

Э. В. ШПОЛЬСКИЙ

АТОМ ФИЗИКАСИ

БИРИНЧИ ТОМ

АТОМ ФИЗИКАСИГА КИРИШ

ТУЗАТИЛГАН ВА ТЎЛДИРИЛГАН РУСЧА БЕШИНЧИ НАШРИДАН ТАРЖИМА

РСФСР Олий ва махсус ўрта таълим
министрлиги олий ўқув юртлари учун ўқув
қўлланмаси сифатида рухсат этган

~~2-3-6~~
Учит. 70.

МУНДАРИЖА

Русча бешинчи нашрига сўз боши	8
Русча иккинчи нашрига берилган сўз бошидан	9
Русча биринчи нашрига берилган сўз бошидан	10

I Б О Б. Электрон, унинг заряди ва массаси

1-§. Электроннинг кашф қилиниши	13
2-§. Электрон зарядини аниқлаш	14
3-§. Милликэн тажрибасини амалда қилиб қўриш	16
4-§. Электр ва магнит майдонларида электроннинг ҳаракати	21
5-§. Электроннинг бўйлама электростатик майдондаги ҳаракати	26
6-§. Солиштирма зарядни аниқлашнинг экспериментал методлари	28
7-§. Электроннинг солиштирма зарядини икки конденсатор методи билан аниқлаш	29
8-§. Электроннинг солиштирма зарядини бўйлама магнит майдон билан фокуслаш методи бўйича аниқлаш	81
9-§. Зарядли заррачалар дастасини фокуслаш ва монохроматизация қилиш	84
10-§. Электрон массасининг тезлигига боғлиқлиги	88

II Б О Б. Атомлар. Изотоплар

11-§. Муқаддима	44
12-§. Д. И. Менделеевнинг элементлар даврий системаси	45
13-§. Атомларнинг ҳақиқий массаларини аниқлаш. Парабола методи	52
14-§. Масс-спектрографлар	55
15-§. Қўш марта фокусловчи масса-спектрометрлар ва масса-спектрографлар	63
16-§. Изотопларнинг массалари ва процент миқдори	69
17-§. Изотопларни диффузияга асосланган методлар ёрдамида ажратиш	69
18-§. Изотопларни термодиффузия методи билан ажратиш	76
19-§. Изотопларни электромагнит методлар ёрдамида ажратиш	81
20-§. Изотопларни фракциялаб ҳайдаш ва алмашиниш реакциялари методлари билан ажратиш	85

21-§.	Изотопларни центрифуга методи билан ажратиш	86
22-§.	Водороднинг оғир изотопи (дейтерий) ва оғир сув олиш	89

III Б О Б. Атомнинг ядровий тузилиши

23-§.	Заррачалар сочилишининг эффе́ктив кесими	94
24-§.	Атомларни электронлар билан зондлаш	97
25-§.	α -заррачаларнинг хоссалари	99
26-§.	Зарралар сочилиши назарияси	103
27-§.	Резерфорд формуласини экспериментда текшириб куриш	107
28-§.	Ядронинг зарядини аниқлаш	109

IV Б О Б. Рентген нурлари ва уларни атом доимийларини аниқлашга татбиқ этиш

29-§.	Рентген нурлари	111
30-§.	Рентген нурларининг ютилиши	115
31-§.	Рентген нурларининг сочилиши	120
32-§.	Рентген нурларининг кристалл панжарадаги дифракцияси	121
33-§.	Рентген нурлар дифракциясини тажрибада амалга ошириш	128
34-§.	Рентген спектрал чизиқларининг тўлқин узунлигини аниқлаш	133
35-§.	Рентген нурларининг спектрлари	134
36-§.	Мозели қонуни	137
37-§.	Рентген нурлари тўлқин узунлигини абсолют аниқлаш	141
38-§.	Авогадро доимийсини ва электрон зарядини аниқлаш	144
39-§.	Электроннинг солиштирма заряди	148

V Б О Б. Атом тузилиши ва классик физика

А. Классик механика ва атом тузилиши

40-§.	Атом моделлари	150
41-§.	Механикада энергиянинг сақланиш қонуни	151
42-§.	Потенциал эгри чизиқлар	154
43-§.	Импульснинг сақланиш қонуни	157
44-§.	Ўзаро тўқнашиш	159
45-§.	Инерция маркази	162
46-§.	Чизиқли гармоник осциллятор	165
47-§.	Тебранишларни комплекс тасвирлаш	169
48-§.	Спектрга ажратиш	171
49-§.	Марказий кучлар. Қутб координаталарида кинетик энергия	176
50-§.	Марказий майдондаги ҳаракат	177
51-§.	Кеплер масаласи	179
52-§.	Ядро майдонидаги α -заррача	183
53-§.	Келтирилган масса	185
54-§.	Умумлаштирилган координаталар. Системанинг вазияти	187
55-§.	Лагранж функцияси. Лагранж тенгламалари	188
56-§.	Лагранж тенгламаларини марказий куч майдонидаги ҳаракат тўғрисидаги масалага татбиқ этиш	191
57-§.	Умумлаштирилган импульслар	194
58-§.	Гамильтон каноник тенгламалари	196
59-§.	Гамильтон функциясининг физик маъноси	199
60-§.	Циклик координаталар	201
61-§.	Пуассон қавслари. Сақланиш қонунлари	203
62-§.	Электромагнит майдонидаги ҳаракат	207

63-§.	Тез ҳаракатланувчи заррачалар механикаси. Лоренц алмашти-ришлари	212
64-§.	Заррача релятивистик динамикасининг асослари	217
65-§.	Масса билан энергия орасидаги боғланиш тўғрисида	225

Б. Электромагнит нурланишнинг классик назарияси

66-§.	Ёруғлик чиқариш элементар марказлари	231
67-§.	Чизиқли осцилляторнинг электромагнит нурланиши	232
68-§.	Осцилляторнинг тўлиқ ва ўртача нурланиши	235
69-§.	Гармоникмас осцилляторнинг электромагнит спектри	237
70-§.	Тебранишларнинг сўниши	239
71-§.	Нурли ишқаланиш	241
72-§.	Фурье интеграл ва туташ спектри	245
73-§.	Спектрал чизиқларнинг табиий кенглиги	249
74-§.	Даврий бўлмаган процессларни спектрал ёйишнинг бошқа ми- соллари	251
75-§.	Атомнинг планетар модели	255
76-§.	Орбитал магнит момент ва Лармор теоремаси	256
77-§.	Зеeman эффекти	259
78-§.	Зеeman эффекти. Умумий ҳол	262
79-§.	Вавилов—Черенков нурланиши	265

VI БОБ. Абсолют қора жисмнинг нурланиши ва энергия квантлари ҳақида гипотеза

80-§.	Классик физика ва иссиқлик нурланиш проблемаси	275
81-§.	Ковакда мувозанат нурланиш	287
82-§.	Кирхгоф қонуни	280
83-§.	Абсолют қора жисмнинг нурланиш қонунлари	282
84-§.	Иссиқлик нурланиш қонунларини экспериментал текшириш	284
85-§.	Эркинлик даражалари бўйича энергиянинг текис тақсимланиши ҳақида теорема	286
86-§.	Рэлей—Жинс формуласи	289
87-§.	„Ультрабинафша ҳалокат“	294
88-§.	Планк формуласи	296
89-§.	Энергия квантлари гипотезаси	298

VII БОБ. Атомларнинг энергия сатҳлари

90-§.	Атомнинг планетар модели ва Борнинг квант постулатлари	302
91-§.	Франк ва Герц тажрибалари	303
92-§.	Эластик тўқнашиш	307
93-§.	Ноэластик тўқнашишлар. Критик потенциаллар	309
94-§.	Экспериментал методикани такомиллаштириш	311
95-§.	Уйғонишнинг барча погоналарини бирданига аниқлаш	312
96-§.	Ионизация потенциалларни аниқлаш	315
97-§.	Уйғотилган атомларнинг нурланиши	318
98-§.	Спонтан нурланиш	319
99-§.	Ютиш ва мажбурий нурланиш	322
100-§.	Планк формуласини Эйнштейн усулида келтириб чиқариш	323
101-§.	Индукцияланган нурланишнинг хоссаси	327
102-§.	Ёруғлик генераторлари	331

VIII БОБ. Водород атомининг спектрал сериялари ва энергия сатҳлари

103-§.	Бальмер серияси	335
104-§.	Лайман, Пашен ва бошқалар сериялари. Бальмернинг умум- лашган формуласи	338

105-§.	Спектр термлари. Комбинацион принцип	340
106-§.	Доиравий орбиталарни квантлаш	342
107-§.	Бор назарияси	345
108-§.	Юқоридаги назариянинг қўлланиши. Водород оғир изотопининг кашф қилиниши	349
109-§.	Пикеринг серияси ва водородсимон ионлар спектрлари	351
110-§.	Электроннинг солиштирма зарядини спектроскопик аниқлаш ҳақида	354
111-§.	Энергия сатҳлари диаграммалари	355
112-§.	Атом ҳолидаги водороднинг чегаравий туташ спектри	356
113-§.	Водородсимон атомни Бор—Заммерфельд усулида квантлаш	358
114-§.	Мослик принципи	367
115-§.	Бор назариясининг кризиси	372

IX Б О Б. Ёруғлик квантлари

116-§.	Ёруғлик майдонининг флукутацияси	374
117-§.	Фотозэффekt ва Эйнштейн тенгламаси	380
118-§.	Эйнштейн тенгламасини экспериментал текшириш	383
119-§.	Туташ рентген спектрининг қисқа тўлқинли чегараси	386
120-§.	Планк доимийсини аниқ топиш	387
121-§.	Ёруғликнинг корпускуляр хоссалари ошқор бўладиган бошқа тажрибалар	389
122-§.	Ёруғлик оқимининг флукутациялари	391
123-§.	Рентген нурларининг сочилиши (тўлқин назария)	394
124-§.	Комптон эффекти	399
125-§.	Комптон эффеқтининг элементар назарияси	401
126-§.	Тепки электронлари	406
127-§.	Социлишининг элементар актлари ва сақланиш қонунлари	409
128-§.	Социлишининг элементар актларига сақланиш қонунларини қўллаш мумкинлигининг экспериментал тасдиқи	499
129-§.	Мёссбауэр эффеқти	414
130-§.	Мёссбауэр эффеқтининг баъзи бир татбиқлари	419

X Б О Б. Тўлқинлар ва заррачалар

131-§.	Кириш	426
132-§.	Бир жинсли муҳитдаги ясси монохроматик тўлқин	427
133-§.	Тўлқин тенгламаси	429
134-§.	Ясси тўлқинлар суперпозицияси	431
135-§.	Тўлқин пакети	433
136-§.	Фазавий ва группавий тезликлар	437
137-§.	Корпускуляр-тўлқин дуализми. Ёруғликнинг синиши	440
138-§.	Корпускуляр-тўлқин дуализми. Допплер эффеқти	445
139-§.	Корпускуляр-тўлқин дуализми. Дифракцион панжара	447
140-§.	Де-Бройль гипотезаси	448
141-§.	Де-Бройль тўлқинларининг хоссалари	450
142-§.	Де-Бройль гипотезасининг тажрибада тасдиқланиши. Врэгг методи	458
143-§.	Электрон тўлқинларининг синиши ва металлнинг ички потенциали	458
144-§.	Де-Бройль гипотезасининг тажрибада тасдиқланиши. Лауэ ва Дебай—Шёррер методлари	460
145-§.	Молекуляр дасталар ва нейтронлар ҳосил қиладиган интерференцион ҳодисалар	467
146-§.	Тўлқин пакет ва заррача	471
147-§.	Де-Бройль тўлқинларини статистик талқин қилиш	472
148-§.	Ноаниқлик муносабатлари	475
149-§.	Микрозаррачаниннг жойини ва импульсини аниқлаш	477

150- §. Ноаниқлик муносабатларининг хато талқинлари	484
151- §. Ноаниқлик муносабатлари ва сабабият принципи	451

XI Б О Б. Шрёдингер тенгламаси

152- §. Шрёдингер тенгламаси ва унинг ечимларининг физик маъноси	494
153- §. Потенциал барьердан қайтиш ва ўтиш	500
154- §. Кенглиги чекланган потенциал барьер	510
155- §. Торнинг тебраниши	514
156- §. Потенциал яшиқдаги заррача	520
157- §. Потенциал ўрадаги электрон	525
158- §. Чизиқли гармоник осциллятор	531
159- §. Чизиқли осцилляторнинг нормал ва уйғонган ҳолатлари	537
160- §. Боғлаётган осцилляторлар. Ван-дер-Ваальс кучлари	544
161- §. Уч ўлчовли потенциал яшиқдаги заррача	554
162- §. Водородсимон атом учун Кеплер масаласи	559

Қўшимчалар

I. Ўртача қийматларни ҳисоблаш	564
II. Квант системалар учун Больцман тақсимотини келтириб чиқариш	568
III. Зеeman эффекти классик назариясига доир	570
IV. Ўртача квадратик флуктуация формуласи	572
V. Тўғри бурчакли потенциал ўрадаги заррача	576
VI. Осциллятор хусусий функцияларининг ортогоналлиги ва нормаланиши	580



РУСЧА БЕШИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Бешинчи нашрида биринчи томнинг материали қайта қараб чиқилган, қисман қайта ишланган ва тўлдирилган: баъзи жойлари бир оз қисқартирилган, жуда кўп майда тузатишлар, аниқлаштиришлар ва қўшимчалар киритилган. Йирик қўшимчалардан қуйидагиларни эслатиб ўтаман: V бобда Вавилов—Черенков нурланишига бағишланган 79-§ киритилган ва релятивистик динамика асослари анча кенгроқ баён этилган; бунда мен релятивистик механикани электродинамикадан мустақил равишда баён этишга имкон берадиган Толман методидан фойдаландим. VII бобда Эйнштейн коэффицентларини киритиш муносабати билан спонтан ва мажбурий ўтишлар анча муфассал қараб чиқилди ва назариянинг натижаси сифатида ёруғликнинг квант генераторлари (лазерлар) баён этилди. Ниҳоят, IX бобда фотон импульси мавжудлигини тасдиқловчи экспериментларнинг тавсифига Мёссбауэр эффекти ва унинг баъзи амалий татбиқлари қўшилди.

Айтилганлардан кўриниб турибдики, гарчи китобнинг умумий характери ўзгармай қолган бўлса-да, қўшилган материаллар китобхонга атом физикасининг қўлга киритган баъзи актуал ютуқлари тўғрисида тасаввур олишга имкон беради.

Бу нашрнинг оригиналини матбаага тайёрлашда менга кўрсатган катта ёрдами учун В. В. Власовга самимий ташаккур изҳор этаман. Стабил изотоплар жадвалини 1962 йилги маълумотларга қараб тузиб бергани учун И. П. Селиновга миннатдорчилик билдираман.

Москва, 1963 йил, июнь.

Э. В. Шпольский

РУСЧА ИККИНЧИ НАШРИГА БЕРИЛГАН СЎЗ БОШИДАН

Бу китобнинг биринчи нашри чиққанидан кейин тўрт йил ўтди. Бу давр ичида мен Москвадаги иккита олий ўқув юртида шу китоб буйича дарс бериб, унинг қандай баён этилгани ва тузилишини текшириб кўриш имконига эга бўлдим. Атом физикасини бу китобдан мустақил ўқиб ўрганган ёки олдин олган билимларини шу китобга қараб системага солган китобхонларнинг хатлари ҳам мен учун қимматли материал бўлди. Бу кузатишларнинг натижаси материалнинг баён этилиш характери ва китоб плани тўғри эканлигини кўрсатди. Жумладан, масаланинг экспериментал ва назарий томонларининг параллел ўрганилиши, шунингдек, назарий физиканинг бошқа бўлимларидан керак бўладиган маълумотлар ёритилган ёрдамчи боб ёки параграфлар киритилиши кўпчиликка маъқул тушди. Ўшанга қараб мен китобнинг характерини иккинчи нашрида ҳам бутунлай олдингича қолдирдим.

Шунга қарамай, китоб анча қайта ишланди. Китоб маълум даражада қайтадан ёзилди, деса муболаға бўлмайди. Сезилган барча хатоларни, ноаниқ жойларни тузатишга ва материални кенгайтириб юбормай, имкон борича аниқроқ баён этишга ҳаракат қилдим. Китобнинг биринчи ярмида киритилган қўшимча материал асосан атом физикасининг экспериментал асосларига тааллуқлидир, чунки биринчи нашрдаги баъзи экспериментлар менга жуда элементар баён этилганга ўхшаб кўринади. Ундан ташқари, ўтган давр ичида фаннинг тараққий этиши туфайли ўртага ташланган масалаларни ҳам тўлароқ баён этиш керак эди. Булар жумласига изотопларни ажратиш тўғрисидаги масала киради; биринчи нашрда бу масала бир жумла билан эслатилган эди, иккинчи нашрда унга бир неча параграф бағишланади.

Китобнинг иккинчи ярми айниқса кўп ўзгартирилди, атом ядросига бағишланган охириги бўлим эса ядро физикасининг аҳамияти ортиб кетгани ва кўпдан-кўп янги фактларнинг кашф этилиши муносабати билан анча кенгайтирилди. Шу туфайли бутун китобнинг ҳажми ҳам ортди; китобдан фойдаланишни қулайлаштириш мақсадида у икки томга бўлинди.

Ҳозир нашр этилаётган биринчи том асосан атомнинг ядро назарияси ва квант физикасининг экспериментал асосларига бағишланади. Китоб охирида материянинг тўлқин хоссалари баён этилади, охириги бобда эса олдинги нашридагига ўхшаб, Шрёдингер тенгласи чиқарилади ва унинг фақат бир ўлчовли масалалардаги энг оддий татбиқлари қараб ўтилади. Шундай қилиб, бу том анча мукамал бўлиб, баъзи категория китобхонлар учун мустақил аҳамиятга эга.

Иккинчи томда квант механикасининг асослари ва унинг атом электрон қобилигининг тузилишига татбиқ этилиши системали равишда баён этилади; иккинчи томнинг ярмичаси атом ядроси ва космик нурларга бағишланади.

Москва, 1948 й.

Э. Шпольский

РУСЧА БИРИНЧИ НАШРИГА БЕРИЛГАН СЎЗ ВОШИДАН

Ҳозирги замон атом физикаси „классик физикага“ асосланади. Ньютон ва Лагранж механикасида етарли маълумотга эга бўлмай туриб, квант механикасида бирор нарсага тушунишга, ёки Максвелл—Лоренц электромагнит назарияси билан таниш бўлмай туриб, нурланишнинг квант назарияси масалаларига тушунишга уриниш беҳуда кетган бўларди. Иккинчи томондан, квант механикасининг математик методлари тебранишлар назарияси масалалари ва классик математик физиканинг бошқа проблемаларини ечишда топилган усуллардан фойдаланади. Гарчи шу билан атом физикасини бирор тарзда жиддий ўрганиш учун зарур бўладиган тайёргарлик характери жуда аниқ белгиланса-да, назарий физика ва айниқса назарий механика ўқитишда атом физикасининг бу эҳтиёжлари етарли даражада ҳисобга олинмаслигини эътиборга олишга тўғри келади. Китобхонни имкон борича ҳар хил китоблардан керакли маълумотлар излаш заруратидан қутқариш мақсадида китобга „Атом тузилиши ва классик физика“ номли анча кенг ёрдамчи боб (тайёрлов боби) киритилган. Қўпинча бошқа китоблардаги зарур маълумотлар бу ҳол (яъни атом физикаси) учун керак бўладиган кўринишда бўлмайди. Китобхонларнинг аксарияти учун бу боб жуда фойдали бўлар, бошқалари эса бундан керак бўлганда маълумот олиш учун фойдаланар деб ўйлайман. Ундан ташқари, китобда сатрлар тагидаги эслатмаларда зарур қўлланмаларнинг номи кўрсатилади; мазкур китобда баён этилганларни тушуниш учун билиш керак бўлган бирор масала тўғрисида бу қўлланмалардан тўлароқ маълумот олиш мумкин.

Китобнинг алоҳида таъкидлаб ўтилиши зарур бўлган яна бир хусусияти экспериментга катта эътибор берилишидадир. Одатда назарий физикага бағишланган китобларда экспериментал маълумотларнинг қисқача таърифини бериш билан чегарланилади. Бу китобда эса ҳеч ерда ундай қилинган эмас, балки бу маълумотлар қандай қилиб топилганини тавсифлаб

ўтаман, ишлатиладиган катталикларнинг тартиби тўғрисида тушунча беришга ҳаракат қиламан.

Материал танлаш ва жойлаштиришда катта қийинчиликларни енгишга тўғри келди. Маълумки, атом физикасини унинг ривожланиш тарихи тартибида баён этиш зарурлиги тўғрисида мутахассислар ўртасида ягона фикр йўқ. Назарийчилар ўртасида квант механикасини баён этишда тарихий тартибдан (кетма-кетликдан) умуман юз ўгириш ва уни озми-кўпми догматик равишда соф мантиқий тарафда баён этиш керак деган фикр анча кенг тарқалган. Гарчи мен ўқув китобида назария ривожланишининг барча деталлари (иқир-чиқирлари), жумладан, ҳозирги кунда актуаллигини йўқотган томонлари тўла тасвирланиши лозим деб ҳисобламасам ҳам, тарихдан бутунлай ажралиб қолишни нотўғри, ҳеч бўлмаганда, педагогика нуқтаи назаридан нотўғри деб биламан. Шунинг учун абсолют қора жисмнинг нурланишига бағишланган VI бобда XIX аср охири ва XX аср бошларида классик физика ҳалокатининг сабаблари тушунтирилади. VIII бобда эса ҳозирга қадар экспериментатор учун мадад бўлиб келаётган Бор назарияси (атомнинг вектор модели билан) қисқача баён этилган ва нима учун бу назария асоссиз эканлиги кўрсатилган. Квант механикаси одатдаги тасаввурлардан воз кечишга олиб келиши муқаррар эканлигига китобхонни шу йўл билангина ишонтириш мумкин деб ўйлайман.

Атом физикасининг кўп масалалари катта математик аппарат билан баён этилади. Одатда китобларда ҳисоблашлар тушириб қолдирилади, мен эса математик операцияларни анча тўлиқ келтираман. Бу эса „буни бунга қўямиз“, „дифференциаллаймиз“ ва шулар каби бир хил ибораларни кўп ишлатишга ва материални бир оз қўполроқ баён этишга сабаб бўлади. Аммо мен асосан китобхоннинг манфаатини кўзлаган ҳолда, китоб стилининг чиройли бўлиши устида ортиқча ташвиш тортишдан воз кечдим.

Равшанки, ҳамма ҳисобларни тўла-тўқис келтиришга ҳеч қандай имконият йўқ. Унинг устига, бундай қилиш педагогик нуқтаи назардан қўпол хато бўлур эди. Китобхон учун етарлича иш қолади, аммо юқори курс студентларининг бундай китобларни ўқиш юзасидан малакалари бор: улар бундай китобларни қўлга қалам олиб ўқиш кераклигини биладилар. Маълумки, квант механикасини ўрганувчи китобхонга қийинлик қиладиган нарса математика эмас, балки предметнинг моҳиятидир: микроскопик системаларда юз берадиган ҳодисаларнинг қонуналари ўзига хос бўлиши, уларнинг одатдан ташқарилиги ва кўргазмали эмаслигидир. Мен конкрет мисоллар, иллюстрация ва сонли маълумотларни қараб чиқиш йўли билан китобхонга ёрдам беришга ҳаракат қилдим ва материал-

ни ишнинг моҳияти ҳамда ўзимнинг имкониятларим йўл қўйганча максимал даражада аниқ баён этишга меҳнатимни аямасдим.

Равшанки, мен предметнинг янги эканлиги ва қарор топган тўғри педагогик анъаналарнинг йўқлиги туфайли янада чигаллашадиган барча дидактик, мантиқий ва математик қийинчиликларни бартараф қила олдим деб ўйламайман. Шунинг учун китобни яхшилашга қаратилган барча кўрсатмаларни миннатдорчилик билан қабул қиламан.

Москва, 1944 й.

Э. Шпольский

1-§. Электроннинг кашф қилиниши

Электр зарядларининг дискрет структурали эканлиги электролиз тўғрисидаги Фарадей қонунларидан хулоса тарзида кашф қилинган эди. Бу кашфиётга олиб келган мулоҳазалар қандай юритилганини эслатиб ўтамиз.

Ҳар хил электролитлардан бир хил миқдорда электр ўтказганда бир валентли ионларнинг эритмаларида ажралиб чиқадиган модда миқдорлари ионларнинг атом оғирликларига тўғри пропорционал бўлиши Фарадей қонунларидан келиб чиқади. Агар бу электр миқдори муайян ионларнинг бир грамм-атомини (яъни модданинг атом оғирлигига тенг граммлари сонини, масалан, 107,88 г кумуш, 35,45 г хлор ва ҳоказо) ажратса, бир валентли ионлари бўлган бошқа ҳар қандай электролитда ҳам бир грамм-атом ион ажратади. Электролитдаги электр токи ионлар ҳаракатидан иборат бўлгани учун юқорида аниқланган фактни бундай деб таърифлаймиз: ионларнинг табиати қандай бўлишига боғлиқ бўлмаган ҳолда бир валентли ҳар қандай ионларнинг бир грамм-атоми бир хил электр миқдорини ташийди. Фарадей сони деб аталувчи бу F электр миқдори 96491 кулонга ёки $2,892 \cdot 10^{14}$ абсолют электростатик бирликка тенг. Икки валентли ионлар эритмасидан ток ўтказганда бир фарадей зарядини икки валентли ионнинг ярим грамм-атоми ташийди, уч валентли электролитларда бу миқдор электрни грамм-атомнинг учдан бир улуши ташийди ёки, бошқача қилиб айтганда, икки валентли ионларнинг бир грамм-атоми иккита фарадей зарядини ташийди, уч валентли ионларнинг бир грамм-атоми учта фарадей зарядини ташийди. Иккинчи томондан, Авогадро қонунига биноан, ҳар қандай модданинг бир грамм-атомида бир хил миқдорда N заррачалар бўлгани ва бир грамм-атом ташийдиган бутун заряд барча бу N заррачага бир текис тақсимланади дейишга тўлиқ

асосимиз бўлгани учун, бир валентли ҳар бир ион ташийдиган заряд мутлақо аниқ e катталиқка тенг бўлади:

$$e = \frac{F}{N}; \quad (1.1)$$

икки валентли ҳар бир ион ташийдиган заряд

$$2e = \frac{2F}{N}$$

бўлади ва умуман k валентли ион ташийдиган заряд

$$ke = \frac{kF}{N}$$

бўлади.

Шундай қилиб, ҳар хил ионлар e , $2e$, $3e$, ... га тенг зарядларни ташиши мумкин эканлигини, аммо $1,5e$ ёки $2,5e$ зарядли ионлар бўлмаслигини кўрдик. Вундан Гельмгольцнинг Фарадей шарафига бағишланган нутқида жуда аниқ баён этилган хулоса чиқади: „Модомики, биз элементлар атомларининг мавжудлигига иқрор эканмиз, бундан чиқадиган натижани ҳам инкор этолмаймиз: мусбат электр ҳам, манфий электр ҳам муайян элементар миқдорларга бўлинганки, улар ўзларини электрнинг атомлари каби тутади“.

Электрнинг атомистик табиатини билишда электрнинг газлардан ўтишини ўрганиш айниқса муҳим роль ўйнади. Жумладан, сийраклаштирилган газлардаги разрядни текшириш ва бу разрядда юзага келадиган катод нурларининг хоссаларини ўрганиш манфий электрнинг атомларини модданинг одатдаги атомларига боғлиқ бўлмаган эркин ҳолатда осонгина олиш мумкинлигини кўрсатади. Манфий электрнинг бу атомлари таърихан электронлар деб аталган.

2-§. Электрон зарядини аниқлаш

1911 йили Милликэн айрим заррачаларнинг зарядларини топиш йўли билан электрон зарядининг миқдорини биринчи бўлиб аниқлади ва шу билан электр зарядларининг дискрет эканлигини бевосита исбот қилди. 1912 йилда А. Ф. Иоффе ёруғлик таъсирдан ажралиб чиқадиган (фотоэффект) электронлар зарядини Милликэн методига ўхшаган метод билан аниқлади.

Милликэн қўллаган экспериментал метод мойнинг жуда майда томчилари зарядини бевосита ўлчашдан иборат эди. Мана шундай майда томчини горизонтал жойлашган конденсаторнинг пластинкалари (қопламлари) орасига киритдик деб тасаввур этайлик. Агар конденсатор пластинкаларига майдон қўйилган бўлмаса, томчи эркин тушади. Ўлчовлари кичик бўлгани туфайли томчи текис тушади, чунки унинг mg оғирлиги

ҳавонинг қаршилиқ кучи билан мувозанатлашади, ҳавонинг қаршилиқ кучи эса Стокс қонунига биноан

$$F = 6\pi\eta av_g \quad (2.1)$$

бўлади, бу ерда: v_g —тушиш тезлиги, η —ҳавонинг ички иш-қаланиш коэффициентни ва a —томчининг радиуси. Томчининг радиуси

$$mg = 6\pi\eta av_g \quad (2.2)$$

шартдан ҳисоблаб топилади. Ҳақиқатан ҳам, томчи моддасининг зичлигини σ билан, ҳавонинг зичлигини ρ билан белгилаймиз, у вақтда оғирлиги $mg = \frac{4}{3}\pi a^3\sigma g$ бўлган ва ҳавода тушаётган шарчага, Архимед қонунига биноан, юқорига йўналган ва $\frac{4}{3}\pi a^3\rho g$ га тенг бўлган яна бир куч таъсир қилишини эътиборга олиб, (2.2) формулани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\sigma - \rho)g = 6\pi\eta av_g,$$

бундан

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\eta^{1/2} v_g^{1/2}}{(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}}. \quad (2.3)$$

Энди конденсатор пластинкаларига потенциаллар айирмаси қўйилган деб фараз этайлик. Потенциаллар айирмасининг катталиги ва йўналиши шундай танлаб олинганки, томчи электр майдони таъсири остида юқорига кўтарилади. Томчи пастга тушганидагидек, кўтарилганида ҳам текис ҳаракат қилади; томчи кўтарилишининг тезлигини v_E билан белгилаб

$$Ee - mg = 6\pi\eta av_E \quad (2.4)$$

деб ёза оламиз, бу ерда: E —конденсатор ичидаги майдон кучланганлиги. (2.2) ва (2.4) тенгламалардан e ни топамиз:

$$e = \frac{6\pi\eta a}{E} (v_g + v_E)$$

ёки томчининг бевосита ўлчаб бўлмайдиган a радиуси ўрнига унинг v_g орқали ёзилган (2.3) ифодасини қўйсак,

$$e = 9\sqrt{2} \frac{\pi v g^{1/2} \eta^{1/2}}{E(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} (v_g + v_E) \quad (2.5)$$

бўлади.

Конденсатор пластинкалари орасидаги ҳавони (масалан, рентген нурлари ёрдамида) ионлаштириш йўли билан томчи зарядини ўзгартириш мумкин. Агар бунда майдон кучланган-

л катталигини аввалгича қолдирсак, томчининг тезлиги ўзгариб, v'_E га тенг бўлиб қолади; бунда томчи заряди

$$e_1 = 9\sqrt{2} \frac{\pi v g^{1/2} \eta^{3/2}}{E(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} (v_g + v'_E)$$

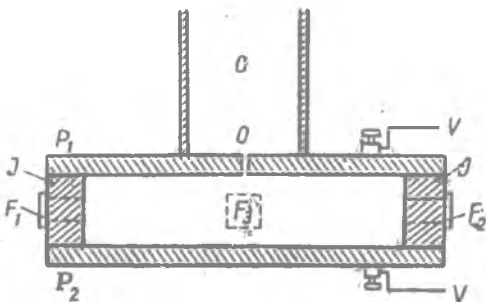
Бу ифодани (2.5) дан аяибриб, қуйидагини топамиз:

$$\Delta e = e - e_1 = 9\sqrt{2} \frac{\pi v g^{1/2} \eta^{3/2}}{E(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} (v_E - v'_E) \quad (2.6)$$

бўлади. Томчи зарядини бир неча марта ўзгартириб, аяни бир томчи билан кўпгина ўлчашлар ўтказиш мумкин.

3- §. Милликэн тажрибасини амалда қилиб кўриш

Конденсаторнинг яхшилаб силлиқланган P_1 ва P_2 пластинкалари (1- расм) изоляцияловчи JJ қистирмалар ёрдамида бир-бирига жуда аниқ параллел ҳолда маълум масофада тутиб турилади. Юқориги P_1 пластинканинг ўртасида O тешик бўлиб,

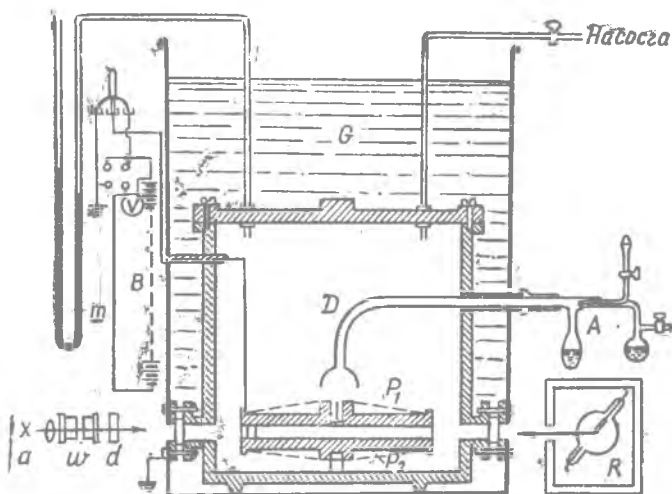


1- расм. Милликэн конденсаторининг схемаси.

бу тешик орқали синалаётган мой томчилари конденсатор ичига ўтади. Бу мой C цилиндрга пульверизатор ёрдамида пуркалади. Маълумки, суюқликлар пуркалганда ҳосил бўладиган томчилар электр зарядланиб қолади, демак, конденсатор ичига зарядланиб қолган томчилар киради. Томчи F_1 дарчадан ёй ёруғлиги билан ёритилади; F_3 дарча орқали эса микроскоп ёрдамида кузатиб турилади. Томчилар ёритувчи ёруғлик дастаси йўналишига перпендикуляр йўналишда кузатилгани учун танлаб олинган томчи микроскопнинг кўриш майдонида қоронғи фондаги равшан юлдузчадек (ультрамикроскопдаги каби) кўринади. Ёруғлик дастаси F_2 дарчадан чиқиб туради, чунки акс ҳолда ёруғликни камера деворлари ютса, камера ичи нотекис исиган ва унда кузатишга ҳалақит берувчи ҳаво оқимлари вужудга келган бўларди. Ўша F_2 дарча орқали конденсатор ичига ҳавони ионлаштириб, томчининг зарядини ўзгартириш имконини берувчи рентген нурлари киритилиши ҳам мумкин. Милликэн қурилмасининг тўлиқ схемаси 2- расмда келтирилган.

Томчининг тушиш ёки кўтарилиш тезлиги микроскопнинг фокал текислигида жойлашган иккита чизиқ орасини ўтишга кетган вақтни аниқлаш йўли билан ўлчанади; тезлик ўлчови

қилиб бу вақт оралиғига тескари бўлган катталиқ олинган. 1-жадвалда Милликэн ўлчашларининг бир қанча натижалари келтирилган. Томчи Зарядини ўзгартирганда заряд катталиғининг ўзгариши, (2.6) га биноан, тезликларнинг $v_E - v'_E$ айир-

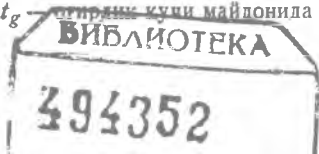


2-расм. Милликэн қурилмасининг схемаси: a —ёруғлик манбаи; W, d —иссиқлик нурларини йутувчи филтрлар; P_1, P_2 —конденсатор; AD —мой томчилари ҳосил қилувчи пульверизатор; G —мой ванна (термостат); B —батарея; m —манометр; R —рентген трубки.

1-жадвал

Электр майдонида кўтарилиш вақти t_E (сек)	Электр майдонида кўтарилиш вақтига тескари катталиқ $\frac{1}{t_E}$	Заряд ўзгартирилгандан кейин кўтарилиш вақтлари тескари катталиқлари айир-катталиқ маси $\frac{1}{t'_E} - \frac{1}{t_E}$	Заряд ўзгаришининг бирликлари сони n'	Заряд ўзгаришининг нисбий катталиғи $\frac{1}{n' \left(\frac{1}{t'_E} - \frac{1}{t_E} \right)}$	Тушиш вақтлари-нинг тескари катталиқлари йиғиндиси $\frac{1}{t_g^*} + \frac{1}{t_E}$	Заряд бирлик-лари сони $n \pm n'$	Заряд бирлиғининг нисбий катталиғи $\frac{1}{n \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_E} \right)}$
80,708	0,01236	0,03234	6	0,005390	0,09655	18	0,005366
22,375	0,04470	0,03751	7	0,005358	0,12887	24	0,005371
140,565	0,00719	0,005348	1	0,005348	0,09138	17	0,005375
79,600	0,01254	0,01616	3	0,005387	0,09673	18	0,005374
34,785	0,02870				0,11289	21	0,005376

* Ҳурғача $t_g = 11,880$, бунда: t_g — тушириш кучи майдонида тушиш вақти.



масига пропорционал бўлиши керак. Агар бу айирма аини бир катталikka бутун сон марта каррали бўлса, у ҳолда заряд муттасил ўзгармай, балки чекли улушлар билан ўзгаради деб айтса бўлади.

Жадвалнинг тўртинчи ва бешинчи устунлари бунинг ҳақиқатда ҳам шундай эканлигини кўрсатади: заряд бешинчи каср хонасидаги бир неча бирлик аниқлигида 6, 7, 1, . . . бирликка ўзгаради, шу билан бирга, заряд ўзгариши бирлиги эса (жадвалнинг бешинчи устуни) тажрибада йўл қўйиладиган хато чегарасида ўзгармас қийматга эга бўлади.

Томчи зарядининг абсолют катталиги $v_g + v_E$ йиғиндига (жадвалнинг олтинчи устуни) пропорционал бўлиши (2.5) формуладан кўриниб турибди. Бу йиғиндининг аини бир катталikka каррали бўлиши заряднинг дискрет бирликлардан ташкил топишини билдиради. Еттинчи ва саккизинчи устунлар ҳақиқатан ҳам ана шундай бўлишини кўрсатади. Ниҳоят, бешинчи ва саккизинчи устунларни солиштиришдан заряд ўзгариши бирлиги билан заряд бирлиги (яна бешинчи каср хонасидаги бир неча бирлик аниқлигида) бир-бирига мос келиши кўриниб турибди. Шундай қилиб, жадвални анализ қилиш электр зарядининг—электр ҳодисалари атомистикасининг дискрет табиатли эканлигини тўлиқ ва бевосита исботлайди.

Электрон зарядининг абсолют катталигини аниқ топиш учун, (2.5) формула ёрдамида топилган сонларга анчагина катта тузатма киритиш керак. Ҳақиқатан ҳам, агар ҳар хил радиусли томчилар заряди аниқланса, радиус кичрайганда аввал e нинг қиймати ўзгармас бўлади, аммо жуда кичик томчиларнинг e заряди радиусининг кичрайиши билан тез ортади. Шундай қилиб, электрон заряди доимий бўлмай, балки томчининг ўлчовларига боғлиқ бўлади, деган хулоса келиб чиқади.

Милликән бундай ўринсиз хулоса чиқишига Стокс қонунини жуда майда томчилар ҳаракатига татбиқ этиш ярамаслиги сабаб бўлди деб кўрсатди. Ҳақиқатан ҳам Стокс қонуни чиқарилганда ҳаракатланувчи жисм шар шаклида ва жисм узлуксиз муҳитда ҳаракатланади деб фараз қилинган. Томчилар газда ҳаракатланганида уларнинг ўлчовлари газ молекулаларининг эркин югуриш йўлининг ўртача узунлигига солиштирарлик даражада бўлганда муҳитни узлуксиз деб бўлмайди. Шундай қилиб, эркин югуриш йўли ўртача узунлигининг томчи радиусига бўлган λ/a нисбати Стокс қонунининг татбиқ этилиш ёки татбиқ этилмаслик критерийси бўлади: агар бу нисбат жуда кичик ($\frac{\lambda}{a} \ll 1$) бўлса, Стокс қонунини татбиқ этса бўлади, акс ҳолда эса татбиқ этиш мумкин эмас.

Жуда майда томчилар учун Стокс қонунидан четга чиқишларни ҳисобга олиш мақсадида Стокс кучининг (2.1) ифодаси

ўрнига тузатилган қўйидаги ифодасидан фойдаланиш тавсия этилган:

$$F = \frac{6\pi\eta a v_g}{1 + A \frac{\lambda}{a}} \quad (3.1)$$

бу ерда A — бирор доимий катталиқ. $A \frac{\lambda}{a} \rightarrow 0$ да бу ифода Стокснинг (2.1) формуласита айланиши кўришиб турибди. Мана шу тузатилган формула ёрдамида заряд абсолют катталиги учун (2.5) формула ўрнига қўйидаги ифодани оламиз:

$$e_0 = \frac{9V \sqrt{2} \pi \eta^{1/2} v_g^{1/2} (v_F + v_g)}{(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2} E \left(1 + A \frac{\lambda}{a}\right)^{1/2}} \quad (3.2)$$

Заряднинг абсолют катталигини бу формулага қараб топиш учун A доимийни билиш керак. Лекин Милликэн бу доимийни аниқламасдан туриб заряднинг ҳақиқий катталигини қандай қилиб топишни кўрсатди.

(2.5) ва (3.2) формулаларни солиштириш йўли билан e_0 катталиқнинг тузатмасиз ҳисобланган заряд катталигига нисбатини топиш осон:

$$\frac{e_0}{e} = \frac{1}{\left(1 + A \frac{\lambda}{a}\right)^{1/2}}$$

ёки

$$e_0^{1/2} \left(1 + A \frac{\lambda}{a}\right) = e^{1/2}$$

Лекин эркин югуриш йўлининг узунлиги λ газнинг p босими-га тесқари пропорционал, шунинг учун

$$e_0^{1/2} \left(1 + \frac{B}{pa}\right) = e^{1/2}, \quad (3.3)$$

бу ерда B — бирор янги доимий.

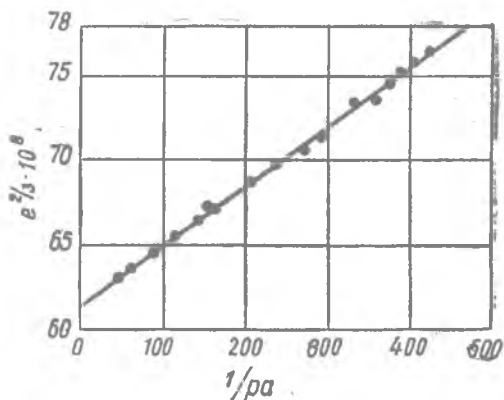
Агар p босимни ўзгартириб ва босимнинг ҳар бир қийматида e заряднинг тузатма киритилмаган катталиги ҳисобланса, (3.3) формулага биноан, $e^{1/2}$ билан $1/pa$ орасида чизиқли бѳғланиш бўлиши керак.

(3.3) формуладаги B/pa ҳад жуда кичик тузатма бўлгани учун, бунда томчининг a радиуси сифатида Стокснинг тузатма киритилмаган формуласи [(2.3) формулага қаранг] бўйича ҳисоблаб топиладиган катталиқни олиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам Милликэн ўлчашларига кўра, B доимий (константа) қўйидагичадир:

$$B = 0,000617,$$

буни ўлчаганда p босим сантиметр билан ифодаланган симоб устуни ҳисобида, a эса сантиметр ҳисобида олинган.

3-расмда абсциссалар ўқида $1/pa$ нинг қийматлари, ординаталар ўқида $e^{3/2} \cdot 10^8$ нинг қийматлари олинган. Бу расм (3.3) формула талаб қиладиган чизиқли боғлаишнинг ҳақиқатда мавжудлигини кўрсатади.

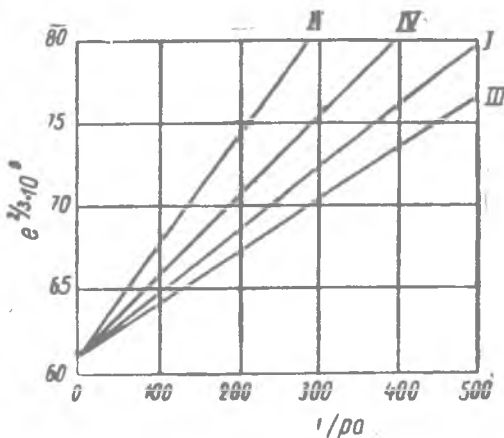


3-расм.

(3.3) формулада $1/p = 0$ ёки $a = \infty$ деб олиб, яъни Стокс қонуни ўринли (заррача радиуси эркин югуриш йўлининг ўртача узунлигидан чексиз катта) бўладиган лимит ҳолга ўтиб, $e^{3/2} = e_0^{3/2}$ ёки $e = e_0$ эканлигини топамиз. Шундай қилиб, электрон зарядининг ҳақиқий e_0 катталигини то-

пиш учун тўғри чизиқни ординаталар ўқи билан кесишгунча экстраполяция қилиш етарлидир.

4-расмда табиати ҳар хил бўлган заррачалар учун худди шу йўл билан ясалган тўртта тўғри чизиқ кўрсатилган: I—ҳаводаги мой томчилари, II—водороддаги мой томчилари, III—ҳаводаги симоб томчилари, IV—ҳаводаги шеллак зарралари. Тўрттала тўғри чизиқ ординаталар ўқини айни бир нуқтада кесиб ўтади: электрон заряди зарраларнинг табиатига ҳам, зарралар атрофидаги газ табиатига ҳам боғлиқ эмас.



4-расм.

Милликэн тажрибалари катта принципиал аҳамиятга эга, чунки улар электр зарядининг атомистик табиатини жуда аниқ исбот қилади. Гап e нинг абсолют қийматига келганда шуни айтиш керакки, (3.2) формуладан кўринишича, e ни топиш аниқлиги ҳавонинг ички ишқаланиш коэффициенти η ни топиш

аниқлигига жуда ҳам боғлиқ. η ни анча аниқ ўлчашлардан топилган янги натижаларнинг ўртачаси $\eta = 1832 \cdot 10^{-7}$ бўлади. η нинг мана шу қийматида электрон заряди $e = 4,805 \cdot 10^{-10}$ CGSE бўлади. Аммо электрон зарядининг анча аниқроқ қиймати билвосита йўл билан, яъни рентген нурларининг тўлқин узунлигини абсолют ўлчаш ёрдамида топилади (37—38- параграфларга қаранг).

Ма ш қ л а р: 1. Заряди 5 электрон зарядига тенг бўлган мой томчисини мувозанатлаш учун пластинкаларининг оралиги 5 мм бўлган конденсаторга қандай потенциаллар айирмаси қўйиш керак? Томчи массаси $3,119 \cdot 10^{-13}$ г га тенг. (Жавоб: 19,2 в.)

2. Зичлиги 0,98 ва радиуси 10^{-4} см бўлган мой томчисининг босими 76 см бўлган ҳавода тушиш тезлиги ҳисоблансин. Ҳавонинг ички ишқаланиш коэффициентини 0,0001832 га тенг. (Жавоб: 0,0117 см/сек.)

3. Конденсаторнинг бир-биридан 1 см масофада турган пластинкаларига қўйилган 31,5 в потенциаллар айирмаси зарядли ёғ томчисини 10 сек да 10 бўлим тезлик билан юқорига кўтарилишга мажбур қилади (50 бўлим = 1 мм). Оғирлик кучи таъсирида тушиш тезлиги 100 секундда 10 бўлим. Ҳавонинг ички ишқаланиш коэффициентини 0,00018. Томчининг зичлиги 0,9. Ҳавонинг босими 76 см Hg. Томчида неча электрон бор? (Жавоб: битта.)

4-§. Электр ва магнит майдонларида электроннинг ҳаракати

Заряди билан бир қаторда электронни характерловчи асосий константа электрон массасидир. Бу масса жуда ҳам кичик, шундай эканлигини Милликэн конденсаторида кузатиш ўтказганда билиш мумкин: гарчи (2. 2) формулага мувофиқ текис тушиш тезлиги массага пропорционал бўлса-да, заррача заряди ўзгарганда бир неча электрон йўқотиши ёки қўшиб олиши заррачанинг тушиш тезлигига сезиларли таъсир кўрсатмайди. Лекин электронга электр ёки магнит майдони таъсирида тезланиш берилса электронда инерт массанинг борлиги билинади. Шунинг учун электрон массасини аниқлашнинг барча усуллари электроннинг электр ва магнит майдонларидаги ҳаракатини ўрганишга асосланган. Бизнинг навбатдаги вазифамиз электр ёки магнит майдонларининг электрон ҳаракатига таъсирини ўрганишдан иборатдир.

Маълумки*, e заряди бўлган заррачага электромагнит майдони томонидан таъсир этадиган куч (Лоренц кучи деб атаувчи куч) қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \mathbf{H}]. \quad (4.1)$$

* Масалан, И. Е. Таммининг, Основы теории электричества деган китобига қаранг, 210-бет, Гостехиздат, 1949.

Бу ердаги биринчи ҳад электр майдонининг таъсир кучини, иккинчиси эса магнит майдонининг* таъсир кучини билдиради. e заряд бирликларнинг электростатик системасида ифодаланган деб фараз қилинади. Бундан кейин мусбат зарядли заррачалар устида мулоҳазалар юритамиз, лекин манфий зарядли заррачалар ҳаракати тўғрисида ҳам худди шундай фикр юритиш мумкин. Бу мулоҳазаларда электрон заряди манфий эканлигини ва унинг оғиш йўналиши мусбат зарядли заррача оғишига ҳамиша қарама-қарши эканлигини эсда тутиш керак.

Ньютоннинг иккинчи қонунига мувофиқ, F куч m масса билан v тезланиш кўпайтмасига тенг:

$$F = m\dot{v}. \quad (4.1')$$

(4.1) ва (4.1') нинг ўнг томонларини тенглаштирамиз:

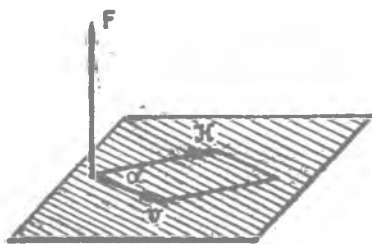
$$m\dot{v} = eE + \frac{e}{c} [vH]. \quad (4.2)$$

Энди электр ва магнит майдонларининг таъсирини алоҳида-алоҳида текширамиз. (4.2) формулада $E = 0$ деб олиб, қуйидагини топамиз:

$$m\dot{v} = \frac{e}{c} [vH]. \quad (4.3)$$

Кўпинча заряднинг магнит майдонидаги ҳаракатини текширишда бирликларнинг электромагнит системаси ишлатилади. У ҳолда (4.3) тенглама

$$m\dot{v} = e[vH]$$



5-расм.

кўринишга келади, бундан

$$\dot{v} = \frac{e}{m} [vH]. \quad (4.4)$$

Магнит майдонининг таъсир кучи вектор кўпайтма орқали ифодалангани учун H , v , F векторлар ўнг винт системасини ҳосил қилади (5-расм).

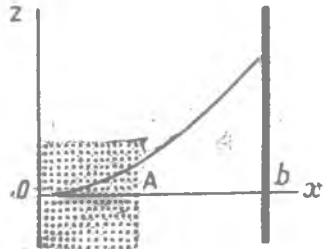
(4.4) вектор тенглама қуйидаги учта скаляр тенгламага эквивалент:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m} (v_y H_z - v_z H_y), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{e}{m} (v_z H_x - v_x H_z), \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{e}{m} (v_x H_y - v_y H_x). \end{aligned} \right\} \quad (4.4')$$

* Келгусида (4.1) формуланинг магнит майдонига боғлиқ бўлган иккинчи ҳадини баъзан Лоренц кучи деб атаймиз.

Бу тенгламалар системасини интеграллаш кўпчилик ҳолларда мураккаб математик масаладан иборатдир. Бу системани С. А. Богуславский бир қанча ҳоллар учун ечган. Шартли одатдаги лаборатория экспериментларига мос келадиган энг содда ҳолни текширамиз ва зарядли заррачалар параллел дас-тасининг магнит майдонидаги траекториясини ҳисоблаш билан шуғулланмасдан, ўша майдондаги оғиши катталигинигина топамиз.

$t = 0$ бўлган пайтда заррачанинг тезлиги x ўқ бўйича йўналган, яъни $t = 0$ да $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$ деб фараз қиламиз. Магнит майдони эса вақт ўтиши билан ўзгармайди, y ўқ бўйича йўналган, умуман айтганда, бир жинсли эмас, яъни $H = H(x)$ шаклда ёзиш мумкин деб фараз қиламиз. Шундай қилиб, $H_x = H_z = 0$, $H_y = H(x) = H$. Майдон $OA = x$ масофада таъсир қилади (6- расм) ва, умуман айтганда, OA га тенг бўлмаган $OB = l$ масофада флуоресценцияловчи экран қўйилиб, заррачалар оғиши ўша экранда ўлчанади деярлик. Майдон бутун OA масофада y ўқи бўйича йўналгани учун кучнинг $F_y = e(v_z H_x - v_x H_z)$ ташкил этувчиси нолга тенг ($F_y \equiv 0$) ва ҳаракат xz текислигида юз беради. Бизни заррачанинг траекторияси эмас, балки унинг $x = l$ бўлгандаги z оғиши қизиқтиргани учун (4.4') тенгламаларнинг фақат учинчисидан фойдаланамиз. Агар оғиш жуда кичик бўлса, иккинчи тартибли чексиз кичик миқдорлар аниқлигида бутун йўл давомида $v = v_x = \frac{dx}{dt}$ деб олиш мумкин; ҳақиқатан ҳам,



6- расм. Магнит майдонидаги мусбат зарядли заррача.

$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = v_x \left[1 + \left(\frac{v_z}{v_x} \right)^2 \right]^{1/2} = v_x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_z}{v_x} \right)^2 + \dots \right] \approx v_x$.

(4.4') тенгламаларнинг бизни қизиқтираётган учинчисидан қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{dx}{dt} H, \quad (4.5)$$

чунки ўнг томондаги иккинчи ҳад нолга тенг.

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ эканлигини эътиборга олиб, (4.5) ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \frac{dx}{dt} H.$$

Ўхшаш миқдорларни қисқартириб ва $\frac{dx}{dt}$ ни қайта v билан алмаштириб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{e}{mv} H.$$

Бизни қизиқтираётган z оғишни топиш учун бу тенгламани икки марта интеграллаймиз. 0 дан x гача бир марта интеграллаймиз:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e}{mv} \int_0^x H dx.$$

Нолдан l гача (майдон бошидан экрангача бўлган масофа) иккинчи марта интеграллаганда қуйидагини топамиз:

$$z = \frac{e}{mv} \int_0^l dx \int_0^x H dx.$$

$u = \int_0^x H dx$ ва $dv = dx$ деб олиб, бўлаклаб интеграллаймиз:

$$z = \frac{e}{mv} \left\{ l \int_0^l H dx - \int_0^l H x dx \right\} = \frac{e}{mv} \int_0^l H(l-x) dx. \quad (4.6)$$

Бу формуладаги

$$A = \int_0^l H(l-x) dx \quad (4.7)$$

интеграл, равшанки, асбобнинг доимийсидир, чунки унинг катталиги майдоннинг H кучланганлигига ва электронлар кириш жойидан экрангача бўлган l масофагагина боғлиқдир. (4.7) белгилашдан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$z = A \frac{e}{mv}. \quad (4.8)$$

Майдон бир жинсли ($H = \text{const}$) ва $x=0$ дан $x=a$ гача ораликда таъсир этадиган, $x=a$ дан $x=l$ гача интервалда $H=0$ бўлган хусусий ҳолда асбоб доимийси қуйидагига тенг бўлади:

$$A = a \left(l - \frac{a}{2} \right) H.$$

Ниҳоят, агар экран магнит қутблари охирига тақаб қўйилган бўлса, $l=a$ бўлади ва

$$A = \frac{a^2}{2} H.$$

Тезликка перпендикуляр йўналган бир жинсли майдонда заррачанинг траекториясини ҳам топиш осон. Ҳақиқатан ҳам,

Лоренц кучи ҳамиша v га перпендикуляр бўлгани учун тезликнинг катталигини эмас, балки йўналишинигина ўзгартиради; шунинг учун электрон шундай айлана бўйлаб ҳаракат қиладики, бу айлананинг ρ радиусини топиш учун $e v H$ Лоренц кучини марказдан қочирма инерция кучига тенглаштирамиз:

$$e v H = \frac{m v^2}{\rho},$$

бундан

$$\rho = \frac{m v}{e} \frac{1}{H}. \quad (4.9)$$

Энди зарядли заррачанинг кўндаланг электростатик майдонда оғишини ҳисоблаймиз. Олдинги ҳолдагидек бунда ҳам заррачанинг конденсатор пластинкалари орасидаги фазога кириш пайтидаги тезлиги x ўқи бўйича йўналган, конденсатор майдони эса z ўқи бўйича йўналган бўлсин. Барча бошқа шартларни ўзгартирмаймиз (7-расм). $H = 0$ бўлгани учун (4.2) дан

$$m \dot{v} = e E$$

тенглама ҳосил бўлади. $E_x = E_y = 0$, $E_z = E$ эканлигини назарга олиб, қуйидаги учта скаляр тенгламани ҳосил қиламиз:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = e E.$$

Оғишлар жуда кичик бўлганда, олдингидагидек, ҳамиша $v = \frac{dx}{dt}$ деб фараз қилиш ва оғишни ҳисоблаш учун фақат учинчи

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = e E \quad (4.10)$$

тенгламадан фойдаланиш мумкин.

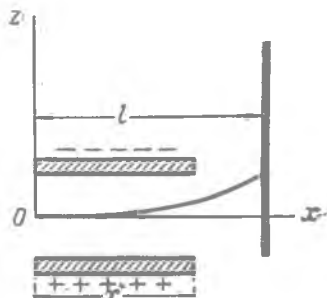
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = v^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$$

эканлигини эътиборга олиб, (4.10) тенгламани

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{e}{m v^2} E$$

кўринишда ёзиш мумкин. Худди олдингидагидек икки марта интеграллаб, z оғишни топамиз:

$$z = \frac{e}{m v^2} \int_0^l dx \int_0^x E dx = \frac{e}{m v^2} \int_0^l (l-x) E dx,$$



7-расм. Электростатик майдондаги мусбат зарядли заррача.

Ёки $\int_0^l (l-x)E dx = B$ белгилаш киритиб (бундаги B олдин киритилган A доимий каби асбобнинг доимийси бўлади),

$$z = B \frac{e}{mv^2} \quad (4.11)$$

га эга бўламиз.

Конденсатор пластинкаларининг узунлиги b га тенг ва майдон бир жинсли ($E = \text{const}$) бўлган хусусий ҳолда бевосита интеграллашдан қуйидагини топамиз:

$$B = b \left(l - \frac{b}{2} \right) E$$

Ёки $l = b$ бўлганда

$$B = \frac{b^2}{2} E. \quad (4.12)$$

5-§. Электроннинг бўйлама электростатик майдондаги ҳаракати

Ниҳоят, электроннинг ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлган электростатик майдондаги ҳаракатини текширайлик. Электрон x ўқи йўналишида ҳаракат қилаётган бўлсин. У ҳолда $E_x = E$, $E_y = E_z = 0$ бўлади. Ҳаракатнинг

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = eE \quad (5.1)$$

кўринишидаги скаляр тенгламасида $\frac{dx}{dt}$ ни v га алмаштириб, тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = eE. \quad (5.1')$$

(5.1') нинг иккала томонини v га кўпайтирамиз ва

$$v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$$

эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = eEv \quad (5.2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Электр майдонининг потенциалини φ билан белгиласак, $E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$ бўлади. Шунинг учун

$$Ev = -\frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$$

булади ва (5.2) тенглама

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = -e \frac{d\varphi}{dt}$$

ёки

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + e\varphi \right) = 0$$

кўринишига келади, бундан

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi = \text{const.} \quad (5.3)$$

(5.3) тенглама энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайди, чунки $e\varphi$ кўпайтма майдоннинг потенциали φ бўлган нуқтасидаги e заряднинг потенциал энергиясидир. Агар заряд потенциали φ_1 бўлган нуқтадан потенциали φ_2 бўлган нуқтага кўчса ва $\varphi_1 - \varphi_2 = V$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = e(\varphi_1 - \varphi_2) = eV$$

булади, $v_1 = 0$ бўлган ҳолда

$$\frac{mv^2}{2} = eV \quad (5.4)$$

келиб чиқади. Одатда, потенциаллар айирмаси вольтларда ўлчанади; бу ҳолда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300} \quad (5.4')$$

Атом физикасида энергия кўпинча электрон-вольтларда ифодаланади. 1 *э* тезлатувчи потенциаллар айирмасини ўтганда электрон оладиган энергия 1 *эв* булади. (5.4') дан қуйидаги қийматни топамиз:

$$1 \text{ электрон-вольт} = \frac{4,80 \cdot 10^{-10} \cdot 1}{300} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

Ҳар бирининг энергияси 1 *эв* бўлган $N = 6,023 \cdot 10^{23}$ (1 моль) та электрон энергияси қуйидагига тенгдир:

$$\begin{aligned} 1 \text{ электрон-вольт} \cdot \text{моль}^{-1} &= 9,64 \cdot 10^{11} \text{ эрг} \cdot \text{моль}^{-1} = \\ &= 2,304 \cdot 10^4 \text{ кал} \cdot \text{моль}^{-1} = \\ &= 23,04 \text{ ккал} \cdot \text{моль}^{-1}. \end{aligned}$$

Агар электронларнинг электрон-вольтларда ифодаланган энергияси маълум бўлса, (5.4') дан v тезликни *см/сек* ларда бевосита ҳисоблаб топса бўлади:

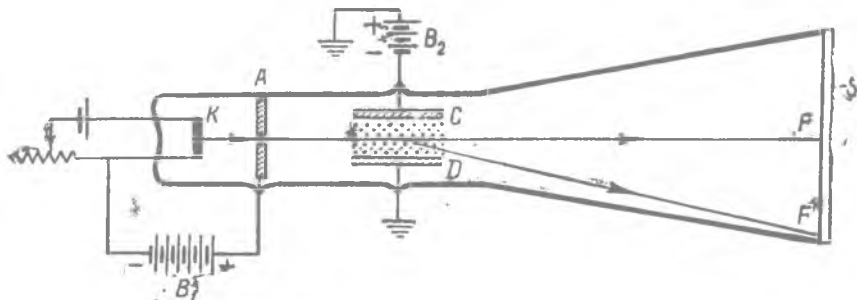
$$v = \sqrt{\frac{e}{m} \frac{V}{150}} = 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V(\text{вольт})} \text{ см/сек.} \quad (5.5)$$

6-§. Солиштирма зарядни аниқлашнинг экспериментал методлари

Солиштирма e/m зарядни аниқлашнинг экспериментал усуллари электроннинг электр ва магнит майдонларидаги ҳаракати ни текшириш натижаларига асосланган; бундан олдинги икки параграф ўша текширишларга бағишланган эди.

Лекин шуни назарда тутиш керакки, кўндаланг электр майдонида ҳам, кўндаланг магнит майдонида ҳам электроннинг оғиши фақат e/m га эмас, балки v га ҳам боғлиқ: магнит оғдириши e/mv фактор билан, электр оғдириши e/mv^2 фактор билан белгиланади. Шунинг учун битта майдоннинг оғдиришига асосланган тажриба e/m ни аниқлашга имкон бермайди.

Дастлабки ишларда одатда электр ва магнит майдонларидаги оғишлар бирин-кетин ўлчанган ва (4.8), (4.11) тенгламалардан тўппа-тўғри e/m ва v ҳисобланган. Бундаги электронлар дастаси гази сийраклаштирилган (10^{-2} мм Hg тартибидаги босим) трубкалардаги катод нурлари эди. Кейинги ўн йилликларда вакуум ҳосил қилиш техникасининг ривожланиши бу ўлчашларни янада аниқроқ ва яхши назорат қилинадиган шароитларда бажаришга имкон беради. 8-расмда e/m ва v ни



8-расм. Солиштирма зарядни электростатик ва магнит майдонларида оғишга қараб аниқлаш методининг схемаси.

аниқлашда ишлатиладиган замонавий асбобнинг схемаси тасвирланган. Ҳозирги замон вакуум техникаси имкон берадиган даражада ҳавоси сийраклаштирилган трубка ичига жойлаштирилган чўғланма K катод электронларнинг бой манбаидир. Бу электронларни B_1 батарея тезлаштиради; батареянинг мусбат қутби марказида тешиги бўлган металл пластинкага (анодга) уланган. Анод марказидаги тешикдан ўтган электронлар тўғри чизик бўйича ҳаракат қилиб, трубканинг флуоресценцияловчи модда қопланган S деворида F ёруғ доғ ҳосил қилади; бу ёруғ доғ A аноддаги тешик қаршисига тушади. A анод билан F орасидаги йўлда электронлар конденсаторнинг CD пластинкалари орасидан ўтади; бу пластинкаларга B_2 ба-

тараядан кучланиш берилиши мумкин. Агар B_2 батарея уланса, пластинкалар орасида ҳосил бўлган электр майдони электронлар дастасини оғдиради ва ёруғ доғ F' вазиятга силжийди.

Конденсаторнинг CD пластинкалари орасида чизма тексизлигига перпендикуляр бўлган (расмда нуқталар билан кўрсатилган) бир жинсли магнит майдони ҳосил қилиб, ёруғ доғни ўша йўналишда ёки унга тескари йўналишда оғдириш мумкин. Агар иккала оғиш ўлчанса, (4.8) ва (4.11) тенгламалардан e/m ва v ларни ҳисоблаб топиш мумкин. Амалда эса бошланғич электростатик оғишни магнит майдони билан компенсациялаш қулайроқдир. Бу ҳолда бажарилиши лозим бўлган ўлчашлар иккала майдоннинг, яъни электр ва магнит майдонларнинг кучланганликларини жуда аниқ белгилашга келтирилади.

Юқорида айтилганидек, иссиқ катоддан чиқадиган электронларнинг бошланғич тезликлари кичик бўлади. Масалан, вольфрам спиралдан иборат катод 2400°K гача қиздирилганда электронларнинг атиги $0,1\%$ ининг энергияси $1,42$ электрон-вольтдан ортиқ бўлади; $0,0001\%$ ининг энергияси $2,85$ электрон-вольтдан ортиқ бўлади. Шунинг учун тезлатувчи майдон жуда кучсиз бўлмаса, катоддан чиқаётган электронларнинг бошланғич тезлиги нолга тенг деб аниқ айтиш мумкин. Катод билан анод (масалан, 8-расмдаги K билан A) орасидаги потенциаллар айирмаси V вольт деб фараз қилайлик. У ҳолда электронларнинг охириги тезлиги қуйидаги тенгламадан топилади:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300}. \quad (5.4')$$

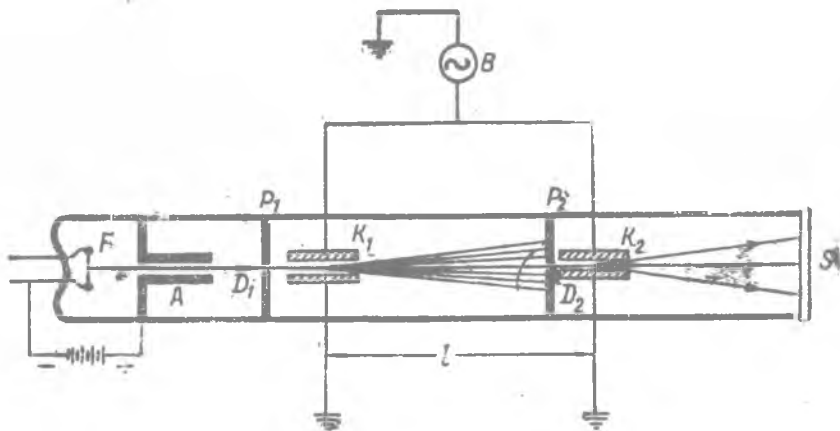
Шунинг учун V ни билсак, электронлар тезлигини ҳам билган бўламиз. Бу ҳол e/m ва v ни аниқлаш учун электр ва магнит оғдиришларидан фойдаланиш заруратини йўқотади. Бунинг учун ё электр майдонидан, ёки магнит майдонидан фойдаланиш етарлидир; (5.4') формула ҳамини иккинчи тенглама ўрнида олиниши мумкин.

Бундан кейинги параграфларда солиштирма зарядни аниқлашга доир жуда кўп замонавий методлардан иккита энг характерлисини келтирамиз. Булардан бирида электр майдони, иккинчисида эса магнит майдони қўлланилади.

7-§. Электроннинг солиштирма зарядини икки конденсатор методи билан аниқлаш

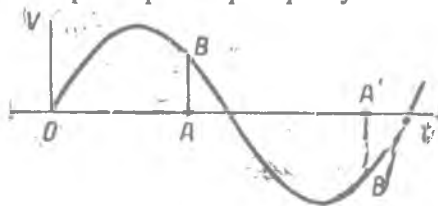
e/m нисбатни аниқлашнинг энг аниқ замонавий методларидан бири икки конденсатор методидир. F чуғланиш толасидан (9-расм) чиқаётган электронларни F катод билан A анод орасидаги майдон тезлаштиради. Электронлар дастаси A аноддаги тешикдан ва D_1 диафрагмадан ўтиб, биринчи K_1 конден-

саторга тушади; бу конденсаторга юксак частотали B генератордан ўзгарувчан потенциаллар айирмаси берилади. Мана шу ўзгарувчан майдон таъсирида дастанинг йўналиши даврий равишда ўзгаради ва, умуман айтганда, дастани P_2 экран ту-



9-расм. Солиштирма зарядни иккита конденсатор ёрдамида аниқлаш методининг схемаси.

тиб қолади. Потенциал эгри чизиғи нолдан (10-расм) ўтган пайтда K_1 конденсатордан учиб ўтадиган электронларгина P_2 экрандаги жуда кичик D_2 тешикдан ўтиб кетади. Сўнгра бу электронлар генераторга уланган K_2 конденсаторга тушади.



10-расм.

Иккала конденсатор бир генераторга улангани учун иккала конденсатордаги майдон фазаси ҳар доим бир хил бўлади. Шундай қилиб, ҳар бир давр давомида K_2 конденсаторга электронлар икки марта тушади ва электронларнинг K_2 конденса-

тордан ўтиш пайтида генераторнинг фазаси қандай бўлишига қараб юқорига ёки пастга оз ёки кўп даражада оғади. Электронлар иккинчи K_2 конденсатор орқали ўтганида фақат иккита симметрик йўналиш бўйича оғишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Масалан, электроннинг K_1 конденсатордан K_2 конденсаторга учиб бориш вақти $t_1 = OA$ га тенг бўлса (10-расм), у ҳолда K_2 конденсаторда баъзи электронлар $AB = +V_1$ потенциалга, баъзилари $A'B' = -V_1$ потенциалга дуч келади. Шунинг учун флуоресценцияловчи S экранда симметрик жойлашган иккита доғ ҳосил бўлади.

Тезлатувчи потенциални ўзгартириш билан электронлар тезлигини ўзгартириб, t_1 вақтни генераторнинг $T/2$ ярим даврига ёки умуман $nT/2$ га тенг қилиш мумкин. Бу шароитда электронлар иккинчи конденсатордан ҳам оғмасдан ўтади ва флуоресценцияловчи экранда иккита доғ устма-уст тушади. Агар K_1 ва K_2 конденсаторлар орасидаги масофа l , генераторнинг частотаси f бўлса, бундай электронларнинг тезлиги

$$v = \frac{2l}{T} = 2lf$$

ёки, умуман,

$$v = \frac{2l}{nT} = \frac{2lf}{n} \quad (7.1)$$

га тенг бўлади. Иккинчи томондан,

$$eV = \frac{mv^2}{2}, \quad (5.4)$$

бундаги V —катод F ва анод A орасига қўйилган тезлатувчи потенциалдир. (7.1) ва (5.4) формулалардан қуйидагини топамиз:

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2V} = \frac{2f^2 l^2}{n^2 V}. \quad (7.2)$$

Икки конденсатор методининг афзал томони шундаки, бу „ноль“ метод бўлиб, одатда тузатилиши қийин бўлган хатолар билан боғлиқ бўлган оғишларни ўлчашни талаб қилмайди. Солиштирма заряднинг бу усул билан топилган катталиги барча тузатмаларни киритгандан кейин қуйидагига тенг* бўлади:

$$(1,7590 \pm 0,0015) \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot z^{-1}.$$

8-§. Электроннинг солиштирма зарядини бўйлама магнит майдон билан фокуслаш методи бўйича аниқлаш

e/m ни аниқлашнинг иккинчи аниқ методи бўйлама магнит майдонини татбиқ этиш билан боғлиқдир.

Аввал бир нуқтадан (диафрагма тешигидан) чиқаётган электронларнинг ёйилувчи дастасига магнит майдоннинг қандай таъсир қилишини текширамиз. Магнит майдонининг электронга кўрсатадиган таъсир кучи (e электромагнит бирликларида ифодаланган деб фараз қилинади):

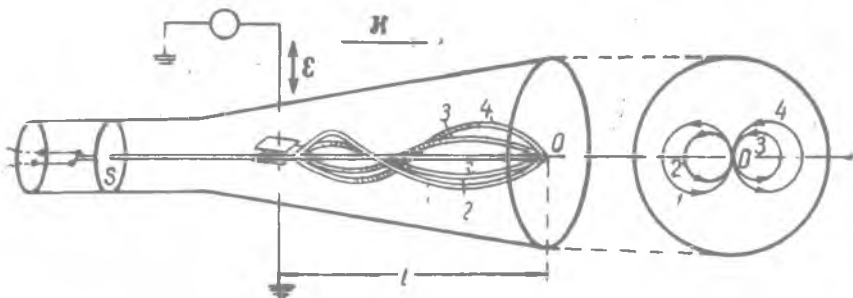
$$F = e [vH]$$

* Тарихан қарор топган практикага мувофиқ, электроннинг солиштирма заряди (e/m) ни CGSM· z^{-1} бирликларда ифодалаймиз. Аслида эса электроннинг e заряди одатда CGSE бирликларида ифодаланади. e ва e/m миқдорларнинг иккаласи формулаларда бирор комбинацияларда қатнашганда e/m ўрнига e/mc ёзиш лозим.

га тенг. Агар электрон магнит майдони куч чизиқлари йўналишига 0 ёки 90° га тенг бўлмаган α бурчакда учаётган бўлса, унинг тезлигини иккита: v_l бўйлама ва v_p кўндаланг компонентларга ажратиш мумкин:

$$v_l = v \cos \alpha, \quad v_p = v \sin \alpha. \quad (8.1)$$

Магнит майдони ўша компонентлардан ҳар бирига қандай таъсир кўрсатишини алоҳида-алоҳида текшираемиз. Майдонга перпендикуляр йўналишда v_p тезлик билан учаётган электронга $F_p = ev_p H$ куч таъсир қилади. F_p куч ҳамма жойда v_p га перпендикуляр бўлгани учун электрон айлана бўйича ҳаракат



11-расм. Солиштирма зарядни бўйлама магнит майдони ёрдамида аниқлаш методининг схемаси.

қилади. Бу айлананинг радиусини топиш учун F_p ни марказдан қочирма инерция кучига тенглаштираемиз:

$$ev_p H = \frac{mv_p^2}{r},$$

бундан

$$r = \frac{v_p}{\frac{e}{m} H}, \quad v_p = \frac{e}{m} H r.$$

Электрон айланани тўлиқ айланиб чиқиши учун кетган вақт қуйидагига тенг бўлади:

$$t = \frac{2\pi r}{v_p} = \frac{2\pi}{\frac{e}{m} H}. \quad (8.2)$$

Демак, айланиб чиқиш вақти t айлананинг r радиусига боғлиқ эмас экан. Шундай қилиб, бир вақтда бир нуқтадан H га перпендикуляр бўлган ҳар хил v_p тезликлар билан чиқадиган электронларнинг ҳаммаси ҳар хил радиусли айланалар бўйича ҳаракат қилиб, ўша дастлабки нуқтасига бир вақтда етиб келади. Бу ҳол 11-расмда ўнг томонда кўрсатилган; бунда тезлигининг v_p ташкил этувчилари ҳар хил бўлган электронлар йўллари

магнит майдоннинг йўналишига перпендикуляр бўлган текисликдаги проекциялари кўрсатилган.

Магнит майдони тезликнинг бўйлама компонентига таъсир кўрсатмайди. Шунинг учун электронлар майдон ҳосил қилувчи соленоид ўқи бўйлаб t вақт ичида

$$l = vt = \frac{2\pi v \cos \alpha}{\frac{e}{m} H} \quad (8.3)$$

масофага сурилади. Агар α бурчак жуда кичик бўлса, $\cos \alpha \approx 1$ ва (8.3) формула қуйидаги кўринишга келади:

$$l = \frac{2\pi v}{\frac{e}{m} H}, \quad (8.4)$$

яъни диафрагма тешигидан айна бир v абсолют катталикли тезлик билан учиб чиқаётган барча электронлар ўзларининг соленоид ўқига перпендикуляр бўлган текисликдаги проекциялари тўла айлана чизадиган вақт ичида соленоид ўқи бўйича айна бир l масофага сурилади. Бундан шундай хулоса чиқарилдики, бир хил энергияли электронларнинг ёйилувчи дастаси бўйлама магнит майдони таъсирида l масофада (йиғилади) фокусланади.

Соленоиднинг мана шу фокусловчи таъсири бўйлама магнит майдони методига асос қилиб олинган. Диафрагманинг S тешигидан чиқадиган (11-расм) ва аввал ўзгарувчан электр майдони E ёрдамида ёйилган даста тарзида тарқалувчи электронлар соленоид ичига тушади. Майдоннинг H кучланганлиги $\frac{e}{m}$ - члар дастаси соленоиднинг диафрагмага n учига фокусланадиган қилиб танлаб олиш мумкин. Соленоиднинг бу учига флуоресценцияловчи экран қўйилган. Бунинг учун керак бўлган майдонни билган ҳолда e/m ни ҳисоблаб топиш мумкин. Ҳақияқатан ҳам, (8.4) дан қуйидагини топамиз:

$$v = \frac{l}{2\pi} \frac{e}{m} H.$$

Тезликнинг бу ифодасини энергия тенгламасига, яъни

$$\frac{mv^2}{2} = eV \quad (8.4)$$

тенгламага қўйиб, e/m ни топамиз:

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{H^2 l^2} \quad (8.5)$$

Бу метод билан бажарилган кейинги ўлчашларнинг натижаси (1939 й.) қуйидагидир:

$$\frac{e}{m} = (1,7586 \pm 0,0023) \cdot 10^7 \text{CGSM} \cdot \text{э}^{-1}.$$

Электрон солиштира зарядининг ҳар хил методлар билан ўтказилган ўлчашларни танқидий нуқтаи назардан қараб чиқиш натижасида ҳосил қилинган энг аниқ қиймати қуйидагидир:

$$\frac{e}{m} = (1,7592 \pm 0,0005) \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot \text{z}^{-1}. \quad (8.6)$$

Энди электрон массасини водород атоми массаси билан таққослайлик. Бунинг учун аввал e/m_n катталикини, яъни электрон зарядининг водород атоми массасига нисбатини аниқлаш керак. Равшанки, бу нисбат F Фарадей сонининг водороднинг H^1 атом оғирлигига нисбатига тенг. Дарҳақиқат, $F = Ne$ ва $H^1 = Nm_n$ бўлгани учун (N — Авогадро сони), $\frac{F}{H^1} = \frac{e}{m_n}$. F ва H^1 ни энг аниқ ўлчашлар қуйидаги натижани беради:

$$\frac{e}{m_n} = (9573,5 \pm 1) \text{ CGSM} \cdot \text{z}^{-1}. \quad (8.7)$$

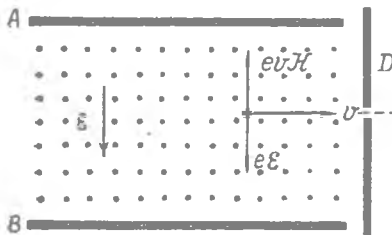
(8.6) ва (8.7) лардан қуйидагини топамиз:

$$\frac{m_n}{m} = 1837,5.$$

Шундай қилиб, электроннинг массаси водород атомининг массасидан 1837,5 марта кичик экан.

9-§. Зарядли заррачалар дастасини фокуслаш ва монохроматизация қилиш

Бу ерда доимий тезликли заррачалар дастасини ҳосил қилиш (монохроматизация, тезликлар фильтри) ва зарядли заррачалар дастасини фокуслаш методларини бирга текшираимиз.



12-расм. Зарядли заррачалар тезликларининг фильтри схемаси.

Бу методлар билан танишиб қўйиш кейинчалик бизга керак бўлади.

Тезликларнинг энг содда фильтри қуйидагича тузилган: зарядли заррачалар дастаси бир-бирига перпендикуляр йўналган ва қарама-қарши йўналишда оғдирадиган электр ва магнит майдонларидан бир вақтда ўтказилади.

12-расмда магнит майдони чизма текислигига перпендику-

ляр бўлиб, мусбат зарядли заррачага чизма текислигида ётган $e\nu H$ куч билан таъсир қилади. AB конденсатор майдонининг зарядга таъсир этувчи eE кучи ҳам ўша текисликда ётади.

Агар майдонлар йўналишини иккала куч қарама-қарши томонларга йўналадиган қилиб танлаб олинса, у ҳолда натижавий куч $e\mathcal{H} - eE$ га тенг бўлади. Заррача бу куч таъсирида, умуман айтганда, эгрилик радиуси ρ бўлган эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. Заррачага таъсир этувчи кучни марказдан қочирма инерция кучига тенглаштириб, қуйидаги тенгликни топамиз:

$$e\mathcal{H} - eE = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (9.1)$$

Равшанки, иккала $e\mathcal{H}$ ва eE кучлар бир-бирини компенсациялайдиган шартни қаноатлантирадиган тезликли заррачаларгина конденсатор орқали ўтади. Бу ҳолда

$$e\mathcal{H} - eE = 0 \text{ ва } v = \frac{E}{\mathcal{H}}. \quad (9.2)$$

Тезликлари (9.2) муносабатни қаноатлантирмайдиган заррачалар конденсатор пластинкаларига тортилади ва дастадан чиқарилади ёки жуда бўлмаса D диафрагмада тутиб қолинади.

Кўпинча заррачаларни фокуслаш учун бир жинсли кўндаланг магнит майдони таъсирдан фойдаланилади.

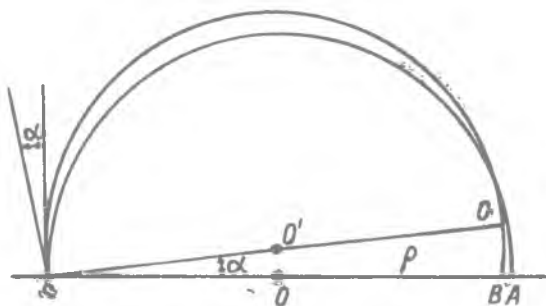
Заррачалар манбаи S да (13-расм) ва барча заррачалар айни бир $m\mathcal{V}/e$ катталик билан характерланадиган бўлсин. Юқорига вертикал учиб чиқадиган заррача

$SA = 2 \frac{m\mathcal{V}}{e\mathcal{H}} = 2\rho$ диаметри ярим айлана чизади; биринчисига нисбатан α бурчак остида учиб чиқадиган бошқа бирор заррача SA тўғри чизиқни B нуқтада кесадиган ўшандай радиусли айлана ёйи чизади. Кўриниб турибдики,

$$AB = 2\rho(1 - \cos \alpha).$$

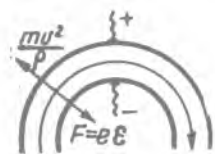
Агар α бурчак етарли даражада кичик бўлса, косинуснинг даражали қаторга ёйилмасидан, яъни $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$ ифодадан фойдаланиш ва унинг бошдаги иккита ҳади билан чега раланиш мумкин; у вақтда

$$AB = \rho\alpha^2.$$



13- расм. Бир жинсли кўндаланг магнит майдони билан фокуслаш.

Масалан, агар $\rho = 5$ см, $\alpha = 3^\circ = 0,05$ бўлса, у ҳолда $AB = 1,25 \cdot 10^{-2}$ см. Равшанки, S дан учиб чиқишда йўналишлари α бурчак ичида ётган барча заррачалар тегишли ёйни ўтиб, SA тўғри чизиқни A билан B орасида кесади. Шунинг учун S манба ўрнида заррачалар ўтадиган тирқиш олинган ҳолда AB бу тирқишнинг ингичка чизиқ шаклидаги „тасвири“ бўлади; демак, бир жинсли кўндаланг магнит майдонини цилинрик линза каби таъсир кўрсатади.



14-расм. Цилинрик конденсаторнинг радиал электр майдоидаги мусбат зарядли заррача.

Филтрларнинг кейинги вақтда кўп қўлланиладиган бошқа бир тури цилинрик конденсатордаги радиал электр майдоннинг таъсирига асосланган. Цилинрик конденсаторга (14-расм) келиб тушадиган e зарядли заррачани текшираемиз. Равшанки, заррачага майдон томонидан таъсир қиладиган eE куч марказдан қочирма инерция кучига тенг бўлган ҳолда, яъни

$$eE = \frac{mv^2}{\rho}$$

бўлганда бу заррача конденсатордан бемалол ўтиб кетади.

Цилинрик конденсатордаги майдон радиал симметрияга эга, шунинг учун

$$E = -\frac{dV}{d\rho}.$$

Биобарин, заррачанинг конденсатор орқали бемалол ўтиб кетиш шarti қуйидагича:

$$e \frac{dV}{d\rho} = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (9.3)$$

$mv^2/2$ кинетик энергияни тезлатувчи потенциал орқали $mv^2 = 2eV_0$ билан ифодалаб ва (9.3) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб, қуйидаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2V_0} dV.$$

Конденсаторнинг ташқи ва ички қопламалари радиусларини мос равишда ρ_2 ва ρ_1 га, ташқи қопламанинг потенциалини V_k га ва ичкисиникини 0 га тенг деб, юқоридаги дифференциал тенгламани мана шу шартларда интеграллаймиз:

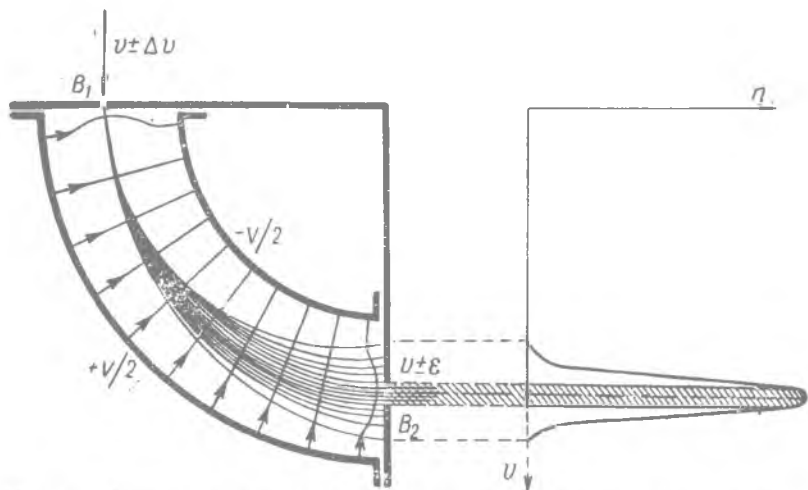
$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2V_0} \int_0^{V_k} dV.$$

‘бундан

$$V_k = 2V_0 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (9.4)$$

Шундай қилиб, конденсатор қопламаларидаги ҳар бир V_k потенциаллар айирмасига электронлар конденсатордан ўтадиган V_0 энергия мос келади.

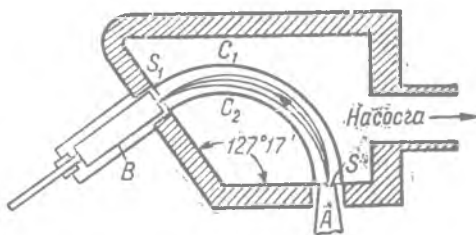
15-расмда цилиндрик конденсаторнинг тезликлар фильтри сифатида ишлаш схемаси тасвирланган. Кўриниб турибдики,



15-расм. Цилиндрик конденсаторнинг тезликлар фильтри сифатида қўлланиши. (Электр майдоннинг куч чизиқлари стрелкалар билан кўрсатилган; ўнг томондаги графикда η —заррачалар сони, v —уларнинг тезлиги.)

агар B_1 тирқиш орқали тезликлари $v \pm \Delta v$ интервалда ётган электронлар дастаси тушса, у ҳолда B_2 тирқиш орқали тезликлари олдингидан торроқ бўлган $v \pm \varepsilon$ интервалда ётган электронлар ўтади. Расмнинг ўнг томонида филтргача бўлган ва филтрдан ўтгандаги (штрихланган қисм) электронларнинг тезликлар бўйича тақсирмотининг график тасвири берилган.

Текширилаётган фильтрининг энг ажойиб хусусияти шундаки, бу филтър ёйилувчи дасталарни фокуслай олади. S тирқишдан чиқувчи ёйилувчи



16-расм. Радиал электр майдонининг фокусловчи таъсири: A —зарядли заррачалар манбаи; B —Фарадей цилиндри; C_1, C_2 —цилиндрик конденсаторнинг пластинкалари; S_1, S —тирқишлар.

даста цилиндрик конденсаторда (16-расм) $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^\circ 17'$ ёйни ўтиб яна қайтадан фокусланишини Юз ва Рожанскийлар назарий ҳисоблаб кўрсатдилар ва тажрибада тасдиқладилар.

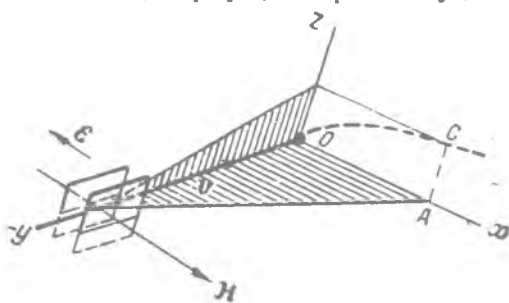
Шундай қилиб, цилиндрик конденсаторнинг радиал электр майдони зарядли заррачаларнинг ёйилувчи дастасига худди бир жинсли кўндаланг магнит майдони каби таъсир кўрсатар экан. Аммо, баъзи жиҳатдан қаратганда магнит майдонидан кўра электр майдонини ишлатиш афзал ҳисобланади. Масалан, электр майдонини экранлар ёрдамида чеклаш магнит майдонини чеклашдан кўра анча осон.

10-§. Электрон массасининг тезлигига боғлиқлиги

Электронлар тезлиги ёруғлик тезлигига яқинлашганда масса-си тезликка боғлиқ бўлиб қолади. Бу муҳим фактни биринчи бўлиб Кауфман экспериментал равишда исбот этган эди. Кауфманнинг иши 1901 йилда, яъни нисбийлик назарияси яратилишидан тўрт йил олдин нашр этилган эди. Нисбийлик назариясига биноан, ҳар қандай масса электр заряди бор-йўқлигидан қатъи назар тезлигига қуйидаги формула билан боғланиши лозим:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

бундаги c —ёруғликнинг бўшликдаги тезлиги. Гарчи Кауфман ишининг ҳозир фақат тарихий нуқтаи назардангина аҳамияти



17-расм. Кўндаланг электр ва магнит майдонлардаги электронлар.

бўлишига қарамасдан, унинг методининг ғояси билан танишиб чиқамиз, чунки бу ғоя зарядли заррачалар билан ўтказиладиган тажрибаларда кенг қўлланиладиган бўлди. Жумладан, Ж. Ж. Томсоннинг атомларнинг ҳақиқий массаларини аниқлашда биринчи бўлиб ишлатилган „параболалар методи“ (13-§) шунга ўхшаш принципга асосланган.

Кауфман методининг моҳияти шундаки, электронлар бири-бирига параллел ёки антипараллел йўналган кўндаланг электр ва магнит майдонларидан бир вақтда ўтказилади, натижада иккала майдондаги оғишлар бири-бирига перпендикуляр бўлади. Бир хил тезликли электронларнинг параллел дастаси конденсатор пластинкалари орасидан ўтади; бу пластинкалар орасидаги фазода магнит майдони ҳам бор (17-расм.) Майдонларнинг йўналишлари расмда стрелкалар билан кўрсатилган.

Электр майдонидаги оғиш ўнг томонга қараб йўналган бўлиб, масалан, $OA = x$ га тенг; электроннинг магнит майдонидаги оғиши юқорига қараб йўналган бўлиб, масалан, $OB = z$ га тенг (электронларнинг заряди манфий эканини эсда тутиш керак; шунинг учун мусбат зарядли заррачалар чапга ва пастга оғган бўлар эди). 4-§ даги формулалар

$$z = A \frac{e}{mv}, \quad (4.8)$$

$$x = B \frac{e}{mv^2}, \quad (4.11)$$

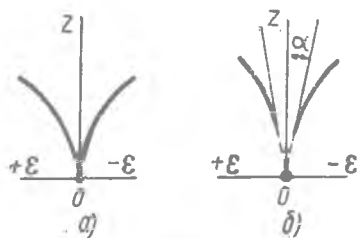
бундаги A ва B — асбобнинг доимийлари. Тезликлари бир хил бўлган барча электронлар иккала майдондан ўтганидан кейин фотопластинканинг C нуқтасига тушади. Энди даста бир жинсли эмас ва ундаги электронларнинг тезликлари ҳар хил бўлсин деб фараз қилайлик. Бу ҳолда электронларнинг фотопластинкадаги излари бирор эгри чизиқ бўйича жойлашади; бу эгри чизиқнинг шаклини топиш учун (4.8) ва (4.11) формулалардан v тезликни йўқотамиз. Уларнинг биринчисини квадратга кўтариб, иккинчисига бўламиз:

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2 e}{B m}. \quad (10.1)$$

Агар e/m доимий булса ва, бинобарин $\frac{A^2 e}{B m} = K = \text{const}$ бўлса, у ҳолда

$$z^2 = Kx \quad (10.2)$$

ва изланаётган эгри чизиқ параболанинг кесмаси бўлиб чиқади. Магнит майдонининг йўналишини ўзгартирмаган ҳолда электр майдонининг йўналишини олдин бир томонга, кейин иккинчи томонга ўзгартириб, иккига парабола кесмасини ҳосил қилишимиз ва бу кесмаларнинг O нуқтадаги умумий уринмаси z ўқ бўлиши керак эди (18-а расм). Кауфманнинг майдонларни шундай жойлаштириб ва электронлар манбаи сифатида радий препарати ишлатилган тажрибаларида ҳосил қилинган эгри чизиқ кесмалари парабола кесмалари бўлиб чиқмаган. Мана шунинг ўзи (10.1) даги e/m нинг доимий қолмаслигини, яъни массанинг тезликка боғлиқ эканлигини кўрсатади. 18-б расмда Кауфман олган фотография схематик равишда тасвирланган. Радийнинг магнит ва электр майдонларида оғмайдиған γ -нурлари ҳосил қилган доғ координаталар



18-расм.

бошини кўрсатади. Аммо дастада ёруғлик тезлигидан жуда кам фарқ қиладиган тезликли электронлар бўлишига қарамасдан эгри чизиқлар кесмалари координаталар бошига етмаганлиги кўриниб турибди. Шунингдек, иккала кесманнинг давомига O нуқтада ўтказилган уринмалар ҳам z ўқ билан устма-уст тушмаганлиги, балки у билан нолдан фарқли α бурчак ҳосил қилганлиги ҳам кўриниб турибди. Шунинг учун $z = 0$ бўлганда z/x чекли қийматга эга бўлади, бинобарин, $\frac{z^2}{x^2} = \frac{z}{x} z = 0$. Бундай фотографиялар, изларнинг шакли қандай бўлишидан қатъи назар, электронларнинг ҳар хил тезликлари учун e/m катталикини аниқлашга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, эгри чизиқнинг бирор нуқтасининг координаталарини ўлчаб, e/m ва v ни (4.8) ва (4.11) формулалар ёрдамида ҳисоблаб топиш мумкин. Фотопластинкада ҳосил бўлган излар анча чаплашиб кетгани учун бундай ўлчашлар унча аниқ бўлмайди. Аммо бу излар электрон массасининг тезликка шубҳасиз боғлиқ эканлигини сифат жиҳатидан кўрсатади. Масалан, Кауфман қуйидаги натижаларни олган (II жадвалга қаранг).

II ж а д в а л

v см/сек	e/m CGSM $\cdot z^{-1}$
$2,36 \cdot 10^{10}$	$1,31 \cdot 10^7$
$2,59 \cdot 10^{10}$	$0,97 \cdot 10^7$
$2,83 \cdot 10^{10}$	$0,63 \cdot 10^7$

Массанинг тезликка боғланишини миқдор жиҳатидан аниқлашда Кауфман тажрибасининг берадиган аниқлиги кифоя қилмайди.

Кауфман ўз тажрибаларини ўтказган вақтда гап қуйидаги иккита формуладан қайси бирини олиш тўғрисида борар эди: 1) Абрагам формуласи; бу формула электронни қаттиқ ва сиқилмайдиган шарча деб тасаввур қилиш асосида келтириб чиқарилган:

$$m = m_0 \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} - 1 \right)$$

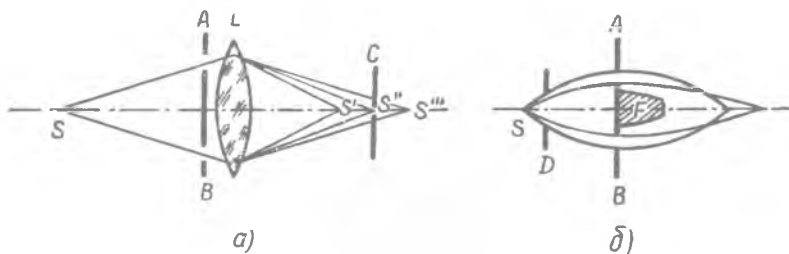
ва 2) Лоренц формуласи:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right);$$

бу формула электронни ҳаракат йўналишида сиқиладиган деб тасаввур қилиш асосида келтириб чиқарилган; Лоренц формуласи нисбийлик назариясидан ҳам келиб чиқади. Бу иккита формуладан қайси бири ҳақиқатга яхшироқ мос келиши тўғрисидаги масала катта принципиал аҳамиятга эга бўлгани учун Кауфманнинг ишидан сўнг жуда кўп бошқа ишлар чиқди ва натижада тортишув юз берди. Бу тортишувнинг келиб

чиқишига тегишли экспериментларнинг ниҳоят даражада оғир эканлиги ва иккала формуладан топиладиган сон маълумотларнинг фарқи жуда кичик эканлиги сабаб бўлди.

Масаланинг тарихига тўхталмасдан олдинги тадқиқотларга тегишли барча эътирозлар ҳисобга олинган кейинги ишларнинг натижаларинигина кўриб ўтамиз. Триккернинг тажрибаларида электронларни тезликлари бўйича анализ қилишга доир П. Л. Капица таклиф қилган схемадан фойдаланилган. Бу схема аслида электронларнинг „фокал монохроматори“ бўлиб, ёруғликнинг монохроматизациясида ишлатиладиган фокал монохроматорга ўхшайди. 19-а расмда оптик линза қўлланилганда бу мо-



19- расм. а) Ёруғликнинг „фокал монохроматори“, б) Капица—Триккер тажрибасининг схемаси.

нохроматорнинг ишлаши кўрсатилган. S ёруғлик манбаидан чиқувчи ёйилувчи нурлар дастаси L линзадан ўтади. Бу линзанинг олдига ҳалқа шаклидаги AB диафрагма қўйилган. Бу диафрагма параксиал нурларни тутиб қолади ва линзанинг четларига тушувчи, яъни катта бурчак остида тарқалувчи нурларни ўтказидади. Линзанинг хроматик aberрацияси туфайли, тўлқин узунликлари ҳар хил бўлган нурлар оптик ўқнинг ҳар хил S', S'', S''', \dots нуқталарида фокусланади: қисқа тўлқинли нурлар линзага яқин жойда, узун тўлқинли нурлар линзадан узоқроқда фокусланади. C диафрагмани суриш билан унинг тешигидан ҳар қандай узунликдаги тўлқинларни ўтказиш мумкин.

Капица—Триккер методида линза ўрнида симметрия ўқли бўйлама магнит майдони, яъни соленоид ишлатилади. Бу ҳолда соленоид узун магнит линзадан иборат бўлади. 8-§ да кўриб ўтганимиздек, бундай линза электронларни l масофада фокуслайди:

$$l = \frac{2\pi v \cos \alpha}{\frac{e}{m} H}. \quad (8.3)$$

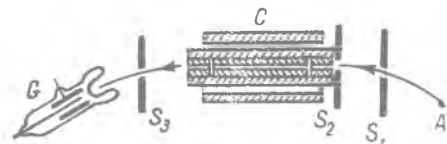
H ва α нинг берилган қийматларида l масофа v ва $\frac{e}{m}$ га боғлиқ бўлади. Электронларнинг „фокал монохроматори“ схемаси 19-б расмда тасвирланган. S манбадан, яъни радиоактив

препаратдан $\beta = 0,8$ гача бўлган тезликда чиққан электронларнинг ёйилувчи дастаси ҳалқали AB диафрагма орқали ўтиб, соленоиднинг бўйлама магнит майдони таъсирида фокусланган. Бунда, оптик линза ишлатилгандаги каби, ҳар хил тезликли электронлар оптик ўқнинг ҳар хил жойларида фокусланган. F — электронларнинг диафрагмаларда тормозланишидан ҳосил бўладиган рентген нурларининг келиб тушишидан сақловчи қўрғошин блок. D диафрагмани ± 5000 в гача зарядлаш ва шу билан электронларни тезлаштириш ёки секинлаштириш мумкин эди. $\beta = 0,8$ тезликда тезлатувчи потенциал $340,5 \cdot 10^6$ в, Лоренц—Эйнштейн формуласида m/m_0 нисбат 1,666 га тенг бўлади. Тезлатувчи потенциални 5000 в га ўзгартирганда масса атиги 0,06% га ўзгаради, бу миқдор тажрибада қилинган хатолардан кичик, шунинг учун 5000 в майдон электронларни сезиларли тезлаштиради ёки тормозлайди, аммо амалда уларнинг массаларини ўзгартирмайди. (8.3) формуладан тезлик Δv га ўзгарганда фокус Δl масофага, яъни

$$\Delta l = \frac{2\pi \Delta v \cos \alpha}{\frac{e}{m} H}$$

масофага сурилиши керак. Δv ва H ни билган ҳолда Δl ни ўлчаб топиб, ўша тезликда e/m нинг катталигини ҳисоблаб топиш мумкин.

Трикернинг ўлчашлари электронлар ёруғлик тезлигининг 0,8 қисмича тезликка эга бўлганда массанинг тезликка боғлиқ



20-расм. Цан ва Списс тажрибасининг схемаси.

равишда узгариши Лоренц—Эйнштейн формуласига 1—2% аниқликда бўйсунганини, Абрагам ва Лоренц—Эйнштейн формулаларидан топиладиган натижалар орасидаги фарқ мана шу шароитларда 5% га яқин эканлигини кўрсатди.

Массанинг тезликка боғлиқ бўлишини аниқлашнинг бошқа бир методи Цан билан Списс (1938 йил) ишлатган. Бу методнинг гоёси қуйидагидан иборат.

А нуқтада (20-расм) электронлар манбаи жойлашган бўлсин. Агар расм текислигига перпендикуляр бўлган бир жинсли H магнит майдони бўлса, S_1 ва S_2 тирқишлар тезликлари

$$\frac{mv^2}{\rho} = e v H \quad (10.3)$$

шартни қаноатлантирадиган электронларни дастадан ажратиб олади; бу формуладаги ρ — S_1 , S_2 , S_3 тирқишларнинг жойлашишига боғлиқ бўлган траекториянинг эгрилик радиуси. S_1 ва

S_2 тирқишлардан ўтган электронлар C конденсаторга тушади. Электр майдонига перпендикуляр бўлган магнит майдони мавжудлиги туфайли бу конденсатор филтёр (9-§ га қаранг) вазифасини ўтайди. Бу филтёр электронлар тезлигини анча яниқ монохроматизация қилади. G да қабул қилувчи асбоб жойлашган бўлиб, барча тирқишлар ва конденсатор орқали ўтган айрим электронларни бу асбоб ёрдамида санаш мумкин. Тажрибанинг моҳияти шундан иборатки, магнит майдонининг муайян қийматида конденсатор пластинкаларидаги потенциаллар айирмаси G счётчик қайд қиладиган электронлар сони максимал бўладиган қилиб танлаб олинади. Агар конденсатордаги майдон кучланганлиги E бўлса, (9.2) формулага биноан, конденсатордан тезликлари

$$evH - eE = 0, \quad v = \frac{E}{H} \quad (9.2)$$

шартни қаноатлантирадиган электронларгина ўтиб кетади. Бу формулани (10.3) формула билан бирга ишлаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{\rho H^2} \quad (10.4)$$

Цан ва Списсинг тажрибалари, Капица—Триккер тажрибалари каби, электронлар тезликлари $\beta = 0,745$ бўлганда Лоренц—Эйнштейн формуласи бўйича ҳисоблаб топилган натижалар билан эксперимент натижалари орасидаги фарқ 1,5% дан ортмаслигини кўрсатади.

Ҳозирги вақтда тез ҳаракатланувчи заррачалар массасининг тезликка боғланиши масаласи жуда катта техник аҳамият касб этди, чунки массанинг тезликка боғланиш факти ва бу боғланишни миқдор жиҳатдан ифодалайдиган формула элементар заррачаларининг ҳозирги замон циклик тезлатгичларига асос қилиб олинган. Маълумки, циклик тезлатгичлар ниҳоят даражада улкан техник иншоотлардир. Бу тезлатгичлар ичида тезланувчи заррачалар радиуси 100 м гача бўлган доирани айланиб, бир неча ўн миллиард электрон-вольт энергияга эга бўлади. Бундай машиналарни лойиҳалашда массанинг тезликка боғланиши асосий роль ўйнайди ва Лоренц—Эйнштейн формуласидан фойдаланишда жуда кам четга чиқилса машина бутунлай ишламайди. Шундай қилиб, ҳозирги вақтда бу формула тезликларнинг эришиш мумкин бўлган бутун интервалида тасдиқланган деб ҳисобланиши керак. Бу масала назарий жиҳатдан 64 ва 65-§ ларда кўриб чиқилади.

II боб

АТОМЛАР. ИЗОТОПЛАР

11- §. Муқаддима

Бундан олдинги боб энг муҳим элементар заррачалардан бири—электронга бағишланган эди. Биз, электроннинг реаллиги исботини, шунингдек, унинг заряди ва массасининг катталигини бевосита аниқлашни кўриб ўтдик. Бу бобда моддаларнинг атомларини ўрганишга ўтамиз. Атомлар реаллигининг исботи физика ва химия элементар курсларидан яхши маълум, шунинг учун улар устида тўхталмасдан, диққатимизни атомнинг энг муҳим характеристикасига, яъни массасига қаратамиз.

Химияда одатда атомнинг абсолют массаларидан эмас, балки атомнинг нисбий массалари ёки атомнинг нисбий оғирликларидан фойдаланилади, шу билан бирга шартли бирлик сифатида расо 16 га тенг деб ҳисобланадиган кислород атоми оғирлигининг 1/16 қисми* қабул қилинади. Атом оғирликлар модданинг макроскопик миқдорлари билан ўтказиладиган химиявий анализлар натижасида топилади. Шу йўл билан топилган сонлар жуда катта амалий аҳамиятга эга ва улар барча химиявий ҳисоблашларнинг асосида ётади. Яқин вақтга қадар мазкур элементнинг барча атомлари бир хил массали бўлади деб келинар эди. Агар шундай деб фараз қилсак, Авогадро қонунига (ҳар қандай модданинг бир молида бир хил миқдорда молекула бўлади) биноан, химиявий атом оғирлик ёрдамида атомнинг абсолют массасини ҳам ҳисоблаб топиш мумкин бўлади.

Лекин бу бобда химиявий атом оғирликлар атомларнинг абсолют массаларини ҳисоблашга имкон бермаслигини кўраемиз. Шунга қарамасдан, химиявий атом оғирликларни билиш тари-

* Яқинда атом массаларини аниқлаш стандарти ўзгарди; энди углерод C^{12} изотопи атоми массасининг 1/12 қисми бирлик сифатида қабул қилинади. Аммо бу бирликнинг қабул қилиниши китобда баён этиладиган мулоҳазалар учун аҳамияти йўқ.

хан амалий аҳамиятга эга бўлиши билан бирга булар ёрдамида ҳар хил элементларнинг атомларини ўзаро боғловчи муҳим қонуният очилганлиги учун ҳам муҳимдир. Бу қонуният Д. И. Менделеевнинг элементлар даврий системасида намоён бўлди. Бу бобни ўша даврий системани ўрганишдан бошлаймиз.

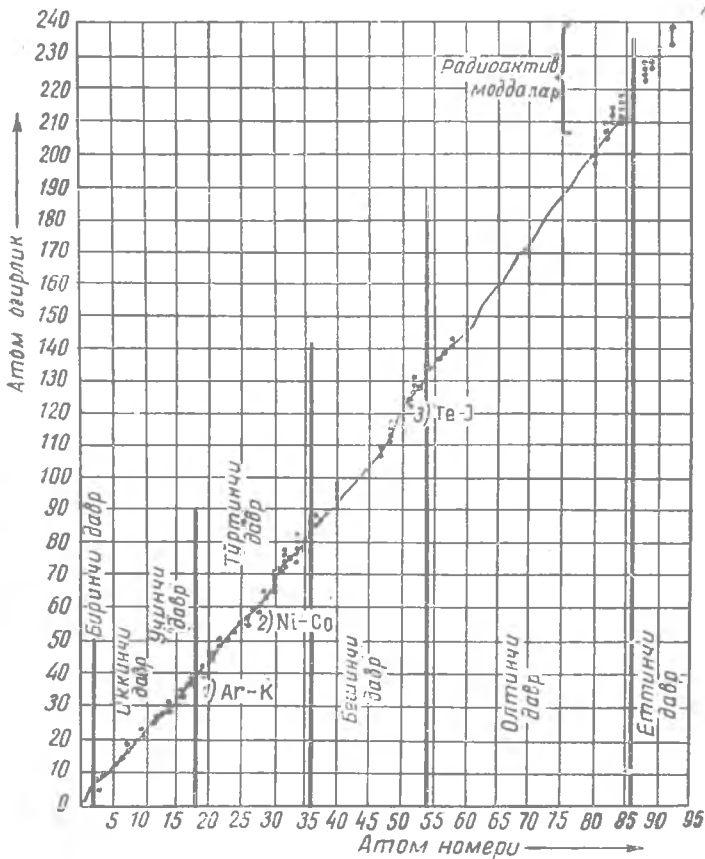
12-§. Д. И. Менделеевнинг элементлар даврий системаси

XIX аср ўрталарига келиб жуда кўп химиявий элементлар кашф этилди ва бу элементлар ўзаро бирор тарзда боғлиқми ёки уларнинг хоссалари мутлақо тасодифий бўлиб, бир-бирига боғлиқ эмасми, деган савол табиий ҳолда туғилди. Турли хил хусусий қонуниятлар анча олдин ҳам топилган эди. Бироқ, Д. И. Менделеевгина биринчи бўлиб барча элементларни ягона бир система қилиб бирлаштирувчи умумий қонунни топдики, бу система атомлар тузилишидаги умумийликнинг ёрқин ифодаси бўлди. Д. И. Менделеевнинг бу системани кашф этишдаги гениал зийраклигини тўғри баҳолаш учун баъзи фактларни келтириб ўтаемиз.

Д. И. Менделеев биринчи жадвални 1869 йилда нашр эттирди. Ўша вақтга қадар 63 га яқин элемент маълум эди. Аммо 35 та элементнигина уларнинг атом оғирликларига мувофиқ система қилиб жойлаштириш мумкин эканлиги аниқланди. 8 та элементнинг ўрни ноаниқ эди. Масалан, нима учун Zn, Cd ва Hg ларнинг Mg, Ca, Sr, Ba лар билан бир гурпуага тушиб қолиши тушунарсиз эди; Mn нинг галогенлар билан бир гурпуага (яъни даврий системанинг VII гурпуасига) тушиб қолиши яна ҳам таажжубли эди. Ниҳоят, қолган 20 та элементнинг атом оғирликларини ёки келиш кетма-кетлигини Менделеев ўзгартирди. Кўпинча бу ўзгартиришлар анча жиддий бўлди: масалан, церийнинг атом оғирлиги 92 га тенг деб ҳисобланар эди; Менделеев эса унинг атом оғирлигини 138 деб ёзди (ҳозирги қиймати 140,13); уша вақтдаги маълумотларга кура, торий ва уранинг атом оғирликлари мос равишда 116 ва 120 эди. Менделеев эса буларнинг атом оғирликлари мос равишда 232 ва 240 бўлиши кераклигини кўрсатди. Ниҳоят, Менделеев жадвалда баъзи ўринларни бўш қолдириб, бу ўринларни ҳали кашф этилмаган элементлар эгаллаши кераклигини олдиндан айтган. Жумладан, Менделеев учта элементнинг мавжудлигини олдиндан айтиб берди; у бу элементларни экабор, экаалюминий ва экасилиций деб атаб, уларнинг хоссаларини тавсифлади. Бундан кўп ўтмасдан 1875 йилда галлий деб аталган элемент кашф этилди. Менделеев дарҳол галлий ўша олдиндан айтилган экаалюминий эканлигини ва унинг атом оғирлиги 68 га яқин, солиштирма оғирлиги 6,0—5,9 ва атом

ҳажми 11,5 бўлиши кераклигини кўрсатди. Ҳақиқатда эса галлийнинг атом оғирлиги 69,9 га, солиштирма оғирлиги 5,96 га ва атом ҳажми 11,7 га тенг бўлиб чиқди.

Д. И. Менделеевнинг элементлар даврий системасини тузишда асосланган асосий факти шундан иборатки, агар барча элементларни атом оғирликлари ортиб бориши тартибида жойлаштирилса, хусусиятлари ўхшаш бўлган элементлар даврий такрорланиб туради. Гарчи атом оғирлик атомнинг индивидуал хоссаларини бир қийматли аниқлайдиган доимий бўлмаслиги кейинчалик маълум бўлса ҳам Менделеевнинг юқоридаги асосда тузган "элементларнинг табиий системаси" тўғри бўлиб чиқди. Ҳақиқатан ҳам, атом оғирликлари ҳар хил бўлишига қарамасдан амалда химиявий жиҳатдан бир хил бўлган моддалар борлигини қуйида кўрамиз. Бундай моддалар *изотоплар* деб ата-



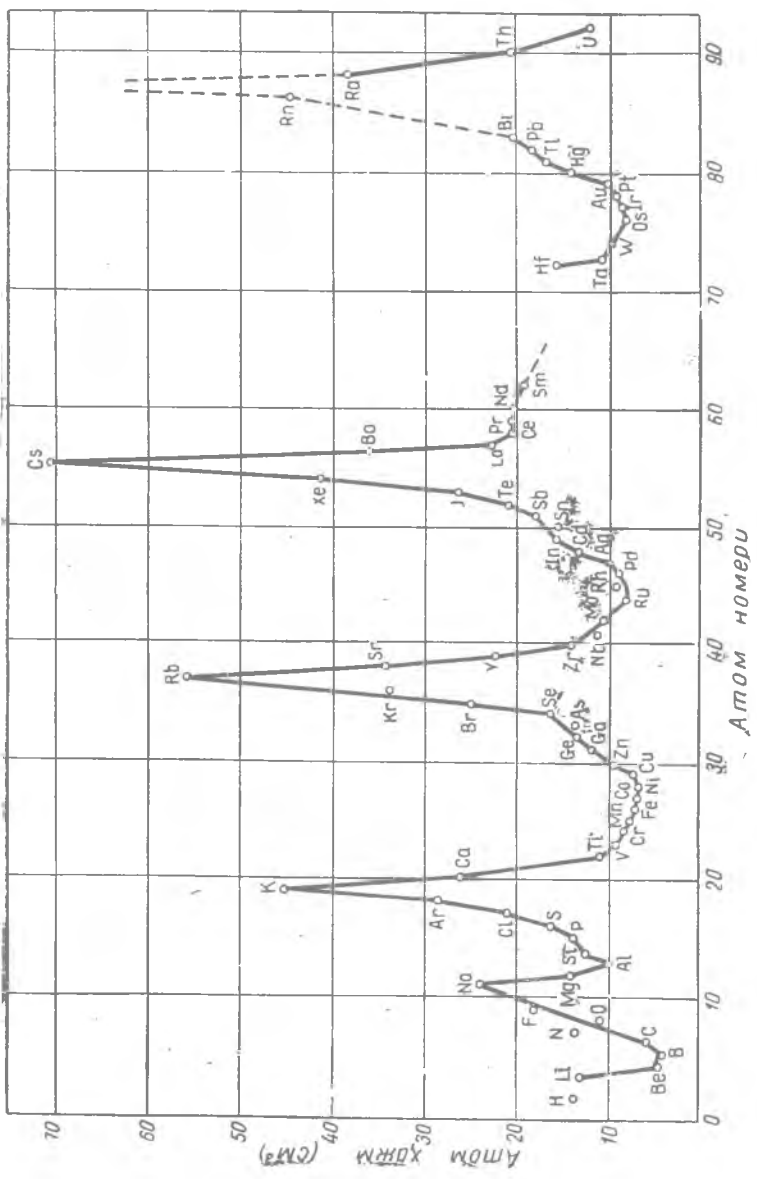
21- расм. Атом оғирлик— атом номерининг функциясиدير.

лади, чунки химиявий жиҳатдан бир хил бўлгани учун уларни даврий системада айти бир ўринга жойлаштирилади („изотоп“ сўзи грекча „айни бир ўринни эгалловчи“ деган маънони беради). Ҳақиқатда, химиявий элементлар изотопларнинг аралашмасидан иборатдир. Элементларнинг одатдаги химиявий методлар билан аниқланадиган атом оғирликлари мазкур элемент барча изотоплари атом оғирликларининг ўртачасидир. Атом оғирликлари ҳар хил, хоссалари бир-бирига яқин бўлган атомлар билан бир қаторда, атом оғирликлари бир хил, лекин хусусиятлари ҳар хил бўлган атомлар (изобарлар) ҳам мавжуддир. Бу фактларга қарамасдан, элементларнинг Д. И. Менделеев яратган даврий системаси тўғри ва, шунинг учун, уни *табиатнинг асосий қоқуни* деб қарамоқ керак.

Ҳақиқатда атомнинг химиявий оғирлиги *атомнинг* муҳим аломати бўлмагани учун элементнинг асосий характеристикаси унинг даврий системадаги ўрнидир, бу ўрин эса мазкур элементнинг Менделеев жадвалидаги ўрнининг номери билан аниқланади. *Атом номери* деб аталадиган бу соннинг муҳим эканлигининг чуқур сабаби, бу сон аслида фақат тартиб номери бўлиб қолмай, атомнинг асосий *физик* доимийларидан биридир. Шундай эканлигини қуйида кўрсатамиз.

Элементларни атом оғирликлари орқали мунтазам система қилиб жойлаштириш имконияти қуйидаги ажойиб фактга асосланади: агар мазкур элемент химиявий методлар билан аниқланадиган ва унинг барча изотоплари атом оғирликларининг ўртачасига тенг бўлган атом оғирлик билан характерланса, бу ўртача атом оғирлик билан атом номери орасида содда монотон боғланиш мавжуд бўлади (21-расм). Бу муносабат бузиладиган айрим ҳолларда (K—Ar, Te—J, Co—Ni) Менделеев элементларни уларнинг атом оғирликларига қарамасдан гениал зийраклик билан тўғри жойлаштирди.

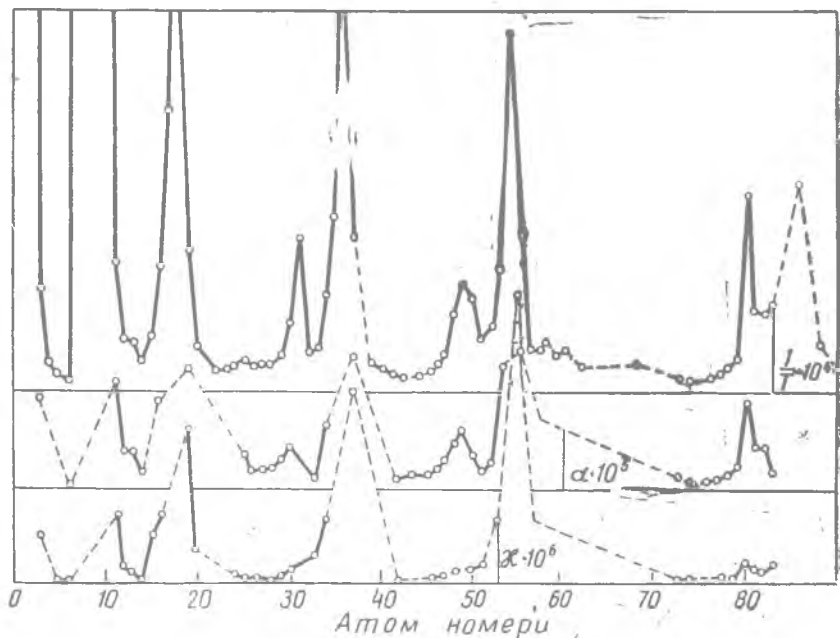
22 ва 23-расмларда атом хоссаларининг даврий такрорланишига доир баъзи мисоллар келтирилган. 22-расмда атом ҳажмлари эгри чизиғи берилган: абсцисса ўқи бўйича атом номерлари, ордината ўқи бўйича атом ҳажмлари ($\frac{\text{атом оғирлик}}{\text{зичлик}}$) қўйилган, 23-расмда бир диаграммада бир қанча физик хоссаларнинг атом номерига боғлиқ равишда ўзгариши кўрсатилган, жумладан, юқориги эгри чизиқ—эриш температурасига тесқари бўлган миқдорларнинг боришини, ўртадаги эгри чизиқ—чизиқли кенгайиш коэффициентларининг ва пастқиси—сиқилувчанлик коэффициентларининг ўзгаришини кўрсатади. Кўрииб турибдики, барча бу хоссалар атом номери (ўртача атом оғирлик) монотон ортганда даврий ўзгарибгина қолмай, балки бу барча эгри чизиқларнинг максимум ва минимумлари атом номерининг айти бир қийматига тўғри келади, яъни бу хоссаларнинг ҳаммаси *бирдек* давр билан ўзгаради.



22-расм. Атом ҳажмларинг даврийлиги.

Элементларнинг табиий системасига бериладиган ташқи шакллар жуда хилма-хилдир. Икки хил кўринишдаги жадваллар кўп тарқалган: булар узун даврли ва қисқа даврли жадваллардир. Назарий жиҳатдан узун даврли жадвал (50-бетдаги III жадвал) анча асослидир.

Бу жадвалнинг кетма-кет қаторларини текшираимиз. Биринчи қатор атиги иккита элементдан иборат: бу қатор бир валентли водороддан бошланиб инерт газ гелий билан тугайди. Учинчи элемент—литий ҳам бир валентлидир: литий типик металл бўлиб, ишқорий хоссалари кучли. Унг томонга сурилган сари бу



23-расм. Физик хоссаларнинг даврийлиги. Юқориги эгри чизиқ—эриш температурасининг тескари қийматлари $(1/T) \cdot 10^4$; ўртадаги эгри чизиқ—чизиқли кенгайиш коэффициенти $\alpha \cdot 10^5$; пастки эгри чизиқ—сиқилувчанлик коэффициенти $\chi \cdot 10^6$. Пунктир билан белгиланган жойларда аниқ маълумот йўқ.

иккала хосса сезиларли даражада сусайиб, қарама-қарши хоссалар секин-аста намоён бўлади; ниҳоят, тўққизинчи элемент—фтор литийнинг антиподи бўлади: у типик металлоид бўлиб, кислоталик хусусиятлари кучлидир. Ундан кейин инерт газ неон, унинг кетидан ишқорий металл натрий (№ 11) келади ва олдинги даврдаги бутун манзара яна такрорланади. Шундай қилиб, 8 элементдан кейин (натрийни ҳам қўшиб ҳисоблаганда) яна ишқорий металл калийни кураимиз, бундан олдин эса инерт

III- жа д в а л

1 H 1,0080																	2 He 4,003				
3 Li 6,940	4 Be 9,012															5 B 10,82	6 C 12,011	7 N 14,008	8 O 16,000	9 F 9,000	10 Ne 20,183
11 Na 22,997	12 Mg 24,32															13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457	18 Ar 39,944
19 K 39,096	20 Ca 40,08	21 Sc 45,10	22 Ti 47,88	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69	29 Cu 63,57	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916	36 Kr 83,7				
37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,91	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc (99)	44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,71	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,76	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92	54 Xe 131,3				
55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57 La 138,92	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 Pm (147)	62 Sm 150,43	63 Eu 152,0	64 Gd 156,9	65 Tb 159,2	66 Dy 162,46	67 Ho 164,94	68 Er 167,2	69 Tu 169,4	70 Yb 173,04	71 Lu 174,99					
87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227,05																			
Лантанидлар қатори																					
Актинидлар қатори																					

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	0	
1	1 H 1,0080				7 N 14,008				2 He 4,003	
2	3 Li 6,940	4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,010	14 Si 28,06	8 O 16,0000	9 F 19,000		10 Ne 20,183	
3	11 Na 22,997	12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457		18 Ar 39,944	
4	19 K 39,096	20 Ca 40,08	21 Sc 45,10	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69
	29 Cu 63,57	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916			36 Kr 83,7
5	37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc (99)	44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,71
	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,76	70 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92			54 Xe 131,3
	55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57 La* 138,92	72 Hf 178,6	73 Ta 180,88	74 W 183,92	75 Re 186,31	76 Os 190,2	77 Ir 193,1	78 Pt 195,23
6	79 Au 197,2	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po 210	85 At (211)			86 Rn 222
7	87 Fr 223	88 Ra 226,06	89 Ac 227,05	**						

* 58—71	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tu	70 Yb	71 Lu
Лантандлар қаторы	140,13	140,92	144,27	(147)	150,41	152,07	156,9	159,7	172,16	164,94	167,2	169,4	173,04	174,99

** 91—98	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lw
Актиноидлар қаторы	232,1	231	238,07	237	(242)	(243)	(247)	(249)	(249)	(254)	(253)	(256)	(254)	103 Lw

газ аргон (№ 18) келади. Типик металлардан типик металлоидларга „амфотер“ элемент—кремний (№ 14) орқали ўтилади. Кремний иккита: металл ва металлмас модификацияда бўлади. Калийдан бошланадиган галдаги тўртинчи давр 8 элементдан эмас, балки 18 элементдан иборат, чунки калийдан кейин келадиган ишқорий металл—рубийдий 37- ўринда туради. Рубийдийдан кейин эса янги катта давр келадик, бу давр ҳам 18 та элементдан иборат бўлиб, 54- ўринда турувчи инерт газ ксенон билан тугайди. Сўнгра яна ишқорий металл—цезий (№ 55) келиб, у билан 32 элементи бўлган энг узун давр очилади. Бу 32 та элемент орасида лантандан кейин келадиган (58 дан 71-гача ўринни эгаллайдиган) 14 элемент нодир ер элементлари ёки „лантанидлар“ махсус группа ҳосил қиладики, бу группадаги элементларнинг химиявий хоссалари бир-бирига жуда яқинлигидан, химик мутахассис учун уларни бир-биридан ажратиш анча қийин масала ҳисобланади. Лантанидларнинг химиявий хоссалари бир-бирига жуда яқин бўлиши туфайли улар учун жадвалда битта каттак ажратилган бўлиб, бутун қатор айрим келтирилади. 87- элемент билан бошланадиган охириги давр турғун бўлмаган табиий-радиоактив элементлардан иборатдир. Табиатда учрайдиган элементларнинг энг оғири—уран (№ 92) яқин кунларгача даврий системадаги охириги элемент эди. Аммо кейинги йилларда янада оғир—„трансуран“ элементларнинг 103- номергача бўлган қаторини сунъий равишда топишга муяссар бўлинди. Уларнинг химиявий хоссаларини текшириш ва олдинда турган элементларнинг химиявий хоссаларини қайта қараб чиқиш шундай хулосага олиб келдики, актинийдан (№ 89) кейин келадиган элемент—торий (№ 90) нодир ер металлар—„лантанидлар“ группасига ўхшаш химиявий хоссалари бир-бирига яқин бўлган элементларнинг „актинидлар группаси“ деб аталадиган группасини бошлайди.

Элементлар табиий системасининг анча кенг тарқалган бошқа бир шакли—қисқа даврли жадвалдир (51-бетдаги IV жадвал). Унинг ихчамлиги асосий афзаллиги бўлиб, камчилиги эса барча элементларни 8 группага сунъий йўл билан группачалар ва „триадлар“ (VIII группада) киритиб тақсимлашдадир.

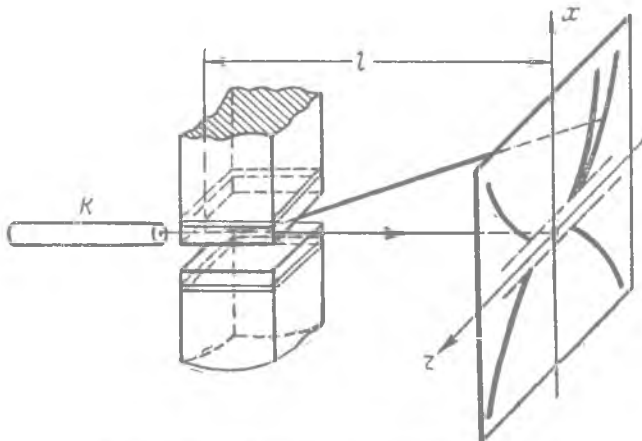
13-§. Атомларнинг ҳақиқий массаларини аниқлаш. Параболалар методи

Атомларнинг ўртача массаларини эмас, балки ҳақиқий массаларини аниқлаш жуда муҳим масала эканлиги олдинги параграфдан маълум бўлди. Атомлар массаларини аниқлашнинг ҳозирги замон энг аниқ усуллари ҳар хил газлар ионларини электр ва магнит майдонларида оғдиришга асосланиб, улар индивидуал атомлар *массасининг ҳар хиллигига* таянади ва

атомларнинг бошқа ҳеч қандай хоссаларига боғлиқ бўлмайди. Биринчи бўлиб бу методни Ж. Ж. Томсон таклиф этган.

Пасайтирилган босимда (10^{-2} мм Hg тартибда) ишлайдиган разряд найининг католида тешик очилса, катодга борувчи ионлар шу тешикдан ўтади ва катод орқасида канал нурлари деб аталадиган нурлар оқими ҳосил қилади. Бу канал нурлари асосан разряд трубкасидаги қолдиқ газларнинг мусбат ионларидан иборатдир: бу нурлар таркибига мусбат ионларнинг ва электронларнинг катод орқасидаги фазода рекомбинацияланиши натижасида ҳосил бўладиган кам миқдордаги нейтрал заррачалар ва манфий ионлар ҳам киради.

Томсон методи канал нурлари дастасига кирадиган айрим заррачаларнинг нисбий массаларини қуйидагича аниқлашга имкон беради. Канал нурлари разряд трубкасида ҳосил бўлган ва тезлаштирилган ионларнинг узунлиги 2 см ва диаметри 0,1 мм бўлган K канал орқали (24-расм) ўтишидан ҳосил бўлади. Канал



24-расм. Параболалар методининг схемаси.

анча узун бўлганидан нурлар дастаси деярли параллел бўлади; бу нурлар дастасида энергияси трубкадаги кучланишга боғлиқ бўлган максимал қийматгача бўлган ҳар хил энергияли заррачалар бўлади. Сўнгра канал заррачалари дастаси бир-бирига параллел ёки антипараллел йўналган кўндаланг электр ва магнит майдонларининг таъсирига дуч келади. Бунда зарядли заррачалар электр ва магнит майдонлари таъсирида ўзаро перпендикуляр бўлган йўналишларда оғади; 10-§ да кўрганимиздек, агар даста бир хил массали, лекин тезликлари ҳар хил бўлган заррачалардан иборат бўлса, электр ва магнит майдонлари бу дастани унинг бошланғич йўналишига перпендикуляр қўйилган флуоресценцияловчи экранда ёки фотопластинкада

парабола кесмаси шаклида из қолдирадиган қилиб ёяди. Бу кесма 25-расмда муфассал тасвирланган.

Заррачанинг электр майдон таъсирида оғишини x ўқи бўйича, магнит майдон таъсирида оғишини z ўқи бўйича оламиз, у ҳолда 10-§ да кўрсатганимиздек, z билан x орасидаги боғланиш қуйидагича бўлади:

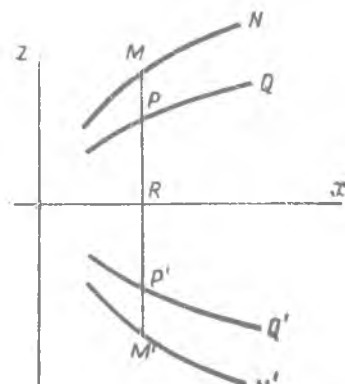
$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2 e}{B m}, \quad (10.1)$$

бундаги A ва B — асбобнинг доимийлари (4-§ га қаранг). (10. 1) дан

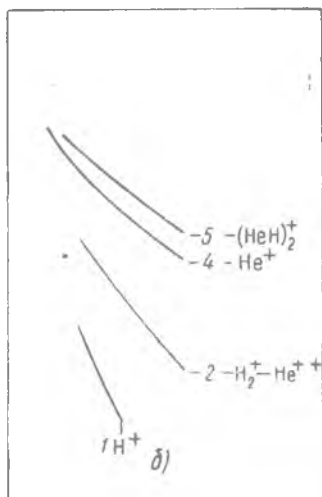
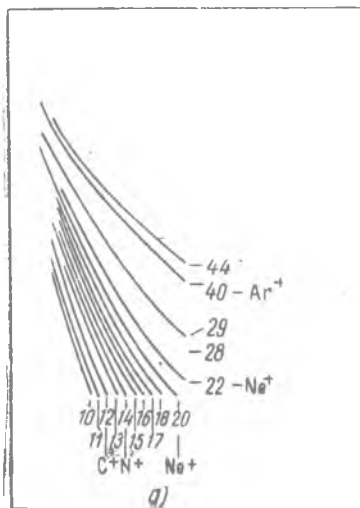
$$z^2 \frac{m}{e} = \frac{A^2}{B} x. \quad (13.1)$$

Ионнинг заряди электрон зарядига бугун каррали бўлиши (яъни $+e, +2e, \dots$ бўлиши) мумкин. Агар барча ионлар бир каррали зарядли бўлса, у ҳолда (13.1) формуланинг курсатишича, x абсциссанинг қий-

мати ўзгармас бўлганда, ионлар массалари ординаталар квадратига тескари пропорционал бўлади (25-расмга қаранг).



25- расм.



26- расм. Ҳар хил газлар ионларининг параболалари.

Координаталар боши фотопластинкада электр ва магнит майдонларида оғмайдиган зарядсиз заррачалар билан қайд қилинган; лекин фотопластинкада ҳеч қандай координата ўқлари

ҳам йўқ. Массаларни аниқлашда зарур ординаталарни ўлчаш мумкин бўлиши учун тажриба вақтида магнит майдонининг йўналиши ўзгартириб турилади ва шу йўл билан MN ва PQ парабола кесмаларидан ташқари, яна симметрик $M'N'$, $P'Q'$ кесмалар ҳосил қилинади. (Маълумки, электрон массасининг тезлигига боғлиқлигини аниқлашга бағишланган 10-§ да тавсифланган тажрибада электр майдони йўналиши ўзгартирилган эди.)

Агар дастада бир каррали зарядли ионлар билан бир қаторда икки каррали зарядли ионлар (масалан, O^+ ва O^{++}) ҳам учраса, икки каррали зарядли ионлар массанинг ярмига тўғри келади-ган параболани ҳосил қилади (масалан, O^{++} нинг параболаси 8 га тенг массага мос келади). Аммо кўп каррали зарядли заррачалар параболаларини бир каррали зарядли заррачалар параболаларидан фарқ қиладиган ташқи аломатлари ҳам бор.

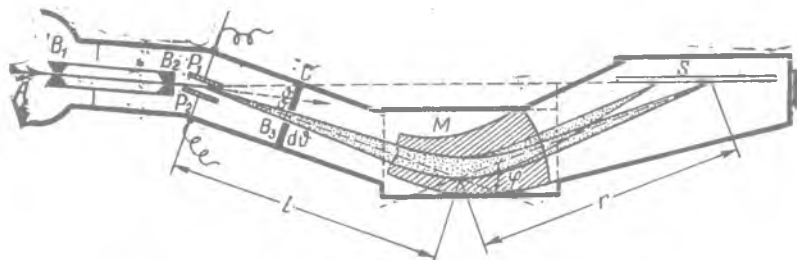
26-расмда такомиллашган ҳозирги замон қурилмасида шу метод билан олинган параболаларнинг иккита фотосурати келтирилган. Чапдаги фотосуратда битта мотда—неоннинг бир каррали зарядли ионлари ҳосил қилган иккита парабола аниқ кўриниб турибди. Бу параболалар неоннинг 20 ва 22 массали изотоплари борлигини равшан кўрсатади. Бу фотосуратлар деталлар конструкциясини тегишлича қилиб олганда ва асбобни тўғри ҳисоб қилганда массалар фарқи жуда оз бўлганда ҳам бир-биридан катта оралиқлар билан ажралиб турадиган ингичка излар шаклида параболалар ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатади. Шу йўл билан эришилган ажрата олиш қобилиятининг максимал қиймати $1/600$ га тенг, яъни ўз катталигининг $1/600$ қисмига фарқ қиладиган массаларга мос иккита чизиқ (20 марта катталаштириб қаралганда) айрим-айрим кўринади. Аммо бу асбобнинг энг муҳим камчилиги унинг „ёруғлик кучи“ жуда камлигидадир: кескин ажралган чизиқлар олиш учун тешиклари жуда тор қилишга тўғри келади, электр ва магнит майдонлари эса зарралар оқимини чўзади, натижада изнинг интенсивлиги жуда ҳам камаёди. Бу шароитлар объективи бўлмаган тор тешикли фотография камерасига ўхшаб кетади: тешикнинг диаметрини камайтириб, истаганча аниқ тасвир олиш мумкин, лекин бунда экспозиция вақти амалда мақбул бўлмаган даражада ортиб кетади.

14-§. Массаспектрографлар

Электр ва магнит майдонларининг ҳар хил комбинациялари ёрдамида зарядли заррачаларни фокуслайдиган методлар параболалар методидан анча афзал ҳисобланади. Бундай тузилган асбоблар массаспектрографлар деб аталади; уларнинг энг биринчисини Астон қурган.

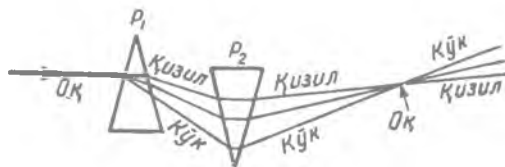
Бу спектрографнинг тузилиши қуйидагичадир. Мусбат зарядли ионлар паст босимли трубкадаги разрядда ҳосил қилина-

ди. Бу ионлар катоддаги тешик орқали ўтиб, катод орқасидаги фазога канал заррачалари дастаси тарзида ўтади ва у ерда анализ қилинади. Бу мақсадда даста аввал эни $0,02$ мм бўлган иккита B_1 ва B_2 коллиматор тирқишлари ёрдамида параллел дастага айлантирилади (27-расм); P_1P_2 конденсатор бу дастани унинг заррачалари e/mv^2 га пропорционал равишда



27-расм. Астон масса-спектрографининг схемаси.

оғадиган қилиб ажратади. Бу ёйилган дастанинг B_2 тирқиши С экран ажратган қисми M учликли электромагнит қутби ҳосил қилган магнит майдонга тушади. Магнит майдони электр майдонига параллел ёки антипараллел йўналган Томсон методидан фарқли равишда, Астон қурган асбобда магнит майдони электр майдонига *перпендикуляр* йўналган. Шу туфайли заррачаларнинг магнит майдони таъсирида оғиш текислиги электр майдони таъсирида оғиш текислиги билан устма-уст тушади; магнит майдони йўналган томон магнит майдонида заррачалар электр майдонидаги қарама-қарши йўналишда оғадиган қилиб танлаб олинади. Бундай шароитда магнит майдони бир хил массали (аниқроғи, e/m нисбат катталиги бир хил бўлган), лекин ҳар хил тезликли заррачаларни S фотопластинкада умумий



28-расм. Масса-спектрографининг оптик эквивалент схемаси.

фокусга тўплайди. Ҳақиқатан ҳам, ионларнинг конденсаторда оғиши e/mv^2 га пропорционал, магнит майдонидаги траекториянинг эгрилик радиуси эса (4.9) формулага биноан mv/e га пропорционал. Шунинг учун электр майдонида кўпроқ оғишган заррачалар магнит майдонида эгрилик радиуси кичикроқ бўлган траектория бўйича ҳаракат қилади (27-расм). Натижада

магнит майдони ионларнинг ёйилувчи дастасини умумий фокусга тўплайди. Чизмада кўрсатилган учликли қутб шаклини махсус танлаб олиш билан ионлар яхшироқ фокусланади.

Қуйидаги оптик ўхшашлик бу асбобнинг ишлашини янада яхши тушунишга имкон беради: оқ ёруғлик нурларининг параллел дастаси (28-расм) P_1 призма орқали ўтиб, спектрга ажралади. Биринчига учи қарама-қарши қилиб қўйилган ва катта дисперсияли иккинчи P_2 призма ҳар хил рангли барча нурларни қайтадан оқ „фокусга“ тўплайди. Бу ердаги ўхшашликда биринчи призма—электр майдонини, иккинчиси—магнит майдонини эслатади; тўлқин узунлиги ҳар хил нурлар—тезликлари ҳар хил бўлган зарраларга ўхшатилади.

Астон спектрографининг аниқ назарияси анча мураккаб. Бу ерда заррачаларни фокуслаш шароитини тушунтириб берувчи баъзи содда мулоҳазаларнигина келтирамиз. Электр майдони ёйган ва B_z тирқишдан ўтган дастанинг бурчак кенглиги $d\vartheta$ бўлсин. Агар конденсаторнинг ўртасидан магнит майдони марказигача бўлган масофани l билан, магнит майдони марказидан фокусгача бўлган масофани r билан белгиласак, магнит майдони бўлмаганда $l + r$ масофада электр майдони ёйган даста кенглиги $(l + r) d\vartheta$ га тенг бўларди. Заррачаларни фокуслаш учун бу кенглик қарама-қарши томонга йўналган магнит оғдириши билан компенсацияланиши керак. Агар дастанинг магнит майдони таъсиридан оғишдан ҳосил бўладиган бурчак кенглиги $d\varphi$ бўлса, у ҳолда $rd\varphi$ катталиқ дастанинг r масофадаги чизиқли кенглиги бўлади. Заррачаларни фокуслаш учун электр майдони таъсирдаги оғиш магнит майдонидаги оғиш билан компенсацияланиши лозим. Бу ҳолдан қуйидаги шарт келиб чиқади:

$$(l + r) d\vartheta - rd\varphi = 0. \quad (14.1)$$

Олдин массалари бирдек бўлган дастанни кўриб чиқамиз, яъни дастадаги барча заррачалар учун $e/m = \text{const}$ деб фараз қиламиз. Параллел даста заррачаларининг бир жинсли электр майдонидаги оғиши (4.11) ва (4.12) формулаларга биноан,

$$z = \frac{e}{2mv^2} Ea^2$$

бўлади, бунда a — конденсаторнинг узунлиги. Шунинг учун оғиш бурчаклари ϑ жуда кичик бўлганда

$$\vartheta \approx \text{tg } \vartheta = \frac{z}{a} = \frac{e}{2mv^2} Ea$$

ва, бинобарин,

$$\vartheta v^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} Ea = \text{const.}$$

Дифференциаллаб, қуйидагини топамиз: $v^2 d\vartheta + 2v\vartheta dv = 0$

ёки
$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -2 \frac{dv}{v}. \quad (14.2)$$

Бир жинсли магнит майдонида траекториянинг эгрилик радиуси (4.9) формулага асосан

$$\rho = \frac{mv}{e} \frac{1}{H}.$$

Магнит майдондаги φ огиш бурчаги

$$\varphi = \frac{L}{\rho} = \frac{e}{mv} L H,$$

бу ерда L — магнит майдонидаги йўл узунлиги. Худди олдингидаги каби, бунда ҳам $\varphi v = \frac{e}{m} L H = \text{const}$, буни дифференциаллаб,

$$\varphi dv + v d\varphi = 0$$

ёки

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{dv}{v} \quad (14.3)$$

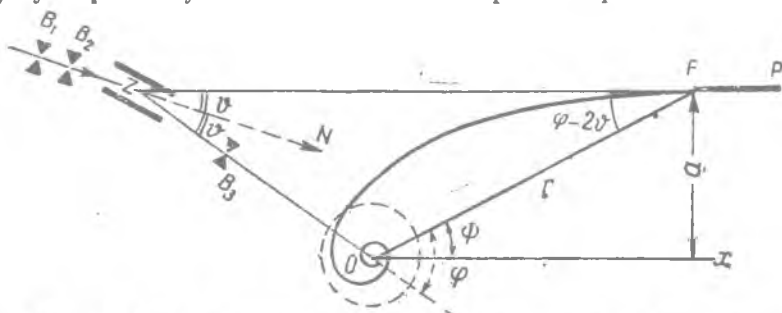
тенгламага эга бўламиз. $d\vartheta$ ва $d\varphi$ нинг (14.2) ва (14.3) қийматларини (14.1) га қўямиз:

$$\frac{dv}{v} [(\varphi - 2\vartheta)r - 2l\vartheta] = 0.$$

$\frac{dv}{v} \neq 0$ бўлганидан бу шартни бажариш учун ўрта қавс ичидаги ифода нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$(\varphi - 2\vartheta)r = 2l\vartheta. \quad (14.4)$$

Бу муносабатнинг геометрик мазмунини 29-расмга қараб тушунтириш мумкин. Z — конденсатор электр майдонининг



29-расм. Астон масса-спектрографида фокусланиш шартига доир.

ўртаси, O — магнит майдонининг ўртаси, F — биз танлаб олган массали заррачалар тўпланадиган фокус бўлсин. ZN — канал

заррачаларининг оғмасдан олдинги учиш йўналиши. Агар OZF учбурчакда Z даги бурчак, чизмада кўрсатилгани каби, 2θ га тенг бўлса, $ZO = l$ ва $OF = r$ (27-расмга қаранг) эканлигини ҳисобга олиб, синуслар теоремасига асосан, қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$\frac{r}{\sin 2\theta} = \frac{l}{\sin(\varphi - 2\theta)}. \quad (14.5)$$

Бурчаклар жуда кичик бўлганда (14.5) муносабат (14.4) га айланади.

Ҳозирга қадар e/m нинг қиймати маълум бўлган заррачаларни назарда тутиб келдик, лекин FP фотопластинкани ZF тўғри чизиқ унинг текислигида ётадиган қилиб қўйилса, пластинкага ҳар хил e/m ли заррачаларнинг фокуслари ҳам бир вақтда тушади. Ҳақиқатан ҳам, ZF га параллел OX тўғри чизиқни қутб ўқи деб қабул қилайлик. У ҳолда F га ўтказилган радиус-вектор r га тенг, қутб бурчаги ψ эса, расмдан кўринишича, $\varphi - 2\theta$ га тенг бўлади. ZP билан OX орасидаги a масофа $r \sin(\varphi - 2\theta)$ га тенг бўлади ёки, (14.5) га асосан:

$$a = r \sin(\varphi - 2\theta) = l \sin 2\theta \approx 2l\theta.$$

Лекин θ бурчак B_3 тирқишнинг вазияти орқали белгилангани учун (27-расм), a ўзгармас катталиқ бўлади. $\varphi - 2\theta = \psi$, $2l\theta = a$ деб белгилаб, (14.4) дан қуйидагини топамиз;

$$r = \frac{a}{\psi}. \quad (14.6)$$

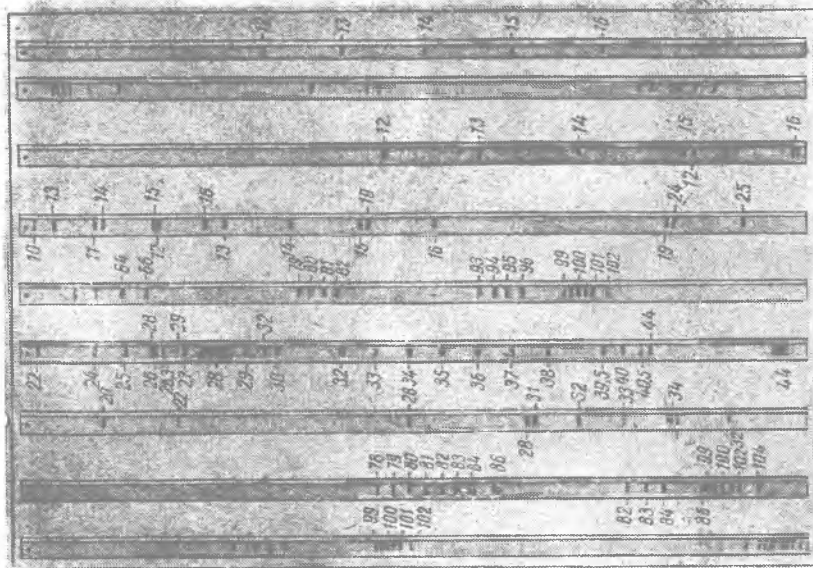
a — ўзгармас катталиқ бўлгани учун (14.6) тенглама гиперболик спиралнинг тенгламасидир*. Бу спираль чексиз кўп айланиб координаталар бошига яқинлашади, лекин унга етиб келолмайди; бу чизиқ қутб ўқига параллел бўлган ва ундан a масофада ўтадиган асимптотага эга. Шунинг учун фотопластинкани асимптота унинг текислигида ётадиган қилиб жойлаштирилса, бирор аниқ катталиқдан кичик ψ бурчаклар мос келадиган барча фокуслар фотопластинка текислигида ётади ва шу туфайли масса-спектрдаги чизиқлар аниқ бўлади.

30-расмда юқорида тавсифланган типдаги асбоб ёрдамида олинган бир қанча масса-спектрлар келтирилган. Бу спектрларнинг чизиқлари нақадар аниқ эканлиги кўриниб турибди. Улар орасидаги масофа (асбоб дисперсияси) жуда катта бўлганидан массаларни жуда аниқ ўлчаш ва яқин массаларни юксак даражада аниқлик билан ажратиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, спектрнинг узунлиги 16 см бўлганда бу спектрда бир-бирдан иккидан озгина зиёд фарқ қиладиган массали атомларнинг

* Масалан, В. И. Смирновнинг Курс высшей математики деган китобига қаранг. 1 т., 190-бет, Гостехиздат, 1948.

чизиқлари жойлашади; массанинг бир процентга ўзгариши чизиқлар орасидаги масофанинг 1,5 дан 3 мм гача (пластинканинг ҳар хил қисмларида) бўлишига мос келади.

Бу спектрларга қараб массаларни аниқлаш учун қуйидагича иш тутилади. Биринчидан, бирор аниқ массани „стандарт“ си-



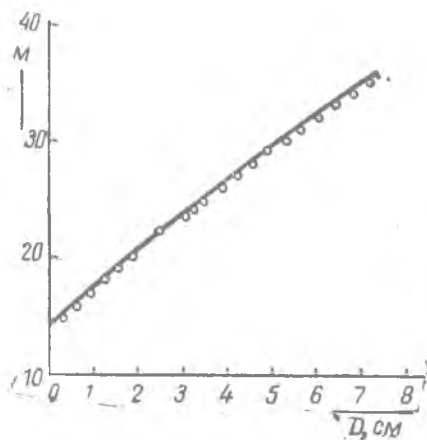
30- расм. Бир қанча типик масса-спектрлар.

фатида қабул қилиш керак, чунки масса-спектрлар ёрдамида массаларнинг фақат *нисбий* катталикларигина аниқланиши мумкин. Массаларнинг физик шкаласи деб аталадиган шкалада асос қилиб углерод изотопининг массаси $C^{12}=12$ қабул қилинади. Иккинчидан, номаълум массаларни аниқлаш учун даражалаш эгри чизиғини тузиш керак. Бу эгри чизиқни тузиш учун абсциссалар ўқида фотопластинкадаги маълум бир нуқтадан чизиқларгача бўлган масофа, ординаталар ўқида эса ўшаларга мос массалар қўйилади. Массаларнинг бу шкаласи нисбатлари жуда аниқ маълум бўлган массаларга алоқадор чизиқлар ёрдамида аниқланиши мумкин. Масалан, кислород атоми ва молекуласи O ва O_2 нинг чизиқларига 16 ва 32 массаларни ёзиб қўйиш, бир ва икки зарядли O^+ ва O^{++} ионларга 16 ва 8 массаларни ёзиб қўйиш лозим ва ҳоказо.

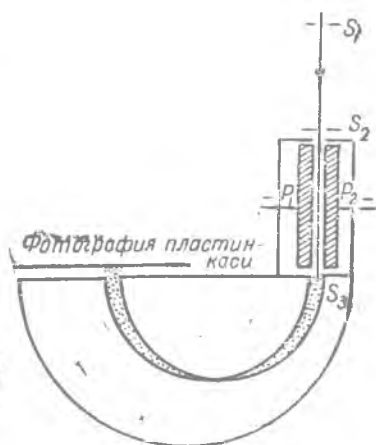
31-расмда Астон спектрографининг даражалаш эгри чизиғи тасвирланган. Бу эгри чизиқнинг тўғри чизиқдан жуда кам фарқ қилиши кўриниб турибди. Бу ҳол юқори аниқликка эришни осонлаштиради. Максимал аниқликка эришиш учун

янада мураккаброқ методлар ишлатилади. Лекин бу методларнинг тавсифига тўхталмаймиз*.

Бэйнбриж ўзининг масса-спектрографида электр ва магнит майдонларининг бутунлай бошқа комбинациясидан фойдаланган. Бэйнбриж қурган масса-спектрограф конструкцияси жуда содда бўлишига қарамай, баъзи ҳолларда Астон спектрографи берган натижалардан анча аниқ бўлган натижалар беради.



31-расм. Астон спектрографининг даражалаш эгри чизиги.



32-расм. Тезликлар фильтрига эга бўлган Бэйнбриж масса-спектрографининг схемаси.

Бэйнбриж спектрографининг схемаси қуйидагича: канал нурлари дастаси коллиматорнинг иккита S_1 ва S_2 тирқишлари ёрдамида параллел қилинади (32-расм). Ҳар хил массали ва ҳар хил тезликли ионлар бўлган бу параллел даста кейин P_1P_2 конденсаторга тушади. Бу конденсатор чизма текислигига перпендикуляр бўлган кўндаланг магнит майдонида жойлашган. 9-§ да кўрсатилганидек, бундай система тезликлар фильтридан иборат бўлади. Бундай фильтрнинг мавжудлиги ишни анча осонлаштиради. Ҳақиқатан ҳам, фильтр S_3 тирқиш орқали ҳар хил массали, лекин бир хил v_0 тезликли ионларни ўтказди. Бу ионлар S_3 тирқишдан ўтиб, бир жинсли кўндаланг магнит майдонида доиравий траекториялар чизади. Бу траекторияларнинг эгрилик радиуслари (4.9) формулага биноан ионларнинг ҳаракат миқдорларига пропорционалдир:

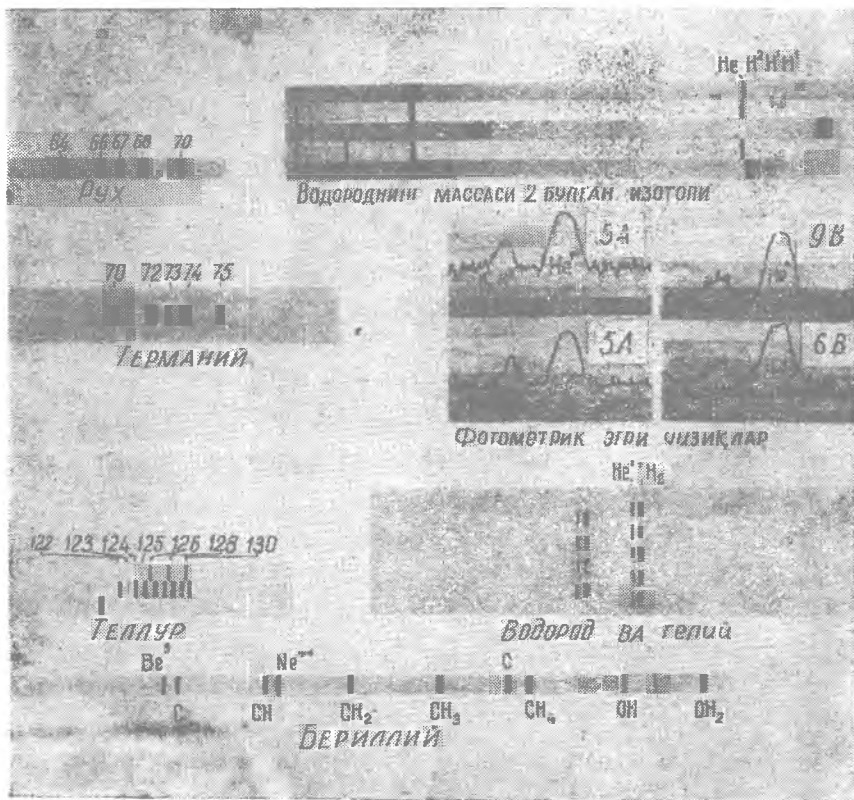
$$r = \frac{mv_0}{eH}, \quad (4.9)$$

* Т. Р. Рик, Масс-спектроскопия, Гостехиздат, 1953.

ҳамма ионларнинг v_0 тезлиги бир хил бўлгани учун, ҳар хил массали ионлар траекторияларининг эгрилик радиуслари массаларга пропорционал бўлади:

$$\rho = \text{const} \cdot m.$$

Шунинг учун чизиқларнинг фотопластинкада саноқ боши деб қабул қилинган бир чизиқдан узоқлиги ҳам массага қатъий



83- расм. Бэйнбриж спектрографида олинган масса-спектрларнинг намуналари. Чанда рух, германий ва теллурнинг изотоплари берилган; ўнгда 2 массали водород изотопи борлигини тасдиқловчи спектрлар тасвирланган. Пастки спектр бериллийнинг изотоплари йўқ эканлигини тасдиқлайди.

пропорционал бўлади. Шкаланинг чизиқли эканлиги, шунингдек, айниқса чизиқлар шаклининг симметрик эканлиги бу асбобга Астон спектрографидан анча кўп устунликлар беради. Чизиқлар шаклининг симметрик бўлиши интенсивлиги жиҳатидан бир-биридан кучли фарқ қиладиган чизиқларни таққослашга имкон беради.

33-расмда Бэйнбриж спектрографи ёрдамида олинган масса-спектрларнинг бир қанчаси келтирилган. Водород молекуласи ва икки зарядли гелий He^{++} иони чизиқлари бир-биридан анча узоқ туришидан бу спектрографнинг ажрата олиш қобилияти юқори эканлиги кўриниб турибди.

Гояси жуда содда бўлган Бэйнбриж спектрографи аслида каттагина иншоотдир. Унинг асосий хусусияти—каттакон электромагнитнинг қутблари орасидаги масофа 1,8 см бўлганда диаметри 40 см бўлган ярим доира сатҳда 15 000 эрстедли бир жинсли магнит майдони ҳосил қилишидир.

15-§. Икки марта фокусловчи масса-спектрометрлар ва масса-спектрографлар

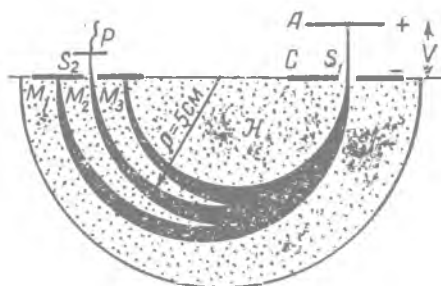
Олинган параграфда тавсифланган масса-спектрографлар индивидуал типдаги атомларнинг атом массаларини ғоят даражада тўғри (унли касрнинг бешинчи хонасигача) аниқлашга имкон беради. Фотографик фотометрия методларидан фойдаланиб, спектрнинг муайян чизиқларида фотопластинканинг қорайиш даражасига қараб ўша чизиқларга мос массаларнинг процент миқдорини таққослаш мумкин. Лекин, биринчидан, фотографик фотометрия методлари кўп меҳнат талаб қилиб, аниқ натижа бермайди, иккинчидан, изотопларнинг процент миқдорини масса-спектрометрлар деб аталадиган асбоблар билан анча тез ва тўғри аниқлаш мумкин. Бу асбобларда муайян массали ионлар фотографик усул билан эмас, балки электр усулда — муайян массали ионлар ташиб ўтадиган заряд катталигига ёки ион токининг кучига қараб аниқланади. Шу туфайли изотопларнинг процент миқдорлари қўшимча ўлчашлар ўтказилмасдан ҳам аниқланади: электр ўлчов асбоби (электрометр ёки гальванометр) кўрсатишлари мазкур типдаги ионларнинг сонига пропорционалдир.

Масса-спектрометрлар атом массаларини аниқлашга ҳам имкон беради, лекин бунга қараганда масса-спектрограф анча тўғри аниқлайди. Масса-спектрометрлар кейинги йилларда катта амалий аҳамиятга эга бўлиб қолди, чунки улар химиявий газ анализиди (масалан, углеводородларни анализ қилишда) борган сари кўпроқ ишлатилмоқда, бундан ташқари, изотопларни электромагнит усулда ажратадиган қурилмалар катта қувватли масса-спектрометрлардир. Бу қурилмалар тўғрисида кейинроқ (19-§) гапираимиз. Масса-спектрометрларнинг муҳим хусусиятларидан бири ёйилувчи ион дасталарни фокуслашдир. Астон масса-спектрографини кўрганда фокуслаш деб бир хил массали, лекин ҳар хил тезликли заррачаларни фокусга тўплашни тушунган эдик. Аммо бу мақсадда ионлар дастаси олдин бир-биридан анча узоқ масофада жойлашган иккита тор тирқишдан (27-расмдаги B_1 ва B_2) ўтказилиб, параллел даста

қолига келтирилар эди; лекин кўп миқдорда ионлар исроф бўлар эди. Оптика тили билан айтганда, асбоб тасвирнинг аниқлигидан ютса, ёруғлик кучидан ютқизади. Масса-спектрометрларни конструкциялашда ёйилувчи ион дасталарини фокуслашнинг хилма-хил методларидан фойдаланилган.

Астон масса-спектрографида фақат тезликлар фокусланади, масса-спектрометрларда йўналишлар ҳам фокусланади.

Ҳозирги вақтда бу масала электрон геометрик оптиканинг ривожланиши туфайли, яъни механика билан геометрик оптика орасидаги ажойиб ўхшашликни зарядли заррачаларнинг



31-расм. радианга фокусловчи масса-спектрометрнинг схемаси.

электр ва магнит майдонлардаги йўларини ҳисоблашга татбиқ этиш туфайли анча осон ҳал қилинади. Бу метод кейинги йилларда хилма-хил амалий эҳтиёжлар, жумладан телевидение эҳтиёжлари, электрон микроскоплар қуриш ва бошқа эҳтиёжлар туфайли кўп ривожланди.

Масса-спектрометрларнинг конструкцияларида энг эски ва кенг қўлланиладиган

Йўналишларни фокуслаш методи 180° (ёки π радиан) масофада кўндаланг магнит майдони билан фокуслашдир. Биз 9- § да кўрдикки, муайян e/m қийматли ионларнинг кучсиз ёйилувчи дастаси ионларнинг бутун йўли давомида таъсир қиладиган бир жинсли кўндаланг магнит майдонида ярим айлана чизиб, фокусланади.

Астоннинг масса-спектрографи (1918 й.) билан деярли бир вақтда Демстернинг дастлаб (34- расм) қурган масса-спектрометри конструкцияси шунга асосланган. А манба ҳосил қиладиган ионлар (аслида ионлар текшириладиган металлнинг тузини қиздириш йўли* билан ҳосил қилинади) А ва С пластинкалар орасидаги потенциаллар айирмаси V таъсирида ҳаммаси бир хил энергия олади. Ёйилувчи ионлар дастаси S_1 тирқишдан ўтиб, бир жинсли кўндаланг H магнит майдони таъсир эгаётган соҳага тушади. Ҳар хил e/m га эга бўлган ионлар, чизмада курсатилганидек, ҳар хил жойга фокусланади. Агар ҳозирги ҳолдагидек, ҳамма ионларнинг энергияси бир хил

* Агар анодга металл тузи суркаб қиздирилса, сийраклашган газда разряд юз берганда аноддан металлнинг мусбат ионлари оқими анод нуллари тарзида чиқади ва шуниси муҳимки, ҳосил бўлаётган ионлар энергияси жуда кам бўлади; бу энергия ионлар кейинчалик тезлаштирилганда оладиган энергиядан анча кам бўлиши туфайли барча ионлар бир хил энергияли бўлади, чунки бошланғич энергиясидаги арзимаган фарқ аҳамиятсиздир.

бўлса, фокуснинг вазиятини аниқловчи эгрилик радиуси билан масса (аниқроғи, m/e) орасида жуда содда муносабат топиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \quad (5.4)$$

$$\rho = \frac{mv}{eH}, \quad (4.9)$$

булардан

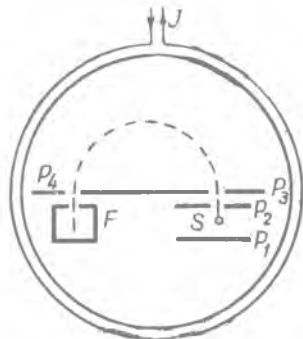
$$\frac{m}{e} = \frac{H^2 \rho^2}{2V}$$

ёки

$$\rho^2 = \frac{2}{H^2} \frac{m}{e} V.$$

Тезлагувчи потенциалнинг катталигини m/e нинг муайян қийматида ρ эгрилик радиуси аниқ қийматга, масалан 5 см га тенг буладиган қилиб танлаймиз; 34- расмда кўрсатилганидек бундай ҳолда S_2 чиқиш тирқишидан ҳар қандай массали ионни утказиб юбориш мумкин. Бунда P коллектор зарядланган потенциал (ёки бу коллекторга келадиган ионлар тоқининг кучи) мазкур массали ионлар миқдорининг ўлчови булади.

Кейинги йилларда бу методда қилинган такомиллаштиришлар имкон борица кўп миқдорда ионлар олишга қаратилган. Масалан, кейинги конструкцияларнинг бир қанчаси учун прототип (тимсол) ҳисобланган Блэрни масса-спектрометрида кўпроқ ионлар олишга қўйидагича эришилади. Ионлар P_1 электрод билан P_2 тирқиш орасидаги фазода расм текислигига перпендикуляр ва уни S да кесиб ўтадиган электронлар оқими билан ҳосил қилинади (35-расм). J соленоид ҳам чизма текислигига перпендикуляр бўлган (яъни электронлар оқимига параллел бўлган) кўндаланг бир жинсли магнит майдони ҳосил қилади. Бу майдон электронлар оқимининг кенгайишига йўл қўймайди. Ҳосил бўлган ионлар P_1 ва P_2 орасидаги кучсиз электр майдон таъсирида P_2 ва P_3 тирқишлар орасидаги анча кучли электр майдони таъсир қиладиган фазога тортилади. Ионлар P_3 тирқишдан ўтиб, юқорида айтиб ўтганимиздек, магнит майдон таъсирида π радиан масофада фокусланади. Магнит майдонининг катталигини тегишлича қилиб танлаб олиш билан ионларни P_4 тирқиш орқали Фарадейнинг F цилиндрига ўтишга мажбур қилиш мумкин. Фарадей цилиндрининг заряди мазкур массали ионлар тоқи кучининг ўлчови бўлиб хизмат



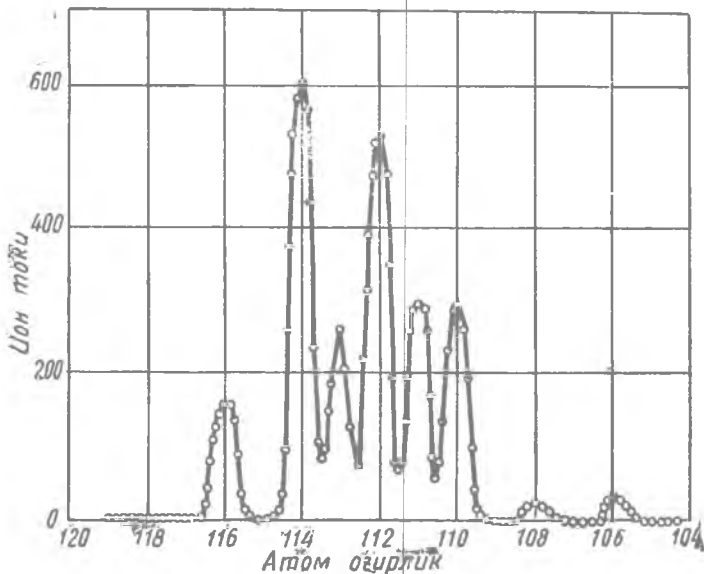
35- расм. Блэрни масса-спектрометрининг схемаси.

қилади. Ионлар кўпроқ ўтиши учун барча тирқишларнинг узунлиги каттароқ қилинади.

36- расмда кадмийнинг изотоп таркибининг юқорида тавсифланган такомиллаштирилган спектрометрда қилинган анализи нисол тариқасида келтирилган. Абсциссалар ўқидаги рақамлар изотопларнинг яхлитланган атом массаларидир; кескин максимумлар кадмийнинг 106, 108, 110, 111, 112, 113, 114 ва 116 массали изотопларига мос келади. Ион тоқларининг ординаталар ўқидан топиладиган миқдорлари нисбатлари изотопларнинг процент миқдорини кўрсатади. Бу процент қуйдагичадир:

Масса сони	106	108	110	111	112	113	114	116
Процент миқдори	1,215	0,875	12,39	12,75	24,07	12,26	28,86	7,58

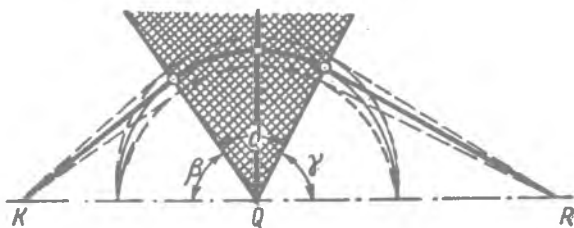
Ионларнинг ярим айлана шаклидаги траекториясининг бошидан охиригача таъсир қилувчи кўндаланг бир жинсли магнит майдони электрон оптика нуқтаи назаридан қараганда S_1



36- расм. Кадмийнинг изотоп таркиби.

тирқишнинг „тасвирини“ берадиган цилиндрик линзадир. Лекин электрон оптикада ϑ бурчакли сектор шаклидаги чекли соҳада таъсир қилувчи кўндаланг бир жинсли магнит майдони

ҳам цилиндрик линза бўлиши исбот этилади; лекин бунда ионлар ёйилувчи дастасининг марказий нури майдонга кириши ва ундан чиқишида майдон чегараларига нормал йўналади, дейилган шарт қўйилади (37-расм). Бунда сектор бурчаги ҳар қандай бўлганда ҳам ионлар дастаси фокусланади, аммо



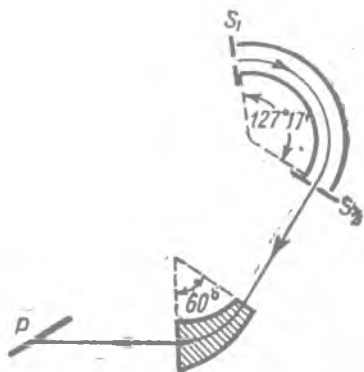
37-расм. Чекли магнит майдоннинг йўналишларни фокуслаши.

β , γ ва ϑ бурчаклар $\beta + \gamma + \vartheta = \pi$ муносабат билан боғланган бўлиши керак. Ионлар манбаи, секторнинг учи ва фокус бир тўғри чизиқда ётган вақтда бу муносабат бажарилади. Жумладан, $\vartheta = \pi$ бўлганда биз кўриб ўтган доиравий траекторияларнинг фокусланиши бўлади.

Цилиндрик конденсаторнинг радиал электр майдони ҳам ионларнинг ёйилувчи дасталарини фокуслаш учун қўлланилиши мумкин; 9-§ да кўриб ўтганимиздек, бу ҳолда фокус манбадан $127^\circ 17'$ ёки $\pi/\sqrt{2}$ радиан узоқда туради. Радиал



38-расм. Айқаштирилган электр ва магнит майдонли масса-спектрометр.



39-расм. Бэйнбриж ва Жорданнинг такомиллаштирилган масса-спектрографи схемаси.

электр ва кўндаланг магнит майдонларининг баъзи масса-спектрометрларда қўлланиладиган комбинацияси жуда эффективдир (38-расм).

Бэйнбриж билан Жордан ёруғлик кучи жуда катта ва ажрата олиш қобилияти айниқса юқори бўлган масса-спектрограф ясаш учун радиал электр ва сектор магнит майдонларидан фойдаланиб, қўш фокуслашни амалга оширган. Бу асбобда (39-расм) ионларнинг ёйилувчи дастасини аввал радиал электр майдони фокуслайди, сунгра эса бурчаги 60° бўлган сектор магнит майдони фотопластинкада массаларнинг ясси спектрини ҳосил қилади; бу асбобнинг „ёруғлик кучи“ шундайки, ёруғ чизиқлар учун экспозиция вақти 1—5 секундга етказилиши, жуда кучсиз чизиқлар учун 180 секундгача етказилиши мумкин. Ажрата олиш қобилияти, яъни массаларнинг чизиқлар айрим-айрим кўринадигандаги ΔM минимал фарқининг бутун M массага нисбати тирқишнинг кенглигига қараб $1/6000$ дан $1/15000$ гача ўзгаради.

16-§. Изотопларнинг массалари ва процент миқдори

Атом оғирликлари ҳар хил бўлса-да, химиявий йўл билан ажратиб бўлмайдиган элементлар борлиги радиоактив элементларнинг химиявий хоссаларини ўрганишда 1906—1910 йиллардаёқ аниқланган. Булар жумласига, масалан, ионий ва торий, мезоторий ва радийлардан иборат жуфт элементлар киради. 1913 йилда Ж. Ж. Томсон ўзи кашф этган параболалар методидан фойдаланиб, радиоактив бўлмаган неон газини химиявий йўл билан фарқ қилиб бўлмайдиган икки хил атомлардан, яъни массалари 20 ва 22 бўлган изотоплардан иборат эканлигини (26-а расмга қаранг) кўрсатди. Неоннинг химияда қабул қилинган атом оғирлиги 20,2. Шунга асосан бу 20,2 „химиявий“ атом оғирлиги аслида 20 ва 22 массали иккита изотоп атом оғирликларининг ўртачаси деган хулосага келиш керак эди. Кейинчалик Астон ўзининг масса-спектрографиини қўллаб, иккита ва ундан кўп изотопга эга бўлган элементлар кўп бўлиб, аксинча изотоплари йўқ элементлар (натрий, фтор ва ҳоказо) кам эканлигини кўрсатди. Аммо бу ҳолларда ҳам сунъий радиоактивликнинг кашф этилиши аслида *стабил* (яъни радиоактив бўлмаган) изотоплар йўқ эканлигини, аммо радиоактив изотоплар, стабил Na^{23} изотоп билан бир қаторда Na^{22} , Na^{24} радиоактив изотоплар ҳамма вақт борлигини кўрсатди.

Изотопларнинг атом массалари масса-спектрографлар ёрдамида жуда тўғри аниқланади. Фотографик фотометрия методларидан фойдаланиб, изотопларнинг процент миқдорини ҳам фотопластинканинг қорайиш интенсивлигига қараб аниқлаш

мумкин. Аммо изотопларнинг процент миқдорини олдинги параграфда қараб ўтилган масса-спектрометрлар билан анча аниқ ва осон аниқласа бўлади. Масса-спектрометрларнинг ҳаммаси изотопларнинг процент миқдорини тез ва жуда аниқ топишга имкон беради.

Астоннинг ҳақиқий атом массаларини 0,001 гача аниқликда топишга доир дастлабки натижалари шу нарсани кўрсатдики, ҳамisha атомларнинг массалари 16,000 деб қабул қилинган кислород массасига нисбатан деярли бутун сонлар билан ифодаланади. Бу ерда фақат водород мустасно бўлиб, унинг атом массаси ўша аниқлик чегарасида бирдан фарқ қилади ва 1,008 га тенг. *Химиявий* атом оғирликлар мазкур элемент барча изотоплари массаларининг ўртачаси булади, шунинг учун баъзи элементларнинг химиявий атом оғирликлари бутун сонлардан анча фарқ қилади (лекин бундай элементлар кўп эмас). Масалан, магний изотоплари қуйидагичадир:

Изотоплар	24	25	26
Процент миқдори	78,60	10,11	11,29

Шунинг учун ўртача масса 24,33 бўлади, магнийнинг химиявий атом оғирлиги эса 24,32 га тенг. Кадмийга тегишли бундай жадвал илгари келтирилган эди.

Такомиллаштирилган масса-спектрографларда атом массалари тўртта ёки бешта каср хона билан аниқланади. Бундай аниқликда чиқадиган рақамлар бутун сонлардан салгина фарқ қилади.

17- §. Изотопларни диффузияга асосланган методлар ёрдамида ажратиш

Табиатдаги химиявий элементлар турғун изотопларнинг аралашмасидан иборат. Шу билан бирга, баъзи элементларни ҳисобга олмаганда бу аралашмаларнинг таркиби доимийдир. Албатта, айрим изотопларни тоза ҳолда олиш анча қизиқиш туғдириши турган гап. Бу масала ҳозирги вақтда жуда муҳим илмий ва техника аҳамиятга эгадир. Унинг аҳамияти ядро энергетикаси ривожланиши муносабати билан айниқса кейинги йилларда янада ортиб кетди.

Соф изотоплар олиш ёки изотоплар аралашмасини улардан бирига етарли даражада бойитиш масаласи жуда оғир масаладир. Ҳақиқатан ҳам, изотопларни ажратиш учун уларнинг массага боғлиқ бўлган хоссаларидан фойдаланишга тўғри келади. Аммо массанинг процент ҳисобидаги фарқи жуда

енгил элементларнинг изотоплари учунгина сезиларли қийматга эга бўлади. Масалан, водороднинг оғир (H^2 ёки D) ва енгил (H^1) изотопи массаларининг фарқи 100% ни, аммо углероднинг C^{12} ва C^{13} изотоплари учун бу фарқ 8,35% ни, ураннынг U^{238} ва U^{235} изотоплари учун эса атиги 1,2% ни ташкил қилади.

Изотопларни ажратишнинг ҳар хил методларини ўрганишга киришишдан олдин келгусида ишлатиладиган терминлар тўғрисида келишиб оламиз. Массалари ҳар хил бўлган иккита изотопнинг аралашмаси ажратилаётган бўлсин ва σ —бутун атомлар сонининг ажратишдан олдин изотоплардан бири ҳиссасига тўғри келадиган қисми бўлсин, $\lambda = 1 - \sigma$ эса бошқа изотопнинг ажратилганга қадар бўлган ҳиссаси бўлсин деб фараз қилайлик; мос равишда Σ ва $\Lambda = 1 - \Sigma$ — изотоплар ажратилгандан кейинги ўша ҳиссалар бўлсин.

$$q = \frac{\Sigma/\Lambda}{\sigma/\lambda} \quad (17.1)$$

тенглик билан аниқланадиган q катталики ажратиш коэффициентини деб атаймиз. Масалан, табиатда учрайдиган неон 20 массали 90% атомлардан ва 22 массали 10% атомлардан иборат бўлади. Агар биз бу аралашмани ундаги оғир изотоп ҳиссаси 50% га тенг бўладиган қилиб бойитмоқчи бўлсак, ажратиш коэффициентини

$$q = \frac{0,5/0,5}{0,1/0,9} = 9$$

бўлиши керак.

Массага боғлиқ бўлган ва шунинг учун изотопларни ажратишга яроқли бўлган процесслардан диффузия процессини энг олдин кўриб чиқамиз. Массалари бир-биридан фарқ қиладиган икки тур заррачалар аралашмасидан иборат бўлган газни текширайлик. Газ температура мувозанатида бўлгани учун иккала тур заррачаларнинг ўртача кинетик энергиялари бир хил; $m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2$ бўлади ва шунинг учун, ўртача тезликлар массалардан олинган квадрат илдизга тесқари пропорционал бўлади:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

Шунинг учун диффузия вақтида енгил заррачалар олдинга кетиб қолиб, оғирроқ заррачалар орқада қолади.

Иккита газ аралашмасини ғовак тўсиқ орқали диффузия қилиш йўли билан ажратиш мумкинлигини Рэлей 1896 йилдаёқ назарий жиҳатдан текширган эди. Айтайлик, бошланғич пайтда тўсиқнинг бир томонида массалари бўйича фарқ қиладиган икки тур молекулалардан иборат газ, иккинчи томонида вакуум бўлсин. Диффузия натижасида газ тўсиқнинг бир томонида енгил компонентга ва иккинчи томонида оғир компо-

нентга боййиди. Рэлейнинг фикрига кўра, ҳар хил тур молекулаларнинг максимал ажралиш шарты қуйидагича: биринчидан, ғовак тўсиқдаги тешиқлар катталиги молекуларлар эркин югуриш йўлининг ўртача узунлигидан анча кичик бўлиши ва, иккинчидан, секин диффузияланувчи компонент ғовак тўсиқ сиртида тўпланиб қолмаслиги керак.

Ундан ташқари, диффузияланган аралашманинг таркиби енгил ва оғир молекулалар тезликлари нисбатигагина эмас, балки бу молекулаларнинг бошланғич аралашмадаги нисбий концентрациясига боғлиқ бўлишига ҳам эътибор бериш керак. Бу ҳол жуда муҳим ҳисобланади, чунки диффузия процессида бошланғич аралашмада енгил молекулалар секин-аста камаяди ва шунинг учун ғовак тўсиқдан ўтадиган газнинг таркиби бошланғич таркибидан борган сайин кам фарқ қиладиган бўла боради.

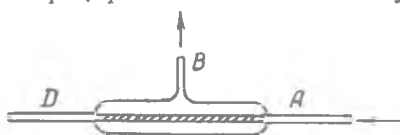
Энди диффузияланувчи газ массалари бир-биридан арзимаган даражада фарқ қиладиган иккита изотоп аралашмасидан иборат булсин деб фараз қилайлик (ҳақиқатда ҳам шундай бўлади); у ҳолда Рэлейнинг фикрига кўра, диффузияланмаган газнинг оғир компонент билан бойиш коэффициенти

$$\varphi = \sqrt{\frac{\text{бошланғич ҳажм}}{\text{охирги ҳажм}}} \quad (17.1')$$

формула билан ифодаланади, бундаги $\nu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}(m_1 \text{ ва } m_2 - \text{иккала изотоп атомларининг массалари})$. Бу формулани неонга татбиқ этайлик. Неон изотопларининг массалари $m_2 = 20$ ва $m_1 = 22$, бинобарин, $\nu = 21$. Астоннинг неон изотопларини ажратишга бағишланган илк тажрибаларида ҳажмлар нисбати 500 дан катта ва 10000 дан кичик қилиб олинган бўлса керак. (17.1') формулага биноан, ажратиш коэффициенти учун 1,3 билан 1,5 орасидаги сон чиқади, яъни аралашманинг оғир компонент билан 50% га бойиши учун керакли сондан 6—7 марта кичик сон чиқади. Хлорнинг 36 ва 38 массали изотопларини ажратиб олишда HCl диффузия қилинади; бу ҳолда (17.1') формуладаги ν кўрсаткич 37 га тенг бўлади ва ҳажм 10^4 марта ўзгарганда бойитиш коэффициенти 1,3 га тенг булади.

Қараб ўтилган мисоллардан бир каррали диффузия йўли билан изотоплар аралашмаси таркибини фақат салгина ўзгартириш мумкин эканлиги кўринади. Биринчи марта Г. Герц ишлаб чиққан кўп поғонали ёки каскадли метод қўлланилганда бутунлай бошқача натижага эга бўламиз. Г. Герц ишлатган аппаратура кетма-кет уланган қатор звенолардан иборат бўлиб, бу звеноларнинг ҳар бири ўз ичига кирадиган газ оқимини таркиби бўйича салгина фарқ қиладиган иккита қисмга ажратади. Бу каскаднинг тузилиши ва ишлашини тушуниб олиш учун аввал унинг битта ажратувчи звеносини айрим қараб чиқиш керак.

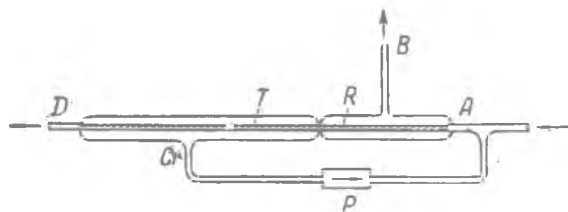
Бундай звенонинг энг оддий тузилиши 40- расмда тасвирланган. Бу звено ғовак материалдан ясалган ва анча кенгроқ шиша найча ичига жойлаштирилган ички найчадан иборат. Агар ҳар хил массали икки тур заррачалардан иборат газ A



40- расм. Ажратувчи ячейканинг энг содда схемаси.

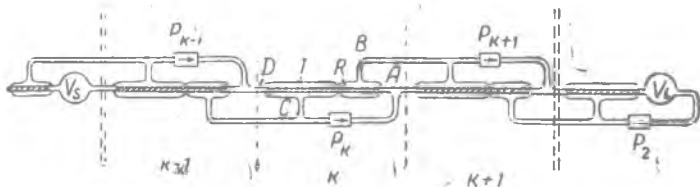
га ўнг томондан оқиб келса, унинг ташқи найчага диффузияланиб ўтган қисми энгил компонентга бир оз бойийди; бу қисмни B орқали ўнгдаги қўшни звенога насос билан ҳайдаш мумкин, оғир компонент билан бойитган қисми эса D орқали қўшни чап звенога ўтади.

Шундай қилиб, айрим звено ҳақиқатан ҳам газ оқими таркиби бўйича бир оз фарқ қиладиган иккита қисмга ажратади: оғир компонент билан бойитилган газ чап томонга, энгил компонент билан бойитилган газ эса ўнг томонга берилади.



41- расм. Такмиллаштирилган ажратувчи ячейка.

Аmmo бу қурилманинг камчилиги қуйидагича: ғовак найча ичидан утаётган газ олға борган сари оғир компонентга бойиб боради. Шунинг учун звенонинг чап учида (D яқинида) диффузияланадиган газ A орқали кираётган газ таркибидан жуда оз фарқ қилади.

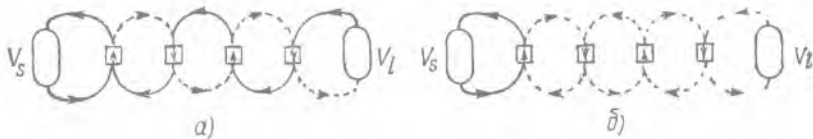


42- расм. Диффузион ячейкалар каскади.

Герц бу камчиликни тўғрилаш учун ҳар бир звенони, 41- расмда кўрсатилгандек қилиб, икки қисмга ажратди. Газнинг R орқали диффузияланадиган ва энгил компонент билан бойитиладиган қисмигина B орқали сўриб олиниб, қўшни ўнг зве-

нога ҳайдалади. Қолган қисми T га ўтади ва юқорида айтиб ўтганимизга биноан, бу ерда диффузияланувчи қисм таркиби звенога кираётган газ таркибидек бўлади; шунинг учун бу қисм C орқали P насос билан сўриб олиниб, қайта диффузияланиши ва тегишлича бойитилиши учун A яқинидан звенога қайта юборилади.

42-расмда учта ажратувчи ячейкадан иборат кичикроқ каскад кўрсатилган. V_1 ва V_s — мос равишда енгил ёки оғир компонентларга бойитилган газ тўпланадиган баллонлардир. Газ бу баллонлар орқали яна ажратувчи ячейкаларга қайтарилади, шу тўғрисида оқибатда стационар ҳолат қарор топади. V_s баллондан чапда турган кичикроқ сопол найча ажратувчи ячейка сифатида эмас, балки баллон орқали циркуляция қилиб,



43-расм. Диффузион ячейкалар каскади ишлашининг схемаси: а) бошланғич ҳолат; б) барқарор ҳолат.

қўшни ажратувчи ячейкага қайтадан тушадиган газнинг тезлигини ростловчи сифатида хизмат қилади.

Қурилманинг ишлаши 43-расмда схематик тушунтирилади. Бу ерда ҳар бир ячейка квадрат билан белгиланган. Бошланғич ҳолатда бутун каскад нормал таркибли аралашма билан тўлдирилган. Диффузия натижасида ҳар бир ячейка ўнг томонга енгил компонент билан бойитилган газ, чап томонга эса, оғир компонент билан бойитилган газ беради. 43-расмда енгил компонент билан бойитилган аралашма оқими пунктир чизиқ билан, оғир компонент билан бойитилган аралашма оқими туташ чизиқ билан кўрсатилган. Бошланғич ҳолатни тасвирловчи 43-а расмдан ажратувчи ячейкаларнинг ишлаши натижасида системада иккита оқим қарор топиши кўринади: ўнг томонга—енгил компонент билан бойитилган оқим, чап томонга—оғир компонент билан бойитилган оқим. Бу ҳаракат натижасида V_1 ва V_s баллонлардаги газнинг таркиби тегишлича ўзгаради. Аралашманинг таркиби стационар ҳолат қарор топгунча ўзгариб туради. Стационар ҳолат қарор топганда ҳар бир ячейканинг қўшни ячейкалардан оладиган газ таркиби бу ячейканинг иккала қўшни ячейкага берадиган аралашмаси таркиби билан бир хил бўлади. Лекин бунда ҳар бир ячейканинг ўнгга ва чапга берадиган иккала оқими енгил ва оғир компонентлар миқдорига қараб, аввалгидек бир-биридан бирор q коэффициентга фарқ қилгани учун кетма-кет келган қўш звенолар орасида циркуляцияланадиган газ таркиби стационар ҳолатда

ўша q коэффициентга фарқ қилади. Бу ҳол 43-б расмда ҳар хил зичликда чизилган штрих чизиқлар билан кўрсатилган; ўнг томондаги энг охири ячейка билан V_1 баллон орасида циркуляция қиладиган аралашма энгил компонент билан энг кўп бойитилган, шунинг учун штрихлари жуда сийрак чизилган; ўнг томондаги энг охири ячейка билан охиридан олдинги ячейка орасида циркуляция қиладиган аралашма таркибидаги оғир компонентнинг нисбий концентрацияси q марта катта:

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n.$$

шунинг учун штрих чизиқлар зичроқ қилиб ўтказилган. Ундан кейинги жуфт учун:

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-2} = q \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q^2 \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

ва ҳоказо. Равшанки, агар каскадда z звено бўлса, чап томонда турган V_s баллондаги аралашманинг таркиби ўнг томонда турган V_1 баллондаги аралашма таркибидан q^z коэффициентга фарқ қилади. Шундай қилиб, бутун каскаднинг тўлиқ ажратиш коэффициенти Q :

$$Q = q^z. \quad (17.2)$$

q ни ҳисоблаш учун ажратувчи ячейкага тушадиган оқимнинг қандай f улуши ғовак R найча орқали диффузияланишини билиш керак (41-расм). Умуман айтганда, ажратувчи звенога тушган оқим уч қисмга ажралади: бири R орқали диффузияланиб, B орқали ўнг томондаги қўшни звенога ҳайдалади, иккинчиси T орқали диффузияланиб, ўша ячейкада қайтадан циркуляция қилиши учун P насос билан сўриб олинади ва учинчиси D орқали чап томондаги қўшни ячейкага ўтади. Агар R ва T ларнинг узунлиги бир хил бўлса, оқимнинг учала қисми ўзаро тенг бўлади ва $f = 1/3$. Агар R ва T бир хил бўлмаса, у ҳолда f уларнинг l_R ва l_T узунликлари нисбатига боғлиқ бўлади. Умумий ҳолда, соддагина ҳисобнинг кўрсатишича,

$$f = \frac{1}{2 + \frac{l_R}{l_T}} \quad (17.3)$$

(равшанки, $l_T = l_R$ бўлганда олдингидагича $f = 1/3$ чиқади). Айрим звено ажратиш коэффициенти учун Герц чиқарган формула

$$q = \frac{f^\mu}{1 - (1 - f)^\mu} \quad (17.4)$$

бу ерда

$$\mu = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (m_1 < m_2),$$

шунинг учун каскаднинг тўлиқ ажратиш коэффициенти (17.2) га биноан,

$$Q = \left(\frac{f^\mu}{1 - (1 - f)^\mu} \right)^\mu, \quad (17.5)$$

бу ерда z — каскаддаги звенолар сони.

Тушунтиришда мисол учун яна неонни келтирамиз. Герцнинг дастлабки қурилмасида R ва T найчаларнинг узунликлари бир хил бўлган, шунинг учун $f = 1/3$. $\mu = \sqrt{\frac{20}{22}} = 0,954$ бўлгани учун (17.4) формулага асосан $q = 1,089$ эканини топамиз. Агар каскад 24 звенодан иборат бўлса, Q нинг қиймати:

$$Q = (1,089)^{24} = 7,73,$$

каскад 48 звенодан иборат бўлганда,

$$Q = (1,089)^{48} = 59,75.$$

Демак, каскадни ишлатиш туфайли ажратиш коэффициенти изотопларни жуда яхши ажратиш мумкин бўлган даражада ортиб кетади.

Тавсифланган метод дастлаб бир қатор енгил элементларнинг изотопларини ажратишга татбиқ этилган эди. Неоннинг изотопларини ажратиш учун 24 звенодан иборат каскад ишлатилган. Мувозанат тўрт соатдан кейин қарор топган. Бунда $Ne^{20} : Ne^{22} = 9 : 1$ нормал таркиб ўрнига қурилманинг „оғир томонидаги“ резервуарда $Ne^{20} : Ne^{22} = 1,25 : 1$ таркибли аралашма тупланган. Бу охирги маҳсулотнинг миқдори атмосфера босимида 4 см^3 бўлган. 48 звеноли каскад ишлатилганда соф Ne^{22} олинди. Шунингдек, водороднинг изотоплари бутунлай ажратилди ва углерод ҳамда азот оғир компонентлари (C^{13} ва N^{15} изотоплари) билан бойитилди.

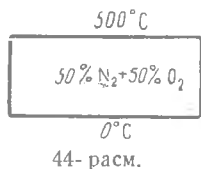
Каскаднинг ишлаши учун диффузия ўтадиган ғовак тўсиқнинг аҳамияти муҳимдир. Юқорида айтиб ўтилганидек, ажратиш учун анча мойил келадиган шароитлар ғовак тўсиқнинг махсус танланишини талаб қилади. Бу мақсадда Герц махсус равишда тайёрланган сопол найчалардан фойдаланди. Лекин улар талабга унча яхши жавоб бермаган. Натижада Герц методи шундай ўзгартирганки, бунда диффузия ғовак тўсиқ орқали эмас, балки енгил компонент билан бойитилган газни ўзи билан олиб кетадиган симоб буғлари оқимида юз берадиган бўлган. Бу иккинчи методнинг ажратувчи звеносини аралашманинг асосан битта компонентини сўриб олувчи диффузион насос деб қараш мумкин. Бундай звенолардан ҳам бир нечта ўн звеноли (50 тагача) каскадлар тузилади. Бу методнинг биринчи методдан афзаллиги мувозанатнинг тезроқ қарор топишидадир. Бу метод ёрдамида Герц ва яна бошқа бир

қанча тадқиқотчилар бір қатор енгил элементлар (неон, кислород, аргон ва углерод) изотопларини ажратганлар ёки бойитганлар.

Ма ш қ. Герцнинг 24 звенодан иборат қурилмаси ажратишининг тўлиқ коэффициентларини $f = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ деб қараб ҳисобланг ва Q нинг f га боғланиш эгри чизигини ясанг.

18-§. Изотопларни термодиффузия методи билан ажратиш

Изотопларни ажратишнинг энг эффектив методларидан бири термодиффузия деб аталувчи ўзига хос ҳодиса билан боғлиқдир. Бу ҳодисанинг нимадан иборат эканлигини тушуниб олиш учун, аввал унинг одатдаги диффузиядан фарқини билиб олиш лозим. Маълумки, диффузия ҳодисасини намоиш қилиб кўрсатувчи классик тажриба қуйидагидан иборат. Шундай бир ёпиқ фазони тасаввур этайликки, бошланғич пайтда унинг ичига молекуляр оғирликлари турлича бўлган иккита газ киритилган бўлиб, буларнинг оғири пастда, енгилроғи эса юқорида бўлсин. Бу ҳолда диффузия натижасида оғирроқ газнинг молекулалари юқорига кўтариледи (яъни оғирлик кучининг таъсирига қарши), енгилроқ газнинг молекулалари эса пастга ҳаракат қилади. Бирор вақт ўтгандан кейин иккала газнинг мутлақо бир жинсли бўлган аралашмаси ҳосил бўлади. Шундай қилиб, одатдаги диффузия таъсирида бошланғич пайтда айрим-айрим ҳолда турган газлар аралашиб кетади.



Термодиффузия ҳодисаси *тескари таъсир* кўрсатади: газлар аралашмасида температура градиенти мавжуд бўлганда термодиффузия натижасида аралашма қисман ажралади. Буни 44-расмда тасвирланган мисолда тушунтириш мумкин. Кислород ва азот молекулаларининг мутлақо бир жинсли бўлган аралашмаси турган яшикни тасаввур қилайлик: $50\% \text{O}_2 + 50\% \text{N}_2$. Агар энди яшикнинг пастки деворини 0°C температурада, юқоригисини 500°C температурада тутиб турилса, тажрибанинг кўрсатишича, юқориги девор, яъни иссиқроқ девор яқинида газнинг таркиби $50,27\% \text{N}_2 + 49,73\% \text{O}_2$, пастки девор, яъни совуқроқ девор яқинида $49,73\% \text{N}_2 + 50,27\% \text{O}_2$ бўлади. Шундай қилиб, термодиффузия натижасида иссиқроқ девор яқинида енгил молекулалар кўпроқ, совуқ девор яқинида эса оғир молекулалар кўпроқ бўлади: термодиффузия аралашманинг бир жинслилигини бузади ва уни оғир ва енгил компонентларга қисман ажратади.

Аралашма компонентларидан бирининг (масалан, енгилроқ компонентининг) концентрациясини c орқали белгилайлик. У ҳолда бу концентрациянинг иссиқроқ девор яқинидаги ор-

тиқчаси иккала деворнинг T_2 ва T_1 температураларига қуйидаги муносабат орқали боғланган:

$$\Delta c = \kappa \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (18.1)$$

бу ерда κ коэффициент *термодиффузия коэффициенти* деб аталади.

Термодиффузия ҳодисанинг мавжудлиги даставвал назарий йул билан айтилган, кейин эса тажрибада тасдиқланган. Бу ҳодисанинг назарияси қуйидаги қизиқ фактни очишга ёрдам берди. Газларнинг кинетик назариясида газ молекулалари орасидаги ўзаро тўқнашишлар баъзан идеал эластик шарларнинг урилиши деб қаралади. Лекин ҳодисани бундай тасаввур қилиш ҳаддан ташқари соддалаштиришга йул қуяди. Оддий „урилишлар“ ўрнига молекулаларнинг ўзаро таъсирларини қараб чиқиш анча туғрироқ булади. Молекулаларнинг ўзаро таъсири улар бир-бирига жуда яқин келганида бир-биридан итаришишида намоён булади. Бу ўзаро таъсир қонунини $\frac{\text{const}}{r^v}$ кўринишда тасвирлаш мумкин, бу ерда r — масофа ва v — бирор даража кўрсаткич. Термодиффузия учун v кўрсаткич катталигига боғлиқ равишда назарий жиҳатдан бир-биридан анча фарқ қиладиган натижалар олинади. Масалан, v нинг баъзи қийматларида термодиффузия уз ишорасини ўзгартириши ёки ҳатто термодиффузия мутлақо содир бўлмаслиги ҳам мумкин. Жумладан, $v = 5$ бўлганда термодиффузия содир бўлмайди.

Бу натижа тарихий нуқта назардан ҳам қизиқарлидир, чунки Максвелл газларнинг кинетик назариясини ривожлантириб, молекулалар орасидаги итаришиш кучи const/r^5 қонунга бўйсунди деган гипотезадан фойдаланган ва шунинг учун термодиффузиянинг зарурлигини кўрмаган.

Термодиффузия процессини тавсифлашда айтилган фикрлардан бу ҳодисани изотопларни ажратиш учун татбиқ этиш мумкинлиги келиб чиқади. Температура майдони куб яшиқда қарор топган ҳолда (бу кубнинг қарама-қарши деворларининг температураси T_2 ва T_1 қилиб турилади) ажратиш коэффициентининг ифодаси қуйидаги содда формула билан аниқланади:

$$q = 1 + \frac{2}{3} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Бу формулани неонга ($m_1 = 22$, $m_2 = 20$) татбиқ этиб ва $T_1 = 900^\circ$ ва $T_2 = 300^\circ$ деб ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$Q = 1,035.$$

Бу катталик Герц каскадидаги битта звено учун топилган катталikka яқин, шунинг учун изотопларни ажратиш учун термодиффузия ҳодисасидан фойдаланиш мумкин эканлиги келиб чиқади. z звеноли каскад ишлатилганда ажратишнинг тулиқ коэффициентини $Q = q^z$ бўлади.

Ажратиш эффектини кучайтириш учун термодиффузия билан бир қаторда конвекциядан ҳам фойдаланилади. Деворларининг температураси ҳар хил бўлган тўғри тўрт бурчакли энсиз яшикни қарайлик (45-расмда кўрсатилган). Яшикнинг



45- расм.

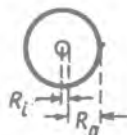
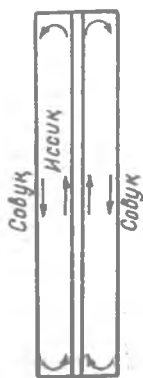
иссиқроқ девори яқинидаги газ кенгайди ва юқорига кўтарилади, совуқроқ девори яқинидаги газ эса пастга тушади. Агар тўғри тўртбурчакли яшик ўрнига R_a радиусли цилиндрдан фойдаланилса ҳам худди шундай ҳодиса юз беради. R_a радиусли цилиндр ичига юқорироқ температурагача қиздирилган R_i радиусли бошқа бир цилиндр (электр ток иситаётган сим) коаксиал равишда ўрнатилган (46- расм).

Шундай қилиб, конвекция натижасида қарама-қарши йўналишларда ўтадиган иккита оқим ҳосил бўлади. Агар яшиқ ёки найча ичида молекуляр оғирликлари турлича бўлган иккита газ аралашмаси бўлса, термодиффузия натижасида конвекцион оқимга перпендикуляр йўналган оқим ҳам ҳосил бўлади. Бу оқим натижасида иссиқ девор яқинида энгилроқ молекулаларнинг концентрацияси совуқроқ девор яқинидагидан ортиқроқ бўлади. Иккала эффект таъсиридан юқори ва пастки соҳалар орасида концентрацияларнинг анча катта фарқи пайдо бўлади.

Бу ҳодисани муфассалроқ текширайлик. Қарама-қарши деворларининг температураси турлича ($T_2 > T_1$) тутиб туриладиган тўғри бурчакли яшикни яна тасаввур этайлик (47- расм). Координата ўқларини 47-расмда кўрсатилгандек оламиз ва олдин термодиффузия ва одатдаги диффузия натижасида ҳосил бўлган оқимни текшираемиз. Агар яшикда молекуляр оғирликлари турлича бўлган иккита газ аралашмаси бўлса ва олдин айтганимиздек энгилроқ компонентнинг концентрацияси c билан белгиланса, у ҳолда термодиффузия натижасида модда кўчади, бунда кўчаётган модданинг миқдори $\frac{\partial \ln T}{\partial x}$ га [(18.1) формулага қаранг] пропорционал бўлади. Термодиффузион токнинг кучи, яъни вақт бирлиги ичида оқимга перпендикуляр юздан ўтадиган модда миқдори қуйидагига тенг бўлади:

$$\rho D x \frac{\partial \ln T}{\partial x} \quad (18.2)$$

Бу ерда ρ — газнинг зичлиги ва D — диффузия коэффиценти. Термодиффузия натижасида иссиқ ва совуқ деворлар орасида оғир ва энгил компонентларнинг концентрациялари фарқи ҳо-



46- расм.

сил бўлади. Концентрацияларнинг бу фарқи натижасида одатдаги диффузиянинг тескари томонга йўналган токи ҳосил бўлади. Бу ток газнинг бутун ҳажмида концентрацияни тенглаштиришга ҳаракат қилади. Бу токнинг кучи қуйидагига тенг:

$$- \rho D \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (18.3)$$

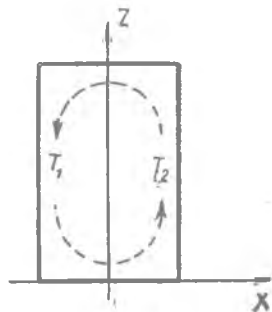
Тўла J ток кучини топиш учун иккала процессни ҳисобга оламиз, яъни (18.2) ва (18.3) формулалардан фойдаланамиз:

$$J = \rho D \left(x \frac{\partial \ln T}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} \right). \quad (18.4)$$

Барқарорлашган ҳолатда термодиффузия ва диффузия натижасида ҳосил бўладиган тўла ток кучи нолга тенг бўлади ва (18.4) дан қуйидаги тенгликни топамиз:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = x \frac{\partial \ln T}{\partial x}. \quad (18.5)$$

Шундай қилиб, деворлар орасида температура градиенти мавжуд бўлганда термодиффузия ва одатдаги диффузиянинг биргаликдаги таъсирида аралашма компонентларининг *концентрация градиенти* юзага келади. Энди яшик ичидаги газ 47-расмда стрелкалар билан кўрсатилган йўналишда бирор усул билан циркуляцияланадиган бўлсин. Бунда ўнг томондаги девор яқинида юқорига кўтариладиган газ миқдори чап девор яқинида пастга тушадиган газ миқдорига тенг бўлади. Шу туфайли ихтиёрий горизонтал кесим орқали ўтадиган модданинг тўла оқими нолга тенг бўлади.



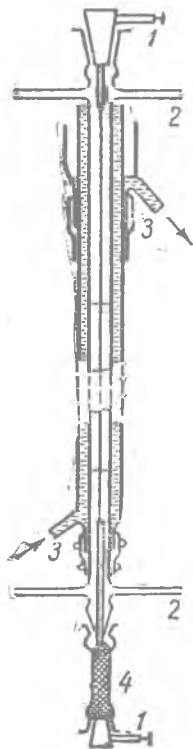
47- расм.

Лекин газлар аралашмаси турли *компонентларининг* оқимлари нолдан фарқли бўлади, чунки (18.5) формулага биноан термодиффузия натижасида стационар ҳолатда энгил компонент концентрациясининг иситилган девор томонга йўналган градиенти мавжуд бўлиши керак. Шунинг учун циркуляция натижасида иссиқроқ девор яқинида юқорига кўтариладиган энгил компонентлар миқдори совуқ девор яқинида пастга тушадиганидан кўпроқ бўлади. Бунинг оқибатида концентрациянинг *вертикал* градиенти аста-секин қарор топа бошлайди, бунда юқорида энгил компонентлар, пастда эса оғир компонентлар кўпаяди.

Тавсифланган методнинг қиммати шундаки, аҳамияти айтиб утилган мулоҳазаларда тушунтирилган газ циркуляцияси оғирлик кучи таъсирида ўз-ўзидан вужудга келади. Равшанки, молекуляр оғирликлари турлича бўлган газларнинг аралашма-

си турли массали изотоплар аралашмасига ҳам бутунлай тааллуқлидир.

Хлор изотопларини ажратишда ишлатилган найчанинг тузилиши 48-расмда кўрсатилган. Найча 46-расмда тушунтирилган ажратувчи цилиндрик ячейка принципида ишлайди. Ички цилиндр ўрнида диаметри 0,4 мм бўлган ва ток билан қиздириладиган платина сим ишлатилади; ташқи найчанинг диаметри 8,4 мм. Хлор изотопларини ажратиш учун каскад қилиб бириктирилган бешта найча ишлатилган. Уларнинг узунликлари 7 м, 8 м, иккита найчаники 6 м дан ва биттасиники 9 м булган. Шундай қилиб, найчаларнинг умумий узунлиги 36 м га тенг. Ажратиш учун HCl^{35} ва HCl^{37} молекулалар аралашмасидан иборат бўлган водород хлорид олинган. Бунда ҳар куни қурилманинг оғир изотоплар тўпланадиган томонида таркибида 99,4% Cl^{37} изотоп булган HCl дан 8 см³, енгил изотоплар тўпланадиган томонида эса таркибида 96,6% Cl^{35} изотоп булган HCl дан 25 см³ тупланган. Найчаларнинг умумий узунлиги 20 м бўлганда таркибида 99,6% Cl^{35} булган HCl олишга эришилди. Ўша методнинг ўзи неон изотопларини ажратишга ҳам татбиқ қилинган. Бунда бир неча литр тоза Ne^{20} олинган. Шунингдек, углерод C^{13} оғир компоненти билан 6,6% гача бойитилиб, бу маҳсулот кунига бир неча мг миқдорда (углероднинг нормал таркиби $\text{C}^{12} : \text{C}^{13} = 99,1$) чиқиб турган.



48-расм. Термодиффузион ажратувчи трубка:

- 1—ток бериш;
- 2—газ бериш;
- 3—совитиш;
- 4—симоб.

Термодиффузия методи изотопларнинг суюқ аралашмаларини ҳам ажратишга яроқли бўлиб чиқди. Масалан, ZnSO_4 эритмаси термодиффузия методи билан ажратилди; бунда эритма биридан 0,025 см масофада жойлашган 90 см узунликдаги иккита пластинка орасига қўйилган. Пластинкалар орасидаги температуралар фарқи 50° қилиб турилган. Рухнинг 64 ва 68 массали изотоплари миқдорларининг нисбати нормал ҳолатда 2,93 га тенг; термодиффузиядан кейин қурилманинг оғир изотоп йиғиладиган томонида $\text{Zn}^{64} : \text{Zn}^{68} = 2,7$, енгил изотоп йиғиладиган томонида $\text{Zn}^{64} : \text{Zn}^{68} = 3,2$ булган.

Суюқ системаларда мувозанатнинг қарор топиш процесси секин боради, лекин ажратиш учун ишлатиладиган колонкаларнинг узунлиги газларни ажратгандагидан қисқароқ бўлади.

Тавсифлаб ўтилган қурилманинг тузилиши жуда содда бўлишига қарамасдан, у изотопларни ажратишда ниҳоят даража-

да эффектив бўлиб чиқди. Бу методни диффузион метод билан таққослаш мақсадида оғир газ—ксеноннинг изотоплари узунлиги 2,5 м ва диаметри 5 мм бўлган ажратиш найчасида (бу найчанинг марказий сими 1200—1750° С гача қиздирилган) ва шу билан бир вақтда 12 та диффузион ячейкали каскад ёрдамида ажратилган. Узунлиги 1 м бўлган найчанинг эффективлиги 12 диффузион ячейкали каскаднинг эффективлиги билан бир хил бўлиб чиққан.

19-§. Изотопларни электромагнит методлар ёрдамида ажратиш

Изотопларни ажратишнинг энг эффектив воситалари электромагнит методлардир. Ҳақиқатан ҳам, аслида ҳар бир масса-спектрограф ёки айниқса масса-спектрометр изотопларни тулиқ ажратадиган асбобдир. Агар 34-расмда керакли массалар тупланадиган фокуслар вазиятларига мос ўринларда орқасига приёмниклар урнатилган тирқишлар бор деб тасаввур этилса, бу приёмникларда соф изотоплар йиғилади.

Ион токи кучининг жуда камлигидан бундай приёмникда йиғиладиган модда миқдори жуда оз бўлади; одатдаги масса-спектрометрларда модданинг йиғилиш тезлиги соатига микрограммнинг мингдан бир (10^{-9} г) улушлари тартибида бўлади.

Шундай қилиб, жуда оз миқдорда ажратилган изотоплар олиш етарли бўлган ҳолларда масса-спектрограф методи идеал метод ҳисобланади, аммо бу метод билан кўп миқдорда соф изотоп олишнинг иккита асосий қийинчилиги бор. Биринчидан, масса-спектрографда моддани ион токи кўчириши сабабли кўп миқдорда изотоплар олиш учун тоқлар жуда кучли бўлиши керак. Бу ҳол жуда қувватли ионлар манбаи қуриш проблемасини кундаланг қилиб қўяди. Иккинчидан, етарли даражада қувватли ионлар манбаи мавжуд булса ҳам ион токи кучини бирор чегаравий қийматидан ошириш мақсадга мувофиқ эмас, чунки кучли ион токида фазовий заряд пайдо бўлиб, масса-спектрографнинг ажрата олиш қобилиятини кескин пасайтириб юборади ва ток кучининг ортиши ажратилган изотоплар тупланиши тезлигини ошира олмайди.

Бу масалани бир оз муфассалроқ текширайлик. Массалари (граммлар ҳисобида) M_1 ва M_2 бўлган иккита изотоп ионларидан иборат бўлган оқимни текширайлик. Бир жинсли кундаланг магнит майдони изотопларнинг ҳар бирини ўз фокусида фокуслайди, бунда бу фокуснинг вазияти мазкур тур ион ҳаракатланадиган доиравий траекториянинг эгрилик радиуси билан белгиланишини биламиз (15-§). Бу эгрилик радиусини ҳисоблаш учун 15-§ да (4.9) формуладан фойдаланган эдик; бу формула Hev Лоренц кучи билан mv^2/r марказдан қочирма

инерция кучининг тенглиги шартдан келтирилиб чиқарилади:

$$\frac{mv^2}{\rho} = Hev. \quad (19. 1)$$

Энди фазовий заряднинг фокус ўткирлигига қандай таъсир кўрсатишини текширайлик. 49-расмда массалари бир-биридан жуда оз фарқ қиладиган ионларнинг бир жинсли кўндаланг магнит майдонидаги йўллари туташ ва пунктир чизиқлар билан кўрсатилган. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида ион дасталарининг чизма текислигига перпендикуляр йўналишдаги узунлиги жуда катта деб фараз қиламиз. Агар ион токининг чизма текислигига перпендикуляр йўналишдаги узунлик бирлигига тўғри келадиган тўла кучи J га тенг бўлса, у ҳолда чизма текислигига перпендикуляр йўналишдаги узунлик бирлигига тўғри келадиган электр миқдори, равшанки, $\frac{J}{v}$ бўлади, бу ерда v —ионлар тезлиги. Шундай тарзда ҳосил бўладиган фазовий заряд ўз навбатида ионларга таъсир қилади.

Энди ҳар бир дастада ионларнинг иккита четки йўлини текширамиз. Бир дастадан иккинчисига ўтилганда ионлар йўли эгрилигининг ўзгариши унча катта эмас деб ва Гаусс-Остроградский теоремасини татбиқ этиб, ионларга иккала йўлда фазовий заряд томонидан таъсир қиладиган кучнинг қўйидаги ифодасини топамиз:

$$F = 2\pi \frac{J}{v} e, \quad (19. 2)$$

бу ерда e —ионнинг заряди. Бу куч ҳамиша дастага нисбатан ташқарига йўналган бўлади, яъни юқориги йўл билан ҳаракат қилувчи ионга траектория



49- расм. Массалари бир-биридан жуда оз фарқ қиладиган иккита изотоп ионларининг электромагнит сепаратордаги йўллари.

(айлана) марказидан ташқарига йўналган куч, пастки йўл билан ҳаракатланувчи ионга эса марказга йўналган куч таъсир қилади. Худди шунинг учун фазовий заряд мавжуд бўлмаганда олинган фокусни фазовий заряд чаплагитириб юборadi. Дастанинг фокусдаги энини ҳисоблаш учун (19. 1) формула ўрнига марказдан

қочирма инерция кучининг Лоренц кучи билан фазовий заряд томонидан таъсир этувчи куч йиғиндисига тенглиги шартини ёзиш керак. Бу кучнинг йўналиши тўғрисида айтил-

ганла рни эътиборга олиб, четки траекториялар бўйича ҳаракатланувчи ионлар учун қуйидаги тенгламаларни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Mv^2}{\rho_1} &= Hev + 2\pi \frac{Je}{v}, \\ \frac{Mv^2}{\rho_2} &= Hev - 2\pi \frac{Je}{v}, \end{aligned} \right\} \quad (19.3)$$

булардан:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{4\pi Je}{Mv^3}.$$

Фазовий заряд бўлмаган ҳолда йўлнинг радиусини ρ орқали белгилаб ва $\rho_1 \rho_2 \approx \rho^2$ деб фараз қилиб, 180° узоқликда дастанинг кенглиги учун қуйидаги ифодани топамиз.

$$\Delta s \approx 2(\rho_2 - \rho_1) = \frac{8\pi e J \rho^2}{M v^3}. \quad (19.4)$$

Текширилаётган иккита изотоп массаларининг фарқи жуда оз бўлганлиги учун уларга тегишли бўлган фокуслар B яқинида (49-расм) бир-бирига яқин ётади. Шунинг учун улар ионларининг йўли бутун йўл узунлигида устма-уст тушади дейиш ва шунга кўра, дастанинг B яқинидаги кенглиги иккала тур ионлар учун бир хил ва Δs га тенг деб ҳисоблаш мумкин.

Фазовий заряд мавжуд бўлмаганда M_1 ва M_2 массали ионлар фокуслари орасидаги масофа:

$$\Delta x = \frac{|M_2 - M_1|}{M_1} \rho. \quad (19.5)$$

Равшанки, соф изотоплар олиш учун ишлатиладиган қурилманинг эффективлиги Δx ва Δs орасидаги муносабат билан аниқланади. $\Delta x = \Delta s$ бўлганда изотопларни ажратиш учун қулай шароит яратилган бўлишини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, модда тўпланишининг тезлигини ошириш учун J ток кучини ошириш табийдир. Аммо бунда фокуснинг Δs кенглиги J ток кучига пропорционал равишда ортади. Агар Δs кенглик Δx дан катта бўлиб қолса, дастанинг чизма текислигига перпендикуляр йўналишдаги бирлик кенглигига тўғри келадиган соф изотоплар тўпланишининг тезлиги $\frac{\Delta x}{\Delta s} J$ га пропорционал бўлади, Δs кенглик ўз навбатида J га пропорционал бўлгани учун, J ток кучини Δs миқдор Δx дан катта бўладиган қилиб ошириш билан ҳеч нарсадан ютмаймиз. $\Delta x = \Delta s$ шартга асосан (19.4) ва (19.5) формулалардан ток кучини топамиз:

$$J = \frac{M_1 v^3}{8\pi e \rho} \frac{|M_2 - M_1|}{M_1}. \quad (19.6)$$

Энди $\frac{M_1 v^2}{\rho} = \frac{Hev}{c}$ (e — электростатик бирликларда) ва $\frac{M_1 v^2}{2} = eV$ (бу ерда V — ионларни тезлаштирувчи потенциал) муносабат-

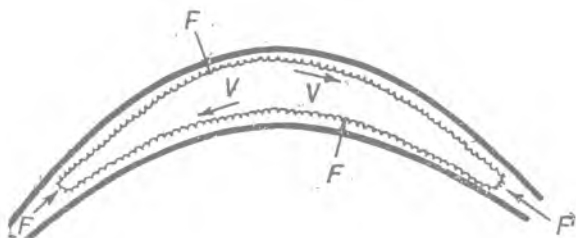
лардан фойдаланиб, баъзи алмаштиришлардан кейин тўпландиган модда миқдори учун қуйидаги ифодани чиқарамиз:

$$\mu \left[\frac{\text{мг}}{\text{соат}} \right] = 3,19 \cdot 10^{-8} \eta \frac{|A_2 - A_1|}{A_1} V H, \quad (19.7)$$

бу ерда η — моддадаги изотоплар концентрацияларининг нисбати; A_2 ва A_1 — изотопларнинг бутун сонгача яхлитланган атом массалари; V — вольтларда ва H — эрстедларда ҳисобланган. Мисол учун кальцийнинг Ca^{44} ва Ca^{40} изотопларини ажратишни оламиз (бунда $\eta = \frac{1}{20}$); V ва H нинг қийматлари жуда катта, масалан, $V = 50000$ в, $H = 15000$ эрстед бўлганда

$$\mu = 0,12 \frac{\text{мг}}{\text{соат}}$$

чиқади, бунга мос тўла ток кучи бир см га атиги 1,6 ма бўлади; токни янада орттириш, юқорида айтилганга мувофиқ, бифойдадир. Бу айтилганлардан, кўп миқдорда соф изотоплар



50-расм. Ион дастасининг ичида электронлар йўли (F—электронга таъсир этувчи куч).

олиш мақсадида масса-спектрограф методи амалда яроқли бўлиши учун фазовий зарядни нейтраллаш керак деган хулоса чиқади, чунки фазовий заряд бу методнинг эффе́ктивлигини жуда ҳам пасайтириб юборади.

Аммо фазовий зарядни нейтраллаш имконияти ҳам мавжуддир. Ион дастаси ичига бирор миқдор электронлар киритилган бўлсин деб фараз қилайлик. Бу электронлар даста ичида қолиб, ўзининг манфий заряди билан ионларнинг мусбат зарядининг бир қисмини нейтраллашини кўриш осон. Ҳақиқатан ҳам юқорида курсатилгандек, фазовий заряд ионлар дастасига нисбатан ташқарига йўналган майдон ҳосил қилади. Шунинг учун манфий электронларга даста ичига йўналган куч таъсир қилади; бу куч электронларнинг кўндаланг йўналишида дастадан чиқиб кетишига йўл қўймайди. Электронлар дастанинг фақат ўқи бўйича ҳаракат қила олади. Аммо электродларнинг потенциалларини электронлар бу йўналишда ҳам

дастадан чиқиб кетмайдиган қилиб танлаш мумкин. Ундан ташқари, кўндаланг магнит майдони ҳам мавжуд бўлгани учун электронлар циклоидасимон берк траекториялар бўйича 50-расмда кўрсатилгандек ҳаракат қилади ва бунда ионларнинг фазовий заряди анча эффектив компенсацияланади.

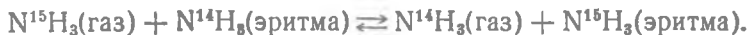
20-§. Изотопларни фракциялаб ҳайдаш ва алмашилиш реакциялари методлари билан ажратиш

Иккита суюқлик аралашмасини фракциялаб ҳайдаш йўли билан ажратиш процесси лаборатория ва заводларда кенг қўлланиладиган, қадимдан маълум бўлган процессдир. Ҳайдаш вақтида аввал қайнаш температураси паст бўлган (буғининг эластиклиги юқори) суюқлик дистилланади; шунинг учун дистиллят (суюқлик) анча тез қайнайдиган суюқлик билан бойиб боради, қолдиқ эса буғининг эластиклиги камроқ суюқлик билан бойийди. Бу ишни бир неча марта такрорлаб, иккала суюқликни ажратиш мумкин.

Изотоплар буғининг эластиклиги уларнинг массасига боғлиқ бўлади, шунинг учун фракциялаб ҳайдаш методи принцип жиҳатдан изотопларни ажратиш учун ҳам яроқлидир. Аммо бу ҳолда буғлар эластиклигининг фарқи шунчалик камки, бу методнинг одатдаги усулда татбиқ этилиши мутлақо мақсадга мувофиқ эмас. Амалда „қарши оқим методи“ деб аталадиган метод яхши натижалар беради. Бу методнинг моҳияти шундан иборатки, ажратиш колонкасида пастдан юқорига қараб буғ, юқоридан пастга қараб суюқлик юради; бунда суюқлик билан буғнинг бир-бирига тегиш сирти имкон борича каттароқ бўлиши чоралари курилади. Буғининг эластиклиги катта бўлган суюқлик молекулалари билан уша суюқлик буғининг молекулалари алмашганда газ фазасида концентрацияланиш кўпроқ сезилади. Бу метод қайнаш температуралари бир-бирдан кўпроқ фарқ қиладиган изотопларга татбиқ этилиши мумкин.

Моҳияти қуйидагидан иборат бўлган алмашилиш реакциялари методи аслида фракциялаб ҳайдаш методига яқин, лекин ундан анча эффективроқдир. Икки фазали системани қараб чиқамиз: суюқлик ва унинг устида газ. Масалан, бу NH_3 аммиак ва аммиакнинг сув ёки алкохолдаги эритмаси ёхуд аммоний нитрат NH_4NO_3 эритмаси (эритмада NH_4^+ ва NO_3^- га диссоциацияланган) бўлсин. Бу ҳолда алмашилиш реакцияси юз беради: газ ҳолдаги аммиак таркибидаги азот эритмадаги аммиак таркибидаги азот билан ўрин алмашади. Бу реакция иккала томонга ҳам бора олади ва мувозанат юз беради. Агар бир хил массали изотоплар ўрин алмашса, реакцияни умуман пайқаш мумкин бўлмайди. Аммо N^{14} изотоп N^{15} нинг ўрнига

ва, аксинча, N^{15} изотоп N^{14} ўрнига ўтиб қолиши мумкин, бунда реакция қуйидаги тенглама бўйича боради:



Назария ва тажрибанинг кўрсатишича, бу ҳолда енгил изотоп газ фазасида концентрацияланади, оғир изотоп эса суюқ фазада концентрацияланади. Бунинг натижасида реакция мувозанатининг таъсирлашувчи массалар қонунидан аниқланадиган

$$K = \frac{[N^{14}H_3]_{\text{газ}} [N^{15}H_3]_{\text{эритма}}}{[N^{15}H_3]_{\text{газ}} [N^{14}H_3]_{\text{эритма}}}$$

константаси бирдан фарқли бўлади; бир хил массали атомлар алмашганда эса K нинг қиймати 1 га аниқ тенг бўлиши керак эди. Аммиак мувозанатида $K = 1,033$. Равшанки, бу сон мазкур процесда ажратиш коэффициенти ҳам бўлади. Ҳақиқатан ҳам, K қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$K = \frac{\frac{[N^{15}H_3]_{\text{эритма}}}{[N^{14}H_3]_{\text{эритма}}}}{\frac{[N^{15}H_3]_{\text{газ}}}{[N^{14}H_3]_{\text{газ}}}}$$

яъни таърифга кўра $K = q$, $K > 1$ бўлгани учун, оғир изотоп суюқ фазада концентрацияланади.

Изотопларни ажратиш учун яроқли бўлган бошқа алмашиш реакциялари ҳам мавжуддир, масалан,



бу реакцияда $q = K = 1,012$.

Газ диффузиясидаги каби, бунда ҳам ажратиш коэффициенти жуда кичик. Аммо бунда ҳам каскадлардан фойдаланиш йўли билан ажратиш коэффициентини анча ошириш мумкин: агар каскад z звенодан иборат бўлса, ажратишнинг тўлиқ коэффициенти, диффузия ҳолидаги каби, $Q = q^z$ бўлади.

O^{18} кислород ва N^{15} азот изотопларини концентрациялашда ишлатилган колонкада 621 звено бўлган эди. Бутун колонка ички диаметри 15 см ва баландлиги 10,7 м бўлган пўлат труба эди. Бу ерда қарши оқим методи ишлатилган: суюқлик пастга тушган, буғ эса юқорига кўтарилган.

Бу метод татбиқ этилганда C^{13} , N^{15} , O^{18} , S^{34} изотопларнинг концентратларидан бир сугкада 1 граммга яқин миқдорда олиш мумкин экан.

21-§. Изотопларни центрифугалаш методи билан ажратиш

Изотопларни ажратиш учун тортишиш кучи массага пропорционал эканлиги фактидан фойдаланиш мумкин. Шунинг учун изотоплар аралашмасидан иборат бўлган газда мувозанат бўл-

ганда массаси катта атомлар концентрацияси пастда кўпроқ бўлади. Шуниси ҳам борки, ер гортиш кучи майдонининг кучланганлиги шунчалик кичикки, у атомлар концентрацияси фарқидан амалда бирор даражада фойдаланиш имконини бермайди. Лекин сунъий майдонлардан фойдаланиш мумкин, бу майдонларнинг кучланганлиги ер гравитацион майдонидагидан бир неча юз минг марта ортиқ бўлади. Марказдан қочирма кучлар, тортишиш кучлари каби, массага пропорционал бўлгани учун изланаётган сунъий ёки псевдогравитацион майдонлар центрифугада ҳосил қилинади.

Центрифугада ўқдан ҳар хил масофада заррачаларнинг тақсимотини топамиз. ρ — газнинг зичлиги, r — ўқдан узоқлик, ω — айланиш бурчак тезлиги бўлсин. Ўқдан r узоқликдаги босимни ҳисоблаб топамиз. Марказдан қочма тезланиш $r\omega^2$ га тенг, кесими 1 см^2 ва қалинлиги dr бўлган газ қатламининг массаси ρdr бўлади. Шунинг учун радиуслари r ва $r + dr$ бўлган қатламнинг босими

$$dp = \rho dr \cdot r\omega^2. \quad (21.1)$$

Иккинчи томондан, идеал газ қонунларига биноан:

$$p = \frac{RT}{M} \rho, \quad (21.2)$$

бу ерда M — молекуляр (атом) оғирлик. (21.1) ва (21.2) формулалардан

$$\frac{dp}{p} = \frac{M\omega^2}{RT} r dr$$

ёки буни интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$p = p_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}},$$

иккинчи томондан, босим 1 см^3 даги заррачалар сонига пропорционал бўлгани учун ҳар хил масофаларда заррачалар сони тақсимотининг қуйидаги ифодасини топамиз:

$$n = n_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}}. \quad (21.3)$$

Энди қаралаётган газ энгил M_L , n_L ва оғир M_S , n_S заррачалар аралашмасидан иборат бўлсин. Мувозанат бўлганда (21.3) муносабат ҳар бир тур заррача учун ўринли бўлади, шунинг учун ўқдан r масофада заррачалар сонларининг нисбати

$$\frac{n_L}{n_S} = \left(\frac{n_L}{n_S} \right)_0 e^{\frac{(M_L - M_S)\omega^2 r^2}{2RT}} \quad (21.4)$$

бўлади, бу ерда $(n_L)_0$ ва $(n_S)_0$ — иккала тур заррачаларнинг центрифуга ўқидаги сони. Ажратиш коэффициентини n_S/n_L сон-

ларнинг майдон чегарасидаги ($r = r_0$) ва ўқдаги ($r = 0$) қий-
матлари нисбатига тенг:

$$q = \frac{(n_s/n_L)}{(n_s/n_L)_0} = e^{\frac{(M_s - M_L) \omega^2 r_0^2}{2RT}} \quad (21.5)$$

Бошқа методлар татбиқ этилганда ажратиш коэффициентини
массалар нисбатига (масалан, диффузия методида $\sqrt{\frac{M_s}{M_L}}$ га)
бирор тарзда боғлиқ бўлар эди. Бу методда эса ажратиш ко-
эффициенти массаларнинг $M_s - M_L$ айирмаси билан белги-
ланади. Бу эса центрифуга методида афзаллигидир. Бирин-
чидан, ажратиш коэффициенти ўрганилаётган изотопларнинг
қандай бирикмага киришига боғлиқ бўлмагани учун ҳамиша
ишлаш осон бўладиган бирикмани танлаб олиш мумкин. Ик-
кинчидан, оғир элементлар билан иш кўрилганда методнинг
бу хоссаси ажратиш коэффициенти катталигига яхши таъсир
курсатади. Масалан, уран изотопларини ажратишда газ ҳоли-
даги бирикма сифатида уран (VI)-фторид UF_6 танланади: $U^{238}F_6$
ва $U^{235}F_6$ молекуляр оғирликларининг нисбатидан чиқарилган
квадрат илдиз $\sqrt{\frac{352}{349}} = 1,0043$ га тенг бўлади; центрифуга ме-
тодида $M_s - M_L = 3$, центрифуганинг чеккаларида заррачалар-
нинг чизиқли тезлиги $5 \cdot 10^4$ см/сек ва температура 300° К, бу
ҳолда ажратиш коэффициенти 1,16 га тенг бўлади.

(21.5) формуладан куринишича, q коэффициент температу-
рага жуда боғлиқ ва температура пасайганда унинг қиймати
ортади. Масалан, $v = 5 \cdot 10^4$ см/сек ва $M_s - M_L = 3$ бўлганда
 q нинг қийматлари ҳар хил температураларда қуйидагича бў-
лади:

T, °C	300	200	90	20
q	1,16	1,25	1,65	9,68

Бимс изотопларни ажратиш учун махсус тез юрар центри-
фугалар қурган. Центрифуга хром-молибденли пўлатдан ясал-
ган цилиндрдир; цилиндрнинг ташқи диаметри 10 см, девор-
ларининг қалинлиги 12 мм. Цилиндр сиқилган ҳаво восита-
сида айлантирилади. Материалнинг пухталиги йўл қўядиган
максимал айланиш тезлиги $v = 8 \cdot 10^4$ см/сек чизиқли тезлик-
ка мос келади.

Центрифуганинг изотопларни ажратишдаги эффективлигини
орттириш учун унинг псевдогравитацион майдонини диффузия
билан комбинациялаш керак. Бу мақсадда буғ оқими цилиндр-

нинг ташқи қисмида пастга қараб, аксиал қисмида эса юқорига қараб йўналтирилади. Иккита оқим чегарасида бир оқимдаги малекулаларнинг иккинчидаги молекулаларга бетўхтов равишда диффузияси юз беради. Марказдан қочирма майдон оғирроқ молекулаларнинг четга томон йўналишда ўтишини кучайтиради. Шунинг учун чеккароқ жойларда оғир изотоплар марказдагидан кўра кўпроқ бўлади. Енгил изотоплар эса марказда кўпроқ бўлиб, четда камроқ бўлади.

Ма ш қ. Қуйидаги маълумотлардан фойдаланиб центрифуганинг ажратиш коэффициентлари ҳисоблаб топилсин: чизиқли тезлик $v = 5 \cdot 10^4$ см/сек, изотоплар массалари айирмаси $M_S - M_L = 1, 2, 3, 4$. Температура 300, 200, 90°C ($M_S - M_L = 3$ булган ҳол учун текстда келтирилган рақамлар текшириб қўрилсин).

22- §. Водороднинг оғир изотопи (дейтерий) ва оғир сув олиш

Водороднинг оғир изотопи—дейтерий (D) ҳозирги вақтда физика ва химияда жуда катта роль ўйнайди, шунинг учун унинг олинишига айрим тўхталиб ўтишга тўғри келади. Водород оғир изотопининг аҳамияти катта бўлишининг сабаби шу нарсага боғлиқки, у массаси асосий изотоп массасидан 100% фарқ қиладиган ягона изотопдир. Шу туфайли, водороднинг бу икки тури ҳар хил химиявий ва физик процессларда бир-биридан кескин фарқ қилади.

Табиатда учрайдиган одатдаги водородда оғир водороднинг процент миқдори атиги 0,02% булади. Дейтерий концентрацияланган ҳолда оғир сув тарзида олинади. Водородгина эмас, кислороднинг ҳам изотоплари (O^{16}, O^{17}, O^{18}) бўлгани учун сув молекулалари орасида ҳам изотопларнинг ҳар хил комбинациялари учрайди, масалан, $D_2O^{16}, H_2O^{18}, D_2O^{18}$ ва ҳоказо. Аммо оғир сув деганда молекулаларининг таркиби D_2O^{16} булган сув назарда тўтилади. Оғир сувнинг физик хоссалари одатдаги (ёки енгил) сувнинг хоссаларидан фарқ қилиши V жадвалдан кўрииб турибди.

V ж а д в а л

Оғир (D_2O) ва енгил (H_2O) сувнинг баъзи физик хоссалари

Хоссалари	D_2O	H_2O
Зичлиги d_4^{20}	1,1059	0,9982
Музлаш температураси	3,82°C	0,00°C
Қайнаш температураси	101,42°C	100,00°C
Зичлигининг максимум бўлиш температура- тураси	11,60°C	4,00°C
Қовушоқлиги 10^3 CGS	12,60	10,09
Сирт таранглиги дина/см ҳисобида	67,8	72,75
Синдириш кўрсаткичи n_D^{20}	1,32844	1,33300

Оғир водород кашф этилгандан кўп ўтмасдан шу нарса аниқланганки, сувли эритмаларни электролиз қилганда сув дейтерийга бойийди, бу вақтда эса газ ҳолида чиқадиган водород энгил изотопга бойийди. Электролиз қилиш йўли билан амалда соф (D_2O нинг миқдори 99,9% бўлган) оғир сув олиш методи ўшанга асосланган.

Ҳозирги вақтда оғир сув заводларда кўп миқдорда олинади. Буни олишда электролиз ва алмашилиш реакцияси (20-§ га қаранг) методлари биргаликда ишлатилади. Сувдаги водород газ ҳолидаги водороддаги дейтерийга алмашадиган алмашилиш реакцияси катализатор бўлганда олиб борилса, мувозанат юз берганда сувда дейтерийнинг концентрацияси газ фазасидагидан тахминан уч марта ортиқ бўлади.

Оғир сув олиш процессининг схемаси қуйидагичадир. Сув колонканинг юқорисига берилади ва водородга аралашган буғ юқори кўтарилаётганда у орқали пастга оқиб тушади. Катализатор бор бўлганда водород билан буғ орасида алмашилиш реакцияси юз беради. Бу реакцияда дейтерийнинг бир қисми буғда концентрацияланиб, сўнгра сувга ўтади. Колонканинг пастки қисмида сув электр токи билан парчаланаяди, шу билан бирга парчаланмай қолган сувда дейтерий концентрацияси янада ортади, водород эса буғ билан бирга юқорига, сув оқимиға қарши кўтарилади. Бу турдаги колонкалар каскад қилиб жойлаштирилади. Оғир сув олишда жуда кўп миқдорда электр энергия истеъмол қилинади. Шу туфайли оғир сув олиш заводлари арзон электр энергия манбалари (гидроэлектр қурилмалар) яқинига қурилади.

Қуйида стабилъ изотопларнинг муфассал жадвалини келтирамиз. Бу жадвалда изотопларнинг тарқалганлиги кўрсатилган.

VI ж а д в а л

Стабилъ изотоплар ва уларнинг тарқалганлиги
(жадвал 1962 йилдаги маълумотларга қараб тузилган)

Сим-воли	Атом номери	Масса сони	Нисбий тарқалганлиги	Сим-воли	Атом номери	Масса сони	Нисбий тарқалганлиги
H	1	1	99 9850	O	8	16	99,759
D		2	0,0158			17	0,0374
He	2	3	0,000137			18	0,2039
		4	99,999863	F	9	19	100
Li	3	6	7,42	Ne	10	20	90,92
		7	92,58			21	0,257
Be	4	9	100			22	8,82
B	5	10	19,61	Na	11	23	100
		11	80,39	Mg	12	24	78,70
C	6	12	98,893			25	10,13
		13	1,107			26	11,17
N	7	14	99,6337	Al	13	27	100
		15	0,3663	Si	14	28	92,91

VI жадвалнинг давоми

Сим-воли	Атом номери	Масса сони	Нисбий тарқалганлиги	Сим-воли	Атом номери	Масса сони	Нисбий тарқалганлиги
		29	4,70			72	27,43
		30	3,09			73	7,76
P	15	31	100			74	36,54
S	16	32	95,0	As	33	76	7,76
		33	0,760	Se	34	75	100
		34	4,22			74	0,87
		36	0,0136			76	9,02
Cl	17	35	75,529			77	7,58
		37	24,47			78	23,52
Ar (A)	18	36	0,337			80	49,82
		37	0,063			82	9,19
		40	99,600	Br	35	79	50,537
K	19	39	93,10	Kr	36	81	49,463
		40	0,01181			78	0,354
		41	6,88			80	2,27
Ca	20	40	96,97			82	11,56
		42	0,64			83	11,55
		43	0,145			84	56,90
		44	2,06	Rb	37	86	17,37
		46	0,0033			85	72,15
		48	0,185	Sr	38	87	27,85
Sc	21	45	100			84	0,56
Ti	22	46	7,93			86	9,86
		47	7,28			87	7,02
		48	73,94			88	82,56
		49	5,61	Y	39	89	100
		50	5,34	Zr	40	90	51,46
V	23	51	99,76			91	11,23
Cr	24	50	4,31			92	17,11
		52	83,76			94	17,40
		53	9,55			96	2,80
		54	2,38	Nb	41	93	100
Mn	25	55	100	Mo	42	92	15,84
Fe	26	54	5,82			94	9,04
		56	91,66			95	15,72
		57	2,19			96	16,53
		58	0,33			97	9,46
Co	27	59	100			98	23,78
Ni	28	58	67,88			100	9,63
		60	26,23	Ru	44	96	5,51
		61	1,19			98	1,87
		62	3,66			99	12,72
		64	1,08			100	12,62
Cu	29	63	69,09			101	17,07
		65	30,91			102	31,61
Zn	30	64	48,89			104	18,58
		66	27,81	Rh	45	103	100
		67	4,11	Pd	46	102	0,96
		68	18,57			104	10,97
		70	0,62			105	22,23
Ga	31	69	60,4			106	27,33
		71	39,6			108	26,71
Ge	32	70	20,52			110	11,81

VI жадвалнинг давоми

Симво- ли	Атом номери	Масса соғи	Нисбий тарқалганлиги	Симво- ли	Атом номери	Масса соғи	Нисбий тарқалганлиги		
Ag	47	107	51,35	Ce	58	136	0,193		
		109	48,65			138	0,250		
Cd	48	106	1,215	Pr	59	140	88,48		
		108	0,875			142	11,07		
		110	12,39			141	100		
		111	12,75			Nd	60	142	27,11
		112	24,07			143	12,17		
		113	12,26			144	23,85		
		114	28,86			145	8,30		
		116	7,58			146	17,22		
In	49	113	4,28	Sm	62	148	5,73		
		115	95,72			150	5,62		
Sn	50	112	0,96	Eu	63	144	3,09		
		114	0,66			147	14,97		
		115	0,35			148	11,24		
		116	14,30			149	13,83		
		117	7,61			150	7,44		
		118	24,03			152	26,72		
		120	32,85			154	22,71		
		122	4,72			Gd	64	151	47,82
124	5,94	153	52,18						
Sb	51	121	57,25	Tb	65	152	0,200		
		123	42,75			154	2,15		
Te	52	120	0,089	Dy	66	155	14,73		
		122	2,46			156	20,47		
		123	0,87			157	15,68		
		124	4,61			158	24,87		
		125	6,99			160	21,90		
		126	18,71			Ho	67	159	100
		128	31,79					156	0,0524
		J	53			130	34,48	Er	68
127	100			160	2,294				
124	0,096			161	18,88				
126	0,090			162	25,53				
128	1,919			163	24,97				
129	26,44			164	28,18				
130	4,08			Tm	69	165	100		
131	21,18					162	0,136		
Xe	54	132	26,89	Yb	70	164	15,6		
		134	10,44			166	33,41		
		136	8,87			167	22,94		
		133	100			168	27,07		
		130	0,101			170	14,88		
		132	0,097			169	100		
		134	2,42			168	0,135		
		135	6,59			170	3,03		
Cs	55	136	7,81	La	57	171	14,31		
		137	11,32			172	21,82		
		138	71,66			173	16,13		
		138	0,089			174	31,84		
		139	99,911			176	12,73		

VI жадвалнинг давоми

Симво- ли	Атом номери	Масса сони	Нисбий тар- қалганлиги	Сим- воли	Атом номери	Масса сони	Нисбий тарқал- ганлиги
Lu	71	175	97,41	Pt	78	192	0,78
		176	2,59			194	32,9
Hf	72	174	0,18	Au	79	195	33,8
		176	5,20			196	25,3
		177	18,50			198	7,21
		178	27,14			197	100
		179	13,75			196	0,146
		180	35,24			198	10,02
Ta	73	181	99,9877	Hg	80	199	16,84
W	74	180	0,135			200	23,13
		182	26,41			201	13,22
		183	14,40			202	29,80
		184	30,64			204	6,85
		186	28,49			203	29,50
		185	37,07	205	70,50		
Re	75	187	62,93	Tl	81	204	1,48
		184	0,018			206	23,6
Os	76	186	1,59	Pb	82	207	22,6
		187	1,64			208	52,3
		188	13,3			209	100
		189	16,1			232	100
		190	26,4			234	0,0051
		192	41,0			235	0,71
Ir	77	191	37,3	Bi	83	238	99,28
		193	62,7			238	
				Th	90		
				U	92		

23-§. Заррачалар сочилишининг эффе́ктив кесими

Шу чоққача атомни яхлит деб қараб келдик. Энди атомни оғир ядро ва унинг атрофидаги электронлардан иборат система деб қарайдиган ҳозирги замон тасаввурлари асосланган фактларни таққослаймиз.

Атом тузилишини тадқиқ қилишнинг энг яхши усулларидан бири атомни тез заррачалар—катта тезликли электронлар ёки радиоактив моддаларнинг α -заррачалари билан „зондлашдир“. Моддадан тез заррачалар оқими ўтганда юз берадиган процесслар умуман айтганда хилма-хил ва мураккабдир. Бизни бу ва келгуси параграфларда заррачаларнинг сочилиш ҳодисалари, яъни заррачаларнинг бошланғич йўлидан оғишига алоқадор бўлган ҳодисаларгина қизиқтиради. Бу ҳодисаларни қараб чиқиш бизга атом ишғол қилган фазонинг модда билан тўлиш даражаси ва бу фазода мусбат ва манфий электрнинг тақсимланиши тўғрисида фикр юритишга имкон беради. Аммо дастлаб заррачаларнинг сочилишига тааллуқли баъзи умумий масалаларни қараб чиқамиз.

Тартибсиз жойлашган қўзғалмас шарлар орасида ҳаракатланадиган заррачани қараб чиқамиз. Бу заррача ўз ҳаракати давомида ўша шарларга тўқнашиши мумкин. Ҳаракатланаётган заррачанинг бирор шар билан тўқнашиши тасодифий ҳодисадир. Аммо, равшанки, *шарларга тўқнашмасдан* x масофа босиб ўтиш эҳтимоли бу масофанинг бирор функцияси $f(x)$ бўлади. Иккинчи томондан, биз чексиз кичик dx кесмада *тўқнашиш* эҳтимолини dx га пропорционал деб, яъни adx га тенг деб олишимиз мумкин, шунинг учун кесмани шарларга тўқнашмасдан ўтиш эҳтимоли $1 - adx$ га тенг бўлади. $x + dx$ масофани шарларга тўқнашмасдан ўтиш эҳтимолини энди иккита усул билан ифодалашимиз мумкин: биринчидан, бу эҳтимол $f(x + dx)$ функциядир, иккинчи томондан, $x + dx$ кесма узунлигини ўтишни

иккита босқичдан иборат мураккаб воқеа деб қарашимиз мумкин: x масофани ўтиш ва кейинчалик x дан $x + dx$ гача бўлган масофани ўтиш. Бундай мураккаб воқеанинг эҳтимоли иккала воқеа эҳтимоллари кўпайтмасига, яъни $f(x)(1 - adx)$ га тенг. Шундай қилиб,

$$f(x + dx) = f(x)(1 - adx)$$

ёки иккинчи тартибли чексиз кичик миқдорларгача аниқликда

$$f(x) + \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) - af(x)dx,$$

бундан баъзи алмаштиришлардан кейин

$$\frac{df}{f} = -adx$$

тенгламани ёки уни интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$f = ce^{-ax}.$$

Интеграллаш доимийсини кўриниб турган шартдан, яъни $x = 0$ масофани шарларга тўқнашмасдан ўтиш эҳтимоли 1 га тенглиги муқаррар эканлигидан топамиз. Бундан $c = 1$ ва, ниҳоят,

$$f(x) = e^{-ax}. \quad (23.1)$$

Шундай қилиб, модданинг бирор қатламини шарларга тўқнашмасдан ўтиш эҳтимоли қатлам қалинлиги ортиши билан экспоненциал равишда камаяди.

Энди a доимийнинг физик маъносини тушунтирамиз. Аввал бу катталиқнинг ўлчамлиги узунлик ўлчамлигига тескари эканлигини қайд қиламиз, чунки даражанинг ax кўрсаткичи ўлчамсиз катталиқ бўлиши керак. a нинг физик маъносини аниқлаш учун (23.1) формула ёрдамида заррачанинг эркин югуриш йўли ўртача узунлигини ҳисоблаб топамиз. x билан $x + dx$ орасидаги кесмани тўқнашиб ўтадиган заррачалар x кесмани тўқнашмасдан ўтади. x йўлни тўқнашмасдан ўтиш эҳтимоли, юқорида келтириб чиқарганимизга асосан, e^{-ax} билан ифодаланadi, x ва $x + dx$ орасида тўқнашиш эҳтимоли adx га тенг. Шунинг учун эркин югуриш йўли узунлиги x эканлигининг эҳтимоли

$$ae^{-ax} dx$$

кўпайтмага тенг. Эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги λ ўртача қийматлар формуласига* биноан, қуйидагига тенг:

$$\lambda \equiv \bar{x} = \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx = a \int_0^{\infty} xe^{-ax} dx. \quad (23.2)$$

* Китоб охиридаги 1-иловага қаранг.

Бўлаклар интеграллаб, λ ни топамиз:

$$\lambda = a \left[\left(-\frac{1}{a} x e^{-ax} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \right] = \frac{1}{a}.$$

Шундай қилиб, a доимийни эркин югуриш йули уртача узунлигига тескари бўлган катталиқ

$$a = \frac{1}{\lambda} \quad (23.3)$$

дейишимиз ва (23.1) формулани

$$f(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (23.4)$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. a доимийни янада қизиқроқ талқин қилишимиз мумкин. a нинг ўлчамлиги $см^{-1}$ эканлигини биламиз: буни яна қуйидагича тасвирлаш ҳам мумкин:

$$[a] = \frac{см^2}{см^3} = см^{-1}.$$

Бирлик ҳажмдаги сочувчи қўзғалмас заррачалар сони n бўлсин. Сочувчи ҳар бир заррачани радиуси r_0 ва юзи σ бўлган тўғарак шаклидаги нишон билан алмаштираемиз. Нишон юзи нишон ичидан ўтадиган ҳаракатланувчи ҳар бир заррача оғишадиган („туқнашадиган“) қилиб танлаб олинган, равшанки, $n\sigma$ нинг ўлчамлиги $см^{-1}$ га тенг:

$$[n\sigma] = \frac{1}{см^3} см^2 = см^{-1}.$$

σ юз сочилиш учун „эффектив кесим“ деб ва мос равишда, r^0 эффектив кесимнинг радиуси деб аталади. $n\sigma$ купайтма макроскопик кесим деб аталади; бу кесим ҳажм бирлигидаги эффектив кесимлар йиғиндисидан иборатдир. a нинг ўлчамлиги $n\sigma$ нинг ўлчамлиги билан бир хил бўлгани учун биз a ни ҳам ҳажм бирлигидаги эффектив кесимлар йиғиндиси деб қарашимиз ва $n\sigma$ купайтма шаклида тасвирлашимиз мумкин.

Эффектив кесимнинг статистик маъносини қуйидагича тушунтириш мумкин: сочилувчи заррачалар оқимининг N_0 зичлиги 1 га тенг, яъни 1 $см^2$ дан 1 секундда 1 заррача утадиган бўлсин. Ҳажм бирлигидаги сочувчи марказларнинг n сони ҳам 1 га тенг бўлсин. У вақтда сочилиш юз бериш эҳтимолини эффектив кесим юзи σ нинг „оқим“нинг кесими юзига, яъни 1 $см^2$ га нисбати каби ифодалаш мумкин. Шундай қилиб, σ — битта заррачаси бўлган 1 $см$ қалинликдаги қатламни ўтишдаги сочилиш эҳтимоли; $n\sigma$ — қатламда заррачалар зичлиги n га тенг булгандаги сочилиш эҳтимолидир.

Энди заррачалар оқимининг ҳар қандай қалинликдаги қатламдан ўтишда заифлашувини кўриб чиқамиз. Бунда биз „туқнашган“ ҳар бир заррача (яъни σ эффектив кесимга тенг бул-

ган радиусли доирача ичидан ўтган заррача) параллел оқимдан чиқади ва қайд қилувчи қурилма бу заррачани қайд қилмайди, деб назарда тутамиз. Бутун қатламни чексиз кичик dx қатламларга ажратамиз. Ҳар бир cm^2 га тўғри келадиган сочувчи заррачалар сони ndx бўлади; уларнинг эффектив кесимлари йиғиндиси $ondx$ га тенг.

Агар биз олган чексиз кичик қатламнинг олдинги сиртига заррачаларнинг N зичликли параллел оқими тушса, бу оқимнинг сусайиши

$$-dN = N\sigma n dx \quad (23.5)$$

бўлади, буни интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$N = N_0 e^{-\sigma n x} = N_0 e^{-\alpha x} = N_0 e^{-\lambda x},$$

бу ерда N_0 — қалин қатламга кираётган заррачалар оқимининг зичлиги.

24-§. Атомларни электронлар билан зондлаш

Энди электронларнинг сочилишини қараб чиқамиз. Электронлар дастаси моддадан ўтганида сусаяди, яъни дастадаги электронлар сони икки сабабга кўра камаяди. Биринчидан тезлиги катта электронлар атом орқали ўтаётганида юз берадиган ҳар хил процессларга (ионлашиш ва ғалаёнлиниш, VII бобга қаранг) ўз энергиясини сарфлаб, энергияси камайиши мумкин; иккинчидан, бу электронлар эластик тўқнашади, натижада энергияси камаймаса-да, электрон бирор пайтда ўзининг йўналишини қатъий ўзгартириб, дастадан чиқиб кетади. Электронлар дастасининг сочилиш натижасида сусайишини ўтган асрнинг 90-йилларида Ленард ўрганган. Ленард электронлар оқими x қалинликдаги модда қатламидан ўтганида оқим интенсивлиги x нинг ортиши билан экспоненциал қонун бўйича камайишини кўрсатди:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\alpha x},$$

бу ерда N_0 — тушаётган дастанинг интенсивлиги, N — x қатламни ўтган дастанинг интенсивлиги, α коэффициент эса дастанинг сочилиш натижасида йўлнинг узунлик бирлигидаги сусайишини характерлайди.

α коэффициентнинг физик маъноси олдинги параграфда қараб ўтилган α коэффициентнинг физик маъноси билан бир хил эканлигини кўраамиз: α ни модда атомларининг электронларнинг сочилиши учун эффектив кесимлар йиғиндиси деб қараш мумкин.

Тажриба шароитларини мумкин бўлганча ҳар хил қилиб ўзгартириб, бу коэффициентнинг хусусиятларини ўрганиш натижасида қизиқ факт топилган: электронлар тезлигининг муайян

қийматида, α коэффициент сочувчи модданинг хусусий хос-саларига ҳам, агрегат ҳолатига ҳам боғлиқ бўлмай, фақат модданинг ρ зичлигига боғлиқ бўлади; бунда α коэффициент ρ га жуда катта аниқлик билан пропорционал бўладики, α/ρ нисбат электронлар тезлигининг муайян қийматида доимий бўлиб қолади. Аммо электронлар тезлиги ўзгарганда α/ρ нисбат доимий бўлмайди, балки электронлар тезлиги ортганда тез (тезликнинг тўртинчи даражасига тескари пропорционал бўлиб) камайди.

VII жадвалда электронлар тезлиги ортганда модданинг электронлар учун шаффофлиги кескин ортишини намоён қилади-ган бир қанча рақамлар келтирилган.

VII- жадвал

$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\rho} (z-1 \cdot \text{см}^2)$	$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\rho} (z-1 \cdot \text{см}^2)$
0,90	6	0,40	$24 \cdot 10^2$
0,80	13	0,20	$360 \cdot 10^2$
0,70	29	0,10	$8 \cdot 10^5$
0,60	83	0,04	$58 \cdot 10^5$
0,50	$2,2 \cdot 10^2$		

VII жадвалдан фойдаланиб, электронларнинг турлича тезликлари учун α коэффициентнинг катталигини ҳисоблаб топиш мумкин. $\beta = \frac{v}{c} = 0,04$, яъни $v = \beta c = 1,2 \cdot 10^9$ см/сек бўлганда жадвалдан $\frac{\alpha}{\rho} = 58 \cdot 10^5$ эканлигини топамиз. Бу нисбат ютувчи модданинг табиатига боғлиқ бўлмаганлиги учун α/ρ нинг катталигига қараб ҳаво молекулаларининг нормал шароитдаги (0°C ва 760 мм Hg) эффектив кесимларининг йиғиндисини ҳисоблаб топиш мумкин. Бу ҳолда $\rho = 0,00129$ ва, бинобарин:

$$\alpha = \rho \sigma = 58 \cdot 10^5 \cdot 1,29 \cdot 10^{-3} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{см}^3.$$

Бу катталик нормал шароитдаги 1 см^3 газ молекулалари кесимларининг газлар кинетик назарияси (диффузия, иссиқлик ўтказувчанлик) маълумотларига асосланиб топилган йиғиндисига яқин. Ҳақиқатан ҳам, нормал шароитдаги 1 см^3 газ молекулаларининг сони $2,7 \cdot 10^{19}$ га тенг: $r_0 = 10^{-8}$ см бўлганда:

$$\rho \sigma = 2,7 \cdot 10^{19} \cdot 3,14 \cdot 10^{-16} = 8,5 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{см}^3.$$

Электронларнинг тезликлари катта бўлганида, α/ρ нисбат кескин камайиб кетади, масалан, $\frac{v}{c} = 0,9$, яъни $v = 2,7 \cdot 10^{10}$ см/сек бўлганда $\frac{\alpha}{\rho} = 6$. Бундан биз $\alpha = 6 \cdot 1,29 \cdot 10^{-3} = 7,7 \cdot 10^{-3}$ эканини, яъни юқорида кўрган ҳолдагидан тақрибан 10^6 марта кам эканини топамиз.

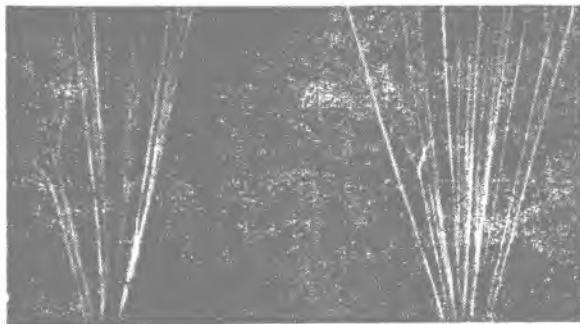
Демак, $r_0 = 10^{-8}$ см радиусли сферада *модда*, яъни электронлар ва мусбат зарядли заррачалар эгаллаган ҳақиқий ҳажм ғоят кичик бўлади (газларнинг кинетик назариясига биноан, атом сфераси радиуси r_0 деб олинади).

Бу параграфнинг бошида бу натижалар тезликлари унча катта ҳам ва жуда кичик ҳам бўлмаган электронлар учун тўғри эканлиги айтилган эди. Электронларнинг тезлиги жуда катта ёки жуда кичик бўлган чегаравий ҳолларда электронларнинг модда орқали ўтиш манзарасини сезиларлик даражада ўзгартириб юборадиган бир қатор факторлар мавжуд бўлади. Жумладан, секин ҳаракат қиладиган (энергияси электрон-вольтнинг улушлари тартибда) электронлар билан иш кўрилган ҳолда электроннинг тўлқин табиатига алоқадор бўлган ҳодисалар намоён бўлади. Электронларнинг тўлқин хоссалари билан (жумладан, атомнинг секин электронлар учун шаффофлиги ортишидан иборат бўлган Рамзауэр эффекти деб аталадаган эффект билан) X бобда танишамиз. Тез электронлар (энергияси $10^7 - 10^8$ эв тартибдаги электронлар) билан иш кўрилган ҳолда моддани ташкил этган элементар заррачалар структурасига алоқадор бўлган бир қатор жуда мураккаб процесслар кўпроқ аҳамиятга эга бўлади.

25-§. α - заррачаларнинг хоссалари

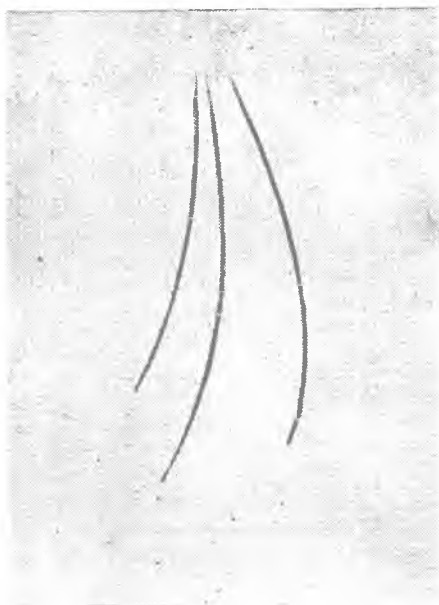
Атомдаги мусбат электрнинг роли тўғрисида янада аниқ натижалар атомларни α -заррачалар билан „зондлаганда“ олинган. α -заррачаларнинг хоссалари II томдаги XXI бобда текширилади. Бу ерда уларнинг табиатига алоқадор бўлган баъзи асосий маълумотларнигина келтириб ўтамиз.

Купчилик радиоактив моддалар (масалан, радий) α -заррачалар чиқаради. Уларнинг заррачалар оқими эканлиги Вильсон камерасидаги йўлларининг фотосуратларидан бевосита кўриниб турибди. Бу фотосуратларнинг биттаси 51-расмда келтирилган.



51-расм. α -заррачаларнинг Вильсон камераси ичидаги йўллари.

α -заррачалар электр ва магнит майдонларида оғади, шунга қараб биз бу заррачаларнинг электр заряди бор, деган хулосага келамиз. α -заррачаларнинг оғиш йўналиши бу заряднинг *мусбат* эканлигини кўрсатади. Лекин электронларни сезиларли даражада оғдирадиган майдонлар α -заррачаларнинг траекториясига таъсир кўрсата олмайди, шунга қараб α -заррачанинг массаси электрон массасига қараганда катта экан,



52-расм. Кучли магнит майдонга жойлаштирилган Вильсон камераси ичида α -заррачаларнинг йўллари (П. Л. Капица).

деган хулосага келамиз. Ҳақиқатан ҳам, α -заррачаларнинг магнит майдони эгрилантирган траекторияларини расмга олиш учун Вильсон камерасини жуда кучли магнит майдонига жойлаштиришга тўғри келган. Бу ишни биринчи бўлиб П. Л. Капица амалга оширди; П. Л. Капицанинг 43000 *эрстед* магнит майдонида олган расмларидан бири 52-расмда келтирилган.

Радиоактив моддалар чиқарадиган α -заррачалар сони уларнинг жуда кичик фазовий бурчакли дастасининг флуоресценцияловчи экрандаги чақнашлар (сцинтиляциялар) сонини бевосита санаб чиқиш йўли билан аниқланган. 1 μ радийнинг 1 *сек* да чиқарадиган α -заррачаларининг тўла сони $Q = 3,7 \cdot 10^{10}$. Битта α -заррача ташийдиган заряд ҳам бевосита ўлчанди. Муайян

кучга эга препаратдан чиқадиган α -заррачалар металл коллекторга (Фарадей цилиндрига) туширилган, бу цилиндрининг заряди электрометр ёрдамида аниқланган. Q ни ва тажриба ўтказиш геометриясини (манбадан коллектор олдига қўйилган доиравий диафрагмагача бўлган масофани, диафрагманинг ўлчамларини) билган ҳолда ҳам α -заррачалар сонини аниқлаш мумкин эди. Бу тажрибалар *α -заррача ташийдиган заряднинг $+2e$ га*, яъни электрон заряди абсолют қийматининг иккиланганига тенг эканлигини кўрсатди. Ниҳоят, магнит майдони таъсиридаги оғиш (e/mv га пропорционал) ва электр майдони таъсиридаги оғиш (e/mv^2 га пропорционал, бу ерда e — α -заррачанинг заряди) тажрибаларидан α -заррачаларнинг массаси

ва тезлигини аниқлаш мумкин эди. С радий чиқараётган α -заррачалар тезликлари

$$v = 1,992 \cdot 10^9 \text{ см/сек},$$

e/m_α эса,

$$\frac{e}{m_\alpha} = 1,446 \cdot 10^{14} \text{ CGSE} \cdot \text{г}^{-1}.$$

Бу катталиқни F/H^1 нисбат билан, яъни Фарадей зарядининг водород грамм-атоми массасига нисбати билан солиштирамиз:

$$\frac{F}{H^1} = 2,88 \cdot 10^{14} \text{ CGSE} \cdot \text{г}^{-1}.$$

Иккинчи томондан, $e = 2e$ эканлигини назарга олиб ҳамда $2e/m_\alpha$ нисбатнинг сурат ва махражини N_0 Авогадро доимийсига кўпайтириб, қуйидагини топамиз:

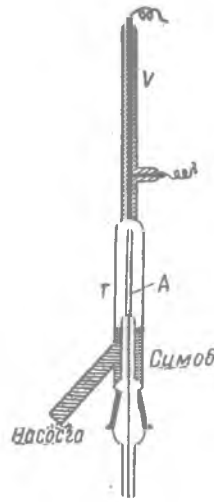
$$\frac{e}{m_\alpha} = \frac{2e}{m_\alpha} = \frac{2F}{M_\alpha} = 1,44 \times 10^{14} \text{ CGSE} \cdot \text{г}^{-1},$$

бу ерда $M_\alpha = m_\alpha N_0$ — α -заррачалар грамм-атомининг массаси ва $F = eN_0$ —Фарадей заряди. Шунинг учун

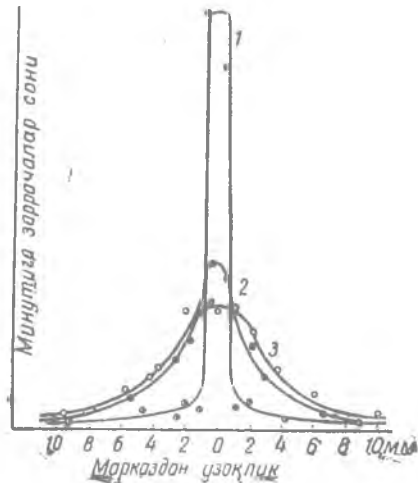
$$\begin{aligned} \frac{F}{H^1} \cdot \frac{2F}{M_\alpha} &= \frac{M_\alpha}{2H^1} = \\ &= \frac{2,38 \cdot 10^{14}}{1,44 \cdot 10^{14}} = 2, \end{aligned}$$

бундан $\frac{M_\alpha}{H^1} = 4,$

яъни α - заррачанинг массаси гелий атоми массасига тенг.



53- расм. Резерфорд ва Ройдс тажрибаси.

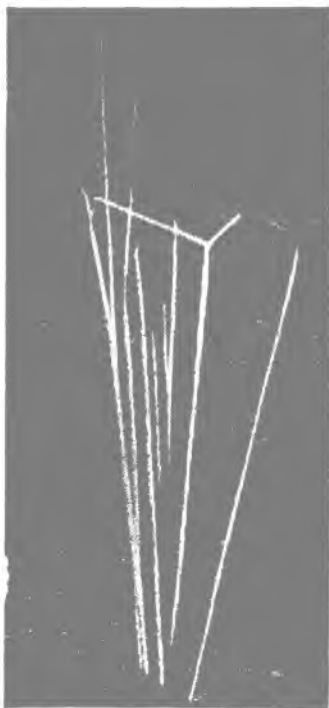


54- расм. α - заррачаларни кичик бурчаларга сочиш частотаси. Сочилишни характерлаш учун флуоресценцияланувчи экраннинг ҳар хил нуқталарига тушган заррачалар саналган;

1— α - заррачаларнинг ҳавода сочилиши; 2— α - заррачаларни юпқа олтин varaгининг сочиши; 3—иккита олтин varaгининг сочиши.

α -заррачалар табиати гелий табиати билан айнан бир хил эканлиги Резерфорд ва Ройдснинг қуйидаги тажрибасида ҳам кўрсатилган (53-расм).

Радиоактив газ радон юпқа деворли А шиша найча ичига кўп миқдорда киритилган; найча деворларининг қалинлиги улардан α -заррачаларнинг кўпчилиги ўтиб кетадиган қилиб олинган. Бу найчанинг сиртига кенгроқ T най кийдирилган. T найга электродлари бўлган V разряд най пайвандланган. Тажриба бошлашдан олдин T най ичидаги ҳаво яхшилаб сўриб олинган. T найчага йиғилиб қолган α -заррачалар газ ҳосил қилади. Бу газни сиқиш ва V капиллярга ўтказиш учун симоб сатҳи кўтарилади. V орқали разряд ўтказиб туриб чиқувчи ёруғликда тажриба бошлагандан икки кундан кейин гелийнинг сариқ чизиғи, 6 кундан кейин эса гелийнинг тўлиқ спектри аниқланган.



55-расм. α -заррачаларнинг кислородда сочилиши.

α -заррачаларнинг параллел дастаси модда қатламидан ўтганида сочилади: α -заррачалар ўз йўналишини бир оз ўзгартиради. Юпқа металл варақларнинг α -заррачаларни сочишини тадқиқ қилиш шу нарсани кўрсатдики, кўпинча α -заррачалар унча катта бўлмаган, ўрта ҳисобда $2-3^\circ$ бурчакка оғади ва α -заррачаларнинг бурчакларга қараб тақсимооти тасодифий ҳодисалар статистик эгри чизиғига жуда аниқ тўғри келади (54-расм). Резерфорднинг ходимларидан Гейгер ва Марсден кичик бурчакларга бундай оғиш билан бир қаторда α -заррачаларнинг баъзи қисми (тахминан 8 000 тадан биттаси) катта бурчакларга, баъзан 90° дан ошадиган ва баъзи ҳолларда 180° га етадиган бурчакларга оғишини пайқаганлар. α -заррачаларнинг бунчалик катта бурчакларга сочилиш сабабини тасодифий кичик оғишларнинг тўпланиши туфайли булади деб изоҳлаш мумкин бўлмай қолган, чунки сочилишнинг статистик эгри чизиғига кўра, шунчалик катта оғадиган заррачалар сони 8000 тадан биттаси сочилишидан кўп марта кам бўлиши керак.

α -заррачалар металл варақлардан ўтганида ҳам, газлардан ўтганида ҳам баъзилари катта бурчакларга оғади. Буни α -заррачаларнинг Вильсон камерасидаги йўлларининг фотосуратла-

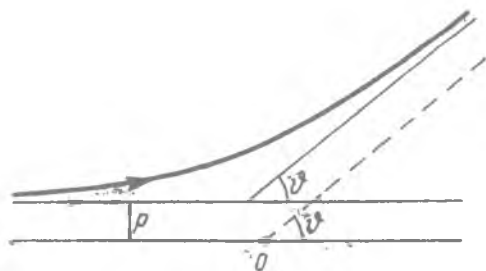
ридан кўриш мумкин. Бундай фотосуратлардан бири 55-расмда келтирилган, бу ерда α -заррачанинг кислороддаги изи тасвирланган: қисқа из тез ҳаракатга келтирилган кислород атомики, узунроқ из бошланғич йўналишидан 90° га яқин бурчакка оғдирилган α -заррачаникидир. Бу фотосурат катта оғиш бурчаклари жуда кичик оғишларнинг тўпланиши натижасида эмас, балки якка-ю ягона тўқнашиш натижасида ҳосил бўлишини аниқ кўрсатади.

Атом ичида ниҳоят даражада кучли электр майдони бўлган ҳолда шундай бўлиши мумкинлигини Резерфорд кўрсатди. Атом ичидаги электр майдонни жуда кичик (10^{-13} см тартибдаги радиусли) ҳажмга тўпланган ва жуда катта массага боғлиқ бўлган мусбат заряд ҳосил қилади. Бундан атомнинг „ядро“ модели пайдо бўлди; бу моделга кўра, атом планеталар системасига ўхшаш тузилган: ўлчамлари жуда кичик бўлган мусбат зарядли ядро (ядрога атомнинг деярли бутун массаси тўпланган) ва бу ядро атрофида ёпиқ орбиталарда айланиб юрадиган манфий электронлар.

26-§. α -заррачалар сочилишининг назарияси

Резерфорд ана шу тасавурларга асосланиб, α -заррачалар сочилишининг миқдорий назариясини ривожлантирди.

О нуқтага (56-расм) сочувчи ядро жойлашган бўлсин. Равшанки, бу ядронинг заряди абсолют катталиқ жиҳатидан электрон зарядига бутун сон марта каррали бўлиши керак, чунки

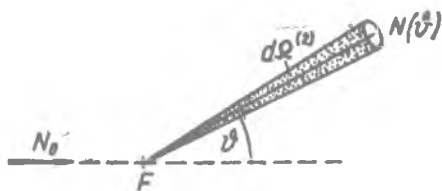


56-расм.

нейтрал атомда ядронинг мусбат заряди электронларнинг манфий зарядлари йиғиндиси билан аниқ компенсацияланиши керак.

О га жойлашган ядронинг зарядини $+Ze$ билан белгилаймиз (бу ерда Z — бутун сон) ва бу ядронинг массаси α -заррачанинг массасидан шунчалик каттаки, улар ўзаро таъсир қилишганида ядро қимирламайди деб фараз қиламиз. Ниҳоят,

ядро билан α -заррача орасидаги ўзаро таъсир кучи Кулон қонунига бўйсунди, яъни бу куч иккала заррача орасидаги масофа квадратига тескари пропорционалди деб фараз қиламиз. Яна шу нарсани эсда тутиш керакки, ҳозиргина қилган фаразимиз дастлабки пайтларда фақат гипотеза бўлиб, назариянинг тажрибада тасдиқланиши билан ҳақиқатга айланади. Ҳақиқатан ҳам, бир-бирига жуда яқин келувчи жуда майда заррачаларнинг ўзаро таъсири макроскопик жисмлар учун аниқланган



57- расм.

Кулон қонунига бўйсунди, деб олдиндан айтишимизга ҳеч қандай асосимиз йўқ.

Классик механиканинг кўрсатишича, мана шу фаразларнинг ҳаммасида α -заррача O даги ядро атрофида гипербола чизиши керак. α -заррачанинг массасини M билан, унинг сочувчи ядро

родан узоқ масофадаги тезлигини v билан белгилаймиз. Агар α -заррача ядро билан ўзаро таъсир қилишмаса, у ядродан (56- расм) „нишонга олиш масофаси“ деб аталадиган p масофада четдан ўтиб кетган бўлар эди. 53- § да кўрсатиладиган ҳисоблашга мувофиқ, ϑ бурчак, яъни ядродан Кулон қонунига мувофиқ итариладиган α -заррачанинг оғиш бурчаги юқорида кўрсатиб ўтилган параметрлар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{Mv^2 p}{2Ze^2}. \quad (26.1)$$

Бу формулани бевосита тажрибада текшириб кўришга уриниш бефойда бўлади, чунки бу формулага ўлчаб бўлмайдиган нишонга олиш масофаси p киради.

Аммо (26.1) формулани статистик назарияга асос қилиб олишимиз мумкин. Бу назария сочилишнинг эффе́ктив кесими қийматини тажрибада аниқланадиган параметрлар орқали ифодалайди.

Марказида сочувчи F варақ турган сферани (57- расм) тасаввур этайлик. Бу вараққа вақт бирлиги ичида N_0 донга α -заррача тушаётган бўлсин. Сочилишни муфассал ўрганишда $d\vartheta^{(2)}$ фазовий бурчак ичида ϑ ва φ бурчаклар билан характерландиган йўналишда сочилган заррачаларнинг ўртача $N(\vartheta)$ сони аниқланади. Фазовий $d\Omega^{(2)}$ бурчакнинг катталиги сфера сирти элементининг радиус квадратига бўлган нисбатига тенг:

$$d\Omega^{(2)} = \frac{R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{R^2} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (26.2).$$

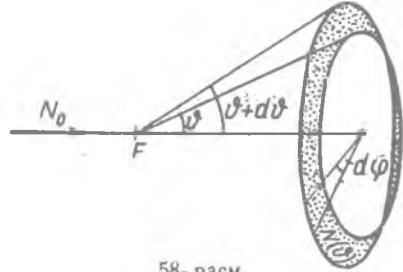
Резерфорд ва унинг ходимлари тажрибаларида кўпинча ϑ ва $\vartheta + d\vartheta$ тешиклар билан характерландиган иккита фазовий

бурчак орасида ётадиган соҳада сочиладиган заррачаларнинг ўртача сони ўрганилган (58-расм). Равшанки, бу ҳолга мос келадиган $d\Omega^{(1)}$ фазовий бурчак (ёки $d\Omega$) (26.1) формулани φ буйича 0 дан 2π гача интеграллаш йўли билан топилади:

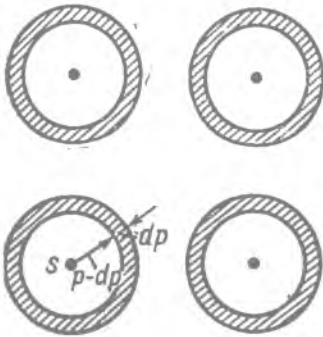
$$d\Omega = d\Omega^{(1)} = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (26.3)$$

$d\Omega$ ичида сочилишга тааллуқли эффе́ктив кесимни ҳисоблайлик.

α -заррачалар сочилгунча параллел оқим бўлиб учади, деб фараз қилайлик. Бошқа шароитлар бир хил бўлганда α -заррачанинг оғиш бурчаги (26.1) формулага биноан нишонга олиш p масофаси билан аниқлангани учун нишонга олиш масофаси p билан $p - dp$ орасида ётадиган α -заррачалар, яъни ҳар бир сочувчи марказ атрофида p ва $p - dp$ орасидаги радиуслар билан чизилган доиралар орасидаги ҳалқадан ўтадиган α -заррачалар θ ва $\theta + d\theta$ орасида ётадиган бурчакка оғади (59-расм). Ҳар бир бундай ҳалқанинг юзи $2\pi p dp$ га тенг; шунинг учун биз θ ва $\theta + d\theta$ орасидаги бурчакка оғишган α -заррачаларнинг, яъни сочилгандан кейин $d\Omega$ фазовий бурчак ичида учадиган α -заррачаларнинг ўртача сони $2\pi p dp$ га пропорционал дея оламиз.



58-расм.



59-расм.

Шундай қилиб, ядронинг α -заррачаларни сочиш $d\sigma$ эффе́ктив кесими қуйидагига тенг:

$$d\sigma = 2\pi p dp. \quad (26.4)$$

Агар энди биз p ни (26.1) дан топиб, квадратга кўтарсак, қуйидаги чиқади:

$$p^2 = \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \text{ctg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Буни дифференциаллаймиз:

$$p dp = - \frac{1}{2} \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{\text{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

ва (26.4)* га қўямиз, у ҳолда:

$$d\sigma = 2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Бунга яна (26.3) формулага биноан, $d\Omega$ фазовий бурчакни киритамиз:

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (26.5)$$

Бу эса Резерфорднинг α -заррачалар сочилишига доир формуласидир.

Эксперимент натижалари билан солиштириш учун Σ макроскопик кесимни, яъни 1 см^3 даги барча сочувчи ядролар эффектив кесимлари йиғиндисини топиш керак. Агар варақдаги барча ядролар бир текис тақсимланган ва бир-бирини тўсмайди, деб фараз қилсак, у ҳолда равшанки,

$$\Sigma = n d\sigma$$

бўлади, бунда $n = 1 \text{ см}^3$ даги сочувчи ядролар сони. (26.5) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\Sigma = n \left(\frac{Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (26.6)$$

Агар энди сочувчи варақнинг сиртига 1 сек да тушадиган α -заррачалар сонини N билан белгиласак, $d\Omega$ фазовий бурчак ичида θ бурчакка сочилган α -заррачаларнинг ўртача сони қуйидагича бўлади:

$$dN = N \Sigma = n N \left(\frac{Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (26.7)$$

Кўриб турибмизки, сочилган α -заррачалар сони θ бурчакка узвий боғлиқ ва θ бурчакнинг камайиши билан бу сон тез ўсади.

* Минус ишоранинг аҳамияти катта эмас: бу ишора нишонга олиш маъноси p нинг ортиши билан θ бурчакнинг камайишини (ва аксинча) кўрсатади, холос. Шунинг учун бундан кейин pdp нинг абсолют қийматидан фойдаланамиз.

27-§. Резерфорд формуласини экспериментда текшириб кўриш

Резерфорд формуласи экспериментда жуда синчиклаб текшириб кўрилган. (26.7) формуладан:

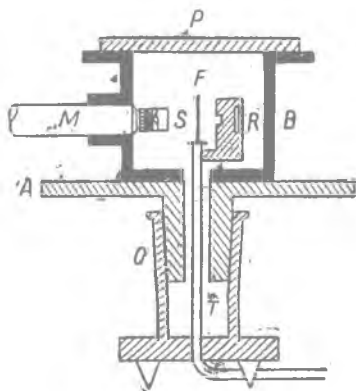
$$dN \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2} = nN \left(\frac{Ze^2}{Mc^2} \right)^2 d\Omega.$$

Шундай қилиб, агар барча бошқа шартларни ўзгартирмаган ҳолда фақат θ бурчак ўзгартирилса,

$$dN \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2} = \text{const}$$

бўлиши керак.

Мана шу хулоса биринчи навбатда текшириб кўрилган. Бу мақсадда қуйидаги асбоб ишлатилган (60-расм). Цилиндр шаклидаги B металл қутича даражали A доирага маҳкамланган. Қутича доира билан бирга C шлифта айлана олади. R радиоактив препарат ва сочувчи F варақ махсус T найчада қутичадан алоҳида ўрнатилган; шундай қилинганда қолган система бурилганда R ва F ларнинг вазияти ўзгармайдиган булади. Шаффоф S экран B қутичага қўзғалмас қилиб маҳкамланган M микроскоп олдига ўрнатилган. A доирани буриб, микроскопни ҳар қандай сочиш бурчагида сочилган α -заррачалар сонини ўлчаш учун ўрнатиш мумкин. Қутичанинг устига P шиша пластинка ёпилган бўлиб, α -заррачаларнинг ҳавода қўшимча сочилишни йўқотиш учун ичидаги ҳавоси T найча орқали сўриб олинган. Бутун иш давомида 100000 дан ортиқ сцинтилляция (чақнаш) саналган.



60-расм. Сочилган α -заррачалар сони билан сочилиш бурчаги орасидаги боғланишни ўрганишга мўлжалланган асбоб.

Олтинда сочилишга доир олинган натижалар VIII жадвалда келтирилган. $1/\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ катталиқ ва сцинтилляциялар сони кенг чегарада ўзгартирилишига қарамасдан, $dN \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ кўпайтма назариянинг талабига мувофиқ равишда тақрибий ўзгармас катталиқ бўлиб қолганлиги жадвалдан кўриниб турибди*.

*Ҳақиқатан ҳам жадвал $1/\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ тахминан 3500 марта ўзгарганда

$dN \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ нинг атиги 30% га ўзгаришини кўрсатади.

Олтин варақларнинг α -заррачаларни сочини

Оғиш бурчаги (°)	$\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$	Чақнашлар сони	$dN \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$
150	1,15	33,1	28,8
135	1,38	43,0	31,2
120	1,79	51,9	29,0
105	2,53	69,5	27,5
75	7,25	211	29,1
60	16,0	477	29,8
45	46,6	1435	30,8
30	223	7800	35,0
15	3445	132000	38,4

Сочилишнинг варақлар қалинлигига ва α -заррачалар тезлигига боғлиқлиги ҳам шунга ўхшаш йўл билан ўрганилган. Оғир металлдан ясалган варақларнинг сочишига доир барча ҳолларда назария талабларига эксперимент натижалари жуда тўғри келганлиги аниқланган. Бу тажриба натижалари билан назария талабларининг мувофиқ келиши айни вақтда тажриба-балар ўтказилган шароитда, яъни оғир ядролар ва ҳаракат тезлиги унча катта бўлмаган α -заррачалар билан тажриба ўтказилган шароитда, α -заррачалар билан сочувчи ядролар орасидаги ўзаро таъсирга Кулон қонунини татбиқ этиш мумкин эканлигининг исботи ҳам бўлади.

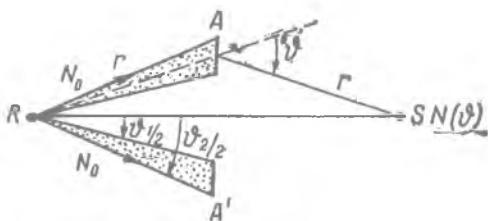
Назарияни заррачаларнинг газларда сочилишига махсус бағишланган экспериментда текширишнинг бошқа бир усули қўйидагидан иборат. Бунда α -заррачаларнинг газдаги йўли Вильсон камерасида кўп марта суратга олинади, оғиш бурчаклари ўлчанади ва муайян сочиш бурчаклари такрорланиши саналади. Бу методни Блэкет асосан Кулон қонунининг татбиқ этилиш чегараларини ўрганиш мақсадида ишлатган. Бунинг натижасида шу нарса аниқланганки, аргонда ядро маркази билан α -заррача маркази орасидаги масофа $7 \cdot 10^{-12}$ дан 10^{-9} см гача бўлганда ва ҳавода бу масофа $3 \cdot 10^{-12}$ дан $5 \cdot 10^{-10}$ см гача бўлганда Кулон қонунини татбиқ этиш мумкин экан.

Аммо бундан Кулон қонунини ядровий ўзаро таъсирларга универсал равишда татбиқ этиш мумкин, деган хулоса чиқариш ярамайди. Аксинча, α -заррачаларни *енгил* ядроларнинг сочишини ўрганиш шуни кўрсатдики, ўзаро таъсир қилишувчи заррачалар орасидаги масофа 10^{-12} см гача камайганда

Кулон қонунидан кескин четга чиқишлар кўринади, 10^{-12} см дан кичик масофаларда эса масофа ортганида тез камаядиган ва бир хил зарядли заррачалар орасидаги итаришиш Кулон кучларидан катта бўладиган *тортишиш кучларининг* таъсири сезилади.

28-§. Ядронинг зарядини аниқлаш

Резерфорд формуласи Z сонни, яъни ядрогаги элементар мусбат зарядлар сонини экспериментал йўл билан топишга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, тушаётган α -заррачаларнинг флуоресценцияланувчи экрандаги сцинтилляциялари сони N ни ва ϑ бурчакка сочилган α -заррачалар ҳосил қиладиган dN сцинтилляциялар сонини билган ҳолда $d\sigma = dN/N$ катталикини топамиз. Резерфорд формуласининг ўнг томонига изланаётган Z катталикдан ташқари ёки маълум катталиклар (n, e) ёки экспериментал йўл билан аниқланиши мумкин бўлган катталиклар (Mv^2, ϑ) киради. Шундай қилиб, Z ни топиш учун N ва dN сцинтилляциялар сонини аниқлаш керак. Экспериментнинг энг асосий қийинчилиги бу сонларнинг бир-биридан жуда катта фарқ қилишидадир.



61-расм. Чадвик тажрибасининг схемаси.

Дастлабки тажрибаларда N ва dN сонлар ҳар хил қурилмаларда, яъни ҳар хил шароитларда ўлчанган, бунинг натижасида анча катта хатоларга йўл қўйилган.

Чадвик ўтказган тажрибада N ва dN сонлар айни бир қурилмада ўлчаниши мумкин, шунинг учун у Z ни катта аниқлик билан топишга муяссар бўлган. Чадвик тажрибасининг ғояси қуйидагичадир. Сочувчи фольга (зар қогоз) AA' ҳалқа шаклида бўлган (61-расм); R препарат ва ZnS дан ясалган S экран AA' дан бир хил r масофада жойлаштирилади. Муайян ϑ бурчакка сочилган α -заррачаларнинг сони ўлчанади. Ҳисоблаш ишини соддалаштириш мақсадида бу бурчак RS ўқ билан R дан фольгага борувчи нурлар йўналиши орасидаги бурчакдан икки марта катта қилиб олинади (61-расм). Ҳалқа ичида R билан S орасига α -заррачалар учун шаффофмас экран жойлаштириб, фақат сочилган α -заррачаларни санаш мумкин; аксинча, AA' ҳалқани экран билан ёпиб, тушаётган дастадаги заррачалар сони N ни санаш мумкин эди. Бу сон бирламчи α -заррачаларнинг экрандаги сцинтилляцияларини бевосита санаш учун жуда катталик қилгани (масалан, сочилган α -заррачаларнинг чақнашлари сони минутига 30 бўлиши учун туша-

ётган α -заррачаларнинг N сони минутига 20000 га тенг бўлиши керак) сабабли S экран олдига тор тирқишли айланувчи диск ўрнатилган. Бу диск сцинтилляциялар сонини истаганча марта камайтиришга имкон беради.

Шу йўл билан Чадвик Z нинг платина, кумуш ва мис учун қуйидаги қийматларини топган: Pt(78) — 77,4; Ag(47) — 46,3; Cu(29) — 29,3. Элементларнинг химиявий символларидан кейинги қавс ичидаги сонлар тегишли элементнинг Менделеев даврий системасидаги ўрнининг номерини (атом номерини) билдиради. Шундай қилиб, Чадвикнинг тажрибалари ядронинг элементар мусбат зарядлари сони тегишли элементнинг атом номерига тенг эканлигини кўрсатади. Бошқа тадқиқотчиларнинг ҳам қатор элементлар устида ўтказган тажрибаларида тасдиқланган бу қонда ядро зарядини аниқлаш масаласини барча элементларнинг атом номерларини аниқ белгилашга келтиради. Бунинг учун яроқли воситани рентген спектрлари беради; рентген спектрлари билан келгуси бобда танишамиз.

IV Б о б

РЕНТГЕН НУРЛАРИ ВА УЛАРНИНГ АТОМ ДОИМИЙЛАРИНИ АНИҚЛАШГА ТАТБИҚ ЭТИЛИШИ

Рентген нурлари атомни ўрганишда муҳим роль ўйнайди. Масалан, 28-§ да айтиб ўтилганидек, рентген нурларининг спектрлари барча элементларнинг атом номерларини аниқ белгилашга, яъни улар ядроларининг зарядларини аниқлашга имкон беради. Ундан ташқари, рентген спектроскопиясининг методлари Авогадро доимийсининг, электрон заряди e , шунингдек, электроннинг солиштирма заряди e/m нинг анча аниқ қийматларини топишда самарали равишда татбиқ этилади. Бундан кейинги бобларда кўпинча рентген нурларига алоқадор бўлган ҳар хил ҳодисаларни текшираемиз. Шунинг учун аввал рентген нурларининг табиати ва хоссалари билан танишиб чиқшимиз лозим.

29-§. Рентген нурлари

Рентген нурлари тез электронлар таъсирида пайдо бўлади. Рентген трубкалари деб аталадиган трубкаларда катоднинг қаршисида металл пластинка (медицина ва техникада ишлатиладиган трубкаларда вольфрам пластинка) жойлашган бўлади. Электронларнинг бу пластинкаларни бомбардимон қилганида рентген нурлари чиқади. Одатдаги техник қурилмаларда уйғотувчи электронларнинг энергияси 100000 эВ тартибида бўлади. Электронларнинг энергияси миллион электрон-вольт бўлганида рентген нурларини ҳосил қиладиган қурилмалар ҳам мавжуд. Кейинги йилларда ядро физикаси мақсадларида 100 миллион электрон-вольтгача энергияга эга бўлган электронлар тормозланганда рентген нурларини ҳосил қиладиган махсус электрон тезлаткичлар қурилди.

Кўзга кўринмайдиган рентген нурлари баъзи табиий кристалл моддаларда (барий платиноцианид, алдама рух ва ҳока-

зо) ва сунъий равишда тайёрланган кукунларда (люминофорда) кўзга кўринадиган ёруғ флуоресценция ҳосил қилади. Рентген нурлари фотопластинкага таъсир қилади ва газлари ионлаштиради. Рентген нурларини пайқаш ва тадқиқ қилишда ўша ҳодисаларнинг ҳаммасидан фойдаланилади.

Рентген нурлари ўз табиатига кўра ёруғликка ўхшайди ва ундан тўлқин узунлиги кичик бўлиши билан фарқ қилади. Худди ёруғлик каби рентген нурлари интерференция ва дифракция билан ўтказиладиган тажрибалардан пайқаладиган тўлқин хоссаларига эга. Френель кўзгулари билан ўтказиладиган тажрибаларга ўхшаш интерференцион тажрибани рентген нурлари устида биринчи бўлиб совет физиги В. П. Линник қилган.



62-расм. Рентген нурларининг тор тирқишдан ўтишидаги дифракцияси (тирқишнинг эни 0,006 мм; расм 26 марта катталаштирилган).

Рентген нурларининг тор тирқишдан ўтишида ҳосил бўлган дифракцион манзаранинг фотографияси 62-расмда келтирилган. Бу тажрибалар жуда мураккабдир, чунки тўлқин узунлигининг жуда кичик бўлиши туфайли тирқиш жуда тор бўлиши ва ундан ташқари ёруғ ва қоронғи йўллар аниқ кўриниши учун фотографияни жуда кўп марта катталаштириб олиш керак. 62-расмда келтирилган фотография тирқиш кенглиги 6 μ бўлганда олинган, кейин 26 марта катталаштирилган. Тажрибанинг геометрик шартларини (тирқишдан фотопластинкагача бўлган масофани) билган ҳолда ва кетма-кет келган ёруғ йўллар орасидаги масофани ўлчаб, рентген нурларининг тўлқин узунлигини худди оптикада* қилинадигандек йўл билан ҳисоблаб топиш мумкин. 62-расмда келтирилган фотографиядан тўлқин узунлик 0,5% аниқлигида 8,33Å бўлиб чиққан (кўзга кўринадиган энг четки бинафша нурларининг тўлқин узунлиги 4000Å). Бу—узун тўлқинли рентген нурланиши экан. Медицинада ишлатиладиган рентген нурларининг тўлқин узунлиги бир ангстрем чамасида бўлади.

Рентген нурлари икки хил бўлади. Агар антикатодда тормозланадиган электронларнинг энергияси антикатод моддаси учун характерли бўлган муайян катталиқдан ортмаса, ҳосил бўладиган нурланиш *тормозланиш* нурланиши деб аталади. Бу нурланиш оқ ёруғлик каби туташ спектрга ажралади, шунинг учун *тормозланиш* нурланиши баъзан „оқ“ рентген

* Масалан, Г. С. Ландсбергнинг Оптика деган китобига қаранг, 11-§, Гостехиздат, 1947.

нурланиши деб аталади. Тормозланиш нурланишининг туташ спектри қўйилаги характерли хусусиятларга эга. Бу спектрда интенсивликнинг тўлқин узунлигига қараб тақсимооти муайян бир тўлқин узунликда максимумга эга бўладиган эгри чизиқ билан тасвирланади (387-бетдаги 178-расмга қаранг). Интенсивликнинг узун ва қисқа тўлқинлар томонига қараб бу максимумдан камайиши ҳар хил йўл билан боради: узун тўлқинлар томонида эгри чизиқ ётироқ пасайиб, тўлқин узунлик ортгани сари нолга асимптотик яқинлашади, аксинча, қисқа тўлқинлар томонида эгри чизиқ тикроқ пасайиб, муайян бир тўлқин узунликда спектр бирданига узилади. Бу критик тўлқин узунлик, яъни туташ спектрнинг қисқа тўлқинли чегараси электронларни тезлатувчи потенциалга боғлиқ бўлади. Агар бу потенциал V киловольт бўлса, чегаранинг ангстрем бирликларида ифодаланган тўлқин узунлиги λ :

$$\lambda = \frac{12,345}{V} \text{ \AA}. \quad (29.1)$$

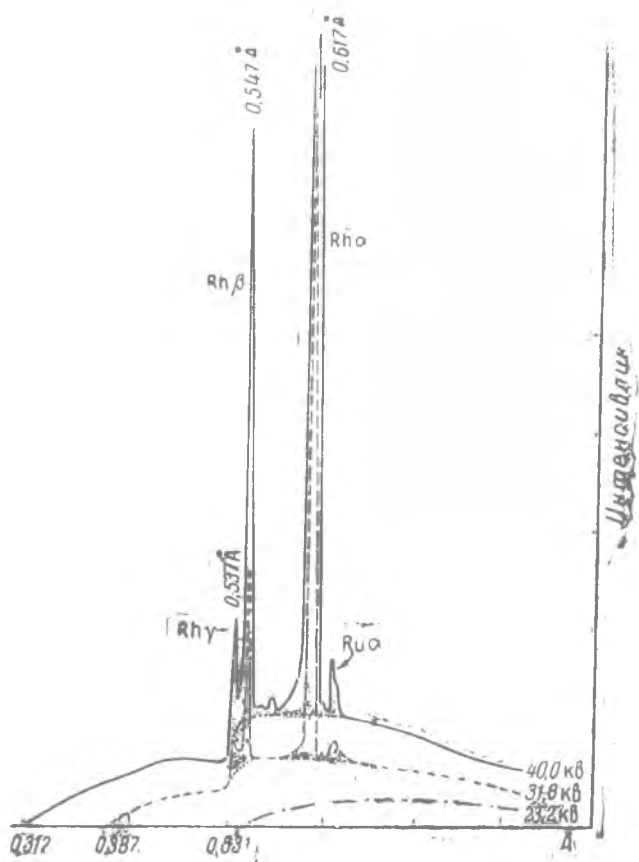
Шундай қилиб, $V = 100$ кВ бўлганда туташ спектрдаги энг қисқа тўлқин узунлик $0,123 \text{ \AA}$ бўлади. Шуниси муҳимки, туташ спектрнинг характери антикатоднинг табиатига боғлиқ бўлмай, тезлатувчи потенциалга боғлиқ бўлади.

Юқорида айтиб ўтганимиздек, уйғотувчи электронларнинг энергияси бирор критик катталикдан ортиқ бўлмаган ҳоллардагина туташ спектр ҳосил бўлади. Агар электронларнинг энергияси бу критик катталикка тенг ёки ундан катта бўлса, *характеристик нурланиш* деб аталадиган нурланиш ҳосил бўлади, чунки газ ёки буғнинг оптик чиқариш спектри моддани қай даражада характерласа, бу нурланиш ҳам антикатод моддасини шу даражада характерлайди. Характеристик нурланишнинг спектри чизиқли спектрдир. Бу ерда шуниси ажойибки, рентген нурланиши беришида ҳар бир элемент эркин ҳолатда ёки химиявий бирикма ҳолида бўлишидан қатъи назар фақат ўзигагина хос бўлган спектр беради. Рентген спектрлари оптик спектрлардан бу билан муҳим фарқ қилади, чунки айтиб берилган бир модда атом ҳолатида бўлганда бошқа ва молекуляр ҳолатда бўлганда бошқа оптик спектрлар беради (масалан, О атомнинг, O_2 молекуланинг ва H_2O молекуланинг оптик спектрлари мутлақо ҳар хил бўлади ва молекула таркибига кирувчи атомларнинг спектрларидан аддитив қўшилиб ҳосил бўлмайди).

63-расмда характеристик нурланиш пайдо булганда рентген спектри ўзгаришига доир қизиқ мисол келтирилган. Бу ерда абсциссалар ўқига тўлқин узунликлар, ординаталар ўқига интенсивлик қўйилган; уйғотувчи электронларнинг энергияси ҳар хил бўлган ҳолларда ҳар хил эгри чизиқлар олинган. Ҳамма ҳолларда антикатоднинг моддаси родийдир. Куриниб

турибдики, тезлатувчи потенциал 23,2 кВ бўлганда спектр ҳали туташ, аммо 31,8 кВ бўлганда туташ спектр устига аниқ кўриниб турган спектрал чизиқлардан иборат чизиқли спектр тушади; тезлатувчи потенциал 40,0 кВ бўлганда спектрнинг характери ўзгармайди, лекин чизиқларнинг интенсивлиги шунчалик ортадики, уларнинг энг ёруғи қабул қилинган масштабда чизмага сигмай қолади.

Бу чизиқли спектр антикатод моддасининг, бу ҳолда родий (Rh) нинг характеристик нурланишига тегишлидир.



63-расм. Родийдан ясалган антикатод характеристик нурланиши К-сериясининг ҳосил бўлиши. Абсциссалар ўқида рентген нурланишининг тўлқин узунликлари қўйилган ва ҳар бир спектр қисқа тўлқинли чегарасининг тўлқин узунликлари кўрсатилган. (Rhα чизиқ родий намунасида аралашма сифатида қатнашган рутенийникидир.)

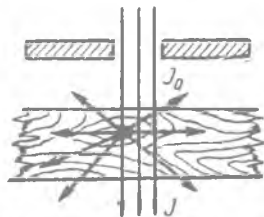
Характеристик нурланишнинг спектрал чизиқлари рентген спектрининг ҳар хил қисмларига жойлашган ва муайян бир қонунга бўйсунадиган кетма-кетлик ёки сериялар ҳосил қилади. Тарихий сабабларга кура, бу сериялар *K, L, M, N* ҳарфлари билан белгиланади. *K* серия энг қисқа тўлқинли серия бўлиб, узун тўлқинлар томонидаги навбатдаги серия *L* сериядир. Улардан кейин фақат оғир элементларда кўринадиган *M* ва *N* сериялар келади. Бу сериялар 35-§ да муфассалроқ қараб утилади.

30-§. Рентген нурларининг ютилиши

Рентген нурларининг ажойиб хусусиятлари қаторига уларнинг ўзига хос ютилиш қонуни киради. Аввало, рентген нурларини модданинг ютиши модданинг оптик хусусиятларига боғлиқ бўлмас экан. Масалан, ёруғлик учун рангсиз ва шаффоф бўлган қўرғошинли шиша рентген нурларини бутунлай ютади ва шунинг учун рентген қурилмаларида ишловчи ходимларни муҳофаза қилишда ишлатилади. Аксинча, ёруғлик учун шаффоф бўлмаган юпқа алюминий варағи рентген нурларини жуда оз ютади, техник рентген найлари (потенциал 100 *кв* чамасида бўлганда) чиқарадиган нурлар учун мутлақо шаффофдир.

Рентген нурларининг медицина ва техникада ёритиб кўришда ишлатилиши рентген нурларининг қуйида кўриладиган ютилиш қонунларида асосланади. Агар рентген нурларининг параллел дастаси модда қатламидан ўтса, у ҳолда даста кучсизланади, яъни интенсивлиги камаяди. Бу кучсизланишга иккита процесс: 1) сочилиш ва 2) ютилиш сабаб бўлади. Бу иккита процесс бир-биридан жиддий фарқ қилади:

1) Сочилиш натижасида нурлар дастасининг кучсизланишига нурларнинг бир қисми четга оғиши (64-расм) ва шунинг учун параллел дастадан чиқиб кетиши сабаб бўлади. Бу ҳодиса ёруғликнинг хира муҳитдан ўтишидаги сочилишига мутлақо ўхшайди. Бу ердаги фарқ фақат шундаки, муҳитнинг ёруғликка шаффоф бўлмаслиги унда синдириш кўрсаткичи муҳитнинг синдириш кўрсаткичидан фарқ қиладиган анча йирик заррачаларнинг муаллақ ҳолда бўлишидадир. Рентген нурларининг тўлқин узунликлари жуда қисқа бўлганлиги сабабли ёруғликка шаффоф бўлган ҳар қандай муҳит рентген нурлари учун „хира“ ҳисобланади. Бу ҳолда сочувчи марказлар модда атоми ёки молекуласининг ўзи бўлади. Бунга ўхшаган молекуляр сочилиш ёруғликда ҳам кузатилади. Аммо ёруғликда



64-расм. Рентген нурларининг моддадан ўтишида сочилиши.

бу эффект жуда кучсиз бўлади. Таққослаш учун қуйидаги рақамларни келтирамиз. *Ёруғликнинг* параллел дастаси қалинлиги 1 км бўлган тоза сув қатламида $e (\approx 2,7)$ марта кучсизланади; *рентген нурлари* дастаси эса қалинлиги 5 см бўлган сув қатламида фақат сочилиш ҳисобига (ютилишни ҳисобга олмаганда) худди шунча марта кучсизланади. *Ёруғликнинг* молекуляр сочилиши осон сезиларли бўлиши учун муҳитда жуда кўп миқдорда маҳаллий зичланиш ва сийракланишлар (зичлик флукутациялари) содир бўлиши керак. Масалан, ҳар қандай модданинг критик температураси яқинида зичлик флукутациялари („критик опалесценция“ деб аталувчи ҳолат) рўй беради.

2) Ютилиш ёки абсорбция натижасида кучсизланиш сабаби шундаки, рентген нурлари энергиясининг бир қисми моддада ҳақиқатан ҳам ютилади, яъни натижада иссиқликка айланади.

Агар рентген нурларининг параллел дастаси монохроматик бўлса, яъни айна бир узунликдаги нурлардан иборат бўлса, у ҳолда модданинг қалинлиги dx бўлган чексиз юпқа қатламда дастанинг кучсизланиши қуйидаги содда қонунга буйсунади:

$$-dJ = \mu J dx,$$

бу ерда J — қатламга тушаётган дастанинг интенсивлиги, μ — кучсизланишни характерлайдиган коэффициент. Бу тенгламани интеграллаб (23-§ даги шунга ўхшаш тенгламага қаранг), рентген нурларининг модданинг чекли d қалинликдаги қатламида кучсизланиш қонунини чиқарамиз:

$$J = J_0 e^{-\mu d}, \quad (30.1)$$

бу ерда J_0 — параллел дастанинг модда қалинлиги $d = 0$ бўлгандаги интенсивлиги. Ютилиш коэффициенти μ нинг ўлчамлиги $[см^{-1}]$ бўлади, чунки даража кўрсаткичи μd ўлчовсиз катталиқ бўлиши керак.

Даста ҳақиқий ютилиш ҳисобига ҳам, сочилиш ҳисобига ҳам кучсизланиши учун кучсизланиш коэффициенти μ иккита коэффициентнинг: ҳақиқий ютилиш коэффициенти τ ва сочилиш коэффициенти σ йиғиндисидан иборат бўлади:

$$\mu = \tau + \sigma. \quad (30.2)$$

τ ва σ иккала коэффициент, бинобарин, μ ҳам модданинг массасига пропорционал бўлади. Шу туфайли „массали коэффициентлар“ деб аталувчи коэффициентлардан, яъни μ/ρ , τ/ρ ва σ/ρ нисбатлардан фойдаланиш қулайдир; бу ерда ρ — модданинг зичлиги. Равшанки, (30.1) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$J = J_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho d}. \quad (30.3)$$

ρd кўпайтма кесими 1 см^2 ва қалинлиги d бўлган модда устунининг массаси; μ/ρ нинг ўлчамлиги [$\text{г}^{-1} \text{ см}^2$].

Агар $\rho d = 1$ бўлса, у ҳолда $J = J_0 e^{-\frac{\mu}{\rho}}$ бўлади. Бундан μ/ρ нисбат рентген нурларининг ҳар бир квадрат сантиметрда 1 г моддага эга бўлган қатламда кучсизланишини характерлаши келиб чиқади.

Назарий ҳисоблашларда *атом коэффициентлар* деб ата- лувчи μ_a , τ_a , σ_a коэффициентлардан фойдаланиш қулайроқдир. Бу коэффициентлар маълум бир элемент учун μ/ρ , τ/ρ ва σ/ρ қийматларини атомнинг абсолют массасига, яъни мазкур эле- мент грамм-атоми A нинг Авогадро доимийси N га нисбатига кў- пайтириб аниқланади, яъни

$$\mu_a = \frac{\mu}{\rho} \frac{A}{N}, \quad \tau_a = \frac{\tau}{\rho} \frac{A}{N}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma}{\rho} \frac{A}{N}. \quad (30.4)$$

Шундай қилиб, масалан, μ_a катталиқ см^2 юзда 1 атоми бўлган қатламдаги кучсизланишни характерлайди. Яна шуни ҳам қайд қилиш керакки, μ_a , τ_a ва σ_a атом коэффициентлар- нинг ўлчамлиги [см^2] эканлигига ишонч ҳосил қилиш осон. Шунинг учун бу коэффициентларни атомнинг мос равишда рентген нурларини кучсизлантириш, ютиш ёки сочишдаги эф- фектив кесимлари деб қараш мумкин.

Эмпирик йўл билан аниқланган ва амалда анча тўғри бўл- ган қуйидаги муносабатни келтирамиз:

$$\tau_a = cZ^4\lambda^3, \quad (30.5)$$

бу ерда c — бирор доимий катталиқ, Z — модданинг атом но- мери ва λ — тўлқин узунлик. (30.4) белгилашлардан фойдаланиб ютилишнинг массали коэффициенти ифодасини топамиз:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_a N}{A} = \frac{cN}{A} Z^4 \lambda^3 \quad (30.6)$$

ёки

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{c'}{A} Z^4 \lambda^3 \quad (c' = cN), \quad (30.6')$$

Бу формулалардан кўриниб турибдики, муайян бир тўлқин узунликдаги нурларнинг ютилиши атом номерининг ортиши билан (Z нинг *тўртинчи* даражасига пропорционал равишда) жуда тез ортади.

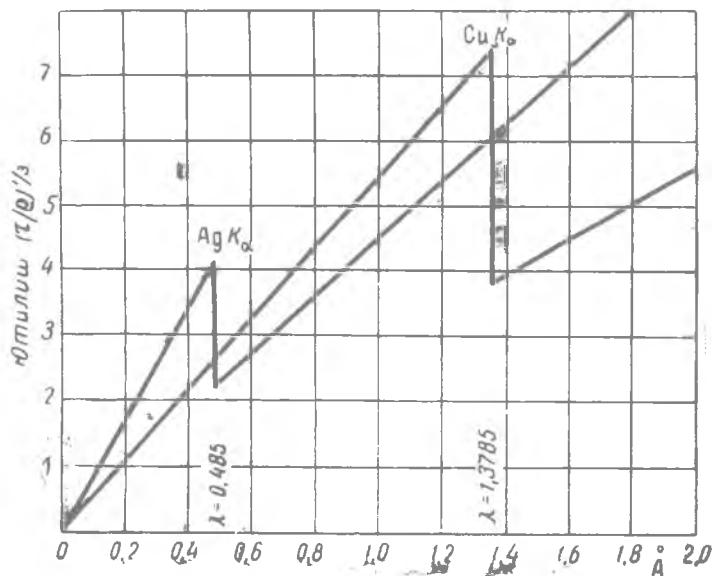
Рентген нурлари ютилишининг иккинчи ажойиб хусусияти ютилишнинг атомга хос эканлигидадир: шунинг учун ютилиш- нинг *молекуляр коэффициенти* мазкур молекула таркибига кирувчи элементларнинг атом коэффициентларини аддитив қў- шиш билан топилади. Шу туфайли турли-туман химиявий би- рикмаларнинг молекуляр коэффициентларини ҳисоблаш учун элементлар ютишининг атом коэффициентларини билиш етар- лидир. (30.6) ва (30.6') формулалар ва рентген нурлари

ютилишининг аддитивлиги бу нурлардан ёритиб кўришда фойдаланишга асос қилиб олинган. Масалан, киши суяги ва тўқималарининг ютиш коэффициентларини таққослаб кўрамиз. Суякнинг моддаси кальций фосфат $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$; тўқиманинг ютиши асосан унинг таркибидаги сувга (H_2O) боғлиқдир. Са, Р, О ва Н ларнинг атом номерлари мос равишда 20, 15,8 ва 1 эканлигини ҳисобга олиб, иккала модда ютишининг атом коэффициентлари нисбати

$$\frac{3 \cdot 20^4 + 2 \cdot 15^4 + 8 \cdot 8^4}{2 + 8^4} \approx 3 \left(\frac{5}{2}\right)^4 + 2 \left(\frac{15}{8}\right)^4 + 8,$$

яъни $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ нинг ютиш коэффициенти сувнинг (тўқиманинг) ютиш атом коэффициентида тақрибан 150 марта катта эканлигини топамиз. Аммо амалий мақсадларда *масса* коэффициентларнинг нисбатини билиш муҳимроқдир. Агар бизни қизиқтираётган ҳолга (30.6) формулани татбиқ этсак, нисбат тахминан 68 га тенг бўлиб чиқади. Бу эса рентгенограммаларда нима учун суякнинг сояси аниқ ажралиб туришини тushунтириб бера олади.

(30.5) ва (30.6) формулалар тўлқин узунлик ортганда рентген нурларининг ютилиши тез ортишини кўрсатади. Аксинча, тўлқин узунлик қанча кам бўлса, рентген нурларининг ўтувчанлик қобилияти ва қаттиқлиги шунча катта бўлади. Агар



65-расм. Рентген нурларнинг ютилиши билан тўлқин узунлиги орасидаги боғланиш (кумуш ва миснинг K_α - чизиқлари).

абсциссалар ўқига тўлқин узунликларни, ординаталар ўқига $\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}$ қийматлар қўйилса, у ҳолда (30.5) ва (30.6) формулаларга мувофиқ мазкур элемент учун ютилишнинг λ га боғланиш графиги тўғри чизиқ билан тасвирланади (65-расм). Аммо муайян бир тўлқин узунликда ютилишда бирдан сакраш юз беради, сўнгра яна чизиқли қонун бўйича ўзгаради. 65-расмдан мисда бундай сакраш $\lambda = 1,3785 \text{ \AA}$ да, кумушда эса $\lambda = 0,485 \text{ \AA}$ да юз бериши кўриниб турибди. Тўлқин узунликларнинг бу критик қийматлари маъноси қуйидагичадир: агар бирор элемент (масалан, Си ёки Аг) тўлқин узунлиги қисқариб борувчи монохроматик рентген нурлари билан ёритилса, рентген нурларининг қатъий аниқ бир тўлқин узунлигидан бошлаб (тўлқин узунлик янада қисқариб борганда) элемент ўзидан *флуоресценция нурланиши* тарзида хусусий характеристик нурланиш чиқаради. Ютилишда сакраш юз берадиган критик тўлқин узунликлар мазкур тўлқин узунликдаги флуоресценция характеристик нурланишининг критик тўлқин узунликлари билан мос келади. Ютилишда сакраш юз бериши (30.5) ва (30.6) формулаларда шу билан ҳисобга олинадики, c коэффициент критик тўлқин узунликнинг икки томонида ҳар хил қийматларга эга бўлади.

Ма ш қ л а р: 1. Рентген нурларининг модда орқали ўтишида кучсизланиши кўпинча рентген нурларини икки марта кучсизлантирувчи модда қатлами қалинлигини (ярим ютилиш қалинлигини, $d_{1/2}$) кўрсатиш билан характерланади. $d_{1/2}$ нинг $\frac{\mu}{\rho}$ орқали $d_{1/2} = \frac{0,693}{\frac{\mu}{\rho}}$ муносабат билан ифодаланиши

ни исбот қилинг.

2. Алюминий, кумуш ва қўрғошинда баъзи тўлқин узунликларнинг абсорбция массавий коэффициентлари жадвалда келтирилган.

$\lambda(\text{\AA})$	μ/ρ		
	Al	Ag	Pb
0,1	0,16	1,4	3,8
0,5	2,0	11	54
1,0	15	73	—

Кўрсатилган тўлқин узунликлар учун атомларнинг эффектив кесимларини ва ярим ютилиш қатлами қалинликларини ҳисобланг.

31-§. Рентген нурларининг сочилиши

Рентген нурларининг сочилишида спектрнинг оптик қисмидаги (яъни кўзга кўринадиган ёки ультрабинафша нурлар соҳасидаги) ёруғликнинг сочилиш қонунларидан фарқ борлиги куринади. Маълумки, спектрнинг тўлқин узунлиги 10^{-5} см тартибида, яъни атом ўлчамларидан ($1\text{Å} = 10^{-8}$ см тартибида) анча катта бўлган оптик қисмида сочилиш тўлқин узунлигининг тўртинчи даражасига тескари пропорционалдир (осмоннинг зангори бўлиб кўринишини изоҳловчи Рэлей қонуни). Рентген нурлари соҳасида тўлқин узунлик билан атомнинг ўлчамлари тартиби бир хилдир. Бу ерда сочилиш қонуни ҳам бошқача экан. Чунончи, *рентген нурларининг сочилиши тўлқин узунликка боғлиқ эмас*. Рентген нурларини ўрганишнинг бошланғич даврларидаёқ Ж. Ж. Томсон сочилишни тушувчи рентген нурларининг электромагнит майдони таъсирида электронларнинг мажбурий тебранма ҳаракати натижаси деб қараб, сочилишнинг атом коэффициенти учун қуйидаги формулани чиқарган:

$$\sigma_a = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} Z, \quad (31.1)$$

бу ерда e ва m — электроннинг заряди ва массаси, c — ёруғлик тезлиги. Элементнинг бу формулага кирувчи Z атом номери нейтрал атомдаги электронлар сонига тенг. Иккинчи томондан, юқорида айтилгандек, σ_a нинг ўлчамлиги юз ўлчамлиги билан бир хил. Шундай қилиб, $\frac{\sigma_a}{Z} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4}$ нисбатни битта электроннинг рентген нурларни сочилишининг эффектив кесими деб қараш мумкин. Бунга

$$e = 4,80 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{e}{mc} = 1,760 \cdot 10^7, \quad c = 2,997 \cdot 10^{10}$$

қийматларни қўйиб, электроннинг эффектив кесимини топамиз:

$$\sigma_a = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} = 6,57 \cdot 10^{-25} \text{ см.} \quad (31.2)$$

Бу эффектив кесимнинг радиуси:

$$r_0 = 4,57 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (31.3)$$

Бу катталиқнинг тартиби „электроннинг классик радиуси“ тартиби билан бир хилдир.

Томсон атомдаги электронлар соними (ядронинг Z зарядига тенг сонни) аниқлашга (31.1) формулани қуйидагича ажойиб йўл билан татбиқ этган.

Атом коэффициентларининг (30.4) таърифига мувофиқ,

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\rho} \frac{A}{N}$$

Бўлгани учун сочишлишнинг массавий коэффициентини (31.1) формуладан топамиз:

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{NZ}{A}; \quad (31.4)$$

(31.2) ҳисоблаш натижаларидан фойдаланган ҳолда қуйидагига эгамиз:

$$\frac{\sigma}{\rho} = 6,57 \cdot 10^{-25} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{Z}{A} \approx 0,40 \cdot \frac{Z}{A}. \quad (31.5)$$

Томсон формуласини тажрибада текшириш бу формула энгил элементлар учун анча тўғри эканлигини кўрсатди. Тажриба йўли билан топилган σ/ρ катталиқ тўлқин узунликка боғлиқ эмас ва унинг қиймати 0,20 га тенг экан. Бу қийматни (31.5) га қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$0,20 = 0,40 \frac{Z}{A}$$

ёки

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}, \quad (31.6)$$

яъни энгил элементларнинг (водороддан ташқари) атом номерлари атом оғирликнинг ярмига тенг бўлиши керак. Бу муносабат ҳақиқатда даврий системанинг бошида тақрибан тўғри бўлиб чиқади [He ($Z=2$, $A=4$), Li ($Z=3$, $A=7$), C ($Z=6$, $A=12$) ва ҳоказо]. (31.6) муносабатга келтирувчи физик сабаблар ядро кучларининг табиатига боғлиқ бўлади. Сочилган рентген нурланишининг ажойиб ва муҳим хоссаларини 123 ва 124-§ ларда текширамиз.

Ма ш қ. (31.1) формула ва σ/ρ нинг тажрибадан топилган қийматидан фойдаланиб, 1 грамм-атомлаги электронлар сонини ҳисоблаб топим.

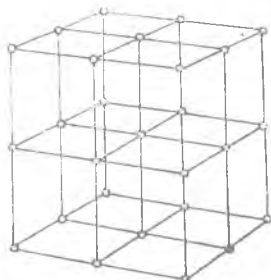
Сўнгра, бу сон ёрдамида кислород, азот ва углероднинг битта атомидаги электронлар сонини аниқланг.

32-§. Рентген нурларининг кристалл панжарадаги дифракцияси

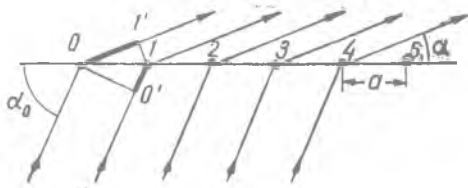
Ёруғлик юзага келтирадиган дифракцион ҳодисаларни рентген нурлари ҳам ҳосил қилиши мумкин эканлигини 31-§ да кўрдик. Аммо рентген нурлари дифракциясини ҳосил қилишнинг анча содда ва амалда анча муҳим бўлган усули дифракцион панжара ўрнида *кристалл* ишлатишга асосланган. Рентген нурларини кристалллар ёрдамида дифракциялаш осонлигининг сабаби, кристаллда атомлар орасидаги масофалар тартиби рентген нурлари тўлқин узунликларининг (1Å) тартиби билан бир хил эканлигидадир. Маълумки, дастлаб рентген нурларининг

дифракцияси уларнинг кристаллар орқали ўтишида пайқалган эди (Лауэ, 1912 йил). Бу ҳодиса рентген нурларининг табиати ёруғлик нурлари табиати билан бир хил эканлигини узил-кесил исбот қилди.

Кристалл фазода бирор қонуният билан жойлашган атомлар, атом группалари ёки ион группалари тўпламидан иборатдир (*n* фазовий панжара“, масалан, 66-расмда энг содда кристалл панжара кўрсатилган). Бундай уч ўлчовли мунтазам структураларда дифракция шароитларини топиш учун биз бир ўлчовли (чизиқли), икки ўлчовли ва уч ўлчовли панжарани кетма-кет текширашимиз.



66-расм. Куб панжара.



67-расм. Чизиқли панжарадаги дифракция.

Бир тўғри чизиқда (67-расм) жойлашган 0, 1, 2, 3, 4, 5 сочувчи марказлар (атомлар) қатори бор ва бу чизиқли панжарага яси тўлқин α_0 бурчак остида тушсин. 0, 1, 2, 3, ... сочувчи марказларнинг ҳар бири янги сферик тўлқин манбаи бўлади ва бу когерент сферик тўлқинлар барча йўналишларда тарқалади. α бурчак билан характерланувчи бирор ихтиёрий йўналишни қараб чиқайлик. Қўшни атомларнинг ҳар жуфтидан ўтувчи иккита нур йўлининг айирмаси, 67-расмдан кўринишича, $a(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$ га тенг. α йўналишда дифракцион максимум ҳосил бўлиши учун

$$a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = h\lambda \quad (32.1)$$

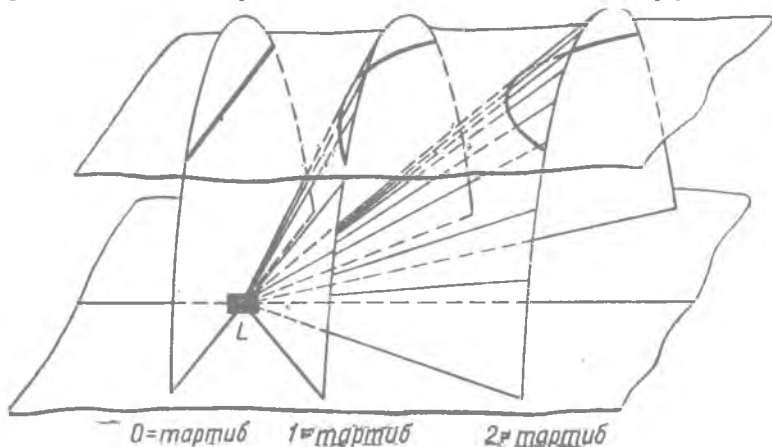
шарт бажарилиши зарур, бу ерда h — бутун сон. (32.1) дан қуйидагини топамиз:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + h \frac{\lambda}{a}. \quad (32.2)$$

Бундан кўринадики, чизиқли панжара спектрал асбоб каби ишлайди, чунки ҳар бир тўлқин узунлик λ учун α бурчакнинг ўзига хос қиймати чиқади. Шундай қилиб, $h = 1$ бўлганда биринчи тартибли спектр, $h = 2$ бўлганда иккинчи тартибли спектр ҳосил бўлади ва ҳоказо. Симметрик йўналишларда $h = -1, -2$ ва ҳоказо бўлганда ҳам $-1, -2$ ва ҳоказо тартибли спектр-

лар ҳосил бўлади. Демак, бу спектрларнинг тўплами бир ўлчовли аналитик фазо ҳосил қилади.

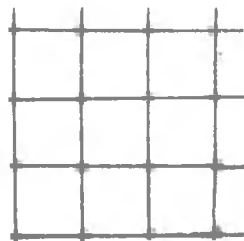
Агар энди ҳар бир сочувчи марказ *сферик* тўлқин манбаи эканлигини эътиборга олсак, мазкур тўлқин узунлик учун муайян тартибли (масалан, 1-тартибли) интерференция максимумига мос йўналишлар *фазода* учигаги бурчаги α бўлган конус сиртида ётади. 68-расмда чизиқли панжара L ҳарфи билан



68- расм. Чизиқли панжаранинг интерференцион йўллари.

белгиланган. Равшанки, агар флуоресценцияловчи экранни ёки фотопластинкани панжарадан бирор масофага қўйилса, у ҳолда интерференцион конусларнинг излари бу экранда гиперболалар бўлади, муайян бир тўлқин узунликка доир интерференция максимумлари бу гиперболаларда жойлашади.

Энди ясси, яъни икки ўлчовли панжарани қараб чиқамиз (69 расм). Равшанки, бу панжарани x ва y ўқларига параллел жойлашган чизиқли панжараларнинг қўш аналитик фазолари деб қараш мумкин. Энди бу панжарага нормали x ва y ўқлар билан α_0 ва β_0 бурчаклар ҳосил қиладиган ясси тўлқин тушсин. Олдинги ҳолдаги каби бу ерда ҳам панжаранинг ҳар бир марказини сферик тўлқин манбаи деб қараб, интерференцион максимумлар ҳосил бўладиган йўналишлар қуйидаги иккита шартни қаноатлантирадиган α ва β бурчаклар билан характерланишини кўрамиз:



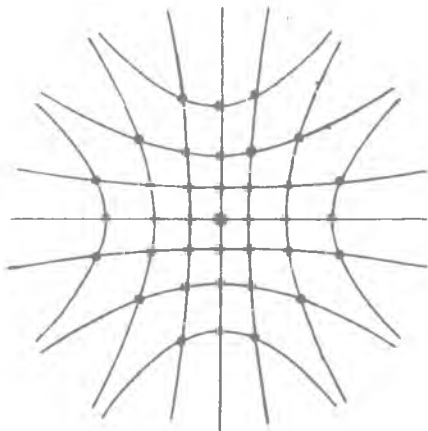
69- расм. Ясси панжара.

$$\left. \begin{aligned} a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= h_1 \lambda, \\ a(\cos \beta - \cos \beta_0) &= h_2 \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (82.3)$$

бу ерда h_1 ва h_2 — бутун сонлар. Равшанки, бу шартларнинг биринчиси x ўқига параллел чизиқли панжаралар учун интерференция максимуми шартини, иккинчиси эса y ўқига параллел панжаралар учун интерференция максимуми шартини билдиради. Агар ясси панжарадан бирор масофада флуоресценцияловчи экран жойлаштирилса, ясси панжара ажратилган чизиқли панжаралар системасининг ҳар бири экранда ўзларига хос гипербодалар системасини беради ва равшанки, (32.3) шартлар бу гипербодалар кесишган нуқталарда бажарилади (70-расм). (32.3) дан $\cos \alpha$ ва $\cos \beta$ ни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha_0 + h_1 \frac{\lambda}{a}, \\ \cos \beta &= \cos \beta_0 + h_2 \frac{\lambda}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (32.4)$$

Бундан ҳар бир тўлқин узунлик λ учун α ва β нинг ўз қийматлари ҳосил бўлиши, яъни ясси панжара ҳам нурни спектрга ажратади деган хулоса келиб чиқади. Аммо бунда спектрларнинг чизиқли панжара берадиган содда спектрлардан фарқи бўлган



70-расм. Ясси панжарадан ҳосил бўлган спектрлар.

қуш аналитик фазоси ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, муайян бир спектр (h_1, h_2) сонлар *жусфти* билан характерланади. Шундай қилиб масалан, $(+1, +1), (+1, +2), \dots$ тартибли спектрлар, шунингдек $(+1, -1), (+1, -2)$ ва ҳоказо тартибли спектрлар ҳосил бўлади. Бу ҳол 70-расмда аниқ кўриниб турибди.

Ниҳоят, *фазовий* панжарани текширайлик. Бу панжарани x, y ва z ўқларга параллел бўлган чизиқли панжараларнинг учта системасига ажратиш мумкин. Бу ҳолда интерференцион максимумлар қуйидаги учта шартни бир вақтда қаноатлантирадиган α, β, γ бурчаклар билан характерланадиган йўналишларда ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= h_1 \lambda, \\ a(\cos \beta - \cos \beta_0) &= h_2 \lambda, \\ a(\cos \gamma - \cos \gamma_0) &= h_3 \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (32.5)$$

Бу шартлардин интерференцион максимумларнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha_0 + h_1 \frac{\lambda}{a}, \\ \cos \beta &= \cos \beta_0 + h_2 \frac{\lambda}{a}, \\ \cos \gamma &= \cos \gamma_0 + h_3 \frac{\lambda}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (32.6)$$

Кўриниб турибдики, бу ерда интерференция тартиби учта сон (h_1, h_2, h_3) билан аниқланади. Шу билан бирга яна шундай бир факт аниқланадики, интерференцион максимумлар ҳар қандай тўлқин узунликлар учун эмас, балки мутлақо тайин баъзи тўлқин узунликлар учун ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (32.5) шартлар билан бир қаторда фазодаги *ҳар қандай* йўналиш учун яна қуйидаги шартлар автоматик равишда қаноатлантирилади:

$$\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (32.7)$$

Шунинг учун (32.5) шартлардан интерференция максимумининг йўналтирувчи косинусларигина эмас, балки бу интерференция юз берадиган *тўлқиннинг узунлиги* ҳам аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, (32.6) тенгликларни квадратга кўтариб, қўшсак ва (32.7) формулаларни эътиборга олсак, қуйидагини топамиз:

$$1 = 1 + \frac{\lambda^2}{a^2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + 2 \frac{\lambda}{a} (h_1 \cos \alpha_0 + h_2 \cos \beta_0 + h_3 \cos \gamma_0),$$

бундан

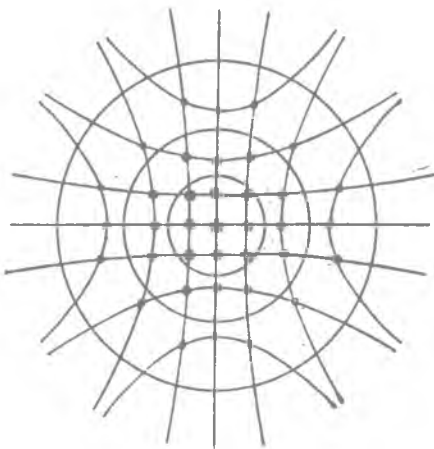
$$\lambda = -2a \frac{h_1 \cos \alpha_0 + h_2 \cos \beta_0 + h_3 \cos \gamma_0}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \quad (32.8)$$

чиқади. Демак, тушувчи ясси тўлқин йўналиши аниқ бўлганда $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ лар берилганда (32.8) тенгликни қаноатлантирувчи тўлқин узунлиги учун муайян (h_1, h_2, h_3) тартибли интерференция максимуми мавжуд бўлади.

Биз чизиқли ва ясси панжараларни текширганда кўрган геометрик тасвирлар бу чекланишнинг сабабини осон тушунишга имкон беради. Соддалик учун тушувчи ясси тўлқинга ўтказилган нормал z ўқ бўйича йўналган ва экран ҳам z ўққа нормал равишда жойлаштирилган, деб фараз қилайлик. У ҳолда z ўққа параллел жойлашган чизиқли панжараларга тегишли интерференция максимумларининг йўналишлари конусларнинг сиртларида жойлашади. Бу конуслар экранда айланалар системаси*

*) Агар панжаралар йўналиши z ўқ билан бир хил бўлмаганда ёки экран бу ўққа ихтиёрий бурчакка қиялатиб қўйилганда айланалар ўрнига эллипслар ҳосил бўлган, лекин барча мулоҳазалар бу ҳоллар учун ҳам ўз кучида қолган бўлар эди.

(71-расм) ҳосил қилади, бунда ҳар бир айлана тайин бир λ тўлқин узунликка ва тайин бир $h_z = \text{const}$ интерференция тартибига мос келади. Иккинчи томондан, xy текисликка параллел ясси панжараларнинг ҳар бири мазкур тўлқин узунлик учун гиперболаларнинг иккита системаси кесишган жойда



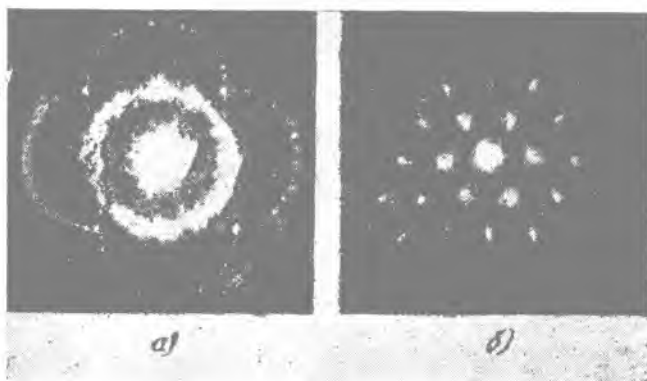
71-расм. Фазовий панжарада интерференция шартининг геометрик тасвири.

ётадиган интерференцион максимумлар тўпламини беради (70-расмга қаранг). $\lambda = \text{const}$ бўлганда (32.6) шартларнинг учаласи ҳам бажарилиши учун 71-расмдаги айланалар гиперболаларнинг кесишиш нуқталаридан ўтиши керак. Тайин узунликдаги битта тўлқинда бундай бўлиш эҳтимоли жуда кам. Шундай қилиб, фазовий панжарани монохроматик нур билан ёки чизиқли спектрга эга нурланиш билан ёритганда интерференциянинг юз бериш эҳтимоли жуда кам. Аксинча, панжарани туташ спектрли нурланиш билан ёритганда

интерференциянинг барча шартларини қаноатлантирувчи тўлқин узунлик ҳар доим топилади. Шундай қилиб, туташ спектрли тўлқин фазовий панжарадан утганидан кейин монохроматик интерференцион нурлар системасига ажралади, бу нурлар экранда (фотопластинкада) симметрик жойлашган интерференцион доғлар тўпламини беради. Агар бу доғларни бевосита кўриш мумкин бўлганда эди, улар бизга ҳар хил рангли бўлиб кўринарди.

Ниҳоят, юқоридаги мулоҳазалар ҳар қандай тўлқин узунликка ва марказлар орасидаги масофа қуйидагича чегараланадиган ҳар қандай панжараларга татбиқ қилинишини қайд қиламиз: λ тўлқин узунлик панжаранинг a параметридан кичик бўлиши лозим, чунки $\lambda > a$ бўлганда $h \frac{\lambda}{a} > 1$ ва (32.2), (32.7) ва (32.6) шартлар ҳеч қандай тўлқин узунликда қаноатлантирилмайди (қосинус 1 дан катта бўлолмайди!). Иккинчи томондан, агар $\lambda \ll a$ бўлса, интерференция шартлари қаноатлантирилиши мумкин, лекин α, β, γ бурчаклар жуда кичик бўлиб, интерференцияни кузатиш қийинлашиб қолади. Худди шу сабабдан рентген нурларининг *кристалларда* интерференциясига рентген нурлари тўлқин узунлиги кристаллдаги атомлар орасидаги масофалар тартибдаги катталик бўлиши айниқса яхши қулайлик беради.

Кўзга кўринадиган ёруғликнинг дифракцияланишига яроқли бўлган a даврли фазовий панжара ҳосил қилиш учун ультратовуш тўлқинларидан фойдаланилади. Суюқлик ва қаттиқ жисмларда тўлқин узунликлари $10^{-4} - 10^{-5}$ см тартибида, яъни кўринадиган спектр тўлқин узунликларига ($7 \cdot 10^{-5} - 4 \cdot 10^{-5}$ см) яқин бўлган ультратовушлар ҳосил қилиниши мумкин. Шунинг учун суюқлик ёки қаттиқ жисмда турғун ясси

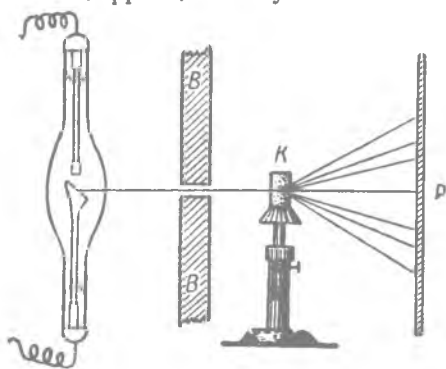


72-расм. а) ксилолда бир-бирига 90° бурчак остида йўналган учта ультратовуш тўлқини ҳосил қилган фазовий панжарада ёруғликнинг дифракцияси; б) ультратовуш тўлқинлари бир-бирига 120° бурчак остида йўналган ҳолдаги дифракцион манзара.

ультратовуш тўлқинлари ҳосил қилинса, у ҳолда пайдо бўлган зичланиш ва сийракланишлар системаси ёруғлик учун ажойиб дифракцион панжара бўлади. Ўзаро перпендикуляр ёки бир-бирига нисбатан бирор бурчак остида йўналган учта ультратовуш тўлқинлари кўринадиган ёруғликни дифракциялашга яроқли бўлган даврли фазовий панжара ҳосил қилади, деб ўйлаш табиийдир. Бу фаразimiz ҳақиқатда тўғри бўлиб чиқади. Суюқлик (ксилол) орқали ёруғлик нурлари ўтказганда олинган иккита фотография 72-расмда келтирилган. Бу дифракцияни суюқлик ичида бир хил даврли учта ультратовуш тўлқини ҳосил қилган. Бу расмларда дифракцион доғлар яхши кўриниб турибди. Рентген нурларини кварц кристаллидан ўтказганда ҳосил бўлган Лауэ дифракцион манзараси (74-расм) билан солиштириш ёруғликнинг сунъий кристалл фазовий панжарадаги ($a - 10^{-8}$ см тартибида, яъни рентген нурлари тўлқин узунлиги тартибида) дифракцияси худди шунга ўхшаган манзара беришини кўрсатади.

33-§. Рентген нурлари дифракциясини тажрибада амалга ошириш

Олдинги параграфда рентген нурларининг Лауэ методи билан ҳосил қилинган дифракциясини текширдик. Бу метод билан дифракцияни кузатишга тегишли экспериментал қурилма



73- расм. Рентген нурлари дифракциясини Лауэ методи билан ҳосил қилиш схемаси.

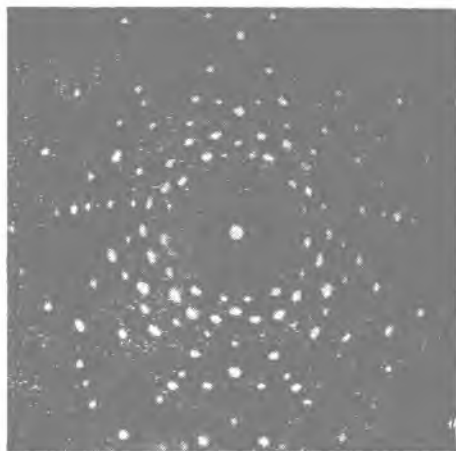
жуда оддий. Қалин қўрғошин B экрандаги (73-расм) юмалоқ тешик ажратадиган рентген нурларининг торгина дастаси K кристалл орқали ўтади. Бунда пайдо бўладиган дифракцион дасталар нурлар йўлига перпендикуляр жойлаштирилган P фотопластинкада доғлар кўринишида қайд қилинади. Бу метод билан олинган фотографияларга мисол тариқасида 74-расмда кварц кристаллидаги дифракция манзараси келтирилган. Олдинги

параграфда айтилганларга асосан, Лауэ методи билан дифракция ҳосил қилиш учун туташ спектрга эга бўлган тормозланиш рентген нурланишидан фойдаланиш лозим.

У. Г. Брэгг ва У. Л. Брэгг (ота ва ўғил), шунингдек, улардан мустақил рус физик-кристаллографи Ю. В. Вульф рентген нурларини текшириш ва ҳисоблашнинг бошқа методини таклиф қилдилар. Қисқача айтганда, бу методда Лауэ рентгенограммасининг ҳар бир доғи рентген нурларининг *интерференцион қайтиши* натижаси деб қаралади. 66-расмда тасвирланган энг содда куб кристалл панжарага мурожаат қиламиз.

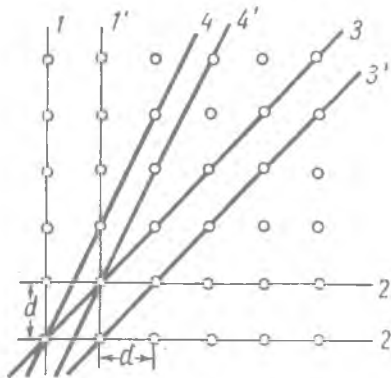
x , y , z координата ўқларини кубнинг қирралари бўйлаб йўналган деб фарз қиламиз; u вақтда атомларнинг

xu текисликдаги жойлашиши 75-расмдагидек тасвирланади. Кристаллни xu текисликка перпендикуляр равишда кесиб ўтувчи



74- расм. Рентген нурларнинг кварц кристаллида дифракцияси.

ҳар қандай текислик бу ҳу текисликда тўғри қизиқ кўринишида (масалан, 1 ёки 1', 2 ёки 2') из қолдиради. Равшанки, дастлаб бутун кристаллни унинг табиий ёқларига параллел бўлган қатор 1, 1', ... ёки 2, 2', ... текисликларга ажратамиз. Бу текисликларда атомларнинг жойлашиш зичлиги бир хил бўлади ва бу текисликлар бир-биридан элементар куб ячейканинг қирраси узунлигига тенг бўлган бир хил d масофада туради. Аммо ўша расмдан кўриниб турибдики, кристаллни бошқа кўп усуллар билан ҳам ана шундай бўлаклар мумкин. Масалан, булар 3, 3', ...; 4, 4', ... текисликлардир; бу текисликлардан атомларнинг жойлашиш зичлиги ва ораларидаги масофа билан фарқ қилади.

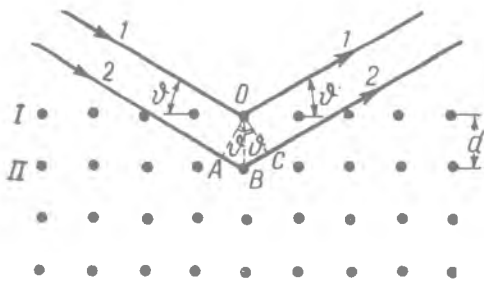


75- расм. Тўрсимон текисликлар.

Энди бундай текисликлар системаларидан бирини, масалан, табиий ёқига параллел бўлган текисликларни (яъни 1, 1', ... ёки 2, 2', ...) текшира-

рамыз. Бу текисликларга тўлқин узунлиги λ бўлган монохроматик нурларнинг параллел дастаси тушсин. Атомларни янги когерент элементар тўлқинлар маркази деб қараб, текисликларнинг ҳар бири учун бурчаги тушиш бурчагига тенг бўлган

нолинчи тартибли қайтишга эга бўламиз. Бунда айни бир текисликдан ихтиёрий узунликдаги ҳамма тўлқинлар мутлақо бир хил қайтади, чунки ҳамма нурларнинг йўллари узунлиги ўзаро тенг. Бинобарин, нурлар юриш йўлининг фарқи ҳаммаша нолга тенг бўлади. Энди тўлқинларнинг бир текисликдан эмас, балки бир-биридан



76- расм. Вульф - Брегг тенгласини келтириб чиқаришга доир.

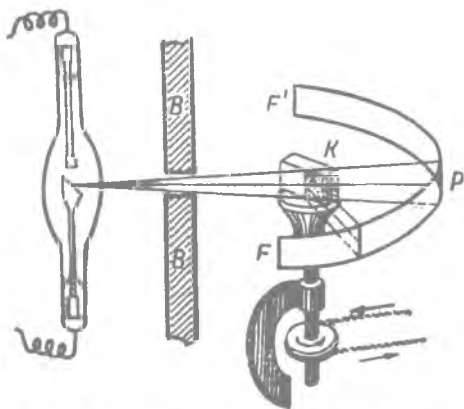
бир хил узоқликда турган текисликлар системасидан қайтишини ҳисобга оламиз. Бу ҳолда манзара ҳар хил текисликлардан қайтган когерент нурларнинг интерференцияси туфайли мураккаб-лашади ва ҳар қандай узунликдаги тўлқинлар қайтавермасдан, фақат муайян узунликдаги баъзи тўлқинларгина қайтади. Ҳақи-

қатан ҳам, *I* ва *II* текисликлардан қайтган *1* ва *2* нурларнинг (76-расм) йўллари фарқи $2d \sin \vartheta$ га тенг эканлиги чизмадан кўриниб турибди, бу ерда ϑ —сирпаниш бурчаги, яъни тушиш бурчагини 90° га тўлдирувчи бурчак. Шунинг учун йўлларининг фарқи тўлқин узунлигининг бутун сонига тенг бўлган тўлқинларгина қайтади. Шундай қилиб, рентген нурларининг интерференцион қайтиши учун қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (33. 1)$$

Бу формула *Вульф—Брэгг* формуласидир; у рентген нурларининг бутун спектроскопиясига асос қилиб олинган.

Ҳақиқатда тўлқинлар кўп текисликлардан қайтади, яъни ўзаро иккита эмас, балки кўп дасталар интерференциялашади. Лекин бу кўп марта қайтишлар интерференция максимумининг шартини ўзгартирмайди, фақат худди оптикадаги* каби, энлик интерференцион полосалар ўрнига энсиз чизиқлар ҳосил бўлишига сабаб бўлади,



77- расм. Рентген спектрографининг схемаси.

яъни бу методни рентген нурларининг спектроскопиясида татбиқ этишга анча қулайлик келтиради. Қайтишга доир (33. 1) шарт ўзгармайди.

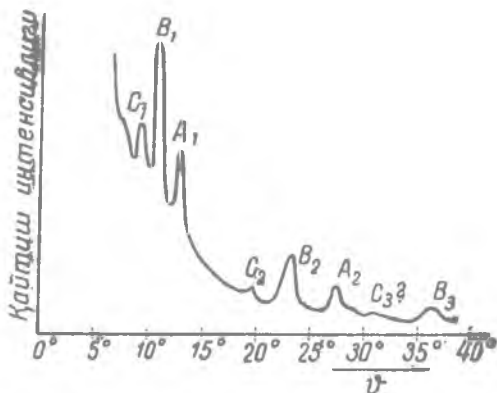
Биз шу чоққача нурларнинг кристаллнинг табиий ёқига параллел бўлган текисликлардан қайтишини кўрдик. Аммо нурларнинг $3,3', \dots; 4,4', \dots$ ва ҳоказо текисликлар системаларидан қайтишини текширишимиз ҳам мумкин. Лауэ рентгенограммасидаги ҳар бир

доғ тўрсимон текисликларнинг муайян системасидан интерференцион қайтиш натижалари эканлигини жуда аниқ кўрсатиш мумкин**. Шундай қилиб, Вульф—Брэгг методи текшириш методи сифатида Лауэ методига эквивалентдир. Аммо Вульф—Брэгг методининг катта мустақил аҳамияти ҳам бор, чунки у, олдин айтганимиздек, рентген нурлари спектроскопиясига, шунингдек, кристалларни анализ қилиш методларидан энг самаралисига асос қилиб олинган.

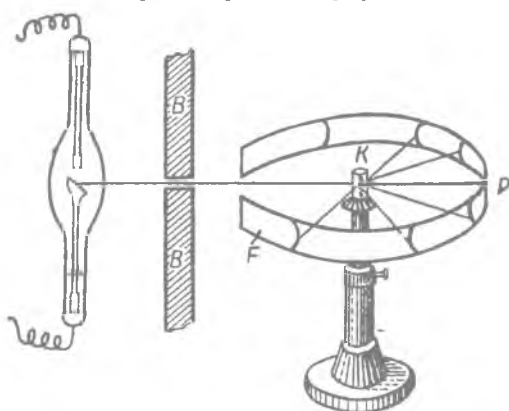
* Г. С. Ландсберг, Оптика. 27-§, Гостехиздат, 1947. Бу китобдан Фабри—Перо интерферометри ёки Луммер—Герке пластинкасининг назариясига қаранг.

** Ишоти рентгеноструктура анализи курсларида берилади (масалан, Г. С. Ждановнинг Основы рентгеновского структурного анализа, деган китобига қаранг, Гостехиздат, 1940).

Рентген спектрографининг эяг содда схемаси 77-расмда тасвирланган. Рентген нурларининг параллел дастаси айланувчи стол устига қўйилган K кристаллга тушади; FPF' — фотоплётка. Фотоплётка ўрнида баъзан ионизацион камера қўлланилади. Бу камера кристалл билан бирга иккиланган бурчакка бурилади. (Изоҳлаб беринг!) Ионизацион камерада рентген нурлари таъсирида ҳосил бўладиган ионизацион ток кучи бу нурлар интенсивлигининг ўлчови бўлади. Агар чизиқли спектрга эга нурланиш $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ тўлқин узунликларидан иборат бўлса, ҳар бир тўлқин узунлик Вульф — Брэгг формуласидан аниқланадиган ўзининг θ бурчагида қайтади. Шундай қилиб, рентген нурлари интенсивлигининг кристаллнинг бурилиш бурчагига боғланиш эгри чизиғи қатор максимумларга эга бўлади, бу максимумлар ҳар хил қайтиш тартибларида такрорланиши керак. 78-расмда антикатоди платинадан ясалган рентген трубкиси нурланишининг $NaCl$ кристаллидан қайтишида ҳосил бўлган шундай эгри чизиққа мисол келтирилган. Бу эгри чизиқнинг учта қайтиш тартибида кетма кет такрорланувчи учта A_1, B_1, C_1 аниқ максимуми платинанинг учта K_α, K_β ва K_γ спектрал чизиқларига мос келади. Қайтиш интенсивлиги чизиқлардан ташқарида нолга тенг эмаслиги, лекин қайтиш бурчаги



78-расм. Рентген нурларининг $NaCl$ кристаллидан қайтиш эгри чизиғи.

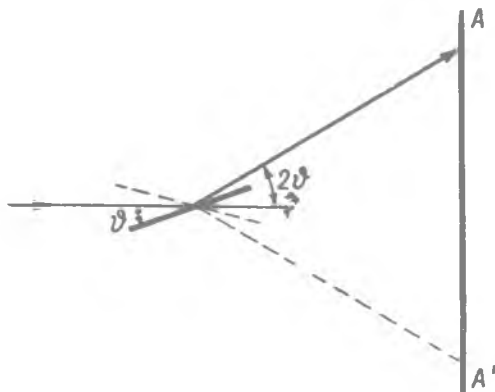


79-расм. Рентген нурларининг дифракциясини кристалл кукунлар методи билан ҳосил қилиш.

камайганда систематик ортишининг сабаби қуйидагичадир: платина антикатод электронлар билан бомбардимон қилинганда характеристик нурланишдан ташқари, туташ спектрли тормоз-

ланиш нурланиши ҳам пайдо бўлади. Шу туфайли платинанинг спектрал чизиқлари туташ фон устига тушади. 84 ва 85-расмларда рентген спектрларининг фотографияларига мисоллар келтирилган.

Рентген нурлари дифракциясини ўрганишнинг биз қараб ўтган иккита методидан ташқари, кристалл кукунлар методи деб аталувчи учинчи методи бор; бу метод қаттиқ жисмларнинг тузилишини рентген нурлар ёрдамида анализ қилишда жуда кўп қўлланилади. Дебай ва Шеррерлар таклиф этган бу методда Лауэ ва Вульф—Брэгг методларини ишлатганда зарур бўладиган катта кристаллар ўрнига ймкон борича майдаланган кристалл кукун ишлатилади; бу кукун цилиндр устунча қилиб



80-расм.

прессланади (79-расмдаги *K*). Агар бундай устун орқали монокроматик рентген нурланиши ўтказилса, у ҳолда кукуннинг микркристаллари бутунлай тартибсиз жойлашганлиги туфайли устунчада нурга нисбатан мазкур тўлқин узунликда Вульф—Брэгг шартини қаноатлантирувчи бурчак остида ўрнашган кристаллчалар ҳамма вақт топилади. Бунда қайтган нурлар учигаги бурчаги 2θ га тенг бўлган конус сиртида кетади (80-расм). Агар устунчанинг сиртига 79-расмда кўрсатилгандек қилиб, фотоплёнка ўралса, у ҳолда бу конуслар



81-расм. Рентген нурларининг NaCl кристалл кукундаги дифракцияси.

плёнкада эгри чизиқлар шаклида из қолдиради. Бу изларнинг ҳар бири муайян тўлқин узунликка ва муайян қайтиш тартибига мувофиқ келади. Кристалл кукунлар методи билан олинган бундай фотографиянинг мисоли 81-расмда келтирилган.

Кристалл кукунлар методининг энг афзал томони шундаки, бу метод билан ишлаганда яхши сифатли катта кристаллар талаб қилинмайди. Табиатда бундай кристаллар кўринишида моддалар жуда кам учрайди, кристаллар ўстириши эса ҳамма вақт ҳам мумкин бўлавермайди.

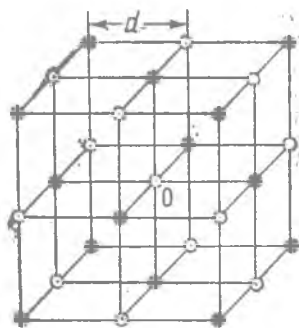
Ма ш қ. Миснинг тўлқин узунлиги $1,542 \text{ \AA}$ бўлган (миснинг K_{α} чизиғи) биринчи тартибли спектрал чизиғи тош туз кристаллининг табиий ёқидан $15^{\circ}50'$ сирпаниш бурчагида қайтади. NaCl учун d нинг қийматини топинг.

34-§. Рентген спектрал чизиқларининг тўлқин узунлигини аниқлаш

Вульф—Брэггининг (33. 1) тенгламаси рентген нурларининг тўлқин узунлигини ϑ қайтиш бурчаги бўйича аниқлаш имконини беради, лекин бунда кристаллдаги қўшни атом текисликлари орасидаги d масофа маълум бўлиши керак. Бу масофани мустақил равишда қуйидагича йўл билан ҳисоблаб топиш мумкин. Мунтазам системали, яъни элементар ячейкаси куб шаклида бўлган кристалл бор деб фараз қилайлик, бунга мисол қилиб тош туз (NaCl) кристаллини олиш мумкин. NaCl нинг бир грамм-молекуласи массаси $M=58,454 \text{ г}$, ундаги NaCl молекулалари сони Авогадро доимийси (N) га тенг бўлади; шунинг учун бундаги Na^+ ва Cl^- ионлари сони $2N$ бўлади.

NaCl кристаллининг элементар ячейкасини текширамиз. Бу кристалл структурасини урганиш* элементар кубнинг учларида NaCl молекулалари эмас, балки Na^+ ва Cl^- ионлари жойлашишини кўрсатди (82-расм). Шундай қилиб, куб ячейканинг 8 та учида 8 та ион жойлашади, аммо учлардан ҳар бири 8 та қўшни ячейка учун умумий бўлгани туфайли (шундай экани 82-расмда марказий O ион учун яши кўриниб турибди), ҳар бир ячейкага биттадан ион тўғри келади. Агар ячейка қиррасининг узунлиги d га тенг бўлса, ҳажми d^3 бўлади, ичида $2N$ иони бўлган битта грамм-молекуланинг бутун ҳажми $2Nd^3$ бўлади. Иккинчи томондан, ўша ҳажм M массанинг кристалл зичлиги Q га нисбатига тенг. Бу шартдан фойдаланиб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$2Nd^3 = \frac{M}{\rho}$$



82-расм. Натрий хлориднинг кристалл панжараси. Ёруғ тўғарақлар - хлор ионлари (Cl^-); қора тўғарақлар—натрий ионлари (Na^+).

* Бу китобда кристалллар структурасини рентген нурлари ёрдамида ўрганишни қарамаймиз. Бу масала билан танишмоқчи бўлган китобхонлар учун қуйидаги китобларни тавсия этамиз: Г. С. Жданов. Основы рентгеновского структурного анализа. Госгеиздат, 1940. У. Г. Брэгг, У. Л. Брэгг. Кристаллическое состояние, ОНТИ, 1938.

ёки

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{M}{N_p}} \quad (34. 1)$$

Бу формуладан кўриниб турибдики, d ни тўғри аниқлаш, бинобарин, λ ни тўғри аниқлаш Авогадро доимийсини ишончли туғри билишга жуда боғлиқдир. Бу масала атом физикасида катта аҳамиятга эга, шунинг учун 38-§ да бунга яна тўхталиб ўтамиз. Ҳозирча d_{NaCl} учун $d = 2,81400 \text{ \AA}$ стандарт қиймат қабул қилинса, у ҳолда миснинг K_{α} чизиғи тўлқин узунлиги:

$$\lambda = (1,537302 \pm 0,000031) \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Кўриниб турибдики, бу ердаги аниқлик шунчалик юқорики, $1 \text{ \AA} (= 10^{-8} \text{ см})$ бу ерда ноқулай бирлик бўлиб қолади, чунки ишончли ўнли рақамлар сони жуда катта бўлиб чиқади*. Шунинг учун рентген нурларининг спектроскопиясида кўпчилик ҳолларда X-бирлик деб аталувчи бошқа бирлик татиқ қилинади:

$$1 \text{ X} = 10^{-3} \text{ \AA} = 10^{-11} \text{ см.} \quad (34. 2)$$

Юқорида ёзилган тўлқин узунлик бу бирликларда қуйидаги сон билан ифодаланади:

$$\lambda = (1537,302 \pm 0,031) \text{ X.}$$

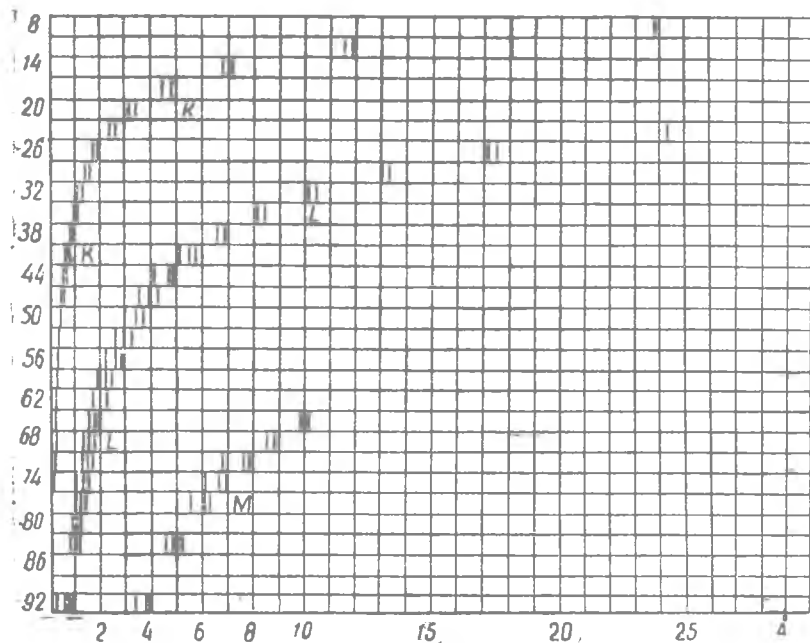
35-§. Рентген нурларининг спектрлари

83-расмда кислороддан то урангача бўлган элементларнинг рентген спектрлари схемаси берилган. Бу расмга шундай юзак қарагандаёқ рентген спектрларининг ажойиб хусусияти, яъни уларнинг соддалиги ва бир хиллиги кўзга ташланади. Оптик спектрлар кўпинча жуда мураккаб ва баъзан юз ва ҳатто минг чизиқлардан (масалан, темир спектри) иборат бўлгани ҳолда, рентген спектрларидаги чизиқлар сони жуда оз бўлади. Элементдан элементга ўтилганда оптик спектрлар кескин ўзгаради. Бу спектрларнинг структураси элементларнинг бошқа хоссалари даврийлигига параллел борувчи даврийликка эга бўлади; аксинча, рентген спектрлари эса мутлақо бир хил тузилган, ҳеч қандай даврийлиги йўқ, энгил элементлардан оғир элементларга ўтишда кўринадиган яқкаю ягона ўзгариш чизиқларнинг қисқа тўлқин томонига монотон силжишидан иборатдир. Ниҳоят, 113-бетда кўрсатилганидек, рентген

* Лекин келтирилган бу сонда бирор систематик хато борлигини қайд қилиш керак; бу хато тўғрисида 37-§ да гапирилади. Бу ерда миснинг K_{α} чизиғининг тўлқин узунлиги хоналар сонини характерлаш учунгина келтирилади; рентген нурлари спектроскопиясида тўлқин узунликлари шунча хонали сомлар (рақамлар) билан кўрсатилади.

спектрлари атомга тегишли хоссалар бўлиб, атом бирор бирикмага киришганда биринчи яқинлашишда бугунлай ўзгармайди.

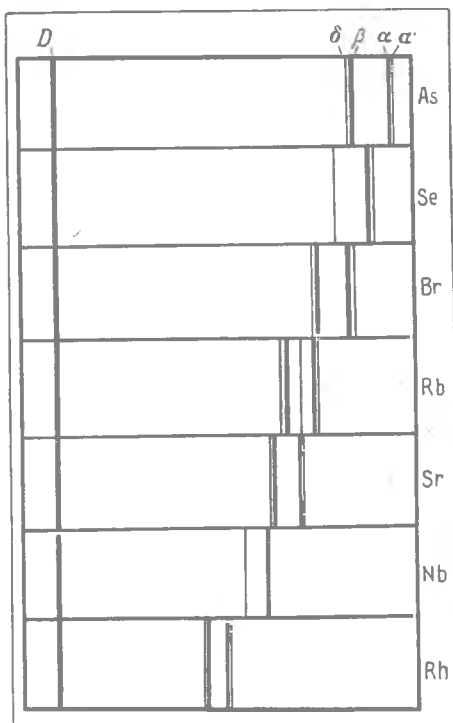
Оптик ва рентген спектрлар характерининг бундай кескин фарқ қилишига сабаб бу спектрларнинг атомнинг ҳар хил қисмларида пайдо бўлишидир: оптик спектрлар ташқи қобиклардаги электронларнинг ҳаракати туфайли ҳосил бўлади, рентген спектрлари эса атомнинг ички қисмларида (ички орбиталардаги электронларнинг ҳаракатидан) пайдо бўлади. Шундай эканлигини кейинроқ кўрамиз.



83- расм. Ҳар хил элементлар рентген спектрларининг схемаси. (Ординаталар ўқида элементларнинг атом номерлари қўйилган.)

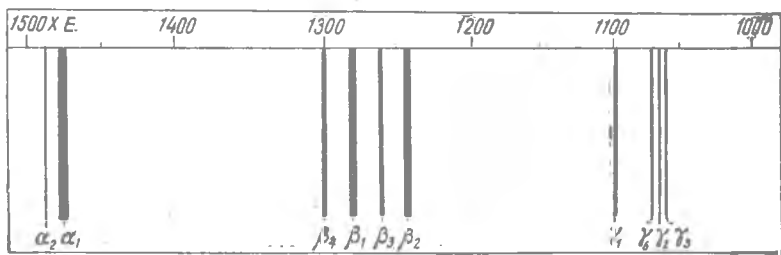
Рентген спектрларидаги чизиқлар бир неча группа ёки сериялар ҳосил қилиши ҳам 83-расмдан кўриниб турибди. Бу серияларнинг энг қисқа тўлқинлиси *K* серия деб аталади. Уzun тўлқинлар томонида жойлашган бундан кейинги серия *L* серия деб аталади. Кейинчалик *M* ва *N* серия келади, бу *M* ва *N* серия фақат оғир элементларда кузатилади. Ҳақиқатда эса барча бу серияларнинг спектрдаги оптик қисмда табиий давом бўлади. Лекин серияга тегишли чизиқлар мутлақо махсус шароитлардагина уйғонади. Рентген спектрларининг барча серияларидан структураси энг содда бўлгани *K* сериядир. Бу серия K_{α} , K_{β} ва K_{γ} деб аташ қабул қилинган учта чизиқдан ибо-

рат. K_{α} чизиқ энг узун тўлқинли, шу билан бирга энг равшандир. Бу чизиқ аниқ ажралиб турадиган дублет бўлиб, α_1 ва α_2 иккита компонентдан иборат K_{β} чизиқ тўлқин узунлиги



84- расм. Баъзи элементларнинг K -серия спектрлари фотографияси.

ва интенсивлиги бўйича навбатдаги чизиқдир; у ҳам дублет, лекин чизиқлари бир-бирига яқин жойлашган, осонлик билан уларни ажратиб бўлмайди. K_{γ} чизиқ энг қисқа тўлқинли чизиқдир.



85- расм. Вольфрамнинг L -серия спектрининг фотографияси.

К серияга родийнинг 63-расмда тасвирланган спектри типик мисол бўлади. Бу сериянинг K_{α} , K_{β} , K_{γ} учта чизиқдан иборат эканлиги расмдан кўриниб турибди. Юқорида айтганимиздек, K_{α} чизиқ дублетдир, яъни у бир-бирига жуда яқин жойлашган ва ўзаро қонуний равишда боғланган иккита чизиқдан иборат. Аммо 63-расмда бу чизиқларнинг „нозик структураси“ асбобнинг ажрата олиш қобилияти камлиги туфайли кўринмайди. 84-расмда ҳар хил элементлар К серияларининг бир қанча фотографиялари келтирилган. 85-расмда вольфрам L сериясининг фотографияси мисол сифатида келтирилган. Гарчи бу серия унча кўп бўлмаган чизиқлардан иборат бўлса-да, структураси К серияниқига қараганда мураккаброқ эканлиги кўри-
ниб турибди

36-§. Мозели қонуни

Мозели элементларнинг рентген спектрларини тадқиқ қилишида (1913 – 1914 йиллар) спектрал чизиқлар частотаси билан бу чизиқларни чиқарувчи элементнинг атом номери орасидаги боғланишни ифодаловчи оддий қонун кашф қилди.

83-расмни кўздан кечирганда бу қонуният кўзга ташланади. Бу ерда спектрлар горизонтал ўққа ётқизилган тулқин узунликлари шкаласида жойлаштирилган, вертикал ўқ бўйлаб эса атом номерлари белгиланган. Барча спектрлар мутлақо бир хил типли бўлгани учун атом номери ортганда бирор маълум чизиқнинг (масалан, К сериядаги чизиқлардан бирининг) силжишига қараб бориш мумкин. Бунда тулқин узунликнинг атом номерига боғлиқлигини тасвирловчи эгри чизиқ парабола шаклида бўлишини пайқаш осон. Агар тулқин узунликлари ўрнига c/λ частоталар ёки тулқин узунликнинг тескари катталиги $1/\lambda$ олинса, қонуният янада соддароқ бўлади. У вақтда тулқин узунлик тескари катталигининг квадрат илдизи ($\sqrt{1/\lambda}$) атом номерига *чизиқли* боғланишда булади. Агар барча спектрал қонунларга кирувчи универсал доимий, яъни $109737,42 \text{ см}^{-1}$ га тенг бўлган Ридберг доимийси (VIII) бобга қаранг) киритилса, бу қонуният назарий жиҳатдан муҳим бўлган жуда ажойиб кўринишга келади. Масалан, Мозели K_{α} чизиқ учун

$$Q_{K_{\alpha}} = \sqrt{\frac{\nu_{K_{\alpha}}}{\frac{3}{4}R}} \quad (36.1)$$

(бу ерда $\nu_{K_{\alpha}} = \frac{1}{\lambda_{K_{\alpha}}}$) кўринишда тузилган $Q_{K_{\alpha}}$ сон атом номери (Z) дан битта кам, яъни

$$Q_{K_{\alpha}} = Z - 1 \quad (36.2)$$

эканлигини кўрсатди. Шундай эканлиги IX жадвалдан кўриниб турибди.

IX жадвал

Элемент	$\sqrt{\frac{\nu K_{\alpha}}{\frac{3}{4}R}}$	Z	Элемент	$\sqrt{\frac{\nu K_{\alpha}}{\frac{3}{4}R}}$	Z
Ca	19,00	20	Fe	24,99	26
Ti	20,99	22	Co	26,00	27
V	21,96	23	Ni	27,04	28
Cr	22,98	24	Cu	28,01	29
Mn	23,99	25	Zn	29,01	30

(36.1) ва (36.2) формулалардан $\sqrt{\frac{\nu K_{\alpha}}{\frac{3}{4}R}} = Z - 1$ эканини

топамиз. Буни қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$\nu K_{\alpha} = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right). \quad (36.3)$$

Рентген спектрининг бошқа серия чизиқлари учун ҳам мана шунга ўхшаган муносабатлар ўринли бўлади. Масалан, L серия учун Мозели муносабатининг кўриниши:

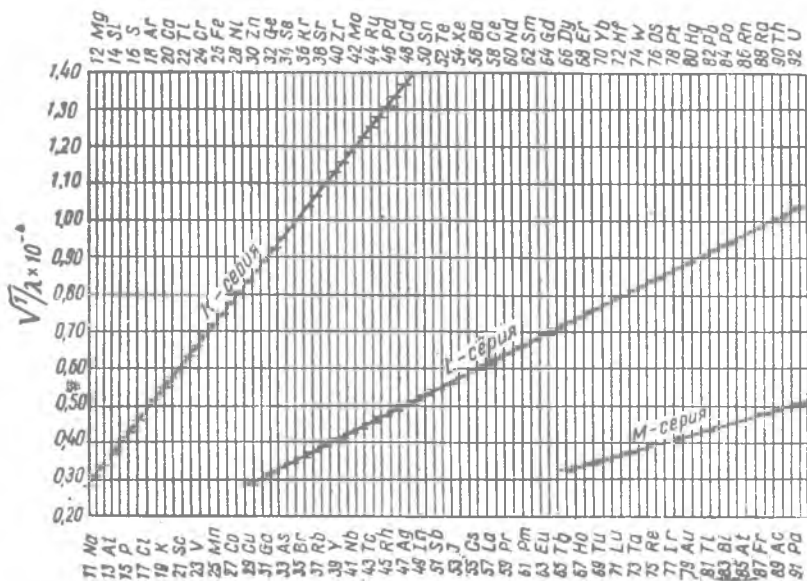
$$\nu L = R(Z-\sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right), \quad (36.4)$$

бу ерда σ — бирор ўзгармас сон.

(36.3) ва (36.4) формулалар кўринишининг симметрик бўлиши бизнинг принципиал характердаги бирор муҳим қонуният билан иш кўраётганимизни билдиради. Бу формулалар спектрал серияларнинг аниқ назарий мазмунга эга бўлган умумий формулаларининг хусусий ҳоллари эканлигини кейинчалик кўрамиз. Бу ерда шуни айтиб ўтиш муҳимки, Мозели қонуни рентген спектрининг барча сериялари учун спектрал чизиқлар тўлқин узунликларига тескари бўлган миқдорнинг квадрат илдизи билан атом номери орасида чизиқли боғланиш борлигини кўрсатади (86-расм). Бу боғланиш ўлчаб топилган тўлқин узунликка қараб мазкур элементнинг атом номерини, бинобарин, унинг ядроси зарядини аниқ белгилашга имкон беради.

Агар элементларнинг даврий системада атом оғирликлари ва химиявий хоссаларига қараб жойлаштирилиши ҳамма ҳолларда ҳам тўла ишонч билан бажарилмагани ҳисобга олинса, бу қонуннинг аҳамияти янада равшан бўлиб қолади. Даврий жадвалнинг турли қисмларида ҳали кашф этилмаган элементларга тегишли бўш жойлар қолган эди; сўнгра, $Z=58$ дан $Z=71$ гача (Мозели яшаган даврда $Z=72$ гача деб ҳисобланар эди)

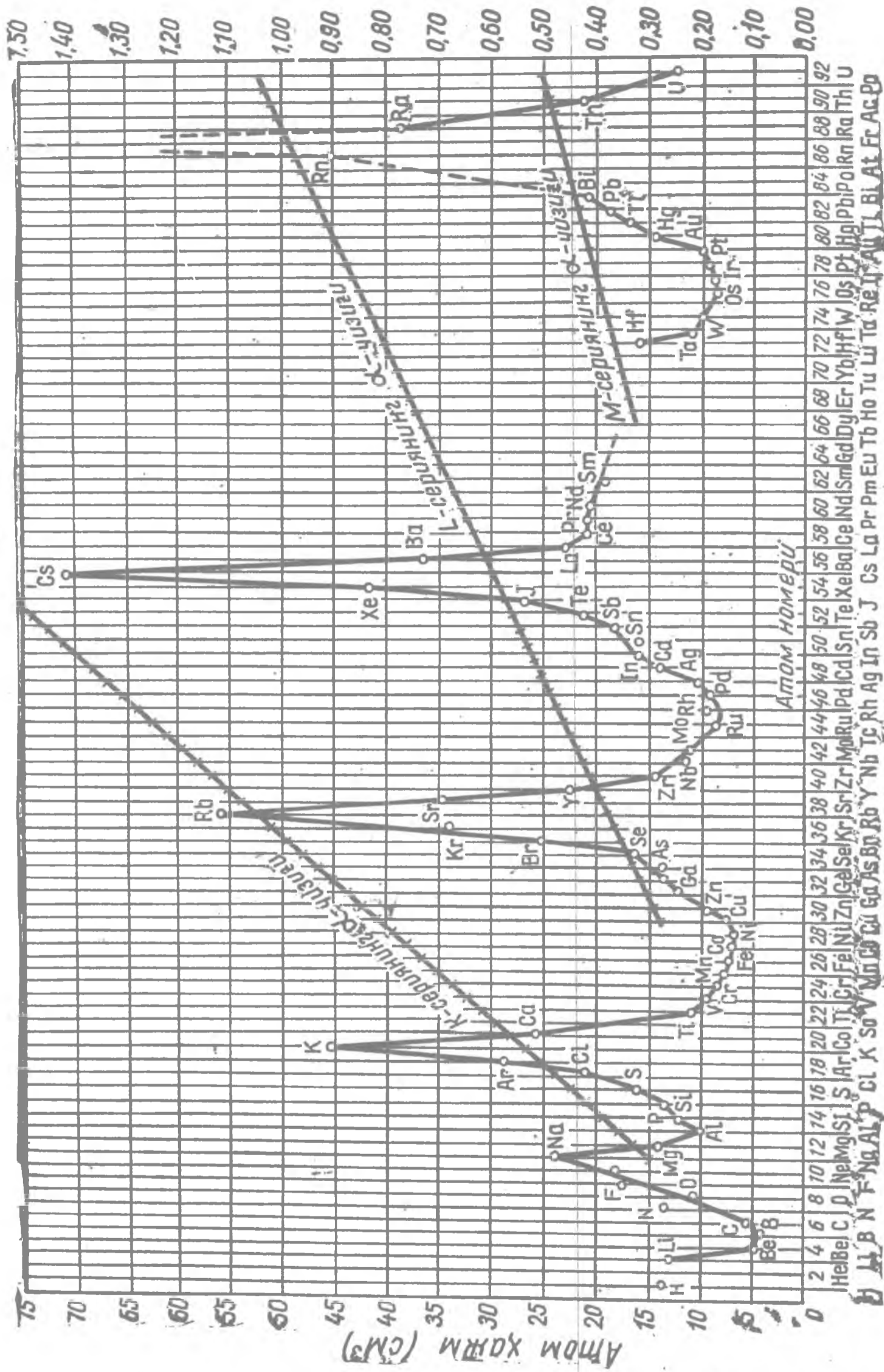
бўлган қисмда нодир ер элементлари жойлашган. Бу элементларнинг химиявий хоссалари бир-биридан жуда арзимаган даражада фарқ қилади ва атом оғирликлари кўпинча шунчалик аниқ эмас эдики, уларни тартиб бўйича жойлаштиришнинг тўғрилигига ишониш қийин эди. Мозели қонуни бу қийинчиликларнинг барчасини бартараф қилди. Мозели водород билан уран орасида номерлари ҳар хил бўлган роса 92 хил атом мавжуд бўлиши кераклигини очиқ-ойдин кўрсатди ва шу билан



86- расм. Мозели диаграммаси.

ҳали кашф этилмаган элементларнинг сонини аниқ айтди. Ундан ташқари, Мозели Менделеевнинг баъзи элементларни (Co—Ni, Ag—K, Te—J) атом оғирликлари қийматларига зид равишда тўғри жойлаштиришига бўлган барча шубҳаларни ҳам бартараф қилди. Шу билан бирга, бу қонун биринчи бўлиб атомнинг химиявий индивидуаллигини атом оғирлик эмас, балки ядро зарядига тенг бўлган атом номери белгилашини кўрсатди. Бу хулоса изотопларнинг кашф этилиши билан ажойиб равишда тасдиқланди.

Охирида шу нарсани қайд қиламизки, Мозели қонунини рентген нурлари учун характерли бўлган муҳим бир хусусият жуда ёрқин ифодаланган: атом номери Z ўзгарганда рентген спектрлари *монотон* ўзгаради. Буни атомнинг кўп хоссалари, масалан, химиявий валентлик, солиштирма ҳажм ва 12-§ да кўрсатилган бошқа қатор хоссалари Z нинг ортиши билан



87 -расм. Мозели диаграммасини атом хажмлар эгри чизигига таққослаш.

даврий равишда ўзгаришига таққослаш керак. 87-расмда Мозели қонунини ифодаловчи тўғри чизиқлар ва атом ҳажмларининг қатор максимум ва минимумларга эга бўлган эгри чизиғи бир чизмада тасвирланган. Бу расм рентген нурларининг бу хусусиятини айниқса равшан кўрсатади.

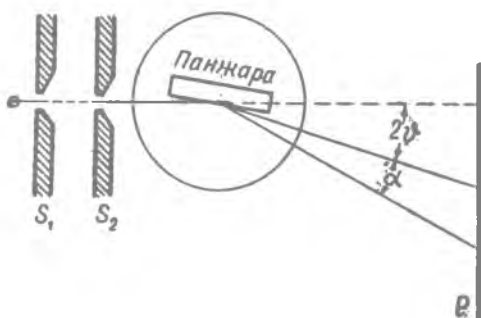
Бу фарқнинг сабаби шундаки, рентген спектрлари атомнинг ички қисмларида ҳосил булади (биз буни иккинчи томнинг XVI бобида кўрамиз) ва улар атомнинг ички, ядрога яқин соҳалари ҳар хил атомларда *бирдай структурали* эканлигини, атомнинг ташқи, чекка қисмлари эса даврий равишда такрорланадиган структурали эканлигини кўрсатади.

37-§. Рентген нурлари тўлқин узунлигини абсолют аниқлаш

Рентген нурларининг синиш кўрсаткичи 1 дан жуда оз фарқ қилади. Узоқ вақт рентген нурлари умуман синмайди деб ҳам юрилган. Аммо тўлқин узунлиги катта бўлган ($2-3\text{Å}$) рентген нурлари учун Вульф—Брэгг формуласидан систематик четга чиқишлар мавжудлиги аниқланиб, бу четга чиқишлар рентген нурларининг кристаллда синиши туфайли юз беради деб талқин қилинган (Вульф—Брэгг формуласини чиқаришда синиш кўрсаткичи 1 га тенг деб олинади!). Бу четга чиқишларнинг характери рентген нурлари ҳаводан кристаллга ўтишида синиш кўрсаткичи 1 дан *кичик* эканлигини кўрсатади. Бундан шундай хулоса чиқадики, рентген нурлари ҳаводан қаттиқ жисмга ўтганда тўла қайтиши мумкин. Рентген нурлари худди критик қийматдан катта тушиш бурчакларида ёруғликнинг шишадан ҳавога ўтишида тўла ички қайтиш деб аталадиган қайтиш сингари *тўла қайтади*. 1923 йилда А. Комптон рентген нурларининг ҳаводан қаттиқ жисмга ўтганида ҳақиқатан ҳам тўла қайтишини кўрсатди ва критик бурчакни топиб, синиш кўрсаткичини аниқлади. Узунлиги $1,279\text{Å}$ тўлқин зичлиги $2,52$ бўлган кронгласдан ўтганида критик бурчак $11''$ га тенг бўлиб чиққан, бу бурчак синиш кўрсаткичининг 1 дан $5 \cdot 10^{-6}$ кам бўлган (яъни $\mu=0,999995$) қийматига тўғри келади.

Бу кашфиёт шу нарсани кўрсатдики, агар тушиш бурчаклари критик қийматдан катта бўлган, яъни сирпаниш бурчаклари жуда кичик бўлган қайтарувчи панжарадан фойдаланилса, одатдаги дифракцион панжара рентген нурларининг спектрларини ҳосил қилиши мумкин. Ҳар хил тўлқин узунликлар ва ҳар хил моддалар учун тўла қайтишнинг максимал бурчаги 10 дан 3° гача чегарада ўзгаргани сабабли рентген нурларига ишлатиладиган дифракцион панжаралар одатда оптикада ишлатиладиган панжаралардан қўполроқ бўлиши керак. Бу ҳол

биринчи қарашда ғалати (парадокс) туюлади. Аммо шуни назарда тутиш керакки, сирпаниш бурчаги ϑ жуда кичик бўлганда d даврли панжара нурлар нормал тушгандаги $d \sin \vartheta$ даврли панжара сифатида ишлайди*. $10'$ нинг синуси $3 \cdot 10^{-3}$ га тенг бўлгани учун ҳатто жуда қўпол панжаранинг бундай сирпаниш бурчакларидаги эффектив даври шунчалик кичик бўлиб, натижада рентген нурларининг дифракциясини кузатиш имконияти туғилади. Масалан, сирпаниш бурчаги шундай бўлганда бир мм га 50 чизиқ тўғри келадиган панжара бир мм га 17000 чизиқ тўғри келадиган панжара каби ишлайди, ҳозирги замон энг яхши панжараларида эса бир мм га 1200 чизиқ тўғри келади!



88-расм. Рентген нурларининг дифракциясини дифракцион панжарада ҳосил қилиш тажрибаси схемаси. (S_1 ва S_2 тирқишларнинг кенглиги 0,01 мм га, орасидаги масофа 42 см га тенг.)

88-расмда оптик панжарадан дифракцион спектрлар ҳосил қилиш тажрибасининг схемаси тасвирланган, 89-расмда эса мис (тўлқин узунликлари 1,392 Å ва 1,542 Å), хром (тўлқин узунликлари 2,084 Å ва 2,291 Å) спектрлари K сериясининг чизиқлари сони (чизиқларнинг энг катта сони бир мм га 287) расм тагидаги ёзувда кўрсатилган панжаралар билан олинган фотографиялари келтирилган. 1, 2, 3, ... рақамлар спектрнинг тартибини билдиради.

Бу спектрларга қараб тўлқин узунликларини аниқлаш учун дифракцион панжаранинг нурлар қия тушган ҳолдаги қуйидаги формуласидан** фойдаланилади:

$$d (\sin i - \sin r) = n \lambda,$$

бу ерда i — тушиш бурчаги, r — дифракция бурчаги. i ва r бурчакларни 88-расмда кўрсатилган ϑ ва α сирпаниш бурчаклари билан алмаштириб, панжаранинг рентген нурлари спектроскопиясида амалда қўлланиладиган тенгламасини оламиз:

$$d [\cos \vartheta - \cos (\vartheta + \alpha)] = n \lambda \quad (37. 1)$$

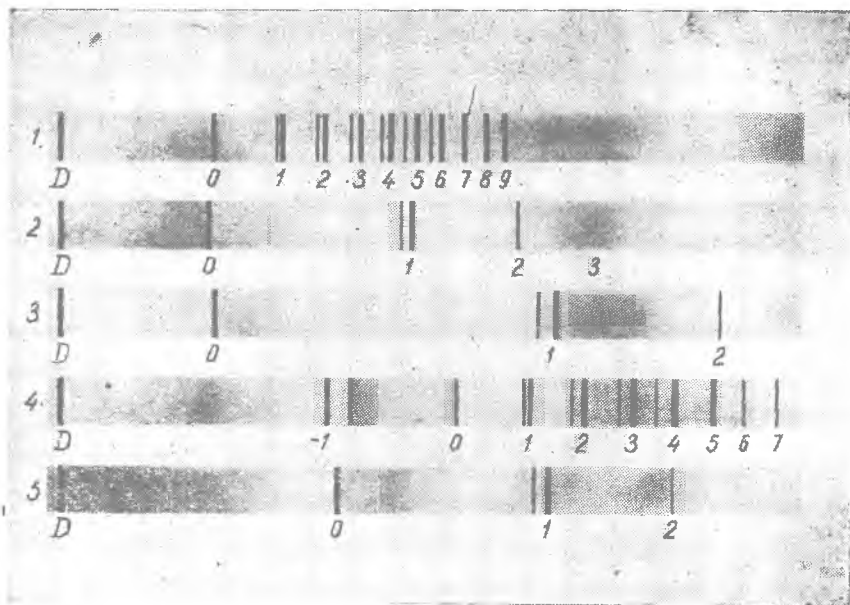
* Г. С. Ландсберг, Оптика, 42-§, Гостехиздат, 1947.

** Г. С. Ландсберг, Оптика, 42-§, Гостехиздат, 1947.

ёки

$$2d \sin \frac{2\vartheta + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = n\lambda. \quad (37.1')$$

Бу тенглама рентген нурларининг тўлқин узунликларини абсолют аниқлашга, яъни билвосита йўл билан топиладиган бирор доимийларни билишга боғлиқ бўлмаган ҳолда аниқлашга имкон беради (34-§ га солиштиринг). Ҳақиқатан ҳам, дифракцион панжаранинг d доимийси компаратор билан бевосита ўлчаниши ёки оптиканинг одатдаги усуллари билан, яъни панжарани спектроскопик стандартлардан бирига қараб даражалаш йўли билан аниқланиши мумкин, ϑ ва α бурчаклар жуда катта аниқлик билан бевосита ўлчанади. Амалда d ни аниқлаш



89-расм Дифракцион панжара ёрдамида ҳосил бўлган типик рентген спектрлар (тақрибан 2 марта катталаштирилган). D —тўғри нур, 0—нолинчи тартиб (тўла қайтган нур). 1—4-фотографиялар—1 мм да 50; 287; 60 ва 143 чизиғи бўлган панжара ёрдамида олинган миснинг K -серия рентген спектрлари. 5-фотография—хромнинг K -серияси; панжаранинг 1 мм да 387 чизиқ бор.

учун мис буғлари спектрининг $\lambda = 5153, 25 \text{ \AA}$ яшил чизиғидан фойдаланилган. Рентген нурлари тўлқин узунликларини бундай абсолют ўлчашлар аниқлиги 0,002—0,004% деб белгиланган.

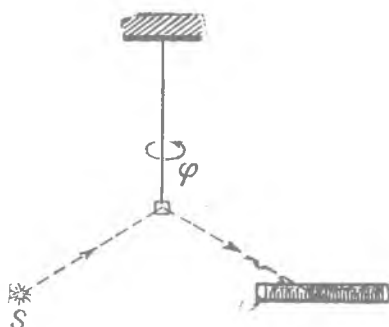
Тадқиқотчилар айти бйр спектрал чизиқларнинг кристаллар ёрдамида ўлчанган тўлқин узунликлари абсолют ўлчанган

узунликлардан айти бир томонга ўртача 0,15% га, яъни ўлчаш аниқлигидан деярли 100 марта фарқ қилганига ҳайро қолганлар.

Тўлқин узунликларини кристаллар методи билан аниқлашдаги хато манбаини излаш соҳасидаги беҳуда кетган кўп уришишлар натижасида рентген-спектроскопиячилар хатў манбаи ўлчашларда эмас, балки Авогадро доимийсининг ўша вақтлар (1931—1935 йиллар) қабул қилинган қийматида экан, деган хулосага келдилар. Авогадро сони кристаллнинг d доимийсини (34. 1) формула бўйича ҳисоблаш учун зарурдир. Шунинг учун Авогадро доимийсини аниқлаш методларини келгуси параграфда текширамиз.

38- §. Авогадро доимийсини ва электрон зарядини аниқлаш

Авогадро доимийси N ни аниқлашнинг бевосита методи Броун ҳаракатини ўрганишга асосланган*. Бунда одатда, эмульсиянинг микроскопик заррачаларининг баландлик бўйича тақсимооти аниқланади ёки суюқлик ёки газда броун ҳаракати қилаётган заррача силжишининг ўртача квадрати ўлчанади



90-расм. Броун айланма ҳаракати таъсири туфайли осиглиқ кўзгуниг ноль вазиятининг ўзгариб туришини кузатиш.

(жумладан бундай катталиклар Милликэн конденсаторида ёғ томчилари билан ўтказилган тажрибада ўлчанган эди). Аммо бу катталикларнинг аниқлиги унча катта эмас, N нинг Перреннинг классик ишларида топилган қиймати унинг ҳозирги замон стандарт қийматидан 25% фарқ қилади. Айланма броун ҳаракатини ўрганишда янада аниқроқ натижалар олинган. Агар жуда енгил кўзгуни ингичка кварц ипга осиб, бу кўзгудан қайтган ёруғлик нурини анча узоқдаги шкалада кузатсак (90-расм),

у ҳолда ёруғ доғ бир жойда қолмасдан, балки мувозанат вазияти атрофида регуляр бўлмаган тебранишлар қилади. Осилган система „нолининг турғунмаслиги“ ҳаво молекулалари томонидан бериладиган зарбалар таъсирида юзага келган айланма броун ҳаракатининг натижасидир. Масалан, йўғонлиги

* Масалан, қуйидаги китобларга қаралсин: Ж. Перрен, Атомы, Госиздат, 1924 ёки Гарнвелл, Ливингуд, Экспериментальная атомная физика, III боб, ОНТИ, 1936, шунингдек, М. А. Леонтович, Статистическая физика, III боб, Гостехиздат 1944.

микроннинг бир нечта ўндан бир улушларича бўлган кварц ипга осилган $0,8 \times 1,6$ мм ўлчовли кўзгудан атиги 1,5 м масофада турган шкалада ёруғ доғ бир неча сантиметрга силжиган.

Классик статистик механиканинг энергиянинг эркинлик даражалари бўйича текис тақсимооти тўғрисидаги теоремаси деб аталувчи энг муҳим теоремасига мувофиқ (85-§ га қаранг), битта эркинлик даражасига тўғри келадиган ўртача кинетик энергия $1/2 k T$ га тенг, бу ерда k —Больцман доимийси; Больцман доимийси универсал газ доимийси R ни Авогадро доимийси N га бўлиб топилади:

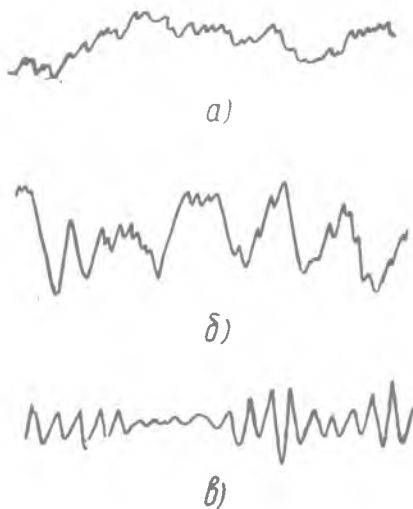
$$k = \frac{R}{N}. \quad (38.1)$$

Бунда бу эркинлик даражасининг қандай эканлиги мутлақо аҳамиятсиз: газнинг илгариланма ҳаракат қилувчи бир атомли молекуласи учун эркинлик даражалари молекула оғирлик марказининг декарт координаталаридир, кўзгалмас ўқ атропофида буралма тебранишлар қила оладиган система учун яккаю ягона эркинлик даражаси φ бурилиш бурчаги билан характерланади. Иссиқлик мувозанатида температура T бўлганда ҳаво молекуласи илгариланма ҳаракатининг битта эркинлик даражасига тўғри келадиган ўртача кинетик энергияси ва ҳавода осифлиқ турган кўзгунинг броун айланма тебранишлари ўртача энергияси айни бирдай бўлиб, $1/2 kT$ га тенг. Бу айланма тебранишларнинг кинетик энергияси $1/2 I \dot{\varphi}^2$ га тенг, бу ерда I инерция моменти. Ип φ бурчакка бурилганида $1/2 A \varphi^2$ га тенг бўлган потенциал энергия ҳосил бўлади, бу ерда A —ипнинг бирор эластиклик доимийси. Кичик тебранишлар учун ўртача кинетик энергия ўртача потенциал энергияга тенг бўлади (46-§ га қаранг):

$$\frac{1}{2} I \overline{\dot{\varphi}^2} = \frac{1}{2} A \overline{\varphi^2}. \quad (38.2)$$

Энергиянинг текис тақсимланиши тўғрисидаги теоремага биноан:

$$\frac{1}{2} A \overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} k T. \quad (38.3)$$



91-расм. Осифлиқ кўзгунинг Броун флуктуациялари: а) атмосфера босимда; б) босим $4 \cdot 10^{-3}$ мм га тенг; в) босим 10^{-4} мм га тенг.

Шундай қилиб, эластиклик доимийси A ва $\overline{\varphi^2}$ ўртача қиймати билган ҳолда k ни бевосита топиш ва ундан фойдаланиб (38. 1) формула ёрдамида N ни ҳисоблаб топиш мумкин.

Авогадро сонини жуда аниқ топиш учун айланма броун ҳаракатини текшириш тажрибаларини Капплер жуда эҳтиётлик билан ўтказган эди. Кўзгунинг оғишлари ҳаракатланаётган фотоплёнкада суратга тушиши билан қайд қилинган. Ҳар хил шароитларда қайд қилинган бундай эгри чизиқларга мисоллар 91-расмда келтирилган. Шунини қайд қиламизки, атмосфера босимида кўзгунинг тебранишлари (91-расмдаги a эгри чизиқ) мутлақо тартибсиз бўлиб, босим камайгани сари тебранишлар (91-расмдаги b ва v эгри чизиқлар) синусоидал тебранишларга яқинлаша борган. Бу тебранишларнинг даври кўзгудан иборат буралма маятникнинг хусусий тебранишларига мос келади. Аммо ҳамма ҳолларда $\overline{\varphi^2}$ ўртача катталиқ айни бир-дайлигича қолиши муҳимдир.

Капплер 287°K температурада кўзгунинг тебранишларини 101 соат давомида юқоридагича қайд қилиб, бу шароитда $\overline{\varphi^2}$ нинг $4,178 \cdot 10^{-6}$ радианга тенг эканлигини топди. Иннинг буралиш доимийси A алоҳида тажрибада $\pm 0,2\%$ аниқлигида топилган. Натижада N нинг $N = 6,059 \cdot 10^{23}$ қиймати $\pm 1\%$ аниқликда олинган.

Аммо бу аниқлик ҳозирги вақтда асосий универсал доимийлар қийматларига қўйиладиган талабларни қаноатлантирмайди. N нинг аниқроқ стандарт қиймати билвосита йўл билан топилади. Электроннинг заряди Фарадей заряди F нинг Авогадро доимийси N га нисбати каби ифодаланиши мумкин (1-§ га қаранг):

$$e = \frac{F}{N}.$$

Милликэн тажрибаларидан e заряд анча аниқ топилган деб ҳисобланганлиги учун, N ни e ва F нинг қийматларига қараб аниқланган:

$$N = \frac{F}{e}.$$

Шундай қилиб, N нинг аниқлиги электрон заряди аниқлигига боғлиқ эди. λ нинг дифракцион панжара ва кристалл ёрдамида аниқланган қийматлари орасидаги систематик фарқ Милликэн олган натижаларни текшириб кўришга туртки берди, чунки кристаллнинг d доимийси аниқланадиган (34. 1) формулада N ҳам бор. 3-§ да айтганимиздек, Милликэн олган натижалар у ўз ҳисоблашларида фойдаланган ҳаво қовушоқлиги η нинг қийматини унча тўғри олмаслик натижасида бузилган эди.

Қийинчиликдан чиқишнинг ягона йўли d кристалл доимийсини, оптикада дифракцион панжараларни даражалашдаги

каби, тўлқин узунлигининг абсолют қиймати бўйича экспериментал равишда аниқлашдир.

Ҳақиқатан ҳам, тўлқиннинг қайтарувчи панжара ёрдамида аниқланган абсолют узунлиги маълум бўлса ва бу тўлқин узунлик биринчи тартибда қайтадиган φ бурчак кристали рентген спектрографи ёрдамида аниқланса, у ҳолда Вульф—Бреггнинг

$$\lambda = 2d \sin \varphi$$

формуласидан кристаллнинг доимийси d ни аниқлаш мумкин. Одатда, рентген спектроскопиясида ишлатиладиган кальцит (CaCO_3) панжара доимийси шу йўл билан аниқланиб, тегишли тузатмалар киритилганда (жумладан, рентген нурларининг синиш кўрсаткичига доир тузатма) 18°C да d нинг қиймати қуйидагича бўлган:

$$d = 3,03560 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Бу катталикни билган ҳолда Авогадро доимийсини қуйидагича топиш мумкин: мунтазам системали (NaCl) кристалл учун (34. 1) формуладан:

$$N = \frac{M}{2a^3\rho}. \quad (38.4)$$

Кальцитнинг элементар ячейкаси куб эмас, балки ромбоэдр бўлади, шунинг учун (38.4) формулани бир оз ўзгартириш керак. Агар β ромбоэдр қирралари орасидаги ўтмас бурчак ($\beta \approx 101^\circ 54'$) бўлса, элементар ячейканинг ҳажми $d^3\Phi(\beta)$ бўлади, бу ерда:

$$\Phi(\beta) = \frac{(1 + \cos \beta)^3}{\sin \beta (1 + 2\cos \beta)};$$

(38.4) формула эса қуйидаги кўринишга келади:

$$N = \frac{M}{2a^3 \Phi(\beta)\rho}. \quad (38.5)$$

Агар бунга барча катталикларнинг аниқ: $M = 100,090$ (химиявий шкаладан); $d_{18^\circ} = 3,0356 \cdot 10^{-8} \text{ см}$; $\rho_{20^\circ} = 2,71025$ ва $\Phi(\beta) = 1,00595$ қийматлари қўйилса, у ҳолда

$$N = (6,0228 \pm 0,0011) \cdot 10^{23} \quad (38.6)$$

бўлади. Бу катталик олдин қабул қилинган стандарт ($6,06 \cdot 10^{23}$) қийматдан анча фарқ қилади.

Авогадро доимийсини билган ҳолда электрон зарядини $e = F/N$ формуладан ҳисоблаб топиш мумкин. Фарадей заряди, яъни электролиз вақтида ҳар қандай ионларнинг бир грамм-эквиваленти олиб ўтадиган электр миқдорининг энг аниқ қиймати (химиявий шкала бўйича):

$$F = (2,89247 \pm 0,00030 \cdot 10^{14} \text{ CGSE} \cdot \text{г} \cdot \text{э} \cdot \text{э} \cdot \text{в}^{-1}.$$

Бу сонни N нинг (38 6) қиймати билан бирга ишлатиб, электрон зарядининг қуйидаги аниқ қийматини топамиз:

$$e = (4,8025 \pm 0,0010) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

39-§. Электроннинг солиштирма заряди

Рентген спектрларини урганиш электроннинг e/m солиштирма зарядини аниқ белгилаш учун ҳам янги имкониятлар яратди. Дисперсиянинг электрон назариясидан заиф боғланган электронлар ва етарлича қаттиқ рентген нурлари бўлган ҳолда си- ниш курсаткичи қуйидагича бўлиши топилди:

$$\mu = 1 - \frac{ne^2}{2\pi m\nu^2}, \quad (39.1)$$

бунда n — 1 см^3 даги электронлар сони ва ν — рентген нурлари частотаси. Электронлар n сонини қуйидагича ифодалаш мумкин: атом номери Z бўлган модданинг бир молидаги электронлар сони NZ га тенг, 1 см^3 даги сони

$$n = \frac{NZ}{M} \rho \quad (39.2)$$

га тенг, бунда M — атом оғирлик. Агар e электростатик бирликларда, F — электромагнит бирликларда ифодаланган бўлса, у ҳолда $Ne = Fc$ бўлади; ν ни $\frac{c}{\lambda}$ билан алмаштириб, (39.1) ва (39.2) формулалардан қуйидагини топамиз:

$$\mu = 1 - \frac{FZ\rho\lambda^2}{2\pi M} \cdot \frac{e}{mc},$$

бундан $\delta = 1 - \mu$ деб белгилаб e/m ни топамиз:

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi M}{FZ\rho} \cdot \frac{\delta}{\lambda^2} \text{ CGSM} \cdot z^{-1}.$$

Бундан e/m ни, яъни солиштирма зарядни электромагнит бирликларда аниқлаш учун δ ни ва рентген нурлари тўлқинининг абсолют узунлигини аниқ билиш етарли эканлиги келиб чиқади. Бу мақсадда рентген нурларининг призма ўрнида ишлатилган катта олмос (оғирлиги 13 карат) ёрдамида ҳосил қилинган спектри қўлланилган.



92-расм. Миснинг K серия призматик спектри.

92-расмда миснинг шундай призма ёрдамида олинган K серияли нурланиш спектри келтирилган. Тўлқин узунликларни мана шу спектрларга қараб аниқлаш натижалари дифракцион панжара билан бажарилган

Ўлчашлардан топиладиган натижаларга жуда мос келади. Ундан ташқари, олмоснинг зичлигини ниҳоят даражада катта аниқлик билан топиб [бунда $\rho = (3,5154 \pm 0,0001) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$] ва (39.3) формуладан фойдаланиб, Бэрдэн e/m нинг қуйидаги қийматини топган:

$$\frac{e}{mc} = (1,7601 \pm 0,0003) \cdot 10^7 \cdot \text{CGSM} \cdot \text{г}^{-1}.$$

Бу сон бевосита йўл билан топилган сонларга яқин (7,8-§ ларга қаранг).

У Б о б

АТОМ ТУЗИЛИШИ ВА КЛАССИК ФИЗИКА

А. КЛАССИК МЕХАНИКА ВА АТОМ ТУЗИЛИШИ

40-§. Атом моделлари

Биз бундан олдинги бобларда атомнинг мусбат электр ва Z электронлардан иборат мураккаб система эканлигининг исботини келтирдик. Атом тузилиши назарияси ривожланишининг дастлабки босқичларида бутун бу система статик система деб фараз қилинган. Электронларни мувозанатда турадиган заррачалар деб қараш мумкин бўлиши учун қуйидагича фараз қилинган: мусбат электр сферада текис тақсимланган бўлиб, бу сфера радиуси бутун атомнинг радиуси тартибда, яъни 10^8 см тартибда, электронлар эса ўша мусбат электр „булутда“ сузгандек юради. Атомнинг ёруғлик чиқариши электронларнинг мувозанат ҳолатлари атрофида жуда кичик тебранишлари натижаси (Ж. Ж. Томсон модели) деб қаралган. Аммо α -заррачаларнинг сочилишига доир ўтказилган тажрибалар статик моделни мутлақо рад қилишга ва планетар моделга ўтишга, яъни электронларни ядро атрофида муайян орбиталар бўйлаб айланадиган заррачалар деб қарашга мажбур қилди. Заррачаларнинг сочилиши сабабини изоҳлаш учун атомнинг деярли бутун массаси тўпланган жуда кичик мусбат ядро (10^{-12} — 10^{-13} см тартибда) борлиги тўғрисида гипотеза кириштишга тўғри келди.

Бу бобда классик физика, чунончи классик механика ва электродинамикада қараладиган ва атом тузилиши проблемаларини назарий ўрганиш учун кўрак бўладиган формал аппаратни ва улардан келиб чиқадиган асосий хулосаларни кўриб ўтамиз. Бунда атом системаларини бутун мураккаб ҳолида ўрганиш ўрнига энг содда механик моделлардан фойдаланамиз. Тебранма ҳаракат қилувчи системага намуна қилиб тўғри чизик бўйича тебранувчи заррачани—чизикли *осцилляторни* оламиз; қўзғалмас марказ атрофида айланма ҳаракат бўладиган системага мусбат ядро атрофида айланувчи электрон намуна бўлади.

41-§. Механикада энергиянинг сақланиш қонуни

Ньютоннинг „ҳаракат қонунлари, яъни аксиомалари“ классик механиканинг асоси ҳисобланади. Маълумки, ҳаракат тенгламалари шаклидаги математик таъриф Ньютоннинг иккинчи қонунидан келиб чиқади. Бу қонунга мувофиқ, ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила қўйилган кучга тенг. Битта заррача учун бу қонундан урта дифференциал тенглама келиб чиқади:

$$\frac{dp_x}{dt} = X, \frac{dp_y}{dt} = Y, \frac{dp_z}{dt} = Z, \quad (41.1)$$

бу ерда X , Y ва Z — кучнинг координата ўқларидаги проекциялари. Бу урта скаляр тенгламани битта вектор тенглама билан алмаштириш мумкин:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (41.2)$$

(вақт бўйича олинган ҳосила устига нуқта қўйиб белгиланади).

Чап томонида *ҳаракат миқдоридан* олинган ҳосила турган (41.2) шаклда ёзилган ҳаракат тенгламаси жуда кичик (ёруғлик тезлигига нисбатан) тезликлар учун ҳам, катта тезликлар ($\frac{v}{c} \sim 1$)

учун ҳам ўринлидир. Аммо $\frac{v}{c} \ll 1$ бўлган ҳолда массани тез-

ликка боғлиқ эмас деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$ ҳосила $m\dot{\mathbf{v}}$ ёки $m\ddot{\mathbf{r}}$ вектор бўлади, бу ерда \mathbf{r} — заррачанинг вазиятини аниқловчи радиус-вектор. Бу шартда тезликлар жуда кичик булган ҳолда (41.1) урта скаляр тенгламани одатдаги

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, m \frac{d^2z}{dt^2} = Z \quad (41.1')$$

кўринишда, (41.2) вектор тенгламани эса:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (41.2')$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди (41.2') тенгламани $\dot{\mathbf{r}}$ тезликка *скаляр* кўпайтирамиз:

$$m \dot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}}. \quad (41.3)$$

Ҳосил бўлган тенгликнинг чап томонини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$m \dot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right).$$

Қуйидаги

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (41.4)$$

катталиқ кинетик энергия деб аталади. Шундай қилиб, (41.3) формуланинг чап томонида кинетик энергиядан вақт буйича олинган ҳосила туради:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \frac{dT}{dt}. \quad (41.5)$$

(41.3) ва (41.5) формулалардан

$$dT = \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} dt = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (41.6)$$

Аммо $\mathbf{F} d\mathbf{r}$ — кучнинг элементар $d\mathbf{r}$ кўчишдаги ишидир, бинобарин, кучнинг иши кинетик энергия орттирмасига тенг.

Кўпчилик ҳолларда кучнинг ташкил этувчилари бирор U функциядан* координаталар буйича олинган хусусий ҳосилаларнинг манфий ишора билан олинган қиймати орқали ифодаланади:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}; \quad (41.7)$$

ёки вектор кўринишда

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U. \quad (41.7')$$

Бу ҳолда

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}\right). \quad (41.8)$$

Агар U фақат координаталарнинг функцияси бўлса, у ҳолда (41.8) нинг ўнг томонида тўла дифференциал туради:

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dt}. \quad (41.9)$$

У ҳолда кучнинг $d\mathbf{r}$ элементар кўчишда бажарган иши

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} dt = -\frac{dU}{dt} dt = -dU,$$

кучнинг A нуқтадан B нуқтагача бўлган чекли йўлдаги иши

$$\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int_A^B dU = U_A - U_B.$$

Бундан ташқари, U функция бир қийматли функция бўлса, у ҳолда кучнинг иши йўлга боғлиқ бўлмай, U нинг йўлдаги бошланғич ва охириги нуқталардаги қийматлари айирмасига тенг. Хоссаси (41.7) тенгликлар билан ифодаланган U функция умуман потенциал функция деб аталади. Агар бу функция

* Энг оддий мисол қилиб mg га тенг бўлган оғирлик кучини олиш мумкин. Бу ҳолда $U = -mgz$; кучнинг ташкил этувчилари:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = mg.$$

вақтга ошкор ҳолда боғлиқ бўлмасдан, координаталарнинг бир қийматли функцияси* бўлса, у потенциал энергия деб аталади.

(41.3), (41.5) ва (41.9) формулалардан

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(T + U) = 0, \quad (41.10)$$

бундан

$$T + U = \text{const} = E. \quad (41.11)$$

Бу эса энергия сақланишининг механик қонунидир: кинетик ва потенциал энергиялар йиғиндиси доимий катталиқдир. Вақтга ошкор ҳолда боғлиқ бўлмаган U потенциалли кучлар майдони консерватив майдон деб аталади.

Аммо баъзан (41.7) хоссаларга эга U функция мавжуд бўлса-да, у вақтга боғлиқ бўлади. Масалан, пластинкалари орасидаги электр потенциаллар айирмаси (V) вақтга боғлиқ равишда даврий ўзгарадиган, масалан,

$$V = V_0 \cos \omega t$$

косинус қонуни билан ўзгарадиган конденсатор ичида зарядли заррачанинг ҳаракатини текширайлик. e заряднинг V га кўпайтмаси

$$U = eV = eV_0 \cos \omega t$$

заррачага майдон томонидан ҳар бир пайтда таъсир қиладиган куч U функциянинг градиенти бўлиш хоссасига эга:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U,$$

аммо U функция, у билан бирга эса \mathbf{F} куч ҳам вақтга ошкор ҳолда боғлиқдир. Бу ҳолда $T+U$ йиғиндининг қиймати доимий эмас. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right).$$

Бинобарин, (41.8) га асосан энди қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t},$$

ва (41.10) ўрнига қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Бу тенглама системанинг „берк эмас“ лигини, яъни система катта системанинг бир қисми эканлигини кўрсатади: албатта, катта система учун энергиянинг сақланиш қонуни уринли бўлади.

* Кўп қийматли потенциал мисоли қуйидаги китобда баён этилган, Т. Леви-Чивит, У. Амальди, Курс теоретической механики, I т., I қ., 326-бет, ОНТИ, 1935.

Кучлар тезликка боғлиқ бўлган ҳоллар учрайди. Бунга ҳаракатланувчи жисмларга муҳитнинг қаршилигини мисол қилиб олиш мумкин: ҳавонинг Стокс қаршилиқ кучи $F = 6\pi\eta av$ ўшандай кучдир. Бу кучни иккинчи параграфда ёғ томчиларининг тушишини ўрганганда учратган эдик. v олдидаги коэффицентни k билан белгилаб ва R қаршилиқ кучи ҳамма вақт тезликка қарама-қарши йўналганлигини ҳисобга олиб, умуман қуйидагича ёзиш мумкин:

$$R = -kv.$$

Заррачанинг R қаршиликли муҳитда F куч таъсиридаги ҳаракатининг тенгламаси

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

бўлади. Бунинг иккала томонини $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v}$ га кўпайтириб, қуйидагини топамиз:

$$m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}.$$

(41.1) ва (41.2) формулаларга асосланиб ва $R\dot{\mathbf{r}} = -kv^2$ ни эътиборга олиб, $\frac{d}{dt}(T + U) = -kv^2$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Олдинги ҳолдагидек, $T + U$ йиғинди доимий қолмаслиги кўриниб турибди; ҳамма вақт $v^2 > 0$ бўлгани учун $-kv^2 < 0$ ва, бинобарин, $T + U$ йиғинди вақт ўтиши билан камаяди: ишқаланиш кучлари консерватив эмас.

Тезликка боғлиқ бўлган кучларнинг энг муҳим ҳоли ҳаракатланувчи зарядли заррачага магнит майдони томонидан таъсир қиладиган кучдир.

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]$$

вектор кўпайтма билан ифодаланадиган бу куч тезликка *перпендикуляр* ва шунинг учун *ҳеч қандай иш бажармайди*.

Ниҳоят, потенциал ўзининг ҳосилалари [(41.7) формулалар] орқали аниқлангани учун фақат потенциаллар айирмаси аниқ қийматга эга бўлишини эслатиб ўтамиз. Потенциалнинг абсолют қийматида эса бирор ихтиёрий ўзгармас миқдор ҳам бўлади, шу туйфайли потенциалнинг ноли ихтиёрий танлаб олиниши мумкин.

42-§. Потенциал эгри чизиқлар

Координаталарда вақт бўйича олинган биринчи ҳосилалар орасидаги муносабат энергиянинг сақланиш қонунидан келиб чиқиб, у механик масалаларни ечишда ишлатилиши мумкин. Заррачанинг бир ўлчовли ҳаракатида ўша битта муносабатнинг ўзи етарли бўлади. Шунинг учун бу ҳолда ўша муносабатдан фойдаланиш жуда қулай. Заррача тўғри чизиқ бўйича ҳара-

кат қилипти деб фараз қилайлик. Агар бу тўғри чизиқни x ўқ деб олсак, у ҳолда потенциал энергия биттагина координатанинг функцияси бўлади: $U = U(x)$. Бу ҳолда энергиянинг сақланиш қонунидан

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E$$

келиб чиқади, бундан

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U)}, \quad (42.1)$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U)}} + t_0,$$

бу ерда t_0 — ихтиёрий ўзгармас.

Потенциал энергиянинг ошкор ифодасини билган ҳолда (42.1) формуладан ҳаракат қонунини топа оламиз. Масалан, $U = \frac{1}{2} f x^2$ деб фараз қиламиз, бу ерда f — бирор мусбат доимийдир. У вақтда (42.1) формуладан қуйидагини топамиз:

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \frac{1}{2} f x^2)}} = \sqrt{\frac{m}{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{f} - x^2}}. \quad (42.1')$$

$2E/f$ мусбат сонни a^2 билан белгилаймиз (равшанки, a нинг ўлчамлиги узунлик ўлчамлиги билан бир хил), у вақтда

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{f}} \arcsin \frac{x}{a},$$

бундан

$$x = a \sin \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t - \sqrt{\frac{f}{m}} t_0 \right),$$

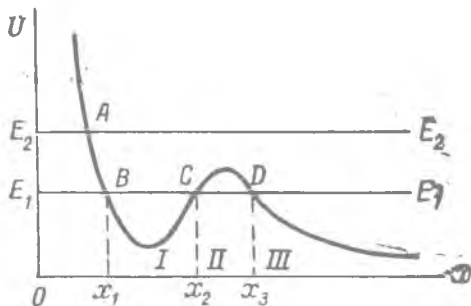
ёки $\sqrt{\frac{f}{m}} t_0$ доимийни δ билан белгилаб, ҳаракат қонунини топамиз:

$$x = a \sin \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t - \delta \right).$$

Шундай қилиб, $U = fx^2/2$ бўлганда ҳаракат гармоник тебранма ҳаракат бўлади.

Бир ўлчовли ҳаракатда потенциал энергияни билиш ҳаракатнинг сифат характерини ҳеч қандай аналитик воситалардан фойдаланмасдан аниқлашга имкон беради. Бунинг учун потенциал энергиянинг координатага боғланишини ифодаловчи эгри чизиқ яшаш кифоя. Бундай эгри чизиқлар потенциал эгри чизиқлар деб аталади.

Масалан, потенциал эгри чизиқ 93-расмда тасвирланган кўринишда бўлсин. У ҳолда (42.1) формуланинг ўнг томонида турган интегрални ҳисобламасданок (ҳатто потенциал энергиянинг аниқ аналитик ифодасини билмасдан ҳам) ҳаракатнинг



93-расм. Потенциал эгри чизиқ намунаси.

баъзи бир муҳим хусусиятларини аниқлай оламиз. Тўла энергиянинг бирор қийматини, масалан, E_1 ни оламиз ва чизмада абсциссалар ўқига параллел равишда ундан E_1 масофада тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ потенциал эгри чизигини абсциссалари x_1, x_2, x_3 бўлган B, C, D нуқталарда кесиб ўтади. Равшанки,

$\sqrt{\frac{2}{m}}(E - U)$ илдиз ҳақиқий,

яъни $E \geq U$ бўлганда (42.1) формула физик маънога (классик механика нуқтаи назаридан) эга бўлади. Расмдан бу шарт бажарилиши учун қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлиши кўриниб турибди:

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad (I)$$

ёки

$$x \geq x_3. \quad (II)$$

Шундай қилиб, заррача I соҳада бўлганда бу соҳадан ташқарига чиқиб кета олмайди. Ҳақиқатан ҳам, унинг абсциссаси x_1 дан кичик ва x_2 дан катта була олмайди, чунки акс ҳолда унинг потенциал энергияси тўла энергиядан катта, x тезлиги эса мавҳум бўлиб қоларди. Бундан, заррача I соҳада тебранма ҳаракат қилади, деган хулоса чиқади. $x = x_1$ ва $x = x_2$ бўлганда заррача четки вазиятларда бўлади, бунда U потенциал энергия E га тенг бўлиб қолади. Равшанки, тебраниш *даври*:

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}$$

Заррача II соҳага ўта олмайди. Агар E_1 тўла энергияли заррача $x = x_3$ нуқтада бўлса, унинг абсциссаси чексизликкача ортиши мумкин, чунки x нинг $x \geq x_3$ шартни қаноатлантирувчи барча қийматларида потенциал энергия тўла энергиядан кичик бўлади.

Энди заррача E_2 энергия запасига эга бўлсин деяйлик: $E_2 > E_1$. Олдинги ҳолдагидек бунда ҳам чизмада E_2 баландликда тўғри чизиқ ўтказиб, A дан ўнг томонда заррача чек-

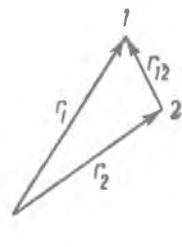
сизликкача кўчишини кўрамиз, чунки у ёқда заррачанинг тўла энергияси ҳамма жойда потенциал энергиядан катта бўлади. А дан чап томонда эса заррачанинг ҳаракатига енгиб бўлмайдиган барьер ($E < U$ соҳа) қаршилик қилади.

Ҳаракатнинг сифат характерини потенциал эгри чизиқ ёрдамида қуйидаги кўргазмали иллюстрациядан фойдаланиб аниқлаш мумкин. Профили потенциал эгри чизиқ билан устма-уст тушадиган идеал силлиқ йўл бор деб фараз қилайлик. 93- расмда кўрсатилган эгри чизиқни олсак, бу йўл нишаблик бўлиб, салгина кўтарилади ва сўнгра яна пастга кетади. Мана шу йўлга E баландликда оғир шарчани ўз ҳолига қўямиз. Шарча пастга думалаб кетади ва унинг ҳаракати бизни қизиқтираётган заррача ҳаракатини деярли аниқ тасвирлайди. Агар шарчани E_1 баландликка кўтариб қўйсак, у ҳолда шарча I чуқурликда олдинга ва орқага юмалаб бориб-келиб туради, лекин II дўнгликдан „ўтиб кета“ олмайди. Агар шарчани E_2 баландликкача кўтариб қўйсак, шарча II тепаликдан бемалол ўтиб, чексизликка кетади.

Оғир шарчанинг потенциал энергияси у кўтарилган баландликка пропорционал бўлиши иллюстрациядан фойдаланишга сабаб бўлади. Шарча энергиясининг бир қисми уни айлангиришга сарф бўлиши туфайли иллюстрацияда бир оз ноаниқлик бўлади.

43-§. Импульсининг сақланиш қонуни

Шу вақтгача биз битта заррачанинг бирор кучлар майдонидаги ҳаракатини текшириб келдик. Энди иккита заррачадан иборат булган жуда оддий системани текшираемиз ва бу заррачалар фақат ўзаро таъсир кучлари таъсирида бўлади деб фараз қиламиз. Бундай кучлар ички кучлар деб аталади. Система заррачаларига ташқаридан таъсир этувчи кучлар эса ташқи кучлар деб аталади. Заррачаларга тааллуқли бўлган параметрларни мос равишда 1 ва 2 индекслар билан белгилаймиз. Биринчи заррачанинг ихтиёрий O марказга нисбатан вазияти \mathbf{r}_1 радиус вектор билан, иккинчи заррачанинг вазияти эса \mathbf{r}_2 радиус-вектор билан характерланади (94-расм). Иккала заррачанинг ҳаракат тенгламалари қуйидагича бўлади:



94- расм.

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad (43.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} \quad (43.2)$$

бунда \mathbf{F}_{12} вектор биринчи заррачага иккинчи заррача томонидан таъсир этадиган кучни, \mathbf{F}_{21} вектор эса иккинчи заррачага биринчи заррача томонидан таъсир этадиган кучни билдиради.

Ньютоннинг учинчи қонунига биноан, бу кучларнинг катталиги тенг ва йўналиши қарама-қарши, шунинг учун

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \quad (43.3)$$

(43.1) ва (43.2) ларни қўшиб ва (43.3) ни ҳисобга олган ҳолда қўйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} & m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \\ \text{ёки} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) = 0,$$

бундан

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const}, \quad (43.4)$$

ёки

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{const}.$$

$m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m_i \mathbf{v}_i$ вектор катталиқ заррачанинг импульси ёки ҳаракат миқдори деб аталади.

(43.4) тенглик ҳар қандай ички кучлар таъсирида бўлган иккита заррача системасида импульснинг сақланиш қонунини ифодалайди. Бу қонунни фақат ички кучлар таъсирида бўлган n та заррачалар системасига ҳам умумлаштириш мумкин. k - заррачанинг ҳаракат тенгламаси

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_l \mathbf{F}_{kl}, \quad (43.5)$$

Бунинг ўнг томони k - заррачага системанинг бошқа заррачалари томонидан таъсир қилувчи барча кучларнинг йиғиндисини билдиради. Йиғинди белгиси устидаги штрих йиғинди l индекснинг $l = k$ қийматидан бошқа барча қийматларида олинишини билдиради. Системанинг барча заррачалари учун ҳаракат тенгламаларини ёзиб ва уларнинг йиғиндисини олиб, чап томонини вақтдан олинган биринчи ҳосила шаклида ифодалаймиз:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}.$$

Аммо бунинг ўнг томони нолга тенг эканлигини кўриш осон. Ҳақиқатан ҳам, ўнг томонда ҳар бир \mathbf{F}_{kl} ҳад учун ўзига тенгишли \mathbf{F}_{lk} ҳад топилади. Ньютоннинг учинчи қонунига биноан, ҳар бир кучлар жуфти учун

$$\mathbf{F}_{kl} + \mathbf{F}_{lk} = 0,$$

шунинг учун,

$$\frac{d}{dt} m_i \dot{r}_i = 0$$

ёки

$$\sum m_i \dot{r}_i = \text{const}, \quad (43.6)$$

шунинг исбот қилиш керак эди.

44-§. Ўзаро тўқнашиш

Икки заррачанинг ўзаро тўқнашиши тўғрисидаги масалага импульснинг ва энергиянинг сақланиш қонунларини татбиқ этамиз. m_1 ва m_2 массали заррачаларнинг тўқнашгунча бўлган тезликлари v_1 ва v_2 , тўқнашгандан кейинги тезликлари c_1 ва c_2 бўлсин.

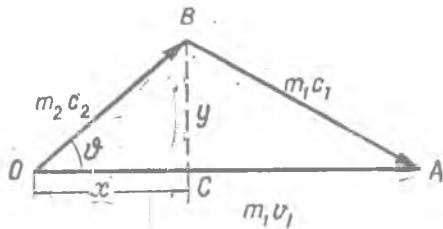
Оқорида ўзаро таъсир кучлари характери ҳар қандай бўлганда ҳам импульснинг сақланиш қонуни ўринли бўлишини кўрдик. Бу қонунга биноан, системанинг тўла импульси сақланади, яъни иккала заррачанинг тўқнашгунга қадар импульслари йиғиндиси уларнинг тўқнашгандан кейинги импульслари йиғиндисиغا тенг бўлади.

Заррачаларнинг тўқнашгунга қадар бўлган импульсларини p_1 ва p_2 билан, тўқнашгандан кейинги импульсларини мос равишда p'_1 ва p'_2 билан белгилаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2. \quad (44.1)$$

Заррачалар тўқнашганда энергия чиқарилмаган ва ютилмаган, аниқроқ қилиб айтганда, тўқнашиш натижасида заррачаларнинг ички энергияси ўзгармаган ҳолдагина механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлади.

Бу шарт кўпинча бажарилмайди. Масалан, атом ядроларининг ядро реакцияларида сабаб бўлувчи тўқнашишларида одатда кўп миқдорда энергия ажралади (камдан-кам ҳолларда энергия ютилади); электронлар атомларга тўқнашганда маълум шароитларда (91-§ ва ундан кейингиларга қаранг) иккала заррача нисбий ҳаракатининг кинетик энергиясининг бир қисми ёки ҳаммаси атомни уйғотиш энергиясига айланиб кетиши, яъни энергия ютилиши мумкин. Бу параграфда фақат эластик тўқнашишларнигина, яъни механик энергия сақланган тўқнашишларнигина қараб чиқамиз. Бу ҳол (44.1) вектор тенгламага қўшимча яна бир скаляр тенгламани беради. Кинетик



95- расм.

энергияларни импульслар орқали ифодалаб, бу тенгламани қуйидагича ёзамиз:

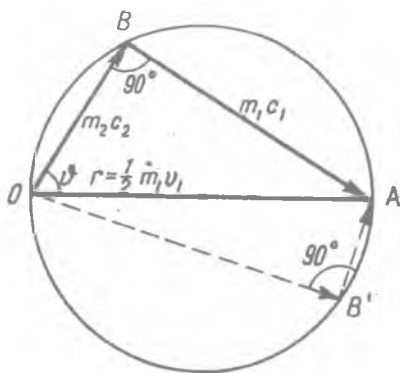
$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}. \quad (44.1')$$

Айтайлик, 2-заррача тўқнашгунга қадар тинч турган, яъни $p_2 = 0$ бўлсин. Бу шарт атом физикасида ўтказиладиган тажрибаларда етарлича аниқлик билан кўп ҳолларда бажарилади. Масалан, электронлар билан атомларнинг тўқнашишларини урганишда одатда атомлар кучланиш қуйиб тезлаштирилган электронлар дастаси билан бомбардимон қилинади. Бунда электронларнинг тезлигинишонга олинаётган атомларнинг газокинетик тезликларидан жуда катта булганидан атомларнинг тезликларини нолга тенг деб олиш мумкин. Шунга ўхшаган ҳоллар ядро заррачаларининг сочилишини урганишда ёки ядро реакцияларида янада кўпроқ даражада юз беради.

$p_2 = 0$ бўлганда (44.1) тенглама қуйидаги вектор тенгликка айланади:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \quad (44.2)$$

Бу тенгликни қаноатлантириш учун \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}'_1 ва \mathbf{p}'_2 векторлар ёпиқ OBA учбурчак ҳосил қилиши керак (95-расм). Энди биз 2- заррачанинг тўқнашгандан кейинги йўналиши ҳар қандай бўлганда ҳам унинг тўқнашганда кейинги импульси вектори \mathbf{p}'_2 нинг



96- расм.

уқи бўлган B нуқта айланада ётишини кўрсатамиз. B нуқтанинг боши O нуқтада бўлган системага нисбатан координаталар

$$x^2 + y^2 = p_2'^2 \quad (44.3)$$

тенгламани қаноатлантиради. Сўнгра, BCA учбурчакдан:

$$(p_1 - x)^2 + y^2 = p_1'^2 \quad (44.4)$$

$p_2 = 0$ бўлганда энергиянинг сақланиш қонуни қуйидаги тенглик ўринли бўлишини талаб қилади:

$$\frac{p_1^2}{m_1} = \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{p_2'^2}{m_2}. \quad (44.5)$$

(44.4) га $p_1'^2$ нинг (44.5) дан топиладиган ифодасини қуйиб ва (44.3) дан фойдаланиб, соддагина алгебраик шакл алмаштиришлардан кейин қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 x = 0. \quad (44.6)$$

Бу тенглама осонгина қуйидаги кўринишга келтирилади:

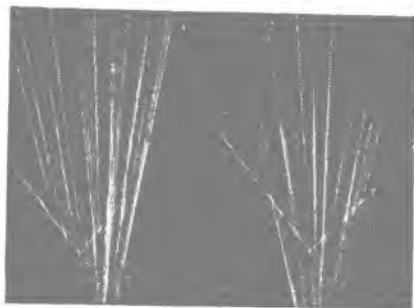
$$\left(x - \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1\right)^2. \quad (44.6')$$

Аммо бу тенглама B нуқтадан ўтадиган ва радиуси

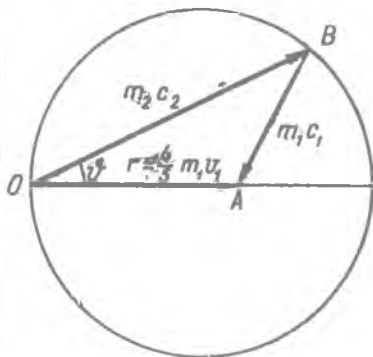
$$r = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} p_1 \quad (44.7)$$

бўлган айлананинг тенгламасидир.

Энди баъзи бир қизиқ хусусий ҳолларни текшираемиз. Масалан, $m_1 = m_2$ бўлсин; бундай ҳол α -заррачалар гелий ядроси билан тўқнашганда ёки протон енгил водород ядроси билан тўқнашганда юз беради. $m_1 = m_2$ бўлганда (44.7) дан $r = \frac{1}{2} p_1$ бўлишини топамиз. Бу ҳолда айлананинг диаметри учиб келаётган заррачанинг импульсига тенг бўлади, яъни айлана B ва A нуқталардан ўтади. Бундан (96- расм), тўқнашганларидан кейин заррачалар бир-бирига нисбатан тўғри бурчак остида учиб кетади деган хулоса чиқади. 97- расмда α -заррачанинг гелий ядросига тўқнашишининг стереоскопик фотографияси келти-



97- расм.



98- расм.

рилган. Тўқнашгандан кейин иккала заррача тўғри бурчак остида учиб кетиши расмдан кўриниб турибди. $p_1 = 0$ бўлган ҳол мустаснодир („рўпара тўқнашиш“). Бу ҳолда импульснинг сақланиш қонунидан (импульсларнинг ошкор ифодаларини ёзган ҳолда) қуйидаги тенгликни топамиз:

$$m_1 v_1 = m_2 c_2,$$

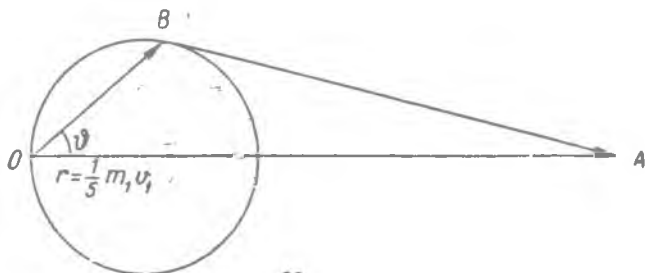
бу тенгликдан ($m_1 = m_2$ бўлганда) $c_2 = v_1$. Демак, рўпара тўқнашишда учиб келаётган заррача тўхтайти ва ўз импульсини бомбардимон қилинаётган заррачага беради.

Иккинчи мисол тариқасида $m_2/m_1 = 4$ бўлган ҳолни текширамиз. Бу ҳол протон гелий ядроси билан ёки α -заррача ксилород ядроси билан тўқнашганда юз беради.

(44.7) формуладан қуйидагини топамиз:

$$r = \frac{4}{5} p_1.$$

Учиб келаётган заррачанинг тўқнашгандан кейинги импульси катталиги маълум бўлган ҳолда иккала заррачанинг тўқнашгандан кейинги учиш бурчаклари 98-расмдаги чизмага қараб ҳисобланади.



98- расм.

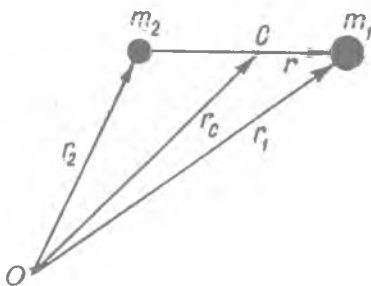
$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$, яъни масалалар нисбати катталиги олдингига тескари бўлган ҳол ҳам анча диққатга сазовордир (масалан, α -заррачанинг протон билан тўқнашиши), бу ҳолда (44.7) дан

$$r = \frac{1}{5} p_1.$$

99-расмдан бу ҳолда p_2 ҳамма вақт p_1 дан анча кичик бўлиши кўриниб турибди.

45-§. Инерция маркази

Икки заррачанинг ҳар қандай системасида *инерция маркази* деб аталадиган ажойиб нуқта бўлади. Унинг радиус-вектори қуйидагича аниқланади (100-расм):



100-расм.

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}. \quad (45.1)$$

Икки заррачадан иборат системада инерция маркази иккала заррачани туташтирувчи тўғри чизиқда ётишини, бу тўғри чизиқни массалар нисбатига тескари бўлган нисбатда бўлишини кўр-

сатиш осон. Ҳақиқатан ҳам, (45. 1) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$m_1(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_1) = m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c). \quad (45. 2)$$

Аммо бу тенглик $\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_1$ ва $\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_2$ векторларнинг параллел эканлигини билдиради, улар учун C умумий нуқта бўлгани учун, $m_1 C$ ва m_2 учта нуқта бир тўғри чизиқда ётади. Шундай қилиб, фикримизнинг бир қисми исбот қилинди. Унинг иккинчи қисми қуйидаги ёзиш мумкин бўлган (45. 2) тенгликдан бевосита кўринади:

$$\frac{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c|} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (45. 3)$$

Энди инерция марказининг хоссаларини текшираемиз. Иккита заррачадан иборат системада импульснинг сақланиш қонуни вектор шаклда қуйидаги тенглик билан ифодаланади:

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const}. \quad (45. 4)$$

Энди инерция марказининг радиус-векторидан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}.$$

Бу ифодани (45. 4) билан солиштириб қарасак

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \text{const} \quad (45. 4')$$

эканлигини кўраемиз. Шундай қилиб, ташқи кучлар таъсир этмайдиган икки заррача системасида инерция маркази тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади.

Атом физикасида (45. 4') тенглик ўринли бўлган координаталар системаси одатда „лаборатория системаси“ деб аталади, чунки декарт координата ўқлари бу ҳолда, масалан, лаборатория хонасининг иккита девори текисликлари полининг текислиги билан кесишишидан ҳосил бўлади. Аммо координаталар боши инерция марказида жойлашган координаталар системасини киритишимиз мумкин. *Инерция маркази системаси* деб аталадиган бундай координаталар системасининг қатор афзал томонлари борлигини ҳозир қуйида кўраемиз.

Координаталарнинг лаборатория системасида инерция марказининг тезлиги:

$$\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2},$$

бу ерда \mathbf{v}_1 ва \mathbf{v}_2 иккала заррачанинг координаталарнинг лаборатория системасидаги тезликлари, заррачаларнинг инерция маркази системасидаги тезликларини топиш учун \mathbf{v}_1 ва \mathbf{v}_2 дан

инерция марказининг v_c тезлигини айириш керак. Шундай қилиб,

$$v_1' = v_1 - v_c = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \quad (45.5)$$

$$v_2' = v_2 - v_c = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1). \quad (45.6)$$

Инерция маркази системасида тўла импульс қуйидагича бўлади:

$$P = p_1' + p_2' = m_1 v_1' + m_2 v_2';$$

(45.5) ва (45.6) ларни эътиборга олсак,

$$P = 0$$

эканини кўрамиз.

Шундай қилиб, координаталарнинг инерция маркази системасида заррачалар системасининг тўла импульси ўзгармас ва нолга тенгдир. Координаталарнинг инерция маркази системасига ўтиш кўпчилик ҳолларда мақсадга мувофиқдир, чунки бу координаталарда биз бутун сифатида қараладиган системанинг ҳаракатини эътибордан четда қолдириб, заррачалар системаси ичидаги нисбий ҳаракатларни ўрганамиз. Аммо энергетик ҳисоблашларда инерция марказининг ҳаракатини ҳам эътиборга олиш зарурлигини ҳозир кўрамиз.

Ҳақиқатан ҳам, икки заррачадан иборат системанинг тўла кинетик энергиясини ҳисоблаймиз. Бунинг учун, равшанки, заррачалар тезликларини координаталарнинг лаборатория системасига нисбатан ёзиш керак. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} E_{\text{лаб}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1' + v_c)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2' + v_c)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 + (m_1 v_1' + m_2 v_2') v_c. \end{aligned}$$

(45.5) ва (45.6) формулаларга асосан, охириги ҳад нолга тенг; шундай қилиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$E_{\text{лаб}} = E_{\text{и.м}} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2. \quad (45.7)$$

Бу жуда муҳим формуладир. Иккита заррачанинг эластик бўлмаган тўқнашиши натижасида юз берадиган бирор процессни текширайлик. Бунга, масалан, электронга тўқнашиши натижасида атомнинг ионланиши ёки молекуланинг диссоциацияланиши, ёки тез заррача таъсирида юз берадиган ядро реакцияси, ёки шуларга ўхшаган бошқа процесс мисол бўлади. Процесснинг юз бериши учун зарур бўладиган критик энергия (ионланиш энергияси, диссоциацияланиш энергияси ва шу кабилар), равшанки $E_{\text{и.м}}$ га тенг. Аммо (45.7) формула учиб келаётган заррачанинг (электрон, протон ва шу кабилар) энергияси $E_{\text{и.м}}$ энергиядан инерция марказининг кинетик энер-

гияси миқдорича ортиқ бўлиши кераклигини кўрсатади (инерция марказида системанинг бутун массаси тўпланган).

Бомбардимон қилинаётган заррача (нишон) нинг v_2 тезлигини нолга тенг деб олиш мумкин бўлганда $E_{\text{лаб}}$ жуда осон ҳисобланади. Бу ҳолда

$$E_{\text{лаб}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

$$E_{\text{и. м}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2,$$

чунки $v_2 = 0$. Шундай қилиб,

$$\frac{E_{\text{лаб}}}{E_{\text{и. м}}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2},$$

$$E_{\text{лаб}} = E_{\text{и. м}} \frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

Бундан $m_2 \gg m_1$ бўлган ҳолдагина $E_{\text{лаб}} = E_{\text{и. м}}$ деб ҳисоблаш мумкин эканлиги келиб чиқади.

М а ш к. $N^{14} + He^4 \rightarrow O^{17} + H^1$ ядро реакциясининг энергияси $1,13 \text{ Мэв}$ га тенг ($1 \text{ Мэв} = 10^6 \text{ эв}$). Бу реакция юз бериши учун α -заррачанинг минимал энергияси қанчага тенг бўлиши керак? (Жавоб: $1,45 \text{ Мэв}$.)

46-§. Чизиқли гармоник осциллятор

m массали заррача ўзининг мувозанат вазиятидан оғишига пропорционал бўлган ва ҳамиша мувозанат вазиятига қараб йўналган куч таъсирида тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилсин. Бундай тебранма система чизиқли гармоник осциллятор деб аталади. Эластик пружинага осилган оғир шарча унинг намунаси бўлади (101-расм). Электр майдони таъсирида тебранувчи электрон ҳам чизиқли гармоник осциллятор бўлади. Лекин бунда қуйидаги шарт бажарилиши керак: майдон томонидан электронга таъсир этувчи куч электроннинг мувозанат вазиятидан узоқлашишининг биринчи даражасига пропорционал бўлиб, ўша вазиятга қараб йўналган. Эластиклик кучига ўхшаш, юқоридаги талабни қаноатлантирадиган барча кучлар *квазиэластик* кучлар деб аталади.

Чизиқли осцилляторда заррача тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилгани учун ҳамма вақт бу тўғри чизиқни координаталар ўқи деб қабул қилишимиз мумкин. Бу ўқ x ўқ бўлсин ва координаталар боши заррачанинг мувозанат вазияти билан устма-уст тушган

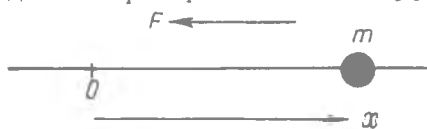


101-расм. Чизиқли гармоник осциллятор модели.

бўлсин (102-рasm). Бу ҳолда ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$m\ddot{x} = -fx, \quad (46. 1)$$

бу ерда f катталиқ $x = 1$ оғишда пайдо бўладиган кучга тенг доимий пропорционаллик коэффициенти: бу коэффициент „кванзиэластик куч доимийси“ деб аталади. (46. 1) тенг-



ламани қуйидагича ёзамиз:

102-рasm.

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}x = 0 \quad (46. 2)$$

ёки $\frac{f}{m} > 0$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{f}{m} = \omega^2 \quad (46. 3)$$

белгилаш киритиб, юқоридаги тенгламани

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0 \quad (46. 4)$$

кўринишда ёзамиз: (46. 4) тенгламанинг хусусий ечимлари

$$x_1 = \cos \omega t, \quad x_2 = \sin \omega t \quad (46. 5)$$

бўлади. Бундай эканлигига уларни (46. 4) га бевосита қўйиб йшониш мумкин.

Чизиқли дифференциал тенгламаларнинг маълум хоссасига биноан, умумий ечим хусусий (46. 5) ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (46. 6)$$

бунда c_1 ва c_2 — ихтиёрий доимийлар. Бу доимийларни бошланғич шартлардан топиш мумкин: масалан, $t = 0$ бўлганда $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ бўлса, у ҳолда $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0/\omega$ эканлигига ишониш мумкин; шунинг учун (46. 6) қуйидаги кўринишга келади:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (46. 7)$$

Бизнинг мақсадларимиз учун (46. 6) умумий ечимни бир оз бошқача кўринишда тасвирлаш қулай. (46. 6) ни c_1 ни қавсдан ташқарига чиқариб ёзамиз:

$$x = c_1 \left(\cos \omega t + \frac{c_2}{c_1} \sin \omega t \right).$$

Бунда $\frac{c_2}{c_1} = \operatorname{tg} \delta$ деб олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x = c \left(\cos \omega t + \operatorname{tg} \delta \cdot \sin \omega t \right) = \frac{c_1}{\cos \delta} \cos (\omega t - \delta) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos (\omega t - \delta)$$

ёки $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = a$ белгилашдан фойдалансак,

$$x = a \cos (\omega t - \delta), \quad (46. 8)$$

бу ерда a ва δ — янги ихтиёрий доимийлар.

Равшанки, (46. 8) формула билан ифодаланган ҳаракат даврий ҳаракат бўлади, чунки вақт бу формулага даврий функция орқали киради. Демак, бу

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos[\omega(t + T) - \delta]$$

бўладиган T вақт оралиги мавжуд эканини билдиради. Бундан шундай хулоса чиқади:

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T};$$

ω бурчак частота деб, T даврнинг тескари катталиги чизиқли частота ν деб аталади:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

(46. 3) га асосан

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}, \quad (46. 9)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}}. \quad (46. 10)$$

Энди *осцилляторнинг энергиясини* ҳисоблаймиз. Кинетик энергияси $E_k = \frac{m}{2} \dot{x}^2$ га тенг ёки $\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t - \delta)$ бўлгани учун

$$E_k = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t - \delta). \quad (46. 11)$$

Агар заррача мувозанат вазиятда турган пайтдаги потенциал энергиянинг қиймати ноль деб қабул қилинса, у вақтда заррачанинг x координатали бирор вазиятидаги потенциал энергия қўйидагига тенг бўлади:

$$E_p = - \int_0^x F dx = f \int_0^x x dx = \frac{fx^2}{2}. \quad (46. 12)$$

Бунга (46. 8) дан x нинг қийматини ва (46.9) дан топиладиган $f = m\omega^2$ қийматни қўйсак, потенциал энергия:

$$E_p = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \cos^2(\omega t - \delta). \quad (46. 13)$$

(46. 11) ва (46. 13) формулалар ёрдамида тўла энергияни топамиз:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 [\sin^2(\omega t - \delta) + \cos^2(\omega t - \delta)] = \\ = \frac{1}{2} ma^2\omega^2. \quad (46. 14)$$

(46. 11) ва (46. 13) формулалар кинетик ва потенциал энергияларнинг вақт бўйича синус ва косинус квадратлари каби

Ўзгаришини кўрсатади. Шунинг учун энергиянинг тўла даврдаги ўртача қийматларини топиш учун косинус ва синус квадратларининг ўртача қийматларини ҳисоблаб топиш етарлидир. Бунда вақтга боғлиқ бўлмаган фаза доимийси δ нинг борлиги ҳеч қандай аҳамиятга эга эмас. T давр ичидаги ўртача қиймат таърифига биноан, қуйидагиларни топамиз:

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \, dt = \frac{1}{2}, \quad (46. 15)$$

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \, dt = \frac{1}{2}. \quad (46. 16)$$

Яна $\cos^2 \omega t$ ва $\sin^2 \omega t$ нинг даврга нисбатан жуда катта вақт оралигидаги ўртача қийматлари ҳам яримга тенг бўлишини қайд қиламиз. t_1 шундай вақт оралиги бўлсин: $t_1 \gg T$. Таърифга биноан,

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega t_1} \sin 2\omega t.$$

Аmmo $\omega t_1 = 2\pi \frac{t_1}{T}$; агар $t_1 \gg T$ бўлса, у ҳолда ωt_1 жуда катта сон бўлади, шунинг учун иккинчи ҳад жуда кичкина ва уни эътиборга олмаса ҳам бўлади. Шундай қилиб, етарлича катта вақт оралиги учун

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}.$$

Худди шунингдек,

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб, кинетик энергиянинг бир давр ёки даврга нисбатан жуда катта вақт оралигидаги ўртача қиймати (46. 11) ва (46. 15) формуларга асосан қуйидагига тенг эканлиги келиб чиқади:

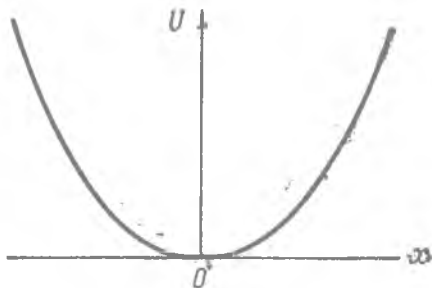
$$\bar{E}_k = \frac{1}{4} a^2 m \omega^2 \quad (46. 17)$$

ва ўртача потенциал энергия

$$\bar{E}_p = \frac{1}{4} a^2 m \omega^2, \quad (46. 18)$$

(46. 17), (46. 18) ва (46. 14) формуларни таққослашдан

$$\bar{E}_k = \bar{E}_p = \frac{1}{2} E \quad (46. 19)$$



103-расм. Гармоник осцилляторнинг потенциал эгри чизиги.

эканлиги, яъни чизиқли гармоник осциллятор кинетик энергиясининг катта вақт оралигидаги ўртача қиймати ўртача потенциал энергияга тенг ва уларнинг ҳар бири тўла энергиянинг ярмига тенг эканлиги келиб чиқади. Потенциал энергия кўчишининг квадратига пропорционал, яъни $U = fx^2/2$ бўлгани учун гармоник осцилляторнинг потенциал эгри чизиғи парабола бўлади (103-расм).

47- §. Тебранишларни комплекс тасвирлаш

Гармоник осциллятор тебранишлари тенгламасининг

$$x = a \cos(\omega t - \delta) \quad (46. 8)$$

умумий ечимини формал нуқтаи назардан катта афзалликлари бўлган бошқачароқ кўринишда ёза оламиз. Бунинг учун биз аввал математик анализдаги маълум теоремага биноан, ҳар қандай

$$u = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (47. 1)$$

комплекс сонни мавҳум кўрсаткичли экспоненциал функция кўринишида тасвирлаш мумкин эканлигини эсга олайлик:

$$u = re^{i\varphi}, \quad (47. 2)$$

бунда r — комплекс соннинг модули деб аталади ва $|u|$ орқали ҳам белгиланади. φ — аргумент ёки фаза. Агар (47. 1) ва (47. 2) да i ўрнига $-i$ қўйилса,

$$u^* = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = re^{-i\varphi} \quad (47. 3)$$

комплекс сон ҳосил бўлади, бу сон u билан комплекс қўшма сон деб аталади. Иккита комплекс қўшма соннинг кўпайтмаси уларнинг умумий модулининг квадратига тенг, яъни

$$uu^* = re^{i\varphi} \cdot re^{-i\varphi} = r^2 = |u|^2.$$

Қуйидаги

$$x = a(\cos \omega t + i \sin \omega t) = ae^{i\omega t} \quad (47. 4)$$

комплекс ифода ва унга комплекс қўшма бўлган

$$x^* = a(\cos \omega t - i \sin \omega t) = ae^{-i\omega t} \quad (47. 5)$$

ифода гармоник осцилляторнинг (46. 4) дифференциал тенгламасини қаноатлантиришини кўрамиз, чунки улар айтилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимларининг чизиқли комбинациясидир. Шунинг учун тебранишлар формуласини *формал равишда* тригонометрик кўринишдагина эмас, балки (47. 4) ёки (47. 5) экспоненциал кўринишда ҳам ёза оламиз. Бундай қилишнинг сабаби кўпчилик ҳолларда экспоненциал функциялар устида математик амаллар бажариш тригонометрик функ-

циялар устида амаллар бажаришдан осонроқ бўлишидадир. Аммо физика нуқтаи назаридан $x = ae^{i\omega t}$ формулада зиддият бор, чунки унинг чап томонида ҳақиқий катталиқ (координата), ўнг томонида эса комплекс катталиқ туради. Шунга қарамасдан, экспоненциал функциялар билан амаллар бажариш имкониятини сақлаб қолиш учун бундай шарт қўйилади: бошда бу функциялардан фойдаланиш, лекин охириги натижада ҳосил бўлган комплекс соннинг фақат ҳақиқий қисминигина олиш керак. Шубҳа туғилиши мумкин бўлган ҳолларда бу ҳақиқий қисм комплекс соннинг олдига қўйилган Re символ билан белгиланади:

$$\text{Re } e^{i\varphi} = \cos\varphi.$$

Равшанки,

$$\text{Re } e^{i\omega t} = \text{Re } e^{-i\omega t} = \cos\omega t,$$

шунинг учун иккита қўшма комплекс соннинг хоҳлаган биридан бир хил фойдаланиш мумкин.

Чизиқли осциллятор тенгламасининг

$$x = a \cos(\omega t - \delta)$$

умумий интегрални бу шартда қуйидагича ёзилади:

$$x = \text{Re } ae^{i(\omega t - \delta)}.$$

Комплекс амплитуда киритиш билан бу ифода янада соддалаштирилади. $ae^{i(\omega t - \delta)} = ae^{-i\delta} \cdot e^{i\omega t}$ эканлигини қайд қилиб, $A = ae^{-i\delta}$ комплекс амплитуда киритамиз. $A^* = ae^{i\delta}$ қўшма комплекс амплитуда бўлади, ҳақиқий a амплитуданинг квадрати AA^* кўпайтма шаклида топилади:

$$AA^* = ae^{-i\delta} \cdot ae^{i\delta} = a^2 = |A|^2.$$

Комплекс амплитудалардан фойдаланиб, гармоник тебранишлар формуласини ҳамма вақт қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = \text{Re } Ae^{i\omega t}$$

ёки соддагина қилиб,

$$x = Ae^{i\omega t},$$

бунда бошланғич δ фаза комплекс амплитуда ифодасига кирганлигини эсда тутиш керак.

Тебранишларни комплекс тасвирлашнинг бу параграфда кўрсатилган усули чизиқли ифодалар билан иш кўрганлимиздагина тўғри натижалар беради. Агар даврий равишда ўзгарадиган катталиқ квадрат даражада ёки ундан юқорироқ даражада қатнашса ёки бундай катталиқларнинг кўпайтмаси билан иш кўрилса, у ҳолда яна тригонометрик функцияларга ўтиш керак. Шундай қилиш зарурлиги қуйидагидан кўринади: ком-

плекс сон квадратининг ҳақиқий қисми унинг ҳақиқий қисми квадратига тенг эмас:

$$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + i2ab,$$

демак,

$$\operatorname{Re}(a + bi)^2 \neq a^2.$$

Худди шунингдек, комплекс сонлар кўпайтмасининг ҳақиқий қисми уларнинг ҳақиқий қисмларининг кўпайтмасига тенг эмас. Аммо бу ҳолда ҳам экспоненциал функциялардан фойдаланилмоқчи бўлганда косинусларни Эйлернинг машҳур формулалари орқали комплекс қўшма функцияларнинг ярим йигиндиси билан алмаштириш керак:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}).$$

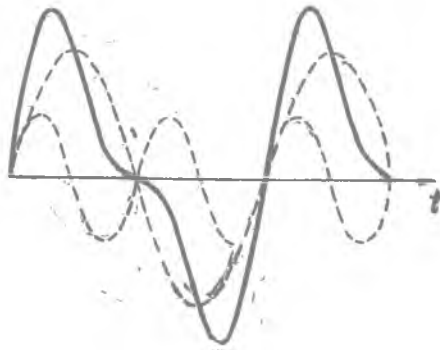
48-§. Спектрга ажратиш

Чизиқли гармоник осцилляторнинг тебранишлари даврий процесснинг энг содда ҳоли ҳисобланади. Даврий бўлиб, лекин гармоник бўлмаган процесслар кўп учрайди. Масалан, 104-расмдаги туташ эгри чизиқ чап ва ўнг томонга чегараланмаган равишда такрорланиб боради. Бу эгри чизиқ, шубҳасиз, даврий процессни ифодалайди, аммо у гармоник эмас. Бироқ 104-расмда частоталари ω ва 2ω бўлган иккита синусоидани қўшиш йўли билан туташ эгри чизиқ ҳосил қилинганлиги кўрсатилган, чунончи

$$x = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t.$$

Еки бошқача айтганда, 104-расмда тасвирланган тебраниш *спектра*га ажратилди, бу спектрда частоталари ω ва 2ω бўлган (бурчак частоталар ўрнига чизиқли частоталар ишлатилганда — частоталари ν ва 2ν бўлган) иккита спектрал чизиқ бор.

Математик анализда ω частотали даврий процессни тасвирловчи *ҳар қандай* эгри чизиқ* частоталари ω , 2ω , 3ω , ... бўл-



104-расм. Гармоник бўлмаган даврий процессга доир мисол.

* Даврий процессни ифодаловчи функцияни Фурье қаторига ёйиш шартлари шунчалик кенги, амалда реал физик процессни тасвирловчи ҳар қандай функция бу шартларни қаноатлантиради.

ган чексиз кўп синусоида ва косинусоидаларнинг қўшилиши натижаси сифатида тасвирланиши мумкинлиги исбот этилади. Гармоник бўлмаган даврий процессларни соф гармоник процессларга шундай ажратиш Фурье қаторига ёйишдир. Бу қаторларнинг яқинлашиш шартлари математик қўлланмаларда* текширилади. Биз бу ерда мазкур китобда бизни қизиқтирадиган функциялар учун Фурье қаторлари ҳамма ерда текис яқинлашишини қайд қиламиз; Шунинг учун уларни ҳадма-ҳад кўпайтириш, дифференциаллаш ва интеграллаш мумкин. Аниқлик учун биз текширадиган функция $x(t)$ кўчишдан иборат бўлсин, деб фараз қиламиз. У вақтда

$$x(t) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \quad (48. 1)$$

Биринчи ҳаддаги $\frac{1}{2}$ коэффициент қулайлик ва формулаларнинг симметрияси учун киритилган; шундай эканини қуйидагилардан кўрамиз.

Фурье қатори коэффициентларини ҳисоблашнинг содда усулини эслатамиз. Бу усул бевосита ҳисоблаганда тўғри эканлиги осонгина кўринадиган қуйидаги формулаларга асосланади:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ да,} \\ \frac{1}{2} T, & m = n \text{ бўлганда;} \end{cases} \quad (48. 2)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ да,} \\ \frac{1}{2} T, & m = n \text{ бўлганда;} \end{cases} \quad (48. 3)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t dt = 0. \quad (48. 4)$$

b_m коэффициентни аниқлаш учун (48. 1) нинг иккала томонини $\cos m\omega_0 t$ кўпайтириб, $-T/2$ дан $+T/2$ гача интеграллаймиз. У ҳолда (48. 2) ва (48. 4) формулаларга асосан ўнг томондаги ҳамма интеграллар нолга тенг бўлади, бунда b_m коэф-

* Қуйидаги китоблардан қаранг: И. И. Привалов, Ряды Фурье, Госиздат, 1930 ёки математик анализ дарсликларидан хоҳлаган биттаси, масалан, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, II, т., VI боб, Гостехиздат, 1948.

фициентга кўпайтириладиган интегралгина $T/2$ га тенгдир. Шундай қилиб, b_m коэффициентни топамиз:

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos m\omega_0 t dt. \quad (48.5)$$

Худди шунингдек, c_m коэффициентни топиш учун (48.1) нинг иккала томонини $\sin m\omega_0 t$ га кўпайтирамиз ва $-T/2$ дан $+T/2$ гача интеграллаймиз. Натижада қуйидагини топамиз:

$$c_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin m\omega_0 t dt. \quad (48.6)$$

Ниҳоят, b_0 ни топиш учун (48.1) ни $-T/2$ дан $+T/2$ гача интеграллаймиз:

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt.$$

Эйилмадаги

$$\frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$$

доимий ҳад $x(t)$ функциянинг давр ичидаги ўртача қийматидир; агар $x(t)$ эгри чизиқ t ўқига нисбатан (масалан, 104-расмдаги эгри чизиқ каби) симметрик бўлса, у ҳолда $\frac{1}{2} b_0 = 0$.

Бу ерда яна Фурье қаторининг бошқа иккита шаклини келтирирамиз. Синус ва косинусли ҳадларни $b_k \cos k\omega_0 t + c_k \sin k\omega_0 t$ кўринишда жуфтлаб бирлаштириб, уларни $a_k \cos(k\omega_0 t + \delta_k)$ кўринишдаги ҳадлар билан алмаштириб (46-§ га қаранг) ва овоз ҳадни $\frac{1}{2} a_0$ билан белгилаб, $x(t)$ ни ёямиз:

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t + \delta_1) + a_2 \cos(2\omega_0 t + \delta_2) + a_3 \cos(3\omega_0 t + \delta_3) + \dots \quad (48.7)$$

Фурье қаторининг комплекс шакли бизнинг мақсадларимиз учун янада қулайдир. (48.7) да косинусларни комплекс қўшма бўлган экспоненциал функцияларнинг ярим йиғиндиси билан алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \cos(s\omega_0 t + \delta_s) &= \frac{1}{2} \left[e^{i(s\omega_0 t + \delta_s)} + e^{-i(s\omega_0 t + \delta_s)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{i s \omega_0 t} \cdot e^{i \delta_s} + e^{-i s \omega_0 t} \cdot e^{-i \delta_s} \right) \end{aligned}$$

Бундан қуйидаги келиб чиқади:

$$A_r = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i2\pi r \nu_0 t} dt. \quad (48. 11)$$

Худди шунга ўхшаш, A_{-r} коэффициентни топиш учун (48. 10) нинг иккала томонини $e^{i2\pi r \nu_0 t}$ га кўпайтирамиз ва $-T/2$ дан $+T/2$ гача интеграллаймиз. Натижада A_{-r} ни топамиз:

$$A_{-r} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{i2\pi r \nu_0 t} dt. \quad (48. 12)$$

$r = 0$ бўлганда

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt. \quad (48. 13)$$

Агар $x(t)$ ҳақиқий функция бўлса, у ҳолда A_m ва A_{-m} Фурье коэффициентлари албатта комплекс қўшма бўлади:

$$A_m^* = A_{-m}$$

[(48. 10) формулага қаранг], чунки фақат бу ҳолда (48. 10) нинг ўнг томони ҳақиқий бўлади.

Шундай қилиб, агар $x(t)$ функция даврий процессни тасвирласа, у ҳолда уни ҳамisha гармоник ташкил этувчиларга ажратиш мумкин эканлигини кўрамиз. Физикада бу фикр даврий процессни *спектрага ажратиш* мумкин эканлигини билдиради. Бу спектр дискрет бўлади, яъни частоталари $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ арифметик қатор ҳосил қилувчи айрим-айрим идеал ингичка чизиқлардан иборат бўлади. Кўпчилик ҳолларда акустика терминологиясидан фойдаланилади ва ν_0 *асосий частота*, $2\nu, 3\nu, \dots$ лар эса унинг *обертонлари* деб аталади.

Равшанки, Фурье коэффициентлари тегишли обертонларнинг амплитудаларидир. Амплитуда мусбат ёки манфий бўлишига қарамай, *интенсивлик* қатъий мусбат катталиқдир, чунки интенсивлик амплитуданинг квадрати билан ўлчанади. Шундай қилиб, Фурье коэффициентларининг квадратлари даврий процесс гармоник ташкил этувчиларининг интенсивлигини ёки бошқача айтганда, спектрал чизиқларнинг интенсивлигини ифодалайди.

Хулосада *чегараланган* (масалан, t_0 дан t_1 гача) *интервалда* берилган давриймас процессни ҳам Фурье қаторига ёйиш мумкин эканлигини қайд қиламиз. Бу ҳолда процессни тасвирловчи эгри чизиқни даврий функциянинг битта даври деб қарай оламиз. Аммо Фурье ёйилмаси даврий функцияни тасвирлагани учун, бу ёйилма процесснинг боришини мазкур интервал ичидагина тўғри тасвирлайди*

* 72- § га ҳам қаранг.

49-§. Марказий кучлар. Қутб координаталарида кинетик энергия

Энди биз чизиқли осцилляторнинг хоссаларини ўрганиб олганимиздан кейин қўзғалмас марказ атрофида айланиб юрадиган электрондан иборат моделни текширишга ўтамыз. Бундай ҳаракат марказий кучлар, яъни йўналиши ҳамма вақт айни бир нуқтадан ўтадиган, катталиги эса шу нуқтагача бўлган масофанинггина функцияси булган кучлар майдонидаги ҳаракатнинг хусусий ҳоли булади.

Ҳар қандай механика масаласини ечганда координаталар системасини рационал танлаб олиш жуда катта аҳамиятга эга. Одатда масала ўз симметриясига мос келадиган координаталар системасида жуда осон ечилади. Шунинг учун марказий кучлар майдонидаги ҳаракат учун қутб координаталар системаси энг мақбул система бўлиши керак.

Атомнинг планетар моделини (51-§) текширганда энергиянинг сақланиш қонуни ва ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунидан фойдаланамиз. Шунга тайёргарлик кўриш мақсадида энергиянинг қутб координаталаридаги ифодасини келтириб чиқарамиз.

Текисликда нуқтанинг вазияти декарт координаталарига

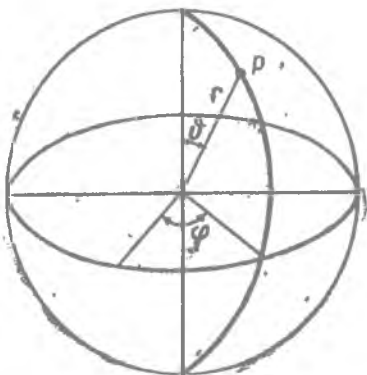
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (49.1)$$

муносабатлар билан боғланган r ва φ иккита қутб координаталари билан аниқланади. Декарт координаталарида кинетик энергия қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (49.2)$$

Лекин (49.1) га асосан қуйидагиларни топамиз:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}. \quad (49.3)$$



105 расм.

Буни (49.2) га қўйиб оддий ҳисоблашлардан кейин кинетик энергиянинг қуйидаги ифодасини топамиз:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (49.4)$$

Бу эса кинетик энергиянинг текисликдаги қутб координаталари орқали ёзилган ифодасидир.

(49.1) ва (49.3) формулаларни бирга ишлатиб,

$$x \dot{y} - y \dot{x} = r^2 \dot{\varphi} \quad (49.5)$$

муносабатни топамиз. Бу муносабат бизга кейинчалик керак бўлади.

Фазодаги P нуқтанинг сферик қутб координаталари қуйидагилардир (105-расм): r радиус-вектор, қутб масофаси ϑ (кенгликни 90° га тўлдирувчи бурчак) ва бирор биринчи меридиандан ҳисобланадиган φ узоқлик. Декарт координаталари билан қутб координаталари орасидаги муносабат чизмадан бевосита кўриниб турибди:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Булардан:

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta.$$

Буларни кинетик энергиянинг фазодаги декарт координаталари орқали ёзилган

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (49.6)$$

ифодасига қўйиб, баъзи соддалаштиришлардан кейин кинетик энергиянинг сферик қутб координаталар системасидаги ифодасини топамиз:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2). \quad (49.7)$$

50-§. Марказий майдондаги ҳаракат

Марказий кучлар таъсиридаги ҳаракатни тавсифлаш учун ҳаракат миқдорининг моменти деб аталадиган динамик катталик катта аҳамиятга эга. Ньютоннинг ҳаракат тенгламасини вектор кўринишда оламиз:

$$\dot{\mathbf{p}} = m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$$

ва уни *чандан* \mathbf{r} радиус-векторга *вектор* тарзда кўпайтирамиз:

$$[\mathbf{r} m \dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{r} \mathbf{F}]. \quad (50.1)$$

Лекин

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \mathbf{p}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r} m \mathbf{v}] = m [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{v}] + m [\mathbf{r} \dot{\mathbf{v}}] = m [\mathbf{v} \mathbf{v}] + [\mathbf{r} m \dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{r} m \dot{\mathbf{v}}]$$

эканлигини ҳисобга олиб ($[\mathbf{v} \mathbf{v}] = 0$ — коллинеар векторларнинг кўпайтмаси бўлгани учун), (50,1) ни

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \mathbf{p}] = [\mathbf{r} \mathbf{F}] \quad (50.2)$$

кўринишда ёзамиз. Ушбу вектор

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \mathbf{p}] \quad (50.3)$$

моддий нуқта ҳаракат миқдорининг O нуқтага нисбатан моменти деб аталади (106-расм). Бу моментнинг декарт координата ўқларидаги ташкил этувчилари қуйидагичадир:

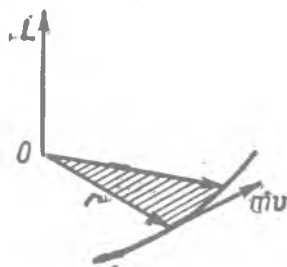
$$\left. \begin{aligned} L_x &= (yp_z - zp_y) = m(y\dot{z} - \dot{z}y), \\ L_y &= (zp_x - xp_z) = m(z\dot{x} - \dot{x}z), \\ L_z &= (xp_y - yp_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \right\} \quad (50.4)$$

Энди (50.2) тенглама

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{r}\mathbf{F}] \quad (50.5)$$

кўринишни олади. Агар ҳаракат марказий *ҳаракат* бўлса, у ҳолда \mathbf{r} ва \mathbf{F} векторларнинг йўналиши бир хил ёки бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши бўлади. Бу ҳолда $[\mathbf{r}\mathbf{F}] = 0$ бўлади, шунинг учун (50.5) тенгламадан

$$\mathbf{L} = \text{const} \quad (50.6)$$



106-расм.

эканлиги келиб чиқади, яъни марказий ҳаракатда ҳаракат миқдори моментининг *вектори* сақланади. Бундан марказий куч майдонидаги ҳаракатда заррачанинг траекторияси бир текисликда ётади деган хулоса ҳам чиқади, чунки шу ҳолдагина \mathbf{L} вектор бутун ҳаракат давомида айни бир йўналишда бўлади.

Агар орбита текислиги деб ху текислик олинса, у ҳолда \mathbf{L} вектор z ўқ бўйича йўналади ва унинг ташкил этувчилари қуйидагича бўлади:

$$L_x = L_y = 0, \quad L_z = L,$$

ва, демак,

$$L = L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (50.7)$$

Кўп ҳолларда марказий ҳаракатларни ўрганишда қутб координаталардан фойдаланиш қулайроқдир.

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi}$$

эканлигини ҳисобга олиб [(49.5) га қаранг] ҳаракат миқдори моментининг (50.7) ифодасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (50.8)$$

Ҳаракат миқдорининг моменти секториал тезлик деб аталадиган c кинематик катталиқ орқали ифодаланиши мумкин. Таърифга кўра,

$$c = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\mathbf{v}]$$

ва, бинобарин:

$$L = 2mc.$$

Ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунидан Кеплернинг иккинчи қонуни бевосита келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар $L = \text{const}$ бўлса, равшанки, $c = \text{const}$ бўлади, бу эса Кеплернинг иккинчи қонунидир.

51-§. Кеплер масаласи

Заряди $+Ze$ ва массаси электрон массасидан қўзғалмас марказ деб қабул қилиш мумкин бўладиган даражада катта бўлган ядро атрофида электроннинг ҳаракатини текшираемиз. Резерфорднинг α -заррачаларни сочишга доир тажрибалари 10^{-12} см тартибидаги масофаларгача Кулон қонуни ўринли бўлишини кўрсатди. Шунинг учун ядро билан электрон орасидаги ўзаро таъсир кучи Ze^2/r^2 , потенциал энергия эса

$$U = -\frac{Ze^2}{r} \quad (51.1)$$

бўлади. Равшанки, бундай шароитда бизнинг масаламиз планетанинг Қуёш атрофидаги ҳаракати тўғрисидаги масалага айнаган ўхшаш бўлади. Шунинг учун бу масала Кеплер масаласи деб аталади. Бу масалани ечиш учун энергиянинг ва ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунларидан фойдаланамиз. Қутб координаталарда бу қонунлар [(49.4) ва (50.8) формулаларга қаранг] қуйидагича ёзилади:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r} = E, \quad (51.2)$$

$$mr^2\dot{\varphi} = P, \quad (51.3)$$

бу ерда E ва P — ўзгармас миқдорлар; (51.3) дан:

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}. \quad (51.4)$$

Сўнгра вақт бўйича ҳосилалардан φ бурчак бўйича ҳосилаларга ўтаемиз ва бу мақсадда

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad (51.5)$$

муносабатдан фойдаланамиз.

(51.4) ва (51.5) ларни (51.2) га қўямиз:

$$\frac{m}{2} \left[\frac{P^2}{m^2 r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{P^2}{m^2 r^2} \right] = E + \frac{Ze^2}{r}$$

ёки бир оз шакл ўзгартиришлардан кейин қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \quad (51.6)$$

$\rho = \frac{1}{r}$ деб олиб, янги ўзгарувчи киритамиз. $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$ бўлгани учун (51.6) қуйидаги кўринишга келади:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2}\rho - \rho^2. \quad (51.7)$$

(51.7) тенгламани интеграллаш учун уни яна бир марта дифференциаллаш қулай:

$$2 \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{2mZe^2}{P^2} \cdot \frac{d\rho}{d\varphi} - 2\rho \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Бу тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} \left(\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho - \frac{mZe^2}{P^2} \right) = 0.$$

Умуман айтганда, $d\rho/d\varphi \neq 0$, шунинг учун қавслар ичидаги ифода нолга тенг бўлиши керак*. Шундай қилиб, о учун иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{mZe^2}{P^2}. \quad (51.8)$$

Унинг умумий интегралли, маълумки, бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечими билан тегишли бир жинсли тенгламанинг умумий интегралли йиғиндисига тенг. Бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечими

$$\rho_1 = \frac{mZe^2}{P^2}$$

бўлиши кўриниб турибди.

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$$

* Кейинроқ кўрамизки [(51.14) формула ва ундан кейин келадиган текстга қаранг], умуман айтганда, $d\rho/d\varphi$ ҳосила траекториянинг афелий ва перигелийга ($E < 0$ бўлганда) тегишли иккита нуқтасидагина нолга айланади, $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$ тенглама эса φ нинг ҳар қандай қийматида ҳам $\rho = \text{const}$ ечимга эга бўлади. Равшанки, бу ҳол орбита доиравий орбита бўлган ҳолдагина юз беради. Аммо доиравий орбита бўлган ҳолда (яъни орбитанинг ҳамма нуқталарида $\rho = \text{const}$ бўлганда) ρ учун қуйидаги ифода топилади:

$$\rho = \frac{mZe^2}{P^2}.$$

Аммо, текстдан кўринишича, бу ифода қавслар ичидаги ифодани нолга тенглашдан ҳосил бўладиган бир жинслимас тенгламанинг ρ_1 хусусий ечимидир. Шундай қилиб, $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$ шарт (51.8) тенглама ечимидан бошқа янги ечим бермайди.

бир жинсли тенгламанинг умумий интегралы эса

$$\rho_2 = A \cos \varphi + B \sin \varphi,$$

бу ерда A ва B — бошланғич шартлардан аниқланадиган ихтиёрый ўзгармаслар. Шундай қилиб,

$$\rho = \frac{mZe^2}{P^2} + A \cos \varphi + B \sin \varphi. \quad (51.9)$$

Агар биз φ бурчакни радиус-векторнинг r минимал, яъни $r = r_{\min}$ ва, бинобарин, $\rho = 1/r = \rho_{\max}$ бўладиган вазиятидан бошлаб ҳисоблашни келишиб олсак, у ҳолда $\varphi = 0$ учун

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0 \quad (51.10)$$

шартни топамиз; (51.9) га асосан

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -A \sin \varphi + B \cos \varphi$$

бўлгани учун (51.10) шартдан $B = 0$ эканлиги топилади. Бунда (51.9) ечим қўйидаги кўринишга келади:

$$\rho = \frac{mZe^2}{P^2} + A \cos \varphi. \quad (51.11)$$

Бу эса электрон орбитасининг тенгламасидир. Уни коник кесимларнинг кутб координаталарда фокусга нисбатан олинган қўйидаги тенгламаси билан солиштирамыз:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (51.12)$$

бу ерда a — катта ярим ўқ ва ε — эксцентриситет. Бундан $\rho = \frac{1}{r}$ нинг қўйидаги ифодасини топамиз:

$$\rho = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (51.13)$$

Равшанки,

$$\frac{mZe^2}{P^2} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

деб олсак, (51.11) ва (51.13) бир хил бўлади. Демак, электроннинг траекторияси конус кесимидан иборат экан (Кеплернинг биринчи қонуни).

Бу конус кесими эллипс бўладиган шартни топиш учун ρ нинг максимум ва минимум бўлиш шартини топамиз. ρ нинг экстремумга эга бўлиш зарурий шarti

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0.$$

(51.7) да $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$ деб олиб, квадрат тенглама ҳосил қиламиз:

$$\rho^2 - 2 \frac{mZe^2}{P^2} \rho - \frac{2mE}{P^2} = 0. \quad (51.14)$$

Квадрат тенглама илдизларининг хоссаларига асосан, (51.14) дан қуйидагиларни топамиз:

$$\rho_{\max} + \rho_{\min} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \quad \rho_{\max} \rho_{\min} = -\frac{2mE}{P^2}. \quad (51.15)$$

Агар E энергия манфий ($E < 0$) бўлса, у ҳолда $\rho_{\max} \rho_{\min} > 0$ ва, бинобарин, ρ нинг (демак, r нинг ҳам) шундай иккита мусбат қиймати мавжудки, бу қийматларда $d\rho/d\varphi$ нолга айланади; бу қийматлардан бири ρ нинг максимумига (r нинг минимума, перигелийга), иккинчиси эса ρ нинг минимумига (r нинг максимуми, афелийга) мос келади. Шундай қилиб, $E < 0$ бўлганда орбита *эллипс* бўлади.

Аксинча, $E > 0$ бўлганда $\rho_{\max} \rho_{\min} < 0$ бўлади. Демак, ρ нинг r нинг максимум ва минимумига тегишли иккита *мусбат* қиймати бўлмас экан, аммо улардан бири мусбат, иккинчиси манфий бўлади. Радиус-векторнинг мусбат ва манфий қийматлари *гипербола*нинг иккита турли тармоқларига мос келади. Шундай қилиб, $E > 0$ бўлганда орбита *гипербола* бўлади.

Энди энергия билан катта ярим ўқни боғлайдиган фойдали муносабатни топамиз. $\varphi = 0$ бўлганда $\rho = \rho_{\max}$, $\varphi = \pi$ бўлганда $\rho = \rho_{\min}$ эканлигини эътиборга олиб, (51.13) дан қуйидагини топамиз:

$$\rho_{\max} = \frac{1 + \epsilon}{a(1 - \epsilon^2)} = \frac{1}{a(1 - \epsilon)}; \quad \rho_{\min} = \frac{1 - \epsilon}{a(1 - \epsilon^2)} = \frac{1}{a(1 + \epsilon)}.$$

Буни (51.15) нинг чап томонига қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{2}{a(1 - \epsilon^2)} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \quad (51.16)$$

$$\frac{1}{a^2(1 - \epsilon^2)} = -\frac{2mE}{P^2}; \quad (51.17)$$

(51.16) ва (51.17) дан:

$$E = -\frac{mZ^2e^4(1 - \epsilon^2)}{2P^2}. \quad (51.18)$$

(51.16) ни (51.17) га бўлиб, E ни топамиз:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}. \quad (51.19)$$

Ядро зарядининг тайин қийматида электрон энергияси орбитасининг катта ярим ўқидагина боғлиқ бўлиб, эксцентриситетига боғлиқ бўлмаслиги (51.19) муносабатдан кўринади: катта ярим ўқи бир хил бўлган орбиталардаги электронлар энергияси тенг бўлади.

Ниҳоят, юқорида топилган муносабатлар ёрдамида Кеплернинг учинчи қонунини келтириб чиқарамиз. Агар электроннинг секториал тезлиги c га тенг бўлса, у ҳолда радиус-вектор T тўлиқ айланиш даври ичида

$$S = cT$$

юзни чизади.

Аммо секториал тезлик ҳаракат миқдорининг моменти орқали $c = L/2m$ кўринишда (50-§ га қаранг) ифодалангани учун, бу ерда $L = P$ деб олиб, қуйидагини топамиз:

$$S = \frac{1}{2} \frac{P}{m} T. \quad (51.20)$$

Иккинчи томондан, S юз ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсининг юзи сифатида қуйидагича ифодаланади:

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (51.21)$$

чунки $b = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$. (51.20) ва (51.21) ни солиштириб, PT ни топамиз:

$$PT = 2\pi m a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (51.22)$$

(51.16) муносабатдан P^2 ни топамиз:

$$P^2 = mZe^2 a (1 - \epsilon^2). \quad (51.23)$$

(51.22) ни квадратга кўтариб ва унга (51.23) ни қўйиб, баъзи қисқартириш ва шакл алмаштиришлардан сўнг қуйидагини топамиз:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m} \quad (51.24)$$

ёки $\frac{1}{T}$ катталиқ вақт бирлиги ичидаги v айланишлар сони бўлгани учун,

$$a^3 v^3 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \quad (51.25)$$

(51.24) нинг ўнг томонида (ядронинг заряди Ze бўлган ҳолда) ўзгармас катталиқ тургани учун, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$$

Бу эса Кеплернинг учинчи қонунидир.

52-§. Ядро майдонидаги α -заррача

Энди *итарувчи* куч Кулон қонунига бўйсунганда α -заррачанинг қўзғалмас ядро майдонидаги ҳаракатини текширамиз. Ядронинг заряди аввалгича $+Ze$ бўлсин; α -заррачанинг заряди $+2e$ га тенг, шунинг учун потенциал энергияси

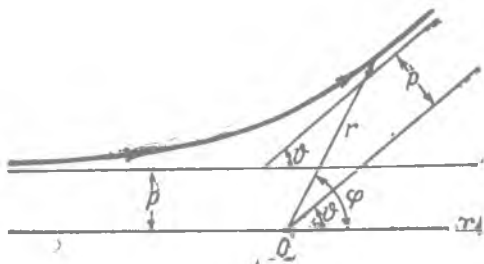
$$U = \frac{2Ze^2}{r}. \quad (52.1)$$

Энергиянинг ва ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунлари қуйидаги ифодаларни беради:

$$\frac{M}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{2Ze^2}{r} = E, \quad (52.2)$$

$$Mr^2 \dot{\varphi} = P, \quad (52.3)$$

бу ерда M — α -заррачанинг массаси; масалани ечишнинг бундан кейинги схемаси олдинги параграфда фойдаланилган схема билан бутунлай бир хил бўлади, чунки иккала ҳолда ҳам бошланғич тенгламалар бир хил (потенциал энергиянинг ишораси би-



107-расм. α -заррачанинг O нуқтада турган ядро майдонидаги йўли.

лан фарқ қилади) [(51.1) — (51.3) формулаларга қаранг]. Шунинг учун биз ҳисоблашни такрорлаб ўтирмасдан, $\rho = \frac{1}{r}$ янги ўзгарувчи киритилгандан ва баъзи шакл алмаштиришлар бажарилгандан сўнг (52.2) ва (52.3) тенгламалардан чиққан охириги натижани ёзамиз:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2ME}{P^2} - 2\frac{2MZe^2}{P^2}\rho - \rho^2.$$

Бу тенгламани яна бир марта дифференциаллаб ва баъзи қисқартиш ва ўрин алмаштиришларни бажариб,

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C \quad (52.4)$$

тенгламани топамиз, бу ерда:

$$C = -\frac{2MZe^2}{P^2}. \quad (52.5)$$

(52.4) тенгламанинг умумий ечими қуйидагичадир:

$$\rho = C + A \cos \varphi + B \sin \varphi. \quad (52.6)$$

Энди бошланғич шартлардан фойдаланамиз. Равшанки (107-расм), $\varphi = \pi$ бўлганда $r = \infty$ ва, бинобарин, $\rho = 0$. (52.6) га бунини қўйганимизда

$$A = C \quad (52.7)$$

бўлади. Иккинчи шартни қўйидагича топамиз. Траекториядаги ҳар қандай нуқтанинг ординатаси r ва φ га $y = r \sin \varphi$ ёки

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r \sin \varphi} = \frac{\rho}{\sin \varphi}$$

муносабат билан боғланган.

(52.6) ва (52.7) лардан қўйидагини топамиз:

$$\frac{1}{y} = \frac{C(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} + B.$$

$\varphi = \pi$ бўлганда y ордината „мўлжал масофа“ ρ га тенг бўлади, ўнг томондаги биринчи ҳад эса нолга айланади. Шундай қилиб, $B = 1/\rho$ эканини топамиз ва (52.6) ечим узил-кесил қўйидаги кўринишни олади:

$$\rho = C(1 + \cos \varphi) + \frac{1}{\rho} \sin \varphi. \quad (52.8)$$

α -заррачанинг φ оғиши, равшанки, гипербола асимптоталари орасидаги ϑ бурчакка тенг, оғишгандан кейинги учуш йўналиши учун эса $\rho = 0$. Шунинг учун (52.8) дан қўйидагини топамиз:

$$-\frac{1}{C\rho} = \frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \quad (52.9)$$

ёки C нинг (52.5) дан топиладиган қийматини эътиборга олиб, қўйидагини топамиз:

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{P^2}{2MZe^2\rho}. \quad (52.10)$$

Нихоят, ҳаракат миқдорининг P моментини мўлжал масофа ρ ва v тезлик орқали ифодалаш мумкин:

$$P = M\rho v.$$

Буни (52.10) га қўямиз:

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{Mv^2\rho}{2Ze^2}. \quad (52.11)$$

Бу эса α -заррача оғишининг биз 26-§ да фойдаланган оғиш бурчаги формуласидир.

53-§. Келтирилган масса

Юқорида (45-§) биз кўрдикки, фақат ўзаро таъсир кучлари таъсиридагина бўлган иккита заррача системасида иккала заррача уларнинг инерция марказига нисбатан ҳаракат қилади. Энди иккита заррачанинг ана шундай системаси ҳаракатини ўрганиш ўрнига битта фиктив заррачанинг ҳаракатини ўрганиш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Бу фиктив заррача қўзғалмас

марказдан заррачалар орасидаги масофага тенг масофада туради ва массаси μ бўлади:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Иккала заррачанинг ҳаракат тенгламаларидан

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{12}, \quad (53.1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{21}. \quad (53.2)$$

(53.1) дан (53.2) ни айирамиз:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{21}.$$

Ньютоннинг учинчи қонунига биноан,

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

бўлганлиги учун

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}.$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu} \quad (53.3)$$

деб ҳисоблаб ва $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ векторлар айирмаси (100-расмга қаранг) m_2 дан m_1 га қараб йўналган \mathbf{r} вектор эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12}$$

ёки

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}, \quad (53.4)$$

бунда (53.3) га асосан

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (53.5)$$

Кўриб турибмизки, икки заррача системасининг ҳаракати тўғрисидаги масала қўзғалмас марказдан \mathbf{r} масофада турган ва массаси иккала заррача массалари орқали (53.5) формула билан ифодаланган битта заррачанинг ҳаракати тўғрисидаги масалага эквивалент экан. μ масса *келтирилган масса* деб аталади.

Биз шу вақтгача, масалан, m массали электроннинг M массали ядрога нисбатан ҳаракатини текширганда, ядрони қўзғалмас деб ҳисоблаб топган натижаларимиз аниқ бўлмаслиги равшан бўлди, чунки ҳақиқатда эса электроннинг ҳам, ядронинг ҳам ҳаракатини уларнинг умумий инерция марказига нисбатан текшириш керак эди. Аммо массаси ядро ва электроннинг келтирилган массасига тенг бўлган фиктив заррачанинг қўзғал-

мас ядрога нисбатан ҳаракатини текширганда жуда аниқ натижалар олиниши (53.4) тенгламадан кўринади.

Ядронинг ўз ҳаракатини эътиборга олмаганда йул қўйиладиган хатони баҳолайлик. M ядро билан m электроннинг келтирилган массаси қуйидагича ифодаланади:

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}}.$$

$M/m=1836,5$ бўлгани учун электрон массаси қатнашадиган формулаларда m ўрнига μ ни қўйиш керак. Натижада қуйидаги тузатма ҳосил бўлади:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1836,5}}.$$

Кейинчалик кўрамизки (107- §), ўлчаш аниқлиги жуда юксак бўлган спектроскопия масалаларида бундай тузатма ўзининг қиймати жуда кичик бўлишига қарамасдан, ҳисоблаш натижасига эксперимент хатосидан каттароқ ўзгариш киритади.

Охирида шуни қайд қиламизки, ядро ҳаракатини эътиборга олган вақтда Кеплер учинчи қонунининг

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m} \quad (51.24)$$

ифодаси электроннинг m массасини келтирилган μ массага алмаштириш йўли билан аниқлаштирилиши керак:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

54- §. Умумлаштирилган координаталар. Системанинг вазияти

Биз шу вақтгача иккита координаталар системаси: декарт координаталари ва қутб координаталар билан иш кўриб келдик. Аммо механикада *умумлаштирилган координаталар* деб аталувчи координаталардан фойдаланиш катта фойда келтиради. Системанинг „конфигурациясини“ тўлиқ аниқлайдиган ҳар қандай параметрлар умумлаштирилган координаталар деб аталади. Масалан, ўзаро таъсир қилишувчи иккита заррачадан иборат система уларнинг умумий инерция марказининг учта декарт координатаси билан, заррачалар орасидаги масофа ва бу заррачаларни туташтирувчи тўғри чизик вазиятини белгилувчи иккита бурчак билан характерланиши мумкин.

Танлаб олинган умумлаштирилган координаталар одатда ҳар хил индексли айни бир q ҳарфи билан белгиланади: $q_1,$

q_2, q_3, \dots Бундай усулнинг афзаллиги шундаки, баъзи ҳолларда умумлаштирилган координаталар сони декарт ёки қутб координаталарнинг тўлиқ сонидан кам ҳам бўлиши мумкин. Масалан, агар бир-биридан ўзгармас d масофада жойлашган иккита нуқтавий массадан иборат система бўлса, бу заррачаларнинг олти декарт координаталари орасида битта муносабат (боғланиш шarti) бўлади:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d^2.$$

Бу шартдан бир координатани қолган бештасининг функцияси сифатида аниқлаш мумкин. Шундай қилиб, бу ҳолда системанинг конфигурацияси бешта *эркли* параметр билан тўлиқ аниқланади ва шунинг учун бу ҳолда бешта умумлаштирилган координата етарлидир. Умуман, агар n заррачадан иборат система заррачалар координаталари орасидаги k та боғланиш шartига бўйсунса, у ҳолда $3n - k$ координаталардан

$$f = 3n - k$$

координата эрки бўлади; қолган k та координата боғланишлар шartидан аниқланади. Системанинг оний конфигурациясини тўлиқ аниқлаш учун зарур бўлган эрки параметрларнинг бу f сони *эркинлик даражалари сони* деб аталади. Агар барча $q_1, q_2, q_3, \dots, q_f$ умумлаштирилган координаталар ва барча умумлаштирилган тезликлар, яъни умумлаштирилган координаталардан вақт бўйича олинган $q_1, q_2, q_3, \dots, q_f$ ҳосилалар берилган бўлса, системанинг вазияти тўлиқ аниқланган бўлади. Шундай қилиб, классик механикада системанинг *оний вазияти* $2f$ эрки параметрлар билан аниқланади.

55- §. Лагранж функцияси. Лагранж тенгламалари

Биз умумлаштирилган координаталар киритганлигимиз сабабли ҳар қандай координаталар системасида ўринли бўлган ҳаракат тенгламаларини топиш мақсадга мувофиқдир. Лагранж топган тенгламалар шундай хусусиятга эгадир. Бу тенгламалар Лагранжнинг ҳаракат тенгламалари деб аталади; кўпинча бу тенгламаларни Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари деб ҳам аталади. Энди шу тенгламалар билан танишамиз.

Биз эрки заррача билан иш кўраётган бўлайлик. Бу заррачанинг вазияти умуман учта координата билан характерланади. Бу координаталар x, y, z декарт координаталари ёки бошқа ҳар қандай q_1, q_2, q_3 координаталар бўлиши ҳам мумкин. Бизга x, y, z ларни q_1, q_2, q_3 лар орқали ифодаловчи формулалар маълум бўлсин деб фераз қилайлик:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (55.1)$$

{декарт координаталаридан қутб координаталарга ўтиш формулаларига (49- §) таққосланг.} Ҳаракат тенгламаларини декарт координаталарида ёзамиз:

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z.$$

Энди бу тенгламалардан биринчисини $\frac{\partial x}{\partial q_1}$ га, иккинчисини $\frac{\partial y}{\partial q_1}$ га, учинчисини $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ га кўпайтирамиз ва уларни қўшамиз:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1}. \quad (55.2)$$

Ҳосил бўлган тенгламанинг ўнг томонини қисқалик учун Q_1 билан белгилаймиз:

$$X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} = Q_1. \quad (55.3)$$

Масалан, қуйидагиларни эътиборга оламиз:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad \text{ва ҳоказо.}$$

У ҳолда (55.2) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \right] - m \left[\dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) + \right. \\ \left. + \dot{y} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right) + \dot{z} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \right] = Q_1. \end{aligned} \quad (55.4)$$

(55.1) формулаларни дифференциаллаб, x , y , z ларнинг вақт бўйича олинган тула ҳосилалари ифодасини топамиз (бунда x , y , z координаталарни вақтнинг мураккаб функцияси деб қараймиз). Масалан,

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \dot{q}_3. \quad (55.5)$$

Бундан бирданга қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}.$$

Шунга ўхшаш:

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1}. \quad (55.6)$$

Сўнгра, дифференциаллаш натижаси кетма-кет келган иккита дифференциаллаш тартибига боғлиқ эмаслигини назарга олиб, қуйидагиларни ёзамиз:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}. \quad (55.7)$$

(55.6) ва (55.7) муносабатларни эътиборга олиб, (55.4) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + y \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} \right) \right] - m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} \right) = Q_1. \quad (55.8)$$

Энди текшириляётган заррачанинг T кинетик энергияси тезликларининг \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} ташкил этувчилари орқали қуйидагича ифодаланишини эслаймиз:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Шунинг учун

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1} \right).$$

Энди (55.8) тенглама бундай ёзилади:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1. \quad (55.9)$$

Агар ҳаракатга сабаб бўлаётган куч $U(x, y, z)$ потенциалга эга бўлса, яъни

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

бўлса, Q_1 нинг (55.3) ифодасини бундай ёзиш мумкин:

$$Q_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Энди (55.9) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1}. \quad (55.10)$$

Ниҳоят, энди кинетик ва потенциал энергиялар айирмасига тенг бўлган янги L функцияни киритамиз (буни кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндисига тенг бўлган тўла энергияга аралаштириб юбориш ярамайди!):

$$L = T - U. \quad (55.11)$$

Бу функция *Лагранж функцияси* ёки *кинетик потенциал* деб аталади. Потенциал энергия q_1, q_2, q_3 тезликларга боғлиқ бўлмагани учун $\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1}$ бўлади ва (55.10) тенглама жу-

да содда кўринишга келади:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0. \quad (55.12)$$

Бу Лагранжнинг биринчи тенгламасидир. Қолган иккитаси ҳам худди шундай шакл алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлади:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0. \quad (55.12')$$

Лагранж тенгламаларининг Ньютон тенгламаларидан афзаллиги заррачалар ҳаракати боғланишларга бўйсунган ҳолда айниқса яққол кўринади. Бу ҳолда системанинг конфигурациясини характерловчи *эркли* параметрлар сони $3n$ эмас, балки бу сондан кичик бўлади, чунончи бу эркли параметрлар сони системанинг эркинлик даражалари сонига тенг бўлади (54-§ га қаранг): $q_1, q_2, \dots, q_f, f = 3n - k$. Лагранж тенгламалари сони ҳам шунча бўлади. Агар гап бир заррачанинг берилган сирт устидаги (битта боғланиш тенгламаси) ҳаракати тўғрисида бўлса, Лагранжнинг иккита тенгламаси етарлидир. Заррачанинг берилган эгри чизиқ бўйича ҳаракатини аниқлаш учун Лагранжнинг битта тенгламаси кифоя қилади.

56-§. Лагранж тенгламаларини марказий куч майдонидаги ҳаракат тўғрисидаги масалага татбиқ этиш

Лагранж тенгламаларининг татбиқ этилишига мисол тариқасида электроннинг мусбат зарядли ядро майдонида ҳаракатланиши тўғрисидаги масалани яна текшираамиз. Масаланинг симметрик эканлиги бу ерда декарт координаталарига

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

муносабатлар билан боғланган r ва φ қутб координаталар энг қулай эканлигини кўрсатади.

Лагранж тенгламалари ($q_1 = r, q_2 = \varphi$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (56.1)$$

Бу ҳолда Лагранж функциясини топиш учун кинетик ва потенциал энергияларнинг қутб координаталар орқали ёзилган ифодаларини эслайлик*:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2); \quad U = -\frac{Ze^2}{r}.$$

* Агар биз ядронинг ўз ҳаракатини ҳисобга олмоқчи бўлсак, кинетик энергия формуласида электрон массаси ўрнига электрон билан ядронинг келтирилган массасини (53-§) қўйиш керак.

Шунинг учун Лагранж функцияси

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{Ze^2}{r}. \quad (56.2)$$

Унинг хусусий ҳосилаларини ёзамиз:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr \dot{\varphi}^2 - \frac{Ze^2}{r^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

буларни (56.1) га қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{d}{dt} (m \dot{r}) - m r \dot{\varphi}^2 + \frac{Ze^2}{r^2} = 0, \quad (56.3)$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (56.4)$$

(56.4) тенгламани интеграллаб

$$mr^2 \dot{\varphi} = P \quad (56.5)$$

тенгликни топамиз, бу ерда P — интеграллаш доимийси. Бу эса ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунидир. Биринчи тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m \ddot{r} = -\frac{Ze^2}{r^2} + mr \dot{\varphi}^2. \quad (56.6)$$

Бу тенглама ҳаракатнинг радиус-вектор бўйича ташкил этувчисини тасвирлайди. Ўнг томонда электронга радиус-вектор бўйлаб таъсир қилувчи куч ёзилган. Бу кучнинг ифодаси иккита ҳаддан иборат: булардан биринчиси Кулон кучи; юзаки қараганда, иккинчи ҳаднинг бўлиши кутилмагандай туюлади. Амма масалани чуқурроқ текширсак, бу $mr \dot{\varphi}^2$ ҳад марказдан қочирма инерция кучи эканлиги маълум бўлади.

Энди (56.6) тенгламани интеграллашга ўтамиз. Бунинг учун унга $\dot{\varphi}$ нинг (56.5) дан топиладиган

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}$$

қийматини қўямиз ва иккала томонини m га бўламиз:

$$\ddot{r} = -\frac{Ze^2}{mr^2} + \frac{P^2}{m^2 r^3}.$$

Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{2m^2 r^2} \right). \quad (56.7)$$

Бу тенгламанинг иккала томонини $2\dot{r}$ га кўпайтириб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\frac{d}{dt} \dot{r}^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2 r^2} \right),$$

буни интеграллаб \dot{r}^2 ни топамиз:

$$\dot{r}^2 = c + \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2}, \quad (56.8)$$

бу ерда c — интеграллаш доимийси. Бу тенгламада \dot{r} ни

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

орқали алмаштирамиз, у ҳолда (56.8) тенглама баъзи шакл алмаштиришлардан кейин бундай ёзилади:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + C,$$

бунда $C = \frac{cm^2}{P^2}$; янги $\rho = \frac{1}{r}$ ўзгарувчи киритсак, бу тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2} \rho - \rho^2 + C. \quad (56.9)$$

Аммо (56.9) ва (45.7) тенгламалар ўхшаш ва улар бир хил йўл билан интегралланади. Шунинг учун биз бу ерда 51-§ да бажарилган ва охириги натижада конус кесимлари тенграмаси келиб чиқадиган ҳисоблашларни такрорламаймиз.

Пировардида (56.6) тенгламани сифат жиҳатдан талқин қиламиз. Бунинг учун бу тенгламани (56.7) кўринишга келтириб, қуйидагича ёзамиз:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2} \right). \quad (56.7')$$

Равшанки, бу тенглама потенциали

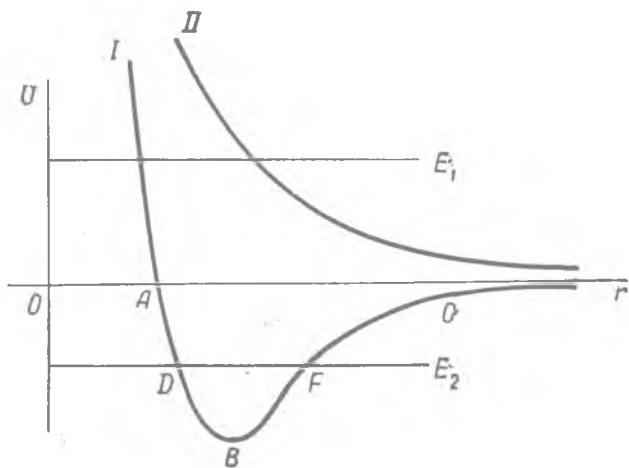
$$U = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2} \quad (56.10)$$

бўлган майдондаги бир ўлчовли ҳаракатга мос келади. Потенциал ифодасидаги биринчи ҳад Кулон кучининг потенциали, иккинчи ҳад эса марказдан қочирма куч юзага келтирган бирор фиктив потенциалдир.

Энди абсциссалар ўқида r ни ва ординаталар ўқида U ни қўйиб, потенциал эгри чизиқ ясаймиз. Бу эгри чизиқ 108-расмда тасвирланган I эгри чизиқ кўринишида бўлиши керак.

Ҳақиқатан ҳам, r нинг қиймати катта бўлганда (56.10) даги иккинчи ҳадни биринчисига нисбатан эътиборга олмаса ҳам бўлади, шунинг учун U манфий бўлади. Аксинча, r нинг қиймати кичик бўлганда иккинчи ҳад биринчидан катта бўлади ва U потенциал энергия мусбат бўлади. Шунинг учун r нинг муайян бир қийматида эгри чизиқ минимумдан ўтиб, r янада камайганда юқорига тез кўтарилади.

Бу эгри чизиқ тўла энергия мусбат бўлганда нима учун орбитанинг гиперболик бўлишини, тўла энергия манфий бўлганда орбитанинг эллиптик бўлишини яққол кўрсатади. Бунинг учун оғир шарча билан ўтказиладиган иллюстрациядан фойдаланиш жуда қулай (... - бетга қаранг). Равшанки, $E_1 > 0$ баландликка кўтарилган шарча ABC „ўрага“ думалаб тушиб, чексизликка кетади. Аксинча, энергия манфий ($E_2 < 0$) бўлганда шарча DBF чуқур ичида у ёқ бу ёққа бориб-келиб туради



108-расм. Кеплер ҳаракатининг радиал ташкил этувчиси учун потенциал эгри чизиқ: I — тортишиш ҳоли; II — итаришиш ҳоли.

ва бунга тегишли заррача ҳамма вақт тортувчи марказ атрофида чекли масофада қолгани ҳолда унга нисбатан даврий ҳаракат қилади.

Агар заррача марказга тортилмасдан фақат итарилса, (56.10) даги биринчи ҳад мусбат бўлади ва r нинг ҳар қандай қийматида потенциал энергия мусбат бўлади. Бунда потенциал эгри чизиқ 108-расмда тасвирланган II эгри чизиқ кўринишида бўлади. Бу ҳолда ҳар қандай баландликка кўтарилган шарча чексизликка думалаб кетади.

57-§. Умумлаштирилган импульслар

Лагранж тенгламалари ҳамма вақт масаланинг ечилишини иккинчи тартибли одатдаги дифференциал тенгламаларни интеграллашга келтиради. Аммо кўпчилик ҳолларда иккинчи тартибли тенгламалар ўрнига тенгламалар сони икки марта ортиқ бўлган биринчи тартибли тенгламалардан фойдаланиш қулай. Бундай тенгламаларни ёзиш учун энг аввал *умумлаш-*

тирилган импульс деб аталадиган янги тушунча киритишимиз керак. Умумлаштирилган координаталардан ҳар бирига тегишлича умумлаштирилган импульсларни ёзамиз. Бу умумлаштирилган импульсни (Лагранж механикасида) формал равишда Лагранж функцияларидан тегишли умумлаштирилган тезлик бўйича олинган хусусий ҳосила деб таърифлаймиз:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (57.1)$$

Координаталарнинг функцияси (тезликларнинг функцияси эмас) булган U потенциалга эга кучлар учун Лагранж функцияси $L = T - U(q_1, \dots, q_k, \dots)$ ва

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (57.2)$$

Умумлаштирилган импульсларнинг физик маъносини тушуниб олишимиз учун уларнинг ҳар хил координаталардаги ошкор ифодаларини ҳисоблаб топиш фойдалидир. Декарт координаталари системасида нуқтанинг кинетик энергияси

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

шунинг учун

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad (57.3)$$

яъни бу ҳолда умумлаштирилган импульслар $m\mathbf{v}$ ҳаракат миқдорининг декарт координаталари ўқларидаги проекцияларидан иборат бўлади.

Бошқа координаталарда умумлаштирилган импульсларнинг маъноси ва ўлчамлиги бошқача бўлиши мумкин. Масалан, r ва φ қутб координаталарга тегишли импульсларни ҳисоблайлик. Кинетик энергиянинг қутб координаталардаги ифодаси

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2);$$

тегишли умумлаштирилган импульслар:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad (57.4)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \quad (57.5)$$

Равшанки, p_r радиал импульснинг ўлчамлиги ҳаракат миқдорининг ўлчамлиги билан, p_φ азимутал импульснинг ўлчамлиги эса ҳаракат миқдори моментининг ўлчамлиги билан бир хил булади.

Умумлаштирилган импульс тушунчасидан фойдаланиб, Лагранж тенгламаларини янгича шаклда ёзамиз:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, f)$$

ва уларда $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ ни (57.1) таърифга биноан p_k орқали ифода-
лаб, тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, f). \quad (57.6)$$

Бунга умумлаштирилган импульснинг

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, f) \quad (57.7)$$

таърифни қўшиб, *биринчи тартибли 2f* тенгламалар систе-
масини ҳосил қиламиз.

58- §. Гамильтон каноник тенгламалари

Олдинги параграфнинг охирида ҳосил қилинган (57.6) ва (57.7) тенгламалар иккинчи тартибли тенгламаларни биринчи тартибли тенгламалар билан алмаштириш имконини беради. Аммо улар жуда симметрик эмас. Амалда эса, одатда, биринчи тартибли тенгламаларнинг *Гамильтон каноник тенгламалари* деб аталадиган бошқа шаклидан фойдаланилади. Бу тенгламалар жуда оддий ва ихчамдир.

Аввал энг содда ҳолни қараб чиқамиз. Биз тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган битта заррача билан иш кўраётган бўлайлик. Бу заррачанинг траекториясини x ўқ деб қабул қилишимиз мумкин. У вақтда заррачанинг вазияти битта $q = x$ координата билан аниқланади, унга тегишли умумлаштирилган импульс эса $p = m\dot{x}$ бўлади [(57.3) га қаранг]. Энди янги H функция киритамиз; уни *кинетик ва потенциал энергиялар йиғиндиси* деб қараймиз, *лекин бунда кинетик энергияни тезлик орқали эмас, балки p импульс орқали ифода*лаймиз:

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U. \quad (58.1)$$

Бу H функцияни Лагранжнинг L функцияси билан боғлай оламиз. Бунинг учун аввал кинетик энергия

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(m\dot{x})^2}{2m} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

кўринишда тасвирланишини қайд қиламиз.

Энди қуйидаги тенгликларни текшириб кўриш осон:

$$p\dot{x} - L = p\dot{x} - T + U = p\dot{x} - \frac{1}{2}p\dot{x} + U = \frac{1}{2}p\dot{x} + U = T + U = H. \quad (58.2)$$

(58.2) нинг иккала томонидан тўлиқ дифференциал оламиз:

$$dH = p d\dot{x} + \dot{x} dp - \frac{\partial L}{\partial x} dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\dot{x}. \quad (58.3)$$

Аммо (57.2) га асосан, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p$. Шунинг учун (58.3) нинг ўнг томонидаги биринчи ҳад тўртинчи ҳад билан қисқариб кетади ва (58.3) қуйидаги кўринишни олади:

$$dH = \dot{x} dp - \frac{\partial L}{\partial x} dx. \quad (58.4)$$

Энди H нинг x ва p (аммо \dot{x} ники эмас) функцияси эканлигини назарда тутиб, H нинг тўла дифференциалини ёзамиз:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial x} dx.$$

Энди бу ифодани (58.4) билан солиштириб ва (57.6) га биноан $\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{p}$ эканини эсга олиб қуйидаги тенгламаларни топамиз:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (58.5)$$

Биринчи тартибли бу иккита тенглама биз текшираётган ҳол учун *Гамильтоннинг каноник тенгламаларидир*. Кўришиб турибдики, бу ҳолда (58.5) каноник тенгламалар бизга яхши маълум бўлган натижаларга олиб келади. $H = \frac{p^2}{2m} + U$ бўлгани учун, $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$. Шунинг учун (58.5) тенгламалардан қуйидагиларни топамиз:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Бу муносабатларнинг биринчисидан $p = m\dot{x}$ эканлиги топилади, бу эса ҳаракат миқдорининг таърифидир; иккинчиси эса x ўқ бўйича ҳаракатланаётган варрача ҳаракатининг Ньютон тенгламасидир.

Биз ҳозир, эркинлик даражаси f бўлган системалар учун ҳам каноник тенгламалар кўриниши (58.5) тенгламалар кўришиддек бўлишини, фақат тенгламалар сони тегишлича ортиқ бўлишини кўрсатамиз. Системанинг конфигурацияси f та умумлаштирилган q_1, q_2, \dots, q_f координаталар билан белгилансин. L Лагранж функцияси умумлаштирилган координаталарга, умумлаштирилган q_1, q_2, \dots, q_f тезликларга, шунингдек, умуман айтганда, вақтга ҳам боғлиқ бўлади:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

шу билан бирга бу ерда барча умумлаштирилган координаталарнинг тўплами q_k билан, барча умумлаштирилган тезликларнинг тўплами \dot{q}_k билан белгиланган. Энди Лагранж функциясидан H Гамильтон функциясига ўтамиз. Бунинг учун f эркинлик даражасига тегишли бўлган (58.2) алмаштиришдан фойдаланамиз:

$$H = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - L. \quad (58.6)$$

(58.6) нинг ўнг ва чап томонини тўла дифференциаллаймиз:

$$dH = \sum p_k d\dot{q}_k + \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

(57.7) га биноан $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ бўлгани учун биринчи ва тўртинчи йиғиндилар қисқаради ва қўйидаги ҳосил бўлади:

$$dH = \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (58.7)$$

Иккинчи томондан, q_k , p_k (\dot{q}_k ники эмас) ва t нинг функцияси бўлган H нинг тўла дифференциали қўйидаги кўринишда бўлиши керак:

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

(58.7) ни бунга таққослаб ва (57.6) га биноан $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{dp_k}{dt}$ эканлигини ҳисобга олиб, қўйидаги дифференциал тенгламаларни топамиз:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, f) \quad (58.8)$$

Биринчи тартибли бу дифференциал тенгламалар эркинлик даражаси f бўлган системалар учун каноник тенгламалардир. Бу тенгламаларнинг умумий сони $2f$ га тенг, яъни иккинчи тартибли тенгламалар сонидан икки марта ортиқ. Умумлаштирилган q_k координата ва бу координатага тегишли умумлаштирилган p_k импульс бир-бирига *каноник қўшма* дейилади.

Эркинлик даражаси учта бўлган система учун (масалан, ҳаракати боғланишлар билан чекланмаган битта заррача учун) каноник тенгламалар олтига бўлади. Биз бу ерда биринчи тартибли олтига тенглама билан иш кўрганлигимиз учун охириги натижага яна олтига ихтиёрий ўзгармаслар киради. Системанинг бошланғич вазиятини (54- §), яъни $t=0$ бўлганда q_k ва p_k лар қийматларининг тўпламини билган ҳолда, (58.8) тенгламаларни интеграллаб келгусидаги ҳар қандай пайтда системанинг вазияти қандай бўлишини олдиндан айта оламиз. Шундай қилиб, Гамильтоннинг каноник тенгламалари ўз шаклига кўра сабабият классик принципнинг яққол ифодасидир.

59-§ . Гамильтон функциясининг физик маъноси

Олдинги параграфнинг бошида биз Гамильтон функциясини декарт координаталаридаги бир ўлчовли ҳаракат ҳоли учун координаталар ва импульслар орқали ифодаланган кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндиси деб таърифлаган эдик. Ундан кейин биз бу таърифнинг Лагранж функцияси орқали ёзилган

$$H = \dot{x}p_x - L$$

таъриф билан айнан эканлигини кўрсатдик ва бу охириги таърифни f та ихтиёрий умумлаштирилган координаталар ҳоли учун

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (58.6)$$

деб умумлаштирдик. Энди Гамильтон функциясининг бу умумийроқ ҳолда маъноси қандай эканлигини ойдинлаштирамиз.

Лагранж функцияси, шунингдек H Гамильтон функцияси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлмаган ҳолларда Гамильтон функцияси, энг содда ҳолдаги каби, кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндисидан иборат экан. Аввал H функция вақтга ошкор ҳолда боғлиқ бўлмаганда унинг ўзгармас катталикка тенг эканлигини кўрсатамиз:

$$H = H(q_k, p_k) = \text{const.}$$

Буни исбот қилиш учун H нинг вақт бўйича тўла ҳосиласини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_3} \dot{p}_3 + \dots = \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right). \end{aligned}$$

Бунга \dot{q}_k ва \dot{p}_k нинг (58.8) дан топиладиган қийматларини қўямиз:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0, \quad (59.1)$$

бундан

$$H = \text{const.} \quad (59.2)$$

Энди Гамильтон функциясининг физик маъносини ойдинлаштиришга ўтамиз. Таърифга биноан:

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3 + \dots - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L. \quad (59.3)$$

Консерватив система учун:

$$L = T - U \quad (59.4)$$

ва U фақат координаталарга боғлиқ бўлганлиги учун:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (59.5)$$

Шундай қилиб, қуйидагини топамиз:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \quad (59.6)$$

ва, бинобарин,

$$H = \sum_{k=1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (59.7)$$

Энди ҳар қандай умумлаштирилган координаталарда кинетик энергия q_k тезликларнинг *икки ўлчовли бир жинсли* функцияси эканлигини эътиборга олиш зарур. Декарт ва қутб координаталарда бунинг тўғри эканлигига бевосита ишонч ҳосил қилган эдик (41 ва 49-§ ларга қаранг). Умумлаштирилган координаталарда ҳам шундай бўлишини кўрсатиш* мумкин. Эйлernинг бир жинсли функциялар тўғрисидаги теоремасига биноан: агар $f(x, y, \dots, u, v)$ функция n ўлчовли бир жинсли функция бўлса, у ҳолда

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} = n f. \quad (59.8)$$

Бу теоремани (59.6) йиғиндига татбиқ этиб, қуйидагини топамиз:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} + \dots = 2T \quad (59.9)$$

ва (59.7) дан:

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - T + U = T + U. \quad (59.10)$$

Шундай қилиб, консерватив системалар учун Гамильтон функцияси координаталар ва импульслар орқали ифодаланган кинетик ва потенциал энергиянинг йиғиндисидангина иборатдир.

Гамильтон функциясига бир қанча мисол келтирамиз:

а) U потенциалли майдондаги заррача:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z).$$

55-§ га биноан, $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$, бинобарин,

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z). \quad (59.11)$$

* Масалан, қуйидаги китобларга қаранг: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, 19-бет, Физматгиз, 1959; Т. Голдстейн, *Классическая механика*, 36-бет, Физматгиз, 1957.

б) Чизикли осциллятор: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $U = \frac{1}{2} f x^2$,

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} f x^2. \quad (59.12)$$

в) Кулон майдонидаги электрон: $T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$, $U = -\frac{Ze^2}{r}$;

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi},$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) - \frac{Ze^2}{r}. \quad (59.13)$$

60- §. Циклик координаталар

Гамильтон функцияси H умумий ҳолда барча координаталарга ва умумлаштирилган импульсларга боғлиқ бўлади. Аммо баъзи хусусий ҳолларда битта ёки бир нечта координаталар H нинг ифодасига кирмай қолиши ҳам мумкин. Бундай координаталар *циклик* координаталар деб аталади. Ядронинг Кулон майдонида ҳаракат қилувчи электроннинг Гамильтон функциясини мисол қилиб оламиз:

$$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2) - \frac{Ze^2}{r}. \quad (59.13)$$

Кўриб турибмизки, H нинг ифодасига r ва φ иккита координатадан фақат r киради; бинобарин, φ циклик координатадир.

Иккинчи мисол тариқасида ернинг тортиш кучи майдонида ҳаракатланадиган заррача учун Гамильтон функциясини қараб ўтамиз. Бу ерда потенциал энергия заррачадан Ергача булган масофагагина боғлиқ: $U = mgz$. Бинобарин [(59.11) га қаранг]

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz. \quad (60.1)$$

Кўриб турибмизки, H нинг ифодасига x ва y координаталар кирмайди; улар ҳам циклик координаталардир.

Агар координаталардан бирораси циклик координага булса, унга тегишли умумлаштирилган импульс доимий бўлиши керак. Масалан, q_i координата H га кирмасин:

$$H = H(q_2, q_3, \dots, q_f; p_1, p_2, \dots, p_f).$$

У вақтда (58.8) каноник тенгламалардан $\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ эканлиги, бундан $p_i = \text{const}$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, (59.13) Гамильтон функциясига φ координата кирмаганлиги учун,

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (60.2)$$

Гамильтоннинг (60.1) H функциясига y ва x координаталар кирмайди, натижада

$$p_x = m\dot{x} = \text{const}, \quad p_y = m\dot{y} = \text{const}. \quad (60.3)$$

Барча координаталар циклик координаталар бўлган ҳол айтиқса муҳимдир. Бу ҳолда барча импульслар доимий, барча координаталар эса вақтнинг чизиқли функциялари бўлиши-ни кўрсатамиз. Бунга ротатор, яъни қўзғалмас марказ атро-фида айлана бўйича ҳаракатланувчи заррача энг содда мисол бўлади. Маълумки, бундай заррачанинг кинетик энергияси

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2, \quad (60.4)$$

бунда $A = mr^2$; унинг потенциал энергияси нолга тенг, φ га мос келувчи умумлаштирилган импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = A \dot{\varphi} \quad (60.5)$$

бўлади ва, бинобарин,

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2 = \frac{(A \dot{\varphi})^2}{2A} = \frac{p_\varphi^2}{2A}$$

ва

$$H = T + U = \frac{p_\varphi^2}{2A}. \quad (60.6)$$

Яккаю ягона φ координата циклик координата бўлгани учун $p_\varphi = \text{const}$ бўлади; каноник тенгламаларга асосан,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial p_\varphi} \left(\frac{p_\varphi^2}{2A} \right) = \frac{p_\varphi}{A} = \text{const}.$$

const ни ω билан белгилаб, интеграллагандан кейин қуйидаги-ни топамиз:

$$\varphi = \omega t + \alpha,$$

бунда α — интеграллаш доимийсидир.

Агар системанинг эркинлик даражаси f ва барча коорди-наталари циклик координаталар бўлса, у ҳолда $H = H(p_1, p_2, \dots, p_f)$ ва ҳар қандай p_k импульс учун қуйидаги тенглик-ка эга бўламиз:

$$\frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0.$$

У вақтда каноник тенгламалардан:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \text{const} = \omega_1,$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \text{const} = \omega_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{dq_f}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_f} = \text{const} = \omega_f,$$

бундан

$$q_1 = \omega_1 t + \alpha_1, \quad q_2 = \omega_2 t + \alpha_2, \dots, \quad q_f = \omega_f t + \alpha_f.$$

Барча координаталар циклик координаталар бўлганда ҳақиқатан ҳам барча импульслар доимий, координаталар эса вақтнинг чизиқли функцияси бўлиши кўриниб турибди.

61-§. Пуассон қавслари. Сақланиш қонунлари

Координаталар, импульслар ва вақтнинг бирор $F(q_k, p_k, t)$ функциясини текшираётирмиз деб фараз қилайлик, бу ерда q_k ва p_k — барча координата ва импульсларнинг тўпламлари; F нинг вақт бўйича олинган тўла ҳосиласини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dt} + \dots \equiv \\ &\equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right). \end{aligned}$$

Ўнгдаги координата ва импульслардан вақт бўйича олинган ҳосилаларни каноник тенгламалардаги H гамильтониан ҳосилалари $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ орқали алмаштириб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right).$$

Ўнгдаги иккинчи ҳад Пуассон қавслари деб аталади ва (H, F) орқали белгиланади:

$$(H, F) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (61.1)$$

Шундай қилиб, ҳар қандай $F(q_k, p_k, t)$ функциянинг вақт бўйича олинган тўла ҳосиласини қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (H, F). \quad (61.2)$$

Агар F функция вақтга ошкор ҳолда боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ бўлади, шунинг учун

$$\frac{dF}{dt} = (H, F). \quad (61.3)$$

Шундай қилиб, координата ва импульсларнинг ҳар қандай $F(q_k, p_k)$ функциясига тегишли Пуассон қавслари бу функциянинг вақт бўйича олинган тўла ҳосиласи ифодасини билдиради. Бу фактдан фойдаланиб,

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

каноник тенгламаларни Пуассон қавслари ёрдамида янги кўринишда тасвирлаймиз.

(61.3) га асосан,

$$\frac{dq_k}{dt} = (H, q_k), \quad \frac{dp_k}{dt} = (H, p_k). \quad (61.4)$$

Энди (H, q_k) ва (H, p_k) қавсларни топамиз:

$$(H, q_k) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial q_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$(H, p_k) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial p_k}{\partial p_k} \right) = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Ҳақиқатан ҳам (61.4) тенгламалар каноник тенгламалар билан бир хил эканлиги кўриниб турибди.

Агар $F(q_k, p_k)$ функция учун Пуассон қавслари нолга тенг, яъни

$$(H, F) = 0 \quad (61.4')$$

булса, у ҳолда

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad F(q_k, p_k) = \text{const.}$$

Бундан сақланиш қонунларини ёки ҳаракат тенгламаларининг биринчи интегралларини топишда фойдаланиш мумкин; ҳаракат тенгламаларининг биринчи интеграллари деганда координаталар билан уларнинг вақт бўйича олинган *биринчи* ҳосилалари орасидаги шундай муносабатлар тушуниладики, бу муносабатлар бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда бутун ҳаракат давомида ўз қийматларини ўзгартирмайди. Масалан, (H, H) қавсларни топайлик:

$$(H, H) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0,$$

бундан

$$H = \text{const}$$

ёки декарт координаталарида ёйиб ёзсак,

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) = \text{const.} \quad (61.5)$$

Энергиянинг сақланиш қонунини ифодаловчи бу муносабат ҳаракатнинг биринчи интегралларидан биридир, яъни энергия интегралидир. 59-§ да $\frac{dH}{dt}$ ҳосилани излаганда биз Пуассон қавсларининг хусусий ҳолидан [(59.1) га қаранг] фойдаланганлигимизни бу ерда қайд қиламиз.

Иккинчи мисол тариқасида заррачанинг марказий куч майдонидаги ҳаракатини текширамиз. (H, L_z) Пуассон қавсларини топамиз, бу ерда L_z — ҳаракат миқдорининг z ўққа нисбатан моменти:

$$L_z = xp_y - yp_x. \quad (61.6)$$

Пуассоннинг изланаётган қавслари, (61.1) га асосан,

$$(H, L_z) = \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial L_z}{\partial p_y}. \quad (61.7)$$

(61.5) ва (61.6) ни ҳисобга олиб (H, L_z) ни топамиз:

$$(H, L_z) = y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Ўнг томонини ҳисоблаш учун $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ формулалардан фойдаланиб қутб координаталарга ўтамыз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \\ &= -r \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial y} = x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

тенгликларни ҳисобга олиб, (H, L_z) ни топамиз:

$$(H, L_z) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Марказий куч ҳолида потенциал энергия φ га боғлиқ бўлмай, фақат r га боғлиқ бўлади, шунинг учун

$$(H, L_z) = 0 \text{ ва } L_z = \text{const.}$$

Машқ тариқасида $L_x = \text{const}$ ва $L_y = \text{const}$ эканлигини Пуассон қавслари ёрдамида исбот этиш китобхонга тавсия этилади. Биз учта сақланиш қонунини, чунончи ҳаракат миқдори моменти ташкил этувчиларининг сақланиш қонунларини топамиз.

Ҳаракат миқдори тула моментининг сақланиш қонунлари заррачаларнинг изоляцияланган *системаси* учун ҳам ўринли бўлади. Бу ҳолда

$$L_z = \sum_k (x_k p_{y_k} - y_k p_{x_k}), \quad H = \sum_k \frac{1}{2m_k} (p_{x_k}^2 + p_{y_k}^2 + p_{z_k}^2) + U(x_k, y_k, z_k),$$

бу ерда йиғинди барча заррачаларга тааллуқлидир. Битта заррачага тегишли (61.7) га ўхшаган ҳисоб натижасидан қуйидагини топамиз:

$$\frac{dL_z}{dt} = (H, L_z) = \sum_k (y_k \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial y_k}).$$

$x_k = r_k \cos \varphi_k$, $y_k = r_k \sin \varphi_k$ формулалар ёрдамида қутб координаталарга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = - \sum_k \frac{\partial U}{\partial \varphi_k}.$$

Изоляцияланган консерватив системани айни бир бурчакка бурганда потенциал энергия ўзгармагани учун

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = 0 \text{ ва } L_z = \text{const.}$$

k та заррачадан иборат изоляцияланган система тўла ҳаракат миқдорининг P_x, P_y, P_z ташкил этувчилари сақланиш қонунлари ўринли эканлигини юқоридаги йўл билан исбот қилиш мумкин; бунда

$$P_x = \sum_k p_{xk}, \quad P_y = \sum_k p_{yk}, \quad P_z = \sum_k p_{zk}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{dP_x}{dt} = (H, P_x) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_{xk}} \frac{\partial P_x}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial P_x}{\partial p_{xk}} \right) = - \sum_k \frac{\partial H}{\partial x_k} = - \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k}$$

(йигинди барча заррачаларга тегишлидир). Заррачалар *системасининг* потенциал энергияси уларнинг ўзаро масофаларигагина боғлиқ бўлгани ва улар x ўқда бир хил масофага силжиганида потенциал энергия ўзгармаганлиги учун $\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$

ва $P_x = \text{const}$.

$$P_y = \text{const}, \quad P_z = \text{const}$$

эканлиги худди шу йўл билан исбот этилади.

Агар бунга (61. 5) энергиянинг сақланиш қонунини ҳам қўшсак, етти та сақланиш қонуни ёки ҳаракат тенгламаларининг етти та биринчи интегралига эга бўламиз.

Пуассон қавсларини H ва F бир жуфт функциялар учунгина эмас, балки координата ва импульсларнинг ҳар қандай жуфт f ва g функциялари учун ҳам аниқлаш мумкин. Бу ҳолда таъриф қуйидагича бўлади:

$$(f, g) = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (61.8)$$

$f = p$ ва $g = q$ бўлсин; u ҳолда, равшанки,

$$(p, q) = \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} - \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} = 1; \quad (61.9)$$

$f = q$ ва $g = p$ бўлганда

$$(q, p) = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} = 0, \quad (61.10)$$

Худди шунингдек, $(p, p) = 0$. Каноник қўшма координаталар ва импульслар жуфтига тегишли Пуассон қавслари 1 га тенг бўлиш фактини каноник қўшма катталиклар таърифи деб қараш мумкин: агар

$$(q_k, q_k) = 0, \quad (p_k, p_k) = 0, \quad (p_k, q_k) = 1$$

бўлса, p_k ва q_k иккита катталикни каноник қўшма катталиклар деб атаймиз.

62-§. Электромагнит майдондаги ҳаракат

Бу бобнинг олдинги параграфларида биз потенциал майдондаги, яъни заррачага таъсир этувчи куч бирор φ скаляр функциянинг градиенти сифатида тасвирланиши мумкин бўлган майдондаги ҳаракатларнигина ўргандик. Бундай майдонга доимий электростатик майдон мисол бўлади. Зарядли заррачани бундай майдонда кўчиришда бажарилган иш йўлнинг шаклига эмас, балки фақат бошланғич ва охири нуқталар вазиятигагина боғлиқ бўлади.

Электромагнит майдони таъсиридаги ҳаракат ҳаракатнинг муҳим ҳолидир. Бундай майдонда зарядли заррачага таъсир этувчи куч, маълумки, Лоренц формуласи билан ифодаланади:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

Бу формуланинг иккинчи ҳади магнит майдони томонидан таъсир этувчи кучни ифодалайди. Юқориди айтиб ўтилганидек (154-бет)

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

куч иш бажармайди, чунки у тезликка перпендикуляр йўналган. Магнит майдонининг муҳим хусусияти майдонда манбалар йўқлигидир. Бу факт қуйидаги шарт билан ифодаланади.

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Бу шартни ҳисобга олиб, магнит майдонининг \mathbf{H} кучланганлигини вектор потенциал деб аталадиган бирор \mathbf{A} векторнинг уюрмаси сифатида тасвирлаш мумкин

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

[вектор анализдан маълумки, ҳар қандай \mathbf{a} вектор учун $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$ айнинг ўринлидир, шунинг учун $\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, яъни айтиб ўтилган шарт бажарилади].

Вақт ўтиши билан ўзгарадиган электромагнит майдони анча умумийроқ ҳолдир. Бундай майдонни ҳисоблаш учун электродинамикада электродинамик потенциаллар — φ скаляр ва \mathbf{A} вектор* потенциаллар киритилади, электр майдонининг \mathbf{E} кучланганлиги, магнит майдонининг \mathbf{H} кучланганлиги қуйидаги формулалардан ҳисоблаб топилади:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}, \end{aligned} \right\} \quad (62.1)$$

* Масалан, қуйидаги китобларга қаранг: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 46-§, Гостехиздат, 1949; Я. И. Френкель, Курс теоретической механики, 212-бет, ГТТИ, 1940.

Ёки координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}, & H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}, & H_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}, & H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (62.2)$$

Шуни айтиш керакки, \mathbf{A} вектор-потенциал бир қийматли аниқланган эмас. Ҳар қандай скаляр f функция учун $\operatorname{rot} \xi \operatorname{grad} f = 0$ муносабат ўринли бўлгани учун (вектор анализи дарсликларидан қаранг) \mathbf{A} га $\operatorname{grad} f$ қўшиш мумкин, бунда (62. 1) формулаларнинг иккинчисидан қуйидагини топамиз*:

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}.$$

m массали ва e мусбат зарядли заррачанинг электромагнит майдондаги ҳаракат тенгламалари (Ньютон тенгламалари) қуйидагичадир;

$$m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]_x \equiv eE_x + \frac{e}{c} (yH_z - zH_y); \quad (62. 3)$$

y ва z ўқлар учун бунга ўхшаган яна иккита тенглама бор. Энди қуйидагича танлаб олинган

$$L = T - e\varphi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \mathbf{A}) \quad (62.4)$$

Ёки декарт координатларида ёйиб ёзилган

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + \frac{e}{c} (x\dot{A}_x + y\dot{A}_y + z\dot{A}_z) \quad (62.5)$$

Лагранж функциясидан (62. 3) тенгламаларни ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатамиз. Исбот этиш учун аввал x , y , z координаталарга тегишли умумлаштирилган импульсларни топамиз. Таърифга кўра, $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ ва ҳоказо. L функциянинг (62.5)

* Агар f скаляр вақтга боғлиқ бўлса, у ҳолда \mathbf{A} вектор потенциални $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f$ га алмаштирганда, (62.2) формулаларнинг биринчисига биноян, майдоннинг \mathbf{E} кучланганлиги ҳам ўзгаради. \mathbf{A} ни \mathbf{A}' га алмаштириш билан бир вақтда скаляр φ потенциал φ' потенциалга

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

формула ёрдамида алмаштирилган ҳоллагина \mathbf{E} кучланганлик ўзгармай қолади (бунга ишонч ҳосил қилиш учун (62. 2) формулаларнинг биринчисига φ ўрнига φ' , \mathbf{A} ўрнига \mathbf{A}' қуйиш керак). Майдоннинг \mathbf{A} ни \mathbf{A}' га ва φ ни φ' га алмаштиришга нисбатан ўзгармай қолиши калибровка ёки градиент инвариантлиги дейилади; бу китобга қаранг: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 96-§, Гостехиздат, 1949.

ифодасидан фойдалансак, умумлаштирилган импульсларни топамиз:

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x, \quad p_y = m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y, \quad p_z = m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z \quad (62.6)$$

ёки вектор кўринишида

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (62.7)$$

Кўриб турибмизки, p_x, p_y, p_z умумлаштирилган импульслар ҳаракат миқдорининг $m\dot{x}$ ва ҳоказо ташкил этувчиларига тенг бўлмай, яна қўшимча $\frac{e}{c} A_x$ ва ҳоказо қўшилувчиларга ҳам эгадир. Баъзан (62.6) умумлаштирилган импульслар кинетик импульслар деб ҳам аталади. Заррачанинг *тв ҳаракат миқдори кинетик* импульс орқали (62.7) формуладан қуйидагича аниқланади:

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (62.8)$$

бундан бевосита қуйидагилар топилади:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right), \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right), \\ \dot{z} &= \frac{1}{m} \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right). \end{aligned} \right\} \quad (62.9)$$

Энди ҳаракатнинг Лагранж тенгламаларини ёзамиз:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, f.$$

$q_1 = x$ деб олиб ва $\frac{\partial L}{\partial x} = p_x$ эканлигини назарда тутиб, Лагранж тенгламасини топамиз:

$$\frac{dp_x}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (62.10)$$

p_x ҳосилани ҳисоблаш учун (62.6) формулаларнинг биринчисидан фойдаланамиз:

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt}.$$

$\frac{dA_x}{dt}$ ҳосилани ҳисоблашда *тўла* ҳосила ёки ҳаракатланаётган

заррачанинг траекторияси бўйича ҳосила олиш кераклигини назарда тутиш муҳимдир*:

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Буни эътиборга олсак,

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right). \quad (62.11)$$

Сўнгра, (62.5) ни x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right). \quad (62.12)$$

(62.11) ва (62.12) ни (62.10) га қўямиз:

$$m\ddot{x} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c} \left[\dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right].$$

Аmmo (62.2) ни назарга олиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} &= eE_x, \\ \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) &= \\ = \dot{y} \operatorname{rot}_z A - \dot{z} \operatorname{rot}_y A = \dot{y} H_z - \dot{z} H_y = [\mathbf{vH}]_x. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, биз

$$m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]_x$$

тенгламани топдик. Лекин бу (62.3) тенгламадир.

Умумий таърифга асосан, Гамильтон функцияси қуйидагичадир:

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L. \quad (62.13)$$

Агар биз бу ерга p_x, p_y, p_z лар ўрнига (62.6) кинетик импульслар ифодаларини ва (62.4) Лагранж функциясини қўйсақ, қуйидагича ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} H = & \dot{x} \left(m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \right) + \dot{y} \left(m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y \right) + \dot{z} \left(m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z \right) - \\ & - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi - \frac{e}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \end{aligned}$$

* t бўйича олинган тўла (ёки субстанциал) ҳосила *мазкур заррача* учун A нинг ўзгаришини характерлайди, хусусий (ёки локал) ҳосила эса A нинг *мазкур жойда* ўзгаришини характерлайди. Бу ҳосилаларнинг фарқи тўғрисида ушбу китобга қаранг: Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 152-бет, ГОНТИ, 1939.

Содда алгебраик алмаштиришларни бажарсак, вектор-потенциалнинг ташкил этувчилари қатнашган ҳадлар қисқариб кетиб, натижа қуйидагича бўлади:

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + e\varphi,$$

яъни H аввалгича кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндисига тенг бўлиб, магнит майдонга тегишли бошқа бирор ҳад ҳам йўқ. Шундай бўлиши керак ҳам эди, чунки Лоренц кучи ҳеч қандай иш бажармайди (41-§ га қаранг).

Энди Гамильтон функциясининг координаталар ва уларга тегишли умумлаштирилган импульслар орқали ёзилган ошкор ифодасини топамиз. Бунинг учун (62.13) да, шунингдек Лагранж функциясининг (62.5) ифодасида \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} лар ўрнига уларнинг p_x , p_y , p_z лар орқали ёзилган (62.9) даги ифодаларини қўямиз. Аввал Лагранж функциясининг ифодасини ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + \frac{e}{c} (\mathbf{vA}) = \\ &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - e\varphi + \frac{1}{m} \frac{e}{c} \mathbf{A} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \end{aligned}$$

бу ерда \mathbf{p} — кинетик импульс. Гамильтон функциясини ҳам қисқалик учун вектор кўринишда ёзамиз:

$$H = \frac{1}{m} \mathbf{p} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi - \frac{1}{m} \frac{e}{c} \mathbf{A} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right).$$

Биринчи ва охириги ҳадлар биргаликда $\frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$ га тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам, масалан,

$$\begin{aligned} p_x \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) - \frac{e}{c} A_x \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) &= \\ = p_x^2 - 2 \frac{e}{c} p_x A_x + \frac{e^2}{c^2} A_x^2 &= \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2. \end{aligned}$$

Шунинг учун ихчамлашдан кейин қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi = \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right)^2 \right] + e\varphi. \quad (62.14) \end{aligned}$$

Бу эса Гамильтоннинг биз излаётган функциясидир.

(62.14) ни Гамильтон функциясининг майдон электростатик майдон бўлган ҳолдаги

$$H = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + e\varphi \quad (62.15)$$

ифодаси билан солиштирсак (бунда P_x , P_y , P_z лар ҳаракат миқдорининг ташкил этувчилари, яъни $P_x = m\dot{x}$ ва ҳоказо), у

ҳолда *электромагнит* майдон ҳолига жуда соддагина йўл билан ўтиш мумкинлигини кўраимиз: (62.15) да одатдаги импульснинг P_x, P_y, P_z ташкил этувчиларини кинетик импульснинг [(62.8) га қаранг] тегишли ташкил этувчилари билан алмаштирамиз, яъни

$$P_x = p_x - \frac{e}{c} A_x \text{ ва ҳ. к.}$$

63-§. Тез ҳаракатланувчи заррачалар механикаси. Лоренц алмаштиришлари

Заррачанинг тезлиги ёруғлик тезлигига яқин бўлган ҳолларда нисбийлик назарияси қонунларидан фойдаланиш лозим. Бу ерда нисбийлик назариясини муфассал баён эта олмаймиз, фақат бу ва бундан кейинги параграфларда бизга кейинчалик керак бўладиган зарур маълумотларни* келтириб ўтамиз.

Нисбийлик назарияси иккита постулатга асосланади.

1. Нисбийлик постулати. Системанинг тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётганлигини бу система ичида ўтказилган механик ёки электромагнит (жумладан, оптик) тажрибаларнинг бирортаси ёрдамида пайқаш мумкин эмас.

Бу постулат классик механиканинг Галилей очган нисбийлик принципининг умумлаштирилишидан иборатдир. Классик механиканинг нисбийлик принципига биноан, системанинг тинч ёки тўғри чизиқли текис, яъни инерциал ҳаракат ҳолатида бўлишидан қатъи назар, барча механик ҳодисалар бир хилда рўй беради.

Аммо бу ерда кичкина писанда қилиб ўтамиз: агар бирига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётган иккита система мавжуд бўлса, нисбийлик назарияси бирор *мазкур* ҳодиса иккала системада ҳам бир хилда рўй беради, деб *даъво қилмайди*. Масалан, агар жисм бир системада тинч турса, иккинчисида ҳаракат қилади. Аммо нисбийлик принципи бошланғич шартлар иккала системада бир хил бўлса, ҳаракатлар ҳам бир хилда рўй беради, деб даъво қилади.

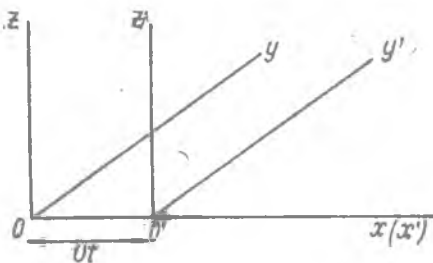
Эйнштейннинг нисбийлик постулати бу фикрни электромагнит ҳодисаларга ҳам жорий қилади. Агар инерциал системалар, яъни инерция қонуни ўринли бўладиган системалар тушунчасидан фойдаланилса, бу постулат бир оз бошқачароқ таърифланиши мумкин. Бу ҳолда нисбийлик принципи бун-

* Рус тилида нисбийлик назариясини яхши баён этган қатор китоблар бор, масалан: Беккер, *Электронная теория*; Бергман, *Теория относительности*. Г. С. Ландсбергнинг „Оптика“ китобида (XVI боб) нисбийлик назарияси ва унинг экспериментал асослари қисқа ва жуда тушунарли қилиб баён этилган. Нисбийлик назарияси яратилишининг тарихи жуда қизиқарлидир. Л. И. Мандельштамнинг нисбийлик назариясига доир лекцияларида бу тарих қизиқарли баён этилган (Танланган асарлар, V т.)

даф таърифланади: *механика ва оптиканинг ҳамма қонунлари барча инерциал системаларда бир хилдир.*

2. Ёруғлик тезлигининг доимийлиги постулати. Ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги барча системаларда бир хил бўлиб, манба ва кузатувчининг нисбий ҳаракатига боғлиқ эмас.

Классик механикада бир координаталар системасидан ўша системага нисбатан текис ҳаракат қилувчи иккинчи системага ўтиш учун Галилей алмаштиришлари деб аталадиган алмаштиришлардан фойдаланилади. Иккита тўғри бурчакли $S(x, y, z)$ ва $S'(x', y', z')$ декарт координаталари системаларини текширайлик (109-расм). Соддалик учун уларнинг x ўқлари устма-уст тушсин ва S' система S системага нисбатан x ўқ бўйича v тезлик билан текис ҳаракатлансин; шу билан бирга $t = 0$ пайтда иккала системанинг координаталар боши устма-уст тушади. Бу ҳолда S система S' системага нисбатан $-V$ тезлик билан ҳаракатланади. Шунинг учун нуқтанинг S' ва S системалардаги координаталари орасида қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:



109-расм.

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \right\} \quad (63.1)$$

Фазовий координаталарнинг бу учта муносабатига вақтга тегишли муносабатни ҳам қўшамиз: классик механика нуқтаназаридан, иккала системада вақт бир хилдир:

$$t' = t. \quad (63.1 \text{ а})$$

(63.1) ва (63.1 а) формулалар Ньютон механикасидаги Галилей алмаштиришларидан иборатдир. Координаталар билан вақтни бу алмаштириш формулаларига биноан алмаштирганда Ньютон механикасининг тенгламалари кўриниши ўзгармаслигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бошқача қилиб айтганда, Ньютон механикасининг тенгламалари Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантдир.

Ҳақиқатан ҳам Ньютоннинг ҳаракат тенгласини x координата учун ёзайлик:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x. \quad (63.2)$$

Равшанки, бундан кейинги мулоҳазалар ҳар қандай x , y ёки z координаталар учун ёзилган тенгламаларга ҳам тааллуқлидир. x координата учун Галилейнинг алмаштириш формулаларидан:

$$x = x' + Vt.$$

Буни t бўйича дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V$$

ёки

$$v_x = v'_x + V. \quad (63.3)$$

Бу Галилей—Ньютон механикасининг тезликларни қўшиш теоремасидир: заррачанинг S системадаги тезлиги бу заррачанинг S' системадаги тезлиги билан иккала координаталар системалари нисбий ҳаракатининг тезлиги йиғиндисига тенг.

t бўйича иккинчи марта дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}. \quad (63.2a)$$

Шундай қилиб, Ньютон ҳаракат тенгламаларининг чап томонлари Галилей алмаштиришларида ўзгармайди. Бу тенгламаларнинг ўнг томонларида кучнинг компонентлари туради. Аммо механикада иккита жисм орасидаги ўзаро таъсир кучлари тортишиш кучлари ёки итаришиш кучлари бўлади. Бундай кучлар икки жисм орасидаги масофага, яъни координаталарнинг ўзига эмас, балки уларнинг айирмасига боғлиқ бўлади. Шунинг учун Галилей алмаштиришлари кучнинг компонентларини ўзгартирмайди, яъни

$$F'_x = F_x. \quad (63.2 б)$$

(63. 2 а) ва (63. 2 б) ни (63.2) га қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$m \frac{d^2x'}{dt'^2} = F'_{x'}.$$

Бу эса Галилей алмаштиришлари Ньютоннинг ҳаракат тенгламалари кўринишини ўзгартирмаслигини билдиради: Ньютоннинг ҳаракат тенгламалари Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантдир.

Ҳаракат тенгламаларининг Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантлиги классик механика нисбийлик назариясининг математик таърифидан иборатдир: бир-бирига нисбатан текис ҳаракат қилувчи барча координаталар системаларида ҳаракат қонунилари бир хилдир. Нисбийлик назариясининг биринчи постулати бу принципга мувофиқ келади ва уни ёруғликнинг тарқалиш қонуниларига жорий этиб, умумлаштиради. Аммо иккала постулатни бир вақтда татбиқ этиш Галилей алмаштиришларига зиддир. Ҳақиқатан ҳам, тезликларни қўшиш теоремаси (63.3) Галилей алмаштиришларидан бевосита келиб

чиқади. Аммо бу теорема ёруғликнинг тарқалиш тезлигига татбиқ этилса, ёруғликнинг S системадаги тезлиги c бўлгани ҳолда S' системадаги тезлиги

$$c' = c + V$$

бўлиши келиб чиқади, бу эса нисбийлик назариясининг иккинчи постулатига зиддир.

Аммо бу иккала постулат барча экспериментал фактлар билан тасдиқланганлиги учун зиддият постулатлар орасида эмас, балки постулатлар билан Галилей алмаштиришлари орасидадир: Галилей алмаштиришларини ёруғликнинг тарқалишига ва ёруғлик тезлигига яқин тезликли ҳаракатларга татбиқ этиб бўлмайди.

Эйнштейн фазо ва вақтнинг хоссалари тўғрисидаги энг умумий мулоҳазалардан шундай алмаштиришларни топдики, бу алмаштиришлар нисбийлик назариясининг иккала постулатига ва буларнинг хусусий ҳоли булган ($v/c \ll 1$) Галилей алмаштиришларига ҳам мувофиқ келади. Бу алмаштиришларни олдинроқ Лоренц юзаки топган эди, шунинг учун бу алмаштиришлар Лоренц алмаштиришлари деб аталади. Бу алмаштиришларнинг кўриниши қуйидагичадир:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & y' &= y, \\ z' &= z, & t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (63.4)$$

Бу алмаштиришларнинг муҳим хусусияти шундаки, бир инерциал системадан иккинчисига ўтганда фазовий координаталаргина эмас, балки вақт ҳам ўзгартирилади: бир-бирига нисбатан текис ҳаракат қилувчи инерциал системаларда вақт ҳар хил ўтади.

$V/c \ll 1$ булганда, яъни Ньютон механикаси тўғри бўлган шароитда Лоренц алмаштиришлари Галилей алмаштиришларига (63.1) айланиб қолади.

(63.4) дан x, y, z, t ларни x', y', z', t' лар орқали ифода-лаймиз:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & y &= y', \\ z &= z', & t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (63.5)$$

Бу формулалар эса S' системага нисбатан — V тезлик билан ҳаракат қилувчи S системага тегишли Лоренц алмаштиришлари формулаларидир.

Лоренц алмаштиришларини келтириб чиқармаймиз, аммо уларнинг тўғри эканлигини кўрсатиш учун бу алмаштиришлар нисбийлик назариясининг иккала асосий постулати орасида зиддият чиқармаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун яна S ва S' иккита инерциал системаларни текшираемиз; $t = 0$ пайтда бу системаларнинг бошлари бир жойда бўлсин. Ўша пайтда координаталар бошидан қисқа ёруғлик сигнали чиқсин деб фарз қилайлик. dt вақт ўтганда ёруғлик сигнали S системада cdt масофага тарқалиб $R = cdt$ радиусли сферик сиртга етиб боради. Маркази O нуқтада бўлган бу сферик сиртнинг тенгламаси қуйидагичадир:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2. \quad (63.6)$$

Энди Лоренц алмаштиришларидан фойдаланиб, S системадан S' системага ўтамиз. (63.6) га dx , dy , dz , dt ларнинг (63.5) дан олинган қийматларини қўямиз:

$$\frac{(dx' + V dt')^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + dy'^2 + dz'^2 = c^2 \frac{\left(dt' + \frac{V dx'}{c^2}\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Содда алгебраик алмаштиришлардан кейин қуйидагини топамиз:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = c^2 dt'^2, \quad (63.7)$$

яъни маркази O' да бўлган сферик сиртнинг тенгламасидир.

Кўриб турибмизки, Лоренц алмаштиришлари ва ёруғлик тезлиги c нинг доимийлиги (иккинчи постулат) туфайли нисбийлик постулати ҳам қаноатлантирилади: $t = 0$ пайтда умумий координаталар бошидан чиққан тўлқин биринчи системада O марказга нисбатан, иккинчи системада эса ўзининг O' марказига нисбатан сферик тўлқинлигича қолаверади. Галилей алмаштиришлари нуқтан назаридан бундай бўлиши мумкин эмас эди*.

Шундай қилиб, Лоренц алмаштиришлари нисбийлик назариясининг иккита асосий постулати орасидаги туюлма зиддиятни бартараф қилади.

Нисбийлик назариясининг тезликларни қўшиш теоремаси ҳам Лоренц алмаштиришларига мувофиқ келади. Заррача x

* Ҳаракатланувчи системада тўлқин етиб борадиган нуқталарнинг геометрик ўрни қўзғалмас системада сфера бўлгани ҳолда нима учун O' га нисбатан сфера бўлиб қолавериши биринчи қарашда тушунарсиз бўлиб туюлади. Бу туюлма парадокс бир системада бир вақтда бўладиган ҳодисалар бошқа системада бир вақтда бўлмаслиги орқасида ҳал қилинади.

ўқ бўйича ҳаракатланган энг содда ҳолни текширайлик; (63.4) дан қуйидагини топамиз:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} - V \frac{dt}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Иккала ифодани бирга ечиб, қуйидагини топамиз:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (63.8)$$

Бундан штрихсиз катталикларни штрихли катталиклар орқали ифодалаб тезликни топамиз:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (63.9)$$

(63.9) тенглик нисбийлик назариясида тезликларни қўшиш теоремасидан иборатдир. $V/c \ll 1$ бўлганда автоматик равишда:

$$v_x = v'_x + V,$$

яъни Галилей—Ньютон механикасидаги тезликларни қўшиш теоремаси келиб чиқади. Шу билан бирга, (63.9) формула нисбийлик назариясининг иккинчи постулатига мувофиқ келадиган натижаларни ҳам беради. Энг чегаравий ҳолни текширайлик. Айтилик, $v'_x = c$ ва S' система S системага нисбатан $V = c$ тезлик билан ҳаракат қилган ҳолда ёруғликнинг S системага нисбатан тезлигини ҳисоблаб топиш керак бўлсин. V ҳолда (63.9) дан

$$v_x = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c,$$

шундай бўлиши керак ҳам эди.

64-§. Заррача релятивистик динамикасининг асослари

а) Массанинг тезликка боғланиши

Энди Ньютон динамикасига нисбийлик назарияси киритган муҳим ўзгартиришлар билан танишиб чиқишимиз лозим. Бу мақсадда оддий механик процессни: бир-бирига қараб x ўқ бўйича ҳаракатланувчи иккита бир хил эластик шарларнинг

ўзаро тўқнашишидан иборат бўлган процессни қараб чиқишдан бошлаш қулай. Текширишга асос қилиб анча умумий бўлган қуйидаги иккита қондани постулатлар сифатида қабул қиламиз: массанинг сақланиш принципи

$$\sum_i m_i = \text{const} \quad (64.1)$$

ва импульснинг сақланиш принципи

$$\sum m_i v_i = \text{const} \quad (64.2)$$

Ўки координаталар орқали ифодаси

$$\left. \begin{aligned} \sum_i m_i v_{ix} &= \text{const}, \\ \sum_i m_i v_{iy} &= \text{const}, \\ \sum_i m_i v_{iz} &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (64.2a)$$

Бундан сўнг эластик ўзаро тўқнашиш процесси бир-бирига нисбатан текис ҳаракат қиладиган иккита координаталар системаси нуқтаи назаридан текширилади. Бу процесснинг Ньютон механикасида текширилиши билан нисбийлик назариясида текширилиши орасидаги фарқ шундан иборатки, Ньютон механикасида Галилей алмаштиришлари, нисбийлик назариясида эса Лоренц алмаштиришлари, аниқроғи, бу алмаштиришлардан келиб чиқадиган тезликларни қўшиш қонунлари қўлланилади.

Шундай қилиб, S' системада x уқ бўйича $+v'$ ва $-v'$ тезликлар билан ҳаракатланувчи иккита шарни текшираемиз. Шарлар идеал эластик равишда тўқнашади деб фараз қилинган учун, тўқнашганда иккала шар аввал тўхтайдди, сўнгра эластиклик кучлари ортиши таъсирида тезликлари алмашади: биринчи шар $-v'$ тезлик билан орқага кетади, иккинчиси эса $+v'$ тезлик билан орқага кетади.

Энди координаталарнинг S' системага нисбатан $-V$ тезлик билан ҳаракатланувчи S инерциал системасини киритамиз. Шарлар массаларининг тезликка боғлиқ равишда ўзгариш имкониятини олдиндан ҳисобга олиб, уларнинг бу системадаги массаларини m_1 ва m_2 билан белгилаймиз. M —бу шарларнинг тўхтаган пайтдаги, яъни иккала шар S системага нисбатан V тезликка эга бўлган пайтдаги массалари йиғиндиси бўлсин. Янги системада ҳам тўғри бўлган масса ва импульснинг сақланиш қонунлари қуйидагича ифодаланади:

$$m_1 + m_2 = M, \quad (64.3)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV. \quad (64.4)$$

Галилей—Ньютон механикасидаги тезликларни қўшиш теоремаси тривиал (одатдаги) натижага, яъни $m_1 = m_2$ га олиб келишини ҳозир кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам бу теоремага асосан биринчи шарнинг S системага нисбатан тезлиги

$$v_1 = v' + V,$$

иккинчи шарники эса

$$v_2 = -v' + V$$

бўлади. Буларни (64.4) га қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$m_1 v' + m_1 V - m_2 v' + m_2 V = M V,$$

бундан

$$(m_1 - m_2) v' = 0$$

ёки

$$m_1 = m_2.$$

Шундай эканлигини исбот қилишимиз керак эди.

Нисбийлик назарияси динамикасида биз тезликларни қўшишнинг Лоренц алмаштиришларидан келиб чиқадиган Эйнштейн теоремасидан фойдаланишимиз керак. Бу теоремага асосан,

$$v_1 = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{-v' + V}{1 - \frac{v'V}{c^2}}. \quad (64.5)$$

(64.5) ни (64.4) га қўйиб ва массанинг сақланиш $m_1 + m_2 = M$ қонунидан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$m_1 \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} + m_2 \frac{-v' + V}{1 - \frac{v'V}{c^2}} = m_1 V + m_2 V,$$

содда алгебраик алмаштиришлардан сўнг бу тенгламадан массалар нисбатини топамиз:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{v'V}{c^2}}{1 - \frac{v'V}{c^2}}. \quad (64.6)$$

Охири натижани топишимиз учун (64.5) тезликларни қўшиш теоремасидан фойдаланиб, баъзи алгебраик ҳисобларни бажаришимизгина қолади. v_1 тезлик қийматини ҳисобга олиб, қуйидаги ифодани ҳисоблаймиз:

$$\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(v' + V)^2}{c^2 \left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{c^2 \left[1 + \left(\frac{v'V}{c^2} \right)^2 + 2 \frac{v'V}{c^2} \right] - (v'^2 + V^2 + 2v'V)}{c^2 \left(1 + \frac{v'V}{c^2} \right)^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right) - \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right)}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2} \right)^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \quad (64.7)
\end{aligned}$$

Бу тенгликнинг боши ва охирини ёзамиз:

$$\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

Шунга ўхшаш ҳисоблаш йўли билан қуйидагини ҳам топамиз:

$$\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v'V}{c^2}}.$$

Топилган бу нисбатлар ёрдамида (64.6) ни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (64.8)$$

Шундай қилиб, тезликлар ҳар хил бўлганда жисмларнинг массалари бир хил бўлмас экан, балки $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ га тесқари пропорционал бўлар экан, умуман

$$m = \frac{\text{const}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$v = 0$ бўлганда $m = m_0$ бўлади ва Лоренц—Эйнштейннинг бизга маълум бўлган формуласини чиқарамиз:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ҳозир келтирилган хулосада иккита масса рўпара урилишининг содда ҳоли қараб ўтилди. Аммо бу хусусий ҳол олинган натижанинг умумийлигини чекламаслиги ва ҳар қандай қия тўқнашишларни текширганда ҳам ўша формуланинг ўзи ҳосил бўлишини кўрсатиш мумкин. Агар формулага v сифатида тўла тезлик кирса, импульс ва массанинг сақланиш қонуллари ўринли бўлади.

Юқорида (10-§) кўрдикки, экспериментал ишлар бирор назарияга боғлиқ бўлмаган ҳолда зарядли заррачалар — электрон, протон, оғир водород ядролари (дейтронлар), гелий ядролари массасининг тезликка боғланиши тўғрисидаги Лоренц—Эйнштейн формуласини юксак даражада аниқлик билан тасдиқлайди. Бу параграфда келтирилган хулоса жисмнинг электр заряди бўлиши ёки нейтрал бўлишидан қатъи назар, аини ўша формула тўғри бўлишини кўрсатади.

б) Куч ва энергия

Заррача релятивистик динамикасининг асосий қонун-қоидаларини текширишни давом эттирамиз. Бунда юқорида топилган натижага асосланамиз, яъни юқори аниқлик билан экспериментал тасдиқланган Лоренц—Эйнштейн формуласига мувофиқ массанинг тезликка боғланиш факти, (агар импульснинг сақланиш қонунига асослансак) релятивистик динамикада энг содда процессни—эластик шарларнинг тўқнашишини текширишда натижа сифатида ҳосил бўлишини кўрамиз. Бу эса нисбийлик назарияси динамикасида импульснинг сақланиш қонуни ўринли бўлишини кўрсатади. Буни эътиборга олиб, энди ўзаро уйғунлашган таърифлар системаси ҳосил бўлиши учун асосий динамик катталиклар қандай таърифланиши кераклигини кўриб чиқамиз.

1) *Куч*. Классик механикада кучни массанинг тезланишга кўпайтмаси деб ёки импульсдан вақт бўйича олинган ҳосила (41-§ га солиштиринг), яъни

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (64.9)$$

деб таърифлаймиз. Нисбийлик назарияси механикасида бу таърифлар тенг қийматли эмас, чунки масса тезликка боғлиқ ва, бинобарин,

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \neq m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Релятивистик механикада бу иккита таърифдан иккинчисини, яъни (64.9) формула билан ифодаланган таърифни олиш маъқул эканлигини кўриш осон. Ҳақиқатан ҳам, таъсир ва акс таъсирнинг тенглиги қонунига кўра (43-§ га қаранг),

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_{12}; \quad \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}_2) = -\mathbf{F}_{21}.$$

бундан

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2) = 0$$

ва

$$m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = \text{const.}$$

Бу тенглик кучнинг (64.9) формула буйича аниқланган таърифи қабул қилинганда импульснинг сақланиш қонуни қаноатлантирилишини, яъни ички уйғунлашган таърифлар ҳосил бўлишини кўрсатади.

Аммо кучнинг (64.9) таърифидан релятивистик механикада, Ньютон механикасидан фарқли ўлароқ, куч ва тезланиш, умуман айтганда, бир хил йўналган бўлмаслиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, (64.9) формулада m масса доимий бўлмагани учун дифференциаллаш натижасида (64.9) нинг ўнг томонида қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = -\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \mathbf{v}. \quad (64.10)$$

Куч бири тезланишга параллел, иккинчиси эса мавжуд тезликка параллел иккита векторнинг йиғиндисидан иборат бўлишини кўрамиз. Бу эса куч ва тезланишнинг, умуман айтганда, йўналиши бир хил бўлмаслигини кўрсатади.

Қуйидаги иккита хусусий ҳолда куч тезланиш билан бир хил йўналган бўлади: а) \mathbf{F} куч мавжуд \mathbf{v} тезликка перпендикуляр йўналган ва б) \mathbf{F} куч мавжуд \mathbf{v} тезликка параллел йўналган. Биринчи (а) ҳолда тезлик миқдор жиҳатдан доимий бўлади ($\frac{dv}{dt} = 0$) ва (64.10) нинг ўнг томонидаги иккинчи ҳад нолга тенг; натижада

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (64.11)$$

Иккинчи (б) ҳолда (64.10) нинг ўнг томонидаги иккала ҳад нолга тенг эмас; иккинчи ҳадни дифференциаллагандан кейин қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 \frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \mathbf{v} \frac{dv}{dt}. \quad (64.12)$$

Бу ҳолда $v \frac{dv}{dt} = v^2 \frac{dv}{dt}$ эканлигини ҳисобга олиб, содда алгебраик алмаштиришлардан кейин кучни топамиз:

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (64.13)$$

(64.11) ва (64.13) формулаларда тезланиш олдида турган скаляр коэффициентлар бир хил эмасдир. (а) ҳолда кучнинг тезланишга нисбати

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (64.14)$$

(б) ҳолда эса бу нисбат

$$\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (64.15)$$

Равшанки, (64.14) формулагина релятивистик массанинг ифодасидир, чунки худди шу ифода олдинги таърифларга уйғунлаштирилган бўлиб, импульснинг сақланиш қонунини қаноатлантиради. (64.15) ифода куч йўналиши мавжуд тезлик йўналиши билан бир хил булганда импульснинг ўзгариши тезликнинг ўзгаришигагина эмас, балки массанинг тезликка қараб ўзгаришига ҳам боғлиқ бўлишини кўрсатади.

2) *Иш ва кинетик энергия.* F кучнинг элементар иши релятивистик динамикада ҳам, Ньютон динамикасидаги каби, куч билан кўчишнинг скаляр кўпайтмаси сифатида таърифланиши мумкин:

$$dW = F dr. \quad (64.16)$$

Иш эркин заррача устида бажарилганда сарф бўлган иш, энергиянинг сақланиш қонунига биноан, кинетик энергиянинг ўзгаришига тенгдир. Шунинг учун

$$\begin{aligned} dE = F dr &= \left(m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v \right) dr = m dv \frac{dr}{dt} + dm v \frac{dr}{dt} = \\ &= m v dv + v dm = m v dv + v^2 dm. \end{aligned} \quad (64.17)$$

Массанинг тезликка релятивистик боғланиши ифодасидан фойдаланиб ва

$$dm = \frac{m_0 \frac{v}{c^2} dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

ифодани назарга олиб, (64.17) дан кинетик энергиянинг ўзгаришини топамиз:

$$dE = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} dv + \frac{m_0 \frac{v^3}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (64.18)$$

Текширсак, охириги натижа қуйидаги айниятдан иборат:

$$\frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{d}{dv} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) dv.$$

Буни эътиборга олиб ва (64.18) ни 0 дан v гача интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$E_{\text{кин}} = \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \int_0^v \frac{d}{dv} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) dv = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \quad (64.19)$$

Бу эса кинетик энергиянинг релятивистик ифодасидир. $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ ифода даражали қаторга ёйилади:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

v тезлик c га нисбатан жуда кичик, яъни $v/c \ll 1$ бўлган ҳолда қаторнинг биринчи ва иккинчи ҳадини олиш етарлидир. Бу шартда (64.19) қуйидагича ёзилади:

$$E_{\text{кин}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2. \quad (64.20)$$

Биз кутганимиздек кинетик энергиянинг Ньютон механикасидаги ифодасини топдик.

(64.17) ва (64.18) ни бирга ечиб, қуйидагини топамиз:

$$dE = c^2 (m - m_0). \quad (64.21)$$

Ушбу

$$m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ифода релятивистик тўла энергия деб, $m_0 c^2$ ифода эса тинч ҳолат энергияси деб аталади. (64.21) формула кўрсатадики, жисм кинетик энергиясининг *эрг* ҳисобида ифодаланган ўзгариши релятивистик массанинг грамм ҳисобида ифодаланган ўзгариши билан c^2 нинг кўпайтмасига тенг, яъни

$$\Delta E = c^2 \Delta m \text{ ёки } \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Релятивистик катталиклар—масса ва энергия орасидаги бу муҳим муносабат кинетик энергиягагина тегишли бўлиб қолмайди. Ҳақиқатан ҳам (*a*) кичик параграфда баён этилган релятивистик масса формуласини чиқаришга қайтайлик. Бу ерда абсолют қиймати бир хил бўлган тезликлар билан бир-бирига қараб ҳаракат қилувчи бир хил иккита шарнинг мар-

казий тўқнашиш процесси қараб ўтилган эди. Тўқнашган пайтда иккала шар бир-бирига нисбатан тинч туради, аммо формулани чиқаришда киритилган иккинчи координаталар системасига нисбатан аynи бир V тезлик билан ҳаракат қилади. Шарларнинг тезлиги V бўлганда тула массаси қуйидагига тенг:

$$\frac{2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Иккала шарнинг тўқнашишдан олдинги тула массаси қуйидагига тенг эканлигини кўрсатиш осон:

$$m_1 + m_2 = \frac{2 m}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

бу ерда

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

Аммо, равшанки, $m > m_0$ бўлади, шунинг учун

$$m_1 + m_2 > \frac{2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Биринчи қарашда қарама-қарши бўлиб кўринган бу натижа соддагина талқин қилинади. Фаразимишга кўра, шарлар эластик бўлганлиги учун тўхташ пайтида системада эластик деформация потенциал энергияси ΔE ҳосил бўлади. Бу потенциал энергияга $\Delta E/c^2$ га тенг бўлган масса мос келади, бу масса релятивистик массанинг туюлма исрофини компенсациялайди.

65-§. Масса билан энергия орасидаги боғланиш тўғрисида

64-§ да чиқарилган масса билан энергия орасидаги

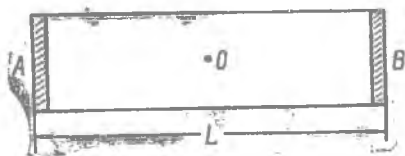
$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \tag{65.1}$$

муносабат нисбийлик назариясининг жуда муҳим натижасидир. Ҳозирги вақтда бу муносабат жуда катта амалий аҳамиятга эгадир; ядро энергетикасини тинчлик мақсадларида ишлатиш (ядро реакторлари, атом электр станциялари ва шу кабилар) ҳам, уруш мақсадларида ишлатиш ҳам ўша муносабатга асосланади. Шунинг учун биз Эйнштейннинг (65.1) формуласи маъносини ва ундан келиб чиқадиган хулосаларни аниқ ва чуқур билиб олишимиз зарур. Яхши тушуниб олиш зарурлигининг сабаби яна шундаки, адабиётда, айниқса оммабоп адабиётда терминология ва таърифларда куп чалкашликлар учрайди.

Ишни Эйнштейннинг бу формулани чиқаришини кўрсатишдан бошлаймиз. Бу формулани чиқаришда ёруғлик босими катта роль ўйнайди. Ёруғлик босими борлигини Максвелл олдиндан айтган ва П. Н. Лебедев экспериментал равишда тасдиқлаган. Ёруғлик тўла ютилганда ёруғлик босими катталиги E/c га тенг, бу ерда E —электромагнит нурланиш энергияси оқими. Импульс сақланишининг умумлаштирилган қонунига биноан, нурланувчи жисм ёруғлик *чиқарганида* қарама-қарши томонга йўналган ва E/c га тенг тепки импульс олишини эслагамиз.

Энди Эйнштейн формуласининг чиқарилишини кўрайлик.

Бўшиқда мувозанатда турган L узунликдаги бир жинслик найни тасаввур қилайлик (110-расм). Бу найнинг қарама-қарши учларида массалари найнинг M массасига қараганда жуда



110- расм.

кичик бўлган иккита A ва B жисмлар турган бўлсин; бу жисмларнинг массаси шунчалик кичикки, системанинг тўла массасини M га тенг деб олиш мумкин. Ундан ташқари, A жисмнинг B жисмга қараганда ортиқча ΔE энергияси бўлсин;

A жисм бу энергиясини B жисм томонга электромагнит тўлқин тарзида нурлантира олади.

Қуйидаги айланма процессни текширайлик. Бирор пайтда A жисм ўзидаги ортиқча ΔE энергиясини ёруғлик нури сифатида нурлантиради, натижада труба ичида чапдан ўнгга қараб электромагнит тўлқинларнинг қисқа оқими тарқала бошлайди. $t = L/c$ вақт ўтгандан кейин бу оқим B жисмга боради ва унда ютилади. Нур чиқарганда A жисм ва u билан бирга бутун система тепки туфайли импульс олади. Бу импульс чапга йўналган бўлиб, $g = \Delta E/c$ га тенг. Бу импульс таъсири остида най ҳаракатга келади. A жисмдан чиққан нур B жисмга келиб, унда тўлиқ ютилгунча найнинг бу ҳаракати давом этади. У вақтда B жисмга, u билан бирга бутун найга ўнгга йўналган ва $g = \Delta E/c$ га тенг булган ёруғлик босими таъсир қилади. Бу босим найнинг ҳаракатини тўхтатади.

Биз текшираётган системанинг g тепки таъсирида оладиган v тезлиги (A ва B жисмларнинг массалари эътиборга олмайдиган даражада кичикдир!):

$$v = \frac{g}{M} = \frac{\Delta E}{Mc}$$

t вақт ичида системанинг массалар маркази Δx масофага силжийди:

$$\Delta x = vt = \frac{gL}{Mc} = \frac{L}{M} \frac{\Delta E}{c^2}, \quad (65.2)$$

Бунда найнинг узунлиги анча катта деб фараз қилинади; ёруғлик чиқарилиш ва ютилиш вақти t вақтга нисбатан арзимаган даражада кичикдир.

B жисм ёруғликни ютгандан кейин уни система ичида ишлайдиган бирор механизм ёрдамида, яъни фақат ички кучлар ёрдамида A жисмга теккунча кўчирамиз. Бунда B жисм ўзининг ортиқча энергиясини қайтадан A жисмга беради, бундан кейин B жисмни яна найнинг ўнг томонидаги ўз ўрнига фақат ички кучлардан фойдаланиб келтирамиз. Натижада бутун система дастлабки ҳолатига келади, аммо унинг массалар маркази эса сурилиб қолади. Энергия билан масса орасида боғланиш бўлишини эҳтимол тутиб, биз B жисмнинг ΔE ортиқча энергияга эга бўлгандаги массаси ва уни қайтариб бергандаги массаси ҳар хил бўлади деб ҳисоблашимиз керак; бу массаларни мос равишда m_1 ва m_2 билан белгилаймиз. Бу ҳолда ортиқча энергия A дан B га ўтганда, яъни L масофага ўтганда системанинг массалар маркази

$$-L \frac{m_1}{M}$$

масофага силжийди, энергия тескари йўналишда ўтганда эса системанинг массалар маркази

$$L \frac{m_2}{M}$$

масофага силжийди. Массалар марказининг тепки натижасида кўчишини ҳам назарга олганда унинг тўла кўчиши қуйидагига тенг бўлади:

$$\frac{L}{M} \left(\frac{\Delta E}{c^2} + m_2 - m_1 \right). \quad (63.3)$$

Аммо бу кўчиш албатта нолга тенг бўлиши керак, чунки акс ҳолда ўз конфигурациясини тўлиқ сақлаган система ташқи кучлар таъсирисиз ўз-ўзидан кўчган бўлиб қолар эди. Равшанки, (63.3) нинг нолга тенг бўлиши тўла (механик + электромагнит) импульс сақланиш қонунининг натижасидир. Демак,

$$m_1 - m_2 = \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2},$$

шуни исбот қилиш керак эди.

Текширилган айланма процессда ортиқча ΔE энергия B жисмни L масофага илгариланма ҳаракат қилдириб кўчириш йўли билан A жисмга қайтарилди. Аммо бу фаразнинг яқкаю ягона эмаслигини ва шунинг учун унга ҳулоса умумийлигининг чекланиши деб қараш ярамаслигини кўрсатиш мумкин.

Энди Эйнштейн муносабатини анализ қилайлик. Биз 64-§ да исбот этдикки, иккита эластик шар ўзаро тўқнашининг энг содда процессини текширганда масса ва импульснинг сақ-

ланиш қонунларини асос қилиб олинса, нисбийлик назариясида масса тезликка Лоренц—Эйнштейннинг

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

формуласи бўйича боғланган деб ҳисоблагандагина бу иккала қонун ўринли бўлади. Лоренц—Эйнштейн формуласини чиқаришда массанинг сақланиш қонуни асос қилиб олинганлиги фактидан *релятивистик* массанинг сақланиш қонунига бўйсунуши келиб чиқади. Аммо релятивистик массанинг тезликка қараб ўзгариши масса ва энергиянинг (65.1) эквивалентлик қонунини ўз ичига олишини кўриш осон. Шундай эканлигига v тезлик унча катта бўлмаган ҳолни текширганда осонгина ишонч ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ ифодани даражали қаторга ёйиб, $v/c \ll 1$ бўлганда қаторнинг фақат биринчи ва иккинчи ҳадини оламиз, натижада масса қуйидагича ифодаланади:

$$m = m_0 + \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{c^2} = m_0 + \frac{E_{\text{кин}}}{c^2}.$$

Бу ерда ўнг томондаги биринчи ҳад инвариант (яъни тезликка боғлиқ бўлмаган) m_0 тинч ҳолатдаги массани, иккинчи ҳад эса айнан массанинг тезликка қараб ўзгаришини ифодалайди. Кўриб турибмизки, бу иккинчи ҳад Эйнштейннинг

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

қонунига аниқ мос келади.

Энди ўзаро бирор тарзда таъсирлашувчи бир қанча жисмлардан иборат системани текшираемиз. Релятивистик масса сақланиш қонунига бўйсунгани учун қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$\text{const} = \sum_i m_i = \sum_i m_i + \sum_i^{(i)} \frac{E_{\text{кин}}^{(i)}}{c^2}.$$

Шундай қилиб биз муҳим хулосага келдик: процесс натижасида $\sum m_0$ тинч ҳолатдаги масса билан системанинг процесс ба- жарилгандан кейинги $\sum \frac{E_{\text{кин}}}{c^2}$ кинетик энергиясига мос массанинг йиғиндиси сақланади-ю, аммо *тинч ҳолатдаги масса* $\sum m_0$ *сақланмайди*. Энди, умуман айтганда, процессдан олдинги ва кейинги кинетик энергия бир хил эмас эканлигини эътиборга оламиз; масалан, атом ядроси парчаланса, бошланғич ядро тинч турган координаталар системасида унинг кинетик энергияси нолга тенг бўлади, аммо бўлиниш процессида ҳосил бўлаган парчалар кинетик энергияга эга бўлади. Шунинг учун $\frac{\sum E_{\text{кин}}}{c^2}$ ортади, бинобарин, $\sum m_0$ камайиши керак. Бу ҳол *реля-*

тивистик массанинг сақланиш қонуни тубфайли юз беради. Демак, тинч ҳолатдаги масса сақланиш қонунига бўйсунмайди: аксинча, ΔE энергия ажралиб чиқадиган процесс натижасида тинч ҳолатдаги масса $\Delta E/c^2$ миқдорга камайди. Тескарича айтиш ҳам мумкин: тинч ҳолатдаги массанинг Δm_0 катталikka ўзгаришига $\Delta E = (\Delta m_0)c^2$ энергия ажралиб чиқиши мос келади.

Масса билан энергия орасидаги муносабат экспериментда тўла-тўқис тасдиқланган. Аммо $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ формулада махраждаги c^2 миқдор 10^{21} га яқин бўлгани учун, ΔE катталик $100 \text{ кг} \cdot \text{кал} \cdot \text{моль}^{-1} = 4,18 \cdot 10^{12} \text{ эрг} \cdot \text{моль}^{-1}$ тартибда бўладиган химиявий процессларда тинч ҳолатдаги массанинг ўзгариши ниҳоятда кичик қуйидаги катталikka тенг:

$$\Delta m = \frac{4,18 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} = 4,6 \cdot 10^{-9} \text{ г.}$$

XIX аср охири ва XX аср бошида, яъни ҳали нисбийлик назарияси пайдо булмасдан олдин немис физик-химиги Р. Ландольт Ломоносов ва Лавуазье тажрибаларининг янги, анча юқори техник савияда бажарилган такрорланишидан иборат қатор экспериментлар ўтказди. Бу тажрибаларда қатор химиявий реакциялар бутунлай изоляцияланган фазода ўтказилди ва системанинг реакциядан олдинги ва кейинги массаси аниқ контрол қилинди. Изоляцияланган фазода ўтказишдан мақсад модданинг арзимаган даражада йўқолишининг олдини олиш эди. Бунда масса ҳеч қандай ўзгарган эмас. Бизнинг ҳозирги нуқтаи назаримизча, система энергетик жиҳатидан изоляцияланмаган бўлгани учун реакция вақтида ажралиб чиқадиган иссиқлик тарқалган ва системанинг тинч ҳолатдаги массаси камайиши керак эди. Аммо Ландольт тажрибаларида массанинг бундай камайиши аниқланган эмас, чунки ишлатилган тарозиларнинг сезгирлиги бунчалик кичик миқдорни пайқаш учун етарли эмас эди.

Шундай қилиб, одатдаги химиявий реакциялар масса билан энергия орасидаги муносабатни текширишга ярамайди. Аксинча, ядро реакцияларида ниҳоят даражада кўп миқдорда энергия чиқади ва тинч ҳолатдаги масса ўлчаб бўладиган даражада ўзгаради. Бунга мисол қилиб бутун ҳозирги замон ядро энергетикасининг асосий булган ва ядронинг бўлиниши деб аталадиган реакцияни олиш мумкин. Бу реакция натижасида уранининг оғир ядроси тақрибан иккига бўлинади. Бунда чиқадиган энергия тақрибан 200 миллион электрон-вольтга тенг. Бир моль, яъни масалан, $\sim 240 \text{ г}$ уран бўлинганда қуйидагича энергия чиқади:

$$\Delta E = 200 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 19,3 \cdot 10^{19} \text{ эрг.}$$

Бунда массанинг камайиши

$$\Delta m = \frac{19,3 \cdot 10^{10}}{9 \cdot 10^{20}} = 0,21 \text{ г}$$

булади ва, бинобарин, бир килограмм уран бўлингanda масса бир граммга яқин камаяди.

Эйнштейн муносабатини текшириш учун ядро реакциялардан фойдаланилган. Бу реакцияларда энергия бир томондан бевосита ўлчаш йўли билан ва иккинчи томондан массанинг камайиш миқдорига қараб аниқланган. Ҳамма ҳолларда энергияни бевосита ўлчаш қанчалик аниқ бўлса, иккала йўл билан топилган энергия бир-бирига шунчалик аниқроқ тўғри келадиган. Мисол тариқасида қуйидаги натижани келтириш мумкин: бир қатор ядро реакцияларда бевосита ўлчаб топилган ΔE ва Δm ларни таққослаш йўли билан Эйнштейн муносабатидан ёруғликнинг тезлиги ҳисоблаб топилган. Шу йўл билан $c = 2,98 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$ эканлиги аниқланган; ваҳолонки, унинг аниқ қиймати $c = 2,99 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$. Бундаги фарқ 0,4% дир. Бу маълумотлар фақат мисол тариқасида келтирилди. Ҳозирги вақтда ядро физикаси натижаларининг бутун тўпламига асосланиб туриб, Эйнштейн муносабатининг мутлақо аниқ эканлигига ҳеч қандай шубҳа бўлиши мумкин эмас.

Адабиётда кўпинча энергия чиқадиган процессларда (масалан, ядро реакцияларда) „масса энергияга айланади“ деган фикр учраб туради. Бундай таъриф аслида нотўғри бўлиб, фақат чалкашликка олиб келади. Масса билан энергия ўзаро узвий боғлиқ, улар материянинг айни бир универсал хоссасининг икки томонидан иборатдир ва шунинг учун бир-бирига „айлана олмайди“. Тўғри, кинетик энергия ортадиган процессларда $\sum m_0$ тинч ҳолатдаги масса тегишлича камаяди. Аммо кинетик энергиянинг реакция натижасида ҳосил бўлган $\Delta E_{\text{кин}}$ орттирмасига $\frac{\Delta E_{\text{кин}}}{c^2}$ масса мос келади, бу масса эса $\sum m_0$ нинг камайишини аниқ компенсациялайди. Худди шунингдек, $\sum m_0$ га $\sum m_0 c^2$ энергия мос келадигани, бу энергия $\Delta E_{\text{кин}}$ га қўшилганда $\sum m_0 c^2$ нинг реакциягача бўлган қийматига тенг булади.

Масса ва энергия эквивалентлигининг кашф этилиши масса тўғрисидаги тушунчанинг ўзини анча ўзгартириш зарурлигига олиб келди. Ньютон механикасида масса модда миқдори деб таърифланиб, жисмининг материаллиги ифодаси сифатида қаралар эди. Нисбийлик назарияси яратилишидан олдиноқ бу тушунчадан воз кечишга тўғри келган эди. Кауфман ва бошқа тадқиқотчилар электроннинг массаси тезлигига боғлиқ эканлигини бевосита экспериментда кўрсатганларида бу факт мода миқдори сифатида қаралган масса тушунчасига тўғри келмай қолди. Дастлаб бу қийинчиликдан қутулиш учун, массанинг тезликка қараб ортишини ҳаракатланаётган электроннинг элек-

тромагнит майдони туфайли қўшимча инерция пайдо бўлишининг натижаси деб қараганлар (Ж. Томсон) ва бу қўшимча инерция „туюлма масса“ деб аталган. Агар бу нуқтаи назарга асосланиладиган бўлса, зарядли жисмнинг бутун массасини „туюлма“ (электромагнит) масса деб қарашга тўғри келиши кейинчалик билинди. Ниҳоят, нисбийлик назарияси шу нарса-ни кўрсатадики, ҳар қандай масса тезликка ўзида электр заряди бўлиши ёки бўлмаслигидан қатъи назар, зарядли заррачалар учун экспериментда аниқланган қонун бўйича боғлиқ бўлиши керак. Бу ҳол юқорида кўриб ўтилган натижаларга олиб келди; бу натижалар массага модда миқдори деб берилган таърифнинг физик маъноси йўқлигини жуда аниқ кўрсатди.

Аммо бу ҳол бизга релятивистик массани (тезликка боғлиқ массани) жисмнинг инертлиги ўлчови деб қарашга халақит бермайди, чунки кучнинг релятивистик массага нисбати жисмнинг тезланишига тенглигича қолади.

Б. ЭЛЕКТРОМАГНИТ НУРЛАНИШНИНГ КЛАССИК НАЗАРИЯСИ

66-§. Ёруғлик чиқариш элементар марказлари

Ёруғлик нурланиши проблемаси атом тузилиши назариясида марказий ўрин тутади, чунки ёруғлик бизга атомнинг ички тузилиши тўғрисида энг кўп маълумот беради. Деярли бутун китобда жой оладиган бу проблемани текширишдан олдин электромагнит нурланиш классик назариясининг баъзи масалаларининг қисқача обзори келтириб ўтамиз; бу маълумотлар билан таниш бўлиш ҳозирги замон тушунчаларини англаб олиш учун зарурдир.

Электронлар кашф этилгандан сўнг, ёруғлик электронларнинг ҳаракати туфайли чиқиши аниқ бўлиб қолди. Бу ҳол ёруғликнинг чиқарилишига *магнит* майдонининг таъсир қилишини (Зееман эффекти) 1896 йили Зееман кашф этишидан жуда равшан кўринади. Бу ҳодисанинг Лоренц ишлаб чиққан назарияси элементар нурланиш марказлари учун e/mt катталикни ҳисоблашга имкон берди; бу катталиқ эркин электронлар солиштирма заряди катталигига қониқарли аниқлик билан тенг келар экан.

Шундай қилиб, биз ёруғлик чиқиши процессини классик физикага асосланиб текширишимиз керак. Гарчи атомнинг статик модели умуман асоссиз бўлса-да, электронларни электромагнит тўлқинлар тарқатувчи микроскопик *вибраторлар* деб қараб кўпчилик оптик ҳодисаларнинг сабабини тушунтириш мумкин бўлди. Ёруғлик чиқарилишининг қатор фактларини изоҳлаш учун бир оз яроқли бўлган элементар марказнинг энг содда модели сифатида чизиқли осцилляторни олиш мумкин; биз чизиқли осцилляторнинг механик хоссалари билан 46-§ да танишган эдик,

67- §. Чизиқли осцилляторнинг электромагнит нурланиши

Мусбат заряд шундай катта массага боғланган бўлсинки, уни қўзғалмас деб, абсолют катталиги буйича мусбат зарядга тенг бўлган манфий заряд эса бу қўзғалмас мусбат зарядга нисбатан тебранади деб фараз қилайлик; бундай система чизиқли осцилляторнинг худди ўзи бўлади. Электр нуқтаи назардан бу система диполь бўлади. Диполнинг электр хоссалари *диполь моменти* деб аталадиган катталик билан характерланади. Диполь моменти

$$\mathbf{p} = e\mathbf{r} \quad (67.1)$$

га тенг вектордир, бу ерда \mathbf{r} — манфий заряддан мусбат зарядга қараб йўналган радиус-вектордир. Диполь моменти координаталар бошининг қаерда олинишига боғлиқ бўлмагани* учун, мусбат зарядни координаталар бошига қўйиш қулайдир; у ҳолда \mathbf{p} нинг ташкил этувчилари қўйидагича бўлади:

$$p_x = ex, \quad p_y = ey, \quad p_z = ez. \quad (67.2)$$

Тебранма ҳаракат қилаётган диполнинг электромагнит майдонини Максвелл тенгламалари ёрдами билан ҳисоблаб топиш мумкин.

Бу ерда узундан-узоқ ва хийла оғир ҳисоблашларни бажармасдан уларнинг натижасини келтириб** қўя қоламиз. Тебранаётган диполнинг электр ва магнит майдонлари ўзидан *етарлича катта масофаларда* (тўлқин зонаси деб аталадиган зонада) \mathbf{E} ва \mathbf{H} кучланганликлар билан характерланади. Бу кучланганликларнинг абсолют қийматлари бир-бирига тенг бўлиб, йўналишлари ўзаро перпендикулярдир. Ёруғлик тезлигига қараганда жуда кичик бўлган ($v \ll c$) тезликларда \mathbf{E} ва \mathbf{H} кучланганликларнинг диполдан R масофада турган M нуқтадаги (111-расм) $|\mathbf{E}|$ ва $|\mathbf{H}|$ абсолют қийматлари қўйидаги формула билан ифодаланади:

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}| = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{c^2 R} \sin \theta^{***}, \quad (67.3)$$

бу ерда c — ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги; θ — тебраниш бўлаётган тўғри чизиқ билан M нуқтага қараб йўналган чизиқ орасидаги бурчак; $\ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{R}{c} \right)$ символнинг маъноси қўйидагича-

* И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 96-бет, Гостехиздат, 1949.

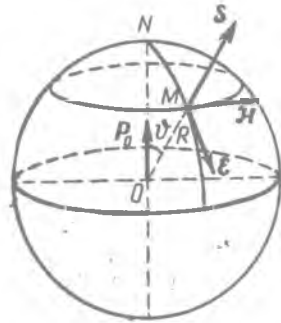
** И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 99-§, Гостехиздат, 1949 ёки Я. И. Френкель, Электродинамика, 1-т., 154-бет, ОНТИ, 1934.

*** (67.3) формуладаги қавслар теришга қулай бўлиш учун ишлатилган бўлиб, $\ddot{\mathbf{p}}$ нинг $t - \frac{R}{c}$ функцияси эканини билдиради.

дир: бу диполь моментининг t пайт учун эмас, балки ундан олдинги $t - \frac{R}{c}$ пайт учун олинган иккинчи ҳосиласидир. Равшанки, $\frac{R}{c}$ вақт c тезлик билан тарқалаётган процесснинг O дан кузатиш нуқтаси M га етиб келишига кетадиган вақтдир. Шундай қилиб, (67.3) формулада кечикувчи $\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{R}{c}\right)$ қийматининг пайдо бўлиши электромагнит майдоннинг тарқалиш тезлиги чекли эканлигини курсатади: тебранувчи электр диполь c тезлик билан кўчадиган электромагнит тўлқинлар юборади.

$\mathbf{p} = e\mathbf{r}$ эканлигини ҳисобга олиб, бошқа шартлар бир хил бўлган ҳолда \mathbf{E} ва \mathbf{H} кучланганликлар O дан анча узоқда электроннинг \mathbf{r} тезланишига боғлиқ бўлишини кўрамиз.

\mathbf{E} ва \mathbf{H} кучланганликларнинг йўналишлари қуйидагича аниқланади: O марказ атрофида R радиус билан чизилган сферани тасаввур этайлик: қутбий ўқ деб диполь тебранаётган туғри чизиқ йўналишини оламиз ва сфера устида меридиан ва параллеллар ўтказамиз. \mathbf{U} ҳолда \mathbf{E} вектор M нуқтадан ўтадиган меридианга ўтказилган уринма бўйича, \mathbf{H} вектор эса ўша нуқтадан ўтадиган параллелга ўтказилган уринма бўйича, 111-расмда кўрсатилгандек, йуналади.



111-расм. Диполнинг нурланиши.

Электромагнит майдон энергиясининг зичлиги қуйидагига тенг:

$$\rho = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \quad (67.4)$$

Эки бу ҳолда $E = H$ эканлигини назарга олсак:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} E^2 \frac{\partial \rho c}{\partial c^3}$$

Тебранувчи диполнинг майдони c тезлик билан тарқалгани учун R нормал йўналишидаги ҳар бир квадрат сантиметр орқали (111-расм) секунд сайин S миқдорда энергия ўтади:

$$S = \rho c = c \frac{E^2}{4\pi c^2} \frac{\partial \rho c}{\partial c^3} \quad (67.5)$$

S миқдор, равшанки, мазкур нуқтадан ўтувчи энергия оқимининг сон қийматидир. Бу миқдор Умов—Пойнтинг вектори S нинг муайян нуқтадаги сон қиймати каби ҳисоблаб топилиши мумкин:

$$S = |S| = \frac{c}{4\pi} |[\mathbf{E} \mathbf{H}]| = \frac{c}{4\pi} E H \sin(\mathbf{E} \mathbf{H}).$$

Тулқин зонасида $E = H$ ва $E \perp H$, шунинг учун

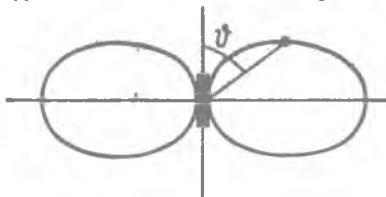
$$S = \frac{c}{4\pi} E^2,$$

яъни (67.5) формула ҳосил бўлади.

Бунга E нинг (67.3) қийматини қўйиб, S ни топамиз:

$$S = \frac{p^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta = \frac{e^2 r^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta \quad (67.6)$$

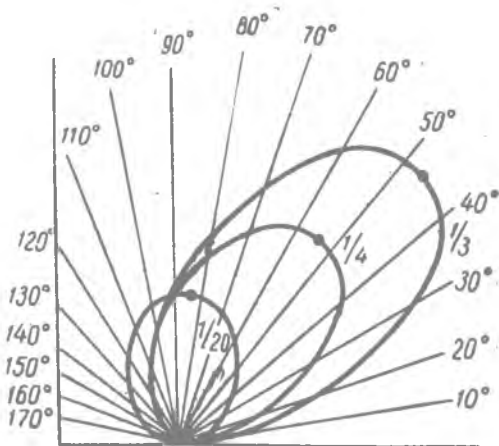
(p ёки r нинг қийматлари $t - \frac{R}{c}$ пайтга тегишлидир!).



112-расм. Диполь нурланиши интенсивлиги тақсимотининг қутб диаграммаси.

вишда ортади. (67.6) формулада $\sin^2 \theta$ нинг бўлиши интенсивликнинг ҳар хил йўналишларда текис бўлмаслигига олиб келади: тебраниш юз берадиган тўғри чизиқ йўналишида ($\theta = 0$ ва π) интенсивлик нолга тенг, бу тўғри чизиққа перпендикуляр йўналишда ($\theta = \pi/2$) интенсивлик максимал қийматга эришади. 112-расмда нурланиш интенсивлигининг бурчакларга қараб тақсимланиш қутб диаграммаси келтирилган. Интенсивликнинг бундай тақсимланиши тажрибада тасдиқланган. Антикатода электронларнинг тормозланишида (манфий тезланишда) рентген нурларининг пайдо бўлиши бунга анча кўرғазмали мисол бўлади. 113-

Бу формуладан кўриниб турибдики, нурланиш интенсивлиги тезланиш квадратига тўғри пропорционал ва масофа квадратига тескари пропорционал, чунки энергиянинг O атрофидаги сфера орқали ўтадиган тўла оқими ўзгармас бўлиб, сферанинг сирти радиуснинг квадратига пропорционал ра-



113-расм. Тормозланиш рентген нурланиши интенсивлигининг бурчак бўйича тақсимоти.

расмда тормозлиш рентген нурланиши интенсивлигининг электронлар тезлиги ҳар хил бўлганда θ бурчакка боғланишини тажрибада тадқиқ қилиш натижалари келтирилган. $\theta = 0$

ва $\theta = \pi$ бўлган барча ҳолларда интенсивлик нолга тенг эканлиги кўришиб турибди; тезликлари кичик бўлган ($\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{20}$) электронлар учун интенсивликнинг максимуми бурчак $\theta = \frac{\pi}{2}$ яқинида ҳосил бўлади; электронлар тезлиги катгароқ бўлганда ($\beta = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$) максимумнинг йўналиши электронлар ҳаракати томонига сурилади. (67.6) формулага бундай мос келмасликнинг сабаби бу формуланинг жуда кичик тезликлар учун релятивистик эффектларни ҳисобга олмасдан чиқарилишидадир. Катта тезликлар учун Зоммерфельд қуйидаги формулани топган:

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3},$$

бунда $\beta = \frac{v}{c}$, бу формула β нинг ҳар қандай қийматида тажриба натижаларига яхши мос келади.

68-§. Осцилляторнинг тўлиқ ва ўртача нурланиши

(67.6) формула муайян пайтда танлаб олинган нуқтадан θ бурчак билан характерланадиган йўналишда ўтадиган энергия оқимини ёки бошқача қилиб айтганда, электромагнит тўлқиннинг муайян йўналишдаги оний интенсивлигини ифодалайди.

Агар осцилляторнинг вақт бирлиги ичида нурлайдиган энергиясининг тўла миқдорини ҳисоблаш лозим бўлса,

$$I = \int S \, d\sigma \quad (68.1)$$

интегралнинг қийматини топиш етарлидир. Бунда интегрални O агрофида (111-расм) чизилган сфера сирти бўйича ҳисоблаш керак.

Сирт элементи сферик қутб координаталарда

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

шаклида ифодаланишини эътиборга олиб, (68.1) интегрални ошкор ҳолда ёзамиз. Бунинг учун S оқим ўрнига унинг (67.6) ифодасини қўямиз:

$$\begin{aligned} I &= \iint \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (68.2)$$

Охирги интегрални ҳисоблаш учун $\xi = \cos \theta$ янги ўзгарувчи киритамиз ва бу ўзгарувчининг интегралланиш чегаралари $+1$ ва -1 эканлигини эътиборга оламиз:

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) d\xi = \frac{4}{3}.$$

Буни (68.2) га қўйиб, I интегралнинг қийматини топамиз:

$$I = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} = \frac{2e^2\ddot{r}^2}{3c^3}. \quad (68.3)$$

Равшанки, бу формула бир ондаги тўла энергия катталигини ифодалайди. p ҳосила вақтга боғлиқ равишда даврий ўзгарганлиги учун I тўла энергия ҳам ўзгаради. Амалий нуқтаи назардан энергиянинг оний қийматини эмас, балки унинг ўртача қийматини билиш анча муҳимдир, чунки ёруғлик тебранишларининг частотаси жуда юксак бўлиши (спектрнинг кузга кўринадиган қисмида ν частота 10^{15} сек^{-1} тартибда бўлади) туфайли ҳамма асбоблар, жумладан кўз ҳам тебранишлар орқасидан улгура олмайди ва фақат ўртача энергияни сезади. Энди анча катта вақт ичидаги, масалан, 1 секунд ичидаги бу ўртача энергияни ҳисоблаб топайлик. Бу энергия бир давр ичидаги ўртача энергияга тенг:

$$I = \frac{2\overline{\ddot{p}^2}}{3c^3}. \quad (68.4)$$

Агар диполь momenti гармоник тебранишлар қонуни бўйича ўзгарса, яъни $p = p_0 \cos \omega t = p_0 \cos 2\pi\nu t$ бўлса, у ҳолда

$$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos \omega t = -4\pi^2\nu^2 p_0 \cos 2\pi\nu t. \quad (68.4')$$

\ddot{p} нинг бу қийматини (68.3) га қўйиб қуйидагини топамиз:

$$I = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2 2\pi\nu t.$$

I нинг ўртача қиймати:

$$\bar{I} = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 2\pi\nu t}$$

ёки $\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\cos^2 2\pi\nu t} = \frac{1}{2}$ бўлгани учун

$$\bar{I} = \frac{\omega^4}{3c^3} p_0^2 = \frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2. \quad (68.5)$$

Энди диполнинг мусбат заряди координаталар бошида тинч турган, манфий заряди x ўқи бўйича тебранма ҳаракат қи-

лаётган бўлсин. У ҳолда $p = ex$; бир давр ичидаги ўртача нурланиш, (68.4) га асосан, қуйидагича ифодаланади:

$$\bar{T} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\dot{x}^2}. \quad (68.6)$$

Агар тебранишлар гармоник тебраниш бўлса, у ҳолда $x = \text{acos}\omega t = \text{acos } 2\pi\nu t$ бўлади ва (68.5) ўрнига \bar{T} нинг қуйидаги қийматини топамиз:

$$\bar{T} = \frac{\omega^4 e^2 a^2}{3c^3} = \frac{16\pi^4 \nu^4 e^2 a^2}{3c^3}. \quad (68.6')$$

69-§. Гармоникмас осцилляторнинг электромагнит спектри

Катъий гармоник синусоидал тебранишлар математик абстракция бўлиб, табиатда ҳеч қачон юз бермайди. Механик тебранишларда оғишлар жуда кичик бўлган ҳолдагина кучнинг квазиэластик қонуни ўринли булади. Оғишлар катта бўлган ҳолда кучнинг ифодасида катта даражали кўчишлар қатнашган ҳадлар пайдо бўлади, механик спектрда эса асосий частота билан бир қаторда унинг обертонлари ҳосил бўлади. Энди гармоник бўлмаган, аммо бирор мураккаброқ қонун бўйича юз берадиган тебранишларда пайдо бўладиган электромагнит тўлқин спектри қандай бўлишини текширайлик. Бу тебранишларни ҳозирча математик маънода катъий даврий деб ҳисоблаймиз.

Гармоникмас қонун бўйича тебранувчи осцилляторнинг ўртача энергиясини (68.6) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\bar{T} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\dot{x}^2}. \quad (69.1)$$

x кўчиш вақтнинг *даврий* функцияси бўлгани учун уни Фурье қаторига ёямиз:

$$x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{is\omega_0 t} \quad (69.2)$$

Энди x нинг иккинчи ҳосиласини ҳисоблаб, вақт бўйича ўртача қийматини аниқлаймиз ва натижани (69.1) га қуямиз. x дан t бўйича олинган иккинчи ҳосила:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -[A_1 \omega_0^2 e^{i\omega_0 t} + A_2 (2\omega_0)^2 e^{i^2 \omega_0 t} + \dots \\ & \dots + A_{-1} \omega_0^2 e^{-i\omega_0 t} + A_{-2} (2\omega_0)^2 e^{-i^2 \omega_0 t} + \dots]. \end{aligned} \quad (69.3)$$

Катта вақт ичидаги ўртача қийматни ҳисоблаб топиш учун бир давр $T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ичидаги ўртача қийматни топиш етарлидир. Шунинг учун квадратнинг ўртачаси $\overline{\dot{x}^2}$ қуйидагича бўлади:

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \dot{x}^2 dt. \quad (69.4)$$

Бунга (69.3) ни квадратга кўтариш йўли билан топиладиган \ddot{x}^2 ни қўямиз ва ҳадма-ҳад интеграллаймиз. Бунда бизга қуйидаги кўринишдаги интегралларни топишга тўғри келади:

$$A_k A_l \int_0^{2\pi/\omega_0} e^{i(k+l)\omega_0 t} dt.$$

Барча бу интегралларнинг $t = -k$ дан ташқари ҳамма ҳолларда нолга тенг бўлишини бевосита ҳисоблаб кўриб билиш мумкин. Ниҳоят қуйидагини топамиз:

$$\overline{\ddot{x}^2} = 2 [A_1 A_{-1} \omega_0^4 + A_2 A_{-2} (2\omega_0)^4 + \dots + A_k A_{-k} (k\omega_0)^4 + \dots], \quad (69.5)$$

ёки, 48-§ дагига асосан $2A_k A_{-k} = \frac{a_k^2}{2}$ бўлгани учун,

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{2} [a_1^2 \omega_0^4 + a_2^2 (2\omega_0)^4 + \dots + a_k^2 (k\omega_0)^4 + \dots].$$

Буни ўртача нурланишнинг (69.1) формуласига қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\bar{I} = \frac{e^2 a_1^2}{3c^3} \omega_0^4 + \frac{e^2 a_2^2}{3c^3} (2\omega_0)^4 + \frac{e^2 a_3^2}{3c^3} (3\omega_0)^4 + \dots \quad (69.6)$$

ёки бурчак частоталардан $\omega = 2\pi\nu$ ёрдамида чизикли частоталарга ўтсак, \bar{I} ни топамиз:

$$\bar{I} = \frac{16\pi^4 \nu^4}{3c^3} e^2 a_1^2 + \frac{16\pi^4 (2\nu)^4}{3c^3} e^2 a_2^2 + \frac{16\pi^4 (3\nu)^4}{3c^3} e^2 a_3^2 + \dots \quad (69.6')$$

Бу натижани (68.6') га солиштирсак, гармоникмас даврий ҳаракат қилувчи осцилляторнинг ўртача нурланиши ҳақлар йиғиндисидан иборат эканлигини ва бу ҳақларнинг ҳар бири гармоник осциллятор ўртача нурланишидан иборат эканлигини кўрамиз; шу билан бирга, бу осцилляторларнинг частоталари $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ қатор ҳосил қилади. Демак, *гармоникмас осцилляторнинг электромагнит спектри унинг механик спектридаги частоталарга эга бўлади.*

Бу спектрнинг характерли хусусияти шундан иборатки, унга ν_0 асосий частота ва унинг *гармоник обертоналари* киради, яъни спектрни частоталар шкаласида тасвирлаганда бир-биридан *тенг узоқликда* турувчи чизиклар қатори ҳосил бўлади. Радиотелеграф антеннаси тарқатадиган электромагнит тўлқинлар худди шундай спектр берар экан; ионларнинг молекулалардаги инфрақизил тебранишлари тақрибан мана шу қонунга бўйсунадиган, лекин обертон тартиби ортгани сари бир-бирига бир оз яқинлашадиган чизиклардан тузилган спектр беради. Ниҳоят, электронларнинг ҳаракати туфайли ҳосил бўладиган спектрлар (кўзга кўринадиган ва ультрабинафша) бу қонунга

мутлақо буйсунмайди: бундаги барча чизиқлар юқорироқ частоталарга ўтилгани сари анча тез яқинлашиб, ҳатто бутунлай қўшилиб ҳам кетади (VIII бобга қаранг). Кейинчалик кўзга кўринадиган ва ультрабинафша спектрлардаги чизиқлар мутлақо бошқа қонунларга буйсунишини кўрамиз. Бу қонунлар квантлар назарияси асосидагина изоҳланиши мумкин.

70-§. Тебранишларнинг сўниши

Шу вақтгача биз осцилляторнинг энергияси доимий бўлади, яъни осциллятор сўнмайдиган электромагнит тўлқинларни чексиз узоқ вақт чиқариб туради деб фараз қилиб келдик. Анигини айтганда бундай фараз ҳақиқатга тўғри келмайди, чунки осцилляторнинг эркин тебранишларида электромагнит тўлқин ўзи билан энергия олиб кетади. Шунинг учун осцилляторнинг энергия запаси аста-секин камаяди ва тебранишлар сўнади.

Аввал энергиянинг вақт ўтиши билан камайиш қонунини топайлик. Ҳар хил экспериментал маълумотлар нурланувчи атомларнинг жуда оз сўнишини кўрсатади. Масалан, йўллар фарқи катта бўлганда ёруғлик интерференциясини ўрганиш шундай хулосага олиб келдики, атомлар нурлайдиган қатор сўнмас тўлқинларнинг узунликлари 100 миллион тўлқин узунлигидан ортиқроққа мос келади. Бу ҳолни эътиборга олиб, электроннинг тебранишлари гармоник тебранишдан жуда оз фарқ қилади дея оламиз. Аммо гармоник тебранишларда вақт бирлиги ичида электромагнит тўлқин олиб кетадиган ўртача энергия қуйидагига тенг эканлигини биламиз:

$$\bar{I} = \frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3} \quad (68.6')$$

Вақт бирлигида осциллятор энергиясининг камайиши худди мана шу \bar{I} катталиқка тенг бўлади, яъни

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}$$

ёки:

$$dE = -\frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3} dt \quad (70.1)$$

Гармоник осцилляторнинг тўла энергияси

$$E = \frac{m a_0^2 \omega^2}{2} \quad (46.14)$$

(70.1) ни (46.14) га бўлиб қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2\omega^2 e^2}{3m\omega^2} dt \quad (70.2)$$

Энди

$$\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3} = \gamma \quad (70.3)$$

белгилаш киритиб, (70.2) тенгламани

$$\frac{dE}{E} = -\gamma dt$$

кўринишда ёзамиз. Буни интеграллаб, E ни топамиз:

$$E = E_0 e^{-\gamma t}. \quad (70.4')$$

Демак, осцилляторнинг энергияси вақт ўтиши билан экспоненциал қонун бўйича камайиши керак экан.

(70.3) муносабат орқали киритилган γ доимийнинг муайян физик маъноси бор. Аввал бу доимийнинг ўлчамлиги [сек⁻¹] эканлигини қайд қиламиз. Бунга ишонч ҳосил қилиш осон, чунки (70.4) нинг курсаткичида турган γt купайтма ўлчамсиз катталиқ бўлиши керак. Шунинг учун γ га тескари бўлган катталиқ бирор вақт оралиғи бўлиши керак. Уни τ билан белгилаймиз: у ҳолда

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \frac{3mc^3}{2\omega^2 e^2} = \frac{3mc^3}{8\pi^2 \nu^2 e^2}. \quad (70.5)$$

Энди (70.4) муносабатни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$E = E_0 e^{-t/\tau}. \quad (70.4'')$$

Бундан кўрииб турибдики, $t = \tau$ бўлганда $E = E_0/e$, яъни τ шундай вақтни, бу вақт ичида осцилляторнинг энергияси $e = 2,718$ марта камаяди. t ортганда энергия (70.4'') га мувофиқ нолага асимптотик равишда яқинлашгани учун, тебранишлар қанча вақт давом этишини кўрсатиш қийин. Бу вақтнинг шартли ўлчови сифатида *релаксация вақти* деб аталадиган τ катталиқдан фойдаланиш қулайдир. Демак, γ сўниш доимийси релаксация вақтига тескари катталиқдир.

Бу вақт катталигининг тартиби тўғрисида тасаввур ҳосил қилиш учун унинг водород спектридаги ҳаво ранг чизиқ (H_β чизиқ) чиқарилишига тегишли сон қийматини ҳисоблайлик. Бу чизиққа $\lambda = 4861,33 \cdot 10^{-8}$ см тўлқин узунлиги мос келади. Бу ҳолда

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4861,33 \cdot 10^{-8}} = 3,87 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}.$$

(70.5) га ω нинг бу қийматини, шунингдек $m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ г}$, $\frac{e}{mc} = 1,76 \cdot 10^7$ универсал доимийларни қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\tau = \frac{3mc^3}{2\omega^2 e^2} = \frac{3c}{2\omega^2 m} \left(\frac{mc}{e}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot (3,87 \cdot 10^{15})^2 \cdot 9 \cdot 10^{-28} (1,76 \cdot 10^7)^2} \approx 10^{-8} \text{ сек}.$$

Бу сон шуълаланиш вақтининг *абсолют* катталиги жуда кичик эканлигини кўрсатади. Аммо унинг *нисбий* катталиги, чунончи

τ нинг тебранишлар даврига нисбати тақрибан $6 \cdot 10^6$ га тенг, яъни жуда катта миқдордир: энергияси e марта камайгунча электрон 6 миллион тебраниши керак.

Релаксация вақтининг катталиги бевосита экспериментда биринчи марта канал нурлари ёрдамида аниқланган. Водороднинг ёруғлик чиқарувчи канал нурлари дастаси катоддаги тирқишдан юқори вакуум ҳосил қилинган фазога чиқарилди. Бунда вакуум шунчалик юқорики, бу фазода атомлар амалда бири-бирига тўқнашмасдан „шуълаланади“. Канал заррачаларининг тезлиги маълум бир қийматга етганда ёруғлик сочувчи даста бўйича интенсивликнинг камайишига қараб τ ни аниқлаш мумкин эди. Бу вақт катталигининг тартиби юқорида кўрсатиб ўтилганга мос келади ($\lambda \approx 5 \cdot 10^{-8}$ см учун 10^{-8} сек).

71-§. Нурли ишқаланиш

Шундай қилиб, тебранма ҳаракат қилаётган диполнинг энергияси вақтга боғлиқ равишда (70.4) ёки (70.4') қонунга биноан камайишини аниқладик. Агар тебранма ҳаракатни вужудга келтирадиган куч квазиэластик куч бўлса, осцилляторнинг потенциал ва кинетик энергиялари йиғиндисини ҳисоблаш мумкин. Аммо тебранишлар сўниши туфайли бу йиғинди доимий бўлмайди. Механикада ҳам шундай ҳолни учратамиз: агар механик осциллятор қовушоқ муҳитда тебранса, унинг механик энергияси (кинетик+потенциал энергия) вақт ўтиши билан камаяди. Шунинг учун энергия балансида етишмовчилик юз беради: энергия қайта тикланмайдиган тарзда сарфланади ва натижада иссиқликка айланади. Аммо биз бирор диссипатив R куч (R —энергиянинг сочилишига олиб келадиган куч)—ишқаланиш кучи киритиш билан энергиянинг бу етишмовчилигини ҳисобга олиш мумкинлигини 41-§ да кўрдик. Шунга мувофиқ равишда, тебранишлар тенгламасининг ўнг томонида — $f x$ квазиэластик куч билан бир қаторда ишқаланиш кучи ҳам ҳосил бўлади.

Осцилляторнинг *электромагнит* тебранишлари сўнаётган ҳолда ҳам энергия балансини худди шунга ўхшаш йўл билан тиклаш мумкин; бу тебранишларни диссипатив куч тормозлайди деб тасаввур қилайлик; диссипатив кучни „нурли ишқаланиш кучи“ деб аташ мақсадга мувофиқдир. Ҳавшанки, бу куч осциллятор нурланиши майдонининг осцилляторнинг ўзига қайта таъсир кўрсатиши натижасида ҳосил бўлади.

Энди бу кучнинг ошкор ифодасини аниқлаймиз. Механикада одатда ишқаланиш кучи тезликка, яъни x биринчи ҳосиллага боғлиқ (унча катта бўлмаган тезликларда R ишқаланиш кучи тўғридан-тўғри x га пропорционал бўлади) деб қабул қилинади. Албатта, биз аввал текшириб кўрмасдан туриб, бу муносабатни *нурли* ишқаланиш кучига ҳам жорий қила олмай-

миз. Бу кучнинг ифодасини топиш учун энг осони қуйидагича иш тутамиз. Нурли ишқаланиш кучининг тебранишлар даврига қараганда анча катта бўлган вақт ичида бажарган ишнинг ўртача қийматини ҳисоблаймиз.

R кучнинг dt вақт ичидаги бажарган иши $R dx = R \dot{x} dt$ га тенг бўлади; шунинг учун ишнинг 0 дан t гача бўлган вақт ичидаги ўртача қиймати

$$\frac{1}{t} \int_0^t R \dot{x} dt.$$

Биз нурли ишқаланиш кучини энергиянинг камайишини кўрсатиш учун киритган эдик, шу сабабли бу куч бажарган ишнинг ўртача қиймати осцилляторнинг ўша вақт ичида чиқарган энергиясининг ўртача қийматига тенг бўлиши керак. Осциллятор чиқарган энергиянинг ўртача қиймати (68.6) формулага биноан қуйидагичадир:

$$\frac{2e^2}{3c^3} \bar{\ddot{x}^2} = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \dot{x}^2 dt.$$

Шундай қилиб, қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\frac{1}{t} \int_0^t R \dot{x} dt = -\frac{2e^2}{3c^3 t} \int_0^t \dot{x}^2 dt. \quad (71.1)$$

Содда шакл алмаштиришлар ва бўлаклаб интеграллашдан кейин қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \dot{x}^2 dt &= \frac{1}{t} \int_0^t \ddot{x} \dot{x} dt = \frac{1}{t} \int_0^t \ddot{x} d\dot{x} = \\ &= \frac{1}{t} (\dot{x} \ddot{x}) \Big|_0^t - \frac{1}{t} \int_0^t \dot{x} d\ddot{x} = \frac{(\dot{x} \ddot{x})_t - (\dot{x} \ddot{x})_0}{t} - \frac{1}{t} \int_0^t \dot{x} \ddot{\ddot{x}} dt. \end{aligned}$$

\dot{x} тезлик ва \ddot{x} тезланиш чекли чегараларда ўзгарганлиги учун катта вақт ораллигини олиб, биринчи ҳадни истаганча кичик қилишимиз мумкин. Шунинг учун (71.1) тенгламадан қуйидагини топамиз:

$$\frac{1}{t} \int_0^t R \dot{x} dt = \frac{2e^2}{3c^3 t} \int_0^t \dot{x} \ddot{\ddot{x}} dt.$$

Бу тенглик қаноатлантирилиши учун

$$R = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\ddot{x}} \quad (71.2)$$

деб олиш етарлидир. Бу ифода нурли ишқаланиш кучининг бизни қизиқтираётган ифодасидир.*. Бу ерда кўчишнинг вақт бўйича олинган *учинчи* ҳосиласига боғлиқ бўлган кучни биринчи марта учратаётғимиз. Механикада бундай кучлар ўрганилмайди.

Энди нурли ишқаланиш кучининг ифодасини билганимиз ҳолда электромагнит осцилляторнинг тебранишлари тенгламасини тузишда бу кучни эътиборга олишимиз керак. Бу тенглама умумий ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$m \ddot{x} = -fx + R;$$

R нинг (71.2) ифодасини бу ерга қўйиб, тебранишларнинг нурли ишқаланиш ҳисобга олинган ҳолдаги тенгламасини топамиз:

$$m \ddot{x} = -fx + \frac{2e^3}{3c^3} \ddot{x}. \quad (71.3)$$

Биз учинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама ҳосил қилдик. Унинг ечимини $x = e^{i\omega t}$ кўринишда излаб, учинчи даражали характеристик тенгламага келамиз. Аммо кетма-кет яқинлашишлар методидан фойдаланишимиз ва қуйидагича мулоҳаза юритишимиз мумкин. Нолинчи яқинлашишда (71.3) тенгламанинг ўнг томондаги жуда кичик иккинчи ҳадини ташлаб юбориш мумкин. У вақтда осцилляторнинг ишқаланишни ҳисобга олмагандаги тебранишлари тенгламаси, яъни

$$m \ddot{x} + fx = 0 \quad (71.4)$$

тенглама ҳосил бўлади, бу тенгламанинг ечими $x = e^{i\omega_0 t}$, бу ерда $\omega_0 = \sqrt{f/m}$. Бу ечимни (71.3) га қўйиб ва $\ddot{x} = -i\omega_0^3 e^{i\omega_0 t} = -\omega_0^3 \dot{x}$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$m \ddot{x} = -fx - \frac{2e^2\omega_0^3}{3c^3} \dot{x}. \quad (71.5)$$

Олдин фараз қилганимиздек,

$$\frac{2e^2\omega_0^3}{3mc^3} = \gamma \quad (70.3)$$

белгилаш киритиб, (71.5) тенгламани бошқача кўринишда ёзамиз:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (71.6)$$

бу ерда $\omega_0^2 = f/m$, шу билан бирга ω_0 — осцилляторнинг сўнмас тебранишлари частотаси.

* Равшанки бу хулоса фақат етарли, аммо зарурий характерда эмас. Аммо майдоннинг реакциясини қарашга асосланган анча аниқроқ исботдан ҳам ўша ифода чиқади. Бу масала билан ва унинг принципиал проблемалари билан қизиқувчиларга бу китобни тавсия қиламиз: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, 40-бет, Гостехиздат, 1940.

(71.6) тенгламанинг ечимини

$$x = e^{int}$$

кўринишда излаймиз. Бу ечимни (71.6) га қўйиб, e^{int} га қисқартиргандан кейин қўйдаги тенглама ҳосил бўлади:

$$-n^2 + i\gamma n + \omega_0^2 = 0.$$

Бундан n ни топамиз:

$$n = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Белгилаш киритамиз:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2}. \quad (71.7)$$

γ — жуда кичик сон, ω_0 — жуда катта сон бўлгани учун

$$\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} \ll 1 \quad (71.8)$$

ва шунинг учун катта аниқлик билан қўйдаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$\omega_f = \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma}{8\omega_0^2}\right), \quad (71.9)$$

ω_f — *сўнувчи* тебранишларнинг частотаси. Равшанки, сўниш доимийси γ қанча кичик бўлса, ω_f частота ω_0 дан шунча кам фарқ қилади. Оптик частоталарда сўниш шунчалик кичикки, ҳатто $\omega_f \approx \omega_0$ деб олиш мумкин. Шунинг учун бу ҳолда етарлича тақрибийликда

$$n = i\frac{\gamma}{2} \pm \omega_0$$

деб олиш мумкин, унда $x = e^{int}$ ечим қўйдаги кўринишни олади:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm i\omega_0 t}.$$

Шунинг учун (71.3) тенгламанинг умумий ечими қўйдагича бўлади:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}). \quad (71.10)$$

Бу ерда чап томонда ҳақиқий катталиқ (x кўчиш) турибди; ўнг томонининг ҳам ҳақиқий катталиқ бўлиши учун умуман айтганда, комплекс бўлган A ва B коэффициентлар комплекс қўшма бўлиши керак:

$$B^* = A.$$

Агар A ва B нинг умумий модулини $\frac{a}{2}$ билан, фазасини δ билан белгиласак, у ҳолда

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\delta}, B = \frac{1}{2} a e^{-i\delta}$$

ва (71.10) қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[e^{i(\omega_0 t + \delta)} + e^{-i(\omega_0 t + \delta)} \right] = a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t + \delta) = \\ &= a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(2\pi\nu_0 t + \delta). \end{aligned} \quad (71.11)$$

Бу формула амплитудаси вақтга боғлиқ равишда $e^{-\gamma t/2}$ экспоненциал қонун билан камайдиган тебранма ҳаракатни ифодалайди. Равшанки, бу қонун энергиянинг

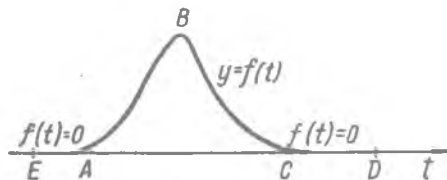
$$E = E_0 e^{-\gamma t}$$

камайиш қонунига мос келади, чунки энергия амплитуданинг квадратига пропорционалдир.

72-§. Фурье интегралли ва туташ спектр

Осцилляторнинг сўнувчи тебранишлари даврий бўлмаган процессдир, чунки у даврийликнинг асосий шарти, яъни бир хил вақт оралиқларида айни бир амплитудаларни чексиз такрорлаш шартини қаноатлантира олмайди. Ҳақиқатан ҳам, сўнувчи тебранишларда бир хил амплитудалар умуман бўлмайди ва ундан ташқари, бутун процесс маълум бир пайтдан бошланади; бинобарин, $-\infty$ дан $+\infty$ гача эмас, фақат 0 дан $+\infty$ гача давом этади. Шундай қилиб, сўнувчи тебранишлар даврий булмаган процессга мисол бўлади.

Энди даврий булмаган процессларни спектрга ёйиш тўғрисидаги муҳим масалани текширайлик. Юқорида биз даврий процессни тасвирловчи ҳар қандай функцияни Фурье қаторига ёйиш, яъни уни частоталари $\nu_0 = 1/T, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ бўлган қатъий гармоник тебранишларнинг суперпозицияси натижаси сифатида тасвирлаш мумкин эканлигини кўрдик, бу ерда T — ёйилманинг асосий даври. Фурье қатори ёрдамида математик бажариладиган ишни тажрибада тегишли анализатор, масалан, гап ёруғлик тебранишлари тўғрисида борганда дифракцион панжара ёрдамида қилиш мумкин. Шундай қилиб, даврий процесс спектрга ҳар қандай йўл билан ёйилганда ҳам *чизиқли спектр* беради.



114- расм.

Энди биз AC интервалда (114-расм) ABC эгри чизиқ билан тасвирланадиган ва интервалнинг чегараларида, яъни A ва C нуқталарда нолга айланадиган бирор $f(t)$ функцияни текшираётирмиз дейлик. Равшанки, бу функция даврий бўлмаган процессии тасвирлайди. Биз уни $A \dots C$ интервалда Фурье қаторига ёйишимиз мумкин, бунда $T=AC$ деб ҳисоблаймиз; бу қаторнинг ҳадлари сонини етарлича қилиб олиб, бу функцияни AC интервалда тўғри аниқлаган бўламиз. A дан чап томонда ва C дан ўнг томонда бу қатор ABC эгри чизиқни даврий равишда такрорлайди. Энди биз интервални, масалан, чапга E гача ва ўнгга D гача кенгайтиришимиз мумкин, лекин бунда функциянинг AE ва CD қисмлардаги қийматини ноль деб оламиз. Кенгайтирилган бу интервалда функцияни яна Фурье қаторига ёйишимиз мумкин. Аммо бунда ёйилманинг асосий даври $T=ED$ бўлади. Равшанки, E ва D нуқталарни чексизликка суриш билан $E \dots D$ ёйилиш интервалини чексиз кенгайтириш мумкин. Бунда ёйилманинг асосий даври T чексиз ортади, бунга тегишли $\nu_0 = 1/T$ асосий частота эса чексиз камаяди. Бунинг натижасида Фурье қаторидаги кетма-кет жойлашган $e^{+i2\pi s \nu_0 t}$ ҳадларнинг аргументлари s ортган сайин бири-бирига яқинлашади. Ёйилманинг асосий интервалини шу тариқа чексиз кенгайтирганда қатор оқибатда $-\infty$ дан $+\infty$ гача олинган интегралга айланишини кўрсатиш мумкин.

Агар биз бу мулоҳазаларни формулалар ёрдамида такрорласак, янада тушунарлироқ бўлиб қолади. Шундай қилиб, даврий бўлмаган $f(t)$ функция берилган бўлсин: буни $-T/2$ дан $+T/2$ гача бўлган чекли интервалда Фурье қаторига ёямиз:

$$f(t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi s \nu_0 t}, \quad \nu_0 = \frac{1}{T}. \quad (72.1)$$

Ёйилманинг коэффициентларига тегишли маълум формулага биноан:

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i2\pi s \nu_0 t} dt. \quad (72.2)$$

Бу ерда t ўрнига вақтинча a олиб ва $\nu_0 = 1/T$ асосий частота оқанлигини назарга олиб, (72.2) формулани

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(a) e^{-i2\pi \frac{s}{T} a} da \quad (72.3)$$

кўринишда ёзамиз. A_s нинг бу ифодасини (72.1) қаторга қўямиз; бунда қатор қуйидаги кўринишга келади:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_s \left[\int_{-T/2}^{+T/2} f(a) e^{-i \frac{2\pi s a}{T}} da \right] e^{i \frac{2\pi s t}{T}} \quad (72.4)$$

Энди s/T ни ν орқали белгилаймиз. s бутун сон бўлгани учун (72.4) ёйилмага кирувчи $\frac{s}{T} = \nu$ частоталар s нинг кетмакет ўзгаришида чекли

$$\Delta \nu = \frac{s+1}{T} - \frac{s}{T} = \frac{1}{T}$$

поғоналар билан ўзгаради; бу ни эътиборга олиб, (72.4) қаторни қуйидагича ёзамиз:

$$f(t) = \sum \left[\int_{-T/2}^{+T/2} f(a) e^{-i2\pi\nu a} da \right] e^{i2\pi\nu t} \Delta \nu. \quad (72.5)$$

Энди юқорида айтилган лимитга ўтаемиз. Чунончи $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$ интервал $-\infty$ дан $+\infty$ гача кенгайтирилди деб фараз қиламиз. У ҳолда (72.5) нинг ўнг томонидаги йиғинди қуйидаги интегралга айланади (шундай эканлиги математик қўлланмаларда * қатъий исбот этилади):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(a) e^{-i2\pi\nu a} da \right] e^{i2\pi\nu t} d\nu.$$

Буни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad (72.6)$$

бу ерда

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) e^{-i2\pi\nu a} da.$$

ёки олдинги белгилашларга ўтсак, яъни a ўрнига t ни қўйсак,

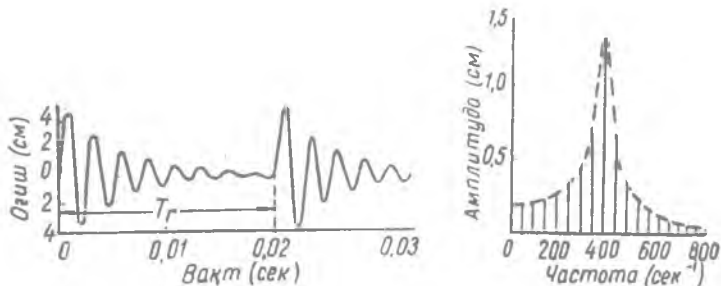
$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt. \quad (72.7)$$

* Бу китобларга қаранг:
Курант - Гильберт, Методы математической физики. т. 1, Гостехиздат, 1951 ва И. И. Привалов, Ряды Фурье, Госиздат, 1930.

Бу эса даврий бўлмаган функция ёйилмасининг коэффициентлари билан частота орасидаги боғланишни ифодаловчи формуладир.

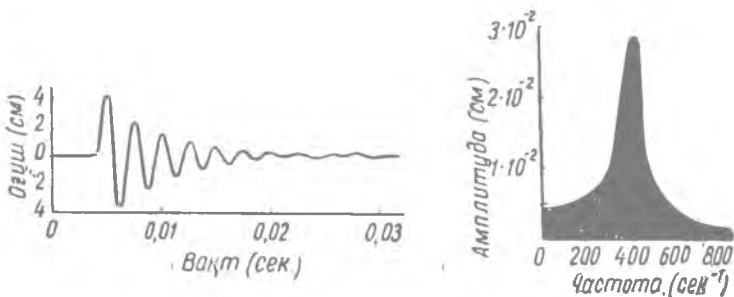
(72.6) ва (72.7) формулалар даврий бўлмаган процессларни, хусусан сўнувчи тебранишларни спектрга ёйишга имкон беради.

Физика нуқтаи назаридан, даврий функцияни Фурье қаторига ёйиш билан даврий бўлмаган функцияни *Фурье интегралига* ёйиш орасида катта фарқ бор. *Фурье қатори* $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ частоталар билан дискрет узгарадиган оддий даврий функциялардан иборат ҳадлардан тузилган; *Фурье интегралига* эса



115-расм. Даврий процесс чизиқли спектрга ёйилади.

частота бўйича интегралланади, яъни частоталар *узлуксиз* ўзгаради деб фараз қилинади. Биринчи ҳолда чизиқли спектрга ёйиш билан, иккинчи ҳолда эса туташ спектрга ёйиш билан иш кўрамыз. Бу фарқ 115 ва 116-расмлардан яхши кўриниб



116-расм. Даврий бўлмаган процесс туташ спектрга ёйилади.

турибди. Бу расмларда чап томонда тебранишларнинг иккита эгри чизиғи, ўнг томонда эса уларнинг спектрлари тасвирланган (абсциссалар ўқида сек^{-1} ҳисобидаги частоталар, ординаталар ўқида амплитудалар, яъни Фурье коэффициентлари қўйилган). Юқоридаги эгри чизиқ синусоидал бўлмаган даврий процессни тасвирлайди; унинг спектри чизиқли спектрдир. Пастдаги эгри чизиқ эса олдинги эгри чизиқнинг бир звено-

сидир. Бу звено даврий бўлмаган эгри чизиқ, чунки бу ерда тенг амплитудалар тенг вақтлар ўтказиб чексиз такрорланмайди. Бу ҳолда айрим чизиқлар шунчалик яқинлашадики, ёйилма частоталарнинг тўлиқ *интервалини—туташ спектр* қисмини ўз ичига оладиган туташ полоса бериши ўнг томонда кўрсатилган.

73-§. Спектрал чизиқларнинг табиий кенглиги

Осцилляторнинг сўнувчи тебранишлари

$$x = ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(2\pi\nu_0 t + \delta)$$

олдинги параграфларда айтилганларга асосан, гармоник бўлмаган процессгина эмас, балки даврий бўлмаган процесс ҳамдир.

Шунинг учун уни спектрга математик ёйиш учун Фурье қаторидан эмас, балки Фурье интегралидан фойдаланиш керак. Демак, спектр *туташ* бўлади. Аниқроқ қилиб айтганда, ҳисоблашларнинг кўрсатишича, тебранишларнинг сўниши туфайли спектрал чизиқ *кенгайди*; спектрал чизиқ туташ спектрнинг $\Delta\nu$ кенглиги γ сўниш доимийси билан аниқланадиган қисмини ўз ичига олади. Шундай эканлигини кўрсатиш учун аввал $f(t)$ функцияни $-\infty$ дан $+\infty$ гача интервалда ифодалаш керак. Буни қуйидагича қиламиз:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 & \text{бўлганда} \\ ae^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i2\pi\nu_0 t}, & t \geq 0 & \text{бўлганда.} \end{cases} \quad (73.1)$$

Олдинги параграфда айтилганга биноан, $f(t)$ функция спектр-га қуйидаги формула билан ёйилади:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad (73.2)$$

бу ерда $a(\nu)$ амплитуда

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (73.3)$$

формула билан аниқланади. Бунга $f(t)$ нинг (73.1) даги қийматини қўйиб ва $-\infty$ дан 0 гача интервалда $f(t) = 0$ эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги чиқади:

$$a(\nu) = \int_0^{+\infty} ae^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t} dt = a \int_0^{+\infty} e^{[i2\pi(\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2}]t} dt.$$

Бу интегрални ҳисоблаб қўйидагини топамиз:

$$a(\nu) = \frac{a}{i2\pi(\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t}}{e^{\frac{\gamma}{2}t}} \right]_0^\infty = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i2\pi(\nu_0 - \nu)} \quad (73.4)$$

Спектрда интенсивликнинг частотага қараб тақсимланишини топиш учун $a(\nu)$ модулининг квадрати ҳисоблаш керак:

$$|a(\nu)|^2 = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i2\pi(\nu_0 - \nu)} \cdot \frac{a}{\frac{\gamma}{2} + i2\pi(\nu_0 - \nu)} = \frac{a^2}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (73.5)$$

Агар энди (68.4) формуладан фойдаланилса ва катта вақт оралиги учун ўртача қиймат топилса, натижада $I_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2}{3c^3} |a(\nu)|^2$ ҳосил бўлади [(68.6') формулага қаранг]; $|a(\nu)|^2$ ўрнига (73.5) қиймат қўйилса, қўйидагини топамиз:

$$I_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{16\pi^4\nu_0^2 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2\left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{\nu^2}} \quad (73.6)$$

$\frac{\nu}{\nu_0} = x$, $\frac{\gamma}{\nu_0} = \Gamma$ белгилашларни киритиб, (73.6) формулани бундай ёзамиз:

$$I_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^2 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2(1-x)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} \quad (73.7)$$

(73.6) ва (73.7) формулалар интенсивликнинг частотага қараб тақсимланишини, яъни сўнувчи осциллятор спектрининг манзарасини кўрсатади.

117-расмда

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2(1-x)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}$$

кўпайтувчининг ўзгариши тасвирланган. Кўриниб турибдики, $x=1$ ёки $\nu = \nu_0$ бўлганда, яъни сўнмас осцилляторнинг хусусий тебранишлари частотасида эгри чизиқ кескин максимумга эга. $f(x)$ нинг максимал қиймати

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} \Gamma^2}$$

Равшанки, $f(x)$ нинг максимал қийматининг ярмига тенг қиймати $2\pi(1-x) = \frac{1}{2} \Gamma$ шартда ҳосил бўлади; $x = \nu/\nu_0$ ва $\Gamma = \gamma/\nu_0$

эканлигини назарга олиб ва бу ҳолда $\nu - \nu_0$ ни $\Delta\nu_{1/2}$ билан белгилаб бу шартни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\gamma}{4\pi}. \quad (73.8)$$

$\Delta\nu_{1/2}$ — спектрал чизиқнинг ярим кенглиги деб аталади; у γ сўзиш доимийси билан тўлиқ аниқланиши кўриниб турибди.

Оптик спектрда $\Delta\nu_{1/2}$ ярим кенглик жуда кичик бўлади. 117-расмда $\Gamma = 1/5$ учун спектрал чизиқнинг контури тасвирланган, аммо тор спектрал чизиқлар учун Γ нинг қиймати $10^{-3} - 10^{-4}$ тартибда бўлади, демак, расмда тасвирланган чизиқнинг кенглиги ҳаддан ташқари катталаштириб кўрсатилган.

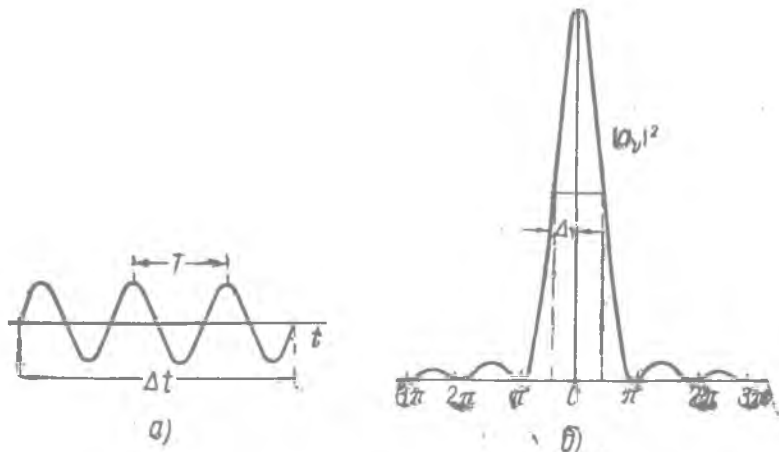
γ билан релаксация вақти τ орасидаги $\gamma = 1/\tau$ боғланишни эътиборга олиб, (73.8) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\tau\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{4\pi}.$$

74-§. Даврий бўлмаган процессларни спектрал ёйишнинг бошқа мисоллари

Даврий бўлмаган процессларни спектрга ёйишнинг яна иккита мисолини текширайлик.

а) Тебраниш бирор чекли Δt вақт оралиғида юз берсин, лекин мана шу чекли интервалда гармоник қонунга (118-а



118-расм. а) квазимонохроматик тебраниш; б) бу тебранишнинг спектри.

расм) бўйсунсин дейлик. Бундай тебранишларни *квазимонохроматик* тебранишлар деб атаймиз. Равшанки, амалда биз монохроматик ва сунмайдиган деб ҳисоблайдиган барча реал

тебранишлар аслида квазимонохроматик тебранишлардир, чунки улар чекли вақт давом этади. T —тебранишнинг даври, $\nu_0 = \frac{1}{T}$ эса частотаси бўлсин. Бу тебранишнинг спектрал ёйилмасини топайлик.

Тебраниш $-\infty$ дан $+\infty$ гача давом *этмаганлиги* учун *даврий бўлмаган* процессдан иборатдир ва уни спектрга ёйиш учун Фурье қаторидан эмас, балки Фурье интегралидан фойдаланиш лозим.

Ёйиладиган функция қуйидагичадир:

$$f(t) = \begin{cases} A_0 e^{i2\pi\nu_0 t} & \left(-\frac{\Delta t}{2} \text{ дан } +\frac{\Delta t}{2} \text{ гача}\right) \\ 0 & \left(-\infty \text{ дан } -\frac{\Delta t}{2} \text{ гача ва } +\frac{\Delta t}{2} \text{ дан } +\infty \text{ гача}\right). \end{cases} \quad (74.1)$$

Изланаётган ёйилма эса:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{2\pi i \nu t} d\nu,$$

бу ерда a_ν амплитуда қуйидагича ифодаланади:

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

(74.1) ни ва $f(t)$ нинг $-\frac{\Delta t}{2}$, $+\frac{\Delta t}{2}$ соҳадагина нолга тенг эмаслигини назарга олиб, амплитудани топамиз:

$$a_\nu = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = A_0 \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t} dt = A_0 \frac{\sin\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t}{\pi(\nu_0 - \nu)}. \quad (74.2)$$

Бу натижани яна бундай тасвирлаш мумкин:

$$a_\nu = A_0 \Delta t \frac{\sin\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t}{\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t} \quad (74.3)$$

ёки $A_0 \Delta t = A$ ва $\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t = \xi$ белгилар киритиб, амплитудани қуйидагича ёзамиз:

$$a_\nu = A \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

$\frac{\sin \xi}{\xi}$ функция қуйидагича ўзгаради: унинг бош максимуми $\xi=0$ да жойлашган, бу ерда $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$; сўнгра бу функция $\xi = \pm\pi$, $\pm 2\pi, \dots, \pm m\pi$ қийматларда нолга айланади, ораларида эса ξ нинг $\text{tg } \xi = \xi$ шартни қаноатлантирадиган қийматларида иккинчи даражали максимумларга эга; ξ нинг бу шартни қаноат-

лантирадиган қийматлари: $\xi = 1,430\pi = 4,49$; $2,459\pi = 7,73$; $3,47\pi = 10,90$ ва ҳоказо. $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$ нинг максимумлардаги қийматлари қуйидагичадир:

ξ	0	4,49	7,73	10,90
$\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2$	1	0,047	0,016	0,008

Бундан $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$ функциянинг бутун ўзгариши $\xi = \pm \pi$ интервалда жойлашади деган хулоса чиқариш мумкин, бунда йўл қўйиладиган хато 5 процентдан ошмайди. Бу интервалдан ташқарида функция (айтиб ўтилган аниқликда) нолга айланади дейиш мумкин.

$$|a_\nu|^2 = A^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 = (A_0 \Delta t)^2 \left[\frac{\sin \pi (\nu_0 - \nu) \Delta t}{\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t}\right]^2$$

бўлгани учун $\nu = \nu_0$ бўлганда (118-б расм), яъни квазимонохроматик тебранишларнинг частотасида $|a_\nu|^2$ бош максимумга эга бўлади ва

$$|\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t| = \pi \quad (74. 4)$$

шартда нолга айланади.

Кўриб турибмизки, гарчи $\nu_0 = 1/T_0$ частота энг катта интенсивлик билан тасвирланган бўлса-да, спектр частоталарнинг $\nu - \nu_0 = \Delta\nu$ туташ интервалини ўз ичига олади. (74. 4) шартдан $\Delta\nu$ билан сўнмовчи тебранишларнинг давом этиш вақти Δt орасидаги муносабат келиб чиқади:

$$\Delta\nu \Delta t = 1. \quad (74. 5)$$

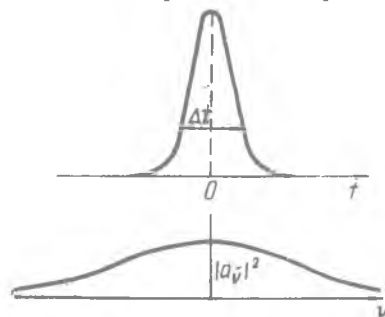
Агар бош максимумнигина эмас, балки иккинчи даражали максимумларни ҳам эътиборга оласак, (74. 4) шарт ўрнига

$$|\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t| = m\pi$$

шарт ҳосил бўлади. Бу шартдан $\Delta\nu \Delta t = 2, 3, \dots, m$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун (74. 5) ўрнига биз қуйидаги тенгсизликни ёза оламиз:

$$\Delta\nu \Delta t \geq 1. \quad (74. 6)$$

Бу тенгсизлик квазимонохроматик тебранишларнинг давом этиш вақти Δt қанча катта бўлса, $\Delta\nu$ спектрал интервал шунча тор эканлигини кўрсатади ва аксинча.



119- расм. Бирлик импульс ва унинг спектри.

б) $f(t) = e^{-\beta^2 t^2}$ функция билан тасвирланган ягона тўлқин-ланишни иккинчи мисол сифатида текширайлик (119-расмдаги юқориги эгри чизиққа қаранг).

Ўлчамлиги $[\text{сек}^{-1}]$ бўлган β параметр тўлқинланишнинг ўткирлигини характерлайди. Бу ўткирликнинг ўлчови сифатида $\Delta t = \frac{1}{\beta}$ вақт оралиғи олинади, мана шу вақт ичида тўлқинланиш амплитудаси e марта ўзгаради. Спектрал ёйилманинг амплитудаси қуйидаги маълум формула бўйича ҳисоблаб топилади:

$$a_v = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi vt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + i2\pi vt)} dt.$$

Интеграл остидаги даражанинг кўрсаткичини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned} -(\beta^2 t^2 + i2\pi vt) &= -\left[\beta^2 t^2 + i2\pi vt + \left(\frac{i\pi v}{\beta}\right)^2\right] + \left(\frac{i\pi v}{\beta}\right)^2 = \\ &= -\left(\beta t + \frac{i\pi v}{\beta}\right)^2 - \frac{\pi^2 v^2}{\beta^2}, \end{aligned}$$

шунинг учун

$$a_v = e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\beta t + \frac{i\pi v}{\beta}\right)^2} dt.$$

Бу ерда $\beta t + i \frac{\pi v}{\beta}$ ифодани z билан белгилаб, a_v ни қуйидагича ёзамиз:

$$a_v = e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\beta^2}}$$

бундан

$$|a_v|^2 = \frac{\pi}{\beta^2} e^{-2\frac{\pi^2 v^2}{\beta^2}}.$$

Энергиянинг спектрдаги тақсимоти, равшанки, экспоненциал кўпайтувчига боғлиқдир. Эгри чизиқнинг кенглиги қуйидаги шартдан аниқланади:

$$2 \frac{\pi^2 (\Delta v)^2}{\beta^2} = 1$$

Ўки $\beta = \frac{1}{\Delta t}$ бўлгани учун бу шарт бундай ёзилади:

$$|\sqrt{2} \pi \Delta v \Delta t| = 1,$$

яъни

$$\Delta v \Delta t = \frac{1}{\sqrt{2} \pi}.$$

Юқорида қараб ўтилган ҳоллардаги каби, бунда ҳам туташ спектрнинг кенглиги импульснинг давом этиш Δt вақтига тескари нисбатда бўлади.

Охирги иккита параграфда текширилган барча мисоллар учун қуйидаги умумий хулоса характерлидир: $f(t)$ тўлқинланишнинг давом этиш вақти билан частоталар спектрининг кенглиги орасида тескари пропорционал боғланиш мавжуд, яъни тўлқинланиш қанчалик қисқа давом этса, спектр шунчалик кенг бўлади ва аксинча.

Л. И. Мандельштам ўз лекцияларида буни ёрқин мисол билан намоён қилган. Ўз текислигида нурга перпендикуляр равишда тез ҳаракатланадиган пластинкага ёруғлик нури тушяпти дейлик. Нурнинг пластинкада қолдирган изи узунлиги $f(t)$ тўлқинланишнинг давом этиш вақтининг ўлчовидир. Энди пластинкани призма ва линзадан иборат спектрографга қўяйлик. Агар $f(t)$ синус бўлса (чексиз тўлқинланиш), у ҳолда фокал текисликда муайян бир ν частотага мос келадиган нуқта ҳосил бўлади. Агар $f(t)$ синус бўлмаса, пластинкада битта частота ўрнига чўзилган спектр ҳосил бўлади. Ҳаракатланаётган пластинкадаги чизиқ қанчалик қисқа бўлса, спектр шунчалик кенг чўзилади ва аксинча.

75-§. Атомнинг планетар модели

Шу вақтгача биз ёруғлик манбаи модели сифатида фақат чизиқли осциллятордан, яъни гармоник ёки гармоник бўлмаган қонун билан тебранма ҳаракат қилувчи диполдан фойдаланиб келдик. Аммо Резерфорднинг планетар моделига мувофиқ, атомни ротатор деб, яъни мусбат ядро атрофида ёпиқ орбита бўйлаб ҳаракатланувчи манфий зарядли заррача деб қараш лозим. Бундай модель электромагнит хоссаларининг чизиқли осциллятор нурланишининг топилган хоссаларидан ҳеч бир муҳим янгилиги йўқ эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Аввал ядро атрофида айлана орбита бўйлаб электроннинг текис айланишини энг содда ҳол сифатида текширайлик. Бу ҳаракат тезланма ҳаракат бўлади; шунинг учун бу ҳаракат вақтида электромагнит тўлқинлар нурланиши керак.

Бу нурланишнинг интенсивлигини ҳисоблаш учун айлана бўйича текис ҳаракатни x ва y ўқлар бўйича иккита гармоник ҳаракатга ажратамиз:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

Равшанки, айлана орбита бўйича текис ҳаракат қиладиган электрон ўрнига бир хил ω частота билан ва бир хил a амплитуда билан ўзаро перпендикуляр йўналишларда тебранма ҳаракат қилувчи иккита диполнинг нурланишини текшириш мумкин.

68-§ даги формулаларга биноан, иккала диполнинг нурланиш интенсивликлари қуйидагича бўлади:

$$J_x = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \omega t, \quad J_y = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \sin^2 \omega t.$$

Шундай қилиб, диполнинг айлана орбитадаги тўла нурланиши

$$J = J_x + J_y = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{32\pi^4 \nu^4 e^2 a^2}{3c^3}.$$

Топилган натижани диполнинг бир давр ичидаги ўртача нурланишининг (68.6) формуласи билан таққослаб, диполнинг айлана орбитадаги тўла нурланиши вақтга боғлиқ эмас ва диполнинг уртача нурланишидан икки марта кагта эканлигини кўрамиз, чунки иккала диполнинг J_x ва J_y нурланишлари ўзаро перпендикуляр текисликларда қўтлангандир.

Ядрога Кулон кучи билан боғланган электроннинг *Кеплер эллипси бўйича* умумий ҳаракатини текшириш бир оз мураккаброқдир. Бу ҳолда ҳаракатнинг x ва y координата ўқларидаги ташкил этувчилари оддий гармоник тебранма ҳаракат бўлмайди. Аммо улар ҳамма вақт Фурье қаторига ёйилиши, яъни оддий гармоник тебранишларнинг суперпозицияси натижаси сифатида тасвирланиши мумкин. Эллипснинг бош ўқларини координата ўқлари қилиб олиб, қуйидагини ёзамиз:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \omega t + a' \cos 2\omega t + a'' \cos 3\omega t, \\y &= b \sin \omega t + b' \sin 2\omega t + b'' \sin 3\omega t.\end{aligned}$$

Агар 69-§ дагидек x ва y ўқидаги тебранишларга мос ўртача интенсивликлар ҳисобланиб, кейин улар қўшилса (ўзаро перпендикуляр йўналишлардаги тебранишлар интерференция ҳосил қилмайди), u ҳолда нурланиш ω , 2ω , 3ω , ... частотали осцилляторлар тўпламига мос келади.

Шундай қилиб, Кеплер эллипси бўйича айланадиган электрон асосий частота ва унинг гармоник обертонларидан иборат бўлган бутун частоталар спектри нурланади.

76-§. Орбитал магнит момент ва Лармор теоремаси

Орбита бўйича ҳаракат қилувчи электрон айланма токдир. Электродинамика қонунларига биноан, бундай айланма ток муайян магнит моментга эга бўлиши, яъни магнит майдонида ўзини магнит диполь каби тутиши керак. Иккинчи томондан механика нуқтан назаридан, электрон айланма ток электроннинг тез айланиши натижасида пиридоқнинг хоссаларига эга бўлиши керак. Электрон орбитасининг унинг магнит моменти орқали характерланувчи магнит хоссалари билан ўлчови ҳаракат миқдорининг моменти бўлган механик хоссалари орасида муайян муносабат мавжуддир. Бу муносабатни келтириб чиқарамиз.

Электродинамикадан маълумки*, берк токнинг магнит моменти

$$M = \frac{1}{c} JS, \quad (76.1)$$

* И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 253-бет, Гостехиздат, 1949.

бу ерда J — ток кучи (электростатик бирликларда), S — ток ўтаётган сирт ва c — ёруғликнинг тезлиги. Агар электроннинг айлана орбитада айланишлари сони $\nu = \frac{1}{T}$ бўлса (T — айланиш даври), у ҳолда

$$J = e\nu = \frac{e}{T}. \quad (76.2)$$

Шунинг учун

$$M = \frac{1}{c} e\nu r^2$$

ёки ν ни $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ тенгликка асосан бурчак частота билан алмаштириб,

$$M = \frac{e}{2c} \omega r^2 = \frac{e}{2mc} m r^2 \omega. \quad (76.3)$$

Аmmo $m r^2 \omega = m r^2 \dot{\varphi}$ ифода равшанки, электрон орбитаси ҳаракат миқдорининг l моментидан иборатдир. Шундай қилиб,

$$M = \frac{e}{2mc} l, \quad (76.4)$$

бу эса биз излаган муносабатдир.

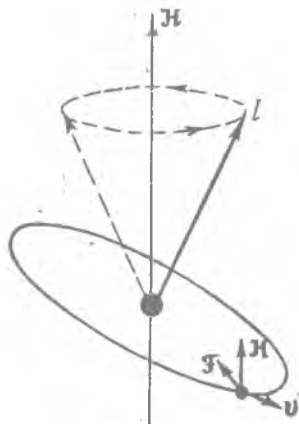
Энди, орбитал электронли атом магнит майдонига жойлашган деб тасаввур қилайлик. Юқорида айтилганига биноан, атом муайян магнит моментга эга бўлгани учун ташқи майдонда ўзини магнит сифатида тутиши, яъни унинг магнит momenti майдонга параллел ёки антипараллел жойлашиши керак. Аммо бунга атомнинг айна вақтда ўзини пирилдоқ сифатида тутиши қаршилиқ қилади. Бундан магнит майдонида атом ўзини ернинг тортиш кучи майдонидаги оддий пирилдоқ сингари тутиши кераклиги, яъни майдон йўналиши атрофида атом прецессия ҳаракат қилиши кераклиги келиб чиқади. Агар энди электроннинг орбитасини қўзғалмас координаталар системаси нуқтаи назаридан текширсак, орбита ясси бўлмасдан, умуман жуда мураккаб бўлиб кетади. Агар орбита билан биргаликда прецессияланувчи қўзғалувчан координаталар системаси киритилса, масала анча соддалашади. Бундай координаталар системасида орбита ўзининг шаклини сақлайди ва фақат прецессиянинг бурчак тезлигини аниқлаш қолади.

Иккита координаталар системаси киритамиз: улардан бирини H магнит майдонининг йўналиши билан боғлаймиз. Бу системани „қўзғалмас“ система деб атаймиз. Қўзғалувчи, яъни иккинчи система электрон орбитаси билан узвий боғланган бўлиб, „қўзғалмас“ системага нисбатан прецессияланади. Прецессия ўқи майдон йўналиши билан бир хил. Прецессия бурчак тезлиги θ бўлсин дейлик; орбита бўйлаб ҳаракат қилувчи электроннинг тезлиги қўзғалмас координаталар системасида v , қўзғалувчи системада v' бўлсин. Қўзғалувчан системада элек-

тронга қўшимча инерция кучлари—марказдан қочирма инерция кучи $m\rho^2$ ва $C = 2m[\mathbf{v}' \mathbf{o}]$ Кориолис кучи таъсир қилади, бу ерда ρ — электрондан прецессия ўқиғача бўлган масофа. Прецессион ҳаракатнинг электронга берадиган чизиқли тезлиги электроннинг прецессия булмагандаги орбитал тезлигига қараганда жуда кичик деб, яъни

$$\rho \ll v$$

деб фараз қилиб, марказдан қочирма инерция кучини Кориолис кучига нисбатан эътиборга олмаслигимиз мумкин. Яқинлашишнинг мана шу фаразга асосланган даражасига берилган



120- расм.

баҳо уни тўлиқ асослайди. Ундан кейин уша яқинлашиш чегараларида Кориолис кучи ифодасидаги v' тезликни қўзғалмас координаталар системасига нисбатан олинган v тезликка алмаштириш мумкин. Шундай қилиб,

$$C = 2m[\mathbf{v} \mathbf{o}]. \quad (76. 5)$$

Аммо биламизки, магнит майдонида v тезлик билан ҳаракат қилувчи электронга

$$\mathbf{F} = -\frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \quad (76. 6)$$

куч таъсир қилади. Бундаги минус ишора электрон заряди манфий эканлигини билдиради. Агар майдоннинг \mathbf{H} йўналиши прецессия ўқиға параллел

бўлса, у ҳолда C ва F кучларнинг йўналишини вектор кўпайтма қондасига биноан аниқлаб, бу кучларнинг бир-бирига қарама-қарши таъсир қилишини кўриш осон. Шунинг учун орбита ўз ўлчовлари ва шаклини ўзгартмаслиги учун бу кучларнинг сон қиймати бир-бирига тенг бўлиши керак: $C = -F$. Бу ҳолда (76. 5) ва (76. 6) лардан қуйидагини топамиз:

$$2m\mathbf{v} \mathbf{o} \sin(\mathbf{v} \mathbf{o}) = \frac{e}{c} v \mathbf{H} \sin(\mathbf{v} \mathbf{H}). \quad (76. 7)$$

Прецессия ўқи майдон йўналишига параллел бўлгани учун $\sin(\mathbf{v} \mathbf{o}) = \sin(\mathbf{v} \mathbf{H})$

бўлади ва (76. 7) дан қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{o} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \quad (76. 8)$$

Топилган натижани қуйидагича таърифлашимиз мумкин: кучсиз магнит майдонида электрон чизадиган орбита магнит майдонга нисбатан

$$\mathbf{o} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}$$

бурчак частота билан прецессияланувчи координаталар система-сига нисбатан айнан майдон бўлмагандаги орбитадагидек бўлади.

Шундай қилиб, *магнит майдонининг электрон орбитаси-га таъсирини бу орбитага о тезликли прецессия беришдан иборат дейиш мумкин* (120-расм). Лармор теоремаси мана шундан иборат.

Ма ш қ. Кучланганлиги 40 000 эрстед бўлган магнит майдонига ёруғлик манбаи жойлаштирилган. Электрон орбитаси прецессиясининг Лармор частотаси ҳисоблансин ва бу частотага мос келадиган тўлқин узунлик аниқлансин. (Жавоб: $\lambda = 0,54$ см.)

77-§. Зеeman эффекти

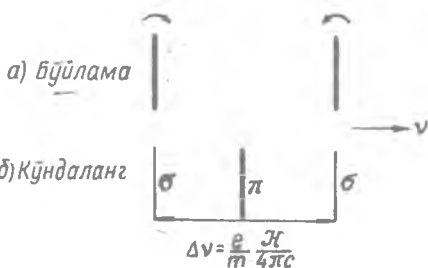
Маълумки, ҳаётининг охирида Фарадей электромагнит майдон билан ёруғлик орасида боғланиш борлигини кўрсатувчи ҳодисаларни зўр бериб излаган. Фарадейнинг ўз таъбири билан айтганда у „куч чизиқларни ёритиш ва ёруғликни магнитлаш-га“ ҳаракат қилган. Қутбланиш текислигининг магнит майдонида бурилишини кашф этиши (Фарадей эффекти) билан у ёруғликнинг магнитланиши-ни пайқашга муяссар бўлган.

Бу соҳада ишни давом эттириб Фарадей 1862 йилда магнит майдонининг спектрал чизиқларга таъсирини кашф этмоқчи бўлиб беҳуда уринган. Бундан 34 йил кейин √1896 йили Зеeman электромагнит қутблари орасига ёруғлик манбаини жойлаштирганда спектрал чизиқлар ажралишини анча катта қувватли майдонлар ва нозик спектрал асбоблар ёрдамида аниқлаган.

Бу ҳодисани Лоренц электрон назария асосида миқдорий асослаб берган. Лоренц назариясига мувофиқ, майдон йўналишига перпендикуляр қараганда спектрал чизиқ симметрик манзара бериб учта компонентга ажралиши керак (121-б расм). Шу билан бирга, ўртадаги чизиқ билан ҳар бир четки чизиқ орасидаги масофа частоталар шкаласида $\Delta\nu$ га тенг бўлиши керак, яъни

$$\Delta\nu = \frac{e}{4\pi mc} H \text{сек}^{-1}. \quad (77. 1)$$

Ажралган чизиқлар чизиқли қутбланиши, яъни четдаги чизиқлар майдонга перпендикуляр қутбланиши, ўртадаги чизиқ майдон бўйича қутбланиши керак. Майдон бўйича қараганда ўртадаги чизиқ бўлмаслиги, четдаги чизиқлар айланиш йўналиши қарама-қарши бўлган айланма қутбланиши керак (121-а расм).



121-расм. Зеemanнинг оддий эффектила спектрал чизиқнинг ажралиш схемаси.

Назариянинг барча бу фикрлари кўпчилик ҳолларда ҳайрон қоларли даражада аниқ тасдиқланган. Лекин шу билан бирга, ажралиш манзараси анча мураккаб бўлган кўп ҳоллар ҳам бор: компонентлар сони учтадан ортиқ бўлади ва силжиш катталиги (77. 1) формула бўйича ҳисоблаб топилганга (гарчи у билан соддагина боғланган бўлса-да) мос келмайди.

Лоренц назариясига тўғри келадиган ажралиш *Зееманнинг нормал эффекти* деб аталади. Қолган барча ҳолларда кузатиладиган манзара *Зееманнинг аномал ёки мураккаб эффекти* деб аталади.

Энди нормал эффектнинг классик электрон назария бўйича қандай талқин қилинишини кўрайлик. Айланма орбита бўйича ҳаракатланувчи электронни текширайлик. Айтайлик, бу ядроси $+e$ зарядли ва ядро атрофида битта электрон айланаётган водород атоми бўлсин. Магнит майдони орбита текислигига перпендикуляр йўналган бўлсин (122-расм).

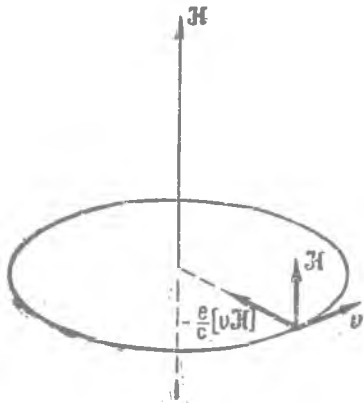
Электронни орбитада тутиб турувчи кучнинг абсолют қиймати қуйидагига тенг:

$$F = \frac{e^2}{r^2}. \quad (77. 2)$$

Бу F куч марказдан қочирма инерция кучига тенг:

$$\frac{e^2}{r^2} = mr\omega_0^2, \quad (77. 3)$$

бу ерда ω_0 — электроннинг магнит майдон бўлмагандаги айланиб юриш частотаси. Магнит майдони бўлганда электронга (77. 2)



122-расм.

Кулон кучидан ташқари, $\frac{e}{c} [vH]$ га тенг Лоренц кучи ҳам таъсир қилади. Агар энди Лоренц кучи йўналишини аниқлаш учун ўнг винт қондасидан фойдалансак, бу кучнинг радиус бўйича йўналиши 122-расмдан кўриниб турибди. Шунга қарамасдан, магнит майдони *орбитанинг радиуси ортиши ёки камайишига олиб келмай* балки орбита радиуси ўзгармаган ҳолда электроннинг орбитада айланиш бурчак тезлигини ўзгартиради.

Бу фикр қутилмагандай туюлади, аммо уни аниқ ҳисоб* билан исбот қилиш мумкин. Биз бу ерда бу ҳисобни келтирмаймиз, фақат қуйидаги изоҳларни бериш билан чегараланамиз,

* Китоб охиридаги III иловага қаранг.

холос. Магнит майдони берилганда ўзининг охириг катталигига бирданига эмас, балки муайян вақт ўтгандан кейин эришади. Бу вақт оралиғи электроннинг орбитада айланиш даврига нисбатан шунчалик каттаки, бутун процессни, термодинамикадаги адиабатик процессларга ўхшатиб, ҳаддан ташқари секин борадиган процесс деб қараш мумкин. Шунинг учун ҳар бир пайтда Кулон кучи билан Лоренц кучи йиғиндиси марказдан қочирма инерция кучига тенг бўлиши керак. Аммо марказдан қочирма инерция кучи ўзгариб туради, чунки Фарадейнинг электромагнит индукция қонунига (аниқроқ айтганда, электродинамикадаги Максвеллнинг иккинчи тенгламасига) биноан, магнит майдонининг ортиши уюрмали электр майдонининг ҳосил бўлишига олиб келади. Уюрмали электр майдонининг симметрия ўқи магнит майдонининг йўналиши билан бир хил бўлади. Худди ўша уюрмали электр майдони электронга таъсир қилиб, уни тезлатади ёки секинлатади. Процесснинг юқорида баён этилган тарзда бориши кераклиги шу нарсадан кўринадики, Лоренц кучининг ўзи электроннинг орбитада айланиш частотасини ўзгартира олмайди, чунки у куч тезликка перпендикуляр йўналган ва, бинобарин, ҳеч қандай иш бажармайди.

Юқорида айгиб ўтилганидек, электронга таъсир этувчи кучлар билан марказдан қочирма инерция кучи ҳар бир пайтда, жумладан магнит майдони ўзининг H стационар катталигига эришиб, турғунлашган ҳолатда ҳам мувозанатда бўлиши шарт. Бу ҳолатда электроннинг бурчак тезлигини ω билан белгилаб, Лоренц кучининг сон қийматини топамиз: $\frac{e}{c} r\omega H$, чунки $v = r\omega$ ва $\sin(\mathbf{vH}) = 1$; майдон орбита текислигига перпендикуляр бўлгани учун $\sin(\mathbf{vH}) = 1$ бўлади. Айтиб ўтилган мувозанат шarti бу ҳолда

$$\frac{e^2}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H = mr\omega^2,$$

ёки (77.3) ни эътиборга олсак,

$$mr\omega_0^2 + \frac{e}{c} r\omega H = mr\omega^2,$$

бундан

$$\omega^2 - \frac{e}{mc} H\omega - \omega_0^2 = 0. \quad (77.4)$$

Иккинчи ҳадда ω нинг олдидаги коэффициент, равшанки, Лармор частотаси (ω_0) нинг иккиланганига тенг, чунки

$$\omega_0 = \frac{e}{2mc} H \quad (76.8)$$

ва, бинобарин,

$$\omega^2 - 2\omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0. \quad (77.5)$$

Бу квадрат тенгламани ω га нисбатан ечамиз:

$$\omega = 0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + \sigma^2}. \quad (77.6)$$

0 катталиқ ω_0 га нисбатан жуда кичик. Ҳақиқатан ҳам, шу вақт-гача амалда ҳосил қилинган магнит майдонларнинг (П. Л. Капицанинг машҳур тажрибалари) энг катта интенсивлиги тақрибан 500 000 эрстедга етган. Бундай майдонларда

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{e}{mc} H = 0,5 \cdot 1,76 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^5 = 4,4 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}.$$

Шунга қарамасдан, спектрнинг кўзга кўринадиган ёки ультра-бинафша қисмларида ётадиган спектрал чизиқлар учун ω_0 нинг қиймати 10^{15} сек^{-1} катталиқ тартибида бўлади. Бинобарин, $(\sigma/\omega_0)^2$ катталиқ 10^{-6} тартибида, шунинг учун биз (77.6) да радикал остидаги σ^2 катталиқни ω_0^2 га нисбатан эътиборга олмаслигимиз ва (77.6) ни қўйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\omega = 0 \pm \omega_0$$

ёки

$$\omega_1 = \omega_0 + \sigma, \quad \omega_2 = -\omega_0 + \sigma. \quad (77.7)$$

Шундай қилиб, магнит майдонида соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда (майдон вектори учидан қараганда) айланадиган электроннинг частотаси σ га ортади, тескари томонга ҳаракатланадиган электроннинг частотаси эса ўша катталиқча камаяди. Агар энди бурчак частотадан чизиқли частотага ўтсак, қўйидагини топамиз:

$$\Delta\nu = \pm \frac{\sigma}{2\pi} = \pm \frac{e}{4\pi mc} H. \quad (77.8)$$

Бу эса Лоренцнинг (77.1) формуласидир.

78-§. Зееман эффекти. Умумий ҳол

Олдинги параграфда биз текислиги майдон йўналишига перпендикуляр бўлган электрон орбитага магнит майдонининг таъсирини кўрган эдик. Бунда электроннинг орбитада айланиш бурчак частотасининг узгариши бу ҳолда ҳам Лармор частотасига тенг эканлигига ишонч ҳосил қилдик [(77.7) формулага қаранг]. Энди умумийроқ ҳолни текшириб, бу назария ҳодисанинг барча томонларини, жумладан чизиқларнинг қутбланиш ҳолатини ҳам аниқ тавсифлашни кўрсатамиз.

Биз диполни текшираётирмиз дейлик, бунда мусбат заряд координаталар бошига маҳкамланган, $-e$ зарядли электрон эса мусбат зарядга квазиэластик куч билан боғланган булсин. Электрон эркин тебранишларининг тенгламаси

$$m\ddot{\mathbf{r}} + f\mathbf{r} = 0.$$

Магнит майдони бўлганда — $\frac{e}{c} [\mathbf{vH}]$ Лоренц кучи ҳосил бўлади ва тебранишлар тенгламаси m га бўлинган ва f/m ни ω_0^2 билан алмаштиригандан кейин қуйидаги кўринишга келади:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{c} [\mathbf{vH}]. \quad (78.1)$$

Энди магнит майдони z ўқ бўйича йўналган дейлик:

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H.$$

$\frac{e}{mc} H$ нинг иккиланган Лармор частотасига тенг эканлигини эътиборга олиб, (78.1) вектор тенгламага мос келувчи учта скаляр тенгламани ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\dot{\omega} y &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\dot{\omega} x &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (78.2)$$

Дастлабки иккита дифференциал тенгламанинг ечимларини

$$x = ae^{i\omega t}, \quad y = be^{-i\omega t} \quad (78.3)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда a ва b лар, умуман айтганда, комплекс амплитудалар. (78.3) ни (78.2) га қўямиз:

$$\left. \begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\dot{\omega}b &= 0, \\ b(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\dot{\omega}a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (78.4)$$

Бу ерда биз a ва b номаълумларнинг чизикли бир жинсли тенгламалари системасига эга бўлдик. Маълумки, бундай система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун унинг коэффициентларидан тузилган детерминант нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2i\dot{\omega} \\ -2i\dot{\omega} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (78.5)$$

бу детерминантни ечиб, қуйидагини* топамиз:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\dot{\omega}^2. \quad (78.6)$$

* (78.5) шартнинг маъноси жуда содда: (78.4) тенгламанинг бириччисидан

$$\frac{a}{b} = -\frac{2i\dot{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

иккинчисидан

$$\frac{a}{b} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\dot{\omega}}$$

Иккала тенгламанинг ечимлари биргаликда бўлиши учун ёзилган тенгликларнинг ўнг томонлари бир-бирига тенг бўлиши керак:

$$-\frac{2i\dot{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\dot{\omega}}$$

Бундан (78.6) шарт чиқади.

Шундай қилиб, биз иккита квадрат тенгламага эга бўлдик:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega_1^2 &= 2\omega\omega_1, \\ \omega_0^2 - \omega_2^2 &= -2\omega\omega_2. \end{aligned} \quad (78.7)$$

Бу тенгламаларнинг тўртта ечимидан икkitасигина мусбатдир:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\omega + \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}, \\ \omega_2 &= -\omega + \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (78.8)$$

$\omega \ll \omega_0$ эканлигини (262-бетга қаранг) эътиборга олиб, (78.8) дан қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 - \omega, & \omega_2 &= \omega_0 + \omega, \\ \omega_2 - \omega_1 &= 2\omega = \frac{e}{mc} H, \end{aligned}$$

чизиқли частотанинг ω_0 га нисбатан силжиши олдинги ҳолдагидек бўлади:

$$\Delta\nu = \pm \frac{\omega}{2\pi} = \pm \frac{e}{4\pi mc} H. \quad (78.9)$$

Шундай қилиб, x ва y ўқлар бўйича, яъни H майдонга перпендикуляр тебранишларнинг частоталари Лоренц формуласидан топиладиган катталиқ қадар силжийди.

Энди иккала силжиган компонентнинг қутбланиш ҳолатини ҳам белгилашимиз мумкин. (78.4) дан:

$$\frac{a}{b} = -i \frac{2\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (78.10)$$

Бунга $\omega = \omega_1$ ни, яъни қизил томонга силжиган компонентнинг частотасини қўйиб ва (78.7) формулаларнинг биринчисига мувофиқ $2\omega\omega_1 = \omega_0^2 - \omega_1^2$ эканлигини эътиборга олиб, $\frac{a}{b} = -i$ ёки $a = -ib = be^{-i\pi/2}$ тенгликни топамиз. Бу тенглик x ўқ бўйича бўлаётган тебранишнинг y ўқ бўйича бўлаётган тебранишдан фаза жиҳатдан $\frac{\pi}{2}$ га орқада қолишини кўрсатади. Иккала тебраниш биргаликда доиравий айланиш беради ва, шу билан бирга, фазалар орасидаги айтиб ўтилган муносабатни эътиборга олсак, айланиш соат стрелкаси ҳаракати бўйича юз беради, яъни ўнг айлана бўйича қутбланади.

Худди шунингдек, (78.10) га $\omega = \omega_2$ ни, яъни бинафша томонга сурилган компонент частотасини қўйиб ва (78.7) тенгламаларнинг иккинчисини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{a}{b} = i \text{ ёки } a = be^{i\pi/2},$$

бундан ω_2 компонент чап айлана бўйича қутбланганлиги келиб чиқади. Ниҳоят, (78.2) системанинг

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

учинчи тенгласи z ўқ бўйича тебраниш частотаси ўзгармаслигини кўрсатади; бунда тебраниш чизиқли қутбланади. Аммо магнит майдонининг куч чизиқларига қарши қараб турган (бўйлама йўналиш) кузатувчи бу учинчи компонентни кўрмайди, чунки диполнинг тебранишлар йўналишидаги нурланиши нолга тенг.

Шундай қилиб, бўйлама йўналишда Зеeman эффектнинг манзараси иккита *сурилган* чизиқдан иборат; бу иккала чизиқ айлана бўйича қутбланган, шу билан бирга, қизил томонга сурилган чизиқ ўнг айлана бўйича, бинафша томонга сурилган чизиқ эса чап айлана бўйича қутбланган.

Магнит майдони йўналишига перпендикуляр, масалан, x ўқ бўйича қараб турган кузатувчи сурилмаган чизиқни кўради, чунки z ўқ бўйича тебранишлар перпендикуляр йўналишда максимал даражада нурланиш беради. Бу кузатувчи сурилган *иккала* компонентни ҳам кўради, чунки x ўқ бўйича тебраниш диполь бу ўқ йўналишида нурланиш бермайди. Аммо x текисликдаги иккала тебраниш айлана бўйича қутбланган компонентлар беради. Шунинг учун x ўққа қарши қараб турган кузатувчи айлана тебранишларнинг u ўқдаги проекциясини кўради, u ўқ бўйича қараб турган кузатувчи эса айлана тебранишларнинг x ўқдаги проекциясини кўради. Шундай қилиб, Зеemanнинг кўндаланг эффекти манзараси учта чизиқдан иборат: битта сурилмаган ва иккита сурилган чизиқлар. Барча чизиқлар чизиқли қутбланган: сурилмаган чизиқ тебранишларнинг электр вектори майдон бўйича йўналган, сурилган чизиқлар тебранишларининг электр вектори майдонга перпендикуляр йўналган.

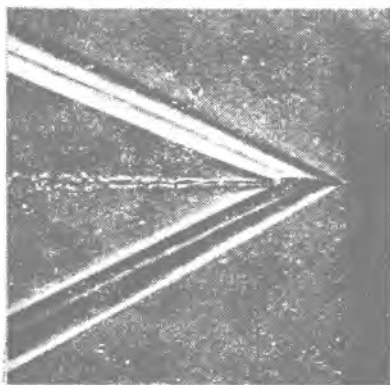
Бу параграфнинг бошида айтиб ўтилганидек, назариянинг баён этилган барча натижалари Зеemanнинг *оддий эффект*ида мутлақо аниқ тасдиқланади. Лекин мураккаб эффект квантлар назарияси асосидагина изоҳланиши мумкин.

79-§. Вавилов—Черенков нурланиши

Классик электродинамикага биноан, электронларнинг ёки умуман зарядли заррачаларнинг тезланма, яъни нотекис ҳаракатида электромагнит тўлқинлар нурланиши вужудга келишини 67-§ да кўриб ўтдик. Аммо бунда нурланувчи бу заррачаларнинг *тезлиги* ёруғлик тезлигидан кичик деб фарз қилинган. Иккинчи томондан, механик системада жисм *муҳит*да эластик тўлқинларнинг тарқалиш тезлигидан катта тезлик билан ўша муҳитда текис ҳаракат қилганида махсус тур тўлқинлар пайдо бўлиши кўпдан бери маълум эди. 123-расмда учиб кетаётган ўқнинг махсус метод билан олинган фотографияси келтирилган. Бу метод ҳавонинг синдириш кўрсаткичи ўзгаришини аниқлашга имкон беради (Теплер методи). Ўқ учиб кетаётган

нида зичлашиш тўлқини ҳосил бўлиши кўриниб турибди. Снаряд учиб кетаётганда товуш чиқишига сабаб мана шу тўлқин бўлади. Глиссер тез ҳаракат қилганда сув юзида ҳосил бўладиган „тумшуқ тўлқини“ ҳам ҳаммага маълум. Бу ҳолларнинг ҳаммасида тўлқиннинг пайдо бўлиш механизми, яъни текис ҳаракат қилаётган жисм нурланишининг механизми айни бир хилдир.

Муҳитда текис ҳаракат қиладиган электр заряд (жумладан, электрон) электромагнит тўлқин нурлантира олар экан, лекин



123- расм. Учиб кетаётган ўқнинг фотографияси.

бу муҳитда заряднинг ҳаракат тезлиги ёруғликнинг шу муҳитдаги тезлигидан ортиқ бўлиши керак. Шунини қайд қиламизки, бу ерда гап ёруғликнинг *бушлиқдаги тезлиги тўғрисида эмас, балки муҳитдаги тезлиги тўғрисида* боради. Бу писанданинг аҳамияти шундаки, ёруғликнинг *бушлиқдаги тезлиги* $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, нисбийлик назариясига бинноан, энг охири тезликдир: ҳеч қандай жисм бу тезликка тенг ёки ундан катта тезлик билан ҳаракат қила олмайди. Аммо ёруғликнинг муҳитдаги тезлиги c/n га тенг, бунда n — нормал дисперсия соҳасида

бирдан катта бўлган синдириш кўрсаткичидир; $c/n < c$ булгани учун нисбийлик назарияси қўядиган чек муҳит ичидаги ҳаракатга тааллуқли эмас. Бунда ёруғликнинг тезлиги тўғрисида гапирар эканмиз, фазавий тезликни, яъни тенг фазали сиртининг кўчиш тезлигини назарда тутамиз (136-§ га қаранг).

Муҳит ичида ёруғлик тезлигидан ортиқ тезлик билан ҳаракатланувчи электронлар туфайли ҳосил бўладиган электромагнит нурланишни С. И. Вавилов раҳбарлигида ишлаган П. А. Черенков 1934 йилда кашф этди.

Шу сабабдан биз бу нурланишни Вавилов—Черенков нурланиши* деб атаймиз. Черенковнинг дастлабки масаласи эритмаларнинг радиодан чиқадиган γ-нурлар таъсирида ёруғлик чиқаришини тадқиқ қилиш эди. Радиоактив нурланишлар таъсирида суюқликларнинг кўринадиган нурланишини Черенков ишидан тахминан 25 йил олдин Мария Кюри кузатган эди. Аммо Кюри бу нурланишни одатдаги люминесценция деб қараган. Шунингдек, француз физиги Малленинг ишларида ҳам (1926—1929 й.) бу нурланиш тўғри талқин қилинмаган, аммо француз физигининг ишларидан Черенковнинг хабари бўлмаган эди.

* Бу нурланиш адабиётда кўпинча Черенков нурланиши деб ағалади.

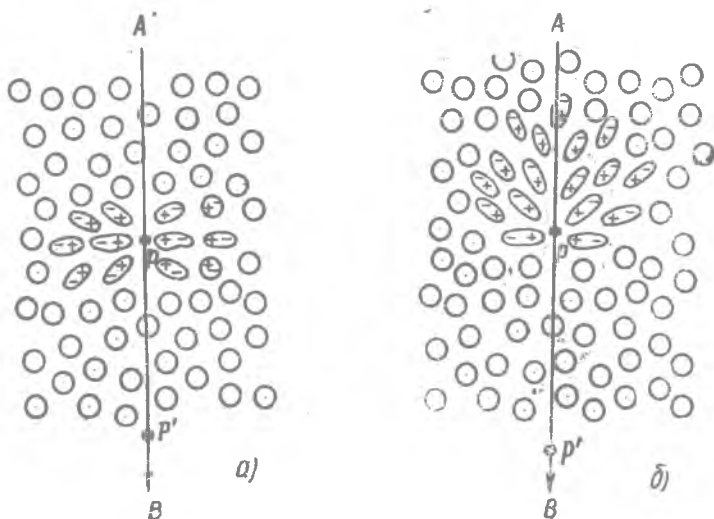
Черенков эритмаларнинг радийдан чиқадиган γ -нурлар таъсирида нурланишини тадқиқ қилиб, эритманинг люминесценцияси билан бирга эритувчиларнинг узи ҳам кучсиз нурланишини кўрсатди. Ҳамма соф суюқликлар—сув, бензол ва бошқалар шундай нурланар экан. Аммо дастлабки бу тадқиқотларнинг энг муҳим натижаси бу кучсиз нурланишнинг люминесценция эмас эканлигини исботлаш бўлди. Бунинг аҳамияти катта бўлишининг сабаби яна шундаки, купина соф суюқликлар, масалан, сув ультрабинафша нурлар билан ёритилганда кучсиз кўк нур чиқаради. Бу кўк нурланиш ўзининг бутун хоссаларига кўра шубҳасиз люминесценция деб қаралиши керак. Аммо радийнинг γ -нурлари таъсиридаги нурланишнинг баъзи хоссалари унинг люминесценциядан катта фарқ қилишини кўрсатди. Бу муҳим хоссаларни Черенков нурланишнинг кучсизлиги туфайли жуда қийин бўлган миқдорий экспериментлар йўли билан аниқлади. Бу хоссалар қуйидагилар: эритмаларнинг люминесценциясини эритмага оз концентрацияда қўшилган баъзи аралашмалар (йодли калий, анилин ва бошқалар) „сундиради“, соф суюқликларнинг γ -нурлар таъсирида нурланиши эса бундай сўнмайди; ундан ташқари, люминесценция ёруғлиги муайян даражада қутбланади, бу қутбланишни ҳам ўша „учирувчилар“ ёрдамида ёки иситиш йўли билан сусайтириш мумкин, лекин Черенков нурланиши эса бундай қутбланмайди. Бу хоссаларнинг ҳаммаси Вавилов—Черенков нурланиши давом этиш вақти чекли (10^{-7} — 10^{-8} сек) бўлган люминесценциядан фарқли ўлароқ „оний“ ёруғлик эканлигини кўрсатади. Ниҳоят, бундан кўп ўтмай яна шу нарса кўрсатилдики, Черенков нурланишини электромагнит табиатли γ -нурларнинг ўзлари эмас, балки уларнинг моддада ҳосил қилган электронлар ҳосил қилади; ўшандай махсус хоссали нурланишни радиоактив моддаларнинг β -нурлари каби тез электронлар оқими ҳам ҳосил қилади. Кейинги ўтказилган тажрибаларнинг кўрсатишича, бундаги энг муҳим нарса Вавилов—Черенков нурланишининг муайян йўналишга эга бўлиши эди: бу нурланиш γ -нурларнинг тарқалиш йўналиши билан муайян бурчак ҳосил қилгани ҳолда фақат олдинга қараб тарқалади, люминесценция ёруғлиги эса ҳамма йўналишлар бўйича текис нурланади.

Бу хосса Вавилов—Черенков нурланишини ёруғлик тезлигидан катта тезлик билан ҳаракат қилувчи электронлар ҳосил қиладиган нурланиш деб тўғри талқин қилишга асос қилиб олинган. Бу нурланишни И. М. Франк ва И. Е. Тамм 1937 йилда ўшандай талқин қилганлар*.

Электрон муҳитда тез ҳаракат қилганида электромагнит

* И. А. Черенков, И. М. Франк ва И. Е. Таммнинг иши 1959 йилда Нобель мукофотига сазовор бўлган.

нурланишнинг қандай қилиб пайдо бўлишини тушуниб олиш учун аввал бу масаланинг сифат томонини текширайлик. Масалани мураккаблаштирмаслик учун электрон қаттиқ муҳит ичида, масалан, шишада ҳаракатланаётган бўлсин. 124-а расмда AB —электроннинг траекторияси. Муҳитнинг молекулаларини сферик деб ҳисоблай оламиз. Аммо ҳаракатланаётган заряд атропофида, масалан, P нуқтада муҳит қутбланади: молекулалар шундай деформацияланадики, мусбат зарядлар ҳаракатланаётган электронга томон, манфий зарядлар эса тескари томонга



124-расм. Вавилов—Черенков нурланиши ҳосил бўлишига доир. Учиб ўтаётган зарядли заррача таъсирида диэлектрикнинг қутбланиши: а) тезлик жуда кичик бўлганда; б) тезлик катта бўлганда (Желли маълумоти).

силжийди; бунда молекулалар P га нисбатан муайян даражада ориентацияланган элементар диполларнинг хоссасига эга бўлади. Траекториянинг P нуқтасидан бошқа бир нуқтасига, масалан, P' нуқтасига ўтилганда P да қутбланиш йўқолади, натижада қисқа электромагнит импульс пайдо бўлади. Аммо қутбланишнинг PP' ўққа нисбатан ҳам, P нуқтага нисбатан азимут бўйича ҳам бутунлай симметрик бўлганлиги туфайли катта масофаларда майдон, бинобарин, нурланиш ҳам бўлмайди.

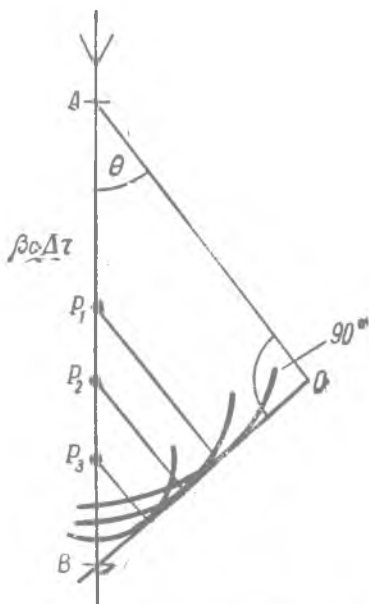
Энди қутбланишнинг бир онда эмас, балки бирор вақтдан сўнг (релаксация вақти) йўқолишини эътиборга олиш керак. Агар электрон ёруғликнинг муҳитдаги тезлигига яқин тезлик билан ҳаракат қилса, бу ҳол муҳит қутбланиши симметриясининг 124-б расмда кўрсатилгандек бузилишига олиб келади. Олдин электрон турган соҳада қутбланиш ҳали йўқолиб улгур-

масдан P соҳада қутбланиш қарор топади. Симметриянинг бундай бузилиши натижасида электрон йўлининг ҳар бир нуқтасида оний электромагнит импульс пайдо бўлади. Бу импульс катта масофаларда ҳам майдон ҳосил қилади. Аммо компенсацияланмаган бу оний импульслардан фазода тарқалувчи тўлқин ҳосил бўлиши учун электрон траекториясининг ҳар хил нуқталарида пайдо бўладиган импульслар орасида муайян когерентлик шарти ўринли бўлиши керак; бу шартни Гюйгенснинг элементар ясаш усулларида фойдаланиб топамиз.

Синдириш кўрсаткичи n бўлган муҳитда $v > c/n$ тезлик билан AB йўналишда (125-расмга қаранг) ҳаракатланувчи электронни текширайлик. Равшанки, электрон траекториясининг P_1, P_2, \dots нуқталаридан чиқувчи Гюйгенс тўлқинлари (электромагнит импульслар) бирор BC текисликка бир хил фазода етиб келади. Бунда улар электроннинг учинчи йўналиши билан шундай ϑ бурчак ҳосил қилиб тарқаладики, A дан чиқувчи тўлқин электроннинг $v\Delta t$ га тенг бўлган AB йўлни ўтгунча кетадиган вақт ичида $(c/n)\Delta t$ га тенг AC йўл босиб ўтади. Бошқа йўналишларнинг ҳаммасида элементар тўлқинлар интерференция туфайли сўнади. Аммо расмда бевосита кўриниб турибдики, бу шартда $(c/n)\Delta t = v\Delta t \cos \vartheta$ бўлади. Бундан

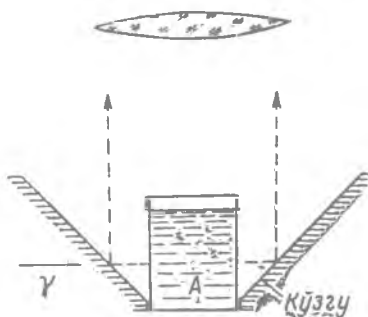
$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n}, \text{ бу ерда } \beta = \frac{v}{c}. \quad (79.1)$$

Назариянинг асосий натижаси бўлган бу тенгликдан шундай хулоса чиқадики, $\beta n > 1$, яъни $v > c/n$ шартдагина нурланиш пайдо бўлади. $\beta n = 1$ шарт бўсаға энергияни кўрсатадики, бунда нурланиш пайдо бўлиши эҳтимоли бор. Равшанки, бу энергия синдириш кўрсаткичи (n) га боғлиқ. Нурланишнинг муайян йўналишли эканлигини Черенков қуйидаги тажрибада исбот қилган (126-расм). γ -нурларнинг тор дастаси суюқлик қуйилган A идишга тушади. Идишда пайдо бўладиган нурланиш конус шаклидаги кўзгудан қайтганидан кейин фотоаппаратнинг объективига тушади. 127-расмда шу йўл билан олинган фотографиялар кўрсатилган. 127-*a* расм идишга люминесценцияланувчи суюқлик қуйилганда ҳосил бўладиган манзарани кўрса-



125-расм. Нурланишнинг когерент эканлигини тушунтириш учун Гюйгенс чизмаси.

тади: бир текис ёритилган ҳалқа люминесценциянинг интенсивлиги йўналишга боғлиқ эмаслигини кўрсатади. 127-б ва в расмларда синдириш кўрсаткичлари ҳар хил бўлган иккита суюқликнинг Вавилов—Черенков нурланиши интенсивлигининг йўналишлар бўйича тақсимоти кўрсатилган. Бу ҳолда текис ёритилган ҳалқа ўрнига иккита доғ ҳосил бўлиши аниқ кўриниб турибди.



126-расм. Нурланишнинг йўналишли эканлигини исбот қилиш учун Черенков тажрибасининг схемаси.

Вавилов—Черенков нурланиши γ -нурлар таъсиридан ҳосил бўлган ҳолда тажрибанинг геометрияси унча аниқ эмас, чунки нурланишни γ -нурларнинг ўзи эмас, балки бутун йўл давомида улар ҳосил қиладиган электронлар юзага келтиради. Шунинг учун Черенковнинг ҳозиргина айтиб ўтилган тажрибаси катта принципиал аҳамиятга эга бўлса-да, геометриясининг унча аниқ бўлмаганлиги туфайли (79.!) муносабатни фақат сифат жиҳатдангина текширишга имкон берди. Черенков тажрибаси аҳамиятининг катта бўлиши нурланишнинг муайян йўналишли эканлигини кўрсатишидир. Бу муносабатнинг миқдорий томонини, жумладан, ϑ бурчак билан муҳитнинг синдириш кўрсаткичи орасидаги боғланишни 1938 йилда Коллинс ва Рейлинг

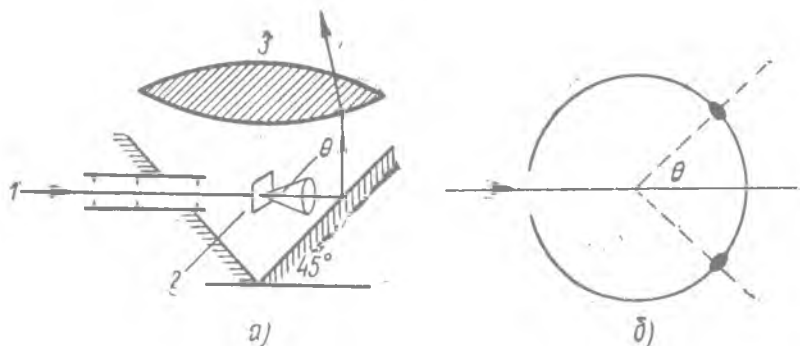
дангина текширишга имкон берди. Черенков тажрибаси аҳамиятининг катта бўлиши нурланишнинг муайян йўналишли эканлигини кўрсатишидир. Бу муносабатнинг миқдорий томонини, жумладан, ϑ бурчак билан муҳитнинг синдириш кўрсаткичи орасидаги боғланишни 1938 йилда Коллинс ва Рейлинг



127-расм. Интенсивлиқнинг бурчак бўйича тақсимоти: а) флуоресценцияланувчи эригма; б) ва в) $n = 1,5804$ (этилциннамат) ва $n = 1,3371$ (сув) бўлган тоза суюқликлар ҳолидаги фотографиялар.

қатъий коллимациялаш мумкин буладиган β -электронлар дастаси ёрдамида текширганлар. Бу тажрибанинг схемаси 128-расмда кўрсатилган. Электростатик генераторда аниқ 2 Мэв энергияли электронлар дастаси ҳосил қилиниб, тирқишлар системаси (коллиматор) орқали ўтказилди. Шу йўл билан ҳосил қилинган

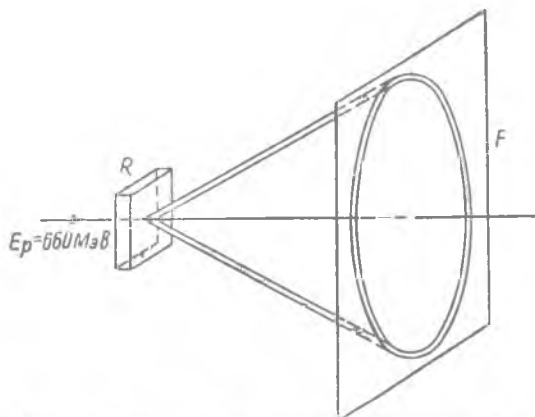
қатъий параллел даста бир-бирига 45° бурчак остида жойлаштирилган кўзгулар орасида 128-а расмда кўрсатилгандек қилиб, осиб қўйилган юпқа плёнкага туширилган. Плёнка жуда юпқа бўлганлиги туфайли Вавилов—Черенков нурланиши пайдо бўладиган соҳанинг узунлигини асбоб ўлчамлари масштабида эътиборга олмаслик ва бу нурланишни бир нуқтадан чиқадиган деб қараш мумкин бўлган. Бу ҳол расмда схематик равишда кўрсатилган. 128-б расмда фотопластинкада ҳосил бўладиган доғларнинг жойлашиши кўрсатилган. Бу қурилмада θ нинг слюда ($n=1,59$), шиша ($n=1,47$) ва целлофан ($n=1,53$) плёнкалари билан ўтказилган тажрибалардан топиладиган қийматлари мос равишда қуйидагилар: $53^\circ 30'$; $45^\circ 15'$; $50^\circ 0'$. (79.1) формуладан фойдаланиб ҳисоблаганда θ нинг қиймати мос равишда $52^\circ 10'$; $46^\circ 30'$; $49^\circ 22'$ булади. Ҳисоблашда содалаштиришлар билан боғлиқ булган муқаррар хатоларни ва ўлчашлардаги одатдаги хатоларни эътиборга олиб, тажриба ва назария натижалари жуда тўғри келади деб айтиш керак.



128-расм. Коллинс ва Рейлинг тажрибаларининг схемаси ва натижаси; а) асбоб: 1—2 Мэв энергияли электронлар дастаси; 2—плёнка 3—линза; б) фотопластинкадаги тасвир.

Радиоактив моддалардан чиқадиган γ - ва β -нурлар дасталарининг интенсивлиги жуда оз бўлганлиги ва кўринадиган нурланишнинг етарлича сезгир детекторлари йўқлиги туфайли Черенковнинг биринчи тажрибаларини бажариш қийин бўлган. Ҳозирги вақтда Вавилов—Черенков нурланишига доир тажрибаларни бажариш жуда осон. Ҳақиқатан ҳам, нурланиш манбалари сифатида Коллинс ва Рейлингнинг юқорида айтиб ўтилган тажрибасидаги каби тезлатгичлар ёрдамида олинadиган ва интенсивлиги қиёсан катта бўлган зарядли заррачаларнинг қатъий параллел дасталари хизмат қилиши, детекторлар сифатида эса фотопластинкалар ҳам, сезгирлиги ниҳоятда катта бўлган электрон кўпайтиргичлар ҳам ишлатилиши мумкин. Бунинг устига, электрон кўпайтиргичлар хилма-хил радиотехник учайтириш схемаларида ишлатилиши мумкин.

П. А. Черенковнинг Нобель лекцияси учун Ядро тадқиқотлари бирлашган институтида тайёрланган демонстрацион тажрибаси 129—130-расмларда кўрсатилган. Тажрибанинг содда схемаси 129-расмда тасвирланган: тезлатгичдан (синхроциклотрондан) чиқадиган 660 МэВ энергияли протонлар дастаси R объектга туширилган, бу объектда Вавилов—Черенков нурланиши пайдо бўлган. Бу нурланиш протонлар дастаси йўналишига перпендикуляр қўйилган F фотопластинкага тушган. Вавилов—Черенков нурланиши фазода учудаги бурчаги 2θ га

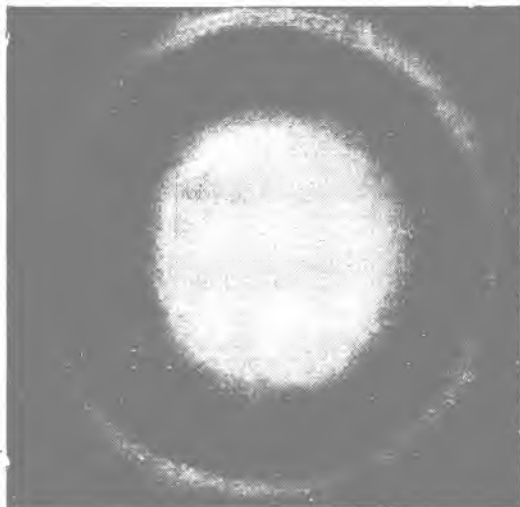


129-расм. Вавилов—Черенков нурланишининг фазовий тақсмотини пайқашга бағишланган тажриба схемаси.

тенг бўлган конус сирти бўйича тарқалгани учун пластинкада конуснинг пластинка текислиги билан кесишишидан ҳалқа ҳосил бўлиши керак. 130-расм ҳалқанинг ҳақиқатан ҳам ҳосил бўлганлигини кўрсатади. Ҳалқа билан биргаликда фотографияда кўриниб турган марказий интенсив доғни объектдан ўтган протонлар дастаси ҳосил қилган. Шуни қайд қилиш муҳимки, ҳар хил тўлқин узунликли нурлар учун n синдириш кўрсаткичи ҳар хил бўлиши сабабли ҳалқанинг кенглиги чекли бўлади; шунинг учун конус сирти бўйича кетадиган даста муҳитнинг ўзида спектрга ажралади. Бунда ҳалқанинг ички қисми қизил, ташқи қисми бинафша рангда бўлиши керак. Олинган рангли фотографиялар бунинг шундай эканлигини тасдиқлайди.

Вавилов—Черенков нурланиши принципиал муҳимлиги билан бир қаторда катта амалий аҳамиятга ҳам эга бўлди. Бу ерда аввал Вавилов—Черенков эффеќти асосида ишлайдиган тез заррачалар сўётчигини эслатамиз. Ҳар бир тез заррача муҳитдан ўтганида чақнаш ҳосил қилади. Албатта, бу чақнашнинг интенсивлиги жуда кичик (синдириш кўрсаткичи $n=1,5$

бўлган муҳитда 1 см йўлда тахминан 200—300 фотон нурланади) бўлади. Аммо фотокатодда пайдо бўладиган электронлар сони кўпайтиргичнинг ўзидаёқ миллион марта ортади. Ундан ташқари, кўпайтиргич радиотехник схемага қўшилади, бунда эса импульс қўшимча равишда янада кучайиб, шу тўфайли айрим заррача қайд қилинади. „Черенков“ сўтчиклари деб аталувчи бундай сўтчиклар кенг тарқалган. Баъзи жиҳатдан бу сўтчиклар зарядли заррачаларнинг бошқа сўтчикларига қараганда устун туради.



130-расм. Нурланиш интенсивлигининг фазовий тақсимотини текширишга бағишланган тажрибада олинган фотография. Марказий доғ протонлар дастасидан ҳосил бўлган.

Кейинги вақтларда Вавилов—Черенков эффеќтини татбиќ этишининг миллиметрли электромагнит тўлқинлар ҳосил қилишдан тортиб заррачалар тезлатгичлари конструкция қилишга қадар бўлган хилма-хил кўринишлари белгиланган ва текширилмоқда.

Ниҳоят, ёруғлик тезлигидан катта тезлик билан ҳаракатланувчи зарядли заррачалар нурланишини кашф этиш тарихидан ажойиб ва ибратли бир воқеани айтиб ўтамиз. 1904 йилда, яъни нисбийлик назарияси эълон қилинмасдан бир йил олдин А. Зоммерфельд бир иш эълон қилди. Бу ишда ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан катта тезлик билан вакуумда ҳаракатланувчи заряднинг нурланиши ҳисобланган эди. Аммо бир йилдан кейин нисбийлик назарияси эълон қилинди, бу назарияга биноан, бундай ҳаракатнинг бўлиши мумкин эмас эди. Шунинг

учун Зоммерфельднинг иши унутиб юборилди. Зоммерфельд иши Франк ва Таммга улар ўзларининг ишини тамомлаб булганларидан кейингина маълум булди. Шу муносабат билан И. Е. Таммнинг Нобель лекциясида келтирган қўйдаги фикри катта қизиқиш уйғотади:

„Кўриб турибсизки, бу нурланиш механизми ниҳоятда содда. Бу ҳодисанинг узи ҳақиқатда аниқланганидан бир неча ўн йил олдин классик электродинамика асосида осонгина олдиндан айтилиши мумкин эди. Нима учун бу кашфиёт шунча кечикиб қолган экан? Менинг билишимча, бу ерда фан тараққиётида тез-тез бўлиб турадиган ибратли бир мисолга дуч келамиз. Бу шундан иборатки, илмий прогресс тўғри физик принципларни уларнинг татбиқ этилиш соҳасига кирмайдиган ҳодисаларга танқидий қарамай татбиқ этиш орқасида тормозланади.

Бир қанча ун йил давомида барча ёш физикларни электр зарядлар нотекис ҳаракат қилгандагина ёруғлик (ва умуман электромагнит тўлқинлар) нурлаши мумкин деб ўргатиб келинган. Бу теоремани исбот қилишда нисбийлик назариясига кўра ёруғлик тезлигидан катта тезликли ҳаракатлар бўлмаслиги факти ошкор ёки ошқормас ҳолда ишлатилади; бу назарияга биноан, ҳеч қандай моддий жисм ёруғлик тезлигида ҳаракат қила олмайди. Шунга қарамасдан бу теорема узоқ вақт давомида ҳеч қандай писандасиз тўғри деб келинган.

Ундан ташқари, И. М. Франк билан мен Вавилов—Черенков нурланишининг изчил назариясини математик йўл билан ишлаб чиқишимиздан кейин ҳам ҳар хил йўллар билан (бу йўллар ҳозир бизнинг ўзимизга ҳам тушунарсиз) натижаларимизни нурланиш ҳосил бўлиши учун тезланиш бўлиши керак деган даъвога келиштирмоқчи бўлдик. Биз бу назария тўғрисида физика институти коллоквиумида биринчи доклад қилганимизнинг эртаси куни бехосдан оддийгина бир ҳақиқатни тушуниб етдик. Моддий жисмлар учун энг катта тезлик ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги (биз бунини c билан белгилаймиз) бўлгани ҳолда, муҳитда доимий v тезлик билан ҳаракатланувчи заряд $v > c'(\omega)$ шартда нурланиш чиқара бошлайди, шу билан бирга, $c'(\omega)$ нинг қиймати муҳитнинг хоссаларига боғлиқ. Агар $c'(\omega) < c$ бўлса, бу шарт нисбийлик назарияси талабларига хилоф бўлмаган ҳолда бемалол бажарилиши мумкин ($c' < v < c$)“.

VI б о б

АБСОЛЮТ ҚОРА ЖИСМНИНГ НУРЛАНИШИ ВА ЭНЕРГИЯ КВАНТЛАРИ ҲАҚИДА ГИПОТЕЗА

80-§. Классик физика ва иссиқлик нурланиш проблемаси

Олдинги бобда атомларнинг электромагнит нурланишини классик физика қандай тушунтиришини курсатган эдик. Ёруғликнинг электромагнит назариясининг ва электрон назариянинг қатор ҳулосалари эксперимент натижаларига мос келишини кўрдик. Бунга масалан, турли йўналишлар бўйича нурланишнинг тақсимланиши, спектр чизиқларнинг кенглиги, Зеemannнинг нормал эффекти ва бизнинг баёнимизда эсланмаган қатор бошқа ҳодисалар киради. Булар қаторида баъзи ҳулосаларнинг тажриба натижаларига зидлигига ёки чекли татбиқ қилинишига эътиборни жалб қилдик. Масалан, чизиқ электромагнит спектрнинг характери узун тўлқинлар (узун тўлқинли инфрақизил соҳа ва радиотўлқинлар) соҳасидагина классик назария талабларига жавоб бериб, спектрнинг оптик соҳасида бу талабларга қатъиян зиддир.

Бироқ классик физика иссиқлик нурланиш проблемасига татбиқ қилинганда айниқса жиддий мағлубиятга учради. Худди шу проблемани урганишда классик механиканинг ва электродинамиканинг заиф томонлари биринчи марта ошкор бўлди ва классик физиканинг бутун руҳига қатъий қарама-қарши бўлган квантлар гипотезасини киритиш зарур бўлиб қолди.

Масаланинг моҳияти билан ўқувчини биратўла таништириш мақсадида, даставвал бу масалада классик физика ҳал бўлмайдиган қандай қарама-қаршиликка олиб келганлигини кўрсатайлик.

Кундалик тажрибанинг курсагишича, етарлича юқорп температурагача қиздирилган қаттиқ жисмлар чуғланади, яъни курунувчи ёруғлик чиқара бошлайди. Бироқ улар анча паст температурада ҳам иссиқлик тўлқинлари деб аталадиган, яъни инфрақизил нурлар кўринишда энергия чиқаради.

Шунинг учун келгусида махсус узун инфрақизил тўлқинларни назарда тутмаган ҳолда, иссиқлик нурланиш устида гап

юритамиз ва Ҷақат унинг ҳосил бўлишини таъкидлаш учунгина „иссиқлик нурланиш“ терминидан фойдаланамиз.

Ҳар хил температурагача қиздирилган бир нечта жисм мавжуд бўлсин ва тўла аёнлик бўлиши учун бу жисмларни идеал қайтарувчи деворли қобиқ билан қуршалган ковакка жойлаштирайлик. Агар бу ковак ичида ҳатто абсолют вакуум бўлса-да, жисмлар бир-бирлари билан бевосита нурланиш орқали энергия алмашади. Бунда, ҳар бир жисмнинг нурланиши атрофдаги жисмлар температураларига боғлиқ бўлмасдан, жисмнинг хусусий температурасигагина боғлиқ бўлса-да (Прево қонуни), иссиқроқ жисмлар совий бошлайди, чунки улар атрофдаги жисмлардан олаётганларига нисбатан кўпроқ энергия чиқаради, совуқроқ жисмлар эса исийди, чунки улар бераётганларига нисбатан кўпроқ энергия олади. Бундан ташқари, бу жисмлардан нурланаётган электромагнит тўлқинлар чекли тезлик билан тарқалганлиги сабабли, ковак ичидаги фазо ҳар доим нур энергияга тўлган бўлади. *Тажрибанинг кўрсатишича*, ниҳоят ҳамма жисмлар бир хил температурага эришадиган стационар ҳолат албатта қарор топади, яъни жисмлар бирлик вақтда қанча энергия берса, шунча энергия ютади, нурланиш зичлиги эса улар орасидаги фазода берилган температурага мос келувчи бирор муайян катталиққа етади.

Бу факт шу қадар яхши маълумки, у ҳатто классик физика қонунларининг табиий хулосасидек туйилади, ваҳолонки, агар чуқурроқ фикрлаб кўрилса, худди *классик* физика нуқтан назаридан у мутлақо тушунарсиз бўлиб қолади.

Буни оддий мисолда тушунтирамиз. Бизнинг ковакда темир парчаси жойлашган ва у ўзига тушаётган барча энергияни ютадиган даражада қорайтирилган бўлсин. Бундай темир парчаси 0°C температурада ўзининг ҳар бир квадрат сантиметр сиртидан секундига $3 \cdot 10^5$ эрг энергия чиқариши, иссиқлик мувозанатида эса бир вақтнинг ўзида атрофдаги фазодан секундига шунча миқдорда энергияни ютиши аниқ маълумдир. Ковак деворлари билан темир бўлаги сирти орасидаги фазода, умуман, *ковак ичидаги фазонинг модда заррачалари банд қилмаган қисмида* 0°C да энергиянинг мувозанат зичлиги $4 \cdot 10^{-5}$ эрг/см³ га тенг бўлиши юқоридагидек аниқ маълумдир. Иккинчи томондан, шу температурада темир бўлаги ичида иссиқлик энергия зичлиги тахминан $8 \cdot 10^9$ эрг/см³ га тенг, яъни нурланувчи энергия зичлигидан $2 \cdot 10^{14}$ марта ортиқдир. Маълумки, бу иссиқлик энергия темир атомларининг мувозанат ҳолатга яқин тебранишларига тааллуқлидир. Шундай қилиб, ажойиб хулосага келамиз: модданинг тебранаётган атомлари билан электромагнит нурланиш орасида термодинамик мувозанат бўлганда деярли барча энергия тебранаётган атомларда йиғилган бўлиб, энергиянинг жуда оз қисми улар билан мувозанатда бўлган нурланишга тўғри келади.

Худди шу факт классик механика нуқтаи назаридан мутлақо тушунарли эмас. Юқорида қаралган тажрибанинг қуйидаги моделини тасаввур қилайлик: бирор идишдаги сув юзида пўкак бўлаклари сузиб юрибди, улар бир-бирига нисбатан тебрана оладиган ҳолда ўзаро пружина билан боғланган. Пўкакларни тебрантирамиз; у ҳолда улар ўз энергияларини („нурлаб“) сувга берадилар, сувнинг силлиқ сиртида тўлқинлар пайдо бўлади. Бу тўлқинлар сув сиртида турли йўналишларда тарқалади, идиш деворларидан қайтиб, тобора майда тўлқинларга бўлинади ва сувнинг ёпишқоқлиги туфайли уларнинг энергияси секин-аста иссиқликка айлана бошлайди. Равшанки, тажриба оқибатида пўкаклар ўз энергияларини атроподаги муҳитга бериб, тебранишдан тўхтайдилар.

Сув ҳеч қандай энергия олмасдан, пўкаклар охириги ҳолатда ҳам интенсив тебранишда бўладилар деб фараз қилиш мумкин эмас. Қиздирилган моддий жисм билан нурланиш орасида мувозанат мавжудлигида худди шундай бўлади. Бунда деярли ҳамма энергия атом тебранишларида жамланганини, нурланишга эса жуда оз энергия тўғри келишини юқорида кўрган эдик.

Энди бошқа модель тажрибани қараб чиқайлик. Айтايлик, нурланувчи жисмнинг механик модели вазифасини пўкаклар ўрнида майда соққачалар бажарсин, улар ҳам бир-бирига пружина билан боғланган ва ҳаволи ёпиқ камера ичида осиглиқ бўлсин. Агар бу соққачаларни қаттиқ тебранишга келтириб ўз ихтиёрига қўйсақ, улар ҳавода акустик тўлқинлар юзага келтирадилар, бу тўлқинлар ҳавонинг ёпишқоқлиги туфайли, худди сув юзидаги тўлқинлар каби аста-секин майдаланиб сўна бошлайдилар. Системанинг охириги ҳолатида соққачаларнинг барча бошланғич энергия запаслари ҳаво молекулаларига ўтган ҳамда соққачалар мувозанат ҳолатларида тинч турган бўлади. Аниқроқ айтганда, соққачалар ўз массаларига мувофиқ тезлик билан чексиз кичик браун тебранишлар қилади. Бироқ бундай аниқлаштиришда ҳам амалда системанинг барча энергияси газ молекулаларида булади.

Ҳодисанинг қандай содир бўлишини газларнинг кинетик назарияси тўла тушунтиради. Ҳақиқатан ҳам, ҳавонинг икки атомли молекулаларининг T температурада мувозанат ҳолатдаги кинетик энергияси $\frac{5}{2} nkT$ га тенглиги маълум, бу ерда n — молекулалар сони; браун ҳаракатидаги n' соққачанинг кинетик энергияси $\frac{3}{2} n'kT$ га тенг бўлади. Шунинг учун бутун системанинг тўла энергияси мувозанат пайтида $(\frac{5}{2}n + \frac{3}{2}n')kT$ бўлиши керак. n молекулалар сони соққачалар n' сонидан ниҳоятда кўп бўлганидан, амалда барча энергия $\frac{5}{2}nkT$ га тенг бўлади. Бошқача айтганда, мувозанат ҳолида барча энергия соққачалардан ҳаво молекулаларига ўтган бўлади.

Шундай қилиб кўриб турибмизки, заррачаларнинг „нурлар чиқарувчи“ системаси ва нурланиш тарқаладиган муҳит учун тавсифланган ҳодиса манзараси моддий жисмнинг электромагнит майдони билан мувозанати (иссиқлик нурланиш) ҳолида *тажрибага кўра* ўринли бўладиган манзарага тамомила қарама-қаршидир. Иссиқлик нурланиш проблемаси билан боғлиқ ҳолда пайдо бўлган қийинчилик, маълум бўлишича шундан иборатки, *классик физикага кўра, ёпиқ ковакда моддий жисмлар электромагнит нурланишининг мувозанати ҳолида ҳам амалда ҳамма энергия электромагнит майдонига ўтиши керак.*

81-§. Ковакда мувозанат нурланиш

Энди утган параграф охирида чиқарилган хулосанинг туғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун нурланиш проблемасини қараб чиқамиз. Аввалгидек, бирор муайян T температурагача қиздирилган иссиқлик ўтказмайдиган деворлар билан қуршалган ковакни тасаввур қилайлик. Ковак деворлари электромагнит тулқинлар нурлайди ва ковак ичидан тушаётган тулқинларни ютади; мувозанат ҳолида 1 секундда қанча электромагнит тулқин нурланса, шунча ютилади, нурланиш чекли тезлик билан тарқалиши туфайли ковак ичида ўзгармас зичликли электромагнит майдон энергияси мавжуд бўлади.

$$u = \frac{1}{8\pi}(\bar{E}^2 + \bar{H}^2). \quad (81.1)$$

Нурланишнинг u ҳажмий зичлиги ўрнида, айниқса амалий мақсадлар учун бошқа катталиқ — солиштирама интенсивлик ёки нурланишнинг сиртий равшанлигидан фойдаланиш қулай бўлади. Бу катталиқ қўйидагича аниқланади: нурланиш майдонида ихтиёрий ориентирланган $d\sigma$ юзчани қарайлик. Бу юзчадан мумкин бўлган барча йўналишларда нурланиш ўтади. Биз $d\sigma$ юзчага таянган қуш турли-туман элементар конусларни тасаввур қилиб, нурланиш шу конуслар ичида тарқалади дея оламиз. Ўқи юзчага туширилган нормал билан ϑ бурчак ҳосил қиладиган $d\Omega$ конус ичидаги $d\sigma$ юзчадан бирлик вақт ичида

$$d\Phi = I d\sigma \cos \vartheta d\Omega \quad (81.2)$$

миқдорда энергия ўтади. I катталиқ нурланишнинг солиштирама интенсивлиги дейилади. Бу демек, бирлик вақт ичида $d\sigma = 1 \text{ см}^2$ юзча орқали ўтувчи ва юзчага нормал йўналишда бирлик фазовий бурчак ичида тарқалаётган энергетик оқимдир. Бирлик вақт ичида $d\sigma$ юзча орқали бир томонга ўтган тўла энергия оқимини аниқлаш учун (81.2) ифодани унинг барча φ азимутлари бўйича 0 дан 2π гача ва барча ϑ бурчаклари бўйича 0 дан $\pi/2$ гача интеграллаш керак.

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Phi = d\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I \sin \nu \cos \nu d\nu.$$

Агар нурланиш изотроп бўлса, яъни I бурчакка боғлиқ бўлма-са, у ҳолда

$$\Phi = \pi I d\sigma.$$

Манба учун сиртий (энергетик) равшанлик катталиги қандай роль ўйнаса, нурланиш учун I катталиқ ҳам худди шундай роль ўйнайди. Шу сабабли I ни кўпинча нурланишнинг сиртий равшанлиги дейилади. I равшанлик билан нурланишнинг u ҳажмий зичлиги орасида оддий муносабат мавжуд. Нурланиш майдони ичида O нуқта олиб, шу O ни марказ қилиб чизилган сферани тасаввур қилайлик. Равшанки, O нуқта орқали ўтувчи барча нурлар бу сферадан ўтиши керак ва уларнинг ҳар бири нурланишнинг O яқинидаги ҳажмий зичлигига уз ҳиссасини қўшади. Интеграллаш ва оддий геометрик тасаввурларга* асосланиб, чизиқли қутбланган нурланиш ҳоли учун

$$u = \frac{4\pi I}{c} \quad (81.3)$$

бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Сўнг иссиқлик нурланиш ковакда туташ спектрга эга бўлишини эътиборга олиш зарур. Унинг спектрал таркибини текшириш учун нурланишдаги ҳамма частоталар эътиборга олинadиган u ва I интеграл катталиқлар билан биргаликда спектрал катталиқларни ҳам киритиш керак бўлади. Чексиз кичик $d\nu$ частота интервали учун du , спектрал ҳажмий зичликни $d\nu$ интервалга пропорционал дейишимиз мумкин:

$$du = \rho_\nu d\nu.$$

ρ_ν коэффициент нурланишнинг спектрал (ҳажмий) зичлиги дейилади.

О дан ∞ гача барча частоталарга эга бўлган туташ спектр учун

$$u = \int_0^\infty du = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu.$$

ρ_ν билан бир қаторда худди интеграл катталиқларни киритишдагидек таърифлаб нурланишнинг спектрал сиртий равшанлиги I_ν ни киритиш мумкин. Бу ҳолда ρ_ν ва I_ν орасида худди u ва I орасидагидек муносабат мавжуд бўлади:

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (81.4)$$

* Масалан, М. Планкнинг Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935, китобига қarang.

Ниҳоят, муайян частотали ва муайян йўналишли нурланиш яна ўзининг қутбланиш ҳолати билан ҳам характерланишини этиборга олиш керак. Ковак ичидаги нурланиш сира қутбланмаган. Бироқ қутбланмаган нур ташийдиган энергияга нисбатан ўзаро перпендикуляр текисликларда қутбланган ва бир хил ўртача интенсивликка эга бўлган икки нурга эквивалент бўлади. Қутбланмаган нурланиш учун

$$I = 2 \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu$$

га ва қутбланмаган бир жинсли изотроп нурланиш учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\rho_{\nu} = \frac{8\pi}{c} I_{\nu}. \quad (81.5)$$

82-§. Кирхгоф қонуни

Мувозанатли нурланиш хоссаларини биринчи бўлиб Кирхгоф назарий текширди. У ўзгармас температурада нурланишнинг ρ_{ν} спектрал зичлиги ковакда турган жисмнинг (шу жумладан бўшлиқ деворининг ҳам) табиатига ва хоссасига, масалан, сиртининг характерига, уларда селектив оптик абсорбция поласаларининг мавжудлиги ёки мавжуд эмаслигига мутлақо боғлиқ бўлмаслигини термодинамик усул билан кўрсатди. Мувозанатли нурланишнинг бу хусусияти бевосита термодинамиканинг иккинчи қонунидан келиб чиқади. Айтайлик, мувозанат бўлганда нурланиш зичлиги ковак ичидаги жисмларнинг табиатига қандайдир боғланган бўлсин. У ҳолда, бир хил температурали, лекин турлича жисмларга эга бўлган иккита мувозанатли системани бир-бирига боғласак, биз мувозанатни бузган бўлардик. Бу ҳар иккала система орасида температуралар фарқининг юзага келишига, ундан эса иккинчи тур регретуинг mobile ясаш учун фойдаланиш имконига олиб келган бўларди.

Сўнгра Кирхгоф бир томондан мазкур частота учун жисмнинг чиқариш ва ютиш қобилияти орасида, иккинчи томондан жисмнинг чиқариш қобилияти билан спектрал равшанлик I_{ν} (ва демак, ρ_{ν}) орасида муҳим муносабат борлигини топди. Ҳар хил чалкашликлар бўлмаслиги учун аввал терминларни шартлашиб оламиз.

Агар жисмга нур тушса, унинг бир қисми албатта жисм ва муҳитнинг чегара сиртидан қайтади, қолган қисми эса жисм ичига киради. Бу жисм ичига кирган нур энергиянинг бир қисми ютилиб иссиқликка айланади, қолган қисми жисм ичида бир ёки бир неча марта қайтгандан кейин яна ташқарига чиқади. Жисмга тушган $\nu, \nu + d\nu$ частота интервалли барча энергиянинг жисм ичида иссиқликка айланиб қолган қисмига мазкур час-

тога учун *жисмнинг ютиш қобилияти* дейлади ва A_v (ўлчамсиз сон) билан белгиланади. Уни узунлик бирлигида параллел нурлар дастасининг нисбий сусайишини билдирувчи a_v ютилиш коэффициенти билан аралаштирмаслик керак. Жисмнинг ютиш коэффициенти кичик бўлиши, бироқ узоқ масофада ютиш қобилияти катта бўлиши мумкин. 1 сек да 1см^2 юздан нурланадиган энергия *чиқариш қобилияти* дейлади ва E_v билан белгиланади. Кирхгоф қуйидаги муносабатни аниқлади:

$$\frac{E_v}{A_v} = I_v = \frac{c}{8\pi} \rho_v, \quad (82.1)$$

[кейинги ифода (81.5) га кўра ёзилди], яъни жисмнинг чиқариш қобилиятининг унинг ютиш қобилиятига нисбати u билан мувозанатда бўлган нурланишнинг сиртий равшанлигига тенг. ρ_v спектрал зичлик (шунингдек I_v ҳам) жисм табиатига боғлиқ эмас, у ҳолда (82.1) муносабат *жисм чиқариш қобилиятини ютиш қобилиятига нисбати барча жисмлар учун бирдек бўлишини* билдиради. Мувозанатли нурланишнинг спектрал зичлигига пропорционал бўлган бу нисбат, шунингдек, фақат температура ва частотага боғлиқ бўлган универсал функция ҳисобланади.

Барча жисмлар орасида ютиш қобилияти бирга тенг бўлган жисм максимал E_v қийматга эга бўлади; чунки бу жисм ўзига *тушувчи* ҳамма энергияни ютади, шунинг учун уни Кирхгоф *абсолют қора* жисм деб атади. Айтайлик, биз шундай жисм ясаган бўлайлик; (82.1) дан $A_v = 1$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$E_v = I_v = \frac{c}{8\pi} \rho_v. \quad (82.2)$$

Бу эса, абсолют қора жисмнинг чиқариш қобилияти частота ва температуранинг универсал функцияси бўлишини кўрсатади. Агар $\rho(\nu, T)$ нинг ошкор ифодасини берувчи формула назарий топилган бўлса ва, агар битта абсолют қора жисм учун бажарилган тажриба бу формулани тасдиқласа, абсорбция спектри ва геометрик мулоҳазалар асосида топиш мумкин бўлган ютиш қобилиятини билган ҳолда ҳар қандай жисмнинг спектридаги энергия тақсимотини ҳисоблаб топа оламиз. Булардан $\rho(\nu, T)$ функцияни назарий излаш проблемасига катта эътибор берилиши тушунарлидир.

Ҳақиқатда табиатдаги бирор жисмни абсолют қора жисм деб ҳисоблаш мумкин эмас, шунингдек сиртга суриш билан жисмнинг қайтариш коэффициентини нолга айлантирадиган бўёқ мавжуд эмас. Бироқ Кирхгоф қонуни абсолют қора жисмни сунъий ясаш имконини беради. Бунинг учун бир текис қиздирилган деворлар билан қўршалган ковакни (масалан, муфель электр печини) олиш етарлидир; у ҳолда ковак ичида ўрнатиладиган мувозанатли нурланиш абсолют қора жисм

спектридаги энергия тақсимланишидек бўлади. Шунинг учун, агар ковакнинг деворида тирқиш очилса, у ҳолда бу тирқишдан абсолют қора жисм нурланиши каби нурланиш чиқади. Бундай сунъий абсолют қора жисми амалда ҳосил қилиш ҳақида 84-§ да ёзилган.

83-§. Абсолют қора жисмнинг нурланиш қонунлари

Кирхгоф қонунидан келиб чиқадиган асосий хулосани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\rho_\nu d\nu = F(\nu, T)d\nu, \quad (83.1)$$

бунда $F(\nu, T)$ бирор универсал функция. Навбатдаги масала бу функциянинг курилишини очишдир. Рус физиклари В. А. Михельсон ва Б. Б. Голицинларнинг қатор муҳим ишларидан кейин термодинамика билан бирга ёруғликнинг электромагнит назариясидан фойдаланиб, Вин бу йуналишда катта иш қилди.

У натижада қуйидаги формулани топди*:

$$\rho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \quad (83.2)$$

Бу ерда $F(\nu/T)$ — кўрилиши фақат термодинамик мулоҳазалар асосида, яъни нурланиш ва ютишнинг молекуляр механизми ҳақидаги ҳар қандай гипотезаларсиз очилиши мумкин бўлмаган функциядир.

Шу камчиликларига қарамай, Вин формуласи жуда муҳим роль уйнайди. Биринчидан ν ва T икки ўзгарувчанли функцияни топиш масаласини бир ўзгарувчанли ν/T функцияни топиш масаласига келтирди, бу эса бирор температура учун берилган спектрда энергиянинг тақсимланиш эгри чизиғига асосан ҳар қандай бошқа температурага тегишли эгри чизиқни ҳисоблаш имконини очиб берди. Масалан, бизга T температура учун эгри чизиқ берилган бўлиб, T_1 температура учун эгри чизиқни ҳисоблаш керак бўлсин. $\frac{\nu_1}{T_1} = \frac{\nu}{T}$ шартни, яъни $\nu_1 = \frac{T_1}{T}\nu$ қанотлантирувчи ν_1 частота учун Вин формуласи қуйидагини беради:

$$\rho(\nu_1, T_1) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu_1}{T_1}\right) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3} \rho(\nu, T).$$

Шундай қилиб, $\rho(\nu_1, T_1)$ эгри чизиқни ҳосил қилиш учун $\rho(\nu, T)$ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасининг ординагасини T_1^3/T^3 нисбатга кўпайтириш етарли бўлади.

* Вин қонунини келтириб чиқаришни кўпчилик назарий физика қўлланмаларидан, шу жумладан М. Планкнинг „Теория теплого излучения“, ОНТИ, 1935 ва „Введение в теоретическую физику“, V қ., ОНТИ, 1935 китобларидан топиш мумкин. Нурланиш назариясининг қисқача баёни Г. А. Лорентцнинг „Теория излучения“, Гостехиздат, 1941 китобида гоят равшан берилган.

Иккинчидан, Вин формуласи термодинамика асосида келтириб чиқарилгани учун ҳам шубҳасиз туғридир. Шунинг учун нурланишнинг бирор махсус механизми ҳақидаги мулоҳазалар ёрдамида ҳосил қилинган ҳар қандай формула Вин формуласида ифодаланган талабларни албатта қаноатлантириши, яъни (ўзгармаслардан ташқари) частота кубига ва ν/T нисбат функциясига эга бўлиши керак.

Ниҳоят, $F(\nu/T)$ ошқормас функциянинг иштирокига қарамасдан, Вин формуласи баъзи бир жуда аниқ миқдорий муносабатларга олиб келади. Аввал Вин формуласи ёрдамида нурланишнинг u интеграл зичлигини ҳисоблаб, бунга ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$u = \int_0^{\infty} \rho_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu.$$

Янги ўзгарувчи $\nu/T = \xi$ ни киритиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$u = T^4 \int_0^{\infty} \xi^3 F(\xi) d\xi.$$

Интегрални ҳисоблаганда ҳосил бўладиган катталиқни a билан белгиласак, у ҳолда

$$u = aT^4, \quad (83.3)$$

яъни маълум бўлган *Стефан — Больцман қонунини* ҳосил қиламиз.

Келгуси мақсадлар учун частота бўйича тақсимотдан тўлқин узунлик бўйича тақсимотга ўтиш қулай бўлади. Шу мақсадда, даставвал ν ва $\nu + d\nu$ частота интервалда жамланган энергияни $\rho_{\nu} d\nu$ га (бирок ρ_{ν} га эмас!) тенг эканлигини назарга олиш керак; шунингдек, тўлқин узунлик орқали ифодаланган энергия $\rho_{\lambda} d\lambda$ га тенг бўлиши равшандир. Шунинг учун частота бўйича тақсимотдан тўлқин узунлик бўйича тақсимотга ўтишда

$$\rho_{\nu} d\nu = \rho_{\lambda} d\lambda. \quad (83.4)$$

муносабатдан фойдаланиш лозим. Сўнгра ν ва $d\nu$ ни λ ва $d\lambda$ орқали алмаштириш керак:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad |d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (83.5)$$

Буларни эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\rho_{\lambda} d\lambda = \rho_{\nu} d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda. \quad (83.6)$$

Энди максимум шарт $\frac{dF}{d\lambda} = 0$ дан фойдаланамиз. (83.6)
ни дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$\frac{c^4}{\lambda^6} \left(\frac{c}{\lambda T} \right) F' \left(\frac{c}{\lambda T} \right) + \frac{5c^4}{\lambda^6} F \left(\frac{c}{\lambda T} \right) = 0,$$

ёки, ниҳоят, $\frac{c}{\lambda T} = \eta$ белгилаш киритиб ва қисқартириб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\eta F'(\eta) + 5F(\eta) = 0. \quad (83.7)$$

Бу тенгламани ечиб, η учун аниқ сон қиймат $\eta = \text{const}$ ни ҳосил қиламиз. Бу эса $\frac{c}{\lambda_{\max} T} = \text{const}$ ни беради, бунда λ_{\max} орқали $\rho_{\lambda_{\max}}$ га мос келган тўлқин узунлик белгиланган ёки c доимий катталиқ бўлгани учун:

$$\lambda_{\max} T = \text{const} = b. \quad (83.8)$$

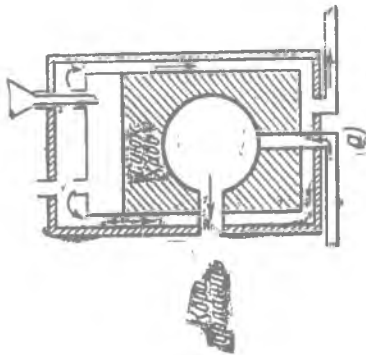
Бу ҳаммага маълум бўлган *Виннинг силжиш қонунидир*: спектрдаги максимал энергияга мос келган тўлқин узунлик абсолют температурага тескари пропорционалдир.

84-§. Иссиқлик нурланиш қонунларини экспериментал текшириш

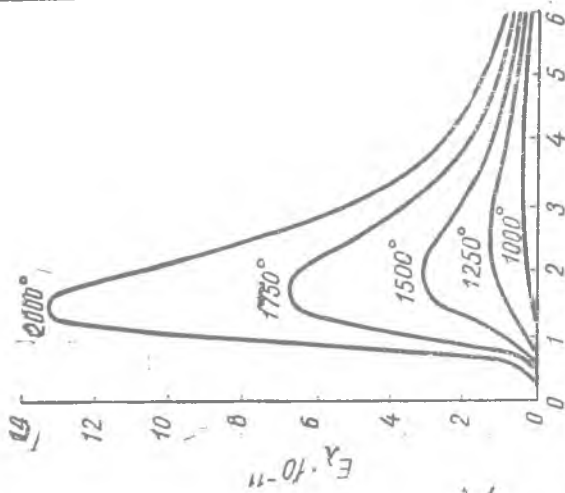
82-§ да абсолют қора жисм моделини сунъий яшаш мувозанатли нурланиш хоссасини экспериментал йўл билан ўрганиш имконини, хусусан шу нурланиш спектрида энергиянинг тақсимланишини текшириш имконини беришини кўрган эдик. Қора жисмнинг моделини амалда яратиш учун бўшлиқ деворларини бир текис қиздиришни ва нурланишни кичик тирқишдан ташқарига чиқишини таъминлаш керак. 131-а расмда биринчи марта Луммер ва Прингсгейм ясаган қора жисм тасвирланган. У икки қават деворли металл идишдан иборат. Деворлар орасидаги фазо муайян ва бир текис температурани сақлаш учун „температура ҳаммоми“ ролини бажаради. Бунга қайнаётган сув буғини ёки паст температуралар учун муз, қаттиқ карбонат ангидрид, суюқ ҳаво ва бошқалар тўлдириш йўли билан эришилади.

Юксак температурадаги нурланишни текшириш учун бошқача тузилган қора жисм қўлланилади (131-б расм). Платина тунукадан ясалган ва электр токи ўтказиладиган цилиндр ички чинни R цилиндри бир текис қиздириш учун хизмат қилади. Цилиндр ичидаги температура E термопара билан ўлчанади; 1, 2, 3, ... диафрагмалар ташқаридан кирган ҳаводан совийдан сақлайди.

Шунга ўхшаш қора жисм моделлари ёрдамида нурланиш қонунлари экспериментал текширилган, унинг доимийлари аниқ



131-рasm. Қора жисмнинг икки модели: а) кўш девор оралиғи температура-
турасини бошқаришда фойдаланиладиган энг оддий модель, б) юксак тем-
ператураларда нурланишни текшириш учун қўлланиладиган қора жисм.



132-рasm. Абсолют қора жисм спектри-
да энергиянинг тақсимлаш эгри чизиги.
Ординаталар ўқига ҳар бир тўлқин
узунлигига тўғри келадиган энергия зич-
лиги қўйилган.

топилган ва нурланиш равшанлигининг спектрал тақсимоти ўрганилган. 132-расмда ҳар хил температуралар учун абсолют қора жисм спектрида энергия тақсимоти эгри чизигининг бир нечаси берилган. Барча эгри чизиқлар кескин ифодаланган максимумга эга ва температура кўтарилганда Вин қонуни талабига қура бу максимумнинг қисқа тулқин томонга силжиши сезиларлидир.

85-§. Эркинлик даражалари бўйича энергиянинг текис тақсимланиши ҳақида теорема

Абсолют қора жисмнинг нурланиш проблемасини назарий текширишда классик статистик механиканинг битта жуда умумий теоремаси—эркинлик даражалари бўйича энергиянинг текис тақсимланиши ҳақидаги теоремаси жуда муҳим роль ўйнади. Бу теореманинг мазмунини эслатамиз. Бунинг учун аввал оддий мисол тариқасида кўп сонли заррачалардан иборат системани—*бир атомли* газни қараб чиқамиз. Бу газнинг тўла энергияси унинг молекулалари *илгариланма* ҳаракатининг кинетик энергияси йиғиндисига тенг. Агар биз айрим молекулаларнинг кинетик энергияларини ўлчай олсак, турли молекулалар учун бу кинетик энергиянинг турлича қийматларини топган бўлар эдик. Бироқ ўзгармас температурада битта молекулага тўғри келадиган ўртача кинетик энергия жуда аниқ катталиқдир. Агар биз етарлича кўп сонли молекулаларга эга бўлган газ ҳажмидан қандайдир қисмини ажратсак, газнинг ҳамма жойида температура бир хил бўлган шароитда, ҳажмнинг бу қисми учун ҳисобланган молекулаларнинг ўртача кинетик энергияси, ҳажмнинг бошқа қисми учун ҳисобланган ўртача кинетик энергияга тенг бўлади. Газ молекулалари ҳар хил массага эга бўлган икки газ аралашмасидан иборат бўлганда ҳам бу хулоса тўғри бўлади: иккала хил молекулаларнинг ўртача кинетик энергиялари бир хил булади; бу иккала газ аралашмаганда ва температуравий мувозанатда бўлган ҳолда ҳам тўғри бўлади.

Бир атомли газнинг бир моль молекулаларининг кинетик энергияси $E_k = \frac{1}{2} Nm\bar{v}^2$ га тенг ва, иккинчи томондан, газларнинг кинетик назариясига асосан $p\bar{v} = RT = \frac{1}{3} Nm\bar{v}^2$ бўлганидан $m\bar{v}^2 = 3R/NT = 3kT$ ва $E_k = \frac{3}{2} NkT$ га тенг бўлади.

Агар бир атомли газ молекулалари нуқтавий масса деб қаралса, у ҳолда N та шундай масса системасининг жойлашишини $3N$ декарт координаталари тўла аниқлаб беради. Биз система $3N$ та эркинлик даражага эга деймиз. Айтайлик, i массанинг оғирлик маркази координаталари x_i, y_i, z_i бўлсин;

уларга мос бўлган ташкил этувчи тезликлар x_i, y_i, z_i бўлсин. Бутун системанинг кинетик энергиясини $3N$ квадратик ҳадлар йиғиндиси кўринишида ёзишимиз мумкин:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \dots + \frac{1}{2} m \dot{x}_N^2 + \\ + \frac{1}{2} m \dot{y}_N^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_N^2.$$

Энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теоремага асосан, бу йиғиндининг ҳар бир ҳадига тўғри келган ўртача энергия, яъни илгариланма ҳаракатнинг ҳар бир эркинлик даражасига тўғри келган ўртача энергия бир хил ва $\frac{1}{2} kT$ га тенг бўлади. Ҳақиқатда, агар бу йиғиндининг ҳар бир квадратик ҳадига $\frac{1}{2} kT$ га тенг бўлган бир хил кинетик энергия ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда газнинг тўла энергияси юқоридагиларга кўра $\frac{3}{2} NkT$ га тенг бўлади.

Бир атомли газ мисолининг алоҳида соддалиги шундаки, бир атомли газ молекулаларини ҳар бири фақат илгариланма ҳаракат қилаётган нуқтавий массалар деб қараш мумкин. Ньютон механикасига асосланган классик статистик механика бу натижа энг умумий бўлган ҳол учун ҳам ўринли эканлигини кўрсатади. Айтайлик, бизнинг газ икки атомли молекулалардан иборат бўлсин. Уларнинг ҳар бири бешта эркинлик даражасига эга: учта эркинлик даражаси оғирлик марказининг илгариланма кўчишига ва иккита эркинлик даражаси атомларни бирлашгирган чизиққа перпендикуляр бўлган икки ўқ атрофида айланишга тўғри келсин (иккала атомдан ўтган ўқ атрофида айланишни, атомлар нуқтавий масса деб қаралганда, эътиборга олиш зарур бўлмайди). Бу ҳолда ҳам газнинг тўла энергиясини ҳисоблаш учун ҳар бир эркинлик даражасига (яъни илгариланма кўчиш эркинлик даражасига, ҳамда айланиш эркинлик даражасига) $\frac{1}{2} kT$ га тенг бир хил ўртача энергияни ёзиш керак.

Ниҳоят, жойлашиши f умумлашган лагранж координатлари q_1, q_2, \dots, q_f билан тўла аниқланадиган ихтиёрий системага эга бўлайлик. Система бунда f эркинлик даражасига эга бўлади. Бундай системанинг кинетик энергияси ҳадлари умумлашган тезлик квадратларига ва шунингдек, уларнинг жуфт кўпайтмаларига эга бўлган ҳадлардан ташкил топган бир жинсли квадратик форма кўринишида бўлади*. Бироқ, q_1, q_2, \dots, q_f координаталарни шундай танлаш мумкинки, у ҳолда кинетик

* Г. К. Суслонинг Теоретическая механика деган китобига қаранг, 329-бет, Гостехиздат, 1944.

энергия фақат умумлашган тезликлар квадратларига эга бўлган, яъни $\frac{1}{2} a_i \dot{q}^2$ кўринишидаги f ҳадлар йиғиндисидан иборат булади, бунда a_i коэффициентлар умуман айтганда, энди фақат масса m_i га тенг бўлмайди. Масалан, қутб координаталарда i заррача учун

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\vartheta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i r_i^2 \sin^2 \vartheta_i \dot{\varphi}_i^2,$$

чунки

$$a_{ir} = m_i, \quad a_{\vartheta i} = m_i r_i^2, \quad a_{\varphi i} = m_i r_i^2 \sin^2 \vartheta_i.$$

Танланган координаталар қандай бўлмасин, агар кинетик энергия *фақат* квадратик ҳадлардан иборат бўлса, бу f ҳадларнинг ҳар бирига, яъни ҳар бир эркинлик даражасига, статистик механиканинг эслатилган теоремасига асосан $\frac{1}{2} kT$ га тенг бирдай *ўртача* энергия тўғри келади.

Шу пайтгача фақат кинетик энергия ҳақида гапирдик. Баъзан оддий усул билан потенциал энергияни ҳисоблаш мумкин бўлган ҳоллар ҳам мавжуддир. Масалан, система чизиқ гармоник осцилляторлардан иборат бўлса, у ҳолда чизиқ гармоник осцилляторнинг ўртача потенциал энергияси унинг ўртача кинетик энергиясига тенг булади, ҳар бир эркинлик даражасига

$$\frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT$$

га тенг энергия тўғри келади.

Системанинг кичик тебранишлар бажара олувчи умумий ҳолида шундай координаталар топиш мумкинки, бу координаталарда $\frac{1}{2} a_i \dot{q}_i^2$, кўринишидаги квадратик ҳадлар йиғиндисидан иборат булади, квадрат ҳадлар сони ҳам системанинг эркинлик даражасига тенг булади*. Шундай танланган *нормал координаталарнинг* ҳар бири вақтга оддий синусоидал функция кўринишида боғланган булиб, тегишли хусусий тебранишларнинг ўртача кинетик энергияси ўртача потенциал энергияга тенг (бу параграфдаги машққа қаранг). Системанинг ҳаракати бу ҳолда f чизиқли гармоник осцилляторларнинг суперпозициясидан иборат булади; тўла энергия $2f$ квадратик ҳадлар йиғиндисига тенг. Ҳар бир ҳадга $\frac{1}{2} kT$ га тенг *ўртача* энер-

* Искотини чизиқли тебранишлар назариясига оид қўлланмалардан қаранг; масалан, Л. Г. Лойцянский ва А. И. Лурье, Теоретическая механика, III т., 411-бет, ОНТИ, 1934.

гия тўғри келади, демак, тўла энергия $f kT$ бўлади. Энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теорема шундан иборатдир.

Машқ. Кичик тебранишлар бажара оладиган системанинг кинетик ва потенциал энергияси нормал координаталарда қуйидаги кўринишга эга:

$$T = \frac{1}{2} a_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{q}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} a_f \dot{q}_f^2, \quad U = \frac{1}{2} b_1 q_1^2 + \frac{1}{2} b_2 q_2^2 + \dots + \frac{1}{2} b_f q_f^2.$$

Бу координаталарда Лагранж тенгламасини ёзинг ва уларнинг ечими

$$q_1 = A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} t + \delta_1 \right), \quad q_2 = A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} t + \delta_2 \right), \dots$$

бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Бундан фойдаланиб, ҳар бир хусусий тебраниш учун потенциал ва кинетик энергия ифодасини ёзинг ва уларнинг ўртача қийматлари ўзаро тенг бўлишига ишонч ҳосил қилинг.

86- §. Рэлей—Жинс формуласи

Рэлей ёпиқ ковакдаги электромагнит энергияси зичлигини ҳисоблаш учун энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теоремадан биринчи бўлиб фойдаланди. Бу ҳолда теоремани қўллаш учун қуйидаги мулоҳазалар асос бўлиши мумкин. V ҳажмли, материяга эга бўлмаган (яъни вакуум) ва T температурага қиздирилган идеал қайтарадиган деворлар билан ўралган ковак бор дейлик.

Бу ковак деворлари ҳар қандай температурада ҳам ёруғлик (хусусан паст температураларда—инфрақизил ёруғлик) тарзида электромагнит тўлқинлари чиқариши туфайли ковак ичида ҳам электромагнит майдони мавжуд бўлади. Бу электромагнит майдонини турли частотали ва турли йўналишли турғун тўлқинлар системасига ажратиш мумкин; ҳар бир шундай турғун тўлқин электромагнит майдонининг элементар ҳолатини ўзида мужассамлаштиради. Энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теорема бу ҳолда ҳам ковакнинг деворлари билан электромагнит майдони орасида мувозанат мавжудлигида ҳар бир турғун тўлқинга kT га тенг ўртача энергия тўғри келишини тасдиқлайди. Бунда гармоник осцилляторнинг ўртача энергияси $\frac{1}{2} kT$ га тенг ўртача кинетик энергия билан $\frac{1}{2} kT$ га тенг ўртача потенциал энергия йиғиндисидан иборат бўлгани каби, турғун тўлқин электромагнит майдони ҳолида ҳам тўла ўртача kT энергия электр ва магнит майдонларнинг ҳар бири $\frac{1}{2} kT$ га тенг ўртача энергиялари йиғиндисидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, ν , $\nu + d\nu$ частоталар интервали учун майдон энергиясини ҳисоблаш масаласи элементар турғун тўлқинлар сонини, яъни туташ муҳит билан тўла V ҳажмнинг кўрсатилган частоталар интервалига тегишли эркин хусусий тебрانىш-

лари сонини топишга келтирилади. V ҳажмдаги майдоннинг $V\rho, dV$ га тенг бўлган тўла энергиясини билган ҳолда, энергиянинг ρ, dV зичлигини ҳам топиш мумкин.

Энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теорема ёрдамида майдон энергияси зичлиги ρ, dV ни Рэлей кўрсатган метод бўйича Жинс ҳисоблади. Шунинг учун улар топган формула Рэлей—Жинс формуласи дейилади. Бу формулани бутун спектрга қўллаш мумкин бўлмаса ҳам, у нурланиш назариясининг ва, умуман, ҳозирги замон физикасининг ривожланишида катта роль ўйнади, чунки у классик физиканинг принципаал қийинчиликларини ёрқин очиб берди.

Рэлей—Жинс формуласини келтириб чиқаришни қараб чиқамиз ва майдоннинг хусусий тебранишлари сонини ҳисоблашдан бошлаймиз. Соддалик учун стационар (яъни вақтга боғлиқ бўлмаган) тўлқин майдони жойлашган ковак a қиррали куб шаклига эга дейлик. Юқорида айтилгандек, стационар тўлқин майдонни турғун тўлқинлар тўпламидан иборат деб қараш мумкин. Дастлаб, тўлқинларга ўтказилган нормал кубнинг икки параллел ёқларига перпендикуляр бўлган тўлқинларни қарайлик. Бу йўналишга параллел ҳолда йўналиш бўйлаб ёки йўналишга қарши кетаётган, тушган ва қайтган тўлқинлар турғун тўлқинларни ҳосил қилади. Бунда тўлқинлар табиатига боғлиқ ҳолда ковак деворига тўлқин тугунлари ёки дўнгликлари тўғри келади; масалан, электромагнит тўлқинлар ҳолида электр майдон деворда тугунлар ҳосил қилса, магнит майдон—дўнглик ҳосил қилади. Бироқ бу ва бошқа ҳолларда турғун тўлқинлар ҳосил бўлиши учун a масофада ярим тўлқинларнинг бутун сони жойлашиши керак.

Равшанлик учун фақат деворда тугунлар ҳосил қиладиган турғун тўлқинларни қараб чиқамиз. Демак, uz текисликка параллел турғун тўлқинлар мавжуд бўлиш шarti $\frac{2a}{\lambda} = n_1$ (n_1 — бутун сон) бўлади.

xu ва xz текисликларга параллел, бирдай фазали текисликларга эга бўлган турғун тўлқинлар учун

$$\frac{2a}{\lambda} = n_2, \quad \frac{2a}{\lambda} = n_3$$

юқоридагига ўхшаш шартлар ўринли бўлади.

Нормаллари координата ўқларига параллел бўлган, кўриб ўтилган турғун тўлқинлар системалари хусусий ҳоллар бўлади. Ковакда нормаллари турли йўналишда бўлган турғун тўлқинлар мавжуд бўлиши мумкин.

Бу умумий ҳолни батафсилроқ қараб чиқамиз. Айтайлик, нормали x ва y ўқлар билан мос равишда α ва β бурчаёлар ҳосил қилувчи, унинг тенг фазали текисликлари $z\alpha$ (масалан, тугун текисликлари) кубнинг z ўққа мос тушувчи вертикал

қиррасига параллел турғун тўлқин мавжуд бўлсин. 133-расмда квадрат кубнинг асосларидан бирини, яъни xu координата текислигига параллел бўлган ёқни тасвирлайди, параллел чизиқлар системаси эса тугун текисликлар. изини тасвирлайди. Вундай турғун тўлқинларнинг мавжудлик шarti шундан иборатки, уларнинг куб ёқларига ўтказилган нормаллар бўйича ўлчанган, тугун текисликлари орасидаги масофалар a қиррада бутун сон марта жойлашишлари керак, яъни

$$\frac{2a \cos \alpha}{\lambda} = n_1, \quad \frac{2a \cos \beta}{\lambda} = n_2.$$

Бу шартлар 133-расми қараб чиқишдан ҳосил бўлади. Равшанки, умумий ҳолда тугун текисликларга ўтказилган нормал координаталар ўқлари билан ихтиёрий α, β, γ бурчаклар ҳосил қилганида, бир вақтда уч шарт қаноатлантириши керак:

$$\frac{2a \cos \alpha}{\lambda} = n_1, \quad \frac{2a \cos \beta}{\lambda} = n_2, \quad \frac{2a \cos \gamma}{\lambda} = n_3. \quad (86.1)$$

Бу учала тенгликни квадратга кўтариб ва қўшсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2av}{c'}\right)^2, \quad (86.2)$$

бунда c' — мазкур муҳитда тенг фазали текисликнинг кўчиш тезлиги (фазавий тезлик). Бироқ бу

$$R = \frac{2av}{c'} \quad (86.3)$$

радиусли сфера тенгламасидир.

Бундан кўриниб турибдики, бу учта *бутун сонларнинг* ҳар бири n_1, n_2, n_3 га муайян частота мос келади:

$$v = \frac{c'}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (86.4)$$

Энди декарт координаталар системасини киритамиз. $c'/2a$ ни бирлик қилиб, система ўқларига n_1, n_2 ва n_3 бутун сонларни қўямиз. (86.4) га кўра, бу сонлар қийматларининг ҳар бир тўпламига муайян частота мос келади. Биз энди „частоталар фазоси“ деб атайдиган координаталар системасида бу частота (нуқтани тасвирловчи) n_1, n_2, n_3 координатали нуқтадан иборат бўлади. Равшанки, квадратлари йиғиндиси доимий қийматга эга бўлган барча n_1, n_2 ва n_3 бутун сонларга сон жиҳатидан тенг бўлган частоталар мос келади. Бу тенг частоталар бизнинг континуумнинг *турлича* хусусий тебранишларига тегиш-

ли бўлади. Чунки уларнинг ҳар бирига йўналишлари жиҳатдан фарқли бўлган ўзининг турғун тўлқинлари системаси мос келади*.

Барча бундай ўзаро тенг частоталарнинг частоталар фазосининг турли нуқталарига тегишли бўлиши бизнинг мақсад учун муҳимдир.

Энди 0 дан ν гача бўлган хусусий частоталарнинг тўла сонини ҳисоблашимиз мумкин. Бунинг учун n_1, n_2, n_3 ларнинг ҳар хил бутун мусбат қийматларига мос келувчи нуқталар системасини тузамиз. Равшанки, бу нуқталар системаси куб панжара ҳосил қилиб, элементар кубчанинг қирраси ҳам, ҳажми ҳам 1 га тенг бўлади. Агар тўлқин узунлиги ковакнинг a чизиқли ўлчовига нисбатан етарлича кичик бўлса, у ҳолда барча элементар ячейкаларнинг (кубчалар) ҳажмлари йиғиндиси етарлича аниқликда (86.3) ва (86.4) шартларга кўра аниқланадиган R радиусли сферанинг саккиздан бир қисмига тенг бўлади. Ҳар бир ячейканинг ҳажми 1 га тенг бўлганидан биз акс ҳолни—октант (кўрсатилган даражадаги аниқлик билан) ҳажми элементар ячейкалар *сонига* тенг бўлишини ҳам тасдиқлай оламиз.

Агар бир ячейкага нечта тасвирловчи нуқта тўғри келишини билсак, у ҳолда бизнинг ковакнинг 0 дан ν гача оралиғида ётувчи хусусий частоталари тўла сонини ҳам топа оламиз. Худди кубик ион панжарада (34-§ га қаранг) ҳар бир ячейкага биттадан ион тўғри келганидек, мазкур ҳолда ҳам ҳар бир элементар кубчага *биттадан* тасвирловчи нуқта тўғри келади. Шундай қилиб, эркин тебранишлар частоталарининг изланаётган сони сон жиҳатдан октант ҳажмига тенг, яъни

$$N = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2a\nu}{c'} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\nu}{c'} \right)^3 \equiv \frac{4}{3} \pi \frac{a^3 \nu^3}{c'^3}.$$

Бу эса 0 дан ν гача оралиқдаги хусусий тебранишлар сонидир. ν ва $\nu + d\nu$ гача оралиқдаги тебранишлар сони $\frac{2a\nu}{c'}$ ва $\frac{2a(\nu + d\nu)}{c'}$ радиусли сферик қатламнинг саккиздан бир қисми ичига жойлашган тасвирловчи нуқталар сонига тенг, юқоридагига, асо-

* $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ йиғинди аниқ сонга тенг бўлган шартда n_1, n_2 ва n_3 сонларнинг турлича тўпламига мувофиқ келувчи бу частоталарнинг мос келиши хусусий ҳол бўлиб, у айниш ҳоли дейилади. Биз ҳажми куб деб қараганимиз учун бу мос келиш содир бўлади. Агар биз қирраларининг узунликлари умумий ўлчовли кесмалар билан ифодаланадиган параллелепипед шаклидаги ҳажми олганимизда ҳам, бу ҳол содир бўлади. Бироқ параллелепипед қирралари узунликлари умумий ўлчовсиз бўлса, мос келиш рўй бермайди ва n_1, n_2 ва n_3 сонларнинг ҳар бир тўпламига фақат битта частота тўғри келади. Бу хусусиятларнинг маъноси ўқувчига 161-§ билан танишгандан кейин тушунарли бўлиб қолади.

сан эса, тасвирловчи нуқталарнинг бу сони кўрсатилган қатлам ҳажмига тенгдир, яъни

$$dN = \frac{4\pi\nu^3}{c^3} a^3 d\nu.$$

Мазкур ҳолда сўз фақат бизни қизиқтираётган электромагнит тўлқинлар ҳақида кетса, у ҳолда ҳар бир ν частотага қутбланиш текисликлари ўзаро перпендикуляр бўлган *иккита* тўлқин тўғри келишини ҳам эътиборга олишимиз керак. Шунинг учун топилган сонни иккилантириш керак ва a^3 куб ҳажмини V билан белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$dN = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} V d\nu.$$

Бу эса бизнинг V ҳажмининг эркин хусусий тебранишлари сони бўлади. Энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теоремага асосан уларнинг ҳар бирига ўртача kT энергия ёзиш керак бўлади. Бинобарин, V ҳажмдаги тўла энергия:

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} V kT d\nu,$$

бундан тўла энергияни V ҳажмга бўлиб, энергия зичлигини топамиз:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu. \quad (86.5)$$

Бу эса Рэлей—Жинс формуласидир.

Бу формуладан амалда фойдаланиш учун энергиянинг частота бўйича тақсимланишидан тўлқин узунлиги бўйича тақсимланишига ўтиш қулай бўлади. λ , $\lambda + d\lambda$ тўлқин узунлик интервали учун юқоридагига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\rho_\nu d\nu = \rho_\lambda d\lambda \quad (83.4)$$

ва

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (83.5)$$

Бу муносабатлар ёрдамида (86.5) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\rho_\lambda d\lambda = 8\pi kT \lambda^{-4} d\lambda. \quad (86.6)$$

Нурланишнинг сиртий равшанлиги I_λ учун $I_\lambda = \frac{c}{8\pi} \rho_\lambda$ муносабат ёрдамида (86.6) дан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$I_\lambda d\lambda = ckT \lambda^{-4} d\lambda. \quad (86.7)$$

Ниҳоят Рэлей—Жинс формуласининг тўлқин узунлик бўйича тақсимланиш кўринишидаги (86.6) ифодасини ўлчамлик мулоҳазаларидан осон ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам λ , $\lambda + d\lambda$ тўлқин узунликка тегишли V ҳажмининг $f(\lambda)d\lambda$ эркин хусусий тебранишлари сони V га ва $d\lambda$ интервалга пропор-

ционал бўлиши керак: $f(\lambda)d\lambda = C\varphi(\lambda)Vd\lambda$, бунда C —доимий сон. Бироқ $f(\lambda)d\lambda$ ўлчамсиз сон бўлиши кераклигидан $Vd\lambda$ катталик $см^4$ ўлчамликка эга бўлиши керак. У ҳолда $\varphi(\lambda)$ ни ўлчами $см^{-4}$ бўлади. Шундай қилиб: $\varphi(\lambda) = \lambda^{-4}$ ва $f(\lambda)d\lambda = C\lambda^{-4}Vd\lambda$. Бу формула ҳар қандай туташ муҳит учун ва, тегишлича, ҳар қандай табиатли тўлқин учун ўринлидир. Энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теоремага асосан ҳар бир хусусий тебранишга kT ўртача энергия ёзиб, V ҳажмнинг тўла энергияси учун қуйидагини топамиз:

$$CkT\lambda^{-4}Vd\lambda,$$

энергия зичлиги учун эса

$$\rho_\lambda d\lambda = CkT\lambda^{-4}d\lambda,$$

яъни Рэлей—Жинс формуласига C сон кўпайтувчи аниқлигида мос келувчи ифода ҳосил бўлади. Бу кўпайтувчини соф ҳисоблаш йўли билан ҳосил қилиш мумкин. V ҳажм газ билан тўлдирилганда фақат бўйлама тўлқинлар мавжуд бўлиши мумкин бўлиб, C учун 4π ҳосил бўлади; фақат кўндаланг тўлқинлардан иборат, лекин ўзаро тик қутбланиш текисликли иккита мустақил тўлқинга эга бўлган электромагнит майдон учун $C = 8\pi$, ниҳоят, иккала хил кўндаланг тўлқин, шунингдек, бўйлама тўлқин мавжуд бўладиган қаттиқ жисм учун $C = 12\pi$ бўлишини кўрсатиб ўтиш мумкин.

Ма ш к. Қирралари l_1, l_2, l_3 ўлчовдош бўлмаган сонлар билан ифодаланувчи параллелепипед шаклидаги ҳажмнинг хусусий тебранишлари сонини ҳисобланг (282-бетдаги эслатмага қаранг). Бу ҳолда ҳам энергия зичлиги учун Рэлей—Жинс формуласи ҳосил бўлишини кўрсатинг.

87-§. „Ультрабинафшавий ҳалокат“

Энди Рэлей—Жинс формуласини анализ қилиб, унинг хулосалари эксперимент натижаларига қанчалик мос келишини қараб чиқамиз. Даставвал Рэлей—Жинс формуласи

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu. \quad (87.1)$$

Виннинг $\rho_\nu d\nu = \nu^3 F(\nu|T) d\nu$ термодинамик қонунини қаноатлантиришини кўрсатиб ўтамиз, чунки уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} k \frac{T}{\nu} d\nu.$$

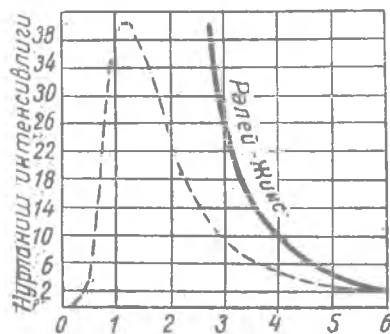
Шунга қарамасдан, Рэлей—Жинс формуласи маъносизликка олиб келади. Ҳақиқатан (87.1) ёрдамида нурланишнинг интеграл зичлигини ҳисоблаймиз:

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty!$$

Бу эса, нурланиш зичлиги чексизга тенг бўлгандагина моддий жисмлар билан нурланиш орасида мувозанат юз беришини билдиради (80-§ нинг охирига қаранг). Бошқача айтганда, нурланувчи жисмнинг осцилляторлари жисмнинг температураси абсолют нолга тушгунча энергия нурлайвериши керак экан. Классик механикани микроскопик нурланиш системаларига қўлланилганда худди шундай натижа беришини 80-§ да тушунтирган эдик. Иккинчи томондан, бу натижа тажрибага кескин виддир. Тажрибанинг кўрсатишича, ҳар қандай температурада ҳам нурланиш ва унинг моддий марказлари орасида мувозанат мавжуд бўла олади ва назария даъвосига зид равишда бу мувозанат вақтида нурланиш энергияси зичлиги моддий жисмдаги энергия зичлигига нисбатан жуда кичик бўлади.

Рэлей—Жинс формуласининг ошқора хатолигига қарамасдан, уни тажриба натижаларига таққослаш қизиқарли бўлади. Бунинг учун бу формуланинг тўлқин бўйича энергиянинг тақсимланиши берилган (86.6) ёки (86.7) кўринишидан фойдаланиш қулай бўлади. Ҳар хил температурада абсолют қора жисм спектрида энергия тақсимланишининг экспериментал натижалари келтирилган 132-расмдаги эгри чизиққа эътибор берсак, бунда барча эгри чизиқлар максимумга эғалигини ва қисқа тўлқинлар томонига тик тушишини кўрамиз. Аксинча, Рэлей—Жинс формуласи қисқа тўлқинлар томонига монотон ва шу билан тез (λ^{-4}) ўсишни беради. Бироқ узун тўлқинлар ёки юқори температура учун у экспериментга яхши мос келади. Бу 134-расмда схематик кўрсатилган. Классик физикага таянган Рэлей—Жинс формуласи, тажрибага кескин зид равишда, иссиқлик нурланиш спектрида энергиянинг кўпроқ қисми спектрнинг қисқа тўлқинли қисмига тўғри келади деган хулосага олиб келганлигидан, буни квант назариянинг асосчиларидан бири П. С. Эрэнфест „ультрабинафшавий ҳалокат“ деб атади.

Айтилганларни яқунлаб, иссиқлик нурланиш назариясида классик физика тўла мағлубиятга учраганини кўрамиз. Лоренцнинг образли ифодасича, „ўчган печка маттароқ узунликдаги тўлқинлар чиқариш билан бирга нима учун сариқ нурлар ҳам чиқармаслик сабабини тушунтиришга классик физика тенгнамалари ожизлик қилди“.



134-расм. Спектрда энергия тақсимланишининг тажрибада топилган эгри чизигини (пунктир эгри чизиқ) Рэлей—Жинс формуласи бўйича ҳисобланган эгри чизиқ билан солиштириш.

88-§. Планк формуласи

Биз кўрдикки, Рэлей—Жинс формуласи классик физиканинг энг умумий қонунларига асосланади ва келтириб чиқарилишига ҳеч қандай махсус гипотезаларни талаб қилмайди. 1896 йилда Вин спектрнинг Рэлей—Жинс формуласини татбиқ қилиб бўлмайдиган соҳасида эксперимент натижаларига яхши мос келадиган бошқа формулани таклиф қилди*. Виннинг бу формуласи I_λ учун қуйидагича ёзилади:

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T}, \quad (88.1)$$

бунда c_1 ва c_2 — доимий катталиклар. Вин ўз формуласини чиқариш учун нурланишнинг частота бўйича тақсимланиши газ молекулалари орасида тезликларни максвелл бўйича тақсимланишига мос келади деган нурланишнинг чиқиш механизмига тааллуқли гипотезани қабул қилди. Вин формуласи Рэлей—Жинс формуласидан фарқли равишда, спектрдаги энергия тақсимланиши эгри чизигида максимум беради.

Бироқ Вин формуласи абсолют қора жисм спектрида энергия тақсимланиши эгри чизигининг фақат қисқа тўлқин қисми учун қўлланиши мумкин экан. Шундай қилиб, XIX аср охирида ҳар бири спектрнинг чекли қисмидагина эксперимент маълумотларига мос келувчи, лекин бирортаси ҳам экспериментал эгри чизиқни тўла тушунтира олмайдиган икки формула мавжуд эди. 1900 йилга яқин Планк даставвал тажриба натижаларига яхши мос келадиган ва ҳар икки чегаравий ҳолларда (узун ва қисқа тўлқин учун) тегишлича Рэлей—Жинс ёки Вин формуласига ўтадиган формулани соф эмпирик равишда топишга муяссар бўлди. I_λ учун Планк формуласи қуйидагидан иборат:

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} \cdot \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}. \quad (88.2)$$

Ҳақиқатан бу формула Рэлей—Жинс ва Вин формулалари орасидаги интерполяция натижаси эканлигига осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. $\lambda T \gg 1$ учун (узун тўлқинлар ёки юқори температуралар) Планк формуласи махражидаги экспоненциал ҳадни қаторга ёйиб, дастлабки икки ҳад билан чегаралансак:

$$e^{c_2/\lambda T} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \dots$$

Бу ҳолда Планк формуласи қуйидагини беради:

$$I_\lambda = \frac{c_1}{c_2} \lambda^{-4} T,$$

* Вин ўз формуласини энергиянинг частота бўйича тақсимланиши газ молекуласининг тезлик бўйича максвелл тақсимланишига ўхшаш, деган гипотеза асосида ҳосил қилди. Бу идеяни Виндан аввал рус физиги В. А. Михельсон айтган эди.

бу Рэлей—Жинс формуласига мос келади:

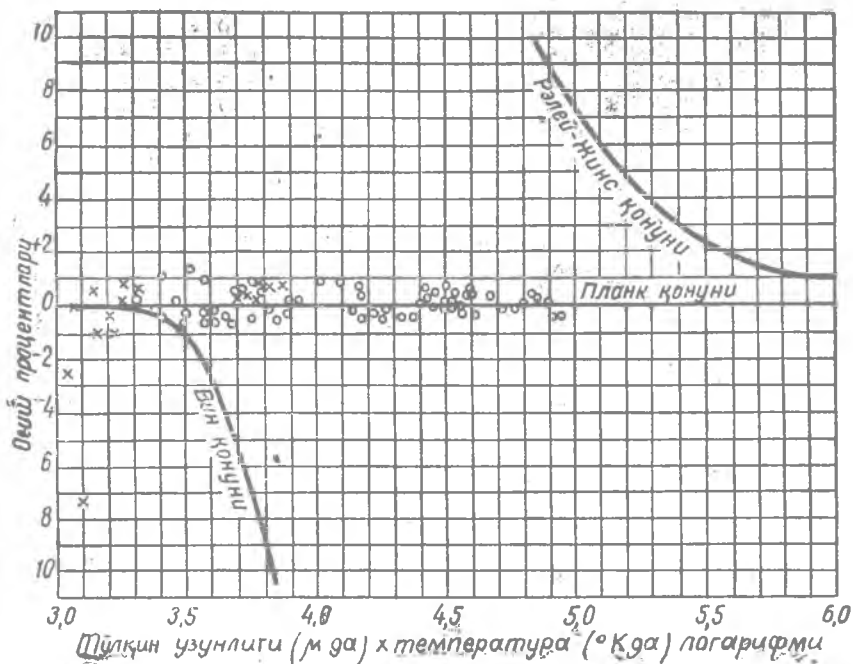
$$I_{\lambda} = ck\lambda^{-4}T. \quad (86.7)$$

Аксинча, $\lambda T \ll 1$ учун (қисқа тўлқинлар ёки паст температуралар) $\frac{c_2}{\lambda T} \gg 1$ ва Планк формуласи махражидagi 1 ни экспоненциал ҳадга нисбатан назарга олмаса бўлади. Бунда Планк формуласи бевосита қўйидагини беради:

$$I_{\lambda} = c_1 e^{-c_2/\lambda T} \cdot \lambda^{-5},$$

яъни (88.1) Вин формуласига ўтади.

Планк формуласи билан эксперимент маълумотлари орасидаги мослик даражасини 135-расмдан мулоҳаза қилиш мумкин.



135-расм. Планк формуласини экспериментал текшириш.

Расмда ординаталар ўқи бўйича процент четлашишлар қўйилган. Тўгаракчалар ва крестчалар билан эксперимент натижалари жойлаштирилган. Шу расмнинг ўзида Вин ва Рэлей—Жинс формуласига асосан чизилган эгри чизиқлар бу формулаларнинг асимптотик характерини яхши ифодалайди.

89-§. Энергия квантлари гипотезаси

Ўтган параграфда Планк формуласи абсолют қора жисм спектрида энергиянинг тақсимланиш қонунининг математик ифодасини излаш масаласини ҳал қилиши кўрсатилган эди. Бироқ, бу формулани келтириб чиқариш учун классик физиканинг барча тасаввурларига туб илдизи билан зид бўлган гипотезани — микроскопик системалар (атомлар, молекулалар) энергиялари фақат муайян, дискрет қийматларгина қабул қилишлари мумкинлиги ҳақидаги гипотезани қабул қилиш зарур бўлди.

Планк ўз формуласини келтириб чиқаришда нурланувчи моддий марказларни схемалаштирди. Уларни электр зарядни элитувчи ва шу зарядлар воситасида атроф электромагнит майдон билан энергия алмашиши мумкин бўлган қизиқли гармоник осциллятор деб қаради. Планк ўз хулосасига асос қилиб олган гипотезанинг ҳозирги анча аниқ таърифи қуйидагича: *осцилляторлар фақат баъзи бир танланган ҳолатлардагина бўла олиб, бу ҳолатларда уларнинг энергиялари энергиянинг ϵ_0 энг кичик миқдорига бутун каррали бўлади:*

$$\epsilon_0, 2\epsilon_0, \dots, n\epsilon_0, \dots;$$

осцилляторлар энергия нурлаганда ёки ютганда бу ҳолатларнинг биридан иккинчисига оралиқ ҳолатларни қолдириб сакраб ўтади.

Планк бу гипотезага асосланиб нурланишнинг ρ_ν ҳажмий спектрал зичлиги учун қуйидаги кўринишдаги формулани келтириб чиқарди:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/kT} - 1} \quad (89.1)$$

Бироқ нурланишнинг ҳар қандай тўғри формуласи Виннинг $\rho_\nu = \nu^3 F(\nu/T)$ термодинамик қонунини қаноатлантириши керак, (84.1) формула бу қонунни қаноатлантириши учун

$$\epsilon_0 = h\nu \quad (89.2)$$

бўлиши зарурлигини осонгина кўриш мумкин, бунда ν — осцилляторнинг тебраниш частотаси ($\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{m}}$), h — [энергия х вақт] ўлчамликка эга бўлган универсал доимий. Бундай ўлчамликка эга бўлган механик катгаликни *таъсир* дейилади.

(89.2) ни (89.1) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (89.3)$$

Бу эса Планк формуласининг назарий физикада одатда фойдаланиладиган кўринишидир.

(89.3) дан нурланишнинг спектрал равшанлиги учун $I_\nu = \frac{\nu}{8\pi} \rho_\nu$ ифода, яъни

$$I_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (89.4)$$

келиб чиқади. (89.4) формуладан амалий ҳолларда қўлланиладиган I_λ формуласига ўтиш учун одатдаги муносабатлардан фойдаланиш зарур:

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda, \quad |d\nu| = \frac{c d\lambda}{\lambda^2}.$$

Бунда (89.4) формула қуйидагини беради:

$$I_\lambda d\lambda = \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} d\lambda \quad (89.5)$$

$hc^2 = c_1$, $\frac{hc}{k} = c_2$ ларни назарга олиб (89.4) формулани

$$I_\lambda d\lambda = c_1 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda \quad (89.6)$$

кўринишга келтирамиз, бу олдинги параграфдаги (88.2) формулага мос келади.

Универсал доимий h — Планк доимийси ҳозирги замон физикасида муҳим роль ўйнайди. Унинг қийматини турли методлар билан экспериментал аниқлаш мумкин. Хусусан, абсолют қора жисмнинг нурланиш қонунари

$$h = 6,53 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$$

катталикини беради.

h ни янада аниқроқ топиш методлари IX бобда кўриб чиқилади. Биз бу ерда фақат шуни таъкидлаб ўтамизки, атом физикаси қонунари талаб этадиган узлукликнинг макроскопик ҳодисаларни ўрганишда мутлақо сезилмаслигининг сабаби h нинг (10^{-27} эрг·сек чамасида) ғоят кичик эканлигидир.

$h\nu \ll kT$ ҳол учун, яъни кичик частоталар (узун тўлқинлар) ёки юқори температуралар учун тақрибан қуйидагига эга бўламиз:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

ва (89.3) Планк формуласи қуйида ρ_ν учун Рэлей — Жйнс формуласини беради:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (87.1)$$

$h\nu \gg kT$ ҳол учун, яъни юксак частоталар ёки паст температуралар учун (89.3) Планк формуласи Виннинг ρ , учун ёзилган формуласига мос формулага олиб келади:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}. \quad (89.7)$$

Ниҳоят, нурланишнинг интеграл зичлиги

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu.$$

ρ , учун (89.3) Планк формуласи олинса, чекли булишини кўрсатиб ўтамиз. Айнан, ҳисоблашнинг кўрсатишича (шу параграфга берилган машққа қаранг),

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = 1,08 \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4.$$

Бинобарин, Планк формуласи „ультрабинафшавий ҳалокат“ ни йўқотади (87-§ га қаранг). Бунинг сабабини тушуниш қийин эмас. 87-§ да кўрганимиздек, ρ , учун Рэлей — Жинс формуласи олинганда, $\int_0^\infty \rho_\nu d\nu$ интегралнинг узоқлашиши, бу формуланинг энергиянинг эркинлик даражалари бўйича тенг тақсимланиши ҳақидаги теоремага асосланганлигидадир. Бу теоремага асосан, *ҳар бир* эркинлик даражасига бир хилда $\bar{\epsilon} = kT$ ўртача энергия мос келади. Энди ρ , учун Рэлей — Жинс ва Планк формулаларини солиштирамиз:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT,$$

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

86-§ га кўра $8\pi\nu^2/c^3$ катталиқ ν ва $\nu + d\nu$ частоталар оралиғидаги нурланишнинг эркинлик даражалари сони бўлгани учун, Планк формуласи тўғрилигидан, *ҳар бир* эркинлик даражасига тўғри келадиган ўртача энергия *турли частотали турғун тўлқинлар учун* бир хилда бўлмаслиги келиб чиқади. Айнан, Планк формуласидан қуйидаги келиб чиқади:

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (89.8)$$

Шундай қилиб, бу ҳолда ν нинг ортиши билан $\bar{\epsilon}$ нинг тез камайиши ва шу билан $\int_0^\infty \rho_\nu d\nu$ интегралнинг яқинлашувчанлиги

тушунтирилишини кўрамиз. Яна шуни кўрсатиб ўтамизки, битта эркинлик даражасига тўғри келадиган ўртача энергия учун (89.8) формулани қабул қилиш Эйнштейн кўрсатганидек, иссиқлик сиғимларнинг классик назариясининг жиддий қийинчиликларини бартараф қилади*.

Кўрсатилган фактлардан куринашича, Планк формуласининг яратилиши классик физикадан гўла узилишни билдирди, чунки Планк формуласи энергиянинг тенг тақсимланиши ҳақидаги теоремага қарама-қаршидир. Бироқ бу теорема гамилтон формадаги классик механикага асосланган статистик механиканинг натижаси бўлиши аниқдир. Шундай қилиб, биринчи марта энергия квантлари гипотезаси таърифланган 1900 йил фақат календарь ҳисобидаги янги асрнинг биринчи йилигина бўлмасдан, назарий физиканинг ривожига янги эранинг бoshланиши ҳам эди.

Ма ш қ. ρ_ν учун Планк формуласидан фойдаланиб, нурланишнинг $u = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu$ интеграл зичлигини ҳисобланг ва

$$u = \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right)$$

эканлигини кўрсатинг.

Қавс ичидаги тез яқинлашувчи қатор 1,08 га тенг, шунинг учун

$$u = 1,08 \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4$$

(Планк формуласидан Стефан—Больцман қонуни келиб чиқади). *Кўрсатма.* Аввал

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} + e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \dots + e^{-\frac{nh\nu}{kT}} + \dots$$

эканлигига ишонч ҳосил қилиш керак. Бундай алмаштиришдан кейин интеграллаш осон бажарилади.

* В. Г. Левининг Статистическая физика, Гостехиздат, 1950, китоби-га қаранг.

90- §. Атомнинг планетар модели ва Борнинг квант постулатлари

III бобда атомнинг мусбат зарядли оғир ядродан ва уни қуршаб турган электронлардан таркиб топганини кўрдик. Классик механикага кўра, электронлар ядро атрофида қандайдир орбиталар буйича айланса, бундай система мувозанатда бўлиши мумкин. Бироқ, *классик электродинамика* нуқтаи назаридан бундай атом бари бир нотурғун бўлиши керак, чунки тезла-нишли ҳаракатдаги электронлар электромагнит тўлқинлари тарзида энергия чиқариши (75- §) ва, демак, аста-секин ядрога тушиши керак буларди. Шу билан бирга бу шароитда айла-ниш частотаси ҳам узлуксиз ўзгара бориши ва биз кескин спектрал чизиқлар ўрнида туташ спектр олган бўлардик. Амалда бу ҳолнинг юз бермаслиги ва атомларнинг кескин спек-трал чизиқлар чиқариши, уларнинг классик электродинамикага зид равишда ниҳоятда турғунлигини кўрамыз.

Ўтган бобда кўрдикки, осцилляторларнинг турғун стационар ҳолатларининг мавжудлиги ҳақидаги постулат абсолют қора жисм нурлар чиқаришининг аниқ формуласини келтириб чиқа-риш учун зарурий замин бўлди. Бундай ҳолатнинг равшан таърифини бериш ва уни *ҳар қандай атом системалар* учун умумлаштириш шарафига Нильс Бор (1913 й.) муяссар бўлди. Шу билан бирга биринчи марта классик физиканинг атомлар ички ҳаракатларига татбиқ қилиб бўлмаслиги тўла равшанлик билан кўрсатилди. Нурланиш майдони билан чизиқ осцилля-торлар орасидаги энергия алмашилишга тегишли квантлар ҳа-қидаги фикр Планк томонидан айтилган бўлиб, атом ички дунё-си процессларининг характерли хусусиятларини акс эттирувчи универсал аҳамиятга молик бўлиб қолди.

Бор атом тузилишининг ўзи ривожлантирган квант назарияси асосига қуйидаги икки постулатни қўйди:

I. Атомлар ва атом системалар узоқ вақт фақат муайян ҳолатларда — стационар ҳолатлардагина була олиб, бунда за-

рядли заррачаларнинг ҳаракати мавжудлигига қарамай, улар энергия нурламайдилар ва ютмайдилар. Бу ҳолатларда атом системалар *дискрет* қатор E_1, E_2, \dots, E_n ларни ташкил этадиган энергияларга эга бўлади. Бу ҳолатлар ўз турғунлиги билан характерланади; электромагнит нурланишни ютиш ёки чиқаришда, ёки урилишда энергиянинг ҳар қандай ўзгариши бу ҳолатларнинг биридан бошқасига тўла ўтишдагина (сакрашдагина) юз бериши мумкин.

II. Бир стационар ҳолатдан иккинчи стационар ҳолатга ўтишда атомлар фақат кескин аниқ частотали нурланишни чиқаради ёки ютади. E_m ҳолатдан E_n ҳолатга ўтишда чиқариладиган ёки ютиладиган нурланиш монохроматик бўлиб, унинг ν частотаси қуйидаги шартдан топилади:

$$h\nu = E_m - E_n \quad (90.1)$$

(Борнинг частоталар шarti).

Бу икки постулат классик электродинамика талабларига кескин қарама-қаршидир, чунки биринчи постулатга кўра, атомлар электронларининг тезланишли (масалан, ёпиқ орбиталарда айланиши) ҳаракат қилишларига қарамай, улар нурланмайдилар, иккинчи постулатга кўра, нурланиш частоталари электронлар даврий ҳаракатининг частоталари билан ҳеч қандай умумийликка эга эмаслар.

91- §. Франк ва Герц тажрибалари

Борнинг ўтган параграфда таърифланган квант постулатлари Ж. Франк ва Густав Герц тажрибаларида бевосита экспериментал тасдиқланди; бу тажрибаларни баён қилишга ўтамиз.

Бу тажрибаларнинг ғояси қуйидагича: кўпроқ ёки озроқ сийраклаштирилган газ молекулалари ва атомлари секинлаштирилган электронлар билан бомбардимон қилинади; бунда электронларнинг урилишдан олдинги ва кейинги тезликлари тақсимланишлари текширилади. Агар урилишлар эластик бўлса, урилиш натижасида тезликлар тақсимланиши ўзгармайди ва, аксинча, ноэластик урилишда электронларнинг бир қисми ўзлари урилишган атомларга ўз энергияларини беради ва тезликлар тақсимланиши ўзгаради.

Франк ва Герц тажрибалари натижасида қуйидагилар аниқланди:

1. Электронлар тезликлари бирор критик тезликдан кичик бўлганда тўқнашиш тўла эластик бўлади, яъни электрон атомга ўз энергиясини бермасдан ундан ўз тезлиги йўналишини ўзгартирибгина қайтади.

2. Критик тезликка етган тезликда зарб ноэластик юз беради, яъни электрон ўз энергиясини йўқотади ва уни атомга беради, атом эса натижада катта энергия билан характерландиган бошқа стационар ҳолатга ўтади.

Шундай қилиб, атом ё умуман энергия қабул қилмайди (эластик зарба), ёки агар энергия қабул қилса, фақат икки стационар ҳолат энергияси айирмасига тенг миқдорлардагина қабул қилади.

Бу тажрибалар ва уларнинг натижаларини батафсил баёнига ўтишдан олдин, бу тажрибаларни амалга ошириш билан боғлиқ бўлган баъзи масалаларни қараб чиқамиз. Секин электронларнинг атомлар билан тўқнашишини ўрганиш учун мўлжалланган экспериментал қурилма қўйидаги асосий талабларни қаноатлантириши керак:

1. Электронлар манбаи етарлича кўп миқдорда муайян бошланғич тақсимотли тезликка эга бўлган секин электронлар бериши керак.

2. Ташқаридан берилган тезлаштирувчи потенциал таъсирида бу электронларга олдиндан маълум бўлган исталган тезлик бериш мумкин.

3. Тезлаштирилган электронлар аппаратнинг муайян бир жойида текшириладиган атомлар ёки молекулалар билан тўқнашишлари керак.

Кўрсатилган талабларни қаноатлантирадиган секин электронлар дастасини олиш учун фақат қиздирилган катодлардан фойдаланилади. Бу катодлардан олинадиган кўп сонли электронларни истак бўйича ўзгартирилиши мумкин бўлган катодга берилган V потенциал билан тезлаштирилади. Тинч турган электроннинг V вольт тезлаштирувчи потенциал таъсирида оладиган v (см/сек ларда) тезлиги қўйидаги муносабатдан топилади:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{eV}{300},$$

бунга $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot \text{z}^{-1} = 5,27 \cdot 10^{17} \text{ CGSE} \cdot \text{z}^{-1}$ ни қўйиб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{V}{300}} = 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V} \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Демак, 1 в тезлаштирувчи потенциалда электрон $6 \cdot 10^7$ см/сек га яқин тезлик олади. Бундан „секин электронлар“ термини жуда ҳам нисбий тушунча эканлиги куриниб турибди.

Агар ток кучининг тезлаштирувчи кучланишга боғланишини текшириб, сўнгра абсцисса ўқига тезлаштирувчи потенциални, ордината ўқига эса мос ток кучини қўйиб график тuzилса, типик кўриниши 136-расмда тасвирланган эгри чизик (вольтампер характеристика) ҳосил бўлади. Бу эгри чизикда қўйидаги характерли белгилар диққатни жалб қилади:

1) Бирор потенциалда ток кучи кучланишга боғлиқ бўлмай қолади; бу „тўйиниш токи“ бўлиб, унинг пайдо бўлиши тегishли чўғланиш температурасида вақт бирлиги ичида катоддан чиқаётган ҳамма электроңларнинг анодга етиб келиши билан тушунтирилади.

2) Тезлаштирувчи потенциал нолга тенг бўлганида ток нолга тушиши у ёқда турсин, тескари ишорали потенциалларда ҳам, яъни бирор K потенциалгача бўлган тормозловчи потенциалларда ҳам кучланишга боғлиқ бўлмай тураверади. Тормозловчи потенциалнинг кейинги ортишида ток камаяди ва секин аста нолга тушади.

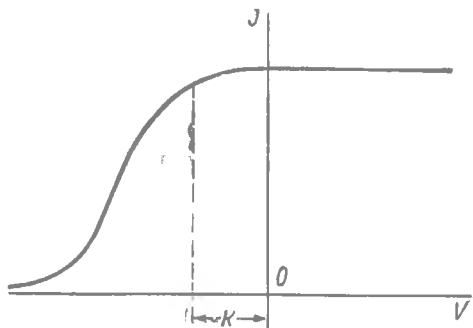
Бу хусусиятларни тушуниш учун аввало қиздирилган катодли трубкаида катод ва анод ҳар доим ҳар хил металлдан ясалганини эътиборга олиш зарур. Шунинг учун ташқи кучланиш бўлмаганида ҳам катод ва анод орасида албатта *контакт* потенциаллари айирмаси мавжуд бўлади. Агар шунда тезлаштирувчи ташқи потенциал нолга тенг бўлса ҳам электронларни бу контакт потенциаллари айирмаси ҳайдайверади. Уни компенсациялаш учун бирор K *тормозловчи* потенциал бериш керак бўлади.

Бу потенциал берилганда ҳам ток кучи бари бир нолга тенг бўлмайди, чунки электронлар катоддан нолга тенг тезлик билан чиқмасдан, Максвелл қонуни бўйича тақсимланган чекли тезликлар билан чиқадилар. Тўсувчи потенциал энг тез электронлар ҳам енголмайдиган қийматга етгандагина ток кучи нолга тенг бўлиб қолади.

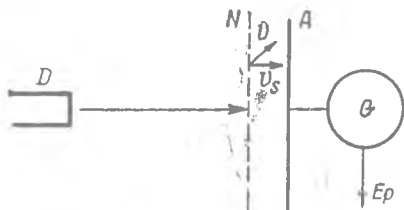
Олдин кўрсатиб ўтилганидек, келгуси параграфларда баён қилинадиган тажрибаларнинг гоёси шундаки, муайян тезланиш олган электронларга кичик босимларда трубкаида киритилувчи газ атомлари билан тўқнашиш имкони берилади.

Бу тўқнашишларнинг характерини, яъни тўқнашишнинг эластик ёки ноэластиклигини билиш учун кўпинча тўқнашишдан кейин электронлар орасидаги тезликлар тақсимотини текшириш зарур бўлиб қолади. Бу эса тўсувчи потенциал методи билан амалга оширилади.

Айтайлик, D иссиқ катод бўлиб (137- расм), унга V тезлаштирувчи потенциал берилган бўлсин. Тезлаштирилган электронлар олдида N тўр жойлашган A пластинкага йўналтирилади. Агар бу тўр $+V_1$ потенциалгача зарядланса, у ҳолда N



136- расм. Чўғланма катодли трубканинг вольтампер характеристикаси.



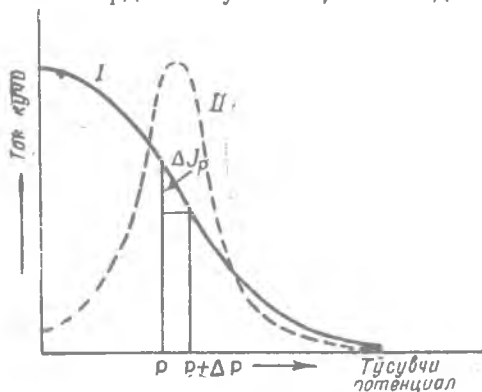
137- расм. Тўсувчи потенциал методининг схемаси.

ва A орасидаги фазода электронлар тормозловчи майдонда ҳаракатланади. Улардан фақат тормозловчи майдондан ўтишга етадиган кинетик энергияга эга бўлганлари A пластинкага етиб келади. A пластинка G гальванометр орқали ерга уланган. Шундай қилиб, A га етиб келувчи электронлар гальванометр кўрсатаётган токни беради. Электроннинг A пластинкага етиб келишига тўсқинлик қилувчи, тормозловчи P потенциал электроннинг v тўла тезлиги билан аниқланмасдан унинг A га тик бўлган v_s ташкил этувчиси билан аниқланишини назарда тутиш лозим (137-расм): A га фақат

$$\frac{1}{2} m v_s^2 > \frac{1}{300} eP \quad (91.1)$$

муносабатни қаноатлантирадиган электронларгина етиб келади.

Агар аста-секин P орттирилса ва шу билан бирга G гальванометрда ток ўлчанса, натижада қандайдир I вольтампер ха-



138-расм. Тўсувчи потенциал методи билан олинган вольтампер характеристика.

рактеристика ҳосил бўлади (138-расм). Бу вольтампер характеристика электронлар ўртасида тезликлар тақсимланишини қуйидаги тарзда ҳисоблаб топишга имкон беради. Агар тормозловчи потенциал P га тенг бўлса, у ҳолда тегишли J_p ток кучи энергиялари P электрон-вольтга тенг ёки ундан катта бўлган электронлар сонига пропорционал бўлади. $P + \Delta P$ тормозловчи

потенциалда $J_p - \Delta J_p$ ток кучи энергиялари $P + \Delta P$ электрон-вольтга тенг ёки ундан катта бўлган электронлар сонига пропорционал бўлади. Демак, $\frac{\Delta J_p}{\Delta P} \Delta P$ катталиқ P ва $P + \Delta P$ энергия интервалига тўғри келган электронлар сонининг ўлчовидир. Шунинг учун P ва $P + dP$ орасидаги энергияга эга бўлган электронлар миқдорини $f(P) dP$ кўринишда ёзсак, бунда $f(P)$ электронларнинг энергия бўйича тақсимланиш функцияси, у ҳолда, равшанки

$$f(P) = \frac{dI}{dP}$$

бўлади. Бундан электронларнинг энергиялари (тезликлари) бўйича тақсимланиш эгри чизиғини топиш учун I вольтампер

характеристикани график дифференциаллаш зарурлиги келиб чиқади (138-расм).

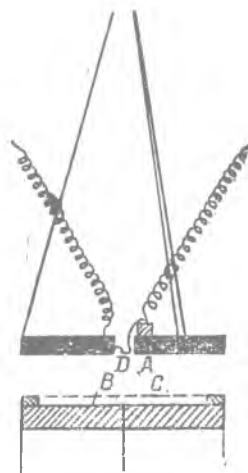
Вольтампер характеристика I ни дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган эгри чизиқ пунктир билан кўрсатилган (138-расмдаги II эгри чизиқ).

92-§. Эластик тўқнашишлар

Даставвал Франк ва Герц агар электронлар энергияси бирор критик катталиқдан ортиқ бўлмаса, у ҳолда электронлар ва атомлар орасидаги тўқнашиш тўла эластик бўлишини кўрсатдилар. Бу демак, тўқнашиш натижасида электрон энергия йўқотмасдан, фақат тезлик йўналишинигина ўзгартиради. Буни исботлаш учун бир нечта тажриба ўтказилган бўлиб, биз улардан фақат биттасини баён қиламиз.

A металл диск марказида тешик бўлиб, унга D чўғланиш толаси жойлаштирилган (139-расм). Дискни исталган газ босими ҳосил қилиниши мумкин бўлган фазода ипларга осилган. Шлиф орқали ишлайдиган махсус мослама ёрдамида дискни вакуумни бузмасдан кўтариш ёки пастга тушириш мумкин. Иккинчи B диск ва C тўр орасида тўсувчи майдон ҳосил қилиниб, унинг ёрдамида электронлар орасидаги тезликлар тақсимоли ўлчанади. Газ босими шундай танланиши керакки, унда фазодаги C тўр ва қабул қиладиган B пластинка орасида электронларнинг мумкин қадар тўқнашиши юз бермасин. 140-расмда $1,3$ мм босимда ва 18 в тезлаштирувчи потенциалда гелийда электронлар энергиясининг тақсимланиши келтирилган. AC масофа 4 мм га тенг бўлганда I эгри чизиқ, масофа 18 мм га тенг бўлганда, II эгри чизиқ ҳосил бўлган. Электронлар иккинчи ҳолда биринчи ҳолдагига нисбатан жуда кўп марта ортиқ тўқнашишига қарамай, ҳар икки эгри чизиқ деярли мос келади. Бундан 18 эв энергияли электронлар ва гелий атомлари орасидаги тўқнашишлар етарлича эластик бўлиши келиб чиқади.

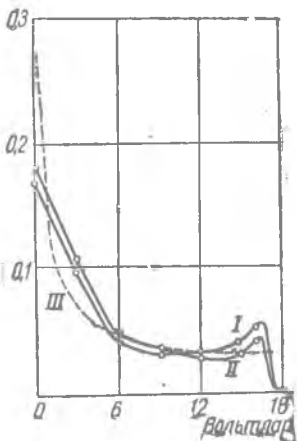
140-расмдаги III пунктир эгри чизиқ назарий эгри чизиқ бўлиб, тўқнашиш натижасида электронлар тезликлари йўналишини шундай ўзгартирадиларки, C тўр тешигидан ўтувчи электронлар ярим сфера соҳасида турли йўналишларга эга бўлади деб ҳисобланган. Бу эгри чизиқнинг экспериментал эгри чизиқларга яқин келиши кўриниб турибди.



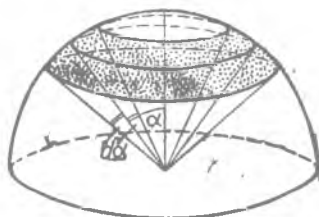
139- расм.

Эгри чизиқларнинг характери қўшимча тушунтириш талаб қилади.

Электронларнинг энергиялар бўйича тақсимот функциясининг нолга тенг энергияда энг катта қийматга эришиши ўзига эътиборни жалб қилади. Бунинг сабаби соф геометрикдир. Юқорида айтилганидек, III назарий эгри чизиқ электронлар тўқнашиши натижасида ўз тезликларини *катталик жиҳатдан* ўзгартмай, C тўр билан анод орасидаги фазода турли-туман йўналишларга эга бўлади, деган фаразда тузилган. Бундан кейин, ясси электродлар ҳолидаги тўсувчи потенциаллар



140- расм.



141- расм.

методида тезликнинг *нормал* ташкил этувчисигина аҳамиятга эга эканлигини эътиборга олиш керак (91-§ га қаранг). Тезликларнинг йўналишлар бўйича тамомила текис тақсимланишида $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$ фазовий бурчак ичига тўғри келувчи электронлар сони (141- расм) қуйидагига тенг бўлади:

$$dN = N_0 d\Omega = 2\pi N_0 \sin \alpha d\alpha.$$

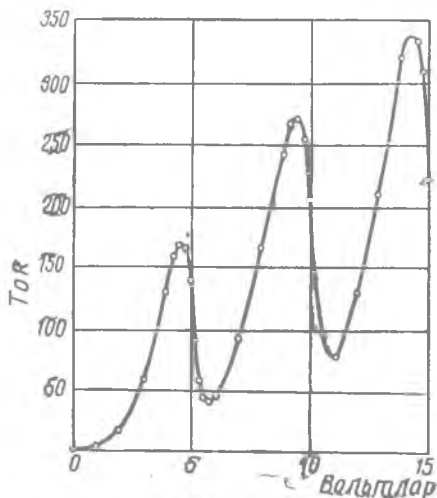
Бундан $\pi/2$ га тенг бўлган α бурчакка энг кўп электронлар тўғри келиши маълум бўлади. Бироқ бундай электронлар учун тезликнинг нормал ташкил этувчиси нолга тенг бўлади. Бу эса ноль энергияга ўтишда эгри чизиқнинг кўтарилишини тушунтиради. 18 эВ дан камроқ энергияда экспериментал эгри чизиқдаги кичикроқ максимум шубҳасиз, тўр орқали ўтган электронларнинг йўналиш бўйича тақсимланиши бутунлай бертартиб эмаслигини кўрсатади: электронларнинг сезиларли қисми нормалга яқин тезлик йўналишларини сақлайди.

93-§. Ноэластик тўқнашишлар. Критик потенциаллар

Ноэластик тўқнашишнинг мавжудлигини исботлаш учун Франк ва Герц қуйидаги қурилмадан фойдаланган. D чўғлиниш толасидан чиққан электронлар толага берилган манфий потенциал билан тезлаштирилади (137- расм). D ва N орасидаги фазода бу электронлар кўп сонли тўқнашишлардан кейин ниҳоят A қабул қилувчи пластинкага тушадилар. A га уланган G гальванометр пластинка токини ўлчайди. A га нисбатан кучсиз мусбат зарядланган (кўпчилик ҳолларда $+0,5$ в потенциалгача) N тўр A пластинканинг олдига бевосита ўрнатилган. Тўрнинг вазифаси ноэластик тўқнашиш натижасида энергиясини деярли бутунлай йўқотган электронларни тутиб олишдан иборат. Тажриба нисбатан юқори босимдаги (1 мм га яқин) симоб буғида ўтказилди ва D толага берилган тезлаштирувчи потенциалга боғлиқ ҳолда A пластинка токи ўлчанди.

Тезлаштирувчи потенциал нолдан бошлаб ортганида дастлаб ток ортди (142- расм), шу билан бирга, ток эгри чизиғи термoeлектрон асбобларнинг одатдаги вольтампер характеристикалари кўринишига эга бўлди. Аммо 4,1 в га яқин потенциалда ток бирдан кескин камайди, кейин яна 9,0 в потенциалгача у яна орта борди, бундан кейин токнинг яна кескин камайиши ҳамда 13,9 в потенциалгача унинг яна ортиши кузатилди. Шундай қилиб, бутун эгри чизиқ бир-биридан 4,9 в масофада турган қатор ўткир максимумлардан иборат эди. Икки қўшни максимум ораси ҳар доим 4,9 в ни (0,1 в гача аниқлик билан) ташкил этиши, биринчи максимумнинг 4,1 в да содир бўлиш факти, ташқаридан берилган потенциалга, максимумлар орасидаги масофани ўзгартирмасдан, бутун эгри чизиқни гўёки чапга силжитадиган контакт потенциаллар айирмасининг қўшилиши билан тушунтирилади.

91-§ да айtilганлар асосида эгри чизиқ максимумларини тушунтириш қийинчилик туғдирмайди. Электрон энергияси 4,9 в га етгунча у симоб атомлари билан эластик тўқнашади ва потенциалнинг ортиши билан ток одатдаги қонун бўйича



142- расм.

ортади. 4,9 в потенциалда тўқнашиш ноэластик бўлиб қолади, электрон симоб атоми билан тўқнашганда ўз энергиясини бутунлай беради. Бу электронлар A пластинкага тушмайдилар, чунки улар $+0,5$ в гача зарядланган N_1 тўрда қайтадан тугиладилар ва пластинканинг токи кескин камаяди.

Агар электронлар энергияси 4,9 в дан сезиларли ортса, у ҳолда бундай электронлар ноэластик тўқнашишда ўз энергияларининг бир қисмини йўқотиб, етарлича ортиқча энергия сақлаб қоладилар ва мусбат зарядланган тўрнинг борлигига қарамай, A пластинкага етиб борадилар — ток яна орта бошлайди.

Биринчи ноэластик тўқнашган электронларнинг энергияси қандай бўлишидан қатъи назар, улар A пластинкага бир хил энергия билан етиб келишларини кўрсатиб ўтамыз. Тўла равшанлик учун катод потенциалини нолга, A пластинка потенциалини $+V_p$ га, критик потенциални V_A га тенг (бу ҳолда $V_A = 4,9$ в) ва N тўр олиб ташланган деб фараз қилайлик. V_p потенциал D дан A гача бўлган оралиқда туша боради. Айтайлик, потенциал V_x бўлган жойда электрон ноэластик тўқнашсин. Электрон бу жойга етгунча eV_x энергия тўплайди, ноэластик тўқнашганда эса eV_A энергия беради. Шундай қилиб, у тўқнашгандан кейин $e(V_x - V_A)$ энергияга эга бўлади. A пластинкагача қолган йўлда потенциаллар айирмаси $V_p - V_x$ га тенг; бу йўлда электрон яна $e(V_p - V_x)$ энергия тўплайди ва бинобарин, A пластинкага етганда қуйидаги энергияга эга бўлади:

$$e(V_x - V_A) + e(V_p - V_x) = e(V_p - V_A).$$

Кўришиб турибдики, бу энергия биринчи ноэластик тўқнашиш ҳаёрида сөдир бўлганига ҳеч ҳам боғлиқ бўлмайди. Агар тезлаштирувчи V_p потенциал етарлича катта, яъни $V_p - V_A > 4,9$ в бўлса, у ҳолда электрон қолган йўлда ($V_p - V_A$ катталигига қараб) бир ёки икки марта ноэластик тўқнашиши мумкин, бу ҳол максимумларнинг даврий такрорланишига сабаб бўлади.

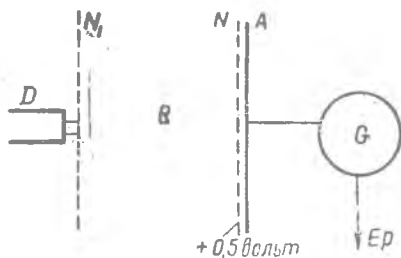
Шундай қилиб, 4,9 эв энергия симоб атоми учун алоҳида аҳамиятга эга бўлишини кўрамыз. Симоб атоми бундан кам энергияни қабул қилмайди, чунки уларни бомбардимонловчи электронларнинг энергияси бундан кам бўлганда тўқнашиш етарлича эластик бўлади; 4,9 эв энергияни тўла қабул қилади. Лекин бу Борнинг биринчи постулатига мос равишда симоб атоми ихтиёрий энергия запасига эга бўлавермасдан, фақат танланган энергия запасларигагина эга бўла олишини кўрсатади. Агар „уйғотилмаган“ симоб атомининг энергия запаси E_1 бўлса, у ҳолда атом энергиясининг бундан кейинги мумкин бўлган қиймати $E_1 + 4,9$ эв бўлади. 4,9 эв тезлаштирувчи потенциал симоб атомининг „биринчи критик потенциали“ ёки

„резонанс потенциали“ деб аталади. Шундай резонанс потенциаллар бошқа атомлар учун ҳам топилган. Масалан, калий учун резонанс потенциали 1,63 в га, натрий учун — 2,12 в га, гелий учун — 21 в га ва ҳ. к. га тенг бўлади.

Ўз-ўзидан тушунарлики, биринчи критик потенциалга тегишли бўлган энергиядан ташқари атомлар яна бошқа юқорироқ поғонали уйғониш энергиясига эга бўлишлари мумкин. Бу янада юқори уйғониш поғоналари электронлар тўқнашиши методи ёрдамида ҳам топиллишлари мумкин. Бироқ бу мақсад учун экспериментал методнинг кўриниши ўзгартирилиши зарур. Бу масалага кейинги параграфларда қайтамиз.

94-§. Экспериментал методикани такомиллаштириш

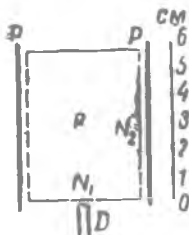
Тавсифланган метод кўп афзалликлари билан бир қаторда жиддий камчиликларга ҳам эга. Хусусан, у зич жойлашган максимумларни ажратишга имкон бермайди, ваҳоланки уйғониш поғоналари яқин жойлашган бундай ҳоллар кам эмас. Ҳисоблашларнинг кўрсатишича, эгри чизиқларнинг шакли битта λ эркин югуриш узунлигида потенциалнинг тушиш катталигига, яъни $\lambda \frac{dV}{dx}$ катталиқка жиддий боғлиқ бўлади. Бу катталиқ қанчалик кичик бўлса, максимумлар қанчалик ўткир бўлса, критик потенциаллар шунчалик аниқ топилади ва яқин ётган уйғониш поғоналари шунчалик яхши ажратилади. Агар танланган шароитда $\lambda \frac{dV}{dx}$ жуда кичик бўлса, у ҳолда юқорироқ уйғониш поғоналарини аниқлаш мумкин бўлмай қолади. Бу камчиликдан қутулиш учун Франк ва Герц методикаларини электронлар энергияни асбобнинг бир қисмида йиғиб, бошқа қисмида тўқнашадиган қилиб ўзгартирдилар. Шу мақсадда чўғланиш толаси D дан электроннинг ўртача эркин югуриш йули узунлигига нисбатан кичикроқ масофада иккинчи N_1 „тўрни“ (143-расм) киритиш етарли бўлди. Бу ҳолда ўз энергияларини $D-N_1$ оралиқда йиғган электронлар, икки металл тўр орасидаги майдондан холи K



143-расм.

фазога кириб, бу ерда газ атомлари билан кўп сонли тўқнашишларга учрайдилар. Электронлар бу фазодан N тўр тирқишлари орқали чиқаётганларида, улардан ўз энергияларини йўқотганлари $+0,5$ в потенциалгача зарядланган шу тўрга тугилиб қолади ва ўтган параграфда тавсифланган манзара такрорланади.

Герц бу методга нозик ўзгартиш киритиб, қуйидаги схемани амалга оширди (144-расм). D чўғлиниш толасидан чиққан электронлар DN_1 фазада тезлаштирилиб, N_1 тўр тирқишларидан ўтганидан кейин N_2 цилиндр тўр билан қўршалган R майдонсиз фазога кирадилар. Бу электронлар кўп сонли тўқнашишлардан кейин N_2 тўр тирқишларидан ўтиб, N_2 билан P туташ металл цилиндр орасидаги фазода диффузияланадилар. Гальванометр ёрдамида цилиндр токи икки марта — N_2 ва P орасида майдон бўлмаганида, ҳамда $+0,2$ в тўсувчи потенциалда ўлчанилди. Биринчи ҳолда P га N_2P фазода диффузияланган барча электронлар келганлар, иккинчи ҳолда эса ноэластик тўқнашиш натижасида энергия йўқотган электронлар „ўтказилмаган“. Токнинг иккала қиймати айирмасини бирламчи ток катталигига бўлинмаси тезлаштирувчи потенциалнинг критик қийматида максимум бериш кераклиги равшандир. Чунки бу ҳолда кўпчилик электронлар ўз энергияларини йўқотадилар, тўсувчи потенциал мавжудлигида ток жуда кичик бўлиб қолади. Бу метод ёрдамида вольтнинг улушлари қадар бир-бирдан узоқда турган максимумларни ажратиш ва заиф кўринувчи максимумларни пайқаш мумкин бўлади.



144- расм. Герц методининг схемаси.

95-§. Уйғонишнинг барча поғоналарини бирданига аниқлаш

Тавсифланган методларни энергиянинг юқори поғоналарини аниқлашда ҳам татбиқ этиш мумкинлигини эслатиб ўтган эдик. Шу мақсадда газ босими мумкин қадар паст бўладиган тажриба шароитини танлаш керак. Бу шунинг учун муҳимки, юқори босимда электроннинг газ атомлари билан тўқнашишлари сони жуда катта бўлади ва бу шароитда электрон биринчи критик потенциалга тенг ёки ундан бир оз каттароқ энергия йиғиши биланоқ бу энергияни атомга узатиш эҳтимоли жуда катта бўлиб қолади. Етарлича паст босимда ва етарлича юқори тезлаштирувчи потенциалда анча юксак стационар ҳолатгача уйғотиш имкони пайдо бўлади.

Бирок тажрибадан бевосита олинган критик потенциаллар қиймати ҳали энергия поғонасининг ҳақиқий қийматини бермайди, чунки энергияни икки карра ёки умуман кўп карра бериш имкони ҳали йўқолмайди. Бу қуйидаги мисолдан равшан кўриниб турибди. Симоб буғларини бевосита кузатилганда критик потенциалларнинг қуйидаги қийматлари олинади: 4,9; 9,8; 11,2; 13,5; 14,7; 16; 17,6; 19,3; 20,2; 21,2 в. Ҳақиқатда эса барча бу потенциаллар иккита асосий: $a = 4,9$ в ва $b = 6,7$ в потенциалларнинг комбинациясидан иборатдир, шу билан бирга

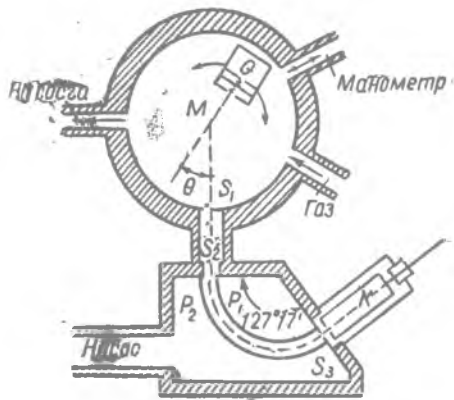
иккинчиси алоҳида бутунлай кузатилмайди. Ҳақиқатан, $9,8 = -2a$; $11,2 \approx a + b$; $13,5 = 2b$; $17,6 \approx a + 2b$; $21,2 = 3a + b$ ва ҳ. к. бўлишини осон кўриш мумкин. Шундай қилиб, олинган максимумларнинг талқини унча енгил иш эмас.

Уша юқори энергия сатҳларини Юэ, Рожанский ва Мак-Милленлар таклиф этган методда анча равшан аниқлаш мумкин. Тажрибанинг ғояси қуйидагидан иборат: урганилаётган атомларнинг энг юқори уйғониш поғонасидан катта энергияли электронларнинг қатъий бир жинсли дастасини жуда сийраклаштирилган газга юборилади. Ноэластик тўқнашишларда турли электронлар ўз энергияларининг атомларнинг мумкин бўлган

уйғониш поғоналарига мос келадиган бир қисмини йўқотадилар. Газ кучли сийраклашганлигидан такрор тўқнашишлар эҳтимоллиги жуда кичикдир. Энди тўқнашган электронлар дастасини тезликлар спектрига ёйилса, бу спектр биратўла барча энергия йўқотишларни, шу билан бирга мумкин бўлган барча энергия поғоналарини беради. Тажриба қуйидагича бажарилади: 50 эВ энергияли электронлар дастаси G „электрон замбарак“ (145-расм) ёрдамида олинди.

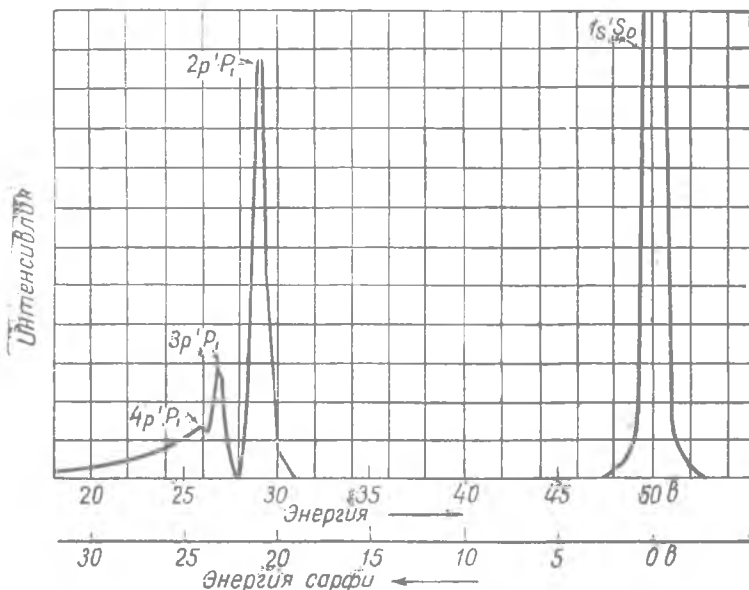
Бу даста ғоят юқори даражада сийраклаштирилган гелий тўлдирилган металл цилиндрининг диаметри бўйлаб йўналтирилди. Цилиндрнинг M марказида тўқнашган электронларгина S_1 ва S_2 тирқиш орқали ўтарди ва бунда улар θ йўналишда оғишарди. Кейинчалик ораларига электронлар кирадиган, цилиндр кўринишида эгилган P_1 ва P_2 иккита пластинка тезликлар „фильтри“ вазифасини ўтарди (9-§ га қаранг); S_2 тирқишдан ўтган электронлар K Фарадей цилиндрига тушиб, унинг зарядини электрометр билан ўлчанарди. P_1P_2 филтлдаги муайян потенциаллар айирмасида у орқали фақат жуда аниқ тезликли электронларгина ўта олганликларидан, P_1P_2 фазода майдон кучланганлигини ўзгартириш билан θ бурчак остида сочилган электронларни энергиялари бўйича тақсимланишини бевосита топиш мумкин бўлади. G электрон замбаракни 145-расмда кўрсатилган стрелкалар йўналишида кўчириш билан θ бурчак ўзгартириларди.

Бошланғич энергияси 50 эВ бўлган электронларнинг гелий атомлари билан тўқнашгандан кейинги шундай йўл билан олинган энергетик спектри 146-расмда келтирилган. Бу спектрда



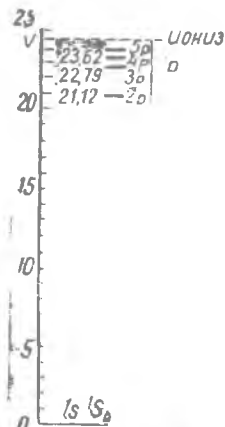
145-расм. Уйғонишнинг барча поғоналарини аниқлаш методининг схемаси.

электронларнинг 50 эв бошланғич энергиясига туғри келадиган максимумдан ташқари 28,8; 27,2; 26,38 эв да ҳам максимумлар бўлиши кўриниб турибди. Вундай электронлар гелий атомлари



146- расм. Бошланғич энергияси 50 эв бўлган электронларнинг гелий атомлари билан тўқнашгандан кейинги тезликлари спектри.

билан нозластик тўқнашганларида электронлар фақат қатъий аниқ энергия улушларини, яъни: $50 - 28,8 = 21,2$; $50 - 27,2 = 22,8$; $50 - 26,4 = 23,6$ эв энергияларни йўқотишлари мумкинлигини кўрамаиз.



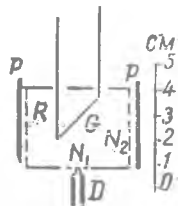
147- расм. Гелий сатҳлари схемаси.

Агар гелий атомлари энергиясини тўқнашгунга қадар (нормал ҳолат) шартли равишда нолга тенг десак ва мумкин бўлган энергетик ҳолатларни тегишлича баландликда жойлашган горизонтал туғри чизиқлар билан тасвирласак, у ҳолда гелий атомининг 147- расмда келтирилган „энергия сатҳлари“ схемаси ҳосил бўлади. Бу схемада кўрсатилган турли сатҳлар энергиялари спектроскопик маълумотларга кўра ҳисобланган. Тўқнашишлар билан қилинган тажрибалардан олинган рақамларга мослик тула қониқарли эканлиги кўриниб турибди. Шундай қилиб, бу тажрибаларни Ворнинг биринчи постулати туғрилигининг ғоят равшан экспериментал тасдиғи дейиш мумкин.

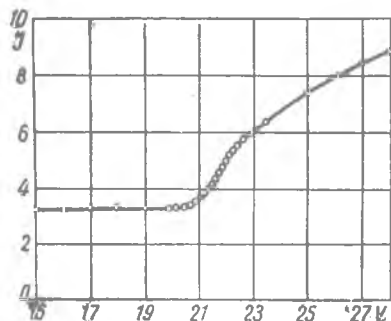
96-§. Ионизацион потенциалларни аниқлаш

Кўрсатилиб ўтилганидек, барча баён этилган методлар ҳар хил стационар ҳолатлардаги энергиялар қийматлари айирмачилиги топишга имкон беради. Масалан, симоб атоми учун $E_2 - E_1$ айирма 4,9 эВ га тенг деб айтишимиз мумкин. Бироқ энергияларнинг $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ қийматлари бу методлар билан топилиши мумкин эмас. Бу қийматларни топиш учун, муайян энергетик ҳолатдаги атомдан электронни бутунлай ажратиб олиш учун қанча энергия сарфланишини аниқлаш етарли эканлиги равшандир. Бошқача айтганда, энергияларнинг E_1, \dots, E_n абсолют қийматларини топиш масаласи, ҳар хил энергетик ҳолатлар учун ионизация потенциалларини аниқлаш масаласига мос келади.

Ионизация потенциалларини аниқлаш учун жуда кўп методлар тавсия этилди. Биз алоҳида соддалиги ва аниқлиги билан ажралиб турадиган Герц методини баён этамиз. 94-§ да баён этилган Герц схемасига кичик қўшимча киритиб, шу асбоб билан ионизация потенциалларини ҳам аниқлаш мумкин. Бу қўшимча R фазо ичида жойлашган G иккинчи чўғланиш толасидан иборат (148-расм). Агар



148-расм.



149-расм.

лик қилувчи фазовий заряд ҳосил бўлади.

Энди R фазога G катоддан тегишли потенциаллар билан тезлаштирилган электронлар етиб келсин. Агар бу электронларнинг энергияси R даги газ атомларини ионлаштиришга етарли бўлса, у ҳолда ҳар бир ионизация актида фазовий зарядни қисман компенсацияловчи, секин ҳаракатланувчи оғир (электронларга нисбатан) мусбат ионлар пайдо бўлади. Шундай ионларнинг пайдо бўлиши натижасида G ва N_2 орасидаги термоэлектрон ток кескин ортади.

Токнинг бу ортиши D ва N_1 орасидаги қайси тезлаштирувчи потенциалда бошланишини аниқлаб, ионизация потенциалини топиш мумкин. 149-расмда мисол тариқасида неонда олинган

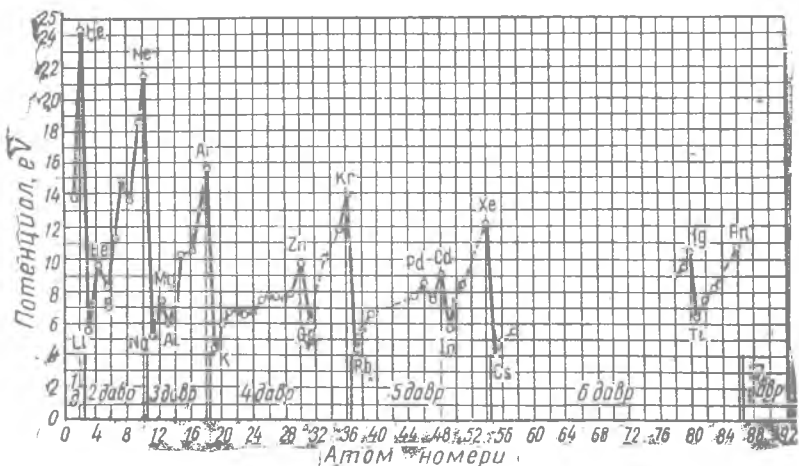
эгри чизиқ келтирилган; 21 σ да токнинг кескин ортиши кўзга бирданига ташланади. Шундай йўл билан даврий системадаги (X жадвалга қаранг) кўпчилик атомлар учун ионизация потенциаллари топилган.

X жадвал

Элементларнинг ионизацион потенциаллари

Атом номери	Элемент	Биринчи ион. потен. электрон-вольт ҳисобида	Атом номери	Элемент	Биринчи ион. потен. электрон-вольт ҳисобида
1	H	13,539	14	Si	7,39
2	He	24,45	15	P	10,3
3	Li	5,371	16	S	10,31
4	Be	9,50	17	Cl	12,96
5	B	8,34	18	Ar	15,70
6	C	11,217	19	K	4,32
7	N	14,474	20	Ca	6,09
8	O	13,565	21	Sc	6,57
9	F	18,6	22	Ti	6,81
10	Ne	21,482	23	V	6,76
11	Na	5,116	24	Cr	6,74
12	Mg	7,61	25	Mn	7,40
13	Al	5,96	26	Fe	7,83

Ионизация потенциаллари атомнинг типик чекка хоссасидир, чунки бунда гап ташқи электронларни узиб олиш устида болади. Қолган барча чекка хоссалар сингари, ионизация потенциаллари атом номерига даврий боғлангандирлар (150-расм).



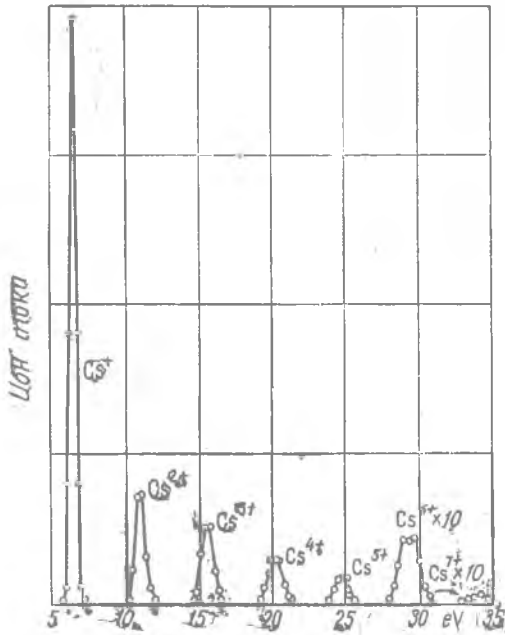
150-расм. Биринчи ионланиш потенциаллари атом номерининг функцияси сифатида.

150-расмдан кўринишича эгри чизиқ максимумларида химиявий жиҳатдан ҳам инерглиги билан характерли бўлган нодир

газлар жойлашган. Аксинча, бир валентли ва химиявий реакцияларга юксак даражада киришадиган ишқорий металллар (Li, Na, K, Rb, Cs) минимал ионизация потенциалларига эгадирлар.

Шу вақтгача биз фақат биринчи ионизация потенциаллари билан, яъни нейтрал атомдан бир электронни ажратиб олиш энергияси билан танишдик. Иккинчи, учинчи ва ҳоказо электронларни ажратиб олиш иши ҳам қизиқиш туғдиради. Тавсифланган қурилмалар мусбат ионларни вужудга келганини билишга имкон берадилар (ионизация бошланиши), бироқ ионларнинг табиатини, хусусан ионлар бир зарядлими ёки кўп зарядлими эканлигини билишга имкон бермайдилар.

Ионизациянинг кетма-кет босқичларини ўрганиш ва мусбат ионларнинг табиатини аниқлаш учун масса-спектрометрик методдан фойдаланилади (15-§ га қаранг). Масса-спектрометр заряднинг массага E/M нис-



151-расм. 700 эВ энергияли электронлар билан ионлаштирилган цезий бугининг спектри.

батини аниқлаши туфайли n зарядли ион $E = ne, \frac{M}{n} \left(\frac{ne}{M} = \frac{n}{M/n} \right)$

массага мос келади. 151-расмда келтирилган эгри чизиқ, 700 эВ энергияли электронлар билан цезий бугини бомбардимон қилинганда юзага келган ионларнинг масса-спектридан иборатдир. Расмда кўриниб турган еттита максимум цезий атомининг кетма-кет еттита ионизация босқичига тўғри келади. Ионизация потенциалларининг тегишли қийматлари қуйидагичадир:

Ион	Cs ⁺	Cs ²⁺	Cs ³⁺	Cs ⁴⁺	Cs ⁵⁺	Cs ⁶⁺	Cs ⁷⁺
Ионизация потенциаллари (eV)	3,9	27,4	62	113	171	275	410

97- §. Уйғотилган атомларнинг нурланиши

Электрон билан тўқнашишда ортиқча энергия олган атом, бу энергияни бирор вақт сақлайди, кейин галаёнлаш таъсирида бу энергияни қайтиб бериб, яна нормал ҳолатга ўтади. Агар газ босими етарлича кичик бўлса, у ҳолда бу қайта ўтишнинг энг аҳтимоллиси ёруғлик кўринишда энергия нурлаб ўтишдир. Бундан Бор постулатларини экспериментал текшириш учун янги йўл топилади. Масалан, симоб атомига кўриб чиқайлик. Унинг биринчи критик потенциали 4,9 эв га тенг, яъни

$$E_2 - E_1 = 4,9 \text{ эв.}$$

Борнинг иккинчи постулатига кўра, нормал ҳолатга ўтишда бу барча энергия монохроматик ёруғликнинг битта кванти кўринишида чиқарилиши керак:

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Бундан λ ни топамиз:

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} \approx 2520 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 2520 \text{ \AA}.$$

Шундай қилиб, агар назария тўғри бўлса, у ҳолда 4,9 эв энергияли электронлар билан бомбардимон қилинаётган симоб буғи фақат битта $\lambda \approx 2520 \text{ \AA}$ ультрабинафша чизиқдан иборат спектр бериши керак. Тажрибада ҳақиқатан битта $\lambda \approx 2537 \text{ \AA}$ ультрабинафша чизиқ пайқалади.

Бу чизиқ *биринчи* уйғотилган ҳолатдан нормал ҳолатга ўтишда вужудга келишига оптик уйғотиш тажрибаларидан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Агар сийраклаштирилган симоб буғини тўлқин узунлиги $\lambda \approx 2537 \text{ \AA}$ бўлган монохроматик ёруғлик билан ёритилса, у ҳолда юқорида айтилганидек, ютувчи атомлар 4,9 эв энергияли ҳолатга ўтишлари керак, ҳамда нормал



4571

152- расм. 3,2 эв энергияли электронлар билан уйғотилган магний буғининг спектри.

ҳолатга қайта ўтишда, агар E_1 ва E_2 орасида ҳеч қандай оралиқ сатҳлар бўлмаса, *худди ўша тўлқин узунликли* битта спектрал чизиқ нурлашлари зарур. Тажриба бу хулосани ҳам тасдиқлайди. Бундай спектрал чизиқларни *резонанс* чизиқлар дейилади, чунки уларнинг тўлқин узунлиги оптик уйғотишда ютиладиган тўлқин узунликка аниқ тенгдир. Демак, резонанс чизиқлар тўлқин узунликларини аниқлаб, биринчи критик потенциални ҳам ҳисоблаб топиш мумкин.

Шунга ўхшаш манзара бошқа бир атомли газ ёки буғларда ҳам кузатилади. 152-расмда мисол тариқасида $3,2 \text{ \AA}$ тезлаштирувчи потенциалда электронлар зарбидан уйғотилаётган магний буғи спектри келтирилган. $3,2 \text{ \AA}$ потенциалда спектр фақат битта 4571 \AA чизиқдан (резонанс потенциал $2,65 \text{ \text{e}}$)



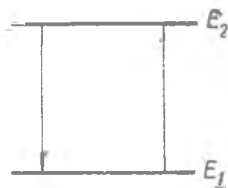
153-расм.

иборат эканлиги кўриниб турибди. 153-расмда $6,5 \text{ \text{e}}$ уйғотувчи потенциалда энди иккита чизиқ: аввалги 4571 \AA чизиқ ва тўлқин узунлиги 2852 \AA га тенг бўлган янги чизиқ вужудга келиши кўриниб турибди. Янада юқорироқ потенциалда ($10 \text{ \text{e}}$) магний буғининг тўла спектри ҳосил қилиниши мумкин.

98- §. Спонтан нурлаиш

Ўтган параграфда энергия сатҳларининг мавжудлигини исботлашдан ва уларни бевосита аниқлаш усулларидан турлича сатҳлар орасидаги ўтишларни кўришга ўтдик. Бу ўтиш процессларининг муҳимлиги туфайли энди уларни назарий жиҳатдан чуқурроқ анализ қилишимиз керак. Бу анализ квант ҳодисаларининг ўзига хос баъзи бир хусусиятларини аниқлашга имкон бериб, кўриш натижаларини ва методларини бевосита татбиқ этиш намунаси сифатида Планк формуласининг Эйнштейн таклиф этган содда ва аниқ келтириб чиқарилишини берамиз.

Шундай қилиб, фазода эркин ва ташқи таъсирсиз турган атомни қарайлик. Атом энергия сатҳларининг дискрет қаторига мос келадиган турлича квант ҳолатларда бўлиши мумкин. Соддалик учун бу ҳолатлардан фақат E_1 ва E_2 энергияли иккитасини қараймиз (154-расм). Бу ҳолатларни қисқача: 1-ҳолат ва 2-ҳолат деб атаймиз.



154-расм.

Агар атом бирор t пайтда уйғотилган 2 ҳолатда бўлса, у ҳолда бундан кейинги dt вақт интервалида ё шу ҳолатда қолавериши ёки у ортиқча $E_2 - E_1$ энергиясини нурланиш кўринишида бериб, қуйи 1 ҳолатга ўтиши мумкин.

Нурланиш билан ўтишлар уйғотилган атом жойлашган ташқи майдоннинг таъсиридан ташқари, ёки шу майдон таъсирида юз бериши мумкинлигига ушбу ва келгуси параграфларда ишонч ҳосил қиламиз. Биринчи ҳолдаги ўтишларни *спонтан* „ўз-ўзидан“ ўтишлар, иккинчи ҳолдагисини *мажбурий* ўтишлар дейилади.

Биз спонтан ўтишларни статистик қарашдан бошлаймиз. Бундай қараш шундан иборатки, *мазкур атомда* t пайтдан кейинги 1 секунд давомида ўтиш содир бўлиши ёки бўлмаслигини *ишонч* билан айта олмаемиз, балки унинг *эҳтимоллигини* кўрсата оламиз. Вақт бирлигида $2 \rightarrow 1$ спонтан ўтишнинг бу эҳтимоллигини A_{21} орқали белгилаймиз. Спонтан ўтиш тасодифий процесс бўлганидан, A_{21} вақтга боғлиқ бўлмайди деб фараз қилинади.

Айтайлик, атомлараро ўзаро таъсирни назарга олмаслик мумкин бўладиган даражада жуда сийрақланган газни ташкил этувчи кўп сонли атомлар тупламига эга бўлайлик. Бу атомлардан N_2 таси t пайтда 2 ҳолатда бўлсин. t ва $t + dt$ вақт оралиғида улардан бир қисми 1 ҳолатга *спонтан* ўтади. Бундай ўтишлар тасодифий бўлганидан *қайси* атомлар ўтганини кўрсата олмаемиз, аммо ўтиш эҳтимоллиги A_{21} ни билган ҳолда, ўртача *қанча* атом ўтишини айта оламиз. dt вақт оралиғида dZ_{21} ўтишлар сони, равшанки, 2 ҳолатда бўлган N_2 атомлар сонига пропорционал бўлади,

$$dZ_{21} = A_{21}N_2dt. \quad (98.1)$$

Бу ўтишларнинг ҳар бирида Борнинг частоталар шартига кўра, $E_2 - E_1 = h\nu$ энергия нурланади, ўша вақт оралиғида

$$h\nu dZ_{21} = A_{21}N_2h\nu dt \quad (98.2)$$

га тенг энергия чиқарилади.

Энди вақт ўтиши билан уйғотилган атомлар сонининг камайиш қонунини ва атомнинг уйғонган ҳолатида ўртача „яшаш вақтини“ топишимиз мумкин.

Равшанки, dt вақт оралиғидаги dZ_{21} ўтишлар сони t пайтда уйғонган ҳолатда бўлган атомлар сонининг камайишига тенгдир, $dZ_{21} = -dN_2$. Шунинг учун (98.1) формула қуйидагини беради:

$$-dN_2 = A_{21}N_2 dt. \quad (98.3)$$

Буни интеграллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$N_2 = N_{20}e^{-A_{21}t}, \quad (98.4)$$

бунда N_{20} катталиқ $t = 0$ пайтда 2 ҳолатда бўлган атомлар сони.

(98.2) формулани эътиборга олиб, вақт бирлигида чиқарилган энергияни, яъни ёруғланиш интенсивлигини **топамиз**:

$$J = A_{21}N_{20}e^{-A_{21}t}h\nu = J_0e^{-A_{21}t}, \quad (98.5)$$

бунда $J_0 = A_{21}N_{20}h\nu$. Шундай қилиб, уйғотилган газнинг ёруғланиши вақт ўтиши билан экспоненциал қонун бўйича камайиши керак.

Энди уйғонган ҳолатда ўртача яшаш вақтини қуйидагича ҳисоблаймиз. t ва $t + dt$ вақт оралиғида $E_2 \rightarrow E_1$ ўтишни ба-

жарувчи атомлар сони $A_{21}N_2dt$ га тенг. Шунинг билан бирга, бу уйғонган ҳолатда t секунд „яшаган“ атомлар сонидир. Шунинг учун уларнинг яшаш вақтлари йиғиндиси $tA_{21}N_2dt$ га тенг, 0 дан ∞ гача вақт оралиғида ўтиш бажарган барча атомларнинг яшаш вақти йиғиндиси $\int_0^{\infty} tA_{21}N_2dt$. Бундан ўртача яшаш вақти τ қуйидагига тенг бўлади:

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} tA_{21}N_2dt}{N_{20}}$$

ёки (98.4) ни эътиборга олсак,

$$\tau = A_{21} \int_0^{\infty} te^{-A_{21}t} dt. \quad (98.6)$$

Буни бўлаклаб интеграллаб ва чегараларни ўрнига қўйиб (97-бетга қаранг) қуйидагини топамиз:

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}. \quad (98.7)$$

(98.7) ни назарга олиб, ҳамда $N_{20}A_{21}h\nu$ ни J_0 орқали белгилаб, интенсивликнинг (98.5) формуласини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$J = J_0 e^{-t/\tau}. \quad (98.8)$$

70- § да чизиқ осциллятор нурланишининг сўнишини классик электродинамика нуқтаи назаридан текшириб, *формал* жиҳатдан (98.8) формулага айнан ўхшаш булган (70.4') формулага келдик. (70.4') формулага сўнишни характерловчи доимий сифатида τ вақт киради, биз уни релаксация вақти деб атадик. Бироқ уйғотилган ҳолатда „ўртача яшаш вақти“ тушунчасига биз берадиган физик маъно, „релаксация вақти“ тушунчасининг маъносидан кескин фарқ қилади. Классик электродинамика нуқтаи назаридан барча нурланувчи диполлар бир вақтнинг ўзида мажбурий тебранишлар ҳам бажарадилар ва амплитуда квадратининг e марта кичрайиши вақтига тенг бўлган τ вақт, шу турдаги барча диполлар учун бирдай.

Бу ерда нурланишни вақтнинг турли пайтида турли уйғонган атомларда содир буладиган мустақил квант ўтишлар мажмуаси деб қараймиз. *Шу пайтда* ўтиш юз берадими ёки йўқми, бу тасодифий ҳодисалар қонунидан аниқланади: уйғонган атомлардан бири жуда қисқа вақт оралиғида нормал ҳолатга қайтиши мумкин, иккинчиси бу ҳолатда узоқ вақт „яшаши“ мумкин. Бироқ оммавий процессларда одатда бўлганидек, бирдай тур атомлар учун ўртача яшаш вақти қатъий аниқ қийматга эга бўлади.

Шуълаланишнинг сўниш қонунини экспериментал текшириш ва уйғонган ҳолатда ўртача яшаш вақтини аниқлаш канал нурларининг шуълаланиши устидаги тажрибаларда Вин томонидан бевосита ўтказилган эди. Водороднинг канал нурлари дастаси кенглиги 0,1—0,25 мм бўлган тирқишдан шундай юқори вакуумли фазога чиқарилар эдики, бунда уйғонган атомлар амалда тўқнашишсиз „шуълаланарди“. Бунда шуълаланувчи ва ўз узунлиги бўйича сўна борувчи канал нурлари дастаси пайдо бўлиб, кварц спектрографнинг тирқиши ўрнида жойлаштирилади. Кварц призма бу дастани спектрга шундай ёр эдики, бундан шуълаланишнинг сўнишини ҳар бир спектрал чизиқ учун алоҳида-алоҳида кузатиш мумкин эди. Агар канал нурлари тезлиги v ва даста бошидан бирор нуқтагача бўлган масофа y бўлса, y ҳолда $t = \frac{y}{v}$ ва $e^{-t/\tau} = e^{-y/v\tau}$ бўлади. Шундай қилиб, τ вақтни канал нурлари дастаси бўйлаб интенсивликнинг камайишини кузатиш орқали аниқлаш мумкин эди.

Бу метод билан водороднинг қизил чизиғи H_{α} ($\lambda = 6562 \text{ \AA}$) (учун $\tau = 1,5 \cdot 10^{-8}$ сек; симобнинг резонанс чизиғи учун $\lambda = 2537 \text{ \AA}$) $\tau = 9,8 \cdot 10^{-8}$ сек олинган эди, бу τ нинг билвосита топилган қийматларига жуда яхши мос келади.

Спонган нурланишнинг статистик характери қуйидаги муҳим хулосага олиб келади: *спонтан нурланиш когерентдир*. Спонтан нурланиш актлари фазовий ажралган турли атомларда вақтнинг турли пайтларида содир бўлганликлари сабабли, турли атомлар чиқарган тўлқин фазалари орасида ҳеч қандай қонуний боғланишлар мавжуд бўлмайди. Шундай қилиб, аниқ бир атом чиқарган тўлқинлар бирор қурилма билан иккита оқимга ажратилганидагина шу тўлқинлар ўзаро интерференцияланади. Ҳар хил атомлар чиқарган тўлқинлар ҳосил қилган интерференция манзаралари ўзаро оддий қўшиладилар. Бу ҳол ҳатто бир манба воситасида интерференция юзага келтириш имконини ҳам чеклайди. Масалан, манба ўлчовининг роли, манба ва интерференцион қурилма орасида тирқишдан фойдаланишнинг зарурлиги ва шунга ўхшашлар юқорида айтилганлар туфайли муҳимдир*.

99- §. Ютиш ва мажбурий нурланиш

Ўтган параграфда қаралган спонтан ўтишлар уйғотилган атомларни ўраган электромагнит майдонга боғлиқ бўлмайди. Шу майдон таъсирида юз берадиган процессларни қарайлик.

E_1 паст энергия сатҳида турган уйғонмаган атомлар атропо-

* Когерентлик тушунчасининг анализи ва уни амалга ошириш шароитларини Г. Ландсбергнинг Оптика китобининг IV бобига қаранг, Гостехиздат, 1957 й.

даги майдондан $E_2 - E_1 = h\nu$ энергияни ютиб, майдон таъсирида уйғонган E_2 ҳолатга ўтадилар. Бу процессларни ҳам спонтан ўтишлардек, статистик қараб чиқамиз. Равшанки, $\nu + d\nu$ частота интервалида ютиш билан ўтиш эҳтимоллиги шу интервалдаги майдон энергияси зичлиги ρ , $d\nu$ га ва шу атом системани уйғотиш эҳтимоллигини характерловчи бирор B_{12} коэффициентга пропорционалдир. Хуллас, ютиш эҳтимоллиги (бирлик интервалда) ρ , B_{12} бўлади.

Майдон таъсирида бўладиган процесслар ютишнинг ўзи билан чегараланмас экан. Агар майдон таъсирини ютиш процесси билан чегараланса, нурланиш формуласини келтириб чиқаришда Планк формуласи ҳосил бўлмасдан Вин формуласи ҳосил бўлишига Эйнштейн биринчи бўлиб эътибор берди. Шунинг учун у майдон таъсирида юз берадиган яна бир тур процессни қараб чиқди: бу процесс *нурланиш билан мажбурий ёки индукцияланган ўтишлардир* (радиофизик адабиётларда бу процессларни кўпинча стимулланган ўтишлар ҳам дейилади). Уйғонмаган атомлар майдон таъсирида фақат ютиш билангина ўтишлар бажариши мумкин, бироқ уйғонган ҳолатдаги (масалан, E_2 сатҳдаги) атомлар Эйнштейннинг кўрсатишича майдондан энергия ютиб юқори энергетик сатҳга ўтиши ёки, аксинча майдон энергиясини қайтиб бериб (масалан, $E_2 - E_1 = h\nu$ энергияни) пастроқ энергия сатҳига қайтиши мумкин. Бу кейинги ўтишлар индукцияланган ўтишлар бўлади; худди шулар индукцияланган нурланишга сабабчи бўлади. Вақт бирлиги ичидаги бу ўтишлар эҳтимоллиги ρ , B_{21} бўлади.

Мажбурий нурланиш ҳақидаги фараз классик ўхшашликка таяниб тасдиқланади: тўлқин майдонидаги классик осциллятор майдон частотаси билан осцилляторнинг хусусий частотаси орасидаги резонансга яқин бўлган турғунлашмаган ҳолатда бўлганида ё майдондан энергия ютиши, ёки майдонга энергия бериши мумкин. Бу икки процессдан қайси бири юз бериши майдон ва осциллятор фазалари орасидаги муносабатга боғлиқдир.

Индукцияланган ўтишларнинг реаллиги ҳозирги вақтда бевосита экспериментал исботланган. Бу масалага яна 101-§ да қайтамыз. У ерда индукцияланган нурланишларнинг баъзи асосий хоссалари қаралади.

100- §. Планк формуласини Эйнштейн усулида келтириб чиқариш

Энди Планк формуласини келтириб чиқарайлик. Бу чиқариш асосида *деталь мувозанат принципи* (баъзан микроскопик қайтувчанлик принципи деб ҳам аталади) ётади. Бу принципга кўра, термодинамик мувозанатда ҳар бир процессга унга аниқ тескари бўлган процессни таққослаш мумкин, бунда вақт бир-

лигида юз бераднган у ҳам бу процесслар сони бир хил бўлиши керак.

Мувозанатда бўлган атомлардан ва нурланишдан иборат системани қарайлик ва аввалгидек, пастки ҳолатда (E_1 энергия) атомлар сони N_1 , юқори ҳолатда (E_2 энергия) эса — N_2 бўлсин. Атомлар биринчи ҳолда $2 \rightarrow 1$ (нурланиш) ўтишлар, иккинчи ҳолда $1 \rightarrow 2$ (ютиш) ўтишлар қилиб атом электромагнит нурланишни нурлайди ва ютади. Деталь мувозанат принципига кўра вақт бирлиги ичидаги $2 \rightarrow 1$ ўтишлар сони $1 \rightarrow 2$ ўтишлар сонига тенг бўлганида чиқариш ва ютиш процесслари орасида статистик мувозанат юзага келади. Чиқариш билан ўтишлар ё спонтан ёки индукцияланган бўлади. Ҳар иккала ўтишларнинг тўла эҳтимоллиги $A_{21} + B_{21}\rho$ бўлади, вақт бирлиги ичидаги ўтишларнинг ўртача сони:

$$dZ_{21} = (A_{21} + B_{21}\rho) N_2.$$

Ютиш билан бўлган ўтишлар эҳтимоллиги $B_{12}\rho$, ва тегишлича вақт бирлиги ичида $1 \rightarrow 2$ ўтишларнинг ўртача сони

$$dZ_{12} = B_{12}\rho N_1.$$

Мувозанат ҳолида $dZ_{21} = dZ_{12}$ бўлганидан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$N_2(A_{21} + B_{21}\rho) = B_{12}\rho N_1. \quad (100.1)$$

Бундан

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}\rho}{A_{21} + B_{21}\rho}. \quad (100.2)$$

Бироқ мувозанат статистик характерга эга бўлганидан, юқори ва пастки ҳолатлардаги атомлар сони нисбати N_2/N_1 Больцман тақсимоги ёрдамида ҳам ифодаланиши мумкин. Агар система $E_1, E_2, \dots, E_m, \dots$ энергиянинг дискрет қаторли ҳолатларида бўла олса, у ҳолда системанинг E_m энергияли ҳолатда бўлиш эҳтимоллиги (Π иловага қаранг)

$$W_m = C' e^{-E_m/kT} \quad (100.3)$$

га тенг бўлади, C' — доимий бўлиб, у энергиянинг мумкин бўлган қийматларидан бирига эга бўлиш эҳтимоллиги бирга тенг (ишончли воқеа) қилиб нормаланади.

Бундан кейин Больцман формуласини янада умумийроқ кўринишда ёзиш мақсадга мувофиқдир. Атом физикасида атом *бир неча* турли ҳолатларда бирдай энергияга эга бўладиган (айниган ҳоллар деб аталадиган) ҳоллар учраб туради (масалан, 113- § га қаранг). Равшанки, бундай ҳолларда энергиянинг турли қийматларига турли *статистик вазн* мос келиб, улар квант физикасида мос энергия сатҳлари сони билан характерланади.

Шунинг учун умумий ҳолда Больцман формуласи қуйидагича ёзилади:

$$W_m = C g_m e^{-E_m/kT}, \quad (100.4)$$

бунда g_m — статистик вазн бўлиб, оддий (айнмаган) энергия сатҳлари ҳолида 1 га тенг.

Шундай қилиб, умумий статистик мулоҳазалардан қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} \quad (100.5)$$

(100.2) ва (100.5) ларни таққослаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{B_{12}\rho_\nu}{A_{21} + B_{21}\rho_\nu} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}}, \quad (100.6)$$

бундан

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}g_2}{B_{12}g_2 e^{(E_2-E_1)/kT} - B_{21}g_2}. \quad (100.6')$$

Бироқ, Бор частоталар шартига кўра $E_2 - E_1 = h\nu$ ва, бинобарин,

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}g_2}{g_1 B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21}g_2}. \quad (100.7)$$

Бу эса мувозанат нурланиш спектрида энергиянинг тақсимланиш формуласидир. A ва B коэффициентларни аниқлаш учун қуйидаги чегаравий шартлардан фойдаланамиз:

1) $T \rightarrow \infty$ да, яъни $h\nu \ll kT$ да зичлик ρ_ν чексизга, яъни (100.7) да махраж нолга интилади. Бу эса қуйидагиний беради:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

ёки

$$B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21}. \quad (100.8)$$

Шу $h\nu \ll kT$ шартда Рэлей—Жинс формуласи ўринли бўлиши керак:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

(100.8) формулани эътиборга олиб (100.7) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\rho_\nu = \frac{g_1 A_{21}}{g_1 B_{12}} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (100.9)$$

$h\nu/kT \ll 1$ да биринчи яқинлашишда қуйидагига эга бўламиз:

$$e^{h\nu/kT} = 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

ва (100.9) қуйидаги кўринишни олади:

$$\rho_\nu = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \cdot \frac{kT}{h\nu}.$$

Рэлей—Жинс формуласи билан таққослаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (100.10)$$

ва (100.9) қуйидаги кўринишни олади:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Бу эса Планк формуласининг ўзгинасидир.

Кейинги мулоҳазаларда умумийликни бузмаган ҳолда $g_2 = g_1 = 1$ дея оламиз, яъни айнамаган оддий сатҳлар орасидаги ўтишларни қараймиз. Эйнштейн коэффициентлари орасида боғланишни ўрнатувчи (100.8) ва (100.10) формулалар бу ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}, \quad B_{12} = B_{21} \quad (100.11)$$

ёки частоталардан тўлқин узунликларга ўтганда

$$A_{21} = \frac{8\pi h}{\lambda^3} B_{21}, \quad B_{21} = B_{12}. \quad (100.12)$$

Мувозанат бўлган шароитда нурланишли ўтишлар сифатида A_{mn} коэффициентлар билан характерланувчи спонтан ўтишларгина ҳисобга олинганда Планк формуласи ўрнига Вин формуласи ҳосил бўлишини юқорида кўрсатган эдик. Ҳақиқатан ҳам (100.7) даги индукцияланган ўтишлар коэффициенти B_{21} ни нолга тенг десак ва (100.11) ни эътиборга олсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT},$$

бу эса Вин формуласидир [(89.7) га солиштиринг]. Лекин биз энди Вин формуласи юқори частоталар соҳасида, яъни кўринувчи ёруғликнинг қисқа тўлқинли томонида ва ультрабинафшада кузатиладиган натижаларни яхши тушунтира олишини биламиз. Бундан мажбурий нурланиш билан бўладиган ўтишлар бу соҳада кам роль ўйнаши, барча нурланишлар амалда спонтан ўтишлар ҳисобига содир бўлишини кўрамиз. Иккинчи томондан, спектрнинг радиочастота (микротўлқин) диапазонида индукцияланган ўтишлар коэффициенти B_{21} кескин ($\sim \lambda^3$) ортиши ҳамда нурланиш зичлиги ρ_ν нинг ўсиши натижасида спонтан ўтишларнинг роли жуда кичик бўлади.

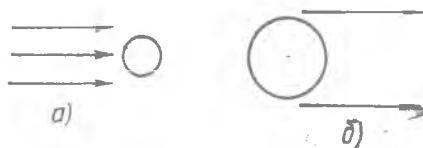
101- §. Индукцияланган нурланишнинг хоссалари

Энди Эйнштейн коэффициентлари B_{12} ва B_{21} лар билан характерланувчи квант ўтишларнинг, яъни ёруғликни (электромагнит тўлқинларни) ютиш ва тегишлича индукцияланган(стимулланган) нурланишлар билан содир бўладиган квант ўтишлар хоссаларини батафсилроқ қараб чиқамиз. Индукцияланган нурланиш кейинги вақтларда катта назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлгани учун биз унга алоҳида эътибор берамиз. Индукцияланган нурланиш радиофизика ва радиотехниканинг янги, тез ривожланаётган соҳаси—квант радиотехникаси асосида ётишини айтиши кифоядир.

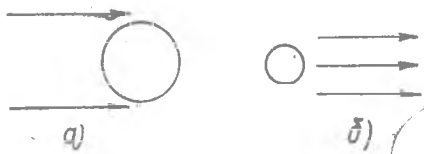
Даставвал электромагнит нурланиш ва модда атомлари орасидаги ўзаро таъсирларнинг B_{mn} коэффициентлар билан характерланувчи турларининг микроскопик манзарасини қараймиз, сўнгра шу коэффициентлар билан ютишнинг макроскопик характеристикаси орасидаги боғланишни ўрнатамиз.

Бу программанинг биринчи ярмини бажаришга киришиш учун квант хоссалар фақат атом системаларда дискрет энергия сатҳларининг мавжудлигидагина содир бўлмасдан, балки нурланишнинг ўзи икки ёқлама табиатга эга бўлишида ошкор бўлади.

Нурланиш тўлқин хоссаларини сақлагани ҳолда ўзини худди $h\nu$ энергияга ва $h\nu/c$ импульсга эга бўлган заррачалар, фотонлар оқими каби тутати. Бу ҳол атом назариясининг элементар баёнидан яхши маълум бўлиб, қуйида тўла асосланади (IX бобга қаранг). Шу нуқтани назардан нурланишнинг уйғотилмаган ва уйғотилган атомлар билан ўзаро таъсирини қараб чиқайлик. 155—156-расмлар ютишдаги ўзаро таъсир схемасини аёний кўрсатадилар, 155-а расмда уйғотилмаган атом ва ўзаро таъсир олдидан учта фотон кўрсатилган; 156-б расмда ўзаро таъсир натижасида атом бир фотонни ютиб (B_{12} коэффициент) $E_1 \rightarrow E_2$ уйғотилган ҳолатга ўтгани, икки фотон эса ўз хоссасини ҳам, ўз йўналишини ҳам ўзгартирмасдан ҳаракатини давом эттириши кўрсатилган. 156-расмда индукцияланган нурланиш схемаси тасвирланган: чапда (156-а расм) $E_2 \rightarrow E_1 = h\nu$ уйғониш энергияли уйғонган атом ва шу $h\nu$ энергияли ўзаро таъсиргача бўлган икки фотон кўрсатилган; ўнг-да (156-б расм) ўзаро таъсирдан кейинги манзара кўрсатилган:



155-расм.



156-расм.

атом тушувчи фотон энергиясидек $h\nu$ энергияни ва $h\nu/c$ импульсни чиқариб нормал ҳолатга ўтди ва учта бирдай фотон параллел йўналишда ўз ҳаракатларини давом эттирадидлар.

Кўриб турибмизки, I ҳол кучсизланишга, яъни нурланишнинг ютилишига мос келади; II ҳолда эса нурланиш интенсивлиги мажбурий ўтишлар ҳисобига ортади ва бунда фотон тушувчи фотон йўналишида нурланиши сабабли, *манфий ютиш* ҳақида гапириш мумкин. Процесснинг батафсил анализи, индукцияланган ўтишларда чиқарилган электромагнит нурланиш тушувчи фотон билан частота жиҳатдангина ўхшаш бўлмай, балки у билан фаза жиҳатдан ҳам узлуксизлигини сақлайди; у тушувчи фотон билан когерентдир.

Бу хосса шунчалик муҳимки, унинг устида тўхталиб ўтиш зарур. Равшанки, ютиш ва мажбурий нурланиш—иккита бири-бирига аниқ тескари процесслардир. Бу хусусан, 155 ва 156-расмлардан тушунарлидир; биринчи процесснинг бошланғич ҳолати иккинчи процесснинг охириги ҳолати билан мос келади ва аксинча. Сўнгра, ютишда ёруғлик интенсивлиги камайиши, бироқ когерентлик хоссалари тўла сақланиши жуда яхши маълумдир. Бу ҳар қандай интерференцион тажрибаларда тушувчи ёруғлик дастасининг ютувчи муҳитдан (масалан, ёруғлик фильтридан) ўтишида интерференцион манзаранинг бузилмаслигидан кўринади. Яна бир мисол: линза олдига ёруғлик фильтри ўрнатилганда тасвирда ҳеч қандай бузилишлар содир бўлмайди. Бундан, ютиш (мусбат) натижасида когерентлик ҳолати ўзгармаслиги келиб чиқади.

Энди ютиш ва мажбурий нурланиш ёки бошқача қилиб айтганда мусбат ва манфий ютиш иккита тўла ўзаро тескари процесслигини эътиборга олсак, у ҳолда ҳодисаларнинг симметрия қонунларига кўра, индукцияланган нурланиш тушувчи билан когерент бўлишини кутишимиз керак бўлади. Шундай қилиб, ёруғлик мажбурий нурланиш қобилиятига эга ва уйғонган атомлари бўлган муҳитдан ўтаётганида ёруғлик оқими ўта борган сари ўз когерентлигини сақлаган ҳолда *узлуксиз интенсивлигини* орттира боради, яъни ҳодиса оқим интенсивлиги камайган мусбат ютиш манзарасига аниқ симметрик ҳолда содир бўлиши керак. Мажбурий нурланишнинг бу хоссаси уни бевосита экспериментал аниқлашда ҳал қилувчи аҳамиятга эга эканлигини кейинчалик кўраимиз.

Энди программаизнинг иккинчи қисмига—ютишнинг оддий „макроскопик“ характеристикаси билан Эйнштейн коэффициентлари B_{12} ва B_{21} ларни боғлашга киришайлик. Айтайлик ν частотали параллел монохроматик электромагнит нурланиш оқимига эга бўлайлик. Δx қалинликдаги модда қатламыдан ўтганида нурланиш интенсивлиги камаяди. Фотометрнинг асосий қонунига (Бугер қонуни) кўра интенсивликнинг кама-

йиши тушувчи интенсивликка ва қатлам қалинлиги элементи Δx га пропорционал бўлади:

$$-\Delta I_v = k_v I_v \Delta x, \quad (101.1)$$

ёки интеграл шаклда,

$$I_v = I_0 e^{-k_v d},$$

бунда d — қатламнинг тўла қалинлиги. Кўпайтувчи k_v (ўлчамлиги $см^{-1}$) ютиш коэффициентидир.

Энди интенсивлик ўзгаришини Эйнштейн коэффициентлари B_{mn} лар орқали ҳисоблаймиз. Пастки сатҳда жойлашган ва кесими $1 см^2$ ва қалинлиги Δx бўлган ҳажмдаги атомлар сони $N_1 \Delta x$ бўлади. Ҳар бир ҳақиқий (мусбат) ютиш акти нурланиш оқимидан битта $h\nu$ квантни олиб кетишини эътиборга олиб, $E_1 \rightarrow E_2$ ўтишлар натижасида интенсивликнинг камайиши қуйидагига тенг бўлишини топамиз:

$$N_1 \cdot x B_{12} \rho_v h\nu.$$

Шунга ўхшаш мулоҳазалар асосида $E_1 \rightarrow E_2$ индукцияланган ўтишлар натижасида оқимга қуйидаги энергия келишини топамиз:

$$N_2 \Delta x B_{21} \rho_v h\nu.$$

Иккала турдаги (мусбат ва манфий) ютишнинг энергетик баланси қуйидагига тенг:

$$-\Delta I_v = (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}) \rho_v h\nu \Delta x. \quad (101.2)$$

c тезлик билан тарқалаётган нурланишнинг $1 см^2$ кесимли параллел дастасидаги ρ_v нурланиш зичлиги қуйидагига тенг:

$$\rho_v = \frac{I_v}{c}.$$

Бу ифодани (101.2) га қўйиб қуйидагини топамиз:

$$-\Delta I_v = \frac{h\nu}{c} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}) I_v \Delta x.$$

Буни (101.1) билан солиштириб, ютиш коэффициенти Эйнштейн коэффициентлари орқали қуйидагича ифодаланишини кўрамиз:

$$k_v = \frac{h\nu}{c} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}).$$

$g_1 = g_2$ да $B_{21} = B_{12}$ бўлишини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$k_v = \frac{h\nu}{c} N_1 B_{12} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

Больцман тақсимотига кўра мувозанатда

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-h\nu/kT}$$

бўлади ва

$$k_\nu = \frac{h\nu}{c} N_1 B_{12} \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right)$$

ифодани топамиз. Қавс ичидаги иккинчи ҳад бирдан кичик; масалан,

$$\lambda = 4000 \text{ \AA} \text{ учун } \nu = 7,5 \cdot 10^{15} \text{ ва } T = 300^\circ \text{ К да:}$$

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 7,5 \cdot 10^{15}}{1,4 \cdot 10^{-16} \cdot 300} = 1,2 \cdot 10^3,$$

$e^{-1,2 \cdot 10^3}$ — жуда кичик катталиқ. Бу ҳол доимо спектрнинг кўринадиган қисмида ва унча юқори бўлмаган температураларда ўринли эканлигини осон кўриш мумкин. Шунинг учун мувозанат бўлганида ҳар доим, $k_\nu > 0$, яъни ютишнинг йиғинди коэффиценти ҳар доим мусбат бўлади ёки бошқача айтганда мусбат абсорбция актлари манфий абсорбция актларидан устунроқ бўлади. Бунинг асосий сабаби мувозанат ҳолида нормал сатҳдаги атомлар сони (Больцман тақсимоти) ҳар доим уйғонган атомлар сонидан ортиқ бўлишидир.

Манфий ютишли муҳит вужудга келтириш учун ва шу тарзда индукцияланган ўтишларни экспериментал қайд қилиш учун уйғонган атомлар сони нормал ҳолатдаги атомлар сонидан ортиқ бўладиган *мувозанатсиз* ҳолатни юзага келтириш зарур. Бундай мувозанатсиз ҳолатни қуйидаги сабабларга кўра, кўпинча шартли равишда манфий температурали ҳолат дейилади. Больцман тақсимотидан, аввалгидек $g_2 = g_1$ деб олиб (бу натижанинг умумийлигини бузмайди), қуйидагини топамиз:

$$T = - \frac{E_2 - E_1}{k \ln \left(\frac{N_2}{N_1} \right)},$$

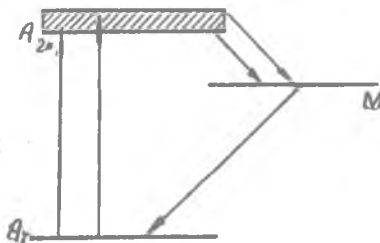
шартга кўра $E_2 > E_1$ ҳамда $N_2/N_1 < 1$ бўлганидан, худди кутилганидек $T > 0$ бўлади (мувозанат ҳолат), бироқ $N_2/N_1 > 1$ ҳолда $T < 0$ температура манфий бўлади. Мувозанатсиз ҳолатларга температура тушунчасини қўллаб булмаса ҳам, амалда қулайлиги туфайли „манфий температура“ термини кенг ишлатилади. Бу терминга атомларнинг энергия сатҳлари бўйича тескари тақсимланиш ҳолатининг синоними сифатида қараш керак.

Манфий температурали муҳит ҳосил қилишнинг бир қатор усуллари бор. Шу мақсадда бирор пастроқ сатҳга нисбатан (энг паст сатҳга нисбатан бўлиши шарт эмас) юқорироқ энергия сатҳда сунъий йўл билан ортиқча атомлар ҳосил қилишга, ёки, аксинча, юқори сатҳга нисбатан пастки сатҳдаги атомларни сунъий сийраклашга ҳаракат қилинади. Равшанки, ҳар иккала ҳолда ҳам атомларнинг сатҳларда тескари тақсимланиши ва демак, сатҳларнинг танланган жуфтлари учун „манфий температура“ юзага келади.

Индукцияланган нурланишнинг манфий температура шароитида энг оддий намоён бўлиши манфий ютишнинг вужудга келишидан, яъни бирдан катта бўлган шаффофлик коэффициентининг вужудга келишидан иборатдир. Шундай йўл билан 1939 йилда совет физиги В. А. Фабрикант баъзи бир махсус шароитларда электр разрядида уйғотилган симоб буғи спектрининг кўринадиган қисмида индукцияланган ўтишларни пайқаган эди. У биринчи бўлиб молекуляр кучайтириш принципини таърифлаган эди.

102-§. Ёруғлик генераторлари

Кейинги вақтларда мажбурий ўтишлар амалда кенг қўлланила бошланди, улар асосида радиотўлқинларнинг сантиметрли диапазонда молекуляр генераторлар ва кучайтиргичлар деб аталадиган асбоблар яратилди (СССР да Басов ва Прохоров, АҚШ да ўз илмий ходимлари билан Таунс). Энг сўнгги пайтларда (1960 й.) мажбурий ўтишлар асосида спектрнинг кўринадиган ва яқин инфрақизил қисмида „ёруғлик генераторлари“ яратишга катта эътибор берилди. Масалан, ёқут кристали шундай ёруғлик генераторидир. Ёқут химиявий табиати жиҳатдан, кристалл панжарасида бир қанча Al атомлари хромнинг уч валентли ионлари Cr^{3+} билан алмаштирилган алюминий оксидидан иборатдир. Ёруғлик ютилганда хром ионлари A_1 нормал сатҳдан A_2 уйғонган сатҳга ўтади (157-рasm). Кейингиси сатҳ бўлмай, етарлича кенг полосадир. Шу полоса чегарасида уйғонган хром ионлари қисман бирор M сатҳга ўтиб, бунда улар бир неча мил-



157-рasm.

лисекунд, яъни уйғонган ҳолатнинг нормал яшаш вақтидан ($10^{-7} - 10^{-8}$ сек) 4—5 баробар вақт миқдориде тутилиб қоладилар. Шунга кўра M сатҳда (уни метастабил сатҳ дейилади) кўпгина уйғонган ионлар тўпланиб қолади. Уйғонган ионлар концентрацияси ҳамма ионлар сонининг 50% ига етмагунча ионларнинг A_1 нормал сатҳга қайтиши ёқутнинг кўрсатилган бир неча миллисекунд ўртача давомликда одатдагича қизил флуоресценцияси билан бирга содир бўлади. Бироқ уйғонган ионлар сони нормал сатҳдаги ионлар сонидан ортиқ бўлиб қолганда, манфий температурали муҳит вужудга келади ва бунинг натижасида мажбурий ўтишлар ҳисобига ёруғланиш имконияти туғилади.

Бу ҳодисани кузатиш учун узунлиги бир неча сантиметр бўлган, оптик силлиқланган, учки ёқлари қатъий параллел бўлгани ҳолда кумуш суви югуртирилган (улардан бири ярим шаффоф қилинган) стержень ёки призма кўринишидаги ёқут кристалл олинади. Мажбурий ўтиш процесслари бошланиши учун спонтан ўтиш йўли билан озод қилинган бир неча фотоннинг чиқиши етарлидир; шу билан бирга, чиққан фотонлар ўз навбатида янги мажбурий ўтишларни вужудга келтиради ва процесс кўчкисимон ривожлана боради. Бу ҳолга ўсиб борувчи кўчкисимон қарама-қарши учки ёқлардан кўп каррали қайтиши сабаб бўлади. Бунда кўчки кристалл ичида унинг ўқиға параллел ҳолда у ёқ, бу ёққа тарқалиб ўса боради, тасодифан бошқа йўналишда чиққан фотонлар кристаллнинг ён сиртидан чиқиб кетади. Фотонлар кўчкисимон интенсивлиги бирор критик катталиққа етганида, унинг бир қисми ярим шаффоф томон орқали кристаллдан чиқади ва деярли қатъий параллел тор даста кўринишида тарқалади.

Бу нурланиш қатор жуда муҳим хоссаларга эға. Биринчидан, дастанинг фазовий бурчаги шунчалик кичикки, кўзгу ёки линза кўринишидаги оптик воситаларсиз даста ўзининг параллеллигини сақлайди, — унинг бир километрда ёйилиши бир метрга яқин бўлади*). Агар дастани астрономик трубадан тескари йўналишда утказиб бир оз қисилса, ҳисоблашларнинг кўрсатишича, ойға диаметри 3 км бўлган доғни проекциялаш мумкин бўлади. Йўналган дастада энергия оқими $I, d\Omega$ га ($d\Omega$ — дастанинг ёйилиш фазовий бурчаги) пропорционал, $d\Omega$ нинг жуда кичик бўлишлиги туфайли, дастанинг равшанлиги ғоят катта бўлади. Шунинг учун ҳам ойнинг кичик қисмларини ердан кўринадиган қилиб ёритиш проекти жуда реалдир. Ёқут „ёруғлик генератори“ да кесим юзи 1 см² дан кичикроқ кристаллдан 10⁴ вт қувват тартибида чақнаш чиқади. Агар уни қисқа фокуси линза ёрдамида йиғилса, ҳосил бўладиган доғда қуёш ёруғлигини йиғиш билан ҳосил қилинадиган қувватдан мингларча марта ортиқ бўлган қувват вужудга келади.

Ушбу ёруғлик генератори нурланишининг муҳим хоссаси бошқа ҳеч бир усул билан эришиб бўлмайдиган монохроматиклигидир. Мажбурий нурланиш резонанс процесс бўлганидан, у частота эгри чизигининг максимумида энг катта интенсивлик билан уйғотилади. Шунинг учун интенсивлигининг кўчкисимон ортиши билан бирга частоталар интервалининг сиқилиш процесси ҳам юз беради. Натижада спектрал кенглиги спек-

*) Таққослаш мақсадида, диаметри икки метрга яқин бўлган прожектор кўзгуси ҳосил қилган дастанинг тарқалиши $d\Omega = 1^\circ$ бўлишини, бу 1 км масофадаги 17 м диаметрли дастага тўғри келишини кўрсатиш мумкин.

трал чизиқнинг табиий кенглигидан анча кичик бўлган монохроматик нурланиш содир бўлади (251-бетга қаранг). Бу жиҳатдан 10^5 мГц ташувчи частотада спектрал кенглиги бир килогерцдан кичикроқ бўлган инфрақизил нурланиш берадиган газ (гелий+неон) генератор жуда қулайдир.

Индукцияланган нурланишнинг бошқа бир муҳим хоссаси унинг когерентлигидир. Олдин курсатилганидек, чўзиқ манбада спонтан нурланиш фазода тасодикий тақсимланган нуқталарда ва ўзаро боғланмаган тасодикий вақт пайтларида содир бўлади. Шунинг учун у когерент эмас: турли манбалардан чиққан ёруғликларгина эмас, балки битта манбанинг ҳар хил нуқталаридан чиққан ёруғлик ҳам ўзаро интерференциялашмайди. Шундай нурланиш билан интерференция вужудга келтириш учун кичик улчовли манбадан фойдаланиш керак, бундай манбадан чиққан бошланғич дастани икки ёки бир нечтага ажратилса, кейин улар ўзаро интерференциялашади. Бунда амалда битта атомдан чиққан тулқинлар оқими интерференциялашади ва турли интерференцион манзаралар ўзаро қўшилади.



158- расм.

Энг кўргазмали интерференцион тажриба Юнгнинг икки тирқиш билан ўтказган тажрибасидир: узоқдаги кичик ўлчовли манбадан (ёки узоқдаги манба ёритаётган тирқишдан) чиққан ёруғлик икки параллел тирқишдан ўтиб, узоқдаги экранда навбатлашувчи ёруғ ва қора полосалар кетма-кетлигидан иборат бўлган типик интерференцион манзарани беради. Бироқ, ёруғлик манбаи жуда катта ёки экранга жуда яқин жойлашган бўлса, бу тажрибада интерференцион манзара ҳосил бўлмайди.

Ёқут ёки газ „ёруғлик генератори“ нинг нурланиши бутунлай фазовий когерентдир. Шунинг учун, агар индукцияланган нурланиш ташқарига чиқадиган ярим қумушланган сиртда иккита тирқиш қилинса, интерференция тўсқинликсиз ҳосил бўлади. Бу эса, кристаллдан чиқаётган тўлқин ҳақиқатдан ясси фронтга эгаллигини ва тўлқиннинг фазовий ажратилган турли нуқталари когерент эканлигини кўрсатади. 158-расм нурлатгич билан ўтказилган Юнг тажрибасининг схемасини кўрсатади. Расмнинг ўнг томонида интерференцион манзаранинг фотосурати келтирилган.

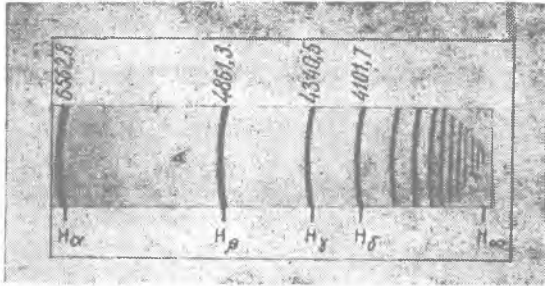
Индукцияланган нурланишнинг ажойиб хоссалари яқин вақт ичида шубҳасиз амалда кенг қўлланилиши мумкин.

VIII б о б

ВОДОРОД АТОМИНИНГ СПЕКТРАЛ СЕРИЯЛАРИ ВА ЭНЕРГИЯ САТҲЛАРИ

103-§ Вальмер серияси

Водород атомининг спектрал чизиқлари ўз кетма-кетлигида оддий қонуниятлар борлигини кўрсатади. 159-расмда водород атоми чиқариш спектрининг лаборатория шароитида олинган фотосурати келтирилган, 160-расмда эса ўша спектрнинг (аб-



159-расм. Атомар водороднинг чиқариш спектридаги Вальмер серияси: H_α , H_β , H_γ , H_δ , — кўринувчи чизиқлар; H_∞ — серия чегараси.

сорбцияда) с Таугі юлдузидан олинган фотосурати келтирилган. Спектрал чизиқлар орасида қонуний боғланишлар мавжудлиги ҳар иккала расмдан кўзга яққол ташланиб турибди.



160-расм. Ютилиш спектрида Вальмер серияси (с Таугі юлдузи), H_γ дан бошлаб серия чегарасигача.

Ҳақиқатан ҳам, 1885 йилнинг ўзида Бальмер спектрнинг кўринадиган қисмида ётувчи ва H_α , H_β , H_γ , H_δ символ билан белгиланадиган тўртта чизиқ тўлқин узунлиги (159-расм)

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (103. 1)$$

эмпирик формула билан жуда аниқ ифодаланиши мумкинлигини кўрсатди, бу ерда n ўрнига 3,4,5,6, бутун сонларни қўйиш керак ва $B = 3645,6 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 3645,6 \text{ \AA}$ га тенг бўлган эмпирик доний. Бу формулага асосан ҳисобланган тўлқин узунликлар, Бальмерга маълум бўлган бевосита ўлчашлар натижаларига қанчалик мос келиши XI жадвалдан кўриниб турибди.

XI жадвал

Чизиқ	Бальмер формуласи буйича ҳисобланган (\AA)	Ангстрем ўлчашлари буйича (\AA)	Фарқи (\AA)
H_α	6562,08	6562,10	+ 0,02
H_β	4860,80	4860,74	- 0,06
H_γ	4340,00	4340,10	+ 0,10
H_δ	4101,30	4101,20	- 0,10

Тўртта кўринадиган чизиқлардан ташқари ўша вақтда ердаги манбаларда бешта ва оқ юлдузлар спектрида ўнта ультрабинафша чизиқ маълум эди. Бальмер формуласига яна кейинги $n = 7,8, \dots$ бутун сонларни қўйиб, бу ультрабинафша чизиқларнинг тўлқин узунликларини ҳам ҳосил қилиш мумкин эди. Бироқ бу чизиқлар учун ҳисобланган ва қузатилган тўлқин узунликларнинг мос келиши анча ёмонлашди, бу ҳол асосан ўша вақтдаги бу чизиқларни ўлчаш ноаниқлиги билан боғлиқдир.

Агар бу формулани ҳозирги вақтда одатда фойдаланиладиган кўринишда ёзсак, Бальмер формуласи ифодаляйдиган қонуният жуда аён бўлиб қолади. Шу мақсадда бу формулани тўлқин узунликни ҳисоблаш учун қўлланиладиган кўринишдан частота ёки тўлқин сонини ҳисоблаш учун қўлланиладиган кўринишга ўтказиш зарур. Маълум формулага кўра, частота (1 секундда тебранишлар сони) қўйидаги кўринишда ифодаланади:

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} \text{ сек}^{-1},$$

бунда c — бўшлиқдаги ёруғлик тезлиги ва λ_0 — бўшлиқдаги тўлқин узунлик. Тўлқин узунликнинг тескарисини ёки 1 см га жойлашган тўлқинлар сони тўлқин сони бўлади:

$$\nu = \frac{1}{\lambda_0} \text{ см}^{-1}.$$

Спектроскопияда кўпроқ тўлқин сонлардан ($см^{-1}$ ларда) фойдаланилади, чунки ёруғлик тезлиги ва демак, частота анча кичик аниқликда топилгани ҳолда, тўлқин узунликлар ва демак, тўлқин сонлар ҳозирги вақтда жуда катта аниқликда топилади.

(103. 1) дан

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B} \frac{n^2 - 4}{n^2} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (103. 2)$$

ни ҳосил қиламиз.

Доимий $4/B$ ни R орқали (бу машҳур швед спектроскопи Ридберг фамилиясининг бош ҳарфи бўлиб, доимийни унинг номи билан юритилади) белгилаб, (103. 2) ни қуйидаги кўринишда қайта ёзамиз:

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots). \quad (103. 3)$$

Бу Бальмер формуласининг одатдаги кўринишидир.

(103. 3) формуладан n нинг ортиши билан қушни чизиқларнинг тўлқин сонлари орасидаги фарқ камайиши ва $n = \infty$ да $\nu = R/2^2$ доимий қиймат ҳосил бўлиши кўриниб турибди. Шундай қилиб, чизиқлар $\nu = R/4$ $см^{-1}$ чегаравий ҳолатга интилиб, аста-секин яқинлашишлари керак. Бу 159 ва 160-расмда келтирилган фотосуратларда жуда яхши кўриниб турибди; 159-расмда серия лимитининг назарий ҳолати H_{∞} символ билан кўрсатилган. Бундан ташқари, кузатишлар шуни кўрсатадики, чизиқларнинг n номери ортиши билан қонуний равишда унинг интенсивлиги камаё боради. Шундай қилиб,



161-расм. Спектрал сериянинг умумий схемаси.

(103. 3) формула ўз ичига олган спектрал чизиқларнинг жойлашиши схематик кўрсатилса ва шартли равишда уларнинг интенсивлигини чизиқлар узунлиги билан тасвирласак, у ҳолда 161-расмда кўрсатилган манзара ҳосил бўлади.

Ўзининг кетма-кетлигида ва интенсивлигининг тақсимланишида қонуният ошкор қиладиган ва 161-расмда схематик келтирилган спектрал чизиқлар тўплами одатда *спектрал серия* дейилади. $n \rightarrow \infty$ яқинида чизиқлар зичлашадиган чегаравий тўлқин сони *сериянинг чегараси* дейилади.

Ёр манбалари ёрдамида водород атомидан кўп миқдорда чизиқлар ҳосил қилиш, турли экспериментал қийинчиликлар билан боғлиқдир. Шунинг учун фақат 1920 йилдагина Вуд,

Бальмер серияси ҳадларининг 22 тасининг фотосуратини олишга ва 20 тасини ўлчашга муяссар бўлди. Бу сериянинг энг кўп чизиқларини Қуёш хромосфераси ва протуберанцлари (37-ҳадгача) спектрида ўлчаш мумкин.

104-§. Лайман, Пашен ва бошқалар сериялари. Бальмернинг умумлашган формуласи

Водород атомининг спектрида Бальмер серияси билан бир қаторда, худди шу формулага ўхшаш формула билан ифодаланадиган қатор бошқа сериялар ҳам топилди. Жумладан, Лайман спектрнинг чекка ультрабинафша қисмида

$$\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (104. 1)$$

терия кашф қилди. Инфрақизил қисмида учта серия топилди: Пашен серияси

$$\nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, \dots), \quad (104. 2)$$

Брәкет серияси

$$\nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, \dots), \quad (104. 3)$$

Пфунд серияси

$$\nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, \dots), \quad (104. 4)$$

Бундан, водород атомининг барча маълум серияларини умумий формула

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (104. 5)$$

билан ифодалаш мумкин эканлиги кўриниб турибди, бунда m ҳар бир серияда доимий қийматларга ($m = 1, 2, 3, 4, 5$) эга, n эса, m дан бир бирлик ортиқ сон билан бошланадиган бутун сонлар қатори. (104. 5) формула Бальмернинг умумлашган формуласи дейилади.

XII жадвалда водород атомининг ҳар хил серияларида бевосита ҳисобланган ва ўлчанган (Бальмер серияси учуң ўлчанган 36 ҳадидан 10 та ҳади келтирилган) тўлқин узунликлар келтирилган. Бу жадвал спектрал сериялар формулалари билан тўлқин узунликларни қанчалик аниқлик билан ҳисоблаш мумкинлигини билишга имкон беради.

Водород атоми серияларининг обзори

XII жа двал

Лайман серияси $\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$			
n	$\lambda_{\text{вак}}$ (кузат.)	$\lambda_{\text{вак}}$ (ҳисоб.)	ν (ҳисоб.)
2	1215,7	1215,68	82258,31
3	1026,0	1025,73	97491,36
4	972,7	972,54	102822,94
Бальмер серияси $\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$			
n	$\lambda_{\text{ҳаво}}$ (кузат.)	$\lambda_{\text{вак}}$ (ҳисоб.)	ν (ҳисоб.)
3	6562,8473	6562,793	15233,216
4	6562,7110	4861,327	20564,793
	4861,3578		
5	4861,2800	4340,466	23032,543
	4340,497		
6	4340,429	4101,738	25181,055
	4101,7346		
7	3970,0740	3970,075	24373,343
8	3889,0575	3889,052	25705,957
9	3835,397	3835,387	26065,61
10	3797,910	3797,900	26322,90
Пашен серияси $\nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$			
n	$\lambda_{\text{ҳаво}}$ (кузат.)	$\lambda_{\text{ҳаво}}$ (ҳисоб.)	ν (ҳисоб.)
4	18751,3	18751,1	5331,58
5	12817,6	12818,1	7799,33
6	1,09 μ	10938,1	9139,84
7	10049,8	10049,4	9948,13
8	9546,2	9546,0	10472,74
9	9229,7	9229,1	10832,40
10	9015,3	9014,9	11089,69
11	8863,4	8862,9	11280,03
Брекет серияси $\nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$			
n	$\lambda_{\text{ҳаво}}$ (кузат.)	$\lambda_{\text{ҳаво}}$ (ҳисоб.)	ν (ҳисоб.)
5	4,05 μ	40510,4	2467,75
6	2,63 μ	26251,6	3808,26
Пфунд серияси $\nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$			
n	λ (кузат.)	λ (ҳисоб.)	ν (ҳисоб.)
6	7,40 μ	74578,0	1340,512

105-§. Спектрал термлар. Комбинацион принцип

(104. 1) — (104. 4) формулаларни бир-бирига таққослаганда бу формулалардан ҳар бирининг биринчи доимий ҳади бошқасида ўзгарувчан ҳадлардан бири бўлишини осон пайқаш мумкин. Масалан, Пашен серияси формуласидаги $R/3^2$ доимий ҳад, Бальмер серияси формуласида биринчи ўзгарувчан ҳад бўлади ва Лайман серияси формуласи учун иккинчи ўзгарувчан ҳад бўлади; Бальмер сериясининг доимий ҳади ўз навбатида Лайман серияси формуласида ўзгарувчан ҳадлардан бири бўлиб қолади ва ҳ. к. Бу ҳол Бальмернинг умумлашган формуласи (104. 5) нинг ёзилишида айниқса яққол кўриниб, у водород спектрининг исталган спектрал чизиғи тўлқин сонини m нинг қандайдир иккита бутун қийматида R/m^2 хилдаги иккита ҳаднинг айирмаси сифатида келтириш мумкинлигини кўрсатади. *Комбинацион принципнинг* ҳозирги замон таърифи мана шундан иборатдир.

$$T(m) = \frac{R}{m^2}, \quad T(n) = \frac{R}{n^2} \quad (105. 1)$$

белгилашлар киритиб.

(104. 5) ни бутун сонлар икки функциясининг айирмаси кўринишида ёзишимиз мумкин

$$\nu = T(m) - T(n). \quad (105. 2)$$

$T(n)$, $T(m)$ сонлар *спектрал термлар* ёки содда қилиб термлар деб аталади. Водород атоми учун барча термлар системаси битта умумий формуладан ҳосил бўлади.

$$T = \frac{R}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (105. 3)$$

(105. 3) дан, муайян атом учун термлар системасини билган ҳолда, исталган спектрал чизиқнинг тўлқин сонини шу системанинг иккита ҳади айирмаси ҳолида топишимиз мумкинлиги келиб чиқади.

Комбинацион принципга бошқачароқ таъриф беришимиз мумкин: битта сериянинг икки спектрал чизиғининг тўлқин сонлари маълум бўлса, у ҳолда уларнинг айирмаси шу атомга тегишли бирор учинчи спектрал чизиқнинг ҳам тўлқин сони бўлади. Айтайлик, Лайман сериясининг икки чизиғи тўлқин сонлари берилган бўлсин:

$$\nu_1 = T_1 - T_2 \quad \text{ва} \quad \nu_2 = T_1 - T_3.$$

У ҳолда $\nu_2 - \nu_1$ айирма Бальмер серияси биринчи чизиғининг тўлқин сони бўлади:

$$\nu_2 - \nu_1 = T_2 - T_3 \quad \text{ва ҳ. к.}$$

Ҳақиқатан ҳам, XII жадвалнинг охириг устунидан

$$\nu_1 = 82258,31, \quad \nu_2 = 97491,36 \quad \text{ни топамиз.}$$

Бу сонлар айирмаси $\nu_2 - \nu_1 = 15233,05$ га тенг бўлади. Шу жадвалдан Бальмер сериясининг ($n = 3$) биринчи ҳади учун $\nu_2 - \nu_1$ билан кузатиш ҳатолари чегарасида мос келадиган $\nu = 15233,216$ сонни топамиз.

Комбинацион принцип соф эмпирик йўл билан кашф қилинди ва спектрлардаги кўпчилик бошқа қонуниятларга ўхшаш у ҳам аввал қандайдир ғалати сон бўлиб туюлди. Бу принципнинг чуқур маъноси Борнинг квант постулатлари таърифлангандан кейингина очилди.

Шу принцип ифодалайдиган частоталардаги қонуниятлар классик физика қонуниятларига кескин зид эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар электронга битта эркинлик даражаси ёзилса, у ҳолда спектр битта частота ва унинг обертонларидан иборат бўлиши керак эди; агар электронлар боғланиши шундай бўлсаки, унга уч эркинлик даражаси ёзишга тўғри келса, у ҳолда биз учта асосий частотага ва уларнинг обертонларига эга бўлар эдик. Бироқ ҳақиқатда атом спектрида умуман ҳеч қандай обертонлар, яъни гармоник қатор ҳосил қилувчи частоталар кузатилмайди.

Биринчи марта Бор комбинацион принцип атомлар ичидаги ҳаракатларни бошқарадиган ўзига хос квант қонунларнинг ёрқин ифодаси эканлигини тўла равшанлик билан кўрсатди. Чизиқли осцилляторлар ҳақидаги хусусий ҳол учун айтилган Планк гипотезасини умумлаштириб ва аниқроқ таърифлашда, у комбинацион принципда атомлар фақат энергиялари дискрет қатор ҳосил қиладиган муайян ҳолатлардагина бўла олишини кўрсатувчи фикрни пайқади. Шундай қилиб, ҳар бир термга муайян стационар энергетик ҳолат тўғри келади ва 90-§ да таърифланган Бор частоталар шarti бошқа усулда ифодаланган, яъни ҳар бир чиқарилган частота икки стационар ҳолат билан боғланган деб кўрсатувчи комбинацион принципнинг ўзидан иборатдир. Агар cm^{-1} да ифодаланган тўлқин сонини ν орқали белгиласак, у ҳолда $сек^{-1}$ да ифодаланган частота $c\nu$ га тенг бўлади, ва (90. 1) частоталар шarti қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$hc\nu = E_n - E_m,$$

бундан

$$\nu = \frac{E_n}{hc} - \frac{E_m}{hc}. \quad (105. 4)$$

Агар

$$T(n) = -\frac{E_n}{hc} \quad (105. 5)$$

деб олинса, у ҳолда (105. 4) қуйидаги кўринишга келади:

$$\nu = T(m) - T(n),$$

яъни комбинацион принципнинг маълум таърифини ҳосил қиламиз. (105. 5) даги минус ишора шartли аҳамиятга эга: биз

биламизки, кулон майдонида боғланган электрон энергияси (норелятивистик) ҳар доим манфийдир (51-§), шунга қарамай термларни мусбат ишора билан ёзиш қулайроқ бўлади.

(105.4) га термнинг (105.1) таъриф бўйича Ридберг доимийси орқали ёзилган ифодасини киритсак, атомлар энергиясини ҳам шу доимий орқали ифодалашимиз мумкин:

$$E_n = - \frac{Rhc}{n^2}. \quad (105.6)$$

Бу формуладаги h ва c — универсал доимийлар, n — бутун сон ва фақат R — эмпирик константадир. Агар Ридберг доимийси R ни ҳам универсал доимийлар орқали ифодалай олсак, бизнинг формула тугал аниқ физик қийматга эга бўлур эди. Бунга Бор ўзининг атом тузилишининг хомаки назариясидаёқ амалга оширишга муваффақ бўлди.

106- §. Доиравий орбиталарни квантлаш

Бор назарияси 90-§ да таърифланган квант постулатларнга, чунончи, стационар ҳолатларнинг мавжудлиги ҳақидаги постулат ва частота шартларига асосланади. Бу постулатлар, бир неча бор кўрсатилганидек, классик физика қонунларига тубдан зиддир. Ҳақиқатан ҳам, Бор постулатлари энергия сатҳларининг дискрет кетма-кетлигининг ва уларга мос равишда атомда *квантланган* орбиталарнинг танланган қаторининг мавжудлигини даъво қилгани ҳолда, классик механика орбиталарнинг узлуксиз кўплигига олиб келади. Бу зиддият ғоят умумий характерга эгадир. Фактлар мажмуаси бир қийматли равишда атом дунёси ҳодисаларида Планк доимийсининг чекли (нолга тенг бўлмаган) катталиги билан характерланувчи узлуклилик ошкор бўлишини кўрсатади. Аксинча, макроскопик, яъни катта масштабдаги ҳодисалар учун айнан узлуксизлик характерлидир.

Шундай қилиб, узлуксиз ўзгарувчи катталикларга эга бўлган классик механикани атом ҳодисаларга татбиқ қилиб бўлмайди деган хулосага келамиз. Кейинчалик Х бобда ҳақиқатан бу узилиш жуда чуқур маънога эга эканлигини кўрамиз, чунки жуда кичик заррачалар — электронлар, протонлар ва шунга ўхшашлар ҳаракатларида классик механика қонунларидан кескин фарқ қиладиган, ўзига хос *тўлқин* қонунларига бўйсунадилар. Бу ҳол Бор постулатлари кашф этилгандан йигирма йил кейингина очилди. Атом механикаси ривожининг биринчи босқичидаёқ қуйидаги мантиқий қарама-қарши усулдан фойдаланишга тўғри келди: дастлаб масала (атом ичидаги) ҳаракатларга тўла қўлланиши мумкин бўлмаган классик механика ёрдамида ечилади, кейин эса классик механика олиб келадиган барча ҳаракат ҳолатлари узлуксиз мажмуасидан

махсус постулат асосида айрим, квант ҳолатлар танлаб олинарди. Бу метод барча камчиликларига қарамай, жуда катта ютуқларга олиб келди. Атом процессларнинг баъзи бир ўзига хос белгиларини қайд қилиш ва улардан тегишли хулосалар чиқариш, атом ва молекуляр спектрлардаги мураккаб қонуниятларни очишга, химиявий процессларни тушунишга анча яқин келишга ва бошқаларга имкон туғилди.

Дастлаб Бор назариясида квантланган орбиталарни танлашда асос қилиб олинган махсус постулатни таърифлайлик. Биз бунда энг содда атом моделидан фойдаланамиз: марказий мусбат зарядли ядро атрофида доиравий орбита бўйлаб электрон айланади. Бир оз мураккаброқ бўлган эллиптик орбиталар ҳолини кейинроқ 113- § да қисқача қараб ўтамиз.

Квантланган орбиталарни танлаш учун, таърифлашимиз керак бўлган постулат, чизиқли осцилляторнинг квант ҳолатларини танлаш учун Планк постулатини мақсадга мувофиқ умумлаштиришдан иборатдир. Бу кейинги постулатга кўра чизиқли осцилляторнинг мумкин бўлган барча ҳолатларидан фақат энергияси

$$E_n = nh\nu \quad (106. 1)$$

га тенг бўлганларигина мавжуд бўлади.

Дастлаб фақат чизиқ осцилляторга татбиқ қилинадиган бу шартни бир оз бошқача таърифлайлик. Бунинг учун даставвал уни

$$\frac{E}{\nu} = nh \quad (106. 2)$$

кўринишда қайта ёзамиз. Бу кўринишда ёзилган шартни атом системаларда $\left[\begin{array}{c} \text{энергия} \\ \text{частота} \end{array} \right]$ ўлчамликка ёки (энергия x вақт) ўлчамликка эга бўлган ва таъсир деб аталадиган механик катталик h Планк доимийсига каррали бўлиши керак деган умумий талаб деб қараймиз. Энди масала ҳар бир хусусий ҳол учун бу катталикни мақсадга мувофиқ равишда танлашдан иборатдир.

Ҳолатларни ўз-ўзидан тўғри танлашга олиб келадиган умумий қонидани кўрсатиш учун яна чизиқ осцилляторни қараб чиқамиз. Классик механикада унинг ҳолати декарт координатаси x ва унга мос ҳаракат миқдори $m\dot{x}$ билан характерланади. Шу ҳолат параметрларини q ва p орқали белгилаймиз ва статистик механикада қабул қилинганидек, осциллятор ҳолатини фазовий бўшлиқда нуқта билан тасвирлаймиз. Бу ҳолда система ҳолати p ва q иккита параметр билан тўла характерланганидан, фазовий „бўшлиқ“ текислик бўлади ва система-нинг p ва q муайян қийматлари билан характерланадиган ҳар бир ҳолати шу текисликдаги нуқтадан иборат бўлади. Ҳаракатда бу нуқта системада ўз вазиятини узлуксиз ўзгартира

бориб, бирор фазовий траектория чизади (162-расм). Муайян E энергияга эга бўлган осциллятор учун бу траектория қандай бўлишини қараб чиқамиз. Осцилляторнинг тўла энергияси $(T + U)$ учун қуйидаги ифодани ёзамиз (46-§ га қаранг):

$$E = T + U = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{fq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{fq^2}{2}. \quad (106.3)$$

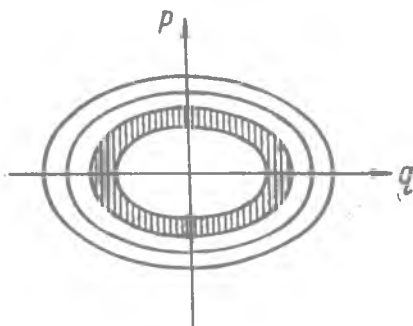
(106.3) нинг икки томонини E га бўламиз:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{f}} = 1;$$

$$a = \sqrt{2mE} \text{ ва } b = \sqrt{\frac{2E}{f}} \quad (106.4)$$

белгилашлар киритиб қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1. \quad (106.5)$$



162-расм.

Бироқ (106.5) эллипс тенгмасидир, демак, чизиқли осцилляторнинг фазовий траекторияси ўқлари (106.4) асосида берилган осциллятор (берилган m ва f) учун E энергия билан аниқланадиган эллипсдан иборатдир. Энди эллипснинг юзини ҳисоблайлик. $y = f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган юз $\int y dx$ га тенг; иккинчи томондан эллипс юзи πab га тенг.

Шунинг учун $\oint p dq = \pi ab$, интегралдаги тўгаракча уни ҳисоблашни ёпиқ контур бўйича ўтказиш кераклигини кўрсатади. Бироқ (106.4) га кўра

$$\pi ab = \pi \sqrt{2mE} \sqrt{2E/f} = 2\pi E \sqrt{m/f}.$$

Гармоник осциллятор учун $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{f/m}$,

у ҳолда

$$\oint p dq = \pi ab = 2\pi E \sqrt{m/f} = \frac{E}{\nu} \quad (106.6)$$

ёки (99.2) ни эътиборга олсак

$$\oint p dq = nh. \quad (106.7)$$

Энди бизга охириги қадамни ташлаш қолди: агар p ва q сифатида умумлашган координаталарни ва унга мос умумлашган импульсни тушунсак, у ҳолда (106.7) формулани битта эркинлик даражали ҳар қандай системанинг кванглиниш умумий шарти деб қараймиз.

Бу умумий шартни доиравий орбита бўйлаб айланаётган электрон моделига татбиқ қилайлик. Бу ерда координата сифатида орбитадаги электрон вазиятини характерловчи φ қутбий бурчакни танлаш мақсадга мувофиқдир. Унга мос бўлган умумлашган импульс [(57. 7) га қаранг] $p\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ ҳаракат миқдори моменти бўлади. Энди (106.7) га q ва p ўрнига φ ва p_φ ни қўйсақ ва ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунига кўра ҳаракат миқдори моменти $p\varphi = \text{const}$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$nh = \oint p dq = \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

бундан эса бирданига қуйидагига эга бўламиз:

$$p_\varphi = n \frac{h}{2\pi}. \quad (106.8)$$

Бу эса доиравий орбиталарнинг изланаётган „квантлаш қондасидир“: классик механикага кўра барча мумкин бўлган орбиталардан ҳаракат миқдори моменти $h/2\pi$ га қаррали бўлган орбиталаргина ҳақиқатда мавжуд бўла олар экан. Охириги $h/2\pi$ катталиқ, демак, ҳаракат миқдори моментининг квант бирлигидир.

107-§. Бор назарияси

Энди Бор назариясини кўриб чиқишга ўтайлик. „Водород-симон атом“ деб юритилувчи, яъни $+Ze$ (Z — бутун сон) зарядли ядро ва битта электрондан иборат бўлган системани кўрайлик. $Z = 1$ да бундай система хусусан водород атомидан, $Z = 2$ да бир қарра ионлашган He^+ гелий атомидан, $Z = 3$ да икки қарра ионлашган Li^{++} литий атомидан, $Z = 4$ да уч қарра ионлашган Be^{+++} бериллий атомидан ва ҳ. к. иборат бўлади.

Газларнинг кинетик назариясидан маълумки, атомлар 10^{-8} см тартибдаги „ўлчовга“ эга. Иккинчи томондан α -заррачаларнинг сочилишига доир Резерфорд тажрибаларидан (27-§), Кулон қонуни 10^{-12} см масофагача ўринли эканлиги келиб чиқади; шунинг учун ҳам моделимизда электроннинг ядро билан ўзаро таъсири Кулон қонунига бўйсунушга, яъни электронни тутиб турувчи ядро кучи Ze^2/r^2 га тенг бўлиши кераклигига ишонишимиз мумкин. Агар атомдаги электрон ҳаракати классик механика қонунарига бўйсунди десак, у ҳолда биз моделимизга классик механикадаги (51-§) Кеплер масаласининг ечилишида олинган барча натижаларни ишлатишимиз мумкин; хусусан бундай системанинг тўла энергияси (кинетик $+$ потенциал) қуйидагига тенг бўлиши керак:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a},$$

бунда a — эллипснинг катта ярим ўқи ёки доира равий орбитанинг радиусидир. Кеплернинг учинчи қонунига кўра, a радиус T айланиш даври билан қуйидагича боғланган*:

$$\frac{a^3}{T^2} = a^3 \nu^{*2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \quad (51.24)$$

Иккинчи муносабат ўтган параграфда келтириб чиқарилган квантлаш қондасини беради:

$$p_\varphi = n \frac{h}{2\pi}. \quad (106.8)$$

Сўнгра, таърифга кўра,

$$p_\varphi = ma^2 \dot{\varphi} = ma^2 \omega = 2\pi ma^2 \nu^*, \quad (107.1)$$

бундан

$$a^2 \nu^{*2} = \frac{nh}{4\pi^2 m}. \quad (107.2)$$

(107.2) ва (51.24) ни комбинациялаб қуйидагини топамиз:

$$a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Z e^2}. \quad (107.3)$$

$Z = 1$ ва $n = 1$ да (водород атомининг биринчи орбитаси) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} = 0,528 \cdot 10^{-8} \text{ см}. \quad (107.4)$$

Универсал доимийларнинг бу комбинацияси ҳисоблашларда кейинчалик ҳам учрайди; биз уни ҳар доим a билан белгилаймиз. (107.3) нинг қийматини (51.19) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}; \quad (107.5)$$

n га кетма-кет 1,2,3,..., қатор бутун сонларни бериб, энергиянинг E_1, E_2, \dots , квантланган қийматларини ҳосил қиламиз.

* Доиравий орбиталар бўлган ҳолда (51.24) муносабат қуйидаги оддий усул билан ҳам ҳосил қилиниши мумкин. Ядро ва электрон орасидаги тортишиш Кулон кучини марказдан қочма инерция кучига тенглаштириб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{Ze^2}{a^2}.$$

$v = a\omega = 2\pi a\nu^*$ эканлигини назарга олиб, (51.24) формулани осонгина топамиз

$$a^8 \nu^{*2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}.$$

Бу ерда тўлқин сондан сек^{-1} да ўлчанадиган частотани фарқ қилиш учун уни ν^* билан белгиланди.

$hc\nu = E_n - E_k$ частоталар шартидан фойдаланиб ва бу ерга (107.5) дан E_n ва E_k ифодаларини қўйсак, водородсимон атомлар учун Бальмернинг умумлашган формуласини топамиз.

$$\nu = \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (107.6)$$

Бунда $Z = 1$ деб, махсус водород атоми учун Бальмер формуласини ҳосил қиламиз, қавс олдидаги кўпайтувчи

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \quad (107.7)$$

универсал доимийлар орқали ифодаланган, изланаётган Ридберг доимийси бўлади.

R ни ҳисоблаш учун e , $\frac{e}{m}$, h , c универсал доимийларнинг ҳозирги замон энг аниқ қийматларидан фойдаланамиз:

$$c = 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}, h = 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек},$$

$$e = 4,8025 \cdot 10^{10} \text{ CGSE}, \frac{e}{m} = 1,7592 \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot \text{г}^{-1}; \quad (107.8)$$

(107.7) формула бу ҳолда R учун қуйидаги назарий қийматни беради:

$$R = 109737,303 \text{ см}^{-1}, \quad (107.9)$$

ваҳолонки, жуда аниқ спектроскопик ўлчашлардан топилган R_n катталиқ қуйидагига тенг:

$$R_n = 109\,677,581 \text{ см}^{-1}. \quad (107.10)$$

R нинг назарий ҳисобланган ва экспериментал ҳисобланган қийматларининг мос келиши шунчалик яқинки, у водородсимон атомлар энергия сатҳлари учун Бор топган (107.5) формуланинг шубҳасиз тўғри эканлигини билдиради. Ҳақиқатан бу мослик (107.9) ва (107.10) формулаларни бевосита таққослашда туюлганидан анча яхшидир. Гап шундаки, бу икки қийматни амалда таққослаш мумкин эмас, чунки (107.7) формула ни келтириб чиқаришда ҳозирги замон спектроскопик ўлчашларнинг аниқлиги оқламайдиган тақрибийлик ўтказилган. Хусусан, биз водородсимон атом ядроси қўзғалмас деб фараз қилган эдик, ваҳолонки механика қонунларига кўра электрон ва ядро ҳаракатларини уларнинг умумий инерция марказларига нисбатан қараш керак эди. Ядро массаси электрон массасига нисбатан чексиз катта бўлганидагина ядронинг қўзғалмаслиги фарази (50-§ га қаранг) ўринли бўлур эди. Ҳақиқатда водород ядроси массасининг электрон массасига нисбати қуйидагига тенг:

$$\frac{M_n}{m} = 1836,5$$

ва ҳозирги замон спектроскопик ўлчашлардаги улкан аниқликларда ядро массасининг чекли эканлигини назарга олмаслик мумкин эмас.

Бироқ, бу ҳолни ҳисобга олувчи тузатмани киритиш қийин эмас. 53-§ да кўргандек, икки жисм ҳақидаги масалани аниқ ечиш учун (107.5) формулада электрон массаси ўрнига электрон ва ядронинг келтирилган массасини киритиш керак:

$$m' = \frac{mM_z}{m + M_z},$$

бунда M_z атом номери z бўлган ядронинг массаси. Бунда (107.7) формула қуйидаги кўринишга келади:

$$R_z = \frac{2\pi^2 m' e^4}{h^3 c} = \frac{2\pi^2 m M_z e^4}{h^3 c (m + M_z)} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c \left(1 + \frac{m}{M_z}\right)}. \quad (107.11)$$

Водород учун $M_z = M_H$ ва

$$R_H = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c \left(1 + \frac{m}{M_H}\right)}. \quad (107.12)$$

$M_z = \infty$ бўлганда (107.11) формула (107.7) формулага ўтади. Шунинг учун (107.7) формула берадиган R катталики R_∞ билан белгиласак, у ҳолда (107.12) қуйидаги кўринишни олади:

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_H}}, \quad (107.13)$$

умумий формула (107.11) эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_z = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_z}}. \quad (107.14)$$

(107.13) формула ёрдамида назарияни қуйидагича батафсил текшира оламиз: (107.13) формулага энг аниқ экспериментал қиймат $R_H = 109677,581$ ни қўямиз ва (107.13) дан R_∞ ни ҳисоблаймиз; $\frac{m}{M_H} = \frac{1}{1836,5}$ ни эътиборга олиб,

$$R_\infty = R_H \left(1 + \frac{m}{M_H}\right) = 109677,581 \left(1 + \frac{1}{1836,5}\right) = 109736,807 \text{ см}^{-1}$$

ни ҳосил қиламиз. Буни (107.7) формула бўйича бевосита ҳисобланган 109737,303 қиймат билан солиштириб, мослик бизнинг ҳар қандай истагимизни ҳам тўла қаноатлантиришини кўрамиз.

108-§. Юқоридаги назариянинг қўлланиши.

Водород оғир изотопининг кашф қилиниши

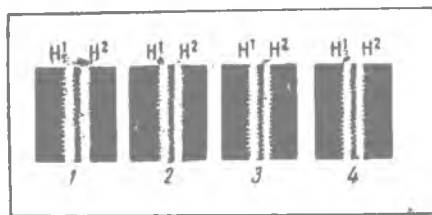
Водород оғир изотопининг кашф этилишида Ридберг доимийсининг ядро массасига боғланишидан фойдаланилган эди. Бу кашфиётнинг босқичлари инерт газларнинг атмосферада аргондан бошлаб кашф этилиши тарихини эслатади. Маълумки, бу кашфиётга атмосфера азотининг атом оғирлиги билан лаборатория шароитида турли химиявий бирикмалардан олинган азотнинг атом оғирлиги қийматлари орасидаги бир оз фарқ туртки бўлган эди. Бу воқеа константаларни аниқ белгилаш маъносининг ажойиб намоийши бўлди ва XIX аср охири табиатшуносларидан бирининг: „ўнли касрнинг олтинчи каср хонаси ичида ҳали қанчадан-қанча кашфиётлар яшириниб ётади!“ деган оқилона фикрини жуда яхши тасдиқлайди.

Оғир водороднинг кашф этилиши тарихи қисқача шундай. Астон масс-спектрограф ёрдамида водороднинг атом оғирлигини кислороднинг шартли қабул қилинган 16,00000 атом оғирлигига нисбатан аниқлашида $1,00778 \pm 0,000015$ чиқди. Бу катталиқ химиявий йўл билан топилган водород атоми оғирлиги $1,00777 \pm 0,00002$ билан жуда яхши мос келди.

Бу ўлчашлар ўтказилган вақтда кислород изотопга эга эмас деб қараларди. Бироқ тез орада атмосфера кислороди O^{16} ва O^{18} икки изотоп аралашмаси эканлиги пайқалди, улар миқдори 630:1 доимий нисбатда бўлади. Бу ҳолни ҳисобга олиб, Бердж ва Менцель масс-спектрографик ва химиявий йўл билан аниқланган водород атоми оғирликлари катталиқларининг мос келиши ҳақиқатан хаёлий бўлиб, принципиал хатога асосланганлигига эътибор бердилар. Ҳақиқатда, масс-спектрографдаги ҳар бир чизик муайян изотопга мос келади. 16,00000 масса ёзиладиган чизик ҳақиқатдан O^{16} кислород изотопига тегишлидир, ваҳолонки химиявий аниқлашларда 16 масса нотўғри равишда $O^{16} + \frac{1}{630}O^{18}$ аралашмага ёзиб қўйилади. Агар кислороднинг масс-спектрдаги чизигига шартли равишда химиявий тажрибаларда кислород эга бўладиган ўртача массани, яъни $O^{16} + \frac{1}{630}O^{18}$ ёзилса, у ҳолда, шундай тарзда химиявий шкалага ўтказилган водород атоми оғирлиги учун сезиларли даражада кам сон: 1,00756 ҳосил бўлади. Химиявий усулда аниқланган водород атоми оғирлигининг 1,00777 — 1,00756 = 0,00021 қадар, яъни тақрибан 0,02% қадар ортиқлиги факти Бердж ва Менцелни, химиклар ўз тажрибаларида ишлатадиган одатдаги водород ҳақиқатан энг камида икки хил изотопнинг: тақрибан массаси 1 га тенг бўлган енгил ва массаси 2 га (яхлитланган рақамда) тенг бўлган оғир изотоплар аралашмасидан иборат бўлиши керак деган гипотезани айтишларига туртки бўлди. Масс-спектрографик ва химиявий атом оғирликлар фарқидан улар оддий водороддаги изотоплар миқ-

дори нисбатини аниқладилар ва $H^1 : H^2 = 4500 : 1$ ни ҳосил қилдилар.

Оғир изотопнинг кашф этилишига ҳар иккала изотоп мас-саларининг ғоят қулай нисбати қулайлик туғдирди. Одатда изотоплар массалари фарқи нисбатан кичиклигидан уларнинг хоссалари шу қадар яқин бўладики, бирор изотопни йиғиш ғоят қийиндир. Бу ерда бир изотопнинг массаси иккинчисининг массасидан икки марта каттадир. Шунинг учун уларнинг хоссалари бир-бириникидан анча сезиларли фарқ қилади. Бундан фойдаланган Юри ўз ходимлари билан биргаликда сунъий равишда оғир водород процентини қуйидагича кўпайтирди: улар 3 л суюқ водородни эҳтиётлик билан бир неча миллиметр Hg босимда буғга айлантирдилар. Енгил водороднинг буғланиш тезлиги оғир водородникига нисбатан тезроқ бўлиши кераклигидан, буғланиш натижасида аралашма оғир водородга бойий бориши керак. Улар 3 л миқдордаги суюқ водородни сантиметр кубнинг улушларигача келтириб, улар қолдиқни разряд найчага киритдилар ва спектрни фотосуратга олдилар. Бунда улар Ридберг доимийсидаги фарқ туфайли оғир водород чизиқлари энгилиникига нисбатан силжишлари керак деб тахминладилар. Ҳақиқатан бу тасдиқланди. 163-расмда енгил (H^1) ва оғир (H^2) водород аралашмаси



163-расм. Енгил ва оғир водороднинг Лайман сериясидаги биринчи тўрт ҳадининг фотосурати.



164-расм. H_α (пастки чизиқ) ва D_α (юқориги чизиқ) тўлқин узунликларни солиштириш.

учун Лайман сериясининг дастлабки тўрт ҳадининг фотосурати келтирилган. Чизиқларнинг бир-бирига нисбатан силжигани аниқ кўриниб турибди. Тегишли тўлқин узунликлари XIII жадвалда келтирилган бўлиб, оғир водород чизиқлари λ_D орқали белгиланган (оғир водород алоҳида ном—*дейтерий* номи

билан юритилиб, унга D химиявий символ берилган). Жадвалнинг охириги икки устунида ўлчанган ва H ва D лар учун Ридберг доимийси қиймати ёрдамида ҳисобланган $\Delta\lambda$ фарқлар келтирилган. $\Delta\lambda$ нинг ҳисобланган ва кузатилган қийматларининг мослиги бу ерда ҳам ғоят яхшидир.

164-расмда енгил ва оғир водороднинг Бальмер серияси биринчи чизиғи (H_{α}) фотосурати келтирилган.

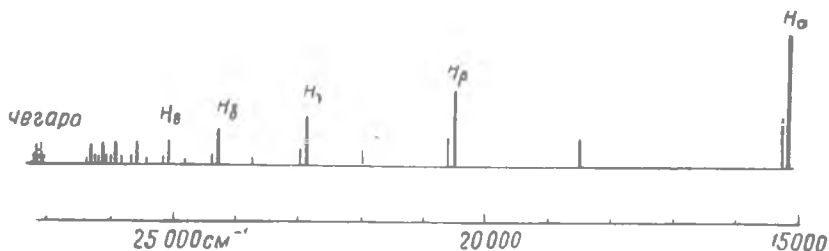
ХIII жадвал

λ_D (Å ларда)	λ_H (Å ларда)	$\Delta\lambda$ ҳисобланган	$\Delta\lambda$ кузатилган
1215,664	1215,334	0,330	0,330
1025,718	1025,439	0,279	0,279
972,533	972,269	0,264	0,266

Кейинчалик биз оғир водород—дейтерий фақат ҳар хил бирикмаларда енгил водороднинг ўринбосари сифатидагина эмас, балки ўзининг ядро физикасида қўлланишлари билан ҳам муҳим эканлигини кўрамиз. Дейтерий ядроси—дейтерон ядро физикасида ядроларни парчалашда қўлланиладиган жуда қулай „снарядлар“ дан биридир.

109-§. Пикеринг серияси ва водородсимон ионлар спектрлари

Астроном Пикеринг 1897 йилда ϵ Puppis юлдузи спектрида Бальмер сериясини эслатадиган спектрал серияни кашф қилди. Атом тузилиши квант назариясининг бир муҳим ғалабаси бу сериянинг тарихи билан боғлиқдир. Иккала серия схематик



165-расм. Бальмер ва Пикеринг сериялари. Бальмер серияси чизиқлари анча узун чизиқлар билан ифодаланган.

тасвирланган 165-расм Пикеринг сериясини икки гурпуага ажратиш мумкинлигини кўрсатади: бир чизиқ оша жойлашган бир гурпуа чизиқлар деярли Бальмер сериясидаги чизиқларга мос келади, оралиқ чизиқлар эса, Бальмер сериясида ўхшашларига эга эмаслар. Ридберг бу серияни n бутун ва ярим

қиймагларга эга бўлган Бальмер формуласи билан ифодалаш мумкинлигини кўрсатди:

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2,5; 3; 3,5; \dots); \quad (109.1)$$

бутун қийматларига Бальмер чизиқларига мос келган чизиқлар тўғри келади; ярим қийматларига оралиқ чизиқлар тўғри келади.

Бу серияни ердаги водороддан олишга қанчалик уринсалар ҳам, уни олиш мумкин бўлмади. Шунинг учун Пикеринг серияси юлдузларда қандайдир ҳолатда бўлган водородга тааллуқлидир деб олинди. Ниҳоят, бу серияни лабораторияда олишга муваффақ бўлдилар, бироқ тажрибанинг муваффақиятли чиқиши учун водородга, албатта, гелий аралаштириш керак. Бор фактларнинг бу чигал мажмуасини Пикеринг серияси ҳеч водородга эмас, балки ионлашган гелийга тааллуқлидир, деган тахмин билан ечиб берди. Ҳақиқатан, (107.6) га асосан ν ҳар доим Z^2 га пропорционал ва гелий учун $Z=2$ га тенг, у ҳолда ионлашган He^+ гелийнинг спектрал серияси

$$\nu = 4 R_{\text{He}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (109.2)$$

формулага мос келиши керак. Бу ерда $m = 4$ десак, у ҳолда формула қуйидаги кўринишга келади:

$$\nu = 4 R_{\text{He}} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5,6, \dots),$$

$$\nu = R_{\text{He}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \right)$$

бироқ, уни яна

кўринишда ёки $\frac{n}{2}$ ни k орқали белгиласак

$$\nu = R_{\text{He}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (k = 2,5; 3; 3,5; 4; \dots)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу эса Пикеринг серияси формуласидир. Водород ва гелий массаларидаги фарқ туфайли R_{He} Ридберг константаси R_{H} дан бир оз фарқ қилиши керак. Шунинг учун k нинг бутун қийматлари учун ҳам Пикеринг серияси чизиқлари водороднинг Бальмер чизиқларига нисбатан бир оз силжиган бўлиши керак.

Борнинг бу башорат қилиб айтганларини Пашен тасдиқлади. Унинг кўрсатишича, Пикеринг сериясини соф водородда ҳосил қилиб бўлмагани ҳолда, водороднинг ҳеч қандай асари бўлмаган соф гелийда осон ҳосил қилиш мумкин ва бу сериянинг чизиқлари k нинг бутун қийматлари учун Бальмер чизиқларига нисбатан худди (109.2) формулада кутилганидек, бинафша томонга силжигандирлар. Бу силжиш мисолларини XIV жадвалда кўриш мумкин. Жадвалда ионлашган гелий

спектрида Пашен ўлчаган аниқ тўлқин узунликлар билан ёнма-ён n нинг бутун қийматларига мос келувчи водороднинг Бальмер серияси тўлқин узунликлари келтирилган.

XIV жа д в а л

n	He ⁺	H
3	6560,1	6562,8 (H _α)
3,5	5411,6	
4	4859,3	4861,3 (H _β)
4,5	4561,6	
5	4338,7	4340,5 (H _γ)
5,5	4199,9	
6	4100,0	4101,7 (H _δ)

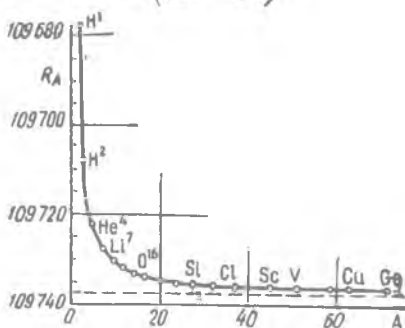
He⁺ дан кейинги водородсимон ионлар икки қарра ионлашган литий Li⁺⁺ ($Z=3$) ва уч қарра ионлашган бериллий Be⁺⁺⁺ ($Z=4$) лардир. Уларнинг спектрал сериялари

$$\nu = 9 R_{\text{Li}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \nu = 16 R_{\text{Be}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

формулаларга бўйсунishi керак.

Ҳақиқатан, бу ионлар учун Лайман сериясининг дастлабки ҳадларини ($m=1$) спектрнинг четдаги ультрабинафша қисмидан топишга муваффақ бўлинди.

166-расмда ядро массасига боғлиқ равишда Ридберг доимийсининг ўзгариши график кўринишда келтирилган.



166- расм. Ядро массасига боғлиқ ҳолда Ридберг доимийсининг ўзгариши.

М а ш қ. 1. Ионлашган гелий учун Лайман сериясининг биринчи чизиги тўлқин узунлиги $\nu = 303,797 \text{ \AA}$ га тенг: а) чексиз катта масса учун Ридберг доимийсини; б) He⁺ нинг электрон-вольтларда ифодаланган ионлашиш энергиясини ҳисобланг.

2. Li⁺⁺ ва Be⁺⁺ ионлар спектрларида ўлчанган тўлқин узунликлар қуйидаги қийматларга эга (Å бирликда):

Li ⁺⁺		Be ⁺⁺	
$n_1 = 1, \quad n_2 = 2$	135,01	$n_1 = 1 \quad n_2 = 2$	75,94
$n_1 = 1, \quad n_2 = 3$	113,92		

Li⁺⁺ ионнинг биринчи уч термини ва Be⁺⁺ ионнинг биринчи иккита термини ҳисобланг.

110-§. Электроннинг солиштирма зарядини спектроскопик аниқлаш ҳақида

39-§ да спектроскопик маълумотлардан электроннинг солиштирма зарядини аниқлаш мумкинлигини эслатиб ўтган эдик. Энди бу қандай амалга оширилишини кўрсатамиз.

Қандайдир икки атом учун, масалан, водород (H) ва дейтерий (D) учун Ридберг доимийсининг ифодаларини ёзамиз:

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_H}}, \quad (110.1)$$

$$R_D = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_D}}, \quad (110.2)$$

бунда M_H ва M_D —атом ядролари массалари. (110.1) ва (110.2) лардан қуйидагини топамиз:

$$\frac{R_D}{R_H} = \frac{1 + \frac{m}{M_H}}{1 + \frac{m}{M_D}}, \quad \frac{R_D - R_H}{R_H} = \frac{m}{M_H} \cdot \frac{M_D - M_H}{M_D + m},$$

бундан

$$\frac{m}{M_H} = \frac{(R_D - R_H)(M_D + m)}{(M_D - M_H)R_H}. \quad (110.3)$$

Бу формулаларга кирган M_D ва M_H ядро массалари атом массалари H ва D ва электрон массаси орқали қуйидагича ифодланади:

$$M_H = \frac{H}{N} - m, \quad M_D = \frac{D}{N} - m$$

(N —Авогадро доимийси).

F Фарадей заряди электрон зарядини Авогадро доимийсига кўпайтирилганига тенг:

$$F = Ne. \quad (110.4)$$

(103.3) ва (103.4) лардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{e}{m} = \frac{F}{Nm} = \frac{FR_H(M_D - M_H)}{N(R_D - R_H)(M_D + m)M_H} = \frac{FR_H(D - H)}{(R_D - R_H)(H - Nm)}. \quad (110.5)$$

Nm (электроннинг „атом оғирлиги“) кўпайтманинг H ва D га нисбатан жуда кичик катталиқ эканлигини эътиборга олсак,

$$Nm = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 9,108 \cdot 10^{-28} = 5,48 \cdot 10^{-4},$$

$\frac{e}{m}$ ни ҳисоблаш учун (110.5) формула ўрнига етарлича аниқликда қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин бўлади:

$$\frac{e}{m} = F \frac{R_n}{(R_D - R_n) H} \frac{D - H}{D}.$$

Агар бунга константаларнинг аниқ қийматларини қўйсақ, у ҳолда H ва D спектрларнинг охири вақтда ўлчаб топилган қийматларига кўра қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{e}{m} = 1,7596 \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot z^{-1}.$$

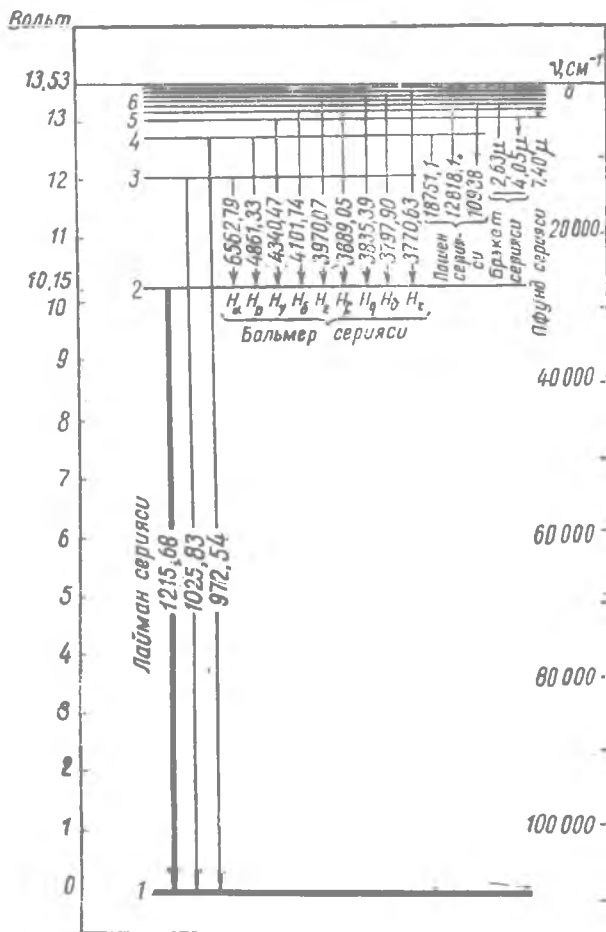
Бундан электронларнинг электромагнит майдонларда оғиши билан ўтказилган тажрибалардан олинган $\frac{e}{m}$ нинг энг аниқ қийматлари бу спектроскопик $\frac{e}{m}$ қийматга яқин эканлиги кўриниб турибди.

111-§. Энергия сатҳлари диаграммалари

Ўтган параграфларда айtilганларга яқун ясаб, спектр анализининг энг муҳим натижаси термлар системасининг топилиши эканлигини кўрамиз. Ҳақиқатан, термларни жуфтлаб комбинацияласак, бевосита спектрал чизиқларнинг тўлқин сонларини ҳосил қиламиз; термларни cm^{-1} ларда ифодаловчи сонларни hc га кўпайтириб, турли квант ҳолатлардаги атом энергиясининг мусбат қийматларини топамиз. Энергиянинг электрон-вольтларда ифодаланган бу қийматлари ҳар хил ҳолатдаги атомнинг ионизация потенциалини беради, уларнинг айирмалари уйғониш потенциалларини беради.

Юқоридаги тарзда атом ҳақида олинган барча маълумотлар тўпламини тез кўздан кечирмоқ учун энергия сатҳлари диаграммаларидан фойдаланиш қулайдир. 167-расмда водород атоми учун шундай диаграммалардан энг соддаси келтирилган. Бу ерда турли энергетик ҳолатлар горизонтал тўғри чизиқлар билан белгиланган. Уларни яшаш учун айtilганларга асосан ордината ўқларига R/k^2 қийматларни қўйиш етарли бўлади. k нинг ортиши билан кетма-кет келган энергетик сатҳлар орасидаги масофа камаяди ва лимитда нолга айланади. Қўшилиш жойидан юқорида квантланмаган мусбат энергиялар туташ соҳаси жойлашган. Ўнг ва чапда энергия ва термлар шкалалари жойлашган. Ҳар бир шкалада ҳисоб энергетик сатҳлар қўшилиб кетган жойдан бошланади, бироқ квантланган ҳолатлар учун энергия манфий, термлар учун мусбат бўлганидан энергия пастдан юқorigа камая боради, термлар (ионлаш ишига тенг бўлган) эса ўша йўналишда ўса боради. Уша диаграммада энергетик сатҳлар орасидаги мум-

кин бўлган ўтишлар стрелкалар билан кўрсатилган ва бунда ҳосил бўладиган сериялар белгиланган. Ҳар бир серия юқорида ётган ҳамма сатҳлардан пастки сатҳларга ўтишда юзага келади. Спектрал чизиқларнинг тўлқин сонларини охириги ва бошланғич ҳолатларга тегишли термлар айирмаси сифатида ўнгдаги шкаладан ҳисоблаш мумкин.

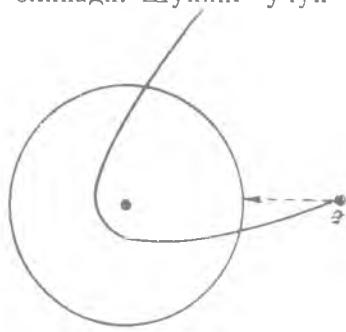


167- расм. Водород атоми энергия сатҳларининг диаграммаси.

112-§. Атом ҳолидаги водороднинг чегаравий туташ спектри

Ҳар қандай сериал спектра серия чегарасига, яъни чизиқлар қушилиб кетган жойга, ҳар доним қисқа тўлқин томонга ёйилган туташ спектр ёпишади. Бу туташ спектрни эмис-

сияда ҳам, абсорбцияда ҳам кузатиш мумкин. Унинг пайдо бўлиши электронларнинг мусбат энергияли ҳолатдан манфий энергияли ҳолатга ва, аксинча ўтиши билан боғлиқ бўлади. Барча квант ҳолатларда электрон манфий энергияга эга бўлишини биламиз. Бу ердаги манфий ишора нолинчи потенциал энергияли ҳолатнинг ихтиёрий танланиши билан боғлиқдир. Одатда ядродан чексиз узоқда тинч турган электроннинг потенциал энергиясини нолга тенг деб олинади. Шунинг учун тўла энергиянинг манфий ишораси, бундай ҳолатларда электрон энергияси унинг атомдан ажратилган ва чексиз узоқликда тинч тургандаги энергиясидан камлигини кўрсатади, яъни биз боғланган электрон билан иш кўраётганимизни билдиради*. Бундан, мусбат энергияга атомдан ажратилган ва потенциал энергияга нисбатан кинетик энергияси ортиқ булган электрон эга бўлиши кераклиги келиб чиқади. Классик механикага кўра бундай электрон ядро атрофида гиперболик орбита буйлаб айланиши керак (168-расм). Бироқ Борнинг биринчи постулати бу орбитада электрон айланишида нурланиш бўлмаслигини талаб қилади; у гиперболик орбитадан берк (масалан, доиравий) орбитага сакраганда нурланиш содир бўлиши мумкин. Иккинчидан, квантлар назариясининг умумий принципига кўра (кейинги параграфга қаранг) фақат даврий ёки шартли-даврий ҳаракатгина квантланиши мумкин, натижада гиперболик орбитада айланаётган электронлар узлуксиз тақсимланган ҳар қандай энергия запасига эга була олишлари мумкин. Шу ҳол спектрнинг туташ характерини тушунтиради.



168-расм.

Ҳақиқатан, квантланган ҳолатдан нолга тенг энергияли ҳолатга ўтишга тўғри келган тўлқин сон R/m^2 бўлади (серия чегараси), квантланган ҳолатдан ΔE мусбат энергияли ҳолатга ўтишга тегишли тўлқин сон қуйидагига тенг бўлади:

$$\nu = \frac{R}{m^2} + \frac{\Delta E}{hc}.$$

$\Delta E > 0$ ва узлуксиз ўзгарганидан, ν серия чегарасининг тўлқин сонидан катгароқ бўлади ва узлуксиз ўзгара боради, яъни серия чегарасига қисқа тўлқин томондан ёпишувчи туташ спектрга эга бўламиз. Яна равшанки, *ютилиш туташ спектр* электроннинг атомдан чекли кинетик энергия билан аж-

* Ҳақиқатда электроннинг тўла энергиясига яна қўшилувчи энергия сифатида электроннинг тинчликдаги массасига тегишли $0,5 \cdot 10^6$ эв га тенг бўлган m_0c^2 , энергия, яъни электроннинг нормал ҳолатдаги манфий потенциал энергиясидан анча ортиқ бўлган энергия киради.

ралишини, яъни ионланишни кўрсатса, *чиқариш туташ спектри* тескари процессни, яъни мусбат ион ва электроннинг рекомбинациясини билдиради. Ниҳоят, узун тўлқинлар томонидан туташ спектрнинг боши тўлқин сонига ёки, айнан, серия чегарасининг тўлқин сонига тўғри келадиган энергия ионизация энергиясига, яъни электронни атомдан ажратиш ва уни нолинчи кинетик энергияли ҳолатга утказиш учун зарур бўлган энергияга тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, водород учун Лайман сериялари чегарасининг тўлқин сони биратўла

$$\nu = \frac{R_H}{1^2} = R_H = 109678 \text{ см}^{-1}$$

асосий, энг турғун ҳолатда водород атомининг ионизация энергиясини беради. Агар кўрсатилган тўлқин сонни электрон-вольтларга ўтказилса, у ҳолда нормал ҳолатдаги водород атомининг VII бобда кўриб ўтилган ўлчаш методлари билан бевосита топилган ионизация иши 13,54 эв га тўғри келадиган 13,527 эв келиб чиқади.

113-§. Водородсимон атомни Бор—Зоммерфельд усулида квантлаш

Ўтган параграфларда Бор назариясининг кўп сонли хулосалари билан танишдикки, улар Бор назариясига ғоят катта муваффақиятлар келтирди. Зоммерфельд бу назарияни ривожлантиришда навбатдаги қадамни қўйди. Ўша вақтларда Борнинг дастлабки назариясидагига ўхшаш фақат доиравий орбиталар қараларди, Зоммерфельд классик механикадаги Кеплер масаласининг умумий ечимидан фойдаланди, яъни эллиптик орбиталарни ҳам эътиборга олди. Бунинг учун даставвал 106-§ да таърифланган квантлаш қондасини кенгайтириш зарур бўлди. Ҳақиқатан ҳам, биз электроннинг фақат доиравий ҳаракатини қараётганимизда, бизга битта эркинлик даражаси учун квантлаш қондаси етарлидир. Агар эллиптик орбиталарни ҳам эътиборга олишни хоҳласак, бу ҳолда электроннинг орбитадаги вазияти иккита параметр: радиус-вектор r ва қутбий бурчак (азимут) φ билан аниқланишлиги сабабли, бизга иккита эркинлик даражали система учун квантлаш қондаси керак бўлади. Ниҳоят, агар биз орбитанинг фазовий ориентациясини эътиборга олишни хоҳласак, электронга барча учта эркинлик даражасини ёзиш керак бўлади.

Шундай қилиб, биринчи навбатда ечиш зарур бўлган масала, кўп эркинлик даражали система учун квантлаш қондасини топишдан иборат эди. Бу масалани Зоммерфельд ва ундан мустақил равишда Г. А. Вильсон системанинг етарлича умумий ҳоли учун—шартли-даврий системалар учун ҳал қилдилар.

Анизотроп осциллятор деб аталадиган система бунга энг оддий мисол бўла олади. m массали заррача текисликда, унинг проекцияси ўзаро перпендикуляр координатлар ўқида v_x ва v_y турлича частота билан оддий гармоник тебранишлар бажарадиган тарзда ҳаракатланаётир деб кўз олдимишга келтирайлик. У вақтда заррачанинг ҳаракат тенгламаси қуйидагига тенг бўлади:

$$m\ddot{x} = f_1 x, \quad m\ddot{y} = -f_2 y,$$

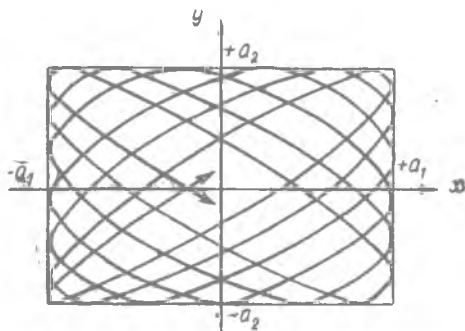
бундан

$$x = a_1 \cos(2\pi v_x t + \delta_1), \quad y = a_2 \cos(2\pi v_y t + \delta_2),$$

ва частоталар қуйидагига тенг бўлади:

$$v_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f_1}{m}}, \quad v_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f_2}{m}}.$$

Агар f_1 ва f_2 квазиэластик кучларнинг иккала константаси ўзаро тенг бўлса, частоталар v_x ва v_y лар ҳам бир хил бўларди, ва биз одатдаги изотроп осцилляторга эга бўлардик. Бироқ, $f_1 \neq f_2$ деб фараз қиламиз; бу ҳолда осциллятор анизотроп дейилади. v_x ва v_y лар ноўлчовдош бўлганида шундай осцилляторнинг энг умумий ҳаракати содир бўлади. Бу шароитда заррача кўп сонли сиртмоқлардан иборат бўлган ва қуйидаги муҳим хоссага эга бўлган мураккаб (169-расм) эгри чизиқ (Лиссажу фигураси) чизади: бу эгри чизиқ ҳеч ерда ёпилмайди; у $a_1 a_2$ тўғри тўртбурчакни бир текис зичлик билан шундай тўлдирадики, ҳаракатланаётган нуқта тўғри тўртбурчак ичида ётган ҳар қандай нуқтага чексиз яқинлашиши мумкин. Аксинча, агар v_x ва v_y лар ўлчовдош бўлсалар, у ҳолда соф даврий ҳаракат содир бўлади; масалан, $v_x = v_y$ да заррача ё тўғри чизиқ бўйлаб тебранади, доира ёки эллипс чизади. Частоталарнинг бошқа бирор рационал нисбатида, умуман айтганда, албатта мураккаб, лекин ёпиқ эгри чизиқ ҳосил бўлади, заррача муайян нуқтадан чиққанидан кейин кўп ёки оз даражада мураккаб траектория чизиб, яна шу нуқтага қайтади ва ҳаракат такрорлана бошлайди. Бундай барча ҳолларда биз амалда v_x ва v_y иккита асосий частота билан иш кўрмасдан, фақат биттаси билан иш кўрамиз, чунки v_x/v_y нисбатнинг рационаллигидан иккинчи частотани биринчиси орқаб



169- расм. Шартли-даврий ҳаракатга мисол.

ли ифодалаш мумкин. Бундан, соф даврий ҳаракат шартли-даврий ҳаракатнинг хусусий ва *махсус* ҳоли эканлигини кўра-миз: икки эркинлик даражали система характерланадиган икки хусусий частота ўрғига, бу ерда битта частотага эга бў-ламиз ва траектория бутун тўғри тўртбурчакни бир текис зич-лик билан тулдирмайди. Одатда, соф даврий ҳаракат шартли-даврий ҳаракатнинг *айниган* ҳолидир, дейилади.

Қаралган оддий ҳолда шартли-даврий ҳаракат иккита од-дий гармоник тебранишларга келтирилади. Шунинг учун (106.7) квантлаш қондасини энди бу тебранишларнинг ҳар бирига қўллаш ва қўйидагини талаб қилиш мумкин:

$$\oint p_x dx = n_x h, \quad \oint p_y dy = n_y h,$$

бунда n_x ва $n_y = 1, 2, 3, \dots$ бутун сонлардир.

Бир неча эркинлик даражали системаларнинг кўпчилик ҳолларида шундай q_1, q_2, \dots, q_f умумлашган координаталар то-пиш мумкинки, уларда, худди аввал кўрилган анизотроп ос-циллятор мисолидаги каби ҳаракат f гармоник тебранишларга „ажралади“; бу ҳолларда 106-§да топилган квантлаш қонда-сини ҳар бир эркинлик даражасига қўллаш мумкин бўлади. Бунда биз f квантлаш шартини ҳосил қиламиз.

$$\oint p_1 dq_1 = n_1 h, \quad \oint p_2 dq_2 = n_2 h, \dots, \quad \oint p_f dq_f = n_f h \quad (113.1)$$

n_1, n_2, \dots, n_f бутун сонлар *квант сонлар* дейилади.

Энди водородсимон атомни қарайлик. Бор назарияси схе-маси бўйича электроннинг ядронинг кулон майдонидаги ҳа-ракати ҳақидаги масалани дастлаб классик механика чегараси-да ечиш керак бўлади. Бу ечиш 51-§ да тўла амалга оширил-ган бўлиб, унда қўйидаги муносабатлар топилган эди:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}, \quad (51.19)$$

$$E = -\frac{mZ^2e^4(1-\epsilon^2)}{2P^2}. \quad (51.18)$$

Энергия қийматларининг бу узлуксиз кўплигидан квант шарт-лар асосида дискрет қаторни ажратиб олиш зарур.

Электроннинг орбитал ҳаракатини қарашда ўзаро боғлан-маган r ва φ иккита координатага мос келадиган иккита эр-кинлик даражасини ёзиш зарурлигидан, иккита квант шартни татбиқ қилиш керак бўлади:

$$\oint p_r dr = n_r h; \quad \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h. \quad (113.2)$$

57-§ га асосланган p_r ва p_φ умумлашган импульслар қўйида-гилардан иборат:

$$p_r = mr \dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}.$$

Ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунига кўра, $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$ бўлишини эътиборга олиб, иккинчи шарт (113.2) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$n_\varphi h = \oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

бундан

$$p_\varphi = n_\varphi \frac{h}{2\pi}. \quad (113.3)$$

(113.2) биринчи квант шартни татбиқ қилиш жуда ҳам мураккаб ҳисоблашларни талаб қилганидан, уларни бу ерда келтирмаймиз. Бу ҳисоблашлар натижасида орбитанинг эксцентриситети учун n_r ва n_φ квант сонлар орқали ушбу ифода ҳосил бўлади:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{(n_r + n_\varphi)^2}.$$

n_r ва n_φ иккала квант сонлар йиғиндиси *бош квант сон* деб аталади. Уни n билан белгилаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} n_r + n_\varphi &= n, \\ 1 - \varepsilon^2 &= \frac{n_\varphi^2}{n^2}. \end{aligned} \quad (113.4)$$

Буни (51.18) га қўйиб ва $P = p_\varphi$ ни $n_\varphi h/2\pi$ га алмаштириб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}. \quad (113.5)$$

Иккита квант шартни татбиқ қилинишига қарамай, охириги натижа доиравий орбита ҳоли учун 107-§ да ҳосил қилинган натижадан ҳеч нарса билан фарқ қилмайди: энергия *бош квант сон* деб аталадиган битта n квант сонга боғлиқ бўлар экан; бунда n_r ва n_φ квант сонларнинг йиғиндиси бўлади. Бу натижа электроннинг эллиптик ҳаракати шартли-даврий ҳаракатнинг айниган ҳоли эканлиги билан боғлиқдир. Ҳақиқатан ҳам, айнамаган шартли-даврий ҳаракат текисликда эпилмайдиган Лиссажу фигуралари бўйича рўй бериши керак, у ҳолда эллипс бўйича айланиш соф даврий ҳаракатдир. Биз қуйида (113.5) формула билан ифодаланган натижа ҳар бир n бош квант сон қиймати учун *катталик жиҳатдан мос келувчи n энергия сатҳи* тўғри келишини билдиришини курамиз.

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун n нинг ҳар бир қиймати-га бирдай катта ярим ўқли n та ҳар хил орбиталар тўғри келишини курсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, орбитанинг катта ярим ўқининг ифодасини (51.19) формуладан ҳосил қиламиз. Унга

энергиянинг квантланган (113.5) қийматларини қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$a = -\frac{Ze^2}{2E} = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m Ze^2} \quad (113.6)$$

ёки, 107-§ да a_1 „Бор радиуси“ учун киритилган қисқача белгилашдан [(107.4) формула] фойдаланиб ушбуни ҳосил қиламиз,

$$a = n^2 \frac{a_1}{Z} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (113.7)$$

Шундай қилиб, ҳар хил квант ҳолатлардаги катта ярим ўқ катталиги бош квант сон квадратига пропорционалдир.

Кичик ярим ўқ b ни ҳисоблаш учун аналитик геометриянинг маълум формуласи $b = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$ ни оламиз ва унга (113.4) ва (113.7) лардан топилган a ва $\sqrt{1 - \epsilon^2}$ ларнинг квант қийматларини қўямиз:

$$b = n^2 \frac{a_1}{Z} \frac{n_\varphi}{n} = n n_\varphi \frac{a_1}{Z}. \quad (113.8)$$

(113.7) ва (113.8) ларни таққослаш, катта ярим ўқ фақат бош квант сонга боғлиқ бўлгани ҳолда, кичик ярим ўқ бош квант сонга ҳамда азимутал квант сонга боғлиқ бўлишини кўрсатади.

Энди азимутал квант сон қандай қийматлар олиши мумкинлигини қараб чиқамиз. $n_\varphi = n$ да (113.8) формула (113.7) га ўтади ва орбита доиравий бўлади; $n_\varphi = 0$ ва $b = 0$ да эллиптик орбита тўғри чизиқли траекторияга айнибди ва электрон бу чизиқ бўйлаб маятниксимон ҳаракат қилган бўларди. Бор назариясига кўра, бундай орбита мавжуд бўла олмайди, чунки бу чизиқ бўйлаб ҳаракатда электроннинг ядрога тўқнашиши юз берарди. Демак, n_φ нинг энг кичик қиймати 1 га, энг катта қиймати n га тенг бўлади:

$$n_\varphi = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (113.9)$$

Бундан n нинг ҳар бир қийматиغا, яъни ҳар бир катта ярим ўққа эксцентриситети турлича катталikka эга булган n та турлича—чүзилган эллипсдан доирагача бўлган орбита мос келади. Масалан,

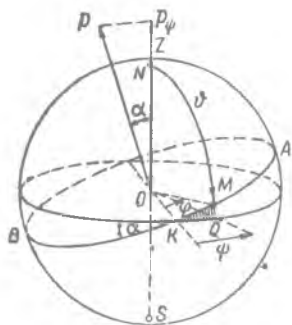
$$\begin{aligned} n = 1, a = \frac{a_1}{Z}, n_\varphi = 1, b = \frac{a_1}{Z} = a - \text{доира}, \\ n = 2, a = 4 \frac{a_1}{Z} \left\{ \begin{array}{l} n_\varphi = 1, b = 2 \frac{a_1}{Z} - \text{эллипс}, \\ n_\varphi = 2, b = 4 \frac{a_1}{Z} - \text{доира}, \end{array} \right. \\ n = 3, a = 9 \frac{a_1}{Z} \left\{ \begin{array}{l} n_\varphi = 1, b = 3 \frac{a_1}{Z} - \text{эллипс}, \\ n_\varphi = 2, b = 6 \frac{a_1}{Z} - \text{эллипс}, \\ n_\varphi = 3, b = 9 \frac{a_1}{Z} - \text{доира}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

170-расмда $n = 1, 2, 3$ лар учун учта орбита чизилган. Перигелийда эллиптик орбиталар n_φ қанча кичик бўлса, фокусага (ядрога) шунча яқин келишини таъкидлаб ўтамыз.

Шундай қилиб, бош квант соннинг ҳар бир қиймати учун ҳақиқатан бир хил катта ярим ўқли n та ҳар хил орбита мавжуд эканлигини кўрамыз. (113.5) формулага кўра, бу барча n орбитага энергиянини бирдай қиймати ёки, аниқроғи, n та бирдай қиймати мос келади. Айниш шундан иборатдир. Бироқ, агар қандайдир ғалаёнланиш содир бўлса, у ҳолда орбиталар турлича деформацияланади ва аввал мос келган n та энергия сатҳи ажралади. Ғалаёнланиш айнишни олиб ташлайди дейилади.

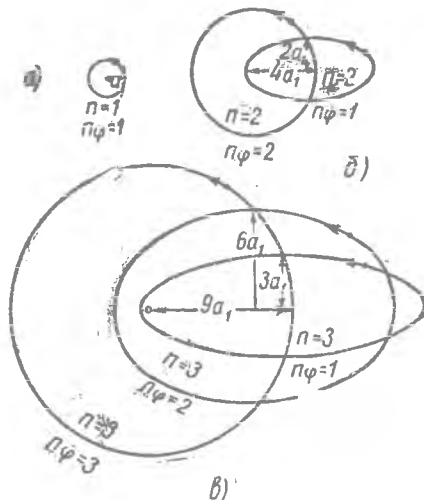
Шу пайтгача биз фақат электроннинг ўз орбитаси текислигидаги ҳаракати билан иш кўрдик ва бунга мос ҳолда электронга иккита эркинлик даражаси ёзган эдик. Бироқ фазодаги электрон вазияти учта координата билан аниқланади. Учта эркинлик даражасини ҳисобга олганимизда, электроннинг фақат ўз орбитасидаги ҳаракатигина эмас, балки орбитасининг ўзини фазовий ориентациясини ҳам кўрсатиш имконига эга бўламиз.

Электроннинг фазодаги вазияти r, ϑ ва ψ учта қутб координаталар билан аниқланади (171-расм). Шунинг учун бу ҳолда квант шартлар қуйидаги кўринишга келади:



171-расм.

$$\left. \begin{aligned} \oint p_r dr &= n_r h, \\ \oint p_\vartheta d\vartheta &= n_\vartheta h, \\ \oint p_\psi d\psi &= n_\psi h. \end{aligned} \right\} \quad (113.10)$$



170-расм. Бор тасаввурича электронларнинг орбиталари.

p_r, p_θ, p_ψ умумлашган импульслар умумий қондага (57, §) асосан ҳисобланади: кинетик энергия ифодасини r, θ, ψ қутбий координаталарда ёзиш керак:

$$E_k \equiv T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) \quad (113.11)$$

ва умумлашган тезликлар бўйича ҳосиласини топиш керак:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, & p_\theta &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \\ p_\psi &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (113.12)$$

Энди умумлашган импульс p_ψ га эътибор берайлик, 171-расмдан кўринадики, ψ координата электроннинг экватор бўйлаб қилган ҳаракат проекциясини ифодалайди, унга мос келадиган p_ψ умумлашган импульс P тўла ҳаракат миқдори моментининг z ўққа проекциясидир. Бу ўқнинг йўналиши физик жиҳатдан, масалан, йўналиши жиҳатдан z ўққа мос келувчи чексиз кичик магнит майдон билан берилиши мумкин. P_ψ ўз қийматини сақлашини, $p_\psi = \text{const}$ булишини ҳозир кўрамыз. Шу мақсадда кинетик энергиянинг (113.11) ифодасини ва умумлашган импульснинг (113.12) ифодасини эътиборга олиб, Гамильтон функциясини ёзамиз:

$$H = T + U = E_k + E_p = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\psi^2 \right) - \frac{Ze^2}{r}. \quad (113.13)$$

Бу ифодада ψ координата кирмаганидан, у циклик координата бўлади. Шунинг учун тегишли импульс ўзгармас (60-§), $p_\psi = \text{const}$ бўлади. Шу сабабли $\oint p_\psi d\psi = n_\psi h$ квант шарт қуйидагини беради:

$$\oint p_\psi d\psi = p_\psi \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi p_\psi = n_\psi h, \quad p_\psi = n_\psi \frac{h}{2\pi}. \quad (113.14)$$

Шундай қилиб, ҳаракат миқдори моментининг майдон йўналишига проекцияси квантланган қийматларга эга бўлишини кўрамыз. Бу ҳол фазода AB орбита ориентацияси ихтиёрий бўлмасдан, балки мумкин бўлган ориентацияларнинг дискрет қатори мавжудлигини кўрсатади. Ҳақиқатан ҳам, ҳақиқий мусбат сон n_ψ ўрнига унга абсолют қиймат жиҳатдан тенг, лекин ҳам мусбат, ҳам манфий қийматларга эга бўла оладиган n сонни киритиб, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\cos \alpha = \frac{p_\psi}{P} = \frac{m \frac{h}{2\pi}}{n_\psi \frac{h}{2\pi}} = \frac{m}{n_\psi}.$$

Айтайлик, масалан, $P = 1 \frac{h}{2\pi}$ бўлсин; у ҳолда $n_\varphi = 1$ ва

$$\cos \alpha = \frac{m}{n_\varphi} = +1, 0, -1.$$

Шундай қилиб, $n_\varphi = 1$ да орбитанинг фақат учта турлича ориентацияси мавжуд бўла олади; $n_\varphi = 2$ да бундай ориентация бешта ($m = +2, +1, 0, -1, -2$) бўлади, $n_\varphi = 3$ да еттита ва умуман ҳар қандай n_φ да мумкин бўлган ориентация сони $2n_\varphi + 1$ га тенг бўлади.

Бироқ, биз киритган янги иккита „экваториал“ n_ϑ ва „кенглик“ n_ψ квант сонлар азимутал квант сон n_φ билан жуда оддий боғланганлигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин, яъни

$$n_\varphi = n_\vartheta + n_\psi.$$

Ҳақиқатан, 59-§ да кинетик энергия T қуйидагича ифодаланishi мумкинлигини кўрган эдик:

$$2T = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (59.9)$$

Кинетик энергияни $E_{\text{кин}}$ билан белгилаб ва $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ эканлигини эътиборга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2E_{\text{кин}} = \sum_k \dot{q}_k p_k.$$

Бу тенгликни t бўйича давр чегарасида, яъни 0 дан τ гача интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$2 \int_0^\tau E_{\text{кин}} dt = \sum_k \int_0^\tau p_k dq_k = \sum_k \oint p_k dq_k. \quad (113.15)$$

Агар q_k координаталар сифатида текисликдаги қутб координаталар (r ва φ) ни олсак, у ҳолда (113.15) га асосан

$$2 \int_0^\tau E_{\text{кин}} dt = \oint p_r dr + \oint p_\varphi d\varphi \quad (113.16)$$

ҳосил бўлади. Сферик қутб координаталар ҳолида

$$2 \int_0^\tau E_{\text{кин}} dt = \oint p_r dr + \oint p_\vartheta d\vartheta + \oint p_\psi d\psi.$$

Ўнг томондагиларни бир-бирига тенглаштириб, қисқартишлардан сўнг қўйидагини топамиз:

$$\oint p_{\varphi} d\varphi = \oint p_{\theta} d\theta + \oint p_{\psi} d\psi,$$

ёки, (113.2) квант шартни эътиборга олсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$n_{\varphi} = n_{\psi} + n_{\theta}. \quad (113.17)$$

Бу электроннинг тўла энергия ифодаси (113.5) қўйидагича ёзилиши мумкинлигини кўрсатади:

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(n_r + n_{\varphi})^2 h^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(n_r + n_{\theta} + n_{\psi})^2 h^2}.$$

Демак, орбитанинг фазовий ориентациясини ҳисобга олинганда тўла энергия, худди текисликдаги масалалар каби, квант сонларнинг ўзига эмас, балки барча квант сонлар йиғиндисигагина боғлиқ бўлади. Бошқача айтганда, айниш амалда текисликдаги масалаларни қаралишидан келиб чиққанидан анча кўпроқдир: бир хил катта ярим ўқли барча эллипсларгина эмас, балки фазода турлича ориентацияланган эллипслар ҳам ташқи магнит майдон йўқлигида бир хил энергияга эга бўладилар.

Қараб чиқилган барча аниқлашларни (эллиптик орбиталар, фазовий ориентация) киритилишига қарамай, натижанинг худди доиравий орбита энг оддий ҳолидагидек чиқиши, бу мукамаллаштиришларни ҳисобга олиш ортиқчадек туюлади. Ҳақиқатда бу шундай эмас. Ташқи магнит майдон мавжудлигида экваториал n_{φ} (ёки магнит m) квант сонга нисбатан айниш йўқолади: турлича ориентацияланган орбиталар турлича энергия оладилар. Изчил ўтказилган ҳисоблашлар оддий Зеeman эффектини тушунтириш имконини беради. Яна, бир нечта электронли мураккаб атомларда чекка электроннинг қолганлари томонидан ғалаёнланиши, атом энергияси ифодасида $n_r + n_{\varphi}$ йиғиндига тенг бўлган бош квант сон билан бир қаторда азимутал квант соннинг юзага келишига олиб келади. Бунинг натижасида бирдай бош квант сонли ва турлича азимутал сонли (бир электронли атомлар ҳолида азимутал сонлар бир хил бўлади) энергия сатҳлари ажраладилар. Бу ҳол бир валент электронли (даврий системанинг биринчи группа элементлари Li, Na, K ва ҳ. к.) мураккаб атомлар спектрининг хусусиятларини тушунтиришга имкон беради. Бироқ, бу ерда биз Бор назариясининг келгуси ривожини устида тўхтаб ўтирмаймиз, чунки у қатор айрим катта ютуқларига қарамасдан, энди фақат тарихий жиҳатдангина аҳамиятга эгадир. Эсланган ҳодисалар (мураккаб атомлар спектрлари, Зеeman эффекти) анча кенг доирадаги ҳодисалар рамкасида бошқача тушунтирилди. Бу тушунтириш билан биз кейинчалик танишамиз.

114-§. Мослик принципи

Энди 106-§ да қаралган масалага, айнан, классик ва квант физика қонунлари орасидаги муносабат масаласига қайтамыз. Планк доимийси h нинг нолга тенг эмаслиги, атом ўлчовларидаги системаларни характерловчи механик катталиклар (энергия, ҳаракат миқдори моменти), умуман айтганда, узлуксиз ўзгармасдан, квант шартлар асосида танланадиган дискрет қатор қийматларнигина қабул қилишларига олиб келишини кўрган эдик.

Шунингдек, классик электродинамика қонунларини ҳам атом системаларига татбиқ қилиб бўлмас экан. Ҳақиқатан ҳам, классик электродинамика қонунларига кўра, орбита бўйлаб айланаётган электрон электромагнит тўлқин нурлаши керак. Бу нурланиш энергиянинг камайишига олиб келиши ва бунинг натижасида электрон ядрога тобора яқинлаша бориши керак. Аксинча, квант постулатлар нурланиш фақат бир стационар орбитадан бошқасига ўтишдагина содир бўлиши кераклигини талаб қилади. Шундай қилиб, классик манзарада электрон тўхтовсиз нурланиш билан спирал орбита бўйлаб ядрога узлуксиз туша боради, квант манзарада эса у фақат „сакрашларда“ нурланиб, чекли катталикдаги поғоналар бўйича тушади.

Бироқ, иккала манзара мос келувчи натижа берадиган шароитлар ҳам мавжуддир. Кетма-кет сатҳлар оралиғи сатҳларнинг баландлигига нисбатан кичик бўлган ҳолни тасаввур қилайлик. У ҳолда, тушиладиган „поғоначалар“ жуда майда бўлади ва у орқали тушиш пастга узлуксиз сирғаниб тушишдан кам фарқ қилади. Катта квант сонлар ҳолида худди шундай ҳодиса ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, масалан, Бальмер энергия сатҳларини қарайлик:

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Энергия манфий бўлганидан n ортиши билан у ортади. Бундан сунг $n \gg 1$ ҳол учун (100.5) дан қуйидагини топамиз:

$$\Delta E_n = \frac{4\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 n^3} \Delta n.$$

Бундан n нинг етарлича катта қийматларида қўшни сатҳлар ($\Delta n = 1$) жипс жойлашгани ва n қанча катта бўлса, улар шунчалик жипсроқ бўлиши келиб чиқади. Агар n жуда катта бўлса, у ҳолда амалда сатҳларнинг узлуксиз кетма-кетлигига эга бўламиз ва квант процессларнинг характерли хусусияти—дискретлик—тўла йўқолиши керак.

Биз ҳозир ўтган параграфда олган натижаларимиз бу талабни тўла қаноатлантиришини кўрамиз. Водородсимон атомни қарашдан бошлаймиз ва катта квант сонлар ҳолида классик

ва квант қонунларга асосан ҳисобланган нурланиш частоталари ўзаро мос келишини кўрсатамиз. Бунинг учун 107-§ даги формулалардан фойдаланамиз. Қуйидаги

$$a_n^2 v_n^* = \frac{nh}{4\pi^2 m} \quad (107.2)$$

ва

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Z e^2} \quad (107.3)$$

формулаларни бирлаштириб қуйидагини топамиз:

$$v_n^* = \frac{4\pi^2 m Z^2 e^4}{n^3 h^3} \text{сек}^{-1}.$$

Бу формула электроннинг n -стационар орбитада айланиш частотасини беради. Классик электродинамикага кўра электромагнит нурланиш частотаси ҳам шундай бўлиши керак. Шунинг учун биз қуйидагига эга бўламиз:

$$v_{\text{кл}}^* = v_n^* = \frac{4\pi^2 m Z^2 e^4}{n^3 h^3} \text{сек}^{-1}. \quad (114.1)$$

Ридберг доимийси ифодасидан фойдаланиб, бу формулани анча ихчамлаштирайлик:

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \text{см}^{-1}. \quad (113.7)$$

(114.1) формулани энди осонгина қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$v_{\text{кл}}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \text{сек}^{-1}. \quad (114.2)$$

$n \rightarrow k$ ўтишда квант частота, маълумки, Бальмер формуласи бўйича ҳисобланади ва қуйидагига тенг бўлади:

$$v_{\text{кв}}^* = RcZ^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{сек}^{-1} \quad (114.3)$$

(ҳақиқий частотани сек^{-1} да ҳисоблаганимиздан c кўпайтувчи пайдо бўлди, R одатда см^{-1} да ифодаланади).

(114.1) билан солиштириш учун (114.3) ни қуйидаги кўринишга келтириш қулай:

$$v_{\text{кв}}^* = RcZ^2 \frac{n^2 - k^2}{k^2 n^2} = RcZ^2 \frac{(n-k)(n+k)}{k^2 n^2}. \quad (114.4)$$

$v_{\text{кл}}^*$ ва $v_{\text{кв}}^*$ учун (114.2) ва (114.3) ифодалар бир-бирларидан кескин фарқ қилишини кўрамиз. Айтайлик, n —катта сон бўлсин:

$$n \gg 1 \quad (114.5)$$

) v^ катталики см^{-1} да ифодаланувчи v (тўлқин сон) дан фарқли равишда сек^{-1} да ифодаланган частотани билдиришини эслатиб ўтамиз.

ва бундан ташқари $n - k = 1$ бўлсин; у ҳолда (114.5) га кўра $k = n + 1 \approx n$ бўлади. Бу шартда (114.4) қуйидаги куринишни олади:

$$v_{\text{кв}}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \text{ ёки } \frac{2RcZ^2}{k^3}. \quad (114.6)$$

(114.6) ни (114.2) билан солиштириб, квант сонлар катта бўлса, у ҳолда қўшни квант ҳолатлар орасидаги ўтишлар учун қуйидаги ўринли бўлишини кўраемиз:

$$v_{\text{кв}}^* = v_{\text{кл}}^* \quad (114.7)$$

Агар ўтишда бош квант сон 1 га ўзгармасдан, балки 2, 3, ... ва умуман Δn га узгарса, $\Delta n \ll n$ шартда

$$v_{\text{кв}}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \Delta n = v_{\text{кл}}^* \Delta n \quad (\Delta n = 2, 3, \dots)$$

бўлади, яъни бундай ўтишларда чиқариладиган частоталар $2v_{\text{кл}}^*$, $3v_{\text{кл}}^*$, ... классик частотанинг биринчи, иккинчи ёки анча юқори *обертонларига* мос тушади. Кичик квант сонлар учун бундай мос тушиш мавжуд эмас, бироқ шундай мослик мавжудки, бунда ҳар бир классик обертонга мос ҳолда муайян квант частотани келтириш мумкин.

Классик ва квант қонунлар орасидаги муносабатни жуда яққол шаклда яна қуйидагича ойдинлаштириш мумкин. Айтайлик, биз битта эркинлик даражали системага эга бўлайлик. Бу система чиқарадиган нурланиш частотаси квант қонунларга кўра ушбу

$$E_n - E_k \equiv \Delta E = h\nu$$

частоталар шартига асосан ҳисобланади:

$$\nu_{\text{кв}} = \frac{\Delta E}{h}. \quad (114.8)$$

E_k ва E_n энергияли стационар ҳолатлар $\oint p dq = nh$ квант шарт

ёрдамида топилади. Таъсир ўлчамлигига эга бўлган $\oint p dq$ интегрални I билан белгиласак, $I = nh$ ҳосил бўлади. Икки стационар ҳолат учун

$$I_k = kh, \quad I_n = nh$$

ва

$$I_k - I_n \equiv \Delta I = (k - n)h$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $n - k = 1$, яъни қўшни ҳолатлар қаралса, у ҳолда $\Delta I = h$ бўлади. Буни (114.8) га қуйиб, қуйидагини топамиз:

$$\nu_{\text{кв}}^* = \frac{\Delta E}{\Delta I}. \quad (114.9)$$

Классик частотанинг тегишли ифодасини ҳисоблаб топиш учун чизиқ гармоник осциллятор ҳолни оламиз. Осциллятор энергияси $E = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + U$, бундан $p = \sqrt{2m(E - U)}$. Бу ҳолда таъсир интегрални

$$I = \oint p dx = \oint \sqrt{2m(E - U)} dx.$$

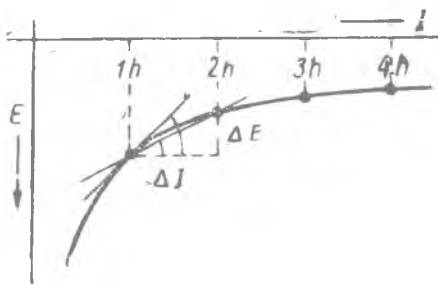
E энергияни узлуксиз ўзгарувчи параметр деб қараб, ҳосиласини топамиз:

$$\frac{dI}{dE} = \oint \frac{m}{\sqrt{2m(E - U)}} dx = \oint \frac{m}{p} dx = \oint \frac{dx}{v} = \oint \frac{dx}{dx/dt} = \oint dt = T,$$

бунда T — тебраниш даври. Бундан классик частота учун қуйидаги ажойиб ифода ҳосил бўлади:

$$v_{\text{кл}}^* = \frac{1}{T} = \frac{dE}{dI} \quad (114.10)$$

(114.10) муносабат битта эркинлик даражали ҳар қандай даврий система учун ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин.



172- расм.

Бу умумий исбот ўқувчига таниш бўлмаган амалдан фойдаланишни талаб қилганидан, биз уни шу параграфга тегишли машқларда келтирилган хусусий мисолларда тасдиқлаш билан чегараланамиз.

(114.9) ва (114.10) ларни таққослаб, қуйидаги натижага келамиз. Ҳам классик, ҳам квант назарияга кўра частотани энергия орттирмасининг таъсир орттирмасига нисбати билан ҳисоблаш мумкин.

Бироқ, классик ҳолда чексиз кичик орттирмалар олсак, квант назария ҳолида чекли айирмалар олишимиз зарур.

Бу 172-расмда яхши тасвирланган. Бу расмдаги туташ эгри чизиқ энергияни I таъсир интегралининг функцияси сифатида кўрсатади. Квант ҳолатларни бу эгри чизиқнинг таъсирнинг $I = 1h, 2h, 3h$ бутун сон қийматларига мос келган нуқталарига тасвирлайди. Равшанки, $\frac{\Delta E}{\Delta I}$ квант частота квант ҳолатларга мос келган, икки нуқтани бирлаштирувчи кесувчининг қиялик бурчаги тангенсига тенгдир, классик частота эса уринма чизиқнинг қиялик бурчаги тангенсига тенгдир, чунки

$$v_{\text{кл}}^* = \frac{dE}{dI}$$

Уринма ва кесувчи чизиқлар қиялиги орасидаги фарқ йўқоладиган катта квант сонлар соҳасида $\nu_{кл} = \nu_{кв}$ бўлади.

Худди шунинг ўзи пастда келтирилган XV жадвалда яхши кўрсатилган, бунда n нинг икки қўшни бутун қийматлари учун (114.2) формула ёрдамида ҳисобланган классик айланиш частоталари ҳамда (114.3) формула ёрдамида ҳисобланган мос квант частоталар кўрсатилган.

XV ж а д в а л

Бошланғич ҳолат	Охириги ҳолат	Бошланғич ҳолатда айл. частотаси, $сек^{-1}$	Квант частота, $сек^{-1}$	Охириги ҳолатда айл. частотаси $сек^{-1}$
$n = 2$	$n = 1$	$0,82 \cdot 10^{15}$	$2,47 \cdot 10^{15}$	$6,58 \cdot 10^{15}$
6	5	$3,04 \cdot 10^{13}$	$4,02 \cdot 10^{13}$	$5,26 \cdot 10^{13}$
10	9	$6,58 \cdot 10^{12}$	$7,71 \cdot 10^{12}$	$9,02 \cdot 10^{12}$
25	24	$4,21 \cdot 10^{11}$	$4,48 \cdot 10^{11}$	$4,76 \cdot 10^{11}$
101	100	$6,38 \cdot 10^9$	$6,48 \cdot 10^9$	$6,58 \cdot 10^9$
501	500	$5,23 \cdot 10^7$	$5,25 \cdot 10^7$	$5,26 \cdot 10^7$

Кўриниб турибдики, кичик n лар учун квант частоталар классик частоталарга мос келмасдан, улар орасида жойлашар экан. Бироқ n нинг ортиши билан классик ва квант частоталар орасидаги фарқ камая бориб, жуда катта n ларда фарқ эътиборга олмастик даражада кичик бўлиб қолади.

Олинган натижаларни яна бошқача изоҳлаш мумкин. Квант шартларга 106-§ да берилган умумий таърифдан, жуда кичик системалар учун механик катталикларнинг узлукли бўлишининг асосий сабаби таъсирнинг „атомизми“ дадир: таъсирнинг $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек. Планк доимийсига тенг бўлган энг кичик қиймати мавжуддир; у худди таъсир „атоми“ кабидир. Агар системанинг ўлчови ва заррачанинг массаси шундай бўлсаки, бундай система учун таъсир h га таққосланурли бўлса, у ҳолда ҳодисаларнинг квант характери тула намоён бўлади; агар таъсир шундай каттаки, бунда $h = 0$ дейиш мумкин бўлса, у ҳолда узлуклик билинмай қолади ва классик механика қонунлари қаноатлантирилиши керак.

Бу натижа ҳозирги замон назарий физикасида муҳим роль ўйнайдиган умумий принцип—*мослик принципининг* хусусий ҳолидир. Масалан, $v \ll c$ да, яъни тезлик жуда кичикки $c \rightarrow \infty$ дейиш мумкин бўлганда, махсус нисбийлик назарияси механикасининг формулалари автоматик равишда Ньютон механикаси формулаларига ўтади. Мослик принципи, умуман, ҳар қандай ноклассик назария тегишли чегаравий ҳолларда классик назарияга ўтишини талаб қилади.

Ма ш қ: 1. (114.10) формула ротатор учун, яъни қўзғалмас марказ атрофида доира бўйлаб айланувчи заррача учун ўринли эканлигини исботланг. (Курсат ма. Ротатор бўлган ҳолда таъсир интегралли $I = \oint p_{\varphi} d\varphi$ бўлади, бунда

$p_{\varphi} = \sqrt{2EA}$, A — инерция моменти).

2. Водородсимон атом энергияси учун (100.5) формуладан фойдаланиб

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2} = - \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{I^2}$$

ни топамиз, бунда $l = nh$ — таъсир интеграл ва l ни узлуксиз ўзгаради деб, (114.10) формула ёрдамида электроннинг n - орбитада айланиш классик частотасини ҳисобланг ва шу йўл билан ҳосил қилинган натижа (114.2) га мос келишини кўрсатинг.

115-§. Бор назариясининг кризиси

Бу бобда биз танишган Бор назарияси атом тузилиши назариясининг ривожланишида жуда улкан қадам бўлди. У бир томондан атом ичидаги ҳодисаларга классик физикани татбиқ этиш мумкин эмаслигини, иккинчи томондан микроскопик системаларда квант қонунларнинг асосий ғолини тўла ойдинлик билан кўрсатди. У бир қатор муҳим натижаларга олиб келган кўп сонли экспериментал ишларга тўртки бўлди: бироқ унинг эвристик (муҳокама йўли билан ҳал қилиш) аҳамияти айниқса катта эди: назария у ёки бу группа ҳодисаларга миқдорий талқин беролмаганида ҳам, у ҳодисаларнинг яққол классификациясига ва сифатий интерпретациясига йўналтирувчи кўрсатма берарди. Шу йўл билан, масалан, атом ва молекуляр спектроскопиянинг ғоят катта эмпирик материали бир қатор тадқиқотчиларнинг меҳнатлари орқасида биринчи марта изчил ва равшан системага келтирилган эди. Бу ишни амалга оширишда рус олими, академик Д. С. Рожественский ва унинг шогирдларининг хизматлари катта аҳамиятга эгадир.

Мана шу ва бошқа жуда кўп ижобий томонлари билан бир қаторда, назария бошдан оқ равшан бўлган жиддий камчиликларга ҳам эга эди. Улар жумласига ҳаммадан аввал назариянинг ички мантиқий зиддияти киради. Ҳақиқатан ҳам, Бор назарияси на изчил классик, на изчил квант назария эмас эди. У. Г. Брэггнинг ҳазил билан айтишича, бу назарияда классик қонунлардан душанба, чоршанба ва жума кунлари, квант қонунлардан сешанба, пайшанба ва шанба кунлари фойдаланишимиз керак эди.

Назариянинг дастлабки ютуқларидан кейин тобора унинг камчиликлари кўпроқ намоён бўлиши бежиз эмас. Аввало, Бор назарияси энг содда водородсимон атомлар ҳолида спектрал чизиқларнинг интенсивлигини эмас, фақат частотасинигина ҳисоблашга имкон берарди. Интенсивликни ҳисоблаш учун мослик принципидан уни жуда кичик квант сонларга ҳам ёйиб фойдаланишга ва натижада, ҳисоблашларни классик электродинамика бўйича бажаришга туғри келарди.

Даврий системанинг энг оддий атомларидан бири, водород атомидан бевосита кейинги ўринда жойлашган ҳамда учта заррачадан — ядро ва иккита электрондан ташкил топган нейтрал

гелий атомининг назариясини яратишдаги муваффақиятсизлик айниқса оғир эди. Уч жисмга тегишли масала классик механика доирасида аниқ ҳал қилиниши мумкин бўлмаса ҳам, эксперимент билан солиштириш учун тамомила етарли аниқликда натижалар берадиган ажойиб тақрибий методлар осмон механикасида аллақачон ишлаб чиқилган эди. Шунга қарамасдан, гелий атоми назариясини тузишдаги кўпгина уринишлар тўла муваффақиятсизликка учради.

Х бобда гап юритиладиган модданинг ўзига хос тўлқин хоссалари кашф қилингандан кейинги ҳозирги пайтда, классик механикага таянадиган Бор назарияси атом ҳодисаларнинг изчил назариясини яратишда ўтиш босқичигина бўла олиши тамомила равшан бўлиб қолди.

116-§. Ёруғлик майдонининг флукутациялари

Шу пайтгача микроскопик заррачалар *ҳаракатларидаги* ўзига хос квант қонуниятларнинг кўринишлари билан танишиб чиқдик. Биз, хусусан, атомнинг ёруғлик чиқариш процесси турли стационар ҳолатлар орасидаги ўтишларда узлукли тарзда содир бўлишини аниқладик, бироқ нур энергиянинг ўз табиати ҳақидаги масалани ҳали қарамадик. Бироқ Эйнштейн 1905 йилдаёқ нурланишнинг узлукли табиати ҳақидаги тасаввурга муқаррар олиб келадиган кўп миқдорда экспериментал далиллар ва жиддий назарий мулоҳазалар мавжуд эканлигини кўрсатди. Эйнштейннинг *назарий* мулоҳазаларининг баёнидан бошлаймиз. Бу мулоҳазалар нурланиш зичлигининг тасодифий тебранишларини (флукутацияларини) қараб чиқишга асосланади.

Даставвал, V ҳажмли берк идишга жойлашган моддий газни қараб чиқамиз. Энди бирор $v < V$ ҳажмни ажратамиз ва v ичида турли пайтлардаги газ молекулаларининг сонини текшираемиз. Молекуляр статистик нуқтаи назардан газ молекулаларининг бу сони ҳеч аниқ доимий қолмасдан тебраниб туради. Айтайлик v ҳажмда заррачаларнинг ўртача сони n бўлсин. Агар бу ҳажм етарлича катта ва газ нормал босимда бўлса, у ҳолда бу ўртача n сондан оний четлашишлар нисбатан шунчалик кичик бўладики, умуман айтганда, уларни эътиборга олмаса ҳам бўлади. Энди v ҳажмни кичрайтира борамиз. Агар биз ниҳоят бу ҳажм шунчалик кичрайганки, унда озгина сон заррача (айтайлик, ўртача 10 та) жойлашади деб фараз қилсак, у ҳолда ўртачадан тасодифий четлашишлар энди жуда сезиларли бўлиб қолади. Бундай тасодифий четлашишлар флукутация дейилади. Уларни ўрганиш ҳозирги замон статистик физикасининг қизиқарли ва муҳим бобларидан биридир.

Флукутацияни ўрганиш билан кўп шуғулланган Смолуховский, масалан, қуйидаги масалани қараб чиқди: V ҳажм-

даги газ молекулаларининг ҳаммаси бу ҳажмнинг v қисмида тўпланиш эҳтимоллиги қандай бўлади? Бу саволга жавоб бериш қийин эмас*. Агар V ҳажмда фақат битта молекула бўлса, у ҳолда уни v қисмда топиш эҳтимоллиги, равшанки, v га пропорционалдир ва ушбуга тенг

$$\omega_1 = \frac{v}{V}. \quad (116.1)$$

Ҳақиқатан ҳам, агар $v = V$ бўлса, у ҳолда $\omega_1 = 1$, чунки бутун V ҳажмда молекуланинг топилиши ишончли воқеа бўлади. Бироқ, V ҳажмда n та мустақил молекула мавжуд бўлсин. Ҳажмнинг v қисмида *битта* молекулани топиш эҳтимоллиги (116.1) формула билан ифодаланади; n та мустақил молекуланинг ўша v ҳажмда топиш эҳтимоллиги, эҳтимолликларни кўпайтириш теоремасига кўра қуйидагига тенгдир:

$$\omega_n = \left(\frac{v}{V}\right)^n. \quad (116.2)$$

Бу формуладан, масалан, $v = 1/2 V$ бўлса, у ҳолда n нинг бирор катта қийматида ω_n эҳтимоллик

$$\omega_n = \frac{1}{2^n}$$

жуда кичик бўлади.

Эйнштейн шунга ўхшаш масалани нурланиш ҳоли учун қараб чиқди. Айтайлик, T температурада қора нурланишга тўлган V берк ҳажм мавжуд бўлсин. Бу ҳажм ичида жойлашган ν ва $\nu + d\nu$ орасидаги частотали нурланиш энергияси қуйидагича бўлади:

$$E = V \rho_\nu d\nu,$$

бунда ρ_ν — нурланишнинг спектрал зичлиги. Масала бу барча энергиянинг ҳажмнинг v қисмида тўпланиш эҳтимоллигини ҳисоблашдан иборатдир. Статистик термодинамикадан ва нурланиш зичлиги учун (*юксак частоталар учун ўринли бўлган*) Вин формуласидан фойдалансак,

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT} d\nu,$$

Эйнштейн изланаётган эҳтимоллик

$$\omega = \left(\frac{v}{V}\right)^{E/h\nu}$$

эканлигини топди. Бу натижани (116.2) формула билан таққослаш кўрсатадики, етарлича қисқа тўлқинли нурланиш ўзини худди $n = E/h\nu$ мустақил корпускуладан ташкил топгандек тутарди.

* Китоб охиридаги IV иловага қаранг.

Эйнштейн кейин нурланиш зичлигининг флуктуацияси ҳақиқатан биз *фотонлар* деб атайдиган $h\nu$ катталиқдаги айрим „атомлар“ дан иборат дейлик. Бундай ҳолда нурланиш зичлиги бирлик ҳажмдаги фотонлар сонини $h\nu$ га кўпайтирилганига тенг бўлади. Бироқ бирор танланган ҳажмдаги фотонлар сони, худди молекулалар сони каби тасодифий тебранишларга, флуктуацияларга дучор бўлиши керак. Аввал бу флуктуациялар ўлчовини ўрнатамиз. Агар \bar{n} заррачаларнинг v ҳажмдаги ўртача сони бўлса, у ҳолда муайян пайтда шу ҳажмда турган заррачалар сони n_k , умуман айтганда, \bar{n} дан фарқли бўлади: бир ҳолларда \bar{n} дан катта, бошқа ҳолларда \bar{n} дан кичик бўлади. Ўртачадан четлашиш

$$\Delta n_k = n_k - \bar{n}$$

гоҳ мусбат, гоҳ манфий бўлади ва бундан ташқари, ҳар хил абсолют қийматларга эга бўлади. Бироқ Δn нинг ўртача қиймати флуктуациянинг ўлчови бўлолмайди, чунки у, равшанки, нолга тенг

$$\overline{\Delta n} = \overline{(n_k - \bar{n})} = \bar{n} - \bar{n} = 0.$$

Шунинг учун четлашиш ўлчови сифатида ҳар доим мусбат бўлган $(n_k - \bar{n})^2$ квадратдан фойдаланиш қулайдир. Четлашиш квадратининг ўртача қиймати

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(n_k - \bar{n})^2}$$

уларнинг айрим n_k қийматларининг „тарқалиши“ уларнинг ўртачадан чекиниш ўлчовидир. Шунинг учун $\overline{\varepsilon^2}$ квадратик флуктуация ёки дисперсия дейилади. Ўртачадан четлашишни плюс $\overline{\varepsilon^2}$ нинг ишораси билан олинган квадрат илдиз билан характерлаш мумкин:

$$\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\overline{(n_k - \bar{n})^2}},$$

буни физиклар ўртача квадратик хато, математиклар эса стандарт дейишади. Бу барча таърифлар, албатта, фақат заррачалар сонининг четлашишлари ҳолигагина эмас, балки ҳар қандай тасодифий флуктуацияларга ҳам татбиқ қилинади.

Математик статистикада ҳар қандай тасодифий четлашишлар учун ўринли ва қуйидагидан иборат бўлган содда қонун исботланади: агар тасодифий узгарувчи катталиқнинг ўртача қиймати \bar{n} бўлса, у ҳолда $\overline{\varepsilon^2}$ квадратик флуктуация ҳам \bar{n} га тенг бўлади*, шунинг учун ўртача квадратик четлашиш $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\bar{n}}$. Бу қонуннинг маъноси сонли мисоллардан кейин ойдинлашиб қолади.

* Китоб охиридаги IV иловага қаранг.

Айтайлик, \bar{n} аввалгидек заррачаларнинг ўртача сони бўлсин. Агар $\bar{n} = 100$ бўлса, у вақтда $\bar{\epsilon}^2$ ҳам 100 га тенг. $\sqrt{\bar{\epsilon}^2} = 10$ га тенг ёки бошқача айтганда, заррачалар сонининг тебраниши улар сонининг ўртача 10% ини ташкил қилади: агар $\bar{n} = 10^{10}$ бўлса, у ҳолда $\sigma = \sqrt{\bar{\epsilon}^2} = 10^5$ ёки $10^{-3}\%$ \bar{n} бўлади, $\bar{n} = 10^{20}$ да $\sqrt{\bar{\epsilon}^2} = 10^{10}$ ёки $10^{-8}\%$ \bar{n} бўлади.

Агар бизни энергия тебранишлари қизиқтирса у ҳолда энергия $h\nu$ катталикдаги мустақил атомлардан иборат десак, $\bar{E} = \bar{n} h\nu$ бўлади, шунинг учун

$$\bar{\epsilon}^2 = \Delta \bar{E}^2 = \Delta \bar{n}^2 (h\nu)^2 = (\bar{n} h\nu) h\nu = \bar{E} \cdot h\nu. \quad (116.3)$$

Агар нурланиш соф тўлқин табиатга эга бўлганида ҳам, энергия флукуацияси бўлиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда V ковакда ҳамма йўналишларда электромагнит тўлқинлар тарқалаётипти деймиз. Улар орасида йўналиши ва частотаси бўйича яқинлари бўлиб, улар узаро интерференциялашади. Бироқ бу тўлқинларнинг йўналишлари ва фазалари тасодифий тарзда ўзгаргани учун бу интерференция натижаси ҳам бетартиб ўзгаради: максимум ва минимумларнинг фазода ва вақт бўйича тақсимланиши ўзгаришсиз қолмайди. Шунинг учун ҳам бундай тўлқинларни когерентмас деймиз. Биз фойдаланадиган макроскопик асбоблар бу узлуксиз ўзгарувчи интерференцион манзарани ўртачалаштиради ва зоҳиран йўқолган интерференцияни қайд қилади. Бироқ микроскопик нуқтаи назардан биз бу ҳолда энергиянинг типик флукуациясига эга бўламиз.

a_1 ва a_2 амплитудали тўлқинларнинг интерференцияси натижасида муайян жойда юзага келадиган амплитуда $a_1 + a_2$ максимал қийматдан $a_1 - a_2$ минимал қийматгача тебранади. Бунга мос ҳолда фазалар айирмасига боғлиқ равишда энергия оралиқ қийматлардан ўтиб $(a_1 + a_2)^2$ дан $(a_1 - a_2)^2$ гача ўзгаради; у ўртача $a_1^2 + a_2^2$ га тенг бўлади. Энергиянинг ўртача қиймати амплитуда квадратига пропорционал бўлгани учун энергиянинг квадратик флукуацияси амплитуданинг тўртинчи даражасига, яъни энергия квадратига пропорционал бўлади. Аниқ ҳисоблаш* $\bar{\epsilon}^2$ учун қуйидаги формулани беради:

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{c^2}{8\pi\nu^2} V d\nu \bar{E}^2. \quad (116.4)$$

Статистик термодинамика биз шу пайтгача фойдаланиб келган кургазмали манзараларсиз энергиянинг квадратик флуку-

* Бу ҳисоблаш жуда мураккаб бўлгани учун бу ерда уни келтирмаймиз. Қизиқувчилар уни Г. А. Лорентцнинг "Статистическiе теории в термодинамике" кигибдан топишлари мумкин, 119-бет, ОНТИ, 1936.

ацияси учун ифодани топишга имкон беради. Физик статистиканинг (Гиббс тақсимоти) энг умумий ҳолатлари асосида энергиянинг квадратик флукуацияси учун қуйидаги формула* ҳосил қилинади:

$$\bar{\epsilon}^2 = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT}. \quad (116.5)$$

Бироқ $\bar{E} = V \rho_\nu d\nu$ бўлганидан, ҳисоблашда энергия зичлиги учун қайси формуладан фойдаланишга қараб ҳар хил натижалар ҳосил бўлади.

Юксак частоталар соҳасида Вин формуласи яхши қаноатлантиришини биламиз:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT} d\nu,$$

аксинча, паст частоталар соҳасида етарлича узун тўлқинлар учун экспериментал натижаларга яхши мос келадиган Рэлей—Жинс формуласи татбиқ қилинади.

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT,$$

ниҳоят, *барча спектрда* Планк формуласи тўғри натижалар беради:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^2 d\nu}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Энди (116.5) формула ёрдамида $\rho_\nu d\nu$ энергиянинг юқорида ёзилган тақсимот қонунларининг учаласидан кетма-кет фойдаланиб $\bar{\epsilon}^2$ ни ҳисоблаймиз.

Вин формуласидан бошлаймиз. Бу ҳолда

$$\begin{aligned} \bar{E} &= V \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT} d\nu, \\ \frac{d\bar{E}}{dT} &= V \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{kT^2} e^{-h\nu/kT} d\nu = \frac{h\nu}{kT^2} V \rho_\nu d\nu = \frac{h\nu}{kT^2} \bar{E}. \end{aligned}$$

Буни (116.5) га қўйиб қуйидагини

$$\bar{\epsilon}^2 = h\nu \bar{E}, \quad (116.6)$$

яъни (116.3) формулани ҳосил қиламиз. Бу эса, Вин формуласига бўйсунувчи нурланиш, ўзини ҳақиқатан „нурланиш атомлари“ тўплами каби тутишини кўрсатади.

Энди бошқа чегаравий ҳолни қараб чиқамиз: нурланиш зичлиги учун Рэлей—Жинс формуласини оламиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} \bar{E} &= V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu, \\ \frac{d\bar{E}}{dT} &= V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k d\nu \end{aligned}$$

* Келтириб чиқаришни китоб охиридаги IV иловадан қаранг.

ва

$$\bar{\epsilon}^2 = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT} = k^2 T^2 V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu. \quad (116.7)$$

Бу ҳолда

$$\bar{E} = V \rho_\nu d\nu = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu$$

эканлигини эътиборга олиб (116.6) ни ушбу кўринишга

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V d\nu} \bar{E}^2, \quad (116.8)$$

яъни нурланишнинг тўлқин табиати ҳақидаги тасаввурга кўра ҳосил қилинган (116.4) формулага мос келувчи натижага келамиз.

Шундай қилиб, статистика қуйидаги ўзига хос хулосага олиб келганини кўрамиз: қисқа тўлқинлар соҳасида (Вин қонуни қўлланиладиган соҳада) нурланиш ўзини тўпланган заррачалар, фотонлар каби тутар экан, Рэлей — Жинс формуласи ўринли бўлган узун тўлқинлар соҳасида нурланиш ўзини тўлқинлар сингари тутар экан. Бироқ биз фойдаланган ҳар иккала нурланиш қонуни чегаравий қонунлардир. Ниҳоят, энди *ҳар қандай узунликдаги тўлқинлар учун ўринли бўлган* Планк формуласини олайлик ва унинг ёрдамида, (116.5) статистик формуладан фойдаланган ҳолда, квадратик флукутацияни ҳисоблайлик. Бу ҳолда

$$\bar{E} = V \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

$\bar{\epsilon}^2$ ни ҳисоблаш учун $\frac{d\bar{E}}{dT}$ ҳосилани топиш керак. Қисқалик учун

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = f,$$

деб белгиласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{df}{dT} = \frac{h\nu}{kT^2} \cdot \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}.$$

Бевосита ҳисоблашлар асосида қуйидагига ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$\left(\frac{e^{h\nu/kT}}{e^{h\nu/kT} - 1} \right)^2 = f + f^2.$$

Бу кўрсатмаларга амал қилиб, ўқувчи $\bar{\epsilon}^2$ учун *икки ҳаддан иборат* қуйидаги формулани осон ҳосил қилади:

$$\bar{\epsilon}^2 = h\nu \bar{E} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu V} \bar{E}^2. \quad (116.9)$$

Биринчи ҳад (116.6) формулага мос келади, яъни ёруғлик табиати ҳақидаги соф корпускуляр қарашга мос келади. Иккинчи

ҳад (116.8) формулага мос келади ва, бинобарин, соф тўлқин тасаввурга мос келади. Шундай қилиб, ёруғлик икки аспектга: корпускуляр ва тўлқин аспектга эга бўлиши керак деган ажойиб хулосага келамиз. Биринчиси айниқса спектрнинг қисқа тўлқинли қисмида аниқ намоён бўлади, иккинчиси узун тўлқинли қисмида намоён бўлади. Бу аспектлардан ҳеч бири айрим ҳолда ёруғлик табиатини тўла тушунтирмайди; фақат улар биргаликдагина унинг барча хоссаларини тушунишга имкон беради.

Бу бобда бизни ёруғликнинг фақат корпускуляр хоссалари қизиқтиради. Агар ёруғлик фотонлар оқимидан иборат деб қаралса, кўпгина ҳодисалар бевосита тушунтирилиши мумкин эканлигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин. Ёруғлик табиатининг тўлқин аспекти намоён бўладиган ҳодисалар (интерференция, дифракция) классик оптикадан жуда яхши маълумдир.

117-§. Фотоэффект ва Эйнштейн тенгламаси

Ёруғликнинг корпускуляр хоссаси намоён бўладиган ҳодисалар қаторига, даставвал, ёруғлик таъсирида электронлар чиқариш — фотоэффект ҳодисаси киради.

1888 йилда Генрих Герц агар разрядникнинг рух шарчаларидан бири ультрабинафша ёруғлик билан ёритилса, улар орасида учқун чиқиш осонлик билан содир бўлишини пайқайди. Бу ҳодиса фотоэффектни текшириш методикасини (Столетов конденсатори) ишлаб чиққан рус физиги А. Г. Столетовнинг классик ишларида мукамал ўрганилган ва қатор муҳим қонуниятлар аниқланган. Бу ҳодиса металл сиртида ультрабинафша ёруғлик таъсирида *манфий* электрни ажратишга асосланган экан. Кейинги текширишлар фотоэффектнинг моҳияти *электронларни* ажратиб олишдан иборат эканлигини аниқлади. Бу ҳодиса совет физиги А. Ф. Иоффеннинг металл чангларида фотоэффект билан ўтказган назик тажрибаларида айниқса аниқ кўрсатилган. Электродлар орасида ёй ёнганда электродларнинг чангланиши натижасида ҳосил бўлган микроскопик металл заррачаларини конденсатор пластинкалари орасига киритилади. Конденсатор пластинкалари орасидаги потенциаллар айирмаси, бу чанг зарраларидан бири микроскопнинг кўриш майдонида муаллақ ҳолда туриб қоладиган қилиб танлаб олинади. Ультрабинафша ёруғлик билан ёритилганда зарра вақт-вақти билан ўз зарядини ўзгартиради ва мувозанат бузилади; потенциаллар айирмасини қайта танлаб олиб, заррани микроскопнинг кўриш майдони марказига келтириш мумкин. Муаллақ ҳолга келтирувчи потенциаллар айирмасини билган ҳолда, зарранинг ҳар сафар йўқотган зарядини топиш мумкин (3-§ га қараи). Бу заряд ҳар доим электрон зарядига бутун қаррали бўлар экан.

Фотоэффектни тўлқин нуқтаи назардан сифатий тушунтириш *биринчи қарашда* ҳеч қийин эмасдек туюлади. Ҳақиқатан ҳам, бу тушунтириш қуйидагича бўлиши мумкин эди: тушувчи электромагнит тўлқин металлдаги электронларни мажбурий тебратади; электроннинг хусусий тебраниш даври ва тушувчи тўлқин даври орасидаги резонансда электроннинг тебраниш амплитудаси шунчалик катта бўлиб кетадики, натижада электрон металл сиртидан узилиб чиқиши мумкин. Агар бу манзара тўғри бўлса, у ҳолда электроннинг металлни ташлаб чиқишидаги кинетик энергияси тушувчи тўлқиндан олиниши керак, шунинг учун фотоэлектрон энергияси тушувчи тўлқинлар интенсивлиги билан узвий боғлиқ бўлишини кутиш табиийдир. Ҳақиқатда эса, кўпчилик тажрибалар, фотоэлектронлар энергияси ёруғлик интенсивлигига *сира боғлиқ бўлмаслигини* кўрсатди: интенсивликнинг оширилиши фотоэлектронлар тезлигини эмас, балки фақат уларнинг *сонини* интенсивликка қатъий пропорционал миқдорда кўпайтиради. Фотоэлектронлар тезлиги фақат тушувчи ёруғликнинг частотасига боғлиқ бўлиб, частотанинг ортиши билан фотоэлектронлар энергияси ҳам чиққли ортади.

Фотоэффектнинг бу ҳамма қонунлари ёруғликнинг тулқин табиати нуқтаи назаридан тушунарли булмай қолди. Фотоэлектронлар энергиясининг ёруғлик интенсивлигига боғлиқ эмаслигини ёруғликка „бўшатиш механизм“ вазифасини бериш билан тушунтиришга ҳаракат қилинди; яъни бу қарашга кўра, электрон ўз энергиясини тушувчи тўлқин ҳисобига эмас, балки металлда иссиқлик ҳаракати ҳисобига олиб, ёруғлик фақат электронни озод қилиш вазифасинигина бажаради. Бироқ бунда ёруғлик частотасининг таъсири тамоман тушунарсиз бўлиб қолади, ундан ташқари, бу ҳақиқатан тўғри бўлса, фотоэффект металл температурасига кучли боғланган бўлиши керак эди, ҳақиқатда шундай эмас.

Эйнштейн, агар ёруғликни $h\nu$ катталикидаги фотонлар оқими деб қаралса, яъни соф корпускуляр нуқтаи назарда турилса, бу барча қийинчиликлар йўқолишини кўрсатди. Бу нуқтаи назардан фотоэффект механизмининг сифатий манзараси қуйидагичадир: фотон ютилаётиб ўз энергиясини электронга беради ва агар шу энергия электронни уни тутиб турувчи боғлардан озод қилишга етса, у металл сиртидан ташқарига чиқади. Битта электроннинг иккита фотонни бир вақтда ютиш эҳтимоллиги жуда кичик бўлганидан, ҳар бир озод қилинган электрон ўз энергиясини *битта фотондан* олади (умуман айтганда, аксинча ҳол ўринли эмас, яъни ҳар бир ютилган фотон электронни озод қилавермайди).

Шунинг учун ажралиб чиққан фотоэлектронлар *сони* ютилган фотонлар сонига пропорционал, яъни ёруғлик интенсивлигига пропорционал бўлиши (Столетов қонуни) керак. Бироқ

фотоэлектрон энергияси фақат ютилган фотон энергиясига боғлиқ бўлади; фотон энергияси $h\nu$ га тенг, бундан фотоэлектрон энергияси частотага чизиқли боғлиқ бўлиши ва интенсивликка (фотонлар сонига) бутунлай боғлиқ бўлмаслиги керак.

Фотон ютилишдаги энергетик баланс энг умумий ҳолда қуйидаги оддий тенглама билан ифодаланиши мумкин, одатда бу тенгламани Эйнштейн тенгламаси деб аталади:

$$h\nu = P_1 + P_2 + eV. \quad (117.1)$$

Бу ерда P_1 — атомдан электронни узилиб чиқиш энергияси, (ионизация энергияси); P_2 — электроннинг жисм сиртидан ташқарига чиқиш иши ва eV — озод қилинган фотоэлектроннинг кинетик энергияси.

Металлар ўзларида кўп миқдорда эркин электронлар бўлиши билан характерланади; шу сабабли металлар учун P_1 ни нолга тенг дейиш мумкин. Бироқ электрон металл сиртидан чиқиб кетиши учун майдонни енгиши керак. Шу майдон туйфайли электронлар металл ичида яшикка қамалгандек бўладилар. Бу майдонни енгишга сарфлаш учун керак бўлган иш P_2 чиқиш иши бўлади. Демак, металлар учун Эйнштейн тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$h\nu = eV + P_2. \quad (117.2)$$

Равшанки, агар $h\nu < P_2$ булса, у ҳолда электрон металл сиртидан чиқиб кетолмайди. Бу эса, ҳали фотоэффектни вужудга келтира оладиган бирор $h\nu_0 = P_2$ минимал частота мавжуд эканлигини билдиради; кичик частоталарда фотоэффект кузатилмайди (фотоэффектнинг қизил чегараси).

Металл сиртидан электронни озод қилишда иш бажариш фақат фотоэффект ҳолидагина зарур бўлмасдан, қиздирилган жисмларнинг электронлар чиқаришида ҳам содир бўлади (термоион эмиссия). Чиқиш иши фотоэффектдан мустақил равишда, термоион эмиссияни тадқиқ қилиш орқали ҳам экспериментал аниқланиши мумкин. У бир неча электрон-вольт тартибдаги катталикларга эга.

XVI жадвалда чиқиш иши катталигига бир неча мисол берилади.

XVI ж а д в а л

Металл	Чиқиш иши (электрон-вольт ҳисобида)	Металл	Чиқиш иши (электрон-вольт ҳисобида)
Li	2,4	W	4,5
Na	2,1	Pd	5,0
K	2,0	Pt	6,3
Cs	0,7		

Чиқиш иши катталигига металл сиртининг ҳолати ва айниқса адсорбцияланган газ пардасининг мавжудлиги жиддий таъсир қилишини қайд қилиш керак. Жадвалда келтирилган рақамлар, сирти газсизланган металлларга тааллуқлидир.

Чиқиш ишини билган ҳолда, фотоэффект қизил чегарасининг λ_0 тўлқин узунлигини ҳисоблаш мумкин:

$$P_2 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}.$$

Бундай ҳисоблашлар ишқорий металллар учун λ_0 спектрнинг кўринадиган қисмида (масалан, калий учун $\lambda_0 = 600 \text{ м}\mu$), чиқиш иши 5—6 эв тартибда бўлган вольфрам, платина ва бошқа металллар учун ультрабинафша қисмида ётишини (масалан, вольфрам учун $\lambda_0 = 270 \text{ м}\mu$) кўрсатади.

Ма ш қ. XVI жадвалда келтирилган барча металллар учун қизил чегаранинг тўлқин узунлигини ҳисобланг.

118-§. Эйнштейн тенгламасини экспериментал текшириш

Эйнштейн тенгламасини экспериментал текшириш мумкин. (117.2) га кўра, тушувчи ёруғликнинг частотаси билан у ажратиб чиқарган фотоелектронларнинг eV энергияси орасида чизиқли боғланиш мавжуд бўлиши керак. Шундай қилиб, турли узунликдаги тўлқинлар билан фотоэффект уйғотиб ва ажратилган фотоелектронлар энергиясини ўлчаш билан Эйнштейн тенгламасининг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш мумкин, бундан ташқари, ҳосил қилинган тўғри чизиқнинг қиялик бурчак тангенс сифатида h нинг сон қийматини ҳам аниқлаш мумкин.

Кўпчилик ҳолларда фотоелектронлар энергиясини ўлчаш учун 91-§ да тавсифланган „тўсувчи потенциал“ методидан фойдаланилади.

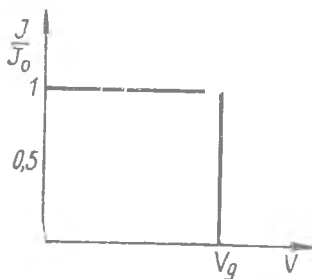
Агар барча озод қилинаётган электронлар бир хил тезликка эга бўлганларида, фототок кучининг тормозловчи потенциалга боғланиши 173-расмда тасвирланган кўринишга эга бўларди: тормозловчи потенциал муайян $V = V_g$ катталикка етмагунча, ток кучи потенциалга боғлиқ бўлмайди. $V = V_g$ да ток бирдан нолга тенг бўлиб қолади. Бу электроннинг кинетик энергияси тормозловчи майдонни енгиб ўтиши учун бажариладиган ишга тенг бўладиган V_g потенциалнинг худди ўзгинасидир

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_g.$$

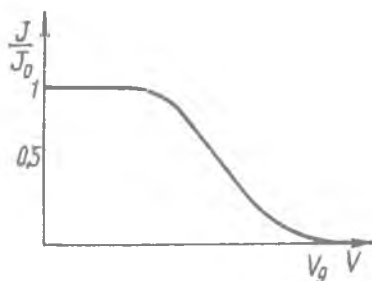
Шундай қилиб, бу чегаравий V_g потенциал фотоелектронлар энергиясининг уллови хизмати бажаради: у eV_g электрон-вольтга тенг.

Ҳақиқатда токнинг бундай кескин пасайиши кузатилмайди. Токнинг тормозловчи потенциалга боғланиш эгри чизиғи 174-расмда тасвирланган кўринишда бўлади.

Токнинг секин-аста пасайиши электронларнинг бир хил муайян тезлик билан озод бўлмаслигидан тушунтирилади, лекин тезликларнинг узлуксиз туплами мавжуд. Бунда вольтампер характеристикани ифодалайдиган 174-расмдаги эгри чизиқ электронларнинг энергия бўйича тақсимланишини топишга



173- расм.



174- расм.

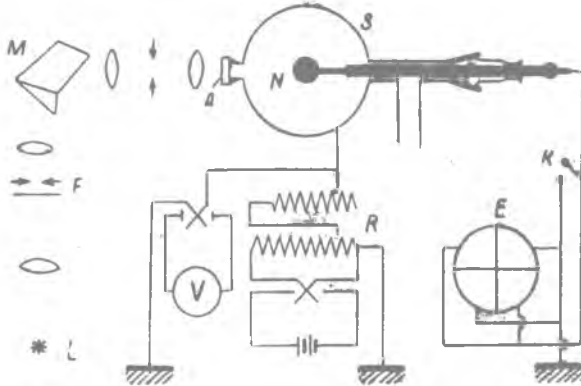
имкон беради. Бунинг учун 91-§ да тушунтирилгандек, вольтампер характеристикани график дифференциаллаш керак бўлади. Бироқ Эйнштейн тенгламасини экспериментал текширишда бизни электронларнинг энергия бўйича тақсимланиши эмас, балки *максимал* энергия қизиқтиради, чунки у фотоэлектронларнинг металл сиртидан ажралишидаги энергиядир.

Аниқ натижаларга эришишга икки ҳол катта халақит беради. Биринчидан, V_g нинг функцияси бўлган J/J_0 экспериментал эгри чизиқ 174-расмда кўрсатилгандек, абсцисса ўқи билан кесишмайди, балки унга асимптотик яқинлашади, натижада максимал тўсувчи потенциал маълум даражада ноаниқ бўлиб қолади. Иккинчидан, худди шунга ўхшаш барча тажрибалардаги сингари аниқ топиш қийин бўлган контакт потенциаллар айирмаси бутун эгри чизиқни силжитади.

Бу контакт потенциаллар айирмасининг муқаррар мавжуд бўлиши ва уни назарга олиш қийинлиги, ҳамда қатор бошқа экспериментал қийинчиликлар ва хатолик манбалари—шуларнинг ҳаммаси Эйнштейн тенгламасининг равшан тасдиқига тез эришиш имконини бермади. Милликэн жиддий эътирозларга сабаб бўлган баъзи бир дастлабки ишлардан кейин моҳирона ва лекин жуда мураккаб қурилма воситасида тегишли экспериментал исботни беришга в h ни аниқ топишга муваффақ бўлди.

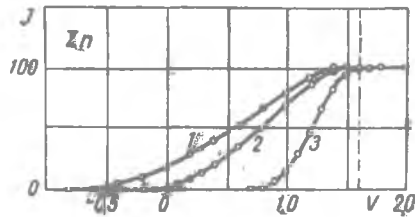
Юқори вакуум техникасининг мукамаллашиши ҳамда қулай сферик конденсатор методининг қўлланиши туфайли ҳозирги вақтда ўлчашлар ғоят соддалашди. Дастлаб П. И. Лу-

кирский ишлаб чиққан ва Эйнштейн тенгламасини экспериментал текшириш учун П. И. Лукирский ва С. С. Прилежаев томонидан фойдаланилган сферик конденсатор методининг афваллиги шундан иборатки, бундай конденсатор майдонида электронлар ҳаракатининг хусусиятлари туфайли тўсувчи потенциалга боғлиқлик ток эгри чизиғи нолга тик тушади. Натижада максимал тўсувчи потенциал жуда аниқ топилиши мумкин.



175-расм. Сферик конденсатор ёрдамида фотовффектни текшириш схемаси.

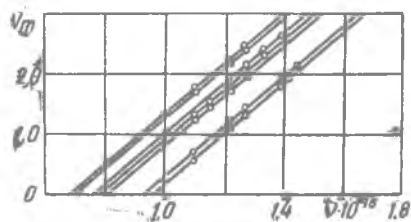
175-расмда тажрибанинг қўйилиш схемаси келтирилган. Бу ерда L — ёруғлик манбаи (кварц симоб лампаси), FM — спектрдан битта чизиқни ажратишга имкон берувчи кварц монохроматор. Конденсаторнинг ташқи қопламаси вазифасини бажарувчи, ичи кумушланган S шар ичига A кварц дарча орқали ёруғлик тушади. Текшириладиган металлдан ясалган N металл шарча конденсаторнинг ички қопламаси хизматини бажаради ва монохроматик ёруғлик билан ёритилади. R потенциометр ёрдамида конденсаторнинг S қопламасига V вольтметр билан ўлчанадиган муайян потенциал бериш мумкин. Фототок кучини



176-расм. Рухдаги фотовффект.

ўлчаш учун „зарядлаш методи“ қўлланилди: N шарчадан электронлар озод қилиниши билан шарчанинг мусбат потенциали орта боради. Шарча потенциалининг E квадрант электрометр ёрдамида ўлчанадиган ўсиш тезлиги фототок кучининг ўлчови вазифасини бажаради. Зарядланиш тезлигини амалий характерлаш учун муайян вақт оралиғида (1,5—2 минут) электрометрдаги оғиш ўлчанарди. 176-расмда рух шарчани 1—2302 Å, 2—2537 Å

ва 3—3130 Å тўлқин узунликли ёруғлик билан ёритилгандаги учта эгри чизиқ келтирилган. Эгри чизиқлар тўлқин узунликлдан қатъи назар потенциалнинг бирдан-бир қийматида пасая бошлайди. Бу потенциал махсус ўлчашларсиз шу йўл билан



177- расм.

аниқланадиган контакт потенциаллар айирмасига тенгдир. Агар шундай эгри чизиқлар ёрдамида фотозлектронларнинг максимал энергияси топилса ва бу энергиянинг частотага боғланиш графиги ясалса, у ҳолда 177- расмда келтирилган тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Шу билан $h\nu$ ва eV орасидаги чизиқли боғланиш тасдиқланади; бу тўғри чизиқлар қиялигининг бурчак тангенси h/e га тенглигидан, қиялик бурчагини аниқлаган ҳолда, e нинг маълум катталиги ёрдамида h ни ҳисоблаш мумкин.

119- §. Туташ рентген спектрининг қисқа тўлқинли чегараси

Агар ички электронларнинг боғланиш энергияси фотоэффектни вужудга келтирувчи фотоннинг $h\nu$ энергиясидан анча кичик бўлса, у ҳолда Эйнштейн тенгламасида $h\nu$ га нисбатан P_2 ва P_1 катталиклари эътиборга олмаса ҳам бўлади. Бу ҳолда Эйнштейн тенгламаси жуда оддий кўриниш олади:

$$h\nu = eV. \quad (119.1)$$

Агар бу тенгламани чапдан ўнгга қараб ўқилса, у ҳолда ифода $h\nu$ фотон ажратиб чиқарган электроннинг энергияси қандай бўлишини кўрсатади. Агар у ўнгдан чапга қараб ўқилса, у ҳолда ифода eV энергияли электрон ҳисобига $h\nu$ фотон ҳосил бўлишини талаб қилади. Электронларнинг тормозланишида рентген нурларининг ҳосил бўлиши тез ҳаракатланаётган электрон энергиясининг фотон энергияга айланиш процессидан иборатдир. Ҳақиқатда ҳодисанинг механизми унча содда эмас, ҳамда электроннинг тормозланишида рентген нурларнинг бутун туташ спектри ҳосил бўлади. Бироқ Эйнштейн тенгламаси бунда ҳосил бўладиган фотонларнинг максимал энергияси (119.1) шартни қаноатлантиришини талаб қилади.

Тажириба рентген нурининг туташ спектрида энергиянинг тақсимланиши 158- расмда тасвирланган кўринишга эга бўлишини кўрсатади. Бу расмда вольфрам антикатодли рентген трубканинг электродларида ҳар хил потенциаллар бўлганда олинган қатор туташ спектрлар келтирилган. Бу спектрларнинг ҳар бири қисқа тўлқин (юксак частота) томондан кескин

чегараланган. Қисқа тўлқинли чегарага мос келадиган λ_{\min} тўлқин узунлик берилган потенциал билан

$$\lambda_{\min} V = \text{const} \quad (119.2)$$

муносабат орқали боғлиқлиги эмпирик усулда топилган, у Ғайнштейн тенгламаси (119.1) билан айнандир. Ҳақиқатан, (119.1) даги ν ни c/λ билан алмаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lambda_{\min} V = \frac{ch}{e} = \text{const.} \quad (119.3)$$

(119.3) муносабатни h ни аниқлаш учун қўллаш мумкин; бунда ҳосил қилинган h нинг қиймати энг ишончли булади.

120-§. Планк доимийсини аниқ топиш

Энергия алмашишининг квант қонунлари кўп сонли ҳодисаларда ўринли бўлгани учун, экспериментал маълумотлардан h ни ҳисоблашнинг жуда кўп имкониятлари мавжуддир. Аввало абсолют қора жисмнинг нурланиш қонунлари шундай имкониятни беришини кўрсатамиз. Масалан, тўлқин узунлик орқали ифодаланган Планк ва Вин формуласига $c_2 = \frac{hc}{k}$ доимий киради. Бу доимийни экспериментал аниқлаш

$$c_2 = 1,4384 \text{ см} \cdot \text{град}$$

ни беради, бундаги c ва k ларнинг қийматлари:

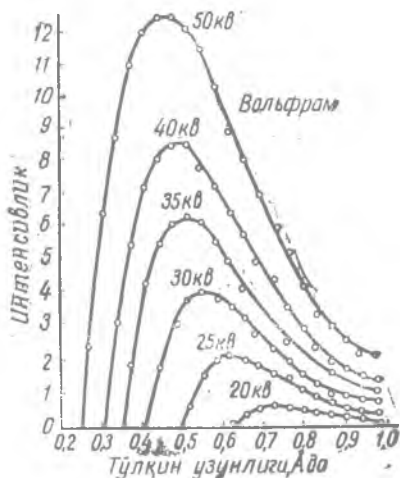
$$c = 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad k = 1,3804 \cdot 10^{16} \text{ эрг град}^{-1}$$

лардан фойдаланиб ушбуни топамиз:

$$h = 6,558 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.}$$

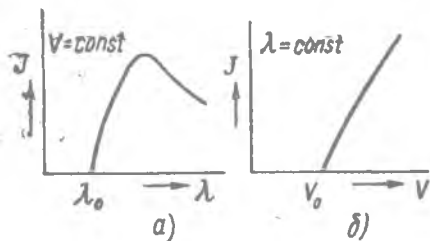
Фотоэффектдан h анча бевосита аниқланилади. Ҳақиқатан ҳам, 157-расмдаги тўғри чизиқлар қиялиги h/e ни беради, шунинг учун бу йўл билан h ни топиш аниқлиги экспериментнинг аниқлигидан ташқари яна битта константа e нинг ишончилигига боғлиқдир, ваҳолонки юқорида кўрилган методда c ва k яна иккита константаларнинг қийматини билиш керак бўларди. Фотоэффектдан қуйидаги топилган

$$h = 6,547 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.}$$



178-расм. Ҳар ҳид потенциалда рентген нурлари туташ спектрининг қисқа тўлқинли чегараси.

h ни аниқлашнинг рентген спектрининг қисқа тўлқинли чегарасини аниқлашга асосланган методи энг аниқ метод ҳисобланади. Аниқлаш 178-расмда тасвирлангани сингари эгри чизиқлардан, яъни ўзгармас потенциалда спектрда энергиянинг тақсимланишидан (179-а расм) ёки „изохромат“ методи ёрдамида ўтказилади. „Изохромат“ методи қуйидагидан иборат. Рентген нурлари спектрометрини ионизацион камерага ҳар доим бирдай муайян тўлқин узунлики нур тушадиган қилиб ўрнатилади ва рентген трубкасига берилган потенциалга боғлиқ ҳолда нур интенсивлиги ўлчанади. Эйн-



179-расм: а) Туташ рентген спектрида энергиянинг тақсимланиш эгри чизиги. б) Изохромата.

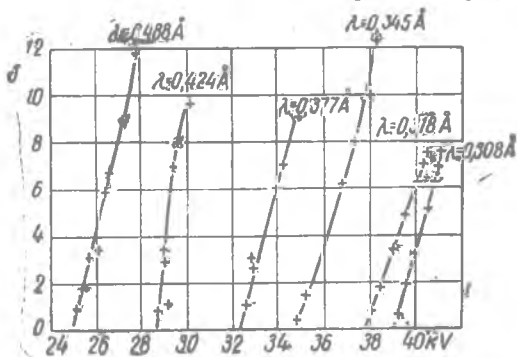
штейн тенгламаси

$$eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

га кўра, танланган тўлқин узунлик жуда аниқ

$$V_0 = \frac{hc}{\lambda e}$$

потенциалда ҳосил бўлади: потенциалнинг кейинги ортишида интенсивлик „изохромат“ деб аталадиган (179-б расм) бирор эгри чизиқ бўйича ортади. λ_{\min} ни спектрал эгри чизиқдан аниқлаш методи билан изохроматик метод билан аниқлаш орасидаги фарқ 179-расмда тасвирланган. Изохроматга бир неча мисол 180-расмда келтирилган. Ҳар бир эгри чизиқни абсцисса ўқи билан кесишгунча экстраполяциялаб V_0 ни, кейин Эйнштейн тенгламаси ёрдамида h ни топамиз. Кейинги пайтларда бажарилган энг аниқ ўлчашлар қуйидагини берди



180-расм. Изохроматалар намуналари.

ёрдамида h ни топамиз. Кейинги пайтларда бажарилган энг аниқ ўлчашлар қуйидагини берди

$$\frac{h}{\lambda} = (1,37920 \pm 0,00009) \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \cdot \text{сек CGSE}^{-1}.$$

Бунда $e=4,8024 \cdot 10^{-10}$ CGSE ни ўрнига қўйсақ, ушбу ҳосил бўлади:

$$h = 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}.$$

121-§. Ёруғликнинг корпускуляр хоссаларини намоён қилувчи бошқа тажрибалар

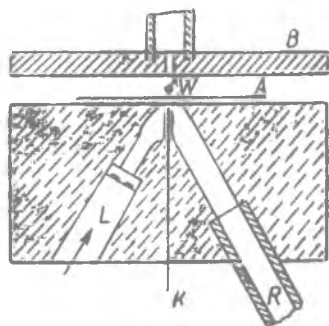
Ёруғликнинг корпускуляр хоссалари қисқа тўлқинли нурланиш билан ўтказиладиган тажрибаларда жуда равшан намоён бўлиши кераклигини 116-§ да қўлланган эдик. Рентген нурларнинг тўлқин хоссалари у кашф қилингандан 17 йил ўтгач тўла аниқланганлиги бежиз эмас эди.

Рентген ва γ -нурлар билан ўтказиладиган жуда кўп тажрибалардан, бу нурларнинг корпускуляр хоссаларини энг яққол ошкор қиладиган иккитасини қараб чиқамиз; булардан биринчиси А. Ф. Иоффе ва Н. И. Добронравовларга, иккинчиси Ботега тегишлидир.

181-расмда Иоффе ва Добронравов тажрибаларида қўлланилган митти рентген трубканинг схемаси берилган. Қалин эбонит пластинкада R ва L тирқишлар пармаланган. Ҳосил бўлган ковакдан R орқали ҳаво сўриб олинади; L — кварц дарча билан беркитилган тешик орқали қалинлиги 0,2 мм бўлган K алюминий сим учи ультрабинафша ёруғлик билан ёритилади. Бунда озод қилинадиган фотоэлектронлар K симга берилган 12000 в потенциал билан тезлаштирилади ва ковак тешигини устандан беркитувчи A юпқа алюминий варақ билан тормозланади. Бу алюминий варақ шунчалик юпқаки ($5 \cdot 10^{-3}$ мм) у электронларни тормозлашда ҳосил бўладиган рентген нурларини амалда ютмайди. Симни бир секундда 1000 га яқин фотоэлектрон берадиган қилиб заиф ёритиларди, бу ўз навбатида секундига 1000 га яқин рентген импульслари берарди.

Шунинг билан бирга A — алюминий зар қоғоз радиуси $3 \cdot 10^{-5}$ см га яқин бўлган микроскопик висмут W заррани A антикатоддан тахминан 0,02 см да мувозанатловчи AB Милликэн конденсаторининг пастки пластинкаси вазифасини ҳам бажарарди.

Тажрибанинг кўрсатишича, зарра вақт-вақти билан мувозанатдан чиқиб туради, яъни рентген нурлари ундан Эйнштейн тенгламасига кўра 12000 в га яқин энергияли фотоэлектронни ажратади. Бу ўрта ҳисобда ҳар 30 минутдан кейин содир бўлади. Бу 30 минут давомида зарра орқали $1,8 \cdot 10^6$ га яқин рентген импульслари ўтади. Агар бу импульслар энергияси сферик тўлқинлар кўринишида тарқалса, у ҳолда улардан ҳар бири антикатоддан заррага у кичик фазовий бурчак ичида кўринганидан, ўз энергиясининг оз қисмини берган бўларди.



181-расм. Иоффе ва Добронравов тажрибасининг схемаси.

Бундан ташқари, бу энергия заррани ҳосил қилган кўп сонли электронлар орасида тақсимланарди ва 30 минутда бу электронларнинг ҳаммаси уз энергияларини қандайдир сирли механизм воситасида битта электронга бериши, ҳамда бу электроннинг симдан узиб олинган ва 12000 в потенциал билан тезлаштирилган фотоэлектрон энергиясига тенг энергияга эга бўлиши тамомила эҳтимолдан холидир.

Шундай қилиб, тўлқин нуқтаи назардан Иоффе ва Добро-нравов тажрибасининг натижалари тушунарли эмас. Аксинча, корпускулар нуқтаи назардан улар тамомила табиий туюлади.

Ҳақиқатан ҳам, бу нуқтаи назардан энергия фазода жамланган фотонлар кўринишида тарқалади ва заррага фотон тушган пайтдагина ундан электрон ажралиб чиқади. Заррага фотоннинг тушиш эҳтимоллигини ҳисоблаймиз. Иоффе ва Добро-нравов тажрибасида заррадан антикатодгача бўлган ма-софа $d = 0,02$ см, зарра радиуси $r = 3 \cdot 10^{-5}$ см эди. d радиусли сфера $4\pi d^2 = 4\pi (0,02)^2 = 16\pi \cdot 10^{-4}$ см² сиртга эга. Бу сферада зарра эгаллаган юз, яъни зарранинг эффе́ктив кесим юзи

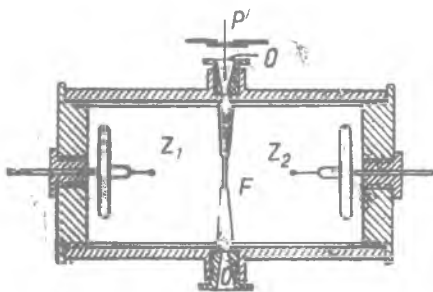
$$\pi r^2 = \pi (3 \cdot 10^{-5})^2 = 9\pi \cdot 10^{-10} \text{ см}^2$$

бўлади.

Агар айрим рентген фотони ҳаракати учун барча йўналиш тенг эҳтимоллик деб ҳисобланса, у ҳолда заррага фотоннинг тушиш эҳтимоллиги зарра эффе́ктив кесим юзининг сфера

$$\text{сиртига нисбатига тенг бўли-ши, яъни } \frac{9\pi \cdot 10^{-10}}{16\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{1800000}$$

бўлиши кўриниб турибди. Бинобарин, заррага ўртача 1800000 фотондан биттаси тушади. Агар 1 секундда 1000 фотон учиб чиқса, у ҳолда заррага ўртача 30 ми-нутда 1 фотон тушади, бу эса кўриб ўтилаётган таж-риба натижаларига тўла мос келади.



182- расм. Боте тажрибасининг схемаси.

Боте тажрибаси рентген нурлари уйғотилганда флуоресцен-ция энергияси сферик тўлқинлар кўринишида тарқалмасдан, йўналган фотонлар кўринишида тарқалишини кўрсатади. Юпқа темир ёки мис F зар қоғоз (182- расм) Z_1 ва Z_2 иккита Гейгер счё́тчиғи орасига осилган. Етарлича қаттиқ бирламчи рентген нурлари зар қоғозни устдан ёритарди (P стрелка йўналишида) ва уни характеристик флуоресценция нурланиш чиқаришга уйғотарди. Агар бу нурланиш энергияси сферик тўлқин кўри-нишида тарқалса, у ҳолда иккала счё́тчик бир вақтда қайд қилган бўларди.

Бироқ тажриба бундай эмаслигини кўрсатди: счётчиклар бир-бирларидан мустақил тарзда қайд қилади ва кутилган мос тушишлар сони *тасодифий* мос тушишлар сонидан ортиқ бўлмайди. Барча ҳодисалар худди юзага келаётган флуоресценция нурланиши у ёки бу счётчикка тушадиган йўналган фотонлар сифатида тарқаларди.

122-§. Ёруғлик оқимининг флуктуациялари

Ёруғликнинг корпускуляр хоссалари яна бир муҳим натижага олиб келади: заиф ёруғлик оқимида флуктуация мавжуд бўлиши лозим. Ҳақиқатан ҳам, агар ёруғлик фотонлар оқимидан иборат деб қаралса, у ҳолда ҳар бир фотон қабул қурилмасига (фотоэлемент, ионизацион камера ва шунга ўхшашларга) тушиб, бошқа фотонлардан мустақил тарзда бирор таъсир кўрсатади. Одатдаги интенсивликларда бу ютилиш элементар актлари сони шунчалик кўпки, нурланишда ҳеч қандай дискретликни пайқай олмаймиз. Бироқ оқим шунчалик заифки, вақт бирлиги ичида приёмникка тушаётган фотонлар сони бирликларда ёки ўнликларда ўлчанади деб фараз қилайлик; агар бундан ташқари приёмник шунчалик сезгир бўлсакки, у оз миқдорда тушган фотонларни ҳам қайд қилса, у ҳолда бу соннинг флуктуацияси албатта ошкор бўлиши керак.

Бундай флуктуациялар даставвал жуда қисқа тўлқинли нурланишда, чунончи рентген нурланишда ва радиоактив моддаларнинг γ -нурларида ошкор қилинди. Бу ҳолда, юқорида бир неча бор кўрсатилганидек, нурланишнинг юқори частотали бўлиши сабабли фотонлар жуда йирик бўлади. Уларни атомлар ёки молекулалар ютганда ионизация содир бўлиб, тез электронлар ажралиб чиқади, улар ўз навбатида ионизацион камеранинг ёки счётчикнинг бошқа купчилик молекулаларини ионлаштиради. Шундай йўл билан ютилишнинг элементар акти эффекти анча кучайтирилади ва заиф оқимни кузатиш осонлашади. 121-§ да қаралган темир зар қоғознинг қарама қарши томонга йўналган кучсиз рентген нурланиш фотонларини қайд қиладиган икки счётчикли Боте тажрибаси ҳам моҳияти жиҳатдан флуктуацион тажрибалардан ҳисобланади.

Кўринадиган ёруғликнинг заиф оқимлари флуктуациясини ошкор қилиш зўр қизиқиш туғдиради. Ҳақиқатда бундай флуктуациялар С. И. Вавилов ва унинг ходимлари томонидан кенг сериядаги ишларда, улардан кейин бошқа қатор тадқиқотчилар томонидан ҳам кузатилди. Бу тажрибаларнинг ҳаммасида қабул қилувчи асбоб вазифасини ҳали фотозлектрик асбобларда эришилмаган катта сезгирликка эга бўлган одам кўзи бажарди. Айнан, Вавилов тажрибаларига кўра, етарлича узоқ вақт қоронғида булган кўз учун кўз тўр пардасининг муайян периферик қисмининг максимал сезгирлиги 200 фотонга яқин-

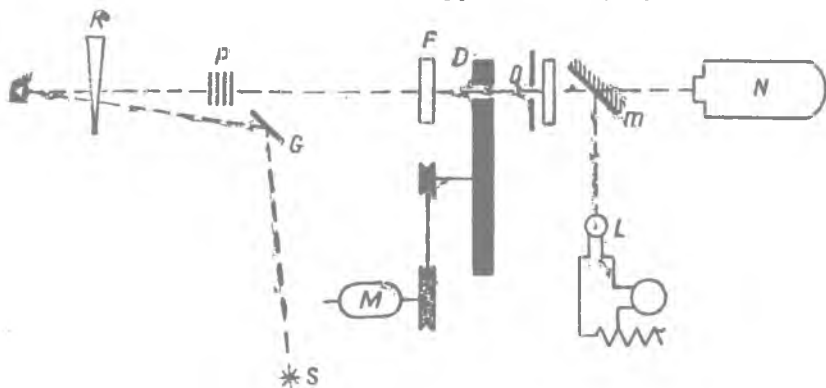
ли ташкил қилади ва ҳар хил кузатувчиларда бу анча ораликда тебранади. Бунда кўрсатилган сезгирлик кўзга *тушадиган* энергияга тааллуқлидир. Ёруғлик тўр пардага тушгунча қайтиб ва қисман ютилиб қатор муҳитлардан ўтганидан, кўриш сезгисини пайдо қиладиган фотонларнинг минимал сони кўрсатилгандан анча кам ва Вавиловнинг баҳолашига кўра ўндан ортиқ эмас, балки бир нечта фотонни ташкил қилса керак.

Вавилов тажрибасининг қўйилиши тушунарли бўлиши учун кўзнинг тузилишига ва физиологик функциясига тегишли баъзи бир далилларни эслатиш керак.

Маълумки, кўзнинг тўр пардасида ёруғликни қабул қилувчи икки турдаги элемент: колбачалар ва таёқчалар жойлашган. Колбачалар тўр парданинг кўзнинг оптик ўқи яқинига жойлашган қисмларида кўп бўлади, периферияда эса бутунлай бўлмайди; таёқчалар аксинча, тўр парданинг периферик қисмида бўлади. Бу икки тур элементлар турлича функцияларни бажаради: рангни кўриш аппарати колбачалар билан боғлиқ, таёқчалар эса, ғира-шира ёки периферик кўриш деб аталадиган кул ранг кўришни таъминлайди. Таёқчалар сезгирлиги колбачалар сезгирлигидан бир неча марта ортиқ бўлади. Шунинг учун кўзнинг қабул қилиш қобилияти чегарасини тажрибада аниқлашда флуктуация билан ўтказилган тажрибалардаги сингари, ана шу рангсиз периферик кўришдан фойдаланилади. Бу тажрибаларнинг ҳаммаси кескин *кўриш сезгиси* поғонасининг мавжудлигига асосланган; агар тўр пардага тушувчи нурланиш энергияси бирор муайян қийматдан кичик бўлса, у ҳолда кўз ёруғни бутунлай сезмайди. Кўринувчи ёруғликнинг квант флуктуацияларини кузатиш учун Вавилов кўриш сезгисининг худди шу хусусиятидан фойдаланди. Ёруғликнинг қисқа вақтдаги чақнаши кузатилади деб фараз қилайлик; айтайлик, поғонага чақнаш вақтида ютилган n_0 фотон мос келсин ва айтайлик ўша вақтда ютилган фотонларнинг ҳақиқий сони z бўлсин. Бундай ҳолда $z > n_0$ шартдагина кўз чақнашни *кўради*, агар $z < n_0$ бўлса, у ҳолда кўриш сезгиси нолга тенг бўлади, кўз бундай чақнашни сезмайди. Агар даврий равишда, муайян вақт оралиғида кўзга шундай кичик интенсивликли чақнашлар юбориб турилсаки, флуктуация натижасида фотонлар сони z гоҳ n_0 дан катта, гоҳ n_0 дан кичик бўлса, кузатувчи кўзи чақнашни гоҳ сезади, гоҳ сезмайди.

Шундай қилиб, кўриш сезгиси поғонасининг мавжудлиги флуктуация борлигига ўткир белги беради; n_0 катталики атрофида z нинг тебранишида ёруғлик ё бутунлай кузатилмайди ёки чақнаш кўринади. $z > n_0$ шароитда ютилувчи фотонлар сонининг ҳар хил бўлишига боғлиқ бўлган интенсивлик тебранишларини, Вавиловнинг маълумотига кўра, бу тажрибаларда уларни кўзнинг қабул қилиш қобилияти чегарасида пайқаш мумкин бўлмайди.

Тажрибалар қуйидаги тарзда ўтказилган эди (183-расм). Чақнаш ёруғлиги тўр парданинг доимо маълум бир қисмига тушиши учун кузатувчининг кўзи ёруғлиги қизил филтёр орқали ўтадиган S кучсиз лампочка воситасида белгиланган; кузатувчининг кўзи ҳар доим ҳосил бўлган қизил доғга йўналтирилган. Иккинчи L лампочка ёруғлиги m кўзгудан қайтиб M



183-расм. Кўринадиган квант флукуацияларини ўлчаш қурилмаси схемаси.

синхрон мотор билан (1 секунда бир марта айланади) айланинадиган тирқишли D дискка тушади. Тирқиш шундай ўлчовга эга эдики, диск $0,1$ сек давомида ёруғликни ўтказиб, $0,9$ сек давомида уни тўсиб туради. Шундай тарзда $0,1$ сек давом этадиган чақнаш ҳосил қилинади, $0,9$ сек давомида кўз дам оларди. Бундай қурилма кўзнинг узоқ вақт кўриш таассуротини сақлаш қобилияти таъсирини йўқотиш учун зарур эди. F яшил филтёр муайян тўлқин узунликли оқим ҳосил қилиш учун керак эди.

Кузатувчи чақнашни кўрган пайтда хронограф кнопоксини босади, хронографнинг ҳаракатланаётган лентасида эса белги ҳосил бўлади. Махсус қурилма айланувчи дискни хронографнинг бошқа пероси билан шундай боғлар эдики, ўша лентада дискнинг ҳар бир айланиши белгиланиб қолади. Шулар тўғрисида, диск тирқиши ёруғлик ўтказаётганда чақнаш кузатиладими ёки кузатилмайдими, шуни аниқлаш мумкин эди.

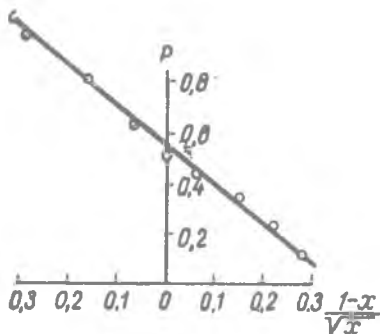
Яшил доғ равшанлигини узлуксиз камайтириш мумкин эди. Бунда кузатувчи даставвал ҳар бир чақнашни белгилар экан. Равшанликни бундан кейинги сусайишида чақнашлар диск тирқишининг ҳар бир ўтишига мос келмай қолади; флукуациялар кузатилади: тирқишнинг бир ўтишида чақнаш кўринади, бошқасида кузатилмайди. Тажрибадан кейин хронограф лентасини урганиб кузатишларни статистик контрол қилиш мумкин бўлади. Бир томондан кузатилган чақнашлар сонининг диск

айланишларининг тўла сонига нисбати чақнашнинг пайдо бўлиш P эҳтимолига тенгдир; иккинчи томондан, биз тўхталиб ўтмайдиган баъзи бир қўшимча ўлчашлар бир чақнашда кўзнинг тўр пардаси ютадиган n фотонлар сонининг кўриш сезгиси поғонаси шароитида тўр парда ютадиган n_0 фотонлар сонига нисбатини аниқлаш имконини берди. Бу нисбатни x билан белгиласак

$$\frac{n}{n_0} = x,$$

у ҳолда эҳтимоллик назариясига асосланган ҳисоблашлар P ва x орасидаги шундай муносабатни беради:

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_0}{2} \frac{1-x}{x}}$$



184- расм. Флукуацион кузатишларнинг натижалари.

С. И. Вавилов олган жуда кўп экспериментал материаллар ҳамма ҳолларда P эҳтимоллик билан

$\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ катталиқ орасида чизиқли боғланиш мавжудлигини кўрсатади. 184- расмда бир мисол келтирилган: туташ тўғри чизиқ формула бўйича чизилган, кузатилган қийматлар тўгаракчалар билан кўрсатилган. Экспериментал нуқталар тўғри чизиққа яхши жойлашиши, ҳамда шу билан кузатилаётган флукуацияларнинг статистик характерини тасдиқлаши кўриниб турипти.

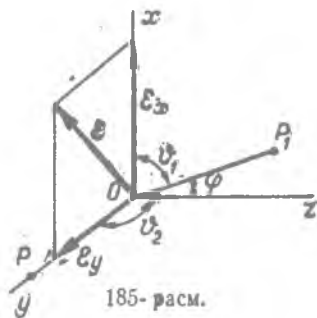
123- §. Рентген нурларининг сочилиши (тўлқин назария)

Рентген нурларининг сочилиши нурланишнинг икки ёқлама табиатини очиқ-ойдин кўрсатадиган ҳодисалар қаторига мансубдир (116- § га қаранг).

Ҳақиқатан ҳам, ҳозирги ва келгуси параграфларда сочилган рентген нурланишнинг баъзи бир хоссалари (қутбланиш, интенсивлик) тўлқин нуқтаи назардан осон тушунтирилиши мумкинлиги ҳолда бошқа бир хоссалари (сочилишда частотанинг ўзгариши) рентген нурларига корпускуляр табиат берилганда осон тушунтирилади.

Рентген нурлар сочилиши тўлқин назариясининг муҳим хулосаларидан бири шундан иборатки, тушувчи нурлар қутбланмаган бўлганда ҳам, сочилган нурланиш, умуман айтганда, қисман қутблангандир, муайян шароитларда эса тўла қутбланган бўлади. Бу қутбланишнинг вужудга келишини қараб чиқамиз. Айтайлик, z ўққа параллел йўналишда (185- расм) тарқалаётган ясси монохроматик электромагнит тўлқин O нуқтадаги

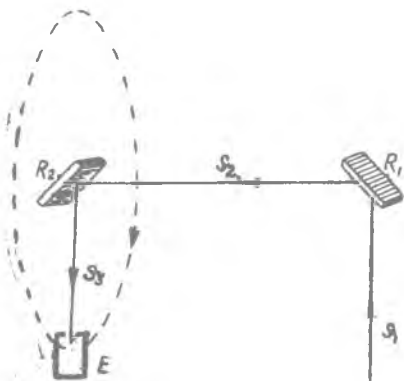
электронга тушсин. Бу тўлқиннинг электр вектори электронга таъсир қилиб, уни гармоник тебранишга мажбур қалади, натижада электрон сочилаётган тўлқиндан иборат бўлган сферик тўлқинлар маркази бўлиб қолади. Бу тўлқиннинг у ўқ давомида ётган P нуқтадаги, яъни тушувчи тўлқин йўналишига тик йўналишдаги қутбланиш ҳолатини қараб чиқамиз. Тушувчи тўлқин қутбланмаган бўлганидан, унинг E электр вектори ҳар қандай йўналишларга эга бўлса-да, у ҳар доим ху текисликда ётади. Уни E_x ва E_y ташкил этувчиларга ёямиз. 67-§ да [масалан, (67.6) формулага қаранг] электроннинг дипол нурланишининг интенсивлиги $\sin^2\vartheta$ га пропорционал бўлишини кўрган эдик, бунда ϑ — электроннинг тебраниш



185- расм.

йўналиши билан кузатиш нуқтасига томон йўналиш орасидаги бурчак. Шунинг учун электроннинг E_y ташкил этувчи таъсирида OP йўналишдаги тебраниши нурланиш ҳосил қилмайди ($\vartheta = 0$). Бундан P нуқтага фақат E_x ташкил этувчи таъсиридаги

тебранишдан вужудга келган сочилган нурланиш, яъни электр вектори тушувчи тўлқин йўналиши билан P кузатиш нуқтаси орқали ўтувчи текисликка тик тебраниш йўналишли, чизикли қутбланган нурланиш келади.

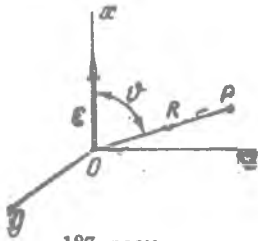


186- расм. Рентген нурларининг қутбланишини аниқлаш учун Баркл тажрибасининг схемаси.

Бу хулоса Норренбергнинг кўзгу билан ўтказилган машҳур оптик тажрибасига ўхшаш Баркланинг қуйидаги тажрибаси билан тасдиқланади. Рентген нурлари S_1 йўналишда (186-расм) қутблагич вазифасини бажарадиган R_1 пластинкага (кўмир ёки парафин) тушади. Юқорид айтилганларга кўра

S_2 йўналишда сочилган нурлар тўла қутбланган бўлиши керак. Бу қутбланиш анализатор вазифасини бажарувчи иккинчи R_2 пластинка ёрдамида ошкор қилинади. Шу мақсадда R_2 пластинка E ионизацион камера билан биргаликда S_2 га параллел ўқда айланиши мумкин (бу пунктир билан кўрсатилган). Тажрибанинг кўрсатишича, S_3 билан S_1 параллел (чизмада кўрсатилгандек) бўлганда E камерада сочилган нурланиш интенсивлиги максимум бўлади ва S_3 билан S_1 перпендикуляр (яъни, чизмада кўрсатил-

ганга нисбатан 90° га бурилганда) бўлганда E камерада сочилган нуруланиш, интенсивлиги минимум бўлади, Худди шу натижани кутиш лозим эди, чунки юқорида айтилганларга кўра, тушувчи тўлқиннинг электр вектори R_2 электронларни S_1 ва S_2 га перпендикуляр тебрантиради.



187-расм.

Энди сочилган нуруларнинг интенсивлигини ҳисоблаймиз. Бунинг учун электроннинг z ўқ йўналишида тарқалаётган (187-расм) ясси тўлқин таъсиридаги мажбурий тебранишларини қараб чиқамиз. Даставвал тўлқин чизиқ қутбланган ва унинг E электр вектори x ўқ йўналишида ω частота билан тебранади, дейлийк

$$E = E_0 e^{i\omega t} \quad (123.1)$$

67-§ га асосан [(67,5) формула] тушувчи тўлқин интенсивлиги

$$J_0 = \frac{e}{4\pi} E^2 \quad (123.2)$$

бўлади. E электр майдони электронларни x ўқ бўйича ўша ω частота билан мажбурий тебрантиради. Бу тебранишлар электрондан R масофадаги бирор P нуқтада оний интенсивлиги (67.6) формулага асосан

$$J = \frac{e^2 \ddot{x}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta \quad (123.3)$$

га тенг бўлган янги сферик тўлқиннинг пайдо бўлишига сабаб бўлади. θ — куватиш P нуқтаси йўналиши билан электроннинг тебраниши йўналиши орасидаги бурчак. eE майдон кучи таъсирида ҳаракатланаётган электроннинг \ddot{x} тезланиши eE/m га тенг бўлиши равшандир. Буни (123.3) га қўй-сак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$J = \frac{e^4 E^2}{4c^3 m^2 R^2} \sin^2 \theta.$$

(123.2) га асосан E^2 ни тушувчи тўлқиннинг J_0 интенсивлиги билан алмаштириб,

$$J = J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \theta \quad (123.4)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу эса сочилган нуруланишнинг P нуқтадаги интенсивлиги ифодасидир. Тушувчи тўлқин чизиқли қутбланган ҳолда интенсивлигининг йўналиш бўйича тақсимланиши $\sin^2 \theta$ га эга бўлиши, яъни тебраниш йўналишида интенсивлик нолга тенг ва $\theta = \pi/2$ да максимумга эришиши кўриниб турипти (67-§ га қаранг).

Тушувчи тўлқин қутбланмаган бўлганда сочилиш интенсивлигининг йўналишга боғланиши бир оз бошқачароқ бўлади. Шу ҳолни кўрайлик.

Айтайлик, тушувчи тўлқин аввалгидек z ўққа параллел тарқалсин (185-расм); шунинг учун электр вектор u_x текисликда ётади. Уни E_x ва E_y ташкил этувчиларга ажратамиз ва сочилган нурланишнинг xz текисликда ётувчи P_1 нуқтадаги интенсивлигини ҳисоблаймиз. Бирламчи нурланиш қутбланмаганидан E электр вектор xu текисликда ихтиёрий вазиятга эга бўлиши мумкин. E_x ва E_y ташкил этувчиларнинг квадратларининг ўртача қийматлари ўзаро тенг бўлади:

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \frac{1}{2} E_0^2,$$

бу ташкил этувчиларга мос интенсивликлар ҳам ўзаро тенг бўлади:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_0.$$

E_x ва E_y ташкил этувчиларнинг ҳар бири сочилган тўлқин ҳосил қилади; бу сочилган тўлқинларнинг P нуқтадаги интенсивлиги (123.4) формулага кўра қуйидагича бўлади (185-расмга қаранг):

$$J' = J_x \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \theta_1 = \frac{1}{2} J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \cos^2 \varphi, \quad (123.5)$$

$$J'' = J_y \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \theta_2 = \frac{1}{2} J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \quad (123.6)$$

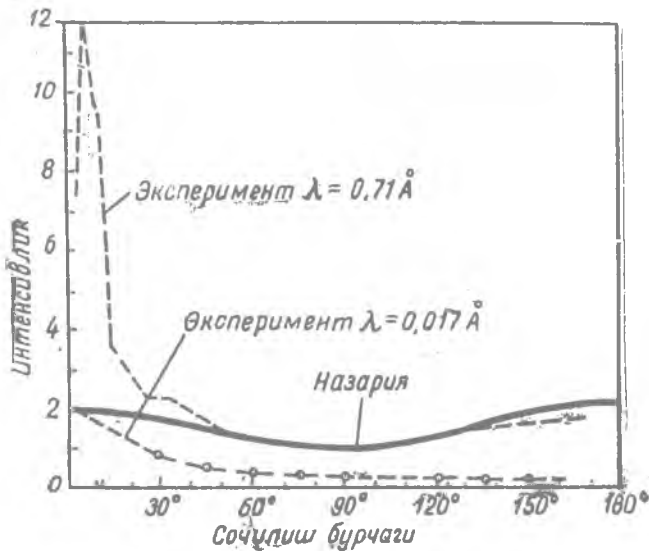
($\theta_2 - xz$ текислик билан y ўқ орасидаги бурчак бўлганидан $\sin^2 \theta_2 = 1$). E_x ва E_y тебранишлар нокогерент бўлганидан P да тўла интенсивликни топиш учун J' ва J'' интенсивликларни қўшиш керак:

$$J = J' + J'' = J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2}. \quad (123.7)$$

Экспериментал текширишлар кўрсатдики, унча қисқа тўлқинли бўлмаган рентген нурлари учун (123.7) формула тажрибага тўла мос келувчи натижалар беради. 188-расмдаги тўташ эгри чизиқ (123.7) формула бўйича ҳисобланган интенсивлик тақсимланишини кўрсатади; пунктир эгри чизиқлар иккита бири-биридан кескин фарқли тўлқин узунликлар учун экспериментал натижаларни кўрсатади. Узунроқ тўлқинлар ($\lambda = 0,71 \text{ \AA}$) учун ва унча кичик бўлмаган сочилиш бурчаклари учун экспериментал натижаларнинг назарий эгри чизиққа яхши мос келиши кўриниб турипти. 30° бурчакдан кичик бурчаклар учун назарий ва экспериментал натижалар орасидаги кучли тафовут, бу оддий келтириб чиқаришда атомнинг қўшни электронлари

сочган тўлқинларнинг интерференцияси ҳисобга олинмаганлиги билан тушунтирилади.

Аксинча, қисқа тўлқин узунликлар ($\lambda = 0,017\text{Å}$) учун экспериментал эгри чизиқ бошдан охиригача назарий эгри чизиққа мос келмайди. У 90° яқинида назария талаб қилган ҳеч қандай минимумга эга бўлмайди ва бундан ташқари, барча



188-расм. Социлишнинг тўлқин назариясини тажриба маълумотлари билан таққослаш.

бурчаклар учун экспериментал топилган социлиш интенсивлиги назарияда топилганидан анча кичикдир.

Бу тафовутнинг кўрсатишича, жуда қисқа тўлқин узунликлар учун рентген нурлар социлишининг классик тўлқин назарияси, тамомила қаноатлантирмайдиган бўлиб қолади.

Ма ш қ: 1. (123.4) формуладан фойдаланиб, электроннинг барча йўналишларга сочадиган тўлқин энергияси

$$S = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} J_0$$

формула билан ифодаланишини исбот қилинг.

2. Социлган нурланишнинг қутбланиш проценти қуйидаги каср билан ифодаланади:

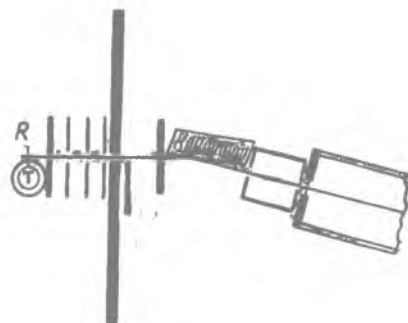
$$\frac{J'' - J'}{J'' + J'} \cdot 100\%.$$

ху текисликда ётувчи кузатиш нуқталари учун қутбланиш тўла (100%), ҳамда z ўқда ётган нуқталар учун қутбланиш проценти нолга тенглигини исбот қилинг.

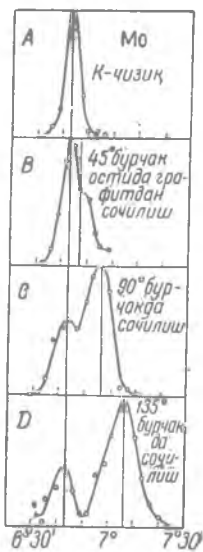
124-§. Комптон эффекти

Рентген нурлар сочилиш тўлқин назариясининг жуда қисқа тўлқин узунликларнинг сочилиш интенсивлигини ўрганишда ошкор бўладиган камчилиги, сочилган нурлар частоталарини қарашда айниқса кескин билинади. Тўлқин назарияга кўра сочилиш механизми электронларнинг тушувчи тўлқиннинг электромагнит майдонида "тебратишидан" иборатдир. Шунинг учун ҳам сочилган нурланишнинг частотаси тушувчи нурланиш частотаси билан мос келишини кутиш табиийдир.

Бироқ, дастлабки кузатишлар оқ, рентген ва, айниқса γ -нурларнинг сочилишида тўлқин узунлигининг ўзгариш ни, айнан, сочилган нурланиш таркибида кирувчанлик қобилияти кичик бўлган анча узун тўлқинларнинг юзга келишини кўрсатган эди. Рентген нурларнинг спектроскопияси кашф қилингунига қадар тўлқин узунликини



189-расм. Комптон тажрибасининг схемаси.

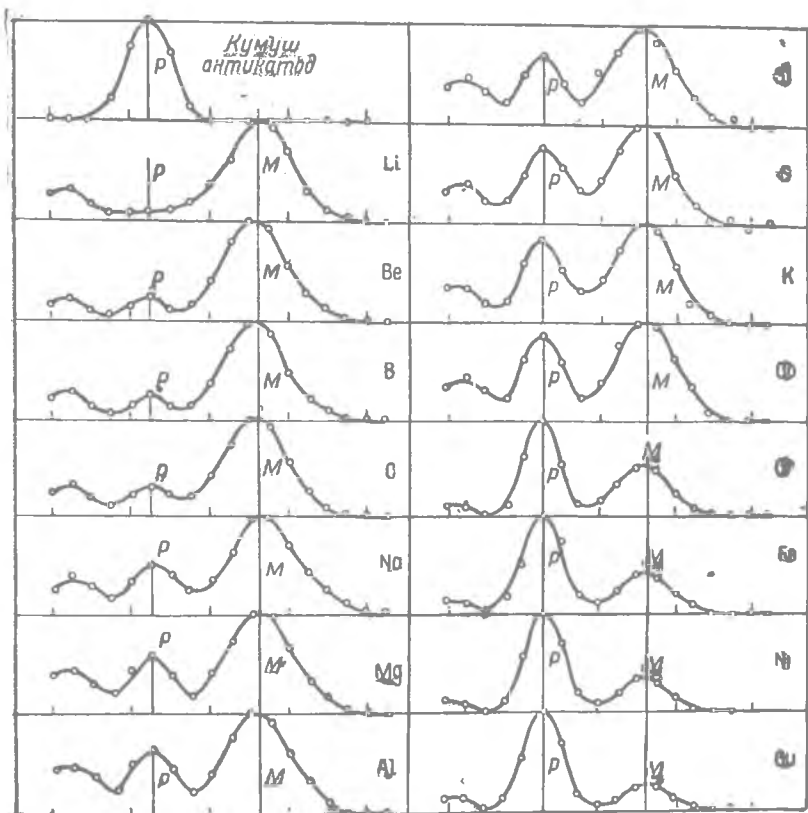


190-расм. Графитда Комптон эффекти.

ўлчаш учун турли тўлқин узунликли нурларнинг абсорбциясининг турлича бўлишига асосланган кўпол методлардан фойдаланилганлиги туфайли, ҳодисаларнинг икир-чикирларини билиб олиш қийин бўлган ва юқорида айтилган кузатишлардаги ўзгаришларга иккиламчи омилларни сабабчи қилиб кўрсатиларди.

1922—1923 йилларда А. Комптон рентген спектрографидан фойдаланиб, бу ҳодисани диққат билан урганиди ва унинг сабабини қўшимча факторлар таъсири билан асло тушунтириб бўлмаслигини, балки у бевосита сочилиш механизми билан боғлиқ эканлигини кўрсатди. Комптон тажрибасининг схемаси 189-расмда келтирилган. Молибден антикатодли T рентген трубканинг нурланиши R графит парчасида сочилади; сочилган нурлар қатор тирқишлар орқали ўтиб, рентген спектрографнинг кристалига тушади. Трубкани R радиатори билан бирга силжитиб ва вертикал ўқда айлантириб, асбобнинг бошқа қисмларига тегмаган ҳолда, сочилиш бурчаги ϕ ни ўзгартириш мумкин эди. Интенсивликнинг спектрал тақсимланиши ионизацион камера билан ўлчанарди.

190-расмда олинган натижалар таққосланган. А биринчи чизиқда (K_{α} молибден чизиғи, $\lambda = 0,712603\text{\AA}$) интенсивлик тақсимланишини кўрсатади; В, С, D ҳар хил сочилиш бурчагида нурланишнинг спектрал таркибини кўрсатади. Бирданига ҳодисанинг қуйидаги хусусиятларини аниқлаш мумкин: 1) сочилган нурланишда уйғотувчи нурланишнинг бошланғич тўлқин узунлиги ҳам, узун тўлқинлар томонга силжиган тўлқин узунлиги ҳам мавжуддир; 2) силжиш катталиги сочилиш бурчагига



191-расм. Ҳар хил табиатли радиаторларда Комптон эффекти (Комптон ва Ву.)

боғлиқдир, яъни бу бурчакнинг ортиши билан у ортади; 3) сочилиш бурчаги катталашган сари силжимаган чизиқнинг интенсивлиги камаяди, силжиган чизиқ интенсивлиги ортади.

191-расмда кумуш антикатоднинг ($\lambda = 0,56267\text{\AA}$) бир хил бурчак билан ҳар хил модалардан сочилган K_{α} спектр чизиқлари келтирилган. Процесснинг қуйидаги хусусиятларини аниқ-

лаш мумкин: 1) силжиш катталиги радиаторнинг табиатига боғлиқ эмас; 2) радиаторнинг атом номери ортиши билан силжимаган чизиқ интенсивлиги ортади, силжиган чизиқ интенсивлиги эса, камаяди. Масалан, литийда сочилган нурланиш амалда бутунлай силжиган тўлқин узунликлардан иборат, мисда эса, силжимаган чизиқ интенсивлигига қараганда силжиган чизиқ интенсивлиги унча катта эмас.

125-§. Комптон эффектининг элементар назарияси

Агар нурланиш соф корпускуляр табиатга эга, яъни фотонлар оқимидан иборат ва сочилишда барча электронлар қатнашмасдан, уларнинг озгина қисмигина қатнашади, бироқ ҳар бир электрон бутун фотонни сочади десак, юқоридаги параграфда тавсифланган Комптон эффекти хусусиятлари жуда осон тушунтирилиши мумкин. Бу тушунтиришни охирига етказиш учун фотон фақат аниқ энергия ($h\nu$) запасигагина эмас, балки муайян ҳаракат миқдорига ҳам эга бўлади, яъни, қўполроқ айтганда, ўзини ҳаракатдаги шарчадек тутати деб қараш лозим. Бундай ҳолда электронларнинг фотонларни сочиши тўқнашишда энергия ва *ҳаракат миқдори* алмашиши билан боғлиқдир ва, Комптоннинг образли қилиб айтганидек, фотонлар ва электронларда биллиард ўйинига ўхшаш ҳол содир бўлади.

Бу тушунчалар асосида тўлқин узунлигининг силжишини ҳисоблаш учун фотоннинг баъзи бир хоссаларини қараб чиқишимиз керак. Фотон заррача сифатида ҳар ҳолда алоҳида хоссаларга эга, чунки у ёруғлик тезлигида ҳаракатланади. Шунинг учун классик механиканинг формулаларини фотон ҳаракатига қўллаш мумкин эмас ва релятивистик муносабатлардан фойдаланиш лозим (64-§ га қаранг).

Нисбийлик назариясига кўра v тезлик билан ҳаракатланаётган заррача массаси қуйидагига тенг:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Фотон c тезлик билан ҳаракатлангани учун $\beta = 1$ ва юқоридаги формуланинг махражи нолга айланади. Шунинг учун агар тинчликда фотон массаси чекли катталикка эга бўлганида

(яъни нолдан фарқли бўлса), у ҳолда $m = \frac{m_0}{0} = \infty$ бўларди.

Бундан тинчликдаги фотон массаси албатта нолга тенг бўлиши керак деган хулосага келамиз. Бу билан фотон, чекли тинчлик массали, масалан, электрон каби заррачалардан бутунлай фарқ қилади.

Энди фотоннинг ҳаракат миқдорини ҳисоблаймиз. Равшанки, бу мақсадда биз энди юқоридаги сабабларга кўра, одатдаги

$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ формуладан фойдалана олмаймиз. Бироқ нисбийлик назарияси p импульс учун c тезлик билан ҳаракат қилаётган заррача ҳоли учун ҳам яроқли бўлган бошқа формулани беради. Бу формула қуйидагича:

$$p = \frac{v}{c^2} E. \quad (64.16)$$

Ҳақиқатан ҳам:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c} = E \frac{v}{c^2}$$

га тенг,

Ёруғлик теълигида ($v = c$) ҳаракат қилаётган заррача учун ушбу ҳосил бўлади:

$$p = \frac{E}{c}. \quad (125.1)$$

Ниҳоят, $E = h\nu$ фотон учун

$$p = \frac{h\nu}{c}. \quad (125.1')$$

Худди шу фотон импульси учун изланган ифодадир.

Фотоннинг муайян импульсга эга эканлигидан фотонлар оқими бирор тўсиққа учраганида, худди идиш деворини газ молекулалари бомбардимон қилганда ўртача газ босими ҳосил бўлгандек, фотонлар бу тўсиққа босим бериши керак. Фотонлар вужудга келтирадиган босим, буюк рус физиги П.Н. Лебедевнинг машҳур ишларида (125.1) формулага миқдорий мослиги экспериментал тасдиқланган ёруғлик босимидан иборатдир. Бунда, маълумки, Лебедев фақат макроскопик қаттиқ жисмларга ёруғлик босимининг мавжудлигини исботлабгина қолмасдан, тўла ишонч билан ёруғликнинг газларга булган босимининг нозик эффектини ҳам аниқлади. Шу билан бирга Лебедев ўз тажрибаларини ёруғликнинг корпускуляр назариясига эмас, балки Максвеллнинг электромагнит назариясига таяниб ўтказди, чунки бу назария ёруғликнинг босими мавжудлиги ҳақидаги хулосага олиб келади ва босим учун (125.1) га мос келадиган формулани беради. Максвеллнинг ўзи Фарадейнинг электр майдоннинг куч чизиқлари ҳақидаги кўргазмали тасаввурларига таяниб, ёруғлик босимини куч найларининг кўндаланг босими натижаси деб қаради. Ёруғлик босими мавжудлиги ҳамда унинг миқдорий ифодаси ёруғлик табиатининг ҳам корпускуляр, ҳам тўлқин манзарасидан чиқарилиши мумкинлиги, ёруғликнинг кўп марта кўрсатиб ўтилган икки ёқлама табиатининг ошкор бўлишидир.

Энди электрон тўқнашгунга қадар тинч турган эди, яъни унинг импульси фотон билан тўқнашгунга қадар нолга тенг

эди дейлик; фотоннинг бошланғич импульси $\vec{h\nu_0/c}$. Тўқнаш-
гандан сўнг электрон $\vec{m\upsilon}$ импульсга эга булади, бунда $m =$
 $= m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, фотон импульси эса $\vec{h\nu/c}$ бўлиб қолади.

Энергиянинг ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини
қўллаб, яъни бу тўқнашишни эластик шарларнинг тўқниши-
дек ҳисоблаб, иккита тенглама ҳосил қиламиз. Энергиянинг
сақланиш қонунидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (125.2)$$

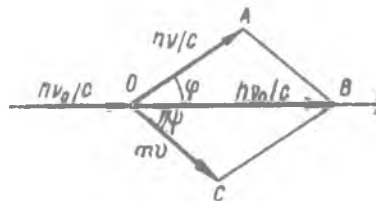
бунда m_0c^2 — электроннинг „тинчлик энергияси“. Қисқалик
учун ҳаракатдаги электрон массасини m билан белгилаб, (125.2)
ни шундай ёзамиз:

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2. \quad (125.3)$$

Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни

$$\frac{\vec{h\nu_0}}{c} = \frac{\vec{h\nu}}{c} + \vec{m\upsilon} \quad (125.4)$$

ифодани беради. (125.3) ва (125.4) тенгламалардан биринчиси
скаляр, иккинчиси вектор тенгла-
мадир. Ҳисоблаш учун (125.4) век-
тор тенгламани координат ўқлари-
га проекцияларидан иборат икки
скаляр тенглама билан алмашти-
риш керак. Лекин биз қуйидагича
иш тутамиз. OAB учбурчак (192-
расм) (125.4) вектор тенгламани
ифодалайди. Элементар тригоно-
метрия формуласига асосан бу
учбурчакдан квадратнинг катталиқ жиҳатдан $m\upsilon$ га тенг бўлган
 AB томонини аниқлаймиз:



192- расм.

$$m^2\upsilon^2 = \frac{h^2\nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2\nu^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu_0\nu}{c^2} \cos \varphi$$

ёки

$$m^2\upsilon^2c^2 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu \cos \varphi. \quad (125.5)$$

(125.3) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2$$

ва квадратга кўтарамиз:

$$m^2c^4 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu_0 - \nu). \quad (125.6)$$

(125.6) дан (125.5) ни айириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m^2c^4 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu_0\nu(1 - \cos \varphi) + 2m_0c^2h(\nu_0 - \nu). \quad (125.7)$$

Бунда $m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \equiv m^2 (1 - \beta^2) = m_0^2$ эканлигини назарга олиб ва (125.7) да оддий алмаштиришлар қилиб қуйидагиларни топамиз:

$$c(v_0 - v) = \frac{h}{m_0 c} v_0 v (1 - \cos \varphi) \quad (125.8)$$

ёки

$$\frac{c}{v} - \frac{c}{v_0} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi). \quad (125.9)$$

Бундан v ни ҳисоблаб топамиз:

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{h v_0}{m_0 c^2} (1 - \cos \varphi)} = \frac{v_0}{1 + 2 \frac{h v_0}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (125.10)$$

Бу эса ўзгарган частота учун формуладир.

(125.10) дан ўзгарган тўлқин узунлик учун амалда кўп қўлланадиган формула ҳосил қиламиз. $\frac{c}{v} = \lambda$ ва $\frac{c}{v_0} = \lambda_0$ эканлигини эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$\lambda - \lambda_0 \equiv \Delta \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

ёки

$$\Delta \lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (125.11)$$

Узунлик ўлчамлигига эга бўлган $h/m_0 c$ катталиқ учта универсал доимийнинг комбинациясидан иборат; бу комптон тўлқин узунлик дейилади ва Λ билан белгиланади:

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6,624 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 2,99 \cdot 10^{10}} = 0,0242 \text{ \AA}.$$

Сочилишда тўлқин узунлик ўзгариши учун охириги формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\Delta \lambda = 2\Lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0,048 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (125.12)$$

Бу формуладан кўринишича, $\varphi = 0$ учун $\Delta \lambda = 0$, $\varphi = 90^\circ$ учун $\Delta \lambda = \Lambda$ ва ниҳоят, $\varphi = 180^\circ$ учун $\Delta \lambda = 2\Lambda$ бўлади.

190 ва 191-расмларда силжиган чизиқларнинг ҳисобланган ҳолатлари вертикал тўғри чизиқлар билан кўрсатилган. Экспериментал ўлчанган чизиқларининг максимумлари (125.12) формулага асосан олдиндан топилган максимумларга яхши мос келиши кўриниб турибди. Энг аниқ ўлчашлардан $\frac{h}{m_0 c}$ учун қуйидаги топилган:

$$\left(\frac{h}{m_0 c}\right)_{\text{эксп}} = (0,02424 \pm 0,00004) \text{ \AA}$$

у h , m_0 , c ларнинг аниқ қийматлари бўйича назарий ҳисобланган катталиққа яхши мос келади:

$$\left(\frac{h}{m_0 c}\right)_{\text{назар}} = (0,024265_{14} \pm 0,000005_7) \text{ \AA}$$

(125.11) формуладан кўринадики, комптон силжиш бирламчи нурланишнинг тўлқин узунлигига боғлиқ бўлмайди. Шунинг учун, агар Комптон эффектни кўринувчи спектрда кузатиш мумкин бўлганида, четдаги бинафша қисми ($\lambda = 4000 \text{ \AA}$) учун у асосий тўлқин узунлиқнинг мингдан бир процентини ташкил қилган бўларди; ўртача қаттиқликдаги рентген нурлар ($\lambda \sim 0,5 \text{ \AA}$) учун у 10% га яқинни ташкил қилади, γ -нурлар учун эса унинг катталиги тўлқинларнинг ўз узунлиги тартибида бўлади.

Энди бизга сочилган нурланишда силжиган чизиқлар билан бирга силжимаган чизиқлар ҳам кузатилишининг сабабини тушунтириш қолди; юқорида баён қилган назария буни тушунтирмайди. Бироқ сочилиш механизмини қараётганда фотон эркин электрон билан „тўқнашади“ деб тахмин қилган эдик. Енгил атомлар ва периферик, кучсиз боғланган электронлар учун, электроннинг боғланиш энергияси (бир неча электрон-вольт) рентген нури фотонининг энергиясига нисбатан жуда кичик бўлганидан бу тахмин етарлича ўринли бўлади. Бироқ ички, айниқса, оғир атомлардаги электронлар шунчалик мустақам боғланганки, уларни эркин деб қараб бўлмайди. Шунинг учун фотон атом билан „тўқнашганда“ яхлит атом билан энергия ва ҳаракат миқдори алмашишади. Атом массаси жуда катта бўлганидан, ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунига кўра, фотон унга ўз энергиясини ва ҳаракат миқдорини бермайди; бинобарин, сочилишда $h\nu$ ўзгармайди.

Бу мулоҳазаларга асосан силжиган ва силжимаган чизиқлар интенсивликлари нисбатини атом массасига боғлиқ ҳолда сифат жиҳатдан баҳолаш мумкин. Енгил атомларда ҳамма электронлар кучсиз боғланган; аксинча, оғир атомларда фақат периферик электронларгина кучсиз боғланган бўлади. Шунинг учун, бир хил шароитда кузатилганда атом номери ортиши билан силжиган чизиқлар интенсивлигининг камайишини, силжимаган чизиқлар интенсивлигининг ортишини кутиш мумкин. 191-расмнинг кўрсатишича, ҳақиқатан бу ҳол кузатилади.

Шунга ўхшаш мулоҳазалардан, спектрнинг кўринадиган қисмида Комптон эффекти умуман кузатилмаслиги келиб чиқади.

Оптик (тўлқин) нуқтаи назардан сочилган рентген нурланиши спектрининг силжиган ва силжимаган чизиқлари орасидаги фарқ шундан иборатки, биринчи ҳолда некогерент, иккинчи ҳолда когерент сочилишга эга бўламиз. Ҳақиқатан ҳам

комптон сочилишда тўлқин узунлигининг силжиши, яъни частотанинг ўзгариш фақти тушган ва сочилган нурланишда когерентлик йўқлигини кўрсатади. Аксинча, силжимаган чирик берадиган сочилган нурланиш тушган нурланиш билан когерент бўлади ва ҳар хил атомлар сочган тўлқинлар қатори ўзаро когерент бўлади. Бу ҳол кристалларда рентген нурлари интерференцияси манзарасидан (33- § га қаранг), айниқса кристалларда Брэгг бўйича монокроматик рентген нурларнинг сочилиши қаралганда (34- §), жуда яққоа кўринади. Бу ҳолда кристалл панжаранинг турли атом қатламлари сочган тўлқинлар ўзаро интерференциялашиб, ниҳояда Вульф—Брэггнинг $n\lambda = 2d \sin \theta$ формуласига бўйсунадиган интерференцион қайтиш беради.

126- §. Тепки электронлари

Шу пайтгача рентген нурларнинг сочилишида спектрнинг ўзгаришига эътиборни жалб қилдик. 125- § да келтирилган оддий ҳисоблашнинг кўрсатишича, ҳар бир элементар сочилиш акти фотон томонидан туртки олган тез электроннинг юзага келиши билан бирга содир бўлади. Сочилишда электроннинг кинетик энергияси ўзгаришини ҳисоблаймиз.

Энергиянинг сақланиш қонунига кўра, бу ўзгариш сочилишдан олдинги ва кейинги фотон энергиясининг айирмасига тенг бўлиши керак:

$$E_k = h\nu - h\nu' = h\Delta\nu.$$

E_k нинг фотоннинг бошланғич энергиясига нисбати

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \quad (126.1)$$

га тенг. Бироқ

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = \nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda},$$

бундан

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

(125.10) ни эътиборга олсак

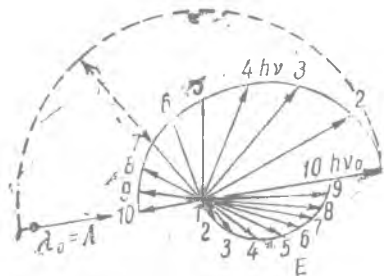
$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\lambda + 2\lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (126.2)$$

ҳосил бўлади.

Бу формула бўйича тепки электроннинг бирламчи фотон энергиясининг қандай қисмини олишини ҳисоблайлик. $\lambda = 10\text{Å} = 0,24\text{Å}$ (қаттиқ рентген нури) ва $\varphi = 90^\circ$ да $E_k/h\nu$ ҳаммаси бўлиб $1/11$ ҳиссани ташкил қилса, $\varphi = 90^\circ$ да $\lambda = \Lambda = 0,024\text{Å}$ (γ -нурлар соҳаси) учун нисбат $\frac{E_k}{h\nu} = \frac{1}{2}$ бўлади. Шундай қи-

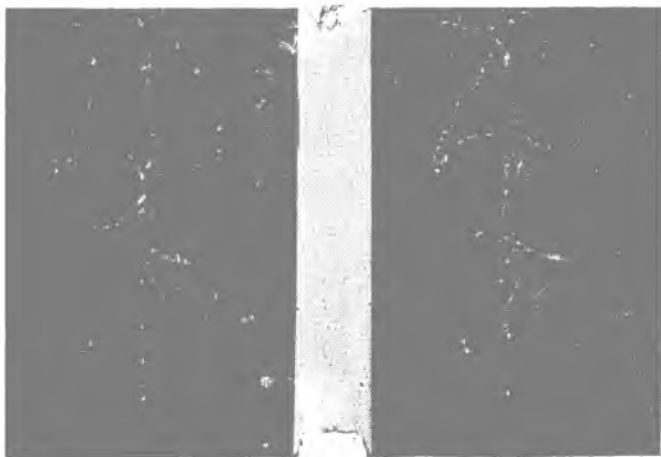
либ, унча қаттиқ бўлмаган рентген нурлари ҳолида тепки электрони фотон энергиясининг жуда оз қисмини олади. Бу эса тепки электронларини атом фотонни тўла ютганида пайдо бўладиган „фотоэлектронлар“дан фарқ қилиш имконини беради, охириги ҳолда Эйнштейн тенгласига асосан электрон фотон энергияси катталиги тартибдаги энергияни олади.

193- расмда сочилган фотонлар ($h\nu$) ва тепки электронлари йўналишларининг ва энергияларининг ($h\nu$ ва E) муносабатини кўрсатувчи қутбий диаграмма келтирилган. Диаграмма $\lambda_0 = \Lambda$ ҳол учун, яъни қаттиқ нурлар учун чизилган; шунинг учун тепки электронлари энергияси бу ерда бирламчи фотон ($h\nu_0$) энергиясининг сезиларли қисмини ташкил қилади. Диаграммадан кўринишича, тепки электронлари асосан олд томонга бирламчи фотон йўналишида чиқариб ташланиши зарур.



193- расм. Сочилган фотонлар ва тепки электронларининг қутбий диаграммаси.

Комптон назариясининг рентген ва γ -нурларнинг сочилишида тепки электронларининг вужудга келишига тегишли



194- расм. Вильсон камерасида тепки электронларининг излари.

башорати Вильсон камерасида ўтказилган тажрибаларда тезда тасдиқланди. Рентген нурларининг ҳаводан ўтганида олинган фотосуратда (194- расм) нур йўлида фотоэлектронларнинг

узун траекториялари билан бирга нур йўлида жойлашган ва кутбий диаграммага (193-расм) мос равишда асосан олдга йўналган кўп сонли қисқа траекторияларни ҳам пайқаш мумкин. Бу эса тепки электронларининг йўлидир.

Тепки электронларига тезлик бериш учун энергия сарфлангандан уларнинг пайдо бўлиши тушувчи рентген ёки γ -нурларнинг абсорбцияси билан боғлиқ эканлигини кўрсатиб ўтамыз. Бу абсорбция коэффициентини σ билан, одатдаги ёки „фотоэлектр“ абсорбция коэффициентини τ билан белгилаймиз. У ҳолда тепки электронларининг қисқа траекториялари N_r сони билан фотоэлектронларнинг узун траекториялари N_p сони орасида

$$\frac{N_r}{N_p} = \frac{\sigma}{\tau}$$

муносабат ўринли эканлигини кутиш мумкин.

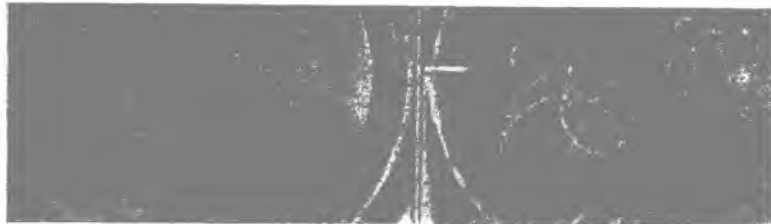
Тажрибанинг кўрсатишича, τ абсорбция коэффициенти тўлқин узунлик камайганда λ^3 га пропорционал равишда камаяди, σ эса тўлқин узунликка суст боғланган. Шунинг учун λ камайганда N_r/N_p нисбат тез ортиши керак. Ҳақиқатан шундай эканлигини XVII жадвал курсатиб турибди. Бундан яна қаттиқ γ -нурларнинг абсорбцияси фотоэффект билан эмас, балки деярли нуқул тепки электронларини вужудга келтиришга энергия сарфи билан боғлиқлиги келиб чиқади.

XVII жадвал

Тўлқин узунлик (\AA ҳисобида)	N_r / N_p	$\frac{\sigma}{\tau}$
0,71	0,10	0,27
0,44	0,9	1,2
0,29	2,7	3,8
0,20	9	10
0,17	17	17
0,13	72	32

Совет физиги Д. В. Скобельцин тепки электронларини апрофлича текширди. Бу электронларнинг бошланғич энергиясини аниқлашда Скобельцин, кейинчалик космик нурларнинг тез заррачаларини ўрганишда муҳим роль ўйнаган махсус кузатиш усулидан фойдаланди. Биринчи марта — α -заррачалаб табиатини текширишда П. Л. Капица томонидан қўлланилган (102-бетга қаранг) бу методда Вильсон камераси кучли магнит майдонга жойлаштирилади ва Вильсон траекториялари

нинг эгрилик радиўслари бўйича электронлар энергиялари аниқланади. 195-расмда Скобельцин олган фотосуратлардан бири берилган (RaC элемент γ -нурларининг сочилиши).



195-расм. Магнит майдонда тепки электронларнинг йўли.

Бу метод ёрдамида Скобельцин γ -нурлар ютилиши билан боғлиқ бўлган бир қанча муҳим масалаларни ҳал қилишга муяссар бўлди.

127-§. Сочилишнинг элементар актлари ва сақланиш қонунлари

Висмут чангчасидаги элементар фотоэффект тажрибаси, рентген нурлар энергияси сферик тўлқинлар кўринишида тарқалмасдан фотонлар сифатида тарқалади десак, табиийроқ тушунтирилишини 121-§ да кўриб ўтган эдик. Фотоэффектнинг иккита элементар актлари орасидаги ўртача вақт висмут чангчасидан иборат бўлган „нишон“га антикатоддан тахминан „отилган“ фотонлардан бирининг тегиш эҳтимолига мос келади. Юқоридаги параграфларда қаралган Комптон эффекти бунинча равшанроқ кўрсатади.

Ҳақиқатан ҳам, биллиард шарларининг тўқнашишидан иборат бўлган жуда қўпол модель ҳодисанинг барча муҳим белгиларини осон тушунтиришга имкон беради. Биз бу „биллиард шарларидан“ бирини—тепки электрони, Комптон ибораси билан айтганда „фотон туртишгандан“ кейин сочилгач унинг жуда аниқ ҳаракатланганлигини ҳатто кузатишимиз ҳам мумкин.

Агар биз бу ҳодисани соф классик нуқтаи назардан, яъни рентген нурларни сферик тўлқинлар, электронларни эса одатдаги заррачалар (қўпол айтганда, шарчалар) деб қараб тушунтиришга уринганимизда, у ҳолда бунинг учун жуда оғир қурбон беришга—сочилишнинг элементар актларига энергиянинг ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунларининг татбиқидан воз кечишга тўғри келарди. Бу қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади. Сферик тўлқин ҳамма электронларга бир текис таъсир қилиб, уларни мажбурий тўбрантиради; электрон кесимининг роят кичиклигидан, унга тўғри келган энергия ва импульс улуши жуда кичик бўлади. Комптон сочилишида эса бирламчи тўлқиннинг энергия ва импульсидан сезиларли улуш

олган тепки электронлари пайдо бўлади. Улар бу энергия ва импульсни қаердан олишини тушуниш учун узоқ вақт оралигида аста-секин энергия йиғилади, деб фараз қилишга тўғри келарди. Бироқ буни Комптон эффектининг кучсиз боғланган (энергия йиға оладиган), электронларда ҳам, эркин электронларда ҳам (масалан, металлларда) вужудга келиш факти билан келиштириб бўлмайди.

Тўлқин тасаввурларни қутқариш мақсадида 1923 йили Бор, Крамерс ва Слэтер ҳатто энергия ва импульсининг сақланиш қонунлари сочилишда фақат *статистик*, ўртача катта вақт оралиқларида бажарилиб, элементар актларга татбиқ қилиб бўлмайди, деювчи назарияни яратишга уришиб кўрдилар. Бу назарияга асосан сочилиш узлуксиз бўлади, бироқ тепки электронлари тамомила тасодифий чиқади. Иккала процесс—тўлқинларнинг сочилиши ва тепки электронларининг чиқиши ўзаро созланмаган. Асосида табиатнинг қатъий қарор топган асосий қонунларини—энергиянинг ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунларини инкор қилиш ётган бу назария методологик нақтаи назарданоқ яроқсиз эди. Кутилгандек, унинг асосиз эканлиги тез орада экспериментал кўрсатилди.

Рентген нури сочилишнинг элементар актларида энергия ва ҳаракат миқдори сақланиш қонунларининг бажарилишини тасдиқлайдиган тажрибалар қуйидаги мулоҳазаларга таянади. Сочилишнинг элементар актларига сақланиш қонунларини қўлланишни талаб қилувчи „биллиард ўйини назарияси“га кўра иккала процесс ўзаро боғланган бўлиши ва ҳеч бўлмаганда, бир вақтда содир бўлиши керак. Бор, Крамерс ва Слэтерларнинг статистик назариясига кўра иккала процесс бир-бирларидан тамомила мустаснодир.

У ҳам бу назарияни текшириш учун тегишли тажрибаларни бажариш мумкин экан. Сочилишнинг элементар актларига энергия ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунларини қўлланиш мумкин бўлса, у ҳолда қуйидаги қатор хулосалар бажарилиши керак. Масалан, статистик назариянинг талабига зид равишда ҳар бир тепки электронига мос ҳолда бир вақтда фотон (бизнинг моделда фотоэлектрон) сочилиши керак. Бундан ташқари, сочилишдан кейин тепки электрони ва фотоннинг учини бурчаклари орасида муайян муносабат мавжуд бўлиши керак. 193-расмда бу муносабат қутбий диаграммада акс эттирилган; агар сақланиш қонунларидан [(125.2) ва (125.4) формулалар] фойдаланилса ва (125.4) вектор тенгламани координата ўқларидаги проекциялардан иборат бўлган иккита скаляр тенглама билан алмаштирилса, уни бевосита ҳисоблаш йўли билан ҳосил қилиш мумкин. Ҳосил қилинган муносабат қуйидаги кўринишни олади:

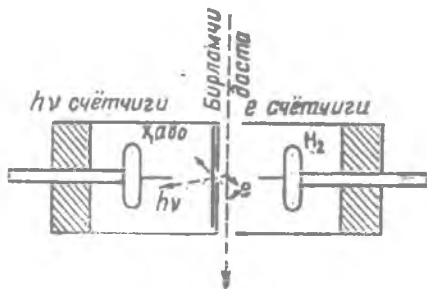
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{1 + \alpha} \operatorname{tg} \psi, \quad (127.1)$$

бунда $\alpha = \Delta/\lambda$; бурчакларнинг белгиланишини 192-расмдан қаранг.

1925 йилда бир томондан Боте ва Гейгер, иккинчи томондан Комптон ва Саймон тажрибалар ўтказдилар. Бу тажрибалар сочилишнинг элементар актларига сақланиш қонунларини қўллаш мумкин эмаслиги тўғрисидаги статистик назариянинг асосий фикри нотўғри эканлигини тўла равшанлик билан кўрсатди. Шу билан бирга улар ёруғликнинг баъзи хоссаларини тушунтиришда корпускуляр тушунчанинг мақсадга мувофиқ эканлигини энг яхши намойиш қилдилар. Кейинчалик (1936 — 1937 йиллар) шунга ўхшаш тажрибалар яхшиланган техника билан ва турли-туман кўринишларда яна такрорланди. Бу янги тажрибаларда ҳам, фақат катта аниқликда ва ишонтирарли тарзда рентген ва γ -нурлар сочилишининг элементар актларига сақланиш қонунларининг қўлланиши мумкинлиги тасдиқланди. Бу тажрибалардан биз энг характерлиларини Боте ва Гейгернинг биринчи тажрибасини ҳамда Комптон ва Саймоннинг тажрибасини баён қиламиз.

128- §. Сочилишнинг элементар актларига сақланиш қонунларини татбиқ этиш мумкинлигининг экспериментал тасдиқи

Боте ва Гейгер тажрибаси тепки электрони ва сочилган фотоннинг бир пайтда пайдо бўлишига ишонч ҳосил қилиш учун ўтказилган эди. Рентген нурларининг ингичка дастаси водород атмосферасидаги иккита Гейгер сўтчиғи орасидан ўтарди (196-расм). Водород олинишига сабаб шуки, у рентген нурларини кучсиз ютгани ҳолда, уларни етарлича кучли сочади. Сўтчиқлардан бири (196-расмда чапдаги) платина зар қоғоз билан ёнилиб ҳавога тўлдирилган, иккинчиси очиқ, бинобарин, водород билан тўлдирилган. Бундай шароитда чапдаги сўтчиқ тепки электронлари платина, зар қоғозда ютилиши туфайли, уларни қайд қилмайди, бироқ зар қоғоздан ўтиб, ҳаводан, сўтчиқ деворидан ёки зар қоғознинг ўзидан фотоэлектронни юлиб чиқара оладиган фотонларни қайд қиларди. Ўнгдаги сўтчиқ фотонларни деярли қайд қилмайди, чунки улар водородда жуда кам ютылади, бироқ тепки электронларини кучли қайд қиларди. Чапдаги сўтчиқка тушган ҳар бир



196-расм. Боте ва Гейгер тажрибасининг схемаси.

фотон уни ишга туширавермаганидан, ўнгдаги счётчикка боғланган электрометрнинг ҳар бир оғишига чапдаги счётчикка боғланган электрометрнинг ҳар бир оғишини таққослаш мумкин бўлавермасди. Аксинча, агар ҳақиқатан мос тушиш содир бўлса, у ҳолда квантлар счётчигининг ҳар бир оғишига электронлар счётчигининг оғиши мос келиши керак. Ҳақиқатда бу ҳодиса шу хилда унча аниқ кузатилмасди, бироқ мос тушишлар тасодикий бўлмасдан уларнинг сони шунчалик катта эдики, Боте ва Гейгернинг статистик ҳисоблашларига кўра 1 га қарши 150000 қўйиш мумкин, лекин бу ҳодиса сочилиш ва тепки электронларининг бир вақтнинг ўзида пайдо бўлишига боғлиқ.

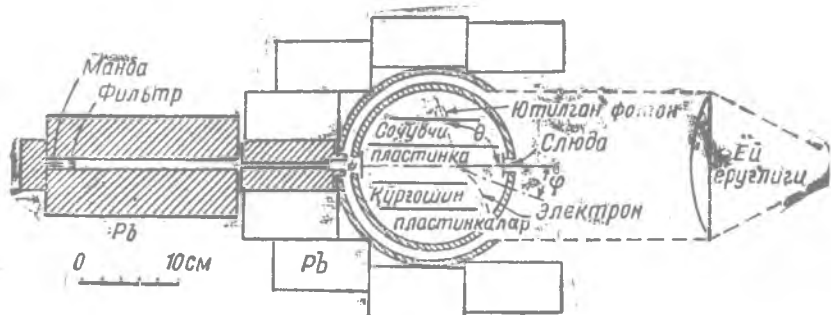
Комптон ва Саймон тажрибаси ҳамда унинг Крэйн, Гернер ва Турин томонидан такомиллаштирилган кўриниши тепки электронининг ва сочилган фотоннинг учиш бурчаклари орасидаги муносабат сақланиш қонунлари талаб қилганидек бажариладими, йўқми эканлигини текшириш учун Вильсон камерасида ўтказилган эди [193-расмдаги диаграммага ва (127.1) формулага қаранг]. Бу тажрибанинг ғоясини тушуниш учун 193-расмдаги диаграммага мурожаат қиламиз.

Масалан, сочилишида тепки электрони пастки 5 стрелка йўналишида учсин; у ҳолда сақланиш қонунарига кўра сочилган фотон юқориги 5 стрелка йўналишида учиши керак. Пастки ва юқориги 5 стрелкалар ва 1 стрелка орасидаги бурчаклар (127.1) муносабатни қаноатлантиради. Пастки стрелка йўналишини тажрибада кўриш осон, чунки ҳар бир тепки электрони Вильсон камерасида сезиларли из қолдиради. Бироқ фотоннинг ўзи ҳавони ионлаштирмайди; шунинг учун юқори стрелкага тегишли йўналишни Вильсон камерасида бевосита аниқлаш мумкин эмас. Буни билвосита шундай аниқлаш мумкин: агар сочилган фотон камера ичида қаердадир ютилса, у узун фотоэлектрон изини беради. Бу узун из бошланишини тепки электроннинг қисқа изининг бошланиши билан бирлаштириб, иккала стрелкани ҳам ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳолда қолдиган маълум ноаниқлик шундан иборатки, топилган фотон аниқланган тепки электронини сочилиш пайтида юзага келтирган фотонми, 6 бошқама, шуни ишонч билан айтолмаслигимиздадир. Шунинг учун ҳам тажрибадан хулосаларни етарлича катта статистик материал асосидагина чиқара оламиз.

Тажриба схемаси 197-расмда берилган.

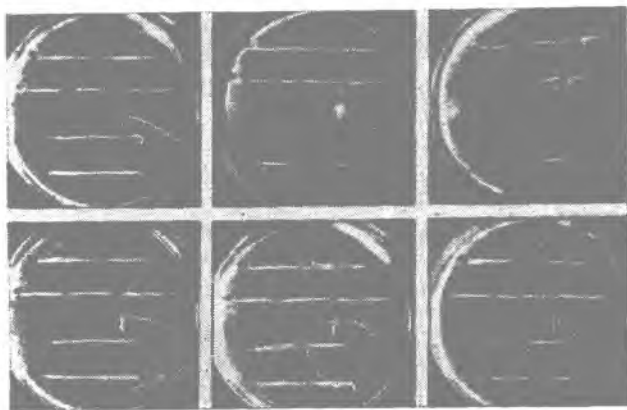
Тепки электронларининг энергиясини катталаштириш ва шу билан тажриба аниқлигини ошириш учун тажриба рентген нурлари билан эмас, балки қаттиқ γ -нурлар билан ўтказилди. γ -нурлар манбаи тор канал охирида қалин қўрғошин блокка жойлаштирилади; филтрланган γ -нурларнинг параллел дастаси каналдан чиқиб, Вильсон камерасига кирарди. Сочувчи жисм вазифасини камера марказига жойлаштирилган целлулоид бу-

лаги бажарган. Сочилган фотоннинг камера ичида ютилиш эҳтимолини ошириш учун сочувчи жисмнинг ҳар иккала томонига иккитадан қўрғошин пластинка қўйилган. Камерани чизма текислигига тик бўлган магнит майдонга жойлаштирилган. Бу тепки электронининг учиш йўналишинигина эмас,



197-расм. Комптон ва Саймон тажрибасининг схемаси (Крейн ва бошқалар тузган).

балки изнинг эгрилиги бўйича шу электроннинг энергиясини ҳам (Скобельцин методи, 126-§ га қаранг) топишга имкон беради. Тажрибанинг бундай қўйилиши қуйидаги афзалликларга эга: тепки электронининг учиш бурчаги ва энергияси бўйича,



198-расм.

Комптон назарияси ёрдамида, тушувчи фотоннинг энергияси ҳақида ҳеч қандай тахминсиз сочилган фотоннинг тегишли учиш бурчагини топиш мумкин. Бу устунлик шунинг учун ҳам муҳимки, бирламчи γ -нурларнинг филътрациясининг тоза-лигига тўла ишона олмаймиз ва, демак, тушувчи фотонга тўла ишонч билан муайян энергияни ёза олмаймиз. 198-расмда ми-

сол тариқасида учта сурат келтирилган бўлиб, унда тепки электрони (камера ўргасида) ва сочилган фотоннинг ютилган жойи (четдаги юқориги кўрғошин пластинка олдида) кўриниб турибди. Фоторасмларни ишлашда тепки электронининг учиш бурчаги ва энергияси бўйича сочилган фотоннинг учиш бурчаги ҳисобланарди ва ҳисоблаш натижалари фоторасмдан топилган бурчак билан таққосланарди. Ҳаммаси бўлиб 10000 фоторасм олинган бўлиб, улардан 300 та электрон — фотон комбинацияси топилди. Ишлаш натижаларининг кўрсатишича, тасодифий мос тушиш ҳолларидан анча ортиқ бўлган ҳолларда сочилган фотоннинг кузатилган учиш бурчаги ҳисоблаб топилган учиш бурчагига мос келар экан.

Шундай қилиб, ҳозирги вақтда рентген ва γ -нурларнинг сочилиш элементар актларида энергиянинг ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунлари бажарилишига ҳеч қандай шубҳа йўқдир.

129-§. Мёссбауэр эффекти

Ўтган параграфларда эркин электронларнинг рентген ва γ -нурларни сочишини фотоннинг электрон билан эластик „урилиши“ сифатида қараш мумкинлигини кўрган эдик. Бундай хил „урилишларга“ энергиянинг ва импульснинг сақланиш қонуниларини татбиқ қилишга асосланган ҳисоблашлар, тажрибада тула тасдиқланувчи натижаларга олиб келиши маълум бўлди.

Бироқ импульснинг сақланиш қонуни фақат сочилишдагина эмас, балки фотонларнинг атом объектлар билан ҳар қандай ўзаро таъсирларида, хусусан атомларнинг фотонларни ютиши ва чиқаришида ҳам бажарилиши керак.

Оптикада резонанс нурланиш ҳодисаси маълумдир. У атомнинг нормал сатҳи ва унга яқин уйғонган сатҳ орасидаги энергия айирмасига тўғри келадиган частотали ёруғликни айниқса катта эҳтимоллик билан ютишдан иборатдир. Бундай частотали ёруғликни ютиб, атом уйғонган ҳолатга ўтади ва уйғонган ҳолатнинг яшаш вақтига ($\tau \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ сек) тенг вақтдан кейин яна *худди ўша частотали* фотон чиқаради. Амалда бу ҳодиса нурланувчи ва ютувчи атомлар битта модданинг атомлари бўлганида кузатилади. Масалан, агар натрий буғини уйғонган натрий атомлари нурлаётган сариқ чизиқли $\lambda = 5889,6 \text{ \AA}$ ёруғлик билан ёритилса, у ҳолда бу ёруғликни натрий атомлари интенсив равишда ютади ва ўз навбатида шу тўлқин узунлиқли ёруғлик нурлайди. Шунинг учун бу ҳодисани резонанс нурланиш дейилади. Шунга ўхшаш ҳодисалар симоб буғида ва кўпчилик бошқа ҳолларда кузатилади.

Бу резонанс нурланишнинг пайдо бўлиш шароитини муҳокама қилишда бир нарса, айнан, ютиладиган фотон частотаси

шундай бўлиши керакки, фотон энергияси $h\nu$ атомни нормал сатҳдан унга энг яқин бўлган уйғонган сатҳга ўтказиш учун етарли бўлиши, яъни $h\nu = E_2 - E_1$ тенглик ўринли бўлиши керак. Бошқача айтганда, сақланиш қонуни ҳисобга олиниб, импульснинг сақланиш шarti эътиборга олинмайди.

Атомлар ядроси ҳам энергиянинг нормал ва уйғонган квант сатҳларига эга бўлиб, бу сатҳлар орасидаги ўтишлар γ -нурлар кўринишида қисқа тўлқинли электромагнит нурланиш вужудга келишига олиб келади. Бироқ γ -нурлар билан резонанс ютилиши амалга оширишга уринишлар узоқ вақтгача ижобий натижа бермай келди. Бунинг сабаби айнан бундай уринишда фақат энергиянинг сақланиш қонунига асосий эътибор берилишида, яъни электрон қобиқ учун ва спектрнинг оптик қисми учун маълум бўлганларни атом ядросига ва γ -нурга автоматик татбиқ қилинишидadir. Ваҳолонки, γ -фотонларнинг частотаси ва, демак, энергия ва импульси спектрнинг оптик қисми фотонларига тегишли қийматлардан бир неча марта катта бўлиши, энергиянинг сақланиш қонунини ҳам, импульснинг сақланиш қонунини ҳам γ -нурларнинг фақат сочилиш шароити муҳокамасида эмас, балки ютилишида ҳам назарга олиш зарур эканлигини билдиради.

Бу масалани батафсилроқ қараб чиқамиз. Агар фотон моддий заррача каби ҳақиқатан импульсга эга бўлса, у ҳолда атом ёки ядронинг фотон нурланиши худди ўқ отилганда қуролда тепиш юзага келиб қуролнинг снаряднинг учиб чиқиш йўналишига тескари йўналишда силжиши содир бўлганидек, тепиш билан бирга юз бериши керак. Агар бунда атом ҳолида тепиш импульси етарлича катта булиб, „отувчи“ атомга нолдан фарқли тезлик берса, у ҳолда атомнинг ўз координаталар системасида сатҳлар айирмасига тенг бўлган $E_2 - E_1$ энергия ажралса-да, энергиянинг бир қисми тепиш натижасида атомнинг ўзига тезлик беришга сарф бўлганидан, лаборатория координаталар системасида (45-§ га қаранг) озод қилинган фотон энергияси бундан бир оз кам бўлади. Шунга ўхшаш, ютилишда, $E_1 \rightarrow E_2$ квант ўтиши вужудга келтириш учун зарур энергия атомнинг координаталар системасида $E_1 - E_2$ га тенг, бироқ лаборатория координаталар системасида бу ўтиш амалга ошириш учун бир оз кўпроқ энергия сарфлаш керак бўлади, чунки фотоннинг импульси (ёруғлик босими) туфайли унинг бир қисми яхлит атомга бирор тезлик бериш учун кетади.

Бу сифатий мулоҳазаларга миқдорий шакл бериш осон. Фотон чиқарганда ядронинг оладиган p тепиш импульси $h\nu_0/c$ га тенг, атомнинг тепиш туфайли оладиган кинетик энергияси

$$R = \frac{p^2}{2M} = \frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2} \quad (129.1)$$

бунда M —ядро массаси. Бироқ энергиянинг сақланиш қонунига кўра, бу энергия сатҳларнинг энергиялари айирмалари $E_2 - E_1$ ҳисобига олиниб, тепишга сарф бўлмаганда, бу сатҳлар орасидаги ўтиш $h\nu_0 = E_2 - E_1$ энергияли фотоннинг чиқарилишига олиб келган бўларди. Шундай қилиб, овоз қилинган фотон

$$h\nu_{\text{чик}} = h\nu_0 - R \quad (129.2)$$

энергияга эга бўлиши керак.

Аксинча, ядрога $E_2 - E_1$ энергия бериб, уни уйғотиш учун $h\nu_0$ дан R катталиқ қадар ортиқ энергия сарфлаш керак: ортиқча энергия импульснинг сақланиш қонуни бажарилиши учун атомга (ёки ядрога) берилади.

Ниҳоят,

$$h\nu_{\text{ют}} = h\nu_0 + R. \quad (129.3)$$

Шундай қилиб, чиқариш ва ютилиш чизиқлари частоталари бир-бирига нисбатан $h\Delta\nu = 2R$ шартни қаноатлантирувчи $\nu_{\text{ют}} - \nu_{\text{чик}} = \Delta\nu$ катталиқка силжиган.

Энди икки ҳол учун R катталиқни ҳисоблаймиз: а) кўринадиган спектрнинг ўрта қисми учун; б) γ -нурланиш учун. Айтайлик, масалан, а) ҳолда $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ ва атомнинг масса сони $M = 100$ атом бирликка тенг бўлсин. $h\nu_0$ ва Mc^2 катталиқларни электрон-вольтларда ҳисоблаймиз ($1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ э}$):

$$h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} \approx 2,5 \text{ эв},$$

$$Mc^2 = \frac{100 \cdot 1,7 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{1,6 \cdot 10^{-12}} \approx 10^{11} \text{ эв}.$$

Буидан

$$R = \frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2} = \frac{(2,5)^2}{2 \cdot 10^{11}} = 2,7 \cdot 10^{-11}$$

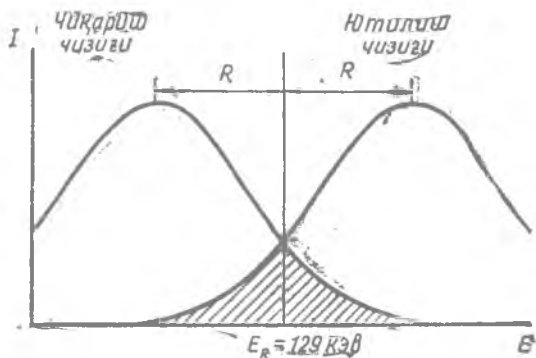
б) ҳолда γ -нурларнинг фотон катталиги $h\nu_0 = 500 \text{ кэв} = 5 \times 10^5 \text{ эв}$ ва M —аввалгидек 100 атом бирликка тенг бўлсин. Бу ерда

$$R = \frac{(5 \cdot 10^5)^2}{2 \cdot 10^{11}} = 1,25 \text{ эв}.$$

Шундай қилиб а) ҳолда $h\Delta\nu = 6 \cdot 10^{-11} \text{ эв}$, яъни ютилиш ва чиқариш чизиқлари бир-бирини амалда тўла ёпади, шу сабабли резонанс ютилиш вужудга келиши мумкин. Аксинча, б) ҳолда $2R$ га тенг катталиқка силжиган ютилиш ва чиқариш максимумлари қатта масофага ($2,5 \text{ эв}$) ажралганлар. 199-расмда иридий Ir^{191} радиоактив изотопи чиқарган $h\nu_0 = 129 \text{ кэв}$ энергияли фотонлардан ташкил топган γ -нурларнинг чиқариш ва ютилиш эгри чизиқларининг бир-бирига нисбатан жойлашиши кўрсатилган. Уйғонмаган Ir^{191} ядроларнинг жуда кич-

чик улушигина $h\nu_0 = 129$ кэв, нурланишни резонанс тутишга қодир бўлиши рэвшандир.

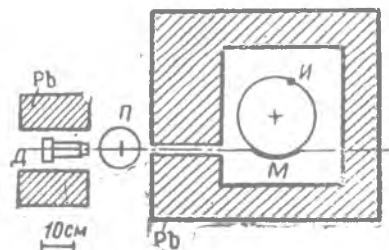
Иккала эгри чизиқнинг бир-бирини ёпишини яхшилаш ва шу билан резонанс ютилишни қузата оладиган қилиш учун Допплер эффекти ҳисобига чиқариш чизиғи частотасини силжитиш таклиф қилинди ва ундан муваффақият билан фойдала-



199-расм. $T = 300^\circ\text{K}$ да 129 кэв ўтиш энергияли Ir^{191} γ -нурларининг чиқариш ва ютилиш чизиқларининг вазияти ва шакли.

нилди. Ir^{191} чизиқ ҳолида $h\nu_0 = 129$ кэв ҳисоблашларнинг кўрсатишича $2R$ силжишни компенсациялаш учун манба тезлиги $1,1 \cdot 10^8$ см/сек бўлиши керак. 200-расмда тажриба схемаси тасвирланган. Бу ерда И— γ -нурланиш манбаи, у тез айланадиган ва тезлигини ихтиёрий ўзгартириш

мумкин бўлган ультрацентрифуга роторига ўрнатилган. Қуюк ёй билан тасвирланган йўл кесмасида манбанинг γ -нурлари Рв муҳофаза яшиқдан ташқарига чиқа олардилар; П юткичдан ўтган фотонлар сони D фотонлар сётчиги билан ҳисобланади. Агар центрифуганинг айланиш тезлиги ўзгартирилса, у ҳолда Допплер эффекти туфайли γ -нурлар частотаси ҳам ўзгаради. Бунда ютилиш



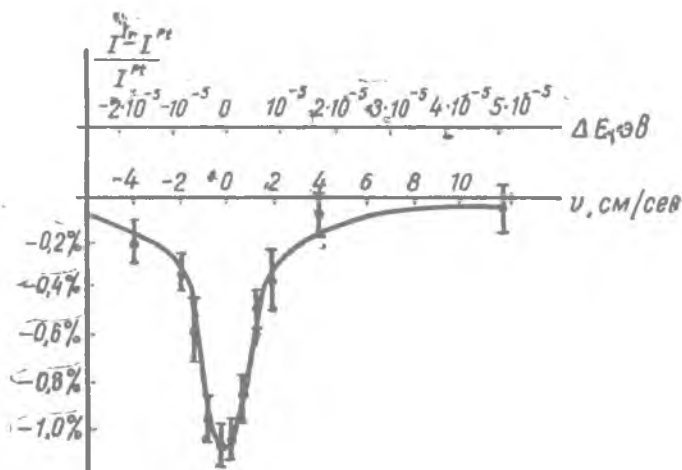
200-расм. γ -нурларнинг резонанс ютилишини қузатиш тажрибасининг схемаси.

ва чиқариш эгри чизиқлари нисбий силжишининг компенсацияси қанчалик тўлароқ бўлса, П юткичда фотонлар шунча кучлироқ ютилади ва сётчикда фотонлар шунча кам қайд қилинади. Шундай йўл билан заиф ифодаланган резонанс ютилиш ошкор қилинди.

1958 йилда немис физиги Р. Мёссбауэр тепки импульси нурланувчи айрим ядрога берилмасдан, балки яхлит кристалл-

га бериладиган шароит яратиш мумкин эканлигини кўрсатгандан сўнг, бу ҳодисанинг тадқиқи тамомила янги босқичга кўтарилди. Айрим ядро массасига нисбатан кристалл массаси жуда ҳам катта бўлганидан ютилиш ва нурланиш процесслари кристаллнинг ички эркинлик даражаларига энергия узатмасдан, яъни энергия йўқотмасдан, идеал эластик юз беради. Бундай шароитда резонанс ютилиш кузатилади ва уйғонган ядронинг яшаш вақти катталигининг тескари қийматига тенг бўлган фақат битта табиий кенгликли, яъни ғоят ингичка ютилиш чизиғи вужудга келади.

Шу ҳолни ва бу билан бирга ютилиш эгри чизиғи йўлини ўлчаш учун Мёссбауэр тажрибанинг 200-расмда тасвирланган тартибдаги жойлашишидан фойдаланди. У манбани ҳар хил тезлик билан айлантириб, Допплер эффекти воситасида P^{101} ютигичдан ўтувчи γ -нурланиш частотасини ўзгартирди. Ютигич



201-расм. I^{191} да тепкисиз резонанс ютилиш эгри чизиғи. Қисқа вертикал кесмалар ҳар бир кузатиш нуқтаси учун хатолик чегараларини характерлайди.

орқасидаги счётчик қайд қиладиган нурланиш интенсивлиги P да ютилиш интенсивлигини характерлайди. Ютилиш „тепишсиз“ юз берадиган шароитда резонанс кескин ўткирликка эга бўлади. Буни қуйидаги маълумотлардан билиш мумкин: I^{191} ҳолида 129 кэв фотонли γ -нурланиш ротор тезлиги бир неча ўн минг см/сек тартибда бўлганида заиф резонанс юз беради. Аксинча, тепишсиз резонанс шароитида ядро ютилишни тўла сўндириш учун бир неча см/сек тезлик етарли бўлади; масалан, 1,5 см/сек тезликда ютилиш тенг ярмига қадар камаяди. Вуни 201-расмдаги эгри чизиқ намоиш қилади (v см/сек

шкалага эътибор беринг). Бу расмда кўрсатилган ютилиш чизигининг ярим кенглиги $4,6 \cdot 10^{-6}$ эв ни ташкил қилади, холос.

Резонанс ютилишнинг тавсифланган манзараси бир қадар соддалаштирилган. Ҳақиқатда фақат битта табиий кенглик билан характерланадиган чизиқ ютилишнинг фақат биргина натижаси бўлмай, анчагина кенг фонга устма-уст тушади. Бу чизиқнинг максимум баландлиги (ёки аниқроғи—чуқурлиги; 201-расмга қаранг) 100% дан анча кам бўлган тегишсиз ютилиш эҳтимоллиги билан белгиланади. Тегишсиз ютилиш процессининг ўзи импульс бутун кристаллга берилган ҳолдагина содир бўлса-да, уни нурланувчи ядронинг қолган панжара билан қаттиқ боғланиши натижасигина деб қарамастик лозим. Бу процесснинг квант назарияси Мёссбауэр томонидан ривожлантирилди ва тегишсиз резонанс ютилишни кузатишга имкон берадиган шароитларни олдиндан баҳолайдиган формулалар топилди.

Мисол тариқасида келтирилган Ir^{191} ($h\nu_0 = 129$ кэв) изотопининг хоссалари шундай, резонанс ютилишни кузатиш учун намунани суюқ гелий температурасигача ($T = 4^\circ \text{K}$) совитиш керак. Бунда қанчалик ингичка чизиқ нурланишини Γ чизиқ ярим кенглигининг (энергетик бирликларда ифодаланган) фотоннинг E энергиясига нисбати бўйича баҳолаш мумкин; бу чизиқ учун $\Gamma/E = 2 \cdot 10^{-11}$ га тенг ва спектрнинг кўринадиган қисми учун мос келадиган тегишли катталikka қараганда 10^4 марта кичикдир.

Темир Fe^{57} изотопи янада қулай хоссаларга эга. У резонанс ютилишни уй температурасидаёқ кузатишга имкон беради. Бу ҳолда Γ/E нисбат $3 \cdot 10^{-13}$ га тенг, яъни Ir^{191} ҳолдагига қараганда яна икки тартиб кичик бўлади. Мёссбауэр эффекти кузатиладиган яна бошқа қатор изотоплар ҳам маълумдир.

130-§. Мёссбауэр эффектнинг баъзи бир татбиқлари

Мёссбауэр эффектдаги резонанс чиқариш чизигининг ғоят кичик кенглиги, айниқса Fe^{57} нинг $14,4$ кэв чизиги ҳолида жуда нозик ва муҳим эффектларни кузатишга имкон беради. Бу ерда Мёссбауэр эффектнинг мумкин бўлган татбиқларидан икки ҳолини қараб чиқамиз: иккинчи тартибли Допплер эффекти ва гравитацион майдонда спектрал чизиқларнинг силжиши (гравитацион майдонда „қизил силжиш“ деб аталадиган силжиш).

А. Иккинчи тартибли доплер-эффект. Допплер эффекти туфайли спектрал чизиқларнинг силжиши оптикадан маълум:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \alpha,$$

бунда v —ёруғлиқ манбаи тезлиги ва α -манбаи тезлиги йўналиши билан кўриш нури йўналиши орасидаги бурчак. Кузатиладиган частота

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right). \quad (130.1)$$

Бу формулани келтириб чиқаришда хусусий нисбийлик назариясида биринчисига нисбатан текис ҳаракатланаётган бошқа координаталар системасига ўтишда фақат фазовий координаталаргина эмас, балки вақт ҳам алмаштирилиши (67-§ га қаранг) эътиборга олинмаган. Агар вақтни алмаштириш эътиборга олинса, у ҳолда (130.1) ўрнига

$$v = \frac{v_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (130.2)$$

формула ҳосил бўлади*.

Шундай қилиб нисбийлик назарияси v/c нисбатининг биринчи даражасига боғлиқ силжиши билан бирга бу нисбатининг квадратига боғлиқ бўлган ва тезликнинг йўналишига боғлиқ бўлмаган эффект мавжуд бўлишини талаб қилади. $v/c \ll 1$ ҳол учун қуйидагига эга бўламиз:

$$v = v_0 \left[1 - \frac{v}{c} \cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right].$$

$(v/c)^2$ га боғлиқ релятивистик эффект биринчи тартибли анча катта эффект билан айтганда ёпилиб кетиши равшандир. Шунинг учун иккинчи тартибли эффектни пайқаш ва ўлчаш анча қийин экспериментал масалалардан биридир.

Канал нурларидаги тез ҳаракатланаётган атомлар чиқарадиган водород H_β чизиғи мисолида биринчи марта (130.2) формулани текширган Айвс битта пластинкага спектрни: канал нурлари учини йўналишида ($\alpha = 0$) ва қарама-қарши йўналишда ($\alpha = 180^\circ$) суратга олиб, биринчи тартибли эффектни йўқотди. Бу эса ушбу ифодаларни беради:

$$v_1 = v_0 \left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right],$$

$$v_2 = v_0 \left[1 + \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right].$$

Бундан v нинг ишорасига боғлиқ бўлмаган релятивистик силжиш ўртачасини олиш йўли билан топилади

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = v_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

* Масалан, П. Бергманнинг „Введение в теорию относительности“ китобига қаранг, Ил, 1947, 70-бет.

$$\Delta v = v_0 - \bar{v} = v_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Бу эффектнинг ажойиб ва муҳим томони унда ҳаракатланувчи системалардаги „вақтнинг секинлашиши“ релятивистик эффектнинг намоён бўлишидир. Ҳақиқатан ҳам, нурлиниш частотаси қатъий даврий процессни характерлагани учун нурланувчи атомни „соат“ дейиш мумкин. Бироқ, вақт учун Лоренцнинг алмаштириш формулаларига (61-§) кўра, ҳаракатланувчи координаталар системасидаги $\Delta t'$ вақт оралиги лаборатория координаталар системасидаги Δt вақт оралиги билан қуйидаги муносабатда боғланган:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong \Delta t' \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Шунинг учун

$$\Delta t' = \Delta t \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right), \quad (130.3)$$

яъни ҳаракатланаётган системада иккинчи тартибли доплер-эффект формулаларига мос равишда „вақтнинг секинлашиши“ содир бўлади.

Иккинчи тартибли доплер-эффект тепишсиз резонанс ютилиш ва чиқариш процессида яққол кузатилади. Кристалл панжара ядролари иссиқлик тебранишлар туфайли мувозанат ҳолат атрофида узлуксиз ҳаракатда бўладилар. Шунинг учун \bar{v} ўртача тезлик ва u билан бирга иккинчи тартибли доплер-эффект нолга тенг бўлади. Бироқ радиоактив ядро (Fe^{57} да 10^{-7} сек) нинг яшаш вақти ичида ўртача квадратик тезлик \bar{v}^2/c^2 турғун қийматга (панжаранинг тебраниш даври 10^{-12} сек⁻¹ тартибда) эришади. Fe^{57} да Мёссбауэр чизиғи кенлиги жуда кичик ($\Gamma/E=3 \cdot 10^{-13}$) бўлганидан нурлатгич ва ютгич частотаси 10^{-12} гга „ўзгарганда“ резонанс амалда тўла йўқолади. Бироқ ҳаракатланаётган (нурланувчи ядро) системадаги частота лаборатория системадаги (ютувчи ядро) частота билан қуйидаги муносабатда боғланган:

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = v \left(1 + \frac{v}{c} - \frac{v^2}{2c^2}\right),$$

биноқ тезликларни ўртачасини олганда қуйидаги ҳосил бўлади

$$v' = v \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right),$$

яъни (130.3) формула бўйича релятивистик „вақтнинг секинлашишига“ мос келадиган частотани беради. Бу формулага ўр-

тача квадратик тезлик кирганидан, эффе́ктыннг ўзи температурага боғлиқ бўлиши керак. Шунинг учун, агар нурланувчи ва ютувчи ядролар бир хил температурада бўлсалар, ҳар иккала ядрога силжиш бирдай бўлади ва эффе́кт содир бўлмайди. Аксинча, нурлангич ва ютгич температуралари фарқли бўлганда ўтиш частоталарининг резонансни бузувчи нисбий силжиши кузатилиши керак. Америка физиклари Паунд ва Ребка тегишли экспериментлар қилдилар ва температуралар фарқига боғлиқ ҳолда Fe^{57} ҳол учун назарий ҳисобланганларга қониқарли мос келувчи силжиш кузатилишини кўрсатдилар.

Бунга боғлиқ равишда қўшимча иккита изоҳ берамиз:

1. Иккинчи тартибли доплер-эффе́кт, биз кўрганимиздек ҳаракатланаётган системалардаги релятивистик вақт секинлашишининг натижасидир. Бироқ Мёссбауэр эффе́ктида бу секинлашишининг намоён бўлиши ва унинг экспериментал тасдиқланиши вақтнинг секинлашиш эффе́ктинигина эмас, балки ундан келиб чиқадиган соатлар парадоксини ҳам оқлайди. Бу ҳол шундан иборатки, агар иккита бир хил соат ёнма-ён турган бўлса, уларнинг кўрсатишларида, ўтмишларидаги фарқ туфайли, тафовут бўлиши мумкин. Бу ҳолда „соатлар“ нурланувчи ва ютувчи ядролардан иборатдирлар. Бунда ютгич ядроси ўз соатининг частотасини (кўрсатишини) нурлангич соати кўрсатиши билан (тўла резонанс ёки бузилиш мавжудлигини) таққослайди, бу ҳолдаги бузилишни пайқаш сезгирлиги (Fe^{57} ҳолда $1:10^{12}$) бошқа ҳеч қандай методда эришилмайди. Нурлангич ва ютгичнинг турлича температураларида резонанс силжишининг содир бўлиши иккала „соат“ кўрсатишларининг ўзларининг ўтмишларига боғлиқлигини, яъни „соатлар парадоксини“ тасдиқлайди.

2. Резонанс ютилиш ва чиқаришга температуранинг таъсирини энергетик тушунтириш ҳам мумкин. Изоҳлаш қуйидагидан иборат: ҳар қандай температурада нурланиш ва ютилиш теписиз содир бўлса-да, яъни γ -фотон импульси $h\nu/c$ теписиз натижасида ўзгармаса-да, $h\nu$ катталики бошқа сабабга кўра озгина ўзгаради. Бу сабаб қуйидагидан иборат: нурланганда ядро уйғонган ҳолатдан нормал ҳолатга ўтганидан, унинг энергияси ўзгаради, бунинг натижасида релятивистик муносабатга кўра унинг массаси ҳам ўзгаради:

$$\Delta M = \frac{E}{c^2},$$

бунда E —ўтиш энергияси. Шунинг учун ўртача кинетик энергия ҳам ўзгаради. Ҳақиқатан ҳам, $R = p^2/2M$ га тенг, шу билан бирга $p = h\nu/c = \text{const}$ бўлади (нурланиш теписиз бўлади), у ҳолда

$$\Delta R \approx \Delta \left(\frac{p^2}{2M} \right) = - \frac{p^2 \Delta M}{2M^2} = - \frac{p^2 E}{2M^2 c^2} = - \frac{M^2 \bar{v}^2}{2M^2 c^2} E = - \frac{\bar{v}^2}{2c^2} E.$$

яна, уйғонган сатҳдан нормал сатҳга ўтиш энергияси нурланган фотон энергияси билан панжаранинг кинетик энергиясини орттиришга тақсимланганидан, нурланган энергия қуйидагига тенг бўлади:

$$E - \frac{v^2}{2c^2} E = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) E,$$

яъни тепишсиз нурланган фотон частотаси айнан иккинчи тартибли доплер-эффект талаб қилган $\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$ факторга ўзгариши керак.

Б. Спектрал чизиқларнинг гравитацион қизил силжиши. Умумий нисбийлик назариясининг экспериментал текшириш мумкин бўлган хулосаларидан бири гравитацион майдоннинг спектрал чизиқлар частотасига таъсирдан иборатдир. Бироқ бу эффект жуда кичикдир; масалан, Қуёш сиртидан чиққан ёруғлик

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2,12 \cdot 10^{-6}$$

га тенг нисбий катталиқча қизил томонга силжиши керак. Астрономик ўлчашлар бу „спектрал чизиқларнинг гравитацион қизил силжиши“ эффектнинг мавжудлигини сифатий тасдиқладилар, бироқ силжиш қийматининг жуда кичиклигидан миқдорий натижалар ҳар доим ишончли эмасдилар.

Мёссбауэр чизиги кенглигининг жуда ҳам кичиклиги ва Fe^{57} ҳолида у билан боғлиқ бўлган 10^{-12} дан кичик частота силжишини ошкор қилиш имкони, ер шароитида енгил эришилдиган эффектни кузатиш ва ўлчаш мумкинлигига умид турдирди. Бу умид ҳақиқатда оқланди.

Даставвал, умумий ҳолда эффект электромагнит нурланиш частотасининг гравитацион потенциаллар айирмасидан ўтишдаги ўзгаришидан иборат бўлишини кўрсатиб ўтамиз. Бу силжишни умумий нисбийлик назариясининг эквивалентлик принципининг натижаси деб қараш мумкин. Кейинги ҳол шундан иборатки, фазонинг чекланган соҳасида тортишиш майдонини системанинг доимий тезланиши билан алмаштириш мумкин. Тортишиш майдони бўлмаган соҳада жойлашган лабораторияни тасаввур қилайлик ва унда худди ютгич устида l масофада у билан айнан бир хил манба жойлашган бўлсин. Айтайлик, бизнинг лаборатория юқорига йўналган (яъни, ютгичдан манба томон) ва g тезланишга эга бўлсин. Фараз қилайлик, манба ν частотали электромагнит тўлқин кўринишида монохроматик сигнал чиқараётган бўлсин. Сигнал манбадан ютгичга етиши учун керак бўлган вақт

$$t = \frac{l}{c};$$

бу вақт ичида манба

$$v = gt = \frac{gl}{c}$$

тезликка эришади ва ютгич қабул қиладиган частота биринчи тартибли Допплер эффекти туфайли

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{gl}{c^2}$$

нисбий катталикча ўзгаради. Шундай қилиб, кузатиладиган частота қуйидагига тенг:

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{gl}{c^2} \right).$$

„Лабораториямиз“ ичида юз берадиган ҳодисалар учун юқорига йўналган g тезланишли текис-тезланувчан ҳаракат, шу g тезланишли пастга томон йўналган тортишиш майдонига эквивалентдир (Эйнштейн „лифти“)*.

Эквивалентлик принципига асосан gl катталикни l баландликлар айирмасига мос келадиган гравитацион потенциаллар айирмаси сифатида интерпретациялаш мумкин. Уни $\Delta \varphi$ билан белгилаб, қуйидагини ёзамиз:

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{\Delta \varphi}{c^2} \right).$$

Бу кўринишда формула бир жинсли бўлмаган гравитацион майдонлар учун ҳам ўринли бўлади. Иккинчи ҳаднинг маҳражида 10^{11} тартибдаги c^2 катталикнинг борлиги сабабли гравитацион силжиш ғоят кичик бўлади.

Частотанинг гравитацион силжишини ўрганиш учун Паунд ва Ребка Fe^{57} ҳолида $14,4$ кэв нурланишнинг резонанс ютилишидан фойдаландилар. $\Delta \nu/\nu$ нинг h катталикка пропорционал-лигидан, манба билан ютгич орасидаги баландлик бўйича ма-софа муҳим роль ўйнайди. Бироқ Fe^{57} да Мёссбауэр эффек-тининг ғоят сезгирлигидан манбани Гарвард университети лабораторияси минорасига ютгичдан ҳаммаси бўлиб 21 м ба-ландликда жойлаштириб, гравитацион силжишни кузатиш мум-кин бўлди**. Дастанинг ҳавода ютилиши туфайли заифлаши-шидан қутулиш учун манба ва ютгич гелий тўлдирилган пластмасса цилиндрга жойлаштирилган. Дастлабки тажриба-ларда ютгич частотасига нисбатан манба частотасининг тартиб-сиз силжишлари туфайли анча қийинчиликлар учради. Бироқ бу силжишлар ўз навбатида манба ва ютгич температуралари айирмасининг Допплернинг квадратик эффекти натижасида ре-зонансни бузадиган тебранишлардан иборат эканлиги тезда аниқланди. Ҳисоблашларнинг кўрсатишича, температуранинг 1° флукутацияси деярли гравитацион эффектга тенг силжишни

* Масалан, А. Эйнштейн, „О специальной и общей теории относительности“ китобига қаранг, С. И. Вавилов таржимаси, Л., 1923 й.

** Бу экспериментларнинг батафсил баёни „Успехи физических наук“ журналидаги Паунд мақоласида берилган, 72-т, №4, 1960 й., 674-бет.

юзага келтириши керак. Сўнгра қонуниятсиз тебранишлар сабаби аниқланганидан кейин, манба ва ютгич температуралари контрол қилина бошланди ва тегишли тузатмалар киритилди. Бунда натижалар тургун бўлиб қолди. Барча улчашлар ўртачасининг gl/c^2 назарий катталиқка нисбати $0,99 \pm 0,047$ га тенг чиқди, яъни хато чегараларида олдиндан кутилган катталиқка тенг чиқди. Шундай қилиб, 45 йил давомида астрофизиклар ва спектроскопистларнинг катта уринишларини талаб қилган проблема бир неча ҳафта ичида ҳал бўлди.

Англияда эквивалентлик принципини кўргазмали намойиш қилган яна бир эксперимент ўтказилди. Манба ва ютгич роторда айланиш ўқидан ҳар хил масофага жойлаштирилди. Натижада манба ва ютгич турлича гравитацион майдонларга эквивалент бўлган ҳар хил марказдан қочма тезланиш таъсирида бўлиб қолдилар. Бунда чизиқларнинг хатолар чегарасида назарий ҳисоблашларга мос келадиган силжишлари топилди.

Мёссбауэр кашфиётидан бери ўтган вақтнинг қисқалигига қарамай, бу ажойиб ҳодисанинг хилма-хил тадбиқи имкониятларини очган жуда кўп ишлар бажарилди. Қаттиқ жисм физикаси Мёссбауэр эффектидан амалий фойдаланишда айниқса катта имкониятлар очиб бераётир.

Ж боб

ТЎЛҚИНЛАР ВА ЗАРРАЧАЛАР

131-§. Кириш

Оптик ҳодисаларда (жумладан, рентген нурлари соҳасида) ўзига хос дуализм намоён бўлиши олдинги бобда кўрсатилган эди. Ёруғликнинг тўлқин табиатга эга эканлигини бевосита тасдиқловчи хоссалари (интерференция, дифракция) билан бир қаторда унинг корпускуляр табиатга эга эканлигини худди шундай бевосита ошкор қилувчи бошқа хоссалари (фотозэффект, Комптон эффекти) ҳам мавжуд. Биз айнан бир объектнинг ўзи бир вақтда ҳам заррача, ҳам тўлқин бўлишини ҳеч тасаввур қила олмаслигимизга қарамасдан оптик ҳодисалар тўпламини тушунтиришда иккала тасаввурдан фойдаланишга мажбурмиз.

Ушбу бобда бу жуда ажойиб дуализм одатда „заррачалар“ деб аталадиган объектлар — электронлар, протонлар, атомлар учун ҳам ўринли бўлишини кўрамиз. Модданинг бу элементар таркибий қисмлари ўзларини фазода муайян жойни эгалловчи заррачалар каби тутишларини жуда равшан кўрсатувчи ҳаммага маълум бўлган тажрибалар мавжуддир. Вильсон камерасида олинган фотосуратлардаги туманли изларни текширганимизда, улар — учиб ўтган заррачаларнинг излари эканлигига бизда ҳеч қандай шубҳа туғилмайди. Аммо бу бобда шундай тажрибалар мавжудлигини кўрамизки, уларда ўша „заррачалар“нинг ўзлари интерференция ҳосил қила оладиган тўлқинлар тарзида бўладилар.

Олдинги бобда биз ёруғликнинг корпускуляр табиати ошкор бўладиган ҳодисаларни алоҳида таъкидлаб ўтган эдик. Бу бобни ёруғлик табиатидаги *икки ёқламаликни* [ёруғлик майдони флуктуациясини текширганимизда бизни шу ажойиб ҳулосага олиб келган эди (116-§)] батафсил қараб чиқишдан бошлаймиз.

Аммо бизга келгусида тўлқин ҳаракат назариясидан бир қатор маълумотлар керак бўлиб қолиши мумкин. Шунинг учун биз даставвал ана шу зарур бўлган маълумотларни қисқача эслатиб ўтамиз.

132- §. Бир жинсли муҳитдаги ясси монохроматик тўлқин

Тўлқинлар ҳақида гапирганда, биз даставвал сув сиртидаги тўлқинларни ёки эластик шнурнинг учини даврий силкитганда шнур бўйлаб югурувчи кўндаланг тўлқинларни тасаввур қиламиз. Тўлқинларнинг табиати қандай бўлишидан қатъи назар, уларнинг тарқалиши бир хил қонунларга бўйсунди.

Даставвал тўлқинларнинг энг содда тури — ясси монохроматик ёки гармоник тўлқинларни текшираамиз ва тўлқинларнинг тарқалиш йуналишини координаталар системасининг x ўқи деб қабул қиламиз. Бундай тўлқинлар

$$u = a \cos [\omega(t - \frac{x}{c'}) + \delta], \quad (132. 1)$$

формула билан ифодаланади. Бундаги a , ω , c' ва δ лар доимийлар бўлиб, уларнинг маъноси қуйида аниқланади, u эса тўлқин тарзида тарқалувчи ғалаёнланиш катталиги, масалан, эластик тўлқинда заррачанинг мувозанат вазиятдан четланиши, электромагнит тўлқинда электр ёки магнит майдон кучланганлигининг бирор ташкил этувчиси ва ҳоказо. a доимийси тўлқин амплитудасидир, $\omega(t - \frac{x}{c'}) + \delta$ ни тўлқиннинг фазаси деб, фаза ифодасига кирган δ доимийни эса бошланғич фаза деб атаймиз. Барча нуқталарида фаза бир хил қийматга эга бўладиган сирт тенг фазали сиртдир. Равшанки, фаза x координатага чизиқли боғлиқ бўлган ҳолни текшираётганимизда бундай сирт $x = \text{const}$ текислик бўлади. Бу текисликка ўтказилган нормал x ўқ билан мос тушади.

Фаза ифодасига кирган c' доимий катталики қуйидаги маънога эгадир. Фазанинг бирор муайян қийматини танлаб олиб, x ҳамда t лар ўзгарганида бу қийматнинг қандай шароитда ўзгармай қолиш шартларини топайлик. Равшанки, фазанинг доимий бўлиши учун $t - \frac{x}{c'} = \text{const}$ бўлиши зарур ва етарлидир, бундан

$$x = c't + \text{const}.$$

Бундан кўринадики, c' катталики тенг фазали сиртнинг кўчи тезлигидир, ёки тўлқиннинг фазавий тезлигидир.

x ва t лар даврий функция аргументига кирганлиги туфайли, тўлқин вақтга ва фазога нисбатан даврийлик хоссасига эга бўлиши керак. Вақтга нисбатан даврийлик туфайли ушбу

$$\cos [\omega(t - \frac{x}{c'}) + \delta] = \cos [\omega(t + T - \frac{x}{c'}) + \delta]$$

шартни қаноатлантирувчи ўзгармас T вақт оралиги мавжуд бўлиши лозим. Бундай ҳол $\omega T = 2\pi$ ёки $\omega = \frac{2\pi}{T}$ бўлгандагина юз бериши мумкин. T ни тўлқин даври, ω ни бурчак ёки цик-

лик частота дейлади; $1/T = \nu$ — чизиқли частотадир, бинобарин, $\omega = 2\pi\nu$.

Берилган t вақтда фазога нисбатан даврийлик туфайли x бирор λ (тўлқин узунлиги) кесма қадар ўзгарганида u нинг бир хил қийматлари такрорланиши керак, яъни

$$\cos[\omega(t - \frac{x}{c'}) + \delta] = \cos[\omega(t - \frac{x+\lambda}{c'}) + \delta].$$

Бу эса, $\frac{\omega\lambda}{c'} = 2\pi$ ёки $\lambda = \frac{2\pi c'}{\omega} = \frac{c'}{\nu}$ демакдир ёки, ниҳоят

$$c' = \lambda\nu. \quad (132. 2)$$

Бу муносабат фазавий тезликни тўлқин узунлик билан боғлайди.

Энди ясси тўлқин координата ўқлари билан α , β , γ бурчаклар ташкил этиб исталган йўналишда тарқалсин. Координата ўқларини шундай бурамизки, x ўқи, аввалгидай, тенг фазали текисликнинг нормалига мос тушади. У ҳолда бу янги координаталар системасида ясси тўлқин формуласи қуйидагича бўлади:

$$u = a \cos[\omega(t - \frac{x'}{c'}) + \delta].$$

Лекин, ўқларни бурганда координаталарни алмаштириш формулаларига кўра

$$x' = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

бўлади ва биз

$$u = a \cos [\omega(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c'}) + \delta] \quad (132. 3)$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Бу ҳолда бирдай фазали текислик тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \text{const.}$$

Бурчак частотаси ω ўрнига чизиқли частота ν дан фойдаланиб, тўлқин формуласини қуйидаги курунишда ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} u &= a \cos [2\pi\nu(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c'}) + \delta] = \\ &= a \cos [2\pi(\nu t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda}) + \delta]. \end{aligned}$$

Энди йўналиши бирдай фазали текисликка утказилган мусбат нормал йўналишига мос тушувчи, ҳамда абсолют қиймати жиҳатидан

$$|\mathbf{k}| = \frac{1}{\lambda}. \quad (132. 4)$$

га тенг булган \mathbf{k} векторни киритамиз. Биз тўлқин вектори ёки тўлқиннинг тарқалиш вектори деб атайдиган бу векторнинг компонентлари қуйидагичадир:

$$k_x = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad k_y = \frac{\cos \beta}{\lambda}, \quad k_z = \frac{\cos \gamma}{\lambda}.$$

Бундай ҳолда

$$\frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} = xk_x + yk_y + zk_z = \mathbf{kr}, \quad (132. 5)$$

бунда \mathbf{r} — бирдай фазали текисликнинг ихтиёрий нуқтасига ўтказилган радиус-вектордир. (132. 5) формула ёрдамида ясси тўлқин формуласи қуйидаги ихчам кўринишга келтирилади:

$$u = a \cos [2\pi(\nu t - \mathbf{kr}) + \delta]. \quad (132. 6)$$

Ниҳоят, худди тебраниш формулалари сингари (47- §), ясси тўлқин формуласини ушбу кўринишда ёзиш мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз:

$$u = ae^{i[2\pi(\nu t - \mathbf{kr}) + \delta]} \quad (132. 7)$$

ёки $A = ae^{i\delta}$ комплекс амплитудани киритиб,

$$u = Ae^{i2\pi(\nu t - \mathbf{kr})} \quad (132. 8)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бунда (132. 7) ёки (132. 8) комплекс соннинг ҳақиқий қисми олинади.

133-§. Тўлқин тенгламаси

Олдинги параграфда кўриб ўтилган ясси тўлқин формуласи тўлқин тенгламаси деб аталувчи дифференциал тенгламанинг хусусий ечимидир. Масалан, бушлиқдаги электромагнит майдоннинг асосий тенгламаларидан — Максвелл тенгламаларидан — электр ёки магнит майдон кучланганлигининг исталган компоненти учун қуйидаги, иккинчи тартибли тенгламани олиш мумкин:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (133. 1)$$

бунда u — электр ёки магнит майдон кучланганлигининг исталган компоненти. (133. 1) тенглама, электродинамика бўйича қўлланмаларда исботланишича*, бушлиқда c тезлик билан тарқалувчи электромагнит тўлқинларни ифодалайди.

Ясси тўлқин формуласи

$$u = Ae^{i2\pi(\mathbf{kr} - \nu t)} = Ae^{i2\pi(xk_x + yk_y + zk_z - \nu t)} \quad (133. 2)$$

(133. 1) тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (133. 2) ифодани барча координаталар

* Электромагнит тўлқинлар учун тўлқин тенгламаси бевосита Максвелл тенгламаларидан келтириб чиқарилади; қуйидаги китобларга қаранг: И. Е. Тамм, Основы теории электричества. 100-§, Гостехиздат, 1949; Л. Д. Ландау ва Е. М. Лифшиц, Теория поля, 44-§, Гостехиздат, 1948; П. Друде, Оптика, 229-бет, ОНТИ, 1935.

ва вақт бўйича икки марта дифференциаллаб, қўйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -4\pi^2 k_x^2 u, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -4\pi^2 k_y^2 u, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -4\pi^2 k_z^2 u, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -4\pi^2 v^2 u.\end{aligned}$$

Бу ҳосилаларни (133. 1) тенгламага қўйиб, қисқартишлардан сунг

$$\frac{v^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (133. 3)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. v частотани тўлқин вектор компонентлари билан боғловчи бу муҳим муносабат тўлқин табиати учун характерлидир; уни баъзан дисперсия қонуни дейилади.

(133. 1) тенгламанинг чап томонида координаталар бўйича иккинчи хусусий ҳосилалар йиғиндисини ёзиш ўрнига, уни қўйидагича белгилашимиз мумкин:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

бунда Δ — Лаплас оператори деб аталади. Тўлқин тенгламани

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad (133. 4)$$

кўринишда ёзганда биз фақат ёзувни ихчамлабгина қолмасдан, балки муҳим умумлаштиришга эга бўламиз, чунки Лаплас оператори ҳар қандай координаталар системасида ифодаланиши мумкин. Хусусий ҳолда тўғри бурчакли декарт координаталарида у қўйидаги кўринишга эгадир:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (133. 5)$$

Бошқа координаталар системаларида Δ оператор бошқача ифодаланади. Бу ифодалардан биз учун энг муҳими Δ операторнинг сферик қутб координаталар системасидаги ифодасидир. У мана бундай:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (133. 6)$$

Декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтишни, албатта, дифференциал ҳисоб қоидалари бўйича ўзгарувчиларни оддий алмаштириш йўли билан бажариш мумкин. Аммо, r , ϑ ва φ фазвий координаталарга ўтиш ҳолида ҳисоблашлар шу қадар узоқ ва толиқтирарлидирки, шу туфайли бу йўлдан бориш тавсия қилинмайди. Вектор анализ бўйича қўлланмаларда одатда ҳар қандай эгри чизиқли ортогонал координаталарга ўтишнинг жуда содда ва ижчам усули баён қилинади. (133. 6) формулани ҳосил қилишда ана шу усулдан фойдала-

нилади. Бу ерда шу усулни баён қилишнинг ўрни бўлмаганидан*, (133. 6) тайёр формулани келтириш билан чекланамиз.

Тўлқин тенглама хусусий ҳосилаларда бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламадан иборат бўлади. Ҳар қандай бир жинсли чизиқли тенглама сингари тўлқин тенглама қўйидаги муҳим хоссага эгадир. Биз u , (133. 1) нинг хусусий ечимини топдик деб фараз қилайлик; у ҳолда $c_1 u_1$ ҳам (133. 1) нинг ечими бўлади, бунда c_1 — ихтиёрий доимий. Агар бизга u_1 ва u_2 ларнинг хусусий ечимлари маълум бўлса, у ҳолда

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

ҳам тўлқин тенглама (133. 1) нинг ечими бўлади, бунда c_1 ва c_2 ихтиёрий доимийлар. Бу тўлқин ҳаракатларнинг қўшилиши ёки суперпозицияси машҳур принципнинг математик асосла-нишидан иборат. Шу принцип ясси тўлқинларни қўшиш ор-қали ҳар қандай тўлқин майдонлар яшаш имконини беради. Келгуси параграфларда шу принципдан фойдаланамиз.

134- §. Ясси тўлқинлар суперпозицияси

Олдинги параграфда қараб чиқилган ясси монохроматик тўлқинлар табиатда бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, шартга кўра, бу тўлқинлар қатъий даврий процессдан иборатдир, бунинг учун эса улар фазода чексиз узун ва чексиз узоқ вақт давом этадиган бўлиши керак. Реал ёруғлик „сигналлари“ эса чекли фазони эгаллайди, чекли вақт оралиғида тарқалади, шунинг учун ҳам улар қатъий гармоник тўлқинлар эмас (72- § га қаранг). Шунинг учун реал тўлқинларни, интерференция туфайли фазонинг бирор қисмида бир-бирини кучайтирувчи, фазонинг қолган қисмида эса бир-бирини сўндирувчи аниқ гармоник, ясси тўлқинлар суперпозицияси натижаси сифатида қарай оламиз. Бундай мураккаб тўлқинлар баъзи бир муҳим хусусиятларга эга бўлиб, бу хусусиятларни даставвал фақат икки ясси гармоник тўлқин суперпозицияси мисолида тушунтирамиз.

Фараз қилайлик, бу иккала тўлқин x ўқ бўйлаб тарқал-син ҳамда уларнинг частоталари ν_0 ва ν бўлсин, шунингдек тўлқин вектори k_0 ва k нинг абсолют қийматлари ($k_0 = \frac{1}{\lambda_0}$, $k = \frac{1}{\lambda}$) бир-биридан жуда кам фарқ қилсин: $k_0 - k = \Delta k \rightarrow 0$, $\nu_0 - \nu = \Delta \nu \rightarrow 0$. Шундай қилиб, қўйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} u_1 &= a \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x), \\ u_2 &= a \cos 2\pi (\nu t - k x). \end{aligned}$$

*Масалан, Н. Е. Кочиннинг „Векторное исчисление и начала тензорного исчисления“ деган китобига қаранг, 202-бет, ГОНТИ, 1938.

u_1 ва u_2 ларни қўшиб, u мураккаб тўлқин ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = a \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x) + a \cos 2\pi (\nu t - kx) = \\ &= 2a \cos 2\pi \left(\frac{\nu_0 + \nu}{2} t - \frac{k_0 + k}{2} x \right) \end{aligned}$$

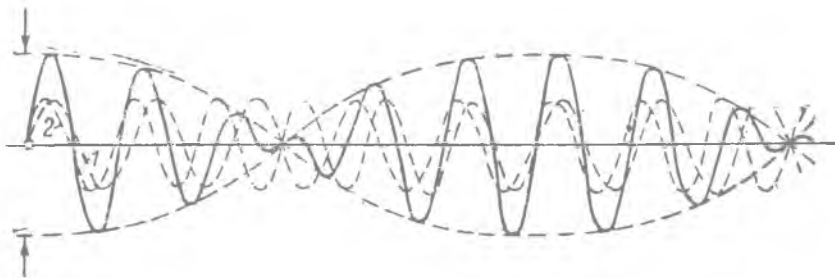
ёки, ν_0 ва ν нинг ҳамда k_0 ва k нинг бир-бирига яқинлиги туфайли, тақрибан:

$$u = 2a \cos 2\pi \left(\frac{\Delta\nu}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x). \quad (134.1)$$

Олинган натижани қўйидагича талқин қилиш мумкин. (134.1) формуланинг $\cos 2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ иккинчи кўпайтувчиси частотаси ν_0 ва тўлқин сони k_0 бўлган тўлқиннинг фазаси бўлиб, биринчиси

$$2a \cos 2\pi \left(\frac{\Delta\nu}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right)$$

— секин ($\Delta\nu \rightarrow 0$, $\Delta k \rightarrow 0$) ва шунинг билан бирга даврий ўзгарувчи амплитудадир. Бошқача қилиб айтганда, u (134.1) тўлқинни частотаси ν_0 ва тўлқин сони k_0 бўлган, лекин *модуляцияланган амплитудали* тўлқин деб қараймиз. Аммо, шуни эсда тутиш керакки, (134.1) формула билан ифодаланган тўлқин жиддий айтганда, энди гармоник тўлқин бўлмайди: гармоник тўлқин — ∞ дан $+\infty$ гача бўлган бутун оралиқда бир хил амплитудага ва биргина муайян частотага эга бўлиши керак. Ваҳолонки, (134.1) тўлқин даврий ўзгарувчи амплитудага эгадир ва тегишли спектрал асбоб унда бир частотани эмас, балки ν_0 ва ν частотани қайд қилади.



202-расм. Тўлқин группалар ҳосил бўлиши.

Бу натижа 202-расмда тасвирланган бўлиб, унда вақтнинг бирор пайти учун бир-бирдан кам фарқ қиладиган λ_0 ва λ тўлқин узунлиги гармоник тўлқинларнинг икки қисми ва уларнинг суперпозициясидан вужудга келган тўлқин тасвирланган. Бу мураккаб тўлқин косинусоидал қонун бўйича ўзгарувчи амплитудали қатор группаларга ажралиши кўриниб турибди.

Муайян фазанинг кўчиш тезлигини *тўлқинларнинг фазавий тезлиги* деймиз. Уни топиш учун тўлқин фазасининг доимийлиги шартини ёзамиз:

$$v_0 t - k_0 x = \text{const.} \quad (134. 2)$$

Бу ифодадан x координатанинг вақт бўйича ҳосиласини, яъни x катталикини аниқлаб, тенг фазали текисликларнинг кўчиш тезлигини, яъни фазавий тезликни топамиз. (134. 2) дан қуйидагини топамиз:

$$v_0 - k_0 \frac{dx}{dt} = 0,$$

бундан, фазавий тезликни c' орқали белгилаб қуйидагини аниқлаймиз:

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{k_0}, \text{ ёки } c' = v_0 \lambda_0. \quad (134. 3)$$

Бу эса элементар физика курсидан маълум бўлган ва, кўриб турганимиздек, *фазавий тезлик* учун ўринли муносабатдир.

Энди муайян амплитудали тўлқиннинг кўчиш тезлигини алоҳида топамиз. Равшанки, бу тезлик бутун группанинг кўчиш тезлигига мос келади; шунинг учун уни *группавий тезлик* дейилади. Уни топиш учун, олдиндаги сингари, амплитуданинг доимийлиги шартини ёзамиз:

$$\frac{\Delta v}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = \text{const.} \quad (134. 2')$$

Бундан x ни топиб, унинг вақт бўйича ҳосиласини аниқлаймиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta k}.$$

Бу ифоданинг $\Delta k \rightarrow 0$ даги лимитини группавий тезлик деб атаймиз:

$$g = \frac{dv}{dk}. \quad (134. 4)$$

Шундай қилиб, фазавий тезлик ҳам, группавий тезлик ҳам турлича формулалар билан ифодаланишини кўрдик. Бу тезликлар орасидаги муносабатни аниқлаш учун тўлқинларнинг турли муҳитда тарқалиш шартини текшириб чиқиш зарур. Бунинг учун даставвал олинган натижаларни кўп тўлқинларнинг қўшилиш ҳоли учун умумлаштиришимиз керак. Бу иш қуйидаги параграфда бажарилади.

135-§. Тўлқин пакет

Энди, ясси тўлқинларнинг суперпозицияси орқали амплитудаси фазонинг кичик қисмидагина нолга тенг бўлмайдиган, қолган фазода эса нолга тенг бўладиган тўлқин процессни юзага келтириш мумкинлигини кўрсатамиз. Соддалик учун,

аввалгидек, чизиқли процессларни ёки, аниқроғи, фақат битта фазовий координата x га ва вақтга боғлиқ бўладиган ясси тўлқинларни қараб чиқамиз.

Фазода чекли соҳани эгалловчи тўлқин процессни юзага келтириш учун иккита ясси тўлқинни қўшиш энди етарли эмас. Аммо, бирор $2\Delta k$ интервалда узлуксиз ўзгарадиган k тўлқинларни қўшиш йўли билан юқорида айтилган процессни юзага келтириш мумкин экан. Бундаги $2\Delta k$ интервалнинг ўлчамларини кейинроқ аниқлаймиз. $2\Delta k$ интервалда бирер k_0 ўрта нуқтани танлаймиз ва муайян шароитларда, k нинг узлуксиз ўзгариши туфайли йиғинди билан эмас, балки

$$u = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) \cos 2\pi [\nu(k)t - kx] dk \quad (135.1)$$

интеграл билан ифодаланиши лозим бўлган суперпозиция натижасида чекли ясси тўлқин процесс ҳосил қилиш мумкин. Буни тўлқин пакет деб ҳам аталади.

Қўшилаётган гармоник тўлқинларнинг амплитудаси $a(k)$ ни эса бутун $\pm \Delta k$ интервалда ўзгармас ва $a(k_0)$ га тенг бўлади деб ҳисоблашга шартлашиб оламиз. ν частотанинг k га боғланиши, умуман айтганда, бизни қизиқтирадиган турдаги тўлқинларнинг дисперсия қонунида берилади (133-§ га қаранг). Бу қонун қандай бўлишидан қатъи назар, Δk нинг кичик интервали учун $\nu(k)$ ни даражали қатор кўринишида кўрсатиш мумкин:

$$\nu(k) = \nu(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\nu}{dk} \right)_{k=k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left(\frac{d^2\nu}{dk^2} \right)_{k=k_0} + \dots \quad (135.2)$$

$k - k_0$ интервал шунчалик кичикки, (135.2) да учинчи ҳаддан бошлаб қолган ҳамма ҳадларни ташлаб юбориш, яъни $\nu(k)$ учун

$$\nu(k) = \nu(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\nu}{dk} \right)_{k=k_0}$$

чизиқли ифодани олиш мумкин деб фараз қилиб, (135.1) интегрални тақрибан ҳисоблаймиз.

Юқоридаги $\nu(k)$ ифодани (135.1) га қўйиб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$u = a(k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \cos 2\pi \left[\nu(k_0)t + (k - k_0) \left(\frac{d\nu}{dk} \right)_0 t - kx \right] dk.$$

Бу интегрални ҳисоблаш осон. Интеграллаш чегараларини қўйгач, ҳамда сурат ва махражни Δk га кўпайтиргач, қўйидагини топамиз:

$$u = 2a(k_0) \Delta k \frac{\sin 2\pi \Delta k \left[\left(\frac{d\nu}{dk} \right)_0 t - x \right]}{2\pi \Delta k \left[\left(\frac{d\nu}{dk} \right)_0 t - x \right]} \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x). \quad (135.3)$$

Олдинги параграфда (134.1) формулани қандай талқин қилган бўлсак, бу натижани ҳам худди шунга ўхшаш талқин қилиш мумкин: (135.3) даги $\cos 2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ кўпайтувчи мураккаб процесс фазаси билан боғланган, унинг олдидаги кўпайтувчи эса ўзгарувчан (модуляцияланган) амплитудадан иборат.

$$2\pi \Delta k \left[\left(\frac{d\nu}{d\nu} \right)_0 t - x \right] = \xi$$

деб белгилаб олиб, амплитуданинг ўзгариш характери $\frac{\sin \xi}{\xi}$ кўпайтувчи белгилашини кўрамиз. Бу модуляцияловчи кўпайтувчини 70-§ да учратган эдик; аргумент ўзгариши билан у қуйидагича ўзгаради:

$$\begin{aligned} \xi \rightarrow 0 \quad \text{бўлганда} \quad \lim \frac{\sin \xi}{\xi} &= 1, \\ \xi = \pm \pi \quad \text{бўлганда} \quad \frac{\sin \xi}{\xi} &= 0. \end{aligned}$$

ξ нинг абсолют қиймати янада орта борганда $\frac{\sin \xi}{\xi}$ функция қатор максимумлар ва минимумлардан ўтади. Аммо уларнинг катталиги $\xi=0$ даги бош максимумга нисбатан кичик бўлади ва аргумент ортиши билан тез камая боради. Шундай қилиб, суперпозиция натижасида амалда амплитудаси фақат чекли соҳадагина нолдан фарқ қиладиган ва бу соҳада $\frac{\sin \xi}{\xi}$ каби ўзга-



203- расм. Тўлқин пакет.

радиган битта группа ҳосил бўлади. 203-расмда шундай группанинг „оний фотография“си, яъни унинг вақтнинг муайян пайтидаги шакли тасвирланган.

(135.3) формуланинг кўрсатишича, тўлқин пакет ҳолида ҳам, худди олдинги параграфда қараб чиқилган иккита ясси тўлқиннинг қўшилиши ҳолидагидек, икки тезлик — фазавий ва группавий тезлик ҳақида гапириш мумкин. Айтиб ўтилганидек, фаза $\cos 2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ кўпайтувчига киради; $2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ фазани ўзгармас сонга тенглаштириб ва дифференциаллаб, фазавий тезликни топамиз, у, олдинги параграфдаги каби

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{\nu_0}{k_0}$$

га тенгдир.

Амплитудани модулловчи $\frac{\sin \xi}{\xi}$ кўпайтувчи $\xi \rightarrow 0$ бўлганда 1 га тенг бўлган ўзгармас қийматга эга бўлади. $\xi=0$ бўлганда:

$$x - \left(\frac{dv}{dk}\right)_0 t = 0,$$

Бу эса тенг амплитудалар сирти

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dv}{dk}\right)_0 = g \quad (135.4)$$

тезлик билан ҳаракатланувчи текислик бўлишлигини кўрсатади.

Тенг амплитудалар текислигининг кўчиш тезлиги ифодаси олдинги параграфда группавий тезлик учун топилган (134.3) формула билан мос келади. Шу билан бирга бу яхлит пакетнинг кўчиш тезлигидир.

Энди ҳозиргача олинган барча натижалар $v(k)$ ёйилмасида биринчи тартибдан юқори бўлган ҳадларни ташлаш орқали (135.3) формулада ўтказилган яқинлашиш билан боғлиқ бўлиб, бу яқинлашишнинг натижага қандай таъсир кўрсатишини ҳам текшириб кўриш кераклигини эслатиб ўтиш лозимдир. Агар иккинчи ҳосила $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$ нолга тенг бўлса (муҳитнинг дисперсияси бўлмаганда шундай бўлади), у ҳолда натижалар сақланади.

Агар $\frac{d^2v}{dk^2} \neq 0$ бўлса, у ҳолда пакетнинг қўйидаги ўзига хос хусусияти намён бўлади: пакет ўз шаклини сақламайди ва вақт ўтиши билан аста-секин ёйила бошлаб, деформацияланади. Агар дисперсия кичик, яъни $\frac{d^2v}{dk^2}$ нолга яқин бўлса, у ҳолда пакетнинг муайян шакли тўғрисида ва унинг яхлит ҳолда g группавий тезлик билан кучиши тўғрисида гапириш мумкин.

Шундай қилиб, тўлқин процессининг тўла тавсифини ҳосил қилдик. Энди унинг қўйидаги хусусиятини таъкидлаймиз: пакетнинг (135.3) формуласига аниқ v_0 ва k_0 ларни узичига олган фазавий кўпайтувчи кирса-да, ҳақиқатда *биз текшираётган процесс мураккаб бўлиб, уни бирор аниқ тўлқин узунлик билан боғлаб бўлмайди*. Аксинча, пакет ҳосил бўлиши учун k лари узлуксиз ўзгарадиган кўп гармоник тўлқинларнинг суперпозицияси зарур бўлганлиги туфайли, пакетнинг спектрал анализи уни туташ спектрнинг бутун бир қисмига ёяди. Бунинг устига, берилган Δx ўлчовли тўлқин пакет ҳосил қилиш учун туташ спектрнинг Δk интервали бирор маълум катталикдан кичик бўлмаслиги керак экан.

Энди келгусида жуда муҳим бўлган Δk ва Δx орасидаги муносабатни топамиз. Бунинг учун бирор муайян вақт моментидаги ($t=0$ да) пакетни текшираимиз. Бу ҳолда пакетнинг шакли қўйидаги кўпайтувчи

$$\frac{\sin 2\pi \Delta k \cdot x}{2\pi \Delta k \cdot x} = \frac{\sin \xi_0}{\xi_0}$$

билан белгиланади, бунда $\xi_0 = 2\pi \Delta k \cdot x$. Бу кўпайтувчи $\xi = \pm \pi$ бўлганда нолга айланади. Агар координаталар бошини ўқнинг бош максимумга мос келган нуқтасида (яъни $\xi_0 = 0$ га мос келган нуқтада) танласак, у ҳолда бу максимумдан чапдаги ва ўнгдаги биринчи минимумларнинг координаталари $\pm \frac{\Delta x}{2}$ бўлади. Кейинги максимумларнинг катталиқ жиҳатдан тез камай боришини эътиборга олиб (74-§ га қаранг, унда $\frac{\sin \xi}{\xi}$ функциянинг ўзгариши батафсил кўрилган), иккита симметрик биринчи минимумлар орасидаги Δx кесмани пакетнинг улчови деб қабул қилишимиз мумкин. Бу минимумлар учун

$$2\pi \Delta k \frac{\Delta x}{2} = \pi$$

шарт ўринли бўлиб, бундан $\Delta k \cdot \Delta x = 1$ келиб чиқади.

Агар пакет улчовини аниқроқ топишни хоҳласак ва координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган кейинги минимумлар орасидаги масофани пакетнинг улчови деб қабул қилсак, у ҳолда $\Delta k \cdot \Delta x = 2$ муносабатни ҳосил қилган бўлардик ва умуман:

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 1. \quad (135.5)$$

Шу пайтгача биз бир улчовли группалар ёки „чизиқли группалар“ ҳосил қилишни текширдик. Бундай группалар ҳосил қилиш учун k векторлари бир хил йўналган монохроматик тўлқинларни қўшган эдик. Юқоридаги барча мулоҳазалар координаталарнинг учта ўқининг ҳар қайсиси учун ҳам туғри бўлганлиги учун, координаталар ўқлари бўйича Δx , Δy ва Δz ўлчовларга эга бўлган фазовий пакет ҳосил бўлиши учун қуйидаги уч шарт бажарилиши керак:

$$\Delta x \cdot \Delta k_x \geq 1, \quad \Delta y \cdot \Delta k_y \geq 1, \quad \Delta z \cdot \Delta k_z \geq 1. \quad (135.6)$$

Пакетнинг муайян вақт momentiдаги ($t=0$) фазовий улчови билан шу пакетнинг ҳосил бўлиши учун зарур бўлган гармоник тўлқинларнинг туташ спектри орасида 74-§ да вақт функцияси $f(t)$ учун ва амплитудаларнинг частоталар бўйича тақсимоти учун топилган муносабат ўринлидир. Чексиз узун синусоидал тўлқин $e^{i2\pi k x}$ га муайян k (муайян λ тўлқин узунлиқ) мос келади. Аммо тўлқин фазода чекли бўлса, у ҳолда муайян k бўлмайди ва $\Delta x \Delta k \sim 1$ муносабатни қаноатлантирадиган Δk кенгликдаги тўлқин узунлиқлар спектри албатта пайдо бўлади.

136-§. Фазавий ва группавий тезликлар

Энди фазавий ва группавий тезликни текшираимиз ва уларни қуйидаги икки ҳолда ўзаро таққослаб кўраимиз:

1. Пакетни ташкил қилувчи гармоник тўлқинларнинг фазавий тезлиги k га боғлиқ бўлмаган ҳол. Бундай ҳоссага эга бўлган муҳитларни дисперсиясиз муҳитлар деб атайдилар.

2. Муҳит дисперсияли бўлган, яъни фазавий тезлик k нинг функцияси бўлган ҳол.

(1) ҳолга мурожаат қилайлик. Фазавий тезликнинг $c' = \frac{v}{k}$ формуласидан $v = c'k$ ни топамиз. Энди группавий тезликни ҳисоблаймиз:

$$g = \frac{dv}{d\lambda} = \frac{d}{dk} (c'k) = c'.$$

Демак, дисперсия бўлмаганда группавий тезлик ва фазавий тезлик бир хил бўлади.

(2) ҳолда c' фазавий тезлик k нинг функциясидир, шунинг учун

$$g = \frac{d}{dk} (c'k) = c' + k \frac{dc'}{dk}. \quad (136.1)$$

Ўнгдаги иккинчи ҳадни қуйидагича алмаштирамиз:

$$\frac{dc'}{dk} = \frac{dc'}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda} = \frac{dc'}{d\lambda} : \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\lambda^2 \frac{dc'}{d\lambda}.$$

Топилган натижани (136.1) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$g = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda}. \quad (136.2)$$

Дисперсия мавжудлигида группавий тезлик фазавий тезлик билан бир хил бўлмайди, балки $\frac{dc'}{d\lambda}$ ҳосиланинг ишорасига қараб, группавий тезлик фазавий тезликдан кичик бўлиши ҳам ($\frac{dc'}{d\lambda} > 0$), катта бўлиши ҳам ($\frac{dc'}{d\lambda} < 0$) мумкинлигини кўрамиз. Оптикада шу иккала ҳол ҳам юз беради: 1) нормал дисперсия вақтида λ ортган сари синдириш кўрсаткичи μ камайдди (яъни c/c' нисбат, бунда c — ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги), яъни c' ортади ва $\frac{dc'}{d\lambda} > 0$ бўлади; 2) ютилиш полосалари ичида кузатиладиган аномал дисперсия вақтида μ нинг λ га боғланиши аксинчадир ва, бинобарин, $\frac{dc'}{d\lambda} < 0$. Шундай қилиб, вакуумдаги ёруғлик тўлқинлари ҳолида иккала тезлик бир хилдир; муҳитда эса нормал дисперсия ҳолида $g < c'$, аномал дисперсия ҳолида $g > c'$.

Ёруғлик тезлигини аниқлашда тажрибада бу икки тезликдан қайси бири ўлчанади, деган савол келиб чиқади. Ёруғлик тезлигини ўлчашнинг турли усуллари таҳлил қилишнинг кўрсатишича, уларнинг ҳеч бири фазавий тезликни аниқлаш имконини бермайди, балки уларнинг барчаси группавий тезликни беради. Бу ҳол, ёруғлик тезлигини ўлчашнинг турли усулларида ё маълум сигналнинг тезлиги (Ремер методи — Юпитер йўлдошларининг тутилиши), ёки айланаётган тишли

гилдирак ўтказиб юборган чекли тўлқинлар қаторининг тезлиги (Физо методи) ўлчанишидан кўриниб турибди. Аммо ҳар қандай чекли тўлқинлар қатори Фурье интегралли ёрдамида анализ қилиниши ва ясси монохроматик тўлқинлар суперпозицияси натижаси сифатида тасвирланиши мумкин. Бу эса, ҳар қандай чекли тўлқинлар қатори тўлқин пакетдан иборат бўлади ва биз, пакетнинг тезлигини, яъни группавий тезликни ўлчаймиз, демакдир. Ёруғлик аберрацияси усули ҳолида бу хулоса унчалик ойдин эмас; бироқ П. С. Эренфест бажарган анализ бу ҳолда ҳам фазавий тезлик эмас, балки группавий тезлик аниқланишлигини кўрсатди*.

Айтилганлардан, фазавий тезлик бевосита ўлчаб бўлмайдиган катталик эканлиги келиб чиқади. Аммо фазода чекланган тўлқинлар (яъни тўлқин пакетлар) нинг дисперсияловчи муҳитда тарқалаётганида фазавий тезлик тушунчаси ўзининг бевосита маъносини йўқотади, чунки бу ҳолда биз, битта фаза билан эмас, балки ҳар бири ўз тезлигида тарқалувчи чексиз кўп гармоник тўлқинлар фазалари билан иш кўрамыз.

Муфассалроқ анализ кўрсатадики, тенг фазали текисликнинг кўчиш тезлигининг ўзгариши ўтиб кетаётган тўлқин таъсирида резанаторларнинг мажбурий тебраниши туфайли юз берадиган фаза силжишига боғлиқ бўлиб, резанаторларга тўлатилган муҳитда тўлқиннинг тарқалиш вақтида кузатилади. Бундан фазавий тезлик, ўз номига мувофиқ равишда, маълум фазанинг кўчиш тезлигини ифодалайди ва батафсилроқ анализнинг кўрсатишича, масалан, фазода чекланган тўлқинлар қатори фронтининг ҳаракат тезлиги билан ёки энергиянинг ҳаракат тезлиги билан мутлақо боғланмаган, деган хулоса чиқади. Айнан шунинг учун ҳам ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан каттароқ бўлган фазавий тезликнинг вужудга келиши нисбийлик назариясининг, ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги чегаравий тезликдир, деб айтилган фикрига ҳеч зид эмас.

Хусусан, оптикада тўлқин fronti тезлигининг ҳар қандай шароитда c га, яъни ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигига тенг бўлишлиги исботланади**.

* Бу ҳақда П. Эренфест ва Л. Исаковнинг „О так называемой групповой скорости света“ (И. И. Боргман таҳрири остида „Новые идеи в физике“ тўплами, 5-сон, „Образование“ нашриёти, СПб, 1913) мақоласини қаранг; ушбу китобни ҳам қаранг: Г. С. Ландсберг, Оптика, 113-§, Гостехиздат, 1947.

** Дисперсияловчи муҳитда тўлқин группаларнинг тарқалиши тўғрисидаги масала тўлқин оптикasinинг энг қийин ва нозик масалаларидан биридир. Бу ҳақда қуйидаги китобга қаранг: Г. С. Ландсберг, Оптика, 113-§, Гостехиздат, 1947; масаланинг батафсил математик текширилишини ушбу китобдан қаранг: К. Шефер, Теоретическая физика, III т., 2-қисм, 371-бет, ГОНТИ, 1938. Тўлқин пакетлар ҳақида қуйидагига қаранг: Я. И. Френкель, Электродинамика, II т., 241 ва кейинги бетлар, ОНТИ, 1935.

c ва c' фазавий тезликлар учун юқорида келтириб чиқарилган

$$c = v\lambda, \quad c' = v\lambda'$$

муносабатни эътиборга олиб, Снеллиус қонунини

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} = \frac{c}{c'} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad (137.1')$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Муҳитнинг вакуумга нисбатан синдириш кўрсаткичи бирдан катта бўлганлиги туфайли, бўшлиқдан муҳитга ўтишда ёруғликнинг фазавий тезлиги камаяди; муҳитда тўлқиннинг узунлиги ҳам вакуумдаги тўлқин узунлигига нисбатан ўша меъёردа камаяди.

Синишни корпускуляр нуқтаи назардан тушунириш учун, ёруғлик заррачалари икки муҳит чегараси сиртидан ўтишда ўз ҳаракат миқдорини ўзгартиради, деб фараз қилиш кифоядир. Айтайлик, „ёруғлик заррачасининг“ ҳаракат миқдори юқори муҳитда p , пастки муҳитда p' ва шу билан бирга $p' > p$ бўлсин (205-расм). Симметрия туфайли, ҳаракат миқдорининг тангенсиал ташкил этувчиси чегара сирти орқали ўтишда ўзгармайди:

$$p_t = p'_t, \quad (137.2)$$

балки нормал ташкил этувчисигина ўзгаради ($p'_n > p_n$). Чизмадан:

$$\sin \vartheta = \frac{p_t}{p}, \quad \sin \vartheta' = \frac{p'_t}{p'}$$

бу эса, (137.2) ни эътиборга олганимизда

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} = \frac{p'}{p} = \text{const} \quad (137.3)$$

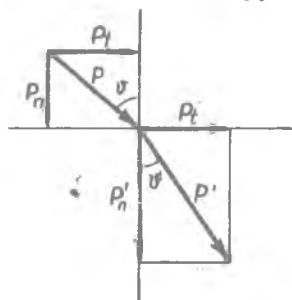
нисбатни, яъни яна Снеллиус қонунини беради.

Энди Снеллиус қонунининг корпускуляр ифодасидан ёруғликнинг бўшлиқдаги ва муҳитдаги тезлиги хусусида қандай натижалар келиб чиқишини кўрайлик. Агар „ёруғлик заррачаларини“ Ньютон корпускулалари сифатида қаралса, у ҳолда p импульс заррачанинг v тезлиги орқали маълум

$$p = mv$$

формула билан ифодаланади. Бу ҳолда (137.3) дан қуйидаги нисбат келиб чиқади:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} = \frac{v'}{v}, \quad (137.4)$$



205-расм. Синиш. Корпускуляр манзара.

яъни синдириш кўрсаткичи муҳитдаги тезликнинг вакуумдаги тезликка нисбатига тенг.

(137.1') билан таққослашнинг кўрсатишича, корпускуляр талқин қилганда (интерпретацияда) тезликлар нисбати тўлқин нуқтаи назаридан талқин қилгандагига тескарисидир, яъни синдириш кўрсаткичи 1 дан катта бўлган ҳолда, ёруғлик заррачасининг *муҳитдаги тезлиги вакуумдагидан каттадир*.

Аммо синиш қонунини тўлқин ва корпускуляр нуқтаи назардан талқин қилганда биз ҳақиқатан турли тезликлар билан иш кўрганимизни эсда тутмоқ зарур. Тўлқин нуқтаи назардан талқин қилинганда c ва c' тезликлар фазавий тезликлардир, у вақтда, v ва v' лар заррачалар тезликлари бўлиб, улар фазавий тезликлар билан ҳеч айнан эмас. Буни аниқ кўриш учун „ёруғлик заррачасини“ Ньютон заррачаси эмас, балки фотон деб қаралса, у ҳолда (137.3) муносабатни айнан (137.1') кўришига келтириш мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз. Дарҳақиқат, 125-§ да кўрганимиздек, фотоннинг импульси:

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

ва, бинобарин ($\nu\lambda = c$),

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad p' = \frac{h}{\lambda'}$$

Буни (137.3) га қўйиб, қўйидагини топамиз:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

яъни худди (137.1') даги сингари, синдириш кўрсаткичи вакуумдаги тўлқин узунлигининг муҳитдаги тўлқин узунликка нисбатига ёки, бошқача айтганда, фазавий тезликларнинг тўғри нисбатига тенгдир. Равшанки, бундай натижанинг келиб чиқиши фотон импульси $p = \frac{h\nu}{c}$ ифодасида фазавий тезликнинг суратда эмас, балки махражда турганлигидандир.

XIX асрнинг иккинчи ярмида, ҳали фазавий ва группавий тезликлар фарқи аниқ тушунилмаган вақтда, ёруғлик тўлқин табиатга эгами ёки корпускуляр табиатга эгами деган саволга узил-кесил жавоб бера оладиган ҳал қилувчи тажрибани амалга ошириш учун уриниб кўрилган эди. Биз ҳозир бу тажрибанинг ва шу типдаги кейинги тажрибаларнинг қўйилган саволга ҳақиқатда ҳеч қандай жавоб беролмаганлигини ва бера олмаслигини тушунсак-да, бу тажрибалар билан танишишимиз ва нима учун улар „ҳал қилувчи“ тажрибалар эмаслигини билиб олишимиз жуда фойдалидир.

Фуко (1850) тақлиф этган ва амалга оширган тажриба Снеллиус қонуни ифодаси учун чиқарилган (137.1) ва (137.4) формулаларни таққослашга асосланган эди. Бир томондан, c ва c' , иккинчи томондан, v ва v' тезликлар орасидаги прин-

ципиал фарқни эътиборга олмай туриб, Фуко ёруғлик табиати тўғрисидаги масалани ҳал қилиш учун ёруғлик тезлиги ҳақида синдириш кўрсаткичи асосида мулоҳаза юритиб ўтирмасдан, бирор муҳитда ёруғлик тезлигини бевосита ўлчаш керак деб ҳисоблаган эди. Агар бу тезлик бўшлиқдаги ёруғлик тезлигидан кичик бўлса, у ҳолда тўлқин назария тўғри, акс ҳолда эса, корпускуляр назария (Ньютон механикаси назарияси маъносида) тўғри бўлади.

Тажрибада ёруғликнинг сувдаги тезлиги аниқланди. У ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан *кичик* бўлиб чиқди, бундан Фуко ёруғликнинг тўлқин табиатли эканлиги узил-кесил исботланади, деб оддиданоқ хулоса чиқарди. Кейинчалик Майкельсон каттароқ аниқлик билан худди шундай тажриба ўтказиб, ёруғликнинг сувдаги ва углерод сульфиддаги тезликларини ёруғликнинг ҳаводаги тезлиги (у амалда ёруғликнинг вакуумдаги тезлигига тенгдир) билан таққослади. Шунингдек, бу тажриба ҳам ҳаводаги ва сувдаги тезликлар нисбати 1,330 га тенг бўлиб, у Майкельсон фойдаланган сариқ ёруғлик учун сувнинг синдириш кўрсаткичига амалда тенг бўлишлигини кўрсатди. (Спектрнинг бу қисми учун сувнинг синдириш кўрсаткичи ҳақиқатда 1,333 га тенг, лекин 0,003 айирма тажриба хатоликлари соҳасидадир.) Катта синдириш кўрсаткичли ва катта дисперсияли углерод сульфид билан бажарилган тажрибанинг натижаси бирмунча бошқача бўлди. Тезликлар нисбати $1,76 \pm 0,02$ га тенг бўлиб чиқди, ваҳолонки CS_2 нинг синдириш кўрсаткичи 1,63 га тенгдир. Шундай қилиб, тажриба худди тўлқин назария талаб қилганидек, ёруғликнинг углерод сульфиддаги тезлиги ҳаводагидан кичик, аммо тезликлар нисбати синдириш кўрсаткичига тенг эмаслигини кўрсатди. Бу туюлма зиддиятнинг ечими шундаки, Майкельсон тажрибасида ҳар қандай ўлчашлардаги каби ёруғлик сигнали тезлигини ўлчганда (136-§ га қаранг), нисбати синдириш кўрсаткичига тенг бўладиган фазавий тезликлар эмас, балки группавий тезликлар ўлчанади. Дисперсия ҳавода ва сувда жуда кичик бўлганидан иккала тезлик бир хилдир. Углерод сульфидда дисперсия анча катта бўлганидан фазавий ва группавий тезликлар орасидаги фарқ сезиларлидир.

$$g = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda} \quad (136.2)$$

формуладан фойдаланиб, бўшлиқдаги ёруғлик тезлиги c нинг муҳитдаги ёруғликнинг группавий тезлигига нисбати синдириш кўрсаткичи μ билан

$$\frac{c}{g} = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} \quad (137.5)$$

муносабат орқали боғланганлигини кўрсатиш мумкин*. Углерод сульфид учун c/g нисбат 1,76 га тенг экан; сўнгра CS_2 синдириш курсаткичининг тўлқин узунликка боғланиш эгри чизигидан Майкельсон фойдаланган тўлқин узунлик учун $\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = -0,126$ топилади (тўлқин узунлик орта борган сари синдириш курсаткичи камай боради). Шундай қилиб, (137.4) формуладан олинадиган

$$\mu = \frac{c}{g} + \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = 1,76 - 0,126 \approx 1,63$$

қиймат тажриба натижасига мувофиқ келади.

Демак, „ёруғлик заррачалари“ фотонлар бўлганлиги сабабли, корпускуляр манзарада ҳам ёруғликнинг муҳитдаги фазавий тезлиги бўшлиқдаги фазавий тезликдан кичик бўлиши керак, бу эса Фуко тажрибасига ўхшаш тажрибалар ёруғлик тўлқин табиатлими ёки корпускуляр табиатлими деган саволга ҳеч жавоб бера олмайди, демакдир.

Айтилганлардан, тавсифланган тажрибалар XIX асрда пайдо бўлган фикрни аксинча, ёруғлик табиати тўғрисидаги масала-

* Дарҳақиқат, (136.2) дан:

$$c' = g + \lambda \frac{dc'}{d\lambda},$$

бундан

$$\frac{c'}{g} = 1 + \frac{\lambda}{g} \frac{dc'}{d\lambda}. \quad (136.2')$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{c'}{c} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{c'} \right) = - \frac{1}{c'} \frac{dc'}{d\lambda}$$

бўлишини кўриш осон.

Бундан $\frac{dc'}{d\lambda}$ ни аниқлаб ва (136.2') га қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{c'}{g},$$

ёки, яна (136.2) дан фойдаланиб,

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{g} \frac{dc'}{d\lambda} \right)$$

ни топамиз.

$\frac{\lambda}{g} \frac{dc'}{d\lambda}$ нинг кичик миқдор эканлигини эътиборга олиб ва иккинчи тартибли кичик миқдорларни ташлаб юбориб, биринчи яқинлашишда

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}$$

ифодани топамиз, бундан, ниҳоят, $\mu c' = c$ ни назарда тутиб, исботланиши талаб қилинган

$$\frac{c}{g} = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda}$$

муносабатни топамиз.

ни ҳал қилолмайди: улар тўлқин манзарага ҳам, корпускуляр манзарага ҳам зид эмас, деган хулоса келиб чиқади.

Хулосада яна қуйидаги муҳим ҳолни айтиб ўтамиз. Тўлқинни биз ν частота ва λ тўлқин узунлик орқали характерлаймиз; заррача учун унинг энергияси E ва импульси p характерлидир. Биз синишни ё корпускуляр, ёки тўлқин нуқтаи назардан тавсифлашимиз мумкин. Биринчи ҳолда биз E ва p , иккинчи ҳолда ν ва λ катталиклардан фойдаланамиз. Бироқ биз корпускуляр манзарадан тўлқин манзарага ўтишни истасак, у ҳолда иккала группа катталиклари орасидаги қуйидаги бизга маълум муносабатлардан фойдаланишимиз керак:

$$E = h\nu \quad (137.6)$$

ва

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (137.7)$$

Шундай қилиб, бу муносабатларда Планк доимийси бир манзарадан иккинчи манзарага ўтиш имконини берадиган ўтказувчи кўпайтувчи ёки калит вазифасини бажаради.

138- §. Корпускуляр-тўлқин дуализми. Допплер эффекти

Энди бошқа мисолларда оптик ҳодисаларни икки нуқтаи назардан — корпускуляр ва тўлқин нуқтаи назардан талқин қилиш имкониятини кўрсатамиз. Бунинг учун даставвал Допплер эффектига мурожаат қиламиз.

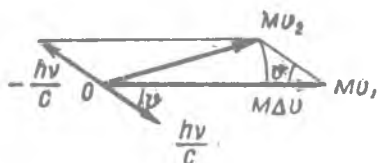
Акустикада ҳам, оптикада ҳам ўринли бўлган *Допплер эффекти*, маълумки, манба ва кузатувчи бир-бирига нисбатан ҳаракатланганда частота ўзгаришидан иборат бўлади. Ёруғлик манбаи A нуқтада, кузатувчи эса B нуқтада жойлашган бўлсин. Агар манба A билан B ни бирлаштирувчи туғри чизиққа нисбатан ϑ бурчак остида v тезлик билан ҳаракатланса, у ҳолда манба ҳаракатланганда кузатувчи қайд қиладиган частота манба ҳаракатсиз бўлгандаги частотадан $\Delta\nu$ катталиққа фарқ қилади, бу $\Delta\nu$ фарқ

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \vartheta \quad (138.1)$$

формуладан аниқланади, бунда c — ёруғлик тезлиги. Бу ҳодисанинг тўлқин назарияси (ёруғлик тарқалиш тезлиги узгармаган ҳолда) манбанинг ҳаракатланиши натижасида тўлқин узунлигининг ўзгаришини текширишга асослангандир*.

* Биз бу ерда Допплер эффеқтининг тўлқин назариясига ва бу эффеқтининг акустика ҳамда оптикадаги муҳим тафовутига тухталиб ўтолмаймиз. Бунга тегишли масалалар Г. С. Ландсбергнинг китобида жуда равшан баён қилинган („Оптика“, 114—116-§, Гостехиздат, 1947).

Аммо, бу ҳодисани корпускуляр нуқтаи назардан ҳам тунтириш мумкин экан. Бунда ёруғлик нурланишини фотоннинг „отилиши“ деб қаралади ва бу процессга, худди Комптон эффектининг корпускуляр назарияси сингари энергиянинг ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунлари татбиқ қилинади.



206- расм. Допплер эффектининг корпускуляр назариясига доир.

ланиш қонунига асосан фотон чиқариш (нурланиш) пайтида атом қарама-қарши томонга йўналган — $\frac{h\nu}{c}$ қўшимча импульс (тепки) олади. Унинг нурланишдан кейинги импульси Mv_2 га тенг бўлиб қолади. Импульс асосида ясалган чизмадан

$$Mv_1 - Mv_2 = M\Delta v = \frac{h\nu}{c} \cos \vartheta \quad (138.2)$$

булишлиги кўриниб турипти. Энди энергиянинг сақланиш қонунини татбиқ қилиш учун қуйидаги тарзда муҳокама юритамиз. Агар ҳаракатсиз атомнинг $h\nu$ фотонни чиқаришга олиб келувчи стационар ҳолатларидаги энергияси мос равишда E_1 ва E_2 бўлса, у ҳолда

$$E_1 - E_2 = h\nu. \quad (138.3)$$

Уйғонган ҳолатда (нурланиш олдидан) ҳаракатланаётган атомнинг энергияси:

$$E_1 + \frac{1}{2} Mv_1^2,$$

нормал ҳолатдаги (нурланишдан кейин) энергияси:

$$E_2 + \frac{1}{2} Mv_2^2.$$

Нурланган фотоннинг энергияси:

$$h(\nu + \Delta\nu).$$

Энергиянинг сақланиш қонунига асосан

$$\frac{1}{2} Mv_1^2 + E_1 = \frac{1}{2} Mv_2^2 + E_2 + h(\nu + \Delta\nu), \quad (138.4)$$

бундан, (138.3) ни эътиборга олсак,

$$\frac{1}{2} M(v_1^2 - v_2^2) = h\Delta\nu$$

ёки

$$M\Delta v \frac{v_1 + v_2}{2} = h\Delta\nu.$$

(138.2) дан фойдаланиб ва $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ўртача тезликни кири-
тиб, қуйидагини оламиз:

$$\bar{v} \frac{h\nu}{c} \cos \vartheta = h\Delta\nu,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{v}}{c} \cos \vartheta,$$

яъни тўлқин оптикасида чиқариладиган (138.1) муносабатни оламиз.

139-§. Корпускуляр-тўлқин дуализми. Дифракцион панжара

Қайтарувчи ясси дифракцион панжарани кўриб чиқайлик. Тўлқин назариясидан маълумки, агар панжаранинг даври a га тенг бўлса ва панжара текислигига нисбатан ϑ бурчак остида панжарага ясси монохроматик тўлқин тушаётган бўлса, у ҳолда қайтишда ϑ' бурчак билан характерланувчи йўналишда ёруғлик олиш учун қуйидаги шарт бажарилиши зарур:

$$a (\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n\lambda. \quad (139.1)$$

Энди бу ҳодисани корпускуляр нуқтаи назардан текшира-
миз. Панжарага ϑ бурчак остида фотонлар оқими тушаётган бўлсин. Дифракцион манзаранинг характери ёруғлик интен-
сивлигига боғлиқ бўлмаслиги, лекин панжаранинг ўзи билан *бутунлайича* аниқланиши тажрибадан маълум бўлгани учун манзарани муфассаллаштириш, масалан, ҳар бир фотоннинг маълум қайтарувчи штрихдан қайтишини текшириш шарт эмас (бу масалани қуйида қараб чиқамиз). Аммо, фотон панжарага тушганида панжара қўшимча импульс олади, қайтганида эса, панжара тепкиланади, дея оламиз. Натижада панжара импульс-
сининг панжара текислигида ётувчи x ўқи бўйича ташкил ётувчиси

$$p_x - p'_x = \Delta p_x$$

қадар ўзгаради. Энди, панжара ҳаракатчан ва у ўз текисли-
гида қолган ҳолда ҳаракатлана олади деб тасаввур қилайлик; у ҳолда Δp_x импульс уни ҳаракатга келтиради. Равшанки, пан-
жара x ўқи йўналишида унинг даври a га тенг масофага сил-
жиганда, панжара ўзининг дастлабки вазиятига яна устма-уст
тушади. Шунинг учун панжаранинг ҳаракатини a даврли дав-
рий ҳаракат деб қарай оламиз. Бундай ҳолда, Бор—Зоммер-
фельд квант шартларидан (113-§) фойдаланиб, бу ҳаракатни
„квантлаш“ мумкин:

$$\int_0^a \Delta p_x dx = nh,$$

бундан

$$a\Delta p_x = nh. \quad (139.2)$$

Панжаранинг массаси фотоннинг массасига нисбатан жуда катта бўлганлиги учун, қайтишда панжара импульсининг абсолют қиймати ўзгаришини эътиборга олмаслик мумкин. Шунинг учун

$$\begin{aligned} p_x &= p \cos \vartheta, \\ p'_x &= p \cos \vartheta', \\ \Delta p_x &= p (\cos \vartheta - \cos \vartheta') \end{aligned}$$

ва (139.2)

$$a (\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n \frac{h}{p} \quad (139.3)$$

кўринишни олади.

p фотоннинг импульси бўлиб, u тўлқин узунлик билан

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (137.8)$$

муносабат орқали боғланганлигини эътиборга олиб ва бу ифодани (139.3) га қўйиб,

$$a (\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n\lambda \quad (139.1)$$

формулани, яъни дифракцион панжаранинг одатдаги кўринишдаги формуласини ҳосил қиламиз.

(139.3) формулага заррачани характерловчи p импульс кирганлигига, (139.1) муносабатга эса — тўлқин узунлиги кирганлигига эътиборни жалб қиламиз. Демак, (139.3) ва (139.1) муносабатлар битта формуланинг ўзи булиб, биринчиси корпускуляр манзара терминлари орқали, иккинчиси — тўлқин манзара терминлари орқали ёзилган дейиш мумкин. Бошқа ҳоллардаги каби, бир манзарадан иккинчисига ўтиш оптик ҳодисаларнинг иккала жиҳатини боғловчи

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

муносабат ёрдамида бажарилади.

140-§. Де-Бройль гипотезаси

„Тўлқин-заррача“ дуализми, кўриб утганимиздек, даставвал, ёруғлик табиатини ўрганишда аниқланган эди. 1924 йилда Луи де-Бройль бу дуализм билан боғлиқ булган қийинчиликларни бартараф қилишга уриниб, дуализм фақат биргина оптик ҳодисаларнинг хусусияти бўлмасдан, балки универсал аҳамиятга эгадир, деган дадил гипотезани олдинга сурди. „Оптикада,— дейди у,— аср давомида, текширишнинг тўлқин усулига нисбатан корпускуляр текшириш усулини ҳаддан ташқари менсимай келдилар; материя назариясида тескари хатого йўл қўйилмадимикан? Биз „заррачалар“ манзараси тўғрисида ҳаддан таш-

қари кўп ўйлаб юбормадикмикан ва тўлқинлар манзарасини ҳаддан ташқари менсимадикмикан? Де-Бройль қўйган савол ана шундай эди.

Қуйидаги мулоҳазалар ҳам де-Бройлни моддий заррачалар тўлқин хоссали бўлади деган фикрга олиб келди. XIX асрнинг йигирманчи йилларида Гамильтон геометрик оптика ва механика орасидаги ажойиб ўхшашликка эътиборни жалб қилди (ўша вақтда фақат Ньютон механикаси ҳақидагина сўз бориши мумкинлиги ўз-ўзидан тушунарлидир). Бу икки турли соҳанинг асосий қонунларини математик жиҳатдан айнан бир хил шаклда ифодалаш мумкин экан. Бу—моддий заррачанинг $V(x, y, z)$ потенциалли майдондаги ҳаракатини текшириш урнига тегишлича танлаб олинган $\mu(x, y, z)$ синдириш кўрсаткичли, оптик жиҳатдан бир жинсли бўлмаган муҳитда ёруғлик нурлари ҳаракатини текширса ҳам бўлади ва аксинча, демакдир. Бу ўхшашлик фақат геометрик оптикага ва классик механикага тегишли эди. Лекин, геометрик оптика ёруғликнинг барча хоссаларини тушунтира олмаслиги маълум. Интерференция ва дифракция каби хоссаларни тушунтиришда умумий аҳамиятга эга бўлган тўлқин оптикасидан фойдаланиш керак; геометрик оптика эса тўлқин оптикасининг (жуда қисқа тўлқин узунликлар учун ўринли булган) чегаравий ҳолидир. Иккинчи томондан, Ньютон механикасининг қўлланиш соҳаси чекли эканлиги ҳам маълумдир; у масалан, атом системаларда энергиянинг дискрет сатҳлари мавжудлигини тушунтира олмайди. Де-Бройль идеясига кўра, механика ва оптика орасидаги ўхшашликни кенгайтириш ҳамда тўлқин оптикаси билан классик механикадан кўра умумийроқ бўлган ва атом ички ҳаракатларига қўллана оладиган тўлқин механикасини таққослаш зарур.

Шу йўсинда, моддий „заррачалар“ корпускуляр хоссалари билан бир қаторда тўлқин хоссаларига ҳам эга бўлади, деб фараз қилиб, де-Бройль тўлқин ва корпускуляр манзараларнинг биридан иккинчисига ўтиш қоидаларини моддий „заррачалар“ ҳолига татбиқ этди. Биз оптикада „тўлқин-заррача“ дуализмини текширганимизда бу манзараларни кўп марта учратган эдик. Айтайлик, ν тевлик билан текис (майдон йўқ бўлганда) ҳаракатланаётган m массали моддий „заррача“ (масалан, электрон) мавжуд бўлсин. Корпускуляр манзарада заррачани E энергия ва p импульс билан характерлаймиз; тўлқин манзарада ν частота ва λ тўлқин узунлик билан иш кўрамиз. Агар бу икки манзара битта объектнинг турли жиҳатлари бўлса, бу ҳолда уларни характерловчи катталиклар орасидаги боғланиш қуйидаги муносабатлар орқали аниқланади (137-§ га қаранг):

$$\text{ва} \quad E = h\nu \quad (140.1)$$

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (140.2)$$

бунда h — Планк доимийси.

Оптик ҳодисаларни текширганда фотоннинг импульсини аниқлаш учун (140.2) муносабатдан фойдаланган эдик (фотон—тинчликдаги массаси нолга тенг бўлган ва c ёруғлик тезлиги билан ҳаракатланувчи заррачадир). Де-Бройль фикрича, ўша муносабатнинг ўзи моддий заррачалар учун шу заррачаларга тўғри келтирилувчи ясси монохроматик тўлқинларнинг тўлқин узунликларини аниқлайди:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Тинчликдаги массаси нолга тенг бўлмаган заррачалар учун $p = mv$, шу билан бирга кичик тезликлар учун m ўзгармасдир, ёруғлик тезлиги билан таққосланувчи тезликлар учун релятивистик масса $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ тезликка боғлиқ бўлади. Демак, тинчликдаги массаси нолга тенг бўлмаган „заррачалар“ учун, де-Бройль ҳисобича

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (140.3)$$

Агар абсолют қиймати $|\mathbf{k}| = \frac{1}{\lambda}$ бўлган \mathbf{k} тўлқин векторни киритсак, у ҳолда (140.2) га асосан:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad p_x = \hbar k_x, \quad p_y = \hbar k_y, \quad p_z = \hbar k_z. \quad (140.4)$$

Шунинг учун эркин моддий „заррачалар“ ҳаракатини тавсифловчи ясси тўлқин формуласи қуйидаги кўринишга эгадир*):

$$\begin{aligned} \psi &= A e^{i2\pi(\mathbf{k}\mathbf{r} - \nu t)} = A e^{i2\pi(xk_x + yk_y + zk_z - \nu t)} = \\ &= A e^{i \frac{2\pi}{h}(xp_x + yp_y + zp_z - Et)}. \end{aligned} \quad (140.5)$$

141-§. Де-Бройль тўлқинларининг хоссалари

Ҳамма ҳоллардагидек, фазавий ва группавий тезликларни бир-биридан фарқ қилган ҳолда де-Бройль тўлқинларининг тарқалиш тезлигини ҳисоблаймиз. Фазавий тезлик:

$$c' = \frac{v}{k} = \frac{h\nu}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}; \quad (141.1)$$

$c > v$ бўлгани учун де-Бройль тўлқинларининг фазавий тезлиги ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан каттадир. Аммо бу бизни ажаблантирмаслиги лозим, чунки биз фазавий тезликнинг „сигнал“ тезлигини ҳам, энергия ҳаракати тезлигини ҳам

) (140.5) даги кўрсаткич (132.8) дагига нисбатан тескари ишорага эга эканлиги, $|\psi|^2$ модуль квадратигина, яъни $\varphi^\psi = A^2$ физик маънога эга бўлганлиги туфайли аҳамиятсиздир.

ифодаламаслигини биламиз, шунинг учун эса у c дан кичик ҳам, катта ҳам бўлиши мумкин.

Группавий тезликни (134.3) формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$g = \frac{d\nu}{dk} = \frac{d(h\nu)}{d(hk)} = \frac{dE}{dp}. \quad (141.2)$$

$\frac{dE}{dp} = v$ бўлишлигини исботлаш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам F куч таъсирида ds йўлда ҳаракатланувчи заррача энергиясининг ўзгариши $dE = Fds$, лекин $F = \frac{dp}{dt}$, шунинг учун эса

$$dE = \frac{dp}{dt} ds = dp \frac{ds}{dt} = v dp$$

ёки v ва p ларнинг йўналиши бир хил бўлгани учун

$$dE = v dp,$$

бундан

$$\frac{dE}{dp} = v.$$

Демак, (141.2) дан қуйидагини топамиз:

$$g = v,$$

яъни де-Бройль тўлқинларининг группавий тезлиги заррача тезлигига тенгдир. Бу ажойиб муносабатга яна қайтамиз.

Энди де-Бройль тўлқинлари частотаси билан тўлқин векторининг ташкил этувчилари орасидаги муносабатни (дисперсия қонунини) топамиз. Шу мақсадда, даставвал, энергия ва импульс орасидаги

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p^2 = m_0^2 c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (141.3)$$

релятивистик муносабатдан фойдаланиб, релятивистик заррачаларнинг умумий ҳоли учун v ва k орасидаги муносабатни аниқлаймиз*). (141.3) ифодага

$$E = h\nu, \quad (140.1)$$

$$p_x = hk_x, \quad p_y = hk_y, \quad p_z = hk_z \quad (140.4)$$

қийматларни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{h^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (141.4)$$

*) Бу муносабатни $p = \frac{v}{c^2} E$ (402- бег) ва $E = \frac{m_0 c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}$ (223- бег)

формулалардан осон келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан,

$$p^2 = \frac{v^2}{c^4} E^2 = \frac{\beta^2}{c^2} E^2 = \frac{E^2}{c^2} [1 - (1 - \beta^2)] = \frac{E^2}{c^2} - \frac{E^2}{c^2} (1 - \beta^2) = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2,$$

бундан (141.3) формула келиб чиқади.

Қуйидаги

$$\frac{m_0 c^2}{h} = \nu_0 \quad (141.5)$$

белгилашни киритиб (141.3) ни

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\nu_0^2}{c^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (141.6)$$

кўринишга келтирамиз Бу эса изланган релятивистик муносабатнинг худди ўзидир. Тинч ҳолатда массаси нолга тенг бўлган заррачалар учун (141.5) формуладаги $\nu_0 = 0$ ва (141.6)

$$\frac{\nu^2}{c^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

қуриниш олишини айтиб ўтамиз, бу эса электромагнит тўлқинлар учун, яъни фотонлар оқими деб қаралувчи тўлқинлар учун тўлқин тенгламасидан келиб чиқадиган маълум муносабатдир.

Ниҳоят, де-Бройль тўлқинларининг яна бир ажойиб хоссасини қараб чиқамиз. Борнинг водородсимон атомнинг элементар назариясида стационар доиравий орбиталарни танлашда қуйидаги шартдан фойдаланган эдик:

$$mva = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Бу шартни

$$2\pi a = n \frac{h}{mv}$$

кўринишда қайта ёзиш мумкин. h/mv де-Бройль тўлқинининг узунлиги эканини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2\pi a = n\lambda, \quad (141.7)$$

яъни стационар орбита айланасининг узунлиги де-Бройль тўлқинларининг бутун сонига тенг бўлиши лозим.

Борнинг эллиптик орбиталари учун ҳам шунга ўхшаш шарт ўринлидир. Бу ҳол анча мураккабдир, чунки тезлик ўзгарувчан бўлганлиги туфайли эллиптик орбитанинг турли нуқталарида де-Бройль тўлқини узунлиги $\lambda = h/mv$ турлича бўлади. Бор назариясида эллиптик орбиталарни танлаб олиш учун иккита квант шартдан фойдаланиш керак:

$$\oint p_r dr = n_r h, \quad \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h.$$

Уларни қўшиб:

$$\oint (p_r dr + p_\varphi d\varphi) = (n_r + n_\varphi) h = n h$$

ни оламиз. Сўнг (113.15) формулага асосан:

$$p_r dr + p_\varphi d\varphi = 2I dt$$

эканлигини назарга олиб қўйидагини оламиз:

$$nh = \oint (p_r dr + p_\varphi d\varphi) = \oint 2T dt = \oint mv^2 dt = \oint mvv dt = \oint mv ds.$$

Де-Бройль формуласи $\lambda = h/mv$ ни эътиборга олиб:

$$nh = h \oint \frac{ds}{\lambda}$$

ёки

$$\oint \frac{ds}{\lambda} = n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (141.8)$$

га эга бўламиз, яъни бу ҳолда ҳам орбита узунлигига бутун сонли де-Бройль тўлқинлари жойлашиши керак. Бу ажойиб натижанинг ҳақиқий маъноси аслида электрон ҳаракатини фойдаловчи тўлқин функция бир қийматли бўлиши керак деган талабга жавоб бериши керак.

142- §. Де-Бройль гипотезасининг тажрибада тасдиқланиши. Брэгг методи

Де-Бройль гипотезаси жуда тез вақт ичида тажрибада тасдиқланди. Чунончи, электронлар, протонлар ва ҳатто бутун атомлар дастаси худди ёруғлик ва рентген нурлари сингари, интерференция ҳодисаларини вужудга келтириши кўрсатилди.

Даставвал, моддий заррачалар учун де-Бройль тўлқини узунлиги катталигининг тартибини қараймиз. Бу эса муайян ҳолда интерференцияни ошкор қилиш учун қандай экспериментал методлар қўлланиши кераклигини кўрсатиб беради. Айтайлик, V вольт потенциал билан тезлантирилган электронлар дастаси мавжуд бўлсин; агар бу потенциал унча катта бўлмаса, унда классик механика формулаларидан фойдаланиш мумкин бўлади. У ҳолда электронлар тезлигини

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300} \quad (142.1)$$

муносабатдан, де-Бройль тўлқини узунлигини эса

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (140.3)$$

муносабатдан аниқланади.

(142.1) ва (140.3) дан v ни йўқотиб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{h^2}{me}} \sqrt{\frac{150}{V}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{9 \cdot 10^{-28} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10}}} \sqrt{\frac{150}{V}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{150}{V}} \cdot 10^{-8} \text{ см} = \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ \AA} = \sqrt{\frac{12,25}{V}} \text{ \AA}. \end{aligned} \quad (142.2)$$

Шундай қилиб, 150 вольт потенциал билан тезлантирилган электронлар учун де-Бройль тўлқини узунлиги 1 \AA га тенг; бу—юмшоқ рентген нурлари тўлқин узунлиги катталиги тартибидадир.

Агар электронлар тезлиги катта бўлса, у ҳолда Ньютон механикаси формулалари яроқсиз бўлиб қолади ва массанинг тезликка боғлиқлигига релятивистик тузатма киритиш зарур бўлади. Бундай ҳолларда λ ни аниқлаш учун қуйидаги тақрибий формуладан фойдаланиш мумкин:

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{V}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} V) \text{ \AA}. \quad (142.3)$$

Протонлар учун ўша тезликда де-Бройль тўлқини узунлиги $\sqrt{1836}$ марта кичик бўлади. XVIII жадвалда электронлар ва протонлар учун λ нинг ҳисоблаб топилган қийматлари келтирилган.

XVIII жадвал

Тезлатувчи потенциал (вольт)	Тўлқин узунлиги (Å да)	
	электронлар	протонлар
10^9	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$7,3 \cdot 10^{-6}$
10^8	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$
10^7	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-4}$
10^6	$0,87 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$
10^5	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-4}$
10^4	0,12	$2,9 \cdot 10^{-3}$
10^3	0,39	$9,0 \cdot 10^{-3}$
400	0,61	$1,4 \cdot 10^{-2}$
200	0,86	$2,0 \cdot 10^{-2}$
50	1,7	$4,0 \cdot 10^{-2}$
10	3,9	$0,9 \cdot 10^{-1}$

Айтилганлардан равшанки, моддий заррачаларнинг интерференциясини ҳосил қилиш учун рентген нурлари ҳолида қўлланиладиган ўша усуллардан, яъни кристалл панжара ёрдамида ҳосил қилинадиган интерференциядан фойдаланиш лозим. Дарҳақиқат, электронлар дасталарининг кристаллардаги интерференцияси де-Бройль назарияси пайдо бўлмасидан илгари топилган эди. 1921—1923 йилларда Дэвисон ва Кэнсман электронларнинг юпқа металл варақлардан сочилиши ҳодисасида интенсивликнинг сочилиш бурчагига маълум тарзда боғлиқлигини топдилар (207-расм). Бунда ҳосил бўладиган максимумларнинг вазияти ва катталиги электронларнинг тезлигига жиддий боғлиқдир. Тасодифий ҳол бу ҳодисада кристалл тузилиши ҳал қилувчи роль ўйнашини кўрсатди: никель пластинкаларидан қайиш устида олиб борилган тажрибалар вақтида

шиша аппарат ёрилиб никель пластинка оксидланди. Сўнгра бу пластинкани тиклаш учун уни узоқ вақт вакуумда ва водород атмосферасида қиздиришга тўғри келди. Бу ишловдан

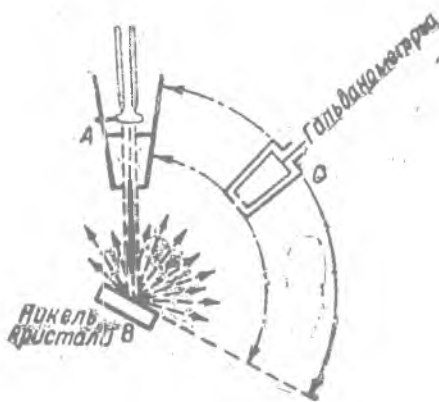


207- расм. а) қиздиришгача; б) қиздиришдан сўнг поликристалл никель пластинканинг электронларни сочиши.

сўнг пластинка қайта кристалланди: унда бирмунча миқдорда йирик кристаллар ҳосил бўлди. Электронларнинг сочилиши устида ўтказилган такрорий тажрибаларда бу қайта кристалланиш туфайли максимумлар сони кескин ошганлиги, максимумларнинг ўзи эса анча аниқлашганлиги маълум бўлди (207-б расмга қаранг).

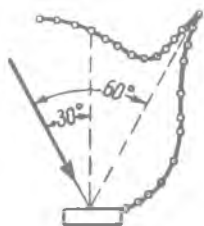
Бу ҳодиса интерференцион қайтишнинг мисоли эканлигини тушунгунга қадар, электронлар қайтишидаги бу ўзига хос селективликни тушунтириб бериш жуда ҳам қийин бўлди. Дэвисон ва Жермернинг қуйидаги тажрибалари бу тушунтиришнинг тўғрилигини тасдиқлади.

А „электрон замбарак“ ёрдамида маълум тезлик олган электронларнинг параллел дастаси (208- расм) В кристаллга йўналтирилган; гальванометрга уланган С коллектор қайтган элек-



208- расм. Дэвисон ва Жермер тажрибалари схемаси.

тронларни ушлайди. Коллектор ҳамма вақт бир текисликда қолган ҳолда, тушаётган дастага нисбатан ихтиёрий бурчак остида урнатилиши мумкин. Коллекторнинг турли вазиятларида ундан ўтаётган токни ўлчаб, турли йўналишлардаги қайтиш интенсивлиги тўғрисида фикр юритиш мумкин эди. Натижа қутб диаграммаси шаклида тасвирланган (209-расмда нусхаси келтирилган).



209-расм. Никель монокристаллидан электронлар қайтиши интенсивлигининг қутб диаграммаси.

Турли бурчаклар остида ўтказилган радиус-векторларда тегишли бурчаклар остида қайтиш интенсивлигига пропорционал бўлган кесмалар ажра илади. Агар V га никель монокристалли жойлаштирилса, у ҳолда электронларнинг „тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенг“ деган оптик қонун бўйича қайтишини кўрсатувчи кескин ифодаланган селектив максимум кузатилади экан. Тартибсиз жойлашган кўп сонли кристаллчалардан иборат поликристалл никель пластинка билан такрорланган худди ўша тажрибада ҳеч қандай селективлик кузатилмади.

Электронларнинг монокристаллдан тўғри қайтиши устида ўтказилган тажриба, ҳақиқатда, Брэгг методи бўйича рентген нурларининг кристаллдан интерференцион қайтишига (ёки монохроматик ёруғликнинг юпқа пластинкадан интерференцион қайтишига) аниқ ўхшашдир. Маълумки, агар рентген нурларининг тўлқин узунлиги ва сирпаниш бурчаги қуйидаги

$$n\lambda = 2d \sin \varphi \quad (142.4)$$

Вульф—Брэгг формуласини (IV боб, 33-§ га қаранг) қаноатлантиргандагина рентген нурлари кристаллдан қайтади.

Интерференцияни кузатишда бу формуладан икки хил фойдаланиш мумкин. Биринчидан, кристаллга маълум λ тўлқин узунликли нурларни йўналтириш мумкин ва, кристаллни буриб, Вульф—Брэгг формуласидаги $n = 1, 2, \dots$ қийматларга мос келган маълум $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, бурчакларда қайтиш юз беришига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шу тарзда биринчи, иккинчи ва ҳоказо тартибли спектрлар олинади. Иккинчидан, сирпаниш бурчаги φ ни бир хил сақлаган ҳолда тўлқин узунликни узлуксиз ўзгартириш мумкин. Бунда

$$\lambda_n = \frac{1}{n} 2d \sin \varphi \quad (142.5)$$

бўлган ҳоллардагина, яъни $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3}$ ва ҳоказо тўлқин узунликлар учун қайтиш юз беради.

Рентген нурлари ҳолида биринчи усулдан, электронлар ҳолида иккинчи усулдан фойдаланилади, чунки электронлар оқи-

ми одагда маълум тезликка эга бўлади (яъни бу оқимларга маълум $\lambda = h/mv$ тўлқин узунлик мос келади) ва бу тезликни узгартириш (тезлантирувчи потенциални узгартириб) кристаллни вакуумда буришга нисбатан жуда осондир.

(142.2) ва (142.5) формулаларни бирлаштириб, қуйидагини топамиз:

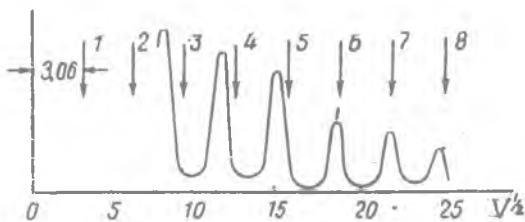
$$\frac{12,25}{V^{1/2}} = \frac{1}{n} 2d \sin \varphi$$

ёки

$$V^{1/2} = n \frac{12,25}{2d \sin \varphi}. \quad (142.6)$$

Шундай қилиб, 208-расмда тезлантирувчи потенциал V ни аста-секин узгартира борсак ва ҳар гал коллектор токи кучини (яъни қайтиш интенсивлигини) ўлчасак, у ҳолда абсцисса ўқи бўйича $V^{1/2}$ ни, ордината ўқи бўйича қайтиш интенсивлигини қўйганимизда орасидаги масофалар бир хил бўлган бир қатор кескин максимумларга эга бўлган эгри чизиқ ҳосил қилишимиз лозим; бунда максимумлар оралиги $12,25/2d \sin \varphi$ га тенг.

Маълум шароитларда ($\varphi = 80^\circ$, $d = 2,03 \text{ \AA}$) никель монокристалли билан олинган эгри чизиқ 210-расмда тасвирланган.



210-расм. Никель монокристаллидан электр-рентген интерференцияси қайтиши учун Вульф—Брэгг формуласини текшириш.

Максимумларнинг даврий такрорланиши жуда аниқ ифодаланганлиги кўриниб турибди. Шу чизманинг ўзида Вульф—Брэгг формуласи (142.6) бўйича ҳисобланган максимумлар вазияти стрелкалар билан кўрсатилган. Экспериментал эгри чизиқда максимумлар вазиятини таққослашнинг кўрсатишича, n нинг катта қийматлари учун ($n = 7, 8$) назарий ва экспериментал эгри чизиқлар аниқ мос тушади; n нинг кичикроқ қийматларида тафовут кузатилади, n қанча кичик бўлса, бу тафовут шунча катта бўлади.

Бу тафовутнинг систематик ва қонуний характерга эга бўлишлиги, ҳисоблашда қандайдир фактор эътиборга олинмаганлигини кўрсатади. Бу фактор де-Бройль тўлқинларининг синдириш кўрсаткичидир. Ҳақиқатан ҳам, Вульф—Брэгг формуласини чиқаришда (33-§ га қаранг) синиш кўрсаткичини 1 га тенг деб, тўлқин узунлиги эса кристалл ташқарисиди ва ичкарисиди бир хил деб ҳисобланади. Бу жуда қисқа тўлқин узунликлар учун ўринлидир. Рентген нурлари соҳасидаги узун-

роқ тўлқинларнинг узунлигини аниқ топишда синдириш кўрсаткичини ҳисобга олиш ва қуйида чиқариладиган Вульф—Брэггнинг тузатилган формуласидан фойдаланиш керак. Де-Бройль тўлқинлари учун ҳам худди шундай бўлади. Қайтишнинг ҳисобланган ва экспериментал максимумлари фарқининг характери ҳам сифат жиҳатдан ана шу хулосани тасдиқлайди. Ҳақиқатан, кўриб утганимиздек, n ортган сари фарқ камая боради; аммо φ бурчакнинг маълум қийматида орта борувчи n ларга мос келувчи қайтишлар, (142.5) формулага мувофиқ, камая борувчи λ , $\lambda/2$, $\lambda/3$ ва ҳоказо тўлқин узунликларга мос келган қайтишлардир

Ма ш қ: 1. RaC' нинг α -заррачасига мос келган тўлқин узунликини ҳисобланг (α -заррачанинг энергияси $1,22 \cdot 10^{-5}$ эрг).

2. Никель монокристалдан интерференцион қайтиш учун биринчи тартибли максимумга мос келган тезлантирувчи кучланишни ҳисобланг. Тушувчи ва қайтувчи даста орасидаги бурчак 50° .

143-§. Электрон тўлқинларнинг синиши ва металлнинг ички потенциали

Олдинги параграфнинг охирида баён қилинган максимумлар силжишини тушунтириш электрон интерференциясини кузатиш асосида металлнинг ички потенциалини ҳисоблаш йўли билан миқдор жиҳатидан тасдиқланади. Бу ҳисоблаш қуйидагича бажарилади. Де-Бройль тўлқинларининг фазавий тезлиги E/p га тенг эканлигини биламиз. Электронлар металл ичига кирганда уларнинг импульси ўзгаради ва худди шу ўзгариш корпускуляр нуқтаи назардан, электронлар оқимининг синишига сабаб бўлади (137-§ га қаранг). Металл ичига электрон кирганда импульснинг ўзгариш сабаби металл ичида унинг кристалл панжарасини ташкил этувчи мусбат ионларнинг электр майдони мавжудлигидир. Бу майдоннинг потенциали мусбатдир. Металлнинг мусбат ионлари орқали утувчи тўғри чизиқни тасаввур қилайлик. Ионлар тенг масофаларда жойлашганлиги туфайли, равшанки, бу тўғри чизиқ бўйича потенциал даврий ўзгариши лозим. Аммо бу даврий ўзгарувчи потенциални металлнинг ички потенциали деб аталадиган бирор ўртача потенциал билан тақрибан алмаштиришимиз мумкин.

Металл ташқарисида электрон тўлқинларнинг фазавий тезлиги:

$$c'_a = \frac{E}{p_a} = \frac{E}{mv_a} = \frac{E}{\sqrt{m^2v_a^2}} = \frac{E}{\sqrt{2mE}}$$

бунда E — электронларнинг тўла энергияси. Агар металл ичида электроннинг потенциал энергияси U бўлса, у ҳолда металл ичида импульс $p_i = \sqrt{2m(E-U)}$, электрон тўлқинларнинг фазавий тезлиги эса

$$c'_i = \frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}}$$

бўлади. Таърифга кўра, синиш коэффициенти:

$$\mu = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} = \frac{c_a}{c_t} = \sqrt{\frac{E-U}{E}} = \frac{\lambda_a}{\lambda_t}, \quad (143.1)$$

бунда φ ва φ' — сирпаниш бурчаклари, яъни тушиш ва синиш бурчақларини $\pi/2$ гача тўлдирувчи бурчақлардир.

Энди металлнинг ички потенциали V_0 мусбат, электрон заряди эса манфий эканлигини эътиборга олиш лозим; шунинг учун потенциал энергия U манфий бўлади:

$$U = -eV_0;$$

тўла энергия E , одатдагидек, ташқи тезлантувчи потенциал $E = eV$ орқали ифодаланади. Буларнинг ҳаммасини эътиборга олиб, (143.1) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mu = \frac{\sqrt{V+V_0}}{\sqrt{V}} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}. \quad (143.2)$$

Шундай қилиб, синдириш кўрсаткичини ички потенциал V_0 орқали ифодаладик.

Энди $\mu \neq 1$ бўлган ҳол учун Вульф—Брэгг формуласини чиқарамиз. Интерференцияланувчи 1 ва 2 нурларни текширамиз (211-расм). Синиш тўфайли сирпаниш ички бурчаги φ' ташқи бурчақ φ га тенг эмас, 1 ва 2 нурларнинг йўл фарқи қуйидагига тенг бўлиши шубҳасиздир:

$$2d \sin \varphi' = 2d \sqrt{1 - \cos^2 \varphi'}$$

ёки

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} = \mu$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$2d \sin \varphi' = 2d \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\mu^2}}.$$

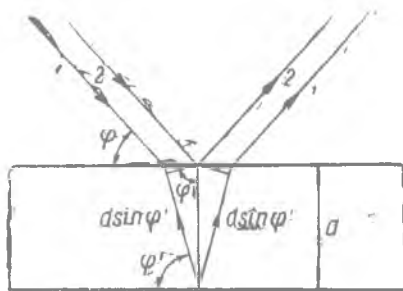
Энди интерференцияда максимумнинг бўлиш шarti қуйидагини беради:

$$2d \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\mu^2}} = n\lambda_t = n \frac{\lambda_a}{\mu}$$

[(143.1) га қаранг] ёки

$$2d \sqrt{\mu^2 - \cos^2 \varphi} = n\lambda_a. \quad (143.3)$$

Бу $\mu \neq 1$ бўлган ҳол учун Вульф—Брэгг формуласидир.



211-расм Синдириш кўрсаткичини ҳисобга олиб, Вульф—Брэгг формуласини келтириб чиқаринг.

Бу формула ёрдамида металлнинг ички потенциалини қуйидагича ҳисоблаш мумкин. (143.3) формулага $\lambda_a = \sqrt{\frac{150}{V}}$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$4d^2(\mu^2 - \cos^2 \varphi) = n^2 \frac{150}{V},$$

ва бу ерда μ^2 ни (143.2) формула бўйича $1 + \frac{V_0}{V}$ билан алмаштириб қуйидагини топамиз:

$$V_0 = n^2 \frac{150}{4d^2} - V \sin^2 \varphi. \quad (143.4)$$

Демак, тезлантирувчи потенциал V ни билган ҳолда сирпаниш бурчаги φ ни улчаб панжара доимийси d маълум бўлган кристалл учун V_0 ни ҳисоблаб топиш мумкин.

Масалан, XIX жадвалда келтирилган V_0 нинг қийматлари шу йўл билан олинади. Бу қийматларнинг етарлича узгармаслиги кўриниб турибди. Улар металллар назариясидан ҳисоблаб топилган қийматларга мос келади.

XIX жадвал

Металл	Тезлантирувчи потенциал (вольтларда)	λ (Å да)	n	μ	V_0 (вольт)
Ni	67	1,49	3	1,12	17
	142	1,03	4	1,05	16
	218	0,83	5	1,03	14
Pb	65	1,52	3	1,10	14
	125	1,09	4	1,06	15
	208	0,84	5	1,03	13
Ag	48	1,77	3	1,15	15
	96	1,25	4	1,08	15
	166	0,95	5	1,04	13

Металлнинг ички потенциаллари ва электрон тўлқинларнинг синиши орасидаги боғланишни талқин қилишда совет физиги В. Е. Лашкаревнинг ишлари муҳим роль уйнади.

Машиқ: 1. Платина сиртига 30° бурчак остида тушайтган 240 эв энергияли электронлар дастаси учун платинанинг синдириш кўрсаткичини ҳисобланг. Платинанинг ички потенциаллари 12 в, панжара доимийси—3,9 Å.

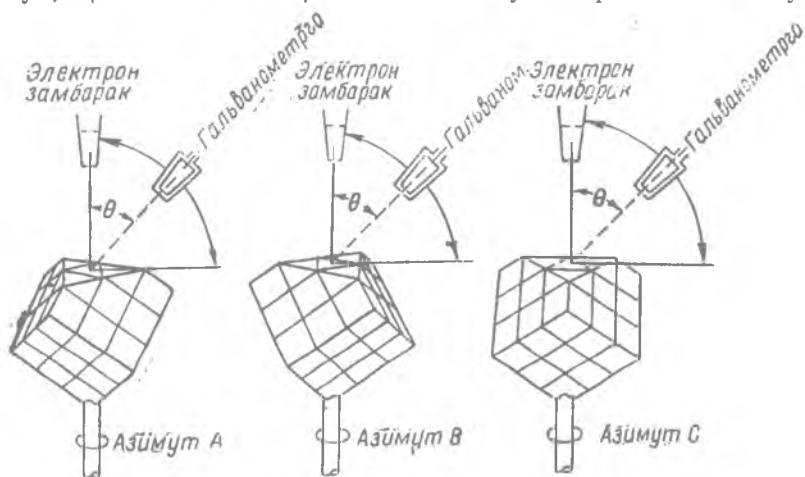
2. Олдинги масаладаги берилганлардан фойдаланиб, электронлар дастасининг синиш бурчагини ҳисобланг.

144- §. Де-Бройль гипотезасининг тажрибада тасдиқланиши. Лауэ ва Дебай—Шеррер методлари

Кристалларда рентген нурларининг интерференциясини фақат Брэгг методи билангина эмас, балки бошқа икки асосий метод: Лауэ методи ва Дебай—Шеррер методи билан ҳам

амалга ошириш мумкин. Бу иккала метод де-Бройль тўлқинлари интерференциясини амалга ошириш учун ҳам қўлланилиши мумкин. Кристалларда рентген нурлари интерференцияси тарихда биринчи марта Лауэ методи ёрдамида амалга оширилган эди. Маълумки, бу метод туташ спектрга эга бўлган рентген нурлари дастасини кристалл орқали ўтқазйшидан иборат. Бунда ҳосил буладиган интерференцион дасталар фотопластинкада симметрик доғлар системаси кўринишида қайд қилинади (32- § га қаранг).

Лауэ тажрибасини амалга ошириш учун рентген нурлари туташ спектрли булиши зарурлигининг сабаби 32- § да батафсил тушунтирилган. Аммо узлуксиз равишда тақсимланган тезликларга эга бўлган электронлар дастасини тажрибада олиш мумкин эмас: электрон замбаракдан чиқаётган электронлар бир хил тезликка эга бўлади ёки, аниқроқ қилиб айтганда, тор интервалда тақсимланган тезликларга эга бўлади. Шунинг учун, кристаллга электрон дастани йўналтирганимизда Лауэ



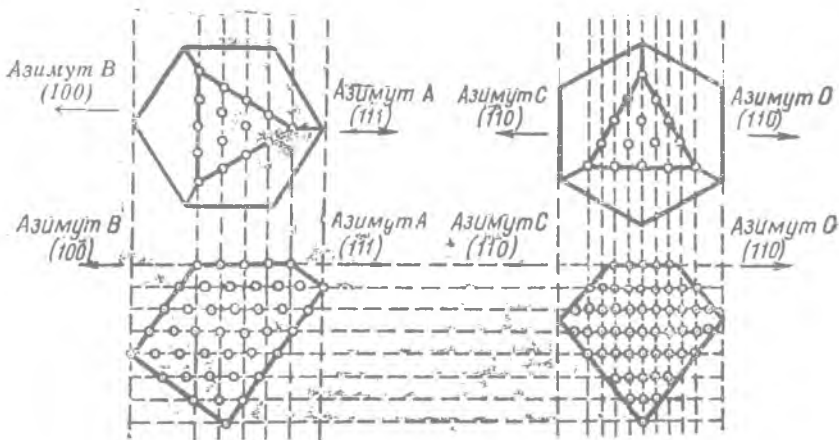
212- расм. Электронлар дифракциясини Лауэ методи буйича тажрибада текшириш схемаси.

интерференциясини амалга ошириш учун зарур бўлган шартларни қаноатлантира олмаймиз. Бу ҳолда электронларнинг тезлигини (яъни замбаракка берилган тезлантирувчи потенциални) узлуксиз ўзгартира бориш ва бир вақтнинг ўзида кристаллдан қайтган электронларни қабул қилаётган коллекторнинг вазиятини ўзгартира бориш йўли билан маълум интерференцион дастага мос максимум вужудга келадиган шароитни қадамма-қадам қидиришга тўғри келади.

Лауэ тажрибасига ўхшаш тажрибани Дэвисон ва Гермер электронлар ёрдамида қуйидагича амалга оширишди. Куб системага мансуб бўлган никель монокристалли 212- расмда кўр-

сагилганидек [кристаллографик индекслари (111) бўлган текисликларга параллел қилиб] жилвирланди. 212-расмда ана шундай жилвирланган кристаллнинг учта характерли вазияти кўрсатилган. Уларнинг бирида (*A* азимут) даста ва коллектор ўқи орқали ўтувчи текислик учбурчак учларидан бири орқали ўтади; иккинчисида (*B* азимут)—у учбурчак томонини тенг иккига бўлади ва учинчисида (*C* азимут)—у учбурчак томонига параллелдир.

Бу уч азимутдаги тажриба шартлари орасидаги фарқ 213-расмдан кўриниб турибди. Кристаллнинг жилвирланган сирти атомларнинг мунтазам қаторлари билан қопланган. Уни чизиқли панжаралар тўплами деб қараш мумкин; бунда турли азимутларда панжара доимийси бир хил эмас: масалан, *A* азимутда

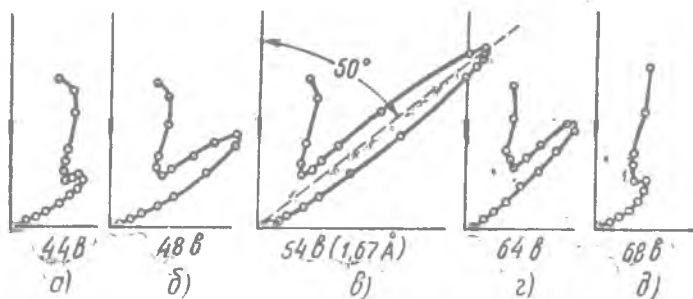


213-расм. Никель кристаллида атомларнинг турли проекцияларда жойлашиши.

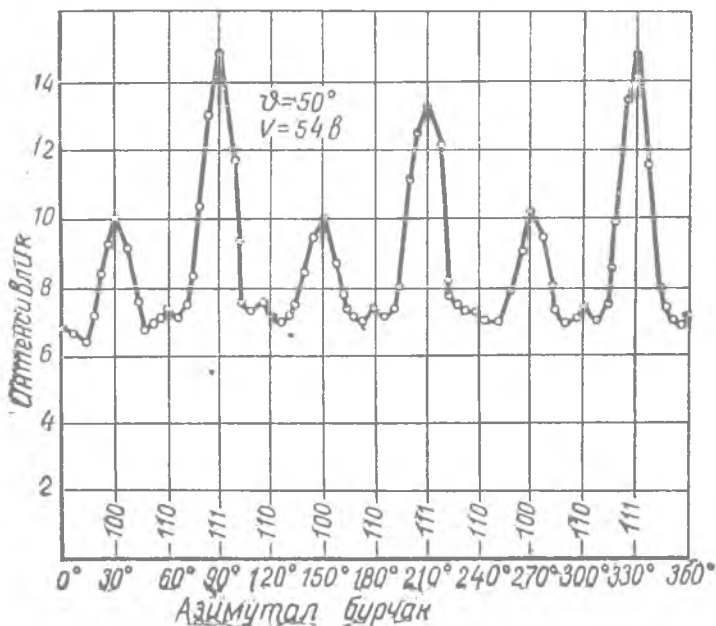
2,15 Å га, *C* азимутда эса 1,24 Å га тенг. Тажриба қурилмаси кристаллни вертикал ўқ атрофида айлантириш ва, бундан ташқари, коллекторни вертикал ўқ атрофида исталган вазиятга кўчириш имконини беради.

Дэвисон ва Гермер тажрибасида электронлар дастаси жилвирланган текисликка тик равишда йўналтирилди ва кристаллнинг муайян вазиятида (юқорида кўрсатилган азимутлардан бирида) электронларнинг турли бурчаклар остида қайтиш интенсивлиги коллектор ёрдамида ўлчанади. Шу турдаги ўлчашларнинг натижалари 214-расмда электронларнинг ҳар хил тезликларида (яъни де-Бройль тулқинларининг турли узунлигида) *A* азимут учун қайтиш интенсивлигининг қутб диаграммалари серияси тасвирланган. Бундан кўринишича, электронлар 44 эВ га мос тезликка эга бўлганда 50° бурчак остида максимум аранг билдилади (214-а расм); 54 эВ да тўла қийматга эришади

ва тезликнинг янада ортиши билан максимум яна сусайиб, 68 эв да деярли йўқолади. Сўнг тажрибанинг кўриниши қуйдагича ўзгартирилди: коллекторнинг вазияти ва электронларнинг тезлиги ўзгармас (масалан, 214-в расмдаги маълумотга мос қилиб) сақланди, лекин кристаллни вертикал ўқ атрофида аста-



214-расм. А азимутда интерференцион чўққининг ўса бориши ва йўқола бориши.

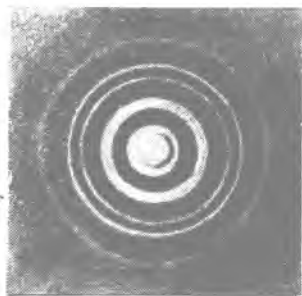


215-расм. Кристаллни бурганда интенсивликнинг азимутал тақсимланиши.

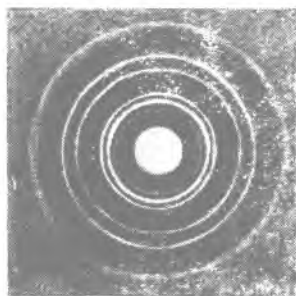
секин буриб турилди ва ҳар сафар коллектордаги тегишли ток ўлчанди. 212-расмдан кўриниб турибдики, кристаллни бурганда, симметрия туфайли у узининг дастлабки вазияти билан уч

марта устма-уст тушиши керак. Шунинг учун ҳар 120° дан сўнг кескин максимум такрорланиши керак. 215-расм кескин максимумнинг кузатилишини кўрсатади. Бу расмда ҳар икки кескин максимум орасида кўриниб турган унча катта бўлмаган дўнгликлар 54 эв энергияли электронлар учун B ва C азимутларда аранг сезиладиган максимумларни тасвирлайди.

Ниҳоят, рентген нурларининг интерференциясини ўрганишнинг учинчи усули—Дебай—Шеррер усули ҳам электрон дасталарнинг интерференцияси мавжуд бўлишligини исботлаш учун қўлланилган. Агар рентген нурларининг ингичка дастаси майда кристалл кукун ёки микрокристаллчалар уюшмасидан иборат



216-расм. Юпқа олтин варақлаф электронogramмаси.



217-расм. Юпқа мис варақлар электронogramмаси.

юпқа металл пластинка орқали ўтса, улар орасида, тушаётган дастага нисбатан Вульф—Брэгг муносабатини қаноатлантирилган бурчак остида жойлашганлари ҳамма вақт топилади. Бундай кристаллчалардан рентген нурлари қайтади ва бунда Вульф—Брэгг формуласидаги φ нинг берилган қийматига мос келган барча қайтган нурлар конус сирти бўйича кетади. Сочилган нурларнинг йулига бирламчи даста йуналишига тик жойлаштириб фотография пластинкаси қўямиз, унда қатор ҳалқалар ҳосил бўлади. Агар юпқа металл плёнка орқали электронлар дастаси ўтказилса, худди шундай манзара ҳосил бўлади: сочилган электронлар фотография пластинкасида интерференцион ҳалқалар системасини ҳосил қилади.

Г. П. Томсон тез электронлар билан (17500—56500 эв) ва П. С. Тартаковский—нисбатан секин электронлар билан (1700 эв гача) Дебай типидagi электронogramмалар олиш устида биринчи муваффақиятли тажрибалар ўтказдилар.

216—217-расмларда олтин ва мис варақлари орқали олинган иккита сурат келтирилган. Иккала ҳолда ҳам типик интерференцион ҳалқалар ҳосил бўлиши кўриниб турипти. Бу ҳалқаларни иккиламчи рентген нурлари эмас, балки сочилган электронларнинг ўзи вужудга келтиришини жуда содда

усулда исботлаш мумкин: магнит майдон ҳосил қилинганда бутун интерференцион манзара силжийди ва бузилади, бу вақтда рентген нурларидан олинган интерференцион манзара магнит майдонда албатта, ўзгаришсиз қолади.

Миқдорий текшириш қуйидагича бажарилиши мумкин. Мазкур металл варақ учун ва варақдан фотопластинкагача масофа ўзгармаганда дифракцион ҳалқанинг r радиуси ва λ тўлқин узунлик орасида

$$\frac{r}{\lambda} = \text{const} \quad (144.1)$$

муносабат ўринли бўлишини геометрик мулоҳазалар ёрдамида осон исботлаш мумкин*. Бу тажрибаларда энергияси килоэлектрон-вольтларда ўлчанадиган электронлардан фойдаланишга (секин электронларнинг металл варақлар томонидан кучли ютилиши сабабли) тўғри келади. Бу ҳолда тўлқин узунлик учун ёзиладиган $\lambda = 12,25 V^{-1/2}$ оддий ифода ноаниқ бўлиб қолади ва релятивистик эффектлар ҳисобга олинган

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{V}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} V) \quad (142.3)$$

формуладан фойдаланиш керак**. Бу ифодани (144.1) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{rV^{1/2}}{12,25 (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} V)} \approx \frac{rV^{1/2}}{12,25} (1 + 0,489 \cdot 10^{-6} V) = \text{const}. \quad (144.2)$$

* (144.1) ни келтириб чиқаришни ушбу китобдан қаранг: П. С. Тартаковский, Экспериментальные основания волновой теории материи, 51-бет, ГТТИ, 1932.

** Бу ифода қуйидагича ҳосил қилинади: де-Бройль формуласи $\lambda = \frac{h}{m v}$

да m масса учун $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ релятивистик ифодани олиш керак.

У ҳолда
$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ҳосил бўлади. Энди нисбийлик назариясидаги кинетик энергия ифодасидан фойдаланиб (64-§ га қаранг), v тезликинн тезлантирувчи потенциал орқали ҳисоблаймиз.

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = eV.$$

Бундан қуйидагини топамиз:

$$v = c \frac{\sqrt{e^2 V^2 + 2m_0 c^2 e V}}{m_0 c^2 + e V}.$$

XX жадвалда олтин варақлар билан ўтказилган тажриба натижалари келтирилган Талаб қилинадиган доимийликнинг қониқарли бажарилиши жадвалнинг учинчи устунидан кўри-
ниб турибди

XX жадвал

V (вольт)	r (см)	$r V^{1/2} (1+0,489 \cdot 10^{-6} V)$
24600	2,50	398
31800	2,15	390
39400	2,0	404
45600	1,86	405
54300	1,63	388

Ниҳоят, электрон нурлар билан олинган дебай-шеррер расмларидан фойдаланиб, турли кристалларнинг панжара доимийсини ҳисоблаб чиқиш ва ўша кристаллар учун рентген нурлари ёрдамида олинган натижалар билан таққослаш мумкин. Йққала ҳолда ҳам қаноатланарли даражада бир-бирига мос тушувчи рақамлар олинади (XXI жадвални қаранг). Ҳозирги

XXI жадвал

Металл	Панжара доимийси (Å да)	
	электронлар интерференциясидан	рентген нурлари интерференциясидан
Al	4,035	4,063
Au	3,99—4,20	4,06
Pt	3,89	3,91
Pb	4,99	4,92
Fe	2,85	2,86

Де-Бройль формуласига қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV \left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)}}$$

агар тезлантирувчи потенциал V электрон-вольтларда ифодаланган бўлса,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{m_0e}{150} V \left(1 + \frac{eV}{600m_0c^2}\right)}} = \sqrt{\frac{h^2}{m_0e}} \sqrt{\frac{150}{V}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eV}{600m_0c^2}}}$$

Константаларнинг сон қийматларини ўрнига қўйиб, текстда келтирилган

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \frac{1}{(1 + 0,978 \cdot 10^{-6} V)^{1/2}} \approx \sqrt{\frac{150}{V}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} V)$$

формулани топамиз.

вақтда электронлар дастаси интерференциясига доир тажрибала-
лар асосида электронографик анализ методи ривожланди, бу
метод ўзининг аниқлиги ва амалда кенг қўлланиши жиҳатидан
рентгенографик анализдан қолишмайди, баъзи ҳолларда эса
ҳатто қулайроқдир*.

Ма ш қ. 30 кэв энергияли электронлар дастаси юпқа алюминий варақдан
ўтади. Вульф—Брэгг формуласини қўллаш мумкин деб фараз қилиб, биринчи
тартибли интерференцион манзара учун оғиш бурчагини ҳисобланг. Al пан-
жара доимийсини XXI жадвалдан олинг.

145- §. Молекуляр дасталар ва нейтронлар ҳосил қиладиган интерференцион ҳодисалар

Де-Бройль гипотезасига мувофиқ фақат электронларгина
эмас, балки ҳар қандай моддий заррачалар ҳам, яъни атомлар,
молекулалар ёки оғир элементар заррачалар (протонлар, ней-
тронлар) ҳам тўлқин хоссаларига эга бўлиши керак. Де-Бройль-
нинг $\lambda = \frac{h}{mv}$ формуласи бўйича тўлқин узунлик массага тескари
пропорционал бўлганлиги учун тезликлар бир хил бўлганда
тўлқин узунлиги оғир заррачалар ҳолида электронлар ҳолида-
гидан анча кичик бўлади. Шунинг учун де-Бройль тўлқинлари
дифракциясини атомлар ва бошқа оғир заррачалар кичик тез-
ликларга эга бўлганда кузатиш мумкин. Ҳисоблашнинг кўр-
сатишича, уй температурасида енгил атомларнинг де-Бройль
тўлқин узунлиги 10^{-8} см тартибидадир, яъни рентген нурлари
тўлқин узунлиги катталиги тартибидадир. Молекуляр дасталар,
яъни нейтрал атомлар ёки молекулаларнинг йўналтирилган
тўғри чизиқли оқимлари** билан ишлаш техникасининг анча
такомиллашганлиги, шунингдек гелий ва нейтрал водород
атомлари дасталари ҳосил қиладиган дифракцион ҳодисаларни
ҳам кузатиш имконини берди. Кичик тезликли атомлар ёки
молекулалар кристалл ичига кира олмаганлиги учун, кристалл
де-Бройль тўлқинларига икки ўлчовли қайтаргич панжара си-
фатида таъсир қилади. Бундай панжарада рентген нурлари ди-
фракциясини 32- § да қараб ўтган эдик. У ерда, ясси панжара
қўш кўп хилли дифракцион спектрлар бериши, масалан, $(+1, +1)$
ёки $(+1, -1)$ ва ҳоказо тартибдаги спектрлар бериши кўрса-
тилган эди. Де-Бройль тўлқинлари кристалл панжарадан қайт-
ганида ҳам худди ўшандай натижа ўринли бўлиши керак.

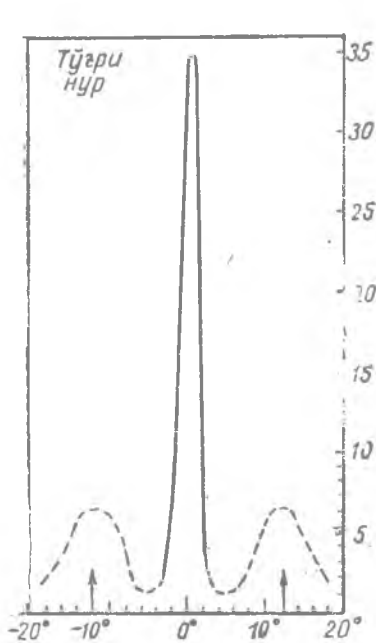
218 ва 219- расмларда гелий атомлари ва водород молекула-
ларининг литий фторит кристаллидан қайтишида олинган ди-
фракцион манзаралар келтирилган. Иккала ҳолда ҳам икки ён
максимумлар $(+1, -1)$ тартибли дифракцияга мос келади.

* Қаранг: З. Г. Пинскер, Дифракция электронов СССР ФА, 1949.

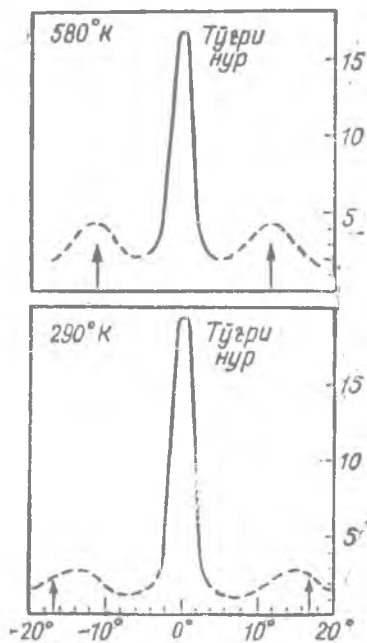
** Молекуляр дасталар методи ва унинг қўлланишига қуйидаги моно-
графия бағишланган: К. Ф. Смит, Молекулярные пучки, Физматгиз, 1959.

Максимумлар вазиятини ҳисоблаш, тажриба маълумотларига жуда яхши мос келувчи натижаларни беради. Шундай қилиб, молекуляр дасталар билан бажарилган тажрибалар материянинг тўлқин хоссалари мавжудлигини фақат сифат жиҳатдангина тасдиқлаб қолмай, балки атомлар ва молекулаларга нисбатан де-Бройль формуласининг тўғрилигини миқдор жиҳатдан ҳам тасдиқлайди.

Оғир заррачаларнинг тўлқин хоссалари мавжудлигини ва де-Бройль формуласининг қўлланиши мумкинлигини, айниқса,



218-расм. Гелий атомларининг литий фторид кристаллдан дифракцияси.

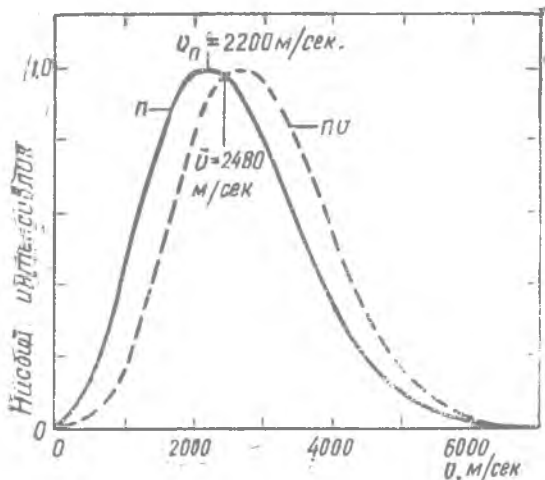


219-расм. Водород молекулаларининг литий фторид кристаллдан дифракцияси.

нейтронлар яққол равишда ошкор қилди. Нейтронлар протонлар билан бир қаторда атом ядроларининг элементар таркибий қисмларидир; уларнинг массаси тақрибан протон массасига тенг, лекин улар электр зарядига эга эмас. Шу охирги хоссаси туфайли нейтронлар қаттиқ жисмлар ичига эркин кира олади ва улар билан кристаллнинг фазовий панжарасида дифракцияни амалга ошириши мумкин.

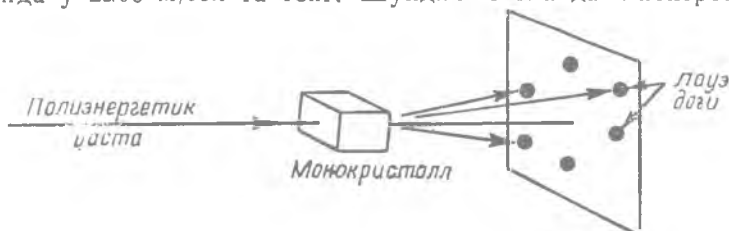
Лауэ методи бўйича дифракция ҳосил қилиш учун тўлқин узунликлар туташ спектри бўлиши зарурлигини биламиз. Нейтронлар жисм ичига киргач, улар модда билан иссиқлик муво-

занатига келади, шу туфайли нейтронлар ҳолида де-Бройль тулқинлари туташ спектри (полиэнергетик даста) олинади. Бунда уларнинг тезликлари кинетик назариядан маълум бўлган Максвеллнинг тақсимот қонунига бўйсунди. Бу қонун



220-расм. Секинлатувчи билан мувозанатда бўлган нейтронлар тақсимоти ($T = 293^\circ\text{K}$; нейтронлар зичлиги ва оқими v нинг функцияси сифатида берилган).

220-расмда уй температураси учун график равишда тасвирланган. Бунда v_0 „энг кўп эҳтимолли тезлик“; уй температурасида у 2200 м/сек га тенг. Шундай тезликдаги нейтронлар

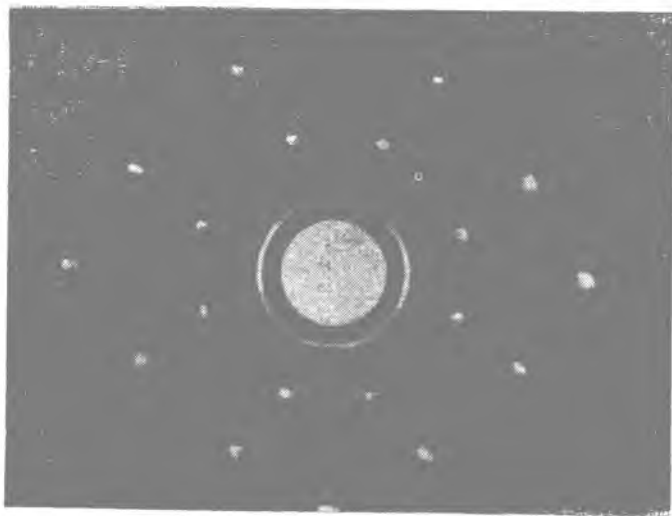


221-расм. Рентген нурлар ва нейтронлар дастаси учун Лауэ дифракцияси методи.

учун де-Бройль тулқин узунлиги $1,8 \text{ \AA}$ га тенг, яъни кристалл панжарада дифракцияни амалга ошириш учун зарур бўлган катталikka эгадир. $\bar{v} = 2480$ м/сек катталик — уй температурасида нейтронларнинг ўртача тезлиги; расмда пунктир билан $n v$ нейтронлар оқими учун, яъни 1 см^2 юзни бир секундда кесиб ўтувчи нейтронлар сони учун тақсимот эгри чизиги ҳам тасвирланган.

221- расмда нейтронларнинг полиэнергетик дастаси учун дифракция тажрибасининг схемаси тасвирланган, 222- расмда эса NaCl монокристалли орқали нейтронлар ўтганда олинган фотография келтирилган. Фазовий панжарадаги дифракция учун типик бўлган доғлар тақсимоти кристалл симметриясига мос келади.

Брэгг методи буйича дифракция олиш учун нейтронларнинг моноэнергетик оқими бўлиши керак. Бундай дастани олиш учун, дастлаб кристаллдан нейтронлар дастаси қайтади,



222- расм. NaCl кристаллининг Шулл ва Уоллан олган нейтронограммаси.

бу қайтишда маълум тезликли ва, бинобарин, маълум де-Бройль тўлқин узунликли нейтронлар ажралади. Муайян сирпаниш бурчаги ҳоли учун қуйидаги Вульф–Брэгг шarti:

$$\lambda = 2d \sin \theta$$

(бунда $\lambda = h/mv$) бажарилса, у ҳолда нейтронлар қайтади.

θ бурчакни тегишли равишда танлаб, полиэнергетик дастадан ҳар қандай зарурий де-Бройль тўлқин узунлигига эга бўлган нейтронларни ажратиб олиш ва улардан фойдаланиб, кристаллар тузилишини текшириш мумкин.

Ҳозирги вақтда нейтронлар дифракцияси ёрдамида кристаллар тузилишини текшириш ривожланиб, структура анализининг структуравий нейтронография деб аталадиган алоҳида соҳасига айланди. Структуравий нейтронография рентгенографик ва электронографик анализ усулларини муҳим равишда тўлдиради. Худди шу нейтронлар дифракцияси туфайли, кристалл панжараларда водород атомлари вазиятини аниқлаш мумкин бўлди.

146-§. Тўлқин пакет ва заррача

Кейинги тўрт параграфда электронлар ёки, ҳатто, атомлар каби „заррачалар“ билан ўтказилган интерференцион тажрибалар, ёруғлик билан қилинган тегишли тажрибалар сингари, бу „заррачаларнинг“ тўлқин табиатли эканлигига шунчалик яхши гувоҳлик беришига ишонч ҳосил қилдик. Биз биринчи марта ёруғликда топилган икки ёқламаликка яна дуч келдик. Аммо квант механикаси тараққиётининг дастлабки даврида, заррачаларни *тўлқин пакетлар* каби қараб, бу зиддиятни бартараф қилишга умидворона уриниб кўрилди. Бунинг учун қуйидаги асослар бор эди. Электрон ёки бошқа моддий заррача, албатта, ясси гармоник тўлқин бўла олмайди, чунки бундай тўлқин чексиздир, заррача эса фазода ва вақт жиҳатидан чекланган, яъни у вақтнинг муайян пайтида фазода муайян жой эгаллайди. Аммо ясси тўлқинлардан уларнинг **k** тўлқин векторларини тегишли равишда танлаб, исталганча кичик ўлчовли тўлқин пакетлар тузиш мумкинлигини 135-§ да кўрган эдик. Заррачани тўлқин пакет сифатида қараб бўлмасмикин? Де-Бройль тўлқинларининг қуйидаги ажойиб хоссаси бу фарзани тасдиқлаётгандек кўринар эди: уларнинг группавий тезлиги, яъни пакет максимуми ҳаракатининг тезлиги заррачанин v тезлигига тенгдир:

$$g = v. \quad (141.2)$$

Бу содда идея қанчалик жозибадор бўлиб кўринмасин, яқиндан текширганда унинг мутлақо нотўғри экани маълум бўлади. Ҳал қилувчи эътироз қуйидагидан иборат. Пакетнинг 135-§ да топилган қулай хоссалари—худди унинг турғунлиги ва бир бутун сифатида группавий тезлик билан ҳаракатланиши—пакет хоссаларининг тула манзарасини бермайди. Улар ҳақиқатан биринчи яқинлашиш сифатидагина олинган эди, чунки 135-§ да пакет ҳаракатини текширганда v ва k орасидаги

$$v(k) = v(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{dv}{dk} \right)_0$$

тақрибий муносабатдан фойдаланган эдик, бунда ёйилманиннг ҳамма кейинги ҳадлари ташлаб юборилган эди. Агар аниқ ҳисоб қилинса, бир оз бошқача натижа олинади, чунончи, пакет максимуми де-Бройль тўлқинлари учун v га тенг бўлган $\frac{dv}{dk}$ тезлик билан ҳаракатланса-да, дисперсияловчи муҳитда ҳаракатланаётганда пакет ўз шакли ва ўлчовини сақлаб қолмайди, балки аста-секин кенгая боради—ёйилиб кетади.

Бундай ёйилишнинг сабабини қуйидаги сифат мулоҳазалардан тушуниб олиш қийин эмас. Айтайлик, бирор муайян пайтда ясси тўлқинлар суперпозицияси оқибатида пакет ҳосил бўлсин. Унинг ҳосил булиши учун бирор $\pm \Delta k$ интервалда узлук-

сиз ўзгарадиган k тўлқин сонларга (ёки тегишли тўлқин узунликларга) эга бўлган тўлқинларни қўшиш зарур. Агар муҳит дисперсиясиз бўлса, у ҳолда бу барча тўлқинлар бир хил тезлик билан тарқалади ва пакет сақланади. Агар дисперсия мавжуд бўлса, бу ҳолда пакетни ташкил этган ясси тўлқинлар турли фазавий тезлик билан тарқалади: тезроқ тарқалаётганлари олдинга ўтади, секинроқлари — орқада қолади. Бунинг оқибатида, ясси тўлқинлар орасидаги паке: ҳосил бўлиши учун мос келадиган фазавий муносабатлар кейинги ондаёқ бузилади ва пакет чузилиб — ёйилиб кетади. Бу ёйилиш тезлигини энг тез ва энг секин тўлқинларнинг группавий тезликлари фарқи, яъни $\frac{d^2v}{dk^2} \Delta k$ катталик характерлайди, ammo пакетларни биринчи марта текширганимизда худди шу $\frac{d^2v}{dk^2}$ ҳосилалари ҳадни ташлаб юборган эдик.

Бу ерда келтирилмаган узундан - узоқ ҳисоблашларнинг кўрсатишича*, агар де - Бройль тўлқинларидан $t = 0$ пайтда қуйидаги

$$u(x, 0) = Ce^{-x^2/2b^2}$$

Гаусс эҳтимоллик эгри чизиғи шаклида бўладиган пакет ташкил этилса,

$$t = 2\pi \sqrt{3} \frac{b^2 m}{h}$$

формула билан ифодаланадиган вақт оралигидан сўнг пакетнинг кенглиги икки марта ортади. Бу формулаларда u — пакетнинг x координатали нуқтадаги амплитудаси, b катталик эса $t = 0$ пайтдаги пакетнинг ярим кенглиги, m — заррачанинг массаси ва h — Планк доимийси. $m = 1g$ массали ва $2mm$ ($b = 0,1cm$) ўлчовли заррачага тегишли пакет $6 \cdot 10^{17}$ йилдан кейин икки марта кенгайди. Ammo электрон ($m = 0,9 \cdot 10^{-27}g$) учун $b \sim 10^{-12}cm$ бўлганда $t \approx 1,6 \cdot 10^{-20}сек$ булар, яъни электронга мос келадиган пакет бир ондаёқ ёйилиб кетган бўлар эди, бу эса энг содда кузатишларга зиддир.

147 - §. Де-Бройль тўлқинларини статистик талқин қилиш

Олдинги параграфда заррачаларни тўлқин пакетлар сифатида текширишга уриниш муваффақиятсизликка учраганини кўрдик: пакетлар ёйилади ва йўқолиб кетади, „заррачалар“ эса бундай хоссага эга эмас.

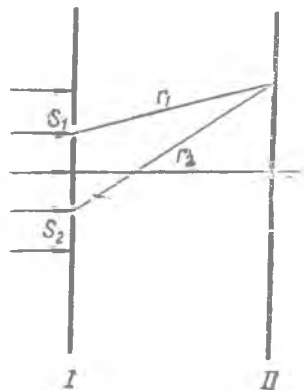
* Бундай ҳисоблашлар билан қизиқувчиларга қуйидаги китобларни тавсия қиламиз: Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, 131 - бет, Гостехиздат, 1949; Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн в ионосфере. 11 - §, Гостехиздат, 1947.

Бундан ташқари, микроскопик заррачаларни тўлқин пакетлар сифатида қараш мумкин эмаслигини кўрсатувчи умумий мулоҳазалар ҳам мавжуд. Элементар заррачаларнинг зарурий белгиси уларнинг бўлинмаслигидир. Манфий электр электронлардан иборат деб даъво қилишимизнинг сабаби шундаки, зарядланиш ва разрядланиш процессида ё бир электрон, ёки бир нечта (бироқ ҳар қандай ҳолда ҳам биттадан кам эмас ва бутун сондаги) электрон зарядига тенг электр миқдори узатилиши мумкин. Худди шунингдек, фотоэффект қонунларини анализ қилиш фотонларнинг мавжудлиги ҳақидаги хулосага олиб келади, чунки, маълум бўлишича, ν частотали монохроматик ёруғлик энергияни фотонларнинг улушлари ҳолида эмас, балки фақат бутун $h\nu$ фотонлар тариқасида ташийди ва ютилиш процессида ҳам энергияни фақат бутун фотонлар тариқасида узатади.

Тўлқинлар бундай бўлинмаслик хоссага эга эмас. Тўлқин турли фазавий тезликли икки муҳит чегарасида қайтган ва синган тўлқинларга ажралади, кристалл орқали ўтганда у қатор дифракцион дасталарга ажралади ва ҳоказо. Агар электронни тўлқинлар тўплами деб қараганимизда эди, у ҳолда, масалан, электронлар кристалл орқали бирин-кетин ўтадиган жуда кучсиз дастанинг дифракциясида ҳар бир дифракцион даста фақат электрон бўлагини олиб юриши керак эди, ҳақиқатда эса бундай бўлмайди.

Агар, қайтиш, синиш, дифракция каби процессларда заррачаларнинг бутунлиги сақланса, у ҳолда икки муҳитнинг чегара сиртига тушган заррача ё қайтади, ёки иккинчи муҳитга ўтади. Аммо бундай ҳолда тўлқинлар ва заррачалар орасидаги боғланиш фақат статистик равишда, яъни қуйидагича талқин қилинади: тўлқин интенсивлигининг ўлчови бўлган амплитуда квадратининг маълум жойдаги қиймати заррачанинг шу жойда топилиш *эҳтимоли* ўлчови бўлади.

Бу талқинни тушунтириш учун қуйидаги типик интерференцион тажрибани қараб чиқамиз: S_1 ва S_2 иккита тешикли тиниқмас экранга ясси тўлқин тушади (223-расм). Бундай ҳолда етарлича узоқдаги сезгир экранда (фотопластинкада, флуоресцирловчи экранда) ёруғ ва қоронғи йўللار кетма-кетлигидан иборат интерференцион манзара вужудга келади. Бундай манзаранинг тўлқин нуқтаи назардан тушунтирилиши ҳаммага маълумдир: чапдан экран I га ясси тўлқин тушишини тасаввур қилиш керак; S_1 ва S_2 тешиклар бу ҳолда экрандан ўнг



223-расм.

томонда тарқалувчи ва ўзаро интерференцияланувчи иккита сферик гюйгенс тўлқинларнинг марказлари бўлиб қолади. Экран // нинг бу тўлқинлар йўл фарқи нолга ёки жуфт сондаги ярим тўлқин узунликка тенг бўладиган жойида амплитуданинг максимуми ва шунинг билан бирга ёруғ полосанинг максимуми олинади; йўл фарқи тоқ сондаги ярим тўлқин узунликка тенг бўлган жойда тўлқинлар интерференциялашганда бир-бирини сўндиради, амплитуда нолга тенг, бинобарин, қоронғи полоса ҳосил бўлади.

Электронларни бўлинмас „заррачалар“ деб қараб, бу полосаларнинг вужудга келишини қандай тушунса бўлади? Тушаётган электронлар дастаси жуда заиф деб тасаввур қилайлик. Тажриба, интерференцион манзара характерининг интенсивликка боғлиқ бўлмаслигини кўрсатади. Фотопластинка айрим электронлар тушишини қайд қила олади деб фараз қиламиз*. Бундай ҳолда электронларнинг заиф дастаси экран / орқали ўтганда фотопластинкада дастлаб тартибсиз жойлашган айрим қоронғи нуқталар—электронларнинг урилиш излари пайдо бўлар эди. Фақат бу доғлар сонининг, яъни электронлар урилиши сонининг интерференцион манзара максимумлари бўлиши лозим жойларда кўпроқ бўлишлигини пайқаш мумкин бўларди, холос. Тажрибани етарлича узоқ вақт давом эттирганда бу айрим излар интерференцион полосалар ташкил қилиши керак. Шундай қилиб, ёруғ интерференцион йўллар—электронлар кўпроқ тушадиган жойлардир; қоронғи йўллар—электронлар мутлақо тушмайдиган жойлардир**.

Агар бу мулоҳазаларни энди кўп сондаги электронлар тўдасига эмас, балки айрим электронларга татбиқ қилинса, у ҳолда электроннинг топилиш эҳтимоли тўлқин майдон амплитудаси максимал катталиikka эга бўлган жойда максимал бўлади, амплитуда нолга тенг бўлган жойда—у нолга тенг бўлади. Аммо амплитуданинг мусбат ҳам, манфий ҳам бўла олишлиги, эҳтимолнинг эса ҳамма вақт мусбат сон бўлишлиги сабабли эҳтимолни амплитуда *квадрати* орқали ифода-лаш зарур.

Де-Бройль тўлқинларини ана шундай статистик талқин қилишни шартлашиб олиб, тўлқин пакетларни қулай муҳокама методи сифатида сақлашимиз мумкин. Фазонинг электрон бирор муайян пайтда турган жойини эгаллайдиган тўлқин пакет тузамиз ва уни ўз ҳолига қўямиз. Энди пакетнинг бирор кейинги t пайтдаги шаклини топсак, у ёки бу жойдаги унинг амплитудаси квадрати электронни шу жойда t пайтда топиш эҳтимолига пропорционал бўлади.

* Келгусида аниқлик учун кўпинча электронлар тўғрисида гапираимиз, ҳар қандай микроскопик заррачаларни назарда тутамиз.

** Бу ерда позитив тасвир назарда тутилади. Фотопластинкада ўз-ўзидан маълумки, онг кўп электронлар тушган жойлар қора бўлиб чиқади.

148-§. Ноаниқлик муносабатлари

Де-Бройль тўлқинларининг олдинги параграфда қараб чиқилган статистик талқини назарий йўл билан олинган натижаларни тажриба маълумотлари билан боғлаш имконини беради. Бироқ бу талқин микроскопик объектларнинг—электронлар, фотонлар ва ҳоказоларнинг табиати тўғрисидаги масалани четда қолдиради. Бу ердаги асосий қийинчилик—тажрибадан олинган натижаларни тавсифлаш учун гоҳ заррачалар манзарасидан, гоҳ тўлқинлар манзарасидан фойдаланишга тўғри келишидадир. Бир хил объектларнинг ўзи—электронлар—Вильсон камераси билан ўтказиладиган тажрибада кескин чегарали излар қолдиради, яъни узини муайян траекториялар бўйича ҳаракатланувчи снарядлар сингари тутади, микрокристалл варақлар орқали ўтиш тажрибаларида эса ёруғ ва қоронғи интерференцион ҳалқалар беради, яъни ўзини суперпозиция принципига бўйсунадиган тўлқинлар каби тутади. Бироқ, заррачалар ва тўлқинларнинг хоссалари фақат бир-биридан жуда фарқ қилибгина қолмасдан, балки кўп жиҳатдан бир-бирини истисно қилганлигига қарамай, электронлар, шубҳасиз ягона табиатли бўлганлигидан, улар тулқин ҳам эмас, заррача ҳам эмас, шунинг учун бир хил ҳолларда тўлқин ва заррачалар манзаралари тўғри бўлади, бошқа ҳолларда эса яроқсиз бўлиб қолади, деҳулоса чиқаришга тўғри келади. Микрозаррачаларнинг хоссалари шунчалик узига хоски, уларнинг табиати атрофимиздаги макроскопик жисмларнинг табиатидан шу қадар фарқ қиладики, бу микроскопик заррачаларни ўзимизга маълум образларга таққослаш мутлақо мумкин бўлмайди. Аммо, равшанки, *бир хил объектларнинг ўзини тавсифлаш* учун ҳам тўлқин, ҳам корпускуляр манзаралардан фойдаланишга мажбур бўлганлигимиз сабабли, бу объектларга заррачаларнинг *барча* хоссалари ва тўлқинларнинг *барча* хоссалари тааллуқли бўлади, дея олмаймиз. Масалан, электронларнинг тўлқин хоссаларга эга бўлишлиги, муқаррар равишда, классик механика заррачани характерловчи тушунчаларни бу микрозаррачаларга татбиқ қилишда қандайдир чеклашлар киритиши керак.

Бу чеклашлар қандай эканлигини кўриб чиқамиз. Классик механикада заррачалар қуйидаги асосий хоссаларга эгадир: ҳар қандай заррача вақтнинг исталган пайтида фазода қатъий аниқ жойни эгаллайди [бунда „жой“ дейилганда оғирлик маркази координаталари назарда тутилади] ва маълум импульсга эга бўлади (тинчлик массаси нолга тенг бўлмаган заррачалар учун ($p = mv$) маълум импульсга маълум v тезлик мос келади]. Бир вақтнинг ўзида вазият ва тезликни аниқ белгилай олиш имконияти макроскопик заррачаларнинг муҳим характерли хоссасидир, шунинг учун ҳам, классик физикада заррачалар системасининг „ҳолати“ барча координаталар ва уларга мос

барча импульслар тўплами орқали тўла характерланади. Биз ҳозир электронларда тўлқин хоссаларнинг мавжуд бўлишлиги микроразрачалар системаси ҳолатини *бундай* тавсифлаш имкониятига муҳим чеклаш киритишини кўрамиз.

Айтайлик, микроразрачанинг x ўқдаги вазияти бирор Δx ноаниқлик билан маълум бўлсин, бинобарин, заррача қаердадир x_0 ва $x_0 + \Delta x$ оралиқда туради, дейиш мумкин. Энди атом физикасининг барча фактлари тўлқин манзара ёрдамида ҳам тавсифланиши мумкинлигини эслайлик (137—139- § га қаранг). Заррачанинг вазияти бирор Δx ноаниқлик билан маълум деган фактни тўлқин манзарада, равшанки, тўлқин функция амплитудаси тахминан Δx га тенг кесмадагина нолдан фарқ қилади деб тавсифланади. Биз биламизки, бундай функцияни гармоник тўлқинларни қўшиш йўли билан тузатиш мумкин, лекин унинг ўзи гармоник тўлқин бўлмайди. Шунинг учун уни ψ ва k нинг маълум қийматлари орқали ифодалаб бўлмайди; фазода чекланган тўлқин функция *тулқин пакетдан* иборат бўлиб, уни синусоидал тўлқинларни қўшиш йўли билан тузиш учун қийматлари муайян Δk интервалда узлуксиз ўзгарадиган тўлқин вектори k бўлган тўлқинларни қўшиш лозим. Пакетнинг Δx кенглиги ва Δk интервал орасидаги муносабат, бизга 135- § дан маълум бўлганидек, қуйидаги шарт билан ифодаланади:

$$\Delta x \Delta k_x \geq 1. \quad (135.5)$$

Бу тенгсизликнинг иккала томонини Планк доимийси h га кўпайтирсак ва де-Бройль постулатига асосан $hk_x = p_x$ эканини ҳисобга олсак,

$$\Delta x \Delta p_x \geq h. \quad (148.1)$$

Бу муносабатдан x ва p_x бир вақтда аниқ қийматларга эга бўла олмаслиги келиб чиқади: агар x нинг қиймати аниқ бўлса, яъни агар $\Delta x = 0$ бўлса, у ҳолда $\Delta p_x \rightarrow \infty$ бўлади, демак p_x ҳеч қандай аниқ қийматга эга булмайди ва, аксинча. Агар x ва p_x лар маълум Δx ва Δp_x чегараларда ноаниқ бўлса, бу ҳолда улар орасида (148.1) муносабат мавжуд бўлади. Бу муносабатдан Δx қанчалик кичик бўлса, яъни заррача вазияти қанчалик аниқ белгиланган бўлса, Δp_x шунчалик катта бўлади, яъни тегишли импульснинг ташкил этувчиси ноаниқлиги шунчалик катта бўлади, деган натижа чиқади.

Бошқа иккита координата учун ўшанга ўхшаш тенгсизликлар олинади [(135.6) формулага қаранг].

$$\Delta y \Delta p_y \geq h, \quad (148.1')$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq h. \quad (148.1'')$$

Бу тенгсизликлар Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабатлари дейилади. *Улар, шу параграф бошида айтиб ўтилган мик-*

розаррачаларга классик тушунчалар татбиқланишини чегараловчи шартлардир. Ҳақиқатан ҳам, айтиб ўтилганидек, макраскопик заррача учун вақтнинг ҳар бир пайтида вазият ва импульсни аниқ топа олиш мумкин. (148.1) муносабат микроскопик заррача учун ҳолатни бундай тавсифлашнинг маъноси йўқлигини кўрсатади. Бу хулоса (148.1) муносабат туфайли Δx ва Δp_x ларнинг *бир вақтда* нолга тенг бўла олмаслигидан келиб чиқади [(148.1') ва (148.1'')] муносабатлар туфайли Δy ва Δp_y ҳамда Δz ва Δp_z учун ҳам ана шу хулоса ўринлидир]. Бундан бир вақтда x ва p_x ларнинг аниқ қийматларини топиш масаласини қўйиш маъносиздир, чунки микррозаррачада бундай қийматларнинг ўзи мавжуд бўлмайди, деган хулоса келиб чиқади.

Бунчалик ғалати хусусият электронлар ва бошқа микррозаррачаларнинг корпускуляр хоссалар билан бир қаторда тўлқин хоссаларга ҳам эга бўлишлигининг муқаррар натижаси эканлигини аниқ ўқиб олиш зарурдир. Корпускуляр хоссаларнинг мавжуд бўлишлиги заррачанинг маълум вақтда фазодаги ўрнини аниқлаш мумкин бўлишлигини талаб қилади. Жойни ҳатто тақрибан аниқлаш (яъни Δx , Δy , Δz ларнинг чекли қийматга эга бўлиши) ҳам мос тўлқин майдоннинг чекли ўлчовли бўлиши зарурлигига олиб келади. Бундай ҳолда эса, ҳар қандай тўлқин майдонга ҳам тааллуқли булган қуйидаги хулоса юзага келади: *чекли ўлчовли бўлиши билан бирга маълум λ қийматли* (яъни маълум k қийматли) *тўлқинни ифодалайдиган тўлқин майдонни ҳеч қандай усул билан тузиб бўлмайди.* Ё униси, ёки бошқаси бўлиши мумкин: ёки маълум λ тўлқин узунликли гармоник тўлқин мавжуд бўла олади, аммо бундай тўлқин чексиз ва, демак, бунда чекли жой (локализация) тўғрисида гап бўлиши мумкин эмас, ёки чекли тўлқин майдон мавжуд бўлади, аммо бунда маълум λ қийматли тўлқин йўқ, балки λ маълум интервалда узлуксиз ўзгарадиган туташ спектрли тўлқин пакет мавжуд бўлади. Пакет қанчалик энсизроқ бўлса, яъни жойнинг белгиланиши қанчалик аниқроқ бўлса, интервал шунчалик кенгроқ бўлади.

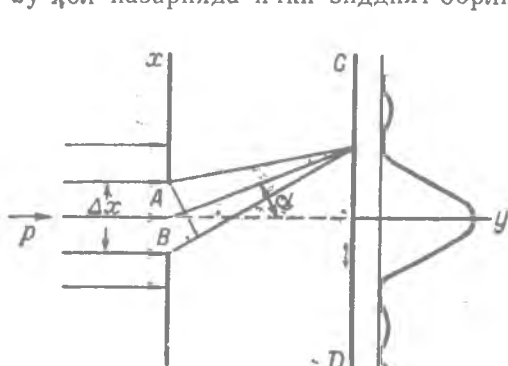
149- §. Микррозаррачанинг жойини ва импульсини аниқлаш

Олдинги параграфда электроннинг икки ёқлама табиатига асосланиб, ноаниқлик муносабатларини келтириб чиқарган эдик. Энди электроннинг координаталарини ва унинг импульсини аниқлаш имконини берадиган тажрибаларни қараб чиқамиз. Бунда ҳам, олдинги параграфдагидек, биз тажрибада ишончли аниқланган фактга—микррозаррачаларнинг икки ёқлама, корпускуляр—тўлқин табиатига таяниб иш қўришимиз табиий ва келгуси мулоҳазаларимизнинг ҳар босқичида микррозаррачаларда тўлқин хоссаларнинг мавжуд бўлишлигидан

макроскопик жисмлар учун яроқли бўлган тавсифлаш усулининг микрозаррачаларга татбиқлашга қандай чеклашлар қўйилишини кузатиб борамиз.

Микрозаррачанинг координатаси ва импульсини аниқлаш учун мўлжалланган тажрибаларни муҳокама қилиш, аёнийликдан ташқари, яна бошқа сабабга кўра ҳам муҳимдир.

Ҳақиқатда, агар назария, микрозаррачанинг координатаси ва импульсининг бир вақтдаги аниқ қийматлари тўғрисида гапириш мумкин эмас, деган хулосага олиб келгани ҳолда, бу иккала катталиқни исталган даражада аниқ ўлчаш имконини берадиган тажрибани (ҳатто бу тажрибани *техник қийинчиликлар* туфайли амалга ошириб бўлмаса ҳам) кўрсатиб берса, бу ҳол назарияда ички зиддият борлигини аниқлаган бўларди.



224-расм. Тирқишли экран ёрдамида электрон вазиятини аниқлаш.

Электрон вазиятини бевосита аниқлаш имконини берувчи тажриба қурилмасини қараб чиқайлик. Δx кенгликдаги AB тирқишдан (уни бундан кейин „диафрагма“ деб атаймиз) экранга чапдан, диафрагма текислигига тик йўналишда электрон тушаётган бўлсин (224-расм). x ўқни диафрагмага параллел, y ўқни эса унга тик йўналишда рамиз. Агар биз электронни

диафрагмадан ўнг томонда (масалан, у флуоресцирловчи CD экранда ҳосил қиладиган чақнашдан ёки фотопластинкада доғ пайдо бўлишидан) топсак, унда электрон AB тирқиш орқали ўтди дейиш мумкин. Бу ҳолда тирқиш орқали ўтиш пайтидаги „электрон жойини“ асбобнинг қолган қисмига нисбатан тирқишнинг вазияти сифатида аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан, агар диафрагма етарлича оғир ва асбобнинг қолган қисмларига маҳкам бириктирилган бўлса, унда диафрагмадаги тирқишнинг вазияти шу билан бирга бу санок системасига нисбатан белгиланган бўлади, бинобарин, электроннинг тирқиш орқали ўтиш пайтидаги вазияти тирқиш кенглигига тенг Δx ноаниқлик билан маълум бўлади. Равшанки, тирқишни торайтира бориб, электроннинг вазиятини тобора юқори даражадаги аниқлик билан белгилашимиз мумкин ва электрон жойини белгилаш аниқлигини бундай йўл билан оширишнинг ҳеч қандай чеки бўлмайди.

Энди электрон импульси ҳақида нима дейиш мумкинлигини кўрайлик. Биринчи қарашда импульс ҳам тула аниқликда

маълумдек кўринади. Ҳақиқатан, диафрагмадан *чап* томонда электроннинг учиш йўналиши диафрагма текислигига тик бўлганлиги учун *экрдан чап томонда* импульснинг *x*-ташқил этувчиси нолга тенг, *y*-ташқил этувчиси эса, масалан, *p* га тенг, яъни импульс аниқ қийматга эгадир. Аммо эркин электрон ҳаракатини ифодаловчи де-Бройль ясси тўлқини тирқишдан ўтишда дифракцияланади. Бу қуйидагиларни билдиради. Битта электрон ўрнига *y* ўқ йўналишида диафрагма орқали ўтувчи параллел электронлар дастасини тасаввур қилайлик. У ҳолда фотопластинкада дифракцион манзара ҳосил бўлади; бу манзаранинг ёйиқ бош максимуми *y* ўққа нисбатан симметрик жойлашган бўлиб, юқори тартибли кичик максимумлар бош максимумнинг икки томонида жойлашган (224-расмнинг ўнг қисмидаги эгри чизиқни қаранг). Дифракцион манзара кўринишидан, тирқишдан ўтгандан сўнг *кўпчилик* электронлар дастлабки йўналишда ҳаракатини давом эттиради, яъни $p_x = 0$ қийматни сақлайди деган хулоса чиқарамиз. Аммо ўз йўналишини ўзгартириб фотопластинканинг турли нуқталарига (224-расмнинг ўнг томонидаги эгри чизиқ шаклига мос келувчи эҳтимол билан) келиб тушган электронлар ҳам мавжуд бўлади.

Энди қуйидаги муҳим ҳолга диққатни жалб қилайлик. Юқорида тасвирланган дифракцион манзара тирқишдан бир вақтда кўп сонли электронлар ўтганда ҳосил бўлади. Бундан, дифракция ҳосил бўлиши учун кўп сонли электронлар қатнашиши зарур, айрим электрон эса ўзини қандайдир бошқача тутади деб ўйлаш мумкин. Бироқ бу шундай эмас. Дифракцион манзаранинг характери ёруғлик интенсивлигига мутлақо боғлиқмаслиги оптикада узоқ вақтдан бери маълум. Электронларга нисбатан қуйидаги аниқланди. Яқинда совет физиклари Л. Биверман, Н. Сушкин ва В. Фабрикант дифракцияловчи система орқали айрим электронлар, ҳатто нисбатан жуда катта вақт интервали билан битта-биттадан ўтган ҳолида ҳам ва, бинобарин, ўзларини бир-бирдан мутлақо мустақил тутганларида ҳам, оқибат натижада, тажриба етарлича узоқ вақт давом этганда худди *ун* миллионларча марта интенсивроқ оқимлар ҳосил қиладиган манзарага аниқ мос тушадиган дифракцион манзара юзга келишини кўрсатдилар.

Л. Биверман, Н. Сушкин ва В. Фабрикант тажрибасида электроннинг дифракцияловчи система орқали икки кетма-кет ўтиши орасидаги вақт оралиғи бир электроннинг бутун асбоб орқали ўтиш вақтидан 30 000 (1) марта катта бўлган. Шунга қарамасдан, вужудга келган дифракцион манзара интенсивлиги 10^7 марта кучли бўлган дасталар ҳосил қилган манзарадан ҳеч фарқ қилмаган. Бу—характерли дифракцион манзара пайдо бўлишига олиб келадиган учиш йўналишининг ўзгариши дифракцияловчи система орқали (бизни қизиқтираётган ҳолда—

тирқиш орқали) электроннинг якка ўтишида юз беришлигини кўрсатади.

Баъзи электронлар тирқишдан ўтганда ўз йўналишини ўзгартириши фактини *корпускуляр нуқтаи назардан* қандай тушунтириш мумкин? деган савол пайдо бўлади. Равшанки, электрон-заррача фақат тирқиш четлари билан ёки бутун экран билан ўзаро таъсирлашиш оқибатидагина ўз йўналишини ўзгартириши мумкин. Демак, корпускуляр манзарада йўналишнинг ўзгариши электроннинг тирқиш орқали ўтиш пайтида x ўқ йўналишида Δp_x қўшимча импульсга эга бўлиб қолиши натижасидир. Кўпчилик электронлар учун, аниқроғи, диафрагма орқали йўналишини ўзгартмасдан ўтган ва фотопластинканинг максимум қорайишига мос келадиган жойга тушган электронлар учун бу қўшимча импульс нолга тенг. Лекин қорайиш максимумдан иккала томонга равон камая борганлиги учун, бу ҳолда юқорида айтилган электронлар билан бир қаторда, фотопластинканинг турли жойларига тушадиган ва, бинобарин, тирқиш орқали ўтишда нолга тенг бўлмаган Δp_x қўшимча импульс оладиган электронлар ҳам бўлади.

Тирқишнинг Δx кенглиги электроннинг тирқиш орқали ўтиш пайтидаги вазиятини белгилашдаги ноаниқликни характерлаганидай, Δp_x қўшимча импульс катталиги импульснинг x -ташқил этувчисини топишдаги ноаниқликни характерлаши равшандир.

Ҳақиқатан, электрон дифракцион манзаранинг ҳар қандай нуқтасига (амалда—бош максимум соҳасида) тушиши эҳтимоли мавжудлигидан, Δp_x нолдан то дифракцион манзара бош максимуми кенглигига боғлиқ бўлган бирор чегаравий катталиккача бўлган барча қийматларни қабул қилиши мумкин.

Аммо, қурилма кўринишини ўзгартириб, унинг ёрдамида Δp_x ни тажрибадан аниқлаш мумкин. Худди, микрозаррачанинг у ўтадиган диафрагма билан ўзаро таъсирлашишига импульснинг (ҳаракат миқдорининг) сақланиш қонунини татбиқ қилиб, микрозаррача импульсини аниқлаш мумкин.

Тирқиш орқали ўтишда заррача диафрагмага параллел йўналишда, яъни x ўқ йўналишида қўшимча импульс олишлиги туфайли, тирқишли диафрагманинг ўзи ҳам x ўқи йўналишида, аммо тескари томонга тепки олади. Биз бу тепкини билсак, Δp_x ни ҳам билган бўлар эдик, у-ташқил этувчи ўзгаришсиз қолганлиги сабабли эса, электроннинг тирқиш орқали ўтиш пайтидаги импульсини аниқ билган бўлар эдик.

Тепкини ўлчаш учун диафрагмани етарлича енгил ва ҳаракатчан қилиш лозим. Агар диафрагма электрон ўтишига қадар асбобнинг бошқа қисмига нисбатан тинч турган бўлса, у ҳолда электрон ўтганда диафрагма оладиган тезликни ўлчаб ва унинг массасини билган ҳолда, диафрагма оладиган, бинобарин, электрон оладиган қўшимча импульсни топамиз.

Техник сабабларга кўра, масалан, электрон билан ўзаро таъсир оқибатида сезиларли тезлик оладиган даражада энгил экран яшаш мумкин эмаслиги туфайли, бундай тажрибани амалга ошириб бўлмаслиги процесснинг кутиладиган боришини текшириш асосида чиқарилган хулосаларнинг тўғрилигига ҳеч таъсир қилмайди. Ҳақиқатан, бу текшириш импульснинг сақланиш қонунини микрозаррачалар тўқнашишига татбиқ қилиш мумкинлиги экспериментал исботланган Комптон эффекти назариясидан ҳеч фарқ қилмайди. Демак, ҳаракатчан диафрагмали қурилма Δp_x ни, бинобарин, p ни ҳам исталган аниқлик даражасида топиш имконини беради. Бироқ, агар диафрагма ҳаракатчан бўлса, бу ҳолда у электроннинг тирқиш орқали ўтиш пайтидаги вазиятини аниқлаш учун қўзғалмас санок системаси бўлиб хизмат қила олмайди.

Шундай қилиб, икки турли тажриба бўлиши мумкинлигини кўраемиз. Бири—электроннинг тирқиш орқали ўтиш пайтидаги вазиятини аниқлаш имконини беради. Бошқача айтганда, бу тажриба электронни фазовий-вақт локализациясини амалга ошириш имконини беради. Бошқа тажриба импульс ва энергиянинг сақланиш қонунларидан электрон импульсини аниқ белгилаш учун фойдаланиш имконини беради, аммо бу тажриба электронни фазовий-вақт локализациялаш имкониятидан воз кечишни тақозо қилади.

Қўзғалмас диафрагмали қурилмани қараб чиқишга қайтамиз. Бу ҳолда, қурилма заррачанинг вазиятини Δx ноаниқлик билан ўлчаш имконини беради. Δx ноаниқлик исталганча кичик қилиниши мумкинлигини кўраемиз. Бироқ, диафрагма қўзғалмас бўлганда заррача ўтганда диафрагма оладиган тепкени ҳисобга олиш имконидан маҳрум бўламиз, заррача оладиган қўшимча импульс маълум Δp_x чегарада ноаниқ бўлиб қолади, Δx ва Δp_x ноаниқликлар $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ муносабат билан боғланганлигини исботлаймиз.

224-расмдан кўринишича,

$$\Delta p_x = p \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha. \quad (149.1)$$

Бошқа томондан, агар электронларнинг фотопластинкага фақат бош дифракцион максимум соҳасида тушишини назарга олсак, у ҳолда α бурчак у ўқ ва биринчи дифракцион минимумга томон йўналиш орасидаги бурчак бўлади. Бу минимумнинг вазияти диафрагманинг юқори ва пастки четларидан дифракцияланган тўлқинларнинг йўл фарқи λ га тенг бўлишлиги шартидан топилади. Бу қуйидагини беради (224-расмни қаранг):

$$\Delta x \sin \alpha = \lambda. \quad (149.2)$$

(149.1) ва (149.2) ни бир-бирига кўпайтирсак,

$$\Delta x \Delta p_x = \hbar \quad (149.3)$$

ҳосил бўлади. Шунингдек, агар ён дифракцион максимумлар ҳам назарга олинса, у ҳолда (149.3) шарт ўрнида $\Delta x \Delta p_x = n\hbar$ шартга эга бўламиз ва, бинобарин, умуман

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar. \quad (149.4)$$

Бу—ноаниқлик муносабатининг ўзидир.

Классик тушунчаларнинг микрозаррачаларга татбиқланишида ноаниқлик муносабати белгилаб берадиган чеклашларни микдор жиҳатдан баҳолаш учун p ни тезлик орқали ($p = mv$) ифодалаш ва (149.3) дан Δv ни топиш фойдалидир:

$$\Delta v = \frac{\hbar}{m \Delta x}, \quad (149.5)$$

\hbar — жуда кичик катталиқ, яъни

$$\hbar = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$$

бўлганлиги учун, Δv катталиқ асосан \hbar ва m ларнинг сон қийматлари орасидаги муносабатга боғлиқ бўлади. Принципиал гапирганда, ноаниқлик муносабати ҳар қандай массалар учун, жумладан, макроскопик массалар учун ҳам ўринли бўлади, чунки классик механика квант механикасининг чегаравий ҳоли эканини исботлаш мумкин. Бироқ, (149.5) муносабатдан кўринишича, масса орта борган сари Δv нолга интилади, чунки макроскопик массалар учун Δx нинг ақлга мувофиқ қийматлари ҳар қандай ҳолда \hbar нинг сон қийматидан анча катта бўлади. Аксинча, массаларининг катталиги тартиби \hbar катталиқ тартибига яқин бўладиган микрозаррачалар учун, вазиятни белгилаш аниқлигига, яъни Δx катталиқка боғлиқ ҳолда, Δv ноаниқлик катта қийматлар олиш мумкин. Буни иккита мисолда тушунтирамиз. Агар гап массаси $m = 1 \text{ г}$ бўлган жисм тўғрисида борса, у ҳолда оғирлик маркази вазиятини Δx ноаниқлик $10^{-4} \text{ см} = 1 \text{ мк}$ дан ошмайдиган аниқликда белгилаш тамомила қаноатланарлидир. Бу ҳолда:

$$\Delta v = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{10^{-4}} = 6,6 \cdot 10^{-23} \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

яъни тезлик ноаниқлиги ўлчаш имконияти чегарасидан узоқда ётади. Кутилганидек, макроскопик жисмлар учун ноаниқлик муносабатлари ҳеч қандай аҳамиятга эга эмас.

Бироқ, агар ўша муносабатни электронга татбиқ этсак, бошқача натижа чиқади. Электроннинг массаси $9 \cdot 10^{-28} \text{ г} \approx 10^{-27} \text{ г}$ га тенг, яъни у катталиқ жиҳатдан \hbar билан бир хил тартибдадир. Бу ҳолда Δv катталиқнинг тартиби вазиятни белгилаш аниқлигига, яъни Δx катталиқка боғлиқ бўлишлиги равшандир. Масалан, электроннинг муайян атомга тааллуқлигини аниқлаш талаб қилинсин. Бу ҳолда вазиятни белгилашдаги аниқлик, энг камида, $\Delta x = 10^{-9} \text{ см}$ бўлиши керак, чунки атом-

нинг ўлчами 10^{-8} см тартибидадир. У ҳолда (140.5) муносабат қуйидагини беради:

$$\Delta v = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{0,9 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-9}} = 7,3 \cdot 10^9 \text{ см/сек.}$$

Аммо 10 эв тартибдаги энергияли электроннинг 304-бетдаги формула билан ифодаланадиган тезлиги $v = 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{10} \text{ см/сек} = 1,87 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$. Шундай қилиб, бу ҳолда тезлик ноаниқлиги ўлчанаётган катталикнинг ўзидан бутун бир тартибга катта бўлишлигини кўрамиз. Бу атом системаларда ноаниқлик муносабатлари ҳал қилувчи роль ўйнашини кўрсатади.

Бу ва бунга ўхшаш ҳолларда Δx катталик тартибининг энг муҳим роль ўйнашлиги факти Вильсон камерасида микрозаррачаларнинг парадоксал бўлиб кўринадиган табиатини тушунтириш имконини беради. Дарҳақиқат, бу ерда биз заррачани энергияси етарлича катта бўлганда қатъий тўғри чизиқли траекторияларни кузатамиз ва импульснинг тўлқин хоссалар билан боғлиқ бўлган ноаниқлигининг ҳеч қандай аломатлари кўринмайди. Буни тушунтириш учун шу тўғри чизиқли траекториялар фотографиясини микроскоп орқали қараганда улар майда туман томчилари тизмасидан иборат бўлишлигини эътиборга олиш лозим. Бу томчи микрозаррачанин вазиятини белгилувчи „ўлчаш асбоби“ дир. Томчилар ўлчами 10^{-4} см тартибда; шунинг учун мазкур ҳолда $\Delta x = 10^{-4}$ ва электронлар ҳолида Δp ноаниқлик 10^{-23} тартибда. Иккинчи томондан микрозаррачаларнинг энергияси жуда катта бўлгандагина тўғри чизиқли траекториялар кузатилганлиги туфайли, p га нисбатан Δp жуда кичик бўлади ва кўрсатиб ўтилган аниқлик чегараларида заррача ўзини тамомила классик заррачадек тутади. Умуман, энергиялар жуда катта бўлганда де-Бройль тўлқин узунлиги жуда кичик бўлади ва худди оптикадагидек, кичик тўлқин узунликлар соҳасида геометрик яқинлашиш тамомила татбиқланурлидир. Оптикада бундай соҳада ёруғлик нурларининг дифракциясини назарга олмасдан қаралса, микрозаррачалар ҳолида эса—маълум траекторияларни қаралса—катта хатоликка йўл қўйилмаган бўлади.

Ма ш қ л я р: 1. Радий чиқарадиган α -заррачаларнинг энергияси $4,8 \cdot 10^6$ эвга тенг. Ноаниқлик муносабатларидан фойдаланиб, α -заррача вазиятини белгилашдаги аниқлик қандай бўлганда p импульснинг катталигига нисбатан унинг Δp ноаниқлигини эътиборга олмаслик мумкинлигини аниқланг. Ана шу ҳисобни энергияси 10^8 эв бўлган электронлар учун ҳам бажаринг. (Кўрсатма. Бундай энергияда электрон ўзини релятивистик заррачадек тутади ва унинг импульсини $p = \frac{h}{\lambda}$ формула бўйича ҳисоблаб топиш лозим.)

2. Чизиқли ўлчови 10^{-8} см тартибда бўлган соҳада заррача „қамалган“. Бу заррачанин ноаниқлик муносабатларини қаноатлантириш учун зарур бўлган минимал энергияси қанча бўлиши керак? Бу энергияни эрг ларда ва электрон-вольтаарда ифодаланг.

3. Водород молекуласи механикасида ноаниқлик муносабатларининг роли баҳолансин. Молекула ўлчовларини билган ҳолда, унинг атомлари вазиятини белгилашдаги минимал аниқликни баҳоланг ва импульснинг мос ноаниқлигини топинг.

4. Де-Бройль тўлқин узунлиги ўрганилаётган система ўлчовлари тартибида бўлганда Ньютон механикаси яроқсиз бўлиб қолади. Шу нуқтаи назардан Ньютон механикасининг водород атомига қўлланилиши масаласини қараб чиқинг, бунда электрон $0,5 \cdot 10^{-8}$ см радиусли доиравий орбита бўйлаб ҳаракатланади ва унинг ҳаракат миқдори моменти $\hbar/2\pi$ га тенг деб фараз қилинг (Бор назариясича, биринчи водород орбитаси). Бу маълумотлар бўйича электроннинг тезлигини ва де-Бройль тўлқин узунлигини топинг.

5. Водород молекуласидаги водород атоми учун уқоридагига ўхшаш гекширишни бажаринг. Водород атоми массасини жадвалдан олинг. Тезликни қуйидаги маълумотлар бўйича аниқланг: водород молекуласини чизиқли осциллятор деб ҳисобланг ва иссиқлик мувозанати шароитидаги 300° К тем-

пературада атомларнинг ўртача кинетик энергияси ($E = \frac{1}{2} kT$) ни топинг. Шундай йўл билан ҳисобланган де-Бройль тўлқин узунлигини водород атоми тебранишлари амплитудаси билан таққосланг, бунда тебранишлар частотасини 10^{14} сек⁻¹ деб олинг. Шундай ҳисоблашни 10° К даги мувозанат учун бажаринг ва иккала ҳолни ўзаро таққосланг.

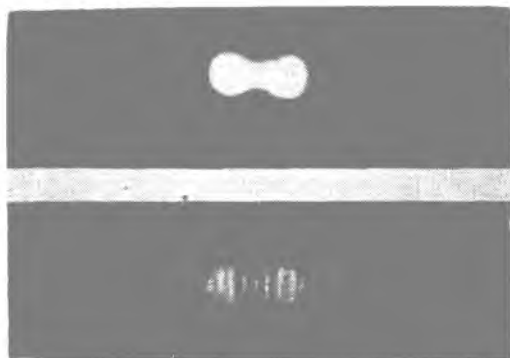
150-§. Ноаниқлик муносабатларининг хато талқинлари

Ноаниқлик муносабатлари турли нотўғри талқинларга сабаб бўлди.

Қуйидагича талқин тез-тез учраб туради: „Микрозаррачалар—электронлар, протонлар, фотонлар—жуда кичикдир, аммо улар вақтнинг ҳар бир пайтида маълум координаталарга ва маълум импульсга эгадир, яъни улар биллиард шарлари ёки сочма ўқ доналарининг жуда ҳам кичрайтирилган копияларидек бўлиб, булардан фақат, миқдоран, уз ўлчовлари билангина фарқ қилади. Шу билан бирга, бизга микрозаррачалар вазияти ва импульсини бир вақтда исталган аниқлик билан бишлини тақиқловчи табиат қонуни мавжуд бўлиб, у ноаниқлик муносабати билан ифодалангандир“. Бундай талқин аввало фалсафа нуқтаи назаридан номақбулдир, чунки у билишга чек қўяди ва шунинг учун агностицизмни, яъни идеализм турларидан бирини асослаш учун хизмат қилиши мумкин. Бу талқин, албатта, физика нуқтаи назаридан ҳам хатодир. Бунга ишониш учун яна битта тажрибани қараб чиқайлик.

Икки тирқишли диафрагма ва ундан анча олиёда турган фотопластинка бор деб тасаввур қилайлик. Агар бундай диафрагма орқали параллел электронлар дастаси ўтказилса, у ҳолда фотопластинкада муайян дифракцион манзара ҳосил бўлиши керак; бу манзара бир тирқишдан ҳосил бўлган дифракцион манзарадан фақат интенсивлиги жиҳатидангина эмас, балки ўзининг бутун характери билан фарқ қилади. Тирқишлардан бирини ёпамиз; фотопластинкада очиқ тирқишнинг ўзига ай-

нан ўхшаш тасвир (ёки, агар тирқиш етарлича тор бўлса,— бир тирқишдан дифракция манзараси) ҳосил бўлади. Олдин очиқ бўлган тирқишни ёпамиз ва иккинчисини очамиз: яна очиқ тирқиш тасвири ҳосил бўлади. Иккала тирқишни очамиз—бунда ҳосил бўладиган манзара биттадан тирқиш очиқ булганда ҳосил бўладиган манзараларнинг қўшилишига мос келмайди, лекин вазияти *иккала тирқиш* билан белгиладиган ёруғ ва қоронғи йўллардан иборат бўлади. 225-расмда айтилганларни тасдиқловчи иккита фотография келтирилган. Буни В. К. Аркадьев фотографияга олган. Фотографиялар ёруғлик билан ҳосил қилинган, аммо электронлар билан ҳосил қилинган манзара ҳам ўшанга мутлақо ўхшаш бўлиши керак.



225-расм. Юқориги фотография ёруғликнинг олдин бир тирқишдан, сунгра эса бошқа тирқишдан ўтишида олинган; пастки фотография ёруғликнинг ҳар икки тирқишдан бир вақтда ўтишида олинган.

Бу тажрибанинг натижаси муайян траектория бўйича ҳаракатланаётган, яъни вақтнинг ҳар бир пайтида муайян (ҳатто номаълум бўлса-да) координаталар ва импульсга эга бўлган заррача ҳақидаги тасаввур электрон ҳақидаги тасаввурга ҳеч мувофиқ келмаслиги мутлақо равшан. Бундай заррача (жуда ҳам майда сочма ўқ донаси бунга яққол мисол була олади) албатта муайян *битта* тирқишдан ўтиши керак; иккинчи тирқишнинг бўлиши ёки булмаслиги унинг траекториясига ҳеч қандай таъсир кўрсата олмайди. Ваҳолонки, у ёки бу ҳолларда, яъни иккинчи тирқиш очиқ ва ёпиқ бўлган ҳолларда электронлар ва бошқа микрзаррачалар ўзини *бутунлай бошқача тарзда* тутадилар. Баён қилинган тажриба электронлар ва бошқа микрзаррачаларни тўғридан-тўғри микродоналар деб қараш мумкин эмаслигини кўрсатади. Муайян траектория бў-

Йича ҳаракатланувчи ва бу траекториянинг ҳар бир нуқтасида муайян тезликка эга бўлган, ҳали ўлчаш ўтказилмаган жуда кичкина заррача тўғрисидаги тасаввур электрон ҳаракати манзараси бўлиб хизмат қила олмайди. *Тулқин оптикисида ёруғлик нури тушунчаси ўз маъносини йўқотганидек*, траектория тушунчаси электрон учун ўз маъносини йўқотади.

479-бетда эслатилган Биверман, Сушкин ва Фабрикант тажрибаси—электронларни „классик“ заррачалар, яъни заррашарчалар сифатида қараш мутлақо мумкин эмаслигининг янги ва янада ёрқинроқ исботидир. Ҳақиқатан, бу тажрибада дифракцияловчи система сифатида магний оксид кристалли хизмат қилган эди. Электронлар бундай кристаллчадан нисбатан жуда катта вақт оралиқларида битта-биттадан учиб ўтиб, сўнгра дифракция натижасида дифракцион максимумларга муайян йўналишларда учади. Электрон-микродона кристалл панжаранинг битта атоми билан ёки, ҳар ҳолда, оз сонли атомлар билан ўзаро таъсирлашган бўлар эди; ваҳолонки, дифракцион манзаранинг характери, унинг максимумлари ва минимумларининг тақсимланиши *бутун панжара* билан, яъни минглаб қатламларда жойлашган жуда кўп сонли атомлар билан аниқланади. Бунга ўхшаш дифракцион тажрибалар, шунингдек, электр зарядга эга бўлмаган нейтронлар билан ҳам амалга оширилади. Нейтронлар панжара атомлари билан масофа ошганда ғоят тез камаядиган ядро кучлари воситасида ўзаро таъсирлашади, шу туфайли дифракцион манзарани нейтронларнинг панжаранинг айрим атомлари билан ўзаро таъсирининг натижаси деб тушунтириш имконияти мутлақо истиснодир.

Шунинг учун ноаниқлик муносабатларининг маъноси уларнинг микрозаррачаларнинг реал мавжуд бўлган қандайдир хоссаларини билишни „тақиқлаши“да, яъни улар қандайдир даражада билишни чеклашида эмас, балки бу муносабатларнинг моҳият эътибори билан *корпускуляр* механика бўлмиш классик механика тушунчаларини микрозаррачаларга қўллашни чеклашидадир. Классик механикада, олдин таъкидлаб ўтилганидек, макроскопик заррачалар системасининг барча q_i координаталарининг ва уларга мос p_i импульсларининг бир вақтда аниқланишлиги система ҳолатини тўла тавсифлаш учун зарурдир. Микрозаррача учун, кўриб ўтганимиздек, бундай тавсифни амалга ошириб бўлмайди. Аммо, электрон координаталари ва импульсининг *бир вақтдаги* қийматлари тўғрисидаги масаланинг умуман физик маъноси йўқ, чунки электрон *ўз табиати жиҳатидан* ана шундай характеристикага *хос бўлмаган* объект эканлиги олдин айтилганлардан равшандир.

Агар шунга қарамай, электрон табиатини классик механика терминлари ёрдамида, яъни бир вақтда унинг вазияти ва импульсини кўрсатиб тавсифлашга уринаётган бўлсак, бунинг учун маълум сабаб бор. Ҳақиқатан, атом физикасида ўткази-

ладиган ҳар қандай тажрибанинг схемаси шундайки, биз бирор экспериментал қурилма ёрдамида фазода ва замонда юз бераётган у ёки бу объектив процесснинг кечишига тегишли масалага жавоб олишни истаймиз. Бу масалани макроскопик жисмлардан иборат бўлган асбоблардан фойдаланганда қўямиз. Бу асбобларнинг табииати, масалан, гальванометр стрелкасининг бурилиши ёки ўзи ёзар перосининг ҳаракати классик механика қонунларига бўйсунди; қурилманинг ўзи, унинг қисмлари тирқишлар, конденсаторлар, магнит майдонлари ва ҳоказоларнинг геометрик жойлашиши қандайдир фазовий-вақт саноқ системасидан иборат. Текшириляётган микрозаррачалар табиитини ҳам макроскопик қурилмани тавсифлашда қўлландиган классик механиканинг ўша тушунчаларидан фойдаланган ҳолда ўша фазовий-вақт саноқ системасида тавсифлаш зарур эканлиги ўз-ўзидан тушунарлидир. Биз, масалан, катод осциллограф экранида унга электронлар урилишидан ҳосил бўлган ёруғ доғнинг силжишини ўлчаймиз ёки қурилманинг мазкур жойида электрон оғиши ва ҳ. к. билан қизиқамиз. Биз бунда электронга ёки бошқа микрозаррачага бу объектларга хос бўлмаган классик тавсифлашни татбиқ қилганимиз учун, табиийки, бу классик тавсифлашнинг қўлланиш чегарасини кўрсатиб беришимиз керак, чунки микрозаррачалар классик механика қонунларидан фарқ қиладиган қонунларга бўйсунди, классик механика қонунлари эса уларга фақат тақрибан қўлланиши мумкин. Ноаниқлик муносабатлари худди мана шу чегарани кўрсатиб беради.

149-§ да -микрозаррачанинг координатаси ва импульсини аниқлаш тажрибасини қараб чиққанда иккала катталикни бир вақтда аниқлашга уринилганда қийинчилик пайдо бўлишини кўрган эдик: қурилма заррача вазиятини қанчалик аниқ белгилаш имконини берадиган бўлса, у импульсни аниқлаш учун шунчалик кам яроқли бўлади. Бунинг сабаби—вазиятни аниқлаш учун фазода қаттиқ жойлашган саноқ системаси хизмат қилиши кераклигидадир. Аммо худди мана шу туфайли биз импульс ташкил этувчисини аниқлаш имкониятидан маҳрум бўламиз, чунки қарама-қарши томонга йўналган тепки импульси катта массали умумий тагликка кетади (худди шу тагликнинг қўзғалмаслиги жойни аниқлаш имкониятини таъминлайди). Аксинча, енгил ҳаракатчан диафрагмага импульснинг сақланиш қонунини татбиқ қилиш бу диафрагмадан заррача жойини аниқлаш учун фойдаланиш имкониятидан маҳрум қилади. Бундай аҳвол фақат 149- § да текширилган қурилмагагина хос эмас. Н. Бор* микрозаррача жойини ва импульсини аниқ-

* Бу анализ тўла равишда Н. Борнинг қуйидаги мақоласида келтирилган: „Дискуссия с Эйнштейном о проблемах теории познания в атомной физике“. Русча таржимаси қуйидаги журналда босилган: „Успехи физических наук“, 66-т, 4-чиқиши, 571-бет, 1958. Бу мақола шунингдек Н. Борнинг „Атомная физика и человеческое познание“, ИЛ, 1961 й. китобига кирган.

лаш учун фойдаланилиши мумкин бўлган хилма-хил қурилмаларни анализ қилди ва бу вазиятнинг умумий эканлигини курсатди. Бу вазиятнинг келиб чиқиш сабаби қуйидагича: таъсир кванти h нинг катталиги чекли (нолга тенг эмас) бўлганлиги туфайли, микрозаррача устида бажарилган ўлчашлар ҳақида гап борганда, ўлчанаётган объект ва ўлчаш асбоби орасидаги ўзаро таъсирни эътиборга олмаслик мумкин эмас. Бу фақат 149-§ да кўрсатилганидек, ноаниқлик муносабатларида миқдорий ифодасини топади.

Аммо, Бор, бу ҳол фақат чуқур физик маънога эга бўлибгина қолмасдан, чуқур фалсафий маънога ҳам эгадир деб тасдиқлайди. Айнан, Борнинг фикрича, материянинг тўлқин ва корпускуляр хоссалари орасида зиддият йўқ, чунки тўлқин хоссаларни аниқлаш учун мулжалланган қурилмалар фақат шу хоссаларни ошкор қилгани ҳолда бошқа қурилмалар фақат корпускуляр хоссаларни ошкор қилади. Шундай қилиб, Бор фикрича, тўлқин ва корпускуляр хоссалар бир-бирини истисно қилмайди, балки тўлдиради: юқорида кўрсатилган сабабларга кўра, битта тажрибада микрозаррачаларнинг ҳамма хоссаларини аниқлай олмаймиз, лекин ҳар бири микрозаррачалар хоссаларининг бир томонини тавсифлаш имконини берадиган турли қурилмалардан фойдаланишимиз лозим ва фақат бу қурилмалар комбинациясигина, бир-бирини тўлдириб, предмет ҳақида билиш мумкин бўлган ҳамма маълумотни беради.

Бу тасаввур аввалига куп тушунмовчиликларни ва физика нуқтаи назаридан ҳам, фалсафа нуқтаи назаридан ҳам нотўғри бўлган таърифларни туғдирди. Бу тушунмовчиликлар сабаби, қисман, Н. Борнинг ўз мақолаларида қўллаган етарлича равшан бўлмаган терминологиясидир. Кейинги вақтларда Бор ўз таърифларини аниқлаштирди ва терминологияни яхшилади, шу туфайли унинг позициясининг материалистик мазмуни очилди. Борнинг кейинги вақтлардаги янги асарларининг биридан қуйида келтирилган цитаталарда бу аниқлаштириш равшан кўринади. Гейзенбергнинг ноаниқлик муносабатлари „... физик система ҳолатини белгиловчи кинематик ва динамик ўзгарувчилар қийматлари орасидаги боғланишни ифодалаб беради“ деб кўрсатиб, Бор давом этади: „Квант механика формал аппаратининг характерига кўра, бундай муносабатлар объектларнинг „модель“-хоссалари сифатида, яъни классик яққол тасаввурларга таянувчи хоссалар сифатида фойдаланилиши мумкин эмас“.

Кейинроқда: „Шу муносабат билан баъзан: „Кузатиш ҳодисанинг боришини бузади“ ёки „Атом объектларнинг физик хоссалари уларни ўлчаш билан яратилади“ дейдилар. Аммо бундай гаплар фақат чалқашлик пайдо қилиши мумкин, чунки „ҳодиса“ ва „кузатиш“ сузлари, шу билан баробар „хосса“ ва „ўлчаш“ сузлари бу ерда оддий тил билан ва уларнинг

амалда аниқланиши билан қовушмайдиган маънода ишлатилади. . . . Атом физикасининг фавқулодда характерли аломати—тавсифлаш учун турли элементар тушунчаларни баён этишда қўллашга тўғри келадиган ҳар хил экспериментал шароитда кузатиладиган ҳодисалар орасидаги янги муносабатдир. Ҳақиқатан, атом процессларнинг боришини классик руҳда тасвирлашга уринилганда бундай шароитда олинadиган тажриба маълумотлари қандай зид бўлиб кўринмасин, уларни қуйидаги маънода бир-бирини тўлдирувчи маълумотлар деб қараш керак: улар атом системалар ҳақидаги бирдай муҳим маълумотлардир, ва биргаликда олинганда бу маълумотлар тўла-тўқис бўлади. *Тўлдирувчилик тушунчаси ҳеч қачон биз табиатнинг мустақил кузатувчилари ҳолатидан воз кечишимизни назарда тутмайди . . .** (курсив меники—Э. Ш.).

151- §. Ноаниқлик муносабатлари ва сабабият принципи

1927 йилда Гейзенберг, ноаниқлик муносабатларини таърифлаган ишида, бу муносабатлардан чиқадиган умумий хулоса сифатида, „квант механикаси сабабият қонуни ўринсизлигини аниқ кўрсатди“ деб даъво қилган эди. Бундай даъвонинг асослари қуйидагилардан иборат эди. Сабабият принципи вақтнинг бирор пайти учун система ҳолатини аниқ билиш асосида исталган келгуси пайт учун унинг ҳолатини олдиндан аниқ айтиб бера олиш мумкин бўлишлигини талаб қилади. Ньютон классик механикаси бу талабни тўла қаноатлантиради, бу астрономияда айниқса яққол кўринади. Маълумки, астрономия (осмон механикаси) вақтнинг исталган келгуси пайти учун осмон jismlari ҳаракатини—уларнинг траекториялари ва тезликларини,—масаланинг математик ечилиши йўл қўядиган даражадаги аниқлик билан олдиндан ҳисоблаб қўйиш ва шу туфайли астрономик ҳодисаларни (масалан, Қуёш ёки Ой тугилишини) исталганча келажак муддатга олдиндан аниқ айтиб бериш имконини беради. Классик механика асосий тенгламаларининг математик шакли шу имкониятни равшан ифодалайди. Бу тенгламалар, принципиал масалаларни муҳокама қилиш учун энг қулай бўлган Гамильтон каноник тенгламалари (58- §) кўринишида қуйидагилардир:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (151.1)$$

Содда ҳолда муайян куч майдонида ҳаракатланаётган биргинг моддий нуқта ҳолида $k = 1, 2, 3$ бўлади, яъни ҳаммаси бўлиб, вақтга нисбатан биринчи тартибли олти дифференциал тенг-

* Н. Бор, Атомная физика и человеческое познание, 102—104-бетлар, ИЛ, 1961 й.

лама бўлади. Бу тенгламаларнинг ечими барча q_k координаталарни ва барча p_k импульсларни вақт ва олтига ихтиёрий ўзгармас катталиқнинг функцияси сифатида ифодалаш имкониятини беради:

$$q_k = f_k(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad p_k = \varphi_k(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \quad (151.2)$$

Агар тегишли ўлчашлар бажариб, вақтнинг бирор бошланғич пайти $t=0$ учун барча q_k^0 координаталар ва p_k^0 импульсларни аниқласак, у ҳолда бу маълум q_k^0 ва p_k^0 қийматларни (151.2) тенгламаларга қўйиб, улардан ($t=0$ да) C_1, \dots, C_6 олтига ихтиёрий ўзгармас катталиқларнинг ҳаммасини ҳисоблаб топиш мумкин. Шундан кейин (151.2) формулалар q_k ва p_k ларни исталган t пайт учун олдиндан айтиб бериш имконини беради. Шундай қилиб, *барча координаталар ва барча импульслар тўплами билан аниқланадиган* бошланғич ($t=0$ даги) ҳолатдан сабабият қонунига тўла мувофиқ равишда, ихтиёрий келгуси пайтдаги ҳолатни олдиндан айтиб бериш мумкин экан.

Аммо, ноаниқлик муносабатлари эса, координаталар ва импульсларнинг бир вақтдаги қийматлари, $\Delta q_k \Delta p_k \geq \hbar$ муносабатни қаноатлантирувчи Δq_k ва Δp_k муқаррар ноаниқлик билан ўлчаниши мумкин деб даъво қилади. Бундан Гейзенберг, бошланғич ҳолатни аниқ белгилаб бўлмайди, шунинг учун эса, сабабият қонунига зид равишда, келгуси ҳолатни ҳам аниқ олдиндан айтиб бериш мумкин эмас, деган хулоса чиқарди. Бу хулоса нотўғридир. Шубҳасиз, албатта, микроразрача координаталари ва импульсларининг бир вақтдаги қийматлари фақат ноаниқлик муносабатлари талаб қиладиган ноаниқлик билан аниқланиши мумкин. Бироқ, квант механикасида „система ҳолати“ тушунчасининг ўзи, равшанки, классик механикадагидан бошқачароқ таърифланиши керак, аниқроғи, ҳолатни тўла аниқлаш учун *параметрларнинг бошқача тўплами* талаб қилинади. Ваҳоланки, ҳолатни аниқловчи ўзгарувчилар кўрсатилган ҳолдагина сабабият қонунининг *миқдорий* таърифини бериш мумкин.

Буни мисолда тушунтирамиз. Электромагнит майдоннинг асосий тенгламалари—Максвелл тенгламалари координаталар ва вақт функциялари сифатида қараладиган майдон кучланганликлари E ва H , заряд зичлиги ρ ҳамда ток зичлиги j учун вақтга nisbatan биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар системасидан иборат. Вақтнинг маълум пайти учун E , H , ρ ва j ларнинг қийматлари берилган бўлса, у ҳолда вақтнинг исталган (келгуси ёки ўтиб кетган) пайти учун уларнинг қийматларини олдиндан айтиб бериш мумкин. Шундай қилиб, майдон „ҳолати“ тўғри танланган параметрлар (E , H , ρ , j) билан таърифланган ҳолдагина электромагнит майдон учун сабабият принципини миқдор жиҳатдан ифодалаш мумкин.

Сабабият принципини у ёки бу физик ҳодисалар соҳасида таърифлаш учун „система ҳолати“ тушунчасини равшан аниқлаб олиш ва бу ҳолат боғлиқ бўлган параметрларни ошқор кўрсатиб бериш зарурлигини юқоридаги мисолдан равшан кўриб турибмиз.

Энди микроскопик „заррачалар“ ва квант механикасига қайтамыз. Микрозаррачанинг ҳолати тўлқин функция ёки, содда қилиб айтганда, ψ -функция деб аталадиган (де-Бройль ясси тўлқинининг комплекс кўринишдаги формуласи ана шундай функцияга энг содда мисол бўла олади), *фақат координаталар ва вақтга ёки фақат импульслар ва вақтга боғлиқ* бўлган бирор ψ функция ёрдамида аниқланишини шу китобнинг кейинги бобларида кўрамиз. Шунингдек, бу функция вақтга нисбатан биринчи тартибли дифференциал тенгламани (Шрёдингер умумий тенгламаси, 152-§ га қаранг) қаноатлантиришини кўрамиз.

Бундан, $t = 0$ пайт учун ψ -функция қиймати маълум бўлса, вақтнинг исталган келаси пайти учун унинг қийматини олдиндан аниқлаш мумкин деган хулоса келиб чиқади. Шундай қилиб, классик механиканинг эмас, балки *квант механиканинг* талабларига мувофиқ аниқланган микрозаррачалар системаси ҳолати, *сабабият қонуни талаб қилганидек*, олдинги ҳолатдан бир қийматли равишда келиб чиқади.

Микрозаррачалар ҳолатини *уларга хос бўлмаган классик механика тушунчалари* ёрдамида тавсифламоқчи бўлганимизда биз буни аниқ қила олмаймиз ва статистик тавсифлаш усулини қўлланамиз. Бунинг ҳеч қандай ҳайрон қоладиган ёки парадоксал жойи йўқ. Лекин ундан, ҳеч қандай ҳолда, сабабият қонунининг микродунёда ноўринлиги ҳақида хулоса чиқариш мумкин эмас. Бу сабабият принципининг кичкина қаттиқ жисмчалар системаси учун яроқли бўлган миқдорий таърифининг микрозаррачаларга нисбатан яроқсиз эканлигини ва микрозаррачалар ҳолатини координаталарнинг ва импульсларнинг бир вақтдаги ҳамма қийматлари ёрдамида тавсифлаш *микрозаррачалар табиатига мувофиқ эмаслигини* кўрсатади, холос.

Чунончи, квант механикаси гўё сабабият қонунини „рад қилди“ деган даъво идеалистик тарзда нотўғри талқин қилувчилар учун, ҳатто фидеизмни асослаш учун баҳона бўлди. Масалан, А. Эддингтон ўзининг „Природа физического мира“ („Физик дунё табиати“) деган китобида ҳатто „... ҳозирги замон фанининг натижалари 1927 йилдан бошлаб, дин сөглом илмий ақл учун мақбул бўлиб қолди деб хулоса чиқаришга, балки, имконият беради“ деб даъво қилди, Дирак эса, „... табиат маълум пайтларда эркин танлаш қилади“ деб даъво қилди.

Барча шунга ўхшаш даъволар ноаниқлик муносабатларида ҳам, квант механикасида ҳам ҳеч қандай заминга эга эмаслиги тушунарлидир.

Кейинги уч параграфда биз ноаниқлик муносабатларини ва улардан келиб чиқадиган натижаларни батафсил қараб чиқдик. Бу муносабатларнинг билишга ҳеч қандай чегара қўймаслигини, бироқ улар классик механика тасаввурларининг микроскопик заррачалар ҳаракатига қўллана олинмаслиги ифодасигина бўлишligини кўрдик. Аниқроқ айтганда, бу муносабатлар микрообъектлар ҳолатини қайси чегараларгача координаталар ва импульсларнинг бир вақтдаги қийматлари орқали (макроскопик жисмлар учун классик механикада шундай қилинади) тавсифлаш мумкинлигининг миқдорий ўлчовини беради: агар 482-бетда кўрган мисоллардагидек, координатани топилганда Δq ноаниқликнинг мазкур ҳол учун мақбул қийматида $\Delta q \Delta p \sim h$ ноаниқлик муносабатлари Δp учун эътиборга олинмаса буладиган кичик қиймат берса, бу ҳолда объект узини тамомила „классик равишда“ тутади, яъни унинг траекторияси ва траекториянинг ҳар бир нуқтасидаги унинг тезлиги туғрисида гапириш мумкин. Акс ҳолда, *тўлқин оптиканинг қўлланиш соҳасида ёруғлик нури тушунчаси маъносини йўқотганидек*, „классик заррача“ образи яроқсиз бўлиб қолади ва траектория тушунчаси ўз маъносини йўқотади. Бундан, ноаниқлик муносабатларининг манбаи—ўрганилаётган субъектнинг хоссалари эмас, балки электронларнинг махсус физик хоссаларидир, деган хулоса чиқади.

Атом дунёси ҳодисалари соҳасида классик тасаввурларнинг қўлланишини чеклаш ҳеч қандай ҳолда билиш қобилиятимизни чеклаш бўлмай, балки дунёнинг *механистик* манзарасини чеклаш демакдир, холос. Бу манзара электромагнит майдон назариясидаёқ яроқсиз бўлиб чиқди, чунки куп уринишларга қарамай электромагнит майдоннинг механик моделини ясаб бўлмади. Физиканинг ташқи дунёни билиш соҳасида жуда катта ютуқлар келтирган кейинги тараққиёти, хусусан атом физикаси тараққиёти, механистик дунёқарашнинг бутун чеклигини ҳар гал тўла очиқ-ойдин кўрсата борди. Аммо Ленин „Материализм ва эмпириокритицизм“ китобида „Қандай бўлмасин ўзгармас элементлар бор, „нарсаларнинг моҳияти ўзгармас“ ва шу кабилар деб эътироф қилиш материализм эмас, балки *метафизик*, яъни антидиалектик материализмдир“* деб тушунтирган эди.

Иккинчи томондан, реал мавжуд бўлган микрозаррачаларнинг объектив хоссаларига асосланган ноаниқлик муносабатларидан идеалистик физик мактаблар гўё „материализм ҳалокатини“, сабабият қонунини „бекор қилинишини“ ва ҳ. к. асослаш учун, ҳатто динни „илмий“ асослаш учун (Эддингтон, А. Комптон) фойдаланганлигини кўрдик. Физикани „пси-

* В. И. Ленин, *Материализм ва эмпириокритицизм*, 244-бет, Госполитиздат, 1948.

хологиянинг кичик қисми“ деб эълон қилган П. Иорданнинг позицияси, бу жиҳатдан, ойдинроқ ва характерлироқдир. Бир хил факт ва ҳодисаларни материалистик ва идеалистик талқин қилишдаги бу тафовутни В. И. Ленин қуйидаги ажойиб берган: „Ҳақиқатда муҳим бўлган ва фалсафий оқимларни бири-бирдан ажратадиган азарий-билиш масаласи сабабий боғланишларни нақадар аниқ тасвирлашга муяссар бўлганлигимизда ва бу тасвирларни аниқ математик формулада ифодалаш мумкин бўлиш-бўлмаглигида эмас, балки мазкур боғланишларни билишимизнинг манбаи табиатнинг объектив қонуниятидан иборатми, ёки ақлимизнинг хусусиятларидан, ақлимизнинг маълум априор ҳақиқатларни билиш бобида ўзига хос қобилияти борлигидан ва шу кабилардан иборатми, деган масалададир“* (курсив меники—Э. Ш.).

* В. И. Ленин, Материализм ва эмпириокритицизм, 166-бет, Ўздавнашр, 1990 и.

ХІ БОБ

ШРЁДИНГЕР ТЕНГЛАМАСИ

152-§. Шрёдингер тенгламаси ва унинг ечимларининг физик маъноси

Микроскопик заррачалар механикасининг энг ажойиб хусусиятларидан бири — энергия дискрет сатҳларининг мавжуд бўлишидир. Квант физикаси тараққиётининг биринчи даврларидаёқ ана шундай дискретлик мавжудлигини постулатлаш зарурлиги аниқланди (VI бобни қаранг). Аммо классик физика соҳасида атом ҳолатларининг дискрет бўлишлиги фарази бутун классик физика системасига зид бўлган мутлақо ёт фараз эди. Бу бобда биз квант механикасида энергия дискретлиги механика асосларига зид бўлибгина қолмасдан, балки, масалан, классик механика тенгламаларидан торнинг гармоник обертонлари мавжуд бўлишлиги келиб чиққани каби табиий равишда, квант механикаси тенгламаларидан энергия дискретлиги келиб чиқишлигини кўрамиз. Квант механикасининг тарихий тараққиётида бу натижа биринчи натижалар қаторида ўлинди ва у ўша даврда энг ажойиб натижа бўлиб кўринди. Аммо, жуда тез квант механикасининг асосий тенгламасидан ва унинг ечимлари маъноси талқинидан, квантланишдан кўра ажойиблиги кам бўлмаган бошқа натижалар ҳам келиб чиқишлиги аниқланди. Бу натижалар янги кенг доирадаги ҳодисаларни тушунтириш имконини берди ва квант механикасининг самарали тараққиётини таъминлади. Ниҳоят, бу даврнинг якунланиши сифатида, мантиқан изчил, аммо мутлақо квант механикасининг ўзига хос системасини яратиш мумкин бўлди.

Ўқувчини бу системани ўзлаштиришга тайёрлаш мақсадида баён қилишни тарихий йўлга яқин бўлган йўл билан олиб борамиз ҳамда ушбу бобда квант механикасининг асосий тенгламасини аниқлаймиз ва математик жиҳатдан жуда содда масалалар мисолида бу тенгламанинг баъзи бир татбиқини кўрсатамиз. Квант механикаси системасининг ўзи билан эса келгуси бобларда танишамиз.

Биз шу вақтгача (X боб) фақатгина эркин микроскопик заррачалар ҳаракатини текширдик ва бу ҳаракат де-Бройль ясси тўлқинлари билан тавсифланишига ишондик. Энди заррачаларнинг турли куч майдонларида ҳаракатланишини текшириш имконини олишимиз зарур. Шу мақсадда аввал де-Бройль тўлқинлари бўйсунадиган дифференциал тенгламани топамиз, сўнгра бу тенгламани куч майдонларида ҳаракатланиш ҳоли учун умумлаштираемиз. Шундай йўл билан квант механикасининг асосий тенгламаси — Шрёдингер тенгламасини оламиз.

Изланаётган тенгламани олиш учун қуйидагича иш кўраемиз. 133-§ да электромагнит тўлқинлар учун (фотонларга мос келувчи) тўлқин тенгламанинг электромагнит майдоннинг асосий тенгламалари (Максвелл тенгламалари) дан бевосита келиб чиқишлиги кўрсатилган эди. Тўлқин тенгламасини ёзиб ва унга ясси тўлқинлар кўринишидаги ечимни қўйиб, биз электромагнит тўлқинлар табиати учун характерли бўлган частота ва тўлқин вектор ташкил этувчилари орасидаги муносабатни (дисперсия қонунини) ҳосил қилган эдик:

$$\frac{v^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (133.3)$$

Биз бу ерда тескари йўлдан борамиз; де-Бройль тўлқинларининг дисперсия қонунидан фойдаланиб, унга мос дифференциал тенгламани топамиз. 141-§ да де-Бройль тўлқинларининг дисперсия қонунини топган эдик:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{v_0^2}{c^2} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (141.6)$$

бунда $v = mc^2/h$. Бу қонун импульс ва энергия орасидаги

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

релятивистик муносабатдан ҳосил қилинган эди.

Бироқ бизни қизиқтираётган Шрёдингер тенгламаси нисбийлик назарияси талабларини қаноатлантирмайди — у норелятивистик тенгламадир. Биз уни Ньютон механикасининг энергия ва импульс орасидаги муносабатидан ҳосил қилаемиз. Бу муносабат

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (152.1)$$

эканлигини билаемиз (58-§ га қаранг).

Энди энергия ҳамда импульс ташкил этувчилари учун квант муносабатлардан фойдаланамиз:

$$E = h\nu; \quad p_x = hk_x, \quad p_y = hk_y, \quad p_z = hk_z.$$

Бу ифодаларни (152. 1) га қўямиз ва h га қисқартиргандан сўнг қуйидагини топамиз:

$$\nu = \frac{h}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (152.2)$$

Худди шу муносабат де-Бройль тўлқинларининг норелятивистик яқинлашишдаги изланаётган дисперсия қонунидир.

Шрёдингер тенгламасини ҳосил қилиш учун де-Бройль яси тўлқини формуласи

$$\psi = A e^{i2\pi(kx - \nu t)} = A e^{i2\pi(k_x x + k_y y + k_z z - \nu t)}$$

ни оламиз ҳамда уни вақт бўйича бир марта ва барча координаталар бўйича икки марта дифференциаллаймиз. Қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2\pi i \nu \psi; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= (2\pi i)^2 k_x^2 \psi; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= (2\pi i)^2 k_y^2 \psi; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= (2\pi i)^2 k_z^2 \psi. \end{aligned}$$

Бундан ν , k_x , k_y , k_z ларни топиб дисперсия қонуни (152.2) га қўйсак:

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$

ёки

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi. \quad (152.3)$$

Бу бобда бизни (152.3) нинг фақат тургун монохроматик тўлқинларга мос келган ечимларигина қизиқтиради. Бундай тўлқинлар учун ечимни, бири фақат координаталар функцияси бўлган, иккинчиси эса — фақат вақт функцияси бўлган икки функция кўпайтмаси кўринишида тасвирлаш мумкин, бунда вақтга боғлиқлик $e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i\frac{2\pi}{h} E t}$ кўпайтувчи орқали ифодаланади, бинобарин,

$$\psi(x, y, z, t) = \psi^0(x, y, z) e^{-i\frac{2\pi}{h} E t}. \quad (152.4)$$

Даставвал, бундай ечимлар учун (152.3) нинг чап томонини

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi \quad (152.5)$$

беришини таъкидлаймиз. (152.4) ечимни (152.3) га қўйиб ва (152.5) ни эътиборга олиб, вақт кўпайтувчи $e^{-i\frac{2\pi}{h} E t}$ га қисқартишдан ва ҳадлар ўрнини алмаштиришдан кейин қуйидагини топамиз:

$$\Delta \psi^0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi^0 = 0. \quad (152.6)$$

(152.3) тенглама эркин заррача учун изланган тўлқин тенглама-дир; унинг ечимининг фақат координаталарга боғлиқ қисми (152.6) тенгламага бўйсунади. Бундан кейин биз (152.3) ни қаноат-лантирувчи функцияни ⁰ белгисиз ёзамиз ва бу бобда гап (152.3) тенгламанинг „монохроматик“ ечимлари тўғрисида боришлигини, у ечимларни ҳосил қилиш учун эса ψ^0 функция ёнига $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ кўнайтувчини ёзиш етарли эканлигини эсда сақ-лаймиз.

(152.6) тенгламани эркин микроскопик заррача учун олдик. Уни U потенциал энергия билан характерланувчи куч май-донда ҳаракатланаётган заррача учун қандай қилиб умум-лаштириш мумкинлигини кўриб чиқамиз. Бундай майдонда заррачанинг тўла энергияси $T + U = E$ га тенг. Эркин заррача ҳолида эса тўла энергия кинетик энергияга тенг ($U = 0$), яъни $E = T$. Бизни қизиқтираётган умумлаштириш учун, майдонда ҳаракатланиш ҳолига ўтишда (152.6) тенгламага кирган E энер-гияни тўла энергия деб тушуниш керакми ёки кинетик энер-гия деб тушуниш керакми деган масалани ечиш лозим. Рав-шанки, агар E энергияни тўла энергия деб қаралса, у ҳолда умумлашган тенгламада у ёки бу майдонни тавсифловчи ҳад бўлмас эди. Агар, аксинча, эркин заррача ҳолида E ни фақат кинетик энергия деб тушунилса, бунда U потенциал энергияли майдонда ҳаракатланиш ҳоли учун (152.6) га E ўрнига $T = E - U$ кинетик энергияни қўйишимиз керак бўлади ва (152.6) тенглама

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\psi = 0 \quad (152.7)$$

кўринишни олади. Бу — квант механиканинг асосий тенглама-си — потенциал майдондаги заррача учун Шрёдингер тенгла-масидир.

Келтирилган мулоҳазаларни Шрёдингер тенгламасини кел-тириб чиқариш деб эмас, балки фақат унинг аниқланишини тушунтирувчи мулоҳазалар деб қараш лозимлиги ўз-ўзидан равшандир. Физиканинг барча асосий тенгламалари (масалан, механиканинг Ньютон тенгламалари ёки электромагнит майдон учун Максвелл тенгламалари) сингари, Шрёдингер тенгламаси қатъий келтириб чиқарилмайди. У математик йўл билан кел-тириб чиқарилмасдан фақат аниқланади ҳамда унинг тўғрили-ги тенглама ёрдамида олинган натижаларнинг тажрибага мос тушиши билан тасдиқланади.

(152.7) тенгламага фақат координаталаргагина эмас, балки вақтга ҳам боғлиқ бўлган ψ функция учун умумийроқ бўлган тенглама мос келади. U потенциал функция вақтга ошкор боғлиқ бўлмайдиган консерватив майдон ҳолида ψ нинг вақтга боғланиши „монохроматик“ кўнайтувчи $e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ орқа-

ли ифодаланани деб ҳамма вақт фараз қилиш мумкин. Бу ҳолда (152.5) муносабат ўринли бўлишлигини эътиборга олиб ва (152.7) тенгламани

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta\psi + U\psi = E\psi$$

кўринишда қайта ёзиб (бунда

$$\psi = \psi^0(x, y, z) e^{-i\frac{2\pi}{\hbar} Et} \quad (152.8)$$

бўлади), қуйидагини топамиз:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta\psi + U\psi = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (152.9)$$

Бу—вақтни ўз ичига олган Шрёдингер умумий тенгламасидир.

Хотимада яна битта изоҳ қиламиз. Эркин заррача учун Шрёдингер тенгламасини ҳосил қилишда эркин заррачанинг

$$\psi = Ae^{i2\pi(kr - vt)}$$

кўринишда ёзилган тўлқин функцияси ўрнида унга комплекс қўшма бўлган

$$\psi^* = A^* e^{-i2\pi(kr - vt)} \quad (152.10)$$

функциядан фойдаланишимиз мумкин эди. Бу кейинги ҳолда

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 2\pi i v \psi^*, \quad \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} = -4\pi^2 k_x^2 \psi^* \quad \text{ва ҳ. к.}$$

бўлишлигини кўриш осон. У ҳолда (152.3) тенглама ўрнига

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta\psi^* \quad (152.11)$$

тенгламани олган бўлар эдик ва мос равишда (152.9) тенглама ўзгарар эди. Бироқ, ҳозир ψ функциянинг ўзи эмас, балки унинг модули квадрати, яъни $\psi\psi^*$ физик маънога эга бўлишлигини кўрамиз. Шу туфайли Шрёдингер тенгламасини мумкин бўлган икки шаклидан қайси бирида ёзиш мутлақо фарқсиздир.

Энди Шрёдингер тенгламаси ечимларининг физик маъносини қараб чиқамиз. 133-§ да учратилган классик физика тўлқин тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad (183.4)$$

ва уни вақтни ўз ичига олган

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta\psi + U\psi \quad (152.9)$$

Шрёдингер тенгламаси билан таққослаймиз. Классик тўлқин тенглама, маълумки, $a \cos [2\pi(\mathbf{kr} - \nu t) + \delta]$ кўринишдаги ҳақиқий ечимларга эгадир. Бироқ, Шрёдингер тенгламасини бу ҳақиқий ечимлар қаноатлантирмаслигига, балки уни фақат *комплекс* ечимлар, масалан, $U = 0$ бўлганда

$$\psi = Ae^{i2\pi(\mathbf{kr} - \nu t)}$$

кўринишдаги ечим қаноатлантиришлигига бевосита текшириш йўли билан ишонч ҳосил қилиш оsonдир. Шрёдингер тенгламасининг бу хусусияти унинг таркибида (классик тўлқин тенгламадан фарқли равишда) вақт бўйича биринчи ҳосиланинг ва координаталар бўйича иккинчи ҳосилаларнинг бўлишлигидан келиб чиқади. Биз унинг биринчи даражасини ва тўлқин векторнинг ташкил этувчилари иккинчи даражаларини ўз таркибига олган

$$\nu = \frac{h}{2\pi} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (152.2)$$

(Ньютон яқинлашувидаги) де-Бройль тўлқинларининг дисперсия қонунига мувофиқ келадиган тўлқин тенгламасини излаганимиз учун ўша Шрёдингер тенгламаси ҳосил бўлганлигини кўрсатдик.

Бу факт Шрёдингер тенгламаси маъносини тушуниш учун жуда муҳимдир. Бу факт гарчи Шрёдингер тенгламаси баъзи ҳолларда даврий ечимлар билан қаноатлантирилса-да, бу тенглама физик муҳитда тарқалувчи ҳеч қандай реал тўлқинларни тавсифламаслигини кўрсатади. Бунга қарамасдан, агар баъзан материянинг турғун ва югурувчи „тўлқинлари“ ҳақида, тугунлар ва дўнгликлар ва ҳ. к. ҳақида гапирилганда, фақат баённинг яққолроқ бўлишлиги учун ана шу иборалар ишлатилади. Ҳозирги вақтда қабул қилинган статистик талқинга мувофиқ Шрёдингер тенгламаси ечимларининг маъноси тамомила бошқачадир.

Ҳақиқатан, эркин электроннинг табиатини де-Бройль ясси тўлқини тавсифлашини, лекин бу тўлқиннинг *амплитудаси квадратигина* физик маънога эга эканлигини олдинги бобда кўрган эдик. Бу де-Бройль тўлқини амплитудаси квадрати, равшанки, $U = 0$ бўлганда (152.9) Шрёдингер тенгламасини қаноатлантирадиган комплекс ψ -функция модули квадратига тенгдир. Ҳақиқатан,

$$\begin{aligned} \psi &= Ae^{i2\pi(\mathbf{kr} - \nu t)} \equiv ae^{i\delta} \cdot e^{i2\pi(\mathbf{kr} - \nu t)}, \\ \psi^* &= A^*e^{-i2\pi(\mathbf{kr} - \nu t)} \equiv ae^{-i\delta} \cdot e^{-i2\pi(\mathbf{kr} - \nu t)} \end{aligned}$$

бўлганда:

$$a^2 = |A|^2 = \psi^* \psi.$$

Бу амплитуда квадратини статистик талқин қилган эдик: 147-§ га мувофиқ, $a^2 d\tau = \psi^* \psi d\tau$ заррачани $d\tau = dx dy dz$ ҳажмда,

яъни x ва $x + dx$, y ва $y + dy$, z ва $z + dz$ координаталарга эга бўлган соҳада топиш эҳтимолидир. Бу статистик талқин (152.9) тенгламанинг умумий ҳолдаги ечимлари учун ҳам сақланади; бу тенгламани қаноатлантирувчи комплекс ψ функция модулининг квадрати координаталари x , y , z бўлган нуқта атрофидаги $d\tau$ ҳажмда заррачани топиш эҳтимолининг зичлиги сифатида талқин қилинади. Эҳтимолликнинг ўзи $\psi\psi^*d\tau$ га пропорционалдир.

ψ функция ўз маъносига кўра баъзи бир табиий шартларни қаноатлантириши керак. Даставвал, у ҳамма жойда узлуксиз ва бир қийматли бўлиши лозим. Сўнгра $\psi\psi^*d\tau$ ни эҳтимоллик сифатида талқин қилаётганимиз туфайли, бу ψ функцияни муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли 1 га тенг бўладиган қилиб нормаллаштириш зарурати пайдо бўлади. Декарт координаталари $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгаргани сабабли, заррачанинг фазода қаердадир бўлишлиги муқаррар ҳодиса бўлади. Шунинг учун нормаллаштириш шarti қуйидагичадир:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi d\tau = 1. \quad (152.12)$$

Математик анализ дарсликларида,* агар координаталар бошидан узоқлашган сари функция етарлича тез камаё борса, аниқроғи, функция интегралланувчи квадрат билан энг камида $1/r^p$ каби (бунда $p > 1$) камайиб борадиган бўлса, у ҳолда чексиз чегарали хосса интегралнинг мавжуд бўлишлиги исботланади. Мазкур ва келгуси бобларда санаб ўтилган табиий шартларнинг квант механикада катта аҳамиятга эга эканлигини кўраимиз. Шрёдингер тенгламаси ечимларининг хоссалари шундайки, ечимлар бу талабларни фақат жуда аниқ шароитдагина, масалан, параметр сифатида тенгламага кирган энергиянинг маълум дискрет қийматларидагина қаноатлантиради. Квант механикада механик катталикларнинг дискрет қийматларга эга бўлишлигини тушунтириш калити шундадир; бу қуйида конкрет мисолларда кўрсатилади.

153-§. Потенциал барьердан қайтиш ва ўтиш

Х бобда заррачанинг майдон бўлмаган фазодаги ҳаракатини текширган эдик. Шрёдингер тенгламасини татбиқ қилишнинг биринчи мисоли сифатида заррачанинг I ва II соҳалар чегарасидаги табиатини қараб чиқамиз: бу соҳаларнинг ҳар бирида заррачанинг потенциал энергияси ўзгармас, аммо бу потенциал энергиялар бир-бирдан чекли миқдорга фарқ қи-

* В. И. Смирнов, Курс высшей математики, II т., 258-бет, Гостехиздат, 1948.

лади. Ҳақиқатда учрайдиган шароитни схемалаштириб, 226—227-расмларда кўрсатилганидек, потенциал энергия I ва II соҳалар чегарасида сакраб ўзгаради деб фараз қиламиз.

x ўқни заррача ҳаракати йўналишига параллел бўладиган қилиб координата системаси танлаб оламиз. U вақтда ψ фақат x нинг функцияси бўлади. Лаплас оператори Δ бу ҳолда тўла иккинчи ҳосила $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ дан иборат бўлади ва Шрёдингер тенгламаси соддароқ кўринишни олади:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U) \psi = 0.$$

Бу ҳолда потенциал энергия қуйидаги шартлар билан аниқланади:

$$\begin{aligned} (I) \quad x \leq 0 \text{ бўлганда} \quad U &= 0, \\ (II) \quad x \geq 0 \text{ бўлганда} \quad U &= U_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Умуман айтганда, масалани ечиш учун U нинг координата функцияси кўринишидаги ифодасини Шрёдингер тенгламасига қўйиш ва уни интеграллаш лозим. Аммо берилган шароитда U ни x нинг аналитик функцияси кўринишида ифодалаш мумкин бўлмаганлигидан қуйидагича иш кўрамиз. Шрёдингер тенгламасини I соҳа учун ҳам, II соҳа учун ҳам алоҳида-алоҳида ёзамиз ва иккала ҳолдаги ечимларни, яъни ψ_1 ва ψ_2 функцияларни топамиз. ψ функция бутун фазода узлуксиз бўлиши сабабли потенциал сакраш содир бўладиган соҳалар чегарасида ψ_1 ва ψ_2 функциялар бир-бирига тенг бўлишлигини талаб қиламиз. Икки соҳа чегарасида фақат ψ функциянинг ўзигина эмас, балки унинг биринчи ҳосиласи ҳам узлуксиз булиши кераклиги кейинчалик кўрсатилади. Функциянинг ва унинг биринчи ҳосиласининг узлуксиз бўлиш шартлари—шу икки шарт масалани охиригача ечиш имкониятини беради.

Демак, Шрёдингер тенгламасини ёзамиз:

I соҳа учун

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi_1 = 0, \quad (153.1)$$

II соҳа учун

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U) \psi_2 = 0. \quad (153.2)$$

Белгилашлар киритамиз:

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} = 2\pi \frac{mv_1}{h} = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad (153.3)$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U_0)} = 2\pi \frac{mv_2}{h} = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \quad (153.4)$$

бунда λ_1 ва λ_2 мос равишда I соҳада ва II соҳада де-Бройль тўлқинлари узунликларидир. Энди (153.1) ва (153.2) тенгламалар қуйидаги кўринишда қайта ёзилади:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0, \quad (153.1')$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2^2\psi_2 = 0. \quad (153.2')$$

Булар ўзгармас коэффициентли оддий дифференциал тенгламалардир. Уларнинг хусусий ечимлари $e^{\pm ik_1x}$ ва $e^{\pm ik_2x}$ кўринишга эга. Равшанки, бу хусусий ечимлар I соҳадаги ва II соҳадаги де-Бройль ясси тўлқинларини тасвирлайди. Ҳақиқатан ҳам, улардан бирортасини, масалан, e^{ik_1x} ни олсак ва унинг ёнига „монохроматик“ вақтли кўпайтувчи $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et} = e^{-i2\pi vt}$ ни ёзсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$e^{ik_1x} \cdot e^{-i2\pi vt} = e^{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda_1} - vt\right)}.$$

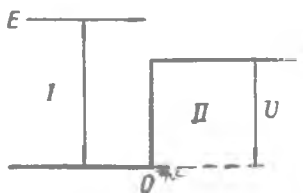
Аммо бу I соҳада x ўқнинг мусбат йўналишида тарқалаётган ясси тўлқин формуласидир.

(153.1') ва (153.2') тенгламаларнинг умумий ечими қуйидагича:

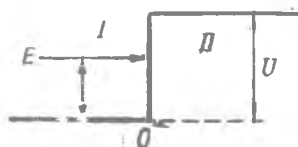
$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \quad (153.5)$$

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x} \quad (153.6)$$

Заррачанинг I соҳадан II соҳага ўтиш шартларини: а) заррачанинг тўла энергияси E унинг II соҳадаги потенциал энер-



226- расм.



227- расм.

гияси U дан катта бўлганда (226-расм) ва б) $E < U$ бўлгандаги (227- расм) ҳоллар учун қараб чиқамиз.

а) $E > U$ бўлганда классик механикага бўйсунадиган заррача албатта (бошқача айтганда, *ишончли равишда*) I соҳадан II соҳага ўтади. Ҳақиқатан ҳам, бу заррача электр заряд ташийди ва I соҳада чапдан ўнгга ҳаракат қилади деб фараз қилайлик. Заррача I ва II соҳалар чегарасида U тормозловчи потенциал майдонига тушади, аммо унинг тўла энергияси E потенциал энергия U дан катта бўлганлиги туфайли бу ҳолда

заррача тормозловчи майдондан ўтиб кетади ва камайган $E-U$ энергия билан II соҳада ўз ҳаракатини давом эттиради.

Шрёдингер тенгламасига бўйсунадиган заррача, масалан, электрон ўзини мутлақо бошқача тутиши кераклигини кўрамиз. Бу сифат жиҳатдан қилинган қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади. Электрон ҳаракати де-Бройль ясси тўлқини билан тасвирланади. Турли синдириш кўрсаткичли икки соҳа чегарасида ёруғлик тўлқини ўзини қандай тутса (143-§ га қаранг), потенциалнинг сакраб ўзгариши юз берадиган икки муҳит чегарасида бу тўлқин ҳам ўзини шундай тутиши керак. Бу, I ва II соҳалар чегарасида де-Бройль тўлқини қисман қайтади, қисман эса II соҳага ўтади, демакдир. Электрон бир соҳадан иккинчи соҳага ўтаётганда муайян қайтиш эҳтимолига ва муҳитга муайян ўтиб кетиш эҳтимолига эга бўлади деб айтиш ҳам мумкин.

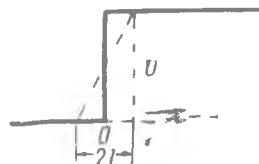
Бизнинг вазифамиз бу эҳтимоликларни топйшдир. Бунинг учун даставвал, e^{ik_1x} хусусий ечим x ўқининг мусбат йўналишида (чапдан ўнгга) бораётган тўлқинга, яъни тушаётган тўлқинга мос келишини, e^{-ik_1x} хусусий ечим эса қайтаётган тўлқинга мос келишини қайд қиламиз. Шу айтилганлар $e^{\pm ik_1x}$ хусусий ечимлар учун ҳам тўғридир. I соҳада ҳам тушаётган тўлқин, ҳам қайтаётган тўлқин тарқалаётганини эътиборга олиб, бу соҳа учун икки ҳаддан иборат (153.5) умумий ечим маънога эга бўлишлигини кўрамиз:

$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \quad (153.5')$$

бунда a_1 — тушаётган тўлқиннинг интенсивлиги, b_1 — қайтаётган тўлқиннинг интенсивлиги. II соҳада эса фақат ўтаётган тўлқин тарқалади. Шунинг учун (153.6) да $b_2 = 0$ деб олиш лозим ва унда

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2x}. \quad (153.6')$$

Энди тушаётган тўлқиннинг a_1 амплитудасини 1 га тенг деб, қолган b_1 ва a_2 амплитудаларни ҳисоблаймиз. Бунинг учун, соҳалар чегарасида ψ функциянинг ўзигина эмас, балки унинг биринчи ҳосиласи ҳам узлуксиз бўлишлигидан иборат „чегаравий шартлардан“ фойдаланиш зарур бўлади. Биринчи ҳосиланинг узлуксиз бўлишлиги қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади. 228-расмда чапдаги вертикал поғона қия поғона билан (228-расмдаги пунктир) алмаштирилган деб фараз қилайлик; ўтиш соҳаси кенглиги $2l$ га тенг бўлсин ва бу соҳада потенциал 0 дан U гача узлуксиз равишда ўзгарсин. (153.3) ва (153.4) белгилашларни эътиборга олиб, (153.1') ва (153.2') тенгламаларни



228- расм.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k'^2\psi \quad (153.7)$$

кўринишда ёзамиз. Бунда k' коэффициент $-l$ дан $+l$ гача соҳада $k' = k_1$ дан $k' = k_2$ гача узлуксиз ўзгаради. Бу соҳа учун бир томондан,

$$\int_{-l}^{+l} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l}$$

ифодага, иккинчи томондан эса, (153.7) нинг ўнг томонига урта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ этиб,

$$\int_{-l}^{+l} k'^2 \psi dx = 2l \overline{k'^2} \psi$$

ифодага эга бўламиз. Демак,

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l} = -2l \overline{k'^2} \psi$$

ёки $l \rightarrow 0$ лимитга ўтсак,

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

ψ функциянинг иккала соҳа чегарасида узлуксиз бўлишлиги қуйидагини беради:

$$(\psi_1)_{x=0} = (\psi_2)_{x=0}$$

ёки, агар $a_1 = 1$ бўлганда (153.5) формуладан фойдаланилса ва (153.6') эътиборга олинса, у ҳолда

$$1 + b_1 = a_2. \quad (153.8)$$

Ҳосиланинг узлуксизлиги шартидан, яъни

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

шартдан (153.5) ва (153.6') формулалар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$1 - b_1 = \frac{k_2}{k_1} a_2. \quad (153.9)$$

(153.8) ва (153.9) тенгламаларни b_1 ва a_2 ларга нисбатан ечиб

$$b_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (153.10)$$

ифодаларни оламиз.

Энди оптика билан ўхшашлигидан фойдаланиб, қайтариш коэффициентини R ни ва шаффоқлик коэффициентини D ни аниқлашимиз мумкин. Қайтариш коэффициенти қайтаётган ва тўшаётган тулқинлар амплитудалари квадратининг нисбатига тенг

бўлади, ёки тушаётган тўлқин амплитудаси a_1 , шартга кўра, l га тенглигини эътиборга олсак,

$$R = b_1^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2. \quad (153.11)$$

Шаффофлик коэффициенти D ни ҳисоблашда, қуйидаги сабабга кўра, ўтаётган ва тушаётган тўлқинларнинг амплитудалари квадратлари нисбатини заррачаларнинг биринчи ва иккинчи соҳадаги тезликлари нисбатига кўпайтириш керак. Шаффофлик коэффициенти ўтаётган заррачалар оқимининг тушаётган заррачалар оқимига нисбатига тенгдир. Асоси l см² ва баландлиги сон қиймати жиҳатидан v тезликка тенг бўлган цилиндрни тасаввур қилайлик. Агар бу цилиндрдаги заррачаларнинг зичлиги ρ га тенг бўлса, у ҳолда ундаги заррачаларнинг тула сони ρv бўлади ва бу заррачалар цилиндр асосидан l сек да ўтиб кетади. Демак, заррачалар оқими ρv га тенг, бинобарин, шаффофлик коэффициенти

$$D = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}.$$

Аммо заррачаларнинг ρ зичлиги де-Бройль тўлқини амплитудаси квадратага пропорционал, тезликлар нисбати эса:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

ёки, (153. 3) ва (153. 4) ларни назарга олсак,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Шунинг учун узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$D = \frac{a_2^2 k_2}{a_1^2 k_1} = a_2^2 \frac{k_2}{k_1} \quad (153.12)$$

(a_1 , олдин айтилганича, l га тенг), ва a_2 нинг (153. 10) даги ифодасидан фойдаланиб,

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (153.13)$$

формулани топамиз.

R ва D коэффициентларни корпускуляр нуқтаи назардан қуйидагича талқин қилиш мумкин: R —заррачанинг соҳалар чегарасида қайтиш эҳтимолидир, D эса l соҳага ўтиш ёки, одатда қабул қилинганидек, потенциал барьер (тўсиқ) дан ўтиш эҳтимолидир.

(153. 11) ва (153. 13) ифодаларни қўшиб, $R + D = 1$ эканлигини топамиз, эҳтимоликларни қўшиш теоремаси асосида ана шу натижани кутиш лозим эди, чунки заррача соҳалар чегарасида ё қайтади, ёки ўтиб кетади деб ишончли равишда тасдиқлаш мумкин.

Энди қайтариш ва ўтказиш коэффициентларини тўла энергия E ва потенциал энергия U орасидаги муносабатга боғлиқ равишда ҳисоблаб чиқамиз. Биз қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} = 2\pi \frac{p_1}{h}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E-U)} = 2\pi \frac{p_2}{h},$$

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}} \right)^2,$$

$$D = 1 - R = 4 \frac{\sqrt{1 - U/E}}{(1 + \sqrt{1 - U/E})^2}.$$

XXII жадвалда R ва D нинг бир неча сон қийматлари келтирилган.

XXII жадвал

$\frac{U}{E}$	R	D	$\frac{E}{U}$
0,1	0,0007	0,9993	10
0,5	0,0296	0,9704	2
0,8	0,1459	0,8541	1,25
0,9	0,2700	0,7300	1,11
1,0	1,000	0,000	1,0

Бу жадвалдан кўринишича, заррача энергияси „потенциал поғона“ баландлиги U дан икки марта катта бўлганда, қайтариш эҳтимоли анча сезиларли катталikka (3% атрофида) эга бўлади, $U=E$ бўлганда эса II соҳага ўтиш умуман мумкин эмас, ваҳолонки, классик механикага асосан, худди бошқа ҳоллардагидек, бу ҳолда ҳам заррача ишончли равишда II соҳага ўтади, лекин бу ерда унинг кинетик энергияси нолга тенг бўлади.

Электронлар билан ўтказиладиган оддий макроскопик тажрибаларда бу квант қайтаришни кузата олмаслигининг сабаби, чегарадаги потенциал 227-расмдаги сингари тўсатдан ортмай, балки „макроскопик“ катталик участкасида ўзгаришидадир.

Агар, ўтиш соҳаси кенглиги атом ўлчовларига ($1-10 \text{ \AA}$) эга бўлса, у ҳолда бу эффект ўринли бўлади ва уни ҳисобга олиш зарур.

б) $E < U$ бўлганда *классик механика бўйича* I соҳадан II соҳага ўтиш мумкин эмас, чунки бу шароитда (потенциал энергия тўла энергиядан катта бўлганда) заррачанинг I соҳадаги кинетик энергияси манфий бўлиши, тезлиги эса мавҳум бўлиши керак эди.

Квант механикасида фойдаланиб, бу ҳол учун қайтариш коэффициенти R ни ҳисоблаймиз. Даставвал $E < U$ бўлганда k_2 катталик соф мавҳум бўлишлигига эътибор бериш лозим:

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E-U)} = i \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} = ik,$$

бунда $k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)}$. Шу туфайли R ни (153. 11) формула буйича ҳисоблашда квадратга кўтаришни комплекс қўшама катталиклар купайтмаси RR^* билан, ёки бари бир, модуль квадратини топиш билан алмаштириш лозим:

$$R = \left| \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right|^2 = 1, \quad D = 1 - R = 0.$$

Демак, $E < U$ бўлганда қайтариш коэффициенти 1 га тенг, яъни қайтиш бўлади. Бу кутилган натижага тамомила мос келади. Аммо қайтиш тула бўлса-да, ҳозир биз курсатишимизча, заррачани II соҳада топишнинг маълум эҳтимолга эга булиши кутилмаган ҳолдир. Бошқача айтганда, қайтиш фақат соҳалар чегарасининг ўзида юз бериши шарт эмас, баъзи заррачалар II соҳага ўтиб, кейин яна I соҳага қайтади. Ҳақиқатан ҳам, $E < U$ бўлганда k_2 коэффицент соф мавҳум ва ik га тенг бўлгани туфайли, бу ҳолда Шрёдингер тенгламасининг II соҳа учун ечими

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2 x} = a_2 e^{-kx}$$

кўринишни олади, шунинг учун заррачани бирлик узунликда топиш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$\psi_2 \psi_2^* = \psi_2^2 = a_2^2 e^{-2kx} = a_2^2 e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m \cdot U - E} x}. \quad (153. 14)$$

Бу заррачани II соҳада топишнинг эҳтимоли тамомила аниқ демакдир. Тўғри, x ортиши билан бу эҳтимоллик экспоненциал (яъни жуда тез) камая боради, лекин у нолдан фарқлидир: микроскопик заррачалар макроскопик заррачалар учун „ман қилинган“ соҳаларга кира олиши мумкин.

Масалан, агар $U - E = 1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг бўлса, электронни чегарадан $x = 1\text{Å} = 10^{-8}$ см узоқликда топишнинг нисбий эҳтимолини ҳисоблаб чиқарамиз. Бунда қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)x} = \frac{12,56}{6,6 \cdot 10^{-27}} \sqrt{1,87 \cdot 10^{-27} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-8}} = 1,045, \\ e^{-1,045} = 0,29.$$

Кўришиб турибдики, эҳтимоллик жуда катта (тахминан 30%); $x = 5\text{Å}$ бўлганда у $e^{-5,2} = 0,005$, яъни кичик бўлиб қолади, лекин ҳали сезиларлидир; бироқ $x = 10\text{Å}$ бўлганда экспоненциал фактор жуда кичик $e^{-10,45} = 4,54 \cdot 10^{-8}$ миқдорга тенг бўлади.

Олинган натижаларни тўлқин нуқтаи назардан талқин қилиш қийин эмас, чунки $E < U$ бўлган ҳол оптикадаги тула ички қайтиш ҳолига ўхшашдир. Ҳақиқатан ҳам, геометрик оптика нуқтаи назаридан ёруғлик—зичлиги каттароқ муҳитдан зичлиги кичикроқ муҳитга ўтишида тушиш бурчаги критик бурчак-

дан катта бўлганда ёруғлик зичлиги кичикроқ муҳитга ўта олмайди. Бироқ тўлқин оптикасининг курсатишича ва тажрибанинг тасдиқлашича, ҳақиқатда бу зичлиги кичикроқ муҳитда, ҳатто тушиш бурчаги критик бурчакдан катта бўлганида ҳам, амплитудаси экспоненциал камаювчи тўлқин майдони мавжуд бўлади. Бунда амплитуданинг камайиши тақрибан $e^{-2\pi \nu/\lambda}$ кўпайтувчи билан аниқланади. Бу қонун $E < U$ учун эҳтимоллик зичлиги ψ^2 нинг камайиш қонунига мутлақо ўхшашдир. Сўнгра, ҳисоблашнинг кўрсатишича, ёруғликнинг иккинчи муҳитга ўтишига қарамасдан, Умов—Пойнтинг векторининг (энергия оқимининг) ажратиш (чегара) сиртига нормал ташкил этувчисининг уртача қиймати етарлича катта вақт оралиғида нолга тенг. Бу биринчи муҳитдан иккинчи муҳитга бир томонлама йўналган энергия ҳаракатининг мавжудмаслигини билдиради.

А. А. Эйхенвальд бу ҳолни батафсил анализ қилиб, тўла ички қайтишда Умов—Пойнтинг вектори чизиқлари эгри бўлишлигини кўрсатди; улар иккинчи муҳитга ўтади ва яна биринчи муҳитга қайтиб чиқади; иккинчи муҳитда майдоннинг мавжудлигига қарамасдан, қайтиш тўлалигича қолаверади*. Шунга мувофиқ равишда биз қараб чиққан ҳолда қайтариш коэффициенти R бирга тенг, ўтказиш коэффициенти эса нолга тенгдир; заррачалар II соҳага „ўтади“, бирор масофагача ичкари киради ва яна I соҳага қайтади.

Шундай қилиб, „ман“ қилинган соҳага кириш тўлқин нуқтаи назардан жуда содда талқин қилинган бўлса-да, корпускуляр нуқтаи назардан бу ҳодиса биринчи қарашда тушунарсиздек кўринади. Ҳақиқатан, агар заррачани тўсиқдан ўнгда топиш эҳтимоли нолга тенг бўлмаса, бу ҳолда уни ўша ерда топиш мумкин. Классик механика нуқтаи назаридан $E < U$ булган соҳада, олдин айтиб утилганидек, заррачанинг булиши мумкин эмас, чунки $E < U$ булганда заррача I соҳадан II соҳага утса, энергиянинг сақланиш қонуни бузилган бўлар эди.

Бироқ квант механикасида, заррачани $E < U$ бўлган соҳада топиш мумкинлиги ҳеч қандай тасодифий ҳодиса эмас. Биринчидан, ноаниқлик муносабатлари туфайли, микроскопик заррачалар учун x ва p нинг бир вақтдаги аниқ қийматлари бўлмайди. Шунинг учун потенциал (x функция) ва кинетик энергия (p функция) нинг бир вақтдаги муайян қийматлари ҳақида гапиришнинг маъноси йўқ. Сўнгра, заррачани барьердан ўнгда топиш дегани нимани билдиради? Бунинг учун, равшанки, унинг x координатасини ўлчаш керак.

* Масалан, қўйидаги китобларга қаранг: Г. С. Ландсберг, Оптика, 130-§. Гостехиздат, 1947; А. А. Эйхенвальд, Теоретическая физика, VI қ., 226-§, ГНТИ, 1931.

Бизни қизиқтирган масалани шу нуқтан назардан анализ қилинганда қуйидаги маълум бўлади: $E < U$ ҳол учун координатани ўлчашнинг ҳар қандай усули ҳам яроқли булавермайди, агар усул яроқли бўлса, у ҳолда заррача ўлчагич асбоб томонидан шундай миқдорда қўшимча энергия оладика, бунда энергиянинг сақланиш қонуни бузилмайди.

Шу анализни келтираемиз. Айтилик, биз заррачанинг координатасини тақрибан ўлчашга муваффақ бўлдик, чунончи заррача барьердан ўнгда, l га тенг кесманинг қаеридадир турган бўлсин. Бундай ҳолда заррачанинг координатаси мутлақо ноаниқ бўлмайди, лекин бизга у $\Delta x = l$ ноаниқликда маълум бўлади. Аммо, агар координатани $\Delta x = l$ ноаниқликда топган бўлсак, у ҳолда импульс

$$\Delta p \geq \frac{h}{l} \quad (153.15)$$

ноаниқликка эга бўлиши керак.

Бу қўшимча Δp импульс қаердан пайдо бўлади? Заррача барьердан чапда эмас, балки ўнгда турибди деб ишончли даъво қилиш учун заррача координатасини аниқлашда қўлланилган оптик асбобнинг ажратиш қобилияти етарлича юқори бўлиши керак. Бунинг учун эса, оптикадан маълумки, заррачани ёритиш учун қўлланилган ёруғликнинг тўлқин узунлиги тегишлича кичик бўлиши керак. Аммо, бундай ҳолда ёруғлик сочилишида заррача қўшимча импульс олади (Комптон эффекти), бу эса импульс ноаниқлигини вужудга келтиради.

Аммо импульснинг Δp ноаниқлигига энергиянинг $\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$ ноаниқлиги мос келади. Уни баҳолаймиз. x ортган сари заррачани топиш эҳтимоли (153.14) формула бўйича экспоненциал камая боради, у ҳолда заррачани барьердан шундай масофаларда қидириш маънога эга бўладика, булар учун (153.14) да даража кўрсаткич 1, яъни

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)} l \sim 1$$

бўлади, бундан

$$l \sim \frac{h}{4\pi \sqrt{2m(U - E)}}.$$

Шундай қилиб, (153.15) бўйича импульс ноаниқлиги

$$\Delta p \geq 4\pi \sqrt{2m(U - E)}$$

ва демак, албатта

$$\Delta p > \sqrt{2m(U - E)}.$$

Шунинг учун

$$(\Delta p)^2 > 2m(U - E)$$

ва

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m} > U - E.$$

Демак, координатани ўлчашда заррача олган қўшимча энергия потенциал ва кинетик энергиялар орасидаги фарқдан катта бўлади ва шунинг учун заррачани барьердан ўнгда топиш имконияти энергия сақланиши қонунига зид эмас.

154-§. Кенглиги чекланган потенциал барьер

Барьерлар тўғрисидаги масалани текширишни давом эттирамиз ва барьернинг кенглиги чекланган ҳолни текшириш билан шуғулланамиз. Бу параграфда биз ечадиган масаланинг шартлари қуйидагича: заррача майдонда (майдонни уч соҳага ажратамиз) чапдан ўнгга x ўққа параллел йўналишда ҳаракат қилади.

- I* соҳада, яъни $x \leq 0$ бўлганда потенциал энергия $U = 0$,
II » » $0 \leq x \leq d$ » » » $U = \text{const} \neq 0$,
III » » $x \geq d$ » » » $U = 0$.

Бу типдаги барьер атом физикасининг кўп масалаларини (масалан, металллардан электронлар эмиссияси, радиоактив емирилиш ва ҳ. к.) ечишда учрайдиган шартларни схематик тасвирлайди.

Ҳар бир соҳа учун Шрёдингер тенгламасини алоҳида-алоҳида ёзамиз:

I ва *III* соҳалар ($U = 0$) учун:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi = 0 \quad (154.1)$$

ва *II* соҳа ($U \neq 0$) учун:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U)\psi = 0. \quad (154.2)$$

Бу тенгламаларнинг ечимлари моҳ равишда қуйидагилардир:

$$\psi_{I,III} = e^{\pm ik_1 x} \quad \left(k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\lambda} \right), \quad (154.3)$$

$$\psi_{II} = e^{\pm ik_2 x} \quad \left(k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)} \right). \quad (154.4)$$

Олдинги параграфда заррачанинг бошқа потенциал энергияли чексиз чўзилган соҳага ўтиш ҳолини қараб чиққан эдик ва заррача энергияси билан потенциал барьер баландлиги орасидаги муносабат ҳар қандай бўлганда ҳам заррачанинг қайтишининг маълум эҳтимоли ва *II* соҳага ўтишининг маълум эҳтимоли бор эканлигини кўрган эдик. Текширилмоқчи бўлган ҳолда потенциал барьернинг кенглиги чекланган, бунда ҳар доим заррачанинг *II* соҳа *ичидан* ўтиб, *III* соҳага чиқиши маълум эҳтимолга эга бўлишлигини кўрамиз. Ҳатто тушаётган

заррачанинг тўла энергияси унинг II соҳадаги потенциал энергиясидан кичик бўлган ҳолда ҳам, бу эҳтимол чекли катталикка эгадир, чунончи заррача бу ҳолда III соҳага I соҳада қандай энергияга эга бўлса, шу энергияси билан чиқади.

Қаралаётган ҳолнинг олдинги параграфда ўрганилган ҳолдан фарқи шундаки, бу ерда қайтиш I ва II соҳалар чегарасида ҳам, II ва III соҳалар чегарасида ҳам ўринли бўлади. Шунга мувофиқ равишда ечимлар қуйидагилардир:

$$\psi_I = e^{ik_1x} + b_1e^{-ik_1x}, \quad \psi_{II} = a_2e^{ik_2x} + b_2e^{-ik_2x}, \quad \psi_{III} = a_3e^{ik_1x}. \quad (154.5)$$

Олдинги параграфдагидек, бунда ҳам a_1 коэффицент 1 га тенг деб олинган.

R ва D коэффицентларни ҳисоблаш учун даставвал b_1 , b_2 , a_2 , a_3 ўзгармасларни топиш зарур. Шу мақсадда ψ функциянинг ва унинг биринчи ҳосиласининг I ва II , II ва III соҳалар чегараларида, яъни $x=0$ ва $x=d$ да узлуксиз бўлиш-лиги шартларидан фойдаланамиз. Бу шартларни ёзамиз:

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0}, \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \quad (154.6)$$

$$(\psi_{II})_{x=d} = (\psi_{III})_{x=d}, \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=d} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=d}. \quad (154.7)$$

Бу шартлар қуйидаги тенгламаларни беради:

$$\left. \begin{aligned} 1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\ k_1 - k_1b_1 &= k_2a_2 - k_2b_2, \\ a_2e^{ik_2d} + b_2e^{-ik_2d} &= a_3e^{ik_1d}, \\ a_2e^{ik_2d} - b_2e^{-ik_2d} &= a_3\frac{k_1}{k_2}e^{ik_1d}. \end{aligned} \right\} \quad (154.8)$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, a_3 учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$a_3 = \frac{4k_1k_2e^{ik_1d}}{(k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2d} - (k_1 - k_2)^2 e^{ik_2d}}. \quad (154.9)$$

Қайтариш коэффиценти R ни ҳисобламаймиз, чунки бу ҳисоблаш олдинги параграфда айтилганларга нисбатан, принцип жиҳатдан ҳеч қандай янги натижа бермас эди. Шунинг учун b_1 , a_2 , b_2 коэффицентлар бизга керак бўлмайди. Барьернинг шаффофлик коэффиценти D [(153.12) формулани қаранг] мазкур ҳолда тўғридан-тўғри a_3 нинг модули квадратига тенг, чунки I ва III соҳаларда тўлқин узунлиги бир хилдир:

$$D = |a_3|^2 = a_3 a_3^*. \quad (154.10)$$

$E < U$ бўлган ҳолда D катталик бизни қизиқтиради. Бунда

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)}$$

равшанки, соф мавҳум сон бўлади.

$$k_2 = ik$$

деб белгилаймиз, бунда

$$k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)}. \quad (154.11)$$

(154.9) нинг махражига кирган $e^{\pm ik_d d}$ экспоненциал функциялар бу шароитда $e^{\mp kd}$ ҳақиқий сонлар бўлади. (154.9) урнига қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a_3 = \frac{i 4k_1 k e^{ik_d d}}{(k_1 + ik)^2 e^{kd} - (k_1 - ik)^2 e^{-kd}},$$

$$a_3^* = \frac{-i 4k_1 k e^{-ik_d d}}{(k_1 - ik)^2 e^{kd} - (k_1 + ik)^2 e^{-kd}}.$$

Гиперболик функциялар

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ёрдамида a_3 ва a_3^* ифодаларни

$$a_3 = \frac{i 2k_1 k e^{ik_d d}}{(k_1^2 - k^2) \operatorname{sh} kd - 2ik k_1 \operatorname{ch} kd},$$

$$a_3^* = \frac{-i 2k_1 k e^{-ik_d d}}{(k_1^2 - k^2) \operatorname{sh} kd - 2ik k_1 \operatorname{ch} kd}$$

кўринишга келтирамиз. Бу эса

$$D = a_3 a_3^* = \frac{4k_1^2 k^2}{(k_1^2 - k^2)^2 \operatorname{sh}^2 kd + 4k^2 k_1^2 \operatorname{ch}^2 kd}$$

ифодани беради;

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

эканини эътиборга олиб, ўзгартиришлардан сўнг

$$D = \frac{4k_1^2 k^2}{(k_1^2 - k^2)^2 \operatorname{sh}^2 kd + 4k_1^2 k^2} \quad (154.12)$$

формулани оламиз.

Энди бизни қизиқтирган ҳолларнинг кўпчилигида $\operatorname{sh}^2 kd$ ни тўғридан-тўғри $\frac{1}{2} e^{2kd}$ га тенг деб ҳисобласа мумкинлигини эътиборга оламиз. Ҳақиқатан ҳам, масалан, электронлар учун

$U - E = 150$ в, $d = 10^{-8}$ см бўлганда $kd = \frac{2\pi}{10^{-8}} \cdot 10^{-8} = 6,28$. Шунинг учун

$$e^{2kd} = e^{12,56} = 2,8 \cdot 10^6, \quad e^{-2kd} = e^{-12,56} = 3,5 \cdot 10^{-7}.$$

Энди D ни

$$D = \frac{1}{4} \frac{(k_1 + k)^2 e^{2kd}}{(k_1 + k)^2 e^{2kd} + 4}$$

кўринишда ёзиб олиб, махражда e^{2kd} га нисбатан 4 ни ташлаб юбориш мумкинлигини кўрамиз ва k_1 ҳамда k кагаликлари бир тартибда бўлганлиги учун муҳим кўпайтувчигача аниқликда:

$$D \sim e^{-2kd} = e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} d}. \quad (154.13)$$

Бу формула барьернинг киритувчанлиги унинг d кенглигига жуда кучли даражада боғлиқ эканлигини кўрсатади.

Электронлар учун экспоненциал фактор қийматини ҳисоблаб чиқамиз. Электрон массаси учун $m = 9,8 \cdot 10^{-28}$, Планк доимийси учун $h = 6,6 \cdot 10^{-27}$ ни оламиз. Агар барьер баландлиги U ва электроң энергияси орасидаги фарқ V электрон-вольт ёки $1,6 \cdot 10^{-12} V$ эрг бўлса, у ҳолда

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} = 1,08 \cdot \sqrt{V} \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}.$$

$U - E = V = 5 \text{ эв}$ деб олиб, барьернинг турли кенглиги учун экспоненциал кўпайтувчининг қуйидаги қийматларини ҳосил қиламиз:

d (Å да)	1	1,8	1,5	1,8	2,0	5,0	10,0
D	0,1	0,04	0,03	0,016	0,008	$5,54 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-12}$

Барьернинг кенглиги 1 Å (атом ўлчамлари) бўлганда киритувчанлик анча катта (бир неча процент) эканлиги, лекин $d = 10 \text{ Å}$ бўлганда эса у жуда кичик бўлиб қолиши кўрииб турибди.

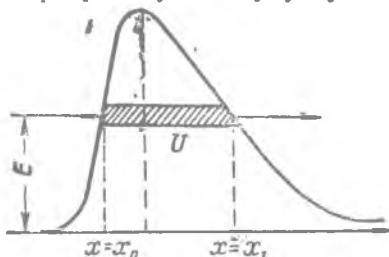
Заррачанинг потенциал барьер орқали ўтишида энергия йўқотмаслигини айтиб угиш қизиқарлидир: заррача барьер соҳасига қандай энергия билан тушган бўлса, барьер чегарасидан ўшандай энергия билан чиқади.

Биз жуда соддалаштирилган тўғри бурчак шаклидаги потенциал барьердан заррачанинг ўтишини текширдик. Ихтиёрий кўринишдаги барьернинг (229- расмга қаранг) шаффофлик коэффициенти, етарлича тақрибий, (154.13) формуланинг табиий умумлашгани бўлган

$$D = Ce^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{U-E} dx}. \quad (154.14)$$

формула билан ифодаланади, бунда C — тартиби 1 га тенг бўлган муҳиммас ўзгармасдир. Бу формулани биз келгусида баъзи бир конкрет физик масалаларга қўллаймиз.

Потенциал барьердан ўтишни кўпинча образли қилиб *туннель эффект* дейилади: заррача барьердан ўтиши учун унинг чўққисига чиқмайди, аммо *унинг остидан*, худди туннелдан ўтган сингари, ўтади. Л. И. Мандельштам ва М. А. Леонтович ишларида туннель ўтишлар назариясига асос солинган эди.



229- раом. Ихтиёрй шаклдаги потенциал барьер.

Классик механикада тушунтириб бўлмайдиган кўпгина ҳодисалар квант механикада микроскопик заррачаларнинг кейинги икки параграфда қараб чиқилган махсус хоссалари туфайли осон тушунтирилади. Қуйидаги параграфларда бу масалага яна қайтамиз.

155- §. Торнинг тебраниши

Олдинги параграфларда текширилган масалалар жуда кичик заррачалар ҳаракатини бошқарувчи қонунларнинг ўзига хос хусусиятларини очиб кўрсатади. Атом системаларнинг уларни классик механикага бўйсунувчи системалардан кескин фарқ қилдирувчи бизга маълум бўлган хусусияти — энергия сатҳлари дискретлигининг мавжудлиги — қандай йўсинда Шрёдингер тенгламасидан мутлақо равон келиб чиқишини келгуси параграфларда кўрсатамиз. Бу хусусияг Шрёдингер дифференциал тенгламасининг баъзи хоссалари билан, — классик физиканинг маълум масалаларини ечиш вақтидан анча аввал кашф қилинган хоссалари билан чамбарчас боғланганлигини кўраимиз.

Келгуси мулоҳазаларни тушунишни энгиллаштириш учун, даставвал, ана шундай классик масалалардан бирини, бутун узунлиги бўйича бир хил зичликка ($\rho = \text{const}$) ва бир хил тарангликка ($T = \text{const}$) эга бўлган тарангланган торнинг тебранишлари тўғрисидаги масалани қараб чиқамиз.

Торнинг тебраниш тенгламаси* бир ўлчовли тўлқин тенгламадир:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (155.1)$$

* Тор тебранишлари тенгламасини келтириб чиқаришни ушбу китобдан қаранг: В. И. Смирнов, Курс высшей математики, II т., 163- §. Гостехиздат, 1948.

бунда $u(x, t)$ — торнинг мувозанат вазиятдан огиши, c' эса торда тўлқиннинг тарқалиш тезлиги бўлиб, у

$$c' = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (155.2)$$

формула орқали торнинг T таранглиги ва унинг ρ зичлиги билан боғлангандир. T ва ρ доимий бўлганда $c' = \text{const}$.

Аввал, торни чексиз деб фараз қиламиз, ва тўлқин гармоник (монохроматик) бўлган ҳолни текшираемиз. У ҳолда торнинг ҳар бир қисми гармоник тебранади ва (155.1) тенглама ечимини

$$u(x, t) = y(x) e^{i2\pi vt} \quad (155.3)$$

кўринишда қидирамиз. Бу ечимни (155.1) га қўямиз ва $e^{i2\pi vt}$ га қисқартириб, қуйидагини оламиз:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\pi^2 v^2}{c'^2} y = 0, \quad (155.4)$$

ёки, v/c' ни $1/\lambda$ га алмаштирадик,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y = 0. \quad (155.5)$$

Бу тенгламани $e^{\pm i \frac{2\pi}{\lambda} x}$ ечимлар қаноатлантиради. Шунинг учун умумий ечим

$$y = B_1 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x} + B_2 e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} x} \quad (155.6)$$

булади, бунда B_1 ва B_2 — умуман айтганда, комплекс, яъни δ_1 ва δ_2 бошланғич фазаларни ўз ичига олган (47- § га қаранг). ихтиёрий ўзгармас катталиклардир:

$$B_1 = b_1 e^{i\delta_1}, \quad B_2 = b_2 e^{-i\delta_2}.$$

(155.6) ечимга b_1 ва b_2 ҳақиқий амплитудаларни киритиб, қуйидагини оламиз:

$$y = b_1 e^{i \left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta_1 \right)} + b_2 e^{-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta_2 \right)}. \quad (155.7)$$

Агар (155.7) нинг ҳар бир ҳади ёнига $e^{i2\pi vt} = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} c' t}$ вақтли кўпайтувчини ёзсак, у ҳолда (155.1) тенгламанинг умумий ечимини оламиз:

$$u(x, t) = b_1 e^{i \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + c't) + \delta_1 \right]} + b_2 e^{-i \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - c't) + \delta_2 \right]} \quad (155.8')$$

ёки, фақат ҳақиқий қисмини олсак,

$$u(x, t) = b_1 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + c't) + \delta_1 \right] + b_2 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - c't) + \delta_2 \right]. \quad (155.8)$$

Бу ечимнинг ҳар бир ҳади торда тарқалаётган тўлқинни тасвирлайди; агар бунда биринчи ҳад чапдан ўнгга тарқалаётган тўлқинга (тезлик $+c'$) мос келса, иккинчиси эса ўнгдан чапга югурувчи тўлқинга (тезлик $-c'$) мос келади.

$b_1 = b_2 = \frac{a}{2}$ деб оламиз ва (155.8) га кирган косинуслар йиғиндисини тригонометриянинг маълум қоидаси бўйича алмаширамиз:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta'\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} c't + \delta\right) = \\ &= a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta'\right) \cos(2\pi\nu t + \delta), \end{aligned} \quad (155.9)$$

бунда $\frac{b_1 + b_2}{2} = \delta'$, $\frac{b_1 - b_2}{2} = \delta$. Равшанки, бу ечим тордаги турфун тўлқинларни тасвирлайди, чунки, x нинг

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta'\right) = 0$$

шартни қаноатлантирган қийматларида t ҳар қандай бўлганда ҳам $u(x, t)$ четлашиш нолга тенг бўлади. Бу эса торда четлашиш ҳамма вақт нолга тенг бўладиган жойлар, яъни тугунлар борлигини, улар орасида эса оғиш максимал бўладиган жойлар, яъни дўнгликлар жойлашганлигини билдиради.

Энди, торнинг бир учи (масалан, $x = 0$ да) қаттиқ маҳкамланган деб фараз қилайлик. Шундай қилиб, битта чегаравий шартга эгамиз:

$$u(0, t) = 0. \quad (155.10)$$

Бу чегаравий шартнинг қаноатлантирилиши учун

$$u(0, t) = a \cos \delta' \cdot \cos(2\pi\nu t + \delta) = 0$$

бўлиши зарур, ammo бу ҳол $\delta' = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ бўлгандагина ($a \neq 0$ булган тривиал ҳол бундан мустасно), яъни

$$u(x, t) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos(2\pi\nu t + \delta) \quad (155.11)$$

ўринли бўлиши мумкин.

Агар тор l чекли узунликка эга бўлса ва иккала учи ҳам маҳкамланган бўлса, у ҳолда (155.9) ечим иккита чегаравий шартни қаноатлантириши керак:

$$u(0, t) = 0 \text{ ва } u(l, t) = 0.$$

Биринчи шартни татбиқ этиб, маълум бўлган (155.11) ечимни оламиз; ошқор қуринишда ёзилган иккинчи чегаравий шарт t нинг ҳар қандай қийматида ҳам

$$a \sin \frac{2\pi}{\lambda} l \cos(2\pi\nu t + \delta) = 0$$

бўлишини талаб қилади. Бу талаб

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (155.12)$$

бўлганда қаноатлантирилади, бундан:

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = n \frac{\pi}{l} \text{ ва } 2\pi\nu_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} c' = n \frac{\pi c'}{l}. \quad (155.13.)$$

Демак, (155.1) дифференциал тенгламани ва (155.12) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечимлар чексиз сонли танланган функциялар тўпламидан иборатдир:

$$\sin n \frac{\pi x}{l} \cos(2\pi\nu_n t + \delta_n) = \sin n \frac{\pi x}{l} \cos\left(n \frac{\pi c'}{l} t + \delta_n\right) \quad (155.14)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Бу функциялар турли турғун тўлқинларни ёки иккала учи маҳкамланган торнинг хусусий тебранишларини тасвирлайди. Ҳақиқатан, (155.14) да $n = 1$ деб олиб,

$$u_1 = \sin \pi \frac{x}{l} \cos\left(\frac{\pi c'}{l} t + \delta\right) \quad (155.15)$$

ечимни ҳосил қиламиз. Бу ечим $x = 0$ ва $x = l$ да иккита тугунга эга бўлган турғун тўлқинни ифодалайди, чунки x нинг фақат шу қийматларидагина (155.15) функция t нинг ҳар қандай қиймати учун нолга айланади. $n = 2$ бўлганда,

$$u_2 = \sin 2 \frac{\pi x}{l} \cos\left(2 \frac{\pi c'}{l} t + \delta\right)$$

турғун тўлқинни оламиз, бу тўлқин $x = 0, l/2, l$ нуқталарда учта тугунга эга, яъни иккита тугун тор учларида ва биттаси—тор ўртасида бўлади. Умуман, m -функция

$$u_m = \sin m \frac{\pi x}{l} \cos\left(m \frac{\pi c'}{l} t + \delta\right)$$

$(m + 1)$ та тугунга эга бўлган турғун тўлқинни тасвирлайди. Атом физикаси масалаларида квант сонлари қандай аҳамиятга эга бўлса, бу ерда бутун m сон худди шундай аҳамиятга эга эканлигини айтиб ўтамиз.

Иккала учи маҳкамланган торда турғунлаша оладиган тўлқинлар узунликлари (155.12) формуладан топилади:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad (155.16)$$

чунончи, фақат шу узунликдаги тўлқинларгина торда тарқала олади, чунки акс ҳолда чегаравий шартлар қаноатлантирилмайди. Бу тўлқинлар узунликларига мос келувчи танланган частоталар қатори қуйдагича бўлади:

$$\nu_n = n \frac{c'}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (155.17)$$

Бу частоталар тор тебранишларининг *хусусий частоталари* дейилади. Улар дискрет қаторни ташкил қилиши кўриниб турибди: энг кичик хусусий частота $\nu_1 = \frac{c}{2l}$ га тенг, кейинги частоталар эса $2\nu_1, 3\nu_1, \dots$. Энг кичик ν_1 частота акустикада асосий тон дейилади; кейинги частоталар обертолар ёки гармоникалар дейилади; ν_2 частота биринчи обертон ёки биринчи гармоника бўлади ва ҳ. к.

Келгусида фойдаланиладиган терминологияни киритамиз. Қуйидаги:

$$y_n = \sin n \frac{\pi x}{l} \quad (155.18)$$

функциялар дифференциал тенглама

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y = 0 \quad (155.19)$$

ва чегаравий шарт

$$y(0) = y(l)$$

ни қаноатлантириши учун (155.19) тенгламага параметр сифатида кирган λ тулқин узунлик фақат қуйидаги:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

қийматлардан бирини қабул қилиши керак. Бу қийматларни параметрнинг *хусусий қийматлари* деб, уларга мос функцияларни эса (155.19) дифференциал тенгламанинг *хусусий функциялари* деб атаймиз.

Иккала учи маҳкамланган торнинг хусусий тебранишлари қандай бўлишини аниқладик. Бу тебранишларга танланган частоталар қатори мос келади. Аммо бундан, тор албатта фақат бир асосий тонга ёки фақат гармоникалардан бирига мос частота билан тебраниши керак деган натижа чиқмайди. Аксинча тор шундай содда тебранишлар қилиши учун махсус уйғотиш шароити бўлиши керак. Оддий уйғотиш усулларида эса, умуман айтганда, торнинг барча хусусий тебранишлари бир вақтда пайдо бўлади. Математик жиҳатдан бу:

$$\frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (155.1)$$

тенгламанинг чизиқли ва бир жинсли бўлишига мос келади, шунинг учун у фақат,

$$\sin n \frac{\pi x}{l} \cos \left(n \frac{\pi c}{l} t + \delta_n \right) \quad (155.14)$$

ечимлар билан қаноатлантирилиб қолмай, балки уларнинг ҳар қандай чизиқли комбинацияси билан ҳам қаноатлантирилади.

(155.14) нинг ечимлар сони чексиз кўп бўлгани учун (155.1) тенгламани қуйидаги чексиз қатор қаноатлантиради:

$$\begin{aligned}
 u &= a_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \left(\frac{\pi c'}{l} t + \delta_1 \right) + a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{l} \cos \left(2 \frac{\pi c'}{l} t + \delta_2 \right) + \dots = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \frac{\pi x}{l} \cos \left(n \frac{\pi c'}{l} t + \delta_n \right) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \frac{\pi x}{l} \left(b_n \cos n \frac{\pi c'}{l} t + c_n \sin n \frac{\pi c'}{l} t \right). \quad (155.20)
 \end{aligned}$$

Бунда баъзи коэффициентлар нолга тенг бўлиб чиқиши мумкин, бундан эса мос обертолар мавжуд эмас деган хулоса чиқади.

Агар (155.20) қаторнинг барча коэффициентлари маълум бўлса, у ҳолда вақтнинг ҳар қандай келажак пайти учун торнинг тебранишлари шаклини олдиндан айтиш мумкин. Аммо бу коэффициентларни аниқлаш учун бошланғич шартлар маълум бўлиши керак ва (155.1) тенглама иккинчи тартибли бўлганлиги учун қуйидаги иккита бошланғич шарт: торнинг бошланғич шакли ва унинг нуқталари тезликларининг бошланғич тақсимооти берилган бўлиши керак.

Торнинг $t = 0$ даги кўринишини характерловчи

$$u(x, 0) = u_0(x) = y_0(x)$$

функция орқали торнинг бошланғич шакли ифодаланади, тезликларнинг бошланғич тақсимооти эса, $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = V_0$ ҳосила қиймати билан аниқланади.

(155.20) қаторни t бўйича дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi c'}{l} \sum_n \sin n \frac{\pi x}{l} \left(-n b_n \sin n \frac{\pi c'}{l} t + n c_n \cos n \frac{\pi c'}{l} t \right). \quad (155.21)$$

$t = 0$ бўлганда (155.20) ва (155.21) формулалар қуйидаги ифодаларни беради:

$$y_0 = \sum_n b_n \sin n \frac{\pi x}{l}, \quad (155.22)$$

$$v_0 = \frac{\pi c'}{l} \sum_n n c_n \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (155.23)$$

Аммо, равшанки, (155.22) ва (155.23) қаторлар Фурье қаторларидан иборатдир. Уларнинг коэффицентлари одатдаги қоида бўйича топилади:

$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l y_0(x) \sin n \frac{\pi x}{l} dx, \\ c_n &= \frac{2}{i n \pi c} \int_0^l v_0(x) \sin n \frac{\pi x}{l} dx. \end{aligned} \right\} \quad (155.24)$$



230- расм.

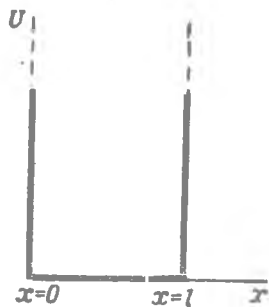
b_n ва c_n коэффицентларни (155.20) қаторга қўйиб, тор тебранишлари характерини ихтиёрий келажак вақт пайти учун олдиндан айтиб бериш имкониятига эга бўламиз.

230- расмда Фурье қаторининг турли сондаги ҳадлари ёрдамида тор тебранишлари бошланғич шаклини қандай тарзда тасвирлашни кўрсатувчи мисол келтирилган. Бу расмда пунктир чизиқлар торнинг $t=0$ пайтдаги шаклини тасвирлайди, туташ чизиқлар эса бу шакл Фурье қаторининг битта, иккита, учта ва тўртта ҳади ёрдамида қандай тасвирланишини кўрсатади.

156- §. Потенциал яшикдаги заррача

Классик физиканинг бундан олдинги параграфда кўриб чиқилган масаласидан яна Шрёдингер тенгламасига қайтамиз ва даставвал қандай қилиб бу тенгламадан энергиянинг квантланиши (дискрет қийматларга эга бўлиши) келиб чиқишини энг содда мисолда кўрсатамиз.

Қуйидагича характерланадиган майдонда жойлашган микроскопик заррачани қарайлик: $x = 0$ дан $x = l$ гача потенциал энергия U ўзгармас ва нолга тенг; $(0, l)$ соҳа чегараларида эса U тўсатдан чексизгача ортади (231- расм). Бундай шароитларда заррача $(0, l)$ соҳадан ташқарига чиқмайди деб таъкидлаш мумкин Буни яққоллаштириш учун деворлари идеал қайтарадиган яшикка қамалган заррачани



231- расм.

тасаввур қилиш мумкин; заррача яшик ичида унинг деворлари орасида эркин ҳаракатланади, лекин яшик ташқарисига чиқа олмайди.

Даставвал бу масаланинг чегаравий шартларини аниқлаймиз. Шу мақсадда, x ўққа параллел йўналган бир ўлчовли ҳаракат учун Шрёдингер тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U) \psi = 0. \quad (156.1)$$

Биз текшираётган масалада потенциал энергия қуйидаги талабларни қаноатлантириши керак:

$$U = \begin{cases} 0, & \text{агар } 0 \leq x \leq l \text{ бўлса,} \\ \infty, & \text{агар } x = 0 \text{ ва } x = l \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (156.2)$$

Бу талабларни қаноатлантириш учун яшик деворлари ёнида $\psi(x)$ нолга айланиши керак. Ҳақиқатан, $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ ни ψ'' орқали белгилаб, (156.1) тенгламани

$$\frac{\psi''}{\psi} = -\frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U) \quad (156.3)$$

кўринишда қайта ёзиб оламиз. x нинг 0 ва l орасидаги ҳамма қийматлари учун $U = 0$ ва ψ''/ψ нисбат чекли катталиққа эга бўлади; $x \rightarrow 0$ ва $x \rightarrow l$ бўлганда U потенциал энергия чексизга интилади. Стандарт шароит (152-§, ψ ва ψ' ларнинг чеклилиги ва узлуксизлиги) туфайли, бу фақат $\psi(x) \rightarrow 0$ ҳолдагина бўлиши мумкин. Шундай қилиб, масала

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi = 0 \quad (156.4)$$

тенгламани

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0 \quad (156.5)$$

шароитда интеграллашдан иборат бўлиб қолади.

Бу масала олдинги параграфда қаралган торнинг турғун тебренишлари ҳақидаги масалага мутлақо ўхшашлиги кўриниб турибди. Шунинг учун у масалада олинган барча натижалардан уларга биз текшираётган ҳолга тегишли изоҳлар бериб, фойдалана оламиз. Чунончи, (156.4) тенгламанинг хусусий функциялари

$$\psi_n = \sin n \frac{\pi x}{l} \quad (156.6)$$

бўлади (155-§ га қаранг).

Энергиянинг хусусий қийматларини топиш учун (156.4) тенгламадаги $8\pi^2mE/h^2$ коэффициент ўрнида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y = 0 \quad (156.7)$$

тенгламада $4\pi^2/\lambda^2$ коэффициент турганлигини эътиборга оламиз. (156.7) даги λ нинг хусусий қийматлари $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ формула билан аниқланганлиги учун $\frac{4\pi^2}{\lambda_n^2} = 4\pi^2 \left(\frac{n}{2l}\right)^2$ бўлади. Шундай қилиб, биз қуйидагини оламиз:

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E_n = 4\pi^2 \left(\frac{n}{2l}\right)^2,$$

бундан

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (156.8)$$

Демак, масаланинг чегаравий шартларини энергиянинг (156.8) дискрет қатор қийматларига қаноатлантиришини кўрамиз. Бу эса потенциал яшиқда „қамалган“ заррача энергиянинг (156.8) квантланган қийматларигагина эга бўлишини билдиради.

Бу хулоса дастлаб жуда кутилмаган бўлиб кўринади. Лекин, „яшиқ“ нинг ўлчамлари атом ўлчамларидек бўлган ҳолдагина энг кичик заррача учун ҳам квантланиш сезиларли бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун узунлиги $l = 1$ см бўлган яшиқка жойланган $m = 9,8 \cdot 10^{-28}$ г массали электрон учун энергия сатҳлари орасидаги масофани ҳисоблаб топамиз. У ҳолда

$$E_n = n^2 \frac{(6,65 \cdot 10^{-27})^2}{8 \cdot 9,8 \cdot 10^{-28}} = n^2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} = n^2 \cdot 3,37 \cdot 10^{-15} \text{ эв.}$$

Бу формулага асосан, қўшни сатҳлар ($\Delta n = 1$) орасидаги масофа:

$$\Delta E_n \approx 2n \cdot 3,37 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} = 6,74 \cdot 10^{-15} n \text{ эв.}$$

Бу масофалар жуда кичик, шунинг учун амалда биз энергияларнинг туташ қаторига эга бўламиз. Бироқ, кейинги параграфда, ҳатто бир-бирига жуда яқин жойлашган дискрет сатҳларнинг мавжуд бўлиши микроскопик ўлчамли яшиқ ҳолида катта аҳамиятга эга бўлишини кўрамиз.

Энди, яшиқ атом тартибидаги ўлчамларга эга, масалан, $l = 10 \text{ \AA} = 10^{-7} \text{ см}$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$E_n = 5,4 \cdot 10^{-13} n^2 \text{ эрг} = 0,34 n^2 \text{ эв}$$

$\Delta n = 1$ бўлганда сатҳлар орасидаги масофа:

$$\Delta E_n = 0,68 n \text{ эв.}$$

Бу — энди тамомила сезиларли масофалардир.

Шу пайтгача биз фақат энергиянинг хусусий қийматлари билан қизиқдик. Энди масаламизнинг хусусий функциялари хоссаларини қараб чиқамиз. Даставвал, хусусий функцияларнинг

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^0(x) \psi_n^0(x) dx = 0 \quad (m \neq n \text{ бўлганда})$$

тенглик билан ифодаланадиган ортогоналлик хоссаларга эга бўлишни исбот қиламиз. Исбот учун, даставвал, (156.5) чегаравий шартларга асосан $x = 0$ ва $x = l$ бўлганда ψ функция нолга айланишини айтиб ўтамиз. Шунинг учун чексиз чегаралар орасида интеграллаш 0 дан l гача интеграллашга келади. Хусусий функцияларнинг (156.6) умумий ифодасини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^0(x) \psi_n^0(x) dx = \int_0^l \sin m \frac{\pi x}{l} \sin n \frac{\pi x}{l} dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos(m-n) \frac{\pi x}{l} - \cos(m+n) \frac{\pi x}{l} \right] dx = 0,$$

биз худди шуни исботламоқчи эдик.

$m = n$ бўлганда интеграл нолга тенг бўлмайди, бу эса ψ_n функцияни 1 га нормаллаштириш имконини беради. Ҳақиқатан, $N_n \psi_n$ функция нормалландиған, яъни

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2 dx = 1$$

шарт бажариладиган N_n кўпайтувчини топдик деб фараз қилайлик. Аввалгидек, $-\infty$ дан 0 гача ва l дан $+\infty$ гача олинadиган интеграллар нолга тенг бўлади, чунки бу оралиқларда ψ_n функция нолга тенг. Шунинг учун

$$1 = N_n^2 \int_0^l \sin^2 n \frac{\pi x}{l} dx = N_n^2 \frac{l}{2}.$$

Бундан

$$N_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Шундай қилиб, барча ψ_n функциялар учун нормаловчи кўпайтувчи бир хил бўлади ва нормалланган хусусий функциялар қуйидагилардир:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin 2 \frac{\pi x}{l}, \quad \dots$$

Заррача ψ_n хусусий функциялар тасвирлайдиган ҳолатларда

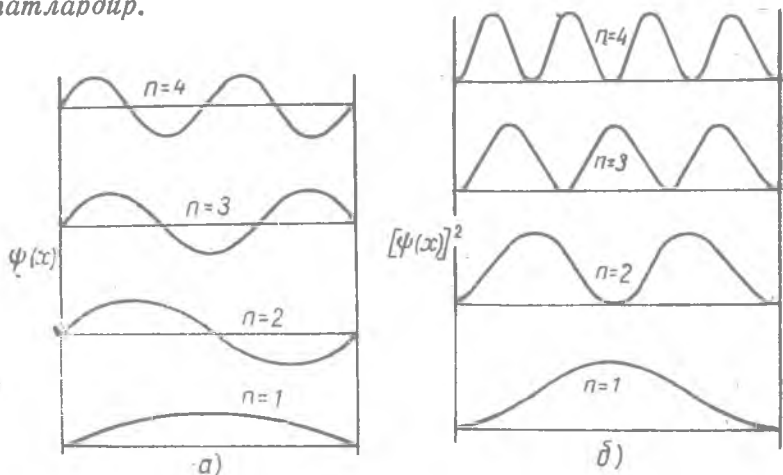
бўлганида вақтга боғлиқликни $e^{-i2\pi \frac{E_n}{h} t}$ „монохроматик“ кўпайтувчи ифодалашини эслатиб ўтамиз, шунинг учун E_n энергияга эга бўлган заррача ҳолатини ифодаловчи функция вақтнинг исталган пайтида қуйидагича бўлади:

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i2\pi \frac{E_n}{h} t} = \sin n \frac{\pi x}{l} e^{-i2\pi \frac{E_n}{h} t}.$$

Бунда, 152-§ да айтилганларга мувофиқ, вақтли кўпайтувчи аслида комплекс бўлиши керак, яъни унинг фақат ҳақиқий қисминигина олиш ярамайди. Бироқ, $\psi_n(x, t)$ функциянинг ўзи эмас, балки унинг модули квадрати, яъни

$$|\psi_n(x, t)|^2 = \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t) = \psi_n^2(x) = \sin^2 n \frac{\pi x}{l}$$

физик маънога эгадир. Равшанки, $\psi_n(x, t)$ функциялар тасвирлайдиган ҳолатлар вақтга боғлиқ эмас: бу — *стационар ҳолатлардир*.

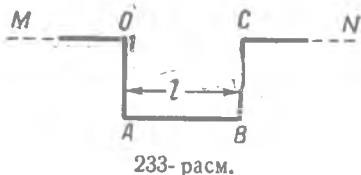


232- расм. а) хусусий функцияларнинг графиклари; б) потенциал яшикдаги заррача вазияти эҳтимоллиги зичлигининг тақсимоти.

232- расмда хусусий функцияларнинг (156.6) ва улар модуллари квадрaтининг графиклари келтирилган. Модуллар квадратлари, мазмунан, микроскопик заррача энергиясининг турли қийматларида заррачани яшик ичида у ёки бу жойда бирлик узунликда топиш эҳтимоли тақсимотини ифодалайли. Расмдан кўриниб туришича, пастки энергетик ҳолатда ($n = 1$) заррачани энг катта эҳтимол билан яшик ўртаси яқинида топиш мумкин, уни яшик деворлари ёнида топиш эҳтимоли эса иолга тенг. Бу натижа макроскопик заррача учун келиб чиқадиган натижадан кескин фарқ қилади. Бундай заррачани тенг эҳтимол билан яшикнинг исталган жойида топиш мумкинлиги равшандир, шу туфайли заррача учун эҳтимол зичлиги графиги абсцисса ўқига параллел бўлиши керак. Заррача энергияси орта борганда (n — квант сони ортганда) $|\psi_n|^2$ эгри чизиқнинг максимумлари борган сари бир-бирига яқинроқ жойлашишлиги, бинобарин, n квант соннинг жуда катта қийматлари учун макроскопик заррачага мос келган тақсимот ҳосил бўлиши расмдан кўриниб турибди. Ҳамма ҳоллардагидек, бу ерда ҳам мослик принципи қаноатлантирилади.

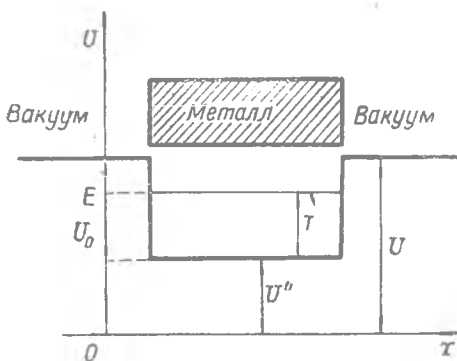
157-§. Потенциал ўрадаги электрон

Олдинги параграфларда олинган натижаларни қўллаш сифатида, потенциал „эгри чизиқ“ билан тасвирланган майдонда (233- расм) электроннинг табиатини қараб чиқамиз: яшик ёки $OABC$ „ўра“ ташқарисида электроннинг потенциал энергияси нолга тенг, чуқур ичида $u - U$ га тенг. Масалан, металл ичидаги электрон ана шундай майдонда жойлашган бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, металлнинг мусбат ионлари ҳосил қилган даврий майдонни дастлабки яқинлашишида металл ичида ўзгармас потенциали V бўлган бирор ўртача майдон билан алмаштириш мумкинлигини 143- § да кўрган эдик. Электроннинг потенциал энергияси манфий ва $U = -eV$ га тенг: металл ичидаги электрон чуқурлиги U бўлган потенциал ўрада қамалган.



233- расм.

Потенциал энергиянинг ноли ихтиёрый танланганлиги тўғрисида, уни металл ичида тинч турган электроннинг потенциал энергияси мусбат бўладиган, масалан, U'' га тенг бўладиган қилиб танлаймиз (234-расм).



234- расм. Металлдаги электрон учун потенциал модель.

U'' га нисбатан ортиқча энергия, яъни $E - U'' = T$ катталики, равшанки, кинетик энергияга тенг бўлади.

Потенциал яшикка жойланган электрон энергиянинг фақат танланган қийматларига эга бўлиши мумкин. Бу энергия дискрет қаторни ташкил қилишини биламиз (156- §)*. Металл парчаси чекли катталиқда бўлганда энергия сатҳлари орасидаги

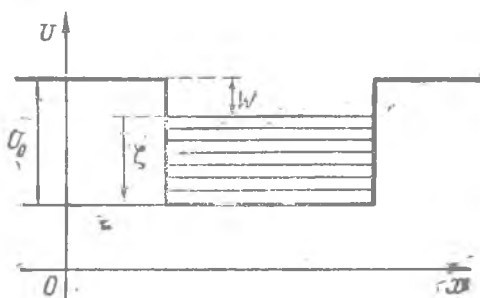
Агар электрон металл ичида ҳаракатланаётган бўлса, унинг тўла энергияси U'' дан катта ва, масалан, E га тенг бўлади.

* Бизни қизиқтираётган ҳолнинг 156- § да қаралган ҳолдан фарқи — бу ерда потенциал яшик деворларининг чекли баландликка эга бўлишидадир. Бундай масала иловада (V) қаралади. Унинг ечими мавжуд тафовутлар (айниқса макроскопик ўлчамли яшик учун) муҳим эъсосини кўрсатади.

масофа жуда кичик бўлади. Аммо уларнинг мавжудлиги *Паули принципи* деб аталадиган табиатнинг муҳим қонуни туфайли, жуда муайян равишда кўринади. Биз бу принцип билан кейинроқ батафсил танишамиз. Бу принципга асосан, металлда ҳар бир энергия сатҳларида фақат иккита электрон бўлиши мумкин. Агар шунинг учун аввал фақат мусбат ионлардан иборат панжарани ва унинг ичига абсолют ноль температурада бирин-кетин электронлар киритилишини тасаввур қилсак, у ҳолда биринчи икки электрон энг пастки сатҳда жойлашади; учинчи электрон бу сатҳда жойлаша олмайди ва кейинги, юқорироқ сатҳда жойлашиши керак бўлади, яъни у фақат потенциал энергияга эга бўлмай, балки бир озгина кинетик энергияга ҳам эга бўлади. Металлда эркин электронлар сони жуда катта (масалан, бир валентли металлнинг, жумладан натрийнинг бир грамм-атоми $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ та эркин электронга эга) бўлганлиги учун мос (яъни икки марта кам) сондаги энергия сатҳлари тўлган бўлади. Бу тўлган сатҳларнинг энг юқоридагиси абсолют ноль температурада тўлган сатҳлар ва бўш сатҳлар орасида кескин чегара ҳосил қилади. Бу юқори сатҳни критик сатҳ ϵ ёки Ферми чегараси дейилади. Равшанки, металлдан электронни озод қилиш учун унга энг камида потенциал ўра чуқурлиги ва критик сатҳнинг кинетик энергияси орасидаги айирмага тенг бўлган энергия бериш лозим (235- расм). Бу айирма

$$w = U_0 - \epsilon$$

бўлиб, у фотоэффектда намоён бўладиган электроннинг металлдан чиқиш ишидир (Эйнштейн тенгламасидаги P ташкил этувчидир).



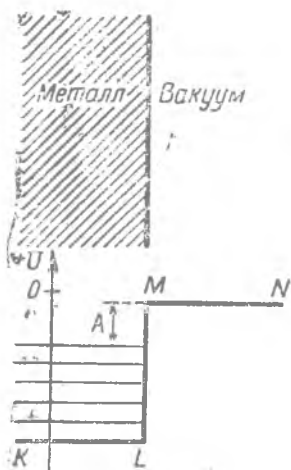
235- расм. Чиқиш иши ва ички потенциал.

Электрон металлдан фақат ёруғлик таъсиридагина эмас, балки қиздириш туфайли ҳам озод қилиниши мумкин (термоион эмиссия). Абсолют нолдан юқори температураларда электронларнинг бир қисми юқори бўш сатҳларда, яъни Ферми чегарасидан юқоридаги сатҳларда жойлашади. Агар металлни қиздириш туфайли, электрон энергияси тормозловчи майдонни енгиш ва металл ташқарисига чиқиш учун етарли бўлиб қолса, у ҳолда термоион эффект вужудга келади.

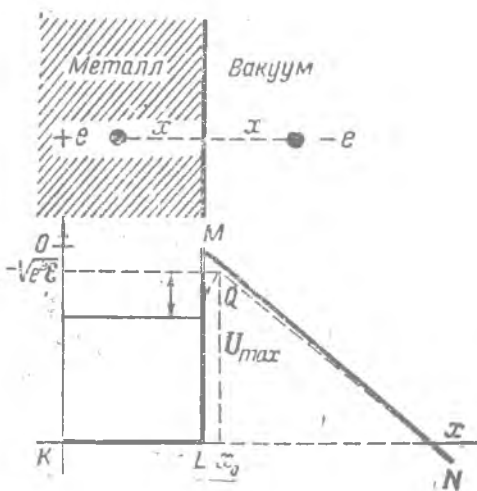
Совуқ эмиссия. Кучли электр майдони таъсирида электронлар металлдан исталганча паст температураларда ҳам чиқа

бошлайди. Бу ҳодисани, сифат жиҳатдан, классик нуқтаи назардан ҳам тушунтириш мумкин, лекин бундай усулда олинган ток кучининг катталиги экспериментал маълумотларга кескин зид бўлади.

Бу *совуқ разряд* ҳодисасининг классик тушунтирилиши қуйидагичадир. Майдон бўлмаганида металл ичида ва унинг сирти яқинида потенциал тақсимоти тахминан, илгаригидек, $KLMN$ синиқ чизиқ билан тасвирланади (236-расм). Энди



236- расм.



237- расм.

металлга \mathcal{E} кучланганликка эга бўлган электр майдони қўйилган бўлсин. Металл ташқарисидаги электронга таъсир қилувчи куч майдоннинг электронга таъсир қилувчи $e \mathcal{E}$ кучидан ва „тасвир кучи“ деб аталадиган кучдан ташкил топади. „Тасвир кучи“ нинг вужудга келиши қуйидагича: электроннинг ўзи электростатик индукция йўли билан металл сиртида мусбат зарядлар ҳосил қилади, бу зарядлар эса электронни, гуё металл ичида унинг сиртидан x масофада $+e$ заряд (электроннинг кўзгусимон электр тасвири) турганидек, тортади (237-расм). Шундай қилиб, тўла куч

$$F = e\mathcal{E} - \frac{e^2}{4x^2},$$

бу куч майдонда электроннинг потенциал энергияси:

$$U = U_0 - e\mathcal{E}x - \frac{e^2}{4x}. \quad (157.1)$$

солжот қиймати бўйича барьернинг U_0 баландлигидан кичик бўлган E энергияли электрон, квант механика қонунларига асосан, бевосита туннель ўтиш йўли билан металлдан чиқиши мумкин. Бу чиқиш эҳтимоли (154.14) формула бўйича

$$D = Ce^{-\frac{4\pi x_2}{h} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m} \sqrt{U - E} dx}$$

катталikka тенг бўлган барьер шаффофлиги билан аниқланади, бунда U — барьернинг бирор нуқтасидаги потенциал энергия, E — заррача энергияси, барьер баландлиги ҳисоблана бошланган сатҳдан ҳисобланган.

$$U = U_0 - e \xi x$$

эканлиги равшан (238-расм). Шунинг учун, $x_1 = 0$ деб, қуйидагини ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} \sqrt{U - E} dx &= \int_0^{x_2} \sqrt{U_0 - e \xi x - E} dx = \\ &= -\frac{2}{3e \xi} (U_0 - e \xi x_2 - E)^{3/2} + \frac{2}{3e \xi} (U_0 - E)^{3/2}. \end{aligned}$$

$U_0 - e \xi x_2 = E$ бўлиши чизмадан бевосита кўриниб турибди, шунинг оқибатида биринчи ҳад нолга тенг ва барьернинг шаффофлиги учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D = Ce^{-\frac{8\pi(U_0 - E)e^{3/2}}{3eh} \sqrt{2m} \frac{1}{\xi}}$$

ёки, $\frac{8\pi(U_0 - E)^{3/2} \sqrt{2m}}{3eh} = a$ деб белгиласак, $D = Ce^{-a/\xi}$ ҳосил бў-

лади. „Совуқ ток“ нинг ξ майдон кучланганлигига худди шундай боғланиши тажрибадан топилган эди.

Барьернинг шаффофлиги ва совуқ ток кучи учун турли кучланганликларга тегишли маълумотларни келтириш қизиқарлидир (XXIII жадвалга қаранг). Бу ерда, майдон ортганида шаффофликнинг ғоят тез ўсиши, шунингдек D нинг жуда кичик қийматларида катта тоқлар ҳосил бўлиши қизиқдир. Кейинги натижа қуйидагича тушунтирилади: барьер деворини

XXIII жадвал

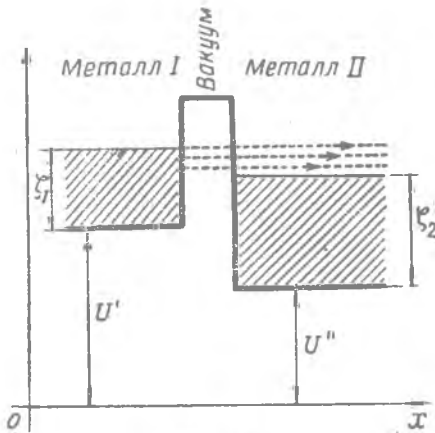
E (в/см)	$E = -2$ в		$E = -5$ в	
	D	J (а/см ²)	D	J (а/см ²)
10^6	10^{-30}	10^{-74}	10^{-828}	10^{-322}
$5 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^{-15}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-65}$	$6 \cdot 10^{-58}$
10^7	$1,3 \cdot 10^{-6}$	100	10^{-31}	$3 \cdot 10^{-24}$
$2 \cdot 10^7$	0,013	$4 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$3 \cdot 10^7$	1	$7 \cdot 10^8$	$6 \cdot 10^{-10}$	0,18

1 секундда бомбардимон қилувчи электронлар сони жуда катта, шунинг учун чиқиш эҳтимоли кичик бўлганда ҳам кучли тоқлар вужудга келади.

Контакт потенциаллар айирмаси. Агар турли табиатли икки металлни (масалан, мис ва рухни) бир-бирига теккизсак,

бу ҳолда улар орасида потенциаллар айирмаси (контакт потенциаллар айирмаси) пайдо бўлади. Агар иккала металлдаги электронларнинг қандай шароитда бўлишлиги қараб чиқилса, Вольта очган бу ҳодиса тушунарли бўлиб қолади.

Ички потенциали ва чиқиш ишлари w_1 ва w_2 турлича бўлган икки металлни тасаввур қилайлик ва $w_1 < w_2$ бўлсин. Металлларни уларнинг параллел сиртлари орасидаги масофа атом ўлчами ($\sim 10^{-8}$ см) тартибда бўлгунга қадар бир-бирига



239- расм.

яқинлаштирамиз. Иккала металлда ҳам Ферми чегараси ξ дан пастдаги барча энергия сатҳларини электронлар эгаллаган, ундан юқоридагилари — бўш бўлади.

Аммо I металлдаги Ферми чегараси Ox нолинчи сатҳга нисбатан II металлдаги Ферми чегарасидан юқорида ётади (239- расм). Шунинг учун I металлнинг юқори сатҳларидаги электронлар иккала металлни ажратиб турувчи потенциал барьер орқали (туннель ўтиш билан) II металлдаги бўш сатҳларга ўтиши мумкин. Аммо II металлнинг электронлари I



240- расм.

металлга ўта олмайди, чунки I металлнинг ξ_2 билан бир хил баландликда ёки ундан пастда ётган ҳамма сатҳларини электрон жуфтлари банд қилган. Шунинг учун II металл манфий, I металл мусбат зарядланади. Бу процесс иккала металлнинг критик сатҳлари тенглашгунча давом этади. Бунда иккала металл орасида уларнинг чиқиш ишлари айирмасига тенг ташқи потенциаллар айирмаси вужудга келади.

Бунга қуйидаги мулоҳазалардан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Айтайлик, бир-бирига тегиб турган ҳамда w_1 ва w_2 чиқиш ишларига эга бўлган I ва II металллар мавжуд бўлиб, бунда $w_1 < w_2$. Вакуумда I металл сирти яқинида жойлашган A нуқтани ва II металл сирти яқинида жойлашган B нуқтани қарай-

миз (240- расм). Электрон A нуқтадан I металл ичига, унинг Ферми чегараси сатҳига ўтганида ω_1 энергия бўшалади, B нуқтадан II металл ичига унинг Ферми чегараси сатҳига ўтишида ω_2 энергия бўшалади. Аммо, айтилганларга кўра, бир-бирига тегиб турган металлларнинг иккаласида ҳам Ферми чегараси бир хил баландликда ўрнашади. Ҳар бир металл учун характерли бўлган чиқиш иши унинг бошқа металл билан тегишиб ёки тегишмасдан туришига боғлиқ эмас. Шунинг учун агар $\omega_2 > \omega_1$ бўлса, Ферми чегараси баландлиги бир хил бўлганда бу ҳол ($\omega_2 > \omega_1$) фақат B нуқтадаги потенциал A нуқтадаги потенциалдан $\omega_2 - \omega_1$ айирма қадар юқори бўлгандагина ўринли бўлиши мумкин.

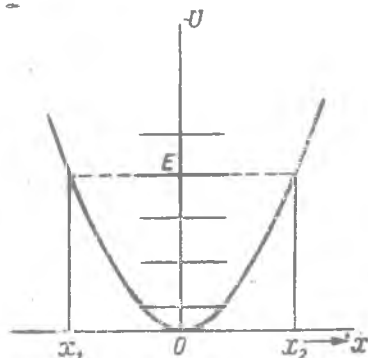
158- §. Чизиқли гармоник осциллятор

Атом физикасида фойдаланиладиган муҳим моделлардан бири чизиқли гармоник осциллятордир. Биз олдинги параграфларда бу моделдан бир неча марта фойдаланган эдик. Гармоник осцилляторнинг потенциал энергияси

$$U = \frac{f x^2}{2} = 2\pi^2 m \nu_0^2 x^2 \quad (158.1)$$

бўлиши бизга маълум, бунда $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}}$ — осцилляторнинг тебраниш частотаси, у классик механика асосида ҳисобланади. (158.1) ифодага мос потенциал

эгри чизиқ 241- расмда тасвирланган параболадир. Бу потенциал эгри чизиқ 156- § да қараб чиқилганга ўхшаш гўё қайтарилган деворли яшикни ҳосил қилади. E энергияли макроскопик осциллятор „деворлар“ орасида у ёқ ва бу ёққа тебранади, у ҳамма вақт x_1, x_2 кесма оралиғида бўлади, яъни x_2 дан ўнгга ва x_1 дан чапга чиқмайди. Микроскопик осциллятор тўғрисидаги масалани ечиш учун бундай потенциал яшик ичида вужудга келадиган турғун тўлқинларни текшириш керак; принцип жиҳатдан бу текшириш торнинг хусусий тебранишларини топишга тамомила ўхшашдир. Аммо бу ерда масалани математик жиҳатдан анча мураккаблаштирадиган хусусият бор; яшик ичида потенциал энергия ҳамма жойда бир хил қийматга эга эмас, бироқ у парабола қонуни бўйича узгаради; шунинг учун $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$ тўлқин



241- расм. Чизиқли гармоник осцилляторнинг потенциал эгри чизиғи.

увунлик яшикнинг турли жойларида бир хил бўлмайди, унинг четлари бўйлаб ортади ва ўртасида камаяди.

Гармоник осциллятор тўғрисидаги масала учун Шрёдингер тенгламаси

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - 2\pi^2\nu_0^2 mx^2)\psi = 0 \quad (158.2)$$

кўринишига эга бўлади, бундаги ψ функция $x \rightarrow \pm\infty$ бўлганда $\psi(x) = 0$ бўлиш талабини ва ҳамма қолган стандарт шартларни (152- §) қаноатлантириши керак.

Ёзувни қисқартиш учун белгилашлар киритамиз:

$$\frac{8\pi^2m}{h^2} E = \lambda, \quad \frac{4\pi^2m\nu_0}{h} = \alpha. \quad (158.3)$$

Бу ҳолда Шрёдингер тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\psi = 0. \quad (158.4)$$

(158.4) ни интеграллаш учун аввал x жуда катта ($\alpha x \gg \lambda$) бўлган чегаравий ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (158.4) даги λ ни $\alpha^2 x^2$ га нисбатан кичик катталиқ бўлгани учун тушириб қолдириш мумкин, бинобарин:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \psi = 0. \quad (158.5)$$

$x \gg 1$ бўлганда бу тенгламани

$$\psi = e^{\pm \alpha x^2/2}, \quad (158.6)$$

ечим етарлича аниқликда қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \pm \alpha x e^{\pm \alpha x^2/2}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \alpha^2 x^2 e^{\pm \alpha x^2/2} \pm \alpha e^{\pm \alpha x^2/2}. \end{aligned}$$

Лекин $x \gg 1$ бўлганда охириги тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи ҳад биринчисига нисбаган муҳим эмас ва, бинобарин, (158.5) тенгламани (158.6) ечим асимптотик қаноатлантиради. Ечимдаги мумкин бўлган икки ишорадан бу ерда минус ишорани олиш лозим:

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2},$$

чунки плюс ишорали ечим $x \rightarrow \infty$ бўлганда чексиз ортади, бу эса ψ функцияга қўйиладиган табиий шартларга зид бўлади (152- §).

Қараб ўтилган чегаравий ҳолни эътиборга олиб, (149.4) ечимини

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x) \quad (158.7)$$

кўринишда излаймиз, бунда $f(x)$ — бирор, ҳали номаълум функция, уни (158.7) ечим (158.4) тенгламани қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиш керак. (158.7) ечимни (158.4) га қўямиз, бунинг учун даставвал қуйидаги ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{d\psi}{dx} = \left(-\alpha x f + \frac{df}{dx}\right) e^{-\alpha x^2/2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(-\alpha f - 2\alpha x \frac{df}{dx} + \alpha^2 x^2 f + \frac{d^2f}{dx^2}\right) e^{-\alpha x^2/2}.$$

(158.4) га ψ ва $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ ўрнига уларнинг ифодаларини қўйиб, содда алмаштиришлардан ва $e^{-\alpha x^2/2}$ га қисқартишдан сўнг ушбуни оламиз:

$$\frac{d^2f}{dx^2} - 2\alpha x \frac{df}{dx} + (\lambda - \alpha)f = 0, \quad (158.8)$$

x ўрнига ξ янги мустақил ўзгарувчини

$$\xi = \sqrt{\alpha} \cdot x \quad (158.9)$$

киригиб, (158.8) тенгламани бошқа шаклда ёзамиз. ξ ўлчамсиз сондир, чунки α [см⁻²] ўлчамликка эга [α нинг (158.3) даги ифодасидан бунга бевосита ишонч ҳосил қилиш осон]. Энди қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \alpha \frac{d^2}{d\xi^2}.$$

(158.8) тенглама ўзгарувчини алмаштириш ва α га қисқартиришдан сўнг

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)H = 0 \quad (158.10)$$

кўринишни олади, бунда $H(\xi)$ функция — $f(x)$ да x мустақил ўзгарувчини ξ га алмаштиришдан сўнг ҳосил бўлган функциядир. $H(\xi)$ нинг ечимини даражали қатор кўринишида излаймиз:

$$H(\xi) = a_\nu \xi^\nu + a_{\nu+1} \xi^{\nu+1} + a_{\nu+2} \xi^{\nu+2} + \dots \equiv \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (158.11)$$

Ечимнинг чекли бўлишлигини таъминлаш учун, қаторни бирор ν даражадан бошлаймиз ва фақат кейинчалик бу ν ни $H(\xi)$ функция ҳеч қаерда чексизликка айланмайдиган қилиб танлаймиз. $H(\xi)$ нинг ҳосилаларини ёзиб оламиз:

$$\frac{dH}{d\xi} = \nu a_\nu \xi^{\nu-1} + (\nu+1) a_{\nu+1} \xi^\nu + (\nu+2) a_{\nu+2} \xi^{\nu+1} + \dots,$$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} = \nu(\nu-1) a_\nu \xi^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1} \xi^{\nu-1} +$$

$$+ (\nu+2)(\nu+1) a_{\nu+2} \xi^\nu + \dots$$

Бу ҳосилаларни (158.10) га қўямиз ва содда алмаштиришлардан сўнг, ушбуни оламиз:

$$\begin{aligned} \nu(\nu-1)a_\nu \xi^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1} \xi^{\nu-1} + (\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2} \xi^\nu + \dots = \\ = \left[2\nu - \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) \right] a_\nu \xi^\nu + \dots \end{aligned}$$

Бу тенглик айниятдан иборат бўлиши лозим, шунинг учун ξ нинг ўнгдаги ва чапдаги бир хил даражалари олдидаги коэффициентлар бир-бирига тенг бўлиши керак. Чапда энг паст даражали ҳад $\nu(\nu-1)a_\nu \xi^{\nu-2}$, унинг коэффициенти нолга тенг бўлиши керак, чунки ўнгда ξ нинг шундай даражасига эга бўлган ҳад йўқ. Бу $\nu(\nu-1) = 0$ тенгламани беради, бундан $\nu = 0$ ёки $\nu = 1$. Навбатдаги ҳад олдидаги коэффициентни нолга тенглаб, $\nu = 0$ ёки $\nu = -1$ қийматларни оламиз. Биринчи ечим ҳеч қандай янги натижа бермайди, иккинчиси эса яроқсиз, чунки ξ^{-1} ҳаддан бошланувчи қатор $\xi = 0$ да чексизга айланади.

ξ^i га эга бўлган бирор ҳад олдидаги коэффициентларни таққослаб, қуйидагини топамиз:

$$(i+1)(i+2)a_{i+2} = \left[2i - \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) \right] a_i,$$

бундан:

$$a_{i+2} = \frac{2i+1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{(i+1)(i+2)} a_i. \quad (158.12)$$

Бу формула (рекуррент формула) қаторнинг ҳамма ҳадларини биттадан ҳад оша кетма-кет ҳисоблаб чиқиш имконини беради. Қатор $\nu = 0$ даражадан, ёки $\nu = 1$ даражадан бошланиши мумкин бўлганлиги учун (158.12) рекуррент формула икки қаторни беради, улардан бири фақат жуфт ҳадлардан ташкил топган:

$$a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots, \quad (158.13)$$

иккинчиси фақат тоқ ҳадлардан ташкил топган:

$$a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots \quad (158.14)$$

Бу қаторлар (158.10) тенгламанинг хусусий ечимларидир.

Энди олинган қаторларнинг ξ нинг катта қийматларидаги табиатини текшираемиз. Улардан бирини, масалан (158.13) ни оламиз ва ξ етарлича катта бўлганда қатор ўзини e^{ξ^2} каби тутишлигини кўрсатамиз. Вунинг учун (158.13) қаторни e^{ξ^2} учун ёзилган қатор билан таққослаймиз. Маълумки,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

ва, бинобарин,

$$e^{\xi^2} = 1 + \frac{\xi^2}{1!} + \frac{\xi^4}{2!} + \frac{\xi^6}{3!} + \dots + \frac{\xi^\nu}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} + \frac{\xi^{\nu+2}}{\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)!} + \dots$$

ξ етарлича катта бўлганда бу йиғиндининг биринчи ҳадлари юқори ҳадларга нисбатан муҳим аҳамиятга эга эмас. ξ^τ ва $\xi^{\tau+2}$ бўлганда коэффициентларни b_τ ва $b_{\tau+2}$ орқали белгилаймиз; уларнинг нисбати

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau} = \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)!}{\left(\frac{\tau}{2} + 1\right)!} = \frac{1}{\frac{\tau}{2} + 1}. \quad (158.15)$$

τ етарлича катта бўлганида (158.15) нинг махражидаги 1 ни ташлаб юбориш мумкин:

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau} = \frac{1}{\tau/2} = \frac{2}{\tau}. \quad (158.16)$$

(158.13) қаторнинг мос ҳадлари нисбати учун рекуррент формула қуйидагини беради:

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau} = \frac{2\tau + 1 - \frac{\lambda}{a}}{(\tau+2)(\tau+1)};$$

τ етарлича катта бўлганда

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau} = \frac{2}{\tau}. \quad (158.17)$$

(158.16) ва (158.17) нисбатларни таққослаб,

$$\frac{b_{\tau+2}}{a_{\tau+2}} = \frac{b_\tau}{a_\tau} = \dots = \text{const}$$

эканлигини кўрамиз, яъни қаторимизнинг юқори ҳадлари e^{ξ^2} қаторнинг юқори ҳадларидан фақатгина ўзгармас кўпайтувчи билан фарқ қилади, бу ξ катта бўлганда $H(\xi)$ функция e^{ξ^2} каби ортади демакдир, бинобарин, (158.7) ва (158.9) ни ҳам эътиборга олсак,

$$\psi = e^{-a_1 \xi^2/2} f(x) = e^{-\xi^2/2} H(\xi) \rightarrow e^{\xi^2/2},$$

яъни $\xi \rightarrow \infty$ бўлганда $\psi \rightarrow \infty$ бўлади.

Бундан кўринишича, (158.12) рекуррент формулали даражали қаторлар билан ифодаланган ечимлар, умуман айтганда, chegarий шартларни қаноатлантирмайди. Аммо, λ/α нинг танланган қийматларида қаторларнинг бирор ҳада узилишини, яъни полиномларга айланишини пайқаш осон. Масалан, $\lambda/\alpha = 5$ бўлганда (158.13) қатор фақат бир a_0 ҳаддан иборат, чунки (158.12) дан кўринишича, $\lambda/\alpha = 5$ бўлганда коэффициент $a_2 = 0$, демак, ҳамма кейинги коэффициентлар ҳам ноль бўлади. $\lambda/\alpha = 9, 13 \dots$ бўлганда ўша қатор иккинчи, учинчи ва ҳ. к. ҳадларда узилади.

Лекин, агар $H(\xi)$ функция полиномга келтирилса, у ҳолда экспоненциал кўпайтувчининг бор бўлиши $\xi \rightarrow \infty$ бўлганда ψ

нинг нолга айланишини таъминлайди. Шундай қилиб, (158.13) ва (158.14) қаторлар полиномларга айланган ҳоллардагина стандарт талабларни қаноатлантирувчи ечимлар олинади. Агар

$$\frac{\lambda}{a} = 2n + 1$$

бўлса, у ҳолда (158.12) рекуррент формула асосида n -даражали ҳад билан тугалланувчи полином оламиз. Кейинги тенгликка (158.3) дан λ ва a қийматларини қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{8n^2m}{\hbar^2} E_n = \frac{4\pi^2m\nu_0}{\hbar} (2n + 1),$$

бундан

$$E_n = h\nu_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (158.18)$$

Шундай қилиб, осцилляторнинг тўлқин тенгласини қаноатлантирадиган ψ функциялардан фақат осциллятор энергияси қийматларининг (158.18) дискрет қаторига мос келадиганларигина чегаравий шартларни ҳам қаноатлантиради. (158.18) формула эски квант назариясининг $E_n = nh\nu_0$ формуласидан бирмунча фарқ қилишлигига эътиборни жалб қиламиз. Худди (158.18) формулага мувофиқ чизиқли осцилляторнинг квант сони ҳамма вақт „яримтали“ $\left(n + \frac{1}{2} \right)$ сон билан ифодаланади. Бунинг оқибатида энг қуйи квант ҳолатда ($n = 0$) осциллятор энергияси E_0 нолга айланмайди, балки

$$E_0 = \frac{h\nu_0}{2}. \quad (158.19)$$

Бу E_0 қийматни „нолинчи энергия“ дейлади. Бу номнинг келиб чиқиши $\frac{1}{2} h\nu_0$ энергиянинг ҳатто абсолют ноль температурада ҳам йўқолмаслиги билан боғлиқдир. Унинг маъноси ва қиймати келгуси параграфларда аниқланади.

Потенциал яшиқдаги заррача энергиясининг квантланиши тор тебранишлари ҳақидаги масаладаги чегаравий шартларга ўхшаш шартларнинг қўлланиши натижасида ҳосил бўлишлигини 156-§ да кўрган эдик. Ушбу параграфда қараб чиқилган чизиқли осциллятор ҳақидаги масалада квантланиш функциянинг бутун фазода чекли бўлишлигининг табий шарти тўғрисида бўлди. Мана шундай табий шартларнинг содда натижаси сифатида квантланиш ҳосил қилиш имконияти Шрёдингер тенгласининг 158-§ да эслатилган ажойиб хусусиятидир.

159-§. Чизиқли осцилляторнинг нормал ва уйғонган ҳолатлари

Чизиқли осциллятор энергияси

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

нинг ҳар бир хусусий қийматига

$$\psi = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

хусусий функция мос келади, бунда N_n — ўзгармас нормалловчи кўпайтувчи, $H_n(\xi)$ эса n - даражали полином бўлиб, унинг коэффициентлари, $\frac{\lambda}{\alpha} = 2n + 1$ бўлганда (158.12) рекуррент формула ёрдамида ҳисоблаб топилади. Бир неча биринчи $H_n(\xi)$ полиномларни топамиз. ξ^n олдидаги коэффициент (158.12) ёрдамида қуйидагича ифодаланади:

$$a_n = \frac{[2(n-2)+1] - (2n+1)}{(n-1)n} a_{n-2} = -\frac{1 \cdot 2^2}{n(n-1)} a_{n-2},$$

бундан

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2} a_n,$$

сўнгра

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} a_n \text{ ва җ. к.}$$

ифодаларни осон ҳосил қиламиз. Шунинг учун изланаётган полином бундай бўлади:

$$H_n(\xi) = a_n \left[\xi^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2} \xi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} \xi^{n-4} - \dots \right]. \quad (159.1)$$

(159.1) да $a_n = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) деб ҳисоблаб, қуйидаги полиномларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} H_0(\xi) &= 1, & H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi, \\ H_1(\xi) &= 2\xi, & H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12, \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2, & H_5(\xi) &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \text{ ва җ. к.} \end{aligned} \right\} \quad (159.2)$$

Булар Чебишев—Эрмит полиномлари бўлиб, улар қуйидаги осон ёдланадиган кўринишда ифодаланиши мумкин:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n}. \quad (159.2')$$

Дарҳақиқат, масалан, $n = 1$ бўлганда:

$$H_1 = -e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (e^{-\xi^2}) = 2\xi,$$

$n = 2$ бўлганда:

$$H_2 = e^{\xi^2} \frac{d^2}{d\xi^2} (e^{-\xi^2}) = e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (-2\xi e^{-\xi^2}) = 4\xi^2 - 2$$

ва ҳ. к.

Турлича полиномларни ҳисоблаш учун икки полином орқали учинчи полиномни ҳисоблаш имконини берадиган рекуррент формуладан фойдаланиш қулайдир. Бу формула қуйидагича ҳосил қилинади. Таърифга кўра:

$$H_{n+1}(\xi) = (-1)^{n+1} e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}) = -(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}). \quad (159.3)$$

Сўнгра,

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}) = \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\frac{de^{-\xi^2}}{d\xi} \right) = \frac{d^n}{d\xi^n} (-2\xi e^{-\xi^2}) = -2 \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi e^{-\xi^2}).$$

Энди uv икки функция кўпайтмасининг n -тартибли ҳосиласи учун чиқарилган

$$\frac{d^n}{dx^n} (uv) = u \frac{d^n v}{dx^n} + n \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \dots$$

маълум формуладан фойдаланамиз. Бу формула ёрдамида қуйидагини оламиз:

$$\frac{d^n}{d\xi^n} (\xi e^{-\xi^2}) = \xi \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) + n \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2}),$$

бунинг оқибатида

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}) = -2 \left[\xi \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) + n \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2}) \right],$$

ва (159.3) бўйича:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(\xi) &= 2\xi (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) + 2n (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2}) = \\ &= 2\xi (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) - 2n (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2}), \end{aligned}$$

ёки, (159,2') умумий таъриф бўйича:

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi). \quad (159.4)$$

Бу биз излаган рекуррент формула бўлиб, у H_{n+1} , H_n ва H_{n-1} ларни ўзаро боғлайди. (159.2) полиномлар шу формула бўйича H_0 ва H_1 лардан ҳосил бўлишини текшириш осон. Ҳақиқатини ихтиёрий тартибли полиномни олдинги икки полином орқали ҳисоблаш учун қўллаш мумкин.

Чизиқли осцилляторнинг хусусий функциялари қуйидаги муҳим хоссага эгадир: улар $-\infty$ дан $+\infty$ гача бўлган орталикда ортогоналдир, яъни *

$m \neq n$ бўлганда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0.$$

$m = n$ бўлганда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx$$

интеграл чекли қийматга эга ва бундан нормалловчи N_n кўпайтувчини ҳисоблаш учун фойдаланиш мумкин. Нормаллаш шарти (152-§ га қаранг) қуйидагидан иборат:

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx = 1.$$

Бунга ψ_n функция ифодасини қўйиб ва ҳисоблаб **,

$$N_n^2 \frac{2^n n! \pi^{1/2}}{a^{1/2}} = 1$$

натижани топамиз, бундан

$$N_n = \sqrt{\frac{a^{1/2}}{\pi^{1/2} n! 2^n}}.$$

Нолинчи ($n = 0$) ҳолат учун:

$$N_0 = \sqrt{\frac{a^{1/2}}{\pi^{1/2}}}.$$

Шундай қилиб, нолинчи ҳолат хусусий функцияси ушбудир:

$$\psi_0(x) = N_0 e^{-x^2/2} H_0(x) = \sqrt{\frac{a^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-ax^2/2},$$

моё эҳтимоллик зичлиги:

$$\psi_0^2(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}.$$

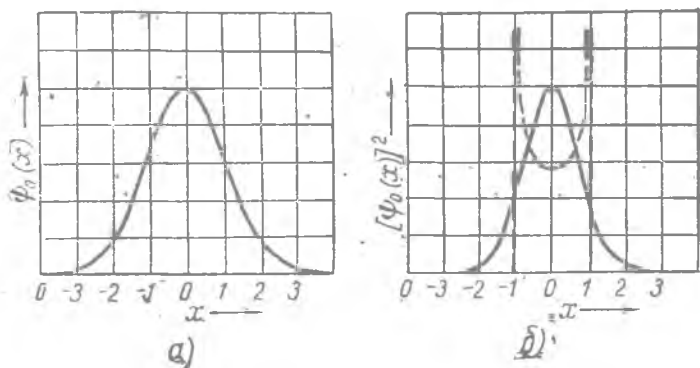
$\psi_0^2(x)$ ни тасвирловчи эгри чизиқ—Гаусс хатоликлар эгри чизиғи типидадир (244-б расм). Бу эгри чизиқнинг кўрсатишича, осцилляторнинг нолинчи ҳолатида заррача вазиятини кўп марта аниқлаганимизда, биз уни ҳаммадан кўпроқ мувозанат вазияти ($x = 0$) атрофида топамиз. Бундан ташқари, заррачани фақат классик осциллятор тебранишлари иккиланган амплитудасига тенг бўлган кесмада топишининггина эмас, бал-

* Исботини китоб охиридаги VI қўшимчадан қаранг.

** Китоб охиридаги VI қўшимчага қаранг.

ки заррачани унинг потенциал энергияси тўла энергиядан катта бўлган „ман қилинган“ соҳада (вертикал пунктир тўғри чизиқлардан ўнгда ва чапда) топишнинг ҳам чекли эҳтимоли борди (242- расмга қаранг).

Бу эгри чизиқ билан гармоник тебранаётган макроскопик заррачани йўлнинг бирор жойида dx йўл участкасида топиш эҳтимоли тақсимооти эгри чизиғини таққослаш эътиборга сазовордир. Масалан, кичик тебранишлар қилаётган маятник бор деб ва маятник шарчаси вазиятларини кинолентага расмга олиб



242- расм. Чизиқли гармоник осцилляторнинг нолинчи ҳолати учун хусусий функция (а) ва эҳтимолик зичлиги тақсимооти (б).

борилади деб фараз қиламиз. Шубҳасиз, кўпгина кадрларда шарчани қаердадир четки вазиятлардан бири яқинида топамиз, чунки бу жойларда унинг тезлиги нолга яқин; шарча мувозанат вазияти яқинида буладиган кадрлар энг кам бўлади, чунки худди шу жойда у энг катта тезликка эгадир. Равшанки, маълум жойда шарчани топиш эҳтимоли унинг бу жойдаги тезлигига тесқари пропорционал бўлади ёки, бошқача айтганда, кинетик энергиядан олинган квадрат илдизга тесқари пропорционалдир, яъни $1/\sqrt{E-U}$ (бунда E —тўла энергия, U —потенциал энергия). Мос эгри чизиқ 242-б расмда пунктир билан тасвирланган; у квант осциллятор эгри чизиғидан жиддий фарқ қилади.

Энди квант осцилляторнинг турли ҳолатларини батафсилроқ қараб чиқамиз ва бу текширишни нолинчи ҳолатдан бошлаймиз. Бу ҳолатнинг хусусияти осциллятор энергиясининг нолга тенг бўлмай, балки $\frac{1}{2} h\nu_0$ га тенг бўлишлигидадир. Худди шунга мувофиқ равишда квант осциллятор абсолют нолда тинч турмайди: биз уни муайян эҳтимоли билан классик осциллятор тебранишлари иккиланган амплитудасига тенг кесманинг ҳар қандай жойида ва ҳатто бу кесмадан ташқарида

топишимиз мумкин. Бу факт ноаниқлик муносабатларининг муқаррар натижасидан иборат эканлигини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар квазиэластик боғланган заррача абсолют холда тинч турганда эди, яъни маълум координатага эга бўлганда эди, бу заррачанинг координатаси ва унинг импульси аниқ (импульс холга тенг) бўладиган ҳолат мавжуд эканлигини билдирар эди. Аммо бу ноаниқлик муносабатига зиддир.

Бунинг устига, ноль энергия $\frac{1}{2} h\nu_0$ нинг ноаниқлик муносабатларини қаноатлантириш учун осциллятор энг камида нолинчи ҳолатда эга бўлиши керак бўлган минимал энергия эканлигини ҳозир кўрсатамиз.

Заррача вазияти ноаниқлиги сифатида ўртача квадратик хатони, яъни ўртача квадратик флуктуациядан олинган мусбат квадрат илдизни қабул қиламиз:

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{\epsilon^2}}.$$

Аммо $\overline{\epsilon^2} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ бўлгани ва умумийликни чекламаган ҳолда $\overline{x} = 0$ деб олиш (бу фақат координата бошини мувозанат вазиятга мос тушувчи нуқтага жойлаштириш лозим демакдир) мумкин бўлгани учун

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

Демак,

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega_0 t} = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}, \quad (159.5)$$

бунда a — классик осциллятор тебранишлари амплитудаси. Бироқ, $\frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = E_0$ (46-§ га қаранг) бўлганлиги учун $a^2 = \frac{2E_0}{m\omega_0^2} = \frac{2E_0}{f}$, шунинг учун эса

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{E_0}{f}} \quad (159.6)$$

бўлишлигини кўриш осон. Сўнгра, шунга ўхшаш қуйидагига эга бўламиз:

$$\overline{\Delta p} = \sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{m^2 a^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t} = \sqrt{\frac{1}{2} m^2 a^2 \omega_0^2} = \sqrt{m E_0}. \quad (159.7)$$

Демак,

$$\overline{\Delta x} \overline{\Delta p} = E_0 \sqrt{\frac{m}{f}} = \frac{E_0}{\omega_0} = \frac{E_0}{2\pi\nu_0}. \quad (159.8)$$

Лекин, ноаниқлик муносабатларига кўра $\Delta x \Delta p \sim h$. Аммо, келгуси бобда (II томга қаранг) ўртача квадратик хатолар

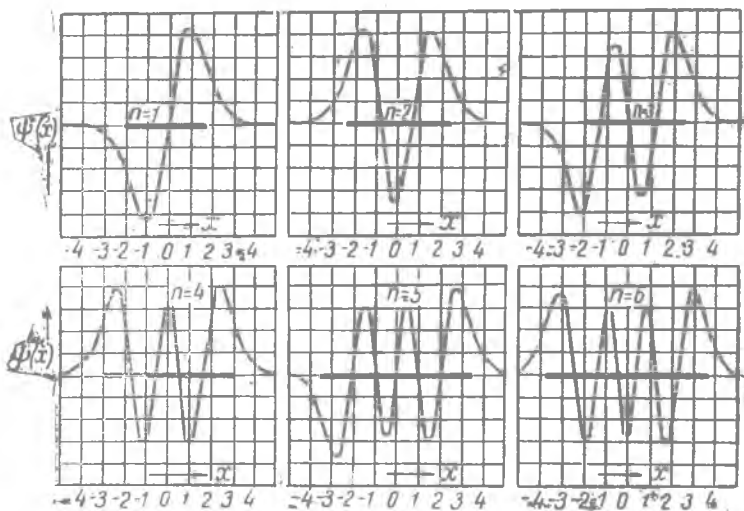
кўпайтмаси қуйи чегарасининг аниқ катталиги $\hbar/4\pi$ эканлигини, бинобарин

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{4\pi} \quad (159.9)$$

бўлишлигини кўрамиз. Бу ерда тенглик ишорасини олиб (яъни хатолар кўпайтмасининг қуйи чегарасини танлаб) ва (159.8) ни (159.9) билан таққослаб, ушбуни топамиз:

$$\frac{E_0}{2\pi\nu_0} = \frac{\hbar}{4\pi}, \quad E_0 = \frac{\hbar\nu_0}{2}.$$

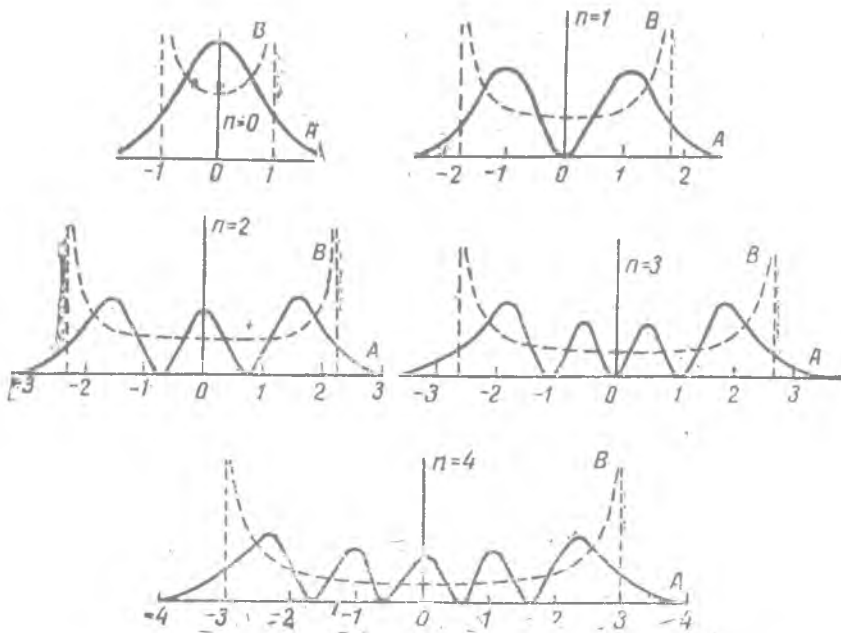
Демак, осцилляторнинг нолинчи энергияси, ҳақиқатан, минимал энергия бўлади. Ноаниқлик муносабатлари бузилмаслиги учун осциллятор нолинчи ҳолатда ана шу энг кам энергияга эга бўлиши керак.



243- расм. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ учун чизиқли гармоник осцилляторнинг хусусий функциялари.

Нима учун вазият аҳтимоли тақсимот эгри чизиғи осцилляторнинг классик траекторияси ташқарисида, яъни унинг тўла энергияси потенциал энергиясидан кам бўладиган соҳаларда аҳтимолнинг нолга тенг бўлмаган қийматларини беришини тушунтириш лозим. Бироқ, осцилляторнинг потенциал эгри чизиғи потенциал яшиқдан иборат бўлганлиги (158- § га қараи) ва заррача тебранишларини шу яшиқ деворларидан „қайтиши“ сингари қараш мумкинлиги туфайли, бу ердаги тушунтириш ҳам тўғри бурчакли барьердан қайтиш (153- §) ҳолидагидек бўлади.

Энди уйғонган ҳолатларни текшираимиз. 243-расмда n нинг бир неча қиймати учун хусусий функциялар графиклари тасвирланган. Бу эгри чизиқлар тўлқинларни эслатиши кўриниб турибди. Агар унга вақтли кўлайтувчи $e^{i2\pi vt}$ ни ҳам қўшиб ёзилса, у ҳолда гўё турғун тўлқинлар ҳосил булади. $n = 0$ бўлганда (243-расм) иккита тугунга ва ўртада максимумга („дўнгликка“) эга бўлдиқ; тугунлар потенциал яшик деворларида эмас, балки чексизликда ҳосил бўлиши тушунарли $n = 1$ бўлганда (243-расм) чексизликда иккита тугун ва классик осциллятор тебранишлари соҳасига мос келган кесим ўртасида битта тугун ҳосил бўлади; $n = 2$ бўлганда чексизликдаги

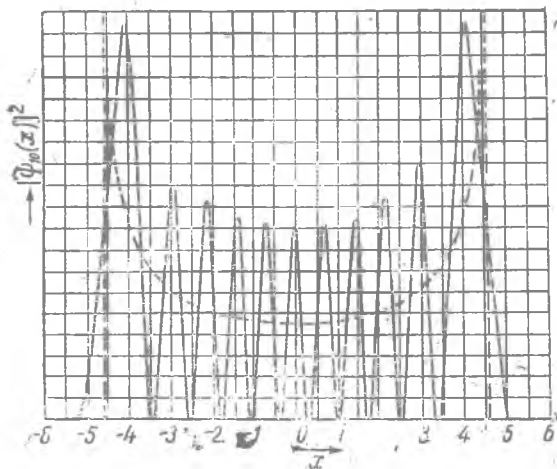


244-расм. $n = 0, 1, 2, 3, 4$ учун эҳтимоллик зичлиги тақсимоти.

иккита тугундан бошқа яна иккита тугун ҳосил бўлади ва ҳ. к. Расмларни текширганда классик траекторияни тасвирловчи йўғон кесма ўртаси яқинида тугунлар оралиғи, четдагилардан кўра кичикроқ эканлигини пайқаш осон. Бу де-Бройль тўлқин узунлиги $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$ мувозанат вазият (бу ерда U нолинчи қийматдан ўтади) яқинида энг кичик бўлиши кераклигини билдиради.

244 расмда квант осцилляторнинг турли ($n = 0, 1, 2, 3, 4$ бўлгандаги) ҳолатлари учун эҳтимоллик зичлиги $|\psi|^2$ нинг

тақсимланиш эгри чизиқлари ва макроскопик осциллятор (маятник шарчаси) учун пунктир билан кўрсатилган эгри чизиқ келтирилган. n квант сонлар кичик бўлганда квант осциллятор ўзини классик осциллятордан бошқача тутишлигини кўра-



245- расм. $n=10$ учун эҳтимоллик зичлиги тақсимоти.

миз. Аксинча, n қанчалик катта бўлса, эҳтимолнинг квант тақсимоти классик тақсимотга шунчалик кўпроқ яқин келади. 245- расмда $n=10$ учун берилган тақсимотда бу айниқса равшан кўриниб турибди. Агар квант тақсимот максимумлари орқали туташ эгри чизиқ ўтказилса, бу эгри чизиқ классик эгри чизиққа параллел бўлади. n ортган сари максимумлар янада жиңсроқ яқин-

лашади ва эҳтимол эгри чизиғи тобора кўпроқ классик чизиққа яқинлашади, мослик принципи ҳам худди шуни талаб қилади.

Маъқула: 1. Тебранишларининг классик частотаси 10^4 сек^{-1} бўлган осцилляторнинг нолинчи энергиясини ҳисобланг. Уни электрон-вольтларда ифодаланг. Бу частотага мос келган тўлқин узунлик спектринг қайси қисмида ётади?

2. Осциллятор массаси 1 г бўлган ва мувозанат вазият билан пружина (эластиклик коэффициент $f = 10^4 \text{ дн} \cdot \text{см}^{-1}$) воситасида боғланган заррачадан иборатдир. Бу осцилляторнинг нолинчи энергиясини ҳисобланг.

3. Олдинги масаладаги осцилляторнинг энергиясини kT га тенг (бунда $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{град}^{-1}$ — Больцман доимийси, $T = 300^\circ \text{К}$) деб бу осцилляторнинг квант сонини ҳисобланг. Квант соннинг бу қийматида осциллятор энергияси амалда узлуксиз ўзгаришига ишонч ҳосил қилинг ($\Delta n = 1$ учун энергия ўзгаришини ҳисобланг).

160- §. Боғланган осцилляторлар. Ван-дер-Ваальс кучлари

159- § да квант механикасида чизиқли осциллятор тўғрисидаги масаланинг ечилиши ҳатто абсолют ноль температурада $h\nu_0/2$ га тенг „нолинчи энергия“ мавжуд бўлиши керак, деган хулосага олиб келишини кўрган эдик. Бу хулоса қандай ғалати бўлишидан қатъи назар, тажрибанинг кўрсатишича, чизиқли осциллятор энергияси учун олинган

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu_0$$

формула, Планк фойдаланган олдинги $E_n = nh\nu_0$ „ярим классик“ формулага нисбатан фактларга яхшироқ мувофиқ келади. Буни, масалан, молекуляр спектрларни текшириш тасдиқлайди, лекин, эҳтимол, нолинчи энергиянинг мавжудлиги узоқ вақтдан бери маълум бўлган, ammo тушунтирила олмаган баъзи бир ҳодисаларни тушунтиришда кутилмаганда муҳим роль ўйнаши айниқса қизиқарлидир. Бу ҳодисаларга сирт таранглик, адсорбция ва бошқа молекуляр ҳодисаларни тушунтириш учун қўлланиладиган молекуляр тутиниш кучлари киради. Бу кучлар реал газлар ҳолатининг

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Ван-дер-Ваальс тенгласида намоён бўлганлиги учун уларни Ван-дер-Ваальс кучлари дейилади.

Бу кучларни классик физика нуқтаи назаридан тушунтиришда кўп уринишлар бўлди, чунончи барча тушунтиришларда, уларни албатта, соф электр табиатга эга деб ҳисобланар эди. Ван-дер-Ваальс кучлари нейтрал атомлар ёки молекулалар орасидаги ўзаро таъсирда намоён бўлганлиги учун, агар бу ўзаро таъсирлашувчи нейтрал системаларни электр диполлар ёки (симметрик системалар ҳолида) квадруполлар деб ҳисоблансагина, бу кучларнинг мавжуд бўлишлигини тушуниш мумкин. Диполлар орасидаги ўзаро таъсир кучлари масофанинг тўртинчи даражасига тескари пропорционал, квадруполлар орасидаги ўзаро таъсир кучлари эса масофанинг олтинчи даражасига тескари пропорционал камаяди. Сифат жиҳатдан бу муносабат, узоқ вақтдан бери маълум бўлган фактга, яъни молекуляр ўзаро таъсир кучларининг масофа ортиши билан фавқулудда тез камаё бориш фактига мувофиқ келади (молекуляр кучларни элементар тушунтиришда ишлатиладиган „таъсир сфераси“ радиусларини эслайлик).

Аmmo, классик физика нуқтаи назаридан молекуляр ўзаро таъсирларни батафсил, айниқса, миқдорий тушунтиришга уринишлар бартараф қилиб бўлмайдиган тўсиқларга дуч келди. Биринчидан, асл (инерт) газларда молекуляр ўзаро таъсирларнинг мавжудлиги мутлақо жумбоқ бўлиб кўринарди. Бу газларнинг атомлари электр жиҳатдан юқори симметрияга эга, шунинг учун статик ҳолатда уларни доимий диполь ёки квадруполь моментли деб бўлмайди. Ваҳоланки, уларнинг ҳаммаси зичлаштирилиб суюлтирилиши ва бинобарин, муайян равишда молекуляр кучлар мавжудлигини ошкор қилиши мумкин. Сўнгра, ҳатто катта диполь моментга эгаллиги маълум бўлган водород галогенид бирикмалари HCl, HBr, HI каби моддалар учун миқдорий назария яратишга уринишлар қониқарсиз натижаларга олиб келди.

Агар кўрсатиб ўтилган соф статик ўзаро таъсирлардан бошқа яна молекулада электронларнинг тез ҳаракатига боғлиқ бўлган ўзаро таъсирларни ҳам ҳисобга олинса, қийинчиликлар бартараф бўлади.

Айтайлик, *тинч ҳолатда* зарядлари сферик симметрик тақсимланган, бир-бирлари билан ўзаро таъсирлашмайдиган икки молекула бўлсин. Агар зарядларни уларнинг мувозанат вазиятларидан силжитсак, у ҳолда молекула диполь моментли бўлиб, ўзаро таъсирлашиши мумкин. Бундай силжиш чиндан ҳам ҳеч қандай шароитда йўқолмайдиган $\frac{1}{2} h\nu_0$ энергияли но-

линчи тебранишлар туфайли вужудга келади. Лекин, бир молекулада диполь моментнинг пайдо бўлиши уни ўраб олган фазода майдонни вужудга келтиради ва бошқа молекулада диполь моментни индукциялайди.

Бу тез ўзгарадиган диполь моментлар бир-бирига нисбатан тортишиш вужудга

келадиган фазада бўлади. Молекуляр кучларни сифат жиҳатдан тушунтириш ана шундайдир. У, кўриниб туришича, зарурлиги ноаниқлик муносабатларидан келиб чиқадиган нолинчи тебранишларнинг мавжудлиги билан муқаррар боғлангандир.

Энди, бу содда манзаранинг, шунингдек миқдорий ҳисоблашга ва молекуляр ўзаро таъсир қонунини аниқлашга ҳам имкон беришини кўрсатамиз. Бунинг учун, икки ўзаро таъсирлашувчи тебранишлар ёки бошқача айтганда, боғланган осцилляторлар ҳақидаги масала классик механикада қандай ечилишини эслаш зарур.

Бир-биридан r масофада турган ва тўғри чизиқ бўйлаб жойлашган икки электр диполь мавжуд бўлсин (246- расм). Ҳар бир заряд билан боғлиқ масса m га тенг, биринчи диполда қарама-қарши зарядлар оралиғи x_1 , иккинчисида эса x_2 бўлсин. Диполларнинг ўзаро таъсир энергияси қарама-қарши зарядларнинг тортишиши ва бир исмли зарядларнинг итаришиши билан аниқланади.

Кулон қонунига асосан у қуйидагига тенг:

$$U_{12} = -\frac{e^2}{r-x_1} - \frac{e^2}{r+x_2} + \frac{e^2}{r+x_2-x_1} + \frac{e^2}{r} = \\ = \frac{e^2}{r} \left(-\frac{1}{1-\frac{x_1}{r}} - \frac{1}{1+\frac{x_2}{r}} + \frac{1}{1+\frac{x_2-x_1}{r}} + 1 \right).$$

r ҳамма вақт x_2 ва x_1 дан анча катта бўлганлиги учун, қавслар ичидаги касрларни умумий формула буйича

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{r}} = \left(1 + \frac{a}{r}\right)^{-1} = 1 - \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \dots$$

қаторларга ёямиз. Агар бу ёйилмаларнинг ҳар бирида биринчи учта ҳадни қолдирсак, у ҳолда содда ҳисоблашлардан сўнг ушбуни ҳосил қиламиз:

$$U_{12} = -\frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2. \quad (160.1)$$

Бу диполларнинг ўзаро таъсирига тегишли потенциал энергиядир.

Энди бу диполларда тебранишлар вужудга келган бўлсин; силжиш унча катта бўлмаганда бу тебранишлар гармоник тебранишлар бўлади. Ҳар бир диполдаги зарядларнинг массалари ва уларни боғловчи кучлар бир хил бўлганлиги учун *диполлар орасида боғланиш бўлмаганда* (масалан, улар орасидаги масофа жуда катта бўлган ҳолда) уларнинг иккаласи ҳам бир хил ν_0 частотали содда гармоник тебранадилар:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}},$$

бунда f — иккала диполда ҳам бир хил бўлган квазиэластик куч доимийси.

Энди осцилляторлар орасидаги боғланишни эътиборга оламиз. Айтайлик, биринчи осцилляторда заряд силжиши, унда $f x_1$ квазиэластик кучни, иккинчи осцилляторда заряд силжиши, унда $f x_2$ квазиэластик кучни вужудга келтиради. Лекин осцилляторлар орасида боғланиш борлиги сабабли иккинчи осциллятор диполь моментининг ўзгариши биринчи осцилляторда қўшимча куч вужудга келтиради ва аксинча. U_{12} ўзаро таъсир энергиясини билган ҳолда бу F_{12} ва F_{21} қўшимча кучларни топамиз; чунончи,

$$F_{12} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = \frac{2e^2}{r^3} x_2, \quad F_{21} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = \frac{2e^2}{r^3} x_1.$$

Қуйидагини

$$\frac{2e^2}{r^3} = k \quad (160.1')$$

деб белгилаб олиб, иккала осцилляторнинг ҳаракат тенгламаларини

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0 \quad (160.2)$$

кўринишда ёза оламиз, бунда, масалан, $m\omega_0^2 x_1 = 4\pi^2 \gamma_0^2 m x_1 = f x_1$ — биринчи осциллятордаги таъсир қилувчи квазиэластик куч.

Қандай шароитларда иккита боғланган осциллятор содда гармоник тебранишлар бажаради, деган савол қўямиз. Равшанки, агар иккала осцилляторнинг тебраниши содда тебраниш бўлса, у ҳолда бу тебраниш битта умумий частота билан содир бўлиши керак. Шунинг учун саволга жавоб топишда (160.2) дифференциал тенгламалар системаси ечимларини

$$x_1 = A e^{i\omega t}, \quad x_2 = B e^{i\omega t}$$

кўринишда қидирамиз. Бу ечимларни (160.2) га қўйиб, $e^{i\omega t}$ га қисқартишдан сўнг, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{k}{m} B = 0, \quad -\frac{k}{m} A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = 0. \quad (160.3)$$

Бу алгебраик тенгламалар системасини A ва B номаълумларга нисбатан тенгламалар деб қарасак, (160.3) системанинг чизиқли ва бир жинсли эканини кўрамиз. Бундай системанинг ечимий нолдан фарқли бўлишлиги учун

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиши керак (78- § га қаранг). Детерминантни очсак,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \text{ва} \quad \omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{k}{m}.$$

Бундан ω частота учун иккита қиймат оламиз:

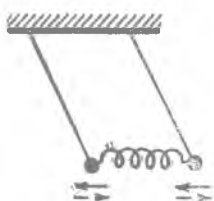
$$\omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{ва} \quad \omega_- = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{k}{m}}. \quad (160.4)$$

Бу частоталарни (160.3) га қайта қўйиб, қуйидагини топамиз:

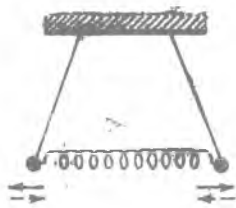
$$\left. \begin{array}{l} a) \omega = \omega_+ \quad \text{учун} \quad A = +B, \\ b) \omega = \omega_- \quad \text{учун} \quad A = -B = B e^{i\pi}. \end{array} \right\} \quad (160.4')$$

Шундай қилиб, боғланган осцилляторлар системаси иккита ҳар хил частотага эга бўлади: улардан бири ω_0 дан бир оз кичик, иккинчиси бир оз катта бўлади. Бу частоталар *нормал*, ёки *бош* частоталар дейилади; худди шу частоталарда осцилляторлар содда гармоник тебранишлар бажариши мумкин.

Бунда, ω_+ частотада тебраниши учун, осцилляторлар бошланғич пайтда *бир хил фазада* бир хил силжиган бўлиши керак ($A = B$, симметрик тебраниш), ω_- частотада тебраниши учун эса, осцилляторлар *қарама-қарши фазада* бир хил амплитудада силжиши керак ($A = -B$, антисимметрик тебраниш). Бу



247-расм. Боғланган маятникларнинг симметрик тебранишлари.



248-расм. Боғланган маятникларнинг антисимметрик тебранишлари.

иккала ҳол 247 ва 248-расмда иккита боғланган маятник ми-солида яққол кўрсатилган *).

Агар бошланғич шарт (160.4) шартлардан фарқ қилса, у ҳолда система тебранишлари содда тебранишлар бўлмайди. Умумий ҳолда уларни ω_+ ва ω_- частотали тебранишлар суперпозицияси сифатида тасвирлаш мумкин. (160.2) системанинг хусусий ечимларини ҳақиқий кўринишда ёзиб оламиз.

$$A = ae^{i\delta_1}, \text{ ва } B = be^{i\delta_2}$$

деб белгиласак,

$$x_1 = a \cos(\omega_+ t + \delta_1),$$

$$x_2 = b \cos(\omega_- t + \delta_2).$$

Умумий ечим хусусий ечимлар суперпозициясидан иборат бўлади:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos(\omega_+ t + \delta_1) + b \cos(\omega_- t + \delta_2), \\ x_2 &= a \cos(\omega_+ t + \delta_1) - b \cos(\omega_- t + \delta_2). \end{aligned} \right\} \quad (160.4'')$$

*) Дарвоқе, боғланган маятникларда потенциал энергия, қаралаётган ўзаро таъсирлашувчи икки диполь ҳолидагидан кўра, бир оз бошқача ифодаланadi. Хусусан, маятниклар ҳолида частоталардан фақат биттаси (айнан каттаси ω_-) ω_0 дан фарқли бўлади. Иккинчи ω_+ частота эса ўз катталигини ўзгартирмайди, бу хулоса, шунингдек, $\omega = \omega_+$ бўлганда $A = B$ бўлишигидан ҳам келиб чиқади, яъни маятниклар бир томонга тебранади, шунинг учун уларни боғловчи пружина олиб ташланса ҳам частота ўзгармайди. Қуйидаги китобга қаранг: Л. Г. Лойцянский ва А. И. Лурье, Теоретическая механика, III т., 384-бет, ОНТИ, 1934.

Энди қуйидаги бошланғич шартларни қўямиз: айтайлик $t = 0$ бўлган пайтда биринчи осцилляторнинг силжиши $x_1 = a$ ва тезлиги $\dot{x}_1 = 0$ бўлсин, иккинчиси эса мувозанат вазиятда тинч турган бўлсин, яъни $x_2 = 0$ ва $\dot{x}_2 = 0$. Бу бошланғич шартларни (160.4'') формулаларга қўйиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} a &= a \cos \delta_1 + b \cos \delta_2, & 0 &= a\omega_+ \sin \delta_1 + b\omega_- \sin \delta_2, \\ 0 &= a \cos \delta_1 - b \cos \delta_2, & 0 &= a\omega_+ \sin \delta_1 - b\omega_- \sin \delta_2. \end{aligned}$$

Иккинчи ва тўртинчи тенгламалардан

$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

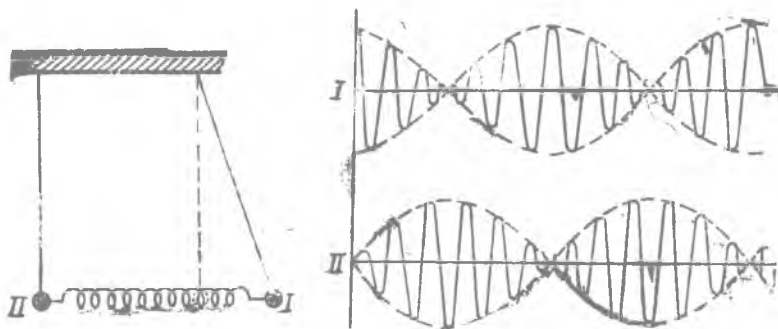
қолиб чиқади. Буни биринчи ва учинчи тенгламаларга қўйиб, ушбуни оламиз:

$$a = b = \frac{1}{2}a.$$

Демак, берилган бошланғич шартларда осцилляторларнинг тебранишлари

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{2} (\cos \omega_- t + \cos \omega_+ t) = A \cos \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \cos \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t, \\ x_2 &= \frac{A}{2} (\cos \omega_- t - \cos \omega_+ t) = A \sin \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \sin \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t, \end{aligned}$$

формулалар билан ифодаланади. Бу ифодаларнинг ҳар бирида модуляцияланган амплитудани тасвирловчи секин $[(\omega_- - \omega_+)/2]$ частота билан ўзгарадиган кўпайтувчи ва тез $[(\omega_- + \omega_+)/2]$ частота билан ўзгарадиган фаза кўпайтувчи бор. Бундан ташқари x_1 ва x_2 тебранишлар бир-бирига нисбатан фаза бўйича



249- расм. Воғланган маятникларда энергия флукутацияси.

$\pi/2$ га силжиган, шунинг учун ҳам, биринчи осциллятор максимал амплитуда билан тебранаётганда иккинчиси тинч ҳолатда туради. Биринчи осциллятор тебранишининг амплитудаси аста-секин камаяди, иккинчисиники эса орта боради ва модуляциялар даври чорагидан сўнг осцилляторларнинг роли алмашинади, бундан кейин бутун процесс тескари йўналишда боради (249-расм).

Энергиянинг бу „дарбадарлиги“ ёки флуктуацияси иккита боғланган бир хил маятниклар билан ўтказиладиган маълум демонстрацион тажрибада яққол кузатилади.

Энди боғланган осцилляторларнинг тўла энергиясини ҳисоблаб чиқамиз. Битта осцилляторнинг потенциал энергияси $\frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$ га тенг, боғланган осцилляторлар системаси потенциал энергияси ифодасида эса, шу параграф бошида кўрганимиздек, иккала осцилляторлар потенциал энергиялари йиғиндисидан ташқари яна уларнинг ўзаро таъсир энергиясини ифодаловчи $-(2e^2/r^3) x_1 x_2$ ҳад ҳам бор.

Шундай қилиб, системанинг потенциал энергияси

$$U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2,$$

кинетик энергияси

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2.$$

Бинобарин, системанинг тўла энергияси

$$T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2.$$

Агар осцилляторларнинг ўзаро таъсирини ҳисобга олмаслик (охирги ҳадни ташлаб юбориш) мумкин бўлса, у ҳолда системанинг тўла энергияси, тўғридан-тўғри ўзгармас ω_0 частотада тебранаётган иккала осциллятор энергиялари йиғиндисига тенг бўлар эди. Лекин бундай тахмин фақат осцилляторлар бир-бирдан катта масофада (r катта) бўлгандагина ярайди. Аммо, $T + U$ тўла энергияни *ўзгарган частоталарда* тебранувчи осцилляторлар энергиялари йиғиндиситарзида қараш мумкин бўладиган шаклда тасвирлашимиз мумкин.

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун x_1 ва x_2 координаталар ўрнига ξ ва η янги координаталар киритамиз; улар эски координаталар билан қуйидаги муносабатларда боғланган:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2).$$

Бундан, тескарича,

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} (\xi + \eta), \quad x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} (\xi - \eta)$$

ва, сўнгра,

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2).$$

Бу муносабатлардан фойдаланиб, тула энергия ифодасини бошқа шаклга келтирамиз:

$$\begin{aligned} T + U &= \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\xi^2 + \eta^2) - \frac{e^2}{r^3} (\xi^2 - \eta^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(1 - \frac{2e^2}{mr^3 \omega_0^2} \right) \xi^2 + \frac{1}{2} m \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(1 + \frac{2e^2}{mr^3 \omega_0^2} \right) \eta^2 \end{aligned}$$

ёки, (160.4) ва (160.1') белгилашларни эътиборга олсак,

$$T + U = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \omega_+^2 \xi^2 + \frac{1}{2} m \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_-^2 \eta^2. \quad (160.5)$$

Шундай қилиб, бундай кўринишдаги $T + U$ тула энергиянинг, олдинроқда топилган ω_+ ва ω_- нормал частоталарда тебранадиган иккита мустақил осцилляторлар энергиялари йиғиндисининг ўзгинаси бўлишлигини кўрамиз.

158-§ да олинган натижага мувофиқ, бу осцилляторлар энергияси қуйидаги квантланган қийматларга эга:

$$E_{n+} = h\nu_+ \left(n_+ + \frac{1}{2} \right), \quad E_{n-} = h\nu_- \left(n_- + \frac{1}{2} \right)$$

ва, бинобарин, системанинг тула энергияси

$$E_{n+} + E_{n-} = h\nu_+ \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) + h\nu_- \left(n_- + \frac{1}{2} \right). \quad (160.6)$$

Энди бизнинг мақсадимиз учун етарли бўлган ν_+ ва ν_- частоталарни тақрибан ҳисоблаб чиқамиз. (160.4) да бурчак частоталарни чизиқли частоталарга ($\omega = 2\pi\nu$) алмаштириб ва k нинг ўрнига унинг (160.1') даги ифодасини қўйиб,

$$\nu_+ = \nu_0 \left(1 - \frac{2e^2}{r^3 f} \right)^{1/2}, \quad \nu_- = \nu_0 \left(1 + \frac{2e^2}{r^3 f} \right)^{1/2}, \quad (f = 4\pi^2 m \nu_0^2)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз. Энди қавсларни маълум формула бўйича

$$(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \dots$$

қаторга ёямиз. Қуйидагини оламиз:

$$\nu_+ = \nu_0 \left(1 - \frac{e^2}{r^3 f} - \frac{e^4}{2r^6 f^2} \right), \quad \nu_- = \nu_0 \left(1 + \frac{e^2}{r^3 f} - \frac{e^4}{2r^6 f^2} \right).$$

Буни (160.6) ифодага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$E = E_{n_+} + E_{n_-} = \\ = h\nu_0 \left[(n_+ + n_- + 1) + \frac{e^2}{r^3 f} (n_- - n_+) - \frac{e^4}{2r^6 f^2} (n_- + n_+ + 1) \right]. \quad (160.7)$$

Иккала осциллятор ҳам асосий ҳолатда бўлганда $n_+ = n_- = 0$ бўлади ва, бундан ташқари, ўрта қавс ичидаги иккинчи ҳад ҳам нолга айланади*; бу ҳолда:

$$E = h\nu_0 \left(1 - \frac{e^4}{2f^2 r^6} \right). \quad (160.8)$$

Иккала осцилляторнинг нолинчи энергиялари йиғиндиси $\frac{1}{2} h\nu_0 + \frac{1}{2} h\nu_0 = h\nu_0$ га тенглигини эътиборга олиб, системанинг тула энергияси бу йиғиндидан $\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2 r^6}$ миқдор қадар *кичиклигини* кўрамыз. — $\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2 r^6}$ миқдор W боғланиш энергиясидир:

$$W = - \frac{e^4 h\nu_0}{2f^2 r^6} = - \frac{C}{r^6}, \quad (160.9)$$

бунда C — бирор ўзгармас катталиқ. Манфий ишора боғланишнинг ҳамма вақт *тортишишдан* иборатлигини кўрсатади. C ўзгармас катталиқни турли атомлар учун оптикадан олинган ўлмуотлар ҳамда e ва h универсал доимий катталиқлар қиймати асосида ҳисоблаш мумкин.

Шундай қилиб, молекуляр ўзаро таъсир энергиясини олдиндан ҳисоблаш имкониятига эга бўламиз. Бошқа томондан, атом ва молекулани унинг қаттиқ кристалл панжарадаги боғланишидан озод қилиш учун сарфланиши лозим бўлган иш ёки бошқача айтганда, ҳайдаш (сублимация) иссиқлиги бу энергиянинг ўлчови бўлиб хизмат қила олади. Сублимация (абсолют нолга келтирилган) иссиқлигининг (160.9) формула ёрдамида ҳисобланган ва тажрибада топилган қийматлари қанчалик ўзаро мос тушишини қуйида келтирилган жадвал кўрсатади.

Бу параграф бошида айтилганларга қайтиб, осциллятор энергияси формуласида биринчи қарашда қизиқ туюлган $1/2 h\nu_0$ нолинчи энергиянинг пайдо бўлиши Ван-дер-Ваальс тутиниш кучларини тушунтириш имкониятини яратишини кўрамыз. Ҳа-

* Бу ҳад, диполлардан бири уйғонган ҳолатда, яъни $n_+ \neq 0$ бўлганда катта аҳамиятга эга. Аммо бу ҳол ҳақида бу ерда тўхталмаймиз.

қиқатан ҳам, агар биз узил-кесил ҳисоблаш учун Планкнинг $E_n = nh\nu_0$ ярим классик формуласидан фойдаланганимизда эди, (160.7) формулада иккита бир (биринчи ва охириги кичик қавс-ларда) тушиб қолар эди. Шунинг учун асосий ҳолатда

Модда	Сублимация иссиқлиги	
	ҳисоблангани	кузатилагани
Ne	0,47	0,58
N ₂	1,64	1,86
Ar	2,08	2,03
CH ₄	2,42	2,70

($n_+ = n_- = 0$ бўлганда) боғланиш энергияси учун ноль қиймат олган бўлар эдик. Бу натижа худди классик назарияга мувофиқ равишда, тинч турган осцилляторлар, агар улар зарядлар тақсимоти туфайли сезиларли электр моментга эга бўлмаса (Ne, Ne, Ar инерт газларнинг атомлари), ўзаро таъсирлашмайди деган фактга мос келади. Шундай қилиб, *нормал ҳолатда молекуляр ўзаро таъсир кучларининг пайдо бўлиши нолинчи энергиянинг мавжуд бўлиши билан боғлиқдир.*

161-§. Уч ўлчовли потенциал яшикдаги заррача

Шу пайтгача қараб чиқилган масалаларда ψ функция фақат битта координатага боғлиқ эди. Бу параграфда уч ўлчовли масаланинг энг содда мисолини қараймиз.

Уч ўлчовли потенциал яшикка, яъни ҳамма йўналишларда чегараланган соҳага эга бўлайлик, унинг ичида ҳамма жойда потенциал энергия нолга тенг, лекин чегараларида потенциал энергия бирданига чексизгача ортади ва қолган бутун фазода шундайлигича қолади. Потенциал энергия нолга тенг бўладиган соҳа l_1, l_2, l_3 қиррали параллелепипед шаклига эга деб фарз қиламиз. $U(x, y, z)$ потенциал энергияни учта қўшилувчининг йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкин:

$$U(x, y, z) = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z),$$

бунда

$$0 \leq x \leq l_1 \quad \text{бўлганда} \quad U_x = 0, \quad x < 0 \text{ ва } x > l_1 \quad \text{бўлганда} \quad U_x = \infty,$$

$$0 \leq y \leq l_2 \quad \text{"} \quad U_y = 0, \quad y < 0 \text{ ва } y > l_2 \quad \text{"} \quad U_y = \infty,$$

$$0 \leq z \leq l_3 \quad \text{"} \quad U_z = 0, \quad z < 0 \text{ ва } z > l_3 \quad \text{"} \quad U_z = \infty.$$

Бу ҳол учун Шрёдингер тенгламасини декарт координаталари орқали ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U_x - U_y - U_z) \psi = 0. \quad (161.1)$$

Бу хусусий ҳосилаларни дифференциал тенгламадир. Биз бу ерда фойдаланадиган ечиш усули, хусусий ҳосилаларни тенгламани учта оддий тенгламага ажратишдан иборатдир. Бу ажратишнинг имконияти кўп даражада координаталар системасини қулай танлашга боғлиқдир, бу танлаш эса, одатда, масаланинг симметриясидан келиб чиқади. Мазкур ҳолда ажратиш жуда содда амалга оширилади.

ψ функцияни ҳар бири фақат битта координатага боғлиқ бўлган учта функция кўпайтмаси кўринишида қидирамиз:

$$\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (161.2)$$

(161.2) ечимни (161.1) тенгламага қўйсак ҳамда иккала томонини XYZ га бўлиб юборсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_x \right) + \left(\frac{1}{y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_y \right) + \left(\frac{1}{z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_z \right) = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E. \quad (161.3)$$

Бунда ҳадларнинг биринчи жуфти фақат x га, иккинчи жуфти фақат y га, учинчи жуфти фақат z га боғлиқдир. Аммо уларнинг йиғиндиси ўзгармас катталиқка тенг. Чап томондаги қавсларнинг ҳар бири қандайдир ўзгармас катталиқка тенг бўлган ҳолдагина ана шундай бўлиши мумкин. Демак,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_x &= C_x, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_y &= C_y, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_z &= C_z. \end{aligned} \right\} \quad (161.4)$$

Биз учта оддий дифференциал тенглама ҳосил қилдик—(161.1) тенгламани ажратиш мумкин бўлди. Равшанки,

$$C_x + C_y + C_z = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E.$$

Лекин C_x, C_y, C_z ўзгармас катталиқлар ўрнига бошқа E_x, E_y, E_z катталиқларни киритиш қулайдир, бунинг учун, масалан, $C_x = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E_x$ деб олинади. У ҳолда (161.4) тенгламаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_x - U_x) X = 0 \text{ ва ғ. к.} \quad (161.5)$$

(161.5) тенглама бир ўлчовли потенциал яшиқ тўғрисидаги масаланинг (156.1) тенгламаси билан бир хиллиги кўриниб

турибди. Иккала масала учун чегаравий шартлар ҳам бир хил:

$$X(0) = X(l_1) = 0. \quad (161.6)$$

156-§ даги ечимларга ўхшаш, (161.5) тенгламани ва (161.6) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечимларни бирданига ёзиш мумкин. Нормалланган кўринишда улар қуйидагичадир:

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{n_x \pi x}{l_1} \quad (n_x = 1, 2, 3, \dots). \quad (161.7)$$

Бундай ечимлар

$$E_{n_x} = n_x^2 \frac{h^2}{8ml_1^2} \quad (161.8)$$

шарт бажарилганда ўринли бўлади.

(161.4) гурппадаги бошқа икки тенглама ҳам шунга ўхшаш ечимларга эга бўлади:

$$\left. \begin{aligned} Y_n &= \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{n_y \pi y}{l_2}, \\ Z_n &= \sqrt{\frac{2}{l_3}} \sin \frac{n_z \pi z}{l_3}, \end{aligned} \right\} (n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots), \quad (161.9)$$

бу ечимлар

$$E_{n_y} = n_y^2 \frac{h^2}{8ml_2^2}, \quad E_{n_z} = n_z^2 \frac{h^2}{8ml_3^2} \quad (161.8')$$

шартлар бажарилганда ўринли бўлади.

Энди биз (161.1) тенгламанинг чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечимларини ёза оламиз:

$$\psi_n(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin \frac{n_x \pi x}{l_1} \sin \frac{n_y \pi y}{l_2} \sin \frac{n_z \pi z}{l_3}, \quad (161.10)$$

бунда энергия фақат қуйидаги дискрет қатор қийматларнигина қабул қилиши мумкин:

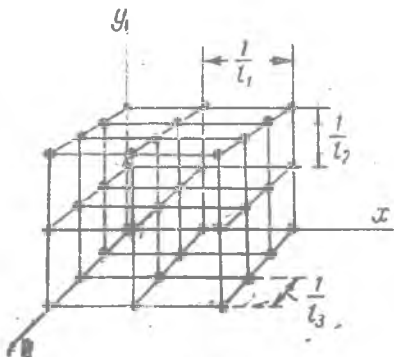
$$E(n_x, n_y, n_z) = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{n_x^2}{l_1^2} + \frac{n_y^2}{l_2^2} + \frac{n_z^2}{l_3^2} \right) \quad (161.11)$$

$$(n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots).$$

Масаланинг (161.10) хусусий функциялари қуйидаги тарзда характерланади (156-§ га қаранг): улар уз координата текисликка параллел $(n_x + 1)$ та тугун текисликка, xz текисликка параллел $(n_y + 1)$ та тугун текисликка ва $xу$ текисликка параллел $(n_z + 1)$ та тугун текисликка эга бўлган турғун тўлқинларни ифодалайди.

(161.11) формулага мувофиқ энергиянинг мумкин бўлган қийматлари дискрет кетма-кетликни ташкил қилади, бунда n_x, n_y, n_z бутун сонларнинг ҳар бир учлигига энергиянинг маълум сатҳи мос келади. Бу n_x, n_y, n_z учта сон масаланинг *квант сонларидир*.

Яшиқда заррачанинг мумкин, бўлган ҳолатлари ва энергияси қийматларини яққол тасаввур қилиш учун қуйидагича геометрик шаклдан фойдаланиш қулайдир. Қирралари $1/l_1, 1/l_2, 1/l_3$ бўлган тўғри бурчакли параллелепипед кўринишидаги элементар ячейкага эга бўлган фазовий панжарани тасаввур қилайлик (250-расм). Бу ячейканинг ҳажми $1/l_1 l_2 l_3$ бўлади. Заррачанинг ҳар бир ҳолати n_x, n_y, n_z ларнинг бутун қийматлари тўплами билан характерланишлиги сабабли, ҳар қандай ҳолатни координаталари $n_x/l_1, n_y/l_2, n_z/l_3$ бўлган панжара тугуни билан тасвирлашимиз мумкин. Бу ҳолатга мос энергияни геометрик манзара ёрдамида қуйидаги тарзда топамиз. Ҳолатни тасвирловчи нуқта билан координата бошини туташтирувчи A векторни тасаввур қилайлик. Унинг узунлиги квадрати:



250- расм.

жара тугуни билан тасвирлашимиз мумкин. Бу ҳолатга мос энергияни геометрик манзара ёрдамида қуйидаги тарзда топамиз. Ҳолатни тасвирловчи нуқта билан координата бошини туташтирувчи A векторни тасаввур қилайлик. Унинг узунлиги квадрати:

$$A^2 = \frac{n_x^2}{l_1^2} + \frac{n_y^2}{l_2^2} + \frac{n_z^2}{l_3^2}.$$

Шунинг учун энергия

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h^2}{8\pi} A^2$$

кўринишда ифодаланади.

Тавсифланган геометрик манзара ёрдамида мазкур масала ечимларининг жуда муҳим хусусиятини аниқлашимиз мумкин. Агар потенциал яшиқнинг l_1, l_2, l_3 қирралари умумий улчовсиз сонлар бўлса, у ҳолда *ҳар бир ҳолатга* ўз тасвирловчи нуқтаси ва ўз энергия қиймати мос келади. Қирралар рационал *қисбатда* бўлган ҳолда аҳвол бошқача бўлади. Соддалик учун, потенциал яшиқ куб шаклида, яъни $l_1 = l_2 = l_3 = l$ деб ҳисоблаймиз. Бу ҳол учун

$$\psi = \sqrt{\frac{8}{l^3}} \sin \frac{n_x \pi x}{l} \sin \frac{n_y \pi y}{l} \sin \frac{n_z \pi z}{l},$$

$$E = \frac{h^2}{8\pi l^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Равшанки, n_x, n_y, n_z бутун қийматларнинг ҳар бир тўплами учун ψ функциясига эга бўлади, лекин $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ йиғинди бир хил катталиқка эга бўлган барча ҳолатлар учун энергия қийматлари ўзаро мос тушади. Шундай қилиб, фараз қилинган куб панжаранинг турли тугунларига ҳамма вақт турли ҳолатлар мос келади, лекин бу ҳолатларнинг баъзиларида энергия бир хил бўлади.

Мисол тариқасида икки хусусий ҳолни қараб чиқамиз. Айтайлик, $n_x = 1, n_y = 1, n_z = 1$ бўлсин; бу ҳолда

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 3.$$

Квадратлари йиғиндиси 3 га тенг бўладиган бошқа учта бутун сон танлаш мумкин бўлмаганлиги учун (1, 1, 1) ҳолатга энергиянинг фақат битта қиймати мос келади. Энди $n_x = 1, n_y = 2, n_z = 3$ деб оламиз. Бунда

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 14$$

ва энергиянинг мос қиймати:

$$E = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot 14.$$

Энергиянинг бу қийматига олтига турлича ҳолат тўғри келади (XXIV жадвалга қаранг).

XXIV жадвал

n_x	n_y	n_z	$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$
1	2	3	14
1	3	2	
2	3	1	
3	1	2	
2	1	3	
3	2	1	

Куб яшиқ ҳолида ҳолатларнинг жуда кўпчилиги учун бир неча турли ҳолатларга бир хил энергия тўғри келишлиги хусусияти характерлидир, бунга ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Бундай ҳолатлар айниган ҳолатлар дейилади, мос келган энергия сатҳлари сони эса ҳолатнинг квант вази дейилади. Таҳлил қилинган мисолларнинг биринчисида квант вази 1 га тенг, иккинчисида эса 6 га тенг.

Ма ш қ л а р: 1. Уч ўлчовли чизиқли анизотроп осциллятор тебранишлари ҳақидаги масалани ечинг (113-§ га қаранг). Бундай осцилляторнинг потенциал энергиясини қуйидаги йиғинди ифодалайди:

$$U = \frac{1}{2} f_x x^2 + \frac{1}{2} f_y y^2 + \frac{1}{2} f_z z^2,$$

Бунда f_x, f_y, f_z — квазиэластик кучнинг тўғри бурчакли декарт координаталар системасининг учта ўқи йўналишидаги ташқил этувчиларидир. Мос класстик частоталар $\nu_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f_x}{m}}$ ва ҳ. к. киритиб, потенциал энергияни

$$U = 2\pi^2 m (\nu_x^2 x^2 + \nu_y^2 y^2 + \nu_z^2 z^2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Шрёдингер тенгламасида потенциал энергиянинг бу ифодасидан фойдаланинг ва бу ҳолда осциллятор энергияси хусусий қийматлари:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = h \left[\left(n_x + \frac{1}{2} \right) \nu_x + \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \nu_y + \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \nu_z \right],$$

(бунда n_x, n_y, n_z бутун сонлар — мазкур масаланинг квант сонларидир) кўринишда бўлишини, хусусий функциялар эса

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = e^{-\frac{1}{2} (a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2)} H_{n_x}(\sqrt{a_x} x) H_{n_y}(\sqrt{a_y} y) H_{n_z}(\sqrt{a_z} z)$$

(бунда $a_x = \frac{4\pi^2 m}{h} \nu_x$ ва ҳ. к.) кўринишда бўлишини кўрсатинг.

Курсатма. Шу параграфда таҳлил қилинган схема бўйича Шрёдингер тенгламасини учтага ажратинг ва бир ўлчовли чизиқли осциллятор учун 158-§ натижаларидан фойдаланинг.

2. Уч ўлчовли чизиқли изотроп осциллятор ҳолида энергия хусусий қийматлари

$$E_n = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) h\nu_0 = \left(n + \frac{3}{2} \right) h\nu_0 \quad (n = n_x + n_y + n_z)$$

Бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Нолинчи ($n_x = n_y = n_z = 0$) сатҳдан бошқа ҳамма сатҳлар $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ квант вазнли айниган сатҳлар эканлигини исботланг.

162-§. Водородсимон атом учун Кеплер масаласи

Энди Шрёдингер тенгламасининг водородсимон атом ҳақидаги масалага қўлланилишини қараб чиқамиз. Бу ҳолда ядронинг электростатик майдонида электроннинг потенциал энергияси бундай бўлади:

$$V = -\frac{Ze^2}{r}. \quad (162.1)$$

Ядро массасини электрон массасига нисбатан чексиз катта деб ҳисоблаб, масалани электроннинг қўзғалмас марказ атрофида ҳаракати масаласига, яъни битта жисм масаласига келтирилади. Бу ҳолда Шрёдингер тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (162.2)$$

Электроннинг ҳаракати марказий сферик симметрик майдонда содир бўлаётганлиги туфайли масаланинг симметрияси сферик кутб координаталар системасидан фойдаланиш маъқуллигини билдиради. Координаталар бошини қўзғалмас марказда жойлаштирамиз; бунда электроннинг вазияти r, ϑ, φ координаталар

орқали аниқланади, ва бинобарин, тўлқин функция, умуман айтганда, шу координаталарга боғлиқ бўлади:

$$\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi).$$

Бироқ, ушбу параграфда барча мумкин бўлган ҳолатлардан фақат ψ функциянинг ўзи ҳам сферик симметрияли бўладиган, яъни фақат r га боғлиқ бўладиган ҳолатларни текшираемиз. Шрёдингер тенгламаси ёрдамида, ҳеч қандай қўшимча гипотезаларсиз, Бальмер формуласини чиқариш учун шунинг ўзи кифоядир. Масалани умумий ҳолда ечишни II томда кўрамиз: ψ функция симметрия хоссаларининг бу ердаги чекланиши Бальмер формуласини чиқаришда нима учун чекланишга олиб келмаслигини ҳам II томда кўрамиз.

Масалани ечишга киришишдан аввал Δ Лаплас операторини ψ функция фақат r га боғлиқ бўладиган шартда, марказий² симметрик майдон учун сферик қутб координаталарида ифодалаб олиш керак. Мазкур ҳолда бу алмаштириш жуда содда бажарилади. Координаталар боши ядро билан мос тушганда электроннинг декарт координаталари ва r радиус-вектор билан боғланиши қуйидагича:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (162.3)$$

бундан

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r};$$

шунга ўхшаш

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Сўнгра

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{dr}{dx} = \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{d\psi}{dr},$$

ва шунга ўхшаш

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \frac{d\psi}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \frac{d\psi}{dr}.$$

Шунинг учун

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) \frac{d\psi}{dr} = \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr}.$$

Буни ихчам куринишда ифодалаш мумкин:

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right).$$

ψ фақат r га боғлиқ бўлган ҳол учун, бу ифодани (133.6) умумий ифодадан ҳосил қилиш мумкинлиги кўришиб турибди.

Энди Шрёдингер тенгламаси

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$$

кўринишга эга бўлади,

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E = \lambda, \quad \frac{8\pi^2 m}{h^2} Ze^2 = \alpha \quad (162.4)$$

деб белгилаб оламиз ва Шрёдингер тенгламасини қайта ёзамиз:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left(\lambda + \frac{\alpha}{r} \right) \psi = 0. \quad (162.5)$$

158-§ да чизиқли гармоник осциллятор учун Шрёдингер тенгламасини қандай ечган бўлсак, (162.5) тенгламани ҳам худди шундай ечамиз. Асимптотик ҳолда, яъни $r \rightarrow \infty$ учун (162.5) тенглама

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \lambda\psi = 0 \quad (162.6)$$

кўринишга ўтади. Равшанки, унинг хусусий ечимлари қуйидагича бўлади:

$$\psi = e^{\pm\sqrt{-\lambda}r}.$$

$\lambda > 0$ [яъни (162.4) бўйича $E > 0$] ва $\lambda < 0$ ($E < 0$) ҳоллар бўлиши мумкин. Классик ечимга ўхшаш биринчи ҳол эркин электроннинг гиперболик ҳаракатига; иккинчиси—боғланган электронга мос келади (51-§ га таққосланг). Бизни мана шу иккинчи ҳол қизиқтиради. $\lambda < 0$ бўлганда $\sqrt{-\lambda}$ — ҳақиқий сондир; уни қуйидагича белгилаймиз:

$$\sqrt{-\lambda} = \epsilon.$$

$e^{\pm\epsilon r}$ нинг хусусий ечимидан минус ишоралисини танлаб оламиз, чунки + ишорали ечим $r \rightarrow \infty$ бўлганда чексизга айланади. Демак, асимптотик ҳол учун:

$$\psi = e^{-\epsilon r}.$$

Буни назарга олиб, ечимни умумий ҳолда

$$\psi = e^{-\epsilon r} f(r) \quad (162.7)$$

кўринишда қидирамиз.

$$\frac{d\psi}{dr} = \left(-\epsilon f + \frac{df}{dr} \right) e^{-\epsilon r},$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \left(\epsilon^2 f - 2\epsilon \frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2} \right) e^{-\epsilon r},$$

$$\epsilon^2 = -\lambda$$

ифодаларни эътиборга олиб, содда ўзгартиришдан ва e^{-r} га қисқартишдан сўнг, (162.5) ни ушбу кўринишга келтирамиз:

$$\frac{d^2f}{dr^2} + 2\left(\frac{1}{r} - \varepsilon\right)\frac{df}{dr} + \frac{\alpha - 2\varepsilon}{r}f = 0. \quad (162.8)$$

Бу тенгламанинг ечимини

$$f(r) = r^\gamma \sum_{\nu} a_{\nu} r^{\nu} \equiv \sum_{\nu} a^{\nu} r^{\gamma+\nu} \quad (162.9)$$

даражали қатор кўринишида қидирамиз. Ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{df}{dr} = \sum_{\nu} (\gamma + \nu) a_{\nu} r^{\gamma+\nu-1}, \quad (162.10)$$

$$\frac{d^2f}{dr^2} = \sum_{\nu} (\gamma + \nu)(\gamma + \nu - 1) a_{\nu} r^{\gamma+\nu-2}.$$

(162.9) ва (162.10) ифодаларни (162.8) тенгламага қўйиб, қатор содда ўзгартиришлардан сўнг, қуйидагини оламиз:

$$\sum_{\nu} (\gamma + \nu)(\gamma + \nu + 1) a_{\nu} r^{\gamma+\nu-2} = \sum_{\nu} [2\varepsilon(\gamma + \nu + 1) - \alpha] a_{\nu} r^{\gamma+\nu-1}.$$

Бу тенглик айнан ўринли бўлиши туфайли ўнгда ва чапда r нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентлар бир-бирига тенг бўлиши керак. Чапда энг паст даражали ($\nu=0$) ҳад $r^{\gamma-2}$, унинг коэффициенти нолга тенг бўлиши лозим, чунки ўнгда бундай даражали ҳад йўқ. Демак,

$$\gamma(\gamma + 1) = 0,$$

бундан $\gamma = 0$ ёки $\gamma = -1$. Иккинчи ечимни ташлаб юборамиз, чунки $\gamma = -1$ бўлганда қатор a/r ҳаддан бошланар ва $r = 0$ қийматда чексизликка айланар эди. Агар чапда $\nu = l$, ўнгда эса $\nu = l - 1$ деб олинса, чапда ва ўнгда r нинг бир хил даражалари ҳосил бўлади. Бу қатор коэффициентлари учун рекуррент формулани беради:

$$l(l+1)a_l = [2\varepsilon(l+1) - \alpha]a_{l-1},$$

$$a_l = \frac{2\varepsilon(l+1) - \alpha}{l(l+1)} a_{l-1}. \quad (162.11)$$

158-§ да қўлланилган усул билан (162.11) рекуррент формулаи қатор $e^{+2\varepsilon r}$ учун тузилган қатор каби яқинлашишини осон исботлаш мумкин (исботлаш ўқувчининг ўзига ҳавола қилинади), бинобарин,

$$\psi = e^{-\varepsilon r} f(r) \rightarrow e^{\varepsilon r},$$

яъни r ортганда ψ чексиз ортади, бу эса мумкин эмас. Шунинг учун чексиз қатор полином кўринишга келтирилиши ке-

рак; у ҳолда ψ нинг ифодасида $e^{-\alpha r}$ экспоненциал кўпайтувчининг бўлишлиги $r \rightarrow \infty$ бўлганда ψ нинг нолга айланишини таъминлайди. Қаторнинг полином кўринишга келиши учун $a_{l-1} \neq 0$ бўлганда унинг қандайдир l номерли ҳади нолга тенг бўлиши лозим. Бу ҳолда (162.11) рекуррент формула қуйидагини беради:

$$2\varepsilon(l+1) - \alpha = 0,$$

бундан

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2(l+1)} = \frac{\alpha}{2n},$$

бунда

$$n = l + 1.$$

ε ва n нинг (162.4) даги қийматларига ўтиб, қуйидагини осон топамиз:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}.$$

Энергиянинг Бальмер сатҳлари учун формула ҳосил қилдик.

ҚЎШИМЧАЛАР

I. ЎРТА ҚИЙМАТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Қуйидаги масалани қараб чиқамиз. Биз ютқизиқсиз лотереяда қатнашаётган бўлайлик, унда a_1 сўм ютуқ чиқадиган n_1 та билет, a_2 сўм ютуқ чиқадиган n_2 та билет бор ва ҳ.к. Ўртача ютуқ қандай? Билетларнинг тўла сони N га тенг бўлсин:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k \equiv \sum_{i=1}^k n_i = N.$$

Равшанки, ўртача ютуқ \bar{a} „аралаштириш қондаси“ бўйича топилади:

$$\bar{a} = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = a_1 \frac{n_1}{N} + a_2 \frac{n_2}{N} + \dots + a_k \frac{n_k}{N}. \quad (I.1)$$

Лекин, $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots$ нисбатлар лотереяда қатнашувчи учун у ёки бу ютуқни олиш эҳтимолларидир*:

$$\omega_1 = \frac{n_1}{N}, \quad \omega_2 = \frac{n_2}{N}, \dots, \quad \omega_k = \frac{n_k}{N}. \quad (I.2)$$

Шунинг учун (I.1) ни қуйидаги кўринишда қайта ёзиш мумкин:

$$\bar{a} = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + \dots + a_k \omega_k \equiv \sum_{i=1}^k a_i \omega_i. \quad (I.3)$$

(I.3) нинг унги қисмидаги ифода, яъни a катталиқ қабул қила оладиган қийматларнинг мос эҳтимолга кўпайтмалари йиғиндиси эҳтимоллар назариясида одатда математик кутиш дейилади.

Умумийроқ ҳолда, x_1, x_2, \dots, x_k дискрет қийматлар қаторини (бу қийматлар орасида манфийлари ҳам бўлиши мумкин) қабул қиладиган ва бу қийматларни қабул қилиш эҳтимоли

* Масалан, С. Н. Бернштейннинг „Теория вероятностей“ деган китобига қаранг, 17-бет, Гостехиздат, 1946.

мос равишда w_1, w_2, \dots, w_k га тенг бўлган x катталикнинг математик кутилиши

$$\bar{x} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_k w_k \quad (1.4)$$

алгебраик йиғинди каби аниқланади. (1.2) эҳтимоллар шундай тарзда аниқланганки, (1.3) даги a катталикнинг ёки (1.4) даги x катталикнинг мумкин бўлган ҳамма қийматлари эҳтимоли йиғиндиси 1 га тенг бўлади:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{N} = 1. \quad (1.5)$$

Бундай таърифнинг мазмуни қуйидагичадир: a_1, a_2, \dots, a_k лар ютуқнинг ҳамма мумкин бўлган қийматлари ва лотерея ютқиқиқсиз бўлганлиги учун, у ҳолда эҳтимолларни қўшиш теоремасига асосан бирорта ютуқни олиш эҳтимолига тенг бўлган $w_1 + w_2 + \dots + w_k$ эҳтимоллар йиғиндиси ишончли воқеа эҳтимолидир. Одатдаги шартга кўра, ишончли воқеа эҳтимоли 1 га тенг деб қабул қилинади. Агар катталикнинг ҳамма мумкин бўлган қийматлари эҳтимоли (1.5) шартни қаноатлантирса, у ҳолда эҳтимолик 1 га нормаланган дейилади.

Физикада баъзи ҳолларда 1 га нормаланмаган эҳтимоликлар билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, у ёки бу ютуқни олиш эҳтимолини бу ютуқни берадиган билетлар сони билан характерлаш мумкин эди. У ҳолда

$$w_1 = n_1, \quad w_2 = n_2, \dots, \quad w_k = n_k,$$

ва (1.1) формула буйича:

$$\bar{a} = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k}{w_1 + w_2 + \dots + w_k} = \frac{\sum_i a_i w_i}{\sum_i w_i}$$

ёки (1.4) ўрнига

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i} \quad (1.6)$$

Келтирилган таърифлар дискрет тақсимланган (масалан, a_1, a_2, \dots, a_k мумкин бўлган турлича ютуқлар бир-биридан чекли сондаги сўмлар билан фарқланади) катталикларга тегишли эди. Физикада эса кўпинча узлуксиз равишда ўзгарувчи катталиклар билан иш кўришга тўғри келади. Бу ҳолда бирор катталикнинг x ва $x + dx$ орасидаги тор интервалда ётувчи қийматга эга бўлиш эҳтимоли интервалнинг dx катталигига пропорционал ва $w(x)dx$ кўринишда ифодаланadi. Бу ерда тақсимот функцияси ёки эҳтимолик зичлиги деб аталадиган $w(x)$ функция қуйидаги маънога эга: $w(x)$ ни тасвирловчи эгри чизиқ ясаймиз (251-расм); x дан $x + dx$ гача бўлган кичик участкада $w(x)$ функцияни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин ва штрихланган полоса юзи билан тасвирланадиган $w(x)dx$ кўпайт-

ма ўзгарувчан катталикнинг кўрсатиб ўтилган интервалдаги қийматга эга бўлиши эҳтимолдир. Агар бу ўзгарувчи катталик $x = a$ дан $x = b$ гача бўлган чекли интервалда узлуксиз ўзгарадиган бўлса, у ҳолда $x = a$ ва $x = b$ ординаталар орасида эгри чизиқ билан чегараланган юз билан тасвирланувчи

$\int_a^b w(x) dx$ интеграл x нинг қиймати қаердадир юқорида кўрса-

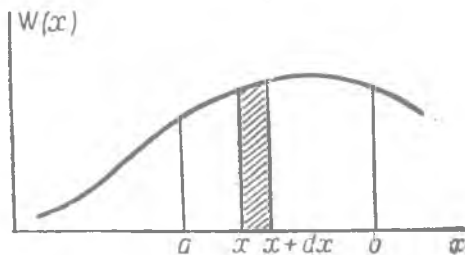
тилган чекли (a, b) интервалда ётиш эҳтимолдир. x нинг ҳам-ма мумкин бўлган қийматлари бу интервалда жойлашганда

$\int_a^b w(x) dx$ интеграл ишончли воқеа эҳтимolini ифодалайди.

Агар $w(x)$ функция

$$\int_a^b w(x) dx = 1 \quad (1.7)$$

шарт бажариладиган қилиб танланган бўлса, у ҳолда эҳтимол-лик зичлиги 1 га нормаланган дейилади. Хусусан, x нинг ўз-гариш соҳаси 0 дан ∞ га-ча ёки ҳатто $-\infty$ дан $+\infty$ гача бўлиши мум-кин. Бу ҳолда (1.7) шарт



251- расм.

маънога эга бўлиши учун, x ортганида $w(x)$ функ-ция етарлича тез (энг камида x^{-p} сингари, бун-да $p > 1$) камай бориши керак*.

x нинг ўрта қийматини топиш учун бутун (a, b)

интервал $x_i, x_i + dx$ кичик участкаларга ажратилади. Уларнинг ҳар бирида $w(x) = w(x_i)$ ни ўзгармас деб ҳисобласа бўлади; $w(x_i) dx$ тақрибан x катталикнинг x_i ва $x_i + dx$ орасидаги қийматга эга бўлишлиги эҳтимолйга тенг.

$\sum_i x_i w(x_i) dx$ йиғиндининг $\int_a^b x w(x) dx$ интегралга тенг лимити бу ҳолда узлуксиз ўзгарадиган катталикнинг ўрта қиймати ёки математик кутилма бўлади**:

$$\bar{x} = \int_a^b x w(x) dx. \quad (1.8)$$

* Масалан, В. И. Смирновнинг „Курс высшей математики“ деган китобига қаранг, II т., 258- бет, Гостехиздат, 1948.

** Аниқ исботларни эҳтимоллик назарияси қўлланмаларида топиш мумкин, масалан, С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, IV боб, Гостехиздат, 1946; В. И. Гливленко, Курс теории вероятностей, 16- §, Гостехиздат, 1939.

Бунда эҳтимоллик зичлиги 1 га нормаланган, яъни (I.7) тенглик ўринли бўлади деб фараз қилинади. Агар $w(x)$ нормаланган бўлмага, у ҳолда \bar{x} ни ҳисоблаш учун (I.6) га ухшаш формуладан фойдаланиш лозим:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x w(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}. \quad (I.9)$$

x катталиқ квадратининг ўрта қиймати \bar{x}^2 қуйидагига тенг [$w(x)$ нормаланган ҳолда]:

$$\bar{x}^2 = \int_a^b x^2 w(x) dx. \quad (I.10)$$

Умуман, ҳар қандай $f(x)$ функциянинг ўрта қиймати

$$f(\bar{x}) = \int_a^b f(x) w(x) dx. \quad (I.11)$$

Мисол кўрамир. Айтайлик,

$$w(x) = e^{-\lambda x} \quad (I.12)$$

ва бунда x ўзгарувчи 0 дан ∞ гача бўлган ҳамма қийматларни қабул қила оладиган бўлсин. $w(x) = e^{-\lambda x}$ функциянинг нормаланишини текширамир:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

яъни эҳтимоллик нормаланмаган. Ўртача қийматларни ҳисоблаш учун ё (I.9) формуладан фойдаланиш керак, ёки $w(x)$ ни нормалаш керак. Бу ҳолда $\lambda e^{-\lambda x}$ нинг нормаланган эҳтимоллик зичлиги бўлишлиги кўришиб турибди. x нинг ўртача қиймати:

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} x w(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Бўлаклар интеграллаймир:

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x d\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) = \left(-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

(юқори чегарани икки марта ўрнига қўйиш $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишли ноа-

ниқликни беради; уни Лопитал қондаси бўйича очсак, нолга тенг бўлади). Демак,

$$\bar{x} = \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Шунга ўқшаш,

$$\overline{x^2} = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 d\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$e^{-\lambda x}$ типдаги эҳтимоллик зичлиги бу китобда бир неча марта учрайди.

II. КВАНТ СИСТЕМАЛАР УЧУН БОЛЬЦМАН ТАҚСИМОТИНИ КЕЛТИРИБ ЧИҚАРИШ

Айтайлик, $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ энергияли квант ҳолатларда бўла оладиган атом ёки молекула мавжуд бўлсин. Бундан кейин бизни қизиқтирадиган объектни (атом ёки молекулани) „система“ деб атаймиз. Савол қўямиз: системани E_i энергияли ҳолатда топиш эҳтимоли қандай? Буни ечиш учун одатда статистикадаги сингари иш қиламиз: турли квант ҳолатларда ўзаро иссиқлик мувозанатида турган жуда катта N сонли бир хил системалар бор деб фараз қиламиз. E_1 энергияли ҳолатда N_1 та система, E_2 энергияли ҳолатда N_2 та система ва ҳоказолар бўлсин. Системаларнинг ҳолатлар бўйича бундай тақсимланиш эҳтимолини топиш учун мазкур ҳолат, яъни $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ энергияли системалар учун $N_1, N_2, \dots, N_i, \dots$ сонлар билан характерланувчи ҳолат неча усул билан амалга оширилиши мумкинлигини аниқлаймиз. Бу—эҳтимоллик назариясининг типик масаласидир. У қуйидаги усул билан ечилади. Даставвал, N та система орасидан E_1 энергияли N_1 та система неча усул билан танлаб олиниши мумкинлигини топамиз. Бу сон N та элементдан N_1 тадан олинган комбинациялар сонига тенгдир, яъни

$$\binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}.$$

Энди қолган $N - N_1$ та системадан E_2 энергияли N_2 та система неча усул билан танлаб олиниши мумкинлигини топамиз. Бу сон қуйидагига тенг:

$$\binom{N - N_1}{N_2} = \frac{(N - N_1)!}{N_2!(N - N_1 - N_2)!}.$$

Қолган $N - N_1 - N_2$ та системадан N_3 та система

$$\binom{N - N_1 - N_2}{N_3} = \frac{(N - N_1 - N_2)!}{N_3!(N - N_1 - N_2 - N_3)!}$$

усул билан танлаб олиниши мумкин ва ҳ. к. Равшанки, N та системанинг $N_1, N_2, N_3, \dots, N_i, \dots$ гадан группаларга тақсим-

ланиш усулларининг сони юқоридагига ўхшаш равишда тузилган барча ифодалар кўпайтмасига тенг, яъни

$$W = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \frac{(N-N_1)!}{N_2!(N-N_1-N_2)!} \times \\ \times \frac{(N-N_1-N_2)!}{N_3!(N-N_1-N_2-N_3)!} \dots = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots} \quad (II.1)$$

Бундан ташқари, системаларнинг умумий сони ва уларнинг тўла энергияси маълум катталиклар бўлганлиги учун икки қўшимча шарт қаноатлантирилиши керак:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_i + \dots = N, \quad (II.2)$$

$$N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 + \dots + N_i E_i + \dots = E. \quad (II.3)$$

Энг кўп эҳтимолли тақсимотни ҳосил қилиш учун (II.2) ва (II.3) қўшимча шартларни эътиборга олган ҳолда (II.1) ифода максимумини топиш керак. W функция ўрнига унинг логарифми билан иш кўрамиз: равшанки, W қандай шароитда максимумга эришса, $\ln W$ ҳам ўша шароитда максимумга эришади.

Демак,

$$\ln W = \ln N! - \sum_i \ln N_i! \quad (II.4)$$

функциянинг максимумини излаймиз. Катта сонлар факториаллари учун

$$x! = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$$

Стирлинг формуласи ўринлидир, бундан

$$\ln x! = x \ln x - x + \frac{1}{2} \ln(2\pi x).$$

x катта қийматларга эга бўлганда биринчи икки ҳад етарлича аниқ натижа беради, яъни

$$\ln x! = x \ln x - x.$$

Бу формулани (II.4) ифоданинг ўнг қисмини ҳисоблашга татбиқ қилиб ва (I.2) ни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\ln W = N \ln N - N - \sum_i N_i \ln N_i + \sum_i N_i = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i. \quad (II.5)$$

$\ln W$ нинг (II.2) ва (II.3) шароитдаги максимумини топиш учун номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланамиз: (II.2) ни $-\alpha$ га, (II.3) ни $-\beta$ га кўпайтирамиз ҳамда (II.5) билан қўшамиз ва

$$N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i - \alpha \sum_i N_i - \beta \sum_i N_i E_i \quad (II.6)$$

функциянинг абсолют максимумини излаймиз.

Маълум қоидага асосан, (II.6) ифодадан $N_1, N_2, \dots, N_i, \dots$ бўйича олинган хусусий ҳосилаларни нолга тенглаймиз. Бунда

$$-\ln N_i - 1 - \alpha - \beta E_i = 0$$

кўринишдаги i та тенглама ҳосил бўлади, бундан

$$N_i = e^{-1-\alpha} e^{-\beta E_i},$$

ёки $C = e^{-1-\alpha}$ доимийни киритсак,

$$N_i = C e^{-\beta E_i}.$$

β доимий классик статистикадаги қийматга эга бўлади:

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad (\text{II.7})$$

бу ерда k —Больцман доимийси. Бу мослик принциpidан келиб чиқади: квант сонлар катта қийматли бўлганида барча квант ифодадар классик ифодадарга ўтади. Лекин, (II.7) бўйича β квант сонларга боғлиқ бўлмаганлиги учун кичик квант сонлари учун ҳам у ўз қийматини сақлаши керак. Демак,

$$N_i = C e^{-E_i / kT}.$$

Бу Больцман формуласидир. C доимийси

$$\sum_j N_j = N$$

нормаллаш шартидан осон топилади:

$$N = C \sum_j e^{-E_j / kT}, \quad C = \frac{N}{\sum_j e^{-E_j / kT}}.$$

E_j энергияли ҳолат g_j қарра айниган, яъни тенг энергияли g_j та ҳолат бўлган ҳолларда N_j ифодасига яна g_j кўпайтувчи ҳам киради:

$$N_j = g_j C e^{-E_j / kT}.$$

ЗЕЕМАН ЭФФЕКТИ КЛАССИК НАЗАРИЯСИГА ДОИР

Магнит майдон аста-секин ортганда электрон орбитаси радиуси ўзгармаслиги, лекин фақат унинг бурчак частотаси ўзгаришлигини кўрсатамиз. Максвеллнинг интеграл шаклдаги иккинчи тенгламасига (электромагнит индукциянинг умумлашган қонунига) мувофиқ \mathcal{H} магнит майдон ўзгарганида \mathcal{H} бўйлаб йўналган ўққа эга бўлган уюрмали \mathcal{E} электр майдон вужудга келади, ва бунда

$$\oint \mathcal{E}_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \pi r^2 \frac{d\mathcal{H}}{dt} \quad (\text{III.1})$$

Агар магнит майдон 0 дан \mathcal{H} гача ортиши учун ўтган вақт

мобайнида электрон n марта айланиб улгурган бўлса, у ҳолда \mathcal{H} ни текис ортади деб фараз қилиб,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\mathcal{H}}{nT} \quad (III.2)$$

тенгликка эга бўламиз, бунда T —электроннинг айланиш даври. Бир айланиш мобайнида майдоннинг электрон устида бажарган иши:

$$\frac{\Delta W}{n} = -e \oint \mathcal{E}_s ds$$

ёки (III.1) ва (III.2) ифодаларни эътиборга олсак,

$$\frac{\Delta W}{n} = \frac{e}{c} \frac{\mathcal{H}}{nT} \pi r^2,$$

бинобарин,

$$\Delta W = \frac{e}{c} \frac{\mathcal{H}}{T} \pi r^2 = \frac{e}{c} \mathcal{H} v \pi r^2 = \frac{e}{2c} \mathcal{H} \omega r^2.$$

Бу иш даставвал электроннинг кинетик энергиясини оширишга, агар орбита радиуси ўзгарса, у ҳолда потенциал энергиясини ҳам оширишга сарфланади. Шунинг учун

$$\frac{e}{2c} \mathcal{H} \omega r^2 = \Delta E_{\text{кин}} + \Delta E_{\text{пот}}. \quad (III.3)$$

Лекин

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m' \omega^2 r^2, \\ \Delta E_{\text{кин}} &= m(r^2 \omega \Delta \omega + \omega^2 r \Delta r), \\ E_{\text{пот}} &= -\frac{e^2}{r}, \quad \Delta E_{\text{пот}} = \frac{e^2}{r^2} \Delta r \end{aligned} \quad (III.4)$$

ёки e^2/r^2 тортишиш кучи билан $m r \omega^2$ марказдан қочирма инерция кучининг тенг бўлишлигини эътиборга олсак,

$$\Delta E_{\text{пот}} = m r \omega^2 \Delta r. \quad (III.5)$$

(III.4) ва (III.5) ларни (III.3) га қўйсак:

$$\frac{e}{2c} \mathcal{H} \omega r^2 = m(r^2 \omega \Delta \omega + 2\omega^2 r \Delta r).$$

Ҳар икки қисмини $m r^2 \omega^2$ га бўлиб,

$$\frac{e}{2mc} \frac{\mathcal{H}}{\omega} = \frac{\Delta \omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta r}{r} \quad (III.6)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Сўнгра, ҳолат чексиз секин (адиабатик) ўзгарганида электронга таъсир этадиган кучлар (яъни Кулон тортишиш кучи плюс Лоренц кучи) ҳар бир пайтда марказдан қочирма инерция кучига тенг бўлишлигини эътиборга олиб, барқарор ҳолат учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m(r + \Delta r)(\omega + \Delta \omega)^2 = \frac{e}{(r + \Delta r)^2} + \frac{e}{c} \mathcal{H} r \omega$$

ёки $(r + \Delta r)^2$ га кўпайтиргандан сўнг,

$$m(r + \Delta r)^3(\omega + \Delta\omega)^2 = e^2 + \frac{e}{c} \mathcal{H} r^3\omega.$$

[$r\Delta r$ ва $(\Delta r)^2$ иштирок этган ҳадларни ташлаб юборамиз]. Бундан содда ўзгартиришлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\Delta r}{r} = \frac{e}{2mc\omega} \mathcal{H}. \quad (\text{III.7})$$

(III.6) ва (III.7)-ларни таққослаб, энг аввал

$$\Delta r = 0$$

ва сўнгра

$$\Delta\omega = \frac{e}{2nc} \mathcal{H}$$

эканлигини аниқлаймиз. Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

IV. ЎРТАЧА КВАДРАТИК ФЛУКТУАЦИЯ ФОРМУЛАСИ

1. Ўртача квадратик флуқтациянинг

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}$$

формуласи бу китобда кўп учрайди, шунинг учун уни келтириб чиқариш мақсадга мувофиқдир.

Газлар кинетик назариясининг қуйидаги масаласини қараб чиқамиз: бирор V ҳажмда N та молекула бор; бу ҳажмнинг v қисмида n та молекула бўлишлигининг эҳтимоли қандай? Битта молекуланинг v ҳажмда бўлишлик эҳтимоли v/V га тенг (116-§ га қаранг); n та муайян молекулаларнинг v ҳажмда йиғилиши эҳтимоли $(v/V)^n$, $N-n$ та молекуланинг $V-v$ ҳажмда бўлиши эҳтимоли эса $(\frac{V-v}{V})^{N-n}$. Ниҳоят, n та молекуланинг v ҳажмда, қолган $(N-n)$ та молекуланинг $V-v$ ҳажмда бўлиши эҳтимоли:

$$\left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \quad (\text{IV.1})$$

Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, бу формула n та қандайдир муайян молекулаларнинг v ҳажмда бўлиши эҳтимолини беради; масалан, ҳамма N та молекула номерланган ва улардан қандайдир номерларга эга бўлган n таси v ҳажмда жойлашган деб тасаввур қилиш мумкин. Аммо, v ҳажмда қандай молекулаларнинг жойлашганлиги биз учун муҳим эмас; биз учун уларнинг сони n бўлишлиги муҳимдир. Лекин v ва $V-v$ ҳажмлар бўйича N та молекулаларнинг мазкур тақсимотидан яна

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (\text{IV.2})$$

та турлича тақсимотлар олиш мумкин, аммо, буларнинг ҳаммасида v ҳажмда илгаригидек n та молекула, $V-v$ ҳажмда

эса $N - n$ та молекула бўлади. Ҳақиқатан ҳам N та объектдан $N!$ та ўрин алмаштиришни амалга ошириш мумкин, лекин бу ўрин алмаштиришларнинг ҳаммаси ҳам турлича тақсимотлар беравермайди. Худди, v ҳажмдаги молекулаларнинг $n!$ та ўрин алмаштириши ва $V - v$ ҳажмдаги молекулаларнинг $(N - n)!$ та ўрин алмаштириши бир хил тақсимотнинг ўзини беради. Шундай қилиб, ҳамма $N!$ та ўрин алмаштиришлар сонидан молекулалар тақсимотини ўзгартирмайдиган $n!(N - n)!$ ўрин алмаштиришни чиқариб ташлаш лозим ва, бинобарин, турлича тақсимотларни берадиган ўрин алмаштиришлар сони (IV.2) формула билан ифодаланади.

Демак, n та молекула v ҳажмда, $N - n$ та молекула $V - v$ ҳажмда бўладиган барча альтернатив тақсимотлар $\frac{N!}{n!(N - n)!}$

та бўлади. Бу тақсимотлардан ҳар бирининг эҳтимоли (IV.1) формула билан ифодаланади ва, бинобарин, ҳар қандай n та молекуланинг v ҳажмда бўлишлиги эҳтимоли (эҳтимолликларни қўшиш теоремасига асосан)

$$w_n = \frac{N!}{n!(N - n)!} \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(\frac{V - v}{V}\right)^{N - n}. \quad (\text{IV.3})$$

Агар, хусусан, ҳамма N та молекуланинг V ҳажмнинг v қисмида тўпланиш эҳтимолини топиш талаб қилинса, у ҳолда $n = N$ бўлади ва (IV.3) формуладан:

$$w_n = \frac{N!}{N!0!} \left(\frac{v}{V}\right)^N = \left(\frac{v}{V}\right)^N$$

қелиб чиқади, яъни текстда 375-бетда келтирилган формула яна ҳосил бўлади. N та молекула V ҳажм бўйича текис тақсимланганда v ҳажмга $N \frac{v}{V}$ та молекула тўғри келиши кўриниб, турибди. (IV.3) формуладан фойдаланиб, бундай тақсимотнинг энг кўп эҳтимолли бўлишлигини кўрсатиш мумкин. Лекин (IV.3) формула v ҳажмда ҳар қандай сондаги молекулалар ($\leq N$) жойлашиши эҳтимолини, яъни энг кўп эҳтимолликли ҳолатдан ҳар қандай четланувчи ҳолатлар эҳтимолини беради, (IV.3) эҳтимолликларнинг 0 дан N гача олинган барча n бўйича йиғиндиси v ҳажмда 0 ва N орасида қандайдир сондаги молекулалар жойлашиши эҳтимолини беради. Бундай воқеа ишончли воқеадир ва, шунинг учун, агар (IV.3) эҳтимоллик 1 га

нормаланган бўлса, $\sum_{n=0}^N w_n$ йиғинди 1 га тенг бўлиши керак.

Ҳақиқатда ҳам шундай бўлади. Ҳақиқатан, (IV.3) нинг ўнг қисми $\left(\frac{V - v}{V} + \frac{v}{V}\right)^N$ биномнинг умумий ҳадидир, шунинг учун

$$\sum_{n=0}^N w_n = \left(\frac{V - v}{V} + \frac{v}{V}\right)^N = 1^N = 1.$$

w_n эҳтимоликни билган ҳолда, ν ҳажмдаги молекулаларнинг ўртача сонини топиш мумкин:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n w_n. \quad (\text{IV.4})$$

(IV.3) ифодадаги $\frac{\nu}{V}$ ни p орқали белгилаймиз, (IV.4) ни ошкор ҳолда ёзамиз:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^N n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= Np \sum_{n=0}^N \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n} \end{aligned}$$

Энди

$$n-1 = n', \quad N-1 = N'$$

деб белгилаб ва

$$N' - n' = [(N-1) - (n-1)] = N - n$$

эканлигини эътиборга олиб,

$$\bar{n} = Np \sum_{n'=0}^{N'} \frac{N'!}{n'!(N'-n')!} p^{n'} (1-p)^{N'-n'}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Лекин бином формуласи бўйича йинди $(p + 1 - p)^{N'}$ га тенг, яъни яна 1 га тенг. Демак,

$$\bar{n} = Np = N \frac{\nu}{V}. \quad (\text{IV.5})$$

Бу ифода ν ҳажмдаги молекулалар ўртача сони, кутилиши лозим бўлганидек, молекулалар бутун V ҳажм бўйича текис тақсимланганида ν ҳажмга тўғри келадиган молекулалар сонига тенгдир.

Энди n квадратининг ўрта қийматини, яъни \bar{n}^2 ни ҳисоблаймиз:

$$\bar{n}^2 = \sum_{n=0}^N n^2 w_n.$$

n^2 ни $n(n-1) + n$ билан алмаштирамиз ва қуйидагини ёзамиз:

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= \sum_{n=0}^N [n(n-1) + n] \omega_n = \sum_{n=0}^N n \omega_n + \sum_{n=0}^N n(n-1) \omega_n = \\ &= \bar{n} + \sum_{n=0}^N n(n-1) \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= \bar{n} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(n-2)!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= \bar{n} + N(N-1) p^2 \sum_{n=0}^N \frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!} p^{n-2} (1-p)^{N-n}. \end{aligned}$$

Йиғиндида

$$N-2 = N'', \quad n-2 = n''$$

деб оламиз ва

$$N'' - n'' = [(N-2) - (n-2)] = N - n$$

эканини кўрамиз. Бу алмаштиришдан сўнг, бином формуласига кўра йиғиндининг $(p+1-p)^{N''}$ га, яъни 1 га тенг эканлиги яққол маълум бўлади, шунинг учун

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= \bar{n} + N(N-1) p^2 = \bar{n} + (Np)^2 - Np^2 = \\ &= \bar{n} + (\bar{n})^2 - \bar{n}p = (\bar{n})^2 + \bar{n}(1-p). \end{aligned} \quad (IV.6)$$

Квадратик флуктуация таърифига кўра:

$$(\Delta n)^2 = (\bar{n}_k - \bar{n})^2.$$

Квадратга ошириб ва ўрталаштириб, қуйидагини топамиз:

$$(\overline{\Delta n})^2 = \overline{n_k^2} - 2\bar{n}_k \bar{n} + (\bar{n})^2 = \bar{n}^2 - (\bar{n})^2. \quad (IV.7)$$

\bar{n}^2 нинг (IV.6) ифодасини келтириб қўйсақ,

$$\bar{n}^2 - (\bar{n})^2 = \bar{n} - \bar{n}p$$

оламиз, шунинг учун

$$(\overline{\Delta n})^2 = \bar{n} - \bar{n}p. \quad (IV.8)$$

Агар v ҳажм V нинг кичик қисми бўлса, у ҳолда $p = v/V$ кичик сондир. Бу ҳолда (IV.8) да иккинчи ҳадни ташлаб юборса ҳам бўлади ва биз қидирилган формулани топамиз:

$$(\overline{\Delta n})^2 = \bar{n}. \quad (IV.9)$$

Бу формула фақат газ молекулалари сони флуктуациясигагина эмас, балки ҳар қандай флуктуацияларга ҳам қўлланилишлиги ўз-ўзидан тушуварли. Унинг маъноси текстда 377-бетда тушунтирилган.

2. Энергиянинг квадратик флуктуацияси учун (116.5) (378-бетга қаранг)

$$\overline{\epsilon^2} = kT^2 \frac{dE}{dT} \quad (116.5)$$

формула қуйидагича чиқарилади. Даставвал, (IV.7) га асосан:

$$\overline{\epsilon^2} = \overline{E^2} - (\overline{E})^2. \quad (IV.10)$$

\bar{E} нинг ўрта қийматини ҳисоблаш учун Гиббснинг каноник тақсимотидан фойдаланамиз*:

$$\bar{E} = \frac{\int E(p, q) e^{-E(p, q)/kT} d\tau}{\int e^{-E(p, q)/kT} d\tau}, \quad (\text{IV.11})$$

* бунда $d\tau$ — *фазавий* фазонинг ҳажм элементи. (IV.11) ни T бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{E}}{dT} &= \frac{\frac{1}{kT^2} \int E^2 e^{-E/kT} d\tau \int e^{-E/kT} d\tau - \frac{1}{kT^2} \left[\int E e^{-E/kT} d\tau \right]^2}{\left[\int e^{-E/kT} d\tau \right]^2} = \\ &= \frac{1}{kT^2} \int \frac{E^2 e^{-E/kT} d\tau}{e^{-E/kT} d\tau} - \frac{1}{kT^2} \left\{ \int \frac{E e^{-E/kT} d\tau}{e^{-E/kT} d\tau} \right\}^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Энди

$$\frac{\int E^2 e^{-E/kT} d\tau}{\int e^{-E/kT} d\tau} = \bar{E}^2$$

булишини эътиборга олсак, (IV.12) қуйидагини беради:

$$kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT} = \bar{E}^2 - (\bar{E})^2,$$

шунинг учун (IV.10) га асосан:

$$\bar{\epsilon}^2 = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT}.$$

Мана шунини исботлаш талаб қилинган эди.

V. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ПОТЕНЦИАЛ ЎРАДАГИ ЗАРРАЧА

156-§ да деворлари чексиз баланд бўлган туғри бурчакли потенциал яшикдаги заррача туғрисидаги масалани қараб чиққан эдик. Чегаравий шартларни қўлланиш йўли билан

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

энергиянинг дискрет сатҳлари системаси бирданига олинишини кўрган эдик. Энди заррача 252-расмда тасвирланган майдонда жойлашган бўлсин. Бу майдонни ҳам деворлари чекли баландликка эга бўлган потенциал ўра ёки потенциал яшик дейиш мумкин. Заррачанинг тула энергияси E яшик баландлиги U_0 дан кичик бўлган ҳолни қараймиз (252-расмга қаранг):

$$E < U_0. \quad (\text{V.1})$$

* Қуйидаги китобга қаранг: В. Г. Левич, Введение в статистическую физику, Гостехиздат, 1950, V боб.

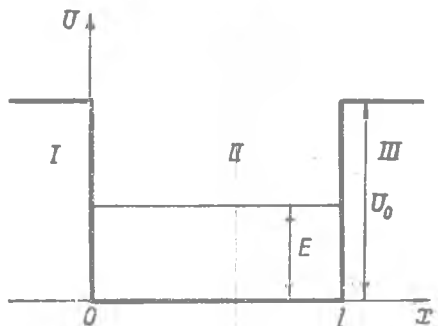
154- § дагидек, бутун майдонни уч соҳага ажратамиз:

$$\begin{array}{lll} I \text{ соҳа} & x \leq 0 & U = U_0 = \text{const}, \\ II \text{ " } & 0 \leq x \leq l & U = 0, \\ III \text{ " } & x \geq l & U = U_0 = \text{const}. \end{array}$$

Белгилашлар киритамиз:

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U_0)}, \quad (V.2)$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}. \quad (V.3)$$



252- расм.

(V.1) шартга кўра, k_1 соф мавҳум миқдордир:

$$k_1 = ik,$$

бунда

$$k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (V.4)$$

Бу белгилашлар ёрдамида Шрёдингер тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$I \text{ ва } III \text{ соҳалар учун } \frac{d^2\psi_{I, III}}{dx^2} - k^2\psi_{I, III} = 0, \quad (V.5)$$

$$II \text{ соҳа учун } \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + k_2^2\psi_{II} = 0. \quad (V.6)$$

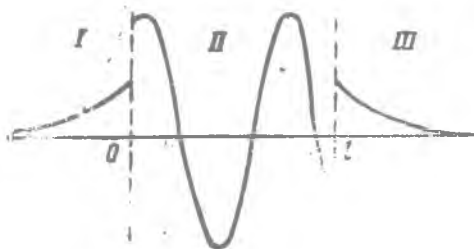
(V.5) тенгламанинг ечимлари $e^{\pm kx}$ бўлади, лекин I соҳада e^{-kx} ечим яроқсиздир, чунки $x \rightarrow -\infty$ да у чексиз ортади; III соҳада эса e^{kx} ечим яроқсиздир, чунки $x \rightarrow \infty$ да у чексиз ортади.

Демак,

$$\left. \begin{array}{l} \psi_I = e^{kx} \\ \psi_{II} = b_1 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, \\ \psi_{III} = c e^{-kx} \end{array} \right\} \quad (x < 0), \quad (V.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_I = e^{kx} \\ \psi_{II} = b_1 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, \\ \psi_{III} = c e^{-kx} \end{array} \right\} \quad (x > 0).$$

ψ нинг бу учта қиймати, умуман айтганда, соҳалар чегарала-рида туташмайди (масалан, 253-расми қаранг). Ваҳолонки, заррачанинг ҳолатини *бутун фазода* узлуксиз ва силлиқ эгри чизиқ тарзида тасвирланадиган ψ функция тавсифлаши керак (ψ ва унинг биринчи ҳосиласи узлуксизлиги). Бу талабнинг



253- расм

қаноатлантирилиши учун учала бўлакнинг соҳалар чегарала-рида узлуксиз ва силлиқ туташishi шартларини топиш керак, яъни қуйидаги шартлардан фойдаланиш керак (154-§ га қа-ранг):

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0}, \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \quad (V.8)$$

$$(\psi_{II})_{x=l} = (\psi_{III})_{x=l}, \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=l} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=l}. \quad (V.9)$$

(V.8) шартлар қуйидагини беради:

$$1 = b_1 + b_2, \quad k = ik_2 b_1 - ik_2 b_2,$$

бу тенгламалардан b_2 ни топамиз:

$$b_2 = -\frac{k - ik_2}{k + ik_2} b_1. \quad (V.10)$$

Равшанки, b_2 ва b_1 коэффициентлар орасидаги бундай муно-сабат бутун чизиқ давомида, шу билан бирга, II ва III соҳа-лар чегарасида ҳам ўринли бўлади. Бу чегара учун (V.9) шарт-лар қуйидагиларни беради:

$$b_1 e^{ik_2 l} + b_2 e^{-ik_2 l} = c e^{-kl}, \\ ik_2 b_1 e^{ik_2 l} - ik_2 b_2 e^{-ik_2 l} = -k c e^{-kl}.$$

Бу муносабатлардан c ни йўқотиб, b_2 ни топамиз:

$$b_2 = -\frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{2ik_2 l} b_1. \quad (V.11)$$

(V.10) ва (V.11) шартларнинг бир вақтда бажарилиши учун

$$\frac{k - ik_2}{k + ik_2} = \frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{2ik_2 l},$$

ёки, бошқача ёзганда,

$$\frac{k - ik_2}{k + ik_2} e^{-ik_2 l} = \frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{ik_2 l} \quad (\text{V.12})$$

ўринли бўлиши зарурлиги равшан. Бундан қуйидагини осонгина оламиз:

$$(k^2 - k_2^2) \sin k_2 l = -2kk_2 \cos k_2 l$$

ёки

$$\operatorname{tg} k_2 l = -\frac{2kk_2}{k^2 - k_2^2}, \quad (\text{V.13})$$

ёки, ниҳоят, ошкор кўринишда

$$\operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \right) l = -\frac{2\sqrt{E(U_0 - E)}}{U_0 - 2E} \quad (\text{V.14})$$

Бу муносабатда турли қийматларни олиши мумкин бўлган ягона параметр E дир. E нинг (V.14) тенгламадан аниқланган қийматларида ψ функция бутун фазода узлуксизлик ва силлиқлик шартларини қаноатлантиради. Бу тенглама трансцендент тенгламадир. Унинг ечимини, масалан, график усулда (V.14) нинг ўнг ва чап томонининг E га боғланишини тасвирлайдиган чизиқлар яшаш йўли билан топиш мумкин. Бу чизиқларнинг кесишиш нуқталари E нинг изланган қийматларини беради. Бу қийматларнинг, кўришиб туришича, *дискрет* тўплам ташкил қилишлиги биз учун муҳимдир. Бундан, чекли баландликка эга бўлган деворли яшик ҳолида ҳам заррача энергиясининг квантланиши сифат жиҳатдан келиб чиқади.

Бу энергия сатҳларининг характери ва уларнинг чексиз баланд деворли яшикдаги заррача энергия сатҳлари билан боғланиши ҳақида тасаввур ҳосил қилиш учун, $U_0 \gg E$ ҳолни, яъни деворнинг баландлиги етарлича катта бўлгандаги пастки энергия сатҳлари тақсимотини қараб чиқамиз. Бу ҳолда (V.14) нинг ўнг томонини қуйидаги кўринишда (ёзишни қисқартириш учун чап томонга k_2 белгилаш киритиб) қайта ёзиш мумкин:

$$\operatorname{tg} k_2 l = -2 \sqrt{\frac{E}{U_0}}. \quad (\text{V.15})$$

$\operatorname{tg} k_2 l$ нинг манфий бўлишлиги ва 0 дан кам фарқ қилишлиги ($U_0 \gg E$) кўришиб турибди. Бу — тангенсининг $k_2 l$ аргументи $n\pi$ дан кам фарқ қилади, лекин $n\pi$ дан бир оз кичик демакдир. Тақрибан

$$k_2 l \approx n\pi$$

ёки, ошкор кўринишда,

$$\frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE_n} l \approx n\pi$$

деб ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$E_n \approx n^2 \frac{h^2}{8ml^2}$$

Бу — пастки энергия сатҳлари тақсимотининг чексиз баланд деворли яшикдаги заррача энергия сатҳлари тақсимотидан кам фарқ қилишлигини билдиради.

VI. ОСЦИЛЛЯТОР ХУСУСИЙ ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ ОРТОГОНАЛЛИГИ ВА НОРМАЛАНИШИ

Чизиқли осциллятор учун Шрёдингер тенгламасининг хусусий функциялари $-\infty$ дан $+\infty$ гача бўлган оралиқда ортогоналлик хоссасига эгадир, яъни:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

(ψ_n — x нинг ҳақиқий функцияси бўлганлиги учун $\psi_n^* = \psi_n$).

Бу хулосага қуйидаги тарзда осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Осциллятор учун Шрёдингер тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2) \psi = 0. \quad (158.4)$$

ψ_n функциянинг хусусий қийматларига мос келадиган λ параметрнинг хусусий қийматлари $\lambda_n = 2n + 1$ булади. Шундай қилиб,

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (2n + 1 - \alpha^2 x^2) \psi_n = 0,$$

$$\frac{d^2\psi_m}{dx^2} + (2m + 1 - \alpha^2 x^2) \psi_m = 0.$$

Бу тенгламалардан биринчисини ψ_m га, иккинчисини ψ_n га кўпайтириб, уларни аяириб ва $-\infty$ дан $+\infty$ гача интеграллаб, қуйидагини оламиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_m \frac{d^2\psi_n}{dx^2} - \psi_n \frac{d^2\psi_m}{dx^2} \right) dx = 2(m - n) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m dx.$$

Бу тенгликнинг чап томонини ушбу кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} \right) dx.$$

$$\psi_n = C_n e^{-\alpha^2 x^2 / 2} H_n(\sqrt{\alpha} x)$$

бўлганлиги учун, $|x| \rightarrow \infty$ бўлганда хусусий функцияларнинг нолга интилишини эътиборга олсак, ҳам юқори чегарани, ҳам пастки чегарани ўрнига қўйиш нолни беришлигини кўрамиз. Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

$m = n$ бўлганда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx$$

чекли сонга (ψ_n функциянинг квадратик интегралланишлиги туфайли) тенгдир ва бундан нормаловчи C_n кўпайтувчини топиш учун фойдаланиш мумкин. Умуман айтганда, C_n комплекс сондир:

$$C_n = |C_n| e^{-i\theta}.$$

Аммо, бизни *модуль* квадрати $|\psi_n|^2$ қизиқтирганлиги сабабли, $|C_n|$ модулни топиш етарлидир; фазавий кўпайтувчи ноаниқлигича қолади. Қисқалик учун $|C_n|$ ни N_n орқали белгиласак, у ҳолда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n^2}{V^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi.$$

$$(\xi = \sqrt{a} x).$$

$H_n^2(\xi)$ даги икки кўпайтувчидан бирини унинг (159.2) даги ифодаси бўйича алмаштирамиз:

$$H_n = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \quad (159.2')$$

Интегрални ушбу кўринишда ифодалаймиз:

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi) d\xi.$$

Бунда

$$dv = \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} d\xi, \quad u = H_n(\xi)$$

деб белгилаб, бўлаклаб интеграллаймиз. У ҳолда

$$v = \frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}}, \quad du = \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} d\xi$$

ва, бинобарин,

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi) d\xi = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} H_n(\xi) \right] +$$

$$+ (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} d\xi.$$

$\xi = \pm \infty$ бўлганда $e^{-\xi^2}$ ва унинг барча ҳосилалари нолга айланишлигини эътиборга олиб, полиномнинг $e^{-\xi^2}$ га кўпайтмаси-

дан иборат бўлган биринчи ҳад нолга айланишлигини кўра-
миз. Агар

$$dv = \frac{d^k e^{-\xi^2}}{d\xi^k} d\xi \text{ ва } u = \frac{d^l H_n(\xi)}{d\xi^l}$$

деб белгилаб, юқоридагига ўхшаш бўлаклар интеграллашни n
марта такрорласак ва ҳар сафар uv нинг чегараларда нолга
айланишлигини эътиборга олсак, у ҳолда натижада қуйидаги
ҳосил булади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} d\xi,$$

$H_n(\xi)$ функция n - даражали полином бўлганлиги учун, яъни

$$H_n(\xi) = 2^n \xi^n + \dots,$$

у ҳолда

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\frac{\alpha}{a}}} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Нормалаш шартига асосан:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\frac{\alpha}{a}}} 2^n n! \sqrt{\pi},$$

бундан

$$N_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Таржимонлар: Р. Сайдалиев (Сўз боши, 1-§-79-§§),
М. Турдиев (80-§-130-§§),
А. Тешабоев (131-§-162-§§).

Махсус редактор Э. Назиров

Редакторлар: М. Турдиев,
Р. Пирмухамедова,
Ғ. Обидов

Тех. редактор Э. В. Ягонцева

Корректор Ў. Йулдошева

Теришга берилди 12/XII-1968 й. Босишга рухсат
этилди 6/IV-1969 й. Қогози 60×90^{1/4} см.
Физик л. 36,5. Нашр. л. 32,77. Тиражи 10000.

Ўқитувчи* нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Шартнома 180-66. Баҳоси 92 т. Муқоваси 10 т.

Область матбуот бошқармасининг Морозов номли
босмаҳонаси, Самарқанд, Типография кўчаси, 4.
Заказ № 720. 1970 й.

Типография им. Морозова Областного управления
по печати, Самарқанд, ул. Типографская, 4.

На узбекском языке

Эдуард Владимирович Шпольский

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Том первый

Введение в атомную физику

Перевод с русского пятого издания исправленного
и дополненного, М., Физматгиз, 1963.

Издательство „Ўқитувчи“
Ташкент — 1970