O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

FUNKSIYALARNI YAQINLASHTIRISH

fani bo’yicha zamonaviy pedagogik texnalogiya asosida yozilgan o’quv-uslubiy majmua

Guliston 2012

G’aymnazarov G. «Funksiyalarni yaqinlashtirish» fanidan o’quv-uslubiy majmua.
Guliston 2012y.

GulDU o’quv-metodik Kengashining (2-sonli bayonnomasi, 26.10.2012yil) yig’ilish qarori bilan chop etishga tavsiya etilgan.

Ushbu o’quv-uslubiy majmua hozirgi dastur asosida tayyorlangan bo’lib, 5460100-matematika ta’lim yo’nalishi bo’yiha ta’lim olayotgan talabalar uchun mo’ljallangan. Bu o’quv-uslubiy majmuada: Uzluksiz funktsiyalarni yaqinlashtirish.Funktsiyaning silliqlik moduli. $L_p(-\infty,\infty)$ fazomerda funktsiyalarni yaqinlashtirish nazariyasi. Fur’e integrallari va ularni nomlash usullari. Funktsiyalarni yaqinlashtirish bazibir tadbiqlari mavzulari bayon etilgan. Har bir mavzuga doir amaliy mashg’ulotlar uchun masalalar berilgan. Nazorat va mustaqil topshiriqlar berilgan va mavzuga doir muammolar qayd etilgan.

Taqrizchilar: **Abduqodirov E.** SamDU, funktsiyalar nazariyasi va funktsional analiz kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi
Jamuratov K. GulDU dotsenti, fizika-mateamtika fanlari nomzodi

MUNDARIJA

KIRISH

Funksiyalarni yaqinlashtirish fani matematikada asosiy o'rinni egallaydi. Hayotning ko'pgina masalalarini yyechishda avvalo unga mos bo'lgan matematik modellar tuziladi. Tuzilgan matematik modellar asosan algebraic usul bilan tekshiriladi va yechiladi. Buni biror jarayonning differentsial tenglamasi yoki differentsial tenglamalar sistemasi misolida ko'rish mumkin. Har bir masalaning yechimini biror toplamda (Funksional fazoda) qaraladi.

Bu esa algebraik tushunchalarni, tasdiqlarni umumiy nuqtai nazardan qarashga olib keladi. Shu sabali bu o'quv-uslubiy majmuada metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar tushunchalari va unga doir masalalar ko'riladi.

Funksiyalarni yaqinlashtirish fan va texnikaning juda ko'p tarmoqlarida tatbiq etiladi.

Axborotlarni uzatish va qabul qilishda (televideniya, radio, uyali telefon)da operatorlar nazariyasidan keng foydalaniladi. Iqtisodiy masalalarni modellashtirish va ularning optimal yechimlarini aniqlashda chiziqli operator tushunchalar muhim ahamiyatga ega.

Funksiyalarni yaqinlashtirish fani bakalavriatning ikki kursida o'qitilib, mutaxassislik fanlarining asosiylaridan xisoblanadi. Bu kursda metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar tushunchalari va ularga oid masalalar ko'riladi.

Fanni o'qitishning maqsadi va vazifalari

«Funksiyalarni yaqinlashtirish» fanining asosiy maqsadi talabalarga nazariy bilim berish, tegishli tushunchalar, tasdiqlar, Funksiyalarni yaqinlashtirishga xos bo'lgan isbotlash usullarini o'rgatish, olgan nazariy bilimlarini masalalar yechishga tadbiq eta bilish, ularda mantiqiy mushoxada qilish, fazoviy tasavvur hamda abstrakt tafakkur kabi, inson faoliyatining barcha sohalari uchun zarur bo'lgan qobiliyatni shakllantirishdan iboratdir. Fanni o'qitishning vazifasi talabalarga Funksiyalarni yaqinlashtirishga oid bilimlar berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo'llay bilishga o'rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yutsak pog'onalarga ko'tarishdan iboratdir.

Fan bo'yicha talabalarning bilim, ko'nikma va malakalariga qo'yiladigan talablar

«Funksiyalarni yaqinlashtirish» o'quv fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

- Funksiyalarni yaqinlashtirishni tarixiy rivojlanish davrlari, metrik fazolar, haqida ***tasavvurga ega bo'lishi va bilishi***;
- normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar ***ko'nikmalariga ega bo'lishi*** *kerak.*
- chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar sistemasini yechish usullarini ***malakasiga ega bo'lishi kerak.***

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Matematikada Funksiyalarni yaqinlashtirishning tutgan o'rni beqiyos. Ko'pgina matematik ob'ektlarni o'rganishda, avvalo ularga mos keladigan matematik tusunchalar tuzilmalar tuzib olinadi. Kvant mexanikasida esa, elementar zarrachalarni o'rganishda operatorlar nazariyasidan foydalaniladi. Iqtisodning modellashtirish masalalarida, zamonaviy kompyuterlarni qurishda va hokazolarda matematik usullardan foydalaniladi.

Funksiyalarni yaqinlashtirish fani matematikaning boshqa bo'limlaridan foydalanadi va atsincha. Masalan, ravshanki matematik analiz, analitik geometriya va differentsial tenglamalar bilan chambarchas bog'langan va bevosita uning davomidir.

Fanning ishlab chiqarishdagi o'rni

Mazkur dasturga ko'ra ushbu fan doirasida ko'plab model masalalar o'rganiladiki, bu mazkur fanni chuqur o'rgangan har bir bakalavr olgan bilim va ko'nikmalarini ilmiy-tadqiqot ishlarida, shuningdek, talim tizimida samarali foydalanishi imkonini beradi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Funksiyalarni yaqinlashtirish kursini o'qitish ma'ruza, amaliy mashg'ulotlar, seminar mashgulotlari va mustaqil ta'lim ko'rinishida olib borish bilan birga o'qitishning ilg'or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq qilish muhim axamiyatga ega. Chunonchi, ushbu fanni o'qitish jarayonida yangi matematik dasturlar Powerpoint, Maple, Mathcad va mavjud elektron darsliklar, vebsaytlardan foydalaniladi.

“Funktsiyalarni yaqinlashtirish” fan bo’yicha ishchi dasur
(lektsiya kursi)

№	Mavzu	Ko’riladigan mavzular mazmuni	Vaqt soat	Izoh
1	Uzluksiz funktsiyalarni yaqinlashtirish	1. Trigonametrik ko’phad va uning ildizi. 2. Funktsiyani trigonametriya ko’pxad bilan yaqinlashtirish 3. Butun funktsiyalar va uning xossalari. 4. Funktsiya butun funktsiyalar bilan yaqinlashtirish	**8**	
2.	Funktsiyaning silliqlik moduli	1. Funktsiyaning uzluksiz moduli va uning xossalari 2. L_p fazoda funktsiyaning silliqlik moduli va uning xossalari. 3. Funktsiyaning silliqlik moduli va uning xossalari. 4. Xar xil silliqlik moduli orasidagi bog’lanish	**8**	
3	$L_p(-\infty,\infty)$ fazomerda funktsiyalarni yaqinlashtirish nazariyasi.	1. Uzluksiz moduli bilan eng yaxshi yaqinlashish orasidagi musbat. 2. Funktsiyani sinflar tayinlashtirish va uzluksiz moduli. 3. Xar xil metrik fazolarda funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashtirishlari orasida musbat.	**6**	
4	Fur’ integrallari va ularni nomlash usullari	1. Fur’e integrallari va ularning yaqinlashtirish. 2. Fur’e integralining nomlash usuli.	**6**	
5	Funktsiyalarni yaqinlashtirish bazibir tadbiqlari.	1. Poligramani operatorlarni yaqinlashtirish. 2. Silliqlik moduli va polinarmonik teorema echimi orasidagi musbat. 3. Xaqiqiy tekislikda uzluksiz funktsiyani yaqinlashtirish.	**8**	
		JAMI	**36**	

“Funktsiyalarni yaqinlashtirish” fan bo’yicha ishchi dasur (amaliy mashg`ulot)

№	Mavzu	Ko’riladigan mavzular mazmuni	Vaqt soat	Izoh
1	Uzluksiz funktsiyalarni yaqinlashtirish	1. Trigonametrik ko’phad va uning ildizi. 2. Funktsiyani trigonametriya ko’pxad bilan yaqinlashtirish 3. Butun funktsiyalar va uning xossalari. 4. Funktsiya butun funktsiyalar bilan yaqinlashtirish	**8**	
2.	Funktsiyaning silliqlik moduli	1. Funktsiyaning uzluksiz moduli va uning xossalari 2. L_p fazoda funktsiyaning silliqlik moduli va uning xossalari. 3. Funktsiyaning silliqlik moduli va uning xossalari. 4. Xar xil silliqlik moduli orasidagi bog’lanish	**8**	
3	$L_p(-\infty,\infty)$ fazomerda funktsiyalarni yaqinlashtirish nazariyasi.	1. Uzluksiz moduli bilan eng yaxshi yaqinlashish orasidagi musbat. 2. Funktsiyani sinflar tayinlashtirish va uzluksiz moduli. 3. Xar xil metrik fazolarda funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashtirishlari orasida musbat.	**8**	
4	Fur’ integrallari va ularni nomlash usullari	1. Fur’e integrallari va ularning yaqinlashtirish. 2. Fur’e integralining nomlash usuli.	**8**	
5	Funktsiyalarni yaqinlashtirish bazibir tadbiqlari.	1. Poligramani operatorlarni yaqinlashtirish. 2. Silliqlik moduli va polinarmonik teorema echimi orasidagi musbat. 3. Xaqiqiy tekislikda uzluksiz funktsiyani yaqinlashtirish.	**8**	
		Jami	**40**	

Talabalarning mavzular yuzasidan mustaqil ishlari
(lektsiya va amaliy mashg'ulot yuzasidan)

№	Mavzu	Ko'rilgan masalalar	Vaqt soat	Izoh
1	Uzluksiz funktsiyalarni yaqinlashtirish	Algebraik va trigonometrik ko'phadlar to'plami, ularni xossalari	4	
		Veyershtras va Bernshteyn teoremalari. Bernshteyn ko'phadi	4	
		Trigonometrik ko'phad bilan yaqinlashtirish	4	
		Funktsiyani butun funktsiyalar bilan yaqinlashtirish	4	
		Bernshteyn teoremasi.	4	
2	Funktsiyaning silliqlik moduli	Funktsiyani uzluksizlik moduli	4	
		Silliqlik moduli va uning xossalari	4	
		Silliqlik moduli va uning xossalari	4	
3	$L_p(-\infty,\infty)$ fazomerda funktsiyalarni yaqinlashtirish nazariyasi.	Funktsiyani algebraik ko'phad bilan eng yaxshi yaqinlashishi	4	
		Trigonometrik ko'phad bilan eng yaxshi yaqinlashishi	4	
		Funktsiyani chekli darajali butun funktsiyalar bilan eng yaxshi yaqinlashishi	4	
		Feyer usuli	4	
		Chezaro usuli	4	
		Abel-Puasson usuli	4	
4	Fur' integrallari va ularni nomlash usullari	Fur'e qatorini Feyer, Chezaro metodi bilan nomlash	4	
		Chezaro, Abel -Puasson, Gauss-Veyershtras usullari	4	
5	Funktsiyalarni yaqinlashtirish bazibir tadbiqlari.	Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning uzluksizlik moduli	4	
		Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashishi	4	
		Fur'e integrallari	4	
		JAMI	**76**	

Mustaqil bajarish uchun mavzular
(referat uchun)

1. Bernshteyn ko'pxadlari va uning xossalari.
2. Funktsiyaning silliqlik moduli va uning xossalari.
3. Fur'e almashtirishlari va ularning xossalari.
4. Berilgan funktsiyaga eng yaxshi yaqinlashuvchi butun funktsiyalar.
5. Ixtiyoriy funktsiyaning silliqlik moduli.

Adabiyotlar

1. T.Azlarov, A.mansurov matematik analiz I, II qism. T. 1993 y.
2. A.F.Timan Teoriya priblijeniya funktsiy deystvitelnogo peremennogo. M. 1960 g.
3. E.Titchmarsh Vvedenie v teoriyu integralov Fure. M. 1978 g.

Internet saytlari

1. www.ziyonet.uz
2. www.gduportal.uz
3. http://www.mcce.ru
4. http://lib.mexmat.ru

“Funksiyalarni yaqinlashtirish” kursining reyting ishlanmasi

№	Nazorat turlari	Soni	Ball	Jami
1.	Joriy baholash 1.1. Amaliy mashg’ulot bajarish 1.2. Uy vazifalarini bajarish 1.3. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	 14 14 3	 1x14=14 1,5x12=18 6x3=18	**50**
	Jami		50	
2.	Oraliq baholash 2.1. Og’zaki so’rov 2.2. TMI (referat) 2.3. Yozma ish	 4 5 2	 1x4=4 2x5=10 3x2=6	**20**
	Jami		20	
3.	Yakuniy baholash 3.1. Yakuniy yozma ish yoki test sinovi	 1	 30	**30**
				100

Baholash mezoni

1. Joriy baholash bo’yicha:

1.1. Joriy baholashda, amaliy mashg’ulotlarda to’liq qatnashib, uni topshiriqlarini to’la bajargani uchun talabaga ___ ball beriladi. Agar topshiriqlar to’la bo’lmasa, ___________ ball beriladi.

1.2. Uyga vazifani to’liq o’z vaqtida sifatli bajargan talabaga har bir vazifa uchun ______ ballgacha beriladi.

1.3. Mustaqil ish topshiriqlari (jamoaviy ta’lim asosda) to’liq va sifatli bajarilgan ish uchun ______ ball, topshiriq to’liq bajarilmasa, uning bajarilish sifati va hajmiga nisbatan ________ballgacha baholanadi.

2. Oraliq baholash bo’yicha:

2.1. Oraliq baholash ____ marta yozma ish olinib, har biri ____ tadan savol asosida olinadi. Har bir savolga to’g’ri javob uchun _____ balldan beriladi.

2.2. ____ marta og’zaki so’rov o’tkaziladi. Og’zaki so’rovda _____ tadan og’zaki javob berish talab etiladi. Har bir savolga _____ balldan beriladi.

3. Yakuniy baholash bo’yicha:

3.1. Yozma ishda ____ ta savol beriladi. Har bir savolga to’g’ri va thliq javob uchun _____ ball beriladi. Agar test sinovi bhlsa _____ ta savol beriladi. Har bir to’g’ri javob uchun _____ ball beriladi.

FUNKSIYALARNI YAQINLASHTIRISH FANI BO'YICHA TA'LIM TEXNOLOGIYALARINI ISHLAB CHIQISHNING KONSEPTUAL ASOSLARI

Bilim olish jarayoni bilan bog'liq ta'lim sifatini belgilovchi holatlar: darsni yuqori ilmiy-pedagogik darajada tashkil etilishi, muammoli mashg'ulotlar o'tkazish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg'or pedagogik texnologiyalardan va multimedia qo'llanmalardan foydalanish, tinglovchilarni mustaqil fikrlashga undaydigan, o'ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo'yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, ijodkorlikka yo'naltirish, erkin muloqotga kirishishga, ilmiy izlanishga jalb qilish va boshqa tadbirlar ta'lim ustuvorligini ta'minlaydi. Ta'lim samaradorligini orttirishda fanlar bo'yicha ta'lim texnologiyasini ishlab chiqishning kontseptsiyasi aniq belgilanish va unga amal qilishi ijobiy natija beradi. Fanni o'qitishning maqsadi va ta'lim berish texnologiyasini loyihalashtirishdagi asosiy kontseptual yondashuvlar quyidagilardan iborat.

Fanning maqsadi. 5460100-matematika ta'lim yo'nalishlarida tahsil olayotgan talabalarga Uzluksiz funktsiyalarni yaqinlashtirish.Funktsiyaning silliqlik moduli. $L_p\left(-\infty,\infty\right)$ fazomerda funktsiyalarni yaqinlashtirish nazariyasi. Fur'e integrallari va ularni nomlash usullari. Funktsiyalarni yaqinlashtirish bazibir tadbiqlari tushunchalarini va ularning xossalarini o'rgatishdan iboratdir.

Fanni o'qitishning vazifalari. Funksiyalarni yaqinlashtirishning asosiy tushunchalari bo'lgan: metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar haqida bilimlar berish, olgan nazariy bilimlarning tatbiqlarini tushuntirish hamda amaliy masalalarni yechishga qaratishdan va natijada fikrlash qobiliyatini rivojlantirishdan iborat.

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. O'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishlarini ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshishga e'tibor qaratishni amalga oshiradi. Har bir talabaning shaxs sifatida kasbiy takomillashuvini ta'minlaydi. Ta'limning markaziga bilim oluvchi qo'yiladi.

Tizimli yondoshuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo'g'inlarini o'zaro bog'langanligi, yaxlitligi bilim olish va kasb egallashning mukammal bo'lishiga hissa qo'shadi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatini jadallashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida barcha qobiliyat va imkoniyatlarni, tashabbuskorlikni ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi. Egallangan bilimlarning ko'nikma va malakaga aylanishi, amaliyotda tatbiq etilishiga sharoit yaratadi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o'quv jarayoni ishtirokchilarining psixologik birligi va o'zaro munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. O'qituvchi va talabaning hamkorlikdagi ta'limiy faoliyat yuritishiga zamin yaratadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratlilik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi o'rtasidagi sub'ektiv munosabatlarda hamkorlikni, maqsad va faoliyat mazmunini shakllantirishda erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi. Ta'lim jarayonida "sub'ekt-sub'ekt" munosabatlari tarkib topadi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni ob'ektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni ta'minlaydi. Muammoli savol, vazifa, topshiriq va vaziyatlar yaratish va ularga echim topish jarayonida ongli, ijodiy, mustaqil fikrlashga o'rgatiladi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash **-** hozirgi axborot kommunikatsiya texnologiya vositalari kuchli rivojlangan sharoitda ulardan to'g'ri va samarali foydalanish, axborotlarni tanlash, saralash, saqlash, qayta ifodalash ko'nikmalari hosil qilinadi. Bu jarayonda kompyuter savodxonligi alohida ahamiyat kasb etadi.

O'qitishning metodlari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid vizuallash, taqdimot, bahs) muammoviy usul, keys-stadi, pinbord, loyiha va amaliy ishlash usullari. Interfaol usullarni mavzuning mazmuniga mos holda tanlash va ulardan samarali foydalanishga o'rgatadi.

O'qitish vositalari: o'qitishning an'anaviy vositalari (darslik, ma'ruza matni, amaliy tatbiqlar, boshqa fanlar bilan bog'liqligi va boshqalar) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiya vositalari keng ko'lamda tatbiq etiladi.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan operativ ikki yoqlama (teskari) aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlarning yo'lga qo'yilishi.

Teskari aloqa usullari va vositalari: ongli ravishda tushunish, blits-so'rov, joriy, oraliq va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi amalga oshiriladi. Ta'lim jarayonida kafolatlangan natijaga erishish ta'minlanadi.

Boshqarish usullari va tartibi: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik xarita ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati ham tartibli yo'lga qo'yiladi.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning naitijalarini reja asosida nazorat va tahlil qilib boriladi. Kurs oxirida yozma, og'zaki yoki test topshiriqlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi. Baholarning haqqoniy bo'lishiga, oshkoraligiga alohida e'tibor qaratiladi.

I bob
Uzluksiz funksiyalarni yaqinlashtirish

1.1-mavzu. Trigonometrik ko'phad va uni uzluksiz funksiya bilan yaqinlashtirish

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Trigonometrik ko'phad va uni uzluksiz funksiya bilan yaqinlashtirish. Identiv o'quv maqsadlari: 1. Trigonometrik ko'phad va uning ilditzini bilib oladi. 2. Funktsiyani yaqinlashtirishni bilib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Funktsiyani yaqinlashtirish tushunchasi kengaytiriladi va tadbiqlari aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Asosiy savollar

1. Funktsiyani trigonometrik ko'phad va uning izi
2. Veyershtass teoremasi va funksiyani eng yaxshi yaqinlashish.

Mavzuga doir tayanch iboralar

Trigonometrik ko'phad, Eyler formilasi, algebraik ko'phad, ko'phad ildizi, $C[0,2\pi]$ fazo, davriy funksiya, Veyershtass teoremasi, max. Inf. $E_n(f)$, funksiyaning eng yaxshi yaqinlashish.

1- asosiy savol bo'yicha o'qituvchining maqsadi:

1. Trigonometrik ko'phad tushunchasini izohlash
2. Trigonometrik ko'phadning ildizi.

Identiv o'quv maqsadlar.

1. Trigonometrik ko'phadni anglab oladi.
2. Trigonometrik ko'phaad ildizini o'zlashtirib oladi.
3. Trigonometrik ko'phaad bilan algebraik ko'phad orasidagi bog'lanishni o'zlashtirib oladi.

1- asosiy savol bayoni

Trigonometrik ko'phadlar va uni $C(a,b)$ fazodagi funksiyalar bilan yaqinlashtirish. Funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashishi.

Quyidagi yig'indi:

$$A+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = T_n(x) \qquad (1)$$

$n-$ tartibli trigonometrik ko'phad deyiladi. Tartibi $n-$ dan oshmaydigan (1) ko'rinishdagi ko'phadlarning to'plami $\{T_n(x)\}$ deb belgilaymiz.

Teorema. 1. Yuqoridagi (1) ko'rinishdagi trigonometrik ko'phadlar ildizi $2n-$dan oshmaydi.

Isbot: (1) dagi $A=a_0$ deb olsak.

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (2)$$

Eyler formulalariga asosan, ya'ni

$$\left.\begin{aligned} \cos kx &= \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}, \\ \sin kx &= \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Tenglamalarga asosan

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i}\right)e^{ikx}+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{2i}\right)e^{-ikx}=e^{-inx}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{(in+k)x}=e^{-inx}\sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx},$$

$$c_k=\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i},$$

$$c_{-k}=\frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{2i},$$

$$d_k=c_k+c_{-k}$$

Endi $e^{ix} = z$ desak

$$T_n(x) = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} d_k z^k = e^{-inx}P_{2n}(z),$$

$$|T_n(x)| = |P_{2n}(z)|,$$

$$\left|e^{-nx}\right| = 1$$

Algebraning asosiy teoremasiga asosan $P_{2n}(z)$ algebraik ko'phad $2n-$ta ildizga ega. (undan ortiq emas)

$$z_0 = e^{ix_0}$$

bo'lgan uchun

$$|P_{2n}(z_0)| = 0 \leftrightarrow |T_n(x_0)| = 0$$

Har bir z_i uchun

$$z_i \leftrightarrow x_i \qquad (i = 0,1,\ldots,n)$$

Munosabat $T_n(x)$ ildizi $2n-$dan oshmasligi kelib chiqadi.
Teorema isbot bo'ladi.

Nazorat topshiriqlar

1. Trigonometrik ko'phad nima?
2. Ko'phadning tartibi deb nimaga aytiladi?
3. Davriy funksiya qanday xossalarga ega?
4. Ko'phad uzluksiz bo'ladimi?
5. Eyler formulasini keltiring va izohlang.
6. Algebraik ko'phad nima ?
7. Ildiz deb nima aytiladi?
8. Ko'phadning ildizi haqidagi teoremani izoxlang.
9. Trigonometrik ko'phad ildizini izoxlang.
10. Trigonometrik ko'phad bilan algebraik ko'phad orasidagi boshlanishni izoxlang.
11. Ko'phad to'plami azo bo'ladimi?
12. Ko'phadlar max ega bo'ladimi?
13. Ko'phadlar min ega bo'ladimi?
14. Ko'phad uchun sup izohlang
15. Ko'phad uchun inf ni izoxlang.

2-asosiy savol buyicha o'qituvchining maqsadi.

1. Veyershtrass teoremasini tushuntirish.
2. Funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashishini urgatish.

Identiv o'quv maqsadlar.

1. Davriy funksiya uchun Veyershtrass teoremasini urganib oladi.
2. Funktsiyaning trigonometrik kupxad Bilan eng yaxshi yaqinlashishini uzlashtirib oladi.

2-asosiy savol bayoni

Teorema-2 . Agar $f(x)\in[0,2\pi]$ bulsa,ya'ni $f(x)$ uzluksiz ,davriy funksiya bulib davri 2π ga teng bulsa,u xolda xar kanday $\varepsilon \succ 0$ son uchun

$$|f(x)-T_n(x)| \prec \varepsilon$$

Tengsizlikni kanoatlantiruvchi $T_n(x)\in\{T_n(x)\}=H_n(x)$ trigonometrik kupxad mavjud va u yagona. Bu teorema Veyeshtrass teoremasi deb atalib matematik analiz kursida berildi.

Endi $H_n(x)$ tuplamda

$$\max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)-T_n(x)|=\Delta_n(f) \qquad (4)$$

$$x\in[0.2\pi], n=1,2,....$$

Mikdorni kurib utamiz. Umuman

$$\Delta_n f=|f(x)-T_n(x)| \qquad (5)$$

Mikdor f funksiyaning $T_n(x)$ kupxaddan chetlanishi deyiladi. (4) mikdor f(x) funksiyani $T_n(x)$ trigonometrik kupxad bilan yaqinlashishi deyiladi. $T_n(x)$ kupxadni $N_n(x)$ tuplamda kurib utib

$$\inf_{T_n\in H_n}\left|\max_x \Delta_n f\right| = \inf\left[\max|f(x)-T_n(x)|\right] \qquad (6)$$

Mikdorni $f(x)$ funksiyani $T_n(x)$ kupxad bilan eng yaxshi yaqinlashishi deb ataymiz va uni $E_n(f)$ deb belgilaymiz.

Shundday kilib,

$$\inf_{T_n(x)\in H_n}\left[\max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)-T_n(x)|\right]=E_n(f) \qquad (7)$$

bu $E_n(f)$ mikdor kuyidagi xossalarga ega.

1. $E_n(f)\ge 0$
2. $E_n(f)\downarrow 0 \quad n\uparrow$

Ya'ni $E_1(f)\ge E_2(f)\ge E_3(f)\ge ...\ge E_n(f)...$

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)=0$$

bu xossalarni isboti $E_n(f)$ ta'rifidan kelib chikadi. (mustakil bajariladi.)

Teorema 3. $H_n(x)$ tuplamda xar kanday $f(x) \in C[0,2\pi]$ funksiya uchun tartibi n-dan oshmaydigan va u f(x) funksiyaga eng yaxshi yaqinlashuvchi $T_n(x)$ trigonometrik kupxad mavjud va bittaginadir.
Bu teorema isboti 1-ga asoslanadi.

Nazorat topshiriqlar.

1. Davriy funksiya nima?
2. Uzluksiz funksiya nima?
3. $|f(x) - T_n(x)|$ ayirmani izoxlang.
4. Veyershtrass teoremasini izoxlang.
5. $\max|\Delta_n f|$ ni izoxlang.
6. $\inf(\max|\Delta_n|)$ ni izoxlang.
7. $E_n(f) \geq 0$ ni izoxlang.
8. $E_n(f) \geq 0$ ni isbotlang.
9. $E_n(f) \downarrow 0$ ni isbotlang.
10. $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f) = 0$ ni isbotlang.
11. $f(x) \in C[0,2\pi]$ funksiya uchun eng yaxshi yaqinlashuvchi $T_n(x)$ kupxad xakidagi teoremani izoxlang.

1-ma'ruza bo'yicha amaliy mashg'ulot

1. Bernshteyn ko'phadlari va ularning xossalari.
2. Trigonometrik ko'phadlar va ularning xossalari.

Mustaqil topshiriq.

1.Algebraik va trigonometrik kupxad xakida Veyershtrass teoremasi [1].

Adabiyotlar.

1.Azlarov T. Mansurov X. Matematik analiz. 1-tom .T 1993y.
2. Timan A.F. Teoriya piblijeniya funktsii deytvitelnogo peremennogo. M. 1990g.
3. Bari N.K. Trigonometrichiskie ryado'. M.1960g.

1.2-mavzu. Butun funksiyalar va uni uzluksiz funksiyalar bilan yaqinlashtirish

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Butun funksiya va uni uzluksiz funksiya bilan yaqinlashtirish. Identiv o'quv maqsadlari: 1. Butun funksiya va uning ilditzini bilib oladi. 2. Funktsiyani yaqinlashtirishni bilib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Funktsiyani butun funksiya bilan yaqinlashtirish tushunchasi kengaytiriladi va tadbiqlari aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Faraz qilaylik, *f(t)* funksiya yarim o'qda $(0;\ \infty)$ berilgan bo'lsin. Bu funksiyalarning o'sish tezligini xarkterlash uchun uni

$$\rho t^{\alpha},\ e^{t}$$

$$|f(t)|,\ e^{\varphi(t)},\ e^{r}$$

funksiya bilan solishtiramiz.

<u>Ta'rif:</u> Berilgan *f(t)* funksiya uchun $t \to \infty$ *da* $|f(t)| \prec t^{\alpha}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\alpha \geq 0$ sonlarning eng quyi chegarasi *f(t)* funksiyaning tartibi deyiladi.

$$\rho = \rho(f) = \inf\{\alpha\}$$

$$\rho = \inf\{\alpha\}$$

deb yoziladi.

Ta'rifga asosan,

$$\rho \neq \rho(f) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln f(t)}{\ln t}$$

Ta'rif: Tartibi $\rho \succ 0$ bo'lib, *f(t)* funksiya

$$|f(t)| \prec \mu t^{\rho}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $\mu \leq \infty$ sonlarning yopiq quyi chegerasi *f(t)* funksiyaning tipi deyiladi va

$$\sigma = \sigma(f, p) = \inf\{\mu\} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{\rho}}$$

deb yoziladi.
Agar $\delta = \sigma$ bo'lsa, minimal $0 \prec \sigma \prec \infty$ normal: $\sigma = \infty$ maksimal tip deyiladi.
Ta'rif: Tekislikni hamma joyida gomomorf (analitik) bo'lgan kompleks o'zgaruvchan funksiya butun funksiya deyiladi, ya'ni hamma joyda yaqinlashuvchi darjali qator bilan tasvirlanuvchi *f(t)* funksiya butun funksiya deyiladi.
Butun funksiyalar ko'pxadlarning umumlashuvidir va ularning xossalariga yaqin.

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = M(r), \qquad z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

deb belgilaymiz va $|z| = r \uparrow$ da $M(r) \uparrow$ bo'ladi.
Agar *f(z)* funksiya ko'phaddan farq qilsa, u holda *M(r)* funksiya *r* ning har qanday darajasidan tez o'sadi.
Teorema: Agar $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^n} \prec \infty, \quad n \in N$ bo'lsa, u holda *f(z)* funksiya darajasi *n* dan oshmaydigan ko'phadlar, bunda

$$\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = \lim_{r\to\infty} \{\inf_{|t| \geq r} \varphi(t)\}$$

Shunday qilib, butun funksiyalarning o'sishini baholash uchun darajali funksiyadan tez o'sadigan funksiyani tanlash tabiiy. Bunday funksiya sifatida solishtirish uchun

$$e^{r^k}, \; e^{r^k} \quad k \succ 0$$

ko'rinishdagi funksiya tanlanadi.
Ta'rif: 1) Agar

$$M(r) \prec e^{r^k}, \; k \succ 0, \; r \succ \infty$$

bo'lsa, u holda *inf {k}qp* tartibi deyiladi.
2) agar tartibi *p* bo'lib,

$$M(r)=e^{Ar^{\rho}}$$

bo'lsa, u holda $\inf\{A\}=\sigma$ son f (x) funksiyaning tipi deyiladi.

Endi, $\sigma=\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$ ekanini qayd etamiz.

<u>Ta'rif:</u> Agar *f (z)* uchun $f(z)\prec e^{(\delta+E)|z|}$; $|z|\to\infty$, $|z|\succ R(E)\ \forall E\succ 0$ bo'lsa, u holda *f (z)* funksiya σ tipdagi eksponentsial funksiya deyiladi.
Agar *r* q 1 bo'lib,

$$\sigma=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r}\prec\infty$$

bo'lsa, σ son *f (z)* ning darajasi deyiladi.

Darajasi chekli $\sigma\prec\infty$ bo'lgan butun funksiyalar garmonik analizda differentsial tenglamalar nazariyasini chegaraviy masalalarida va boshqa joylarda keng tatbiq qilinadi.

Endi quyidagini qayd qilamiz,

$$\mathrm{f}\ (\mathrm{z})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n\ ,$$

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n\ \ |}$$

1. Faraz qilaylik, *f(x)* funksiya xaqiqiy o'qning hamma joyida chegaralangan tekis uzluksiz funksiya bo'lsin, B_δ to'plam darajasi δ dan kichik bo'lgan darajali butun funksiyalar sinfi bo'lsin.
Aytaylik,

$$A_\delta(f)=\inf_{\varphi\in B_\delta}\{\sup|\ f(x)-\varphi(x)\,|\}$$

Quyidagi tengsizlik S.N.Bernshteyn tomonidan ko'rsatilgan edi,

$$A_\delta(f)\leq\subset\varpi_f(\frac{1}{\delta})\qquad(12)$$

bu erda $\varpi_f(\delta)=\sup\limits_{|x-y|\leq\delta}|\ f(x)-f(y)\,|$ miqdor *f(z)* funksiyaning uzluksizlik moduli. (12) tengsizlik $n\to\infty$ da limitga o'tish yo'li bilan

$$E_n(f;\lambda)\geq A_\sigma(f;\lambda)\qquad p=\frac{n}{\lambda}$$

$p=\frac{n}{\lambda}$ tengsizlikdan olingan.

bu erda $E_n(f;\lambda)$, $A_\sigma(f;\lambda)$ miqdorlar *f(x)* funksiyaning *n* darajali ko'pxad va B_δ sinf funksiyalari bilan $[-\lambda;\lambda]$ oraliqdagi eng yaxshi yaqinlashishi.

Bu erda quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi, $\varphi(x)\in B_\delta$ funksiyaning effektiv tuzilishini ko'rsatishdan iborat.

$$\sup|f(x)-\varphi(x)|\le e\varpi_f\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

buning xususiy xolidan (12) kelib chiqadi.

Teorema: Faraz qilaylik, *f(x)* tekis uzluksiz va xaqiqiy o'qda chegaralangan bo'lsin va

$$\psi_\sigma(z)=\frac{96}{\pi\sigma^3}\frac{\sin^4\frac{\sigma z}{4}}{z^4}=\frac{96}{\pi\sigma^3}\left(\sin\frac{\frac{\sigma z}{4}}{z}\right)^4$$

$$f_\sigma(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\psi_\delta(u-z)dz$$

bo'lsin. U holda

$$f_\delta(z)\in B_\delta \text{ va}$$

$$\sup|f(x)-f_\delta(x)|\le\delta\varpi_f\left(\frac{1}{\delta}\right) \qquad (13)$$

teoremani isbotlash uchun avvalo ikkita lemmani isbotlaymiz.

Lemma: 1. Quyidagi tengsizlik o'rinlidir.

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right|\le e^{|z|} \qquad (14)$$

zqxQiy $|z|^2$ qx^2Qy^2

$e^{iz}qcos\ z\ Qi\ sin\ z$

Isbot

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{(2k+1)!}\prec\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{(2k)!}\prec e^{|z|}$$

Lemma: 2. Quyidagi tengsizlik o'rinlidir.

$|\sin z|\prec e^{|I_m z|}$ $\quad I_m\, z\, qy$

<u>Isbot</u>. Aytaylik, *zqxQiy* bo'lsin,

U holda $|\sin z| \le \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) \prec \sum \frac{|y|^k}{k!} = e^{|y|}$

Teorema 1. ning isboti.
Quyidagini baholaymiz

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\delta(u-z)| du$$

$$I(z) \le I_1(z) + I_2(z);$$

$$I_1(z) = \int_{|u-z|\le\delta} |\psi_\delta(u-z)| du$$

$$I_2(z) = \int_{|u-z|\succ\sigma} |\psi_\sigma(u-z)| du$$

(14) tengsizlikdan foydalanib, quyidagini xosil qilamiz.

$$I_2(z) \le \frac{3\sigma}{x\pi} \int_{|u-z|} \frac{e^{\sigma|u-z|}}{|u-z|^4} du \le \frac{3\sigma}{8\pi} e^{2\delta} \int_{|u-z|\succ\delta} \frac{du}{(u-z)} \le \frac{3\sigma}{4\pi} e^{2\sigma}(|z|+2) \qquad (16)$$

Endi, (4) tengsizlik asosida

$$I_1(z) \le \frac{96}{\pi} e^{\delta y} \left[\int_{|u-z|\succ 1} \frac{du}{(u-z)^4} + \int_{|u-z|\le 1} \frac{du}{y^4} \le \frac{96}{\pi\sigma^3} e^{|z|\sigma} \right] \qquad (17)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Yuqoridagi (16) va (17) lardan quyidagi kelib chiqadi.

$$I(z) \le \frac{3\sigma}{4\pi} e^{2\delta}(|z|+2) + \frac{96}{\pi\sigma^3} e^{\sigma|z|} \qquad (18)$$

Bu (18) ga asosan (13-ga qarang) butun funksiyadan iboratligi ko'rinadi. (18) tengsizlikdan quyidagini xosil qilamiz.

Shunday qilib, $f_\delta(z) \in B_\delta$

Endi, (13) tengsizlikni hosil qilishga o'tamiz. Avvalo quyidagini xisobga olamiz.

$$\psi_\theta(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\theta(t) e^{-itu} dt$$

Bu erda

$$\varphi_\delta(t)\begin{cases}1-\frac{6}{\sigma^2}t^2+-\frac{6}{\sigma^3}|t|^3 & |t|\prec\frac{\sigma}{2}\\ 2(1-\frac{|t|}{\sigma})^3 & \frac{\sigma}{2}\le|t|\le\sigma\\ 0 & t\succ\sigma\end{cases}$$

Shu bilan birga quyidagi tengsizliklar o'rinli.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(u)du\le\frac{3\sigma}{4\pi}\int_0^{\frac{4}{\sigma}}du+\frac{192}{\pi\sigma^3}\int_{\frac{4}{\sigma}}^{\infty}\frac{du}{u^3}=\frac{4}{\pi}\qquad(19)$$

$$\int_0^{\infty}u\psi_\sigma(u)du\le\frac{3\sigma^3}{4\pi}\int_0^{\frac{4}{\sigma}}udu+\frac{192}{\pi\sigma^3}\int_{\frac{4}{\sigma}}^{\infty}\frac{du}{u^3}=\frac{6}{\pi}\qquad(20)$$

$\varphi_\sigma(t)$ funksiyalar uzluksiz va $\varphi_\sigma(t)\in L(-\infty;\infty)$ ekanligidan (19) tengsizlikdan $\psi_\sigma(u)\in(-\infty;\infty)$ kelib chiqdi.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(u)e^{itu}du=\varphi_\sigma(t)\qquad(21)$$

Bu (21) dan tq0 bo'lganda quyidagi kelib chiqadi.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(u)du=1$$

Shuning uchun

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\psi_\sigma(u)du$$

tenglikni va so'ngra

$$|f(x)-f_\sigma(x)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(x+u)|\psi_\sigma(u)du\le2\omega_f(\frac{1}{\sigma})\int_0^{\infty}(1+\sigma u)\psi_\sigma(u)du$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Endi (19), (20) va oxirgi tengsizlikda biz isbotlamoqchi bo'lgan (13) tengsizlik kelib chiqadi. $f_\sigma(x)$ Funktsiyaning ba'zi xossalarini ko'rib chiqamiz. Shu bilan birga quyidagi (2) teorema esa teorema (1) ning umumlashmasi.

<u>Teorema:</u> 2 Agar tekis uzluksiz, xaqiqiy o'qda chegaralangan *f(x)* funksiya *n* ta tekis uzluksiz va xaqiqiy o'qda chegaralangan xosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\sup_x|f^{(k)}(x)-f_\sigma^{(k)}(x)|\le5\omega_f^{(k)}(\frac{1}{\sigma}),$$

$$(k=0,1,2,3\ldots n)$$

bo'ladi.

$$\omega_f^{(k)}(\delta)=\sup_{|x-y|\le\delta}|f^k(x)-f_\sigma^k(y)|$$

II bob
Funktsiyaning lilliqlik moduli

2.1-mavzu. Funktsiyaning uzluksizlik moduli va uning xossalari

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Funktsiyaning uzluksizlik moduli va xossalarini o'rgatish. Identiv o'quv maqsadlari: 1. Funktsiyaning uzluksizlik modulini bilib oladi. 2. Xossalarini o'rganib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Funktsiyaning uzulksizlik modulining ahamiyati va tadbiqlari bayon etiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Asosiy savollar.
1. Funktsiyaning uzluksizlik moduli
2. Uzluksizlik modul xossalari.

Tayanch iboralar:

Norma, supremum, uzluksizlik, ortirma, modul, fazo, funksiya o'sishi, kamayishi, tekis uzluksizlik, chegaralangan. Lipshits sharti, joylashtirish.

1-asosiy savol bo'yicha o'qituvchining maqsadi.
1. Funktsiyaning uzluksizlik modulini tushintirish.
2. Funktsiyaning uzluksizlik moduli xossalarini tushintirish.

Identiv ukuv maqsadlar.

1. Uzluksizlik modulini o’rganib oladi.
2. Funktsiyani sinflarga ajrata oladi.
3. Uzluksizlik modulini o’rganib oladi

1-asosiy savol bayoni.

Faraz kilaylik *f*(*x*) funksiya uzluksiz bo’lib [*a*,*b*] kesmada berilgan bulsin. Bu funksiyalar fazosini C[*a*,*b*] deb belgilaymiz.

Ushbu

$$\left\{\sup_{0<h\le\delta}\left\| f(x+h)-f(x)\right\| = \omega(\delta; f)\right\}$$

$$\left\| f(x)\right\| = \max\left| f(x)\right|, \qquad a\le x\le b$$

miqdor *f(x)* funksiyaning C[*a*,*b*] fazosidagi normasi deyiladi.

$$\sup_{0<h\le\delta}\left\| f(x+h)-f(x)\right\| = \omega(\delta; f)$$

miqdor *f(x)* funksiyaning uzluksizlik moduli deyiladi.

Bu $\omega(\delta; f)$ uzluksizlik moduli quyidagi xossalarga ega:

1. $\omega(\delta; f)$q0
2. $\omega(\delta; f)$ esa δ ga nisbatan monoton kamaymaydigan funksiya, ya’ni $\omega(\delta_1; f)\le\omega(\delta_2; f)$, $\delta_1<\delta_2$.
3. $\omega(\delta_1+\delta_2; f)\le\omega(\delta_1; f)+\omega(\delta_2; f)$
4. $\omega(n\delta; f)\le n\omega(\delta; f)$
5. Har qanday λ>0 son uchun $\omega(\lambda\delta; f)\le(\lambda+1)\omega(\delta)$
6. $\omega(\delta; f)$ funksiya qngdan uzluksiz funksiyadir.

Nazorat topshiriqlar

1. S[*a*,*b*] fazoni tushuntiring.
2. Norma nima?
3. sup ni izohlang.
4. $\omega(\delta; f)$ nima?
5. $\omega(\delta; f)$ ning eng sodda xossalarini ayting.
6. $\omega(\delta; f)\uparrow$ ni isbotlang.
7. Uchburchak tengsizligi nima?
8. $\omega(\delta; f)\le p\,\omega(\delta; f)$ ni isbotlang.
9. $[\lambda]\le\lambda<[\lambda]+1$ ni izohlang.
10. $\omega(\delta; f)$ uzluksizmi?
11. Funktsiyaning tekis uzluksizlik shartini yozing.
12. Funktsiya silliqlik darajasini aniqlang.
13. Silliq funksiya hosilaga ega bo’ladimi?
14. Funktsiya hosilaga ega bo’lsa silliq bo’ladimi?

2-asosiy savol bo'yicha o'qituvchining maqsadi

1. Silliqlik moduli xossalarini o'rgatish.
2. Lipshits shartini o'rgatish.

Identiv o'quv maqsadi

1. Silliqlik modulining muhim xossasini o'rganib oladi.
2. Lipshits shartini o'rganib oladi.
3. Funktsiyani sinflarga joylashtiradi.

2-asosiy savol bayoni

Har qanday $\omega(\delta; f)\neq 0$ uchun

$$\omega(\delta; f) = \frac{\omega(1; f)}{2}\delta, \qquad 0<\delta<1.$$

Isbot.

$$\omega(1; f) = \omega\left(\delta \cdot \frac{1}{\delta}; f\right) \le \left(\frac{1}{\delta}+1\right)\omega(\delta; f) = \frac{1+\delta}{\delta}\omega(\delta; f) \le \frac{2}{\delta}\omega(\delta; f)$$

$$\frac{\omega(1; f)}{2}\delta \le \omega(\delta; f)$$

Endi uzluksizlik moduli Bilan anio'lanuvchi funksiyalar sinfini khrsatamiz.

Agar uzluksiz funksiyaning uzluksiz moduli

$$\omega(\delta; f) \le M\delta^{\alpha} \qquad (1)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda bunday uzluksiz funksiyalar to'plamini α tartibli Gelder (Lipshits) funksiyalar sinfi deyiladi.

Yuqoridagi (1) da M>0 son δ ga bog'liq emas, lekin umuman N^{α} yoki Lipα deb delgilanadi.

Agar $f(x)\in MH^{\alpha}$ bo'lsa, u holda $f(x)\in H^{\alpha}$, aksincha agar $f(x)\in H^{\alpha}$ bo'lsa, u holda M etarlicha katta bo'lganida $f(x)\in MH^{\alpha}$ bo'ladi.

ESLATMA. *f→0* da $\omega(\delta; f)$ miqdor *f* ga nisbatan yuqori darajali cheksiz kichik bo'la olmaydi, u holda α>1 da (1) tengsizlik bajarilmaydi. 0<α≤1 va demak α>1 da N^{α} sinfni khrib htish ma'noga ega bo'lmaydi.

Shuning uchun biz doimo 0<α≤1 deb qaraymiz.

Endi α<β bo'lganda $H^{\alpha}\supset H^{\beta}$ ekanini qayd etamiz.

$0<\alpha<\beta\le 1$, $\delta^{\alpha}\le\delta^{\beta}$, $0\le\delta\le 1$, $\delta\in[0,1]$

Nazorat topshiriqlar

1. Funktsiya o'sishini izohlang (misol).
2. Funktsiya kamayishini izohlang (misol).
3. $\omega(\delta; f)\ge c\cdot\delta$ ni izohlang.
4. $\omega(\delta; f)\le c\cdot\delta$ ni izohlang.
5. $\omega(\delta; f)\le c\cdot\delta^{\alpha}$ ni 0<α≤1 va α>1 da izohlang.
6. Lipshits sharti nima?

7. Lipshits sinfi nima?
8. N^{α} sinf nima?
9. $f(x) \in Lip\alpha$ ni α uchun izohlang.
10. α>1 sinfni tushuntiring.
11. α>1 uchun N^{α} sinfni izohlang.
12. $H^{\alpha} \supset H^{\beta}$ ni izohlang.

2-ma'ruza bo'yicha amaliy mashg'ulot

1. Funktsiyaning uzluksizlik modulini aniqlash.

   f(x)qsinx, f(x)qcosx, $f(x)qx^{2}$

2. Funktsiyaning silliqlik modul 3, 4, 5, 6 - xossalarini isbotlash.

Mustaqil topshiriq

1. Funktsiyaning uzluksizlik moduli va Lipshits sharti. [1], II bob. [2], I bob.

Adabiyotlar.

1.Azlarov T. Mansurov X. Matematik analiz. 1-tom .T 1993y.
2. Timan A.F. Teoriya piblijeniya funktsii deytvitelnogo peremennogo. M. 1990g.

2.2-mavzu. L_p fazoda funksiyaning silliqlik moduli va uning xossalari

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: L_p fazoda funksiyaning silliqlik moduli va xossalarini o'rgatish. Identiv o'quv maqsadlari: 1. Funktsiyaning silliqliklik modulini bilib oladi. 2. Xossalarini o'rganib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Funktsiyaning silliqlik modulining ahamiyati va tadbiqlari bayon etiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Faraz qilaylik *f(x)* funksiya *(a,b)* intervelda $(-\infty \le a < x < b \le \infty)$ aniqlangan bo'lsin.

Agar

$$\int_a^b |f(x)|^p dx, \qquad 1 \le p < \infty \qquad (1.8.1)$$

integral mavjud bo'lsa, u holda bunday *f(x)* funksiyalar to'plami funksiyalarning L_p sinfi deyiladi.

Funktsiyalarning L_p cinfi chiziqli fazoni tashkil qiladi .

L_p fazoda *f(x)* funksiyaning normasi

$$\|f\| = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty \qquad (1.8.2)$$

deb aniqlanadi.

Endi funksiyaning L_p sinfini L_p-fazo deb ataymiz. Bu fazoda funksiyaning silliqlik modulini ko'rib o'tamiz.

Agar *f(x)* funksiya chekli $[a, b]$kesmada berilgan bo'lsa, u xolda

$$\omega_k(f,t)p=\sup_{|h|\le t}\left\{\int_a^b\left|\Delta_h^k f(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} = \sup_{|h|\le t}\left\|\Delta_h^k f(x)\right\|, \qquad 0\le t\le\frac{b-a}{k} \quad (1.8.3)$$

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x-ih), \qquad \binom{k}{i}=\frac{k!}{i!(k-i)!}$$

miqdor *f(x)* funksiyaning $L_p[a,b]$ fazodgi *k*-tartibli silliqlik moduli deyildi.

Agar *f(x)* funksiya $(-\infty,\infty)$ intervalda, ya'ni xaqiqiy o'qning xammasida berilgan bo'lsa, u holda $L_p(-\infty,\infty)$ fazoda *k* -tartibli integralli silliqli moduli

$$\omega_k(f;t)_p=\sup_{|h|\le t}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_h^k f(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (1.8.4)$$

deb aniqlanadi.

Agar *f(x)* davriy funksiya bo'lib davriy 2π ga teng bo'lsa u xolda $L_p[0,2\pi]$fazoda funksiyaning k-tartibli integralli silliqlik moduli

$$\omega_k(f;t)_p=\sup_{|h|\le t}\left\{\int_o^{2\pi}\left|\Delta_h^k f(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad 0\le t\le\frac{2\pi}{k} \qquad (1.8.5)$$

deb aniqlanadi.

$\omega_k(t)_p=\omega_k(f;t)_p$ - silliqlik moduli quyidagi xssalarga ega.

1. $\omega_k(0)_p=0$

2. $\omega_k(t)_p$ funksiya *t* ga nisbatan kamaymaydigan funksiya.

3. Agar $f^{(r-1)}(x)$xosila absolyut uzlikiz bo'lib, $f^{(r)}(x)\in L_p[a,b]$bo'lsa u xolda

$$\omega_{k\div r}(f;t)_p\le t^r\omega_k\left(f^{(r)};t\right)_p \qquad (1.8.6.)$$

tengsizlik o'rinlidir.

4. Agar $n\ge 0$ butun son bo'lsa, u xolda

$$\omega_k(f;nt)_p\le n^k\omega_k(f;t)_p \qquad (1.8.7.)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagi 1) va 2) xossalar bevosita tarifi kelib chiqadi. 3) va 4) xossalar esa (1.3.3) va (1.3.2) tengliklarga Minkovskiyning.

$$\left\|\sum_{k=o}^{n} f_k lx)\right\|_p\le\sum_{kr1}^{n}\left\|f_k(x)\right\|_p \qquad (1.8.8)$$

$$\left(\int_a^b\left|\int_c^d fx,y\ \ )dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_c^d\left(\int_a^b\left|f(x,y)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy \qquad (1.8.9)$$

tengsizliklarni tatbiqlash bilan kelib chiqadi.

Eslatma. Ko'rib o'tgan $L_p[a,b]$fazodagi funksiyaning integralli silliqlik modulining xossalari $L_p(0,2\pi]$ va $L_p(-\infty,\infty)$ fazolarda xam o'rinli.

2.3-mavzu. Funktsiyaning har xil silliqlik modullari va ular orasida bog’lanish

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma’sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Funktsiyaning har xil silliqlik modullari va ular orasida bog’lanish o’rgatish. Identiv o’quv maqsadlari: 1. Funktsiyaning silliqlik va o’rtalashgan silliqliklik modulini bilib oladi. 2. Har xil silliqlik moduli orasidagi bog’lanishni o’rganib oladi. Qo’llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O’qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko’rib o’tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O’qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo’naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma’lum malu’motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu’lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Funktsiyaning silliqlik va o’rtalashgan silliqlik modulining ahamiyati va tadbiqlari bayon etiladi.	O’qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O’qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O’qituvchi

Faraz qilaylik *f(x)* funksiya [a, b] segmentda aniqlangan uzluksiz funksiya bo’lsin. Ushbu

$$\omega_k(\delta; f) = \sup_{\substack{a\le x\le b-kh \\ 0\le h\le\delta}} \left|\Delta_h^k(x; f)\right|, \qquad \delta\in\left[0, \frac{b-a}{k}\right] \qquad (1.4.1)$$

miqdor *f(x)* funksiyaning k-tartibli silliqlik moduli deyiladi.

Bu (1.4.1) kattalik kq1 bo’lganda *f(x)* funksiyaning uzluksiz moduli bilan mos tushadi.

Misollar: 1. *f(x)*qx^j , j-natural son bo’lsin. U holda (1.3.3) tenglikka asosan (x≤0; j≤ kq 1, 2, …..)

$$\Delta_h^k(x; f) = \int_0^h du_1 \ldots \int_0^h d^k (x+u_1+u_2+\ldots+u_k)^j du_k = \begin{cases} 0, & j<k \\ k!h^k & j=k \end{cases}$$

Demak:

1) j<k bo’lganda $\omega_k(\delta; x^j)$q0;
2) jqk bo’lganda $\omega_k(\delta; x^k)$q $k!\delta^k$

2. $f(x)$qsin$x$ bo'lsin, u holda

$$\Delta_h^2(x;f)=\left|\sin(x+h)-2\sin x+\sin(x-h)\right|=4\sin^2\frac{h}{2}\left|\sin x\right|.$$

Demak,

$$\omega_2(\delta;\sin x)=\begin{cases}4\sin^2\dfrac{\delta}{2}, & \delta\le\pi\\ 4, & \delta\ge\pi\end{cases}$$

Xuddi shunday ixtieriy k-natural son uchun

$$\omega_k(\delta;\sin x)=\begin{cases}2^k\sin^2\dfrac{\delta}{2}, & \delta\le\pi\\ 2^k, & \delta\ge\pi\end{cases}$$

3. $f(x)=e^x, \quad x\in[a,b]$ bo'lsin.
U xolda

$$\Delta_h^k(x;f)=(e^h-1)^k e^x$$

Endi $\delta\in\left[0,\dfrac{b-a}{k}\right]$ bo'lganda

$$\omega_k\left(\delta;e^x\right)=e^{b-k\delta}(e^\delta-1)^k.$$

Funktsyaning *k*-tartibli silliqlik modulining xossalari.

$[a,b]$segmenda aniqlangan uzluksiz funktsning k -tartibli silliqlik moduli $\omega_k(\delta;f)$ quyidagi xossalarga ega.

1. $\omega_k(0;f)=0$;
2. $\omega_k(\delta;f)$ monoton o'suvchi funksiyalardan iborat;
3. $\omega_k(\delta;f)$ uzluksiz funksiya.
4. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$\omega_k(n\delta;f)\le n^k\omega_k(\delta;f) \qquad (1.5.\ OA)$$

tengsizlik o'rinli.
5. Ixtiyoriy $\lambda>0$ son uchun

$$\omega_k(\lambda\delta;f)\le[\lambda+1]^k\omega_k(\delta;f)\le(\lambda+1)^k\omega_k(\delta;f) \qquad (1.5.\ OV)$$

tengsizliklar o'rinli.
6. $\delta\in\left[0;\dfrac{b-a}{k}\right]$bo'lganda

$$\omega_k(\delta;f)\ge A_k\delta_k \qquad (1.5.1)$$

tengsizlik urinli, bunda

$$A_k = \omega_k\left(\frac{b-a}{k}; f\right) \bullet \left[\frac{k}{2(b-1)}\right]^k$$

7. Agar *f(x)* funksiya *[a,b]* segmentda

$$f'(x),\ f''(x), \ldots,\ f^{r-1}(x)$$

tartibli uzluksiz xossilalarga ega bo'lib

$$f^{r-1}(x) \in Lip1$$

bo'lsa, u holda

$$\omega_{k+r}(\delta; f) \le \delta^r \omega_k\left(\delta; f^{(r)}\right) \qquad (1.5.2)$$

tengsizlik o'rinlidir.

8. Harqanday $\delta_1>0,\ \delta_2>0$ uchun $\delta_1+\delta_2 \le \dfrac{b-a}{k}$ bo'lganda

$$\omega_k(\delta_1+\delta_2; f) \le 2^k\left[\omega_k(\delta_1)+\omega_k(\delta_2)\right]$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Izoh. Biz quyida ba'zan $\omega_k(\delta; f)$ o'rnida $\omega_k(f;\delta)$ yoki $\omega_k(\delta)$ deb yozishdan foydalanamiz, ya'ni

$$\omega_k(\delta; f) = \omega_k(f;\delta) = \omega_k(\delta)$$

deb yozamiz.

Endi yuqoridagi xossalarning isbotini keltiramiz.

Har xil tartibli silliqlik modullar orasidagi bog'lanish

Berilgan *f(x)* uzluksiz funksiyaning har xil tartibli silliqlik modullari orasidan bog'lanishlarini ko'rib o'tamiz.

1-Teorema. Ixtiyoriy *j* va *k* natural sonlar uchun $j < k$ bo'lganda

$$\omega_k(\delta; f) \le 2^{k-j}\omega_j(\delta; f) \qquad (1.6.1)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot.

$$\omega_k(f;u) = \sup_{x,0\le h\le u} \Delta_h^k(f;x) = \sup_{x,0\le h\le u}\left|\Delta_h^{k-j}\left[\Delta_h^j(f;x)\right]\right| = \sup_{x,0\le h\le u}\left|\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^{k-j-i}\binom{k-j}{i}\Delta_h^j(f;x+ih)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{k-j}\binom{k-j}{i}\omega_j(f;u) = 2^{k-j}\omega_j(f;u)$$

ya'ni j<k bo'lganda teorema isbot bo'ldi.

$$\omega_k(f;u) \le 2^{k-j}\omega_j(f;u)$$

Ma'lum bir ma'noda (1.6.1) tengsizlikka teskari bo'lgan tengsizlikni hosil qilish murakkabdir. Shunga doir Marsho isbotlangan tenglamani ko'rib o'tamiz.

2-Teorema. (Marsho, 1927) *[a,b]* kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday *f(x)* funksiya uchun va ixtiyoriy *k* va *j q 1, 2, . . . , k* natural sonlar uchun

$$\omega_j(f;u) \le A_k u^j\left[\int_u^{\frac{b-a}{2j}} \frac{\omega_{k+1}(f;t)}{t^{j+1}}\,dt + \|f\|c[a,b](b-a)^{-j}\right] \qquad (1.6.2)$$

Tengsizlik o'rinli, bunda A_k – faqat *k* ga bog'liq bo'lgan son.

Isbot. Avvalo *jqk* uchun ko'rib o'tamiz. Ixtiyoriy $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ va $h \in \left[0, \frac{b-a}{4k}\right]$ uchun (000) tenglikka asosan

$$\Delta_{2h}^{h}(f;x) = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1} \ldots \sum_{i_k=0}^{1}\Delta_h^k(f;x+h(i_1,i_{2,}\ \ldots\ i_k))$$

U holda har bir butun $v \in [0,k]$uchun

$$\Delta_{2h}^{h}(f;x) = \sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}\Delta_h^k(f;x+vh.$$

Bundan

$$(1+t)^k = \sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}t^v,$$

$$k(1+t)^{k-1} = \sum v\binom{k}{v}t^{v-1},$$

$$\sum_{v=1}^{k} v\binom{k}{v} = k2^{k-1}$$

bo'lganidan

$$\left|\Delta_{2h}^{k}(f;x) - 2^k\Delta_h^k(f;x)\right| = \left|\sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}\Delta_h^k\left[f(x+vh) - f(x)\right]\right| = \left|\sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}\Delta_h^k\sum_{j=0}^{v-1}\Delta_h^1 f(x+jh)\right| =$$

$$\left|\sum_{v=0}^{h}\binom{k}{v}\sum_{j=0}^{v-1}\Delta_h^{k+1}f(x+jh)\right| \le \sum_{v=0}^{k} v\binom{k}{v}\omega_{k+1}(f;h) = k2^{k-1}\omega_{k+1}(f;h)$$

hosil qilamiz. Xuddi shunday ixtiyoriy r natural son uchun

$$\left|\Delta_h^k(f;x)\right| \le \frac{k}{2}\omega_{k+1}(f;h) + \frac{1}{2^k}\left|\Delta_{2h}^k(f,x)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{k}{2}\omega_{k+1}(f;h) + \frac{k}{2}\frac{1}{2^k}\omega_{k+1}(f;2h) + \frac{1}{2^{2k}}\Delta_{4h}^k(f;x)\right| \le \ldots$$

$$\ldots \le \frac{k}{2}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\omega_{k+1}(f;2^j h)}{2^{jk}} + \frac{1}{2^{rk}}\left|\Delta_{2^r h}^k(f;x)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^{(r-1)k}}\|f\|c + \frac{k}{2}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\omega_{k+1}(f;2^j h)}{2^{jk}}$$

munosabatni hosil qilamiz.

Endi ixtiyoriy $j \ge 0$butun son uchun o'rinli bo'lgan

$$h^k\int_{2jh}^{2^{j+1}h}\frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}}du \ge h^k\omega_{k+1}(f;2^{jh})\left.\frac{1}{ku^k}\right|_{2^{j+1}h}^{2^j h} \ge \frac{\omega_{k+1}(f;2^j h)}{2k \bullet 2^{jk}}$$

tengsizlikni e'tiborga olib va barcha $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $h \in \left(0, \frac{b-a}{4k}\right]$, r

$\frac{b-a}{4k} < 2^r h \le \frac{b-a}{2k}$ bo'lgan miqdorlar uchun,

$$\left|\Delta_h^k(f;x)\right| \le \frac{\|f\|c}{2^{(r-1)k}} + 2k\sum_{j=0}^{r-1} h^k \int_{2^j h}^{2^{j+1}h} \frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}}du \le$$

$$\le \|f\|_c 2^k \left(\frac{8kh}{b-a}\right)^k + 2kh^k \int_h^{\frac{b-a}{2k}} \frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}}du$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Xuddi shunday $[-b,-a]$da *f(-x)* funksiyani qarab $x \in \left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$da *f(x)* uchun shunga o’xshash tengsizlikni hosil qilamiz. U holda $t \in \left[0,\ \frac{b-a}{4k}\right]$ ning hamma qiymatlari uchun

$$\omega_k(f;t) = \sup_{x\in[a,b]}\left|\Delta_h^k(f;x)\right| \le \left(\frac{8k}{b-a}\right)^k \|f\|_c t^k +$$

$$+ 2kt^k \int_t^{\frac{b-a}{2k}} \frac{\omega_{k+1}(f;u)}{u^{k+1}}du, \qquad h \in \left(0,\ \frac{b-x}{2k}\right), \quad h \le t.$$

Shu bilan $t \in \left[0,\ \frac{b-a}{4k}\right]$ bo’lganda teorema isbot bo’ldi.

$t > -\frac{b-a}{4k}$ bo’lganda (000) tengsizlik yordamida ko’rsatiladi. *j<k* bo’lgan holatda induktsiya usuli bilan ko’rsatiladi. Shu bilan Marsho teoremasi to’liq isbot bo’ldi.

Quyidagi tasdiq ham o’rinli.

Teorema 2. Agar [0, c] segmentda uzluksiz bo’lgan $\omega(x)$ funksiya 1) $\omega(0)=0$, 2) $\omega(x)\uparrow$, 3) $\omega(x)=0\left(x^{1+\varepsilon}\right)$, $\varepsilon = const > 0$, va 4) ixtiyoriy $h\in(0,\ c/2)$ va $x \in [0,\ c-2h]$ uchun $\Delta_h^2(\omega,x) \le \Delta_h^2(\omega,0)$; xossalarga ega bo’lsa, u holda

$$f(x) = f_\omega(x) \overset{df}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\omega_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\omega\left(2^{\frac{x}{k+1}}\right)$$

funksiyaning ikkinchi tartibli uzluksizlik moduli $\omega(t)$ga teng bo’ladi, ya’ni

$$\omega_2(f_\omega;t) \equiv \omega(t).$$

Bu teoremani isbotlash uchun $f_\omega(x)$ funksiyaning qatori $\omega(x)=O\left(x^{1+\varepsilon}\right)$, $x\in[0,c]$ shartga asosan tekis yaqinlashishini e’tiborga olish kifoya.

1.9-§. Funktsiyaning o’rtalashgan siliqlik moduli.

Faraz qilaylik *f(x)* funksiya [a,b] kesmada o’lchovli funksiya bo’lsin. Bunday funksiyalar to’plamini M[a,b] deb belgilaymiz.

Endi quyidagi belgilashlarni qabul qilamiz.

$$\omega_k(f,x;\delta) = \sup_{0<h\le\delta}\left\{\left|\Delta_h^k f(t)\right| : t, t+kh \in \left[x-\tfrac{k\delta}{2}, x+\tfrac{k\delta}{2}\right]\cap[a,b]\right\},$$

$$\Delta_h^k f(t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{i}{k} f(t+ih),$$

$$\binom{i}{k} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$ binom koeffitsientlari

$$\omega_1(f,x;\delta) = \sup_t \left\{ \left| f(t') - f(t'') \right| : t', t'' \in \left[x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2} \right] \right\}$$

Ta'rif. Ushbu

$$\tau_k(f;\delta) = \|\omega_k(f;\delta)\|_{L_p} = \left\{ \frac{1}{в-a} \int_a^в (\omega_k(f,x;\delta))^p dx \right\}^{1/p}, \qquad \textbf{(2)}$$

miqdor $f(x) \in M[a,в]$ funksiyaning o'rtalashgan silliqlik moduli $(ёки\ \tau\text{-модули})$ deyiladi.

$M[a,в]$ fazodan olingan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun $\omega_k(f;x;\delta)$ funksiya $M[a,в]$ da yotadi va shu bilan birga $L_p[a,в]$, $1 \le p \le \infty$ fazoda yotadi.

Agar $k=1$ bo'lsa, u holda $\tau_1(f;\delta)_{L_p}$ o'rniga $\tau(f;\delta)_{L_p}$ deb yozamiz .

O'rtalashgan $\tau(f;\delta)_{L_p}$ modulni quyidagicha aniqlash mumkin (1.5 ta'rifga ekvivalent ta'rif) .

Ushbu

$$S(\delta, f; x) = \sup\{f(t) : t \in [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b]\}, \qquad \textbf{(3)}$$

$$I(\delta, f; x) = \inf\{f(t) : t \in [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b]\}. \qquad \textbf{(4)}$$

funksiyalarni tuzaylik.

U holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$\omega_1(f,x;\delta) = S(\delta/2, f; x) - I(\delta/2, f; x)$$

Shunday qilib,

$$\tau(f;\delta)_{l_p} = \|S(\delta/2, f; \bullet) - I(\delta/2, f; \bullet)\|_{L_p[a,в]}, \qquad \textbf{(5)}$$

ya'ni $\tau(f;\delta)_{L_p}$ modul $S(\delta/2; f)$ va $I(\delta/2; f)$ funksiyalar orasidagi L_p fazodagi masofa bilan mos tushadi.

Bu ta'rif ixtiyoriy funksiyanal metrik fazoda r- metrika yordamida shu metrikaga nisbatan

$$\tau(f;\delta)_r = r(S(\delta/2, f), \qquad \mathrm{I}(\delta/2, f)) \qquad \textbf{(6)}$$

Uzluksizlik modulini kiritishga imkon beradi.

1.10-§. Funktsiyaning o'rtalashgan silliqlik moduli xossalari.

O'rtalashgan silliqlik moduli quyidagi xossalarga ega.

1) Monotonlik.

$$\tau_k\left(f;\delta'\right)_{Lp} \le \tau_k\left(f;\delta''\right)_{Lp}, \qquad 0 \le \delta' \le \delta'' \qquad \textbf{(7)}$$

2) Yarimadditivlik.

$$\tau_k\left((f+g);\delta\right)_{\mathrm{Lp}} \le \tau_k(f;\delta)_{Lp} + \tau_k\left(g;\delta\right)_{L_p} \qquad \textbf{(8)}$$

3) Yuqori tartibli silliqlik moduli quyi tartibli silliqlik moduli bilan chegaralanadi:

$$\tau_k\left(f;\delta\right)_{Lp} \le 2\tau_{k-1}\left(f;\frac{k}{k-1}\delta\right)_{\mathrm{L_p}} \qquad \textbf{(9)}$$

4) Funktsiyaning silliqlik moduli o'zining hosilasining silliqlik moduli bilan chegaralanadi:

$$\tau_k\left(f;\delta\right)_{Lp} \le \delta\tau_{k-1}\left(f;\frac{k}{k-1}\delta\right)_{\mathrm{L_p}} \qquad \textbf{(10)}$$

5) Butun ko'paytuvchini silliqlik modul ishorasidan chiqarish mumkin:

$$\tau_k\left(f;n\delta\right)_{Lp} \le \left(2n\right)^{k+1}\tau_k\left(f;\delta\right)_{\mathrm{L_p}} \qquad \textbf{(11)}$$

Bu erdan dastlabki 3-ta xossasi oddiy ma'nodagi silliqlik modul xossasi bilan mos tushadi va isboti xuddi shularnikiga o'xshash.

Keyingi 4 va 5 xossalar boshqacha ko'rinishga ega.

4-xossani isbotlash uchun

$$\Delta_h^k f(t) = \int_0^h \Delta_h^{k-1} f'(t+u)du, \quad \mathrm{h}>0 \qquad \textbf{(12)}$$

ayniyatdan foydalaniladi.

Endi (12) dan

$$\sup\left\{\left|\Delta_{\mathrm{h}}^{\mathrm{k}} f(t)\right| : \mathrm{t}, \mathrm{t}+\mathrm{kh} \in \left[\mathrm{x} \in \left[\mathrm{x} - \frac{\mathrm{k}\delta}{2}, x+\frac{k\delta}{2}\right]\right] \cap [a,в]\right\} \le \qquad \textbf{(13)}$$

$$\le \sup\left\{\int_0^h \left|\Delta_{\mathrm{h}}^{\mathrm{k}} f'(t+u)\right| du : \mathrm{t},\ \mathrm{t}+\mathrm{kh} \in \left[\mathrm{x} \in \left[\mathrm{x} - \frac{\mathrm{k}\delta}{2}, x+\frac{k\delta}{2}\right]\right] \cap [a,в]\right\} \qquad \textbf{(14)}$$

hosil qilamiz.

1.11-§. Har xil silliqlik modullar orasidagi bog'lanish.

Silliqlik moduli, integral modul va o'rtalashgan silliqlik modullar orasida bog'lanish mavjud. Silliqlik moduli eng kuchli hisoblanadi, integral modul eng sust hisoblanadi.

Aniqrog'i quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema 1.4. Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralangan o'lchovli funksiya bo'lsa, uholda

$$\omega_k\left(f;\delta\right)_{L_p} \le \tau_k\left(f;\delta\right)_{L_p} \le \omega_k\left(f;\delta\right). \qquad (49)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Ikkkinchi chegaralash tengsizlikdan kelib chiqadi..

$$\left\|\omega_k\left(f,\bullet;\delta\right)\right\|_{L_p[a,b]} \le \left\|\omega_k\left(f,\bullet;\delta\right)\right\|_{C[a,b]}. \qquad (50)$$

Birinchi chegaralash quyidagicha o'rnatiladi.

$$\omega_k\left(f;\delta\right)_{L_p} = \sup_{0\le h\le\delta}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^{b-kh}\left|\Delta_h^k f\left(x\right)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \sup_{0\le h\le\delta}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^{b-kh}\left(\omega_k\left(f,x+\tfrac{kh}{2};\delta\right)\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{0\le h\le\delta}\left\{\frac{1}{b-a}\int_{a+kh/2}^{b-kh/2}\left(\omega_k\left(f,x;\delta\right)\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \qquad (51)$$

$$\le \sup_{0\le h\le\delta}\tau_k\left(f;h\right)_{L_p} = \tau_k\left(f;\delta\right)_{L_p}.$$

(1.20) tengsizlik 7 xossaning (1.9) natijasi ekanligini ko'rsatadi.

"Etarlicha yaxshi" funksiyalar uchun integral modullar va o'rtalashgan modullar orasida muhim va trivial bo'lmagan bog'lanish mavjud. Ammo quyidagi tasdiq o'rinlidir.

Teorema 1.5. Shunday k≥2 ga bog'liq S(k) o'zgarmas mavjudki, [*a*,*b*] kesmada ixtiyoriy absolyut uzluksiz *f* funksiya tengsizlikni qanoatlantiradi

$$\tau_k\left(f;\delta\right)_{L_p} \le C(k)\delta\omega_{k-1}\left(f;\delta\right)_{L_p}. \qquad (52)$$

Teorema isbotini engilashtirish uchun ikkita Lemmadan foydalanamiz.

Lemma 1.3. Faraz qilaylik g funksiya barcha haqiqiy *x* lar uchun aniqlangan bo'lsin. U holda ixtiyoriy k natural son va ixtiyoriy haqiqiy h va ν sonlar uchun quyidagi ayniyat o'rinli bo'ladi

$$\Delta_h^k g(x) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i}\left\{\Delta_{i(\nu-h)k}^k g\left(x+ih\right) - \Delta_{h+i(\nu-h)/k}^k g\left(x\right)\right\}. \qquad (53)$$

Isbot. Quyidagini hosil qilish qiyin emas.

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\Delta^k_{h+l(\nu-h)/k}g(x)=$$

$$=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}g\left(x+i(h+l(\nu-h)/k)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}g\left(x+ih+li(\nu-h)/k\right)= \tag{54}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\Delta^k_{i(\nu-h)k}g(x+ih).$$

Agar *lq0* ga mos keluvchi ko'paytuvchilarni tenglikning chap tarafida qoldirib, qolganlarini o'ng tarafga o'tkazsak (53) ayniyatni hosil qilamiz.

Lemma 1.4. Agar $g(x)\in L[a,b],\ t\in[a,b],$ k natural son, $\delta>0,\ s>0$ va $[t+k\delta,t+2k\delta+s]\subset[a,b]$ bo'lsa, u holda

$$\sup_{0\le h\le\delta}\int_o^s\left|\Delta^k_h g(t+u)\right|du\le\frac{(k+1)2^{k+1}}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{s+k\delta}\left|\Delta^k_\nu g(t+u)\right|du d\nu \tag{55}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Lemma shartidan $\delta\le\frac{b-a}{3k}$ ekanligi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $x\in[a,b-kh],\ h\in[0,\delta]$ uchun (53) dan quyidagini hosil qilamiz

$$\left|\Delta^k_h g(x)\right|\le\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left\{\left|\Delta^k_{i(\nu-h)/k}g(x+ih)\right|+\left|\Delta^k_{h+i(\nu-h)/k}g(x)\right|\right\}. \tag{56}$$

Ikkita holatni ko'rib o'tamiz.

a) Agar $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ bo'lsa, u holda $x+kh\le x+k\delta\le b$ va ixtiyoriy $\nu\in[0,\delta]$ uchun

$$x+ih+ki(\nu-h)/k=x+i\nu\le b,\qquad x+i\nu\ge a$$
$$x+k(h+i(\nu-h)/k)=x+(k-i)h+i\nu\le x+k\delta\le b. \tag{57}$$

Xususan, (56) tengsizlikning o'ng tomonidagi hamma oxirgi ayirmalar aniqlangan. $[0,\delta]$ da (56) tengsizlikning ikaala tomonini ν bo'yicha integrallaymiz va ularni δ ga bo'lamiz. Natijada quyidagini hosil qilamiz

$$\left|\Delta^k_h g(x)\right|\le\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left\{\int_0^\delta\left|\Delta^k_{i(\nu-h)/k}g(x+ih)\right|d\nu+\int_0^\delta\left|\Delta^k_{h+i(\nu-h)/k}g(x)\right|d\nu\right\}. \tag{58}$$

b) Agar $x+kh\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ bo'lsa, u holda ma'lum tenglikdan foydalanamiz

$$\left|\Delta^k_h g(x)\right|=\left|\Delta^k_{-h}g(x+(k-i)h\right|+\left|\Delta^k_{-h}g(x+kh)\right| \tag{59}$$

va (56) dan quyidagini hosil qilamiz.

$$\left|\Delta_h^k g(x)\right| \le \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left\{\left|\Delta_{i(\nu+h)/k}^k g\left(x+(k-i)h\right)\right| + \left|\Delta_{-h+i(\nu+h)/k}^k g(x+kh)\right|\right\}. \quad (60)$$

Bu holatda $\nu \in [-\delta, 0]$ deb olamiz. U holda quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

$$x+(k-i)h+ki(\nu+h)/k = x+k(h+\nu) \le x+kh \le b,$$

$$x+k(h+\nu) \ge x-k\delta \ge a,$$

$$x+kh+k(-h+i(\nu+h)/k) = x+i(\nu+h) \le x+kh \le b,$$

$$x+i(\nu+h) \ge x-k\delta \le a. \quad (61)$$

Ma'lumki, berilgan holatda (60) tengsizlikning o'ng tomonidagi hamma oxirgi ayirmalari aniqlangan. (60) tengsizlikning ikkala tomonini ν bo'yicha integrallaymiz va δ ga bo'lamiz. Natijada quyidagini hosil qilamiz

$$\left|\Delta_h^k g(x)\right| \le \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left\{ \int_{-\delta}^{0} \left|\Delta_{i(\nu+h)/k}^k g\left(x+(k-i)h\right)\right| d\nu + \int_{-\delta}^{0} \left|\Delta_{-h+i(\nu+h)/k}^k g(x+kh)\right| d\nu \right\}. \quad (62)$$

$\left|\Delta_h^k g(x)\right|$ qiymat ixtiyoriy $x \in [a, b-kh]$ uchun (58) va (62) orqali chegaralanadi. Agar oxirgi ayirma $\Delta_q^k g(\xi)$ ni ξ va ξQkq nuqtalardan aqala bittasi [*a,b*] kesmaga tegishli bo'lmaganda nolga teng deb hisoblasak, u holda ixtiyoriy $x \in [a, b-kh]$ uchun (58) va (62) lardan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz.

$$\left|\Delta_h^k g(x)\right| \le \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left\{ \int_{0}^{\delta} \left|\Delta_{i(\nu-h)/k}^k g(x+ih)\right| d\nu + \int_{0}^{\delta} \left|\Delta_{h+i(\nu-h)/k}^k g(x)\right| d\nu + \right.$$

$$\left. + \int_{-\delta}^{0} \left|\Delta_{i(\nu+h)/k}^k g\left(x+(k-i)h\right)\right| d\nu + \int_{-\delta}^{0} \left|\Delta_{-h+i(\nu+h)/k}^k g(x+kh)\right| d\nu \right\}. \quad (63)$$

xqtQu ni (63) ga qo'yib bu tengsizlikni [0, s] da *i* bo'yicha integrallaymiz. Natijada quyidagini hosil qilamiz

$$\int_0^s \left|\Delta_h^k g(t+u)\right| du \le \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left\{ \int_0^\delta \int_0^s \left|\Delta_{i(\nu-h)/k}^k g(t+u+ih)\right| du\, d\nu + \right.$$

$$+ \int_0^\delta \int_0^s \left|\Delta_{h+i(\nu-h)/k}^k g(t+u)\right| du\, d\nu +$$

$$+ \int_{-\delta}^0 \int_0^s \left|\Delta_{i(\nu+h)/k}^k g\left(t+u+(k-i)h\right)\right| du\, d\nu + \quad (64)$$

$$\left. + \int_{-\delta}^0 \int_0^s \left|\Delta_{-h+i(\nu+h)/k}^k g(t+u+kh)\right| du\, d\nu. \right.$$

O'zgaruvchilarni almashtirib oxirgi tengsizlikdan quyidagini hosil qilamiz

$$\int_0^s \left|\Delta_h^k g(t+u)\right| du \le \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^k \binom{k}{i}\frac{k}{i}\left\{\left(\int_{-ih/k}^{i(\delta-h)/k}\int_{ih}^{s+ih} + \int_{(k-i)h/k}^{h+i(\delta-h)/k}\int_0^s\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{i(k-\delta)k}^{ih/k}\int_{(k-i)h}^{s+(k-i)h} + \int_{-h+i(h-\delta)/k}^{-h+ih/k}\int_{kh}^{s+kh}\right)\left|\Delta_\nu^k g(t+u)\right| du d\nu\right\} \le \tag{65}$$

$$\le \frac{4}{\delta}\sum_{i=1}^k \binom{k}{i}\frac{k}{i}\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{s+kh}\left|\Delta_\nu^k g(t+u)\right| du d\nu \le \frac{(k+1)2^{k+1}}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{s+kh}\left|\Delta_\nu^k g(t+u)\right| du d\nu$$

Shunday qilib,

$$\sum_{i=1}^k \binom{k}{i}\frac{k}{i} \le \frac{(k+1)2^{k+1}}{\delta}. \tag{66}$$

Teorema 1.5. isboti. Shunday qilib biz quyidagiga egamiz

$$\omega_k(f,x;\delta) = \sup\left\{\left|\Delta_h^k f(t)\right| : t, t+kh \in \left[x-\frac{k\delta}{2}, x+\frac{k\delta}{2}\right]\cap[a,b], h \ge 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\int_0^h \Delta_h^{k-1} f'(t+u)du\right| : t, t+kh \in \left[x-\frac{k\delta}{2}, x+\frac{k\delta}{2}\right]\cap[a,b], h \ge 0\right\} \le \tag{67}$$

$$\le \sup\left\{\int_0^{k\delta}\left|\Delta_h^{k-1} f'(x-\frac{k\delta}{2}+u)\right| du : 0 \le h \le \delta\right\}.$$

k-1 uchun Lemma 1.4. dan foydalanib, bu tengsizlikdan quyidagini hosil qilamiz

$$\omega_k(f,x;\delta) \le \frac{k2^k}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{(2k-1)\delta}\left|\Delta_\nu^{k-1} f'(x-\frac{k\delta}{2}+u)\right| d\nu du. \tag{68}$$

va

$$\tau_k(f;\delta)_{L_p} \le \left\|\omega_k(f,\bullet;\delta)\right\|_{L_p} \le$$

$$\le \frac{k2^k}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{(2k-1)\delta}\left\|\Delta_\nu^{k-1} f'(\bullet-\frac{k\delta}{2}+u)\right\|_{L_p} d\nu du \le$$

$$\le \frac{k2^k}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{(2k-1)\delta}\omega_{k-1}(f'';\delta)_{L_p} d\nu du = k(2k-1)2^{k+1}\delta\omega_{k-1}(f';\delta)_{L_p}. \tag{69}$$

c(k)q$k(2k-1)2^{k+1}$ konstantaga eng yaxshi o’zgarmas deb hisoblanmaydi. kq2 uchun s(2)q48 o’rniga 16 deb olishni ko’rsatish mumkin (Popov [1]), ya’ni

$$\tau_2(f;\delta)_{L_p} \le 16\delta\omega(f';\delta)_{L_p}. \tag{70}$$

(70) dagi 16 konstanta ham eng yaxshi hisoblanmaydi.

III bob
$L_p(-\infty, \infty)$ fazolarda funksiyani yaqinlashtirish

3.1-mavzu. Uzluksizlik moduli va funksiyaning eng yaxshi yaqinlashishi

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Funktsiyani yaqinlashtirishning asosiy teoremalarini o'rgatish. Identiv o'quv maqsadlari: Funktsiyani yaqinlashtirishning to'g'ri va teskari teoremalarini o'rganib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Funktsiyalarni yaqinlashtirishning to'g'ri va teskari teoremalarini har xil ko'rinishda bayon etiladi va tadbiqlari aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Faraz qilaylik $W_\delta^{(p)}$ $(p \geq 1)$ to'plam darajasi δ dan oshmaydigan $g_\delta(x) \in L_p(-\infty:\infty)$, $(p \geq 1)$ butun funksiyalar sinfidan iborat bo'lsin. $L_p(-\infty:\infty)$ fazoda $f(x) \in L_p(-\infty:\infty)$ funksiyaning $W_\delta^{(p)}$ sinfdan olingan butun funksiya bilan eng yaxshi yaqinlashishini $A_\delta(f)_{L_p}$ deb belgilaymiz, ya'ni

$$A_\delta(f)_{L_p} = \inf_{g_\delta(x) \in W_\delta(p)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) - g_\delta(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

va shu bilan birga f(x) funksiyaning quyidagi uzluksizlik modulini ko'rib o'tamiz.

$$\omega_1(f:\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}| f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\omega_2(f:\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}| f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$A_\delta(f)_{Lp}$ miqdor quyidagi xossalarga ega

1. $A_\delta(f)\downarrow$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty} A_\delta(f)=0$

Ushbu

$$A_\delta(f)_p \le K_i\omega_i(f:\frac{1}{\delta}) \qquad i=1,2...$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi K_i o’zgarmaslar mavjudligi ma’lum.

Bu bitiruv malakaviy ishida K_i ning eng kichik qiymati K_i^0 ni topishga bag’ishlangan. Bu erda asosan $p=2$ xolat qaralgan. Bunday masalalar davriy funksiya uchun $[2],[3]$ ishlarda qaralgan.

Avvalo quyidagi lemmalarni isbotlab o’tamiz.

LEMMA II: Faraz qilaylik $f(x)\in L_p(-\infty:\infty)$ bo’lib $\varphi(x)$ funksiya uning $L_2(-\infty:\infty)$ ma’nodagi Fur’e almashtirishi bo’lsin, ya’ni

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{e^{ixt}-1}{it}dt \qquad (23)$$

bunda $f(x)\in L_p(-\infty:\infty)$.

u xolda

$$g_\delta{}^0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\theta}^{\theta}\varphi(t)e^{ixt}dt \qquad (24)$$

funksiya $W_\delta^{(2)}$ sinfdagi $f(x)$ dan $L_2(-\infty:\infty)$ metrik ma’nosida eng yaqin chetlanuvchi butun funksiyadan iboratdir, shu bilan birga

$$A_\delta(f)_2 = \| f(x)-g_\delta{}^0(x)\|_2 \; \left(\int_{|t|\succ\delta}|\psi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (25)$$

Isbot: xaqiqatan ham $|t|\succ\theta$ bo’lganda $\psi(t)=0$ funksiya uchun

$$f(x)-g_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(t)-\psi(t)\ ]\frac{e^{ixt}-1}{it}dt$$

funksiyaga Plansherel teoremasini tatbiq qilib,

$$\inf_{g_\delta\in W^{(2)}} \| f(x)-g_\theta(x)\|_2^2 = \inf \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)-\psi(x)|^2 dt)+\int_{|t|\succ\theta}|\varphi(t)|^2 dt$$

Tenglikni xosil qilamiz. Bundan (3) kelib chiqadi.

Endi $L_2(-\infty:\infty)$ fazoda yotuvchi

$$f^{(r)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{it}(it)^r\varphi(t)dt$$

Funktsiyaga LEMMA 1 ni qo'llab

$$H_\theta(f^{(r)})_2=\{\int_{|t|\succ\theta}|(it)^r\varphi(t)|^2\,dt\}^{\frac{1}{2}}\succ\theta^2\{\int_{|t|\succ\theta}|\varphi(t)|^2\,dt\}^{\frac{1}{2}}=\theta^2A_\theta(f)_2$$

xosil qilamiz. Bu erdan

$$A_\theta(f)_2\prec\frac{1}{\theta^2}A_\theta(f^{(r)})_2\,r=1,2.....\quad(25A)$$

kelib chiqadi.

LEMMA: 2 Agar $\varphi(t)$ funksiya $L_2(-\infty:\infty)$ fazodagi ixtiyoriy funksiya bo'lsa, u xolda

$$\inf_{|y|\le\frac{\pi}{\theta}}\int_{|t|\succ\theta}|\varphi(t)|^2\cos ytdt\prec 0\qquad(26)$$

bo'ladi.

Isbot.

$$\varphi_\theta(y)=\begin{cases}-\sin\theta y & 0\le y\le\frac{\pi}{\theta}\\ 0 & y\succ\frac{\pi}{\theta}\end{cases}$$

funksiyani Fur'e integrali ko'rinishda tasvirlaymiz.

$$\varphi_\gamma(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\tilde{\varphi}_\delta(t)\cos ytdt$$

bu erda $\varphi_\gamma(y)$ $(-\infty:0)$ intervalga juft davom ettirilgan funksiyadir. Bundan

$$\tilde{\varphi}_\gamma(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\tilde{\varphi}_\delta(y)\cos ytdt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}*\frac{4\delta}{t^2-\theta^2}\cos^2\frac{\pi t}{\delta}$$

Lekin

$$\tilde{F}_\sigma(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}|\varphi(t)|^2\quad,\quad|t|\succ\sigma$$

$$\tilde{F}_\sigma(z)=0\quad,\quad|t|\le\sigma$$

Funktsiya

$$F_\delta(y)=\int_\sigma^\infty |\varphi(t)|^2\cos ytdt \qquad 0\le y\le\frac{\pi}{\delta}$$

Funktsiyaning kosinus almashtirishidan iborat ekanligini qayd qilamiz.
Endi quyidagini hosil qilamiz.

$$\int_0^\infty F_\delta(y)\varphi_\delta(y)dy=-\int_0^\infty \tilde{F}_\delta(y)\tilde{\varphi}_\delta(y)dy=2\delta\int_0^\infty|\varphi(t)|^2\frac{\cos\frac{2\pi t}{2\delta}}{t^2-\delta^2}dt\ge 0 \quad (27)$$

Ikkinchi tomondan, agar $F_\delta(y)\ge 0$ bo'lsa, u xolda

$$\int_0^\infty F_\delta(y)\varphi_\delta(y)dy=-\int_0^{\frac{\pi}{\delta}}F_\delta(y)\sin\delta ydy\prec 0 \quad (28)$$

Bu (28) tengsizlik (27) ga qarama-qarshidir va demak $F_\delta(y)$ funksiya $\left[0:\frac{\pi}{\theta}\right]$ da ham musbat xam manfiy qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni (26) munosabat o'rinlidir.

Yuqoridagi lemmalar asosida quyidagilar isbot qilinadi.

<u>Teorema: I</u> yuqoridagi (23) tengsizlikdan

$$\omega_1(f:\frac{\pi}{\theta})_2=\sup_{|y|\le\frac{\pi}{\delta}}|f(x+y)-f(x)|_2=\sqrt{2}\left\{\int_{|t|\succ\theta}|\varphi(t)|^2dt-\inf_{0\le y\le\frac{\pi}{\delta}}F_\delta(y)\right\}$$

(29) tenglikni xosil qilamiz. Bundan LEMMA 1 va LEMMA 2 larga asosan (29) kelib chiqadi. Bundan tashqari $|t|\le\frac{\pi}{\delta}$ bo'lganda

$$\sup_{|t|\le\frac{\pi}{\delta}}\|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\|_2^2\ge 4\sup\left\{\int_{|u|\ge\delta}|\varphi(u)|^2(1-\cos ut)^2du\ge\right\}\ge$$

$$\ge 4\left\{\int_{|u|\succ\delta}|\varphi(u)|^2du-8\inf_{0\le y\le\frac{\pi}{\delta}}F_\delta(y)\right\} \quad (30)$$

Bu erdan (30) tengsizlik kelib chiqadi. Isbaotlangan teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija:

$$A_\delta(f)_2\prec\frac{1}{\sqrt{2}\theta^r}\omega_1(f^{(r)}:\frac{\pi}{\theta})_2$$

$$A_\delta(f)_2 \prec \frac{1}{2\theta^r}\omega_2(f^{(r)} : \frac{\pi}{\theta})_2$$

Bu tengsizliklar yuqoridagi (25A) tengsizlikdan kelib chiqadi. Misol sifatida

$$f(x) = e^{-|x|} \in L_2(-\infty : \infty)$$

Funktsiyani olib qaraylik. Uning Fur'e almashtirishi

$$\tilde{f}(t) = \varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{1}{1+t^2}$$

Isbotlangan TEOREMA ga asosan

$$A_\delta(e^{-|x|})_2 = \left[1 - \frac{2}{\pi}(arctg\,\theta - \frac{\theta}{\theta^2+1})\right]^{\frac{1}{2}} \prec \sqrt{2}/\delta$$

3.2-mavzu. Funktsiyalarni sinflarga joylashtirish va uzluksizlik moduli

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Funktsiyani sinflarga joylashtirishni o'rgatish. Identiv o'quv maqsadlari: Funktsiyalarni bir sinfda boshqa sinfga joylashtirishdagi shartlarni o'rganib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Funktsiyalarni bir fazodan boshqa fazoga o'tkazish shartlari tushuntiriladi va bu masala muammoli ekanligi aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Faraz qilaylik $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \prec p \prec \infty$ to'plam xaqiqiy o'qda berilgan $f(x)$ funksiyalar to'plami bo'lib,

$$\| f(x) \|_{L_p(-\infty,\infty)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p \, dx \right\} \prec \infty$$

shartni qanoatlantirsin.

$L_p(-\infty,\infty)$ va $L_q(-\infty,\infty)$ sinflar $p \neq q$ bo'lganda bir birini o'z ichiga olmaydi.

1961 yilda M.F.Timan quyidagini isbotlagan. Agar $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, $p \geq 1$ bo'lib $q \succ p$ bo'lganda

$$\int_0^{\infty} A_\delta(f)_{L_p(\delta+1)} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{l-1} d\delta \prec \infty$$

bo'lsa, u holda

$$A_\delta\cdot(f)_{L_p}\le C_{pq}\left\{A_\delta(f)_{L_p}(\delta+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}+\left(\int_0^\infty A_\delta(f)_{L_p}(t+1)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})l-1}dt\right)^{\frac{1}{l}}\right\}$$

bo’ladi. Bu erda

$$A_\delta(f)_{L_p}=\inf\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-Q\delta(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

bo’lib $Q_\delta(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ bo’lgan darajasi δ oshmaydigan butun funksiya va $A_\delta(f)_p$ miqdor $f(x)$ funksiyaning L_p fazoda $Q_\delta(x)$ butun funksiya bilan eng yaxshi yaqinlashishi deyiladi.

Quyidagi teoremalar isbot qilingan. (qarang {1} P.L.Ulyanov)

1. Agar $p=1$ va $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(n+1)-\varphi(n)]w(\frac{1}{n}:t)_{L(0,1)}$ bo’lsa, u holda

$$\int_0^1|f(t)|\varphi(f(t))dt\prec\infty$$

bo’ladi.

2. Agar $p=1$ va $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\varphi(36nw/1/n:f)_{L(0,1)}\prec\infty$ bo’lsa, u holda

$$\int_0^1\varphi(f(t))dt\prec\infty$$

bo’ladi.

3. Agar $p\ge1$, $\delta\succ p$ va $D=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p-2}}w^{\nu}(1/n:f)_{L(0,1)}\prec\infty$ (1) bo’lsa, u holda

$$\int_0^1|f(t)|^{\nu}dt\prec\infty,\|f(t)\|_{L_p}(0,1)\le C(\nu)\left\{\|f\|_{L_p(0,1)}+D^{\frac{1}{\nu}}\right\}\qquad(2)$$

bo’ladi, bunda

$$w(\delta; f)L_p(0,1) = \sup_{0 \prec k \le \delta} \left\{ \int_0^{1-k} | f(t+k) - f(t) |^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Bu ishda bu teoremani miqdor $f(x)$ funksiyaning $L_p(0,1)$ fazoda uzluksizlik modulini $(-\infty, \infty)$ uchun isbot qilamiz.

Teorema: 1. Faraz qilaylik $\varphi(t) \ge 0$ va $(0, \infty)$ kamaymaydigan funksiya bo'lsin. U holda:

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\varphi(n+1) - \varphi(n)] w(\frac{1}{n} : f)_{L(0,\infty)} \prec \infty \quad (32)$$

bo'lsa (f(t)-juft funksiya), u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} || f(t) | \varphi || f(t) | dt \prec \infty \quad (33)$$

bo'ladi.

Teorema: 2. Faraz qilaylik $\varphi(t) \ge 0$ va $[0, \infty]$. Quyidagi funksiya bo'lib $0 \le t \le 1$ $\varphi(t) \le At$ da bo'lsin. U holda, agar f(t) juft funksiya bo'lib,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \varphi \left[\frac{2}{w(1, f)_L} \cdot m w(\frac{1}{m} : f)_L \right] \prec \infty \quad (34)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left[\frac{| f(t) |}{t w(1, f)_L} \right] \prec \infty \quad (35)$$

bo'ladi.

Teorema: 3. Faraz qilaylik $f(t) \in L_p(-\infty, \infty) \cdot (p \ge 1)$ juft funksiya bo'lsin. Agar $1 \le p \le v$ va

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p-2}} w^v (\frac{1}{n}, f)_{L_p} \prec \infty \quad (36)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^v \, dt \prec \infty \quad (37)$$

bo'ladi. Hamma joyda

$$w(\delta, f)_{L_p} = w(\delta, f)_{L_p(0,\infty)} = \sup_{0\prec h\leq\delta}\left\{\int_0^\infty | f(t+h) - f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

ekanligini e'tiborga olamiz va bu miqdor $f(x)$ funutsiyaning $L_p(-\infty,\infty)$ fazodagi uzluksizlik moduli deyiladi.

Keltirilgan teoremalar funksiyalarning teng o'lchovli tushunchasiga asoslanib P.L.Ulyanov metodi bo'yicha isbot etiladi. Buning uchun avvalo quyidagi lemmalarni isbotlaymiz.

Lemma: 1 Faraz qilaylik $f(t) \in L_p(0,\infty), p \geq 1$ va $\varphi_n(t) = n$

$$\int_t^{\frac{t+1}{n}} f(u)du, 0 \prec t \prec \infty, n = 1,2.... \quad (38)$$

bo'lsin. U holda

$$\int_0^\infty | f(t) - \varphi_n(t)|^p \; dt \leq w^p(\frac{1}{n}, f)_{L_p} \quad (39)$$

bo'ladi.

Lemma: 2 Faraz qilaylik $f(t), \varphi_\delta(t)$ lar lemma 1. dan va

$$\psi(t) = \psi_{nk}(t) = n\cdot \int_{\frac{k+v}{n}}^{k+(v+1)} f(u)du \quad ,$$

$$\frac{k+v}{n} \leq t \prec \frac{k+(v+1)}{n} \quad (40)$$

$v = 0,1,.....,n-1; k = 0,1,.....,= 0,1,.....;n = 1,2,....$, bo'lsin, u holda

$$\int_0^\infty | \varphi_n(t) - \psi(t)|^p \; dt \leq w^p(\frac{1}{n}, f)_{L_p} \quad (41)$$

bo'ladi.

Lemma: 3 Faraz qilaylik $f(t)$ va $\varphi(t)$ lar lemma 2. dan bo'lsa, u holda

$$\{\int_0^\infty |\varphi_n(t)-\psi(t)|\,dt\}^{\frac{1}{p}} \le 2w(\frac{1}{n}, f)_{L_p} \qquad (42)$$

bo’ladi.

<u>Lemma:</u> 4 Faraz qilaylik $f(t)\in L_p(0,\infty), p\ge 1, |E|$ son $EC(0,\infty)$ to’plam o’lchovli bo’lsin. U holda

1)agar $p\ge 1$ bo’lsa u holda

$$w(\frac{1}{n}; f)_{L_p} \ge \frac{1}{f}\sup_{|E|\le 1/n}\int_E |f(t)|\,dt \qquad (43)$$

2) agar $p\succ 1$ bo’lsa, u holda $n=1,2,....$ va $E, C(0,\infty)-E$ bo’lgandi.

$$w(\frac{1}{n}; f)_{L_p} \ge \frac{1}{9}n^{\frac{1}{1-p}}\sup_{|E|\le\frac{1}{n}}\left\{|f(t)dt|-\sup_{|E_1|=\frac{1}{n}}\int_{E_1}|f|\,dt\right\} \quad (44)$$ bo’ladi.

<u>Lemma:</u> 5 Agar $f(t)\ge 0$ bo’lib, $f(t)\in L_p(0,\infty)$ va $0\le\alpha\prec\infty$ bo’lsa, u holda

$$\sup_{|E|=\alpha}\int_E |F(t)|\,dt = \int_0^\alpha f(z,f)dz, EC(0,\infty) \qquad (45)$$

$$\sup_{|E|=\alpha}\int_E f(t)dt = \int_\alpha^{2\alpha} F(z,f)dz, EC(0,\infty)-E \qquad (46)$$

bo’ladi, bunda $F(z,f)$ funksiya $f(z)$ funksiya bilan teng o’lchovli bo’lib, $(0,\infty)$ da o’smaydi.

<u>Lemma:</u> 6 Agar $F(zd)=F(z)$ funksiya lemma bo’lsa, u holda Nq1,2,3… , bo’lganda

$$F(2^{-N-1}) \le 18\sum_{k=0}^{N} 2^{\frac{k}{p}} w(2^{-k}; f)_{L_p} + F(1), p\succ 1 \qquad (47)$$

bo’ladi.

3.3-mavzu. Har xil metrik fazolarda funksiyaning eng yaxshi yaqinlashtirish orasidagi munosabat

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashishini har xil fazolarda ko'rib o'tish. Identiv o'quv maqsadlari: Funktsiyaning eng yaxshi yaqinlashishi har xil metrik fazolarda qanday bog'langanligni bilib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Metrik fazolarda eng yaxshi yaqinlashishning birini ikkinchisi bilan ifodalganda metrika indeksga bog'liqligi to'la tushuntiriladi va tadbiqlari aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Teorema 1.4 . Agar $f(x) \in Lp(-\infty,\infty)$ bo'lib,

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p}-2} A_n^v(f)_{Lp} \quad 1 \le p \prec v$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$A_\sigma(f)_{Lp} \le C\{(\sigma+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{v}} A_\sigma(f)_{Lp} + (\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p}-2} A_n^v(f)_{Lp})^{\frac{1}{v}}\}$$

bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $Q_{2^m-1}(x) = \int_{-2^n-1}^{2^n-1} F(u)e^{iux}du$

bo'lsin, u holda $2^{m-1} \le n \prec 2^m \prec 2^n$ bo'lganda,

$$\| Q_{2^m-1}(x) - Q_n(x) \|_{Lp}^p \le M(p) \| \int_{-(2^m-1)}^{2^m-1} -$$

$$- \int_{-v}^{n} F(u) e^{iux} du \|_{Lp}^p + \| \sum_{v=m}^{N-1} \left(\int_{-(2^v-1)}^{2^{v+1}-1} - \int_{-(2^v-1)}^{2^v-1} - \right) \|_{Lp}^p \qquad (68)$$

bo'ladi. Tengsizlikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchini ko'rib chiqamiz, darajasi $\le n$ da $Q_n(x)$ funksiya butun funksiya ekanligidan foydalanib, $\| Q_\sigma(x) \|_{Lp} \le \left(\frac{g_0 \sigma}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| Q_\sigma(x) \|_{Lp}$ S.M. Nikolskiy tengsizligidan

$$\| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(u) e^{iux} du \|_{Lp}^p \le M(p) A_\sigma(f)_{Lp},$$

$1 \prec r \prec p$ va

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt$$

M.F. Timan tengsizligadan $A_n(f)_{Lp}$ monoton kamayuvchi funksiyaligadan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\| \int_{-(2^m-1)}^{2^m-1} F(u) e^{inx} du - \int_{-n}^{n} F(u) e^{inx} du \|_{Lp}^p =$$

$$= \| Q_{2^m-1}(x) - Q_n(x) \|_{Lp}^p \le$$

$$\le C(2^{m(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \| Q_{2^m-1}(x) - Q_n(x) \|_{L_2})^p \le$$

$$\le M(r,p)(n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} A_n(f)_{L_2})^p = \qquad (69)$$

$$= M(r,p) n^{\frac{p}{r} - 1} A_n^p(f)_{L_2}$$

1.28 tengsizlikni qanday bajargan bo'lsak, quyidagini ham xuddi shunday qilamiz,

$$|\sum_{\nu=m}^{N-1}\Big(\int_{-(2^{\nu+1}-1)}^{2^{\nu+1}-1}F(u)e^{inx}du-\int_{-(2^{\nu}-1)}^{2^{\nu}-1}F(u)e^{inx}du\Big)\|_{Lp}^{p}=$$

$$=\|\sum_{\nu=m}^{N-1}\lambda_{\nu+1}(x)\|_{Lp}^{p}\le M(p,r)\sum_{\nu=m}^{N-1}(2^{\nu+1}-1)^{\frac{p}{r}-1}A_{2^{\nu}-1}^{p}(f)_{L_2}\le$$

$$\le M(p,r)\sum_{\nu=m}^{N}\sum_{k=2^{\nu-1}-1}^{2^{\nu}-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)_{L_2}\le M(p,r)\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)_{Lr}\le$$

$$\le M(p,r)\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)_{Lr}\le M(p,r)\sum_{k=n+1}^{2^N-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)_{Lr}$$

(68), (69) va (70) tengsizliklardan

$$Q_{2^N-1}(x)-Q_n(x)\|_{Lp}^{p}\le$$
$$\le M(p,r)\{n^{\frac{p}{r}-1}A_n^p(f)_{Lr}+\sum_{k=n+1}^{2^N-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)_{Lr}\}$$

$N\to\infty$ nidan

$$\|f(x)-Q_n(x)\|_{Lp}\le$$
$$\le C(p,r)\{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}A_n^p(f)_{Lr}+(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)_{Lr})^{\frac{1}{p}}\},$$

$1\prec r\prec p\prec\infty$ uchun tasdiqlangan teoremadan kelib chiqadi.
Endi, $0\prec r\prec p\le 1$ xol uchun ko'rib o'tamiz.
Bunday xolda 1.1 teoremani isbot qilganimizday

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_{2^k}(x)=Q_1(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}[Q_{2^\nu}(x)-Q_{2^{\nu-1}}(x)]$$

fikran $L_p(-\infty,\infty)$ ga kiradi deb, va $Q_\tau(x)$ butun funksiyadan

$\|f(x)-Q_\tau(x)\|_{Lp}=A_\theta(f)_{Lp}$

kelib chiqadi.

(1.23) tengsizlikdan va $2^{m-1}\le\theta\prec 2^m$ da $A_\theta(f)_{Lr}$ monotonligadan quyidagi kelib chiqadi,

$$\| Q_\theta(x) - f(x) \|_{Lp}^p =$$

$$= \| Q_\theta(x) - [Q_{2^m}(x) + \sum_{k=m+1}^{\infty}(Q_{2^k}(x) - Q_{2^{k-1}}(x))] \|_{Lp}^p \le$$

$$\le \| Q_\theta(x) - [Q_{2^m}(x) \|_{Lp}^p + \sum_{k=m+1}^{\infty}(Q_{2^k}(x) - Q_{2^{k-1}}(x))] \|_{Lp}^p \le$$

$$\le C(p,r)\{[\theta^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \| Q_\theta(x) - [Q_{2^m}(x) \|_{Lr}]^p +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty}[2^{k(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \| Q_{2^k} - Q_{2^{k-1}}(x)_{Lp} \|]\} \le$$

$$\le C(p,r)\{\theta^{\frac{p}{r}-1} A_\theta^p(f)_{Lr} + \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{k(\frac{p}{r}-1)} A_{2^k}^p(f)_{Lp}\} \le$$

$$\le C(p,r)\{\theta^{\frac{p}{r}-1} A_\theta^p(f)_{Lr} + \sum_{\nu=[\theta]+1}^{\infty} \nu^{\frac{p}{r}-2} A_\nu^p(f)_{Lr}\}$$

$0 \prec r \prec p \le 1$ uchun keltirilgan teoremadan va $1 \prec r \prec p \prec \infty$ xol uchun. Teorema isbot bo'ldi.

3.4-mavzu. Fure integrallarininsh yaqinlashishi va ularni jamlash

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Fure integrallarining xossalarini o'rgatish. Identiv o'quv maqsadlari: 1. Fure integralining yaqinlashish xossalarini o'rganib oladi. 2. Uzoqlashuvchi Fure integrallarini jamlash usullarini o'rganib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Fure integralining yaqinlashish xossalari bayon etiladi. Uzoqlashuvchi Fure integrallarining jamlash usullari bayon etiladi va ularning ahamiyati, tadbiqlari aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Asosiy savollar.

1. Fure integrallari.
2. Fure integrallarining xossalari.

Tayanch iboralar (tushunchalar).

Fure integrali, silliq bo'lakli, deyarli uzluksiz, bo'lakli uzluksiz, o'ng va chap xosila, Eyler formulasi, Fure almashtirishi, absolyut integrallar uchun kosinus, sinus, Fure almashtirishlari.

1-asosiy savol bo'yicha o'qituvchi maqsadi.

1. Fure integrali moxiyatini tushuntirish.
2. Fure integralining har xil ko'rinishlarini o'rgatish.

Indentiv o'quv maqsadlari.

1. Fure integralining moxiyatini o'rganib oladi.

2. Fure integralini har xil ko'rinishda hosil qila oladi.

1-asosiy savol byoni.

Faraz qilaylik *f(x)* funksiya (-∞,∞)da berilgan bo'lsin. U xolda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos t(\xi - x)d\xi$$

integral yordamida

$$f(x) \approx \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\xi - x)\, t\, d\xi\, dt \qquad (1)$$

ni hosil qilamiz. Bu (1) tenglama *f(x)* funksiyaning Fure integrali deyiladi.

Teorema (Fure). Agar butun Ox o'qda aniqlangan *f(x)* funksiya quyidagi shartlarni kanoatlantirsa:

1) Ox o'qning istalgan (-*l*,*l*) chekli kesmasida silliq bo'lakli bo'lsa;

2) (-*l*,*l*) da absolyut integrallanuvchi bo'lsa;

U xolda Ox ga tegishli har qanday *x* uchun

$$\lim \frac{1}{\pi}\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\eta(x-\xi)d\xi\, d\eta = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

bo'ladi. (Isbot. [1]ga qarang.)

1. Uzluksiz bo'lakli funksiya.

Ta'rif. Agar *f(x)* funksiya [*a*,*v*] kesmaning qariyib (deyarli) barcha nuktalarida uzluksiz bo'lib, usha kesmada fakat soni chekli birinchi tur uzilish nuktalariga ega bo'lsa, bu xolda bu funksiya [*a*,*v*]da uzluksiz bo'lakli deyiladi.

$$k = f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0) = M$$

2.Sillik bulakli funksiya.

Ta'rif. Agar [*a*,*v*] da uzluksiz *f(x)* funksiya o'sha kesmaning qariyib (deyarli) barcha nuktalarida chekli ikki yoqlama *f'(x)* hosilaga ega bo'lib, kesmaning fakat chekli sondagi nuqtalarida chekli o'ng va chap hosilalarga ega bo'lsa, u holda *f(x)* funksiya [*a*,*v*] kesmada silliq bo'lakli deyiladi.

Yuqoridagi Fure teoremasini kuchaytirish mumkin. U quyidagicha:

Teorema. Agar (-∞,∞)da absolyut integrallanuvchi funksiya quyidagi shartlarni:

1) Ox o'qning har bir chekli kesmasida uzluksiz bo'lakli bo'lsa;

2) Tayin *x* va istalgancha kichik *i*>0 uchun

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}\right|$$

nisbat chekli bo'lsa.U xolda

$$\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\eta(\xi - x)d\xi d\eta = \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$$

(Isbotij: [1]ga qarang)

NAЗОPAT TOPShIRIQLAR.

1. Fure integrali nima ?
2. Absolyut integrallanuvchi fukntsiya nima?
3. Deyarli uzluksizlik nimadan iborat?
4. Bo’lak uzluksizligi nima?
5. Ikki yoqlama hosila tushunchasini ayting.
6. Silliq bo’lakli funksiyani ayting.
7. Fure teoremasini ayting.
8. Eyler formulasini izoxlang.

2-ASOSIY SAVOL BO’YIChA O’QITUVChINING MAQSADI.

1.Fure almashtirishlarini tushuntirish.
2. Fure almashtirishlarining xossalarini o’rgatish.

Identiv o’quv maqsadlari.

1. Fure almashtirishini o’rganib oladi.
2. Fure almashtirishining asosiy xossalarini o’rganib oladi.

2-asosiy savol bayoni.

Ko’p hollarda Fure integralini kompleks o’zgaruvchi vositasida yozish qulay. Fure teoremasi shartlarida va *f(x)* uzluksiz bqlsa, u xolda

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\eta(\xi-x)d\xi d\eta \qquad (1)$$

tenglik o’rinlidir. Bu (1) ning η ga nisbatan juftligini e’tiborga olsak.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\eta(\xi-x)d\xi d\eta \qquad (2)$$

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right),\qquad \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

larga asosan

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-\xi)\eta}f(\xi)d\xi d\eta \qquad (3)$$

bunda

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i(x-\xi)\eta}d\xi d\eta=\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-\xi)\eta}f(\xi)d\xi d\eta$$

tenglik e’tiborga olindi.

Endi (3) ni bunday yozamiz

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\xi\eta}d\xi\right]e^{i\eta x}d\eta \qquad (3')$$

va

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\xi\eta}d\xi=F(\eta) \qquad (4)$$

deb belgilaymiz.

U holda (3)ni bunday yozamiz

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}F(\eta)e^{i\eta x}d\eta \qquad (5)$$

Yuqoridagi (4) formula bilan aniklinuvchi F(η) funksiya butun haqiqiy o'qda (-∞,∞)da aniqlangan *f(x)* funksiyaning Fure almashtirishi deyiladi. O'zi esa (ya'ni *f(x)*) original deyiladi.

NAZORAT TOPShIRIKLARI.

1. Eyler formulasini ayting.
2. Fure almashtirishlari deb nimaga aytiladi? Keltirib chiqaring.
3. Qoldirilgan joylarni to'ldiring.

Agar *f(x)*.....................................bo'lsa, u xolda F(x) Fure almashtirishlar uchun qkuyidagilar o'rinli.

A) F(x)q

V) [F(0)]q

S) *f(axQb)* uchun

D) $F^{(k)}(x)$q

4. (-∞,∞) uchun *f(x)* ning Fure almashtirishini yozing.
5. Sinus Fure almashtirish nimadan iborat?
6. Kosinus Fure almashtirish nimadan iborat?
7. Juft funksiya uchun Fure almashtirishi qanday bo'ladi?
8. Toq funksiya uchun Fure almashtirish qanday bo'ladi?
9. Ixtiyoriy funksiya uchun Fure almashtirishlarining ko'rinishlarini hosil qiling.
10. Fure almashtirishlari qaysi hollarda tadbiqlanadi?

MUSTAQIL TOPShIRIKLAR:

1. Fure almashtirishlari [1], IV-bob, 138-148 bet.
2. Fure almashtirishlarining xossalari [1] IV bob, 148-158 betlar.

ADABIYoTLAR:

1. Teshaboeva N. «Fure qatorlari va variatsion xisob» T. 1977.
2. Sarimsoqov T.A. «Funktsional analiz» T. 1993
3. Teshaboeva N, «Matematik fizik metodlari» T. I 966.

CHEZARO, ABEL, GAUSS-VEYERSHTRASS USULLARI BILAN FURE INTEGRALLARINI TANLASH.

ASOSIY SAVOLLAR:

1. a) Chezaro metodi bilan integralni tanlash.
   b) Abel metodi bilan integralni tanlash.
2. Gauss - Veyershtrass metodi bilan tanlash.

TAYaNCh IBORA VA TUShUNChALAR:

Fure integrali, Chezaro metodi, Abel- Puasson metodi. Gauss-Veyershtrass metodi, Ulyanov P.L., M.F.Timan ishlari deyarli va o’rtacha yaqinlashish.

O’QITUVChINING MAKSADI:

1. Chezaro metodini tushuntirish.
2. Abel metodini tushuntirish.

IDENTIV O’QUV MAKSADLARI:

1. Integralni Chezaro metodi bilan tanlashni tushunib oladi.
2. Abel metodi bilan ishlashni o’rganib oladi.

1 - ASOSIY SAVOLNING BAYoNI:

Quyida

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos z(t-x)dt \qquad (1)$$

integralni ko’rib o’tamiz, u Fure integrali deyiladi. Agar (1) aniq chekli son bo’lsa, u xolda Fure integrali yaqinlashuvchi deyiladi, ya’ni

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}dz\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos z(t-x)dt = A = Const$$

Endi biz *f(x)* funksiya $(-\infty,\infty)$da karaylik. Avvalo

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \qquad (2)$$

(maxsusmas) integralni ko’rib o’taylik.

Agar

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}f(x)dx = A$$

bo’lsa. (2) yaqinlashuvchi deyiladi. Agarda

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

mavjud bo’lsa, u holda (2) mavjud va ular jamlanuvchi deyiladi.

Endi biz (2) yaqinlashuvchi bo’lmaganda, ya’ni noaniq bo’lganda uni aniqlashtirish masalasini ko’ramiz. (Lopital qoidasiga o’xshatib). Boshqacha aytganda (2) integral yigindisini biror usul bilan topishni ko’rib o’tamiz.

Ta’rif. Agar

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha} f(x)dx = K \qquad \text{(A)}$$

bo’lsa, u holda

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \qquad (4)$$

integral α-tartioli Chezaro metodi bo’yicha jamlanadi deyiladi va (s, α) deb belgilanadi.

Agar bunda αq0 bo’lsa, (4) oddiy yaqinlashishdan iborat, αq1 da Feyer metodi bilan jamlanadi deyiladi.

(s, 0) q> (c, α), α>0

Macalan

$$\int_0^{\infty}\sin axdx$$

integral uzoslashuvchi (noanis). Feyer metodi bilan (α q 1)

$$\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)\sin axdx = \frac{1}{a}-\frac{\sin a\lambda}{a\lambda}\to\frac{1}{a},$$

ya’ni λ→∞ da

$$\int_0^{\infty}\sin axdx = \frac{1}{a} \qquad \text{(Feyer usuli Bilan)}$$

Ta’rif. Agar

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^{\infty} e^{-\delta x}dx$$

mavjud bo’lsa, u holda (4) Abel metodi bilan jamlanuvchi deyiladi.

Buni Fure integraliga tatbiklasak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_0^{\infty} e^{-\delta u}\cos u(x-t)dudt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\delta}{\delta^2+(x-t)^2}dt \qquad \text{(V)}$$

bo’ladi bu integral δ→∞da limitga ega bo’lsa, u holda Fure integrali (1)

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dz\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos z(t-x)dt \qquad (1')$$

Abel-Puasson metodi bo'yicha jamlanadi deyiladi. Abel-Puasson o'rtachasi Laplas tenglamasining echimi bilan uzviy bog'liq.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplas tenglamasi *(uqu(x,y))* Garmonik funksiya. Elliptik tipdagi.

NAZORAT TOPShIRIQLARI:

1. Yaqinlashuvchi Fure integarli deb nimaga aytiladi?
2. Uzoqlashuvchi Fure integrali deb nimaga aytiladi?
3. Integralni tanlash moxiyatini ayting.
4. Chezaro metodi deb nimaga aytiladi?
5. Abel metodi deb nimaga aytiladi?
6. Feyer metodi deb nimaga aytiladi?
7. Metodlar orasida kanday bog'lanish bor?
8. (s, α) va (s, β) larning xossalarini izoxlang.

2 - ASOSIY SAVOL BO'YIChA O'QITUVChINING MAKSADI:

1. Gauss - Veyershtrass metodini o'rgatish.
2. Metodlarning interallarini tanlashdagi moxiyatini o'rgatish.

IDENTIV O'QUV MAQSADLARI:

Gauss - Veyershtrass metodini urganib oladi.
Integrallarni tanlashda metodlarni tadbikiy oladi.

2 - ASOSIY SAVOL BAYoNI

Ta'rif. Agar

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^{\infty} e^{-\delta^2 x^2} f(x)dx$$

mavjud bo'lsa, u holda (2) integral Gauss-Veyershtrass usuli bo'yicha jamlanadi deyiladi. Buni Fure integrallariga tadbiqlasak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_0^{\infty} e^{-\delta^2 u^2}\cos u(x-t)dudt = \frac{1}{2\delta\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-\frac{(x-t)^2}{4\delta^2}\right)dt \qquad \text{(S)}$$

bo'lib, bu integral δ→∞ da mavjud bo'lsa, u holda (1) Fure integrali Gauss-Veyershtrass metodi bo'yicha jamlanadi deyiladi.

Yuqoridagi (A), (V), (S) lar mos ravishda Chezaro o'rtachasi, Abel-Puasson o'rtachasi, Gauss-Veyershtrass o'rtachasi deyiladi.

Endi yukoridagi usullarga ta'luqli bo'lgan teoremalarni keltiramiz.

Teorema 1. Faraz qilaylik $f(x)\in L(-\infty,\infty)$ bo'lsin, u holda (1) integral

1) (S,1)bo'yicha $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ga jamlanadi ((1)-ma'noga ega bo'lsa)

2) agar *f(x)* uzluksiz bo'lsa, u xolda *f(x)* ga jamlanadi.

Teorema 2. Teorema 1 da (S, 1) ni (S, α), 0<α<1ga almashtirish mumkin.

Teorema 3. Abel-Puasson o'rtachasi deyarli hamma *x* uchun *f(x)* funksiyaga yaqinlashadi.

Teorema 4. Agar $e^{-cx^2} f(x) \in L(-\infty,\infty)$ bo'lsa, u xolda Gauss-Veyershtrass o'rtachasi 1) *f(x)* ga jamlanadi (*f(x)*-uzluksiz bo'lsa)

2) *x*-ning deyarli hamma nuktalarida Gauss-Veyershtrass o'rtachasi *f(x)*funksiyaga yaqinlashadi.

Gauss-Veyershtrass o'rtachasi issiqlik tarqalish tenglamasining echimi bilan uzviy bog'lik ekanini qayd etish zarur.

NAZORAT TOPShIRIQLAR:

1. Gauss-Veyershtrass metodi nimadan iborat?
2. Fure integraliga tadbiklashni ayting.
3. Integralni tanlashdagi munosabatlarni ayting. ((S, α) uchun)
4. Gauss-Veyershtrass o'rtachasi nima?
5. Gauss-Veyrshtrassga taalluqli teoremani izoxlang.
6. Gauss-Veyershtrass o'rtachasining tadbiqlari haqida tushuncha bering.

MUSTAQIL TOPShIRIQLAR:

1. Integrallarni xar xil metodlar bilan tanlash [1], III-bob.
2. Gauss - Veyrshtrass o'rtachasining tadbiklari. [2], IV-bob.

ADABIYoTLAR.

1. Titchmarsh E. Vvedenie v teoriyu integral Fure , M. 1980.
2. Teshaboeva N. «Matematika fizika metodlari» T. 1977.

IV bob
Funktsiyalarni yaqinlashtirishning ba'zi bir tadbiqlari

4.1-mavzu. Poligarmonik operatorli va poligarmonik tenglamalar echimini yaqinlashtirish

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: 1. Poligarmonik operatorni yaqinlashtirishni o'rgatish. 2. Poligarmonik tenglama echimini yaqinlashtirishni o'rgatish.. Identiv o'quv maqsadlari: 1. Poligarmonik operatorni yaqinlashtirishni o'rganib oladi. 2. Poligarmonik tenglama echimini yaqinlashtirishni o'rganib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Poligarmonik tenglamalar tushuntiriladi, ularning tadbiqlari aytiladi. Poligarmonik operator tushuntiriladi va ahamiyati, tadbiqlari aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Faraz qilaylik davri 2π va x, y o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiya uchun $\Lambda_P^{\Gamma}(1 \le p \le \infty)$ funksiya sinfi va

$$\gamma(u,v) = \Delta^r f(u,v) = \Delta(\Delta^{r-1} f(u,v))$$

bo'lib S.L.Sobolev bo'yicha umumlashgan funksiyaning 2-tartibgacha xosilasi mavjud bo'lsin.Bu erda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplas operatori. Bunda

$$\left\| \Delta^{\kappa} f(u,v) \right\|_{Lp} = \|\gamma\|_{Lp} \le 1 \tag{1}$$

shart bajariladi. $f(x,y)$ ning davriyligidan

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(u,v) dudv = 0 \tag{2}$$

kelib chiqadi. Bunda funksiyalar sinfi uchun

$$f(x,y) = \frac{\theta_{00}}{4} + (-1)^r \pi^{-2} \cdot =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(4+x, v+y) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{e=0}^{\infty} \lambda_{k,e} \cos ku \cos lv \left(k^2 + e^2\right) dudv$$

Bu erda $\gamma(u,v)$, (1) va (2) larni qanoatlantiradi. Shtrixlangan summaga $k = e = 0; \lambda_{k,e} = \left\{1, k, l > 0; \frac{1}{2}; k = 0, e > 0 va\ a = 0, k > 0\right\}$

larni qo'ysak.

$$E_{m,n}\left(\Lambda_{\infty}^{\Gamma}\right) = \sup_{f \in \Lambda_{\infty}^{r}} \sup_{x,y} \left| f(x,y) - S_{m-1,n-1}(f; x,y) \right|,$$

$$E_{m,n}\left(\Lambda_{\infty}^{\Gamma}\right) = \sup_{f \in \Lambda_{\infty}^{r}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(x,y) - S_{m-1,n-1}(f; x,y) \right| dxdy,$$

Bu erda

$$S_{m-1,n-1}(f; x,y) - f(x,y),$$

funksiyada x ning tartibi $m-1$, y ning tartibi $n-1$ bo'lgan. Fure qatoring hususiy yig'indisi, Λ_{∞}^{r} va Λ_{1}^{r} funksiyalar sinfiga tegishli.

Kolmagorov va Nikolskiy ishlari natijasidan bu garov bu funksiyalar sinfi uchun chegaralangan poliganmanik operatorini m, n ga bog'liq ravishda quyidagicha keltirib chiqardi.

$$E_{m,n}\left(\Lambda_{\infty}^{r}\right) = 16\pi^{-4}\left(m^2 + n^2\right)^{-r} \ln n \ln m + O\left(m^{-2r} mn + n^{-2r} \ln\right) \tag{3}$$

$$E_{m,n}\left(\Lambda_{\infty}^{r}\right) = 16\pi^{-4}\left(m^2 + n^2\right)^{-r} \ln n \ln m + O\left(m^{-2r} mn + n^{-2r} \ln\right) \tag{4}$$

Bu tenglik $m \to \infty, n \to \infty$ da asmptotik bo'lishi uchun

$$0 < c_1 \le m/n \le c_2, \ (c_1, c_2 \to \text{absalyut o'zgarmaslar})$$

bajarilishi kerak.

S. A. Telyakovskiy $w_a^r(r>0, a - aniq \text{ son})$ funksiyalar sinfi svyortkasini ko'rinishini quyidagicha oldi.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt+L\frac{\pi}{2}\right)dt$$

Bu erda

$$|\gamma(t)|\le 1,\ \int_{-\pi}^{\pi}\gamma(t)dt=0.$$

<u>Telyakovskiy natijasi</u>: Agar $S_{n-1}(f;x)$ Fure qatorining hususiy yig'indisi bo'lsa,

$$E_n\left(w_a^r=\sup_{fEW_a^r}\max_x\left|S_{n-1}(f:x)-f(x)\right|=4\pi^{-2}n^{-r}\ln\left(\frac{n}{\min(n,r+1)}\right)+\right.$$

$$\left.+2\left|\sin\frac{a\pi}{2}\right|\pi^{-1}n^{-r}r^{-1}+n^{-r}R(n,r,a)\right.$$

bu erda $|R(n,r,a)|\le c$ barcha $n=1,2,\ldots;r>0$ va a tartibli xosilagacha.

<u>T e o r e m a 1</u>. quyidagilar o'rinlir

$$E_{m,n}(\Lambda_\infty^r)=16\pi^{-4}\left(m^2+n^2\right)^{-r}\ln\left(\frac{m}{\min(m,2r+1)}\right)\ln\left(\frac{n}{\min(n,2r+1)}\right)+$$

$$+O\left(m^{-2r}\ln\left(\frac{2m}{\min(m,2r+1)}\right)+n^{-2r}\ln\left(\frac{2n}{\min(n,2r+1)}\right)\right) \qquad (5)$$

<u>T e o r e m a 2.</u> m,n va r larning bog'liqligidan quyidagi tenglik hosil bo'ladi.

$$E_{m,n}(\Lambda_\infty^r)=16\pi^{-4}\left(m^2+n^2\right)^{-r}\ln\left(\frac{m}{\min(m,2r+1)}\right)\ln\left(\frac{n}{\min(n,2r+1)}\right)+$$

$$+O\left(m^{-2r}\ln\left(\frac{2m}{\min(m,2r+1)}\right)+n^{-2r}\ln\left(\frac{2n}{\min(n,2r+1)}\right)\right) \qquad (6)$$

Poligarmonik tenglama echimining xosilasini chegaralash

Faraz qilaylik $u(r;x)$ funksiya $|z|\le 1(z=re^{ix})$ birlik doirada uzluksiz bo'lsin va

$$\frac{dv}{dr^{v}}u(r;x)(v=1,2,\dots,n-1)0\le r\le 1$$

da hususiy y xosilaga ega bo’lsin va $\Delta^{n}u=0$ laplas tenglamasini qanoatlantirilsin. Chegaraviy shart

$$[u(r;x)]_{r=1}=f(x),\left[\frac{d^{v}}{dr^{v}}u(r;x)\right]_{r=1}=0(v=1,2..n-1)$$

(1)

dan iborat. Yuqoridagi shartlarni qanoatlanturuvchi funksiyalar to’plamini $B*$ deb belgilaymiz va Laplas tenglamasining echimi polegramonik funksiya deyiladi. Quyidagi poligarmonik funksiyaning hosilasi uchun chegara ko’rsatiladi.

Teorema 1 Agar $u(r;x)$ funksiya $\Delta^{n}u=0$ tenglamaning chegaraviy masalasinining echimi bo’lsa ($B*$ masalasining) u holda xar qanday $K\in\mathrm{N}$ uchun $0\le r\le 1$ uchun

$$\left|\frac{d^{k}}{dx^{k}}u(r,x)\right|\le C_{k,n}(1-r)^{-k}\omega_{k}(f;1-r)$$

(2)

bo’ladi.

Bu erda

$$\omega_{k}(f;h)=\sup_{|t|<h}\max_{x}\left|\sum_{v=0}^{k}(-1)^{k-v}\binom{k}{v}f_{t}(x+vt)\right|$$

bu erda $k=n=1$ bo’lganda isbotlangan. Biz bu erda $n=r$ uchun va undan katta qiymatlardan ko’rsatamiz.

Teorema 2

$$\left\|\frac{d^{v}}{dr^{v}}u(r,x)\right\|_{Lp}=\left\{\int_{0}^{2\pi}\left|\frac{d^{v}}{dr^{v}}u(r;x)\right|^{p}dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le M.$$

$$[u(r;x)]_{r=1}=f(x)\in Lp,\ \left[\frac{d^{v}}{dr^{v}}u(r;x)\right]_{r=1}=0\quad(v=1,2\dots,n-1)$$

istalgan k va $0\le r\le 1$ natural sonlar uchun

$$\left\|\frac{d^{k}}{dx_{k}}u(r,x)\right\|_{Lp}\le C_{k,n}(1-r)^{-k}\sup_{|t|\le 1-r}\left\|\sum_{v=0}^{k}(-1)^{k-v}\binom{k}{v}f(x+vt)\right\|_{Lp}$$

munosabat o’rinli.

Teorema 3 Faraz qilayliy $u(x,y)$ funksiya shartini qanoatlantirilsin

$$\left\|\frac{d^{\nu}}{dy^{\nu}u(x,y)}\right\|_{Lp(-\infty;\infty)} \le M\left(1\le p\le\infty, \sqrt{\ }=0,1\ldots,n-1\right)$$

va $\Delta^n u=0$ tenglamaning chegaraviy echimi bo'lsin. $[u(x,y)]_{y=0} = f(x)\in L_p(-\infty;\infty)$,

$$\left[\frac{d^{\nu}}{dy^{\nu}}u(x,y)\right]_{y=0}=0, \quad (\nu=1,2,\ldots,n-1)$$

bu erda $g(x)\in L_1(-\infty;\infty)$. U holda

$$\left\|\frac{d^k}{dx^k}u(x,y)\right\|_{Lp(-\infty;\infty)} \le C_{n,k}y^{-k}\sup_{|t|\le y}\left\|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}f(x+\nu t)\right\|_{Lp(-\infty;\infty)}$$

bo'ladi. (2) tengsizlikning tadbiqini ko'rsatamiz.

Teorema 4 Faraz qilamiz $u(r,x)$ funksiya $|z|<1$ doirada garmonik funksiya bo'lsin. Uning chegaraviy qiymati uzluksiz bo'lsin, ya'ni $\max_x(u(r,x)-f(x))\to 0$ agar $r\to 1$. U holda

$$\max_x|f(x)-u(r,x)|\le C\left\{w_2(f:1-r)+\frac{1}{1-r}w_2(\Phi:1-r)\right\} \qquad (11)$$

bunda $\Phi(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib uning Fure qatori

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}(a_{\nu}\cos\nu x+b_{\nu}\sin\nu x);$$

bo'lsin. a_{ν}, b_{ν} lar $f(x)$ funksiyadagi Fure koeffitsentlari.

4.2-mavzu. Haqiqiy tekislikda uzluksiz funksiyalarni yaqinlashtirish

Mavzuning texnologik xaritasi

№	Faoliyat	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi Darsning maqsadi: Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarni yaqinlashtirishni o'rgatish. Identiv o'quv maqsadlari: Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarni butun funksiyalar bilan yaqinlashtirishni o'rganib oladi. Qo'llaniladigan interfaol usul: aqliy xujum, muxokama-munozara.	O'qituvchi
2	Kirish. Mavzu va ko'rib o'tilgan masalalar tushuntiriladi. Guruhdagi talabalarga savollar beriladi va muhokama yuritish talab etadi, izohlash talaba etiladi.	O'qituvchi
3	Guruh bilan ishlash. 1. Talabalarning mantiqiy fikirlashi analiz qilinadi. 2. Talabalarni muhokama mushohada qilishga yo'naltirish. 3. Talabalardagi noaniq tushunchalar, noma'lum malu'motlar, oydinlashtiriladi va aniqlashtiradi. Analiz qilib umumlashtiradi. 4. Muhokamada qatnashgan talabalarning mu'lumotlari tasovurlari kengaytiriladi, umumlashtiriladi va nixoyat xulosa qilinadi. 5. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning butun funksiyalar bilan xususiy, aralash, to'la eng yaxshi yaqinlashishlari aytiladi va ahamiyati, tadbiqlari aytiladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakunlovchi munozara aytiladi. Bilimlarini baholash uchun nazorat savollari (test) beriladi. Mezon asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriq beriladi. Dars yakunlanadi.	O'qituvchi

Faraz qilaylik $C(l_2)$ chegaralangan tekis uzluksiz funksiyalar fazosi bo'lsin. Bunda norma

$$|f|C = \sup_{-\infty<x,y<\infty} |f(x,y)|$$

aniqlangan bo'lsin. $A_{\delta,\delta_2}(f)$ orqali $f(x,y)$ funksiyaning $C_\tau \tau, \tau_2(x,y)$ butun funksiya bilan eng yaxshi yaqinlashishini belgilaymiz ya'ni.

$$A_{\delta_1,\delta_2}(f) = \inf_{G_{\delta_1\delta_2}} \left\| f(x,y) - G_{\delta_1\delta_2}(x,y) \right\| C$$

bunda $C_\tau \tau_1 \tau_2(x,y)$ funksiya tekis chegaralangan butun funksiya x, y tekislikda quydagi miqdorni qaraymiz.

$$R(f;\gamma_\tau) = \left\| U_v(f;\gamma;x,y) - f(x,y) \right\| c \qquad (1)$$

bundan

$$U_\tau(f;\gamma;x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t,y+z)\Phi_\tau(\mathrm{t,z})dtdz \qquad (2)$$

$$\Phi_\tau(\mathrm{t,z})=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \gamma_\tau(\gamma)K_u(t,z)du \qquad (3)$$

$$K_u(t,z)=\left(e^{iut}+e^{-iut}\right)\int_{-u}^{u} e^{-1\theta_1}zd\theta_1+\left(e^{iuz}+e^{-iuz}\right)\int_{-4}^{4} e^{-i\vartheta_2 t}d\theta_2=$$

$$=4\left(\cos ut\frac{\sin uz}{z}+\cos uz\frac{\sin ut}{t}\right), \qquad (4)$$

$\gamma_\tau(u)$-juft funksiya, $(0,\infty)$ da absalyut integrallanuvchi va har bir bilan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_\tau(t,)\right|dtdz<\infty \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_\tau(t,)\right|dtdz=1 \qquad (6)$$

Endi (1) miqdorni $A_{\tau 1\tau}(f)(\tau\to\infty)$ bog'liq ravishda tekshiramiz. Bunda $\gamma_\tau(u)$ funksiyani quydagicha tanlaymiz.

$$\gamma_\varnothing(u)=\gamma_{\tau,a}(u)=\begin{cases}1,|u|\le a & |0<a<\tau\\ \dfrac{\tau-|u\rangle}{\tau-a}, & a>|u|<\tau\\ 0, & |\mathrm{u}|\ge\tau\end{cases} \qquad (7)$$

$$\gamma_\tau(u)=\gamma_{\tau,0}(u)=\begin{cases}1-\dfrac{|u\rangle}{\tau}, & |u|<\tau\\ 0, & |\mathrm{u}|\ge\tau\end{cases} \qquad (8)$$

$$\gamma_\tau(u)=e^{-\frac{u}{v}},0\le u<\infty \qquad (9)$$

Teorema 1. Agar $f(x,y)\in C(h_2)$ funksiya $\gamma_\tau(u)=\gamma_{\tau,a}(u)$ (7) tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, u holda $\Psi E(0<e<a<\tau)$ o'rinli

$$R\left(f:\gamma_{\tau,a}\right)\le C_{\tau,a}(t,z)A_{a-\mathrm{E},a-\mathrm{E}}(f) \qquad (10)$$

bu erda

$$C_{\tau,}=4\int_0^\infty\int_0^\infty\left|\Phi_{\tau,a}(t,z)\right|dtdz\le C\frac{\tau+a}{\tau-a}.$$

Teorem 2. Agar $f(x,y)\in C(R_2)$ bo'lsa funksiya $u_\tau(u)=\gamma_{\tau,0}(u)$ (8) tenglikga ko'ra u holda

$$R(f:\gamma_{\tau,0})\le \frac{M}{\tau}\sum_{k-0}^{[\tau]} A_{k,k}(f) \tag{11}$$

bo'ladi.

Teorema 3. Agar $f(x,y)\in C(R_2), d_a\gamma_\gamma(u)$ (9) bilan aniqlangan bo'lsa

$$R(f:\gamma_\tau)\le \frac{M}{\tau}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\tau}} A_{u,u}(f)du\,, \tag{12}$$

bo'ladi.

T e o r e m a 1. isboti quydagilarga asoslanadi.

__Lemma 1.__ $\Phi_\tau(u)=\gamma_{\tau,a}(u)$ funksiya va $\Phi_{\tau,a}(t,z)$ lar (3) bilan aniqlangan bo'lsa, Fure almashtirishlar quyidagi funksiyalardan iborat bo'ladi.

$$\Psi_{\tau,a}(u,v)=\begin{cases}1, \ |u|,|v|\le a & (0<\mathrm{a}<\tau),\\ \dfrac{\tau-|u|}{\tau-a}, \ a<|u|<\tau, & |\mathrm{v}|\le u\\ \dfrac{\tau-|v|}{\tau-a}, \ a<|v|<\tau, & |\mathrm{u}|\le|v|\\ 0, & |\mathrm{u}|\le\tau,|v|\le\tau\end{cases} \tag{13}$$

va

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\tau,a}(t,z)dtdz=1$$

__Lemma 2.__ $\gamma_\tau(u)=\gamma_{\tau,0}(u)$ bo'lganda $\Phi_{\tau,0}(tz)$ (3) bilan aniqlanadi, u holda (5) va (6) shart bajariladi. (29) tengsizlikdan

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\left|\Phi_2 v+1,2^v(t,z)\right|dtdz\le 3C \quad (0,1,2,\ldots,m-1)$$

va

$$\int_0^\infty\int_0^\infty(\tau-2^{mv})\left|\Phi_{\tau,2^m}(t,z)dtdz\le\tau\int_0^\infty\int_0^\infty\Phi_{\tau,0}(t,z)dtdz+2^m\int_0^\infty\int_0^\infty\left|\Phi_{2^m,0}\right|t,z)\right|=$$

$$=dtdz\le 2^m 3C$$

xosil bo'ladi. $A_{2^v-1,2^v-1}(f)$ ni monotomligini e'tiborga olib (30) dan

$$R(f;\gamma_{\tau},0)\leq \frac{C'}{\tau}\left\{A_{0,0}(f)+\sum_{\nu=0}^{m-1}A_{2^{\nu}-1,2^{\nu}-1}(f)2^{\nu}+2^{m}A_{2^{m}-1,2^{m}-1}(f)\right\}\leq$$

$$\leq \frac{C''}{\tau}\left\{A_{0,0}(f)+\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{k-2^{\nu}-1}^{2^{\nu}+1}A_{k,k}(f)\right\}\leq \frac{M}{\tau}\sum_{\nu=0}^{[\delta]}A_{\nu,\nu}(f)$$

ni hosil qilamiz.

INFORMATSION-USLUBIY TA`MINOT

Asosiy adabiyotlar.

1. Sarimsoqov T.A. “Funksional analiz kursi” T. 1980 y.
2. Qobulov V. “Funksional analiz va xismoblash matematikasi” T. 1976.
3. Kolmogorov A.N. Fomin S.V. “Elnmento’ teorii funktsiiy i funktsionalnogo analiza” 1976 y.
4. G.G’aymnazarov , O.G.G’aymnazarov Funksional analiz kursidan masalalar yechish, T. “fan va texnalogiya”, 2006 y.
5. R.G’anixo’jaev va boshqalar Funksional analiz, T. O’zMU 2009 y.
6. Sh.A.Ayupov, M.M.Ibragimov, K.K.Kudaybergenov Funksional analizdan misol va masalalar, Nukus, “Bilim”, 2009 y.

Qo`shimcha adabiyotlar.

1. Kantarovich A.G., Akilov V.M. Funksional analiz M.: 1977.
2. Rudin M. Funksional analiz, M. 1972.
3. Maqsudov T. Chiziqli integral tenglamalar, T. 1976.
4. Salohitdinov M.S. Integral tenglamalar, T. 2006.

Internet saytlari

1. www.ziyonet.uz
2. www.gduportal.uz
3. http://www.mcce.ru
4. http://www.lib.mexmat.ru

FUNKSIONAL ANALIZ FANIDAN ILMIY MAQOLALAR E`LON QILINADIGAN JURNALLAR RO`YXATI VA SAYTLAR

1. O`zbekiston fanlar akademiyasi ma`ruzalari.
2. O`zbekiston matematika jurnali.
2. Izvestiya VUZ.
3. Sibirskiy matematicheskiy jurnal.
4. www.manpo.ru
5. www.Mat.zametki.ru

GLOSSARIY

$x \in A$ - x element A to'plamga tegishli yoki qarashli.

$A \oplus B$ - A va B to'plamlarning to'g'ri yig'indisi.

dimR – R fazoning o'lchovi, dimision – o'lchov.

R_n – n o'lchobli chiziqli fazo.

$A \cup B$ - A va B to'plamlarning birlashmasi.

Ag'B - A to'plamdan B to'plamning ayirmasi.

$A \cap B$ - A va B to'plamlarning kesishmasi.

$A \subset B$ - A to'plam b to'plamning qism to'plami.

Ø – bo'sh to'plam.

(x, y) – x va y vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

$|x| = \|x\|$ - x vektorning uzunligi (normasi).

$|AB|$ - A va B nuqtalar orasidagi masofa (AB – kesma uzunligi).

$pr_{OX}a$ – a vektorning OX o'qdagi proetsiyasi.

C – komplets sonlar fazosi.

A^{-1} matrisa (yoki operator) A matrisaga (operatorga) teskari matrisa (operator).

Θ – nol vektor.

r_A – A operatorning (almashtirishning) o'lchovi.

kernA – A operatorning yadrosi.

$|A| = \det A$ – A matrisaning determinanti.

A* - A operatorga qo'shma operator.

$|\lambda|$ - λ komplets sonning bobi.

$T{:}x \rightarrow y$ – T operator x vektorni y vektorga atslantiradi.

A~B – A va B to'plamlar ekvivalent.

A→B – A xossadan B xossa kelib chiqadi.

Z/C - Z guruhning C qism guruh bo'yicha yoyilmasi.

$\varphi_k(x) \leftrightarrow a_k$ - $\varphi_k(x)$ va a_k elementlar o'zaro bir qiymatli moslikda qaraladi.

$\forall$ - umumiylik kvantori.

$\forall x$ – barcha x elementlar uchun.

N – natural sonlar to'plami.

Z – butun sonlar to'plami.

Q – rasional sonlar to'plami.

R – haqiqiy sonlar to'plami.

Terishga 10.10.10 yil berildi. Bosishga 16.10.10 yilda
ruxsat qilindi. Bichimi 60 x 84, 1/16. Buyurtma № __.
Xajmi 5 b.t. Nusxasi 300 dona. Bahosi kelishilgan
narxda. GulDU bosmaxonasida chop etildi.
7007012. Guliston, 4-mavze