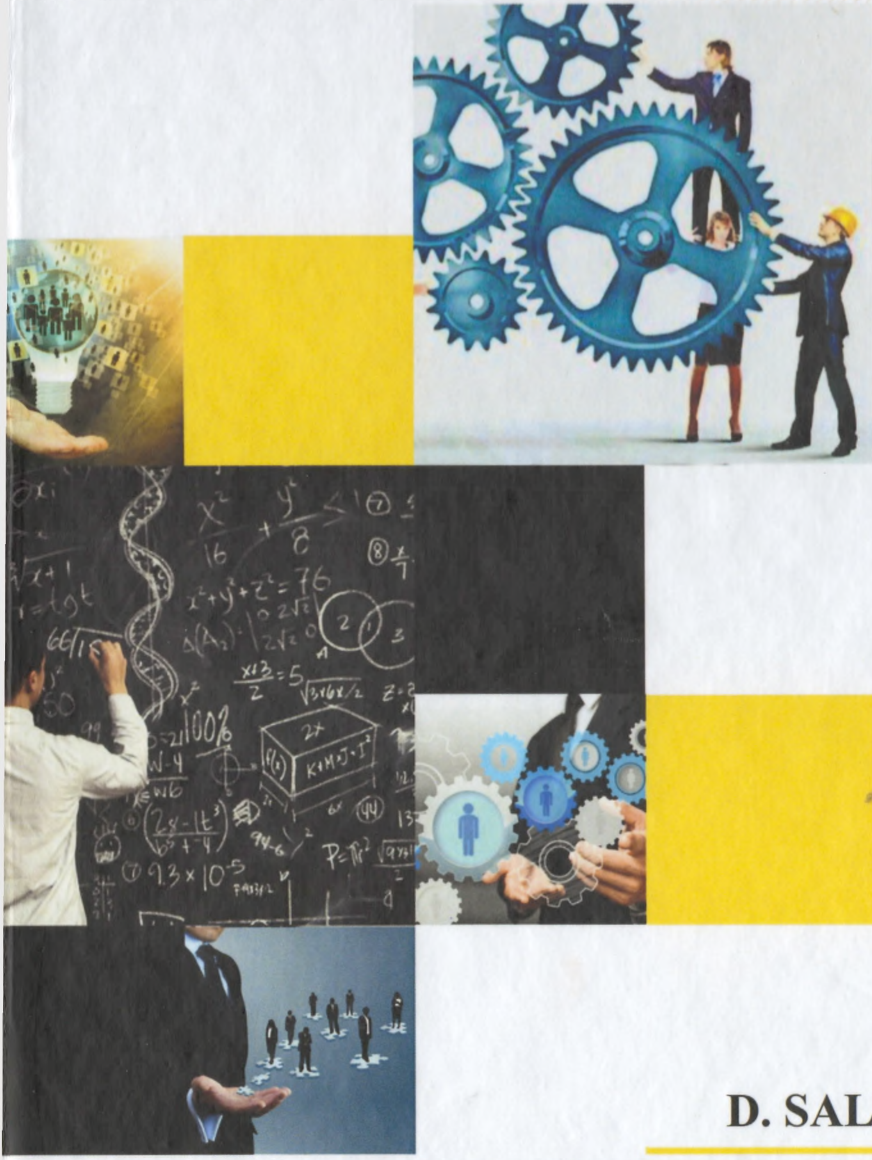


D. SALIMOV

BIZNES MATEMATIKA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

D.T. SALIMOV

BIZNES MATEMATIKA

(Kredit-modul bo'yicha)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

Bilim sohasi: 400000 – Biznes, boshqaruv va huquq

60410400 – Moliya va moliyaviy texnologiyalar

Ta'lim sohasi: 410000 – Biznes va boshqaruv

Ta'lim yo'nalishi: 60410500 – Bank ishi va audit

Toshkent – 2022

UO‘K: 330.43 (07.58)
KBK 65.012.2ya7
S 88

D.T. Salimov. Biznes matematika. (O‘quv qo‘llanma). – T.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2022. – 230 b.

ISBN 978-9943-8915-1-7

Ma’lumki, barcha iqtisodiy masalalar ko‘p variantlidir. Bozor iqtisodiyoti sharoitida mumkin bo‘lgan variantlar orasidan, tabiiy, iqtisodiy va texnologik jarayonlarga qo‘yilgan cheklovlar bajarilgan holda optimal yechimni aniqlash talab etiladi. Shu munosabat bilan iqtisodiy vaziyatlarni tahlil va sintez qilish uchun, matematik usullar sistemasi va kompyuter texnikasidan foydalanish zarurati kelib chiqadi. Bunday usullar birgalikda - matematik dasturlash deyiladi.

Ushbu o‘quv qo‘llanma matematik dasturlash va moliyaviy matematika fanlariga asoslangan.

Matematik dasturlash – bu matematikaning bir sohasi bo‘lib, bunda noma’lumlarga ma’lum bir shartlar qo‘yilganda berilgan, funksiyaning ekstremal qiymatini aniqlashdan iborat.

Moliyaviy matematika bo‘limida esa moliyaviy hisoblar asosida juda ko‘p masalalar yechilib, mustaqil yechish uchun yetarlicha masalalar keltirilgan.

Har bir bobdan so‘ng talabalarning bilim va ko‘nikmalarini mustahkamlash uchun masalalar, testlar va savollar berilgan.

UO‘K: 330.43 (07.58)
KBK 65.012.2ya7

ISBN 978-9943-8915-1-7

KIRISH

Ushbu o'quv qo'llanmaning asosiy maqsadi talabalarga matematik dasturlash va moliyaviy matematikaga oid misol va masalalarni yechishda asosiy tamoyil va formulalardan foydalanishni o'rgatishdan iborat.

Bu yo'nalishda yetarlicha kitoblar yozilgan bo'lib, matematik formulalar taqdimoti ko'pincha haddan tashqari nazariydir. Bunday holda formulalarning ko'pligi ham, misol va masalalar yechishni chalkashtirib yuboradi. Shuning uchun matematik hisob asoslari bo'yicha qo'llanma yozishda asosiy vazifa uning soddaligi bo'lishi kerak. O'quv materiallarining mavjudligi, talabalarning mustaqil ishlashi uchun zarur, lekin sirtqi bo'lim talabalari uchun bu o'quv qo'llanmalari ayniqsa dolzarbdir, chunki masofaviy ta'limda o'qituvchi bilan aloqa faqat onlayn tizimda olib boriladi. Taklif etilayotgan qo'llanmaning asosiy maqsadi nafaqat matematik dasturlash va moliyaviy matematika asoslarining qulay taqdimoti, balki ko'p masala va misollar yechishning namunalari berilganligidir. Misol va masalalar yechishning batafsil tahlili bilan birga, mustaqil yechish uchun shu kabi ko'plab misol va masalalar yechimlari bilan berilgan.

Universitetning sirtqi bo'limi o'qituvchilarining ish tajribasi shuni ko'rsatadiki, faqat misol va masalalarni yechish, talabalarda matematik modelning mohiyati va moliyaviy hisoblarni mustaqil ravishda tushunish imkonini beradi.

Qo'llanma olti bobdan iborat bo'lib, ularning har birida ko'p misol va masalalar yechilishi tahlil qilinishi bilan birga, talabalarda matematik hisoblarni o'zlashtirish ko'nikmalariga ega bo'lishlari uchun topshiriqlar, testlar, savollardan iborat bo'lgan mustaqil ta'lim bo'limi keltirilgan.

Birinchi bobda matematik dasturlashning dastlabki tushunchalari, ya'ni chiziqli dasturlash masalalari keltirilgan. Chiziqli dasturlash masalalari tahlil qilinib, masalaning optimal yechimini aniqlash usullaridan grafik va simpleks usullari ko‘rib chiqilgan.

Ikkinchi bob, chiziqli dasturlash masalalarining ikkilanganlik nazariyasi, sun’iy bazis usuli, hamda butun sonli dasturlash masalalariga bag‘ishlangan. Bunda, yuqoridagi har bir masala tahlil qilinib, ularning optimal yechimlarini aniqlash uchun mos yechish metodlari keltirilgan.

Uchinchi bobda chiziqsiz dasturlash masalalari o‘rganilib, grafik usul yordamida ikki o‘zgaruvchili masalaning optimal yechimi aniqlangan. Shu bilan birga shartsiz va shartli masalalar ham keltirilgan bo‘lib, mos ravishda Gesse matritsasi va Lagranj usuli yordamida berilgan masalalarning optimal yechimlari aniqlangan.

To‘rtinchi bob o‘yinlar nazariyasiga bag‘ishlangan bo‘lib, keyingi paytlarda bu nazariya iqtisodiy masalalarning optimal yechimlarini aniqlashga chuqur kirib bormoqda. Bunda, o‘yinlar nazariyasining asosiy tushunchalari, to‘lov matritsasi, egar nuqtasi, sof va aralash strategiyalarda masalaning optimal yechimini aniqlash usullari ko‘rsatilgan. Masalaning optimal yechimini aniqlash uchun avvalo to‘lov matritsasi soddalashtiriladi, keyin esa $2\times n, m\times 2$ o‘lchovli o‘yinlar uchun grafik usul va $m\times n$ o‘lchovli o‘yinlar uchun esa simpleks usuldan foydalaniladi.

Beshinchi bobda moliyaviy matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan oddiy, murakkab va uzluksiz foizlarning hisoblanishlari tahlil qilinadi. Ekvivalent to‘lovlar va foiz stavkalari tushunchalari hamda nominal va effektiv foiz stavkalari tushunchalari berilgan. Diskontlashning har xil turlari o‘rganilgan. Brutto stavka formulasi yordamida, inflatsiyani hisobga olgan holda real foiz stavkani hisoblash ko‘rsatilgan.

Oltinchi bobda to‘lov oqimlari bilan, uning joriy va jamg‘arma miqdorlari berilgan. To‘lov oqimlarining umumlashgan xarakteristikalari ko‘rib chiqilib, bunda oqimlarning jamg‘arma miqdori va joriy qiymati, postnumerando annuitet va jamg‘arma koeffitsiyentlari, qarzni to'lash usullari, doimiy moliyaviy annuitet postnumerando uchun to'lov muddatini aniqlash usullari keltirilgan.

O'quv qo'llanma iqtisodiy, moliyaviy yo'nalishlardagi bakalavrlar uchun mo'ljallangan bo'lib, lekin, birinchi navbatda, sirtqi ta'lim talabalari uchun atalgandir. Qo'llanmada ko'plab misol va masalalar yechib ko'rsatilgan bo'lib, har bir bobning oxirida topshiriqlar, testlar va savollar berilgan. Amaliy mashg'ulotlarni tashkil qilish uchun ham topshiriqlar yetarli. Matematik dasturlash va moliyaviy matematika bo'yicha yanada chuqur bilim olishni xohlovchilar uchun bibliografiyada tavsiya etilgan kitoblarga murojaat qilishlari mumkin.

Matematik dasturlash va moliyaviy matematika bo'yicha ko'plab kitoblar nashr etilgan (kitob oxiridagi bibliografiyaga qarang). Men bu kitoblarning mualliflariga minnatdorchilik bildiraman – ular orqali biz matematik dasturlash va moliyaviy matematika bilan yaqindan tanishdik, ushbu kitoblar materiallaridan maxsus iqtiboslarsiz keng foydalandik.

I bob. MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH

1.1. Chiziqli programmalashtirish masalasining asosiy tushunchalari

*Matematik programmalashtirishning asosiy pre*dmeti, matematik usullar yordamida, ekstremal masalalarni o'rganish va yechishdan iborat. Noma'lumlarga ma'lum bir shartlar qo'yilganda, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlarini aniqlashda, matematik programmalashtirish usullari qo'llaniladi. Ekstremal qiymatga erishadigan funksiya, berilgan masalaning *maqsad funksiyasi* deyiladi. Noma'lumlarga qo'yiladigan shartlar, ya'ni tenglama va tengsizliklar sistemasi ko'rinishidagi ifodalar, masalaning *chegaraviy shartlari* deyiladi.

Chiziqli programmalashtirish usullari bo'yicha, juda ko'p fundamental ishlar qilingan. Matematik Dj. Dansig chiziqli programmalashtirish tushunchasini hamda 1949-yili uni yechishning simpleks usul algoritmini kiritgan. Shu kabi, bu yo'nalish bo'yicha, S.Gass, S.Karlin, R.Bellman, D.Neyman, O.Morgenshtern, D.Xedli, A.Kofman kabi olimlar tadqiqot ishlari olib borishgan.

Ba'zi sodda iqtisodiy masalalarning matematik modellarini qurish.

Xomashyodan foydalanish masalasi. Aytaylik, korxona n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun, m xil xomashyo turi ishlatsin. S_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ – xomashyo turi; b_i– bu i – turdagi xomashyo zaxirasi; P_j, $j=\overline{1,n}$ – mahsulot turi; a_{ij} – j - mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarflangan, i– xomashyo miqdori; C_j– j - mahsulotning bir birligini sotishdan olinadigan foyda.

Aytaylik x_j– ishlab chiqariladigan j - mahsulot miqdori. U holda masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi. Chiziqli funksiyaning maksimal qiymatini toping.

$$L = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right)
\end{aligned}$$

Bundagi maqsad funksiya, korxonaning maksimal daromadidan iborat. Chegaraviy shartlar esa, ishlab chiqarish uchun sarflangan, har bir xomashyo miqdorining, ularning mavjud bo'lgan, umumiy miqdoridan oshmasligini ta'minlaydi.

Qorishma tayyorlash masalasi. Agar qorishma $b_i, \left(i = \overline{1, m}\right)$ birlikdan kam bo'lmagan m xil oziq moddadan iborat bo'lsa, tarkibida yuqoridagi moddalar bo'lgan, qoramollar uchun n xildagi to'yimli ozuqa tayyorlash talab etilsin. Masalaning matematik modelini tuzish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $a_{ij} \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ – j - to'yimli ozuqaning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarflangan, i– ozuqa modda miqdori; C_j– j - to'yimli ozuqaning bir birligining bahosi; x_j– kunlik ratsionga qo'shiladigan oziq modda miqdori.

Quyidagi chiziqli funksiyaning minimal qiymatini aniqlang

$$L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \\
&x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right)
\end{aligned}$$

Bundagi maqsad funksiya, kunlik ratsionga sarflangan ozuqa moddalarining bahosi. Chegaraviy shartlar esa, kunlik ratsion to'yimli bo'lishini ta'minlaydi.

Ta'rif. Chiziqli programmalashtirish – bu matematik programmalashtirishning bir sohasi bo'lib, chekli sondagi noma'lumlarga ma'lum bir chiziqli shartlar qo'yilganda, berilgan chiziqli funksiyaning ekstremal qiymatini aniqlash usullarini o'rganadi.

Bu berilgan chiziqli funksiya, *maqsad funksiya*, iqtisodiy masala talabidan kelib chiqib, noma'lumlar orasidagi miqdoriy munosabatlar, ya'ni tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasi, *chegaraviy shartlar* deyiladi.

Ta'rif. Chiziqli maqsad funksiya va noma'lumlarga qo'yilgan chiziqli chegaraviy shartlar birgalikda, *chiziqli programmalashtirishning matematik modeli* deyiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasining qo'yilishi.

Chiziqli funksiya $L(\overline{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \to \max$ va chiziqli chegaraviy shartlar berilgan

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ &x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Bunda, a_{ij}, b_i va C_j – berilgan o'zgarmas sonlar.

Manfiy bo'lmagan $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (1.1) chegaraviy shartlarni qanoatlantirib, chiziqli funksiyaga maximal qiymat bersin.

Qayd etib o'tganimizdek, (1.1) chegaraviy shartlardagi barcha $b_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ manfiy emas. (1.1)dagi chegaraviy shartlar, chiziqli hamda chiziqsiz bo'lishi mumkin.

Chegaraviy shartlar, tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasi ko'rinishida beriladi.

Agar (1.1) chegaraviy shartlar, tenglamalar ko'rinishida va noma'lumlari manfiy bo'lmasa, berilgan model *kanonik* shaklda berilgan deyiladi. Chegaraviy shartlardan hech bo'lmasa bittasi, tengsizlik ko'rinishida bo'lsa, berilgan model *kanonik bo'lmagan* shaklda berilgan deyiladi.

Asosiy ta'riflar. $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ qiymatlar, n ta chiziqli tenglamalar sistemasining *yechimi* deyiladi, agar $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ lar, har bir tenglamaga qo'yilgandan so'ng, ular sonli ayniyatga aylansa.

Ta'rif. Sistema yechimining barcha ozod o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, bu *bazis* yechim deyiladi.

Ta'rif. Manfiy bo'lmagan bazis yechimlar – *tayanch yechimlar* deyiladi.

Ta'rif. n o'lchovli fazoda, (1.1) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tartiblangan sonlar to'plami, chiziqli programmalashtirish masalasining *mumkin bo'lgan yechimlari* deyiladi. Chiziqli programmalashtirish masalasining *mumkin bo'lgan yechimlar* to'plami, uning *mumkin bo'lgan yechimlar sohasi* deyiladi.

Ta'rif. Maqsad funksiya o'zining ekstremal qiymatiga erishadigan mumkin bo'lgan yechim, uning *optimal yechimi* deyiladi va $\bar{x}_{onm}$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. Tayanch yechim xosmas deyiladi, agar uning noldan farqli koordinatalari, sistemaning rangiga teng bo'lsa, aksincha esa xos tayanch yechim deb ataladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasi yozilishining vektor shakli. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0, \quad X \geq 0$$

chiziqli funksiyani minimallashtiring:

$$L = CX,$$

Bunda, $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$; $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$; CX – skalyar ko'paytma; ozod hadlar va noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlar vektorlardan iborat:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad ... \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Chiziqli programmalashtirish masalasi yozilishining matritsa shakli. Quyidagi chegaraviy shartlarda:

$$AX = A_0 \quad X \geq 0$$

chiziqli funksiyani minimallashtiring

$$L = CX,$$

Bunda, $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – satrli matritsa; $A = (a_{ij})$ – sistema matritsasi;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \text{– ustunli matritsa.}$$

Chiziqli programmalashtirish masalasi yozilishining yig'indi belgilari shaklidagi ko'rinishi. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i, \; x_j \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

chiziqli funksiyani minimallashtiring:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j .$$

Chiziqli programmalashtirish masalasining ba'zi teoremalari.

Teorema (*chiziqli tengsizlikni, chiziqli tenglamaga almashtirish*).

Tengsizlikning

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b \qquad (1.2)$$

har bir yechimiga, $x_{n+1} \geq 0$ bo'lganda, ushbu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b \qquad (1.3)$$

tenglamaning $\bar{y} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ yagona yechimi mos keladi va aksincha.

Isbot. (1.2) tengsizlikning yechimi, $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bo'lsin. U holda quyidagi sonli tengsizlik o'rinli

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq b .$$

Belgilash kiritamiz: $\alpha_{n+1} = b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n)$.

U holda

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b$$

Bunda, $\alpha_{n+1} \geq 0$. Bu degani , $\bar{y} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ (1.3) tenglamaning ildizi bo'lib, $x_{n+1} \geq 0$ ni qanoatlantiradi.

Demak, agar chegaraviy shartlar sistemasida tengsizliklar bo'lsa (bunday holda chiziqli programmalashtirish masalasi *standart* shaklda berilgan deyiladi), u holda har bir tengsizlikka, qo'shimcha o'zgaruvchi kiritib, tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin. Qo'shimcha o'zgaruvchilarni *muvozanat o'zgaruvchilar* ham deyiladi.

Mana shundan, kanonik bo'lmagan chiziqli programmalashtirish masalasidan, kanonik shaklga o'tish qoidasi kelib chiqadi. Masala kanonik shaklga o'tishi uchun, har bir tengsizlikka muvozanat o'zgaruvchilar kiritiladi. Agar tengsizlikning belgisi $\leq$ bo'lsa, muvozanat o'zgaruvchi tengsizlikka musbat ishora bilan, tengsizlikning belgisi $\geq$ bo'lsa, manfiy ishora bilan kiritiladi. Maqsad funksiyaga muvozanat o'zgaruvchilar kiritilmaydi.

Teorema (chegaralangan sohadagi, maqsad funksiya ekstremumi). Agar chiziqli programmalashtirish masalasidagi, berilgan chegaraviy shartlar sistemasining, mumkin bo'lgan yechimlar sohasi, yopiq va chekli bo'lsa, bu tayanch yechimlar orasidan hech bo'lmaganda bittasi, berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Teorema (chegaralanmagan sohadagi, maqsad funksiya ekstremumi). Agar mumkin bo'lgan yechimlar sohasi chegaralanmagan bo'lsa, optimal yechim mavjud bo'lishining zarur va yetarli sharti, maksimum masalada maqsad funksiya yuqoridan chegaralangan, yoki minimum masalada esa quyidan chegaralangan bo'ladi.

Agar teoremalar sharti bajarilmasa, maqsad funksiya, mumkin bo'lgan yechimlar sohasida chegaralanmagan bo'ladi.

Misol. Chiziqli programmalashtirish masalasini standart shaklga keltiring:

$$
\begin{aligned}
&L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \min \\
&3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
&x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\
&2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10 \\
&x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)
\end{aligned}
$$

Yechish. Birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlarni tengsizliklarga o'tkazamiz. Birinchi chegaraviy shartdan x_4 ni topib, ikkinchi chegaraviy shartga qo'yib, soddalashtirgandan so'ng quyidagini hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
&x_4 = 2 - 3x_1 - x_2 + x_3 \\
&-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\
&2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10 \\
&x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)
\end{aligned}
$$

Ikkinchi chegaraviy shartdan x_3 ni topib, 1- va 3-shartlarga qo'yamiz:

$$
\begin{aligned}
&x_4 = -2 - 5x_1 + 2x_2 \\
&x_3 = -4 - 2x_1 + 3x_2 \\
&8x_1 - 10x_2 \le -2 \\
&x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)
\end{aligned}
$$

Masala shartiga asosan x_3 va x_4 o'zgaruvchilar, masala shartiga asosan manfiy emasligidan, ularga teng bo'lgan ifodalar ham, manfiy emasdir. Bu ifodalarni maqsad funksiyasiga qo'yamiz. Birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlardan x_3 va x_4 larni tashlab yuborib, ba'zi almashtirishlardan so'ng, matematik modelning standart shaklini hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
&L(\bar{x}) = -11x_1 + 7x_2 - 2 \to \min \\
&-5x_1 + 2x_2 \ge 2 \\
&-2x_1 + 3x_2 \ge 4 \\
&-8x_1 + 10x_2 \ge 2 \\
&x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,2}\right)
\end{aligned}
$$

Misol. Chegaraviy shartlar sistemasini kanonik shaklga keltiring:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 4x_2 - 2x_3 \ge 2 \\
&-2x_2 + 3x_3 - 2x_5 \le 6 \\
&2x_2 - 5x_4 \ge 11 \\
&x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)
\end{aligned}
$$

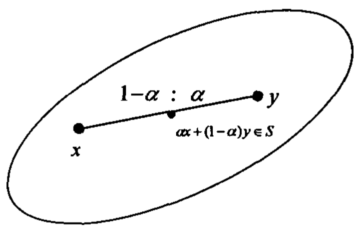
Yechish. Chegaraviy shartlar sistemasini kanonik shaklga keltirish uchun yangi manfiy bo‘lmagan x_6, x_7, x_8 noma’lumlarni kiritamiz. Birinchi tengsizlikka x_6 ni, ikkinchi tengsizlikka x_7 ni, uchinchi tengsizlikka x_8 ni kiritib, quyidagi kanonik shaklni hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_6 = 2 \\
&-2x_2 + 3x_3 - 2x_5 + x_7 = 6 \\
&2x_2 - 5x_4 - x_8 = 11 \\
&x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,8}\right)
\end{aligned}
$$

Qavariq to‘plam va uning xossalari. $S \subseteq E^n$ to‘plam *qavariq* deyiladi, agar ixtiyoriy ikkita $x, y \in S$ nuqtalar uchun, ixtiyoriy $\alpha \in [0,1]$ son uchun quyidagi munosabat bajarilsa:

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in S.$$

Geometrik ma’nosi: to‘plamga x, y nuqtalar bilan birga, ularni tutashtiruvchi $[x, y]$ kesma ham shu to‘plamga tegishli bo‘lishi kerak (1.1-rasm). Qayd etib o‘tamizki, $\alpha x + (1-\alpha) y \in S$ kesma, $x, y \in S$ nuqtalarning kombinatsiyasidan iborat.



1.1-rasm.

Nuqtalar to'plami *qavariq* deyiladi, agar uning ixtiyoriy ikki nuqtasi bilan birga ularning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasini ham o'zida saqlasa.

To'plamning nuqtasi *chegaraviy* deyiladi, agar markazi shu nuqtada bo'lgan ixtiyoriy shar, shu to'plamga tegishli va tegishli bo'lmagan nuqtalarni saqlasa. To'plamning chegaraviy nuqtalari uning *chegarasini* tashkil etadi. To'plam *yopiq* deyiladi, agar uning barcha chegaraviy nuqtalari, unga tegishli bo'lsa. Ikki to'plamning *kesishmasi* to'plam bo'lib, bu to'plamlarning umumiy qismidan iborat.

Nuqtalar, qavariq to'plamning *burchak nuqtalari* deyiladi, agar ularning ixtiyoriy ikkita nuqtalari qavariq chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lmasa. Masalan, uchburchakda uning uchlari burchak nuqtalari bo'ladi, doiraning burchak nuqtalari esa, uni chegaralovchi aylana nuqtalaridan iborat.

Tekislikda, chekli sondagi burchak nuqtalari bo'lgan, qavariq, yopiq chegaralangan to'plam, *qavariq ko'pburchak* deyiladi. Ko'pburchakning burchak nuqtalari uning *uchlari*, ixtiyoriy ikkita uchini tutashtiruvchi kesma esa ko'pburchakning *tomonlari* deyiladi. Agar to'g'ri chiziq, ko'pburchakning bir tomonida yotib, hech bo'lmaganda bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu to'g'ri chiziq *tayanch* to'g'ri chiziq deyiladi.

Uch o'lchovli fazoda, chekli sondagi burchak nuqtalari bo'lgan, qavariq, yopiq chegaralangan to'plam, *qavariq ko'pyoq* deyiladi. Ko'pyoqning burchak nuqtalari uning *uchlari*, ixtiyoriy ikkita uchini tutashtiruvchi kesma esa ko'pyoqning *tomonlari* deyiladi. Agar tekislik, ko'pyoqning bir tomonida yotib, hech bo'lmaganda bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu tekislik *tayanch* tekislik deyiladi.

1.2. Grafik usul

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish, bu uning yechimlarini ikki o'lchovli fazoda geometrik tasvirlashdan iborat.

Chegaraviy shartlari tengsizliklar ko‘rinishida berilgan, chiziqli programmalashtirish masalasini ko‘rib chiqamiz.

Chiziqli funksiyaning maksimal qiymatini aniqlang:

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1.4)$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right) \qquad (1.6)$$

(1.5) va (1.6) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tartiblangan sonlar to‘plami, *tayanch yechim* deyiladi. Agar (1.5) tengsizliklar sistemasi (1.6) shartda, hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsa, u birgalikda, aksincha esa birgalikda emas deb yuritiladi.

x_1Ox_2 tekislikda chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo‘lsin, maqsad funksiya

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ &x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, 2}\right) \end{aligned}$$

Sistemadagi har bir tengsizlikning geometrik ma’nosi, tekislikdagi chegarasi to‘g‘ri chiziqdan $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right)$ iborat bo‘lgan, yarim tekislikni aniqlaydi. Noma’lumlarning manfiy bo‘lmaslik sharti, $x_j \ge 0, \ (j = 1,2)$ chegaraviy shart bilan aniqlanadi. Sistema birgalikda, shuning uchun yarim tekisliklar kesishib, ularning umumiy kesishgan sohasi, nuqtalarining koordinatalari berilgan sistemaning yechimlaridan iborat, qavariq ko‘pburchak bo‘ladi. Bu nuqtalar (yechimlar) to'plami, *yechimlar ko'pburchagi* deyilib, u nuqta, nur, kesma, ko'pburchak, chegaralanmagan ko'pburchakli soha bo'lishi mumkin.

Agar sistemadagi (1.5), (1.6) chegaraviy shartlarda $n=3$ bo'lsa, u holda har bir tengsizlikning geometrik ma'nosi, uch o'lchovli fazodagi yarim tekislikdan iborat bo'lib, chegaraviy tekislik $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ formula, yarim fazoning manfiy bo'lmaslik shartlari, mos ravishda chegaraviy tekisliklar $x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,3}\right)$ orqali aniqlanadi. Agar sistema birgalikda bo'lsa, u holda bu yarim fazolar kesishib, ularning umumiy kesishgan sohasi, *ko'pyoqli yechim* deyiladi. Ko'pyoqli yechim, nuqta, nur, kesma, ko'pburchak, ko'pyoq, ko'pyoq chegaralanmagan ko'pburchakli soha bo'lishi mumkin.

Bulardan kelib chiqib, chiziqli programmalashtirish masalasini geometrik talqini shundan iboratki, bunda ko'pyoqli yechimlardan shunday birini tanlash kerakki, uning koordinatalari, chiziqli funksiyaga minimal qiymat bersin. Bunda, masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi deganda, ko'pyoqli yechimning barcha nuqtalari tushuniladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usul bilan yechishda, maqsad funksiyaning ekstremal qiymatini topish uchun, x_1Ox_2 tekislikdagi, $gradL$ vektordan foydalaniladi. U $\overline{N}$ deb belgilanadi.

Bu vektor maqsad funksiyaning tez o'sish yo'nalishini ko'rsatib, u quyidagiga teng:

$$gradL = \overline{N} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\overline{e}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\overline{e}_2$$

Bunda $\overline{e_1}$ va $\overline{e_2}$ – mos ravishda Ox_1 va Ox_2 o'qlardagi birlik vektorlar Demak, $\overline{N} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}\right)$. $\overline{N}$ vektorning koordinatalari, $L(\overline{x})$ maqsad funksiya noma'lumlari oldidagi koeffisiyentlardan iborat ekan.

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish algoritmi

1. Masalaning chegaraviy shartlaridan, uning mumkin bo'lgan

yechimlar sohasi aniqlanadi.

2. $\overline{N}$ vektorni quramiz.

3. $\overline{N}$ vektorga perpendikular bo'lgan, L_0 sath chizig'i o'tkaziladi.

4. Maksimum masalada, sath chizig'i $\overline{N}$ vektor yo'nalishi bo'yicha, minimum masalada esa $\overline{N}$ vektor yo'nalishiga qarama-qarshi suriladi. Bu surish, sath chizig'i bilan mumkin bo'lgan yechimlar sohasining yagona umumiy nuqtasi hosil bo'lguncha, davom ettiriladi. Bu nuqta, mumkin bo'lgan yechimlar sohasida, maqsad funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'ladi, ya'ni chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimidir.

5. Maqsad funksiyaning qiymatini, ekstremum nuqtalarning koordinatalari orqali aniqlaymiz.

Agar sath chizig'i, mumkin bo'lgan yechimlar sohasining biror tomoniga parallel bo'lsa, u holda chiziqli programmalashtirish masalasi cheksiz yechimlar sohasiga ega.

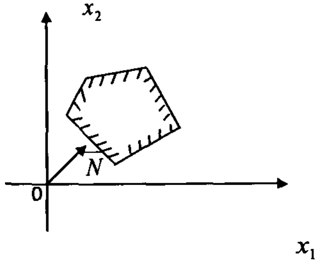
Agar mumkin bo'lgan yechimlar sohasi, cheksiz soha bo'lsa, maqsad funksiya chegaralanmagan bo'ladi.

Mumkin bo'lgan yechimlar sohasining chegaraviy shartlari qarama-qarshi bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalasi yechimga ega emas.

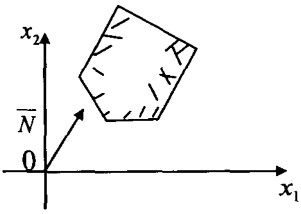
Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini aniqlashda quyidagi vaziyatlar bo'lishi mumkin:

- masala yagona yechimga ega (1.2-rasm);
- masala cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega (1.3-rasm);
- L funksiya yuqoridan chegaralangan emas, ya'ni L ekstremal qiymatga ega emas (1.4-rasm);

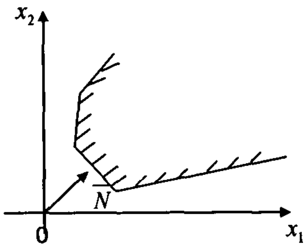
masalaning chegaraviy shartlari birgalikda emas, ya'ni mumkin bo'lgan yechimlar sohasi bo'sh to'plamdan iborat (1.5-rasm).



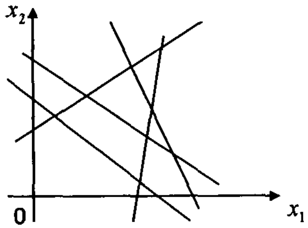
1.2- rasm.



1.3- rasm.



1.4- rasm.



1.5- rasm.

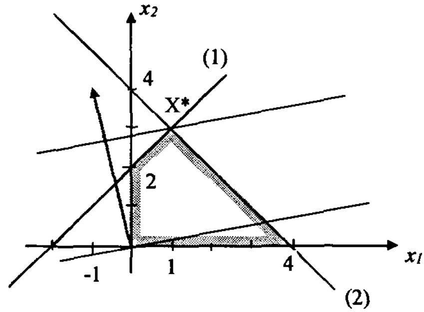
Misol. Chiziqli programmalashtirish masalasini yeching.

$$L(\bar{x}) = -6 - x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 4, & (2) \\ x_1 \geq 0, (3) \quad x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Yechish. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasini quramiz (1.6-rasm). Masalaning chegaraviy shartlarini nomerlaymiz. Dekart koordinatalar sistemasida (1) chegaraviy shartga asosan $x_1 - x_2 = -2$ to'g'ri chiziqni quramiz. Bu to'g'ri chiziq tekislikni, ikkita yarim tekislikka bo'ladi. Bulardan qaysi biri qidirilayotgan yarim tekislik ekanligini aniqlaymiz. Bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tmaganligi uchun, $O(0,0)$ nuqtaning koordinatalarini (1) chegaraviy shartga qo'yib $0-0 \geq -2$, to'g'ri tengsizlik $0>2$ ni hosil qilamiz. Demak, O nuqta, qidirilayotgan yarim tekislikka tegishli ekan.

Shu kabi, (2) – (4) to'g'ri chiziqlarni quramiz.



1.6-rasm

Gradiyent $\overrightarrow{grad L} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ topdik, gradientga perpendikular bo'lgan funksiyaning sath chizig'ini o'tkazdik, uni o'ziga parallel ravishda, $gradL$ yo'nalishi bo'yicha siljitamiz. Bu to'g'ri chiziq, mumkin bo'lgan yechimlar sohasi (1) va (2) tengsizliklarga mos bo'lgan, to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan X^* o'tadi. Quyidagi sistemani yechib, X^* nuqtaning koordinatalarini topamiz:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

$X^*(1,3)$ hosil qildik. Bundan esa maqsad funksiyaning qiymati kelib chiqadi $L(X^*) = -6 - 1 + 4 \cdot 3 = 5$. Demak, $\max L(1;3) = 5$.

Chiziqli programmalashtirish masalasi doimo matematik model ko'rinishida berilmaydi.

Mahsulot ishlab chiqarishning optimal rejasini aniqlaymiz.

Masala. Kompaniya ikki turdagi muzqaymoq ishlab chiqaradi: qaymoqli va shokoladli. Muzqaymoq ishlab chiqarish uchun ikkita mahsulotdan foydalaniladi: sut va uning to'ldiruvchilari. Sutka davomida 1 kg muzqaymoq uchun sarflangan mahsulotlar va ularning zaxirasi ushbu jadvalda berilgan.

Boshlang'ich mahsulot	1 kg muzqaymoq uchun sarflangan mahsulotlar		Zaxira, kg
	qaymoqli	shokoladli	
Sut	0,8	0,5	400
To'ldiruvchilari	0,4	0,8	365

Bozor talabini o'rganish shuni ko'rsatdiki, qaymoqli muzqaymoqqa bo'lgan kundalik talab, shokoladli muzqaymoqqa nisbatan 100 kg dan ortiq emas. Bundan tashqari, shokoladli muzqaymoqqa bo'lgan bir sutkalik talab 350 kg dan oshmaydi. 1 kg qaymoqli muzqaymoqning narxi 16 so'm, shokoladli muzqaymoqning narxi esa 14 so'm.

Kompaniyaning mahsulot sotishdan tushgan daromadining maksimal bo'lishi uchun, har bir muzqaymoq turidan qancha miqdorda ishlab chiqarish zarur.

Yechish. x_1 – kundalik ishlab chiqarilgan qaymoqli muzqaymoq hajmi (kg); x_2 – kundalik ishlab chiqarilgan shokoladli muzqaymoq hajmi (kg). Masalaning matematik modelini tuzamiz.

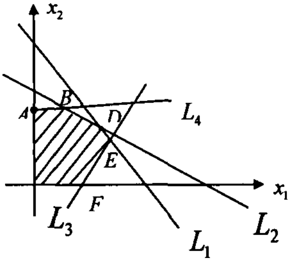
Maqsad funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$L(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 \le 400, & (L_1) \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 \le 365, & (L_2) \\ x_1 - x_2 \le 350, & (L_3) \\ x_2 \le 350, & (L_4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Masalani grafik usul bilan yechamiz. Avvalo (1)-(4) tengsizliklardan foydalanib, masalaning, mumkin bo'lgan yechimlar sohasini (*OABDEF* ko'pburchak, 1.7 rasm) aniqlaymiz.



1.7-rasm.

Normal vektor $\overline{N}=(16,14)$ quramiz. Sath chizig‘ining L_0 tenglamasi

$16x_1+14x_2=const$.

Sath chizig‘ini $\overline{N}$ vektor yo‘nalishi bo‘yicha suramiz. L_0 ning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasidan chiqib ketish nuqtasi D bo‘lib, uning koordinatalari quyidagi tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat:

$$0,8x_1+0,5x_2=400,$$
$$0,4x_1+0,8x_2=365$$

Sistemani yechib, $D(312{,}5;300)$ ni topamiz. D nuqta masalaning optimal yechimini aniqlaydi, ya’ni $\bar{x}_{onm}=(312{,}5;\,300)$, bundan esa

$L_{\max}(\bar{x})=16\cdot 312{,}5+14\cdot 300=9200$ (sum).

Demak, mahsulotni sotishdan olingan maksimal daromad sutkasiga 9200 so‘m bo‘lib, bunda 312.5 kg qaymoqli va 300 kg shokoladli muzqaymoq ishlab chiqarish zarur ekan.

Masala. Mexanika sexida, uch turdagi uskunalardan foydalanib, A va B mahsulotlar tayyorlanadi. Har bir tur uskunaning, bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan vaqti quyidagichadir:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4.

Uskunalarning I, II, III ishlash vaqti, mos ravishda 40, 36 va 36 soatlardan iborat. Har bir mahsulotning bir birligini sotishdan olingan foyda mos ravishda 5 va 3 pul birligidan iborat.

Firmaning bir haftada maksimal foyda olish uchun, haftalik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab etiladi. Masalaning matematik modelini tuzib, uni grafik usulda yeching.

Yechish. Aytaylik, A va B tovarlarni haftalik ishlab chiqarish rejasi mos ravishda x_1 birlik va x_2 birlik bo'lsin.

Masala shartidan quyidagi tengsizliklar sistemasini tuzamiz

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \le 40 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 \le 36 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \le 36 \end{cases} \qquad (1.7)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (1.8)$$

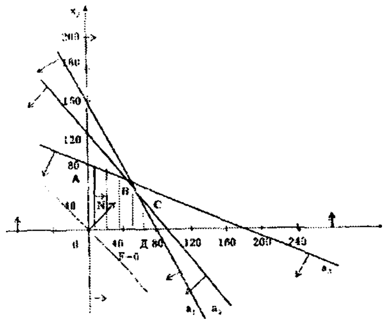
$$L(\bar{x}) = 5x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (1.9)$$

Masalada noma'lumlar soni ikkita, chegaraviy shartlar tengsizliklar ko'rinishida berilgan, shuning uchun optimal yechim grafik usulda aniqlanadi.

(1.7) va (1.8) chegaraviy shartlardagi tengsizliklar x_1Ox_2 koordinatlar tekisligida yarim tekisliklardan iborat bo'lib, uning chegaralari mos ravishda quyidagi to'g'ri chiziqlardan iborat (1.8 rasm)

$$0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 = 40 \qquad (a_1)$$
$$0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 36 \qquad (a_2)$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 = 36 \qquad (a_3)$$

Yarim tekisliklarning kesishishidan hosil bo'lgan ko'pburchakni aniqlab, normal vektor yordamida $\bar{N} = (5;3)$, maqsad funksiya maksimal qiymatga erishadigan nuqtani aniqlaymiz.



1.8-rasm

Rasmdan ko'rinadiki, maqsad funksiya *ABCDO* ko'pburchakning *C* nuqtasida maksimal qiymatga erishadi.

Bu nuqta esa a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lib, uning koordinatalari, quyidagi tenglamalar sistemasi yechimlaridan iborat:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 = 40 & (a_1) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 = 36. & (a_2) \end{cases}$$

Sistema yechimlari $(x_1;x_2)=(60;40)$. Maqsad funksiyasining optimal qiymati esa $\max L(\bar{x}) = 5x_1 + 3x_2 = 5\cdot 60 + 3\cdot 40 = 420$.

Demak, firma 420 birlik foyda olishi uchun, *A* tovar ishlab chiqarishni 60 birlik, *B* tovarni esa 40 birlik kabi rejalashtirish zarur ekan.

Misol. Grafik usulda funksiyaning ekstremal qiymatlarini aniqlang.

$$L(\bar{x}) = 6x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 - 18$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \ge 0 \; \left(j = \overline{1,4}\right) \end{cases}$$

Yechim. Birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlarni tengsizliklarga aylantiramiz. Ikkinchi shartdagi x_4 o'zgaruvchini birinchi shartga qo‘yib, ixchamlasak quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + x_3 \\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right) \end{cases}$$

So‘ngra, birinchi shartdagi x_3 o‘zgaruvchining qiymatini ikkinchi shartga qo‘ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_3 = 6 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 = -4x_1 - 3x_2 + 12 \\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right) \end{cases}$$

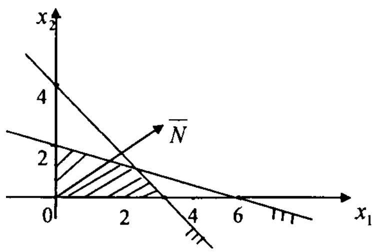
Masala shartiga ko‘ra x_3 va x_4 manfiy bo‘lmaganligi uchun, ular teng bo‘lgan ifodalar ham manfiy emas. x_3 va x_4 o‘zgaruvchilarning bu ifodalari maqsad funksiyaga qo‘yiladi. x_3 va x_4 noma’lumlarni birinchi va ikkinchi shartlardan tashlab yuborilsa, quyidagi model hosil bo‘ladi:

$$L\left(\bar{x}\right) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,2}\right) \end{cases}$$

Masalada noma’lumlar soni ikkita bo‘lib, chegaraviy shartlar tengsizliklar ko‘rinishida bo‘lgani uchun, masalaning optimal yechimini topishda grafik usuldan foydalanilsa bo‘ladi.

Yarim tekisliklarning kesishishi natijasida hosil bo‘lgan ko‘pburchakdan, normal vektor $\bar{N} = (1;\ 1)$ foydalanib, maqsad funksiya maksimal qiymatga erishadigan nuqtani aniqlaymiz.



1.9- rasm.

Rasmdan ko‘rinadiki, maqsad funksiya maksimal qiymatga quyidagi to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasida erishadi:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Bu nuqtaning koordinatalari (2; 4/3) dan iborat. Minimal nuqta esa (0,0) nuqtada hosil bo‘ladi. Natijada quyidagi javoblarni olamiz:

$$\max L(2;\ 4/3) = 10/3, \quad \min L(0;\ 0) = 0.$$

1.3. Simpleks usul

Simpleks usul kanonik shaklda berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini yechishning universal usullaridan biridir.

Simpleks usulning g‘oyasi (rejani ketma-ket yaxshilash usuli) shundan iboratki, bunda biror boshlang‘ich tayanch yechimdan boshlab, ketma-ket tayanch yechimlar bo‘yicha, yo‘nalgan holda harakatlanib, masalaning optimal yechimiga erishadi. Maksimum masalada, maqsad funksiyaning qiymati kamaymaydi. Tayanch yechimlar chekli bo‘lgani uchun, chekli sondagi qadamlardan so‘ng optimal yechim aniqlanadi.

Chiziqli programmalashtirish masalasining optimallik kriteriyasi, quyidagi ifodadan iborat:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i - c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Agar maksimum masalada, barcha Δ_j baholar manfiy bo‘lmasa, u holda topilgan yechim optimal bo‘lib, uni yaxshilash shart emas. Lekin, agar hech bo‘lmaganda Δ_j biror qiymati manfiy bo‘lsa, u holda masalaning yechimini yaxshilash zarur, bunda Δ_j ga mos bo‘lgan noma’lum, bazisdagi mos noma’lum bilan almashtiriladi.

Demak, chiziqli programmalashtirish masalasini yechishning optimallik kriteriyasi quyidagicha ta’riflanadi: maksimum masalada, chiziqli programmalashtirish masalasining yechimi optimal bo‘ladi, agar barcha baholar manfiy bo‘lmasa (ya’ni $\Delta_j \geq 0$) va minimum masalada esa, barcha baholar musbat bo‘lmasa (ya’ni $\Delta_j \le 0$).

Chiziqli programmalashtirish masalasining kanonik shakli:

Maqsad funksiya

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$$

Chegaraviy shartlar

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right)$$

Masalani simpleks usul bilan hisoblash uchun simpleks jadval tuziladi.

BN	C	B	c_1	c_2	..	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	...	c_n
			x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	...	x_n
x_1	c_1	b_1	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	...	a_{1n}
x_2	c_2	b_2			...	0	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	...	a_{2n}
...	..	...	0	1	...		...	...	...	..
x_m	c_m	b_m	...	...	..	...	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	...	a_m
			0	0		1				
		$L(\bar{x})$	0	0	...	0	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	...	Δ_n

Simpleks usul algoritmi

1. Masalaning matematik modeli kanonik ko‘rinishda bo‘lishi kerak. Agar u kanonik shaklda bo‘lmasa, kanonik shaklga keltirish zarur.

2. Simpleks jadval to‘ldiriladi. Birinchi qadamda jadvalning optimallik kriteriyasi Δ_j bo‘lgan indeks satrdan boshqa, barcha satrlarini, chegaraviy shartlardan va maqsad funksiyadan foydalanib to‘ldiramiz. Boshlang‘ich tayanch yechimni aniqlaymiz.

3. Topilgan boshlang‘ich tayanch yechimni optimalligini tekshiramiz. Indeks satr noma’lumlari $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j, \left(j = \overline{1, n}\right)$ formula bilan topilib, ozod hadlar uchun esa $\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$ formula bilan aniqlanadi.

Maksimum masala yechilayotganda quyidagi hollar bo‘ladi:

barcha optimallik kriteriyalari uchun $\Delta_j > 0$ shart bajariladi, u holda topilgan yechim optimal bo‘ladi;

hech bo‘lmaganda bitta optimallik kriteriyasi uchun $\Delta_j < 0$ shart bajariladi, lekin bu o‘zgaruvchi uchun birorta ham musbat koeffitsient mavjud emas, u holda masala yechish to‘xtatiladi, chunki $L(\bar{x}) = \infty$, ya’ni maqsad funksiya mumkin bo‘lgan yechimlar sohasida chegaralanmagan;

hech bo‘lmaganda bitta optimallik kriteriyasi manfiy bo‘lib, bunga mos o‘zgaruvchida hech bo‘lmaganda bitta musbat koeffitsient mavjud bo‘lsa, u holda, maqsad funksiya qiymati katta bo‘lgan boshqa tayanch yechimga o‘tiladi;

indeks satrda manfiy bo‘lgan optimallik kriteriyalari bir nechta bo‘lsa, u holda bazis noma’lumga, manfiy baholarning orasidan, absolyut qiymati bo‘yicha eng katta bo‘lgan o‘zgaruvchi kiritiladi.

Aytaylik bitta baho $\Delta_k < 0$, yoki absolyut qiymati bo‘yicha eng katta bo‘lgan $\Delta_k < 0$ uchun, k - satrni tanlaymiz. Bundan foydalanib, ozod hadlarni k - satrning musbat elementlariga bo‘lgandan so‘ng, eng kichik nisbatdan, aniqlovchi element topiladi.

4. Yangi simpleks jadval tuziladi:

aniqlovchi turgan satr elementlari, aniqlovchi elementga bo‘linib yangi jadvalga yoziladi;

bazis noma’lum to‘ldiriladi;

Jadvalning boshqa koeffitsiyentlari ham shu kabi topiladi. Yangi tayanch yechim aniqlanadi.

5. Algoritmning birinchi qadamiga qaytiladi.

Misol. Chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usul bilan yeching.

$$L(\bar{x}) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ & x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,3}\right) \end{aligned}$$

Yechish. Berilgan masalani kanonik shaklga keltiramiz;

$$L(\bar{x}) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned} & -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_6 = 5 \\ & x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,6}\right) \end{aligned}$$

Simpleks jadvalni tuzamiz.

			-1	3	2	0	0	0
BN	*C*	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	5	1	-1	-2	1	0	0
x_5		3	(2)	-3	1	0	1	0
x_6	0							
		5	2	-5	6	0	0	1
	0							
		0	1	-3	-2	0	0	0
x_4	0	13/2	0	5/2	-3/2	1	½	0
x_1	-1	3/2	1	-3/2	½	0	½	0
x_6								
	2	2	0	-2	5	0	-1	1
		3/2	0	-3/2	-5/2	0	-5/2	0

BN - bazis o‘zgaruvchilar;

C – bazis o‘zgaruvchilarning maqsad funksiyasidagi koeffitsiyentlari;

B – chegaraviy shartlardagi ozod hadlar.

Simpleks jadvaldan foydalanib masalaning optimal yechimini aniqlaymiz $\bar{x}_{onm} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3/2, 0, 0, 13/2, 0, 2)$, $\min L(\bar{x}) = -3/2$.

Masala. Korxona uchta ishlab chiqarish resurslaridan (xomashyo, uskunalar, elektr energiyasi) iborat bo‘lib, mahsulot ishlab chiqarishni ikki xil usulda tashkil etishi mumkin. Har bir usulda, bir oyda sarflangan resurslar, jadvalda berilgan. Korxona birinchi usul bilan bir oyda 3000 birlik mahsulot, ikkinchi usulda esa 4000 birlik mahsulot ishlab chiqaradi. Korxona, berilgan resurslardan foydalanib, maksimal mahsulot ishlab chiqarishni ta’minlagan holda, har bir usul bilan necha oy ishlashi talab etiladi?

Ishlab chiqarish resurslari	1 oy mobaynida sarflangan resurslar, pul birligi		Umumiy resurs, pul birligi
	1-usul bilan	2-usul bilan	
Xomashyo	1	2	4
Uskunalar	1	1	3
Elektr energiyasi	2	1	8

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. x_1 – korxonaning birinchi usul bilan ishlash vaqti, x_2 - korxonaning ikkinchi usul bilan ishlash vaqti.

Masalaning matematik modeli ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Masalani kanonik shaklga keltiramiz:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}$$

Simpleks jadval tuzamiz.

BN	*C*	*B*	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	4	1	(2)	1	0	0
x_4	0	3	1	1	0	1	0
x_5	0	8	2	1	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0
x_2	4	2	½	1	½	0	0
x_4	0	1	(½)	0	-1/2	1	0
x_5	0	0	3/2	0	-1/2	0	1
Δ_j		8	-1	0	2	0	0
x_2	4	1	0	1	1	-1	0
x_1	3	2	1	0	-1	2	0
x_5	0	3	0	0	1	-3	1
Δ_j		10	0	0	1	2	0

Jadvaldan ko'rinadiki, barcha optimallik kriteriyalari $\Delta_j \geq 0$, demak, topilgan tayanch yechim optimal ekan:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 0, 3),\ L(\bar{x}_{опт}) = 10.$$

Demak, maksimal mahsulot ishlab chiqarish hajmi 10 000 birlikdan iborat bo'lib, bunda korxona, birinchi usul bilan -ikki oy, ikkinchi usul bilan -bir oy ishlashi talab etilar ekan.

MUSTAQIL TA'LIM. Mustaqil yechish uchun misollar.

Chiziqli programmalashtirish masalalarini grafik usulda yeching

1.1. $$\max L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.2. $$\min L(\bar{x}) = 2x_1 - 10x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 5x_2 \ge -5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.3. $$\max L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_1 \le 4 \\ 2x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.4. $$\min L(\bar{x}) = x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.5. $$\max L(\bar{x}) = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.6. $$\min L(\bar{x}) = 2x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 2 \\ 5x_1 - x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.7. $$\min L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 6 \\ 5x_1 - x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.8. $$\max L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Chiziqli programmalashtirish masalalarini simpleks usulda yeching.

1.9. $$\max L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.10. $$\max L(\bar{x}) = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.11. $\max L(\bar{x}) = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.12. $\max L(\bar{x}) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

1.13 $\max L(\bar{x}) = x_1 - x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

1.14. $\max L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

1.15. $\min L(\bar{x}) = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Testlar

1. Qanday shartda chiziqli programmalashtirish masalasi grafik usulda yechiladi.

a) Barcha chegaraviy shartlar tengsizliklar ko‘rinishida beriladi;

b) O‘zgaruvchilarning manfiy bo‘lmaslik sharti beriladi;

c) Model ikki (uch) o‘zgaruvchidan iborat bo‘ladi;

d) Model kanonik shaklda beriladi.

2. Normal vektor nima?

a) Maqsad funksiyaning tez o‘zgaradigan yo‘nalishini ko‘rsatadigan vektor;

b) Maqsad funksiyaning kamayish yo‘nalishini ko‘rsatadigan vektor;

c) Maqsad funksiyaning kamayish yoki o‘sish yo‘nalishini ko‘rsatadigan vektor;

d) Maqsad funksiyaning o‘sish yo‘nalishini ko‘rsatadigan vektor.

3. Qanday yechim tayanch yechim bo‘ladi?

a) Masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi vektor

b) Optimal yechim;

c) Minimal yechim;

d) Maksimal yechim.

4. Qanday yechim optimal yechim bo'ladi?

a) Maqsad funksiyani maksimallashtiruvchi (minimallashtiruvchi) tayanch yechim;

b) Maqsad funksiyani minimallashtiruvchi tayanch yechim;

c) Chiziqli programmalashtirish masalasining ixtiyoriy yechimi;

d) Maqsad funksiyani maksimallashtiruvchi tayanch yechim.

5. Ko'pyoqning qanday nuqtalarida optimal yechim aniqlanadi?

a) Ko'pyoqning uchlari yoki qirralarida;

b) Ko'pyoqning qirralarida;

c) Ko'pyoqning barcha nuqtalarida;

d) Ko'pyoqning tashqarisidagi nuqtalarida.

6. Ushbu tengsizlikni $x_1^2+x_2^2\le 36$ qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami tekislikda qanday figurani aniqlaydi?

a) Markazi koodinatalar boshida, radiusi 6 ga teng bo'lgan doira;

b) Aylana;

c) Birinchi chorakda yotuvchi, ellips;

d) Birinchi chorakda yotuvchi, parabola.

7. $\max L$ to'g'ri chiziq, mumkin bo'lgan yechimlar sohasining qirrasi bilan mos tushadi. Masalaning yechimi to'g'risida qanday xulosa chiqariladi?

a) Masalaning yechimi mavjud emas;

b) Masalaning cheksiz ko'p yechimi mavjud;

c) Sel funksiyasi cheklanmagan;

d) Masala yagona yechimga ega.

8. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasi – kesma bo'lib, u normal vektorga perpendikular. Bunday masalada nechta ekstremum nuqta mavjud?

a) To'plam (ikkitadan ortiq);

b) Bitta;

c) Ikkita;

d) Bir nechta.

9. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasida maqsad funksiyaning maksimal va minimal qiymatlari teng bo'lsa, u holda mumkin bo'lgan yechimlar sohasi ushbu shaklda bo'ladi...

a) To'g'ri to'rtburchak;

b) To'g'ri to'rtburchak yoki kvadrat;

c) Nuqta yoki kesma;

d) Nuqta.

10. Quyidagi nuqtalarning qaysi biri, ushbu $2x_1-3x_2+5x_3-4x_4 \leq 3$ yarim fazoga tegishli?

a) (0;1;-1;0) b) (3;0;2;0) v) (2;1;5;0) g) (9;3;4;1)

Nazorat uchun savollar

1. Chiziqli programmalashtirish masalasini yozish qanday shakllarda bo'ladi? Ularning o'ziga xos alohida tomonlarini tushuntiring.
2. Chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelida noma'lumlarning manfiy bo'lmaslik shartini asoslab bering.
3. Chiziqli programmalashtirishning qanday masalalarini yechishda grafik usul qo'llaniladi?
4. Chiziqli programmalashtirish masalasini yechishda grafik usul algoritmi qanday bo'ladi?
5. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasining qanday nuqtalarida, optimal yechimni qidirish kerak?
6. Vektor gradiyent deganda nimani tushunasiz? Antigradiyent deganda esa nimani tushunasiz?
7. Simpleks usul?
8. Chiziqli programmalashtirish masalasining qanday yechimi tayanch yechim bo'ladi? Optimal yechim qanday bo'ladi?
9. Chiziqli programmalashtirish masalasining tayanch yechimini

aniqlash algoritmi qanday bo'ladi?

10. Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini aniqlash algoritmini tushuntiring.

11. Simpleks jadvalda tayanch va optimal yechimlarning mavjudlik belgisi qanday bo'ladi?

12. Simpleks jadvalda tanlangan aniqlovchi element asosida yangi simpleks jadvalni hisoblash qoidasini tushuntiring.

13. Simpleks jadvalda maqsad funksiyaning chegaralanmagan bo'lish belgisi qanday bo'ladi? Buning geometrik tasviri qanday bo'ladi?

14. Qanday holda, simpleks jadvalda chiziqli programmalashtirish masalasining yechimi mavjud bo'lmaydi? Bu holning geometrik tasvirini keltiring.

15. Yagona yechim bo'lmaslik belgisi nimadan iborat? Bu grafik usulda qanday tasvirlanadi?

I bob. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISHNING MAXSUS MASALALARI

2.1. Ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasi

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasi, ikkilangan masala deb ataluvchi, boshqa chiziqli programmalashtirish masalasi bilan uzviy bog'langan. Masalalar orasidagi bog'lanish shundan iboratki, ulardan ixtiyoriy birini yechib, ikkinchisining ham yechimini aniqlash mumkin. O'zaro bog'liq bo'lgan bunday masalalarni birgalikda *ikkilangan masalalar* deyiladi. Demak, ikkilangan masala, berilgan va ikkilangan masalalardan iborat ekan.

Berilgan masala va ikkilangan masalalar orasidagi bog'lanish shundan iboratki, bunda berilgan masala maqsad funksiyasi noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlar c_j, ikkilangan masala chegaraviy shartlarida ozod hadlardan iborat, berilgan masala chegaraviy shartlaridagi ozod hadlar, ikkilangan masala maqsad funksiyasi noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan iborat, ikkilangan masala chegaraviy shartlaridagi noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa, berilgan masala chegaraviy shartlaridagi koeffitsiyentlar transponirlangan matritsa ko'rinishida bo'ladi. Ikkilangan masalaning yechimi berilgan masala yechimidan olinadi va aksincha.

O'zaro ikkilangan masalalarning iqtisodiy talqini. Resurslardan foydalanish masalasi. Korxona n turdagi mahsulot ishlab chiqarsin. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun, m turdagi resurslar $b_i\ (i=\overline{1,m})$ miqdorlarda mavjud bo'lsin. $j-$ mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun, $i-$ resursning a_{ij} birligi sarflanib, uning narxi c_j birlikdan iborat bo'lsin.

Ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, resurslardan optimal foydalanib, pul birligi ifodasida maksimal mahsulot ishlab chiqarsin.

Ishlab chiqarishda rejalashtirilgan j- mahsulotning miqdorini $x_j \left(j=\overline{1,n}\right)$ bilan belgilaymiz. U holda berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelini quyidagicha ifodalash mumkin.

Shunday $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektorni topingki, uning koordinatalari chegaraviy shartlar sistemasini qanoatlantirib,

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \le b_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}$$

maqsad funksiyaga maksimal qiymat bersin

$$L(\bar{x})=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n.$$

Endi mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan resurslarni baholaymiz. Resurslarning bir birlik narxi, ishlab chiqariladigan mahsulotning bir birlik narxi bilan, bir xil o‘lchov birligiga ega. $y_i \left(i=\overline{1,m}\right)$ bilan i – bir xil birlik resursning bahosini belgilaymiz. U holda ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelini quyidagicha ifodalash mumkin.

Shunday $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ vektorni topingki, uning koordinatalari chegaraviy shartlar sistemasini qanoatlantirib,

$$\begin{cases}
a_{11}y_1+a_{21}y_2+...+a_{m1}y_m \ge c_1\\
a_{12}y_1+a_{22}y_2+...+a_{m2}y_m \ge c_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+...+a_{mn}y_m \ge c_n
\end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right)$$

maqsad funksiyaga minimal qiymat bersin

$$S=b_1y_1+b_2y_2+...+b_my_m.$$

Ko'rib o'tilgan, berilgan va ikkilangan masalalarni quyidagicha talqin qilish mumkin.

Berilgan masala. Bir birlik mahsulotning berilgan narxi $c_j\ (j=\overline{1,n})$ va chegaralangan resurslardan $b_i\ (i=\overline{1,m})$ foydalanib, qaysi mahsulotdan qancha miqdorda $x_j\ (j=\overline{1,n})$ ishlab chiqarilganda, foyda maksimal?

Ikkilangan masala. Bir birlik mahsulotning berilgan narxi $c_j\ (j=\overline{1,n})$ va chegaralangan resurslardan $b_i\ (i=\overline{1,m})$ foydalanib, umumiy xarajat minimal bo'lishi uchun, har birlik resursning narxi qanday bo'lishi zarur?

Simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalar. Simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalarda berilgan masalaning chegaraviy shartlari tenglik ko'rinishida, ikkilangan masalada esa tengsizlik ko'rinishida bo'ladi. Lekin ikkilangan masalada noma'lumlar manfiy ham bo'lishi mumkin.

Chiziqli programmalashtirish masalasining kanonik shaklini ko'rib chiqamiz: Masalaning maqsad funksiyasi

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

tenglik ko'rinishidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ &x_j \geq 0,\quad (j=\overline{1,n}) \end{aligned}$$

Simmetrik bo'lmagan masala qoidasidan, ikkilangan masalaning matematik modelini quyidagi xususiyatlarga asoslanib tuzamiz:

– ikkilangan masalaning chegaraviy shartlari tengsizliklardan iborat bo'ladi. Agar ikkilangan masalada maqsad funksiyaning minimumini topish talab etilsa, tengsizlik belgisi $\geq$ ko'rinishda, agar maksimum bo'lsa, u holda $\leq$ bo'ladi; - y_i – o'zgaruvchilarning ishoralari ixtiyoriy bo‘lib, musbat qiymat ham, manfiy qiymat ham qabul qilishi mumkin.

Ikkilangan masalaning matematik modeli quyidagicha bo‘ladi

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$$

Chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

Simmetrik ikkilangan masalalar. Simmetrik ikkilangan masalalarda berilgan va ikkilangan masalalarning chegaraviy shartlari tengsizlik ko‘rinishida bo‘lib, ikkilangan masalada noma’lumlarga manfiy bo‘lmaslik sharti qo‘yiladi.

Chegaraviy shartlari tengsizlik ko‘rinishida bo‘lib, x_j noma’lumlar manfiy bo‘lmagan, chiziqli programmalashtirish masalasining kanonik bo‘lmagan shaklini ko‘rib chiqamiz. Bu masala quyidagicha bo‘ladi.

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

Ikkilangan masalaning matematik modeli quyidagicha bo‘ladi:

- berilgan masala chegaraviy shartlar sistemasining har bir tengsizligiga, mos ravishda y_i o‘zgaruvchini mos qo‘yamiz;
- koeffitsiyentlari berilgan masala chegaraviy shartlari ozod hadlaridan iborat bo‘lgan, maqsad funksiyani tuzamiz;

– chegaraviy shartlar sistemasini tuzamiz. Ikkilangan masala chegaraviy shartlar sistemasining koeffitsiyentlari, berilgan masala chegaraviy shartlari sistemasi matritsasining transponirlanganidan hosil bo'ladi. Tengsizliklarning ishoralari qarama-qarshiga o'zgaradi. Chegaraviy shartlar sistemasining ozod hadlari, berilgan masala maqsad funksiyasining koeffitsientlaridan iborat bo'ladi. Maqsad funksiyani maksimallashtirish masalasi, minimallashtirish bilan almashtiriladi, va aksincha. Ikkilangan masalaning barcha o'zgaruvchilari manfiy emas.

Bundan kelib chiqib, ikkilangan masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$$

chegaraviy shartlarda
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$$

Ikkilangan masalaning matematik modellari. Xulqsa qilib aytganda, simmetrik va simmetrik bo'lmagan ikkilangan masalalarning matematik modellari ushbu ko'rinishlarning biridan iborat bo'ladi.

Simmetrik bo'lmagan masala

Berilgan masala $\min L(\bar{x}) = CX$ $AX = B$ $X \geq 0$	Ikkilangan masala $\max S(\bar{y}) = YB$ $YA \leq C$
Berilgan masala $\max L(\bar{x}) = CX$ $AX = B$ $X \geq 0$	Ikkilangan masala $\min S(\bar{y}) = YB$ $YA \geq C$

Simmetrik masala

Berilgan masala	Ikkilangan masala
$\min L(\bar{x}) = CX$ $AX \ge B$ $X \ge 0$	$\max S(\bar{y}) = YB$ $YA \le C$ $Y \ge 0$
Berilgan masala	**Ikkilangan masala**
$\max L(\bar{x}) = CX$ $AX \le B$ $X \ge 0$	$\min S(\bar{y}) = YB$ $YA \ge C$ $Y \ge 0$

Ikkilanma teoremalar. Ikkilanma teoremalar, ikkilangan masalalar optimal yechimlari orasidagi bog'liqlikni o'rnatadi.

Teorema. Agar ikkilangan masalaning birortasi optimal yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo'lib, berilgan va ikkilangan masalalarning maqsad funksiyalari bu optimal yechimlarda o'zaro teng bo'ladi

$$\max L(\bar{x}) = \min S(\bar{y})$$

Agar ikkilangan masaladan birortasi maqsad funksiyaning chegaralanmaganligidan yechimga ega bo'lmasa, u holda ikkinchisi ham chegaraviy shartlar sistemasi birgalikda bo'lmaganligidan yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. Quyidagi umumiy shaklda berilgan masala uchun ikkilanma masala tuzing:

$$L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2 & \Big| y_1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3 & \Big| y_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6 & \Big| y_3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3 & \Big| y_4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; \left(j = \overline{1,3}\right)$$

Yechish. Ikkilanma masala tuzishning umumiy qoidasidan foydalanamiz. Berilgan masaladagi har bir tengsizlik, ikkilanma masalaning bitta o'zgaruvchisiga mos keladi. Demak chegaraviy masaladagi tengsizliklar soni ikkilangan masaladagi o'zgaruvchilar sonini aniqlar ekan. Ikkinchi chegaraviy shartni -1 ga ko‘paytiramiz, chunki minimum masalada tengsizliklar «≥» ko‘rinishda bo‘lishi kerak. U holda berilgan masala quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 & \Big| y_1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3 & \Big| y_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 & \Big| y_3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 & \Big| y_4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,3}\right)$$

Ikkilanma masala tuzamiz:

$$S(\bar{y}) = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2 \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq 3 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,4}\right).$$

Misol. Quyidagi kanonik shaklda berilgan masala uchun ikkilanma masala tuzing:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 & \Big| y_1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 9 & \Big| y_2 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 10 & \Big| y_3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,3}\right)$$

Yechish. Ikkilanma masala tuzishning umumiy qoidasidan foydalanamiz. Ikkilanma masalani quyidagicha tuzamiz:

$$S(\bar{y}) = 7y_1 + 9y_2 + 10y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \leq 4 \\ 3y_1 - 5y_2 - 6y_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Aytaylik, simmetrik ikkilangan masalalar berilgan bo‘lsin.

$$L(\bar{x})=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max \qquad S(\bar{y})=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\to\min$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\quad i=\overline{1,m} \qquad \sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_j\ge c_j,\quad j=\overline{1,n}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n} \qquad y_i\ge 0,\quad i=\overline{1,m}$$

Teorema. Ikkilangan masalalarning mumkin bo'lgan yechimlari $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ va $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ optimal bo'lishi uchun, quyidagi tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli:

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_j-c_j\right)=0,\quad j=\overline{1,n}$$

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i-b_i\right)=0,\quad i=\overline{1,m}.$$

Boshqacha aytganda, agar optimal yechim chegaraviy shartlar sistemasiga qo'yilganda, berilgan masalaning i- chegara shartida qat'iy tengsizlik bajarilsa, u holda ikkilangan masala optimal yechimining i- koordinatasi nolga teng bo'ladi.

Misol. Berilgan masala uchun ikkilanma masala tuzing, uni ikkilanma teoremadan foydalanib, grafik usulda yechib, berilgan masalaning optimal yechimini toping:

$$L(\bar{x})=-2x_1+3x_2\to\min$$

$$\begin{cases}-x_1+x_2-2x_3=4 & \big| y_1\\ -2x_1+x_2+x_3=20 & \big| y_2\end{cases}$$

$$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,3}\right)$$

Yechish. Ikkilanma masala tuzamiz:

$$S(\bar{y})=4y_1+20y_2\to\max$$

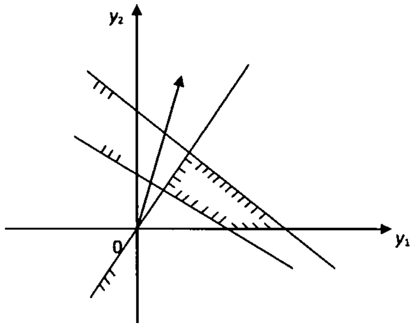
$$\begin{cases}-y_1-2y_2\le -2 & (L_1)\\ y_1+y_2\le 3 & (L_2)\\ -2y_1+y_2\le 0 & (L_3)\end{cases}$$

$$y_i\ge 0\ \left(i=\overline{1,2}\right)$$

Masalani grafik usul bilan yechamiz. 2.1-rasmda masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi va normal $\bar{N}=(4,20)$ vektor berilgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, optimal yechim L_2 va L_3 to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining koordinatalaridan iborat. Demak, L_2 va L_3 to'g'ri chiziqlarning mos tenglamalarini birgalikda yechamiz.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3 & (L_2) \\ -2y_1 + y_2 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

Bundan, masalaning $Y^* = (1,2)$ optimal yechimi aniqlanadi.



2.1-rasm

$Y^* = (1,2)$ optimal yechimni chegaraviy shartlarga qo'yamiz. Bundan, L_1 shartda qat'iy tengsizlik bajarilyapti:

$$-1 - 2 \cdot 2 < -2 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$1 + 2 = 3$$
$$-2 \cdot 1 + 2 = 0.$$

Ikkilanma teoremaga asosan, ikkilangan masala optimal yechimiga mos bo'lgan, berilgan masalaning mos o'zgaruvchisi nolga teng: $x_1 = 0$. Buni hisobga olib, berilgan masala chegaraviy shartlaridan ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$$

Bundan esa, berilgan masalaning optimal yechimini topamiz $X^* = (0;\ 44/3;\ 16/3)$.

Demak, $\min L(0;\ 44/3;\ 16/3) = 12/11$.

Misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$L(\bar{x}) = -2x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 30 \end{cases} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

$$x_j \geq 0 \; \left(j = \overline{1,4}\right)$$

Yechish. Ikkilangan masala

$$S(\bar{y}) = 6y_1 + 30y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 \leq -2 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ y_1 + 4y_2 \leq 14 \\ 2y_1 - 5y_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \; \left(j = \overline{1,2}\right)$$

Ikkilanma simpleks usul. Berilgan masalaning, boshlang'ich berilganlarining ixtiyoriy o'zgarishi, optimal yechimga hamda ikkilangan masalaning optimal baholariga ham ta'sir etadi. Chiziqli programmalashtirish masalasining chegaraviy shartlar sistemasi tenglamalar bo'lib, manfiy ozod hadlardan (ulardan bir nechtasi yoki hammasi) iborat bo'lsa, uni ikkilangan simpleks usul bilan yechish mumkin:

- ba'zi ozod hadlari manfiy bo'lgan chiziqli programmalashtirish masalasining kanonik shakli tuziladi;

– masalaning kanonik shakli simpleks jadvalga kiritiladi;

bazis vektorlar orasidan eng kichik manfiy ozod hadga mos bo'lgan vektor aniqlanadi;

kiritiladigan va chiqariladigan vektorlar kesishmasidagi element, aniqlovchi element bo'ladi;

- yangi simpleks jadvalni tuzish, odatdagi simpleks usul yordamida bajariladi:

Ozod hadlardan iborat vektor elementlarining ishoralari, musbat bo'lmaguncha va yechimning optimallik sharti bajarilguncha jarayon davom ettiriladi.

Misol. Simmetrik ikkilangan masalalarni yechishni misollarda ko'rib o'tamiz:

Berilgan masala	Ikkilangan masala
$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 & \vert y_1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 & \vert y_2 \\ x_1 + x_2 \le 5 & \vert y_3 \end{cases}$ $x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,2})$	$S(\bar{y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min$ $\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 \end{cases}$ $y_i \ge 0, \ (i = \overline{1,3})$

Yechish. Berilgan masalani kanonik shakldа yozib olamiz:

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,5})$$

Masala ikkilangan simpleks usul bilan yechiladi:

$$\bar{x}_{onm} = (4,\ 1), \qquad L(\bar{x}_{onm}) = 3$$

$$\bar{y}_{onm} = \left(0,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right), \quad S(\bar{y}_{onm}) = 3$$

Misol. Simmetrik ikkilangan masalani yeching:

Berilgan masala	Ikkilangan masala
$L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 24 & \vert y_1 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 & \vert y_2 \\ x_2 \le 4 & \vert y_3 \end{cases}$ $x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,2})$	$S(\bar{y}) = 24y_1 + 15y_2 + 4y_3 \to \min$ $2y_1 + y_2 \ge 1$ $3y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 2$ $y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,3})$

Yechish. Berilgan masalani kanonik shaklda yozib olamiz.

$$L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_2 \le 4 \end{cases} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,2}\right)$$

Masala ikkilangan simpleks usul bilan yechiladi.

Simpleks jadval tuzib, ikkilangan simpleks usul bilan masalani yechamiz.

BN	C	B	2 x_1	4 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5
x_3	0	24	2	3	1	0	0
x_4	0	15	1	3	0	1	0
x_5	0	4	0	(1)	0	0	1
		0	-1	-2	0	0	0
x_3	0	12	2	0	1	0	-3
x_4	0	3	(1)	0	0	1	-3
x_2	2	4	0	1	0	0	1
		8	-1	0	0	0	2
x_3	0	6	0	0	1	-2	(3)
x_1	1	3	1	0	0	1	-3
x_2	2	4	0	1	0	0	1
		11	0	0	0	1	-1
x_3	0	2	0	0	1/3	-2/3	0
x_1	1	9	1	0	1	-1	0
x_2	2	2	0	1	-1/3	2/3	1
		13	0	0	1/3	1/3	0

Simpleks jadvaldan $\bar{x}_{onm}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(9,2,0,0,2)$, $\max L(\bar{x})=9+2\cdot 2=13$.

Ikkilangan masala uchun quyidagi optimal yechimni aniqlaymiz: $\bar{y}_{onm}=(y_1,y_2,y_3)=(1/3,1/3,0)$, $\min S(\bar{y})=24\cdot 1/3+15\cdot 1/3+4\cdot 0=13$.

Masala. Korxona, miqdorlari mos ravishda 18,16, 8, 6 t bo'lgan, to'rtta A, B, D, C turdagi ashyolardan, uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Har bir ashyoning bir birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi me'yori, birinchi tur mahsulot uchun 1,2,1,0 t, ikkinchi tur mahsulot uchun – 2,1,1,1 t, uchinchi tur mahsulot uchun esa – 1,1,0,1 t iborat. Korxonaning bir birlik mahsulotni sotishdan oladigan daromadi birinchi tur mahsulot uchun – \$3, ikkinchi tur mahsulot uchun – \$4, uchinchi tur mahsulot uchun – \$2 iborat. Bu uch turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, bunda daromad maksimal bo'lib, bu optimal rejaga mos bo'lgan xomashyo miqdorini aniqlash talab etilcin.

Yechish. Aytaylik, $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ - uch turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasi bo'lsa, u holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$L(\bar{x})=3x_1+4x_2+2x_3\to\max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3\le 18 \\ 2x_1+x_2+x_3\le 16 \\ x_1+x_2\le 8 \\ x_2+x_3\le 6 \end{cases}\begin{array}{|l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}$$

$$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,3}\right)$$

Masalani ikkilangan simpleks usul bilan yechamiz. Buning uchun avvalo ikkilangan masalani tuzamiz:

$$S(\bar{y}) = 18y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 6y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 4 \\ y_1 + y_2 + y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,4}\right)$$

Berilgan masalani kanonik shaklga keltiramiz:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_7 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,7}\right)$$

Bunga asoslanib simpleks jadval tuzamiz:

BN	C	B	3	4	2	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0
x_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0
x_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0
x_7	0	6	0	(1)	1	0	0	0	1
		0	-3	-4	-2	0	0	0	0
x_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2
x_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1
x_6	0	2	(1)	0	-1	0	0	1	-1
x_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
		24	-3	0	2	0	0	0	4
x_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1
x_5	0	6	0	0	(2)	0	1	-2	1
x_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1
x_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
		30	0	0	-1	0	0	3	1
x_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1

x_3	2	3	0	0	1	0	½	-1	½
x_1	3	5	1	0	0	0	½	0	-1/2
x_2	4	3	0	1	0	0	-1/2	1	1/2
		33	0	0	0	0	1/2	2	3/2

Jadvalga asosan $\bar{x}_{onm} = (5,3,3,4,0,0,0)$, $L(\bar{x}_{onm}) = 3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 2\cdot 3 = \$33$.

Ikkilanma teoremalar yordamida quyidagini topamiz:

$\bar{y}_{onm} = (0,1/2,2,3/2)$, $S(\bar{y}_{onm}) = 18\cdot 0 + 16\cdot 1/2 + 8\cdot 2 + 6\cdot 3/2 = \$33$.

Misol. Berilgan ikkilanma masalani ikkilanma simpleks usul bilan yeching:

$$L(\bar{x}) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 8 \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \geq 4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)$$

Yechish. Berilgan masalani kanonik shaklga keltiramiz:

$$L(\bar{x}) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 8 \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_6 = 4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 - x_7 = 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,7}\right)$$

Berilgan masaladagi noma'lumlarni bazis o'zgaruvchilarga kiritish uchun, chegaraviy shartdagi har bir tenglamani (-1) ko'paytiramiz. Natijada berilgan masala ushbu ko'rinishga keladi:

$$L(\bar{x}) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -8 & \big| y_1 \\ x_2 + 3x_3 - 6x_4 + x_6 = -4 & \big| y_2 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + x_7 = 0 & \big| y_3 \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,7}\right)$$

Bu masala uchun ikkilanma masala tuzamiz:

$$S(\bar{y}) = -8y_1 - 4y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -3y_1 - 2y_3 \le 4 \\ -2y_1 + y_2 \le 3 \\ y_1 + 3y_2 - y_3 \le 10 \\ -5y_1 - 6y_2 + y_3 \le 5 \\ y_1 \le 0 \\ y_2 \le 0 \\ y_3 \le 0 \end{cases}$$

(2.1) masala uchun simpleks jadval tuzamiz:

BN	C	B	4	3	10	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	-8	-3	-2	1	(-5)	1	0	0
x_6	0	-4	0	1	3	-6	0	1	0
x_7	0	0	-2	0	-1	1	0	0	1
Δ_j		0	-4	-3	-10	-5	0	0	0

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, barcha ozod o'zgaruvchilar manfiy, shuning uchun bazis noma'lumlarni aniqlash uchun, ushbu $\theta = \min\limits_{x_{mj}<0} \frac{\Delta_j}{x_{mj}} > 0$ formuladan foydalanamiz. Berilgan masala uchun bu formula quyidagicha bo'ladi:

$\theta = \min\limits_{x_{mj}<0} \frac{\Delta_j}{x_{mj}} = \min\limits_{x_{mj}<0}\left\{\frac{-4}{-3}, \frac{-3}{-2}, \frac{-5}{-5}\right\} = \frac{-5}{-5} = 1 > 0$. Bu esa x_4 bazis noma'lum ekanligini ko'rsatadi.

BN	C	B	4	3	10	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	5	8/5	3/5	2/5	-1/5	1	-1/5	0	0
x_6	0	28/5	18/5	17/5	9/5	0	-6/5	1	0
x_7	0	-8/5	(-13/5)	-2/5	-4/5	0	1/5	0	1
Δ_j		8	-1	-1	-11	0	-1	0	0

Ko'rinib turibdiki, uchinchi satrda ozod o'zgaruvchi manfiy, shuning uchun, bazis noma'lumlarni aniqlash uchun yana formuladan foydalanamiz, $\theta=\min\limits_{x_{nj}<0}\frac{\Delta_j}{x_{nj}}=\min\limits_{x_{nj}<0}\left\{\frac{-1}{-13/5},\frac{-1}{-2/5},\frac{-11}{-4/5}\right\}=\frac{-1}{-13/5}=\frac{5}{13}>0$. Bu esa x_1 bazis noma'lum ekanligini ko'rsatadi.

BN	C	B	4	3	10	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	5	16/13	0	4/13	-5/13	1	-2/3	0	3/13
x_6	0	44/13	0	37/13	9/13	0	-2/3	1	18/13
x_1	4	8/13	1	2/13	4/13	0	-1/13	0	-5/13
Δ_j		112/13	0	-11/13	-139/13	0	-14/13	0	-5/13

Jadval oxiridagi barcha j satr elementlari uchun $\Delta_j\le 0$ shart bajarilmoqda.

Shuning uchun masalaning optimal yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)=\left(\frac{8}{13},0,0,\frac{16}{13},0,\frac{44}{13},0\right)\Rightarrow\min L(\bar{x}_{onm})=4x_1+3x_2+10x_3+5x_4=$$
$$=4\cdot\frac{8}{13}+3\cdot0+10\cdot0+5\cdot\frac{16}{13}=\frac{112}{13}.$$

Ikkilanma masalaning optimal yechimi esa quyidagicha bo'ladi:

$$(y_1,y_2,y_3)=\left(-\frac{14}{13},0,-\frac{5}{13}\right)\Rightarrow\max S(\bar{y}_{onm})=-8y_1-4y_2=-8\cdot\left(-\frac{14}{13}\right)-4\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{112}{13}.$$

2.2. Sun'iy bazis usuli

Agar chiziqli programmalashtirish masalasining chegaraviy shartlar sistemasida m tartibli birlik matritsa mavjud bo'lib, tenglamaning o'ng tomoni manfiy bo'lmagan ozod hadlardan iborat bo'lsa, simpleks usul yordamida optimal yechim aniqlanar edi.

Agar chiziqli programmalashtirish masalasining chegaraviy shartlar sistemasini $AX \le B$, bunda $B \ge 0$ ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, chegaraviy shartlar sistemasi doimo o‘zida birlik matritsani saqlaydi.

Yechimi mavjud bo‘lgan, ko‘p chiziqli programmalashtirish masalalarida birlik matritsa bo‘lmaydi va buni yuqoridagi ko‘rinishga keltirib bo‘lmaydi. Bunday holda masalani yechish uchun sun’iy bazis usuli qo‘llaniladi. Umumiy chiziqli programmalashtirish masalasini ko‘rib chiqamiz.

Chiziqli funksiyaning minimal qiymatini toping:

$$L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

chegaraviy shartlarda
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n+m}\right)$$

Agar masala chiziqli funksiyaning minimal qiymatini topishdan iborat bo‘lsa, M miqdor juda katta musbat son deb taxmin qilinadi, va agar masala chiziqli funksiyaning maksimal qiymatini topishdan iborat bo‘lsa, M miqdor yetarlicha kichik manfiy son deb olinadi. Sun’iy o‘zgaruvchilarga mos bo‘lgan birlik vektorlar $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$ sun’iy bazisni hosil qiladi. Berilgan masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi teoremadan foydalaniladi.

Teorema. Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$ bo‘lib, sun’iy o‘zgaruvchilar $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$ bo‘lsa, u holda berilgan masalaning optimal yechimi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bo‘ladi.

Simpleks usulni kengaytirilgan masalaga qo‘llashdan shunday optimal yechim hosil bo‘ladiki, bunda barcha sun’iy o‘zgaruvchilar $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$ bo‘ladi. Agar berilgan masala optimal yechimga ega bo‘lmasa, kengaytirilgan masalaning optimal yechimida, hech bo‘lmaganda bitta sun’iy o‘zgaruvchi $x_{n+i} > 0$ shartni qanoatlantiradi.

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimini topish uchun, oddiy simpleks jadvaldan farqli, bitta satrga ko'p bo'lgan simpleks jadval tuzib, masalani simpleks usul bilan yechamiz. $(m+2)$ – satrda bazisga kiruvchi vektor aniqlanadi. $(m+2)$ – satrdagi iteratsion protsess bazisdagi barcha sun'iy o'zgaruvchilarni yo'qotib, $(m+1)$ – satrda masalaning optimal yechimini aniqlash jarayonini davom ettiradi.

Misol. Chiziqli funksiyaning minimal qiymatini aniqlang.

$$L(\bar{x}) = 4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,\ 4}\right)$$

Yechish. Chegaraviy shartlar sistemasida birlik matritsa mavjud emas. Har bir tenglamaga manfiy bo'lmagan sun'iy noma'lum kiritib kengaytirilgan masala tuzamiz.

Chiziqli funksiyaning minimal qiymatini aniqlang.

$$L(\bar{x}) = 4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 + Mx_5 + Mx_6$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\ n}\right)$$

bunda $b_i \geq 0$ va chegaraviy shartlar sistemasi o'zida birlik matritsani saqlamaydi. Birlik matritsani hosil qilish uchun har bir tenglamaga bittadan sun'iy deb ataluvchi, yangi o'zgaruvchi $x_{n+i} \geq 0 \ \left(i = \overline{1,\ m}\right)$ kiritib, *kengaytirilgan masala* hosil qilamiz.

Chiziqli funksiyaning minimal qiymatini toping.

$$L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_6 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,\ 6}\right)$$

$m+2$ satrdan iborat simpleks jadval tuzamiz:

BN	C	B	-1	-2	-3	11	M	M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	M	5	(2)	-1	-4	5	1	0
x_6	M	4	1	1	1	-2	0	1
$m+1$			1	2	3	-11	0	0
$m+2$			3	0	-3	3	0	0
x_1		5/2	1	-1/2	-2	5/2	½	0
x_6		3/2	0	3/2	(3)	-9/2	-1/2	1
$m+1$			0	5/2	5	-27/2	-1/2	0
$m+2$			0	3/2	3	-9/2	-3/2	0
x_1		7/2	1	½	0	-1/2	1/6	2/3
x_3		1/2	0	1/2	1	-3/2	-1/6	1/3
$m+1$			0	0	0	-5	1/3-M	-5/3-M

Qulay hisoblash uchun $(m+1)$ - satrga M bog'liq bo'lmagan qo'shiluvchi, $(m+2)$ - qatorga esa faqat M ning koeffitsiyentlarini yozdik.

M noma'lum miqdor tanlashimizga asosan bazisga tushmaydi, va uni keyinchalik yo'qotib yubordik. Demak, masalaning optimal yechimi $X_{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (7/2, 0, 1/2, 0, 0, 0)$

$$L(\bar{x}_{onm}) = 4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 4 - \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

2.3. Butun sonli programmalashtirish masalasi

Ko'pgina iqtisodiy masalalar chiziqli programmalashtirish masalasidagi keltirilib, uning butun sonli yechimini topish talab qilinadi. Ularga quyidagi masalalar kiradi. Bunday masalalarda, o'zgaruvchilar, bo'linmaydigan mahsulot miqdori birliklaridan iborat. Masalan, materiallarni qirqish, uskunalarni yuklash, mashinalar (agregatlar, uskunalar, chorvadagi mollar) miqdori, paroxodlarni yo'nalishlar bo'yicha taqsimlash, samolyotlarni reyslar bo'yicha taqsimlash hamda bo'linmaydigan mahsulot ishlab chiqish masalalaridan iborat.

Bunday masalalar chiziqli va chiziqsiz bo'lishi mumkin. Bunda, butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasi chiziqli, ya'ni maqsad funksiya va uni chegaralovchi shartlar chiziqli deb olinadi. Bunda optimal yechim manfiy bo'lmagan butun sonlardan iborat bo'lishi talab etiladi.

Masalaning qo'yilishi. Chegaraviy shartlarda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0,\ x_j\ бутун,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

ushbu chiziqli funksiyaning ekstremal qiymatini aniqlang:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max(\min).$$

Grafik usul. Agar chiziqli programmalashtirish masalasida ikkita o'zgaruvchi va cheklovlar sistemasi faqat tengsizliklardan iborat bo'lsa, bu masala grafik usulda yechiladi.

Tekislikdagi Dekart koordinatalar sistemasida mumkin bo'lgan yechimlar sohasi, $\bar{C}$ vektor va sohalar chizig'i quriladi. Maksimum masalada, sohalar chizig'i $\bar{C}$ vektor yo'nalish bo'yicha siljitilib, koordinatalar boshidan eng uzoqda yotgan nuqta va uning koordinatalari aniqlanadi.

Agar bu nuqtaning koordinatalari butun sonli bo'lmasa, mumkin bo'lgan yechimlar sohasida, butun sonli kataklar qurilib, unda shunday x_1 va x_2 butun sonlar topiladiki, bu qiymatlarda maqsad funksiyaning qiymati, butun bo'lmagan ekstremal yechimga juda yaqin bo'ladi. Bu katak uchlarning koordinatalari masalaning butun sonli yechimi bo'ladi.

Minimum masala ham shu kabi yechiladi. Maqsad funksiyaning butun sonli minimum qiymati, mumkin bo'lgan yechimlar sohasidagi butun sonli katak uchlari koordinatalariga mos kelib, $\overline{C}$ vektor yo'nalish bo'yicha koordinatalar boshiga eng yaqin bo'lgan, katak uchi koordinatalaridan iborat.

Misol. Tashkilot o'zining moliyaviy ahvolini yaxshilash maqsadida, raqobatbardosh mahsulotlarini ko'paytirishni mo'ljallab, sexlarning birida 19/3 $м^2$ maydonni egallaydigan qo'shimcha uskuna qurishni mo'ljalladi. Bu qo'shimcha uskunani sotib olish uchun tashkilot 10 mln pul birligi ajratdi. Lekin tashkilot bu uskuna komplektini 2 tur ko'rinishda sotib oladi. 1-tur ko'rinishdagi uskuna komplekti narxi 1 mln birligi, 2-xil ko'rinishdagi uskuna komplekti narxi esa 3 mln birligi turadi. 1-tur ko'rinishdagi uskuna komplekti mahsulot miqdorini bir smenada 2 birlikka, 2-tur ko'rinishdagi uskuna komplekti esa 4 birlikka oshiradi.

1-tur uskuna komplektini o'rnatish uchun 2 $м^2$ maydon, 2-tur uskuna komplektini o'rnatish uchun esa 1 $м^2$ maydon talab etilishini bilgan holda, qo'shimcha uskunalar jamlanmasini aniqlash kerakki, bunda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi maksimal bo'lsin.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. Aytaylik tashkilot, 1-tur qo'shimcha uskuna komplektidan x_1 miqdorda, x_2 miqdorda esa 2- tur uskuna komplektini sotib olsin.

Masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

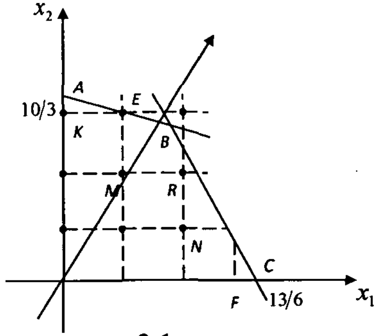
chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ butun \end{cases}$$

Butun sonli programmalashtirish masalasini hosil qildik. Masalada noma'lumlar soni faqat ikkita (x_1 va x_2) bo'lgani uchun, uni grafik usulda yechish mumkin. Avvalo masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasini aniqlaymiz. Buning uchun masala chegaraviy shartlarining tengsizliklariga e'tibor beramiz. Bu sistemadagi har tengsizlik, tekislikda yarim tekislikni ifodalaydi. Bu yarim tekisliklarni aniqlash uchun, avvalo ularning chegara to'g'ri chiziqlarini quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlaymiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 = 10. \end{cases}$$

Sistemaning har bir tenglamasi uchun tekislikda AB va BC grafiklarni hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning pastida yotuvchi nuqtalarning koordinatalarida, yuqoridagi tengsizliklar sistemasi to'g'ri tengsizliklarga aylanadi. Shuning asosida masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasini birinchi chorakda aniqlaymiz. Chunki x_1, x_2 o'zgaruvchilar $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ shartlarni qanoatlantiradi. 2.1-rasmdan ko'rinadiki $OABC$ – masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasidir. Bunda normal vektorning koordinatalari (2;4) iborat. Bundan kelib chiqib, masalaning optimal yechimi $B(9/5, 41/15)$ nuqtada bo'ladi. Bunda maqsad funksiyaning maksimal qiymati $218/15$ birl. teng. Bundan kelib chiqib $x_{opt} = (9/5, 41/15)$, $L_{\max}(\bar{x}) = \frac{218}{15} = 14\frac{8}{15}$ (birl.). Topilgan optimal yechim butun sonli emas. Masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasida butun sonli kataklar yasaladi.



2.1 - rasm

Yechimlar sohasiga tegishli 12 ta o'zgaruvchilar koordinatalarining shartli butun sonli bo'lishi rasmdan ko'rinib turibdi. Berilgan masalada optimal yechimni aniqlaydigan nuqtani topish uchun, $OABC$ ko'pburchakni, nuqtalarining koordinatalari butun sonli bo'lgan $OKEMRNE$ ko'pburchak bilan almashtiramiz (2.1-rasm).

Normal $\overline{N}=(2,4)$ vektorni quramiz. Sohalar chizig'ini $\overline{N}$ vektor yo'nalishi bo'yicha surib, $E=(1,3)$ nuqtani aniqlaymiz. Bu nuqtada maqsad funksiya maksimal qiymatga erishadi:

$$L(\overline{x}_{\max}) = 2x_1 + 4x_2 = 2\cdot 1 + 4\cdot 3 = 14 \text{ bir.}$$

Demak, tashkilot 1-tur uskunadan bir komplekt, 2-tur uskunadan esa uch komplektini sotib olsa, ishlab chiqarish maydonidan optimal foydalanib, ishlab chiqarilgan mahsulot maksimalligini ta'minlagan holda, bir smenada 14 birlikka teng mahsulot ishlab chiqaradi.

Gomori usuli. Bu usul, simpleks usuliga va kesuvchi tekisliklar usuliga asoslangan bo'lib, u Gomori tomonidan tuzilgan algoritm asosida aniqlanadi. Avvalo simpleks usul bilan butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimi aniqlanadi. Agar hosil bo'lgan yechim butun bo'lsa, masalaning optimal yechimi aniqlangan bo'ladi. Agar topilgan yechimlardan hech bo'lmaganda birortasi butun sonli bo'lmasa, u holda masala shartiga qo'shimcha cheklovlar kiritiladi. Bunga ko'ra, mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan, butun bo'lmagan yechim kesib olinadi va butun koordinatali birorta ham nuqta ajratib tashlanmaydi. Yana simpleks usul bilan kengaytirilgan masalaning tayanch va optimal yechimi aniqlanadi. Agar yangi yechim butun sonli bo'lmasa, u holda masala shartiga yana bitta qo'shimcha cheklov kiritiladi. Qo'shimcha cheklovlar kiritish va masala yechimini topishda simpleks usulni qo'llash jarayoni, optimal musbat butun sonli yechim topilguncha, yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

Misol. Yuqorida keltirilgan masala, Gomori usuli bilan yechilsin. Masalaning matematik modeli:

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ \textit{бутун} \end{cases}$$

Yechish. Masalani simpleks usul bilan yechish quyidagi jadvalda keltirilgan:

BN	*C*	*B*	2	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	19/3	2	1	1	0
x_4	0	10	1	(3)	0	1
		0	-2	-4	0	0
x_3	0	3	(5/3)	0	1	-1/3
x_2	4	10/3	1/3	1	0	1/3
		40/3	-2/3	0	0	4/3
x_1	2	9/5	1	0	3/5	-1/5
x_2	4	41/15	0	1	-1/5	2/5
		218/15	0	0	2/5	7/5

Simpleks jadvaldan ko‘rinadiki $\bar{x}_{опт}=(9/5,\ 41/15)$, $L_{\max}(\bar{x})=218/15$.

$9/5$ va $41/15$ sonlarning kasr qismi aniqlanadi (3 qadamdagi 1- va i 2- satrlar):

$$\begin{cases} \frac{9}{5}=1+\frac{4}{5} \\ \frac{41}{15}=2+\frac{11}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{5}>\frac{11}{15}$$

3 qadamdagi 1-satr uchun qo‘shimcha kesuvchi tenglama tuzamiz:

$$\frac{3}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4\geq\frac{4}{5} \quad \text{yoki} \quad -\frac{3}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4+x_5=-\frac{4}{5}.$$

Keyingi hisoblashlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

BN	C	B	2	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	9/5	1	0	3/5	-1/5	0
x_2	4	41/15	0	1	-1/5	2/5	0
		218/15	0	0	2/5	7/5	0
x_5	0	-4/5	0	0	(-3/5)	1/5	1
x_1	2	1	1	0	0	0	1
x_2	4	3	0	1	0	1/3	-1/3
x_1	0	4/3	0	0	1	-1/3	-5/3
		14	0	0	0	4/3	2/3

Bu jadvaldan ko‘rinadiki $\bar{x}_{бут}=(1,\ 3)$, $\max L(\bar{x}_{бут})=2x_1+4x_2=2\cdot1+4\cdot3=14$.

<u>MUSTAQIL TA’LIM</u>: Mustaqil yechish uchun misollar

Chiziqli dasturlash masalasini ikkilangan simpleks usuli orqali yeching.

2.1.
$$\max L(x) = x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

2.2.
$$\min L(x) = -4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

2.3.
$$\max L(x) = x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

2.4.
$$\min L(x) = -3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 6 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -3 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

2.5.
$$\max L(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge -4 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0$$

2.6.
$$\min L(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 18 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0$$

Butun sonli chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini aniqlang.

2.7.
$$\max L(x) = x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; \textit{butun}$$

2.8.
$$\max L(x) = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 3x_1 - 3x_2 \le 9 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; \textit{butun}$$

2.9.
$$\min L(x) = -x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 9 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; \textit{butun}$$

2.10.
$$\min L(x) = -4x_1 - 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ 4x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; \textit{butun}$$

2.11.
$$\min L(x) = -x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; \textit{butun}$$

2.12.
$$\max L(x) = 16x_1 + 9x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; \textit{butun}$$

2.13. $\min L(x)=4x_1+x_2$

$$\begin{cases}4x_1+2x_2\le 7\\ 3x_1+10x_2\le 15\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,$ *butun*

2.14. $\max L(x)=3x_1+x_2$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 6\\ 2x_1-3x_2\le 3\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,$ *butun*

Testlar

1. Ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda ikkilangan masala ...

A) optimal yechimga ega;

B) optimal yechimga ega emas;

C) mumkin bo'lmagan yechimga ega;

D) yechimlar sohasi mavjud emas.

2. Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasiga nisbatan, ikkilangan masalada nechta noma'lum qatnashadi?.

A) Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining tenglamalari soniga teng;

B) Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining chegaraviy shartlari soniga teng;

C) 5; D) 10.

3. Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasi asosida tuzilgan, ikkilangan masala nechta chegaraviy shartdan iborat?

A) Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasidagi noma'lumlar soniga teng;

B) Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasidagi chegaraviy shartlar soniga teng;

C) 15; D) 20.

4. Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasi asosida tuzilgan, ikkilangan masala maqsad funksiyasining oldidagi koeffitsientlari qanday tuziladi?

A) Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasidagi ozod hadlardan tuzilgan;

B) Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasidagi koeffitsientlardan tuzilgan;

C) Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasidagi chegaraviy shartlardagi koeffitsiyentlardan tuzilgan;

V) 10.

5. Qaysi mulohaza to'g'ri:

A) Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasi uchun, ikkilanma masala mavjud;

B) Ba'zi chiziqli programmalashtirish masalasiga, ikkilanma masala mavjud;

C) Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasi uchun bir nechta ikkilanma masala mavjud;

V) hamma javoblar to'g'ri.

6. Qaysi mulohaza to'g'ri:

A) agar berilgan masala maksimum masala bo'lsa, u holda ikkilangan masala minimum masala bo'ladi;

B) agar berilgan masala maksimum masala bo'lsa, u holda ikkilangan masala ham maksimum masala bo'ladi;

C) agar berilgan masala maksimum masala bo'lsa, ikkilangan masala minimum hamda maksimum masala bo'ladi;

D) hamma javoblar to'g'ri.

7. Berilgan va ikkilangan masala noma'lumlari orasida.

A) o'zaro bir qiymatli bog'lanish mavjud;

B) noma'lumlar joyi almashadi;

C) noma'lumlari orasida regression bog'lanish mavjud;

V) o'xshash hadlar ixchamlanadi.

8. Ikkilangan masalalar qanday masalalardan iborat?

A) bir masalaning yechimidan boshqa masalaning yechimi aniqlanadi;

B) berilgan masalaning birinchi simpleks jadvalidan iborat;

C) ikkilangan masalalar maqsad funksiyalari tengsizligidan iborat;

V) berilgan masalaning qo'shimcha noma'lumlaridan iborat.

9. Ikkilangan masalalar maqsad funksiyalari...

A) bir biriga teng;

B) bir biriga teng emas;

C) berilgan masala maqsad funksiyasi, ikkilangan masala maqsad funksiyasidan katta;

V) berilgan masala maqsad funksiyasi, ikkilangan masala maqsad funksiyasidan kichik.

10. Berilgan va ikkilangan masalalar optimal yechimga ega bo'ladi agar ular ...

A) mumkin bo'lgan yechimga ega bo'lsa;

B) berilga masala mumkin bo'lgan yechimga ega bo'lsa;

C) ikkilangan masala mumkin bo'lgan yechimga ega bo'lsa;

V) mumkin bo'lgan yechimlar sohasi chegaralanmagan bo'lsa.

11. Agar berilgan va ikkilangan masalalar mumkin bo'lgan yechimga ega bo'lsa, u holda ....

A) berilgan va ikkilangan masalalar optimal yechimga ega bo'ladi;

B) berilgan masala optimal yechimga ega bo'ladi;

C) ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'ladi;

V) berilgan va ikkilangan masalalar optimal yechimga ega bo'lmaydi.

12. Berilgan masaladagi matritsa...

A) ikkilangan masalada transponirlangan matritsa bo'ladi;

B) ikkilangan masalada teskari matritsa bo'ladi;

C) ikkilangan masalada kvadrat matritsa bo'ladi;

V) ikkilangan masalada, matritsaning bir nechta satridan iborat.

13. Berilgan masala maqsad funksiyasining maksimumida, uning chegaraviy shartlarining tengsizlik belgisi quyidagicha bo'ladi:

A) kichik yoki teng;

B) katta yoki teng;

C) qat'iy katta;

V) qat'iy kichik.

14. Chiziqli programmalashtirishning qanday masalalariga sun'iy bazis usulini qo'llash mumkin?

A) masalada birlik matritsa mavjud emas;

B) masalada birlik matritsa mavjud;

C) masalada noma'lumlarning manfiy bo'lmaslik sharti bo'lsa;

D) barcha ekstremal masalalarda.

15. Berilgan masala, maqsad funksiyasi noma'lumlari oldidagi koeffitsientlar...

A) ikkilangan masala, chegaraviy shartlari sistemasining ozod hadlaridan iborat;

B) ikkilangan masala, maqsad funksiyasi noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan iborat;

C) ikkilangan masala matritsasining bitta satridan iborat;

D) hamma javoblar to'g'ri.

Nazorat uchun savollar

1. Qanday chiziqli programmalashtirish masalasiga, ikkilangan masala tuzish mumkin? Ularning o'ziga xos alohida tomonlarini tushuntiring.

2. Berilgan va ikkilangan masalalar orasidagi qanday bog'lanish mavjud?

3. Berilgan va ikkilangan masalalarning matematik modellari qanday bo'ladi?

4. Qanday hollarda ikkilangan masalalar optimal yechimga ega bo'lmaydi?

5. Simmetrik bo'lmagan ikkilangan masala deganda nimani tushunasiz?

6. Simmetrik bo'lgan ikkilangan masala deganda nimani tushunasiz?

7. Ikkilangan simpleks usul.

8. Simmetrik bo'lmagan va simmetrik bo'lgan ikkilangan masalalarni biridan ikkinchisini keltirib chiqarish mumkinmi?

9. Optimal yechimda, simmetrik bo'lmagan va simmetrik bo'lgan ikkilangan masalalarning maqsad funksiyalari orasidagi bog'lanish qanday bo'ladi?

10. Ikkilangan simpleks usul algoritmini tushuntiring.

11. Simmetrik bo'lmagan masala maksimum masala bo'lsa, ikkilangan masala chegaraviy shartlaridagi tengsizliklar qanday bo'ladi?

12. Simmetrik bo'lmagan masala minimum masala bo'lsa, ikkilangan masala qanday bo'ladi? Uning maqsad funksiyasichi?

13. Ikkilangan simpleks usul uchun tuzilgan jadvalda, ikkilangan masalaning optimal yechimlari qanday aniqlanadi?

14. Butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasi, chiziqli programmalashtirish masalasidan qanday farq qiladi?

15. Gomori usuli.

III bob. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH

3.1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi

Ko'pgina iqtisodiy vaziyatlar chiziqli modellar bilan ifodalanmaydi. Hayotda chiziqli modellar kam uchraydi. Masalan, x birlik tovarni p narxdan sotib px daromadni hosil qilar edik. Daromadning narxga to'g'ri proporsional ekanligi kelib chiqadi. Lekin hayotda narx talabga bog'liq ravishda o'zgarib, ularni sotish hajmi talab va tovar narxiga bog'liq bo'ladi. Sotish hajmi narxga bog'liq bo'lgan $f(p)$funksiyadan iborat bo'lsa, u holda daromad $p\cdot f(p)$ga teng bo'lib, bu esa p o'zgaruvchiga nisbatan chiziqsiz funksiyadan iborat bo'ladi.

Iqtisodiyotda korxona faoliyati natijalarining o'sishi yoki kamayishi, resurslarning o'zgarishiga proporsional ravishda o'zgarmaydi, masalan, tovarlarning ko'pligidan talabning kamayishi, buning asosida esa, har bir tovarning sotilishi avvalgisidan ham mushkullashib boradi.

Iqtisodiyot masalalari ko'p faktorlarga asoslangani uchun, ularning o'zgarish qonuniyatlari chiziqsiz modellarga olib keladi. Shuning uchun chiziqsiz modellarni yechish zarurati kelib chiqadi.

Chiziqsiz programmalashtirish – matematik programmalashtirishning bir bo'limi bo'lib, masalalarning ekstremal qiymatini aniqlashning nazariyasi va yechish usullaridan iborat hamda, maqsad funksiya yoki chegaraviy shartlar (yoki ikkalasi ham birgalikda) izlanayotgan miqdorning chiziqsiz ekanligiga asoslanadi.

Chiziqsiz programmalashtirishning umumiy matematik modeli: shunday $\bar{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorni topish kerakki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirib:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)=b_i, \quad i=\overline{1, m_1};$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\le b_i, \quad i=\overline{m_1+1, m_2};$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)=b_i, \quad i=\overline{m_2+1, m},$$

maqsad funksiyasiga:

$$L(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

ekstremum qiymat bersin. Bunda x_j, $j=\overline{1,n}$ o'zgaruvchilar; L, f, g_i $i=\overline{1,m}$ - berilgan funksiyalar; b_i - fiksirlangan qiymatlar.

Chiziqsiz programmalashtirishning, chiziqli programmalashtirishdan farqi shundaki, bunda yagona yechish usuli mavjud emas. Maqsad funksiyaning va chegaraviy shartlarga asoslanib maxsus yechish usullari ishlab chiqilgan. Bularga, Lagranjning ko'paytuvchilar usuli, kvadratik va qavariq programmalashtirish, gradientlar usuli, taqribiy yechish usuli, grafik usullar mavjud.

Chiziqsiz programmalashtirishda maqsad funksiyaning global maksimum yoki minimumini aniqlash talab etiladi. Funksiyaning *global maksimumi* (*minimumi*), bu uning lokal maksimumlari orasidan eng kattasi (eng kichigi), yoki yopiq soha chegarasidagi funksiyaning maksimum (minimum) qiymatidan iborat.

Ta'rif. S to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning, $x_0 \in S$ nuqtada global minimumga ega bo'lishi uchun, quyidagi tengsizlikning

$$f(x_0) \le f(x), \quad x \in S,$$

bajarilishi zarur va yetarli.

3.2. Chiziqsiz programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining geometrik talqini, uni tekislikda geometrik tasvirlashdan iborat. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi, chiziqli programmalashtirish masalasiga nisbatan kengroqdir. Chiziqsiz programmalashtirish masalasida, chegaraviy shartlari chiziqli, maqsad funksiyasi chiziqsiz bo'lgan holdagi natijalar ko'p olingan. Bunday holda ham, masalaning optimal yechimi juda tor maqsad funksiyalari uchun, olingan. Chiziqli programmalashtirish masalasida ekstremum nuqtalar, yechimlar ko'pburchakning uchlarida bo'lsa, chiziqsiz programmalashtirish masalasida bu optimal yechimlar sohaning ichida, qirralarida yoki uchlarida bo'lishi mumkin. Shunga asoslanib, chiziqli programmalashtirish masalasi usullarini qo'llash uchun, chiziqsiz masalada, maqsad funksiyasiga qo'shimcha chegaralar qo'yish talab etiladi.

Agar chiziqsiz masalada chegaraviy shartlar ham chiziqsiz bo'lsa, optimal yechimni aniqlash yanada qiyinlashadi. Bunday holda, optimal yechimni aniqlash uchun maqsad funksiya va chegaraviy shartlardagi funksiyalar ma'lum bir xossalarga ega bo'lishi zarur.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining optimal yechimini grafik usulda topish. Masala ikki o'zgaruvchidan iborat bo'lganda, uni grafik usulda yechish mumkin. Grafik usulda masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasini geometrik tasviri va bu sohada maqsad funksiyaning ekstremumini aniqlashdan iborat. Lekin, mumkin bo'lgan yechimlar sohasi shakli ixtiyoriy shaklda, hatto ikkita va undan ko'p qismlardan iborat bo'lishi ham mumkin.

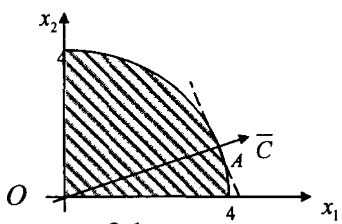
Grafik usulda masalalar yechish.

Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

maqsad funksiyaning $L(\bar{x}) = 2x_1 + x_2$ global ekstremumlarini aniqlang.

Yechish. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasi – radiusi 4 teng bo'lgan, birinchi chorakda yotgan, doiraning bir qismidan iborat (3.1 rasm).



3.1-rasm.

Maqsad funksiyaning sath chizig'i, burchak koeffitsiyentlari -2 ga teng bo'lgan, parallel to'g'ri chiziqlardan iborat. Global minimum $O(0,0)$ nuqtada, global maksimum esa – sath chizig'i va aylana tutashgan A nuqtada yotadi. A nuqta orqali sath chizig'iga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti ½ ga teng, tenglamasi esa $x_2 = x_1/2$ dan iborat bo'lib, u koordinatalar boshidan o'tadi.

Ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_2 = x_1/2. \end{cases}$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$x_1 = 8\sqrt{5}/5,\ x_2 = 4\sqrt{5}/5,\ \max L(\bar{x}) = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}.$$

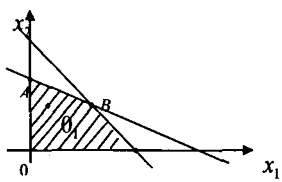
Demak, global minimum nolga teng bo'lib, u $O(0, 0)$ nuqtada erishadi. Global maksimum $4\sqrt{5}$ ga teng bo'lib, u $A\left(8\sqrt{5}/5, 4\sqrt{5}/5\right)$ nuqtada erishadi.

Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \le 9, \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

maqsad funksiyaning $L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ global ekstremumini toping.

Yechish. Bu masalada mumkin bo'lgan yechimlar to'plami $OABD$ ko'pburchakdan iborat (3.2-rasm). Sath chizig'i, markazi O_1 nuqtada bo'lgan aylanadan iborat. Maqsad funksiya maksimal nuqtasiga $D(9;\ 0)$ nuqtada, minimal qiymatiga $O_1(2;3)$ nuqtada erishadi.



3.2-rasm.

Bunda $L(D)=(9-2)^2+(0-3)^2=58$.

Demak, global maksimum $\max L(D)=58$, minimum nuqtasi esa $\min L(D)=0$ teng ekan.

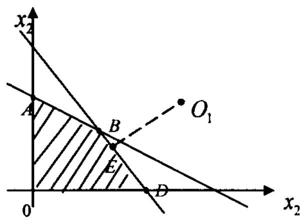
Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$2x_1+3x_2\le 14,$

$3x_1+2x_2\le 15 \quad x_1\ge 0, x_2\ge 0$

$L=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2$ funksiyaning global ekstremumini toping.

Yechish. Bu masalada mumkin bo'lgan yechimlar to'plami *OABD* ko'pburchakdan iborat (3.3 rasm). Sath chizig'i, markazi $O_1(6;3)$ nuqtada bo'lgan aylanadan iborat. Global maksimum O_1 nuqtadan eng uzoq bo'lgan $O(0;0)$ nuqtada yotadi. Global minimum esa, $3x_1+2x_2=15$ to'g'ri chiziq va unga O_1 nuqtadan o'tkazilgan perpendikular kesishadigan, E nuqtadan iborat.



3.3 rasm

E nuqtaning koordinatalari quyidagicha topiladi: $3x_1+2x_2=15$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti -3/2 ga teng. Shuning uchun O_1E perpendikularning burchak koeffitsiyenti 2/3 ga teng. O_1 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti 2/3 ga teng va uning tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_2-3=\frac{2}{3}(x_1+6)\text{, bundan } 2x_1-3x_2=3\,.$$

Tenglamalar sistemasidan

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15 \end{cases}$$

E nuqtaning koordinatalari topiladi: $(x_1; x_2) = (51/13; 21/13)$, bunda $\min L(E) = 1053/169$.

Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$x_1^2 + x_2^2 \le 16,\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ funksiyaning global ekstremumini aniqlang.

Yechish. Masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi birinchi chorakda yotuvchi, radiusi 4 ga teng bo'lgan doiradan iborat (3.4 rasm). Sath chizig'i, markazi $O_1(2;1)$ nuqtada bo'lgan aylanalardan iborat.

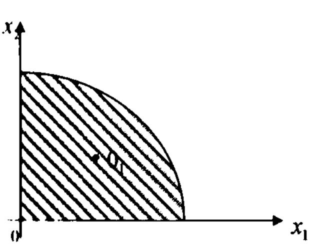
Funksiya global minimumga O_1 nuqtada

$\min L = (2-2)^2 + (1-1)^2 = 0$,

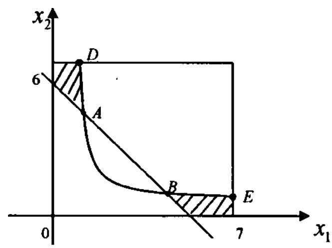
global maksimumga esa A(0; 4) nuqtada erishadi, ya'ni

$\max L = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 13.$

Demak, funksiya global minimumga $O_1(2;1)$ nuqtada erishib nolga teng, global maksimumga esa A(0; 4) nuqtada erishib 17 ga teng bo'lar ekan.



3.4 -rasm



3.5-rasm

Misol. *1.* $x_1^2 + x_2^2$ funksiyaning global ekstremumlarini quyidagi boshlang'ich shartlarda aniqlang:

$$x_1x_2 \le 4,\ \ x_1+x_2 \ge 5,\ \ x_1 \le 7, x_2 \le 6,\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Yechish. Ko'rilayotgan masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi qavariq bo'lmasdan, u ikki qismdan iborat (19.5-rasm). Sath chizig'i, markazi $O(0;\,0)$ nuqtada bo'lgan aylanalardan iborat.

Quyidagi sistemani yechib A va B nuqtalarning koordinatalarini topamiz:

$$x_1x_2 = 4,\ \ x_1+x_2 = 5.$$

Bundan $A(1;\,4)$, $B\,(4;\,1)$ ni hosil qilamiz. Bu nuqtalarda maqsad funksiya global minimumga erishadi, ya'ni:

$$\min L(1,4) = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 4^2 = 17,$$

$$\min L(4,1) = x_1^2 + x_2^2 = 4^2 + 1^2 = 17.$$

Demak, $A(1;\,4)$, $B\,(4;\,1)$ nuqtalarda, maqsad funksiyaning global minimumi 17 ga teng bo'lar ekan. Quyidagi sistemani yechib D va E nuqtalarning koordinatalarini topamiz:

$$\begin{cases} x_1x_2 = 4, \\ x_2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1x_2 = 4, \\ x_1 = 7 \end{cases}$$

Bundan esa $D(2/3,6)$ va $E(7;\,4/7)$ nuqtalarni topamiz. Bu nuqtalarning har birida maqsad funksiyaning qiymatlarini aniqlaymiz:

$$L(D) = x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 6^2 = \frac{328}{9},$$

$$L(E) = x_1^2 + x_2^2 = 7^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{2417}{49}.$$

Demak, maqsad funksiya ikkita global ekstremumga ega bo'lib, u $\min L(D) = 17$, global maksimumga esa $E(7;4/7)$ nuqtada erishib $\max L(E) = \frac{2417}{49}$ bo'lar ekan.

3.3. Shartsiz va shartli chiziqsiz programmalashtirish masalalari va ularni yechish usullari

Shartsiz chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uni yechish usuli. Agar chiziqsiz programmalashtirish masalasida

$$f(x_1,x_2,...,x_n)\to \max \qquad (3.1)$$

noma'lum o'zgaruvchilarga shartlar qo'yilmasa, u holda bu masala *shartsiz chiziqsiz programmalashtirish masalasi* deyiladi. Bu masala vektor ko'rinishda quyidagicha bo'ladi:

$$f(X)\to \max \qquad (3.2)$$

ya'ni, $X\in R^n$. Bu masala *chiziqsiz programmalashtirishning shartsiz maksimal masalasi* deyiladi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi. $z=f(x,y)$ funksiya $\{M\}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $M_0(x_0,y_0)$ shu to'plamdagi biror nuqta bo'lsin.

Ta'rif. $z=f(x,y)$ funksiya $\{M\}$ to'plamdagi M_0 nuqtada lokal maksimumga (minimumga) ega bo'ladi, agar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning atrofidagi barcha $M(x,y)$ nuqtalar uchun $f(M)\le f(M_0)\,(f(M)\ge f(M_0))$ shart bajarilsa.

Uch va undan ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham lokal ekstremum, shu kabi aniqlanadi.

Lokal ekstremum ta'rifiga asosan, funksiyaning to'la orttirmasi M_0 nuqtaning atrofida quyidagi shartlardan birini qanoatlantiradi:

agar M_0 lokal maksimum nuqta bo'lsa, u holda $\Delta z\le 0$;

agar M_0 lokal minimum nuqta bo'lsa, u holda $\Delta z\le 0$.

Lokal ekstremum mavjudligining zaruriy shartini keltiramiz.

Teorema. Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada lokal ekstremum va birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaning barcha birinchi tartibli xususiy hosilalari M_0 nuqtada nolga teng bo'ladi.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=0. \qquad (3.3)$$

Uch va undan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham lokal ekstremum mavjudligining zaruriy sharti (3.3) kabi aniqlanadi, ya’ni barcha birinchi tartibli xususiy hosilalar M_0 nuqtada nolga teng bo‘ladi.

Shuni qayd etish kerakki, (3.3) shart ekstremum mavjudligining yetarli sharti bo‘la olmaydi. Masalan, $z=x^2-y^2$ funksiyaning xususiy hosilalari $O(0,\ 0)$ nuqtada nolga teng, lekin funksiya bu nuqtada ekstremumga ega emas, ya’ni $f(0,0)=0$, O nuqtaning atrofida musbat, hamda manfiy qiymatlar qabul qiladi.

(3.3) shartni qanoatlantiradigan nuqtalar *ekstremum nuqtalar*, yoki *statsionar nuqtalar* deyiladi.

Funksiya ekstremumlarini topishga misollar keltiramiz.

Misol. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$

Yechish. (3.3) shartga asosan $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ va $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, bundan ikki noma’lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2+y^2+xy-4x-5y\right)'_x=2x+y-4=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+y^2+xy-4x-5y\right)'_y=2y+x-5=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=4\\2y+x=5\end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi $x=1$, $u=2$ bo‘lib, (1, 2) koordinatali nuqta berilgan ikki o‘zgaruvchili funksiyaning statsionar nuqtasi bo‘ladi.

Misol. $u=x^2+2x+y^2+2xy+z^2+zy$.

Yechish. (3.3) shartga asosan funksiyaning uchta birinchi tartibli xususiy hosilalarini nolga tenglashtirib, bundan uch noma’lumli uchta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2+2x+y^2+2xy+z^2+zy\right)'_x = 2x+2+2y=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2+2x+y^2+2xy+z^2+zy\right)'_y = 2y+2x+z=0. \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2+2x+y^2+2xy+z^2+zy\right)'_z = 2z+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+2y+z=0 \\ 2z+y=0. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi $(3,-4,2)$ funksiyaning yagona statsionar nuqtasini beradi.

Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti. Amaliyotda ko'p uchraydigan $z=f(x,y)$ funksiyani ko'rib chiqamiz. Biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni belgilaymiz: $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$.

Lokal ekstremum mavjudligining yetarlilik shartini kiritamiz.

Teorema. $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib, uning atrofidagi barcha nuqtalardagi ikkinchi tartibli xususiy hosilalari $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ uzluksiz bo'lsin va quyidagi determinantni kiritamiz: $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$. U holda ushbu hollar bo'ladi

1. Agar $\Delta>0$ bo'lsa, u holda $z=f(x,y)$ funksiya M_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo'ladi: $A<0$ da minimumga, $A>0$ da esa maksimumga erishadi.

2. Agar $\Delta<0$ bo'lsa, u holda $z=f(x,y)$ funksiya M_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lmaydi.

Funksiya ekstremumini tekshirayotganda quyidagi sxema tavsiya etiladi.

1. Xususiy hosilalar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ aniqlanadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 - y^3 - 3xy\right)'_x = 3x^2-3y=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 - y^3 - 3xy\right)'_y = -3y^2-3x=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y=0 \\ x+y^2=0 \end{cases}$$

yechimlari esa (0,0), (-1,1) koordinatali ikkita nuqtadan iborat. Ikkinchi tartibli hosilalarni aniqlaymiz:

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6y$ bundan esa $\Delta=AC-B^2=6x\cdot(-6y)-(-3)^2=-36xy-9$. (0,0) nuqtada $\Delta<0$ bo'lgani uchun funksiya bu nuqtada lokal ekstremumga ega emas. (-1,1) nuqtada $\Delta=AC-B^2=-36\cdot(-1)\cdot 1-(-3)^2=27>0$, ya'ni funksiya bu nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lib, $A<0$ bo'lgani uchun bu maksimum nuqtadir. Funksiyaning bu nuqtadagi qiymati $\max z=f(-1,1)=1$ ga teng bo'lar ekan.

Misol. Funksiyaning ekstremumini aniqlang $z=3x^2y-x^3-y^4$.

Yechish. Funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini aniqlab, uning stasionar nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=6xy-3x^2=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2-4y^3=0;\end{cases}\quad \text{yoki}\quad \begin{cases}x(2y-x)=0,\\ 3x^2-4y^3=0.\end{cases}$$

Bundan, funksiyaning stasionar nuqtalari quyidagicha bo'ladi: (0,0) va (6,3).

Bu nuqtalar uchun ekstremum mavjudligining yetarli sharti bajarilishini tekshiramiz. Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini aniqlaymiz

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6y-6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-12y^2.$$

(6,3) nuqta uchun: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(6,3)=6y-6x,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(6,3)=36,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(6,3)=-108$

Determinant $\Delta=A\cdot C-B^2=18\cdot 108-36^2=3\cdot 18\cdot 36-2\cdot 18\cdot 36=18\cdot 36>0$, demak (6,3) nuqta berilgan funksiyaning ekstremum nuqtasi ekan. Bundan esa $A<0$ bo'lgani uchun, (6,3) nuqta berilgan funksiyaning maksimum nuqtasi ekan. Bundan esa

$\max z(6,3)=\left(3x^2y-x^3-y^4\right)\Big|_{(x,y)=(6,3)}=\left(3\cdot 6^2\cdot 3-6^3-3^4\right)=27$ ekanligi kelib chiqadi:

Shu kabi (0,0) nuqta uchun:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=0,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=0,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=0.$$

Bu holda determinant $\Delta=A\cdot C-B^2=0$, shuning uchun bu nuqta qo'shimcha tekshirishlarni talab etadi.

Misol. Funksiyaning ekstremumini aniqlang.

$z=x^2+y^2+xy-4x-5y$.

Yechish. Funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini aniqlab, uning

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$ tenglamalar sistemasi yechilib, funksiyaning kritik nuqtalari aniqlanadi.

2. Kritik nuqtalarda, funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari aniqlanib, yetarlilik shartidan foydalanib ekstremum nuqtalar aniqlanadi.

Misol. $z=x^3-y^3-3xy$ funksiyaning lokal ekstremumlari va uning qiymatini aniqlang.

Yechish. Quyidagi shartlardan $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ funksiyaning stasionar nuqtalarni aniqlaymiz. Ikki noma'lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

statsionar nuqtalarini topamiz $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-4\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y-4=0\\ x+2y-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

Bundan, funksiyaning stasionar nuqtasi $M(1;2)$ bo'lar ekan.

Bu $M(1;2)$ nuqta uchun, funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini aniqlaymiz

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,2)=2,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,2)=1,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,2)=2$. U holda

$\Delta=A\cdot C-B^2=3>0$. Bundan esa $A>0$ bo'lganligi uchun $M(1;2)$ nuqta berilgan funksiyaning minimum nuqtasi bo'lar ekan, ya'ni

$$\min z=\left(x^2+y^2+xy-4x-5y\right)\Big|_{(x,y)=(1,2)}=1^2+2^2+1\cdot2-4\cdot1-5\cdot2=-7.$$

n o'zgaruvchili funksiya uchun ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti. Agar $X_0=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqta n o'zgaruvchili $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning kritik nuqtasi, hamda bu nuqtaning atrofida ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va $X_0=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtada uzluksiz bo'lib va

$$H(X_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Gesse matritsasi bo'lsa, u holda:

– agar $H(X_0)$ musbat aniqlangan bo'lsa, u holda $X_0=(x_1,x_2,...,x_n)$-nuqta z funksiyaning minimumi;

– agar $H(X_0)$ manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda $X_0=(x_1,x_2,...,x_n)$-nuqta z funksiyaning maksimumi;

– agar $H(X_0)$ ishorasi aniqlanmagan bo'lsa, u holda z funksiya $X_0=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Silvestr kriteriyasi. Kvadratik forma quyidagi matritsa ko'rinishida berilgan bo'lsin.

Bu forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun, uning barcha bosh minorlarining musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu forma manfiy aniqlangan deyiladi, agar uning barcha bosh minorlarining ishoralari manfiy ishoradan boshlab, ketma-ket almashinib tursa.

Misol. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping $L(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

Yechish. Quyidagi tenglamalar sistemasidan stasionar nuqtalarni topamiz:

Bundan statsionar nuqta ekanligi kelib chiqadi. Bu nuqtada funksiyaning 2-tartibli xususiy hosilalarini hisoblab, Gesse matritsasi tuziladi.

$$H(X_0)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gesse matritsasining bosh minorlari hisoblanadi:

$$\Delta_1=a_{11}=-2,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=4,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-6\ .$$

Ular ishoralari (manfiy ishoradan boshlab) o'zgaruvchi ketma-ketlikni hosil qiladi. Bu esa Gesse matritsasining manfiy aniqlanganligini bildiradi. Demak, $X_0=(1/2, 2/3, 4/3)$ – nuqta $L(\bar{x})$ funksiyaning lokal maksimum nuqtasi ekan, ya'ni;

$$\max L(X_0)=\left(x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)\Big|_{(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)}=$$

$$\frac{1}{2}+2\cdot\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{19}{12}.$$

Demak, funksiyaning lokal maksimumi quyidagicha bo'lar ekan:

$$\max L\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{19}{12}.$$

Shartli chiziqsiz programmalashtirish masalasi. Lagranj ko'paytuvchilar usuli. Chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin.

$$L(\bar{x})=f(x_1,\ x_2,...,x_n)\to \max(\min) \qquad (3.4)$$

$$g_i(x_1,\ x_2,...,x_n)=0,\quad i=\overline{1,m}. \qquad (3.5)$$

Faraz qilamiz, funksiyalar $f(x_1,\ x_2,...,x_n)$, $g_i(x_1,\ x_2,...,x_n)=0,\ i=\overline{1,m}$ o'zlarining uzluksiz birinchi tartibli hosilalariga ega bo'lsin.

Chegaraviy masalalar tenglamalar ko'rinishida berilgani uchun, masalani yechish uchun, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumini topish usulidan foydalanamiz.

Masalani yechish uchun Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (3.6)$$

So'ngra, uning birinchi tartibli xususiy hosilalari aniqlanadi:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} \left(j = \overline{1,n}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \left(i = \overline{1,m}\right)$$

Bu hosilalarni nolga tenglashtirib quyidagi sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, & \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, & \left(i = \overline{1,m}\right) \end{cases} \qquad (3.7)$$

Sistemani yechib, $L(\bar{x})$ funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar to'plami topiladi.

(3.6) funksiya, *Lagranj funksiyasi*, λ_i – sonlar *Lagranj ko'paytuvchilari* deyiladi. Agar $L(\bar{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda shunday $\Lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0)$ vektor topiladiki, bunda $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0)$ nuqta (3.7) sistemaning yechimi bo'ladi.

Demak, (3.7) sistemani yechib, $L(\bar{x})$ funksiyaga ekstremal qiymatlar beruvchi nuqtalar to'plami hosil qilinadi. Bu nuqtalardan foydalanib funksiyaning global ekstremum qiymatlarini aniqlash mumkin.

Lagranj $F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ funksiyasining ikkinchi tartibli to'la differensiali quyidagicha beriladi

$$d^2F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2\sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \qquad (3.8)$$

Bu formuladagi dx^2 yozuv, dx ning kvadratini ifodalaydi, ya'ni $dx^2 = (dx)^2$.

d^2F formulaning ishorasini aniqlash uchun, dx va dy ifodalar orasidagi munosabatni ham aniqlash zarur. Bu (3.8) formuladan ko'rinib turibdiki, $\lambda_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalar mavjud emas. Stasionar nuqtada $g_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ funksiyaning to'la differensiali nolga teng:

$$dg_i=\frac{\partial g_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g_i}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial g_i}{\partial x_n}dx_n=0\left(i=\overline{1,m}\right).$$

Lagranj ko'paytuvchilar usuli asosida masalani yechish algoritmi:

1. Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right)=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$$

2. Lagranj funksiyasidan barcha o'zgaruvchilar bo'yicha (3.7) xususiy hosila topilib, nolga tenglashtiriladi. Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasini yechish natijasida, barcha stasionar nuqtalar topiladi.

3. Lagranj funksiyasining ikkinchi tartibli to'la differensiali tuziladi va uning ishorasi har bir stasionar nuqtada aniqlanadi. Agar $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ stasionar nuqtada $d^2F<0$ shart bajarilsa, bu stasionar nuqta lokal maksimum, aksincha esa, ya'ni $d^2F>0$ bo'lsa, lokal minimum bo'ladi.

Misol. Funksiyaning shartli ekstremum nuqtasini toping:

$f\left(x\right)=2x_1x_2-x_2^2$

chegaraviy shartda:

$$x_1+x_2=5$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi.

$$F\left(x_1,x_2,\lambda\right)=2x_1x_2-x_2^2+\lambda\left(x_1+x_2-5\right).$$

Lagranj funksiyasining xususiy hosilalarini aniqlaymiz.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=2x_2+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2x_1-2x_2+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+x_2-5=0.\end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasining yechimi $\lambda=\frac{10}{3}$ da $\bar{x}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini aniqlaymiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=(2x_2+\lambda)'_{x_1}=0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=(2x_1-2x_2+\lambda)'_{x_2}=-2, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=(2x_2+\lambda)'_{x_2}=2. \end{cases}$$

Bu statsionar $\bar{x}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$ nuqtani ekstremumga tekshiramiz:

$$d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\cdot dx_1^2+\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\cdot dx_2^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}\cdot dx_1dx_2=0\cdot dx_1^2-2\cdot dx_2^2+4\cdot dx_1dx_2=-2dx_2^2+4dx_1dx_2.$$

Endi d^2F ning ishorasini aniqlash uchun statsionar nuqtalarning xossasidan foydalanamiz, $g=x_1+x_2-5$ belgilash olib:

$$d\varphi=\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2=(x_1+x_2-5)'_{x_1}dx_1+(x_1+x_2-5)'_{x2}dx_2=dx_1+dx_2=0.$$

Demak, $dx_1=-dx_2$, bundan esa

$$d^2F=-2dx_2^2+4(-dx_2)dx_2=-6dx_2^2<0.$$

Demak, $\bar{x}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$ nuqta berilgan funksiyaning maksimum nuqtasi ekan

$$\max L(\bar{x})=2\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{3}.$$

Masalani ikkinchi usul bilan yechamiz.

Ushbu simmetrik matritsadan foydalanib, masalaning optimal yechimini aniqlaymiz.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Agar statsionar nuqtada $|A|<0$ bo'lsa, berilgan funksiya bu nuqtada minimumga erishadi, aksincha esa, ya'ni $|A|>0$ bo'lsa, maksimumga erishadi.

A matritsani, $\bar{x}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$ nuqta uchun yozib olamiz

Bunda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}=(x_1+x_2-5)'_{x_1}=1, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}=(x_1+x_2-5)'_{x_2}=1. \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=6>0.$$

Demak, $|A|=6>0$ bo'lgani uchun, $\bar{x}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$ nuqta berilgan funksiyaning maksimum nuqtasi bo'lar ekan, bundan esa

$$\max L(\bar{x})=2\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{3}.$$

Misol. Un kombinati unni ikki turda sotadi: do'konlarga chakana savdo orqali va savdo agentlari orqali ulgurji savdo tarzida sotadi. x_1 kg unni magazinlarda sotganda x_1^2 pul birligi miqdorida xarajat bo'ladi, x_2 kg unni savdo agentlari orqali ulgurji savdo tarzida sotganda x_2^2 pul birligi miqdorida xarajat bo'ladi.

Agar har sutkada 5000 kg un sotishga qo'yilsa, uni sotish xarajati minimal bo'lishi uchun, qancha kilogramm unni, qanday turda sotishni aniqlash talab etiladi.

Yechish. Masalaning matematik modeli tuziladi. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$x_1+x_2=5000, \quad x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

xarajatlarning minimum yig'indisini aniqlash talab etilsin:

$$L(x)=x_1^2+x_2^2.$$

Matematik modelni yechish uchun Lagranj ko'paytuvchilar usulidan foydalaniladi. Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5000).$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2 noma'lum o'zgaruvchilar va λ parametr bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5000 = 0 \end{cases}$$

bunda $\lambda = -5000,\ x_1 = 2500\ кг,\ x_2 = 2500\ кг$.

$L(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 = 2500^2 + 2500^2 = 12500000$ so'm.

O'zgaruvchi x_1 ga 2500 dan katta va kichik qiymatlar berib, ta'rifga asosan $L(\bar{x})$ ning ekstremal qiymati minimum ekanligi aniqlanadi.

Demak, sutka davomida, xarajatlarning minimalligini ta'minlash uchun magazin va savdo agentlari orqali 2500 kg unni sotish kerak ekan. Bunda, sotish xarajatlari 12 500 000 pul birligidan iborat bo'lar ekan.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping.

$$L(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min(\max)$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 4) + \lambda_2(2x_1 - 3x_2 - 12)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma'lum o'zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 2x_1 - 3x_2 - 12 = 0 \end{cases}$$

Bundan $(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{72}{19},-\dfrac{28}{19},\dfrac{32}{19}\right)$, $\min L(\bar{x}) = 19{,}37$.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping.

$$L(\bar{x}) = x_1^2 - 3x_2 x_3$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2) = x_1^2 - 3x_2 x_3 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 8) + \lambda_2(x_2 - x_3 - 4)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma'lum o'zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = -3x_3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = -3x_2 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x_2 - x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Bundan

(x_1, x_2, x_3) $(-12,10,6) \Rightarrow \min L(\bar{x}) = x_1^2 - 3x_2 x_3 = 36$.

Statsionar nuqtani ekstremumga tekshiramiz. Soddalik uchun o'zgaruvchilarni yo'qotish orqali ikkita tenglamadan iborat boshlang'ich shartni, bitta tenglamadan iborat boshlang'ich shartga o'zgartiramiz. Buning uchun boshlang'ich shartdagi birinchi tenglamadan x_2 o'zgaruvchini topib, ikkinchi tenglamaga va maqsad funksiyasiga qo'ysak quyidagi holat bo'ladi.

$$\begin{cases} L(\bar{x}) = x_1^2 - 3x_2 x_3 \\ x_1 = 8 - 2x_2 \\ x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\bar{x}) = (8 - 2x_2)^2 - 3x_2 x_3 \\ x_1 = 8 - 2x_2 \\ x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\bar{x}) = 4x_2^2 - 32x_2 - 3x_2x_3 + 64 \\ x_1 = 8 - 2x_2 \\ x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F(x_1, x_3, \lambda) = 4x_2^2 - 32x_2 - 3x_2x_3 + 64 + \lambda(x_2 - x_3 - 4)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_3 noma'lum o'zgaruvchilar va λ parametr bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8x_2 - 32 - 3x_3 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = -3x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_2 - x_3 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x_2 - 32 - 3x_3 + \lambda = 0 \\ -3x_2 - \lambda = 0 \\ x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -30 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 6 \end{cases},$$

Bundan $M(10,6)$ statsionar nuqtani aniqlaymiz. Bu nuqtani ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilani aniqlaymiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = (8x_2 - 32 - 3x_3 + \lambda)'_{x_2} = 8 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = (-3x_2 - \lambda)'_{x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = (8x_2 - 32 - 3x_3 + \lambda)'_{x_3} = -3 \end{cases}$$

Lagranj funksiyasining to'la differensialini aniqlaymiz:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \cdot dx_2^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \cdot dx_3^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \cdot dx_2 dx_3 = 8 \cdot dx_2^2 + 0 \cdot dx_3^2 - 6 \cdot dx_2 dx_3 = 8 \cdot dx_2^2 - 6 \cdot dx_2 dx_3$$

Endi d^2F ning ishorasini aniqlash uchun statsionar nuqtalarning xossasidan foydalanamiz, $\varphi = x_2 - x_3 - 4$ belgilash olib

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 = (x_2 - x_3 - 4)'_{x_2}dx_2 + (x_2 - x_3 - 4)'_{x_3}dx_3 = dx_2 - dx_3 = 0 \Rightarrow dx_2 = dx_3 .$$

Demak, $dx_2 = dx_3$, bundan esa

$$d^2F = 8\cdot dx_2^2 - 6\cdot dx_2 dx_3 = 8\cdot dx_2^2 - 6\cdot dx_2 dx_2 = 2dx_2^2 > 0$$

Demak, statsionar $M(10,6)$ nuqta maqsad funksiyasining minimum nuqtasi bo'lar ekan.

$$\min L(\bar{x}) = L(\bar{x}) = 4x_2^2 - 32x_2 - 3x_2x_3 + 64 = 4(10)^2 - 32\cdot 10 - 3\cdot 10\cdot 6 + 64 = 36 .$$

Bundan esa berilgan masalaning ekstremal qiymati quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{cases} L(\bar{x}) = 4x_2^2 - 32x_2 - 3x_2x_3 + 64 \\ x_1 = 8 - 2x_2 \\ x_2 - x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) = (-12, 10, 6) \\ \min L(\bar{x}) = 4x_2^2 - 32x_2 - 3x_2x_3 + 64 = 36 \end{cases}$$

n o'zgaruvchili funksiyalar uchun Lagranjning ko'paytuvchilar usuli. Aytaylik n o'zgaruvchili $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya va m ta chegaraviy shartlar berilgan bo'lsin.

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Lagranj funksiyani tuzamiz.

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_m\varphi_m .$$

Lagranj funksiyasining barcha noma'lumlari bo'yicha xususiy hosila olib ularni nolga tenglashtirib, stasionar nuqtalarni aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, & (i = \overline{1,n}) \\ \varphi_j = 0, & (j = \overline{1,m}) \end{cases}.$$

Yuqoridagi kabi to'la differensial d^2F ning ishorasini aniqlaymiz. Agar aniqlangan statsionar nuqtada $d^2F < 0$ shart bajarilsa, bu nuqta shartli maksimum, aksincha esa, ya'ni $d^2F>0$ bo'lsa, shartli minimum bo'ladi. Buni boshqacha usulda, ya'ni quyidagi matritsadan foydalanib ham aniqlashimiz mumkin.

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

A matritsadagi

$$H(X)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n\partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

matritsa, Gesse matritsasidir.

Quyidagi qoidani kiritamiz:

Agar A matrisaning burchak minorlari $H_{2m+1}, H_{2m+2}, ..., H_{m+n}$ ishoralari $(-1)^m$ ning ishoralari bilan mos bo'lsa, u holda bu stasionar nuqta $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi.

Agar A matrisaning burchak minorlari $H_{2m+1}, H_{2m+2}, ..., H_{m+n}$ ishoralari almashinib tursa va H_{2m+1} minorning ishorasi $(-1)^{m+1}$ ning ishoralari bilan mos tushsa, u holda bu statsionar nuqta $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo'ladi.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping

$$L(\bar{x}) = x + 3y$$

chegaraviy shartda:

$$x^2 + y^2 = 10$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi.

$$F(x,y,\lambda) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10).$$

Lagranj funksiyasining xususiy hosilalarini aniqlaymiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 10 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{3}{2\lambda}, \\ \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2\lambda}\right)^2 - 10 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}; \ x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1} = 1; \ y_1 = -\dfrac{3}{2\lambda_1} = 3 \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}; \ x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_2} = -1; \ y_2 = -\dfrac{3}{2\lambda_2} = -3 \end{cases}$$

Demak, sistema ikkita yechimga ega ekan.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}, & M_1(1, 3) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}, & M_2(-1, -3). \end{cases}$$

Bu nuqtalarning har birida Gesse matritsasini hisoblaymiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(x^2 + y^2 - 10\right)'_x = 2x, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(x^2 + y^2 - 10\right)'_y = 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(1 + 2\lambda x\right)'_x = 2\lambda, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(3 + 2\lambda y\right)'_y = 2\lambda, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(1 + 2\lambda x\right)'_y = 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

$M_1(1, 3)$ nuqtada

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 40 > 0.$$

Demak, $M_1(1, 3)$ nuqtada $L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2$ funksiya shartli minimumga ega ekan

$$\min L(\bar{x}) = 1 + 3 \cdot 3 = 10.$$

Shu kabi $M_2(-1, -3)$ nuqtada quyidagini aniqlaymiz

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = -40 < 0.$$

Demak, $M_2(-1, -3)$ nuqtada $L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2$ funksiya shartli minimumga ega bo'lar ekan

$$\min L(\bar{x}) = -1 + 3 \cdot (-3) = -10.$$

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping.

$$L(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min(\max)$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1-3x_2=12 \end{cases}$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi.

$$F=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\lambda_1(x_1+x_2+x_3-4)+\lambda_2(2x_1-3x_2-12)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma'lum o'zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

$M_1(1,3)$ nuqtada

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}=40>0.$$

Demak, $M_1(1,3)$ nuqtada $L(\bar{x})=x_1+3x_2$ funksiya shartli minimumga ega ekan

$$\min L(x)=1+3\cdot 3=10.$$

Shu kabi $M_2(-1,-3)$ nuqtada quyidagini aniqlaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}=-40<0.$$

Demak, $M_2(-1,-3)$ nuqtada $L(\bar{x})=x_1+3x_2$ funksiya shartli minimumga ega bo'lar ekan:

$$\min L(x)=1+3\cdot(-3)=-10.$$

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping.

$$L(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\min(\max)$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3 - 4) + \lambda_2 (2x_1 - 3x_2 - 12)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma'lum o'zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 2x_1 - 3x_2 - 12 = 0 \end{cases}$$

Bundan $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{72}{19}, -\frac{28}{19}, \frac{32}{19}\right)$, $\min L(\bar{x}) = 19{,}37$.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping.

$$L(\bar{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Yechish. I-*usul.* Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2 (x_2 + 2x_3 - 4)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma'lum o'zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=x_2+\lambda_1=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=x_1+x_3-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3}=x_2+2\lambda_2=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1}=x_1-x_2-2=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1}=x_2+2x_3-4=0 \end{cases}$$

Bundan $(x_1, x_2, x_3)=(-2,-4,4)$, $\min L(\bar{x})=-8$.

II-*usul.* Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli. Buning uchun chegaraviy shartdagi ikkita tenglamadan birini yo'qotib, bitta tenglamadan iborat chegaraviy shart tuzamiz. Chegaraviy shartdagi birinchi tenglamadan x_2 noma'lumni topib, ikkinchi tenglamaga va maqsad funksiyasiga qo'yib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} L(\bar{x})=x_1x_2+x_2x_3 \\ x_2=x_1-2 \\ x_2+2x_3=4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\bar{x})=x_1(x_1-2)+(x_1-2)x_3 \\ x_2=x_1-2 \\ (x_1-2)+2x_3=4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\bar{x})=x_1^2+x_1x_3-2x_1-2x_3 \\ x_2=x_1-2 \\ x_1+2x_3=6. \end{cases}$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_3,\lambda)=x_1^2+x_1x_3-2x_1-2x_3+\lambda(x_1+2x_3-6)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_3 o'zgaruvchilar va λ parametr bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1+x_3-2+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3}=x_1-2+2\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+2x_3-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+x_3-2+\lambda=0 \\ x_1-2+2\lambda=0 \\ x_1+2x_3-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ x_1=-2 \\ x_3=4. \end{cases}$$

Bundan $M(-2,4)$ statsionar nuqtani aniqlaymiz. Bu nuqtani ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilani aniqlaymiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = (2x_1 + x_3 - 2 + \lambda)'_{x_1} = 2, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = (x_1 - 2 + 2\lambda)'_{x_3} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = (2x_1 + x_3 - 2 + \lambda)'_{x_3} = 1. \end{cases}$$

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \cdot dx_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \cdot dx_3^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \cdot dx_1 dx_3 = 2 \cdot dx_1^2 - 0 \cdot dx_3^2 + 2 \cdot dx_1 dx_3 = 2 \cdot dx_1^2 + 2dx_1 dx_3$$

.

Endi d^2F ning ishorasini aniqlash uchun statsionar nuqtalarning xossasidan foydalanamiz, $\varphi = x_1 + 2x_3 - 6$ belgilash olib

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = (x_1 + 2x_3 - 6)'_{x_1} dx_1 + (x_1 + 2x_3 - 6)'_{x_3} dx_3 = dx_1 + 2dx_3 = 0.$$

Demak, $dx_3 = -\dfrac{dx_1}{2}$, bundan esa

$$d^2F = 2dx_1^2 + 2 \cdot dx_1 \cdot \left(-\frac{dx_1}{2}\right) = 2dx_1^2 - dx_1^2 = dx_1^2 > 0.$$

Demak, statsionar $M(-2, 4)$ nuqta maqsad funksiyasining minimum nuqtasi bo'lar ekan:

$$\min L(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_3 - 2x_1 - 2x_3 = (-2)^2 + (-2) \cdot 4 - 2(-2) - 2 \cdot 4 = -8.$$

Bu optimal yechimlardan foydalanib, boshlang'ich masalaning yechimini aniqlaymiz. Bundan esa berilgan masalaning ekstremal qiymati quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} L(\bar{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \\ x_2 = x_1 - 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\bar{x}) = -2 \cdot (-4) + (-4) \cdot 4 \\ x_2 = -2 - 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) = (-2, -4, 4) \\ \min L(\bar{x}) = -8 \end{cases}$$

III usul. Endi masalaning optimal yechimini tuzilgan matrisaning burchak minorlaridan foydalanib aniqlaymiz. Buning uchun, quyidagi xususiy hosilalarni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=(x_1-x_2-2)'_{x_1}=1, \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=(x_1-x_2-2)'_{x_2}=-1 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}=(x_1-x_2-2)'_{x_3}=0. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}=(x_2+2x_3-4)'_{x_1}=0, \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=(x_2+2x_3-4)'_{x_2}=1 \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}=(x_2+2x_3-4)'_{x_3}=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=x_2+\lambda_1=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=x_1+x_3-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3}=x_2+2\lambda_2=0. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=(x_2+\lambda_1)'_{x_1}=0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=(x_1+x_3-\lambda_1+\lambda_2)'_{x_2}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3^2}=(x_2+2\lambda_2)'_{x_3}=0. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=(x_2+\lambda_1)'_{x_2}=1 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_3}=(x_2+\lambda_1)'_{x_3}=0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_3}=(x_1+x_3-\lambda_1+\lambda_2)'_{x_3}=1. \end{cases}$$

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matritsaning burchak minorlarining $H_{2m+1}, H_{2m+2}, \dots, H_{m+n}$ ishoralarini aniqlashimiz kerak. Bunda m parametr masalaning chegaraviy shartlar soni, n parametr esa noma'lumlar soni. Bu masalada ikkita chegaraviy shart va uchta noma'lum qatnashmoqda, shuning uchun $m=2, n=3$. $2m+1=5$, $n+m=5$ bo'lgani uchun, bunda faqat H_5 minor qaraladi.

A matritsa 5-tartibli bo'lgani uchun H_5 minor bu matritsa bilan ustma-ust tushadi. H_5 minorning tartibini pasaytirish orqali uning ishorasini aniqlaymiz.

$$H=\begin{vmatrix}0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&2\\1&0&0&1&0\\-1&1&1&0&1\\0&2&0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&2\\1&0&0&1&0\\-1&1&1&0&1\\2&0&-2&1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}0&1&-1&0\\0&0&1&2\\1&0&1&0\\2&-2&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\-3&-2\end{vmatrix}=4>0$$

Ta'rifga asosan $(-1)^m=(-1)^2=1$ bo'lgani uchun, H_{2m+1}ning ishorasi, $(-1)^m$ning ishorasi bilan mos tushadi. Bundan kelib chiqib, topilgan statsionar $(x_1,x_2,x_3)=(-2,-4,\ 4)$ nuqta, berilgan funksiyaning minimal nuqtasi bo'lar ekan $\min L(\bar{x})=-8$.

<u>MUSTAQIL TA'LIM</u>: Mustaqil yechish uchun misollar

Grafik usul yordamida chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yeching.

3.1. $L(\bar{x})=x_1^2+(x_2-4)^2\to\max(\min)$
$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 7\\x_1+2x_2\ge 5\\x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0\end{cases}$$

3.2. $L(\bar{x})=(x_1-4)^2+(x_2-1)^2\to\max(\min)$
$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 10\\x_1+x_2\le 6\\x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0\end{cases}$$

3.3. $L(\bar{x})=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\to\max(\min)$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 2\\x_1+x_2\le 9\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

3.4. $L(\bar{x})=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2\to\max(\min)$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 14\\3x_1+2x_2\le 15\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

$$L(\bar{x})=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \to \max(\min)$$

3.5. $\begin{cases} 3x_1+5x_2\le 15 \\ 5x_1+3x_2\le 15 \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0 \end{cases}$

$$L(\bar{x})=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \to \max(\min)$$

3.6. $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 10 \\ x_1+x_2\le 6 \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0 \end{cases}$

$$L(\bar{x})=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2 \to \max(\min)$$

3.7. $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 2 \\ 2x_1+x_2\le 6 \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0 \end{cases}$

$$L(\bar{x})=(x_1-3)^2+(x_2-6)^2 \to \max(\min)$$

3.8. $\begin{cases} x_1+x_2\le 5 \\ 2x_1+x_2\le 8 \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0 \end{cases}$

Ushbu funksiyalarning shartsiz ekstremumlarini toping.

3.9. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$

3.10. $z=xy(1-x-y)$

3.11. $z=x^3+y^3-3xy$

3.12. $z=-x^2+y^2-xy+3x+6y$

3.13. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$

3.14. $z=x^2+y^2-xy+9x-6y+20$

3.15. $z=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2xy-5x-y+2$

3.16. $z=xy-\ln(x+y)$

Lagranjning ko'paytuvchilar usulidan foydalanib funksiyaning shartli ekstremumlarini toping.

$$L(\bar{x})=2x_1x_3-x_2x_3$$

3.17. $\begin{cases} x_1+2x_3=3 \\ x_1+x_2=2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$

$$L(\bar{x})=x_1x_2+x_2x_3$$

3.18. $\begin{cases} x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2=2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$

$$L(\bar{x})=x_1x_2-x_2x_3$$

3.19. $\begin{cases} x_2+x_3=4 \\ x_1-2x_2=2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$

3.20. $L(\bar{x}) = 2x_1 - x_2 + x_3$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.21. $L(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.22. $L(\bar{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.23. $L(\bar{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.24. $L(\bar{x}) = x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_3$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.25. $L(\bar{x}) = 2x_1 + x_1^2 + x_2^2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.26. $L(\bar{x}) = 2x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Testlar

1. Shartli minimumning yetarlilik shartini aniqlang.

a) Gesse matritsasi statsionar nuqtada musbat aniqlangan;

b) Gesse matritsasi statsionar nuqtada musbat aniqlangan;

c) statsionar nuqtada ikkinchi tartibli hosila nolga teng;

d) statsionar nuqtada birinchi tartibli hosila nolga teng.

2. Shartli maksimumning yetarlilik shartini aniqlang:

a) Gesse matritsasi statsionar nuqtada manfiy aniqlangan;

b) Gesse matritsasi statsionar nuqtada musbat aniqlangan;

c) statsionar nuqtada birinchi tartibli hosila nolga teng;

d) statsionar nuqtada ikkinchi tartibli hosila nolga teng.

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$ funksiyaning statsionar nuqtasini toping.

a) (2,1) b).(1,3) c) .(0,4) d) (2,3)

4. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 4y$ funksiyaning ekstremum nuqtasini toping.

a) (-1,-1) b) (1,2) c) (1,3) d) (2,0)

5. $z(x,y)=x^2-xy+y^2-3x+1$ funksiyaning ekstremumini toping

A)-2 B) 4 C) 3 D) 1

6. $L=x^3+y^3$ funksiyaning $A(1;1)$ nuqtadagi gradientini toping.

A)(3; 3) B) (-3; -3) C) (1; 1) D) (1; 2))

B) $L=x^2+y^2-6x-6y$ funksiyaning statsionar nuqtasini toping.

A)(3; 3) B) (6; 6) C) (1; 4) D) (2; 5)

B) $L=x_1^3-x_2^3+3x_1-12x_2$ funksiya berilgan bo'lib, (1;-2) nuqtada Gesse matritsasining determinantini aniqlang .

A) 72 B) 14 C) 84 D) 68

C) $L=x_1^2-x_2^2-2x_1-6x_2$ funksiya berilgan bo'lib, (0;2) nuqtada Gesse matritsasining determinantini aniqlang

A) -4 B) 6 C) -8 D) 3

D) $L=x_1^2+3x_2^2$ funksiyaning $x_1-x_2=4$ chegaraviy shartda, shartli ekstremumini toping.

A) 12 B) 16 C) 9 D) 6

E) Funksiyaning $L=3x^2-2xy+y^2+6x+3y$ statsionar nuqtasini toping.

A) (-3; -6) B) (-6; 4) C) (5; 24) D) (-6; 6)

F) Agar $x_1-x_2=4$ bo'lsa, u holda $L=x_1\cdot x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini aniqlang.

A) -4 B) -3 C) -5 D) -17

G) Funksiyaning $L=x^2+y^2+4xy-6x+6y$ statsionar nuqtasini toping.

A) (-3; 3) B) (2; -6) C) (-3; 4) D) (4; -1)

H) $z(x,y)=x^2-xy+2y^2+x-4y$ funksiyaning ekstremumini toping.

A) -2 B) 1 C) -4 D) 6

I) Agar $x_1-3x_2=6$ bo'lsa, u holda $L=x_1\cdot x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini aniqlang.

A) -3 B) -5 C) -2 D) 12

Nazorat uchun savollar

1. Chiziqli programmalashtirish masalasini yozish qanday shakllarda bo'ladi? Ularning o'ziga xos alohida tomonlarini tushuntiring.
2. Chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelida noma'lumlarning manfiy bo'lmaslik shartini asoslab bering.
3. Chiziqli programmalashtirishning qanday masalalarini yechishda grafik usul qo'llaniladi?
4. Chiziqli programmalashtirish masalasini yechishda grafik usul algoritmi qanday bo'ladi?
5. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasining qanday nuqtalarida optimal yechimni qidirish kerak?
6. Vektor gradiyent deganda nimani tushunasiz? Antigradiyent deganda esa nimani tushunasiz?
7. Simpleks usul?
8. Chiziqli programmalashtirish masalasining qanday yechimi tayanch yechim bo'ladi? Optimal yechim qanday bo'ladi?
9. Chiziqli programmalashtirish masalasining tayanch yechimini aniqlash algoritmi qanday bo'ladi?
10. Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini aniqlash algoritmini tushuntiring.
11. Simpleks jadvalda, tayanch va optimal yechimlarning mavjudlik belgisi qanday bo'ladi?
12. Simpleks jadvalda tanlangan aniqlovchi element asosida yangi simpleks jadvalni hisoblash qoidasini tushuntiring.
13. Simpleks jadvalda, maqsad funksiyaning chegaralanmagan bo'lish belgisi qanday bo'ladi? Buning geometrik tasviri qanday bo'ladi?
14. Qanday holda, simpleks jadvalda chiziqli programmalashtirish masalasining yechimi mavjud bo'lmaydi? Bu holning geometrik tasvirini keltiring.
15. Yagona yechim bo'lmaslik belgisi nimadan iborat? Bu grafik usulda qanday tasvirlanadi?

IV bob. O'YINLAR NAZARIYASI

4.1. O'yinlar nazariyasining asosiy tushunchalari

Matematik modellashtirishda optimal yechim va strategiyalar XVIII asrda taklif etilgan. Emmanuel Lasker, Ernst Sermelo va Emil Borel kabi olimlar XX asr boshlarida matematik ziddiyatli maqsadlar nazariyasi g'oyasini ilgari surdilar.

So'ngra o'yinlar nazariyasi Dj. Nesh tomonidan tahlil qilinadi, bunga ko'ra, o'yinda qatnashayotgan o'yinchilardan biri g'olib bo'lib yutishi, ikkinchi o'yinchining esa yutqazishidan iborat bo'lgan ziddiyatli vaziyat hosil bo'lib, bunda o'yinchilar uchun, *muvozanat turg'unligiga* asoslangan *optimal strategiyalar* aniqlanadi. Bunga ko'ra, o'yinchilar o'zlarining optimal strategiyalarida qolishligi talab etiladi, aksincha esa o'yin natijasi o'yinchilar foydasiga hal bo'lmaydi.

Amaliyotda shunday masalalar bo'ladiki, aniqmaslik sharoitida qaror qabul qilishga to'g'ri keladi, ziddiyatli vaziyatlar sodir bo'ladi, ya'ni ikki (undan ham ko'p bo'lishi mumkin) tomonning qiziqishlari har xil bo'lib, ular har birining ziddiyatli vaziyatdagi harakati, boshqasining harakatiga bog'liq bo'ladi.

Shunday vaziyatlarda, bir qatnashuvchi harakatining samarasi, boshqa qatnashuvchilarning harakatiga bog'liq bo'lishi, ikki turga bo'linadi: qatnashuvchilarning maqsadlari mos tushib, ular kelishgan holda birgalikda harakat qilishadi va qatnashuvchilarning maqsadlari mos tushmaydi. Ikkinchi tur vaziyat *ziddiyatli vaziyat* deyiladi. Ziddiyatli vaziyatlarning matematik modellarini qurish hamda bunday vaziyatdagi masalalarni yechish uchun usullar ishlab chiqish bilan, o'yinlar nazariyasi shug'ullanadi. Ziddiyatli vaziyatlarda optimal qaror qabul qilish uchun ziddiyatli vaziyatlarning matematik nazariyasini ishlab chiqish *o'yinlar nazariyasi* deyiladi.

Ziddiyatli vaziyatlarga misollar: korxonaning tovar sotishdan olingan daromadi, tovarga qo'yilgan narx bilan birga, iste'molchilarning sotib olgan shu tovarlari miqdoriga ham bog'liq. Tashkilot, tovarlar assortimentini tanlashda, boshqa tashkilotlarning qanday assortimentdagi tovarlar ishlab chiqarishlarini hisobga olishi zarur.

Iqtisodiyotda ziddiyatli vaziyatlar ko'p uchrab, u xilma-xil xarakterda bo'ladi. Masalan, ta'minotchi va iste'molchi, bank va mijoz, sotuvchi va xaridor orasidagi munosabatlar. Ular har birining, o'z maqsadlari bo'lib, unga erishish uchun, optimal yechim qabul qilishadi. Bunda ularning har biri, o'z maqsadlari bilan birga, o'z sheriklarining maqsadga erishish uchun qabul qilayotgan qarorlarini ham hisobga olishlari kerak.

O'yinlar nazariyasining masalasi, o'yinchilarning har biri uchun aniq optimal strategiya ishlab chiqishdan iborat. *O'yinchining strategiyasi* deb, shunday mumkin bo'lgan harakatlar sistemasiga aytiladiki, o'yinning har birda alternativ variantlardan shunday yurish tanlanadiki, bu boshqa o'yinchilarning harakatiga qarshi bo'lgan bir qiymatli aniqlangan eng yaxshi yurish hisoblanadi.

Optimal strategiya o'yin ko'p marta qaytarilganda, o'yinchini maksimal o'rtacha yutuq bilan ta'minlaydi (yoki qarshi tomonni minimal o'rtacha yutqazish bilan ta'minlaydi).

Ziddiyatli vaziyat *antagonistik (nol yig'indili)* deyiladi, agar bir tomon yutug'ining biror miqdorga o'sishi, ikkinchi tomon yutug'ining shu miqdorga kamayishiga olib kelsa va aksincha.

O'yin bu real ziddiyatli vaziyatning matematik modelidir. O'yinda qatnashayotgan tomonlar *o'yinchilar* deyiladi. Ziddiyatning natijasi *yutuq* deyiladi. O'yin qoidasi-o'yinchilar harakatlari variantlarini aniqlaydigan sistema bo'lib: bu o'yinchining sherigi to'g'risidagi axborotlar hajmi, yutuqqa olib boradigan harakatlar to'plamidan iboratdir. O'yin qoidasiga asosan, harakatlar variantini tanlash va amalga oshirish, o'yinchining *yurishi* deyiladi.

Shaxsiy yurish o'yinchining ongli ravishda, harakatlar variantidan birini tanlashdan iborat (masalan, shaxmat o'yinida).

Tasodifiy yurish o'yinchining tasodifiy tanlagan harakatidir (masalan, o'yin soqqasini otish). Biz faqat shaxsiy yurishlarni ko'rib chiqamiz.

O'yinchi yurishni o'yinning har bir bosqichidagi konkret vaziyatga bog'liq ravishda tanlaydi. O'yinchi ma'lum bir strategiyani, oldindan tanlagan bo'lishi ham mumkin.

O'yin *chekli* deyiladi, agar har bir o'yinchining chekli sondagi strategiyalari mavjud bo'lsa, va aksincha bo'lsa, *cheksiz* deyiladi.

O'yin *juft* deyiladi, agar unda ikkita o'yinchi qatnashsa, *ko'pchilik bilan* o'yin bo'ladi, agar unda ikkitadan ortiq o'yinchi qatnashsa. Biz faqat juft o'yinlarni ko'rib chiqamiz. O'yinchilarni A va B bilan belgilaymiz.

Antagonistik o'yinning yechimi, bu har bir o'yinchi uchun *optimal strategiyalarni* aniqlashdan iborat. Bunga ko'ra, B o'yinchi qanday strategiyani tanlashidan qat'i nazar, A o'yinchi kafolatlangan maksimal yutuqni olishi kerak, ikkinchi holda esa, A o'yinchi qanday strategiyani tanlashidan qat'i nazar, B o'yinchi o'zining minimal yutqizishiga erishishi zarur. Optimal strategiyalar, *turg'unligi* bilan xarakterlanadi, ya'ni bunda har bir o'yinchining optimal strategiyalaridan chetlanishi, ular uchun zararli oqibatlarga olib keladi.

4.2. To'lov matritsasi. Sof strategiyalar

To'lov matritsasi. Juft chekli o'yinni ko'rib chiqamiz. A o'yinchi, m ta $A_1, A_2, \dots, A_m$ strategiyaga ega bo'lsin. B o'yinchining esa, n ta, $B_1, B_2, \dots, B_n$ strategiyasi bo'lsin (4.1-jadval). O'yinchilar ixtiyoriy A_i va B_j $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ juft strategiyalarni tanlashidan, bir qiymatli o'yin natijasi hosil bo'ladi. Bu degani, A o'yinchining a_{ij} yutug'i (manfiy yoki musbat) va B o'yinchining $(-a_{ij})$ yutqazishi sodir bo'ladi. Ixtiyoriy (A_i, B_j) juftlik uchun v, *o'yin narxi* deyiladi. A_i va B_j o'yin juftligiga mos elementlari a_{ij} yutuqlardan iborat bo'lgan matritsa

$A=(a_{ij})$ $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$ *to'lov matritsasi* deyiladi. Bu matrisaning umumiy ko'rinishi 4.1-jadvalda keltirilgan. A o'yinchi, m ta, $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyadan, B o'yinchi esa n ta, $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyaga ega.

4.1-jadval

O'yinchilar	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Jadvalning satrlari A o'yinchining strategiyalariga, ustunlari esa B o'yinchining strategiyalariga mos keladi. Quyidagi o'yin uchun to'lov matritsasini tuzamiz.

Misol. A yoki B o'yinchilarning har biri, bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda 1, 2, 3 raqamlarini yozadi. Agar raqamlarning ayirmasi musbat bo'lsa, u holda A o'yinchi ayirmaga teng bo'lgan yutuqqa erishadi. Agar ayirma noldan kichik bo'lsa, u holda B o'yinchi yutadi. Agar ayirma nolga teng bo'lsa, durang bo'ladi.

A o'yinchining uchta strategiyasi mavjud: $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=3$,

B o'yinchining ham uchta strategiyasi bor: $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3=3$.

A o'yinchining maqsadi o'zining yutug'ini maksimallashtirishdan, B o'yinchining maqsadi esa-o'zining yutqazishini minimallashtirishdan iborat. Bu nol summali juft o'yin hisoblanadi.

O'yinchilar	$B_1=1$	$B_2=2$	$B_3=3$
$A_1=1$	0	-1	-2
$A_2=2$	1	0	-1
$A_3=3$	2	1	0

Masalan, $a_{13}=-2-$ A o'yinchining yutug'i, $-a_{13}=2-$ B o'yinchining yutug'i. Bu matritsali o'yin bo'lib, uning to'lov matritsasi ushbu ko'rinishdan iborat:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Misol. Ikki o'yinchi bir-biridan farqli 1-5 diapazonda bittadan son aytishadi. Agar sonlar yig'indisi toq bo'lsa, u holda 2 o'yinchi birinchiga aytilgan sonlarning maksimumini to'laydi, aksincha esa 1 o'yinchi to'laydi.

Yechish. Musbat sonlar, 1-o'yinchining yutuqlari, manfiylari esa 2-o'yinchining yutuqlari. Bu o'yinning to'lov matritsasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 & 4 & -5 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 5 \\ -5 & 5 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

O'yinning yuqori va quyi chegaralari. O'lchovi $m\times n$, bo'lgan, $A=(a_{ij})$ $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$ matritsali o'yindan, $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyalardan eng yaxshisini aniqlaymiz. A o'yinchi A_i strategiyalardan birini tanlashi bilan, B o'yinchi ham, A o'yinchining yutuqlari minimal (B o'yinchi, A o'yinchiga zarar keltirishga intiladi) bo'ladigan B_j strategiyalardan birini qo'llaydi. α_i bilan A o'yinchining A_i strategiyalari orasidan eng kichik yutug'ini (to'lov matrisasi i - satridagi eng kichik son) B o'yinchining mumkin bo'lgan barcha strategiyalarini hisobga olgan holda, belgilaymiz, ya'ni

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \qquad (4.1)$$

$\alpha_i(i=\overline{1,m})$ sonlar orasidan eng kattasini tanlaymiz. α ni o'yinning *quyi narxi* yoki *maksimal yutuq* (*maksimin*) deb ataymiz. Bu B

o'yinchining har qanday strategiyasida A o'yinchi uchun *kafolatlangan yutuq* bo'ladi. Demak,

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij} \qquad (4.2)$$

Agar strategiya maksiminga mos kelsa, bu *maksimin strategiya* deyiladi. B o'yinchining maqsadi A o'yinchining yutuqlarini kamaytirish bo'lib, buning uchun B_j strategiyalardan birini tanlayotganda, A ning mumkin bo'lgan barcha maksimal yutuqlarini hisobga oladi. Belgilash kiritamiz:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \qquad (4.3)$$

β_j sonlar orasidan eng kichigini β bilan belgilab, uni o'yinning *yuqori chegarasi* yoki *minimaks yutuq* (*minimaks*) deb ataymiz. Bu B o'yinchi uchun *kafolatlangan yutqazish* bo'ladi. Demak,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (4.4)$$

Agar strategiya minimaksga mos kelsa, bu *minimaks strategiya* deyiladi. Agar o'yinchilarga ehtiyot chora sifatida minimaks va maksimin strategiyalardan birini tanlash zarur bo'lsa, bu *minimaks prinsipi* deyiladi.

O'yin narxi quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi: $\alpha \le v \le \beta$.

Iqtisodiy masalalarni yechishda, o'yinlar nazariyasini qo'llash. Iste'molchilar bozorining mavsum bo'yicha o'zgarib turishi, kompaniyalar strategiyalarini doimo qayta ishlab chiqishlariga sabab bo'ladi. Bozordagi aniqmasliklardan optimal strategiyalarni aniqlash yetarlicha murakkab bo'lsada, matematik usullarni qo'llab va ma'lum bir yo'nalishlarni hisobga olib, maksimal foyda olish mumkin.

Aniqmaslik sharoitida bozor strategiyasini to'g'ri qo'llash asosida tasodifiy faktorlarni kamaytirib, katta ehtimollik bilan foyda olishni prognoz qilish mumkin.

Iste'molchilar talabi va ko'pgina tovarlarni sotish hajmi mavsumga bog'liqdir. Qayd etilganki, bir qancha tovarlarga talabning o'sishi yozga ba'zilarida bahor-kuz davrlariga, ba'zilarida esa qish mavsumiga mos keladi. Shundan kelib chiqib, kompaniyalar o‘tish davrlari uchun optimal strategiyalar ishlab chiqishlari zarur.

Sof strategiyalar. Agar o‘yinning quyi va yuqori narxlari mos kelsa, bu narxlarning umumiy qiymati $\alpha=\beta=v$ *o‘yinning sof strategiyasi*, yoki *o‘yin narxi* deyiladi. O‘yin narxiga mos keluvchi minimaks strategiyalar, *optimal strategiyalar*, yoki *optimal yechim*, yoki *o‘yinning yechimi* deb ataladi. Bunday holda, A o‘yinchi maksimal kafolatlangan yutuq (B o‘yinchi harakatiga bog‘liq bo‘lmagan holda) v ga, B o‘yinchi minimal kafolatlangan yutqazishga (A o‘yinchi harakatiga bog‘liq bo‘lmagan holda) v ga ega bo‘ladi. Optimal yechim esa turg‘unlik xarakteriga ega.

A_i va B_j juftlik sof strategiyalarning optimal yechimi bo‘lishi uchun, ularga mos a_{ij} elementning bir vaqtda satr elementlari orasida eng kichik, ustun elementlari orasida eng katta bo‘lishi zarur va yetarli. Agar bu vaziyat mavjud bo‘lsa, u *egar nuqta* (sirti egarga o‘xshashligidan, ya’ni bir tomondan yuqoriga, boshqa tomondan quyiga qarab qiyshayishiga asoslanadi) deyiladi.

Demak, (A_i, B_j) optimal juft strategiyalar, egar nuqta bo‘lar ekan.

Misol. Berilgan to‘lov matrisasidan foydalanib, egar nuqtani va qatnashchilarning sof strategiyalarini aniqlang.

O‘yinchilar	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	0	6
A_2	6	8	5	10

Yechish. To‘lov matritsasining egar nuqtasini aniqlaymiz. Buning uchun o‘yinning quyi va yuqori chegaralarini aniqlaymiz. $\alpha=\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\max\limits_i(0,5)=5$ dan ko‘rinadiki, A_2 maksimal sof strategiya ekan. $\beta=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=\min\limits_j(8,8,5,10)=5$ dan ko‘rinadiki B_3 minimal sof strategiya ekan. O‘yinning egar nuqtasi (A_2, B_3) iborat bo‘lib, unig narxi $v=5$ ekan.

4.3. Aralash strategiyalar va ularni yechish usullari

Agar o‘yin matrisasida, $\alpha \neq \beta$ bajarilsa egar nuqta mavjud emas. Bunday holda, sof strategiyalarda optimal yechim mavjud bo‘lmaydi. Lekin, sof strategiyalarni, aralash strategiyalar bilan kengaytirsak, aniqmas o‘yin masalalarining ham optimal yechimini aniqlash algoritmini topish mumkin. Bunday hollarda, antagonistik o‘yinlarning optimal yechimini topish uchun, statistik (ehtimollarga asoslangan) usullarni qo‘llash tavsiya etiladi. Bunda, har bir o‘yinchining, mumkin bo‘lgan strategiyalar to‘plami bilan birga, noma’lum bo‘lgan ehtimollik vektorlari (nisbiy chastotalar) orasidagi munosabat kiritiladi.

A o‘yinchining berilgan strategiyalarini, tanlash ehtimollik vektorlari (nisbiy chastotalar) quyidagicha belgilanadi:

$$P=(p_1, p_2, \ldots, p_m), \qquad \text{bunda} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}.$$

p_i miqdor, A_i strategiyani qo‘llash *ehtimoli* (*nisbiy chastota*) deyiladi.

A o‘yinchining, S_A aralash strategiyasi deb, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sof strategiyalarni $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ ehtimollar bilan tatbiq etishga aytiladi, bunda $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

A o‘yinchining aralash strategiyasi ushbu matritsa ko‘rinishda yoziladi.

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_i & \ldots & A_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_i & \ldots & p_m \end{bmatrix} \quad \text{yoki}$$

$$S_A = [p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_i,\ \ldots,\ p_m]$$

ko‘rinishda yozish ham mumkin.

Shu kabi, B o'yinchining noma'lum ehtimollik vektorlari (nisbiy chastotalar) quyidagicha belgilanadi:

$Q=(q_1,q_2,...,q_n)$, bunda $\sum_{j=1}^{n} q_j=1,\ q_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}$.

q_j miqdor, B_j strategiyani qo'llash *ehtimoli* (*nisbiy chastota*) deyiladi.

Shunga o'xshash B o'yinchi uchun aralash strategiya quyidagicha yoziladi:

$$S_B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{bmatrix}, \text{ yoki } \quad S_B=[q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_j,\ \dots,\ q_n],$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j=1$$

$A_1,A_2,...,A_m$ va $B_1,B_2,...,B_n$ sof strategiyalar to'plami, mos ravishda $P=(p_1,p_2,...,p_m)$ va $Q=(q_1,q_2,...,q_n)$ ehtimollik vektorlari bilan birgalikda, *aralash strategiyalar* deyiladi.

Sof strategiyalar, aralash strategiyalarning xususiy holi bo'lib, vektor ehtimolning birga teng bo'lishidan, sof strategiyalar kelib chiqadi.

Ixtiyoriy matritsali o'yinning optimal strategiyasi va o'yin narxini, aralash strategiyalarda topish mumkin.

Teorema. Aralash strategiyalarda ixtiyoriy chekli matritsali o'yin egar nuqtaga ega.

Aralash strategiyalarda o'yinning optimal yechimi – (P^*,Q^*) juft optimal strategiyalar bo'lib, u quyidagiga asoslanadi: agar bir o'yinchi o'zining optimal strategiyasida muqim tursa, ikkinchisining o'z optimal strategiyasidan chetlanishi, unga zararli bo'ladi. Optimal yechimga mos bo'lgan yutuq, o'yinning v *narxi* deyiladi. O'yinning narxi ushbu shartni qanoatlantiradi: $\alpha\leq v\leq\beta$.

O'yinlar nazariyasining quyidagi asosiy teoremasi o'rinlidir.

Teorema (Neyman teoremasi). Har qanday nol yig'indili chekli o'yin aralash strategiyalarda yechimga ega.

$P^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ va $Q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$– optimal juft strategiyalar bo'lsin. Agar sof strategiya, aralash strategiyaning optimal yechimida noldan farqli ehtimollik bilan qatnashsa, u *aktiv* strategiya deyiladi.

Teorema (*Aktiv strategiya to'g'risida*). Agar o'yinchilardan biri aktiv strategiyalar chegarasidan chiqmasa va boshqa o'yinchi o'zining optimal aralash strategiyasida qolsa, u holda yutuq o'zgarmas bo'lib, o'yin narxi v ga teng bo'ladi.

Bu teorema katta amaliy ahamiyatga ega, chunki agar egar nuqta mavjud bo'lmasa, u optimal strategiyalarni topishning aniq modelini beradi.

O'lchovi 2×2 bo'lgan o'yin. Bu o'yin chekli o'yinning sodda holidir. Agar bu o'yin egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda optimal yechim bu nuqtaga mos bo'lgan strategiyalar sof juft strategiyalardir.

Neyman teoremasini qanoatlantiradigan egar nuqtasi mavjud bo'lmagan o'yinning optimal yechimi mavjud va u, aralash strategiyalar jufti $P^* = (p_1^*, p_2^*)$, $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$ bilan aniqlanadi.

A o'yinchining yutishi (B o'yinchining yutqazishi) – tasodifiy miqdor bo'lib, matematik kutilishi o'yinning narxi bo'ladi. Shuning uchun A o'yinchi optimal strategiyani qo'llaganda, uning o'rtacha yutug'i v: birinchi o'yinchiga ham, ikkinchi o'yinchiga ham tegishli bo'ladi.

Masalan, to'lov matritsasi bilan berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Agar B o'yinchi, B_1 sof strategiyada (to'lov matritsaning birinchi ustuni) bo'lib, A o'yinchi esa $P^* = (p_1^*, p_2^*)$ optimal aralash strategiyani qo'llaganda, uning o'rtacha yutug'i v ga teng, ya'ni

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v .$$

Shu kabi, qarshi tomon B_2 strategiyani qo'llasa, A o'yinchining o'rtacha yutug'i $a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v$ ga teng bo'ladi. $p_1^* + p_2^* = 1$ ni hisobga olsak, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \qquad (4.5)$$

(4.5) sistemani yechib, P^* optimal strategiyani va o'yin narxi v ni aniqlash mumkin.

B o'yinchining optimal strategiyasini aniqlash uchun yuqoridagi kabi tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \qquad (4.6)$$

Agar A o'yinchi $P=(p_1,p_2,...,p_m)$ aralash strategiyani, B o'yinchi esa $Q=(q_1,q_2,...,q_n)$ aralash strategiyani qo'llasa, A va B o'yinchilarning o'rtacha yutug'i (matematik kutilishi) quyidagicha aniqlanadi

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j .$$

Optimal strategiyani qo'llash o'yin narxiga teng bo'lgan yutuqqa, ega bo'lishga imkon beradi: $\alpha \le v \le \beta$.

To'lov matritsasini soddalashtirish. Agar to'lov matritsasining o'lchami qancha katta bo'lib, egar nuqtasi bo'lmasa, u holda masalaning aralash optimal strategiyalarini aniqlash shuncha qiyinlashadi. Shuning uchun o'lchami katta to'lov matrisasini, qulay bo'lmagan strategiyalarni tashlab yuborish orqali soddalashtiriladi.

Agar A o'yinchining, $(a_{ij})_{m\times n}$ matritsali o'yindagi A_i strategiyasiga mos i satri elementlari, boshqa satrning mos elementlaridan katta bo'lmasa (kichik yoki teng), u holda A_i ning i – strategiyasi *qulay bo'lmagan strategiya* deyiladi va bu satr to'lov matritsasidan chiqarib tashlanadi.

Agar B o'yinchining, $(a_{ij})_{m\times n}$ matritsali o'yinning biror B_j strategiyasiga mos j – ustun elementlari, boshqa ustunning mos elementlaridan kichik bo'lmasa (katta yoki teng), u holda B_j ning j –

strategiyasi *qulay bo'lmagan strategiya* deyiladi va bu ustun to'lov matritsasidan chiqarib tashlanadi..

Misol. Ushbu to'lov matritsasini soddalashtiring:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	8	6	4	5	1	1
A_2	5	4	3	2	3	2
A_3	6	7	6	3	5	3
A_4	3	3	2	1	2	1
β_j	8	7	6	5	5	

$\alpha = \max\{1;2;3;1\} = 3;$

$\beta = \min\{8,7,6,5,5\} = 5.$

$\alpha = 3 \neq \beta = 5$. Demak, to'lov matritsasi egar nuqtaga ega emas.

Ikkinchi va uchinchi satr elementlarini mos ravishda taqqoslaganimizda, ikkinchi satr elementlarining barchasi mos ravishda, uchinchi satrning mos elementlaridan kichik. Demak, A o'yinchining ikkinchi strategiyasi qulay bo'lmagan strategiya bo'lib, uni tashlab yuborsak bo'ladi. Shu kabi, A_3 va A_4 ni taqqoslab, A_4 ni tashlab yuborib, quyidagi o'yin matritsasini hosil qilamiz:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	6	4	5	1
A_3	6	7	6	3	5

E'tibor bersak, B o'yinchining 1, 2, 3 strategiyalari 5 – strategiyaga nisbatan qulay bo'lmagan strategiyalardir, chunki B o'yinchi, A o'yinchining yutuqlarini minimallashtiradi. Bu strategiyalarni tashlab yuborsak 2×2 o'lchamli matritsa hosil qilamiz, bunda qulay bo'lmagan strategiyalar mavjud emas.

	B_4	B_5
A_1	5	1
A_3	3	5

To'lov matritsasidagi strategiyalarni belgilab chiqamiz:

	B_1	B_2	α_i
A_1	5	1	1
A_2	3	5	3
β_j	5	5	

$$\alpha = 3, \beta = 5.$$

Agar soddalashtirilgan matritsada $\alpha=\beta$ bo'lsa, u holda soddalashtirilgan matritsadagi $\alpha = \beta = v$ narx, berilgan matritsaga ham tegishlidir. Agar $\alpha < \beta$ bo'lsa, soddalashtirilgan matritsa analiz qilinadi va olingan natija, berilgan matritsaga ham tegishli bo'ladi.

Misol. To'lov matritsasining egar nuqtasini toping.

$$\begin{matrix} 4 & 7 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{matrix}$$

Yechish. To'lov matritsaning egar nuqtasi mavjudligini tekshiramiz. I o'yinchi maksimal yutuq olish uchun, o'z strategiyalarini tanlaydi, II o'yinchi esa, I o'yinchi yutuqlarini minimallashtirish uchun ushbu strategilarni tanlaydi.

O'yinchi-lar	B_1	B_2	B_3
A_1	4	7	2
A_2	7	3	2
A_3	2	1	8

A o'yinchining A_1 maksimal sof strategiyasiga mos bo'lgan, kafolatlangan yutuqni, ya'ni o'yinning $\alpha = \max_i(2, 2, 1)=2$ quyi narxini aniqlaymiz. O'yinning yuqori narxi esa $\beta = \min_j(7, 7, 8) = 7$ dan iborat.

Bunga asoslanib $\alpha \neq \beta$ ekanligidan, o'yinning egar nuqtasi mavjud emasligi va o'yin narxi $2 < v < 7$ oraliqda o'zgarishi kelib chiqadi. O'yin yechimini aralash strategiyalarda topamiz. Buning sababi, o'yinchilar o'zlarining sof strategiyalarini qarshi tomondan sir tutishidadir.

2. To'lov matritsani soddalashtiramiz. Matritsaning qulay bo'lmagan satri va ustuni mavjud emas.

3. Aralash strategiyalarda o'yinning yechimini topamiz.

Tenglamalar sistemasini yozamiz.

I o'yinchi uchun

$$\begin{cases} 4p_1 + 7p_2 + 2p_3 = v \\ 7p_1 + 3p_2 + p_3 = v \\ 2p_1 + 2p_2 + 8p_3 = v \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

II o'yinchi uchun

$$\begin{cases} 4q_1 + 7q_2 + 2q_3 = v \\ 7q_1 + 3q_2 + 2q_3 = v \\ 2q_1 + q_2 + 8q_3 = v \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechib, quyidagilarni topamiz:

$p_1 = {}^{29}/_{68}$ (1 strategiyani qo'llash ehtimoli).

$p_2 = {}^{4}/_{17}$ (2 strategiyani qo'llash ehtimoli).

$p_3 = {}^{23}/_{68}$ (3 strategiyani qo'llash ehtimoli).

I - o'yinchining optimal aralash strategiyasi: $P = \left({}^{29}/_{68}; {}^{4}/_{17}; {}^{23}/_{68}\right)$

$q_1 = {}^{6}/_{17}$ (1 strategiyani qo'llash ehtimoli).

$q_2 = {}^{9}/_{34}$ (2 strategiyani qo'llash ehtimoli).

$q_3 = {}^{13}/_{34}$ (3 strategiyani qo'llash ehtimoli).

II-o'yinchining optimal aralash strategiyasi: $Q = \left({}^{6}/_{17}; {}^{9}/_{34}; {}^{13}/_{34}\right)$.

O'yinning narxi: $v = 4^{1}/_{34}$.

Grafik usul. *2x2* o'lchamli o'yinning geometrik yechimini tekislikda yaqqol tasvirlash mumkin. Bunday o'lchamdagi o'yinlarni grafik usulda yechish mumkin.

2x2 o'lchamli o'yinni grafik usulda yechish umumiy holda, quyidagilardan iborat:

1. Birinchi (ikkinchi) o'yinchining mos strategiyalari uchun, to'g'ri chiziqlar quriladi.

2. Kesishish nuqtasining koordinatalari aniqlanadi, ya'ni bunda birinchi (ikkinchi) o'yinchining optimal strategiyalari va o'yin narxi aniqlanadi.

3. Boshqa o'yinchining optimal strategiyasi, uning faol strategiyalaridan tashkil topgan tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi.

$(2xn)$ va $(mx2)$ o'lchamli o'yinlarni grafik usulda yechish. Grafik usul o'yinda hech bo'lmaganda bitta o'yinchining ikkita strategiyasi bo'lishiga asoslanadi.

$(2\times n)$ o'lchamli o'yinni ko'rib o'tamiz. Aytaylik, o'yin egar nuqtaga ega emas.

Birinchi o'yinchi	Ikkinchi o'yinchi			
	q_1	q_2	...	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$p_2 = 1 - p_1$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Belgilash kiritamiz: p_1- birinchi o'yinchining 1-strategiyani tanlash ehtimoli, p_2- birinchi o'yinchining 2-strategiyani tanlash ehtimoli, bunda $p_2 = 1 - p_1$, q_1- ikkinchi o'yinchining 1-strategiyani tanlash ehtimoli, q_2- ikkinchi o'yinchining 2-strategiyani tanlash ehtimoli va hokazo, q_n- ikkinchi o'yinchining n- strategiyani tanlash ehtimoli.

Ikkinchi o'yinchi 1-strategiyani qo'llaganda, birinchi o'yinchining kutayotgan yutug'i:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = a_{11}p_1 + a_{21}(1-p_1) = (a_{11} - a_{21})p_1 + a_{21}.$$

Shu kabi, ikkinchi o'yinchining, 2-, 3-, ..., n - strategiyalarni qo'llaganda, birinchi o'yinchining kutayotgan yutuqlarini aniqlaymiz. Olingan natijalarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Ikkinchi o'yinchining sof strategiyalari	Birinchi o'yinchining kutayotgan yutuqlari
1	$(a_{11}-a_{21})p_1+a_{21}$
2	$(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$
...	...
n	$(a_{1n}-a_{2n})p_1+a_{2n}$

Jadvaldan ko'rinadiki, birinchi o'yinchining kutayotgan yutuqlari p_1 ga chiziqli bog'langan. Birinchi o'yinchining kutayotgan yutuqlariga mos, to'g'ri chiziqlarni quramiz.

Birinchi o'yinchi kutayotgan minimal yutuqlarini maksimallashtiradigan strategiyalarni tanlaydi. Shuning uchun, birinchi o'yinchining kutayotgan minimal yutuqlarini maksimallashtiradigan, optimal strategiyasi to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan nuqtadan iborat.

Shu kabi, ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasini topamiz. Bunda, kutilayotgan maksimal yutqazishlarini minimallashtiradigan to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan nuqtadan iborat.

Misol. To'lov matritsasi $(2\times n)$ ko'rinishda berilgan, o'yin yechimini aniqlang.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu holda $\alpha=\max(2,2)=2,\ \beta=\min(4,3,3)=3,\ 2\le\nu\le3$. O'yinning yechimi, aralash strategiyalarda aniqlanadi. Avvalo, yuqoridagi masalani quyidagicha yozib olamiz:

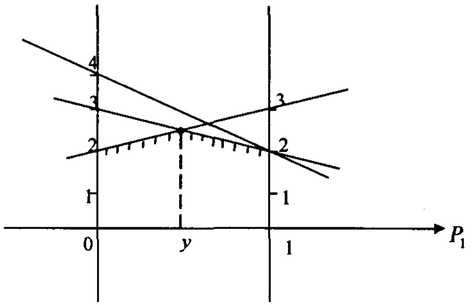
$$\begin{array}{r|l} p_1 & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$} \\ p_2=1-p_1 & \end{array}$$

Birinchi o'yinchining kutilayotgan yutuqlarini aniqlaymiz:

Ikkinchi o'yinchining sof strategiyalari	Birinchi o'yinchining kutayotgan yutuqlari
1	$2p_1+4(1-p_1)=-2p_1+4$
2	$2p_1+3(1-p_1)=-p_1+3$
3	$3p_1+2(1-p_1)=p_1+2$

O'yinning yechimini grafik usulda topamiz (4.1-rasm). p_1 o'qda, $p_1=0$ va $p_1=1$ nuqtalarni belgilab, ular orqali p_1 ga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. $p_1=0$ ni, $-2p_1+4$ ifodaga qo'yib, 4 va 2 sonlarini hosil qilamiz. Ularni mos to'g'ri chiziqlarda belgilaymiz. Bu nuqtalarni tutashtirib, $-2p_1+4$ to'g'ri chiziqni hosil qilamiz.

Shu kabi, $-p_1+3$ va p_1+2 to'g'ri chiziqlarni quramiz (4.1-rasm).



4.1-rasm.

Birinchi o'yinchining optimal strategiyasi $-p_1+3$ va p_1+2 to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan nuqtadan iborat. Chunki, birinchi o'yinchi yutuqlarini maksimallashtirishni xohlaydi.

$-p_1+3=p_1+2$, $p_1=1/2$, $p_2=1/2$.

O'yin narxi $v=-p_1+3=-1/2+3=5/2$.

Birinchi o'yinchining optimal strategiyasi $\overline{P}_{onm}=(1/2, 1/2)$ bo'lib, o'yin narxi esa $v=5/2$ dan iborat.

Ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasini aniqlaymiz. 4.1-rasmdan ko'rinib turibdiki, ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasi $-p_1+3$ va p_1+2 to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan nuqtadan iborat. Bu esa ikkinchi o'yinchining 2- va 3- sof strategiyalariga to'g'ri keladi, ya'ni $q_1=0$, $q_3=1-q_2$.

Endi to'lov matritsasini ko'ramiz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Avvalo to'lov matritsasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ q_2 & q_3=1-q_2 \end{pmatrix}$$

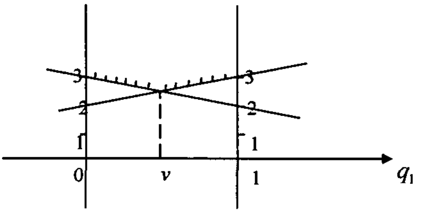
Ikkinchi o'yinchining kutayotgan yutuqlarini aniqlaymiz:

Birinchi o'yinchining sof strategiyalari	Ikkinchi o'yinchining kutayotgan yutuqlari
1	$2q_2+3(1-q_2)=-q_2+3$
2	$3q_2+2(1-q_2)=q_2+2$

Bundan, 4.2-rasmdan

$-q_2+3=q_2+2,\quad q_2=1/2,\quad v=q_2+2=1/2+2=5/2$

Demak, ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasi $\overline{Q}_{onm}=(0; 1/2; 1/2)$ bo'lib, o'yin narxi esa $v=5/2$ dan iborat ekan.



4.2-rasm.

Keltirilgan misoldan ko'rinadiki, agar to'lov matritsaning (m va n katta bo'lmaganda) o'lchamlari kichik bo'lsa, ya'ni har bir o'yinchining strategiyalari soni ko'p bo'lmasa, uning aralash strategiyasining optimal strategiyasini osonlik bilan topish mumkin ekan. Agar o'yinning o'lchami katta bo'lsa, uning yechimini aniqlash murakkablashadi. Shuning uchun ham, optimal aralash strategiyalarni aniqlashda to'lov matritsasi yuqoridagi kabi yetarlicha soddalashtiriladi.

4.4. Tabiat bilan o'yin

Agar tabiat to'g'risidagi axborot yetarli bo'lmasa, u holda tabiatning barcha holatlari uchun teng ehtimolli bo'lgan, Laplasning yetarli bo'lmagan prinsipini qo'llash mumkin. U holda optimal strategiya ma'lum satr elementlari o'rtacha arifmetigining maksimalligiga asoslangan ifodadan aniqlanadi.

$$\max_i \frac{(\alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\ldots+\alpha_{in})}{n}.$$

Optimal strategiyalarni tanlashda bir qator kriteriyalar mavjud.

1. Valde kriteriysi. Bu mezonda birinchi o'yinchi nazarida ikkinchi o'yinchi – tabiat unga qulay bo'lmagan yo'ldan harakatlanayotgan bo'lib, bunda juda yomon natijalarning maksimumi tanlab olinib, uning pessimist kriteriy ekanligi kelib chiqadi. Bu vaziyat ushbu formula bilan aniqlanadi:

$$\max_i\left(\min_j a_{ij}\right).$$

Shu kabi ikkinchi o'yinchining ustunlar bo'yicha maksimal yutuqlar orasidan, minimal qiymatni aniqlashdan iborat bo'lgan, eng yaxshi strategiyani tanlashdan iborat.

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}.$$

Agar ikkinchi o'yinchi minimaks strategiyada qolsa, u holda kafolatlangan β dan katta bo'lmagan miqdorda yutqizadi.

2. Maksimallik kriteriysi. Bu kriteriy Valde kriteriysiga qarama-qarshi, ya'ni optimist bo'lib, tabiat insonga yoqimli ta'sir qilishiga asoslangan.

Strategiya quyidagi shartdan aniqlanadi:

$$\max_i \max_j a_{ij}.$$

3. Gurvis kriteriysi. Strategiya quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}\right),$$

Bunda, α – optimallik darajasi bo'lib, $[0, 1]$ oraliqda o'zgaradi.

Bu kriteriy tabiatning yomon hamda yoqimli tomonlariga asoslanadi. Bu formula $\alpha=1$ da Valde kriteriysiga, $\alpha=0$ da esa, maksimum kriteriysiga aylanadi. Strategiyani tanlaydigan mas'ul shaxs, α ga ta'sir etadi. Noto'g'ri yechimning oqibatlari qancha katta bo'lsa, α shuncha birga yaqinlashadi, ya'ni bunda kafolatlash zarurati kelib chiqadi.

4. Sevidj kriteriysi. Bu mezonning mazmuni shunday strategiyadan iboratki, bunda katta yo'qotishlarga yo'l qo'ymaslik va foyda olmaslik riskidan himoyalanadi. Buning uchun o'yinchining har bir o'yini uchun maksimal foydadan iborat bo'lgan risklar matritsasi tuziladi. Keyingi qadam esa bu natijalarning ichidan eng kichik riskni tanlashdan iborat. Aytaylik A_i yechim qabul qilingan bo'lsin. Real vaziyat bizga aniq emas. Agar uni biz bilganimizda edi, maksimum foyda beruvchi yechimni tanlagan bo'lar edik. Agar j – vaziyat bo'lsa, $q_j = \max_i q_{ij}$ daromad beruvchi yechim qabul qilinadi. Demak, i yechimni qabul qilish bilan biz, q_j daromadni emas, balki q_{ij} riskni qabul qilamiz. Demak, real daromadni qabul qilmaslik mavjud bo'lib, uning o'lchovi sifatida bunga qarshi daromadni qabul qilmaslik riski, r_{ij} kiritiladi. Uning ko'rinishi $r_{ij} = q_j - q_{ij}$ kabi bo'ladi.

Matritsa $R=(r_{ij})$, risklar matritsasi deyiladi. Matritsa elementlari (r_{ij}) ushbu formuladan topiladi:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

Bunda, $\max_i a_{ij}$– berilgan matritsa ustunidagi maksimal elementdir.

Optimal strategiya esa quyidagi ifodadan topiladi:

$$\min_i \max_j \left(\max_i a_{ij} - a_{ij}\right).$$

5. Bayes kriteriysi. Bu kriteriyni hisoblash uchun, qaralayotgan strategiyalarning har biriga bir xil ehtimolliklar berilib, keyin esa kutilayotgan maksimal yutuq qabul qilinadi. Bu kriteriyning bir kamchiligi bo'lib, ikkinchi o'yinchi bo'lgan tabiat hodisasining ehtimolini to'la aniqlamaydi. Bu kriteriy ushbu formula bilan aniqlanadi:

$$\max \sum p \cdot a_{ij}.$$

Kriteriylar orasidagi munosabat. Aniqmaslik sharoitida bir qancha kriteriylar bo'yicha qaror qabul qilishda har xil variantlarni baholashga to'g'ri keladi. Agar tavsiyalar mos kelsa, ishonch bilan optimal yechim tanlanadi, agar tavsiyalar bir-biriga qarama-qarshi bo'lsa, oxirgi yechimni qabul qilayotganda, uning kuchli va kuchsiz tomonlari hisobga olinishi zarur.

Yuqoridagi kriteriylarni quyidagi misol asosida ko'rib chiqamiz.

Misol. Korxona 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi: plash (A1), palto (A2), kurtka (A3). Har bir mahsulotdan tushadigan foyda, ob havo sharoitiga bog'liq ravishda o'zgaradigan talabga bog'liq. Ob-havo sharoiti 3 shaklda bo'ladi: Yomg'irli havo (V1), bulutli havo (V2), ochiq havo (V3). Mahsulot turlari va ob-havo sharoitlariga bog'liq bo'lgan korxona daromadlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

4.2-jadval.

Korxona daromadining, mahsulot turlari va ob-havo sharoitlariga bog'liqligi

Mahsulot turi	Ob-havo		
	Yomg'irli havo (V1)	Bulutli havo (V2)	Ochiq havo (V3)
Plash (A1)	9	7	5
Palto (A2)	4	10	2
Kurtka (A3)	11	8	4

Valde kriteriysi (maksimin). Bu vaziyat ushbu formula bilan aniqlanadi: $\max_i\left(\min_j a_{ij}\right)$

Plash (A1) uchun minimal foyda 5 bu ochiq havoda (V3)

Palto (A2) uchun minimal foyda 2 bu ochiq havoda (V3)

Kurtka(A3) uchun minimal foyda 4 bu ochiq havoda (V3)

Shuning uchun, $\max_i(5;2;4)=5$. Demak, Valde mezoni bo'yicha, korxonaning kurtka ishlab chiqarishi foydaliroq ekan.

Maksimum kriteriysi (maksimaks). Bu vaziyat ushbu formula bilan aniqlanadi: $\max_i\left(\max_j a_{ij}\right)$

Plash (A1) uchun maksimal foyda 9 – bu yomg'irli havoda (V1)

Palto (A2) uchun maksimal foyda 10 – bu bulutli havoda (V2)

Kurtka(A3) uchun maksimal foyda 11 – bu yomg'irli havoda (V1)

Bundan kelib chiqib, korxona uchun kurtka ishlab chiqarish optimal ekan, ya'ni $\max_i(9;10;11)=11$.

Gurvis kriteriysi. Hisoblash formulasi. $\max\left(\alpha\cdot\max_i+(1-\alpha)\cdot\min_j\right)$. Bu kriteriy, tabiatning eng yaxshi va eng yomon o'zgarishlarini hisobga oladi. Bu misol uchun $\alpha=0,5$deb olamiz.

Plash (A1) uchun maksimal foyda $9\cdot0,5+5\cdot0,5=7$

Palto (A2) uchun maksimal foyda $10\cdot0,5+2\cdot0,5=6$

Kurtka(A3) uchun maksimal foyda $11\cdot0,5+4\cdot0,5=7,5$

Demak, plash va kurtka ishlab chiqarish korxona uchun maksimal foyda keltirar ekan.

Sevidj kriteriysi (minimaks). Berilgan masala uchun risk matritsasini tuzamiz: $R_1=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 7 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Plash (A1) uchun maksimal foyda 3 ga teng.

Palto (A2) uchun maksimal foyda 7 ga teng.

Kurtka (A3) uchun maksimal foyda 2 ga teng.

Bundan kelib chiqib, kurtka ishlab chiqarish korxona uchun optimal bo'lar ekan, ya'ni $\min(3;7;2)=2$.

Bayes mezoni. Bu mezon quyidagi formula bilan aniqlanadi $\max\sum q\cdot a_{ij}$. Quyidagilarni hosil qilamiz:

Plash (A1) uchun: $9\cdot 0,33+7\cdot 0,33+5\cdot 0,33=3,63+2,31+1,65=6,93$

Palto (A2) uchun $4\cdot 0,33+10\cdot 0,33+2\cdot 0,33=1,32+3,3+0,66=5,28$

Kurtka(A3) uchun $11\cdot 0,33+8\cdot 0,33+4\cdot 0,33=3,63+2,64+1,32=7,59$.

Bundan kelib chiqib, kurtka ishlab chiqarish korxona uchun maksimal foyda berar ekan.

Xulosa. Demak, korxona uchun kurtka ishlab chiqarish samarali ekan. 5 ta kriteriyni o'zaro taqqoslaganimizda ham shu natija kelib chiqdi. Kurtka va plash ishlab chiqarish daromadlarini taqqoslasak, ular mos ravishda 23 va 21 iborat, bundan esa korxona uchun kurtka ishlab chiqarishning daromadi ko'p bo'lar ekan.

4.8. $m\times n$ o'yinni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish

$m\times n$ o'lchamli o'yinni umumiy holda geometrik talqin qilib bo'lmaydi. m va n lar katta bo'lgan holda, $m\times n$ o'lchamli matritsali o'yinning optimal yechimini topish yetarli darajada qiyinchilikka olib keladi, ammo uni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish orqali yechish bunday qiyinchiliklardan xalos etadi.

Teorema. To'lov matritsasi va v o'yin narxi berilganda, $P^*=(p_1^*,p_2^*,...,p_m^*)$ va $Q^*=(q_1^*,q_2^*,...,q_n^*)$ aralash strategiyalarning optimal bo'lishi uchun quyidagi tengsizliklarning

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq v, \quad j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_i^* \leq v, \quad i=\overline{1,m},$$

bajarilishi zarur va yetarli.

Demak, teorema tasdiqlaydiki, B o'yinchining ixtiyoriy B_j sof strategiyasida A o'yinchi p^* aralash optimal strategiyani qo'llasa, u holda A o'yinchi v o'yin narxidan kam bo'lmagan yutuqqa ega bo'lishi ta'minlanadi; agar A o'yinchining ixtiyoriy A_i sof strategiyasida B o'yinchi q^* aralash optimal strategiyani qo'llasa, u holda B o'yinchi v o'yin narxidan ko'p bo'lmagan yutuqqa ega bo'lishi ta'minlanadi.

Demak, o'yin yechimi optimalligi to'g'riligini tekshirish uchun, yuqoridagi optimal strategiyalar kriteriyalaridan foydalanamiz.

A o'yinchi, $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyalardan, B o'yinchi esa, $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyalardan iborat bo'lsin. O'yinchilarning P^* i Q^* optimal strategiyalarini aniqlash talab etilsin.

A o'yinchining P^* optimal strategiyasini ko'rib chiqamiz.

Yuqoridagi teoremadan, quyidagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi. Agar A o'yinchi $P^*=(p_1^*,p_2^*,...,p_m^*)$ aralash startegiyasini, B o'yinchining B_j sof strategiyalariga qarshi ishlatsa, u holda uning o'rtacha yutug'i yoki matematik kutilishi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$a_j = a_{1j}p_1^* + a_{2j}p_2^* + ... + a_{mj}p_m^*, \qquad j=\overline{1,n}.$$

P^* optimal strategiya uchun barcha o'rtacha yutuqlar o'yin narxidan kam bo'lmaydi, shuning uchun quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$
\begin{cases}
a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* + \cdots + a_{m1}p_m^* \geq v, \\
a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* + \cdots + a_{m2}p_m^* \geq v, \\
------------------ \\
a_{1n}p_1^* + a_{2n}p_2^* + \cdots + a_{mn}p_m^* \geq v.
\end{cases} \tag{4.7}
$$

Aniqlik uchun, $v > 0$ bo'lsin.

Bunga doimo erishish mumkin, ya'ni agar A matritsaning har bir elementiga biror o'zgarmas S sonni qo'shish, optimal strategiyani o'zgartirmaydi, balki faqat o'yin narxini S ga oshiradi.

Sistemaning har bir tengsizlikni $v > 0$ songa bo'lib, ushbu yangi o'zgaruvchilarni kiritamiz:

$$X_1 = \frac{p_1^*}{v}, X_2 = \frac{p_2^*}{v}, \ldots, X_m = \frac{p_m^*}{v}.$$

U holda (4.7) sistema, quyidagi ko'rinishni oladi:

$$
\begin{cases}
a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \geq 1, \\
a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \geq 1, \\
------------------ \\
a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \geq 1,
\end{cases} \tag{4.8}
$$

$$X_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

So'ngra quyidagi tenglikni ko'ramiz: $p_1^* + p_2^* + \cdots + p_m^* = 1$.

Bu tenglikni $v(v \neq 0)$ songa bo'lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_m = 1/v.$$

$$L(\overline{X}) = X_1 + X_2 + \cdots + X_m \to \min \tag{4.9}$$

A o'yinchining maqsadi o'zining kafolatlangan yutug'ini maksimallashtirish, ya'ni o'yinning narxi v ni maksimallashtirish bo'lib, bu esa, $1/v$ miqdorni minimallashtirishga ekvivalentdir. Shuning uchun *masala quyidagicha qo'yi*ladi: $X_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$ o'zgaruvchilarni shunday qiymatlarini aniqlash kerakki, bunda ular (4.8) sistemani qanoatlantirib, (4.9) funksiyaga minimal qiymat bersin.

Hosil bo'lgan chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelini keltiramiz.

A o'yinchining matematik modeli	B o'yinchining matematik modeli
$L(\overline{X}) = X_1 + X_2 + \cdots + X_m \to \min$; $\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \geq 1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \geq 1, \\ ------------ \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \geq 1. \end{cases}$ $X_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$	$S(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \to \max$ $\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \cdots + a_{1n}Y_n \leq 1, \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{2n}Y_n \leq 1, \\ ------------ \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \cdots + a_{mn}Y_n \leq 1. \end{cases}$ $Y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$

Ko'rinib turibdiki, bu o'zaro ikkilangan juft chiziqli programmalashtirish masalasini ifodalaydi. Ularning yechimi mazkur o'yin masalasining yechimidir.

Bunda:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{L(\overline{X^*})} = \frac{1}{S(\overline{Y^*})}; \\ p_i^* &= v \cdot X_i^*, \quad i = \overline{1, m}; \\ q_j^* &= v \cdot Y_j^*, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Demak, matritsali o'yin masalasini, chiziqli programmalashtirish masalasi usullari bilan yechish, quyidagi bosqichlardan iborat bo'ladi.

1. Berilgan juft o'yin masalasiga ekvivalent o'zaro juft ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasini tuzish.

2. Ikkilangan masalaning optimal rejalarini aniqlash.

3. Ikkilangan masalaning optimal rejalaridan foydalanib, optimal strategiyalarni va o'yin narxini aniqlash (4.10).

Chekli *mxn* o'lchamli matritsali o'yinni, chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish uchun tavsiyalar quyidagi sxema bo'yicha bo'ladi:

1. To'lov matritsasidagi qulay bo'lmagan strategiyalar tashlab yuborilib, to'lov matritsasi yetarlicha soddalashtiriladi.

2. O‘yinning quyi va yuqori narxlari aniqlanib, egar nuqtaning mavjudligi tekshiriladi. Agar egar nuqta mavjud bo‘lsa, unga mos strategiyalar optimal strategiyalar bo‘lib, o‘yinning narxi, quyi (yuqori) narx bilan mos tushadi.

3. Agar egar nuqta mavjud bo‘lmasa, yechim aralash strategiyalarda topiladi. Agar to‘lov matritsasi 2xn yoki nx2 o‘lchamli bo‘lsa, o‘yin grafik usulda yechiladi. Agar to‘lov matritsasi mxn o‘lchamli bo‘lsa, chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirilib, simpleks usul orqali masalaning yechimi aniqlanadi.

MUSTAQIL TA’LIM, Mustaqil yechish uchun misollar

To‘lov matritsasini soddalashtiring va uning yechimini aniqlang.

4.1. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. **4.2.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. **4.3.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

4.4. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 2 \\ 1 & 7 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

To‘lov matritsasidan foydalanib, o‘yinning optimal strategiyasi va narxini aniqlang.

4.5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. **4.6.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. **4.7.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

4.8. $A=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. **4.9.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **4.10.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.11. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **4.12.** $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. **4.13.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

To'lov matritsasidan foydalanib, o'yinning optimal strategiyasi va narxini grafik usulda toping.

4.14. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. **4.15.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **4.16.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **4.17.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.18. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. **4.19.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. **4.20.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. **4.21.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

4.22. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. **4.23.** $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **4.24.** $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Testlar

1. Qanday hollarda o'yinlar nazariyasi sof strategiyalarda yechimga ega?

A) O'yinning quyi va yuqori narxlari mos tushadi;

B) O'yinning quyi va yuqori narxlari mos tushmaydi;

C) O'yinning quyi narxi, uning yuqori narxidan kichik;

D) O'yinning quyi narxi, uning yuqori narxidan katta.

2. Aralash strategiyalar nimaga asoslanadi?

A) O'yinning quyi va yuqori narxlari mos tushmaydi;

B) O'yinning quyi va yuqori narxlari mos tushadi;

C) O'yinning quyi narxi, uning yuqori narxidan kichik;

D) O'yinning quyi narxi, uning yuqori narxidan katta.

3. To'lov matritsasining yuqori narxini toping $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

A) 3 B) 5 C) 4 D) 2.

4. To'lov matritsasi berilgan $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. O'yin narxini aniqlang.

A) v=5 B) v =6 C) v =8 D) v =3.

5. To'lov matritsasi berilgan $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. O'yinning yuqori narxini aniqlang.

A) $v=6$ B) $v=5$ C) $v=2$ D) $v=3$.

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ to‘lov matritsasining egar nuqtasini aniqlang.

A) 3 B) 5 C) 4 D) 2.

7. Agar α - o‘yinning quyi narxi, β - o‘yinning yuqori narxi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy to‘lov matritsasi uchun ushbu tengsizlik bajariladi:

A) $\alpha \le \beta$ B) $\alpha < \beta$ C) $\alpha > \beta$ D) $\alpha \ge \beta$.

8. To‘lov matritsasi qanday bo‘lganda, uni grafik usulda yechish mumkin emas.

A) mxn B) 2x2 C) mx2 D) 2xn.

9. O‘yin narxi - bu....

A) son;

B) funksiya;

C) vektor;

D) matritsa.

10. O‘yinchilarning strategiyalari optimal deyiladi, agar:

A) o‘yinning quyi va yuqori narxlari mos tushadi;

B) o‘yin narxi nolga teng;

C) o‘yinning yuqori narxi nolga teng;

D) o‘yinning quyi narxi nolga teng.

Nazorat uchun savollar

1. O‘yinlar nazariyasidagi muvozanat turg‘unligi yoki Nesh bo‘yicha muvozanat deganda nimalarni tushunasiz?

2. O‘yinlar nazariyasidagi ziddiyatli vaziyat nima?

3. O‘yinlar nazariyasining predmeti nimalardan iborat?

4. Antagonistik o‘yinlarda o‘yinchinnig optimal strategiyasini tushuntirib bering.

5. Optimal strategiyaning turg'unligini tushuntirib bering. To'lov matritsasi nima?

6. O'yin narxi deganda nimani tushunasiz?

7. O'yinning yuqori va quyi chegaralarini tushuntirib bering.

8. Iqtisodiy masalalarda o'yinlar nazariyasi qanday ko'rinishlarda bo'ladi?

9. O'yinning sof va aralash strategiyalarini tushuntirib bering. Egar nuqta nima?

10. O'yinning narxi qanday shartni qanoatlantiradi?

11. To'lov matritsasi o'lchami qanday bo'lganda masalani grafik usulda yechish mumkin?

12. To'lov matritsasini soddalashtirishni tushuntirib bering.

13. Agar to'lov matritsasida $\alpha < \beta$ bo'lsa, o'yinning optimal strategiyasi qanday strategiyada yechiladi?

14. Tabiat bilan o'yinni va uning optimallik mezonlarini tushuntirib bering.

15. mxn o'lchovli o'yinning optimal strategiyasi qanday aniqlanadi?

5-MAVZU. MOLIYAVIY MATEMATIKA FANINING ASOSLARI. FOIZLAR

5.1. Moliyaviy matematika fanining predmeti

Moliyaviy matematika fani – investitsiya loyihalar tahlili, kredit va tijorat operatsiyalarini hisoblash, tadbirkorlik faoliyati samaradorligi hamda kapital va investitsiyalarni boshqarish modellari uchun zarur bo'lgan moliyaviy – iqtisodiy hisoblarning nazariyasi va amaliyotini o'rganadi.

Moliyaviy matematikaning obyekti – bu foyda olishga yo'naltirilgan, moliyaviy – iqtisodiy hisoblarga asoslangan, moliyaviy operatsiyadir.

Demak, *moliyaviy matematika* – miqdoriy moliyaviy tahlillarga asoslangan modellar va metodlar bo'lib, predmeti esa, tijorat kelishuvlari yoki moliyaviy bank operatsiyalari orasidagi funksional bog'lanishdagi parametrlarni o'rganish va buning asosida ma'lum bir sinfga tegishli moliyaviy masalalarni yechish metodlarini ishlab chiqishdan iborat ekan.

Moliyaviy operatsiyaning asosi – kreditlashdir.

Moliyaviy matematika, bank-moliya operatsiyalaridagi uchta parametr orasidagi bog'lanishning hisoblash metodlarini qamrab oladi:

1) narxlar (to'lovlar o'lchami, qarzdorlik munosabatlari, kreditlar va hokazo);

2) vaqt momentlari (to'lov vaqti va uni bajarish muddati, bo'lib to'lash va hokazo);

3) foiz stavkalari.

Moliyaviy matematika metodlari, investitsiya operatsiyalarining xarakteristika va xossalarini, kreditlarni, pensiya hisobi va to'lovlarini, qarzni to'lash rejasini tuzishda, moliyaviy operatsiyaning foydasini baholash parametrlarini hisoblashda foydalaniladi.

Moliyaviy-iqtisodiy hisoblarning asosida pulning vaqt bo'yicha qadrlanishi yotadi. Amaliyotda moliyaviy va tijorat operatsiyalarida jamg'arilgan pul vaqt momentlari yoki vaqt intervallari bilan bog'langan bo'ladi. Shuning uchun tuziladigan kontraktlarda muhlat, vaqt, pul mablag'ining tushish davrlari yoki ularni to'lash vaqtlari fiksirlangan holda ko'rsatiladi. Moliyaviy operatsiyalarda har xil davrlardagi, bir xil pul mablag'i, bir xil qadrlanmaydi.

Demak, bugungi pul mablag'lari kelgusidagi pul mablag'lariga nisbatan qadrliroqdir, va aksincha kelajakdagi pul mablag'lari hozirgi davrdagi pul mablag'lariga nisbatan qadrsizdir.

Shuning uchun "Vaqt bu puldir" (Time is money) aforizmi hozirgi moliyaviy miqdorlar tahlilining mazmunini tashkil etadi.

Har qanday moliyaviy operatsiyaning hisobi va tahlili, har xil davrlardagi to'lovlar, bir momentga keltirilgandan so'ng, va faqat shundan so'ng pul mablag'lari o'zaro taqqoslanadi, ayiriladi, qo'shiladi.

Foiz tushunchasi. So'mning yuzdan biri tiyin, dollarning yuzdan biri sent, metrning yuzdan biri santimetr deyiladi.

Har qanday miqdor yoki sonning yuzdan biri *foiz* deyiladi (1%=1/100=0,01).

Demak, bir tiyin – so'mning bir foizi, bir sent – dollarning bir foizi, 1 cm – metrning bir foizi, 0,07 – 7 ning bir foizi.

Foiz tushunchasi o'nli kasrlar bilan juda yaqin bog'langan. O'nli kasrni foizga aylantirish uchun, u 100 ga ko'paytiriladi. Aksincha, foizni o'nli kasrga aylantirish uchun, u 100 ga bo'linadi.

Misol. O'nli kasrlarni foizlarga aylantiring.

0,32 yoki 32% (ya'ni $0{,}32 \cdot 100 = 32$);

2,356 yoki 235,6% (ya'ni $2{,}356 \cdot 100 = 235{,}6$);

0,0425 yoki 4,252% (ya'ni $0{,}0425 \cdot 100 = 4{,}25$).

Foizlarni o'nli kasr ko'rinishida yozing.

62% yoki 0,62 (ya'ni $62/100 = 0{,}62$);

375% yoki 37,5 (ya'ni $375/100 = 37{,}5$);

0,0563% yoki 0, 000563 (ya'ni $0{,}0563/100=0{,}000563$).

Iqtisodiyotda foizlar. Iqtisodiy nuqtayi nazardan foiz, bu bir kishidan (*kreditor*) olingan pul mablag'ining boshqa kishi (*zayom egasi, debitor*) tomonidan foydalanganligi uchun to'lanadigan pul mablag'i bo'lib, bu berilgan pul mablag'ining yuzdan biridan iborat.

Agar o'zgaruvchi stavkalar va ustama pul mabag'i biror vaqt miqdoriga bog'liq bo'lsa, *marja* deyiladi.

Kredit olish — ko'p uchraydigan moliyaviy operatsiyadir. Bunda ikki kishi, kreditor va debitor qatnashib pul mablag'i olinadi. Debitor olingan pul mablag'ini shartnomadagi foizi bilan ko'rsatilgan muddatda qaytarishi talab etiladi.

Ssuda bankka qo'yilgan pul mablag'i yoki investitsiya bo'lsa, foiz esa bu investitsiyadan olingan *daromaddir.*

Pul mablag'i bilan unga qo'shilgan foiz birgalikda *jamg'arma* deyiladi.

Oddiy foizlar berilgan ssudaga nisbatan muddat oxirida hisoblanadi. Olingan daromad oddiy foizlarda moliyaviy operatsiyaning oxirida beriladi.

Avans foizlar berilgan ssudaga nisbatan muddat boshida hisoblanadi. Olingan daromad avans foizlarda kredit berilgan momentda beriladi.

Oddiy va avans foizlar amaliyotda oddiy foiz stavka i, hisob foiz stavkasi esa d bilan belgilanadi.

Agar biror R sarmoya n yilga qarzga berilib katta S jamg'arma pul mablag'i bo'lib qaytsa, u holda berilgan muddatdagi foiz stavka i quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$i=\frac{S-P}{P\cdot n},$$

n qarz muddati.

Yillik hisob foiz stavkasi d quyidagi formuladan topiladi

$$d=\frac{S-P}{S\cdot n}.$$

Bu ko'rsatkichlarning birortasini bilsak, boshqasini yuqoridagi formulalardan foydalanib aniqlashimiz mumkin:

$$i=\frac{d}{1-dn}, \qquad d=\frac{i}{1+in}.$$

Bular *diskont-faktor* (discount factor) deyiladi.

Moliyaviy amaliyotda shartnomada ikkita vaqt birligi ko'rsatiladi, kreditning berilish vaqti va kreditni tugallanish vaqti, ya'ni t_o va $t_o + T$.

Misol. Mijoz bankka $5000 ni 16% yillik foiz stavka bilan bir yilga qo'ydi. Bu moliyaviy operatsiyaning daromadini aniqlang.

Yechish. Masala shartiga asosan: $P= 5000$, i=0,16.

Moliyaviy operatsiya asosida olingan daromad quyidagicha aniqlanadi: D=5000·0,16=$800.

Misol. Yanvar oyida tovar 8% ga, fevral oyida 5% ga o'sdi, martda esa 3% ga kamaydi. Tovar 1-kvartalda necha foizga o'zgargan?

Yechish. Tovarning boshlang'ich narxini S harfi bilan belgilaymiz. Yanvar oyida tovar 8% ga oshdi, ya'ni 1,08 martaga oshdi, fevral oyida 5% ga o'sdi, ya'ni 1,05 martaga oshdi, va bu ikki oy natijasida tovar narxi 1,08S·1,05=1,134S bo'ladi. Mart oyida esa tovar narxi 5% ga kamaydi, ya'ni 1,134S(1-0,03)= 1,134S·0,97=1,1S.

Birinchi kvartalda tovar narxi 10% ga oshgan ekan.

Misol. Kichik korxona $5000 ni, $8150 qilib qaytarish sharti bilan uch yilga kreditga oldi. Yillik foiz stavka va yillik hisob foiz stavkani aniqlang.

Yechish. Masala shartiga asosan: P= 5000, n=3.

1. Yillik foiz stavka hisoblaymiz:

$$i=\frac{S-P}{P\cdot n}=\frac{8150-5000}{5000\cdot 3}=0{,}21 \text{ } yoki \text{ } 21\%.$$

2. Yillik hisob foiz stavkani hisoblaymiz:

$$d=\frac{S-P}{S\cdot n}=\frac{8150-5000}{8150\cdot 3}=0{,}129 \text{ } yoki \text{ } 12{,}9\%,$$

yoki

$$d=\frac{i}{1+in}=\frac{0{,}21}{1+0{,}21\cdot 3}=0{,}129 \text{ } yoki \text{ } 12{,}9\%.$$

5.2. Oddiy foiz asosida pul mablag'larini jamg'arish va diskontirlash

Oddiy foiz asosida pul mablag'larini jamg'arish. Oddiy foizlar bir yildan kam bo'lgan, kam muddatli moliyaviy operatsiyalarda qo'llaniladi.

Jamg'arilgan pul mablag'i (ssudalar, depozitlar va hokazo) deb, uning boshlang'ich miqdori va ma'lum bir muddatdan keyingi foizi yig'indisiga aytiladi.

Bir davrdan so'ng hisoblangan foizlar $P \cdot i$ ga teng, n davrdan keyin esa $Pn \cdot i$ ga teng.

Oddiy foiz asosida, jamg'arilgan pul mablag'lari quyidagi arifmetik progressiya asosida o'zgaradi.

$$P,\ P+Pi=P(1+i),\ P(1+i)+Pi=P(1+2i),\ldots,P(1+ni).$$

Progressiyaning birinchi hadi R ga teng, ayirmasi esa Pi, u holda jamg'arilgan pul mablag'lari progressiyaning oxirgi hadidan iborat bo'ladi. Oddiy foiz asosida, n davrdan keyin, jamg'arilgan pul mablag'lari quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$S=P(1+ni). \qquad (5.1)$$

Bu formula oddiy foiz asosida jamg'arilgan pul mablag'larini aniqlaydi.

Jamg'arilgan pul mablag'ini ikki had yig'indisi shaklida ham yozish mumkin: boshlang'ich mablag' R va protsentlar yig'indisi I:

$$S=P+I, \qquad (5.2)$$

bunda

$$I=Pni. \qquad (5.3)$$

Misol. Agar $2000 pul mablag'i yarim yilga 12% yillik oddiy foiz stavka bilan olingan bo'lsa, foizlar yig'indisi va jamg'arilgan pul mablag'larini hisoblang.

Yechish. $I=Pni=2000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}12=120.$

$S=P+I=2000+12=2120.$

Demak, foizlar yig'indisi va jamg'arilgan pul mablag'lari mos ravishda I= \$120, S=\$ 2120 teng bo'lar ekan.

Oddiy foizlarni hisoblash. Oddiy foizlarni hisoblash odatda ikkita holatda qo'llaniladi: qisqa muddatli shartnomalar (muddati bir yildan oshmaydi) tuzishda hamda foizlar umumiy jamg'arilgan pul mablag'iga qo'shilmaydi va u doimiy ravishda to'lanadi.

Foizlar hisoblangandan keyin kreditorga darhol to'lanadi yoki qarz miqdoriga qo'shiladi. Ularni hisoblash uchun asos bo'lgan summaga hisoblangan foizlarni qo'shish foizlarni *kapitallashtirish* deb ataladi.

Yillik foiz stavkasi mavjud bo'lib, agar kredit bir yildan kam vaqtga berilgan bo'lsa, foizning qanday qismi kreditorga to'lanishini aniqlash talab etiladi. Buning uchun n miqdorni quyidagi kasr shaklida yozib olinadi:

$$n=\frac{t}{K}, \tag{5.4}$$

bunda n – yildagi ssuda muddati; K – yildagi kunlar soni (tayanch vaqt); t - ssudaning amal qilish muddati, kunlarda. Agar t oy bo'lsa, K=12.

Agar moliyaviy operatsiyaning davomiyligi butun bo'lmagan yillar soniga teng bo'lsa, u holda foizni hisoblash davrlari kasr sondan iborat bo'lib, ssuda kunlari sonini, yildagi kunlar soniga nisbati olinadi. U holda jamg'arilgan pul mablag'i quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S=P\left(1+\frac{it}{K}\right). \tag{5.5}$$

Tayanch bazaning har xil qiymatlarida foizni hisoblashning bir nechta variantlari bor.

Ko'pincha o'lchov vaqti sifatida 360 kundan (har biri 30 kundan iborat 12 oy) iborat yil olinadi. Bundan farqli ravishda aniq foizni aniqlash uchun baza sifatida 365 yoki 366 (agar kabisa yil bo'lsa).

Misol. \$3000 pul mablag'i 10% yillik stavka bilan 3-apreldan keyingi yil (kabisa yil emas) 29-noyabrgacha bankka qo'yildi. Ikki xil usulda jamg'arilgan pul mablag'ini hisoblang.

Yechish. Jamg'arilgan pul mablag'ini (5.5) formula bilan har xil usullarda hisoblaymiz.

1. Aniq foizlar aniq kun davrlari asosida. Kunlarning aniq soni 605 kun, tayanch baza 365 kundan iborat bo'lsa, u holda

$$S = P\left(1 + \frac{it}{K}\right) = 3000\left(1 + \frac{0{,}1 \cdot 240}{365}\right) = 3197{,}3 \ (\$).$$

2. Aniq kun davrlari asosida oddiy foizlar. Kunlarning aniq soni 605 kun, tayanch baza 360 kundan iborat bo'lsa, u holda

$$S = P\left(1 + \frac{it}{K}\right) = 3000\left(1 + \frac{0{,}1 \cdot 240}{360}\right) = 3200{,}0 \ (\$).$$

Misol. Aytaylik, 3 mln. so'm oyiga 10% oddiy foiz stavkasi bilan 6 oyga kredit sifatida berilgan bo'lsin. Har oy so'ngida jamg'arilgan pul mablag'larini aniqlaymiz.

$S(k)$ deb k oy oxiridagi jamg'arilgan pul mablag'ini belgilaymiz. Ya'ni S(0) = 3 mln. So'm, $i = 0{,}10$, u holda (5.1) formulaga asosan

$$S(k) = 3(1 + 0{,}10k), \quad k = 1,2,3,4,5,6.$$

Olingan natijalarni 5.1- jadvalga kiritamiz.

5.1-jadval

K	0	1	2	3	4	5	6
S(k)	3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8

Ko'rinib turibdiki S(0), S(1),..., S(6) ketma – ketlik 7 ta haddan iborat arifmetik progressiyadan iborat ekan. Uning birinchi hadi 3 mln. so'm, ayirmasi esa 300 ming so'm.

O'zgaruvchi oddiy stavkalar. Foiz stavkalar doimo o'zgarmas bo'lmasdan, ba'zida kredit kelishuvlarda diskret o'zgaruvchi foiz stavkalar ham uchraydi. U holda jamg'arilgan pul mablag'i quyidagicha aniqlanadi:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_k i_k) = P\left(1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t\right), \qquad (5.6)$$

bunda k- ssudalar davomiyligi soni; i_t - t, $t = \overline{1,k}$ nomerli davrdagi oddiy foiz stavkasi; n_t - i_t $t = \overline{1,k}$ stavkali foizlarni hisoblash muddatining davomiyligi.

Misol. Bir yilga tuzilgan shartnomada, *I* kvartalda oddiy yillik foiz stavka 8% ga, har bir keyingi kvartalda oldingi kvartalga nisbatan esa 0,5% ga kamayish tartibida belgilandi. Berilgan vaqtdagi K_{jam} jamg'arma ko'paytuvchini aniqlang.

Yechish. Jamg'arma K_{jam} ko'paytuvchi (5.6) formula bilan aniqlanadi:

$$K_{jam} = 1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t = 1 + 0,25 \cdot 0,08 + 0,25 \cdot 0,075 + 0,25 \cdot 0,07 + 0,25 \cdot 0,065 = 1,0725.$$

Oddiy foiz hisobida reinvestirlash. Bankka qo'yilgan ssuda va uning foizi birgalikda, yana boshqa foiz stavka bo'yicha bankka qo'yilishi yoki investitsiya qilinishi mumkin. Qisqa muddatli ssudalarni reinvestirlash protsessi *N* davr tugaguncha, bir necha marta investirlanadi. Bu holda jamg'arilgan pul mablag'i quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)...(1 + n_k i_k) = P\prod_{t=1}^{k}(1 + n_t i_t), \qquad (5.7)$$

bunda $n_t -$ $N = \sum_{t=1}^{k} n_t$; i_t, $t = \overline{1,k}$ ifoda bilan bog'langan, reinvestirlash davomiyligi bo'lib, bunda ma'lum bir o'zgarmas foiz stavka qo'llaniladi.

Misol. \$1000 pul mablag'i bankka, 10% yillik oddiy foiz stavka qo'yiladi (kabisa yil emas). Jamg'arilgan pul mablag'ini ikki holda aniqlang: agar *I* kvartalda har oy reinvestirlanadi va reinvestirlanmaydi.

Yechish. Reinvestirlanganda jamg'arilgan pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$S = P\prod_{t=1}^{k}(1 + n_t i_t) = 1000\left(1 + \frac{0,1 \cdot 31}{365}\right)\left(1 + \frac{0,1 \cdot 28}{365}\right)\left(1 + \frac{0,1 \cdot 31}{365}\right) = 1024,9\ \$.$$

Reinvestirlanmaganda jamg'arilgan pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$S = 1000\left(1 + \frac{0{,}1 \cdot 90}{365}\right) = 1024{,}66\$.$$

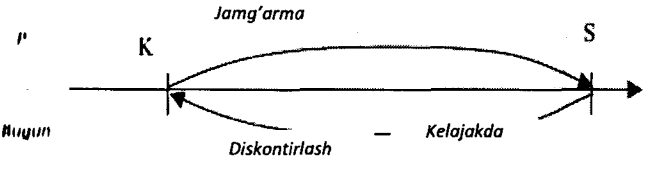
Hisoblash natijalaridan ko'rinib turibdiki, reinvestirlanganda jamg'arilgan pul mablag'i yanada ko'payar ekan.

Diskontirlash va hisob. Amaliyotda ko'pgina hollarda foizlar jamg'armasiga teskari masala yechiladi, bunga ko'ra moliyaviy operatsiya tugallangan vaqtdagi berilgan S yig'indiga asosan joriy R pul mablag'ini topish talab etiladi. R ni S orqali aniqlash S jamg'armani *diskontirlash* deyiladi.

Diskontirlash asosida aniqlangan R miqdor, S yig'indining *joriy qiymati* deyiladi.

D S-P foizlar ayirmasi *diskont* yoki *skidka* deyiladi.

Oldindan foizlarni hisoblash va ushlab qolish jarayoni hisobga olish deyiladi.



Agar biror pul mablag'i joriy sanadan, o'tgan sanaga o'tkazilsa, u holda diskontirlash bajariladi, aksincha esa, ya'ni kechiktirilgan sanaga o'tkazilsa, u holda jamg'arma bo'ladi.

Ikki turdagi diskontirlash mavjud: matematik diskontirlash va bank (tijorat) hisobi.

Matematik diskontirlash. Diskontirlash – bu foiz asosida jamg'arilgan pul mablag'idan, ssudaning joriy miqdorini topishdan iborat. Agar to'g'ri masala

$$S = P(1 + ni),$$

bo'lsa, u holda teskari masala esa quyidagicha bo'ladi

$$P=\frac{S}{1+ni}. \qquad (5.8)$$

(5.8) formuladagi ifoda *diskont ko'paytuvchi* deyiladi. Bu joriy ssuda jamg'arilgan pul mablag'ining qanday qismini tashkil etishini bildiradi.

S jamg'armaning D diskonti quyidagicha aniqlanadi:

$$D=S-P. \qquad (5.9)$$

Misol. Debitor, 8 oydan so'ng $5000 pul mablag'i miqdorida qaytarish sharti bilan oddiy yillik foiz stavka 20% bo'lgan bankdan pul oldi. Debitor shartnoma tuzayotganda qancha pul mablag'i oldi va diskont nimaga teng?

Yechish. (5.8) formuladan foydalanib, shartnoma tuzilgan momentda debitor olgan joriy pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$P=\frac{S}{1+ni}=\frac{5000}{1+0{,}2\cdot 2/3}=4411{,}8\,\$.$$

Diskont esa (5.9) formuladan topiladi:

$$D=S\text{-}P=5000\text{-}4411{,}8=588{,}2\$.$$

Demak, shartnoma tuzilgan momentda debitor $4411,8 pul mablag'ini olgan bank diskonti esa $588,2 ga teng.

Bank (tijorat) hisobi. Hisob operatsiyasi kabi veksel hisobida ham, bank muddati tugamagan vekselni yoki biror qimmatli qog'ozni debitordan belgilangan narxdan past narxga, ya'ni diskont bilan sotib oladi.

Veksel – bu belgilangan pul mablag'ini belgilangan muddatda to'lashdan iborat bo'lgan qimmatli qog'oz. Bunday holda veksel hisobga olinadi va mijoz bir qismi ushlab qolingan pul mablag'ini oladi. Veksel hisobida foizlarni hisoblash uchun *hisob stavkasi* qo'llaniladi va bu d deb belgilanadi.

Oddiy hisob stavkasi quyidagi formuladan topiladi:

$$d=\frac{S-P}{Sn}. \qquad (5.10)$$

Bank tomonidan ushlab qolinadigan diskont miqdori:

$$D=Snd, \qquad (5.11)$$

Shuning uchun

$$P = S - D = S - Snd = S(1-nd). \qquad (5.12)$$

$1-nd$ ko'paytuvchi *diskont ko'paytuvchisi* deyiladi. Bunda n vekselni hisobga olgandan, uni yopishgacha bo'lgan sana orasidagi yildan iborat vaqt davri. Hisob stavkasi bilan diskontirlashda ko'pincha yil 360 kunga teng deb olinadi.

Misol. Veksel egasi to'lash muddati 17-noyabrda bo'lgan \$1000 pulni 8% yillik hisob stavkasi bilan 23-sentabrda bankka qo'ydi. $K=360$ kun hisoblab, veksel egasining jamg'arma pulini hisoblang.

Yechish. Vekselni yopishgacha bo'lgan muddat 54 kun. Veksel egasining jamg'arma puli (5.12) formula bilan hisoblanadi:

$$P = S(1-nd) = 1000\left(1 - \frac{0,08 \cdot 54}{360}\right) = 988\,\$.$$

Veksel egasining bankdan oladigan jamg'arma puli \$988 dan iborat ekan.

Hisob stavkasi bo'yicha jamg'arma pul mablag'i. Hisob stavkasini jamg'arma pul mablag'ida ham ishlatish mumkin, ya'ni S ni P orqali hisoblashda. (5.12) formuladan ushbu formulani hosil qilamiz:

$$S = \frac{P}{1-nd}. \qquad (5.13)$$

Misol. Veksel egasi joriy yilning 1-oktabrdan 6-noyabrgacha \$900 vekselni bankka taqdim etdi. Bank vekselni 20% yillik oddiy foiz stavka bilan hisobga oldi. Veksel egasining bankdan olgan pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. Vekselning yopilishiga 36 kun vaqt bor. Veksel egasining jamg'arma pul mablag'i quyidagi (5.13) formula bilan aniqlanadi:

$$S = \frac{P}{1-nd} = \frac{900}{1 - 0,2 \cdot \frac{36}{360}} = 918,37.$$

Veksel egasi bankdan \$918 pul mablag'i olar ekan.

Jamg'arma va hisob stavkalarini taqqoslash. Jamg'arma va diskontlash qarama-qarshi operatsiyalardir, lekin jamg'arma va hisob stavkalardan ikkala turdagi masalalarda ham foydalaniladi. Qo‘llaniladigan stavkalarga nisbatan, masalalar to‘g‘ri va teskari masalalarga bo‘linadi.

Stavka	To‘g‘ri masala	Teskari masala
Jamg‘arish	Jamg‘arish: $S=P(1+ni)$	Diskontirlash: $P=S/(1+ni)$
Hisob	Diskontirlash: $P=S(1-nd)$	Jamg‘arish: $S=P/(1-nd)$

Ssudalar muddati va foiz stavka miqdorini aniqlash. Shartnoma shartlarini ishlab chiqishda yoki tahlil qilib taqqoslashda qator masalalarni yechishga to‘g‘ri keladi. Bunda ssudalar muddati va foiz stavkalarini hisoblash kabi masalalardir.

Ssudalar muddati. Ssudalar muddati davomiyligi yillar yoki kunlar asosida (5.1) va (5.13) formulalarni n ga nisbatan hisoblab topamiz.

Muddat yillar hisobida:

$$n=\frac{S-P}{Pi}=\frac{S/P-1}{i}, \qquad n=\frac{S-P}{Sd}=\frac{1-P/S}{d}.$$

Muddat kunlar hisobida ($p = t/K$, bunda K — tayanch vaqt):

$$t=\frac{S-P}{Pi}K, \qquad t=\frac{S-P}{Sd}K.$$

Misol. $400 kredit 25% foiz yillik stavka bilan mijozga berildi. Agar mijoz qo‘liga $350 pul mablag‘i olishni rejalashtirgan bo‘lsa, bunga mos kredit muddatini aniqlang.

Yechish. Berilgan $S=400; P=350; d=0,25$. Yuqoridagi formulalarga asoslanib quyidagini topamiz:

$$n=\frac{S-P}{Sd}=\frac{400-350}{400\cdot 0,25}=0,5.$$

Kredit muddati 0,5 yilga teng ekan.

Foiz stavkaning miqdori. Moliyaviy operatsiyaning samaradorligini va daromadlilikni hisobga olgan holda shartnomalarni taqqoslashda (agar foiz stavkalar oshkor shaklda ko‘rsatilmasa) foiz stavkalarni hisoblash zarurati paydo bo'ladi. (5.1) va (5.13) ifodalarni i yoki d ga nisbatan yechib, ushbu formulalarni hosil qilamiz (bundagi formulalar yil va kun o'lchamlarida berilgan):

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{Pt}K,$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{St}K.$$

Misol. Yopilishiga 120 kun qolgan \$900 veksel oddiy foiz stavkada bank foydasiga \$60 diskont bilan yopildi. Agar yil 360 kundan iborat bo'lsa, yillik foiz stavkani aniqlang.

Yechish. Berilgan $S=900;\ P=840;\ t=120,\ T=360$. Yuqoridagi formulalarga asoslanib quyidagini topamiz:

$$d = \frac{S-P}{St}K = \frac{900-840}{900\cdot 120}360 = 0,2 \ \textit{yoki}\ 20\%.$$

Demak, agar yil 360 kundan iborat bo'lsa, yillik foiz stavka 20% iborat bo'lar ekan.

Misol. Veksel egasi yopilishi, joriy yilning 1-oktabridan 6-noyabrigacha bo'lgan \$900 vekselni bankka taqdim etdi. Bank vekselga 20% oddiy foiz stavka belgiladi. Veksel egasining jamg'arma pul mablag'ini toping.

Yechish. Veksel yopilishiga 36 kun qoldi. Veksel egasining, vekseldan oladigan jamg'arma pul mablag'i (5.13) formula bilan aniqlanadi:

$$S = \frac{P}{1-nd} = \frac{900}{1-0,2\cdot\frac{36}{360}} = 918,37.$$

Veksel egasi, bankdan \$918 pul mablag'i olar ekan.

5.3. Murakkab foiz asosida pul mablag'larini jamg'arish va diskontirlash

Murakkab foizlar. Murakkab foizlar oddiy foizlardan hisoblash bazasi bilan farq qiladi. Agar oddiy foizlarda boshlang'ich baza jami hisoblash muddatida o'zgarmas bo'lsa, murakkab foizlarda esa hisoblangan foiz pullar boshlang'ich bazaga qo'shiladi.

Murakkab foizlar uzoq muddatli moliyaviy-kredit operatsiyalarida qo'llaniladi, bunda o'tgan vaqt intervalida hisoblangan foizlar doimiy ravishda to'lanmasdan boshlang'ich bazaga qo'shiladi,

Murakkab foizlar asosidagi jamg'arilgan pul mablag'lari. Aytaylik joriy pul mablag'i *R* bo'lsin, u holda bir yildan so'ng qo'shilgan foiz bilan jamg'arma pul mablag'i $P(1+i)$ bo'ladi, ikki yildan so'ng – $P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2,...,$ n yildan so'ng esa – $P(1+i)^n$ bo'ladi.

Murakkab foizlar asosidagi jamg'arilgan pul mablag'lari quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$S=P(1+i)^n, \qquad (5.14)$$

bunda S – jamg'arilgan pul mablag'i; i– murakkab yillik foiz stavka; n– ssudaning muddati; $K_{\text{жам}}=(1+i)^n$ – jamg'arma ko'paytuvchi.

Murakkab foizlar asosidagi jamg'arilgan pul mablag'larining o'sishi birinchi hadi *R* va maxraji $1+i$ bo'lgan geometrik progressiyadan iborat.

Foiz stavkasi 20% va tayanch vaqti bazasi 360 kun bo'lsa, oddiy va murakkab foizlarning jamg'arma ko'paytuvchilarini taqqoslaymiz. Hisoblash natijalari jadvalda ko'rsatilgan.

Jamg'arma koeffitsiyent	30 kun	180 kun	1 yil	5 yil	10 yil
$1+ni$	1,0167	1,1	1,2	2,0	3,0
$(1+i)^n$	1,0153	1,0954	1,2	2,4883	6,1917

Ko'rinib turibdiki, moliyaviy operatsiya bir yildan kam bo'lganda jamg'arilgan mablag', murakkab foizga nisbatan oddiy foiz yuqori natija beradi, bir yildan yuqori bo'lsa, teskarisi.

Misol. 80% protsent yillik stavka bilan \$8000 pul mablag‘i 3 yilga investitsiya qilinmoqda. Oddiy va murakkab foizlarni qo‘llab jamg‘arma pul mablag‘i va shu muddat uchun foizlar yig‘indisini toping.

Yechish:

1. Murakkab foizlar:

$S=P(1+i)^n=8000(1+0,8)^3=46656$ \$.

Daromad I=S-P=46656 – 8000=38656 \$.

2. Oddiy foizlar:

$S=P(1+ni)=8000(1+3\cdot0,8)=27200$\$.

Daromad *I=S-P*=27200 – 8000=19200 \$.

Demak, 3 yil davomida \$8000 pul mablag‘i murakkab foizda 5,8 marta o‘sdi, oddiy foizda esa 3,4 marta o‘sdi.

Agar murakkab foizlarda, foiz stavka vaqt bo‘yicha o‘zgarib tursa, u holda jamg‘arma pul mablag‘lari quyidagi formula blan aniqlanadi:

$$S=P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}...(1+i_k)^{n_k}, \qquad (5.15)$$

bunda $i_1,i_2,...,i_k$ – $n_1,n_2,...,n_k$ davrlarga mos ravishda stavkalarning o‘zgarishlari ketma-ketligi.

Ifoda $(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}...(1+i_k)^{n_k}$ – jamg‘arma ko‘paytuvchisi (koeffitsiyent) deyiladi.

Misol. Shartnoma, murakkab foiz bo‘yicha tuzilib, 15% yillik foiz stavka plyus yana o‘zgaruvchi marja: bunda birinchi ikki yilda 6%, uchinchi yilda 8%, to‘rtinchi yilda 10% bo‘ldi. Berilgan vaqtdagi K_{jam} jamg‘arma ko‘paytuvchini aniqlang.

Yechish. Jamg‘arma ko‘paytuvchini topamiz:

$K_{jam}=(1+0,21)^2(1+0,23)(1+0,25)=2,25$.

Demak, 4 yil davomida jamg‘arma ko‘paytuvchi 2,25 dan iborat bo‘lar ekan.

Yig‘indining ikkilanish formulasi. Kreditor o‘zining muvaffaqiyatli harakatini baholash uchun, berilgan foiz stavkasida ssuda yig'indisining N marta o'sishini bilish zarurati paydo bo'ladi. Buning uchun jamg'arma ko'paytuvchini N ga tenglashtirib quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

1) oddiy foizlar uchun $1+ni_{oddiy}=N$, u holda

$$n=\frac{N-1}{i_{oddiy}}; \tag{5.16}$$

2) murakkab foizlar uchun $(1+ni_{murak})^n=N$, u holda

$$n=\frac{\ln N}{\ln\left(1+i_{oddiy}\right)}. \tag{5.17}$$

$N=2$ holda (5.16) va (5.17) formulalar ikkilanish formulalari deyiladi.

Misol. Necha yilda oddiy va murakkab foizlarda 3% yillik stavka bilan qo'yilgan ssuda ikki baravar o'sadi.

Yechish. Oddiy foizlar uchun hisobni (5.16) formula bilan aniqlaymiz:

$$n=\frac{1}{i_{oddiy}}=\frac{1}{0,03}=33,33 \text{ yilda.}$$

Murakkab foizlar uchun hisobni (5.17) formula bilan aniqlaymiz:

$$n=\frac{\ln N}{\ln\left(1+i_{murak}\right)}=\frac{\ln 2}{\ln\left(1+i_{murak}\right)}=23,45 \text{ yilda.}$$

Demak, bir xil stavkalarda oddiy va murakkab foizlarning natijalari har xil bo'lar ekan.

Kasr sonli yilda foizlarni hisoblash. Kasr sonli yilda foizlarni hisoblash har xil usullarda hisoblanadi:

1) murakkab foizlar uchun:

$$S_1=P(1+i)^n;$$

2) aralash usulda, bunga ko'ra yillar soni butun bo'lganda murakkab foizlar bilan, kasr qismida esa oddiy foizlar bilan aniqlanadi:

$$S_2=P(1+i)^a(1+bi), \tag{5.18}$$

bunda, a – yilning butun qismi; b – yilning kasr qismi.

Misol. 30% foiz yillik stavka bilan bank \$1000 pul mablag'ini 30 oyga yillik hisob foiz sharti bilan kreditga berdi. Debitor kredit muddati tugagandan so'ng, qanday pul mablag'ini bankka qaytaradi?

Yechish. Ikki xil usulda bankka qaytariladigan jamg'arma pul miqdorini aniqlaymiz:

$$S_1 = P(1+i)^n = 1000(1+0,3)^{2,5} = 1000(1+0,3)^2\sqrt{1+0,3} = 1926,6\ \$;$$

$$S_1 = P(1+i)^a(1+bi) = 1000(1+0,3)^2(1+0,3\cdot 0,5) = 1943,5\ \$.$$

Demak, kasr sonli yilda foizlarni hisoblashda, aralash usuldagi jamg'arma pul mablag'i, kasr qismi hisobga olinmaydigan jamg'arma pul mablag'iga nisbatan ko'p bo'lar ekan.

Uzluksiz stavka. Diskret foizlarda, jamg'arma pul mablag'i ushbu formula bilan aniqlanadi:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn},$$

bunda $j-$ foizning nominal stavkasi, $m-$ yil davomida foiz hisoblashlari soni. m qancha katta bo'lsa, hisoblash davrlari shuncha kichik bo'ladi. $m\to\infty$ da limitga o'tsak ushbu formulani hosil qilamiz:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = Pe^{nj} \qquad (5.19)$$

bunda e - natural logarifmning asosi.

(5.19) ifodadan, uzluksiz protsent stavkasi j asosidagi jamg'arma pul mablag'ining formulasi kelib chiqadi:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = Pe^{nj} \Rightarrow S = Pe^{nj}. \qquad (5.20)$$

Uzluksiz foiz stavkasini, diskret foiz stavkasidan farqlash uchun, uni o'sish tezligi deyiladi va δ simvol bilan belgilanadi. U holda:

$$S = Pe^{\delta n} \qquad (5.21)$$

Misol. \$1000 pul mablag'i, δ=12% uzluksiz foiz stavka bilan 5 yilga bankka qo'yilsa, jamg'arma pul mablag'ini toping.

Yechish: Foiz stavka uzluksiz bo'lgani uchun, (5.21) formuladan foydalanamiz.

$$S = Pe^{\delta n} = 1000 \cdot e^{0,12 \cdot 5} = 1000 \cdot 404,96 = 404961\,\$.$$

Agar nominal foiz stavkada $m \to \infty$ bo'lsa, δ o'sish kuchi hosil bo'ladi. Uzluksiz foiz stavka asosida diskontirlash ushbu formula bilan bajariladi.

$$P = Se^{-\delta n}. \qquad (5.22)$$

Uzluksiz va nominal foiz stavkalar orasidagi bog'lanish. Uzluksiz va nominal foiz stavkalar funksional bog'lanishda bo'lganligi uchun, uzluksiz foiz stavkadan nominal protsent stavkaga o'tish mumkin va aksincha. Bir foiz stavkadan boshqa foiz stavkaga ekvivalent formula orqali o'tish uchun, ularning mos jamg'arma ko'paytuvchilari tenglashtiriladi:

$$(1+i)^n = e^{\delta n}. \qquad (5.23)$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz

$$\delta = \ln(1+i), \qquad (5.24)$$

$$i = e^{\delta} - 1. \qquad (5.25)$$

Misol. Yillik murakkab foiz stavka 15% ga teng, bunga ekvivalent bo'lgan o'sish tezligi nimaga teng?

Yechish. (5.24) formuladan foydalanamiz

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0,15) \approx 0,14.$$

Ya'ni ekvivalent o'sish tezligi 14% ga teng bo'lar ekan.

Ekvivalent va effektiv stavkalar. Har xil stavkalardan foydalanib moliyaviy operatsiyaning biror natijasini har xil ko'rinishda tasvirlash mumkin. Ekvivalent stavkada jamg'arma pul mablag'i va diskontirlash bir xil bo'ladi. Effektiv foiz stavka moliyaviy operatsiyaning har xil chastotadagi hisobi va har xil foiz stavkalarini o'zaro taqqoslaydi. Faqat shu stavka moliyaviy operatsiyaning samaradorligini xarakterlaydi, lekin ko'pgina moliyaviy shartnomalarda effektiv foiz stavkasidan farqli bo'lgan, nominal foiz stavka ishlatiladi.

Nominal foiz stavkalar. Ba'zida moliyaviy operatsiyalarda foizlarni o'sish davrida yil emas, balki yarim yil, kvartal, oy va boshqa vaqt davrlari qo'llaniladi ya'ni foizlar yilda m marta hisoblanadi. U holda shartnomalarda fiksirlangan davr uchun stavka emas, balki yillik foiz stavka qo'llanilib, u nominal stavka deyiladi.

Aytaylik yillik murakkab foiz stavka j bo'lib, m esa yil davomida hisoblangan foizlar soni bo'lsin. U holda har bir foiz, j/m stavka bilan hisoblanadi. Bundagi j nominal stavka deyiladi. Jamg'arma pul mablag'i quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{N} = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}, \qquad (5.26)$$

Bunda, N– hisoblash davrlarining soni.

Misol. Har yarim yilda 20% murakkab yillik foiz stavka bilan \$5000 pul mablag'i 2 yilga bankka qo'yildi. Jamg'arma pul mablag'ini toping va uni har kvartalda hisoblagandagi holat bilan solishtiring.

Yechish. Har yarim yilda foiz hisobini olgan holdagi jamg'arma pul mablag'ini (5.26) formuladan topamiz:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{N} = 5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{2\cdot 2} = 5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{4} = 7320,5\,\$.$$

Agar foiz hisobi har kvartalda hisoblansa, u holda jamg'arma pul mablag'i 2 yildan so'ng quyidagiga teng bo'ladi:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{N} = 5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{4\cdot 2} = 5000\cdot\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{8} = 7387,3\,\$.$$

Demak, foiz hisobini har yarim yilda bajarganimizda 2 yildan so'ng jamg'arma pul mablag'i \$7320,5 teng bo'lar ekan, har kvartalda esa \$7387,3 iborat bo'lar ekan.

Bundan esa, quyidagicha xulosa qilamiz:

murakkab foizda yil davomida qancha ko'p foiz hisobi bajarilsa, jamg'arma pul mablag'i shuncha ko'p bo'lar ekan;

murakkab foizda, har oydagi foiz hisobidagi jamg'arma pul mablag'i, yilda bir marta protsent hisobiga nisbatan katta natija berar ekan.

Misol. Har kvartaldan so'ng foiz hisobi bilan, 20% nominal yillik stavka bilan $1000 pul mablag'i 2 yilga bankka qo'yildi. Jamg'arma pul mablag'ini toping.

Yechish. Jamg'arma pul mablag'i topish uchun (5.26) formuladan foydalanamiz.

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = 1000\cdot\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{4\cdot 2} = 1477,6\,.$$

Demak, 2 yildan so'ng bankdagi jamg'arma pul mablag'i $1477,6 teng bo'lar ekan

Ko'rinib turibdiki m hisob davrlari soni qancha ko'p bo'lsa, jamg'arma pul mablag'i shuncha tez ko'payar ekan.

Misol. 60% murakkab nominal yillik stavka bilan $2000 pul mablag'i 28 oyga bankka qo'yildi. Har kvartaldan sung foiz hisobi bajariladi. Jamg'arma pul mablag'ini quyidagi uchta holda toping.

kasr qismida murakkab foiz bilan hisoblanadi;

kasr qismida oddiy foiz bilan hisoblanadi;

kasr qismi hisobga olinmaydi.

Olingan natijalar taqqoslansin.

Yechish. Har kvartalda protsent hisobi bajariladi. Kasr qismida murakkab foiz bo'lganda, jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{N} = 2000\cdot\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{28/3} = 2000\cdot\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{9}\sqrt[3]{1+\frac{0,6}{4}} \approx 7378\,\$.$$

Butun qismi murakkab foizda, kasr qismida esa oddiy foiz bo'lganda jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$S = 2000\cdot\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{9}\left(1+\frac{0,6}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) = 7392\,\$.$$

Kasr qismi hisobga olinmaganda, jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$S = 2000\cdot\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{9} = 7040\,\$.$$

Uchchala holda ham jamg'arma pul mablag'lar $7378, $7392 i $7040 bo'lar ekan.

Olingan hisob natijalari shuni ko'rsatadiki, 2 – holda jamg'arma pul mablag'i maksimal, 3 – holda esa jamg'arma pul mablag'i minimal bo'lar ekan.

Misol. Yillik foiz stavka 12% bo'lganda, bankka qo'yilgan $6000 pul mablag'ining, 5 yildan so'ng quyidagi shartlarda: a) har yil, b) har kvartalda, v) har oyda, jamg'arma pul mablag'ini toping.

Yechish. Berilgan: R=6000; J=0,12; n=5; a) m=1; b) m=4; v) m=12.

Toping: S, I.

$$a)\ S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = 6000(1+0,12)^5 = 10574,05;\quad I = 10574,05-6000 = \$4574,05;$$

$$б)\ S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = 6000\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{5\cdot4} = 10836,68;\quad I = 10836,68-6000 = \$4836,68;$$

$$в)\ S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = 6000\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{5\cdot12} = 10900,35;\ I = 10900,35-6000 = \$4900,35.$$

Demak, foizlar ko'p hisoblanganda, jamg'arma pul mablag'i ko'p bo'lar ekan.

Misol. $4600 veksel 4 yilda yopilishi kerak. Agar nominal foiz stavka 24% bo'lsa, jamg'arma pul mablag'i va diskontni quyidagi shartlarda aniqlang: a) har yil, b) har kvartalda, v) har oyda.

Yechish. Berilgan: S=4600; j=0,24; n=4; a) m=1; b) m=4; v) m=12.

Toping: P, D.

$$a)\ P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = \frac{4600}{\left(1+\frac{0,24}{1}\right)^{1\cdot4}} = 1945,68;\quad D = 4600-1945,68 = \$2654,32;$$

$$b)\ P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = \frac{4600}{\left(1+\frac{0,24}{4}\right)^{4\cdot4}} = 1810,77;\quad D = 4600-1810,77 = \$2789,23;$$

$$в)\ P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = \frac{4600}{\left(1+\frac{0,24}{12}\right)^{12\cdot4}} = 1778,03;\quad D = 460-1778,03 = \$2821,96.$$

Demak, bu diskontirlash operatsiyasi foiz hisoblar kam bajarilganda foydali bo'lib, bunda diskont kichik bo'ladi.

Misol. Bank hisob raqamiga $2500 pul mablag'i o'tkazilib, 5 yildan so'ng $2000 olindi. Agar foiz stavka 12% bo'lsa, 12 yildan so'ng (qo'yilgan kundan boshlab) jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. (5.26) formulaga asosan, 5 yildan so'ng bank hisob raqamida quyidagicha jamg'arma pul mablag'i bo'ladi.

$$S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}=2500\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2\cdot5}-2000=4477{,}12-2000=2477{,}12$$

Yana 7 yildan so'ng jamg'arma pul mablag'i quyidagicha miqdorga o'zgaradi:

$$S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}=2477{,}12\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2\cdot7}\approx5600{,}53.$$

Effektiv stavka. Effektiv stavka, murakkab foizning yillik stavkasi bo'lib, yiliga *j/m* stavka bilan *m* marta foiz hisobi bajarilgandagi jamg'arma pul mablag'iga teng bo'lgan moliyaviy natija beradi. Ya'ni, bunda murakkab foizning shunday yillik stavkasi aniqlanadiki, bu stavka bilan topilgan jamg'arma pul mablag'i, *j/m* stavka bilan *m* marta hisob bajarilgandagi jamg'arma pul mablag'iga teng bo'ladi.

Agar yiliga *j/m* murakkab yillik stavka bilan *m* marta foiz hisobi bajarilsa, u holda jamg'arma ko'paytuvchilarni tenglashtirib ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$(1+i_э)=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}, \qquad (5.27)$$

bunda $i_э$ – effektiv stavka, j - nominal stavka. (5.27) formuladan effektiv stavkani nominal stavka orqali ifodalaymiz:

$$i_э=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1. \qquad (5.28)$$

Teskari bog'lanish esa quyidagicha bo'ladi:

$$j=m\left[(1+i_э)^{1/m}-1\right]. \qquad (5.29)$$

Misol. Tadbirkor quyidagi shartlar bilan ssuda oldi:

26% yillik stavka bilan har oy foiz hisobi bajarilsa;

27% yillik stavka bilan har yarim yilda foiz hisobi bajarilsa.

Tadbirkor uchun qaysi variant foydaliroq?

Yechish. Hisob foizlari har oyda va yarim yil bo'lgandagi yillik effektiv stavkani aniqlaymiz:

$$i_e=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0,26}{12}\right)^{12}-1\approx0,294;$$

$$i_e=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0,27}{2}\right)^{2}-1\approx0,288.$$

Hisob foizi har oyda bajarilganda effektiv yillik foiz stavka 29,4% ga, yarim yil bo'lgandagi yillik effektiv stavka 28,8% ga teng bo'lar ekan. Demak, tadbirkorga 2 – variant foydaliroq ekan.

Effektiv stavka kredit miqdoriga bog'liq bo'lmasdan, nominal stavkaga va hisob foizlari soniga bog'liq ekan.

Misol. Har kvartalda foiz hisobi bajarilganda, effektiv stavka 12% bo'lishi uchun nominal stavka qanday bo'lishini aniqlang.

Yechish. (29) formuladan:

$$j=m\left[(1+i_e)^{1/m}-1\right]=4\left[(1+0,12)^{1/4}-1\right]=0,115.$$

Demak, har kvartalda foiz hisobi bajarilganda, effektiv stavka 12% bo'lishi uchun, nominal stavka 11,5% bo'lishi kerak ekan.

Misol. Har oydagi foiz hisobi uchun nominal stavka 25% bo'lsa, effektiv stavkani aniqlang.

Yechish. Berilgan: j=0,25; m=12. Effektiv stavkani aniqlaymiz.

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0,25}{12}\right)^{12}-1=0,280732.$$

Demak, bitimda ishtirok etuvchi tomonlar uchun, oylik foiz hisobi 25% (nominal) yoki yillik 28% foiz stavkani (effektiv) qo'llanilishining farqi yo'q.

Misol. Kredit berish shartlari qanday holda bank uchun foydaliroq ekanligini tahlil qiling: 1) 28% yillik stavka, foizlar har kvartalda hisoblanadi; 2) 30% yillik stavka, foizlar har yarim yilda hisoblanadi?

Yechish. Har bir variant uchun yillik effektiv foiz stavkani hisoblaymiz.

1) Berilgan j=0,28; m=4. (5.28) formulaga asosan quyidagini hosil qilamiz.

$$i_э = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0,28}{4}\right)^4 - 1 = 0,3107 \quad yoki\ 31,1\%.$$

2) Berilgan j=0,28; m=2. Yuqoridagi formula kabi quyidagini hosil qilamiz.

$$i_э = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0,3}{2}\right)^2 - 1 = 0,3225 \quad yoki\ 32,25\%.$$

Bank uchun 2 variant bo‘yicha kredit berish foydaliroq, ya’ni bunda yillik effektiv stavka foizlar katta (31,1% dan ko‘ra, yillik 32,25% bilan kredit berish foydaliroq).

Murakkab stavka uchun diskontirlash. Oddiy foizlarni o‘rganganimizda matematik diskontirlash va bank hisobini ko‘rib chiqqan edik. Birinchisi berilgan S ning qiymati va foiz stavkaga asoslanadi, ikkinchisi esa berilgan hisob stavkaga asoslanib R ni aniqlashdan iborat edi. Birinchi metodni qo‘llab murakkab foiz stavka asosida S ning qiymatidan foydalanib P ni aniqlaymiz.

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}.$$

Yilda foiz hisobi m marta bajarilgan hol uchun, yuqoridagi formula quyidagicha yoziladi.

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}}.$$

Eslatib o‘tamiz, S ni diskontirlash asosida hosil qilingan P miqdor, joriy, joriy narx, yoki joriy miqdor deyiladi. Joriy miqdor, S pul mablag‘i to‘languncha ixtiyoriy momentda hisoblanadi. Agar P diskontirlash asosida aniqlanganda, $S-P$ ayirma diskont deyiladi. Bu diskont ushbu formuladan aniqlanadi

$D = S - P.$

Misol. Korxona 3 yildan so‘ng $9000 uskunalarini almashtirsin. Agar pul mablag‘i uchun foiz hisobi har kvartalda bajarilsa, korxona, bank hisobiga qancha pul mablag‘i qo‘yishi kerak. Murakkab yillik foiz stavka 15% dan iborat.

Yechish. Masala shartiga asosan: $S=9000;\ n=3;\ i=0{,}15;\ m=12$. Diskontirlangan pul mablag‘i quyidagicha aniqlanadi:

$$P=\frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}}=\frac{9000}{\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)^{4\cdot 3}}=5786{,}1.$$

Demak, uskunalarni almashtirish uchun, yetarli bo‘lgan pul mablag‘ini jamg‘arish uchun bank hisobiga *P*=$5786 miqdorda pul qo‘yish kerak ekan.

Murakkab hisob stavkasi. Ba’zi hollarda, amaliy hisob operatsiyalarida, murakkab hisob stavkasi qo‘llaniladi. Bunday vaziyatlarda diskontirlash protsessi sekin bajariladi, ya’ni hisob stavkasi boshlang‘ich pul mablag‘iga emas, balki vaqt bo‘yicha avvalgi qadamdagi diskontirlangan pul mablag‘iga asoslanib bajariladi. Murakkab hisob stavkasi uchun diskontirlash quyidagi formuladan aniqlanadi.

$$P=S(1-d)^n, \qquad (5.30)$$

Bunda, d – yillik murakkab hisob stavka.

Misol. 5 yildan keyin to‘lash sharti bilan $5000 pul mablag‘i yillik murakkab 12% hisob stavka bilan sotildi. Qarzdan tushgan pul mablag‘i va diskont miqdori nimaga teng?

Yechish. Buning uchun quyidagi hisob foizlarining formulalaridan foydalanamiz.

$$P=S(1-d)^n=5000(1-0{,}15)^5=\$2218{,}5$$

$$D=S-P=5000-2218{,}5=\$2781{,}5$$

Oddiy hisob foizlarda esa ushbu formuladan foydalanamiz

$$P=S-D=S-Snd=S(1-nd)$$

$$P=S(1-nd)=5000(1-5\cdot 0{,}15)=\$1250$$

$$D=S-P=5000-1250=\$3750$$

Misoldan ko'rinib turibdiki, murakkab hisob stavkasidan foydalanib, diskontirlash qarzdor uchun oddiy hisob stavkaga nisbatan foydaliroq ekan.

Misol. Yillik murakkab hisob stavka 40% bo'lganda, 2 yildan keyin to'lanadigan $120 000 pul mablag'ining joriy miqdorini aniqlang.

Yechish. Bu misolni yechish uchun (5.30) formuladan foydalanamiz:

$$P = S(1-d)^n = 120000(1-0,4)^2 = \$43200$$

Demak, yuqoridagi shartlar bajarilganda pul mablag'ining joriy miqdori $P = \$43200$ teng bo'lar ekan.

Nominal va effektiv hisob stavkalari. Diskontirlash bir yilda bitta emas, balki yiliga m marta hisoblansa, ya'ni har safar hisob j/m stavka bilan bajariladi.

Bu holda:

$$P = S\left(1-\frac{j}{m}\right)^{mn}, \qquad (5.31)$$

bunda j — yillik nominal hisob stavka.

Effektiv hisob stavka d bir yildagi diskontirlash darajasini xarkterlaydi.

Effektiv hisob stavkani diskont ko'paytuvchilarni tenglashtirib topamiz:

$$(1-d)^n = S\left(1-\frac{j}{m}\right)^{mn} \Rightarrow d = 1-\left(1-\frac{j}{m}\right)^m.$$

O'z navbatida

$$j = m\left(1-\sqrt[m]{1-d}\right).$$

Effektiv hisob stavka hamma holda nominaldan kichik bo'ladi.

Yillik effektiv hisob stavka d, yiliga m marta diskontirlab olingan daromadga nisbatan, real nisbiy daromadni o'lchaydi.

Misol. Agar nominal hisob stavka 12% bo'lsa, yillik effektiv murakkab hisob stavkani quyidagi shartlarda aniqlang: a) har kvartalda; b) qarz tugashini hisobga olib har oyda.

Yechish. Berilgan: $j = 0,12$. U holda quyidagilarni hosil qilamiz

a) $m = 4$ ushbu qiymatni olamiz:

$$d = 1 - \left(1 - \frac{j}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0,12}{4}\right)^4 = 0,11147 \text{ yoki } 11,15\ \%;$$

b) $m = 12$ ushbu qiymatni olamiz:

$$d = 1 - \left(1 - \frac{j}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0,12}{12}\right)^{12} = 0,1136 \text{ yoki } 11,36\ \%.$$

Bitim ishtirokchilari uchun yiliga 4 marta 12 % diskontirlashmi yoki 12 martami farqi yo'q, ya'ni kvartal boshida 11,15 % yoki yil boshida 11,36 % effektiv stavka qo'llaniladi.

Misol. Effektiv hisob stavka 8% bo'lsa, quyidagi shartlarda nominal hisob stavkani aniqlang: a) har kvartalda, b) qarz tugashini hisobga olib har oyda.

Yechish. Berilgan: $d = 0,08$.

a) $m = 4$ ushbu qiymatni olamiz:

$$j = m\left(1 - \sqrt[m]{1-d}\right) = 4 \cdot \left(1 - \sqrt[4]{1 - 0,08}\right) = 0,0825179 \text{ yoki } 8,25\ \%;$$

b) m = 12 ushbu qiymatni olamiz

$$j = m\left(1 - \sqrt[m]{1-d}\right) = 12 \cdot \left(1 - \sqrt[12]{1 - 0,08}\right) = 0,084 \text{ yoki } 8,4\ \%.$$

Ko'rinib turibdiki, yildagi diskontirlash davrlari o'sishi bilan nominal hisob stavka ham o'sar ekan.

Murakkab hisob stavkasi bo'yicha jamg'arma. Aytaylik, murakkab yillik hisob stavka d bo'lib, yildagi hisob davrlari soni m bo'lsin. U holda, joriy narx va jamg'arma pul mablag'i ushbu formulalardan aniqlanadi.

$$P = S\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}; \quad S = \frac{P}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}}.$$

Misol. Muddati 5 yil bo'lgan \$5000 veksel, yillik murakkab hisob stavka 15% bo'lgan diskont bilan sotildi. Veksel uchun olingan pul mablag'i va foizlarni hisoblashda diskont miqdori qancha: a) har yil, b) har kvartal, v) har oy? Hisoblangan foizlar miqdori qancha?

Yechish. Berilgan: S=5000; d=0,15; n=5; a) m=1; b) m=4; v) m=12.

Toping: P, D.

$$a)\ P=5000\left(1-\frac{0,15}{1}\right)^{1\cdot 5}=2218,5; \quad D=5000-2218,5=\$2781,5;$$

$$б)\ P=5000\left(1-\frac{0,15}{4}\right)^{4\cdot 5}=2328,0; \quad D=5000-2328,0=\$2672,0;$$

$$в)\ P=5000\left(1-\frac{0,15}{12}\right)^{12\cdot 5}=2350,7; \quad D=5000-2350,7=\$2649,3.$$

Demak, diskontirlash operatsiyasida foizlarni ko‘p marta hisoblash foydali bo‘lib, bunda diskont eng kichikdir.

Misol. Muddati 5 yil bo‘lgan $8000 veksel, murakkab yillik hisob stavka 12% bo‘lgan diskont bilan sotildi. Joriy to‘lov narxini (yig‘indidan olingan pul mablag‘ini hisoblang) va diskont miqdorini quyidagi shartlarda aniqlang: uzluksiz, diskret murakkab va oddiy hisob stavkalarda.

Yechish. Berilgan: S=8000; d=0,12; n=5; a) m=1; b) m=4; v) m=12.

Toping: P, D.

$$a)\ P=Se^{\delta\cdot n}=8000e^{-0.12\cdot 5}=4390,49; \quad D=8000-4390,49=\$3609,5;$$

$$b)\ P=S(1-d)^n=8000(1-0,12)^5=4221,85; \quad D=8000-4221,85=\$3778,14;$$

$$в)\ P=S(1-nd)=8000(1-5\cdot 0,12)=3200,0; \quad D=8000-3200,0=\$4800,0.$$

Demak, foiz hisobini ko‘p marta bajarish, bu operatsiyani diskontirlashda foydali bo‘lib, diskont kichik bo‘lar ekan.

Misol. $5000 ssuda 5 yilga berilgan. Yillik nominal foiz stavkasi 15% bo‘lsa, quyidagi shartlarda qaytariladigan pul mablag‘i va diskontni hisoblang: a) har yili, b) har kvartalda, v) har oyda. Hisoblangan foiz miqdori nimaga teng?

Yechish. Berilgan: P=5000; d=0,15; n=5; a) m=1; b) m=4; v) m=12.

Toping: S, D.

a) $S = \dfrac{5000}{\left(1-\dfrac{0,15}{1}\right)^{1\cdot 5}} = 11268,74; \qquad D = 11268,74 - 5000 = \$6268,74;$

b) $S = \dfrac{5000}{\left(1-\dfrac{0,15}{4}\right)^{4\cdot 5}} = 10738,73; \qquad D = 10738,73 - 5000 = \$5738,73;$

v) $S = \dfrac{5000}{\left(1-\dfrac{0,15}{12}\right)^{12\cdot 5}} = 10635,1; \qquad D = 10635,1 - 5000 = \$5635,1.$

Demak, zayom egasi uchun foizlarni ko‘p marta hisoblash foydali bo‘lib, bunda diskont eng kichikdir.

Misol. \$3000 pul mablag‘i 3 yilda qaytarilishi kerak. 12% yillik hisob stavkasida diskontirlagandan so‘ng, qarzning joriy miqdorlarini quyidagi shartlarda taqqoslang: a) har yarim yilda; b) har kvartalda; v) uzluksiz.

Yechish. Berilgan: $n = 3$, $S = 3\ 000$, $d = 12$ %.

a) $m = 2$ hosil qilamiz

$$P = S\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m\cdot n} = 3000\left(1-\frac{0,15}{2}\right)^{2\cdot 3} = 1879,19;$$

a) $m = 4$ hosil qilamiz

$$P = S\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m\cdot n} = 3000\left(1-\frac{0,15}{4}\right)^{4\cdot 3} = 1896,4;$$

d) $m \to \infty$, $\delta = 0,12$ hosil qilamiz

$P = Se^{-\delta n} = 3000e^{-0,12\cdot 3} \approx 2093,03$.

Ko‘rinib turibdiki, m o‘sishi bilan joriy miqdor ham o‘sar ekan.

Misol. \$8000 pul mablag‘i 5 yilda qaytarilishi kerak. 12% yillik hisob stavkasida diskontirlagandan so‘ng, qarzning joriy miqdorlarini quyidagi shartlarda taqqoslang: a) har yarim yilda; b) har kvartalda; v) uzluksiz.

Yechish. Berilgan: $n = 5$, $P = 8\ 000$, $f = 12$ %.

a) $m = 2$ quyidagini hosil qilamiz

$$P = S\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m\cdot n} = 8000\left(1-\frac{0,15}{2}\right)^{2\cdot 5} = 3668,66; \quad D = 8000 - 3668,66 = 3609,5;$$

b) $m = 4$ quyidagini hosil qilamiz:

$$P=S\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m\cdot n}=8000\left(1-\frac{0,15}{4}\right)^{4\cdot 5}=3724,81;\quad D=8000-3724,81=4275,19;$$

d) $m\to\infty$, $\delta=0,12$ ushbuni hosil qilamiz:

$$P=Se^{-\delta n}=8000e^{-0,12\cdot 5}\approx 4390,49;\quad D=8000-4390,49=3609,51.$$

Ko'rinib turibdiki, m o'sishi bilan joriy miqdor o'sib, diskont kamayar ekan.

Misol. Yopilish muddati 4 yil bo'lib, $5700 veksel 24% murakkab hisob stavka bilan tugashiga 32 oy qolgan. Veksel egasi oladigan pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. Berilgan: n = 32/12= 8/3, S= 5700, d = 0,24. Murakkab foiz stavkasi uchun (5.30) formuladan foydalanamiz:

$$P=S(1-d)^n=5700(1-0,24)^{\frac{32}{12}}=2741,86.$$

Veksel egasi $2741 pul mablag'i olar ekan.

Ssuda muddati va foiz stavka miqdorini aniqlash. Moliyaviy operatsiyalarni hisoblashda ko'p hollarda teskari masalani, ya'ni ssuda muddati va foiz stavka miqdorini aniqlash talab etiladi.

Ssuda muddati. Jamg'arma foizlari va diskontirlashning har xil shartlarida muddat p ni hisoblashning formulalarini keltiramiz. Jamg'armani hisoblashda murakkab i yillik stavka va nominal j stavkalarga asoslangan $S=P(1+i)^n$ va $S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^N=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$ formulalardan, p ni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$n=\frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)},\quad n=\frac{\ln(S/P)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)},$$

Diskontirlashda murakkab d hisob stavkasi va nominal j hisob stavkasi uchun ushbu formulalarni hosil qilamiz.

$$n=\frac{\ln(P/S)}{\ln(1-d)},\quad n=\frac{\ln(P/S)}{m\cdot\ln\left(1-\frac{j}{m}\right)},$$

Misol. Qaysi muddatda murakkab foiz stavkasida \$7500 pul mablag'i \$20 000 bo'ladi? Agar foizlarni hisoblash a) yilda; b) har kvartalda bajarilsa.

Yechish. Yuqoridagi formulalardan quyidagi muddatlarni hosil qilamiz:

$$a)\quad n=\frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)}=\frac{\ln(20000/7500)}{\ln(1+0{,}15)}=\frac{0{,}98}{0{,}14}=7\ \text{йил},$$

$$b)\quad n=\frac{\ln(S/P)}{m\cdot\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}=\frac{\ln(20000/7500)}{4\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)}=\frac{0{,}98}{0{,}147}=6{,}7\ \text{йил}.$$

Misol. Murakkab va oddiy foiz stavkalar 5% bo'lganda, boshlang'ich kapitalni 5 marta o'sishi uchun necha yil kerak?

Yechish. Oddiy foizlar uchun

$$n=\frac{S-P}{iP}=\frac{5P-P}{0{,}05P}=80\,\text{йил}.$$

Murakkab foizlar uchun

$$n=\frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)}=\frac{\ln(5P/P)}{\ln(1+0{,}05)}=33\,yil$$

Demak, foizlarni murakkab hisoblaganimizda kerakli pul mablag'i tezroq yig'ilar ekan.

5.4. Jamg'arma pul mablag'ini inflatsiya bilan hisoblash

Yuqorida ko'rib chiqilgan holatlarda biz vaqt o'tishi bilan pulning qadrsizlanishi, ya'ni inflatsiyani hisobga olmadik. Inflatsiya, tovarlar narxining oshishida namoyon bo'ladi. Endi moliyaviy hisoblarni inflatsiya bilan birgalikda aniqlaymiz.

Inflatsiya – bu, biror davrda (masalan, moliyaviy operatsiya davrida) pulni sotib olish imkoniyatining pasayishi, ya'ni pulning qadrsizlanishi tushuniladi.

Belgilash kiritamiz:

S — nominal bo'yicha o'zgargandagi, ya'ni inflatsiya hisobga olinmagandagi jamg'arma pul mablag'i;

C — pul qadrsizlangandan keyingi, ya'ni inflatsiya hisobga olingandagi jamg'arma pul mablag'i;

J_p — narx indeksi (ma'lum davrda narxlar necha marta oshganligini ko'rsatadigan miqdor);

J_c — ma'lum davr oralig'ida pulning sotib olish imkoniyatini xarakterlaydigan indeks;

α – inflatsiya darajasi (ma'lum davr mobaynida narxlarning nisbiy o'sishi);

i – samarali yoki real foiz stavka.

Inflatsiya darajasi va indeksi. Inflatsiya pulning sotib olish imkoniyatining pasayishini va narxning o'sishini xarakterlaydi. Aytaylik S – shu momentdagi "iste'mol korzinasi" ning narxi, S_T – biror T vaqtdan keyingi "iste'mol korzinasi" ning narxi bo'lsin. Inflatsiya natijasida $S_T > S$ va $S_T = S + \Delta S$, bunda ΔS – biror miqdordagi pul bo'lib S yig'indiga narxni saqlash uchun qo'shiladi.

Inflatsiya tempi (darajasi) deb quyidagi miqdorga aytiladi;

$$\alpha = \frac{S_T - S}{S} = \frac{\Delta S}{S},$$

foizlarda ifodalanadi ($\alpha \cdot 100$ %).

Inflatsiya indeksi (narx indeksi) deb quyidagi miqdorga aytiladi;

$$J_p = 1 + \alpha .$$

Inflatsiya indeksi, narxning necha marta o'sganligini, inflatsiya darajasi esa, belgilangan davrda narxning necha foizga o'sganligini aniqlaydi.

Masalan, agar bir yil yoki bir oy davomida inflatsiya 20% bo'lsa, narxlar 1,2 baravar oshadi.

Ko'rinib turibdiki:

$$C = S \cdot J_c$$

Pulni sotib olish indeksi, narx indeksi bilan teskari bog‘langan, bunda narx qancha katta bo‘lsa, sotib olish imkoniyati shuncha past bo‘ladi:

$$J_c = \frac{1}{J_p}$$

Sotib olish imkoniyatining o‘zgarishi J_p narx indeksi bilan o‘lchanadi va bu esa berilgan davrda narxlarning necha marta o‘sganligini ko‘rsatadi. Jamg‘arma pul mablag‘ining inflatsiyani hisobga olgan holdagi qiymati;

$$C = \frac{S}{J_p} ,$$

formula bilan aniqlanadi.

Inflatsiya tempi (inflatsiya darajasi) - berilgan davrda narxning nisbiy o‘sishi bo‘lib α bilan belgilanadi:

$$\alpha = J_p - 1 \Rightarrow J_p = 1 + \alpha \cdot$$

Masalan, agar berilgan davrda inflatsiya tempi 30% bo‘lsa, bu narxning 1,3 marta o‘sganligini bildiradi.

Inflatsiya zanjirli protsess bo‘lgani uchun, ya’ni t davrdagi narxlar darajaga nisbatan α_t foizga o‘ssa, u holda n davr uchun narx indeksi quyidagi formuladan topiladi:

$$J_p = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_n) = \prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t).$$

Tegishli davr uchun o'rtacha inflatsiya ushbu formuladan topiladi;

$$\bar{\alpha} = \sqrt[n]{J_p} - 1.$$

Misol. Har oydagi narxlarning o‘sishi: 1,4; 1,3 va 0,8% iborat. Uch oy uchun inflatsiya darajasini va o‘rtacha oylik inflatsiyani aniqlang;

Yechish. Avvalo, biz narx indeksini aniqlaymiz;

$$J_p = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) = (1+0,014)(1+0,013)(1+0,008) = 1,0354 .$$

Shunday qilib, uch oylik inflatsiya quyidagiga teng;

$\alpha = J_p - 1 = 1,0354 - 1 = 0,0354$ *или* $3,54\%$.

Endi o'rtacha oylik inflatsiyani aniqlaymiz;

$\bar{\alpha} = \sqrt[3]{1,0354} - 1 = 0,0117$ *или* $1,17\%$.

Agar inflatsiya tempi har bir davrda o'zgarmas bo'lsa, $\alpha_k = const = \alpha$, u holda n davrdagi narxning indeksi ushbu formula bilan hisoblanadi.

$$J_p = (1+\alpha)^n.$$

Misol. Doimiy inflatsiya darajasi oyiga 4% ni tashkil qiladi. Narxlar bir yilda necha marta oshadi? Yillik inflatsiyani aniqlang.

Yechish. Narx indeksi yuqoridagi formula bilan aniqlanadi;

$J_p = (1+\alpha)^n = (1+0,04)^{12} = 1,601$.

Shunday qilib, bir yil ichida narxlar 1,601 marta o'sdi.

Yillik inflatsiya quyidagicha aniqlanadi;

$J_p = 1 + \alpha \Rightarrow \alpha = J_p - 1 \Rightarrow 1,601 - 1 = 0,601$ *yoki* $60,1\%$.

Shunday qilib, yillik inflatsiya 60,1% ni tashkil qilar ekan.

Misol. Inflatsiya tempi birinchi oyda 20%, ikkinchi oyda 15% , uchinchi oyda 10% bo'lsa, kvartalda narx o'sishini baholang.

Yechish. Uch oydagi inflatsiya indeksini ushbu formula bilan hisoblaymiz;

$$J_p = \prod_{t=1}^{3}(1+\alpha_t) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) = 1,2 \cdot 1,15 \cdot 1,1 = 1,518 \Rightarrow$$
$$\alpha = J_p - 1 = 0,518 \Rightarrow \alpha = 51,8\%.$$

Demak, kvartaldagi narx o'sishi $\alpha = 51,8\ \%$ iborat bo'lar ekan.

Davrlar bo'yicha inflatsiya doimiy bo'lgan holat ko'rib chiqiladi.

Endi inflatsiyani hisobga olgan holdagi jamg'arma yig'indini ko'rib chiqamiz. Bu holatda ushbu formuladan foydalanamiz:

$$C = \frac{S}{J_p}.$$

Shartnoma uzoq muddatli yoki qisqa muddatli bo'lishiga qarab, nominal bo'yicha jamg'arma yig'indini aniqlash: murakkab yoki oddiy foiz formulalari bo'yicha bajariladi.

Oddiy foiz formulasi;

$$S = P(1+ni_s).$$

Murakkab foiz formulasi;

$$S = P(1+i)^n.$$

Bar'er stavka. Agar foiz stavkasi inflatsiyani kompensatsiya ($S = C$) qilsa, bu *bar'er* stavka deyiladi. Oddiy foiz stavkada bar'er stavka quyidagicha aniqlanadi;

$$S = P \cdot J_p = P(1+ni) \Rightarrow i = \frac{J_p - 1}{n}.$$

Agar jamg'arma murakkab foiz stavkalarda bo'lsa, u holda bar'er stavka quyidagicha aniqlanadi;

$$S = P \cdot J_p = P(1+i)^n \Rightarrow i = \sqrt[n]{J_p} - 1.$$

Agar jamg'arma, murakkab foiz stavkasi bo'yicha bajarilib, hisoblar soni yiliga m marta bo'lsa, u holda baryer stavka quyidagicha aniqlanadi.

$$S = P \cdot J_p = P\left(1+\frac{j*}{m}\right)^{mn} \Rightarrow j* = m\left(\sqrt[mn]{J_p} - 1\right).$$

Jamg'arma pul mablag'ini inflatsiya bilan hisoblash. Oddiy foiz stavkada jamg'arma pul mablag'ini inflatsiya bilan hisoblash formulasi;

$$C = P\frac{1+ni_s}{J_p}, \quad \alpha = const, \quad C = P\frac{1+ni_s}{(1+\alpha)^n}.$$

Agar jamg'arma murakkab foiz stavkada aniqlanayotgan bo'lsa, u holda jamg'arma pul mablag'ini inflatsiya bilan hisoblash formulasi quyidagicha bo'ladi;

$$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p}, \quad \alpha = const, \quad C = P\left(\frac{1+i}{1+\alpha}\right)^n.$$

Agar jamg'arma murakkab foiz stavkada aniqlanayotgan bo'lib, yilliga hisob m marta bajarisa, u holda jamg'arma pul mablag'ini inflatsiya bilan hisoblash formulasi ushbu ko'rinishda bo'ladi;

$$C=\frac{S}{J_p}=P\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{J_p},\quad \alpha=const,\quad C=P\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{(1+\alpha)^n}.$$

Misol. \$15000 miqdoridagi pul mablag'iga, uch oy mobaynida oddiy foizlar asosida 28% yillik nominal stavka hisoblanadi. Oylik inflatsiya quyidagicha taqsimlangan 2,5; 2,0 va 1,8%. Inflatsiyani hisobga olgan holda jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

$P=\$15000$

$n=3\ oy$

$\alpha_1=2,5\%,\ \alpha_2=2\%,\ \alpha_3=1,8\%$

$r_s=28\%$

$C=?$

Yechish. Avvalo nominal ctavkada jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz.

$$S=P(1+nr_s)=15000\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0,28\right)=\$16050.$$

Uch oy mobaynidagi narx indeksini aniqlaymiz:

$$J_p=(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)(1+\alpha_3)=(1+0,025)(1+0,02)(1+0,018)=1,0643$$

Demak, 3 oydan so'ng narxlar 1,0643 marta o'sar ekan.

Inflatsiyani hisobga olgan holda jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$C=\frac{S}{J_p}=\frac{16050}{1,0643}=\$15080.$$

Misol. \$100000 miqdoridagi pul mablag'iga, uch yil mobaynida murakkab foizlar asosida 10% yillik nominal stavka hisoblanadi. Yillik inflatsiya quyidagicha taqsimlangan, 15; 12 va 9%. Inflatsiyani hisobga olgan holda jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

$P=\$100000$

$n=3\ oy$

$\alpha_1=15\%,\ \alpha_2=12\%,\ \alpha_3=9\%$

$r=10\%$

$C=?$

Yechish. Avvalo nominal stavkada jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$S = P(1+i)^n = 100000(1+0,1)^3 = \$\ 133\,100 .$$

Uch yil mobaynidagi narx indeksini aniqlaymiz:

$$J_p = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3) = (1+0,15)(1+0,12)(1+0,09) = 1,40392$$

Demak, 3yildan so'ng narxlar 1,40392 marta o'sar ekan.

Inflatsiyani hisobga olgan holda jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz:

$$C = \frac{S}{J_p} = \frac{133000}{1,4039} = \$\ 94806 .$$

Endi inflatsiyani hisobga olgan holda ma'lum bir daromad olish uchun shartnoma bo'yicha stavkani topish talab etilsin. Bu masala jamg'arma ko'paytuvchilarining tengligiga asoslanadi.

Pulning qadrsizlanishini qoplash uchun, banklar foiz stavkasini inflatsiya mukofoti deb ataladigan miqdorga oshiradilar. Inflatsiyani qoplovchi va real pul miqdorining ma'lum sur'atda o'sishini ta'minlovchi yakuniy stavka, brutto stavka deyiladi.

Brutto stavka. Pul qadrsizligini kompensatsiya qilish uchun, banklar foiz stavkalarini *inflyatsion mukofot* deb ataluvchi miqdorga ko'tarishadi. Inflatsiyani qoplab va real pul mablag'i o'sishini ta'minlaydigan yakuniy stavka brutto stavka deyiladi va r bilan belgilanadi.

Oddiy foiz stavkalarda brutto stavka

$$C = \frac{S}{J_p} = \frac{P(1+nr)}{J_p} = P(1+ni) \Rightarrow r = \frac{1}{n}\left(J_p(1+ni)-1\right).$$

Murakkab foizlarning brutto stavkasi. Murakkab foizlar uchun ham shu amal bajariladi

$$C = \frac{S}{J_p} = P\left(\frac{1+r}{1+\alpha}\right)^n = P(1+i)^n \Rightarrow \frac{1+r}{1+\alpha} = 1+i \Rightarrow r = i+\alpha+i\alpha ,$$

yoki

$$P\frac{(1+r)^n}{J_p}=P(1+i)^n \Rightarrow (1+r)^n=J_p(1+i)^n \Rightarrow r=\sqrt[n]{J_p}(1+i)-1.$$

Agar jamg'arma, murakkab foiz stavkasi bo'yicha bajarilib, hisoblar soni yiliga m marta bo'lsa, u holda jamg'arma pul mablag'ini inflatsiya bilan hisoblash quyidagicha aniqlanadi.

$$C=\frac{S}{J_p}=\frac{P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}{J_p}=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} \Rightarrow r=\left[\left(\sqrt[mn]{J_p}\left(1+\frac{j}{m}\right)-1\right)\right]m.$$

Misol. Investor \$ 5000 pul mablag'ini, har kvartaldagi kapitallashuvini hisobga olgan holda ikki yil muddatga investitsiya qilsa, inflatsiyani hisobga olgan, jamg'arma pul mablag'ini toping. Yillik daromad yiliga 12 % stavkada hisoblanadi. Yil davomida inflatsiya indeksi 20 % ni tashkil etadi.

Yechish. $P=\$\,5000,\ n=2,\ m=4,\ \alpha=20\,\%,\ r=12\,\%$. Ikki yil davomidagi inflatsiya indeksi quyidagiga teng:

$$J_p=(1+\alpha)^n=(1+0{,}20)^2=1{,}44.$$

Inflatsiya darajasi ushbuga teng:

$$\alpha=J_p-1=1{,}44-1=0{,}44 \ \textit{yoki}\ \alpha=44\,\%.$$

Inflatsiyani hisobga olgandagi, jamg'arma pul mablag'i quyidagiga teng:

$$C=\frac{S}{J_p}=\frac{P\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}{(1+\alpha)^n}=\frac{5000\cdot\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 2}}{1{,}44}\approx \$\,4398{,}5$$

Demak, inflatsiyani hisobga olgandagi, jamg'arma pul mablag'i \$ 4398,5 teng ekan.

Misol. Firma, bank bilan \$100000 pul mablag'ini 10% yillik foiz stavka bilan inflatsiyani hisobga olmagan holda, bir yilga shartnoma tuzdi. Kutilayotgan yillik inflatsiya darajasi 15%. Inflatsiyani hisobga olgan holdagi, kreditning foiz stavkasini, jamg'arma pul mablag'ini va kreditning foizlar yig'indisini toping.

Yechish. $P=\$\,100000,\ n=1,\ \alpha=15\,\%,\ i_s=10\,\%$. Yil davomidagi inflatsiya indeksi quyidagiga teng:

$$J_p = (1+\alpha)^n = 1+0{,}15 = 1{,}15.$$

Inflatsiya darajasi ushbuga teng:

$$\alpha = J_p - 1 = 1{,}15 - 1 = 0{,}15 \text{ yoki } \alpha = 15\,\%.$$

Nominal jamg'arma pul mablag'i:

$$S = P(1+ni) = 100000(1+0{,}1) = \$\,110000.$$

Nominal foiz hisobi:

$$I = S - P = 110000 - 100000 = \$\,10000.$$

Real jamg'arma pul mablag'i:

$$C = \frac{P(1+ni)}{J_p} = \frac{100000(1+0{,}1)}{1{,}15} = \$\,95652{,}17$$

Bankning diskonti:

$$I_r = C - P = 95652{,}17 - 100000 = -4347{,}83\,\$.$$

Shunday qilib, bank ushbu moliyaviy operatsiyadan $ 4347,83 miqdorda zarar ko'rar ekan.

Inflatsiyani qoplaydigan va real pul mablag'ining o'sishini ta'minlaydigan yakuniy stavka, ya'ni, brutto stavka ushbu formula bo'yicha hisoblanadi:

$$r_\alpha = \frac{1}{n}\left(J_p(1+ni) - 1\right) = \left(1{,}15(1+0{,}1) - 1\right) = 0{,}265.$$

Inflatsiyani hisobga olgandagi, jamg'arma pul mablag'i:

$$S = P(1+nr_\alpha) = 100000(1+1\cdot 0{,}265) = \$\,126500.$$

Bank daromadi:

$$I = S - P = 126500 - 100000 = \$\,26500.$$

Bankning real daromadi:

$$I_r = \frac{P(1+nr_\alpha)}{J_p} - P = \frac{126500}{1{,}15} - 100000 = \$\,10000.$$

Moliyaviy operatsiyaning haqiqiy rentabelligi:

$$i = \frac{I_r}{P} = \frac{10000}{100000} = 0{,}1.$$

Shunday qilib, yillik 10% daromadlilikni ta'minlash uchun inflatsiyani hisobga olgan holdagi kredit stavkasi yillik 26,5% ga to'g'ri kelishi talab etilar ekan.

Misol. Firma, bank bilan \$30000 pul mablag'ini 20% yillik foiz stavka bilan inflatsiyani hisobga olmagan holda, yarim yilga shartnoma tuzdi. Kutilayotgan yillik inflatsiya darajasi 12%. Bank inflatsiyani hisobga olgan holda qanday foiz stavkani qo'llaydi? Jamg'arma koeffitsienti va bank diskonti nimaga teng bo'ladi?

Yechish. $P = \$\,30000,\ n = 0{,}5,\ \alpha = 12\,\%,\ i_s = 20\,\%$. Yarim yildagi inflatsiya indeksini aniqlaymiz:

$$J_p = (1 + 0{,}12)^{\frac{1}{2}} = 1{,}0583$$

Inflatsiya darajasi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\alpha = J_p - 1 = 1{,}0583 - 1 = 0{,}0583 \ \textit{yoki} \ \alpha = 5{,}83\%$$

Inflatsiyani yo'qotib, pul mablag'ini kerakli tempda real o'sishini ta'minlaydigan brutto-stavka quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$r_s = \frac{1}{n}\left(J_p(1+ni)-1\right) = \frac{12}{6}\left(1{,}0583\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}2\right)-1\right) = 0{,}32826$$

Jamg'arilgan pul mablag'i oddiy foizlarda quyidagicha bo'ladi

$$S = P(1+nr_s) = 30000(1+0{,}5\cdot 0{,}32826) = \$\,34923{,}9$$

Bank diskonti esa quyidagiga teng bo'ladi:

$$I = S - P = 34923{,}1 - 30000 = \$\,4923{,}1.$$

Demak, masalaning javobi quyidagicha bo'lar ekan: 32,8 %, 1,16413, \$ 4923,1.

Misol. Yillik inflatsiya 13% darajada rejalashtirilgan bo'lsa, yillik 19% real daromad olish uchun shartnomada qanday stavka ko'rsatilishi zarur.

Yechish. $i = 19\,\%,\ \alpha = 13\,\%,\ r = ?$ Inflatsiyani yopadigan va ma'lum bir stavkada real pul mablag'ining o'sishini ta'minlaydigan yakuniy stavka, ya'ni brutto stavka ushbu formula bilan hisoblanadi:

$$r = i + \alpha + i\alpha = 0{,}19 + 0{,}19\cdot 0{,}13 = 0{,}3447 \ \textit{yoki} \ 34{,}47\,\%.$$

Agar biz inflatsiyani 13% darajada rejalashtirib, yiliga 19% rentabellikni ta'minlamoqchi bo'lsak, shartnomada 34,47% nominal stavka ko'rsatilishi zarur ekan.

Endi biz teskari masalani ko‘rib chiqamiz. Nominal stavka berilib, inflatsiya darajasi ma’lum bo'lsa, samarali kurs yoki real rentabellik qanday bo‘ladi. Formula bo‘yicha samarali stavkani topamiz:

$$\left(\frac{1+r}{1+\alpha}\right)^n=(1+i)^n \Rightarrow \frac{1+r}{1+\alpha}=1+i \Rightarrow i=\frac{r-\alpha}{1+\alpha}$$

Misol. Shartnoma bo‘yicha yiliga 25% nominal stavka belgilandi. Joriy yilda inflatsiya darajasi 14 foizni tashkil etdi. Haqiqiy yillik daromad nimaga teng?

Yechish. $r=25\%,\ \alpha=14\%,\ i=?$ Masalani yechish uchun yuqoridagi formuladan foydalanamiz:

$$i=\frac{r-\alpha}{1+\alpha}=\frac{0,25-0,14}{1+0,14}=0,09649 \ \textit{yoki} \ 9,65\ \%.$$

Demak, haqiqiy yillik daromad 9,65 % teng ekan.

Misol. Bank omonatlarni yillik 12 % nominal stavka bilan oylik foizlarni bajaradi. O'rtacha yillik inflatsiya darajasi 2 % ni tashkil qiladi. Operatsiyaning haqiqiy rentabelligini toping.

Yechish. Operatsiyaning real rentabelligi murakkab foiz asosidagi brutto stavka bilan ta’minlanadi. Samarali foiz stavka quyidagicha aniqlanadi:

$$i_{\text{эф}}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12}-1=0,1047 \ \textit{yoki} \ 10,47\ \%$$

Demak, $i_{\text{эф}}=r=10,47\ \%$.

Murakkab foiz stavkasi ko‘rinishidagi real daromad ushbu formuladan topiladi:

$$i=\frac{r-\alpha}{1+\alpha}=\frac{0,1047-0,02}{1+0,02}=0,0830 \ \textit{yoki} \ 8,3\ \%$$

Misol. Agar har oydagi inflatsiya tempi 4 % bo‘lsa, 15% oddiy yillik foiz stavka bilan yarim yilga qo‘yilgan $6000 depozitning real natijalarini aniqlang. Depozitning o‘sishi uchun zarur bo‘lgan minimal musbat stavka qanday bo'ladi? 15% yillik daromadni ta'minlovchi oddiy brutto stavkani va bank diskontini aniqlang.

Yechish. $P=\$\,6000,\ n=0{,}5,\ \alpha=2\,\%,\ i_t=15\,\%$. Yarim yildagi inflatsiya indeksini aniqlaymiz:

$$J_p=(1+0{,}02)^6=1{,}126$$

Inflatsiya darajasi quyidagicha bo'ladi

$$\alpha=J_p-1=1{,}126-1=0{,}126 \text{ или } 12{,}6\,\%$$

Depozitning o'sishi uchun zarur bo'lgan minimal musbat stavka quyidagiga teng

$$i^*=\frac{J_p-1}{n}=\frac{1{,}126-1}{0{,}5}=0{,}252 \text{ или } 25{,}2\,\%.$$

Demak, narxlar o'sishida depozitning real jamg'arma pul mablag'ining o'sishi uchun yillik stavka 25,2% dan katta bo'lishi zarur ekan.

Bank 40% yillik daromadni ta'minlash, hamda inflatsiya natijasidagi yo'qotishlarni kompensatsiya qilish uchun, quyidagicha aniqlangan brutto stavka qiymati qo'llaniladi

$$r=\frac{1}{n}\left(J_p(1+ni)-1\right)=\frac{12}{6}\left(1{,}057681\left(1+\frac{6}{12}0{,}4\right)-1\right)=0{,}5384.$$

Demak, 15% yillik daromadni ta'minlash uchun, inflatsiyani hisobga olgan holda depozitning yillik stavkasi 53,84 % bo'lishi kerak ekan.

Oddiy foizlarda jamg'arma pul mablag'i quyidagiga teng

$$S=P(1+nr)\Rightarrow S=6000(1+0{,}5\cdot 0{,}4209)=7262{,}7\,\$.$$

Bank diskonti esa quyidagiga teng bo'ladi

$$D=7262{,}7-6000=1262{,}7\,\$.$$

Misol. $20000 pul mablag'i 3 yilga kreditga berildi. Shu davrda narxlarning o'sishi 1,5 baravarga bashorat qilingan. Agar real daromadning murakab foiz stavkasi 12% bo'lsa, kredit berilayotgandagi foiz stavkani va jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. Berilganlar: $J_p=1{,}5,\ n=3,\ i=12\%$.

Brutto-stavka ushbu formuladan aniqlanadi:

$$r = \sqrt[3]{J_r}(1+i) - 1 = \sqrt[3]{1,5}(1+0,12) - 1 = 1,145 \cdot 1,12 - 1 = 0,2824 \text{ yoki } r = 28,24\,\%.$$

Murakkab foizlarda jamg'arma pul mablag'i quyidagiga teng:

$$S = P(1+r)^n = 20000(1+0,2824)^3 = \$\ 42\,179,41.$$

Demak, misolning javobi quyidagicha bo'lar ekan:

r=28,24%, S=$42 179,41.

MUSTAQIL TA'LIM. Mustaqil yechish uchun masalalar

5.1. Korxona yil oxirida $16000 qaytarish sharti bilan bir yilga $100000 pul mablag'ini bankdan kreditga oldi. Foiz va hisob stavkalarni hisoblang.

5.2. Oila yillik 6% oddiy foiz stavka bilan $1000 pul mablag'ini bankka qo'ydi. 3 yildan so'ng hisob raqamda qancha pul mablag'i va hisob foiz miqdori nimaga teng bo'ladi?

5.3. Yillik 6% oddiy foiz stavka bilan $6000 pul mablag'i bankka qo'yildi. Necha yildan so'ng hisob raqamida $6540 pul mablag'i bo'ladi?

5.4. Buvi, nevarasining tug'ilgan kunida bankka $1000 pul mablag'ini 8% yillik stavka bilan qo'ydi. Nevarasi 18 yoshga yetganda bankdagi pul mablag'i quyidagi shartlarda nimaga teng bo'ladi:

a) oddiy foizda; b) murakkab foizda?

5.5. $5000 veksel egasi, uning yopilishiga 2,5 yil qolganda bankka taqdim etganda qancha pul mablag'i oladi? Bunda yillik murakkab hisob stavka 20% ga teng.

5.6. Yosh oila avtomobil sotib olish uchun $6000 pul mablag'ini, 3 yilga, 15 % murakkab foiz stavka bilan kredit olishdi. Kreditning zamonaviy qiymati nimaga teng?

5.7. Bankdan $1200 pul mablag'i, 3 yilga, 20 % murakkab foiz stavka bilan kredit olindi. Kreditning zamonaviy qiymati nimaga teng?

5.8. Bankning hisob raqamida 20 yil davomida, 8% murakkab foiz bilan, $200 000 pul mablag'i to'plandi. Pul mablag'ining zamonaviy qiymati nimaga teng?

5.9. Talaba, naqd pul mablag'ini 2 marta ko'paytirish uchun, 10% oddiy foiz stavka bilan bankda depozit ochdi. Quyidagi shartlarni aniqlang: a) necha yildan so'ng kutilgan pul mablag'i yig'iladi? b) Murakkab foiz stavka, oddiy foiz stavka bilan almashtirilganda kutilgan vaqt qanchaga qisqaradi?

5.10. Bankning hisob raqamida 30 yil davomida, 10% murakkab foiz bilan $35 000 pul mablag'i to'plandi. Hisob raqamida 30 yil avval qo'yilgan pul mablag'ini toping.

5.11. 8% oddiy foiz stavka bilan qo'yilgan pulning 2 marta o'sishi uchun uni necha yilga qo'yish kerak?

5.12. 5% oddiy foiz stavka bilan qo'yilgan pulning 2 marta o'sishi uchun, uni necha yilga qo'yish kerak?

5.13. Talaba bankka quyidagi shartlarda $1600 pul mablag'i qo'ydi: birinchi yarim yilda 8% oddiy foiz stavka, keyingi har kvartalda stavka 1% o'sadi. Agar foizlar boshlang'ich pul mablag'iga hisoblansa, bir yarim yildan keyin hisob, raqamda qancha pul mablag'i bo'ladi?

5.14. Birinchi kvartalda 15% oddiy foiz stavka, ikkinchi kavrtalda 16%, uchinchi kvartalda 15,5%, to'rtinchi kavrtalda 17% qo'llanildi. O'rtacha yillik stavkani aniqlang.

5.15. Mijoz 5 yilda $30 000 pul mablag'i olishni xohlaydi. Agar maksimal murakkab foiz stavka 20% bo'lsa, u holda mijoz qanday miqdordagi pul mablag'iga depozit ochish kerak?

5.16. Yosh biznesmen korxona ochish uchun bankdan 13,4 % foiz stavka bilan, $25 000 pul mablag'ini 2 yilda qaytarish sharti bilan kredit oldi. Uyga kelib, u shartnomani e'tibor bilan o'qimaganligini, ya'ni bank hisobni murakkab foiz stavkada bajarayotganligini angladi. Biznesmen o'z e'tiborsizligidan afsuslandimi? Masala javobini asoslab bering.

5.17. Ota- ona yillik 15% foiz stavkada, har oylik foiz hisobi bilan bankdan \$5000 pul mablag'ini olishdi. Bir yilda bankka qancha pul to'lanadi?

5.18. Agar nominal hisob stavka 16% bo'lib, diskontirlash har kvartalda bajarilsa, effektiv yillik murakkab hisob stavkani aniqlang.

5.19. Yillik murakkab foiz stavka 25 % bo'lsa, ekvivalent o'sish kuchi nimaga teng?

5.20. Yillik o'sish kuchi 20 % bo'lsa, ekvivalent yillik murakkab foiz stavka nimaga teng?

5.21. 6% yillik oddiy foiz stavka to'laydigan bankka \$6000 pul mablag'i qo'yildi. Necha yildan so'ng hisob raqamda \$6540 pul mablag'i bo'ladi?

5.22. Korxona \$16000 pulni qaytarish sharti bilan bankdan bir yilga \$10000 pul mablag'i oldi. Foiz va hisob stavkalarini hisoblang

5.23. Oila bankka \$1000 pul mablag'ini 8% yillik stavka bilan qo'ydi. 18 yildan so'ng bankdagi pul mablag'i quyidagi shartlarda nimaga teng bo'ladi: a) oddiy foizda; b) murakkab foizda?

5.24. Veksel \$850 sotib olindi. 3 oydan so'ng \$920 sotildi. Agar yillik oddiy foiz stavka bo'lsa, bu operatsiyaning rentabelligini aniqlang, bunda $K = 360$.

5.25. \$3000 veksel egasi, uning yopilishiga 1,5 yil qolganda bankka taqdim etganda qancha pul mablag'i oladi? Bunda yillik murakkab hisob stavka 15% ga teng.

Testlar

1. Aniq foiz bu –

A) Foizlarni hisoblashda yilni 365 yoki 366 kun deb olish

B) Biznes foiz i

C) Kapitallashtirilgan foizlar

D) Moliyaviy operatsiyalarda ma'lum vaqtlar uchun foizlarni hisoblash

2. Oddiy foizlarda jamg'armani hisoblash formulasini ko'rsating.

A) $S = P(1+ni)$

B) $S = P(1-nd)$

C) $P = S(1-ni)^{-1}$

D) $P = S(1-nd)^{-1}$

3. Oddiy foizlarda matematik diskontirlash formulasini ko'rsating.

A) $P = S(1-dn)$

B) $P = S(1+ni)^{-1}$

C) $S = P(1-dn)$

D) $S = P(1-ni)$

4. Mijoz 2 yildan so'ng qaytarish sharti bilan bankdan \$3000 pul oldi. Agar u bu vaqtda bankka \$4800 pul qaytarsa, kreditning foiz stavkasini toping.

A) 30% B) 20% C) 40% D) 50%

5. Agar oddiy foiz stavka 20% bo'lsa, necha yildan so'ng mablag' 2 marta ko'payadi?

A) 5 B) 8 C) 6 D) 4

6. Agar bankka 9600 sum pul mablag'i qo'yilib, yillik oddiy foiz stavka 10% bo'lsa, jamg'arma pul mablag'ini toping.

A) 10 560 B) 10 300 C) 10 000 D) 10 060

7. 10% oddiy foiz stavka bilan qo'yilgan pulning 1,5 marta o'sishi uchun, uni necha yilga qo'yish kerak?

A) 5 B) 3 C) 4 D) 6

8. Murakkab foiz formulasini ko'rsating

A) $S = P(1+i)^n$

B) $S = P(1+ni)$

C) $S = P\left(1+\frac{t}{T}i\right)$

D) $S = P(1+ni)\cdot(1+i)^n$

9. Nominal foiz stavka qo'llaniladi, agar

A) oddiy foiz stavkada

B) murakkab foiz stavkada

C) yil davomida murakkab foizlar bir necha marta hisoblanadi

D) yil davomida oddiy foizlar bir necha marta hisoblanadi

10. Oddiy foiz stavka 8% bo'lib, boshlang'ich pul mablag'i 100 ming sum bo'lsa, bir yildan so'ng jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

A) 108 000 B) 82 000 C) 96 000 D) 102 000

11. Mijoz bankdan 3000 sum kredit olib, 5 yildan so'ng bankka 8100 sum pul mablag'i qaytarishi kerak. Kreditning oddiy foiz stavksini toping.

A) 34% B) 38% C) 44% D) 52%

12. Oddiy foiz stavkasi 15% bo'lganda, bankka qo'yilgan $8000 pul mablag'i necha yildan so'ng $20 000 bo'ladi?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20

13. Mijoz, 6 oydan so'ng $2200 pul mablag'i miqdorida qaytarish sharti bilan, oddiy yillik foiz stavka 20% bo'lgan bankdan pul oldi. Diskont nimaga teng?

A) 200 B) 220 C) 150 D) 280

14. Mijoz bankka 3 yilga $2000 pul qo'ydi. Murakkab yillik foiz stavka 20%. Jamg'arma pul miqdorini aniqlang.

A) 3456 B) 2800 C) 2836 D) 2700

15. Mijoz bankka 2 yilga $7000 pul qo'ydi. Oddiy yillik foiz stavka 20%. Jamg'arma pul miqdorini aniqlang

A) 9800 B) 9600 C) 8200 D) 4800

Nazorat uchun savollar

1. Foizning iqtisodiy va matematik ma'nolarini tushuntiring.
2. Moliyaviy matematikaning asosiy masalalariga qanday operatsiyalar kiradi?
3. Qanday vaziyatlarda oddiy va murakkab foizlar qo'llaniladi?

4. Nominal va effektiv stavkalar deganda nimani tushunasiz?
5. Uzluksiz foizlar va uni qo'llashni tushuntiring.
6. Jamg'arish samaradorligi deganda nimani tushunasiz?
7. Uzluksiz foizlarda samaradorlik koeffitsienti qanday hisoblanadi?
8. Diskontirlash deganda nimani tushunasiz? Diskont nima?
9. Effektiv stavka qanday moliyaviy parametrlar bilan bog'langan?
10. Nominal stavkaning, effektiv stavka bilan bog'lanishi qanday ko'rinishda bo'ladi? Effektiv stavkaning, nominal stavka bilan bog'lanishichi?

6 - BOB. TO‘LOVLAR OQIMI. RENTALAR. KREDIT HISOBI

6.1. To‘lovlar oqimi

Hozirgi davrda bank moliya operatsiyalari alohida olingan to‘lovlardan emas, balki ularning vaqt bo‘yicha ketma-ketligidan iboratdir. Masalan, oylik ish haqi oyiga to‘lov oqimi sifatida ikki marta, har 15 kunda to‘lanadi. Kvartira haqini to‘lash – to‘lov oqimi bo‘lib, bu esa oylik to‘lovlardan iborat. Oila avtomobil sotib olish uchun, har oyda bankka ma’lum miqdorda pul mablag‘ini yig‘ib borishi kerak. Qarzni bo‘lib to‘lash, investitsiyadan doimiy ravishda daromadning kelib turishi va hokazo. Shuning uchun to‘lovlar oqimini o‘rganish muhimdir.

Bu kabi ketma-ketlik, yoki to‘lovlar qatori, *to‘lovlar oqimi* deyiladi, bu qatorning alohida elementi esa – *oqimning hadi* deyiladi.

To‘lovlar oqimining hadlari musbat (tushum), yoki manfiy (to‘lov) miqdorlar bo‘lishi mumkin.

Hamma hadlar musbat miqdorlardan iborat bo‘lib, to‘lovlar orasidagi vaqt oraliqlari bir xil bo‘lgan to‘lovlar oqimi *moliyaviy renta* yoki *renta*, yoki *annuitet* deyiladi. Masalan, obligatsiya asosida protsentlarning ketma-ket olib turilishi, maishiy kredit uchun to‘lovlar, talabalar o‘qishi uchun oyida to‘lanadigan kontrakt to‘lovlari va hokazo.

6.2. To‘lovlar oqimining umumlashgan xarakteristikalari

To‘lovlar oqimining umumlashgan xarakteristikasi - *jamg‘arma pul mablag‘i* va *tayanch pul miqdoridan* iborat. Bu xarakteristikalarning har biri sonlardan tashkil topgan.

To‘lovlar oqimining *jamg‘arma pul mablag‘i* (S), bu renta oxiridagi to‘lovlar oqimi hadlarining protsentlari bilan yig‘indisidan iborat.

To'lovlar oqimining tayanch pul miqdori (A), bu to'lovlar oqimining diskontirlangan boshlang'ich miqdorlariga mos hadlari yig'indisidan iborat.

Yuqorida ko'rsatilgan pul mablag'larini to'lash yoki qabul qilish teng vaqt oraliqlarida bajariladi.

Moliyaviy rentalar ko'rib chiqilayotganda, quyidagi kategoriyalardan foydalaniladi:

- **renta hadi** (R) - alohida to'lovning miqdori;
- **renta davri** (t) - renta hadlari orasidagi vaqt intervali;
- **renta muddati** (n) - renta boshlanishidan oxirigacha bo'lgan vaqt;
- **protsent stavka** (i) - rentani tashkil qiladigan to'lovlarni jamg'arish uchun qo'llaniladigan stavka.

To'lovlar oqimlarining turiga qarab, moliyaviy kelishuv shartlari ko'p qirrali bo'ladi. Moliyaviy rentalar quyidagi sifat belgilari bilan klassifikatsiyalanadi:

- Renta - *davrining davomiyligiga* bog'liq ravishda quyidagilarga bo'linadi:
  - **yillik renta**, bunda renta davri 1 yil bo'ladi, ya'ni to'lovlar 1 yilda 1 marta bajariladi;
- **rentalarni bo'lib to'lash**, bunda renta davri 1 yildan kam yoki 1 yildan ko'p, ya'ni *r* marta bo'lib to'lash (*r-yil davomidagi to'lovlar soni*) dan iborat bo'ladi.
- *Foizlar hisoblash soniga* qarab farqlanadi:
  - yilda, **1 marta** foiz hisobi bajariladi;
  - yilda, ***m* marta** foiz hisobi bajariladi;
  - **uzluksiz rentalar,** to'lov yoki uctama foiz tez-tez (macalan, bir haftada) amalga oshiriladi.
- Rentalar *hadlarining miqdoriga* qarab farqlanadi:
  - **o'zgarmas rentalar**, bunda har bir to'lovning miqdori o'zgarmas bo'ladi, ya'ni renta teng hadlardan iborat bo'ladi;

- **o‘zgaruvchan rentalar**, bunda har bir to‘lovning miqdori o‘zgaruvchan bo‘ladi, ya’ni renta hadlari bir biridan farqli bo‘ladi.

- Rentalar *hadlarining soniga* qarab farqlanadi:
  - **hadlari soni chekli** (chekli rentalar), rentaning hadlari soni chekli va oldindan ular ma’lum;
  - **hadlari soni cheksiz** (doimiy rentalar), rentaning hadlari soni oldindan ma’lum emas.

- Rentalar *to‘lov ehtimoliga* qarab farqlanadi:
  - **ishonchli rentalar**, ya’ni to‘lov hech qanday shartsiz bajariladi, masalan kreditni to‘lash;
  - **shartli rentalar**, bu to‘lov, biror tasodifiy hodisaning sodir bo‘lishiga bog‘liq bo‘ladi.

- Renta *to‘lovlarini to‘lash vaqtiga* qarab farqlanadi:
  - **oddiy rentalar**, agar to‘lov har bir davr oxirida amalga oshirilsa, u holda bunday renta **poctnumerando** deb ataladi;
  - agar to‘lov davr boshida amalga oshirilsa, u holda **prenumerendo** deyiladi.

Misol. Firma belgilangan yil davomida, har yarim yilda, o‘z mijozidan, qarzni to‘lash uchun, teng miqdordagi to‘lovlar qabul qiladi. Kompaniyaga xizmat ko‘rsatuvchi bank, har yilning oxirida protsent hisobini bajaradi. Bunda, doimiy to‘lov, har yarim yilda bo‘lib to‘lash, ishonchli, har yilning oxirida foiz hisoblash, chegaralangan postnumerando renta ko‘rib chiqildi.

To‘lovlar oqimini tahlil qilganimizda rentaning jamg‘arma pul mablag‘larini yoki tayanch pul miqdorlarini hisoblash talab etiladi.

O‘zgarmas postnumerando rentaning jamg‘arma pul mablag‘i. Jamg‘arma pul mablag‘ining formulasi. Renta jamg‘arma pul mablag‘iinng har xil foiz hisoblarida ko‘rib chiqamiz.

Oddiy yillik renta. Bu yillik foiz stavkasi i bo‘lgan, n yil muddatga tuzilgan, har yili faqat bitta R to‘lov badali bajariladi. Renta to‘lovlari murakkab foizda hisoblanadi.

n yil mobaynida, har yilning oxirida hisob raqamiga R pul mablag'i kelib tushadi, bunda yillik foiz stavkasi i bo'lib, foiz hisobi yiliga bir marta bajariladi. Bunday holda, 1-to'lov badali renta muddatining oxirida $R(1+i)^{n-1}$ ga o'sadi, ya'ni R pul mablag'iga n-1 yillar davomida foizlar hisoblanadi. 2-to'lov badali renta muddatining oxirida $R(1+i)^{n-2}$ ga o'sadi va hokazo. Oxirgi to'lov badaliga foiz hisoblanmaydi.

Shuning uchun, renta muddatining oxirida, uning jamg'arma pul mablag'i geometrik progressiya hadlarining yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+...+R(1+i)^{n-1}$$

bunda progressiyaning birinchi hadi R ga teng bo'lib, maxraji $(1+i)$ ga, hadlar soni n ga teng. Bu postnumerando renta, jamg'arma pul mablag'lari yig'indisidan iborat. Bu quyidagicha aniqlanadi;

$$S=R\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}=R\frac{(1+i)^n-1}{i}=RS_{ni} \qquad (6.1)$$

Bunda;

$$S_{ni}=\frac{(1+i)^n-1}{i}, \qquad (6.2)$$

va bu renta *jamg'arma pul mablag'ining koeffitsiyenti* deyiladi. Bu renta muddati n ga va i foiz stavkaga bog'liq.

Misol. Ishlab chiqarish firmasi investitsion fond tashkil etish to'g'risida qaror qabul qildi. Shu maqsadda 3 yil mobaynida har yilning oxirida bankka $10 000 pul mablag'i qo'yildi. To'lov badaliga yillik 12% murakkab foiz stavka hisoblanadi. Renta muddati oxirida jamg'arma pul mablag'i yig'indisini aniqlang.

Yechish. Boshlang'ich berilganlar R=10 000, i=0,12, n=3.

$$S=R\frac{(1+i)^n-1}{i}=10000\cdot\frac{(1+0,12)^3-1}{0,12}=33744\ \$.$$

Demak, postnumerando rentaning jamg'arma pul mablag'i $S=\$33744$ teng bo'lar ekan.

Misol. 3 yil mobaynida hisob raqamiga har yilning oxirida bankka $1000 to'lov badali qo'yildi. To'lov badaliga yillik 10% murakkab foiz stavka hisoblanadi. Renta muddati oxirida jamg'arma pul mablag'i yig'indisini aniqlang.

Yechish. Boshlang'ich berilganlar R=1000, i=0,1, n=3.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000\frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} = 3310\,\$.$$

Demak, renta muddati tugaganda hisob raqamidaga jamg'arma pul mablag'i $3310 ga teng bo'lar ekan.

Yillik renta to'lovlari yiliga bir marta, foiz hisoblari esa yil davomida *m* marta bajariladi (Rentaning xarakteristikalari R, n, j, $m\neq 1$, p=1). Bunda har doim foiz stavka j/m qo'llaniladi, bunda j – nominal foiz stavka. U holda renta muddati oxirigacha renta hadlari foiz hisoblari bilan birga quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$R(1+j/m)^{m(n-1)}, R(1+j/m)^{m(n-2)}, ..., R\ .$$

Agar ketma-ketlikka o'ngdan chapga e'tibor bilan qarasak, bu birinchi hadi R, maxraji esa $(1+j/m)^m$ga, hadlar soni esa n ga teng bo'lgan geometrik progressiyadan iborat ekan. Bu progressiya hadlarining yig'indisi S, rentaning jamg'arma pul mablag'i yig'indisiga teng:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}. \qquad (6.3)$$

Misol. Ishlab chiqarish firmasi investitsion fond tashkil etish to'g'risida qaror qabul qildi. Shu maqsadda 3 yil mobaynida har yilning oxirida bankka $10 000 to'lov badali qo'yildi. To'lov badaliga yillik 12% murakkab foiz stavka hisoblanadi. Endi yil davomida ikki marta foiz hisoblansin. Renta muddati oxirida jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

Berilganlar: $j=0,12$ $m=2$ $R=\$10000$ $n=3$	**Yechish**: Yillik renta postnumerando, yil davomida ikki marta foiz hisoblansa, u holda jamg'arma pul mablag'i (6.3) formula bilan aniqlanadi:
S=?	$S=R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}=10000\dfrac{\left(1+\dfrac{0,12}{2}\right)^{2\cdot 3}-1}{\left(1+\dfrac{0,12}{2}\right)^{2}-1}=33860,8\$$ Demak, renta muddati oxirida jamg'arma pul mablag'i \$33860,8 dan iborat ekan.

Misol. Tashkilot pension fond tashkil etish uchun postnumerando renta bo'yicha har yili \$5000 to'lov badalini 6 yil davomida bankka qo'yadi. Bank har kvartalda 18% yillik nominal stavka bilan foiz hisoblaydi, rentaning jamg'arma pul mablag'ini toping.

Yechish. Berilganlar $R=5000,\ m=4,\ j=0{,}18$. (6.3) formuladan hosil qilamiz:

$$S=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m}-1}=5000\frac{(1+0{,}18/4)^{24}-1}{(1+0{,}18/4)^{4}-1}=48903{,}8\,\$.$$

Demak, rentaning jamg'arma pul mablag'i $S=\$48903{,}8$ dan iborat ekan.

Yil davomida renta to'lovlari bir necha *p* marta bir xil miqdordagi pul mablag'i qo'yadi, foiz yil oxirida (m=1) **bir marta hisoblanadi** (Rentaning xarakteristikalari R, n, i, m=1, $p\neq 1$). Renta to'lovlari yil davomida bir xil bo'lib, p marta to'lanadi va yil oxirida bir marta foiz hisoblanganda jamg'arma pul mablag'ini aniqlaymiz.

Agar R – yillik to'lov badali bo'lsa, u holda alohida bitta to'lovning miqdori R/p ga teng. U holda renta muddati oxirigacha, renta hadlari (to'lovlar ketma ketligi) foiz hisoblari bilan birga quyidagi geometrik progressiya ko'rinishida bo'ladi,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}, \dots, \frac{R}{p},$$

Birinchi hadi R/p ga, maxraji $(1+i)^{1/p}$, umumiy hadlar soni np ga teng. Bu progressiya hadlarining yig'indisi S, rentaning jamg'arma pul mablag'i yig'indisiga teng:

$$S=\frac{R}{p}\frac{(1+i)^{(1/p)np}-1}{(1+i)^{1/p}-1}=R\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=RS_{ni}^{p} \qquad (6.4)$$

bunda

$$S_{ni}^{(p)}=\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} \qquad (6.5)$$

– jamg'arma koeffitsiyent $m=1$ dagi, yiliga p marta to'lanadigan postnumerando renta.

Misol. Ishlab chiqarish firmasi investitsion fond tashkil etish to'g'risida qaror qabul qildi. Shu maqsadda 3 yil mobaynida, har yilning oxirida bankka \$10 000 to'lov badali qo'yildi. Har yilgi to'lov badali 4 ta bir xil qismga bo'linadi. To'lov badaliga yillik 12% murakkab foiz stavka hisoblanadi. Endi yil davomida bir marta foiz hisoblansin. Renta muddati oxirida jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. Berilganlar: R=10 000, p=4, i=0,12, n=3. Postnumerando renta har kvartalda qo'yilib, yiliga bir marta foiz hisoblansa, u holda jamg'arma pul mablag'i yig'indisi (6.5) formula bilan aniqlanadi:

$$S=R\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=10000\frac{(1+0,12)^3-1}{4\left[(1+0,12)^{1/4}-1\right]}=35221,13\,\$.$$

Demak, renta muddati oxirida jamg'arma pul mablag'i S=\$35221 iborat bo'lar ekan.

Misol. Mijoz har oyning oxirida bankka \$500 pul mablag'i qo'yadi. Har bir qo'yilayotgan to'lov badali uchun yillik murakkab foiz stavka 22% dan iborat. 8 yildan so'nggi jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. Berilganlar R=500, p=12. Misolni (6.5) formuladan foydalanib yechamiz:

$$S = R\frac{(1+i)^8 - 1}{\left[(1+i)^{1/12} - 1\right]} \Rightarrow S = 500\frac{(1+0,22)^8 - 1}{\left[(1+0,22)^{1/12} - 1\right]} = 118415,4$$

Demak, 8 yildan so‘ng mijoz bankdan $118 415,4 pul mablag‘i olar ekan.

Misol. Korxona nafaqa fondi tashkil etish uchun postnumerando renta asosida har yili bankka $10 000 pul mablag‘i qo‘yadi. Bu to‘lov badallari uchun yillik 18% murakkab foiz stavka qo‘llaniladi. 6 yildan so‘ng jamg‘arilgan pul mablag‘ini aniqlang. Bank quyidagi shartlarda foiz hisoblaydi: a) har yili, b) har kvartalda. Kreditor uchun qaysi variant foiz hisobi foydaliroq?

Yechish. Berilgan: R=10 000; i=0,18; n=6; a) m=1; b) m=4.

$$a)\ S = R\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10000\cdot\frac{(1+0,18)^6 - 1}{0,18} = 94419,67$$

$$б)\ S = R\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1} = 10000\cdot\frac{\left(1+\frac{0,18}{4}\right)^{4\cdot6} - 1}{\left(1+\frac{0,18}{4}\right)^4 - 1} = 98436,95$$

Demak, kreditor uchun renta uchun har kvartalda hisob foizi bajarilishi foydaliroq ekan, ya’ni bunda fondning jamg‘arma pul mablag‘i S=$98 436,95 teng bo‘lar ekan.

Misol. Kreditor $20 000 qarzni to‘lashi kerak. Ushbu qarzni to‘lash uchun kreditor 3 yil ichida bankka yillik 15% yillik murakkab foiz stavkada ma’lum miqdorda pul mablag‘ini qo‘yishni rejalashtirmoqda. Kreditor tomonidan qo‘yilgan depozitlar miqdori qanday bo‘lishi kerak? Yillik renta quyidagi shartlarda qo‘yiladi a) har yili; b) yiliga ikki marta.

Yechish. Berilgan: R=20 000; i=0,15; n=3: a) m=1, b) m=2.

$$a)\ S = R\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} = \frac{20000\cdot 0,15}{(1+0,15)^3 - 1} = 5759,54$$

$$б)\ S=R\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{j}{m}}\Rightarrow R=\frac{S\frac{j}{m}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}=\frac{20000\cdot 0{,}075}{\left(1+\frac{0{,}15}{2}\right)^{2\cdot 3}-1}=2760{,}9$$

Demak, birinchi holda kreditor bankka \$5759,54 pul mablag'i, ikkinchi holda esa \$2760,9 pul mablag'i qo'yadi. Ikkinchi variant kreditor uchun foydali ekan.

Misol. Oila dacha sotib olish uchun 5 yil davomida bankda \$20000 pul mablag'ini yig'ish uchun reja tuzdi. Agar bank har kvartalda hisob foizini bajarib, yillik 12% foiz stavkani tavsiya etsa, har kvartalda bankka qo'yiladigan to'lov badaliini (postnumerando) aniqlang.

Yechish. Berilgan: S=20000, p=4, m=4, n=5, i=0,12. Yillik rentaning joriy narxini aniqlash talab etiladi. Shartga ko'ra foiz yiliga 4 marta hisoblanadi. Buning uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$S=R\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}\Rightarrow R=S\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}=20000\frac{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4/4}-1}{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 5}-1}=744{,}31$$

Demak, har kvartalda bankka qo'yiladigan pul mablag'i \$744,31 iborat bo'lar ekan.

Moliyaviy rentaning jamg'arma pul mablag'ini aniqlash

Bir yildagi to'lovlar soni	Yil davomida foiz hisoblar soni	Postnumerando moliyaviy rentaning jamg'arma pul mablag'i
	m=1	$S=R\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$
p=1	m>1	$S=R\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}$
	$m\to\infty$	$S=R\cdot\dfrac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}$
	m=1	$S=R\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$
p>1	m=p	$S=R\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\dfrac{j}{m}}$,
	$m\neq p$	$S=\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1}$

O'zgarmas postnumerando rentaning joriy miqdori. Joriy miqdor moliyaviy operatsiyalarda ko'p qo'llaniladi (qarzni to'lashni rejalashtirish, ishlab chiqarish investitsiyalari samaradorligini baholash, taqqoslash va hokazo).

Bu moliyaviy tahlilning eng muhim xarakteristikasi bo'lib, turli moliyaviy-kredit operatsiyalari samaradorligini tahlil qilish, shartnoma shartlarini taqqoslash va hokazolarda foydalaniladi.

A to‘lovlar oqimining joriy miqdori, bu barcha diskontirlangan renta hadlarining yig‘indisidan iborat.

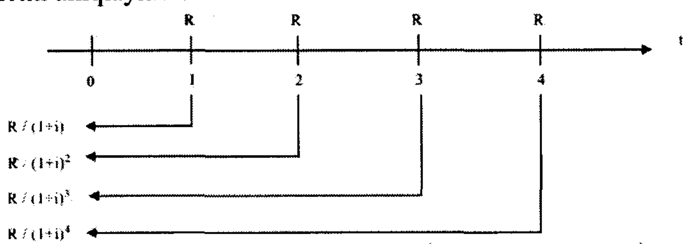
Moliyaviy rentalarning joriy miqdorlarini aniqlash metodlarini, jamg‘arma pul mablag‘larini aniqlash kabi boshlaymiz.

Joriy miqdorlarni baholash rentaning birinchi yili boshlanishi momentida amalga oshadi.

Eng oddiy usuldan, yillik postnumerando rentadan boshlaymiz, ya’ni bunda renta hadi R, muddati – n yil, yillik murakkab foiz stavka i bo‘lsin.

1. Yillik postnumerando renta (Rentaning xarakteristikalari $R, n, i, p=1, m=1$). Moliyaviy rentalarning joriy miqdorini topishdan boshlaymiz.

Diskontirlash sxemasi. Aytaylik p=4 yilga teng. Rentaning joriy miqdorini aniqlaymiz.



$$A=\frac{R}{(1+i)}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\frac{R}{(1+i)^4}=\frac{R}{(1+i)}\left(1+\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}\right)=$$

$$=\frac{R}{(1+i)}\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^3}\cdot\frac{1}{(1+i)}}{1-\frac{1}{(1+i)}}=R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^4}}{i}.$$

Eslatma: Bunda geometrik progressiyaning birinchi n ta hadi yig‘indisidan foydalanildi $S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$, progressiyaning birinchi hadi a_1 1 ga teng, progressiyaning maxraji esa $q=\frac{1}{1+i}$, progressiyaning n - hadi $a_n=\frac{1}{(1+i)^3}$.

Hadi *R* ga teng bo'lgan, yillik postnumerando rentaning formulasi. Muddati n yil, yillik murakkab foiz stavka i ga teng. Joriy miqdor ushbu formuladan aniqlanadi:

$$A = R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}. \qquad (6.6)$$

Bunda ushbu miqdor $a_{ni} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$ renta joriy miqdorining *koeffitsiyenti* deyiladi. U holda (6.6) formula ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$A = R\cdot a_{ni}. \qquad (6.7)$$

Misol. Firma 3 yil mobaynida \$18200 dan iborat bo'lgan rivojlanish fondini tashkil etishni mo'ljalladi. Shu maqsadda firma har yil oxirida 20% yillik murakkab stavka bilan \$5000 pul mablag'ini bankka qo'ydi. Renta muddati oxirida jamg'arma pul mablag'ini aniqlang:

Firma \$18200 pul mablag'ini hosil qilish uchun, qanday miqdordagi pulni bankka 20% yillik murakkab stavka bilan qo'yishi mumkin?

Yechish. Berilganlar: R = 5000, n = 3, i = 0,2. Agar firma \$5000 pul mablag'ini bankka 20% yillik stavka bilan qo'ysa, jamg'arma pul mablag'i yig'indisi (6.1) formuladan topiladi:

$$S = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = 5000\cdot\frac{(1+0,2)^3-1}{0,2} = 18200\,\$.$$

Ikkinchi savolga javob berish uchun rentaning tayanch pul miqdorini (6.6) formuladan aniqlaymiz:

$$A = R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 5000\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+0,2)^3}}{0,2} = 10532,4\,\$.$$

Agar firma \$10532,4 pul mablag'ini, 20% yillik stavka bilan 3 yilga bankka qo'ysa, yillik murakkab foiz hisobida jamg'arma pul mablag'i yig'indisi quyidagiga teng bo'lar ekan.

$$S = 10532,4 \cdot (1+0,2)^3 = 18200\,\$.$$

Misol. Renta hadi R=$4000, muddati n=5 yil, yillik stavka i = 18,5%. ga teng. Rentaning joriy miqdorini aniqlang.

Yechish. Tayanch pul miqdori (6,6) formuladan aniqlanadi:

$$A = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 4000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,185)^5}}{0,185} = 12368,3\,\$.$$

Hosil qilingan yig'indi shuni ko'rsatadiki, agar bugun $12368,3 pulni 5 yil davomida 18,5% yillik stavka bilan bankka qo'yilsa, bankdan har yilning oxirida $4000dan pul olishi mumkin.

2. Yillik postnumerando renta, foiz hisobi yiliga *m* marta (Rentaning xarakteristikalari $R, n, j, m \neq 1, p=1$).

Postnumerando rentaning joriy miqdori ushbu formuladan aniqlanadi:

$$A = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1}. \qquad (6.8)$$

Misol. Firmaning 5 yilga mo'ljallangan moliyaviy rentasi $600 bo'lib, to'lov har yili bajariladi. Yillik 15% foiz stavka har yarim yilda bajariladi. Rentaning joriy narxini toping.

Yechish. Berilgan: R=600, n=5, p=1, m=2. Rentaning joriy narxi (6.8) formula bilan aniqlanadi:

$$A = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1} = 600 \cdot \frac{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,15}{2}\right)^{2\cdot 5}}}{\left(1+\frac{0,15}{2}\right)^2 - 1} = 1984,79.$$

Demak, rentaning joriy narxi A=$1984,8 teng ekan.

3. Yillik postnumerando renta, *p* marta bo'lib to'lash, yiliga foiz hisobi *m*=1 marta (Rentaning xarakteristikalari R, n, i, m=1, $p \neq 1$).

Postnumerando rentaning joriy pul miqdori ushbu formuladan aniqlanadi:

$$A = R \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} \tag{6.9}$$

Misol. Firmaning 2 yilga moʻljallangan moliyaviy rentasi $6000 boʻlib, toʻlov har yili bajariladi. 8% yillik foiz stavka har yarim yilda boʻladi. Rentaning joriy narxini toping.

Yechish. Berilgan: R=6000, p=2, m=1. Rentaning joriy narxi ushbu formula bilan aniqlanadi.

$$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = 6000 \cdot \frac{1-(1+0,08)^{-2}}{2\left[(1+0,08)^{1/2}-1\right]} = 10909,46$$

Demak, rentaning joriy narxi A=$10 909,46 teng ekan.

4. **Yillik postnumerando renta, *p* marta boʻlib toʻlash, yiliga foiz hisobi *m* marta boʻlib, toʻlash *p* foiz hisobi davri bilan mos kelmaydi** (Rentaning xarakteristikalari R, n, j, $m \neq p \neq 1$).

Postnumerando rentaning joriy pul miqdori.

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}. \tag{6.10}$$

Misol. Bankka qanday miqdorda pul mablagʻi qoʻyganimizda, 8 yil davomida har yili $2500 pul mablagʻini hosil qilamiz. Har kvartal oxiridagi yillik foiz stavka i=5% dan iborat.

Yechish. Bu masalada, yillik rentaning joriy pul miqdorini aniqlash talab etilyapti. Buning uchun (6.10) formuladan foydalanamiz. Shartga koʻra yiliga hisob foizi 4 marta bajariladi. (6.10) formulaga rentaning ushbu parametrlarini qoʻyamiz p=1, m=4, n=8, i=0,05.

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}=2500\cdot\frac{1-(1+0{,}05/4)^{-4\cdot 8}}{(1+0{,}05/4)^{4}-1}=16096{,}6\,\$.$$

Demak, bankka joriy $A\approx 16096{,}6\,\$$ miqdorda pul mablag'i qo'yganimizda, 8 yil davomida har yili $2500 pul mablag'ini olar ekanmiz.

Misol. 3 yil davomida har kvartalda $4000 bo'lgan moliyaviy rentaning joriy narxini aniqlang. To'lov uchun har kvartalda 12% yillik murakkab foiz stavka bajariladi.

Yechish. Berilgan: $R=50, n=3, m=p=4, j=0{,}08$. Rentaning joriy narxi $m=p$ mos formula bilan aniqlanadi.

$$A=R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\frac{j}{m}}=4000\frac{1-\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{-4\cdot 3}}{\frac{0{,}12}{4}}=39816{,}02.$$

Demak, rentaning joriy narxi A=$39816 teng bo'lar ekan.

5) **Yillik postnumerando renta, p marta bo'lib to'lash, foiz hisobi uzluksiz** (rentaning xarakteristikalari $R, n, j, m=\infty, p\neq 1$).

Joriy narx ushbu formula bilan aniqlanadi

$$A=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}. \qquad (6.11)$$

Misol. Firmaning 6 yilga mo'ljallangan moliyaviy rentasi $500 bo'lib, to'lov har yili bajariladi. Foiz hisobi uzluksiz bo'lib, o'sish kuchi 0,5 teng. Yillik foiz stavka har yarim yilda bo'ladi. Rentaning joriy narxini toping.

Yechish. Berilgan: p=1, $\delta=0{,}5$, n=6. Rentaning yillik joriy narxini topish talab etilsin. Rentaning joriy narxi (6.11) formula bilan aniqlanadi.

$$A=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}=500\cdot\frac{1-e^{-0{,}5\cdot 6}}{e^{0{,}5}-1}=500\cdot\frac{1-e^{-0{,}5\cdot 6}}{1{,}64872127}=288{,}17.$$

Demak, agar foizlar uzluksiz hisoblansa, rentaning joriy narxi A $288,17 ga teng bo'lar ekan.

Doimiy moliyaviy rentaning joriy narxini aniqlash

Bir yildagi to'lovlar soni	Yil davomida foiz hisoblar soni	Postnumerando doimiy moliyaviy rentaning zamonaviy narxi
$p=1$	$m=1$	$A=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
	$m>1$	$A=R\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$
	$m\to\infty$	$A=R\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$
$p>1$	$m=1$	$A=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$
	$m=p$	$A=R\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{j}$
	$m\neq p$	$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}$

Doimiy moliyaviy renta jamg'arma pul mablag'ining joriy narxi ushbu formuladan aniqlanadi:

$$R=\frac{Sj}{(1+j)^{n}-1}.$$

Shu kabi A miqdordagi qarzning n yil davomida yopishning yillik to'lovi yoki rentasi (6.6) formuladan aniqlanadi:

$$R=\frac{Aj}{1-(1+j)^{-n}}.$$

Misol. Yillik 10% murakkab foiz stavkada, yillik postnumerando moliyaviy renta yoki yillik to'lanadigan rentani quyidagi shartlarda aniqlang: a) hajmi \$9000 fondni 3 yilda tashkil etish; b) hajmi \$9000 qarzni 3 yilda yopish.

Yechish. Berilgan: $R = A = 9000$, $n = 3$, $j = 0{,}1$.

a) quyidagi formuladan topamiz:

$$R = \frac{Sj}{(1+j)^n - 1} = \frac{9000 \cdot 0{,}1}{(1+0{,}1)^3 - 1\ 0{,}331} = 2719{,}03\,\$.$$

b) ushbu formuladan foydalanamiz:

$$R = \frac{Aj}{1-(1+j)^{-n}} = \frac{9000 \cdot 0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-3}} = 3619{,}03\,\$.$$

Umuman olganda, r marta bo'lib to'lash, foiz hisobi yiliga m marta bo'lsa, u holda n yil uchun yillik to'lov, jamg'arma va qarz to'lovlari uchun quyidagi formulalardan topiladi:

$$R = Sp\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}. \qquad R = Ap\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}.$$

Doimiy renta. Doimiy renta — bu annuitet bo'lib, to'lovlar ketma-ketligi hadlari chegaralanmagan, ya'ni bu to'lovlar cheksiz yillar davomida to'lanadi. Bunga, ishlab chiqarishga investitsiya qilingan pul mablag'idan tushayotgan foiz to'lovlarini misol qilib keltirish mumkin. Bu rentaning, avvalgilaridan farqi shuki, yillik badal to'lovlari R cheksiz ravishda bajariladi, ya'ni $n \to \infty$. Bu holda jamg'arma pul mablag'i cheksiz o'sib, joriy miqdor chekli bo'ladi. Bu rentaning joriy miqdorini aniqlashda ushbu limitdan foydalaniladi:

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = \frac{R}{i} \Rightarrow A_\infty = \frac{R}{i}.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, doimiy rentaning joriy miqdori quyidagi formuladan aniqlanar ekan:

$$A_\infty = \frac{R}{i}.$$

Demak, doimiy rentaning joriy miqdori, badal to'lovi miqdoriga va foiz stavkaga bog'liq bo'lar ekan.

Misol. Har yil oxirida badal to'lovi $5000 bo'lgan, doimiy renta berilgan bo'lsin. Agar yillik foiz stavka 8% bo'lsa, doimiy rentani sotib olish uchun to'lanadigan pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. Diskontirlashda 8% yillik stavka qo'llaniladi. Arendaning joriy miqdorini aniqlash talab etiladi. Ya'ni, bunda doimiy rentani sotib olish uchun to'lanadigan pul mablag'i, rentaning joriy miqdoriga teng. Bu esa yillar bo'yicha taqsimlangan barcha to'lovlar yig'indisiga teng. Doimiy rentaning joriy miqdori quyidagiga teng:

$$A_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{5000}{0,08} = 62500\ \$.$$

Demak, hosil qilingan $62500 yig'indi, yillar bo'yicha taqsimlangan postnumerado doimiy rentaning, barcha $5000 to'lovlar yig'indisiga ekvivalent.

Misol. Kvartira yiliga $18000 bilan arendaga olingan. Agar yillik foiz stavka 12% bo'lsa, doimiy rentani sotib olish uchun to'lanadigan pul mablag'ini aniqlang.

Yechish. Berilganlar: R - $18000; i - 0,12. Rentani sotib olish uchun to'lanadigan pul mablag'i – bu arendaninig kelajakdagi barcha to'lovlaridan iborat bo'lgan joriy miqdoridir. Bu esa quyidagiga teng:

$$A_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{18000}{0,12} = 150000\ \$.$$

Ko'rinib turibdiki, agar yillik 12% stavka bilan $150000 pul mablag'i bankka qo'yilsa, u holda yillik foiz pul mablag'lari $18000 bo'ladi.

Kechiktirilgan renta. Kechiktirilgan rentaning boshlanishi, ya'ni shartnoma tuzilgan vaqt momenti, biror kelajakdagi vaqt momentiga ko'chiriladi.

6.3. Qarzni to'lashning usullari

Kredit hisoblarda, uzoq muddatli qarzlarni to'lashni rejalashtirishni ko'rib chiqamiz.

Uzoq muddatli qarzlarni moliyaviy tahlil qilishning asosiy vazifasi ushbu qarzlarni to'lash rejasini ishlab chiqishdir. Aniqlik uchun biz qarzlarni kredit deb ataymiz. Biz avval kreditga pul olamiz, keyin qaytaramiz.

Har bir to'lov ikkita faktorni o'z ichiga oladi:

- kreditdan foydalanganlik uchun joriy foizlarni to'lash;
- asosiy qarzni to'lash uchun ketadigan pul mablag'i miqdori.

Bu faktorlar *shoshilinch to'lovlar* deb ataladi.

Belgilash kiritamiz:

D– qarzlar miqdori (asosiy qarz);

i – kredit bo'yicha foiz stavkasi;

n – kreditni yopish muddati;

Y– kreditga xizmat ko'rsatish yoki shoshilinch to'lov xarajatlari.

Kreditlarni berish va olish shartlari har xil. Bu mavzuda kreditni to'lashning juda oddiy va ommalashgan usullari ko'rsatiladi.

Bitta to'lov bilan muddat oxirida qarzni yopish. Aytaylik D zayom, i yillik murakkab foiz bilan p yilga berilgan bo'lsin. p yildan so'ng bu jamg'arilgan pul mablag'i $D(1+i)^n$ ga teng bo'ladi. Agar bu zayom bitta to'lov bilan amalga oshirilsa, bu to'lovning o'lchami bo'ladi. Demak, bitta to'lov bilan amalga oshiriladigan jamg'arma pul mablag'i quyidagicha bo'ladi:

$$Y = D(1+i)^n.$$

Qarzni yopishning bu usuli quyidagicha ham amalga oshiriladi. Bu holda, har yili faqat foiz pullari to'lanadi va asosiy qarz keyingi yil uchun qoladi. Kredit muddati tugagach, kredit bo'yicha foizlar ham, asosiy qarz ham to'lanishi zarur.

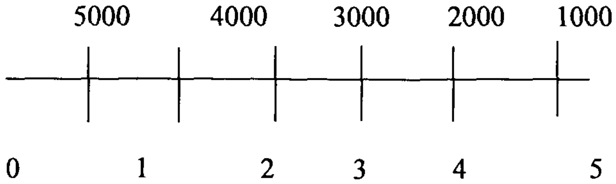
Misol. \$20 000 pul mablag'i 10% yillik murakkab foiz bilan, 8 yilga kredit berildi. Agar bu kredit bitta to'lov bilan amalga oshirilsa, bu to'lov o'lchami nimaga teng?

Yechish. Yuqoridagi formulaga asosan

$$Y = D(1+i)^n = 20000(1+0{,}1)^8 = 42372\,\$.$$

Zayomning o'zi *asosiy qarz*, jamg'arilgan qismi *foiz pul mablag'i* deyiladi.

Misol. Aytaylik, $D=5000$, $n=5$, $i=10\%$ bo'lsin. To'lovlar quyidagi rasmda ko'rsatilgan sxema asosida bajariladi.



1000	1000	1000	1000	1000
500	400	300	200	100 ,
1500	1400	1300	1200	1100

Misol. \$1000 zayom 5 oyga 15% oddiy yillik foiz stavka bilan berildi. Agar bu zayom bitta to'lov bilan bajarilsa, bu to'lovning jamg'armasini aniqlang.

Yechish. Berilgan: S=\$1000; t=5 yil; i=0,15. Ko'pincha qisqa muddatli kreditlarni yopish, bitta to'lov bilan amalga oshiriladi.

Oxirgi to'lov foizlari bilan quyidagicha aniqlanadi:

$$S = P\left(1+\frac{it}{K}\right) = 1000\left(1+\frac{5}{12}\cdot 0{,}15\right) = 1062{,}5\,\$.$$

Misol. \$10000 pul mablag'i, 5 yilga kreditga berildi. Kredit uchun yillik protsent stavka 10% dan iborat. Kreditni to'lov jamg'armasini aniqlang.

Yechish: Agar kredit muddati tugashi bilan bir marta to‘lansa, u holda to‘lov jamg‘armasi quyidagicha bo‘ladi:

$$Y = D(1+i)^n = 10000(1+0{,}1)^5 \approx 16105 .$$

Demak, kreditning to‘lov o‘lchami $16105 dan iborat ekan.

Misol. $ 100 000 miqdoridagi pul mablag‘i kreditga 5 yil muddatga berildi. Kredit uchun 10% yillik stavkada foiz to‘lanadi. Shoshilinch to‘lovlar miqdorini aniqlang.

Yechish. Ushbu masala uchun 5 ta to‘lov yoki 5 ta shoshilinch to‘lov bo‘ladi. Shunday qilib, dastlabki 4 yil davomida faqat kreditdan foydalanganlik uchun foizlar to‘lanadi, faqat kreditdan foydalanganlik uchun foizlar to‘lanadi.

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = Di = 100000 \cdot 0{,}1 = \$\,10000 .$$

Beshinchi yil uchun yakuniy shoshilinch to‘lov o‘tgan yil uchun foiz yo‘lovi va asosiy qarzni o‘z ichiga oladi.

$$Y_5 = 100 + 10 = \$\,110000 .$$

Asosiy qarzni yillik teng to‘lovlar bilan to‘lash. Har yili qarzning bir qismi to‘lanadi. Har yili asosiy qarz bo‘yicha to‘lanadigan to‘lov miqdori

$$d = \frac{D}{n} .$$

Misol. $ 100 000 miqdoridagi pul mablag‘i kreditga 5 yil muddatga berildi. Kredit uchun 10% yillik stavkada foiz to‘lanadi. Shoshilinch to‘lovlar miqdorini aniqlang va turli to‘lov sxemalari bo‘yicha kreditni to‘lash jadvalini tuzing.

Yechish. Bu masala bo'yicha kreditni qaytarish jadvalini tuzamiz.

Yil	Yil boshidagi asosiy qarzning qoldig'i	Kredit xarajatlari (shoshilinch to‘lovlar)	Asosiy qarzni to'lash	Foizlar
1	100 000	30 000	20 000	10 000

2	80 000	28 000	20 000	8 000
3	60 000	26 000	20 000	6 000
4	40 000	24 000	20 000	4 000
5	20 000	22 000	20 000	2 000

Shunday qilib, asosiy qarz to'liq to'landi.

Jadval shuni ko'rsatadiki, istalgan vaqtda biz asosiy qarzning qancha qismini to'laganimizni va qancha to'lashimiz kerakligini bilishimiz mumkin.

II usul. Aytaylik D zayom, i yillik murakkab foiz bilan p yilga berilgan bo'lsin. Bu usul bilan qarzni to'lash, har bir yil oxirida, bir xil R pul mablag'i bilan to'lanadi. Bu to'lovlarni renta muddati n yil bo'lgan va yillik to'lov R dan iborat. Rentaning joriy miqdorini D zayom bilan tenglashtirib $D = R \cdot a_{ni}$ tenglamani hosil qilamiz. Bunda yillik rentaning koeffitsienti bo'lib, $a_{ni} = \dfrac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$ dan iborat. Demak,

$$R = \frac{iD}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}.$$

Misol. Shu usul yordamida oldingi masalani yechamiz.

$$R = \frac{iD}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{0,1 \cdot 100000}{1 - \frac{1}{(1+0,1)^5}} = \$\ 26379,748.$$

Bundan esa quyidagini hosil qilamiz

$$Y = n \cdot R = 5 \cdot 26379,748 = \$\ 131\,898,74.$$

Demak, asosiy qarz to'liq to'landi.

Misol. Aytaylik D=$ 5000, n=5, i=10 %. Yillik to'lov badalini toping.

Yechish. Yuqoridagi formuladan

$$R=\frac{iD}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}=\frac{0,1\cdot 5000}{1-\frac{1}{(1+0,1)^5}}=\$\,1319.$$

Demak, yuqoridagi shartlar uchun yillik to‘lov badali R=$ 1319ga teng bo‘lar ekan.

2. Qarzni yil davomida bir necha marta, bir xil to‘lovlar bilan to‘lash. Aytaylik, R to‘lov badali, yiliga m marta to‘lansa, barcha yillik to‘lov Rm ga teng bo‘ladi. Bu to‘lovlarga i/m yillik stavka bilan m marta foizlar hisoblansin. Bu to‘lovlar ham renta hosil qilib, uning jamg‘arma pul mablag‘i, ushbu formuladan topiladi

$$S=R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{i}{m}}.$$

Zayomning jamg‘arma pul mablag‘i $S=D\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$ ga teng. Yuqoridagi ikkita formulani tenglashtirib, R ni hisoblash formulasini hosil qilamiz:

$$D\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}=R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{i}{m}}$$

bundan esa

$$R=\frac{D\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}\cdot\frac{i}{m}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}. \qquad (6.12)$$

Misol. $5000 kredit 4 yilga berildi. Yillik murakkab foiz stavka 22% dan iborat bo‘lsin. Kreditlarni to‘lash va foizlarni hisoblash quyidagicha: 1) har kvartalda; 2) har oydagi yillik to‘lov badallarini aniqlang.

Yechish. Berilgan: D=$5000; n=4; i=0,22. Bu holda kreditni to‘lash uchun yiliga m marta foiz hisobidagi n yilga mo‘ljallangan, to‘lanadigan to‘lov badallari R ni moliyaviy renta deb qarash mumkin. R to‘lov badalini (6.12) formula bilan aniqlaymiz.

1. Har kvartaldagi to‘lov badalini aniqlaymiz (m =4):

$$R=\frac{D\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}\cdot\frac{i}{m}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}=\frac{5000\left(1+\frac{0,22}{4}\right)^{4\cdot4}\cdot\frac{0,22}{4}}{\left(1+\frac{0,22}{4}\right)^{4\cdot4}-1}=477,8$$

Demak, har kvartaldagi yillik to‘lov badali $R\approx\$477,8$ dan iborat bo‘lar ekan.

2. Har oydagi to‘lov badalini aniqlaymiz (m =12):

$$R=\frac{D\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}\cdot\frac{i}{m}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}=\frac{5000\left(1+\frac{0,22}{12}\right)^{12\cdot4}\cdot\frac{0,22}{12}}{\left(1+\frac{0,22}{12}\right)^{12\cdot4}-1}=157,5\ \$.$$

Demak, har oydagi yillik to‘lov badali $R\approx\$157,5$ dan iborat ekan.

Misol. $1500 pul mablag‘i 10% yillik murakkab foiz bilan, 4 yilga kredit berildi. Korxona kreditni to‘lash uchun 14% yillik stavka bilan fond tashkil etdi. Kreditni to‘lash fondining yillik to‘lov badalini aniqlang.

Yechish. Berilgan: D=$1500; n=4; i=0,1; g=0,14.

1. Kredit muddati tugaguncha to‘lanadigan qarzni foizlari bilan birgalikda hisoblaymiz:

$$D=(1+i)^n=1500(1+0,1)^4=2196,15\ \$.$$

Kreditni to‘lash fondi, shu pul mablag‘ini, kredit muddati tugaguncha to‘plashi zarur.

2. Kreditni to‘lash fondi uchun zarur bo‘lgan, yillik to‘lov badalini aniqlaymiz Buning uchun ushbu formuladan foydalanamiz

$$S=R\frac{(1+g)^n-1}{g}\Rightarrow 2196,15=R\frac{(1+0,14)^4-1}{0,14}\Rightarrow R=446,3\ \$.$$

Demak, kreditni to‘lash fondi uchun zarur bo‘lgan, yillik to‘lov badali $R\approx\$446,3$ ga teng ekan.

Misol. 5 yildan so‘ng $60 000 fond yaratish uchun yillik 10% murakkab stavka bo‘yicha yillik to‘lov badalini aniqlang.

Yechish. Fondning yillik to'lov badalini aniqlaymiz. Buning uchun rentaning jamg'arma yig'indisidan foydalanamiz:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow R = \frac{60000 \cdot 0{,}1}{(1+0{,}1)^5 - 1} = 9827{,}85\,\$.$$

Demak, fondning yillik to'lov badali R=$9827,85 teng bo'lar ekan.

Iste'mol krediti va uni to'lash. Iste'mol krediti R miqdoridagi ssuda bo'lib, t muddatga (yillar) mo'ljallangan, yillik foiz stavka i, jamg'arma pul miqdorini foizlari bilan, bir xil n vaqt davrlarida to'lashdan iborat. Oddiy foizlar uchun.

$$S = \frac{P}{n}(1+it) \qquad (6.13)$$

Murakkab foizlar uchun qarz to'lashdagi to'lov miqdori quyidagi formula bilan topiladi.

$$S = \frac{P}{n}(1+i)^t \qquad (6.14)$$

Misol. Mijoz $9000 televizor sotib olish uchun bankdan kredit oldi. Bank mijozga har oyda 12% postnumerando oddiy protsent stavkasi bilan, 1,5 yilga iste'mol krediti taklif etdi. Mijoz, bankka har oyda qancha pul mablag'i o'tkazishi kerak?

Yechish. Berilganlar $n=18;\ i=0{,}12;\ t=1{,}5;\ P=9000$, u holda (6.13) formuladan foydalanib, quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$S = \frac{P}{n}(1+it) = \frac{9000}{18}\cdot(1+0{,}12\cdot1{,}5) = 590\,\$.$$

Demak, mijoz, bankka har oyda $590 pul mablag'i o'tkazishi kerak ekan.

Misol. Mijoz $18000 avtomobil sotib olish uchun bankdan kredit oldi. Bank mijozga har oyda 9% postnumerando murakkab protsent stavkasi bilan, 3 yilga iste'mol krediti taklif etdi. Mijoz, bankka har oyda qancha pul mablag'i o'tkazishi kerak?

Yechish. Berilganlar $n=36;\ i=0{,}09;\ t=3;\ P=18000$, u holda (6.14) formuladan foydalanib, quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$S=\frac{P}{n}(1+i)^t=\frac{1}{36}\cdot 18000\cdot(1+0,09)^3\approx 647,5$$

Demak, mijoz, bankka har oyda \$647,5 pul mablag‘i o‘tkazishi kerak ekan.

Imtiyozli kreditlar. Imtiyozli kredit odatdagi stavkadan kamroq bo‘lgan imtiyozli stavkada beriladi. Aslida, shu tarzda, qarz oluvchi subsidiya oladi, bu tegishli joriy miqdorlar o‘rtasidagi farq asosida hisoblanadi.

An‘anaviy ipoteka kreditni to‘lash. Bunday kredit 10–30 yilga past foiz stavkalarida beriladi. Odatda uni, mulkni (yer, uy va boshqalar) garovga qo‘yish evaziga beriladi. Agar qarz belgilangan muddatda qaytarilmasa, garovga qo‘yilgan mol-mulk kreditorning mulkiga o‘tadi. An’anaviy ipoteka krediti har oyda teng to‘lovlar asosida oylik foiz hisob bajarish bilan olib boriladi.

Doimiy postnumerando moliyaviy rentani to‘lash muddatini aniqlash

Bir yildagi to‘lov-lar soni	Yil davomida foiz hisoblar soni	To‘lov muddati (n)	
		S	A
$p=1$	$m=1$	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$	$n=\frac{\ln\left(1-\frac{A\cdot i}{R}\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$
	$m>1$	$n=\frac{\ln\left\{\frac{S}{R}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$	$n=\frac{\ln\left\{\frac{A}{R}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$
	$m=1$	$n=\frac{\ln\left\{\frac{S}{R}p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]+1\right\}}{\ln(1+i)}$	$n=\frac{\ln\left\{1-\frac{A}{R}p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]+1\right\}^{-1}}{\ln(1+i)}$

$p>1$	$m=p$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}j+1\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$	$n=\dfrac{\ln\left(1-\frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$
	$m\neq p$	$n=\dfrac{\ln\left\{\frac{S}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$	$n=\dfrac{\ln\left\{1-\frac{A}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$

Misol. Yillik to'lov badali \$250 va jamg'armaga yillik 12% foiz stavka bo'yicha hisoblansa, \$5000 pul mablag'ini jamg'arish uchun qancha vaqt ketadi?

Yechish. Berilgan: $S = 5000$, $R = 250$, $i = 0,12$. Bu son qiymatlarni $r=1$ va $m=1$ vaziyat uchun mos bo'lgan formulaga qo'yamiz.

$$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}=\frac{\ln\left(\frac{5000}{250}\cdot 0,12+1\right)}{\ln(1+0,12)}=10,8.$$

Demak, yuqoridagi shartlar bo'yicha \$5000 pul mablag'ini jamg'arish uchun 11 yil vaqt talab etilar ekan.

Misol. Yillik to'lov badali \$1000 bo'lsa, \$56000 qarzni to'lash uchun qancha vaqt ketadi. Qarz miqdori bo'yicha foizlar har kvartalda kapitallashuv bilan 20% nominal stavkada hisoblanadi.

Yechish. Berilgan: S=56000, R=1000, i=0,2, m=4, p=1. Bu son qiymatlarni r=1 va m>1 vaziyat uchun mos bo'lgan formulaga qo'yamiz.

$$n=\frac{\ln\left\{\frac{S}{R}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}=\frac{\ln\left\{\frac{56000}{1000}\left[\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{4}-1\right]+1\right\}}{4\ln\left(1+\frac{0,2}{4}\right)}=13,17.$$

Demak, yuqoridagi shartlar bo'yicha \$56000 qarzni to'lash uchun 13 yil vaqt talab etilar ekan.

Misol. Agar har oyda to'lov \$8000 bo'lib, yillik 24% stavka bo'yicha foizlar hisoblansa, \$100 000 pul mablag'ini topish uchn qancha vaqt kerak?

Yechish. Berilgan: $S = 100000$, $R = 8000$, $i = 0{,}24$, $p = 12$; $m = 1$. Bu son qiymatlarni $r>1$ va $m=1$ vaziyat uchun mos bo'lgan formulaga qo'yamiz.

$$n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R}p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]+1\right\}}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left\{\frac{100}{8}\cdot 12\left[(1+0{,}24)^{\frac{1}{12}}-1\right]+1\right\}}{\ln(1+0{,}24)} = 6{,}1.$$

Demak, yuqoridagi shartlar bo'yicha \$100 000 pul mablag'ini jamg'arish uchun 6 yil vaqt talab etilar ekan.

<u>MUSTAQIL TA'LIM</u>. Mustaqil yechish uchun misollar

6.1. Oila mashina olish uchun har yili bankka \$1000 qo'yish bilan, \$12 000 pul mablag'i yig'ishi kerak. Yillik foiz stavka 7%. Bu jamg'arma pul mablag'i qancha vaqtda yig'iladi?

6.2. Oila 6 yildan so'ng dacha sotib olish uchun \$12 000 pul mablag'i yig'ish kerak. Bankning yillik foiz stavkasi 8% bo'lsa, oila, 6 yil davomida har yili (o'zgarmas) qancha pul mablag'i bankka qo'yishi kerak?

6.3. Har yarim yilda yozuvchining bank hisobiga, nashriyot \$2000 pul mablag'i o'tkazib, har yarim yilda 7% yillik murakkab foizni hisoblaydi. 4 yildan so'ng bank hisobida qancha pul mablag'i bo'ladi?

6.4. Fondga, 20 yil davomida har yilning oxirida \$10 000 kelib tushib, yillik murakkab foiz stavka 10% dan iborat. Muddat oxiridagi jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

6.5. Fondga, 8 yil davomida har kvartalda \$2500 pul mablag'i kelib tushadi. Bu pul mablag'i uchun yiliga 2 marta, yillik 16% murakkab foiz stavka bilan, foiz hisobi bajariladi. Jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

6.6. Oila 5 yildan so'ng, 10 yil davomida har yili bankdan

$60 000 pul mablag'i olishni istaydi. Agar bankning yillik foiz stavkasi 8% bo'lib, har kvartalda murakkab foiz bajarsa, bank hisobiga qancha pul mablag'i qo'yish zarur?

6.7. Ota o'g'liga 10 yildan so'ng universitet ta'limini bermoqchi bo'ldi. Buning uchun unga $45 000 pul mablag'i zarurligi kelib chiqdi. Buning uchun har oyda R miqdordagi pul mablag'ini 8% yillik murakkab foiz stavka bilan bankka qo'ydi. R miqdorni aniqlang.

6.8. Fondga, 7 yil davomida har yilning oxirida $10 000 kelib tushib, yillik foiz stavka 15% dan iborat. To'lov har kvartalda bajarilib, foizlar esa har oyda hisoblanadi. Muddat oxiridagi jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

6.9. Oila har oyning oxirida bankka $1000 pul qo'yadi. Nominal yillik murakkab foiz 12% bo'lib, foizlar har oyda hisoblanadi. 2 yildan so'ng oila hisobidagi jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

6.10. Korxona, $12000 bilan qaytarish sharti bilan bir yilga, bankdan $8000 kredit oldi. Yillik foiz va hisob stavkalarini aniqlang.

6.11. Bank hisob raqamiga har kvartal boshida $5000 pul mablag'i kelib tushadi. Bank har oyda 18% nominal yillik foiz stavkasi bo'yicha murakkab foizlarni bajaradi. 2 yildan so'ng bank hisob raqamidagi jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

6.12. Oila har oyda bank hisobiga $4000 pul mablag'i o'tkazadi. Bank murakkab foiz stavkasi bo'yicha 12% to'laydi. 5 yildan so'ng quyidagi shartlar asosida, oilaning bank hisob raqamidagi jamg'arma pul mablag'ini aniqlang: a) har yili; b) har yarim yilda; d) har kvartalda.

6.13. 5 yillik postnumerando rentaning jamg'arma pul mablag'i, 4,25% stavka bilan $50 000 pul mablag'iga teng. Agar foiz hisobi har kvartalda bajarilsa, uning joriy qiymatini aniqlang.

6.14. Korxona 3 yil ichida $500 000 fond tashkil etish kerak. Yillik foiz stavka 8% bo'lsa, har yil oxirida to'lanadigan badal puli miqdorini aniqlang.

6.15. Kompaniya hamkorga 5 yil davomida $500 000 miqdoridagi joriy qarzni har yil oxirida teng bo'lib, 8% stavkada to'lashga rozi bo'ldi. Har bir to'lov badalini aniqlang.

6.16. Ishlab chiqaruvchi kompaniya 3 yil ichida rivojlanish fondini tashkil etishni rejalashtirmoqda. Kompaniya yiliga murakkab 12% foiz stavka bilan har yili bankka $10000 miqdorida jamg'arma pul mablag'i ajratish imkoniyatiga ega. Rentaning joriy qiymatini va rivojlanish fondining jamg'arma pul mablag'ini aniqlang.

6.17. Firma 3 yil davomida har yarim yilda $4000 pul mablag'i qabul qiladi. Agar bank kompaniyaga yillik 15% foiz stavkada xizmat ko'rsatsa, Shartnoma muddati tugaganidan keyin kompaniya olgan jamg'arma pul mablag'i qancha bo'lishini quyidagi shartlarda aniqlang: a) har yarim yilda; b) har kvartalda.

6.18. Ota o'g'liga, har o'quv yilining boshida 5 yillik universitetda ta'lim olishiga har yili $1000 pul mablag'i bilan ta'minlash uchun, shu bugundan boshlab bankdagi jamg'arma depozitiga qancha pul mablag'i o'tkazishi kerak?

6.19. Sud majlisida ma'lum bo'lishicha, oila oyiga $100 soliq kam to'lagan. Soliq inspeksiyasi tomonidan, so'nggi 2 yil davomida kam to'langan soliqlarni (oylik 6%) foizlar bilan undirish rejalashtirildi. Oila qancha pul mablag'i to'lashi kerak?

6.20. Yillik 9% stavka bilan 6 yilga olingan $12000 kredit teng to'lovlar bilan qaytariladi. Yillik to'lov badalini toping.

6.21. Talaba universitetda 5 yil o'qishi uchun yillik 2% foiz stavka bilan $10000 miqdorida kredit oldi. Yillik $10000 ish haqining16 % foizini to'lash majburiyatini oldi. O'qishni tugatgandan keyin necha yildan so'ng kreditni to'laydi?

6.22. 3 yillik postnumerando rentaning jamg'arma pul mablag'i 8% foiz stavka bilan $24 000 bo'lib, foiz hisobi har kvartalda bajariladi. Uning joriy qiymatini aniqlang.

6.23. 3 yil davomida kompaniya $500 000 miqdorida fond yaratish kerak. Har yil oxirida yillik 8% stavkada yillik badal to'lovini aniqlang.

6.24. Korxona 5 yil ichida $500 000 qarz pul mablag'ini yil oxirida teng yillar asosida yillik 8% foiz stavka yopish kerak. Har yil oxirida to'lanadigan badal pul mablag'i miqdorini aniqlang.

Testlar

1. Foiz stavkalarining o'lchov turlarini ko'rsating.

A) foizlar bilan, o'nlik yoki natural kasrlar bilan

B) faqat foizlar bilan

V) faqat o'nlik kasrlar bilan

G) faqat natural kasrlar bilan 1/32 gacha aniqlikda

2. Agar yillik nominal stavka 20% ga teng bo'lib, yilda 2 marta foiz hisoblansa, u holda yillik effektiv stavka quyidagiga teng

A) 21% B) 24% C) 28% D) 16%

3. Foizlarning nominal stavkasidan quyidagi holda foydalaniladi

A) oddiy foiz stavkada

B) murakkab foiz stavkada

V) yil davomida murakkab foizlar bir necha marta hisoblanadi

G) yil davomida oddiy foizlar bir necha marta hisoblanadi

4. Agar foiz stavka 20%, yillik to'lov 1000, rentaning muddati 5 yil bo'lsa, yillik postnumerando rentaning jamg'arma mablag'ini aniqlang

A) 7442 B) 8420 C) 6200 D) 4250

5. Agar foiz stavka 20%, yillik to'lov 1000, rentaning muddati 5 yil bo'lsa va foizlar har kvartaldahisoblansa, yillik postnumerando rentaning jamg'arma mablag'ini aniqlang.

A) 6954 B) 6500 C) 4200 D) 8020

6. Effektiv protsent stavka 44%, yilda 2 marta hisoblanadi. Nominal stavkani toping.

A) 40 B) 36 C) 20 D) 28

7. Agar oddiy yillik foiz stavka 15% bo'lsa, necha yildan so'ng $8000 pul mablag'i $20 000 bo'ladi?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 3

8. 15 sonining 72% ini aniqlang.

A) 10,8 B) 9 C) 8 D) 6

9. 20 sonining 128% ini aniqlang.

A) 25,6 B) 24 C) 16,2 D) 14

10. Mijoz bankka 13% stavka bilan pul qo'ydi. Bir yildan so'ng u bankdan $26 000 foyda oldi. Qo'yilgan pul mablag'ini aniqlang.

A) 200 000 B) 150 000 C) 260 000 D) 160 300

11. Postnumerando renta nima?

A) Har bir davr oxirida amalga oshiriladigan to'lovlar

B) Har bir davr boshida amalga oshiriladigan to'lovlar

V) Har doim amalga oshiriladigan to'lovlar

G) Uzluksiz amalga oshiriladigan to'lovlar

12. Prenumerando renta nima?

A) Har bir davr boshida amalga oshiriladigan to'lovlar

B) Har bir davr oxirida amalga oshiriladigan to'lovlar

V) Har doim amalga oshiriladigan to'lovlar

G) Uzluksiz amalga oshiriladigan to'lovlar

13. r marta bo'lib to'lash rentasi nima?

A) yil davomida foizlar r marta bo'lib to'lanadi

B) muddati r yil bo'lgan renta

V) yil davomida r to'lovli renta

G) yil davomidagi renta

14. 18% murakkab yillik stavka bilan $30 000 pul bankka 3 yilga qo'yildi. Jamg'arma pul mablag'ini toping.

A) 49291 B) 52300 C) 60500 D) 25300

15. 12% murakkab yillik stavka bilan $10 000 pul bankka 3 yilga qo'yildi. Jamg'arma pul mablag'ini toping.

A) 14049 B) 15200 C) 16500 D) 12000

16. Nevarasining to'g'ilgan kunida buvisi bankka 3 % stavka bilan bank $1000 pul qo'ydi. Nevarasi 17 yoshga to'lganda jamg'arma pul mablag'i qancha bo'ladi?

A) 1510 B) 1420 C) 1230 D) 1820

17. 20% oddiy stavka bilan bankka 700 ming sum pul bankka 4 yilga qo'yildi. Jamg'arma pul mablag'ini toping.

A) 1260 B) 1020 C) 1280 D) 1020

18. Katya 20% oddiy stavka bilan bankka $800 pul qo'ydi. 3 yildan so'ng u bankdan qancha miqdorda pul oladi?

A) 1280 B) 1100 C) 1020 D) 9200

19. Anton 10% oddiy stavka bilan bankka $600 pul qo'ydi. 3 yildan so'ng u bankdan qancha miqdorda pul oladi?

A) 800 B) 720 C) 630 D) 520

20. 50 000 sum 20% oddiy foiz bilan 2 yilga berildi. Jamg'arma pul mablag'ini toping.

A) 70 000 B) 60 000 C) 56 000 D) 46 200

Nazorat uchun savollar

1. To'lovlar oqimi nima? Misollar bilan tushuntiring.
2. Moliyaviy renta nima? Annuitetchi?
3. To'lovlar oqimining umumlashgan xarakteristikalari nimani bildiradi?
4. To'lovlar oqimining jamg'arma pul mablag'i nimani bildiradi?
5. To'lovlar oqimining zamonaviy miqdori nimani bildiradi?
6. Rentaning davomiylik davri nimadan iborat?
7. Oddiy yillik renta qanday aniqlanadi?
8. Kotraktlarda ko'rsatiladigan to'lov rentalarining tushishi va ular uchun hisob foizlari tartibi shartlari nimalardan iborat bo'ladi?
9. Doimiy renta postnumerandoning zamonaviy miqdori nimadan iborat?
10. Doimiy va kechiktirilgan rentalarlarni qanday tushunasiz?
11. Zayomni bitta to'lov bilan oxirida to'lashni tushuntirib bering.
12. Zayomni teng yillar davomida to'lashni tushuntirib bering.
13. Iste'mol krediti va uni to'lashni tushuntirib bering.

Mustaqil ishlarning javoblari va ularni yechish uchun tavsiyalar

I bob

1.1. $\bar{x}_{onm} = (2,25;\ 0,5)$, $\max L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 = 7,25$

1.2. $\bar{x}_{onm} = (0;\ 1)$, $\min L(\bar{x}) = 2x_1 - 10x_2 = -10.$

1.3. Yechimi mavjud emas

1.4. $\bar{x}_{onm} = (1,\ 0)$, $\max L(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 = 1$

1.5. $\bar{x}_{onm} = (36/11;\ 2/11)$, $\max L(\bar{x}) = x_1 + x_2 = 38/11$

1.6. $\bar{x}_{onm} = (0;\ 0)$, $\max L(\bar{x}) = 2x_1 + 2x_2 = 0$

1.7. $\bar{x}_{onm} = (2;\ 0)$, $\max L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 = 6$

1.8. $\bar{x}_{onm} = (0;\ 5)$, $\max L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 = 15$.

1.9. $\bar{x}_{onm} = (4;\ 11/3)$, $\max L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 = 34/3.$

1.10. $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 = \infty$

1.11. $\bar{x}_{onm} = (6;\ 3)$, $\max L(\bar{x}) = x_1 - x_2 = 3$

1.12. $\bar{x}_{onm} = (0;\ 7;\ 10;\ 0;\ 63)$, $\max L(\bar{x}) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 201.$

1.13 $\bar{x}_{onm} = (1/3;\ 11/3;\ 4;)$, $\max L(\bar{x}) = x_1 - x_2 - 3x_3 = 46/3$

1.14. $\bar{x}_{onm} = (0;\ 0)$, $\max L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 = 0$

1.15. $\bar{x}_{onm} = (-2;\ 0;\ -2;\ 0;\ -1)$, $\max L(\bar{x}) = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -7.$

II bob

2.1.
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4,0,0,0) \Rightarrow \max L(\bar{x}) = x_1 - x_2 = 4$$
$$(y_1, y_2) = \left(0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \min S(\bar{y}) = 2y_1 + 12y_2 = 4$$

2.2.
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4,0,0,18) \Rightarrow \min L(\bar{x}) = -4x_1 + 3x_2 = -16$$
$$(y_1, y_2) = (-4,0) \Rightarrow \max S(\bar{y}) = 4y_1 + 10y_2 = -16$$

2.3.
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \max L(\bar{x}) = x_1 + 5x_2 = \frac{15}{2}$$
$$(y_1, y_2) = \left(\frac{5}{2}, 0\right) \Rightarrow \min S(\bar{y}) = 3y_1 + 4y_2 = \frac{15}{2}$$

2.4. $(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{3}{2},0,\frac{21}{2},0\right)\Rightarrow \min L(\bar{x})=-3x_1+5x_2=-\frac{9}{2}$

$(y_1,y_2)=\left(0,\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \max S(\bar{y})=6y_1+3y_2=-\frac{9}{2}$

2.5. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(3,0,2,0,0)\Rightarrow \max L(\bar{x})=2x_1-3x_2+5x_3=16$

$(y_1,y_2)=\left(\frac{12}{5},\frac{11}{5}\right)\Rightarrow \min S(\bar{y})=3y_1+4y_2=16$

2.6. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(6,6,0,0,0)\Rightarrow \min L(\bar{x})=-4x_1-2x_2+x_3=-36$

$(y_1,y_2)=(0,-2)\Rightarrow \max S(\bar{y})=6y_1+18y_2=-36$

2.7. $(x_1,x_2)=(2,3)\Rightarrow \max L(\bar{x})=x_1+2x_2=8$

2.8. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(3,1,2,3,3)\Rightarrow \max L(\bar{x})=2x_1+x_2=18$

2.9. $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,1,2,1)\Rightarrow \min L(\bar{x})=-x_1-x_2=-3$

2.10. $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,1,1,1)\Rightarrow \min L(\bar{x})=-4x_1-3x_2=-11$

2.11. $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,3,2,0)\Rightarrow \min L(\bar{x})=-x_1-x_2=-3$

2.12. $(x_1,x_2)=(2,4)\Rightarrow \max L(\bar{x})=16x_1+9x_2=68$

2.13. $(x_1,x_2)=(1,1)\Rightarrow \max L(\bar{x})=4x_1+x_2=5$

2.14. $(x_1,x_2)=(1,1)\Rightarrow \max L(\bar{x})=3x_1+x_2=4$.

III bob

3.1. $(x_1,x_2)=(0,7)\Rightarrow \max L(\bar{x})=x_1^2+(x_2-4)^2=9$

$(x_1,x_2)=(0,4)\Rightarrow \min L(\bar{x})=x_1^2+(x_2-4)^2=0.$

3.2. $(x_1,x_2)=(0,10)\Rightarrow \max L(\bar{x})=(x_1-4)^2+(x_2-1)^2=81$

$(x_1,x_2)=(4,1)\Rightarrow \min L(\bar{x})=(x_1-4)^2+(x_2-1)^2=0.$

3.3. $(x_1,x_2)=(9,0)\Rightarrow \max L(\bar{x})=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2=58$

$(x_1,x_2)=(2,3)\Rightarrow \min L(\bar{x})=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2=0.$

3.4. $(x_1,x_2)=(0,0)\Rightarrow \max L(\bar{x})=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2=45$

$(x_1,x_2)=(51/13,21/13)\Rightarrow \min L(\bar{x})=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2=1053/169.$

3.5. $(x_1,x_2)=(3,0)\Rightarrow \max L(\bar{x})=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=5$

$(x_1,x_2)=(1,1)\Rightarrow \min L(\bar{x})=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=0.$

3.6. $(x_1,x_2)=(0,0)\Rightarrow \max L(\bar{x})=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2=52$

$(x_1,x_2)=(3,4)\Rightarrow \min L(\bar{x})=(x_1-4)^2+(x_2-6)^2=5.$

3.7. $(x_1,x_2)=(0,1);\ (x_1,x_2)=(0,6)\Rightarrow \max L(\bar{x})=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2=45$

$(x_1,x_2)=(2,4;1,2)\Rightarrow \min L(\bar{x})=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2=16,2.$

3.8. $(x_1,x_2)=(0,0)\Rightarrow \max L(\bar{x})=(x_1-3)^2+(x_2-6)^2=45$

$(x_1,x_2)=(1,4;5,2)\Rightarrow \min L(\bar{x})=(x_1-3)^2+(x_2-6)^2=3,2.$

3.9. $(x;y)=(1;2)\Rightarrow \min z=x^2+y^2+xy-4x-5y=-7.$

3.10. $(x;y)=(1/3;\ 1/3)\Rightarrow \max z=xy(1-x-y)=1/27.$

3.11. $(x;y)=(-1;-1)\Rightarrow \max z=x^3+y^3-3xy=1.$

3.12. Yechimi mavjud emas

3.13. $(x;y)=(0;0)\Rightarrow \min z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2=0.$

3.14. $(x;y)=(-4;1)\Rightarrow \min z=x^2+y^2-xy+9x-6y+20=-1.$

3.15. $(x;y)=(1;1)\Rightarrow \min z=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2xy-5x-y+2=-1.$

3.16. Yechimi mavjud emas

3.17. $(x_1,x_2,x_3)=(-1/2;\ 5/2;\ 1/4)\Rightarrow \max L(\bar{x})=2x_1x_3-x_2x_3=-7/8.$

3.18. $(x_1,x_2,x_3)=(1;\ 1;\ 1)\Rightarrow \max L(\bar{x})=x_1x_2+x_2x_3=2.$

3.19. $(x_1,x_2,x_3)=(8/3;\ 1/3;\ 11/3)\Rightarrow \min L(\bar{x})=x_1x_2-x_2x_3=1/3.$

3.20. $(x_1,x_2,x_3)=(\sqrt{6}/3;\ -\sqrt{6}/6;\ \sqrt{6}/6)\Rightarrow \max L(\bar{x})=2x_1-x_2+x_3=\sqrt{6}.$

3.21. $(x_1,x_2,x_3)=(3/25;\ 4/25)\Rightarrow \min L(\bar{x})=x_1^2+x_2^2=0,04.$

3.22. $(x_1,x_2,x_3)=(-1/2;\ 3/2)\Rightarrow \min L(\bar{x})=5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=1/2.$

3.23. $(x_1,x_2,x_3)=(-5/11;\ -8/11)\Rightarrow \max L(\bar{x})=3x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=249/121.$

3.24. $(x_1,x_2,x_3)=(6;\ 4;\ -3)\Rightarrow \max L(\bar{x})=x_1\cdot x_2-x_2\cdot x_3=24.$

3.25. $(x_1,x_2)=(2;\ 3)\Rightarrow \min L(\bar{x})=2x_1+x_1^2+x_2^2=17.$

3.26. $(x_1,x_2,x_3)=(2;\ 1/2;\ -3)\Rightarrow \max L(\bar{x})=2x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3=1/2.$

IV bob

4.1. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \alpha = 0; \beta = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{10}; q = \frac{7}{10}; v = \frac{9}{10}$.

4.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = -1; \beta = 2 \Rightarrow p = \frac{2}{3}; q = \frac{1}{3}; v = 1$.

4.3. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 0; \beta = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{5}; q = \frac{4}{5}; v = \frac{2}{5}$.

4.4. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3; \beta = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{5}; q = \frac{4}{5}; v = \frac{16}{5}$.

4.5. $\alpha = 4; \beta = 5 \Rightarrow p = \frac{2}{5}; q = \frac{3}{5}; v = \frac{22}{5}$.

4.6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\alpha = 1; \beta = 4 \Rightarrow p = \frac{5}{8}; q = \frac{3}{8}; v = \frac{7}{4}$.

4.7. $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $\alpha = 6; \beta = 9 \Rightarrow p = \frac{1}{3}; q = \frac{2}{3}; v = 7$.

4.8. $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2; \beta = 7 \Rightarrow p = \frac{3}{7}; q = \frac{4}{7}; v = \frac{34}{7}$.

4.9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3; \beta = 3$.

4.10. $\alpha = 2; \beta = 4 \Rightarrow P = \left(\frac{15}{31}, \frac{6}{31}, \frac{10}{31},\right); Q\left(\frac{9}{35}, \frac{2}{5}, \frac{12}{35},\right); v = \frac{88}{35}$.

4.11. $\alpha = 3; \beta = 3$. **4.12.** $\alpha = 6; \beta = 6$. **4.13.** $\alpha = 2; \beta = 2$.

V bob

5.1. $S = P(1+ni) \Rightarrow 16000 = 10000(1+1\cdot i) = 16000 \Rightarrow i = 60\%$.

$d = \frac{i}{1+in} = \frac{0,6}{1+0,6} = 0,375$ *yoki* $37,5\%$.

5.2. $S = P(1+ni) = 1000(1+3\cdot 0,06) = 1180$, $D = 1180 - 1000 = 180$.

5.3. $S = P(1+ni) \Rightarrow 6000(1+n\cdot 0,06) = 6540 \Rightarrow n = 1,5$.

5.4. a) $S = P(1+in) \Rightarrow S = 1000(1+0,08\cdot 18) = 2440$.

b) $(S = P(1+i)^n \Rightarrow S = 1000(1+0,08)^{18} = 3999,84$.

5.5. $S = \frac{P}{(1-d)^n} = \frac{5000}{(1-0,2)^{2,5}} = 8734,64$.

5.6. $S=P(1+i)^n \Rightarrow 6000=P(1+0,15)^3 \Rightarrow P=\dfrac{6000}{(1+0,15)^3}\approx 3945,1$.

5.7. $S=P(1+i)^n \Rightarrow 1200=P(1+0,2)^3 \Rightarrow P=\dfrac{1200}{(1+0,2)^3}\approx 694,4$.

5.8. $S=P(1+i)^n \Rightarrow 200000=P(1+0,08)^{20} \Rightarrow P=\dfrac{200000}{(1+0,08)^{20}}\approx 42955,33$.

5.9. a) $S_n=P(1+ni)\Rightarrow 2P=P(1+n\cdot 0,1)\Rightarrow n=10$.

b) $S_{cл}=P(1+i)^n \Rightarrow 2P=P(1+0,1)^n \Rightarrow P=\dfrac{\ln 2}{\ln 1,1}\approx 7,5.$

$S=S_{np}-S_{cл}=10-7,5=2,5.$

5.10.

$$S=P(1+i)^n \Rightarrow P=\frac{S}{(1+i)^n}\Rightarrow P=\frac{35000}{(1+0.1)^{30}}=\frac{35000}{17,45}\approx 2005,73$$

5.11. $P(1+n\cdot 0,08)=2P\Rightarrow n=12,5$.

5.12. $P(1+n\cdot 0,05)=2P\Rightarrow n=20$.

5.13.

$$S=P\left(1+\sum_{t=1}^{k}n_t i_t\right)=1600(1+0,5\cdot 0,08+0,25\cdot 0,09+0,25\cdot 0,1+0,25\cdot 0,11+0,125\cdot 0,12)=1808$$

5.14. $i=\dfrac{15+16+15,5+17}{4}\approx 15,9$.

5.15. $S=P(1+i)^n \Rightarrow 30000=P(1+0,2)^5 \Rightarrow P=\dfrac{30000}{(1+0,2)^5}\approx 20157$.

5.16.

$$S_n=P(1+ni)\Rightarrow P=\frac{25000}{(1+0,134\cdot 2)}\Rightarrow P\approx 19716,09\Rightarrow D=25000-19716,09=5283,91.$$

$$S_{cл}=P(1+i)^n \Rightarrow P=\frac{25000}{(1+0,134)^2}\Rightarrow P\approx 19440,79;\quad D=25000-19440,79=5559,21$$

5.17. $S=P\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}=5000\left(1+\dfrac{0,15}{12}\right)^{12\cdot 1}\approx 5804,38,\quad D=5804,38-5000=\$804,38$.

5.18. $d=1-\left(1-\dfrac{f}{m}\right)^m=1-\left(1-\dfrac{0,16}{4}\right)^4=0,04$.

5.19. $\delta=\ln(1+i)=\ln(1+0,25)\approx 0,223$.

$i=e^{\delta}-1=e^{0,25}-1=0,284\quad yoki\quad 28,4\%$.

5.21. $S=P(1+ni)\Rightarrow 6000(1+n\cdot 0,06)=6540\Rightarrow n=1,5$.

5.22. $d=\frac{i}{1+in}=\frac{0,6}{1+0,6}=0,375$ *yoki* $37,5\%$.

5.23. $S=P(1+ni)\Rightarrow S=1000(1+18\cdot 0,03)=1540$.

$S=P(1+i)^n=1000(1+0,08)^{18}=3996,02$.

5.24. $S=P(1+ni)\Rightarrow 920=850\left(1+\frac{90}{360}\cdot i\right)\Rightarrow i=0,3294$ *yoki* $32,94\%$.

5.25. $S=\frac{P}{(1-d)^n}=\frac{3000}{(1-0,2)^{2,5}}=5240,78$.

VI bob

6.1. $S=R\frac{(1+i)^n-1}{i}\Rightarrow 12000=1000\cdot\frac{(1+0,07)^n-1}{0,07}\Rightarrow n=9$.

6.2. $S=R\frac{(1+i)^n-1}{i}\Rightarrow 12000=R\cdot\frac{(1+0,08)^6-1}{0,08}\Rightarrow R=1635,8$.

6.3. $$S=R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\Rightarrow S=2000\frac{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{2\cdot 4}-1}{\left[\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{2/2}-1\right]}=18103,4.$$

6.4. $S=R\frac{(1+i)^n-1}{i}\Rightarrow S=10000\cdot\frac{(1+0,1)^{20}-1}{0,1}=572750$.

6.5. $$S=R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\Rightarrow S=2500\frac{\left(1+\frac{0,16}{2}\right)^{2\cdot 8}-1}{\left[\left(1+\frac{0,16}{2}\right)^{2/4}-1\right]}=154605,647.$$

6.6. $$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}=\frac{60000}{1}\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{4\cdot 10}}}{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{4}-1}=398218,365.$$

6.7.

$$S=R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\Rightarrow R=S\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}=45000\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12/12}-1\right]}{\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12\cdot 10}-1}=195,62\,.$$

6.8. $$S=R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\Rightarrow S=10000\frac{\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{12\cdot 2}-1}{\left[\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{12/4}-1\right]}=91499,4\,.$$

6.9. $$S=R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\Rightarrow S=1000\frac{\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12\cdot 2}-1}{\left[\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12/12}-1\right]}=27000\,.$$

6.10. $S=R(1+i)^n\Rightarrow 12000=8000(1+i)\Rightarrow 3=2(1+i)\Rightarrow i=0,5\,.$

6.11. $$S=\frac{R}{}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\Rightarrow S=5000\cdot\frac{\left(1+\frac{0,18}{12}\right)^{12\cdot 2}-1}{\left[\left(1+\frac{0,18}{12}\right)^{12/4}-1\right]}=47013,8\,.$$

6.12. $S=R\frac{(1+i)^n-1}{i}\Rightarrow S=4000\cdot\frac{(1+0,12)^5-1}{0,12}\approx 25\,411,39\,.$

а) $$S=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{j}{m}}=4000\frac{\left(1+\frac{0,15}{2}\right)^{2\cdot 3}-1}{\frac{0,15}{2}}=28976,08\,.$$

б) $$S=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{j}{m}}=4000\frac{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4\cdot 3}-1}{\frac{0,15}{4}}=59248,46\,.$$

6.13. $$S=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{j}{m}}\Rightarrow R=\frac{S\frac{j}{m}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}=\frac{50000\cdot\frac{0,0425}{4}}{\left(1+\frac{0,0425}{4}\right)^{4\cdot 5}-1}=2256,98\,.$$

$$A=R\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}=2257\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{0,0425}{4}\right)^{4\cdot5}}}{\left(1+\dfrac{0,0425}{4}\right)^{4}-1}=9958,57\,.$$

6.14. $R=\dfrac{Sj}{(1+j)^{n}-1}=\dfrac{500000\cdot0,08}{(1+0,08)^{5}-1}=85228,23\,.$

6.15. $R=\dfrac{Aj}{1-(1+j)^{-n}}=\dfrac{500000\cdot0,08}{1-(1+0,08)^{-5}}=125228,23\,\$.$

6.16. $A=R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}=10000\cdot\dfrac{1-(1+0,12)^{-3}}{0,12}=24018,31\,.$

$S=R(1+i)^{3}=24018,31(1+0,12)^{3}=33744\,.$

6.17. *а)* $S=R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\dfrac{j}{m}}=4000\dfrac{\left(1+\dfrac{0,15}{2}\right)^{2\cdot3}-1}{\dfrac{0,15}{2}}=28976,08\,.$

б) $S=R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\dfrac{j}{m}}=4000\dfrac{\left(1+\dfrac{0,15}{4}\right)^{4\cdot3}-1}{\dfrac{0,15}{4}}=59248,46\,.$

6.18. $A=R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}=1000\cdot\dfrac{1-(1+0,08)^{-5}}{0,08}=3992,71\,.$

6.19. $S=R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\dfrac{j}{m}}=100\dfrac{\left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12\cdot2}-1}{\dfrac{0,06}{12}}=2543,2\,.$

6.20. $R=\dfrac{Aj}{1-(1+j)^{-n}}=\dfrac{12000\cdot0,09}{1-(1+0,09)^{-6}}=2675,04\,.$

6.21. $S=R\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}=10000\dfrac{(1+0,02)^{5}-1}{0,02}=52040,4\,.$

$$n=\frac{\ln\left(\dfrac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}=\frac{\ln\left(\dfrac{52040}{10000}0,16+1\right)}{\ln(1+0,16)}=4,08\,.$$

6.22. $S=R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\dfrac{j}{m}}\Rightarrow R=\dfrac{S\dfrac{j}{m}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}=\dfrac{24000\cdot\dfrac{0,08}{4}}{\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{4\cdot3}-1}=3578,86\,.$

$$A = R\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1} = 3578,86\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{4\cdot 3}}}{\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^{4}-1} = 9182,74\,.$$

6.23. $R = \dfrac{Sj}{(1+j)^{n}-1} = \dfrac{500000\cdot 0,08}{(1+0,08)^{5}-1\ \ 0,469} = 85228,23\,.$

6.24. $R = \dfrac{Aj}{1-(1+j)^{-n}} = \dfrac{500000\cdot 0,08}{1-(1+0,08)^{-5}} = 125228,23\,\$.$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Блау С.Л. Финансовая математика: практикум. Учебное пособие. –М.: Академия, 2011. – 208 с.

2. Высшая математика для экономистов. // Н.Ш. Кремер и др. -М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2008. - 479 с.

3. Высшая математика. Учебное пособие / Г.Л. Луканкин, Н.Н. Мартынов и др. - М.: Просвещение, 1988. – 431 с.

4. Ковалев С.В. Экономическая математика. – М.: КНОРУС, 2010. – 248 с.

5. Костевич Л.С., Гайдукевич И.В. Математическое программирование. Практикум. – Мн.: БГЭУ, 2007 . – 204 с.

6. Красс. М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. Учебник. –М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.

7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: ”ДЕЛО”АНХ, 2008. – 720 с.

8. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономических специальностей. - М.: Высшее образование, 2008. – 893 с.

9. Кремер Н.Ш. и др. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - М.: Высшее образование, 2007. – 646 с.

10. Кузнецов Ю.Н. и др. Математическое программирование. Учеб.пособие. – М.: Высш.школа, 1976. –352 с.

11. Кундышева Б.С. Математика: учебник для экономистов. – М.: ”Дашков и K^{o}”, 2009. – 564 с.

12. Методы оптимальных решений в экономике и финансах. Учебник. /Под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. – М.: КНОРУС, 2015. - 400 с.

13. Новиков А.И. Экономико–математические методы и модели: Учебник для бакалавров. – М.: "Дашков и K^{0}", 2020. – 532 с.

14. Общий курс высшей математики для экономистов. /Под ред. В.И.Ермакова. - М.:ИНФРА-М, 2010. - 656 с.

15. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. - М.: ИНФРА-М, 2009. - 575 с.

16. Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций. Учебное пособие. /Под ред. В.А. Половникова, А.И. Пилипенко –М.: ИНФРА-М, 2010. – 360 с.

17. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. –М.: Дело, 2008. – 400 с.

18. Saipnazarov Sh.A., Ortiqova M.T. Moliyaviy matematika. Darslik. - T.: Fan va texnologiya, 2017. 244 b.

19. Safayeva Q. Moliya matematikasi. Darslik. - T.: IQTISOD-MOLIYA, 2012.-264 b.

20. Safayeva Q. «Moliya matematikasi» fanidan masalalar to'plami. Darslik. - T.: IQTISOD-MOLIYA, 2013.

21. Sauxanov J.K., Mamurov I.N., Abdikarimov R.A. Finans matematikasi, O'quv qo'llanma. -Nukus: Qaraqalpaqstan. 2020. 176 b.

MUNDARIJA

D.T. SALIMOV

BIZNES MATEMATIKA

(o'quv qo'llanma)

Toshkent – «INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI» – 2022

Muharrir:	X.Zokirova
Texnik muharrir:	M.Tursunov
Musavvir:	A. Shushunov
Musahhih:	B.Baxronova
Kompyuterda sahifalovchi:	S. Tojiyeva

E-mail: nashr2019@inbox.ru. Tel.: +99899920-90-35
№ 3226-275f-3128-7d30-5c28-4094-7907, 10.08.2020.
Bosishga ruxsat etildi 07.11.2022.
Bichimi 60x84 1/16. «Timez Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 15,0. Nashriyot bosma tabog'i 14,25.
Tiraji: 50. Buyurtma № 152

«INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI»
bosmaxonasida chop etildi.
100174, Toshkent sh, Olmazor tumani,
Universitet ko'chasi, 7-uy.