O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

K. Jamuratov, I. Jangibayev

NOKORREKT VA TESKARI MASALALAR
o‘quv qo‘llanma

60540200 – Amaliy matematika talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

Guliston – 2024

UDK: 530
KBK:
J:

Nokorrekt va teskari masalalar [matn]:
o‘quv qo‘llanma – Guliston: GulDU, 2024 – 85 bet

Annotatsiya

Mazkur o‘quv qo‘llanma universitetlarning matematika, amaliy matematika yo‘nalishlari talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, u ikkita bobdan iborat. Birinchi bob “Nokorrekt masalalarni yechish metodlari” deb nomlangan bo‘lib, u sakkizta paragrafni o‘z ichiga oladi. Ikkinchi bob “Teskari masalalar” deb atalgan, bu bobda yettita paragraf mavjud.

Birinchi bobda gidrodinamika masalalaridan biri – noma’lum chegarali chegaraviy masala nokorrekt masalalarni yechishning regulyarlashtirish metodini qo‘llab yechilgan bo‘lib, bu holat ma’lum ma’noda yangilik hisoblanadi.

ISBN.

Muharrir: X. Narjigitov fizika-matematika fanlari nomzodi
GulDU “Matematika” kafedrasi dotsenti

KIRISH

KORREKT VA NOKORREKT MASALALAR (lotincha correctus – tuzatilgan) – matematik masalalarning yechimlari aniqliklariga qarab ba’zi shartlarga javob beradigan sinfi. Ko‘pgina matematik masalalarda berilgan u boshlang‘ich ma’lumotlar bo‘yicha yechim izlanadi. Bunda u va z ushbu $z=R(u)$ funksional bog‘lanish bilan bog‘langan hisoblanadi. Agar quyidagi shartlar (korrektlik shartlari) bajarilgan bo‘lsa, masala korrekt masala (yoki korrekt qo‘yilgan masala) deyiladi:

1) har yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan boshlang‘ich ma’lumotlarda masala yechimga ega (yechimning mavjudligi);

2) har bir boshlang‘ich ma’lumot u ga faqat bitta yechim to‘g‘ri keladi (masalaning bir qiymatliligi);

3) yechim turg‘un (ustuvor).

Birinchi shartning mazmuni shundan iboratki, boshlang‘ich ma’lumotlar orasida shartlarning bir-biriga zidlik qiladigani mavjud emas, agar mavjud bo‘lganda masalaning yechim bo‘lmasdi.

Ikkinchi shartning mazmuni shundaki, masala yechimining aniq bir qiymatli bo‘lishi uchun boshlang‘ich ma’lumotlar yetarli. Bu ikki shart, odatda, masalaning matematik aniq bo‘lish shartlari deyiladi.

Uchinchi shartning mazmuni quyidagicha: agar u_1 va u_2 – boshlang‘ich ma’lumotlarning ikkita har xil to‘plami bo‘lib, bir-biridan chetlashish farqi yetarlicha kichik bo‘lsa, u holda $z_1=R(u_1)$ va $z_1=R(u_2)$ yechimlarning bir-biridan chetlashish o‘lchami oldindan berilgan o‘lchov aniqligidan kichik bo‘ladi. Bunda mumkin bo‘lgan boshlang‘ich ma’lumotlarning $U=\{u\}$ ko‘p xilliligidan va mumkin bo‘lgan yechimlarning $Z=\{z\}$ ko‘p xilliligida $U(u_1,u_2)$ va $Z(z_1,z_2)$ o‘lchov chetlashishi (yaqinmas o‘lchovi) tushunchalari belgilangan.

Odatda, uchinchi shart masalaning tabiiy determinantlanganligi deb sharhlanadi. Bu shu bilan tushuntiriladiki, tabiiy masalaning boshlang‘ich ma’lumotlari, odatda, ba’zi xatoliklar bilan beriladi; uchinchi shart buziladigan bo‘lsa, boshlang‘ich ma’lumotlarning har qanday kichik o‘zgarishi yechimda katta o‘zgarishlarni vujudga keltirishi mumkin.

Shartlardan aqalli bittasini qanoatlantirmaydigan masalalar nokorrekt masalalar deyiladi.

Masalalarning korrektliligiga fransuz matematigi J. Adamar 1923 yilda xususiy hosilali tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechganda e’tibor bergan. Masalalarning korrektliligi tushunchasi, xususan, aytilgan tenglamalarning chegaraviy masalalarni sinflarga ajratishga sabab bo‘lgan. Nokkorrekt masalalarni yechishning taqribiy usullariga va ularni teskari masalalarni yechish uchun tatbiq qilishga doir ko‘pgina ilmiy ishlar mavjud. Bu ishlar kuzatuv materiallarini ishlashni avtomatlashtirish, boshqaruv muammolarini hal qilish va boshqalar uchun juda muhim.

Ko‘pgina tatbiqiy masalalarning modellari xususiy hosilali differensial tenglamalarga oid masalalarga, shu jumladan matematik fizikaning teskari va nokorrekt masalalariga keltiriladi. Qayd etish joizki, teskari va nokorrekt masalalarning tadqiqi va ularni sonli hisoblari matematik fizikaning model tenglamalari uchun amalga oshiriladi.

Oxirgi yillarda matematik modellarga mos keluvchi teskari va nokorrekt masalalarni o‘rganish bo‘yicha izchil ishlar olib borilmoqda. Nokorrekt masalalar nazariyasining nazariy asoslari A.N.Tixonov, M.M.Lavrentev, V.K.Ivanov va F.Djon singari matematiklarning ishlarida yoritilgan. Bu nazariyaga ko‘ra, teskari va nokorrekt masalalarni tadqiq etishda odatda yechimning mavjudligi faraz qilinib, masalaning yagonaligi va shartli turg‘unligi isbotlanadi. Bu nazariyaga muvofiq o‘zining ahamiyatiga ega bo‘lgan ko‘plab amaliy masalalar o‘rganilgan.

1-Bob. Nokorrekt masalalarni yechish metodlari

§ 1. Korrekt qo‘yilgan va nokorrekt qo‘yilgan masalalar tushunchasi

Matematik fizikaning chegaraviy masalalarining korrekt qo‘yilganlik tushunchasi J.Adamar tomonidan kiritilgan. Masalan, elliptik tipdagi differensial tenglamalar uchun Dirixle chegaraviy sharti, xuddi shuningdek giperbolik tipdagi tenglamalar uchun 1,2-chegaraviy shartlarning bajarilishi tabiiy masalalar bo‘ladi.

Odatda har qanday miqdoriy masalalar “yechimi” ya’ni Z ni “masalaning berilganlari U ” bo‘yicha topishga olib kelinadi, ya’ni Z=R(U) ko‘rinishga keltiriladi. Biz bu z va u larni F va U metrik fazolarning elementlari deb hisoblaymiz. Shuningdek $U_1, U_2 \in U$ lar uchun masofani $p_u(U_1,U_2),\ z_1, z_2 \in Z$ lar uchun masofani $p_F(z_1, z_2)$ orqali belgilaymiz.

Faraz qilaylik “yechim” tushunchasi aniqlangan bo‘lib, har bir $u \in U$ elementga F fazoda yagona Z=R(U) yechim mavjud bo‘lsin.

Ta’rif-1. Masalaning F fazoda Z=R(U) yechimi $u \in U$ berilganlarga nisbatan (F, U) fazolarda turg‘un deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ son topilib, $p_u(U_1,U_2) \le \delta(\varepsilon)$ bo‘lganda $p_F(z_1, z_2) \le \varepsilon$ bajarilsa. Bu yerda $z_1 = R(u_1),\ z_2 = R(u_2);\ u_1, u_2 \in U;\ z_1, z_2 \in F.$

Ta’rif-2. U fazodagi u “berilganlarga” ko‘ra F fazodan z yechimni aniqlash masalasi (F,U) fazolar juftligida korrekt qo‘yilgan deyiladi, agar quyidagi talablar bajarilsa:

1) har qanday $u \in U$ uchun F fazodan z yechim mavjud;

2) yechim yagona aniqlangan;

3) masala (F,U) fazolar juftligida turg‘un bo‘lsa.

Eslatilgan talablarni bajarmaydigan masalalar nokorrekt qo‘yilgan deyiladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, nokorrekt qo‘yilgan masala ta’rifi qaralayotgan (F,U) metrik fazolar juftligigagina tegishli bo‘lib, boshqa metrikalarda masala korrekt qo‘yilgan bo‘lishi ham mumkin (buni ayrim misollarda ko‘rsatamiz).

Yechimlarni ajratib olish prinsipi darkor bo‘ladi. Buning uchun esa yechimlar haqidagi informatsiyalar kerak bo‘ladi. Bunday informatsiyalar miqdoriy yoki sifat ma’nosidagi xarakterga ega bo‘lishi mumkin.

Yechimning miqdoriy xarakterga ega bo‘lgan informatsiyalardan foydalanish odatda kvazi yechim tushunchasiga olib keladi. Yechimning sifatiy xarakterga ega bo‘lishligi esa (masalan yechimning silliqligi) butunlay boshqacha yondashuvga olib keladi.

§ 2. Nokorrekt qo‘yilgan masalalarga misollar

1-masala. $K(x,s)$ yadroli Fredgolmning 1-tur integral tenglamasi yechilsin, ya’ni

$$\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds = U(x), \quad c \le x \le d \tag{1.1}$$

Integral tenglama yechilsin, bu yerda $z(s)$ izlanuvchi (noma’lum) funksiya F fazodan, $U(x)$ – berilgan funksiya U fazodan. $K(x,s)$ yadroni x bo‘yicha o‘zi hamda dK/dx xususiy hosilasi bilan uzluksiz funksiya bo‘lsin deymiz.

Qisqalik uchun $\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds$ operatorni Az orqali belgilaymiz. Yechim $z(s)$ ni $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalar klassidan izlaymiz. (1.1) tenglamaning o‘ng tomoni $U \in L_2[c,d]$ bo‘lsin deymiz, metrikani

$$p_u(U_1,U_2) = \left\{ \int_c^d [U_1(x) - U_2(x)]^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ko‘rinishda bo‘lsin deymiz. Yechim funksiya $z(s)$ ni esa $F \in C[a,b]$ klassdan izlaymiz, ya’ni metrikani

$$p_F(z_1, z_2) = \max_{s\in[a,b]} \left| z_1(s) - z_2(s) \right|$$

ko‘rinishda bo‘lsin deymiz.

Bir qator fizik masalalar (1.1) ko‘rinishdagi tenglamani yechishga olib kelinadi. Masalan, spektroskopiya masalasi: kuzatilayotgan nurlanish bir jinslimas bo‘lib, energiya zichligi taqsimoti spektr bo‘yicha $z(s)$ funksiya bilan xarakterlangan bo‘lsin. Bu yerda s – chastota (yoki energiya), x – tokning kuchlanishi yoki (tok kuchi), $U(x)$ – eksperimentdan olingan spektr. $K(x,s)$ – apparat funksiyasi bo‘lib, ma’lum hisoblanadi va x ga bog‘liq bo‘ladi, agar priborga birlik intensivlikka ega s chastotaning monoxramatik nurlanishi tushayotgan bo‘lsa, bu esa $\delta(s-x)$ funksiya bo‘ladi. Bu yerda a va b – lar spektr chegaralari.

Shuningdek, birinchi tur integral tenglama Laplas tenglamasiga qo‘yilgan Dirixle masalasini yechishga ham keltiriladi. Haqiqatdan ham, uch o‘lchovli chegarasi S sirt bo‘lgan D sohada garmonik bo‘lgan chegara S da berilgan $\varphi(M)$ funksiyani qabul qiluvchi va $D \cup S$ da uzluksiz bo‘lgan

$$U = U(M) = U(x, y, z)$$

funksiyani topish, ya’ni:

$$\Delta U = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \qquad M(x,y,z) \in D \tag{1.2}$$

$$U(x,y,z)|_{\xi} = \varphi(x,y,z) = \varphi(p), \quad P \in S \tag{1.3}$$

masalaning yechimini oddiy qatlamli potensial ko‘rinishda, ya’ni

$$U(M) = \int_S \frac{\rho(p)}{r_{Mp}} d\delta_{Pz} \tag{1.4}$$

bo‘lsin deylik. Bu yerda $\rho(p)$ - izlanuvchi funksiya bo‘ladi. Ma’lumki matematik fizika tenglamalari kursida ko‘rsatiladiki, ixtiyoriy uzluksiz funksiya bilan aniqlangan oddiy qatlamli potensial D sohada garmonik va $D+S=\overline{D}$ da uzluksiz bo‘ladi. U holda eslatilgan xossaga ko‘ra (1.4) tenglik bilan aniqlangan $U(M)$ funksiya S chegarada $\varphi(M)$ funksiyaga teng, ya’ni

$$\int_S \frac{\rho(p)}{r_{Mp}} d\delta_{Pz} = \varphi(M) \tag{1.5}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu (1.5) tenglikdan $\rho(p)$ funksiya aniqlanadi va uni (1.4) formulaga olib borib qo‘yib izlanuvchi (noma’lum) $U(M)$ funksiyani topamiz. Shunday qilib $U=U(M)$ funksiyani topish masalasi (1.5) birinchi tur integral tenglamani yechishga olib kelinar ekan.

Endi (1.1) tenglama biror $U=U_1(x)$ o‘ng tomon uchun $z_1(s)$ yechimga ega bo‘lsin deb faraz qilaylik, ya’ni

$$\int_a^b K(x,s)\, z_1(s)\, ds \equiv U_1(x)$$

bo‘lsin deyaylik. Agar $U_1(x)$ berilgan funksiya o‘rniga L_2 fazo metrikasida kam farq qiladigan taqribiy $U(x)$ funksiya ma’lum bo‘lsa, u holda o‘ng tomon $U(x)$ eksperimentda (ya’ni tajribada) olingan bo‘ladi, masalan elektrokardiogrammaga o‘xshagan apparatda olingan bo‘lib $U(x)$ ni ifodalovchi egri chiziq “burchak nuqtalarga” ega yoki siniq chiziq bo‘ladi. Ma’lumki, burchak nuqtasida $U(x)$ funksiya hosilaga ega bo‘lmaydi. Bunday o‘ng tomon $U(x)$ uchun (1.1) tenglama klassik ma’nodagi $z=A^{-1}U$ formula bilan topiluvchi yechimga ega bo‘lmaydi, chunki $K(x,s)$ yadro x bo‘yicha uzluksiz differensiallanuvchi A^{-1} teskari operator esa integral operatorga teskari bo‘lgan operator bo‘lgani uchun $U(x)$ funksiyadan hosila olishi (differensiallash) kerak bo‘ladi, ya’ni (1.1) ning o‘ng tomoni ham differensiallanuvchi funksiya bo‘lishi lozim bo‘ladi, bunday bo‘la olmasligi $U(x)$ ning grafigi burchak nuqtalariga ega yoki siniq chiziqligidan ko‘rinadi.

Demak (1.1) tenglamaning $z(s)$ taqribiy “yechimi” sifatida o‘ng tomon $U(x)$ taqribiy ma’lum bo‘lgandagi aniq yechimni olish mumkin bo‘lmaydi, chunki bu holda bunday yechim mavjud bo‘lmasligi mumkin. Quyidagi prinsipial savol tug‘iladi: o‘ng tomoni taqribiy aniq bo‘lganda (1.1) tenglamaning taqribiy “yechimi” sifatida nimani tushunmoq kerak bo‘ladi?

Tabiiyki (1.1) tenglama klassik ma’nodagi yechimga faqat o‘ng tomon $U(x)$ F fazoning obrazi AF ga tegishli funksiyalar uchungina ega bo‘ladi ya’ni:

$$U = Az = \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds,\ z(s) \in F$$

bo‘ladi.

Bundan tashqari (1.1) tenglamaning klassik ma’nodagi, ya’ni $z = A^{-1}U$ tenglik bilan aniqlangan (bu yerda A^{-1} (1.1) tenglamadagi A operatorga teskari operator) $z(x)$ yechimi o‘ng tomondagi kichik o‘zgarishlarga turg‘un ($U(x)$ taqribiy bo‘lganida) bo‘lmaydi.

Haqiqatdan ham $z_1(s)$ funksiya (1.1) tenglamaning $U_1(x)$ tomoni uchun yechimi bo‘lsin, ya’ni

$$U_1(x) = \int_a^b K(x,s) z_1(s)\,ds, \quad c \le x \le d$$

bo‘lsin, u holda $z_2(s) = z_1(s) + N \sin ws$ funksiya (1.1) tenglamaning o‘ng tomoni

$$U_2(x) = U_1(x) + N\int_a^b K(x,s) \sin ws\,ds$$

ko‘rinishdagi yechim bo‘ladi.

Koʻrinib turibdiki, har qanday N son uchun ω ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$\rho_u(U_1,U_2)=|N|\left\{\int_c^d\left[k(x,s)\sin wsds\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

farqni keraklicha kichik qilish mumkin. Ammo ushbu holda U_1 va U_2 larga mos $z_1(s)$ va $z_2(s)$ yechimlar orasidagi farq

$$p_F(z_1,z_2)=\max_{s\in[a,b]}|z_2(s)-z_1(s)|$$

xohlagancha katta boʻlishi mumkin. Bu holda biz $z_1(s)$ va $z_2(s)$ lar orasidagi farqni $C_{[a,b]}$ fazo metrikasida baholadik.

Agar $z_1(s)$ va $z_2(s)$ lar orasidagi farqni $L_2[a,b]$ fazo metrikasida baholasak, bu holda ham (1.1) tenglamaning yechimi oʻng tomon $U(x)$ ning oʻzgarishiga turgʻun boʻlmaydi. Haqiqatdan ham

$$\begin{aligned}\rho_F(z_1,z_2)&=\left\{\int_a^b\left[|z_2(s)-z_1(s)|\right]^2ds\right\}=|N|\left\{\int_a^b\left[\sin ws\right]^2ds\right\}^{\frac{1}{2}}=\\&=|N|\sqrt{\frac{b-a}{2}-\frac{1}{2w}\sin w(b-a)\cos w(b+a)}\end{aligned}\tag{1.6}$$

koʻrinib turibdiki, W va N sonlarni shunday tanlab, $U_1(x)$ va $U_2(x)$ lar orasidagi farq yetarlicha kichik boʻlganda ularga mos $z_1(s)$ va $z_2(s)$ yechimlar orasidagi farqni ((1.6) formula bilan topilgan farqni) yetarlicha katta qilish mumkin.

Ammo koʻpgina hollarda (1.1) tenglamaning oʻng tomonining kichik oʻzgarishlariga turgʻun boʻlgan yechimini topish kerak boʻladi, chunki bu talab tenglamaning fizik jarayonini ifodalaganligidan kelib chiqadi.

Ma’lumki fizik hodisalar determinanlangan, ya’ni ayrim paramertlarining kichik oʻzgarishlariga nisbatan turgʻun boʻladi.

Agar (1.1) tenglamaning o‘ng tomonining U_T aniq qiymati o‘rniga $\rho_U(U_T, U_\delta) \le \delta,\ \ \delta > 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi U_δ taqribiy qiymati ma’lum bo‘lgan holda tenglamaning yechimlari $Z(s) \in F$ lar orasidan $\rho_u(Az, U) \le \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchisini olmoq lozim bo‘ladi. Yuqorida ko‘rdikki, bunday yechimlar ko‘p, ular orasidan F fazo metrikasida bir-biridan xohlagancha farq qiladiganlari topiladi. Demak bu hollarda (1.1) integral tenglamani yechish masalasi noaniq va o‘ng tomonga nisbatan turg‘un bo‘lmaydi.

Shunday qilib, (1.1) tenglamaning taqribiy “yechimi” deganda nimani tushunmoq kerak? degan savolga javob topishdan tashqari o‘ng tomonning kichik farqiga (o‘zgarishiga) turg‘un bo‘ladigan yechimni izlash (topish) algoritimini ham ko‘rsatish kerak bo‘ladi.

Yuqorida biz (1.1) tenglamaning U aniq o‘ng tomon uchun aniq Z yechim (klassik ma’noda) mavjud deb hisoblab, unga $\rho_u(Az, U) \le \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $U(x)$ o‘ng tomon uchun $Z(s)$ taqribiy yechimni qidirish masalasini qaraylik.

Bu misolda o‘rganilgan situatsiya barcha nokorrekt qo‘yilgan masalalarga xosdir.

2-masala. Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechilsin:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \ \ldots - x_{n-3} - x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = -1, \\ \qquad x_2 - x_3 - x_4 \ \ldots - x_{n-3} - x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = -1, \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 \ \ldots - x_{n-3} - x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = -1, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad x_{n-3} - x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = -1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{n-2} - x_{n-1} - x_n = -1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_{n-1} - x_n = -1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

(1.7) sistemani $Ax = f$ ko‘rinishida yozib olamiz, bu yerda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kvadratik matritsa.

$X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ satr matritsa $f = (-1, -1, -1, \dots, -1, 1)$ satr matritsa.

$A = (a_{ij})$ matritsaning normasi deb

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

tushinsak $\|A\| = n$ bo‘ladi. $Det\, A = 1$.

(1.7) sistemani yechish masalasi $Ax = f$ operatorli tenglamani yechishga olib kelinadi. (1.7) masalaning berilganlari deganda $x_i, i = 1, 2, 3, ..., ...$ larning oldidagi koeffisentlari bilan o‘ng tomonlar $f_1 = -1,\ f_2 = -1, ...,\ f_{n-1} = -1,\ f_n = 1$ larni tushunamiz.

Masalaning berilganlarida aniqrog‘i o‘ng tomonda kichik o‘zgarish qilaylik, ya’ni $f(-1, -1, -1, ..., 1)$ ning o‘rniga $\tilde{f} = (-1, -1, -1, ..., -1, 1 + \varepsilon)$ deb olaylik.

Natijada (1.7) o’rniga

$$
\begin{cases}
\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \tilde{x}_4 \ \ \dots - \tilde{x}_{n-3} - \tilde{x}_{n-2} - \tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_n = -1, \\
\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \tilde{x}_4 \ \ \dots - \tilde{x}_{n-3} - \tilde{x}_{n-2} - \tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_n = -1, \\
\tilde{x}_3 - \tilde{x}_4 \ \ \dots - \tilde{x}_{n-3} - \tilde{x}_{n-2} - \tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_n = -1, \\
\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots, \\
\tilde{x}_{n-3} - \tilde{x}_{n-2} - \tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_n = -1, \\
\tilde{x}_{n-2} - \tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_n = -1, \\
\tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_n = -1, \\
\tilde{x}_n = 1 + \varepsilon.
\end{cases} \tag{1.8}
$$

Sistemani yechish lozim bo‘ladi. Bu ikkala sistemada $det\,A = 1$ bo‘lgani uchun ularning $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n),\ \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_n)$ yechimlari topiladi, ya’ni mavjud hamda yagona.

$\left\| f - \tilde{f} \right\| = \varepsilon$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Endi f va $\tilde{f}$ larga mos kelgan yechimlarni mos ravishda $x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ yechimlar topiladi va yagona bo‘ladi, $r = \tilde{x} - x = (\tilde{x}_1 - x_1, \tilde{x}_2 - x_2, \tilde{x}_3 - x_3, ..., \tilde{x}_n - x_n)$ deb belgilasak va (1.8) dan (1.7) ni ayirsak quyidagi tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$
\begin{cases}
r_1 - r_2 - r_3 - r_4 \ \ \dots \ - r_{n-3} - r_{n-2} - r_{n-1} - r_n = 0, \\
r_2 - r_3 - r_4 \ \ \dots \ - r_{n-3} - r_{n-2} - r_{n-1} - r_n = 0, \\
r_3 - r_4 \ \ \dots \ - r_{n-3} - r_{n-2} - r_{n-1} - r_n = 0, \\
\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots, \\
r_{n-3} - r_{n-2} - r_{n-1} - r_n = 0, \\
r_{n-2} - r_{n-1} - r_n = 0, \\
r_{n-1} - r_n = 0, \\
r_n = \varepsilon,
\end{cases} \tag{1.9}
$$

(1.9) sistemadan $r_n = \varepsilon,\ r_{n-1} = r_n = \varepsilon,\ r_{n-2} = 2\varepsilon,\ r_{n-3} = 4,\ r_{n-4} = 2^2\varepsilon,\ ...,\ r_1 = 2^{n-2}\varepsilon,$ ya’ni yechim va taqribiy yechimlar farqi $r = \left(2^{n-2}\varepsilon, 2^{n-3}\varepsilon,\ ...,\ 2^3\varepsilon, 2^2\varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon\right)$ ko‘rinishdagi vektor bo‘lar ekan. Agar $\|r\| = \max|r_i| (1 \le i \le n)$ deyilsa, $\|r\| = 2^{n-2} \cdot \varepsilon$

bo‘lar ekan. Xususiy holda noma’lumlar soni $n=102$ ta bo‘lsa va $\varepsilon=\left(\frac{1}{2}\right)^{37}$ bo‘lsa, yechimlar orasidagi farq $\|r\|=2^{100}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{37}=2^{63}$ bo‘lar ekan. Demak chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish ham umumiy olganda nokorrekt qo‘yilgan masalalar jumlasiga kirar ekan.

Shuni ta’kidlash kerakki,chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini $Ax=f$ ko‘rinishida yozib olib

$$\|A\|=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

norma kiritilganda $\mu_A=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|<1$ shart bajarilganda $Ax=f$ sistema yaxshi shartlangan, aks holda yomon shartlangan deyiladi. Yaxshi shartlangan sistemalarni yechish masalasi korrekt qo‘yilgan masalalar jumlasiga kiradi. Yomon shartlangani esa nokorrekt qo‘yilgan bo‘ladi. Bizda $\mu=n>1$ edi, shuning uchun (1.7) masalani yechish nokorrekt masalani yechishdir.

3-masala. Taqribiy berilgan $U(t)$ funksiyani differensiallash masalasini qaraymiz. Faraz qilaylik $U_1(t)$ funksiyaning hosilasi $Z_1(t)$ bo‘lsin. $U_2(t)=U_1(t)+N\sin wt$ funksiya C fazo metrikasida $U_1(t)$ funksiyadan

$$\rho_c(U_1,U_2)=\max_t|U_2(t)-U_1(t)|=|N|$$

N miqdorga farq qiladi (ω ning ixtiyoriy qiymatlarida). Ammo $Z_2(t)=U_2'(t)$ hosila C ning metrikasida $Z_1(t)=U_1'(t)$ hosiladan $|N\omega|$ ga farq qiladi, qaysiki yetarlicha katta $|\omega|$ lar uchun bu farq ixtiyoriy katta bo‘lishi mumkin.

Ma’lumki $U(0)=U'(0)=...=U^{(n-1)}(0)=0$ bo‘ladigan $U(t)$ funksiyaning n-tartibli hosilasini topish masalasi quyidagi 1-tur ($Z(t)$ ga nisbatan) integral tenglamani yechishga olib kelinadi:

$$\int_0^t \frac{1}{n-1}(t-\tau)^{n-1} z(\tau)\, d\tau = U(t)$$

Shunday qilib, bu masala ham turg‘unlik xossasiga ega emas ekan, ya’ni hosilalarni taqribiy hisoblashda katta qiyinchiliklar keltiradi.

1-izoh: F va U to‘plamlarda boshqa metrikalar olinsa (yoki ularning bittasida), u holda $U(t)$ funksiyani differensiallash ($U(t)$ taqriban berilganda) masalasi korrekt qo‘yilgan masala bo‘lishi mumkin.

Agar U to‘plam $[a,b]$ da uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardan tashkil topgan bo‘lib va $U_1(t)\in U$ lar orasidagi masofa

$$\rho_c(U_1,U_2)=\sup_{t\in[a,b]}\left\{\left|U_2(t)-U_1(t)\right|+\left|U_1'(t)-U_2'(t)\right|\right\}$$

ko‘rinishida olinib, F dagi $Z_1(t)$ va $Z_2(t)$ lar orasidagi masofa C ning metrikasida olinsa, u holda tabiiyki (F,U) metrik fazolar juftligida differensiallash masalasi korrekt qo‘yilgan bo‘ladi.

Ammo $U(t)$ ga qo‘yilgan talab amaliy masalalarda ko‘pgina hollarda tekshirish qiyin bo‘ladi. Shuning uchun ham yuqorida $U(t)\in U$ funksiyalarning farqini baholaydigan metrika differensiallash masalasi uchun tabiiy bo‘lmaydi.

4-masala. Koeffitsientlari L_2 fazoning metrikasida taqriban ma’lum bo‘lgan Furye qatorini sonli usulda yig‘indisini topish masalasini qaraymiz.

Faraz qilaylik quyidagi tenglik o‘rinli bo‘lsin:

$$f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$$

Agar a_n koeffitsientlar o‘rniga $n \geq 1$ bo‘lganda $c_n = a_n + \frac{\varepsilon}{n}$ va $n = 0$ bo‘lganda $c_0 = a_0$ olinsa quyidagiga ega bo‘lamiz.

Bu qatorlar koeffitsientlari l fazo metrikasida quyidagi miqdorga farq qiladi.

$$\varepsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n) \right\}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$$

Bunda ε_1 esa ε ni yetarlicha kichik qilib olib istalgancha kichik qilish mumkin. Ammo

$$f_2(t) - f_1(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos nt)$$

Ayirma xohlagancha katta bo‘lishi mumkin ($t = 0$ bo‘lgan holda oxirgi qator uzoqlashuvchidir).

Shunday qilib, agar qator yig‘indilari farqi C fazo metrikasida olinsa, Furye qatori yig‘indisini topish turg‘un bo‘lmaydi.

2-izoh. Agar F fazodagi $f(t)$ funksiyalar farqi L_2 metrikasida baholansa, u holda koeffitsientlari (L_2 fazo metrikasida) taqribiy berilgan Furye qatori yig‘indisini topish masalasi (F,U) fazolar juftligida korrekt qo‘yilgan masala bo‘ladi.

Haqiqatdan ham Parseval teoremasiga ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left\{ \int_0^{\pi} [f_1(t) - f_2(t)] \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} (c_n - a_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4-masala. Ikki o‘lchovli Laplas tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasini yechish (Adamar misoli) masalasini qaraymiz:

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0$$

tenglamaning

$$U(x,0)=f(x),\ \ \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0}=\varphi(x),\ \ -\infty<x<+\infty,$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $U=U(x,y)$ yechimi topilsin. Bu yerda $f(x)$ va $\varphi(x)$ - berilgan funksiyalar.

Agap $f_1(x)=0,\ \varphi_1(x)=\frac{1}{a}\sin\alpha x$ deb olinsa, u holda Koshi masalasining yechimi $U_1(x,y)=\frac{1}{a^2}\sin axsh\alpha y,\ a>0$ funksiya bo'ladi.

Agar $f_2(x)=0,\ \varphi_2(x)=0$ deyilsa, u holda Koshi masalasining yechimi $U_2(x,y)=0$ funksiya bo'ladi. Agar masalaning berilganlari va yechimlari farqini C fazo metriklsida baholasak, ya'ni quyidagicha olinsa

$$\rho_c(f_1,f_2)=\sup_x\left|f_1(x)-f_2(x)\right|=0,$$

$$\rho_c(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_x\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|=\frac{1}{a}.$$

U holda oxirgi miqdor a ning yetarlicha katta qiymatlirida xohlagancha kichik bo'ladi. Ammo yechimlar farqi

$$\rho_c(U_1,U_2)=\sup_{x,y}\left|U_1(x,y)-U_2(x,y)\right|=\sup_{x,y}\left|\frac{1}{a^2}\sin ax\right|\cdot\sup_{x,y}\left|\frac{e^{ay}-e^{-ay}}{2}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{e^{ay}-e^{-ay}}{2}\to+\infty,\ \ y\to\infty.$$

ko'rinishda bo'lib, ixtiyoriy $y>0$ uchun a ning yetarlicha katta qiymatlarida juda katta bo'lishi mumkin.

Demak bu masala ham turg'unlik shartiga bo'ysunmas ekan, ya'ni nokorrekt masala ekan.

Ammo ko‘pgina amaliyotlarda Laplas tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasi uchraydi.

Masalan Yer usti (sirti) y=0 da og‘irlik kuchi potensialining gravitatsiyalanuvchi yo‘nalishidagi davom etishi haqidagi masala ham Laplas tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasiga olib kelinadi.

5-masala. Gravitatsiyaning teskari masalasi. Faraz qilaylik zichligi uni o‘rab turuvchi muhit zichligidan farq qiluvchi jism berilgan bo‘lsin.

Yer sirtida bu jism hosil qilgan og‘irlik kuchi kuchlanishi anomoliyasi tavsiridan o‘zgargan jismning formasi topilsin. Bu masalani yechish ham nochiziqli 1-tur integral tenglamani yechishga olib kelinadi.

Nokorrekt qo‘yilgin matematik masalalar qatoriga yana juda ko‘p masalalarni sanab o‘tamiz: asosiy determinanti nolga teng bo‘lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, chiziqli programmalashning ayrim masalalari, funksionalni minimallashtirish masalasi, optimal bashqaruvning ayrim masalalari, differensial o‘yinlar va boshqalar.

Nokorrekt masalalardan muhim klassi hamda amaliy (tadbiqiy) ahamiyatga ega masalalardan biri optimal sistemani loyihalash hamdir.

Fizika va texnikada uchraydigan va boshqa fanda uchraydigan nokorrekt masalalar qatoriga teskari masalalar kiradi.

6-masala. Tomonlarining nisbati irratsional bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakli ushbu $D=\{(x,t):\ 0<x<\pi,\ 0<t<\theta\pi\}$ sohada

$$U_{tt}-U_{xx}=0 \qquad (A_1)$$

tor tebranish tenglamasining

$$U(x,0)=0,\ U(0,t)=0,\ U(\pi,t)=0 \qquad (A_2)$$

$$U(x,\theta\pi)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}},\ 0\le x\le\pi,\ n>0 \qquad (A_3)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ yechimi topilsin.

Noma’lum funksiyaning qiymati qaralayotgan sohaning chegarasida berilganligi uchun (A_1), (A_2), (A_3) masala tor tebranish tenglamasi uchun Dirixle masalasi deyiladi.

(A_1), (A_2), (A_3) masalaning yechimi

$$U(x,t)=\frac{\sin(nt)\sin(nx)}{\sqrt{n}\sin(\theta n\pi)} \qquad (A_4)$$

formula bilan aniqlanadi.

(A_3) chegaraviy shartdanshi kelib chiqadi.

Sonlar nazariyasidan ma’lumki, ixtiyoriy berilgan r_n ratsional uchun shunday p_n va q_n butun sonlar ketma-ketligi mavjud bo‘lib, har qanday r_n irratsional son uchun quyidagi tengsizlik

$$\left|\theta-r_n\right|=\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\varepsilon_n=\frac{1}{q_n^2}$$

o‘rinli bo‘ladi. Unga asosan

$$\left|\sin(\theta\pi q_n)\right|=\left|\sin(\theta\pi q_n-\pi p_n)\right|<\varepsilon_n=\frac{1}{q_n^2}$$

o‘rinli bo‘ladi. Unga asosan

$$\left|\sin(\theta\pi q_n)\right|=\left|\sin(\theta\pi q_n-\pi q_n)\right|=\left|\sin\left(\pi q_n\left(\theta-\frac{p_n}{q_n}\right)\right)\right|\le\pi q_n\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\pi q_n\varepsilon_n=\frac{\pi}{q_n} \quad (A_5)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Oxirgi (A_5) tengsizlikka ko‘ra qaralayotgan (A_1), (A_2), (A_3) masalaning $U(x,t)$ yechimi uchun quyidagi

$$\left|U_{q_n}(x,t)\right|=\frac{1}{\sqrt{q_n}}\cdot\frac{\left|\sin(q_n(t))\right|\left|\sin(q_n(x))\right|}{\left|\sin(\theta\pi q_n)\right|}>\frac{\sqrt{q_n}}{\pi}\left|\sin(q_n(t))\right|\left|\sin(q_n(x))\right|$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Bu tengsizlikdan $n\to\infty$ bo‘lganda $U_{q_n}(x,t)\to\infty$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, tor tebranish tenglamasi uchun qo‘yilgan Dirixle masalasida yechimning turg‘unligi buzilar ekan. Bundan esa giperbolik tipdagi tenglama uchun qo‘yilgan Dirixle masalasining nokorrekt ekanligi kelib chiqadi.

7-masala. Ushbu $D=\{(x,t):\ 0<x<\pi,\ t<0\}$ sohada

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (A_6)$$

issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining

$$U(x,t)|_{t=0}=\frac{1}{k}\sin(kx),\ U(0,t)=U(\pi,t)=0 \qquad (A_7)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ yechimini toping.

Yechish. Bu masalaning yechimi

$$U(x,t)=\frac{1}{k}e^{-(ak)^2 t}\cdot\sin(kx),\ U(0,t)=U(\pi,t)=0 \qquad (A_8)$$

funksiyadan iborat.

Oxirgi formuladan ko‘rinadiki, k ning noldan farqli har qanday qiymati uchun bu funksiya o‘zining boshlang‘ich sharti va unga mos bo‘lgan qiymatga ega. Shu sababli (A_8) formulani (A_6), (A_7) masalaning yechimlari ketma-ketligi deb qarash mumkin.

Boshlang‘ich $\frac{1}{k}\sin(kx)$ funksiya $k\to\infty$ bo‘lganda nolga intiladi. Lekin (A_8) formula bilan aniqlangan $U(x,t)$ yechim $k\to\infty$ da $U(x,t)\to\infty$ bo‘ladi. Demak, bu masala ham nokorrekt qo‘yilmagan.

§ 3. Funksional analiz kursidan ayrim kerakli ma’lumotlar

Biz asosan $Az = U$ ko‘rinishdagi funksional tenglamani yechish metodlarini qaraymiz. Bu metodlarni o‘rganish davomida funksional analiz kursidan muhim tushunchalarni bilishimiz lozim bo‘ladi.

1-ta’rif. F metrik fazodan olingan M to‘plam F da (yoki F ning ichida) kompakt deyiladi, agar M ga tegishli ixtiyoriy $\{z_n\} \subset M$ ketma-ketlikdan F ning biror elementiga intiluvchi yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa.

Funksional analiz kursidan ma’lumki n o‘lchovli R^n Evklid fazosidan olingan M to‘plam kompakt bo‘lishi uchun uning chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.

$[a,b]$ segmentda uzluksiz funksiyalar fazosidan $C[a,b]$ dan olingan) olingan M to‘plamning kompakt bo‘lishligiga yetarli shartlar quyidagi Artsela teoremasida keltiriladi.

Teorema (Artsela). Agar $C[a,b]$ dan olingan M to‘plam tekis chegaralangan va teng darajali uzluksiz bo‘lsa, bunday M to‘plam $C[a,b]$ da kompakt bo‘ladi.

2-Ta’rif. Agar M to‘plamdan olingan har qanday $\{z_n\}$ ketma-ketlikdan shu M to‘plamning biror z elementiga intiluvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa, u holda bu M to‘plam o‘zida kompakt deyiladi.

Har bir o‘zida kompakt to‘plamni alohida metrik fazo (yoki kompakt) deb qarash mumkin.

F metrik fazodan olingan va F da kompakt M to‘plam kompakt bo‘lishi uchun uning F da yopiq bo‘lishi zarur va yetarli.

Har qanday M kompakt to‘plam M da zich bo‘lgan chekli yoki sanoqli to‘plamni o‘zida saqlaydi.

3-Ta'rif. Metrik fazoning tayin z_0 elementi va Z elementlari, qaysiki $\rho_F(z_0, z) < r$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday Z elementlar to'plamini markazi z_0 nuqtada radusi r ga teng ochiq sfera (yoki shar) deyiladi.

4-Ta'rif. F chiziqli metrik fazodan olingan z_1 va z_2 elementlar va $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonlar uchun tuzilgan $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ elementlar to'plami uchun F da kesma deyiladi.

5-Ta'rif. Agar F chiziqli metrik fazodan olingan M to'plamning har bir ikkita z_1 va z_2 elementlari bilan hosil qilingan kesmadagi elementlar ham shu M ga tegishli bo'lsa, u holda bu M to'plamni qavariq to'plam deymiz.

6-Ta'rif. M to'plamda aniqlangan, qiymatlari sonlardan iborat bo'lgan funksiyani funksional deymiz, M to'plamni esa uning aniqlanish sohasi deymiz.

7-Ta'rif. $F(x)$ funksional qavariq deyiladi, agar u qavariq M to'plamda aniqlanib, ixtiyoriy $z_1, z_2 \in M$ lar va ixtiyoriy $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$ bajariladigan $\alpha,\ \beta$ sonlar uchun $F(\alpha z_1 + \beta z_2) \leq \alpha f(z_1) + \beta f(z_2)$ tengsizlik bajarilsa.

8-Ta'rif. F metrik fazoning M to'plamida aniqlangan $f(z)$ funksional M da uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\{z_n\} \in M$ va $z_0 \in M$ hamda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ (Fazo metrikasida) lar uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$ bajarilsa.

9-Ta'rif. F metrik fazodan olingan $\{z_n\}$ ketma-ketlik fundamental deyiladi, ular ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olganda ham shundan $N(\varepsilon)$ natural son topilib, barcha $n, m \geq N(\varepsilon)$ lar uchun $\rho_F(z_n, z_m) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.

10-Ta'rif. Agar F metrik fazodan olingan $\{z_n\}$ fundamental ketma-ketlik shu F fazoning elementiga yaqinlashsa, u holda bu F metrik fazoni to'la fazo deymiz.

11-ta'rif. Agar F fazoning ixtiyoriy z_1, z_2 elementlari uchun ularning yig'indisi deb ataluvchi $z_1 + z_2 = z_3$ element mavjud va ixtiyoriy $z \in F$ element va ixtiyoriy β son uchun elementni songa ko'paytmasi deb ataluvch $\beta z \in F$ element mavjud bo'lib va shuningdek elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi talablarga javob bersa:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (qo'shishning kommutativlik);

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (assotsiativlik);

3) Fazoda O element mavjud, ya'ni ixtiyoriy $z \in F$ uchun $z + 0 = z$ bo'ladigan;

4) har qanday $z \in F$ element uchun qarama-qarshi $-z$ element mavjud $z + (-z) = 0$ bo'ladigan;

5) ixtiyoriy α, β sonlar va $z \in F$ uchun $\alpha(\beta z) = (\alpha\beta)z$ bajarilsin;

6) har qanday $z \in F$ uchun $1 \cdot z = z$;

7) har qanday α, β sonlar va $z \in F$ uchun $(\alpha + \beta) \cdot z = \alpha \cdot z + \beta \cdot z$ (distributivlik);

8) ixtiyoriy β son va ixtiyoriy $z_1, z_2 \in F$ lar uchun $(z_1 + z_2) \cdot \beta = \beta \cdot z_1 + \beta \cdot z_2$ (distributivlik) u holda F fazoni chiziqli fazo deymiz.

12-tarif. F chiziqli fazo normalangan deymiz. Agar ixtiyoriy $z \in F$ uchun uning normasi deb ataluvchi manfiymas $\|z\|$ haqiqiy son mos qo'yilib

1) $\|z\| \geq 0, \|z\| = 0,$ faqat $z = 0$ bo'lganda;

2) $\|\beta z\| = |\beta| \|z\|$ bo'lsa;

3) Ixtiyoriy $z_1, z_2 \in F$ lar uchun $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$ uchburchak tengizligi shartlar bajarilsa.

Agar F chiziqli fazoda norma kiritilgan bo'lsa, u holda uni

$$\rho_F(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|$$

tenglik bilan aniqlangan metrika yordamida metrik fazoga aylantirish mumkin. Endi chiziqli normalangan fazolarga eng ommalashgan misollarni keltiramiz.

1. R^1 haqiqiy sonlar to‘plamida (haqiqiy sonlar fazosida) normani $\|z\| = |z|$ deb kiritish mumkin.

2. n – o‘lchovli evklid fazosi R^n da $z = (z_1, z_2, ..., z_n),\ z_i \in R^1,\ i = 1, 2, ..., n$ element normasini

$$\|z\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

deb kiritamiz.

3. Elementlari kvadrati bilan yaqinlashuvchi qatorni tashkil etuvchi $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ ketma-ketliklar elementlar to‘plami L_2 da normani

$$\|z\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

deb kiritamiz.

4. Elementlari $[a,b]$ da kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar to‘plami $L_2[a,b]$ da normani

$$\|z\| = \left\{ \int_a^b z^2(x)dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

deb kiritamiz.

5. Elementlari $[a,b]$ da moduli bilan integrallanuvchi $z(x)$ funksiyalardan iborat $L_2[a,b]$ fazoda normani

$$\|z\| = \int_a^b |z(s)|ds$$

deb kiritamiz.

6. $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lgan $z(x)$ funksiyalar to‘plami $C[a,b]$ da normani

$$\|z\| = \max_{x\in[a,b]} |z(x)|$$

deb kiritamiz.

7. $[a,b]$ da kvadrati bilan integrallanuvchi va $[a,b]$ da umumlashgan hosilaga ega bo‘lgan $z(x)$ funksiyalar to‘plami $W_2^1[a,b]$ fazoda normani

$$\|z\| = \left\{ \int_a^b z^2(x)dx + \int_a^b \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

deb kiritamiz.

13-ta’rif. Agar F chiziqli fazoning ixtiyoriy (z_1, z_2) aniqlangan bo‘lib

a) barcha $z_1, z_2 \in F$ lar uchun $(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$;

b) $z_1, z_2, z_3 \in F$ lar uchun $(z_1 + z_2, z_3) = (z_1, z_3) + (z_2, z_3)$;

v) ixtiyoriy β haqiqiy son va barcha $z_1, z_2 \in F$ lar uchun $(\beta z_1, z_2) = \beta(z_1, z_2)$;

g) $(z, z) \geq 0,$ shuningdek $(z, z) = 0$ faqat $z = 0$ bo‘lganda;

d) agar yuqoridagi a) va g) shartlar bajarilib yana F da metrika quyidagicha: $\rho_F(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = (z_1 - z_2,\ z_1 - z_2)$ tenglik bilan kiritilsa, u holda F ni Gilbert fazosi deymiz.

14-ta’rif. To‘la chiziqli normalangan fazoni banax fazosi deymiz.

Yuqorida keltirilgan fazolardan 1-4 ular Banax 7-Gilbert fazosi deyiladi.

§ 4. Nokorrekt qo‘yilgan masalalarni yechishning saralash metodi

Nokorrekt qo‘yilgan masalalar berilganlarining kichik o‘zgarishlariga turg‘un bo‘ladigan taqribiy yechimini topish imkoniyati yechimlar haqida oldindan qo‘shimcha ma’lumotlarga asoslangan bo‘ladi. Qo‘shimcha ma’lumotlar ikki tipda bo‘ladi.

Birinchi tipdagi qo‘shimcha ma’lumotlar miqdoriy xarakterga ega, ikkinchi tipdagi qo‘shimcha ma’lumotlar esa yechimlarning sifati haqida ya’ni silliqligi haqidagi xarakterga egadir.

Saralash metodi yechimlarning miqdori bilan bog‘liq ya’ni birinchi tipdagi ma’lumotlarga asoslangandir.

Nokorrekt qo‘yilgan masala sifatida biz

$$Az = u \tag{4.1}$$

tenglamani yechishni qaraymiz. Bu yerda z - noma’lum, u - masalaning berilgani, A - operator F metrik fazoni U metrik fazoga akslantiradi. Shuningdek $u \in U$, $z \in F$. Teskari A^{-1} operator mavjud deb hisoblaymiz, ammo bu teskari operator umuman olganda uzluksiz bo‘lishi shart emas. (4.1) tenglamani (A operatorga nisbatan eslatilgan xossalarga ega bo‘lganda) biz birinchi tur operatorli tenglama deb ataymiz, yoki qisqa qilib birinchi tur tenglama ham deymiz.

Hisoblashlar amaliyotida (4.1) tenglamani taqribiy yechish usullaridan biri saralash metodidir. Bu metodning mohiyati quyidagidan iborat: z yechimlar saqlanadigan M $(M \subset F)$ sinfdan Az operator hisoblanadi, ya’ni to‘g‘ri masala yechiladi. So‘ngra z_0 taqribiy yechim sifatida $\rho_u(Az, u)$ masofaga minimum beruvchi qiymat qilib, ya’ni

$$\rho_u(Az_0, u) = \inf_{z \in M} \rho_u(Az, u)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladigan z ning qiymati olinadi.

Faraz qilaylik (4.1) tenglamaning o‘ng tomoni aniq (taqribiy emas!) va $u = u_T$ bo‘lsin, hamda masalaning aniq yechimi z_T izlanayotgan bo‘lsin. Odatda M to‘plam sifatida chekli o‘lchovli fazoning yopiq qismi (to‘plami) olinadi. Agar (4.1) tenglamaning aniq z_T yechimi M to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda

$$\inf_{z \in M} \rho_u(Az, u) = 0$$

bo‘ladi va $\inf$ (eng kichik qiymat) z_T aniq yechimda erishiladi. Agar (4.1) tenglama yagona yechimga ega bo‘ladigan bo‘lsa minimum beruvchi z_0 element ham bir qiymatli aniqlanadi.

Faraz qilaylik $\{z_n\}$ - elementlar ketma-ketligi uchun $n \to \infty$ da $\rho_u(Az_n, u) \to 0$ bo‘lsin. Savol tug‘iladi qanday shartlarda $\rho_F\left(z_{n,} z_T\right) \to 0$ bo‘ladi, ya’ni bu holda $\{z_n\}$ ketma-ketlik z_T aniq yechimga intiladi?

Bu savol saralash metodining effektivligini asoslovchidir. Bu talablar M to‘plamning kompakt bo‘lishini bildiradi. Quyidagi lemma qanday shartlarda saralash metodining effektiv bo‘lishiga asos bo‘ladi.

Lemma. F metrik fazo U metrik fazoga akslantirilgan va U_0 to‘plam F_0 to‘plamning obrazi bo‘lsin, $F_0 \subset F$. Agar $F \to U$ akslantirish uzluksiz, o‘zaro bir qiymatli va F_0 to‘plam F da kompakt bo‘lsa, u holda $U_0 \to F_0$ teskari akslantirishi (U_0 ni F_0 ga) ham F fazoda uzluksiz bo‘ladi.

Bu lemmani qisqaroq formulada quyidagicha ham yozish mumkin.

Lemma. Agar F_0 kompaktni U_0 ga akslantirish o‘zaro bir qiymatli va uzluksiz bo‘lsa, u holda $U_0 \to F_0$ akslantirish ham uzluksiz bo‘ladi.

Shunday qilib quyidagi hulosaga keldik: $\{z_n\}$ minimum beruvchi ketma-ketlik aniq yechim z_T ga $n \to \infty$ da yaqinlashishi uchun

a) z_T ning mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plami M ga tegishli bo‘lishini va

b) M -kompakt to‘plam bo‘lishini taqozo etar ekan.

§ 5. Operatorli tenglamalarni yechishning regulyarizatsiya metodi

To‘rtinchi paragrafdagi (4.1) tenglama yechimlari to‘plami kompakt bo‘lgan hol qaraldi. Ammo juda ko‘p amaliy masalalarga F klass kompakt bo‘lmagan holat xarakterli va bundan tashqari (4.1) tenglamaning o‘ng tomoni akslantirish paytida hosil bo‘lgan F ning obrazi AF dan tashqari bo‘lib qoladi. Bunday masalalarni **muhim nokorrekt** masalalar deymiz.

A.N.Tixonov tomonidan muhim nokorrekt masalalarning taqribiy yechimini topishning yangi metodi ishlab chiqilgan. Bu metodning asosida operatorni regulyarlashtirish deb ataluvchi fundamental tushuncha yotadi. Metodni tushuntirish oson kechish uchun (4.1) tenglamaning faqat o‘ng tomonida taqribiylik mavjud va A operator aniq berilgan deb hisoblaymiz.

Endi operatorni regulyarlashtirish tushunchasini bayon qilamiz.

$$Az = u \tag{5.1}$$

operatorli tenglamada A operatorga teskari A^{-1} operator AF to‘plamda uzluksiz emas va mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plami kompakt emas bo‘lsin.

Faraz qilaylik z_T (5.1) tenglamaning aniq yechimi, ya’ni $Az_T = u_T$ bo‘lsin.

Ko‘pincha biz u_T o‘rniga $\rho_u(u_\delta, u_T) < \delta$ shartni qanoatlantiradigan u_δ element va ma’lum $\delta > 0$ sonlarga ega bo‘lamiz, ya’ni (U_T, A) aniq berilganlar o‘rniga taqribiy (U_δ, A) berilganlarga ega bo‘lamiz, bu yerda δ taqribiylikning bahosi sifatida xizmat qiladi.

Bizga qo‘yilgan masalalarning mohiyati quyidagicha bo‘ladi: masalaning berilganlari (U_δ, A, δ) larga ko‘ra o‘ng tomoniga nisbatan turg‘un bo‘ladigan taqribiy z_δ yechimni topishdan iboratdir. Ko‘rinib turibdiki (5.1) tenglamaning taqribiy yechimi z_δ sifatida uning o‘ng tomonida taqribiy $u = u_\delta$ turgan holdagi aniq yechimini olish mumkin emas, chunki

$$z_\delta = A^{-1} u_\delta$$

tenglik bilan aniqlanadigan z_δ element $u \in U$ elementlarning hammasi uchun turg‘unlik shartini bajaravermaydi.

Sonli parametr δ (5.1) tenglamaning o‘ng tomoni xatoligini xarakterlaydi. Shuning uchun z_δ ni δ parametrga bog‘liq operator yordamida aniqlashimiz kerak bo‘ladi. Demak z_δ ni aniqlashda qatnashayotgan operator ham u_δ berilgan (o‘ng tomon) dagi xatolik δ bilan bog‘liq bo‘lishi kerak ekan.

Bu bog‘liqlik shunday bo‘lishi kerakki o‘ng tomondagi taqribiy u_δ parametrlar $\delta \to 0$ da U fazo metrikasida aniq u_T ga intilganda z_δ taqribiy yechimlar z_T aniq yechimga F fazo metrikasida intilishini bildiradi, ya’ni $Az_T = u_T$ bo‘lishi zarur.

Faraz qilaylik $z_T \in F$ va $u_T \in U$ elementlar $Az_T = u_T$ munosabat bilan bog‘langan bo‘lsin.

Ta’rif-1. U fazodan F fazoga o‘tuvchi $R(u,\delta)$ operator $Az = u$ tenglama uchun (u_T elementga nisbatan) regulyarlashtiruvchi operator deyiladi, agar:

1) shunday $\delta_1 > 0$ son topilib, barcha $0 \le \delta \le \delta_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi δ sonlar uchun $R(u,\delta)$ operator aniqlangan va ixtiyoriy $u_\delta \in U$ uchun

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \le \delta_1,$$

bo‘lsa;

2) shuningdek ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, u_\delta) \le \delta_1$ son mavjud bo‘lsin, buning uchun

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \le \delta \le \delta_0$$

tengsizlikdan

$$\rho_F(z_\delta, z_T) \le \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqsa. Bu yerda $z_\delta = R(u_\delta, \delta)$.

Ta'rif-1 dan $R(u,\delta)$ operatorning yagona bo'lishligi talab qilinmaydi. z_δ orqali esa $R(u_\delta,\delta)$ operatorning qiymatlari to'plami $\{R(u_\delta,\delta)\}$ dan olingan ixtiyoriy element belgilangan.

Ko'p hollarda regulyarlashtiruvchi operator(R.O.)ning ta'rifi sifatida boshqacha (quyidagi) ta'rifni qabul qilish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Ta'rif-2. U fazodan F fazoga ta'sir qiluvchi va α parametrga bog'liq $Az = u$ (z_T elementga nisbatan) tenglamaning regulyarlashtiruvchi operatori deyiladi agar u quyidagi xossalarga ega bo'lsa:

1) shunday $\delta_1 > 0, \alpha_1 > 0$ sonlar mavjud bo'lib, $(0,\alpha_1)$ oraliqqa qarashli barcha α lar uchun va ixtiyoriy $u \in U$ lar uchun

$$\rho_U(u, u_T) \le \delta_1;$$

2) $U_{\delta_1} \equiv \{u : \rho(u,u_T) \le \delta_1\}$ to'plamdagi $u \in U$ elementlarda aniqlangan shunday $\alpha = \alpha(u,\delta)$ funksional mavjudki, agar $\tilde{u} \in U$ va $\rho_u(\tilde{u}, u_T) \le \delta \le \delta(\varepsilon)$ uchun

$$\rho_F(z_T, z_\alpha) \le \varepsilon$$

bo'lsa, bu yerda $z_\alpha = R(\tilde{u}, \alpha(\tilde{u},\delta))$.

Bu ta'rifda $R(\tilde{u}, \alpha(\tilde{u},\delta))$ operatorning bir qiymatli bo'lishligi talab qilinmaydi. Shuni ta'kidlash kerakki $\alpha = \delta$ bo'lganda **Ta'rif-2** dan **Ta'rif-1** kelib chiqadi.

Agar $\rho_U(u_T, u_\delta) \le \delta$ bo‘lsa, (5.1) tenglamaning taqribiy yechimi sifatida (o‘ng tomonidagi u_δ taqribiy qiymat turganda) regulyarlashtiruvchi $R(u,\alpha)$, $\alpha = \alpha(u_\delta) = \alpha_1(\delta)$ operator yordamida topilgan $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha)$ elementni olish mumkin. Bu yechim (5.1) tenglamaning regulyarlashtirilgan yechimi deyiladi. α parametr esa regulyartiruvchi parametr deyiladi.

§ 6. Gidrodinamika masalasini matematik modellashtirish

Hozirgi kunda yer osti suvlari dinamikasi gidravlik va gidrodinamika nazariyalar asosida o‘rganiladi. Gidrodinamika nazariyaga shu narsa xoski, bu nazariyada filtratsiya tezligining gorizontal va vertikal tashkil etuvchilari hamda erkin suv oqimi sirtidagi chiziqli bo‘lmagan kinetik shartlar hisobga olinadi. Filtratsiya tezligining vertikal tashkil etuvchisini hisobga olmasdan, tuproq tarkibidagi suv oqimini balandligi bo‘yicha o‘rtachalab yer osti suvlari harakatining gidravlik nazariyasiga kelinadi. Bu holda real fazoviy (uch o‘lchovli) oqim ikki o‘lchovli yoki bir o‘lchovli oqim bilan almashtiriladi.

Gorizontal drenalar yoki daryolar atrofidagi filtratsiya, shuningdek katta uzunlikka ega bo‘lgan suv omborlari hamda kanallar atrofidagi gidroinshoatlar uzunliklari yer osti suvlari chuqurligidan uzoqroq tomon yo‘nalgan bo‘ladi.

Ko‘pgina gidravlik va gidrodinamika nazariyaga asoslangan masalalar solishtirganda, ko‘p hollarda gidravlik nazariyaga asoslangan masala yechish haqiqatga ancha yaqin bo‘ladi.

Gidravlik nazariya doirasida yer osti suvlari (YOS) sathi h quyidagi Bussinesk tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + W \qquad (6.1)$$

bu yerda μ - effektiv g‘ovaklik koeffitsienti, k - plastning (yer qatlamining) filtratsiya koeffitsienti, W - plastning ostki asosidan bo‘layotgan filtratsiya tezligini, infiltratsiyani (yomg‘ir, qor suvlari) suv oqimining erkin sirtidan bo‘layotgan bog‘lanishni hisobga oluvchi ifoda. Demak

$$W = F + F_0$$

bu yerda F_0 – pastki plastdan yuqori plastga sizib o‘tish tezligining vertikal tashkil etuvchisi, agar plast asosi suv o‘tkazmaydigan bo‘lsa $F_0 = 0$ bo‘ladi.

$F = \varepsilon^+ - \varepsilon^-$ ya’ni F funksiya infiltratsiya va bog‘lanish ayirmasini ifodalaydi. Infiltratsiya – bu yer osti suvlarining erkin sirtiga tashqaridan (yomg‘ir, qor suvlardan, sug‘orishdan) qo‘shiladigan suv miqdori, bug‘lanish - bu erkin sirtdan sarflanuvchi suv miqdori.

Yangi suv omborlari, kanallari atrofida yer osti suvlari erkin sirtidan

$$\varepsilon = \varepsilon^- = \begin{cases} f(h - h_{kp}, t), & h > h_{kp} \\ 0, & h \le h_{kp} \end{cases} \tag{6.2}$$

qonuniyat bilan bug‘lanish mavjud bo‘lganda yer osti suvlari harakati – dinamikasi (filtratsiya) haqidagi masalani qaraymiz.

Bu yerda $f(x,t)$ – birinchi argumenti bo‘yicha yetarlicha silliq, ikkinchi argumenti bo‘yicha bo‘lak – bo‘lak silliq funksiya, shuningdek

$$f(0,t) = 0, \; f(z,t) > 0, \; f_z'(z,t) > 0, \; z > 0 \tag{6.3}$$

h - suv o‘tkazmaydigan qatlamdan hisoblangan yer osti suvlarining sathi, h_{kp} - kritik chuqurlik y ga mos keluvchi yer osti suvlarining sathi; t - vaqt.

Umumiylikka zarar yetkazmagan holda infiltratsiya intensivligi ε^+ ni nolga teng ya’ni $\varepsilon^+ \equiv 0$; shuningdek plast asosi suv o‘tkazmaydi, ya’ni $F_0 = 0$ deb olamiz. Quyida infiltratsiya intensivligini va F_0 ni hisobga olish tenglamaning o‘ng tomonida o‘zgarishga olib kelishi ko‘rsatiladi.

Kanallar (suv omborlari) devorlari (qirg‘oqlari) vertikal ko‘rinishga ega, shuningdek $k = const,\ \mu = const$ deb hisoblaymiz.

Yangi kanallar va suv omborlari suv bilan to‘ldirilganda yer osti suvlari sathi $h(x,t)$ ko‘tarila boshlaydi. Agar dastabki sath h_0 kritik chuqurlik y_0 dan pastda joylashgan bo‘lsa, vaqtning shunday t_0 momentida yer osti suvlari sathi kritik sath h_{kp} ga erishadi. Kanallarda suv sathining keyingi ko‘tarilishi davomida bug‘lanish ε ning $h(x,t)$ ga bog‘liqligini hisobga olsak, harakat $x = l(t)$ qo‘zg‘aluvchan chegarali sohada kechadi, shuningdek $\psi_1(t) = h(0,t) > h(x,t) > h(l(t),t) = h_{kp}$ zonada bug‘lanish mavjud, $h_0 \le h(x,t) \le h_{kp}$ zonada esa bug‘lanish mavjud bo‘lmaydi.

Yuqorida keltirilgan mulohazalarni hisobga olib, $h(x,t)$ funksiyani va $x = l(t)$ noma’lum chegarani aniqlash masalasini quyidagicha qo‘yamiz:

$$Mh \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -\frac{\varepsilon}{\mu},\ (x,t) = \Omega_{t_0}^{\infty} \,|\, \left\{x : x = l(t)\right\} \qquad (6.4)$$

tenglamani hamda

$$h(l(t)-0,t) = h(l(t)+0,t) = h_{kp},\ t > t_0 \qquad (6.5)$$

$$h(x,t_0+0) = \varphi_0(x),\ h(0,t) = \psi(t);\ h \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} h_0 \qquad (6.6)$$

$$h(x,t)\cdot\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)-0} = h(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)+0} \qquad (6.7)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $h(x,t)$ va $l(t),\ l(t_0) = 0$ funksiyalar topilsin. Bu yerda $\psi(t) -$ kanalda suvning ko‘tarilish qonuniyati, $\varphi_0(x) -$ funksiya $t = t_0$ momentdagi depressiya chizig‘i (suv sathi) ε (6.2) formula bilan aniqlanuvchi bug‘lanish intensivligi, $h(x,t)$ funksiyani aniqlash kerak bo‘ladi. (6.4) tenglama $k > 0$ bo‘lganda kvazichiziqli divergent bosh qiymatli parabolik tenglamalar klassiga tegishli.

Masalani o‘rganishni yengillashtirish uchun odatda (6.4) tenglama chiziqlilashtirilgan holda qaraladi. Filtiratsiya nazariyasida Bussinesk tenglamasini birinchi usul va ikkinchi usul deb ataluvchi ikkita chiziqlilashtirish usuli mavjud.

P.Ya.Polubarinova – Kochina tomonidan taklif qilingan birinchi usul (6.4) tenglamaning chap tomonidagi qavs ichidagi $h(x,t)$ funksiya biror $\tilde{h}=const,\ \tilde{h}\in[h_l,h_m]$ doimiy qiymat bilan almashtiriladi. U holda kvazichiziqli Mh operator Lh chiziqli operator bilan taqribiy almashtiriladi:

$$Lh\equiv\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\tilde{h}_k}{\mu}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$a^2=\dfrac{\tilde{h}_k}{\mu}$ o‘zgarmas miqdorni sath o‘tkazish koeffitsienti deb ataymiz.

N.N.Verigin taklif etgan ikkinchi usulda noma’lum funksiya h^2 izlanadi: $h^2=v$ deb Mh operator

$$M_1h\equiv\frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

operator bilan almashtiriladi. Shundan so‘ng $\sqrt{v}=\tilde{h}=const$ almashtirish bajariladi. Natijada Mh operator

$$LV\equiv\frac{1}{2\tilde{h}}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

operator bilan taqriban almashtiriladi. Agar $\varepsilon=0$ bo‘lsa chiziqlilashtirishning birinchi usuli bilan olingan yechim aniq yechimga ancha yaqin ekanligi, boshqa hollarda esa ikkinchi usul bilan olingan yechim aniq yechimga yaqin bo‘lishi ko‘rsatilgan. Bu ikkala usulda topilgan yechimda xatolik unchalik katta emas deb hisoblaniladi.

Ammo ba’zi hollarda bu xatolik anchagina katta bo‘lishi ham kuzatilgan. Bizning holimizda h_l kattalik h_m ga unchalik yaqin bo‘lmasa xatolik kattaroq bo‘lishi mumkin. Shuning uchun (6.4) tenglamani $0 < x < l(t), (h > h_{kp})$ va $l(t) < x < +\infty, (h < h_{kp})$ sohalarning har birida alohida-alohida chiziqlilashtirish yuqori aniqlik beradi, deb hisoblanadi.

$$h(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} \tilde{h}_1 \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}, h_{kp} < h(x,t) \le h_m \\ \tilde{h}_2 \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}, h_l < h(x,t) \le h_{kp} \end{cases} \tag{6.8}$$

deb olamiz. Bu yerda $\tilde{h}_1 \in (h_{kp}, h_m]$ va $\tilde{h}_2 \in (h_l, h_{kp}]$ qiymatlar $h(x,t)$ sathning biror o‘rtacha qiymatlaridir.

(6.8) dan foydalanib Mh operator yuqori tartibli hosilasi oldidagi koeffitsientini bo‘lak-bo‘lak o‘zgarmas bo‘lgan quyidagi operator bilan almashtiriladi:

$$L_2 h \equiv \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} - a^2(x)\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2},$$

bu yerda

$$a^2(x) = \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{k\tilde{h}_1}{\mu} = const,\ 0 < x < l(t), \\ a_2^2 = \dfrac{k\tilde{h}_2}{\mu} = const,\ l(t) < x < \infty \end{cases}.$$

Ma’lumki, (6.7) shart $x = l(t)$ kesimda sarfning uzluksizligidan kelib chiqqan (6.8) ga muvofiq (6.7) shart quyidagicha:

$$\tilde{h}_1 \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)-0} = \tilde{h}_2 \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)+0}$$

ko‘rinishga keladi. Tabiiyki, bu holda $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ hosila $x = l(t)$ chiziqdan o‘tganda birinchi tur uzilish nuqtaga ega bo‘ladi. $U(x,t) = h(x,t) - h_l$ deb belgilab va Mh

operatorni bo‘lak-bo‘lak chiziqlilashtirib, masalaning quyidagi formulirovkasiga kelamiz.

$\Omega^0_{t_0} \,|\{x: x = l(t)\}$ sohada

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{\mu} \tag{6.9}$$

tenglamani va quyidagi boshlang‘ich hamda chegaraviy shartlarni

$$U|_{t=t_0} = \varphi(x);\ U|_{x=0} = \psi(t);\ U|_{x\to+\infty} = 0 \tag{6.10}$$

$$U|_{x=l(t)-0} = U|_{x=l(t)+0} = \psi_0 = const\ \ (t > t_0) \tag{6.11}$$

$$\tilde{h}_1 \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)-0} = \tilde{h}_2 \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)+0} \quad (t > t_0) \tag{6.12}$$

qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ va $l(t), l(t_0) = 0$ funksiyalar topilsin.

Bu yerda $\psi_0 = h_{kp} - h_l;\ \varphi(x) = \varphi_1(x) - h_l;\ \psi(t) = \psi_1(t) - h_l;$ shuningdek, $\varphi(0) = \psi(t_0) = \psi_0$,

$$\varepsilon = \begin{cases} f(U - \psi_0, t), & U > \psi_0\ (0 < x < l(t)) \\ 0, & (l(t) < x < +\infty) \end{cases} \tag{6.13}$$

$f(x,t)$ funksiya esa (6.3) xossaga ega;

$$a^2(x) = \begin{cases} a_1^2, & 0 < x < l(t), \quad (U > \psi_0) \\ a_2^2, & l(t) < x < \infty, \quad (U < x_0) \end{cases} \tag{*}$$

(6.9)-(6.13) masala Abduvali Begmatov tomonidan butun sohada $(0,\infty)$ sohada $h = h_{cp} = const$ almashtirilish qilib o‘rganilgan va integral tenglamalar sistemasini yechishga keltirilgan.

(6.9)-(6.13) masala qo‘zg‘aluvchan noma’lum chegarali chegaraviy masalalar klassiga tegishlidir. Stefanning mashhur klassik tenglamasidan (6.9)-(6.13) masala shunisi bilan farq qiladiki, bu yerda noma’lum chegara $x = l(t)$ da oqim uzluksiz, Stefan masalasida esa sarf (oqim) $x = l(t)$ chegarada uzilishga ega va bu uzilish qo‘zg‘aluvchan noma’lum chegaraning qo‘zg‘alish tezligiga proporsionaldir.

$l(t_0) = 0$ shart va noma’lum chegaradagi shartning Stefan tipidagi shartdan farqi (6.9)-(6.13) masalani tekshirishda qo‘shimcha qiyinchiliklar tug‘diradi. Shuning uchun (6.9)-(6.13) masala nafaqat mexanika nuqtai nazardan balki matematika nuqtai nazardan ham qiziqarlidir.

Endi infiltratsiya yo‘q va pastki qatlamga suvning sizib o‘tishi yo‘q, degan farazimizning umumiylikka zarar yetkazmasligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatdan ham, faraz qilaylik filtratsiya koeffitsiyenti k bo’lgan yuqori (asosiy) qatlam $k_0 = const$ filtratsiya koeffitsientiga ega, qalinligi M_0 bo‘lgan suvni sust o‘tkazadigan gorizontal qatlam bilan chegaralangan, undan pastda esa suvni yaxshi o‘tkazuvchi doimiy H naporli $(H > h)$ qatlam mavjud bo‘lsin. U holda pastki qatlamdan yuqori qatlamga

$$F_0 = -\frac{K_0}{M_0}(h - H) \tag{6.14}$$

intensivlik bilan suv sizib o‘tishi kuzatiladi. Bu yerda $h-$ yuqori suv o‘tkazuvchi qatlamdagi yer osti suvlari sathi (suv o‘tkazuvchi qatlamdan boshlab hisoblangan).

Yer osti suvlarining erkin sathida (sirtida)

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(t) \tag{6.15}$$

intensivlik bilan infiltratsiya (yomg‘ir, qor yoki sug‘orishdan hosil bo‘lgan suvlar) ro‘y berayotgan bo‘lsin. (6.14), (6.15) larni hisobga olib (6.1) tenglamani (6.8) formula bilan alohida-alohida chiziqlilashtirilgandan so‘ng bu tenglama

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{K_0}{\mu M_0}\left(h - H + \frac{\varepsilon^*}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\mu}\right)$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglamaga (6.4)-(6.7) shartlar qo‘shilib yangi kanal va suv omborlari atrofidagi yer osti suvlari harakati (filtratsiya) masalasi infiltratsiya va bug‘lanishni hamda pastki qatlamda suvning sizib o‘tishini hisobga olish haqidagi masalaga kelamiz.

Yangi $\tilde{H}(x,t)$ funksiyani quyidagicha kiritamiz:

$$\tilde{H}(x,t) = (h - H)e^{d(t-t_0)} - \int_{t_0}^{t} \varepsilon^{+}(\tau)d\tau, \tag{6.16}$$

bu yerda $d = \dfrac{K_0}{\mu M_0}$; $\tilde{\varepsilon}^{+}(t) = \dfrac{1}{\mu} e^{d(t-t_0)} \cdot \varepsilon^{+}(t)$.

Shundan so‘ng (6.5)-(6.7) va (6.15) lar o‘rniga

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2} - \frac{\tilde{\varepsilon}^{+}}{\mu};\ (x,t) \in \Omega_{t_0}^{\infty} \setminus \{x:\ x = l(t)\} \tag{6.17}$$

$$\tilde{H}|_{t=t_0} = \tilde{\varphi}_1(x);\ \ \tilde{H}|_{x=0} = \tilde{\psi}_1(t);\ \ \tilde{H}|_{x\to+\infty} = \tilde{\psi}_2(t); \tag{6.18}$$

$$\tilde{H}|_{x=l(t)-0} = \tilde{H}|_{x=l(t)+0} = \tilde{h}_{kp}(t); \tag{6.19}$$

$$\tilde{h}_1 \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}|_{x=l(t)-0} = \tilde{h}_2 \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}|_{x=l(t)+0} \tag{6.20}$$

larga ega bo‘lamiz. Bu yerda

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1 - H;\ \ \tilde{\psi}_1(t) = (\psi_1(t) - H)e^{d(t-t_0)} - \int_{t_0}^{t} \tilde{\varepsilon}^{+}(\tau)d\tau;$$

$$\tilde{\psi}_2(t) = (h_l - H)e^{d(t-t_0)} - \int_{t_0}^{t} \tilde{\varepsilon}^{+}(\tau)d\tau;$$

$$\tilde{h}_{kp}(t) = (h_{kp} - H)e^{d(t-t_0)} - \int_{t_0}^{t} \tilde{\varepsilon}^{+}(\tau)d\tau;$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} e^{d(t-t_0)} \cdot f(s,t), & \tilde{H} < \tilde{h}_{kp}(t), \\ 0, & \tilde{H} < \tilde{h}_{kp}(t), \end{cases} \tag{6.21}$$

$$s = \bar{e}^{d(t-t_0)} \left(\tilde{H} - \int_{t_0}^{t} \tilde{\varepsilon}^{+}(\tau) d\tau \right) + H - h_{kp}.$$

Bo‘lak-bo‘lak o‘zgarmas koeffitsient $a(x)$ $(*)$ formula bo‘yicha aniqlanadi.

Shunday qilib quyidagi tasdiq o‘rinli ekan: yangi kanallar va suv omborlari atrofida yer osti suvlari erkin sathida (sirtida) infiltratsiya, bug‘lanish bo‘lganda, shuningdek pastki qatlamdan suv sizib o‘tganda ham filtiratsiya masalasi (6.16) almashtirish yordamida (6.9)-(6.12) masala tipidagi masalaga kelinar ekan. Shu holatni e’tiborga olib, agar maxsus eslatma bo‘lmasa (6.9)-(6.12) masalani (6.17)-(6.20) umumiy masala, deb qarayveramiz.

§ 7. Gidrodinamika masalasini vaqtning kichik qiymatlarida taqribiy yechish

Oldingi banddagi (6.9)-(6.12) masalani t vaqtning t_0 ga yaqin qiymatlarida taqribiy yechamiz.

Faraz qilaylik, f, φ, ψ funksiyalar va ularning hosilalari – $f''_{zz}(z,t), \varphi''(x), \psi''(t)$ lar o‘zlari aniqlangan sohalarda uzluksiz va bundan tashqari

$$\begin{gathered} \varphi(x), \psi(t), \varphi'(x), \psi'(t) > 0, \varphi''(x) < 0, \psi''(t) > 0, \\ \psi(t_0) = \varphi(0) = \psi_0 = const \end{gathered} \tag{7.1}$$

munosabatlarni qanoatlantirsin.

Yer osti suvlari sathining t_0 momentdagi o‘rnini (holatini) aniqlovchi $\varphi(x)$ funksiya $x > 0$ yarim o‘qda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga qo‘yilgan birinchi chegaraviy masalaning yechimi sifatida topiladi:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ 0 < x < \infty, \ 0 < t \le t_0,$$

$$U|_{t=0} = 0, \ U|_{x=0} = \psi(t), \ U|_{x \to +\infty} = 0,$$

$$\varphi(x)=U(x,t_0)=\frac{x}{2a_2\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0}\frac{\psi(\tau)\exp\left\{-\frac{x^2}{4a_2^2}(t-\tau)\right\}}{(t_0-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

t_0 moment esa $\psi(t_0)=\psi_0=h_{kp}-h_e$ shartdan topiladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, keyingi mulohazalarda $\varphi(x)$ eslatilgan munosabatlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiyadir. Endi vaqtning t_0 momentiga yaqin qiymatlarida (6.9)-(6.12) masalaga kvazistatsionar yaqinlashish metodini qo‘llaymiz.

Bu metodning mohiyati shundaki, qo‘zg‘aluvchan chegara “muzlatiladi” ya’ni $l(t)=l(s)=const$ deb olinib, odatdagi $x=l(s)$ vertikal chegarali qo‘shma chegaraviy masala yechiladi. Shundan so‘ng $l(s)$ o‘rniga $l(t)$ qo‘yilib va $x=l(t)$ chegaradagi shartdan foydalanib, $l(t)$ ni aniqlaydigan tenglama yechiladi.

Shunday qilib, $l(t)=l(s)\neq 0$ deb, $x>0$ yarim o‘qda quyidagi ikki qatlamli chegaraviy masalani qaraymiz (bu masala yechimi $l(s)$ ga bog‘liq bo‘ladi):

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial t}=a^2(x)\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon}{\mu},\ (x,t)\in\Omega_{t_0}^{\infty}\setminus\{x:\ x=l(s)\} \tag{7.2}$$

$$U^{(s)}|_{x=0}=\psi(t);\ U^{(s)}|_{t=t_0}=\varphi(x);\ U^{(s)}|_{x\to+\infty}=0; \tag{7.3}$$

$$\left[U^{(s)}\right]|_{x=l(s)}=0,\ \tilde{h}_1\frac{\partial U^{(s)}}{\partial x}|_{x=l(s)-0}=\tilde{h}_2\frac{\partial U^{(s)}}{\partial x}|_{x=l(s)+0}; \tag{7.4}$$

bu yerda ε va $a(x)$ lar $l(t)=l(s)$ ekanligini hisobga olgan holda (6.13), (*) formulalar bilan aniqlanadi. f,φ,ψ (7.1) xossalarga ega funksiyalar.

L.I.Rubinshteyn tomonidan $l(s)=1$ bo‘lganda $x>0$ yarim o‘qda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga qo‘yilgan ikki qatlamli chegaraviy masalaning Grin funksiyasi, Laplas-Karson integral almashtirishini qo‘llab topilgan. Biz qarayotgan holda $l(s)\neq 1,\ l(s)>0$ bo‘lib Grin funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$g(x,t,\sigma,\tau;l(s))=\begin{cases} g_1(x,t,\sigma,\tau;l(s)),\ 0<x,\sigma<l(s),\\ g_2(x,t,\sigma,\tau;l(s)),\ 0<\sigma<l(s)<x<\infty,\\ g_3(x,t,\sigma,\tau;l(s)),\ 0<x<l(s)<\sigma<\infty,\\ g_4(x,t,\sigma,\tau;l(s)),\ l(s)<x,\tau<\infty,\end{cases}$$

bu yerda

$$g_1(x,t,\sigma,\tau;l(s))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\delta^n}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left\{-\frac{((x-\sigma)+2nl(s))^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\sigma+2nl(s))^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}\right]$$
$$-\delta\exp\left\{-\frac{(2(n+1)l(s)-x-\sigma}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(2(n+1)l(s)-(x+\sigma)}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}$$

$$g_2(x,t,\sigma,\tau;l(s))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\delta^n(1+\delta)}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{x-l(s)}{a_2}+\frac{((2n+1)l(s)-\sigma)}{a_1}\right)^2\cdot\frac{1}{4(t-\tau)}\right\}\right.$$
$$-\exp\left\{-\left(\frac{x-l(s)}{a_2}+\frac{(2n+1)l(s)+\sigma}{a_1}\right)^2\cdot\frac{1}{4(t-\tau)}\right\}$$

$g_3(x,t,\sigma,\tau;l(s))$ va $g_4(x,t,\sigma,\tau;l(s))$ funksiyalar ham shunday qator ko‘rinishda topiladi, bu yerda

$$\delta=\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\ \lambda=\sqrt{\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}};\ \ 0<\lambda<1.$$

Masala yechimining integral ko‘rinishda tasvirlanishidan foydalanib, (7.2)-(7.4) masalani yechish quyidagicha:

$$U^{(s)}(x,t)=A^{(s)}U^{(s)}+B(x,t;l(s))$$

integral tenglamani yechishga olib kelinadi.

Bu yerda

$$A^{(s)}U^{(s)}=\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}d\tau\int_0^{l(s)}g(x,t,\sigma,\tau;l(s)\,f(U^{(s)}-\psi_0,\tau)d\sigma,$$

$$B(x,t;l(s))=\int_0^{+\infty} g(x,t,\sigma,\tau;l(s))\varphi(\sigma)d\tau+a_1^2\int_{t_0}^{t}\frac{\partial g(x,t,\sigma,\tau;l(s))}{\partial\sigma}|_{\sigma=0}\,\psi(\tau)d\tau.$$

(6.9)-(6.12) masalaning $U(x,t)$ va $l(t)$ taqribiy yechimlari sifatida ushbu integral tenglamalar sistemasining yechimini qabul qilamiz.

$$\left.\begin{array}{l} U(x,t)=AU+B(x,t;l(t)), \\ \psi_0=\left[AU+B(x,t;l(t))\right]|_{x=l(t)} \end{array}\right\} \qquad (7.6)$$

bu yerda

$$AU+B\left(x,t;l(t)\right)\approx\left(A^{(s)}U^{(s)}+B(x,t;l(t))\right)|_{\,l(s)=l(t)}.$$

L.I.Rubinshteyn tadqiqotlariga ko‘ra kvazistatsionar yaqinlashish metodi bilan olingan aniq yechim Stefan tipidagi masalaning yechimiga yuqori aniqlik bilan yaqin bo‘ladi. Ammo xatolik uchun baho olinmagan.

(7.6) sistemani quyidagicha matritsaviy operator tenglama ko‘rinishda yozib olamiz:

$$P\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1(U,l) \\ P_2(U,l) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.7)$$

bu yerda

$$\begin{array}{l} P_1(U,l)=U-AU-B(x,t;l(t)); \\ P_2(U,l)=\psi_0-[AU+B(x,t;l(t))]|_{x=l(t)}\,. \end{array}$$

$P\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$ operatorning aniqlanish sohasini va qiymatlar sohasini mos ravishda C^* va C fazolar deb hisoblaymiz, bu yerda

$$C^*=C_1\oplus C_2,$$

$$C_1=\{U(x,t:\ U\in C[a,b]\times[t_0,T]\},$$

$$C_2=\{l(t);\ l(t)=m(t)\cdot(t-t_0)^{\frac{1}{2}+\alpha},\ m(t)\in C[t_0,T],\ \frac{1}{2}\le\alpha\le1$$

$$b=\max_{t_0\le t\le T} l(t)=l(T),$$

$\oplus-$ belgi to‘g‘ri ko‘paytmani anglatadi.

$$\left\|U\right\|_{C_1}=\max_{(x,t)}\left|U\left(x,t\right)\right|,$$

$$\left\|l\left(t\right)\right\|_{C_2}=\max_{t}|\,(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}\,l\left(t\right)|;$$

$$\left\|\begin{pmatrix}U\\ l\end{pmatrix}\right\|_{C^*}=\left\|U\right\|_{C_1}+\left\|l\left(t\right)\right\|_{C_2};$$

$$\left\|P\begin{pmatrix}U\\ l\end{pmatrix}\right\|=\left\|P_1(U,l)\right\|_{C_1}+\left\|P_2(U,l)\right\|_{C_2}.$$

Endi φ,ψ va λ funksiyalarga nisbatan qilingan farazlar va t vaqtning t_0 qiymatga yaqin qiymatlarida $P\begin{pmatrix}U\\ l\end{pmatrix}$ chiziqli bo‘lmagan operator C^* fazoda yagona nolga ega bo‘ladi, yani C^* da shunday $\begin{pmatrix}U^*\\ l^*\end{pmatrix}$ element borki uning uchun

$$P\begin{pmatrix}U^*\\ l^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

bo‘lishini ko‘rsatamiz. Bu tasdiq L.V.Kantarovich, G.P.Akilovning “Funksionalniy analiz”. M.Nauka 1977-737-kitobida isbotlangan funksional tenglamalar uchun qurilgan Nyuton protsessining yaqinlashishi haqidagi teoremadan kelib chiqadi.

Dastlab $0<x<l(t)$ holni qaraymiz. Nolinchi yaqinlashish sifatida quyidagilarni

$$l_0(t)=2a_1(t-t_0)^{-\frac{1}{2}+\alpha},\quad \frac{1}{2}\le\alpha\le1$$

$$U_0(x,t) = B(x,t;l_0(t))$$

olamiz. U holda Nyuton protsessi birinchi yaqinlashishi

$$\Delta U(x,t) = U_1(x,t) - U_0(x,t),$$

$$l_0 = l_1(t) - l_0(t)$$

tuzatmalarga nisbatan quyidagi matritsaviy tenglamaning yechimi sifatida bo‘ladi:

$$\begin{pmatrix} P'_{1U}(U_0,l_0)\Delta U + P'_{1l}(U_0,l_0)\Delta l \\ P'_{2U}(U_0,l_0)\Delta U + P'_{2l}(U_0,l_0)\Delta l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1(U_0,l_0) \\ -P_2(U_0,l_0) \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

bu yerda

$$P'_{1U}(U_0,l_0)\Delta U = \Delta U + \frac{1}{\mu}\int_0^t d\tau \int_0^{l_0(\tau)} g_1(x,t,\sigma,\tau;l_0(\tau))\, f_1'(U(\sigma,\tau)-\varphi_0,\tau)\Delta U(\sigma,\tau)d\tau,$$

$$P'_{2U}(U_0,l_0)\Delta U = \frac{1}{\mu}\int_0^t d\tau \int_0^{l_0(\tau)} g_1(l(t),t,\sigma,\tau;l_0(\tau))\, f_1'((U_0,\sigma,\tau)-\varphi_0,\tau)\Delta U(\sigma,\tau)d\tau,$$

bu yerda P'_{iu}, P'_{il} $\quad(\tau = 1,2)-$ Freshe hosilalari, $f'_y(y,t)-$ odatdagi hosila

$$P'_{1l}(U_0,l_0)\Delta l = g_1(x,t;l_0(t),t;l_0(t))\varphi(l_0(t)) - \int_0^{l_0(t)} \frac{\partial g_1(x,t,\sigma,t_0;y)}{\partial y}\Big|_{y=l_0(t)} \varphi(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^{l_0(t)} \frac{\partial g_3(x,t,t_0;y)}{\partial y}\Big|_{y=l_0(t)} \varphi(\tau)d\tau - a_1^2 \int_{l_0(t)}^{t} \left[\frac{\partial^2 g_1(x,t,\sigma,\tau;y)}{\partial \tau\, \partial y}\Big|_{y=l_0(t),\tau=0} \varphi(\tau)d\tau \right] \Delta l(t) +$$

$$+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t} g_1(x,t;l_0(\tau),\tau;l_0(t))\, f(U_0(l_0(\tau),\tau-\psi_0,\tau))\Delta l(t) +$$

$$+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_0^{l_0(\tau)} \frac{\partial g_1(x,t;\sigma,\tau;y)}{\partial y}\Big|_{y=l_0(t)} f(U_0(\sigma,\tau)-\psi_0,\tau)\Delta l(\tau)d\tau.$$

Xuddi shunday $P'_{2l}(U_0, l_0)\Delta l$ ham hisoblanadi.

Nyuton protsessi yaqinlashganligini ta'minlaydigan tengsizlikda qatnashadigan

$$\left\| P\begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\|, \quad \left\| \left(P'\begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|, \quad \left\| P''\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} \right\|$$

normalarni hisoblashga kirishamiz.

Norma ta'rifiga ko'ra:

$$\left\| P\begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| P_1(U_0,\, l_0) \right\| + \left\| P_2(U_0,\, l_0) \right\| = \max_{x,t} \left| P_1(U_0,\, l_0) \right| + \max_{t} \left| P_2(U_0,\, l_0) \right|.$$

φ, ψ va f funksiyalarga nisbatan (silliqliklariga) qilingan farazni hisobga olib (7,7) ning chap tomoni bir necha shakl almashtirishlardan so'ng quyidagicha hisoblanadi:

$$\left\| P\begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\| \le \eta_1 \equiv M_p (t - t_0)^{\alpha}, \quad \frac{1}{2} \le \alpha < 1 \tag{7.9}$$

bu yerda M_p - masalaning berilganligidan bog'liq biror musbat son(o'zgarmas)

$\left\| \left(P'\begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|$ normani yuqoridan baholaymiz.

Agar (7,8) matritsaviy operatorli tenglama yechimga ega bo'lsa, u holda bu fakt $\left(P'\begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1}$ teskari operatorlarning mavjudligiga va uning norma bo'yicha chegaralanganligiga ekvivalent bo'ladi.

(7,8) matritsaviy tenglama quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} P'_{1U}(U_0,l_0)\Delta U + P'_{1l}(U_0,l_0)\Delta l = -P_1(U_0,l_0) \\ P'_{2U}(U_0,l_0)\Delta U + P'_{2l}(U_0,l_0)\Delta l = -P_2(U_0,l_0) \end{cases} \tag{7.10}$$

Soddalashtirilgandan so‘ng (7.10) sistemaning ikkinchi tenglamasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\left(t-t_0\right)^{1+\alpha} A_0\Delta U + \left(t-t_0\right)^{1+\alpha} B_0\Delta l - \sqrt{t-t_0}\,N(t)\Delta v = -\left(t-t_0\right)^{\alpha} M(t) \tag{7.11}$$

bu yerda A_0 va B_0 chiziqli Volterra operatorlari, ular mos ravishda ΔU va Δv ga ta’sir etadilar, bundan tashqari

$$\Delta v = \left(t-t_0\right)^{-\frac{1}{2}} \Delta l(t), \;\; \frac{1}{2} \le l \le 1,$$

$M(t)$ va $N(t)$ lar $t > t_0$ bo‘lganda uzluksiz funksiyalar, bundan tashqari t ning t_0 ga yaqin qiymatlarida $N(t_0) = \varphi'(0) \ne 0$ va $N(t) \ne 0$. (7.11) dan

$$\Delta v = \frac{\left(t-t_0\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{N(t)} \cdot A_0\,\Delta U + \frac{\left(t-t_0\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{N(t)} \cdot B_0\,\Delta l + \frac{\left(t-t_0\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{N(t)} \cdot M(t)$$

ni olamiz va (7.11) ning birinchi tenglamasiga olib borib qo‘yib ΔU va Δv ga nisbatan Volterraning 2-tur chiziqli integral tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta U(x,t) + A_1\Delta U + B_1\Delta v = F_1(x,t), \\ \Delta v(t) + A_2\Delta U + B_2\Delta v = F_2(t) \end{array}\right\} \tag{7.12}$$

bu yerda A_i, B_i $(i=1,2)-$ Volterra chiziqli operatorlari, $F_i(t)$ $(i=1,2)-$ uzluksiz funksiyalar.

Ikkinchi tur chiziqli Volterra tenglamalari sistemasining umumiy nazariyasiga binoan (7.12) sistema yechimga ega bo‘ladi, ya’ni normasi bo‘yicha chegaralangan teskari operator mavjud bo‘ladi. Bu teskari operatorni (7.12) ning o‘ng tomoniga ta’sir ettirib, $\begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta l \end{pmatrix}$ yechimni olamiz:

$$\begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta l \end{pmatrix} = \left(P' \begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib,

$$\left\| \left(P' \begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\| \le n_0. \tag{7.13}$$

Endi

$$\left\| \begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\| \le r$$

Shartda $P\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$ operatorning ikkinchi tartibli hosilalarini C ning normasi bo‘yicha baholaymiz. f, φ, ψ funksiyalar va α parametrga qo‘yilgan talablarga binoan $P\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$ operatorning ikkinchi tartibi Freshe ma’nosidagi hosilasi mavjud bo‘ladi. Bu ikkinchi tartibli hosila uchun olingan ifoda anchagina katta bo‘lgani uchun uni hisoblash yo‘linigina keltiramiz.

Dastlab $P'\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$– birinchi tartibli hosila hisoblanadi, so‘ngra argumentlarga ΔU va Δl dan farqli bo‘lgan $\Delta' U$ va $\Delta' l$ ga orttirmalar berib, yana hosila hisoblanadi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli hosila bi chiziqli operator bo‘lar ekan:

$$P''\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta' U \\ \Delta' l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P''_{1UU}\,\Delta U\Delta' U + P''_{1Ul}\,\Delta U\Delta' l + P''_{1lU}\,\Delta l\Delta' l \\ P''_{2UU}\,\Delta U\Delta' U + P''_{2Ul}\,\Delta U\Delta' l + P''_{2lU}\,\Delta l\Delta' l \end{pmatrix}.$$

Mos hisoblashlarni amalga oshirib,

$$\left\| P''\begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta' U \\ \Delta' l \end{pmatrix} \right\| \le \eta_2\left(\left(\|\Delta U\| + \|\Delta l\|\right)\left(\|\Delta' U\| + \|\Delta' l\|\right)\right).$$

Bu yerda η_2 – berilganlarga bog‘liq bo‘lgan (chegaralangan) chekli o‘zgarmas.

(7.9), (7.13), (7.14) baholashlardan kelib chiqsak, shunday $T_0 \in (t_0, T_1], T_0$ – vaqtning qiymati topiladiki, barcha $t \in (t_0, T_0]$ uchun

$$\eta_0 = \eta_0^2\,\eta_1\,\eta_2 < \frac{1}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bu esa eslatilgan teoremaga ko‘ra (7.7) tenglama

$$\left\| \begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\| \le r < r_1, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \cdot \eta_0$$

sharda yagona $\begin{pmatrix} U^* \\ l^* \end{pmatrix}$ – yechimga ega bo‘ladi.

Izoh. Agar (6.9)-(6.12) masalaning $0 < x < l(t)$ sohada yechimi topilsa, bu masalaning $l(t) < x < \infty$ sohada yechimi mavjud va (7.5) Grin funksiyasi yordamida oshkor-analitik ko‘rinishda ifodalanadi.

§ 8. Gidrodinamika masalasiga regulyarizatsiya metodini qo‘llash

Oldingi 7-bandda (6.9)-(6.12) masalaning taqribiy yechimini vaqtning kichik qiymatlarida kvazistatsionar yaqinlashish metodini qo‘llab topish mumkinligi ko‘rsatildi. Bu bandda masala vaqtning chekli oralig‘ida o‘rganiladi.

Vaqtning $t > t_1 > t_0$ qiymatlari uchun (6.9)-(6.12) masala ekvivalent integral tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bunda vaqtning $t \in (t_0, T_0]$ qiymatlarida biror xatolik bilan u yoki bu metod bilan taqribiy yechim qurilgan, deb hisoblanadi. Hosil bo‘lgan integral tenglamalar sistemasidagi tenglamalarning birida differensiallash operatori qatnashadi, ma’lumki bunday operator chegaralanmagandir. Shuning uchun ham sistemaning $(t_1, T]$ oraliqdagi yechimi berilganlardagi kichik xatolikka turg‘un bo‘lmasligi mumkin. Shu munosabat bilan qaralayotgan masala yechimi regulyarizatsiya metodini qo‘llab quriladi. Bunda regulyarlashtirilgan va taqribiy yechimlar farqi baholanadi.

Shunday qilib (6.9)-(6.12) masalani vaqtning $t \in (t_0, T_0], T < \infty$ qiymatlar uchun qaraymiz. U holda Ω_{t_1} sohada (6.9) tenglamaning (6.10)-(6.12) shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ yechimini topish kerak bo‘ladi. Bunda t_0 o‘rniga t_1 olinadi va $\varphi(x)$ tenglik bilan aniqlanadi. Shuningdek $l(t_1 + 0) = l(t_1 - 0) = l_0 > 0$ shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi $l(t)$ funksiya ham qidiriladi. Masalani o‘rganishda $x = l(t)$ chiziq ma’lum deb hisoblab, ikkita yordamchi masalalarni qaraymiz.

Masala 1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}, \; l(t) < x < \infty, \; t_1 < t < T \qquad (8.1)$$

ning

$$U_2(x,t)|_{t=t_1+0} = \varphi_2(x), \; l_0 < x < \infty \qquad (8.2)$$

$$U_2(x,t)|_{x=l(t)+0}=\psi_0,\ U_2|_{x\to+\infty}=0 \tag{8.3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $U_2(x,t)$ yechimi topilsin. Bu yerda $\varphi_2(x)$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $\varphi_2(l_0)=\psi_0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\frac{U_2}{\varphi_0}=\overline{U_2};\ \ \frac{x}{a_2\sqrt{\pi}}=\bar{x};\ \ \frac{t-t_1}{T}=\bar{t}$$

$$z(t)=\frac{l(t)}{a_2\sqrt{\pi}},\ \bar{T}=\frac{T-t_1}{T},\ \overline{\varphi_2}=\frac{\varphi_2}{\psi_0} \tag{8.4}$$

$\bar{y}=\bar{x}-z(\bar{t})$ almashtirish qilib va so‘ngra t,φ_2,U_2,T lar ustidagi chiziqchani tashlab yuborib, (8.1)–(8.3) o‘rniga quyidagi masalaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}=\frac{\partial^2 U_2}{\partial \bar{y}^2}+z'(t)\frac{\partial U_2}{\partial \bar{y}},\ 0<t<T \tag{8.5}$$

$$U_2|_{t=0}=\varphi_2(\bar{y}),\ U_2|_{\bar{y}=0}=1,\ U_2|_{\bar{y}\to+\infty}=0 \tag{8.6}$$

Shunday qilib $\bar{y}\geq 0$ yarim o‘qda o‘ng tomoni $z'(t)\dfrac{\partial U_2}{\partial \bar{y}}$ bo‘lgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga qo‘yilgan birinchi chegaraviy masalaga keldik.

$$G_1(\bar{y},\sigma,t-\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left\{-\frac{(\bar{y}-\sigma)^2}{4(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(\bar{y}+\sigma)^2}{4(t-\tau)}\right\}\right] \tag{8.7}$$

Grin funksiyasi yordamida (8.5)–(8.6) masala yechimining integral ifodasi koordinatalar tekisligining 1-choragida quyidagi integrodifferensial tenglamasiga ekvivalent bo‘ladi:

$$U_2(x,t)=erfc\frac{\bar{y}}{\sqrt{t}}+\int_0^{\infty}\varphi_2(\sigma)G_1(\bar{y},\sigma;t)d\sigma+\int_0^{t}d\tau\int_0^{\infty}z'(\tau)U_{2\sigma}(\sigma,\tau)G_1(\bar{y},\sigma;t-\tau)d\sigma \tag{8.8}$$

bu yerda $erfc=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^{\infty}e^{-a^2}da.$ (8.8) ni $\bar{y}$ bo‘yicha differensiallab $\bar{y}\in(0,+\infty)$

$$U_2(\bar{y},t)=\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{\bar{y}^2}{-4t}\right\}+\int_0^{\infty}\varphi_2(\sigma)\frac{\sigma G_1(\bar{y},\sigma,t-\tau)}{\partial\bar{y}}d\sigma+\int_0^{\infty}z'(t)\frac{\sigma G_1(\bar{y},\sigma,t-\tau)}{\partial\bar{y}}U_3(\sigma,\tau)d\sigma \tag{8.9}$$

ni olamiz.

Endi $G_{1\bar{y}} = -G_{2\sigma}$ tenglikni e’tiborga olib va bo‘laklab integrallashni amalga oshirib yuqorida eslatilgan tenglamaga kelamiz:

$$U_3(\bar{y},t) = \varphi'(\sigma)G_2(\bar{y},\sigma;t)d\sigma - \int_0^t d\tau \int_0^\infty z'(\tau)U_3(\sigma,\tau)G_{2\sigma}(\bar{y},\sigma,t-\tau)d\sigma \qquad (8.10)$$

bu yerda

$$G_2(\bar{y},\sigma;t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left\{-\frac{(\bar{y}-\sigma)^2}{4(t-\tau)}\right\} + \exp\left\{-\frac{(\bar{y}+\sigma)^2}{4(t-\tau)}\right\}\right]$$

issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga $x>0$ yarim o‘qda qo‘yilgan ikkinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi.

Nihoyat (8.10) integral tenglamani (2-tur Volterra integral tenglamasini) yechgandan so‘ng (masalan ketma-ket yaqinlashish usuli bilan) (8.5)–(8.6) masala yechimi (8.8) formula bilan oshkor ko‘rinishda ifodalanadi.

Shuni ta’kidlash lozimki $\bar{x} = z(t)$ chegaradagi sarfga proporsional bo‘lgan ifodani ham (8.10) dan olish mumkin:

$$G_0^+(t) = \frac{\partial U_2}{\partial \bar{y}}\Big|_{\bar{y}=0} = \frac{\partial U_2}{\partial \bar{x}}\Big|_{\bar{x}=z(t)+0} = U_3(0,t)$$

Haqiqatan ham (8.10) da $\bar{y}$ ni nolga intiltirib,

$$G_0^+(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi_2'(2\sqrt{t}\lambda)e^{-\lambda^2}d\lambda + \int_0^\infty \sigma U_3(\sigma,\tau)e^{-\frac{\sigma^2}{4(t-\tau)}}d\sigma \qquad (8.11)$$

ga ega bo‘lamiz.

Masala-2. Quyidagi masalaning yechimi $U_1(x,t)$ topilsin:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = a_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu}f(U_1-\psi_0,t), \quad 0<x<l(t), \quad t_1<t<T \qquad (8.12)$$

$$U_1|_{t=t_1+0} = \varphi_1(x), \quad 0\le x\le l_0; \quad U_1|_{x=0} = \psi(t) \qquad (8.13)$$

$$U_1|_{x=l(t)-0} = \psi_0 \qquad (8.14)$$

bu yerda φ,ψ va f funksiyalar (7.1) xossalarga ega va $\psi(t_1+0)=\varphi_1(t_0)$ (8.4) belgilashlarni kiritib va yangi funksiyalar va o‘zgaruvchilar ustidagi chiziqchani tashlab yuborib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}-\bar{y}\,\varepsilon(U_1,t),\quad 0<x<z(t),\ \ 0<t\le T_1 \tag{8.15}$$

$$U_1|_{t=0}=\varphi_0(x);\quad U_1|_{x=0}=\psi(t) \tag{8.16}$$

$$U_1|_{x=z(t)-0}=1 \tag{8.17}$$

bu yerda $a=\dfrac{a_1}{a_2},\ \bar{y}=\dfrac{T}{\psi_0\mu}$.

Bu masalani yechish uchun U_1 va φ_0 funksiyalarni $x>l(t)$ sohada nol qilib davom ettiramiz, ya’ni:

$$\breve{U}(x,t)=\begin{cases}U_1(x,t), & 0<x<z(t)\\ 0, & x>z(t)\end{cases}$$

$$\breve{\varphi}_0(x)=\begin{cases}\varphi_0(x), & 0<x<z_0=\dfrac{l_0}{a_2\sqrt{T}}\\ 0, & x>z_0\end{cases}$$

Bo‘lak-bo‘lak silliq $\hat{U}(x,t)$ funksiya quyidagicha aniqlangan umumlashgan hosilaga ega:

$$\breve{U}_x=\left\{\breve{U}_x\right\}_{KN}+\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)}\cdot\delta(x-z(t))$$

$$\breve{U}_{xx}=\left\{\breve{U}_{xx}\right\}_{NK}+\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)}\cdot\delta(x-z(t))+\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)}\cdot\delta'(x-z(t)) \tag{8.18}$$

bu yerda $\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)}$ – $\breve{U}$ funksiyaning $x=z(t)$ nuqtadagi sakrashi. $\breve{U}(x,t)$ funksiyaning (8.18) tenglik bilan aniqlanishiga ko‘ra:

$$\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)}=\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)+0}-\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)-0}=-1 \tag{8.19}$$

$$\left[\breve{U}\right]|_{x=z(t)}=-q_0^-(t),$$

bu yerda

$$q_0^-(t)=\frac{\partial U_1}{\partial x}|_{x=z(t)-0}$$

Endi quyidagi umumlashgan masalani qaraymiz:

$$\frac{\partial \breve{U}}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\breve{U}}{\partial x^2}-a^2\delta'\varepsilon(x-z(t))-a^2g^-(t)\delta(x-z(t))-\breve{\gamma}\varepsilon(\breve{U}-\varphi_0,t) \qquad (8.20)$$

$$\breve{U}|_{x=0}=\psi(t);\;\; \breve{U}|_{t=0}=\breve{\varphi}(x); \qquad (8.21)$$

Bu masala ekvivalent ravishda quyidagi integral tenglamaga olib kelinadi:

$$U_1(x,t)=\int_0^{z_0}\varphi_0(\sigma)G_1(x,\sigma,a^2t)d\sigma+a^2\int_0^t G_{1\sigma}\left(x,0;a_1^2(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{x+z(\tau)}{4a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{\left(x+z(t)\right)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}d\tau-\int_0^t\frac{x-z(\tau)}{4a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{\left(x-z(t)\right)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}d\tau+$$

$$+a^2\int_0^t q_0^-(\tau)G_1\left(x,z(\tau);a_1^2(t-\tau)\right)d\tau-8\int_0^t d\tau\int_0^{z(t)}G_1\left(x,\sigma;a_1^2(t-\tau)\right)f\left((U,\sigma,\tau)-1,\tau\right)d\sigma \quad (8.22)$$

(8.18) va (8.19) lardan foydalanib, (8.22) tenglamaning yechimi (8.15) tenglamani va (8.16) shartni qanoatlantirishini ko‘rish qiyin emas. Demak, agar $\breve{U}(x,t)$ funksiya (8.22) ning yechimi bo‘lsa, u holda bu funksiya (8.17) shartni ham qanoatlantiradi, ya’ni:

$$\breve{U}(x,t)|_{x=z(t)-0}=1 \qquad \text{yoki} \quad \breve{U}(x,t)|_{x=z(t)+0}=0.$$

U holda bu $\breve{U}(x,t)$ funksiya yordamchi **Masala-2** ning ham yechimi bo‘ladi, aniqrog‘i $0<x<z(t)$ sohada $\breve{U}(x,t)=U_1(x,t)$ bo‘ladi. Shuning uchun (8.22) da

$$\lambda=\frac{x-z(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}},\quad \frac{x-z(\tau)}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau=d\lambda-\frac{z'(\tau)d\tau}{2a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

belgilashlar qilib va $x\to z(t)-0$ deb, hamda bir necha almashtirishlar bajarib, (8.17) shartni quyidagicha ifodalaymiz:

$$\int_0^t\frac{z'(\tau)d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}=-2a+a\left[erfc\left(\frac{z(t)-z_0}{2a\sqrt{t}}\right)+erfc\left(\frac{z(t)+z_0}{2a\sqrt{t}}\right)\right]+$$

$$+2a\int_0^{z_0}\varphi_1(\sigma)G_1\left(z(t),\sigma,a^2t\right)d\sigma+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z(t)}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\lambda^2}\varphi\left(t-\frac{z^2(t)}{4a^2\lambda}\right)d\lambda+$$

$$+\int_0^t\frac{z'(t)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[1-\exp\left\{-\frac{\left(z(t)-z(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}+\exp\left\{-\frac{\left(z(t)-z(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]+$$

$$+2a^3\int_0^t q_0^-(\tau)G_1\left(x(t),z(\tau);a^2(t-\tau)\right)d\tau+$$

$$2\bar{\gamma}\int_0^t\int_0^{z(\tau)}G_1\left(z(t),\sigma;a^2(t-\tau)\right)f\left(\varphi_0\left(\frac{U_1}{\sigma},\tau\right)-1,\tau\right)d\sigma d\tau\equiv F. \qquad (8.23)$$

$U_1(x,t)$ va $q_0^-(t)$ noma’lum funksiyalarga nisbatan (8.22), (8.23) sistema yordamchi Masala-2 ga ekvivalent bo‘ladi.

Haqiqatan ham, agar $U_1(x,t)$ funksiya (8.15), (8.16), (8.17) masala yechimi bo‘lsa, yuqorida ko‘rildiki bu masalani har vaqt (8.22), (8.23) integral tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin. Ikkinchi tomondan agar U_1 va q_0^- lar (8.22), (8.23) tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lsa, adabiyotlarda keltirilgan issiqlik potensiallari xossasidan bu U_1 va q_0^- lar (8.15) va (8.16) shartlarni ham qanoatlantiradi. Va nihoyat (8.19) shartni qanoatlantiruvchi (8.20), (8.21) masala yechimi $x\to z(t)-0$ da birga intilar ekan, bundan $\breve{U}(x,t)$ ning aniqlanishiga ko‘ra tasdiq to‘g‘riligi kelib chiqadi.

Bu tasdiqning batafsil isbotini adabiyotlardagi mulohazalardan foydalanib amalga oshirish mumkin.

$$\breve{\breve{U}}(x,t)=\begin{cases}U_1(x,t), & 0<x<z(t)\\ U_2(x-z(t),t), & z(t)<x<+\infty\end{cases}$$

funksiyani qaraymiz, bu yerda U_1 va U_2 Masala-1, Masala-2 larning yechimlari. Quyidagi shartning bajarilishini talab qilamiz:

$$\breve{h}_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=z(t)-0}=\breve{h}_2\frac{\partial U_2}{\partial x}\Big|_{x=z(t)+0} \qquad (8.24)$$

Bu shart $q_0^{\pm}(t)$ ning aniqlanishiga ko‘ra

$$q_0^{+}(t) = q_0^{-}(t)a^2$$

ekanligini anglatadi, shuning uchun (8.11) ga ko‘ra

$$a^2 q_0^{-}(t) = Q(z';U_3;t) \tag{8.25}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerda $Q(z';U_3;t)$ (8.11) ning o‘ng tomoni.

Endi (8.25) ning (8.24) shartga teng kuchli ekanlgini esdan chiqarmasdan (6.9)-(6.12) masalani $t \in (t_1,T), T < \infty$ sohada yechishga kirishamiz.

(8.23) dagi $q_0^{-}(t)$ funksiyani (8.25) formulaga ko‘ra almashtirib,

$$\int_0^t \frac{z'(\tau)d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = F\left(t, z, z', U_1, U_{2x}, \varphi\right) \tag{8.26}$$

ga ega bo‘lamiz. Bu yerdagi (8.23) ning eslatilgan almashtirishdan keyingi o‘ng tomoni.

Endi (8.9), (8.10) va (8.22), (8,23) sistemalarning mos ravishda Masala–1, Masala–2 yordamchi masalalarga ekvivalentligidan foydalanib, ya’ni dastlabki (6.9)–(6.12) masalaning (8.9), (8.10), (8.22), (8.23) integral tenglamlar sistemasiga ekvivalent ekanligini ko‘rsatish mumkin, ya’ni (8.24) shartni qanoatlantiruvchi $\breve{\breve{U}}$ funksiya $U(x,t)$ funksiya bilan ustma-ust tushadi.

(8.23) tenglamaning chap tomoni va $z'(t)$ va $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ funksiyalarning Laplas bo‘yicha svertkasi (o‘ramasi) ekanligini hisobga olib, bu tenglamani Laplas integral almashtirishining xossalariga ko‘ra

$$z'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{F((t, z, z', U_1, U_{1x}, \varphi)\big|_{t=\tau})}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \tag{8.27}$$

ko‘rinishga keltirish mumkin.

Ma’lumki, differensiallash operatori chegaralanmagan operator bo‘lgani uchun (8.27) tenglamaning yechimi masalaning berilganlaridagi kichik o‘zgarishlarga turg‘un bo‘lmasligi ko‘rinadi, ya’ni (8.27) tenglamani yechish masalasi nokorrekt masaladir.

Yuqorida ta’kidlanganidan kelib chiqsak izlanuvchi funksiyaning boshlang‘ich qiymati

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_0(x)=U_1(x,t_1-0), 0<x<z_0\\ \varphi_2(x)=U_2(x,t_1-0), z_0<x<\infty\end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

(6.9)–(6.12) masalaning $(t_0,t_1]$ oraliqda yechimi taqriban topilgan edi, shuning uchun $\varphi(x)$ boshlang‘ich funksiya σ taqribiylikka ega bo‘ladi. Shuni e’tiborga olib, uni φ^σ orqali belgilab olamiz va (8.9), (8.10), (8.22), (8.27) sistemani

$$\left.\begin{aligned}U_1^\sigma&=A_1(x,t;U_1,U_3,U_4),\\ U_2^\sigma&=A_2(x,t;U_3,U_4),\\ U_3^\sigma&=A_3(x,t;U_3,U_4),\\ U_4^\sigma&=A_4(t;U_1,U_3,U_4),\end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Bu yerda $U_3=U_{2x}, U_4=z'(t), z(t)=z_0+\int_0^t U_4(\tau)d\tau$ va $A_i\ (i=1,2,3,4)$ - lar mos ravishda (8.22), (8.9), (8.10), (8.27) tenglamalarning o‘ng tomoni.

(8.28) sistemadagi to‘rtinchi tenglamaga nisbatan yuritilgan mulohazadan kelib chiqib, bu sistemani yechish masalasi umuman olganda nokorrekt masala ekanligi ko‘rinadi.

A.N.Tixonov tomonidan nokorrekt qo‘yilgan masalalarni yechishga yangicha yondashuv qilingan, natijada qo‘yilgan masalaning taqribiy yechimi topilgan. Bu metod asosida regulyarlashtiruvchi operator degan fundamental tushuncha yotadi.

Shuni ta’kidlash lozimki, agar qo‘yilgan masalani dastlab korrektlikka, xususan berilganlardagi xatolikka nisbatan turg‘unlikka tekshirilmasa olingan natijaning (rezultatning) to‘g‘riligiga ishonib bo‘lmaydi, ayniqsa bu holat masalani sonli usulda yechishda alohida muhim o‘rin tutadi.

Faraz qilaylik φ^{σ} va φ lar $U(x,t)$ funksiyaning $t \to t_1 - 0$ dagi taqribiy va aniq qiymatlari bo‘lsin. Shuningdek boshlang‘ich qiymatlardagi xatolik

$$\left\|\varphi-\varphi^{\sigma}\right\|_{c^2} = \max\left(\left\|\varphi_1-\varphi_1^{\sigma}\right\|_{c^2},\ \left\|\varphi_2-\varphi_2^{\sigma}\right\|_{c^2}\right) < \sigma$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Bu yerda

$$\left\|\varphi_i-\varphi_i^{\sigma}\right\|_{c^2} = \max\sum_{n=0}^{2}\left|\varphi_i^{(n)}-\left(\varphi_i^{\sigma}\right)^{(n)}\right|,\ i=1,2$$

A_4 operatorni regulyarlashtirishni quyidagicha amalga oshiramiz.

(8.23) ni Laplas almashtirishi tasvirlari sohasida quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\hat{U}_4 = \hat{F};\ \hat{U}_4 = \sqrt{\pi}\hat{F}, \tag{8.29}$$

Bu yerda $\hat{U}_4$ va $\hat{F}$ – mos ravishda U_4 va F funksiyalarning Laplas integral almashtirishidagi tasvirlari.

$$\hat{U}_4 = \int_0^{\infty} U_4 e^{-pt}dt, \qquad \hat{F} = \int_0^{\infty} F e^{-pt}dt.$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\sqrt{p}e^{-\alpha\sqrt{p}} = \sqrt{p}$ tenglikni e’tiborga olib, (8.28) tenglama o‘rniga

$$\hat{U}_4 = \sqrt{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}\hat{F}, \quad \alpha > 0 \tag{8.29}$$

tenglamani qaraymiz. (8.29) $\alpha \to 0$ (8.28) bilan ustma-ust tushadi.

Original hosilasining integral almashtirishi xossalariga ko‘ra:

$$\left(\frac{\alpha^2}{2t}-1\right)\cdot\left(2\sqrt{\pi}t^{3/2}\right)\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} = B(\alpha,t).$$

Ifodaga quyidagi original mos keladi:

$$\int_0^t B(\alpha,t-\tau)F(\sigma;U_1^{\sigma},U_2^{\sigma},U_3^{\sigma},U_4^{\sigma};\varphi^{\sigma})d\tau.$$

U holda original funksiyalar sohasida (8.29) tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$U_4 = \int_0^t B(\alpha, t-\tau) F(\sigma; U_1^{\sigma}, U_2^{\sigma}, U_3^{\sigma}, U_4^{\sigma}; \varphi^{\sigma}) d\tau. \qquad (8.30)$$

Agar operator (funksiya) yetarlicha silliq bo‘lsa, u holda (8.30) ning yechimi σ xatolikka nisbatan turg‘un bo‘ladi.

Tabiiyki (8.30) ning o‘ng tomonidagi integral operator $\varphi, U_n (n = 1,2,3,4)$ larning ixtiyoriy chekli atrofida va ixtiyoriy $\alpha > 0$ da aniqlangan.

Bu esa regulyarlashtiruvchi operatorga qo‘yilgan birinchi talabning bajarilishini anglatadi.

(8.28) sistemaga mos keluvchi regulyarlashtirilgan sistema sifatida quyidagi sistemani qaraymiz:

$$U_j^{\alpha\sigma} = R_j (U_1^{\alpha\sigma}, U_3^{\alpha\sigma}, U_4^{\alpha\sigma}; \varphi^{\sigma}, t),\ j = 1,2,3,4. \qquad (8.31)$$

Bu yerda

$$R_j (U_1^{\alpha\sigma}, U_3^{\alpha\sigma}, U_4^{\alpha\sigma}; \varphi^{\sigma}, t) = A_j (U_1^{\alpha\sigma}, U_3^{\alpha\sigma}, U_4^{\alpha\sigma}; \varphi^{\sigma}, t),\ j = 1,2,3.$$

$$R_4 (U_1^{\alpha\sigma}, U_3^{\alpha\sigma}, U_4^{\alpha\sigma}; \varphi^{\sigma}, t) = \int_0^t B(\alpha, t-\tau) F(U_1^{\alpha\sigma}, U_3^{\alpha\sigma}, U_4^{\alpha\sigma}; \varphi^{\sigma}, t) d\tau. \qquad (8.32)$$

$R_j,\ j = 1,2,3,4$ operatorlar xossalarini o‘rganamiz. Faraz qilaylik

$$z(t) = z_0 = O\left(t^{\frac{1}{2}+\vartheta}\right), \vartheta \geq \frac{1}{2} \ \text{ va } \ t^{-\frac{1}{2}} \cdot U_3 \in C$$

bo‘lsin. U holda operator o‘zining va $U_i, i = 1,2,3,4,$ φ va t argumentlariga nisbatan uzluksiz bo‘ladi. Bu holda operator

$$U_1(z(t),t) \in C_{(0,T]}, U_2(z(t),t) \in C_{(0,T]}, t^{-\frac{1}{2}} \cdot U_3(z(t),t) \in C_{(0,T]}, t^{\vartheta-\frac{1}{2}} \cdot z'(t) \in C_{(0,T]}$$

funksiyalar to‘plamini $t \to 0$ da $O(t)$ tartibga ega uzluksiz funksiyalar to‘plamiga o‘tkazadi (akslantiradi).

Bu tasdiqni tekshirish qiyin emas. Haqiqatan ham

$$\varphi_1'(z_0) = \frac{1}{\alpha^2} q_0^+(0)$$

tenglikni e'tiborga olsak

$$\int_0^t q_0^+(\tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(z(t)-z(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau;$$

$$\int_{-\frac{z(t)}{2a\sqrt{t}}}^{-\frac{z(t)-z_0}{2a\sqrt{t}}} (\varphi_1(z(t)+2a\sqrt{t}\lambda)-\varphi(z_0))e^{-\lambda^2} d\lambda;$$

Integrallarda $O(\sqrt{t})$ tartibga ega qo'shiluvchilar o'zaro yeyishib ketadi. Chunki φ_1 funksiya C^2 klassga tegishli va

$$q_0^+(t) = \left(q_0^+(t) - q_0^+(\theta)\right) + q_0^+(0)$$

$$\varphi(z(t)+2a\sqrt{t}\lambda) - \varphi(z_0) = \varphi''(z_0)(z(t)-z_0+2a\sqrt{t}\lambda) +$$
$$+[\varphi'(z_0+\theta(z(t)-z_0+2a\sqrt{t}\lambda)-\varphi'(z_0)](z(t)-z_0+2a\sqrt{t}\lambda),\ 0<\theta<1$$

ayniyatlar o'rinli bo'lgani uchun yuqoridagi natija to'g'ri bo'ladi. Bir necha murakkab bo'lmagan almashtirishlar bajarib

$$\begin{aligned} \left|F(U_1^{\alpha\sigma},U_3^{\alpha\sigma},U_4^{\alpha\sigma};\varphi^\sigma,t) - F(U_1,U_3,U_4;\varphi;t)\right| \le \sum_{i=3}^{4} \chi_{4i}(t)\left\|U_i^{\alpha\sigma}-U_i\right\|_C + \\ +\chi_4(t)\left\|\varphi^\sigma-\varphi\right\|_{C^2} + \chi_{4,1}(t)\left\|U_1^{\alpha\sigma}-U_1\right\|_C. \end{aligned} \tag{8.33}$$

bu yerda $\chi_4(t)$ va $\chi_{4i},\ i=1,3,4\ \ t\to 0$ da $O(t)$ tartibga ega funksiyalardir.

(8.26) tenglama aniq berilgan φ ga mos U_4 yechimga ega, deb bu aniq yechim va regulyarlashtirilgan $U_4^{\alpha\sigma}$ yechimlar ayirmasini baholaymiz:

$$\left|U_4^{\alpha\sigma}-U_4\right| = \left|R_4(U_1^{\alpha\sigma},U_3^{\alpha\sigma},U_4^{\alpha\sigma};\varphi^\sigma,t) - A_4(U_1,U_3,U_4;\varphi;t)\right|.$$

Quyidagi tengsizliklar o'rinli

$$\begin{aligned}&\left|R_4(U_1^{\alpha\sigma},U_3^{\alpha\sigma},U_4^{\alpha\sigma};\varphi^\sigma,t)-A_4(U_1,U_3,U_4;\varphi;t)\right|\le\\&\left|R_4(U_1^{\alpha\sigma},U_3^{\alpha\sigma},U_4^{\alpha\sigma};\varphi^\sigma,t)-R_4(U_1^{\alpha},U_3^{\alpha},U_4^{\alpha};\varphi^\sigma,t)\right|+\\&\left|R_4(U_1^{\alpha},U_3^{\alpha},U_4^{\sigma};\varphi^\sigma,t)-R_4(U_1^{\alpha},U_3^{\alpha},U_4^{\alpha};\varphi,t)\right|+\\&\left|R_4(U_1^{\alpha},U_3^{\alpha},U_4^{\alpha};\varphi,t)-A_4(U_1,U_3,U_4;\varphi,t)\right|.\end{aligned}\tag{8.34}$$

bo‘lgani uchun (8.34) ning o‘ng tomonidagi ayirmalarni baholash yetarli. (8.34) ning dastlabki uchta qo‘shiluvchini mos ravishda $\Delta J_{41},\ \Delta J_{42},\ \Delta J_{43}$ deb belgilab olamiz.

Yangi $\tau=\lambda t$ o‘zgaruvchi kiritib va (8.34) baholashni e’tiborga olib hamda

$$B(\alpha,(1-\lambda)\cdot t)\le C_4\cdot t^{-3/2}$$

tengsizlikni hisobga olsak, C_4-t dan bog‘liq emas, quyidagini olamiz.

$$\Delta J_{41}\le C_4\sum_{i=3}^{4}t^{-\frac{1}{2}}\chi_{4i}(t)\left\|U_i^{\alpha\sigma}-U_i^{\alpha}\right\|+C_4\cdot t^{-\frac{1}{2}}\chi_{4i}(t)\left\|U_1^{\alpha\sigma}-U_1^{\alpha}\right\|.\tag{8.35}$$

Xuddi shunday

$$\Delta J_{42}\le C_4\cdot t^{-\frac{1}{2}}\chi_4(t)\cdot\left\|\varphi^{\alpha\sigma}-\varphi\right\|_{C^2}.\tag{8.36}$$

tengsizlikni olamiz.

Quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\begin{aligned}\Delta J_{43}\le&\left|\int_0^t\Big(F(U_1^{\alpha},U_3^{\alpha},U_4^{\alpha};\varphi,\tau)-F(U_1,U_3,U_4;\varphi;\tau)\Big)B(\alpha,t-\tau)d\tau\right|+\\&+\left|\int_0^t F(U_1,U_3,U_4;\varphi;t)B(\alpha,t-\tau)d\tau-\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{F(U_1,U_3,U_4;\varphi;\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau\right|.\end{aligned}$$

Agar $U_i^{\sigma\sigma}$ ni U_i^{α} $(i=1,3,4)$ ga almashtirsak birinchi qo‘shiluvchi (8.35) bilan ustma-ust tushadi. Ikkinchi qo‘shiluvchini, Laplas, almashtirishiga teskari almashtirish formulasidan foydalansak, quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta J_{44}=\left|R_4(U_1,U_3,U_4;\varphi;\tau)-A(U_1,U_3,U_4;\varphi;\tau)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty}\sqrt{p}\,(e^{-\alpha\sqrt{p}}-1)\hat{F}\cdot e^{pt}dp\right|,i=\sqrt{-1}.$$

Bu yerdan

$$\Delta J_{44} \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sqrt{p}(1-e^{-\alpha\sqrt{p}})\hat{F}\right|e^{c_0 t}d\mu_0,$$

bu yerda $p = c_0 + i\mu_0$.

Oxirgi integralni mos ravishda va $(-\infty,-N),(-N,N)$ va $(N,+\infty)$ kesmalar bo‘yicha olingan uchta integral yig‘indisi ko‘rinishda tasvirlaymiz.

U holda xosmas integrallarni, N yetarlicha katta bo‘lganda xohlagancha kichik qilish mumkin, chunki $t \to 0$ da

$$F(U_1,U_3,U_4;\varphi;t) = O(t)$$

bo‘lgani uchun $\hat{F}\,\mu_0$ yetarlicha katta bo‘lganda $\frac{1}{p^2}$ tartibli bo‘ladi. Chekli kesma bo‘yicha olingan integral $\left(\left|\sqrt{p}\hat{F}\exp\{pt\}\right|\right)$ chegaralangan bo‘lgani uchun) $\alpha \to 0$ da nolga intiladi. Demak

$$\Delta J_{43} \le C_4\sum_{i=3}^{4} t^{-\frac{1}{2}}\chi_i(t)\left\|U_i^{\alpha} - U_i\right\| + D_4\omega(\alpha) \tag{8.37}$$

bu yerda $\omega(\alpha) = \left\|1-\exp\left\{-\alpha\sqrt{p}\right\}\right\|, D_4$ esa α dan bog‘liq emas. Shunday qilib (8.35)–(8.37) larni hisobga olib quyidagiga kelamiz:

$$\begin{gathered}\left|U_4^{\alpha\sigma} - U_4\right| \le \left|R_4(U_1^{\alpha\sigma},U_3^{\alpha\sigma},U_4^{\alpha\sigma};\varphi^{\sigma},t) - A_4(U_1,U_3,U_4;\varphi,t)\right| \le \\ \le C_4\sum_{i=3}^{4}\frac{\chi_{4i}(t)}{\sqrt{t}}\left[\left\|U_i^{\alpha\sigma} - U_i^{\alpha}\right\|_C + \left\|U_i^{\alpha} - U_i\right\|_C\right] + C_4\cdot\frac{\chi_{4i}(t)}{\sqrt{t}}[\left\|U_1^{\alpha\sigma} - U_1^{\alpha}\right\|_C + \\ + \left\|U_i^{\alpha} - U_i\right\|_C] + \frac{\chi_{4i}(t)}{\sqrt{t}}\left\|\varphi^{\sigma} - \varphi\right\|_{C^2} + D_4\omega(\sigma)\end{gathered} \tag{8.38}$$

Xuddi shunday

$$\begin{gathered}\left|R_j(U_1^{\alpha\sigma},U_3^{\alpha\sigma},U_4^{\alpha\sigma};\varphi^{\sigma},t) - R_j(U_1,U_3,U_4;\varphi,t)\right| \le \\ \le C_j\sum_{i=1}^{4} t^{-\frac{1}{2}}\chi_{4i}(t)\left\|U_i^{\alpha\sigma} - U_i^{\alpha}\right\| + \left\|U_i^{\alpha} - U_i\right\|_C + t^{-\frac{1}{2}}\chi_4(t)\left\|\varphi^{\sigma} - \varphi\right\|_{C^2} + D_j\omega(\alpha).\end{gathered}$$

Sonli parametr σ (8.27) sistemaning berilganlaridagi xatolikni xarakterlaydi. Regulyarizatsiya parametrik α ni berilganlardagi xatolik σ bilan moslashtirib olish kerak. Bu moslashuv quyidagicha amalga oshiriladi: $\sigma \to 0$ da, ya'ni taqribiy berilganlar aniq berilganlarga intilganda $U_i^{\alpha\sigma}$ regulyarlashtirilgan taqribiy yechimlar sistemaning aniq yechimi U_i larga intilsin [18].

Bu ikki σ va α parametrlar orasidagi bog'lanishni o'rnatish uchun quyidagi yo'lni tutamiz:

$$U_4^{\alpha\sigma} - U_4 = R_4(U_1^{\alpha\sigma}, U_3^{\alpha\sigma}, U_4^{\alpha\sigma}; \varphi^\sigma, t) - A_4(U_1, U_3, U_4; \varphi, t)$$

tenglamani ketma-ket yaqinlashish metodini qo'llab yechamiz:

$$\left(U_4^{\alpha\sigma} - U_4\right)_{n+1} = \left(R_4(U_1^{\alpha\sigma}, U_3^{\alpha\sigma}, U_4^{\alpha\sigma}; \varphi^\sigma, t) - A_4(U_1, U_3, U_4; \varphi, t)\right)_n .$$

(8.38) tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun, ya'ni

$$\left\|U_4^{\alpha\sigma} - U_4\right\| \le C_1(t)\left\|\varphi^\sigma - \varphi\right\|_{C^2} + C_2(t)\left\|U_4^{\alpha\sigma} - U_4^\sigma\right\| + C_3(t)\left\|U_4^\sigma - U_4\right\| + D_4\omega(\alpha).$$

Bu yerda $C_i(t) = o(\sqrt{t}),\ i = 1,2,3.$ U holda

$$\left\|U_4^{\alpha\sigma} - U_4\right\| \le C_{1n}(t)\left\|\varphi^\sigma - \varphi\right\| + C_{2n}(t)D_n\omega(\alpha).$$

bu yerda

$$C_{in}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots(k+\frac{1}{2})} = C_i^*\sqrt{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}, \quad i = 1,2,\ldots$$

va $n \to \infty$ da $C_{in}(t) \to C_i^*\sqrt{t}\cdot e^t$.

Agar $\left\|\varphi^\sigma - \varphi\right\|_{C^2} < \sigma^\beta, \beta > 0$ bo'lsa, u holda

$$\left\|U_4^{\alpha\sigma} - U_4\right\| \le \sqrt{t}(C_1^* \cdot e^t + C_1)\sigma^\beta + D_4\omega(\alpha)(1 + C_2^*\sqrt{t}e^t) \le$$
$$\le \sqrt{T}(C_1^* \cdot e^t + C_1)\sigma^\beta + D_4\omega(\alpha)(1 + C_2^*\sqrt{T}e^T) = \gamma G^\beta.$$

Bu yerdan

$$\omega(\alpha) = \gamma_1 G^\beta \tag{8.39}$$

bu yerda

$$\gamma_1 = \frac{\gamma - \sqrt{T}(C_1^* e^T - C_1)}{D_4(1 + C_2\sqrt{T}e^T)}, \ \gamma \geq \sqrt{T}(C_1^* e^T + C_1).$$

Demak regulyarlashtirish parametrik α ni (8.39) tenglamaning yechimi sifatida olish kerak bo‘lar ekan.

Tabiiyki bu holda agar $\sigma \to 0$ bo‘lsa, $\omega(\alpha) \to 0$ bajariladi va shu bilan birga $\left\| U_4^{\alpha\sigma} - U_4 \right\| \to 0$ bo‘ladi.

Yana shuni ta’kidlash lozimki, (8.28) sisemada $U_4 = z'(t) -$ noma’lum funksiya aslida noma’lum chegarani aniqrog‘i $x = l(t)$ funksiyani ifodalar edi. Ma’lumki chegaraviy masalalarda izlanuvchi funksiyadan tashqari funksiyaning aniqlanish sohasining chegarasi (yoki chegaraning bir qismi) noma’lum bo‘lsa, bunday masalalar teskari masala deb yuritiladi va teskari masalalarning aksariyati nokorrekt qo‘yilgan masalalar bo‘ladi.

Keyingi bobda teskari masalalar va ularning turlari hamda ularni yechish metodlari haqida to‘xtalamiz.

II – BOB. TESKARI MASALALAR

§ 1. To‘g‘ri va teskari chegaraviy masalalar tushunchasi

Chegaraviy masalalar matematika va fizikada muhim rol o‘ynaydi. Chegaraviy masala deganda, sohada biror differensial tenglamani (yoki differensial tenglamalar sistemasini) qanoatlantiruvchi, sohaning chegarasida esa berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyani (yoki funksiyalar sistemasini) topish (izlash) masalasi tushuniladi. Bu ta’rifga D sohada analitik va uning chegarasida berilgan qiymatga teng $f(z)$ kompleks funksiyani aniqlash masalasi ham tushadi. Bu holda $f(z)$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qiymatlari D sohada Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

Chegaraviy masalalar XVIII asrdan boshlab (Eyler, Laplas tomonidan) matematikaga kirgan bo‘lishiga qaramasdan haligacha dolzarb muammolardan biri hisoblanadi. Shunisi e’tiborga loyiqki, chegaraviy masalalar dastlab mexanika va fizika masalalari bilan bog‘liq muammolarni hal qilgan.

Chegaraviy masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi ko‘pincha fizik va mexanik mulohazalardan kelib chiqadi.

Chegaraviy masalalardan tashqari teskari chegaraviy masalalar ham qaraladi. To‘g‘ri chegaraviy masalalarda differensial tenglamalar, yechimning mavjudlik sohasi va undan tashqari u yoki bu chegaraviy shartlar beriladigan bo‘lsa, teskari chegaraviy masalalarda esa differensial tenglamalar va chegaraviy shartlar beriladigan bo‘lib, chegarasida chegaraviy shart beriladigan soha izlanadi. Izlanayotgan sohani aniqlash uchun to‘g‘ri chegaraviy masalalar uchun yetarli bo‘lgan chegaraviy shartlardan tashqari bir necha qo‘shimcha shartlar ham beriladi. Masalan, Laplas tenglamasi va garmonik funksiyaning chegaraviy qiymatlari va uning normal hosilasining qiymatlari berilgan bo‘lib, bundan tashqari chegaraviy qiymatlar biror parametrga bog‘liq bo‘lgan, masalan, soha chegarasining yoyidan bog‘liq holda bo‘ladi.

Eng dastlabki teskari masala R.Kurant tomonidan yechilgan: barcha bir xil perimetrli va zichligi ma’lum membranalar ichida eng past ton beradigan membrana doiraviy membrana ekanligi isbotlangan. Bu masalada differensial tenglama

$$\Delta U + \lambda U = 0$$

ko‘rinishda, chegaraviy shart esa $U = 0$ ko‘rinishda bo‘lib, bundan tashqari soha chegarasining uzunligi (perimetri) berilgan, shuningdek dastlabki xos qiymat eng kichik hisoblanadi.

Ma’lumki, chegaraviy masalalar ikki tipga bo‘linadi: birinchisi matematik fizikaning chegaraviy masalalari, ikkinchisi esa analitik funksiyalar nazariyasining chegaraviy masalalaridir.

Hozirgi paytda analitik funksiyalar nazariyasining teskari chegaraviy masalalari Rossiya Federatsiyasi Qozon shahri matematiklari tomonidan (M.T.Nujin, G.G.Tumashev, F.D.Gaxov va boshqalar tomonidan) atroflicha o‘rganilgan. Bu masalalar gidromexanikadan kelib chiqqan bo‘lib, amaliy xarakterga egadir.

Teskari chegaraviy masalalar to‘g‘ri chegaraviy masalalardan prinspial farq qiladi. To‘g‘ri chegaraviy masalalar jismlarning u yoki fizik xossalarini (hodisalarini) o‘rganishda hosil bo‘ladi. Bunda yechimlarning aniqlanish sohasi va bu sohaning chegarasi berilgan bo‘ladi.

Teskari chegaraviy masalalarda chegaraviy shartlarga ko‘ra yechimdan tashqari soha ham izlanadi. Shuningdek, teskari chegaraviy masalalarda sohani aniqlashdan tashqari bu sohaning birvaraqli bo‘lishligi ham muhim shartlardan hisoblanadi.

Odatda, amaliyotda ko‘pincha konstruktiv xarakterdagi masalalar, ya’ni tayyor obyektning fizik xossalarini emas, balki oldindan ma’lum xossalarga ega obyektni qurish masalasi uchraydi. Bu masalalar ham teskari chegaraviy masalalar sinfiga mansubdir.

§ 2. Asosiy teskari chegaraviy masalaning qo‘yilishi. Ichki teskari masalalar

II bobning birinchi paragrafida (birinchi bandida) teskari chegaraviy masalalarda soha chegarasi izlanuvchi element hisoblanadi, chegaraviy shartlar esa, odatdagi to‘g‘ri chegaraviy masaladagiga nisbatan bittaga ko‘payadi. Analitik funksiyalar nazariyasi chegaraviy masalasida chegarada izlanuvchi analitik funksiya haqiqiy qismi yoki mavhum qismi, funksiya moduli va hokazolar berilishi mumkin.

Analitik funksiyalar nazariyasining teskari chegaraviy masalalarida esa izlanuvchi soha chegarasida ikkita shart berilmog‘I darkor. Bu shartlar bir-biridan bog‘liq bo‘lmasligi lozim.

Teskari chegaraviy masalalarning amaliyotga tatbiqi shuni ko‘rsatadiki, bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan ikki xil chegaraviy shartlarning turli kombinatsiyalari uchrashi mumkin.

Agar izlanuvchi D_z sohaning chegarasi L_z da $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari berilgan bo‘lsa, u holda bu masalani asosiy teskari chegaraviy masala deymiz. Shunday qilib, asosiy teskari chegaraviy masala quyidagicha qo‘yiladi: Chegarasida analitik funksiyaning qiymatlari berilgan holda soha aniqlansin.

Birinchi bandda eslatilganiga ko‘ra teskari chegaraviy masala yechimi D_z sohalar to‘plamidan va chegarada berilgan qiymatni qabul qiladigan $w(z)$ funksiyadan iborat bo‘lar ekan.

Biroq masala qo‘yilishi jumlasida izlanuvchi $w(z)$ funksiya masalasi eslatilmaydi, chunki sohaning formasi aniq bo‘lgandan so‘ng $w(z)$ funksiya qiyinchiliklarsiz aniqlanadi.

Agar izlanuvchi $w(z)$ funksiyaga oldindan qo‘shimcha cheklovlar bo‘lmasa, u holda qo‘yilgan teskari chegaraviy masalani tekshirish ancha qiyin kechadi, ya’ni masala hamma vaqt ham aniq yechimga ega bo‘lavermaydi. Bundan keyin agar alohida teskari shartlar bo‘lmasa, $w(z)$ va $\frac{dw}{dz}$ lar yopiq $\overline{D}_z$ sohada uzluksiz va $\frac{dw}{dz}$ nolga aylanmaydi deb faraz qilamiz.

Bundan tashqari, mulohazalarni murakkablashtirmaslik uchun hozircha $w(z)$ funksiyalarni D_z da birvaraqli bo‘lgan holni qaraymiz.

Hozircha biz teskari chegaraviy masalalarning sodda holini, ya’ni $w(z)$ funksiya D_z sohaning hamma joyida regulyar (D_z da analitik va birorta ham maxsuslikka ega emas) yoki D_z sohada bitta oddiy qutbga ega deb hisoblaymiz.

Ichki va tashqi masalalar bir-biridan ancha farq qiladi, $w(z)$ funksiyaning qutbga ega bo‘lishi esa masalani yechish jarayonida unchalik qiyinchilik tug‘dirmaydi. Shuni ta’kidlash lozimki, to‘g‘ri chegaraviy masalalar qaralayotgan paytda hamma vaqt ichki masaladan tashqi masalaga o‘tish mumkin bo‘ladi. Teskari chegaraviy masalalarda esa bunday o‘tish yechimni topmasdan oldin mumkin emas.

Nihoyat oxirgi izohni beramiz! To‘g‘ri chegaraviy masalalarda chegaraviy shartlar kontur nuqtalarining joylashishini aniqlaydigan salohiyatga ega ixtiyoriy parametr orqali ifodalanishi mumkin. Bu holda zarurat tug‘ilganda bir parametrni boshqa parametrga almashtirish mumkin bo‘ladi. Teskari chegaraviy masalalarda bunday parametrning roli ancha muhim hisoblanadi. Quyida bu parametrning masalani yechish metodiga ham, hosil bo‘lgan yechimning aniqlik darajasiga ham kuchli ta’sir qilishi ko‘rsatishi isbotlanadi. Eng qulay parametr yoy absissasi hisoblanadi, bu yoy nuqtaning kontur ustida joylashuvini hamma vaqt bir qiymatli aniqlab beradi. Ammo ko‘pgina boshqa hollarda parametr sifatida yoy uzunligi emas boshqa parametrlardan foydalansa ham bo‘ladi, faqat tanlangan parametr orqali chegaraviy shartlar bir qiymatli ifodalansa bas.

1. Dastlab regulyar funksiya bo‘lgan holni qaraymiz. Demak, chekli D_z sohaning chegarasi yopiq kontur L_z izlanadi, bu kontur ustida

$$\varphi = f_1(s), \quad \psi = f_2(s) \quad (0 \le s \le l) \tag{2.1}$$

shartlar bajarilganda.

Bu yerda s orqali yoy absissasi, $l-$ izlanayotgan konturning uzunligi: $f_1(l) = f_1(0), \quad f_2(l) = f_2(0).$

$f_1(s)$ va $f_2(s)$ funksiyalar birinchi tartibli bir qiymatli hosilalarga ega va bu hosilalar bir vaqtda nolga aylanmaydi hamda

$$\left| f_j'(s_2) - f_j'(s_1) \right| \le A \left| s_2 - s_1 \right|^{\alpha}, \quad (A > 0,\ 0 < \alpha \le 1) \tag{2.2}$$

Gyolder shartiga bo‘ysunadi.

(2.1) munosabatlar L_w yopiq konturning parametr tenglamasidir, bu kontur chekli D_w sohaning chegarasi vazifasini o‘taydi, bu sohaga $w(z)$ funksiya yordamida izlanuvchi D_z soha conform akslanadi. $w(z)$ funksiya bir qiymatli bo‘lgani uchun L_w kontur sodda bo‘lishi zarur, ya’ni o‘z-o‘zini kesmaydigan bo‘lishi lozim. Bu holat ikkita bir-biridan farq qiluvchi s_1 va s_2 yoy absissalari (faqat 0 va l dan boshqalar) uchun

$$\left[f_1(s_1) - f_1(s_2) \right]^2 + \left[f_2(s_1) - f_2(s_2) \right]^2 \neq 0 \tag{2.3}$$

tengsizlik bajarilishini taqoza etadi.

L_w kontur yoyining elementini $d\tau$ orqali belgilab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$d\tau = \pm\sqrt{\left(f_1'(s)\right)^2 + \left(f_2'(s)\right)^2}\, ds,$$

$$\tau(s) = \pm\int_0^s \sqrt{\left(f_1'\right)^2 + \left(f_2'\right)^2}\, ds + \tau_0, \tag{2.4}$$

$\tau = \tau(s)$ yoki $s = s(\tau)$ bog‘lanishlar ma’lum $\left(L_w\right)$ kontur va izlanuvchi $\left(L_z\right)$ kontur yoy absissalari orasidagi bog‘lanishni aniqlaydilar.

$$R(w) = \ln\frac{dz}{dw} \tag{2.5}$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Yuqorida keltirilgan shartlarga ko‘ra $\frac{dz}{dw}$ funksiya analitik bo‘ladi hamda D_w sohada nolga ham maxsuslikka ham ega bo‘lmaydi.

$R(w)$ funksiyaning haqiqiy qismlari L_w konturda ma’lum ekan

$$\ln\left|\frac{dz}{dw}\right| = \ln\left|\frac{ds}{d\tau}\right| = p(\tau)$$

bo‘ladi, u holda $R(w)$ funksiya sof mavhum qo‘shiluvchi aniqligida topiladi:

$$R(w) = sp(\tau).$$

$R(w)$ funksiyani topib, so‘ngra (2.5) dan $z = z(w)$ funksiyani aniqlaymiz, bu funksiya D_w sohani izlanuvchi D_z sohaga akslantiruvchidir:

$$Z = \int e^{R(w)} dw + C, \tag{2.6}$$

bu yerda $C-$ ixtiyoriy kompleks o‘zgarmas.

Shunday qilib, qo‘yilgan teskari chegaraviy masala $R(w)$ funksiyaning haqiqiy qismi uchun ma’lum D_w sohada Dirixle masalasini yechishga olib kelindi va bu Dirixle masalasini ma’lum metodlar yordamida yechish mumkin bo‘lishi ravshan. Agar konform akslantirish metodini qo‘llashni davom ettirsak, konkret masala yechilayotganda D_w sohadan Shvarts operatorining oshkor ko‘rinishi ma’lum bo‘lgan sohaga o‘tish, masalan, doiraga o‘tish ma’qul bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $w = w(\xi)$ funksiya $\xi = \rho e^{i\gamma}$ kompleks o‘zgaruvchidagi $|\xi| < 1$ sohani D_w sohaga konform akslantiruvni amalga oshiruvchi bo‘lsin.

Bu funksiyani to‘la aniqlangan bo‘lishi uchun, masalan, D_w sohaning ixtiyoriy tanlangan $w = w_1$ nuqtasi va L_w konturdagi $\tau = 0$ bo‘ladigan nuqtalar $\xi = 0$ va $\xi = 1$ nuqtalarga akslanishini talab qilish yetarli bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, teskari chegaraviy masalaning $s = s(\tau)$ bog‘lanishni butunasiga aniqlaydigan yechimi yuqorida eslatilgan nuqtalarning tanlanishidan bog‘liq bo‘lmaydi.

$$w(s) = f_1(s) + if_2(s) = w\left(e^{i\gamma}\right) \tag{2.7}$$

tenglik konform akslantirish paytida L_z va L_w konturlar o‘rtasida moslik o‘rnatadi. Bu tenglikdan foydalanib, $s = s(\gamma)$ bog‘lanishni topamiz.

Bu safar yordamchi funksiya vazifasini bir qiymatli

$$X(\xi) = \ln\frac{dz}{dw} = \ln\left|\frac{dz}{d\xi}\right| + i\arg\frac{dz}{d\xi} \tag{2.8}$$

funksiya o‘taydi. $\left(\dfrac{dz}{d\xi} \neq 0,\ |\xi| \leq 1\right)$ (doira ichida).

Bu (2.8) funksiya haqiqiy qismining $\xi = 1$ aylana ustidagi qiymati ma’lum bo‘lib, u quyidagiga teng:

$$\ln\left|\frac{dz}{d\xi}\right| = \ln\left|\frac{ds}{d\gamma}\right| = \xi(\gamma).$$

$\dfrac{dz}{d\xi}$ ifoda $\dfrac{dz}{dw}$ ifodaga o‘xshab, $|\xi| \le 1$ doirada maxsuslikka ega emas, shuning uchun Shvarts formulasiga asosan $X(\xi)$ funksiya uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$X(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \xi}{e^{i\gamma} - \xi} d\gamma + i\beta \tag{2.9}$$

Izlanayotgan akslantiruvchi funksiya

$$Z(\xi) = \int e^{X(\xi)} d\xi + C \tag{2.10}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$Z(\xi)$ funksiya aniqlangandan so‘ng $w(\xi)$ va mos ravishda D_z soha (2.10) dan va $w = w(\xi)$ munosabatdan ξ o‘zgaruvchini yo‘qotishdan hosil bo‘ladi.

(2.10) da $\xi = e^{i\gamma}$ deb olib, L_z kontur nuqtalari koordinatalarini aniqlaymiz:

$$z = x + iy = i\int_0^{\xi} \frac{ds}{d\gamma} e^{i(\eta+\gamma)} d\gamma + C, \tag{2.11}$$

bu yerda $\eta - \operatorname{Im} X$ ning chegaraviy qiymati bo‘lib, bu qiymat

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\gamma) ctg \frac{\gamma - \gamma'}{2} d\gamma' + \beta \tag{2.12}$$

formula bilan topiladi.

Ko‘rinib turibdiki, (2.10) tenglik bilan aniqlangan $z(\xi)$ funksiya $|\xi| < 1$ doirani yopiq kontur bilan chegaralangan D_z sohaga akslantiradi. Bu xulosa (2.10) tenglikdagi integral ostidagi ifodaning $|\xi| < 1$ doirada maxsuslikka ega emasligidan kelib chiqadi.

(2.9) va (2.10) tengliklardan ko‘rinadiki, $z(\xi)$ ifodaga uchun D_z izlanuvchi sohaning formasiga ta’sir qilmaydigan β va C o‘zgarmaslar kiradi.

Shunday qilib, β va C o‘zgarmaslarning turli qiymatlariga mos keluvchi L_z konturlar (yoki D_z sohalar) bir-biridan faqat z kompleks tekislikda joylashuvidan farq qiladilar. Bu konturlar to‘plamini (majmuasini) qo‘yilgan teskari chegaraviy masalaning yechimi deb qarash mumkin.

2. Funksiya oddiy qutbga ega bo‘lgan hol.

Bu holda ichki masala oldingi regulyar funksiya bo‘lgan holdagi mulohazalar takrorlanadi, faqat ayrim detallarda kichik o‘zgarishlar bo‘ladi.

$w(z)$ funksiyaning z kompleks tekislikda joylashgan qutbini koordinatalar boshi sifatida qabul qilamiz. (2.1) chegaraviy qiymatlar uchun qo‘yilgan cheklovlarni hisobga olib, L_w konturni quramiz. Tabiiyki, D_w soha bu holda L_w konturga nisbatan tashqi soha bo‘ladi.

$$w = w(z) = \frac{a}{\xi} + a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots$$

funksiya yordamida D_w sohani $|\xi| < 1$ sohaga akslantiramiz va 1-banddagiga o‘xshash $s = s(\gamma)$ moslikni o‘rnatib (2.10) va (2.11) formulalarga kelamiz. (2.10) dagi C o‘zgarmas $z(\xi_0) = 0$ shartdan aniqlanadi (hozirgi holda $\xi_0 = 0$); β o‘zgarmas esa ixtiyoriy qoladi, ya’ni L_z kontur qutb atrofida aylanish aniqligida bo‘ladi. z o‘zgaruvchi $e^{i\beta}$ ko‘paytuvchi aniqligida topilgani uchun $w(z) = \frac{A}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ yoyilmada $|A|$ qiymat (2.1) chegaraviy shartdan, $\arg A$ esa β qiymatini tanlashdan aniqlanadi.

§ 3. Tashqi qo‘yilgan masalalar

Tashqi qo‘yilgan masalalarda cheksiz uzoqlashgan nuqta D_z sohaga tegishli bo‘ladi. To‘g‘ri qo‘yilgan masalalarda bu holat soha ma’lum bo‘lgani uchun, unchalik qiyinchilik tug‘dirmaydi. Teskari chegaraviy masalalarda soha noma’lum bo‘lgani uchun cheksiz uzoqlashgan nuqta muhim rol o‘ynaydi. Tashqi qo‘yilgan masalalarda ikkita hol bo‘lishi mumkin: birinchisida $w(\infty)$ oldindan ma’lum qilib berilgan bo‘ladi, ikkinchisida esa ma’lum emas bo‘ladi. Bu farqlar tashqi masalani yechishda muhim rol o‘ynaydi. Hozirga qadar o‘rganilgan tashqi qo‘yilgan masalalarda $w(\infty)$ ning qiymati berilgan bo‘ladi, ammo bu holat aksi ro‘y bermasligi uchun garantiya bo‘la olmaydi.

Tashqi qo‘yilgan masalani $w(\infty) = w_0$ qiymati berilgan regulyar funksiya uchun qaraymiz. Oldingi §2 da (ichki qo‘yilgan masalada) qo‘yilgan barcha shartlar avvalgidek bo‘lib qoladi. Tabiiyki $w = w_0$ nuqta L_w kontur bilan chegaralangan D_w sohaga bo‘lishligi talab qilinadi.

D_w sohani $|\xi| > 1$ sohaga shunday akslantiramizki, $w = w_0$ nuqta $\xi = \infty$ nuqtaga o‘tsin (akslansin). §2 dagi mulohazalarni takrorlab amin bo‘lamizki, masala yechimi §2 da o‘rnatilgan formulalar kabi bo‘ladi, faqat (2.9) va (2.12) integrallar oldidagi ishorani teskarisiga o‘zgartirish kerak bo‘ladi.

L_z yopiq konturni hosil qilish uchun (2.10) formula bilan aniqlanadigan $z = z(\xi)$ funksiyadan bir qiymatli bo‘lishligini talab qilish zarur va yetarlidir. Integral ostidagi $e^{X(\xi)} = \dfrac{dz}{d\xi}$ funksiya $|\xi| > 1$ sohaning hamma joyida regulyar bo‘lgani uchun

$$\frac{dz}{d\xi} = C_0 + \frac{C_{-1}}{\xi} + \frac{C_{-2}}{\xi^2} + \ldots$$

bo‘ladi.

$z(\xi)$ funksiyaning bir qiymatli bo‘lishligi uchun yuqoridagi yig‘indining 2-hadini nolga teng bo‘lishligi kifoya. C_{-1} va chetni aniqlab va uni nolga tenglashtirib, L_z konturning yopiqlik sharti bo‘lgan ushbuni

$$\int_0^{2\pi} \ln\frac{ds}{d\gamma} e^{i\gamma} d\gamma = 0 \tag{3.1}$$

yoki

$$\int_0^{2\pi} \ln\frac{ds}{d\gamma}\cos\gamma d\gamma = 0,\ \int_0^{2\pi} \ln\frac{ds}{d\gamma}\sin\gamma d\gamma = 0, \tag{3.1.1}$$

hosil qilamiz.

Masalaning qo‘yilishida izlanuvchi konturning yopiq bo‘lishi talab qilingani uchun ba’zan bu shartlarni ((3.1) va (3.1.1)) ni masalaning yechimga ega bo‘lishlik shartlari ham deb ataymiz.

§ 4. Chegaraviy shartlarni parametr orqali berishning turli usullari

Ikkinchi bandda chegaraviy shart yoy uzunligi S parametrga bog‘liq ravishda berilgan edi.

Endi parametr S dan farqli bo‘lgan hollarni qaraymiz. Dastlab $w(t)$ funksiyaning qiymatlari Dekart koordinatalarning yoki qutb koordinatalarning funksiyasi bo‘lgan hollarni qaraymiz.

1.Faraz qilaylik $0 \le x \le a$

$$\left.\begin{aligned} w = w_1(x) = \varphi_1(x) + i\psi_1(x), \\ w = w_2(x) = \varphi_2(x) + i\psi_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

shuningdek

$$w_1(0) = w_2(0),\ w_1(a) = w_2(a) \tag{4.2}$$

$\varphi_i, \psi_i \quad (i = 1, 2) -$ bir qiymatli funksiyalar.

Ko‘rinib turibdiki (4.1) tenglamalar w tekislikda o‘zgaruvchi x noldan a gacha o‘zgarganda L_w ning konturni aniqlaydilar.

D_w sohani $|\xi|<1$ doiraga akslantirib odatdagi usul bilan $x = x(\gamma)$ bog‘lanishni topamiz.

Ichki qo‘yilgan masala uchun $z = z(\xi)$ va $y = y(\gamma)$ akslantiruvchi funksiyalar quyidagicha:

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\xi}{e^{i\gamma}-\xi}d\gamma + iy_0 \tag{4.3}$$

$$y(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\gamma')ctg\frac{\gamma-\gamma'}{2}d\gamma' + y_0 \tag{4.4}$$

bo‘ladilar.

(4.3) va (4.4) formulalardan ko‘rinadiki, izlanuvchi kontur Oy o‘qi bo‘lgan qo‘zg‘alish aniqligida, ya’ni yagona aniqlanadi.

Tashqi qo‘yilgan teskari chegaraviy masalalarda bunday aniqlik bo‘lmaydi. Haqiqatdan ham $z(\xi)$ funksiya $|\xi|<1$ doira ichida biror nuqtada oddiy qutbga ega va bu nuqta koordinatalar boshi sifatida qabul qilingan bo‘lsa, u holda (4.3) va (4.4) formulalar quyidagi ko‘rinishni oladilar:

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\xi}{e^{i\gamma}-\xi}d\gamma + C\xi - \frac{\overline{C}}{\xi} + iy_0, \quad (C = A + iB). \tag{4.5}$$

$$y(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\gamma')ctg\frac{\gamma-\gamma'}{2}d\gamma' + 2A\sin\gamma + 2B\cos\gamma + y_0. \tag{4.6}$$

Shunday qilib hatto D_w sohadan o‘z xohishimiz bilan $w_0 = w(\infty)$ nuqtani tanlaganimizda ham $z(\xi)$ yoki $y(\gamma)$ larni aniqlaydigan formulalarga L_z konturning formulasiga ta’sir qiladigan A va B o‘zgarmaslar kirar ekan. R.B.Salimov isbotladiki , agar koordinatalari A va B bo‘lgan P nuqta bu sohaga tegishli bo‘lsa u holda izlanuvchi D_z soha bir varaqli bo‘lar ekan.

2. Endi qutb koordinatalar bo‘lgan holga o‘tamiz.

a) Faraz qilaylik $w(z)$ funksiyaning chegaraviy qiymatlari quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin:

$$\varphi = \varphi(r),\ \psi = \psi(r),\ \left(r_0 \le r \le r,\ z = re^{i\varphi}\right) \tag{4.7}$$

Izlanuvchi kontur r monoton bo‘ladigan har bir holda alohida ko‘rinishga ega deb faraz qilamiz; bunday maydonlarda $\varphi(r)$ va $\psi(r)$ funksiyalar bir qiymatli bo‘lib (4.2) shartlarni qanoatlantiruvchi bo‘lsin deymiz.

D_w sohani $|\xi| < 1$ doiraga akslantirib $r = r(\gamma)$ bog‘lanishni topamiz, shundan so‘ng, $X(\xi) = \ln z$ funksiyani kiritib istalgan teskari qo‘yilgan masala yechimini topish mumkin.

Chegaraviy shartlarni qo‘yishning bu usuli uchun ayrim muhim tomonlarni eslatib o‘tamiz.

Dastlab $r_0 \ne 0$ bo‘lgan holda z kompleks tekislikning kordinatalar boshi izlanuvchi D_z sohaning ichida yotibdimi yoki tashqarisida yotibdimi, shunga qarab qo‘yilgan teskari masala ikkita har xil yechimga ega bo‘ladi.

Agar $z = 0$ nuqta D_z sohaning tashqarisida yotsa ichki masala uchun $X(\xi)$ funksiya (4.3) formula bilan topiladi, bu holda zichlik rolini $\ln r(\gamma)$ o‘ynaydi. $z(\xi)$ va konturning $x(\gamma),\ y(\gamma)$ kordinatalari:

$$z = e^{X(\xi)}, \tag{4.8}$$

$$x = r(\gamma)\cos\alpha(\gamma),\ \ y = r(\gamma)\sin\alpha(\gamma), \tag{4.9}$$

ko‘rinishda bo‘ladilar, bu yerda $\alpha(\gamma) - \operatorname{Im} X$ ning chegaraviy qiymati.

Agar $z=0$ nuqta D_z sohaning ichida yotsa, u holda $z(\xi)$ funksiya $\xi=0$, $(z(0)=0)$ nuqtada birinchi tartibli nolga ega bo‘ladi. $(z(0)=0)$, $X(\xi)$ funksiya esa logarifmik maxsuslikga ega bo‘ladi. $z(\xi)$ va $x(\gamma), y(\gamma)$ lar uchun quyidagi:

$$z=e^{X(\xi)}, \qquad (4.8)$$

$$x=r(\gamma)\cos\alpha(\gamma), \;\; y=r(\gamma)\sin\alpha(\gamma), \qquad (4.9)$$

formulalarni olamiz, bu yerda $\alpha(\gamma)-\operatorname{Im} X$ ning chegaraviy qiymati.

Agar $z=0$ nuqta D_z sohaning ichkarisida yotsa, u holda $z(\xi)$ funksiya $\xi=0$, $(z(0)=0)$ nuqtada birinchi tartibli nolga, $X(\xi)$ funksiya esa logarifmik maxsuslikka ega bo‘ladi. Bu maxsusliklarni odatdagi usul bilan yo‘qotib, ikkinchi yechimni quyidagi ko‘rinishda:

$$z_1(\xi)=\xi z(\xi) \qquad (4.10)$$

$$x_1(\gamma)=r(\gamma)\cos[\alpha(\gamma)+\gamma], \;\; y_1(\gamma)=r(\gamma)\sin[\alpha(\gamma)+\gamma], \qquad (4.11)$$

topamiz. Bu yerda $z(\xi)$ ifoda (4.8) formuladan topiladi.

Shunday qilib, $\xi=1$ aylanadagi $e^{i\gamma}$ nuqtalarga mos keluvchi kontur ustidagi (birinchi va ikkinchi holdagi) nuqtalar bir-biridan γ ga farq qiladi. $\alpha_1=\alpha+\gamma$. Agar $z_0=0$ bo‘lsa, ya’ni koordinatalar boshi L_z chiziq ustida yotsa, u holda bitta yechimga ega bo‘lamiz. Bu holda $X(\xi)$ chegarada logarifmik maxsuslikka ega bo‘ladi va maxuslikdan osonlikcha qutilish mumkin.

§ 5.Teskari masalalar yechimlari yagonaligi.

§2. da eslatilgan ediki, teskari chegaraviy masalar nazariyasida yechim yagona deyiladi, agar topilgan L_z chegarali D_z sohalar bir-biridan tekislikda faqat o‘rni bilan farq qilsa. Bu holda asosiy teskari chegaraviy masala yechimi w

funksiyaning faqat chegaraviy qiymatlari bo‘yicha izlanadi. Boshqa hollarda w funksiya (yechim) chegaraviy shartlarning xarakteriga qarab u yoki bu tarafida ixtiyoriylik bilan aniqlanadi.

1. §2 va §3 dagi har xil teskari masalalar yechimlarini ifodalovchi formulalardan bevosita ko‘rinadiki ichki qo‘yilgan teskari masala yechimi yagona, toki qo‘yilgan teskari masala yechimi (2.1) dan boshqa yana $w_0 = w(\infty)$ ma’lum bo‘lganda yagona bo‘ladi.

Faraz qilaylik, (2.1) shartlarga mos keluvchi ichki teskari masala yechimi ikkita bo‘lsin. Bittasi L_z kontur bilan chegaralangan soha D_z va $w(z)$ funksiya ikkinchisi esa L_{z_1} kontur bilan chegaralangan D_{z_1} soha va $w(z_1)$ funksiya bo‘lsin.

$w(z)$ va $w(z_1)$ funksiyalar L_z va L_{z_1} konturlarda bir xil qiymatlar qabul qilgani uchun teskari chegaraviy masalaning yechimlari D_z va D_{z_1} sohalarning biri ikkinchisidan biror $z_1 = f(z)$ regulyar funksiyasi yordamida konform akslantirish bilan hosil qilinar ekan.

Masalaning qo‘yilishidan shu narsa ma’lum bo‘ladiki L_z va L_{z_1} konturlar ustidagi bir xil S va S_1 yoy absissasida w va w_1 funksiyalar bir xil qiymatga erishadilar. Demak, akslantiruvchi $f(z)$ funksiya shunday bo‘lishi lozimki, u bilan hosil qilingan S va S_1 lar orasidagi bog‘lanish $S_1(s) = S$ ko‘rinishda bo‘lishligini taqoza etadi, yani L_z konturning hamma nuqtalari uchun:

$$|f'(z)| = \frac{ds_1}{ds} = 1$$

bo‘lishi kerak.

$$F(z) = \ln f'(z)$$

analitik funksiyani qaraymiz. $f'(z)$ hosila D_z sohada nullarga va maxsuslikka ega emas bo‘lgani uchun, u holda $\operatorname{Re} F(z) = \ln|f'(z)|$, L_z da nolga teng bo‘lib D_z sohada ham nolga teng bo‘ladi.

Demak

$$F(z) = i\alpha,\ z_1 = f(z) = e^{iz} z + C, \qquad (5,1)$$

bu yerda $\alpha -$ haqiqiy o‘zgarmas.

Shunday qilib, L_z va L_{z_1} konturlar faqatgina tekislikda joylashgan o‘rni bilan bir-biridan farq qilar ekan. Shuni isbotlash kerak edi. Xuddi shu yo‘l bilan $w(\infty)$ berilganda tashqi qo‘yilgan teskari masala ham yagona yechimga ega bo‘lishi ko‘rsatiladi.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, agar teskari masala qo‘yilgan paytda $w_0 = w(\infty)$ ning qiymati aniqlanmagan bo‘lsa vaziyat ancha o‘zgaradi.

§ 6.Yechimning birvaraqliligi haqida

1. D_ξ sohada $\dfrac{dz}{d\xi}$ hosilaning nullari bo‘lmasligi (xuddi shunday D_w sohada $\dfrac{dz}{dw}$ hosilaning nullari bo‘lmasligi), ma’lumki $z(\xi)$ funksiya yordamida amalga oshiriladigan akslantirishning birvaraqligiga kafil bo‘lolmaydi. Shuning uchun D_z soha birvaraqli bo‘lmasligi mumkin, bu esa hosil qilingan (topilgan) yechimning amaliy jihatdan yaroqsiz ekanligini anglatadi.

Hozirga kelib birvaraqlilikni ta’minlaydigan bir necha yetarli shartlar (belgilar) bor; biz ulardan ba’zilarini keltiramiz.

Birinchi yetarli shart I.S.Krasnovidova hamda V.S.Rogotin tomonidan topilgan:

$$|\xi(\gamma_1)-\xi(\gamma_2)|<\frac{\pi}{4\ln 2}|\gamma_1-\gamma_2|,\quad \left(\xi(\gamma)=\ln\frac{ds}{d\gamma}\right), \tag{6.1}$$

Xuddu shu masala uchun A.Aksentev tomonidan quyidagi shart olingan

$$|\xi'(\gamma_1)-\xi'(\gamma_2)|<\frac{1}{2\ln 2}|\gamma_1-\gamma_2|, \tag{6.2}$$

Tashqi masalalar uchun birvaraqlilik sharti ancha murakkab kechadi. $\xi(\gamma)$ orqali yagona

$$|\xi(\gamma_1)-\xi(\gamma_2)|<k|\gamma_1-\gamma_2|, \tag{6.3}$$

ko‘rinishda ifodalanib, faqat k ning turli qiymatlari bilan farq qiladigan uchta shartni keltiramiz:

a) V.S.Rogotin bo‘yicha:

$$k=\frac{3}{2\ln 2} \tag{6.4}$$

shuningdek quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$(\pi^2-4)\exp|\max\xi(\gamma)-\min\xi(\gamma)|<\left(\pi\cos\beta+\sqrt{4-\pi^2\sin^2\beta}\right)^2$$

b) L.A.Aksentev bo‘yicha:

$$k=\frac{1}{2\ln 2}\arccos\left\{\frac{1}{2}\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\max\xi(\gamma)-\xi(\gamma)\right]d\gamma\right\}, \tag{6.5}$$

d) S.N.Kudranov bo‘yicha:

$$k=\frac{1}{2\ln 2}\arcsin\left\{\frac{2}{\pi}\exp\left[\min\xi(\gamma)-\max\xi(\gamma)\right]\right\}. \tag{6.6}$$

Bu formulalarda (6.1) va (6.2) lardan farqli K ning qiymati $\xi(\gamma)$ dan bog‘liq. Misollar ko‘rsatadiki tashqi qo‘yilgan chegaraviy masalalar ichki qo‘yilgan masalalarga qaraganda birvaraqlikni oson yo‘qotadilar.

2. Yechimlarni birvaraqli bo‘lmasligi ularning fizik ma’noda yaroqsizligini anglatar ekan. Ko‘rinib turibdiki, ularning birvaraqli yechimga ega bo‘lishi juda

muhim ekan. Funksiyalarning birvaraqli bo‘lishlik muommosini tekshirish ancha qiyin kechadi. Teskari masalalarda bu muammo alohida ko‘rinishga ega. Berilgan D_w sohada $z = z(w)$ funksiyaning birvaraqli bo‘lishligi talab qilinadi, qaysiki bu funksiyaning izlanuvchi L_z konturda berilgan qiymatiga ko‘ra aniqlanadi.

Teskari chegaraviy masalalar – bu berilgan xossaga ega bo‘ladigan obyektlarni qurish (tiklash) demakdir. Hammaga haqiqatki, quriladigan obyektga qo‘yilgan - biz xohlagan talablarning hammasi ham bajarilavermaydi.

Tabiiyki, biror narsani loyihalashda kam resurs sarflab yuqori effekt olish maqsad qilib qo‘yiladi. Buning uchun qurilayotgan obyektga bosh sifatini olish uchun qanday maksimal talablar qo‘yish kerak bo‘ladi.

§ 7. Asosiy teskari masalaga keltiriladigan boshqa teskari chegaraviy masalalar

Asosiy teskari chegaraviy masalalar qaralganda, izlanuvchi koturda yo regulyar funksiyaning yoki bitta oddiy qutbga ega funksiyaning chegaraviy qiymati berilgan bo‘lar edi.

Ammo amaliyotda shunday masalalar uchraydiki, teskari chegaraviy masalaga keltirilganda izlanuvchi konturda w funksiya o‘zining qiymati emas, balki w bilan bog‘liq boshqa miqdorlarning qiymati berilishi mumkin.

Masalan gidrodinamika masalalari uchun teskari masala yechilganda, L_z konturda $\frac{d\varphi}{dn}$ va $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ larning qiymatlari (bu holda $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ bo‘ladi) beriladi. L.L.Lebedeb bu masalani yechganda L_z chegaraviy $\frac{d\varphi}{dn}$ va $\frac{d\psi}{dn}$ ning qiymatlarini berishga to‘g‘ri kelgan.

Agar $w=\varphi+i\psi$ analitik funksiya uchun teskari chegaraviy masala qaralsa, berinchi navbatda izlanuvchi konturda s ning funksiyasi bo‘lgan yettilik $\varphi,\ \psi,\ \frac{d\varphi}{dn},\ \frac{d\psi}{dn},\ |w|,\ \arg w,\ \left|\frac{dw}{dz}\right|$ dan ixtiyoriy juftlikning qiymatini berish yetarli bo‘ladi. Shunday qilib 19 dan ko‘p yoki kam bo‘lgan turli masalani qarash mumkin (ko‘rinib turibdiki, $\left(\varphi,\frac{d\psi}{dn}\right)$ va $\left(\psi,\frac{d\varphi}{dn}\right)$ larning berilishi konturni aniqlamaydi). Hosil bo‘lgan barcha masalalar asosiy masalaga olib kelinadi va ular yagona metod bilan yechiladi.

Biz eslatilgan masalalarning hammasi emas balki ikkitasini qaraymiz.

a) Faraz qilaylik izlanuvchi chegarada

$$\frac{d\varphi}{dn}=f_1(s),\quad \left|\frac{dw}{dz}\right|=f_2(s) \tag{7.1}$$

shart berilgan bo‘lsin.

Bu xildagi masalalar o‘tkazuchi profilni suyuqlik yuvayotgan holda hosil bo‘ladi.

Ma’lumki $\frac{d\varphi}{dn}=-\frac{d\psi}{ds}$ u holda

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left[\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dn}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.2}$$

tenglikdan foydalanib,

$$\psi=-\int f_1(s)ds+C_2,\quad \varphi=\pm\int\sqrt{f_2^2(s)-f_1^2(s)}ds+C_1$$

tenglikni olamiz. $w(z)$ funksiya $C=C_1+iC_2$ o‘zgarmasgacha aniqlikda topiladi, bu esa konturning formulasiga ta’sir ko‘rsatmaydi.

b)

$$\arg w = f_1(s), \ \left|\frac{dw}{dz}\right| = f_2(s), \tag{7.3}$$

berilgan, shuningdek

$$f_1(l) = f_1(0) + 2\pi k, (k = 0, \pm 1), \ f'(l) = f_1'(0).$$

$|w|$ ning chegaraviy qiymatini $K(s)$ orqali belgilab quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\varphi = K(s)\cos f_1(s), \quad \psi = K(s)\sin f_1(s).$$

Bu munosabatlarni differensiallab va (7.3) dan foydalanib, $K(s)$ uchun quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\phi(s, K, K') = K'^2 + f_1'^2 K^2 - f_2^2 = 0. \tag{7.4}$$

Agar bu tenglama $K(s,C)$, $K(l,C) = K(0,C)$ nomanfiy funksiya ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lsa, u holda bu yechimni topib asosiy masalaga kelamiz. Ko‘rinib turibdiki, yechim tarkibiga kirgan C o‘zgarmas izlanuvchi kontur formulasiga ta’sir ko‘rsatadi. Yechim aniq bo’lishi uchun, masalan, L_z ning biror nuqtasida $|w|$ ning qiymatini berish yetarli bo‘ladi.

(8.4) tenglama umumiy yechimdan tashqari yana $\frac{dk}{ds}$ ni (7.4) dan chiqarib tashash bilan hosil bo‘ladigan

$$\frac{df}{dK} = 2\frac{dK(s)}{ds} = 0, \tag{7.5}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yechim

$$K(s) = \pm\frac{f_2(s)}{f_1(s)} \tag{7.6}$$

$w(z)$ funksiyalardan chegaraviy qiymatlari o‘zgarmas va o‘z navbatida (7.3) chegaraviy qiymatlar

$$f_2(s) = mf_1'(s), \quad m = const \tag{7.7}$$

shartni qanoatlantiradi.

Mundarija:

Adabiyotlar

1. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. “Методы решения некорректных задач”. Москва. “Наука”. 1979-год.
2. Г.Г.Тумашев, М.Т.Нужаин. “Методы решения некорректных задач”. Москва. “Наука”. 1979-год.
3. M.Salohiddinov. “Matematik fizika tenglamalari”. Toshkent. “O‘zbekiston”. 2002-yil.
4. O.S.Zikirov. “Matematik fizika tenglamalari”. Toshkent. “Fan va texnologiya” nashriyoti. 2017-yil.
5. А.Н.Тихонов. “О регуляризации некорректно поставленных задач”. ДАН СССР. 1963-год, 151, №3.
6. М.М.Лаврентьев. “К вопросу об обратной задаче теории потенциала”. ДАН СССР. 1966-год, 106, №3.
7. М.М.Лаврентьев. “О некоторых некорректных задачах математической физики”. Москва. СО АН СССР. 1962-год.
8. В.А.Морозов. “Линейные и нелинейные некорректные задачи.”. Итоги науки и техники. Математический анализ. Москва. ВИНИТИ. 1973-год.