O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

**Matematik analiz kaferdrasi**

# “DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA”

fanidan

# O’QUV–USLUBIY MAJMUA

**Bilim sohasi:** 100 000 - Gumanitar soha
**Ta’lim sohasi:** 130 000 - Matematika
**Ta’lim yo’nalishi:** 6054100 - Matematika

**Namangan 2021-2022**

O’quv uslubiy majmua 2021-yil O’ROO’MTV tomonidan № BD 6054100-___ raqami bilan 2021-yil __ ______gi __- sonli buyrug’i bilan tasdiqlangan fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

**Tuzuvchilar:** **N.Malikov**-Matematik analiz kafedrasi o’qituvchi.
**A.Mashrabboyev**, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

**Taqrizchilar:** **M.Xolmurodov**, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.
**N.Xatamov,** fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O’quv uslubiy majmua "Matematik analiz" kafedrasining 2021 yil " _26.08.2021 dagi "1" - son yig’ilishida muhokamadan o’tgan va fakul’tet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

**Kafedra mudiri:** **A.Mashrabboyev**

O’quv uslubiy majmua "Matematika" fakultet kengashida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan (2021-yil 27.08 dagi 1_-sonli bayonnoma).

**Fakultet dekani:** **A.Mashrabboyev**

## MUNDARIJA

## SO‘Z BOSHI

Mazkur o‘quv uslubiy majmua “Differensial geometriya va topologiya” fanidan “5130100-Matematika” ta’lim yo‘nalishi uchun mo‘ljallangan bo‘lib, fizika-matematika fakultetining “Matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi tomonidan ishlab chiqilgan. “Differensial geometriya va topologiya” fani o‘quv uslubiy majmuasini yaratishda yetakchi xorijiy OTMlari o‘quv dasturlariga asosiy adabiyotlar ro‘yxatiga kiritilgan Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry (1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America), Izu Vaisman Analytical Geometry (World Scientific 1997), M.A.Arstrong, Basic Tpology (Springer, 1998 y) adabiyotlardan foylalanildi.

“Differensial geometriya va topologiya” fani “5130100-Matematika” ta’lim yo‘nalishi o‘quv rejasiga asosan 3- va 4-semestrlarda mos ravishda 72 soat ma`ruza va 72 soat amaliy mashg`ulot auditoriya soatlarda o‘qitiladi.

Ushbu o‘quv uslubiy qo‘llanma beshta qismdan iborat bo‘lib, o`quv materiallari, mustaqil ta`lim mashg`ulotlari, kurs ishi va kurs loyihasi, glossariy va ilovalar (namunaviy va ishchi o‘quv dastur, nazorat savollari va test savollari)dan tashkil topgan.

# KIRISH

Differensial geometriya kursida uch o‘lchamli fazodagi chiziqlar va sirtlar matematik analiz yordamida o’rganiladi. Ma’lumki, analitik geometriya kursida chiziqlar va sirtlarni o‘rganish ularning tenglamalarini tekshirish yordamida amalga oshiriladi. Shuning uchun algebraik metodlar analitik geometriya kursida asosiy ro‘l o‘ynaydi. Differensial geometriya kursida biz chiziq va sirtlarni tenglamalar yordamida emas, balki fazodagi ma’lum xossalarga ega bo’lgan figuralar sifatida aniqlaymiz va ularni matematik analiz yordamida o‘rganish uchun differensialanuvchi funksiyalar yordamida parametrlaymiz. Geometriyada matematik analiz metodlarini tadbiq qilishga Peterburg fanlar akademiyasi a’zosi L.Eyler katta hissa qo‘shdi. U chiziqni parametrlash, sirt nuqtasida bosh yo‘nalishlar kabi muhim tushunchalarni kiritdi va juda ajoyib teoremalarni isbot qildi. Differentsial geometriyaning asosiy masalalari sistematik ravishda yoritilgan birinchi asarni Gaspar Monj yozdi. Uning «Cheksiz kichiklar analizining geometriyaga tadbiqi» nomli kitobi 1795 yili chop etildi. G. Monjning shogirdlari Dyupen, Menye ham sirtlar nazariyasiga katta hissa qo‘shdilar. Geometriya fani XIX asrda juda tez rivojlandi. 1826 yili buyuk matematik N.I. Lobachevskiy Evklid geometriyasidan farqli geometriya mavjud ekanligini ko‘rsatdi. Bu geometriyada geodezik uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi $180^0$ dan kichikdir. 1827 yili Gauss sirtning to‘liq egriligi uning ichki geometriyasiga tegishli ekanligini isbotladi. 1854 yili B.Riman Lobachevskiy geometriyasini ham o‘z ichiga oluvchi yangi geometriyani asoslab berdi. Bu geometriya Riman geometriyasi deb ataladi. Riman geometriyasida geodezik uchburchaklar ichki burchaklar yig‘indisi $180^0$ dan katta ham, kichik ham bo‘lishi mumkin. XX asrda differensial geometriyaning rivojlanishida chiziqlar va sirtlar o‘rniga har xil differensial strukturalar kiritilgan silliq ko‘pxilliklarni o‘rganish tendensiyasi paydo bo‘ldi va rivojlandi. Bu obyektlarni (silliq ko‘pxilliklarni) o‘rganish qulayligi shundaki, ular chiziqlar va sirtlar kabi Evklid fazosining qism to‘plamlari sifatida emas, balki differensial struktura kiritilgan abstrakt topologik fazolar sifatida aniqlanadi. Ko‘pxilliklar nazariyasida chiziqlar va sirtlar mos ravishda bir o‘lchamli va ikki o‘lchamli ko‘pxilliklarni tashkil etadi. Hozirgi vaqtda ko‘pxilliklar nazariyasi geometriya kursining asosiy qismlardan biri bo‘lib qoldi.

## GLOSSARIY

**Absolyut buralish.** Tabiiy parametrlashtirilgan chiziq $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S)$ tenglamasi orqali berilgan bo`lsin. $P(S)$, $Q(S+\Delta S) \in \gamma$ cheksiz yaqin nuqtalarida chiziqqa yopishma tekisliklar o`tkazaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan burchakni $\Delta Q = <(\Pi_p \cdot \Pi_Q)$ belgilaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan $\Delta Q$ burchak *P* va *Q* nuqtalardagi $\vec{\beta}(S)$, $\vec{\beta}(S+\Delta S)$ binormal vektorlar tashkil etgan burchakka teng, ya`ni $\Delta Q = \angle(\vec{\beta}(S), \vec{\beta}(S+\Delta))$. $\gamma$ chiziqning *P* va *Q* nuqtalar bilan chegaralangan kesmasi (yoyi)ning uzunligi $|\Delta S|$ bo`lsin.
$\gamma$ chiziqning *P* nuqtasidagi absolyut buralishi deb, $\Delta Q : |\Delta S|$ nisbatning *Q* nuqta chiziq bo`ylab *P* nuqtaga intilgandagi limitiga aytiladi va
$|K_2| = \lim\limits_{Q \to P} \dfrac{\Delta Q}{|\Delta S|}$ ko`rinishda belgilanadi.

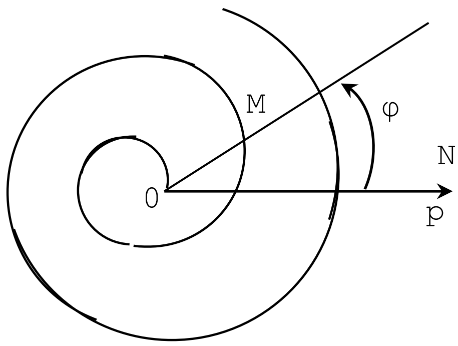
**Akslantirish.** $X, Y$ ixtiyoriy to’plamlar bo’lib, $X$ ning har bir elementiga Y ning bitta elementi mos qo’yilgan bo’lsa $X$ ni $Y$ ga akslantiruvchi moslik yoki akslantirish berilgan deyiladi va $f : X \to Y$ ko’rinishida yoziladi.

**Ajraluvchan topologik fazo.** Agar topologik fazoning har qanday ikki nuqtasi uchun o’zaro kesishmaydigan atroflar mavjud bo’lsa, u holda ushbu fazoning ajraluvchan yoki xausdorf fazosi deyiladi. Bittadan ortiq nuqtaga ega bo’lgan antidiskret fazo ajralmaydi.Diskret fazo ajraluvchanlik xossaga ega. Har qanday metrik fazolar ajraluvchan.

**Asimptota.** Egri chiziq ustidagi nuqta chiziq bo`ylab cheksiz uzoqlashganda, bu nuqta bilan birorta to`g`ri chiziq orasidagi masofa nolga intilsa, u holda bu to`g`ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

**Aylana.** Tekislikda markaz deb ataluvchi berilgan M nuqtadan bir xil r>0 masofada turuvchi nuqtalar tiplamini aylana deb ataladi.

**Arximed spirali.** $M$ nuqta $ON$ to`g`ri chiziq bo`yalab harakatlansin. $ON$ to`g`ri chiziq esa $O$ nuqta atrofida aylansin. Qutb atrofida tekis aylanayotgan to`g`ri chiziq ilgarlanma tekis harakat qiluvchi nuqtaning chizgan iziga Arximed spirali deyiladi. Arximed spiralining qutb kordinatalari bo`yicha tenglamasi $r = a\varphi$.



**Aylanma sirt.** $\gamma: x=\varphi(u),\ z=\psi(u)$ tenglamalar orqali berilgan chiziqning (OZ) o`q atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt aylanma sirt deyiladi.

**Asimptotik yo`nalish.** Sirtdagi biror $(du:dv)$ yo`nalishda $K_n$ normal egrilik nolga aylansa, bu holda ushbu yo`nalishni asimtotik yo`nalish deyiladi. Normal egrilikning

**Asimptotik chiziq.** Sirtga qarashli biror chiziqning har bir nuqtasidagi urinma yo`nalishshi asimptotik yo`nalishi bo`lsa, bu holda ushbu chiziqni sirtning asimptotik chizig`i deb ataladi.

**Binormal**. Chiziqning yopishma tekisligiga perpendikulyar normali chiziqning binormali deb ataladi. Binormalning yo`naltiruvchi ort vektori $\vec{\beta}=\dfrac{\left[\vec{r}_t'\,\vec{r}_{t^2}''\right]}{\left\|\left[\vec{r}_t'\vec{r}_{t^2}''\right]\right\|}$

**Bog'lanishli to'plam**. $(X,\tau)$-topologik fazo, $A\subset X$-qism to'plam bo'lsin. Ikkita $G_1$ va $G_2$ ochiq qism to'plamlar mavjud bo'lib:

1) $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$

2) $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$

3) $A\cap G_1\neq\varnothing, A\cap G_2\neq\varnothing$

shartlar bajarilsa, *A* to'plam bog'lanmagan to'plam deyiladi. Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $G_1$ va $G_2$ ochiq to'plamlar mavjud bo'lmasa, A to'plamni bog'lanishli to'plam deyiladi.

**Bosh normal**. Chiziqning yopishma tekisligida yotuvchi normali chiziqning bosh normali deb ataladi. Bosh normalning yo`naltiruvchi ort vektori $\vec{\nu}=\dfrac{\left[\left[\vec{r}_t'\vec{r}_{t^2}''\right]\vec{r}_t'\right]}{\left\|\left[\left[\vec{r}'\vec{r}_{t^2}''\right]\vec{r}_t'\right]\right\|}$

**Bir parametrli chiziqlar oilasini o`ramasi.** $F(x,y,c)=0$ bir parametrli chiziqlar oilasining o`ramasini $F(x,y,c)=0$ va $F_c'(x,y,c)=0$ tenglamalar sistemasini yechib $F_x'$ va $F_y'$ bir vaqtda nolga aylanmasa diskiriminant chiziq tarkibidan aniqlanadi.

**Bog'lanishli to'plamlar**. $(X,\tau)$-topologik fazo, $A\subset X$-qism to'plam bo'lsin. Ikkita $G_1$ va $G_2$ ochiq qism to'plamlar mavjud bo'lib:

1) $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$

2) $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$

3) $A\cap G_1\neq\varnothing, A\cap G_2\neq\varnothing$

shartlar bajarilsa, *A* to'plam bog'lanmagan to'plam deyiladi. Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $G_1$ va $G_2$ ochiq to'plamlar mavjud bo'lmasa, A to'plamni bog'lanishli to'plam deyiladi.

**Buralish teoremasi**. Regulyar (uch marta uzluksiz differensiallanuvchi) chiziq o`zining $K_1$ (egrilik) noldan farqli bo`lgan har bir nuqtasida ma`lum bir absolyut buralish

$|K_2|$ da ega. Agar chiziq $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S)$ ko`rinishdagi tenglama orqali berilgan bo`lsa, uy holda $|K_2| = \frac{|(\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}})|}{K_1^2}$ ko`rinishda belgilanadi.

**Differensiyallash qoidalari(vektor funksiya).** $\vec{r}_i(t),\ (i=1,2,3)$ va f(t) funksiyalar differensiallanuvchi bo`lsa, u holda quyidagi differensiallash qoidalari o`rinli.

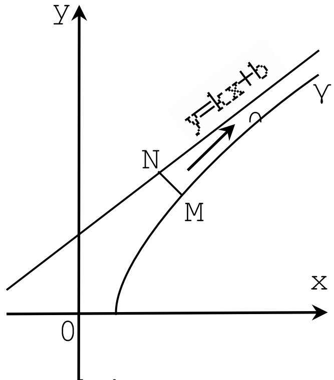
a) $\left(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)\right)'_t = \vec{r}_1'(t) \pm \vec{r}_2'(t),$

b) $\left(f(t)\vec{r}_i(t)\right)'_t = f_t'(t)\vec{r}_i(t) + f(t)\vec{r}_i'(t),$

c) $\left(\vec{r}_1(t)\ \vec{r}_2(t)\right)'_t = \vec{r}_t'(t)\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t),$

d) $\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t)\right)'_t = \left(\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t)\right) + \left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t)\vec{r}_3(t)\right) + \left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3'(t)\right),$

**Egri chiziqning asimptotasi.** Tekis egri chiziq quyidagi parametrik tenglamalari orqali berilgan bo`lsin: $\gamma : x = x(t), y = y(t).$




Birorta $\ell$ to`g`ri chiziq mavjud bo`lib , $\gamma$ chiziq ustidagi M(t) nuqta chiziq bo`ylab cheksiz uzoqlashganda, ushbu nuqtadan $\ell$ to`g`ri chiziqqacha masofa nolga intilsa , u holda $\ell$ to`g`ri chiziqni berilgan $\gamma$ chiziqning asimptotasi deb ataladi.

$$Ax + By + C = 0\ ,$$

to`g`ri chiziqni $\gamma : x = x(t), y = y(t).$ chiziqqa asimptota bo`lish sharti:

$$\lim_{t\to T}\left|Ax(t) + By(t) + C\right| = 0.$$

Asimptota $y = kx + b$, ko`rinishdagi tenglamaga ega bo`lsa, koeffitsientlarni quyidagicha topiladi $k = \lim\limits_{t\to T}\frac{y(t)}{x(t)},\ b = \lim\limits_{t\to T}\left[y(t) - kx(t)\right].$

$\gamma : x = x(t), y = y(t).$ egri chiziq vertikal asimptotaga ega bo`lsa , uning tenglamasi $a = \lim\limits_{t\to T} x(t)$ , $\lim\limits_{t\to T} y(t) = \infty$ . Gorizontal asimptota uchun $\lim\limits_{t\to T} x(t) = \infty,\ b = \lim\limits_{t\to T} y(t).$

Tekis chiziq $y = f(x)$, tgenglama orqali berilgan bo`lsa, asimptota uchun $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$ koeffisientlarni hisoblaymiz.

**Elementar sirt.** Tekislikdagi ochiq sohani $R^3$ fazoga topologik akslantirish natijasida hosil qilingan nuqtalar to`plamiga elementar sirt deyiladi. Elementar sirtga tekislik, elliptik va giperbolik paraboloidlar va parabologik silindr misol bo`la oladi.

**Elliptik nuqta.** Agar sirtning biror nutasidagi yopishma paraboloidi elliptik paraboloid bo`lsa, u holda bu nuqtani elliptik nuqta deyiladi.

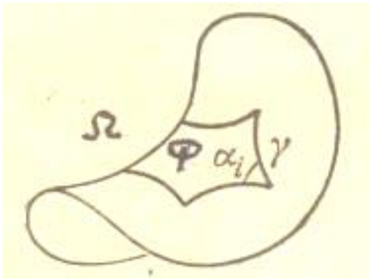
**Evolyuta.** Berilgan chiziq egrilik markazlarining geometrik o`rni evolyuta bo`lib, uning tenglamasi $X = x - y_t'\frac{x_t'^2 + y_t'^2}{\begin{vmatrix} x_t' & y_t' \\ x_{t^2}'' & y_{t^2}'' \end{vmatrix}}$ , $Y = y + x_t'\frac{x_t'^2 + y_t'^2}{\begin{vmatrix} x_t' & y_t' \\ x_t'' & y_t'' \end{vmatrix}}$ . ko`rinishda bo`ladi.

**Evolventa.** Evolyutaga o`tkazilgan urinmalarning ortogonal traektoriyasiga uning evolventasi deyiladi. Evolventa tenglamasi: $\overline{p} = \overline{r}(s) + (\lambda - s)\overline{\tau}(s)$.

**Frene formulalari**. 1) $\dot{\vec{\tau}}(S) = K_1\vec{v}(S)$ 2) $\dot{\vec{v}}(S) = -K_1\vec{\tau} - K_2\vec{\beta}$
3) $\dot{\vec{\beta}}(S) = +K_2\vec{v}(S)$; bu yerda $K_1$ va $K_2$ chiziqninq mos ravishda egriligi va buralishi;

**Gauss – Bonne teoremasi.** : Sirtning doiraga gomeomorf $\Phi$ sohasi $\gamma$ regulyar chiziq bilan chegaralangan bo`lsin. U holda $\int\limits_{\gamma} K_g ds = 2\pi - \iint\limits_{\Phi} K d\delta$ formulaning chap qismida integral $\gamma \in \Omega$ chiziqning $S = \int\limits_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2} d\bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$ yoy uzunligi bo`yicha olinsa o`ng tamonida $\Phi$ sohaning yuzi bo`yicha olinadi. Kg musbat yoki manfiy qiymatli bo`lishi mumkin. Bu sohaning qavariq yoki botiqligiga bog`liq.
Agar $\gamma$ regulyar chiziqlar yoylarining kesishmasidan iborat bo`lib uchlaridagi ichki burchaklari $\alpha_i$ bo`lsa, $\int\limits_{\gamma} K_g ds + \sum\limits_{i} (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint\limits_{\Phi} K d\delta$

**Topologik fazo**. **X** ning qism to'plamlar oilasi $\tau = \{G_\alpha\}$ dan quyidagi shartlarni bajarilishini talab qilaylik.
1) $\tau$ oilaga tegishli to'plamlar ixtiyoriy sistemasining birlashmasi $\tau$ ga tegishli bo'lsin
2) $\tau$ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) $\tau$ ga tegishli bo'lsin.
3) Ø bo'sh to'plam $\tau$ ga tegishli bo'lsin
4) X to'plam $\tau$ ga tegishli bo'lsin.
U holda $\tau$ oilani X dagi topologik struktura deyiladi. X to'plamda biror $\tau$ topologik struktura aniqlangan bo'lsa, holda (X,$\tau$) juftlikka **topologik fazo** deyiladi.




**Topologik fazo bazisi**. $(X,\tau)$ fazoning ixtiyoriy ochiq qism to'plamini B oilaga tegishli to'plamlar yig'indisi sifatida yozish mumkin bo'lsa, B oila $(X,\tau)$ topologik fazoning bazasi deyiladi.

**Uzluksiz almashtirish.** Agar *f* almashtirish $x \in F$ nuqtani $x' \in F'$ nuqtaga o`tkazsa va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik son uchun $\delta > 0$ cheksiz kichik son mavjud bo'lsaki, $\rho(x,y) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $y \in F$ nuqta $\rho_1(x',y') < \varepsilon$ tengsizlikka qanoatlantiruvchi $y' \in F'$ nuqtaga o`tsa, u holda *f* ni uzluksiz almashtirish deyiladi.

**Vektor funksiya**. Agar skalyar o`zgaruvchi $t$ ning $[a,b]$ kesmadagi har bir qiymatiga biror qoida asosida aniq bir $\vec{r}$ vektor mos kelsa, u holda bu vektor $t$ parametrning vektor funktsiyasi deyiladi va qisqacha $\vec{r} = \vec{r}(t)$ shakldа ifodalanadi.

## O`QUV MATERIALLARI (Ma`ruza)
## 1.YEVKLID FAZOSI. YEVKLID METRIKASI

Reja

1. $R^n$ fazoda ikki nuqta orasidagi masofa formulasi.
2. Masofaga qo'yilgan talablar
3. Ochiq va yopiq shar tushunchasi
4. Teoremalar.
5. Chiziqli $R^n$ fazo
6. Evklid fazosi

**Tayanch iboralar. Yevklid fazosi, ochiq shar, yopiq shar, $R^n$ fazo, ochiq to`plam, yopiq to`plam**.

Xaqiqiy sonlar to'plami $R^1$,bo'yicha $R^n = R^1 x R^1 x....R^1$ (n marta) fazo quraylik. n $\geq 1$ uchun $\Omega^n$ $\{(x^1\ x^2,\ \dots\ ,\ x^n)$ $x^i \in (a^i, b^i), i = 1,2..,n\}$ $\Omega^n \subset R^1.(a^i, b^i)$ – sonli intervallar bo'lib $R^1$ ga qism. $R^n$ to'plamda $x=(x^1,x^2..x^n)$ va $y=(y^1,y^2..,y^n)$ nuqtalar orasidagi masofani

$$d(x,y) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + ... + (y^n - x^n)^2} \qquad (1.1)$$

formula bilan aniqlaymiz. $d : R^n x R^n \to R^1$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) musbat aniqlangan, ya'ni $\forall x, y \in R^n$ uchun x=y bo'lsa d(x,y)=0, $x \neq y$ bo'lganda d(x,y)>0 munosabatning bajarilishi zarur va Yetarli.

2) Simmetrik, ya'ni $\forall x, y$ uchun d (x,y)=d(y,x).

3) Uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi, ya'ni $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

Matematik tahlil kursidan, shuningdek analitik geometriyadan bizga quyidagi Koshi tengsizligi ma'lum

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a^i + b^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a^{i2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b^{i2}\right)^{\frac{1}{2}} (1.2)$$

Ushbu tengsizlik asosida uchburchak tengsizligini isbotlash mumkin. $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$, $y=(y^1,y^2,\dots y^n)$, $z = (z^1,z^2, .. z^n)$ nuqtalarni olib, $a^i = x^i - z^i$, $b^i = z^i - y^i$ belgilash kiritsak, Koshi tengsizligidan $d(x,y) \leq d(x, z)+d(z,y)$ tengsizlik kelib chiqadi.

$R^n$ da ikki nuqta orasidagi masofani (1.1) formula bo'yicha kiritish bilan uni metrik fazoga aylantiramiz. $R^n$da ochiq to'plam tushunchasini ochiq koordinat parallelopipedi yoki ochiq shar orqali kiritish mumkin.

1- ta'rif. $R^n$ da ochiq koordinat parallelopipedi deb $\Omega^n = \{M(x^1, x^2,..., x^n) /$ $a^i < x^i < b^i, i = 1,2,..n\}$ nuqtalar to'plamiga aytiladi.

2- ta'rif. $R^n$ da yopiq koordinat parallelopipedi deb $\Omega^n = \{M(x^1, x^2,..., x^n) /$

$a^i \le x^i \le b^i, i = 1,2,..n\}$ nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Yevklid fazosida $x_o(x_o^1, x_0^2, ..., x_o^n)$ markazli va r > o radiusli shar tushunchasiga ta'rif beraylik.

3-ta'rif. $\overline{U}(x_o, r) = \{x(x^1, x^2,.., x^n)/(x^1 - x_0^1)^2 + .. + (x^n - x_o^n)^2 < r^2\}$ nuqtalar to'plamiga $x_o$-markazli va r radiusli ochiq shar deyiladi.

4-ta'rif $\overline{U}(x_o, r) = \{x(x^1, x^2,.., x^n)/(x^1 - x_0^1)^2 + .. + (x^n - x_o^n)^2 \le r^2\}$ nuqtalar to'plamiga yopiq shar deyiladi. Son o'qida ochiq shar ($x_o$-r, $x_o$+r) ochiq intervaldan yopiq shar esa [$x_o$-r, $x_o$+r] kesmadan iborat bo'ladi.

Yevklid fazasida berilgan x markazli va r > o radiusli ochik shar va yopiq shar tushunchalariga quyidagicha ta'rif berish ham mumkin.

$3'$-ta'rif. $V_r$ (x)={y$\in$R$^n$: d(x,y)<r} to'plam markazi x nuqtada va radiusi r ga teng ochiq shar deb ataladi.

$4'$ - ta'rif. $\overline{B_r}$ (x)={y$\in$R$^n$: d(x,y) $\le$ r} to'plam esa markazi x nuqtada va radiusi r ga teng yopiq shar deb ataladi.

Ochiq shardan foydalanib R$^n$ da ochiq to'plam tushunchasini kiritaylik.

5-ta'rif. Berilgan A to'plam va unga tegishli har qanday nuqta uchun shunday r > o son mavjud bo'lib, $B_r$ (a)$\subset$A bo'lsa, a nuqta A to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

6-ta'rif. Hamma nuqtalari ichki nuqtalari bo'lgan to'plam ochiq to'plam deyiladi. Xulosa shuki, xar qanday ochiq shar $B_r$ (a) ochiq to'plamdir, ya'ni $\forall x \in B_r(a)$ uchun $d(a,x) < r \Rightarrow r - d(a,x) = r_x > o.x$ nuqta va uning $r_x$ atrofi uchun $B_{r_x}(x) \subset B_r(a)$ ni ko'rsatishimiz talab qilinadi.

$\forall y \in B_{r_x}(x)$ ni olib, $y \in B_r(a)$ ni ko'rsataylik $d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < r_x + d(x,a) = r_x + r - r_x = r$ ya'ni $d(y,a) < r \Rightarrow y \in B_{rx}(x) \subset B_r(a)$. Bo'sh to'plamni Ø simvol bilan belgilaymiz.

Ø- to'plamni har qanday to'plamning qism to'plami deb kelishamiz. To'plamning ochiq qism to'plamlari uchun ushbu teorema o'rinlidir.

1-Teorema 1) R$^n$ fazo ochiq to'plamdir;

2) Ø to'plam ochiq to'plamdir;

3) Chekli sondagi ochiq qism to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plamdir.

4) Har qanday ochiq qism to'plamlar oilasi uchun bu oiladagi har qanday ochiq to'plamlar yigindisi ochiq to'plamdir.

Isboti: Teoremaning ikkinchi talablari isbotlashimiz shart emas, chunki Ø-ochiq to'plam. Birinchi talabni isbotlash uchun $\forall$ a $\in$R$^n$ element (nuqta)ni olamiz

$\forall$ r > o son uchun

$B_r(a) \subset R^n$ har doim o'rinli bo'lganidan $R^n$-fazo ochiq to'plamdir. Endi uchinchi talab ya'ni $A_1, A_2\ldots, A_n$ larning har biri ochiq to'plam bo'lsa, $A=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ to'plamning ochiq bo'lishini ko'rsatamiz.

A=∅ $\Rightarrow$A – ochiq to'plam. Shuning uchun A ≠ Ø deb faraz qilib, A ga tegishli $\forall a$ no'ktaning ichki nuqta ekanligini ko'rsataylik.

Agar a ∈ A $\Rightarrow$ a ∈ $A_i$ – barcha i-larda o'rinli. Har bir $A_i$ ochiq to'plam bo'lgani uchun shunday $r_i$>o soni mavjudki $B_{ri}(a) \in A_i$ bajariladi.

$\bigcap_{i=1}^{n} r_i = r$ belgilasak, $B_{r_a}(a) \subset R_{ri}(a) \subset A_i \Rightarrow B_r(a) \subset A$ va a nuqta A to'plamning ichki nuqtasidir. Endi teoremadagi to'rtinchi da'voni isbot qilaylik. $\{A_\propto\}$ - ochiq to'plamlar sistemasi bo'lsin. $A = \underset{\propto}{U} A_\propto$ yig'indining ochiq to'plam ekanligini ko'rsataylik $\forall a \in A$ nuqtani olib, uning ichki nuqta ekanligini ko'rsatamiz. $a \in A$ nuqta $\{A_\propto\}$ to'plamning kamida birorta elementiga tegishli bo'ladi.

Faraz qilaylik $a \in A_{\alpha g}$ bo'lsin $A_{\alpha g}$ to'plam ochiq bo'lganidan, biror $r > o$ son mavjud bo'lib, $B_r(a) \subset A_{\alpha o} \Rightarrow B_r(a) \subset A$.. Bundan a ning A to'plam uchun ichki nuqta bo'lishi kelib chiqadi. Endi yopiq to'plam tushunchasini kiritaylik.

7-ta'rif. CA=$R^n \setminus A$ to'plamga A to'plamning to'ldiruvchisi deyiladi.

8-ta'rif CA to'plam ochiq to'plam bo'lsa, A ni yopiq to'plam deb ataladi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiraylik.

2-Teorema.1) $R^n$ fazo yopiq to'plamdir

2) Ø bo'sh to'plam yopiq to'plamdir

3) Har qanday yopiq qism to'plamlar oilasi uchun shu oiladagi ixtiyoriy yopiq to'plamlar sistemasining kesishmasi yopiq to'plamdir.

4) Chekli sondagi yopiq to'plamlarning yig'indisi yopiq to'plamdir.

Teoremani $\underset{\alpha}{U}\underset{\alpha}{C}A = C(\underset{\alpha}{\bigcap} A_\alpha) \text{ва} \underset{\alpha}{\bigcap} CA_\alpha = C(\underset{\alpha}{U}\underset{\alpha}{A})$ ikkilanganlik qonunlariga asoslanib, 3-§ da isbotlashga aloxida to'xtalamiz $R^n$ da $\vec{x} = \{x^1, x^2,.., x^n\}, \vec{y} = \{y^1, y^2,.., y^n\}$ elementlarni olib, ular orqali $\vec{x}+\vec{y} = \{x'+y', x^2+y^2,...., x^n+y^n\}$, $\lambda\vec{x} = \{\lambda x', \lambda x^2,..\lambda x^n\}$ qoidalar bilan yangi $\vec{x}+\vec{y} \in R^n$, $\lambda\vec{x} \in R^n$ elementlarni aniklashimiz mumkin. Shunday amallarga nisbatan $R^n$ chiziqli fazo bo'ladi. $\vec{x}, \vec{y}$– elementlarni vektorlar deyiladi. $\vec{x} = \vec{XY}$ belgilasak, X ni $\vec{x}$ vektorning boshlangich nuqtasi Y ni esa oxiri deyiladi. $R^n$ chiziqli fazoda $\vec{x} \text{ва} \vec{y}$ vektorning skalyar ko'paytmasi $(\vec{x}, \vec{y})$ kiritilsa, $R^n$- Yevklid fazosiga aylanadi. Yevklid fazosida affin almashtirishni $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{a}$ formula bilan berish mumkin.

Bunda $\vec{x} = \begin{pmatrix} x' \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}. \vec{a} = \begin{pmatrix} a' \\ a^2 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}$, A=$\|(a_{ij})\|$, $\left(A\vec{x}, A\vec{y}\right) = (\vec{x}A^T, A\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$ $\quad A^T A = E$. E-birlik matritsa, $A^T$ esa transponirlangan matritsa, A-ortogonal matritsa bo'lib, detAq1 bo'lganda affin almashtirish harakatga o'tishi mumkin. Harakat natijasida masofa o'zgarmaydi, shu bilan birga fazoda orientratsiya (aylanish) ham saqlanadi.

Agar A matritsaning har bitta ustuni uchun barcha elementlar kvadratlarining yig'indisi birga teng bo'lib, turlicha ikkita ustunlar uchun mos elementlar ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, u holda A ni ortogonal matritsa deyiladi.

Agar B=$\left\{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, .., \vec{e_n}\right\}$-ortonormallashgan reper, ya'ni

$(\vec{e_i}\,\vec{e_j})=\vec{b_{ij}} = \begin{cases} 1, агар - i = j \\ 0, агар - i \neq j \end{cases}$ bo'lsa,

u holda shu reperga nisbatan $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{a}$ ko'rinishda berilgan akslantirishning harakatdan iborat ekanligi bizga analitik geometriya ko'rsidan ma'lum.

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


## Nazorat savollari

1. $R^n$ da ochiq to`plam tushunchasi qanday to`plamlar orqali kiritilishi mumkin?
2. $R^n$ da nuqtalar orasidagi masofa qanday shartlarni qanoatlantiradi?
3. Yevklid fazosida ochiq to`plam deb nimaga aytiladi?
4. Yevklid fazosida yopiq to`plam deb nimaga aytiladi?
5. Yevklid fazosida to`plamning ichki nuqtasi deb qanday nutaga aytiladi?
6. Chekli sondagi ochiq qism to`plamlarning kesishmasidan qanday to`plam hosil bo`ladi?
7. To`plamning to`ldiruvchisi deb qanday to`pamga aytiladi?+
8. Ihtiyoriy sondagi yopiq qism to`plamlarning kesishmasidan qanday to`plam hosil bo`ladi?

## Glossariy

**$R^n$ fazo –** n o'lchovli dekart koordinatalari sistemasidan iborat bo'lgan fazo.

**Yevklid fazosi –** $R^n$ to'plamda $x=(x^1,x^2..x^n)$ va $y=(y^1,y^2..,y^n)$ nuqtalar orasidagi masofani

$$d(x,y)=\sqrt{(y^1-x^1)^2+(y^2-x^2)^2+...+(y^n-x^n)^2} \qquad (1.1)$$

formula bilan aniqlaymiz. $d: R^n x R^n \to R^1$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:
1) musbat aniqlangan, ya'ni $\forall x,y \in R^n$ uchun x=y bo'lsa d(x,y)=0, $x \neq y$ bo'lganda d(x,y)>0 munosabatning bajarilishi zarur va yetarli.
2) simmetrik, ya'ni $\forall x,y$ uchun d (x,y)=d(y,x).
3) uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi, ya'ni $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$.
U holda, bunday fazo Yevklid fazosi deyiladi.
**Ochiq to`plam -** hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lgan to'plam.
**Yopiq to`plam -** $R^n \setminus A$ to'plam bo'lsa, A ni yopiq to'plam deyiladi.
**Ochiq shar -** $V_r$ (x)={$y \in R^n$: d(x,y)<r} to'plam.
**Yopiq shar -** $\overline{B_r}$ (x)={$y \in R^n$: d(x,y) $\le$ r} to'plam.

## 2.METRIK FAZOLAR.METRIK FAZODA OCHIQ VA YOPIQ TO`PLAMLAR.

Reja

1. Metrik fazo.
2. Metrik fazoga misollar.
3. Ochiq va yopiq to`plamlar

**Tayanch iboralar: Metrik fazo, metrika,ochiq to`plam, yopiq to`plam.**

Metrik fazolar topologik fazolarning juda muhim sinfini tashkil etadi. Bu fazolarda ixtiyoriy ikki nuqta uchun ular orasidagi masofa tushunchasi kiritiladi.
X - ixtiyoriy to'plam X $\times$X =$X^2$ to'g'ri ko'paytmada $\rho$ : X $\times$X--> $R^1$ funksiya aniqlangan bo'lib, qo'yidagi shartlarni qanoatlantirsin.
1) $\rho$ (x,y)$\ge$0, $\forall$ x,y $\in$ x
2) $\rho$ (x,y)= 0 < => x=y, $\forall$ x,y $\in$ X
3) $\rho$ (x,y)= $\rho$ (y,x), $\forall$ x,y $\in$ X
4) $\rho$ (x,y)$\le$ $\rho$ (x,z)+ $\rho$ (z,y) $\forall$ x,y, z $\in$ X

Yuqoridagi shartlar metrik fazo aksiomalari deyiladi. (X, $\rho$ ) juftlikni metrik fazo deyiladi. (X, $\rho$ ) –metrik fazo, x$\in$X,r >0 bo'lsa, markazi X nuqta va radiusi r ga teng ochiq shar $U_r$(x) qo'yidagicha aniqlanadi:
$U_r$(x)={y$\in$X / $\rho$ (x,y)<r}.
Ochiq shar yordamida metrik fazoda ochiq to'plam tushunchasini kiritish mumkin.
A$\subset$X –qism to'plam, x$\in$X bo'lib birorta r >0 son uchun $U_r$(x)$\subset$ A bo'lsa, x nuqta A to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lgan to'plam

ochiq to'plam deyiladi. Agar $\tau$ oila sifatida (X, $\rho$ ) metrik fazoning hamma ochiq qism to'plamlari va bo'sh to'plamdan iborat oilani olsak natijada
$(X,\rho)$ –juftlik topologik fazoga aylanadi.

Bu topologiya (X, $\rho$ ) fazoga $\rho$ metrika yordamida kiritilgan topologiya deb ataladi. Endi $\tau$ oilaning topologik fazo aksiomalarini qanoatlantirishini tekshiraylik.

1) $x\in X$ va r>0ixtiyoriy son bo'lsa, $U_r(x)\subset X$ bo'lgani uchun X to'plam $\tau$ oilaga tegishlidir.

2) Bo'sh to'plam ham $\tau$ oilaning elementi.

3)$A_1$, $A_2$ $\in\tau$ bo'lsin. Agar $A_1\cap A_2\neq\phi$ bo'lsa, ikkinchi shartga ko'ra $A_1\cap A_2\in\tau$

Faraz qilaylik, $A_1\cap A_2\neq\phi$ va $x\in A= A_1\cap A_2$ bo'lsin.

$A_1$,$A_2$ to'plamlar ochiq bo'lgani uchun shunday $r_1>0$, $r_2>0$ sonlar mavjudki, $U_{r_1}$ (x) $\subset$ $A_1$, $U_{r_2}$ (x) $\subset A_2$ munosibatlar bajariladi.

Agar 0<r<min($r_1$,$r_2$) bo'lsa,$U_r(x)\subset A= A_1\cap A_2$ munosibat bajariladi. Demak,$A= A_1\cap A_2\in\tau$

4) $\{A\alpha\}$ - $\tau$ ga tegishli to'plamlar oilasi bo'lsin.

$\bigcup\limits_{a} A\alpha\in\tau$ ekanini ko'rsataylik. Buning uchun $x\in A=\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ nuqtani qaraylik. x nuqtaning yig'indiga qarashliligidan shunday indeks $\alpha_0$ mavjudki, $x\in A\alpha_0$ munosibat o'rinli. $A\alpha_0$ to'plamning ochiqligidan shunday r>0 son mavjudki, $U_r(x)\subset A\alpha_0\subset A$ munosibat bajariladi. Demak $\tau$ oila topologik fazoning 1)-4) aksiomalarini qanoatlantiradi.

<u>1-misol</u> $X=R^1$, $\rho(x,y)=|x-y|$ to'g'ri chiziqning standart metrikasi

<u>2-misol</u> $X=R^n$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}$ , bu erda $\rho$ (x,y) $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$, $y=(y^1,y^2,\dots,y^n)$ nuqtalar orasidagi evklid bo'yicha oddiy masofa. 4)- aksioma Koshi tengsizligi [

$$\sum_{i-1}^{n}(a^i+b^i)^2]^{\frac{1}{2}}\le(\sum_{i=1}^{n}a^{i^2})^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{n}b^{i^1})^{\frac{1}{2}}$$

dan foydalanib tekshiriladi.

3-misol. X=C[a,b] [a,b] kesmada aniqlangan uzluksiz funksiya-lar to'plami bo'lsin. Bu to'plamda x(t), y(t) funksiyalar uchun $r(x,y)=\sup/y(t)-x(t)/, t\in[a,b]$ formula bo'yicha metrika kiritamiz. Bu holda r funksiya uchun metrik fazo aksiomalarini tekshirish engil, shuning uchun bu mashg'ulot t alabalarga tavsiya etiladi.

Metrik fazo uchun ichki,chegaraviy va urinish nuqtalarini quyidagicha kiritish mumkin. $A\subset X$- qism to'plam ,$x\in X$ bo'lib, ixtiyoriy r>0 uchun $U_r(x)\cap A\neq\varnothing$ va $U_r(x)$

$\cap$(X/A)$\neq \phi$ bo'lsa,x nuqta A to'plamning chegara nuqtasi deyiladi.

Agar ixtiyoriy r>0 uchun faqat $U_r(x)\cap A\neq \phi$ bo'lsa x nuqta A to'plamning urinish nuqtasi deyiladi.

Biror r>0 son uchun $U_r(x) \subset A$ munosabat bajarilsa , x nuqta A uchun ichki nuqta deyiladi.

Metrik fazolar shunday bir ajoyib xususiyatga egaki, bu xususiyat Xausdorf aksiomasi deyiladi. $x,y\in X, x\neq y, (X \rho)$- metrik fazo bo'lsin. Agar $d=\rho(x,y), 0<r<\frac{d}{2}$ bo'lsa, $U_r(x)$, Ur(y) sharlar o'zaro kesishmaydi. Topologik fazolar uchun ham Xausdorf aksiomasining bajarilishi talab qilinadi.

Xausdorf aksiomasi. (X, $\tau$ )-topologik fazo, x, $y\in X$ va $x\neq y$ bo'lsa, x va y nuqtalarning o'zaro kesishmaydigan atroflari mavjud.

Xausdorf aksiomasi bajaraladigan topologik fazolar Xausdorf fazolari deyiladi. Hamma topologik fazolar uchun ushbu aksiomaning har vaqt bajarilishi talab qilinadi. Jumladan, metrik fazolar (X, $\tau$ )-topologik fazo $\{x_n\}\in X$, n=1,2,.... va $x \in X$ bo'lsin.

Ta'rif. x nuqtaning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday N>0 son mavjud bo'lib, n>N da $x_n\in U$ munosabat bajarilsa, $\{x_n\}$ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi va

$$\underline{\lim_{n\to\infty} x_n} = x \langle \ (x_n \underset{n\to\infty}{->} x)$$ ko'rinishda yoziladi.

10-Teorema. Xausdorf fazosida har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga egadir.

Isbot. $\{x_n\}$ -yaqinlashuvchi ketma-ketlik va $\underline{\lim_{n\to\infty} x_n}=x$ bo'lsin .Agar $x_n$->y va $y\neq x$ bo'lsa, x va y nuqtalarning o'zaro kesishmaydigan atroflarini $U_1$ va $U_2$ bilan belgilasak, $\{x_n\}$-ketma-ketlik x va y nuqtalarga yaqinlashganligi uchun shunday $N_1$,$N_2$ sonlar mavjudki, n>$N_1$ da $x_n\in U_1$, $n > N_2$ $\partial a$ $x_n \in U_2$ bo'lib, $n\geq \max\{N_1 N_2\}$ olinsa $x_n\in U_1\cap U_2\neq \phi$ munosabat kelib chiqadi. Ko'ramizki, $U_1\cap U_2\neq \phi$ .Bu ziddiyatdan $y=x$ limitning yagonaligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1) Metrik fazo deb nimaga aytiladi?
2) Metrik fazolarga misollar keltiring.
3) Metrik fazoda ochiq to`plam deb qanday to`plamga aytiladi?

4) Metrik fazoda yopiq to`plam deb qanday to`plamga aytiladi?
5) Metrik fazoda sonli ketma-ketlikka misollar keltirng.
6) Metrik topologiya deb nimaga aytiladi?
7) Metrik fazo uchun ichki,chegaraviy va urinish nuqtalar to`plamlariga misollar keltiring.

**Glossariy**

**Metrik fazo -** bu ixtiyoriy ikki nuqta uchun ular orasidagi masofa bilan aniqlangan fazo.
**Metrika -** X - ixtiyoriy to'plam va $X\times X = X^2$ to'g'ri ko'paytmada $\rho : X\times X\to R^1$ funksiya aniqlangan bo'lib, qo'yidagi shartlarni qanoatlantirsin:
1) $\rho(x,y)\geq 0, \forall x,y \in x$
2) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y, \forall x,y \in X$
3) $\rho(x,y)=\rho(y,x), \forall x,y \in X$
4) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y), \forall x,y,z \in X$
U holda, $(X, \rho)$ juftlikni metrika deyiladi.

## 3.TOPOLOGIK FAZOLAR.OCHIQ VA YOPIQ TO`PLAMLAR.

Reja

1.To`plarlar oilasi.
2.Topologik fazo.
3.Yopiq to`plamlar.

**Tayanch iboralar:to`plamlar oilasi, topologiya,ochiq to`plam, yopiq to`plam.**

Biror X to'plam va uning qism to'plamlaridan iborat $\tau=\{G_\alpha\}$oila berilgan bo'lsin. Bu oila chekli sondagi elementlarga ega bo'lishi ham mumkin. Jumladan, $\tau$ oilaga X to'plamning barcha qism to'plamlari tegishli bo'lishi mumkin. Shundan kelib chiqib, quyi $\alpha$ indeksning qabo'l qilishi lozim bo'lgan qiymatlari qanday to'plamga tegishli ekanligini ko'rsata olmaymiz. X to'plam elementlarini nuqtalar deyiladi.

**Ta'rif. X**ning qism to'plamlar oilasi $\tau=\{G_\alpha\}$ dan quyidagi shartlarni bajarilishini talab qilaylik.

1) $\tau$ oilaga tegishli to'plamlar ixtiyoriy sistemasining birlashmasi $\tau$ ga tegishli bo'lsin

2) $\tau$ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) $\tau$ ga tegishli bo'lsin.

3) Ø bo'sh to'plam $\tau$ ga tegishli bo'lsin

4) X to'plam $\tau$ ga tegishli bo'lsin.

U holda $\tau$ oilani X dagi topologik struktura deyiladi. X to'plamda biror $\tau$ topologik struktura aniqlangan bo'lsa, holda $(X,\tau)$ juftlikka **topologik fazo** deyiladi.

Biror to'plamni topologik fazoga aylantirish uchun uning yuqoridagi to'rtta shartlarni qanoatlantiruvchi qism to'plamlaridan iborat birorta oilani aniqlash etaridir. (X, $\tau$) topologik fazo bo'lsa, Xning elementlarini nuqtalar deb, $\tau$ ga tegishli Xning qism to'plamlarini esa ochiq to'plamlar deb ataladi. 1)-4)-shartlarni topologik fazo aksiomalari deyiladi. Endi misollar keltiraylik.

1-misol. X ixtiyoriy to'plam, $\tau$ oila bo'sh to'plam (Ø) va X dan iborat bo'lsa, (X, $\tau$) juftlik topologik fazo bo'ladi. Bu fazoda faqat ikkita ochiq qism to'plam mavjud. Bu fazoni trivial yoki antidiskret topologik fazo deyiladi.

2-misol. X ixtiyoriy to'plam, R(x)q $\tau$ Xning barcha qism to'plamlari oilasi bo'lsa, (X, $\tau$) juftlik topologik fazo bo'lib, uni diskret topologik fazo deyiladi. Bitta nuqtadan iborat diskret topologik to'plamning ochiq to'plam bo'lishi 4) dan kelib chiqadi. 1)-4)-aksiomalar bajarilishini tekrishish o'quvchiga tavsiya etiladi.

3-misol. X=[0,∞) nur bo'lib, $\tau$ oila Ø, x va {[a, ∞), $a \geq 0$} nurlardan iborat bo'lsa, 1)-4)-aksiomalarni tekshirish mumkin.(x, $\tau$) fazoni strelka (yo'nalish) deyiladi.

4-misol. X=$R^n$ bo'lsin. $R^n$ da ochiq to'plam deb, har bir nuqtasi shu to'plamga tegishli biror sharning markazi bo'la oladigan to'plamga aytiladi. Ya'ni ixtiyoriy $G \in R^n$ to'plamni olsak, bu to'plam ochiq bo'lishi uchun har bir $x_0 \in G$ nuqta uchun r>0 son mavjud bo'lib, U($x_0$,r)$\in G$ bo'lishi talab qilinadi, bunda U($x_0$,r)={ $x|d(x_0, x) < r$ }. Masofani koordinatalar orqali ifodalasak

$$x(x^1, x^2, ..., x^n) \in R^n, x_0(x_o{}^1, x_o{}^2, ..., x_o^n) \in R^n$$

$$d(x_o x) = \sqrt{(x^1 - x_o{}^1)^2 + (x^2 - x_o{}^2)^2 + ...(x^n - x_o{}^n)^2} < r \quad (1 \cdot 1)$$

($R^n$, $\tau$) juftlikka tabiiy topologiya deyiladi va $E^n$ orqali belgilanadi

2-aksiomaning bajarilishini tekshiraylik $G_1$ va $G_2$ $E^n$ da ochiq to'plamlar bo'lsin G=$G_1 \cap G_2$ belgilaylik $x \in G \Rightarrow x \in G_1, x \in G_2$. U xolda $r_1$>o,$r_2$>o sonlar mavjud bo'lib, U(x,$r_1$)$\in G_1, U(x, r_2) \subset G_2$. min $(r_1, r_2) = r$ belgilasaq, ko'ramizki, $U(x, r) \subset G \Rightarrow G$ - ochiq to'plam.

5-misol $X = R^n$. X fazodagi ochiq to'plamlar deb markazi fiksirlangan (mahkamlangan) $x_o$ nuqtada bo'lgan {U ($x_o$,r)} sharlar oilasiga, X ga va Ø ga aytiladi. 1)-2) aksiomalarni tekshiraylik {U($x_o$,$r_2$)} – ochiq to'plamlar sistemasi bo'lsa, $U(x_o, r) = \bigcup_\alpha u(x_o, r_\alpha)$, bunda $r = \sup_\alpha r_\alpha$ ( $\sup_\alpha r_\alpha$ =∞ bo'lsa, $U(x_o, r) = X$)

$U(x_o, r) \subset X$

U($x_o$,$r_1$) va U($x_o$,$r_2$) ikkita to'plamlar kesishmasini U($x_o$,r)=U($x_o$,$r_1$) ∩ U (U($x_o$,$r_2$) belgilasaq, r=min ($r_1$,$r_2$) bo'lib, U($x_o$,r) $\subset X$ Bunday topologiyani $R^n$ da konsentrik deb nomlanadi.

6-misol $A_2$ affin tekislikda R=ABCD paralellogrammni olaylik

$\overset{o}{P} = \{k / \overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}, O < \lambda,, \beta < 1\}$ to'plamga P ning ichkarisi deyiladi.

$F \subset A_2$ bo'lib, F to'plamning har qaysi M nuqtasi uchun R paralellogramm mavjud va $M \in \overset{o}{P} \subset F$ bo'lsa, F ni ochiq to'plam deyiladi. $A_2$ dagi barcha ochiq to'plamlar sistemasi $\tau$ uchun topologik fazoning 1)–4) aksiomalari o'rinlidir.

Demak ($A_2$, $\tau$ )-topologik fazo.

X-ixtiyoriy to'plam, F uning qism to'plami bo'lsa, u holda X\F=$C_x$F F ni X gacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi. quyidagilar o'rinlidir: $F \cap c_x F =$ Ø, FU$C_X$F=X, $C_x$($C_x$F)=F

Shu bilan birga ikkilanganlik formulalari deb ataluvchi qo'yidagi formulalar engillik bilan tekshiriladi.

$\underset{\lambda}{U} C_x F_\lambda = C_x(\underset{\lambda}{\bigcap} F_\lambda$ (1.3) $\underset{\lambda}{\bigcap} C_x F_\lambda = C_x(\underset{\lambda}{U} F_\lambda$ $(1 \bullet 4)$

Ta'rif (X, $\tau$ ) – topologik fazoda $F \subset X$ to'plam uchun uning to'ldiruvchisi X\F ochiq to'plam bo'lsa, F to'plamni yopiq to'plam deb ataladi.

Masalan: [a,∞) tuplam (-∞,a) ochiq to'plam to'ldiruvchisi sifatida yopiq. Topologik faza aksiomalaridan va $(1 \bullet 3)$, $(1 \bullet 4)$ formulalardan yopiq to'plamlar uchun quyidagi xossalarni keltirish mumkin.

1. Yopiq to'plamlar ixtiyoriy sistemasining kesishmasi yopiq to'plamdir.
2. Chekli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plamdir.
3. X fazo yopiq to'plamdir.
4. Ø-bo'sh to'plam yopiq to'plamdir.

1)-2) xossalarni isbotlaylik

$F_\lambda$ - `yopiq to'plamlar oilasining { $F_\lambda$ } sistemasini qaraylik $C_x F_\lambda$ = X\ $F_\lambda$ tuldiruvchi to'plam har bir $\lambda$ uchun ochiq to'plam bo'lganligidan { $G_\lambda = C_x F_\lambda$ } – ochiq to'plamlar sistemasini tashqil etadi. $C_x G_\lambda = F_\lambda \Rightarrow F = \underset{\lambda}{\bigcap} F_\lambda = \underset{\lambda}{\bigcap} C_x G_\lambda = C_x(\underset{\lambda}{U} G_\lambda)$

Ko'ramizki F yopiq to'plamdir, chunki $\underset{\lambda}{U} G_\lambda$-ochiq to'plam bo'lib, F uning to'ldiruvchisidir.

Ikkinchi xossani isbotlash uchun $\lambda = 1,2$ holni qaraylik {$F_1$,$F_2$}- yopiq to'plamlar sistemasi

$G_\lambda = C_x F_\lambda = X \setminus F_\lambda$ to'ldiruvchini $\lambda$=1 va $\lambda$=2 qiymatlarda ochiq to'plam bo'lishi ravshan.

$F = \overset{2}{\underset{\lambda=1}{U}} C_x G_\lambda - C_x(\overset{2}{\underset{\lambda=s}{\bigcap}} G_\lambda);$ $G_1 \bigcap G_2 = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) \Rightarrow$ ikkita ochiq to'plamlarning kesishmasi sifatida ochiq to'plam (2-aksiomaga binoan), F esa $G_1$

$\cap G_2$ ning to'ldiruvchisi sifatida yopiq to'plamdir. Uchinchi va turtinchi xossalarning isboti o'quvchiga tavsiya etiladi

**Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

1. To`plamlarning qanday oilasi topologiya tashkil etadi?
2. Topologik fazolarga misollar keltiring.
3. Diskret toplogiyaga misollar keltiring.
4. Trivial toplogiyaga misollar keltiring.
5. Toplogik fazoda ochiq to`plam deb nimaga aytiladi?
6. Toplogik fazoda yopiq to`plam deb nimaga aytiladi?

**Glossariy**

**Topologik fazo - X** ning qism to'plamlar oilasi $\tau = \{G_\alpha\}$ dan quyidagi shartlarni bajarilsin:

1) $\tau$ oilaga tegishli to'plamlar ixtiyoriy sistemasining birlashmasi $\tau$ ga tegishli bo'lsin

2) $\tau$ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) $\tau$ ga tegishli bo'lsin.

3) Ø bo'sh to'plam $\tau$ ga tegishli bo'lsin

4) X to'plam $\tau$ ga tegishli bo'lsin.

U holda $\tau$ oilani X dagi topologik struktura deyiladi va (X, $\tau$ ) juftlikka topologik fazo deyiladi.

**To`plamlar oilasi -** Biror X to'plamning qism to'plamlaridan iborat $\tau = \{G_\alpha\}$ to'plam, to'plamlar oilasi deyiladi.

## 4.TO'PLAMNING ICHKI, CHEGARAVIY TASHQI VA URINISH NUQTALARI

Reja

1.Atrof tushuchasi.

2.Ichki nuqta.

3.Urinish nuqta.

4.Chegaraviy nuqta.

**Tayanch iboralar: nuqtaning atrofi, ichki nuqta, chegara nuqta, urinish nuqta.**

(X, $\tau$ )-topologik fazo va a$\in X$ biror nuqta.

Ta’rif. Agar U ochiq to’plami bo’lib, A va a$\in U$ bo’lsa, U ni a nuqtaning atrofi deyiladi. X fazoda A to’plamni olaylik.

Ta’rif: a nuqtaning U atrofi mavjud bo’lib, a$\in U \subset F$ munosabat o’rinli bo’lsa, a ni F to’plamning ichki nuqtasi deyiladi. F to’plamning barcha ichki nuqtalar to’plami int F orqali belgilanadi.

Ta’rif: a nuqtaning U atrofi mavjud bo’lib, shu atrofda F to’plamga tegishli nuqtalar mavjud bo’lmasa, u holda a ni F to’plamning tashqi nuqtasi deyiladi va ext F orqali belgilanadi.

A F to’plam uchun tashqi nuqta bo’lsa, X \F uchun ichki nuqta bo’ladi.

Ta’rif: Agar a € X nuqtaning har qanday U atrofida F ga va X\F ga tegishli nuqtalar mavjud bo’lsa u holda *a* ni F to’plamning chegara nuqtasi deyiladi.

F to’plamning barcha chegara nuqtalar to’plamiga F ning chegarasi deyiladi va $\partial$F belgilanadi. To’plamining ichki va tashqi va chegara nuqtalari tarifidan xar qanday F to’plam uchun X fazo Int F, ext F, va $\partial$F dan iborat 3ta to’plamga ajraladi. Bu to’plamlar juft- jufti bilan umumiy nuktalarga ega bo’lmaydi, yani

$\operatorname{int} f \bigcap extf = extF \bigcap \partial h = \operatorname{int} f \bigcap \partial h = 0$ (1.5)

Shu bilan birga $\operatorname{int} FUext\,FU \bigcup \partial F = X$ (1.6)

Ko’ramizki, $\operatorname{int} F = extC_x F,\ extF = \operatorname{int} C_x F,\ extF = \operatorname{int} C_x F (1,7).$

$\operatorname{int} F \subset F,\ extF \subset C_x F$ (1.8)

Teorema. Har qanday F to’plam uchun int F - ochiq to’plamdir.

Isboti: a$\in \operatorname{int} F$ ixtiyoriy nuqtani olaylik. a nuqtaning shunday atrofi $U_a$ ni aniqlash mumkinki $U_a \subset F$. Ochiq to’plam o’zini har qanday nuqtasini atrofi ekanligidan $\operatorname{int} F = \bigcup Ua$ va topologik fazoning 1- aksiomasiga ko’ra $a \in \operatorname{int} F$ - ochiq to’plamdir. Ushbu teorema va (1.7) munosibatdan quyidagi teorema kelib chiqadi:

Teorema:Har qanday F to’plam uchun ext F ochiq to’plamdir.

teorem:F to’plam ochiq bo’lishi uchun u o’zining ichkarisi int F bilan ustma-ust tushishi zarur va Yetarli.

<u>Zaruriyligi:</u> Ochiq to’plam shu to’plamga tegishli ixtiyoriy nuqtasining atrofi bo’lganligi uchun F $\subset$ int F( * )

(1.8) dan int F $\in$ F(**) •

(*) va (**)dan F=int F kelib chiqadi.

<u>Yetarliligi</u>: int F- ochiq to’plam bo’lgani uchun 3- teoremaga ko’ra F –ochiq to’plamdir.

1-misol: X= R; F=]a,b[ bo’lsin a,b –haqiqiy sonlar va a<b

int F = ]a,b[ bo’lib, $\partial F = \{a, b\}$

2-misol:X=R;F- hamma ratsional sonlar to’plami bo’lsin. $\partial F$ –qanday to’plam?

Yechish: $\partial F$=X,chunki ixtiyoriy haqiqiy son uchun unga yaqinlashuvchi ratsional sonlar ketma-ketligi mavjud.

Ta’rif: F $\in$ X, x $\in$ X bo’lib, *x* nuqtaning ixtiyoriy atrofida F to’plamga tegishli nuqtalar mavjud bo’lsa, x nuqta F to’plamning urinishi nuqtasi deyiladi. F to’plamning hamma urinishi nuqtalari to’plami $\bar{F}$ bilan belgilanadi va F ning yopilmasi deyiladi.

Ta’rifdan: $\bar{F}$ = int F$\cup$. $\partial F = C_x(extF)$ (1.9)

Ko’ramizki F to’plamning yopilmasi to’plamning ichki va chegaraviy nuqtalaridan iborat bo’lib, tashqi qism uchun to’ldiruvchi to’plamdir. 4- teoremaga ko’ra F – ochiq to’plam bo’lib, uning yopilmasi F – yopiq to’plamdir.F to’plamning har qanday nuqtasi uning yopilmasi $\bar{F}$ ga tegishliligidan F $\in$ $\bar{F}$ (1.10)

munosabat o’rinlidir.

To’plamning qoplamasi haqidagi teoremalar

Teorema:F yopiq to’plam bo’lish uchun u o’zining qoplamasi bilan ustma- ust tushishi zarur va Yetarlidir.

Isboti: Zaruriyligi.F yopiq to’plam bo’lsin.

F=$\bar{F}$ bo’lishini ko’rsatamiz.$C_x$F – ochiq bo’lgani uchun 5 – teoremaga va (1.7) tenglikka asoslansak,

$C_x$F = int $C_x$F= ext F (1.11).

(1.9), (1.11) va 2-§dan (1.2) bo’yicha F=$\bar{F}$ kelib chiqadi.

Yetarliligi: Har qanday to’plam uchun uning qoplamasi yopiq to’plam bo’lishidan kelib chiqadi.

Natija: To’plamning ikki karrali qoplamasi uning bir karrali qoplamasi bilan ustma – ust tushadi.

$(\bar{\bar{F}}) = \bar{F}$ (1.12).

7-Teorema. Agar $A$ $F$ yopiq to’plamga qism to’plam bo’lsa, u xolda $\bar{A} \subset F$

Isbot: $A \subset F$ => $\bar{A} \subset \bar{F}$ . 6-teoremadan $\bar{F}$ =F Shuning uchun $\bar{A} \subset F$ .

Natija F to’plamining qoplamasi $\bar{F}$ ,F ni o’z ichiga oluvchi barcha yopiq to’plamlar kesishmasidan iboratdir.

8- Teorema: Har qanday F nuqtaning chegarasi $\partial$F yopiqdir.

Isbot: 4 –§ da keltirilgan (1.5) va (1.6) tengliklardan

$\partial$F intF U ext F larning X fazoga to’ldiruvchi to’plam ekanligi kelib chiqadi.3 va 4 teoremalar bo’yicha int FUextF - ochiq to’plam. Ma’lumki, $\partial$F = $C_x$ (intFUextF) => > $\partial$F – yopiq.

9-Teorema:Ikki to’plam birlashmasining qoplamasi shu to’p-lamlar qoplamalarining birlashmasiga teng, ya’ni $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (1.13)

Isbot: (1.5) tenglikka ko'ra (1.13)ni qo'yidagicha ifodalash mumkin. $C_x(\overline{A \cup B})=C_x($ $\bar{A} \cup \bar{B})$ (1.14) => (1,8) asosida $C_x(\overline{A \cup B})=(C_x \bar{A}) \cap (C_x \bar{B})$ (1.15) ga (1.9) tenglikni qo'llab, ext(AUB)= ext $A \cap$ extB (1.16) tenglikni hosil qilamiz. Ushbu (1.16) tenglik (1.13)ga teng kuchli bo'lib,teoremani isbotlash uchun (1.16) tenglikni isbotlash Yetarlidir. a $\in$ ext (AUB) bo'lsa a nuqtaning U atrofi mavjud bo'lishi mumkinki $U \cap (AUB)= \phi$ => $U \cap A= \phi$ va $U \cap B= \phi \Rightarrow$a A.
va B to'plamlariga nisbatan tashqi nuqtadir.
Ext(AUB) $\subset extA \cap extB$ (1.17), a $\in$ extA$\cap$ extB bo'lsin. U holda $a$ nuqtaning U va V atroflari mavjud bo'lib, $U \cap A= \phi$ ,$V \cap B= \phi$ ,$W=U \cap B$ to'plam ham $a$ nuqtaning atrofi bo'lib, $W \cap A = \varnothing$ $W \cap B = \varnothing$ va $W \cap (AUB) \neq \phi$ =>a $\in$ ext(AUB)=>ext $A \cap$ ext B $\subset$ ext (AUB) (1.18. (1.17) va (1.18) tengliklardan (1.16) kelib chiqadi.

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


## Nazorat savollari

1. Topologik fazoda nuqtaning atrofini keltiring.
2. Topologik fazoda to`plamning tashqi nuqtasi deb qanday nuqtaga aytiladi.
3. Qanday nuqta toplogik fazoda to`plamning chegara nuqtasi deyiladi?
4. Toplogik fazoda to`planning barcha tashqi nuqtalar to`plami qanday to`plam bo`ladi?
5. Toplogik fazoda To`plamning ichi deb qanday to`plamga aytiladi?
6. Toplogik fazoda chegaraviy va urinish nuqtalar to`plamlariga misollar keltiring.
7. Toplogik fazoda to`plamning zichligiga misollar keltiring.

## Glossariy

**Nuqtaning atrofi –** biror A to'plamning ixtiyoriy a nuqtasi uchun $\forall a \in U$ munosabat bajariladigan biror U ochiq to'plam.

**Ichki nuqta -** a nuqtaning U atrofi mavjud bo'lib, $a \in U \subset F$ munosabat o'rinli bo'ladigan ixtiyoriy nuqta F to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

**Chegara nuqta -** Agar a € X nuqtaning har qanday U atrofida F ga va X\F ga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa u holda *a* ni F to'plamning chegara nuqtasi deyiladi.

**Urinish nuqta -** F $\in$ X, x $\in$ X bo'lib, *x* nuqtaning ixtiyoriy atrofida F to'plamga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa, x nuqta F to'plamning urinishi nuqtasi deyiladi.

1

## 5.AJRALUVCHAN (XAUSDORF) TOPOLOGIK FAZO.

Reja

1.$T_0$ fazo.
2.$T_1$ fazo.
3.$T_2$ fazo.

**Tayanch iboralar: $T_0$ fazo, $T_1$ fazo, $T_2$ fazo.**

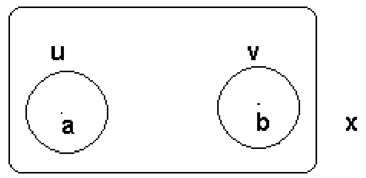
Ta'rif. Agar topologik fazoning har qanday ikki nuqtasi uchun o'zaro kesishmaydigan atroflar mavjud bo'lsa, u holda ushbu fazoning ajraluvchan yoki xausdorf fazosi deyiladi.

Ta'rifni qo'yidagicha talqin qilish mumkin: $(X,\tau)$-Xausdorf topologik fazo bo'lsa, ixtiyoriy $a,b \in X,\ a \neq b$ nuqtalar uchun $U,V \in \tau$ to'plamlar mavjud bo'lib, $a \in U,\ b \in V$ va $U \cap V = \varnothing$ bajariladi.

*U* va *V* atroflar *a* va *b* nuqtalarni bir-biridan ajratadi.

Ta'rifdan natijalar:

1-Teorema. $(X,\tau)$ Xausdorf topologik fazoda har biriga bittadan nuqta qarashli bo'lgan qism to'plamlar yopiqdir.




1-chizma

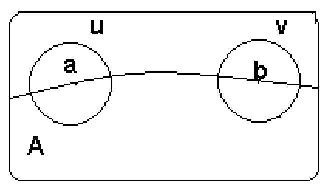
Isbot. $x_0 \in X$ bo'lsin. $\{x_0\}$-ning yopiqligini ko'rsatish uchun $X \setminus \{x_0\}$ to'ldiruvchi to'plamning ochiqligini tekshirish Yetarlidir. Haqiqatda ham, har qanday $y \in X \setminus \{x_0\}$ nuqta *V* atrofga ega bo'lib, $x_0 \overline{\in} V$, chunki *X*– ajraluvchan fazo. Ko'ramizki, $y \in X \setminus \{x_0\}$ ga ichki nuqta $y \in V \subset X \setminus \{x_0\} \Rightarrow X - \{x_0\}$ - ochiq to'plam. U holda $\{x_0\}$-yopiq bo'ladi.

Natija. Xausdorf fazosida chekli to'plamlar yopiqdir.

2-Teorema. Xausdorf fazosi *X* ning har qanday *A* qism fazosi ajraluvchan fazodir.

Isbot. Agar $a,b \in A$ ikkita turli nuqtalar bo'lib, $U,V \subset X$ – ularning kesishmaydigan atroflari bo'lsa, $U \cap A$ va $V \cap A$ ushbu nuqtalarning *A* qism fazodagi kesishmaydigan atroflaridir.

1-misol. Bittadan ortiq nuqtaga ega bo'lgan



antidiskret fazo ajralmaydi.

2-shakl

2-misol. Diskret fazo ajraluvchanlik xossaga ega.

3-misol. Har qanday metrik fazolar ajraluvchan (5-§).

Ajraluvchan fazoda elementlar sonining ikkitadan kam bo’lmasligi talab etiladi.

Xausdorf fazosi aksiomalarini keltiraylik:

$AA_0$: Fazoda ($T_0$) turlicha nuqtalarining har bir jufti uchun, nuqtalardan biri ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga egadir.

$AA_1$: Fazoda ikkita turlicha nuqtalarning har bittasi ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga ega ($T_1$-fazo).

$AA_2$: Fazoda har qanday ikkita turlicha nuqtalar uchun kesishmaydigan atroflar mavjuddir ($T_2$-fazo).

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


## Nazorat savollari

1. Qanday fazo ajraluvchan fazo deyiladi?
2. Qanday fazo Xausdorf fazosi deyiladi?
3. Xausdorf fazosi uchun teoremani aytib bering.
4. $T_0$ fazoning ta`rifini keltiring.
5. $T_1$ fazoning ta`rifini keltiring.
6. Qanday fazoda har qanday ikkita turlicha nuqtalar uchun kesishmaydigan atroflar mavjuddir?

## Glossariy

**$T_0$ fazo -** Fazoda turlicha nuqtalarining har bir jufti uchun, nuqtalardan biri ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga ega.

**$T_1$ fazo -** Fazoda ikkita turlicha nuqtalarning har bittasi ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga ega.

**$T_2$ fazo -** Fazoda har qanday ikkita turlicha nuqtalar uchun kesishmaydigan atroflar mavjud.

# 6.BOG’LANISHLI TO’PLAMLAR

Reja

1.Bog`lanmagan fazo.

2.Bog`lanishli fazo.

3.Bog`lanishlilik komponentasi.

**Tayanch iboralar:bog`lanishli to`plam, bog`lanishsiz to`plam, bog`lanishlilik komponentasi.**

$(X,\tau)$-topologik fazo, $A\subset X$-qism to’plam bo’lsin. Ikkita $G_1$ va $G_2$ ochiq qism to’plamlar mavjud bo’lib:

1) $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$

2) $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$

3) $A\cap G_1\neq\varnothing, A\cap G_2\neq\varnothing$

shartlar bajarilsa, $A$ to’plam bog’lanmagan to’plam deyiladi. Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $G_1$ va $G_2$ ochiq to’plamlar mavjud bo’lmasa, A to’plamni bog’lanishli to’plam deyiladi.

$A=X$ holni qaraylik. Bu holda $X\cap G_1=G_1, X\cap G_2=G_2$ bo’lganligi uchun 1)-3) shartlarni qo’yidagicha yozish mumkin:

1') $X=G_1\cup G_2$

2') $G_1\cap G_2=\varnothing$

3') $G_1\neq\varnothing, G_2\neq\varnothing$

xulosa shuki,

$G_1$ va $G_2$ ochiq qism to’plamlar mavjud bo’lib, ular 1'), 2'), 3') shartlarni qanoatlantirsa, $X$ ni bog’lanmagan topologik fazo deb ataladi. Aks holda, $X$ ni bog’lanishli topologik fazo deb ataymiz.

Diskret topologik fazo bog’lanmagan fazoga misol bo’la oladi. $X$ da bittadan ortiq nuqta mavjuddir. Har qanday $U\neq X, U\neq\varnothing$ to’plamni olsak, $V=X\setminus U$ uning to’ldiruvchisi bo’lib, shu bilan $X$ bo’sh bo’lmagan ikkita ochiq to’plamlarga ajratiladi.

Agar bog’lanmagan $X$ fazo umumiy qismga ega bo’lmagan ikkita $U$ va $V$ bo’sh bo’lmagan ochiq to’plamlarga ajratilsa, u holda $U=CV$ va $V=CU$.

Shu asosda bog’lanishli to’plamga qo’yidagicha ta’rif berish mumkin:

Ta’rif. Agar $X$ fazo yoki bo’sh to’plam bir vaqtda ochiq va yopiq to’plam bo’lsa, u holda $X$ fazoni bog’lanishli deyiladi.

1-Teorema. Topologik fazo bog’lanishli bo’lishi uchun uning har qanday ikki nuqtasi biror bog’lanishli to’plamga tegishli bo’lishi zarur va Yetarli.

Isbot. Zaruriyligi bog’lanishlilik ta’rifiga ko’ra o’z-o’zidan tushunarli.

Yetarliligi $X$-topologik fazo bo’lib, ixtiyoriy ikki nuqtasi birorta bog’lanishli to’plamda yotsin. $X$ ni bog’lanmagan bo’lsin deb faraz qilaylik, ya’ni $G_1\cup G_2, G_1, G_2$-ochiq to’plamlar, $G_1\neq\varnothing, G_2\neq\varnothing,\ G_1\cap G_2=\varnothing$ $\ a\in G_1,\ b\in G_2$ nuqtalarni olaylik. $K\subset X$ $a$ va $b$ nuqtalarni o’z ichiga oluvchi bog’lanishli to’plam bo’lsin. U holda $G_1$ va $G_2$ $K$ ning qoplamasi bo'lib, $G_1 \cap K \neq \varnothing, G_2 \cap K \neq \varnothing,$ lekin $G_1 \cap G_2 \cap K = \varnothing.$ Bunday munosabada $K$ bog'lanmagan bo'ladi. Qarama-qarshilik kelib chiqdi. Teorema to'la isbot qilindi.

2-Teorema. Bog'lanishli to'plamning qoplamasi ham bog'lanishli to'plamdir.

Isbot $(X,\tau)$-topologik fazo, $A \subset X$ bog'lanishli qism to'plam bo'lsin. Agar $A$ ning qoplamasi $\bar{A}$ bog'lanmagan to'plam bo'lsa, $G_1$ va $G_2$ ochiq qism to'palmlar mavjud bo'lib, qo'yidagi

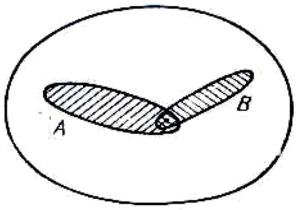
$\bar{A} = (G_1 \cap \bar{A}) \cup (G_2 \cap \bar{A}),\ (G_1 \cap \bar{A}) \cap (G_2 \cap \bar{A}) = \varnothing,\ G_1 \cap \bar{A} \neq \varnothing, G_2 \cap \bar{A} \neq \varnothing$ bo'lganligi uchun

$$(G_1 \cap \bar{A}) \cap A = G_1 \cap \bar{A}, (G_2 \cap \bar{A}) \cap A = G_2 \cap A,\ (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A) = A$$

tengliklar o'rinlidir $G_1 \cap \bar{A} \neq \varnothing,\ G_2 \cap \bar{A} \neq \varnothing,\ G_1 \cap G_2 \cap \bar{A} = \varnothing$.

A bog'lanishli bo'lgani uchun A ning $G_1$ va $G_2$ larning biri bilan kesishmasi bo'sh to'plam. $G_1 \cap A = \varnothing$ bo'lsin. Bundan A ni $X \setminus G_1$ yopiq to'plamga tengli bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $A \in X \setminus G_1$. U holda $A$ ning qoplamasi $\bar{A}$ ham $X \setminus G_1$ ga qism bo'ladi. Ko'ramizki, $\bar{A} \cap G_1 = \varnothing$. Bu qarama-qarshilikdan A ning bog'lanishli ekanligi kelib chiqadi.

3-Teorema. Kamida bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan ikkita bog'lanishli to'plamlarning yig'indisi bog'lanishli to'plamdir (3-shakl).




3-shakl.

Isbot. A, B X topologik fazoning $A \cap B \neq \varnothing$ shartni qanoatlantiruvchi bog'lanishli qism to'plamlari bo'lsin, ya'ni $C \in G_1 \cup G_2$ bunda $G_1$ va $G_2$ $C$ to'plam bilan umumiy nuqtalarga ega bo'lgan ochiq to'plamlar bo'lib, $G_1$, $G_2$ va C larning kesishmasi $\varnothing$ to'plam: $G_1 \cap C \neq \varnothing, G_2 \cap C \neq \varnothing, G_1 \cap G_2 \cap C = \varnothing$. U holda A va B larning bog'lanishliligidan A va B larning har biri $G_1$ va $G_2$ lardan birining ichida to'laligicha yotishi va ikkinchisi bilan kesishmasligi kelib chiqadi. $A \in G_1$ bo'lsin. $D \in G_1$ desak, u holda $C \subset G_2 = \varnothing,\ B \subset G_2$ bo'lsa $A \cap B \subset G_1 \cap G_2 \cap C = \varnothing$. Har ikki farazimiz zidlikka uchradi. Teorema isbotlandi.

Natija: Teorema talabi bog'lanishli to'plamlarning ixtiyoriy oilasi uchun o'rinli bo'lib, ular kesishmasining bo'sh to'plam $(\varnothing)$ dan farqli bo'lishligi talab qilinadi.

4-Teorema. Umumiy nuqtaga ega bo'lgan bog'lanishli to'plamlar oilasining birlashmasi bog'lanishidir.

Isboti. $X$ dagi bog'lanishli to'plamlarning ixtiyoriy oilasi $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bo'lsin $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$

-umumiy nuqta. Bog'lanishlilik kriteriyasi bo'yicha $\underset{\alpha\in I}{\cup} A_\alpha$ ning bog'lanishli bo'lishini isbotlash uchun uning ikkita *a* va *b* nuqtalari uchun $\underset{\alpha\in I}{\cup} \bar{A}_\alpha$ to'plamning ushbu nuqtalarni o'z ichiga oluvchi bog'lanishli qism to'palmini ko'rsatish kifoya. Masalan, $a\in A_\alpha$ va $b\in A_\beta,\ \alpha,\beta\in I$ bo'lsa, *a* va *b* lar $A_\alpha\cup A_\beta$ to'plamga tegishlidir. $A_\alpha\cup A_\beta$ 18-teoremaga ko'ra bog'lanishli to'plam. Teorema isbotlandi.

Har qanday antidiskret fazo, haqiqiy to'g'ri chiziq $R^1$, (0,1)-interval bog'lanshili to'plamlardir. *N*-natural sonlar to'plami, *Q*-ratsional sonlar to'plami va har qanday chekli to'plamlar bog'lanishsiz to'plamlardir.

Agar $A\subset R$ to'plam *a* va *b* nuqtalarni o'z ichiga olib *a* va *b* nuqtalar oralig'idagi biror *c* nuqta (*a*<*c*<*b*) *A* ga tegishli bo'lmasa, u holda *A* bog'lanmagan bo'ladi. Haqiqatan ham

$G_1=(-\infty,c),\ G_2=(c,\infty)\ G_1\cap G_2=\varnothing,\ G_1\cap A\neq\varnothing,\ G_2\cap A\neq\varnothing, G_1\cap G_2\cap A=\varnothing$. To'g'ri chiziq $(-\infty,\infty)$ interval orqali tasvirlanadi. a *X* topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. 18-teoremaga ko'ra *a* ni o'z ichiga oluvchi bog'lanishli qism to'plamlar orasida eng kattasi mavjud. Bu to'plamga *a* ni o'z ichiga oluvchi har qanday qism to'plam tegishlidir.

Ta'rif. *a* ni o'z ichiga oluvchi eng katta bog'lanishli qism to'plamga *a* nuqtani *X* dagi komponentasi deyiladi.

Agar $n_a$ va $n_v$ *a* va *b* nuqtalarning komponentalari bo'lib, $H_a\cap H_в\neq\varnothing$ bo'lsa, u holda 18-teorema va komponenta ta'rifidan $H_a\cup H_в=H_a=H_в$.

Xulosa qo'yidagicha: Turli ikkita nuqtalarning komponentalari yoki kesishmaydi yoki ustma-ust tushadi.

Bundan har qanday *X* topologik fazo o'z nuqtalarining juft-jufti bilan kesishmaydigan komponentalari yig'indisiga ajralishi kelib chiqadi. *X* fazodagi nuqtalarning bog'lanishli komponentalarini *X* ning komponentalari deyiladi. Qo'yidagi teoremani mustaqil isbotlashga qoldiriladi.

5-Teorema. *X* fazo komponentalari yopiq to'plamlardir.

Ta'rif. *X* fazodagi bog'lanishli ochiq to'plamga soha deyiladi. Soha yopilmasga yopiq soha deyiladi.

Antidiskret fazo har qanday bog'lanishli to'plamdagi kabi bitta komponentaga (fazoning o'zi) ega. Diskret fazoda har biri bitta nuqtadan tashkil topgan qism to'plamlar alohida komponentalardir.

*Q*-ratsional sonlar to'plamida har bir nuqta alohida komponentani tashkil etadi (ochiq bo'lmagan komponentalar).

**Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.

2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

7. Topologiya bazasi qanday to`plamlarga aytiladi?
8. Xausdorf, regulyar, tixonov va normal fazolarga misollar keltiring.
9. Chiziqli bog'lanishli to'plam deb qanday to`plamga aytiladi?
10. Chiziqli bog'lanishsiz to'plam deb qanday to`plamga aytiladi?
11. Nuqtaning komponentasi deb nimaga aytiladi?
12. Regulyar, tixonov fazolariga misollar keltiring.
13. Qanday fazo bog`lanishli deyiladi?
14. Qanday fazo bog`lanishsiz deyiladi?

## 7.KOMPAKT TO'PLAMLAR

Reja

1.To`plamning qoplamasi.
2.Kompakt to`plamlar.
3.Kompakt to`plam xossalari.

**Tayanch iboralar:ochiq qobig`, chekli qoplama, kompakt to`plam.**

$(X,\tau)$-topologik fazo, $A\subset X$ qism to'plam va birorta $\{A_\alpha\}$-ochiq to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin.

Birinchi oila uchun $\underset{\alpha}{U}\ A_\alpha\supset A$ munosabat bajarilsa, $\{A_\alpha\}$ oila A to'plamning ***ochiq qobig'i*** deyiladi. Agar qobiq chekli sondagi to'plamlardan iborat bo'lsa, u chekli qobiq deyiladi.

Ta'rif. $A$ to'plamning ixtiyoriy ochiq qobig'idan chekli qobiq ajratish mumkin bo'lsa, A to'plam kompakt to'plam deb ataladi.

*A*=*X* uchun kompakt fazo tushunchasi qo'llaniladi. $\{A_\alpha\}$ oila $X$ uchun qobiq bo'lsa, unda $\underset{\alpha}{U}\ A_\alpha\supset X$ munosabat yoziladi.

1-Teorema. *X*-kompakt fazo, $A\subset X$ yopiq to'plam bo'lsa, A kompakt to'plamdir.

Isbot. $\sum=\{A_\alpha\}$-oila X da A to'plam uchun ochiq qobiq bo'lsin. A yopiq bo'lgani uchun X\A ochiq to'plam. $\{A_\alpha\}$ ga X\A ni qo'shib, X ning ochiq qobig'i $\sum'$ ni hosil qilamiz. $\sum'$ dan *X* fazoning $\sum''$ chekli qobig'ini tanlaymiz. $\sum''$ da X\A qatnashmasa, u holda $\sum''$ $\sum$ ning chekli qismi bo'lib, *A* uchun qobiq bo'ladi. $X\setminus A\in\sum''$ bo'lsa, u holda $\sum''$ dan *X\F* ni chiqarib, *A* ni qobig'idan iborat bo'lgan $\sum$ ning qism sistemasini hosil qilamiz. *A* ning kompaktligi ta'rifdan kelib chiqadi.

2-Teorema. *F X* Xausdorf fazosining kompakt qism to'plami bo'lib, $a\overline{\in}F$ bo'lsin. U holda $F\subset G_1$ va $A\subset G_2$ kesishmaydigan ochiq to'plamlar mavjuddir.

Isbot. Har qanday $x \in F$ nuqta uchun kesishmaydigan $x \in \Omega_x(x)$ va $a \in \Omega_a(x)$ atroflar mavjud.

$\sum = \{\Omega_x\}$ $F$ ning ochiq qobig'i. $F$ kompakt bo'lgani uchun $\sum$ dan chekli sondagi $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, ..., \Omega_{x_k}$ qism qobiqni ajratish mumkin.

$G_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_{x_i}, G_2 = \bigcap_{i=1}^{k} \Omega_a(x_i)$ izlangan to'plamlardir.

3-Teorema. X-Xausdorf fazo, $A \subset X$ kompakt to'plam va $x \in X \setminus A$ bo'lsa, shunday ochiq kesishmaydigan $G_1$ va $G_2$ to'plamlar mavjudki, $A \in G_1$, $x \in G_2$ bo'ladi.

Isbot. $A$ ga tegishli ixtiyoriy $y$ nuqtani olsak, Xausdorf aksiomasiga ko'ra $x \in G_x$, $y \in G_y$ bo'ladi. $\{G_y : y \in A\}$ oila $A$ to'plam uchun ochiq qobiq bo'ladi va $A$ ning kompaktligidan bu oiladan $A$ uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiqqa tegishli to'plamlar $G_{y_1}, G_{y_2}, ..., G_{y_m}$ bo'lsin. Bu ochiq to'plamlar bilan kesishmaydigan $x$ nuqtaning atroflari mos ravishda $G_x(y_1), G_x(y_2), ..., G_x(y_m)$ to'plamlar bo'lsin. Agar $G_1 = \bigcup_{i=1}^{m} G_{y_i}, G_2 = \bigcup_{i=1}^{m} G_x(y_i)$ bo'lsa, ravshanki $A \subset G_1$, $x \subset G_2$ va $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ o'rinli.

4-Teorema. $X$-Xausdorf fazo, $A \in X$ -kompakt to'plam bo'lsa, A yopiq to'plamdir.

Isbot. $A$ ning yopiq ekanligini ko'rsatish uchun $X \setminus A$ ning ochiq ekanligini ko'rsatamiz. Agar $x \in X \setminus A$ bo'lsa, shunday ochiq $G$ to'plam mavjudki, $x \in G \subset X \setminus A$ munosabat bajariladi. Demak $x$ nuqta $X \setminus A$ uchun ichki nuqta va $x$ ning ixtiyoriyligidan $X \setminus A$ ning ochiq to'plam ekanligini kelib chiqadi. U holda $A$ yopiq bo'ladi.

5-Teorema. $X = R^n, A \subset X$ bo'lsa $A$ ning kompakt to'plam bo'lishi uchun $A$ ning yopiq va chegaralangan to'plam bo'lishi zarur va Yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Metrik fazoda to'plam birorta shar ichida yotsa, uni chegaralangan to'plam deyiladi. $A$ kompakt to'plam bo'lsa, $R^n$ ning Xausdorf fazo ekanligidan $A$ ning yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi (24-teorema). Endi $A$ ni chegaralanganligini ko'rsataylik. Buning uchun birorta $x \in A$ nuqtani olib, markazi shu nuqtada bo'lgan $\{B_n(x)\}$ sharlar oilasini qaraymiz ($n = 1, 2...$). Bu oila $A$ uchun ochiq qobiq bo'ladi va $A$ ning kompaktligidan bu oiladan chekli qobiq ajratish mumkin. Agar chekli qobiq $B_{n_1}(x), B_{n_2}(x), ..., B_{n_k}(x)$ sharlardan iborat bo'lsa, $N$ bilan $\max_{1 \le i \le k}\{n_i\}$ ni belgilasak, $B_N(x)$ markazi $x$ nuqtada radiusi $n$ bo'lgan ochiq shar bo'lib, $A \subset B_n(x) \Rightarrow A$ chegaralangan. Yetarliligini isbotlash o'quvchiga tavsiya etiladi. Kompakt to'plamga misollar keltiraylik.

1-misol. Har qanday antidiskret fazo kompakt.

2-misol. Har qanday chekli topologik fazo kompakt.

3-misol. Chekli ochiq to'plamlardan iborat har qanday fazo kompakt, son o'qi $R^1$ nokompaktdir.

4-misol. Cheksiz nuqtalarga ega diskret fazo nokompakt.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. To`plamning ochiq qobig`i deb qanday to`plamga aytiladi?
2. Qanday to`plam kompakt to`plam deyiladi? Misollar keltiring.
3. Qanday fazolar lokal kompakt fazolar deyiladi? Misollar keltiring.
4. Yevklid fazolarida kompaktlik deb nimaga aytiladi?
5. Kompakt to`plam yopiq to`plam bo`lishi mumkinmi? Misollar keltiring.
6. Har qanday chekli toplogik fazo kompakt bo`ladimi? Misollar keltiring.
7. Yevklid vazosida to`plam qanday shartlarni bajarsa, doim kompakt to`plam bo`ladi?

## 8. UZLUKSIZ AKSLANTIRISHLAR.

Reja

1.Akslantirish tushunchasi.

2.Uzluksiz akslantirish.

3.Uzluksiz akslantirishning xossalari.

**Tayanch iboralar: akslantirish,akslantirishning obrazi, uzluksiz akslantirsh, ochiq akslantirish.**

$X, Y$ ixtiyoriy to'plamlar bo'lib, $X$ ning har bir elementiga Y ning bitta elementi mos qo'yilgan bo'lsa $X$ ni $Y$ ga akslantiruvchi moslik yoki akslantirish berilgan deyiladi va $f : X \to Y$ ko'rinishida yoziladi.

Agar $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lsa $x \in X$ uchun $y = f(x)$ element $x$ ning aksi (obrazi) $y \in Y$ uchun $f^{-1}(y)$ $\{x \in X : f(x) = y\}$ $y$ ning asli (proobrazi) deyiladi.

$A \subset X$ qism to'plam uchun uning aksi $f(A) = B \subset Y$ bo'lib $B$ ning asli (proobrazi) $f^{-1}(B)$ qism to'plamdir. Agar $f(X) = Y$ bo'lsa $f$ ni ustlama akslantirish $f(X) \subset Y$ bo'lganda esa ichiga akslantirish deyiladi.

Birorta $f : X \to Y$ ustlama akslantirish uchun $x_1, x_2 \in X$ va $x_1 \neq x_2$ dan $f(x_1) \neq f(x_2)$ kelib chiqsa $f$ ni o'zaro bir qiymatli akslantirish deyiladi.

X, Y topologik fazalar bo'lsin.

Ta'rif: $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lib $x$ $X$ ning biror nuqtasi bo'lsin $(x \in X)$ $f(x) \in Y$ nuqtaning har bir $V$ atrofi uchun $x \in X$ nuqta shunday $U$ atrofga ega bo'lsaki $f(U) \subset V$ munosabat bajarilsa $f$ akslantirishni $x$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta’rif: Agar $f$ akslantirish $A\subset X$ to’plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo’lsa, u holda uni $A$ to’plamda uzluksiz deyiladi.

To’plamda uzluksiz akslantirish ta’rifida to’plamning barcha nuqtalari uchun akslantirishning uzluksizligi ko’zda tutiladi. Agar $f$ akslantirish $X$ ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo’lsa uni uzluksiz akslantirish deyiladi.

1-teorema $f: X\to Y$ akslantirish $X$ da uzluksiz bo’lishi uchun $G\subset Y$ ochiq to’plamning proobrazi $f^{-1}(G)$ $X$ da ochiq bo’lishi zarur va Yetarli

Isbot. Zaruriyligi $f$ uzluksiz akslantirish $G\subset Y$ ochiq to’plam bo’lsin $f^{-1}(G)$ ni ochiq ekanligini ko’rsatishimiz kerak.

Agar $x\in f^{-1}(G)$ bo’lsa $f(x)\in G$ bo’ladi.

$f$ akslantirish $x$ nuqtada uzluksiz bo’lgani uchun $x$ ning shunday $U$ atrofi mavjudki, $U\subset f^{-1}(G)$ bo’ladi.

Bundan esa $x\in U\subset f^{-1}(G)$ kelib chiqadi. Demak, $f^{-1}(G)$ ochiq to’plamdir.

Yetarliligi. Endi ixtiyoriy $G\subset Y$ ochiq to’plam uchun $f^{-1}(G)$ ochiq to’plam, $x\in X$ bo’lsin.

$y=f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofi $V$ ni qarasak $U=f^{-1}(V)$ ochiq to’plam bo’lib $x$ nuqtaning atrofidir. $f(U)=V$ bo’lgani uchun $\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{x}$ nuqtada uzluksiz akslantirish. $x$ ning ixtiyoriyligidan teorema to’la isbot qilindi. Yopiq to’plamlar uchun teorema to’ldiruvchi to’plamlarga o’tish orqali isbot qilinadi.

2-teorema $X,Y,Z$ topologik fazalar bo’lsin. $f: X\to Y,\ g: Y\to Z$ akslantirishlar uzluksiz bo’lsa u holda $h=g\circ f: X\to Z$ akslantirish uzluksiz akslantirish bo’ladi.

Isbot: $W$ $Z$ da ixtiyoriy ochiq to’plam bo’lsin. 26-teoremadan $V=g^{-1}(W)$ va $U=g^{-1}(V)$ lar ochiq. $V=h^{-1}(W)$ bo’lgani uchun 26-teoremani qayta tadbiq etish bilan $h$ ning uzluksizligi isbot bo’ladi.

Uzluksiz akslantirishda yopiq (ochiq) to’plamning aksi yopiq (ochiq) bo’lmasligi ham mumkin.

Masalan $U=e^x\cos y$ , $V=e^x\sin y$ qoida asosida $(x,y)\in X$ nuqtalarning $(u,v)\in Y$ nuqtalarga akslantirishni qaraylik.

Bu akslantirish $X$ dagi $x\le 0, y=0$ nur (yopiq to’plam)ni Y dagi $0<u\le 1, v=0$ yopiq bo’lmagan to’plamga akslanishini ko’ramiz.

Agar akslantirishda barcha nuqtalarning obrazlari ustma-ust tushsa (o’zgarmas akslantirish) ochiq to’plamning obrazi ochiq emasligini ko’ramiz.

3-teorema. $X,Y$ topologik fazolar $f: X\to Y$ uzluksiz akslantirish $A\subset X$ kompakt to’plam bo’lsa $f(A)\subset Y$ ham kompakt to’plamdir.

Isbot: $\{U_\alpha\}$ oila $f(A)$ to’plamning ochiq qobig’i bo’lsin.

$f$ uzluksiz akslantirish bo’lgani uchun $V_\alpha=f^{-1}(U_\alpha)$ to’plam hamma $\alpha$ lar uchun ochiq to'plam bo'ladi. Demak $\{V_\alpha\}$ oila $A$ uchun ochiq qobiq bo'ladi. $A$ kompakt to'plam bo'lganligi uchun bu qobiqdan chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiq elementlari $V_{a_1}, V_{a_2}, ..., V_{a_m}$ bo'lsin. Shunda ularning obrazlari $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_m}$ to'plamlar $f(A)$ to'plam uchun $\{U_\alpha\}$ oiladan ajratilgan chekli qobiqni tashkil etadi. Bundan $f(A)$ ning kompaktligi kelib chiqadi.

4-teorema. $X, Y$ topologik fazolar $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish $A \subset X$ bog'lanishli to'plam bo'lsa $f(A)$ ham bog'lanishli to'plamdir.

Isbot: Agar $f(A)$ bog'lanishsiz to'plam bo'lsa bo'sh bo'lmagan $G_1$ va $G_2$ ochiq to'plamlar mavjud bo'lib,

$f(A) = (f(A) \cap G_1) \bigcup (f(A) \cap G_2), (f(A) \cap G_1) \bigcap (f(A) \cap G_2) = \varnothing$ va

$f(A) \bigcap G_1 \neq \varnothing$, $f(A) \bigcap G_2 \neq \varnothing$ munosabatlar o'rinli

$f$ akslantirish uzluksiz bo'lgani uchun $A_1 = f^{-1}(G_1)$ *ва* $A_2 = f^{-1}(G_2)$ to'plamlar X ning ochiq qism to'plamlaridir.

$f(A) \cap G_1 \neq \varnothing$ va $f(A) \cap G_2 \neq \varnothing$ munosabatlardan $A_1 \cap A \neq \varnothing$ va $A_2 \cap A \neq \varnothing$ kelib chiqadi. Ko'ramizki $(A_1 \cap A) \cap (A_2 \cap A) \neq \varnothing$, $A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A)$. Bundan A ning bog'lanmaganligi aniqlanadi. Bu ziddiyatdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

5-teorema. $I = [a, b]$ yopiq kesma bog'lanishli to'plamdir.

Isbot: Faraz qilaylik $[a, b]$ bog'lanmagan bo'lsin. U holda ochiq va bo'sh bo'lmagan $U_1$ va $U_2$ to'plamlar mavjud bo'lib $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2), I \cap U_1 \neq \varnothing, I \cap U_2 \neq \varnothing$ va $(I \cap U_1) \cap (I \cap U_2) = \varnothing$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Endi $I$ ni topologik fazoga aylantiraylik. Buning uchun $I$ ning qism to'plami $A$ uchun $R^1$ da ochiq $G$ to'plam mavjud bo'lib, $A = I \cap G$ bo'lsa, A ni ochiq to'plam deb qabul qilamiz. Hosil bo'lgan $I$ ning ochiq qism to'plamlari oilasi $I$ da topologiya hosil qiladi va $I$ topologik fazoga aylanadi. Bu topologiyada $I$ va $\varnothing$ ochiq to'plamlardir.

Agar $I$ bog'lanmagan bo'lsa $I$ da ochiq va bo'sh bo'lmagan $U_1 \cap U_2$ to'plamlar mavjud bo'lib $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ va $I = U_1 \cup U_2$ munosabatlar bajariladi. Endi

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in U_1 \\ \hline 1, x \in U_2 \end{cases}$$ qoida bilan berilgan $f$ akslantirishni qaraylik.

Agar $G \subset R^1$ ochiq to'plam bo'lsa $$f^{-1}(G) = \begin{cases} I \; agar \;\; 0,1 \in G \\ \varnothing, agar \;\; 0 \notin G, 1 \notin G \\ U_1, agar \;\; 0 \in G, 1 \notin G \\ U_2, agar \;\; 0 \notin G, 1 \in G \end{cases}$$

tenglik o'rinlidir. $I, \varnothing, U_1, U_2$ to'plamlar ochiq bo'lganligi uchun 26-teoremaga ko’ra $f$ uzluksiz funksiyadir. Koshi teoremasiga ko’ra funksiya 0 va 1 oralig’idagi hamma qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bundan $I$ ning bog’lanishliligi kelib chiqadi. Bu ziddiyatdan teoremaning isboti kelib chiqadi. $X$ topologik fazo $f:[0,1]\to X$ uzluksiz akslantirish bo’lsin. Bu erda $[0,1]$ kesmadagi topologiya 30-teorema isbotidagi kabi evklid topologiyasi yordamida aniqlanadi.

Agar $x=f(0)$, $y=f(1)$ bo’lsa $x$ va $y$ nuqtalar $x$ yo’l yordamida tutashtirilgan deb ataymiz.

Ta’rif: Agar $A\subset X$ qism to’plamning har qanday ikki nuqtasini shu to’plamda yotuvchi yo’l yordamida tutashtirish mumkin bo’lsa $A$ to’plam chiziqli bog’lanishli to’plam deyiladi.

6-teorema. Chiziqli bog’lanishli to’plam bog’lanishli to’plamdir.

Isbot: X-topologik fazo $A\subset X$-chiziqli bog’lanishli to’plam bo’lsin. Ta’rifga ko’ra $A$ ga tegishli ixtiyoriy $x,y$ nuqtalar uchun uzluksiz $f:I\to X$ akslantirish mavjud bo’lib $f(0)=x,\ f(1)=y$ *ва* $f(I)\subset A$ bo’ladi. Agar A bog’lamagan to’plam bo’lsa, ochiq bo’sh bo’lmagan $G_1$ va $G_2$ to’plamlar mavjud bo’lib, $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$, $A\cap G_1\neq\varnothing$, $A\cap G_2\neq\varnothing$ munosabatlar bajariladi.

$A\cap G_1$ to’plamdan $x$ nuqtani $A\cap G_2$ to’plamdan $y$ nuqtani olaylik. $A$ chiziqli bog’lanishli bo’lgani uchun $f:I\to X$ yo’l mavjud bo’lib, $f(0)=x$, $f(1)=y$ va $I=[0,1]$ 2 va 3 teoremalarga ko’ra $I=[0,1]$ bog’lanishli. Lekin $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$ tenglikdan $f(I)=(f(I)\cap G_1)\cup(f(I)\cap G_2)$ tenglikni yozish mumkin.

$$x\in f(I)\cap G_1,\ y\in f(I)\cap G_2 \Rightarrow f(I)\cap G_1\neq\varnothing, f(I)\cap G_2\neq\varnothing$$

Bundan $f(I)$ ning bog’lanmaganlikni ko’ramiz. +arama-qarshilik kelib chiqdi. Demak $A$ bog’lanishli to’plam.

7-teorema $X$-chiziqli bog’lanishli fazo bog’lanishlidir.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik. U holda bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq bo’lgan $U$ va $V$ to’plamlar mavjud bo’lib $U\cup V=X$ va $U\cap V=\varnothing$ $a\in U, b\in V$ nuqtalarni qaraylik.

$L:I\to X$ $a$ va $b$ nuqtalarni tutashtiruvchi yo’l $f[l]$ bog’lanishli (nega?). Ikkinchi tomondan $L_u=L(I)\cap U$ va $L_v=L[1]\cap V$ induksiyalangan topologiyada ham ochiq ham yopiq bo’lib $L_u\cup L_v=I$ va $L_u\cap L_v=\varnothing$. Hosil qilingan qarama-qarshilikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

$X$ birorta topologik fazo bo’lsin. $X_1, X_2\subset X$ ikkita chiziqli bog’lanishli fazolar bo’lib, umumiy nuqtaga ega bo’lsa, ravshanki $X_1\cup X_2$ qism fazo ham chiziqli bog’langan bo’ladi. Bundan $X$ ning o’zaro kesishmaydigan chiziqli bog’lanishli qism fazolar birlashmasi ko’rinishda ifodalanishi kelib chiqadi. Bunday qism fazolarni $X$ fazoning chiziqli bog’lanishli komponentlari deyiladi.

$X$ fazoning har bir chziqli bog'langanlik komponentasi nuqtalarning shunday to'plamidirki, ularning har birini ushbu komponentaning ixtiyoriy nuqtasi bilan yo'llar orqali tutashtirish mumkin. Komponentlar ta'rifidan qo'yidagi teorema kelib chiqadi.

8-teorema. $X$ bog'lanishli topologik fazo bo'lib, har bir nuqtasi chiziqli bog'langanlik munosabatidagi atrofga ega bo'lsa, u holda $X$ chiziqli bog'langandir.

Isbot. $a \in X$ bo'lib $U$ $a$ nuqtaning chiziqli bog'langanlik komponentasi bo'lsin. Teorema shartidan $U$ va $X \setminus U$ larning ochiq to'plamlar bo'lishi kelib chiqadi. Bundan ularning yopiqligi ravshan. $U \neq \varnothing$ bo'lib, $X$ ning bog'lanishliligidan $U = X$ kelib chiqadi, ya'ni $X$ -chiziqli bog'langan fazo.

9-teorema. $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish $f(X) = Y$ bo'lib $X$ -bog'lanishli bo'lsa, $Y$ ham bog'lanshli to'plamdir.

Isbot: $Y$ bog'lanmagan deb faraz qilaylik. U holda bir vaqtda ochiq va yopiq bo'sh bo'lmagan $U_1$ va $U_2$ to'plamlar mavjud bo'lib $U_1 \cup U_2 = Y$ va $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ . $f$ uzluksiz akslantirish bo'lgani uchun $V_1 = f^{-1}(U_1)$ *ва* $V_2 = f^{-1}(U_2)$ bo'sh bulmagan to'plamlar bir vaqtda ham ochiq, ham yopiqdir.

$V_1 \cup V_2 = X$ , $V_1 = X \setminus V_2 \Rightarrow X$ - bog'lanishsiz. Kelib chiqqan qarama-qarshilikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

1-misol. Diskret topologiyalik $X$ fazoning ixtiyoriy $Y$ fazoga akslantirishning uzluksizligi isbotlansin.

Yechish: $\forall x \in X$ nuqtani qaraylik $V$ $f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofi bo'lsin.

$U = f^{-1}(V) \subset X$ to'plam $x$ nuqtaning atrofi bo'lib $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$ . $x$ nuqtani atrofi uchun shu nuqtaning o'zini olish ham mumkin. U holda $f(U) = f(x) \subset V$

2-misol. Har qanday $X$ fazoning trivial topologiyalik $Y$ to'plamga ixtiyoriy akslantirishning uzluksizligini isbotlang.

Yechish: $\forall x \in X$ nuqtani qaraylik $f(x)$ nuqta uchun Y ni atrof deb olish mumkin. $f^{-1}(Y) = X$ ochiq to'plam bo'lib uni $x$ nuqtaning atrofi deb qarash mumkin. $f(X) \subset Y$ munosabat o'z-o'zidan ravshan.

3-misol. Tekislikning $O(0,0)$ va $A(0,1)$ nuqtalaridan farqli bo'lgan har bir nuqtasini o'z-o'ziga O ni A ga va A ni O ga o'tkazuvchi $f : E^2 \to E^2$ akslantirishning uzluksiz bo'lmasligini ko'rsating.

Yechish: $f$ akslantirish 0 nuqtani A ga $f^{-1}$ akslantirish A nuqtani 0 nuqtaga o'tkazadi. O nuqta atrofidagi nuqtalar A nuqtaning atrofidagi nuqtalarga o'tmaydi. 0 ning atrofidagi nuqtalarga A ning atrofidagi nuqtalar o'tmaydi. 0 ning atrofi $U$ , $A$ ning atrofi V bo'lsa, $f(U) \subset V$ o'rinli emas, shuningdek $f^{-1}(V) \subset U$ munosabat o'rinni emas. $\Rightarrow$ $f$ uzluksiz akslantirish emas.

4-misol. (Bolsano-Koshi teoremasi)

$f$ sonli funksiya bog'lanishli $X$ to'plamda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar

$a$ va $b$ $X$ ning nuqtalari va $\omega \in [f(a), f(b)]$ bo'lsa u holda $X$ da kamida bitta shunday $x$ nuqta mavjudki, $f(x) = \omega$

Isbot: $f(X)$ $R^1$ da bog'lanishli to'plam $Y$ $[f(a), f(b)]$ ni o'z ichiga oladi.

$x \in X \xrightarrow{f} \omega \in [f(a), f(b)]$

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Qanday akslantirishlar uzluksiz akslantirishlar deyiladi? Misollar keltiring.
2. Uzluksizlik haqidagi teoremalarni aytib bering.
3. O`zaro bir qiymatli akslantirishlar deb qanday akslantirishlarg aytiladi? Misollar keltiring.
4. Ichiga akslantirishlar deb qanday akslantirishlarga aytiladi? Misollar keltiring.
5. Uzluksiz akslantirishda kompakt to`plamning obrazi qaday to`plam bo`ladi?
6. Chizqli bog`lanishli to`plam deb qanday to`plamga aytiladi?
7. Chiziqli bog`lanishli to`plam bog`lanishli to`plam bo`ladimi? Misollar keltiring.

## 9. TOPOLOGIK AKSLANTIRISHLAR(Gomeomorfizmlar)

Reja

1.Uzluksiz akslantirish.
2.Teskari akslantirish.
3.Topologik akslantirish.

**Tayanch iboralar: uzluksiz akslantirish, teskari akslantirish, gomeomorfizm.**

Uzluksiz akslantirishlar orasida eng muhimi topologik akslantirishlardir. Topologik akslantirishni gomeomorfizm deb ham ataladi.

Ta'rif: $X, Y$ topologik fazolar $f: X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $f$ akslantirishga teskari akslantirish $f^{-1}$ mavjud va $f, f^{-1}$ akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, $f$ topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi.

Gomeomorfizmga eng sodda misol qilib $f(X) = X$ qoida bilan aniqlangan $f: X \to X$ ayniy akslantirishni olish mumkin. Ta'rifdan agar $f$ topologik akslantirish bo'lsa unga teskari akslantirish $f^{-1}$ ham topologik akslantirish ekanligi kelib chiqadi. Endi $f$ uchun teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun zaruriy va Yetarli shartlarga e'tibor beraylik.

Teskari akslantirish Y ning har bir nuqtasiga $X$ ning bitta nuqtasini mos qo'yadi.

Demak ixtiyoriy $y \in Y$ nuqta uchun birorta $x \in X$ nuqta mavjud bo'lib $f(x) = y$ tenglik bajariladi.

Bundan tashqari $f^{-1}$ teskari akslantirish ustlama akslantirish bo'lib $y \in Y$ nuqtaga bitta $x \in X$ nuqtani mos qo'yganligidan $x_1 \neq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lishi ya'ni uning o'zaro bir qiymati akslantirish ekanligi aniqlanadi.

Shunday qilib, $f$ ga teskari akslantirish $f^{-1}$ mavjud bo'lishi uchun $f$ ustlama va o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarur va Yetarli.

Agar $X$ va $Y$ topologik fazolar uchun $f: X \to Y$ topologik akslantirish mavjud bo'lsa $X$ va $Y$ topologik fazolar o'zaro gomeomorf yoki topologik ekvivalent fazolar deb ataladi.

Topologik fazolarning topologik akslantirishda saqlanib qoladigan (biridan ikkinchisiga o'tadigan) xossalari topologik xossalar deb ataladi. Topologiya figuralar va topologik fazolarning topologik xossalarini o'rganish bilan shug'ullanadi.

1-teorema. $f: X \to Y$ $g: Y \to Z$ gomeomorfizmlar bo'lsa $h = g \circ f: X \to Z$ ham gomeomorfizmdir.

Isbot: $f$ va $g$ akslantirishlar biektiv va uzluksiz bo'lgani uchun $h$ akslantirish ham biektiv va uzluksizdir. $f$ va $g$ topologik akslantirishlar bo'lganidan ularga teskari akslantirishlar $f^{-1}$va $g^{-1}$ ham uzluksizdir. Shuning uchun $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ akslantirishning biektiv va uzluksizligidan $h$ ning gomeomorfizm ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish $X$ kompakt fazo $Y$-Xausdorf fazosi va $f$ ga teskari akslantirish $f^{-1}$ mavjud bo'lsa, $f$ gomeomorfizmdir.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $f^{-1}$ ning uzluksizligini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun ixtiyoriy ochiq $G \subset X$ to'plamning $f^{-1}$ akslantirishga nisbatan proobrazi $Y$ da ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

Agar $G$ ochiq bo'lsa $X \setminus G$ yopiq to'plamdir. $X \setminus G$ ning $f^{-1}$ ga nisbatan proobrazi $f(X \setminus G)$ to'plamdan iborat.

$X \setminus G$ yopiq va $X$ kompakt bo'lganligidan 28-teoremaga ko'ra $f(X \setminus G)$ ham kompakt $f(X \setminus G) \subset Y$ Xausford fazosi bo'lganligi uchun 24-teoremaga ko'ra $f(X \setminus G)$ yopiq to'plamdir. $f(G) = Y \setminus f(X \setminus G)$ tenglikdan $f(G)$ ning ochiqligi kelib chiqadi.

Endi bir nechta misollar keltiraylik.

1-misol. $X = (a,b)$, $Y = (c,d)$ bo'lib $X$ $Y$ fazolarda topologiya $R^1$ dagi topologiya yordamida aniqlanadi.

Shunda $f: X \to Y$ akslantirishni $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(X-a) + c$ formula yordamida Aniqlasak $f$ gomemomorfizm bo'ladi, chunki $f$ chiziqli funksiya uzluksiz va unga teskari funksiya ham uzluksizdir.

2-misol. $X=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ Y=[-1;1]$ bo'lsin.

Ma'lumki $f(x)=\sin x$ uzluksiz unga teskari funksiya xqarcsiny $[-1,1]$ da aniqlangan va uzluksizdir. shuning uchun $f:X\to Y$ gomeomorfizmdir.

3-misol $(a,b)$ interval va son o'qi $R^1$ gomeomorfizmdir. $y=tg\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}-\frac{\pi}{2}\right)$ funksiya orqali $X=(a,b)$ va $Y=R^1$ orasidagi gomeomorfizmni o'rnatishimiz mumkin.

4-misol. Sfera va kubning sirti gomeomorfizmdir. Gomemorfizmni o'rnatish uchun sferaga ichki chizilgan kubni olib umumiy markazga nisbatan markaziy proeksiyalash orqali moslik o'rnatish kifoya.

5-misol. Bitta nuqtasini o'yib tashlangan sfera tekislikka gomeomorf.

Tekislikni sferaga o'yib tashlangan nuqtaga diametral qarama-qarshi nuqtada urinadigan qilib o'tkaziladi. O'yilgan nuqtani proeksiya markazi uchun olib sferani tekislikka proeksiyalanadi.

6-misol. Tekislikdagi $D^2=\left\{(x,y)/x^2+y^2<R^2\right\}$ ochiq doira tekislikka gomemorf.

Bu erda $f(x,y)=\left\{\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ formula bilan $f:D^2\to R^2$

akslantirishni aniqlasak $f$ gomemorfizm bo'ladi. Bu akslantirishning uzluksizligi

$$v(x,y)=\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$h(x,y)=\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}}$$ funksiyalarning uzluksizligidan

kelib chiqadi. Teskari akslantirishni $f^{-1}(x,y)=\left\{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ formula bilan aniqlaymiz .

Bu akslantirishning uzluksizligi $\mu(x,y)=\left\{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$, $\varphi(x,y)=\left\{\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi $f^{-1}(x,y)$ akslantirish haqiqatdan ham $f$ ga teskari akslantirish ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun $f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=(x,y)$ tenglikni isbotlaymiz.

$$f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=\left\{\frac{\mu(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}},\ \frac{\varphi(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{\dfrac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\dfrac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}},\frac{\dfrac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\dfrac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\right\}=(x,y)$$

Demak $f$ akslantirish gomeomorfizmdir. $X$ va $Y$ topologik fazalar $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish bo'lib
bu fazolar o'zaro gomeomorf munosabatda bo'lmasligi mumkin.

7-misol. $X=(0.1)$ interval bo'lib $\varphi: X \to E^2$ 4-shakldagi figura bo'lsin. $Y=\varphi(x)$ $Y$ dagi topologiya $E^2$ topologiyasining induksiyalash orqali kiritiladi. $f: X \to Y$ akslantirish $\forall x \in (0.1)$ uchun $f(x)=\varphi(x)$ qoida asosida o'rnatiladi.
$f$ uzluksiz va teskarilanuvchi akslantirish lekin $f^{-1}$ akslantirish $a=f\left(\frac{1}{2}\right)$ nuqtada uzluksiz emas. Shunday qilib $X$ va $Y$ orasidagi moslik gomeomorfizm emas.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Qanday akslantirishlar toplogik akslantirishlar deyiladi?
2. Teskari akslantirish mavjud bo`lishi uchun zarur va yetarli shartlarni ayting.
3. Qanday fazolar topologic ekvivalent fazolar deyiladi?
4. Gomeomorf akslantirishlarning kompozitsiyasi qanday akslantirish bo`ladi? Misollar keltiring.
5. Ayniy akslantirish deb qanday akslantirishga aytiladi?
6. Gomeomorf akslantirishlarga misollar keltiring.
7. Qanday fazolar o`zaro gomeomorf fazolar deb ataladi?

## 10.SKALYAR ARGUMENTLI VEKTOR FUNKTSIYA

**Reja:**

1. Ta'rifi va belgilanishi
2. Vektor funktsiya $\vec{r}(t)$ ning koordinatalari
3. CHeksiz kichik o'zgaruvchi vektor
4. O'zgaruvchi vektorning limiti
5. Limitlar haqidagi teoremalar
6. $\vec{r}(t)$ vektor funktsiyaning uzluksizligi
7. Vektor funktsiya orttirmasi

8. Misollar

**Tayanch iboralar: vektor-funksiya, godograf, limit,uzluksizlik,cheksiz kichik funksiya.**

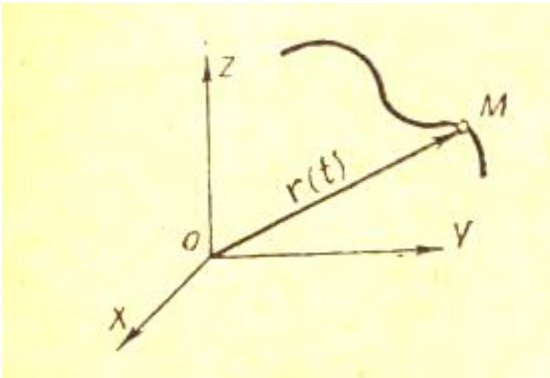
**Mavzuning bayoni:**

Fazoda 0 markazli dekart koordinatalar sistemasini belgilaymiz.

**1-ta'rif:** Agar skalyar o'zgaruvchi $t$ ning $[a,b]$ kesmadagi har bir qiymatiga biror qoida asosida aniq bir $\vec{r}$ vektor mos kelsa, u holda bu vektor $t$ parametrning vektor funktsiyasi deyiladi va qisqacha

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

shaklda ifodalanadi.




1-chizma

**2-ta'rif:** Uzunligi nolga intiluvchi vektor cheksiz kichik vektor deyiladi va $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ belgilanadi. $|\vec{\alpha}(t)| \to 0$

Agar $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $OX,\ OY,\ OZ$ koordinat o'qlarining yo'naltiruvchi ort vektorlari bo'lsa, u holda

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (2)$$

yoyilma o'rinlidir, bunda $x(t), y(t), z(t)$ skalyar funktsiyalar bo'lib $\vec{r}(t)$ vektorning o'qlardagi proektsiyalaridir. $x(t), y(t), z(t)$ - larni $\vec{r}(t)$ vektor funktsiyaning koordinatalari deb ataymiz. $\vec{r}(t)$ vektor $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lsin.

**3-ta'rif:** Agar biror o'zgarmas $\vec{a}$ vektor mavjud bo'lib $t$ parametr $t_0 \in [a,b]$ ga intilganda $\vec{r}(t) - \vec{a}$ ayirma cheksiz kichik $\vec{\alpha}(t)$ o'zgaruvchi vektor bo'lsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{r}(t)$ o'zgaruvchi vektorning limiti deyiladi va u

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \qquad (3)$$

belgilanadi.

Ko'ramizki,

$$\vec{r}(t) - \vec{a} = \vec{\alpha}(t) \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| = |\vec{\alpha}(t)|$$

$$|\vec{\alpha}(t)| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0 \Rightarrow \vec{a} = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t)$$

**4-ta'rif:** Vektorlarning $\{\vec{r}_n\}$ ketma ketligi uchun $\lim_{n \to \infty} |\vec{r}_n - \vec{a}| = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda o'zgarmas $\vec{a}$ vektor $\{\vec{r}_n\}$ ning limiti deyiladi.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor funktsiya $t \in [a,b]$ segmentda aniqlangan bo'lib $x(t),\ y(t),\ z(t)$ uning koordinatalari bo'lsin. $\vec{a}$ o'zgarmas vektor $\vec{r}(t)$ ning limiti bo'lib $\alpha, \beta, \gamma$ - koordinatalarga ega bo'lsin. Ya'ni $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ .

**1-teorema:** O'zgarmas $\vec{a}$ vektor $\vec{r}(t)$ vektor funktsiyaning limiti bo'lishi uchun $t_0 \in [a,b]$ da $\vec{a}$ vektor koordinatalari $\vec{r}(t)$ vektor koordinatalarining limiti bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Isbot:** Zaruriyligi $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$ bo'lsin

$$|x(t) - \alpha| \le |\vec{r}(t) - \vec{a}|;\ |y(t) - \beta| \le |\vec{r}(t) - \vec{a}|;\ |z(t) - \gamma| \le |\vec{r}(t) - \vec{a}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} |x(t) - \alpha| = 0,\ \ \lim_{t \to t_0} |y(t) - \beta| = 0,\ \lim_{t \to t_0} |z(t) - \gamma| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = \alpha,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \beta,\ \ \lim_{t \to t_0} z(t) = \gamma .$$

Etarliligi: $|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 + (z(t) - \gamma)^2} \le |x(t) - \alpha| +$

$$|y(t) - \beta| + |z(t) - \gamma| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} .$$

teorema isbot bo'ldi.

**2-teorema:** Bir necha vektor yig'indisining limiti shu vektorlar limitlarining yig'indisiga teng.

**Isboti**: $n = 2$ holni qaraylik

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}_1,\ \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{a}_2$ bo'lsin

$\vec{r}_1(t) - \vec{a}_1 = \vec{\alpha}_1(t),\ \vec{r}_2(t) - \vec{a}_2 = \vec{\alpha}_2(t)$ bo'lib

$$(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{\alpha}_1(t) + \vec{\alpha}_2(t)$$

$$|(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)| = |\vec{\alpha}_1(t) + \vec{\alpha}_2(t)| \to 0$$

$|\vec{\alpha}_1(t) + \vec{\alpha}_2(t)| \le 2|\vec{\alpha}_2(t)| \to 0$ bu yerda $|\vec{\alpha}_1(t)| \le |\vec{\alpha}_2(t)|$ olindi.

SHunday qilib, $\lim\limits_{t \to t_0} |(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)| = 0 \Rightarrow$

$$\lim(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \lim\vec{a}_1 + \lim\vec{a}_2 = \lim\vec{r}_1(t) + \lim\vec{r}_2(t)$$

Qo'shiluvchilar soni n ta bo'lgan holda ham teorema o'rinli. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

**3-teorema:** Agar $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}_1, \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{a}_2,\ \lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t) = \lambda_0$ bo'lsa u holda

1) $\lim\limits_{t \to t_0} (\lambda(t)\vec{r}_1(t)) = \lambda_0 \vec{a}_1,$

2) $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)) = (\vec{a}_1\,\vec{a}_2),$

3) $\lim\limits_{t \to t_0} [(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))] = [\vec{a}_1\,\vec{a}_2],$

Agar $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_3(t) = \vec{a}_3$ bo'lsa, u holda

4) $\lim\limits_{t \to t_0} ([\vec{r}_1\,\vec{r}_2\,] \cdot \vec{r}_3) = (\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)$

$\vec{r}(t)$ vektor funktsiyaning uzluksizligiga skalyar analizdagi kabi ta'rif berish mumkin.

**5-ta'rif:** Agar $t \to t_0$ da $\vec{r}(t)$ ning limiti $\vec{r}(t_0)$ ga teng bo'lsa, ya'ni $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ bo'lsa, u holda $\vec{r}(t)$ vektor funktsiya $t = t_0$ qiymatda uzluksiz deyiladi.

$\vec{r}(t)$ vektor $(a,b)$ intervalda uzluksiz bo'lishi uchun shu intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lishi kerak. Vektor funktsiya orttirmasi deb $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ (4) ayirmaga aytiladi.

Funktsiya uzluksiz bo'lsa argument $t$ – ning cheksiz kichik $\Delta t$ orttirmasiga funktsiya $\vec{r}(t)$ ning $\Delta\vec{r}$ orttirmasi mos kelishi va $\Delta t \to 0$ dan $\Delta\vec{r}(t) \to 0$ kelib chiqishi kerak, ya'ni $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r} = 0$. Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

**4-teorema:** $\vec{r}(t)$ vektor funktsiya $t_0$ nuktada uzluksiz bo'lishi uchun uning koordinatalari $x(t),\ y(t),\ z(t)$ ning $t_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

**5-teorema:** Agar $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)$ funktsiyalar $[a,b]$ oralikda uzluksiz bo'lsa, u holda

1) $\vec{r}(t) = \lambda_1(t)\vec{r}_1(t) + \lambda_2(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \lambda_3(t)\cdot\vec{r}_3(t);$

2) $f(t) = (\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t));$

3) $\vec{r}(t) = [\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)];$

4) $g(t) = (\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t))$

ko'paytmalar uzluksiz bo'ladi, bunda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lar ham $[a,b]$da uzluksiz funktsiyalardir.

**Misollar:**

1. $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{b}.\vec{a},\vec{b}$ (o'zgarmas vektorlar $-\infty < t < \infty$) to'g'ri chiziq tenglamasi.
2. $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j},$ $(0 \le t \le 2\pi)$ birlik aylana tenglamasi.
3. $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + b\vec{k}$ $(0 \le t \le \infty)$ vint chiziq tenglamasi

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


## Nazorat savollari

1. Skalyar argumentli vektor funksiyani tarifini ayting.
2. Vektor funktsiyaning limit tushunchasini ayting va misollar keltiring.
3. Qanday vektor funksiya uzluksiz vektor funksiya deyiladi? Misollar keltiring.
4. Bir nechta vektor funkisiya godogrflarini chizib ko`rsating.

   Qanday vektor funksiyalar cheksiz kichik o'zgaruvchi vektor funksiya deyiladi?
5. Vektor funksiya uchun limit teoremalarini keltring.

6. Vektor funksiyaning koordinatalari nimani ifoda etadi?
7. Qanday qiymatga vektor funksiyaning ortirmasi deyiladi?

## 11.VEKTOR-FUNKTSIYANING HOSILASI VA INTEGRALI.

**Reja :**

1. Hosila ta'rifi
2. Hosilaning geometrik ma'nosi
3. Vektorni differentsiallash qoidalari
4. Moduli va yo'nalishi doimiy vektorlar
5. O'zgaruvchi vektorni Teylor qatoriga yoyish

**Tayanch iboralar:funksiya ortirmasi, differensiallash, teylor formulasi.**

**Mavzuni bayoni:**

$[a,b]$segmentda $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektor funktsiya berilgan bo'lsin.

**Ta'rif:** Agar vektor funktsiyaning $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ orttirmasini $\Delta t=t-t_0$ argument orttirmasiga bo'lishdan chiqqan nisbatning $\Delta t\to 0$ dagi limiti $(\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t})$ mavjud bo'lib, bitta limit vektorga intilsa, u holda bu limit $\vec{r}(t)$ vektor funktsiyaning $t$ argument bo'yicha hosilasi deyiladi va $\vec{r}\,'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\to$ belgilanadi. $\vec{r}\,'(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Hosilasi mavjud bo'lgan vektor funktsiyani differentsiallanuvchi deyiladi. Vektor funktsiya hosilasiga $t=t_0$ nuqtada ta'rif berish ham mumkin. Hosilasi mavjud bo'lgan vektor-funktsiya uzluksizdir.

**Teorema:** Agar $\vec{r}(t)$ vektor-funktsiyaning $t_0\in[a,b]$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lsa, u holda shu nuqtada vektor koordinatalarining hosilalari mavjud bo'ladi va $\vec{r}\,'(t_0)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$ yoyilma o'rinli bo'ladi.

**Teorema:** $\vec{u}(t),\vec{\upsilon}(t),\vec{w}(t)$ funktsiyalar $[a,b]$ oraliqda differentsiallanuvchi funktsiyalar bo'lsa $(\vec{u}(t)+\vec{\upsilon}(t)+\vec{w}(t))'=\vec{u}\,'(t)+\vec{\upsilon}\,'(t)+\vec{w}'(t)$.

Differentsiallashning quyidagi qoidalarni isbotsiz keltiramiz.

1. $(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))'=(\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t))+(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t))$;
2. $[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)]'=[\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t)]+[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t)]$;
3. $(\lambda(t)\vec{r}(t))'=\lambda'(t)\vec{r}(t)+\lambda(t)\vec{r}\,'(t)$.

Agar $\vec{r}(t)$ vektor funktsiya $[a,b]$ oraliqda $k$-marta $(k\geq 1)$ uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda shu oralikda vektor funktsiyaning $k$-tartibligacha uzluksiz hosilaga ega deyiladi.

$\vec{r}(t)\in C^{(k)}[a,b]$ - belgilaymiz.

Agar $\vec{r}(t)$ vektor funktsiyasining $[a,b]$ oraliqda hosilasi mavjud bo'lsa, y $R$ reperdagi koordinatalariga nisbatan ham hosilaga ega bo'ladi va aksincha

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+\vec{z}(t)\vec{k}$ vektor funktsiya koordinatalarining $t_0\in[a,b]$ nuqtada Teylor qatoriga yoyilmasi berilgan bo'lsa,
ya'ni

$$\Delta x=x(t)-x(t_0)=x'(t_0)\,\Delta t+\frac{(\Delta t)^2}{2}x''(t_0)+...+x^{(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon_1(t_0\Delta t)(\Delta t)^n$$

$$\Delta y=y(t)-y(t_0)=y'(t_0)\,\Delta t+y''(t_0)\frac{(\Delta t)^2}{2}+...+y^{(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon_2(\Delta t)^n$$

$$\Delta z=z(t)-z(t_0)=z'(t_0)\Delta t+z''(t_0)\frac{(\Delta t)^2}{2}+...+z^{(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon_3(\Delta t)^n$$

u holda

$$\Delta r=\Delta r\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}=\vec{r}\,'(t_0)\Delta t+r''(t_0)\frac{(\Delta t)^2}{2}+...+\vec{r}^{\,(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon(\Delta t)^n$$

Bu formula $\vec{r}(t)$ vektor funktsiyaning $t_0\in[a,b]$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasini ifoda etadi. Bu yerda $\Delta t\to 0\Rightarrow\vec{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to 0$ ga e'tibor beriladi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Vektor funksiya uchun hosila ta`rifini aytib bering.
2. Vektor funsiya hosila haqidagi teoremani keltiring.
3. Differensiallash qoidalariga ayting va misollar keltiring.
4. Vektor funksiya uchun Teylor qatorini yozing va misollarda ko`rsating.
5. Vektor funksiya uchun argument ortirmasi qanday formula bilan beriladi?

## 12-13.CHIZIQ TUSHUNCHASI

**Reja:**

1. Topologik almashtirishlar
2. Ta'riflar
3. CHiziq tenglamasi
4. Misollar
5. Regulyar chiziq

**Tayanch iboralar:topologik akslantirish, elementar chiziq, sodda chiziq, regulyar chiziq.**

**Mavzu bayoni:**

Tekislikda $F$ figurani olaylik. Agar $F$ figuraning har bir nuqtasi biror qoida asosida siljitilsa, ya'ni $F'$ figura kelib chiqsa $F', F$ figurani almashtirish bilan hosil bo'ladi.

Agar $f$ almashtirish $F$ ning cheksiz yaqin nuqtalarini $F'$ ning cheksiz yaqin nuqtalariga, o'tkazsa, u holda bu almashtirishni uzluksiz deb ataladi.

**1-Ta'rif:** Agar $f$ almashtirish $x \in F$ nuqtani $x' \in F'$ nuqtaga o'tkazsa va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik son uchun $\delta > 0$ cheksiz kichik son mavjud bo'lsaki, $\rho(x,y) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $y \in F$ nuqta $\rho_1(x',y') < \varepsilon$ tengsizlikka qanoatlantiruvchi $y' \in F'$ nuqtaga o'tsa, u holda $f$ ni uzluksiz almashtirish deyiladi.

**2-Ta'rif:** $f: F \to F'$ almashtirishda

1) $x \neq y$ nuqta $x' \neq y'$ nuqtaga o'tsa,

2) $f$ va $f^{-1}: F' \to F$ (teskari almashtirish) uzluksiz bo'lsa,

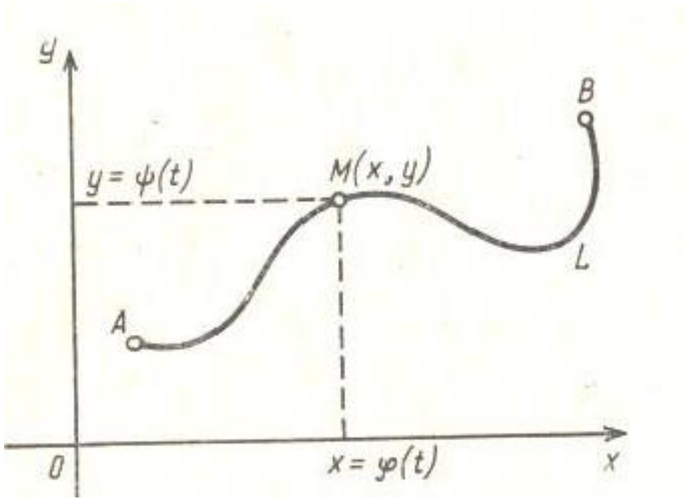
u holda $f$ ni topologik almashtirish deyiladi.

$[\alpha,\beta]$ sigmentda uzluksiz $\varphi(t), \psi(t)$ funktsiyalarni qaraylik. $F$ figura uchun $L$ – to'plamni olaylik.

$\forall M(x,y) \in L$ nuqta koordinatalari

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t) \quad \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

ifodalar bo'yicha aniqlangan bo'lsin.




2-chizma

**3-Ta'rif:** $t$ ning $[\alpha,\beta]$ segmentdagi turli qiymatlariga $L$ ning turli nuqtalari mos kelsa, u holda $L$ ni elementar yoy deyiladi.

**4-Ta'rif:** Ochiq kesmani topologik almashtirish natijasida hosil bo'lgan figuraga elementar chiziq deyiladi. Elementar yoy, elementar chiziq tushunchalari ba'zan ustma ust tushadi.

Elementar chiziqda o'z-o'zini kesish nuqtalari, ustma ust tushgan qicmlari mavjud bo'lmaydi. Intervalning $\alpha, \beta$ - chegaraviy qiymatlariga mos $A$, $B$ nuqtalarni $L$ elementar chiziqning chegaraviy nuqtalari deyiladi.

Elementar chiziq parametrik tenglamasini $x = t, y = f(t) \ \ \alpha \le t \le \beta$ ko'rinishda olish ham mumkin. $L$ - chiziqning parametrik tenglamasi turlicha bo'lishi mumkin. Masalan (1) ko'rinishda. To'g'ri chiziq, parabola, yarim aylana elementar chiziqlardir.

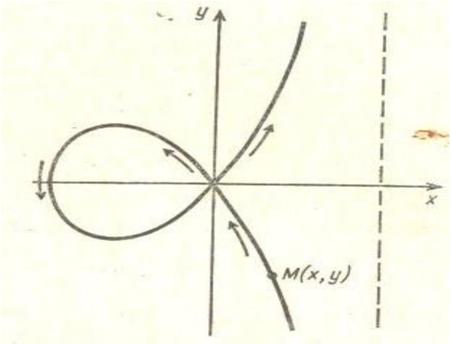
**5-Ta'rif:** Agar $L$ figuraning har bir nuqtasi, fazoviy atrofga ega bo'lib, uning shu atrofdagi qismi elementar chiziq bo'lsa, u holda $L$ figurani sodda chiziq deb ataladi.

$x = a\cos t,\;\; y = a\sin t,\; a > 0,\; 0 \le t \le 2\pi$ aylana sodda chiziqqa misol bo'la oladi.

**6-Ta'rif:** Sodda chiziqni lokal topologik almashtirish natijasida hosil bo'lgan chiziqqa umumiy chiziq deyiladi.

Umumiy chiziqda o'z o'zini kesish nuqtalari mavjud bo'lishi mumkin.

$x = a\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \quad y = at\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \quad a > 0$ strofoida.




3-chizma

$t = -1$ *ва* $t = 1$ da (0, 0) nuqtada kesishadi. CHiziqni ikkita sirtlarining kesishish chizigi sifatida olish ham mumkin.

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \ne 0$ shart bajarilsa (2) sistemani yechsak $y = \psi(t)$ $z = \varphi(t)$ funktsiyalar hosil qilinadi.

Masalan viviani chizig'i.

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\;\; x^2 + y^2 - ax = 0$ sfera bilan $a$ diametrli doiraviy tsilindrning kesishish chizig'i:

$x = t \;\; y = \pm\sqrt{at - t^2}, \quad z = \pm\sqrt{a^2 - at}, \quad 0 \le t \le a$

Fazoviy chiziq parametrik tenglamasini

$$x = x(t),\; y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (3)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Bu funktsiyalar uzluksiz bo'lib, $t_1 \ne t_2$ uchun $(x(t_2) - x(t_1))^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2 + (z(t_2) - z(t_1))^2 \ne 0$

Regulyar chiziq

$\gamma$ chiziq regulyar (k marta differentsiallanuvchi) deyiladi, agar uni (3) ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lib, bu funktsiyalar regulyar (k-marta differentsiallanuvchi) bo'lsa va $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ shart bajarilsa. $k = 1$ bo'lganda $\gamma$ ni silliq chiziq deyiladi.

Ba'zan $\gamma$ ni $y = f(x),\ z = \varphi(x)$ ko'rinishda ifodalash ham mumkin.

Haqiqatan ham, $x'(t) \neq 0$ bo'lsa, $x = x(t)$ teskarilanuvchi bo'ladi, ya'ni

$x'(t) \neq 0 \Rightarrow t = \psi(x)$, u holda $y = y(\psi(x)) = f(x) \qquad z = z(\psi(x)) = \varphi(x)$ .

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Chiziq va uning turlarini aytib bering.
2. Elementar chiziq deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
3. Sooda chiziqlarni aytib bering.
4. Oshkormas ko`rinishda berilgan chiziqlarga misollar keltiring.
5. Parametrik ko`rinishda berilgan chiziqqa misollar keltiring va chiziq grafigini chizing.
6. Qanday akslantirishlar uzluksiz akslantirishlar deyiladi? Misollar keltiring.
7. Umumiy chiqqa misollar aytib bering.

## 14.CHIZIQNING ODDIY VA MAXSUS NUQTALARI

**Reja:**

1. Regulyar yoy
2. Oddiy va maxsus nuqta ta'rifi
3. Oshkormas funktsiyaning mavjudlik teoremasi
4. CHiziq nuqtasining oddiy bo'lishi uchun yetarli shart
5. Karrali maxsus nuqtalar
6. Maxsus nuqta atrofida chiziqning tuzilishi
7. Maxsus nuqta tiplari
8. Misollar

**Tayanch iboralar: regulyar yoy, oddiy nuqta, maxsus nuqta, ajralgan maxsus nuqta, tugun maxsus nuqta, I-tur qaytish maxsus nuqtasi, II-tur qaytish maxsus nuqtasi.**

**Mavzuning bayoni:**

CHiziq oshkormas ko'rinishda, ya'ni

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

oshkormas funktsiya orqali berilgan bo'lsin.

Ba'zan (1) tenglamani y ga nisbatan yechib

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \qquad (2)$$

ni keltirib chiqarishimiz mumkin.

**Ta’rif:** Agar (2) funktsiya

1) bir qiymati 2) uzluksiz va 3) tegishli

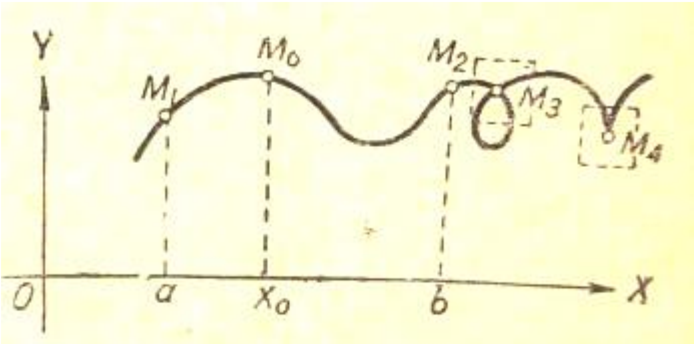
tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo’lsa, u holda (2) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to’plamiga (1) chiziqning regulyar yoyi deyiladi.

Agar (1) chiziqdagi nuqtaning yetarlicha kichik atrofi regulyar yoy bo’lsa, bunday nuqtani chiziqning oddiy nuqtasi deb ataladi.

CHiziqning oddiy bo’lmagan barcha nuqtalarini uning maxsus nuqtalari deyiladi.

$M_0(x_0, y_0)$ oddiy nuqta atrofida (1) va (2) tenglamalar teng kuchlidir.

4-chizmadagi chiziqda $[a,b]$ segmentda aniqlangan $M_1M_2$ yoyning barcha nuqtalari oddiy nuqtalar bo’lib $M_3$ maxsus nuqtadir.




4-chizma

$f'(x)$ - uzluksiz bo’lganidan chiziqning har bir oddiy nuqtasida tayin urinma o’tkazish mumkin va nuqta regulyar yoy bo’ylib o’zgarsa, urinma ham yo’nalishini o’zgartiradi deyishga asos bo’ladi. $M_3$ maxsus nuqtadan ikkita regulyar yoy o’tadi.

SHu nuqtada urinma ikkita. Bu esa $f(x)$ funktsiyaning bir qiymatlilik talabiga zid bo’ladi. (1) chiziq nuqtasining oddiy bo’lishi uchun yetarli shartni matematik analizdagi oshkormas funktsiyaning mavjudlik teoremasi orqali ifodalash mumkin.

**Teorema:** Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqta (1) chiziqda yotib $F(x,y)$ funktsiya $M_0$ nuqta atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega va $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ bo’lsa, u holda faqat bitta $y = f(x)$ funktsiya mavjudki, u $M_0$ nuqtaning biror atrofida (1) tenglamani qanoatlantiradi va $x = x_0$ da $y = y_0$ qiymat qabul qiladi.

$y = f(x)$ funktsiya shu atrofda uzluksiz hosilaga ega bo’lib,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}..$$

Agar $M_0$ nuqtada $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ lekin, $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ bo’lsa, ham teorema o’rinli bo’ladi.

Teorema shartini qisman o’zgartirish mumkin.

**Masalan:** $M_0$ nuqtada $F'_x, F'_y$ hosilalar birdaniga nolga aylanmasa, ya'ni $F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} \neq 0$ bo'lsa, $F(x, y) = 0$ ni yechib yuqoridagi uchta shartlarni qanoatlantiruvchi $y = f(x)$ funktsiyani aniqlash mumkin.

**Ta'rif:** Agar (1) chiziqdagi biror $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada $F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} \neq 0$ bo'lsa, $M_0$ nuqta oddiy bo'ladi.

$M_0(x_0, y_0)$ nuqta (1) chiziqning maxsus nuqtasi bo'lsa $F(x_0, y_0) = 0,$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

tengliklar o'rinli bo'lishi kerak.

Oddiy nuqtada urinma tenglamasi

$$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (4)$$

bo'lib, normal tenglamasi

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} \qquad (5).$$

Endi chiziq maxsus nuqtalarini va maxsus nuqtalar atrofida chiziqning tuzilishini tekshiraylik. (1) chiziq uchinchi tartibligacha xususiy hosilalarga ega bo'lsin. $F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} \ldots$

Maxsus nuqtada (3) tengliklar o'rinli bo'lib, ikkinchi tartibli xususiy hosilalar orasida aqalli bittasi nolga teng bo'lmasin.

**Masalan:** $F''_{yy} \neq 0$. CHiziqning (3) shart bajariladigan $M_0(x_0, y_0)$ maxsus nuqtasini ikki karrali (qo'shaloq) nuqta deyiladi.

Agar (3) dan tashqari ikkinchi tartibli xususiy hosilalar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada nolga aylanib uchinchi tartibli xususiy hosilalar orasida nolmasi mavjud bo'lsa, u holda $M_0$ maxsus nuqtani uch karrali deyiladi.

Faraz qilaylik, $M_0$ maxsus nuqtadan chiziqning regulyar yoyi o'tsin. CHiziqning $M_0(x_0, y_0)$ maxsus nuqtasi orqali o'tuvchi regulyar yoyi (2) ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lsin. (1) ga (2) ni qo'ysak $F(x, f(x)) = 0$ ayniyat kelib chikadi. Bu ayniyatni $x$ bo'yicha ikki marta differentsiallaymiz.

$$F'_x + F'_y f'(x) = 0$$

$$F''_{xx} + 2F''_{xy} f'(x) + F''_{yy} \quad f^2(x) + F'_y f''(x) = 0$$

Bu tenglamalardan birinchisi $M_0$ nuqtada ayniyatdan iborat, chunki

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, \ F'_y(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Ikinchisidan esa

$$F''_{xx}(x_0, y_0) + 2F''_{xy}(x_0, y_0) f'(x_0) + F''_{yy}(x_0, y_0) f^2(x_0) = 0$$

kelib chiqadi.

$f'(x_0)=k,\ F''_{xx}(x_0,y_0)=a_{11},\ \ F''_{xy}(x_0,y_0)=a_{12}\ F''_{yy}(x_0,y_0)=a_{22}$

Belgilash kiritsak

$$a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0 \qquad (6)$$

kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. $k$ ning har bir qiymati (1) chiziq regulyar yoy urinmasining mos yo'nalishini aniqlab beradi. Demak, $M_0$ maxsus nuqtadan ikkitadan ortiq bo'lmagan regulyar yoy o'tadi. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ (6) tenglama ikkita turlicha haqiqiy ildizga ega. $M_0$ nuqtadan chiziqning ikkita rerulyar yoyi o'tadi.

2) $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ (6) tenglamaning ildizlari qo'shma kompleks. $M_0$nuqtadan chiziqning regulyar yoyi o'tmaydi.

3) $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ tenglama karrali ildizga ega. $M_0$ maxsus nuqtadan o'tuvchi regulyar yoylar umumiy urinmaga ega bo'ladi.

Birinchi holda $M_0$ maxsus nuqtni tugun nuqta, ikkinchi holda ajralgan nuqta deyiladi. Uchinchi holda esa $M_0$ maxsus nuqta yoki regulyar yoylarning urinish nuqtasi, yoki birinchi tip qaytish nuqtasi yoki ikkinchi tip qaytish nuqtasi bo'lishi mumkin.

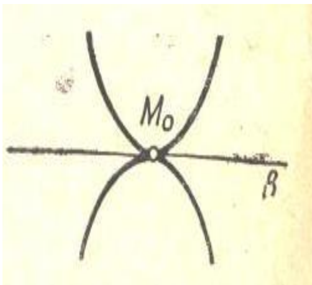
Yuqoridagi 3- ta holga misol keltiraylik :

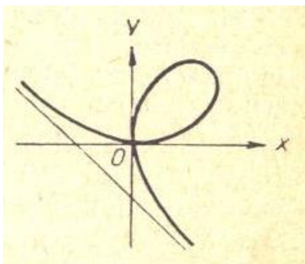
a) $y^2-x^4=0 \quad (0,0)$ maxsus nuqta.

b) $x^3-y^3-3axy=0. \quad (0,0)$ maxsus nuqta.

Dekart yaprog'i uchun $k_1=0,\ k_2=\infty \quad a^2{}_{12}-a_{11}a_{12}=9a^2>0 \quad (0,0)$tugun nuqta

v) $F(x,y)=x^4-4x^2-y^2=0 \quad (0,\,0)$ maxsus nuqta



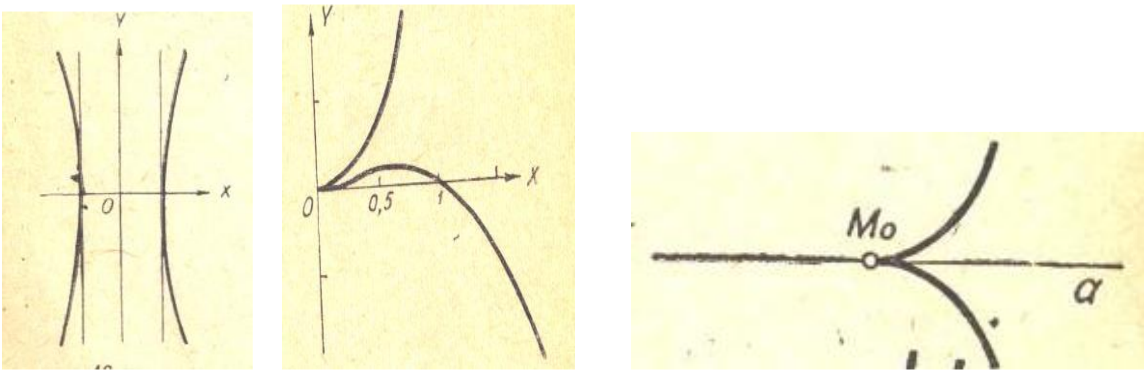

a) b)

5-chizma

$a^2{}_{12}-a_{11}\cdot a_{22}=0-16<0$ ajralgan nuqta

g) $0(0,0)$ – 2 tip qaytish nuqtasi.

d) $0(0,0)$ – 1 tip qaytish nuqtasi.




a) b) d)

5-chizma

Agar $a_{11}=0,\ a_{12}=0,\ a_{22}=0$ bo'lsa,

$$F'''_{xxx}+3F'''_{xxy}f'(x_0)+3F'''_{xyy}f^2(x_0)+F'''_{yyy}f^3(x_0)=0$$

yoki

$$a_{222}k^3+3a_{122}k^2+3a_{112}k+a_{111}=0 \qquad (7)$$

tenglamaning ildizlari yoki uchta turlicha haqiqiy yoki bitta haqiqiy va bir juft qo'shma kompleks sonlardan iborat bo'lishi mumkin.

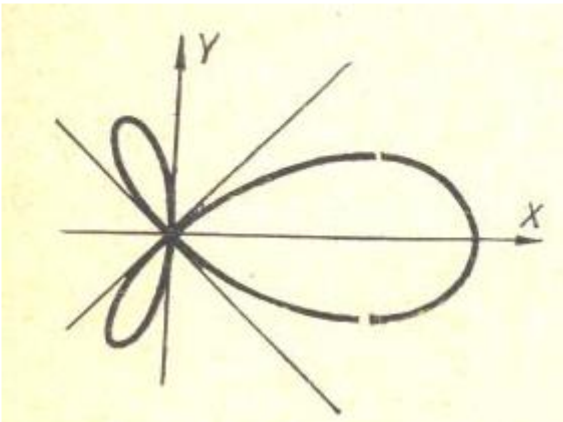
Mos ravishda $M_0(x_0,y_0)$ - maxsus nuqta uch karrali bo'lishi mumkin yoki $M_0$ nuktadan chiziqning faqat bitta regulyar yoyi o'tishi mumkin.

**Masalan:** $(x^2+y^2)^2-ax(x^2-y^2)=0$

Uch yaproqli gul deyiladi. $a_{111}=2a\neq 0,\ k_1=1, k_2=-1,\ k_3=\infty$

Urinma tenglamalari: $x=y,\ \ y=-x,\ x=0$

Endi parametrik ko'rinishda berilgan chiziqning $P$ maxsus nuqtasi atrofida tuzilishini tekshiraylik.




6-chizma

$\gamma: x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$ bo'lib (8)

$$x'^2+y'^2+z'^2\neq 0 \qquad (9)$$

bo'lsa $P(t_0)$ - oddiy nuqta bo'ladi. Agar chiziqni (8) ko'rinishda ifodalab bo'lmasa $P(t_0)$ maxsus nuqta bo'ladi.

**Teorema:** Yassi chiziq $x=x(t),\ y=y(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin.

Agar $P(t_0)$ nuqtadagi noldan farqli $x^{(n)}(t_0), y^{(m)}(t_0)$ hosila toq tartibli bo'lsa $P(t_0)$ oddiy nuqta, aks holda maxsus nuqta bo'ladi.

$n$ -juft, $m$ -toq bo'lib, $n \le m$ bo'lsa $P$ – birinchi tip qaytish nuqta, $n$ - juft, $m$ – juft bo'lsa, $P$ – ikkinchi tip qaytish nuqta bo'ladi.

**Masalan:** $x = t - \sin t \;\; y = 1 - \cos t$ tsikloida uchun $(0,0)$ birinchi tip qaytish nuqtasi bo'ladi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Chizqning oddiy nuqta ta`rifini aytib bering.
2. Chiziqning maxsus nuqta t`rifini ayting. Chiziq grafikda oddiy va maxsus nuqtalarni ajratib bering.
3. Chizqning qo`shaloq nuqta at`rifini aytib bering.
4. Maxsus nuqta tiplarni aytib bering. Grafikda maxsus nuqta tiplarini ajratib bering.
5. Chiziqning karrali nuqtalariga misollar keltiring.
6. Parametrik ko`rinishda berilgan chiziqning maxsus nuqta tiplarini aniqlash uchun uni qanday shartlarga tekshirish kerak?
7. Oshkormas ko`rinishda berilgan chiziqning maxsus nuqta tiplarini aniqlash uchun uni qanday shartlarga tekshirish kerak?

## 15.TEKIS CHIZIQ ASIMPTOTALARI.ALGEBRAIK CHIZIQ ASIMTOTALARI.

**Reja:**

1. Asimptota ta'rifi
2. $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqning asimptota bo'lish sharti
3. CHiziqning koordinat o'qlariga parallel asimptotalari
4. Asimptota urinmaning limit vaziyati
5. Algebraik chiziq asimptotalari
6. Misollar

**Tayanch iboralar:vertical asimptota, gorizantal asimptota, og`ma asimptota, algebraic chiziq.**

**Mavzuning bayoni:**

Tekislikda egri chiziqning regulyar yoyi

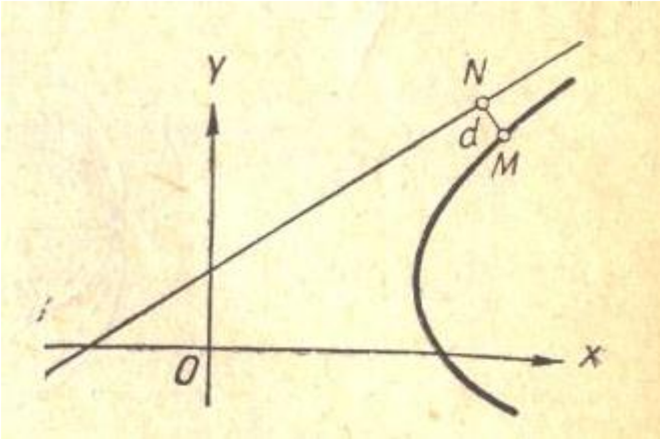
$$x = x(t), y = y(t), \;\; t_0 \le t \le T \qquad (1)$$

parametrik tenglamasi orqali berilgan bo’lsin. $t \to T$ da $M(t)$ chiziq bo’ylab cheksizlikka intiladi.

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x(t)-x_0)^2 + (y(t)-y_0)^2} \xrightarrow[t\to T]{} \infty \qquad (2).$$

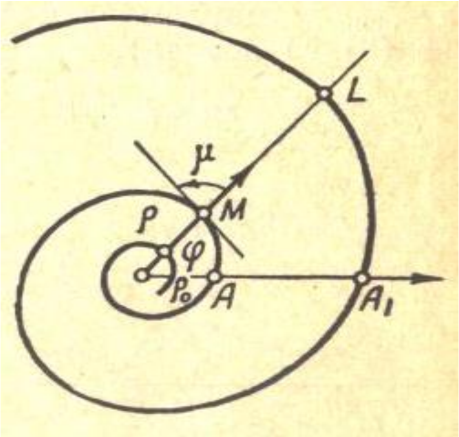
**1-Ta’rif:** (1) egri chiziq ustidagi nuqta chiziq bo’ylab cheksiz uzoqlashganda, bu nuqta bilan birorta to’g’ri chiziq orasidagi masofa nolga intilsa, u holda bu to’g’ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

$\rho(M, N) \xrightarrow[t\to T]{} 0$, bunda $MN \perp l$.




8-chizma

Har qanday chiziq uchun (2) shartning bajarilishiga qaramay, asimptota mavjud bo’lmasligi mumkin. Jumladan $\rho = e^{\alpha\varphi}$ logarifmik spiralning asimptotasi yo’q. Logarifmik spiral deb hamma radius vektorlarni bir xil burchak ostida kesib o’tadigan chiziqqa aytiladi.

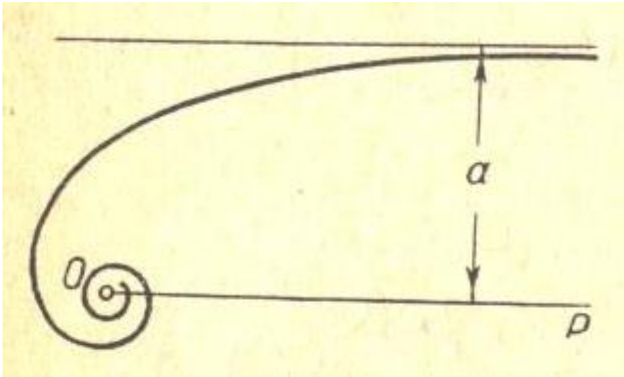



9-chizma

Boshlang’ich nuqta atrofida istalgancha aylanib, qancha uzoqlashmasin, harakatdagi nuqta yaqinlasha oladigan to’g’ri chiziq mavjud emas.

$$\rho = \frac{a}{\varphi} \qquad (3)$$

tenglama orqali berilgan giperbolik spiral uchun asimptota mavjud. Ordinata o’qiga parallel bo’lmagan asimptotani qidiraylik.




10-chizma

Asimptota tenglamasi

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'lsin. (1) chiziqda biror $M(x(t),\ y(t))$ nuqtani olib, shu nuqtadan (4) to'g'ri chiziqgacha bo'lgan $\rho(M,N)$ masofani hisoblaymiz. Analitik geometriyadan ma'lumki $\rho(M,N)$ masofa

$$\rho(M,N) = \frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5)$$

(4) to'g'ri chiziq asimptota bo'lishi uchun $t \to T$ da $\rho(M,N) \to 0$ bajarilishi kerak. (5) da maxraj o'zgarmas son bo'lgani uchun

$$\lim_{t \to T} |Ax(t) + By(t) + C| = 0 \qquad (6)$$

kasr suratining limiti nolga tengligi kelib chiqadi. Biz (4) ni asimptota bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartni aniqladik.

Endi chiziq asimptotasini $y - kx - b = 0$ ko'rinishda olib, $t \to T$ da $k$ va $b$ larni hisoblash formulalarini aniqlaylik. (6) kabi quyidagi tengliklar o'rinlidir.

$$\lim_{t \to T}[y(t) - kx(t) - b] = 0 \qquad (7)$$

$$\lim_{t \to T}\left\{x(t)\left[\frac{y(t)}{x(t)} - k - \frac{b}{x(t)}\right]\right\} = 0 \quad \lim_{t \to T} x(t) = \infty \text{ bo'lgani uchun}$$

$$\lim_{t \to T}\left[\frac{y(t)}{x(t)} - k - \frac{b}{x(t)}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{t \to T}\frac{y(t)}{x(t)} - k - \lim_{t \to T}\frac{b}{x(t)} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to T}\frac{b}{x(t)} = 0$$

$$k = \lim_{t \to T}\frac{y(t)}{x(t)} \qquad (8)$$

$k$ – ni (7) ga qo'ysak

$$b = \lim_{t \to T}[y(t) - kx(t)] \qquad (9)$$

kelib chiqadi.

Agar (8) va (9) ning chekli limiti mavjud bo'lmasa asimptotani $y - kx - b = 0$ ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi. Agar (1) chiziqning asimptotasi ordinata o'qiga parallel bo'lsa, u holda asimptotaning tenglamasi

$$x - a = 0 \qquad (10)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $t\to T$ da $x(t)-a\to 0 \Rightarrow x(t)\xrightarrow[t\to T]{} a$.

Agar $\lim x(t)$ mavjud bo'lmasa, asimptota aniqlanmaydi. Abstsissa o'qiga prallel asimptota uchun

$$y-m=0 \qquad (11)$$

ga ega bo'lamiz.

Agar chiziq $y=f(x)$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, $x=t, y=f(t)$ parametr kiritish mumkin.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(t)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx) \qquad (12)$$

Asimptotaning boshqa ta'rifi ham mavjud.

**2-Ta'rif:** CHiziqdagi nuqta shu chiziq bo'ylab cheksizlikka intilganda urinmaning limit vaziyati mavjud bo'lsa, limitda hosil qilingan to'g'ri chiziq asimptotadir.

Lekin asimptota urinmaning limit vaziyati bo'lmasligi ham mumkin. Haqiqatan ham, $t\to T$ da $x(t)\to\infty,\ y(t)\to\infty$ bo'lgan holda $\frac{y(t)}{x(t)}$ nisbatga $t\to T$ da Lopital qoidasini qo'llaymiz.

$k=\lim\limits_{t\to T}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\frac{y'(t)}{x'(t)},\ b=\lim\limits_{t\to T}[y(t)-x(t)\frac{y'(t)}{x'(t)}]$ $y=kx+b$ ga $k$ va $b$ larni qo'yish mumkin.

Agar chiziq $y=f(x)$ shaklda berilgan bo'lsa,

$$k=\lim_{t\to T}f'(x),\ b=\lim_{t\to T}[y-x\,f'(x)] \qquad (13)$$

$k$ va $b$ chekli sonlar bo'lsa, asimptota mavjud bo'lib uning tenglamasi $y=kx+b$ ko'rinishida bo'ladi.

SHunday chiziq mavjud bo'lishi mumkinki, uning tenglamasiga Lopital qoidasini qo'llab bo'lmaydi.

Masalan: $y=\frac{\cos x^2}{x^2}$ chiziq $x\to\infty$ da $OX$ o'qdan iborat asimptotaga ega, lekin bu chiziq urinmasining burchak koeffitsienti $y'(x)=-2\sin x^2-\frac{\cos x^2}{x^2}$, $x\to\infty$ da xech qanday limitga intilmaydi. $(\frac{\cos x^2}{x^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0)$ lekin $\sin x^2$ ni limiti yo'q $(-1)$ va $(+1)$ orasida tebranib turadi.

Endi algebraik ifoda orqali berilgan chiziq asimptotasini aniqlash masalasini qaraylik. $F(x,y)=0$ funktsiya ko'pxad bo'lib, kasrlardan va radikallardan ozod qilingan, ya'ni $Ax^py^q$ ko'rinishidagi birhadlarning yig'indisidan iborat bo'lsin.

CHiziqning asimptotasi sifatida, urinish nuqtasi cheksizlikka intilganda urinmaning limit vaziyatini qabul qilishimiz mumkin. Bu to'g'ri chiziq ustma ust tushgan cheksiz uzoq ikki nuqtadan o'tadi.

Ikki holni qaraymiz.

1) asimptota $OY$ o'qqa parallel bo'lmasin.

$$\begin{cases} y = kx + b \\ F(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_ny^n + b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2}y + ... + b_{n-1}y^{n-1} + ... = 0 \end{cases} \quad (14)$$

(14) da $y$ o'rniga $kx+b$ ni qo'ysak

$$A_0(k)x^n + A_1(k,b)x^{n-1} + ... + A_n = 0 \quad (15)$$

tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglama cheksiz katta ikkita ildizga ega bo'lishi kerak, chunki urinish nuqtasi cheksiz uzoqdadir.

Algebradan ma'lumki bunday holda

$$A_0(k) = 0 \quad ва \quad A_1(k,b) = 0 \quad (16)$$

tenglamalar o'rinli bo'lib, $k$ va $b$ lar aniqlanadi.

Misollar. 1. Dekart yaprog'i $x^3 + y^3 - 3axy$ berilgan bo'lsin. Bu tenglama $x = \frac{3at}{t^3+1}$ $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$ ga teng kuchlidir.

a) $t = -1$ da $x = \infty, y = \infty$ $k = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to -1} t = -1$

$b = \lim\limits_{t=-1} \left[ \frac{3at^2}{t^3+1} + \frac{3at}{t^3+1} \right] = -a$ asimptota $y = -x - a$ to'g'ri chiziqdan iborat.

b) $\begin{cases} y = kx + b \\ x^3 + y^3 - 3axy = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + k^3 = 0,\ k^2b - ka = 0 \Rightarrow k = -1, b = -a$

2) Algebraik chiziqning asimptotasi ordinata o'qiga parallel bo'lsa $F(x,y) = 0$ ва $x = a$ tenglamalarni birgalikda yechib $y$ ga nisbatan

$$B_0y^n + B_1(a)y^{n-1} + B_2(a)y^{n-2} + ... + B_n = 0 \quad (7)$$

tenglamani hosil qilinadi.

$B_0$ koeffitsient $a$ ga bog'liq emas. SHu bilan birga $B_0 = 0,\ B_1(a) = 0$ tengliklar bajariladi. $B_1(a) = 0$ dan $a$ ni aniqlash mumkin.

**Masalan:** $x(x^2 + y^2) = ay^2$

$y^3 -$ oldidagi koeffitsient nolga teng bo'lib,

$$(x-a)y^2 + x^3 = 0 \Rightarrow x = a \neq 0$$

Asimptota tenglamasi $x - a = 0$ ko'rinishga ega.

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

1. Tekis chiziq asimptotasi ta`rifini aytib bering.
2. Tekis chiziq asimptotasi uchun asosiy teoremani keltirng.
3. Qanday asimptota og`ma asimptota deyiladi? Misollar keltirng.
4. Qanday asimptota gorizontal asimptota deyiladi? Misollar keltirng.
5. Qanday asimptota vertikal asimptota deyiladi? Misollar keltirng.
6. Algebraik chiziq asimptotalariga misollar ayting va ularni grafikda berilishini chizing.

## 16.CHIZIQ URINMASI VA NORMAL TEKSILIGI

**Reja :**

1. Ta'riflar
2. Asosiy teorema
3. Urinmaning turlicha tenglamalari
4. Normal tekislik tenglamasi
5. Misollar

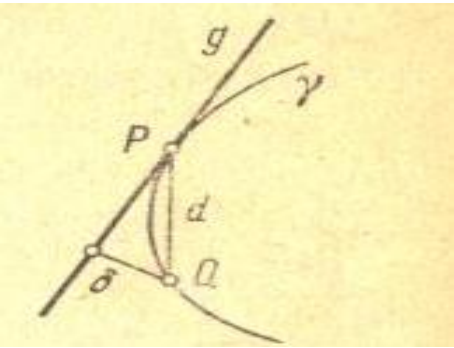
**Tayanch iboralar: chiziq rinmasi, normal tekisligi, parametric tenglamasi, oshkor tenglama, oshkormas tenglama.**

**1-Ta'rif:** Berilgan chiziqning $P$ nuqtasidagi urinmasi deb $P$ va unga cheksiz yaqin chiziq ustidagi $Q$ nuqta orqali utuvchi $(PQ)$ kesuvchining $Q \to P$ dagi limit vaziyatiga aytiladi.

Tekislikda chiziq

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

parametrik tenglamasi orqali berilgan bo'lsin. $P$ nuqtadagi urinmani g-orqali belgilaylik $Q \in \gamma$ nuqtadan $g$ ga $QR$ perpedikulyar o'tkazamiz. $P$ nuqtadan $Q$ gacha masofani $d$ orqali $Q$ nuqtadan $g$ gacha masofani $\delta$ orqali belgilaymiz.




7-chizma

**2-Ta'rif:** $\lim\limits_{Q \to P} \dfrac{\delta}{d} = 0$ tenglik bajarilsa $g$ to'g'ri chiziqni $\gamma$ ning $P$ nuqtasidagi urinmasi deyiladi. $PQR$ uchburchakdan $\frac{\delta}{d}=\sin\varphi,\quad \varphi=\angle(PQ,PR)$. Ko'ramizki $\frac{\delta}{d}\to 0 \Leftrightarrow \varphi\to 0$.

**Teorema:** (1) ko'rinishda berilgan silliq chiziq o'zining har bir nuqtasida birdan bir urinmaga ega; $\vec{r}'(t)$ uning yo'naltiruvchi vektori.

**Isbot:** $g-\gamma-$ ning $P$ nuqtasidagi urinmasi bo'lsin. $P(t), Q(t+\Delta t)$ desak $d=|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|$

$\delta=|[\vec{P}Q\vec{\tau}]|$ - bo'lib, $\vec{\tau}-g$ ning yo'naltiruvchi ort vektori $\frac{\delta}{d}=\frac{|[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)]\vec{\tau}|}{|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|}\to\frac{|[\vec{r}'(t)\vec{\tau}]|}{|\vec{r}'(t)|}=0\Rightarrow \vec{r}'(t)=\lambda\vec{\tau},\ \vec{r}'(t)$ va $\vec{\tau}$ - kollinear.

Mavjudligi $\frac{\delta}{d}\to\frac{|[\vec{r}'(t)\vec{\tau}]|}{|\vec{r}'(t)|}=0\Rightarrow \lim\limits_{Q\to P}\frac{\delta}{d}=0$ ya'ni g urinma to'g'ri chiziq.

Fazoda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi analitik geometriyadan ma'lum:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}.$$

Bunda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - boshlang'ich nuqta, $\vec{p}\{m,n,k\}$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori. Agar chiziq (1) ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda $P(t_0)\in\gamma$ nuqtadagi urinmasi

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}'(t_0) \qquad (2)$$

tenglamaga ega.

Bu tenglamani koordinat ko'rinishda yozsak

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)} \qquad (3)$$

kelib chiqadi.

Tekislikda esa urinma tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)} \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar chiziq

$$\gamma: y=f(x),\ z=\varphi(x) \qquad (5)$$

Ko'rinishda bo'lsa, urinma tenglamasi

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\ z=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0) \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar chiziq oshkormas ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni

$$\varphi(x,y,z)=0,\quad \psi(x,y,z)=0 \qquad (7)$$

U holda urinma tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}_{M_o}} \qquad (8)$$

**3-Ta'rif:** $P(t_0)$ nuqta orqali o'tuvchi va urinmaga perpendikulyar tekislikka normal tekislik deyiladi.

Normal tekislik

$$(x-x_0)F'_x+(y-y_0)F'_y+(z-z_0)F'_z=0 \qquad (9)$$

ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'ladi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

7. Chiziq urinmasi ta`rifini aytib bering.
8. Urinma uchun asosiy teoremani keltiring.
9. Oshkormas ko`rinishda berilgan funksiya uchun chiziq urinmasi tushunchasini ayting va misollar keltiring.
10. Oshkor ko`rinishda berilgan funksiya uchun chiziq urinmasi tushunchasini ayting va misollar keltiring.
11. Parametrik ko`rinishda berilgan funksiya uchun chiziq urinmasi tushunchasini ayting va misollar keltiring.
12. Chizqning berilsh usuliga qarab chziqning normallarini chizib ko`rsating.

## 17.CHIZIQLAR OILASINING O'RAMASI

### Reja:

1. Bir parametrli va ikki parametrli chiziqlar oilasi
2. O'rama ta'rifi
3. O'ramaning parametrik tenglamasi
4. Diskriminant chiziq
5. Misollar

**Mavzuning bayoni:**

$y^2=2px$, $p$ – parametrga bog'liq uchi $0(0,0)$ nuqtada bo'lib, simmetriya o'qi abstsissalar o'qidan iborat parabolalar oilasini ifoda etadi.

$y=kx,$ $k-$ parametrga bog'liq $0(0,0)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar oilasini aniqlaydi.

$y=kx+b,$ ikki parametrli to'g'ri chiziqlar oilasi bo'lsa, $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$

uch parametrli aylanalar oilasining tenglamasidir.

Umumlashtirsak, bir parametrli chiziqlar oilasini $F(x,y,c)=0$ ko'rinishda, ikki parametrli chiziqlar oilasini $F(x,y,c_1,c_2)=0$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

$n$ – ta parametrga bog'liq chiziqlar oilasi esa

$$F(x,y,c_1,c_2...,c_n)=0 \qquad (1)$$

oshkormas tenglama orqali ifodalanadi.

$c_1,c_2,...,c_n -$ parametrlarni aniqlash uchun esa $n$ – ta nuqta berilishi kerak.

Bizga bir parametrli chiziqlar oilasi

$$F(x,y,c)=0 \qquad (2)$$

oshkormas tenglamasi orqali berilgan bo'lsin.

Oilaning biror chizig'ini hosil qilish uchun s parametrga $c_1<c<c_2$ oraliqdan ma'lum bir qiymat berish kerak.

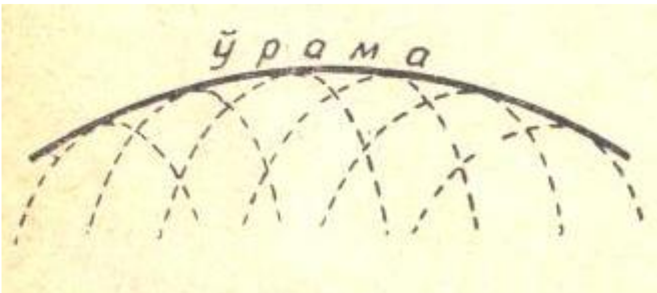
Bir parametrli oila chiziqlari uchun ba'zan shunday chiziq topiladiki, uning har bir nuqtasidan (2) oilaning kamida bitta chizigi urinib o'tadi.

**Ta'rif:** Har bir nuqtasida (2) oilaning kamida bitta chizig'iga urinuvchi va o'zi shu urinish nuqtalardan iborat bo'lgan tekislikdagi chiziqqa bir parametrli chiziqlar oilasining o'ramasi deb ataladi.

Agar (2) oila o'ramasi mavjud bo'lsa, uning tenglamasini

$$x=x(c),\ \ y=y(c) \qquad (3)$$

bo'lsin deb olamiz.




12-chizma

(2) ga (3) ni qo'ysak ayniyat kelib chikadi.

$$F(x(c),y(c),c)=0 \qquad (4)$$

Bu ayniyatni s bo'yicha differentsiallaymiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dc}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dc}+\frac{\partial F}{\partial c}=0 \qquad (5)$$

Ta'rifga ko'ra oila chizig'i va o'rama bir-biriga urinadi. Oshkormas tenglamasi orqali berilgan chiziqning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasidagi urinmasining tenglamasi

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)=0 \qquad (6)$$

ko'rinishga ega.

(3) orqali berilgan chiziqning shu nuqtasidagi urinmasining

$$\frac{x-x_0}{x_c'}=\frac{y-y_0}{y_c'}=\lambda \qquad (7)$$

tenglamasidan

$$x-x_0=\lambda x_c',\ y-y_0=\lambda y_c' \qquad (8)$$

kelib chiqadi. (8) ni (6) ga qo'yamiz.

$$\lambda(F_x'(x_0,y_0)x_c'+F_y'(x_0,y_0)y_c')=0 \qquad (9)$$

(5) va (9) umumiy $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada teng kuchli tenglamalar bo'lishi uchun shu nuqtada

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial c}=0 \qquad (10)$$

tenglik bajarilishi kerak.

SHunday qilib, agar (2) oilaning o'ramasi mavjud bo'lsa, uning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasi

$$F(x,y,c)=0,\quad F_c'(x,y,c)=0 \quad (11)$$

tenglamalarni yechishdan topiladi.

Ba'zan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada $F_c'(x_0,y_0)=0,\quad F_x'(x_0,y_0)=0$ bo'lib urinmaning burchak koeffitsienti $K=\frac{dy}{dx}$ ni aniqlab bo'lmaydi.

Bunday nuqtani (2) oilaning maxsus nuqtasi deyiladi. Agar (3) chiziq maxsus nuqtalardan tashkil topgan bo'lsa, uni diskriminant chiziq deymiz. Diskriminant chiziq o'rama bo'lishi uchun uning nuqtalari oddiy nuqtalar bo'lishi kerak. O'ramani (11) tenglamalarni yechish orqali topiladi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Bir parametrli chiziqlar oilasining o`ramasi ta`rifini aytib bering.
2. Ikki parametrli va ikki parametrli chiziqlar oilasining o`ramasi tushunchasini keltiring . O`ramani misollar bilan ishlab ko`rsating.
3. Diskriminant chiziq ta`rifini ayting.
4. O`rama va diskiriminant chiziq farqini ko`rsating.
5. Chiziqning o`ramasi chiziq grafigi bilan qanday holatda joylashadi?
6. Parametrik ko`rinishda berilgan chiziqning o`rama tenglamasini keltiring.

## 18.YOPISHMA TO'G'RI CHIZIQ VA YOPISHMA AYLANA.

**Reja:**

1. Ikki va uch parametrli chiziqlar oilasining yopishma chizig'i
2. Yopishma chiziq ta'rifi
3. Yopishma to'g'ri chiziq
4. Yopishma aylana
5. Misollar

Mavzuning bayoni:

$$\gamma : x = x(t), \ \ y = y(t) \qquad (1)$$

chiziqni olaylik. $M_0(t_0) \in \gamma$ chiziq nuqtasi atrofidagi yoyining xossalarini tekshirish maqsadida shu nuqtadan o'tgan va $\gamma$ chiziqqa yaqin aloqador bo'lib, tuzilishi soddaroq bo'lgan ikkinchi chiziqni olib kerakli xossalarni tekshiramiz. SHu maqsadda uch parametrli chiziqlar oilasiga murojat etamiz.

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0 \qquad (2)$$

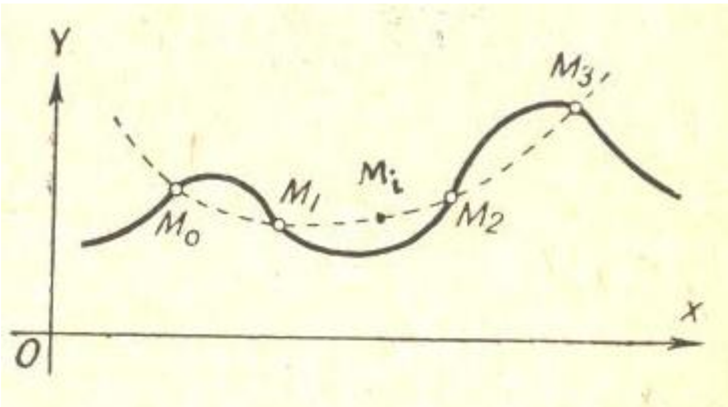
(2) oiladan (1) ga $M_0$ nuqtasida yaqinroq turgan chiziqni ajratib olishimiz kerak.

$M_0$, $M_1$, $M_2$ nuqta koordinatalari (2)-ni qanoatlantiradi.

$F(x(t_0), \ y(t_0), C_1, \ C_2, \ C_3) = 0$

$F(x(t_1), \ y(t_1), C_1, \ C_2, \ C_3) = 0$

$F(x(t_2), \ y(t_2), C_1, \ C_2, \ C_3) = 0$




13-chizma

Ammo (2)-ni (1)-ning har qanday nuqtasi (masalan $M_i$) qanoatlantirmaydi. (2) ga (1)-ni qo'ysak yordamchi funktsiya kelib chiqadi.

$$f(t) = F(x(t), \ y(t), C_1, C_2, C_3) \qquad (3)$$

$f(t)$ funktsiya va uning hosilalari t – parametrga nisbatan uzluksiz bo'lib, $t_0, t_1, t_2$ - qiymatlarda nolga teng.

$f(t_0) = 0, f(t_1) = 0, f(t_2) = 0.$

$f(t_0, C_1, C_2, C_3) = 0, \ f(t_1, C_1, C_2, C_3) = 0$ funktsiyalarga *Pol* teoremasini qo'llasak,

shunday $t_0'$ - qiymat mavjud bo'ladiki $t_0 < t_0' < t_1$ bo'lib, $f'(t_0', C_1, C_2, C_3) = 0$.
SHuningdek $f'(t_1', C_1, C_2, C_3) = 0$, $t_1 < t_1' < t_2$.

Endi Pol teoremasini $f'(\mathrm{t}_0', C_1, C_2, C_3) = 0$, $f'(t_1', C_1, C_2, C_3) = 0$ funktsiyalarga qo'llaymiz.
SHunday $t_0$" $(t_0' < t_0'' < t_1')$ qiymat mavjudki $f''(t_0'', C_1, C_2, C_3) = 0$.

Agar $t_1, t_2, t_0$ -ga intilsa, $t_0', t_1', t_0''$ -lar ham va $t_0$ ga intiladi. $M_0, M_1, M_2$ nuqtalar orqali o'tgan oila siljib yoki egilib limit holatga intiladi.
SHu vaqtda $c_1, c_2, c_3$ parametrlar ham $a,b,c$ -larga intiladi. Quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} f(t_0, a, b, c) = F(x(t_0), y(t_0), a, b, c) = 0 \\ f'(t_0, a, b, c) = F'(x(t_0), y(t_0), a, b, c) = 0 \\ f''(t_0, a, b, c) = F''(x(t_0), y(t_0), a, b, c) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

(4) sistemani yechib topilgan $a,b,c$ -parametrlarni (2) ga qo'ysak izlangan chiziqning tenglamasi kelib chiqadi.

$$F(x, y, a, b, c) = 0 \qquad (5)$$

(5) – tenglama yopishma chiziqni ifoda etadi.

**Ta'rif:** Berilgan $\gamma$ chiziqning berilgan $M(t_0)$ nuqtasidagi yopishma chizig'i deb $F(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0$ oilaga qarashli bo'lgan $\gamma$ chiziqning $M_0, M_1, M_2$ nuqtalaridan o'tgan chiziqning $M_1, M_2$ nuqtalar $M_0$ nuqtaga intilgandagi limit vaziyatiga aytiladi.

Yopishma chiziq tenglamasini aniqlash uchun yordamchi funktsiya tuzib, undan birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz. So'ngra bu funktsiya va uning hosilalaridagi $t$ o'rniga $t_0$ ni qo'yib (4) tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Sistemani yechib $a,b,c$ -larni aniqlab, ularni oila tenglamasiga qo'yamiz. $n$ - parametrga bog'liq chiziqlar oilasini olib yuqoridagi muloxazalarni takrorlash orqali yopishma chiziqni aniqlash ham mumkin.

Endi (1) chiziqning $M_0(t_0)$ nuqtasidagi yopishma to'g'ri chizig'ini aniqlaylik.

To'g'ri chiziqlar oilasining tenglamasi ikki parametrli bo'lgani uchun uni

$$y - kx - b = 0 \quad (6)$$

ko'rinishda olamiz.

$$f(t) = y(t) - k(x(t)) - b \qquad (7)$$

yordamchi funktsiya tuzamiz.
(4) sistema quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} f(t_0) = y(t_0) - kx(t_0) - b = 0 \\ f'(t_0) = y'(t_0) - ktx'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Bulardan

$$k = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)},\ b = y(t_0) - \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} x(t_0) \qquad (9)$$

(9) ni (6) ga qo'ysak yopishma to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} (x - x(t_0)) \qquad (10)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Demak yopishma to'g'ri chiziq urinma ekan. Endi yopishma aylanani ko'rib o'tamiz. Aylanalar oilasini

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0 \qquad (11)$$

formula orqali ifodalaymiz. SHu oiladan shunday aylanani aniqlaymizki, u berilgan (1) chiziqning $M_0$ nuqtasidagi yopishma aylanasi bo'lsin. Yordamchi funktsiya tuzamiz.

$$f(t,a,b,R) = (x(t)-a)^2 + (y(t)-b)^2 - R^2 \qquad (11)$$

Parametrlar soni uchta bo'lgani uchun ikki marta hosila olib (4) sistemani tuzamiz.

$$f(t_0,a,b,R) = (x(t_0)-a)^2 + (y(t_0)-b)^2 - R = 0$$
$$f''(t_0,a,b,R) = 2(x(t_0 - a)x'(t_0) + 2(y(t_0)-b)y'(t_0) = 0$$
$$f''(t_0,a,b,R) = (x(t_0)-a)x''(t_0) + (y(t_0)-b)y''(t_0) + x'^2(t_0) + y'^2(t_0) = 0$$

Sistema yechsak

$$a = x(t_0) - \frac{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}_{M_0}} y'(t_0)$$

$$b = y(t_0) + \frac{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}_{M_0}} x'(t_0) \qquad (12)$$

$$R = \frac{[x'^2(t_0) + y'^2(t_0)]^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}_{M_0}}$$

$a, b, R$ larni (11) ga qo'yib yopishma aylana tenglamasini topamiz.

$0(a,b)$-chiziqning egrilik markazi $k = \frac{1}{R}$ esa $M_0$ nuqtadagi egriligidir.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.

2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

1. Yopishma chiziq ta`rifi qanday?
2. Yopishma to`g`ri chizq ta`rifini ayting.
3. Ikki va uch parametrli chiziqlar oilasining yopishma chizig'iga misollar keltiring.
4. Yopishma aylana ta`rifini ayting.
5. Oshkormas ko`rinishda berilgan chiziqning yopishma aylanasiga misollar keltiring.
6. Oshkormas ko`rinishda berilgan chiziqning yopishma to`g`ri chizig`iga misollar keltiring.
7. Chiziqning egriligi deganda nimani tushunish mumkin?

## 19.CHIZIQNING YOPISHMA TEKISLIGI

**Reja:**

1. Yopishma tekislik ta'rifi
2. Asosiy teorema va uning isboti
3. Yopishma tekislik tenglamasi
4. Bosh normal va binormal
5. To'g'rilovchi tekislik
6. Misollar

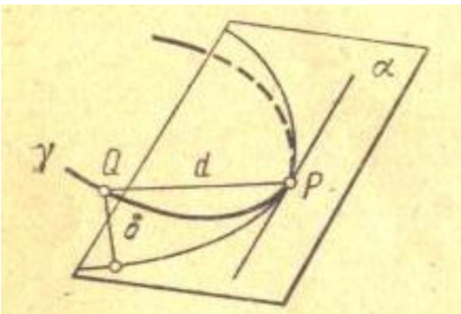
**Tayanch iboralar: yopishma tekislik, binormal, boshnormal, to`g`rilovchi tekislik, normal tekislik, urinma.**

**Mavzuning bayoni:**

Fazoviy $\gamma$ chiziq

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

parametrik formulasi orqali berilgan bo'lsin. $P(t) \in \gamma$ nuqta orqali o'tuvchi $\Pi$ tekislikni olaylik. $P$ va $Q$ orasidagi masofa $\rho(P,Q) = d, Q$ nuqtadan $\Pi$ tekislikgacha masofa $\rho(Q,\Pi) = \delta$ bo'lsin.




11-chizma

**1-Ta'rif:** Agar $Q \to P$ *ва* $\frac{\delta}{d^2}$ nisbat nolga intilsa, u holda $\Pi$ tekislikni $\gamma$ chiziqning $P$ nuqtasidagi yopishma tekisligi deb ataladi.

Yopishma tekislik tushunchasini fazoviy $\gamma$ chiziqning cheksiz yaqin uchta $M$, $N, K$ nuqtalari orqali o'tuvchi tekislikning nuqtalaridan ikkitasi chiziq bo'ylab uchinchi nuqtaga yaqinlashgandagi tekislikning limit vaziyati deb qarashimiz mumkin.

**Teorema:** (1) ko'rinishda berilgan ikki marta differentsiallanuvchi chiziq, o'zining har bir nuqtasida yoki birdan bir yopishma tekislikka ega bo'lib nokollinear $\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)$ vektorlarga parallel bo'ladi yoki urinma orqali o'tuvchi tekisliklar dastasining ixtiyoriy tekisligi yopishma tekislik bo'lishi ham mumkin.

**Isboti:** $\Pi$ – yopishma tekislik bo'lsin. Fazoda ixtiyoriy 0 nuqta (polyus) tanlaymiz. $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$, $\vec{r}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OQ}(t+\Delta t)$ bo'lsin. U holda $\overrightarrow{PQ} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$, $\delta = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|$ $\Pi$ tekislikning birlik normal vektori $\vec{n}$ bo'lsin. $\vec{n}^2 = 1$ $Q$ nuqtadan $QR \perp \Pi$ tushiramiz.

$\vec{n}$- ni $R$ nuqtaga ko'chiraylik. $\overrightarrow{RQ}$ va $\vec{n}$-kollinear vektorlar bo'lib, $(\overrightarrow{PQ}\vec{n}) = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |n| \cos\varphi = |\overrightarrow{PQ}| \cos\varphi = d\cos\varphi = \delta$

Bunda $\varphi = \angle(PQR)$ $\quad QRP = 90^0$

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{|(\vec{n}(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t))|}{|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|} = \frac{|(\vec{n}(\vec{r}\,'(t)\cdot\Delta t + \vec{r}\,''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \vec{\varepsilon}_1\Delta t^2))|}{(\vec{r}^{\,1}(t)\cdot\Delta t + \varepsilon_2\Delta t)^2} =$$
$$= \frac{\left|\frac{(\vec{n}\vec{r}\,'(t))}{\Delta t} + \frac{(\vec{n}\vec{r}\,''(t))}{2!} + \varepsilon_1\right|}{\vec{r}\,'^2(t) + \varepsilon_3} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0 \tag{2}$$

o'rinli bo'lib,

$\vec{n} \perp \vec{r}\,'(t), \vec{n} \perp \vec{r}\,''(t) \Rightarrow \vec{r}\,'(t) // \Pi, \vec{r}\,''(t) // \Pi$

SHunday qilib, $\Pi$-yopishma tekislik bo'lsa, u birdan birdir, chunki $\vec{n}$- $\Pi$ ga yagona normal vektor bo'la oladi. SHu bilan birga $\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)$ vektorlar yoki $\Pi$ ga tegishli yoki unga parallel vaziyatda bo'lishi mumkin.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlash uchun quyidagi tenglikka e'tibor beraylik.

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{\left|\frac{\vec{n}\vec{r}\,'(t))}{\Delta t} + \frac{(\vec{n}\vec{r}\,''(t))}{2!} + \varepsilon_1\right|}{d^2\vec{r}\,'^2(t) + \varepsilon_3};$$

$(\vec{n}\vec{r}\,'(t)) = 0$, $(\vec{n}\vec{r}\,''(t)) = 0$ bo'lgani uchun

$$\frac{\delta}{d^2}=\frac{|\varepsilon_1|}{\vec{r}'^2(t)+\varepsilon_3}\xrightarrow[Q\to P]{}0;$$

Bundan $\Pi$ tekislik haqiqatan ham yopishma tekislik ekani $\left(\lim\limits_{Q\to P}\frac{\delta}{d^2}=0\right)$ kelib chiqadi.

Agar $\vec{r}''(t)\parallel\vec{r}'(t)$ yoki $\vec{r}''(t)=0$ bo'lsa ham $\frac{\delta}{d^2}\xrightarrow[Q\to P]{}0$.

Endi yopishma tekislik tegnlamasini yozaylik. $\Pi$ tekislikda ixtiyoriy $M$ nuqtani olamiz

$$\overrightarrow{PM}=\lambda\vec{r}'(t)+\mu\vec{r}''(t) \qquad (3)$$

Uchta vektorlarning komplanarligidan $(\overrightarrow{PM}\vec{r}'(t)\vec{r}''(t))=0$ (4)

Agar fazoda dekart reper o'rnatilgan bo'lib, shu reperda $P(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$ koordinatalarga ega bo'lsa (4) ni quyidagicha ifodalash mumkin

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0)\\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0)\end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

**2-Ta'rif:** CHiziqning $P$ nuqtasidan o'tib urinmasiga perependikulyar to'g'ri chiziqqa uning normali deyiladi. Yassi chiziq uchun normal yagona bo'lib, yopishma tekislikda yotadi.

**3-Ta'rif:** CHiziqning $P$ nuqtasidagi yopishma tekisligida yotib, urinmaga perpendikulyar to'g'ri chiziqqa bosh normal deyiladi.

**4-Ta'rif:** CHiziqning $P$ nuqtasidan o'tib yopishma tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqqa binormal deyiladi.

Ta'rifdan binormalning urinma va bosh normalga perpendikulyarligi kelib chiqadi. Agar urinmaning yo'naltiruvchi birlik vektori

$$\vec{t}=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \qquad (6)$$

binormalning yo'naltiruvchi birlik vektori

$$\vec{b}=\frac{[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)]}{|[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)]|}, \qquad (7)$$

bo'lsa, u holda bosh normalning yo'naltiruvchi birlik vektori $[\vec{b}\vec{t}]=\vec{n}$ bo'lib

$$\vec{n}\perp\vec{t}\ \text{ва}\ \vec{n}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{n}\parallel[\vec{t}\vec{b}],\ \vec{n}=[\vec{t}\vec{b}] \qquad (8)$$

**5-Ta'rif:** CHiziqning $P$ nuqtasidagi urinmasi va binormali orqali o'tuvchi tekislikka to'g'rilovchi tekislik deb ataladi.

**Misol:** $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$ vint chiziqning (1,0,0) nuqtasidagi urinmasi, yopishma tekisligi, normal tekisligi, bosh normali va binormali aniqlansin.

Echilishi: $\cos t = 1$ $\sin t = 0$ $t = 0$ bo'lgani uchun $\vec{r}'(t)\{0,1,1\}$, $\vec{r}''(t)$ $\{-1,0,0\}$ $\vec{t}\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ $\vec{b}\left\{0,\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ $\vec{n}\{1,0,0\}$ urinma tenglamasi $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow y=z,\ x=1$

Yopishma tekislik tenglamasi - $y-z=0$;

Normal tekislik tenglamasi - $y+z=0$;

Bosh normal tenglamasi - $y=z=0$;

Binormal tenglamasi - $y=-z,\ x=1$.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollar**

1. Chiziqning yopishma tekislik ta`rifini aytib bering.
2. Oshkor ko`rnishda berilgan chiziqning yopishma tekislik tenglamasini ko`rsating. Misollar bilan ifodalang.
3. Qanday tekislik chiziqning normal tekisligi deyiladi?
4. Qanday to`g`ri chiziq chiziqning bosh normal to`gri chizig`I deyiladi? Misollar keltiring.
5. Qanday to`g`ri chiziq chiziqning binormali bo`ladi?
6. Chiziqning to`grilovchi tekisligini misollar orqali grafikda ajratib ko`rsating.
7. Chiziqning urinma tekislik, yopishma tekislik va to`g`rilovchi tekisliklarini grafikda chizmasini ko`rsating.

## 20.CHIZIQNING YOY UZUNLIGI.

**Reja:**

1. Yoy uzunlik ta'rifi
2. Asosiy teorema
3. Turlicha berilgan chiziqlar uchun yoy uzunlik formulalari
4. Yoy uzunligi parametr sifatida
5. Vektor-funktsiyaning $s$ -bo'yicha hosilalari

Tayanch iboralar:yoy uzunligi,parametrik tenglama, tabiiy tenglama.

**Mavzuning bayoni:**

Elementar chiziq vektor ko'rinishidagi parametrik tenglamasi

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

yoki koordinat ko'rinishdagi parametrik tenglamalari

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \qquad (2)$$

orqali berilgan bo'lsin.

**Ta'rif:** CHiziqning $a \le t \le b$ oraliqdagi yoy uzunligi deb, uchlari chiziqqa qarashli $M_i(x(t_i),\ y(t_i),\ z(t_i)),\ t_1 = a,\ t_2, t_3 ..., t_n = b(t_1 < t_2 < ... < t_n)$ nuqtalarda bo'lib ungi ichki chizilgan siniq chiziq perimetrining uchlar soni $n \to \infty$ dagi yoki eng katta bo'g'in uzunligi nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

**Teorema:** Har qanday silliq chiziqning biror aniq yoy uzunligi mavjud. (1) ko'rinishda berilgan chiziqning $a \le t \le b$ kesmadagi yoy uzunligi

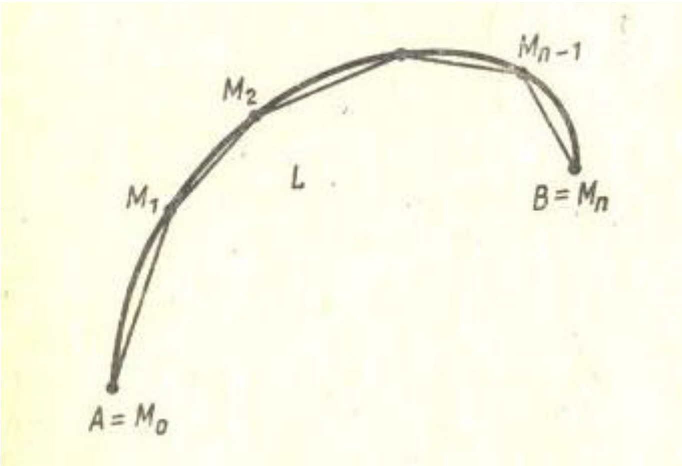
$$S = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt \qquad (3)$$

formula bo'yicha aniqlanadi.

**Isboti:** 0 qutb tanlaymiz. Uchlari $M_1(t_1),\ M_2(t_2),.....,$ $M_{k-1}(t_{k-1}),$ $M_k(t_k),...,M_n(t_n)$ nuqtalarda bo'lgan siniq chiziq, perimetri r bo'lsin. $\vec{O}M_{k-1} = \vec{r}(t_{k-1}),\ \vec{O}M_k = \vec{r}(t_k),$ belgilasak $|\overrightarrow{M_{k-1}M_k}| = 1\vec{r}(t_k) - \vec{r}\,|t_{k-1}|$

$$p = \sum_k |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt +$$

$$+\left\{\sum_k (t_k - t_{k-1})|\vec{r}'(t_k)| - \int_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt\right\}_1 + \left\{\sum_k |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| - \sum_k (t_k - t_{k-1})|\vec{r}'(t_k)|\right\}_2 \quad (4)$$




14-chizma

quyidagi tengliklarga e'tibor beraylik:

$$\sum_k (t_k - t_{k-1})|\vec{r}'(t_k)| = \sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{r}'(t_k)\,dt\right| \qquad (5)$$

$$\sum_k |\vec{r}(t_k)-\vec{r}'(t_{k-1})| = \sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{r}'(t)dt\right| \qquad (6)$$

(4) dagi uchta qo'shiluvchilardan ikkitasini baholashimiz mumkin.

Jumladan $\left\{\sum_k (t_k - t_{k-1})|\vec{r}'(t_k)| - \int_a^b |\vec{r}'(t)|dt\right\}_1 =$

$$=\left\{\sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\vec{r}'(t_k)|dt - \int_a^b |\vec{r}'(t)dt\right\}_1 \le \int_a^b |\vec{r}'(t_k)-\vec{r}'(t)|dt < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon|b-a| \qquad (7)$$

$$\left\{\sum_k |\vec{r}(t_k)-\vec{r}(t_{k-1})| - \sum_k |t_k - t_{k-1}||\vec{r}'(t_k)|\right\}_2 = \left\{\sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{r}'(t)dt\right| - \right.$$

$$-\sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{r}'(t_k)dt\right| \le \sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\vec{r}'(t)-\vec{r}'(t_k)|dt \to \int_a^b |\vec{r}'(t)-\vec{r}'(t_k)|dt < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b-a) \qquad (8)$$

$k\to\infty$ da $\varepsilon\to 0$ .

U holda

$$S=\lim_{k-\infty} P = \int_a^b |\vec{r}'(t)|dt \qquad (9)$$

ega bo'lamiz, bunda $\vec{r}'(t)$ ning uzluksizligidan foydalanildi.

(2) ko'rinishda berilgan chiziqning yoy uzunligi

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt \qquad (10)$$

$\gamma: y = f(x)$ chiziq uchun

$$S=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\int_x{}^2}\,dx \qquad (11)$$

Regulyar chiziq yoy uzunligi uchun yuqorida isbotlangan (3) formulada yuqori chegarani o'zgaruvchi deb qarasak,

$$S(t)=\int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(t)|dt \qquad (12)$$

funktsiya kelib chiqadi.

Buning geometrik ma'nosi shuki $|S(t)|$ chiziqning $[t_0,t]$ kesma uzunligi.

$\dfrac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| > 0$ (13) dan ko'ramizki $S(t)$ funktsiya qat'iy monoton. U holda $S$ -ni parametr sifatida olishimiz mumkin. $\gamma$ chiziq uchun $S$ -ni parametr sifatida qarasak uni tabiiy parametrlashgan deyiladi. (13) dan $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ kelib chiqadi.

$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \cdot\,|\,\dot{\vec{r}}(S)\,|$ belgilaymiz. Keyingi hosilalar $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \ddot{\vec{r}}(S), \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \dddot{\vec{r}}(S),...$

**Xulosa:** $S$ - parametr bo’lsa urinmaning yo’naltiruvchi vektori birlik vektor bo’ladi, ya’ni $|\,\dot{\vec{r}}(S)\,| = 1, \quad \dot{\vec{r}}(S) = \vec{\tau}$ belgilaymiz. $|\,\vec{\tau}\,| = 1 = |\,\dot{\vec{r}}(S)\,|$.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Vektor funksiya orqali berilgan chiziqning biror oraliqdagi yoy uzunligi qanday bo`ladi?
2. Parametrik ko`rinishda berilgan chiziqning biror oraliqdagi yoy uzunligiga misollar keltiring.
3. Oshkor ko`rinishda berilgan funksiyaning yoy uzunlik formulasi va unga oid misollar keltiring.
4. Vektor funksiyani o`zgaruvchili oraliqda yoy uzunligi orqali qanday parametrlashtirish mumkin.
5. Turlicha berilgan chiziqlar uchun yoy uzunlik formulalarini keltirib chiqaring. Misollar orqali ko`rsating.
6. Qutb tenglamasi orqali berilgan chiziqning yoy uzununlik formulasini ayting va misollar keltiring.

## 21.CHIZIQNING EGRILIGI

**Reja:**

1. Egrilik ta’rifi
2. Asosiy teorema
3. Ixtiyoriy parametrlashtirilgan chiziq egriligi uchun formula
4. Xususiy hollar
5. Misol

**Mavzuning bayoni:**

Regulyar chiziq

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S) \qquad (1)$$

tenglama orqali berilgan bo’lsin. $P, Q$ $\gamma$ chiziqning cheksiz yaqin nuqtalari bo’lsin. SHu nuqtalardagi chiziqqa o’tkazilgan urinmalar tashkil etgan burchak $\Delta Q$ bo’lsin. $\breve{P}\breve{Q}$

yoy uzunligi $|\Delta S|$ bo'lsin.

**Ta'rif:** $\gamma$ chiziqning $P$ nuqtadagi egriligi deb, $\dfrac{\Delta Q}{|\Delta S|}$ nisbatining $Q \to P$ dagi limitiga aytiladi va $K_1 = \lim\limits_{Q^0 \to P} \dfrac{\Delta Q}{|\Delta S|}$ belgilanadi.

**Teorema:** (Ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi) Regulyar chiziq o'zining har bir nuqtasida biror $K_1$ egrilikka ega bo'lib, (1) formula orqali berilgan chiziqning egriligi uchun

$$K_1 = |\ddot{\vec{r}}(S)| \qquad (2)$$

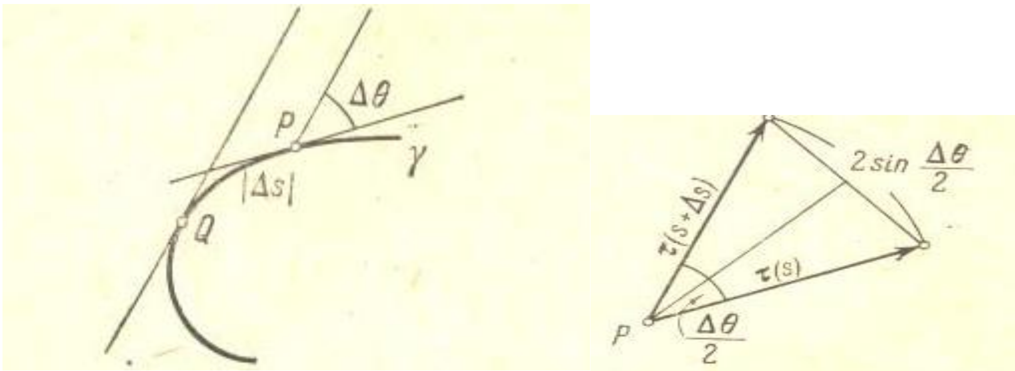
o'rinlidir.

**Isboti:** $P(S),\ Q(S+\Delta S)$ $\gamma$ chiziqning cheksiz yaqin nuqtalari bo'lib, shu nuqtalardagi urinmalar $\vec{\tau}(S) = \dot{\vec{r}}(S),\ \vec{\tau}(S+\Delta S) = \dot{\vec{r}}(S+\Delta S)$ yo'naltiruvchi birlik vektorlarga ega bo'lsin.

$$\angle(\vec{\tau}(S), \vec{\tau}(S+\Delta S)) = \Delta Q \qquad (3)$$

$$|\vec{AB}| = \vec{\tau}(S+\Delta S) - \vec{\tau}(S)| \qquad (4)$$

$$|\vec{AB}| = 2\sin\frac{\Delta Q}{2} \qquad (5)$$




15-chizma

$APB$ uchburchak teng yonli $PB = PA = 1,\ < APB = \Delta Q$ bo'lgani uchun

$$\frac{|\vec{\tau}(S+\Delta S) - \vec{\tau}(S)|}{\Delta S} = \frac{2\sin\frac{\Delta Q}{2}}{|\Delta S|} = \frac{\sin\frac{\Delta Q}{2}}{\frac{|\Delta S|}{2}} = \frac{\sin\frac{\Delta Q}{2}}{\frac{\Delta Q}{2}} \cdot \frac{\Delta Q}{|\Delta S|} \qquad (6)$$

$Q \to P$ da $\Delta Q \to 0$ va $|\Delta S| \to 0,$ u holda (6) dan $|\ddot{\vec{r}}(S)| = K_1$ kelib chiqadi. Isbot yakunlandi.

$K_1 \neq 0$ nuqtalarda $\dfrac{\ddot{\vec{r}}(S)}{K_1} = \vec{\upsilon}(S)$ belgilaymiz $|\vec{\upsilon}(S)| = 1$ bo'lib yopishma tekislikda yotadi. $\vec{\tau}^{\,2} = 1 \Rightarrow (\vec{\tau}\dot{\vec{\tau}}(S)) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{\tau}}(S) \perp \vec{\tau} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}(S) = k_1 \cdot (\vec{\upsilon})$ bo'lib $\vec{\tau}(S), \vec{\upsilon}(S)$

yopishma tekislikda yotadi va uzaro perpendikulyar vektorlardir.

$\vec{\upsilon}$ - bosh normal uchun yo'naltiruvchi birlik vektor. Endi ixtiyoriy parametrlashtirilgan chiziq uchun egrilik formulasini aniqlaylik. $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$ (7) dan ikki va uch tartibligacha hosila olamiz. Oraliq parametr kiritamiz. $\gamma : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ (7)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \Rightarrow |\vec{r}\,'(t)| = |\dot{\vec{r}}(S)|\cdot\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \Rightarrow |S'(t)| = |\vec{r}\,'(t)| \quad (8)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (9)$$

$$[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)] = [\dot{\vec{r}}\,\frac{ds}{dt}\,\ddot{\vec{r}}(S)S_t'^2 + \dot{\vec{r}}(S)S_{t^2}''] = [\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}(S)]S'^3(t) = [\vec{\tau}k_1\vec{\upsilon}]S'^3(t) = K_1\vec{\beta}(S)S'^3(t)$$

$[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']$ - binormal yo'nalishiga ega bo'lib, uning yo'naltiruvchi birlik vektorini $\vec{\beta}(S)$ belgilaymiz.

$$|[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)]| = |K_1|\cdot|S'(t)|^3 \Rightarrow |K_1| = \frac{|[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)]|}{|S'(t)|^3} \Rightarrow K_1^2 = \frac{[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']^2}{S'^6(t)}$$

yoki

$$K_1^2 = \frac{[\vec{r}\,'\vec{r}\,''(t)]^2}{|\vec{r}\,'(t)|^6} \qquad (10)$$

(7) ko'rinishda berilgan chiziq uchun

$$K_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}_p^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}_p^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}_p^2}{(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))_p^3} \qquad (11)$$

**Misol:** uchun OXY koordinat tekisligiga qarashli chiziq uchun

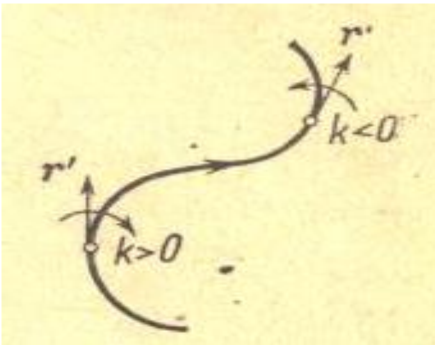
$$K_1^2 = \frac{y''^2(x)}{(1+y'^2)^3} \quad (12)$$

$k_1$ – egrilik «+», «-» ishoradagi qiymatlarga ega bo'lishi mumkin.

*P* – nuqtada $k_1$ ga «+» ishora qo'yiladi.

Q nuqtada esa $k_1$ ga «-» ishora qo'yiladi.

$K_1 = |\vec{r}\,''(t)| = 0$ chiziq to'g'ri chiziqdan iborat. $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$




16-chizma

**Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

1. Chizqning egrilik ta`rifini aytib bering.
2. Chiziqning egrigi uchun asosiy teoremani keltring.
3. Vektor ko`rinishda berilgan chiziqning egrililarini hisoblash formulasi yozing. Misollar keltiring.
4. Parametrik ko`rinishda berilgan chiziqning egrililarini hisoblash formulasi yozing. Misollar keltiring.
5. Ixtiyoriy parametrlashtirilgan chiziq egriligi uchun formulasini vektor funksiya differensiali orqali qanday toppish mumkin?

## 22-23.CHIZIQNING BURALISHI. FRENE FORMULALARI

**Reja:**

1. Buralish ta’rifi va belgilanishi
2. Asosiy teoremaning isboti
3.Ixtiyoriy parametrlashtirilgan chiziq buralishining formulasi
4. Misollar
5. Frene formulalari

**Tayanch iboralar:chiziqning buralishi, frene formulasi, tabiiy tenglamasi, parametrlashgan chiziq.**

**Mavzuning bayoni:**

Tabiiy parametrlashtirilgan chiziq

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S) \qquad (1)$$

tenglamasi orqali berilgan bo’lsin. $P(S)$, $Q(S+\Delta S) \in \gamma$ cheksiz yaqin nuqtalarida chiziqqa yopishma tekisliklar o’tkazaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan burchakni $\Delta Q =\angle (\Pi_p \cdot \Pi_Q)$ belgilaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan $\Delta Q$ burchak *P* va *Q* nuqtalardagi $\vec{\beta}(S)$, $\vec{\beta}(S+\Delta S)$ binormal vektorlar tashkil etgan burchakka teng, ya’ni $\Delta Q = \angle(\vec{\beta}(S), \vec{\beta}(S+\Delta))$. $\gamma$ chiziqning *P* va *Q* nuqtalar bilan chegaralangan kesmasi (yoyi)ning uzunligi $|\Delta S|$ bo’lsin.

**Ta’rif.** $\gamma$ chiziqning *P* nuqtasidagi absolyut buralishi deb, $\Delta Q : |\Delta S|$ nisbatning $Q$ nuqta chiziq bo’ylab *P* nuqtaga intilgandagi limitiga aytiladi va

$$|K_2| = \lim_{Q\to P} \frac{\Delta Q}{|\Delta S|} \qquad (2)$$

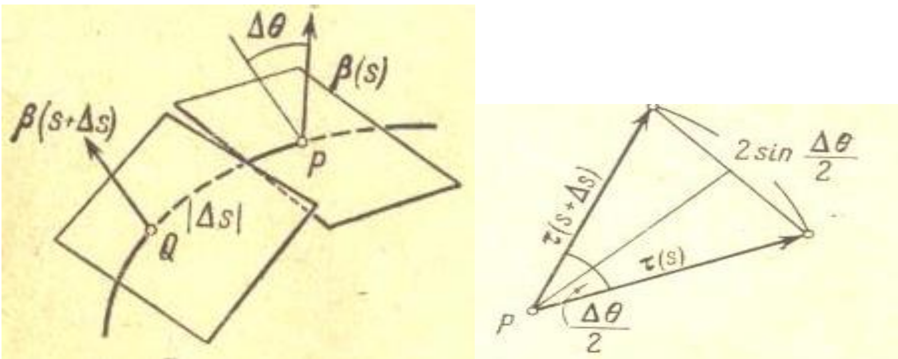
ko’rinishda belgilanadi.

**Teorema.** Regulyar (uch marta uzluksiz differentsiallanuvchi) chiziq o'zining $K_1$ (egrilik) noldan farqli bo'lgan har bir nuqtasida ma'lum bir absolyut buralish $|K_2|$ ga ega. Agar $\gamma$ chiziq (1) ko'rinishdagi tenglama orqali berilgan bo'lsa, u holda

$$|K_2| = \frac{|(\dot{\vec r}\ \ddot{\vec r}\ \dddot{\vec r})|}{K_1^{\,2}} \qquad (3)$$

o'rinlidir.

**Isboti:** $P$ *ва* $Q$ nuqtalarda $K_1 \neq 0$ bo'lgani uchun $\dot{\vec r}(S)$ *ва* $\ddot{\vec r}(S)$ o'zaro kallinear yoki ulardan biri nolь vektor bo'lishi mumkin emas. Aks holda shu nuqtalarda $\Pi_p, \Pi_Q$ yopishma tekisliklarni mavjudlik va birdan birlik sharti bajarilmaydi.




17-chizma

$P$ *ва* $Q$ nuqtalardagi $\vec\beta(S), \vec\beta(S+\Delta S)$ binormal vektorlarni 0 nuqtaga ko'chiramiz. Ular birlik vektorlar bo'lgani uchun OAV uchburchak teng yonli $|\vec{AB}| = 2\sin\dfrac{\Delta Q}{2}$ yoki $\dfrac{|\vec\beta(S+\Delta S) - \vec\beta(S)|}{|\Delta S|} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta Q}{2}}{|\Delta S|} \Rightarrow |\dot{\vec\beta}(S)| = \ = \lim\limits_{|\Delta S|\to 0} \dfrac{|\vec\beta(S+\Delta S) - \vec\beta(S)|}{|\Delta S|} =$

$$\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta Q}{2}}{\frac{\Delta Q}{2}} \cdot \lim_{Q\to p}\left(\frac{\Delta Q}{|\Delta S|}\right) = \lim_{Q\to p}\frac{\Delta Q}{|\Delta S|} = |K_2|$$

SHunday qilib, $|K_2| = |\dot{\vec\beta}(S)|$ (4)

$$\vec\beta^2(S) = 1 \Rightarrow 2(\dot{\vec\beta}(S)\vec\beta(S)) = 0 \Rightarrow \dot{\vec\beta}(S) \perp \vec\beta(S) \qquad (*)$$

$$\vec\beta(S) = [\vec\tau(S)\vec\upsilon(S)] \Rightarrow \vec\beta(S) \perp \vec\tau(S), \vec\beta(S) \perp \vec\upsilon(S)$$

$$\dot{\vec\beta}(S) = [\dot{\vec\tau}(S)\vec\upsilon(S)] + [\vec\tau(S)\dot{\vec\upsilon}(S)] = [K_1\vec\nu\vec\upsilon] + [\vec\tau\dot{\vec\upsilon}] = [\vec\tau(S)\dot{\vec\upsilon}(S)] \Rightarrow \dot{\vec\beta}(S) \perp \vec\tau(S)\,(**)$$

(*) va (**) munosabatlardan $\dot{\vec\beta}(S)$ *ва* $\vec\upsilon(S)$ vektorlarning kollinearligi kelib chiqadi.

$$|K_2| = |(\dot{\vec\beta}(S)\vec\upsilon(S))| \qquad (5)$$

(5) ga

$$\vec\upsilon = \frac{\ddot{\vec r}(S)}{K_1} \quad \text{ва} \quad \vec\beta(S) = \frac{[\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}]}{K_1} \qquad (6)$$

larni qo'ysak,

$$|K_2| = \frac{\left|(\dot{\vec r}\ \ddot{\vec r}\ \dddot{\vec r})\right|}{K_1^2} \qquad (7)$$

kelib chiqadi. SHuni isbot qilish so'ralgan edi. $|K_2| = \pm K_2$

«+» ishorada chiziq bo'ylab $P$ nuqtadan $Q$ nuqtaga o'tishda yopishma tekislik urinma atrofida $\overline{\beta}$ dan $\vec{\upsilon}$ tomonga buriladi «-» ishorada esa $\vec{v}$ dan $\vec{\beta}$ yo'nalishga buriladi.

Endi $\vec r = \vec r(t)$ ko'rinishda berilgan ixtiyoriy parametrlashtirilgan chiziq uchun buralish formulasini yozaylik. $S$ va $t$ parametrlar orasida $S = S(t)$ moslik o'rinli

$$\dot{\vec r}(S) = \vec r_t \dot t(S),\ \ddot{\vec r}_{ss} = \vec r''_{t^2}\dot t_s^2(S) + \vec r'_t(t)\ddot t \qquad (8)$$

$$\dddot{\vec r}_{s5}(S) = \vec r'''_{t^3}\dot t^3 + \lambda\left\{\vec r'_t, \vec r''_{t^2}\right\} \qquad (8^*)$$

$$t'(S) = \frac{1}{|\vec r'_t|} \qquad (9),$$

$$|K_2| = \frac{|(\vec r_t \vec r''_{t^2} \vec r'''_{t^3})|}{|r'_t|^6} \cdot \frac{|\vec r'_t|^6}{|\vec r_t \vec r''_{t^2}|^2} = \frac{|(\vec r_t \vec r''_{t^2} \vec r'''_{t^3})|}{[\vec r_t \vec r''_{t^2}]^2} \qquad (10)$$

Agar $\gamma$ chiziq $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(1)$ koordinat ko'rinishida berilgan bo'lsa (10) quyidagicha yoziladi.

$$|K_2| \equiv \frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}_\rho}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}_\rho^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}_\rho^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}_\rho^2} \qquad (11)$$

**Misol:** Har bir nuqtasida $K_2 = 0$ bo'lgan chiziqni aniklang.

**Ma'lumki**

$|K_2| = |(\dot{\vec\beta}\vec V)| = 0 \Rightarrow K_2 = 0 \Rightarrow \dot{\vec\beta} = 0, (\dot{\vec\beta}\tau) = 0,\ (\dot{\vec\beta}\vec\beta) = 0 \Rightarrow \dot{\vec\beta} = 0, \vec\beta = const.$ ko'ramizki $\gamma$ chiziq tekis chiziq bo'lib $(\vec r - \vec r_0)\vec\beta = 0.$ $\gamma$ chiziqning har bir $P(S)$ nuqtasidan yo'naltiruvchi vektorlari $\vec\tau(S), \vec v(S), \vec\beta(S)$ bo'lgan uchta nurlar chiqadi. Ular uch yoqli burchakning qirralarini ifodalaydi. Ushbu uchyoqni tabiiy uch yoq deb ataymiz.

$\vec\tau, \vec\beta, \vec v$ vektorlarning hosilalarini shu vektorlarning o'zlari bilan ifodalaymiz

$$\ddot{\vec r}(S) = \dot{\vec\tau}(S) = K_1\vec v(S)$$

$$\dot{\vec\beta}(S) = K_2\vec v(S)$$

$$\dot{\vec v}(S) = [\vec\beta\dot{\vec\tau}]^{\cdot} = [\dot{\vec\beta}\dot\tau] + [\vec\beta\dot{\vec\tau}(S)] = [K_2\vec v\,\tau] + [\vec\beta K_1\vec v] = -K_2\vec\beta - K_1\vec\tau$$

SHunday qilib

$$\dot{\vec\tau}(S) = K_1\vec v(S) \qquad \dot{\vec v}(S) = -K_1\vec\tau - K_2\vec\beta$$

$$\dot{\vec{\beta}}(S) = +K_2\vec{v}(S) \qquad (12)$$

(12)-ni Frene formulalari deyiladi.

Egrilik $K_1$ va buralish $K_2$ chiziq bo'ylab $S$ – parametrning funktsiyasi bo'lib $K_1 = \varphi(S), \quad K_2 = \psi(S)$ (13) tenglamalarni chiziqning tabiiy tenglamalari deyiladi. Agar chiziqning tabiiy tenglamalari berilgan bo'lib $K_1 > 0$ bo'lsa, u o'zining fazodagi o'rni farqi bilan bir qiymatli ravishda aniqladi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Chizqning buralish ta`rifini keltiring.
2. Chiziqning buralishi uchun asosiy teoremasini keltiring.
3. Ixtiyoriy parametrlashtirilgan chiziq buralish formulasini vector funksiya differensiali orqali qanday toppish mumkin?
4. Frene formulalarini keltiring.
5. Qanday tenglamalar chiziqning tabiiy tenglamalari.

## 24.TEKIS CHIZIQNING EVOLYUTA VA EVOL`VENTASI

Reja

1.Evolyuta.

2.Evolventa.

$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S)$ tenglama orqali berilgan regulyar (uch marta differentsiallanuvchi) chiziq bo'lsin. CHiziqning *P* nuqtasidagi normaliga $\overline{\upsilon}$ yunalishda $\rho = \dfrac{1}{K_1}$ uzunlikdagi kesmani joylaymiz. Kesmaning ikkinchi uchini uning egrilik markazi deb ataymiz.

Markazi shu nuqtada bo'lib, radiusi $\rho$ bo'lgan aylana berilgan $\gamma$ chiziq bilan $P$ nuqtada 3-tartibli yopishuvga ega. Ma'lumki, chiziqning urinmasi chiziq bilan 2-tartibli yopishuvga ega.

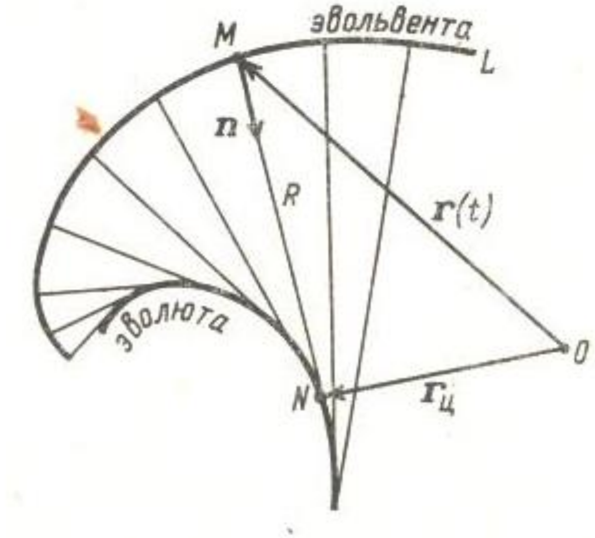
**Ta'rif:** $\gamma$ chiziq egrilik markazlarining geometrik o'rniga uning evolyutasi, evolyutaga o'tkazilgan urinmalarning ortogonal traektoriyasiga uning evolьventasi deyiladi.

CHiziqning evolyutasi normalarining o'ramasi bo'lishini ko'rsataylik.

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{K_1}\vec{v} \qquad (1)$$

evolyutaning vektor tenglamasi.

$$\dot{\vec{\rho}}' = \dot{\vec{r}} + \left(\frac{1}{K_1}\right)' v + \frac{1}{K_1}(-K_1\vec{\tau}) \qquad \dot{\vec{\rho}}^1 = \left(\frac{1}{K_1}\right)' \vec{v} \qquad (2)$$




18-chizma

(2) dan $\dot{\vec{\rho}}^1 \parallel \vec{v}$ $K_1' \neq 0$ bo'lgani uchun evolyutaning $a \leq S \leq b$ oraliqdagi yoy uzunligi

$$\int_a^b |\,\vec{\rho}'(S)\,|\,ds = \int_a^b \left|\left(\frac{1}{K}\right)'\right| ds = \left|\frac{1}{K_1(b)} - \frac{1}{K_1(a)}\right| \qquad (3)$$

kesma uchlaridagi egrilik radiuslarinin*g ayirmasiga teng.

Agar berilgan chiziq $\vec{r} = \vec{r}(S)$ tenglamaga ega bo'lib, uning M nuqtasidagi urinmasiga $\vec{\tau}$ yunalishda |S| uzunlikdagi kesmani qo'ysak $M_0M = d(M,N)$ tenglikni bajaruvchi N nuqta kelib chiqadi. N nuqtalar chizgan chiziq evolьventa bo'ladi.

$$\vec{\rho} = \vec{r} - S\vec{\tau} \qquad (4)$$

evolьventa tenglamasidir.

$$\vec{\rho}^1 = \vec{r} - \vec{r} - SK_1\overline{\upsilon} = -SK_1\overline{v} \Rightarrow \overline{\rho}' II \overline{v}$$

Bundan evolyutaning urinmalari evolьventa uchun normal bo'lishi kelib chiqadi. Masalan tekis chiziqlardan traktrisa va xalqa chiziqlardan biri evolyuta bo'lsa ikkinchisi evolьventa bo'ladi.

## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

## Nazorat savollari

1. Chiziqning evalyutasi ta`rifini aytib bering.
2. Chiziqning birir nuqtasidagi egrilik markazi chizmada qanday ko`rininshda bo`ladi?

3. Chiziqning evolventasi ta`rifini keltiring.
4. Chiziq normallari o`ramasidan qanday chiziq hosil bo`ladi?
5. Chiziq yopishma aylana markazlarining geometric o`rni qanday chiziqni hosil qiladi?
6. Grafikda chiziqning evalyuntasi va evolventasini tasvirlang.

## 25.Sirt tushunchasi.Sirt tenglamasi,regulyar sirt

**Reja:**

1. Ochiq soha
2. Topologik akslantirishlar
3. Elementar sirt,sodda sirt,umumiy sirt ta'rifi
4. Sirt tenglamalari. Regulyar sirt
5. Sirtga qarashli chiziqlar
6. Misollar

**Mavzuning bayoni**:

$G$ -tekislidagi nuqtalar to'plami bo'lsin. Agar $G$ to'plamining $x$ nuqtasiga yetarlicha yaqin barcha nuqtalar $G$ to'plamga tegishli bo'lsa, u holda $x$ nuqtani $G$ to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Ta'rifdan $\varepsilon > 0$ son mavjud bo'lib, tekislikning $x$ nuqtasidan $\varepsilon$ dan kichik masofada turuvchi barcha nuqtalari $G$ to'plamga tegishli bo'ladi, degan xulosaga kelamiz. Barcha nuqtalari ichki nuqtalardan tuzilgan $G$ to'plam ochiq to'plam bo'lib, uning har qaysi ikki nuqtasini shu to'plamga tegishli siniq chiziq orqali tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda $G$ ni soha deyiladi.

Doiraning chegaraviy aylanasi kirmagan qismi ochiq sohaga misol bo'la oladi. $G$ - tekislikda soha bo'lsin. Tekislikning $x$ nuqtasi uchun shu nuqtaga cheksiz yaqin nuqtalar orasida $G$ ga tegishli nuqtalar va unga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud bo'lsa, u holda $x$ ni $G$ to'plamning chegara nuqtasi deyiladi. $G$ to'plamning barcha chegara nuqtalar to'plamiga uning chegarasi deyiladi. Agar $G$ sohaga chegara qo'shilsa, yopiq soha hosil bo'ladi

$X$ ,$Y$-ixtiyoriy to'plamlar bo'lib, biror $f$ qonun (qoida) $X$ ning har bir $x$ elementiga $Y$ ning aniq $y$ elementini mos keltirsa, u holda $X$ ni $Y$ ga akslanitirish o'rnatilgan deyiladi. Akslantirishni $f : X \to Y$ ko'rinishda belgilaymiz. $x \in X$ uchun $y = f(x)$ element $x$ ning aksi , $y \in Y$ uchun $x = f^{-1}(y)$ element uning asli deyiladi.

$f : G \subset X \to \Phi \subset Y$ $f(x) \subset Y$ bo'lsa $f$ ni ichiga akslantirish, $f(X) = Y$ bo'lsa, ustiga akslantilish deyiladi. Agar $f(X) = Y$ bo'lib $f$ akslantirishda $X$ to'plamning har qanday $x_1 \neq x_2$ elementlari $Y$ to'plamning $y_1 \neq y_2$ elimentlariga o'tsa, u holda $f$ akslantirishni o'zaro bir qiymatli deyiladi. Agar $f$ akslantirish $X$ to'plamning cheksiz yaqin nuqtalarini $Y$ to'plamning cheksiz yaqin nuqtalariga akslantirsa , ya'ni har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun cheksiz kichik $\delta > 0$ son topilsaki $\forall x_1, x_2 \in X |x_1 - x_2| < \delta$ dan $|y_1 - y_2| < \varepsilon$

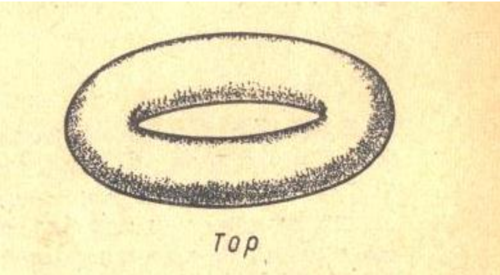
kelib chiqsa ,u holda $f$ akslantirishni uzluksiz akslantirish deyiladi. $X$ to'plamning $Y$ to'plamga o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz akslantirishni topologik yoki gomeomorf akslantirish deyiladi.

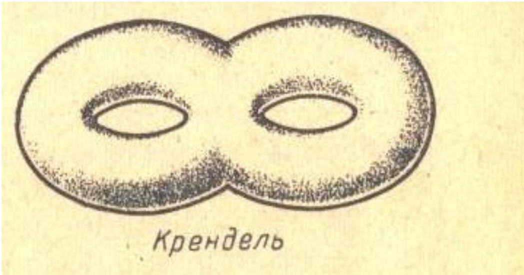
**1-ta'rif**: Tekislikdagi ochiq sohani $E_3$ fazoga topologik akslantirish natijasida hosil qilingan nuqtalar to'plamiga elementar sirt deyiladi.

Elementar sirtga tekislik, elliptik va giperbolik paraboloidlar va parabologik tsilindir misol bo'la oladi.

**2-ta'rif** : Agar $\Omega$ figuraning har bir nuqtasi fazoviy atrofga ega bo'lib , uning shu atrofdagi qismi elementar sirtdan iborat bo'lsa , u holda $\Omega$ figurani sodda sirt deyiladi.

Sodda sirt chekli yoki sanoqli sondagi elementar sirtlarning birlashmasidan tashkil topadi. Sodda sirtga sfera, ellipsoid, tor, krendel, tsilindr misol bo'la oladi .



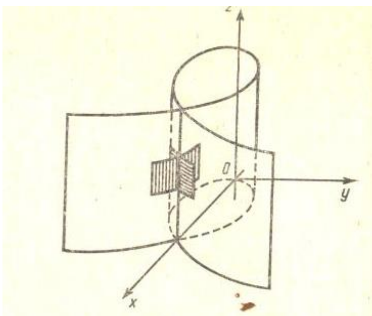




19-chizma

**3-ta'rif**: Sodda sirtni lokal –topologik almashtirish natijasida hosil qilingan sirtga umumiy sirt deyiladi .

Umumiy sirtda o'z-o'zi bilan kesishuvchi chiziqlar, ustma-ust tushuvchi yopishgan (qo'shaloq ) nuqtalar, atrofi elementar sirt bo'lmagan nuqtalar mavjud bo'lishi mumkin.

Misol: $x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$, $y = u\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $z = v$ funktsiya tekisligidagi $P = \{(u,v) | -2 < u < 2, 0 < u < 2\}$ to'rtburchakni $E^3$ fazoga akslantiradi. $x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$, $y = u\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $-2 < u < 2$ tekislikda strofoidani ifodalaydi. Har bir nuqtasidan $OZ$ o'qqa parallel o'tkazilsa , umumiy tsilindirik sirt kelib chiqadi. $x = 0, y = 0, z = v$ $|v| < 2$ kesma sirtning o'z-o'zini kesish chizig'i bo'ladi.Ko'ramizki sirt tushunchasi murakkab tushuncha bo'lib, har qanday sirt uchun yaroqli umumiy ta'rif berishda hali hanuzgacha yakdillik yo'q. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi o'rnatilgan bo'lsa sirtga bunday ta'rif berish mumkin:




**4-ta'rif** : Sirt deb koordinatalari

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ushbu ta'rifni qabul etish uchun (1) oshkormas tenglamaga quyidagi talablar qo'yiladi.

a) $F(x, y, z)$ biror sohada uzluksiz ;

b) $F_x^{'}$, $F_y^{'}$, $F_z^{'}$ birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega .

v) $F_x^{'2} + F_y^{'2} + F_z^{'2} \neq 0$.

$\Omega$ – elementar sirt bo'lsin.Bu sirt $G$ tekis sohani $E^3$ fazoga topologik akslantirish orqali hosil qilinadi. $M(u, v) \in G$- ni $f$ topologik akslantirish $M^{'}(x, y, z) \in E_3$ ga quyidagi qoidaga ko'ra o'tkazsiḥ.

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v) \qquad (1^*)$$

Bu tenglamani elementar sirtning parametrik tenglamasi deyiladi. Fazoda $\{\ 0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\ \}$ dekart reper tanlangan bo'lsa,

$$\bar{r}\ (u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \qquad (2)$$

yoki

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \qquad (3)$$

ni hosil qilamiz. (3) ni $\Omega$ –elementar sirtning vektor ko'rinishidagi parametrik tenglamsi deyiladi .Sirtga qarashli $M^{'}(x, y, z)$ nuqtaning vaziyatini aniqlovchi $u, v$ –parametrlarga sirtning egri chiziqli yoki Gauss koordinatalari deyiladi.

5-ta'rif: Agar $\Omega$ sirtning har bir nuqtasi uchun regulyar parametrlashtirish mumkin bo'lgan atrof mavjud bo'lsa va sirtni shu atrofda (1*) tenglamalar orqali ifodalash mumkin bo'lib bu funktsiyalar regulyar ($k$ k marta uzluksiz differentsiallanuvchi, $k \geq 1$ )

$$rang \begin{Vmatrix} x_u^{'} y_u^{'} z_u^{'} \\ x_v^{'} y_v^{'} z_v^{'} \end{Vmatrix} = 2$$

bo'lsa , u holda $\Omega$ ni regulyar sirt deyiladi. $k = 1$ bo'lganda silliq sirt deyiladi. Silliq sirtni

$$z = f(x, y) \qquad (4)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin (isbotlansin ). $\Omega$ – sirtga qarashli ixtiyoriy egri chiziqning parametrik tenglamasi sifatida

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \qquad (5)$$

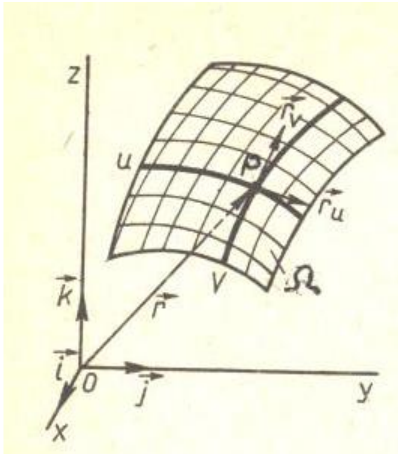
ni olishimiz mumkin.U holda $\gamma \subset \Omega$ chiziq

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(t) \quad (6)$$

vektor tenglamaga ega bo'ladi . $u$ yoki $v$ parametrlarni fiksirlab , sirtning koordinat chiziqlariga ega bo'lamiz.

“$u$ ”chiziq

$$\begin{cases} u = t, \\ v = const; \end{cases} \quad \vec{r} = \vec{r}(u, const);$$




“$v$ ”chiziq

$$\begin{cases} u = \cos nt, \\ v = t; \end{cases} \quad \vec{r} = \vec{r}(const, v) \quad (7)$$

Misol: 1. $y = x^2$ parabolik tsilindrning parametrik tenglamasi yozilsin .

Javob : $x = u$ , $y = u^2$, $z = v$ .

2. $z = pxy$ sirtning parametrik tenglamasi yozilsin .

Javob: $x = u$ , $y = v$ , $z = puv$.

**Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

1. Sirt tushunchasi va uning berilish usullarini aytib bering.
2. Elementar sirt,sodda sirt,umumiy sirt ta’riflarini keltiring.
3. Regulyar sirt deb qanday sirtga aytiladi?
4. Sirtga tegishli chiziqlar va ularning berilish usullarini ko`rsating. Misollar keltiring.
5. Qanday chiziqlar koordinat chiziqlar deb nomlanadi?
6. Qanday sirtlar tog`ri chiziqli sirtlar deb ataladi?
7. Aylanma sirtlar deb qanday sitrlarga aytiladi? Misollar keltiring.

## 26.Sirtning urinma tekisligi va normali.

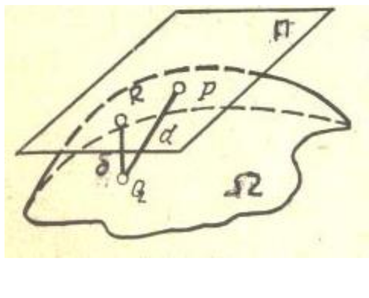
Reja:

1. Urinma tekislik ta’rifi
2. Asosiy teorema
3. Urinma tekislikning turlicha tenglamalari
4. Sirt normalining ta’rifi va tenglamasi
5. Misollar

**Mavzuning ba’yoni:**

Regulyar sirt

$$\Omega \ : \ \vec{r} = \vec{r}(u, v) \qquad (1)$$



parametrik tenglamasi orqali berilgan bo'lsin.
Sirtda $P(u,v)\in\Omega$ nuqtani olaylik. Sirtda $P$
nuqtaga cheksiz yaqin $Q(u+\delta u, v+\delta v)$ nuqtani 22-chizma
tanlaymiz. $P$ nuqtanidan o'tuvchi $\Pi$ tekislikni qaraylik. $P$ va $Q$ nuqtalar
tanlaymiz. $P$ nuqtanidan o'tuvchi $\Pi$ tekislikni qaraylik. $P$ va $Q$ nuqtalar orasidagi masofani $d$ orqali, $Q$ nuqtadan $\Pi$ tekislikkacha masofani $\delta$ orqali belgilaymiz.

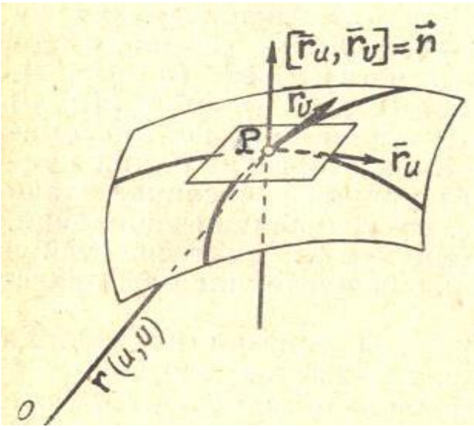
**1-ta'rif**: Agar $Q$ nuqta sirtda yotib , $P$ nuqtaga intilganda $\frac{\delta}{d}\to 0$ (nisbat 0 ga intilsa), u holda $\Pi$ tekislikni $\Omega$ sirtning $P$ nuqtasidagi urinma tekisligi deb ataladi.

Urinma tekislikka boshqa ta'rif berish ham mumkin:

**2-ta'rif**: Agar $Q\to P$ da $PQ$ to'g'ri chiziq va $\Pi$ tekislik tashkil etgan burchak nolga intilsa, u holda $\Pi$ tekislikni sirtning $P$ nuqtadagi urinma tekisligi deyiladi.

**Asosiy teorema** : (1) tenglama orqali berilgan silliq sirt o'zining har bir nuqtasida birdan-bir urinma tekislikka ega bo'lib, uning $P(u,v)$ nuqtasidagi urinma tekisligiga $\vec{r}_u'(u,v)$ , $\vec{r}_v'(u,v)$ vektorlar parallel vaziyatdadir.

**Isboti**: $\Omega$ sitrning $P(u,v)$nuqtasidagi urinma tekisligi $\Pi$ mavjud bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{Q\to P}\frac{\delta}{d}=0$ bajarilsin. Urinma tekislikning $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorlarga parallel vaziyatda bo'lishi va birdan birligini ko'rsataylik $\Pi$ tekislikka perpendikulyar birlik vektorni $\vec{n}$ orqali belgilaylik. O-qutb tanlaymiz.




23-chizma

$$\overrightarrow{OP}=\vec{r}(u,v),\ \overrightarrow{OQ}=\vec{r}(u+\delta u, v+\delta v);\quad d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\vec{r}(u+\delta u, v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right|$$

$$\delta=\left(\overrightarrow{PQ}\vec{n}\right)=\left|\left(\left(\vec{r}(u+\delta u, v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right)\vec{n}\right)\right|;\qquad \frac{\delta}{d}=\frac{\left|\left(\left(\vec{r}(u+\delta u, v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right)\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{r}(u+\delta u, v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right|}\quad (2)$$

$\delta u$ va $\delta v$ o'zaro bog'liqsiz ravishda nolga intilsa, $Q$ nuqta $P$ ga intiladi va shu bilan birga $d\to 0$.Umumiylikni daxlsiz qoldirib $Q$ nuqtani "$U$" chiziqda olaylik . (2) nisbat quyidagi ko'rinishga ega.

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\left(\left(\vec r(u+\delta u,v+\delta v)-\vec r(u,v)\right)\vec n\right)\right|}{\left|\vec r(u+\delta u,v+\delta v)-\vec r(u,v)\right|}\xrightarrow[\delta u\to 0]{}0 \qquad (3)$$

$Q\in\Omega$ nuqta “$v$” chiziqda yotsa,

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\left(\left(\vec r(u+\delta u,v+\delta v)-\vec r(u,v)\right)\vec n\right)\right|}{\left|\vec r(u+\delta u,v+\delta v)-\vec r(u,v)\right|}\xrightarrow[\delta v\to 0]{}0 \qquad (4)$$

(3) va (4) dan

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\frac{(\vec r(u+\delta u,v)-\vec r(u,v)}{\delta u}\vec n\right|}{\left|\frac{\vec r(u+\delta u,v)-\vec r(u,v)}{\delta u}\right|}\xrightarrow[\delta u\to 0]{}\frac{|(\vec r_u\vec n)|}{|\vec r_u|}=0 \quad , \qquad \frac{\delta}{d}=\frac{\left|\frac{\vec r(u,v+\delta v)-\vec r(u,v)}{\delta v}\vec n\right|}{\left|\frac{\vec r(u,v+\delta v)-\vec r(u,v)}{\delta v}\right|}\xrightarrow[\delta u\to 0]{}\frac{|(\vec r_v\vec n)|}{|\vec r_v|}=0$$

$|\vec r_u|\neq 0$ , $|\vec r_v|\neq 0$ bo’lganligidan

$$(\vec r_u\vec n)=0\,,\ (\vec r_v\vec n)=0 \qquad (5)$$

tengliklarga ega bo’lamiz.(5) dan $\vec r_u\perp\vec n$ va $\vec r_v\perp\vec n$ kelib chiqadi. $[\vec r_u\ \vec r_v]\|\vec n$ ekan.Ko’ramizki $\vec r_u\|\Pi$ va $\vec r_v\|\Pi$. $\vec n$ ning yagonaligidan urinma tekislikning birdan-birligi kelib chiqadi. $Q\in\Omega$ nuqtaning umumiy vaziyati uchun

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\frac{\vec r(u+\delta u,v+\delta v)-\vec r(u,v+\delta v)}{\delta u}\delta u\vec n+\frac{\vec r(u,v+\delta v)-\vec r(u,v)}{\delta v}\delta v\vec n\right|}{\left|\frac{\vec r(u+\delta u,v+\delta v)-\vec r(u,v+\delta v)}{\delta u}\delta u+\frac{\vec r(u,v+\delta v)-\vec r(u,v)}{\delta v}\delta v\right|}=\frac{\left|(\vec r_u'\vec n)\delta u+(\vec r_v'\vec n)\delta v+\varepsilon_1\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}\right|}{\left|\vec r_u'\delta u+\vec r_v'\delta v+\varepsilon_2\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}\right|}$$

(6) tenglik o’rinli bo’lib , $\delta u\to 0$ , $\delta v\to 0$ da $|\varepsilon_1|\to 0, |\varepsilon_2|\to 0$ (6) dan (5) ni e’tiborga olsak, $Q\to P$ da $\frac{\delta}{d}\to 0$ kelib chiqadi.Endi urinma tekislikning mavjud bo’lishini ko’rsatamiz. Bunda (5) tengliklarning bajarilishidan foydalanamiz. (6) dan

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\varepsilon_1\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}\right|}{\left|\vec r_u'\delta u+\vec r_v'\delta v+\varepsilon_2\sqrt{\delta u^2+\delta u^2}\right|}=\frac{|\varepsilon_1|}{\left|\vec r_u'\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}+\vec r_v'\frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}+\varepsilon_2\right|} \qquad (7)$$

$\delta u\to 0,\ \delta v\to 0$ , $|\varepsilon_1|\to 0$ , $|\varepsilon_2|\to 0$ , $\frac{\delta}{d}\to 0$ ni ko’rsatish uchun (7) maxrajini o’zgarmas miqdor bo’lishini ko’rsatishimiz kifoya.

$$\left(\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\right)^2+\left(\frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\right)^2=1$$

bo’lgani uchun qo’shuvchilardan biri $\frac{1}{\sqrt2}$ dan kichik emas deyish uchun asos bo’ladi.

$\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\geq\frac{1}{\sqrt2}$ $\Pi$ tekislikda $\vec r_u,\vec r_v$ vektorlarga nisbatan komplanar $\vec r_v$ vektorga perpendikulyar birlik $\vec e$ vektorni tanlaylik.

$$\left|\frac{\vec r_u\delta u}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}+\frac{\vec r_v\delta v}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\right|\ge\left|\vec e\left(\vec r_u\,\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}+\vec r_v\,\frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\right)\right|=\left|(\vec r_u\vec e)\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\right|\ge$$

$$\ge|\vec r_u|\sin\theta\frac{1}{\sqrt2}=C_1$$

bunda $Q$ - $\vec r_u,\vec r_v$ vektorlar tashkil etgan burchak. Yuqoridagi kabi muloxaza yurgizib $\frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\ge\frac{1}{\sqrt2}$ ni e’tiborga olsak

$$\left|\frac{\vec r_u\delta u}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}+\frac{\vec r_v\delta v}{\sqrt{\delta u^2+\delta v^2}}\right|\ge|\vec r_u|\sin\theta\frac{1}{\sqrt2}=C_2$$

ga ega bo’lamiz. Bu yerda $\vec e\perp\vec r_u$ -qilib olinadi. SHunday qilib (7) ning maxraji $C_1$ va $C_2$ sonlardan kichikroq son bo’lishi mumkin. Teorema to’la isbotlandi.

Endi urinma tekislik tenglamasini tuzamiz. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidagi urinma tekislik $\Pi$ da ixtiyoriy $K$ nuqtani olaylik. $\overrightarrow{PK},\vec r_u,\vec r_v$ -komplanar vektorlar.

$$\left(\overrightarrow{PK},\vec r_u,\vec r_v\right)=0 \qquad (8)$$

(8)-urinma tekislik tenglamasi . Agar sirt

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v) \qquad (9)$$

ko’rinishda berilgan bo’lsa , $P(u_0,v_0)$ nuqta koordinatalarini $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$ , $z_0=z(u_0,v_0)$ belgilasak , u holda $P(x_0,y_0,z_0)$, $k(x,y,z)$ nuqtalar uchun (8) ni quyidagi ko’rinishda yozish mumkin.

$$\left.\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & y'_v\end{vmatrix}\right|_{P(u_0,v_0)}=0 \qquad (10)$$

Agar sirt

$$z=f(x,y) \qquad (11)$$

ko’rinishda berilgan bo’lsa , u holda $x=u$ , $y=v$ , $z=f(u,v)$ dan

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0)\\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0)\end{vmatrix}=0 \qquad (12).$$

Urinma tekislik tenglamasiga ega bo’lamiz . (12) ni ochiq holda yozsak

$$z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (13)$$

kelib chiqadi . $P(0,0,0)$ nuqta uchun

$$z=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y \qquad (14) .$$

Oshkormas ko’rinishda berilgan sirt uchun urinma tekislik tenglamasini yozaylik .

$$\Omega:\varphi(x,y,z)=0 \qquad (\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\ne0) \quad (15)$$

$\varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0$ ayniyatga ega bo’lamiz. SHu ayniyatni $u$ va $v$ parametrlar bo'yicha differentsiallaymiz.

$$\begin{aligned}\varphi'_x x'_u+\varphi'_y y'_u+\varphi'_z z'_u&=0\\ \varphi'_x x'_v+\varphi'_y y'_v+\varphi'_z z'_v&=0\end{aligned} \qquad (16)$$

(16) $\vec{N}(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z)$ va $\vec{r}'_u,\vec{r}'_v$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ekanidan

$$(\vec{N}\vec{r}_u{}') = 0, \qquad (\vec{N}\vec{r}'_v)=0 \qquad (17)$$

kelib chiqadi.

Ko'ramizki $\vec{N}\perp\vec{r}'_u,$ $\vec{N}\perp\vec{r}'_v,$ u holda $\vec{N}\|[\vec{r}'_u,\vec{r}'_v].$

SHunday qilib , urinma tek islik tenglamasi:

$$\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \qquad (18)$$

3.Ta'rif: $\Omega$ sirtning $P$ nuqtasidagi normali deb shu nuqtadan o'tuvchi urinma tekislikka perpendikulyari to'g'ri chiziqqa aytiladi. $\vec{N}$ vektor normal to'g'ri chiziqqa yo'naltiruvchi vektor bo'lgani uchun uning tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)} \qquad (19)$$

yoki

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}_p}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}z'_u & x'_u\\ z'_v & x'_v\end{vmatrix}_p}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}x'_u & x'_u\\ y'_v & y'_v\end{vmatrix}_p} \qquad (20)$$

ko'rinishga ega.

Misol: $x^2+y^2+z^2=169$ sirtning $P(3,4,12)$ nuqtasidigi urinma tekisligi va normalining tenglamasi yozilsin.

Yechish:

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0 \Rightarrow$$

$3x+4y+12z-169=0$ urinma tekislik.

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$ - normal tenglamasi.

**Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

1. Sirtning urinma tekislik ta`rifini aytib bering.
2. Sirtning urinma tekislik haqidagi teoremasini keltring.
3. Parametrik ko`rinishda berilga sirtning urinma tekislikning tenglamasi yozing va misollar keltiring.

4. Sirtning normali deb qanday chiziqqa aytiladi?
5. Oshkor va oshkormas ko`rinishda berilga sirtning urinma tekislikning turlicha tenglamasi yozing va misollar keltiring.
6. Parametrik ko`rinishda berilga sirtning normal to`g`ri chiziq tenglamasini yozing va misollar keltiring.
7. Oshkor va oshkormas ko`rinishda berilga sirtning normal to`g`ri chiziq tenglamasini yozing va misollar keltiring.

## 27.Sirtning yopishma paraboloidi. Sirt nuqtalarining klassifikatsiyasi

Reja:

1. Yopishma paraboloid ta’rifi
2. Mavjudlik va yagonalik teoremasi
3. Yopishma paraboloid tenglamasi
4. Sirt nuqtalarining klassifikatsiyasi
5. Sirtning Dyupen indikatrisasi
6. Misollar.

**Mavzuning bayoni:**

Regulyar sirtning ixtiyoriy nuqtasini olib, shu nuqtani yetarlicha kichik atrofida tuzilishini aniqlash uchun uning shu nuqtasidagi urinma tekisligiga nisbatan chetlanishini turli yo’nalishlar uchun baholash kerak. Agar sirtning ixtiyoriy tanlangan nuqtasi atrofida yopishma paraboloidga nisbatan turli yo’nalishlar bo’yicha chetlanishi baholansa, sirtning tuzilishi va shakli haqida aniqroq tasavvurga ega bo’lamiz. Sirtning yopishma paraboloidi qanday figura. Urinma tekislikdan farqi nimada, uning xususiy hollari qanday kabi savollarga javob izlaylik.

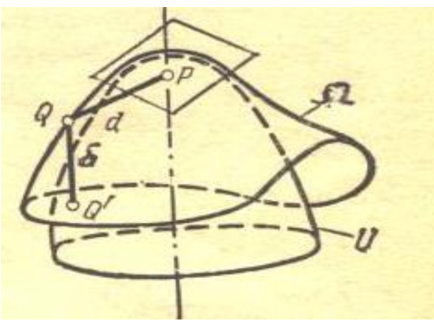
$\Omega$ -regulyar sirt bo’lsin. $P \in \Omega$ nuqtani olaylik $P$ nuqtada sirt urinma tekislik va normalga ega bo’lsin. Uchi shu $P$ nuqtada bo’lib, o’qi sirtning $P$ nuqtadagi normali bilan ustma-ust tushuvchi $U$ - paraboloidni qaraylik.

$\Omega$ sirtda $P$ nuqtaga yaqin $Q \in \Omega$ nuqta olamiz. $P$ va $Q$ orasidagi masofa $d$ bo’lsin. $Q$ nuqtadan paraboloid o’qiga paralel to’g’ri chiziq o’tkazib uning $U$ paraboloid bilan kesishish nuqtasini $Q'$ orqali belgilaymiz.

$Q$ va $Q'$ nuqtalar orasidagi masofa $\delta$ bo’lsin. $\rho(P,Q) = d,\quad p(Q,Q') = \delta$

**1-ta’rif:** Agar regulyar sirtning ixtiyoriy $P$ nuqtasida $U$ - paraboloid mavjud bo’lib, $Q \in \Omega$ nuqta $P$ nuqtaga intilganda

$$\frac{\delta}{d^2} \to 0 \quad (\lim_{Q\to P} \frac{\delta}{d^2} = 0) \qquad (1)$$



25-чизма

bajarilsa, u holda $U$ ni sirtning yopishma paraboloidi deb ataladi.

**Teorema:** Regulyar (ikki marta uzluksiz differentsilanuvchi) sirtning har bir nuqtasida birdan-bir yopishma paraboloid va uning aynigan hollari parabolik tsilindr yoki tekislik mavjuddir.

**Isboti:** sirt

$$\Omega: \quad \vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (2)$$

vektor ko'rinishida berilgan bilib, $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$ bo'lsin. Fazoviy dekart koordinatalar sistemasini shunday o'rnataylikki, $P$ koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsin. $XY$ koordinata tekisligi uchun sirtning shu nuqtadagi urinma tekisligini olaylik, u holda $Z$ o'q sirt normali bilan ustma-ust tushadi.

$Z$ o'qining yo'naltiruvchi vektori $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ga kollinear bo'lishini ko'ramiz.

$$[\vec{r}_u', \vec{r}_v'] \left\{ 0,0, \begin{vmatrix} x_u x_v \\ y_u y_v \end{vmatrix} \right\}, \quad \begin{vmatrix} x_u, x_v \\ y_u, y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

u holda

$x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ funktsiyalar teskarilanuvchi bo'ladi va biz sirtning

$$z = f(x,y) \qquad (3)$$

ko'rinishidagi oshkor tenglamasiga ega bo'lamiz. Sirtning $P(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidagi urinma tekisligi

$$z = z_0 + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (4)$$

tenglamaga ega bo'lib $P(0,0,0)$ bo'lganda

$$z = f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y \qquad (5)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Lekin bizda urinma tekislik xy tekislik bo'lib $z = 0$ tenglamaga egadir. U holda (5) dan

$$f_x'(0,0) = 0,\ f_y' = (0,0) = 0 \qquad (6)$$

kelib chiqadi.

SHunday qilib, koordinatalar boshi atrofida $f(x,y)$ funktsiyaning Teylor qatoriga yoyilmasi

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon(x,y)(x^2 + y^2) \qquad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bunda $r = f_{xx}''(0,0)$, $s = f_{xy}''(0,0)$, $t = f_{yy}''(0,0)$, $\varepsilon(x,y) \to 0$, $x \to 0$, $y \to 0$ da sirtning koordinatalar boshi atrofidagi tenglamasi

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon(x,y)(x^2 + y^2) \qquad (8)$$

ko'rinishda bo'lishi aniqlanadi. Uchi $P(0,0,0)$ nuqtada bo'lgan paraboloid va uning aynigan hollari parabolik tsilindr yoki tekislik tenglamasini

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \qquad (9)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ da tekislik kelib chiqadi. Yopishma paraboloid mavjud deb faraz qilib, uning birdan-birligini ko'rsataylik.

$P(0,0,0)$, $Q(x, y, f)$, $Q'(x, y, z)$.

$$\rho(P,Q) = d = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2(x,y)} \qquad (10)$$

$$\rho(Q,Q') = \delta = \left|\frac{1}{2}(r-a)x^2 + (s-b)xy + \frac{1}{2}(t-e)y^2 + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2)\right| \qquad (11)$$

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{\left|\frac{1}{2}(r-a)x^2 + (s-b)xy + \frac{1}{2}(t-e)y^2 + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2)\right|}{x^2 + y^2 + f^2(x,y)} \qquad (12)$$

dan $y = 0$, $x \to 0$ da $\frac{\delta}{d^2} \to \frac{1}{2}(r-a)$ kelib chiqadi. Bundan $a = r$ ga ega bo'lamiz. $y = 0$, $x \to 0$ da $\frac{\delta}{d^2} \to \frac{1}{2}(t-c) \to 0 \Rightarrow c = t$ $x = 0$, $y \to 0$ da $b = s$ bo'lishi aniqlanadi. SHunday qilib, yopishma paraboloid mavjud bo'lsa, uning tenglamasi

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) \qquad (13)$$

ko'rinishga ega va birdan-bir. (13) paraboloidning yopishma paraboloid ekani ta'rifni tekshirish orqali isbotlanadi. Haqiqatdan ham, $\frac{\delta}{d^2} = \frac{|\varepsilon(x,y)(x^2+y^2)|}{x^2+y^2+f^2(x,y)} < |\varepsilon(x,y)| \to 0$ teorema isbotlandi.

Yopishma paraboloidga bog'liq ravishda sirt nuqtalarini klassifikatsiyalash mumkin.

$rt - s^2 > 0$ da (13) elliptik paraboloid,

$rt - s^2 < 0$ da (13) giperbolik paraboloid,

$rt - s^2 = 0$ da parabolik tsilindrni ifoda etadi,

$r = t = s$ da tekislikka ayniydi.

**2-ta'rif**: Agar sirtning $P$ nuqtasidagi yopishma paraboloidi elliptik paraboloid bo'lsa, u holda $P$ nuqtani elliptik nuqta deyiladi.

**3-ta'rif**: Agar sirtning $P$ nuqtasidagi yopishma paraboloidi giperbolik paraboloid bo'lsa, u holda $P$ nuqtani giperbolik nuqta deyiladi.

**4-ta'rif**: Agar sirtning $P$ nuqtasidagi yopishma paraboloidi parabolik tsilindr bo'lsa, u holda $P$ nuqtani parabolik nuqta deyiladi.

**5-ta'rif**: Agar sirt $P$ nuqtasining yetarlicha kichik atrofi tekislik qismidan iborat bo'lsa, u holda $P$ nuqtani sirtning dumaloqlanish nuqtasi deyiladi.

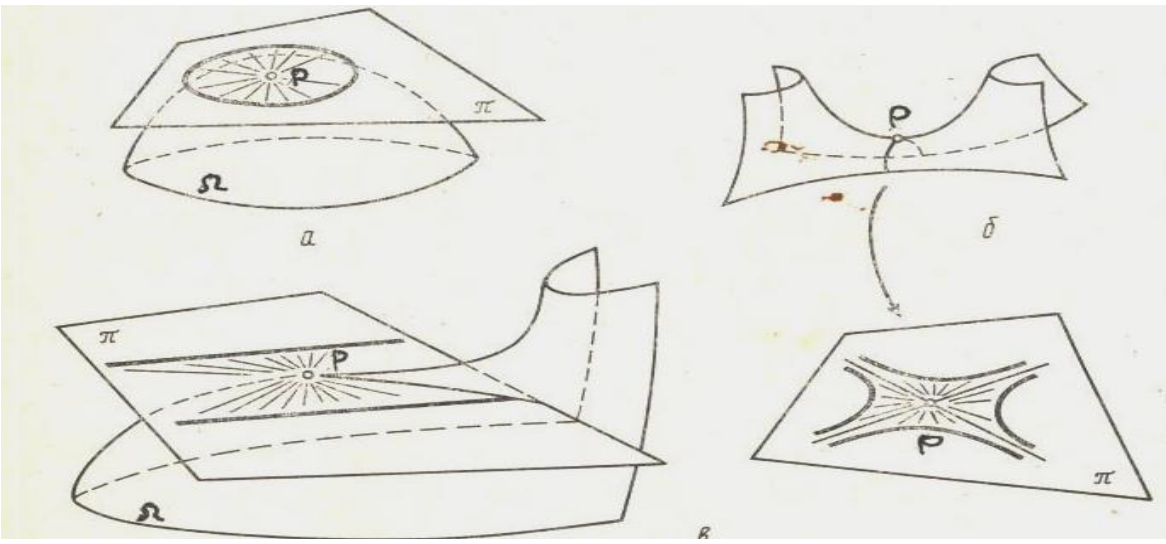
$P$-elliptik nuqta bo'lsin. SHu nuqtada yopishma paraboloid o'rnatib, uni urinma tekislikka nisbatan $\frac{1}{2}$ masofada (uzoqlikda) turuvchi tekislik bilan kesamiz. Kesimda ellips hosil bo'ladi. Kesimdagi ellipsni urinma tekislikdagi ortoganal proektsiyasiga Dyupen indikatrisasi yoki egrilik indikatrisasi deyiladi. Paraboloidning (13) tenglamasiga $z=\pm\frac{1}{2}$ qo'ysak,

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm1 \qquad (14)$$

kelib chiqadi. Paraboloid fazoning $z>0$ qismida joylashsa, "+" ishora, $z<0$ qismida joylashsa, «-» ishora olinadi.

Sirtning $P$ nuqtasida urinma tekislik (ellips) yasalgan bo'lsin. Ellipsning $P$ markazidan ikkita qo'shma diametrlarni o'tkazsak, ularning yo'nalishlariga sirtning qo'shma yo'nalishlari deyiladi.

Dyupen indikatrisasi o'qlarining yo'nalishlariga sirtning bosh yo'nalishlari deyiladi. Sirtning giperbolik nuqtalarida indikatrisa yuqoridagi kabi ta'riflanadi (14) tenglama qo'shma giperbolalarni ifodalaydi. Sirtning giperbolik nuqtalarida qo'shma va bosh yo'nalishalardan tashqari asimptotik yo'nalishlar tushunchasini ham kiritish mumkin. $P$-giperbolik nuqta bo'lsa, indikatrisa urinma tekislikka qarashli qo'shma giperbolalar ko'rinishida bo'lib, uning bir juft asimptotalari mavjuddir. $P$-sirtning parabolik nuqtasi bo'lsa, sirtning Dyupen indekatrisasi $P$ nuqtaga nisbatan simmetrik joylashgan bir juft parallel to'g'ri chiziqlardan iboratdir. Sirtning dumaloqlanish nuqtalarida indikatrisa mavjud emas. Sirtning indikatrisasi tushunchasini frantsuz geometrigi Dyupen kiritgan.




26-chizma

Elliptik nuqtalar uchun $rt-s^2>0$

Giperbolik nuqtalar uchun $rt-s^2<0$ va

Parabolik nuqtalar uchun $rt-s^2=0$ munosabatlar o'rinlidir.

Misol: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning $(0,0,c)$ nuqtasidagi paraboloidning tenglamasi yozilsin.

Echish: $f(x,y)=z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $\quad f'_x=\frac{\frac{-2cx}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ , $f'_x(0,0)=0$,

$f'_y=-\frac{\frac{cy}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$, $f'_y(0,0)=0$ $f''_{xx}(0,0)=-\frac{c}{a^2}$ $f''_{yy}(0,0)=-\frac{c}{b^2}$ $f''_{xy}(0,0)=0$ .

SHunday qilib $rt-s^2=\frac{c^2}{a^2b^2}>0$ bo’lib, $z=c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$.

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Sirtning yopishma paraboloid ta`rifini aytib bering.
2. Sirtning yopishma paraboloidining mavjudlik va yagonalik teoremasi keltring.
3. Sirt nuqtalarining klassifikatsiyasi qanday?
4. Sirtning qanday nuqtasi eliptik nuqta deyiladi?
5. Sirtning qanday nuqtasi giperbolik nuqta deyiladi?
6. Sirtning qanday nuqtasi dumaloqlanish nuqta deyiladi?

## 28-29-30.SIRTNING CHIZIQLI ELEMENTI VA UNING TADBIQLARI.
## SIRT SOHASINING YuZI

**Reja**.

1. Sirtning birinchi kvadratik formasi
2. Birinchi kvadratik formasining ishorasi
3. Sirtga qarashli chiziqning yoy uzunligi
4. Sirtga qarashli chiziqlar tashkil etgan burchak
5. Sirt koordinat chiziqlari tashkil etgan burchak
6. Sirt soxasining yuzini hisoblash ta’rifi
7. Sirt soxasining yuzini hisoblash formulasi
8. Misollar

**Mavzuning bayoni:**

$\Omega$ regulyar sirt $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ vektor tenglamasi orqali berilgan bo'lsin. $P(u,v)$ nuqtada

$$[r'_u, r'_v]\neq 0, \varphi_1 = d\vec{r}^{\,2} \qquad (1)$$

ifodaga sirtning birinchi kvadratik formasi deyiladi. Ko'ramizki, sirtning birinchi kvadratik formasi $\vec{r}$ - to'la differentsialining kvadratiga teng. $d\vec{r}=\vec{r}'_u du+\vec{r}'_v dv$ bundan

$$d\vec{r}^{\,2}=\vec{r}'^2_u du^2+2(\vec{r}'_u\vec{r}'_v)dudv+\vec{r}'^2_v dv^2$$

$$\varphi_1=\vec{r}'_u du^2+2(\vec{r}'_u,\vec{r}'_v)dudv+\vec{r}'^2_v dv^2 \qquad (2)$$

(2) sirtning har bir nuqtasida $du$ va $dv$ larga nisbatan kvadratik formani ifodalaydi. $d\vec{r}'^{\,2}=ds^2$, $ds=\sqrt{d\vec{r}'^{\,2}}$ ni e'tiborga olsak,

$$ds^2=\vec{r}'^2_u+2(\vec{r}'_u,\vec{r}'_v)dudv+\vec{r}'^2_v dv^2 \qquad (3)$$

(3) ni sirtning chiziqli elementi deyiladi va uni birinchi kvadratik forma desa bo'ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik.

$$E=\vec{r}'^2_u,\quad F=(\vec{r}'_u,\vec{r}'_v),\quad G=\vec{r}'^2_v \qquad (4)$$

$(g_{11}=\vec{r}'^2_u, g_{12}=(\vec{r}'_u,\vec{r}'_v), g_{22}=\vec{r}'^2_v)$ belgilash ham mumkin. $\varphi_1=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$

Bundan

$$EG-F^2>0 \qquad (6)$$

haqiqatan ham, $\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2=[\vec{r}_u\vec{r}_v]^2>0$. Ko'ramizki $\varphi_1$ musbat ishorali va $\vec{r}'^2_u>0$. $\Omega$ -sirtga qarashli $\gamma$ chiziq $u=u(t)$, $v=v(t)$ parametrik tenglama orqali berilgan bo'lib, $t_0\le t\le t_1$. $\gamma$ chiziqning vektor tenglamasi

$$\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t)) \qquad (7)$$

ko'rinishga ega. $\gamma$ chiziqning $M(t_0)$ va $N(t_1)$ nuqtalari orasidagi yoy uzunligini xisoblaylik.

$$ds=|d\vec{r}|=|\vec{r}'(u(t),v(t))|dt=\sqrt{d\vec{r}^{\,2}}=\sqrt{\varphi_1}=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}*\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

Bundan

$$s(t)=\int_{M(t_0)}^{N(t_1)}\sqrt{\varphi_1}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2_t+2Fu'_t v'_t+Gv'^2_t}\,dt \qquad (8)$$

(8) $\Omega$ sirtga qarashli $\gamma$ silliq chiziqning $M(t_0)$ va $N(t_1)$ nuqtalari orasidagi yoy uzunligining hisoblash formulasidir.

$\Omega$ regulyar sirtda $\gamma$ silliq chiziqdan tashqari ushbu chiziq bilan kesishuvchi $L$ silliq chiziq $u=u(\tau)$, $v=v(\tau)$ tenglama orqali aniqlangan bo'lsin. $\gamma$ va $L$ chiziqlar $P(u,v)\in\Omega$ nuqtada kesishsin.

**Ta'rif:** $\Omega$ regulyar sirtga qarashli $\gamma$ va $L$ silliq chiziqlar tashkil etgan burchak deb, ularning kesishish $P$ nuqtasida $\gamma$ va $L$ chiziqlarga o'tkazilgan urinmalar tashkil etgan eng kichik burchakka aytiladi. $\gamma$ chiziqqa o'tkazilgan urinma vektor

$$\frac{dr}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \qquad (9)$$

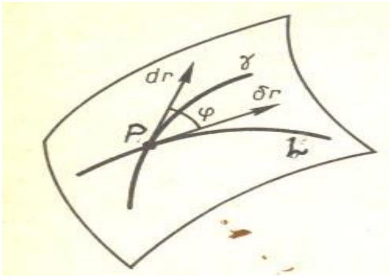
$L$ chiziqqa $P$ nuqtada o'tkazilgan urinma vektor

$$\frac{\delta r}{\delta\tau} = \vec{r}_u \frac{\delta u}{\delta\tau} + \vec{r}_v{}' \frac{\delta v}{\delta\tau} \qquad (10)$$

$d\vec{r} = \vec{r}_u{}'du + \vec{r}_v{}'dv$ , $\delta\vec{r}\,' = \vec{r}_u{}'\delta u + \vec{r}_v{}'\delta v$

vektorlarni skalyar ko'paytmasidan

$$\cos\varphi = \frac{(d\vec{r}\,\delta\vec{r}\,)}{\sqrt{dr^{-2}}\sqrt{\delta\tau^2}} \qquad (11)$$



27-чизма

kelib chiqadi.

$$d\vec{r}^{\,-2} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \,(\alpha)$$

$$\delta\vec{r}^{\,-2} = E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + C\delta v^2 \left(\beta\right)$$

$$(d\vec{r}\,\delta\vec{r}\,) = \vec{r}_u{}'^2 du\delta u + (\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}')(du\delta v + dv\delta u) + \vec{r}_v{}'^2 dv\delta v =$$

$$= Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v(\gamma)$$

formuladan foydalansak,

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Ddv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \qquad (12)$$

formulaga ega bo'lamiz. $\Omega$ sirtga qarashli koordinat chiziqlar kesishib tashkil etgan burchak formulasini yozaylik.

$$\gamma : \begin{cases} u = t \\ v = const \end{cases} \qquad L : \begin{cases} u = const \\ v = t \end{cases} \qquad (13)$$

$\gamma$ uchun $dv = 0$, $L$ uchun $\delta u = 0$ bo'lgani uchun (12) dan

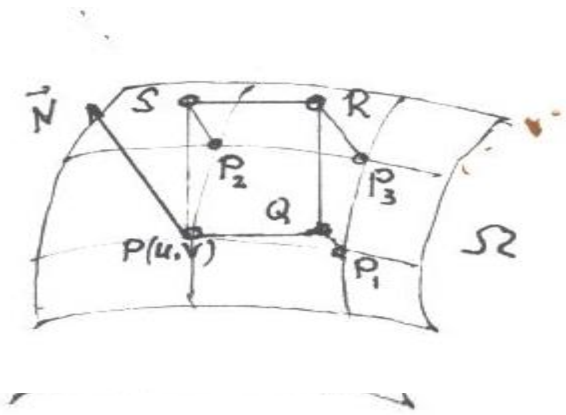
$$\cos\varphi = \frac{Fdu\delta v}{\sqrt{Edu^2}\sqrt{G\delta v^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \qquad (14)$$

(14) dan quyidagi teorema kelib chiqadi.

**Teorema:** $\Omega$ sirt koordinat chiziqlari ortogonal bo'lishi uchun $F = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Endi $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ vektor ko'rinishda berilgan $\Omega$ silliq sirt sohasining yuzini hisoblash formulasini yozaylik.

Sirtning silliq chiziqlar qism yoylari bilan chegaralangan $\Phi$ sohasini ajrataylik. $\Phi$ sohani $u$ ,$v$ parametrlarining o'zgarish sohasi deb qarash mumkin. $\Phi$ sohaning har bir nuqtasiga $u$ ,$v$ parametrning fiksirlagan qiymatlari mos keladi va aksincha. $\Phi$ soxani "$u$" va "$v$" koordinat chiziqlar oilasi orqali egri chiziqli parallelogrammlarga ajratamiz. qarama-qarshi tomonlar juftlaridan biri "$u$" chiziqlar bilan, ikkinchisi "$v$" chiziqlar bilan chegaralanadi.




28-chizma

CHizmada $PP_1\ \ P_2P_3$ egri chiziqli parallelogramm tasvirlangan bo'lib, uchlari $P(u,v)$, $P_1(u+\Delta u, v)$, $P_2(u, v+\Delta v)$, $P_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$ koordinatalarga ega. $\vec{N}$ -sirtning $P$ nuqtadagi normal vektori bo'lsin. "$u$" va "$v$" chiziqlarga $P$ nuqtada urinmalar o'tkazamiz. $PP_1\ \ P_2P_3$ egri chiziqli parallelogrammni $\vec{N}$ ga parallel ravishda urinma tekislikka proektsiyalaymiz. Urinma tekislikda $PQSR$ to'g'ri parallelogramm hosil bo'ladi. Uni $\vec{r}_u\ \ \Delta u$ va $\vec{r}_v\ \ \Delta v$ vektorlar bo'yicha ko'rilgan urinma tekislikka tegishli parallelogramm bo'lishidan $PP_1\ \ P_2P_3$ parallelogramm o'rniga olish mumkinligi kelib chiqadi.

$PQSR$ parallelogramm yuzini $G(g)$ orqali belgilaylik. $\Phi$ sohadagi egri chiziqli parallelogrammlarning yig'indisi $G=\sum G(g)$ bo'lsin.

Ta'rif: Sirt sohasi $\Phi$ ning yuzi deb, $g$ soha o'lchov bo'yicha cheksiz kichrayganda

$$S = l\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \sum_g G(g) \qquad (15)$$

songa aytiladi.

$$G(g) = \left|\left[\vec{r}_u{}'\Delta u \quad \vec{r}_v{}'\Delta v\right]\right| = \left|\left[\vec{r}_u{}' \ \ \vec{r}_v{}'\right]\right|\Delta u\Delta v \qquad (16)$$

$\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'$ hosilalarning uzluksizligidan (15) limit mavjud bo'lib, ikki karrali integral ta'rifi bo'yicha

$$S = \iint_{\Phi} \left|\left[\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\right]\right| du dv \qquad (17)$$

ga tengdir.

SHunday qilib,

$$S = \lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \sum_g G(g)$$

$$\left[\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\right]^2 + \left(\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\right)^2 = \vec{r}_u{}'^2\vec{r}_v{}'^2 \qquad (18)$$

(4) dan foydalanib, (18) dan

$$\left(\left[\vec{\tau}_u' \vec{\tau}_v'\right]\right) = \sqrt{EG - F^2} \qquad (19)$$

tenglikni keltirib chiqarish mumkin.

$$S = \iint\limits_{\Phi} \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (20)$$

(20) $\Omega$ sirt $\Phi$ sohasi yuzini hisoblash formulasi bo'lib, $\varphi_1$ forma koeffitsientlari orqali ifodalanadi.

Misol: $R$ radiusli sfera yuzi hisoblansin. Sferaning parametrik tenglamasi

$x = R\cos u \cos v$, $y = R\sin u \cos v$, $r = R\sin v$

$$\Phi = \left\{ (u,v) \middle| 0 \le u \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

$\vec{r}_u' = -R\sin u \cos v \cdot \vec{i} + R\cos u \cos v \cdot \vec{j}$ , $\vec{r}_v' = -R\cos u \sin v \cdot \vec{i} - R\sin u \sin v \cdot \vec{j}$ ,

$E = \vec{r}\,'^2(u) = R^2\cos^2 v$ , $G = \vec{r}\,'^2(v) = R^2$ , $F = (\vec{r}_u' \vec{r}_v') = 0$ ,

$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos v$ ,

$$S = \iint\limits_{\Phi} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = R\int_0^{2\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv = 4\pi R^2$$

Agar sirt $z = g(x,y)$ tenglamasi orqali berilgan bo'lsa, uning yuzini hisoblash formulasi

$$S = \iint\limits_{(\Phi)} \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\; dx\, dy \qquad (21)$$

ko'rinishda yoziladi. Isbotlashni o'quvchiga tavsiya etamiz.

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


## Nazorat savollari

1. Sirtning birinchi kvadratik formasi ta`rifini ayting.
2. Sirtning chiziqli elementi qanday tadbiqlarga ega?
3. Sirtga qarashli chiziqning yoy uzunligini qanday toppish mumkin?
4. Sirt koordinat chiziqlari tashkil etgan burchak qanday formula bilan hisoblanadi?
5. Sirt soxasining yuzini hisoblash ta'rifini keltirng.
6. Sirt soxasining yuzini hisoblash formulasini aytib bering. Misollar keltiring.

**31.Sirtning ikkinchi kvadratik formasi. Sirtga qarashli chiziqlarning normal va geodezik egriligi. Меньe teoremasi**

**Reja:**

1. Ikkinchi kvadratik forma ta'rifi
2. Ikkinchi kvadratik forma koeffitsientlari
3. Normal va geodezik egrilik
4. Normal va geodezik egrilik formulalari
5. Меньe teoremasi
6. Misollar

Mavzuning bayoni:

Sirt ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lib,

$$\vec r = \vec r(u,v), \quad (u,v)\in \Phi \qquad (1)$$

vektor ko'rinishida berilgan bo'lsin. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidagi normalning birlik vektori

$$\vec n = \frac{[\vec r_u'\ \vec r_v']}{|\vec r_u'\ \vec r_v'|} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}[\vec r_u'\ \vec r_v'] \qquad (2)$$

Radius vektorni ikki marta differentsiallasak

$$d^2\vec r = \vec r_{uu}''du^2 + 2\vec r_{uv}''dudv + \vec r_{vv}''dv^2 + \vec r_u' d^2u + \vec r_v' d^2 v \qquad (3)$$

**Ta'rif:** $L$ sirtning ikkinchi kvadratik formasi deb $d^2\vec r$ va $\vec n$ vektorlarning skalyar ko'paytmasiga aytiladi va

$$\varphi_2 = (d^2\vec r\vec n) = (\vec r_{uu}''\vec n)\,du^2 + 2(\vec r_{uv}''\vec n)du\,dv + (\vec r_{vv}''\vec n)\cdot dv^2 \qquad (4)$$

belgilanadi.

$$L = (\vec r_{uu}''\vec n)\,, \quad M = (\vec r_{uv}''\vec n)\quad , \quad N = (\vec r_{vv}''\vec n) \qquad (5)$$

belgilash kiritamiz.

$$\varphi = Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2 \qquad (6)$$

(6) $du$ , $dv$ differentsiallarga nisbatan kvadratik formadir. $L, M$ , $N$ koeffitsentlari uchun qo'yidagi hisoblash formulalari

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\vec r_{uu}''\vec r_u'\vec r_v')\,, M = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\vec r_{uv}''\ \vec r_u'\vec r_v')\,, N = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\vec r_{vv}''\ \vec r_u'\vec r_v')$$

o'rinli bo'lib, ularni

$$L = -(\vec r_u'\ \ \vec n_u') \qquad M = -(\vec r_u'\,\vec n_v') = -(\vec r_v'\ \ \vec n_u') \qquad N = -(\vec r_v'\ \ \vec n_v')$$

ko'rinishida ifodalash ham mumkin. Buning uchun $(d^2\vec r\,\vec n) = -(d^2\vec r\ \alpha\vec n)$ tenglikdan foydalanish kerak (isbotlang). $\Omega$ regulyar sirtda $P(u,v)$ nuqta orqali o'tuvchi $\gamma : u = u(s), v = v(s)$ chiziqni olaylik. $\vec\tau$ urinmasining birlik vektori bo'lsin. $\vec d = [\vec n\,\vec\tau]$ belgilaylik $P(u,v)\in\Omega$ nuqtada $\vec\tau,\ \vec n$ va $\vec b$ chiziqli erkli vektorlar orqali

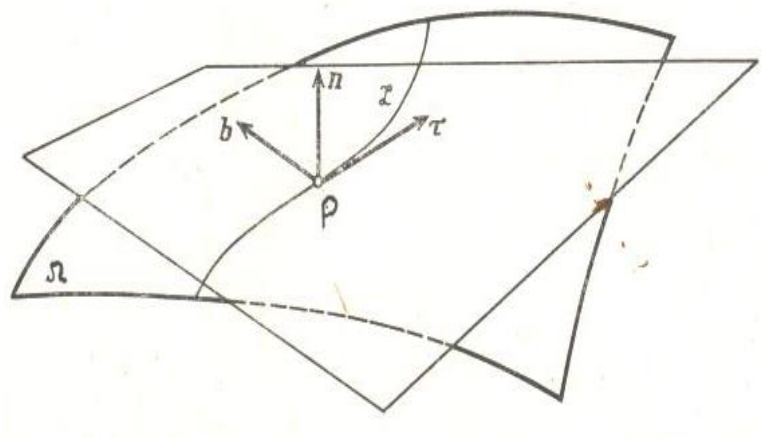
$$\ddot{\vec r}_{ss} = \alpha\vec\tau + \beta\vec n + \gamma\vec b \qquad (10)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$\left(\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{\tau}\right)=0\rightarrow\alpha=0 \quad \ddot{\vec{r}}_{ss}=\beta\vec{n}+\gamma\vec{b} \qquad (11)$$

$$\beta=\left(\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{n}\right),\gamma=\left(\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{b}\right)$$

koeffitsientlar geometrik ma'noga ega.




29-chizma

**Ta'rif:** sirtga qarashli γ chiziqning $P(u,v)$ nuqtasidagi normal egriligi deb chiziqning $p(u,v)\in\Omega$ nuqtasidagi egrilik vektorini sirtning birlik normal vektori qarashli bo'lgan to'g'ri chiziqqa proektsiyasiga aytiladi.

Normal egrilikni $k_n=\left(\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{n}\right)$ belgilaymiz. Ko'ramizki, $k_n=\beta$

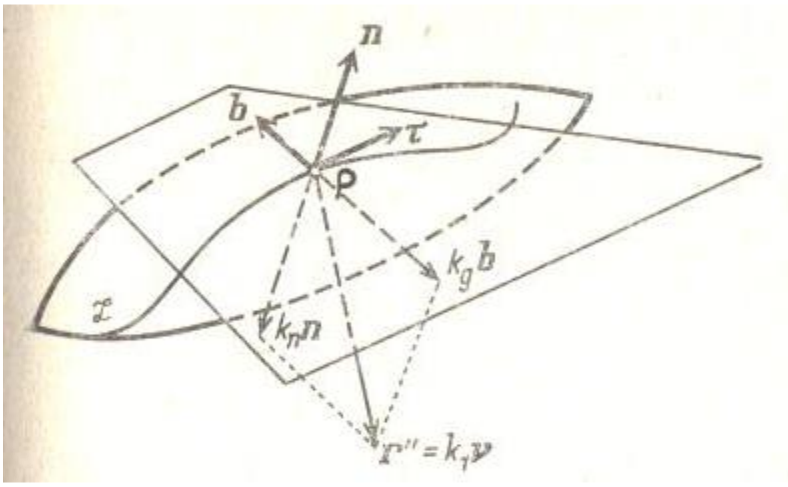
**Ta'rif:** sirtga qarashli γ chiziqning $P\in\Omega$ nuqtasidagi geodezik egriligi deb γ chiziqning $P$ nuqtadagi $\ddot{\vec{r}}_{ss}$ egrilik vektorini $\bar{b}$ vektor qarashli bo'lgan to'g'ri chiziqqa proektsiyasiga aytiladi va uni $k_g=\gamma=(\vec{r}_{ss}\vec{b})$ belgilaymiz.

Agar $\gamma$ chiziqning $P$ nuqtadagi oddiy egriligi noldan farqli bo'lsa, ya'ni $k_1=\left|\ddot{\vec{r}}_{ss}\right|\neq 0$, $\ddot{\vec{r}}_{ss}=k_1\vec{v}$ u holda,

$$k_n=(\ddot{\vec{r}}_{ss},\vec{n})=k_1(\vec{v},\vec{n})=k_1\cos\theta \qquad (12)$$

bunda $\theta=\angle(\vec{v},\vec{n})$

$$k_g(\ddot{\vec{r}}_{ss},\vec{b})=k_1(\vec{v},\vec{\tau},\vec{n}) \qquad (13)$$




30-rasm

Sirtning $P(u,v)$ nuqtasida umumiy $(du,dv)$ yo'nalishdagi sirtga qarashli barcha chiziqlar uchun $k\cos\theta$ bir xil qiymatga egaligini ko'rsataylik.

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\vec{r}''_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}''_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}''_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\vec{r}'_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}'_v\frac{d^2v}{ds^2} \qquad (14)$$

(14) ning chap va o'ng qismini $\vec{n}$ vektorga skalyar ko'paytirib $(\vec{r}'_u\vec{n})=(r'_v\vec{n})=0$ ni e'tiborga olsak,

$$k_n=(\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{n})=k_1\cos\theta=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \qquad (15)$$

$$ds^2=\varphi_1=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \qquad (16)$$

$$k_n=k_1\cos\theta=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \qquad (17)$$

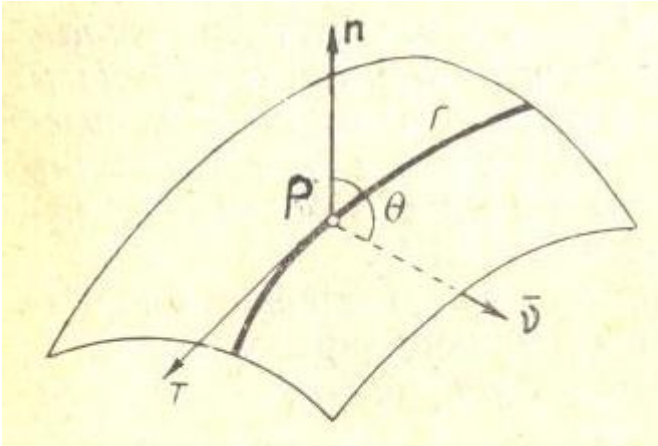
**Ta'rif:** Sirtning $P$ nuqtasidagi normal egriligi deb, ikkinchi kvadratik formaning birinchi kvadratik formaga bo'lgan nisbatiga aytiladi.

Ko'ramizki $k_n$ $\gamma\in\Omega$ chiziqning $P$ nuqtasidagi urinmasining yo'nalishiga ya'ni $du:dv$ nisbatga bog'liq. Umumiy urinmalik barcha chiziqlar uchun $k_n$ bir xil qiymatga ega.

$\Omega$ sirtning $P(u,v)$ nuqtasidan shu nuqtadagi $\vec{n}$ vektorga va $du:dv$ yo'naishga parallel ravishda $\Pi$ tekislik o'tkazaylik. $\Pi$ tekislik $\Omega$ sirt bilan normal kesim deb ataluvchi chiziq bo'yicha kesishadi.

SHunday qilib, sirtning $P$ nuqtasi orqali $du:dv$ yo'nalish bo'yicha o'tuvchi sirtga qarashli chiziqlar orasida $L$ normal kesim ham mavjud. Normal kesim egriligiga teskari miqdorga normal egrilik radiusi, uning ikkinchi uchiga normal egrilik markazi deyiladi.

Meнье teoremasi. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasisidan $du:dv$ yo'nalish bo'yicha $\Pi$ tekislik o'tkazilgan bo'lsin. $\Pi'$ tekislik $\Omega$ sirt bilan $\gamma$-og'ma kesim bo'yicha kesishsin. U holda normal kesim $L$ egrilik markazining $\Pi'$ tekislikdagi proektsiyasi $\gamma$ og'ma kesimning egrilik markazi bilan ustma-ust tushadi.




31-chizma

32-chizmada $C_0$ nuqta normal kesimning egrilik markazi, $C$ esa ixtiyoriy kesim $\gamma$ ning egrilik markazi bo'lib $C_0C \perp CP$

$$\rho_0 = \rho_{c_0} = \frac{1}{k_1}, \qquad \rho = \rho_c = \frac{1}{k_n} \qquad (18)$$

Менье teoremasini boshlang'ich varianti quyidagicha. Sirt ustida yotuvchi va sirtning berilgan nuqtasidan o'tuvchi umumiy urinmali barcha chiziqlarning egrilik markazlari diametri shu nuqtadagi normal kesimning egrilik radiusiga teng bo'lib, o'zi esa chiziqlarning umumiy normal tekisligida yotgan aylanada joylangandir. Normal kesim uchun $\theta = 0$ bo'lib (17) formuladan

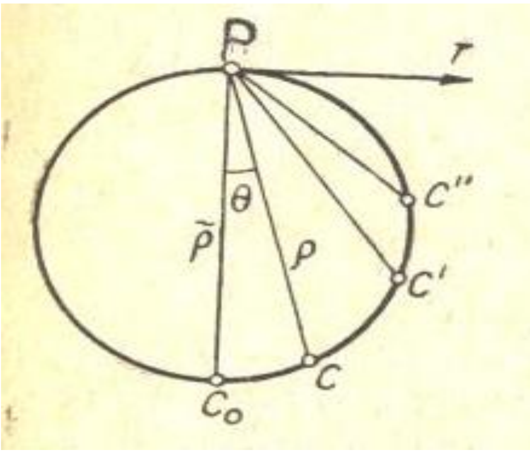
$$k_n = k_1 \qquad (19)$$

kelib chiqadi, ya'ni normal kesim uchun normal egrilik oddiy egrilikka aylanadi.

Agar sirtda $du:dv$ yo'nalish aniqlangan bo'lsa, u holda shu yo'nalishdagi normal egrilik

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

formula orqali hisoblanadi




32-chizma

Misol: $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$ paraboloidning $(0,0,0)$ nuqtasidagi $dx:dy$ yo'nalish bo'yicha normal egriligi aniqlansin.

Echish: $x=u$, $y=v$, $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$, $u=0$, $v=0$.

$$E=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2=1, \qquad F=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'=0$$

$$G=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2=1$$

$$L=\begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=a,\ M=0,\ N=b,\quad k_n=\frac{adx^2+bdy^2}{dx^2+dy^2}.$$

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi ta`rifini aytib bering.
2. ISirtning ikkinchi kvadratik forma koeffitsientlari qanday hisoblanadi?
3. Qanday egrilik sirtning normal egriligi deyiladi?
4. Sirt ustidagi chiziqning egriligi deb qanday egrilikka aytiladi? Misollar keltring.
5. Sirtning qanday egriligi uning geodezik egriligi deyiladi?
6. Sirtning normal va geodezik egrilik formulalari qaysi vektorlar orqali ifodalanadi?
7. Men`e teoremasi teoremasini aytib bering.

## 32. Bosh egriliklar. Sirtning Dyupen indikatrisasi

**Reja:**

1. Indikatrisa ta'rifi
2. Indikatrisa formulasi
3. Sirt nuqtalarini sinflarga ajratish
4. Eyler formulasi
5. Bosh yo'nalishlar

**Mavzuning bayoni:**

Regulyar sirt

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

vektor ko'rinishda berilgan bo'lsin. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidagi $du:dv$ yo'nalish bo'yicha normal egriligi $K_n$ bo'lsin. Sirtning $P$ nuqtasida urinma tekislik yasaymiz. SHu nuqtadan o'tuvchi barcha normal kesimlarning urinmasiga boshlang'ich $P$

nuqtadan uzunligi $R_n = \frac{1}{\sqrt{K_n}}$ ga teng kesmalarni mos ravishda qo'yamiz.

**Ta'rif**: Sirtning $P$ nuqtasidan o'tuvchi urinma tekislikka qarashli $\sqrt{|R_n|}$ ga teng uzunlikdagi kesmalar ikkinchi uchlarining geometrik o'rniga sirtning $P$ nuqtadagi Dyupen indikatrisasi deyiladi.

$P$ nuqtani koordinatalar boshi uchun $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ vektorlarni bazis vektorlar uchun tanlaymiz. SHu bilan urinma tekislikda affin koordinatalar sistemasini o'rnatgan bo'lamiz

Indikatrisada ixtiyoriy $M$ nuqtani tanlaymiz.

$$\overrightarrow{PM} = \xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v \qquad (2)$$

$\overrightarrow{PM}$ yo'nalishning birlik vektori $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ bo'lsin.

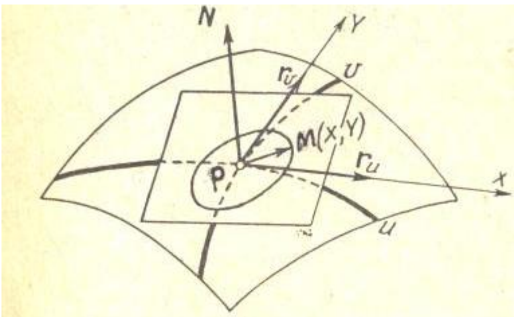
$$\xi = \sqrt{|R_n|}\frac{du}{ds}, \quad \eta = \sqrt{|R_n|}\frac{dv}{ds} \qquad (3)$$

bundan

$$\frac{du}{ds} = \frac{\xi}{\sqrt{|R_n|}}; \frac{dv}{ds} = \frac{\eta}{\sqrt{|R_n|}} \qquad (4)$$

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{R_n}} = L\left(\frac{du}{ds}\right)_2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$ formulaga (4) ni qo'yamiz

$$\frac{|R_n|}{R_n} = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 \qquad (5)$$




$\frac{|R_n|}{R_n} = \pm 1$ bo'lgani uchun

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \pm 1 \qquad (6)$$

$\xi : \eta = du : dv$ bo'lgani uchun

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \pm 1 \qquad (7)$$

Dyupen indikatrisasining formulasiga ega bo'lamiz. Dyupen frantsuz matematigi 1784-1873 vaqt oralig'ida yashagan.

$LN - M^2 < 0$ bo'lsa, $P$-giperbolik nuqta., bo'lib, indikatrisa bir juft qo'shma giperbola ko'rinishida bo'ladi.

$LN - M^2 > 0$ bo'lsa $P$-elliptik nuqta. Indikatrisa ellipsdan iborat.

$LN - M^2 = 0$ ,bo'lsa $P$- parabolik nuqta bo'lib, indikatrisa $P$-nuqtaga nisbatan simmetrik bir juft parallel to'g'ri chiziq ko'rinishida bo'ladi.

Dyupen indikatrisasi tushunchasi bilan egrilik indikatrisa quyidagi hol uchun ustma-ust tushadi.

$\Omega$ sirtni

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon(x,y)(x^2+y^2) \qquad (8)$$

ko'rinishdagi tenglama bilan ifodalash mumkin bo'lsin. (mavzu: Yopishma paraboloidga qarang).

$P(0,0)$ nuqtadagi sirtning dyupen indikatrisasi

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1 \qquad (9).$$

Sirt va uning $P$ nuqtadagi yopishma paraboloidi

$$z=\frac{1}{2}\left(rx^2+2sxy+ty^2\right) \qquad (10)$$

SHu nuqtada bir xilda $\varphi_1$ va $\varphi_2$ formalarga egadir.

$$\begin{aligned}\varphi_1&=dx^2+dy^2\\ \varphi_2&=rdx^2+2Sdxdy+tdy^2\end{aligned} \qquad (11)$$

bundan

$$K_n=\frac{rx^2+2sxy+ty^2}{x^2+y^2} \qquad (12)$$

Indikatrisaning $M$ nuqtasi $dx:dy$ yo'nalishda $M(x,y)$ koordinatalarga ega bo'lsin.

$$dx:dy=x:y \qquad (*)$$

U holda (12) ni

$$K_n=\frac{rx^2+2sxy+ty^2}{x^2+y^2} \qquad (13)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (13) ga (9) ni qo'yamiz

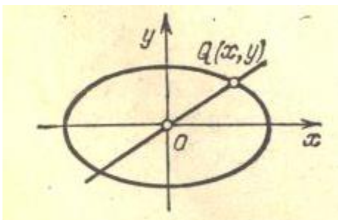
$$K_n=\frac{\pm 1}{x^2+y^2}=\frac{\pm 1}{PM^2} \qquad (14)$$

Bunda $PM=\frac{1}{\sqrt{|K_n|}}$ bo'lib sirtning dyupen indikasasi va normal egriligi o'zaro (14) munosabatda bo'ladi. SHuning uchun uni sirtning egrilik indikatrisasi deyishimiz mumkin.

(14) dan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

a) Asimptotik yo'nalishlardagi normal egrilik nolga teng.
Asimptotik yo'nalishda $R=\infty$ va $PM=\infty$

b) o'zaro perpendikulyar va qo'shma yo'nalishlarda normal egrilik eng katta va eng kichik (ekstremal) qiymatlarga erishadi.



34- чизма

Analitik geometriyadan ellips o'qlarining

yo'nalishlari bosh yo'nalishlar ekani ma'lum.
Bosh yo'nalishlarda $F = M = 0$ shart o'rinlidir. $r = L$, $s = M$, $t = N$ bo'lgani uchun (13) dan

$$K_n = r\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right)^2 + t\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right)^2 \qquad (15)$$

Birinchi bosh yo'nalish uchun $dy = 0$ bo'lsa, $K_n^1 = r$ ikkinchi bosh yo'nalishi uchun $dx = 0$ bo'lsa, $K_n^2 = t$ bunda $K_n^1$ , $K_n^2$ bosh yo'nalishlar bo'yicha normal egriliklar. Qo'yidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sin\theta, \quad K_n = K_n^1 \cos^2\theta + K_n^2 \sin^2\theta$$ (16) formula

kelib chiqadi.

(16) Eyler formulasi bo'lib, sirt ixtiyoriy qiyshiq kesimining normal egriligi va bosh normal kesimlarning normal egriliklari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

$\theta$ - ixtiyoriy kesim yo'nalishi bilan $K_n^1$ ga mos bosh yo'nalish tashkil etgan burchak.

**Sirtning bosh egriliklari**

Sirtning berilgan $P(u, v)$ nuqtasidagi normal egriligi sirtda $du : dv$ yo'nalish tanlashga bog'liq bo'lib,

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \qquad (1)$$

formula bo'yicha ifodalanadi.

**Ta'rif:** Agar $du : dv$ yo'nalishda sirtning $K_n$ normal egriligi ekstremal qiymatlarga erishsa u holda, ushbu yo'nalishni bosh yo'nalish deyiladi.

Ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi sirtda kamida ikkita bosh yo'nalishlar mavjuddir.
$P$ nuqtadagi biror $\xi : \eta$ yo'nalishni qaraylik.

$$K_n = K_n(\xi, \eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} \qquad (2)$$

normal egrilik formulasini

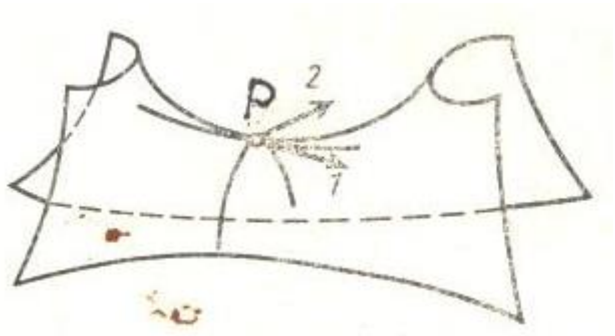
$$\xi = \rho\cos\varphi, \eta = \rho\sin\varphi$$

orqali qutb koordinatalarga o'tkazsak

$$K_n = K_n(\varphi) = \frac{Lcos^2\varphi + M\sin 2\varphi + N\sin^2\varphi}{E\cos^2\varphi + F\sin 2\varphi + G\sin^2\varphi} \qquad (3)$$

kelib chiqadi. $K_n = k_n(\varphi)$ uzluksiz funktsiya bo'lib $K_n(0) = K_n(2\pi)$ bo'lgani uchun $[0, 2\pi]$ kesmada yoki u o'zgarmas funktsiyalar yoki kamida bitta maksimum va kamida bitta minimumga ega bo'lishi mumkin. Bundan ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi regulyar sirtning har bir nuqtasida ikkita turli bosh yo'nalishlarning mavjud bo'lishi aniqlanadi.

**Ta'rif:** Sirt normal egriligining bosh yo'nalishlardagi ekstremal qiymatlariga sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklari deb ataladi.




35-chizma.

(2) formuladan $\xi,\eta$ ga nisbatan quyidagi ayniyat kelib chiqadi.

$$\left(L+K_nE\right)\xi^2+2(M-K_nF)\xi\eta+(N-K_nG)\eta^2=0 \qquad (4)$$

Bosh yo'nalish uchun normal egrilik hosilalarining nolga aylanishini e'tiborga olib (4) ni differentsiallash orqali

$$\begin{array}{l}\left(L-K_nE\right)\xi+(M-K_nF)\eta=0\\(M-K_nF)\xi+(N-K_nG)\eta=0\end{array} \qquad (5)$$

sistemani hosil qilamiz.

Bunda $k(\xi;\eta)$ yo'nalishdagi bosh egrilik. (5) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun

$$\begin{vmatrix}L-K_nE, M-K_nF\\M-K_nF, N-K_nG\end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

tenglik bajarilishi kerak.

Determinantni hisoblab

$$K_n^2\left(EG-F^2\right)-K_n\left(EM-2FM+GL\right)+LN-M^2=0 \qquad (7)$$

kvadrat tenglamani keltirib chiqaramiz. (7) bosh egriliklarni hisoblash uchun asosiy tenglamadir.

Bu tenglama ikkita turli haqiqiy $K_n^1$ , $K_n^2$ ildizlarga yoki ustma-ust tushuvchi $K_n^1=K_n^2$ ildizga ega bo'lishi mumkin.

Xususiy hollar:

1) (7) tenglama ikkita turli ildizlarga ega bo'lsin. Bu ildizlarga sirtda $(\xi_1,\eta_1)$ va $(\xi_2,\eta_2)$ ikkita bosh yo'nalishlar to'g'ri keladi.

$$\begin{cases}\left(L-K_n^1E\right)\xi_1+\left(M-K_n^1F\right)\eta_1=0\\\left(M-K_n^1F\right)\xi_1+\left(N-K_n^1G\right)\eta_1=0\end{cases} \qquad (8a)$$

$$\begin{cases}(L-K_n^2E)\xi_2+(M-K_n^2F)\eta_2=0\\(M-K_n^2F)\xi_2+(N-K_n^2G)\eta_2=0\end{cases}\qquad (8b)$$

Agar sirtning ba'zi bir nuqtalarida sirtning koordinat chiziqlari bosh yo'nalishlarga ega bo'lsa, u holda bunday nuqtalarda $F=M=0$ bo'lishini ko'rsataylik. Koordinant chiziqlarining $(\xi_i,0)$ va $(0,\eta_i)$ $(i=1,2)$ yo'nalishlari bosh yo'nalishlar bo'lsin. U holda (8 a,b)dan.

$$L-K_n^1E=0,\quad M-K_n^1F=0 \qquad (9a)$$

$$M-K_n^2F=0,\quad N-K_n^2G=0 \qquad (9b)$$

$K_n^1\neq K_n^2$ bo'lgani uchun (9a), (9b) ning ikkinchi va uchinchi tengliklaridan $F=M=0$ kelib chiqadi. Qolgan tengliklardan

$$K_n^1=\frac{L}{E},\quad K_n^2=\frac{N}{G} \qquad (10)$$

ga ega bo'lamiz.

2) (7) tenglamaning ildizlari karrali bo'lsin. U holda sirtdagi istalgan yo'nalishning bosh yo'nalish bo'lishini ko'rsataylik.

Regulyar sirt uchun $P(u,v)$ nuqtadan ikkita bosh yo'nalishlarning mavjudligidan (7) sistemaning ikkita turli ildizlarga ega bo'lishi kelib chiqadi. Buning uchun qo'yidagi tengliklar bajarilishi kerak.

$$L-K_nE=0,\quad M-K_nF=0,\quad N-K_nG=0 \quad\Rightarrow\quad L=K_nE,\quad M=K_nF,\quad N=K_nG$$

U holda $K_n=const$ bo'lishini aniqlanadi.

SHunday qilib, sirtning $P$ nuqtasidagi normal egriligi o'zgarmas miqdor bo'lib, yo'nalishga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni ixtiyoriy yo'nalish bosh yo'nalishga aylanadi.

Sirtning bunday nuqtasi yoki sirtning zichlanish nuqtasi (har qanday yo'nalish uchun $K_n=0$), yoki uning dumaloqlanish(ombilik)nuqtasi $K_n>0$ bo'lishi mumkin. Ombilik nuqtada bosh yo'nalishlar aniqmas bo'ladi.

**Masalan:** Tekislikning barcha nuqtalari zichlanish nuqtalar bo'lib, sferaning nuqtalari esa ombilik nuqtalardan iborat bo'ladi.

$M-K_nF=0\Rightarrow$ agar $F=0$ , bo'lsa, u holda $M=0$ bo'lib , sirtdagi bosh yo'nalishlar koordinat chiziqlarning yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi.

**Sirtning egrilik va asimtotik chiziqlari**

Ta'rif: Har bir nuqtadagi urinmasining yo'nalishi sirtning shu nuqtasidagi bosh yo'nalishi bilan usma-ust tushuvchi sirtga tegishli chiziqqa uning egrilik chizig'i deb ataladi.

$du$ va $dv$ difrentsiallar bosh yo'nalish $(du:dv)$ ni aniqlashi uchun quyidagi ifodalarning o'rinliligi zaruriy va yetarli shartlar bo'lishini biz yuqoridagi mavzularda isbotladik.

$$(L-K_nE)du+(M-K_nF)dv=0,\quad (M-K_nF)du+(N-K_nG)dv=0 \qquad (1)$$

Bunda $K_n$ -$(du:dv)$ yo’nalishi bo’yicha normal egrilik.

(1) ifodalardan $K_n$ ni chiqarsak

$$\frac{Ldu+Mdv}{Edu+Fdv}=\frac{Mdu+Ndv}{Fdu+Gdv} \qquad (2)$$

yoki

$$(LF-ME)du^2+(LG-NE)dudv+(MG-NF)dv^2=0 \qquad (3\ )$$

kelib chiqadi. Bu tenglama $(du:dv)$ yo’nalishining bosh yo’nalish bo’lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir. (3 ) ni quyidagi simmetrik shaklda ifodalash mumkin.

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

(4) egrilik chiziq uchun differentsial tenglamadir. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidagi birilik normal vektori uchun $\vec{n}^2=1$ dan $(\vec{n}\vec{n}'_u)=0$, $(\vec{n}\vec{n}'_v=0)$ $\Rightarrow \vec{n}_u$, $\vec{n}_v$ vektorlar R nuqtadagi urinma tekislikda bazis vektorlar ekanini e’tiborga olinsa

$$\vec{n}_u=\alpha\vec{r}_u+\beta\vec{r}_v\,,\quad \vec{n}_v=\gamma\vec{r}_u+\delta\vec{r}_v \qquad (5)$$

kelib chiqadi .

(5) ni $\vec{r}'_u$ va $\vec{r}'_v$ vektorlarga skalyar ko’paytirib, $L$, $M$ , $N$ , $E$, $F$ , $G$ lar uchun belgilashlar asosida

$$-L=\alpha E+\beta F\,,\quad -M=\gamma E+\delta F \qquad (6)$$
$$-M=\alpha F+\beta G\,,\quad -N=\gamma F+\delta G$$

bog’lanishlarni aniqlaymiz. Sirtda koordinat chiziqlar sirt egri chiziqlari bilan ustma-ust tushsa

$$F=M=0 \qquad (7)$$

zaruriy va yetarli shart bajariladi. U holda (6) dan

$$\alpha=-\frac{L}{E}\,,\quad \beta=\alpha=0\,,\quad \delta=-\frac{N}{G} \qquad (8)$$

$$K_n^1=\frac{L}{E}\,,\quad K_n^2=\frac{N}{G} \qquad (9)$$

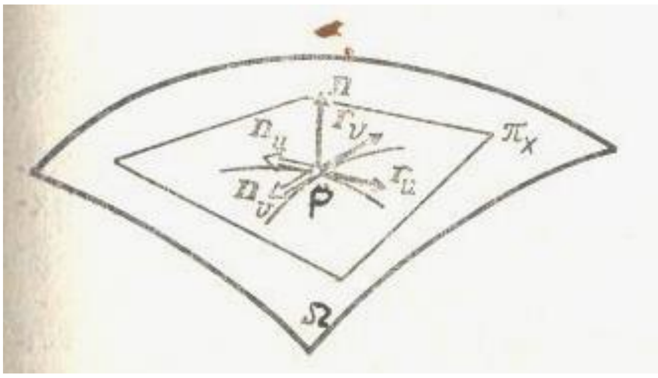
(8) va (9) dan

$$\alpha=-K_n^1\,,\quad \delta=-K_n^2 \qquad (10)$$

kelib chiqadi. SHunday qilib

$$\vec{n}'_u=-K_n^1\vec{r}'_u\,,\quad \vec{n}'_v=-K_n^2\vec{r}'_v \qquad (11)$$

formulalarga ega bo’lamiz. Ushbu formulalardan Rodrig teoremasining isboti kelib chiqadi.




36-chizma

**Rodrig teoremasi:** Sirt vektori $\vec{r}(u,v)$ va sirtning birlik normal vektori $\vec{n}(u,v)$ larning bosh yo'nalishlardagi hosilalari kollinear bo'lib, proportsionallik koeffitsienti bosh normal egriliklardan faqat ishora bilan farq qiladi.

**Ta'rif** : Sirtdagi biror $(du:dv)$ yo'nalishda $K_n$ normal egrilik nolga aylansa, bu holda ushbu yo'nalishni asimtotik yo'nalish deyiladi.

Normal egrilikning

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$ formuladan

sirtning elliptik nuqtalarida asimptotik yo'nalishlarning mavjud emasligi , giperbolik nuqtalarda aniq ikkita asimptotik yo'nalishlarning mavjudligi, parabolik nuqtalarda ularning yagonaligi va zichlanish nuqtalardagi har qanday yo'nalishning asimptotik yo'nalish bo'lishi mumkinlig ini ko'rsatamiz.

**Ta'rif**: Sirtga qarashli biror chiziqning har bir nuqtasidagi urinma yo'nalishshi asimptotik yo'nalishi bo'lsa, bu holda ushbu chiziqni sirtning asimptotik chizig'i deb ataladi.

(12) difrentsial tenglama sirt asimptotik chizig'ining tenglamasi ekanini ko'ramiz.

Giperbolik nuqtalarda $LN - M^2 < 0$ asimptotik chiziqlar uchun sirtning koordinat chiziqlari olinsa, ularning har birini birinchi tartibli differentsial tenglamalarning integral chiziqlari kabi aniqlash mumkin. $(du;0)$ va $(0;dv)$ yo'nalishlarning asimptotik yo'nalishlar uchun olinsa. $L = N = 0$ kelib chiqadi. U holda

$\varphi_2 = 2Mdudv$

**Xossalari**

1) Sirtga to'g'ri chiziq qarashli bo'lsa , u shubhasiz asimptotik chiziq bo'ladi.
2) Asimtotik chiziqning har bir nuqtasidagi yopishma tekisligi sirtning shu nuqtasidagi urinma tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

**Isboti:** $\varphi_2 = (d^2\vec{r}\vec{n}) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$

Misol: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ gelikoid ustidagi egrilik chiziqlarning tenglamasi yozilsin.

Yechish: $E=1$, $F=0$, $G=u^2+a^2$ , $\varphi_1=ds^2=du^2+\left(u^2+a^2\right)dv^2$, $L=0$, $N=0$,

$M=-\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, $\varphi_2=-\dfrac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv$

$E,F,G,L,M,N$ koeffitsientlarni quyidagi tenglamaga qo'yamiz.

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0\Rightarrow \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \frac{du^2}{\left(\sqrt{u^2+a^2}\right)^2}-dv^2=0\Rightarrow$$

$$\left(\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}-dv\right)\left(\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}+dv\right)=0\Rightarrow \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)-v=C_1, \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)-v=C_2$$

**Foydalanilgan adabiyotlar**


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


**Nazorat savollari**

1. Sirtning indikatrisa ta`rifini aytib bering.
2. Dyupen indikatrisasi qanday shart bajarilsa, u bir juft qo'shma giperbola ko'rinishida bo'ladi?
3. Sirtning indikatrisasi qachon ellipsdan iborat bo`ladi?
4. Dyupen indikatrisasi tushunchasi bilan egrilik indikatrisasi qanday hollarda ustma-ust tushadi?
5. Qanday yo`nalish sirtning bosh yo`nalishi deyiladi?
6. Qanday egrilik sirtning bosh egriligi deyiladi?

## 33-34.Sirtning o'rta va to'la egriligi. To'la egriligi. O'zgarmas sirtlar

**Reja :**

1. O'rta va to'la egrilik ta'rifi
2. O'rta va to'la egrilik formulasi
3. Aylanma sirtning $\varphi_1$ va $\varphi_2$ formalari
4. $K>0$, $K<0$ bo'lgan sirtlar
5. Misollar

**Mavzuning bayoni**:

Regulyar sirting berilgan nuqtasidagi bosh egriliklari $K_n^1$, $K_n^2$ xisoblangan bo'lsin.

**1-Ta'rif**: Bosh egriligi yig'indisining yarmiga sirtning berilgan nuqtasidagi o'rta egrilik deyiladi.

**2-Ta'rif**: Bosh egriliklarning ko'paytmasiga sirtning berilgan nuqtasidagi to'la egriligi deyiladi.

O'rta egrilikni $H$ orqali, to'la egrilikni $K$ orqali belgilasak , ta'rifga ko'ra

$$H = \frac{1}{2}\left(K_n^1 + K_n^2\right), \quad K = K_n^1 K_n^2 \tag{1}$$

formulalarni yozish mumkin. Sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklarni

$$K_n^1\left(EG - F^2\right) - K_n^2\left(EN - 2FM + GL\right) + LN - M^2 = 0 \tag{2}$$

kvadrat tenglamani yechish orqali topiladi.

Kvadrat tenglama ildizlarini xossalaridan foydalansak

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - FM + GL}{EG - F^2} \tag{3}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{4}$$

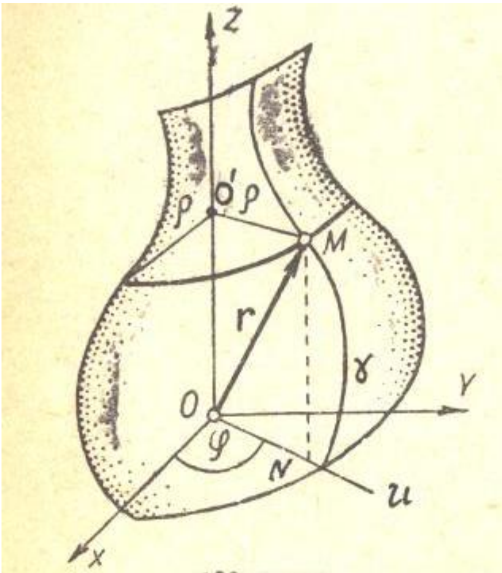
formulalar aniqlanadi. Eyler formulasidan foydalansak

$$K_n(\varphi) = K_n^1 \cos^2\varphi + K_n^2 \sin^2\varphi \tag{5}$$

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\varphi)d\varphi \tag{6}$$

kelib chiqadi. (1) va (4) formulalardan sirtning to'la egriligi $K$ elliptik nuqtalarda musbat, giperbolik nuqtalarda manfiy ishorali qiymatlarga hamda sirtning parabolik va zichlanish nuqtalarida $K = 0$ qiymatga erishadi. Ko'ramizki, $K$ ning ishorasi sirtning $\varphi_2$ (ikkinchi kvadratik forma) diskriminanti bilan ustma-ust tushadi. Misol tariqasida aylanma sirtning to'la egriligining formulasini aniqlaylik.

**Ta'rif**: Tekis chiziq $\gamma \in \Pi$ ning tekislikdagi biror $a$ to'g'ri chiziq atrofida aylanishdan hosil bo'lgan sirtga aylanma sirt, $a$ to'g'ri chiziqni esa uning o'qi deyiladi.




37-chizma

O'q orqali o'tuvchi har qanday tekislik aylanma sirtning meridian bo'yincha kesib o'tadi.O'qqa perpendikulyar tekisliklarning sirt bilan kesishib hosil qilingan chiziqlarga parallellar deyiladi.

Sirtga qarashli meridianlar va parallellar to'r tashkil etadi. Fazoda $OXYZ$ to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini shunday o'rnataylikki aylanma sirtning $a$ o'qi $OZ$ o'q bilan ustma-ust tushsin.

$\Pi$ tekislikda $OUZ$ koordinatalar sistemasini o'rnatamiz va bu sistemada $\gamma \in \Pi$ ning tenglamasi

$$z = f(u) \qquad (7)$$

bo'lsin.

$OU \in OXY < XOU = \varphi$ bo'lsin, $0 \le \varphi \le 2\pi,\gamma$ $\gamma$ chiziqda ixtiyoriy $M$ nuqta olamiz. $M$ nuqta $O'$ markazi $OZ$ o'qda bo'lib, radiusi $O'M$ ga teng bo'lgan aylana chizadi.

$OXYZ$ sistemada $M$ nuqta $M(x,y,z)$ koordinatalarga ega.

$$x = u\cos\varphi, \quad y = u\sin\varphi, \quad z = f(u) \qquad (8)$$

bunda $ON = u$, $MN = OO' = z$

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & f'_u \\ -u\sin\varphi & u\cos\varphi & 0 \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

(9) matritsaning rangi har qanday $M(u,\varphi) \in \Omega$ nuqtada ikkiga tengligidan $\Omega$ - sirtning silliq elementar sirt ekanligi kelib chiqadi. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u_1\varphi)$ belgilaylik .

$$\vec{r} = u\cos\varphi \cdot \vec{i} + u\sin\varphi \cdot \vec{j} + f(u)\cdot \vec{k} \qquad (10)$$

$$\vec{r}'_u = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j} + f'(u)\cdot \vec{k} \qquad (11)$$

$$\vec{r}'_\varphi = -u\sin\varphi \cdot \vec{i} + u\cos\varphi \cdot \vec{j} \qquad (12)$$

$$E = \vec{r}'^2_u = 1 + f'^2(u), \; F = 0, \; G = u^2 \qquad (13)$$

$$\varphi_1 = ds^2 = \left(1 + f'^2(u)\right)du^2 + u^2 dv^2 \qquad (14)$$

$$\vec{r}''_{uu} = f''(u)\cdot \vec{k}, \quad \vec{r}''_{\varphi\varphi} = -u\cos\varphi \cdot \vec{i} - u\sin\varphi \cdot \vec{j} \qquad (15)$$

$$L = \left(\vec{r}''_{uu}\vec{r}'_u\vec{r}'_\varphi\right) = \frac{uf''(u)}{u\sqrt{1+f'^2(u)}}, \; M = 0,$$

$$N = \left(\vec{r}''_{\varphi\varphi}\vec{r}'_u\vec{r}'_\varphi\right) = \frac{u^2 f'(u)}{u\sqrt{1+f'^2(u)}} \qquad (16)$$

$$K = \frac{LN = M^2}{EG - F^2} = \frac{uf'(u)f''(u)}{(1+f'^2(u))} * \frac{1}{u^2(1+f'^2(u))} = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1+f'^2(u))^2}$$

SHunday qilib

$$K = \frac{f'u(u)f''_{uu}(u)}{u(1+f'^2_u(u))^2} \qquad (17)$$

1-misol: Sferaning to'la egriligi aniqlansin. Yechish: $\Pi$ tekislikdagi meridian(aylana) tenglamasini

$$z^2 + u^2 = a^2$$

ko'rinishda olamiz. ($a$ -radius) $z > 0$ da yarim aylana tenglamasi uchun

$$f(u) = z = \sqrt{a^2 - u^2} \qquad (18)$$

ifodaga egamiz.

$$f'_u(u) = -\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}, \quad f''_{uu}(u) = -\frac{a^2}{\left(a^2 - u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (19)$$

---

(17) ga (19) ni qo'yib

$$K = \frac{1}{a^2} \qquad (20)$$

ga ega bo'lamiz.

2-misol: Psevdosferaning to'la egriligi aniqlansin.

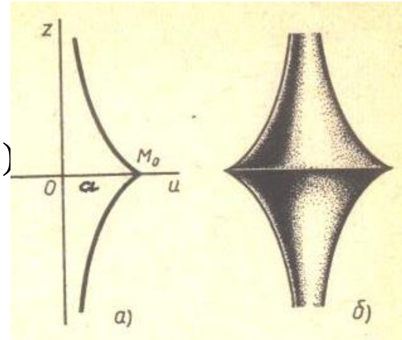
Echish: Traktrisaning $(OZ)$ bazasi atrofida aylanishidan psevdosfera hosil bo'ladi.

Traktrisa

$$z = a\left(\ln tg\frac{t}{z} + \cos t\right), u = a\sin t \qquad (21)$$

$$z'_t = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}, u'_t = a\cos t \Rightarrow f'(u) = \frac{z'_t}{u'_t} ctgt, \ (t \neq \frac{\pi}{2}) \quad (22)$$

$$f''_{uu} = \frac{df'_u(u)}{du} = \frac{\frac{d}{dt}f'(t)}{u'_t} = -\frac{1}{a\sin^2 t\cos t} \qquad (23)$$




(17) dan (22) va (23) orqali (24) kelib chiqadi. Demak, sfera $K > 0$ sirtga misol bo'lsa, psevdosfera $K < 0$ sirtga misol bo'la oladi.

## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

## Nazorat savollari

1. Qanday egrilik sirtning o`rta egriligi deyiladi?
2. Qanday egrilik sirtning to`la egriligi deyiladi?
3. Sirtning to`la egrilik formulasini keltiring.
4. Sirtning o`rta egrilik formulasini keltirng.
5. Qanday chiziq sirtning egrilik chizig`i deb ataladi?
6. Qanday chiziq sirtning asimptotik chizig`i deyiladi?
7. Aylanma sirt formulalarini keltiring.

## 35. Sirtlar nazariyasining asosiy tenglamalar

**Reja:**

1. $\varphi_1$ va $\varphi_2$ formalar va sirtlar orasidagi bog'lanish
2. Derivatsion formulalar
3. Koeffitsientlar uchun ifodalar

**Mavzuning bayoni**:

Fazoviy chiziqlar uchun frene formulalariga o'xshash regulyar sirtlar uchun muhim formulalar mavjud. Sirt berilgan bo'lsa, uning $\varphi_1$ va $\varphi_2$ formalarini hisoblash mumkin .Biz bu ish bilan yuqoridagi mavzularda shug'ullandik. Agar $\varphi_1$ va $\varphi_2$ formalar oldindan ma'lum bo'lsa, qanday shart bajarilganda ular fazoda biror sirtni aniqlashini ko'rsatish lozim.

$$\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \qquad (1)$$

$$\varphi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \qquad (2)$$

kvadratik formalar berilgan bo'lsin.Birdan-bir sirt mavjud bo'lib , uning $\varphi_1 в a \varphi_2$ formalari berilgan (1) va (2) formalardan iborat bo'lishishni ko'rsatish lozim.

$\Omega$ -regulyar sirt

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (3)$$

ko'rinishda ifodalangan bo'lib, $\vec{r}(u,v)$ funktsiya ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. $\Omega$ sirtning har bir nuqtasida $r'_u$, $r'_v$ va $\frac{[\vec{r}'_u\vec{r}'_v]}{|[\vec{r}'_u\vec{r}'_v]|} = \vec{n}$ vektorlar chiziqli erkli sistema tashkil etadi. Fazoning har qanday vektorini $r'_u$, $r'_v$ va $\vec{n}$ vektorlar orqali chiziqli ifoda etish mumkin. Jumladan, $\vec{r}''_{uu}$, $\vec{r}''_{vv}$, $\vec{r}''_{uv}$, $\vec{n}'_u$ va $\vec{n}'_v$ larni chiziqli erkli vektorlar uchligi orqali ifodalashimiz lozim.

Quyidagilar o'rinli bo'lsin.

$$\begin{aligned}
\vec{r}''_{uu} &= \Gamma^1_{11}\vec{r}'_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}'_v + \lambda\vec{n}, \\
\vec{r}''_{uv} &= \Gamma^1_{12}\vec{r}'_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}'_v + \mu\vec{n}, \\
\vec{r}''_{vv} &= \Gamma^1_{22}\vec{r}'_u + \Gamma^2_{22}\vec{r}'_v + \nu\vec{n} \qquad (4)\\
\vec{n}'_u &= \alpha_{11}\vec{r}'_u + \alpha_{12}\vec{r}'_v + \alpha_{13}\vec{n}, \\
\vec{n}'_v &= \alpha_{21}\vec{r}'_u + \alpha_{22}\vec{r}'_v + \alpha_{23}\vec{n}
\end{aligned}$$

Bunda $\Gamma^k_{ij}$ , $\alpha_{ij}$, va $\lambda$, $\mu$, $\nu$ aniqlashimiz lozim bo'lgan koeffitsientlar $(i, j = 1,2)$ bog'lanish koeffitsientlarini $\varphi_1$ va $\varphi_2$ orqali ifodalashimiz lozim. Ma'lumki

$$\vec{r}_u^{\,2} = E, \quad (\vec{r}'_u\vec{r}'_v) = F, \quad \vec{r}'_v = G \qquad (5)$$

$$(\vec{r}''_{uu}\vec{n}) = L, \quad (\vec{r}''_{uv}\vec{n}) = M, \quad (\vec{r}''_{vv}\vec{n}) = N \qquad (6)$$

$$-(\vec{r}'_u\vec{n}'_u) = L, \quad -(-\vec{r}'_u\vec{n}'_v) = -(\vec{r}'_v\vec{n}'_v) = M, \quad -(\vec{r}'_v\vec{n}'_v) = N \qquad (7)$$

(4) formulalarning chap va o’ng qismini $\vec{n}$ ga skalyar ko’paytirib $(\vec{r}_u'\vec{n})=0$ $(\vec{r}_v'\vec{n})=0$ va (5), (6), (7) larni e’tiborga olinsa

$$\lambda = L, \quad \mu = M, \quad \nu = N \tag{8}$$

kelib chiqida. Endi (4) dagi $\vec{r}_{uu}''$, $\vec{r}_{vv}''$, $\vec{r}_{uv}''$ vektorlarni $r_u'$, $r_v'$ vektorlarga skalyar ko’paytirib (5) ni e’tiborga olinsa

$$(\vec{r}_{uv}''\vec{r}_u') = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \quad (\vec{r}_{uu}''\vec{r}_v') = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \tag{9}$$

hosil qilinadi. (4) dan

$$(\vec{r}_{uu}''\vec{r}_u') = \frac{1}{2}E_u', \quad (\vec{r}_{uu}''\vec{r}_v') = F_u' - \frac{1}{2}E_v' \tag{10}$$

shuningdek (4) dan

$$(\vec{r}_{uu}'\vec{r}_v') + (\vec{r}_u'\vec{r}_{uv}'') = F_u', \quad 2(\vec{r}_{uv}''\vec{r}_u') = E_v' \tag{11}$$

munosabatlar kelib chiqadi. $(\vec{r}_{uv}''\vec{r}_u')$ ni chiqarsak

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}E_u' - F_u'F + \frac{1}{2}E_v'F\right) \tag{12}$$

bunda

$$\gamma = EG - F^2 \tag{13}$$

SHuningdek

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}E_v'G - \frac{1}{2}G_u'F\right)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}G_u'E - \frac{1}{2}E_v'F\right) \tag{14}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{\gamma}\left(-\frac{1}{2}G_u'G + F_v'G - \frac{1}{2}G_v'F\right)$$

$\Gamma_{ij}^k$ -koeffitsientlarni Xristofel simvollari deyiladi. $\vec{n}^2 = 1$ ni $u$ va $v$ parametrlar bo’yicha differentsiallab $(\vec{n}_u'\vec{n}) = (\vec{n}_v'\vec{n}) = 0$ ni e’tiborga olsak , $\vec{n}_u'$ va $\vec{n}_v'$ larning urinma tekislikka parallelligidan (4) dan $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$ ga erishamiz. $\vec{n}_u' = \alpha_{11}\vec{r}_u' + \alpha_{12}\vec{r}_v'$ tenglikning chap va o’ng qismini $r_u'$ va $r_v'$ ga ketma-ket ko’paytirib (6), (7) ni e’tiborga olinsa $-L = \alpha_{11}E + \alpha_{12}F, -M = \alpha_{11}F + \alpha_{12}G \Rightarrow \alpha_{11} = \dfrac{MF - LG}{\gamma}, \ \alpha_{12} = \dfrac{LF - ME}{\gamma}$

(15) SHuningdek $\vec{n}_v'' = \alpha_{11}\vec{r}_u' + \alpha_{12}\vec{r}_v'$ dan

$$\alpha_{21} = \frac{NF - MG}{\gamma}, \quad \alpha_{22} = \frac{MF - NE}{\gamma} \tag{16}$$

SHunday qilib, barcha koeffitsientlar $\varphi_1$ va $\varphi_2$ forma koeffitsientlari va ularning hosilalari orqali ifoda qilindi. (4) ni sirtlar uchun derivatsion (asosiy) tenglamalar deyiladi.

## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

**Nazorat savollari**

1. Sirtlar nazariyasining asosiy teoremalarini aytib bering.
2. Sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari va sirtlar orasidagi bog'lanish ko`rsatib bering.
3. Derivatsion formulalarini keltiring.
4. Xristofel simvollarini qanday formula orqali ifodalanadi?
5. Agar $\varphi_1$ va $\varphi_2$ formalar oldindan ma'lum bo'lsa, qanday shart bajarilganda ular fazoda biror sirtni aniqlaydi?

## 36.Sirtning ichki geometriyasi. Sirtning to'la va geodezik egriligi

**Reja:**

1. Sirt ichki geometriyasi tushunchasi
2. Sirtning Gauss egriligi ichki geometriya ob'ekti
3. Geodezik egrilik ichki geometriya ob'ekti

**Mavzuning bayoni:**

**Ta'rif:** Sirtning ichki geomentriyasi deb, sirtga qarashli chiziq uzunligiga bog'liq xossalarini o'rganuvchi geometriya bo'limiga aytiladi. Regulyar sirtlar uchun uning birinchi kvadratik formasi shu sirtga qarashli chiziq uzunligi , chiziqlar tashkil etgan burchak va sirt sohasining yuzini hisoblash imkonini beradi. Bir xildagi chiziqli element $(\varphi_1)$ ga ega bo'lgan ikki sirt bir xildagi ichki geometriyaga ega. Bunday sirtlarni izometrik deyiladi. Sirtlardan birini deformatsiyalash (egish) orqali ikkinchisini hosil qilish mumkin. Bunda ichki geometriya o'zgarmaydi. Sirt ichki geometriyasi ob'ektlaridan biri uning Gauss egriligidir.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad (1)$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \qquad N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \qquad (3)$$

ifodalarni qaraylik . (2) va (3) dan

$$LN=\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix}(\vec r''_{uu}\vec r''_{vv}) & (\vec r''_{uu}\vec r'_u) & (\vec r''_{uu}\vec r'_v)\\ (\vec r'_u\vec r''_{uv}) & E & F\\ (\vec r'_v\vec r''_{uv}) & F & G\end{vmatrix} \qquad (4)$$

$$M^2=\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix}(\vec r''_{vv})^2 & (\vec r''_{uv}\vec r'_u) & (\vec r''_{uv}\vec r'_v)\\ (\vec r'_u\vec r''_{uv}) & E & F\\ (\vec r'_v\vec r''_{uv}) & F & G\end{vmatrix} \qquad (5)$$

(4) va (5) dan

$$K=\frac{1}{EG-F^2}\left\{\begin{vmatrix}(\vec r''_{uu}\vec r''_{vv})-\vec r''^2_{uv} & (\vec r''_{uu}\vec r'_u) & (\vec r''_{uu}\vec r'_v)\\ (\vec r'_u\vec r''_{vv}) & E & F\\ (\vec r'_v\vec r''_{vv}) & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & (\vec r''_{uv}\vec r'_u) & (\vec r''_{uv}\vec r'_v)\\ (\vec r'_u\vec r''_{uv}) & E & F\\ (\vec r'_v\vec r''_{uv}) & F & G\end{vmatrix}\right\} \qquad (6)$$

$$(\vec r''_{uu}\vec r'_u)=\frac{1}{2}E'_u,\quad (\vec r''_{uv}\vec r'_v)=\frac{1}{2}G'_u,\quad (\vec r''_{uv}\vec r'_u)=\frac{1}{2}E'_v,\quad (\vec r''_{uu}\vec r'_v)=F'_u-\frac{1}{2}E'_v,\quad (\vec r''_{vv}\vec r'_v)=\frac{1}{2}G'_v,$$

$$(\vec r''_{vv}\vec r'_u)=F'_v-\frac{1}{2}G'_u\ ,\quad (\vec r''_{uu}\vec r''_{vv})-\vec r''^2_{uv}=-\frac{1}{2}G''_{uu}+F''_{uv}-\frac{1}{2}E''_{vv} \qquad (7)$$

(6) ga (7)ni qo'ysak

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix}\left(-\frac{1}{2}G''_{uu}+F''_{uv}-\frac{1}{2}F''_{vv}\right) & \frac{1}{2}E'_u & \left(F'_u-\frac{1}{2}E'_v\right)\\ \left(F'_v-\frac{1}{2}G'_u\right) & E & F\\ \frac{1}{2}G'_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u\\ \frac{1}{2}E'_v & E & F\\ \frac{1}{2}G'_u & F & G\end{vmatrix}\right\} \qquad (8)$$

(8) ni , ya'ni $K$ ni $E, F, G$ miqdorlar va ularning hosilalari orqali ifodalash mumkinligini birinchi marta nemis matematigi Karl Fridrix Gauss isbotladi. Agar sirtnig $\varphi_1$ formasi

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2 \qquad (9)$$

ko'rinishda bo'lsa,

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})''_{uu} \qquad (10)$$

formulani keltirib chiqirish mumkin. Sirt ichki geometriyasi ob'ektlaridan yana biri uning geodezik egriligidir. Sirtning $\varphi_2$ formasi mavzusida geodezik egrilikka ta'rif berib uning formulasini

$$K_g=K_1(\vec v\vec\tau\vec n) \qquad (11)$$

ko'rinishda tasvirlandi, bunda $\vec\tau$ $\gamma\in\Omega$ chiziq urinmasining yo'naltiruvchi birlik vektori, $\vec v$ bosh normalning birlik vektori , $\vec n$ esa sirt normalining birlik vektori. $\vec\tau(s)$, $\vec v(s)$ vektorlarni $\vec r=\vec r(t)$ vektor hosilalari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{\vec{r}_t'}{|\vec{r}_t|},\ \vec{\nu}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\vec{r}_{tt}''\frac{1}{(\vec{r}_t')^2}-\vec{r}_t'\frac{(\vec{r}_{tt}''\vec{r}_t')}{|\vec{r}_t|^4} \tag{12}$$

(11) dan (12) yordamida

$$K_g=\frac{1}{|\vec{r}_t|^3}(\vec{r}_{tt}''\vec{r}_t'\vec{n}) \tag{13}$$

kelib chiqadi.

$$\vec{r}_t'=\vec{r}_u'u_t'+\vec{r}_v'v_t' \tag{14}$$

$$\vec{r}_{tt}''=\vec{r}_{uu}''(u_t')^2+2\vec{r}_{uv}''u_t'v_t'+\vec{r}_{vv}''(v_t')^2+\vec{r}_u'u_{tt}''+\vec{r}_v'v_{tt}'' \tag{15}$$

(15) ga derivatsion formulalarni qo'llaymiz.

$$\vec{r}_{tt}''=(u_{tt}''+A)\vec{r}_u'+(v_{tt}''+B)\vec{r}_v'+C\vec{n} \tag{16}$$

Bunda

$$\begin{aligned} A&=\Gamma_{11}^1(u_t')^2+\Gamma_{12}^1u_t'v_t'+\Gamma_{22}^1(v_t')^2\\ B&=\Gamma_{11}^2(u_t')^2+\Gamma_{12}^2u_t'v_t'+\Gamma_{22}^2(v_t')^2\\ C&=L(u_t')^2+Mu_t'v_t'+N(v_t')^2 \end{aligned} \tag{17}$$

(14) va (16) ni (13) ga qo'yamiz.

$$K_g=[(u_{tt}''+A)v_t'-(v_{tt}''+B)u_t']\frac{(\vec{r}_u'\vec{r}_v'\vec{n})}{|\vec{r}_t|^3} \tag{18}$$

$$|\vec{r}_t|=\sqrt{E(u_t')^2+2Fu_t'v_t'+G(v_t')^2} \tag{19}$$

$$(\vec{r}_u'\vec{r}_v'\vec{n})=|[\vec{r}_u'\vec{r}_v']|=\sqrt{EG-F^2} \tag{20}$$

(19) va (20) ni (18) ga qo'yamiz.

$$K_g=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E(u_t')^2+2Fu_t'v_t'+G(v_t')^2}}\left\{\left(u_{tt}''+\Gamma_{11}^1(u_t')^2+\Gamma_{12}^1u_t'v_t'+\Gamma_{22}^1(v_t')^2\right)v_t'-\left(v_{tt}''+\Gamma_{11}^2(u_t')^2+\Gamma_{12}^2u_t'v_t'+\Gamma_{22}^2(v_t')^2\right)u_t'\right\} \tag{21}$$

Ko'ramizki , $K_g$ Xristofel simvollari yordamida ifodalangan bo'lib $\varphi_1$ forma koeffitsientlari orqali aniqlash mumkin . Bundan $K_g$ sirt ichki geometriyasi ob'ekti ekani kelib chiqadi.

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.


## Nazorat savollari

1. Sirt ichki geometriyasi tushunchasini aytib bering.
2. Sirtning qanday egriligi Gaus egriligi deyiladi?
3. Qanday egrilik sirtning geodezik egriligi deyiladi?

4. Qanday chiziqlar sirtning geodezik chiziqlari deyiladi?
5. Gauss- Bonne teoremasini aytib bering.
6. Ichki geometriya ob'ektlarini sanab bering.