad b = (A-B)/2;$$

бунда

$$A = \sqrt{m^2+n^2+2p}; \qquad B = \sqrt{m^2+n^2-2p};$$

p, m, n, a, b — меридианлар, паралеллар ва асосий йўналишлар бўйлаб майдонлар ва чизиқлар хусусий масштаблари (a, b - экстремал масштаблар).

Псевдоконусли проекцияларнинг таърифи ва (*144*), (*146*) – (*150*) формулаларнинг таҳлилидан келиб чиқиб қайд қилиш мумкинки, бу проекцияларда картографик тўр ортогонал эмас, меридианлар ёйи узунлиги кенглик ва узоқлик функциялари ҳисобланади. Шу сабабли, бу проекциялар тенг бурчакли бўла олмайди ва меридианлар яқинида узунлик сақланади. Улар хатоликлари бўйича фақат тенг майдонли ва ихтиёрий бўлиши мумкин.

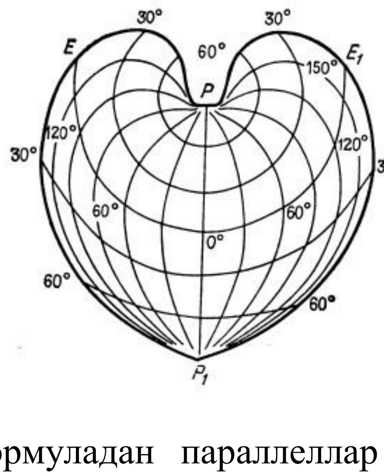
Хусусий ҳолатда, $\delta = \alpha\lambda$ ёки $\delta = \lambda$ шарт бажарилганда, меридианлар тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, ҳосил қилинган проекциялар конусли ёки азимутал хусусиятдаги ортогонал картографик тўрга мос тушади ва берилган хатоликлар тавсифлари ўринли ҳисобланади. Бу проекцияларда параллеллар тенг бўлинган айланалар бўлиб, уларда ёйлар узунлиги сақланади ёки узунлик масштаблари қиймати ўзгармайди. Псевдоконусли проекциялардан тенг майдонли *Бонн проекциялари* кенг фойдаланилади, у 1752 йилда таклиф этилган.

46 – §. Тенг майдонли псевдоконусли проекциялар. Бонн проекцияси

(145) ва (147) формулалардан тенг майдонлилик шарти бўйича

$h = -\rho\rho_\varphi\delta_\lambda = -\rho_\varphi nr = Mr$. Бундан қутбий масофа

$\rho = C - \int \frac{M}{n} d_\varphi = C - s$; C — интеграллаш доимийси.



(147) формуладан қутбий бурчак қийматини топамиз

$$\delta = \int \frac{nr}{\rho} d\lambda + F(\varphi).$$

47-расм. **Тенг майдонли псевдоконусли Бонн проекцияси**

$\rho = f(\varphi)$ шарти бўйича, (152) формуладан параллеллар бўйича узунлик хусусий масштаби n, бундай проекцияларда фақат φ кенглик функцияси бўлади ёки у ўзгармас қиймат олади. Агар проекция ўрта тўғри меридианга нисбатан симметрик бўлса, унда $\delta = 0$ фақат $\lambda = \lambda_0 = 0$ бўлганда. Бу проекциялар учун $F(\varphi) = 0$; $\delta = \frac{nr}{\rho}\lambda$. $n = f(\varphi)$ кўринишли функция шартини белгилаб, (152) ва (153) тенгликлардан ва (143), (146), (150) — (153) умумий формулалар орқали турли хил тенг майдонли псевдоконусли проекцияларни олиш мумкин.

Бонн проекциясини олиш учун (47-расм) ўрта меридиан ва параллеллар бўйлаб хусусий масштаблар бирга тенг, деган шартни қўйиш керак, яъни

$n = 1; \quad m_0 = 1.$

Унда (152), (153), (146), (148) — (150) тенгликлардан

$\rho = C - s; \quad \delta = \frac{r}{\rho}\lambda;$

$tg\ \varepsilon = \frac{\rho}{M}\left(\frac{\lambda\rho M\ \sin\varphi - r\lambda M}{\rho^2}\right) = \lambda\left(\sin\varphi - \frac{r}{\rho}\right);$

$m = \sec\varphi; \qquad p = 1;$

$tg(\omega/2) = tg\varepsilon/2$, бунда s — экватордан берилган параллелгача бўлган меридиан ёйи узунлиги.

Демак, ушбу формуладан барча хатолик турлари (ε, ω, υ) ўрта меридианда нулга тенг $\lambda = \lambda_0 = 0$ ва берилган параллелда φ_0

$\sin\varphi_0 - r_0/\rho_0 = 0$

Бу ифодадан ρ_0 қийматини (154) формула орқали топиб, интеграллаш доимийси C қийматни топамиз ва қутбий масофаларни ҳисоблаш якуний формулаларини оламиз

$$\mathrm{C} = s_0 + N_0 \operatorname{ctg}\varphi_0;$$
$$\rho = (s_0 - s) + N_0 \operatorname{ctg}\varphi_0; \tag{155}$$

Бонн псевдоконусли проекцияси учун

$x = q - \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$

q = const;

$\rho = (s_0 - s) + N_0 \operatorname{ctg}\varphi_0;\ \delta = \frac{r}{\rho}\lambda;$

$tg\ \varepsilon = \lambda\left(\sin\varphi - \frac{r}{\rho}\right); \qquad tg(\omega/2) = tg\varepsilon/2,$

$m = \sec\varphi$; n=1; $p = 1$;

$a = (A + B)/2; \qquad b = (A + B)/2;$

$A = \sqrt{4 + \mathrm{tg}^2\,\varepsilon}\ ; \qquad B = \pm\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$

Ушбу проекция формулалари таҳлилидан қайд этиш жоизки, уларда изоколалар ўқ меридиани яқинида ва ўрта параллелларда ушбу чизиқларга нисбатан симметрик тенг томонли гипербола характерга эга бўлади.

Бу проекция хоссалари бўйича тенг майдонли Сансон псевдоцилиндрик проекциясига жуда яқин, улар тенг майдонли псевдоконусли Бонн проекциясининг хусусий ҳолати сифатида қараб чиқилиши мумкин. 1940 йилларда М.Д.Соловьев томонидан кўриниши ўзгартирилган формулалар тавсия қилинган, бунда учта доимий параметрлар киритилиши йўли билан Бонн проекциясида параллелларнинг тасвирланиш эгрилиги қиймати камайтирилган. Бу формулалар қуйидагича ифодаланади:

$x = q - \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$

$q = const;$

$\rho = C_0 + C_1(s_0 - s); \qquad \delta = C_2\frac{r}{\rho}\lambda;$

$tg\ \varepsilon = C_2\lambda\left(\frac{\sin\varphi}{C_1} - \frac{r}{\rho}\right);$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(C_1 - C_2)^2 + C_1^2 tg^2\varepsilon}{C_1C_2}}; \qquad (156)$$

$m = C_1\sec\varepsilon; \qquad n = C_2; \qquad p = C_1C_2:$

$a = (A + B)/2; \qquad b = (A + B)/2;$

$A = \sqrt{(C_1\sec\varepsilon)^2 + C_2^2 + 2C_1C_2};$

$B = \sqrt{(C_1\sec\varepsilon)^2 + C_2^2 - 2C_1C_2};$

бунда C_0, C_1 ва C_2 — амалий масалаларни ечишда танлаб олинадиган доимий параметрлар.

C_0, C_1, C_2 параметрларни аниқлаш масаласини қўйилган шарт ва параллеллар эгрилиги бўйича қариб чиқамиз. Параллеллар эгрилиги қуйидаги формула бўйича аниқланиши мумкин

$$K_п = \frac{x_\lambda y_{\lambda\lambda} + y_\lambda x_{\lambda\lambda}}{(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)^{3/2}} = \frac{1}{nr}\left\{\left[(mM)_\lambda tg\,\varepsilon + (nr)_\varphi \sec\varepsilon\right]\frac{1}{mM} + \varepsilon_\lambda\right\}. \qquad (157)$$

Демак, $K_п$ қийматини ҳисоблаш учун проекциянинг тенгламалари асосида унинг ҳосиласини топиш етарли, яъни m_λ, $(nr)_\varphi$, ε_λ. Лекин псевдоконусли проекциялар учун параллеллар эгрилиги қуйидаги формула билан аниқланади

$$K_п = -1/\rho.$$

(156) тенгликни ҳисобга олиб

$$-1/K_п = C_0 + C_1(s_0 - s).$$

φ_1 ва φ_2 кенгликли иккита параллел эгрилиги қийматларини белгилаб, (159) формуладан C_1 ва C_0 коэффициентлар қийматини топамиз:

$$C_1 = \frac{K_{п_1} - K_{п_2}}{K_{п_1} - K_{п_2}(s_2 - s_1)};$$

$$C_0 = -1/K_{п_1} - C_1(s_0 - s_1) = -1/K_{п_2} - C_1(s_0 - s_2). \qquad (160)$$

C_2 ни параллеллар узунаси бўйлаб берилган ўзгармас чизиқ хусусий масштаби бўйича аниқлаш мумкин: $n = n_k$, ёки ўзгармас қийматли майдон хусусий масштаби орқали $p = p_k$.

Биринчи ҳолат учун

$$C_2 = n_k, \qquad (161)$$

иккинчи ҳолатда

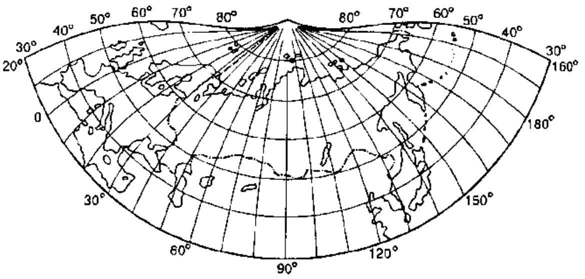
$$C_2 = p_k/C_1. \qquad (162)$$

$p = 1$ шарти бўлганда

$$C_2 = 1/C_1. \qquad (163)$$

Ушбу проекция параллеллари бўйича тенг бўлинган ҳисобланади (47-§ га қаранг). Параллеллари ва ўрта меридиани бўйича узунлик хусусий масштаби ва майдон хусусий масштаби ўзгармас қийматлар. Параллеларининг эгрилиги камайиб бориши туфайли шакли ўзгартирилган Бонн проекцияси худудларни географик жойлашини тасвирлашда катта эффект беради, картанинг ўқувчанлигини оширади, масалан, мактаб карталарида (48-расм).

Қайд этилган псевдоконусли проекцияларда параллеллар бўйлаб узунлик хусусий масштаби (n) ўзгармас қийматда деб фараз қилинади (масалан, бирга тенг).



48-расм. **Кўриниши ўзгартирилган Бонн проекцияси.**

Умумий ҳолат учун белгиланган барча қўшимча шартлар билан

$n = f(\varphi)$ ёки, функция берилганда,

$n = \sum_{i=1}^{k} a_i \cos(i\varphi);$ $\qquad k = 1,\ 2,\ 3, . . . ,$

бунда a_i — ўзгармас коэффициентлар, турли кенгликдаги параллеллар учун берилган функцияни $n = f(\varphi)$ қийматлари бўйича ва ўрнатилган шартлар асосида кичик квадратлар усули билан аниқланади.

Тегишли n қийматни (*152*) формулага қўйиш орқали ва бу тенгликни интеграллаш билан қўшимча шартларни қониқтирувчи тенг майдонли псевдоконусли проекцияларни ҳосил қилишимиз мумкин.

47 – §. Параллеллари тенг бўлинган картографик проекциялар

Н.А.Урмаев 1953 йилда параллеллари тенг бўлинган картографик проекциялар назариясини ишлаб чиқди, уларнинг хусусий ҳолати сифатида бир қатор псевдоконусли ва псевдоцилиндрик проекцияларни таърифлаб берди. Тенг бўлинган параллелларга эга бўлган картографик проекциялар формулаларини олиш учун Н.А.Урмаев шар сиртида ягона радиус билан ифодаланган ер юзасини қабул қилган, параллеллар бўйлаб узунликнинг хусусий масштаблари майдоннинг хусусий масштабига тенг эканлиги шартидан келиб чиққан ҳолатда иш олиб борилган, бу ҳолатлар фақат кенглик функцияси ҳисобланади.

$n = p = f(\varphi)$, ўз навбатида:

$$m = \sec\varepsilon. \qquad (164)$$

Узунликнинг хусусий масштаби формуласи асосида

$$m^2 = x_\varphi^2 + y_\varphi^2;$$

$$\nu^2 = n^2\cos^2\varphi = x_\lambda^2 + y_\lambda^2$$

хусусий ҳосиларнинг қийматлари қуйидагича ифодаланган

$$x_\varphi = m cos(\varepsilon + \tau); \qquad x_\lambda = v\sin\tau;$$

$$y_\varphi = m sin(\varepsilon + \tau); \qquad y_\lambda = v\cos\tau; \qquad (165)$$

бунда ε — проекцияда меридиан ва параллеллар орасидаги i бурчакнинг 90° дан фарқи; τ — абсцисса ўқи ва ушбу нуқтадан параллелга ўтказилган нормал ўртасидаги бурчак.

Тенгламани интегралланиш шарти (165):

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(x_\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi}(x_\lambda); \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}(y_\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi}(y_\lambda); \qquad (166)$$

(165) формулани дифференциясини φ, λ бўйича олиб ва (166) формула ҳосиласи қийматини қўйиб, (164) тенгламадаги натижани эътиборга олиб, қуйидагиларни оламиз

$$-tg\varepsilon\,\tau_\lambda = \vartheta\tau_\varphi; \qquad (167)$$

$$\tau_\lambda + (tg\varepsilon)_\lambda = -v_\varphi = -dv/d\varphi \qquad (168)$$

Бу $\mathrm{v} = \mathrm{n}\cos\varphi$ кенглик функцияси бўлганлиги сабабали, кўрилаётган проекция эса ўрта меридианга нисбатан симметриклиги ҳисобга олинса, ифоданинг интеграли (168) қуйидагини беради

$$\tau + \mathrm{tg}\varepsilon = -\lambda\mathrm{v}_\varphi. \qquad (169)$$

Унда (167) тенглама (169) ни ҳисобга олиб,

$$\mathrm{v}\tau_\varphi - (\tau + \lambda\mathrm{v}_\varphi)\tau_\lambda = 0. \qquad (170)$$

Параллеллар бўйича узунликнинг хусусий масштаби шарти қараб чиқилганда, $\nu = n\cos\varphi$ тенглик берилган бўлиб, (*170*) тенглама ечими биринчи даражадаги хусусий ҳосила бўйича бир жинсли чизиқли дифференциал тенлама интегралига олиб келади, умумий интеграл ўз таркибида одатдаги дифференциал тенглама сифатида, ихтиёрий доимийни сақлаши эмас, балки ихтиёрий функцияни сақлаши қайд қилинади. Бу муносабатни ҳисобга олган ҳолда ва (*170*) тенгламани интеграллаш орқали қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\tau\varphi + \lambda\nu = f(\tau), \qquad (171)$$

бу ерда $f(\tau)$ – ихтиёрий функция.

(169) ва (171) тенгламалар параллеллари тенг бўлинган картографик проекциялар назарияси асосини ташкил этади, бунда $n = p = f\ (\varphi)$ шарти амал қилади. Хусусий ҳолатда, агар $\tau = 0$, унда (169) дан оламиз

$$tg\ \varepsilon = -\lambda v_{\varphi}, \qquad (172)$$

ва (165), (164) тенгликни эътиборга олиб,

$$x_{\varphi} = 1; \qquad y_{\varphi} = \lambda v_{\varphi}$$

$$x_{\lambda} = 0; \qquad y_{\lambda} = v = n\cos\varphi.$$

Интеграллашдан сўнг (173) тенглик

$$x = \varphi \quad ; \quad y = \lambda n \ \cos \ \varphi;$$

бу тенг майдонли псевдоцилиндрик Сансон проекцияси формуласи. Агар (171) тенглама $f\ (\tau)$ — чизиқли функция деб ҳисобланса, унда $f\ (\tau) = C\tau$, ундан

$$\tau = \lambda v/(C - \varphi) = \lambda n\ cos\varphi/(C - \varphi) \qquad (174)$$

τ қийматини (169) га қўйиб, $n = p = 1$ бўлганда

$$tg\varepsilon = \lambda\left[-v_{\varphi} - v/(C - \varphi)\right] = \lambda[\sin\varphi - \cos\varphi/(C - \varphi)] \qquad 175)$$

λ, n cosφ проекциядаги иккита нуқта орасидаги параллеллар ёйи узунлиги, τ эса нормал ва параллел ўртасидаги нуқталар бурчаги эканлигини эътиборга олсак, унда (174) тенгламадан $(C - \varphi)$ — параллел эгрилиги радиуси келиб чиқади:

$$\rho = C - \varphi. \qquad (176)$$

Ушбу кўринишда бу қиймат узоқликка боғлиқ эмас, шу сабабли параллеллар бўйича барча нуқталарда доимий қиймат φ кенглик қайд қилинади. Шундай қилиб, (*174*) – (*176*) формулалардан ҳосил қилинган проекция тенг майдонли Бонн псевдоконусли проекцияси ҳисобланади.

48 – §. Псевдоазимутал проекциялар ҳақида тушунча

1952 йилда Г.А.Гинзбург томонидан шар сиртини текис юзага нисбатан тасвирлашга тадбиқ этилган проекциялар ишлаб чиқилган. Псевдоазимутал проекцияларда параллеллар концентрик айланалар, ёки уларнинг ёйлари, меридианлар – паралеллар марказида туташадиган эгрилар, битта ёки иккита тўғри чизиқли меридианларга нисбатан симметрик эгри чизиқлар билан тасвирланади.

Узоқлиги $0°, 360°$ меридианлар ҳамма вақт тўғри чизиқ бўлиб тасвирланади, 90°, 180°, 270° узоқликли меридианлар тўғри ёки эгри, қолган меридианлар – эгри чизиқлар бўлиб тасвирланади (17-расмга қаранг).

Таърифга кўра, бу проекцияларнинг умумий тенгламаси

$x = \rho \cos \delta;$ $\qquad y = \rho \sin \delta$

$\rho = f_1(z);$ $\qquad \delta = a + f_2(z) \sin ka.$

бунда z, a — (59) ва (61) форомулар орқали аниқланадиган қутбий сферик координаталар; k — ўзгармас сон, қиймати проекция хусусияти ва меридианлар кўринишини белгилайди. Масалан, агар k = 1 бўлса, 0°, 180°, 360° узоқликдаги меридианлар тўғри чизиқ бўлиб тасвирланади, агар k = 2 — $0°,$ 90°, 180°, 270°, 360° узоқликдаги меридианлар тўғри чизиқ бўлиб тасвирланади. Агар k параметр каср сон бўлса, проекция псевдоазимутал эмас, балки псевдоконуслига айланади.

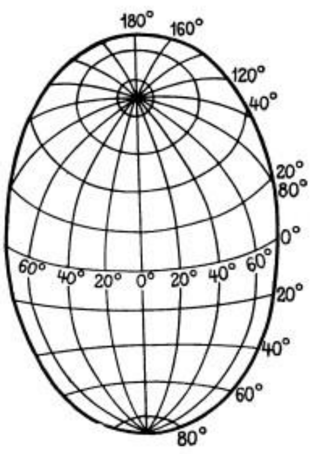
Г.Л.Гинзбург проекция меридианлари орасидаги қутбий бурчакни δ аниқлаш учун қуйидаги формулани таклиф этган:

$\delta = a - C(z/z_{max})^q \sin ka;$

q= const (179)

бунда z_{max} — картага олинаётган худуд зенит масофасининг энг йирик қиймати.

Шу билан бир қаторда, карта рамкаси шаклига ўхшаш эгрининг катта ярим ўқи ўрта меридиан бўйлаб йўналишга эга, шарти қўйилади. Агар эгрининг катта ярим ўқи ва ўрта меридиан орасидаги фарқ 90° бўлса,



49-расм. **Атлантика океани картаси учун ишлаб чиқилган қийшиқ псевдоазимутал проекция.**

$$\delta = (90° + a) - C(z/z_{max})^q sin[k(90° + a)]. \qquad (180)$$

Картографик тўрнинг кўриниши ва картографик проекция хусусиятлари C, z_{max} q ва k ўзгармас доимийларга боғлиқ. Параметрлар қийматлари исталган картографик тўрга боғлиқ ҳолатда танлаб олинади. $\rho = f_1(z)$ функциянинг кўриниши псевдоазимутал проекциянинг хатоликлар тавсифларига таъсир кўрсатади, бироқ улар тенг бурчакли бўлиши мумкин эмас, чунки меридианларда (айримларидан ташқари) узунлик сақланмайди.

Псевдоазимутал проекциялар битта қимматли хоссага эга – улар ер юзасини сфериклигини яхши кўргазмали тасвирлайди. Одатда, бу проекциялар майда масштабларда йирик ҳудудлар карталарини тузишда қийшиқ ориентировкада тасвирлаш учун (овалсимон рамка билан) фойдаланилади (49–расм). Масалан, псевдоазимутал проекциялар дунё атласининг Атлантика океани картасини тузишда фойдаланилган, бунда майдон хатолигини камайтириш мақсадида қуйидаги тенгликдан фойдаланилган:

$$p = 3R\sin(z/3).$$

Назорат саволлари

1. Псевдоконусли проекцияларда картографик тўр қандай кўринишда бўлади, Бонн проекциялари формулаларини келтиринг.

2. Псевдоазимутал проекциялар ҳақида нималарни биласиз, уларни умумий формуларини келтиринг.

3. Н.А.Урмаев томонидан 1953 йилда таклиф этилган параллеллари тенг бўлинган картографик проекциялар назарияси ҳақида маълумот беринг.

4. 1952 йилда Г.А.Гинзбург томонидан шар сиртини текис юзага тасвирлашга тадбиқ этилган қандай проекцияларни биласиз?

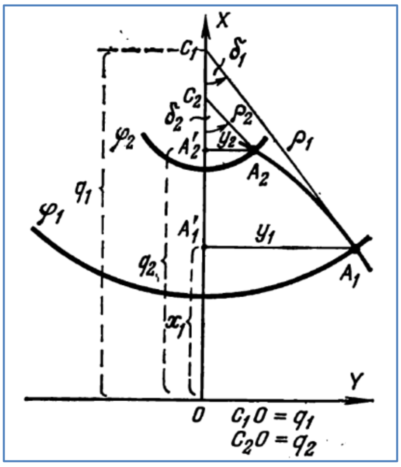
5. Псевдоазимутал проекцияларнинг қандай қимматли хоссаси бор?

IX Боб.
ЯРИМ КОНУСЛИ ПРОЕКЦИЯЛАР

49 – §. Ярим конусли проекцияларнинг умумий назарияси

Ярим конусли проекциялар нормал тўрининг кўриниши қуйидагича: параллеллари – маркази ўқ меридианда жойлашган эксцентрик айлана ёйлари; ўқ меридиан тўғри чизиқлар билан тасвирланади, барча қолган меридианлар ўқ меридианга нисбатан симметрик ҳолатда жойлашувчи эгри чизиқлардан иборат бўлади.

Одатда, картографик тўр ортогонал эмас (ортогоналлик шарти қўйилиши мумкин, бироқ картография амалиётида ҳозирги вақтда ортогонал тўрга эга бўлган ярим конусли проекциялардан жуда кам фойдаланилади. Бундай проекцияларда нормал конусли проекцияларда кузатилгани каби, иккита ясси координаталар тизимидан фойдаланилади: қутбий ва тўғри бурчакли (50 – расм).



50–расм. **Ярим конусли проекцияларнинг координаталари тизими.**

Қутб бурчаги – $\delta = F(\varphi, \lambda)$; параллеллар радиуси – $\rho = f_1(\varphi)$. Параллеллар маркази абсциссалари q бу проекцияларда ўзгарувчан қиймат бўлиб, у кенгликга боғлиқ, яъни $q = f_2(\varphi)$. Агар X ўқи ўқ меридиан билан устма-уст қўйилса, унда У ўқи экватор чизиғи билан мос тушади, бунда

$x = q - \rho\, cos\delta; \quad y = \rho\, sin\,\delta.$

Тўғри бурчакли координаталар тенгламасини дифференциялаб:

$x_\varphi = q_\varphi - \rho_\varphi cos\delta + \delta_\varphi \rho\, sin\delta;$

$x_\lambda = \delta_\varphi \rho\, sin\delta;$

$y_\varphi = \rho_\varphi sin\delta + \delta_\varphi \rho\, cos\delta;$

$y_\lambda = \delta_\lambda \rho\, cos\delta$, бундан (20) ва (32) формулаларни инобатга олиб

$$tg\varepsilon = -f/h;$$

$$f = \rho\sigma_\lambda(q_\varphi sin\delta + \rho\delta_\varphi);$$

$$h = \rho\delta_\lambda(q_\varphi cos\delta + \rho_\varphi);$$

$$tg\ \varepsilon = -\frac{q_\varphi \sin\delta + \rho\delta_\varphi}{q_\varphi cos\delta - \rho_\varphi}.$$

Проекциянинг бошқа формулалари:

$$n = \sqrt{g/r} = \rho\delta_\lambda/r;$$

$$p = \frac{h}{Mr} = \rho\delta_\lambda \frac{q_\varphi cos\delta - \rho_\varphi}{Mr};$$

$$m = \frac{p}{n}\sec\varepsilon = \frac{q_\varphi cos\delta - \rho_\varphi}{M}\sec\varepsilon;$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2-2p}{p}};$$

$a = (A+B)/2; \quad b = (A-B)/2$ бунда

$$A = \sqrt{m^2+n^2+2p}; \qquad B = \sqrt{m^2+n^2+2p}.$$

Ярим конусли проекциялар хатоликлар характери бўйича тенг бурчакли, тенг майдонли ва ихтиёрий турларда бўлиши мумкин, бироқ нисбатан кўп ҳолатларда ихтиёрий проекциялардан фойдаланилади. Ихтиёрий ярим конусли проекциялар кўпинча майда масштабли дунё карталарини тузишда ишлатилади. Бу проекцияларни ҳисоблашда рақамли (сонли) таҳлил усулидан кенг фойдаланилади. Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, ярим конусли проекциялар – оддий ва мураккаб турларга бўлинади.

Оддий проекциялар сифатида – оддий ярим конусли проекцияни олиш мумкин. Мураккаб ярим конуссимон проекциялар сифатида доиравий проекциялар, Н.А.Урмаева проекцияси, Г.А.Гинзбург проекцияси (ЦНИИГАаК) кабиларни келтириш мумкин. Ярим конусли проекцияларни излашда графикли таҳлил усулидан фойдаланилади (52 – § га қаранг).

50 – §. Оддий ярим конусли проекция

Оддий ярим конусли проекцияни олиш учун қўшимча шартлар белгиланади:

– параллеллар радиуси – $\rho = Nctg\varphi$ ушбу параллеллар бўйича эллипсоидга (шарга) уринма асосида ҳосил бўлган конусга тенг;

– барча параллелларнинг узунлиги хатосиз узатилади $(n = 1)$;

– ўқ меридан хам ўз узунлигини сақлаб қолади $(m_0 = 1)$.

Биринчи ва иккинчи шартлар асосида

$n = \frac{\rho \partial \delta}{r \partial \lambda} = 1,$ бундан

$\partial\delta = \frac{r}{\rho}\partial\lambda$, ва интеграллашдан сўнг

$\delta = \frac{r}{\rho}\lambda + F(\varphi)$, бунда $F(\varphi)$— кенгликнинг ихтиёрий функцияси.

Агар $\lambda = o, \delta = o$ бўлганда, унда $F(\varphi) = 0$ ва

$\delta = \frac{r}{\rho}\lambda.$

r и ρ қийматини қўйиб, оламиз

$\delta = \lambda \sin\varphi.$

$m_o = 1$ шарти параллеллар маркази абсциссаларини q аниқлаш учун хизмат қилади. Агар ўқ меридиан узунлиги хатоликсиз тасвирланса, унда

$q = \rho + s = Nctg\,\varphi + s$, бунда s — экватордан берилган параллелгача бўлган меридиан узунлиги. Унда оддий ярим конусли проекция тенгламалари қуйидагича бўлади

$x = s + Nctg\varphi(1 - \cos\delta) = s + Nctg\,\varphi[1 - \cos(\lambda\sin\varphi)];$

$y = N\,ctg\,\varphi\,sin\delta = Nctg\,\varphi\sin(\lambda\sin\varphi);$

$\rho = Nctg\,\varphi; \quad \delta = \lambda\sin\varphi;$

$q = Nctg\,\varphi + s.$

Оддий ярим конусли проекция учун $tg\,\varepsilon$ хусусий масштаблар ва бурчак хатолиги формулаларини қоидага кўра ярим конусли проекциялар умумий формулаларидан оламиз. Қийматларни қўямиз

$\rho_\varphi = -M - Nctg^2\varphi;$

$q_\varphi = Nctg^2\varphi;$

$\delta_\varphi = \lambda\cos\varphi$ (181) формуладан

$$tg\,\varepsilon = -\frac{-N\,ctg^2\varphi\,sin\delta + N\,\lambda\,ctg\varphi\cos\varphi}{-N\,ctg^2\varphi\,cos\delta + M + Nctg^2\varphi} = -\frac{\lambda\sin\varphi - \sin\delta}{(M/N)ctg^2\varphi + 1 - cos} =$$

$$-\frac{\delta - \sin\delta}{(M/N)tg^2\varphi + 2sin^2(\delta/2)}.$$

$$P = Ncos\,\varphi\frac{-N\,ctg^2\varphi\,cos\delta + M + Nctg^2\varphi}{Mr} = 1 + \frac{N}{M}ctg^2\varphi(1 - \cos\delta) =$$

$$1 + 2\frac{N}{M}ctg^2\varphi sin^2\frac{\delta}{2};$$

$$m = \left(1 + 2\frac{N}{M}ctg^2\varphi sin^2\frac{\delta}{2}\right)\sec\varepsilon.$$

$$tg\,\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

Олинган формулалардан хулоса шуки, оддий ярим конусли проекцияда хатолик кенглик ва узоқликкга боғлиқ бўлади; изоколалар кўриниши ўқ меридианга симметрик бўлган эгрилар. Бу проекцияда меридианлар бўйича чўзилган худудларни энг кам хатоликда ифодаласа бўлади. Оддий ярим конусли проекцияни камчилиги параллелларни катта миқдордаги эгрилиги (айниқса юқори кенгликларда) ва меридианлар узунлиги, майдон ҳамда бурчак хатоликларини ўқ меридиандан узоқлашиб борган сари сезиларли даражада ошиб боришидир (4-жадвал).

Ўқ меридиан яқинида хатолик секин ошиб боради, масалан, 30^0 кенглик полосалар учун $\upsilon_м = \upsilon_р \leq 3.4\%$, $\omega = 2^0$, кейинчалик анча тез ортади, ва экваторни $\lambda = \pm\ 90°$ узоқликдаги меридиан билан кесишиш нуқтасида қуйидаги қийматни олади

$\upsilon_м = \upsilon_р \leq 123\%$, $\omega = 44.9^0$

Ҳозирги вақтда йирик ҳудудларни картага олишда оддий ярим конусли проекциялардан деярли фойдаланилмайди, бунда картографик тўрни хомаки чизмалари (*эскизи*) графикли таҳлил усулида қурилган ярим конусли проекциялар маъқул кўрилади.

4-жадвал

Оддий ярим конусли проекция меридианлари узунлик хусусий масштаби ва бурчак хатолиги қийматлари

φ, градус	Белгиси	λ. градус				
		0	15	30	60	90
0	m	1.000	1.034	1.137	1.548	2.231
	ω. градус	0.0	1.9	7.4	24.9	44.9
15	m	1.000	1.032	1,128	1.509	2.141
	ω. градус	0.0	1.8	6.9	23.5	42.8
30	m	1.000	1.026	1.102	1.404	1,894
	ω. градус	0.0	1.5	5,6	19,6	36,7
GO	m	1.000	1.009	1.034	1,129	1,270
	ω. градус	0.0	0.5	1.9	7,2	14,1
90	m	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	ω, градус	0.0	0,0	0.0	0.0	0,0

Оддий ярим конусли проекция 1:1 000 000 масштабдаги Ҳалқаро дунё картаси асосий проекцияси сифатида танлаб олинган. АҚШда оддий ярим конусли проекциялар “Қирғоқ ҳудуди ва геодезик съемкага олиш ишлари Бошқармасида” нисбатан йирик масштабли топографик карталарни тузишда фойдаланилади, шу сабабли оддий ярим конусли проекцияни баъзи ҳолатларда Америка проекциялари ҳам дейишади.

Оддий ярим конусли проекциялар трапеция ёки меридиан зоналарини тасвирлашда фойдаланилади, уларнинг кенглиги одатда олти градусдан ошмайди, яъни ўқ меридиандан ҳисобланадиган узоқлик кам қийматга эга ($\lambda \leq 3^\circ$). Шу сабабли, бу проекцияларда формулаларни келтириб чиқаришда ажратилган қаторлардан фойдаланиш мумкин, бу чегараланган ажратишлар таркибида λ^2 ва λ^3 қисмларга эга бўлади.

51 – §. Тор меридиан зонаси учун оддий ярим конусли проекция

Қаторлар назариясидан маълумки,

$\sin\delta = \sin(\lambda\sin\varphi) = \lambda\sin\varphi - \frac{\lambda^3}{6} sin^3\varphi + \dots$;

$\cos\delta = \cos(\lambda\sin\varphi) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} sin^2\varphi + \dots$; унда

$1 - cos\,\delta = \frac{\lambda^2}{2} sin^2\varphi + \dots$;

Охирги олинган натижаларни (180) формулага қўйиб, оламиз

$x = s + \frac{\lambda^2}{2} Ncos\,\varphi\sin\varphi\,.\,.\,.$;

$y = \lambda Ncos\,\varphi - \frac{\lambda^3}{6} Ncos\,\varphi\, sin^2\varphi \dots$

Тор зона учун $M \approx N$ қабул қилинса, унда

$tg\,\varepsilon = -\frac{\lambda^3 sin^3\varphi}{6\,tg^3\varphi} = -\frac{\lambda^3}{6} sin\varphi\, cos^2\varphi$ бундан

$\varepsilon'' = -\frac{(\lambda^\circ)^3}{6}\frac{\rho''}{(\rho^\circ)^3}\, sin\varphi\, cos^2\varphi\,\,.\,.\,.$;

Лекин

$\rho''/6(\rho^\circ)^3 = 0.18''$, натижада,

$\varepsilon'' = -0.18''(\lambda^\circ)^3\, sin\varphi\, cos^2\varphi\,\,.\,.\,.$;

$\lambda \leq 3^\circ$ бўлганда е" қиймати икки секунддан ошмайди, шу сабабли олти градусли зона учун тузилган оддий ярим конусли проекция картографик тўрини амалий жиҳатдан ортогонал деса бўлади, унда

$p = m = 1 + \frac{(\lambda^\circ)^2}{2(\rho^\circ)^2} cos^2\varphi$, чунки

$1/2(\rho^\circ)^2 = 0{,}000152$, унда

$p = m = 1 + 0{,}000152(\lambda)^2 cos^2\varphi$.

(183) формуладан фойдаланиб, оламиз

$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+1-2m}{m}} \approx \frac{m-1}{2}$.

$\omega' = \frac{\rho'}{(\rho^\circ)^2}\,\frac{(\lambda^\circ)^2}{2}\, cos^2\varphi\,.\,.\,.$,

Лекин $\rho'/2(\rho^\circ)^2 = 0{,}52'$, унда

$$\omega' = 0.52'(\lambda°)^2 cos^2\varphi \ .$$

Бу проекцияларда барча турдаги хатоликлар ўқ меридиандан узоқлашиш ҳамда кенглик қиймати камайиши билан ортиб боради; максимал хатолик зоналарни четки меридианларларини экватор билан кесишиш нуқталарида кузатилади, бунда қуйидаги тенглик амал қилади:

$$\upsilon_m = \upsilon_p = 0{,}14\%; \quad \omega = 4{,}7'.$$

52 – §. Дунё карталарини тузиш учун картографик тўр эскизлари бўйича олинган иxтиёрий ярим конусли проекциялар

Проекцияларни олишнинг турли хил усуллари билан бир қаторда, нуқталар координаталари ва хатоликларни аниқлашни рақамли таҳлил усулидан ҳам фойдаланилади. Математик картографияда рақамли (сонли) таҳлил усулидан фойдаланиш ғоясини Н.А.Урмаев таклиф этган. У рақамли таҳлил усули ва яқинлаштириш назарияси ҳамда интерполяция функцияларидан фойдаланиб, картографик тўрлар эскизлари бўйича проекцияларни олиш назариясини ишлаб чиқди. Г.А.Гинзбург томонидан эса дунё картаси учун ихтиёрий ярим конусли проекцияларни олиш усули ишлаб чиқилган.

Бу усулнинг моҳияти қуйидагича. Дастлаб, тавсифга кўра ва тасвирланаётган ҳудуд бўйича хатоликларнинг таҳминий тақсимланиши асосида у ёки бу талабларни қониқтирувчи картографик тўр эскизи (хомаки нусхаси) тузиб чиқилади. Сўнгра тузиб чиқилган эскиз асосида тўрнинг тугун нуқталари координаталари, узунлик, майдон ва бурчак хатолиги аниқланади, яъни яқинлаштирилган таҳлилий проекция ифодаси топилади. Бунда проекция тенгламаси берилмайди, координаталар рақамли қийматлари жадвали билан чекланилади.

Кўрсатиб ўтилган усулда дунё картаси учун проекцияларни ишлаб чиқишда ярим конусли проекциялар танлаб олинган, бу проекциялар тўрининг трансформацияси нисбатан маълум бўлган мослашиш хусусиятига эгалиги ва берилган топширикга нисбатан юқори даражада жавоб бериши, янги тўрлар эскизларини тузиб чиқиш учун хатоликлар қийматларининг тақсимланиши ва айрим қийматларнинг ўзгаришга эга бўлиши характерланади.

Проецияни ишлаб чиқишни иккита босқичга бўлиш мумкин: тўр эскизини тузиб чиқиш ва эскизни математик жиҳатдан қайта ишлаш.

Тўр эскизини тузиб чиқиш

Эскизни ишлаб чиқишда қуйидагилар аниқланади: тўрнинг экватор ва ўқ меридианга нисбатан симметриклиги, тўрнинг ўқ меридиани (картада материклар ўзаро жойлашишига таъсир кўрсатади), ўқ меридиан ва тўр параллеллари бўлиниши, қутблар тасвирланиши (нуқталар ёки чизиқлар билан), қутб чизиқлари узунлиги, хатоликларнинг тақсимланиши, характери ва бошқалар.

Битта ёки иккита бошланғич проекциялар вариантини асосий деб танлаб олиб ва унда тегишли ўзгартиришларни киритиш билан миллиметрли қоғозда майда масштабда меридианлар ва параллеллар тўрларининг эскизи тузиб чиқилади. Тўрни рационал трансформациялаш ва эскизни берилган талаблар асосида такомиллаштириш учун бошланғич проекциянинг хоссаларини, хатоликларни тақсимланиши ва тўрни кўриниши билан хатоликнинг боғлиқлиги ҳақидаги талабларни яхши билиш керак.

Параллелларни қуришда тўғри чизиқли ўқ меридиан бўйича узунлик масштабининг умумий ҳолати жуфт кўпҳад билан берилиши мумкин:

$m_0 = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + ...,$ амалий масалаларни ечиш учун қаторда иккинчи ҳад билан чекланса ҳам бўлади;

$m_0 = a_0 + a_2\varphi^2 + ...,$ агар, иккита кенглик учун m масштаб берилган бўлса, бунда a_0 ва a_2 коэффицентлар топилиши мумкин. У ҳолда ўқ меридианнинг абсцисса нуқталари:

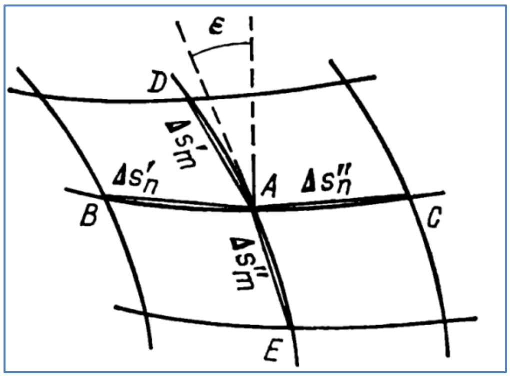
$$x_0 = a_0\varphi + \frac{a_2}{3}\varphi^3.$$

$m_0 = 1$ шарт бажарилган ҳолатда

$x_0 = R\varphi\mu_0$, бу ерда μ_0 – картанинг масштаби.

Бошланғич проекция варианти тўрлари бўйича талаб қилинган тегишли таҳлиллар амалга оширилгандан сўнг, ўқ меридианнинг аниқланган бўлиниш нуқтаси орқали айланага яқин бўлган, силлиқ кўринишдаги эгри чизиқлар – параллеллар ўтказилади. Бунда параллелларнинг эгрилик қиймати ортиши бурчак хатолиги қиймати камайишига ва майдон хатолиги қийматининг ортишига олиб келишини ҳисобга олиш керак. Меридианларни ўтказиш қуйидаги тартибда амалга оширилади. Агар параллеллар тенг бўлинган бўлса, у ҳолда нисбатан қулай ҳолатни белгилаб олиш орқали ва четки меридианларни контури $(\lambda = 180^\circ)$ бўйлаб, параллеллар тенг қисмларга бўлиб чиқилади ва қолган меридианлар ўтказилади.

Четки меридианларни чизишда масштаби $n_k = 1$ га тенг бўлган φ_k параллел кенглигини белгилаб олиш қулай. Кенгликни билиш орқали, ўқ меридиандан четки меридианганча бўлган ушбу параллелнинг ёйи узунлигини аниқлаш мумкин – $s_n = \pi R\cos\varphi_k$. n масштаб қиймати белгиланиши хам мумкин. Четки меридианнинг нисбатан қулай ҳолатда чизилиши учун проекциянинг бошланғич вариантлари тўрлари таҳлил қилиб чиқилади. Бирламчи эскиз асосида хусусий масштаблар ва бурчак хатолиги аниқланади.



Бунда бевосита ўлчаш йўли билан $\Delta s'm$, $\Delta s''m$ ва $\Delta s'n$, $\Delta s''n$ хорда қийматлари аниқланади (51 – расм).

51–расм. *m* **ва** n **қийматларни аниқлаш чизмаси.**

Хусусий масштаблар – m ва n қийматларни аниқлаш формуласи:

$$m \approx (\Delta s'_m + \Delta s''_m)/(2\Delta s_m \mu_0);$$

$$n \approx (\Delta s'_n + \Delta s''_n)/(2\Delta s_n \mu_0),$$

бу ерда Δs_m ва Δs_n – ер юзасида тегишли ёйларнинг кесмалари.

Бурчак i ва ε тўғридан тўғри ўлчаш орқали аниқланади.

m, n, i қийматларни билиш орқали майдон хусусий масштабини – p ва бурчак хатолиги – ω қийматини топиш мумкин. Одатда, бу аниқлаш яқинлаштириш асосида номограммадан фойдаланиш бўйича амалга оширилади. Олинган қийматлар таркибида p бўйича 2 – 3% гача ва ω - 2 – 3^{o} гача хатолик бўлиши мумкин.

Тўрни баъзи нуқталаридаги хатоликлар қийматини билиш орқали яқинлаштирилган изоколаларни тузиб чиқиш мумкин, улар мураккаб эгри чизиқлардан ташкил топади. Агар олинган хатоликлар қийматлари ва уларнинг тақсимланиши қўйилган талабларни қониқтирмаса, у ҳолда эскизга тузатмалар киритилади. Мисол сифатида 1950 йилда ЦНИИГАиК томонидан ишлаб чиқилган ярим конусли проекцияни қараб чиқамиз, бу проекциядан ўрта мактаб ўқитувчилари атласидаги дунёнинг сиёсий картасини тузишда фойдаланилган.

Проекцияни ишлаб чиқишда меридиан ва параллеллар тўрлари ўқ меридиан ва экваторга нисбатан симметрик деган шарт қўйилади, шунингдек, ўқ меридиан ва параллеллар тенг бўлинганлиги қайд қилинади. Параллеллар, жумладан қутб яқинида жойлашган параллеллар кам миқдорда эгриликка эга бўлиши керак. Хатоликларга нисбатан белгиланган асосий талаблар шундан иборатки, майдон хатолиги қуруқликнинг муҳим участкалари учун 100% дан ошмаслиги, шунгдек шакл хатолиги ҳам йирик бўлмаслиги керак.

Эскизни математик қайта ишлаш

Эскизни математик жиҳатдан қайта ишланишининг мақсади – тўрнинг тугун нуқталари тўғри бурчакли координаталарини аниқлаш ва хатоликлар қийматини топишдан иборат. Бунинг учун бошланғич маълумотлар тузиб чиқилган эскиздан олинади. Эскизни қайта ишлаш математик аппарати Н.А.Урмаева томонидан ишлаб чиқилган.

1. *Тўғри бурчакли координаталарни ҳисоблаш*

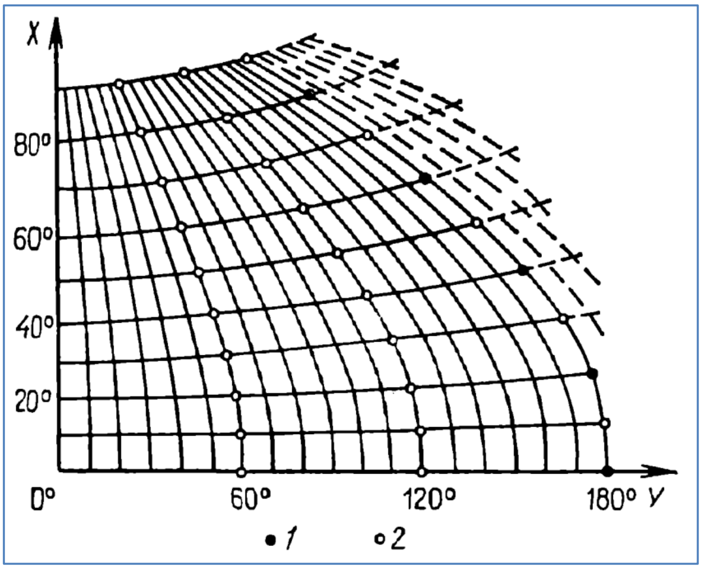
Дастлаб ўрта миъёна бошланғич тугун нуқталар координаталари аниқланади, сўнгра интерполяция ва экстрополяция усуллари орқали тўрнинг бошқа тугун нуқталари координаталари топилади. Ҳисоблаш қуйидагича олиб борилади:

– четки меридиан ($\lambda = 180^0$) бошланғич тугун нуқталари координаталарини тўғриланган қийматлари ҳисоблаб чиқилади (52–расм);

– ушбу меридианнинг қолган тугун нуқталари координаталарини аниқлаш учун белгиланган қийматлар интерполяция ва экстраполяция йўли билан топилади;

– асосий оралиқ меридианлар нуқталари координаталари ҳисобланади;

– тўрнинг қолган тугун нуқталари координаталарини аниқлаш учун барча маълумотлар интерполяция ва экстраполяция йўли билан топилади.



52 – расм. **ЦНИИГАиК ярим конусли проекциясида *x* ва *y* координаталар қийматини ҳисоблаш чизмаси**.

Бу ерда 1 – четки меридианнинг бошланғич тугун нуқталари; 2 – оралиқ меридианларнинг тугун нуқталари.

$\lambda = 180^{\circ}$ *меридиан бошланғич тугун нуқталари координаталарининг тўғриланган қийматини ҳисоблашда* бошланғич сифатида тенг бўлинган ўқ меридиан тугун нуқталари ва экватор қабул қилинади, уларни координаталари чизма бўйича аниқланади. Агар, ўқ меридианга нисбатан 180^{o} четки меридианнинг нуқталари координаталари аниқ бўлса, тўр экваторга нисбатан симметрик ҳолатда, ярим конусли проекция ўқ меридиани ва бўлинган параллеллари аниқланади.

Четки меридианда бошланғич тугун нуқталарни танлашда бундай нуқталар сони унча кўп бўлмаслиги асосида меридианнинг якуний ҳолатдаги тасвири эскиз ҳолатидан фарқ қилиниши ҳисобга олинади. Бироқ, бошланғич сифатида қанча кам нуқта олинса, қолган тугун нуқталарнинг тўғриланган координаталарини олиш шунчалик даражада осонлашади, чунки ушбу меридиан бўйича келтирилган нуқталар координаталарини кўпҳад даража тартиби белгилайди ва у паст даражада бўлади.

Четки меридианнинг бошланғич нуқталари сифатида 0^{o}, 20^{o}, 40^{o}, 60^{o} ва 80^{o} (5 та нуқта) кенглик нуқталар қабул қилиниши анча қулай. Берилган бешта нуқта орқали ўтувчи меридиан экваторга нисбатан симмерик ҳолатда жойлашадиган абсцисса тенгламасини тоқ кўпҳадни 7–даражада ифодалаш, ордината тенгламасини – жуфт кўпҳадли 8–даражасида ифодалаш мумкин:

$$x = a_1\varphi + a_3\varphi^3 + a_5\varphi^5 + a_7\varphi^7;$$

$$y = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + a_6\varphi^6 + a_8\varphi^8.$$

Эскиздан ҳосил қилинган, бошланғич нуқталар абсциссаси ва ординаталарининг қийматлари квадрат яқинлаштириш усули бўйича тўғрилади. Бу усулдан фойдаланишда кўпҳад даражасини пасайтиришга ҳаракат қилинади, яъни меридианнинг бирмунча тўлқинсимонлиги силлиқланади. Агар абсцисса кўпҳади 5–даража билан, ордината 6–даража билан белгиланса, у ҳолда олтинчи (абсцисса учун) ва еттинчи (ордината учун) айирмалар нолга тенг бўлади. Четки меридиан бошланғич нуқталарини олишни қараб чиқамиз. Еттинчи даражали айирма

$f_{0,5}^{VII} = 35 f_0 - 56 f_1 + 28 f_2 - 8 f_3 + f_4$, бу ерда f_i – ордината қиймати.

Бу тенгламани нолга тенглаштириш орқали, ягона шартли тенгламани ҳосил қиламиз:

$a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0,$ бу ерда коэффицентлар

$a_0 = +35,\ a_1 = -56,\ a_2 = +28,\ a_3 = -8,\ a_4 = +1$

Агар бу тенгламага ординаталар ўлчанган қиймати қўйилса, унда $f = y$ изм бунда унинг чап томони нулга тенг бўлмайди, унда

$[af] = W.$

v_0, v_1, v_2 .... тузатмаларни ординаталар ўлчанган қийматлари бўйича қўйидагича топиш мумкин

$v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + .\ \ .\ \ . = min$

Демак, коррелата k бўйича ифодаланган тузатмалар тенгламалари

$v_o = a_o k, \quad v_1 = a_1 k, \quad v_2 = a_2 k, \ \ldots$

Аниқ бўлмаган кўпҳаднинг — коррелатанинг қиймати нормал тенгламаларни ечиш орқали аниқланади

$[aa]k + W = 0; \quad k = -W/[aa].$

k ни билиб, v тузатмаларнинг қийматларини ва ординаталарнинг тўғриланган қийматларини ҳисоблаш мумкин (5-жадвал).

5-жадвал.

Ординаталарнинг тўғриланган қийматларини ҳисоблаш

φ градусда	f. мм=у ўлч.	a	af	aa	$v = a\kappa$	av	у. мм=у ўлч+v
0	266,5	+35	+9 327,5	1225	-0,02	-0,70	266,48
20	256,2	—56	—14 347.2	3136	+0,03	—1,68	256,23
40	228.2	+28	+6 389,6	784	-0,01	-0,42	228,18
60	187,9	-8	-1 503.2	64	0	0	187,90
80	136,1	+1	+136.1	1	0	0	136.10

Текшириш:

$[av] = -[af] = -W.$

$W = [af] = +2.8;$ $[aa] = 5210;$ $[av] = -2.8$

$k = -W/[aa] = -2.8/5210 = -0.000537.$

Худди шундай тўғриланган абсциссалар қийматлари ҳам топилади, бунда олтинчи даража айирмаси нулга тенгланади

$f_1^{v1} = -14f_1 + 14f_2 - 6f_3 + f_4.$

Тенглаштиришдан кейин ординаталар олтинчи ва абсциссалар бешинчи фарқлари доимий қийматлар бўлади, бу эса тенглашнинг тўғри бажарилганлигини билдиради (5-жадвал).

Четки меридианнинг қолган бошқа нуқталари координаталарини олиш учун интерполяция ва экстраполяция усулида четки меридианнинг абсцисса ва ординаталари қийматлари якуний сифатида қабул қилинади, бунда 10° кенглик оралиқларида жойлашган четки меридианнинг оралиқ нуқталари координаталари аниқланади. Бунда Стирлинг интерполяция формуласидан фойдаланиш қулай. Шунингдек, 20° кенглик оралиқлари бўйича мос келувчи f қийматнинг бошланғич фарқлари бўйича 10° кенглик оралиқларига мос келувчи янги ψ фарқланиш бошланғич қийматлари аниқланади.

Интервал улуши n=$10°/20° = 0.5$ бўлганда жуфт функциялар (ординаталар) учун

$\psi_0^{II} = 0.250\,000 f_0^{II}-0.015625f_0^{IV} + 0.001953 f_0^{VI};$

$\psi_0^{IV} =$ -0.062500f_0^{IV} - 0.007812f_0^{IV}

$\psi_0^{VI} =$ - 0.015625f_0^{IV}.

n = 0,5 бўлганда тоқ функциялар (абсциссалар) учун

$\psi_{0.5}^{I} = 0.500\,000 f_0^{I}-0.062500f_0^{III} + 0.001719 f_0^{V};$

$\psi_{0.5}^{III} =$ -0.125000f_0^{III} + 0.023438f_0^{V}

$\psi_{0.5}^{V} =$ +1..31250f_0^{V}.

Ҳар 10° кенгликда четки меридиан ордината нуқталарини олишни қараб чиқамиз. Дастлаб 20° кенглик ораликдаги ординаталар фарқини бошланғич қийматлари олинади (6-жадвал).

Янги дастлабки айирма учун:

$$\psi_0^{II} = 0.250000(-20.500) - 0.015625(+5.410) + 0.001953$$
$$(-5.120) = -5.2195$$

$\psi_0^{IV} = 0.3781;\ \ \psi_0^{VI} = -0.0800.$

Жуфт функциялар хусусияти бўйича:

$\psi_{0,5}^{V} = 0.5\,\psi_0^{VI} = -0.0400;$

$\psi_{0,5}^{III} = 0.5\,\psi_0^{IV} = +0.1890;$

$\psi_{0,5}^{I} = 0.5\,\psi_0^{II} = -2.6098.$

6-жадвал.

20° кенглик бўйича четки мериадиан нуқталари ординаталари фарқли қийматлари

φ градус	у, мм	f_0^{i}	f_0^{II}	f_0^{III}	f_0^{IV}	f_0^{V}	f_0^{VI}	f_0^{VII}
0	266.480		-20.500		+5.410		-5.120	
		-10.250		+2.705		-2.560		
20	256.230		-17.795		+2.850		-5.120	
		-28.045		+5.555		-7.680		
40	228.185		-12.240		-4.830			
		-40.285		+0.725				
60	187.900		-11.515					
		-51.800						
80	136.100							

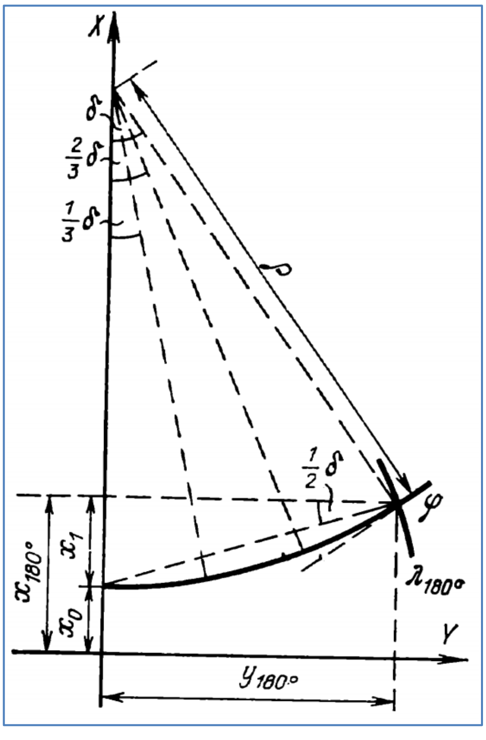
Олтинчи айирма ўзгармаслини эътиборга бўлиб, ўнг томонда жойлашган устунлардан чап томонга йўналишда бешинчи, тўртинчи, учинчи ва ҳоказо тартиб асосидаги кетма–кетликда йиғиндини олиш мумкин (7 – жадвал) ва ниҳоят, ординаталарнинг асл қиймати аниқланади. y_{90° ордината қиймати экстраполяция йўли билан аниқланади (қавсда келтирилган сонлар).

7 – жадвал

10^o кенглик оралиқлари бўйича четки меридиан нуқталари ординаталарини ҳисоблаш

φ градус	у, мм	ψ^{i}	ψ^{II}	ψ^{III}	ψ^{IV}	ψ^{V}	ψ^{VI}
0	266.48		-5.2195		+0.3781		-0.8800
		-2.6098		+0.1890		-0.0400	
10	263.87		-5.0305		+0.3381		
		-7.6403		+0.5271		-0.1200	
20	256.23		-4.5034		+0.2181		
		-12.1437		+0.7452		-0.2000	
30	244.09		-3.7582		+0.0181		
		-15.9019		+0.7633		-0.2800	
40	228.18		-2.9949		-0.2619		
		-18.8968		+0.5014		-0.3600	
50	209.29		-2.4935		-0.6219		
		-21.3903		-0.1205		-0.4400	
60	187.90		-2.6140		-1.0619		
		-24.0043		-0.1824		(-0.5200)	
70	163.89		-3.7964		(-1.5819)		
		-27.8007		(-2.7643)			
80	133.09		(-6.5607)				
		(-34.3614)					
90	(101.73)						

Асосий оралиқ меридианларда тугун нуқталар координаталарини ҳисоблаш қуйидагича амалга оширилади. Ҳар бир параллелда ўқ ($\lambda = 0$) ва четки ($\lambda = 180^\circ$) меридианлар нуқталарининг тўғри бурчакли координаталарини билиш орқали, тригонометрия формулалари бўйича иккита асосий оралиқ меридианларда ($\lambda = 60^\circ$ ва $\lambda = 120^\circ$) нуқталар координаталари топилади.



53–расм. **Асосий оралиқ меридианларда ($\lambda = 60^\circ$ ва $\lambda = 120^\circ$) нуқталар *x* ва *y* координаталарини аниқлаш чизмаси.**

Параллеллар айлананинг тенг бўлинган ёйларидан ташкил топган, параллелларнинг асосий тугун нуқталарида δ ва ρ қутб координаталарини осонлик билан олиш мумкин.

λ = 180' меридиан нуқталари учун (53-расм) δ ва ρ қиматларини қуйидаги формулалар билан топиш мумкин

$$\tan(\delta_{180^0}|2) = {x_1}/{y_{180^0}}$$

ρ=$y_{180^0}\operatorname{cosec}\delta_{180^0}$ бунда

x_1=x_{180^0}-x_0

ρ нинг қиймати ҳар бир параллел учун ўзгармас, асосий оралиқ меридианлар нуқталари учун σ қуйидагича олиш мумкин

δ_{60^0}=${1}/{3}\,\delta_{180^0}$; δ_{120^0}=${2}/{3}\,\delta_{180^0}$;

тўғри бурчакли координаталарни эса формулалардан оламиз

$x=x_0+\rho(1-\cos\delta)$; $y=\rho\sin\delta$

Барча қолган тугун нуқталар координаталарини аниқлаш учун интерполяция ва экстраполяция методида ҳар бир параллелни тўртта таянч нуқталар оралиғида бешта нуқтани белгилаб олиш керак. Бунинг учун ҳам $n = 10^\circ / 60^\circ = 1/6$ бўлганда узунлик функциясининг жуфт бўлмаган (ординаталар) ва жуфтлиги (абсцисса) учун Стирлинг формулаларидан фойдаланилади. Абсциссалар учун

$$\psi_0^{II} = 0.027778\, f_0^{II}\text{-}0.002250 f_0^{IV} + 0.000298 f_0^{VI};$$

$$\psi_0^{IV} = \qquad -0.000772 f_0^{IV} + 0.000125 f_0^{IV}$$

$$\psi_0^{VI} = \qquad - 0.000021 f_0^{IV}.$$

Ординаталар учун:

$$\psi_{0.5}^{I} = 0.166667 f_{0.5}^{I} - 0.027006 f_{0.5}^{III} + 0.005364 f_{0.5}^{V};$$

$$\psi_{0.5}^{III} = \qquad -0.004630 f_{0.5}^{III} + 0.001125 f_{0.5}^{V}$$

$$\psi_{0.5}^{V} = \qquad +0.000129 f_{0.5}^{V}.$$

2. *Хатоликнинг аниқлаштирилган қийматларини ҳисоблаш*

Хусусий масштаблар ва бурчак хатоликлари қийматларини аниқлаштирилган ҳолда ҳисоблаш хатоликлар назарияси бўйича маълум бўлган формулалар асосида амалга оширилади:

$$m = \frac{1}{R}\sqrt{x_{\varphi}^{2} + y_{\varphi}^{2}}; \qquad n = \frac{1}{R}\sec\varphi\sqrt{x_{\lambda}^{2} + y_{\lambda}^{2}};$$

$$p = \frac{1}{R^{2}}\sec\varphi(x_{\varphi}y_{\lambda} - x_{\lambda}y_{\varphi});$$

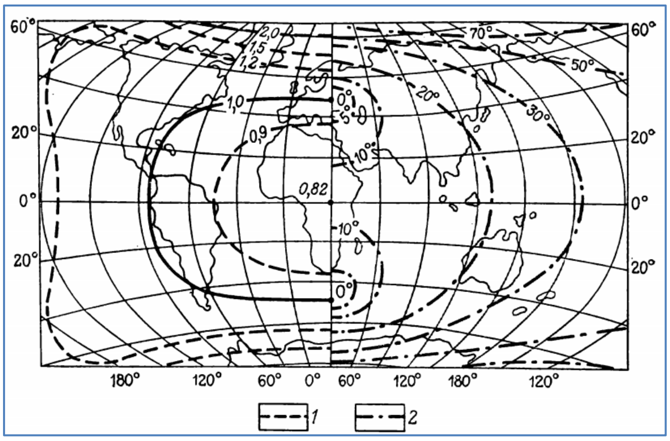
$$tg\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^{2}+n^{2}}{4p} - \frac{1}{2}}.$$

Бунда хусусий ҳосилалар қийматини мавжуд координаталар қийматлари учун тузиб чиқилган айирмалар жадвали билан биргаликда сонли дифференциал формулалар бўйича аниқланади. Шундай қилиб, эркин ҳолатдаги z ўзгарувчан орқали қандайдир функция ҳосиласининг яқинлаштирилган қиймати тоқ фарқли қийматлардан фойдаланиш билан қуйидаги формула ёрдамида аниқланиши мумкин:

$$f(z)_{k} = \frac{1}{\omega}\left(f_{k}^{I} - \frac{1}{6} f_{k}^{III} + \frac{1}{30} f_{k}^{V} - \ldots \right),$$

бунда ω – функциянинг ўзаро қўшни ҳолатда жойлашган оралиқлари қийматини ифодалайди $(\omega = arc10^{\circ})$. Учинчи ҳад одатда, ҳисобга олмайди. Тенг бўлинган параллелларда узунлик хусусий масштабини ҳисоблаш осонлашади:

$$n = \rho\delta_{180^{\circ}}/R\,\pi\,cos\varphi.$$



54–расм. **Дунё картасида ярим конусли проекция изоколалари** – *p (1)* ва *ω (2)*.

Изоколаларни тузиш учун 30° узоқлик ва 20° кенглик қийматидан кам бўлмаган қатор жойлашган нуқталар хатолиги аниқланади. *P* изоколалари билан ω қиймати биргаликдаги тўрни кўриниши 54 – расмда келтирилган.

Катта совет энциклопедияси (БСЭ) дунё картаси, сўнгра дунё атласидаги дунёнинг сиёсий картаси учун фойдаланилган ярим конусли проекцияда ўқ меридиан бўйлаб параллеллар ўртасидаги оралиқ қутбга томон ортиб боради, параллеллари – юқорида қараб чиқилган вариантга нисбатан кўпроқ эгриликка эга бўлади. Натижада тахминан бурчак хатолиги 10^{o} га камайишида майдон хатолиги тасвирланаётган материклар доирасида (Антарктидадан ташқари) 180% га ортиши кузатилади. Дунёнинг деворий карталари учун тўрнинг ғарбий қисмида тенг бўлинган, шарқий қисмида эса – тенг бўлинмаган параллелларга эга проекциядан фойдаланилади. Бунда меридианлар оралиғи камайиши ҳисобига Тинч океани майдони тенг бўлинган параллеллар проекциясидай унча катта бўлиб тасвирланмайди.

Тўр эскизлари бўйича ихтиёрий проекцияларни ишлаб чиқиш усули В.М.Богинский ишларида ривож топди. Картографик тўр эскизини меридиан ва параллеллари мураккаб эгри чизиқ билан тасвирланувчи проекциялар учун ҳам тузиб чиқиш мумкин.

Эскизларнинг аппроксимацияланиши учун, яъни тўрнинг тугун нуқталарида тўғри бурчакли ва географик координаталар ўртасидаги функционал боғлиқликни аниқлаш учун, иккита ўзгарувчан (φ ва λ) даражали кўпҳаддан фойдаланилади:

$$f(\varphi,\lambda)=\sum_{i=0}^{i=s}\ \sum_{j=0}^{j=t}k_{ij}\varphi^{i}\lambda^{j},$$

бу ерда $i=0,...,s;$ $j=0,...,t;$ $i+j\le n;$ n – кўпҳад даражаси; k_{ij} – доимий коэффицентлар.

Агар картографик тўр X ва Y ўқларига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда абсцисса узунликнинг жуфт даражали кўпҳади ва кенгликнинг тоқ даражали кўпҳади билан, ординаталар эса – узоқликнинг тоқ даражали кўпҳади ва кенгликнинг жуфт даражали кўпҳади билан ифодаланади

$$x = a_1\varphi + a_2\varphi\lambda^2 + a_3\varphi^3 + ...;$$

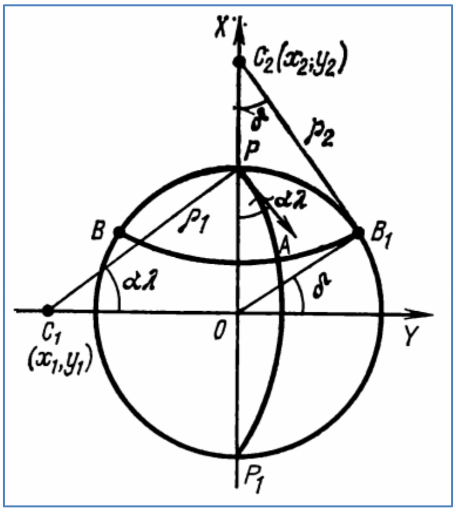
$$y = b_1\varphi + b_2\varphi^2\lambda + b_3\lambda^3 + ...$$

Доимий коэффицентларни (a_i ва b_i) топиш учун эскиз бўйича тўғри бурчакли координаталар тахминий қиймати топилади, улар нисбатан кичик квадратлар усули бўйича тенглаштирилади.

53 – §. Лагранж проекцияси

Лагранж проекциясини хатолик тавсифи бўйича тенг бурчакли ярим конусли проекцияларнинг хусусий ҳолати сифатида қараб чиқиш мумкин. Бу проекцияларда меридианлар ва параллеллар эксцентрик айлана ёйлари кўринишида тасвирланади.

Айлана радиуси – k ни тасаввур қиламиз (55–расм), бунда k – проекциянинг биринчи параметри. Айлана диаметрларидан бирини λ_0 узоқлик билан ифодаланувчи ўқ меридиан сифатида қабул қиламиз, уни қийматини нолга тенглаштирамиз; бу меридиан X ўқи билан устма – уст тушади ва асосий айланани P ва P_1 географик қутб нуқталарида кесиб ўтади.



55–расм. **Лагранж проекцияси координаталари тизими.**

Бошқа барча меридианлар айлана ёйларидан ташкил топган бўлиб, қутб нуқтаси орқали ўтади; уларнинг маркази φ_1 кенглик қийматига эга бўлган тўғри чизиқли параллелларда жойлашади, Y ўқига мос тушади. Қолган барча параллеллар – айлана ёйлари ҳисобланиб, уларнинг маркази тўғри чизиқли меридианда жойлашади. P ва P_1 нуқталарда меридианга нисбатан уринма ўқ меридиан билан $\alpha\lambda$ бурчакни ҳосил қилади, бу ерда α – проекциянинг иккинчи параметри. Меридианлар ва параллеллар тўри ортогонал бўлади.

$A(\varphi, \lambda)$ нуқтадан PAP_1 меридиан ва параллел BAB_1 ўтказамиз; меридиан маркази координатаси $C_1 - x_1, y_1$, параллеллар маркази - $C_2 - x_2, y_2$.

Маркази C_1 бўлган меридиан учун

$$x_1 = 0 \quad y_1 = -kctg(\alpha\lambda); \; p_1 = k \operatorname{cosec}\,(\alpha\lambda),$$

бунда p_1 — меридиан ёйи радиуси; маркази C_2 параллел учун

$$x_2 = k \operatorname{cosec}(\delta) \quad y_2 = 0;$$

$p_2 = k \;\; ctg\delta$ бунда p_2 — параллел ёйи радиуси.

Бу формулаларда $\delta = f(\varphi)$ — кенгликнинг ёрдамчи функцияси. Координаталар марказини билган ҳолда, меридианлар тенгламасини тузамиз

$$x^2 + [y + k \; ctg \;\; (\alpha\lambda) \;]^2 = k^2 \operatorname{cosec}^2(\alpha\lambda)$$

ва параллеллар формуласини тузамиз

$$(x - k \operatorname{cosec} \; \delta)^2 + y^2 = k^2 ctg^2\delta$$

Сўнгра осон қайта ўзгартиришлардан кейин, формулалар олинади

$$x^2 + 2ky\, ctg(\alpha\lambda) + y^2 = k^2$$

$$x^2 - 2ky \operatorname{cosec}\delta + y^2 = -k^2$$

буларни ечиб, проекция тўғри бурчакли координаталарини топамиз:

$$x = \frac{k \sin\delta}{1 + \cos\delta\cos(\alpha\lambda)} \qquad y = \frac{k\cos\delta\sin(\alpha\lambda)}{1 + \cos\delta\cos(\alpha\lambda)}$$

δ функцияси Коши—Риман тенгламасидан фойдаланиб, тенг бурчаклилик шарти бўйича аниқланади (51). Бунинг учун $x_\varphi, y_\lambda, y_\varphi$ ва y_λ хусусий ҳосилаларини топамиз ва уларни келтирилган формулаларга қўямиз:

$$x_\varphi = x_\delta\delta_\varphi = \frac{k[\cos\delta + \cos(\alpha\lambda)]}{[1 + \cos\delta(\alpha\lambda)]^2}\delta_\varphi;$$

$$x_\lambda = \frac{\alpha k \sin\delta \cos\delta \sin(\alpha\lambda)}{[1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)]^2}$$

$$y_\varphi = y_\delta \delta_\varphi = -\frac{k\sin\delta\sin(\alpha\lambda)}{[1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)]^2}\delta_\varphi;$$

$$y_\lambda = \frac{\alpha k\cos\delta[\cos\delta+\cos(\alpha\lambda)]}{[1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)]^2};$$

Бу тенгламаларни ечиб, қуйидагилар олинади

$$\alpha\cos\delta = \frac{r}{M}\frac{d\delta}{d\varphi} \qquad \text{ёки}$$

$$\frac{d\delta}{\cos\delta} = \alpha\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}$$

Интеграллашгандан сўнг lntg $(45^0+\delta/2) = \alpha 1nU + 1n\beta$ бу ерда β — проекцияни учинчи параметри. Бундан

$$\text{tg } (45^0+\delta/2) = \beta\, U^2$$

бу ерда

$$U = \frac{tg(45^0+\varphi/\ 2)}{tg^e(45^0+\psi/2};$$

$$\psi = \arcsin(e\sin\varphi).$$

Проекция тенг бурчакли, шу сабабли меридианлар и параллеллар бўйича хусусий масштаблар бир-бирига тенг:

$$m = n = \frac{1}{r}\sqrt{x^2{}_\lambda + y^2{}_\lambda} \quad \text{ундан}$$

$$m = n = \frac{\alpha k\cos\delta}{r[1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)]}.$$

Лагранж проекциясида учта параметр мавжуд: α, β ва k; уларни аниқлаш учун проекциянинг марказий нуқтасида (φ_0, λ_0) масштаб экстремал хусусиятга эга шарти белгиланади. Масштабнинг ҳосиласини олиш орқали ва уни нолга тенглаштириш билан $\lambda_0 = 0$ қийматни топамиз:

$$tg(\delta_0/2) = \sin\varphi_0/\alpha. \qquad (190)$$

Келтирилган охирги формулада φ_0 ва α қийматлар маълум бўлса, δ_0 қийматни топиш имконини беради. Асосий айлана радиуси – k қиймати марказий нуқтада масштаб – m_0 қийматини бериш орқали аниқланади,

$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha}(1 + \sec\delta_0). \qquad (191)$$

Келтирилган (*190*) ва (*191*) формулалар α параметр қиймати маълум бўлган ҳолатни ўзида ифодалайди. Бу параметр марказий нуқта яқинида изоколалар шаклини тадқиқ қилиш йўли билан топилади.

Изоколалар тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{m}{m_0} - 1 = \upsilon_m = \left(\frac{1}{2R^2} - \frac{\alpha^2 - \sin^2\varphi_0}{4R^2\cos^2\varphi_0}\right)x^2 + \frac{\alpha^2 - \sin^2\varphi_0}{4R^2\cos^2\varphi_0}y^2,$$

яъни изокола иккинчи даражали марказий эгри чизиқдир.

Агар меридиан бўйича йўналтирилган изокола ярим ўқини a ва параллел бўйича йўналтирилган ярим ўқни —b деб белгиласк, унда

$$a^2 = \frac{1}{1/2R^2 - (\alpha^2 - \sin^2\varphi_0)/4R^2\cos^2\varphi_0} = \frac{4R^2\cos^2\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 - \alpha^2},$$

$$b^2 = \frac{1}{(\alpha^2 - \sin^2\varphi_0)/4R^2\cos^2\varphi_0} = \frac{4R^2\cos^2\varphi_0}{\alpha^2 - cin^2\varphi_0},$$

Изокола ярим ўқлари нисбатини *n* билан белгиласак, унда

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{2\cos^2\varphi_0 - (\alpha^2 - \sin^2\varphi_0)}{\alpha^2 - \sin^2\varphi_0} = \frac{2\cos^2\varphi_0}{\alpha^2 - \sin^2\varphi_0} - 1 \text{ ёки}$$

$$n^2\alpha^2 - n^2\sin^2\varphi_0 = 2\cos^2\varphi_0 - \alpha^2 + \sin^2\varphi_0$$

Бундан

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{1 - n^2}{1 + n^2}\cos^2\varphi_0} \qquad (192)$$

(*192*) формуладаги α параметр изокола шаклини белгилайди ва бу ўз навбатида хатоликларни тақсимланишига ҳам таъсир этади.

Агар $\alpha = 1$ бўлса, у ҳолда изоколалар айлана кўринишида, проекция эса – стереографик, α > 1 – изоколалар меридианлар бўйлаб чўзилган овал,

$\alpha < 1$ ҳолатда эса – изоколалар параллеллар бўйлаб чўзилган овал, $\alpha = 0$ ҳолатда изоколалар параллел чизиқларга айланади, унда тенг бурчакли цилиндрик проекция ҳосил бўлади. Лагранж проекцияси изоколалар шаклини бошқариш имконини берувчи биринчи проекция ҳисобланади.

Проекцияни ҳосил қилиш учун:

– ҳоҳлаган проекция ва ҳоҳлаган масштабда тузиб чиқилган эскиз тўрида тасвирланаётган ҳудуд чегаралари доирасида белгиланувчи изоколалар қайд қилинади ва $\alpha,\ b,\ n$ ва φ_0 қийматлар аниқланади;

– проекциянинг марказий нуқтасида берилган масштаб қиймати бўйича (m_0) ҳисобланади:

$$tg(\delta_0 / 2) = \sin\varphi_0 / \alpha;$$

$$\beta = tg(45^\circ + \delta_0 / 2) U_0^{-\alpha};$$

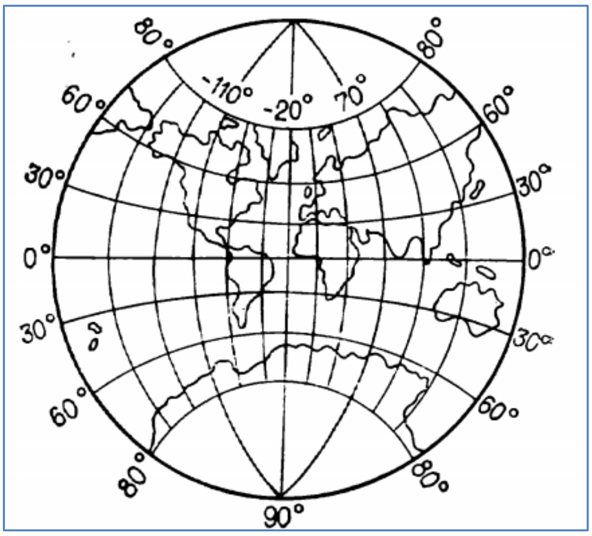
$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha}(1 + \sec\delta_0);$$

– (*188*) формула бўйича ҳар бир параллел учун δ қиймат аниқланади;

– (*187*) ва (*189*) формулалар бўйича проекциянинг ҳар бир нуқтаси учун тўғри бурчакли координаталар ва масштаб ҳисобланади.

Барча меридианлар марказлари жойлашган тўғри чизиқли параллел φ_1 кенглигини топиш учун (*188*) формуладан фойдаланиб ёрдамчи функцияни аниқлаймиз.

Бу параллелда $\delta = 0$, яъни формулани чап томони бирга тенг.



56–расм. **Лагранж проекциясида картографик тўрнинг кўриниши.**

Ўнг томони эса (шар сирти учун) тенг бўлади

$$\beta U^{\alpha} = \beta tg^{\alpha}(45^0 + \varphi_1 / 2)$$

бундан

$$\mathrm{tg}(45^0 + \varphi_1 / 2) = \sqrt[\alpha]{\beta}$$

Назорат саволлари

1. Ярим конусли проекцияларнинг умумий назариясини тушунтиринг.

2. Оддий ярим конусли проекцияни олишда қандай шартлар қўйилади?

3. Дунё картаси учун ихтиёрий ярим конусли проекцияларни олиш ким томонидан ишлаб чиқилган, проекцияни моҳиятини тушунтиринг.

4. Эскизни математик қайта ишлашни тушунтиринг, унинг мақсадини изоҳланг.

5. Тўғри бурчакли координаталарни ҳисоблаш қандай олиб борилади?

6. Лагранж проекцияси координаталар тизимини нима ташкил этади, проекцияда қандай параметрлар аниқланади?

X БОБ.
1:1 000 000 ва 1:2 500 000 МАСШТАБЛИ КАРТАЛАР ПРОЕКЦИЯЛАРИ

54 – §. Кўриниши ўзгартирилган оддий ярим конусли проекция ва ундан 1:1 000 000 масштабли карталарни тузишда фойдаланиш

Ҳалқаро бутун дунё картасини тузиб чиқиш ғояси ўтган асрнинг охирларида таклиф этилган. 1909 йилда Лондонда ўтказилган Ҳалқаро географик Конгрессда ушбу картанинг масштаби белгиланган (1:1 000 000), шунингдек, унинг проекцияси (кўриниши ўзгартирилган оддий ярим конусли проекция), графикли тавсифлари ва варақлари номенклатураси, картани тузиб чиқиш тартиб–қоидаларига аниқлик киритилган. 1913 йилда Парижда ўтказилган Ҳалқаро анжуманда «Миллион масштабли Ҳалқаро дунё картасини тузиб чиқиш бўйича асосий қоидалар» қабул қилинган. Кўриниши ўзгартирилган оддий ярим конусли проекцияни ва унинг 1:1 000 000 масштабдаги картасини тузишда фойдаланиш имкониятларини қараб чиқамиз.

Бу проекция кўп қиррали, айланма эллипсоид сифатида қабул қилинадиган ер юзаси меридиан ва параллел чизиқлари бўйича трапецияларга бўлинади. Ҳар бир трапеция картанинг алоҳида варағида, кўриниши ўзгартирилган оддий ярим конусли проекцияда 1:1 000 000 масштабли карта учун бир хилдаги проекция бўйича тасвирланади. Варақларни рамкаси бўйича бирлаштиришдан кўп қиррали шакл ҳосил бўлади. Трапециялар томонлари учун маълум аниқликдаги ўлчамлар қабул қилинган – меридианлар бўйлаб - 4^o, параллеллар - 6^o. 60^o дан 76^o гача кенгликда варақ иккиланади ва параллеллар бўйича 12^o ўлчамга етади; 76^o дан юқорида варақлар тўрт ҳиссага оширилади ва параллаллар бўйича 24^o бўйлаб чўзилади.

Проекцияни кўп қирралик бўлиши фойдаланилиш учун номенклатура киритилишини талаб этади, яъни алоҳида варақларни белгилаш тизимини. 1:1 000 000 масштабли карта учун кенглик бўйлаб трапецияларни лотин алифбоси ҳарфлари билан (*A, B, C, D* ва ҳоказо) экватордан қутбга томон йўналишда белгилаш ва коллонналар бўйича араб рақамлари билан (1, 2, 3, 4 ва ҳоказо) белгилаш қабул қилинган, бу ҳолат 180^o узоқликдаги меридиандан (Гринвич бўйича) бошланиб, соат стрелкасига қарама – қарши йўналишда ҳисобланади; Тошкент шаҳри тасвирланган варақ К-42 номенклатураси билан белгиланади. Икки ва тўрт ҳисса оширилган карта варақлари номенклатураси белгиланган кенглик минтақасида ва мос равишда, икки ёки тўртта коллоннадан ташкил топади, масалан – *P* – 39, 40.

Кўриниши ўзгартирилган оддий ярим конусли проекцияни хоссаларини ва хатоликлар тақсимланишини 1:1 000 000 масштабли картани алоҳида варақлари доирасида қараб чиқамиз. Барча меридианлар тўғри чизиқлар билан тасвирланади. Ўрта меридиандан ±2^o узоқликда жойлашган (икки ҳисса оширилган варақларда ±4^o ва тўрт ҳисса оширилганларда эса ±8^o) икки меридиан узунлигида хатолик қайд қилинмайди.

Ҳар бир варақнинг четки параллеллари (шимолий ва жанубий) $\rho = Nctg\varphi$ айлана радиуси ёйлари ҳисобланади; параллелларнинг маркази ўрта меридианда жойлашади; узунлик хатолиги кузатилмайди, яъни $n_ш = n_ж = 1$.

Лондон конгрессида ички параллелларни ўтказиш бўйича кўрсатмалар берилмаган. Одатда, уларни ўтказиш учун Хинкс усулидан фойдаланилади: барча меридианларни тўртта тенг қисмларга бўлиб чиқиш билан ҳосил қилинган нуқталар орқали параллеллар ўтказилади. Картографик тўр кенглик ва узоқлик бўйича 1^o оралиқда ўтказилади, икки ҳисса оширилган варақларда узоқлик бўйича 2^o, тўрт ҳисса оширилган варақларда эса – 4^o бўйича ўтказилади. Шундай қилиб, 1:1 000 000 масштабли картанинг барча варақларида бешта параллел ва еттита меридиан бўлади. Карта варағи четки параллеллари тўғри бурчакли координаталари (*184*) формулага мос ҳолатда аниқланади:

$$x = \frac{\lambda^2}{2} N \cos\varphi \sin\varphi + ...;$$

$$y = \lambda N \cos\varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \cos\varphi \sin^2 \varphi...$$

Бу проекцияда меридианлар бўйича масштаб оддий ярим конусли проекция меридианлари бўйича масштабни қисқартириш йўли билан ҳосил қилинади.

$$m = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\right) / \left(1 + \frac{4}{2}\cos^2\varphi\right) = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\right)\left(1 + \frac{4}{2}\cos^2\varphi\right)^{-1} = 1 + \frac{\lambda^2 - 4}{2}\cos^2\varphi.$$

$(\rho^\circ)^2 / 2 = 0{,}000152$ (λ градусда) қиймат киритилганидан кейин

$$m = 1 + 0{,}000152\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi. \qquad (193)$$

Четки меридианлар учун $\lambda = \pm 3^\circ$ бўлганда

$\upsilon_m = +0{,}076\%,$

ўрта меридиан учун $\lambda = 0$ ҳолатда:

$m_0 = 1 - 0{,}00061\cos^2\varphi; \quad \upsilon_m = -0{,}061\%.$

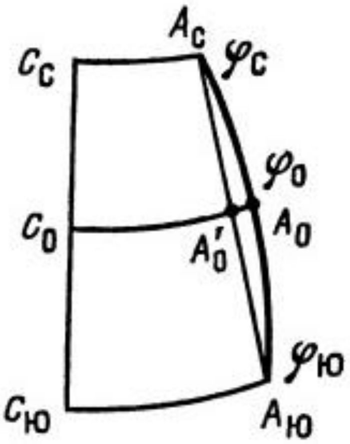
Картанинг варағи баландлиги

$H = s_{жанубий}^{шимолий} m_0$, бу ерда $s_{жанубий}^{шимолий}$ – четки параллеллар ўртасидаги меридиан ёйи узунлиги, ундан

$$H = s_{жанубий}^{шимолий}(1 - 0{,}00061\cos^2\varphi) = s_{жанубий}^{шимолий}(1 - 0{,}000305 - 0{,}000305\cos 2\varphi) =$$
$$s_{жанубий}^{шимолий}(0{,}999695 - 0{,}000305\cos 2\varphi).$$

Оддий ярим конусли проекцияларда эгри чизиқлар билан ифодаланган меридианлар кўриниши, ўзгартирилган ярим конусли проекцияни четки параллелларида тўғри чизиқларга алмаштирилади, шу сабабли ички параллеллар қиймати бирдан кичик. Минимал масштаб фақат ўрта параллелда сақланади, бу параллел кенглигини φ_0.билан белгилаймиз. n_0 масштабни топамиз (57-расм),

$n_0 = 1 - \frac{A_0^{'}A_0}{C_0A_0}$ бунда $A_0^{'}A_0$ — ўрта параллелни узунлигининг қийшиқ чизиқли меридиандан тўғри чизиқлига ўтишдаги камайиши.



$C_cA_c = N_c\cos\varphi_c\lambda$ $\qquad C_юA_ю = N_ю\cos\varphi_ю\lambda$

$C_0A_0 = N_0\cos\varphi_0\lambda$

57-расм. **Масштабни аниқлаш чизмаси.**

Қабул қиламиз

$$C_0A_0^{'} = \frac{1}{2}\left(C_CA_C + C_юA_ю\right) = \frac{1}{2}\left(N_ю\cos\varphi_ю + N_c\cos\varphi_c\right)$$

бундан

$$A_0^{'}A_0 = C_0A_0 - \frac{1}{2}\left(C_cA_c + C_юA_ю\right) = \lambda\left[N_0\cos\varphi_0 - \frac{1}{2}\left(N_ю\cos\varphi_ю + N_c\cos\varphi_c\right)\right]$$

Маълумки, $\varphi_c - \varphi_ю = 4^0$, шу сабабли $N_C = N_0 = N_ю$ ва бунда

$$A_0^{'}A_0 = \lambda N_0\left(\cos\varphi_0 - \cos\frac{\varphi_C + \varphi_ю}{2}\cos\frac{\varphi_C - \varphi_ю}{2}\right) = \lambda N_0\cos\varphi_0\left(1 - \cos\frac{\varphi_C - \varphi_ю}{2}\right).$$

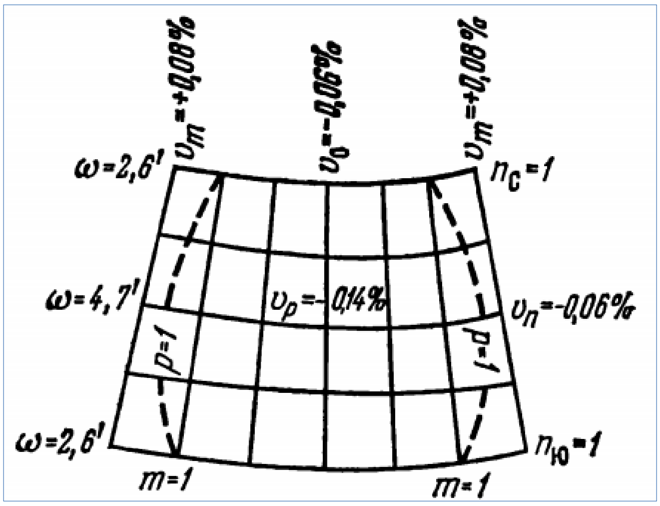
$\varphi_C - \varphi_ю = \Delta\varphi$ қабул қилиб, cos($\Delta\varphi$/2) ни $\Delta\varphi$ иккинчи даражада чеклаб, қаторга ажратсак, унда

$$A_0^{'}A_0 = \frac{\lambda(\Delta\varphi)^2}{8}N_0\cos\varphi_0$$

$$n_0 = 1 - \frac{\left(\Delta\varphi^0\right)^2}{8\left(p^0\right)^2} = 1 - 0{,}000152\frac{(\Delta\varphi)^2}{4}$$

1:1 000 000 масштабли картани ҳар бир варағида ўрта параллел бўйлаб хатолик қиймати $\upsilon_n = -0{,}06\%$ ни ташкил қилади. Бу картада меридиан ва параллеллар бўйлаб масштаблар экстремал (a ва b), чунки проекция тўри деярли ортогонал. Картанинг битта варағида хатоликларнинг тақсимланишини қараб чиқамиз (58–расм).

Ҳар бир варақда барча турдаги хатоликлар учрамайдиган 4 та нуқта мавжуд - бу нуқталар варақнинг четки параллелларининг ўрта меридиандан икки градус ғарбга ва шарққа томон узоқлашган меридианлари билан кесишиш нуқталарида жойлашган.



58–расм. **1:1 000 000 масштабли карта варағида хатоликларни тақсимланиши.**

Майдон максимал хатолиги (υ_p) варақни ўртасида кўзатилади, уни қиймати минус ишорага эга ва 0,14% гача етади. Майдонни ноль хатолигига эга бўлган изоколалар эгри чизиқ бўлиб, хатолик мавжуд бўлмаган нуқталар орқали ўтади ва четки меридианлар бўйлаб чўзилган кўринишда тасвирланади. Майдон масштабини четки параллелларда қуйидаги формулалар бўйича (λ градус ҳисобида) аниқлаш мумкин:

$$p = m = 1 + 0{,}000152\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi,$$

ўрта параллеллар бўйича қуйидаги тенглик ўринли:

$$p_0 = m_0 n_0 = 0 + 0{,}000152\left\{\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi - (\Delta\varphi)^2/4\right\}. \qquad (195)$$

Бурчак хатолиги, аксинча, варақнинг ўрта қисмида деярли қайд қилинмайди; унинг максимал қиймати варақнинг четки меридианларида, экватор ва $\varphi = 60^\circ$ кенгликдаги параллеллар яқинида кузатилади, унинг қиймати $\omega \le 4{,}7'$ га етиши мумкин. Четки параллелларда бурчак хатолиги қуйидагича ҳисобланади (минут ҳисобида):

$$\omega_{шимолий} = \omega_{жанубий} = 0{,}52'\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi;$$

ўрта параллеллар учун эса:

$$\omega_0 = 0{,}52'\left\{\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi + (\Delta\varphi)^2/4\right\}. \qquad (196)$$

Кўп қиррали кўриниши ўзгартирилган оддий ярим конусли проекциянинг афзаллиги – унда хатоликнинг нисбатан катта бўлмаслиги билан белгиланади. Карта варағи доирасида хатоликларни таҳлил қилиш натижаларига кўра, узунлик хатолиги 0,1% дан, майдон хатолиги – 0,15% ва бурчак хатолиги – 5' дан ортиқ эмас, яъни амалий жиҳатдан деярли сезиларсиз.

Проекцияни камчилиги – меридиан ва параллеллар бўйича варақларни бирлаштиришда узилишлар ҳосил бўлишини кўрсатиб ўтиш мумкин. 4 та варақни бирлаштиришда бу узилишлар (В.В.Каврайский тадқиқотлари бўйича) 1:1 000 000 масштабли картада бирлаштирилувчи трапецияда битта сферик ортиқлик қийматига тенг (59–расм), яъни:

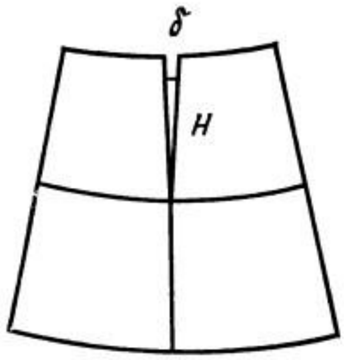
$$\delta = \Delta\lambda\Delta\varphi\cos\varphi\frac{\rho'}{(\rho^0)^2},$$ бу ерда

$\rho'/(\rho^\circ)^2 = 1{,}048$ га тенг, бу ҳолатда қуйидаги тенглик амал қилади:

$$\delta = 25{,}15'\cos\varphi$$

ва узилишнинг *мм* ҳисобидаги чизиқли қиймати

$$\bar{\delta} = \delta H/\rho' = 3{,}25\cos\varphi.$$



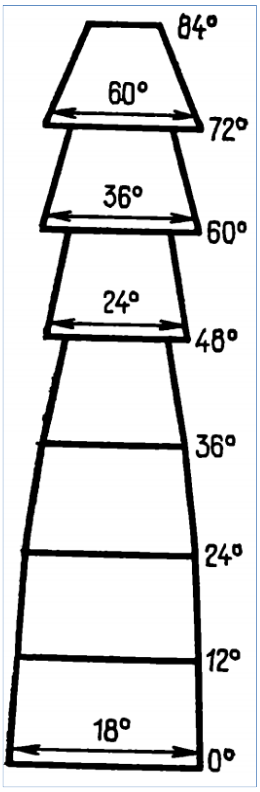
59-расм. **1:1 000 000 масштабли картани 4 та варағини бирлаштиришда юзага келадиган узилишлар**

55–§. 1:2 500 000 масштабли дунё картасини тузишда фойдаланиладиган проекциялар

Дунёнинг 1:2 500 000 масштабли картаси – бу Ер юзасини ягона масштабда, компоновка ва жиҳозлаш асосида тасвирлайдиган умумгеографик карта; у бир хил мазмунга, легенда ва тушунтириш қоидаларига эга. Бу карта йирик ҳудудлар мавзули карталарини тузиш учун картографик асос вазифасини бажаради. У йирик табиий географик ва иқтисодий районлар, давлатлар ва давлатлар гуруҳларини бир хилда батафсиллик асосида алоҳида варақларда тасвирлаш имконини беради. Кўрсатиб ўтилган хоссалар унинг математик асосини ишлаб чиқишга (проекция, *компоновка*) алоҳида талаблар қўйилишини белгилайди.

Картанинг асосий мақсади – унинг маълумотномали тавсифга эгалигидир, шу сабабли барча турдаги хатоликлар (узунлик, майдон, бурчак, шакл) нисбатан кичик қийматда бўлиши талаб этилади. Бироқ, эслатиш жоизки, хатоликни камайтиришга уриниш ҳар доим картада тасвирланаётган ҳудуд майдонини камайишига олиб келади, бу эса проекцияни кўп қирралик сифатидан фойдаланишга мажбур қилади ва ўз навбатида истеъмолчини карта варақларини узилишсиз блоклар кўринишида компоновка қилаш имкониятидан маҳрум қилади, бу маъқул эмас. Карта масштаби майда (жойда 1 км масофа картада 0,4 *мм* га тенг), генерализация даражаси сезиларли даражада юқори, карта орқали барча ўлчашлар тақрибан бўлишини ҳисобга олсак, унда барча хатолик турлари қиймати унча катта бўлмаслиги керак.

Юқорида таъкидлаб ўтилганларни эътиборга олган ҳолатда, қуйидаги хулосага келишимиз мумкин: 1:2 500 000 масштабли карта учун нисбатан мувофиқ ҳисобланган хатоликни берадиган проекция – бу ихтиёрий проекция ҳисобланади. Узунлик ва бурчак хатоликлари мос равишда 3 – 4% ва 2 – 3^0 дан ошмаслиги керак.



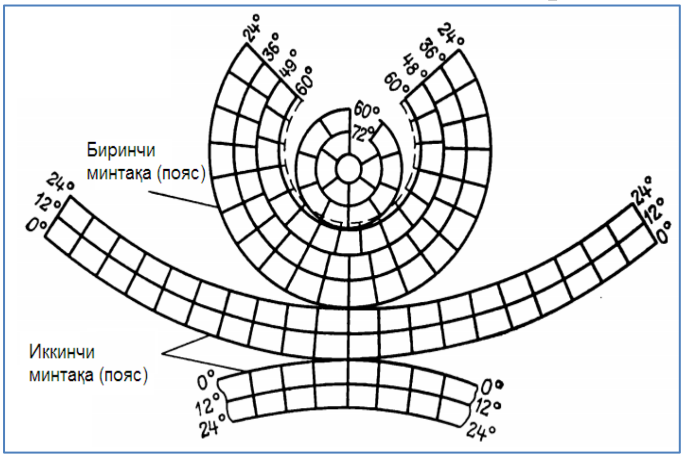
60–расм. **1:2 500 000 масштабли картанинг варақларга бўлиниши (разграфкаси)**

Меридиан ва параллеллари бўйича 1:2 500 000 масштабли карта варағи томонлари чўзилиши 1:1 000 000 масштабдаги карта варақлари томонлари узунлигининг каррали қиймати бўйича қабул қилинади; 1:2 500 000 масштабли картанинг битта варағи ўз таркибига 1:1 000 000 масштабли картанинг 9 тадан 12 тагача варағини қамраб олади.

Ҳар бир варақда четки параллелларнинг (қутбий ҳолат ҳисобга олинмаганда) фарқланиши 12^{o} ни ташкил қилади; $\Delta\lambda$ узоқлик бўйича карта варақнинг чўзилиши – кенгликка боғлиқ ҳолда ўзгаради (60–расм):

$\Delta\varphi$, градусда	0 – 48	48 – 60	60 – 72	72 – 84	84 – 90
Узоқлик бўйича варақнинг чўзилиши $\Delta\lambda$ (градус ҳисобида)	18	24	36	60	360
Қаторда варақлар сони q=360/$\Delta\lambda$	20	15	10	6	1

Карта қутбий варақлари айланали рамкали бўлиб, радиуси 6 градусли. Карта варақларини тузиш учун Красовский эллипсоиди қабул қилинган. Картада тасвирлаш учун ер юзаси 6 та йирик зоналарга бўлиб чиқилади, улардан иккитаси қутбий ($\pm 90^{o}$ дан $\pm 60^{o}$ гача) бўлиб, меридиани бўйича тенг ораликли бўлган азимутал проекцияда тузилади, қолган тўрттаси – меридиани бўйича тенг ораликли конусли проекцияда тузилади (ҳар бир ярим шарда иккитадан проекция): биринчи минтақа (*пояс*) $\pm 24^{o}$ дан $\pm 64^{o}$ гача, иккинчиси – 0^{o} дан $\pm 24^{o}$ гача тасвирланади (61 – расм).



61–расм. **1:2 500 000 масштабли картада зоналарнинг жойлашиш схемаси.**

Варақларнинг келтирилган ўлчамлари бўйича ҳар бир ярим шарда 112 та асосий карта ва кенглиги 4^{o} бўлган ($+60^{o}$ дан $+64^{o}$ гача) 10 та қўшимча карталар (шимолий ярим шарда) ҳосил бўлади. Алоҳида зоналарнинг туташ жойлари экватор бўйича ±24° ва ±60° кенгликдаги параллеллар бўйлаб ўтказилади; ушбу параллелларда кенглик бўйича бир неча градус қийматдаги қоплама соҳа берилади. 1:2 500 000 масштабли картани тузиш учун қўлланиладиган проекцияни қараб чиқамиз.

Меридианлари бўйича тенг оралиқли нормал азимутал проекция:

$$p = k\left(s_o^{90} - s\right) \qquad \delta = \lambda$$

бунда s_o^{90}— экватордан қутбгача меридиан ёйи узунлиги, k меридианлар масштабини аниқлайдиган параметр, m=0,99.

Бунда, параллеллар узунлиги сақланади s_φ = ± 76°.

$$x = p\cos\delta; \qquad y = p\sin\delta;$$

$$m = k = 0{,}99; \qquad n = p/r$$

$$p = mn; \qquad \sin(\omega/2) = (n - 0{,}99)/(n + 0{,}99)$$

± 60° кенгликли параллелларда максимал хатолик v_n = + 3,7 %, v_p = 2,6 % ва ω = 2,6° га тенг.

Меридианлари бўйича тенг оралиқли нормал конусли проекция

$$x = q - p\cos\delta; \qquad y = p\sin\delta;$$

$$p = C - s \qquad \delta = \alpha\lambda$$

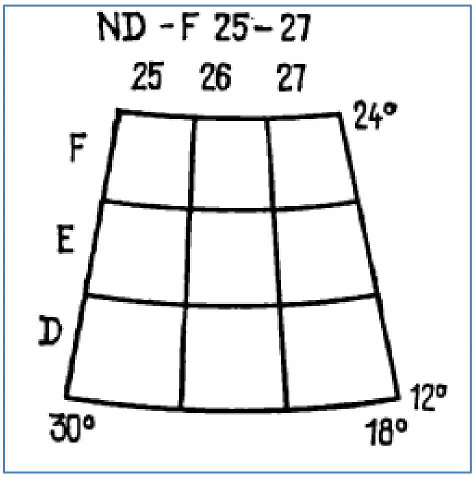
$$m = 1 \qquad n = p = \alpha p/r$$

$tg(45^o + \omega/4) = \sqrt{n}$ бунда параметрлар

$$\alpha = (r_1 - r_2)/(s_2 - s_1); \qquad C = s_1 + r_1/\alpha = s_2 - r_2/\alpha;$$

Бош параллелларнинг кенглиги биринчи поясда φ_1= ± 32°, φ_2= ± 64°. φ = ±48° кенгликдаги паралелларнинг максимал хатолиги $\vartheta_n = \vartheta_p = -39\%$; $\omega = 2{,}2°$ га ва $\varphi =$ = ± 24° параллеларда эса $\vartheta_n = \vartheta_p = +$ 4,0%, ω = 2,3° га тенг. Иккинчи поясда эса φ_1 = ± 4° и φ_2 = = ± 21°, максимал хатоликлар $\vartheta_n = \vartheta_p \leq 1$ %, ω < 0,7° га тенг.

Карта варақлари номенклатураси ярим шарларни белгилаш (62–расм), 1:2 500 000 масштабли карта варақлари таркибига киритилган 1:1 000 000 масштабли карта варақлари номенклатураси ва тузилаётган карта варағи тартиб рақами бирлашмасидан ҳосил қилинади, варақ тартиб рақами “йиғма варақ”дан олинади. Бундан ташқари, ҳар бир варақ шаҳар ёки бошқа географик объект билан номланади, масалан, «*53 Рим*», «*91 Яшил Бурун ороллари*».



62–расм. **1: 2 500 000 масштабли карта номенклатураси.**

Назорат саволлари

1. 1:1 000 000 масштабли карта варақлари ўлчамларининг турли кенгликларда ўзгариб боришини тушунтиринг.

2. 1:1 000 000 масштабли карта варағида хатоликлар қандай тақсимланган, уни чизмада кўрсатинг.

3. Майдон масштаби четки параллелларда қайси формулалар билан аниқланади?

4. 1:1 000 000 масштабли картани 4 та варағини бирлаштиришда юзага келадиган узилишлар миқдори қанча ва улар қандай аниқланади?

5. 1:2 500 000 масштабли дунё картасини тузишда қандай проекциялардан фойдаланилади?

6. 1:2 500 000 масштабли картанинг варақларга бўлиниши (разграфкаси) қандай ташкил этилади?

XI БОБ.
ТЕКИСЛИКДА АЙЛАНМА ЭЛЛИПСОИДНИНГ ТЕНГ БУРЧАКЛИ ПРОЕКЦИЯЛАРИ

56 – §. Умумий маълумотлар

Масалан, иккита юзани олайлик, S ва σ, бунда уларда $u = const,$ $\upsilon = const$ ва $\xi = const,$ $\eta = const$ кўринишга эга бўлган иккита эгри чизиқли координаталар тизими ўрнатилган бўлсин. Битта текисликни иккинчисида тасвирлаш учун юқорида қайд қилиб ўтилганидек, ушбу текисликлар координаталари ўртасида ўзаро бир хилликдаги мосликни қарор топиши талаб этилади:

$$\xi = f_1(u,\upsilon); \;\; \eta = f_2(u,\upsilon),$$

бу ерда f_1 ва f_2 функциялар ва уларнинг иккинчи даражадаги ҳосилалари ҳам узлуксиз, бир хил қийматга эга ва ўзаро мустақил бўлиши керак, яъни ҳудуди тасвирланаётган соҳани барча нуқталарида $\partial(\xi,\eta)/\partial(u,\upsilon)$ қиймат нолга тенг бўлиши талаб қилинади.

Юзанинг чизиқли элементларини S метрли шаклда ёзамиз:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdud\upsilon = Gd\upsilon^2,$$

бу ерда *E, F, G* – биринчи *S* юзанинг бирламчи квадрат шакллари коэффицентлари (*Гаусс коэффицентлари*).

S юзанинг σ юзада тенг бурчакли тасвирланиши учун, σ юза учун чизиқли элемент тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлиши керак:

$$d\sigma^2 = E'd\xi^2 + 2F'd\xi d\eta + G'd\eta^2 = Q^2(u,\upsilon)\times\left[Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2\right],$$

бу ерда *E', F' ва G'* – σ юзанинг бирламчи квадрат шакллари коэффицентлари; $Q(u,\upsilon)$ – биринчи ва иккинчи юзанинг чизиқли элементлари фарқланишлари функцияси. Бунда белгиланган ҳар иккала эгри чизиқли координаталар тизимида ўзаро пропорционаллик сақланиши таъминланиши талаб этилади:

$$\frac{E'd\xi^2}{Edu} = \frac{F'd\xi d\eta}{Fdud\upsilon} = \frac{G'd\eta^2}{Gd\upsilon^2} = Q^2(u,\upsilon).$$

Бироқ, бундай пропорционаллик мавжуд эмас ва уни эгри чизиқли координаталар тизимлари ўртасида қарор топтириш етарлича даражада мураккаб масала ҳисобланади. Шу сабабли, кўплаб ҳолатларда тенг бурчакли тасвирлашларни ҳосил қилиш мақсадида бирламчи квадрат шакллар изометрик кўринишда келтирилади:

$$ds^2 = P^2(\tau,\nu)\left[d\tau^2 + d\nu^2\right];$$

$$d\sigma^2 = \theta^2(p,t)\left[dp^2 + dt^2\right]$$

ёки Гаусс усули бўйича ёки уйғун функциялар назарияси асосида иш тутилади.

Иккинчи юзанинг ёйлари дифференциалини биринчи юза ёйлари дифференциали орқали ифодалаб,

$$dp = p_\tau d\tau + p_\nu d\nu;$$

$$dt = t_\tau d\tau + tvd\nu,$$

шу асосда σ юзада тасвирланаётган S юза учун хусусий масштаблар формулаларини ҳосил қилиш мумкин:

$$m^2 = \frac{\theta^2(p,t)}{P^2(\tau,\nu)}\left[p_\tau^2 + t_\tau^2\right];$$

$$n^2 = \frac{\theta^2(p,t)}{P^2(\tau,\nu)}\left[p_\nu^2 + t_\nu^2\right]$$

Олинган формулалардан битта ихтиёрий юзада иккинчисини тасвирлаш учун фойдаланилади. Қайд қилиш керакки, мураккаб тавсифга эга бўлган юзаларни тасвирлашда (уч ўқли эллипсоид ва нисбатан мураккаб юзалар) берилган u, υ ёки ξ, η эгри чизиқли координаталар бўйича изометрик координаталарни аниқлаш масаласи сезиларли даражада қийинчилик туғдиради. Лекин айланма эллипсоидни геодезик координаталари бўйича изометрик координаталарни аниқлаш анча осон.

Бу ҳолатда эллипсоид юзаси текисликда $\tau,\ \nu;\ u,\ \upsilon$ ва $p,\ t;\ \xi,\ \eta$ координаталар тизими билан биргаликда, $P(u,\upsilon),\ \theta(p,t)$ метрик элементлар учун қуйидагини оламиз:

– эллипсоид юзасида $q,\ \lambda$ – изометрик координаталар; $\varphi,\ \lambda$ – геодезик координаталар; параллелларнинг эгрилик радиуси: $r = P(u,\upsilon) = N\cos\varphi;$

– текисликда $x,\ y$ – тўғри бурчакли координаталар, улар билан маълум боғлиқликдаги геодезик координаталар (φ,λ), ёки эллипсоид юзаси изометрик координаталари (q,λ) билан; бунда қисм $\theta(p,t)=1$.

Айланма эллипсоид юзасида изометрик ва геодезик координаталар ўртасидаги боғлиқлик формула билан аниқланади

$$q = \int -\frac{M d\varphi}{r} = \ln U = \ln\frac{tg(45^\circ+\varphi/2)}{tg^{e}(45^\circ+\psi/2)}\ ;\ \psi = \arcsin(\ e\sin\varphi)$$

узунлик хусусий масштаблари формулалари қуйидагича

$$m = \frac{1}{M}(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)^{1/2} = \frac{1}{r}\sqrt{x_q^2 + y_q^2};\quad n = \frac{1}{r}\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}.$$

I бобда тенг бурчакли проекцияни ҳосил қилишни қониқтирувчи шартларга ойдинлик киритилган эди. Тасвирлашга белгиланган талаблардан келиб чиққан ҳолда, турли тенг бурчакли проекцияларни ҳосил қилиш мумкин, улардан кўпчилиги картографик амалиётда кенг фойдаланилмоқда. Бундай проекциялар маълум афзаллик ва камчиликларга эга. П.Л.Чебышев теоремасига мувофиқ, бир қатор тенг бурчакли проекциялар мавжуд. Бу бобда шундай проекцияларни ва ҳали кенг қўлланилиши қайд этилмаган проекцияларни қараб чиқамиз.

57 – §. Гаусс–Крюгер проекцияси ва ундан собиқ иттифоқ топографик карталарини тузишда фойдаланиш

1928 йилда собиқ иттифоқда ўтказилган III Геодезик кенгашда барча геодезик ва топографик ишларда Бессель эллипсоидида Гаусс–Крюгер проекциясидан фойдаланиш қарори қабул қилинди. Бу проекция асосида 1:500 000 дан йирик масштабли барча топографик карталарни тузиш бошланган. 1939 йилдан Гаусс–Крюгер проекцияси 1:500 000 масштабли карталарни тузиш учун ҳам фойдаланила бошланган.

Гаусс–Крюгер проекциясида эллипсоидни текисликда тасвирлаш меридиан зоналари бўйича амалга оширилади, зона кенглиги олти градусга тенг (1:10 000 – 1:500 000 масштабли карталар учун), уч градусли зона 1:2 000 – 1:5 000 масштабли планлар учун қўлланилади. Меридиан ва параллеллар зона ўқ меридиани ва экваторга нисбатан симмерик жойлашган эгри чизиқлар билан тасвирланади. Бунда меридианлар эгри чизиқлари шу даражада кичик қийматга эгаки, картанинг ғарбий ва шарқий рамкалари ўзаро мос тушади ва тўғри чизиқлар билан тасвирланади. Картанинг шимолий ва жанубий рамкалари билан мос тушувчи параллеллари фақат йирик масштабли (1:2 000 – 1:50 000) карталардагина тасвирланади, нисбатан майда масштабдаги карталарда улар эгри чизиқлар билан тасвирланади. Ҳар бир зонада тўғри бурчакли координаталар боши ўқ меридианнинг экватор билан кесишиш нуқтасида жойлашади.

Собиқ иттифоқда 1:1 000 000 масштабли карталар колонналари рақамларидан ўттизта бирликга фарқланувчи зоналар рақамланиши қабул қилинган, яъни $L_0 = 21^\circ$ ўқ меридиан узунлиги билан белгиланувчи, четки ғарбий зона 4 рақамига эга бўлиб, шарққа томон зоналар рақамланиши ортиб боради (Чукотка ҳудудида 32 гача етади).

Бу проекция 1825 йилда Гаусс томонидан ишлаб чиқилган бўлиб, унда биринчи марта битта юзанинг иккинчисида тасвирланишида чексиз даражада кичик қисмларнинг ўхшашлиги сақланиши бўйича умумий масалани ечиш амалга оширилган. Ушбу умумий масаланинг хусусий ҳолати айланма эллипсоид юзасининг текисликда тасвирланиши бўйича картографик масалани ечишдан иборат. Гаусс проекциядан Ганновер триангуляциясини қайта ҳисоблаш учун фойдаланди, шундан кейин бу проекция деярли ишлатилмади. 1912 йилда Крюгер Гаусс бажарган илмий ишларни нашр қилиш ва шарҳлаш ишларини олиб борган, шунда бу проекция ишчи формулаларини ишлаб чиқди. Шундан кейин, бу проекция *Гаусс – Крюгер проекцияси* номи билан аталган ва топографик ишларни бажаришда кенг қўлланила бошланган.

Проекцияни қоидасини кўриб чиқамиз. 56-§ орқали тенг бурчакли проекцияни умумий формуласини ёзиш мумкин

$x + iy = F(q + i\lambda)$,

бунда q ва λ — изометрик координаталар, функция F ҳар хил усуллар билан олиниши мумкин: чизиқли, даражали, Тейлор қаторини бўлиш орқали.

$$F = (q + i\lambda) = F(q) + i\lambda\frac{dF(q)}{dq} + \frac{(i\lambda)^2}{2!}\frac{d^2F(q)}{dq^2} + \frac{(i\lambda)^3}{3!}\frac{d^3F(q)}{dq^3} + \ldots,$$

лекин $i=\sqrt{-1}$; $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4=+1$ ва ҳ.к., (198) формуладан

$$x + iy =$$

$$F(q) + i\lambda\frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2F(q)}{dq^2} - i\frac{\lambda^3}{6}\frac{d^3F(q)}{dq^3} + \frac{\lambda^4}{24}\frac{d^4F(q)}{dq^4} + i\frac{\lambda^5}{120}\frac{d^5F(q)}{dq^5} - \ldots,$$

бундан тенг бурчакли проекциялар умумий формулалари

$$x = F(q) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2F(q)}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24}\frac{d^4F(q)}{dq^4} \ldots \qquad (199)$$

$$y = \lambda\frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^3}{6}\frac{d^3F(q)}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120}\frac{d^5F(q)}{dq^5} \ldots;$$

$F(q)$ қиймат тавсиф деб номланади; картографик тўр ўқ меридианга нисбатан симметрик ҳолатда бўлган проекцияларда бу қиймат ушбу меридиан бўйича абсциссани тавсифлайди.

Гаусс–Крюгер проекциясини олишда қуйидаги шартларни белгилаш керак: проекция ўрта меридиан ва экваторга нисбатан симметрик ва тенг бурчакли тавсифга эга; *X* ўқи билан устма–уст тушувчи зона ўқ меридиани тўғри чизиқ билан ифодаланади; ўқ меридиан узунлиги хатоликсиз тасвирланади, яъни $m_0 = 1$. Охирги шарт қуйидаги тенгликга олиб келади: $F(q) = s_m = X$, бунда X — геодезияда қабул қилинган экватордан жорий параллелгача бўлган меридиан ёйи узунлиги белгиси.

Олинган характеристикани (199) тенгликга қўйиб, оламиз

$$x = S_m - \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2 s_m}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24}\frac{ds^4 m}{dq^4} - \ldots;$$

$$y = \lambda\frac{ds_m}{dq} - \frac{\lambda^3}{6}\frac{d^3 s_m}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120}\frac{d^5 s_m}{dq^5} - \ldots;$$

Ҳосилаларни $\frac{ds_m}{dq}, \frac{d^2 s_m}{dq^2}, \frac{d^3 s_m}{dq^3}$ топамиз ва (200) тенгликни қўйиб

$\frac{ds_m}{dq} = \frac{ds_m}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dq}$, лекин $d\varphi/dq = r/M$, (197) формуладан ва $ds_m/d\varphi = M$, шу сабабли $ds_m/dq = r = N\cos\varphi$, яъни биринчи ҳосила олинган параллел радиусига тенг;

$\frac{d^2 s_m}{dq^2} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dq}$ лекин $dr/d\varphi = -M\sin\varphi$; $d\varphi/dq = r/M$,

бундан $\frac{d^2 s_m}{dq^2} - r\sin\varphi = -N\cos\varphi\sin\varphi$;

$$\frac{d^3 s_m}{dq^3} = -\frac{d(N\cos\varphi\sin\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dq},$$

ёки

$$\frac{d(N\cos\varphi\sin\varphi)}{d\varphi} = r_\varphi\sin\varphi + N\sin^2\varphi = -M\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi$$

$\frac{d^3 s_M}{dq^3} = -N\cos^3\varphi\left(\frac{N}{M} - \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)$, агар белгиласак $\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = t^2$.

Унда $\sin^2\varphi$ (1-$\cos^2\varphi$) формула билан алмаштириб,

$N/M = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2}$ оламиз

$$N/M = 1 + [e^e/(1-e^2)]\cos^2\varphi = 1 + e'^2\cos^2\varphi = 1 + \eta^2,$$

бунда e'^2 – иккинчи эксцентриситет квадрати; унда

$$\frac{d^3 s_m}{dq^3} = -N\cos^3\varphi(1 - t^2 + \eta^2)$$

Тўртинчи ва бешинчи ҳосилани ёзиш мумкин

$$\frac{d^4 s_M}{dq^4} = -N\cos^3\varphi\sin\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$

$$\frac{d^5 s_M}{dq^5} = -N\cos^3\varphi\sin\varphi(5 - 18t^2 + t^4 - 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)$$

(198) формулага ҳосилани қўйиб, оламиз:

$$x = s_m + \frac{\lambda^2}{2} N\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\lambda^4}{24} N\cos^4\sin\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \ldots;$$

$$y = \lambda N\cos\varphi + \frac{\lambda^3}{6} N\cos^3\varphi(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5}{120} N\cos^5\varphi(5 - 18t^2 + t^2 - \ldots)$$

1:50 000 масштабли карталарни тузишда таркибида λ^4 ва λ^5 мавжуд бўлган формула қисмлари, одатда, ҳисобга олинмайди.

Қараб чиқилган Гаусс–Крюгер проекцияси қатъий равишда тўғри бурчакли эмас, чунки уни ҳосил қилишда шундай қаторлар парчаланишидан фойдаланилганки, унда Коши–Риман шартининг фақат битта ҳолати бажарилади; агар проекция тенгламасига яна битта қўшимча қисм қатори киритилса, у ҳолда иккинчи шарт бажарилиши бошланади, олдин бажарилган биринчиси эса бажарилмайди. Проекцияни формулаларида етарлича сонли миқдорда (7–8 та) қисмлар сақланиши деярли тенг бурчакли тавсифга эга, шу сабабли таъкидлаш жоизки, унинг таркибида ҳам тўрнинг ортогоналлик шарти, ҳам масштаблар тенглиги шарти бажарилади.

Таркибида λ^2 мавжуд бўлган қисмларнинг чекланиши асосида узунлик хусусий масштаби формуласини келтириб чиқарамиз. Узунлик хусусий масштабини топиш учун маълум бўлган формуладан фойдаланамиз:

$$m = n = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^3}$$ x_λ y_λ ҳосилалари қиймати билан.

Унда Гаусса коэффициенти g тенг

$g = N^2\cos^2\varphi\ |\lambda^2\sin^2\varphi + 1 + \lambda^2\cos^2\varphi\ (1 - t^2 + \eta^2)\ \ ] =$

$= N^2\cos^2\varphi\ [1 + \lambda^2\cos^2\phi\ (\sin^2\varphi/\cos^2\varphi + 1 - t^2 + \eta^2)] =$

$= N^2\cos^2\varphi\ [1 + \lambda^2\cos^2\phi\ (1 + \eta^2)]$

g қийматини формулага қўйсак (λ ва ρ градусда):

$m = n = [1 + \lambda^2\cos^2\varphi\ (1 + \eta^2)^{1/2} = 1 + [(\lambda)^2/2(p)^2]\cos^2\varphi\ (1+\eta^2) = 1 + 0{,}000\ 152\ (\lambda)^2\cos^2\varphi\ (1+\eta^2)$.

Картографик амалиётда $+\eta^2$ қиймати эътиборга олинмайди. Унда

$$m = n = 1 + 0{,}000\ 152\ \lambda^2\cos^2\varphi \qquad (201)$$

Ўтказилган тадқиқотларга кўра, Гаусс–Крюгер проекциясида изоколалар ўқ меридиан бўйлаб чўзилган бўлиб, овал кўринишга эга. Ҳар бир зонада узунликнинг максимал хатолиги $\varphi = 0$ ва $\lambda = \pm 3^\circ$ шароитда кузатилади; бу нуқталарда хатолик $\upsilon_m = 0{,}14\%$ гача етади. Уч градусли зона ўқ меридианлари навбатма-навбат олти градусли ўқ меридианларга мос тушади, ёки зоналарнинг четки меридианлари билан устма – уст тушади.

Гаусс–Крюгер проекцияси 35–§ да қараб чиқилган тенг бурчакли кўндаланг цилиндрик Гаусс–Ламберт проекцияси билан кўплаб умумийликларга эга, бироқ унга тўлиқ мос тушмайди; бунга проекцияларни солиштириш йўли билан осонликча ишонч ҳосил қилиш мумкин. Биринчи проекция бевосита эллипсоидни текисликдаги тасвири, иккинчиси (Гаусс–Ламберт проекцияси) – шар проекциясидир.

Қатор мамлакатларда ҳозирги вақтда топографик карталар учун зонаси олти градусли универсал кўндаланг–цилиндрик Меркатор проекциясидан (*UTM*) фойдаланилади. Бу проекциялар ўз хоссалари ва хатоликлари тақсимланиши бўйича Гаусс–Крюгер проекциясига жуда яқин, уларда ҳар бир зона ўқ меридианида масштаб m_0 = 1 га эмас, балки 0,9996 га тенг.

Ўқ меридандан ҳар икки томонга 200 км атрофида масофа бўйлаб ва унга параллел ҳолатда узунлик бўйича нол хатоликли иккита изоколалар жойлашган. Ўқ меридиандан узоқлашган сари узунлик масштаби бирдан катталашади ва зона четки меридианларнинг экватор билан кесишиши жойида қиймати максимал бўлади ($\upsilon_m = +0{,}05\%$).

58 – §. Собиқ иттифоқ топографик карталари разграфкаси ва номенклатураси

Кўп варақли карталардан фойдаланишни осонлаштириш учун барча варақлар маълум бир тизимда белгиланади (номенклатура киритилади). Собиқ иттифоқда қабул қилинган топографик карталарнинг номенклатураси ва варақларга бўлинишини (разграфкани) эслатиб ўтамиз. Уларнинг асосини 1:1 000 000 масштабли карта номенклатураси ва разграфкаси ташкил этади. Разграфкада карталар рамкаси ўлчамлари 8 – жадвалда келтирилган.

8-жадвал.

Карталар рамкаси ўлчамлари

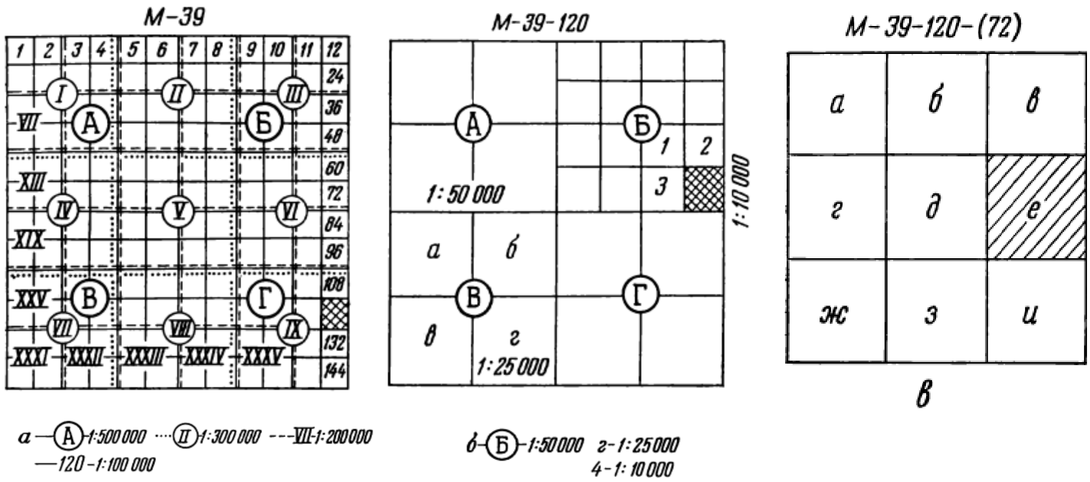
Карта масштаби	Томонлар ўлчами		Карта масштаби	Томонлар ўлчами	
	Меридианлар бўйича	Параллеллар бўйича		Меридианлар бўйича	Параллеллар бўйича
1 : 1 000	$4^0$00'	6°00'	1 : 50 000	10’ 00'	15’ 00
1 : 500 000	2° 00	3°00	1 : 25 000	5 00	7 30
1 : 300 000	1° 20	2° 00	1 : 10 000	2 30	3 45
1 : 200 000	0°40	1°00	1 : 5 ООО	1 15	1 52.5
1 : 100 000	0°20	0°30	1 : 2 000	0 25	0 37,5

Битта 1:1 000 000 масштабли карта трапециясида 4 та 1 : 500 000 масштабли трапеция, 9 та 1:300 000 масштабли трапеция, 36 та 1:200 000 масштабли трапеция ва 144 та 1:100 000 масштабли трапеция жойлашади.

1:500 000 масштабли карта рус алфавити бош ҳарфлари билан белгиланади А, Б, В, Г, у 1 : 1 000 000 масштабли карта номенклатурасидан кейин ёзилади, масалан М-39-Б; 1:300 000 масштабли карта варақлари рим рақамлари билан белгиланади i-IX, улар 1:1 000 000 масштабли карта номенклатурасидан олдин ёзилади, масалан, VIII-М-39. 1:200 000 мастабли карта варақлари ҳам рим рақамлари билан белгиланади I-XXXVI, улар 1:1 000 000 масштабли карта номенклатурасидан кейин ёзилади, масалан, М-39-XXVII; ва ниҳоят, 1:100 000 масштабли карта трапецияси араб рақамлари билан 1 дан 144 гача белгиланади, улар ҳам 1:1 000 000 масштабли карта номенклатурасидан кейин ёзилади, масалан, М-39-120. Бунда рақамларни қўйиб чиқиш чапдан ўнгга қаторлар бўйлаб, шимолдан жанубга томон ҳисобланади (63,а-расм).

1:100 000 масштабли карта варағи йирик масштабли карталар разграфкаси ва номенклатурасига асос қилиб олинган; битта 1:100 000 масштабли карта варағида 4 та 1:50 000 масштабли карта варақлари жойлашади, улар рус алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади А, Б, В, Г, масалан, М-39-120-Б. 1:50 000 масштали карта варағида 4 та 1:25 000 масштабли карта варақлари жойлашади, улар рус алфавити кичик ҳарфлари билан белгиланади *а, б, в, г*, масалан, М-39-120-Б-*г* (63,б-расм).

1:25 000 масштабли карта варағида 1:10 000 масштабли картанинг 4 та варағи жойлашади, улар 1, 2, 3, 4 араб рақамлари билан белгиланади, масалан: *М-39-120-Б-г-4*. Бундан ташқари, 1:100 000 масштабли карта варағи таркибида 1:5 000 масштабли картанинг 256 та варағи жойлашади, улар қавсларга олинган ҳолда 1 дан 256 гача араб рақамлари билан белгиланади, масалан (63 *в* – расм): *М*-39-120-(72).



63–расм. **Собиқ Иттифоқ топографик карталарининг разграфкаларини ишлаб чиқиш ва номенклатураси**

1:5 000 масштабли карта варағида 1:2 000 масштабли картанинг 9 та варағи жойлашади, бу варақлар *а* дан *и* гача бўлган ҳарфлар билан белгиланади. 60^0 – 70^o кенгликда топографик карталар варақлари номенклатураси икки карра оширилади, $\varphi = 76^{\circ}$ кенгликдаги шимолий параллелларда эса тўрт карра оширилади.

59 – §. Кенг полосалар учун Гаусс–Крюгер проекцияси

Кенг полосалар учун Гаусс–Крюгер проекцияси формулаларини ишлаб чиқиш билан кўп олимлар Л.Крюгер, В.В.Каврайский, В.П.Морозов ва бошқалар кенг кўламда шуғулланишган. Бундай изланишлар энг аввало, проекциянинг афзаллик жиҳатлари ва ундан топографик карталарни тузишда ҳамда геодезик ўлчашларни қайта ишлашда кенг миқёсда фойдаланиш билан боғлиқ бўлди. Шунингдек, Гаусс–Крюгер формулалари эллипсоидни текисликда тасвирлашда, асосан, фақат тор зоналар бўйича масалалар ечиш учун яроқли ҳисобланиши бўйича тадқиқотлар олиб борилишига туртки берган. Аслида бу проекция берилган шартлар бўйича тенг бурчакли ҳисобланиб, ўз навбатида унда Коши – Риман шарти бажарилиши талаб қилинади:

$x_q = y_\lambda; \quad x_\lambda = -y_q$ ёки Лаплас тенгламасига амал қилинади:

$$x_{qq} + x_{yy} = 0; \quad y_{qq} + y_{\lambda\lambda} = 0,$$

$$\ln \mu_{qq} + \ln \mu_{\lambda\lambda} = 0; \quad \gamma_{qq} + \gamma_{\lambda\lambda} = 0.$$

Бироқ, юқорида қайд қилиб ўтилганидек, унда бир вақтнинг ўзида фақат Коши–Риман шартларидан бири бажарилади ва Лаплас тенгламаси эса тўлиқ ҳолда бажарилмайди. Масалан, Гаусс–Крюгер проекциясида абсциссани ҳисоблаш учун тўртта қисмга эга бўлган (фақат кенглик функциялари ҳисобланган узилиш тавсифидаги A_i коэффицент билан биргаликда) ва ординатани ҳисоблашга мос келувчи учта қисмга эга бўлган λ даражаси бўйича ўзаро симметрик қаторлар кўринишида берилган бўлсин.

Белгилаймиз

$$x = X + \Delta x; \quad y = Y + \Delta y,$$

бу ерда X, Y – Гаусс–Крюгер проекцияси координаталари; Δx, Δy – X, Y координаталардан тенг бурчакли проекция x, y координаталарга ўтишда киритилган тузатмалар.

$\Delta x_{qq}+\Delta x_{\lambda\lambda} = 56A_8\lambda^6$

$\Delta y_{qq}+\Delta y_{\lambda\lambda} = 42A_7\lambda^5$

бунда

$A_8 = 1/6!N \cos^7\varphi \sin\varphi\ (1385 — 3111\ tg^2\varphi + 543\ tg^4\varphi — tg^6\varphi)$;

$A_7 = 1/5!N \cos^7\varphi\ (61 — 479\ tg^2\varphi + 179\ tg^4\varphi — tg^6\varphi)$;

Шу сабабли Гаусс–Крюгер проекцияси формулаларидан фойдаланишда картага олинаётган зонанинг кенгайтирилиши ёки тузиб чиқилувчи карта масштабларини йириклаштириш талаб қилиниши шароитида кўрсатиб ўтилган формулаларда парчаланишнинг сақланувчи қисмлари сон миқдорини ошириш эҳтиёжи туғилади.

Бу ҳолат ҳисоблаш ҳажмини сезиларли даражада ортишига олиб келади, А.3.Сазонов тадқиқотларида 60^o га яқин узоқликли фарқларда бу ҳисоблашни ҳатто ЭҲМдан фойдаланиб хам бажариш мумкин эмас. Қараб чиқилаётган проекцияни олиш учун бир нечта усуллардан фойдаланиш мумкин. Бунда Л.Крюгер таклиф этган ва В.В.Каврайский, М.Д.Соловьев, В.П.Морозов томонидан батафсил ўрганилган Гаусс–Крюгер проекциясини олиш усулини келтирамиз.

Бунда проекция учланган тасвирлаш усулида ҳосил қилинади:

– эллипсоид сирти шар юзасида Мольвайде усулида тенг бурчакли тасвирланади;

– текисликда шарнинг Гаусс–Ламберт тенг бурчакли проекцияси ҳосил қилинади;

– ўрта меридианда узунликнинг сақланишида ҳосил қилинган проекциянинг конформ шаклда қайта ўзгартирилиши амалга оширилади.

Шар юзасида эллипсоидни тасвирлашда эллипсоид нуқталари геодезик координаталари φ, λ ва географик координаталар $\varphi_ш$, $\lambda_ш$ ўртасидаги боғлиқлик қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$\lambda_ш = \lambda; \; q_ш = q \ln U$$

ёки

$$tg(45^\circ + \varphi_ш / 2) = tg(45^\circ + \varphi / 2)\left[(1 - e\sin\varphi)/(1 + e\sin\varphi)\right]^{e/2}. \qquad (202)$$

Охирги тенгликни Тейлор қаторига тақсимлаш натижасида

$\varphi_ш = \varphi - a_2 sin2\varphi \; + a_4 sin4\varphi \; - a_6 sin6\varphi \; + \cdots$ унда

$$a_2 = 2(n' - \tfrac{1}{3}n'^2 - \tfrac{2}{3}n'^3 + \cdots)$$

$$a_4 = \tfrac{5}{3}n'^2 - \tfrac{16}{15}n'^3 + \cdots;$$

$$a_6 = \tfrac{26}{15}n'^3 + \cdots;$$

$n' = (a - b)/(a + b)$, бунда a ва b — эллипсоид ярим ўқлари.

Красовский эллипсоидига қўлланганда:

$a_2 = 0.003\,356\,072\,8$; $\quad a_4 = 0.000\,004\,693\,2$;

$a_6 = 0.000\,000\,008\,2$.

Олинган қийматлар $\varphi_ш$, $\lambda_ш$ Гаусс–Ламберт проекцияси тўғри бурчакли $x_{Г-Л}$, $y_{Г-Л}$ координаталарини ҳисоблашда фойдаланилади, қулайлик учун буларни $R\xi$ ва $R\eta$ билан белгилашни киритамиз, унда

$$\xi = arctg(tg\varphi_ш \sec\lambda_ш);$$

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \cos\varphi_ш \sin\lambda_ш}{1 - \cos\varphi_ш \sin\lambda_ш}. \qquad (205)$$

Учинчи ўзгартиришни бажариш учун, яъни Гаусс–Ламберт проекциясидан Гаусс–Крюгер проекциясига ўтиш учун қуйидаги кўринишдаги аналитик функциядан фойдаланилади:

$$x + iy = F(\xi + i\eta). \qquad (206)$$

Ўрта меридиан нуқталари учун бу функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_0 = F(\xi_0) = F(\varphi_ш).$$

Гаусс–Крюгер проекцияси шарти бўйича узунлик ўрта меридианда сақланади, яъни $x_0 = s_m$, бу ерда s_m – экватордан берилган параллелгача меридиан ёйи узунлиги.

Сфероидик геодезиядан меридиан ёйи узунлиги s_m ва эллипсоидни геодезик кенгиги φ ўртасидаги боғлиқлик формуласи маълум. Бирок, φ ва $\varphi_ш$ кенгликлар боғлиқлиги формуласини ҳисобга олган ҳолда, ўзгартиришлар амалга оширилганидан кейин x_0 қийматни ҳисоблаш учун қуйидаги тенгламани ҳосил қилиш мумкин:

$$x_0 = s_m = R(\varphi_ш + \alpha_2 \sin 2\varphi_ш + \alpha_4 \sin 4\varphi_ш + ...),$$

бунда

$$R = \frac{a}{1+n'}\left(1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + ...\right);$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}n' - \frac{2}{3}n'^2 + \frac{15}{16}n'^3 + ...;$$

$$\alpha_4 = \frac{13}{48}n'^2 - \frac{3}{5}n'^3 ...$$

Красовский эллипсоидига нисбатан тадбиқ этиш бўйича

$R = 6367558{,}4969$; $\alpha_2 = 0{,}0008376118$; $\alpha_4 = 0{,}0000007606.$

Ўрта меридианда $x = x_0$ ва $\xi = \xi_0 = \varphi_ш$ тенглик амал қилишини ҳисобга олган ҳолда, умумий ҳолатда аналитик функцияда x_0 қиймати ўрнига $x + iy$ қийматни қўйиш ва шунингдек, ξ_0 қиймат ўрнига $\xi + i\eta$ қийматни қўйиш орқали ёзиш амалга оширилади.

У ҳолда, комплекс ўзгарувчи функция формулаларини тадбиқ этиш орқали, ҳосил қилинган таҳлилий функцияда ҳақиқий қисмни ҳаёлий қисмдан ажратишни амалга оширамиз ва натижада Гаусс–Крюгер тенг бурчакли проекциясида қатъий тартибдаги тўғри бурчакли координаталар формулаларини ҳосил қиламиз:

$$x = R(\xi + \alpha_2 \sin 2\xi ch2\eta + \alpha_4 \sin 4\xi ch4\eta + ...);$$

$$y = R(\eta + \alpha_2 \cos 2\xi sh2\eta + \alpha_4 \cos 4\xi sh4\eta + ...).$$

Узоқлик Δλ=30° бўлганда, проекциянинг тўғри бурчакли координаталарини ҳисоблаш хатолиги 0,1 м дан кам бўлади.

Проекцияда узунликни хусусий масштаби

$m = m_1 m_2 m_{3,}$

бу ерда m_1, m_2, m_3 — юқорида келтирилган 3 хил тенг бурчакли тасвирлашнинг хусусий масштаблари.

Умумий ҳолатда

$$m = \frac{R\cos\varphi}{\mathrm{N}\cos\varphi}\sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{1 - \cos^2\varphi\sin^2\lambda}}$$

В.П.Морозов белгиларини киритиб, оламиз

$$m = \frac{H\cos\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1 + e^2\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{1 + \cos^2\varphi\sin^2\lambda}}$$

бунда H = 0,994 977 825; e'^2 = 0,006 738 525 4 (Красовский эллипсоиди учун). Қуйидаги тенгликдан хусусий ҳосилаларни етарлича аниқликда топиш мумкин

$$x_\xi = 1 + 2\alpha_2 cos2\xi ch2\eta + 4\alpha_4(2ch2\eta - 1)2cos^2\xi - 1);$$

$$y_\xi = -2sh2\eta sin2\xi(\alpha_2 + 8\alpha_4 ch2\eta cos2\xi).$$

Кўриб чиқилаётган Гаусс—Крюгер проекциясида меридианлар яқинлашиши

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, бунда

$\gamma_1 = arctg(sin\varphi_{ш} tg\lambda_{ш});$

$\gamma_2 = -y_\xi / x_{\xi,}$

$x_{\xi,} y_\xi$ — юқорида келтирилган хусусий ҳосилалар.

Гаусс–Крюгер проекциясини олишни бундай усулининг афзаллиги шундаки, формулалари нисбатан оддий ва хохлаган узоқлик фарқларида ($\varphi = 0,\ \lambda = 90^\circ$ нуқталар ва уларнинг четлари бундан мустасно) проекцияни ҳисоблаш имкони бор.

60 – §. Мослашувчан изоколали тенг бурчакли проекциялар

Бу проекциялар таркибига Схольс, Лаборд, Юнг, Лагранж проекцияларини киритиш мумкин. Схольс проекцияси майдони бўйича кичик ҳудудларни (масалан, Голландия ҳудудини) картага олиш, Лаборд проекциясида топографик карталарни тузиш, Мадагаскар оролида геодезик ўлчашларни амалга оширишга мўлжалланган; Юнг проекцияси дастлабки иккита проекцияга ўхшаш. Лагранж проекцияси ҳам кичик ва ҳам йирик худудлар карталарини тузишда қўлланилиши мумкин. Қуйида уларнинг баъзи хоссалари қараб чиқилади. Мослашувчан изоколали тенг бурчакли проекцияларни олиш ва улардан фойдаланиш ҳақидаги масалалар Л.А.Вахрамеева тадқиқотларида баён қилинган. Бу проекциялар бир жинсли уйғун кўпҳад ва функцияни қаторларга бўлинишидан ҳосил бўлади.

Проекцияларни олишнинг биринчи усулини караб чиқамиз.

Хақиқий D худудда иккита ўзгарувчан (x, y) нинг уйғун функцияси деб, бу худудда узлуксиз икки марта дефференциалланиш хусусиятига эга ва Лаплас тенгламасини қониқтирадиган функцияга айтилади.

$u_{qq} + u_{\lambda\lambda} = 0$ бунда q ва λ — изометрик координаталар.

Бу тенгламанинг ечими сифатида функция $u = F(x + iy)$ D худуд учун узлуксиз. Тахмин қиламиз

$$u = F(x + iy) = (x + iy)^n. \qquad (207)$$

Унда кетма-кет (207) тенглик n (n = 1, 2, 3, . . .) даражага кўтарилади ва ҳақиқий ва мавҳум ҳадлар ажратилади, шунда тенг бурчакли проекциялар тўғри бурчакли формулаларини қуйидагича тасоввур этиш мумкин:

$x = \sum_{i=1}^{k}(a_i\psi_i - b_i\theta_i)$; $y = \sum_{i=1}^{k}(a_i\theta_i + b_i\psi_i)$

бунда $a_{i\,,} b_i$ — доимий коэффициентлар, ψ_i, θ_i — уйғун кўпҳад бўлаклари, масалан, улар В.П.Морозов формулари асосида аниқланади:

$\psi_1 = (q - q_o) = \boldsymbol{\xi}$; $\theta_1 = (\lambda - \lambda_o) = \eta$

$\psi_2 = \boldsymbol{\xi}\psi_1 - \eta\theta_1$; $\theta_2 = \boldsymbol{\xi}\theta_1 + \eta\psi_1$

. . . .

$\psi_k = \boldsymbol{\xi}\psi_{k-1} - \eta\theta_{k-1}$; $\theta_k = \boldsymbol{\xi}\theta_{k-1} + \eta\psi_{k-1}$

(208) формулалар симметрик ёки асимметрик шаклга эга бўлган худудларни картага олиш учун зарур бўлган тенг бурчакли картографик проекциялар формулаларини олиш имконини беради. Биринчи ҳолат учун (208) тенгликни қуйидагича ифодалаш мумкин

$x = \sum_{i=l}^{k} a_i\psi_i$; $y = \sum_{i=l}^{k} a_i\theta_i$;

Картографик проекцияларнинг умумий назариясига асосан, бундай проекцияларда узунлик хусусий масштаби ва меридианлар яқинлашиши формулалари қуйидагича бўлади

$\mu = \frac{1}{r}\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \frac{1}{r}\sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}$;

$tg\gamma = y_\xi / x_\xi$,

$x_\xi = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i\psi_i\right]\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{k} i a_i \psi_{i-1}$;

$y_\xi = \left[\sum_{i=2}^{k} a_i\theta_i\right]\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=2}^{k} i a_i \theta_{i-1}$;

$r = N cos\varphi$; $N = a/(1 - e^2 sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$

a, e - эллипсоидни катта ярим ўқи ва биринчи эксцентриситети.

Амалиётда бу формулалардан фойдаланишда иккита савол туғилади:

- тенгликда нечта уйғун кўпҳадлар сонини сақлаш керак;

- ўзгармас коэффициентлар a_i, b_i аниқлаш усулларини танлаш керак.

Илмий тадқиқотлар натижасига кўра, агар (*209*) формулада фақат битта параметр (a_0) сақланса, Меркатор проекцияси олинади, агар иккита параметр (a_0, a_1) сақланса, у ҳолда тенг бурчакли конусли проекция ҳосил қилинади.

Ҳар иккала проекцияда ҳам изоколалар параллеллар (альмукантаратлар) билан ўзаро мос тушади, яъни a_0, a_1 параметрлар изоколалар шаклига (изоколалар шакли картадаги ҳудуд тасвирига яқинлашиши) таъсир кўрсатмайди.

Хатоликлар қийматларидаги кескин ўзгаришлар ва уларнинг тақсимланиши изоколалар шаклида кўринади ва учинчи параметрнинг киритилишидан (a_3) юзага келади. Кейинги параметрларнинг сақланиши хатоликлар қийматларини бирмунча даражада камайтирилишида кузатилади, изоколаларнинг картага олинаётган ҳудуд контурига яқинлашиши даражаси яхшиланади, бироқ ҳисоблашларнинг ҳажми сезиларли даражада ортади.

Бундан таъкидлаш мумкинки, ушбу параметр қийматига боғлиқ ҳолда хатолик қийматлари ҳам ўзгаради, уларнинг тақсимланиши ва изоколаларнинг шакли ўзгаради, яъни бундан ҳар хилдаги тенг бурчакли проекцияларни ҳосил қилиш мумкин. Шундай яқинлаштиришни Гаусс–Крюгер проекциялари, тенг бурчакли конусли ва азимутал ва улар ўртасидаги оралиқ проекцияларда кўриш мумкин.

Доимий a_i параметрлар кичик квадратлар усули бўйича аниқланиши мумкин, бироқ уларнинг қийматларини, шунингдек, a_3 параметрнинг проекция хоссаларига ва изоколалар шаклига таъсири ўзгаришларини таҳлил қилиш асосида аниқлаш мумкин. Олиб борилган тахлиллар натижасига кўра, бу параметрнинг қиймати қуйидагига тенг: Гаусс—Крюгер проекциясига яқин проекцияни олиш учун,

$$a_3 = \frac{N_0}{6} cos\varphi_0 sin^2\varphi_0 - \frac{N_0}{6} cos^3\varphi_0;$$

тенг бурчакли конусли проекцияга яқин проекцияларни олишда

$$a_3 = \frac{N_0}{6} cos\varphi_0 sin^2\varphi_0 ,$$

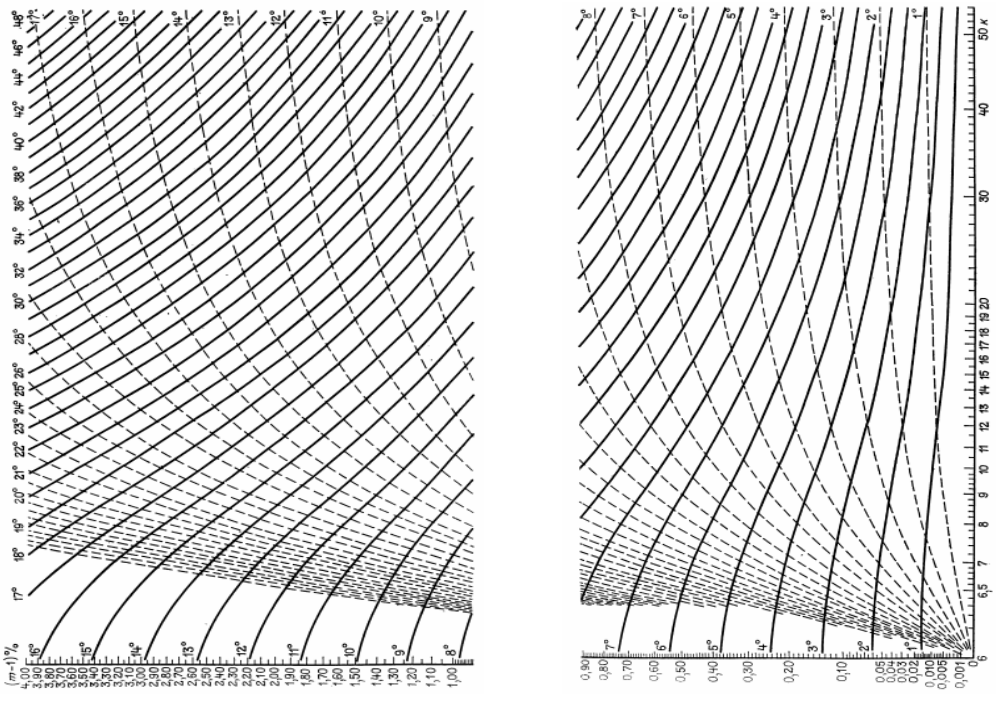
азимутал проекцияларни олишда

$$a_3 = \frac{N_0}{6} cos\varphi_0 sin^2\varphi_0 - \frac{N_0}{12} cos^3\varphi_0;$$

Агар оралиқ хусусиятли проекцияларни олиш зарур бўлганда параметрни қуйидаги формула билан аниқлаш мумкин

$a_3 = \frac{N_0}{6} cos\varphi_0 sin^2\varphi_0 - \frac{N_0}{k} cos^3\varphi_0$; бунда 6<$k$<∞.

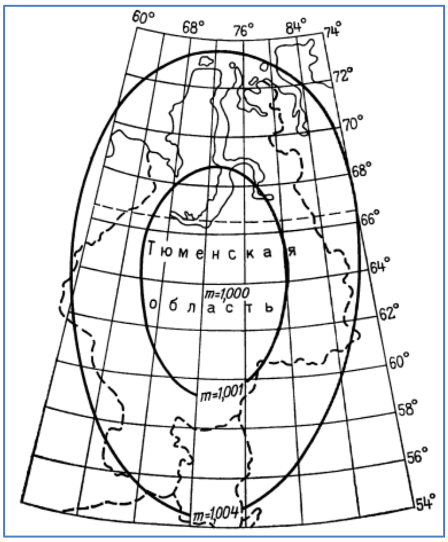
$k = 6$ ҳолатда изоколалар ўқ меридиан бўйлаб жойлашади, $k = 12$ шартида – айлана шаклида, $k = \infty$ – изоколалар параллелар билан устма – уст тушади ёки уларга яқинлашади, k < 6 – гипербола шаклида, 6 < k < 12 – чўзиқ кўринишида, меридианлар бўйлаб чўзилган, 12 < k < ∞ – изоколалар параллеллар бўйлаб чўзилган овал ҳолатда. Кенглик ва узоқлик бўйича чўзилган картага олинаётган ҳудуд билан мосликда k коэффицентнинг аниқланиши 64–расмда келтирилган номограммма бўйича амалга ошириш мумкин. Бу номограмма экватор учун тузиб чиқилган, бироқ ҳар қандай ҳохлаган кенглик учун ҳам фойдаланилиши мумкин, бунинг учун b қиймат ушбу параллел бўйича кенгликнинг косинус қийматига кўпайтирилиши керак:



64–расм. **Қаторлар ёрдамида ҳосил қилинган проекцияда k коэффицент ва $m-1$ узунлик хатолигини аниқлаш номограммаси.**

$$b_{np} = b\cos\varphi_{cp}; \quad n = b_{np} / a,$$

бу ерда a – ўрта меридиан бўйлаб ҳududнинг чўзилишини ифодалайди. k қийматни ўннинг бир улуши даражасигача аниқлаш етарлидир.

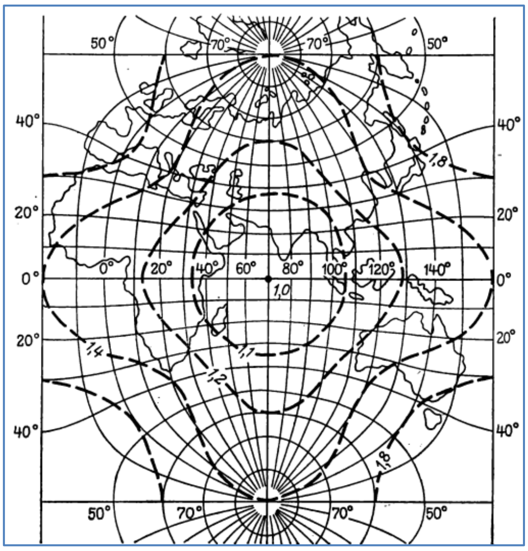


65–расм. **Қаторлардан фойдаланиш йўли билан ҳосил қилинган Тюмень вилояти картаси проекцияси.**

Мисол сифатида Тюмень вилоятининг картаси учун ҳосил қилинган ($k = 4{,}8$) мослашувчан изоколалар билан биргаликдаги картографик тўр макетини келтирамиз (65 – расм).

61 – §. Эллиптик координаталар ёрдамида ҳосил қилинган тенг бурчакли проекциялар

2–§ да кўрсатиб ўтилганидек, эллиптик координаталар шар сиртида сферик эллипс марказининг жойлашиш ҳолатига боғлиқ. Гюй эллиптик координаталарида сферик эллипс фокуслари $\varphi_0 = \pm 45^\circ$ кенглик қийматига эга. Бу ҳолатда координаталарни ҳисоблаш формуласи қуйидагича бўлади:



$$\cos a = \sqrt{\frac{2}{2}}(\sin\varphi - \cos\varphi\sin\lambda);$$

$$\cos b = \sqrt{\frac{2}{2}}(\sin\varphi + \cos\varphi\cos\lambda);$$

$$\sin u = \sqrt{2}\cos[(a+b)/2];$$

$$\sin \upsilon = \sqrt{2}\sin[(a-b)/2].$$

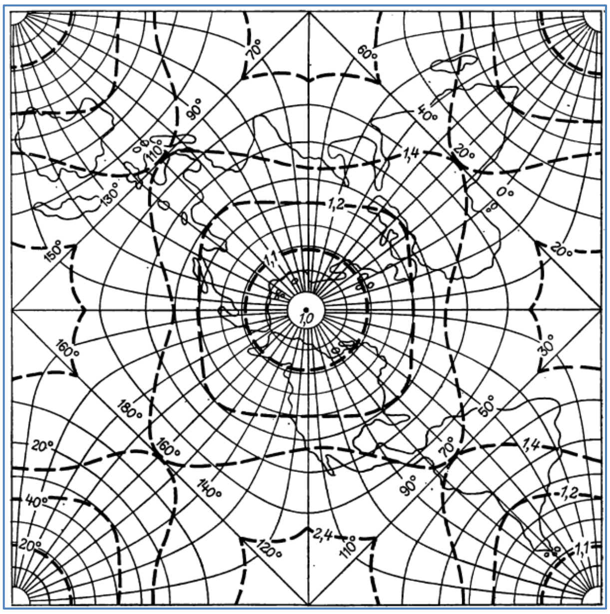
66–расм. **Гюй проекциясида *p* изоколалари.**

Кўрсатиб ўтилган формулалардан фойдаланиш бўйича ҳосил қилинган Гюй проекциясида дунё картаси иккита ярим шардан иборат. Бунда ҳар бир ярим шарда ўқ меридианларнинг экватор билан кесишиш нуқтасида хатолик мавжуд эмас ва ҳар бир ярим шарни чегараловчи меридианларнинг кесишиш нуқтасида у максимал қийматга эгалиги кузатилади. Бу меридианлар тўғри чизиқлар билан тасвирланади, натижада ҳар бир ярим шар тасвири квадрат шаклда бўлади (66–расм).

Пирс эллиптик координаталарида барча тўртта фокус географик экваторда $(\varphi_0 = 0)$, унинг $\lambda_0 = 45^\circ$ узоқлик қийматига эга бўлган меридианлари билан кесишиш нуқтасида жойлашади. Бу ҳолатда якуний формулалар қуйидагича бўлади:

$$\cos a = \cos\varphi \cos(45^\circ + \lambda);$$

$$\cos b = \cos\varphi \cos(45^\circ - \lambda).$$



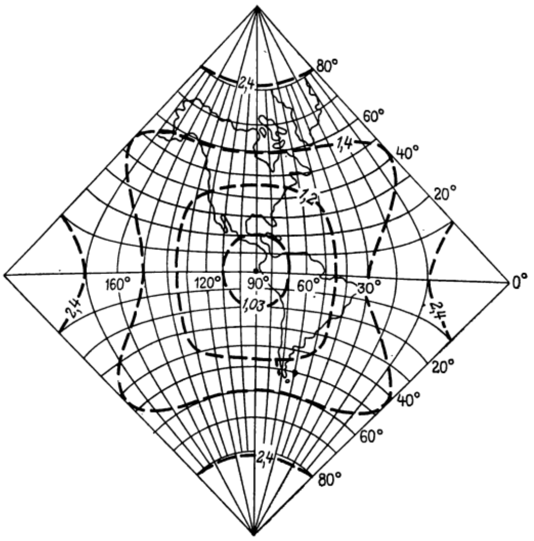
67–расм. **Пирс проекциясида *p* изоколалари.**

Барча ҳолатда $\sin u$ ва $\sin \upsilon$ ҳисоблаш формулалари бир ҳилда бўлади. Пирс координаталари 90° га буралган Гюй координаталарини эслатади. Бу координаталар ёрдамида ҳосил қилинган проекциялар бутун ер юзасининг ўзига хос тасвирини беради. Бу проекцияларда хатоликлар географик қутблар нуқталарида мавжуд эмас; максимал хатолик қиймати квадрат шаклига эга бўлган экваторнинг қайрилиш бурчагида кузатилади (67–расм).

Эллиптик координаталарнинг учинчи тизими – *Адамс координаталари* номи билан машҳур бўлиб, қутбларда ва экваторда сферик эллипслар фокусларига эга. Бу координаталар тизимида формулалар қуйидаги кўринишга эга:

$$a = 90^{\circ} - \varphi, \ \cos b = \cos\varphi \sin\lambda.$$

Бундай координатали проекцияларда картага олинаётган юза ярим шарларга бўлиниб тасвирланади; ҳар бир ярим шар (ғарбий ёки шарқий) ромб шаклида бўлади.



68–расм. **Адамс проекциясида *p* изоколалари**.

Хатолик ўқ меридиан билан экватор кесишиш нуқтасида мавжуд эмас, уни максимал қиймати қутбларда, экваторнинг ярим шарни четки меридианлари билан кесишиш нуқтасида кузатилади (68 – расм). Қараб чиқилган ушбу эллиптик координаталар тизими изометрик координаталар ҳисобланиб, улар ёрдамида қуйидаги формулалар бўйича тенг бурчакли проекцияларни ҳосил қилиш мумин:

$$x = \xi; \quad y = \eta, \text{ бунда}$$

$$\xi = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \varphi_0}}; \quad \eta = \int_0^\upsilon \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \upsilon \cos^2 \varphi_0}},$$

яъни, улар биринчи турдаги эллиптик координаталар ҳисобланиб, қийматлари жадваллардан аниқланиши мумкин [Янке Е. ва бошқалар. Махсус функциялар. Формулалар. Графиклар. Жадваллар. Москва, «Фан» нашриёти, 1968].

Тадқиқотлар натижалари кўрсатишича, эллиптик координаталардан фойдаланиш бўйича олинган проекцияларда узунлик масштаблари қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$\mu = \sqrt{\cos eca \cos ecb.}$$

Ҳар бир ярим шарни марказий нуқтаси атрофида изоколалар айлана шаклига эга; ушбу нуқтадан узоқлашиш билан изоколаларнинг шакли мураккаблашиб боради ва тўртта япроқли шакл кўринишини олади.

62 – § Чебышев проекцияси

1853 йилда П.Л.Чебышев нисбатан энг яхши тенг бурчакли проекциялар ҳақидаги теоремани ишлаб чиқди. Бу теоремага мувофиқ, берилган аниқ ҳудуд бўйича карталарни тузиб чиқиш учун нисбатан энг яхши ҳисобланган тенг бурчакли проекцияларда ушбу ҳудуд контурида масштабнинг натурал логарифми нол қийматни қабул қилиши керак. Бу теоремани 1894 йилда Д.А.Граве исботлаган. Проекцияларни амалий жиҳатдан олишни дастлабки усуллари 1947 йилда Н.А.Урмаев томонидан тавсия қилинган.

Чебышев проекциясини ва унга яқин бўлган тенг бурчакли проекцияларни ишлаб чиқиш ишлари В.В.Каврайский, Л.А.Вахрамеева, Н.Я.Виленкин, Л.М.Бугаевский, Г.И.Конусова, Г.А.Мещеряков ва бошқа олимларга тегишлидир.

Чебышев проекциясини ҳисоблашда қуйидаги иккита масалани ечиш зарур:

– картага олинаётган худуд нуқталарида берилган узунликнинг хусусий масштаби (μ) логарифми доимий қиймати бўйича шу контур доирасида проекциянинг хусусий масштаблари ҳамда бошқа тавсифлари қийматларини аниқлаш;

– картага олинаётган худуд нуқталарида узунликнинг хусусий масштаблари қиймати бўйича проекция нуқталари *x, y* тенг бурчакли координаталарини аниқлаш.

Масаланинг биринчи қисми нол қийматдаги чегаравий шартлар билан биргаликда Пуассон тенгламасини ечиш орқали ҳал қилинади ёки берилган чегаравий шартлар асосида Лаплас тенгламаси ёрдамида ечилади, яъни Дирихле ички масаласи ечилади:

$$\ln \mu_{qq} + \ln \mu_{\lambda\lambda} = 0;$$

белгиланган шартлар бўйича

$\ln \mu \big|_{\Gamma} = \ln r_{\Gamma}$, бу ерда q, λ – изометрик координаталар;

$$r = N \cos\varphi; \quad \ln m = \ln \mu - \ln r.$$

Лаплас тенгламаси ечими қуйидаги функцияни ифодалайди:

$$\ln \mu = F(q + i\lambda), \qquad (211)$$

Бу функция *Г* контур билан чегараланган, картага туширилувчи худуд узлуксиз тавсифга эга бўлади. (*211*) тенгламани (*208*) тенглама кўринишида тасаввур қилиш мумкин ва ҳоҳлаган контурга эга ҳудудни картага олиш учун бир жинсли уйғунликдаги кўпҳад бўйича Лаплас тенгламаси ечимини олиш мумкин:

$$\ln \mu = \sum_{i=0}^{k} a_i \psi_i + \sum_{i=1}^{k} b_i \theta_i, (i = 1,2,3,...) \qquad (212)$$

бу ерда ψ_i, θ_i – (*208*) тенглама асосида аниқланади; a_i, b_i – проекциянинг доимий параметрлари, белгиланган шартлар асосида аниқланади (*210*). Картага олинаётган ҳудуд ўрта тўғри меридианга нисбатан симметрик ҳолдаги контурга эга бўлганда (*212*) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлиши мумкин:

$$\ln \mu = \sum_{i=0}^{k} a_i \psi_i ; (i = 1,2,3,...) \qquad (213)$$

Бунда юқорида таъкидлаб ўтилганидек, тасвирланаётган ҳудуд контурида чегаравий шартларга амал қилинади (*210*). Урмаев ишларида кўрсатилишича, Лаплас тенгламаси ечими учун ва ўз навбатида, тасвирланаётган худуднинг ички нуқталарида узунликнинг хусусий масштабларини топиш учун Ритц вариацион усули, тўрлар усули, уйғун функцияларни тузиб чиқиш усули ва чегаравий шартларни нисбатан яхши даражада қониқтирувчи кичик квадратлар усулидан фойдаланиш мумкин. Мураккаб тузилишга эга бўлган ҳудудларни картага олишда охирги усул нисбатан қулай ва самарали ҳисобланади.

Лаплас тенгламаси ечимидан фойдаланиш орқали (*212*) ва (*210*) тенгламани ҳисобга олган ҳолатда, бу проекция нуқталарида узунликнинг хусусий масштаби натурал логарифмини аниқлаш учун қуйидаги тенгламадан фойдаланилади:

$$\ln m = \ln\mu - \ln r = \sum_{i=0}^{k} a_i\psi_i + \sum_{i=0}^{k} b_i\theta_i - \ln r. \qquad (214)$$

Доимий коэффицентларни a_i, b_i (*214*) формула бўйича бир нечта нуқталар учун масштаблар узунлиги натурал логарифми квадратлари йиғиндиси минимал қийматда, шарти билан аниқлаймиз, бунда уларни сони аниқланаётган коэффициентлардан кўп. Доимий коэффицентларни аниқлаш орқали, тасвирлаётган худуд ички нуқталари узунлик хусусий масштаблари қийматини ҳисоблаб топиш мумкин, яъни масаланинг биринчи қисмини ечиш мумкин.

Масаланинг иккинчи қисми қуйидаги кўринишдаги дифференциал тенгламани ечиш йўли билан ҳал қилинади:

$$\mu^2 = x_q^2 + y_q^2, \qquad (215)$$

бу ерда $\mu = mr;$ m – узунликнинг хусусий масштаби, $r = N\cos\varphi$ – параллелнинг эгрилик радиуси.

Чебышев проекциясининг тўғри бурчакли координаталарини аниқлашни турли усуллари Н.А.Урмаев, Л.М.Бугаевский, Н.Я.Виленкин ва бошқалар ишларида қараб чиқилган. Чизиқли аппроксимация усулидан фойдаланиш орқали картага туширилувчи ҳудуд асимметрик тузилишга эга бўлган ҳолат учун умумий тарздаги Чебышев проекцияси формулаларини ҳосил қиламиз.

Бунда (*215*) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$x_q = \mu \cos \gamma; \qquad y_q = \mu \sin \gamma;$$

$$x_\lambda = -\mu \sin \gamma; \quad y_\lambda = \mu \cos \gamma, \qquad (216)$$

бу ерда γ – бу тенгликда номаълум бўлган меридианлар яқинлашиши ва m – узунлик хусусий масштабини ҳамда λ — функцияни тез аниқлаш мумкин. Меридианлар яқинлашишини аниқлаш учун Лаплас тенгламасини ёзамиз

$\gamma_{qq} + \gamma_{\lambda\lambda} = 0$ ва унга тенг бўлган Коши—Риман шартини ҳам

$\gamma_q = (ln\mu)_\lambda;\ \ \gamma_\lambda = -(ln\mu)_q$ Бундан қуйидагини топамиз

$$\gamma = \int (ln\ \mu_\lambda) dq + C_1(\lambda);$$

$$\gamma = \int \left(ln\ \mu_q\right) dq + C_2(q) \qquad (217)$$

Формулани (212) дифференциялаб ва олинган натижани (217) формулага қўйиб, оламиз

$$\gamma = \int \left[\sum_{i=0}^{k} a_i(\psi_i)_\lambda + \sum_{i=o}^{k} b_i\,(\theta_i)_\lambda\right] dq + C_1(\lambda)$$

$$\gamma = \int \left[\sum_{i=0}^{k} a_i(\psi_i)_q + \sum_{i=o}^{k} b_i\,(\theta_i)_q\right] d\lambda + C_2(q)$$

Коши—Риман шарти бўйича x, = yx\ xк= — yQ оламиз

$$\gamma = \int \left[-\sum_{i=0}^{k} a_i(\theta_i)_\lambda + \sum_{i=o}^{k} b_i\,(\psi_i)_q\right] dq + C_1(\lambda)$$

$$\gamma = -\int \left[\sum_{i=0}^{k} a_i(\theta_i)_q + \sum_{i=o}^{k} b_i\,(\psi_i)_\lambda\right] d\lambda + C_2(q)$$

Бу тенгламаларни интеграллаб, олинган натижани таққослаб,

$$\gamma = -\sum_{i=1}^{k} a_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} b_i\,\psi_i$$

Энди худуднинг хохлаган нуқтаси учун γ ва μ нинг рақамли қийматини олиш мумкин. Проекция тенг бурчакли бўлгани учун

$$x + iy = F(q + i\lambda).$$

Тўғри бурчакли координаталар формулари:

$$x = \sum_{i=1}^{k} m_i\psi_i - \sum_{i=1}^{k} n_i\,\theta_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{k} m_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} n_i \psi_i$$

Бунда ψ_i, θ_i — (206) формула бўйича ҳисобланган уйғун кўпҳадлар, mt, nt — доимий коэффициентлар. mit гц ҳисоблаш учун (219) формулани дефференциялаймиз:

$$x_q = \sum_{i=1}^{k} m_i v_i - \sum_{i=1}^{k} n_i \tau_i$$

$$y_q = \sum_{i=1}^{k} n_i v_i + \sum_{i=1}^{k} m_i \tau_i \qquad (220)$$

бу ерда

$$v_i = (\psi_i)_q = (\theta_i)_\lambda = i\psi_{i-1};$$

$$\tau_i = (\theta_i)_q = -(\psi_i)_\lambda = i\theta_{i-1};$$

(216) формулага белгилаш киритиб,

$$\mu \cos\gamma = T''; \ -\mu \sin\gamma = P'';$$

(216) ва (220) инобатга олиб

$$\sum_{i=1}^{k} im_i\psi_{i-1} - \sum_{i=1}^{k} in_i \theta_{i-1} = T''$$

$$\sum_{i=1}^{k} in_i\psi_{i-1} + \sum_{i=1}^{k} im_i \theta_{i-1} = P'' \qquad (221)$$

$T'', \ P'' \ \psi_{i-1}, \theta_{i-1}$ лар номаълумлар, уларни аниқловчилар, m_i, n_i - доимий коэффициентлар. (*221*) тенглама кўринишидаги тизимни тузиб, нисбатан кичик квадратлар усули бўйича m_i ва n_i ҳақиқий коэффицентларни аниқлаймиз.

Ҳосил қилинган проекция бевосита эллипсоиднинг текисликдаги тасвири бўлиб, кўплаб олимлар (Д.А.Граве, Н.А.Урмаев, В.В.Каврайский ва бошқалар) томонидан амалга оширилган тадқиқотлар натижаларига мувофиқ, тасвирланаётган ҳудуд доирасида хатолик қийматининг минималлигини таъминлайди ва бунда хатоликларнинг нисбатан яхши даражада тақсимланиши кузатилади, шунингдек, ҳоҳлаган бошқа тенг бурчакли проекцияларга нисбатан солиштирилганда, геодезик чизиқларнинг тасвирланиши ўртача эгрилиги қиймати минималлаштирилиши таъминланади.

Назорат саволлари

1. Гаусс коэффицентларини ифодаловчи формулаларни келтиринг.

2. Айланма эллипсоид юзасида изометрик ва геодезик координаталар ўртасидаги боғлиқлик формулаларини ёзинг ва изоҳлаб беринг.

3. Гаусс–Крюгер проекцияси ва ундан собиқ иттифоқ топографик карталарини тузишда фойдаланиш йўлларини тушунтиринг.

4. Гаусс–Крюгер проекциясини олишда қандай шартлар белгиланган, уларни тушунтиринг.

5. Топографик карталар разграфкаси ва номенклатураси тизимини тушунтиринг, берилган карта варағи номенклатурасини аниқланг.

6. Кенг полосалар учун Гаусс–Крюгер проекцияси формулаларини келтиринг ва уларга қисқача таъриф беринг.

7. Проекцияда k *коэффицент ва* m *узунлик хатолигини аниқлаш номограммасини тузилишини тушунтиринг.*

8. Гюй, Пирс, Адамс проекцияларини хусусиятларини қандай, улар қандай карталар учун ишлатилишини таърифланг.

9. Чебышев проекциясини ҳисоблашда қандай масалаларни ечиш керак, уларни моҳиятини изоҳланг.

XII БОБ.
КАРТОГРАФИК ПРОЕКЦИЯЛАРНИ ҚИДИРИШ УСУЛЛАРИ

63 – §. Математик картографиянинг тўғри ва тескари масалалари ҳақида тушунча

I бобда баён қилинган маълумотлар асосида бизга картографик проекцияларнинг умумий тенгламалари маълум:

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \;\; y = f_2(\varphi, \lambda).$$

Агар, акс эттирувчи деб аталадиган f_1, f_2 функциялар маълум бўлса, у ҳолда улар асосида текисликда юзанинг тасвирланиши бўйича асосий тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Бу тенглама узунлик ва майдон хусусий масштаблари формулалари кўринишида ифодаланади:

$$m = \frac{1}{M}\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}; \quad n = \frac{1}{r}\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2};$$

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2; \quad ab = mn\sin i; \qquad (222)$$

$p = \frac{1}{Mr}(x_\varphi y_\lambda + x_\lambda y_\varphi) = ab;$ меридианлар яқинлашиши

$\gamma = arctg(y_\varphi / x_\varphi)$; i - проекцияда меридианлар ва параллеллар орасидаги бурчак ва унинг тўғри бурчакдан фарқи ε

$$i = arctg\left(\frac{x_\varphi y_{\lambda} - x_\lambda y_\varphi}{x_\varphi x_\lambda - y_\varphi y_\lambda}\right); \qquad \varepsilon = i - 90°;$$

бурчак хатолиги энг катта қиймати

$\sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b)$ ва бошқа хусусиятлар.

Математик картографияни тўғри масаласини ечиш картографик проекцияларни аниқлаш усули бўлиб, бунда дастлаб берилган шартлардан келиб чиқиб, тасвирловчи f_1, f_2 функциялар ҳосил қилинади, кейин эса ушбу функцияларга боғлиқ ҳолатда хусусий масштаблар ва проекциянинг бошқа тавсифлари аниқланади ҳамда тегишли ҳисоблашлар амалга оширилади.

Математик картографияни тўғри масаласи ечими бўйича картографик проекцияларни аниқлаш усулларининг афзаллиги – бунда фойдаланилаётган математик аппаратнинг оддийлигидир. Ушбу усулларнинг ўзига хосликлари шундаки, ҳосил қилинаётган проекция хоссаларини фақат акс эттирувчи функцияларни аниқлаш ва проекция тавсифларига ойдинлик киритишдан кейин қарор топиши мумкин. Усулларнинг камчилиги – турли хил талабларни қониқтирувчи янги проекцияларни қидириб топиш имкониятларининг чекланганлигидир.

Математик картографиянинг тескари масаласини ечиш картографик проекцияларни аниқлаш усуллари бўлиб, бунда дастлаб проекция тавсифлари (ёки уларни бир қисми) берилади, кейин эса – уларга боғлиқ ҳолатда акс эттирувчи функция топилади ёки бевосита проекциянинг тўғри бурчакли координаталари, ёки проекциянинг берилмаган тавсифларига ойдинлик киритилади. Математик картографияни тескари масаласини ечими учун фойдаланилаётган юзанинг текисликда тўғридан–тўғри (бевосита) тасвирланиши тенгламаси қуйидаги кўринишда аниқланади.

(*222*) формуладан $\mu = mM, \;\; \nu = nr$ оламиз

$$x_\varphi = \mu\cos\gamma; \qquad y_\varphi = \mu\sin\gamma;$$

$$x_\lambda = -\nu\sin(\gamma+\varepsilon); \quad y_\lambda = \nu\cos(\gamma+\varepsilon), \tag{223}$$

бу ерда γ — меридианлар яқинлашиши, $\varepsilon = i$ — 90°.

(223) тенгламадаги хусусий ҳосилалар интегралланади

$$\frac{\partial(x_\varphi)}{\partial_\lambda} = \frac{\partial(x_\lambda)}{\partial_\varphi}; \qquad \frac{\partial(y_\varphi)}{\partial_\lambda} = \frac{\partial(y_\lambda)}{\partial_\varphi}/ \qquad 224)$$

(223) тенгликни дифференциялаб, олинган натижани (224) қўямиз.

Ўзгартиришлардан сўнг хусусий ҳосилали квазичизиқли биринчи даражали тенгламаларни оламиз

$$y_\varphi = -\varepsilon_\varphi - \frac{\mu\lambda}{v}\sec\varepsilon - \frac{v_\varphi}{v}tg\ \varepsilon$$

$$y_\lambda = \frac{\mu\lambda}{\mu}tg\ \varepsilon + \frac{v_\varphi}{\mu}sec\ \varepsilon$$

Бу тизим Г.А.Мещеряков томонидан *Эйлер–Урмаев тизими* деб номланган, бунда иккита тенглама бўлиб, унча аниқланмаган тўртта тавсиф таркибига киритилади. Агар ушбу тизимга аниқлик киритиладиган бўлса, яъни тўртта тавсифдан иккитаси берилса ва қўшимча чегараловчи ёки бошланғич шартлар белгиланса, у ҳолда кўплаб картографик проекциялар ҳосил қилиниши мумкин.

(*225*) тенгламага аниқлик киритишда бор йўғи 15 та вариант тавсия қилиниши мумкин ва шу асосда Мещеряков томонидан проекцияларни тавсифловчи дифференциал тенгламалар турлари бўйича картографик проекцияларни генетик таснифлаш таклиф қилинади. Эйлер–Урмаев тенгламалари тизимига аниқлик киритишда (*222*) ва (*223*) формулаларга мувофиқ, проекциялар бўйича барча эҳтимолликдаги тавсифлардан келиб чиқиб, улардан фақат тўрттасини мустақил ҳолдаги тавсифларни (хусусий ҳосилаларни – x_φ, x_λ; y_φ, y_λ қийматларни аниқлаш учун) ҳисоблаш мумкин.

Математик картографияни тескари масаласини ечиш асосида картографик проекцияларни аниқлаш усулларининг афзаллиги шундаки, проекцияларни қидириш, уларни исталган хоссасидан келиб чиқиб амалга оширилади, шунингдек, бу усуллар кўплаб картогарфик проекцияларни ҳосил қилиш имконини беради.

Бу усулларнинг камчилиги – улардан фойдаланишда эллиптик, гиперболик, параболик ва бошқа аралаш тавсифга эга бўлган дифференциал тенгламаларни ечишга тўғри келади, кўплаб ҳолатларда бу мураккаб масала бўлиб, катта ҳажмдаги ҳисоблашларни амалга ошириш билан боғлиқ.

Картографик проекцияларни ҳисоблашда (1) ёки (225) тенгликдан ташқари, параллел ва меридианлар тенгламасидан ҳам фойдаланиш мумкин

$$\varphi = F_1(x, y);\ \ \lambda = F_2(x, y).$$

булар асосида тескари тасвирлаш берилиши мумкин, унда олинаётган проекция нуқталарининг (x, y) координаталари ўзгарувчан бўлиб, геодезик координаталари эса (φ, λ) — уларни функциялари бўлади. Н.А.Урмаев тўғри $x_\varphi, x_\lambda, y_\varphi y_\lambda$. ва тескари тасвирлаш $\varphi_{x,} \varphi_{y,} \lambda_x \lambda_y$ хусусий ҳосилалари ўртасидаги боғлиқлик формулалари муносабатини ўрнатди:

$$X_\varphi = \frac{1}{J}\lambda_y; \quad y_\varphi = -\frac{1}{J}\lambda_x;$$

$$X_\lambda = -\frac{1}{J}\varphi_y; \quad y_\lambda = -\frac{1}{J}\varphi_x \text{ бунда}$$

$$J = 1/h = \varphi_x\lambda_y - \varphi_y\lambda_x$$

Бу хусусий ҳосилалар қийматларини картографик проекциялар умумий назарияси хоссалари формулаларига қўйиб $m, n, p, tg, \gamma, \varepsilon$. , Н.А.Урмаев фундаментал аҳамиятга эга бўлган тескари тасвирлаш назарияси дифференциал тенгламалари тизимини олди:

$$m^2 = p^2r^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2); \quad n^2 = p^2M^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2);$$

$$tg\gamma = -\lambda_x/\lambda_y; \quad tg(y + \varepsilon) = \varphi_y/\varphi_x;$$

$$P = \frac{1}{Mr}\frac{1}{\varphi_x\lambda_y - \varphi_y\lambda_x}; \quad tg\varepsilon = \frac{\varphi_x\lambda_x - \varphi_y\lambda_y}{\varphi_x\lambda_y - \varphi_y\lambda_x}.$$

Бу тизимни Г.А.Мещеряков Тиссо—Урмаев тизими деб атади. Ундан фойдаланиб математик картографияни тўғри ва тескари масалаларини ечиш асосида кўплаб картографик проекцияларни олиш мумкин.

Агар параллеллар ва меридианлар тенгламалари маълум бўлса ёки уларнинг функцияларини ҳосил қилиш шартлари берилган бўлса, (*226*) тенгламалар тизими проекциянинг тавсифларини ва тўғри бурчакли координаталарини аниқлаш имконини беради (математик картографияни тўғри масаласи). Проекция тавсифлари берилган ҳолатда ёки уларнинг бир қисми маълум бўлса, (*226*) дифференциал тенглама тизими математик картографияни тескари масаласи ечими асосида ҳақиқий проекцияларни аниқлаш имконини туғилади. Бунда (*226*) тизим чизиқли бўлмайди, шу сабабли унинг ечими Эйлер–Урмаев хусусий ҳосиласидаги дифференциал тенглама (*225*) тизими ечимига нисбатан қиёсланганда янада кўп қийинчиликларни туғдиради.

Картографик проекцияларни қидиришнинг барча мавжуд усуллари математик картографияни тўғри ва тескари масалаларини ечиш вариантлари ҳисобланади.

64 – §. Математик картографияни тўғри масалаларини ечиш орқали картографик проекцияларни қидириш

Картографик проекцияларни аниқлашнинг классик аналитик усули. Ҳозирда маълум бўлган картографик проекцияларни кўпчилиги ва ушбу дарсликнинг олдинги бобларида қараб чиқилган картографик проекциялар ушбу усулда аниқланган ва тузиб чиқилган. Бу усулнинг моҳиятини кўриб чиқамиз.

Картографик тўрнинг исталган кўриниши тасвирланади (масалан, меридианлари – тенг оралиқли параллел тўғри чизиқлар, параллеллари – меридианларга нисбатан ортогонал, параллелл тўғри чизиқлардан иборат) ва тасвирлаш шартига мос равишда картографик проекциянинг умумий тенгламаси ёзилади. Бу ҳолатда қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$x = f_1(\varphi); \quad y = C\lambda,$ бу ерда $C = const$.

Умумий кўринишда тўғри бурчакли координаталарнинг геодезик координаталар билан боғлиқлигини ифодаловчи бошланғич шартларни, масалан, (*1*) тенгликни дастлаб картографик тўрнинг исталган кўринишини ифодаламасдан туриб, аналитик усулда бериш мумкин.

Картографик проекция тенгламаси умумий кўринишда ҳосил қилинганидан кейин, олинган проекция бўйича хатоликларнинг исталган тавсифлари берилади ва юзанинг текисликда тасвирланиши назарияси асосида юқорида келтирилган тенгламалардан фойдаланган ҳолда, хусусий масштаблар ва проекциянинг бошқа картографик тавсифларининг умумий формулалари топилади. Проекцияда хатоликлар қийматларининг берилган тавсифлари ҳисобга олинган ҳолда дифференциал тенгламалар тузиб чиқилади ва тасвирловчи функциянинг асл ҳолати ҳосил қилинади. Сўнгра шулар асосда хусусий масштаблар ва проекциянинг бошқа тавсифларига ойдинлик киритилади.

Картографик проекцияларни олишнинг перспектив усуллари. Перспектив усулда Ер юзаси ёки бошқа осмон жисмлари нуқталари кўриш нуқтасидан туриб айланма конус, цилиндр ва текис юзага лойиҳаланади. Биринчи ҳолатда перспектив конусли проекцияни ҳосил қиламиз, бу проекция нисбатан кам ишлатилади, иккинчи усулда – перспектив цилиндрик проекция, учунчида нисбатан кенг миқёсда фойдаланиладиган перспектив азимутал проекциялар ҳосил қилинади.

Бошлангич проекциялар тенгламаларини комбинацияли усули. Бу усулда бажариладиган комбинациялар битта ёки турли хилдаги синфларга тегишли проекциялар ўртасида бажарилади. Бир хил синфдаги проекциялар комбинациялари амалга оширилган ҳолат учун Г.А.Гинзбург ва А.К.Моловичко томонидан сфера азимутал проекциялари бўйича умумлаштирилган формулалар тавсия қилинган (30–§ га қаранг). Бу формулалар берилган доимий параметрларга боғлиқ ҳолда хатоликлари қиймати бўйича турли хилдаги (тенг бурчакли, тенг майдонли ва бошқа) шар сиртини азимутал проекцияларини ҳосил қилиш имконини беради. Шунга ўхшаш азимутал проекцияларда вертикаллар бўйлаб тенг бурчакли ва тенг оралиқли комбинациялар учун умумлашган формулаларни олиш мумкин:

$\rho = \frac{1}{k} R\left(k_1 tg \frac{z}{2} + k_2 z \right),$ бу ерда $k,\ k_1,\ k_2 - const$.

$k = 2,\ \ k_1 = k_2 = 1$ шароитда Нелли айлана проекцияси формуласини ҳосил қиламиз; $k = 1$ ва $k_1 = 2,\ \ k_2 = 0$ стереографик проекция формуласи олинади:

$\rho = 2Rtg(z/2);$

$k = 1;\ \ k_1 = 0;\ \ k_2 = 1$ бунда вертикаллар бўйлаб тенг оралиқли азимутал проекция формуласи қуйидагича бўлади:

$$\rho = Rz.$$

Шунга ўхшаш, альмукантаратлари бўйлаб тенг майдонли ва тенг ораликли бўлган ўрталикдаги проекциялар умумлашган формуласини ёзиш мумкин:

$$\rho = \frac{1}{k} R\left(k_1 \sin\frac{z}{2} + k_2 \sin z \right),$$

ва уларнинг турли хил вариантлари ҳосил қилинади.

Цилиндрик, конусли ва бошқа турли хил тавсифли хатоликлар билан ифодаланувчи проекцияларнинг бошқа синфлари умумлаштирилган формулалари қуйидаги кўринишга эга:

$$x = kx_1 + (1-k)x_2; \quad y = ky_1 + (1-k)y_2,$$

бу ерда $0 \le k \le 1$; $x_1, y_1; x_2, y_2$ – хатолиги бўйича ўзаро фарқланувчи (тенг бурчакли ва тенг майдонли, тенг бурчакли ва тенг оралиқли, тенг майдонли ва тенг оралиқли ва ҳ.к.), битта синфга тегишли проекцияларнинг (цилиндрик, конусли ва бошқа) тўғри бурчакли координаталари. Доимий параметрлар (k_1 ва k_2) қийматларини ўзгартириш орқали, турли хилдаги хоссаларга эга бўлган кўплаб картографик проекцияларни олиш ва айланали тузилишга эга бўлган ҳудудларни аниқ мақсадли карталарини тузишда оптимал ҳисобланган, проекциялардан бирини танлаб олиш масаласини ҳал қилиш мумкин.

Проекциялар синфлари ўртасидаги комбинациялар натижасида ҳосил қилинган бир нечта проекцияларни қараб чиқамиз. Гаммер тенг майдонли ихтиёрий проекциясида ординаталар Сансон тенг майдонли проекцияси ва цилиндрик проекция ординаталарининг ўртача арифметик қийматлари сифатида аниқланади:

$$y = R\lambda \frac{1 + \cos\varphi}{2} = R\lambda \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Тенг майдонлилик шартидан фойдаланиш орқали ва абсциссалар узоқликка боғлиқ эмаслигини тахмин қилиш билан қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$x = 2R\left(\varphi - tg\frac{\varphi}{2}\right).$$

Винкел ҳосила проекциясида тўғри бурчакли координаталар формулалари тенг оралиқли цилиндрик ва Аитовнинг ихтиёрий проекциялари координаталарининг ўртача арифметик қийматлари сифатида аниқланади:

$$x = \frac{1}{2}(R\varphi + x_A); \quad y = \frac{1}{2}(Rk\lambda + y_A),$$ бу ерда k – доимий коэффицент.

Экваторда узунлик хусусий масштаби $n = 0{,}85$ га тенг шартидан келиб чиқиб, В.В.Каврайский $k = 0{,}7$ қийматни аниқлаган. Бу проекция ҳорижий мамлакатларда дунё карталари учун кенг фойдаланилади. Проекцияда майдон хатолиги бурчак хатолиги қийматидан кичик.

А.С.Лисичанскийни азимутал–цилиндрик ва азимутал–конусли проекцияларининг бирлашган тизим проекциялари кўрсатилган учта проекцияларнинг бирикма йўли билан изоколалари чўзиқроқ кўринишга эга бўлган, тенг бурчакли ва тенг майдонли проекцияларни қидириб топиш мақсадида аниқланади.

Тенг бурчакли проекциялар учун

$$x = k_1x_1 + k_2x_2, \qquad y = k_1y_1 + k_2y_2$$

бунда x_1, y_1, x_2, y_2 — биринчи ва иккинчи проекциялар тўғри бурчакли координаталари формулалари; k_1 k_2 – доимий қийматлар, буларни ўзгариши проекциялар хусусиятларини белгилайди. Бунда $k_1+k_2=1$.

Тенг майдонли проекцияларни аниқлашда, бирлаштирилган тизимлар асосида қутбий координаталар тизимида ифодаланган тенг майдонлилик шартидан фойдаланилган:

$$x_z y_a - x_a y_z = R^2 \sin z$$

шунингдек, бунда Майер усули ишлатилган бўлиб, унга мувофиқ акс эттирилувчи функциялардан бири (x ёки y) берилади. Бу ҳолатда абсциссалар бошланғич проекцияларнинг абсциссалари чизиқли комбинацияси сифатида берилади. Тенг майдонлилик шарти биринчи даражадаги хусусий ҳосилада бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама кўринишида қабул қилинади:

$$py_a - Qy_z = R^2 \sin z,$$ бунда:

$$P = x_z; \quad Q = x_a.$$

Сонли усулда ушбу тенглама ечими натижасида ҳақиқий проекция ординаталари қиймати аниқланади.

Ҳосила проекцияларни олишни Аитов усули. Аитов томонидан дунё картаси учун проекцияларни тузиб чиқиш усули тавсия қилинган бўлиб, бунда бошланғич проекцияда барча ординаталар икки ҳиссага оширилади, меридианлар тегишли икки ҳисса оширилган узоқликларга мос равишда ёзилади, кейин координаталар бўйича оралиқ меридианлар аниқланади. Бундай проекцияларни ҳосил қилиш учун Аитов манба сифатида кўндаланг тенг оралиқли Постел азимутал проекциясидан фойдаланиш тавсия қилинган, кўрсатилган ўзгартиришлар ҳисобга олиниши билан биргаликда унинг формуласи қуйидаги кўринишча бўлади:

$$x = Rz \cos a; \quad y = 2Rz \sin a,$$

бу ерда z, a – қутбий сферик координаталар, (*59*) ва (*61*) формулалар бўйича аниқланади.

Ушбу усул бўйича Е.Гаммер томонидан дунё картаси учун тенг майдонли азимутал проекция ишлаб чиқилган, бу проекция – *Аитов–Гаммер проекцияси* номи билан аталади. Проекцияда узоқлик бўйича чўзилиш олдинги вариантдаги каби 2 га тенг. М.Д.Соловьев томонидан умумий ҳолат учун Аитов–Гаммер проекцияси формулалари ҳисоблаб чиқилиб, узоқлик бўйича чўзилиш қиймати 1,6 га тенглиги аниқланди. Ҳозирги вақтда ушбу проециянинг бир қатор вариантлари ишлаб чиқилган, уларда чўзилиш битта эмас, балки иккита йўналиш бўйича чўзилишни қўллаш тадқиқотлари олиб борилган (Е.Зимон, К.Вагнер, Е.Кремлинг проекциялари).

Таркибли (узилишли) тўрга эга бўлган проекцияларни олиш усуллари. Гуд усули бўйича проекцияларни тузиб чиқишда ҳоҳлаган псевдоцилиндрик проекциялардан (Сансон, Мольвайде, Эккерт, Каврайский ва бошқа проекциялар) фойдаланишга асосланилган бўлиб, бунда ўрта меридиан яқинида хатолик қиймати кичик ва ундан узоқлашган сари сезиларли даражада ортиб боради.

Ҳар бир материкни тасвирлаш учун унинг тўғри чизиқли меридиани билан биргаликда фақат проекциянинг марказий қисмидан фойдаланилади, қисмларни бирлаштириш эса – экватор чизиғи бўйича амалга оширилади. Океанлар тасвирланиши керак бўлган қисмларда узилишлар юзага келади.

В.В.Каврайский усули бўйича ҳосил қилинган проекция иккита – $\varphi = \pm 70^{\circ}$ тенг бурчакли Меркатор цилиндрик проекцияси ва нисбатан юқори кенгликлар бўйича эса – тенг оралиқли цилиндрик проекцияларидан ташкил топади.

Н.А.Урмаев усулида проекцияларни олишда умумий чегараларга эга бўлмаган эллипсоиднинг иккита бўлими олинади, улар турли хил проекцияларда тасвирланади ва бу оралиқ бўлимларда меридианлар ва параллеллар силлиқ эгри чизиқлар билан тасвирланади, деб фараз қилинади.

Таркибли проекцияни тузиб чиқиш қуйидагича бажарилади. Биринчи қисм координаталари тизимида иккинчисини нуқталари координаталари берилади ва иккинчида тўғри бурчакли координаталар тизимини биринчисига нисбатан буриш амалга оширилиши асосида, ясси координаталар тизимида ўзгартиришлар амалга оширилади. Биринчи қисм координаталар тизимида иккинчини нуқталари координаталари аниқланади.

Оралиқ соҳа нуқталари координаталарини аниқлаш учун учта бир хил номланувчи параллеллар умумий нуқтада битта уринмага эга бўлиши шарти асосида аналитик боғлиқлик ўрнатилади (кўп ҳадли ёки Стирлинг интерполяция формулаларидан фойдаланилади). Натижада текислик ва юза координаталари тизимларининг ўзаро бир хилда мослиги ҳосил қилинади.

Қаторлар ва уйғун кўпҳадлардан фойдаланиш асосида проекцияларни ҳосил қилиш усуллари. Проекцияларни бундай излаш усуллари тенг бурчакли ёки уларга яқин тавсифли хатоликли проекцияларидан ташкил топган бўлиб, Л.А.Вахремеева томонидан ишлаб чиқилган. Кўрсатиб ўтилган усулда ҳосил қилинадиган проекцияларда изоколалари овал, айлана ёки гипербола шаклида, бу изоколалар марказий нуқтанинг меридианига нисбатан турли хилда ориентирланиши бўйича жойлашади.

Уйғун кўпҳадларни қўллаш орқали олинадиган тенг бурчакли проекциялар умумий формулалари қуйидагича бўлади

$$x = \sum_{k=o}^{n}(a_k P_k - b_k Q_k);$$

$$y = \sum_{k=o}^{n}(b_k P_k + a_k Q_k);$$

бунда a_k ва b_k — коэффициентлар, P_k и Q_k — иккита бир хилдаги уйғун кўпҳадлар гуруҳи. Бу проекцияларни ишчи формулаларини (3-даражали уйғун кўпҳадлар мисолида) қуйидагича тасоввур қилиш мумкин:

$$x = A_o + B_1\lambda + A_2\lambda^2 + B_3\lambda^3;$$

$$y = B_o + A_1\lambda + B_2\lambda^2 + A_3\lambda^3;$$

бунда A ва B — ўзгарувчан коэффициентлар, улар қуйидаги формулалар асосида олинади

$$A_o = a_o + a_1(q - q_o) + a_2(q - q_o)^2 + a_3(q - q_o)^3;$$

$$A_1 = \frac{dA_o}{dq} = a_1 + 2a_2(q - q_o) + 3a_3(q - q_o)^2;$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\ \frac{d^2A_o}{dq^2} = -[a_2 + 3a_3(q - q_o)];$$

$$A_3 = -\frac{1}{6}\ \frac{d^3A_o}{dq^3} = -a_3.$$

$$B_o = b_o + b_1(q - q_o) + b_2(q - q_o)^2 + b_3(q - q_o)^3;$$

$$B_1 = -\frac{dB_o}{dq} = -[b_1 + 2b_2(q - q_o) + 3b_3(q - q_o)^2];$$

$$B_2 = -\frac{1}{2}\ \frac{d^2B_o}{dq^2} = -[b_2 + 3b_3(q - q_o)];$$

$$B_3 = -\frac{1}{6}\ \frac{d^3B_o}{dq^3} = b_3.$$

бунда q и q_o — проекциянинг марказий нуқтаси ва берилган параллеллар изометрик кенгликлари.

Келтирилган тенгламалар қатъий тартибда тенг бурчакли проекцияларни олиш имконини беради, Коши–Риман шартини қониқтиради, иккинчи даражадаги марказий эгри чизиқли бошқарилувчи изоколалардан ташкил топади ҳамда тасвирланаётган ҳудуд чегаралари билан умумлийликда мослашишга эга бўлади.

a_k коэффицентнинг таҳлиллари натижаларидан a_0 коэффицентини нолга тенг деб қабул қилиш мақсадга мувофиқ (бу ҳолатда, проекциянинг тўғри бурчакли координаталари унинг марказий нуқтасида жойлашади); коэффицентлар қуйидагича ифодаланади:

$$a_1 = r_0; \quad a_2 = -\frac{r_0}{2}\sin\varphi_0;$$

$a_3 = r_0\left(\frac{A}{3}\cos 2\varphi_0 - \frac{\cos 2\varphi_0}{6}\right),$ бу ерда r_0 – марказий нуқта параллели радиуси.

b_k коэффицентни аниқлаш (асимметрик изоколаларга эга бўлган проекцияларда) масалани ечишни қулайлаштириш учун қуйида келтирилган формулаларни ечиш керак:

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0; \quad b_3 = b = r_0\frac{B}{3}\cos^3\varphi_0.$$

Келтирилган формулаларда A ва B – изоколалар шаклига таъсир кўрсатувчи сонли коэффицентлар бўлиб, уларнинг марказий нуқтада меридианга нисбатан буралишини ифодалайди; уларнинг қийматлари қуйидаги формулалар бўйича аниқланиши мумкин:

$$A = (1 - C\cos 2\alpha)/4; \quad B = C\sin 2\alpha/4,$$

бу ерда $C = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$; α – марказий нуқта меридианига нисбатан изоколаларнинг буралиш бурчагини ифодалайди; a ва b – изоколаларнинг ярим ўқини тасвирлайди.

Агар проекциянинг марказий нуқтаси тўғри бурчакли координаталар бошланиши деб қабул қилинса ва қулайлик учун унда узунлик масштаби бирга тенг деб ҳисобланса, у ҳолда изоколалар тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\upsilon = 100(m-1) = Ax^2 - 2Bxy + (1/2 - A)y^2,$$

бу ерда υ – узунлик хатолиги; A ва B – юқорида кўрсатиб ўтилган a_3 ва b_3 қийматлар таркибига кирадиган коэффицентлар.

Уйғун кўпҳадлар ёрдамида ҳосил қилинган проекцияларнинг афзаллиги шундаки, уларни ҳосил қилиш осон ва хатоликлар қиймати унчалик катта эмас. Хатоликлар қиймати бўйича бу проекциялар бошқа тенг бурчакли проекциялар, масалан, цилиндрик ва конусли проекциялар билан солиштирилганда, бир қатор афзалликларга эга. Бу афзалликлар энг аввало, изоколаларнинг картага туширилувчи худуднинг чегараларига нисбатан мослашишида ўз аксини топади, бу ҳолат асимметрик изоколали проекцияларда нисбатан сезиларлидир.

Камчилиги – уларда қутб олди ҳудудларини тасвирлаш имконияти мавжуд эмас, шунингдек, изоколаларнинг тасвирланаётган худудлар чегараларига тўлиқ мос келмаслигини кўрсатиб ўтиш мумкин. Ўқ меридианга нисбатан симметрик изоколаларга эга бўлган тенг бурчакли проекциялар тенгламаларини қаторлардан фойдаланиб қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = a_0 + a_2 s_n^2 + \ldots, \quad y = a_1 s_n + a_3 s_n^3 + \ldots,$$

бу ерда s_n – марказий нуқта меридиани ва жорий меридиан ўртасидаги параллел ёйи, у ушбу меридианлар узоқликлари фарқига $(\lambda - \lambda_0)$ мос келади; a_0 – проекция тавсифи; a_1, a_2, a_3 – ўзгарувчан коэффиентлар, улар қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$a_1 = \frac{da_0}{ds_m};$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 \frac{tg\varphi}{N} - \frac{da_1}{ds_m} \right);$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}\left(2a_2 \frac{tg\varphi}{N} - \frac{da_2}{ds_m} \right);$$

... ...

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}\left[(n-1)a_{n-1} \frac{tg\varphi}{N} - \frac{da_{n-1}}{ds_m} \right],$$

бу ерда s_m – марказий нуқта параллели ва жорий параллел ўртасидаги меридиан ёйи; N – биринчи вертикал эгрилик радиуси.

Агар тўғри бурчакли координаталар формулаларини учинчи даражали қаторлар бўйича чегараланса, унда 400 – 450 км узоқлик ва кенгликли участкалар доирасида координаталар қийматини бир – тўрт метр аниқликда олиш мумкин. Бунда ушбу қаторнинг биринчи даражадаги қисмларини 200 – 225 км узунлик қийматдаги меридиан ва параллеллар ёйлари сифатида қабул қилиш мумкин.

Агар иккинчи даражали қатор ҳадлари қуйидагиларни олганда

$\frac{\mathrm{S_m^3}}{\mathrm{R_o}}$; $\frac{\mathrm{s_m s_n}}{\mathrm{R_o}}$; $\frac{\mathrm{S_n^2}}{\mathrm{R_o}}$;

$\mathrm{S_m} < 200$ км ва $\mathrm{S_n} < 200$ км бўлганда саккиз км дан ошмайди, учинчи ҳадлар қатори

$\frac{S_m^3}{R_o^2}$; $\frac{S_m^2 s_n}{R_o^2}$; $\frac{s_m S_n^2}{R_o^2}$; $\frac{S_n^3}{R_o^2}$;

бунда Ro — тасвирланаётган юза проекциясини марказий нуқтасида эгриликни ўртача радиуси (ер юзасини S_m < 200 км ва S_n < 200 км бўлганда бу ҳадлар қиймати 200 м дан ошмайди).

Келтирилган формулаларда нисбатан сезиларли аҳамиятга эга бўлган ролни проекция тавсифи a_0 ўйнайди, бунда уйғун кўпҳадлардан фойдаланиш билан ҳосил қилинувчи проекцияларда қайд қилингани каби, у тўр кўриниши ва хатоликларнинг тақсимланишига таъсир кўрсатади. Турли хил шаклдаги изоколали проекциялар таҳлили уларни олишдаги мавжуд қонуниятларни аниқлаш ва қаторлар ёрдамида тенг бурчакли проекцияларни умумлаштирилган формулаларини келтириб чиқариш имкони беради:

$$a_0 = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2}...; \quad a_1 = 1 + \frac{3s_m^2}{kR_0^2}...;$$

$$a_2 = \frac{tg\varphi}{2N} - \frac{3s_m}{kR_0^2}...; \quad a_3 = -\frac{tg^2\varphi}{6R_0^2} + \frac{k-6}{6kR_0^2}...$$

бундан

$$x = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2} + \left(\frac{tg\varphi}{2N} - \frac{3s_m}{kR_0^2}\right)s_n^2...;$$

$$y = \left(1 + \frac{3s_m^2}{kR_0^2}\right)s_n + \left(\frac{k-6}{6kR_0^2} - \frac{tg^2\varphi}{6R_0^2}\right)s_n^3 + ...,$$ бу ерда k – сонли коэффицент.

Ушбу коэффицент қийматини ўзгартириш орқали тенг бурчакли проекцияларнинг еттита гуруҳини ҳосил қилиш мумкин:

$k = \infty$ шароитда изоколалар овал шаклга эга бўлиб, ўқ меридиан бўйлаб чўзилган; унча катта бўлмаган участкаларда – ушбу меридианга нисбатан параллел ҳолатда жойлашган тўғри чизиқ кўринишига эга; - 12 < k < ∞ - изоколалар меридианлар бўйлаб чўзилган, эллиптик эгри чизиқлардан ташкил топади; - k = 12 - изоколалар — айлана; - 6<k<12 - изоколалар — параллеллар бўйлаб чўзилган эллиптик эгрилар; - k = 6 изоколалар — параллеллар билан устма-уст тушадиган айланалар ёйлари; - 0<k<6 изоколалар — ҳақиқий ўқи меридиан марказий нуқтасига тўғри келадиган гнперболик эгрилар; - k<0 изоколалар — ҳақиқий ўқи ўрта параллалга тўғри келадиган гиперболик эгрилар.

Асимметрик изоколали проекцияларда

$x = a_o + b_1 S_n + a_2 s_n^2 + b_3 s_n^3 + \ldots\ldots$

$y = b_o + a_1 S_n + b_2 s_n^2 + a_3 s_n^3 + \ldots\ldots$

Ўзгарувчан коэффициентлар қиймати a_k маълум. Агар

$b_o = s_m^3 / kR_o^2$

деб қабул қилинса, a_k коэффициентлари ҳамда бошқа b_k коэффициентлар қийматларини шундай формулалар билан топилса, унда

$b_1 = 3s_m^3 / kR_o^2;\ b_2 = 3s_m / kR_o^2;\ b_3 = 1 / kR_o^2$.

Юқорида келтирилган асимметрик изоколали тўғри бурчакли координаталар формулаларига a_k ва b_k қийматларни қўйиб, оламиз

$$x = S_m + \frac{s_m^3}{kR_o^2} - \frac{3s_m^2 S_n}{kR_o^2} + \left(\frac{tg\,\varphi}{2R_o} - \frac{3s_m}{kR_o^2}\right) s_n^2 + \frac{s_n^3}{kR_o^2} + \ldots;$$

$$y = \frac{s_m^3}{kR_o^2} + \left(1 + \frac{3s_m}{kR_o^2}\right) s_n - \frac{3s_m s_n^2}{kR_o^2} + \left(\frac{k-6}{6kR_o^2} - \frac{tg^2\varphi}{6R_o^2}\right) s_n^3 + \ldots\ .$$

Келтирилган охирги тенглама юлдузчалар билан белгиланувчи қўшимча қисмлари мавжудлиги билан ўқ меридианга нисбатан симметрик ҳолатда жойлашадиган изоколали проекция тенгламасидан фарқ қилади. Бу проекцияларда масштаб формуласи қуйидаги кўринишга эга:

$$m = 1 + \frac{6s_m^2 - 12s_m s_n + (k-6)s_n^2}{2kR_0^2}.$$

Келтирилган учинчи даражали қаторлар билан чегараланувчи тўғри бурчакли координаталар формулалари ўз навбатида 1:100 000 масштабли ҳамда кичик ўлчамли участкалар майда масштабли карталари проекцияларини ҳосил қилишда фойдаланилиши мумкин.

k коэффицентни керак бўлган даражада танлаш орқали изоколалари тасвирланаётган худуд билан белгиланган контур чегарасига жуда яқин келадиган проекцияларни олиш мумкин. Қаторлардан фойдаланиш орқали ҳосил қилинадиган тенг бурчакли проекциялар хатолик қийматлари бўйича ҳозирги вақтда фойдаланилаётган бир қатор бошқа турдаги тенг бурчакли проекцияларга нисбатан, масалан, цилиндрик ва конусли проекцияларга нисбатан солиштирилганда сезиларли даражада афзалликларга эга.

Қўшимча доимийлар ёки функцияларни киритиш йўли билан проекцияларни олиш усуллари. Бир қатор проекциялар вариантларини, энг аввало псевдоцилиндрик ва псевдоконусли проекцияларни аниқлаш ЦНИИГАиКда Ф.А.Старостин ва бошқалар томонидан олиб борилган. Мисол сифатида трапеция кўринишли псевдоцилиндрик проекцияни келтириш мумкин, бунда берилган φ_1, φ_2 кенгликда параллеллар бўйлаб ва $\pm\lambda_0$ узоқликли мериданлар бўйлаб узунлик хусусий масштаблари қийматлари бирга тенг деб ҳисобланиши ($m_0 = n_{1,2} = 1$) шарти асосида учта доимий параметр киритилади.

Қўшимча функциялар проекция тенгламасига киритилиши мумкин ёки проекцияни аниқлашда мустақил ҳолатдаги бошланғич функциялар бўлиши мумкин. Масалан, конусли, псевдоконусли ёки ярим конусли проекцияларни ҳосил қилишда қутб масофасини аниқлаш учун тенгламаларни киритиш мумкин:

$$\rho = a_o\rho_u + \sum_{i=l}^{n} a_i(\varphi - \varphi_o)^i.$$

бу ерда a_i – доимий коэффицентлар; ρ_u – бошланғич проекцияда қутб масофаси; коэффицент a_0 хусусий ҳолатда 0 га тенг бўлиши мумкин. Ифодалаш сифатида Г.А.Гинзбург томонидан берилган хатолик ва бурчак қийматлари билан ифодаланган конусли проекцияни ҳисоблаш учун формулани келтирамиз

$$\rho = c - \left[m_o s + \frac{km_o}{3}(\varphi - \varphi_o)^3\right].$$

бу ерда c, k – доимий қийматлар; m_0 – параллеллар бўйича минимал масштаб билан ифодаланувчи нуқтада меридианлар бўйлаб узунлик хусусий масштаби.

Картографик проекцияларни олишнинг график ва графо–аналитик усуллари. Ҳозирги вақтда график усуллардан кам фойдаланилади. Мисол сифатида Бируни ва Мюфлинг проекцияларини кўрсатиб ўтамиз. Бируни проекцияси – шар тавсифидаги (*глобуляр*) проекция ҳисобланади. Уни тузиш учун карта масштабида олинган радиус айланаси $k=\pi R/2$ бўйича ўзаро перпендикуляр ҳолатда жойлашувчи иккита диаметр ўтказилади. Улардан бири экватор, бошқа бири эса – ўрта меридиан сифатида қабул қилинади, четки меридианлар сифатида – айлана белгиланади.

Ҳар иккала диаметрни бўлиб ва айлананинг ҳар бир қисмини тўртта тенг қисмларга бўламиз, сўнгра меридианларда жойлашган учта нуқта ва экватор ҳамда қутб нуқталари орқали айлана ўтказилади, шу йўл билан проекциянинг меридианлари ва параллеллари чизиқлари олинади.

Мюфлинг проекцияси параллеллар ва меридианлар кесмаларининг ёйларини кесиштириш усулида тўғриланиши бўйича тузиб чиқилади (1:100 000 масштабли ва ундан йирикроқ бўлган топографик карталар учун). Бу проекция кўп қиррали тавсифга эга бўлган проекция сифатида собиқ иттифоқда Гаусс–Крюгер проекцияларидан фойдаланишга қадар топографик карталарни тузишда қўлланилган. Графо–аналитик усуллар цилиндрик, конусли, азимутал ва бошқа проекцияларни тузиб чиқишда фойдаланилади. Ҳозирги вақтда бу усулда асосан, картографик тўр аппроксимациясига асосланилувчи ярим конусли проекциялар тузиб чиқилади.

Бошланғич проекцияларни қайта ўзгартириш усули. Мисол сифатида Н.А.Урмаев усули бўйича гомографик (бир хилли) ўзгартириш йўли билан ҳосил қилинган проекциялар формулаларини келтириб ўтамиз:

$$x=\frac{a_1X+a_2Y+a_3}{c_1X+c_2Y+c_3}; \qquad y=\frac{b_1X+b_2Y+b_3}{c_1X+c_2Y+c_3};$$

бу ерда X, Y; x, y – дастлабки ва ҳосил қилинган проекциянинг мос келувчи нуқталари тўғри бурчакли координаталари; a_i, b_i, c_i – нисбатан кичик квадратлар усули бўйича ҳосил қилинувчи проекциялар доимийлиги.

Ушбу усулнинг иккинчи варианти сифатида берилган проекция шартларидан келиб чиқиб, a_i, b_i, c_i коэффицентларни аниқлашдан ташкил топади, кейин бошланғич проекциянинг X, Y координаталари бўйича янги проекция x, y координаталари олинади.

65 – §. Математик картографияни тескари масаласини ечиш асосида картографик проекцияларни аниқлаш

Бу масалани ечишда қўлланиладиган асосий усуллар юқорида қараб чиқилган Эйлер–Урмаев ва Тиссо–Урмаев тенгламаларидан фойдаланишга асосланади.

Эйлер–Урмаев тенгламасини ечиш бўйича проекцияларни ҳосил қилиш усули. Эйлер–Урмаев дифференциал тенгламасининг (*225*) тахминли ечимини қараб чиқамиз, бунинг учун аппроксимация усулидан фойдаланамиз. Иккита функцияларни оламиз, масалан

$$\gamma_\varphi = -\sum_{i=2}^{k} A_i \tau_i + \sum_{i=1}^{k} c_i T_i + \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(\varphi, \lambda)\ ; \qquad (227)$$

$$\gamma_\lambda = -\sum_{i=1}^{k} A_i T_i - \sum_{i=2}^{k} c_i \tau_i + \sum_{i=1}^{k} a_i \Phi_i(\varphi, \lambda)\ ,$$

улар (224) тенгламани интегралланишини таъминлайди. Бунда A_i, c_i, a_i — доимий коэффициентлар; $f_i(\varphi, \lambda), f_i(\varphi, \lambda)$ — φ , λ бунда F (φ, λ) функция бўйича хусусий ҳосилалар (масалан, даражали қатор бўйича); τ, T — уйғун кўпҳад бўлаклари хусусий ҳосилалари

$$\tau = i\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = -i\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}; \qquad T = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = i\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}, \qquad (228)$$

θ, ψ — кўпҳадлар бўлаклари, такрорий формулалар билан аниқланади:

$$\psi_i = \varphi\psi_{i-1}\lambda\theta_{i-1}; \qquad \theta_i = \varphi\theta_{i-1} + \lambda\psi_{i-1};$$

$$\psi_i = \varphi; \qquad \theta_1 = \lambda. \qquad (229)$$

Тенг бурчакли проекцияларда τ , $T - \psi$ дан олинган ҳосила, θ қиймат эса – изометрик координаталардан q, λ бўйича олинган ҳосила; (*229*) формулада кенглик – φ ўрнида изометрик кенглик – q киритилади. Юқорида айтиб ўтилганидек, (*225*) тизимда иккита тенглама мавжуд ва проекциянинг тўртта тавсифи қайд қилинади, яъни – γ, ε, μ, ν.

Улардан иккитасини келтириш орқали, тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз, бунда унинг таркибига (*227*) формуладаги A_i, c_i, a_i номаълум коэффицентлар билан ифоданувчи қисмлар ва (*225*) тенгламанинг ўнг қисми киритилади, буларни қийматини ушбу тенглама аниқланишигача ойдинлик киритиш мумкин. Ҳосил қилинган тенгламалар тизимининг ечими ҳақиқий – A_i, c_i, a_i коэффициентларни топиш имконини беради.

Шундай қилиб, (*224*) тенгламанинг интегралланиши шартига амал қилинади, бу ҳолатда тўлиқ дифференциал бўйича тегишли тенгламани ҳосил қилиш мумкин, сўнгра уни интеграллаб қуйидаги тенгламани ҳосил қилиш мумкин:

$$\gamma = -\sum_{i=1}^{k} A_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} c_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} a_iF_i(\varphi,\lambda)\ .$$

$$x_\varphi = \mu\ \cos\gamma; \qquad x_\lambda = -v\sin(\varepsilon+\gamma);$$

$$y_\varphi = \mu\ \sin\gamma; \qquad y_\lambda = -\gamma\cos(\varepsilon+\gamma).$$

(*227*) тизимнинг интегралланиши шарти асосида ҳосил қилинувчи γ қиймат олинади, бу ҳолатда (*227*) формулага ўхшаш кўринишда x ва y бўйича ҳосилалар учун алоҳида аппроксимацияланувчи кўпҳадни тузиб чиқиш мумкин. Кейин, ушбу тенгликнинг ўнг қисмини ва (*230*) тенгламани тенглаштириш орқали, ҳосил қилинган тизимда m_i, n_i, b_i, d_i доимий коэффицентларни топиш мумкин. Шундай кейин, тўлиқ ҳолатда дифференциал бўйича тегишли тенгламаларни ёзиш орқали, уларни интеграллаш асосида қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} m_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} b_iF_i(\varphi,\lambda)$$

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{k} m_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} n_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} d_i F_i(\varphi,\lambda)$$

Тенг бурчакли проекциялар учун $b_i = d_i = 0$ ҳисобланади; (*229*) формулада ψ, θ кўпҳадлар қисмларини аниқлаш учун ва уларнинг ҳосилалари – T, V аниқланиши учун геодезик кенглик – φ ўрнига, изометрик кенглик – $q = \ln QU$ қиймати қўйилади. Қайд қилиш жоизки, юқорида келтирилган тенгламалар кўриниши дастлабки манба маълумотларга боғлиқ ва ўз навбатида, аниқлаб берувчи функциялар билан белгиланади.

Тенгламаларнинг тақрибан ечимлари аниқлиги кўплаб ҳолатларда деярли талаб даражасини қониқтиради. Бироқ Эйлер – Урмаев квазичизиқли дифференциал тенгламаларининг умумий ҳолатда, хусусий ҳосилалар бўйича ечилиши келгусида улар устида ҳали яна ишланмалар олиб борилишини тақоза этади.

Тиссо–Урмаев тенгламалари ечими бўйича проекцияларни ҳосил қилиш усуллари. Тиссо–Урмаев дифференциал тенгламаларида хусусий ҳосилалар (*226*) фундаментал аҳамиятга эга, лекин уларнинг ночизиқлиги ҳисобига бунда картографик проекцияларни аниқлаш олдинги келтирилган усуллар билан солиштирилганда мураккаб масала ҳисобланади.

1953 йилда Н.А.Урмаев томонидан проекциялар назарияси ишлаб чиқилган, унга асосан параллеллар тенг оралиқли эгри чизиқлар билан тасвирланади, паралеллар хусусий масштабининг майдон хусусий масштабига нисбати фақат кенглик функцияси ҳисобланади, яъни $n/p = f(\varphi)$ шарти қўйилади. Бунда (*226*) формула қуйидагича бўлади

$$\varphi_x^2 + y_y^2 = g^2(\varphi). \qquad (232)$$

Бу тенгламани интеграллаш учун иккита усул тавсия қилинган. Биринчи усулда Лагранж тўлиқ интеграли усулидан фойдаланилади, унга мувофиқ одатдаги дифференциал тенглама тизими тузиб чиқилади:

$$dx/2\varphi_x = dy/2\varphi_y = d\varphi/2g^2 = -d\varphi_x/2\varphi_x g' g = -d\varphi_y/2\varphi_y g' g. \qquad (233)$$

бунда $g' = dg/d\varphi$.

(233) ифоданинг охирги иккита бўлагидан фойдаланиб, оламиз

φ_y= ($\sqrt{1-a^2/a}$) φ_x, бунда a - ўзгармас доимий. (232) тенгламадан

$g^2 = \varphi_x^2/a^2$ унда

φ_x= ag; φ_y =$\sqrt{1-a^2/}$g

Тўлиқ ҳолатидаги дифференциал тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$d\varphi/g = adx + \sqrt{1-a^2}$dy

бу ерда $u = \int d\varphi/g$ тенгликни ифодалаш орқали, умумий интеграл қуйидаги тенгламалар тизими кўринишида келтирилиши мумкин:

$u = ax + \sqrt{1-a^2}$y+b(a);

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial b}{da} = 0. \qquad (234)$$

Бунда ихтиёрий функция $b(a)$ аниқланмаган бўлиб, (*232*) тенглама билан аниқланувчи, параллеллар синфига нисбатан ортогонал чизиқлар сифатида меридианларнинг аниқланиши белгиланади, бунинг учун эса – (*234*) тенгламани a параметр бўйича олдиндан дифференциаллаш ва дифференциаллаш натижасида олинган қийматларни айрим янги доимий қийматлар билан тенглаштириш талаб қилинади. Унда

$x = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}y = f(a)$.

Битта a параметрли тўғрилар оиласини оламиз. Бунда параллеллар тенг бўлинган эгрилар бўлади. Иккинчи усулда Н.А.Урмаев φ_x=u_xg ва y_y=u_yg белгилашларни киритиб, (232) тенгламани қуйидагича тасоввур қилади

$u_x^2 + u_y^2 = 1$ бундан

$u_x = \cos\tau$; $u_x = \sin\tau$;

ёки t = tgτ белгилашни киритиб

$u_x = 1/\sqrt{1+t^2}$; $u_y = -t/\sqrt{1+t^2}$;

бунда τ – X ўқи ва нормални параллелга тушушидан ҳосил бўлган бурчак.

Биринчи формулани y ва иккинчини x бўйича дифференциаллаб, оламиз $t_x=tt_y=0$,

яъни (232) квадрат ифодани интеграллаш биринчи тартибли хусусий ҳосилали (235) чизиқли тенгликни интеграллашга келтирилган. Оддий дифференциал тенгламалар тизимини ҳосил қилиб

$dx=-\frac{dy}{t}=\frac{dt}{0}$, биринчи интегрални топамиз $t=c_1$

Олинган натижаларни dx қўйиб, иккинчи ва умумий интегралларни оламиз

$y+tx=c_2$; $y+tx=f(t)$

Шундай қилиб, картографик проекцияларни бундай усулида ҳам, уларда $n/p=f(\varphi)$, параллеллар тенг бўлинган эгрилар, меридианлар уларга ортогонал бўлиб, битта t параметрли тўғрилар оиласидан ташкил топган.

Меридианлар, параллеллар, геодезик чизиқларни берилган эгрилиги бўйича картографик проекцияларни олиш усуллари. Меридиан ва параллеллар эгрилиги тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин

$k_m=\gamma_\varphi/\mu=-1/\mu[(\mu_\lambda \sec\varepsilon+\gamma_\varphi \operatorname{tg}\varepsilon)\ 1/\gamma+\varepsilon_\varphi$;

$k_п=(\gamma+\varepsilon)_\lambda/\gamma=1/\gamma[(\mu_\lambda \operatorname{tg}\varepsilon+\gamma_\varphi \sec\varepsilon)\ 1/\mu+\varepsilon_\lambda$.

Картографик проекцияларни ҳохлаган тавсифли хатолиги учун геодезик чизиқни ўртача эгрилиги қуйидаги формула билан аниқланиши мумкин

$$k_{ўр}=1/2r[sin\varphi\left(\frac{m}{n^2}\ sini-\frac{1+cosi}{msini}\right)+\frac{1+cosi}{mnsini}\left(n_\varphi\frac{r}{M}-m_\lambda\right)-\frac{i_\varphi}{mnM}$$

Бу формулалардан фойдаланиб, қўйилган шартлар асосида проекцияларни аниқлаш усуллари гуруҳларини олиш мумкин.

Қўйилган шартлар асосида проекцияларни аниқлашнинг иккита усулини қараб чиқамиз. Н.А.Урмаев таклиф этган тенг бўлинган параллелли проекцияларни олиш усулида берилган параллел бўйича $\varphi_0=50^0$ узунлик сақланади.

Тенглама

$k_п=1/\rho=a_0+a_1s+a_2s+.....$

хусусий ҳолатда

$k_п=\frac{1}{a}+\frac{6}{5}\frac{s^2}{a^3}$

$d\tau/ds = k_n$ эътиборга олиб, интеграллашдан кейин, оламиз

$\tau=\frac{s}{a}+\frac{2}{5}(\frac{s}{a})^3$, бунда

$a=2R$ (1:10 000 000 масштабда a=127.4223); s – параллел ёйи узунлиги.

Берилган параллелда ($\varphi_0=50^0$) n=1 қабул қилиб, Н.А.Урмаев $\Delta\lambda$ частотали узоқликда бу параллел нуқталари учун s, $k_п$, τ қийматларни олиш жадвалини тузди.

Бу қийматларни ва маълум бўлган ўзаро муносабатлардан фойдаланиб

$\frac{dx}{ds}=\sin\tau;\qquad \frac{dy}{ds}=\cos\tau;$

интеграллар қийматини сонли усуллар билан аниқлаймиз

$x=\int\sin\tau ds;\qquad y=\int\cos\tau ds$

Натижада берилган нуқтани тўғри бурчакли координаталари олинади. Бошқа нуқталар координаталари қуйидаги формулалар билан топилади

$x=x_0+u\cos\tau;\quad y=y_0-u\sin\tau;$ бунда

$u=Rarc\Delta\lambda;\quad \Delta\lambda=10^0$.

Параллеллар бўйича хусусий масштаблар қуйидаги формулар билан топилади

$n=\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}[1-k_n(\varphi-\varphi_0)]$, бунда k_n – берилган параллел эгрилиги.

Иккинчи усул - тенг бурчакли проекциялар меридиан ва параллеллари тасвирини берилган эгрилик бўйича олиш усули. Тенг бурчакли проекцияларда

$$k_m=[ln\mu]'_\lambda/\mu=(-\sum_{i=2}^{k}A_i\tau_i+\sum_{i=1}^{k}C_iT_i)/e^{(\sum_{i=0}^{k}A_i\psi_i+\sum_{i=0}^{k}C_i\theta_i)};\qquad (236)$$

$k_п$= - $[ln\mu]'_q$/μ= - ($\sum_{i=2}^{k} A_i T$+$\sum_{i=1}^{k} C_i \tau_i$)/$e^{(\sum_{i=0}^{k} A_i \psi_i + \sum_{i=0}^{k} C_i \theta_i)}$; (237)

бунда $k_м$, $k_п$ - проекция нуқталарида меридиан ва параллеллар тасвири эгрилиги берилган қийматларда. Проекцияни аниқлаш масаласи Лаплас тенгламаси (212) доимий коэффициентларини ҳисоблашга қаратилади.

Лекин берилган эгриликдаги меридиан ва параллеллар қийматлари коэффициентларини бевосита (236) ва (237) формулалар билан аниқлаш анча қийин, шунинг учун A_i, C_i қийматларни яқинлаштирилган формулалар билан итерация методи орқали аниқлаш мумкин.

1+lnk_m=$-\sum_{i=0}^{k} A'_i(\psi_i + \tau_i) - \sum_{i=0}^{k} C'_i(\theta_i - \tau_i)$;

Δlnk_m=$-\sum_{i=0}^{k} \Delta A'_i(\psi_i + \tau_i/\ [ln\mu]'_\lambda) - \sum_{i=0}^{k} \Delta C'_i(\theta_i - T_i/\ [ln\mu]'_\lambda)$;

1+lnk_n=$-\sum_{i=0}^{k} A'_i(\psi_i + T_i) - \sum_{i=0}^{k} C'_i(\theta_i + \tau_i)$; (238)

Δlnk_n=$-\sum_{i=0}^{k} \Delta A'_i\left(\psi_i + \tau_i/\ [ln\mu]'_q\right) - \sum_{i=0}^{k} \Delta C'_i\left(\theta_i + T_i/\ [ln\mu]'_q\right)$; (239)

Тенг бурчакли проекцияларни олиш, масалан, паралеллар эгрилиги k_n берилганда қуйидаги кетма-кетликда бажарилади:

- эгрилик k_n қиймати берилади, (228) тизимли тенгламаларни тузамиз ва ечамиз, A'_i, C'_i коэффициентларни итерация методи орқали топамиз;

- олинган натижалардан фойдаланиб, $[ln\mu]'_q$ ҳосилани ҳисоблаймиз ва (237) формуладан k'_n параллел эгрилиги қийматини топамиз, сўнгра

Δlnk_n= lnk_n- lnk'_i ;

- (239) тенгламалар тизимини ечиб, A'_i, C'_i коэффициентларга тузатмани аниқлаймиз ва ушбу коэффициентлар аниқланган қийматларини ҳисоблаймиз.

A_i= $A'_i + \Delta A'_i$ C_i= $C'_i + \Delta C'_i$

- олинган A_i, C_i коэффициентлар қийматларидан фойдаланиб, ҳисоблашларни қайтадан ўтказамиз, бу $\Delta lnk \leq \varepsilon$ бўлмагинча олиб борилади, ε – ҳисоблаш аниқлигини белгиловчи йўл қўйиларли қиймат.

Якуний ҳолатда коэффицентлар қийматини олиб, маълум бўлган (*231*) формула асосида проекция бўйича ҳисоблашни амалга оширамиз.

Картографик тўр эскизини аппроксимациялаш усулида проекцияларни ҳосил қилиш. Проекцияларни аниқлашни бундай масаласи ечими иккита босқичда амалга оширилади. Биринчи босқичда, карталарнинг мақсадидан келиб чиққан ҳолатда ва картографик тўрлар ҳамда проекция хатоси қийматини ўрганиш натижасидан фойдаланиш билан ушбу берилган масалани оптимал даражада қониқтирувчи картографик тўрнинг макети тузиб чиқилади (одатда, миллиметрли қоғозда).

Иккинчи босқичда эскизда меридианлар ва параллелларнинг кесишиш нуқталари тўғри бурчакли координаталарининг силлиқланиши амалга оширилади (одатда, *коррелят усулида*), сўнгра ушбу координаталар бўйича картографик тўр эскизи тузилади. Бу мақсадда турли хилдаги кўпҳадлардан фойдаланилиши мумкин:

– хатоликлар тавсифи бўйича ихтиёрий бўлган проекцияларда карталарни тузишда – даражали алгеброик кўпҳадлардан фойдаланилади:

$$x=\sum_{i=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} a_{ij}\,\varphi^{i}\,\lambda^{j} \qquad y=\sum_{i=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} b_{ij}\,\varphi^{i}\,\lambda^{j}$$

бу ерда aij, bij – эскизнинг x, y; φ, λ нуқталари координаталари қийматлари бўйича кўрсатилган тизим ечимидан келиб чиққан ҳолда, нисбатан кичик қийматдаги квадратлар усули бўйича аниқланувчи доимий коэффицентлар ҳисобланади;

– тенг бурчакли проекциялар бўйича карталарни тузиб чиқишда – уйғун кўпҳадлардан фойдаланилади:

$$x=\sum_{i=0}^{k} a_i\,\psi_i-\sum_{i=0}^{k} b_i\theta_i \qquad y=\sum_{i=0}^{k} a_i\,\theta_i+\sum_{i=0}^{k} b_i\psi_i$$

бунда В.П.Морозов такрорий формулаларидан

$\psi_i=q\psi_{i-1}-\lambda\theta_{i-1}$; $\theta_i=q\theta_{i-1}+\lambda\psi_{i-1}$

$\psi_1=q$; $\theta_1=\lambda$

$$q=\ln\frac{tg(45^0+\varphi/2)}{tg^2(45^0+\psi/2)}$$

$\psi=\arcsin(e\ sin\varphi)$

бу ерда e – эллипсоиднинг биринчи эксцентриситети; a_i, b_i - доимий коэффицентлар.

Белгиланган мақсадга асосан карталарни тузишда умумий формулаларга аниқлик киритилади, унда қутблар тасвири (нуқта, тўғри ёки эгри чизиқ кесимлари) ҳисобга олинади, ўрта меридиан ва экватор чизиғига нисбатан картографик тўрнинг симметриклиги каби шартларга амал қилинади.

66 – §. Нисбатан энг яхши ва идеал проекцияларни қидириб топиш

Математик картография соҳасида ушбу муҳим масалани ечиш бўйича бир қатор кўзга кўринган олимлар тадқиқот олиб борганлар, П.Л.Чебышев, Д.А.Граве, Н.Я.Цингер, А.А.Марков, В.В.Витковский, собиқ иттифоқ олимлари В.В.Каврайский, Н.А.Урмаев, Л.А.Вахрамеева, Г.А.Мещеряков, Н.А.Виленкин, Л.М.Бугаевский, А.С.Лисичанский, Г.И.Конусова ва бошқалар. Нисбатан энг яхши проекцияларни қандайдир уларнинг хусусий умумийлигидан келиб чиққан ҳолатда ёки проекцияларнинг чекланмаган кўплигидан танлаб олиш мумкин.

Биринчи ҳолатда энг аввало, қайси хусусий умумийликлар энг яхши проекцияларни аниқлаб олишни бажаришга ойдинлик киритиш керак, бунда қандай белгилар тегишли умумийликни танлаб олиш учун асос сифатида қабул қилиниши муҳим аҳамиятга эга.

Картада хатоликлар қийматларининг минимум бўлишини таъминлашни назарда тутиб, барча энг яхши проекцияларни *минимакс* ва *вариацион* турларга ажратиш мумкин. Минимакс проекцияларда П.Л.Чебышев томонидан ишлаб чиқилган мезонларга амал қилинади, унга мувофиқ берилган ҳудуд учун нисбатан энг яхши проекцияда масштаб логарифми модули максимал қиймати минимал бўлиши керак.

Вариацион типда проекцияларнинг аниқланиши шартли экстримумда вариацион масалаларни ечилишида ўз ифодасини топади. Бунда Эйри, Иордан, Клингач, В.В.Каврайский, Г.И.Конусова ва бошқалар томонидан тавсия қилинган мезонлардан фойдаланилиб, алоҳида нуқталарда ва бутун тасвирланаётган худуд бўйича проекцияда хатоликлар қийматларини баҳолаш имконини беради.

Бироқ картография амалиётида кўплаб ҳолатда шундай вазиятлар бўладики, бунда картографик проекцияларни танлашда аниқловчи омил сифатида хатоликлар қийматлари ва уларнинг тақсимланиши эмас, балки бошқа омиллар ёки уларнинг бирлашмасидан фойдаланилади. Шу сабабли, масалани нисбатан кенг миқёсда қўйиш орқали, қайд қилиш мумкинки, нисбатан энг яхши ҳисобланган проекциялар қуйидаги иккита турда мавжуд бўлиши мумкин:

1. Хатолик қийматларининг минимал кўрсаткичини таъминловчи энг яхши проекциялар - *минимакс* ва *вариацион* типдаги проекциялар.

2. Тузилаётган картанинг маълум бир аниқ мақсадга мўлжалланиши проекцияларга нисбатан барча умумийликдаги талабларнинг бажарилишини оптимал даражада таъминловчи, энг яхши проекциялар (масалан, тўрининг оддийлиги, хатолиги камлиги ва ҳ.к.).

Келтирилган охирги ҳолатда проекцияларнинг афзалликларини баҳолаш умумлаштирилган мезонлар асосида бажарилиши мумкин. Идеал проекциялар масаласи муҳокамасига ўтамиз. Агар фақат хатолик қийматини минимум таъминлаш ҳақида фикр юритилса, у ҳолда В.В.Каврайский аниқлик киритган *идеал проекциялар* сифатида шундай проекцияларни кўрсатиб ўтиш мумкинки, бунда барча мавжуд проекциялар кўплигидан келиб чиққан ҳолда, тасвирланаётган худуд доирасида узунлик хатолиги минимал кўрсаткичда бўлиши керак. Бунда идеал проекция сифатида минимакс ва вариацион проекциялар олинади.

Умуман олганда, жуда кенг кўплигидан аниқланадиган идеал проекциялар - бу аниқ мақсадли ва мазмунли карталарни тузиш учун картографик проекцияларга қўйиладиган барча талабларни оптимал даражада қониқтирадиган проекцияларни кўрсатиб ўтиш мумкин.

Бошқача айтганда, агар нафақат картада хатоликлар қийматлари минималлаштирилиши талаб қилиниши эмас, балки барча талаблар умумийлиги қондирилиши ҳисобга олинса, у ҳолда амалиётда барча ҳолатлар учун бир хилда жавоб бера олувчи, яроқли ҳисобланган проекциялар мавжуд эмаслиги кузатилади.

Нисбатан энг яхши ва идеал проекцияларни олиш учун энг аввало қуйидаги ҳолатларга эътибор қаратиш талаб қилинади:

– хатолик қийматларини минималлиги таъминланиши ва шунингдек, тузиб чиқилувчи карталарнинг аниқ мақсадларга мўлжалланилиши ва таркиби асосида аниқланувчи барча муҳим ҳисобланган талаблар умумийлигининг оптимал даражада қондирилиши шартидан келиб чиққан ҳолда, проекцияларнинг афзалликларини объектив ҳолатда баҳолаш имконини берувчи мезонларни ишлаб чиқиш;

– хатоликлар қийматларини минималлаштирилишини таъминловчи ёки талаб қилинган вазиятларда, проекцияга қўйилувчи барча талабларнинг умумийликда оптимал даражада қондирилиши асосидаги нисбатан энг яхши ҳисобланган проекцияларни ҳосил қилиш усулларини ишлаб чиқиш масаласини ҳал қилиш.

Энг яхши проекцияларнинг барча мавжуд бўлган кўп хиллилигидан келиб чиқиб, хатоликни минимал таъминловчи проекцияларни қидириб топиш масаласи тенг бурчакли проекцияларда нисбатан тўлиқ ечилган, бошқа проекцияларда эса – хатоликлар тавсифлари бўйича бу масала деярли ўз ечимини топмаганлигини кўриш мумкин.

Бу масаланинг ҳолати ҳақида қисқача маълумот бериб ўтамиз.

Тенг бурчакли проекциялар.

Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, нисбатан энг яхши тенг бурчакли проекцияларни қидириб топиш масаласи математик картографияда

Г.Л.Чебышев проекцияси бўйича тескари масаласини ечиш орқали амалга оширилади (XI бобга қаранг), бунда четки изоколалардан бири картага олинаётган ҳудуд контури билан устма–уст тушади. Математик картографияни тўғри масалаларини ечиш асосида нисбатан энг яхши тўғри бурчакли проекцияни олиш мумкин, масалан, Л.А.Вахрамеева томонидан ишлаб чиқилган усул орқали.

Тенг майдонли проекциялар.

Нисбатан энг яхши тенг майдонли проекцияларни қидириб топиш масаласининг ечими ҳали дастлабки босқичда. Ҳалигача бу масаланинг умумий ечимлари бўйича амалга оширилган тадқиқотлар мавжуд эмас.

Г.А.Мещеряков нисбатан энг яхши ҳисобланган Эйлер проекцияси хусусий ҳолатини қараб чиқган, яъни ортогонал картографик турли тенг майдонли проекцияларни. Бунда у умумий ҳолатда, энг яхши Эйлер проекцияларини аниқлаш масаласини олдига мақсад қилиб қўймаган, балки бу проекциянинг фақат бошланғич шартлари - тўғри чизиқли ўрта (нол қийматдаги) меридиан бўйича ўтказилиши вазиятидаги ҳолатинигина қараб чиқган.

Бу масала қуйидаги кўринишда ифодаланувчи Коши бошланғич шарти таъсири бўйича ихтиёрий нуқтада масштаб логарифми модулининг баҳоланишини аниқлаш асосидаги тавсифлаш усули асосида ечилган:

$$n/_{\lambda=o} = f_1(\varphi) = 1; \qquad \gamma/_{\lambda=o} = f_2(\varphi) = 0$$

А.С.Лисичанский математик картографияда маълум бўлган эллипсоиднинг текисликдаги тенг майдонли проекцияси тенгламасидан фойдаланган ҳолда

$$x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = Mr.$$

ва шунингдек, Д.А.Граве ва В.В.Витковскийлар Майер усулидан фойдаланилиб, бу усулни ривожлантирган ва азимутал-цилиндрик ва азимутал-конусли проекцияларнинг умумлашган эквивалент тизимини ҳосил қилишган. В.В.Каврайский ва Г.А.Мещеряков тадқиқотларида бу проекциялар ҳали нисбатан энг яхши проекциялар эмаслиги исботланган.

Эквивалентга ёндошувчи ихтиёрий проекциялар.

Ю.М.Юзефович картографик проекцияларнинг янги синфини тавсия этган, бунда $m = n^k$ ва k – берилган проекция қиймати учун доимий. Бундай проекцияларни олиш учун Эйлер – Урмаев асосий тизими олинган, унда бу проекцияларнинг ўқ меридианга нисбатан симметрик бўлиши ва бошланғич шартни ифодаловчи сифатида эгри чизиқ кўринишидаги ўрта меридиан қабул қилинган.

Тенг бурчаклига ёндош ҳисобланган иҳтиёрий проекциялар. .

Бу масаланинг умумий ҳолда ечими ҳали мавжуд эмас. Фақат М.А.Топчилов ва Ю.М.Юзефовичлар томонидан бундай проекцияларни олишнинг айрим хусусий ечимлари қараб чиқилган.

Картографик тўри ортогонал бўлган проекциялар.

Г.И.Конусова Эйлер–Урмаев тенгламаларини ечиш вариантларини тадқиқ қилган, хусусан, ортогонал картографик тўрли проекцияларни аниқлаш бўйича айрим масалалар гиперболик, эллиптик ва параболик типидаги дифференциал тенгламалар ечими асосида таҳлил қилинган, буни умумий масаланинг фақат хусусий ҳолатлари сифатида эътиборга олиш мумкин.

Нисбатан энг яхши проекцияларни аниқлашнинг барча мавжуд бўлган усулларини таҳлил қилиш натижаларига кўра, ҳозирги вақтда бу масалани ҳал қилишнинг иккита асосий усули мавжуд. Улардан биринчиси, нисбатан энг яхши тенг бурчакли проекцияларни олиш масаласини ечишда фойдаланилган, унда дастлаб теорема шаклланган ва кейин эса унинг ечими ушбу проекциялар учун исботланган.

Бундай танланган йўл проекцияларни қидириб топишнинг амалий усулларини ишлаб чиқиш бўйича изланишлар йўналишларини кўрсатиб берди. 1947 йилда Н.А.Урмаев биринчи марта ушбу проекцияларни ҳисоблашнинг дастлабки амалий усулларини ишлаб чиқишга эришган.

Иккинчи ҳолатда Эйлер – Урмаев тенгламалари фойдаланилиб, тавсифлар бўйича олдиндан аниқлаб берувчи тегишли тизимлар белгилаб олинади, кейин эса белгиланган чегаралашларга мос равишда нисбатан энг яхши проекцияларнинг хусусий кўринишларига аниқлик киритилади. Ушбу усул ёрдамида нисбатан энг яхши проекцияларнинг янги турларини ҳосил қилиш имкониятларини қайд қилиш асосида, таъкидлаб ўтиш керакки, умумий ҳолатда белгиланган масала бундай ечилиши мумкин эмас.

Нисбатан энг яхши проекцияларни қидириб топиш масаласи ечими учун энг яхши проекцияларда хатоликлар қийматларининг турли хиллиги тавсифлари ҳақидаги теоремани шакллантириш ва исботлаш талаб қилинади, бунда П.Л.Чебышев томонидан илгари сурилган, энг яхши тенг бурчакли проекциялар теоремасидаги каби иш тутилиши ва ушбу асосда уларни ҳисоблаш усулларини ишлаб чиқиш талаб қилинади.

Назорат саволлари

1. Математик картографияни тўғри масаласини қандай тушунасиз, мисоллар келтиринг.

2. Математик картографиянинг тескари масаласини ечиш орқали нималар аниқланади, уларни ечими қандай топилади?

3. Картографик проекцияларни аниқлашнинг классик аналитик ва перспектив усулларининг афзаллик томонлари нималарда ва қайси проекцияларни олишда ишлатилади?

4. Картографик проекцияларни олишнинг график ва графо–аналитик усулларини тушунтиринг, мисоллар келтиринг.

5. Математик картографияни тескари масаласини ечиш асосида картографик проекцияларни аниқлаш қандай бажарилади?

6. Тиссо–Урмаев тенгламалари ечими бўйича проекцияларни ҳосил қилиш усулларини тушунтиринг, моҳияти нимада?

7. Меридианлар, параллеллар, геодезик чизиқларни берилган эгрилиги бўйича картографик проекцияларни олиш усулларини моҳияти нимада?

XIII БОБ.
БЕЛГИЛАНГАН АНИҚ МАСАЛАНИ ЕЧИШ МАҚСАДИДА ПРОЕКЦИЯЛАРНИ ТАНЛАШ. МЕРИДИАНЛАР ВА ПАРАЛЛЕЛЛАР ТЎРИ КЎРИНИШИ БЎЙИЧА ПРОЕКЦИЯЛАРНИ АНИҚЛАШ УСУЛЛАРИ

67 – §. Картографик проекцияларни танлашнинг назарий асослари

Ҳар қандай картани тузишда у орқали турли масалаларни оптимал даражада ечишни таъминлаб берадиган картографик проекцияларни танлаш масаласи муҳим аҳамиятга эга. Картографик проекцияларни танлаш кўплаб омилларга боғлиқ, уларни учта гуруҳга бўлиш мумкин. Биринчи гуруҳга картага олиш объектини таърифлайдиган омиллар киради. Улар ҳududнинг географик ўрни, ўлчамлари, чегарасининг шакли (*конфигурацияси*), картага олинаётган жой билан бошқа худудларни тасвирлаш имикониятлари кабилар киритилади.

Иккинчи гуруҳ картани тавсифловчи ва ундан фойдаланиш усуллари ва шартларини характерловчи омилларни қамраб олади. Бу гуруҳга картанинг мақсади, масштаби, мазмуни ва функционал вазифаси, карта асосида ҳал қилинадиган масалалар (картометрик, навигацион ва бошқалар) ва уларни ечиш аниқлигига қўйиладиган талаблар, карталардан фойдаланиш усуллари (столда, деворий), картографик ахборотларнинг таҳлил қилиниши (ЭҲМ ёрдамида ёки анъанавий), карта билан ишлаш шартлари (алоҳида ёки бошқа карталар билан биргаликда), картага олиш объектларининг нисбат кўрсаткичларини ифодалаш шартлари (битта ҳududнинг бошқасига нисбатан географик жиҳатдан жойлашиш ҳолати, уларни майдони ва шакли), коммуникация тармоқлари ва ҳудудларни тасвирлаш, улар ўртасидаги ўзаро алоқалар ва ҳ.к. киритилади.

Учинчи гуруҳга картографик проекцияни характерлайдиган омилларни киритиш қабул қилинган. Бу омиллар картографик проекцияларнинг хатолик тавсифлари, узунлик, майдон ва бурчаклар минимал хатолиги шартлари ҳамда рухсат этилган максимал хатолик қийматлари, хатоликлар тақсимланиши хусусияти, геодезик чизиқ тасвирининг эгрилиги, локсодромия, бошқа ҳолат чизиқларининг тасвирланиши, проекциянинг стереографиклиги (ҳудуд шаклларининг узатилиш шартлари), картографик тўр чизиқлари тасвирининг эгрилиги, уларни ортогоналлик талаблари, меридиан ва параллеллар ўртасида тўғри бурчакни фарқи, уларнинг тенг бўлинишлари, қутблар тасвири тавсифлари, ўрта меридиан ва экваторга нисбатан картографик тўрнинг симметриклиги, уни тасвирлаш шартлари (агар улар чизиқ билан тасвирланса, у ҳолда ўрта меридиан ва қутбга нисбатан экватор чизиғининг ўлчамлари), тасвирнинг кўриш орқали ҳис қилиниши, сфериклик эффектининг мавжудлиги, картографик тасвирнинг қоплаб олиниши (такрорланиш) ва ҳ.к. назарда тутади.

Картографик проекцияларни танлаш икки босқичда амалга оширилади:

– биринчи босқичда проекциялар тўплами (ёки уларнинг хусусиятлари) ўрнатилади, кейин улардан мақсадга мувофиқ ҳолда танлаш ишлари амалга оширилади;

– иккинчи босқичда изланган проекция аниқланади.

Қоидага мувофиқ, биринчи гуруҳ омиллари қатъий тартибда берилиши керак. Уларни ҳисобга олишда, энг аввало шундай проекцияларни танлаб олиш назарда тутиладики, бунда проекцияни марказий нуқталари ва марказий чизиқлари яқинида масштаб кам ўзгаради ва улар картага олинаётган худуд ўртасида жойлашади, ҳамда марказий чизиқлар, имкони борича, ҳудудда нисбатан узун чўзилган йўналиш бўйича жойлашади. Шу сабабли, кўплаб карталар учун қуйидаги проекциялар танланади:

– *цилиндрик проекциялар* – экваторга яқин жойлашган ва унга нисбатан симметрик ҳолатда бўлган, кўриниши узоқлик бўйича чўзилган ҳудудлар учун;

– *конусли проекциялар* – юқоридаги ҳудудлар учун, бироқ бунда экваторга нисбатан симметрик жойлашмаган ёки ўрта кенгликларда жойлашган ҳудудлар учун;

– *азимут проекциялар* – қутбий худудларни тасвирлаш учун;

– *кўндаланг ва қийшиқ цилиндрик проекциялар* – меридиан ёки вертикаллар бўлаб чўзилган ҳудудларни тавирлаш учун;

– *кўндаланг ёки қийшиқ азимут проекциялар* – тузилиши айланага яқин бўлган ҳудудларни тасвирлаш учун фойдаланилади.

Шундай қилиб, ушбу гуруҳ таркибига кирган омилларни ҳисобга олиб, умумий проекциялар оиласини (ёки уларнинг хоссаларини) белгилаб олиш мумкин, улар асосида ҳақиқий проекция аниқланади.

Иккинчи гуруҳ омиллари қўйилган масалани ечишда асосий ҳисобланади. Айнан, ушбу гуруҳ таркибидаги шартлардан келиб чиққан ҳолда, учинчи гуруҳ омилларининг аҳамиятига ойдинлик киритилади: жумладан, улардан қайси бири белгиланган аниқ вазиятда нисбатан энг муҳим аҳамиятга эга, қайси омилларни эса ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Бунда айрим талаблар, масалан, проекцияда исталган хатолик тавсифлари, уларнинг рухсат этилган максимал даражадаги қийматлари, қутблар тасвирланиши, картографик тўрнинг симметриклиги ёки асимметриклиги, меридиан ва параллеларнинг тенг бўлинишлари, тасвирда қопланган соҳаларнинг мавжудлиги ва ҳоказолар асосида маълум бир аниқ вазиятларда сўзсиз равишда ҳисоблашлар амалга оширилади. Демак, проекцияни танлаш фақат берилган талабларни тўлиқ ҳолатда қониқтирувчи кўплаб проекциялар ёки уларни хоссаларидан амалга оширилиши кераклигини англатади. Масалан, фақат тенг майдонли проекциялардан ёки фақат ортогонал тўрли проекциялардан танлаш мумкин ва ҳ.к.

Шундай қилиб, берилган ушбу маълум бир аниқ ҳолатларда биринчи гуруҳ таркибига қўшилувчи, сўзсиз равишда муҳим аҳамиятга эга бўлган омиллар, асосан, масаланинг биринчи қисми ечилишида, яъни проекциялар (уларнинг хоссалари) умумийлигини қарор топтиришда фойдаланилади, ушбу таркиб асосида ҳақиқий проекцияларнинг аниқланиши мақсадга мувофиқ ҳисобланади. Бу омилларнинг ажратиб кўрсатилишидан кейин, зарурий ҳисоблашларга жалб қилинувчи, барча қолган омилларнинг қараб чиқилиши (*иерархия*) бажарилади, бунда улардан ҳар бирининг маълум бир аниқ проекцияларда тутган нисбий аҳамияти аниқланади.

Ҳозирги пайтда карталарнинг иккита асосий тизими мавжуд: илмий – техник масалаларни ечиш учун ва кенг миқёсда фойдаланиш учун тузилган карталар. Биринчи турдаги карталар максимал даражада аниқ тузиб чиқилишни талаб қилади ва тасвирларнинг алоҳида қисмлар бўйича батафсиллиги, чуқур таҳлил қилиниши, синтетик тавсифдаги карталарда интеграл тавсифларнинг етарлича даражада аниқ жойлашуви талаб этилади.

Кенг фойдаланувчиларга мўлжалланган карталарнинг тузиб чиқилишида уларга нисбатан қўйилган талабларнинг кўп хиллилиги қайд қилиб ўтилади. Ушбу талабларга мувофиқ ҳолда карталарнинг алоҳида қисмлари тавсифлари бўйича, тасвирининг батафсиллиги ва аниқлиги, картографик тўрнинг кўриниши, кўриш ҳисси орқали белгиланувчи шартлар, яққоллик ва ҳоказолар ўзаро сезиларли даражада фарқланишларга эга бўлади. Картографик проекцияларни танлаш нуқтаи назаридан ушбу иккита тизим бўйича барча карталар (маълум даражада шартли равишда) бешта гуруҳга бўлиб чиқилиши мумкин (9 – жадвал).

Картографик проекцияларни танлаш автоматик равишда ёки турли хилдаги картографик проекцияларни солиштирма таҳлил қилиш асосидаги анъанавий усулларда амалага оширилиши мумкин, бу усуллар маълум бир аниқ турдаги карталарни тузиб чиқишда қўлланилади.

Иккинчи усулда проекцияларни танлаш ҳозирги вақтда нисбатан кенг тарқалган картографик проекцияларни солиштирма таҳлил қилиниши, юқорида кўрсатиб ўтилган алоҳида омилларнинг проекцияни танлашга нисбатан кўрсатган таъсири асосида, сезиларли даражада субъектив ҳолатлар қайд қилиниши ҳисобга олиниши билан амалга оширилади.

Юқорида қайд қилиб ўтилганидек, биринчи гуруҳ таркибига кирувчи омилларнинг ҳисобга олиниши бўйича, олдин проекциялар тўплами ўрнатилади, кейин улар асосида ҳақиқий проекция аниқланади. Масаланинг ечимига бу омилларнинг таъсири картага олинаётган худуднинг ўлчамлари йириклашиши билан ортиб боради.

Хатолик қийматларини камайтириш ва уларни мукаммал даражада тақсимлашни таъминланиши учун, айниқса, йирик ҳудудларни картага олишда, проекциянинг марказий нуқталари ва чизиқлари, уларни ҳудуднинг географик жойлашувига мослигини ҳисобга олишдан ташқари, изоколаларни тасвирланувчи соҳаларнинг схематик тузилиши билан мос тушишига интилиш керак. Картанинг мақсади, мазмуни (ихтисослашуви), ундан фойдаланиш усули, картографик ахборотларни таҳлил қилиш (ЭҲМдан фойдаланиб ёки анъанавий), нашр қилиш формати ва ҳоказолар ҳам ушбу тартибда таҳлил қилинади.

Бундай таҳлиллар картани тузишни ҳар бир вазияти учун бажарилади. Масалан, ўрта мактаб карталарини тузишда қараб чиқилаётган карталарда картографик тўр ўрта меридианга нисбатан симметрик бўлиши ва тенг бўлинган ёки унга яқин бўлган меридианлар ва параллеллар минимал эгрилик қийматига эга бўлиши талаб қилинади.

Мактаб карталари ўлчаш ишларини олиб боришга мўлжалланмаганлигини эътиборга оладиган бўлсак, уларга нисбатан хатоликлар хусусияти, қиймати ва тақсимланишига қатъий талаблар қўйилмайди. Кўриб идрок қилиш нуқтаи-назаридан сфериклик эффекти юзага келтирилиши, материк ва океанлар тасвири ўзаро мувофиқликда жойлашиши анъанавий ва одатдаги кўринишда бўлиши мақсадли.

Осиё қитъасининг четки ҳудудлари шарқий рамкага яқин жойлашиши, Америка қитъаси эса – карта варағида ғарбий рамка яқинида жойлашиши лозим. Карта проекцияларини танлаш масаласини қараб чиқишда, асосий картографик маълумотлар тенг чизиқлар усулида берилиши, картанинг кимларга мўлжалланганлиги, ихтисослиги, у бўйича қандай масалалар ечилиши эътиборга олинади.

Жумладан, агар изобара, изотерма, изогона ва ҳоказолар ўртасидаги майдонларни ўлчаш керак бўлса, у ҳолда тенг майдонли ёки унга яқин тавсифга эга бўлган проекциялардан фойдаланиш тавсия этилади. Агар турли хил ҳодисалар градиентларини аниқлаш (магнит майдон кучи, сувни шўрлик даражаси ва ҳ.к.) талаб қилинса, у ҳолда тенг чизиқлар ўртасида қийматларни интерполяция қилаш ишлари бажарилади, бунда тенг бурчакли проекциялардан фойдаланиш керак, бу проекцияларда узунлик хусусий масштаби йўналишга боғлиқ бўлмайди.

Майдони бўйича йирик худуд тасвирланаётган бўлса ва ўз навбатида, узунлик ва майдон хатолигини эътиборга олмаслик мумкин бўлмаганда, уларни қийматлари сезиларли даражада катта бўлишини ҳисобга олсак, унда узунлик хатолиги минимал қийматга эга бўлган проекцияларни эмас, балки бу хатоликлар қийматларини ҳисоблаш қулай бўлган проекциялардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Кўриб идрок қилиш нуқтаи-назаридан қулай бўлган майда масштабли карталарни тузишда, ҳудудларни тасвирлашда нисбатан тасвирда тўғри географик жойлаштириш, картографик тўр кўринишида сфериклик эффектини ифодалаш ва шунга ўхшаш омиллар сезиларли аҳамиятга эга бўлади.

68 – §. Меридиан ва параллеллар тўрлари кўриниши бўйича карталар проекциясини аниқлаш

Картани математик асоси, энг авволо, картографик проекция картани энг муҳим хоссаларидан бирини таъминлайди, яъни ўлчамлилик хоссасини, шу сабабли проекцияларни аниқлаш, карта доирасида хатоликлар тавсифлари ва уларнинг тақсимланишини билиш, карталардан фойдаланишда энг муҳим ва сезиларли аҳамиятга эга бўлган жараёнлардан бири ҳисобланади.

Меридианлар ва параллеллар тўри кўриниши бўйича картографик проекцияларини аниқлаш етарли даражада мураккаб масала ҳисобланади. Картада унинг проекцияси ҳақида маълумот берилиши мақсадга мувофиқ, чунки нашр этилган карталарда проекцияни аниқлаш масаласи анча қийин. Бу масала асосан, йирик масштабли карталарга тегишли, агар масштаб қанчалик йирик бўлса, карта варағида тасвирланаётган ҳудуд ўлчамлари шунчалик кичик бўлади, унда барча турдаги хатолик мутлоқ қийматлари ҳам шунчалик даражада кичик бўлади. Бу хатолик қиймати айрим ҳолатларда шу даражада кичик бўлиши мумкинки (айниқса, кўп қиррали проекцияларда), улар сезиларсиз ва тўр чизиқларини график кўринишда тузишда ҳамда қоғознинг деформацияси хатолиги билан қопланиб кетади.

Баъзи ҳолатларда майда масштабли карталар проекциясини аниқлаш масаласи оддий ўлчашлар ёрдамида ечилиши мумкин ёки картанинг алоҳида нуқталарида хусусий масштаблар қийматларини ҳисоблаш бўйича топилади.

Проекция синфини аниқлаш учун картографик тўрнинг ташқи кўриниши бўйича ўлчашларни амалга оширмасдан, проекциянинг қайси синфга киришини – нормал, конусли, цилиндрик, азимутал ёки бошқа турдаги проекция ҳисобланишини аниқлаш мумкинлиги ёки мумкин эмаслиги ҳақида олдиндан хулосаларга келиш талаб қилинади. Проекция синфини аниқлаб, кейинги ўлчашларни амалга ошириш ва хатолик тавсифи бўйича проекцияни гуруҳига ойдинлик киритиш мумкин. Агар тўр орқали тезда проекция синфини аниқлаш қийин масала бўлса, у ҳолда ўлчаш ишларини олиб боришга тўғри келади. Картографик тўрни таҳлил қилишни меридиан ва параллеллар кўринишидан, ўқ меридиан бўйича параллеллар ўртасидаги, шунингдек, меридиан ва экватор ўртасида ёки ўрта параллеллар ўртасидаги оралиқлар ўзгаришлари тавсифларига аниқлик киритишдан бошлаш тавсия қилинади; кейин эса тўрнинг ортогоналлиги, симметриклиги ва қутбнинг тасвирига ойдинлик киритилади.

Меридианлар кўринишини аниқлашда энг аввало, уларнинг барчаси тўғри чизиқдан ташкил топганлиги ёки фақат ўрта меридианлар тўғри чизиқ билан тавсирланган, қолганлари эса – ўрта меридианга нисбатан симметрик ҳолатда жойлашган эгри чизиқлардан ташкил топганлиги аниқланади. Агар меридианлар тўғри чизиқ бўлса, у ҳолда улар ўзаро параллелми ёки битта нуқтада кесишадими, ушбу масалага аниқлик киритиш керак. Бундай ишларни оддий графикли усуллар ёрдамида ҳам олиб бориш мумкин. Параллеллар тўрини кўринишини аниқлашда ҳам шу каби саволлар юзага келади, бунда кўпинча параллелларнинг симметриклиги тўғри чизиқли экваторга нисбатан бўлган ҳолати қараб чиқилади; тўғри чизиқли параллеллар фақат ўзаро параллел жойлашиши керак.

Меридианлар ва параллеллар эгри чизиқдан иборат бўлган вазиятда, энг аввало, улар айланами ёки йўқлигига аниқлик киритиш керак. Бундай текшириш калька қоғоздан тайёрланган, мураккаб бўлмаган «*номограмма*»лар ёрдамида амалга оширилади. Бунинг учун калькага текширилаётган эгри чизиқ бўйлаб, бир-биридан бир хил оралиқда жойлашган учта нуқта ўрни кўчирилади ва калькада белгиланган ушбу учта нуқтани олинган эгри чизиқ бутун узунлиги бўйлаб устма – уст тушишига аниқлик киритилади; агар нуқталар мос келса, у ҳолда эгри чизиқ айлана ҳисобланади. Агар параллеллар айлана бўлиб тасвирланганлиги аниқлангандан сўнг, уларни концентриклиги аниқланиши керак. Концентрик айланаларда ҳар бир ёнма-ён жуфт параллеллар орасидаги масофа тенг сақланади. Айрим вазиятларда айлана радиуси унчалик катта бўлмаганда ва уларни марказини осонликча топиш мумкин бўлганда, айлана ёйларини циркул ёрдамида текшириш мумкин. Нисбатан мураккаб эгри чизиқлар (эллипслар, синусоидалар ва ҳ.к.) шакллари одатда, оддий кўз билан қараб аниқланади.

Айрим вазиятларда картографик тўр чизиқларининг кесишиш нуқталари координаталарини ўлчаш йўли билан меридианлар ва параллеллар кўринишини аниқлаш мақсадга мувофиқ. Бу масала автоматлаштириш воситалари мавжуд бўлган ҳолда сезиларли даражада осонлашади. Меридиан ва параллеллар кўриниши ва тўрининг ориентирланганлиги бўйича проекцияни қайси синфга тегишли эканлигини аниқлаш проекцияларни аниқлаш масаласини ечишни биринчи босқичи ҳисобланади.

Иккинчи босқич – бунда хатоликлар тавсифлари бўйича проекциялар гуруҳларига аниқлик киритиш ва айрим ҳолатларда, бу жараённи проекция синфини аниқлаш билан биргаликда бажариш ҳам мумкин, бироқ кўплаб ҳолатларда бундай текшириш карталар орқали ўлчашларни бажариш асосида олиб борилади. Тенг бурчакли проекцияларда тўрнинг ортогоналлиги сақланади ва параллеллар ўртасидаги оралиқлар марказий нуқтадан ёки чизиқдан картанинг четига томон ортиб бориши қайд қилинади. Эслатиб ўтиш керак, бундай тавсифлар айрим ҳосила проекцияларга ҳам хос, масалан, хатоликлари бўйича тенг бурчакли проекцияларга яқин бўлган цилиндрик проекцияларга. Тенг майдонли проекцияларда аксинча, марказий нуқта ёки проекция чизиғидан карта четига томон параллеллар (альмукантаратлар) ўртасидаги оралиқ масофа камайиб боради.

Қайд қилиб ўтамиз, хатолик тавсифлари бўйича иҳтиёрий ташқи перспектив ва ортографик проекцияларда бу масофалар тенг майдонли проекцияларга нисбатан қаралганда тезроқ камайади. Бунда картографик тўр чизиқлари ўртасидаги масофа тезликда камайиши ҳисобига сфериклик эффекти ва узоқдан кўринишлик ифодаси таъминланади. Меридианлар (вертикаллар) бўйича тенг оралиқли проекцияларда параллеллар (альмукантаратлар) орасидаги масофалар ўзгармайди. Ўқ меридиан узунлиги ўзгармайдиган проекцияларда, масалан, псевдоцилиндрик проекцияларда хам параллеллар орасидаги масофа сақланиши кузатилади.

Агар тўрнинг кўринишини ўрганишидан кейин ҳам хатолик тавсифи бўйича ушбу проекциянинг қандай гуруҳга киритилишини аниқлаш мумкин бўлмаса, унда меридиан ва параллеллар бўйича хусусий масштабларни аниқлаш бўйича картада ўлчашлар амалга оширилади. Бунинг учун мавжуд имкониятлар асосида айрим нуқталарга ёки карта чизиқларига нисбатан симметрик ҳолатда жойлашган, меридианнинг нисбатан кичик кесма ва шунингдек, ушбу нуқтадан бошланувчи параллеллар кесмалари ўлчанади. Кейин эса $s_m = (s_2 - s_1)$ ва $\varphi_{урта}$ аргументлар асосида ер юзасида тегишли меридиан ва параллеллар кесмалари узунликлари аниқланади ҳамда қуйида келтирилган формулалар бўйича m ва n масштаблар қийматлари ҳисоблаб топилади:

$$m = s'_m /(\mu_0 1000) s_m; \quad n = s'_n /(\mu_0 1000) s_n,$$

Бу ерда s'_m ва s'_n – меридиан ва параллеллар кесмаларининг карта бўйича ўлчаниш қийматлари (0,1 мм гача аниқлик даражасида; s_m ва s_n – ер юзасида тегишли меридиан ва параллеллар кесмаларининг узунлиги; μ_0 – картанинг асосий масштаби. Агар натижада узунлик хусусий масштаблари $m = n$ ва бурчак $\varepsilon = 0$ (хатолик $\omega = 0$) қийматлар кузатилса, у ҳолда проекция тенг бурчакли; агар $p = mn \sin i = 1$ бўлса, у ҳолда проекция тенг майдонли, агар $m \neq n$ ва $p \neq 1$ шарт бажарилса, унда проекция ихтиёрий проекция ҳисобланади.

Хусусий масштабларни марказий нуқта ёки карта чизиғидан маълум бир масофада бўлган жойда амалга ошириш талаб қилинади. Бунда ҳисоблаш аниқлиги бирнинг юздан бир улушлари билан чегараланиши мумкин. Проекция синфини олдиндан билиш учун махсус жадваллардан фойдаланиш мумкин, масалан 10 – жадвал орқали.

Назорат саволлари

1.
2.

XIV БОБ.
МАТЕМАТИК КАРТОГРАФИЯДА АВТОМАТЛАШТИРИШНИНГ АСОСИЙ МУАММОЛАРИ ВА ЙЎНАЛИШЛАРИ

Ҳозирги пайтда картография фани ва амалиётидаги энг муҳим масалалардан бири – бу картографик ишлаб чиқаришни автоматлаштириш ҳисобланади. Электрон ҳисоблаш машиналари (ЭҲМ) ва ГИС дастурлари картографик тизим таркибига киритилувчи ташқи қурилмалар математик картографияда қуйидаги асосий масалаларни ечишда фойдаланилиши мумкин: картографик проекцияларни ЭҲМ ёрдамида қуриш; берилган проекцияларда картанинг картографик проекцияларини ўзгартириш; тузилаётган картага қўйилган барча талабларни нисбатан тўлиқ ҳолатда қониқтирувчи картографик проекцияларни автоматлаштирилган усулларда танлаш; берилган қоидага мос равишда, автоматлаштирилган режимда янги картографик проекцияларни қидириб топиш; картанинг масштаби ва компоновкасини автоматик тарзда лойиҳалаш; автоматик режимда картографик проекцияларни таниш; картада ўлчашларни олиб бориш учун маълумотларни автоматик тарзда киритиш, ўлчашларни автоматик бажариш ва ўлчаш аниқлигини баҳолаш; математик асос элементларини автоматик тузиб чиқиш ва бошқалар.

69 – §. ЭҲМ ёрдамида картографик проекцияларни ҳисоблаш

Карталарни тузиб чиқишда картографик проекцияларни ҳисоблаш ишлари бажариш учун қўл меҳнати (ҳозирча асосий усул ҳисобланади) ёки автоматлаштирилган картографик тизимдан фойдаланилади.

Кўрсатиб ўтилган биринчи ҳолатда, агар таянч нуқталар сони кам бўлса, ҳисоблаш формулалари оддий кўринишга эга бўлганда ва ҳисоблашлар бир марталик тавсифига эга бўлса, у ҳолда ишлар столда бажарилувчи ҳисоблаш воситалари ёрдамида бажарилиши мумкин, агар сезиларли даражада таянч нуқталар сони ошиб борса ва катта аниқлик талаб қилинса, проекция формулалари мураккаб кўринишга эга бўлганда ва бу ишларни бажариш даврий равишда такрорланиши керак бўлса, унда ГИСдан фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

Иккинчи ҳолатда, автоматлаштирилган тизимлардан фойдаланиб карталарни тузишда, таянч нуқталар сони, формулаларнинг мураккаблик даражаси ва ҳоказоларга боғлиқ бўлган ҳолатда ЭҲМ ёрдамида иш бажарилади. ЭҲМда картографик проекцияларни ҳисоблаш ишлари қуйидаги келтирилган иккита усулда амалга оширилиши мумкин.

Биринчи усулда умумий ечимларнинг хусусий ҳолати сифатида проекцияларнинг синфлари ва вариантларига аниқлик киритиш имконини берувчи алгоритмлар ва дастурлардан ташкил топган ягона услубиятни тузиб чиқиш назарда тутилади.

Иккинчи усулда ҳар бир синф ва ҳар бир қаторлар учун картографик проекцияларнинг алоҳида вариантлари бўйича ўзига тегишли бўлган услубиятлар, алгоритмлар ва дастурлар тузиб чиқилади, яъни дастурий кутубхона ташкил қилинади. Кўплаб ҳолатларда турли хилдаги проекцияларни ҳисоблашнинг ягона кўринишдаги дастурларидан фойдаланиш сезиларли даражадаги иктисодий самарадорликни беради, шунингдек бунда ҳар бир синф учун ёки аниқ берилган проекциялар учун ишлаш мақсадида дастурни тузиб чиқиш эҳтиёжига барҳам беради.

Кундалик ҳаётимизга хилма-хил ахборотларнинг жадал кириб келиши, янги техника ва технологияларни ишлаб чиқаришга тадбиқ этилиши натижасида карталарнинг математик асосини такомиллаштириш, картографик проекцияларни ГИС дастурларини қўллаган ҳолда яратиш вазифалари кўндаланг қўйилди. Бугунги кунда картографик ишлаб чиқаришда ArcGIS, MapInfo, AutoCAD, Panorama, Fotomod, Geo Draw, Geo Graph, Atlas Gis, Win Gis, ArcInfo, Arc View GIS, MGE ва бошқалар ишлатилмокда. Уларнинг имкониятлари ҳар хил. Худудни географик ўрни, уни катталиги, чегараларини шакли, картани мақсади, тайёрланиш соҳаси, масштаб ва мазмуни, карта бўйича ечиладиган вазифалар ва уларни ечиш учун карта аниқлигига қўйиладиган талаблар, картографик проекцияни хатолик хусусияти ва уларни максимал миқдори ҳамда тақсимланиш характери ва ҳоказоларни билиш талаб этилади. Сўнгра шуларга асосланиб эса мақбул ГИС дастурлари танланади.

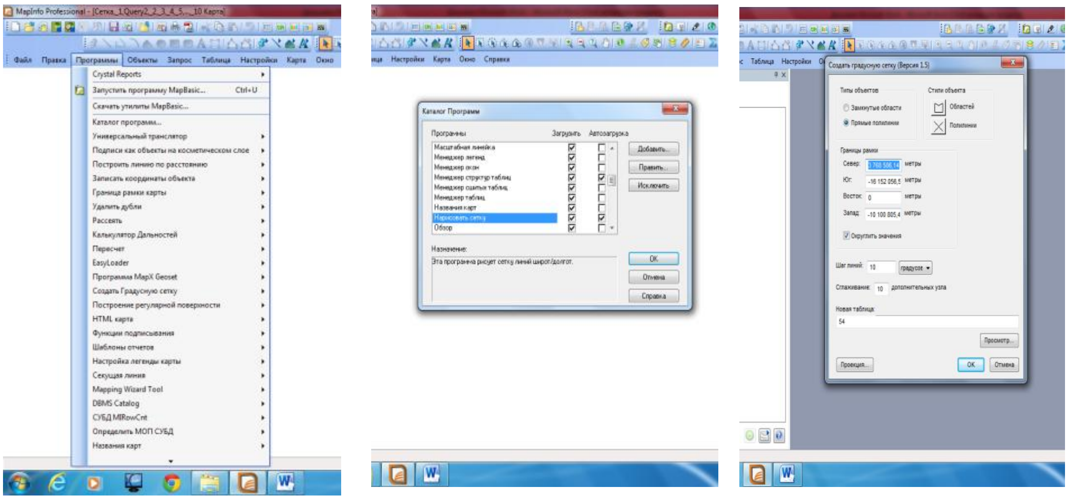
Масалан, ArcGIS дастури карта тузишнинг барча босқичларини қамраб олади. Зеро бу дастур бошқалардан ўзининг таҳлил қилиш ва баҳолаш имкониятлари кўплиги билан фарқ қилади. Panorama, Fotomod дастурлари эса, асосан, аэро ва космик суратлардан маълумотларни олиш, растр билан ишлаш, йирик масштабли план ва карталарни яратиш ишларида кенг ишлатилади. AutoCAD дастуридан геодезик ўлчашларни ва дала съёмкаси натижаларини қайта ишлаш, шаҳар архитектураси ва инфратузилмаси, йирик масштабли план ва карталарни яратиш ишларини олиб боришда фойдаланилса мақсадга мувофиқ бўлади.

Geo Draw, Geo Graph ва Atlas Gis дастурлари Россия ФА География институтида миллий атласларни, йирик регионлар ва вилоятларни мавзули ва умумгеографик карталарини ишлаб чиқишда кенг ишлатилган. Win Gis, ArcInfo, Arc View GIS, MGE дастурлари ер тузиш, кадастр картографиясини олиб бориш, транспортни бошқариш, режалаштириш ва оптимиллаштириш ҳамда бошқа бир қатор хизматларда фойдаланилади.

Юқоридаги ГИС дастурларидан кенг тарқалгани - MapInfo ГИСида картографик проекцияларни ҳосил қилиш йўлларини кўриб чиқамиз. Маълумки, республикамизнинг карта ва атласларини яратишда конусли ва цилиндрик проекциялардан кенг фойдаланилади. Хатолиги бўйича тенг оралиқли бўлган конусли проекция масштаби 1:1 500 000 дан майда бўлган бутун республика худудининг табиий ва социал-иқтисодий карталарини тузишда ишлатилади. Цилиндрик проекциялардан дунё карталари, денгиз навигация карталари ҳамда топографик карталарни тузишда.фойдаланилади. Шу билан бир қаторда цилиндрик проекциялар йирик масштабли тўртбурчак шаклга эга бўлган ўрта кенгликларда жойлашган худудлар карталарини тузиб чиқишда ҳам ишлатилади.

Бундай икки хил проекцияни (конусли ва цилиндирик) MapInfo ГИСида тузиш йўллари қуйидаги босқичларда бажарилиши мумкин. Дастлаб *MapInfo* дастури ишга туширилади, бош меню орқали *программы* функциясига кирилади ва ундан *каталог программ* танланади. Кейин *нарисовать сетку* танланиб, *ОК* тугмаси босилади.

а *б* *в*

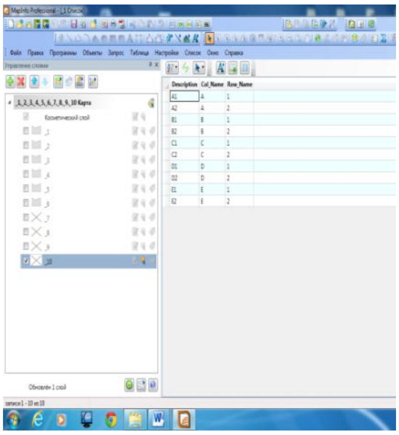


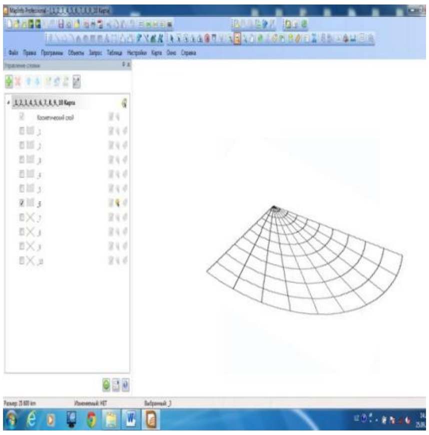
69-расм. **ГИСда дастурлар катологи ва улар билан ишлаш:**
а) дастурлар каталогини танлаш; б) координата тўрини танлаш; в) проекция турини танлаш.

Шунда координата тўрларини чизиш буйруғи ёқилади. Сўнгра яна *программы*га кириб, *Создать градусную сетку* ва *создать сетку* буйруқлари берилади (69-расм). Шундан сўнг тўрни яратиш бўйича ойна ҳосил бўлади.

Конусли проекцияни ГИС асосида яратишда картага олинаётган худуд чегарасининг координаталари маълумотлар базасига киритилиши, ёки тўрни ҳосил қилиш қуроли билан карта ойнасини танланиши керак. Албатта, барча жиҳозлаш ишлари растрни рўйҳатга олишнинг “кенглик ва узоқлик” ҳолатида бажарилиши мумкин (70-расм).

а *б*

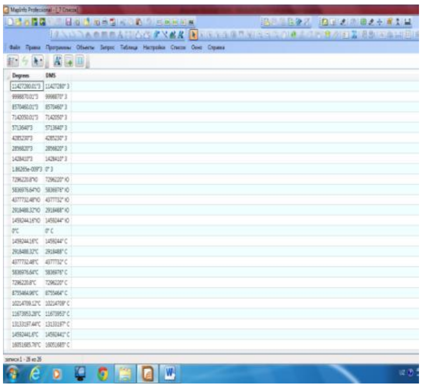


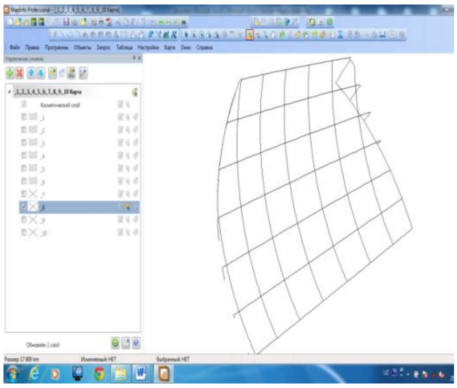


70-расм. **Конусли проекция тўрини чизиш ойнаси:**
а) маълумотлар базаси; б) конусли проекция.

Цилиндрик проекцияни MapInfo ГИСида яратишда юқорида кўрсатилган тартибда ишлар кетма-кет бажарилади, “проекция” қурилмаси орқали ГИС рўйхатида номлари келтирилган проекциялардан худудга мос келадигани кўрсатилади (71-расм). Шундан кейин проекция тўри чизилади.

а *б*





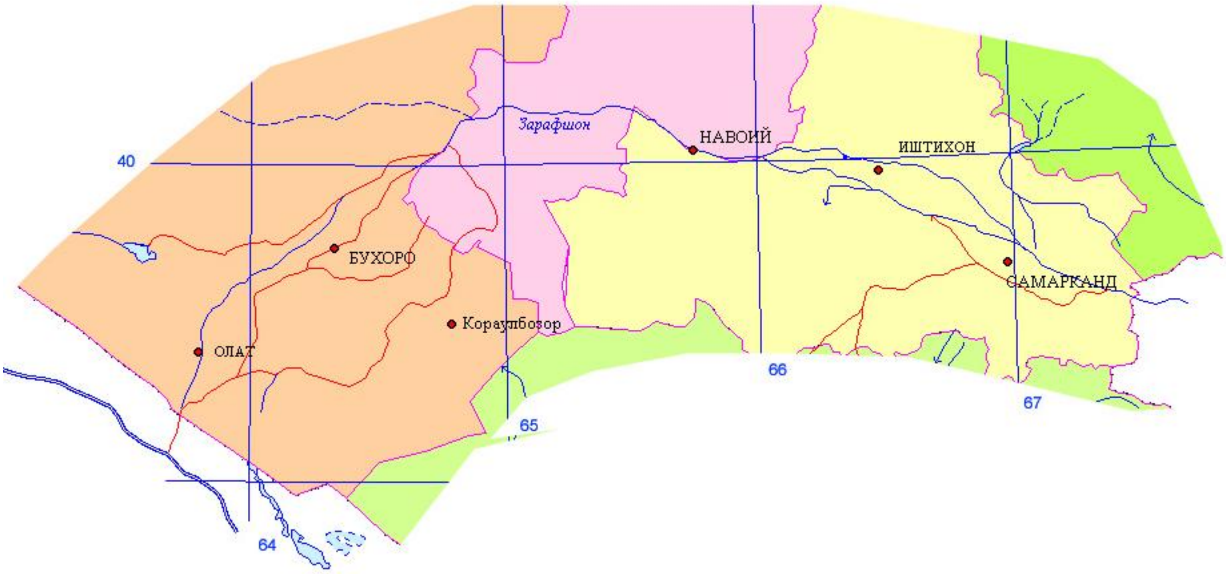
71-расм. **Цилиндрик проекция тўрини чизиш ойнаси:**
а) маълумотлар базаси; б) цилиндрик проекция.

Кадастр карталари учун энг яхши картографик проекцияларни танлаш, проекцияларни хатоликлари хусусияти бўйича энг оптималларини излаш назарияси ва амалиётини ишлаб чиқиш масалари ҳозиргача тўлиқ ечилмаган. Картографик проекцияларни танлаш кадастр тизимини мақсади ва амалга оширадиган вазифаларидан келиб чиқади, шунингдек, қўйилган шартга кўра йўл қўйиларли энг катта майдон хатолигига (унинг таъсир доираси шаклни қупол ўзгаришига олиб келмаганда) боғлиқ бўлиб, у 0.4% дан ошмаслиги керак.

Кадастр карталари учун проекцияларни ишлаб чиқишда республика ва унинг суғориладиган ерлари конфигурация хусусиятларини ҳисобга олиш зарур. Глобал факторлар таьсирини баҳолашда ва йирик геосистемаларнинг ривожланиши ва функционал фаолиятини тадқиқ қилишда уларни бутунлай тасвирлаш масаласи муҳим аҳамият касб этади. Ўрта Осиё шароитида, масалан, мелиорация тадбирларини олиб бориш мақсадида, тупроқ карталарини тузишда, табиий худудни дифференциялашда “ҳавза усули” қабул қилинган. Бундай ҳолатда бутун республика худудига алоҳида, унинг қисмларига алоҳида ишлаб чииқлган проекциялардан фойдаланиш мумкин, лекин изоколлар йирик суғориладиган ерларни ташқи кўриниши билан тўғри келиши керак. Яна шуни таъкидлаш жоизки, майда маштабли (1:5 000 000 ва ундан майда) карталарда “сфериклик эффекти” сақланиши зарур.

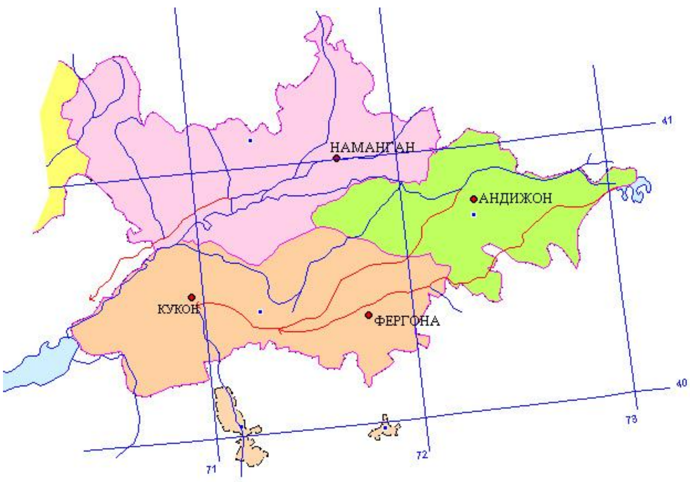
Ҳозирги пайтда туман ва вилоят кадастр тизими босқичида карталар учун ортогоналли ва тенг бурчакли кўндаланг-цилиндрик проекция қўлланилмоқда. Тупроқ ва тупроқ қоплами карталари аниқ разграфкага эга эмас (1:1 000 000 масштабдаги Давлат тупроқ картасидан ташқари). Майда масштабли карталар учун, масалан, Зарафшон водийсига нормал тенг майдонли ёки тенг ораликқли конусли проекцияларни қўллаш мумкин. Фарғона водийси учун эса қийшиқ ёки кўндаланг азимутал проекциялар (стереографик, қийшиқ азимутал ёки худуднинг марказий нуқтаси асосида тузилган перспектив проекция) ишлатилиши мумкин.

Тенг оралиқли конусли проекцияни танлаш хатоликлар характерига боғлиқ, бу ерда меридианлар бир хилда орлиқдан ўтказилган, параллеллар ораси тенг оралиқда бўлинганлиги ва меридиан ёйи бўлакларини ўзгариши сезилмайди. Юқорида келтириб ўтилган шартлар бўйича четки параллелардаги хатоликларни ҳам стандартлардаги каби худди шундай қийматларда ўрнатиш мумкин.



72 – расм. **Зарафшон водийси**

Стандарт параллелар сифатида четдаги параллелар кенгликлари $\varphi_1 = 45^\circ 00$ $\varphi = 37^\circ 00$ қабул қилинган.

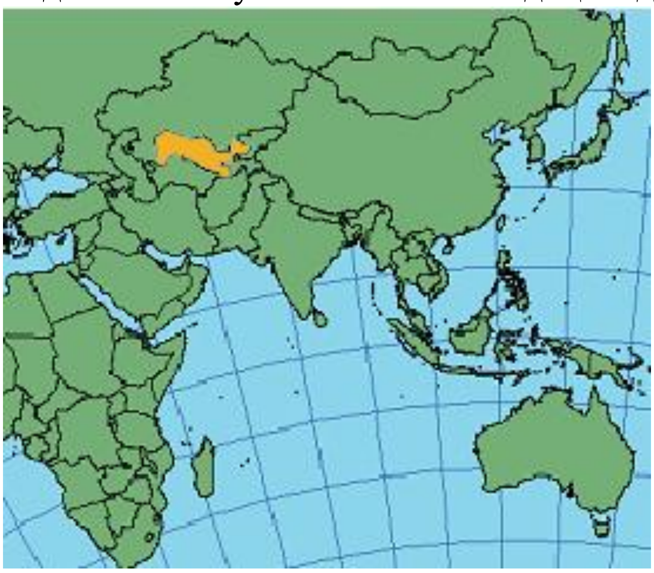


Ламбертнинг қийшиқ тенг майдонли азимутал прекцияси худудни доиравий шаклда тасвирлаш имконини беради, (у Фарғона водийси учун фойдаланилган) бунинг учун марказий нуқтани тасвирланаётган водийнинг ўртасидан олиш мумкин.

73 - расм. **Фарғона водийси**

Бундан ташқари, проекцияда юзалар доиравий шаклда тасвирланади, масофалар эса хатоликларсиз хохлаган йўналишларда ўтказилади. Бурчак хатолиги четки меридианларда ошиб боради, шунда майдон хатолиги нолга тенг бўлади.

Шундай қилиб, кадастр тизими учун кўплаб проекциялардан тўғри тенг майдонли конусли проекция (2 та стандартли параллелари билан), тўғри тенг ораликли конусли проекция, Боннинг псевдоконусли тенг майдонли проекцияси, Ламбертнинг қийшиқ тенг оралиқли азимутал проекцияси ва кўндаланг тенг бурчакли стереографик проекциялар танланади. Кўриб чиқилган конусли проекциялардаги хатоликлар четдаги параллелар томон ошиб боради, тезлик билан шимолга қараб, стандарт параллеларда эса – доимий, ва 1 га тенг, бу эса республика карталари учун ушбу проекциядан фойдаланиш мумкинлигини тасдиқлайди. Хатоликлар изоколлари битта марказли доира кўринишда тасвирланади ва улар параллеллар билан тўғри келади. Кўриб ўтилган ва танланган бошқа проекцияларда хусусий масштаблар ҳамда бурчак хатоликлари қийматлари 11-жадвалда кўрсатилган.



74 - расм. **Бонн проекцияси.**

Тенг оралиқли проекцияларда бурчак хатолиги қийматлари шимолга қараганда жанубий параллелларда катта эканлиги кузатилди. Майдон хатолиги нолга тенг, паралел бўйича энг кичик хусусий масштаб 1 га, энг каттаси 1,031, бурчаклари $0^0 04'$, меридианлар бўйича масштаб 1 га, паралеллар бўйича майдонлар танланган бош масштабга тенг. Бу проекцияларни паралеллар бўйича чўзилган, ўрта кенгликларда жойлашган худудларнинг ўрта ва майда масштабли карталарини тузишда ишлатиш қулай. Шунинг учун бу проекциялар республикамиз ва унинг Заравшон водийсини карталарини тузиш учун танланган.

11-жадвал

Проекциялар	Проекцияларнинг хусусий масштаблари ва бурчак хатоликлари кўрсаткичлари				
1. Иккита стандарт параллелли тўғри тенг майдонли конусли проекция $\varphi_1=45^0 00'$ $\varphi_2=37^0 00'$ *(ЎзбекистонРеспубликаси карталари учун)*	Ўзбекистон Республикаси карталари учун				
	φ	m	n	p	ω
	45	1,006	0,994	1	$0^0 03'$
	44	1,0005	0,9998	1	0 00
	43	1,00015	0,9996	1	0 01
	42	1,002	0,9993	1	0 00
	41	1,002	0,998	1	0 02
	40	1,001	0,9996	1	0 00 16
	39	1,0001	0,9995	1	0 00 14
	38	1,0002	0,9994	1	0 00 09
	37	0,999	1,001	1	0 04
2. Тўғри тенг оралиқли конусли проекция *(Ўзбекистон Республикаси ва Зарафшон водийси карталари учун)*	45	1	1,002	1,002	0 01
	44	1	1,031	1,031	0 00
	43	1	1,019	1,019	0 02
	42	1	1,021	1,021	0 01
	41	1	1,000	1,000	0 00
	40	1	1,016	1,016	0 03
	39	1	1,028	1,028	0 01
	38	1	1,013	1,013	0 02
	37	1	1,003	1,003	0 02
3. Боннинг тенг майдонли псевдо-конусли прооекцияси *(Зарафшон водийси карталари учун ҳам қўлланилиши мумкин)*	45	1,001	1	1	2 05
	44	1,002	1	1	1 10
	43	1,000	1	1	0 23
	42	1,003	1	1	0 29
	41	1,000	1	1	0 15
	40	1,004	1	1	0 54
	39	1,002	1	1	0 43
	38	1,003	1	1	1 22
	37	1,001	1	1	2 10
4. Ламбертнинг тенг майдонли қийшиқ азимутал проекцияси *(Фарғона водийси карталари учун)*	*Фарғона водийси карталари учун*				
	z	*m*	*n*	*p*	*ω*
	0^0	1,0000	1,0000	1	$0^0 00'$
	1^0	0,9998	1,0002	1	0 00
	2^0	0,9996	1,0004	1	0 01
	λ	m	n	P	Ω
	$0^0(71^0)$	1,0000	1,0000	1	0^0 00
	72^0	0,9999	1,00003	1	0 00 22
	73^0	0,9995	1,0009	1	0 01 06

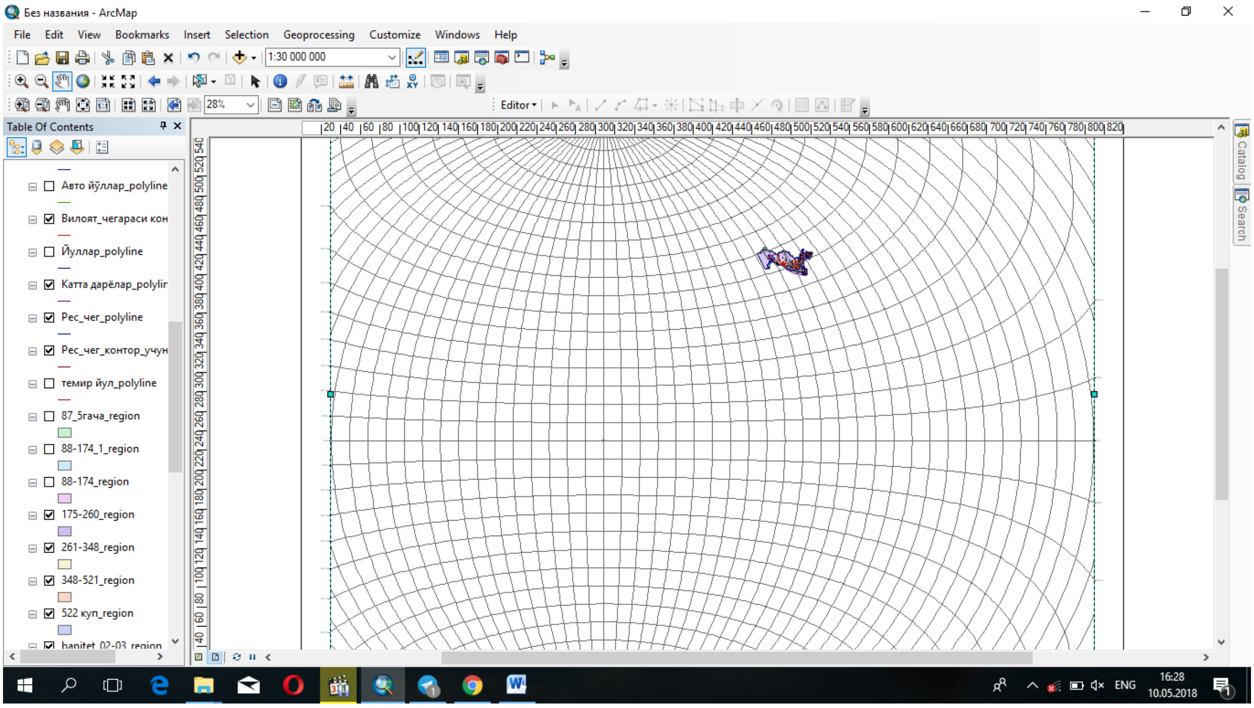
Азимутал проекцияларда асосий йўналишлар вертикалларга ва альмукантаратларга тўғри келади, бу ерда μ_1,μ_2 экстремал, шунинг учун хатоликлар зенит масофасига z боғлиқ. Изоколлар битта марказли доиралардир. Карталарда z жудаям кичик (0^0 дан 3^0 гача) бўлгани учун, изоколлар альмукантаратлар билан устма-уст тушган, бу эса энг минимал хатоликларга тўғри келади.

Бурчак хатолиги кенглик йўналиши бўйича четдаги паралеллар томонига қараб ошиб боради. Агар m≈ω, боғлиқлиги бўлса, унда бурчак ўлчамларини ўзгариши минимал бўлади, шунинг учун олинган бурчак хатолик қийматлари кадастр талабларига жавоб бериши мумкин. Келтирилган ҳисоблар бундай проекцияларни кадастр карталарида ишлатиш мумкинлигини исботлаб беради.

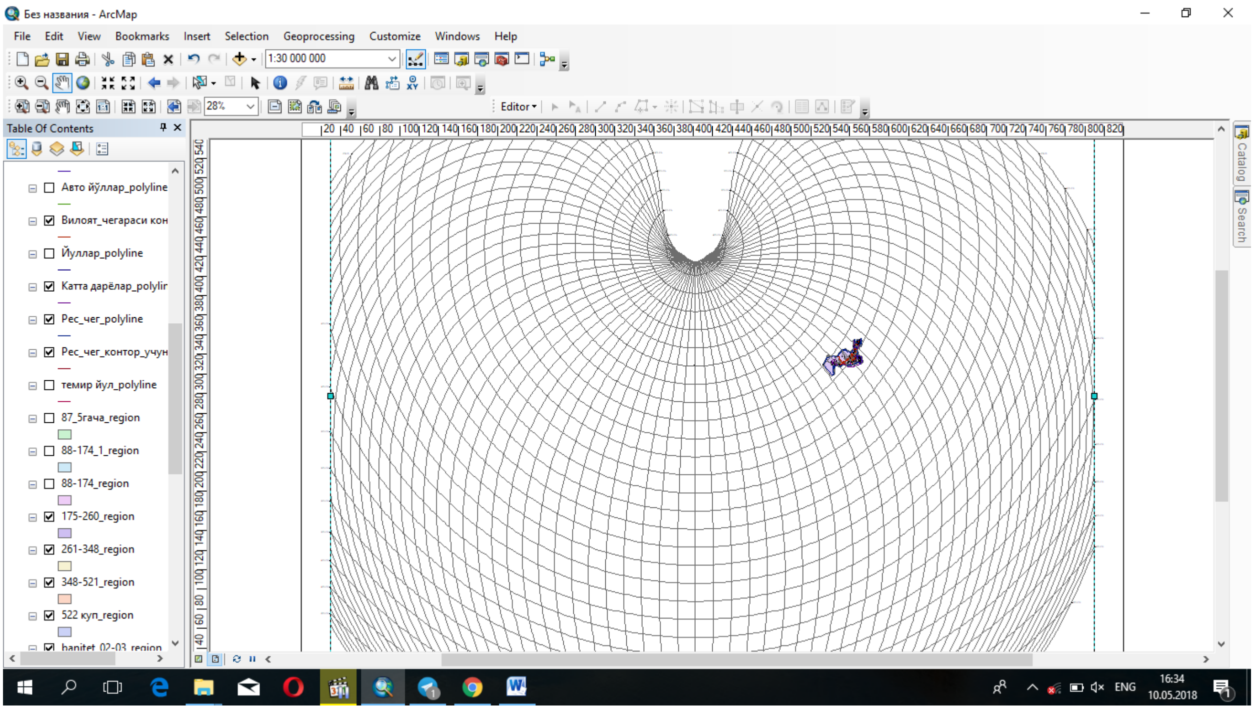
Проекцияларни танлашнинг тайёргарлик ишлари босқичида ГИС-технологиялари дастурлари ва уларга мос келадиган компьютер техник воситалари танланади. Ўтказилган тадқиқотларда *ArcGIS, MapInfo* ва бошқа дастурлар қўлланилган. Координата тизими танланиб, географик боғланиш объектлари аниқланди. Тўғри дискретли боғланишдан фойдаланилиб, картографик проекциялар қийматлари ҳисобланди, сўнгра *ArcGIS* ва *MapInfo* дастурлари орқали республикамиз ҳамда Зарафшон ва Фарғона водийлари учун танланган картографик проекциялар тузилди.

Таъкидлаш жоизки, ГИС дастурлари ёрдамида картографик проекцияларни яратиш бир мунча қулайликларга эга. Бунда проекцияни ҳосил қилиш ишлари тез бажарилади, киритилаётган маълумотларнинг аниқлик даражаси анча юқори бўлади, проекцияда қупол хатоликлар кузатилмайди. Шу билан бирга тузилаётган проекцияга оид барча маълумотлар дастурда сақланиб туради, керакли вақтда унга ўзгартириш ҳамда қўшимчалар киритилиши мумкин.

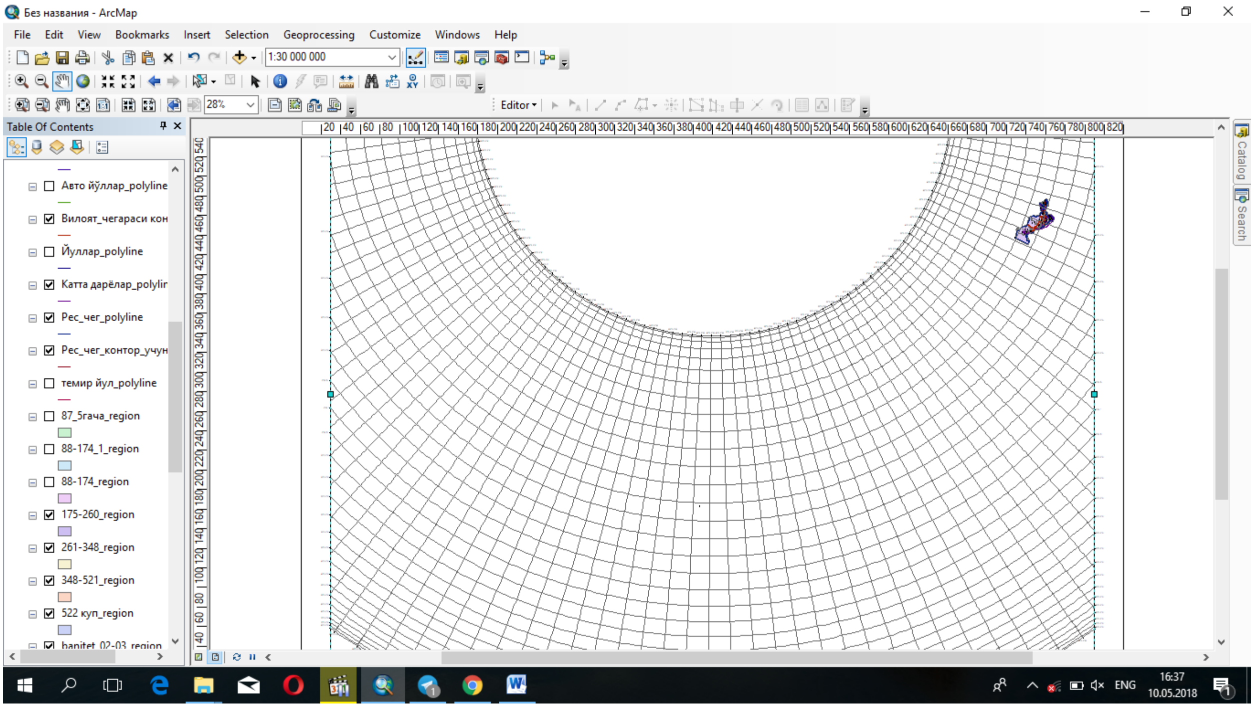
Ўзбекистон картасини тузиш учун турли проекция ва координаталар системаларини кўриб чиқамиз.



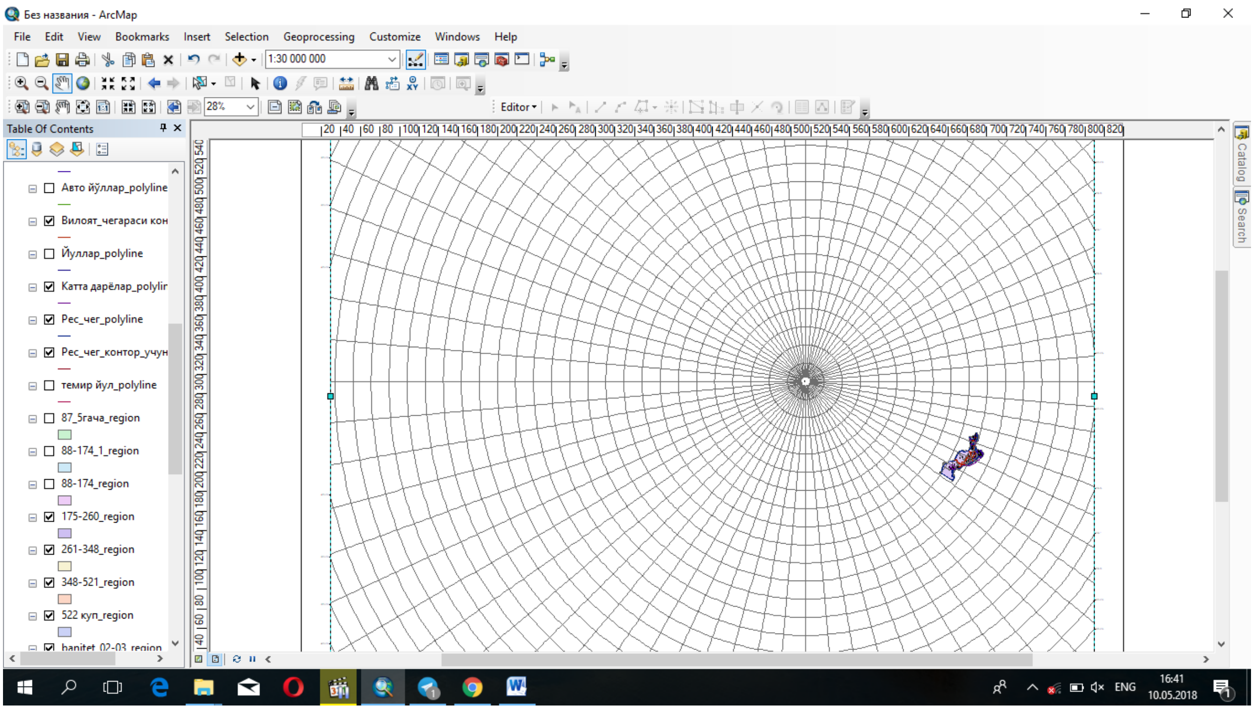
75-расм. **Дунё карталари учун азимутал (сфера) проекция**



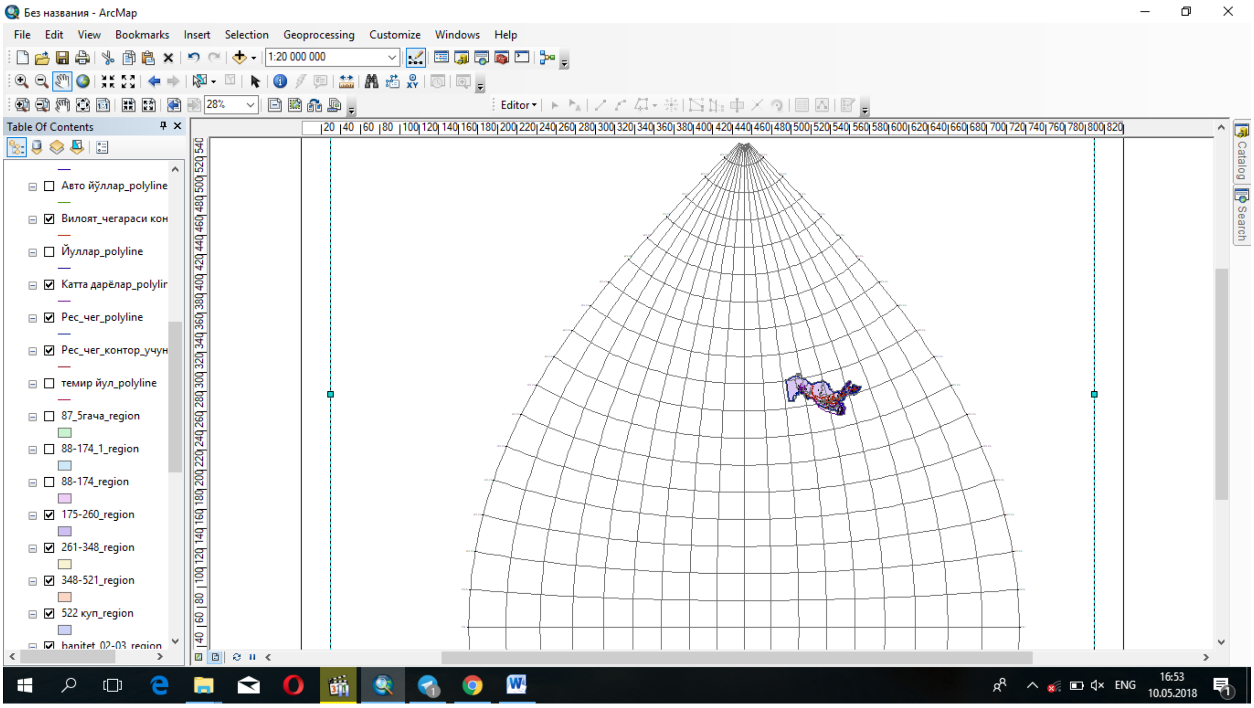
76-расм. **Дунё карталари учун Бонн проекцияси**



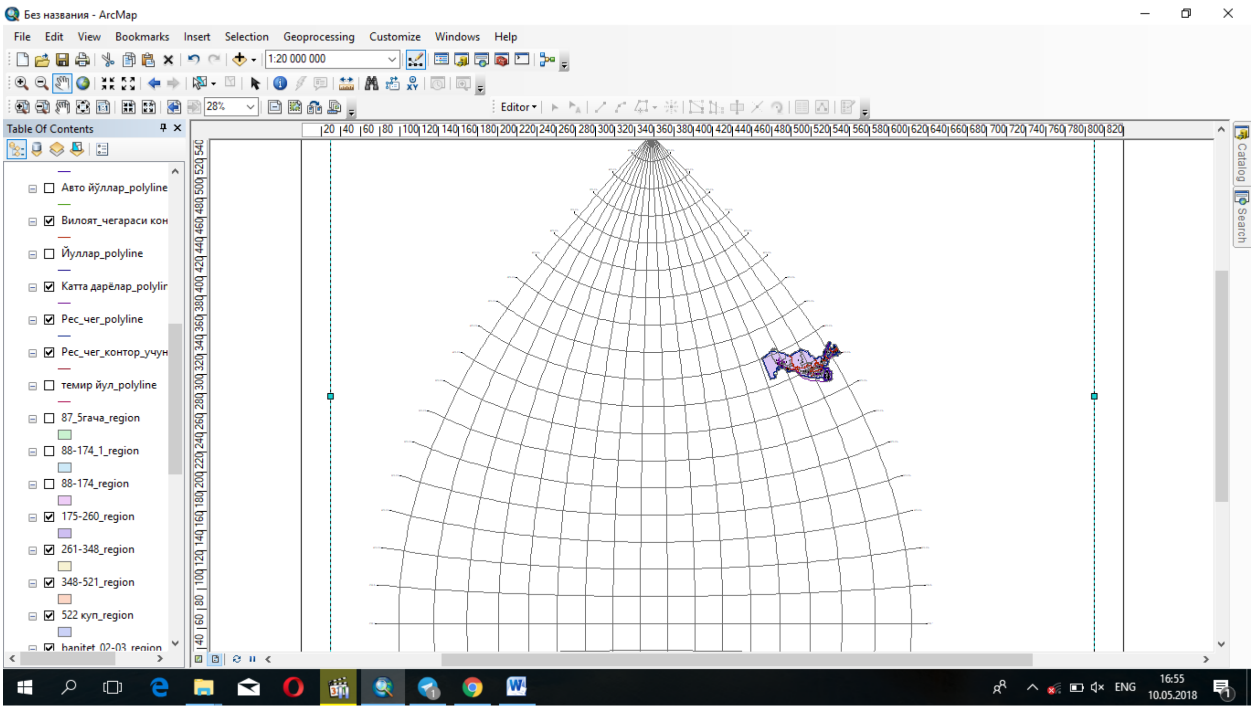
77-расм. **NAD 1983 (2011) Флорида GDL Алберс проекцияси**



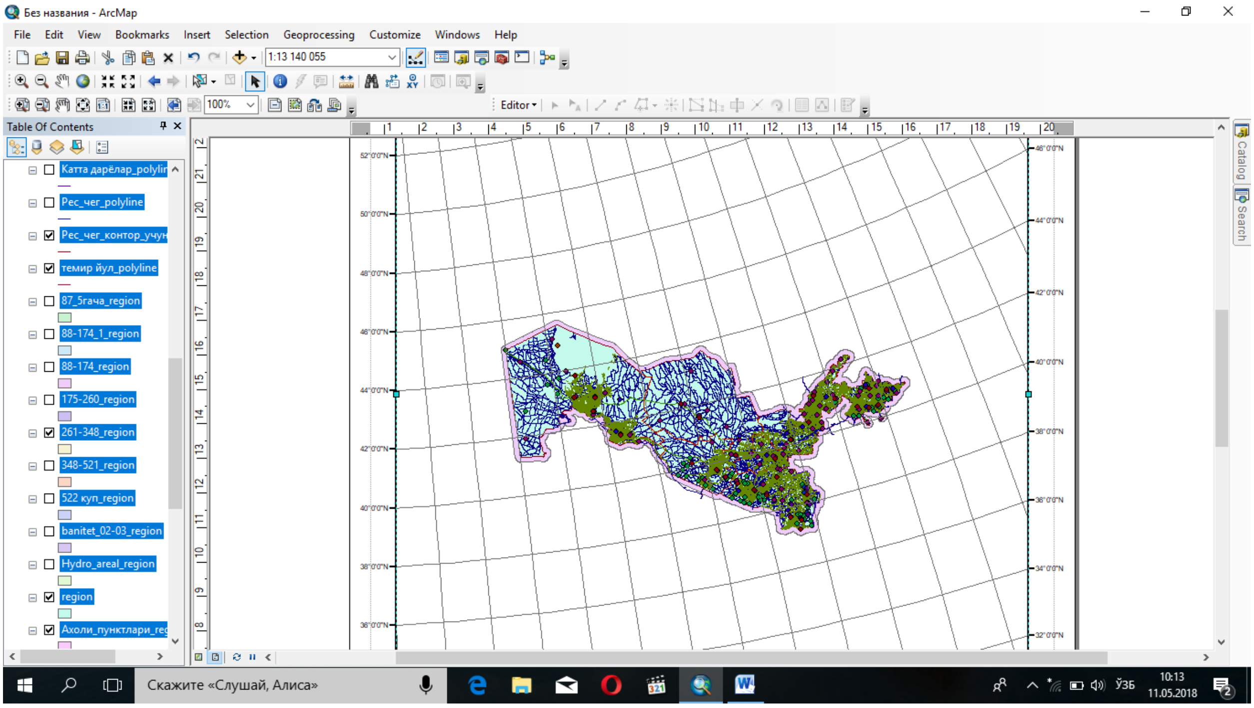
78-расм. **Қутб карталари учун азимутал проекция (Шимолий қутб)**



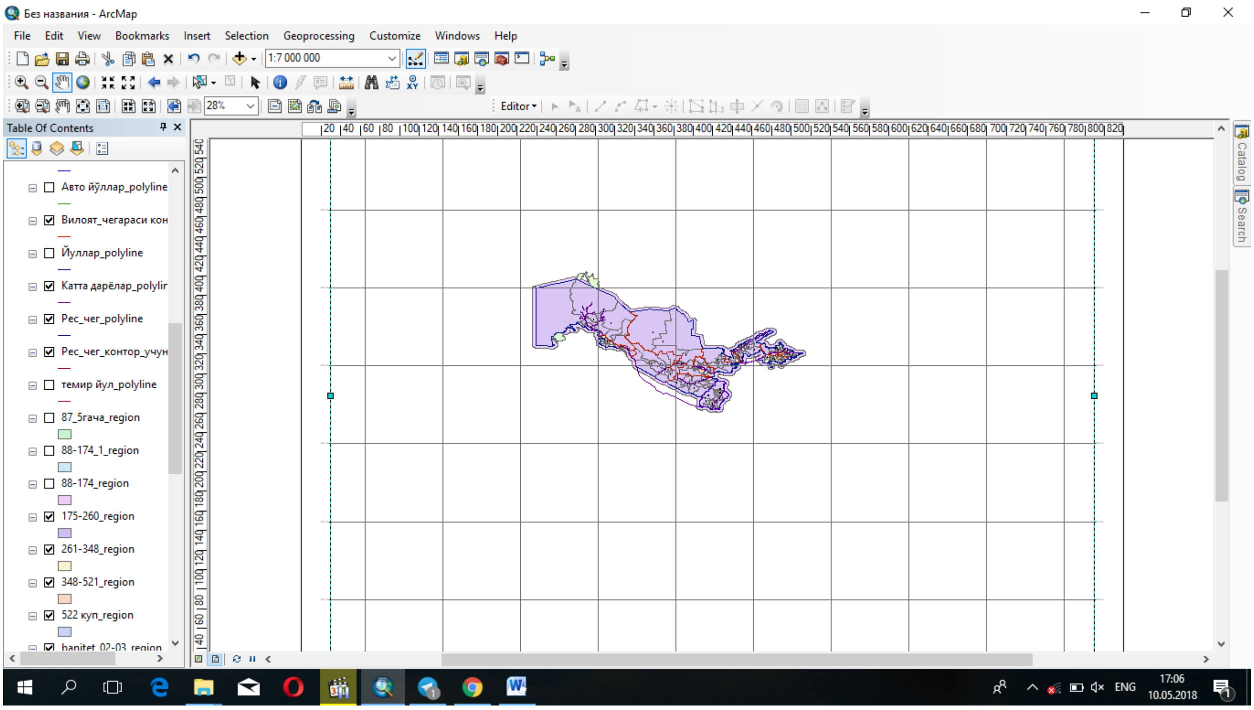
79-расм. **Туркия учун ED 1950 Degree 15-зона**



80-расм. **Туркия учун ED 1950 Degree 9-зона**



81-расм. **Осиё карталари учун Жанубий Яман (8-зона) проекцияси**



82-расм. **Европа карталари учун Албания 1987 проекцияси**

XV БОБ. МАТЕМАТИК КАРТОГРАФИЯНИ РИВОЖЛАНИШИНИНГ ҚИСҚАЧА ТАРИХИ

Математик картографиянинг ривожланиши тарихи бошланиши тахминан икки минг йил олдин Грециялик олимлар томонидан амалга оширилган ишлар билан белгиланади, улар томонидан биринчи марта Ер ва юлдузлар осмонининг тасвирини чизишда математик тамойиллардан фойдаланилган ва аста–секин меридианлар ва параллеллар тўрларидан ишлатилган. Картографиянинг ривожланишида Анаксимандр, Эратосфен, Апполоний, Гиппарх каби Қадимий Греция файласуфлари катта ҳисса қўшишган.

Эрамиздан олдинги II асрда Птолемей томонидан «География» номли йирик асар ёзилган бўлиб, унинг таркибига карталарни тузиш усуллари ва Ернинг ўлчамларини аниқлаш, шунингдек картографик проекцияларни тузиб чиқиш усуллари киритилган. Бу асар VII асрда таркибига бир қатор карталар киритилган «Арман географияси» асари яратилиши учун асос бўлган.

Ўрта асрларда ибодатхона карталарининг вужудга келиши билан тавсифланади, бу карталарда Оламнинг тузилиши ҳақидаги устувор диний тасаввурлар ўз ифодасини топган. Абу Райхон Беруний томонидан Ернинг шарсимон проекция ҳақида фикрлар ўз ифодасини топган асарлар яратилган.

Картографиянинг ривожланишида Ўйғониш даври алоҳида ўрин тутади, бу буюк географик кашфиётлар даври бўлди. Шунингдек, мамлакатларни бошқариш, ҳарбий юришлар уюштириш, савдо – сотиқ ва денгизда сузишни ривожлантириш учун аниқ ва ишончли карталарга эҳтиёж ортган. Карталар фақатгина математик асослардан фойдаланилган ҳолатдагина яратилиши мумкин бўлган ва бевосита тасвирга олиш ишлари асосида яратилган. Дастлабки даврларда топографик карталар пайдо бўлган.

XVI асрнинг охири ва XVII асрнинг бошларида картографиянинг оммалашиши ва навбатдаги босқичда ривожланишида сезиларли ўрин тутган ҳодиса сифатида Голландиялик картографлар – Ортелли ва Меркатор томонидан ишлаб чиқилган географик атласларнинг яратилиши қайд қилиб ўтилади, улар томонидан биринчи марта тенг бурчакли цилиндрсимон проекциядан фойдаланилган бўлиб, денгиз навигация карталарини тузиб чиқиш учун бу усули ҳозирги кунга қадар мувафаққиятли фойдаланилиб келинмоқда.

Бу даврга келиб, дунё картасини тузиб чиқишга уринишларда сезиларли даражада катта ўлчамдаги ҳудудларни акс этириш мақсадида трапециясимон проекциядан ва кейинчалик ишлаб чиқилган псевдоцилиндрсимон проекция учун намуна сифатида хизмат қилган – Апиан проекциясидан кенг миқёсда фойдаланилган. XVII асрда дунё картасини тузиб чиқишда Франция мактаби вакили Н.Сансон томонидан янги псевдоцилиндрсимон проекция таклиф қилинган.

XVIII аср картография фанининг илмий асосларнинг ишлаб чиқилиши билан тавсифланади, бу даврда Ернинг кенг кўламда топографик жиҳатдан ўрганилиши бошланган ва ўз навбатида, карталарнинг аниқлиги ва ишончлилиги даражаси оширилган. Картография амалиётида Р.Бонн, И.Ламберт, Ж.Лагран, Л.Эйлер, Н.Делил ва бошқа картографлар томонидан таклиф қилинган бир қатор янги проекциялардан фойдаланила бошланган.

XIX аср бошларига келиб йирик масштабдаги ҳарбий топографик карталар яратилиши бошланган, бунда математик асослар алоҳида даражада муҳим аҳамиятга эга ҳисобланган, карталар асосида масофалар ва йўналишларни аниқлаш амалга оширилган. Бу вақтга келиб, К.Гаусс томонидан биринчи бўлиб битта юзада бошқасини тенгбурчакли кўринишда аск эттириш масаласи ҳал қилинган, бу эса бир қатор тенг бурчакли проекцияларни олиш учун асос сифатида хизмат қилган (жумладан, йирик масштабли карталар учун). Картографик проекцияларнинг умумий хатоликлар назариясини ишлаб чиққан Н.Тиссонинг асарлари муҳим аҳамият касб этди.

Россияда дастлабки машҳур карта «Катта чизма» номи остида XVI аср охирларида тузиб чиқилган. XVII асрга келиб бу карта яна қайтадан тайёрланган ва таркиби Москвадан Перакопгача бўлган йўллар чизмалари билан тўлдирилган. Бу йўл картаси Россиянинг Европа қисмининг сезилари ҳудудлари тасвирларини ўзида акс эттиради. XVII аср охирлари ва XVIII асрнинг бошларида П.Годунов ва С.Ремезов томонидан Сибир ҳудудининг дастлабки картаси тузиб чиқилган. 1701 йилда С.Ремезов томонидан дастлабки рус география атласи – «Сибирнинг чизмачилик китоби» номи билан тайёрланган.

Санаб ўтилган чизмалардан ташқари, математик жиҳатдан асосланилмаган ҳолатдаги хусусий шахсларга тегишли ёки рус олимлари материаллари асосида ҳорижий олимлар томонидан тайёрланган карталар хам мавжуд бўлиб, уларда XVII асрдан бошлаб меридианлар ва параллеллар тўри акс эттирила бошланган (Россия картаси – Ф.Годунов, Г.Герритс, И.Масс, Н.Витсена). XVIII асрда Пётр I фармойиши билан денгиз флотининг эҳтиёжларини қондириш мақсадларида ва Россиянинг Бош картасини тузиб чиқиш учун тизимли тарзда тасвирга олиш ишлари бошланган. Бу вақтда рус карталари цилиндрсимон, трапециясимон (псевдоцилиндрсимон), стереографик ва конуссимон проекциялар асосида тузиб чиқилган.

1734 йилда И.Крилов томонидан ишлаб чиқилган «Бутун Россия империясининг атласи» нашр қилинган, бу атласнинг пайдо бўлишини Россия картографиясида муҳим ҳодиса сифатида қайд қилиб ўтиш мумкин. Атласнинг кўпгина карталари иккита асосий параллеллар билан биргаликда, тенг оралиқларга эга бўлган конуссимон проекцияда тузиб чиқилган.

Картографиянинг навбатдаги ривожланиши Россия Фанлар академиясининг фаолияти билан чамбарчас боғлиқ ҳисобланади. Фанлар академиясида Географик Департамент ташкил қилинди, у асрнинг охиригача Россияда картографик ишларни умумлаштирди ва бошқаришни амалга оширилди.

Академияда Географик Департаментнинг фаоляити натижасида 1745 йилда «Россия атласи» яратилди, унинг таркибига Россиянинг Бош картаси, мамлакатнинг Европа қисмини тасвирловчи 13 та карта, Осиё қисмини 6 та картаси жойлаштирилган. Бу атлас ўз давридаги энг яхши атласлардан бири сифатида тан олинган; унинг таркибига киритилган барча карталар трапециясимон (псевдоцилиндрсимон) ва тенг оралиқли конуссимон проекцияда тузиб чиқилган.

XVIII асрнинг иккинчи ярмисида батафсил ҳолатдаги картографик материалларда асосий чегараларни белгилаб бурувчи сифатида Депо томонидан тузиб чиқилган «Россия империясиннг батафсил картаси» кўрсатиб ўтилиб, ўз даврида бу карта «юз саҳифали» карта деб хам номланган ва бир дюймда 20 верст (1:840000) масштабда тенг оралиқли конуссимон проекцияда тузиб чиқилган. XVIII асрнинг охирлари ва XIX асрнинг бошларида карталарни тузиб чиқиш масалалари ва уларнинг математик асослари билан ҳарбий геодезистлар, картографлар, астрономлар шуғулланишган (Ф.Ф.Шуберт, А.П.Болотов, Н.Я.Цингер ва бошқалар), улар томонидан мавжуд проекциялардан оқилона фойдаланиш ва карталарнинг аниқлигига катта эътибор қаратилган.

Ҳарбий топографик Депо ва ҳарбий топографлар корпуси томонидан съемка ишлари олиб борилган ҳамда йирик масштабли карталар тузиб чиқилган.

Картографик проеция назарияси А.П.Болотов томонидан ёзилган геодезия курсида батафсил кўринишда баён қилинган; бу курс таркибида Россия миқёсида биринчи марта битта юзанинг иккинчи юзада Гаусс усули бўйича тенг бурчакли тасвирлаш назарияси берилган бўлиб, Россия карталарини тузиб чиқишда тенг бурчакли конуссимон проекция тавсия қилинади. 1848 йилда Ҳарбий топографлар корпусида махсус комиссия ташкил қилинган ва йирик масштабли Россия топографик карталари учун Мюфлинг кўп қиррали проекциясидан фойдаланиш қабул қилинган, бунда ер юзасининг тасвири трапециялар бўйича акс эттирилади ҳамда меридиан ва параллеллар билан чегараланишдан фойдаланилади.

Россия ва унга туташ ҳудудларнинг ўртача ва кичик масштабдаги карталари бу вақтда кўпроқ тенг бурчакли конуссимон проекция асосида тузиб чиқилган, ҳорижий мамлакатлар, қитъалар ва бутун дунё карталарини тузиб чиқишда эса – қийшиқ стереографик, псевдоконуссимон, тенг оралиқли азимутал ва тенг бурчакли цилиндрик проекциялардан фойдаланилган.

1839 йилда Пулково обсерваторияси ишга туширилгандан кейин, карталарда узунлик Пулкова меридианидан ўлчана бошланган, бунгача бошланғич сифатида Ферро (Канар оролларининг энг ғарбий қисмида жойлашган орол) меридианидан фойдаланилган. 1884 йилда Вашингтонда ўтказилган Ҳалқаро анжуманда бошланғич меридиан сифатида Гринвич таклиф қилинган, бу ҳолат бир нечта рус карталарида хам фойдаланилган.

Математик картографиянинг ривожланишидаги янги босқичи машҳур рус математиги П.Л.Чебышев номи билан боғлиқ, у берилган ҳудуд учун нисбатан энг яхши ҳисобланган тенг бурчакли картографик проекция теоремасини шаклантирган. Д.А.Граве томонидан П.Л.Чебышев теоремаси исботлаб берилган ва картографик проекциялар назарияси бўйича бир қатор тадқиқотлар амалга оширилган. XIX асрнинг охирларига келиб математик картография геодезиянинг бўлимларидан бири сифатида, олий техника ўқув юртларида ва университетларининг физика – математика факультетлари ўқув режалари таркибига киритилган. Бу вақтга келиб карталарни тузиб чиқиш асосан ҳарбий қўшинлар эҳтиёжларини қондиришга йўналтирилган.

Картографик проекциялар назарияси соҳасида олиб борилган тадқиқотлар билан XX аср бошларида машҳур олимлар Ф.Н.Красовский, А.А.Михайлов ва бошқалар шуғулланишган. Математик картографиянинг ривожланишида муҳим ҳодисалардан бири сифатида 1907 – йилда В.В.Витковский томонидан нашр қилинган «Картография» тадқиқот ишини кўрсатиб ўтамиз, унда картографик проекциялар назарияси баён қилинган ва ундан амалиётда фойдаланиш бўйича тавсия ва кўрсатмалар келтирилган. 1918 йилда собиқ иттифоқда метрик тизимга ўтиш ва ҳисоблашларни Гринвич меридианидан бошлаш қабул қилинган. 1920 йилларда топографик карталарда математик асослар (метрик масштабларда) масаласи ҳал қилинган. Бу карталар учун илгари Мюфлинг проекциясидан фойдаланилган.

1921 йилда машҳур олим геодезист Ф.Н.Красовский томонидан иккита такрорланмас, ўзи хосликка эга бўлган, тенг оралиқли конусли прекция ишлаб чиқилган бўлиб, бутун собиқ иттифоқ ҳудудларини майда масштабларда тасвирлаш мўлжалланилган. Бу проекциялардан бири бир қатор минтақаларнинг майдони сақланишини таъминлаб бериши ва ҳудудни нисбатан яхши даражада акс эттириш имконини бериши қайд қилиб ўтилади. Айнан бу проекция кенг миқёсда қўлланила бошланган ва Ф.Н.Красовский проекцияси номи билан танилган. Бу проекциянинг афзаллиги шундаки, унда мутлоқо сўзсиз равишда, деярли 90% собиқ иттифоқнинг барча ҳудудларида ундан фойдаланилганда хатоликка йўл қўйилиши 1,5% дан кам бўлиши исботланган.

Ф.Н.Красовский проекциясида жуда кўплаб карталар тузиб чиқилган, жумладан, собиқ РСФСРнинг Европа қисмини 1:4000000 масштабдаги маъмурий картаси (1921 – 1922 йй.), собиқ иттифоқнинг Европа қисмининг 1:1500000 масштабдаги маълумотнома сифатидаги картаси (бу карта кўп марта қайта нашр қилинган бўлиб, бир қатор майда масштабли карталарни яратиш учун асос сифатида хизмат қилган), собиқ иттифоқ картаси ва кўплаб географик атласлар яратилган.

1928 йилда Учинчи геодезик Кенгашда Гаусс–Крюгер проекцияси қабул қилинади ва топографик карталар ва геодезик ўлчашларни қайта ишлаш учун ягона тизимга ўтилади. Бутун собиқ иттифоқ ҳудудлари учун олти градусли зоналар тизимида бу проекциянинг киритилиши геодезия ва картография соҳасида катта ютуқ сифатида ўрин тутади.

1930 йиллар бошларида собиқ иттифоқ майдонини аниқлаш билан боғлиқ картометрик тадқиқотлар бошланган. Бу вақтга келиб, карталарни тузишда сезиларли ютуқлар қўлга киритилган. Масалан, собиқ иттифоқнинг Европа қисми бўйича 1:1500000 масштабда ва Осиё қисми бўйича – 1:5000000 масштабда карталар нашр қилинган, шунингдек ишлаб чиқариш саноат атласи, чўнтак атласи ва бошқа бир қатор карталар тузиб чиқилган.

Бу даврда мактаб карталарини тузиш бўйича ишлар хам бошланган бўлиб, бу карталар миллионлаб нашрдан чиқарилган. Профессор М.Д.Соловьев томонидан перспектив цилиндрик проекциянинг умумлаштирилган назарияси ишлаб чиқилган ва мактаб карталари учун қийшиқ перспектив–цилиндрик проекция тавсия қилинган.

ЦНИИГАиКда математик картография бўйича махсус гуруҳ ташкил қилиниб, бу гуруҳ фаолияти ушбу соҳада тадқиқотлар билан тизимли тарзда шуғулланиши белгиланган. Собиқ иттифоқда кўзга кўринган олимлар – Н.А.Урмаев, В.В.Каврайский, М.Д.Соловьев математик картографиянинг назарий ва амалий масалаларини ишлаб чиқиш бўйича олиб борилган тадқиқотларга раҳбарлик қилишган.

Қайд этиш жоизки, топографик–геодезик ва картографик ишлар бажарилиши ҳарбий ва фуқоролик соҳалардаги мутахасисларнинг биргаликдаги катта меҳнати натижасида ривожланган. Бундай ҳамкорлик айниқса, Улуғ Ватан уруши йилларида яққол кўзга ташланган. Урушдан кейинги даврларда картографик проекциялар ва картографик жадваллар атласи нашр қилинган, бу нашр картографларга проекцияларни ҳисоблашда катта ёрдам беради.

Юқорида кўрсатиб ўтилган олимлардан ташқари, математик картография йўналишида тадқиқотлар билан Н.М.Волков, Г.А.Гинзбург, А.П.Ющенко, Г.А.Мещеряков, А.С.Лисичанский, Ф.А.Старостин, Т.Д.Салманова, А.Г.Гедымин, А.К.Маловичко ва бошқалар шуғулланишган. Картографик проекцияларни яратиш бўйича янги усулларни қидириб топишда собиқ иттифоқ олимлари Чебышев – Граве томонидан ишлаб чиқилган ғоя ва қоидаларнинг фойдаланилиши йўналишида алоҳида аҳамият касб этди. Н.А.Урмаев томонидан ушбу мураккаб масала юзасидан ўз тадқиқот ишида янгича ривожланиш жиҳатлари берилган бўлиб, бунда унинг тадқиқот иши янги картографик проекцияларни излаб топишга бағишланди, бунда сонли дифференциаллаш ва интеграллаш усулларидан кенг фойдаланилган, берилган картографик тўрларнинг хомаки нусхалари бўйича проекцияарни олишнинг график–таҳлилий усули қўлланилган.

Сўнгги йилларда картография соҳасида назарий ва амалий тавсифларга эга бўлган кўплаб тадқиқотлар амалга оширилмоқда, карталарни тузиб чиқиш бўйича барча ишлар мажмуаси автоматлаштиришмоқда, ГИС технологиялари қўлланилмоқда. Ахборотларнинг жадал ривожлантирилиши, ЭҲМларининг тадбиқ этилиши ва автоматик қурилмаларнинг жорий қилиниши бевосита картография олдига карталарни яратиш ва улардан фойдаланишнинг математик асосларни такомиллаштириш йўналишидаги янги вазифаларни кўндаланг қўяди.

ГЛОССАРИЙ

Альмукантаратлар - (арабча «мукантара», «кантара» - доира) қутбий сферик координаталар тизимида ер шарининг кичик доиралари бўлиб, улар ер шарининг географик қутбларини бирлаштирувчи фараз қилинган ўқи (диаметри) га эмас, балки бошқа ихтиёрий ўқ (диаметр)га перпендикуляр текисликлардир.

Бош йўналишлар - элипсоиднинг ҳар бир нуқтасидан бир-бирига перпендикуляр бўлган йўналишлар (чизиқлар) ташқаридан ўтказилган бўлиб, бу йўналишлар проекцияда ҳам шу нуқтада бир-бирига перпендикуляр бўлади. Бош йўналиш берилган нуқтада бўлиши мумкин бўлган энг катта ва энг кичик масштабларни йўналишини кўрсатади. Масштаблар энг катта бўлган йўналишни *а* билан, энг кичик бўлган йўналишни эса *в* билан белгиланади. Агар картографик тўр ортогонал бўлса, бош йўналиш мередиан ва параллеллар билан мос тушади.

Бурчак хатолиги – проекциядаги иккита йўналиш орасидаги бурчак (u′) билан картага олинаётган юзадаги мос келувчи бурчак (u) нинг фарқи.

Вертикаллар – қутбий сферик координаталар тизимида ер шарининг катта доиралари бўлиб, улар ер шарининг географик қутбларини бирлаштирувчи фараз қилинган ўқи (диаметри) орқали эмас, балки бошқа ихтиёрий ўқ (диаметр) орқали ўтувчи текисликлардир.

Ёрдамчи геометрик юзалар – ер юзасини картага олишда ва картогарафик проекцияларни ишлаб чиқишда ер эллипсоиди (шар) ни дастлаб геометрик юзаларга, сўнгра текисликка олиб ўтилади. Ана шундай геометрик юзаларга ёрдамчи геометрик юзалар дейилади.

Изоколалар – проекцияда хатолиги бир хил бўлган нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқлар. Улар картадаги турли хилдаги хатоликларнинг тарқалиши ва қийматлари ҳақида яққол тасаввур беради.

Ихтиёрий проекциялар – тенг майдонлилик ва тенг бурчаклилик шартларининг ҳар иккиси ҳам бажарилмайдиган проекциялар бўлиб, унинг турли нуқталарида бурчак узунлиги ва майдон хатоликларининг қийматлари проекциянинг шартидан келиб чиқиб турли хилда бўлади.

Карта – карта атамаси юнонча ... (хартес-папирос қоғози) сўздан олинган, лотинча “charta”(қоғоз варақ) атамасидан келиб чиққан. Юнонча ... (карта), лотинча “charta”, туркча “harita.”Туркий тиллар оиласига кирувчи ўзбек тилида ҳам карта бўлса этимологик жиҳатдан тўғри бўлади.

Картанинг математик асоси – картанинг математик элементлари мажмуи (картографик проекция ва у билан боғлиқ координата тўри, масштаб, годезик асос, компановка, разграфика ва номенклатура).

Картография – картографик асарларни ўрганиш, яратиш ва фойдаланиш билан шуғулланадиган фан, техника ва ишлаб чиқариш соҳаси.

Картографик проекция – ер эллипсоиди (шари) нинг юзасини текислик, яъни қоғозда маълум математик қонунлар асосида тасвирлаш. Картографик проекциялар ер эллипсоиди (шари) билан текисликдаги нуқталарни текисликда фақатгина битта х ва у координатали нуқта мос келишини таъминлайди.

Картографик тўр – картографик проекциядаги меридианлар ва параллелларни кесишишидан ҳосил бўлган тўр. Картографик тўр карта мазмунининг элементларини тўғри жойлаштириш учун математик асос бўлиб хизмат қилади.

Кўндаланг картографик тўр – фойдаланилаётган ёрдамчи геометрик юзанинг ўқи ер эллипсоиди (шар) нинг айланиш ўқи билан перпендикуляр бўлганда ҳосил бўлган тўр. Бундай тўрдан ташкил топган проекцияга кўндаланг проекция дейилади.

Локсодромия – эллипсоид (шар) юзасидаги ҳамма меридианларни бир хил бурчак (румб, азимут) билан кесиб ўтувчи чизиқ. Локсодромия эллипсоидда эгри спиралсимон, қутбга яқинлашиб борувчи чизиқ бўлиб, Меркатор проекциясида эса тўғри чизиқ, яъни иккита нуқта орасидаги энг яқин масофа бўлиб тасвирланади.

Майдон хусусий масштаби – проекция (карта) даги майдон (dF^1) ни картага олинаётган юзадаги мос келувчи майдон (dF) га нисбатига айтилади ва р деб белгиланади.

Майдон хатолиги – майдон хусусий масштаби билан 1 орасидаги фарқ бўлиб, у фоизда ифодаланувчи катталикдир.

Математик юза – математик картографияда ишлатиладиган шар ва айланма эллипсоид (ер эллипсоиди). Геоид (Ернинг табиий юзаси) ни ҳеч қандай математик қонунлар билан ифодалаб бўлмайди, шунинг учун маълум математик қонунлар билан ифодалаш ва текисликка туширишнинг имконини берувчи табиий юзага жуда яқин бўлган математик юзалардан фойдаланилади.

Меридианлар – географик ва геодезик координаталар системасида ер шари (ер элипсоиди) нинг катта доираларини ёйлари бўлиб, улар ер шари (эллипсоиди) нинг географик қутбларини бирлаштирувчи фараз қилинган ўқи (диамаетри) орқали ўтувчи текисликларнинг ёйларидир.

Масштаб – Жойда (Ер юзасида) нуқталар орасидаги ўлчанган масофалар узунлигини горизантал проекцияларни қоғозда кичрайтирилиш даражасига масштаб дейилади.

Ортодромия – шар юзасидаги икки нуқтани энг яқин масофада туташтирувчи чизиқ. Шарда тўғри чизиқ, Меркатор проекциясида эса қабариқ томони билан ўзига яқин бўлган географик қутбга қараган эгри чизиқ бўлиб тасвирланади.

Параллеллар – географик ёки геодезик координаталар системасида ер шари (ер эллипсоиди) нинг кичик доиралари бўлиб, улар ер шари (ер эллипсоиди) нинг географик қутбларини бирлаштирувчи фараз қилинган ўқи (диаметри) га перпендикуляр текисликларнинг ёйларидир.

Тенг бурчакли (конфром) проекциялар – бурчаклар хатоликсиз тасвирланувчи проекциялар бўлиб, бурчак хатолиги ω=0. Тенг бурчакли проекцияда картага олинаётган юзанинг шакл хусусиятлари сақлаб қолинади.

Т**енг майдонли (эквивалент) проекциялар** – майдон хатолиги бўлмайдиган проекциялар бўлиб, p=mn=const. Бу проекцияларда картага олинаётган юзадаги майдон билан текислик (карта) даги мос келувчи майдон орасидаги доимий муносабат сақланади.

Узунлик хусусий масштаби – проекциядаги энг кичик бўлак (dS^1) ни картага олинаётган юзадаги мос келувчи энг кичик бўлаги (dS) га нисбатан айтилади.

Узунлик хатолиги - узунлик хусусий масштаблари билан бош масштаб фарқига айтилади ва у фоизда ифодаланади.

Хатоликлар эллипси – картага олинаётган юзадаги (эллипсоид ёки шардаги) айлана проекцияда эллипс бўлиб тасвирланади. Бу эллипсга мос келувчи эллипснинг сўнгги ўлчамлари қийматига хатоликлар эллипси дейилади.

Хусусий масштаб – масштаб проекцияда ўзгарувчан микдор ва бўлак узунлиги масштаби ушбу бўлакнинг йўналишига боғлиқ ҳолда ўзгариб туради. Проекциянинг бош масштаб сақланадиган алоҳида нуқталари ёки чизиқларидан бошқа барча нуқталарида масштаблар бош масштабдан кичик ёки катта бўлади. Бундай масштабларга хусусий масштаб дейилади.

Эллипсоид (айланма эллипсоид) – ер юзасини текисликда (қоғозда) тасвирлаш имконини берувчи, табиий юзага жуда яқин бўлган математик юза бўлиб, у эллипснинг ўз кичик ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган геометрик шаклдир.

АДАБИЁТЛАР

1. *Берлянт А.М.* Картоведение. – М.: Аспект-Пресс, 2003.
2. *Беспалов Н.А.* Методы решения задач сфероидической геодезии. – М.: Недра, 1980.
3. *Бугаевский Л.М.* Математическая картография. – М.: Златоуст, 1998.
4. *Вахрамеева Л.А., Бугаевский Л.М., Казакова З.Л.* Математическая картография. – М.: Недра, 1986.
5. *Востокова А. В., Кошель С. М., Ушакова Л. А.* Оформление карт. Компьютерный дизайн. – М.: Аспект-Пресс, 2002.
6. Географический атлас Узбекистана. – Тошкент., Госкомгеодезкадастр, 2012.
7. *Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д.* Атлас для выбора картографических проекций. – Тр. ЦНИИГАиК, М., 1957.
8. *Ғуломова Л.* Математик картография. – Тошкент., Университет, 1999.
9. *Конусова Г.И.* О классификации картографических проекцией по характеру искажений. //Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, вып. 3.
10. *Лурье И.К.* Геоинформационное картографирование. Методы геоинформатики и цифровой обработки космических снимков. – М.: Изд-во КДУ, 2008.
11. *Мирзалиев Т., Сафаров Э.Ю., Эгамбердиев А., Қорабоев Ж.С.* Карташунослик. – Тошкент.: Чўлпон, 2012.
12. *Салищев К.А.* Проектирование и составление карт. – М.: Изд-во МГУ, 1987.
13. *Сафаров Э.Ю., Авезов С.А., Алланазаров О.Р., Ойматов Р.Қ.* Карташунослик. Амалий ва лаборатория машғулоти бўйича ўқув қўлланма. – Тошкент.: Университет, 2012.
14. *Соловьев М.Д.* Математическая картография. – М.: Недра, 1969.
15. *Suyunov A.S., Jo'raqulov D.O., Salahiddinov A.A.* Matematik kartografiya. – Toshkent., "Davr nashriyoti" 2013.
16. Справочник по картографии //А.М.Берлянт, А.В.Гедымин, Ю.Г.Кельнер и др. – М.: Недра, 1988.

М У Н Д А Р И Ж А

Сафаров Эшқобул Юлдашович,
Рахмонов Дилшод Нурбобоевич

МАТЕМАТИК КАРТОГРАФИЯ

Ўқув қўлланма