РЕСПУБЛИКА УЗБЕКИСТАН

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ

Гулистанский государственный университет

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Электронный комплекс для студентов бакалавриата

60540100- Математика: Русский язык

ГУЛИСТАН – 2024

Данный электронный комплекс разработан кафедрой «Математика» и был обсужден и рекомендован к утверждению на заседании 29 августа 2024 года. (протокол №1)

Данное электронное пособие утверждено на заседании учебно-методического Совета Гулистанского государственного университета, протокол №1 от 29 августа 2024 года.

Составитель:

А.И.Эшниязов – доцент кафедры «Математика» Гулистанского государственного университета, доктор философии по физико-математических наук (PhD),

.

Рецензент:

Х.Норжигитов – доцент кафедры «Математика» Гулистанского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой «Математика» – О.Г.Гаймназаров

Декан информационных технологий и физико–математического факультета факультета – О.Ж.Муродов

Введение

Данное электронное пособие по предмету «Дифференциальные уравнения» предназначено для бакалавриата направления «Математика» информационных технологий и физико-математического факультета и подготовлено на основе современных педагогических технологий.

На сегодняшний день основная задача педагогов, работающих в различных образовательных учреждениях – это обеспечить качественное образование учащихся или студентов в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов, проводить с ними эффективную учебно-воспитательную работу, осуществлять непрерывный контроль их деятельности, учить рационально использовать поток информации и развивать навыки самостоятельной деятельности. Для выполнения этих задач от учителей требуется особый опыт, глубокие знания, профессиональное мастерство и навыки. С этой точки зрения исследование теоретических и практических аспектов преподавания дисциплины «Дифференциальные уравнения», создание учебного пособия по предмету, а также разработка выводов и рекомендаций по совершенствованию преподавания являются требованием времени.

В настоящее время существует ряд обстоятельных руковостсть по дифференциальным уравнениям, предназначенных для студентов высших учебных завелений. Но ощущается потребность в электронное пособие, которое на простых и конкретных примерах способно показать читателю со скромной математической подготовкой весь арсенал современных методов дифференциальных уравнений.

Предлагаемое электронное пособие знакомит читателя с важнейшими разделами дифференциальных уравнений и призвано помочь тем, кто осваивает этот курс.

Цель этой книги – просто и доходчиво не конкретных примерах изложить людям, которое возможно, слвершенно незнакомы с математичекой литературой, основные методы и приемы решения дифференциальных уравнений.

Основная цель учебного пособия — дать будущим специалистам базовые понятия по дифференциальным уравнениям, а также познакомить их с практическими приложениями этих дисциплин.

Электронное пособие по предмету «Дифференциальные уравнения» включает: a) тексты лекций; b) практические занятия (упражнения и порядок их выполнения); d) материалы для самостоятельного обучения; f) глоссарий; z) тестовые вопросы, итоговые выводы по основным темам и задачам; i) список рекомендуемой основной и дополнительной литературы для изучения тем.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Примеры решений

Помимо **дифференциальных уравнений с разделяю-щимися переменными**, **однородных уравнений** и **линейных неоднородных уравнений первого порядка**, в практических задачах время от времени встречаются так называемые **уравнения в полных дифференциалах**. Да, конечно, ДУ в полных дифференциалах не такой частый гость в контрольных заданиях. Но освоить этот вид уравнений крайне важно, так как приёмы решения, о которых пойдет речь на данном контексте, потребуются при вычислении **двойных**, **тройных**, **криволинейных** интегралов, а также в ряде задач **комплексного анализа**.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах – вещь довольно простая, вы даже удивитесь, насколько прозрачен и доступен алгоритм решения. **Что необходимо знать, для того чтобы разобраться в этих дифференциальное уравнениеах?**

Во-первых, нужно ориентироваться в базовых понятиях темы, ответьте прямо сейчас на несколько простейших вопросов:

– Что такое дифференциальное уравнение?
– Что значит решить дифференциальное уравнение?
– Что такое общее решение, общий интеграл, частное решение?

Во-вторых, необходимо уверенно находить **частные производные**. Всё будет крутиться вокруг них. Счастливые студенты, которые избежали плотного знакомства с частными производными на первом курсе, будут вынуждены добавить их в свои друзья, поскольку без навыков нахождения частных производных читать дальше просто нет смысла.

С любимых незабываемых частных производных и начнём.

Рассмотрим **функцию двух переменных**:

$$z = x^2 + y^2 - xy + x - y$$

Такая вот простенькая функция.

Требуется найти частные производные первого порядка z'_x, z'_y и составить полный дифференциал dz .

Дана функция двух переменных

$$F = x^2 + y^2 - xy + x - y.$$

Требуется найти частные производные первого порядка

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x},\quad F'_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

и составить полный дифференциал dF .

Зачем потребовалась смена буквы? Традиционно сложилось, что в рассматриваемой теме в ходу буква F. Кроме того, частные производные первого порядка будем чаще обозначать значками

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_x = 2x + 0 - y + 1 - 0 = 2x - y + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_y = 0 + 2y - x + 0 - 1 = 2y - x - 1$$

Полный дифференциал составим по формуле:

$$dF = F'_x dx + F'_y dy,$$

или, то же самое:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

В данном случае:

$$dF = (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy$$

Пример 1.

Решить дифференциальное уравнение

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

Но самое забавное, что уже известен ответ:

$$x^2 + y^2 - xy + x - y = 0,$$

точнее, надо ещё добавить константу, получая **общий интеграл**

$$x^2 + y^2 - xy + x - y + C = 0,$$

который является решением дифференциального уравнения

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,$$

то есть его левая часть является **полным дифференциалом** функции

$$F = x^2 + y^2 - xy + x - y + C.$$

Отсюда и название – **уравнение в полных дифференциалах**.

Как решить дифференциальное уравнение в полных дифференциалах?

Очевидно, нужно выполнить некоторые обратные действия, чтобы восстановить исходную функцию $F(x;y)$ и записать общий интеграл $F(x;y) = 0$, который задаёт семейство функций одной независимой переменной («икс»). Не так давно я что-то там дифференцировал. Какое действие является обратным? Правильно, интегрирование.

Рассмотрим алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах

Итак, требуется решить дифференциальное уравнение:

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

Действие первое. Пожалуйста, забудьте задачку про частные производные и готовый ответ. Дело в том, что когда вам предложен для решения **произвольный** дифференциальное уравнение, то **вы ещё не знаете** о том, что это уравнение в полных дифференциалах. И данный факт крайне желательно **доказать** в самом начале решения.

Докажем, что уравнение

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Как это сделать? Уравнение в полных дифференциалах имеет вид

$$F'_x dx + F'_y dy = 0.$$

Вспоминаем характерное и очень удобное равенство смешанных производных второго порядка:

$$F''_{xy} = F''_{yx}.$$

Вот его и надо проверить:

$$F''_{xy} = (F'_x)'_y = (2x - y + 1)'_y = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$F''_{yx} = (F'_y)'_x = (2y - x - 1)'_x = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$F''_{xy} = F''_{yx}.$$

значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим, является ли уравнение

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

уравнением в полных дифференциалах:

$$P = 2x - y + 1, \quad Q = 2y - x - 1$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x - y + 1)'_y = 0 - 1 + 0 = -1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (2y - x - 1)'_x = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

значит, данное ДУ является уравнением в полных дифференциалах
Вот только теперь, после доказательства, мы можем использовать букву «эф», поскольку показано, что левая часть дифференциаль-ного уравнения

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

является полным дифференциалом некоторой функции F, и уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Ну, а коль скоро уравнение

$$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$$

имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0,$$

то:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$$

Таким образом, нам известны две частные производные, и наша задача состоит в том, чтобы восстановить функцию $F(x, y)$ и записать общий интеграл $F(x, y)=0$.

Существуют два зеркальных способа решения.

Действие второе. Работаем с верхней производной

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1.$$

Нижнюю производную

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$$

пока запишем на листочек.

Если дана частная производная

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1,$$

то нужная нам функция F восстанавливается с помощью обратного действия – *частного интегрирования*:

$$F=\int(2x-y+1)dx$$

Когда мы берём интеграл по «икс», то переменная «игрек» считается константой. Как видите, принцип точно такой же, как и при нахождении **частных производных**.

Я запишу подробно, сначала используем *свойства линейности интеграла*:

$$F=\int(2x-y+1)dx=2\int xdx-y\int dx+\int dx$$

Еще раз подчеркиваю, что «игрек» в данном случае является константой и выносится за знак интеграла (т. е. не участвует в интегрировании).

В итоге:

$$F=\int(2x-y+1)dx=2\int xdx-y\int dx+\int dx=2\cdot\frac{x^2}{2}-y\cdot x+x+\varphi(y)=x^2-xy+x+\varphi(y)$$

Здесь $\varphi(y)$ –некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая только от «игрек».

Правильно ли вычислен интеграл? В этом легко убедиться, если выполнить проверку, т. е. найти частную производную:

$$F'_x=(x^2-xy+x+\varphi(y))'_x=2x-y+1+0=2x-y+1$$

получена исходная подынтегральная функция.

Надеюсь всем, понятно, почему $(\varphi\ (y))'_x$. Функция $\varphi(y)$ зависит только от «игрек», а, значит, является константой.

Действие третье.

Берем «недоделанный» результат

$$F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$$

и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_y = 0 - x + 0 + \varphi'_y(y) = -x + \varphi'_y(y)$$

Функцию $\varphi(y)$ мы пока не знаем, но производная-то по «игрек» у неё существует, поэтому запись $\varphi'_y(y)$ – совершенно законна.

Действие четвертое.

Перепишем результат предыдущего пункта:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'_y(y)$$

А теперь достаем из широких штанин листочек с производной:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$$

Приравниваем:

$$-x + \varphi'_y(y) = 2y - x - 1$$

и уничтожаем всё, что можно уничтожить:

$$\varphi'_y(y) = 2y - 1$$

Находим функцию $\varphi(y)$, для этого нужно взять интеграл от правой части:

$$\varphi(y) = \int (2y - 1)dy = y^2 - y + C$$

Заключительный аккорд: подставим найденную функцию

$$\varphi(y) = y^2 - y + C$$

в «недоделанный» результат

$$F = x^2 - xy + x + \varphi(y):$$

$$F = x^2 - xy + x + y^2 - y + C$$

и приравняем полученную функцию к нулю, получая тем самым:

Ответ: общий интеграл:

$$x^2 + y^2 - xy + x - y + C = 0, \text{ где } C = const$$

Проверка уже выполнена в самом начале урока – находим частные производные функции F, составляем полный дифференциал и приравниваем его к нулю. В результате должно получиться исходное дифференциальное уравнение.

Второй способ проверки состоит в том, чтобы **найти производную неявно заданной функции**, ведь общий интеграл – это *неявные* функции одной (независимой) переменной:

$$(x^2 + y^2 - xy + x - y + C)' = (0)'$$
$$2x + 2yy' - y - xy' + 1 - y' + 0 = 0$$
$$(2y - x - 1)y' + (2x - y + 1) = 0$$
$$(2y - x - 1)\frac{dy}{dx} + (2x - y + 1) = 0$$
$$(2y - x - 1)dy + (2x - y + 1)dx = 0$$

Кому как нравится, кому как удобнее, главное, о проверке не забывать!

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение

$$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$$

Решение:

1) Проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах:

$$P = 3x^2 - 3y^2 + 4x, \quad Q = -(6xy + 4y) = -6xy - 4y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2 + 4x)'_y = 0 - 6y + 0 = -6y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (-6xy - 4y)'_x = -6y - 0 = -6y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

значит, уравнение

$$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

2) Запишем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x$$

будем работать с этой производной.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y$$

– про эту производную пока забываем.

Если

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x,$$

то:

$$F = \int (3x^2 - 3y^2 + 4x)dx = 3\int x^2 dx - 3y^2 \int dx + 4\int x dx =$$
$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3y^2 \cdot x + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$$

где $\varphi(y)$ – некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая только от «игрек».

Напоминаю, что, когда мы интегрируем по «икс», то переменная «игрек» считается константой и выносится за знак интеграла.

3) Берём «недоделанный» результат предыдущего пункта

$$F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$$

и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + 0 + \varphi'_y(y) = -6xy + \varphi'_y(y)$$

4) Переписываем найденный результат:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy + \varphi'_y(y)$$

А теперь вспоминаем про «забытую» в начале второго пункта производную:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y$$

Приравниваем и упрощаем:

$$-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$$
$$\varphi'_y(y) = -4y$$

***Примечание**: на практике решение обычно записывают значительно короче, объединяя пункты № 3 и 4:*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + 0 + \varphi'_y(y) = -6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$$

то есть сразу же после нахождения производной приравнивается «забытая» производная. В последнем равенстве

$$-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$$

проводится взаимоуничтожение членов, откуда следует:

$$\varphi'_y(y) = -4y.$$

Восстанавливаем функцию $\varphi(y)$ интегрированием по «игрек»:

$$\varphi(y) = -4\int y dy = -4 \cdot \frac{y^2}{2} + C = -2y^2 + C$$

В «недоделанный» результат

$$F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$$

пункта № 2 подставляем найденную функцию

$$\varphi(y) = -2y^2 + C$$

и записываем

Ответ: общий интеграл:

$$x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C = 0, \text{ где } C = const$$

Ответ можно записать и в стандартном виде

$$x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 = C,$$

но здесь возникает любопытная особенность, о которой я рассказывал на уроке **Дифференциальные уравнения первого порядка**. Если мы переносим константу в правую часть, то, строго говоря, у неё следует сменить знак:

$$x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 = -C.$$

Константу $-C$ (поскольку она может принимать *любые* значения) желательно переобозначить некоторой другой константой C^* и записать общий интеграл в виде

$$x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 = C^*.$$

Если же записать ответ в виде

$$x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 = C,$$

то формально это будет ошибкой, а неформально – нет. Чтобы избежать лишних телодвижений с переобозначением константы или небрежности в оформлении, лично я предпочитаю оставлять ответ в виде

$$x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C = 0$$

Выполним проверку. Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_x = 3x^2 - 3y^2 + 4x - 0 + 0 = 3x^2 - 3y^2 + 4x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_y = 0 - 6xy + 0 - 4y + 0 = -6xy - 4y = -(6xy + 4y)$$

Составим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0:$$

$$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$$

Получено исходное ДУ, значит, задание выполнено правильно.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение

$$(6y-3x^2+3y^2)dx+(6x+6xy)dy=0$$

Решение:

Проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах:

$$P=6y-3x^2+3y^2, \quad Q=6x+6xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(6y-3x^2+3y^2)'_y=6-0+6y=6+6y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(6x+6xy)'_x=6+6y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$,

значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

Таким образом:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6y-3x^2+3y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=6x+6xy$$

Если

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6y-3x^2+3y^2$$,

то:

$$F=\int(6y-3x^2+3y^2)dx=6xy-x^3+3xy^2+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=(6xy-x^3+3xy^2+\varphi(y))'_y=6x+6xy+\varphi'_y(y)=6x+6xy$$

$$\varphi'_y(y)=0$$

$$\varphi(y)=\int 0dy=C$$

Ответ*:* общий интеграл:

$$6xy-x^3+3xy^2+C=0, \text{ где } C=const$$

Многочлены хорошо, а другие функции – лучше. Рассмотрим еще пару примеров.

Пример 4

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}+\frac{e^y dy}{1+x^2}=0$$

Решение: проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах:

$$P=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2},\ Q=\frac{e^y}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\right)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(1-e^y)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(0-e^y)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{e^y}{1+x^2}\right)'_x=e^y\cdot((1+x^2)^{-1})'_x=-e^y\cdot(1+x^2)^{-2}\cdot(1+x^2)'_x=-\frac{e^y}{(1+x^2)^2}\cdot(0+2x)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

Запишем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$$

работаем с этой производной

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$$

про эту производную пока забываем

Если

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$$, то:

$$F = \int \frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2} = (1-e^y)\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{(1-e^y)}{1+x^2} + \varphi(y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y)$$

Здесь $(1 - e^y)$ является константой, которая вынесена за знак интеграла, а сам интеграл найден **методом подведения функции под знак дифференциала**.

Находим частную производную по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y)\right)'_y = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi'_y(y) = \frac{e^y}{1+x^2}$$

Это стандартное короткое оформление задания, когда после нахождения производной сразу приравнивается производная

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}.$$

Из последнего равенства

$$\frac{e^y}{1+x^2} + \varphi'_y(y) = \frac{e^y}{1+x^2}$$

следует, что $\varphi'_y(y) = 0$,

и это простейший случай:

$$\varphi(y) = \int 0dy = C = const$$

Подставляем найденную функцию $\varphi(y) = C$ в «недоделанный» результат

$$F = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + \varphi(y)$$

Ответ: общий интеграл:

$$\frac{e^y - 1}{1 + x^2} + C = 0, \text{ где } C = const$$

Пример 5

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

Решение: проверим, является ли данное ДУ уравнением в полным дифференциалах:

$P = (1 + e^{\frac{x}{y}})$, $Q = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left((1 + e^{\frac{x}{y}})\right)'_y = 0 + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\right)'_x = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x \cdot \left(1 - \frac{x}{y}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(0 - \frac{1}{y}\right) =$$

$$= e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}\right) = -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

значит, данное ДУ является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1 + e^{\frac{x}{y}})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y}$$

Если

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1 + e^{\frac{x}{y}})$$

,

то:

$$F = \int (1 + e^{\frac{x}{y}})dx = x + ye^{\frac{x}{y}} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(x + ye^{\frac{x}{y}} + \varphi(y)\right)'_y = 0 + e^{\frac{x}{y}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y} + \varphi'_y(y) = e^{\frac{x}{y}} - \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y}$$

В последнем равенстве всё, как в мечте:

$$\varphi'_y(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C = const$$

Ответ: общий интеграл:

$$x + ye^{\frac{x}{y}} + C = 0, \text{ где } C = const$$

А сейчас я рассмотрю обещанный зеркальный метод решения. Обязательно с ним ознакомьтесь, пригодится не только в дифференциальное уравнениях, но и некоторых других задачах математического анализа,

Пример 6

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$$

Начало **решения** точно такое же, необходимо убедиться, что перед нами уравнение в полных дифференциалах:

$$P = \frac{\sin 2x}{y} + x, \quad Q = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)'_y = -\frac{\sin 2x}{y^2} + 0 = -\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)'_x = 0 - \frac{2\sin x}{y^2} \cdot (\sin x)'_x = -\frac{2\sin x\cos x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x$$

про эту производную пока забываем.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

будем работать с этой производной.

Отличие состоит в том, что пляска начинается от другой производной. Может показаться, что второй способ «рассматривать не обязательно», но время от времени выручает именно он. Когда? Когда вы пытаетесь стандартно начать решение с верхней производной $\frac{\partial F}{\partial x}$, но в результате получается очень трудный интеграл. В такой ситуации всегда следует попробовать начать решение с нижней производной $\frac{\partial F}{\partial y}$, вполне возможно, что интеграл получится значительно проще.

Итак, если

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2},$$

то:

$$F = \int\left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = \int ydy - \sin^2 x\int\frac{dy}{y^2} = \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x)$$

Восстановление функции F проведено *частным интегрирова-нием* по «игрек».

Когда мы берём интеграл по «игрек», то переменная «икс» считается константой. Именно поэтому константа $\sin^2 x$ вынесена за знак интеграла и не принимает участия в интегрировании.

Функция $\varphi(x)$ зависит только от «икс» и *пока ещё* неизвестна.

Теперь находим частную производную по «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x)\right)'_x = 0 + \frac{2\sin x\cos x}{y} + \varphi'_x(x) = \frac{\sin 2x}{y} + \varphi'_x(x)$$

Вспоминаем о «забытой» производной:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x$$

Приравниваем результаты и проводим взаимоуничтожение дробей:

$$\frac{\sin 2x}{y} + \varphi'_x(x) = \frac{\sin 2x}{y} + x$$

$$\varphi'_x(x) = x$$

Функцию φx) восстанавливаем интегрированием:

$$\varphi(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Добытый трофей

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

подставляем в недостроенную функцию

$$F = \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x)$$

и записываем:

Ответ: общий интеграл:

$$\frac{y^2 + x^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + C = 0, \text{ где } C = const$$

Вторым способом можно было решить все примеры, которые мы рассмотрели до этого. Оба способа решения абсолютно равноценны, используйте тот, который вам удобнее.

Пример 7

Решить дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$$

Решение:

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1, \quad Q = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)'_y=x\cdot\left((x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=-\frac{x}{2}\cdot(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2-y^2)'_y=$$

$$=-\frac{x}{2\sqrt{(x^2-y^2)^3}}\cdot(0-2y)=\frac{xy}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)'_x=-y\cdot\left((x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=\frac{y}{2}\cdot(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2-y^2)'_x=$$

$$=\frac{y}{2\sqrt{(x^2-y^2)^3}}\cdot(2x-0)=\frac{xy}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

значит, данное ДУ является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

Если

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

то:

$$F=-\int\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=\int\frac{d(x^2-y^2)}{2\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{x^2-y^2}+\varphi(x)$$

Находим частную производную по «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(\sqrt{x^2-y^2}+\varphi(x))'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(x^2-y^2)'_x+\varphi'_x(x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(2x-0)+\varphi'_x(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}+\varphi'_x(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1$$

Из последнего равенства

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + \varphi_x'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1$$

после взаимоуничтожения дробей получаем:

$$\varphi_x'(x) = -1$$

Найдем φ(x):

$$\varphi(x) = -\int dx = -x + C$$

Подставим найденную функцию

$$\varphi(x) = -x + C$$

в недостроенную функцию

$$F = \sqrt{x^2 - y^2} + \varphi(x)$$

.

Ответ: *общий интеграл:*

$$\sqrt{x^2 - y^2} - x + C = 0, \text{ где } C = const$$

Полные дифференциальные уравнения и методы приведения к ним широко применяются в физике, инженерии и других науках, где часто приходится решать задачи, описывающие потенциальные поля или другие консервативные системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961.
2. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – 7-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 5-е изд. – М.: Наука, 1985.
5. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
6. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – 7-е изд. – М.: ГИФМЛ, 1958.
8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Физматгиз, 1985.
9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1985.
10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979, 1985, 1992.
11. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.