МЕХАНИКА

С. П. СТРЕЛКОВ

УМУМИЙ ФИЗИКА КУРСИ

С. П. СТРЕЛКОВ

МЕХАНИКА

Қайта ишланган русча учинчи нашридан таржима

*СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги
университетлар учун ўқув қўлланма сифатида
рухсат этган*

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент — 1977

РЕДАКЦИЯДАН

С. П. Стрелковнинг «Механика» китоби умумий физика курсининг биринчи қисми бўлиб, университетларнинг ва педагогика институтларининг физика ва физика-математика факультетлари студентлари учун мўлжалланган.

Китоб авторнинг кўп йиллар мобайнида МДУ нинг физика факультетида ҳамда МДУ нинг физика факультети қошидаги олий ўқув юртлари ўқитувчиларининг малакасини ошириш факультети тингловчиларига ўқиган лекциялари курси асосида ёзилган; бундан ташқари автор семинар ва амалий машғулотлар тажрибасидан фойдаланди.

Китобнинг биринчи нашри 1956 йилда босмадан чиққан, 1965 йилда чиққан иккинчи нашрида автор курсни такомиллаштира бориб, актуал бўлиб қолган (йўлдошларнинг, космик снарядларнинг ҳаракати, вазнсизлик, товушдан юқори тезликли ҳаракат каби) бўлимларга оид баъзи бир параграфларни кенгайтирди, курсга махсус нисбийлик назарияси асосларини киритди.

Китобнинг учинчи нашрини авторнинг ўзи тугаллаёлмади, бироқ у китобни нашрга тайёрлашда асосий ишларни бажаришга улгурди. Учинчи нашрда ҳозирги замон физика программасининг ўсган талаблари ҳамда ўрта мактабларда физика ва математикани ўқитиш савиясининг ўсиши муносабати билан бир қатор назарий қўшимчалар қилинган. Масалан, инерция моментининг тензор характери ва изотроп эластик жисм механикасининг асосий тензорлари ҳақида тушунча берилган, махсус нисбийлик назариясига бағишланган боб кенгайтирилган ва қайта ишланган. Бироқ китобда олдинги нашрлар учун характерли бўлган, механиканинг бош ҳодисалари ва қонуниятларининг ўша кўргазмали талқини сақланган.

Ушбу нашрни тайёрлашда, уни қайта ишлаш ва тўлдириш борасида китоб авторининг узоқ йиллик ҳамкасби А. А. Харламов актив иштирок этди. Шунингдек, у қўл ёзмани босмага тугал тайёрлади ва корректураларни кўриб чиқди.

531
С 93

Стрелков С. П.

Механика. Ун-тлар учун ўқув қўлланма. Қайта ишланган русча 3-нашридан таржима. Т., «Ўқитувчи», 1977.
579 б. (Умумий физика курси.)

Стрелков С. П. Механика.

531

$С\frac{20302 № 177}{353-(06)-77}141-77$

ҚИРИШ

Физика — жонсиз табиат қонунлари ўрганиладиган асосий табиёт фанларидан биридир.

Олам доимий ўзаро таъсирда ва узлуксиз ҳаракатда бўлган моддий жисмлар мажмуасидан иборат. Табиатда содир бўлувчи барча ҳодисалар ва процесслар муайян қонунлар бўйича юз беради. Турли процесслар ва ҳодисалар орасидаги қонуний боғланишни очиш ва ўрганиш ҳар қандай фан тармоғининг бош мақсади ҳисобланади. Жисмларнинг ҳаракат ва ўзаро таъсир қонунларининг ва электромагнит ҳодисалар қонунларининг анализи физикага тааллуқлидир.

Физикада ўрганиладиган ҳодисалар доирасини ёки бу фаннинг шартли чегараларини аниқлаш жуда қийин; фақат бир нарсани айтиш мумкин: янги кашфиётлар, техникавий татбиқларнинг янги-янги соҳалари бу чегараларни йилдан-йилга кенгайтирмоқда. Кейинги вақтда физиканинг, масалан, плазма физикаси, элементар зарралар физикаси, яримўтказгичлар физикаси, биофизика, қаттиқ жисм физикаси ва бошқалар каби янги бўлимлари интенсив ишлаб чиқилмоқда. Буларнинг ҳаммаси умумий физика курсида аксини топмоқда, бироқ курснинг асосий вазифаси *ҳозирги замон физикасининг янги бўлимларини ўрганишга тайёрлашдир*. Физиканинг бу бўлимларини батафсил ўрганиш планга кўра умумий физика курси кетидан келувчи махсус курслар ва лабараторияларда боради. Умумий физикага оид асосий қонунларни ва ҳодисаларни билмай туриб, махсус курсларни ўрганишга киришиб бўлмайди.

Умумий физика курси одатда бир неча бўлимга бўлинади: 1) механика, 2) молекуляр физика, 3) электр ва магнетизм, 4) оптика ва 5) атом ва ядро физикаси.

Материянинг ҳаракати механикавий, электромагнит, иссиқлик ва бошқа кўринишларга эга. Материя ҳаракатининг энг содда кўриниши турли жисмларнинг бир-бирига нисбатан кўчиши ва жисм шаклининг ўзгаришидан иборат бўлган механикавий ҳаракатдир.

Механикавий ҳаракат қонунлари физиканинг биринчи бўлими — механикада ўрганилади. Кўчишлар барча физикавий ходисаларда содир бўлади, шунинг учун физиканинг қолган бўлимларини механикани билмасдан туриб ўрганиб бўлмайди.

Махсус курсларда механика одатда учта қисмга: кинематика, статика ва динамикага бўлиб ўрганилади. Кинематикада жисмларнинг ҳаракати, бу ҳаракатни юзага келтираётган ёки уни ўзгартираётган сабаблар эътиборга олинмай ўрганилади. Статикада жисмлар системасининг мувозанат қонунлари ўрганилади. Динамикада — жисмларнинг ҳаракат қонунлари ва жисмлар ҳаракатини юзага келтираётган ёки уни ўзгартираётган сабаблар ўрганилади. Агар бизга жисмларнинг ҳаракат қонунлари маълум бўлса, улардан мувозанат қонунларини ҳам аниқлаш мумкин. Шунинг учун ҳам физикада статика қонунларини динамика қонунларидан айрим қаралмайди.

Физиканинг умумий курсида механикани ўрганишни бошлашдан олдин физика предметига ва физикавий тадқиқ методларига оид бир неча жуда қисқа умумий мулоҳазалар киритишни ҳамда баъзи асосий тушунчаларнинг таърифларини келтиришни лозим кўрамиз.

Физикавий ҳодиса. Физикавий ҳодиса (ёки процесс) — муайян жисмларда вақт ўтиши билан содир бўлувчи қонуний боғланган ўзгаришлар мажмуасидан иборат. Физикавий ҳодисаларда юз берувчи барча ўзгаришларни бевосита ўлчашлар орқали *миқдорий* баҳоланади.

Физикавий тажриба. Жисмларда содир бўлувчи турли ўзгаришлар орасидаги қонуний боғланишлар табиатда содир бўлувчи ҳодисаларни, хоҳ уларнинг табиий кўринишида хоҳ ҳодисаларнинг ўрганилаётган боғланишни энг аниқ ва равшан ошкор қилишга имкон берувчи муайян ўтиш шароитини таъминловчи махсус лаборатория тажрибалари воситасида *кузатишлар* орқали ўрганилади. Лабораториявий ва техникавий тажрибалар, табиат ҳодисаларини кузатиш физика фанининг барча ҳолатлари асосини ташкил қилади ва бизнинг у ёки бу процесс, ё ҳодиса қонуниятлари ҳақидаги мулоҳазаларимизнинг асоси бўлади. Илмий анализ натижаларининг тажриба натижаларига мос келиши бизнинг атроф табиат ҳақидаги билимларимизнинг чинлиги ва ҳаққонийлиги критерийси бўлади.

Физикавий ўлчашлар ва физикавий катталиклар. Физика аниқ фанлар синфига оид бўлиб, унда содир бўлаётган ўзгаришларни миқдорий ўлчаш асосий роль ўйнайди. Физикавий текширишларда турлича физикавий катталиклар, масалан, куч, тезлик, узунлик, потенциаллар фарқи ва ҳоказо кабилар аниқланади. *Физикавий катталиклар* жисмларнинг хоссаларини ёки процесснинг характеристикаларини аниқлаб, уларнинг ўзгаришларини ҳамавақт ўлчашлар орқали, яъни муайян катталикни *бирлик* сифатида қабул қилинган, *ўшандай табиатли катталик билан таққослаш орқали миқдорий аниқлаш лозим.*

Кузатишлар ва тажрибалар вақтида физикавий катталикларни аниқ ва тўғри ўлчаш физикадаги ҳар қандай илмий текширишнинг асосий қисмини ташкил қилади.

Физикавий қонунлар. Барча ҳодиса ва процесслар бир-бирлари билан муайян сабабий боғланишда бўладилар. Кузатишлар ва тажрибалар асосида олимлар турлича катталикларнинг ўзгаришлари орасидаги қонуний боғланишларни очадилар ва муайян сабабий ўзаро боғланишларни ўрнатадилар.

Кузатишлар ва тажрибалар натижаларининг анализи асосида турли процессларнинг бориши бўйсунадиган умумий характердаги асосий қонуниятлар ўрнатилади. Бу умумий қонуниятларни физикавий қонуниятлар дейилади ва улар ҳар бир конкрет ҳодисани анализ қилишда асосий бошланғич ҳолат бўлиб хизмат қилади.

Абстракциялар ва соддалаштиришлар. Кўп сонли қўшимча боғланишлар ва эрксизликлар мавжудлиги туфайли асосий сабабий боғланишларни ва қонуниятларни кузатиш ва аниқлаш қийин бўладиган мураккаб процессларнинг анализида *бош* қонуниятлар ва боғланишларни, аввало *иккинчи даражалиларидан* ажратиб олишга интиладилар. Ушбу процессда нима асосий, нима иккинчи даражали эканлигини қиёсий тажрибадан аниқлайдилар. Масалан, лаборатория тажрибаларида пўлат шарнинг ҳавода ҳам, бўшлиқда ҳам бирдай тушиши аниқланади, демак, шарчанинг ҳаракатида ҳавонинг ишқаланиш кучи жуда оз сезилади ва шунинг учун шарчанинг ҳаводаги тушишини фақат оғирлик кучи таъсиридаги текис тезланувчан ҳаракат дейиш мумкин ва ҳоказо. Ҳодисани анализ қилаётганда энг муҳими, асосийси ажратиб олинади, иккинчи даражали, аҳамиятсизидан воз кечилади; бу билан илмий *абстракциядан* фойдаланиб, ҳодисанинг бирор шартли *схемаси* яратилади. Абстракциялар — булар шундай тушунчаларки, улар предметларнинг бирор муайян хоссаларини ёки процесснинг бирор муайян характеристикаларини акс эттиради. Масалан, моддий нуқта, тўғри чизиқ, нуқтага қўйилган куч, қовушоқ бўлмаган суюқлик ва ҳоказолар абстракциялар ҳисобланади.

Ҳақиқий процессни фақат қисмангина акс эттирувчи ёки ҳодисанинг фақат муайян томонинигина акс эттирувчи у ёки бу абстракция ва схемани қўллаётганда схематик тасаввурлар ва абстракцияларнинг *чекланган* эканлигини ҳамма вақт эсда тутиш лозим.

Масалан, механикада жисмларнинг ҳаракатини анализ қилаётганда моддий нуқта тушунчасидан фойдаланилади, лекин берилган жисмни тўғридан-тўғри моддий нуқта деб ҳисоблаш мумкин эмас; бу жисмни қандай ҳаракатда нуқта дейиш мумкинлигини албатта қўшиб қўйиш лозим. Масалан, Ернинг Қуёш атрофидаги йиллик ҳаракатини моддий нуқтанинг ҳаракати деб тасаввур қилиш мумкин, бироқ молекуланинг ҳаракатини нуқтанинг ҳаракати деб тасаввур қилиш ҳамма вақт ҳам мумкин бўлавермайди. Моддий нуқта — абстракциядир, унинг ёрдамида жисм ҳаракатининг баъзи белгилари аниқланади; масалан, Ерни моддий нуқта деб ҳисоблаб, биз Ернинг орбита бўйлаб ҳаракатини тўғри акс эттирамиз, бироқ бунда Ернинг ўз ўқи атрофидаги ҳаракатини мутлақо акс эттира олмаймиз ва ҳоказо.

Агар назарий анализ билан тажриба натижалари орасида қандайдир тафовут сезилса, у *ҳолда схемани танлашда қилинган* соддалаштиришларнинг қонунийлиги ва йўл қўйилиши мумкинлигини ҳар доим диққат билан текшириб кўриш лозим. Масалан, кўпчилик ҳодисаларда сувни сиқилмайдиган деб ҳисоблаш мумкин, чунки, босимнинг каттагина ўзгаришида сувнинг ҳажми шунчалик оз ўзгарадики, босимнинг кичик ўзгаришларида ҳажмнинг ўзгаришларини ҳисобга олмаса ҳам бўлади; бироқ товуш тўлқинларининг сувда тарқалиш ҳодисасини анализ қилаётганда, товуш тўлқинлари ҳолида босимнинг ўзгаришлари унча катта бўлмаса-да, сувнинг сиқилувчанлигини ҳисобга олиш керак. Процессларни ва ҳодисаларни анализ қилаётганда ушбу схема билан ҳодисанинг қайси томонлари акс эттирилаётганини ва ушбу абстракциядан қачон, қандай даражада хатосиз фойдаланиш мумкинлигини ҳар бир конкрет ҳолда аниқ билиш лозим.

Ҳодиса схемасини танлашда катта ва кичикни баҳолашга жуда эҳтиётлик билан ёндашиш лозим. Агар ушбу катталик жуда катта бўлса, у ҳолда қайси катталикка нисбатан ушбу катталик катта қийматга эга эканлиги албатта аниқ кўрсатилиши лозим; масалан, шарча хонада эркин тушаётганда ҳавога ишқаланиш кучи оғирлик кучига нисбатан кичик.

Бир хил тажрибаларда ва ҳодисаларда баъзи катталикларнинг кичик ўзгаришлари ҳам муҳим аҳамиятга эга бўлади, бошқаларида, аксинча, ҳатто сезиларли ўзгаришлар ҳам тажрибанинг ёки ҳодисанинг боришига таъсир қилмайди. Турли тажрибалар ва ҳисоблашлар билан ўтказилган пухта ва кўп каррали текширишларгина бизни қилинган фаразларнинг тўғрилигига ишонтира олади.

Экспериментал ва назарий тадқиқотлар. Физика—экспериментал фандир; у амал қиладиган асосий маълумотлар ва физиклар чиқарадиган хулосалар тажрибадан, эксперимент натижасида олинади. Бироқ, асосан *математика* воситалари ва методлари билан ўтказиладиган назарий таҳлилсиз номаълум қонуниятларни батафсил текшириш ҳеч мумкин бўлмасди.

Олимлар у ёки бу даражада мураккаб ҳодисалар ва процессларни қараётганда ҳодисанинг асосий факторларини ва тахмин қилинувчи қонуниятларини акс эттирувчи ва ҳисобга олувчи схематик моделларини ясайдилар. Умумий назарий ҳолатларни ва ўхшаш ҳодисалар ҳақидаги маълум ахборотларни назарга олиб, математик анализ методларини текширилаётган процесснинг ҳам асосий қонуниятларини, ҳам қўшимча деталларини аниқлаш учун қўллашга имкон берувчи *моделини* тавсия қиладилар.

Назарий ҳисоблашлар асосида олинган ва миқдорий муносабатларда ифодаланган хулосалар кейинчалик кузатишлардаги ва лабораториявий экспериментлардаги ўлчашлар орқали текширилади. Қиёс қилиш натижалари текширилаётган моделнинг аниқлиги ва адекватлигини тасдиқлайди ёки рад қилади. Ҳар ҳолда бундай таққослаш янада мукаммал модель ясашга ёрдам беради. У модель ўз навбатида математик таҳлил қилинади ва кейинчалик экспериментал текширилади ва ҳоказо.

Назарий ва экспериментал тадқиқотларнинг бундай кетма-кет ўзаро таъсири узлуксиз процесс бўлиб, текширилаётган ҳодисаларнинг қонуниятларини янада тўлароқ билишга олиб келади. Физикавий кашфиётлар тарихи назариётчилар ва экспериментаторларнинг ҳамкорликда самарали ишларига ишонарли мисоллар кўрсатади.

Кейинги ўн йилликларда шундай хил текширишлар процесси анча тезлашмоқда. Экспериментал тадқиқот методлари мукаммаллашмоқда ва татбиқий математиканинг замонавий, тобора мукаммал электрон ҳисоблаш машиналари кўринишидаги эффектив воситалари қўлланилмоқда.

Узунлик ва вақт. Турли физикавий ходисаларда биз турли физикавий катталикларни учратамиз. Бироқ деярли барча ходисаларда, бошқа катталиклардан ташқари икки катталикни — *узунлик* ва *вақтни* учратамиз. Шунинг учун узунлик ва вақтни алоҳида физикавий катталиклар дейиш мумкин.

Узунлик — жисмлар кўламининг ўлчови, вақт процессларнинг ва ҳодисаларнинг давомийлик ўлчовидир. Бу катталикларнинг таърифи фалсафий маънодаги фазо ва вақт тушунчалари билан узвий боғлиқдир. Диалектик материализм нуқтаи назаридан фазо ва вақт материянинг мавжудлик формаларидир. Вақтсиз ва фазосиз материя ҳам, ҳодиса ҳам бўлмайди.

Ҳар қандай жисм муайян ўлчовларга эга. Жисмнинг ўлчовлари узунлик, юз ва ҳажм катталиклари билан аниқланади, улар ҳақидаги тасаввурлар геометриядан маълум.

Жисмларнинг фазовий хоссаларини аниқлашда қўлланувчи асосий катталик *бирлик* сифатида қабул қилинган *кесма узунлигидир*. Физикада узунлик бирлиги сифатида эталон-стерженнинг иккита тамғаси орасидаги масофа—*метр* олинади; юз ва ҳажмни мос равишда квадрат метр ва куб метрларда ўлчанади.

Жисмларнинг ҳаракати бир-бирига нисбатан содир бўлади, бошқача айтганда, ҳаракат вақтида жисмларнинг бир-бирига нисбатан жойлашишида ёки битта жисмнинг турли қисмларининг (деформацияда) ўзаро жойлашишида ўзгариш юз беради.

Ҳар бир ҳаракатда камида иккита жисм иштирок этади, шу сабабли ҳаракатни тавсифлаш учун жисмлардан бирини *саноқ жисми* сифатида қабул қилиш мумкин. Саноқ жисми сифатида ихтиёрий жисмни олиш мумкин.

Саноқ жисми билан боғланган саноқ системасини, масалан, тўғри бурчакли координаталар системаси кўринишида тасаввур қилиш мумкин. Фазонинг барча нуқталарининг ҳолати каттиқ, ўзаро тик, саноқ жисми билан доимий боғланган ва координаталар системасининг *боши* дейилувчи муайян нуктадан ўтадиган учта тўғри стерженларга нисбатан бир қийматли аниқлангандир. Стерженлар кесмаларининг узунлиги узунликнинг муайян бирлигида ўлчаниши лозим. У ҳолда фазонинг ҳар бир нуқтаси берилган нуқтадан стержень ўқи чизиғига туширилган перпендикулярнинг ҳар бир стержень ўқи бўйлаб, унинг бошидан охиригача оралиғининг сон қийматини кўрсатувчи *учта* сон — *координаталар* билан аниқланади.

Тажрибанинг кўрсатишича, механика курсида қараладиган ҳаракатларда фазонинг хоссалари танланган саноқ жисмига ва ҳаракат йўналишига боғлиқ эмас. Бошқача айтганда, бир саноқ системасидан бошқасига ўтишда саноқ системаси билан боғланган жисмларнинг физикавий хоссаларини эмас, балки фақат саноқ системасининг геометрик хоссаларинигина назарга олиш лозим. Бироқ янада чуқурроқ тадқиқотлардан маълумки, фазо ҳақидаги бундай тасаввур ҳамавақт ҳам тўғри бўлавермайди: механика курси доирасида қаралмайдиган, жисмларнинг баъзи бир ҳодисалардаги ҳаракатларини таҳлил қилишда фазонинг моддий жисмларнинг хусусиятларига боғлиқ бўлган хоссаларининг тегишли ўзгаришларини ҳисобга олиш зарур (нисбийлик назарияси).

Механикавий ҳаракат—фазода жисм ҳолатининг вақт ўтиши билан ўзгаришидир. Вақт, олдин айтилганидек, процесснинг давомийлик ўлчовидир. Шунинг учун ўтган вақт катталигини бирор процесс (ёки ҳодиса) давомийлиги билан ўлчаш мумкин.

Вақтни даврий равишда такрорланувчи процесс (соат) ёрдамида ўлчаш мумкин. Текислик ва даврийлик турли процессларнинг ўтиш давомийлигини таққослаш асосида тажрибада аниқланади. Бирор тайинли процесс содир бўладиган вақтни бирлик сифатида қабул қилинади. Физикада одатда вақт бирлиги қилиб ўртача Қуёш суткасининг, яъни Ернинг ўз ўқи атрофида бир марта тўла айланиш вақтининг $\frac{1}{86400}$ қисми—*секунд* қабул қилинади.

Тажриба кўрсатадики, жисмларнинг ёруғлик тезлиги ($3 \cdot 10^{10}$ м/сек) га нисбатан жуда кичик тезликда содир бўладиган ҳаракатларини анализ қилишда вақт жисмларнинг хоссаларига ва уларнинг ҳаракатига боғлиқ эмас дейиш мумкин (Ньютон фикри бўйича *абсолют* вақт). Бундай шароитларда турли процесслар ва ҳодисалар учун ҳодисанинг характеридан ва бу ҳодисада иштирок этаётган жисмларнинг хоссаларидан қатъи назар, вақт бирдай ўтади дейиш мумкин. Махсус тадқиқотларнинг кўрсатишича, бир-бирига нисбатан ҳаракатланаётган турли саноқ системаларига нисбатан битта процесснинг давомийлиги шу системаларнинг нисбий ҳаракатига боғлиқдир. Демак, жисмлар ихтиёрий тезликлар билан ҳаракатланганда турли саноқ системалари учун ягона вақт йўқ. (*Эйнштейннинг нисбийлик назарияси*). Бироқ бу фарқ ёруғлик тезлигига нисбатан етарлича кичик бўлган одатдаги тезликлардаги ҳаракатларда деярли йўқ даражада.

Нисбийлик назарияси билан боғлиқ бўлган тафсилотларга киришмаган ҳолда, турли системалар учун абсолют, ўзгармас ва бирдай вақт саноқ системалари бир-бирига нисбатан ёруғлик тезлигидан анча кичик тезликлар билан ҳаракатланадиган тажрибалардагина йўл қўйилиши мумкин бўлган абстракция эканлигини эслатиб ўтиш лозим. Бу абстракцияни қўллашда содир бўладиган хатолик ўлчови $\beta = v^2/c^2$ (v — саноқ системасининг ҳаракат тезлиги, c — ёруғлик тезлиги) бўлиши мумкин. Ҳаракатланаётган системалар учун вақтни абсолют ва ўзгармас дейиш β катталик бирдан қанча кичик бўлса, шунча тўғрироқ бўлади.

Физикавий катталикларнинг ўлчамликлари. Ҳар қандай физикавий катталик тажрибадан олинган қонуниятлар асосида аниқланади. Физикавий катталикнинг сон қиймати ўлчаш давомида уни бирлик сифатида қабул қилинган бирор эталон билан таққослашдан ҳосил бўлади. Умуман айтганда, эталонни ёки ўлчаш бирлигини танлаш ихтиёрий. Аёнки, ҳар бир физикавий катталик учун ўзининг шартли бирлиги танлаб олинади. Бу бошқа катталикларнинг бирликлари қандай танланганлигига боғлиқ бўлмайди. Бироқ бир қатор сабабларга кўра физикада бундай қилинмайди. Баъзи асосий катталиклар учунгина бирликлар ихтиёрий танланади, у ҳолда барча қолган катталикларнинг бирликлари асосийларига боғлиқ бўлиб қолади. Бу ҳолда асосий бирликлар *содда*, қолганлари эса *мураккаб* бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, маълум физикавий қонунлардан фойдаланган ҳолда ҳосилавий катталиклар бирликларининг асосий катталиклар бирликларига боғланишини топиш мумкин. Агар ҳар сафар физикавий қонуниятни ифодаловчи формулалардаги пропорционаллик коэффициентлари қандай тарзда танланганлиги кўрсатилса бу боғланиш ошкор бўлади. Мураккаб катталикларнинг бирликларини танлашда бу пропорционаллик коэффициентларининг мумкин қадар соддароқ бўлишига ҳаракат қилинади.

Механикада асосий бирликлар сифатида узунлик ва вақт бирликлари, масалан, *метр* ва *секунд* (1 м, 1 сек) қабул қилинади. Бундан ташқари асосий катталик сифатида яна битта бирлик — масса бирлиги *килограмм* ёки *грамм* (1 кг, 1 г) киритилади.

Асосий бирликларни танлаш йўли билан бирликларнинг турли *системалари* яратилиши мумкин. Ҳозирги вақтда физикада СИ (*интернационал система* сўзларининг бош ҳарфларидан тузилган) система бирликларидан фойдаланиш қабул қилинган.

Ушбу китобда биз СИ ва СГС системалар бирликларидан фойдаланамиз.

Ҳозирги вақтда бирликларнинг техникавий системаси қўлланилган кенг техникавий адабиёт ва техникавий справочниклар мавжудлиги туфайли, физикавий катталикларнинг қийматлари бир қатор ҳолларда илова учун техникавий системада ҳам берилади.

Барча мураккаб физикавий катталикларнинг бирликлари асосий бирликларнинг танланишига боғлиқ. Мураккаб ва асосий катталиклар бирликлари орасидаги боғланишларни кўрсатувчи формулаларни ўлчамлик формулалари дейилади. Ҳар бир катталик муайян *ўлчамликка* эга бўлиб, унинг асосида асосий бирликларнинг катталиклари ўзгариши натижасида мураккаб катталикнинг бирлиги ўзгаришини билиш мумкин. Масалан, вақтни t орқали, узунликни l орқали белгиласак, у ҳолда тезланиш a нинг ўлчамлиги қуйидагича бўлади:

$$[a] = lt^{-2} .$$

Бу ҳол йўл бирлигини n марта орттирганда тезланиш бирлиги ҳам n марта катталашишини билдиради. Вақт бирлигини m марта катталаштирганда тезланиш бирлиги m^2 марта кичраяди. Мураккаб катталиклар бирликларининг ўлчамлик формулалари физикавий катталикларни богловчи қонуниятларни акс эттиради.

Физика ва техника. Физика барча табиийт фанлари билан, айникса, билимнинг техникавий тармоқлари билан узвий боғлангандир. Физикавий қонунлар бир қанча техникавий фанларнинг асосий қонун-қоидаларини ташкил қилади.

Физиканинг янги бўлимларининг очилиши ва тадқиқи техниканинг янги тармоқларининг вужудга келишига олиб келади. Машинасозлик механика қонунларига, электротехника ва радиотехника эса электромагнит ҳодисалар қонунларига таянади ва ҳоказо. Физиканинг муваффақиятлари техникада амалий масалаларни ечишда қўлланилади, масалан, саноат электростанцияларининг атом энергияси билан ишлаши техниканинг янги соҳаси — атом энергетикасидан далолат беради. Физиклар атом ички энергиясининг ғоят катта запаси ҳақида тахминан 70 йилча илгари билган бўлсалар-да, атом энергетикаси ҳақидаги фикр 30 йил илгари фантазия ҳисобланарди. Қаттиқ жисм физикаси соҳасидаги тадқиқотлар радиотехникани, алоқа техникасини, тез ишловчи ҳисоблагич машиналар техникасини янги, янада юқори поғонага кўтарувчи гуркираб ривожланаётган яримўтказгичлар техникасининг яратилишига олиб келди ва ҳоказо. Техникавий фанларнинг тараққиёти ўз навбатида, физикада тадқиқот усулларининг такомиллашишига ёрдам беради; масалан, радиоастрономияда кузатишнинг радиотехникавий воситалари астрофизикавий ҳодисаларни ўрганишнинг янги самарадор воситаларини берди, зарядли зарраларнинг қудратли тезлатгичларини техниканинг юқори даражаси туфайлигина яратиш мумкин бўлди ва ҳоказо. Космик тадқиқотлар бизнинг табиат қонунлари ҳақидаги тасаввурларимизни кенгайтириб ва аниқлаштириб, физика олдига янги-янги масалалар қўя боради.

Математика ва физика. Математика ва физиканинг (шунингдек, бошқа табиийёт фанларининг) тараққиёти бир-бири билан узвий боғланган. Математикани билмай туриб физикани ўрганиб бўлмайди, чунки физикадаги барча қонуниятлар рақамлар воситасида ифодаланади. Фақат математика ёрдамидагина физикавий ҳодисалардаги мураккаб қонуниятларни таҳлил қилиш мумкин.

Математик методларни яратишда ҳамавақт у ёки бу кўринишдаги амалий мақсад — табиат қонуниятларини таҳлил қилиш воситасини бериш кўзда тутилади. Шунинг учун ҳам физикани ўрганиш, ҳатто унинг умумий ва экспериментал физика деб аталувчи қисмларида ҳам математикани ўрганиш билан узвий боғлангандир

Механика тарихидан. Механикани ўрганишга киришмасдан аввал механика тарихининг асосий босқичларини қисқача эслаб ўтиш фойдалидир. Механиканинг тараққиёти кишилик жамиятининг маданий тарихи билан узвий боғлангандир.

Бизнинг вақтгача сақланиб қолган Миср пирамидалари ва қадимий қурилмаларнинг бошқа қолдиқлари қадимий халқлар асосий мувозанат қонунлари ҳақида муайян билимларга эга бўлганлар деб ҳисоблашга мажбур қилади. Чунки, бундай билимга эга бўлмай туриб, бунақа буюк иншоотларни яратиш мумкин бўлмасди. Юнон файласуфи Афлотун (бизнинг эрамиздан олдинги 384—322 йиллар) ўзининг «Физика» асарида қадимий кишиларнинг механика соҳасидаги билимларини умумлаштирди; бироқ куч ва ҳаракатни боғловчи асосий қонунни у нотўғри таърифлаган эди. Бу қонун 19 аср кейингина аниқланди. Барча машиналарнинг тузилиши асосланган бош қонун — ричагнинг мувозанати қонуни ва сузувчи жисмларнинг мувозанати қонунлари машҳур Архимед (бизнинг эрамизгача III аср) томонидан жуда аниқ кўрсатилган эди. Шу вақтдан бошлаб механика тўла маънодаги фан сифатида тараққий қила бошлайди. Ўрта аср олимлари жисмларнинг мувозанати ҳақида ва уларнинг хоссалари ҳақида янги маълумотлар олдилар, бироқ улар ҳам Афлотуннинг жисмлар ҳаракатининг асосий қонуни ҳақидаги нотўғри тасаввурларига амал қилишда давом этдилар.

Фақат XVII асрда Г. Галилей (1564 — 1642) жисмлар ҳаракатининг асосий қонунини тўғри очиб берди. Бу қонунни ҳамда ўз замонасидаги олимларнинг ютуқларини билгани ҳолда улуғ И. Ньютон (1643 — 1727) бир неча ўн йиллардан сўнг механикавий ҳаракатнинг асосий қонуниятларини аниқлади ва уларни шундай равшан ва ихчам шаклда баён қилдики, у ҳозиргача амалий ва техникавий масалаларни ечишда ҳам, илмий тадқиқотларда ҳам қўлланилмоқда.

Кейинги тадқиқотчилар механиканинг асосий қонуниятларига умумийроқ шакл бердилар ва мураккаб механикавий ҳодисаларни анализ қилиш усулларини такомиллаштирдилар. Аввало Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Даламбер, Ж. Лагранж ва бошқа машҳур олимларнинг асарларидан иборат бўлган бу тадқиқотларнинг буюк натижалари ҳақида назарий механика курсларида гап боради.

Механика тараққиётининг янги босқичи А. Эйнштейн (1879 — 1956) ва ундан олдин ўтган олимларнинг фундаментал ишларидан бошланади. Бу ишлар ёруғлик тезлигидан кичик ҳар қандай тезлик билан ҳаракатланаётган жисмларнинг ҳаракат қонунларини ўз ичига олувчи механика қонунларининг улкан умумлашмасидан иборат бўлиб, эндиликда Ньютон механикасини Эйнштейн механикасининг бир қисми деб ҳисоблаш мумкин.

Атомлар ва молекулалар таркибига кирувчи зарраларнинг ҳаракати ва ўзаро таъсири ҳамда фазонинг жуда кичик соҳасида (10^{-10} м тартибидаги ўлчовларда) содир бўлувчи ҳаракатларнинг қонунлари классик механика қонунларидан, ғоят катта сонли молекулаларга эга бўлган макроскопик жисмлар дейилувчи жисмларнинг ҳаракат қонунларидан принципиал жиҳатдан фарқ қилади. Атомлар ичидаги ва молекулалар ичидаги ҳодисаларнинг қонуниятлари *квант механикаси* (ёки *тўлқин механикаси)* нинг мазмунини ташкил этади. Шуни қайд қилиш лозимки, квант механикаси Эйнштейн механикаси каби, қаралаётган ҳодисалар бўйсунадиган муайян шартларда Ньютоннинг классик механикасини ҳам ўз ичига олади.

Кашфиётлари кўп даражада ҳозирги замон техникасининг даражасини, амалий натижалари эса бизнинг механика соҳасидаги билимларимизнинг ҳаққонийлигини исботлаган инженерлар ва механикларнинг бир қатор авлодларининг хизматлари бебаҳодир. XIX аср ва ҳозирги аср олимларининг тадқиқотлари механикавий ҳодисалар соҳасидаги билимлар доирасини анча кенгайтирди.

БИРИНЧИ ҚИСМ

ҚАТТИҚ ЖИСМЛАР ҲАРАКАТИНИНГ МЕХАНИКАСИ

I БОБ

НУҚТАНИНГ КИНЕМАТИКАСИ

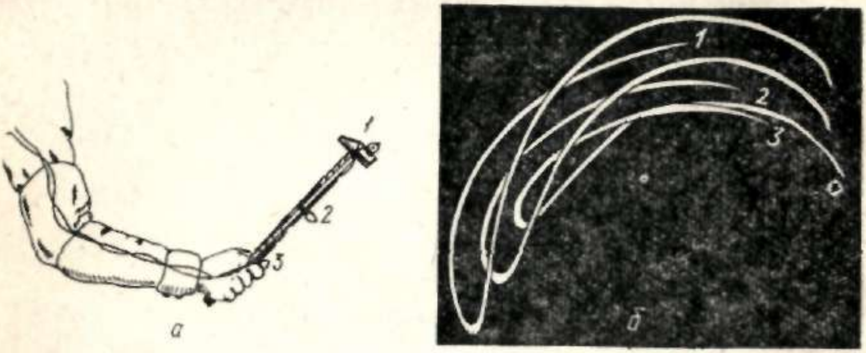
1-§. Жисмларнинг ҳаракати ҳақида

Агар бирор жисмнинг ҳаракатига, масалан, думалаётган ғилдиракка, ҳаракатланаётган автомобилга, тушаётган питрага ёки музда сирпанаётган конькичига ва ҳоказоларга диққат билан қарасак, даставвал, кўзга бу жисмлар ҳаракатининг турли-туманлиги ва мураккаблиги ташланади. Ҳар қандай жисмни—ғилдиракни, автомобилни, двигателни ва ҳақазони фикримизда бўлакларга ажратишимиз мумкин ва бунда ҳар бир бўлак қолган бўлаклардан фарқли ҳаракатланади.

Алоҳида қисмларнинг ҳаракатини аниқлаш учун, масалан, шундай иш кўришимиз мумкин: жисмнинг бирор қисмига ёруғланувчи кичкина лампочка бириктириш ва қўзғалмас фотоаппарат билан расмда фақат ёруғланувчи лампачанинг изи қоладиган қилиб экспозицияни танлаган ҳолда ҳаракатланаётган жисмни расмга олиш мумкин. Вақтни ва расмга олиш масштабини билган ҳолда мураккаб ҳаракатларни ўрганиш мумкин. Масалан, 1-*б* расмда мих қоқаётган ишчининг қўлидаги болғача (1-*а* расм) дастасига жойлаштирилган учта лампача изларининг фотосурати кўрсатилган. Лампачаларни турлича жойлаштириб уларни турли томонлардан расмга олиб, лампачани узлукли ёруғлантириш билан ҳаракатланаётганда деформацияланадиган, ўз шаклини ўзгартирадиган турли жисмларнинг ҳаракатлари ўрганилади.

Ҳар бир лампача ва жисмнинг у билан боғланган ҳар бир зарраси муайян чизиқ бўйлаб ҳаракат қилади; лампачалар шу қадар кичикки, фотосуратда биз лампочка чизган чизиқнигина қайд қиламиз; бу чизиқ лампача ҳаракатининг фотопластинка текислигига проекциясидан иборатдир. Демак, қисмлари турлича ҳаракатлар қилаётган мураккаб жисмнинг ҳаракат қонунларини билиш учун, аввало жисмнинг алоҳида зарралари ҳаракати қонунларини ўрганиш лозим.

Жисм заррасининг (ёки бутун жисмнинг) ҳолати чизиқдаги нуқтанинг ҳолати билан бир қийматли аниқланадиган ҳолларда механикада моддий нуқта тушунчасидан фойдаланилади. Бутун жисм ўл-



1-расм.

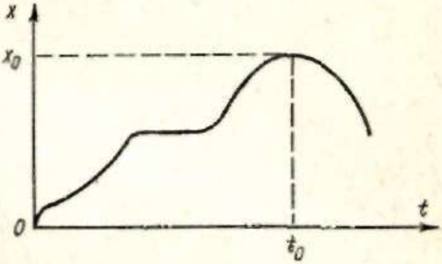
човларига нисбатан етарлича кичик ўлчовли унча катта бўлмаган зарраларни ва ҳатто, ушбу ҳодисада жисм ўтадиган масофага нисбатан ўлчовлари жуда кичик бўлган яхлит жисмни ҳам моддий нуқта деб ҳисоблаш мумкин. Масалан, Ернинг Қуёш атрофидаги йиллик ҳаракатини моддий нуқтанинг ҳаракати сифатида қараш мумкин. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатини ҳамма вақт моддий нуқтанинг ҳаракати билан акс эттириш мумкин, чунки битта зарранинг ҳолати бу ҳолда бутун жисмнинг ҳолатини белгилайди. Моддий нуқтанинг ҳаракат қонунларини билиб олиб, биз қаттиқ ва деформацияланувчи жисмларнинг ҳаракат қонунларини ўрганишга киришамиз. Бу жисмларни бир-бири билан боғланган алоҳида моддий нуқталарнинг мажмуаси сифатида тасаввур қилиш мумкин.

Келгусида биз «моддий» сўзини тушириб қолдириб, содда қилиб, *нуқтанинг ҳаракати ҳақида гап юритамиз.*

2-§. Нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракати

Нуқтанинг энг содда ҳаракати—унинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатидир. Нуқта вақт ўтиши билан тўғри чизиқ бўйича силжийди, берилган чизиқдаги бирор муайян нуқтадан узоқлашади ёки унга яқинлашади. Бу ҳолда тўғри чизиқ саноқ системаси сифатида қабул қилиниб, нуқтанинг ҳаракати унга нисбатан қаралади.

Агар x координата (ҳаракатланаётган нуқтанинг тўғри чизиқдаги бирор танланган O нуқтадан масофаси) t вақтнинг функцияси сифатида маълум бўлса, нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қонуни маълум бўлади. Анализ учун ордината ўқида x координатани муайян масштабда, абсцисса ўқида эса муайян кесмани вақт бирлигига тенг деб олиб, t вақтни қўйган ҳолда x координатанинг t вақтга боғланишини график тасвирлаш (2-расм) қулай. 2-расмдаги график бўйича муайян нуқтанинг ҳаракати қандай содир бўлганини тўла аниқлаш мумкин. Агар t нинг ортиши билан $x(t)$ эгри чизиқ юқорига кўтарилса, нуқта O дан узоқлашади ва эгри чизиқ қанча тикроқ кўтарилса, O нуқтадан шунча тезроқ узоқлашади; эгри чизиқнинг абсцисса ўқига параллел қисмлари нуқтанинг тўхташига, эгри чизиқнинг пастга тушиши нуқтанинг O га яқинлашишига мос келади ва ҳоказо.



2- расм.

Тўғри чизиқ бўйича кўчаётган ва моддий нуқта сифатида қаралаётган жисмнинг ҳаракат графигини олиш учун t вақтнинг муайян пайтларида x масофани ўлчаб бориш лозим. x ни турлича усуллар билан ўлчаш мумкин, масалан, қўзғалмас фотоаппарат воситасида ҳаракатланаётган жисмнинг вақтнинг муайян пайтларида оний фотосуратларини олиш мумкин; ҳаракатланаётган жисмга шундай мослама ўрнатиш мумкинки, жисм ўзи ҳаракатланаётган қўзғалмас жисмда муайян вақт ўтказиб, белгилар қўйиб борсин ва ҳоказо.

Шундай тарзда биз нуқта босиб ўтган йўлни эмас, балки нуқтанинг берилган пайтдаги x координатасини аниқлашимизни айтиб ўтиш лозим. *Нуқта босиб ўтган йўлни, нуқта бир йўналишда* ҳаракат қилаётгандагина унинг координатаси бўйича аниқлаш мумкин. Масалан, 2- расмдаги графикка мос келган ҳаракатда нуқта x_0 дан катта координатага эга бўла олмайди, бироқ t_0 пайтдан кейин нуқта ўтган $s(t)$ йўл x_0 дан катта бўлади, x координата, аксинча, x_0 дан кичик бўлади. Агар автомобиль ғилдирагининг айланишлари счётчиги кўрсатишларини муайян вақт моментларида қайд қилиб борилса, муайян аниқлик билан автомобиль йўлининг вақтга боғланиши ҳосил бўлади. Бир йўналишдаги ҳаракатда бу — ҳаракат координатасини беради, акс йўналишдаги ҳаракатда йўл орта боради, координата эса камая боради.

Координатанинг вақтга боғланиши нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатини тўла белгилайди, бироқ механикада яна иккита катталикни — *тезлик* ва *тезланишни* билиш муҳимдир.

3- §. Нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатидаги тезлиги

Нуқтанинг тезлиги координатанинг вақт бўйича ўзгаришини аниқловчи физикавий катталикдир. *Ўртача тезлик* катталиги сон жиҳатдан нуқта босиб ўтган масофанинг шу масофани босиб ўтиш учун кетган вақтга нисбатига тенг. Айтайлик, t_1 пайтда жисм x_1 нуқтада, t_2 пайтда эса x_2 нуқтада бўлсин; демак, унинг кўчиши $x_1 - x_2$, у ҳолда ўртача тезлик

$$v_{\text{ўр}} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}. \tag{3.1}$$

Кўчишлар узунлик бирликларида (сантиметр, метр, километр, фут ва хоказо) ўлчанади, вақт эса вақт бирликларида (секунд, минут, соат ва ҳоказоларда) ўлчанади. Тезлик—мураккаб физикавий катталик, масофа ҳам вақт ҳам эмас, у узунлик бирлигини ва вақт бирлигининг танланишига боғлиқ бўлган *хусусий* бирликда ўлчанадиган катталикдир. Тезликнинг ўлчамлиги иккита катталик—узунлик ва вақт нисбатига тенг:

$$[v] = l \cdot t^{-1}. \tag{3.2}$$

Тезлик см/сек да, ёки м/сек да, ёки км/соат да ва ҳоказода ўлчанади.

Равшанки, ўртача тезлик биз уни аниқлаётган вақт оралиғига боғлиқдир. Агар ўртача тезлик берилган ҳаракатда *ҳар қандай* вақт оралиғи учун *бирдай* бўлса, у ҳолда ҳаракат ўзгармас тезлик билан юз беради ва уни *текис* ҳаракат дейилади.

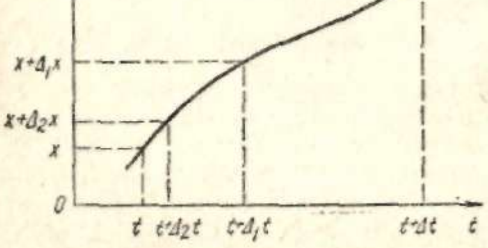
Координатанинг вақтга боғланиш графигида текис ҳаракат тўғри чизиқ кўринишида тасвирланади. Координата бошидан бошланадиган текис ҳаракатда координата катталиги билан йўл катталиги орасида фарқ бўлмаслигини қайд қилиб ўтамиз.

Нотекис ҳаракатда ўртача тезлик доимий катталик бўлмай, у *битта харакатнинг ўзи учун, биз уни вақтнинг қайси интервали* учун аниқлаётганимизга қараб, турлича бўлади. Ўртача тезлик бизга *жисм ҳаракатининг йўлнинг турлича жойларидаги ўзгаришларини* кўрсатмайди, шу сабабли ҳаракатни янада тўлароқ характерлаш мақсадида, тезликнинг муайян вақт моменти учун *оний қиймати* ёки муайян момент учун нуқтанинг тезлиги киритилади.

Нуқтанинг унча катта бўлмаган Δt вақт оралиғидаги кўчиши аниқланган дейлик. Унда шу участкада ўртача тезлик

$$v_{\text{ўр}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

қийматга эга бўлади. Айтайлик, t вақт моментида нуқта x координатага (3-расм), $t+\Delta t$ вақт моментида $x+\Delta x$ координатага эга



3- расм.

бўлсин. Тасаввур қилайликки, кетма-кет камайиб борувчи турлича $t+\Delta t$ ларда $((t+\Delta_1 t)$ да, $(t+\Delta_2 t)$ да ва ҳоказо) қатор Δx ўлчашлар бажарилган. Равшанки, агар $\Delta_i t$ ларнинг ва уларга тааллуқли $\Delta_i x$ ларнинг турли қийматлари етарлича кичик бўлиб, $\Delta_i x$ участкадаги ҳаракатни деярли текис дейиш мумкин бўлса, Δt нинг етарлича кичик қийматларида тезлик катталигининг бирдай қийматлари ҳосил бўлади:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Тезликнинг бу қиймати нуқтанинг муайян t вақт моментидаги, аниқроғи, шу момент яқинидаги тезликдан иборатдир.

Нуқтанинг t моментдаги тезлигининг математикавий маънода янада аниқроқ таърифи қуйидагича ёзилади:

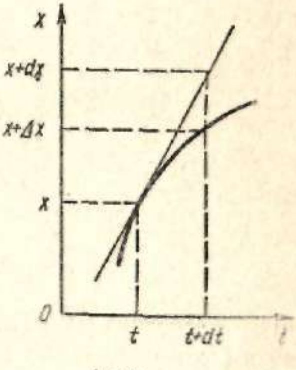
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (3.3)$$

Бу ҳол тезликнинг Δx координата орттирмасининг Δt вақтнинг тегишли орттирмасига нисбати Δt нолга интиладиган шартда интиладиган лимит (limitis) эканлигини билдиради. Математикада бу лимитни x координатадан вақт бўйича ҳосила дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$v = \frac{dx}{dt}. \qquad (3.4)$$

Бу ифодадаги dt таърифга кўра Δt га тенг, dx эса тегишли Δx дан dt^2, dt^3 ва ҳоказоларга пропорционал катталикларча фарқ қилади (4-расм). (3.3) ва (3.4) ифодалар математика нуқтаи назаридан қараганда *тезлик катталиги координатадан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг эканлигини кўрсатади.* (3.4) тенгликни қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$dx = v\,dt, \qquad (3.5)$$

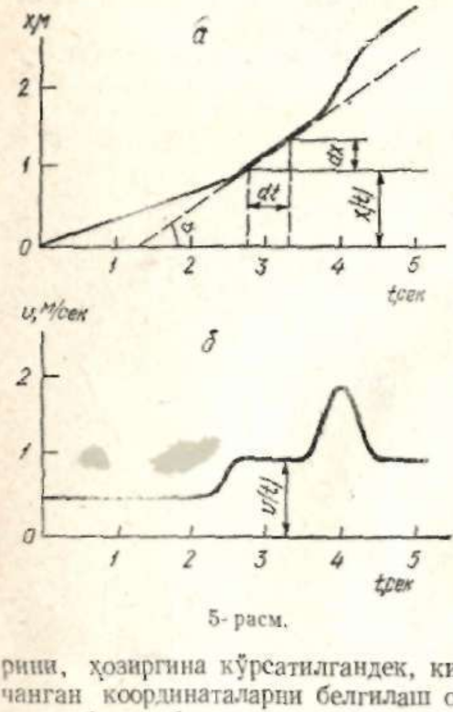


4- расм.

бошқача айтганда: координатанинг етарлича кичик орттирмаси тезликнинг вақт орттирмасига кўпайтмасига тенгдир.

Ҳаракатланаётган нуқта координатасининг вақтга боғланиш графигидан принципда тезлик катталигини топиш ва унинг вақтга боғланиш графигини чизиш мумкин. Айтайлик, $x(t)$ график муайян масштабда 5-*а* расмдагидек берилган бўлсин. t абсцисса ўқини шундай dt кичик қисмларга бўлиш мумкинки, улар устидаги $x(t)$ эгри чизиқ кесмасини катта аниқлик билан уринманинг кесмалари деб ҳисоблаш мумкин бўлсин[1]; у ҳолда уринманинг қиялик бурчаги тангенси $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dx}{dt}$ тезликнинг узунлик ва вақт бирликлари билан белгиланувчи бирликлардаги сон қийматини беради.

Равшанки, вақтнинг $x(t)$ эгри чизиқ деярли тўғри чизиқ (ёки аниқ тўғри чизиқ) бўладиган қийматларида dt оралиқларни, жуда кичик қилиб олмаса ҳам бўлади, лекин $x(t)$ эгри чизиқ кескин эгиладиган жойларда $\frac{dx}{dt} = v$ ни аниқ белгилаш учун dt оралиқлар жуда кичик бўлиши керак. Бунга амалда эришиш жуда қийин бўлганидан, тезликни шу пайтлар учун графикдан топиш аниқлиги етарлича бўлмаслиги мумкин. 5- *б* расмда $x(t)$ ҳаракат графигига (5- *а* расмга қаранг) мос бўлган $v(t)$ тезлик қийматлари вақтнинг ўша масштабида кўрсатилган. Графикларни таққослашдан кўринишича $v(t)$ тезликнинг энг катта қийматларига мос келувчи вақт моментларида $x(t)$ координатанинг энг катта ўсиши, яъни $x(t)$ графикда эгри чизиқнинг энг катта кўтарилиш қиялиги кузатилади.



5- расм.

Нуқтанинг берилган пайтдаги тезлик қийматларини, ҳозиргина кўрсатилгандек, кичик вақт оралиқлари билан ўлчанган координаталарни белгилаш орқали топиш мумкин эди, амалда, албатта, бу усул жуда кам ишлатилади. Шу сабабли, ҳаракатланаётган моддий нуқта тезлиги қийматини бевосита ўлчайдиган бир қатор махсус асбоблар мавжуддир. Масалан, автомобилнинг ҳаракат тезлигини махсус асбоб—спидометр (инглизча Speed — тезлик) кўрсатиб туради.

---

[1] Эгри чизиқнинг берилган нуқтасига уринма деб, шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ эгаллайдиган чегаравий ҳолатни айтилиб, бу тўғри чизиқнинг эгри чизиқни кесадиган иккинчи нуқтаси биринчисига чексиз яқин бўлиши шарт.

Нуқтанинг берилган пайтдаги тезлиги дейилувчи физикавий катталик координатанинг вақт ўтиши билан ўзгариш тезлигини кўрсатади. Нуқтанинг берилган пайтдаги тезлиги каби физикавий катталикнинг мавжудлиги координатанинг вақт ўтиши билан ўзгариши узлуксизлиги ва бу катталикларнинг ўзгаришлари орасида қонуний боғланишнинг мавжудлиги билан боғлиқдир. Тезликнинг катталиги ҳаракатланаётган нуқтанинг исталганча яқин вақт моментларида фазода эгаллаб турган иккита ҳолати фарқи билан аниқланади.

Тезликнинг оний қийматининг аниқ таърифини Ньютон берган; шу таърифдан фойдаланиб, у чексиз кичик миқдорлар анализи асосини яратди.

4-§. Тезлик билан ўтилган масофа орасидаги боғланиш

Нуқтанинг v_0 доимий тезликда t_2-t_1 вақт оралиғида ўтган масофаси, равшанки, тезлик v_0 нинг t_2-t_1 вақтга кўпайтмасига тенг:

$$x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1). \tag{4.1}$$

Нуқтанинг ҳаракат тезлиги ўзгарувчан бўлганда бу ифода маънога эга бўлмайди. Агар t_2-t_1 вақт ичидаги $v_{\text{ўр}}$. ўртача тезлик маълум бўлса, ўтилган масофа (4.1) га ўхшаш формула билан ифодаланиб, унда v_0 ўрнида $v_{\text{ўр}}$ туради.

Ўртача тезлик номаълум бўлган ҳолда, жисм ўтган масофани ҳисоблашни, етарлича кичик вақт оралиғидаги ҳар қандай ҳаракатни етарлича аниқлик билан текис ҳаракат дейиш мумкин, деган асосга таянувчи махсус усулда бажариш мумкин. Шу сабабли жисм етарлича кичик dt вақт оралиғида ўтадиган dx масофани аниқлаш учун берилган t вақтдаги v тезликни вақтнинг тегишли dt орттирмасига кўпайтириш лозим. $v\cdot dt$ га тенг бўлган бу кўпайтма координатанинг dt вақт ичидаги dx орттирмасига тенг:

$$dx = v\,dt. \tag{4.2}$$

Сўнгра, t_2-t_1 бутун вақт оралиғини чексиз кўп сонли dt кичик оралиқларга бўлиб чиқдик, деб фараз қиламиз. Ҳар бир кичик dt оралиққа ўзининг dx кичик орттирмаси мос келади. t_2-t_1 вақт ичида ўтилган x_2-x_1 масофани барча dx ларнинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин. Бундай йиғинди интеграл дейилади ва ушбу кўринишда ёзилади:

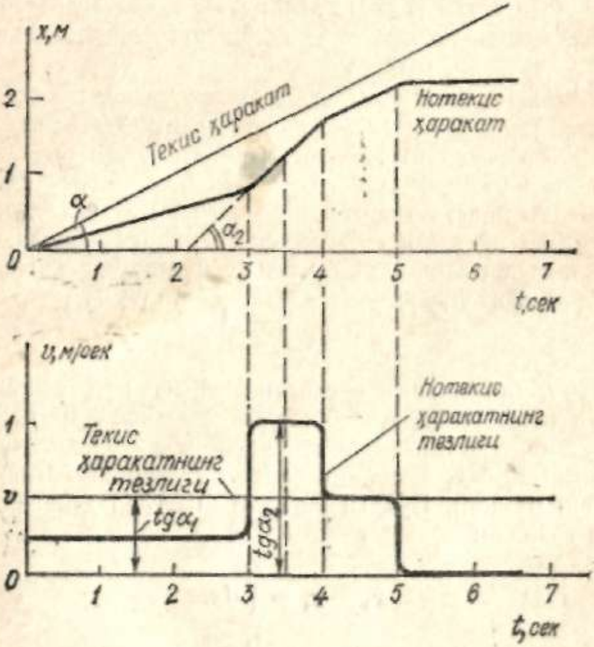
$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx.$$

Интеграл белгиси остига dx ўрнига унга тенг бўлган $v\cdot dt$ катталикни қўямиз ва вақт бўйича t_1 дан t_2 гача йиғамиз. У ҳолда жисм t_2-t_1 вақт ичида ўтган кесма ушбу кўринишда ёзилиши мумкин:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

$x_2 - x_1$ катталикни тезликнинг $v(t)$ маълум катталиги асосида ҳисоблаш интеграл ҳисобнинг масаласини ташкил этади. Интеграллаш дифференциаллашга, яъни ҳосила олишга тескари амалдан иборат. Ўтилган масофанинг катталиги v тезликдан t вақт бўйича интегралга тенгдир. Учта физикавий катталик—координата, вақт ва тезликнинг қонуний боғланиши математик ҳосила ва интеграл билан аниқланади.

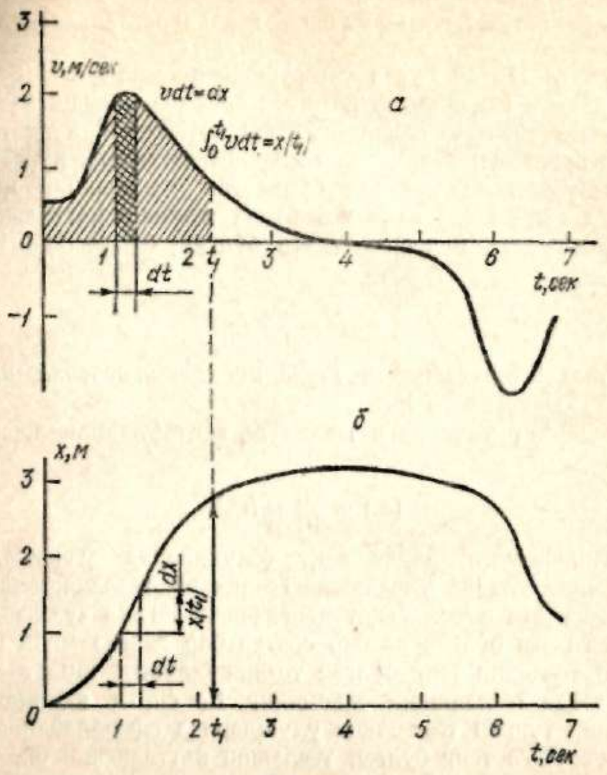
6-расмда икки хил ҳаракат—текис ва нотекис ҳаракатлар учун координаталар ва тезликларнинг графиклари кўрсатилган. Агар бизга ҳаракат тезлиги графиги $v(t)$ маълум бўлса, у асосда шу ҳаракатнинг ўзи учун ва шу билан бирга амалда етарлича аниқ, $x(t)$[1] графикни топиш мумкин. 7-а расмда муайян масштабда v тезликнинг t нинг функцияси сифатидаги боғланиш графиги берилган. dt кесмани ажратиб олайлик; бунда катталикларнинг ўқлар бўйича



6-расм.

---

[1] Агар нуқтанинг муайян вақт моментидаги ҳолати маълум бўлса.



7- расм.

қўйилган масштаблари бирликларида ҳисобланган $v\cdot dt$ юз (7-*а* расмда қуюқ штрихланган) сон жиҳатдан x (t) нинг dt вақт ичидаги орттирмасига тенг (7-*б* расм). Нуқтанинг t_1 вақт моментидаги $x(t_1)$ га тенг бўлган координатаси равшанки, 0—t_1 участкада

$$x(t_1)=\int_0^{t_1}dx=\int_0^{t_1}vdt$$

бўлгани туфайли $v(t)$ эгри чизиқ билан чегараланган ҳамма юзга тенг бўлади.

Шундай қилиб, $t=0$ дан $t=t_2$ гача оралиқда $v(t)$ эгри чизиқ остидаги юзни ҳисоблаб, x координатани исталган t_2 вақт моментида аниқлай оламиз. Интеграллаш натижаси 7-*б* расмда тасвирланган. Юзни бундай топишни амалда етарлича аниқ бажариш мумкин ва шу сабабли график кўринишда берилган тезлик орқали координатани аниқлаш усули тезликни координатанинг берилган графиги бўйича аниқлаш усулидан анча аниқроқдир.

5-§. Нуқтанинг тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланганидаги тезланиши

Нотекис ҳаракатда нуқта ўзгарувчан тезликка эга бўлиб, уни *координата каби вақтнинг функцияси сифатида қараш мумкин.* Тезлик катталиги жисм кўчишининг ўсиш суръатини кўрсатади. Тезликнинг ўзгариш суръатини эса тезланиш катталиги кўрсатади.

Жисм муайян пайтда эга бўладиган тезланишни қуйидагича аниқланади: айтайлик, t вақт моментида тезлик v катталикка $t+dt$ моментда тезлик $v+dv$ қийматга эга бўлсин, бунда dv — чексиз кичик катталик,

$$w = \frac{dv}{dt} \tag{5.1}$$

нисбатни *тезланиш* дейилади. *Тезланиш катталиги тезликдан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг.*

Тезланишнинг ўлчамлиги тезлик ва вақт ўлчамликлари нисбатига тенг:

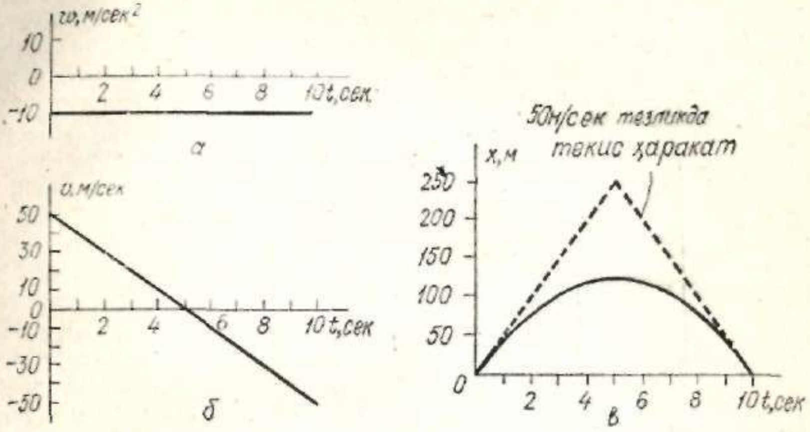
$$[w] = \frac{[v]}{[t]} = lt^{-2}. \tag{5.2}$$

Агар тезлик м/сек ларда, вақт секундларда ўлчанса, у ҳолда *тезланиш м/сек^2 ларда ўлчанади.* Тезлик ва тезланиш бирликлари одатда, номга эга эмас. Фақат денгизчиликдагина «узел» дейилувчи махсус номга эга бўлган ва бир соатда бир денгиз мили (1,853 км) ўтиладиган тезликка тенг бўлган тезлик бирлиги ишлатилади. Техникада баъзида тезланишни жисмнинг Ер сирти яқинида ҳавосиз фазода эркин тушиш тезланиши улушларида ифодалайдилар. У ҳолда 981 см/сек^2 га тенг бўлган тезланиш катталигини бирлик сифатида қабул қилинади. Физика ва техникадаги одатдаги ҳисоблашларда тезлик ва тезланиш бирликларининг катталиклари асосий бирликлар — узунлик ва вақт бирликларининг танланишига боғлиқ бўлади.

Доимий тезланишли ҳаракатда тезлик вақт ўтиши билан ўса боради (ёки камая боради), координата эса вақт ўтиши билан квадратик қонун бўйича ўса боради (ёки камая боради). Жисмнинг тўғри чизиқ бўйича доимий тезланиш билан ҳаракатига унинг Ерга тушиши мисол бўла олади.

Жисмларнинг ҳавода тушиши билан боғлиқ тажрибаларини таҳлил қилаётиб, Галилей ўз вақтида юқорига отилган барча жисмларнинг тезланиши (Ер сирти яқинида) юқорига учиш вақтида ҳам, тушишда ҳам бирдай (ҳавонинг таъсири бўлмаган шароитда) бўлишини таъкидлаган эди. Бу тезланиш берилган жойнинг кенглигига боғлиқ бўлиб, Москва кенглигида тахминан 9,81503 м/сек^2 га тенг. Бўшлиқда вертикал юқорига отилган жисмнинг тезланиш, тезлик ва координаталари грификлари 8-расмда кўрсатилган.

Жисмнинг бўшлиқда тушиши—бу доимий тезланишли ҳаракатга мисолдир. Агар тезланиш вақт ўтиши билан ўзгара борса, у ҳолда,



8- расм.

демак, тезлик ҳам қандайдир ўзгара боради, лекин у доимий тезланишли ҳаракатдагидек ўзгариши чизиқли қонун бўйича юз бермайди. Ўзгарувчан тезлик ҳолидагидек мулоҳаза юритиб *тезликнинг бирор вақт ичидаги ўзгариши тезланишдан вақт бўйича олинган интегралга тенг эканлигини қайд қилиш мумкин.*

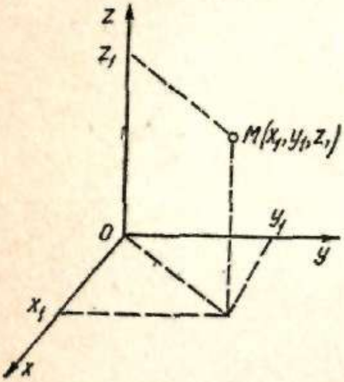
Тезланишни яна қуйидагича таърифлаш мумкин: *тезланиш—тезликнинг ўзгариш «тезлигидир»*. Равшанки, тезлик сўзи ушбу ҳолда турли маънога эга, шу сабабли биз улардан тезликнинг ўзгариш суръатини ифодалайдиганини қўштирноқ ичига олдик: математика терминларидан фойдаланиб, «ўзгариш тезлиги» сўзларини «ҳосила» сўзи билан алмаштириш мумкин.

Ҳосила ва интегралнинг математик тушунчалари Ньютон томонидан жисмнинг тўғри чизиқ бўйлаб нотекис ҳаракати қонунларини тўғри ифодалаш учун киритилган эди. Бу математик тушунчаларсиз мураккаб механикавий ҳаракатлар қонуниятларини тушуниб олиш қийин ва кўпинча, ҳатто мумкин ҳам эмас. Шунинг учун мураккаб ҳаракатлар механикасини ўрганиш математика фанларининг тараққиёти билан узвий боғлангандир.

6- §. Нуқтанинг фазодаги ҳаракати

Нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатида нуқтанинг фазодаги ҳаракати йўналиши шу тўғри чизиқнинг ҳолати билан белгиланади. Берилган тўғри чизиқ бўйича ҳаракат йўналиши ўзгариши мумкин, бунда тезлик ишораси ўзгаради, одатда, мусбат координата вақт ўтиши билан ўса борса, тезликни мусбат катталик деб ҳисобланади.

Нуқтанинг бошқа жисмларга нисбатан ҳар қандай ҳаракатини унинг учта ўзаро тик координата ўқларига эга бўлган *саноқ системасига* нисбатан ҳаракати сифатида тасаввур қилишимиз мумкин. Масалан, питранинг хонанинг деворлари ва полига нисбатан ҳаракатини аниқлаш учун координата ўқлари сифатида деворлар ва полнинг, хонанинг пастки бурчакларидан бирида, учрашадиган кесишув чизиқларини қабул қилиш мумкин. Хона саноқ жисмини, биз танлаган ўқлар системаси эса, боши хонанинг муайян пастки бурчагида жойлашган саноқ системасини ташкил этади.



9- расм.

Координаталар бошидан қаралаётган нуқтадан координаталар ўқларига туширилган перпендикулярларнинг охирларигача масофаларни x, y ва z сонлар билан белгилайлик, бунда x—бир горизонтал ўқ бўйича координата, y— бошқа горизонтал ўқ бўйича, z эса вертикал ўқ бўйича координата (9-расм).

Агар x_1 ва y_1 нуқтанинг текисликдаги координаталари бўлса, у ҳолда питранинг полдаги ҳолати x_1 ва y_1 иккита координата билан бир қийматли аниқланади ва унинг шу текисликдаги ҳар қандай ҳаракати иккита функция билан кўрсатилиши мумкин:

$$x_1(t), \quad y_1(t).$$

Нуқтанинг хонанинг ҳар қандай жойидаги ҳолати ўзаро тик учта координата ўқларидан ҳосил бўлган саноқ системасига нисбатан ҳолати каби аниқланади ва учта сон x_1, y_1 ва z_1 билан аниқ белгиланади, бунда z_1—нуқтанинг полдан узоқлиги, x_1 ва y_1 лар эса, берилган нуқтадан туширилган шоқул учининг горизонтал текисликдаги координаталари. x_1 y_1 z_1 сонлар—нуқтанинг фазодаги координаталари.

Нуқтанинг саноқ системасига нисбатан ҳар қандай ҳаракатида (масалан, питранинг хонага нисбатан ҳаракатида), умуман айтганда, учта сон, учта координата бир вақтда ўзгаради ва шунинг учун нуқтанинг умумий ҳаракати математик шаклда учта вақт функцияси орқали кўрсатилиши мумкин:

$$x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t).$$

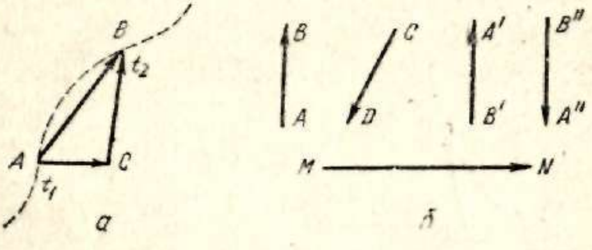
Фазонинг ҳаракатланаётган нуқта ўтадиган барча нуқталари эгри чизиқ ҳосил қилиб, уни *траектория* дейилади. Нуқтанинг траектория бўйича ўтган масофаси узунлигини *йўл катталиги* дейилади. Масалан, шаҳар бўйлаб ҳаракатланаётган автомобилнинг траекторияси ҳақида гапириш мумкин: равшанки, бу етарлича мураккаб эгри чизиқ бўлади. Траектория нуқта фазода «чизган» эгри чизиқ, автомобиль ҳаракатланган эгри чизиқдир, йўл катталиги эса автомобиль босиб ўтган, счётчик кўрсатаётган километрлар сонидир.

Ҳаракат вақтида нуқта вақт ўтиши билан фазонинг траекторияда ётган бир нуқталаридан бошқаларига кўчади. Нуқтанинг dt кичик вақт ичидаги ds кўчиши фақат тезлик катталиги билангина эмас, балки тезликнинг фазодаги йўналиши билан ҳам аниқланади. Муайян пайтда жисмнинг тезлиги жисмнинг шу пайтдаги кўчиш томонига йўналган.

Фазода ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги $\frac{ds}{dt}$ нисбат билангина эмас (бунда ds — траекториянинг dt вақт ичида ўтилган кесмаси узунлиги), балки траекториянинг чексиз кичик кесмаси ds йўналишига мос келувчи йўналиш билан ҳам белгиланади. Фазода муайян йўналиш билан характерланувчи ва *вектор катталиклар* дейилувчи шундай физикавий катталиклар устида математик амаллар бажариш учун математикада махсус қоидалар ишланган бўлиб, уларнинг асосийлари навбатдаги параграфда келтирилган.

7- §. Векторларнинг асосий хоссалари

Векторнинг геометрик образи—бу тўғри чизиқнинг фазода муайян тарзда ориентирланган (йўналган) кесмасидир. Нуқтанинг фазода исталган вақт оралиғидаги кўчишини вектор орқали тасвирлаш мумкин. Масалан, t_1 моментда нуқта A нуқтада, t_2 моментда эса, B нуқтада эди (10-*а* расм); у ҳолда t_2-t_1 вақт ичидаги кўчиш $\overrightarrow{AB}$ вектор билан тасвирланади[1].



10- расм.

Кўчиш вектори тўғри чизиқли ҳаракат ҳолидагина ҳаракатланаётган нуқтанинг траекториясига мос тушади. Эгри чизиқли ҳаракат ҳолида нуқтанинг траекторияси A ва B нуқталардан ўтувчи эгри чизиқдан иборат бўлади (10-*а* расмдаги пунктир).

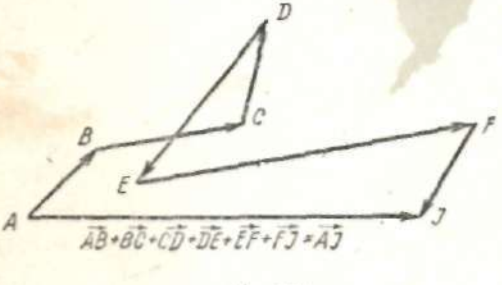
---

[1] AB нинг устидаги стрелка A дан B га йўналган векторни билдиради.

Векторлар тенг параллел кесмалар билан тасвирланиб, бир томонга йўналган бўлсалар, уларни бир хил дейилади. 10-б расмда чизма текислигида ётувчи турли векторлар кўрсатилган. Муайян масштабда ўлчанган кесма узунлиги векторнинг *абсолют катталигига* ёки *модулига* тенг[1], кесманинг жойлашиши ва стрелка унинг йўналишини кўрсатади. Масалан $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар бирдай абсолют катталикларга, лекин турли йўналишларга эга, $\overrightarrow{AB}$ вектор $\overrightarrow{CD}$ векторга тенг эмас. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{MN}$ векторлар ҳам йўналиши ҳам катталиклари жиҳатидан бир-биридан фарқ қилади. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B'A'}$ векторлар тенгдир, яъни улар абсолют катталиклари жиҳатидан тенг ва йўналишлари жиҳатидан ўзаро мос тушади.

Айтайлик, нуқта $\overrightarrow{AB}$ кесмага кўчди (10-*а* расм), яъни A нуқтадан B нуқтага ўтди. Нуқтанинг бундай кўчишини иккита кўчишнинг йиғиндиси сифатида қараш мумкин; A нуқтадан қандайдир ихтиёрий C нуқтага кўчиш юз берди (бу кўчиш $\overrightarrow{AC}$ вектор билан тасвирланган), сўнгра C нуқтадан B нуқтага кўчилди (тегишли кўчиш $\overrightarrow{CB}$ вектор орқали тасвирланган) деб фараз қилайлик. Демак, $\overrightarrow{AB}$ кўчиш $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{CB}$ кўчишлар йиғиндисига тенг ёки $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{CB}$ вектормар йиғиндиси $\overrightarrow{AB}$ векторни беради. Векторлар геометрик қўшилади: иккита векторнинг йиғиндиси томонлари қўшилувчи векторлардан иборат бўлган параллелограммнинг диагоналига тенг. Векторларни айириш ҳам шу қоида асосида бўлади: $\overrightarrow{CB}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторлар айирмасига тенг, $\overrightarrow{AB}$ кўчишдан $\overrightarrow{AC}$ кўчишни айириш лозим, натижада $\overrightarrow{CB}$ кўчиш ҳосил бўлади.

$\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{CB}$ векторлар $\overrightarrow{AB}$ векторнинг *ташкил этувчилари* дейилади. Бир нечта векторнинг йиғиндисини қуйидагича «векторлар занжирчасини» ясаш орқали ҳосил қилиш мумкин (11- расм): барча қўшилувчи векторларни навбат билан шундай тарзда жойлаштириладики, биринчи векторнинг охирига иккинчи векторнинг боши, иккичисининг охирига учинчининг боши ва ҳоказо қўйилади, сўнгра биринчининг боши билан

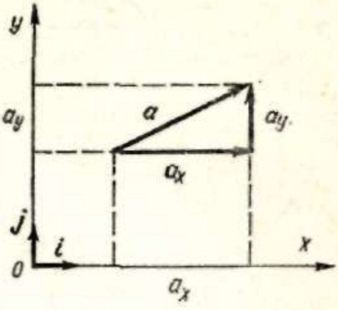


11. расм.

---

[1] $\overrightarrow{AB}$ векторнинг абсолют катталиги (ёки унинг модули) $|\overrightarrow{AB}|$ ёки AB (устида стрелкасиз) тарзда белгиланади.

охиргисининг охири бирлаштирилади. Биринчи векторнинг бошини ва «занжирчанинг» *охирини туташтирувчи* вектор барча векторларнинг йиғиндисидан иборат бўлади.



12- расм.

Тамомила аёнки, маълум ташкил этувчи векторлар асосида ҳамма вақт уларнинг йиғиндисини аниқлаш мумкин. Одатда вектор катталиклар асосида ҳисоблашларда векторларни уларнинг берилган тайинли йўналишлар бўйича ташкил этувчилари орқали кўрсатиш қулай. Буни даставвал текисликда ётувчи векторлар учун тушунтирайлик (12- расм). Текисликда тўғри бурчакли x, y координаталар системасини олайлик, унда ҳар қандай $\mathbf{a}$ векторни[1]

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \tag{7.1}$$

йиғинди сифатида кўрсатиш мумкин, бунда $\mathbf{a}_x$ катталик x ўқ бўйича йўналган ва $\mathbf{a}$ векторнинг x ўқ бўйича *ташкил этувчиси* дейилувчи вектор; шунга ўхшаш $\mathbf{a}_y$ катталик y ўқ бўйича ташкил этувчи. Равшанки, векторнинг иккита ташкил этувчиси унинг катталигини ва йўналишини бир қийматли белгилайди. (Баъзида ташкил этувчилар ўрнига, векторнинг берилган йўналишларга *проекциялари* ёки ўқлар бўйича *компонентлари* киритилади.)

x ўқ бўйича бирлик векторни $\mathbf{i}$ орқали, y ўқ бўйича бирлик векторни $\mathbf{j}$ орқали белгилаймиз. Таърифга кўра, модули бирга тенг бўлган векторни *бирлик* вектор дейилади. Бирлик вектор фазода фақат муайян йўналишнигина кўрсатади. Бу ҳолда ташкил этувчиларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathbf{a}_x = a_x\mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_y = a_y\mathbf{j}, \tag{7.2}$$

бунда a_x ва a_y лар энди векторлар бўлмай, оддий сонлар—*скалярлар* бўлиб, улар билан фазода йўналишга эга бўлмаган катталиклар, масалан, вақт, координата ва бошқалар кўрсатилади. a_x ва a_y сонларни $\mathbf{a}$ нинг $\mathbf{i}$ ва $\mathbf{j}$ векторлар билан кўрсатиладиган муайян йўналишларига проекциялари ёки, содда қилиб, векторнинг берилган x ва y координата ўқларига проекциялари дейилади. Амалий масалаларда биз ҳамма вақт вектор катталикларни бирор тайинли тўғри бурчакли координаталар ўқларига нисбатан, $\mathbf{i}$ ва $\mathbf{j}$

---

[1] Келгусида векторни битта қора ҳарф орқали, унинг модулини ўша ҳарф билан одатдаги шрифтда ёки вертикал чизиқлар орасига олинган қора ҳарф $|\mathbf{a}|$ билан белгилаймиз.

бирлик векторларнинг йўналишлари билан белгиланувчи танланган бирор саноқ системасига нисбатан белгилаймиз.

Текисликда ётган $\boldsymbol{a}$ векторнинг модули (ёки узунлиги) қуйидагига тенг:

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{7.3}$$

(7.2) ва (7.1) формулаларни назарга олиб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}, \tag{7.4}$$

Бу формулалар текисликда ётган ҳар қандай $\boldsymbol{a}$ вектор учун яроқлидир.

Агар $\boldsymbol{a}$ векторлар фазода жойлашган бўлса, уни x, y, z тўғри бурчакли координаталар системасида кўрсатиш мумкин. $\boldsymbol{i}$ ва $\boldsymbol{j}$ векторларга тик ва z ўқ бўйича бирлик векторни одатда $\boldsymbol{k}$ ҳарфи билан белгиланади. У ҳолда юқоридагидек мулоҳазалар асосида $\boldsymbol{a}$ векторни ташкил этувчилар орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z, \tag{7.5}$$

бунда $\boldsymbol{a}_z$ катталик—z ўқ бўйича ташкил этувчи; ташкил этувчиларни a_x, a_y, a_z проекциялар орқали ёзиб чиқсак, у ҳолда

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{7.6}$$

$\boldsymbol{a}$ векторнинг модули

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{7.7}$$

га тенг бўлади.

Вектор катталикларни кўпайтиришнинг асосий қоидаларини келтирамиз. $\boldsymbol{a}$ векторнинг β сонга кўпайтмаси $\beta\boldsymbol{a}$ кўринишда ёзилади ва $\beta > 0$ бўлганда вектор модулининг йўналиши сақланган ҳолда, $\beta < 0$ бўлганда, йўналиши аксга ўзгарган ҳолда β марта ортганини билдиради. Векторларни скаляр ва вектор усулда кўпайтириш мумкин: биринчи ҳолда векторларнинг кўпайтмаси скаляр миқдор, иккинчисида вектор бўлади $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси таърифга кўра шу векторлар модулларининг улар орасидаги α бурчакнинг косинусига кўпайтмасига тенг. Скаляр кўпайтма қуйидагича белгиланади:

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\alpha; \tag{7.8}$$

у бир вектор модулининг иккинчи векторнинг биринчи векторга проекциясига кўпайтирилганига тенг. Масалан, агар биринчи вектор—куч, иккинчиси кўчиш бўлса, у ҳолда у кучнинг иши куч вектори билан кўчиш векторининг скаляр кўпайтмасига тенг бўлади.

Ўзаро тик иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг. Равшанки, $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

Скаляр кўпайтма *тақсимланувчанлик хоссасига* эга:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}.$$

у осон исботланади (13-расм):

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=am,\ \boldsymbol{ab}=an,\ \boldsymbol{ac}=a(m-n).$$

Бу хоссани назарга олиб,

$$\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{jk}=0 \text{ ва } \boldsymbol{ii}=\boldsymbol{jj}=\boldsymbol{kk}=1$$

бўлишини билган ҳолда

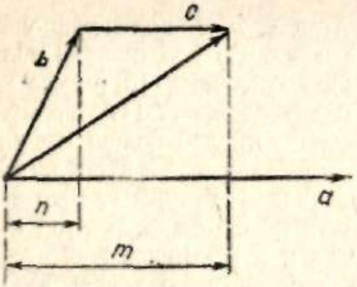
$$\boldsymbol{ab}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (7.9)$$

эканлигини исботлаш мумкин. Демак, иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси координата ўқларига тегишли проекцияларнинг кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

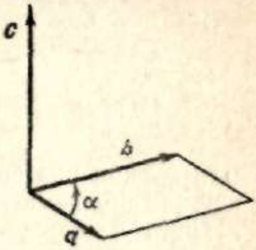
$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг *вектор кўпайтмаси* таърифга кўра, $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар текислигига нормал ҳамда модули $ab\sin\alpha$ бўлган $\boldsymbol{c}$ векторга тенг; бунда α кўпайтирилувчи векторлар орасидаги бурчак. Вектор кўпайтма қуйидагича белгиланади:

$$\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{ab}].$$

Вектор $\boldsymbol{c}$ нинг йўналиши *ўнг* (стандарт) *винт қоидасига* кўра танланади: агар шу винтни $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар текислигида маҳкамланган гайкада $\boldsymbol{a}$ дан $\boldsymbol{b}$ томонга айлантирсак, у ҳолда винт $\boldsymbol{c}$ вектор йўналишида силжийди (14-расм). Бунда вектор кўпайтма, скаляр кўпайтмадан фарқли равишда кўпайтирилувчиларнинг тартибига боғлиқ бўлади, вектор кўпайтма *нокомутативдир*, яъни



13-расм.



14-расм.

$$[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}].$$

Вектор кўпайтма таърифидан $\boldsymbol{c}$ векторнинг модули сон жиҳатдан $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлардан ясалган параллелограммнинг юзига тенглиги келиб чиқади.

Векторлар алгебрасида вектор кўпайтманинг *тақсимланувчанлик хоссаси* исботланади:

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}].$$

Бунда кўпайтувчиларнинг тартиби сақланмоғи лозим.

Бу хоссани назарга олган ҳолда вектор кўпайтма учун кўпайтувчиларнинг проекциялари кўпайтмаси орқали, юзаки қараганда бирмунча мураккаб туюлувчи ифодани чиқариш мумкин:

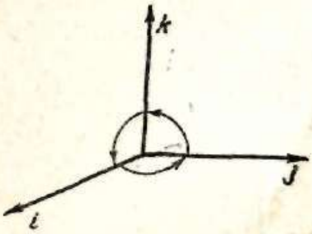
$$\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{ab}]=[(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})]=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}. \qquad (7.10)$$

Чиқариш вақтида

$$[\boldsymbol{ij}]=-[\boldsymbol{ji}]=\boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{jk}]=-[\boldsymbol{kj}]=\boldsymbol{i},$$
$$[\boldsymbol{ki}]=-[\boldsymbol{ik}]=\boldsymbol{j},\ [\boldsymbol{ii}]=[\boldsymbol{jj}]=[\boldsymbol{kk}]=0$$

эканлигини (15- расм) назарга олиш лозим. (7.10) тенгликни проекцияларда ёзиш фойдалидир:

$$c_x=a_yb_z-a_zb_y,$$
$$c_y=a_zb_x-a_xb_z, \qquad (7.11)$$
$$c_z=a_xb_y-a_yb_x.$$



15- расм.

Агар x, y, z индексларнинг барча устунларда алмашинуви айлана бўйича боришига (15- расмга қ.) эътибор берсак, (7.11) формулаларни осон хотирлаб қолиш мумкин.

Скаляр ва вектор катталиклар орасидаги фарқни яна бир бор таъкидлаб ўтамиз: скаляр катталикнинг қиймати *биттагина* сон билан кўрсатилади, вектор катталикнинг қиймати фазода *учта* сон билан кўрсатилади.

Вектор катталикнинг янада умумийроқ таърифи қуйидагича: *вектор—координаталар системасига боғлиқ бўлган ва саноқ системасини бурганда нуқтанинг координаталари каби ўзгарадиган (физикавий катталиклардан иборат бўлган) учта соннинг тартибланган тўпламидан иборатдир*. Координаталар системасини параллел кўчирганда векторнинг проекциялари (компонентлари) ўзгармайди, улар фақат координаталар системасини бургандагина ўзгаради. Физикада биз вектор катталикларни тез-тез учратиб турамиз: масалан, кўчиш, тезлик, тезланиш, куч ва бошқалар вектор катталиклардир.

8-§. Нуқтанинг тезлиги

Йўлнинг етарлича кичик участкасида нуқтанинг ҳар қандай ҳаракатини тўғри чизиқли ҳаракат дейиш мумкин. Эгри чизиқ бўйича ҳаракатланаётган нуқта жуда кичик dt вақт ичида етарлича кичик кесма ўтади (16-расм) ва dS га кўчади. dS кўчишни траекторияга уринма бўйича ҳаракат томонга йўналган вектор деб ҳисоблаш лозим.

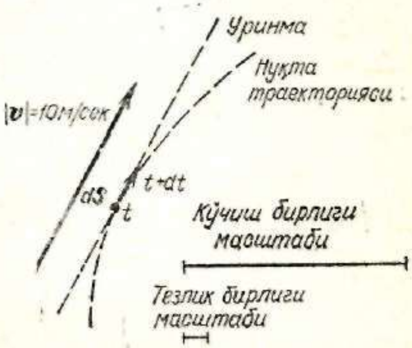
У ҳолда $\boldsymbol{v}$ тезлик векторини (3. 5) га мос равишда қуйидаги тенгликдан аниқлаш мумкин:

$$dS = \boldsymbol{v}\,dt; \qquad (8.1)$$

dt скаляр бўлганидан $\boldsymbol{v}$ вектор йўналиши жиҳатидан dS га мос келади. Энди тезлик

$$\frac{dS}{dt} = \boldsymbol{v}$$

нисбатдан иборат дейиш мумкин.



16-расм.

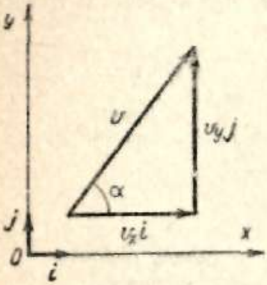
Тезлик траекторияга уринма йўналишига эга бўлган физикавий вектор катталикдир. Шу сабабли тезликни чизмалар ва расмларда, даставвал тезлик бирлиги масштабини шартлашиб олиб, вектор-кесмалар сифатида тасвирлаш мумкин. Тезликларни қўшишни ва айиришни векторларни қўшиш ва айириш каби бажариш лозим.

$\boldsymbol{v}$ тезлик вектори йўналиши жиҳатидан нуқтанинг етарлича кичик dt вақт ичидаги кичик кўчиш вектори dS га мос келади. dS кўчиш ва $\boldsymbol{v}$ тезлик тамомила бошқа-бошқа катталиклар бўлиб, улар фақат фазода умумий йўналишгагина эга. 16-расмдаги dS кесма муайян масштабда нуқтанинг dt вақт ичида амалдаги кўчиш узунлигини, $\boldsymbol{v}$ орқали белгиланган кесма эса шартли равишда тезликни ўз масштабида тасвирлайди: кесманинг узунлик бирлиги тезликнинг муайян бирлигига мос келади.

Мисол тариқасида 16-расмда кўчиш ва тезлик бирликлари масштаблари кўрсатилган; келгусида чизмаларда турли вектор катталикларнинг масштаблари кўрсатилмайди, бироқ ҳар бир катталик учун ўзининг муайян масштаби мавжудлигини доимо эсда тутмоқ лозим.

Нуқтанинг эгри чизиқ бўйлаб ҳар қандай ҳаракатида тезликнинг ҳам йўналиши, ҳам абсолют катталиги ўзгара боради. Тезликнинг абсолют катталиги ва йўналиши ўзгаришсиз қолгандагина тезлик ўзгармайди. *Доимий, ўзгармас тезликли ҳаракат текис ва тўғри чизиқли ҳаракатдир. Эгри чизиқ бўйича ҳаракат ўзгарувчан тезликли ҳаракатдир.*

Қандайдир содда ҳаракатнинг тезлигини таҳлил қилаётганда, уни тезликнинг иккита ёки ортиқроқ ташкил этувчиларининг вектор йиғиндиси тарзида тасаввур қилиш мумкин. Масалан, шарча горизонтал текисликда ҳаракатланмоқда; x ва y координаталар ўқлари шу текисликда ётади. Бирор пайтда $\boldsymbol{v}$ тезлик вектори x ва y координаталар ўқларига нисбатан тамомила аниқ бир йўналишга эга бўлиб, у йўналиш тезлик ва x ўқ йўналишлари орасидаги α бурчак билан белгиланади. Агар тезлик векторининг x ва y координаталар ўқлари бўйлаб проекциялари кўрсатилган бўлса, тезлик векторининг катталигини ва йўналишини топиш мумкин. $\boldsymbol{v}$ вектори бири x ўқ бўйича, иккинчиси y ўқ бўйича йўналган иккита вектордан (17-расм) ташкил топади дейиш мумкин.



17-расм.

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}, \tag{8.2}$$

бунда v_x ва v_y — тезлик векторининг координаталар ўқларига проекциялари, $\boldsymbol{i}$ ва $\boldsymbol{j}$ лар эса, ўша ўқларнинг бирлик векторлари. $v_x\boldsymbol{i}$ вектор тезликнинг x ўқ бўйича ташкил этувчиси, $v_y\boldsymbol{j}$ эса, y ўқ бўйича ташкил этувчисидир. Агар, масалан, ташкил этувчилардан бири нолга тенг бўлса, бу ҳол $\boldsymbol{v}$ тезлик иккинчи координата ўқи бўйича йўналганини билдиради. Тезлик вектори модули:

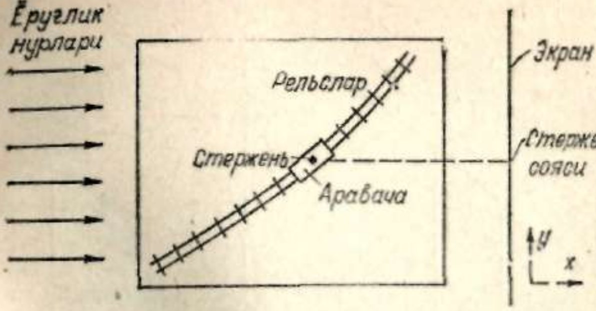
$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \tag{8.3}$$

тезлик вектори билан x ўқ орасидаги α бурчак, равшанки, қуйидагига тенг:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x}. \tag{8.4}$$

Тезлик векторининг ташкил этувчиси ҳаракатланаётган нуқтанинг шу координата ўқига проекциясининг тезлигидан иборат бўлиб, уни содда қилиб, координата ўқи бўйича тезлик дейилади. Иккита координата ўқи бўйича тезликларни билган ҳолда текисликдаги тезликнинг катталигини ва йўналишини ҳисоблаб топиш мумкин.

Тезликнинг муайян ўқ бўйича ташкил этувчиси жисмнинг шу ўққа проекциясининг тезлигидан иборат. Уни ҳаракатланаётган жисм соясининг тезлиги сифатида тасаввур қилишимиз мумкин. Масалан, столда рельслар бўйлаб муайян йўналишда аравача ғилдираб бораётир. Уни ёритаётган ёруғлик манбаи столдан узоқда, деярли аравачанинг ҳаракат текислигида шундай жойлашганки, нурлар x ўққа параллел тушаётир (18-расмда юқоридан кўриниши тасвирланган). У ҳолда аравачага ўрнатилган вертикал стерженнинг x ўққа тик қўйилган экранга тушадиган сояси экран бўйлаб бирор v_y тезлик билан ҳаракатланади. Равшанки, соянинг ҳаракат тезлиги стержень тезлигининг y ўқ бўйича ташкил этувчисидан иборат. Соянинг тик ўрнатилган иккита экрандаги тезликларини



18- расм.

билган ҳолда стерженнинг стол бўйлаб ҳаракати тезлиги катталигини ва йўналишини аниқлаймиз.

Нуқта фазода ҳаракатланганда dS вектор-кесма унинг тўғри бурчакли қилиб олиниши мумкин бўлган координата ўқларига учта проекцияси орқали бир қийматли аниқланади (19-*а* расм). dS векторни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dS = dx\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}, \qquad (8.5)$$

бунда dx, dy ва dz лар вектор dS нинг координата ўқларига проекциялари, бундан тезлик вектори

$$\boldsymbol{v} = \frac{dS}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k},$$

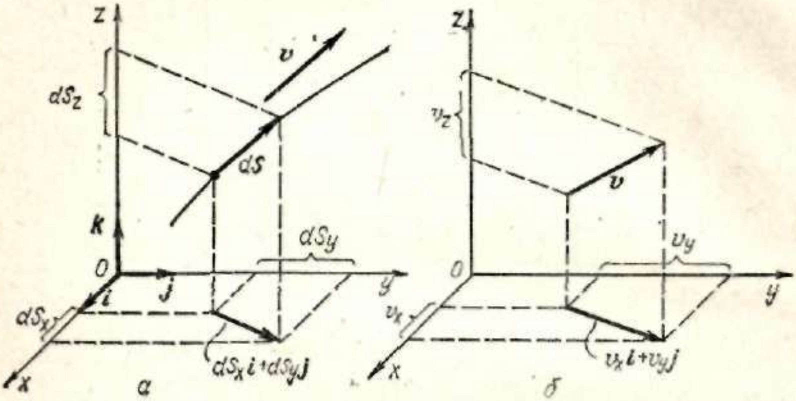
ёки

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \qquad (8.6)$$

бунда v_x, v_y ва v_z лар тезлик векторининг тегишли координата ўқларига проекциялари. Тезлик векторининг координата ўқларига проекциялари нуқтанинг берилган ўққа проекциялари ҳосилаларига ёки содда қилиб айтганда, ҳаракатланаётган нуқта координаталаридан олинган ҳосилаларга тенгдир. Фазодаги нуқта тезлигини иккита тезликнинг: 1) $v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ га тенг бўлган ва нуқтанинг xOy горизонтал текисликка проекцияси тезлиги ҳамда 2) $v_z\boldsymbol{k}$ га тенг бўлган ва нуқтанинг вертикалга проекцияси тезлиги йиғиндиси сифатида тасаввур қилиш мумкин. Одатда, қисқа тарзда, масалан, самолёт тезлиги иккита ташкил этувчига — горизонтал ва вертикал ташкил этувчига эга дейилади.

Тезлик v нинг абсолют катталиги унинг проекциялари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \qquad (8.7)$$

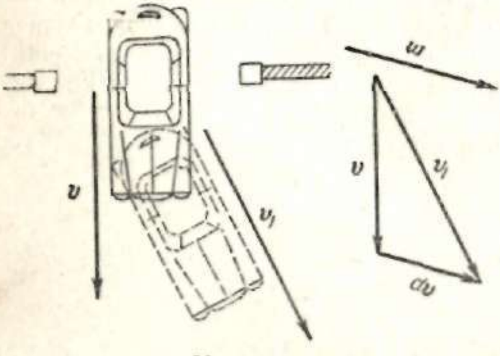


19- расм.

бунда 19- расмни қараб чиқиб, ишонч ҳосил қилиш мумкин. Нуқтанинг фазодаги ҳар қандай ҳаракатида умумий ҳолда унинг кўчишининг барча проекциялари ўзгара боради, яъни *тезлик абсолют катталиги жиҳатидан ҳам, йўналиши жиҳатидан ҳам ўзгара боради.*

9- §. Текисликда ҳаракатланаётган нуқтанинг тезланиши. Марказга интилма тезланиш

Тезланиш—тезликнинг муайян пайтдаги ўзгаришини белгиловчи физикавий катталикдир. Айтайлик, дарвозадан чиқиб кетаётган автомобилнинг (20- расм) t вақт моментидаги тезлиги v га тенг бўлсин. Кўргазмали бўлиши учун тезлик вектори автомобиль ёнида тасвирланган, шунингдек, у (муайян масштабда) расмнинг ўнг қисмида алоҳида кўрсатилган. $t+dt$ вақт моментида тезлик $v_1=v+dv$ қийматга эга, бунда dv — тезликнинг dt вақт ичидаги орттирма вектори.



20- расм.

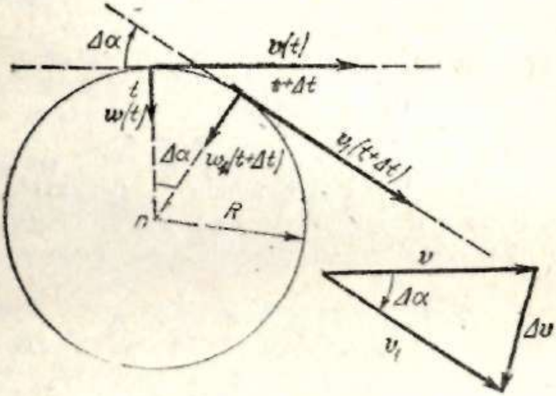
Шундай дейиш ҳам мумкин: v тезлик векторига dt вақт ичида dv вектор қўшилди ва натижада автомобиль v_1 тезликка эришди. dv векторнинг йўналиши умумий ҳолда v тезликнинг йўналишига мос келмайди.

Агар dt етарлича кичик катталик бўлса, у ҳолда dv ҳам етарлича кичик вектор катталик бўлади ва бу катталикларнинг нисбати

$$w = \frac{dv}{dt} \tag{9.1}$$

тезланиш деб юритилувчи ва йўналиши жиҳатдан dv га мос келувчи янги физикавий *вектор* катталик бўлади. Тезланиш тезлик векторининг ўзгариш тезлигини ва йўналишини аниқлайди. w тезланиш катталигини аниқлаш учун v векторнинг dt вақт ичидаги орттирмасини топишимиз ва уни dt вақтга бўлишимиз лозим.

Нуқтанинг айлана бўйлаб текис ҳаракатида тезликнинг абсолют қиймати ўзгармай қолгани ҳолда унинг йўналиши узлуксиз ўзгара боради. Демак, тезлик вектори доимий қолмайди, балки орттирма ола боради.



21- расм

Жисмнинг унча катта бўлмаган dt вақт оралиғида иккита тезлик векторини олиб ва тезликнинг биринчи қийматини кейингисидан айириб, Δv орттирмани ҳосил қиламиз (21- расм). Тезлик орттирмасини топиш учун v (t вақт моментида) ва v_1 ($t+\Delta t$ вақт моментида) тезлик векторларига тенг ва йўналишлари мос келувчи кесмаларни тегишли масштабда ясаймиз. Бу векторларнинг йўналишлари айлананинг нуқта тегишли пайтда турган ўрнига ўтказилган уринма йўналишига мос келади. Сўнгра v векторни v_1 вектордан айириб, Δv векторни топамиз. Равшанки, Δv вектор бошланғич v қийматга ҳам, охирги v_1 қийматга ҳам тик бўлмайди. Бироқ, агар $\Delta t \to 0$ бўлса, у ҳолда $\Delta v \to 0$ бўлади ва Δv векторнинг йўналиши лимитда, $\Delta t \to 0$ да, v тезлик векторига туширилган перпендикулярга интилади. Демак, етарлича кичик dv вектор орттирма v векторга тикдир, $w = \frac{dv}{dt}$ тезланиш тезликка тикдир ва айлана марказига йўналган.

Тезланиш катталигини айлана бўйлаб ҳаракат тезлиги v нинг катталиги ва R радиус катталиги билан боғлаш мумкин. Чизмадан кўринишича (21- расм), жуда кичик $\Delta\alpha$ да

$$[\Delta v] = \Delta v \approx v\Delta\alpha; \tag{9.2}$$

нуқтанинг Δt вақт ичида ўтган йўли

$$v\Delta t \approx R\Delta\alpha. \tag{9.3}$$

Бу иккита тенгламадан $\Delta\alpha$ ни йўқотсак,

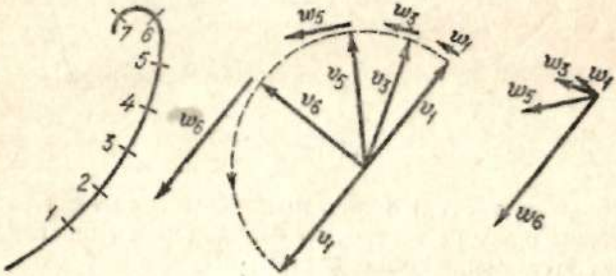
$$\Delta v \approx \frac{v^2}{R}\ \Delta t, \tag{9.4}$$

ёки

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{R},$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{R}. \tag{9.5}$$

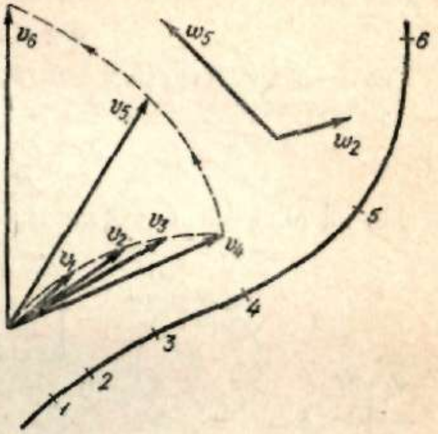
Айлана бўйлаб текис ҳаракатланаётган жисмнинг тезланиши катталиги сон жиҳатдан тезлик квадратининг радиус катталигига бўлинганига тенг. Бундай тезланиш марказга йўналган бўлади ва уни *марказга интилма* тезланиш дейилади.



22- расм.

Нуқтанинг текисликда модул жиҳатдан доимий тезликли ихтиёрий ҳаракатини қарайлик. Масалан, жисм абсолют катталиги жиҳатдан доимий тезлик билан ясси эгри чизиқ бўйлаб *1* нуқтадан *7* нуқтага ҳаракатланаётир (22- расм). Расмда траектория ёнида турли t_i вақт моментлари учун v_i тезлик векторлари, тезлик векторлари ёнида ўша вақт моментлари учун w_i тезланиш векторлари чизилган. Траекториянинг эгрилиги ортиши билан тезланишнинг ўсиши кўриниб турибди. Нуқта траектория бўйлаб текис ҳаракатланганидан тезланиш барча нуқталарда тезликка тикдир.

Таққослаш учун 23-расмда ясси эгри чизиқ бўйича ҳаракат тезлик абсолют катталиги бўйича ортиб борадиган ҳол учун кўрсатилган ва унинг ёнида тезлик ва тезланиш векторларининг траекториянинг чизмада белгиланган муайян нуқталарида бўладиган айрим вақт моментларидаги қийматлари кўрсатилган. *1*, *2*, *3*,... нуқталар 22-расмдаги каби жисмнинг бирдай вақт оралиқларидан кейинги ҳолатларига мос келади.



23- расм.

Бу ҳолда тезланиш тик бўлмай, у тезликка бирор бурчак остида оғгандир. Шу сабабли одатда тезланишни иккита ташкил этувчига ажратиб ўрганилади: бири тезлик бўйича йўналган бўлиб, у тезланишнинг *уринма* ташкил этувчиси, иккинчиси тезликка тик йўналган бўлиб, у тезланишнинг *нормал* ташкил этувчисидир (уринма ташкил этувчини баъзида *тангенциал* ташкил этувчи деб ҳам юритилади).

Агар тезлик катталигининг ва йўналишининг вақт ўтиши билан ўзгариш қонунлари маълум бўлса, у ҳолда исталган вақт моментида тезланишни аниқлаш мумкин.

Тезланиш, ҳар қандай вектор каби, координаталар ўқлари бўйича ташкил этувчилар орқали кўрсатилиши мумкин. Масалан, тезланиш вектори (x, y) текисликда жойлашган бўлса, унинг катталигини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{i} + w_y \boldsymbol{j}, \tag{9,6}$$

бунда $\boldsymbol{w}_x$ ва $\boldsymbol{w}_y$ лар $\boldsymbol{w}$ векторнинг координата ўқларига проекциялари, $\boldsymbol{i}$ ва $\boldsymbol{j}$ векторлар бўлса, аввалгидек, x ва y координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар.

Тезланишнинг w_x ва w_y проекциялари тезлик проекцияларининг ҳосилаларига тенгдир:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad w_y = \frac{dv_y}{dt}. \tag{9.7}$$

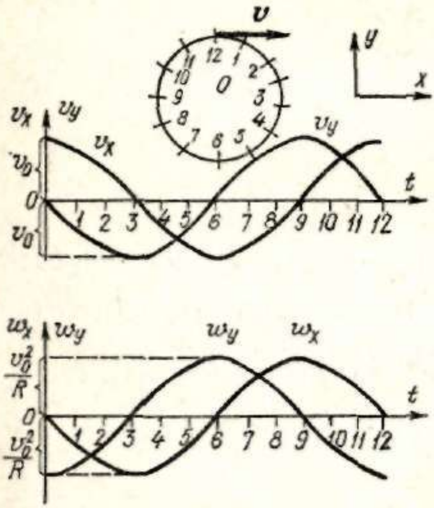
Ҳақиқатан, айтайлик, тезлик вектори қуйидагига тенг бўлсин:

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}.$$

$\boldsymbol{i}$ ва $\boldsymbol{j}$ ларни ўзгармайди деб қараб, ифоданинг иккала қисмини дифференциаллаймиз:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt} \boldsymbol{j}. \tag{9.8}$$

(9.8) ни (9.6) билан таққосласак, (9.7) келиб чиқади.



24- расм.

1-мисол. Нуқта R радиусли айлана бўйлаб v_0 тезликда текис ҳаракатланаётганда тезлик ва тезланишнинг тўғри бурчакли координаталар ўқларига проекциялари вақтга қандай боғланганлигини аниқланг. 24- расмда нуқтанинг шу ҳаракатдаги тезлик ва тезланиш проекциялари графиклари кўрсатилган.

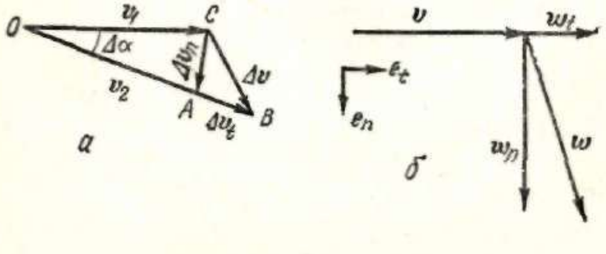
2-мисол. R радиусли айлана бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг тезланишини аниқланг. Нуқта тезлигининг абсолют қиймати вақт ўтиши билан $v=bt$ қонун бўйича ортиб боради.

Тезлик t пайтда $\boldsymbol{v}_1$ қийматга, $t+\Delta t$ пайтда $\boldsymbol{v}_2$ қийматга эга бўлсин (25-*а* расм): $\boldsymbol{v}_2$ вектор $\boldsymbol{v}_1$ га нисбатан жуда кичик $\Delta\alpha$ бурчакка бурилган ва каттароқ абсолют қийматга эга. $\boldsymbol{v}_2$ вектор кесмасида узунлик $OC=OA$ бўладиган A нуқтани белгилаймиз. Агар тезлик абсолют қиймати жиҳатдан доимий қолганида эди, у ҳолда $t+\Delta t$ пайтда у $\overrightarrow{OA}$ вектордан иборат бўларди; демак, тезлик абсолют қийматининг Δt вақт ичида ортиши $|\overrightarrow{AB}|=\Delta v_t$ векторнинг абсолют катталиги орқали тасвирланган; бу катталашиш равшанки, қуйидагига тенг:

$$v_2-v_1=b(t+\Delta t)-bt=b\Delta t,$$

ёки

$$\Delta v_t=b\Delta t \tag{9.9}$$



25- расм.

Тезликнинг Δt вақт оралиғидаги $\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$ га тенг бўлган орттирмасини $\Delta \boldsymbol{v}_n$ ва $\Delta \boldsymbol{v}_t$ иккита векторнинг йиғиндиси тарзида қараш мумкин (25- *а* расм), яъни

$$\Delta \boldsymbol{v}=\Delta \boldsymbol{v}_n+\Delta \boldsymbol{v}_t.$$

$\Delta \boldsymbol{v}_n$ векторнинг абсолют қиймати $\Delta v_n \approx \Delta\alpha \cdot v$ ҳамда, текис ҳаракатдагидек, ((9.4) формулага қаранг), қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$\Delta v_n \approx \frac{v^2}{R}\,\Delta t. \qquad (9.10)$$

Нуқтанинг Δt ичидаги ўртача тезланиши қуйидагига тенг:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\Delta v_n}{\Delta t}+\frac{\Delta v_t}{\Delta t},$$

t пайтдаги тезланиши эса

$$\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_t}{\Delta t}. \qquad (9.11)$$

Бу векторлар абсолют катталикларининг $\Delta t \to 0$ даги лимити қандай бўлишини кўрайлик; (9. 9) ва (9. 10) формулалардан қуйидагини топамиз:

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta t}=b, \qquad \frac{\Delta v_n}{\Delta t}\approx\frac{v^2}{R}.$$

Бундан равшанки, $\Delta t \to 0$ даги лимитда

$$\frac{dv_t}{dt}=b, \qquad \frac{dv_n}{dt}=\frac{v^2}{R}. \qquad (9.12)$$

Энди $\Delta \boldsymbol{v}_n$ ва $\Delta \boldsymbol{v}_t$ векторлар қандай йўналишларга эга бўлишини қараб чиқамиз. $\Delta t \to 0$ (ёки $\Delta\alpha \to 0$) да лимитда Δv_n векторнинг йўналиши $\boldsymbol{v}$ га туширилган перпендикулярга интилади, $\Delta \boldsymbol{v}_t$ эса, $\boldsymbol{v}$ векторнинг йўналишига интилади (25- *б* расм). Агар $\boldsymbol{v}$ бўйича (траекторияга уринма бўйича) бирлик векторни $\boldsymbol{e}_t$ орқали, унга тик ва радиус бўйича айлана марказига йўналганини $\boldsymbol{e}_n$ орқали белгиласак, тезланишнинг (9. 11) ифодаси (9. 12) ни ҳисобга олганда, қуйидаги кўринишга келади:

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{v^2}{R}\,e_n+b \qquad (9.13)$$

Тезланишнинг нормал ташкил этувчиси $\boldsymbol{w}_n=\frac{v^2}{R}\,\boldsymbol{e}_n$, уринма ташкил этувчиси эса

$$\boldsymbol{w}_t=\frac{dv_t}{dt}\,e_t=b\,e_t \text{ дан иборат.}$$

Тезланишнинг $\boldsymbol{w}_n$ нормал ташкил этувчиси хамма вақт текис ҳаракатдагидек катталикка эга бўлишини қайд қилиб ўтамиз. $\boldsymbol{w}$ вектор айлана маркази томонга эмас, балки тезлик векторига бирор бурчак ҳосил қилиб, нуқтанинг ҳаракати бўйича олдинга йўналгандир. Равшанки, айлана бўйича секинланувчан ҳаракат ҳолида тезланиш вектори тезлик векторига ўткир бурчак ҳосил қилиб орқага йўналган бўлади.

Тезланишнинг $\boldsymbol{w}_t$ уринма ташкил этувчиси ҳаракат тезлиги модулининг ўзгариш катталигини, $\boldsymbol{w}_n$ нормал ташкил этувчиси эса нуқтанинг $\boldsymbol{v}$ ҳаракат тезлиги йўналишининг ўзгаришини белгилайди.

10-§. Нуқтанинг фазодаги ҳаракатида тезланиш

Олдинги параграфда тезлик ва тезланиш векторлари ҳамма вақт битта текисликда жойлашган ҳол (нуқтанинг ясси ҳаракати) учун тезлик ва тезланиш векторлари ҳамда уларнинг проекциялари ва ташкил этувчилари орасидаги асосий муносабатларни қарадик.

Худди шунга ўхшаш йўл билан, нуқтанинг фазода ҳар қандай ҳаракатида тезлик вектори фазода ихтиёрий ориентирланган ҳолларни ҳам қараб чиқиш мумкин. Бу ҳолда нуқтанинг ҳаракати (x, y, z) тўғри бурчакли координаталар ўқлари билан боғланган саноқ системасига нисбатан юз беради ва шунинг учун тезланишни ҳам тезлик вектори каби шу учта координата ўқлари бўйича ташкил этувчилар йиғиндисига ажратиш мумкин, яъни

$$\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{i} + w_y \boldsymbol{j} + w_z \boldsymbol{k}, \tag{10.1}$$

бунда $\boldsymbol{k}$ катталик z ўқ бўйича бирлик вектор.

Тезлик ва тезланиш проекциялари орасидаги боғланиш ((9.7) га қ.) қуйидагича:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad w_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{10.2}$$

Ҳаракатни таҳлил қилаётганда бошқа координата саноқ системаларини ҳам танлаш ҳамда тезлик ва тезланиш векторларининг тегишли координата ўқларига проекцияларини қараш мумкин.

Агар ҳаракатланаётган нуқта координаталари $x\ (t)$, $y\ (t)$ ва $z\ (t)$ нинг вақтга боғланиши маълум бўлса, у ҳолда ҳар бир координатани дифференциаллаш билан тезлик векторининг проекцияларини ва бинобарин, тезлик векторининг тўла қийматини ҳам топиш мумкин; сўнгра тезликнинг координата ўқларига проекцияларини дифференциаллаб, тезланиш проекцияларини, улар орқали тезланиш векторини ҳам топиш мумкин.

Тескари амаллар (масалан, берилган тезлик вектори бўйича ҳаракатланаётган нуқтанинг координаталарини топиш) мураккаброқдир, улар тезлик проекцияларини вақт бўйича интеграллашдан иборат. Агар берилган тезланиш бўйича координаталарни топиш талаб қилинса, у ҳолда икки марта интеграллаш зарур бўлади: аввало, тезланиш проекциялари бўйича тезлик проекциялари топилади, сўнгра тезлик проекциялари бўйича ҳаракатланаётган нуқта координаталари вақтнинг функцияси сифатида топилади.

Мисол. Нуқта фазода $\boldsymbol{w}$ доимий тезланиш билан ҳаракатланмоқда (26- расм). У ўз ҳаракатини $t=0$ пайтда z ўқнинг бирор $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0 \neq 0$ нуқтасидан (x, y) текисликка параллел $\boldsymbol{v}_0$ тезлиқда бошлайди (тезликнинг бошланғич пайтдаги проекциялари $v_{oz}=0$, $v_{oy} \neq 0$, $v_{ox} \neq 0$). Тезланиш z ўқ бўйича йўналган бўлсин

$$w_x=0, \qquad w_y=0, \qquad w_z=-a. \tag{10.3}$$

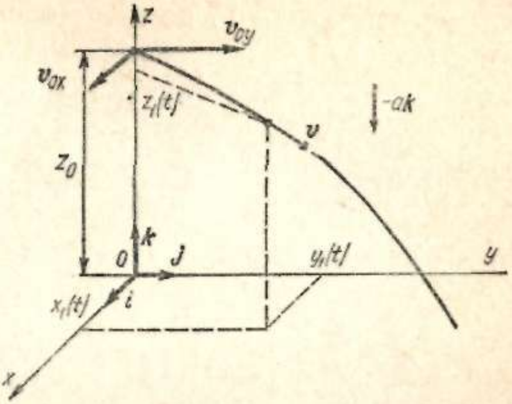
Тезланишнинг x ва y ўқларга проекциялари ҳамма вақт нолга тенглигича қолади, демак, тезликнинг x ва y ўқларга проекциялари ҳамма вақт доимийдир, яъни t вақтнинг исталган пайтида

$$v_x = v_{ox}, \quad v_y = v_{oy}. \qquad (10.\ 4)$$

Тезликнинг z ўққа проекциясигина ўзгаради. (10. 2) асосида қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\frac{dv_z}{dt} = w_z$$

$$v_z = \int_0^t w_z dt. \qquad (10.5)$$



26- расм.

Тезланиш проекцияси $w_z=-a$ ўзгармайди. Нуқтанинг z ўқига проекцияси текис тезланувчан ҳаракат қилади. z координата қуйидагича топилади:

$$\frac{dz_1}{dt} = v_z = -\int_0^t a\,dt = -at. \qquad z_1 - z_0 = \int_0^t v_z dt = -\int_0^t at\,dt = -\frac{at^2}{2}. \qquad (10.6)$$

Нуқтанинг қолган x ва y иккита координатаси тезликнинг шу ўқларга проекциялари доимий қолиш шартидан топилади:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_x = v_{ox}, \quad \frac{dy_1}{dt} = v_y = v_{oy};$$

булардан

$$x_1 = \int_0^t v_{ox} dt = v_{ox} t, \qquad y_1 = \int_0^t v_{oy} dt = v_{oy} t. \qquad (10.7)$$

Шундай қилиб, (10. 6) ва (10. 7) ифодалар нуқта доимий w_z тезланиш билан ҳаракатланганда барча координаталарининг ўзгаришларини беради.

Ихтиёрий йўналган $\boldsymbol{w}$ доимий тезланишли ҳаракатни вектор кўринишда ёзиш мумкин. Ҳаракатланаётган нуқта t вақт моментида бирор доимий O нуқтадан ўтказилган $\boldsymbol{r}$ (t) векторнинг учида жойлашган деб ҳисоблаймиз.

Ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ва тезланиши $\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Бундан $d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}dt$. $\boldsymbol{w} = \text{const}$ бўлганидан,

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \int_0^t \boldsymbol{w} d\xi = \boldsymbol{w} \cdot t, \qquad (10.8)$$

бунда $\boldsymbol{v}_0$ катталик $t=0$ даги тезлик ёки

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{w}t.$$

Нуқтанинг $\boldsymbol{r}$ ҳолатини $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}dt$ тенглик асосида шундай ёзиш мумкин

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\int_0^t \boldsymbol{v}d\xi,$$

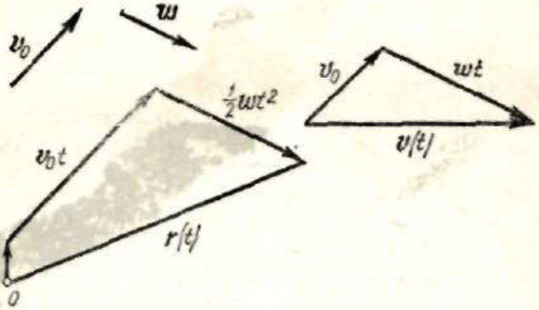
бунда $\boldsymbol{r}$ катталик $t=0$ даги вазият. $\boldsymbol{v}$ тезликнинг ифодасини ҳисобга олсак,

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{w}\int_0^t \xi\, d\xi+\boldsymbol{v}_0\int_0^t d\xi+\boldsymbol{r}_0$$

ҳосил бўлади ёки

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}t^2+\boldsymbol{v}_0t+\boldsymbol{r}_0. \tag{10.9}$$

(10. 9) тенглик — бу нуқта (заррa) нинг $\boldsymbol{r}_0$ нуқтадан $\boldsymbol{v}_0$ бошланғич тезлик билан $\boldsymbol{w}$ доимий тезланишда ҳаракатини ифодаловчи умумий вектор тенгликдир. Бу тенглик бутун ҳаракат кинематикасини яққол кўрсатади: тезлик вақт ўтиши билан $\boldsymbol{w}$ йўналишида чизиқли ўсади, $\boldsymbol{r}$ ҳолат вектори $\boldsymbol{v}_0$ йўналишида чизиқли ва $\boldsymbol{w}$ йўналишида квадратик катталаша боради. Векторларнинг нисбий ҳолати 27- расмда $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{w}$ векторлар битта текисликда жойлашган ҳол учун кўрсатилган.



27- расм.

Шунинг билан нуқтанинг фазода ҳаракатига доир умумий кинематик қонуниятларни қарашни тугаллаймиз. Координаталар, ҳолат векторлари, тезликлар ва тезланишлар — ўзгаришлари ҳаракатни тўла тасвирлайдиган катталиклардир. Агар битта кинематик вектор катталикнинг — тезлик ёки тезланишнинг вақтга боғланиши маълум бўлса, у ҳолда шу боғланиш бўйича иккинчисини ва нуқтанинг ҳаракат координаталарини топиш мумкин.

Кейинроқ нуқтанинг ҳаракат қонунлари ҳар қандай жисмнинг ихтиёрий ҳаракатларини таҳлил қилишда ҳам жуда муҳим эканлигини билиб оламиз.

11-§. Фазо, вақт ва саноқ системалари

Биз шу пайтгача ўрта мактаб курсидан маълум бўлган тасаввурларга таяниб фазо ва вақт тушунчаларига тўхталмаган эдик.

Баъзида механикавий ҳаракат жисмнинг фазода вақт ўтиши билан кўчишидан иборат деб қаралади. Бу таърифга жиддий аниқлик киритиш керак. Механикавий ҳаракатда бир жисмнинг бошқаларига нисбатан кўчиши юз беради, дейиш лозим. Агар жисм биттагина бўлса, унинг кўчиши ҳақида гапиришнинг маъноси йўқ. Нисбатан кўчиш юз бераётган саноқ системасини *саноқ жисми* дейиш керак, чунки амалда саноқ системаси ҳамма вақт бирор жисм ёки жисмлар билан боғлиқ бўлади. Жисмлар йўқлигида фазони тасаввур қилиб бўлмайди.

Фазо ва вақт — материянинг мавжудлик формасидир. Ньютон томонидан киритилган *абсолют*, ҳаракатсиз ва бўш фазо тасаввури маънога эга эмас. Фазо, унинг геометрик элементлари (нуқта, чизиқ, сирт, ҳажм) тушунчалари моддий, деярли ўзгармас жисмлар хоссаларининг абстракциялари сифатида юзага келди. Ньютон механикасида фазо ўзининг барча қисмларида *бир жинсли* ва *изотроп* (яъни, унинг хоссалари йўналишга боғлиқ эмас) деб ҳисобланади; бошқача айтганда, физикавий фазо Евклид геометрияси баён қилганидек тасаввур қилинади. Бизнинг курсда қараладиган механикавий ҳодисалар учун фазони юқори даражада аниқлик билан Евклид фазоси *кабн тасаввур қилиш мумкин. Бу ҳодисаларни таҳлил қилишда* фазони бир жинсли ва изотроп деб ҳисоблаш мумкин. Бироқ абсолют ҳаракатсиз, ҳеч нарса билан боғланмаган фазонинг мавжудлигини тахмин қилиш нотўғри: фазони биз ҳамма вақт муайян жисмлар, саноқ жисмлари билан боғланган ҳолда тасаввур қиламиз.

Ньютон назариясига кўра, вақт — жисмларга боғлиқ бўлмаган ҳолда мавжуд бўлган *абсолют давомийликдир*. Буни ҳам асослаш қийин; вақт материянинг мавжудлик формаси бўлганидан, давомийликни материядан ажратиб бўлмайди.

Битта саноқ системаси доирасида барча процесслар ва ҳодисалар учун ягона давомийлик ўлчовини топиш ва ягона вақт мавжуд дейиш мумкин. Бироқ, нисбийлик назариясида кўрсатилганидек, битта саноқ системасининг турли жойларида содир бўлувчи бир вақтли воқеалар, агар уларни ҳаракатланаётган бошқа саноқ системасига нисбатан қаралса, улар турли вақт моментларида юз беради. Демак, вақтнинг ўтиши саноқ системаларининг нисбий ҳаракати билан боғланган; барча саноқ системалари учун ягона, абсолют вақт мавжуд эмас. Бу барча ҳолатлар барча саноқ системаларида ёруғлик тезлигининг доимийлиги оқибатидир. Процессларнинг давомийлиги ҳаракат билан боғлиқ, вақт тушунчаси жисмларнинг бир-бирига нисбатан ҳаракатидан ажралмасдир.

Бироқ, тезлик ёруғлик тезлигига нисбатан жуда кичик бўладиган секин нисбий ҳаракатларда вақтнинг саноқ системасининг нисбий ҳаракатига боғлиқлиги амалда жуда кичик бўлиб, уни тамомила назарга олмаса бўлади. Шу сабабли ушбу китобда қараладиган деярли барча ҳодисалар ва масалалар учун Ньютоннинг абсолют ва ягона вақт ҳақидаги тасаввурлари тамомила ўринли дейиш мумкин. Бундай қилиш мумкин бўлмаган ҳолларда бу алоҳида айтиб ўтилади.

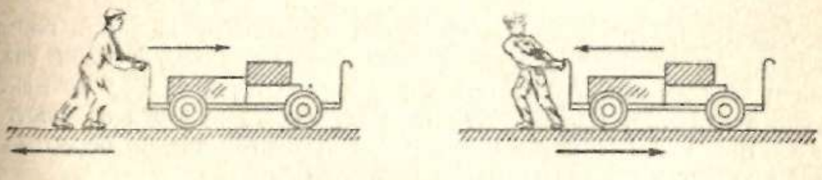
II БОБ

АСОСИЙ ҲАРАКАТ ҚОНУНЛАРИ — ДИНАМИКА ҚОНУНЛАРИ

12-§. Жисмларнинг ҳаракати ва ўзаро таъсири

> Ҳозирги табиийётшунослик нуқтаи назаридан биз ҳаракатланаётган материяни бир бутун деб қараганимизда бизнинг кўз олдимизда даставвал *ўзаро таъсир* намоён бўлади.
>
> (Ф. Энгельс. Табиат диалектикаси. Госполитиздат, 1965. 199-бет)

Турли жисмларнинг ҳаракатини кузатганда ва ўрганганда бирор жисмнинг ҳаракати унинг бошқа жисмлар билан ўзаро таъсири натижасида юзага келади ёки ўзгаради деган хулосага келамиз. Ердаги аравачани ишчи ҳаракатга келтиради, ғилдиратади ва тўхтатади. Ишчи аравачага Ерга нисбатан ҳаракат берди, унинг ўзи бу ҳаракатга барҳам берди, аравачани тўхтатди. Паровоз вагонларни жойидан «қўзғатади», вагонларни кетидан тортади, вагонларни «олиб юради». Одам қўлига тош олади ва отади, одам тошга ҳаракат беради, тош ерга нисбатан ҳаракат қилади ва ҳаво, ер билан ўзаро таъсир натижасида тўхтайди. Бундай мисоллардан жуда кўп келтириш мумкин. Ҳамма вақт жисмларнинг, камида иккита жисмнинг, ўзаро таъсирини кўрамиз. Масалан, ишчи аравачани ғилдиратаётганида учта жисмнинг: ишчи, аравача ва ернинг ўзаро таъсири мавжуд бўлади; ишчи аравачани ғилдиратаётганда ёки тўхтатаётганда ерга таянади (28-расм).



28-расм.

Динамика қонунлари жисмнинг ҳаракати билан уни юзага келтирган ёки бу ҳаракатни ўзгартирувчи сабаблар орасидаги боғланишни ўрнатади.

Механика қонунларини ўрганишни бевосита кузатиш мумкин бўлган содда ҳаракатларни қарашдан бошлаш лозим. Шу сабабли даставвал, ҳозирча етарлича асос келтирмасдан туриб Ерни ҳаракатсиз ҳисоблаб, жисмларнинг Ер сиртига нисбатан ҳаракатларини қараймиз. Бу ҳаракатларнинг умумий қонуниятларини топган ҳолда Ернинг Қуёшга нисбатан ҳаракатининг қаралаётган ҳаракатларга таъсири ҳақида муайян хулосалар чиқариш ва бу хулосаларни тажрибаларда текшириб кўриш мумкин. Қуйида баён қилинадиган бир қатор тажрибалар топилган қонунларнинг жисмларнинг ҳар қандай ҳаракати учун тўғри эканлигини тасдиқлайди. Шу сабабли жисмларнинг Ер сиртига нисбатан ҳаракати учун ўрнатилган динамика қонунларини осмон жисмлари учун ҳам қўллаш мумкин ҳамда шу асосда назарий ҳисоблар бажариш ва ҳисоб натижаларини кузатишлар орқали яна текшириб кўриш мумкин. Олдиндан айтамизки, шундай текширишни Ньютоннинг ўзиёқ бажарди ва ўшандан бери физикавий тадқиқотлар ва астрономик кузатишлар шундай усулда топилган динамика қонунларининг ҳаққонийлигини жуда яхши тасдиқламоқда.

Жисмларнинг бир-бирига нисбатан ҳаракати турли характерда бўлиб, у умуман айтганда, вақт ўтиши билан ўзгаради. Бу ўзгаришлар турли тарзда содир бўлади: масалан, жисм тинчликда эди, кейин ҳаракатлана бошлади, ҳаракат олди — бирор тезлик олди, сўнгра тўхтади, тинч ҳолатга келди; ёки жисм муайян тезлик билан ҳаракатланаётган эди, сўнгра таъсир натижасида жисм тезлиги ортди, у тезроқ ҳаракатлана бошлади; ёки жисм шарқ томонга ҳаракатланаётган эди, сўнгра жануб томонга ҳаракат қила бошлади ва ҳоказо.

Барча ҳолларда тезликнинг ўзгариши, аввало, жисмнинг тезлик векторининг муайян ўзгариши билан юз беради: жисм тезлиги ўз катталигини, ёки ўзининг йўналишини, ёки ҳар иккаласини биргаликда ўзгартиради. Демак, жисм тезлигининг ўзгаришини юзага келтирувчи ўзаро таъсирлар тезлик векторининг ўзгариши билан қонуний боғланган дейиш мумкин.

Бу фикр жисмларнинг ҳаракат қонунларини топишга интилгандаёқ пайдо бўлади. У қуйидагича таърифланиши мумкин: *бошқа жисмларнинг берилган жисмга таъсирлари унинг тезлигини белгилайди.*

Аристотелнинг «Физика»сидан биз биламизки, қадимий олимларнинг ҳаракатнинг асосий қонуни ҳақидаги тасаввурлари тахминан шундай эди. Аристотель барча ҳаракатларни табиий ва мажбурийга ажратди: табиий ҳаракатлар жумласига юқорига ва пастга ҳаракатни, мажбурийларига, ҳозир биз атайдиган таъсир борлигида давом этадиган барча қолган ҳаракатларни киритди.

Ташқи таъсирлар билан жисм тезлиги орасидаги боғланиш ҳақидаги фикр, агар уни ташқи таъсирлар қандайдир тарзда жисм тезлигини белгилайди деб тушунилса, шубҳасиз тўғридир. Аристотелнинг жисмлар ҳаракатининг сабаблари ҳақидаги тасаввурлари асосида қилиш мумкин бўлган ушбу—жисмга муайян пайтдаги таъсир шу вақт моментидаги тезликни белгилайди, деган таъриф тамомила нотўғридир. Галилей ўз тажрибалари натижаларини синчиклаб таҳлил қилиш асосида бу таърифни қатъиян рад қилди ва ушбу хулосага келди: *агар жисмга ташқи таъсирлар бўлмаса, бу ҳолда у исталган доимий тезлик билан ҳаракатланиши ёки тинч ҳолатида қолиши мумкин.*

Бу даъво Галилей очган динамика биринчи қонунининг асосини ташкил қилиб, уни биз 16-§ да батафсил қараб чиқамиз.

Бу ҳолатларни таҳлил қилишга ва динамика қонунларини таърифлашга киришишдан олдин жисмлар таъсирининг асосий механикавий характеристикаси — *физикавий кучни* қараб чиқиш лозим.

13-§. Куч

Одам челакдаги сувни кўтариши ва уни қўлида тутиб туриши учун челакка ўз қўл «кучини» қўйиши лозим: у челакни юқорига тортаётган ўз кучини ёки челак томонидан унинг қўлини пастга тортаётган кучни ҳис қилади. Юкланган аравачани итараётганда ишчи аравачага тезлик бериш мақсадида уни жойидан қўзғатиш ва ғилдиратишга ўз қўл кучи билан таъсир қилади (28-расмга қаранг). Одам бу ҳаракатлари пайтида ўз танасида муайян зўриқиш таассуротлари сезади, ҳозиргина келтирилган мисолларда кўрсатилган куч шу таассуротлар билан боғлангандир.

Бироқ механикада куч деганда физиологик сезиш таассуротини эмас, балки *жисмларнинг ҳаракат ҳолатини ўзгартирувчи ва иккита жисмнинг ўзаро таъсири натижасида вужудга келувчи физикавий сабаб тушунилади*. Механикада гап борадиган физикавий кучни зинҳор одамнинг зўриқиш таассуроти билан аралаштириш ва боғлаш мумкин эмасдир. Масалан, ишчи аравачани итараётиб, аравачага муайян куч билан таъсир қилади. Бу унинг мускулларидаги зўриқиш таассуроти билан боғлангандир. Аравачанинг ҳаракат характери ишчининг таассуроти билан эмас, балки аравачага ишчи томонидан қўйилган куч катталиги билангина қонуний боғлангандир. Агар аравачага шундай куч бошқа жисм, масалан, трактор, автомашина томонидан қўйилган бўлганида ҳам аравачанинг ҳаракати аввалгидек бўлаверади.

Порох газларининг кучи снарядни тўп каналидан итариб чиқаради, паровоз кучи вагонларни ҳаракатга келтиради, дарё оқими кучи чархпалакни айлантиради. Бу ерда ҳамма вақт гап жисм ҳаракатини ўзгартирувчи сабаб, физикавий куч ҳақида боради.

Ҳозиргача биз физикавий кучнинг жисм ҳаракатининг ўзгариши билан боғлиқлигини таъкидлаб келдик; бироқ кўпинча кучнинг таъсири жисмнинг ҳаракатини юзага келтирмайдиган, тўғрироғи — жисмнинг ҳаракатини, лоақал одатдаги кузатишда сезиларли даражада ўзгартмайдиган алоҳида хусусий ҳол учраб туради. Масалан, аравачага куч таъсир қилаётган бўлишига қарамай, аравача ҳаракатланмайди. Одам қўлида челакни тутиб турибди, бу челакка қандайдир куч таъсир қилаётир, челак бўлса, тинч ҳолатда турибди.

Бу ҳолларда жисмга, кўрсатилган кучдан ташқари бошқа кучлар ҳам таъсир қилади, улар кўрсатилган куч таъсирини «йўқотади».

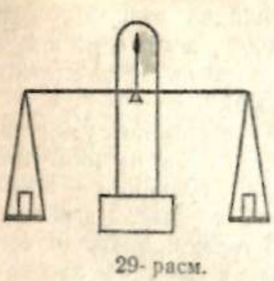
Агар жисмга бирор вақт фақат битта куч таъсир қилса, у ҳолда жисм тинч ҳолатда бўла олмайди—бу динамиканинг биринчи қонунидан маълум. Иккинчи томондан, агар жисм тинч ҳолатда бўлса, унга таъсир этаётган барча кучлар мувозанатлашади ёки барча кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Мувозанатлашган кучлар таъсирида жисм тинч ҳолатини сақлайди, у шу кучлар таъсирида *деформацияланишини* (ўз шаклини ўзгартиришини) қайд қилиш лозим. Деформация билан кучлар орасида қонуний ва бир қийматли боғланиш мавжуд бўлганда муайян жисмларнинг (пружиналар, динамометрлар ва бошқаларнинг) деформациялари кучлар катталигининг ўлчови бўлиши мумкин.

Механиканинг жисмга таъсир қилаётган кучларнинг мувозанат қонунлари ўрганиладиган бўлими *статика* дейилади. Статика қонунлари динамика қонунларининг хусусий ҳолидан иборат бўлиб, улар анча соддадир. Шу сабабли баъзида механикани статикадан бошлаб ўрганилади. Шундай баён тартиби механика фани тараққиётининг тарихий тартибига ҳам мос келади: статика қонунлари динамика қонунларига нисбатан анча илгари маълум бўлган эди.

14-§. Доимий кучларни ўлчаш усуллари

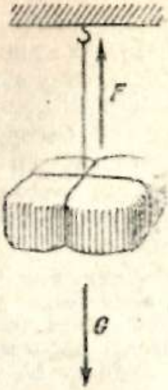
Статикада кучлар вақт ўтиши билан ўзгармайди, шу сабабли уларни аниқлаш ва ўлчаш осонроқ. Статикада одатда бирор тайин жисмнинг оғирлик кучи куч ўлчови бўлади. *Тинч турган жисмнинг ўзини тушиб кетишидан сақлаб турган бошқа жисмга кўрсатаётган таъсир кучи оғирлик кучи ёки содда айтганда оғирлик деб аталади.*

Агар жисм Ерга нисбатан тинч турган бўлса, у ҳолда жисм тагликка (осмага) ушбу жисмга хос муайян куч билан таъсир кўрсатади. Қадим замонлардаёқ инсон турли жисмларнинг оғирлик кучини ўлчашни билиб олган эди, бунда — жисмларнинг оғирлик кучи тарози ёрдамида оғирлиги бирлик сифатида қабул қилинган маълум бир жисмнинг оғирлик кучи билан таққосланар эди.

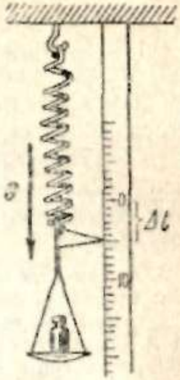


29- расм.

Маълумки, энг содда ричагли тарозилар қуйидагича тузилган: ўртаси яқинида эркин айлана оладиган тенг елкали ричагга оғирлиги таққосланиши зарур бўлган жисмлар осилади (тарози схемаси 29-расмда кўрсатилган). Агар жисмлар осилган тенг елкали ричаг мувозанатда ва горизонтал ҳолатда турган бўлса, у ҳолда ричагнинг турли учларига осилган жисмларнинг оғирлик кучлари бирдай бўлади. Шундай йўл билан ҳар қандай жисмнинг оғирлик кучини ўлчаш мумкин.



30- расм.



31- расм.

Халқаро келишув асосида куч бирлиги учун маълум жисм — эталоннинг оғирлиги қабул қилинган эди. Бу эталон платина ва иридий қотишмасидан иборат бўлиб, Париж яқинидаги Севрда сақланади. Оғирлик кучи муайян жисмнинг оғирлик кучи ўлчанаётган жойнинг географик ҳолатига боғлиқ бўлгани учун куч бирлиги учун эталон-жисмнинг у сақланаётган жойдаги оғирлиги қабул қилинган. Бу куч бирлигини *килограмм-куч* (кгк) деб аталди. СИ системада кучнинг килограммдан 9,80665 марта кичик бўлган, *ньютон* (*Н*) деб аталувчи бошқа бирлиги қабул қилинган. СГС системада куч бирлиги — *дина*: 1 дина $= 10^{-5}$ Н (18- § га қаранг).

Оғирлик кучи вектор катталикдир. Масалан, арқонда пахта тойи осилиб турибди (30- расм). *G* оғирлик кучи пастга йўналган, унинг катталиги ва йўналиши пастга йўналган кесма билан тасвирланган, кесманинг узунлиги муайян масштабда оғирлик кучи катталигига мос келади. Бу мисолда оғирлик кучидан ташқари арқоннинг таранглик кучини — пахта тойига арқоннинг таъсир кучини кўрсата оламиз; 30- расмда бу куч ***F*** кесма орқали тасвирланган. ***F*** ва ***G*** *кучлар катталиклари жиҳатидан тенг ва йўналишлари жиҳатидан қарама-қаршидир.*

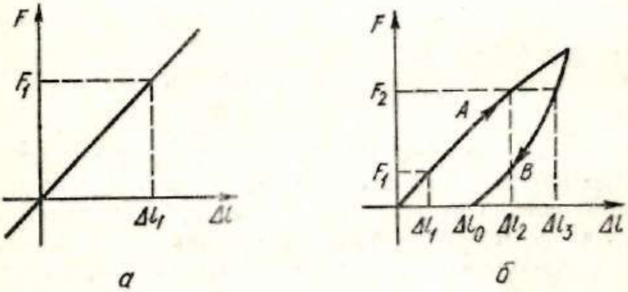
Агар биз арқон узунлигини унга юк осилгунча ва юк осилгандан кейин аниқ ўлчасак эди, биз арқоннинг бир оз узайганини сезган бўлар эдик. Арқоннинг деформацияси унинг таранглик кучи билан қонуний боғлангандир. Куч ва деформация орасидаги боғланиш арқоннинг физикавий хоссаларига ва деформация катталигига боғлиқ. Агар деформация катталиги жисмга таъсир қилаётган кучнинг катталиги билан *бир қийматли* боғланган бўлса, бундай деформацияни *эластик* деформация дейилади.

Пўлат пружина каттагина эластик деформацияга эга бўлган жисмга мисол бўла олади. Пўлат пружина олиб, унинг бир учини маҳкамлаймиз (31- расм), иккинчи учига эса, турли оғирликдаги юкларни оса борамиз ва шу вақтнинг ўзида пружина деформациясини (узайишини) қўзғалмас шкала бўйича ўлчаймиз. Агар пружинанинг Δl узайиши фақат (қолган шароитлар ўзгаришсиз қолганда) унга осилган юкнинг G оғирлиги билан белгиланса, бундай пружинанинг деформациялари эластик бўлади. Шу сабабли куч катталигини ўлчовчи асбобларнинг асосий элементи сифатида эластик пўлат пружина ишлатилади. Бундай асбобларни *пружинали динамометрлар* ёки пружинали тарозилар дейилади.

Динамометрнинг пружинасини чўзувчи F куч билан пружинанинг Δl узайиши орасидаги боғланишни кўрсатувчи график 32- *а* расмда келтирилган. Куч ва деформация орасидаги боғланиш пружинага аввал қандай куч таъсир қилинганидан қатъи назар, бу графикда битта тўғри чизиқ билан кўрсатилган; унинг Δl_1 деформацияси фақат ушбу пайтда таъсир қилаётган F_1 кучнинг катталиги билан белгиланиб, F_1 кучнинг катталиги Δl_1 деформацияга пропорционалдир.

Агар куч билан деформация орасидаги боғланишни битта чизиқ билан ифодалаш мумкин бўлмаса, жисмларнинг деформациялари *ноэластик* бўлади.

Агар биз куч орта борганда кучнинг узайишга боғланишини аниқласак, унда A чизиқ ҳосил бўлади (32- *б* расм), бунда F_1 кучнинг қийматига Δl_1 узайиш, F_2 кучнинг қийматига эса Δl_2 узайиш мос келади. Шундай тарзда 32- *б* расмда кўрсатилмаган бирор максимал нагрузкага (кучга) эришамиз. Нагрузканинг максималдан камая боришида куч ва узайишни ҳисоблаб борсак, тамомила бошқа B эгри чизиқ ҳосил бўлиб, унда F_2 кучга Δl_3 узайиш, F_1 кучга эса Δl_1 узайиш мос келади. Нагрузка йўқотилганда Δl_0 узайиш нолга тенг бўлмай, у *қолдиқ* деформациядан иборат бўлади. Шу сабабли бундай пружина кучларни ўлчашга ярамайди, динамометрларда ҳамма вақт кучнинг деформацияга бир қийматли боғланишини кўрсатувчи ва ғоят кичик қолдиқ деформацияларга эга бўлган яхши пўлат пружиналар ишлатилади.



а *б*

32- расм.

15- §. Нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг мувозанат шартлари

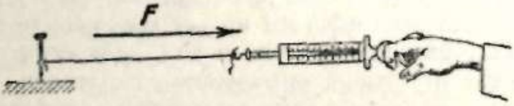
Юклар тўпламига (йирик ва майда қадоқ тошларга) эга бўлганда пружинали динамометрларни даражалаш мумкин. Кучларни пружинали тарозилар билан ўлчаш аниқлиги, агар алоҳида чоралар кўрилмаса, одатда, катта эмас, у ричагли тарозиларда ўлчаш аниқлигидан анча кичикдир. Бироқ, пружинали динамометрлар билан ишлаш анча қулай ва содда бўлганидан, улардан техникада ҳам, физикавий тажрибалар намойиш қилишда ҳам кўп фойдаланилади.

Даражаланган битта пружинали динамометр воситасида ўзимиздаги барча динамометрларни даражалаб олишимиз мумкин. Бунинг учун иккита динамометрнинг пружиналари учини ип билан туташтирамиз ва аста-секин ипни тортамиз; бунда тинч ҳолатда турган иккала динамометр бирдай катталикни кўрсатиши керак. Ипнинг тинч турган исталган заррасига ўзаро тенг ва қарама-қарши йўналган F ва F_1 иккита куч таъсир қилади. Кучларнинг вектор тенглигини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F + F_1 = 0. \tag{15.1}$$

Битта динамометрнинг бўлимлари баҳосини билган ҳолда муайян кучларга мос келган бўлимларни иккинчи динамометрнинг шкаласига ҳам ёзиб қўямиз.

Ип ёрдамида динамометр илгагини қўзғалмас жисмга, масалан, столга қоқилган михга (33-расм) маҳкамлаб, динамометрни чўзувчи қўлнинг михга таъсир кучи катталигини ва йўналишини (кучнинг таъсир йўналиши ип йўналишига мос келади) аниқлаш мумкин. Бинобарин, кучни аниқлаш учун ҳамма вақт фақат куч катталигинигина эмас, унинг фазода таъсир йўналишини ҳам кўрсатиш лозим. *Куч физикавий вектор катталикдир.*

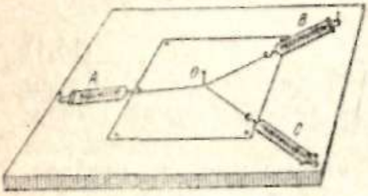


33-расм.

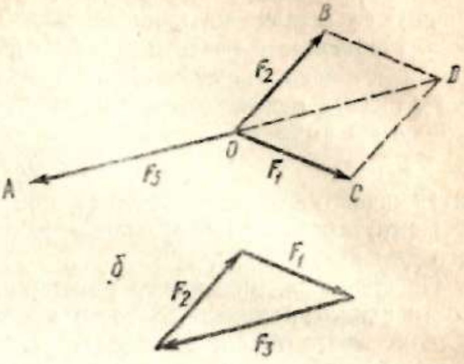
Агар битта нуқтага турли йўналишларда бир нечта куч таъсир қилаётган бўлса, бу ҳолда уларнинг таъсирини *тенг таъсир этувчи* деб аталувчи битта кучнинг таъсири билан алмаштириш мумкин. Тенг таъсир этувчининг катталиги ва йўналиши, барча вектор катталиклардагидек, векторларни қўшиш қоидасига кўра аниқланади.

Бунинг ҳаққонийлигини динамометрлар воситасидаги оддий тажрибалар билан кўрсатиш мумкин. Бир нечта даражаланган динамометр оламиз. Стол устига бир варақ қоғоз қўйиб (34-расм), унинг устидан столга қоғоз устида чиқиб турадиган қилиб мих қоқамиз: учта ип боғланган кичик ҳалқани михга кийдирамиз. Иккита ипнинг учларини B ва C динамометрларнинг илгакларига боғлаймиз, ҳамда динамометрларни чўзиб, уларнинг ҳалқачаларини қўзғалмас қилиб ўрнатамиз. Энди O нуқтадаги ҳалқага бирор бурчак остида йўналган иккита куч таъсир қилади; бундай йўналган кучлар ҳеч қачон ҳалқани мувозанатга келтира олмайди: михни суғуриб олишимиз биланоқ, мувозанат бузилади.

Қоғоз варақда кучларнинг таъсир йўналишларини чизиб оламиз ҳамда O нуқтадан бошлаб узунликлари муайян масштабда тегишли B ва C динамометрларнинг кўрсатишларига пропорционал бўлган OB ва OC кесмаларни қўямиз (35-*а* расм). Параллелограмм диагоналига тенг бўлган OD кесма ясаймиз ва OD чизиқни O нуқта орқали давом эттирамиз. Сўнгра учинчи ипга A динамометрни боғлаймиз, ипни OD



34- расм.



35- расм.

чизиқ бўйича йўналтирамиз, шу ипни OD кесма катталигига пропорционал куч билан тортамиз ва A динамометр корпусини маҳкамлаймиз (34- расмга қаранг). Михни ҳалқадан чиқариб олганимизда ҳалқанинг мувозанатда қолганлигига ишонч ҳосил қиламиз; демак, A динамометр билан ўлчанаётган куч, B ва C динамометрлар билан ўлчанаётган кучларнинг таъсирини мувозанатга келтирди. Равшанки F_1, F_2, F_3 кучларга тааллуқли учта вектор чизмада ёпиқ учбурчак (35- *б* расм) ҳосил қилади. Нуқта O га таъсир қилаётган барча кучларнинг йиғиндиси нолга тенглигини шундай ёзиш мумкин:

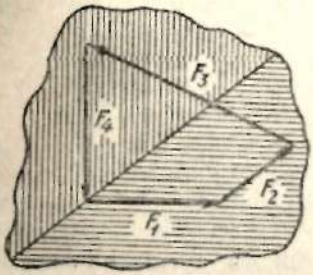
$$F_1 + F_2 + F_3 = 0. \qquad (15.2)$$

Нуқтага таъсир қилувчи учта кучнинг йиғиндиси нолга тенг бўлганда учта кучдан исталган бирига қарама-қарши йўналган куч қолган иккита кучнинг йиғиндисига (тенг таъсир этувчисига) тенгдир.

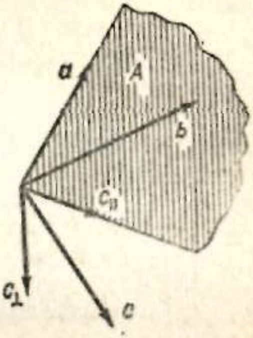
Биз пружинали динамометрлар ўрнига блоклар ва тошлар олишимиз ҳамда улар воситасида 34- расмда келтирилганга ўхшаш тажрибани амалга оширишимиз мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз. Фақат блокларнинг сифатига алоҳида эътибор қилиш лозим: блокларнинг ўқларидаги ишқаланиш кичик бўлмаса, натижалар етарлича аниқ бўлмайди.

Агар бизнинг тажрибамиздагидек (34- расмга қ.) нуқтага таъсир қилувчи ва битта текисликда ётувчи учта кучга биз ўша текисликда ётувчи яна битта кучни қўшсак, у ҳолда ипларнинг таранглиги катталигини ҳамма вақт шундай танлаш мумкинки, тўртала кучнинг ҳалқага таъсири мувозанатлашади. Бу ҳолда кучлар векторлари чизмаси ёпиқ тўртбурчакдан иборат бўлади.

Шундай тарзда бешинчи кучни ва умуман исталганча кучларни қўшиш мумкин: битта нуқтага таъсир этувчи ва битта текисликда ётувчи бу барча кучлар *мувозанатлаша оладилар.*



36-расм.



37-расм.

Мувозанат шартлари қуйидагича таърифланади: *битта текисликда ётувчи ва битта нуқтага турлича бурчаклар остида таъсир қилувчи кучларнинг мувозанатида бу кучларни тасвирловчи векторлар ёпиқ кўпбурчак ҳосил қилади.*

Бу шарт битта текисликда ётмайдиган, лекин битта нуқтага таъсир қилувчи кучлар учун ҳам ўринлидир. Лекин бу ҳолда кўпбурчак фазовий бўлади (36-расм).

Битта нуқтага бурчак остида таъсир қилувчи иккита куч ҳеч қандай шароитда бир-бирини мувозанатлай олмайди. Шунингдек, битта текисликда ётмайдиган учта куч ҳеч қандай шароитда бир-бирларини *мувозанатлай олмайди*. Ҳақиқатан ҳам, айтайлик, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}$ учта куч (37-расм) битта нуқтага таъсир этаётгани ҳолда битта текисликда ётмайди. Исталган иккита куч йўналиши бўйича текислик ўтказиш мумкин. $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар A текисликда ётибди деб фараз қилайлик: у ҳолда $\mathbf{c}$ векторни иккига ажратиш мумкин: $\mathbf{c} = \mathbf{c}_\perp + \mathbf{c}_\parallel$; бунда $\mathbf{c}_\perp$ вектор A текисликка тик, $\mathbf{c}_\parallel$ эса шу текисликда ётади. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ва $\mathbf{c}_\parallel$ кучларнинг йиғиндиси A текисликда ётгани сабабли шу текисликка тик йўналган $\mathbf{c}_\perp$ куч билан мувозанатлаша олмайди. Нуқтага таъсир этаётган тўртта (ва ундан ортиқ) кучлар принципиал *мувозанатлаша олади*. Умуман нуқтага таъсир этувчи кучлар, уларга мос векторлар ёпиқ кўпбурчак (умумий ҳолда фазовий) ҳосил қилганларидагина мувозанатда бўлади. Ёпиқ чизиқнинг исталган ўққа проекцияси ҳамма вақт нолга тенг бўлади. Шунинг учун битта нуқтага таъсир этувчи кучларнинг мувозанат шарти қуйидагича таърифланади: *учта ўзаро тик ўқлардан ҳар бирига барча кучлар проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши лозим.*

Нуқтага $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ кучлар таъсир қилаётган бўлсин, уларнинг x ўққа проекцияларини мос равишда $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ва шунга ўхшаш шу кучларнинг y ўққа проекцияларини $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ орқали, Z ўққа проекцияларини эса $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$

орқали белгилаймиз. У ҳолда мувозанат шартларини қуйдагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n &= \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0, \end{aligned} \qquad (15.3)$$

бунда $\sum\limits_{i=1}^{n}$ белги ўзидан кейин турган ва турлича i индексларга (i индекслар барча 1, 2, 3, ..., n қийматларни қабул қилади) эга бўлган катталикларнинг йиғилишини билдиради. (15. 3) шартлар қуйидаги вектор тенгликка тамомила эквивалентдир:

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = 0. \qquad (15.4)$$

Агар нуқтага таъсир этаётган барча кучларнинг мувозанат шартлари қаноатлантирилмаса, ҳаракат юзага келади. Кучларнинг нуқтага таъсири нуқта ҳаракати билан қандай боғланганлигини навбатдаги параграфларда қараймиз.

Ҳозирча кучнинг таъсирини қараётганда моддий нуқта сифатида қаралаётган жисмнинг ҳеч қандай хоссасини қайд қилмаганимизни таъкидлаб ўтамиз. Биз фақат бу жисм берилган кучларнинг таъсирида бузилиб кетмайди деб ҳисобладик. Шубҳасиз, жисм қандайдир деформацияланади, лекин биз бу деформацияларни ҳисобга олмаймиз.

Умуман, доимий кучларнинг тинч турган исталган жисмга таъсири нимада намоён бўлади? У шу жисм турли қисмларининг муайян деформациясида намоён бўлади. Албатта кучнинг қўйилиш пайтида, деформация юзага келган вақт оралиқларида жисмнинг айрим қисмлари кўчар эди, яъни ҳаракат мавжуд эди. Бироқ, кейин мувозанат ўрнашди, жисм барча қисмлари тинчланди. Шунинг учун ҳам жисм тинч ҳолатда бўлганда кучларнинг таъсири фақат жисм деформациясида намоён бўлади. Лекин жисм деформациялари эластик бўлгандагина таъсир қилувчи кучларни маълум деформация бўйича аниқлаш мумкин бўлади. Акс ҳолда, кучлар ва деформациялар орасида мураккаб боғланиш мавжудлиги сабабли махсус қўшимча тадқиқотларсиз таъсир этувчи кучларни аниқлаш мумкин бўлмайди.

16- §. Куч ва ҳаракат (Ньютоннинг биринчи қонуни)

Олдин айтилганидек (13- §. га қ.) куч деганда жисмларнинг ўзаро таъсири натижасида юзага келувчи ва ҳаракат ҳолатини ўзгартирувчи физикавий сабабни тушунамиз. Кучларнинг мувозанат шартларини (15- §) қараганимиздан кейин, энди кучнинг таърифини аниқлаштириш мумкин: *куч—камида иккита жисмнинг ўзаро таъсирини характерловчи ё жисм ҳаракат ҳолатининг ўзгаришини, ё жисм шаклининг ўзгаришини, ёки ҳар иккаласининг биргаликда ўзгаришини аниқловчи физикавий катталикдир.* Битта жисм билан бошқаларининг механикавий ўзаро таъсири ёки бошқаларнинг муайян жисмга таъсири энди бошқа барча жисмларнинг муайян жисмга таъсир кучлари ёрдамида аниқланиши мумкин.

Куч тушунчасини киритиш билан биз амалда бир нечта ўзаро таъсирлашувчи жисмларнинг ҳаракати ёки деформацияси ҳақидаги механикавий масалани иккига ажратамиз: биринчисида—ҳар бир жисмга таъсир қилувчи кучларни, иккинчисида—муайян жисмнинг энди маълум бўлган кучлар таъсиридаги ҳаракатини (ёки деформациясини) топамиз.

Биз статикада кучни қандай ўлчашни ва аниқлашни билганимиз ҳолда, бу куч (унинг катталиги ва йўналиши) жисм ҳаракатининг ўзгариши, ҳаракат ҳолатининг ўзгариши билан қандай боғланганини билмаймиз—бу *динамиканинг асосий масаласидир.*

Бу масалани кўришга ўтишдан аввал динамометр (ёки тарози) билан ўлчанган куч жисм ҳаракатига қандай таъсир қилиши олдиндан бизга маълум эмаслигини қайд қилиб ўтамиз. Жисмлар ҳаракатланаётганларида динамометр билан кучларни ўлчаш тажрибаларигина жисмга таъсир қилаётган кучлар билан унинг ҳаракати орасида муайян қонуний боғланиш мавжудлигига ишонтиради.

Динамиканинг асосий масаласи—кучлар билан ҳаракат орасидаги боғланиш қонуниятини очиш—биринчи марта Галилейнинг 12- § да эслатилган инерция қонуни асосида Ньютон томонидан тўла тарзда ечилган эди. Бу қонун Ньютоннинг биринчи қонуни дейилади ва у қуйидагича таърифланади: *ҳар қандай жисм тинч ёки текис ва тўғри чизиқли ҳаракат ҳолатини қўйилган кучлар бу ҳолатни ўзгартиргунча сақлайди*[1].

Ньютоннинг биринчи қонунида, аввало, жисмнинг тинчлиги ҳамда текис ва тўғри чизиқли ҳаракати жисмнинг ягона механикавий ҳолатидир, деган даъво бор. Сўнгра унда кучнинг таъсирига баҳо берилган: фақат кучгина жисмнинг тинчлик ҳолатини ва тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатини ўзгартира олади. Кучлар йўқлигида, ташқи таъсирлар бўлмаганда жисм тўғри чизиқ бўйича доимий тезлик билан ҳаракатланади.

---

[1] Академик А. Н. Крилов таржимасида Ньютоннинг бу қонунига берган таърифи қуйидагича: «Ҳар қандай жисм ўзининг тинч ҳолатида ёки текис ва тўғри чизиқли ҳаракат ҳолатида қўйилган кучлар бу ҳолатни ўзгартиришга мажбур қилмагунларича ва бу ҳолатни ўзгартишга мажбур қилмаётганликлари учун қолаверади». А. Н. Крилов асарлари тўплами, VII том (И. Ньютон, Натурал фалсафанинг математик асослари), СССР ФА нашриёти, 1936 й., 39- бет,

Жисмга таъсир қилувчи барча кучлар ҳамма вақт олдиндан маълум бўлавермагани учун бу юзаки қараганда ғалати туюлади. Масалан, поезд вагони тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланмоқда, демак, вагонга қўйилган барча кучлар йиғиндиси нолга тенг. Ҳақиқатдан ҳам, вагонни олдинга тортувчи куч, бу ҳолда вагонни орқага тортувчи кучга аниқ тенг. Бизни ҳозирча, тортувчи куч олдинда кетаётган вагон томонидан, орқага тортувчи куч ҳавонинг қаршилик кучидан, ғилдиракларнинг ишқаланиш кучидан ва бошқалардан иборат эканлиги қизиқтирмайди. Бироқ олдинга ва орқага тортувчи кучлар йиғиндиси нолга тенг, чунки жисм тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланмоқда. Бу хулосага динамиканинг биринчи қонуни асосида эришилди.

Жисм бўшлиқда тушаётганда унга фақат битта куч таъсир қилади, шунинг учун, шунингдек, биринчи қонунга кўра, текис ҳаракат қила олмайди, унинг тезлиги доимий бўлмайди: бу ҳол кузатишлар натижасига тўла мос келади.

Баъзида текис ва тўғри чизиқли ҳаракатда жисм инерцияси бўйича ҳаракат қилади дейишади. Буни жисм инерцияси натижасида ҳаракат қилади, деб тушуниш керак эмас. Жисм тўғри чизиқли ва текис ҳаракат ҳолатини сақлаб туриши учун ҳеч қандай сабаб керак эмас. Жисмнинг текис ва тўғри чизиқли ҳаракати (инерция бўйича ҳаракати) ва тинч ҳолати—бу ташқи таъсирлардан озод қилинган ёки йиғиндиси нолга тенг бўлган ташқи кучлар таъсирида бўлган ҳар қандай жисмнинг табиий ҳолатидир. Текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланаётган вагонга таъсир қилаётган кучлар нолга тенг ва шу сабабли вагон ўз ҳаракатини, инерция бўйича ҳаракатини давом эттиради. Бу ерда ҳамма ҳолда гап жисмга айни пайтда таъсир этаётган кучлар ҳақида бориб, бунда биз вагонга қачондир таъсир қилиб, уни текис ҳаракат ҳолига келтирган кучларни қарамаётганимизни таъкидлаб ўтамиз.

Инерция бўйича ҳаракат—барча моддий жисмларнинг хоссасидир. Галилей—Ньютон қонунини яна қуйидагича таърифлаш мумкин. Жисм инерцияси—унинг ҳаракати сабабчиси бўлмай, балки унинг хоссасидир.

Галилей бундай дейди: «Жисм ошкор қиладиган[1] тезлик даражаси жисмнинг ўз табиатида *бузилмас* жамланган бўлади, ҳолбуки тезланиш ёки секинланиш сабаблари ташқи сабаблардир...» (курсив бизники—С. С.) (Г. Галилей, Танланган асарлар, 2-том, «Беседы», «Наука», 1964, 282-бет).

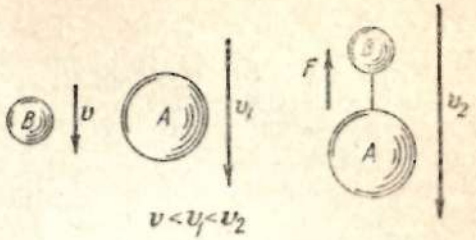
Инерция қонунини очишда Галилей ўтган йўлни кузатиш мароқлидир. У Аристотелнинг ўша вақтда фанда ҳукмрон бўлган—оғир жисмлар енгил жисмларга нисбатан тезроқ тушишлари лозим, деган нотўғри фикрини рад қилди. Ўз тадқиқотлари асосида Галилей тажриба йўли билан жисмларнинг ҳавода тушиш қонунини топди. У жисмларнинг қия текислик бўйича ҳаракатини ўрганди ва ҳаво қаршилиги бўлмаганда барча жасмлар *бирдай* тушишлари лозим, деган хулосага келди.

Кейинчалик Ньютон ҳавоси сўриб олинган трубкада жисмларнинг тушишини кузатиш билан бу хулосани бевосита тажрибада тасдиқлади. Бу тажриба физикадан лекцияларда тез-тез намойиш қилиб турилади.

Галилей ўз тажрибаларидан олган натижаларнинг таҳлили ҳаққонийлигини яна қуйидаги мулоҳаза билан тасдиқлаган эди. Аристотель қонунига кўра A оғир жисм B енгил жисмдан тезроқ тушади, деб фараз қиламиз (38- расм).

---

[1] Бу иборанинг маъносини бундай тушуниш мумкин: жисмнинг доимий тезликни сақлаш хоссаси.



$v<v_1<v_2$

38- расм.

Энди иккала жисмни ип билан туташтириб, боғлаймиз; натижада янада оғирроқ жисм ҳосил бўлиб, у *A* жисмдан тезроқ тушиши керак; бироқ *B* енгил жисм ўзи секинроқ тушиши керак, демак, боғланган жисм тушаётганда *B* жисм орқада қолиши ва ип таранглашиши лозим. Ипнинг *F* таранглик кучи *A* жисмни юқорига, *B* жисмни пастга тортади. *A* жисм юқорига таъсир қилувчи қўшимча куч таъсирида, ўзининг пастга тушиш тезлигини орттиради. Бу ҳол, биз тўғри деб қабул қилган Аристотель қонун-қоидасига кўра ҳам, бўлиши мумкин эмас. Демак, Аристотель қонуни тўғри эмас.

Ҳаво бўлмаганда барча жисмлар текис тезланиш билан тушади ва барча жисмлар учун Ер сиртининг шу жойида тушиш тезланиши бирдай. Жисм кичик баландликдан тушаётганида тортишиш кучи доимий қолади ва тезланиш ҳам доимий қолади, тезлик бўлса, узлуксиз ўсади. Жисмларнинг қия текислик бўйича ҳаракатига оид тажрибалар унда ҳаракатланувчи жисмларнинг тезланиши оғирлик кучининг текислик бўйича йўналган ташкил этувчисига пропорционал эканлигига ишонтиради. Демак, нолга тенг қияликда, яъни горизонтал текисликда ишқаланиш бўлмаганда жисм исталган доимий тезлик билан ҳаракатланади ёки тинчликда қолаверади. Бинобарин, агар куч бўлмаса, жисм тезлиги доимий қолаверади. Шу тажрибалари асосида Галилей шу вақтгача фақат тарози ёрдамидагина аниқланиб юрилган оғирлик кучи (ёки унинг қия текислик бўйича ташкил этувчиси) жисм тезланишига пропорционал эканлигини топганлигини эслатиб ўтамиз.

17- §. Ньютон динамикасининг иккинчи қонуни

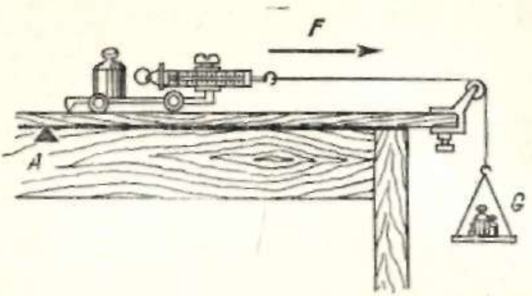
Биринчи қонун таъкидлашича, агар жисмга кучлар таъсир қилса, ҳаракат текис ва тўғри чизиқли бўлмайди. Кучлар таъсирида ҳаракат қандай бўлади? Бунга динамиканинг иккинчи қонуни жавоб беради.

Баённинг соддалиги мақсадида аввал динамика иккинчи қонунининг унча умумий бўлмаган таърифини берамиз: *жисм массаси катталигининг унинг тезланишига кўпайтмаси берилган жисмга таъсир қилаётган кучнинг катталигига пропорционал. Куч ва тезланиш йўналишлари мос тушади.*

Ньютоннинг ўзи берган умумий таърифни биз кейин келтирамиз.

Иккинчи қонун ўзаро учта катталикни: кучни, тезланишни ва массани боғлайди. Куч ва тезланиш катталикларининг физикавий қийматларини ва аниқлаш усулларини биз олдин аниқлаштириб олган эдик. Кейин (18- §) турли жисмларнинг кучлар таъсиридаги ҳаракатига оид тажрибаларни таҳлил қилиш орқали учинчи асосий механикавий катталик—массанинг қийматини аниқлаймиз.

Битта жисмнинг ўзига турли катталикдаги кучларни қўйиш ва шу кучлар юзага келтирадиган тезланишни ўлчаш билан тезланиш жисмга қўйилган кучга пропорционал деган хулосага келамиз. Фа-



39- расм.

раз қилайлик рельсларда турган аравачага ипнинг F таранглик кучи қўйилган бўлсин: блок орқали ўтказилган ипнинг иккинчи учига осилган G юк воситасида ип тарангланади (39- расм). Ипнинг таранглик кучи пружинали динамометр билан ўлчанади. Ҳаракат вақтида кучнинг катталигини ва аравача муайян вақт ичида ўтадиган масофани ўлчаб, биз тезланиш билан куч орасидаги қонуний боғланишни топамиз.

Даставвал аравачанинг динамометр белгилайдиган доимий куч таъсиридаги ҳаракат характерини аниқлаймиз. Аравачани бирор A белгидан қўйиб юбориб, аравача 1, 2, 3,... вақт интервалларида F_0[1] кучнинг бир хил катталигида ўтадиган S_1, S_2, S_3,... масофаларни топамиз. Тажриба натижасида масофалар нисбати $S_1: S_2: S_3:...$ бутун сонлар квадратларининг нисбати $1: 2^2: 3^2:...$ га пропорционал эканлигини кўрамиз. Масофанинг вақт ўтиши билан бундай ўзгариши текис тезланувчан ҳаракатдаги йўл формуласига мос келади: $S = \frac{at^2}{2}$, бунда a—тезланиш, t—вақт. Аравачанинг доимий куч таъсиридаги ҳаракати текис тезланувчан бўлади.

Энди тезланиш катталигининг таъсир этувчи кучга боғланишини топайлик. G ни шундай ўзгартирамизки, ҳаракат вақтида динамометр, масалан, бир ярим марта катта кучни, $^3/_2\,F_0$ ни кўрсатсин. Яна, шунингдек, ҳаракатнинг текис тезланувчан эканлигини, лекин аравачанинг 1, 2, 3,... вақт интервалларида ўтадиган $S'_1, S'_2, S'_3, ...$ масофалари аравачанинг F_0 куч таъсирида ўша вақт оралиқларида ўтган S_1, S_2, S_3,..., тегишли кесмаларидан бир ярим марта катта эканлигини аниқлаймиз. Текис тезланувчан ҳаракатда жисмнинг бирдай вақтда ўтадиган масофаси тезланиш катталигига пропорционал. F кучни қандай ўзгартмайлик, ҳар сафар аравачанинг муайян вақтда ўтадиган масофаси F га пропорционал бўлади. Тажрибалар натижаларини умумий кўринишда шундай ёзиш мумкин:

$$F = ka \tag{17.1}$$

---

[1] G юк бу тажрибалар вақтида ўзгармай туради.

— куч тезланишга пропорционал ва аксинча, тезланиш кучга пропорционал.

Демак, бу тажрибалар динамика иккинчи қонунининг—куч тезланишга пропорционал деган қисми тўғрилигини тасдиқлайди.

Ушбу тажрибаларда Галилейнинг жисмнинг қия текислик бўйича ҳаракатига оид классик тадқиқотларининг асосий ғояси акс эттирилганини таъкидлаб ўтамиз. Тафовут фақат шундаки, бу ерда тезлаштирувчи куч пружинали динамометр билан ҳаракат вақтида ўлчангани ҳолда, у ерда фақат тинчликда ўлчаниши мумкин эди.

Тажрибаларда қолган жисмлар, рельслар ва ҳаво томонидан аравачага таъсирлар нисбатан кичик бўлиши чораларини кўришимиз лозим. Бунга қуйидаги тажрибалар ёрдамида ишонч ҳосил қилиш мумкин: аравача динамометридан ипни узамиз ва аравачанинг қўл билан турткидан кейин иккита кетма-кет бирдай вақт оралиқларида ўтадиган масофаларни ўлчаймиз. Аравачанинг тезлигини тахминан у, тезланувчан аравача билан ўтказилган тажрибалардагидек қилиб танлаймиз. Агар аравачанинг турткидан кейин бирдай вақт интервалларида ўтадиган участкалари тахминан бирдай бўлса, у ҳолда биринчи қонунга мос равишда, аравачага таъсир қилувчи кучлар ипга таъсир қилувчи таранглик кучига нисбатан етарлича кичик бўлади.

Таъсирлар бор бўлса-да, уларнинг катталиги етарлича кичикдир; шу сабабли бизнинг муайян аниқликда ўтказган тажрибаларимиз натижалари динамика иккинчи қонунининг тўғрилигини тўла тасдиқлайди. Агар биз куч, масофа ва вақтни ўлчаш аниқлигини ошириш билан бирга, ҳаво ва рельслар томонидан таъсирни (кучларни) ҳам ўлчасак, у ҳолда ҳам динамиканинг иккинчи қонуни тўғри эканлигини яна тасдиқлашимиз мумкин.

18-§. Жисмнинг массаси

F_0 доимий куч таъсирида тезланиш билан ҳаракатланаётган аравача билан тажрибаларда ҳар гал аравача юкини ўзгартириб, унинг тезланишини ўлчаймиз. Биринчи тажрибаларимизнинг натижалари *юкнинг ортиши билан* ўша куч юзага келтирадиган тезланиш *камайишини* кўрсатади. Демак, муайян куч таъсирида жисмнинг оладиган тезланиши фақат куч катталигигагина эмас, балки жисмни ташкил этувчи модда миқдорининг ўзгариши билан ўзгара борувчи тезлаштирилувчи жисмнинг қандайдир физикавий хоссасига ҳам боғлиқдир. Бу хоссани *инертлик* дейилади. Жисмнинг инертлиги қанча катта бўлса, у доимий куч таъсирида шунча кам тезланиш олади. Юкнинг ортиши, муайян жисмни ташкил қилган модда миқдорининг ортиши билан инертлик орта боради. Жисмнинг инертлиги фақат динамика ҳодисаларида ошкор бўлганидан, у одатдаги жисмлар учун тезлаштирилувчи жисмлар билан ўтказиладиган динамика тажрибаларидагина аниқланиши мумкин.

Жисмнинг *массаси* деб аталувчи физикавий катталик жисм инертлигининг ўлчовидир. Аравачани юклай бориб, биз унинг массасини оширамиз, натижада аравачанинг ўша куч таъсирида оладиган тезланиши камаяди. Берилган жисмнинг муайян куч таъсиридаги тезланиши устида тажрибалар ўтказиш ҳамда динамиканинг иккинчи қонунини ҳисобга олиш билан жисм массаси катталигини аниқлаш мумкин. Шундай йўл билан топилган катталикни *инерт масса* дейиш лозим эди. Келгусида ҳар гал «инерт» сўзини такрорламаймиз, лекин тегишли эслатма қилинмаган бўлса, бундан буён ҳамма ерда «масса» деганда инерт масса назарда тутилишини эсда сақлаш лозим.

Бирор жисмнинг массасини *инерт масса бирлиги* деб қабул қилиш ва барча қолган жисмларнинг массасини у билан таққослаш мумкин. Халқаро келишув асосида СИ системада масса бирлиги килограммнинг халқаро прототипи (53-бетга қаранг) қабул қилинган. Массанинг бу бирлиги *килограмм* (кг) деб аталади. Физикада массанинг килограммдан минг марта кичик бирлиги *грамм* (г) кўп ишлатилади.

Доимий катталикдаги куч билан турли жисмларга тезланиш бериш тажрибаларини ўтказамиз. Олдин айтилганидек, тезланиш фақат куч катталигигагина эмас, балки жисмнинг инертлигига ёки унинг инерт массаси катталигига ҳам боғлиқ. Иккинчи қонундан келиб чиқишича, бундай тажрибаларда жисм тезланиши унинг инерт массасига тескари пропорционалдир. Айтайлик, бирлик массали жисмга F_0 куч таъсир қилсин ва жисм a_1 тезланиш олсин. Массаси номаълум бўлган жисм ўша куч таъсирида a_2 тезланиш олади. У ҳолда иккинчи қонунга кўра

$$F_0 = k m_1 a_1 = k m_2 a_2, \tag{18.1}$$

бунда k фақат бирликларнинг танланишига боғлиқ бўлган коэффициент. Охирги тенгликдан қуйидаги келиб чиқади:

$$m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}. \tag{18.2}$$

Шундай усулда ҳар қандай жисм массасининг катталигини ўлчаш мумкин. Кейинроқ жисм массасини ўлчашнинг моҳияти жиҳатидан баён қилинган усул билан боғланган бошқа усуллари ҳам кўрсатилади.

Энди шундай жисм билан аввалгидек тажрибалар силлиқ горизонтал сиртда ўтказилаётир, деб тасаввур қилайлик. Бу тажрибаларда жисмга қўйилган горизонтал кучнинг йўналиши ҳар сафар жисмга нисбатан турлича бўлсин; бунга куч таъсири йўналишини ўзгартириш ёки жисмнинг ўзини олдиндан қандай бўлмасин бураш билан эришиш мумкин. Натижада жисмга қандай горизонтал кучни қўймайлик, жисмни қандай бурмайлик, тезланиш ҳамма вақт таъсир этаётган кучга пропорционал ва тезланиш йўналиши ҳамма вақт таъсир этувчи куч йўналишига мос тушишини қайд қиламиз. Демак, *масса—скаляр катталик.*

Жисмнинг инерт массаси катталигини m орқали белгилаб, динамиканинг иккинчи қонунини бундай ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{F} = k m \boldsymbol{a}, \tag{18.3}$$

бунда F—куч (вектор), a—тезланиш (вектор), k эса бирликларнинг танланиши билан боғлиқ бўлган бирор коэффициент. Физиканинг асосий қонунларидан бирида танланган бирликларнинг катталиги ва ўлчамлигига боғлиқ бўлган коэффициентнинг мавжудлиги жиддий ноқулайликлар яратади. Шу сабабли одатда масса бирлиги катталигини (ва унинг ўлчамлигини) шундай танланадики, коэффициент ўлчамсиз ва бирга тенг, $k=1$ катталикка эга бўлсин.

Масалан, (18, 3) формулада масса *бирлиги* учун 1 кг, *тезланиш* бирлиги учун 1 м/сек^2 ва $k=1$ деб фараз қилиб, СИ системада ҳосилавий бўлган куч бирлиги *ньютон* (Н) ни топамиз:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{м/сек}^2.$$

СССРда СИ система афзал кўрилган. Бу системада асосий катталиклар сифатида кг, м, сек лардан ташқари, ток кучи бирлиги 1 А (*ампер*), термодинамик температура бирлиги 1 К (*кельвин*), ёруғлик кучи бирлиги 1 кд (*қандил*), модда миқдори бирлиги 1 моль қабул қилинган.

Физикада бошқа бирликлар системаларидан ҳам фойдаланилади. Масалан, асосий бирликлар сифатида масса бирлиги 1 г, узунлик бирлиги 1 см ва вақт бирлиги 1 сек қабул қилиниб, куч бирлиги катталигини шундай танланадики, k коэффициент Ньютоннинг иккинчи қонунида ўлчамсиз бирга тенг катталик бўлади. Бундай системани СГС (сантиметр, грамм, секунд) система дейилади. Бу системада ҳам куч ҳосилавий катталик бўлади ва унинг ўлчамлик формуласи қуйидагича ёзилади:

$$[F] = \text{г} \cdot \text{см/сек}^2. \qquad (18.4)$$

Кучнинг бундай бирлиги дина (*дина*) номи билан юритилади.

Техникада бирликларнинг техникавий системаси афзал кўрилиб, унда асосий бирликлар сифатида килограмм-куч (кгк), метр (м), секунд (сек) олинган. Масса бирлиги ҳосилавий катталикдир ва бунда ҳам Ньютон қонунида k коэффициентнинг бирга тенглиги шартидан танланади. Масса бирлиги шундай жисмнинг массасига тенгки, унга бир килограмм-куч 1 м/сек^2 тезланиш беради. Равшанки, массанинг техникавий бирлиги (м. т. б.) 9,81 кг жисм массасига тенг.

Шу параграфда қаралган тажрибаларнинг ва кичик тезликли ҳаракатлардаги барча механикавий ҳодисаларнинг таҳлили жисмнинг массаси—доимий катталик эканлигини кўрсатади. Бироқ, ҳаракат тезлиги ёруғлик тезлигига яқин бўлган тез зарраларнинг тадқиқлари исталган жисмнинг массаси доимий қолмаслигини, у ҳаракат тезлигига боғлиқлигини кўрсатади. Эйнштейннинг ҳозирги замон механикасида масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (18.5)$$

эканлиги кўрсатилган, бунда m_0—жисм $v \sim 0$ да эга бўладиган доимий масса. Одатдаги ҳаракатларда $v \ll c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек бўлганидан улар учун катта аниқлик билан массани доимий катталик дейиш мумкин (бу ҳақда 155- § да батафсилроқ танишилади).

19- §. Ньютон иккинчи қонунининг умумий кўриниши

Динамиканинг иккинчи қонуни Ньютон томонидан олдинги параграфларда кўрсатилганидан кўра бошқачароқ, умумийроқ шаклда берилган эди. Жисмнинг ҳаракатидаги механикавий ҳолатни характерлаш учун яна битта катталик—жисмнинг ҳаракат миқдори (ёки *импульси*) киритилади. Жисмнинг ҳаракат миқдори—сон жиҳатдан массанинг тезликка кўпайтмасига тенг ва жисмнинг тезлиги йўналишига эга бўлган физикавий вектор катталикдир. Агар m массали жисмнинг ҳаракат миқдорини $\boldsymbol{k}$ орқали белгиласак, у ҳолда $\boldsymbol{v}$ тезликка эга бўлган жисм учун:

$$\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{v}. \tag{19.1}$$

Ҳаракат миқдори бирлиги махсус номга эга эмас. СИ системада ҳаракат миқдори кг·м/сек ўлчамликка эга. Масалан, 10 кг массали жисм 2 м/сек тезлик билан ҳаракатланса, у қуйидаги ҳаракат миқдорига эга бўлади:

$$10\,\text{кг} \cdot 2\ \text{м/сек} = 20\ \text{кг} \cdot \text{м/сек}.$$

Ньютон динамиканинг иккинчи қонунини қуйидагича таърифлаган: «*Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳаракатлантирувчи кучга пропорционал ва шу куч таъсири юз бераётган тўғри чизиқ йўналиши бўйича содир бўлади*»[1].

Ҳозирги замон тилидан фойдаланганда, бу таърифни бундай ёзиш маъқулдир. *Жисм ҳаракат миқдоридан олинган ҳосила катталик жиҳатдан таъсир қилувчи кучга тенг*[2] *ва йўналиши унинг йўналишига мос тушади.*

Агар $\boldsymbol{K}$—жисмнинг ҳаракат миқдори, $\boldsymbol{F}$—таъсир этувчи куч бўлса, у ҳолда исталган вақт моментида

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} \quad \text{ёки} \quad \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}). \tag{19.2}$$

Фақат жисм массаси вақт ўтиши билан доимий қолган тақдирдагина масса катталигини ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш ва қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{F} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \tag{19.3}$$

---

[1] А. Н. Крилов асарлари тўплами, VII том, СССР ФА нaш-ти, 1936, 40-бет.

[2] Агар барча катталиклар битта бирликлар системасида ўлчанган бўлса.

бунда $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ жисмнинг тезланишини беради. Демак, фақат хусусий, бироқ, тез учраб турадиган ҳолдагина аввалги таъриф тўғрилигича қолади.

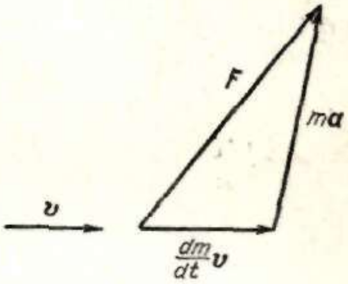
Ҳаракат вақтида ўзгарувчан бўлган жисм массаси ҳолида моддий нуқта ҳаракатининг барча кезларида динамика қонуниятларини тўғри акс эттирувчи умумий кўринишдаги (ҳаракат миқдори иштирок этган) иккинчи қонундан фойдаланиш зарур.

Динамика иккинчи қонунининг умумий кўриниши нисбийлик назариясида ҳам тўғри бўлиб чиқди. Олдин айтилганидек, бу назарияга кўра масса жисмнинг ҳаракат тезлиги модулига боғлиқ (18. 5). Шу сабабли (19. 3) ифода эмас, балки (19. 2) ўринлидир. Бунда динамика қонуни қуйидагича ёзилади:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{dm}{dt}\ \boldsymbol{v} + m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{a} \qquad (19.4)$$

Тезлик катталиги ўзгариши билан m масса ҳам ўзгаради ва умумий ҳолда, $\boldsymbol{F}$ куч йўналиши $\boldsymbol{a}$ тезланиш йўналишига мос тушмайди ва тезланиш кучга пропорционал бўлмайди.

Куч $\boldsymbol{v}$ тезликнинг йўналиши бўйича йўналган ёки куч тезликка *нормал бўлган ҳолдагина* $\boldsymbol{a}$ тезланиш ва $\boldsymbol{F}$ кучнинг йўналишлари мос тушиши кейинроқ (156-§) кўрсатилади. Қолган ҳолларда тахминан 40- расмда кўрсатилгандек бўлади. Ньютон механикасида $\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v} \ll m\boldsymbol{a}$, чунки m массанинг ўзи m_0 доимий массадан жуда кам фарқ қилади. Ҳатто космик тезлик ($\boldsymbol{v} = 30\ \frac{\text{км}}{\text{сек}}$) каби Ердаги шундай катта тезликда $v/c = 10^{-4}$, шунинг учун масса m_0 дан $5\cdot10^{-9}$ бирлик улушгагина фарқ қилади. Одатдаги «техникавий» тезликларда бу улуш янада кичикдир. Албатта, биз тезлаткичлардаги зарралар тезликларини назарда тутаётганимиз йўқ ва ҳоказо. У ерда v тезлик c га яқин ва Ньютон механикасини Эйнштейннинг аниқ механикаси билан алмаштирилмоғи лозим.



40- расм.

Ньютоннинг биринчи ва иккинчи қонунларида гап тайинли бир жисмга таъсир этаётган куч ҳақида бориб, бу куч келиб чиқаётган бошқа жисмлар эсланмайди. Куч камида иккита жисмнинг ўзаро таъсирини характерлайди; иккинчи жисмнинг динамикавий ҳодисалардаги ролини Ньютоннинг учинчи қонуни акс эттириб, у моҳияти жиҳатидан дастлабки иккитасидан ажралмасдир.

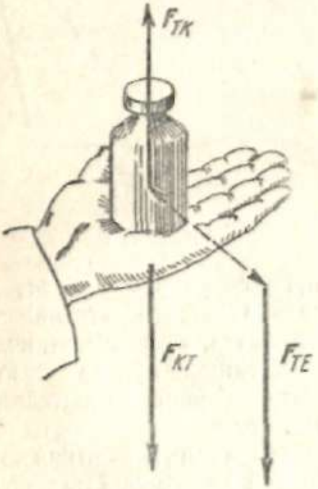
20- §. Ньютоннинг учинчи қонуни

Динамиканинг учинчи қонунини Ньютон қуйидагича таърифлаган: *«Таъсирга ҳамма вақт тенг ва қарама-қарши акс таъсир мавжуд; бошқача айтганда, иккита жисмнинг бир-бирларига ўзаро таъсирлари ўзаро тенг ва қарама-қарши йўналган»*[1].

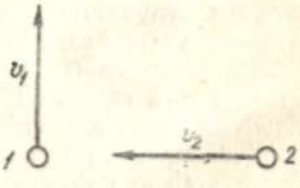
Биринчи ва иккинчи қонунларда куч қайси жисм томонидан таъсир қилаётганидан, таъсир этувчи кучнинг келиб чиқиши қандайлигидан тамомила қатъи назар, гап муайян жисмга таъсир этувчи куч ҳақида, шунингдек, шу кучнинг таъсир натижалари ҳақида боради. Ҳақиқатда жисмнинг ҳаракат ҳолатининг ўзгариши фақат бир нечта жисмнинг ўзаро таъсири натижасида содир бўлади. Ҳар бир конкрет ҳолда кучни кўрсатаётиб, биз ҳамма вақт иккита жисмни: куч таъсир қилаётган жисмни, куч таъсири келиб чиқаётган жисмни кўрсатамиз.

Агар бирор A жисмга таъсир қилувчи куч иккинчи B жисм томонидан қўйилган бўлса, у ҳолда бу кучни F_{AB} орқали белгилаймиз.

Учинчи қонуннинг даъвосига кўра, агар B жисм A жисмга F_{AB} куч билан таъсир қилса, у ҳолда ўз навбатида A жисм B жисмга албатта катталиги тенг ва ишораси қарама-қарши F_{BA} куч билан таъсир қилади. иккала куч битта тўғри чизиқ бўйича йўналган бўлади. Учинчи қонун *куч икки хил жисмнинг ўзаро таъсири натижаси* эканлигини акс эттиради.



41- расм.



42- расм.

---

[1] А. Н. Криловнинг асарлари тўплами, VII том, СССР ФА наш-ти, 1936, 41-бет.

Ҳодисани таҳлил қилиш ва жисмнинг ҳаракатини аниқлаш учун дастлабки иккита қонунда бу ўзаро таъсирнинг бир томонигагина қаралларди. Ҳақиқатда эса ҳамма вақт ўзаро таъсир мавжуддир[1] ва акс таъсирсиз куч йўқдир. Аёнки, «таъсир» ва «акс таъсир» номлари фақат шартли бўлиб, уларнинг ҳар бирини ёки ундай, ёки бундай аташ мумкин.

Масалан, кафтда тош турибди, кафт тошга юқори томонга йўналган ва тошга қўйилган $\boldsymbol{F}_{\text{т. к}}$ куч билан, тош ўз навбатида кафтга пастга йўналган ва кафтга қўйилган $\boldsymbol{F}_{\text{к. т}}$ куч билан таъсир қилади. (41- расм). Энди кафтни юқорига ва пастга кўтарамиз ва туширамиз. Учинчи қонунга кўра

$$\boldsymbol{F}_{\text{т. к}} + \boldsymbol{F}_{\text{к. т}} = 0. \tag{20.1}$$

Бу тенглик, кафт тош билан тинчликдами ёки ҳаракатланаётибдими, бундан қатъи назар, ҳамма вақт ўринли бўлаверади.

Учинчи қонун кучлар катталиги ҳақида ҳеч нарса демай, уларнинг тенглигини таъкидлайди. Учинчи қонунда *турли* жисмларга қўйилган кучлар ҳақида гап боришини қайд қилиш лозим.

Ҳаракатланаётган электр зарядларнинг ўзаро таъсири ҳолида иш мураккаброқдир. Масалан, 42- расмда кўрсатилгандек ҳаракатланаётган иккита заряднинг ўзаро таъсирини қараётганда, зарядларнинг электр ўзаро таъсири Ньютоннинг учинчи қонунини қаноатлантиради, лекин магнит ўзаро таъсири қаноатлантирмайди. *2*- заряднинг *1*- заряд турган нуқтадаги магнит майдони нолга тенг; *2*- заряднинг *1*- зарядга таъсир кучи йўқ. *1*- заряднинг *2*- заряд турган нуқтадаги магнит майдони нолдан фарқли: *1*- заряднинг *2*- зарядга таъсир кучи мавжуд ҳамда у чизма текислигига нормал йўналган.

Гап шундаки, ҳаракатланаётган зарядларнинг ўзаро таъсирини қараётганда электромагнит майдоннинг импульсини ҳисобга олиш лозим бўлиб, бу электродинамикада қилинади.

Динамиканинг Ньютон таърифлаган учта асосий қонуни Ньютонгача маълум эди. Унинг ўзи шундай деган эди. «Мен математиклар қабул қилган ва кўп сонли тажрибаларда тасдиқланздиган қонунларни баён қилдим. Галилей дастлабки иккита қонундан фойдаланиб..., жисмларнинг тушиши вақтнинг квадратига пропорционаллигини топди... Шу иккита қонундан ва учинчидан замонамизнинг буюк геометрлари кавалер Христофор Врен, Иоанн Уаллис ва Христиан Гюйгенслар жисмларнинг урилиш ва қайтиш қонунларини топдилар...» (акад. А. Н. Крилов таржимаси[2]).

Бироқ Ньютонгача бу учта қонун бутун механиканинг асосини ташкил қилади деган тасаввур йўқ эди. Турли-туман жисмларнинг ҳаракатини тадқиқ ва таҳлил қилиш билан фақат Ньютонгина исталганча мураккаб механикавий ҳодисалар динамиканинг учта қонунига бўйсунишини кўрсатиб ўтди ва фақат унгагина бу қонунлар

---

[1] Инерциал саноқ системаларида, 44- § га қаранг.

[2] А. Н. Крилов асарлари тўплами, VII том, СССР, ФА наш-ти, 1936, 50-51-бетлар.

заминида механиканинг илмий фан сифатидаги мунтазам биносини қуриш насиб қилди. Шунинг учун ҳам динамика қонунларининг номи ҳаққоний равишда Ньютон номи билан боғланади.

21- §. Кучлар, Ньютоннинг иккинчи ва учинчи қонунлари

Жисмларнинг ҳаракатини ўрганишда, механикавий масалаларни *ечишда динамиканинг иккинчи ва учинчи қонунидан келиб чиқувчи* қонуниятларнинг фарқи дарҳол ойдинлаштирилмаслиги натижасида тушунмовчиликлар содир бўлади. Буни мисолларда кўрсатамиз.

Ҳар бир механикавий масаланинг таҳлили берилган жисмга қандай кучлар ва қандай жисмлар томонидан таъсир этаётганлигини ва улар нима билан белгиланишини аниқлашдан бошланади. Сўнгра, агар бунга зарурат бўлса, шу кучларга учинчи қонун қўядиган шартларни ҳисобга олган ҳолда иккинчи қонундан фойдаланиб, жисм тезланиши аниқланади. Бир нечта мисол қарайлик.

1) Кафтда тош ётибди. Кафт қандайдир тарзда ҳаракатланаётир, дейлик. Кафтга ва тошга таъсир қилаётган кучларни аниқлаймиз ва тошнинг тезланишини топамиз.

(20. 1) тенглик учинчи қонун асосида ёзилган бўлиб, у тошнинг тезланишини аниқлашда бизга ҳозирча ҳеч ёрдам беролмайди. Тезланишни аниқлаш учун тошга бошқа жисмлар томонидан қўйилган барча қолган кучларни билиш лозим. Тошга қўлнинг $\boldsymbol{F}_{\text{т.к.}}$ кучидан ташқари яна оғирлик кучи, яъни унинг Ер билан ўзаро таъсир кучи[1] таъсир қилади. Уни биз $\boldsymbol{F}_{\text{т.Ер}}$ орқали белгилаймиз. Энди тошнинг тезланишини топиш мумкин. Тошга иккита кучнинг йиғиндисига тенг бўлган куч қўйилган бўлиб, у иккинчи қонунга кўра тош массасининг унинг тезланишига кўпайтмасига тенг:

$$\boldsymbol{F}_{\text{т.Ер}}+\boldsymbol{F}_{\text{т.к.}}=m_{\text{т}}\ \boldsymbol{a}_{\text{т}}.$$

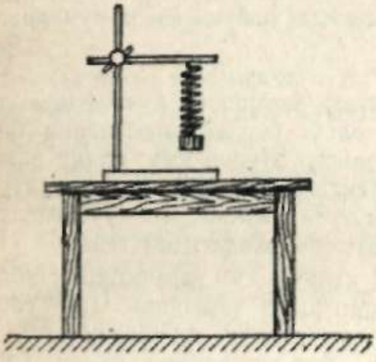
Демак, агар оғирлик кучи $\boldsymbol{F}_{\text{т.Ер}}$ қўлнинг $\boldsymbol{F}_{\text{т.к.}}$ кучидан катта бўлса, тошнинг тезланиши Ерга томон йўналган; агар аксинча, қўл кучи оғирлик кучидан катта бўлса, жисмнинг тезланиши юқорига йўналган бўлади.

Кучларнинг катталиги ва йўналиши тезликни эмас, фақат тезланишни белгилаши туфайли $\boldsymbol{F}_{\text{т.Ер.}}>\boldsymbol{F}_{\text{т.к.}}$ да тош қайси томонга ҳаракатланишини *айтиб бўлмайди:* у тезланиш билан пастга ёки секинланиш билан юқорига ҳаракатланиши мумкин. Аниқроғи, агар тезланиш пастга йўналган бўлса, у ҳолда тезлик исталганча: юқорига, пастга ва ҳатто четга йўналган бўлиши мумкин. Муайян пайтдаги тезлик йўналиши умуман тезланиш йўналиши билан боғлиқ бўлмагани ҳолда тезланиш таъсир этувчи кучлар орқали тамомила бир *қийматли аниқланади.*

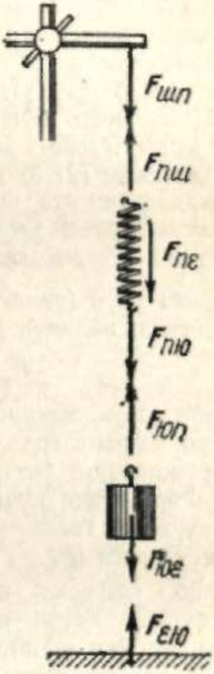
---

[1] Ҳавонинг қаршилик кучи жуда кичиклигидан, уни бу мулоҳазаларда назарга олмаса ҳам бўлади.

Агар тошнинг тезланиши нолга тенг бўлса, демак, тошга таъсир қилувчи кучларнинг йиғиндиси нолга тенгдир: бошқача айтганда, кафтнинг тошга таъсир кучи $F_{т.к.}$ оғирлик кучи $F_{т.Ер}$ га тенг ва қарама-қаршидир. Тош бу шароитда тинчликда қолиши ёки исталган тезлик билан тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланиши мумкин.



43- расм.



44- расм.

2) **Штативда пружинада юк осилибтурибди** (43-расм). Пружина бириктирилган штатив Ерда ҳаракатсиз турган стол билан бир бутун системани ҳосил қилади, деб қараймиз. Шунинг учун учта жисмни: тошни, пружинани ва Ерни (стол ва штатив билан биргаликда) қараймиз. Бу жисмлар орасида ўзаро таъсир мавжуд бўлиб, у шартли равишда 44-расмда кўрсатилган. Бунда учала жисм алоҳида-алоҳида чизилган. Ер томонидан тошга $F_{ю.Ер}$ куч (тошнинг оғирлик кучи), пружинага эса $F_{п.Ер}$ куч (пружинанинг оғирлик кучи) таъсир қилади. Пружинага тош томонидан $F_{п.ю}$ куч, штатив (Ер) томонидан эса $F_{в.ш.}$ куч таъсир этади. Учинчи қонунга кўра, ҳамма вақт қуйидаги тенгликлар бажарилиши лозим:

$$F_{ю.Ер}+F_{Ер\ ю}=0;\ F_{п.ю.}+F_{ю.п}=0;\ F_{п.ш.}+F_{ш.п.}=0, \qquad (21.2)$$

Иккинчи қонунга кўра эса

$$\begin{gathered} F_{\text{ю.Ер}} + F_{\text{ю.п}} = m_{\text{ю}}\, a_{\text{ю}}, \\ F_{\text{п.ш.}} + F_{\text{п.ю.}} + F_{\text{п.Ер.}} = m_{\text{п.}}\; a_{\text{п}}, \\ F_{\text{ш.п.}} + F_{\text{Ер.ю.}} + F_{\text{Ер п.}} = m_{\text{Ер}} a_{\text{Ер}}, \end{gathered} \tag{21.3}$$

бунда $m_{\text{ю}}$, $m_{\text{п}}$, $m_{\text{Ер}}$ мос равишда тош, пружина ва Ер массалари. $a_{\text{ю}}$, $a_{\text{п}}$, $a_{\text{Ер}}$ лар эса уларнинг тезланишлари. Бироқ бизда саноқ системаси Ер билан боғлиқ бўлганидан, тезланиш $a_{\text{Ер}} = 0$[1]. Одатда пружина массаси ёки унинг оғирлиги тошнинг массаси ёки оғирлигига нибатан кичик бўлганидан кўпчилик масалаларда $m_{\text{п}} = 0$ ва $F_{\text{п.Ер}} = F_{\text{Ер п.}} = 0$ дейиш мумкин. У ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодаловчи (21.3) тенгламаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{gathered} F_{\text{ю.Ер.}} + F_{\text{ю.п.}} = m_{\text{ю.}} a_{\text{ю}}, \quad F_{\text{п.ш.}} + F_{\text{п.ю.}} = 0, \\ F_{\text{ш.п.}} + F_{\text{Ер ю.}} = m_{\text{Ер}}\; a_{\text{Ер}}. \end{gathered} \tag{21.4}$$

Пружина учун (унинг массасини назарга олмаслик мумкин бўлгани учунгина) иккинчи қонун асосида ушбуни ёзиш мумкин:

$$F_{\text{п.ш.}} + F_{\text{п.ю.}} = 0. \tag{21.5}$$

(21.5) шарт пружинанинг («массасиз») таранглик кучи ҳамма вақт, ҳар қандай шароитларда, иккала учида бирдай эканлигини билдиради. Пружинанинг битта учига таъсир этувчи куч унинг иккинчи учига таъсир этувчи кучга аниқ тенгдир. Учинчи қонунга кўра бу кучлар пружина томонидан уни чўзувчи жисмларга кўрсатиладиган таъсир кучларига ($F_{\text{ш.п.}}$, $F_{\text{ю.п.}}$) катталик жиҳатидан тенгдир. Шундай қилиб, «вазнсиз» пружина[2] кучни, у ҳаракатланаётибдими, йўқми, бундан қатъи назар, ўзгаришсиз «узатади». Шу сабабли пружинанинг ёки ипнинг таранглиги ҳақида гапирганимизда пружина ёки ипнинг исталган учидан таъсир этувчи кучни назарда тутамиз.

Ер томонидан тошга таъсир этувчи $F_{\text{ю.Ер.}}$ куч (тортишиш кучи) энди пружина томонидан тошга таъсир этувчи $F_{\text{ю.п.}}$ кучга тенг бўлмайди. Бу кучларнинг айирмаси тошнинг тезланишини белгилайди. Агар муайян пайтда $F_{\text{ю.п.}} > F_{\text{ю.Ер.}}$ бўлса, пружинанинг кучи тортишиш кучидан ортиқдир, бироқ бу ҳол тошнинг юқорига ҳаракатини эмас, балки фақат тезланишнинг юқорига йўналганини билдиришини таъкидлаб ўтамиз. Пружина кучи $F_{\text{ю.п.}}$ ва тортишиш кучи $F_{\text{ю.ер.}}$ бир-бирларига тенг эмас (иккинчи қонунга кўра). Бу кучларнинг айирмаси юкнинг тегишли тезланишини таъминлайди.

Юкнинг (пружинанинг ҳам) тинчлик ҳолатида пружина ва юк-

---

[1] *$m_{\text{Ер}}$ жуда катталигидан ($m_{\text{Ер}} \to \infty$) $m_{\text{Ер}}\, a_{\text{Ер}} = 0$ келиб чиқмайди.*

[2] Умуман, ҳар қандай «массасиз» жисм, масалан, бизнинг тажрибалар ипларни шундай ҳисоблаш мумкин.

нинг тезланишлари нолга тенгдир: $\boldsymbol{a}_{\text{ю.}} = \boldsymbol{a}_{\text{п.}} = 0$, у ҳолда (21.3) нинг биринчи иккита тенгламаларида ўнг томонда ноллар туради. Юкка таъсир этувчи $\boldsymbol{F}_{\text{ю.п.}}$ пружина кучи катталик жиҳатидан $\boldsymbol{F}_{\text{ю.Ер.}}$ тортишиш кучига тенгдир, шунингдек, учинчи қонунга кўра эса юкнинг пружинани тортувчи ва биз оғирлик кучи деб атайдиган $\boldsymbol{F}_{\text{п.ю.}}$ кучга тенгдир. Шундай қилиб, тинчлик ҳолатида учта турлича куч: $\boldsymbol{F}_{\text{ю.Ер.}}$ — тортишиш кучи, $\boldsymbol{F}_{\text{ю.п.}}$ —пружинанинг таранглик кучи ва $\boldsymbol{F}_{\text{п.ю.}}$ — юкнинг оғирлик кучи абсолют катталиклари жиҳатидан бирдайдир. Оғирлик кучи ва тортишиш кучи ҳақиқатан тенг, $\boldsymbol{F}_{\text{ю.Ер.}} = \boldsymbol{F}_{\text{п.ю.}}$

Агар пружина оғирлигини (тўғрироғи, оғирлик кучи $\boldsymbol{F}_{\text{п.Ер.}}$ ни) назарга олмаслик мумкин бўлмаса, у ҳолда статикада ҳам пружинанинг турли учидаги таранглик кучлари турлича бўлишини қайд қилиб ўтамиз. (21.3) нинг иккинчи тенгламасидан, $\boldsymbol{a}_{п} = 0$ бўлганда,

$$\boldsymbol{F}_{\text{п.ш.}} + \boldsymbol{F}_{\text{п.ю.}} = -\boldsymbol{F}_{\text{п.Ер.}}. \tag{21.6}$$

Пружинанинг юқорисидаги $\boldsymbol{F}_{\text{п.ш.}}$ таранглик кучи пружинанинг пастидаги $\boldsymbol{F}_{\text{п.ш.}}$ таранглик кучидан пружинанинг $\boldsymbol{F}_{\text{п.Ер.}}$ тортишиш кучи миқдорича ортиқ бўлади.

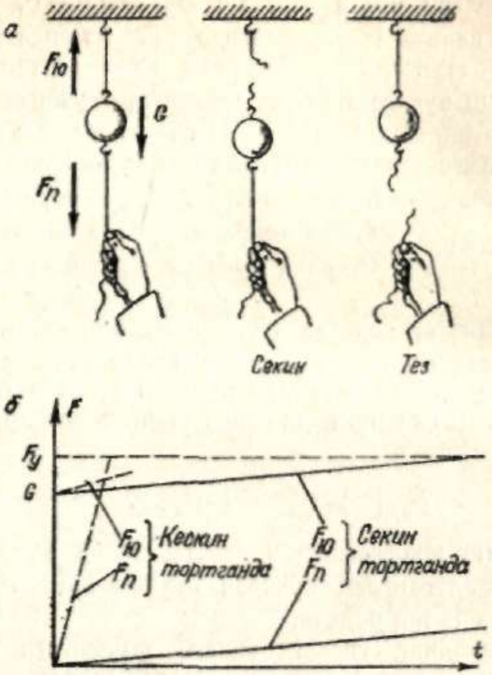
Агар пружинанинг оғирлиги юкнинг оғирлигига нисбатан жуда кичик бўлса, $\boldsymbol{F}_{\text{п.Ер.}}$ кучни назарга олмаса бўлади ($\boldsymbol{F}_{\text{п.Ер.}} = 0$). У ҳолда статик шароитларда (тош тинч турганда) биз қараган барча кучлар катталик жиҳатидан бир-бирига тенг бўлади. Ҳамма вақт ўринли бўладиган (21.3) тенгликлардан ташқари, (21.3) тенгламалардан ҳосил бўладиган тенгламалар ҳам ўринли бўлади.

$$\boldsymbol{F}_{\text{ю.Ер.}} + \boldsymbol{F}_{\text{ю.п.}} = 0,\ \boldsymbol{F}_{\text{п.ш.}} + \boldsymbol{F}_{\text{п.ю.}} = 0,\ \boldsymbol{F}_{\text{ш.п.}} + \boldsymbol{F}_{\text{Ер.ю.}} = 0. \tag{21.7}$$

Фақат шу ҳолдагина барча олтита куч, Ер, тош, пружина ўртасидаги ўзаро таъсир кучлари катталиклари жиҳатидан тенгдир; улардан учтаси, $\boldsymbol{F}_{\text{ю.Ер.}}$, $\boldsymbol{F}_{\text{ш.п.}}$, $\boldsymbol{F}_{\text{п.ю.}}$ лар пастга, қолганлари юқорига йўналган.

Турли жисмларга қўйилган кучларнинг тенглиги учинчи қонунга кўра, ҳамма вақт ўринли бўлишини яна бир бор таъкидлаб ўтамиз. Битта жисмга қўйилган кучлар йиғиндисининг нолга тенг бўлиши фақат тинч ҳолатдаги ёки текис ва тўғри чизиқли ҳаракат ҳолатидаги жисмлар учунгина (иккинчи қонунга кўра) ўринлидир.

Битта жисмга қўйилган кучларнинг тақрибий тенглиги кучлар таъсир қилаётган жисмнинг массасини назарга олмаса бўладиган, тўғрироғи, массанинг шу жисм тезланишига кўпайтмаси таъсир қилувчи ҳар бир кучнинг катталигига нисбатан жуда кичик бўлган хусусий ҳолдагина мавжуд бўлади. Масалан, аравачанинг тезланиши билан боғлиқ тажрибаларда (39-расмга қ.) биз динамометр пружинаси-



45- расм.

нинг массасини назарга олмас эдик ва шу сабабли динамометрнинг кўрсатишлари статикадагидек деб ҳисоблар эдик.

Катта тезланишлар билан иш кўриладиган ҳоллардаги зарбаларда кичик массани назарга олмаслик ҳамма вақт ҳам мумкин бўлавермайди.

3. Жисм инертлигининг кучни узатишга таъсири. Ипга m массали юк осилган бўлиб, унга пастдан йўғонлиги юқоридаги ипнинг йўғонлиги билан бирдай бўлган ип боғлаб қўйилган (45-*а* расм). Агар биз оҳиста, аста-секин пастки ипни торта бошласак, у ҳолда юқоридаги ип узилади. Агар пастки ипдан кескинлик билан тортсак, пасткини жуда осон узамиз.

Равшанки, пастки ипнинг $F_{\text{п.}}$ таранглик кучи (ипнинг юкка таъсир кучи) ва юқориги ипнинг $F_{\text{ю.}}$ таранглик кучи юкнинг G тортишиш кучи билан биргаликда унинг массаси m нинг юк тезланиши a га кўпайтмасига тенг:

$$F_{\text{п.}} + F_{\text{ю.}} + G = ma. \qquad (21.8)$$

$F_{\text{ю.}}$ куч юқорига, қолганлари пастга йўналган. Пастки ипни тортаётганда ҳам a тезланиш пастга йўналган. Демак, (21. 8) тенгликни шундай ёзиш мумкин:

$$F_{\text{п.}} - F_{\text{ю.}} + G = ma.$$

ёки

$$F_{\text{п.}} - F_{\text{ю.}} = ma - G. \tag{21.9}$$

Ипларни вазнсиз деб ҳисоблаганимиз учун, қолган кучларни бу ерда ёзмадик. Ипни секин тортганимизда ҳодиса «деярли статик» бўлади, тошнинг a тезланиши арзимас кичик ва (21.9) тенглик бу ҳолда қуйидагига келади:

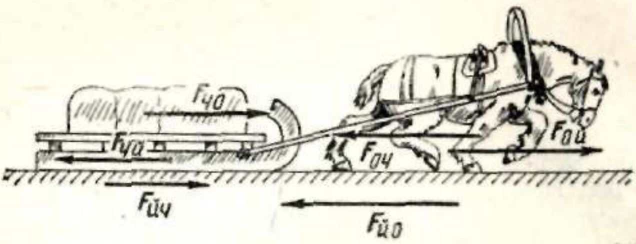
$$F_{\text{ю.}} - F_{\text{п.}} = G. \tag{21.10}$$

Юқориги ипнинг $F_{\text{ю.}}$ таранглик кучи пастки ипнинг $F_{\text{п}}$ таранглик кучидан ҳамма вақт G миқдорда ортиқдир.

Пастки ипни кескин тортиш пайтида манзара тамомила бошқача бўлади. Бу ҳолда юқориги ип юкка пастки ипнинг таранглаииш кучига тенг бўлган таранглик кучи билан таъсир қилиши учун жуда тез чўзилиши лозим. Шу сабабли кескин тортиш пайтида юкка пастдан қанча катта $F_{\text{п.}}$ куч таъсир қилса, у пастга шунча каттароқ бирор a тезланишга эга бўлади. Бу ҳолда пастки ипнинг $F_{\text{п.}}$ таранглик кучи юқориги ипнинг $F_{\text{ю.}}$ таранглигидан ортиқ бўлиб қолиши мумкин. (21.9) тенгликдан кўринишича, агар $ma > G$ бўлса, у ҳолда $F_{\text{п.}} > F_{\text{ю.}}$. Агар иплар тарангликларининг айирмаси ва тортиш кучи юкка оғирлик кучи тезланишидан каттароқ a тезланиш берса, у ҳолда пастки ипнинг таранглиги юқоригиникидан ортиқ бўлади.

Юк тезлаштириладиган вақт етарлича кичик бўлганидан, юк массасининг кўчиши жуда кичкина, тезланиши бўлса, жуда катта эканлигини айтиб ўтамиз.

Секин тортишда ва кескин тортишда кучнинг вақт давомида ўзгариш графигини қараш фойдалидир (45-*б* расм). Ипни секин тортишда иккала куч тахминан бирдай ўса боради, бироқ юқориги ипнинг $F_{\text{ю}}$ таранглик кучи $F_{\text{п.}}$ дан ҳамма вақт юк оғирлик кучи миқдорида ортиқдир. Пастки ипнинг таранглик кучи тез ўсганда, у ип узиладиган $F_{\text{у}}$ қийматга тез эришади, ҳолбуки юқориги ипнинг таранглик кучи нисбатан секин ўсади. Бу тажрибаларни тушунтиришда юқориги ипнинг чўзилиши муҳим аҳамиятга эга эканлигини айтиб ўтамиз: юқориги ипнинг таранглик кучи ортиши учун оз бўлса-да, унинг узунлигининг ортиши муҳимдир. Кескин тортганда юқориги ипнинг деформацияси ўсаётганда, пастки ипнинг таранглиги чегаравий қийматга етади; юкнинг инерцияси жисмнинг тез кўчишига йўл қўймайди, аниқроғи, бунинг учун пастки ип чидаш беролмайдиган катта куч талаб қилинади. Таҳлилдан аёнки, баён қилинган тажрибалар юқориги ип етарлича узун бўлганида ҳамма вақт муваффақиятли чиқади.



46- расм.

4) **От ва чана.** Учинчи қонунни ўрганишда одатда чанани тортиб бораётган от мисолини келтирадилар ҳамда шундай савол қўядилар: от чанага қандай куч билан таъсир қилса, чана ҳам отга шундай таъсир қилади; бироқ нима учун от чанани тортади-ю, аксинча эмас?

Текширилган мисоллардан равшанки, учинчи қонун жисмнинг тезланиши ҳақидаги масалани ечишга ёрдам беролмайди. Ушбу ҳолда гап турли жисмларга таъсир этувчи кучларнинг тенглиги устида бориб, ундан от ва чананинг тезланишига тааллуқли хулосалар чиқариб бўлмайди. От ва чанага таъсир қилаётган қолган кучларни билгандан кейингина жисмларнинг (от ва чананинг) тезланишларини аниқлаш мумкин.

46- расмда ушбу ҳолда барча учта жисмга (чанага, отга, йўлга) таъсир этаётган кучлар кўрсатилган; улар биринчи мисолдагидек чизиб кўрсатилган. $F_{\text{о.ч.}}$ ва $F_{\text{ч.о.}}$ кучлар от ва чананиг ўзаро таъсирини ($F_{\text{о.ч.}} = F_{\text{ч.о.}}$), $F_{\text{й.ч.}}$ ва $F_{\text{ч.й.}}$ кучлар чана ва йўл орасидаги ишқаланиш кучларини ($F_{\text{й.ч.}} = F_{\text{ч.й.}}$), $F_{\text{й.о.}}$ ва $F_{\text{о.й.}}$ кучлар от ва йўл орасидаги тутиниш кучларини ($F_{\text{й.о.}} = F_{\text{о.й.}}$) характерлайди. Ҳар бир тенглик ҳамма вақт қарама-қарши йўналган ва ўзаро таъсирлашаётган турли жисмларга қўйилган (учинчи қонунга кўра) тенг кучларни тасвирлайди. Агар $F_{\text{о.й.}} > F_{\text{ч.й.}}$ бўлса, яъни отга йўл томонидан қўйилган куч ($F_{\text{о.й.}}$) чананинг ишқаланиш кучи ($F_{\text{ч.й.}}$) дан катта бўлса, у ҳолда чана ва от (иккинчи қонунга кўра) олдинга йўналган тезланишга эга бўлади. $F_{\text{ч.о.}}$ ва $F_{\text{о.ч.}}$ кучлар ҳеч нарсани ўзгарта олмайди. Агар $F_{\text{о.й}} < F_{\text{ч.й.}}$ бўлса, у ҳолда от ва чана орқага йўналган тезланишга эга бўлади. Текис ҳаракатдагина 46 - расмда кўрсатилган барча кучлар катталиги бўйича тенгдир.

Қайси кучлар учинчи қонунга кўра, қайси кучлар иккинчи қонунга кўра тенглигини топиш ўқувчининг ўзига ҳавола қилинади.

Бу барча мисоллар динамиканинг учинчи қонуни аввало бирор жисмнинг ҳаракат ҳолатининг ўзгариши сабабчиси ўзида биринчи жисмнинг тазйиқини сезувчи лоақал битта бошқа жисмнинг албатта бўлишлиги фактини акс эттиради. Бу ҳол бирор жисмнинг ҳаракати унинг қандайдир бошқа жисм билан ўзаро таъсири натижасида вужудга келишини ёки тўхташини билдиради; ҳаракат дарҳақиқат, бир жисмдан бошқасига *узатилади.*

22-§. Жисмнинг берилган кучлар таъсирида ҳаракати

Шундай ҳаракатнинг энг содда мисоли жисмнинг «эркин тушиши», жисмнинг тортишиш майдонидаги ҳаракатидир. *Ҳар бир нуқтасида шу нуқтага жойлаштирилган заррага (жисмга) муайян куч таъсир қиладиган фазо куч майдони дейилади.*

Умуман, вектор кўринишидаги физикавий майдон деб, ҳар бир нуқтасига маълум вектор шаклдаги физикавий катталик мос келадиган фазо соҳасини айтилади. Дарҳақиқат, масалан, электрланган ҳаракатсиз жисмлар атрофида $\boldsymbol{E}$ кучланганлик векторининг доимий электр майдони ҳосил бўлади. Фазонинг ҳар бир нуқтасига $\boldsymbol{E}$ вектор мос келиб, у фазонинг шу нуқтасида жойлашган e нуқтавий зарядга таъсир этувчи кучни белгилайди

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}. \tag{22.1}$$

Ўзгармас токли қўзғалмас ўтказгичлар атрофида $\boldsymbol{B}$ индукция векторининг магнит майдони вужудга келиб, у индукция вектори $\boldsymbol{B}$ катталикка эга бўладиган фазо соҳасида $\boldsymbol{v}$ тезлик билан ҳаракатланаётган e нуқтавий электр зарядга таъсир этувчи кучни белгилайди:

$$\boldsymbol{F} = e[\boldsymbol{vB}]. \tag{22.2}$$

Агар катталикларни СИ системаси бирликларида ўлчасак

$$\left([e] = \text{А}\cdot\text{сек};\ [E] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{сек}^3};\ [B] = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{сек}}\right),$$

у ҳолда куч ньютонларда ўлчанишини эслатиб ўтамиз.

Зарядланган зарра бир жинсли E электр майдонда ҳаракатланганда, бир жинсли майдоннинг барча нуқталарида $\boldsymbol{E}$ вектор бирдай бўлгани сабабли, унга доимий, барча нуқталарда бирдай $\boldsymbol{F}$ куч таъсир қилади. Демак, ҳаракат доимий тезланиш билан юз беради.

Жисмнинг ер сирти яқинида оғирлик майдонидаги ҳаракати юқоридагига ўхшаш содир бўлади. Агар фазо соҳаси ўлчовлари Ер радиусига нисбатан кичик бўлса, оғирлик майдонини бир жинсли дейиш мумкин. Бу ҳолда жисмнинг ҳаракати доимий $\boldsymbol{g}$ тезланиш ($g = 9{,}81$ м/сек^2) билан юз беради. Бир жинсли доимий электр майдонда зарядланган зарранинг ҳаракати доимий тезланиш билан юз беради:

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m}. \tag{22.3}$$

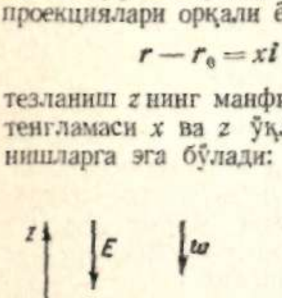
Бундай ҳаракатларни 10- § да қараган эдик.

У ҳолда ҳам, бу ҳолда ҳам зарранинг ҳаракат траекторияси зарранинг $t = 0$ моментдаги ҳолати нуқтасидан ва шу нуқтадан ўтказилган $\boldsymbol{w}$ ва $\boldsymbol{v}_0$ векторлардан ўтувчи текисликда жойлашган. Траектория *параболадан* иборат. Ҳақиқатан ҳам, вектор кўринишидаги (10.9) ҳаракат тенгламасини олайлик ҳамда координаталар боши $\boldsymbol{r}_0$ да ва ҳаракат (x, z) текисликда содир бўлаётир деб олиб, уни проекциялари орқали ёзайлик. У ҳолда

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v}_0 = v_x\boldsymbol{i} + v_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{w} = -w\boldsymbol{k},$$

тезланиш z нинг манфий қийматлари томон йўналган бўлади. Ҳаракат тенгламаси x ва z ўқларга проекциялари бўйича қуйидаги кўринишларга эга бўлади:

$$x = v_x t, \quad z = v_z t - \frac{1}{2} wt^2. \tag{22.4}$$



47- расм.

Бу координата бошидан $t = 0$ да ўтувчи (x, z) текисликдаги парабола тенгламасидир. Иккита тенгламадан t вақтни чиқариб юборсак, x ва z координаталарда ҳаракат троекториясини топамиз (47- расм):

$$z = \frac{v_z}{v_x} x - \frac{w}{2v_x} x^2. \tag{22.5}$$

Бу чўққиси x_1, z_1 нуқтада жойлашган парабола тенгламасидир. Зарра энг юқори нуқтага, парабола чўққисига эришадиган t_1 вақт $\frac{dz}{dt} = 0$ (t_1 пайтда) шартдан топилади ёки

$$\frac{dz}{dt} = v_z - wt_1 = 0, \quad t_1 = \frac{v_x}{w}.$$

t_1 ни (22.4) тенгламага қўйиб, парабола чўққисинининг координаталарини топамиз:

$$x_1 = \frac{v_x v_z}{w}, \quad z_1 = \frac{v_z^2}{2w}.$$

Пастга тушаётганда зарра x ўқни $2x_1 = 2v_x t_1 = \frac{2v_x v_z}{w}$ масофада («узоқликда») кесиб ўтади. Берилган v_0 катталикда максимал узоқлик $v_x = v_z = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0$ ҳолда эришилишини ва у v_0^2/w га тенглигини кўрсатиш мумкин; максимал баландлик $v_x = 0$ ва $v_z = v_0$ да $v_0^2/2w$ га тенгдир.

Зарядланган зарранинг бир жинсли магнит майдонда ҳаракати. Электр майдон ҳаракатсиз зарядга қандай таъсир қилса, ҳаракатдаги зарядга ҳам шундай таъсир қилади: куч заряднинг ҳаракат тезлигига боғлиқ бўлмай, балки унинг ҳолатигагина боғлиқ. Куч ҳамма вақт $\boldsymbol{E}$ майдон вектори бўйича йўналгандир.

Зарядланган зарра магнит майдонда ҳаракатланаётган ҳолда, аҳвол тамомила бошқача бўлади. Магнит майдонда заррага куч фақат унинг тезлиги $\boldsymbol{v} \neq 0$ бўлгандагина таъсир қилиб, ҳаракатсиз заррага эса таъсир қилмайди.

(22.2) формулага кўра, F куч, заряд e нинг $\boldsymbol{v}$ тезлик билан $\boldsymbol{B}$ магнит индукция векторининг вектор кўпайтмасига кўпайтирилганига тенг. Демак, $\boldsymbol{F}$ куч $\boldsymbol{v}$ ва $\boldsymbol{B}$ векторлардан ўтувчи текисликка нормал йўналган бўлиб, ушбуга тенг:

$$F = evB \sin \alpha,$$

бунда α катталик $\boldsymbol{v}$ ва $\boldsymbol{B}$ векторлар орасидаги бурчакдир. $\boldsymbol{F}$ кучнинг йўналиши *ўнг винт қоидасига* кўра аниқланади: агар ўнг винтни $\boldsymbol{v}$ ва $\boldsymbol{B}$ векторлар текислигида жойлашган гайкада $\boldsymbol{v}$ вектордан $\boldsymbol{B}$ вектор томон улар орасидаги кичик бурчак йўналишида бурасак, у ҳолда винт $\boldsymbol{F}$ куч йўналишида силжийди (14-расмга қаранг).

Демак, агар $\boldsymbol{v}$ тезлик йўналиши жиҳатидан $\boldsymbol{B}$ векторга мос тушса, у ҳолда $\boldsymbol{F} = 0$, майдон бу ҳолда ҳаракатланаётган заррага ҳам таъсир қилмайди. $\boldsymbol{F}$ куч ҳамма вақт $\boldsymbol{v}$ тезликка нормал бўлганидан, унинг таъсири тезлик катталиги (модули) v ни ўзгартирмайди. Тезлик вектори $\boldsymbol{F}$ таъсирида айлана бўйлаб текис ҳаракат ҳолидагидек, фақат бурилади.

Шунинг учун ҳам зарранинг $\boldsymbol{B}$ индукцияли бир жинсли магнит майдондаги ҳаракатини икки қисмдан иборат деб қараш мумкин. Зарранинг $\boldsymbol{v}$ тезлигини икки ташкил этувчига ажратамиз.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\parallel} + \boldsymbol{v}_{\perp},$$

бунда $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ магнит индукция вектори $\boldsymbol{B}$ га параллел ва $\boldsymbol{v}_{\perp}$ унга нормалдир; у ҳолда $[v_{\parallel}, \boldsymbol{B}] = 0$ бўлганидан

$$\boldsymbol{F} = e[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}] = e[(\boldsymbol{v}_{\parallel} + \boldsymbol{v}_{\perp})\boldsymbol{B}] = e[\boldsymbol{v}_{\perp}\boldsymbol{B}]. \tag{22.6}$$

$\boldsymbol{F}/m$ тезланиш ҳамма вақт $\boldsymbol{B}$ га нормаллиги туфайли зарра тезлигининг $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ ташкил этувчиси вақт ўтиши билан ўзгармайди, ҳамда зарра $\boldsymbol{B}$ йўналишида доимий $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ тезликда ҳаракатланади. Иккинчи томондан, тезликнинг B га нормал текисликдаги $\boldsymbol{v}_{\perp}$ ташкил этувчиси шундай ўзгарадики, (22.6) га кўра $\frac{e[\boldsymbol{v}_{\perp}\boldsymbol{B}]}{m}$ га тенг бўлган тезланиш ҳамма вақт $\boldsymbol{v}_{\perp}$ га тикдир ва ушбу катталикка эга

$$\frac{e}{m} v_\perp B. \tag{22.7}$$

Демак, $\boldsymbol{v}_\perp$ нинг модули ўзгармайди. Зарра шундай ҳаракат қиладики, унинг B га нормал бўлган текисликка проекцияси R радиусли айлана бўйлаб $\boldsymbol{v}_\perp$ чизиқли тезлик билан текис ҳаракатланади.

Айлананинг R радиуси марказга интилма тезланишнинг (22.7) га тенглиги шартидан топилади:

$$\frac{v_\perp^2}{R} = \frac{e}{m} v_\perp B;$$

бундан

$$R = \frac{m v_\perp}{eB}. \tag{22.8}$$

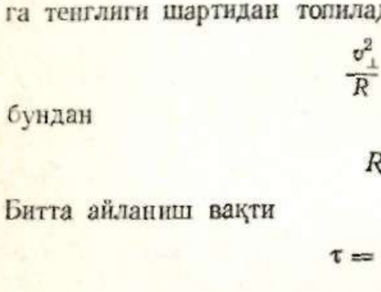
Битта айланиш вақти

$$\tau = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{eB}. \tag{22.9}$$

У $v_\perp$ га боғлиқ бўлмай фақат майдон катталиги B ҳамда зарранинг e/m нисбати билан аниқланади.

Шу сабабли натижавий ҳаракат иккита ҳаракатдан: B га параллел чизиқ бўйича $\boldsymbol{v}_\parallel$ тезлик билан текис ҳаракатдан ва R радиусли айлана бўйлаб катталиги доимий $v_\perp$ тезликли текис ҳаракатдан ташкил топади. Натижавий ҳаракат спиралсимон бўлади (48-расм).

Ҳаракат вақтида тезликнинг $\boldsymbol{v}_\parallel$ ташкил этувчиси катталиги бўйича ҳам, йўналиши бўйича ҳам ўзгармайди, $\boldsymbol{v}_\perp$ эса катталиги ўзгармагани ҳолда йўналишини доимо ўзгартириб туради.



48-расм.

Зарранинг ҳаракат тенгламасини қуйидаги йўл билан топиш мумкин. Айтайлик, $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{i}$, $B_y = B_z = 0$ бўлсин, майдон x ўқ бўйича йўналган; у ҳолда

$$\boldsymbol{v}_\parallel = v_x \boldsymbol{i}, \ \boldsymbol{v}_\perp = v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}.$$

v_x ва $v_\perp = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ катталиклар доимий бўлиб, улар $\boldsymbol{v}_0$ тезлик векторининг бошланғич қиймати билан белгиланади

Агар $\boldsymbol{v}_0$ тезликли зарра $t = 0$ пайтда координата бошида турган ва

$$\boldsymbol{v}_0 = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$$

бўлса, у ҳолда x координата

$$x = v_x t \tag{22.10}$$

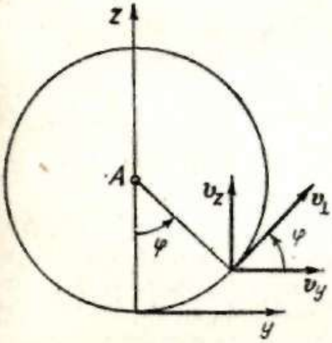
қонун бўйича ўзгаради. Зарранинг (y, z) текисликка проекцияси R радиусли айлана бўйича $v_\perp = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ тезлик билан бўладиган ҳаракатдан иборатдир. Зарранинг $t = 0$ даги $\mathbf{v}_\perp$ тезлиги

$$\mathbf{v}_\perp = v_y \mathbf{j},$$

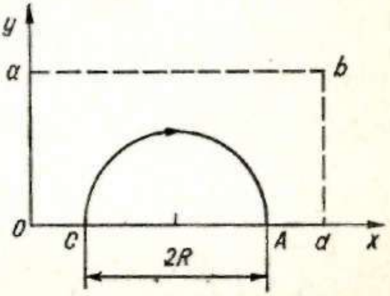
яъни бошланғич тезликнинг нормал ташкил этувчиси y ўқ бўйича йўналган; у ҳолда $\mathbf{v}_\perp$ тезликнинг y ва z ўққа проекциялари қиймати, 49-расмдан кўринишича, қуйидаги қонун бўйича ўзгарадилар:

$$v_y = v_\perp \cos \frac{v_\perp}{R} t, \ v_z = v_\perp \sin \frac{v_\perp}{R} t. \qquad (22.11)$$

$\varphi = \frac{v_\perp}{R} t$ катталик A марказдан зарранинг (y, z) текисликка проекциясига ўтказилган радиус-векторнинг t вақт ичида бурилиш бурчагидан иборат. Бу ерда айланиш бурчак тезлиги тушунчасини киритиш мумкин; у таърифга кўра қуйидагига тенг:



49- расм.



50- расм.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_\perp}{R}. \qquad (22.12)$$

Энди (22.11) ва (22.12) ларни ҳисобга олиб, зарранинг y ва z координаталарининг ўзгаришларини ҳам ёзиш мумкин:

$$y(t) = \int_0^t v_y \, dt_1 = v_\perp \int_0^t \cos \omega t_1 dt_1 = R \sin \omega t,$$
$$(22.13)$$
$$z(t) = \int_0^t v_z \, dt_1 = v_\perp \int_0^t \sin \omega t_1 dt_1 = R(1 - \cos \omega t).$$

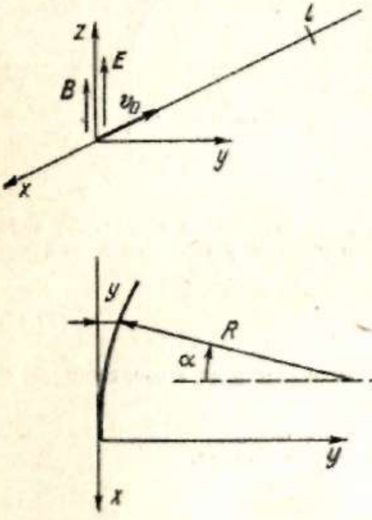
(22.10) ва (22.13) тенгликлар зарядланган зарранинг координата бошидан $\mathbf{v}_0 = v_x \mathbf{i} + v_\perp \mathbf{j}$ бошланғич тезлик билан $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$ бир жинсли магнит майдонидаги ҳаракатини ифодалайди.

Айланиш радиуси катталиги ва бошланғич тезлик v_0 зарядланган зарранинг e/m нисбатини белгилашларини таъкидлаб ўтамиз. e/m ни аниқлаш учун мўлжалланган асбоблар шу муносабатга асосланган. Энг содда қурилмалардан бирининг схемасини қуйидаги кўринишда тасаввур қилиш мумкин.

Айтайлик, бир жинсли майдон z ўқ бўйича йўналган ва координата боши яқинида қандайдир $Oabd$ соҳани эгаллаган бўлсин (50-расм). Шу соҳага C нуқтада зарядланган зарра y ўққа параллел йўналган v_0 тезлик билан учиб киради. B майдон таъсирида R радиусли ярим айлана чизиб, зарра майдон соҳасидан A нуқтада чиқади. $CA=2R$ масофани ўлчаб ва v_0 катталигини билган ҳолда, (22.8) дан ушбуни топилади:

$$\frac{e}{m}=\frac{v_0}{BR}\left[\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}\right]. \qquad (22.14)$$

Зарядланган зарранинг ҳар бир нуқтада E ва B векторларининг йўналишлари мос бўлган бир жинсли электр ва магнит майдонлардаги ҳаракати. Майдоннинг ҳар бир нуқтасида E ва B векторлар йўналиши бирдай бўлган ҳолни кўрамиз. E га тик бўлган v_0 тезлик билан майдонга учиб кирувчи зарралар E таъсирида — майдон вектори йўналишида, B таъсирида эса майдон векторига нормал текисликда оғади. Майдоннинг v_0 бўйича l га тенг участкаси зарранинг B индукцияли магнит майдондаги траекториясининг бурилиш радиусига нисбатан жуда кичик ёки $l \ll R=\frac{mv_0}{eB}$ деб қараб, бу оғишларни аниқлаймиз.



51-расм.

Зарралар координаталар бошида майдон соҳасига x ўқнинг манфий йўналишида учиб кираётган бўлсин, майдоннинг E ва B векторлари эса z ўқи бўйича йўналган бўлсин. x ўққа нормал текисликда координаталар боши O дан l масофада зарраларнинг y ва z координаталари қандай бўлади?

(22.3) ва (22.4) ёрдамида ва $t=l/v_0$ эканлигини назарга олиб зарранинг E электр майдон таъсирида z ўқ бўйича оғишини ҳисоблайлик:

$$z=\frac{1}{2}\ \frac{eE}{m}\frac{l^2}{v_0^2}. \qquad (22.15)$$

B магнит майдон таъсирида y ўқ бўйича оғишни тақрибан ҳисоблаймиз ($l \ll R$) (51-расм):

$$y=R(1-\cos\alpha).$$

Бурчак α ни етарлича кичик деб қараб, тақрибан шундай ёзиш мумкин:

$$R\alpha \approx l, \; 1-\cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}.$$

Шунинг учун (22.8) ни назарга олсак, қуйидагини топамиз.

$$y \approx \frac{l^2}{2R} = \frac{eBl^2}{2mv_0}. \qquad (22.16)$$

(22.15) ва (22.16) лардан кўринишича,

$$\frac{y}{z} = \frac{B}{E} v_0 = \operatorname{ctg}\beta \qquad (22.17)$$

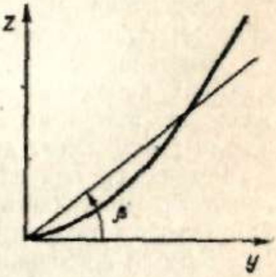
муносабатдан E ва B ларнинг тайинли қийматларидан v_0 тезликни аниқлаш учун фойдаланиш мумкин

Агар (22. 15) ва (22.16) тенгламалардан зарраларнинг тезлигини йўқотсак, у ҳолда

$$y^2 = \frac{eB^2l^2}{2mE} z \qquad (22.18)$$

ифода, яъни парабола тенгламаси ҳосил бўлади.

v_0 тезликлари ҳар хил, e/m нисбати бирдай бўлган зарралар битта параболада жойлашади (52- расм). Иккинчи томондан, (22.17) дан кўринишича, $z = y\operatorname{tg}\beta$ тўғри чизиқда ётувчи нуқталар ҳар қандай зарралар учун $v_0 = \frac{E}{B}\operatorname{ctg}\beta$ га тенг бўлган битта тезликка тааллуқлидир.



52- расм.

Бу қонуниятлар зарядлар учун e/m нисбатни ўлчашга имкон берувчи қурилмалар учун асос қилиб олинган эди. Шу принципда қурилган асбоблар воситасида биринчи марта химиявий элементларнинг изотоплари ошкор қилинди. Жуда тез зарралар учун (22.18) парабола қонунидан четланишлар ҳаракат тезлигининг ўзгариши билан массанинг релятивистик ўзгаришини билдиради.

23-§. Жисмнинг эрксиз ҳаракати

Жисмнинг траекторияси ва тезлигига олдиндан ҳеч қандай чеклашлар қўйилмаган ҳолида муайян кучлар таъсиридаги ҳаракатини *эркин* ҳаракат дейилади. Эркин ҳаракат берилган бошланғич тезлик билан муайян ҳолатдан бошланади.

Механиканинг бошқа масалаларида биз жисмнинг траекториясига олдиндан муайян чеклашлар[1] қўйилганида юз берадиган *эрксиз* ҳаракатларни учратамиз. Масалан, жисмнинг қия текисликдан сирпаниб тушиши, вагоннинг рельслар бўйича ҳаракати, ипга осил-

---

[1] Чеклашлар жисм тезлигига ҳам қўйилиши мумкин.

ган шарчанинг айлана бўйлаб ҳаракати, шарчанинг горизонтал текисликда думаланиши, ўзаро ип билан боғланган иккита жисмнинг ҳаракати — буларнинг ҳаммаси эрксиз ҳаракатлардир. Қия текисликда сирпанаётган жисм ўз ҳаракати вақтида албатта шу текисликда қолаверади, шар ҳам горизонтал текисликда қолаверади ва ҳоказо.

Жисмнинг эрксиз ҳаракатига, унга таъсир қилаётган кучлар катталигидан қатъи назар, механикада *боғланишлар* дейилувчи муайян шартлар қўйилган бўлади. Қандайдир жисмнинг ҳаракатига қўйилган боғланишлар «деформацияланмайдиган» жисмлар томонидан, аксарият шундай жисмларнинг сиртлари томонидан юзага келтирилади. Бир жисмларнинг бошқа жисмлар сиртида ҳаракатида боғланишни белгиловчи жисмлар деформацияланса-да, бу деформациялар шунчалик кичикки, уларни назарга олмаслик ва ҳаракат траекториясини муайян маънода берилган, таъсир қилаётган кучнинг катталигига боғлиқ эмас деб ҳисоблаш мумкин.

Жисмнинг эрксиз ҳаракатида унга ташқи (олдиндан берилган, маълум) кучлардан ташқари яна боғланишни юзага келтирувчи жисмлар томонидан ҳам кучлар таъсир қилади; бу кучларни *боғланиш реакциялари* дейилади.

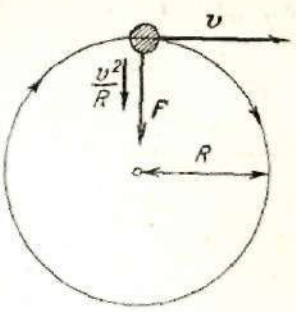
Реакциялар олдиндан маълум бўлмагани туфайли жисмнинг боғланишлар мавжудлигидаги ҳаракатига оид масалани жисмнинг эркин ҳаракати ҳақидаги масаладан бошқача йўллар билан ечилади. Шу сабабли жисмнинг ҳаракат тенгламаларини тузишда маълум, берилган кучлардан ташқари, номаълум боғланиш реакцияларини ҳам ҳисобга олинади. Сўнгра масала шартларидан, масалан, траекториянинг маълум шакли асосида, номаълум реакцияларни ҳам, жисм тезланишини ҳам аниқлашга ёрдам берувчи қўшимча тенгламалар топилади.

Динамиканинг барча масалаларини ечиш йўли содда: номаълум катталиклар белгиланади, динамиканинг иккинчи ва учинчи қонунларидан фойдаланиб, ҳаракат тенгламалари тузилади ҳамда шу пайтда ҳаракатга боғланишлар томонидан қўйиладиган шартлар ҳисобга олинади. Шундай тарзда ҳамма вақт номаълум катталикларни аниқлаш учун етарли миқдорда мустақил тенгламалар оламиз. Бунинг қандай амалга оширилишини ҳаммадан яхшиси мисолларда кўриш мумкин. Биз қуйида аста-секин соддаларидан мураккаброқларига ўта бориб, эрксиз ҳаракатнинг қатор мисолларини қараб чиқамиз. Қуйидаги ҳолларни қарайлик.

1) Жисмнинг горизонтал текисликда айлана бўйлаб ҳаракати. Ипга боғланган шарча айлана бўйлаб ҳаракатланади (53-расм). Ипнинг шарчага F таъсир кучи (боғланиш реакцияси) айлана бўйлаб ҳаракатланаётган шарчанинг v тезлиги абсолют катталигига боғлиқ.

Шарчанинг ҳаракатини кузатишда одатда куч катталиги F номаълум бўлиб, фақат v тезлик ва R радиус маълум бўлади.

Бундан шарчанинг w тезланишини топиш мумкин. Маълумки (9-§), марказга интилма тезланиш $\frac{v^2}{R}$ га тенг. Шу сабабли, агар ип узилиб кетмаган бўлса, у шарчага $\frac{mv^2}{R}$ га тенг бўлган F куч билан таъсир қилади. Боғланиш реакцияси кучи $\boldsymbol{F}$ ҳаракат траекторияси шаклига (R), ҳаракатланаётган жисм массасига (m) ва тезликка (v) боғлиқдир. Боғланиш реакцияси кучи (ушбу ҳолда ипнинг таранглик кучи) шарчага марказга интилма тезланиш беради.



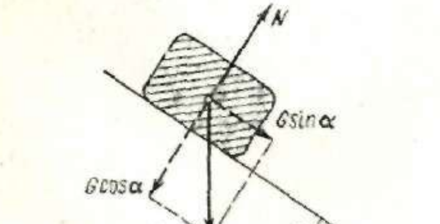
53- расм.

Баъзида *боғланиш реакцияси* катталиги жисмнинг ҳаракат характери билан тамомила боғланмаган бўлса-да, ҳаракат вақтида жисмларнинг ўзаро куч таъсирини англаб олиш учун у муҳим бўлади. Масалан, жисмнинг горизонтал текислик бўйича текисликка ишқаланишсиз сирпанишида боғланиш реакцияси кучи ҳамма вақт *текисликка тик йўналганидан, жисмнинг мумкин бўлган* кўчишларига нормаллигидан, у жисмнинг тезланиши билан ҳам, тезлиги билан ҳам боғланган эмас. Бироқ оғирлик кучи ва бошқа кучларнинг текисликка нормал ташкил этувчилари боғланиш реакцияси кучи билан мувозанатлашади.

Жисмнинг қия текислик бўйича текисликка ишқаланишсиз сирпаниб тушишида (54-расм) ҳам аҳвол шундай бўлади. Агар жисм билан текислик орасида ишқаланиш бўлмаса, жисм ва текисликнинг ўзаро таъсир кучлари текисликка нормалдир: боғланиш реакцияси боғланиш текислигига нормалдир.

Боғланиш реакцияси жисмнинг кўчишига ҳамма вақт нормал бўладиган боғланишларни *идеал боғланишлар* дейилади.

2) Жисмнинг идеал қия текислик бўйича ҳаракати. Муайян пайтда қия текисликда турган жисмга қандай кучлар таъсир қилади? — Оғирлик кучи $\boldsymbol{G}$ ва қия текисликнинг реакцияси $\boldsymbol{N}$. Ишқаланиш кучи йўқлиги сабабли (текислик идеал) $\boldsymbol{N}$ реакция текисликка нормалдир. Иккала куч жисмга қўйилган, фақат шу иккала куч таъсиридагина жисм қия текислик бўйича ҳаракат қилади. Жисм ҳаракат қилаётиб, ҳамма вақт қия текисликка тегиб турадиган ҳолгина қаралади. Шу сабабли барча кучларнинг сирпаниш текислигига тик йўналишда-



54- расм.

ги ташкил этувчилари йиғиндиси нолга тенг бўлиши лозим.

G тортишиш кучини унинг иккита ташкил этувчиси: $G\cos\alpha$ нормал ташкил этувчиси ва $G\sin\alpha$ параллел ташкил этувчиси (54-расмга қаранг) билан алмаштирамиз. Тезланиш сирпаниш текислигига параллел йўналганлиги сабабли

$$N = G\cos\alpha. \tag{23.1}$$

Демак, N реакция текисликда ҳаракатланаётган жисм тезланишига таъсир қилмай, балки у текислик бўйича ҳаракатни таъминлайди.

Тортишиш кучининг текисликка параллел ва пастга йўналган $G\sin\alpha$ ташкил этувчиси жисмнинг тезланишини белгилайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$M\frac{dv}{dt} = G\sin\alpha = Mg\sin\alpha,\ \frac{dv}{dt} = g\sin\alpha, \tag{23.2}$$

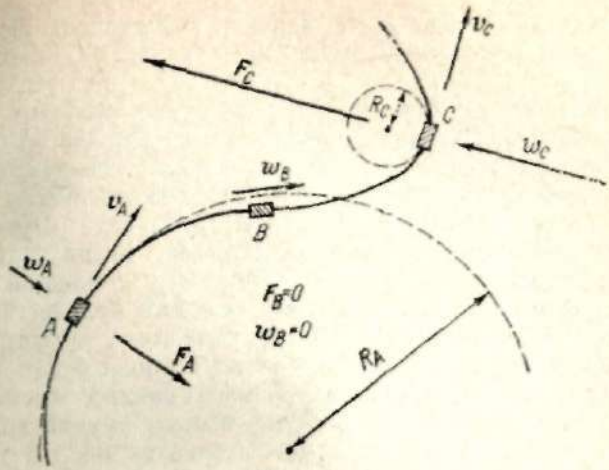
бунда M — жисм массаси. Бинобарин, тезланиш вақт ўтиши билан ўзгармайди ва қия текислик бўйича ишқаланишсиз ҳаракат характери худди жисмларнинг эркин тушишидагидек бўлади, фақат тезланиш катталиги бу ҳолда кичикроқдир.

Кичик тезланиш ҳолида йўл ва вақтни етарлича аниқлик билан ўлчаш мумкин; шу сабабли жисмларнинг тушиш қонунларини ўрганишда Галилей қилганидек, қия текисликдан фойдаланилади.

Ушбу ҳолда боғланиш реакцияси кучи (23.1) жисм ҳаракатланаётганда ўзгармай, у фақат жисмга таъсир қилаётган тортишиш кучига ва текисликнинг қиялик бурчагига боғлиқдир.

3) Жисмнинг эгри йўл бўйича ҳаракати. Шарчанинг айлана бўйича ҳаракатланишидан иборат биринчи мисолдан *кўринадики, бошқа мураккаброқ ҳолларда боғланиш реакцияси* катталиги жисмнинг ҳаракатига кўп даражада боғлиқдир. Эгри горизонтал йўлдан бораётган паровоз учун боғланиш реакцияларини топамиз. Айтайлик, паровознинг v тезлиги абсолют қиймати жиҳатдан доимий бўлиб, тезлик йўналиши, умуман айтганда, ўзгара борсин; бинобарин, паровоз тезланишига эга (55-расм). Шу w тезланишни аниқлаб ва паровознинг M массасини билган ҳолда, рельсларнинг паровоз ғилдираклари ребордасига ён босимининг натижаси бўлган йўлга нормал тезлаштирувчи кучни топамиз. Паровоз тезлиги катталиги жиҳатдан ўзгармаслиги сабабли тезланиш тезликка тикдир. Ҳар бир муайян пайтда паровоз юраётган йўл участкасини муайян R радиусли айлананинг жуда кичик участкаси билан ҳамда паровоз ҳаракатини — шундай радиусли айлана бўйича ҳаракат билан алмаштириш мумкин (56-*а* расм). У ҳолда паровознинг w тезланиши (56-*б* расм) айлана ичига йўналган ва катталиги

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{d\alpha}{dt} = v\frac{dS}{dt}\cdot\frac{1}{R} = \frac{v^2}{R}, \tag{23.3}$$



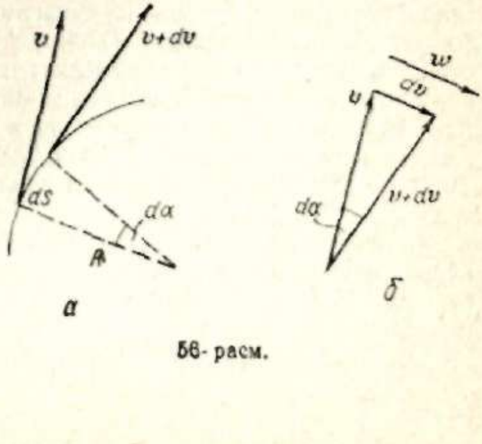
55- расм.

бунда R—айлана радиуси. dS—йўлнинг dt вақт ичидаги орттирмаси.

Паровоз тезлигини ўзгартирувчи боғланиш реакцияси кучи йўлнинг A нуқтасида (55-расмга қ.) ушбу катталикка эга:

$$F_A = M\frac{v^2}{R_A}, \tag{23.4}$$

бунда R_A—йўлнинг берилган нуқтадаги бурилиш радиуси. B нуқтада йўл тўғри бўлганидан, $R_B \to \infty$. Паровозга рельслар томонидан ҳеч қандай горизонтал куч таъсир қилмайди, боғланиш реакциясининг горизонтал ташкил этувчиси нолга тенг. C нуқтада рельсларнинг F_C ён босими кучи қарама-қарши йўналишга эга ва унинг катталиги шу нуқтадаги бурилиш радиусига боғлиқ.



56- расм.

Келтирилган мулоҳазалар ҳаракат тезлиги катталиги жиҳатдан доимий бўлмаганда ҳам ўринли эканлигини айтиб ўтамиз. Фақат бу ҳолда паровознинг тезланиши рельсларга тик бўлмайди, лекин рельслар чизиғига нормал бўлган тезланиш компонентасининг муайян пайтдаги v тезлик билан боғланиши аввалгидек ((23.3) формулага қаранг) бўлаверади, демак, рельсларнинг ғилдиракларга ён босими кучи ҳам (23.4) формула билан белгиланади.

Паровознинг ҳар бир муайян пайтдаги ҳаракати ўлчовлари йўлнинг ушбу жойидаги эгрилик билан аниқланадиган бирор айлана бўйича ҳаракатдан иборат. (Математикада эгри чизиққа шу нуқтада тегишиб турувчи айлана радиусига тескари бўлган катталикни эгри чизиқнинг муайян нуқтадаги эгрилиги деб аталади.) Шу сабабли рельсларнинг паровоз ғилдирагига, худди айлана бўйлаб ҳаракатдагидек, бирор марказга йўналган тезланиш берувчи ён босим кучини *марказга интилма куч* деса бўлади. Фарқ фақат шундаки, жисмнинг айлана бўйича ҳаракатида марказга интилма куч йўналган марказ доимийдир ва вақт ўтиши билан ўзгармайди. Паровознинг ҳаракати қаралаётган мисолдагидек, жисмнинг берилган эгри чизиқ бўйича ҳаракатидан иборат умумий ҳолда бу куч йўналган марказ, умуман олганда, нуқтадан нуктага ўз ҳолатини ўзгартира боради ва эгри чизиқнинг ушбу нуқтасидаги уринмага тик чизиқда ётади[1].

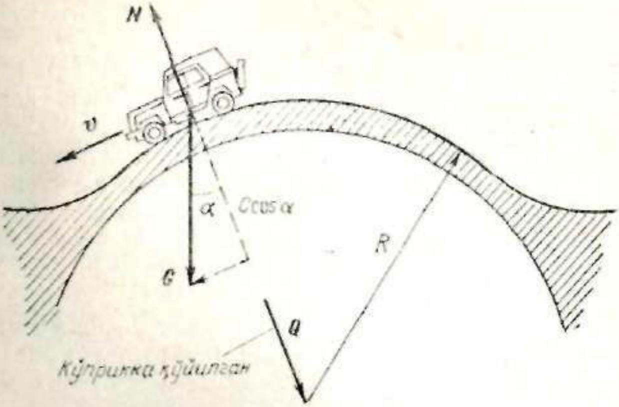
Берилган боғланишли ҳаракатларни таҳлил қилаётганда боғланишни ҳосил қилувчи жисмларнинг мустаҳкамлиги етарли деб олинади. Агар боғланиш хизматини бажараётган жисм ҳаракатланаётган жисмга етарли куч беролмаса, боғланиш узилади. Масалан, агар рельс бузилган бўлса, у ҳолда паровоз етарлича тезликка эга бўлганда бурилишларда издан чиқади.

Поездни тезлаштирилаётганда ёки тормозланаётганда паровозга яна рельслар томонидан таъсир қилувчи кучлар мавжуд бўлиб, улар паровозни рельс йўналиши бўйича тезлаштиради, ё секинлаштиради. Улар ишқаланиш кучидан ёки ғилдиракнинг рельс билан тутиниш кучидан иборатдир. Бу кучлар ҳам рельслар ва паровознинг ўзаро таъсири натижасидир. Аммо улар паровозни рельсларда қолишга «мажбур» қилмайди. Шу сабабли динамика нуқтаи назаридан бу кучлар орасида ҳеч қандай принципиал фарқ бўлмаса-да, уларни боғланиш реакциялари қаторига киритилмайди. Рельслар ва ғилдиракларнинг тутиниш кучлари паровоз цилиндрларидаги буғ босими билан белгиланади, лекин улар муайян катталикдан катта бўла олмайди. Бу катталик паровоз огирлигига ҳамда рельслар ва паровоз ғилдиракларини ясашда ишлатилган материалга боғлиқдир. Агар ғилдиракларга етарлича катта куч қўйилса, ғилдираклар бир жойда сирпаниб, айланади, яъни улар рельсларда думаламайди. Тутиниш кучлари ва ишқаланиш кучлари ҳақида VIII бобда батафсилроқ гапирилади.

4) *Автомобилнинг кўприк бўйича ҳаракати.* Қавариқ кўприк бўйича кетаётган автомобиль ҳаракатини қарайлик (57-расм); бу ерда боғланиш реакциялари ҳаракат тезлигига ҳам, жисмга

---

[1] Бу чизиқни берилган нуқтада эгри чизиққа *нормал* дейилади.



57- расм.

таъсир этаётган кучларга ҳам боғлиқ бўлади. Кўприкка ишқаланиш кучларини ҳисобга олмаймиз; у ҳолда кўприкнинг автомобилга нормал босим кучи **N** оғирлик кучининг берилган жойда кўприкка нормаль бўйича ташкил этувчиси $G\cos\alpha$ билан биргаликда автомобилга $\frac{v^2}{R}$ марказга интилма тезланиш беради, бунда v — автомобиль тезлиги, R — кўприк радиуси. Динамиканинг иккинчи қонунига кўра

$$\frac{mv^2}{R} = G\cos\alpha - N, \qquad (23.5)$$

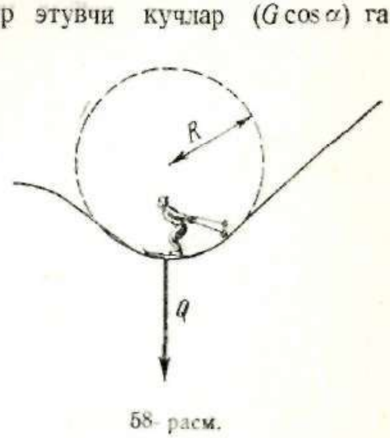
бунда m—автомобиль массаси. Бундан боғланиш реакцияси кучи

$$N = G\cos\alpha - \frac{mv^2}{R},$$

эканлиги аён бўлади, яъни у таъсир этувчи кучлар ($G\cos\alpha$) га ҳам, тезлик v га ҳам, йўл шаклига (R) ҳам, жисм массасига (m) ҳам боғлиқдир.

Биз қараб ўтган барча кучлар автомобилга — ҳаракатланаётган жисмга қўйилган; кўприкка (боғланишга) эса Ньютоннинг учинчи қонунига кўра, **N** га тенг ва қарама-қарши бўлган автомобилнинг кўприкка босим кучи **Q** қўйилган.

Чанғичи тоғдан тушаётиб, 58-расмда кўрсатилган вазиятда бўлган ҳол учун ҳам шунга ўхшаш таҳлил қилиш мумкин; бунда чан-



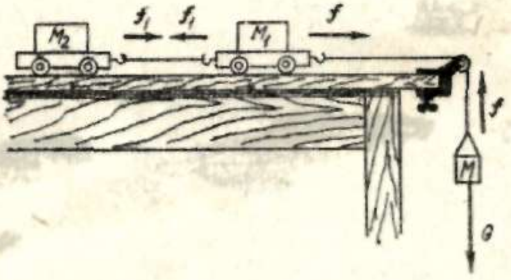
58- расм.

ғичининг ерга босим кучи Q унинг G оғирлигидан ортиқ бўлади.

Хуллас, жисмларнинг эрксиз ҳаракатларини таҳлил қилаётганда олдиндан маълум кучлардан (масалан, юқорида қаралган мисолларда тортишиш кучи) ташқари яна номаълум кучларни, боғланиш реакцияларини киритамиз ҳамда динамика тенгламаларини тузамиз. Тезланишни масаланинг бошқа шартларидан, масалан, жисмнинг тезлиги бўйича ва йўл шаклидан топамиз.

Жисмнинг тезланишини, массасини ва унга таъсир этувчи кучларни билган ҳолда, агар бу зарур бўлса, боғланиш реакцияларини аниқлаш мумкин.

Юқорида келтирилган мисолларда боғланишлар жисмнинг ҳаракат траекториясини белгилайди. Жисм ҳаракатига қўйилган боғланиш ёки чеклашларнинг бошқа ҳоллари, масалан, барча ёки бир нечта жисмлар оддий тарзда чўзилмайдиган иплар ёки деформацияланмайдиган стерженлар билан бириктирилган ҳоллардаги боғланишлар ҳам бўлиши мумкин. Бунда ҳам жисмлар орасидаги ипларнинг таранглик кучларини боғланиш реакциялари деб қараш мумкин. Барча боғланган жисмларнинг бирдай тезланишга эга эканлиги олдиндан маълум бўлса, бутун жисмлар системасини битта жисм деб қараш ва фақат системага таъсир қилаётган ташқи кучларнигина ҳосибга олиш мумкин бўлади. Бироқ, агар ипларнинг таранглик кучи катталигини (реакция катталагини) билиш зарур бўлса, у ҳолда шу кучларни ҳисобга олиб, тенгламалар тузиш лозим бўлади.



59- расм.

Боғланишли ҳаракатнинг яна иккита мисолини қараймиз: бири содда, иккинчиси мураккаброқ.

5) Боғланган аравачаларнинг ҳаракати. Бир-бирига иплар билан боғланган ва юкнинг G оғирлик кучи воситасида тезлаштирилувчи иккита аравача рельслар бўйича ҳаракатланаётир (59- расм). Аравачаларнинг массалари M_1 ва M_2, ипнинг массасини ва A блокнинг массасини ҳисобга олмаса бўлади. Рельслар горизонтал жойлашганлиги сабабли аравачаларнинг оғирлик кучлари

ва аравачага рельслар томонидан таъсир этувчи кучлар (агар ишқаланиш кучларини назарга олмаслик мумкин бўлса) аравачаларнинг мумкин бўлган ҳаракати йўналишига тик бўлади ҳамда аравачаларнинг тезланишини аниқлаётганда уларни ҳисобга олмаса бўлади. Рельсларнинг реакциялари системанинг тезланишига таъсир қилмайди. Ипларни чўзилмас деб ҳисобланади, демак, барча учта жисмнинг (иккита аравача ва юк) тезлиги ва тезланиши катталиги жиҳатидан бирдай бўлади — бу боғланишнинг аравачалар ҳаракатига қўядиган шартидан иборатдир.

Юк ва биринчи аравача орасидаги ипнинг таранглик кучи катталигини f орқали, аравачаларни боғловчи ипнинг таранглик кучини эса f_1 орқали, юк оғирлигини G орқали белгилаймиз. Ип массага эга бўлмай, фақат тортишигина мумкинлигини ҳисобга оламиз. Динамика тенгламаларини ҳар бир юк учун алоҳида ёзиб чиқамиз.

Юк учун:

$$M\frac{dv}{dt} = G - f, \tag{23.6}$$

биринчи аравача учун:

$$M_1\frac{dv}{dt} = f - f_1, \tag{23.7}$$

иккинчи аравача учун:

$$M_2\frac{dv}{dt} = f_1. \tag{23.8}$$

Биз ҳар бир жисм учун ҳаракат тенгламаларини ёзиб чиқдик. Бироқ иплар чўзилмас бўлгани сабабли учала жисмни ягона система сифатида қараш ҳам мумкин эди; у ҳолда ипларнинг таранглиги ички кучлар бўлар эди ва бутун системанинг тезланишини аниқлашда ҳеч қандай роль ўйнамасди; бутун ҳаракатланувчи системанинг массаси $M_1 + M_2 + M$ га, таъсир қилувчи ташқи куч фақат G тортишиш кучига тенг бўларди. Ҳақиқатан ҳам, (23. 6), (23.7) ва (23. 8) тенгламаларни қўшсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$(M_1 + M_2 + M)\frac{dv}{dt} = G. \tag{23. 9}$$

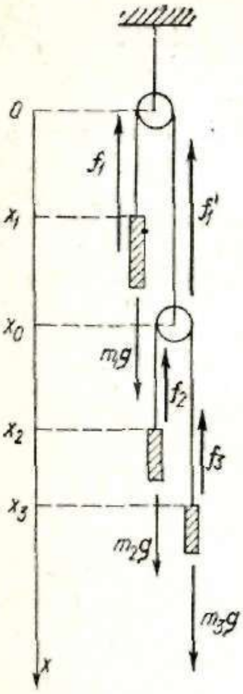
$G = Mg$ (бунда g — тезланиш) оғирлик кучидан юзага келишлиги туфайли аравача ва юкнинг тезланиши:

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{M}{M + M_1 + M_2} \tag{23. 10}$$

бўлади.

Жисмлар системасининг тезланиши доимий бўлишини, тезлик эса яна вақтга ва бошланғич шароитларга, аниқроғи — вақтга ва аравача бошланғич вақт моментида[1] эга бўлган тезликка ҳам боғлиқ эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

Агар ипларнинг таранглик кучини аниқлаш лозим бўлса (кўпинча билиш зарур бўлади), (23. 6), (23. 7) ва (23. 8) тенгламаларга (23. 10) тенгламадан топилган тезланиш катталигини қўйиш керак. Равшанки, юк осилган ипнинг таранглиги иккинчи ипнинг таранглигидан ҳамма вақт ортиқ бўлади.



60- расм.

б) Блокларга осилган учта юкнинг ҳаракати. 60-расмда кўрсатилган системадаги юкларнинг тезланишини ва чўзилмайдиган ипларнинг таранглигини аниқланг; блокларни ва ипларни вазнсиз деб ҳисобланг, ишқаланишни ҳисобга олманг.

60- расмда кўрсатилганидек, ипларнинг таранглигини f_1, f_2 ва f_3 орқали, юклар координаталарини эса x_1, x_2 ва x_3 орқали белгилаймиз. Координаталар ўқининг пастга йўналишини мусбат деб олиб, барча юклар учун динамика тенгламаларини ёзиб чиқамиз;

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1 g - f_1,\quad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2 g - f_2,$$

$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3 g - f_3, \qquad (23.11)$$

бунда m_1, m_2, m_3 — юкларнинг массалари, g — оғирлик кучи тезланиши. Блоклар вазнсиз бўлгани сабабли ипларнинг таранглик кучлари қуйидаги тенгликларни қаноатлантириши керак:

$$f_2 = f_3,\ f_1 = f'_1 = f_2 + f_3. \qquad (23.12)$$

Энди учала юкнинг ҳаракатига боғланишлар томонидан қўйиладиган шартларни ҳисобга оламиз. Иплар чўзилмас бўлгани сабабли

$$x_1 + x_0 + \pi r = l_1,\ x_2 - x_0 + x_3 - x_0 + \pi r = l_2, \qquad (23.13)$$

бунда l_1 ва l_2 — ипларнинг узунликлари, x_0 — қўзғалувчан блок ўқининг координатаси, r — блокларнинг радиуси, (23. 13) тенгламалардан x_0 ни йўқотиб, боғланишнинг барча жисмлар координаталарига қўядиган шартини топамиз:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2l_1 + l_2 - 3\pi r. \qquad (23.14)$$

---

[1] Бошланғич момент деб, шундай вақт моментини айтиладики, ундан кейин системага фақат G куч таъсир этади.

Бу шарт барча жисмларнинг ҳам тезликларини, ҳам тезланишларини боғлайди. Агар (23. 14) тенгламани икки марта дифференциалласак, юкларнинг боғланиш билан белгиланувчи тезланишлари орасидаги муносабатни топамиз:

$$2\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{d^2x_3}{dt^2}=0. \tag{23.15}$$

Энди (23.11), (23.12) ва (23.15) олтита тенглама олтита номаълумга: учта тезланиш ва учта реакция кучига (ипларнинг таранглиги) эга. Бу тенгламаларни ечиб, юкларнинг тезланишларини топамиз. (23.11) нинг биринчи тенгламасидан иккита кейингисини айирсак, ҳамда (23.12) тенгламаларни ҳисобга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-m_3\frac{d^2x_3}{dt^2}=(m_1-m_2-m_3)\,g. \tag{23.16}$$

(23.11) нинг иккинчи тенгламасидан учинчисини айирсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-m_3\frac{d^2x_3}{dt^2}=(m_2-m_3)g. \tag{23.17}$$

Учта номаълумли (23.15), (23.16) ва (23.17) учта тенгламани ечсак, ниҳоят қуйидаги топилади:

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{(m_1m_3-3m_1m_2+4m_2m_3)\,g}{4m_2m_3+m_1m_2+m_1m_3}. \tag{23.18}$$

Буни (23.17) тенгламага қўйсак, $\frac{d^2x_2}{dt^2}$ ни, сўнгра (23.15) дан $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ ни ҳам топамиз. Агар ипларнинг таранглигини билиш зарур бўлса, топилган тезланишларни ҳаракат тенгламалари (23.11) га қўйиш керак.

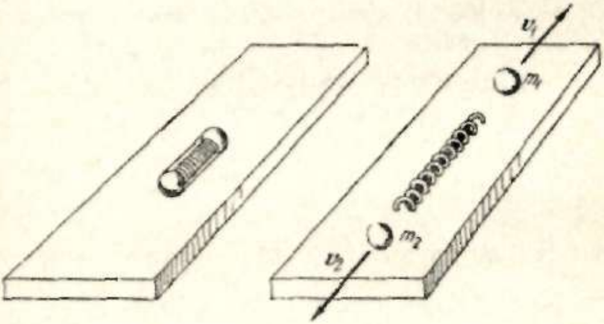
Ҳар бир юк учун (23.11) динамика тенгламаларини тузмасдан бу каби масалани ечиш қийин. Чунки боғланишларнинг тезланишлар орасига қўядиган (23.15) шартини бирданига «фаҳмлаб» олиш қийиндир. Ушбу масалани ечишда тез-тез содир бўладиган хатолар — ишораларни кучлар ва тезланишлар учун нотўғри ҳисобга олишдан келиб чиқади. Шу сабабли ўқувчининг эътиборини барча пастга йўналган катталикларни (кучлар ва тезланишларни) биз мусбат деб ҳисоблаганлигимизга жалб қиламиз. Тезланишнинг ҳақиқий йўналиши қандайлигини фақат (23.18) тенгламани ечиш натижасидагина биламиз.

III БОБ

ЖИСМЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ҲАРАКАТ МИҚДОРИ

24- §. Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни

Динамиканинг иккинчи ва учинчи қонунини ўзаро таъсирлашувчи бир нечта жисмдан иборат бўлган системага татбиқи жуда муҳим хулосаларга олиб келиб, улардан **ҳаракат миқдорининг сақланиши** (ёки доимийлик) **қонуни** келиб чиқади.



61- расм.

Даставвал, мулоҳазаларни соддалаштириш мақсадида, ўзаро таъсирлашувчи иккита жисмни, масалан, горизонтал шиша сиртда ётган ораларига пружина қўйиб сиқиб боғланган иккита шарчани қараймиз (61- расм). Шарчаларнинг шишага ишқаланиш кучини ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Иккала шарча бир-бирига ип билан шундай боғланганки, пружина улар орасида қисилиб туради. Шарчаларнинг массалари m_1 ва m_2 га тенг, пружинанинг массаси буларга нисбатан жуда кичик бўлгани сабабли уни нолга тенг деб ҳисоблаймиз (шундай қилмасак ҳам бўлар эди, бироқ у ҳолда учта жисмнинг ўзаро таъсирини ҳисобга олиш керак бўлар эди). Агар бирор пайтда ипни куйдириб (узиб) юборсак, унда пружина m_1 шарчага $\mathbf{F}_{12}$ куч билан, m_2 шарчага эса $\mathbf{F}_{12}$ га тенг, лекин қарама-қарши $\boldsymbol{F}_{21}$ куч билан таъсир қилади. Пружинанинг массаси кичик бўлгани сабабли биринчи шарча иккинчисига пружина орқали таъсир қилади дейиш мумкин ҳамда

$$\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21}=0. \qquad (24.1)$$

Ҳақиқатдан ҳам, динамиканинг учинчи қонунига кўра қуйидаги кучлар ўзаро тенг ва қарама-қаршидир:

$$\boldsymbol{F}_{1n}+\boldsymbol{f}_{n1}=0, \quad \boldsymbol{F}_{2n}+\boldsymbol{f}_{n2}=0,$$

бунда $\boldsymbol{f}_{n1}$ ва $\boldsymbol{f}_{n2}$ — шарчаларнинг пружиналарга таъсир кучлари, ҳамда $\boldsymbol{F}_{1n}$ ва $\boldsymbol{F}_{2n}$ — пружинанинг шарчаларга таъсир кучлари. Пружина массаси нолга тенг деб олингани туфайли, динамиканинг иккинчи қонунига кўра

$$\boldsymbol{f}_{n1}+\boldsymbol{f}_{n2}=0.$$

Демак,

$$\boldsymbol{F}_{1n}+\boldsymbol{F}_{2n}=0,$$

ва равшанки,

$$\boldsymbol{F}_{1n}=\boldsymbol{F}_{12}, \quad \boldsymbol{F}_{2n}=\boldsymbol{F}_{21}.$$

Бундан (24.1) тенглик ҳосил бўлади. m_1 массага $\boldsymbol{F}_{12}$ куч, m_2 массага $\boldsymbol{F}_{21}$ куч таъсир қилади. Шу кучлар таъсирида шарчалар $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ тезланишлар олиб, улар қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$m_1\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{F}_{12}, \quad m_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{F}_{21}. \qquad (24.2)$$

Бу тенгликларни қўшиб ва (24.1) ни ҳисобга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m_1\boldsymbol{a}_1+m_2\boldsymbol{a}_2=0. \qquad (24.3)$$

маълумки, $m_1\boldsymbol{v}_1$ — биринчи шарчанинг, $m_2\boldsymbol{v}_2$ — иккинчи шарчанинг ҳаркат миқдоридир, тезланишлар эса

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}, \qquad \boldsymbol{a}_2=\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} \qquad (24.4)$$

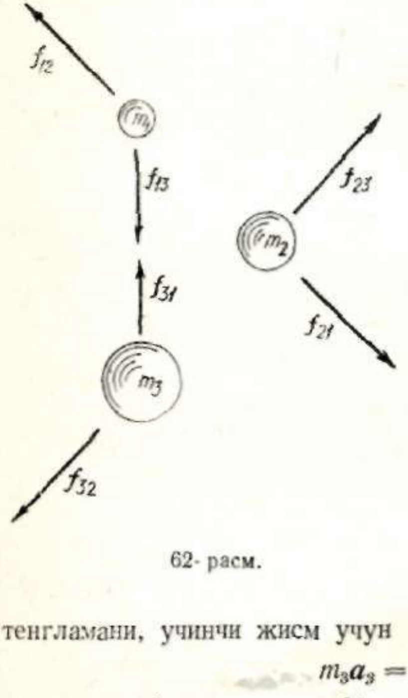
бўлади; бу ифодаларни (24. 3) тенгламага қўйиб қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\frac{d}{dt}(m_1v_1+m_2\ v_2)=0. \qquad (24.5)$$

Аввало, (24. 5) тенгламанинг чиқарилиши шарчалар орасидаги ўзаро таъсир кучининг катталигига ва характерига боғлиқ эмас; муҳими, бу кучларнинг (24.1) шартни қаноатлантиришидир. (24.5) тенглик шарчаларнинг ҳаракат миқдорлари йиғиндиси итарувчи пружинанинг таъсири вақтида ҳам, ундан кейин ҳам, шарчаларга ташқи кучлар таъсир қилмагунча *доимий* қолаверади.

Бу хулоса ҳар қандай иккита жисм учун ҳам ўринлидир, негаки, биз кўргазмали бўлсин деб шарчаларни мисол қилиб кўрсатдик.

Демак *иккита жисмдан иборат бўлган системанинг ҳаракат миқдори шу жисмларнинг ўзаро таъсир кучлари натижасида ўзгариши мумкин эмас.*



62- расм.

Барча қолган жисмлардан изоляцияланган ва битта механикавий системани ташкил этувчи бирор миқдор жисмларни тасаввур қиламиз; у ҳолда жисмларнинг ўзаро таъсир кучлари ушбу системага нисбатан *ички*[1] кучлардир. Агар изоляцияланган система кўп миқдорда жисмларга эга бўлса, у ҳолда ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни бутун система учун ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, айтайлик, система m_1, m_2 ва m_3 массали учта жисмдан иборат бўлсин (62- расм). У ҳолда биринчи жисм учун

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{13}$$

тенгламани, иккинчи жисм учун

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{f}_{23}$$

тенгламани, учинчи жисм учун

$$m_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{f}_{31} + \boldsymbol{f}_{32}$$

тенгламани ёзиш мумкин. Учала тенгламани қўшиб ва динамиканинг учинчи қонунини ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 = 0,$$

ёки

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3) = 0, \qquad (24.6)$$

бунда, одатдагидек, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ лар ҳар бир жисмнинг тезланишлари, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ — мос ҳолда уларнинг тезликлари.

Барча жисмлар ҳаракат миқдорлари йиғиндисини $\boldsymbol{K}$ орқали белгиласак, у ҳолда ҳаракат миқдорининг доимийлик қонуни (24.6) ни шундай ёзиш мумкин бўлади:

---

[1] Ички кучлар—изоляцияланган системани ҳосил қилувчи жисмлар орасидаги таъсир кучларидир.

$$\frac{dK}{dt}=0$$

ёки

$$K=\text{const}. \qquad (24.7)$$

Жисмлар системасининг ҳаракат миқдори ички кучлар таъсирида ўзгариши мумкин эмас.

Ҳаракат миқдорининг доимийлик қонунини изоляцияланган система ҳосил қилувчи исталганча сонли жисмлар учун ҳам осон келтириб чиқариш мумкин. Системанинг ҳаракат миқдори K — бу системага кирувчи барча жисмлар ҳаракат миқдорларининг вектор йиғиндисидир:

$$K=\sum_{i=1}^{n} m_i v_i. \qquad (24\ 8)$$

Динамиканинг учинчи қонунига кўра, барча *ички* кучлар k ва i индексларнинг ҳар қандай $k=1,\ 2,\ 3,\ldots\ n$ ва $i=1,\ 2,\ 3,\ldots\ n$ қийматларида (бунда n — системага кирувчи жисмлар сони)

$$f_{ki}+f_{ik}=0 \qquad (24.9)$$

шартни қаноатлантиради.

Агар жисмга ташқи кучлар таъсир қилмаётган бўлса, у ҳолда ҳар бир жисм учун қуйидагини ёзиш мумкин:

$$m_i\,\frac{dv_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} f_{ik}, \qquad (24.10)$$

бунда m_i — қандайдир i-жисмнинг массаси, v_i — унинг тезлиги, $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{ik}$ — унга қолган жисмлар томонидан таъсир этаётган куч. Энди барча жисмлар учун (24.10) тенгламаларни қўшамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\frac{dv_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{ik}. \qquad (24.11)$$

(24.9) шартга кўра барча ички кучларнинг йиғиндиси нолга тенг, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\frac{dv_i}{dt}=0,$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i=0. \qquad (24.12)$$

Бу айнан фақат ички кучлар мавжудлигида ҳаракатланаётган жисмлар системаси учун ҳаракат миқдорининг доимийлиги қонунини ифодалайди. Уни (24. 7) формула кўринишида ҳам ёзиш мумкин.

Айтилганларга якун ясайлик. Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни кўп жисмлар ўзаро таъсири ҳолида ўринли бўлади: системага кирмайдиган жисмлар томонидан таъсир этувчи кучлар, ташқи кучлар бўлмаса, бу жисмлар системасининг ҳаракат миқдори *доимий* қолади.

Ҳаракат миқдори ёки импульс — *вектор катталикдир*, бинобарин, ҳаракат миқдорининг абсолют катталиги ҳам, унинг йўналиши ҳам доимий қолади. Системадаги ҳар бир жисмнинг ҳаракат миқдори ўзгариши мумкин бўлгани ҳолда, системанинг умумий ҳаракат миқдори доимий қолади.

Исталган жисмнинг ҳаракат миқдори, системанинг қолган жисмлари ҳаракат миқдори шундай миқдорга ўзгармасидан туриб, ўзгариши мумкин эмас. *Ҳаракат миқдори фақат бир жисмдан бошқа жисмга узатилиши мумкин бўлиб, ҳеч қачон йўқолмайди* ёки: *жисмларнинг ҳар қандай изоляцияланган системасининг ҳаракат миқдори — вектор катталик — доимо ўзгаришсиз қолади.*

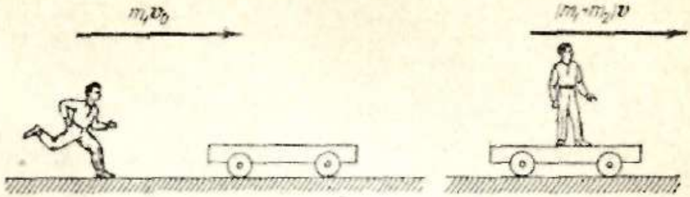
Жисмнинг ҳаракат миқдори ҳақидаги тушунча Декарт томонидан киритилган бўлиб, унинг ўзи фалсафий тарзда Коинотдаги жисмлар ҳаракат миқдорининг сақланиш ёки доимийлик принципини таърифлаб берган. Ҳаракат миқдори ўлчови деб mv ёки mv^2 катталиклардан қайси бирини олиш керак, деган масала устидаги баҳс кейинчалик олимлар орасида узоқ вақт давом этди; энергиянинг сақланиш қонуни таърифлангандан кейингина (37- § га қ.) бу баҳс тўхтади. Бу масала Ф. Энгельс томонидан унинг машҳур «Ҳаракат ўлчови — Иш»[1] мақоласида узил-кесил ойдинлаштирилган эди.

25- §. Ҳаракат миқдорининг бир жисмдан бошқа жисмга узатилиши

Иккита жисмнинг куч ўзаро таъсири вақтида ҳамма вақт бир жисмдан иккинчисига ҳаракат миқдорининг узатилиши содир бўлади. Ўзаро таъсир вақтида кучларнинг ўзгариш характери жуда мураккаб бўлиши мумкин ва ҳодисанинг таҳлили мураккаб масаладир. Бу ҳолларда ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини татбиқ қилиш, жисмлар орасидаги таъсир кучларини батафсил ўрганмасдан туриб, ўзаро таъсир натижасини осон аниқлаш имконини беради. Буни қандай бажарилишини мисолларда кўрсатган маъқул.

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы, Госполитиздат, 1965, 67- бет.



63- расм.

1) Одам аравачага югуриб чиқади. Рельсларда турган платформага (63- расм) чиқаётганда одам v_0 тезликка ва $K = m_1v_0$ ҳаракат миқдорига эга, бунда m_1 — одам массаси Аравача тинч тургани сабабли унинг ҳаракат миқдори нолга тенг. Аравачага югуриб чиқиб, одам унда тўхтайди, аравача билан одамнинг товони орасида кучлар юзага келади; одамга таъсир қилувчи куч уни тормозлади, аравачага қўйилган куч (қарама-қарши таъсир этувчи) унга ҳаракат берди. Одам ва аравача бирдай тезликка эришганда, яъни одам аравачада тўхтаганда, бу кучларнинг таъсири тўхтайди. Агар аравачанинг рельсларга ишқаланиш кучи кичик ва ҳавога ишқаланишни назарга олмаслик мумкин бўлса, у ҳолда системанинг (аравача ва одамнинг) ҳаракат миқдори улар орасидаги ўзаро таъсир натижасида ўзгармайди. Одамнинг m_1v_0 ҳаракат миқдори *тақсимланади*: одамнинг югуриб чиқишдаги ҳаракат миқдоридан бир қисмини аравача олади. Одам ва аравача эришадиган тезликни ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунидан топиш мумкин. У қуйидагига тенг:

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0. \tag{25.1}$$

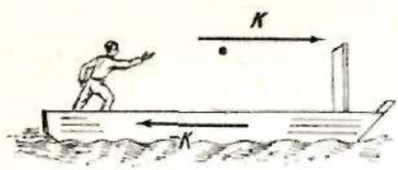
Жавоб одамнинг оёғи билан аравача орасидаги таъсир кучининг давомийлиги ва бу кучлар вақт давомида қандай ўзгаришига боғлиқ эмас. Одам билан аравача орасида тўла ноэластик урилиш юз берди.

Турли тезликларга эга бўлган иккита жисм ўзаро таъсирдан кейин бирдай тезликка эга бўлса, бундай ўзаро таъсирни тўла ноэластик урилиш дейилади.

Урилишдан кейинги тезликни аниқлашда урилиш механизмининг қандайлиги, кучлар вақт давомида қандай таъсир қилганликлари ва катталиги қандайлиги — буларнинг ҳаммаси аҳамиятсиздир.

Ҳаракат миқдори ҳамма вақт бир жисмдан бошқасига узатилиши ҳолати билан биринчи марта танишаётганлардан баъзида эътирозлар эшитиш мумкин. Кўпинча бу эътирозлар, гўёки бу ҳолатни рад қилувчи мисоллар тариқасида қилинади. Шундай мисоллардан бирини қараб чиқайлик.

2) Бола деворга қор копток отади. Айтайлик, бола отган қор копток деворга урилиб, ёпишиб қолади ёки девор олди-



64-расм.

да ерга тушади. Бола қор коптокка $\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{v}$ ҳаракат миқдори «берди», қор копток деворга урилди ва ҳаракат миқдорини «йўқотди». Қор коптокнинг ҳаракат миқдори қаёққа йўқолди, нимага узатилди?

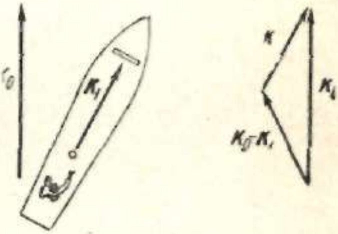
Ҳаракат миқдорининг узатилиш процессини яққол тасаввур қилиш учун бола ва девор қайиқда жойлашган ва бола лой коптокни деворга отади, шунинг билан бирга, ҳамма нарса тинчликда эди, деб ҳисоблаймиз (64-расм). Қайиқ бу ерда худди олдинги мисолдаги Ер каби вазифани ўтайди. Қайиқда турган бола билан ўзаро таъсир натажасида лой коптокнинг отилишдан кейин эришган ҳаракат миқдори «бола — қайиқ» системадан «олинади» ва демак, бутун бу система лой коптокнинг учиши вақтида катталиги $\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{v}$ га тенг бўлган қарама-қарши ҳаракат миқдорига эга бўлади. «Қайиқ, бола ва лой копток» системасининг ҳаракат миқдори доимий ва нолга тенг.

Лой коптокнинг деворга урилишида унинг қайиқ билан ўзаро таъсири девор орқали юз беради, лекин энди уларнинг иккаласи тенг ва қарама-қарши ҳаракат миқдорларига эга бўлгани учун қўшилиб, ноль ҳаракат миқдорини беради. Демак, лой коптокнинг учиши вақтида қайиқ лой коптокни отаётган боланинг турткисидан ҳаракатланарди ва лой копток деворга урилгандан кейин тўхтарди. Динамика қонунларига кўра урилиш ва туртки пайтида ҳаракат миқдори тенг ва қарама-қаршидир, шу сабабли бунда ҳаракат миқдорининг ҳеч қандай «йўқолиши» ёки «яратилиши» содир бўлмайди.

Қайиқ ҳаракатланаётган ҳолда ҳам бизнинг мулоҳазаларимизда ҳеч қандай ўзгариш бўлмаслигини қайд қилиб ўтамиз: бутун система нолдан фарқли ҳаракат миқдорига эга эди, улоқтиришдан кейин «бола — қайиқ» системанинг ҳаракат миқдори лой коптокнинг ҳаракат миқдорича ўзгаради, унинг деворга урилишидан кейин эса шу миқдор қайтиб берилди. Бунда қайиқнинг ва лой коптокнинг ҳаракат йўналишлари ҳар қандай бўлиши мумкин. Айтайлик, улоқтиришгача бутун системанинг ҳаракат миқдори $\boldsymbol{K}_0$ бўлсин, уни чизмада (65-расм) тегишли вектор билан тасвирлаймиз; агар лой коптокнинг ҳаракат миқдори $\boldsymbol{K}_1$ бўлса, у ҳолда қайиқда $\boldsymbol{K}_0 - \boldsymbol{K}_1$ ҳаракат миқдори қолади, лой копток деворга урилганда бутун система яна $\boldsymbol{K}_0$ ҳаракат миқдорига эга бўлиб қолади.

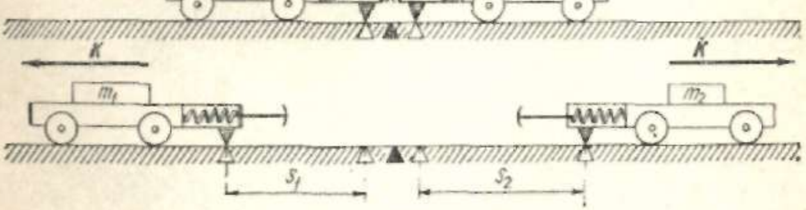
Агар лой копток деворга тегмасдан сувга тушса, «бола—қайиқ» система ҳаракат миқдори йўқотиши аёндир. У ҳолда системада $\boldsymbol{K}_0 - \boldsymbol{K}_1$ ҳаракат миқдори қолиб, $\boldsymbol{K}_1$ ҳаракат миқдори эса сувга берилади. Бироқ, агар системага Ерни ҳам киритсак, у ҳолда ҳаракат миқдорининг яна сақланишини қайд қилиш мумкин. Бола отган қор копток деворга урилиб, унга (Ерга) ўз вақтида боланинг Ер билан ўзаро таъсири натижасида «пайдо» бўлган ҳаракат миқдорини «узатган» ҳолда ҳам ҳодисаларни юқоридагидек талқин қилиш мумкин.

Мулоҳазаларни соддалаштириш мақсадида деворга урилиш тўла ноэластик, яъни лой копток урилишидан сўнг девордан орқага қайтмасдан унга ёпишиб қолади ёки унинг олдига тушади, деб ҳисобладик. Лой копток девордан қайтадиган эластик урилишда ҳам аҳвол аввалгидек *бўлади*. *Ҳақиқатан*, бу урилишдан кейин қайиқ олдинга юради, лекин «қайиқ, бола ва лой копток» системасининг ҳаракат миқдори ўзгаришсиз қолади; чиндан ҳам, лой копток қайиққа тушиб тўхташи биланоқ, бутун система тинч ҳолатга қайтади. Бундан ташқари, келтирилган мулоҳазаларда қайиқнинг сувга ишқаланиши (ёки ҳаракатга қаршилик кучи) йўқ деб ҳисобланди. Бироқ агар биз бу ўзаро таъсир кучларини ҳам *ҳисобга олиб, жисмлар* системасига сувни ҳам киритсак, у ҳолда яна аввалгидек ҳаракат миқдорининг доимийлигини исботлаган бўлардик.



65- расм.

3) **Массани ўлчаш.** Шарчаларни пружина воситасида итариб юбориш тажрибалари иккита жисмнинг массасини таққослаш (ёки ўлчаш) имконини беради. Ҳақиқатдан ҳам, иккита жисмнинг ўзаро таъсири натижасида шу жисмлар оладиган ҳаракатни кузатайлик; тажриба йўли билан жисмларнинг ўзаро таъсир натижасида олган тезликларини аниқлаймиз ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни асосида тезликларнинг нисбати орқали шу иккита жисмнинг массалари нисбатини топамиз. Масалан, агар пружина итараётган шарчалардан бири бирлик массага эга бўлса, у ҳолда шарчалар тезликлари абсолют катталикларининг тескари нисбати шу бирликларда иккинчи шарчанинг массасини аниқлайди.

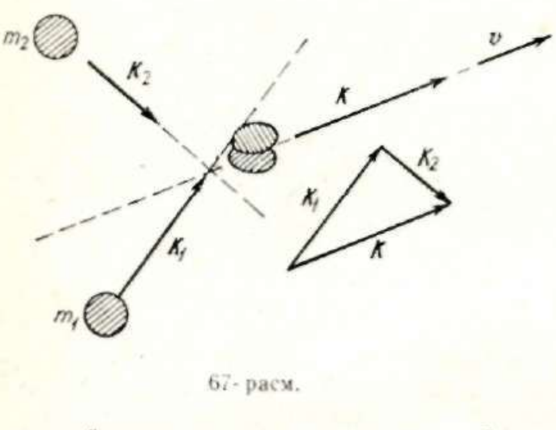


66- расм.

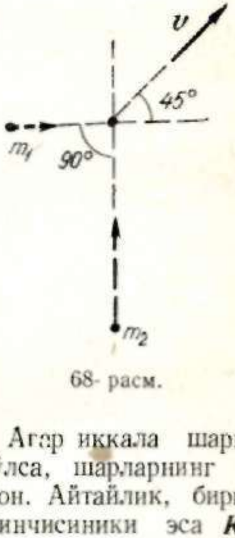
Амалий жиҳатдан бундай тажрибаларни рельсларда жойлашган ва буферлари билан итаришувчи аравачалар билан ўтказиш қулайдир (66- расм). Аравачаларни бир-бирига қисиб, қўйиб юборамиз ҳамда аравачаларнинг бирдай вақт интервалларида ўтадиган S_1 ва S_2 масофаларини белгилаб оламиз. S_1 ва S_2 масофалар аравачалар тезликларига пропорционалдир ва демак, улар шу аравачаларнинг m_1 ва m_2 массаларига тескари пропорционал:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{S_2}{S_1} \qquad (25.2)$$

4) *Иккита шарнинг тўлиқ ноэластик урилиши.* Айтайлик, массалари m_1 ва m_2 бўлган иккита шар $\boldsymbol{v}_1$ ва $\boldsymbol{v}_2$ тезликлар билан учиб бориб бирор пайтда тўқнашади, «тутинишади» ва бундан кейин битта жисм ҳолида учишда давом этади (67- расм). Бу ерда тўлиқ ноэластик урилиш юз берди. Агар иккала шарнинг урилишгача ҳаракат миқдорлари маълум бўлса, шарларнинг урилишдан кейинги ҳаракатини аниқлаш осон. Айтайлик, биринчи шарнинг ҳаракат миқдори $\boldsymbol{K}_1 = m_1 \boldsymbol{v}_1$, иккинчисиники эса $\boldsymbol{K}_2 = m_2 \boldsymbol{v}_2$ бўлсин, у ҳолда урилишдан кейинги ҳаракат миқдори $\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{K}$ бўлади. Шарларнинг учиш йўналишлари ўзгаради, лекин шарлар системасининг ҳаракат миқдори ўзгармайди. Тўлиқ ноэластик урилишдан кейин шарларнинг $\boldsymbol{v}$ тезлиги қуйидагига тенг бўлади:



67- расм.



68- расм.

$$\boldsymbol{v} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (25.3)$$

Снаряд учиш пайтида икки қисмга парчаланади; бу ҳолда ҳам портлашда ҳаракат миқдори ўзгармайди: бўлаклар ҳаракат миқдорларининг вектор йиғиндиси, агар портлаш пайтида ҳавонинг қаршилик кучи таъсири назарга олинмаса, снаряднинг ҳаракат миқдорига тенг бўлади. Снаряд кўпроқ бўлакларга парчаланган ҳолда ҳам шуни айтиш мумкин.

Кундалик ҳаётдан ва техникадан баён қилинганларга ўхшаш мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Шу мисолларни топишни тавсия қиламиз. Механика масалаларини ечаётганда ҳамма вақт муайян масалани ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни асосида ечиш имконини текшириб кўриш лозимлигини уқтириб ўтамиз. Бундай ҳолда бизга жисмлар орасида кучлар вақт давомида қандай таъсир қилиб турганлигини ва уларнинг қандай қўйилганлигини билиш шарт эмас ва шу сабабли масалаларни ҳаракат миқдорининг доимийлиги қонуни ёрдамида ечиш анча соддалашади.

Машқ тариқасида 68- расм бўйича ноэластик тўқнашаётган иккита моддий нуқтанинг ҳаракат миқдорлари нисбатини ва массалари нисбатини аниқланг. Чизмада m_1 ва m_2 массаларнинг тўқнашишдан олдин бирор пайтдаги ҳолатлари муайян масштабда берилган ва ҳаракат йўналишлари кўрсатилган.

26- §. Куч импульси

Ньютоннинг иккинчи қонунини (19- §) қуйидагича ёзиш мумкин:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt, \tag{26.1}$$

ва у шундай ўқилади; *ҳаракат миқдорининг dt вақт ичидаги орттирмаси* $\mathbf{F}$ *кучнинг ўша dt вақт ичидаги импульсига тенг.* $\mathbf{F}dt$ вектор физикавий катталикни dt вақт ичидаги куч импульси дейилади. $\mathbf{F}dt$ куч импульси кучнинг dt вақт оралиғидаги таъсирини характерловчи чексиз кичик катталикдир. Ўзгарувчан кучнинг dt вақт ичидаги эмас, балки $t_2 - t_1$ вақт оралиғидаги таъсирини қараладиган бўлса, у ҳолда бу вақт оралиғини чексиз кичик dt оралиқларга бўлиб чиқиш, ҳар бир dt оралиқ учун $\mathbf{F}dt$ импульсларни аниқлаш ва уларнинг ҳаммасини қўшиб чиқиш лозим. Бундай йиғиндини интеграл дейилади ва маълумки қуйидагича белгиланади:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \mathbf{P}. \tag{26.2}$$

$\mathbf{P}$ вектор катталик $\mathbf{F}$ кучнинг $t_2 - t_1$ вақтдаги импульси. Агар куч катталиги ва йўналиши бўйича доимий бўлса, у ҳолда

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\ (t_2 - t_1), \tag{26.3}$$

яъни куч импульси доимий кучнинг у таъсир қилиб турган вақтга кўпайтмасига тенгдир.

Биз (26.1) тенгликнинг ҳар иккала қисмидан интеграл олишимиз мумкин:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\,(mv) = \int_{t_1}^{t_2} Fat = P. \tag{26.4}$$

Агар жисмнинг t_1 пайтдаги тезлиги v_1 га, t_2 пайтдагиси эса v_2 га тенг бўлса, (26.4) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\,v_2 - m\,v_1 = P. \tag{26.5}$$

Ҳақиқатдан ҳам, $d(mv)$ катталик ҳаракат миқдорининг dt вақт ичидаги чексиз кичик орттирмасидир; агар $t_2 - t_1$ вақт ичидаги бу барча орттирмаларни йиғсак ҳамда қўшсак, у ҳолда аёнки, $t_2 - t_1$ вақт ичидаги $m\,v_2 - m\,v_1$ га тенг орттирмани топамиз.

Шундай қилиб *ҳаракат миқдорининг қандайдир вақт ичидаги орттирмаси таъсир этувчи кучнинг ўша вақт ичидаги импульсига тенг.*

Масалан, 1 Н оғирликдаги тош Ерга тушмоқда. Тошга таъсир қилаётган оғирлик кучининг 5 секунд ичидаги импульси $P = 5$ Н·сек га тенг, тошнинг ҳаракат миқдори ҳам Ерга томон йўналишда шунчага ортди. Демак, 5 секунд ичида тошнинг тезлиги (26.5) формулага кўра ушбуга тенг миқдорда ортди:

$$v_2 - v_1 = \frac{P}{m} = e\frac{5\ \text{Н·сек}}{\frac{1}{9,81}\text{кг}} \approx e \cdot 50\ \text{м/сек},$$

бунда e — пастга вертикал йўналган бирлик вектор. Бу ерда олинган жавоб тош вертикал тушмоқдами ёки парабола бўйича учмоқдами, бунга боғлиқ эмас; фақат 5 секунд давомида унга фақат оғирлик кучигина таъсир қилиб турганлиги муҳимдир. Бу мисолда оғирлиги 1 Н бўлган жисмнинг массаси $\frac{1}{9,8}$ кг эканлигини эсда тутиш лозим.

Ҳаракат миқдорининг орттирмаси таъсир қилувчи кучнинг импульсига аниқ тенг бўлса-да (гап фақат шу куч юзага келтираётган орттирма устида боради), жисмга бошқа кучлар ҳам таъсир қилиб турган ҳолларни назарда тутиб, ҳаракат миқдорининг орттирмаси ва куч импульсини фарқ қилиш лозим. Масалан, ишчи бир жойда турган ҳолда вагонеткани итараётир. Вагонетканинг ҳаракат миқдори орттирмаси, агар ишқаланиш кучини назарга олмасак, ишчининг P куч импульсига тенг. Вагонетка ўз навбатида ишчига $-P$ импульс берди, бироқ ишчида ҳаракат миқдорининг орттирмаси йўқ у ўз жойида қолди.

Импульс бор бўлса-да, ишчига яна бошқа кучлар ҳам таъсир қилиши сабабли орттирма йўқ: ишчига Ер томонидан қўйилган кучлар шу вақт ичида қарама-қарши йўналишда импульс бериб турди. Агар ишчига Ер томонидан кучлар таъсир қилмаганида эди, у ўшандай ҳаракат миқдори олаверарди, шунинг учун ҳам баъзида импульс—жисмга фақат битта муайян импульс таъсир қилганидаги унинг ҳаракат миқдорининг *мумкин бўлган* орттирмасидир, дейишади.

Бироқ биз ҳамма вақт жисмнинг мумкин бўлган ҳаракат миқдори ҳақида эмас, балки *ҳақиқийси* ҳақида ва жисмга таъсир қилувчи *ҳақиқий* куч импульси ҳақида гапирамиз. Шу сабабли бу катталиклар орасида муҳим фарқ бор. Бу шундан иборатки жисмга таъсир қилаётган муайян куч импульсининг мавжудлиги ҳаракат миқдорининг шундай катталикка ортишини билдирмайди.

Жисмга муайян вақт ичида таъсир қилаётган барча кучлар тенг *таъсир этувчисининг импульсини* аниқлаётгандагина ҳаракат миқдорининг орттирмаси (катталиги ва йўналиши жиҳатдан) барча кучлар тенг таъсир этувчисининг ўша вақт ичидаги импульсига тенг, деб ҳисоблаш мумкин. Шу сабабли ҳаракат миқдорининг орттирмаси ва барча кучлар тенг таъсир этувчисининг импульси битта нарсадир, дейиш мумкин.

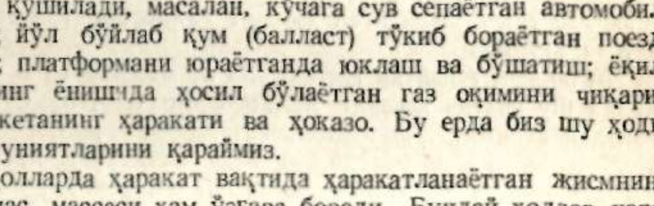
Келгуси параграфда ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни ўзгарувчан массали жисмнинг ҳаракатини таҳлил қилишда татбиқ қилинади.

27-§. Ўзгарувчан массали жисмларнинг ҳаракат қонуни

Шундай ҳодисалар борки, буларда жисмларнинг ҳаракати вақтида уларнинг массалари ўзгара боради. Ҳаракат вақтида жисм ўз массасининг қандайдир қисмини йўқотади, ундан бу жисмни ташкил қилувчи модданинг зарралари ажралади ёки, аксинча, унга янги зарралар қўшилади, масалан, кўчага сув сепаётган автомобилнинг ҳаракати; йўл бўйлаб қум (балласт) тўкиб бораётган поезднинг ҳаракати; платформани юраётганда юклаш ва бўшатиш; ёқилғи ёки порохнинг ёнишида ҳосил бўлаётган газ оқимини чиқариб ташлаётган ракетанинг ҳаракати ва ҳоказо. Бу ерда биз шу ҳодисаларнинг қонуниятларини қараймиз.

Бу барча ҳолларда ҳаракат вақтида ҳаракатланаётган жисмнинг тезлигигина эмас, массаси ҳам ўзгара боради. Бундай ҳоллар ҳаракат механикасининг умумий қонунлари И. В. Мешчерский ва К. Э. Циолковский томонларидан тадқиқ қилинган эди; К. Э. Циолковский уларни реактив космик кеманинг техникавий лойиҳасини ишлашга татбиқ қилди.

Кўчага сув сепаётган автомобилнинг ҳаракатини қарайлик (69-расм). Айтайлик, сув оқими автомобилга нисбатан йўналиши жиҳат-



69- расм.

дан автомобилнинг йўлга нисбатан $\boldsymbol{v}$ тезлигига мос келувчи $\boldsymbol{c}$ доимий тезликка эга бўлсин. Мотор ишлаётганда ғилдиракнинг йўл полосасига тутиниши натижасида автомобилга таъсир қилувчи куч $\boldsymbol{F}$ га тенг ва олдинга йўналган. $\boldsymbol{F}$ куч автомобилга нисбатан ташқи куч бўлиб, у Ер томонидан қўйилгандир. Оқиб чиқиш тезлиги c ва сув чиқариб ташланаётган соплонинг кесим юзи ўзгаришсиз қолса, сув сарфи вақт давомида доимий бўлади.

Ҳар бир секундда чиқариб ташланаётган сув массасини μ орқали белгилайлик; у ҳолда M — автомобилнинг сув билан биргаликдаги массаси — вақт ўтиши билан текис камая боради ва массанинг ўзгариш тезлиги ушбуга тенг бўлади:

$$-\frac{dM}{dt}=\mu, \tag{27.1}$$

ёки массанинг сақланиш қонунини шундай ёзиш мумкин.

$$dM+\mu\,dt=0, \tag{27.2}$$

бунда dM — автомобилнинг сув билан биргаликдаги массасининг dt вақт ичида камайиши ва $\mu\,dt$ — сувнинг dt вақт ичида оқиб чиққан массаси. (27.1) тенгламадаги минус ишора M массанинг камаяётганини билдириш учун қўйилган; сувнинг ҳар секунддаги сарфи μ ни мусбат катталик деб ҳисоблаймиз.

Жисмлар системасига (автомобиль ва чиқариб ташланаётган сувга) ҳаракат миқдорининг ўзгариши ташқи кучлар импульсига тенгдир, деб таърифланадиган ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунини татбиқ қиламиз[1].

Айтайлик, t пайтда автомобиль M массага ва v тазликка эга, у ҳолда шу пайтда ҳаракат миқдори Mv га тенг бўлади. Бирор dt вақтдан кейин, $t+dt$ пайтда, автомобиль массаси $M-\mu\,dt$, унинг тезлиги эса $v+dv$ бўлади; dt вақт ичида чиқариб ташланган сув массаси $\mu\,dt$ ва унинг Ерга нисбатан тезлиги $v+c$ бўлади. У ҳолда $t+dt$ пайтда ҳаракат миқдори қуйидагига тенг бўлади:

$$(M-\mu\,dt)(v+dv)+\mu\,dt(v+c).$$

Кейинги ифодадан Mv ни айирсак, ҳаракат миқдорининг dt вақт ичидаги ўзгаришини оламиз ва уни ташқи кучнинг Fdt импульсига тенглаштирамиз. Иккинчи тартибли $\mu\,dtdv$ чексиз кичик миқдорни ҳисобга олмасак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$Mdv+\mu cdt=Fdt$$

ёки

$$M\frac{dv}{dt}=F-\mu c. \tag{27.3}$$

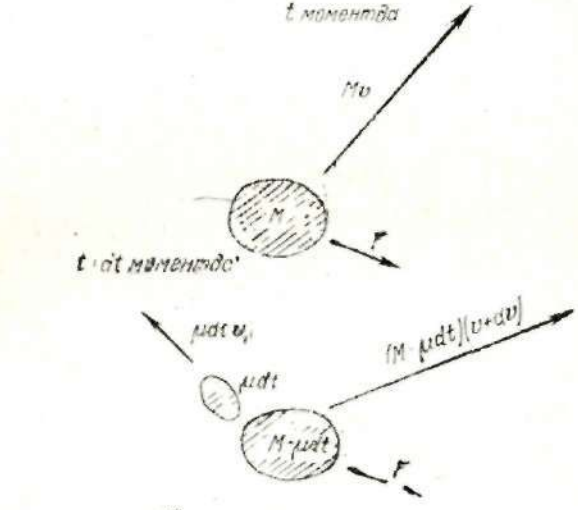
---

[1] Ушбу мисолда барча векторлар битта чизиқ бўйича йўналган. Уларни шу чизиққа проекциялаб, скаляр кўринишдаги ёзувдан фойдаланиш мумкин.

(27.3) тенглама ўз массасининг бир қисмини секундига μ сарф билан олдинга c тезликда чиқариб ташлаётган жисм учун *Мешчерский тенгламасидан* иборатдир. Тенгламани энди шундай ўқиш мумкин: массанинг жисм тезланишига кўпайтмаси таъсир қилувчи F кучдан чиқарилиб ташланувчи массанинг *реактив кучини* айрилганига тенгдир. Бунда чиқариб ташланувчи массанинг реактив кучи масса сар*фи μ ни чиқарилиб ташланувчи зарраларнинг нисбий ҳаракат тез*лиги c га кўпайтмасига тенг.

Реактив куч чиқарилиб ташланувчи зарраларга c тезлик берилиши натижасида юзага келади. Сув зарралари автомобилга нисбатан тинчликда эди, лекин қандайдир куч уларга автомобилга нисбатан тезланиш бериши натижасида улар c тезлик олди. Бу кучга қарама-қарши таъсир этувчи куч, динамиканинг учинчи қонунига кўра автомобилга қўйилган ва чиқариб ташланган сувнинг тезлигига қарама-қарши йўналган: у айнан реактив кучдир.

Жисм ҳар секундда μ массали зарраларни ўзига нисбатан исталганча йўналган $\boldsymbol{c}$ тезлик билан чиқариб ташлаб турса, энг умумий ҳолда, реактив куч $\boldsymbol{f}_{\text{р}} = -\mu \boldsymbol{c}$ бўлишини кўрсатиш мумкин. Шу



70- расм.

исботни келтирайлик. Жисмдан dt вақт ичида $\mu\, dt$ массали зарра ажралади ва ажралгандан кейин Ерга нисбатан $\boldsymbol{v}_1$ тезликка эга бўлади (70- расм). t вақт моментида жисм

$$Mv$$

ҳаракат миқдорига эга эди. Кейинги $t + dt$ вақт моментида қолган жисм

$$(M - \mu\, dt)(\boldsymbol{v} + dv)$$

ҳаракат миқдорига эга бўлади. Шу вақт ичида жисм тезлиги dv га ўзгаради, $\mu\, dt$ ажралган масса қуйидаги ҳаракат миқдорига эга бўлади:

$$\mu\, dt\boldsymbol{v}_1.$$

Демак, бутун система ҳаракат миқдорининг dt вақт ичида ўзгариши қуйидагича бўлади:

$$(M - \mu dt)(\boldsymbol{v} + dv) + \mu\, dt\boldsymbol{v}_1 - Mv = Mdv + \mu\, dt\,(v_1 - \boldsymbol{v}) - \mu\, dtd\boldsymbol{v}.$$

Динамиканинг иккинчи қонунига кўра ҳаракат миқдорининг ўзгариши жисмга ўша вақт ичида таъсир қилиб турган $\boldsymbol{F}$ ташқи кучнинг импульсига тенгдир. Шу сабабли

$$Md\boldsymbol{v} + \mu\, dt\,(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}dt,$$

чунки иккинчи тартибли кичик миқдор $\mu\, dtd\boldsymbol{v}$ ҳадни назарга олмаса бўлади. Тенгликнинг иккала томонини dt га бўлиб, ҳамда μ ли ҳадни ўнгга ўтказиб, ушбуни топамиз:

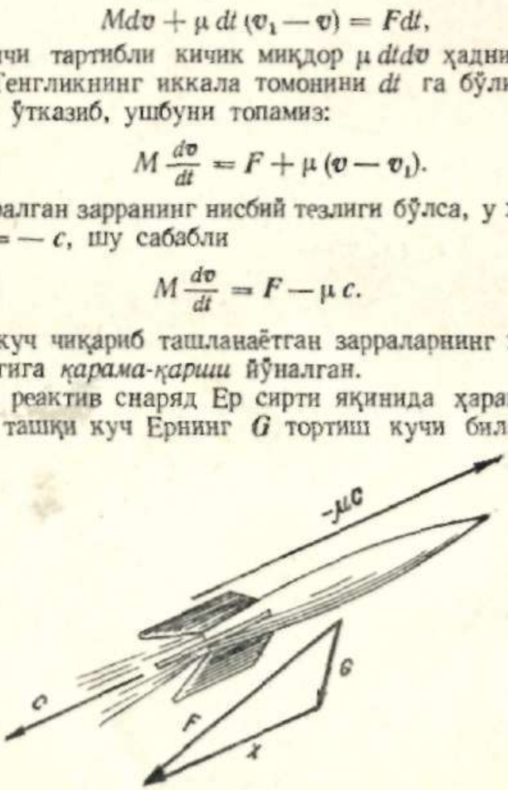
$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \mu\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1).$$

Агар $\boldsymbol{c}$—ажралган зарранинг нисбий тезлиги бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{v}_1$ ёки $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{c}$, шу сабабли

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \mu\, \boldsymbol{c}. \qquad (27.4)$$

Реактив куч чиқариб ташланаётган зарраларнинг жисмдан чиқиб кетиш тезлигига *қарама-қарши* йўналган.

Масалан, реактив снаряд Ер сирти яқинида ҳаракатланаётганда (71- расм) $\boldsymbol{F}$ ташқи куч Ернинг $\boldsymbol{G}$ тортиш кучи билан ҳавонинг $\boldsymbol{X}$



71- расм

қаршилик кучининг йиғиндисидан иборат, снаряднинг тезланиши яна $-\mu c$ реактив кучнинг ҳам катталиги, ҳам йўналишига боғлиқ бўлади. Ҳаракат вақтида реактив кучнинг катталигини ҳамда снарядга нисбатан йўналишини ўзгартириш билан унинг учишини бошқариш мумкин.

Агар биз зарраларнинг чиқариб ташланишини эмас, балки ҳаракатланаётган жисм массасига масса қўшилишини қарасак, (27.4) тенглама μc реактив кучнинг ишораси қарама-қарши бўлиш фарқи билан яна ўринли бўлишини таъкидлаб ўтамиз, яъни

$$M\frac{dv}{dt} = \boldsymbol{F} + \mu \boldsymbol{c}, \qquad (27.5)$$

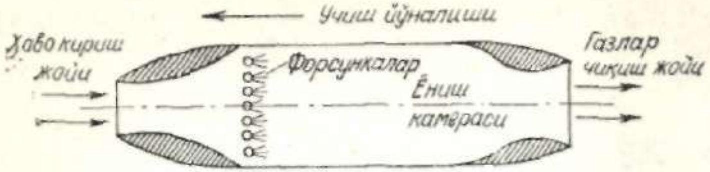
бунда c — қўшилаётган зарраларнинг жисмга нисбатан тезлиги. Ушбу формулани машқ тариқасида чиқаришни тавсия қиламиз.

(27.4) формуладан фойдаланиб, учиш вақтида ўз йўлида ҳаво олиб, уни сиқиб, унда ёқилғини ёқиб ва уни қизиган газлар кўринишида катта тезлик билан орқага чиқариб ташловчи самолёт турбореактив двигателининг (ёки ҳаво реактив двигателнинг) тортиш кучини аниқлаш мумкин. Турбореактив двигателда ҳавони сиқувчи компрессор бор бўлиб, у чиқариб ташланаётган газлар оқими йўлида жойлашган турбина воситасида ҳаракатга келтирилади (72- расм).

72- расм.

Ҳаво-реактив двигателда компрессор ва турбина йўқ. У ўзгарувчан кесимли трубадан иборат бўлиб, унда ёқилғи самолётнинг ҳаракати натижасида сўрилувчи ва сиқилувчи ҳавода ёқилади (73- расм). Ҳаво-реактив двигатель фақат самолёт ҳаракатланаётгандагина тортиш кучи бера олади, ҳолбуки турбореактив двигатель компрессор воситасида ҳавони сўриб олиб, самолёт тўхтаб турганда ҳам тортиш кучи беради.

Равшанки, реактив двигатель бирлик вақтда қанча ҳаво олса, ўшанча чиқариб ташлайди. Айтайлик, самолёт v тезликда учаётган бўлсин, бунда двигатель ҳар секундда $\mu_{\text{ҳ}}$ ҳаво миқдори олади ва чиқариб ташлайди. Двигатель газларни, ҳар секунддаги сарфи $\mu_{\text{ё}}$ бўлган ёниш маҳсулоти билан биргаликда c тезликда чиқариб ташлайди. Атмосферадаги ҳаво тинчликда бўлгани сабабли, ҳаво олаётганда самолётга орқага $\mu_{\text{ҳ}}v$ реактив куч таъсир қилади. Газлар оқимини (ҳаво билан ёниш маҳсулотларини) итариб чиқаришда ол-



13- расм.

динга $(\mu_{ҳ}+\mu_{ё})\,c$ га тенг бўлган реактив куч таъсир қилади. Демак, турбореактив (ёки ҳаво-реактив) двигателнинг олдинга йўналган натижавий реактив кучи қуйидагига тенг:

$$\mu_{ҳ}\,(c-v)+\mu_{ё}\,c.$$

Амалда $\mu_{ё}\ll\mu_{ҳ}$ *бўлади, шунинг учун* турбореактив ёки ҳаво-раектив двигателнинг реактив кучини тақрибан етарлича аниқлик билан қуйидагига тенг дейиш мумкин:

$$\mu_{ҳ}\,(c-v).$$

Бундай двигателли самолётнинг ҳаракатини, агар ёқилғининг ёниши ҳисобга олинмаса, тақрибан доимий массали жисмнинг ҳаракати деб қараш мумкин. Кейинги ифодадан кўриниб турибдики, *тортиш кучи ҳосил қилиш* учун учиб чиқувчи зарраларнинг c тезлиги самолётнинг учиш тезлиги v дан катта бўлиши лозим. Двигателнинг тортиш кучини орттириш учун учиб чиқувчи газларнинг тезлигини ҳам, ҳавонинг двигателда сарфини ҳам орттириш лозим. Двигателда қандай мураккаб процесслар: ҳаво олиш, компрессорнинг ишлаши, ёнилғининг ёниши, газ турбинанинг ишлаши ва ҳоказо содир бўлмасин, тортиш кучини аниқлаш учун фақат иккита катталикни: $\mu_{ҳ}$ ни ва c тезликни билиш лозим.

Тортиш кучини яна шундай баҳолаш мумкин: ҳар секундда $\mu_{ҳ}$ ҳаво массаси самолёт томонидан қўйилган кучлар таъсирида Ерга нисбатан $\mu_{ҳ}(c-v)$ ҳаракат миқдори олади. Демак, ҳаракат миқдорининг *сақланиш қонунига кўра самолётнинг* Ерга нисбатан ҳаракат миқдори ҳам бир секундда шундай катталикка ортиши лозим; шу сабабли $\mu_{ҳ}(c-v)$ — реактив двигатель тортиш кучининг бир секунддаги импульсига, бир секунддаги куч импульси эса кучнинг *ўзига тенгдир.*

Барча баён қилинганлар ҳаво ўрнига сув сўрадиган ва чиқариб ташлайдиган исталган сувда ишлайдиган реактив двигателга ҳам хосдир.

Порох ёки суюқлик билан ишлайдиган *ракета* двигатели учун манзара бошқача бўлади. Бу ҳолда ёқилғи ҳам, оксидловчи ҳам учувчи аппаратда жойлашгани сабабли, двигатель ўрнатилган аппаратнинг учиш тезлиги қандай бўлишидан қатъи назар, ракета двигателининг тортиш кучи ҳамма вақт — $\mu\,c$ га тенг бўлади; тортиш кучи атроф-муҳитга боғлиқ бўлмай, бўшлиқда учишда ҳам мавжуд бўлаверади.

Ракета тезлигининг вақтга боғлиқлигини ва унинг масса билан боғланишини ҳаракат фақат реактив куч таъсирида юз берадиган ҳол учун (27.4) формуладан чиқариш мумкин. Айтайлик, бошланғич пайтда ракетанинг массаси M_0 бўлсин; у ҳолда t вақт моментида $M = M_0 - \mu t$ бўлади. (27.4) формулага кўра ракетадан отилиб чиқувчи газларнинг c тезлиги ҳамма вақт траекторияга уринма бўйича орқага йўналганлигини ҳисобга олиб ушбуни ёзиш мумкин:

$$M\frac{dv}{dt} = \mu c, \text{ ёки } (M_0 - \mu t)dv = \mu c dt. \qquad (27.6)$$

Агар охирги тенгламани қуйидаги тарзда кўчириб ёзсак:

$$\frac{dv}{c} = \frac{\mu\, dt}{M_0 - \mu t},$$

бунинг ўнг ва чап томонларини интеграллаш осон:

$$\frac{1}{c}(v - v_0) = \int_0^t \frac{\mu\, dt}{M_0 - \mu t} = \ln M_0 - \ln(M_0 - \mu t) = \ln\frac{M_0}{M_0 - \mu t} = \ln\frac{M_0}{M}.$$

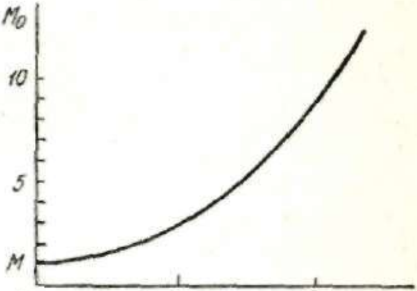
Бундан

$$v - v_0 = -c\ln\left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right)$$

ва

$$M_0 = M \exp\left(\frac{v - v_0}{c}\right). \qquad (27.7)$$

Бу Циолковский формуласининг айнан ўзидир. Кейинги формуланинг графиги 74- расмда кўрсатилган. Агар M массага v тезлик бериш керак бўлса, у ҳолда ракетанинг бошланғич массаси бошланғич тезлик v_0 бўлганда (хусусан, нолга тенг бўлиши ҳам мумкин) M_0 га тенг бўлиши керак. Мўлжалланган тезлик v нинг ортиши билан M_0 бошланғич масса экспоненциал ўса боради. $(v - v_0) \gg c$ да M_0/M нисбат жуда катта бўлади. Мана шу 10 км/сек тартибидаги тезликларга эришадиган космик ракеталарни ясашда асосий техникавий қийинчиликларни юзага келтиради. Отилиб чиқувчи газларнинг тезлигини ошириш бошланғич массани анчагина камайтиришга



74- расм.

имкон беради ва бу билан конструкторларнинг вазифаси енгиллашади.

Ракета атмосферанинг зич қатламларида ҳаракатланаётганда ҳавонинг қаршилик кучларини енгишга тўғри келганидан, ракетанинг бошланғич массаси юқорида ҳисобланганидан янада каттароқ бўлиши лозим; бироқ агар ракета атмосферанинг зич қатламларини қаршилик кучлари нисбатан кичик бўладиган унча катта бўлмаган тезликларда ўтаётган бўлса, у ҳолда M_0 массанинг тегишли ортиши оз бўлади.

IV БОБ

ИШ ВА ЭНЕРГИЯ

28- §. Энергия ҳақида тушунча

Ҳаракат миқдорини жисм механикавий ҳаракатининг муайян ўлчови дейиш мумкин. Бироқ бундай ўлчов жисм ҳаракатининг ўзгаришларини баҳолашга ҳамма ҳолларда ҳам яроқли бўлавермайди. Масалан, бир-бирига томон учиб келаётган иккита бирдай шарнинг тўлиқ ноэластик урилишида ҳаракатнинг «йўқолиши» содир бўлади. Урилишгача шарлар ҳаракатланаётган эди, ҳаракатга эга эди, урилишдан сўнг шарлар тинч ҳолатда, улар ҳаракатга эга эмас. Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни ўз кучида: урилишгача шарлар бир-бирига тенг ва қарама-қарши йўналган ҳаракат миқдорларига эга эди, системанинг ҳаракат миқдори нолга тенг эди ва урилишдан кейин ҳам ҳаракат миқдори нолга тенглигича қолди. Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини битта шарга татбиқ қилиш мумкин эмас, чунки зарба пайтида унга ташқи куч—иккинчи шарнинг босим кучи таъсир қилиб туради.

Иккала шарнинг ҳолати урилишдан кейин принципиал ўзгарди: шарлар ҳаракатда эди, механикавий ҳаракатга эга эди; урилишдан кейин тинч ҳолат юзага келди, ҳар бир шарнинг ҳаракати тўхтади, шарлар ҳаракатларини йўқотди ва бундан ташқари, тажрибаларнинг кўрсатишича, урилишдан кейин ҳар бир шарнинг температураси кўтарилди. Демак, ҳаракат миқдори (ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни) ушбу ҳолда жисм механикавий ҳолати ўзгаришининг ўлчови бўла олмайди. Шарларнинг урилишда исиб қолганликлари принципиал аҳамиятга эга; шарларнинг механикавий ҳаракати «йўқолди», лекин унинг ўрнига материя ҳаракатининг янги шакли—иссиқлик вужудга келди. Тажрибалар иккита шарнинг урилиши натижасида ҳосил бўладиган иссиқлик миқдори шарларнинг ҳар бири урилишгача эга бўлган ҳаракат миқдорларининг йиғиндисига пропорционал эмаслигини кўрсатди. Бундай таққослаш ҳам мумкин эмас: ҳаракат миқдори—вектор катталик ва иккала шар ҳаракат миқдорларининг вектор йиғиндиси нолга тенг. *Иссиқлик миқдори—скаляр катталик, бинобарин,* шарлар ҳаракат миқдорлари модуллари йиғиндисини ҳосил бўлган иссиқлик миқдори билан таққослаш лозим. Лекин тажрибанинг кўрсатишича, шарлар ҳаракат миқдорлари модуллари йиғиндиси ҳам олинган иссиқлик миқдорига пропорционал бўлмайди. Демак, жисм механикавий ҳаракатининг, ҳаракат миқдоридан ташқари, айниқса, жисмнинг механикавий ҳаракати материя ҳаракатининг бошқа кўринишларига айланиши юз берадиган ҳолларда зарур бўладиган бошқа ўлчови бўлиши зарур.

Барча ҳолларда яроқли бўлган шундай ўлчов *энергиядир.* Материянинг барча ўзгаришларида энергия ўзгаришсиз қолади. Материянинг ҳаракати абадий бўлганидан, *энергия—материя ҳаракатининг бу ҳаракатнинг барча шаклларидаги миқдорий ўлчовидир.*

Ҳаракатланаётган жисмнинг энергияси унинг механикавий ҳаракатини ва бошқа шакллардаги ҳаракатини характерловчи бошқа физикавий катталиклар билан миқдорий қандай боғланганлиги ҳақидаги биз учун принципиал бўлган масала фанда узил-кесил тахминан юз йилча муқаддам ойдинлаштирилган эди. Шундан сўнг энергиянинг сақланиш қонуни табиатнинг *асосий* қонуни бўлиб қолди.

Механикавий ҳаракатнинг энергияси ўлчови ҳақида гапиришдан олдин, механикавий ҳаракатни ва энергияни бир жисмдан иккинчисига узатишда муҳим роль ўйнайдиган муҳим физикавий катталик—*иш* устида тўхтаб ўтиш лозим.

29- §. Иш ва энергия

Куч таъсири мавжуд, лекин ҳаракат миқдорининг ўзгариши бўлмаган ҳолларга иккита мисол қарайлик. Биринчи мисол: жисм столда ётипти. Иккинчи мисол: паровоз тўғри йўлда вагонларни текис доимий тезлик билан тортиб бормоқда. Биринчи ҳолда ҳам, иккинчи ҳолда ҳам жисм ва вагонларга ташқи куч: биринчи ҳолда тинч ҳолатдаги жисмга тортишиш кучи, иккинчи ҳолда—паровознинг тортиш кучи вагонларга бирор вақт таъсир қилади. Иккала мисолда ҳам ҳаракат миқдорининг ўзгариши содир бўлмайди: жисм тинч турибди, вагонлар эса ўз ҳаракатини доимий тезлик билан давом эттирмоқда. Иккала ҳолда нима учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши юз бермаётганлиги бизга аён: жисм ва вагонларга бошқа кучлар таъсир қилмоқда ҳамда ҳар бир ҳолда барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг.

Бироқ бу иккита мисолда баён қилинган ҳодисаларда принципиал фарқ бор. Биринчисида, жисм столда ётганда, унга куч доимий таъсир қилади, лекин бунда на жисмнинг ўзида, на жисм атрофидаги жисмларда ҳеч қандай ўзгариш юз бермайди. Иккинчисида—куч аввалгидек доим таъсир қилиб туради, шунингдек, ҳаракат миқдорининг ўзгариши юз бермайди, лекин бунда кучнинг таъсири атроф жисмлардаги муайян, анча мураккаб процесслар билан боғлиқдир. Жисмга оғирлик кучи таъсир қилиши учун куч таъсирини келтириб чиқараётган Ер ҳеч қандай ўзгаришларга учрамаслиги лозим. Паровознинг кучи вагонларга таъсир қилиши учун қозондаги буғнинг муайян босими ва бу буғнинг муайян сарфи мавжуд бўлиши, ёқилғи ва сув узлуксиз сарфланиши лозим. Тортиш кучи ҳосил қилиши учун паровозга муайян миқдор энергия бериш лозим бўлиб, у ёқилғининг ёнишидан ҳосил бўлади. Бу ҳолда тортиш кучининг узлуксиз таъсири атроф жисмлардаги бир қатор мураккаб процесслар билан боғлиқдир.

Аммо бу иккита мисолда баён қилинган ҳодисалар орасида механика нуқтаи назаридан қандай фарқ бор? Фарқ шундаки, биринчи ҳолда кучнинг қўйилиш *нуқтаси тинч ҳолатда бўлади*, иккинчисида кучнинг (тортиш кучининг) қўйилиш нуқтаси бирор тезлик билан *ҳаракатланади*. Тажрибанинг кўрсатишича, бирор вақт ичида паровозда ёқилган ёқилғининг миқдори бошқа бирдай шароитларда тортиш кучининг ўша вақт ичида паровоз ўтган йўлга кўпайтмасига пропорционалдир. Шу сабобли шунга ўхшаш барча ҳодисаларда *иш* деб аталувчи ва *кучнинг йўлга кўпайтмаси билан ўлчанувчи* физикавий катталик муҳим роль ўйнайди; иш ҳаракатни (умумий маънода) куч воситасида бир жисмдан бошқа жисмга узатиш ўлчови хизматини бажаради.

Шундай қилиб, иш бир жисмдан бошқа жисмга ҳаракатни узатиш ўлчовидир ёки энергиянинг бир жисмдан бошқа жисмга ўтиш ўлчовидир. Ф. Энгельс таърифига кўра, «...иш — миқдорий жиҳатдан қаралганда, ҳаракат формасининг ўзгаришидир»[1].

Материалистик фалсафанинг асосий қонунларидан келиб чиқишича, материянинг ҳаракати абадийдир, фақат материянинг ҳаракат шаклларигина турли-тумандир. Табиатда ҳаракатнинг бир шаклдан бошқасига ўтиб туриши юз берадиган процесслар узлуксиз бўлиб туради. Демак, материя ҳаракатининг барча ҳодисалар учун умумий, материя ҳаракатининг барча шакллари учун бирдай бўлган ўлчови мавжуддир; берилган жисмнинг (ёки жисмлар системасининг) *энергияси*, аввал айтилганидек, шундай ўлчовдир.

Қадимги файласуфлароқ, материя ҳаракатининг йўқолмаслиги ҳақидаги фикрни олға сурган эдилар ва бу фикр Р. Декарт, М. В. Ломоносов ва бошқалар каби кейинги замон буюк ақл эгаларининг фалсафий таълимотларига асос бўлди. Бироқ фақат XIX асрдагина *энергиянинг сақланиш қонуни* номини олган универсал қонун барча олимлар, биринчи навбатда физиклар томонидан табиатнинг асосий қонуни сифатида тан олинди.

Ҳар бир жисм ёки жисмлар системаси муайян энергия запасига эгадир. Барча процесслар ва ҳодисаларда энергия бир жисмдан бошқа жисмга ёки жисмнинг бир қисмидан бошқа қисмига ўтади. Физикада жисм (материя) ҳаракатининг шакллари турли-туман (механикавий,

---

[1] Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1965, 78- бет.

иссиқлик, электромагнит ҳаракат шакллари ва бошқа) бўлиши мумкин, бироқ *энергия — барча шаклларда намоён бўлувчи материя ҳаракатининг ягона миқдорий ўлчовидир*.

Бир табиат ҳодисаларида материя ҳаракатининг шакли ўзгармайди: иссиқ жисм совуқ жисмни иситади, юқорига отилган тош юқорига учади, сўнгра Ерга тушади ва ҳоказо. Бошқаларида бир ҳаракат шаклидан бошқасига ўтиш юз беради: ўқ тахта деворга урилади ва исиб, унда тиқилиб қолади — механикавий ҳаракат материя ҳаракатининг иссиқлик шаклига айланади; паровоз вагонларни судраб бормоқда — кўмирнинг ёниши натижасида вужудга келувчи иссиқлик шаклидаги ҳаракат механикавий шаклдаги ҳаракатга айланади; шарча столда думалаб бориб, тўхтайди — механикавий шакл иссиқлик шаклга айланди ва ҳоказо. Лекин бу барча ҳолларда бошқа жисмга узатилган энергия миқдори (у ёки бу шаклда) иккинчи жисм олган энергия миқдорига аниқ тенгдир.

Одатда: «механикавий энергия», «иссиқлик энергия», «электромагнит энергия» ва ҳоказо дейишади; буни берилган жисмнинг механикавий шаклдаги ҳаракатига мос келган энергия катталиги, иссиқлик шаклидаги ҳаракатга мос келган энергия катталиги ва ҳоказо деб тушуниш лозим. Энергиянинг турли хили йўқ: материя ҳаракатининг турлича шакллари мавжуддир, энергия материя ҳаракатининг ягона ўлчовидир. Фақат қисқалик мақсадидагина, юқорида кўрсатилганидек «механикавий энергия», «иссиқлик энергия» ва ҳоказо ҳақида гапирамиз.

Биз фақат ҳаракатнинг механикавий шакли ёки ҳаракатнинг механикавий шаклидан бирор бошқасига, ё аксинча, ўтиш юз берадиган ҳодиса ва процесслар билан иш кўрган ҳолларимизда биз олдин қараган катталик — кучнинг йўлга (кучнинг қўйилиш нуқтасининг кўчишига) кўпайтмаси билан ўлчанадиган иш — узатилган энергия миқдорининг ўлчови бўлади. Шу сабабли энергиянинг асосий бирлигини иш бирлигига тенг қилиб олинади.

СИ системада иш ва энергия бирлиги учун 1 ньютон кучнинг 1 метр йўлда бажарадиган ишига тенг бўлган катталик — 1 жоуль (Ж) олинади. СГС физикавий системада иш ва энергия бирлиги учун 1 дина кучнинг 1 сантиметр йўлда бажарадиган ишига тенг бўлган катталик — 1 эрг олинади.

$$1\ \text{Ж} = 10^7\ \text{эрг}$$

эканлигини осон ҳисоблаб топиш мумкин.

30- §. Кучнинг иши

Куч ҳаракатланаётган жисмга таъсир қилаётган бўлса, ҳамда куч ва ҳаракат тезлиги йўналишлари мос тушса, энергиянинг куч таъсири келиб чиқаётган жисмдан куч таъсири қўйилган жисмга ўтиши юз беради. Бу ҳолда кучнинг ишини *мусбат* ҳисобланади. Ишнинг мусбат қиймати энергиянинг «ҳаракатлантирувчи» жисмдан «ҳаракатлантирилувчи» жисмга ўтишига мос келади. Агар куч ва кўчиш йўналишлари қарама-қарши бўлса, у ҳолда энергия, аксинча, куч таъсири келиб чиқаётган жисмга ўтади. Бу ҳолда кучнинг ишини *манфий* ҳисобланади.

Кучнинг ва кўчишнинг йўналишлари турлича бўлганида ишнинг катталиги кучнинг кўчиш йўналишига проекциясининг кўчиш катталигига кўпайтмасига тенгдир ёки иш катталиги куч векторининг кўчиш векторига *скаляр кўпайтмайсига* тенгдир.

Масалан, 1 жисм 2 жисмга $\boldsymbol{F}_{21}$ *куч билан таъсир қилиб, 2 жисм* dS_2 га кўчган бўлса, у ҳолда *1* жисм *2* жисм устида

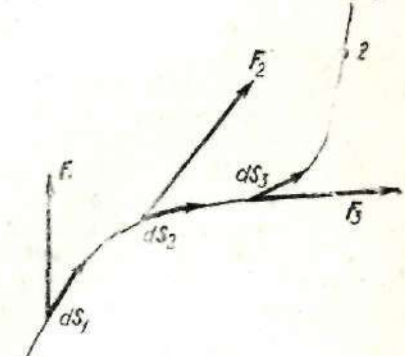
$$dA = \boldsymbol{F}_{21}\, dS_2 \qquad (30.1)$$

катталикда ёки куч векторининг йўл векторига скаляр кўпайтмасига тенг иш бажарган. Агар $dA > 0$ бўлса, бу *1* жисмнинг *2* жисмга энергия узатганини, агар $dA < 0$ бўлса, *2* жисм *1* жисмга энергия узатганини билдиради. Агар кўчиш $d\boldsymbol{S}_2$ куч $\boldsymbol{F}_{21}$ га тик бўлса, у ҳолда $dA = 0$ бўлади, жисмлар орасида энергия алмашинуви содир бўлмайди. Ишни фақат кучнинг кўчиш бўйича ташкил этувчисигина бажаради; шу сабабли ишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dA = F_{21} dS_2 \cos\alpha, \qquad (30.2)$$

бунда α — куч F_{21} билан dS_2 кўчиш йўналиши орасидаги бурчак.

Агар куч бутун йўл давомида ҳам катталиги, ҳам йўналиши жиҳатдан ўзгара борса, у ҳолда йўлнинг ҳар бир чексиз кичик dS участкасида $dA = FdS$ га тенг бўлган элементар ишни ҳисоблаб, сўнгра йўлнинг бутун участкалари бўйича, масалан, *1* нуқтадан *2* нуқтагача барча элементар ишлар қийматларини жамлаш лозим (75- расм). Бошқача айтганда, $\boldsymbol{F}$ ни $d\boldsymbol{S}$ бўйича *1* нуқтадан *2* нуқтагача интеграллаш лозим.



75- расм.

Шундай қилиб, $\boldsymbol{F}$ кучнинг йўл бўйлаб *1* ва *2* нуқталар орасидаги ишни қуйидагича белгиланади:

$$A = \int_1^2 dA = \int_2^1 FdS. \qquad (30.3)$$

Муайян конкрет ҳолда A катталикнинг қиймати қандай топилади? Бу саволга F нинг йўл бўйича ўзгариши маълум бўлгандан кейингина жавоб бериш мумкин.

31- §. Деформация потенциал энергияси

Жисм бирор ташқи куч таъсирида деформацияланаётганида деформацияловчи кучнинг қўйилиш нуқтаси кўчади ва куч таъсири келиб чиқаётган система иш бажариб, бу иш деформацияланувчи жисмга ўтган энергиянинг ўлчови бўлади. Агар *эластик жисм* деформацияланса, у ҳолда иш деформацияланган жисмнинг энергия запасини оширишга сарфланиб, бу энергияни *деформация потенциал энергияси* дейилади.

Ҳақиқатдан ҳам, эластик жисм учун деформация катталиклари билан кучлар, деформациянинг ўзгариш йўналишидан қатъи назар, бир қийматли боғланган. Масалан, жисмни деформациялаётганда, уни dS катталикка сиқиб, биз $dA = FdS$ га тенг энергия сарфладик. Агар жисмга, аксинча, dS катталикка кенгайишга имкон берсак, *бу ҳолда у бу участкада ўшандай катталикдаги, лекин қарама-қарши йўналишли* F куч билан таъсир қилади ҳамда ўшандай dA катталикда иш бажаради. Бунда у деформация энергиясини сиқилган жисмнинг кенгайишида сиқилган жисм таъсир қилган жисмга узатади. Равшанки, эластик жисмнинг деформация потенциал энергияси тўла ишга айлантирилиши мумкин.

Одатда, деформация катталиги таъсир қилувчи кучнинг катталиги билан қонуний боғлангандир; кучнинг катталиги деформациянинг ўзгариши билан ўзгара боради ҳамда кучнинг ўзгарувчанлиги ва кучнинг қўйилиш нуқтаси босиб ўтган кўчишга боғлиқлиги туфайли, ишнинг катталиги кучнинг йўлга кўпайтмасига тенг бўлмайди. Деформация таъсир қилувчи кучга пропорционал бўлган ҳолда берилган деформацияни вужудга келтириш учун бажариш керак бўлган ишни осон ҳисоблаб топиш мумкин. Айтайлик, берилган пружина учун

$$F = kx \qquad (31.1)$$

бўлсин, бунда F — пружинага қўйилган куч, x — шу куч таъсирида пружинанинг узайиши, k — пружинанинг *қаттиқлик коэффициенти* (ёки содда қилиб айтганда *қаттиқлиги*) деб аталувчи доимий коэффициент (76- расм). k коэффициент Н/м ўлчамликка эга ва сон жиҳатдан, пружинани бирлик узунликка дефор-

76- расм.

мациялаш учун зарур бўлган кучга тенг. Пружинани x узайишдан $x+dx$ узайишгача чўзиш учун бажариш зарур бўлган иш, равшанки, Fdx га, ёки $kx\,dx$ га тенг. Демак. $x=0$ дан $x=x_0$ гача чўзишдаги тўла иш қуйидагига тенг:

$$A=\int_0^{x_0} Fdx=k\int_0^{x_0} xdx=\frac{1}{2}kx_0^2. \qquad (31.2)$$

бу иш x_0 *катталикка чўзилган (ёки сиқилган)* ва k *қаттиқликка* эга бўлган пружинанинг потенциал энергиясига тенг.

Сиқилган пружинанинг кучини бирор бошқа жисмга таъсир қилдирилса, у ҳаракатланади ва бунда пружина ёйила боради. Идеал эластик пружина ҳолида унинг таъсир кучи (31. 1) тенглик билан белгилангани сабабли пружинанинг ёйилишда бажарадиган иши уни сиқишда сарфланган ишга тенг бўлади; сиқилган пружинанинг энергияси пружина ёйилаётганда таъсир қиладиган жисмга тўла ўтади.

32- §. Жисмнинг кинетик энергияси

Куч жисмга таъсир қилиб, жисм шу куч таъсирида ҳаракатланганда кучнинг қўйилиш нуқтаси кўчади, куч таъсири келиб чиқаётган система иш бажариб, ҳаракатланаётган жисмнинг энергияси бажарилган иш катталигича ортади. Ҳар қандай ҳаракаланаётган жисм материя ҳаракатининг энг содда шаклидан иборатдир; ҳаракатнинг бирор энергия запаси бу ҳаракатнинг ўлчови бўлиб, уни кинетик *энергия дейилади*.

Жисмнинг кинетик энергияси катталигини ёки ҳаракат энергиясини жисмнинг ушбу ҳаракатини юзага келтириш учун бажарилиши зарур бўлган иш катталиги бўйича аниқлаш мумкин. Айтайлик, $\mathbf{F}$ куч m массали жисмга таъсир қилсин ва унинг тинчлик ҳолатидан v_0 тезликли ҳаракатини юзага келтирсин; у ҳолда $\mathbf{F}$ кучнинг жисм ўз тезлигини нолдан v_0 қийматгача ўстиришида бутун босиб ўтган йўлдаги иши жисм кинетик энергиясининг ошишига кетади. Динамиканинг иккинчи қонунига кўра,

$$m\frac{dv}{dt}=\mathbf{F}, \qquad (32.1)$$

тенгликнинг ҳар иккала томонини жисм ўтган йўл орттирмаси dS га кўпайтирамиз:

$$m\frac{dv}{dt}dS=FdS=dA. \qquad (32.2)$$

$v=\frac{dS}{dt}$ эканлигини эсласак, у ҳолда (32.2) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин бўлади:

$$mv\,dv=FdS. \qquad (32.3)$$

Бу тенгликда $\boldsymbol{v}$ векторнинг $d\boldsymbol{v}$ векторга скаляр кўпайтмаси ёки $v\,dv\cos\alpha$ турибди. $dv\cos\alpha = dv_S$ катталик тезлик орттирмасининг тезлик йўналишига (жисм траекториясига урунма йўналишига) ёки берилган жойда $d\boldsymbol{S}$ вектор йўналишига проекциясидир. Демак, dv_S тезлик вектори модулининг dt вақт ичидаги ортишидир. Шу сабабли (32.3) тенгликни шундай ёзиш мумкин:

$$mvdv_S = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S}. \qquad (32.4)$$

Энди (32.4) тенгликнинг ўнг ва чап томонларини тезликнинг нолдан v_0 гача ўсиши бўйича интеграллаймиз:

$$m\int_0^{v_0} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \int_0^t \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S} = A, \quad A = \frac{mv_0^2}{2}, \qquad (32.5)$$

Шундай қилиб, v_0 тезлик билан ҳаракатланаётган m массали жисм учун кинетик энергия қуйидагига тенг:

$$\frac{mv^2}{2}.$$

$\boldsymbol{F}$ куч таъсири келиб чиқаётган, жисмни ҳаракатлантирувчи система иш *бажаради*; у жисмга бирор энергия узатади. Аксинча, тезликка эга бўлган жисм секинланса ёки тўхтаса, уни тормозловчи куч ҳам иш бажаради, лекин бунда иш манфийдир (кўчиш ва куч қарама-қарши йўналган), тормозловчи жисм ҳаракатланаётган жисм кинетик энергиясининг камайишига тенг энергия олди. Ҳаракатланаётган жисм уни тормозлаган жисмга энергия *узатди*. Кинетик энергия қайси кўринишга айланганлиги — бу физикавий шароитларга боғлиқдир.

Масалан, ўқ тахта деворга урилади ва унда қадалиб қолади, тахта кучли туртки олади ва ҳаракатлана бошлайди. Ўқнинг кинетик энергияси бу ҳолда иссиқликка ҳамда тахтанинг ўқ урилгандан кейинги ҳаракати кинетик энергиясига айланади. Ўқнинг бундай урилиши ноэластик урилишга мисол бўлади. Ноэластик урилишда кинетик энергиянинг бир қисми иссиқлик энергиясига айланади. Тўлиқ ноэластик урилишда, агар иккала жисм урилишдан кейин ҳаракатсиз қолса, бутун кинетик энергия иссиқликка айланади.

33- §. Иккита жисмнинг тўлиқ ноэластик урилиши

$\boldsymbol{v}_1$ тезликда ҳаракатланаётган m_1 массали жисм $\boldsymbol{v}_2$ тезликда ҳаракатланаётган m_2 массали жисмга урилади. Агар урилишдан кейин иккала жисм бирдай $\boldsymbol{v}$ тезликка эга бўлса, у ҳолда бундай урилишни *тўлиқ ноэластик урилиш дейилади*[1]. Жисмларнинг тўлиқ

---

[1] «Тўлиқ ноэластик жисмларнинг урилиши» дейиш тўғрироқ бўларди, лекин урилишни юқоридагидек қисқача номлаш одат бўлган.

ноэластик урилишидан сўнг $\mathbf{v}$ ҳаракат тезлигини 25- § да кўрсатилганидек, ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни асосида аниқлаш мумкин. Урилишдан кейин тезлик катталиги ва йўналиши бўйича (25.3) формулага кўра қуйидагига тенг:

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \tag{33.1}$$

бунда $\mathbf{v}_1$ ва $\mathbf{v}_2$— тегишлича m_1 ва m_2 массаларга эга бўлган жисмларнинг урилишгача тезликлари. Жисмларнинг урилишдан кейинги энергиялари қуйидаги катталикка тенг бўлади[1].

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)v^2 = \frac{(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}\,. \tag{33.2}$$

Урилишгача эса иккала жисмнинг кинетик энергияси қуйидагига тенг эди:

$$E_{\text{б}} = \frac{1}{2}\,m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2v_2^2. \tag{33.3}$$

Механикавий энергиянинг «йўқолиши»ни ёки энергиянинг урилиш вақтида иссиқликка айланган қисмини аниқлаймиз; (33.3) тенгликдан (33.2) ни айирайлик:

$$\begin{aligned} E_{\text{б}} - E_{\text{к}} &= \frac{1}{2}\,m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2v_2^2 - \frac{(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\,(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \end{aligned} \tag{33.4}$$

$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ катталик жисмларнинг урилишгача бўлган ҳаракатининг нисбий тезлигидан иборат. Шу сабабли иссиқликка айланган энергия урилувчи жисмлар массалари муносабати $\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ га ва уларнинг урилишгача нисбий ҳаракати тезликларига боғлиқдир. «Йўқолиш» энергиясини $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ нисбий тезлик билан ҳаракатланаётган бирор

$$m_0 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

эффектив массанинг кинетик энергияси сифатида қараш мумкин. Бундай кўринишдаги тўлиқ ноэластик урилишда механикавий энергиянинг «йўқолишини» аниқлаш формуласи хотирада осон сақланади ва таҳлил қилиш ҳамда ҳисоблаш учун қулайдир.

Масалан, жисмлардан бири иккинчисига нисбатан жуда катта ($m_2 \gg m_1$) бўлса, у ҳолда

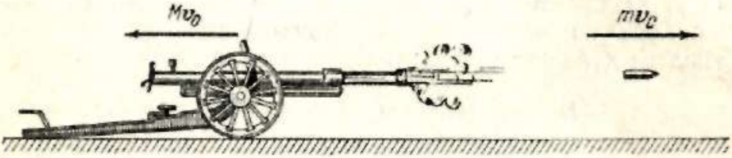
$$m_0 = \frac{m_1}{1 + (m_1/m_2)} \approx m_1$$

ҳамда механикавий энергиянинг йўқолишлари кичик жисмнинг нисбий ҳаракати кинетик энергиясига тенг.

---

[1] $\mathbf{v}^2 = v^2$ эканини эслатиб ўтамиз.

Ҳаракатланаётган танк (ёки самолёт) бронига тегиб, портламаган снаряднинг урилиши ва унда қадалиб қолишида ажралган иссиқлик миқдори амалда снаряднинг кинетик энергиясига тенг бўлади. Снаряднинг кинетик энергиясини ҳисоблаётганда унинг бронга нисбатан тезлигини олиш лозим.



77- расм.

Маҳкам тираб қўйилмаган тўпдан отишда (77- расм) ёки снаряднинг портлашида ва ҳоказода юз берадиган механикавий ҳодисалар *ноэластик урилишдаги ҳодисаларга ўхшаш бўлса-да, процессларнинг* ўтиш йўналиши турличадир. Бу ҳолларда иккита (ёки ундан кўп) жисм портлашга қадар бирдай тезликка ва бирор кинетик энергияга эга эди. Заряд портлаган пайтда снаряд ва тўп порох газларининг босими остида турли тезлик олади ва бирор миқдор кинетик энергияга эга бўлади. Агар снаряд ва тўпнинг массалари, отишгача тезлик ва отилиш натижасида олинган механикавий энергия миқдори маълум бўлса, у ҳолда энергиянинг сақланиш қонуни ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни асосида снаряд ва тўпнинг отилишдан кейинги тезликларини ҳисоблаш мумкин.

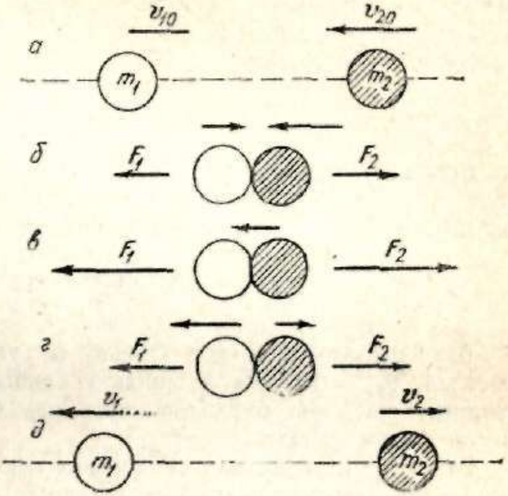
34- §. Эластик урилиш

Иккита жисмнинг, масалан, суякдан ёки қаттиқ тобланган пўлатдан ясалган шарчаларнинг эластик урилишида шарчаларнинг эластик деформацияси юз беради, урилувчи жисмларнинг тегиш сиртлари босилади ва шарчаларнинг деформацияси туфайли юзага келган *босим кучи уларнинг тезликларини ўзгартиради.*

Эластик яхлит жисмларнинг урилишида юзага келадиган ҳодисаларнинг таҳлили жуда мураккаб бўлгани сабабли даставвал энг содда ҳолни — иккита бир жинсли шарнинг *марказий урилишини* қараймиз. Марказий урилиш шундай урилишки, бунда урилувчи шарларнинг урилишгача бўлган тезликлари шарлар марказларини туташтирувчи чизиқ бўйича йўналган бўлади (78- *а* расм).

Урилиш процесси тахминан қуйидаги тарзда юз беради. Шарлар бир-бирига яқинлашаётганида (78- *б* расм) уларга таъсир қилувчи кучлар (F_1 ва F_2) деформация ортиши билан, ҳар иккала шарнинг тезликлари тенглашгунча (78- *в* расм), орта боради. Шу пайтда *деформациялар максимумга эришади, сўнгра улар камая бошлайди;*

бунда деформация кучлари шарларни улар ажралишгунча итаради (78- *г* расм); сўнгра шарлар турли тезликлар билан ҳаракатланади (78- *д* расм).



78- расм.

Шарларнинг урилишдаги деформацияларининг батафсил таҳлили жуда мураккаб масаладир. Бироқ шарларнинг массалари катталиклари ва уларнинг урилишгача тезликлари маълум бўлганда ҳамда механикавий энергиянинг иссиқликка ўтиши бўлмаганда шарларнинг урилишдан кейинги тезликларини осонгина аниқлаш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, бу ҳолда урилиш вактининг биринчи ярмида (жисмлар яқинлашаётганда) кинетик энергиянинг деформация потенциал энергиясига ўтиши, урилиш вактининг иккинчи ярмида (жисмлар узоқлашаётганда) эса потенциал энергиянинг қайтадан тўла кинетик энергияга ўтиши юз беради.

Шу сабабли ҳаракат миқдорининг доимийлиги қонуни ва энергиянинг сақланиш қонуни асосида қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (34.1)$$

ва

$$\frac{1}{2}(m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2) = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2), \qquad (34.2)$$

бунда m_1 ва m_2 — шарлар массалари, v_{10} ва v_{20} — уларнинг урилишгача, v_1 ва v_2 лар эса урилишдан кейинги тезликлари. Симметрия туфайли урилиш пайтида ўзаро таъсир кучлари шар марказлари орқали ўтувчи чизиқ бўйича йўналганликлари сабабли шарларнинг тезлик векторлари ҳам эластик урилишдан кейин шу чизиқда ётади. (34. 1) ва (34. 2) тенгламаларни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$m_1(v_{10} - v_1) = m_2(v_2 - v_{20}), \qquad (34.3)$$

$$m_1(v_{10}^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_{20}^2).$$

Иккинчи тенгламани биринчисига бўлсак, ушбуни топамиз:

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20}. \qquad (34.4)$$

(34.4) тенгламани m_1 га кўпайтиришдан кейин уни (34.3) тенгламалардан биринчисига қўшиб, иккинчи жисмнинг урилишдан кейинги тезлигини топамиз:

$$v_2 = \frac{2m_1v_{10} - (m_1 - m_2)v_{20}}{m_1 + m_2}. \tag{34.5}$$

Биринчи жисмнинг урилишдан кейинги тезлигини аниқлаш формуласини (34. 5) формулада 1 индексни 2 га, 2 индексни 1 га алмаштириш билан осон ҳосил қилиш мумкин:

$$v_1 = \frac{2m_2v_{20} - (m_2 - m_1)\, v_{10}}{m_2 + m_1}. \tag{34.6}$$

Агар шарлар массалари бирдай ва улардан бири тинч ҳолатда, масалан, $v_{20} = 0$ бўлса, у ҳолда урилишдан кейин биринчи шарнинг тезлиги нолга тенг бўлиб, иккинчи шар биринчисининг v_{10} тезлиги билан ҳаракатланади.

Бироқ шундай натижани ҳаракат миқдорининг ва энергиянинг сақланиш қонунларидан ҳам бевосита олиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, шарлар массаларининг бирдайлиги туфайли ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни ҳар иккала шарнинг урилишдан кейинги тезликлари йиғиндиси биринчи шарнинг урилишдан олдинги тезлигига тенг бўлишини талаб қилади. Энергиянинг сақланиш қонуни урилишдан кейинги тезликлар квадратларининг йиғиндиси урилишдан олдинги тезлик квадратига тенг бўлишини талаб қилади. Бу иккала шарт урилишдан кейин шарлардан бирининг тезлиги нолга тенг бўлганидагина бир вақтда бажарилиши мумкин. Урилишгача ҳаракатланаётган биринчи шаргина урилиш вақтида секинлашиши сабабли фақат унинг тезлиги нолга тенг бўлиши мумкин.

Массалари бирдай бир жинсли шарлар марказий эластик урилганда улар тезлик «алмашадилар». Ҳақиқатан ҳам, (34.5) ва (34.6) формулаларда $m_1 = m_2 = m$ деб олсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$v_2 = v_{10}, \quad v_1 = v_{20} \tag{34.7}$$

Агар иккита қаттиқ шарнинг пружина «орқали» ўзаро таъсири қаралса, иккита шарнинг эластик урилиш механизмини етарлича равшан тасаввур қилиш мумкин.

Айтайлик, шарлардан бирига массаси ҳар бир шарнинг массасига нисбатан кичик бўлган пружина («вазнсиз» пружина) бириктириб қўйилган бўлсин; шарларнинг бошланғич тезликлари уларнинг марказлари орқали ўтган чизиқ бўйича йўналган бўлгани сабабли сиқилган пружинанинг кучи ҳам марказий чизиққа мос тушади. Катталикларнинг қийматлари 79- расмда кўрсатилган.

Шарларнинг деформация эластик кучларининг урилишдаги таъсири натижалари худди массаси деярли нолга тенг бўлган пружинанинг таъсири натижасидек бўлади. Системанинг урилишгача ҳаракат кинетик энергияси $\frac{m_1v_{10}^2}{2} + \frac{m_2v_{20}^2}{2} = 0{,}0540$ Ж. Урилиш вақтида потенциал энергия ўса боради, пружина бўлса, шарлар тезликлари тенглашгунча сиқила боради; шу вақт ичида биринчи шар секинлашади, иккинчиси эса тезлашади. Шу пайтда шарлар тезлиги

$$v = \frac{K}{m_1 + m_2} = \frac{0,14}{0,3} \approx 0,467 \text{ м/сек},$$

пружинанинг максимал потенциал энергияси эса қуйидагича бўлади:

$$0,0540 - \frac{0,3 \cdot 0,467^2}{2} \approx 0,0215 \text{ Ж}.$$

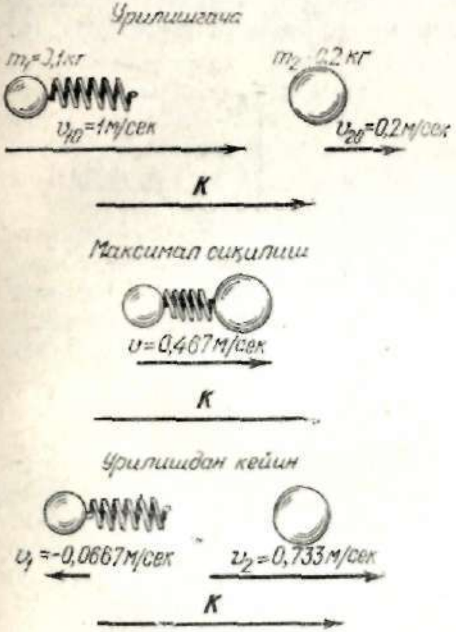
Сўнгра пружина ёйила бошлайди, равшанки, бунда пружинанинг кучи биринчи шарни тормозлаб, унга қарама-қарши йўналишда — 0,0667 м/сек тезлик беради ҳамда иккинчи шарни 0,733 м/сек тезликкача тезлаштиради; бу катталикларни (34.5) ва (34.6) формулалардан аниқлаш мумкин.

Шарларнинг урилишдан кейинги тезликлари пружинанинг қаттиқлигига боғлиқ эмас. Муҳими шундаки, у идеал эластик ва урилишдан кейин энергияга эга эмас.

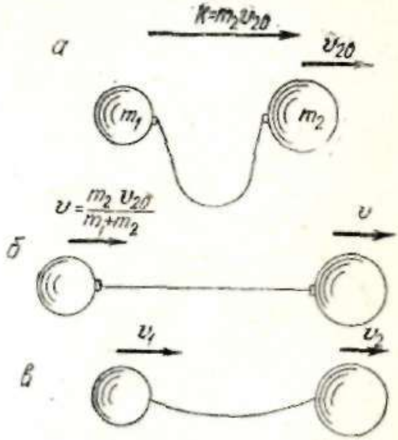
Лекин урилиш вақти, пружинанинг сиқилиш ва *қайтадан кенгайиш вақти* пружинанинг қаттиқлигига ва шарлар массаларига жиддий боғлиқдир. Пружина *қанчалик қаттиқ бўлса, урилиш вақти шунчалик кичик бўлади*. Бирдай массаларда урилиш вақти $\frac{1}{\sqrt{k}}$ га пропорционал эканлигини кўрсатиш мумкин; бунда k — пружинанинг қаттиқлик коэффициенти.

Урилишда фақат итарувчи (тортувчи эмас!) кучлар таъсир қилиши сабабли *урилиш натижасида ҳар бир шар тезлигининг орттирмаси ҳамма вақт иккинчи шардан йўналгандир*.

Агар урилишда тортувчи кучлар юзага келганда эди, у ҳолда аксинча бўларди: *ҳар бир шарнинг урилишдан кейинги тезлик орттирмаси иккинчи шар томонга йўналган бўларди*. Иккита шарнинг бундай урилишини «вазнсиз» ип



79- расм.

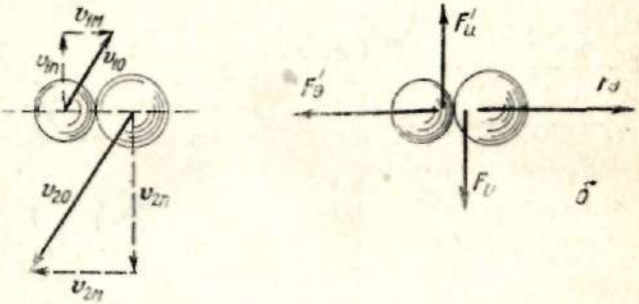


80- расм.

ёрдамида амалга ошириш мумкин. Иккита шар ўзаро шундай ип билан боғланган ва улардан бирига тезлик берилган бўлсин (80- *а* расм); ип ёйилиши биланоқ, урилиш юз бериб, бунда тортишиш кучлари таъсир қилади. Агар ип идеал эластик бўлса, у ҳолда ҳаракат мураккаб бўлади: иккала жисмнинг тезликлари тенглашганда (80- *б* расм), ип максимал катталикка чўзилган бўлади, сўнгра ип узунлиги ўзининг бошланғич қийматига эришгунча, m_1 ни тезлаштириб ва m_2 ни секинлаштириб, қисқара боради. Шу пайтда m_1 масса m_2 массадан тезроқ ҳаракат қилади ва ип шарларнинг бундан кейинги ҳаракатига ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди, улар бир-бирларига доимий тезлик билан яқинлаша боради (80- *в* расм).

Биз иккита шарнинг марказий урилишини батафсил қараб чиқдик. Агар жисмларнинг бошланғич тезликлари уларнинг марказларини бирлаштирувчи чизиқ бўйича, ҳамда ўзаро таъсир кучлари ҳам ўша марказлар чизиғи бўйича йўналган бўлса, иккита ҳар қандай жисмнинг урилиш манзараси шундай бўлади. Акс ҳолда, урилиш мураккаб ҳодиса бўлиб, унинг таҳлили бу курс доирасига кирмайди.

Шарларнинг номарказий урилиши ҳолида урилиш манзараси тамомила бошқача бўлади. Бундай урилиш пайтида шарларнинг деформацияси натижасида уларнинг марказларининг яқинлашиши ҳам, бир шар сиртининг иккинчи шар сиртида «сирпаниши» ҳам юз беради. Ўзимизга урилиш механизмини тасаввур қилишимиз мумкин бўлиши учун ҳар иккала шарнинг урилишгача тезлик векторларини шарларнинг марказлари орқали ўтган чизиқ йўналиши ва шу чизиққа тик йўналиш бўйича ташкил этувчиларга ажратамиз (81- расм).



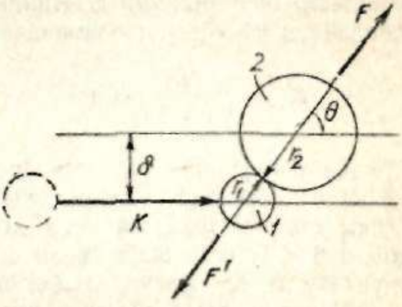
81- расм.

Равшанки, шарлар сиртларининг «сирпаниши» натижасида $F_и$ ва $F'_и$ ишқаланиш кучлари юзага келиб, улар $F_э$ ва $F'_э$ ўзаро таъсир эластик кучлари билан биргаликда шарларнинг урилишдан кейинги тезликлари ўзгаришини белгилайди. Бундан ташқари ишқаланиш кучлари шарларнинг марказ атрофида айланишини юзага келтиради. $F_и$ ишқаланиш кучлари $F_э$ эластик кучларига нисбатан жуда кичик, яъни $F_и \ll F_э$ бўлган ҳолдагина ишқаланиш кучларининг таъсирини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Энди урилиш ҳақидаги масалани нисбатан осон ечиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, бу шартда шарлар тезликларининг v_{1n}, v_{2n} нормал ташкил этувчилари катталиклари урилиш вақтида ўзгармайди, урилишдан кейинги марказлар орқали ўтган чизиқ бўйича иккита тезлик ташкил этувчиларини ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни асосида, худди марказий урилишдагидек йўл билан топамиз. Шу тенгламаларни ёзайлик:

$$\begin{gathered} m_1 v_{1\,\text{м.}} + m_2 v_{2\,\text{м.}} = m_1 v'_{1\,\text{м.}} + m_2 v'_{2\,\text{м.}}, \\ m_1 (v_{1n}^2 + v_{1\,\text{м.}}^2) + (v_{2n}^2 + v_{2\,\text{м.}}^2) = m_1 (v'^2_{1\,\text{м.}} + v_{1n}^2) + m_2 (v'^2_{2\,\text{м.}} + v_{2n}^2); \end{gathered} \tag{34.8}$$

бу ерда $v'_{1\,\text{м.}}$ ва $v'_{2\,\text{м.}}$ катталиклар номаълумдир.



82- расм.

Шарлар урилишининг умумий қонуниятларини бу ҳолда қуйидаги усул билан топиш мумкин. Урилишгача (82- расм) *2* шар тинч турипти, *1* шар эса ҳаракатланмоқда[1] деб фараз қиламиз. Урилиш пайтида ўзаро таъсир кучи шарлар марказларидан ўтиб (ишқаланиш йўқ), унинг йўналиши иккинчи шар марказининг урилишгача учиш чизиғидан тинчликдаги шар марказигача масофага тенг бўлган δ «нишон» масофага боғлиқдир. Чизма текислиги шарлар марказидан ва *1* шарнинг тезлик векторидан ўтувчи текисликка мос тушади.

Урилиш $\delta < r_1 + r_2$ шартда юз беради, бунда r_1 ва r_2—шарларнинг радиуслари. θ бурчак δ ва $r_1 + r_2$ га боғлиқ. *1* шар (урувчи) ҳаракат миқдорининг *F* га (ўзаро таъсир кучига) нормал ташкил этувчиси ўзгаришсиз қолади. Шарлар ҳаракат миқдорининг *F* куч йўналиши бўйича ташкил этувчилари марказий урилиш қонунларига мос тарзда ўзгаради.

Ҳаракат миқдорининг доимийлиги қонунига кўра,

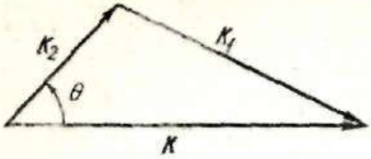
$$K = K_1 + K_2, \tag{34.9}$$

бунда *K*— *1* шарнинг урилишгача ҳаракат миқдори, K_1 ва K_2— *1* ва *2* шарларнинг мос ҳолда урилишдан кейинги ҳаракат миқдорлари

Энергиянинг сақланиш қонунини ҳар қандай жисм учун $K = mv$ ва $mv^2 = K^2/m$ бўлгани сабабли қуйидагича ёзиш мумкин:

---

[1] Бу фараз чеклаш эмас. Ҳамма вақт *2* шарнинг урилишгача тезлиги каби тезлик билан ҳаракатланаётган саноқ система танлаш ва ҳаракатни шу системага нисбатан қараш мумкин (43- § га қ.).



83- расм.

$$\frac{K^2}{m_1}=\frac{K_1^2}{m_1}+\frac{K_2^2}{m_2}. \qquad (34.10)$$

Фараз қилайлик, $\mathbf{K}_2$ катталик вектор $\mathbf{K}$ билан θ бурчак ҳосил қилади, яъни тинчликдаги шар биринчи шарнинг бошланғич тезлиги йўналишига θ бурчак остида учиб кетади, деяйлик; у ҳолда 83- расмдаги учбурчакдан қуйидаги келиб чиқади:

$$K_1^2=K_2^2+K^2-2KK_2\cos\theta.$$

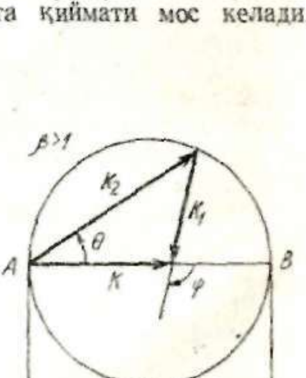
(34.10) энергиянинг доимийлигини ҳисобга олиб, K_1 ни чиқариб ташлаймиз ва ушбуни оламиз:

$$K_2=\frac{2m_2}{m_1+m_2}K\cos\theta=\beta K\cos\theta, \qquad \beta=\frac{2m_2}{m_1+m_2}. \qquad (34.11)$$

Бундан θ бурчакка ва массалар нисбати m_1/m_2 га боғлиқ равишда K_2 ва K орасидаги умумий муносабат кўриниб турибди.

$m_1>m_2$ ва $m_1<m_2$ икки ҳолни фарқ қилиш лозим. Биринчи ҳолда $\beta<1$, оғир шар енгил шарни уради ва 84- расмда бу ҳол учун $\mathbf{K}_2$ ва $\mathbf{K}$ орасидаги боғланиш кўрсатилган: $\mathbf{K}_2$ векторнинг учи βK диаметрли айлана чизади. Ҳар иккала шар урилишдан кейин биринчи шарнинг бошланғич ҳаракати йўналишида ҳаракатланади. θ бурчакнинг катталиги 0 дан $\pi/2$ гача ўзгаради. Биринчи шарнинг оғиш бурчаги 0 дан бирор $\varphi_{\text{макс}}$. гача ўзгара олади. φ нинг битта қийматига, умуман, θ нинг иккита қиймати мос келади.

84- расм.



85- расм.

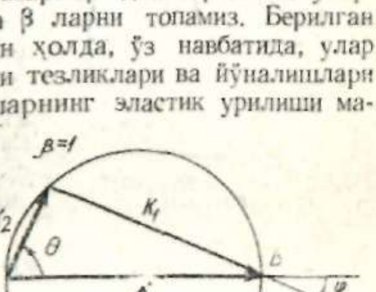
B нуқта марказий урилишни кўрсатиб, иккала шар урилишдан кейин бир томонга (олдин қаралган ҳол) ҳаракатланади. *A* нуқта «хато»ни кўрсатади (шарлар бир-бирига тегмади). $m_1 < m_2$ бўлган иккинчи ҳолда енгил шар оғир шарга урилади. Шарларнинг урилишдан кейинги мумкин бўлган ҳаракат миқдорлари манзараси 85-расмда кўрсатилган. Бунда $\beta > 1$ бўлиб, *1* шар урилишдан кейин орқасига ҳаракатланиши мумкин. Келиб урилувчи шарнинг φ оғиш бурчаги 0 дан π гача ўзгаради. *B* нуқта марказий урилишни кўрсатади. φ нинг ҳар бир қийматига θ нинг фақат битта қиймати мос келади.

Массалари бирдай, $m_1 = m_2$ бўлган шарларнинг оралиқ ҳолида мумкин бўлган ҳаракат миқдорлари манзараси 86- расмда келтирилган. φ бурчак 0 дан $\pi/2$ гача ўзгаради. Марказий урилишда *1* шар тўхтайди, *2* шар бўлса, ўша тезлик билан ҳаракатланиб бораверади (*B* нуқта). Шарларнинг $\theta + \varphi$ бир-биридан «ажралиш» бурчаги ҳамма вақт $\pi/2$ га тенг.

θ бурчакни нишон масофаси δ билан боғлаш ҳамда (82- расмга қ.)

$$(r_1 + r_2)\sin\theta = \delta \tag{34.12}$$

эканлигини кўрсатиш мумкин. δ ни. шарлар диаметрини ва уларнинг массаларини билган ҳолда θ ва β ларни топамиз. Берилган $\boldsymbol{K}$ орқали эса $\boldsymbol{K}_2$ ва $\boldsymbol{K}_1$ ларни топган ҳолда, ўз навбатида, улар орқали шарларнинг урилишдан кейинги тезликлари ва йўналишлари аниқланади. Шундай қилиб, иккита шарнинг эластик урилиши масаласи ҳал қилинди.



86- расм.

Масалани ечиш асоси иккита сақланиш қонунидан — энергиянинг ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунидан келиб чиқишини қайд қилиб ўтиш муҳимдир. Шу сабабли расмда кўрсатилган ва (34.11) дан ҳосил қилинган барча хулосалар моддий нуқталар деб қаралувчи иккита зарранинг эластик урилиши учун қўлланилиши мумкин. Зарраларнинг урилиш механизмини билмаган ҳолда биз уларнинг урилишдан кейинги кинетик энергиялари урилишдан олдинги кинетик энергияга тенг деб ҳисоблаймиз. Кинетик энергиянинг урилишда ўзгармаслигини зарраларнинг эластик урилиши шарти деб қараш мумкин. Агар итарувчи кучлар зарралар орасидаги масофага бир қийматли боғлиқ ҳамда уларни туташтирувчи чизиқ бўйича йўналган бўлса, «нуқтавий зарралар» учун бу шарт бажарилади (36- § га қ.).

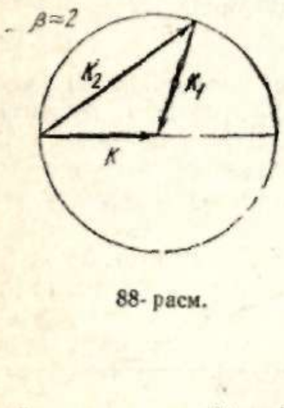
(34.12) муносабат фақат шарлар учун эмас, балки агар итаришиш кучининг зарралараро масофага боғланиши маълум бўлса, ҳар қандай зарралар учун ҳам ўринли бўлиб, δ нишон масофа бўйича θ катталикни аниқлаш мумкин. Зарраларнинг барча мумкин бўлган урилишлари умумий манзараси (34.11) формула орқали келтирилган бўлиб, у расмларда яққол кўриниб турибди. Баъзи бир масалаларда

87- расм.

у билан тўла чекланиш мумкин, Масалан, жуда оғир зарра ($m_1 \gg m_2$) билан урганда $\varphi_{\text{макс.}}$ максимал оғиш бурчаги орқали массалар нисбати катталигини аниқлаш мумкин.

87- расмни қараш натижасида қуйидагига ишонч ҳосил қилиш мумкин

$$\varphi_{\text{макс.}} \approx \frac{\beta}{2} \approx \frac{m_2}{m_1}.$$



88- расм.

Жуда енгил зарра ($m_1 \ll m_2$) билан урган ҳолдаги импульслар манзараси 88- расмда кўрсатилган (бунда $\beta \approx 2$). Пеш уриш ($\theta = 0$) ҳолида $K_2 \approx 2K$ ва $K_1 \approx -K$. $K_1 \approx K$ бўлгандаги ҳар қандай урилиш ҳолида енгил зарранинг тезлиги катталиги бўйича деярли ўзгармай, у фақат йўналишини ўзгартиради. Урилишдан сўнг оғир зарранинг тезлиги ушбу

$$v_2 = \frac{2K}{m_2} = \frac{2m_1}{m_2} v$$

қийматдан катта бўлмайди (v — урувчи зарранинг бошланғич тезлиги). Кейинги ҳол лимитда ($m_1/m_2 \to 0$, $v_2/v \to 0$) қўзғалмас деворга эластик урилиш манзарасини беради.

Шарлар ва зарралар урилиши ўхшашлиги шарлар бир-бирига тегишганда ишқаланишнинг бўлмаслигида ва натижада урилишдан кейин ҳам шарлар айланмай, илгариланма ҳаракат қилганида ўринлидир. Аниқроқ қилиб, урилишда шарларнинг айланиши ўзгармаганда, дейиш лозим.

35- §. Ноэластик жисмларнинг урилиши

Ўтган параграфда қаралган, механикавий энергиянинг «йўқолиши» юз бермайдиган эластик урилишни идеал эластик урилиш дейиш лозим эди, чунки ҳақиқатда ҳамма вақт механикавий энергиянинг «йўқолиши» — унинг бир қисмининг иссиқликка ўтиши мавжуд бўлади. Бироқ, агар бу йўқолишлар жуда кичик бўлса, у ҳолда идеал эластик урилишнинг биз қараган манзараси ҳақиқий процессни етарлича яхши акс эттиради.

Лекин механикавий энергиянинг «йўқолиши» сезиларли бўладиган ноэластик урилишда ҳодисанинг манзараси бир оз бошқачароқ бўлади.

Турли хил урилишларнинг принципиал фарқини шарларнинг пружина орқали (79- расмга қ.) урилишини таҳлил қилиш орқали тасаввур қилишимиз мумкин. Тўлиқ ноэластик урилиш пружинага урилишда пружина ўзининг максимал қисилишига етиб, синадиган ёки фақат қисилиб, ёйила олмайдиган пружинага урилишга ўхшайди; масалан, пружинада шундай тишча борки, у пружинага қисилишга ҳалал бермагани ҳолда, ёйилишга имкон бермайди. Бу ҳолда сиқилган пружинанинг потенциал энергияси кинетик энергиянинг «йўқолишларига» тенг бўлади.

Одатдаги ноэластик жисмларнинг урилиши идеал эластик урилиш билан тўлиқ ноэластик урилишлар орасидаги бирор оралиқ ҳолатга мос келади. Бунга урилиш вақтининг биринчи ярмида бирор қийматгача қисилиб, урилишдан кейин ўзининг бошланғич ўлчовларини ололмайдиган ноэластик пружина орқали иккита шарнинг урилиши ўхшашдир, ёки сиқилиш вақтидаги итарувчи куч урилиш вақтининг иккинчи ярмида пружинанинг кенгайишидаги итарувчи кучдан катта. Пружинанинг сиқилиш потенциал энергиясининг бир қисми ҳаракат кинетик энергиясига айланмасдан иссиқликка ўтади. Демак, бу ҳолда механикавий энергиянинг сақланиш қонунини татбиқ қилиб бўлмайди. Урилишдан кейин тезликларнинг тенглик шарти тўлиқ ноэластик урилишда бўлганидек, иккала жисм урилишдан кейин турли тезлик билан ҳаракатланганидан бу ҳолда ҳам бажарилмайди.

Ноэластик урилишни деформация энергиясининг урилиш пайтида иссиқликка айланган улуши орқали характерлаш мумкин эди. Лекин Ньютоноқ муайян материалдан ясалган шарларнинг ноэластик урилишида урилишдан олдинги ва кейинги нисбий тезликлар катталиклари доимий нисбатда бўлишини топган бўлиб, шу сабабли бундай урилишни *нисбий тезликнинг урилишдан кейинги тикланиш коэффициенти билан характерлаш қулай*:

$$e = \frac{|v_2 - v_1|}{|v_{20} - v_{10}|}, \qquad (35.1)$$

бунда $v_{20} - v_{10}$ — урилишгача, $v_2 - v_1$ эса урилишдан кейинги нисбий тезлик. Тажрибанинг кўрсатишича, e катталикни бирор аниқлик билан доимий ва фақат урилишаётган шарларнинг материалигагина боғлиқ дейиш мумкин.

Идеал эластик урилишда нисбий тезлик катталиги бўйича ўшандай қолиб, фақат ишорасинигина ўзгартиришига осон ишонч ҳосил қилиш мумкин; ҳақиқатан, (34.4) тенгламадан қуйидаги келиб чиқади:

$$v_{1o} - v_{2o} = -(v_1 - v_2). \quad (35.2)$$

Тикланиш коэффициенти эластик урилишда бирга тенг, тўлиқ ноэластик урилишда $v_2 - v_1 = 0$ бўлгани туфайли нолга тенг бўлганидан ҳамма вақт бирдан кичик бўлади. Ньютон шиша учун $e = 15/16$, темир учун 5/9 ва ҳоказо бўлишини аниқлади. e коэффициентни билган ҳолда, 33- § да тўлиқ ноэластик урилишда қилинганидек, шарларнинг урилишдан кейинги ҳаракат тезликларини ва энергия «йўқолиши»ни ҳисоблаш мумкин.

36- §. Потенциал энергия

Ер сиртида турган жисмга ҳамма вақт Ер марказига томон йўналган тортишиш кучи таъсир қилади. Демак, жисмнинг Ер сиртидан, тўғрироғи, унинг марказидан узоқлиги ўзгарганда тортишиш кучи ёки оғирлик кучи иш бажаради.

Агар бирор қурилма жисмни юқорига кўтарса, у иш бажаради. Аксинча, агар жисм эркин тушаётган бўлса, унинг Ер сиртидан узоқлиги камая боради, тортишиш кучи бу ҳолда жисм кинетик энергиясининг ортишига тенг бўлган иш бажаради. Ер яқинида ҳаракатланаётган жисм Ернинг *тортиш* (ёки *оғирлик*) кучи *майдонида* кўчади. Жисмнинг Ернинг тортиш майдонида кўчиши, умуман айтганда, ҳамма вақт тортишиш кучларининг иши билан боғлиқдир: жисм бир нуқтадан бошқа нуқтага кўчаётиб ё энергия сарфланишини талаб қилиши, ё ўзи энергия бериши мумкин. Бундан жисмнинг кўчиши энергиянинг ўзгариши билан боғлиқдир деган хулосани чиқариш мумкин.

Бу энергияни аниқлаш учун жисмнинг фазонинг бир нуқтасидан бошқа нуқтасига кўчишида тортишиш кучларининг ишини ҳисоблаш ва бу ишнинг Ерга нисбатан жисм ҳолатининг ўзгариши билан боғланишини топиш лозим.

Даставвал энг содда холни қарайлик: m массали жисм h баландликка доимий, юқорига йўналган F куч билан кўтарилди. У ҳолда таъсир қилувчи кучнинг иши Fh га тенг бўлади. Жисм кинетик энергиясининг орттирмасини

$$F - F_т = m\frac{dv}{dt} \quad (36.1)$$

тенглама асосида ҳисоблашимиз мумкин, бунда $F_т = mg$ — тортишиш кучи, g — эркин тушиш тезланиши, v — тезлик. (36.1) нинг ҳар иккала томонини йўл орттирмаси ds га кўпайтирамиз ва 0 дан h гача интеграллаймиз, у ҳолда[1]

$$F\int_0^h dS - mg\int_0^h dS = m\int_0^h v dv,$$

---

[1] $\frac{ds}{dt} = v$ эканлигини ҳисобга олганда.

ёки

$$Fh = m\,gh + \frac{mv_{о}^2}{2} - \frac{mv_{б}^2}{2},$$

бунда $v_{о}$ — йўл охиридаги тезлик, $v_{б}$ — унинг бошидаги тезлик. Демак, F кучнинг h масофадаги иши кинетик энергиянинг $\frac{mv_{о}^2}{2} - \frac{mv_{б}}{2}$ ўзгариши билан оғирлик кучининг h йўлдаги mgh иши йиғиндисига тенг. Ташқи куч масофа билан исталган маълум қонун бўйича ўзгарадиган янада умумийроқ ҳолда ҳам шундай хулосага келамиз. Фақат бунда ташқи куч F нинг иши катталигини ушбу формула бўйича аниқлаш лозим

$$\int_0^h F\,dh.$$

Агар йўл бошидаги $\frac{mv_{б}^2}{2}$ кинетик энергия йўл охиридаги $\frac{mv_{о}^2}{2}$ кинетик энергияга тенг ёки $v_{б} = v_{о}$ бўлса, у ҳолда ташқи кучнинг иши оғирлик кучининг ишига тенг. Бу $v_{б} = v_{о} = 0$ ҳолда ҳам ўринли бинобарин, жисмни *исталганча* тарзда тўғри юқорига кўчирувчи система муайян mgh иш бажариб, у фақат h масофага ва mg оғирлик кучи катталигига боғлиқдир.

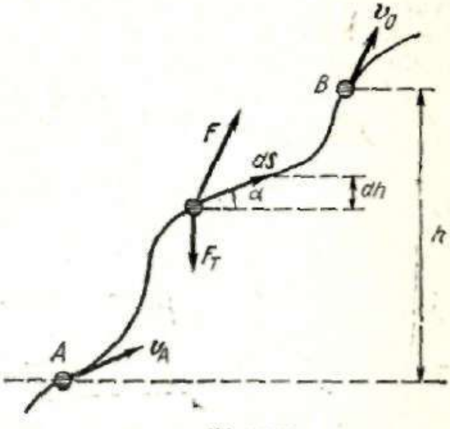
Энди жисмни h баландликка вертикал йўл бўйича эмас, балки охирги B нуқтаси бошланғич A нуқтадан h масофада жойлашган ҳар қандай йўл бўйича кўчириш ишини ҳисоблаймиз (89- расм). Юқорига йўналган ва A нуқтадан B нуқтага йўл бўйича ўзгара борувчи $\boldsymbol{F}$ кучнинг ишини аниқлаймиз. Ташқи кучнинг $\int_A^B \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S}$ иши mgh билан кинетик энергия ўзгариши йиғиндисига тенг.

Ҳақиқатан, 89- расмдаги белгилашларни назарга олган ҳолда, динамика тенгламасини (36.1) тенглама кўринишида ёзамиз ҳамда уни dS га скаляр кўпайтирамиз; у ҳолда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\boldsymbol{F}d\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}_т d\boldsymbol{S} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot d\boldsymbol{S}, \quad (36.3)$$

ёки

$$\boldsymbol{F}d\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{F}_т d\boldsymbol{S} + m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{F}_т d\boldsymbol{S} + d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$



89- расм.

F кучнинг AB участкадаги иши шу ифодадан олинган интегралга тенг:

$$\int_A^B F dS = -\int_A^B F_т\, dS + \frac{mv_о^2}{2} - \frac{mv_б^2}{2}. \qquad (36.4)$$

$F_т\, dS = -mgdh$ эканлигини эътиборга олсак, ушбуни топамиз:

$$\int_A^B F dS = mg\,(h_B - h_A) + \frac{mv_о^2}{2} - \frac{mv_б^2}{2}. \qquad (36.5)$$

бунда $h_B - h_A = h$.

Шундай қилиб, агар кинетик энергия йўл боши ва охирида бирдай, масалан, агар A ва B нуқталарда тезликлар нолга тенг бўлса, у ҳолда ташқи кучнинг иши h баландликдан туширишда оғирлик кучининг ишига тенг эканлиги исботланади.

m массали жисмни A нуқтадан B нуқтага (h баландликдаги A нуқта устидан ўтувчи горизонтал текисликда ётувчи исталган нуқтага) исталган йўл бўйича кўчиришда жисмларнинг қандайдир системаси mgh га тенг энергия сарфлаши лозим. Аксинча, m массали жисмнинг B нуқтадан, горизонтал текисликда ётувчи ҳамда B нуқтадан h масофа пастда жойлашган, исталган A нуқтага кўчишида жисм (тўғрироғи, жисм — Ер система) mgh га тенг иш бажаради ёки mgh энергия беради.

Шундай қилиб, жисмнинг Ернинг тортиш майдонида кўчиши энергиянинг муайян сарфи (ёки олиниши) билан боғлиқдир; бу энергиянинг катталиги фақат жисмнинг горизонт устидаги ҳолати баландлиги ва массаси *катталигига боғлиқ бўлиб*, жисмнинг бир сатҳдан бошқа сатҳга ўтиш *йўлига боғлиқ эмас*. Демак, жисм — Ер системаси муайян U потенциал энергия запасига эга бўлиб, унинг катталиги $U = mgh + \text{const}$ га тенг. Потенциал энергияни $h = 0$ даги потенциал энергияга тенг бўлган қандайдир ихтиёрий доимий катталиккача аниқликда топиш мумкин.

Жисмнинг тортишиш майдонидаги[1] потенциал энергияси жисмнинг Ерга нисбатан ҳолатига, хусусан Ер сиртидан *баландлигига* боғлиқ. Аниқроғи, «Ер+оғир жисм» иккита жисм системасининг тортишиш потенциал энергияси шу жисмларнинг *ўзаро жойлашишига* — шу жисмлар масса марказлари орасидаги масофага боғлиқ. Бу таъриф h катта бўлганида, яъни у Ер радиусига баравар келадиган даражада катта бўлган ҳолда ҳам яроқли ҳисобланади; бундай масофаларда g ни доимий катталик дейиш мумкин бўлмайди, балки тортишиш кучи тезланиши h ортиши билан камаяди, ҳамда потенциал энергия ифодаси бошқа кўринишга эга бўлади (78- § га қ.).

---

[1] Тортишиш кучлари ҳақида батафсилроқ 76- § дан қаранг.

Эластик жисмнинг деформация потенциал энергияси, масалан, эластик пружинанинг потенциал энергияси ҳам шу жисм алоҳида қисмларининг ўзаро жойлашишига боғлиқ.

Умумий ҳолда икки жисмнинг тортишиш кучи потенциал энергияси (36.5) тенглик билан аниқланса-да, (36.4) ни (36.5) билан таққослаш орқали уни қуйидагича аниқлаш яхшироқ:

$$U_B - U_A = mg(h_B - h_A) = -\int_A^B \mathbf{F}_{\text{т}} d\mathbf{S}. \tag{36.6}$$

Ёки: икки жисм тортишиш (ўзаро таъсир) кучларининг тескари ишора билан олинган иши потенциал энергиянинг орттирмасига тенг.

Агар $\mathbf{F}_{\text{т}}$ катталик остида ўзаро таъсир кучини тушунилса, (36.6) *таъриф иккита жисм (зарра) орасидаги ҳар қандай ўзаро таъсир кучи* учун ўринли бўлади. Бироқ бундай таъриф $\int_A^B \mathbf{F}_{\text{т}} d\mathbf{S}$ иш A ва B нуқталарни бирлаштирувчи йўл шаклига боғлиқ бўлмагандагина маънога эга эканлигини таъкидлаб ўтиш лозим. Фақат шу шартдагина иккита жисм системаси потенциал энергияга эга бўлади.

Ички кучларнинг (ўзаро таъсир кучларининг) мусбат иши потенциал энергиянинг камайиши ҳисобига юз беради ва аксинча, бу кучларнинг манфий иши система потенциал энергиясининг ортишини билдиради.

Агар ўзаро таъсир кучлари фақат иккита зарра орасидаги масофагагина боғлиқ бўлиб, уларни бирлаштирувчи чизиқ бўйича йўналган бўлса, моддий зарралар (етарлича майда жисмлар) системаси *потенциал энергияга эга бўлишини кўрсатиш мумкин.*

Айтайлик, битта зарра $\mathbf{r}$ векторнинг бошида, иккинчиси охирида жойлашган бўлсин ҳамда биринчиси иккинчисига $f(r)\mathbf{r}$ куч билан, биринчи заррага эса йўналиши тескари бўлган куч таъсир қилаётган бўлсин.

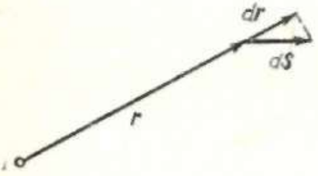
Фараз қилайлик, биринчи зарра тинчликда турган, иккинчиси эса $\mathbf{r}_A$ нуқтадан $\mathbf{r}_B$ нуқтага қандайдир йўл бўйича кўчаётган бўлсин. У ҳолда, агар

$$-\int_A^B f(r)\,\mathbf{r}\,d\mathbf{S}$$

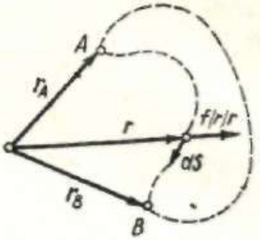
иш йўл шаклига боғлиқ бўлмаса, $U_B - U_A$ га тенг бўлади. Кўпайтма $\mathbf{r}d\mathbf{S} = r\,dr$, бунда dr катталик $\mathbf{r}$ модулнинг орттирмаси (90-расм); шу сабабли

$$\int_A^B f(r)\,\mathbf{r}\,d\mathbf{S} = \int_A^B f(r)\,r\,dr \tag{36.7}$$

интеграл фақат r_A ва r_B ларнинг функциясидан иборат бўлади, яъни у фақат иккита зарра орасидаги масофанинг ўзгаришига боғлиқ бўлиб, A ва B нуқталарни бирлаштирувчи ҳар қандай йўл бўйича бирдай бўлади (91- расм).



90- расм.



91- расм.

(36.7) интегралнинг $r_A = r_B$ да нолга тенг бўлиши аёндир. $f(r)$ функция маълум ва (36.7) интегрални ҳисоблаш мумкин бўлса, у ҳолда (36.6) га мос равишда у иккита зарра потенциал энергиясининг ўзгаришига тенг бўлади ёки

$$-\int_A^B f(r)\,r dr = U_B - U_A. \qquad (36.8)$$

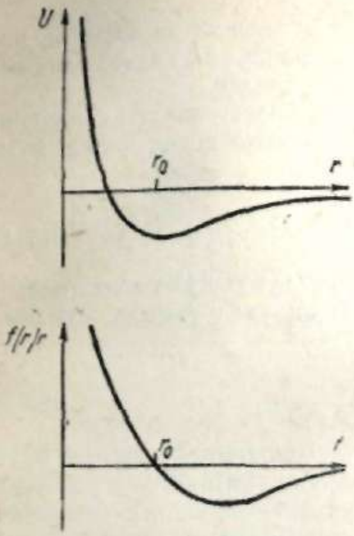
Демак, икки жисм системаси потенциал энергияга эга. Агар $f(r)r$ куч катта масофаларда камая бориб $r \to \infty$ да етарлича тез нолга интилса, у ҳолда чексизликдаги $U(\infty)$ потенциал энергияни одатда нолга тенг деб олинади. У ҳолда бир-биридан r_1 масофада бўлган иккита зарранинг потенциал энергияси (36.8) га кўра ушбуга тенг:

$$U(r_1) = \int_{r_1}^{\infty} f(r)\,r dr.$$

Тортишувчи кучларда $f < 0$, шунинг учун $r_B > r_A$ да $U_B > U_A$. Масофа ортиши билан потенциал энергия ўсади. Итаришувчи кучлар учун $f > 0$ ҳамда $U_B < U_A$, потенциал энергия масофа ортиши билан камаяди.

Агар, кўпинча физикада бўлганидек, катта масофаларда тортишиш кучлари, яқин масофаларда итаришиш кучлари таъсир қилса, икки зарранинг потенциал энергияси улар орасидаги масофага боғлиқ равишда тахминан 92- расмда кўрсатилган кўринишга эга бўлади. $0 < r < r_0$ участкада зарралар итаришишади, $f > 0$, потенциал энергия камаяди; $r = r_0$ да ўзаро таъсир кучи нолга тенг бўлади; кейин $r > r_0$ да $f < 0$ ва потенциал энергия ўсади. Буларнинг ҳаммасини

$$\frac{dU}{dr} = -f(r)\,r, \qquad (36.9)$$



92- расм.

эканлигини назарга олган ҳолда кузатиш мумкин. Бу муҳим тенглик (36.8) дан келиб чиқади.

Ўзаро таъсирлашувчи n та заррадан ташкил топган система, агар ҳар бир жуфт зарра $f(r)\mathbf{r}$ қонун бўйича ўзаро таъсирлашса, муайян потенциал энергияга эга бўлади. Битта қандайдир i- заррани танлаб, унинг k- зарра билан ўзаро таъсир потенциал энергиясини $U_{ik}(|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_i|)$ орқали белгилаймиз. i- зарранинг қолган барча зарралар билан ўзаро таъсир потенциал энергияси

$$U_i=\sum_{k\neq i}^{n}U_{ik}$$

(барча $k=1, 2, \ldots, i-1, i+1 \ldots, n$ лар бўйича йиғиш лозим). Барча зарраларнинг потенциал энергияси равшанки, ушбуга тенг:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}U_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}^{n}U_{ik}. \qquad (36.10)$$

Ҳар бир жуфт зарранинг энергияси йиғиндида икки мартадан ($U_{ik}=U_{ki}$) ҳисобга олинаётгани сабабли йиғинди ишораси олдида ярим турибди.

Ўзаро таъсирлашувчи зарралар бутун системасининг потенциал энергияси зарраларнинг ўзаро жойлашувига боғлиқ.

37- §. Тортишиш кучи майдонида жисм энергиясининг ўзгариши. Энергиянинг сақланиш қонуни

Фараз қилайлик, жисмга тортишиш кучларидан бошқа ҳеч қандай куч таъсир қилмаётган бўлсин; аёнки, у ҳолда жисмнинг тезланиши ҳамма вақт g га тенг ва пастга йўналган бўлади[1].

Жисмнинг фақат тортишиш кучлари таъсиридаги ҳаракатини Ернинг тортишиш майдонидаги эркин ҳаракат дейиш мумкин. Бу жисмнинг кинетик энергияси фақат оғирлик кучи потенциал энер-

---

[1] Агар жисмнинг горизонтдан баландлиги $h \ll R$ бўлса, g ни амалда доимий дейиш мумкин, бунда R — Ер радиуси.

гиясининг ўзгариши ҳисобигагина ўзгариши мумкин ва аксинча, шу сабабли кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндиси доимий қолади, ёки: механикавий энергия *доимий* қолади.

Агар ташқи кучни нолга тенг: $F = 0$ дейилса, энергия сақланиш қонунининг математик ифодасини (36.5) асосида ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан,

$$mgh + \frac{mv_{\text{о}}^2}{2} = \frac{mv_{\text{б}}^2}{2}, \tag{37.1}$$

бунда h — баландликнинг ўзгариши бўлиб, уни қуйидагича белгилаш мумкин: $h = h_{\text{о}} - h_{\text{б}}$, у ҳолда (37.1) ни ушбу тарзда ёза оламиз:

$$mgh_{\text{о}} + \frac{mv_{\text{о}}^2}{2} = mgh_{\text{б}} + \frac{mv_{\text{б}}^2}{2} = E_0. \tag{37.2}$$

(37.2) формула жисмнинг тортишиш майдонидаги ҳаракати учун механикавий энергиянинг сақланиш қонуни математик ифодасини беради. Кинетик ва потенциал энергиянинг йиғиндиси исталган пайтда доимий, E_0 га тенглигича қолади. Бу қонун жисм фақат оғирлик кучи таъсирида ҳаракат қилган ҳоллардагина ўринли бўлишини қайд қилиб ўтамиз. Бошқа кучларнинг (қаршилик кучлари ва б.) мавжудлигида механикавий энергия (кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндиси) умумий ҳолда доимий қолмайди.

Жисмнинг тортишиш майдонидаги ҳаракатида механикавий энергиянинг сақланиш қонуни Галилейгаёқ маълум эди. Бу қонуннинг ўринли эканлигини у ўзининг маятник билан ўтказган маълум тажрибаларида намойиш қилган. Бу тажрибаларни эндиликда мактабларда тез-тез кўрсатилади (Галилей маятниги).

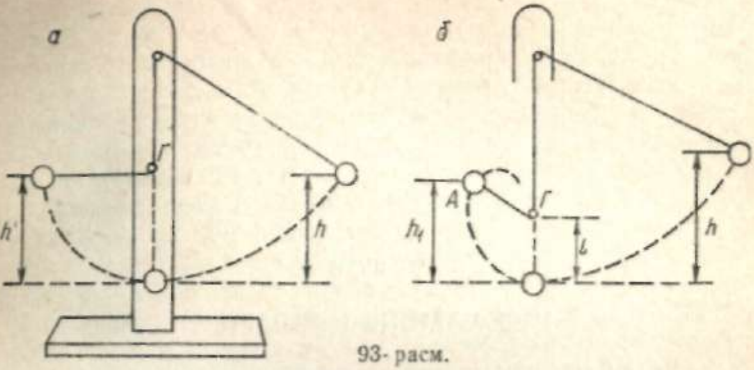
Маятник ипга осилган шарчадан иборатдир (93- *а* расм). Шарчани четга оғдирилади, бунда уни бирор h баландликка ҳам кўтарилади, мувозанат ҳолати устида осилиш чизиғи бўйича $Г$ мих қоқилган ҳамда агар шарчани қўйиб юборилса, ип бирор пайтда $Г$ михга тақалади ва маятник $Г$ нуқта атрофида айланиб, ўз ҳаракатини давом эттиради. Шарчанинг иккала томонга оғишларида h кўтарилиш баландлиги тахминан бирдай бўлади: агар қаршилик кучлари бўлмаганда эди, кўтарилиш баландлиги аниқ бирдай бўларди[1]. Шарча кинетик энергияси нолга тенг бўлган пайтда тўхтайди, у бу пайтда h баландликда бўлади.

Агар $Г$ михни пастга кўчирилса ёки дастлабки кўтарилиш баландлиги h ни етарлича орттирилса, у ҳолда маятник аввалги h баландликкача кўтарилмай қоладиган ҳолатни топиш мумкинлигини қайд қилиш қизиқарлидир. $h > l$ да (l — михнинг шарчанинг пастки ҳолатидан баландлиги) шарча h дан кўра кичикроқ h_1 баландликка кўтарилади.

Шарчанинг ёйнинг кўтарилувчи қисми (93- *б* расм) бўйича ҳаракатида у тўхтагунча шундай пайт келадики, унда ипнинг таранглиги нолга айланади. Сўнгра маятник шарчаси l радиусли айланадан тушаётиб, ўзининг энг юқори нуқтасидан бирор горизонтал тезлик билан ўтади. Энг юқори нуқтада кинетик энергия нолга тенг бўлмагани сабабли кўтарилиш баландлиги h дан кичик бўлиши керак.

---

[1] Шарчанинг ҳаракати вақтида ипнинг таранглик кучи нолга тенг иш бажариши сабабли унинг таъсирини назарга олмаслик мумкинлиги равшан.



93- расм.

Кучнинг иши бир жисмдан иккинчи жисмга ўтадиган энергия катталигини белгилайди. Энергия материянинг турли шаклдаги ҳаракатларининг ягона миқдорий ўлчовидир. Материянинг ҳаракати бир шаклдан бошқа шаклга ўтиб туради ва ҳеч қачон йўқолмайди.

Биз *материянинг механикавий шаклдаги ҳаракати энергиясини* ёки ўз навбатида, кинетик ва потенциал бўладиган механикавий энергияни батафсил қараб чиқдик. *Кинетик энергия* — жисмнинг ҳаракат энергияси — жисмнинг ҳаракат тезлигига ва массасига боғлиқ; *потенциал энергия*—жисмларнинг ёки битта жисм қисмларининг ўзаро жойлашиш энергияси — жисм координаталарига, система конфигурациясига боғлиқ.

Бироқ, биз энди биламизки, масалан, ноэластик урилишда механикавий энергия иссиқлик энергияга ўтади; бу эса урилишда ажраладиган иссиқлик энергия механикавий энергиянинг «йўқолишига» тенглигини билдиради.

Физикавий ва химиявий процессларда энергия бир жисмдан (ёки жисмлар системасидан) бошқа жисмга (ёки жисмлар системасига) ўтади: у ҳеч қайси процессда йўқолмайди ҳам, янгидан пайдо бўлмайди ҳам. Материя ҳаракати ўз шаклини ўзгартира олади, лекин *материя ҳаракатининг барча шакл ўзгаришларида энергия катталиги доимий қолади*. Бу энергиянинг сақланиш қонуни бўлиб, у табиатнинг асосий қонунларидан биридир.

V БОБ

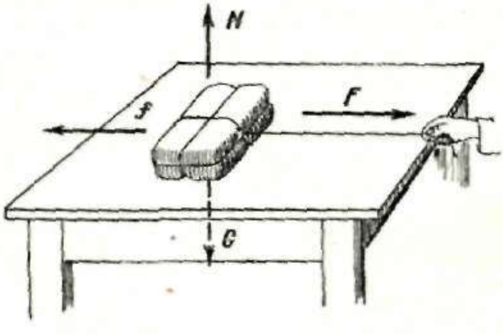
ИШҚАЛАНИШ КУЧЛАРИ

38-§. Ишқаланиш кучларининг турли хиллари

Барча механикавий ҳодисаларда ишқаланиш кучлари мавжуд бўлиб, уларнинг таъсири деярли ҳамма вақт энергиянинг бир кўринишдан бошқасига ўтиши билан боғлиқдир; одатда механикавий энергия ишқаланиш кучлари таъсири натижасида иссиқлик энергияга айланади. Ишқаланиш кучлари ўзларининг таъсири жиҳатидан бошқа кучлардан: тортишиш, жисмларнинг босими, деформация ва бошқа кучлардан ҳеч фарқ қилмаса-да, бу хил кучларнинг ўзига хос хусусиятлари бўлиб, уларни мисолларда қараймиз.

Бирор жисм турткидан сўнг текис, силлиқ горизонтал сирт бўйлаб, масалан, тахтача муз устида сирпанаётган бўлсин. Тахтача вақт ўтиши билан ўз ҳаракатини секинлаштириб, тўхтайди. Тахтача тезлиги камаяди, унинг тезланиши тезликка қарши йўналган. Тахтачага қандай кучлар тезланиш беради? — Ҳаракат тезлигига қарши йўналган музга ва ҳавога ишқаланиш кучлари.

Шунга ўхшаш бошқа мисол: жисм столда ётипти (94-расм), биз уни стол тахтаси бўйлаб канопидан торта бошлаймиз, бироқ жисм қўзғалмайди. Жисмга канопнинг F таранглик куч таъсир қил-



94-расм.

са-да, у тинч ҳолатда қолаверади; демак, жисмга стол томонидан F га тенг ва унга қарама-қарши куч қўйилган, у жисмнинг столга ишқаланиш кучидир (f куч). G оғирлик кучи ва столнинг N босим кучи вертикал бўлиб, улар ўзаро мувозанатлашади ҳамда горизонтал тезланиш катталигига таъсир қилмайди.

Биринчи ва иккинчи мисолларда кўрсатилган ишқаланиш кучларининг физикавий характери турлича: биринчи ҳолда ишқаланиш кучи жисмнинг ҳаракатида ёки аниқроғи, жисмнинг ҳаракати туфайли юзага келади; иккинчи ҳолда эса ишқаланиш кучи тинч ҳолатда, ташқи кучнинг таъсири натижасида юзага келади. Тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучини айнан *тинчликдаги ишқаланиш кучи* дейилади.

Тахтачанинг ҳаракатида ишқаланиш кучи ҳаракат тезлигига қарши йўналган бўлиб, унинг таъсири кинетик энергиянинг иссиқликка айланиши билан боғлиқ; тезлик жисмнинг кўчиш йўналишини белгилайди, шунинг учун кўчиш ва куч турли томонларга йўналган ва бинобарин, ишқаланиш кучининг иши манфий. Демак, энергия ишқаланиш кучи таъсир қилаётган жисмдан узатилади. Жисмга фақат ишқаланиш кучи таъсир қилаётганда кинетик энергия ҳар доим камаяди.

Ҳақиқатдан ҳам, v тезлик билан ҳаракатланаётган m массали жисм учун динамиканинг иккинчи қонунига кўра

$$m\frac{dv}{dt} = -f_{\text{и}},$$

бунда $f_{\text{и}}$ — ишқаланиш кучи; уни dS га кўпайтирсак, (32.4) гаўхшаш формула ҳосил қиламиз:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -f_{\text{и}}\,dS, \tag{38.1}$$

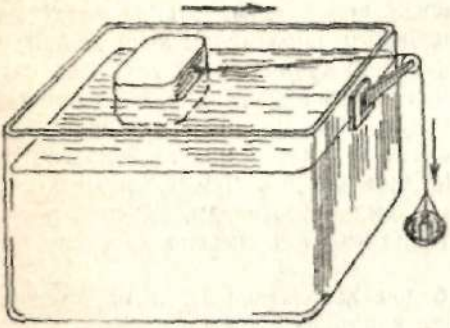
ёки кинетик энергиянинг камайиши ишқаланиш кучи ишига тенг бўлиб, уни энергиянинг сақланиш қонуни асосида тўғридан-тўғри ёзиш мумкин эди.

Ҳаракатдаги жисм ва уни ўраб турган жисмлар билан қилинган текширишлар шуни кўрсатадики, кинетик энергия иссиқлик шаклдаги энергияга ўтар экан.

Тинчликдаги ишқаланишда жисмларнинг ҳаракати йўқ; шу сабабли бунда иш ҳам, энергиянинг бир кўринишдан бошқасига ўтиши ҳам бўлмайди. Ҳаракатдаги ишқаланиш кучининг катталиги ҳаракатланаётган жисмнинг хоссалари ва шаклига, муҳитнинг ва атрофдаги жисмларнинг хоссаларига ва булардан ташқари, ҳаракат тезлигига боғлиқ бўлади.

Икки хил ишқаланиш мавжуд: 1) қаттиқ жисмлар сиртлари қуруқ бўлгандаги ишқаланиш ва 2) суюқликка ёки газсимон қовушоқ муҳитга ишқаланиш. Биринчи хил ишқаланишни қисқача *қуруқ ишқаланиш*, иккинчисини — *қовушоқ ишқаланиш* дейилади.

Қуруқ ишқаланишда тинчликдаги ишқаланиш кучи вужудга келиши мумкин, қовушоқ ишқаланишда эса тинчликдаги ишқаланиш кучи йўқ. Мойланган сиртлари тегишиб турган жисмларнинг ҳаракатида жисмнинг қовушоқ суюқ муҳитдаги ҳаракати ҳолидагидек ишқаланиш кучи вужудга келиб, у *фақат* ҳаракат ҳолидагина мавжуд бўлади. Бу ҳолда тинчликдаги ишқаланиш кучи нолга тенг; масалан, суюқликда сузаётган жисм ҳар қандай (исталганча кичик) горизонтал куч таъсирида ҳаракатлана бошлайди; буни тажрибада текшириб кўриш осон (95-расм).



95- расм.

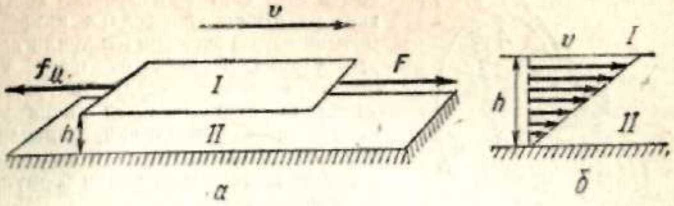
Агар биз жисмнинг доимий горизонтал куч таъсиридаги ҳаракатини кузатсак (95- расмга қ.), у ҳолда тезда ҳаракатнинг бирор вақтдан кейин деярли текис бўлиб қолганига ишонч ҳосил қиламиз. Бу ҳол ҳаракат вақтида тезлик ўсиши билан таъсир қилувчи куч катталигича ўсиб борувчи ва демак, бу ташқи кучни мувозанатловчи ишқаланиш кучининг (қаршилик кучининг) вужудга келганини билдиради.

Қовушоқ ишқаланиш кучлари (қаршилик кучлари) фақат ҳаракат вақтидагина вужудга келиб, уларнинг мавжудлиги ҳамма вақт механикавий энергиянинг иссиқликка айланишига сабаб бўлади.

39- §. Қовушоқ ишқаланиш

Жисмнинг муҳитда ҳаракатланган пайтидаги қовушоқ ишқаланиш кучлари (ёки муҳитнинг қаршилик кучлари) жисм шаклига, ҳаракат тезлигига ҳамда муҳитнинг баъзи бир физикавий хоссаларига, айнан қовушоқлигига ва зичлигига боғлиқ. Муҳитнинг қовушоқлиги қанча катта бўлса, бошқа бирор бирдай шароитларда ишқаланиш кучи ҳам шунча катта бўлади.

Муҳитнинг қовушоқлигини одатда тажрибаларда аниқланиб, уларда баъзи жисмларнинг муайян шароитлардаги ишқаланиш кучлари ўлчанади. Ньютон тажриба йўли билан ораларидаги фазо муайян суюқлик ёки газ билан тўлдирилган иккита яқин параллел сиртларнинг бир-бирига нисбатан сирпанишида муҳитдаги ишқаланишнинг асосий қонуниятларини аниқлаган эди (96- расм). Агар F ташқи куч таъсирида S сатҳли I сирт тинч турган, унга параллел II сиртга нисбатан v тезликда текис ҳаракатланаётган бўлса, у ҳолда I сиртга қўйилган $f_и$ ишқаланиш кучи F кучга тенг ва қарама-қарши бўлади.



96- расм.

Ньютон v тезликни ва F кучни ўлчаш асосида қуйидаги қонуниятни топди:

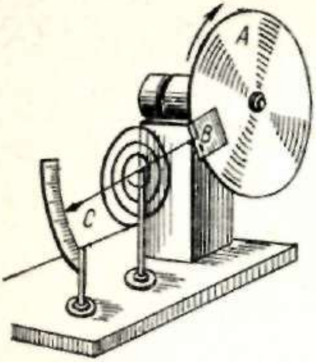
$$f_и = \mu S \frac{v}{h}, \tag{39.1}$$

бунда h — сиртлар орасидаги масофа, μ эса фақат сиртлар орасини тўлдирувчи муҳитнинг хоссаларига боғлиқ бўлган доимий коэффициент *(ковушоқлик коэффициенти)*. Бу қонун $h \ll \sqrt{S}$ да, яъни сирпанишувчи сиртлар орасидаги масофа уларнинг чизиқли ўлчамларига нисбатан жуда кичик бўлгандагина ўринли бўлади. Батафсил текширишларнинг кўрсатишича, биринчи сиртга тегиб турган суюқлик ёки газ зарралари v тезлик билан ҳаракатланади (сиртга эргашади), *II* сиртга тегиб турган зарралар эса тинч туради, муҳит зарраларининг тезлиги *II* сиртдан узоқлашилган сари чизиқли (пропорционал) равишда ўсиб боради (96-*б* расм).

Сиртлар орасидаги суюқлик сиртларга параллел қатламларга ажратилган деб тасаввур қилайлик. Ҳар бир қатлам текис ҳаракатланиб, шунинг билан бирга, юқориги қатлам ўзининг пастидаги қатламни *$f_и$ куч билан олдинга, пастки қатлам эса ўзига қўшни юқориги* қатламни $f_и$ га тенг куч билан орқага тортади. Шундай қилиб, $f_и$ ишқаланиш кучи суюқликнинг бир қатламидан ёнидагисига, бир сиртдан бошқа сиртга узатилади. Ҳар бир сиртга иккита ўзаро тенг ва қарама-қарши кучлар таъсир қилиши сабабли унинг ҳаракати текис бўлади.

Ўлчамлиги СИ системада кг/м·сек, СГС системада эса г/см·сек бўлган муҳитнинг ковушоқлик коэффициенти μ ни экспериментал аниқланади.

Ҳаво учун μ коэффициентни 97- расмда кўрсатилган асбоб ёрдамида аниқлаш мумкин. *A* диск муайян тезликда айлантирилади, дискни ўраган *B* пластинка эса пружинали тарозига ўрнатилган; пластинкага таъсир этувчи ишқаланиш кучи *C* стрелканинг оғиши бўйича ўлчанади; *B* пластинкаларнинг юзини, диск билан пластинка оралиғини, дискнинг айланиш тезлигини ва ўлчовларини билган ҳолда μ коэффициентни аниқлаш мумкин. Диск ва пластинкалар оралиғини ҳамда дискнинг тезлигини ўзгартириш билан ҳаво учун Ньютон муносабатини текшириш мумкин.



97- расм.

Муҳитнинг барча зарралари тезликлари ҳамма вақт сиртларга параллел қолганларидагина муҳитнинг қовушоқлик коэффициентини шундай тарзда аниқлаш мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз. Амалда бу шарт катта тезликларда бажарилмайди; катта тезликларда зарраларнинг ҳаракати кичик тезликлардаги каби қатламдор ёки ламинар бўлмай қолади. Шу сабабли фақат дискнинг муайян айланиш тезлигигача Ньютон формуласи (39.1) ўринли бўлади.

Суюқлик ёки газларнинг қовушоқлик коэффициентини, шунингдек, узунлиги ва диаметри маълум бўлган найча орқали уларнинг оқиш тезлиги бўйича ҳам аниқланади. Босимларнинг муайян айирмасида найчадан муайян вақт ичида ўтган суюқлик (ёки газ) миқдори (Q сарф) қовушоқлик коэффициентига тескари пропорционал эканлиги топилган (батафсилроқ 111-§ дан қ.).

Баъзи моддалар учун μ нинг г/см·сек лардаги қийматлари

Ҳаво	0,00018	16°С да
Сув	0,0114	15°С да
Глицерин	12,93	18°С да
Бензин	0,0053	18°С да
Минерал мой	0,833	50°С да

Муҳитнинг қовушоқлигини унда ҳаракатланаётган кичик шарчанинг тезлиги бўйича аниқлайдиган асбоблар ҳам мавжуд. Шарчанинг унча катта бўлмаган ҳаракат тезликларида назарий ҳисоблаш ишқаланиш кучи учун қуйидаги формулани беради:

$$f_и = 6\pi\mu a v, \qquad (39.2)$$

бунда a — шарчанинг радиуси. Тажриба бу формулани тасдиқлайди. Бироқ ишқаланиш кучининг ўзидан кўра шарчанинг қовушоқ муҳитда тушиш вақтини аниқлаш қулайроқ ва соддароқ.

40-§. Шарчанинг қовушоқ муҳитда тушиши

Қовушоқ муҳитда тушаётган шарчага вертикал бўйича учта куч (98- расм): оғирлик кучи $\rho V g$, гидростатик итариб чиқариш кучи $\rho_c V g$ ва ишқаланиш кучи $f_и = 6\pi\mu a v$ таъсир қилади, бунда V орқали шарча ҳажми белгиланган, ρ ва ρ_c лар эса шарча материалининг ва суюқликнинг зичликлари. У ҳолда вертикалга проекцияда

$$m\frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_c)Vg - 6\pi\mu a v \qquad (40.1)$$

ёки шарчанинг ҳажми $V = {}^4/_3\pi a^3$, унинг массаси $m = \rho V$ эканлигини назарга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\rho-\rho_c}{\rho}g-\frac{g}{2a^2}\frac{\mu}{\rho}v. \tag{40.2}$$

Тезлик v нинг ортиши билан тезланиш камаяди. Бошланғич пайтда $v=0$, сўнгра тезлик ўсади, тезланиш вақт ўтиши билан камаяди ва тезликнинг ўсиши секинлашади. Лекин у ҳамма вақт ўсади.

Бироқ (40.2) тенгламадан кўринишича, тезлик

$$v_0=\frac{\rho-\rho_c}{\mu}\frac{2a^2g}{9} \tag{40.3}$$

катталикдан ортиқ бўла олмайди. $v=v_0$ да $\frac{dv}{dt}=0$ га эга бўламиз, тезликнинг ўсиши бундан буён давом этолмайди.

(40.2) тенгламани қуйидагича кўчириб ёзиш мумкин:

$$\beta\frac{dv}{dt}=v_0-v,\quad \text{бу ерда}\quad \beta=\frac{2a^2\rho}{9\mu}. \tag{40.4}$$

Бундан

$$\beta\frac{dv}{v-v_0}=-dt$$

ёки интегралласак,

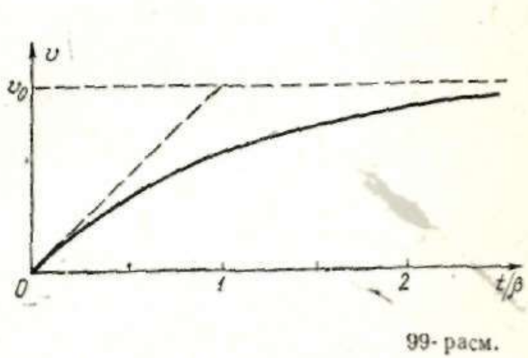
$$\beta\ln(v-v_0)=-t+C,\ v-v_0=Ae^{-\frac{t}{\beta}},$$

бунда A_0 — доимий катталик. Агар $t=0$ да $v=0$ бўлса, у ҳолда $A_0=-v_0$ ва

$$v=v_0\left(1-e^{-\frac{t}{\beta}}\right). \tag{40.5}$$

v нинг t/β га боғланиши 99-расмда кўрсатилган. Вақт t нинг ўтиши билан v тезлик катталиги асимптотик тарзда v_0 қийматга яқинлашади.

98-расм.



99-расм.

Шарчанинг ҳаракати мураккаб бўлади: фақат бошланғич пайтда $t \ll \beta$да тезланувчан, кейин тезланиш аста-секин камая боради ва ниҳоят $t \gg \beta$ да ҳаракат деярли текис бўлиб қолади. Шарчанинг ҳаракати қанчадан кейин деярли текис бўлиб қолади ва шунда шарча қанча йўл ўтади? Буларнинг ҳаммасини (40.5) формула бўйича топиш мумкин. μ қанча катта ва шарча радиуси a қанча кичик бўлса, деярли текис ҳаракат шунча тезроқ содир бўлади.

Жисмнинг v кичик бўладиган бошланғич участкадаги ҳаракати деярли оғирлик кучи тезланишига тенг бўлган тезланиш билан текис тезланувчан ҳаракат бўлади. Графикдан (99-расмга қ.) ҳаракат бошида тезликнинг тахминан вақтга пропорционал ўсиши кўриниб турипти.

Мисол қарайлик. Радиуси 2,5 см бўлган пўлат шарча ҳавода ва радиуси 0,1 см бўлган пўлат шарча глицеринда тушади. Биринчи ҳолда пўлатнинг зичлиги $\rho = 7,88$ г/см^3, ҳавонинг қовушоқлик коэффициенти $\mu = 0,00018$ г/см·сек бўлгани сабабли $\beta \approx 6,08 \cdot 10^4$ сек ёки 16 соатга яқин. Иккинчи ҳолда эса глицерин учун $\mu = 13,93$ г/см·сек бўлгани сабабли $\beta \approx 1,26.10^{-3}$ сек бўлади.

Пўлат шарчанинг дастлабки бир неча секундда, яъни $t \ll 6 \cdot 10^4$ сек да ҳавода тушиши катта аниқликда g тезланишли текис тезланувчан ҳаракат[1] бўлади. Шарчанинг ҳавода тушиши ҳавосиз фазода тушиш қонунлари бўйича содир бўлиб, ишқаланиш кучларини ҳисобга олмаса бўлади. Галилейнинг маълум тажрибаларида шундай манзара мавжуд бўлган, уларда жисмларнинг бўшлиқда тушиши доимий тезланиш билан содир бўлиши лозимлигини у экспериментал исботлаган ва улар инерция қонунини чиқариш учун асос бўлган эди.

Кичкина шарчанинг глицеринда ҳаракати (тушиши) бир неча миллисекунддан кейин деярли *текис* бўлиб қолади, шарча пастга тезланишсиз тушади. (40.3) формулага кўра ҳаракат тезлиги қуйидагига тенг бўлади:

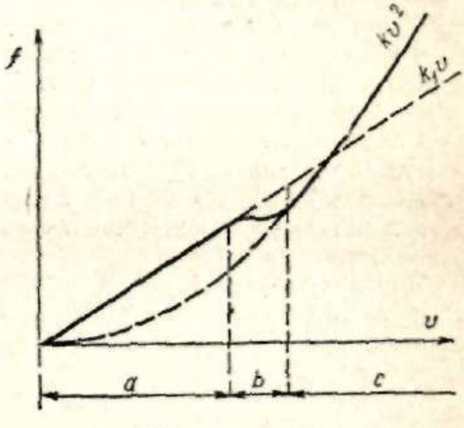
$$v_0 = \frac{\rho - \rho_c}{9\mu} 2a^2 g = \frac{\rho - \rho_c}{\rho} \beta g = \frac{7,88 - 1}{7,88} \cdot 1,26 \cdot 10^{-3} \cdot 981 = 1,06 \text{ см/сек}.$$

Бу текис ҳаракат бўлиб, бунда оғирлик кучи ишқаланиш кучи билан тўла мувозанатлашган ва ҳаракат инерция бўйича юз беради. Бу ҳаракатни кузатаётганда қовушоқлик кучлари ҳисобга олинмаса, нотўғри хулоса чиқариш мумкин: тезлик таъсир қилувчи кучга пропорционал — бу хулоса Аристотель фикрига монанддир.

---

[1] Берилган шарча учун унинг ҳаракат тезлиги 10 м/сек дан ортиши билан биз қабул қилган ишқаланиш кучининг тезликка боғланиш қонуни ўринли бўлмай қолишини қайд қилиш лозим. Бироқ дастлабки уч секунд учун бу ҳисобни аниқлаштириш ушбу хулосани ўзгартмайди.

Изоҳ. Агар қаршилик кучи тезликка пропорционал бўлмай тезлик ўсиши билан қаршилик кучи ҳам орта бориб, тезликка анча мураккаб боғлиқ бўлса, у ҳолда жисмларнинг бундай муҳитда тушишида уларнинг ҳаракати вақт ўтиши билан текис ҳаракатга *интилади*. Масалан, парашютчининг йиғилган ёки очилган парашют билан тушишида *худди шундай бўлади*. Бу икки ҳолдаги фарқ шундаки, очиқ парашют билан текис ҳаракат 5—6 м/сек тезликда, йиғилган парашют билан тушишда (парашютни очмасдан тушишда) текис *ҳаракат анча катта*, тахминан 60 м/сек га тенг тезликда содир бўлади.



100- расм.

Қаршилик кучининг (ёки ишқаланиш кучининг) тезликка *боғланиши тезлик ортиши билан ўзгаради*. Катта тезликда айланиб оқиш характери ўзгаради ва қаршилик кучининг ўсиши энди ҳаракат тезлигига пропорционал бўлмайди. Тезликнинг бирор қийматидан бошлаб, кўпчилик ҳолларда қаршилик кучи тезлик квадратига пропорционал равишда ўсади. Шу сабабли шарнинг қаршилик кучи f нинг v тезликка боғланишини кўрсатувчи чизиқ 100- расмда кўрсатилган кўринишда бўлади. Тезликнинг кичик қийматлари соҳасида (a соҳа) қаршилик кучи биз олдин кўрсатганимиздек, $f_{и} = k_1 v$ қонун бўйича ҳаракат тезлигига пропорционал равишда ўсади; тезликнинг катта қийматлари соҳасида (c соҳа) ишқаланиш кучи $f_{и} = kv^2$ қонун бўйича тезлик квадратига пропорционал равишда ўсади. Баъзи соҳада (b соҳа) бир қонун бошқасига ўтади.

Ишқаланиш кучлари боғланиш қонунининг бундай принципиал ўзгариши айланиб оқиш манзарасининг ўзгариши натижасида содир бўлади: a соҳада бутун жисмни ўраб, оқимнинг жисмдан *«узилиши» сиз* (тўғрироғи, оқимнинг кичик узилишида) силлиқ оқиб ўтиш, c соҳада оқиб ўтиш муҳит оқимининг анча сезиларли узилиши билан юз бериши билан бирга оқимнинг узилиш зонасидаги уюрмаланиш ҳал қилувчи роль ўйнайди (батафсилроқ 112- § дан қ.).

41- §. Қуруқ ишқаланиш

Олдин айтилганидек (38- § га қ), текис горизонтал сиртда ётувчи жисмга қўйилган етарлича кичик горизонтал куч, шу таъсир этувчи **F** кучга тенг ва қарама-қарши **f** тинчликдаги ишқаланиш кучи юзага келишлиги сабабли, жисмни жойидан қўзғата олмайди (94- расмга қ.). Тинчликдаги ишқаланиш кучи нима билан белгиланади? У таъсир қилувчи **F** куч билан белгиланади; тизимчанинг таранглигини ўзгартириш билан ишқаланиш кучини ўзгартирамиз. Тарангликни ошириш билан биз ишқаланиш кучини оширамиз; **F** кучнинг йўналишини ўзгартириш билан биз ишқаланиш кучининг йўналишини ўзгартирамиз.

Бироқ таъсир этувчи **F** кучни аста-секин ошира борганда ҳаракат бошланади. Оддий тажрибаларнинг кўрсатишича, агар **F** куч бирор муайян f_0 қийматдан ортиқ бўлса, жисм тезланишга эга бўлади. Демак, тинчликдаги ишқаланиш кучи нолдан f_0 гача исталган қийматларни олиши мумкин ёки тинчликдаги ишқаланиш кучи f_0 максимал қийматга эга. Агар $\mathbf{F} > f_0$ бўлса, у ҳолда жисм бирор тезланишга эга бўлиши ва ҳаракатланиши мумкин; агар $\mathbf{F} < f_0$ бўлса, у ҳолда жисм тезланиши нолга тенг ва жисм тинч ҳолатда бўлади, ишқаланиш кучи **F** га тенг.

Максимал тинчликдаги ишқаланиш кучининг абсолют катталиги нима билан белгиланади? *Сиртлари тегишиб* турган жисмларнинг физикавий хоссалари, сиртларнинг ҳолатлари (сиртлар ғадир-будур бўлганида тинчликдаги максимал ишқаланиш кучи силлиқ бўлганидагидан катта) ва бир жисмни иккинчисига босиб турувчи босим кучи катталигига боғлиқ.

Айтайлик, қутича столда ётипти, у ҳолда мувозанатда қутининг столга N босими қутининг P оғирлик кучига тенг. Тажрибанинг кўрсатишича, f_0 максимал ишқаланиш кучи

$$f_0 = \mu N \qquad (41.1)$$

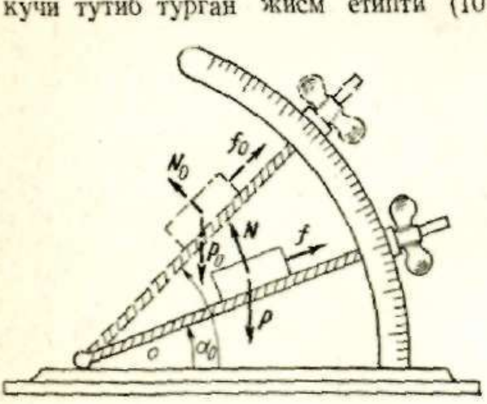
бунда μ — ўлчамсиз коэффициент, тегишиб турган сиртларнинг хоссаларигагина боғлиқ бўлган *тинчликдаги ишқаланиш кучи коэффициенти*. (Одатда бу ерда «тинчликдаги максимал ишқаланиш кучи» назарда тутилади) (41.1) ифодани *Амонтон* қонуни дейилиб, у бу ифодани 1699 йилда тажриба асосида топган.

μ коэффициент катталигини турли тажрибалардан, масалан, жисмнинг қия текисликда сирпаниши тажрибасидан топилади. Бу тажрибаларда текисликнинг жисмнинг текисликда сирпаниши бошланадиган қиялик бурчаги топилади. Айтайлик, қия текисликда ишқаланиш кучи тутиб турган жисм ётипти (101-расм). Ишқаланиш кучи f жисмни пастга сирпанишдан тутиб тургани сабабли қуйидагига тенг бўлади:

$$f = P\sin\alpha. \qquad (41.2)$$

Энди α бурчакни ошира борсак, унинг бирор α_0 қийматида жисмнинг сирпаниши бошланади. $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{N}_0$ ва $\mathbf{f}_0$ кучларнинг йиғиндиси нолга тенг. $\mathbf{P}_0$ ва $\mathbf{N}_0$ орасидаги бурчак $180° - \alpha_0$ га тенг бўлганидан,

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{f_0}{N_0}. \qquad (41.3)$$



101-расм.

$f_0 = \mu N_0$ эканлигини эсласак, $\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \mu$ ҳосил бўлади, яъни тинчликдаги максимал ишқаланиш кучи коэффициенти жисмнинг қия текисликда сирпаниши бошланадиган бурчакнинг тангенсига тенг.

Қуруқ силлиқ ишқаланишувчи баъзи бир жуфт сиртлар учун ишқаланиш кучи коэффициентлари қуйидаги қийматларга эга:

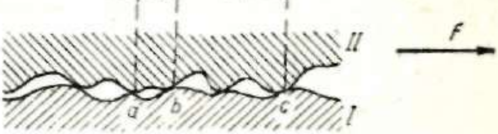
Пўлат сиртида пўлат	0,15
Эман сиртида металл (толаси бўйича)	0,62
Эман сиртида чарм	0,61
Ғишт сиртида ғишт	0,5—0,73

Қуруқ сиртларнинг ишқаланиш кучлари қонунларини тушунтириб берувчи қаноатланарли назария мавжуд эмас. Ҳодисани жуда қўпол схемалаштириш орқали ишқаланиш кучларининг вужудга келиш манзарасини кўрсатиш мумкин. 102- расмда катталаштирилган кўринишда иккита қаттиқ жисмнинг тегишиш сиртлари кесими келтирилган. Жисм сирти идеал текис сирт бўлмай, унда ҳамма вақт қандайдир нотекисликлар, кўп ёки оз даражада текис жойлашган ҳамда муайян чегараларда турлича катталик ва шаклга эга бўлган дўнгликлар мавжуд бўлади. Иккита жисм бир-бирига текканда бу дўнгликлар ва нотекисликлар қандайдир деформацияланади, шу билан бирга деформациялар шу жойдаги маҳаллий босимга (ва албатта тегишиш юзаси бўйича ўртача босимга) боғлиқ ва шунинг учун ҳам эластик, ҳам ноэластик характерга эга бўлади. Иккита жисмнинг яқинлашиши, битта жисм дўнгликларининг иккинчи жисм ботиқларига кириши, равшанки иккала жисмни бир-бирига сиқувчи кучга боғлиқ.

Тинчликдаги ишқаланиш кучи юзага келадиган тинч вазиятда, $F < f_0$ ва иккала жисмнинг дўнгликлари орасида юзага келувчи кучларнинг уринма горизонтал ташкил этувчилари таъсир этувчи кучни мувозанатлайди ва шунинг билан ишқаланиш кучини «яратадилар». 102- расмда схематик равишда тинчликдаги ишқаланиш кучларининг вужудга келиши кўрсатилган; агар II жисмга куч қўйилган бўлса, a, b, c нуқталарга яқин соҳаларда f_a, f_b, f_c уринма кучлар — ташқи кучни мувозанатловчи кучлар вужудга келади. (Яққол кўрсатиш мақсадида f_a, f_b, f_c кучлар расмда юқорида тасвирланган.)

Ҳаракат вақтида, $F > f_0$ да ҳар иккала жисмнинг нотекисликлари тутинади, лекин бундан ташқари улар бир-бирларига урилади ва урилишларда юзага келадиган ўзаро таъсир кучлари йиғилиб иккита қаттиқ жисм сиртларининг сирпанишидаги ҳаракат ишқаланиши кучини беради. Дўнгликларнинг урилишидаги кучлар жисмларнинг турли йўналишлардаги тебранишларини вужудга келтириб, улар ишқаланувчи жисмлар бўйича тақсимланади. Бу ҳолда тегишувчи сиртлардаги дўнгликларнинг ва нотекисликларнинг урилишидаги ноэластик деформациялари ҳам муҳим аҳамиятга эга эканлигини назарга олмоқ лозим.

Биз тасвирлаган манзара мураккаб ҳақиқий манзарани қўпол ва тақрибийгина баён қилиб беради. Бироқ жисм сиртидаги хаотик молекуляр нобиржинсликлар худди сиртдаги дўнгликлар ва нотекисликлар каби роль ўйнашликларини тахмин қилиш мумкин. Молекуляр нобиржинсликларга эга бўлган иккита идеал силлиқ сиртларнинг тегишишида вужудга келувчи уринма кучлар дўнгликларнинг ўзаро таъсир кучлари каби роль ўйнайди.



102- расм.

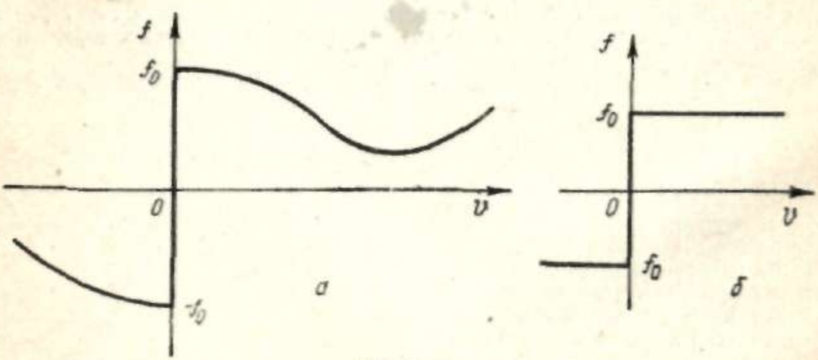
42-§. Сирпанишдаги ишқаланиш кучи

Айтайлик, жисм горизонтал сиртда ётган бўлсин. Агар жисмга таъсир этаётган горизонтал куч тинчликдаги ишқаланиш кучидан ортиқ ($F > \mu N$) бўлса, у ҳолда жисмнинг тезланиши нолдан фарқли бўлади ва сирпаниш бошланади. Жисм тезлиги ортади. Сирпаниш тезлиги ортиши билан қуруқ сиртларнинг ишқаланиш кучи қандай ўзгаради?

Умуман, сирпанишдаги ишқаланиш кучи тезлик ортиши билан даставвал камаяди, кейин орта бошлайди. Баъзи ҳолларда ишқаланиш кучининг тезликка боғланиши 103-*а* расмда кўрсатилгандек бўлади. $v = 0$ да, яъни тинч ҳолатда ишқаланиш кучининг $-f_0$ дан f_0 гача исталган қиймати бўлиши мумкин. Сўнгра тезликнинг ортиши билан ишқаланиш кучи тезлик ўзгаришининг бирор участкасида доимий қолади, сўнгра аста камая бориб, минимумга эришади, шундан кейин кўтарилиш бошланади. Тегишувчи сиртларнинг турли жуфти учун сирпанишдаги ишқаланиш кучининг тезликка боғланиш характери тамомила турличадир.

Етарлича кичик сирпаниш тезликларида қуруқ металл сиртларнинг ишқаланиш кучини доимий, тезликка боғлиқ эмас ва тинчликдаги ишқаланиш кучига тенг дейиш мумкин. Тажрибаларнинг кўрсатишича, бу ҳолат етарлича аниқлик даражасида оқланади. Бу ҳолда ишқаланиш кучининг тезликка боғланиш графиги 103-*б* расмда кўрсатилган кўринишга эга; $v = 0$ тезликда ишқаланиш кучи $-f_0$ дан f_0 гача ҳар қандай қийматни олиши мумкин.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучининг тезликка боғлиқлиги қонуни *Кулон қонуни* деб юритилади. Кулон қонуни металл сиртларнинг бир жинсли ёғоч сиртига, чармга ва бошқаларга ишқаланиш кучлари қараладиган ҳолларда ҳам қўлланиши мумкин. Тезлик ўзгаришининг чекли диапазонида бу қонун кўпчилик ишқаланувчи сиртлар жуфтлари учун тақрибан ўринлидир.



103-расм.

Тинчликдаги ишқаланиш кучи катталиги f_0 ҳам, сирпанишдаги ишқаланиш кучи катталиги ҳам жисмни сирпаниш сиртига босувчи кучга боғлиқ. Одатда, сирпанишдаги ишқаланиш кучи, тинчликдаги ишқаланиш кучи каби нормал босим кучига пропорционалдир.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучларига тааллуқли маълумотлар жуда тақрибийдир ва кўпинча бир ўлчаш натижалари бошқа ўлчаш натижаларига зид келадиган ҳолларни қайд қилиш мумкинлигини эслатиб ўтамиз. Бу кўп даражада ишқаланувчи сиртларнинг механикавий ишлови билангина эмас, балки уларнинг тозалигига боғлиқ: турли хил ифлосликлар сирпанишдаги ишқаланиш кучи катталигига таъсир қилади, шунинг билан бирга ифлосликнинг хили муҳим аҳамиятга эга. Нам, ёғнинг озгина излари ва бошқалар бўлган ифлосланган сиртлар ҳолида ишқаланиш кучининг тезликка боғланиши муайян тарзда тозаланган ўша сиртлар ҳолидагидан тамомила бошқа характерга, f_0 нинг бошқа қийматларига эга бўлади.

Мойланган (мой, сув ва бошқалар билан) сиртнинг ишқаланиши кўп ҳолларда етарлича мойлашда, қовушоқ ишқаланиш характерига эга. Ҳақиқатдан ҳам, мойланганда ишқаланувчи сиртлар орасида суюқликнинг узлуксиз қатлами мавжуд бўлади. Мойнинг жисмга тегиб турган зарралари унга ёпишиб қолади ва уларни жисмга нисбатан ҳаракатсиз дейиш мумкин: суюқликнинг ҳаракат тезлиги бутун қатламнинг кўндалангига чизиқли қонун бўйича ўзгарганидан ишқаланиш кучи бунда μ қовушоқлик коэффициенти катталиги, ишқаланувчи сиртлар сатҳи ва мойловчи қатламнинг қалинлиги билан белгиланади. Мойловчи қатламнинг қалинлиги мойнинг хилига ҳам, тегишиб турувчи ва сирпанувчи жисмларнинг бир-бирига босимига ҳам боғлиқ.

Мойлашнинг гидродинамик назарияси Н. П. Петровнинг классик назарий ва экспериментал тадқиқотларида[1] ишлаб чиқилган эди.

Техникада яна *думаланишдаги ишқаланиш кучлари* ҳамда сирпанишсиз ёки сирпанишли *думаланишдаги тутиниш ишқаланиш кучлари* муҳим аҳамиятга эгадир. Бу масалани биз айланувчи жисм динамикаси билан танишгандан кейин 73- ва 75-§ ларда қараймиз.

Ҳаракатни бир жисмдан бошқасига узатишда тинчликдаги ишқаланиш кучи, баъзида сирпанишдаги ишқаланиш кучи ҳам принципиал аҳамиятга эга эканлигини қайд қилиб ўтиш лозим. Ҳақиқатдан ҳам, одам бир жойдан иккинчи жойга оёғи тагидаги таг чарм билан ер орасида юзага келувчи ишқаланиш кучи туфайли кўчади (қадамлайди). Йўловчилар вагонда бораётганларида ҳамда вагоннинг полида ва полкасидаги юклар улар ва вагон орасида юзага келувчи тинчликдаги ишқаланиш кучи туфайли тезланиш олади. Балки, бу тинч-

---

[1] Н. П. Петров. Гидродинамическая теория смазки. Танланган ишлар, СССР ФА нашриёти, 1948.

ликдаги ишқаланиш кучларини *тутиниш ишқаланиш кучлари* дейиш дурустроқ бўларди. Техникада кўпинча бир машинадан бошқасига энергияни фрикцион узатиш, масалан, бир шкивдан бошқасига тасма билан узатиш қўлланилади; бундай узатиш фақат тасма ва шкив орасида тутиниш ишқаланиш кучи туфайлигина мумкиндир; бошқа бир мисол — 104- расмда автомобилда мотор ва етакчи валнинг фрикцион уланиш схемаси кўрсатилган.

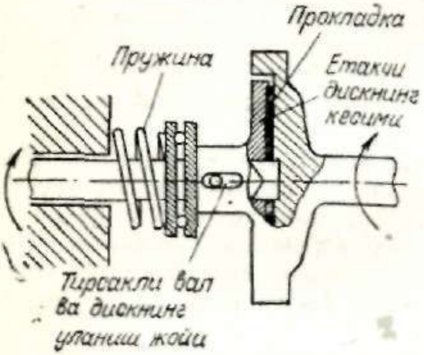
Умуман, ишқаланиш кучлари бўлмаганда ҳаракатни ва кучни бир жисмдан бошқасига узатилишини тасаввур қилиш жуда қийин. Ишқаланиш кучлари бўлмаганда кўпчилик одатдаги кўчиш усулларини тамомила ақл бовар қила олмасди.

Тинчликдаги ва сирпанишдаги қуруқ ишқаланиш муҳим роль ўйнайдиган масалаларни ечишда даставвал қийинчиликлар юзага келади. Шунинг учун шундай хил типик масалалардан бирини батафсил таҳлил қилайлик.

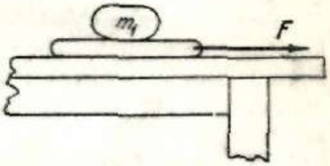
Столнинг горизонтал сиртида ётган тахтага m_1 массали юк қўйилган (105- расм). Тахтага $\boldsymbol{F}$ горизонтал куч қўйилган. Агар m_1 ва m_2 мос равишда юк ва тахта массалари, μ_1 — тахта ва юк орасидаги ишқаланиш коэффициенти ва μ_2 — тахта ва стол орасидаги ишқаланиш коэффициенти маълум бўлса, тахта ва юкнинг тезланишлари аниқлансин. Кулон қонуни ўринли деб ҳисоблаймиз. Масаланинг жавоби F кучнинг турли қийматлари учун ҳар хил бўлади. Кичик F кучларни қараймиз ва аста-секин уларнинг катта қийматларига ўтамиз. Равшанки, жуда кичик куч ҳолида юк ва тахтанинг тезланишлари нолга тенг, тахта тинч ҳолатда бўлади. Таъсир этувчи F куч тахтанинг юк билан тинчликдаги максимал ишқаланиш кучидан кичик бўлган, яъни

$$0 \leqslant F \leqslant \mu_2 (m_1 + m_2) g = F_0$$

бўлганида шундай ҳолат мавжуд бўлади.



104- расм.



105- расм.

F куч F_0 дан озгина ортиқ бўлганда тахта юк билан биргаликда

$$a = \frac{F - F_0}{m_1 + m_2} \tag{42.1}$$

тезланиш билан ҳаракатланади. Бу ҳолда тахта ва юк орасидаги тинчликдаги ишқаланиш кучи $m_1 a$ га тенг бўлади. F ортиши (демак a тезланиш) ортиши билан юк ва тахта орасидаги тинчликдаги ишқаланиш кучи ҳам ортади. Лекин $m_1 a < \mu_1 m_1 g$ ёки $a < \mu_1 g$, яъни ишқаланиш кучи максимал қийматга эришгунча шундай бўлиб туради: бу $F = F_1$ да юз беради. Агар $F > F_1$ бўлса, у ҳолда юк тахтада сирпана бошлайди. F_1 катталикни $a = \mu_1 g$ шартдан аниқланади. Бу шартни (42. 1) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$F_1 = F_0 + (m_1 + m_2)\mu_1 g = (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g.$$

$F > F_1$ да тахтанинг тезланиши $\mu_1 g$ дан катта, юкнинг тезланиши эса $\mu_1 g$ га тенглигича қолгани сабабли юк бирор вақтдан кейин тахтадан тушиб қолади. Тахтанинг тезланиши бу ҳолда

$$b_1 = \frac{F - F_0 - \mu_1 m_1 g}{m_2};$$

уни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$b_1 = \frac{F - F_1 + \mu_1 m_2 g}{m_2} = \frac{F - F_1}{m_2} + \mu_1 g.$$

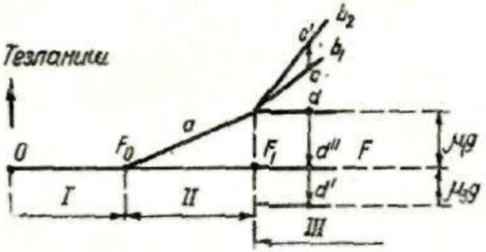
Берилган F кучда бундай ҳолат ҳали юк тахта бўйича орқага сирпанаётган бирор вақт ичидагина давом этади. Юк тахтадан тушиб қолиши биланоқ, унинг тезланиши сакраш билан ўзгаради ва

$$b_1 = \frac{F - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_1 g}{m_2}$$

бўлгани сабабли тезланиш қуйидагига тенг бўлиб қолади:

$$b_2 = \frac{F - \mu_2 m_2 g}{m_2} > b_1.$$

Юк столда ҳаракатланаётганида унинг тезланиши қандай бўлиши маълум эмас; бу унинг қандай ҳаракатланишига, сирпанаётибдими ёки



106- расм.

думалаётибдими, шунга боғлиқдир. Агар у сирпанаётган бўлиб, унинг стол билан ишқаланиш коэффициенти μ_3 бўлса, бу ҳолда юкнинг тезланиши у тўхтагунча $-\mu_3 m_1 g$ га тенг ва орқага йўналган бўлади.

Пировардида тезланишларининг куч катталигига боғланиш графигини тузиш мумкин (106- расм). I соҳада юк тинч ҳолатда, II соҳада юк ва тахтанинг тезланишлари бирдай ҳамда $(F-F_0)$ га пропорционал ўсади, III соҳада тахта ва юк турли тезланиш қийматларига: даставвал тахтанинг тезланиши b_1, сўнгра b_2, сакраш $(c \to c')$ га эга бўлади; даставвал юкнинг тезланиши $\mu_1 g$ га тенг, сўнгра $\mu_3 g$ га тенг ва ниҳоят, нолга тенг $(d \to d' \to d'')$ бўлиб қолиши мумкин.

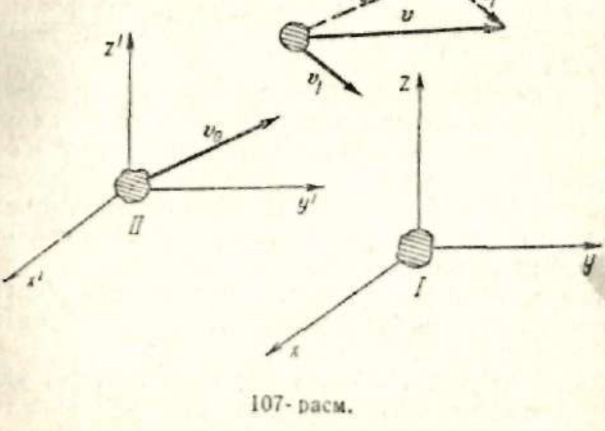
VI БОБ

НИСБИЙ ҲАРАКАТ

43-§. Инерциал саноқ системалари

Ҳозиргача биз ҳаракат нисбатан қаралаётган саноқ системани Ер билан доимо боғланган деб ҳисоблар, шунинг билан бирга, Ернинг ўзини эса тинч турипти деб қарар эдик. Ҳақиқатда эса, биз Ернинг ўз қутб ўқи атрофида айланиши билан бирга Қуёш атрофида йиллик айланма ҳаракат қилишини яхши биламиз. Бинобарин, Ерни ҳаракатсиз деб ҳисоблаб, биз қандайдир хатога йўл қўяр эдик, буни биз ушбу бобда аниқлаймиз.

Динамика қонунларининг таърифлари фақат *инерциал* саноқ системалари учунгина бирдай бўлади. Бири (*I*) ҳаракатсиз, иккинчиси (*II*) эса, биринчисига нисбатан доимий $\boldsymbol{v}_0$ *тезлик* билан ҳаракатланаётган икки саноқ системасини кўз олдимизга келтирайлик (107-расм). У ҳолда иккинчи саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлган жисмлар биринчисига нисбатан $\boldsymbol{v}_0$ тезликда, иккинчи саноқ системасига нисбатан $\boldsymbol{v}_1$ тезликка эга бўлган жисмлар эса ҳаракатсиз системага нисбатан $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0$ тезликда ҳаракатланиши равшан. $\boldsymbol{v}_0$



107- расм.

тезлик доимий бўлганидан жисмнинг ҳаракатланаётган саноқ системага нисбатан тезланиши ҳаракатсиз саноқ системага нисбатан тезланишига тенг ва аксинча. Бир-бирига нисбатан тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланаётган ҳар қандай саноқ системага нисбатан тезланиш *бирдай бўлади*.

Жисмларга таъсир этувчи кучлар ҳамда шу жисмларнинг массалари, тажрибаларнинг кўрсатишича, муайян жисмнинг ҳаракатини биз қандай саноқ системага нисбатан аниқлаётганимизга боғлиқ эмас. Ҳақиқатан ҳам, кучлар *жисмлар орасидаги масофага, уларнинг* нисбий тезлигига ва вақтга боғлиқ. Бу барча катталиклар текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланаётган янги координаталар системасига ўтишда ўзгармайди.

Агар барча биз танлаган саноқ системалари бир-бирларига нисбатан тўғри чизиқли ва текис ҳаракат қилаётган бўлса, ҳамда бундан ташқари улардан бирида динамика қонунлари ўринли бўлиши маълум бўлса, у ҳолда динамиканинг биринчи ва иккинчи қонунларининг таърифи бу барча саноқ системаларининг ҳар бирида ўринли бўлади. Барча шундай саноқ системалари инерциал системалар дейилади; Галилейнинг инерция қонуни фақат шундай системалардагина бажарилади. Бу ҳолатни *Галилейнинг нисбийлик принципи* дейилади.

Инерциал системага нисбатан тезланиш билан ҳаракатланувчи саноқ системаларини *ноинерциал системалар* дейилади. Лекин бизга маълум саноқ системаларидан қайси бирини инерциал система деса бўлади? Бу саволга умумий кўринишда жавоб бериш жуда қийин. Бироқ ёруғлик тезлигига нисбатан кичик тезликлар билан ҳаракатларни таҳлил қилаётганда инерциал саноқ система сифатида Қуёш системасини ҳосил қилувчи, ўқлари «қўзғалмас» юлдузларга[1] нисбатан ўзгармас йўналишларга эга бўлган жисмларнинг массалари марказлари билан доимий боғланган системани қабул қилиш мумкин. Ҳаракатларни Ерда текшириш тажрибаси ҳамда астрономик кузатишлар тажрибаси бундай фаразнинг ўринли эканлигини тасдиқлайди.

Ерни ва у билан боғланган саноқ системаларини фақат тақрибангина, бунда бирор хатоликка йўл қўйиб, инерциал системалар дейиш мумкин. Бунда биз қиладиган хато 48-§ да ойдинлаштирилади.

Нисбийлик назариясида бу проблема бир оз бошқачароқ ечилади. Биринчидан, ҳаракатни тасвирлаш учун барча инерциал саноқ системалар *тенг ҳуқуқли* деб тахмин қилинади. Бир-бирига нисбатан текис ва тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган саноқ системалари ичидан бирор имтиёзлисини ажратиб бўлмайди. Иккинчидан, динамика қонунлари (умуман табиат қонунлари) исталган инерциал саноқ системада бирдай кўринишга эга (инвариант).

Галилейнинг нисбийлик принципи фақат Ньютон қонунларининг инерциал системаларга нисбатан инвариантлигини тасдиқлайди, холос

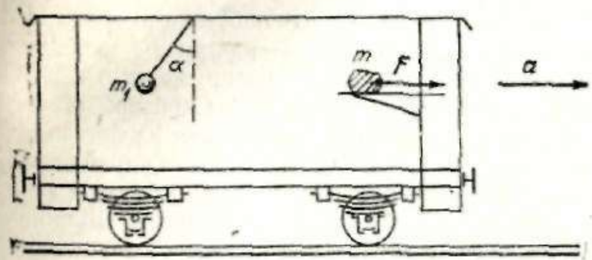
---

[1] Астрономлар «қўзғалмас» юлдузлар деб, осмон гумбазида жойлашишини (муайян аниқликда) доимий сақлайдиган юлдузлар системасини атайдилар.

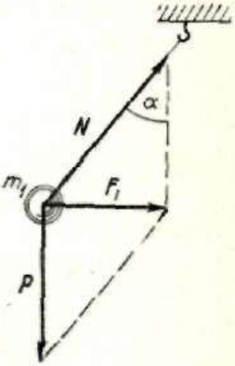
Эйнштейннинг нисбийлик принципи бу тасдиқномани электродинамика қонунларига ҳамда физиканинг бошқа қонунларига ёяди (XVII бобга қ.).

44-§. Жисмнинг ноинерциал саноқ системадаги ҳаракати. Инерция кучлари

Агар биз жисмнинг ҳаракатини тезланишли саноқ системага нисбатан қараётган бўлсак, у ҳолда динамиканинг *биринчи ва иккинчи* қонунларини одатдаги кўринишда татбиқ қилиб бўлмайди. Ҳақиқатдан ҳам, ноинерциал саноқ системадаги тинч ҳолат фақат жисм инерциал *саноқ системага нисбатан тезланишли ҳаракат қилаётганлиги* сабабли жисмга ташқи кучлар таъсир қилаётганидагина мавжуд бўлади. Масалан, темир йўл поездининг вагони $\boldsymbol{a}$ тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракатланмоқда (108-расм). Вагондаги столда тугунча бўлиб, у Ерга нисбатан тезланишга эга; демак, унга $\boldsymbol{a}$ тезланиш берувчи куч таъсир қилиб, бу куч тугунчанинг стол сиртига ишқаланиш кучидир. Вагон шипига ипда осилган юк шундай осилиб турадики, ип вертикал осилган ҳолда қолмай, балки тезланиш йўналишига қарама-қарши йўналишга оғади. Тезланиш $\boldsymbol{a}$ нинг катталиги ўзгариши билан ипнинг вертикалдан оғиш бурчаги α ҳам ўзгаради.



108-расм.



109-расм.

Юкка иккита куч: ипнинг таранглик кучи $\boldsymbol{N}$ ва юкнинг Ерга тортилиш кучи $\boldsymbol{P}$ таъсир қилади (109-расм). Бу кучларнинг йиғиндиси, уларнинг $\boldsymbol{F}_1$ тенг таъсир этувчиси вагон тезланиши томонга йўналган:

$$F_1 = m_1 a, \quad F_1 = P \operatorname{tg}\alpha.$$

Вагондаги жисмга таъсир этувчи кучларни аниқлашда биз бу жисмнинг Ерга нисбатан (инерциал саноқ системага нисбатан) тезланишини назарга олганимизни таъкидлаб ўтамиз. Бироқ тезлашган саноқ системага, вагонга нисбатан ҳаракат қонунларини худди инерциал системаларга нисбатан ҳаракат ҳолидаги кўринишда таърифлаш мумкинмикан? Равшанки, саноқ системанинг (бизнинг мисолда вагоннинг) тезланишли ҳаракатини ҳисобга олмай туриб, бундай қилиш мумкин эмас.

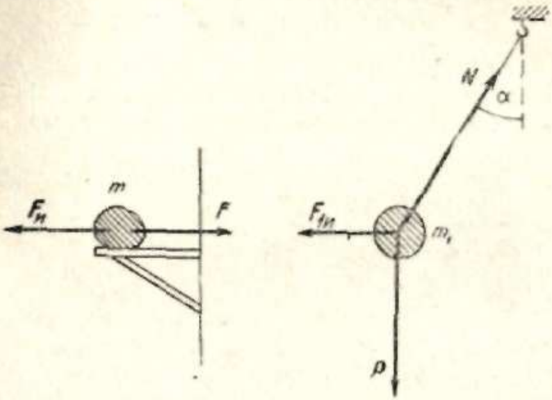
Механикада, кўпинча, тезланишли саноқ системанинг ҳаракатини *инерция кучлари* дейилувчи махсус кучларни киритиш билан ҳисобга олинади. Бу кучларнинг киритилиши ноинерциал саноқ системаларига нисбатан ҳаракатланаётган жисмлар учун динамиканинг биринчи ва иккинчи қонунларини улар инерциал саноқ системаларига нисбатан ҳаракатланаётган жисмлар учун қандай шаклда бўлса, шундай кўринишида сақлашга имкон беради; бу ҳар бир хусусий ҳолда ҳаракатни таҳлил қилишни кўп даражада соддалаштиради.

Айтайлик, тезланишли саноқ системадаги ҳар бир жисмга шу жисм массасининг саноқ системанинг тезланишига кўпайтмасига тенг ва тезланишга қарама-қарши йўналган инерция кучи таъсир қилаётган бўлсин. Масалан, вагон столидаги тугунча ҳамда ипда осилиб турган юкка 110-расмда кўрсатилганидек, $\boldsymbol{F}_{\text{и}} = -m\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{F}_{1\text{и}} = -m_1\boldsymbol{a}$ инерция кучлари таъсир этаётган бўлсин. У ҳолда бу жисмларнинг вагонга нисбатан тинч ҳолатида, худди инерциал саноқ системага нисбатан тинч ҳолатидагидек, жисмга таъсир этувчи барча кучларнинг йиғиндиси нолга тенг деб тасдиқлаш мумкин:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{и}} = 0, \quad \boldsymbol{F}_{\text{и}} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = 0. \tag{44.2}$$

Агар тугунчанинг стол сирти билан ишқаланиши бўлмаганда эди, у ҳолда тугун вагон тезланишига қарама-қарши йўналган $\boldsymbol{F}_{\text{и}}$ инерция кучи таъсирида вагонга нисбатан $\boldsymbol{a}$ тезланиш билан ҳаракатланётган ёки столдан сирпаниб тушиб кетган бўлар эди. Сирпаниб тушаётган тугунчанинг йўл полотносига нисбатан ҳаракатини қараётганда тугунчага горизонтал йўналишда ҳеч қандай куч таъсир қилмайди ва у полотнога нисбатан тинч ҳолатда қолаётир, тезланиш билан ҳаракатланаётган вагон эса ундан узоқлашаётир дейиш мумкин. Шунинг учун саноқ системанинг тезланишли ҳаракатини ҳисобга олувчи инерция кучлари ҳаракатни тезланишли саноқ системага нисбатан қарагандагина юзага келади. Агар ўша ҳаракат инерциал саноқ системага нисбатан қаралаётган бўлса, инерция кучларини киритиш зарурати бўлмайди.

Агар вагонда осилиб турган (110-расмга қ.) юкни туртилса, юк маятник каби тебрана бошлайди. Агар вагоннинг ҳаракати вақтида унинг тезланиши доимий турса, вагонга нисбатан маятник тебранишларини таҳлил қилишда ҳеч қандай қийинчилик туғилмайди. Ҳақиқатан ҳам, тортишиш кучига доимий $\boldsymbol{F}_{1\text{и}}$ инерция кучи қўшилади, бу иккита кучнинг натижавийси вертикалга α бурчак остида йўналган, ҳамда маятник вертикалдан α бурчакка оғган ипнинг мувозанат йўналиши яқинида тебранишлар бажаради. Мувозанат ҳолатида ип бўйича таъсир этувчи куч Ернинг тортиш кучидан катта бўлади, у тортишиш кучи ва инерция кучи квадратлари йиғиндисидан олинган квадрат илдизга тенг ҳамда N га қарама-қарши йўналган (110-расмга қ.). Ипни кесиб юборсак, юк вагонда вертикалга α бурчак остида йўналган тўғри чизиқ бўйлаб $\sqrt{a^2 + g^2}$ тезланиш билан тушади. Ерга нисбатан юк вагоннинг юк узилиш пайтидаги тезлиги ва g тезланиш билан аниқланувчи парабола бўйлаб ҳаракат қилади.



110-расм.

Массаси m бўлган жисмнинг a тезланишли ноинерциал саноқ системадаги ҳаракатида динамиканинг иккинчи қонунини шундай таърифламоқ керак:

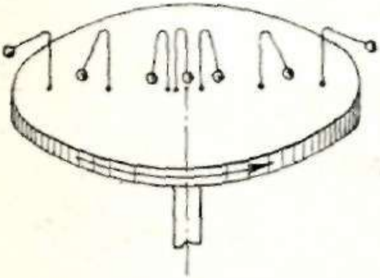
$$F + F_и = mw_0, \tag{44.3}$$

бунда w_0 — жисмнинг ноинерциал саноқ системадаги тезланиши, $F_и = -ma$ — инерция кучи, F — жисмга таъсир этаётган барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси.

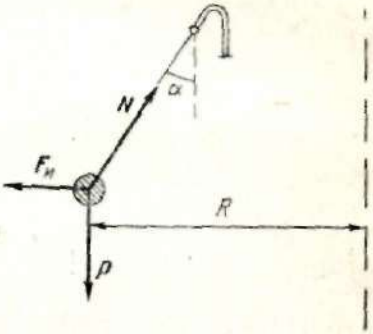
Инерция кучларининг мавжудлиги координаталар системасининг тезланувчан ҳаракатини ҳамда инерция кучлари жисмнинг тезланишли саноқ системадаги ҳаракатини белгилайди. Бу маънода улар жисмларнинг одатдаги ўзаро таъсир кучларидан фарқ қилмайди. Бироқ инерция кучларининг жисмларнинг ўзаро таъсирларини ифодаловчи бошқа кучлардан принципиал фарқини таъкидлаб ўтмоқ лозим; у шундан иборатки, *инерция кучлари акс таъсир этувчига эга эмас*, инерция кучи таъсири келиб чиқадиган жисмни кўрсатиб бўлмайди. Шунинг учун ҳам, баъзида инерция кучини «сохта куч» дейилади; бундай номни мақсадга мувофиқ деб бўлмайди: у координаталар системасининг тезланишли ҳаракатини акс эттириши сабабли инерция кучи реалдир, у акс таъсир этувчига эга эмаслиги сабабли ўзаро таъсир кучларидан фарқли бўлса-да, унда ҳеч қандай сохталик йўқ.

45-§. Айланувчи саноқ системада тинч ҳолатда турган жисмга таъсир этувчи инерция кучлари

Горизонтал жойлаштирилган текис айланаётган дискка ўрнатилган маятникларнинг ҳаракатини кузатайлик (111-расм). Биз маятникларнинг барча шарлари вертикалдан оғганини кўрамиз.



111-расм.



112-расм.

Маятник диск марказидан қанча узоқда бўлса, маятник ипларининг оғиш бурчаклари шунча катта бўлади[1]. Барча маятниклар дискка нисбатан тинчлик ҳолатида бўлганлари ҳолда Ерга нисбатан (инерциал саноқ системага нисбатан) айлана бўйлаб текис ҳаракат қилади. Маятник юкчалари ҳаракатланадиган айланалар радиуслари турлича бўлгани сабабли, юкчаларга таъсир этувчи марказдан қочма кучлар юкчаларнинг диск марказидан масофаларига тўғри пропорционалдир. Марказга интилма куч $\boldsymbol{F}$ ипларнинг $\boldsymbol{N}$ таранглиги ва юкчаларнинг $\boldsymbol{P}$ оғирлик кучлари туфайли ҳосил бўлади (112-расм), $F = m\omega^2 R, P = mg$, шунинг учун ипнинг вертикалдан α оғиш бурчаги шундай бўладики,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}; \qquad (45.1)$$

бунда R — юкчанинг диск марказидан масофаси, g — эркин тушиш тезланиши ва ω — дискнинг айланиш бурчак тезлиги.

Маятниклар дискка нисбатан оғганда тинч ҳолатда бўлади. Демак, маятник юкчаларига тортишиш кучларидан ташқари яна мар-

---

[1] Дискнинг айланиш ўқида осилган маятник $\omega < \sqrt{g/e}$ бурчак тезликларда оғмайди.

каздан ташқарига йўналган ва шунинг билан бирга турли маятниклар учун турлича бўлган қандайдир горизонтал куч таъсир қилади. Бу куч айнан *марказдан қочма инерция кучи* бўлиб, у катталиги жиҳатдан юкча массасининг дискнинг тепасида юкча турган жойининг тезланишига (Ерга нисбатан) кўпайтмасига тенг ва у тезланишга қарама-қарши, яъни диск марказидан радиус бўйича йўналган. Шундай қилиб, дискка нисбатан тинчлик ҳолатида ҳар бир маятникнинг юкчасига учта куч: тортишиш кучи $\boldsymbol{P}$ ва таранглик кучи $\boldsymbol{N}$ ҳамда инерция кучи

$$\boldsymbol{F}_{\text{и}} = m\omega^2\boldsymbol{R} \tag{45.2}$$

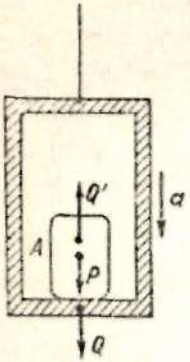
таъсир қилади, бунда $\boldsymbol{R}$ вектор ўқдан ташқарига йўналган. Бу барча кучларнинг йиғиндиси нолга тенглиги сабабли (112-расмга қ.), юкча дискка нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Агар бирор сабабга кўра мувозанат бузилса, маятникларнинг дискка нисбатан тебранишлари бошланган ҳамда юклар дискка нисбатан тезланиш олган бўлар эди

Айланувчи координаталар системасида тинч ҳолатда турган жисмга таъсир этувчи инерция кучлари жисм шу координаталар системасида эгаллаб турган жойга боғлиқ. Жисм айланувчи координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаётганда унга яна бошқа инерция кучлари таъсир қилади, уларнинг катталиги ва йўналишини 48-§ да аниқлаймиз. Тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракатланаётган координаталар системасида инерция кучлари бу системанинг барча нуқталари учун *бирдайлиги* сабабли шу системага нисбатан тинч ҳолатдаги ва ҳаракатланаётган жисмга таъсир этувчи инерция кучлари бирдай қийматга эга бўлади.

46-§. Вазнсизлик ҳодисаси

Космик кемада, сунъий йўлдошда, тушаётган лифтда, фақат оғирлик кучи таъсирида учаётган самолётда *вазнсизлик ҳодисаси* содир бўлади. Кемада, сунъий йўлдошда ва ҳоказода бўлган ҳар қандай жисм, улар *фақат* Ернинг (ёки бошқа осмон жисмларининг) тортишиш кучи таъсирида бўлган пайтларида гўё ўз «оғирликларини» йўқотадилар. Космонавт кабинада ҳеч нарсага таянмай эркин «парвоз қилади» у ўз қаламини «ҳавога қўйиши» мумкин ва бунда қалам тушиб кетмайди. Идиш деворини ҳўлламайдиган суюқлик шар шаклини олишга интилади ва ҳакозо. Аввало, вазнсизлик ҳолати кузатиладиган барча аппаратлар фақат тортиш кучи таъсиридагина тезланувчан ҳаракат ҳолатида — эркин тушиш ҳолатида бўлади.

Тезланувчан ҳаракат қилаётган лифтда жисмнинг оғирлиги қандай ўзгаришини қарайлик. 14-§ да айтилганидек, биз жисмнинг оғирлиги деб, *А* жисмга таъсир қилаётган $\boldsymbol{P}$ тортишиш кучини эмас, балки жисмни тутиб турувчи тагликка қўйилган $\boldsymbol{Q}$ кучни атаймиз



113- расм.

(113- расм); $\boldsymbol{Q'}$ — жисмга таглик томонидан қўйилган куч. Айтайлик, A жисм пастга $\boldsymbol{a}$ тезланиш билан ҳаракатланаётган лифтда жойлашган; у ҳолда механика қонунларига кўра

$$P - Q' = ma, \quad Q = Q',$$

ёки

$$Q = P - ma \qquad (46.1)$$

(проекциялар ишоралари 113- расмда кўрсатилган стрелкаларга мос тарзда танланган). P куч (агар лифтнинг кўтарилиш баландлигининг ўзгариши Ер радиусига нисбатан кичик бўлса) ўзгармайди, Q куч (оғирлик кучи, тагликка босим кучи) эса a тезланишга боғлиқ бўлади.

Агар лифтни тезланишли саноқ система деб олсак, у ҳолда лифтдаги барча жисмларга инерция кучи $-ma$ қўйилган бўлади ва (46.1) тенгламани қуйидагича талқин қилиш мумкин: жисмнинг тагликка босим кучи (оғирлик) тортишиш кучи P ҳамда жисмга қўйилган инерция кучи $(-ma)$ йиғиндиси билан белгиланади.

(46.1) формулани яна шундай ёзиш мумкин:

$$Q = m(g - a). \qquad (46.2)$$

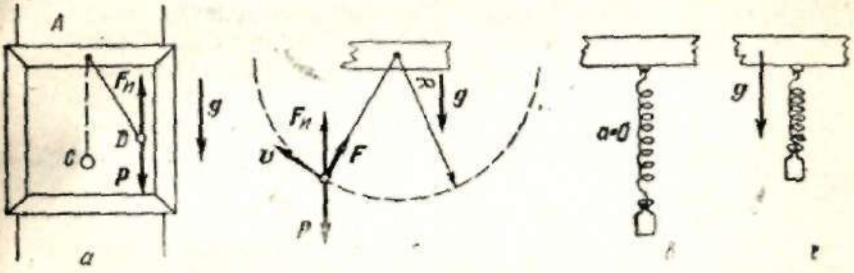
Бундан равшанки, $a = g$ да $Q = 0$ ни топамиз, яъни оғирлик кучи нолга тенг, жисм оғирлигини йўқотади; вертикал g тезланиш билан ҳаракатланаётган лифтда *ваз сизлик ҳодисаси* кузатилади. Инерция кучи тортишиш кучига тенг ва қарама-қарши йўналган — бу кучларнинг йиғиндиси нолга тенг. Лифт бу пайтда юқорига ҳам, пастга ҳам ҳаракатланиши мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз; унинг тезланиши g га тенг ва пастга йўналган бўлиши муҳимдир.

Космик кема ёки сунъий йўлдош ўзлари учиб ўтаётган жойда ҳамавақт тортишиш кучи томонидан ҳосил қилинаётган g тезланишга эга бўлганликлари сабабли уларда ҳам юқоридагидек манзара кузатилади. Ер атрофида айлана орбита бўйича ҳаракатланаётган йўлдош узлуксиз «тушади», яъни у тушиш ҳолатида бўлади; фақат тортишиш кучи тезланиши ҳамавақт унинг траекториясига нормалдир. Самолёт муайян тезликда учаётганда учувчи режимни шундай танлайдики, самолётга ҳаво томонидан таъсир қилувчи кучлар (кўтариш кучи плюс қаршилик кучи) тортиш кучи билан тўла мувозанатлансин; у ҳолда оғирлик кучи таъсирида самолёт g тезланиш билан «туша бошлайди». Техниканинг ҳозирги замон ҳолатида учишнинг шундай режими бир минутча давом этиши мумкин ва самолётда учаётганлар бу пайтда вазнсизлик ҳолатини кечиради.

Вазнсизлик ҳодисасининг аудиторияда энг содда намойишлари— деярли юз йил олдин Москва Давлат университетининг профессори

Н. А. Любимов томонидан таклиф қилинган — тушувчи рамкадаги маятник *билан тажрибалардан иборат.*

Иккита йўналтирувчи бўйича *A* рамка тортишиш кучлари таъсирида пастга эркин сирпана олади (114-*а* расм). *A* рамкага маятник осиб қўйилган. Маятник тебранишлар бажараётганда рамкани қўйиб юборилса, у маятник билан бирга пастга сирпанади. Агар рамкани маятник юкчаси ўзининг энг чекка юқори *D* нуқтасига эришганда қўйиб юборилса, у ҳолда рамка тушаётганда маятник тебранмайди, гўё оғган ҳолатида қотиб қолиб, рамкага нисбатан ҳаракатланмайди. Агар рамкани маятник мувозанат ҳолати (*C* нуқта) яқинидан ўтаётганда қўйиб юборилса, у ҳолда маятник рамка тушаётганда осилиш нуқтаси атрофида текис айланишда давом этади (114-*б* расм).



114-расм.

Тушувчи рамка билан яна шундай тажриба ўтказиш мумкин. Рамкага пружинада юкча осилган (114-*в* расм); у ҳолда рамка тушаётганда олдин юкча чўзган пружина гўё унда ҳеч қандай юкча йўқдек қисилади, юкча гўё оғирлигини «йўқотади» (114-*г* расм).

Бу барча ҳодисаларни инерция кучларини ҳисобга олиш ва ишқаланиш кучларини назарга олмаслик орқали осон тушунтириш мумкин. Жисмнинг тезланиш билан ҳаракатланаётган рамкага нисбатан ҳаракатида унга юқорига йўналган ва жисм массасининг рамка тезланишига кўпайтмасига тенг бўлган $F_и$ инерция кучи таъсир қилади. Рамканинг тезланиши эркин тушиш тезланиши *g* га тенг бўлгани учун инерция кучи жисмнинг Ерга тортилиш кучига тенг бўлади. Демак, рамкага нисбатан ҳаракатланаётган ёки тинч турган жисмга ҳеч қандай куч таъсир қилмайди ҳамда у ё тинчликда қолиши, ё тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланиши лозим. Рамканинг ҳаракати бошида тинчликда бўлган маятник унга нисбатан ҳаракатсиз қолади; маятникнинг рамканинг тушиши бошланган пайтда ҳаракатда бўлган юкчаси унга *фақат битта F куч таъсир қилишлиги туфайли осилиш нуқтаси атрофида текис ҳаракат қилишда давом этади; бу куч рамка томонидан осилиш нуқтасига* йўналган ва айлана бўйича ҳаракатда унга марказга интилма тезланиш беради (рамка массаси маятник массасидан анча ортиқ). Инерция кучи ва тортишиш кучи юкча массасига турли томонга йўналган таъсир кўрсатиши ва бир-бирларини мувозанатлаши сабабли пружинада осилиб турган юкча уни энди чўза олмайди.

Бу ҳодисаларни инерция кучини ишлатмасдан, юкчанинг ва рамканинг Ерга нисбатан ҳаракатини қараш билан тушунтириш ҳам мумкин.

Маятникли рамкани қўйиб юборгандан кейин рамка ҳам маятник ҳам Ерга нисбатан бирдай тезланишга эга; демак, *оғирлик кучи* таъсири туфайли рамка ҳам, юк ҳам ҳар бир пайтда бирдай тезликка эга бўлади. Шунинг учун оғирлик кучи тушиш вақтида маятник ва рамканинг ўзаро вазиятини *ўзгартира олмайди*. Агар маятник бошланғич пайтда рамкага нисбатан тинч ҳолатда турган бўлса, бу ҳолда бутун тушиш давомида у нисбий тинч ҳолатда қолади. Агар маятник бошланғич пайтда бирор бурчак тезлик билан ҳаракатланган бўлса, бу ҳолда у тушиш вақтида ҳам ўша тезлик билан ҳаракатланишда давом этади. (Бу ерда ҳам рамканинг массаси маятник массасидан анча катта эканлигини назарга олиш лозим.)

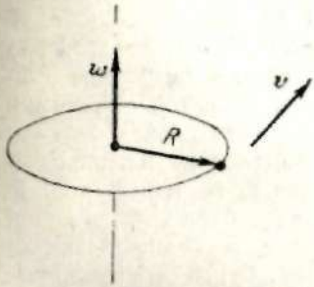
Барча бошқа ҳолларда ҳам юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар юритиш мумкин.

Ҳавосиз фазода ҳаракатланаётган космик кемадаги вазнсизликни ҳам шундай тушунтириш мумкин. Кема Қуёш билан боғланган координаталар системасига нисбатан, тортишиш кучлари яратган тезланишга эга. Кема билан боғланган ноинерциал координаталар системасида барча жисмларга шу системанинг тезланишига қарама-қарши йўналган инерция кучи қўйилган; бундан ташқари жисмларга тортишиш кучи ҳам таъсир қилади. Снаряднинг (ёки космик кеманинг) айлана орбита бўйича ҳаракатида марказдан қочма куч инерция кучидан иборат бўлиб, бу куч жисм снарядга нисбатан ҳаракатланаётганида тортишиш кучининг таъсирини компенсациялайди.

47-§. Нуқтанинг бурчак ва чизиқли тезлик векторлари орасидаги боғланиш

Ҳозир бизга айлана бўйлаб ҳаракатланаётган нуқта тезлигини вектор кўринишда ёзиш учун зарур бўлган иккита векторнинг вектор кўпайтмаси таърифини келтирамиз. Айлана бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги айланага уринма бўйича йўналган бўлиб, уни вектор кўпайтма ёрдамида ёзиш қулай. Бунинг учун ҳозирча формал тарзда, *бурчак тезлик векторини* киритамиз. Айлана бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг бурчак тезлигини айланиш ўқига параллел йўналган (115-расм) ва муайян масштабда сон жиҳатдан ω бурчак тезлик катталигига тенг бўлган вектордан иборат деб ҳисоблашга шартлашамиз. $\boldsymbol{\omega}$ векторнинг йўналиши нуқтанинг айлана бўйича ҳаракати йўналиши билан бир қийматли боғланган: $\boldsymbol{\omega}$ нинг йўналишини шундай танланадики, агар ҳаракатланаётган нуқтага $\boldsymbol{\omega}$ векторнинг учидан қаралса, у ҳолда нуқта соат стрелкасининг ҳаракатига тескари ҳаракатланиши лозим.

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ нуқта ҳаракатланаётган айлана текислигига тик, вектор $\boldsymbol{v}$ эса ҳамавақт айлана текислигида жойлашган. Яна бир $\boldsymbol{R}$ векторни (ёки радиус-векторни) киритамиз; бу вектор айланиш ўқидан ҳаракатланаётган нуқтага йўналган (115-расмга қ.). $\boldsymbol{R}$ ва $\boldsymbol{v}$ векторлар ўзаро тик ҳамда айланиш ўқига тик текисликда жойлашган.



115-расм.

$\boldsymbol{v}$ тезлик $\boldsymbol{\omega}$ ва $\boldsymbol{R}$ векторлар билан вектор кўпайтма қонуни асосида боғланган, яъни

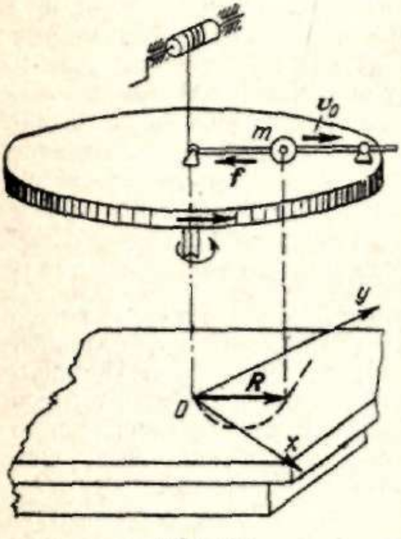
$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}]. \qquad (47.1)$$

тезлик учун (47.1) ифодани ҳамда вектор кўпайтма (7-§) таърифини таққослаганда, ҳақиқатдан ҳам айлана бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг $\boldsymbol{v}$ тезлик вектори катталиги ва йўналиши жиҳатдан $\boldsymbol{\omega}$ ва $\boldsymbol{R}$ векторларнинг вектор кўпайтмасига тенг, шунинг билан бирга $\sin\alpha = \sin 90^\circ = 1$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Формулани (47. 1) кўринишда ёзишнинг қулайлиги шундаки, у тезлик векторининг ҳам йўналиши, ҳам катталигини $\boldsymbol{R}$ ва $\boldsymbol{\omega}$ векторларнинг муайян пайтдаги йўналиши ва катталигига боғлиқ равишда кўрсатиб беради. Вектор кўпайтмани киритишнинг бу ҳолда зарурияти оддий мисолда равшан кўринмаса-да, мураккаб ҳаракат мисолларининг таҳлилида $\boldsymbol{v}$ тезлик векторини вектор кўпайтма кўринишида ифодалашнинг яққоллиги ва ихчамлиги тамомила аёндир.

48-§. Айланувчи саноқ системада ҳаракатланаётган жисмга таъсир қилувчи инерция кучлари

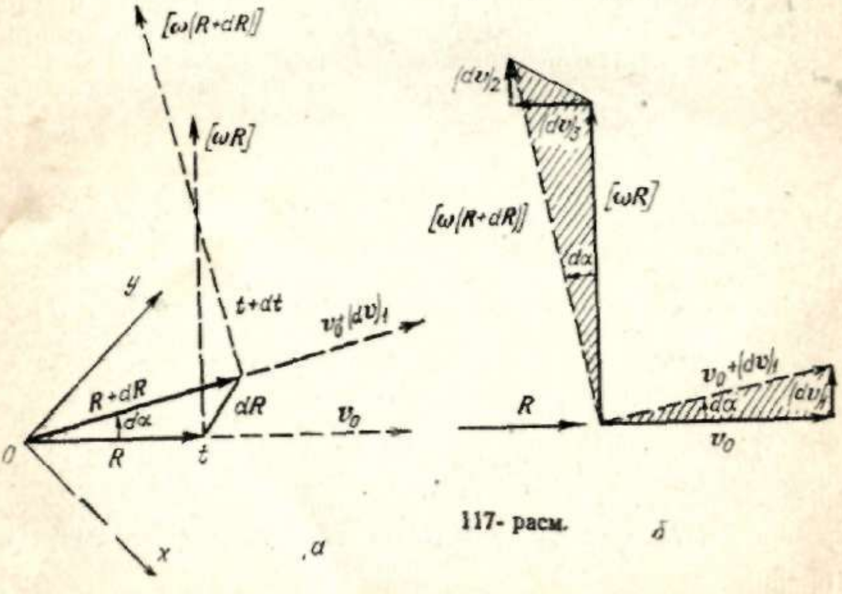
Айланаётган дискка нисбатан бирор йўналтирувчи бўйича (116-расм) тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланаётган кичик шарчани тасаввур қилайлик. Шарча диск радиуси бўйича v_0 тезлик билан тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланаётган бўлсин. Стол билан боғланган (инерциал координаталар системаси) ҳаракатсиз саноқ системага (x, y) нисбатан шарчанинг ҳаракати ҳам тўғри чизиқли эмас, ҳам нотекис бўлади; шарча марказининг траекторияси спиралдан иборат, унинг тезланиши траектория бўйича ҳаракатга анча мураккаб боғланишга эга. Айланувчи координаталар системасида ҳаракатланувчи жисмга таъсир қилувчи инерция кучини аниқлаш учун даставвал бу жисмнинг ҳаракатсиз координаталар системаси (x, y) га нисбатан тезланишини аниқлаш лозим.

Айтайлик, нуқта текис айланаётган диск радиуси бўйлаб ҳаракатланаётган бўлсин; унинг ҳаракатсиз координаталар системасига нисбатан тезланишини аниқлаймиз. Нуқта t вақт моментида айланиш ўқидан R масофада жойлашган бўлиб, уни (x, y) текисликда $\boldsymbol{R}$ вектор орқали белгилаймиз. Унда нуқтанинг (x, y) ҳаракатсиз саноқ системага нисбатан тезлигини икки ташкил этувчидан иборат деб қараймиз — бири дискка нисбатан ҳаракат тезлиги v_0 га тенг бўлиб, $\boldsymbol{R}$ радиус бўйича йўналган; иккинчи ташкил этувчи $\boldsymbol{R}$ радиусга тик ва $[\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{R}]$ га тенг, бунда $\boldsymbol{\omega}$ — дискнинг айланиш бурчак тезлиги вектори (117- *а* расм).



116- расм.

Энди тезликнинг бу ташкил этувчилари жуда кичик dt вақтдан кейин қандай катталикка ва йўналишга эга бўлишини қараб чиқамиз. Биринчидан, иккала ташкил этувчи бирор кичик бурчакка бурилади:



117- расм.

$$d\alpha = \omega\, dt;$$

иккинчидан, радиал ташкил этувчининг абсолют катталиги ўзгармайди, радиусга тик ёки тангенциал ташкил этувчининг катталиги эса

$$\omega\, dR = \omega\, v_0\, dt \tag{48.2}$$

га ортади, чунки R катталик dt вақт ичида

$$dR = v_0 dt \tag{48.3}$$

миқдорда ортади. Битта бошдан тезлик векторларининг t ва $t + dt$ пайтлардаги ташкил этувчилари ўтказилган 117-*б* расмдан кўринадики, тезликнинг dt вақт ичидаги орттирмаси $(d\mathbf{v})_1$, $(d\mathbf{v})_2$ ва $(dv)_3$ учта вектордан иборат бўлиб, шу билан бирга, $(dv)_1$ ва $(d\mathbf{v})_2$ орттирмалар радиусга тик ва тезликнинг $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}]$ тангенциал ташкил этувчиси бўйича бир томонга йўналган; $(d\mathbf{v})_3$ орттирма айланиш ўқи томон йўналган. Бу орттирмаларнинг йўналишини аниқлашда, катталикларини аниқлашдаги каби биз dt вақт оралиғи чексиз кичиклигини ва демак, тезлик орттирмаси уларнинг ташкил этувчиларига нисбатан чексиз кичиклиги каби $d\alpha$ бурчак ҳам чексиз кичиклиги ҳолатини назарга олишимиз кераклигини эслатиб ўтамиз.

Чизмадан (117-*б* расмга қ.) фойдаланиб тезлик орттирмалари катталигини аниқлаймиз.

1) $(dv)_1$ орттирма $\mathbf{R}$ радиус бўйича нисбий ҳаракат тезлиги диск радиуси билан биргаликда бурилишидан юзага келади; агар (48.1) формулани назарга олинса, орттирма катталиги ушбуга тенг бўлади:

$$(dv)_1 = v_0\, d\alpha = v_0 \omega dt. \tag{48.4}$$

2) $(d\mathbf{v})_2$ орттирма ҳаракат вақтида нуқта катта айлана тезликларга ўтишидан юзага келади; унинг катталиги ушбуга тенг:

$$(dv)_2 = \omega\,(R + dR) - \omega R = \omega v_0 dt; \tag{48.5}$$

ҳисоблашда (48.2) формула назарга олинган.

3) $(dv)_3$ орттирма нуқта айлана бўйича диск билан бирга айланиши ҳамда тезликнинг радиусга тик $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}]$ ташкил этувчиси ўз йўналишини ўзгартиришидан юзага келади; бу орттирманинг катталиги

$$(dv)_3 = \omega\, R d\alpha = \omega\, R \omega dt = \omega^2 R dt. \tag{48.6}$$

Тезликнинг етарлича кичик dt вақт ичидаги орттирмасини билган ҳолда тезланиш компоненталарининг катталикларини аниқлаш мумкин. Агар (48.5) ва (48.4) ларни қўшиб, dt га бўлсак, тезланишнинг тангенциал ёки радиусга тик компонентасини ҳосил қилиш мумкин:

$$w_{\text{к}} = \frac{(dv)_1 + (dv)_2}{dt} = \frac{2\omega v_0 dt}{dt} = 2\omega v_0. \tag{48.7}$$

Шундай тарзда тезланишнинг радиал компонентасини ҳам ҳосил қиламиз:

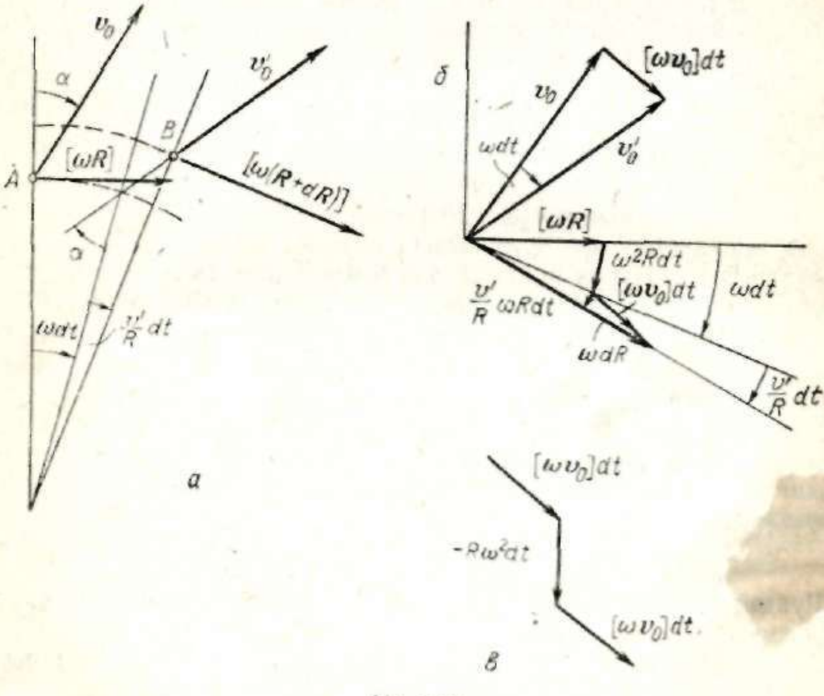
$$w_{\text{м}} = \frac{(dv)_3}{dt} = \frac{\omega^2 R dt}{dt} = \omega^2 R. \tag{48.8}$$

Равшанки, бу компонента бизга маълум бўлган *марказга интилма тезланишга* (9-§) тенг. Тезланишнинг $w_к$ тангенциал компенентаси *бурилиш* (ёки *Кориолис) тезланиши* дейилади. Бурилиш тезланишининг катталиги дискнинг айланиш бурчак тезлигининг нуқтанинг дискка нисбатан ҳаракати тезлигига кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Иккита ҳаракатда иштирок этаётган нуқта (бири — диск марказидан радиус бўйича ва иккинчиси — диск билан бирга айлана бўйича) тезланишининг таҳлилидан нуқтага иккита куч: бири радиус бўйича $f = m\omega^2R$ га тенг, иккинчиси радиусга тик ҳамда $F = m2\omega v_0$ га тенг бўлган кучлар таъсир қилади деган хулосага келамиз. Биринчиси — одатдаги марказга интилма куч, иккинчиси — бурилиш тезлинишини юзага келтирувчи куч. Демак, агар жисм (шарча) айланаётган ғилдиракнинг кегайи бўйича ҳаракатланаётган бўлса, у ҳолда кегай бу жисмга кегайга тик йўналишда таъсир қилади.

Буралиш тезланиши v_0 нисбий ҳаракат тезлиги йўналишига тик бўлиб, у ω ва $\mathbf{v}_0$ векторларнинг вектор кўпайтмаси кўринишида қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$\mathbf{w}_к = 2[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}_0]. \tag{48.9}$$



118- расм.

(48.9) формула v_0 векторнинг дискка (айланувчи жисмга) нисбатан ҳар қандай йўналиши учун ўринли эканлигини қайд қилиб ўтамиз. Бу формуланинг исботини 118- *а* расмни қарашдан олиш мумкин. Бу расмда дискка нисбатан $\boldsymbol{v}_0$ доимий тезлик билан ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлик ташкил этувчилари кўрсатилган. Нуқтанинг тинчликдаги саноқ системага нисбатан тезлиги t пайтда $\boldsymbol{v}_0$ ва $[\omega R]$ икки ташкил этувчидан иборат бўлиб—жисм бу пайтда A нуқтада жойлашган. dt вақтдан кейин жисм B нуқтада бўлади, унинг тезлиги $\boldsymbol{v}'_0$ ва $[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{R}+d\boldsymbol{R})]$ икки ташкил этувчидан иборат бўлиб, кейинги тезлик шу ташкил этувчининг t пайтдаги олдинги йўналишига нисбатан $(\omega+\frac{v'}{R})\,dt$ бурчакка бурилган бўлади ($\boldsymbol{v}'$—тезлик $\boldsymbol{v}_0$ нинг радиусга тик ташкил этувчиси).

118-*б* расмда нуқтанинг ҳаракатсиз саноқ системага нисбатан тезлигининг ҳар иккала ташкил этувчиси t ва $t+dt$ пайтлар учун битта бошдан чизилган. (48.9) ни исботлашда $\omega\,dt$ ва $\frac{v'}{R}dt$ бурчакларнинг чексиз кичик эканликларини ҳисобга олиш лозим. 118-*в* расмда тезлик орттирмасини ташкил этувчи векторлар яққоллик мақсадида занжирча тарзида кетма-кет чизилган: иккитаси $\boldsymbol{v}_0$ га тик ва бирдай, бири марказга йўналган. Орттирмаларни dt га бўлсак, $-\omega\boldsymbol{R}$ марказга интилма тезланишни ва $2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_0]$ Кориолис тезланишини ҳосил қиламиз.

Айланувчи системада $\boldsymbol{v}_0 \parallel \boldsymbol{\omega}$ бўладиган айланиш ўқига параллел ҳаракат, бу ҳаракатда $\boldsymbol{v}_0$ вектор фазода ўз йўналишини ўзгартмаслиги туфайли бурилиш тезланишини юзага келтирмаслигини кўрсатиб ўтамиз. Шу сабабли $\boldsymbol{v}_0$ нинг исталган йўналишида Кориолис тезланиши $2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_0]$ га тенг, чунки агар $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_{\parallel}+\boldsymbol{v}_{\perp}$ бўлса, $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\parallel}]\equiv 0$ туфайли, $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_0]=[\omega\boldsymbol{v}_{\perp}]$ бўлади.

Энди ўз мисолимизга қайтамиз ва яна бир бор айланувчи дискдаги (116-расмга қ.) шарчанинг радиус бўйича ҳаракатини қараймиз. Ҳозиргача биз бу ҳаракатни инерциал саноқ системага нисбатан, ҳаракатсиз координатлар системасига нисбатан қараган эдик. Энди ўша ҳаракатни айланаётган дискка нисбатан қараймиз.

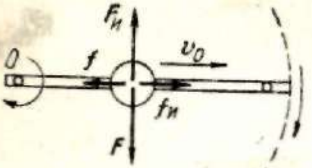
Шарча дискка нисбатан радиус бўйича текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланади; *бинобарин, агар бу ҳаракат учун динамика қонунлари* ўринли бўлса, шарчага ҳеч қандай куч таъсир килмаслиги лозим эди. Бироқ, биз ҳозиргина аниқлаганимиздек, шарчага иккита куч—биринчиси радиус бўйлаб марказга томон $\boldsymbol{f}=-m\omega^2\boldsymbol{R}$, иккинчиси радиусга тик йўналишда $\boldsymbol{F}=2m[\omega\boldsymbol{v}_0]$ таъсир қилади. Демак, шарча ҳаракатланаётган кегай бир оз эгилади ва дискнинг айланиши йўналишида унга босади. Бундан ташқари шарчага $\boldsymbol{f}$ куч қўйилган айлиб, у марказга томон йўналган. $\boldsymbol{f}$ куч шарчага боғланган ва бўланиш ўқига борувчи ип орқали қўйилган, 116-расмдан кўринишича, у блок орқали ташланиб, юқорига барабан томон йўналган. Бу иккита куч шарчага ҳамавақт таъсир қилиб туриши билан бирга, ω ва $\boldsymbol{v}_0$ ларнинг доимийликлари сабабли улардан бири ($\boldsymbol{F}$) катталиги жиҳатдан доимийдир, иккинчиси ($\boldsymbol{f}$) эса шарчанинг ўқдан масофага пропорционал равишда ўсади. Лекин шарча дискка нисбатан текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланади.

Амалда m жисмга таъсир қилувчи $\boldsymbol{F}$ ва $\boldsymbol{f}$ кучлар шундай кучларки, уларнинг катталиги ва йўналиши биз ҳаракатни ҳаракатсиз ёки айланувчи саноқ системага нисбатан қараётганимизга боғлиқ эмас. Шу сабабли, динамика биринчи ва иккинчи қонунларининг таърифи инерциал саноқ система учун қандай бўлса, айланувчи координаталар системасига нисбатан ҳам шундай бўлиши учун тезланишли ва тўғри чизиқли ҳаракатланаётган система ҳолидагидек, инерция кучларини киритиш мумкин.

Инерция кучларининг таъсирини фараз қилиб, шарчанинг текис айланаётган дискнинг кегайи бўйича текис ҳаракати манзарасини қуйидагича тасаввур қилиш мумкин. Шарчага кегайга тик йўналишда бир оз эгилган кегайнинг F кучи таъсир қилиб, у $F_{\text{и}} = -2m[\omega \mathbf{v}_0]$ га тенг ва эгилган кегай томонидан чиқувчи кучга қарама-қарши томонга йўналган *инерция кучи (Кориолис ёки бурилиш* кучи) билан мувозанатлашган бўлади (119- расм). Шарчага радиус бўйича ипнинг марказга интилма тезланиш берувчи таранглик кучи, f куч қўйилган; бу куч *марказдан қочма инерция кучи* $f_{\text{и}} = m\,\omega^2 R$ билан мувозанатлашади. Кегайнинг босим кучини ва ипнинг таранглик кучини мувозанатловчи бу инерция кучларининг мавжудлигида шарча айланувчи координаталар системасида кегай бўйича текис ҳаракат қилади.

Барча инерция кучлари каби бурилиш инерция кучи айланувчи системада ҳаракатланувчи жисмга қўйилган бўлади ва нисбий текис ҳаракат вақтида берилган жисмга бошқа жисмлар томонидан қўйилган кучлар билан мувозанатлашади. Яна қайта таъкидлаймизки, биз жисмнинг шу ҳаракатини инерциал координаталар системасига нисбатан қараётганимизда инерция кучлари ҳақида гап бўлмайди.

Биз қараган мисолда шарчага ҳамавақт вақтга пропорционал (тўғрироғи, радиусга пропорционал) ўса борувчи марказдан қочма инерция кучи таъсир қилади. Агар шарчага радиус бўйича f ташқи кучсиз ҳаракатланишга имкон берсак, яъни ипни узиб юборсак, у ҳолда унинг диск стержани бўйича ҳаракати текис бўлмай, тезланувчан бўлади. Тезланиш $f_{\text{ц}} = m\omega^2 R$ инерция кучи билан белгиланади ва R нинг ўсиши билан ортади. Бурилиш инерция кучи ҳам шарчанинг дискка нисбатан ҳаракат тезлиги ортиши билан ортади. Шарчанинг марказдан R масофаси t вақт ўтиши билан

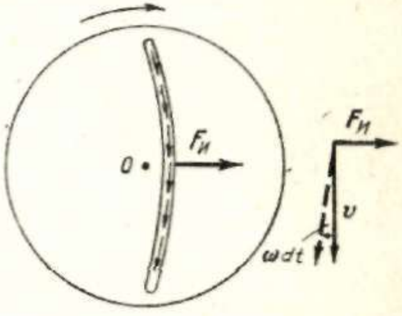


119- расм.

$$R = a\,\mathrm{ch}\,\omega t$$

қонун бўйича ортади, буни ҳособлаш қийин эмас, бунда a — шарча нолга тенг тезликка эга бўлган $t = 0$ пайтда турган масофа, ch — гиперболик косинус $(\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ белгиси.

Бурилиш тезланишининг (ёки бурилиш инерция кучининг) мавжудлигини С. Э. Хайкин тавсия қилган тажрибада осон кўриш мумкин. Айланувчи диск диаметри бўйича (120- расм) тортилган резина найча шундай уланганки, бу най бўйича сув айланиш вақтида бир учидан иккинчи учига оқа олади. Сув дискка нисбатан текис ҳаракатланади ва унга бурилиш инерция кучи таъсир қилади; шу сабабли резинка най диск айланаётганидаги сувнинг бурилиш тезлик векторига қарама-қарши томонга эгилади. Резинка найнинг бу эгилишини стробоскопик ёритишда осон кузатиш мумкин. Шу асбобдан фойдаланиб, дискнинг айланиш тезлиги ортиши билан найнинг эгилиши ортишини ҳам кузатиш мумкин. Сувнинг най бўйича ҳаракат тезлиги ортганда ҳам ўшандай ҳол юз беради.



120- расм.

Ҳаракатсиз ва айланувчи координаталар системаларидаги тезланишлар орасидаги боғланишни бир оз бошқача чиқарилишини тавсия қилиш мумкин.

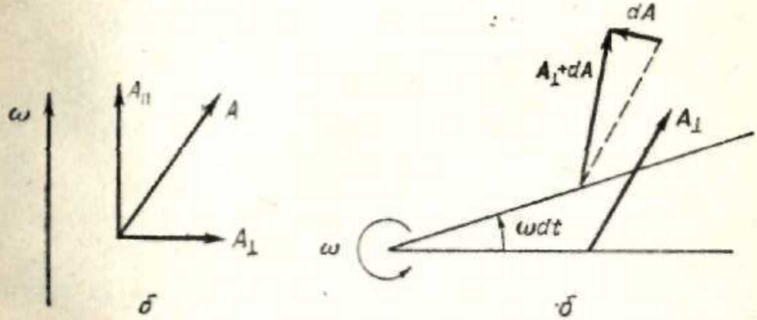
Аввало векторнинг ҳосиласи ҳақидаги умумий қоидани таърифлайлик. Айтайлик, A векторни ҳаракатсиз ва айланувчи системаларда *белгилаган бўлайлик*. Агар компоненталари доимий бўлган A вектор айланувчи системада ўзгармас бўлса, унда ҳаракатсиз системада A нинг компоненталари ўзгара боради. Ҳаракатсиз системада A вектор ўзгаради; dt вақт ичида у орттирма олади:

$$dA = [\omega dt A] \quad \text{ёки} \quad \frac{dA}{dt} = [\omega A].$$

Ҳақиқатдан ҳам, A векторни иккита ташкил этувчига: $A_\parallel$ ва $A_\perp$— бурчак тезлик ω га параллел ва унга нормал ташкил этувчиларга ажратамиз (121- *а* расм).

Унда

$$A = A_\parallel + A_\perp, \ [\omega A] = [\omega A_\perp], \ [\omega A_\parallel] = 0.$$



121- расм.

dA орттирма 121-*б* расмда кўрсатилган бўлиб, унда чизма текислиги ω га нормал равишда йўналган. Кўриниб турибдики,

$$dA = [\omega\ dt\ A_{\perp}],\ \text{ёки}\ \frac{dA}{dt} = [\omega A_{\perp}] = [\omega A].$$

Агар A вектор айланувчи системага нисбатан ўзгарса, ҳамда dt вақт ичида $(dA)_0$ орттирмага эга бўлса, у ҳолда A нинг ҳаракатсиз системадаги ҳосиласи қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{(dA)_0}{dt} + [\omega A]. \tag{48.10}$$

$\frac{(dA)_0}{dt}$ катталикни A векторнинг айланувчи системадаги ҳосиласи деса бўлади. (48.10) муносабат ҳар қандай A вектор учун ўринли.

Уни айланиш ўқидаги қўзғалмас O нуқтадан ҳаракатланаётган заррага ўтказилган R векторга татбиқ қиламиз (122-расм). У ҳолда ҳаракатсиз системага нисбатан

$$\frac{dR}{dt} = \frac{(dR)_0}{dt} + [\omega R] \tag{48.11}$$

бўлади, бунда $\frac{dR}{dt} = v$ — зарранинг ҳаракатсиз системадаги тезлиги, $\frac{(dR)_0}{dt} = v_0$ — айланувчи системага нисбатан тезлиги. v_0 тезлик исталган йўналишга эга бўлиши мумкинлигини эслатиб ўтамиз. Тезлик вектори

$$v = v_0 + [\omega R]$$

нинг ҳаракатсиз системага нисбатан ҳосиласини ёки ундаги w тезланишни, агар $\omega = \text{const}$ бўлса, шундай ёзиш мумкин:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \left[\omega \frac{dR}{dt}\right]. \tag{48.12}$$

Лекин (48.10) га мос равишда $\frac{dv_0}{dt}$ ва $\frac{dR}{dt}$ лар қуйидагиларга тенг:

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{(dv_0)_0}{dt} + [\omega v_0], \qquad \frac{dR}{dt} = v = v_0 + [\omega R].$$

Буларни (48.12) га қўйсак, ушбу ифода

$$w = \frac{(dv_0)_0}{dt} + [\omega v_0] + [\omega[v_0 + [\omega R]]] = \frac{(dv_0)_0}{dt} + 2[\omega v_0] + \\ + [\omega[\omega R]], \tag{48.13}$$

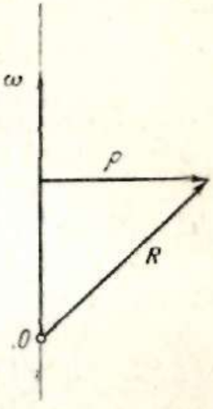
яъни изланаётган ифода ҳосил бўлади. Биринчи ҳад $\frac{(dv_0)_0}{dt}$ — зарранинг айланувчи системага нисбатан тезланиши, $2[\omega v_0]$ — Кориолис тезланиши, $[\omega[\omega R]] = -\omega^2\rho$ — марказга интилма тезланиш (122-расмга қ.). Ниҳоят умумий кўринишда, $\omega = \text{const}$ да

$$w = w_0 + 2[\omega v_0] - \omega^2\rho. \tag{48.14}$$

Инерция кучларини киритиш турлича талқинларни юзага келтиришидан уларни ўрганишда турли қийинчиликлар юзаға келади. Шу сабабдан яна бир бор асосий мулоҳазаларни эслатиб ўтамиз.

1. Инерция кучлари йўқ.

Ноинерциал саноқ системада динамиканинг биринчи ва иккинчи қонунлари *ўринли эмас*, жисмларнинг ўзаро таъсири ҳали жисмларнинг тезланишини белгиламайди. Шу сабабли даставвал муайян жисмнинг *инерциал* саноқ системага нисбатан ҳаракатини динамика нуқтаи назаридан таҳлил қилиш лозим. Жисмнинг шу системага нисбатан ҳаракати топилгандан кейингина кинематика қонунлари асосида унинг ноинерциал саноқ системадаги ҳаракатини ҳам аниқлаш мумкин.



122- расм.

2. Инерция кучлари бор.

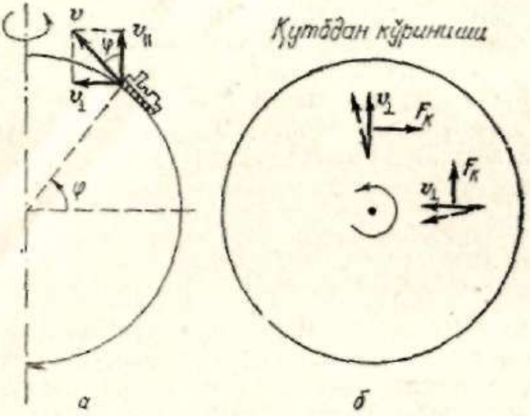
Бу ҳолда динамиканинг биринчи ва иккинчи қонунлари формал равишда *ўринли* бўлгани учун жисм ҳаракатининг бевосита *ноинерциал* саноқ системага нисбатан динамикавий таҳлилини бажариш мумкин бўлади; бунинг учун муайян жисмга таъсир этувчи ўзаро таъсир кучларига *инерциал кучларни* ҳам қўшиш лозим Ноинерциал системанинг илгариланма ҳаракатида *инерция* кучлари бу саноқ системанинг барча нуқталарида *бирдай* бўлиб, жисмнинг унга нисбатан ҳаракат тезлигига боғлиқ эмас. Айланувчи саноқ системада инерция кучлари ноинерциал системанинг турли нуқталарида (марказдан қочма кучлар) *турлича* ва ҳаракатнинг нисбий тезлигига боғлиқ (Кориолис кучлари).

Инерция кучларининг физикавий маъноси фақат шундаки, улар ноинерциал саноқ системага нисбатан текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланаётган жисмнинг тезланишини — саноқ системанинг тезланишли *ҳаракати туфайли мавжуд бўлувчи тезланишни ҳисобга олади* Жисмга таъсир этувчи ташқи кучларга инерция кучларини қўшиш ташқи кучлар йиғиндисидан жисмнинг марказга интилма ва Кориолис тезланишини (айланувчи саноқ системаси ҳолида) ёки ноинерциал саноқ системасининг тезланишини (унинг илгариланма ҳаракатида) белгиловчи қисмини айиришга тенг қийматлидир. Ташқи кучларнинг қолган қисми ноинерциал саноқ системага нисбатан тезланишни белгилайди.

49-§. Ер айланишининг жисмларнинг ҳаракатига таъсири. Фуко маятниги

Шимолий ярим шар дарёлари ўнг қирғоғининг ювилиши бурилиш инерция кучларининг таъсири билан тушунтирилади *(Бэр қонуни)*. Шу ярим шардаги икки йўлли темир йўллар ўнг рельсининг кўпроқ емирилиши ҳам шу билан тушунтирилади.

Айтайлик, поезд меридиан *бўйлаб* шимолий ярим шарда ҳаракатланаётир (123- *а* расм). Унда меридиан бўйлаб ҳаракат тезлиги v ни иккита ташкил этувчига — бири ($v_{\parallel}$) Ер ўқига параллел, иккинчиси ($v_{\perp}$) унга перпендикуляр бўлган ташкил этувчиларга ажратиш мумкин. Тезликнинг $v_{\parallel}$ компоненталарининг йўналиши ва катталиги Ернинг айланиши натижасида ўзгармайди, демак, бу



123- расм

компонента инерция кучлари билан боғлиқ эмас. Иккинчи компонента билан эса айланаётган дискнинг радиуси бўйича ҳаракатланаётган жисм тезлиги билан нима содир бўлса, шундай бўлади. Демак, поездга

$$F_к=2m\omega v_{\perp}=2m\omega v\sin\varphi \tag{49.1}$$

инерция кучи таъсир килади, бунда m — поезд массаси, φ эса географик кенглама, dt пайтдан кейинги $v_{\perp}$ компонентанинг йўналишини пунктир билан тасвирланган чизмадан (123- *б* расм) осон ишонч ҳосил қилиш мумкинки, инерция кучи ҳамма вақт поезд ҳаракати бўйича ўнг томонга йўналган бўлади. Шунинг учун тамомила равшанки ўнг[1] рельснинг эрта ейилишини, ҳаракат шу изда ҳамавақт фақат бир йўналишда бўладиган икки йўлли темир йўллардагина сезиш мумкин.

Поезд меридиан бўйича ҳаракат қилмаганда ҳам бурилиш инерция кучи мавжуд бўлишини эслатиб ўтамиз. Ҳақиқатдан ҳам, параллель бўйича ҳаракатда ҳам (124- расм), агар поезд шарққа ҳаракатланаётган бўлса, айланиш ўқига то-

---

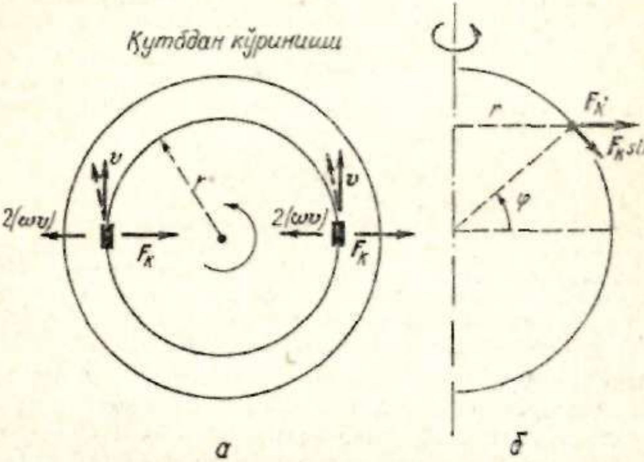
[1] Жанубий ярим шар йўлларида — чап рельс.

мон, ғарбга ҳаракатда эса айланиш ўқидан ташқарига йўналган $2\omega v$ бурилиш тезланиши мавжуд бўлади. Демак, Ер ўқидан ташқарига (ёки унинг ўқига) йўналган

$$F_{\text{к}}=2m\omega v \tag{49.2}$$

инерция кучи мавжуд, бу кучнинг горизонтал текисликка проекцияси

$$F_{\text{к}} \sin \varphi = 2mv\omega \sin \varphi. \tag{49.3}$$



124- расм.

яъни меридиан бўйича ҳаракатдагидек катталикка тенг ҳамда у ўшандек поезд ҳаракатига нисбатан ўнгга йўналган.

Дарё қирғоқларининг емирилиши ҳақида ҳам юқоридагиларни айтиш мумкин: шимолий ярим шарда ўнг қирғоқнинг (жанубда — чапнинг) емирилиши дарё оқимининг йўналишидан қатъи назар содир бўлади.

Ўқувчига қуйидаги **саволга мустақил жавоб бериш** тавсия қилинади: поездлар экватор яқинидаги жойларда ҳаракат қилганларида бурилиш инерция кучи юзага келадими ва бу рельсларнинг ейилишига олиб келадими? (**Жавоб**: юзага келади, лекин у рельсларнинг нотекис эскиришига олиб келмайди.)

Агар эркин тушувчи жисмнинг ҳаракати Ер билан боғланган саноқ система билан боғланса, у ҳолда жисмнинг тушиш вақтида унга учта куч — оғирлик кучи ва иккита инерция кучи: марказдан қочма ва бурилма кучлар таъсир қилади. Унча катта бўлмаган баландликдан тушишда (Ернинг радиусига нисбатан) инерция кучларининг катталиги кичик бўлади. Марказдан қочма тезланиш ушбуга тенг:

$$\omega^2 R \cos\varphi \approx \frac{(2\pi)^2 6400\cdot 10^3}{24^2\cdot 36^2\cdot 10^4} \cos\varphi \text{ м/сек}^2 \approx 0{,}034 \cos\varphi \text{ м/сек}^2, \tag{49.4}$$

бунда ω — Ернинг айланиш бурчак тезлиги, R — Ернинг радиуси, φ — географик кенглама. Экваторда марказдан қочма тезланиш тортиш кучи тезланишининг 0,3% ига яқинини ташкил қилганидан тақрибий ҳисоблашда марказдан қочма кучнинг тушиш баландлиги билан ўзгаришини[1] назарга олмаса бўлади. Бурилиш кучининг таъсири анча кўпроқ сезиларли бўлиб, у тушувчи жисмнинг шарққа оғишига олиб келади. Тушувчи жисмнинг шарққа оғишини тасаввур қилиш қийин эмас: жисм Ернинг айланиши сабабли энг юқори нуқтада у тушадиган жойдагига нисбатан каттароқ (Ернинг маркази билан боғланган айланмайдиган координаталар системасига нисбатан) тезликка эга бўлади. Жисмнинг $\boldsymbol{v}$ тушиш тезлиги биринчи яқинлашишда пастга йўналган ва унинг катталиги айланмайдиган Ерда тушишдагидек gt га тенг (t — тушиш вакти) деб олиб, шарққа оғишни тақрибан жуда содда ҳисоблаш мумкин.

Кориолис инерция кучи — $2m[\boldsymbol{\omega v}]$ га тенг ёки такрибан унинг катталиги $2m\omega gt \cos\varphi$ ни ташкил этади. Демак, тушувчи жисмнинг шарққа тезланиши тақрибан қўйидагига тенг:

$$a=2\omega gt\cos\varphi \tag{49.5}$$

Тезланишни икки марта интеграллаш билан тушувчи жисмнинг шарққа силжиш катталиги қуйидагига тенглигини[2] топамиз:

$$s=\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi.$$

Бу ҳисоблашда биз Кориолис кучи ҳамма вақт шарққа йўналган деб қарадик ҳамда $\boldsymbol{v}$ тезлик йўналишининг ўзгаришини ва демак, бурилиш кучи йўналишининг ўзгаришини ҳам назарга олмадик. Сон қийматларини қўйсак, 45° кенгликда 4 *сек* тушишда (*тахминан* 80 *м баландликдан*) *жисм шарққа томон* тахминан 3 см силжиганини биламиз. Шарққа силжиш текшириладиган пухта тажрибалар, ҳисоблашлар натижаларини тасдиқлайди.

Бу фактлар Ер айланишининг механикавий исботини беради. Уларнинг кўрсатишича, Ер билан боғланган саноқ система — *ноинерциал* саноқ системадир; жисмга таъсир этувчи кучлар бурилиш ва марказдан қочма инерция кучларидан анча катта ҳоллардагина Ер билан боғланган саноқ системани тақрибан *инерциал* дейиш мумкин.

Марказдан қочма инерция кучи муайян жойда, жисмнинг ҳаракатидан қатъи назар, муайян йўналишга ва катталикка эга бўлишини, шу сабабли у жисмга таъсир этувчи тортиш кучи билан бирга ошкор бўлишини ва амалда ҳисобга олинишини қайд қилиб ўтамиз. Ернинг айланиши туфайли марказдан қочма инерция кучининг мавжудлиги жисмнинг тортишиш кучи билан жисм оғирлик кучининг умуман турлича бўлишига олиб келади: улар муайян жойдаги марказдан қочма инерция кучи катталигича фарқ қилади (125-*а* расм).

Бу ерда гап Ернинг фақат ўқ атрофида суткалик айланиши ҳақида борди. Ернинг Қуёш атрофида айланиши сабабли юзага келувчи инерция кучларининг таъсири беқиёс даражада кичик бўлишига ишонч ҳосил қилиш осон. Равшанки, бурилиш инерция кучи Ернинг суткалик айланишидан юзага келувчи бурилиш инерция

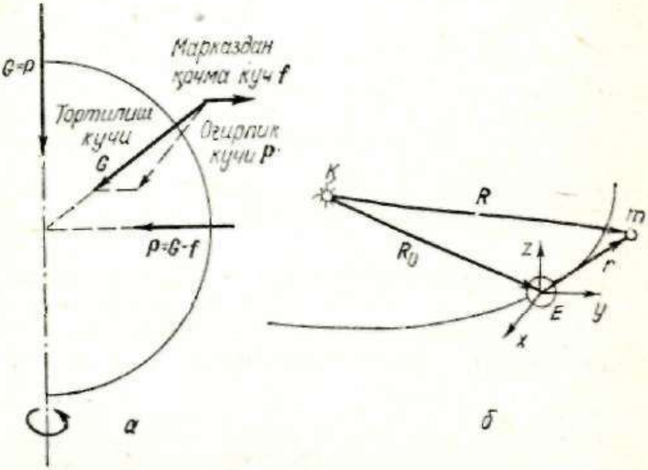
---

[1] Биз учун марказдан қочма кучнинг ўзини эмас, балки унинг баландлик бўйича ўзгаришини билиш муҳимлигини айтиб ўтамиз.

[2] $s=\int\limits_0^t v_{\text{к}}dt$, бунда $v_{\text{к}}=\int\limits_0^t a dt=2\omega g\cos\varphi\int\limits_0^t t dt=\omega g\cos\varphi\, t^2$.

кучидан тахминан 360 марта кичик. Қуёш атрофида айланиш туфайли мавжуд бўлган марказдан қочма инерция кучи экватордаги суткалик айланишдан вужудга келувчи марказдан қочма кучнинг 0,2 қисми тартибида бўлади.

Жисмлар Ер сирти яқинида ҳаракатланганида Ернинг Қуёш атрофида айланиши билан боғлиқ бўлган инерция кучлари ва жисмларнинг Қуёшга тортилиш кучлари амалда бир-бирларини компенсация қилади, ҳамда кўп ҳолларда, умуман назарга олмаса бўлади. Буни кўрсатиш учун m массали моддий нуқтанинг Ер яқинидаги фазода тўлиқ ҳаракат тенгламасини ёзайлик. Ноинерциал саноқ система боши учун Ер массаси марказини оламиз (125-*б* расм):



125- расм.

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma\frac{mM_{\text{Ер}}}{r^3}\boldsymbol{r} - \gamma\frac{mM_{\text{Қ}}}{R^3}\boldsymbol{R} - m\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{F}_{\text{к}} + \boldsymbol{F}_{\text{м}}. \qquad (49.6)$$

Бу ерда тартиб бўйича қуйидагилар ёзилган: m моддий нуқтанинг Ерга тортилиш кучи; унинг Қуёшга тортишиш кучи; Ернинг Қуёш атрофида эллиптик орбита бўйича ҳаракати натижасида юзага келувчи инерция кучи; Кориолис инерция кучи ва марказдан қочма инерция кучи.

Ер массаси марказига $\boldsymbol{a}_0 = -\gamma\frac{M_{\text{Қ}}}{R_0^3}\boldsymbol{R}_0$ тезланишни унинг Қуёшга тортилиш кучи беради. Ердан Қуёшгача масофа $R_0 \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

(49.6) тенгламада саноқ система орбитал ҳаракатининг нотекислиги билан боғлиқ бўлган инерция кучи ва моддий нуқтанинг Қуёш томонидан тортилиш кучини кўрсатувчи қўшилувчилар сон қийматларини таққослаш уларнинг бир-бирларини юқори аниқликда компенсациялашларини кўрсатади. Шу сабабли уларнинг (49. 6) тенгламага умумий ҳиссасини нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $\frac{r}{R_0} \sim \frac{10^4}{10} = 10^{-4}$ ва $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{R}_0$

Бундан

$$-\gamma \frac{mM_K}{R^3}\boldsymbol{R} - m\boldsymbol{a}_0 = -\gamma mM_K\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} - \frac{\boldsymbol{R}}{R_0^3}\right) \approx 0$$

Юкорида кўрсатилганидек (125-*а* расмга қ.), жисмнинг Ерга тортилиш кучи билан марказдан қочма куч йиғиндисини Ер сиртининг муайян нуқтаси устидаги жисм оғирлиги $\boldsymbol{P}$ деб олиб, (49.6) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

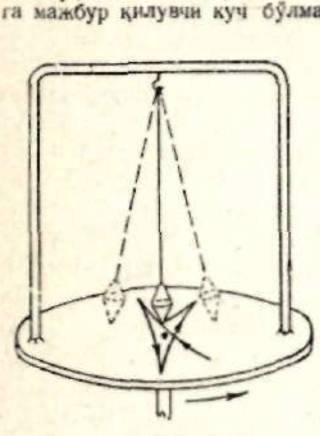
$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_к = m\boldsymbol{g}_э - 2m[\boldsymbol{\omega v}_н], \qquad (49.7)$$

бунда $\boldsymbol{g}_э = \boldsymbol{P}/m$. (49.7) тенглама жисмларнинг Ер билан боғланган саноқ системага нисбатан Ер яқинидаги фазода ҳаракатини тасвирлайди.

Бинобарин, Ер билан боғланган саноқ системани фақат тақрибангина инерциал дейиш мумкин. Бу ҳолда қилинадиган хато жисмга таъсир этувчи инерция кучлари катталигининг барча қолган кучлар катталигига нисбати билан белгиланади.

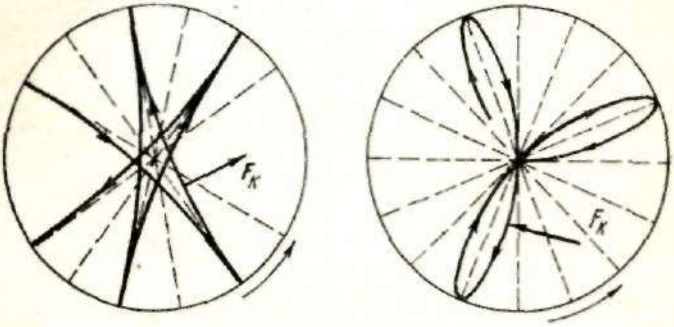
Француз олими Фуко маятник тебранишларини кузатиш билан Ернинг айланишини исботлади (1825 й). Агар маятник қутбда осилган деб тасаввур қилсак, у ҳолда қуйидаги манзарани кутиш лозим бўларди: маятник тебранаётганда унинг тебранишлари текислиги аста-секин Ернинг айланишига қарама-қарши йўналишга бурила бошлайди. Тебранишлар текислигининг бу айланишини айланаётган диск устида осиб қўйилган маятникнинг тебранишлари изини кузатилганда кўрилади (126- расм). Агар биз маятникни бирор текисликда тебранишга мажбур қилиб, сўнгра дискни айланишга келтирсак, у ҳолда маятникнинг юк ўрнида осиб қўйилган воронкасидан тўкилаётган қум бизга маятникнинг диск устидаги ҳаракати изини кўрсатади.

Ҳаракатсиз саноқ системада маятникни тебраниш текислигини ўзгартиришга мажбур қилувчи куч бўлмагани сабабли у текислигини фазода ўзгаришсиз саклайди, диск (ёки Ер) эса унинг тагида бурилади. Равшанки, қутбда маятникнинг тебранишлари текислиги Ернинг айланиш бурчак тезлиги билан (соатига 15°) айланади. Агар маятникнинг қутбдаги тебранишларини Ер билан боғланган координаталар системасига кўчирсак, у ҳолда тебранишлар текислигининг айланишини Кориолис кучларининг таъсири натижаси деб тасаввур қилишимиз мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, у айланиш тезлигига тик ва хамма вақт горизонтал текисликда ётади. Бу куч маятник юкчасининг ҳаракат тезлигига ва Ернинг айланиш бурчак тезлигига пропорционалдир ҳамда шундай йўналганки, унинг таъсири траекторияни тегишли томонга буради.



126- расм.

Маятник ҳаракатининг Ердаги изи биз маятникни қандай тарзда тебранишга келтиришимизга қараб, турлича бўлади. Айланаётган диск устидаги маятник траекториясининг маятникни икки-усул билан тебрантириб юборишдаги изини кузатайлик (126- расмга қ.) Агар маятник юкчасини четга оғдириш билан бир вақтда дискни шундай айланишга келтирсакки, маятникни тебранишга келтириш пайтида воронкача дискнинг ўзининг тагида жойлашган нуқтаси каби тезлик олса, траекториянинг изи «юлдузчадан» иборат бўлади (127- *а* расм). Ер қутбида, агар маятникни оғган ҳолатида қўйиб юборсак, траекториянинг кўриниши худди шундай бўлади.



а *б*

127- расм.

Энди биз маятникни диск тинч турган ҳолида тебранишга келтирамиз ва кейин дискни айланишга келтирамиз. Бу ҳолда траектория «розетка» дан иборат бўлади (127- *б* расм). Ерда траекторияларнинг бундай шакли, агар маятник тебранишлари тинч ҳолатда турган юкчасига берилган кескин зарбадан сўнг бошланса, ҳосил бўлади. Ҳар иккала ҳолда траекториялар Кориолис кучи таъсирида бир томонга эгилади.

Шундай қилиб, маятникнинг қутбдаги тебранишларида маятник траекториясининг изи эгилади ва демак, тебраниш текислиги ҳамма вақт горизонтал текисликда ётувчи ва юкча йўлидан доимо ўнгга йўналган

$$F_{\text{к}} = -2m[\omega v]. \tag{49.8}$$

Кориолис кучи таъсирида аста-секин бурилади.

Фуко тажрибасини аудиторияда ҳам кузатиш мумкин. Бунинг учун фақат маятник тебранишлари сўнгунча ўтган вақт ичида траекториянинг бурилишини ҳисоблайдиган қурилма ясаш керак. Тажрибада маятник тебранишлари даврини катталаштириш мақсадида унинг узунлигини мумкин қадар катта қилиб олинади, у ҳолда тебраниш процесси кўпроқ вақтни олади ва бу вақт ичида Ер каттароқ бурчакка бурилади.

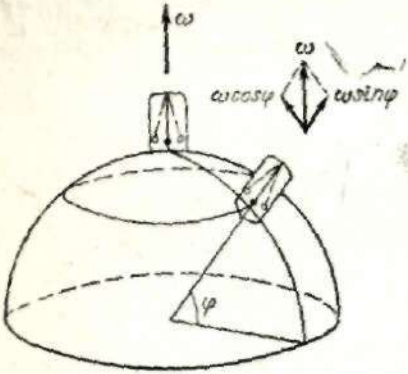
Ишга тушириш пайтида траекториянинг бурилиш бурчагини қайд қилиш мақсадида маятникни нуқтавий манбадан экранга келаётган ёруғлик нури текислигида тебранишга шундай мажбур қилинадики, дастлаб экранда тебранишлар вақтида фақат осма ипнинг ҳаракатсиз равшан соя чизиғи кўринсин. Бирор (5—10 мин) ўтгандан кейин тебранишлар текислиги бурилади ва экранда ип соясининг силжиши кўринади.

Маятник тебранишлари текислигининг бурилиш бурчагини аниқлаш учун ёруғлик манбаини ён томонга ипнинг яна ҳаракатсиз равшан сояси кўрингунча сурилади. Ип соясининг силжишини ва ипдан экрангача масофани ўлчаб, тебранишлар текислигининг шу вақт ичидаги бурилиш бурчаги топилади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, маятник тебранишлари текислигининг бурилиш бурчак тезлиги қуйидагига тенг:

$$\omega \sin\varphi = 15 \sin\varphi \text{ град/соат,}$$

бунда φ — жойнинг географик кенгламаси (128-расм). φ кенгламада вертикаль атрофида айланиш ω бурчак тезлик билан эмас, балки ω векторнинг вертикалга проекциясига тенг бўлган бурчак тезлик билан юз беради, яъни айланиш бурчак тезлиги $\omega \sin\varphi$ га тенг бўлади.

Тебранишлар текислигининг айланиш бурчак тезлиги камайишини яна шу билан тушунтириш мумкинки, Кориолис кучининг муайян жойда горизонтал текисликка проекцияси унинг қутбдаги катталигидан $\sin\varphi$ коэффициентга фарқ қилади. Ҳақиқатан ҳам, фақат шу проекциягина тебраниш текислигининг бурилишини юзага келтиради. Маятник юкчасига ушбу жойда таъсир этувчи Кориолис кучи $\boldsymbol{\omega}$ ва $\boldsymbol{v}$ ларга тик текисликда жойлашган, ҳамда улар орасидаги бурчак синусига пропорционал. Фақат $\boldsymbol{v}$ вектор меридиан текислигида жойлашган ҳолдагина Кориолис кучи горизонтал йўналган; барча бошқа йўналишлар ҳолида бу куч горизонтал текисликда жойлашмайди.



128- расм.

VII БОБ

ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҲАРАКАТИ

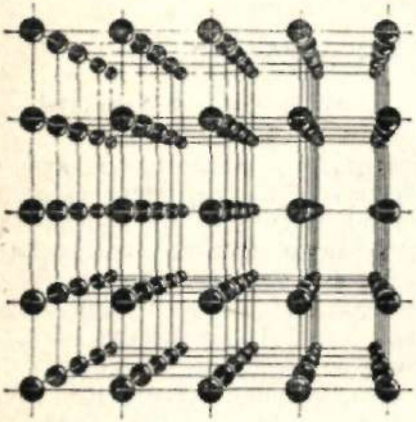
50-§. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ва айланма ҳаракати

Барча жисмлар муайян шароитларда деформацияланади, яъни у ёки бу тарзда ўз шаклларини ўзгартиради. Қаттиқ жисм ёки *абсолют қаттиқ жисм*, бу шундай қаттиқ жисмки, у ҳеч қандай шароитда деформацияланмайди; абсолют қаттиқ жисмда барча шароитларда иккита нуқта орасидаги масофа ёки аниқроғи, шу жисмнинг икки зарраси орасидаги масофа ўзгаришсиз, доимий қолади. Равшанки, бундай тасаввур абстракциядир. Лекин ҳаракат вақтида жисм шакли ўзгармайдиган ёки жуда оз ўзгарадиган ҳолларда бу жисмнинг ҳаракат қонунларини, айнан, абсолют қаттиқ жисмнинг ёки биз бундан буён атайдиганимиздек, содда қилиб, *қаттиқ жисмнинг* қонунлари сифатида қараш мумкин.

Баъзи қаттиқ жисмлар, масалан, металлар бўлаклари ва бошқалар *ғоят майда кристаллардан иборат бўлади. Кристаллни ташкил* этувчи атом ва молекулалар унда муайян, қонуний тартибда жойлашган. *129-расмда кристалл модели кўрсатилиб, у «шарчалардан» (атомлардан) ва бу шарчаларни боғловчи «стерженлардан» иборат.* Агар стерженларни қаттиқ ва вазнсиз, шарчалар эса исталган тартибда жойлашган десак, у ҳолда ҳар бир қаттиқ жисмни кристалл модели тарзида тасаввур қилсак бўлади. Абсолют қаттиқ жисмнинг алоҳида зарраларини бир-бирлари билан ҳамавақт муттасил боғланган алоҳида атомлардан ёки етарлича кўп сонли атомларнинг ва молекулаларнинг бирор мажмуасидан иборат деб тасаввур қилса бўлади. Қаттиқ жисмнинг ҳаракати вақтида ҳар бир зарра ўз траекториясини чизса-да, бу траектория бошқа зарраларнинг траекториялари билан қонуний ва муайян тарзда боғланган. Жисмнинг ҳар бир заррасига қўшни зарралар томонидан бирор кучлар (стерженлар томонидан кучлар) таъсир қилиб, бу қаттиқ жисмдаги *ички кучлардир;* ҳар бир заррага бошқа жисмлар томонидан ҳам кучлар қўйилиши мумкин — булар *ташқи кучлардир;* масалан, жисм зарраларининг Ерга тортилиш кучи ташқи кучдан иборат.

Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай мураккаб ҳаракати оддий ҳаракатлардан — *илгариланма* ва *айланма* ҳаракатлардан ташкил топган. Шу сабабли қаттиқ жисмнинг ҳаракатларини қарашни шу энг оддий ҳаракатларнинг таҳлилидан бошлаймиз.

Қаттиқ жисмнинг *илгариланма* ҳаракати деб шундай ҳаракатини айтиладики, бунда жисмнинг исталган *иккита нуқтасини* бирлаштирувчи *ҳар бир чизиқ* фазода ўз йўналишини *доимий* сақлайди. Умуман, илгариланма ҳаракат тўғри чизиқли бўлмаслиги ҳам мумкин; масалан, модели 130- расмда кўрсатилган «шайтон» ғилдиракдаги йўловчили кабиналар илгариланма ҳаракат қилади ва ҳар бир нуқтанинг траекторияси айлана бўлади. Илгариланма ҳаракатда қаттиқ жисм бурилмасдан ҳаракат қилади ҳамда унинг исталган чизиғи ўз-ўзига параллел кўчади, яъни жисмнинг барча нуқталарининг кўчиши исталган вақт оралиғида бирдай бўлади. Шу сабабли қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатида унинг барча нуқталари бу вақт моментида бирдай тезликка ва демак, бирдай тезланишга эга. Шундай қилиб, жисмнинг илгариланма ҳаракати — энг содда ҳаракатдир; бирор битта нуқтанинг ҳаракатини билган ҳолда биз барча қолган нуқталарнинг ҳаракатини аниқлашимиз мумкин. Масалан, мотоцикл тўғри чизиқли ҳаракатланганда, ҳайдовчи тўғри чизиқли илгариланма ҳаракат қилади, мотоцикл ғилдираклари мураккаб ҳаракат — илгариланма ва айланма, мотоцикл моторининг поршени тўғри чизиқлимас илгариланма ҳаракат бажаради.

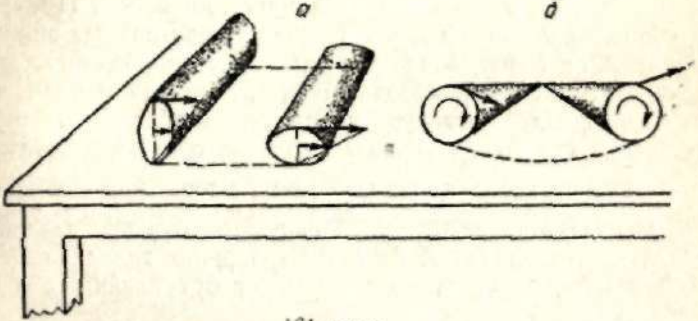


129- расм.

130- расм.

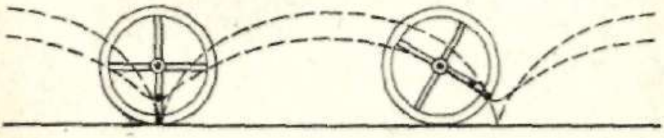
Агар ҳаракат вақтида қаттиқ жисмнинг исталган нуқтаси (зарраси) *параллел текисликлардан бирида қолса,* қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ясси (ёки ясси параллел) ҳаракат дейилади. Ясси ҳаракатда жисм ҳар бир нуқтасининг траекторияси текисликда жойлашиши *билан бирга*, барча траекторияларнинг текисликлари ё мос тушади, ё бир-бирига параллел бўлади. Масалан, мотоциклнинг тўғри чизиқли ҳаракатида ғилдираклар ва поршень ясси ҳаракат қилгани ҳолда, приводнинг вали эса (*ўқи мотоцикл тезлиги йўналишига* мос тушади, яссимас ҳаракат бажаради. Столда сирпанишсиз думалаётган эллиптик кесимли цилиндр (131-*а* расм) ясси ҳаракат, столда думалаётган конус (131-*б* расм) эса яссимас ҳаракат қилади.

Айланма ҳаракат деб шундай ҳаракатни айтиладики, бунда жисм барча нуқталарининг *траекториялари*, маркази *айланиш ўқи* дейилувчи битта чизиқда бўлган *концентрик айланалардан* иборат бўлади. Масалан, ҳаракатсиз автомобилнинг ишлаётган моторидаги вали айланма ҳаракат қилади. Қўзғалмас айланиш ўқи жисм билан муттасил боғланган нуқталардан ўтиб, улар жисмнинг ҳаракати вақтида тинч ҳолатда қолади. Айланиш ўқи жисмдан ташқарида ётиши *ёки жисм ичидан ўтиши мумкин. Қўзғалмас ўқ атрофида бўладиган* айланма ҳаракат ҳамавақт ясси ҳаракат бўлади.

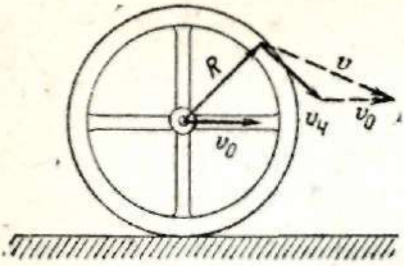


131- расм.

Тўғри чизиқли ҳаракатланаётган экипаж, автомобиль, вагон ғилдиракларининг ҳаракати — мураккаб ҳаракат: у ғилдиракнинг ўз ўқи атрофида айланишидан ва ўқнинг вагон билан биргаликда илгариланма ҳаракатидан ташкил топади. Ғилдиракнинг турли нуқталарининг траекториялари мураккаб чизиқлардан — циклоидалардан иборат (132- расм). Ғилдирак нуқталарининг вагон билан боғланган саноқ системага нисбатан траекториялари айланалардан иборат.



132- расм.



133- расм.

Ғилдиракнинг ҳар қандай нуқтасининг йўлга нисбатан кўчиши икки қисмдан иборат: биринчиси ўқнинг кўчиши, иккинчиси — ғилдиракнинг ўқда айланиши билан белгиланади. Шунинг учун ғилдиракнинг ҳар қандай нуқтасининг $\boldsymbol{v}$ тезлиги ҳам иккита тезликнинг — ўқнинг $\boldsymbol{v}_0$ тезлиги ва ўқ атрофида айланма ҳаракат чизиқли тезлиги $\boldsymbol{v}_ч = [\omega R]$ нинг йиғиндисидан иборат (133- расм).

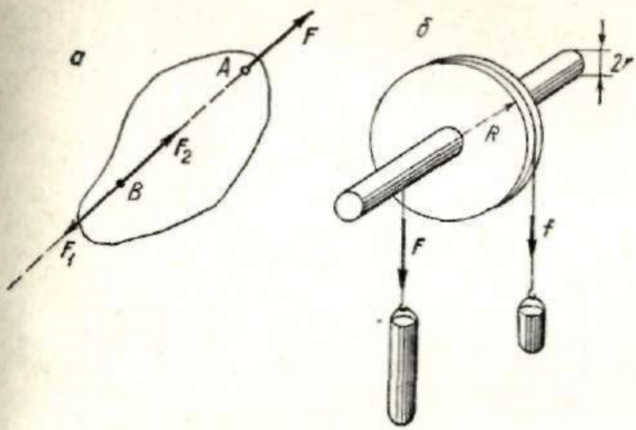
Жисмнинг айланиши бурчак тезлик катталиги билан аниқланади. Жисмнинг A ва B нуқтасидан ўтувчи ҳамда айланиш ўқига тик текисликда ётувчи чизиқ фазода t вақт моментида муайян ҳолатни эгаллаб турибди деб тасаввур қилайлик; навбатдаги $t+dt$ пайтда шу чизиқнинг ўзи бошқа A' ва B' ҳолатни олиб, у олдинги ҳолат билан $d\alpha$ бурчак ҳосил қилади. $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ га тенг катталикни *жисмнинг бурчак тезлиги* дейилади. Равшанки, бурчак тезлик ўққа тик исталган текисликда A ва B нуқталарнинг танланишига боғлиқ эмас; бинобарин, бурчак тезлик жисмнинг бутунлайин айланишини аниқлайди.

Олдин айтилганидек (47-§), бурчак тезликни айланиш ўқига параллел вектор билан белгиланади.

51-§. Қўзғалмас ўққа эга бўлган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари

Биз абсолют қаттиқ жисм нуқталари бир-бирларига нисбатан ўзгаришсиз вазиятларини сақлайди, яъни жисм деформацияланмайди деб ҳисоблаймиз. Агар иккита бирдай кучлар қаттиқ жисмда A ва B нуқталарга қўйилган ва AB чизиқ бўйича турли томонларга йўналган бўлса, у ҳолда уларнинг натижавий таъсири нолга тенгдир, яъни кучларнинг таъсири жисмнинг ҳаракатини ўзгартирмайди. Шунинг учун қаттиқ жисмда (деформация бўлмаганда) кучни унинг таъсир чизиғи бўйича исталган нуқтага кўчириш мумкин (134- *а* расм).

Ҳақиқатан ҳам, A нуқтага қўйилган $\boldsymbol{F}$ кучнинг таъсир чизиғида ётувчи исталган B нуқтага шундай иккита бир-бирига тенг ва қарама-қарши $\boldsymbol{F}_1$ ва $\boldsymbol{F}_2$ кучларни қўйиш мумкинки, улардан бири $\boldsymbol{F}_2$ куч $\boldsymbol{F}$ га айнан тенг бўлсин. Кучлар йиғиндиси $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$; демак, жисмга B нуқтага қўйилган $\boldsymbol{F}_2$ куч таъсир этаётир. Бошқача айтганда, $\boldsymbol{F}$ кучнинг таъсирини $\boldsymbol{F}_2$ кучнинг таъсири билан алмаштириш мумкин. Буни математик равишда қуйидагича таърифланади: кучнинг қаттиқ жисмга таъсирини катталиги ва йўналиши уни таъсир чизиғи бўйича кўчирганда ўзгармайдиган *сирпанувчан*



134- расм.

вектор билан кўрсатиш мумкин. Муайян нуқта билан боғланган векторларни *қутбий* векторлар дейилади.

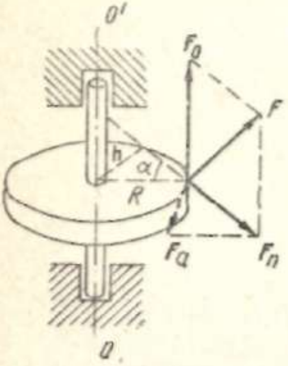
Маълумки, ўқда айланувчи жисмнинг мувозанати барча кучларнинг моментлари йиғиндиси нолга тенг бўлганда мавжуд бўлади.

Кучлар моментларини киритиш зарурияти бир нечта куч таъсирида ўз ўқи атрофида айланувчи жисмнинг мувозанатига оид оддий тажрибалардан кўринади. Масалан, дискли валга f ва F иккита куч таъсир этаётир (134-*б* расм). Агар вал подшипникларида ишқаланиш кам бўлса, мувозанат фақат $fR = Fr$ шартда, яъни кучлар моментлари катталиклари жиҳатидан тенг ва йўналишлари қарама-қарши бўлганларида мавжуд бўлади.

Сон жиҳатдан кучнинг елкага кўпайтмасига тенг бўлган физикавий катталикни ўққа нисбатан куч моменти деб атамиб, бир томонга айлантирувчи куч моментларини мусбат, бошқа томонга айлантирадиганини манфий деб ҳисоблаймиз. Жисмнинг айланиш ўқи билан кучнинг таъсир чизиғи орасидаги энг қисқа масофани муайян ўққа нисбатан куч елкаси деб аталади.

Демак, қўзғалмас ўқда эркин айланувчи жисмнинг тинчлигини ёки мувозанатини аниқлашда кучларни эмас, балки нуқтанинг ҳаракатидаги кучлар каби роль ўйнайдиган айланиш ўқига нисбатан кучлар моментини билиш лозим.

Физикавий катталик — ўққа нисбатан куч моментини аниқроқ таърифлайлик. Жисмга қўйилган куч ҳар қандай йўналган умумий ҳолда, уни иккита ташкил этувчига: бири, айланиш ўқига тик текисликда ётувчи F_n, иккинчиси, айланиш ўқига параллел F_0 га (135-расм) ажратамиз. Айланиш ўқи OO' га параллел F_0 куч жисмни ўқ атрофида айлантира олмайди, унинг мавжудлиги қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг мувозанатига ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди. F_0 куч ўқни эгади, уни ва жисмни деформациялайди, лекин ҳозир биз қаттиқ, деформацияланмайдиган жисмнинг ҳаракатини қараётганимиз сабабли F_0 ташкил этувчини ҳисобга олмаймиз. Демак, биз ўққа нисбатан куч моментини аниқлаётганда фақат, текисликда ётувчи, айланиш ўқига тик бўлган F_n ташкил этувчининг таъсирини ҳисобга олишимиз лозим.



135- расм.

Шу сабабли ўққа нисбатан ҳар қандай кучнинг моменти F_n ташкил этувчининг h елкага кўпайтмасига ёки 135- расмдан осон кўриш мумкинки, F_a айлантирувчи ташкил этувчининг кучнинг қўйилиш нуқтасидан ўққача масофа R га кўпайтмасига тенг. Айлантирувчи F_a ташкил этувчи R чизиқ ва ўқдан ўтувчи текисликка тикдир. Хуллас, ўққа нисбатан M моментнинг катталиги қуйидагига тенг:

$$M=F_n h=F_a R. \tag{51.1}$$

Энди қўнғалмас ўққа эга бўлган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартини таърифлаймиз: *айланиш ўқига нисбатан моментлар йиғиндиси нолга тенг бўлгандагина мувозанат мавжуд бўлади.*

52-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм динамикаси қонуни

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланишида барча зарраларнинг траекториялари марказлари айланиш ўқидан иборат бўлган битта тўғри чизиқда ётувчи айланалар бўлади.

Жисмнинг барча зарралари ясси ҳаракат қилиб, турли зарраларнинг тезликлари ва тезланишлари, умуман айтганда, турличадир: зарра ўқдан қанча узоқда бўлса, унинг тезлиги шунча катта. Айланиш бурчак тезлиги эса жисмнинг барча қисмлари учун *бирдай*: у қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган яхлит қаттиқ жисм ҳаракатини тўла ифодалайди.

Агар бурчак тезлик вақт ўтиши билан ўзгарса (ортса ёки камайса), у ҳолда худди нуқтанинг чизиқли тезлиги ўзгарадиган ҳолдагидек, бу ўзгаришни *бурчак тезланиш* билан ёки бурчак тезликнинг ўзгариш «тезлиги» билан, яъни $d\omega/dt$ ҳосила билан характерланади. Муайян пайтда бурчак тезлик қаттиқ жисмнинг барча қисмлари учун бирдайлиги сабабли, равшанки, бурчак тезланиш $\beta=\frac{d\omega}{dt}$ ҳам бирдай бўлади.

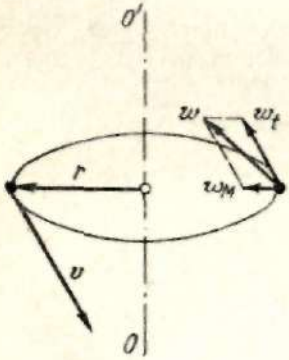
Жисмнинг ҳар бир заррасининг чизиқли тезлиги турлича бўлиб, у зарранинг траекторияси текислигида жойлашган. Бурчак тезланиш β ва зарранинг траекторияга уринма бўйича ташкил этувчи тезланиши қандай боғланганлигини аниқлайлик. 136- расмда тезлиги $v=\omega r$ (бунда r — зарранинг ўқдан масофаси) бўлган бирор зарранинг траекторияси кўрсатилган. Тезланишнинг w_t уринма ташкил этувчиси тезлик v нинг траектория бўйича ўзгариши билан белгиланади; у r вақт давомида доимийлиги сабабли қуйидагига тенг:

$$w_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\beta. \qquad (52.1)$$

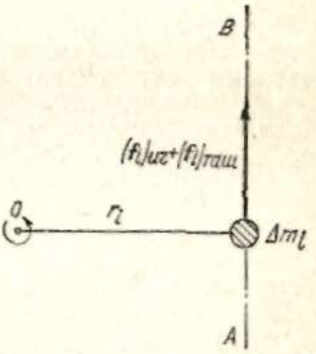
Демак, жисм заррасининг уринма ташкил этувчи тезланиши жисм бурчак тезланиши β нинг зарранинг ўқдан масофаси r га кўпайтирилганига тенг.

Энди бурчак тезланиш ва ўқда айланувчи жисмга таъсир этувчи кучлар моменти орасидаги боғланишни ўрнатайлик. Мувозанат (тинчлик ёки текис айланиш) кучлар моментларининг нолга тенглиги билан белгиланишлиги туфайли бундай қонуний боғланиш мавжуд бўлиши лозим. Ҳақиқатан ҳам, тинчликдаги жисм ўқига нисбатан кучлар моменти нолга тенг бўлмай қолиши биланоқ, мувозанат бузилади ва жисмнинг бурчак тезланиши пайдо бўлади.

Жисмнинг бурчак тезланиши билан унга таъсир этувчи кучлар моментлари орасидаги боғланишни топиш учун даставвал жисмнинг битта бирор ажратилган заррасининг ҳаракатини қарайлик. Айтайлик, Δm_i массали зарра ўқдан r_i масофада жойлашган бўлсин (137-расм). Заррага бирор ташқи ва ички кучлар: ташқи кучлар бошқа жисмлар томонидан, ички кучлар эса жисмнинг ўзининг зарралари томонидан таъсир қилади, деб фараз қилайлик. Бу кучларни ўққа тик текисликда ётувчи r_i га тик бўлган AB чизиққа проекциялайлик.



136-расм.



137-расм.

Бу проекциянинг катталиги қуйидагига тенг бўлсин:

$$(f_i)_{\text{ич.}} + (f_i)_{\text{таш}}.$$

бунда $(f_i)_{\text{ич.}}$ — ички кучларнинг айлантирувчи ташкил этувчиси, $(f_i)_{\text{таш.}}$ — ташқи кучларнинг айлантирувчи ташкил этувчиси. Соат стрелкаси ҳаракатига тескари айлантирувчи кучларни мусбат деб оламиз. У ҳолда жисмнинг i-зарраси учун динамиканинг иккинчи тенгламасини қуйидагича ёзса бўлади:

$$\Delta m_i \frac{dv_i}{dt} = \Delta m_i r_i \frac{d\omega}{dt} = (f_i)_{\text{ич}} + (f_i)_{\text{таш}}. \qquad (52.2)$$

Заррага таъсир қилаётган кучнинг ўққа нисбатан моментини топайлик; бунинг учун (52.2) ни r_i га кўпайтирамиз, у ҳолда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\Delta m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = r_i (f_i)_{\text{ич.}} + r_i (f_i)_{\text{таш.}} \qquad (52.3)$$

Энди ўхшаш тенгликларни муайян жисмни ташкил этувчи барча зарралар учун ёзиб чиқамиз ва уларни бир-бирига қўшамиз; натижада қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{d\omega}{dt} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i r_i (f_i)_{\text{ич.}} + \sum_i r_i (f_i)_{\text{таш}}. \qquad (52.4)$$

Аввало, $\sum\limits_i r_i (f_i)_{\text{ич.}} = 0$ эканлигини, яъни ички кучларнинг моменти нолга тенглигини қайд қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир ички куч ўзига тенг ва қарама-қарши бўлиб, жисмнинг бошқа заррасига ўшандай елка билан қўйилган кучга эга.

$\sum\limits_i r_i (f_i)_{\text{таш.}} = M$ йиғинди жисмга таъсир қилувчи барча ташқи кучлар айлантирувчи моментидан иборат. Қуйидаги

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad (52.5)$$

катталик махсус номга эга бўлиб, уни берилган айланиш ўқига нисбатан *инерция моменти* деб аталади.

Энди (52.4) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$M = I \frac{d\omega}{dt}; \qquad (52.6)$$

у қуйидагича ўқилади: *жисмни муайян ўқ атрофида айлантирувчи ташқи кучларнинг моменти жисмнинг шу ўққа нисбатан инерция моментининг жисмнинг бурчак тезланишига кўпайтмасига тенг.* Бу қўзғалмас ўқда айланувчи қаттиқ жисм учун динамиканинг асосий қонунидир. У худди шу нуқтанинг ҳаракати учун динамиканинг иккинчи қонуни каби таърифланиб, фақат куч ўрнига бу ерда ўққа нисбатан инерция моменти, чизиқли тезланиш ўрнига—бурчак тезланиш, масса ўрнига — жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти киради. Қаттиқ жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти муайян жисм таркибига кирувчи ҳар бир зарра массасининг шу заррадан ўққача масофаси квадратига кўпайтмалари йиғиндисига тенг бўлган физикавий катталикдир. Муайян ўққа нисбатан инерция моменти фақат жисм массаси катталигигагина эмас, балки массаларнинг ўққа нисбатан тақсимотига ҳам боғлиқ. Жисм зарраларини ўқдан узоқлаштириш билан биз жисмнинг инерция моментини орттирамиз.

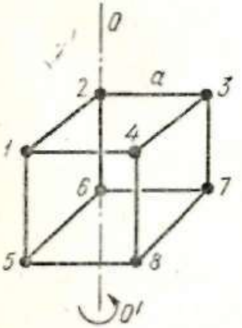
СИ системада инерция моментининг ўлчамлиги — кг·м², СГС системада эса г·см².

Инерция моментини ҳисоблаш учун жисмни етарлича кичик зарраларга бўлиш, ҳар бир зарранинг ўқдан масофасини аниқлаш, сўнгра ҳар бир зарра массасини унинг ўққача масофаси квадратига кўпайтириш амалини барча зарралар учун бажаргандан сўнг, натижаларни биргаликда қўшиш лозим. Масалан, қирралари a га тенг бўлган кубнинг бурчакларида жойлашган саккизта бирдай шарчалардан ташкил топган жисм (138- расм) учун куб қиррасидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

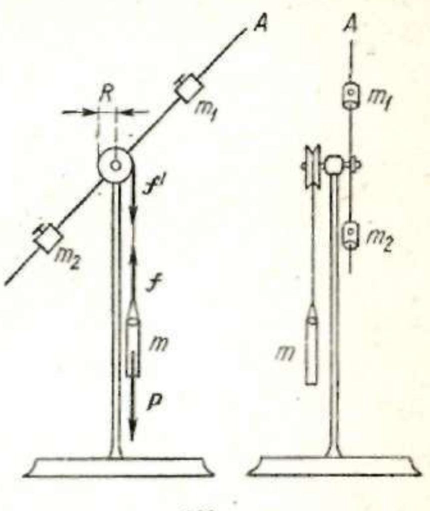
$$I = 4ma^2 + 2m(a^2 + a^2) = 8ma^2,$$

бунда m — битта шарчанинг массаси. Тўртта шарчанинг (*1*, *3*, *5*, *7*) инерция моменти 4 ma^2 га, иккита (*4*,*8*) шарчаники $4ma^2$ га, (*2*,*6*) шарчаларнинг инерция моментлари нолга тенг. Бундай ҳисоблаш шарчаларнинг диаметрлари a га нисбатан жуда кичик бўлгандагина ўринли бўлади. Бир жинсли яхлит жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш ҳақида кейинроқ, 59-§ да гапирилади.

Инерция моментининг физикавий ролини ва аҳамиятини ўққа бириктирилган жисмларнинг айланиши қараладиган барча мисолларда кўриш мумкин. Масалан, чиғириқнинг инерция моменти қанча катта бўлса, қудуққа тушаётган бўш челак шунча секинроқ ҳаракатланади. Челакнинг ҳаракати ва чиғириқ инерция моментининг таъсирини 139- расмда иккита проекцияда кўрсатилган асбоб ёрдамида осон намойиш қилиш мумкин.



138- расм.



139- расм.

Горизонтал ўқда айланувчи кичик блок билан қаттиқ бириктирилган A стерженда айланиш ўқидан муайян бирдай масофаларда m_1 ва m_2 юклар ўрнатилган. Блокка арқонча ўралган бўлиб, унинг эркин учига m массали юк боғланган. Юк тушаётиб, блок ва A стерженни айлантиради. Агар биз A стержендаги юкчаларни ўққа яқинлаштирсак, у ҳолда m юкнинг анча тез тушишини кузатамиз, юкли стерженнинг инерция моменти нисбатан кичик. Агар A стержендаги юкларни учларига суриб, инерция моментини кўп марта оширсак, у ҳолда m юкнинг секин тушишини ва секин айланишини кўрамиз.

Юкларнинг ҳаракатини батафсилроқ қараймиз ва ҳаракат қонунини топамиз. Аввало бутун арқонча ёйилганда A стержень инерцияси бўйича ўша йўналишда айланишда давом этиб, арқончани қайтадан блокка ўраши натижасида m юк кўтарила боришини таъкидлаб ўтамиз. Стерженнинг айланиши тўхтаганда m юк яна туша бошлайди ва юкнинг юқорига ҳамда пастга тебраниш процесси ўша тартибда кейин давом этади. Равшанки, ҳаракатланаётган жисмларнинг тезланишлари (айланаётган стерженли блокнинг бурчак тезланиши ва m юкнинг чизиқли тезланиши) m юкнинг кўтарилиши ва тушишида вақт давомида доимий ва бирдай бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, «ҳаракатлантирувчи» куч юкнинг тортишиш кучи $P=mg$ дан иборат бўлиб, у доимий ва ҳамма вақт пастга йўналган бўлади.

Айланувчи стержень (юкли стержень) ва m юк учун динамика тенгламаларини тузамиз. Бурчак тезланишни $\beta=\frac{d\omega}{dt}$ орқали белгилаймиз ва тенгламаларни ёзамиз:

$$\text{стержень учун } f'R=I\beta,$$

$$\text{юк учун } P-f=ma,\ f-f'. \tag{52.7}$$

бунда f ва f' арқончанинг таранглик кучлари, I — стерженли блокнинг инерция моменти, R — блок радиуси, a — юкнинг чизиқли тезланиши. Блокнинг бурчак тезланиши ва юкнинг тезланиши бир-бирлари билан қуйидаги муносабат бўйича боғланган:

$$a=R\beta,$$

чунки блокнинг α кичик бурчакка бурилиши m юкнинг $\Lambda=R\alpha$ катталикка вертикал силжишига мос келади. Ҳақиқатдан ҳам, $\frac{d^2\Lambda}{d^2t}=a$ ва $\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\beta$ бўлгани сабабли, $\Lambda=R\alpha$ ни икки марта дифференциаллаш билан кўрсатилган муносабатларни топамиз.

(52.7) тенгламани ечсак, блокнинг бурчак тезланиши β ни ва юкнинг чизиқли тезланиши a ни оламиз:

$$\beta=\frac{g}{r}\cdot\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}},\quad a=\frac{g}{1+\frac{I}{mR^2}} \tag{52.8}$$

Бундан кўринишича, агар $I\gg mk^2$ бўлса[1], a тезланиш g га нисбатан жуда кичик бўлиши мумкин.

Стерженда юкчаларнинг айланиш ўқидан масофасини ўзгартириш билан биз I инерция моменти катталигини ва демак, юкнинг кўтарилиш ва тушиш вақтини ҳам ўзгартирамиз. Тажриба йўли билан юкнинг бирор масофага тушиш вақтини ва шу асосда a тезланишни ҳисоблаш, сўнгра эса m ва R катталикларни ўлчаб, (52. 8) формула асосида I ни аниқлаш мумкин.

---

[1] Биз чиқарган қонуниятлар юкнинг арқонча блокнинг бир томонидан бошқа томонига ўтадиган энг пастки тушиш нуқтаси яқинида тўғри бўлмаслигини таъкидлаб ўтамиз. Бунда m юкнинг ҳаракати горизонтал йўналишда ҳам юз беради ва блокни айлантирувчи момент fR га тенг бўлмайди.

53- §. Ҳаракат миқдори моменти

Жисмнинг айланма ҳаракатини таҳлил қилаётганда куч ўрнида унинг моменти, жисм массаси ўрнида—жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти иштирок қилади; лекин нуқтанинг ҳаракат миқдорига қандай катталик ўхшаш бўлади? Шундай катталик жисмнинг ўққа нисбатан *ҳаракат миқдори моментидир.*

Жисмнинг Δm_i массали алоҳида заррасининг *ҳаракат миқдори моменти* деб айланиш ўқидан заррагача масофа r_i нинг шу зарра ҳаракат миқдори $\Delta m_i v_i$ нинг катталигига кўпайтмасини айтилади. Шундай қилиб, зарранинг ҳаракат миқдори моменти сон жиҳатдан қуйидагига тенг:

$$\Delta m_i v_i r_i. \qquad (53.1)$$

Қаттиқ жисмнинг ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти алоҳида зарралар ҳаракат миқдорлари моментларининг йиғиндисидан иборат бўлиб, у қуйидагига тенг:

$$N = \sum_i \Delta m_i r_i v_i. \qquad (53.2)$$

Ҳаракат миқдори моменти ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$N = \sum_i \Delta m_i r_i r_i \omega = \omega \sum_i \Delta m_i r_i^2 = I\omega. \qquad (53.3)$$

Қаттиқ жисмнинг ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моментининг катталиги сон жиҳатдан жисмнинг шу ўққа нисбатан инерция моментининг бурчак тезликка кўпайтмасига тенг.

Энди ўқда айланаётган қаттиқ жисм учун динамиканинг асосий қонунини бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{dN}{dt} = M, \qquad (53.4)$$

ёки *жисмнинг айланиш ўқига нисбатан ҳаракат миқдори моментининг ҳосиласи ўша ўққа нисбатан куч моментига тенг.*

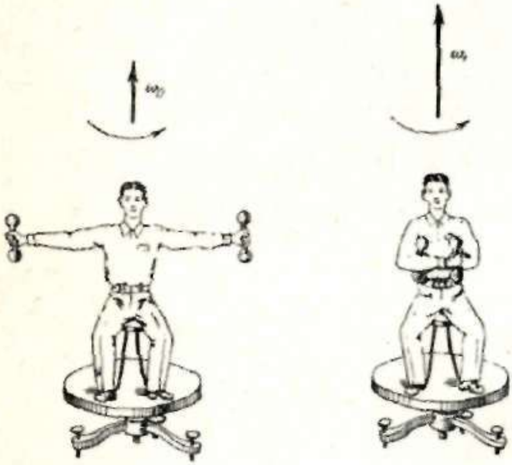
Агар ташқи кучлар моменти M нолга тенг бўлса, у ҳолда жисмнинг ҳаракат миқдори моменти доимий бўлади:

$$\frac{dN}{dt} = 0, \ N = \text{const}, \ I\omega = \text{const} \qquad (53.5)$$

Бу ҳаракат миқдори моментининг *сақланиш қонуни* таърифидан иборат.

Қаттиқ жисмнинг $M = 0$ да ўқда айланиши, яъни доимий ҳаракат миқдори моменти билан айланиши нуқтанинг $mv = \text{const}$ даги «инерция бўйича» ҳаракатига ўхшашдир. Лекин бу ўхшаш ҳоллар орасида баъзи тафовутлар ҳам бор: нуқтанинг «инерция бўйича» ҳаракати, нуқта массаси доимий қолганда доимий тезликли ҳаракатдан иборат, жисмнинг доимий ҳаракат миқдори моменти N билан ҳаракати жисмнинг I инерция моментини ҳаракат вақтида осон ўзгартириш мумкинлиги сабабли хамма вақт ҳам доимий ω бурчак тезликли ҳаракат бўлавермайди. Масалан, дастлаб ҳаракат берилган жисмнинг инерция моменти ўзгартирилса, ω айланиш тезлиги ўзгаради. Агар шунда ташқи кучлар моменти ҳам нолга тенг бўлса, у *ҳолда* ω *бурчак тезлик* инерция моментига тескари пропорционал ўзгаради. Бурчак тезликнинг бундай ўзгаришини, кўпинча, масалан, музда конькида сирпанаётганларнинг айланишида кузатиш мумкин; бурчак тезликнинг шу ўзгаришини **Жуковский скамейкасида** осон намойиш қилиш мумкин.

Жисмлар динамикаси қонунларини намойиш қилиш учун Н. Е. Жуковский вертикал ўқ атрофида жуда кичик ишқаланиш билан айлана оладиган скамейка ясашни таклиф қилди (140- расм). Экспериментатор қўлига гантеллар олиб, скамейкага ўтирганидан кейин қўлларини ўзидан мумкин қадар узоқроққа узатган ҳолда, кенг қулоч ёйиб, оёғи билан скамейкага бирор айланиш беради. Айланиш вақтида экспериментатор оёқларини полга теккизмаган ҳолда қўлларини



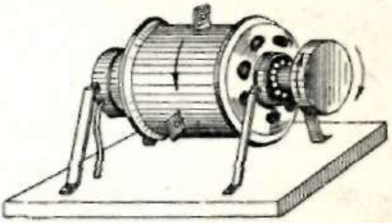
140- расм.

кўкрагига келтирса, бунда айланиш тезлиги кескин ортади; сўнгра қўлларини ташқарига узатиш билан экспериментатор ўзининг айланиш тезлигини яна камайтиради. Инерция моменти I ни ўзгартириб, экспериментатор айланиш тезлигини ўзгартиради, *чунки ташқи кучларнинг моменти* нолга тенг бўлгани учун (ишқаланиш кучлари моментини назарга олмаса бўлади) $I\omega$ кўпайтма доимий қолиши лозим.

Конькида сирпанувчи ўз танасига тез айланиш бериши («пирилдоқ» қилиш) учун бошланғич туртки пайтида қўл ва оёқларини ташқарига узатади. Сўнгра тўғриланиб, қўлларини танасига ёпиштириш ва оёқларини бирлаштириш билан вертикал ўққа нисбатан инерция моментини кескин камайтиради *ҳамда натижада* тез айланиш олади.

С. Э. Хайкин тавсия қилган ушбу тажрибада иккита ўзаро таъсирлашувчи жисмларнинг айланишини таҳлил қилиш учун ҳаракат миқдори моменти қонунидан (53.4) фойдаланамиз: унча катта бўлмаган электрмоторчанинг статори шарикли подшипникларда шундай ўрнатилганки, у ротор билан битта ўқда айлана олади

(141-расм). Мотор чулғамига статорда ўрнатилган ҳалқалар орқали электр ток юборилса, натижада статор ҳам, ротор ҳам турли йўналишларда айлана бошлайди. Агар статорнинг ишқаланиш кучи моментини назарга олмаслик мумкин бўлса, бу ҳолда уларнинг ҳар бирининг ҳаракат миқдорлари моментлари тенг ва қарама-қаршидир. Ҳақиқатдан ҳам, ротор билан статор орасидаги ўзаро таъсир магнит кучлари ҳамда улар орасидаги ишқаланиш кучлари ички кучлардир, бу кучларнинг статорга таъсир этувчи моменти роторга таъсир этувчи кучларнинг моментига тенг ва қарама-қарши йўналган. Статорнинг шарикли подшипникларидаги ва ҳалқаларидаги ишқаланиш кучлари моментигина ташқи момент ҳисобланади. Агар бу момент жуда кичик бўлса, у ҳолда ротор—статор система нолга тенг бўлган умумий ҳаракат миқдори моментига эга бўлади, демак, статор ва роторнинг ҳаракат миқдорлари моменти ҳар қандай вақт моментида тенг ва қарама-қаршидир



141-расм.

Ҳақиқатда эса, ҳамма вақт жуда кичик бўлса-да, асосан статорга таъсир этувчи ташқи кучлар моменти мавжуд бўлгани сабабли статорнинг ҳаракат миқдори моменти роторнинг ҳаракат миқдори моментидан бир оз кичик бўлади. Айланишга келтираётганда бу моментни ҳисобга олмаса ҳам бўлади, чунки ротор ва статор ҳаракат миқдорлари моментлари орасидаги фарқ уларнинг ҳар бирининг ҳаракат миқдорлари моментлари катталигига нисбатан етарлича кичик бўлади. Лекин статор ва роторнинг токни узгандан кейинги айланишини таҳлил қилишда бу фарқ билан ҳисоблашишга тўғри келади. Ҳақиқатдан, агар токни узгандан кейин айланишнинг ишқаланиш кучлари таъсирида тўхташини кузатсак, у ҳолда қуйидаги манзарани кўрамиз: аввал статор тўхтайди, сўнгра ротор статорни ўзи билан айлантира бошлайди ва ниҳоят, бутун система тўхтагунча, уларнинг иккаласи ротор томонга айланади. Равшанки, ишқаланиш кучларининг ташқи моменти бўлмаганида ҳамда статор ва роторнинг ҳаракат миқдорлари моменти бирдай бўлганида эди, бу ҳолда, системанинг тўла ҳаракат миқдори моменти ҳар бир вақт моментида ноль бўлгани сабабли, улар ўзаро ишқаланиш кучлари (ички кучлар) таъсирида бир пайтда тўхтаган бўларди. Лекин токни узганда роторнинг ҳаракат миқдори моменти статорникидан ортиқдир ва бундан ташқари, статорга таъсир этувчи тормозловчи момент роторга таъсир қилувчидан ортиқдир; бинобарин, вақт ўтиши билан улар орасидаги фарқ ортади ва статор ротордан олдин тўхтайди. Сўнгра ҳаракатланаётган роторнинг статорга ишқаланиши уни ҳаракатга келтиради.

54- §. Айланаётган жисмнинг кинетик энергияси

Айланаётган жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг алоҳида зарралари кинетик энергияларининг йиғиндисидан ташкил топади. Ўқдан r масофада турган зарранинг кинетик энергияси қуйидагига тенг:

$$\frac{\Delta m_i\, v_i^2}{2} = \omega^2 \frac{\Delta m_i \quad r_i^2}{2}, \tag{54.1}$$

чунки $v_i = \omega r_i$, айланаётган яхлит жисмнинг кинетик энергияси

$$E_{\text{кин.}} = \frac{\omega^2}{2}\sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (54.2)$$

эса жисмнинг илгариланма харакатидаги каби ифодаланиб, фақат *масса* ўрнига жисмнинг *I инерция моментини*, *чизиқли* тезлик ўрнига—*бурчак* тезлик ω ни қўйиш лозим.

Жисмни қўзғалмас ўқ атрофида айлантиришда кучларнинг ишини одатдаги усулда ёзиш мумкин: ҳар бир кучнинг унинг қўйилиш нуқтаси ўтадиган йўлга скаляр кўпайтмасини аниқлаш лозим. Бироқ бу ишни *кучлар моменти орқали* ифодалаш мумкин. F кучнинг қўйилиш нуқтаси R радиусли айлана бўйича айланади, кучнинг шу айлана уринмасига проекцияси $F_{\text{в}}$ ни олайлик; dt вақт ичида кучнинг қўйилиш нуқтаси $Rd\alpha$ га силжиди, бунда $d\alpha$ — жисмнинг бурилиш бурчаги. Шу сабабли кучларнинг dt вақт ичидаги иши қуйидагига тенг бўлади:

$$F_{\text{в}}Rd\alpha.$$

$F_{\text{в}}R$ катталик куч моменти M га тенг ва демак, ишни шундай ёзса бўлади.

$$Md\alpha.$$

t вақт оралиғидаги иш эса $\int\limits_0^t Md\alpha$ га тенг. Бошқача айтганда, *айланма ҳаракатда кучнинг иши кучлар моментининг бурилиш бурчагига кўпайтмаси* билан, ўзгарувчан кучлар моменти ҳолида эса моментдан бурилиш бурчаги бўйича интеграл билан ўлчанади.

Агар жисмга фақат M кучлар моменти қўйилган бўлса, *кучларнинг иши* кинетик энергиянинг ортишига тенглигини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, динамиканинг (52.6) қонунига кўра

$$M = I\frac{d\omega}{dt}, \qquad (54.3)$$

бунда I — инерция моменти, ω — бурчак тезлик; тенгликнинг ҳар иккала ярмини $d\alpha = \omega dt$ га — жисмнинг dt вақт ичидаги бурилиш бурчагига кўпайтирамиз. Натижада

$$Md\alpha = I\frac{d\omega}{dt}\omega\, dt = I\, d\left(\frac{\omega^2}{2}\right),$$

ёки кучларнинг t вақт ичидаги иши қуйидагига тенг бўлади:

$$\int\limits_0^t Md\alpha = I\int\limits_0^t d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_t - \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_0. \qquad (54.4)$$

Шундай қилиб, юқорида таърифланган ҳолат исботланди[1].

---

[1] (54.3) ва (54.4) формулалар $I = \text{const}$ да ўринлидир.

Энди биз нуқтанинг ҳаракатини қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўққа нисбатан айланма ҳаракати билан қуйидагича таққослаймиз.

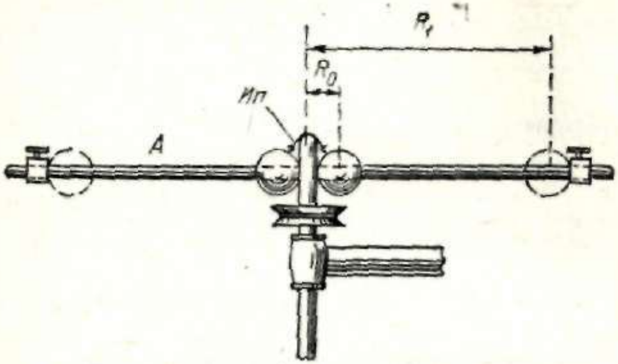
Моддий нуқтанинг ҳаракати	Қаттиқ жисмнинг ўқ атрофида айланиши
Масса m	Ўққа нисбатан инерция моменти I
Ташқи кучларнинг умумий ташкил этувчиси F	Ташқи кучларнинг ўққа нисбатан моментлари йиғиндиси M
Кўчиш x	Бурилиш бурчаги α
Тезлик v	Айланиш бурчак тезлиги ω
Тезланиш a	Бурчак тезланиш β
Ҳаракат миқдори $K = mv$	Ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти $N = I\omega$
Кинетик энергия $\frac{mv^2}{2}$	Кинетик энергия $\frac{I\omega^2}{2}$
Иш Fdx	Иш $Md\alpha$
Динамиканинг иккинчи қонуни $F = ma,\ F = \frac{dK}{dt}$	Динамика қонуни $M = I\beta$, ёки $M = \frac{dN}{dt}$

Айланувчи жисмларнинг кинетик энергияси ўзгарадиган бир нечта тажрибаларни қарайлик. Аввало, олдинги параграфда баён қилинган Жуковский скамейкасидаги тажрибаларда (140- расмга қ.) айланувчи жисм кинетик энергиясининг ўзгаришларини кузатайлик. Қўлида гантель ушлаган экспериментаторнинг айланишида айланувчи жисмнинг кинетик энергияси ўзгаради, айнан инерция моменти камайиши билан у ортади. Ҳақиқатдан ҳам, ҳаракат миқдори моменти $I\omega$ доимий қолгани ҳолда ω ортади; демак, $I\omega^2/2$ га тенг бўлган энергия ортади. Экспериментатор марказдан қочма инерция кучларига қарши бирор миқдор иш бажаради: экспериментаторнинг шу иши ҳисобига системанинг кинетик энергияси *ортади. Юкларни ўқдан узоқлаштиришда, аксинча, кинетик энергия юкларни* радиуслар бўйича ҳаракатлантирганда марказдан қочма инерция кучлари бажарадиган иш катталигича камаяди.

Машқ тариқасида экспериментаторнинг юкларни яқинлаштиришда бажарадиган иши аниқ кинетик энергиянинг ўзгаришига тенг эканлигини ҳисоблаб кўрсатиш тавсия қилинади.

Статор ва роторни айланишга келтириш тажрибаларида (141- расм) ҳам кинетик энергия ортади: агар ташқи ишқаланиш кучларини назарга олмаслик мумкин бўлса, у ҳолда ҳар бир пайтда катта инерция моментига эга бўлган жисмнинг кинетик энергияси кичик бўлади. Айтайлик, статорнинг инерция моменти роторнинг инерция моментидан 4 марта катта бўлсин, у ҳолда роторнинг *бурчак тезлиги статорнинг бурчак тезлигидан 4 марта катта бўлади.* Статор ва роторнинг ҳаракат миқдори моменти $I\omega$ бирдай бўлганидан статорнинг кинетик энергияси роторнинг кинетик энергиясидан 4 марта кичик. Иккита жисм ички кучлар билан «айланишга келтирилаётганда» кичкина инерция моментига эга бўлган жисм кўпроқ энергия миқдори «олади». Электромагнит кучлар манбаи томонидан сарфланган иш статор ва ротор орасида ҳар бирининг инерция моментига тескари пропорционал тақсимланади.

Кинетик энергиянинг ушбу масаладаги ўзгаришини қараб чиқиш ибратлидир. Марказдан қочма машинанинг роторига ўққа тик тарзда A стержень (142- расм) бириктирилган. Стерженга иккита бирдай шар кийдирилган бўлиб, улар стерженда сирпана олади. Бошда иккала шар ип билан туташтирилган, роторни приводдан ажратиб олиб унга қўл билан бирор ω_0 бурчак тезлик берилади ва кейин шарларни туташтирувчи ипни куйдирилади. Шарлар, табиийки, стержень учларига томон қочиб, бир-биридан узоқлашади; стерженда бирдай масофаларда тираклар қўйилганлиги сабабли шарлар ундан чиқиб кета олмайди.



142- расм.

Агар ишқаланиш кучларини назарга олмаслик мумкин бўлса, роторнинг айланиш тезлиги қандай бўлади?

Масалани қуйидагича ечамиз: айтайлик, бошда шарлар марказдан R_0 масофада эди, t пайтда эса R масофада бўлади. У ҳолда бурчак тезликни ҳаракат миқдори моментининг доимийлиги шартидан топиш мумкин:

$$N = (I_0 + 2mR_0^2)\omega_0 = (I_0 + 2mR^2)\omega = \text{const}, \tag{54.5}$$

бунда m — шар массаси, I_0 — ротор ва стерженнинг инерция моменти. Бу пайтда айланиш кинетик энергияси ушбуга тенг бўлади:

$$E = \frac{1}{2}(I_0 + 2mR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}N\omega. \tag{54.6}$$

Шарлар ўқдан R_1 масофада; тиракларга тиралиб тўхтаганларида айланиш бурчак тезлиги (54.5) тенгликка кўра, қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega_1 = \frac{N}{I_0 + 2\,mR_1^2}. \tag{54.7}$$

Равшанки, бурчак тезлик камаяди; демак, кинетик энергия ҳам ушбу миқдорда камаяди:

$$\Delta E = \frac{1}{2}N(\omega_0 - \omega_1). \tag{54.8}$$

ΔE энергия қаерга, қайси кўринишга ва қандай тарзда ўтди? Биз ишқаланиш кучлари йўқ деб фараз қилган эдик-ку. Буни аниқлаш учун ўз мулоҳазаларимизни яна бир бор қараб чиқайлик.

Аввало (54.6) ифоданинг кўрсатишича, шарлар ҳаракатланиши биланоқ ($R > R_0$) айланиш кинетик энергияси камаяди: ҳаракат миқдори моменти доимий, бурчак тезлик эса камаяди. Бу энергиянинг сақланиш қонунига зиддир. Демак, (54.6) формула ҳаракатланаётган жисмларнинг ҳамма кинетик энергиясини ҳисобга олмайди. Ҳа, ҳақиқатдан ҳам худди шундай. (54.6) ифодага шарларнинг радиус бўйлаб ҳаракат кинетик энергияси кирмайди; (54.8) формула кўрсатаётган энергия йўқолиши айнан шу энергия катталигини беради.

Шарлар тиракларга урилиб тўхтаганларида стержень бўйлаб ҳаракатнинг тўла кинетик энергияси, ҳар қандай ноэластик урилишдаги каби, иссиқликка айланади. (54.8) формула айнан энергиянинг иссиқликка ўтган катталигини кўрсатади.

Шарлар тиракларга эластик урилганларида, яъни механикавий энергиянинг иссиқлик энергияга ўтиши бўлмаганда қандай ҳодиса бўлиши билан қизиқиб кўрайлик. Аёнки, радиус бўйлаб v_0 тезликка эга бўлган шарлар эластик урилганда, урилишдан кейин ўша v_0 тезлик билан орқага марказ томон қайтади. Марказдан қочма куч уларнинг ҳаракатини тормозлайди, айланиш бурчак тезлиги яна ортади; шарлар бурчак тезлик бошланғич ω_0 қийматига эришгандагина фақат $R=R_0$ дагина тўхтайди. Сўнгра шарлар четга сурилади ва процесс даврий такрорланади: шарлар радиус бўйлаб тебранади, бурчак тезлик даврий ўзгаради ва ҳоказо. Баён қилинган манзара диск айланаётганда ҳамда шарлар стержень бўйлаб сирпанганда ишқаланиш кучлари бўлмаганда мавжуд бўлади.

Ҳақиқатда эса, шарлар тираклар олдида бирданига тўхтамайди ва ҳодиса қуйидагича ўтади: шарлар тираклардан орқага кичик масофага учиб қайтади, бир нечта кетма-кет борган сари камайиб борувчи урилишлардан сўнг ниҳоят шарлар тираклар олдида тўхтайди. Шарларнинг кинетик энергияси стержень бўйлаб сирпанишда ҳам, урилишларда ҳам иссиқлик энергиясига ўтади ва сочилган энергиянинг умумий миқдори, агар энергиянинг ротор ва стерженнинг айланишида ишқаланиш туфайли йўқолишини ҳисобга олмасак, ΔE га тенг бўлади (54.8 га қ.).

55-§. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази ва инерция маркази

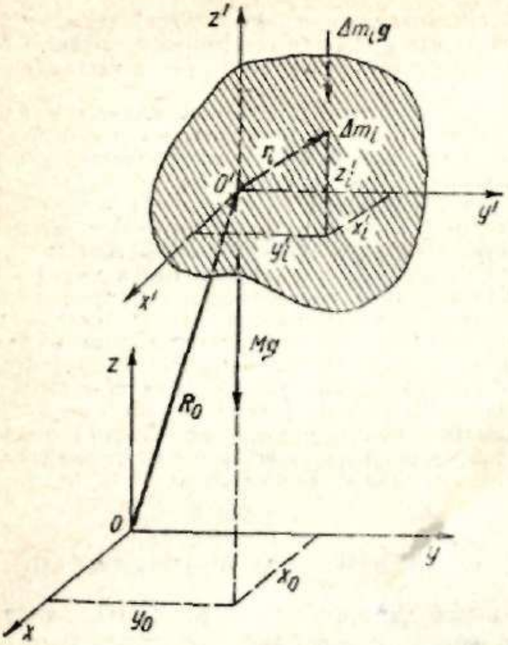
Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай ҳаракатида қаттиқ жисмнинг *инерция маркази* (ёки *массалар маркази*) дейилувчи битта ажойиб нуқтасини билиш муҳимдир. Инерция маркази ўрта мактаб курсидан маълум бўлган *жисмнинг оғирлик марказига* мос келади. Қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш усулларини қараб чиқайлик.

Қаттиқ жисмнинг ҳар бир заррасига Ернинг тортиш кучи таъсир қилади. Агар жисм ўлчамлари Ер радиусига нисбатан кичик бўлса[1], барча тортишиш кучлари бир-бирига параллел бўлади ва катталиги барча параллел кучлар бир томонга йўналгани сабабли барча кучларнинг йиғиндисига тенг бўлган умумий ташкил этувчига эга бўлади. Маълум бўлишича, қаттиқ жисмни қандай бураманг, бу умумий ташкил этувчи жисм билан муттасил боғланган ягона нуқтадан ўтар экан. Бу нуқтани *жисмнинг оғирлик маркази* дейилади.

Агар жисмни оғирлик марказидан бириктириб қўйилса, бунда жисмнинг ҳар қандай ҳолатида у мувозанатда бўлади. Демак, *жисм барча зарралари оғирлик кучларининг оғирлик марказидан ўтувчи исталган горизонтал ўққа нисбатан моментлари йиғиндиси нолга тенг.* Шундай осиб қўйилган жисмни оғирлик марказидан ўтувчи исталган ўқ атрофида буралганда, оғирлик кучининг умумий ташкил этувчиси маҳкамланиш нуқтасидан ўтиши туфайли, мувозанатда қолаверади.

---

[1] Фақат шу ҳолдагина жисмнинг оғирлик маркази тушунчасини киритиш мумкин.



143- расм.

Жисм билан боғланган x', y', z' тўғри бурчакли координаталар системасини танлаб олайлик; шунинг билан бирга, координаталар боши оғирлик марказига мос тушсин. Қаттиқ жисмнинг i-номерига ва Δm_i массага эга бўлган ҳар бир заррасининг координаталарини x_i', y_i', z_i' орқали белгилаймиз (143- расм). Жисмни шундай бурамизки, $x'\ O'\ z'$ текислик горизонтал бўлсин; жисмнинг барча зарралари оғирлик кучларининг оғирлик марказидан ўтувчи горизонтал ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенглиги сабабли, x' ва y' ўқларга нисбатан оғирлик марказини аниқловчи шартларни математик равишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_i \Delta m_i g y_i' = 0, \quad \sum_i \Delta m_i g x_i' = 0.$$

Энди жисмни y' ўқ атрофида 90° га бурсак, у ҳолда z' ўқ горизонтал бўлади, бунда унга нисбатан ҳам оғирлик кучлари моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши лозим ёки:

$$\sum_i \Delta m_i g z_i' = 0;$$

Бу тенгликларни g доимийга бўлсак, қуйидаги шартларга эга бўламиз:

$$\sum_i \Delta m_i x_i' = 0, \ \sum_i \Delta m_i y_i' = 0, \ \sum_i \Delta m_i z_i' = 0 \qquad (55.1)$$

ёки

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i' = 0; \qquad (55.2)$$

бунда $\boldsymbol{r}_i'$ — координаталар бошидан i индексли зарра жойлашган нуқтага ўтказилган радиус-вектор. Равшанки, x', y' z' ўқларнинг йўналишини жисмга нисбатан қандай танламайлик (55.1) ва (55.2) тенгликлар бажарилаверади.

Экспериментал усулда оғирлик марказини қуйидаги тарзда аниқлаш мумкин. Жисмни бирор нуқтасидан осиб қўйилади; мувозанат ҳолатида бу жисм фақат шундай ҳолатни олиши мумкинки, бунда унинг оғирлик маркази осиш нуқтаси тагидаги вертикал чизиқда жойлашади; қандайдир тарзда бу чизиқни жисмда белгиланади, оғирлик маркази унинг қаеридадир ётади. Сўнгра жисмни бошқа нуқтасидан осилади; ва яна вертикал чизиқни белгиланади; оғирлик маркази, равшанки, бу иккита чизиқнинг кесишиш нуқтаси сифатида топилади.

Оғирлик маркази — ягона нуқта эканлигини тажрибада текшириб кўриш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, биз жисмни қайси нуктасидан осмайлик, ҳар сафар осилиш чизиғи жисмнинг оғирлик марказидан ўтади.

Жисм оғирлик марказининг исталган қўзғалмас координаталар системасига нисбатан координаталарини, агар шу системага насбатан жисм барча зарраларининг координаталари маълум бўлса, топиш мумкин. Бунинг учун қуйидаги шартдан фойдаланиш лозим: бутун жисмнинг тортишиш кучининг исталган ўққа нисбатан моменти жисмнинг барча зарралари тортишиш кучларининг ўша ўққа нисбатан моментларининг йиғиндисига тенг бўлиши шарт.

x ва y ўқлари горизонтал бўлган қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига эга бўлайлик (143-расмга қ.).

Жисмнинг Δm_i массали ҳар бир заррасининг x_i, y_i, z_i координаталари маълум; жисм оғирлик марказининг x_0, y_0, z_0 координаталарини $Oxyz$ га нисбатан аниқлаш талаб қилинади. Юқорида эслаб ўтилган шартга мос равишда ҳар бир координата ўқига нисбатан моментлар тенглигини ёзамиз:

$$mx_0g = \sum_i \Delta m_i x_i g, \quad my_0 g = \sum_i \Delta m_i y_i g, \quad mz_0g = \sum_i \Delta m_i z_i g^1;$$

бу тенгликларни g га қисқартириб ва m га (жисм массасига) бўлиб, оғирлик маркази координаталарини топамиз:

$$x_0 = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i x_i}{m}, \quad y_0 = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i y_i}{m}, \quad z_0 = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i z_i}{m}. \tag{55.3}$$

Агар $\boldsymbol{R}_0$ катталик x_0, y_0, z_0 компонентли радиус-вектор бўлса, $\boldsymbol{r}_i$ эса x_i, y_i, z_i компоненталли радиус-вектор бўлса, у ҳолда (55.3) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathrm{R}_0 = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i}{m}. \tag{55.4}$$

Назарий йўл билан оғирлик марказини, одатда (55.3) ва (55.4) формулалар бўйича топилади; агар жисм массаси узлуксиз тақсимланган бўлса, у ҳолда бу формулаларга йиғиндилар ўрнига интеграллар киради. Жисмнинг зичлиги ρ бўлсин; у ҳолда $dx\,dy\,dz$ ҳажмли ва x, y, z координатали чексиз кичик зарра $\rho dx\,dy\,dz$ массага эга бўлади ва демак, (55.3) формулалардаги x_0 координата қуйидагича ифодаланади:

$$x_0 = \frac{\iiint \rho x\, dxdydz}{m}; \tag{55.5}$$

бошқа компоненталар учун ҳам худди шунга ўхшаш формулалар бўлади.

---

[1] Кейинги тенгликни олиш учун, юқоридагидек, $Oxyz$ координата системасини жисм билан биргаликда x ўқ (ёки y ўқ) атрофида бурадик.

Симметрик бир жинсли жисмларда оғирлик маркази симметрия ўқида жойлашган. Баъзи туташ жисмларнинг оғирлик маркази жисмнинг ташқарисида ўтиши ҳам мумкин: масалан, ҳалқа, гайка, шайба ва бошқаларнинг оғирлик маркази жисмдан ташқарида жайлашган. Жисмнинг оғирлик марказини излаётганда уни қисмларга ажратиш, уларнинг ҳар бирининг оғирлик марказини топиш, сўнгра ҳар бир қисмнинг массаси унинг оғирлик марказида жойлашган деб ҳисоблаб, бутун жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш мумкин.

Тортишиш кучларининг умумий ташкил этувчиси қўйилган нуқта сифатида *оғирлик маркази фақат кичик жисмлар* (*ўлчовлари* Ер радиусига нисбатан кичик бўлган жисмлар) учунгина ва алоҳида зарралар оғирлик кучларини параллел дейиш мумкин бўлгандагина, маънога эгадир. Акс ҳолда, жисм билан боғланган ва у орқали ҳамма вақт умумий ташкил этувчи ўтадиган ягона нуқта мавжуд эмас. Буни оддий мисолда кўрсатамиз.

$2R$ га — Ернинг иккиланган радиусига тенг узунликли фаразий AB вазнсиз стержень учларида жойлашган иккита бирдай моддий нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг умумий таъсир этувчиси қаердан ўтади? Айтайлик, стержень 144-*а* расмда кўрсатилгандек жойлашган; у ҳолда тортишиш кучининг умумий ташкил этувчиси стержень ўқининг A яқинида жойлашган C нуқтасидан ўтади. B нуқтадаги тортишиш кучи катталиги жиҳатидан A нуқтадаги тортишиш кучидан 5 марта кичиклигини ҳисобга олувчи оддий геометрик ясама стержень ўқида C нуқтанинг ҳолатини белгилайди. Стерженнинг 144-*б* расмда кўрсатилганидек жойлашишида, равшанки, тортишиш кучларининг умумий ташкил этувчиси стерженнинг ўртасидан — C' нуқтадан ўтади. Стерженни турли тарзда жойлаштириш билан ҳар сафар стержень ўқида тортишиш кучи умумий ташкил этувчиси ўтадиган турлича нуқталарни топишимиз аёндир.

а *б*

144- расм.

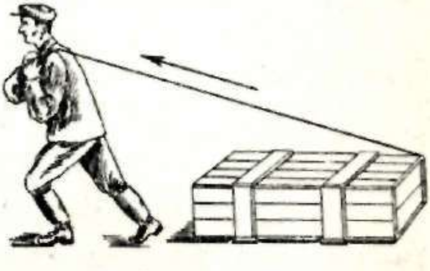
*Баъзи масалаларда бир-бири билан доимий боғланмаган бир неч*та турли жисмларнинг оғирлик марказини билиш муҳимлиги келгусида аниқланади. Бу ҳолда ҳам жисмлар системасининг оғирлик маркази (55.3) формулалар бўйича аниқланиб, уларда m ўрнида барча жисмлар массаларининг йиғиндиси тушунилади. Оғирлик марказининг ҳолати вақт ўтиши билан ҳам фазода, ҳам жисмларнинг ўзларига нисбатан ўзгаради.

Жисмнинг ҳар бир заррасига *массавий параллел кучлар*, яъни катталиклари зарра массасига пропорционал бўлган кучлар қўйилган деб тасаввур қилайлик. Бу кучларнинг ҳамда параллел тортишиш кучларининг умумий ташкил этувчиси уларнинг ҳар қандай йўналишида жисм билан доимий боғланган битта нуқтадан ўтади. Бу нуқтани инерция маркази ёки массалар маркази дейилади ҳамда (55.3) ва (55.4) формулалар бўйича аниқланади. Равшанки, оғирлик маркази билан инерция маркази мос тушиши туфайли баъзида уларни фарқ қилинмайди.

56-§. Жисм инерция марказининг ҳаракати қонуни

Бу қонуннинг моҳияти қуйидагичадир. Айтайлик, биз яшикнинг силлиқ пол ёки муз сиртидаги ҳаракатини қараётган бўлайлик (145-расм).

Яшикнинг бурчагига боғланган арқондан тортайлик; яшик ҳаракатланади ва айланади, у бурчак тезланишга ва бурчак тезликка эга бўлади, яшикнинг ҳаракати мураккаб ҳаракат бўлади. Бироқ қизиғи шундаки, қаттиқ жисмнинг унинг исталган нуқтасига қўйилган **F** куч таъсиридаги мураккаб ҳаракатида унинг *инерция маркази* йўналиши жиҳатдан **F** кучнинг йўналишига мос келувчи ҳамда F/m га тенг бўлган (бунда m — бутун жисмнинг массаси), $\mathbf{a}$ тезланиш билан ҳаракатланади.



145- расм.

Қаттиқ жисмнинг инерция маркази худди барча ташқи кучлар унга қўйилгандек ва бутун жисм массаси инерция марказида тўплангандек ҳаракат қилади.

Энди бу ҳолатни исботлайлик. Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай мураккаб ҳаракатида унинг инерция марказининг (ёки массалар марказининг) ҳаракати муҳим роль ўйнайди. Жисм инерция марказининг ҳолати (55.2) ёки (55.4) формулалар билан аниқланишини, чунончи, жисм барча зарраларининг инерция марказидан ўтказилган $\mathbf{r}'_i$ радиусвекторлари

$$\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}'_i = 0 \qquad (56.1)$$

шартни (бунда Δm_i катталик i-зарранинг массаси) қаноатлантиришини эслатиб ўтамиз.

Инерция марказининг бу таърифи ҳаракат пайтида деформацияланувчи жисм учун ҳам ўринли бўлиб, фақат қаттиқ жисмнинг инерция марказигина зарраларига нисбатан доимий ҳолатни сақлаб, деформацияланувчи жисмнинг инерция маркази эса жисм зарраларига нисбатан қандайдир ҳаракатланади. Бироқ ҳар бир вақт моментида жисм зарраларининг ҳолатини билган ҳолда (56.1) ёки (55.4) формулалар бўйича унинг инерция марказини аниқлашимиз мумкин. Шу сабабли ҳозир ҳар қандай жисм инерция марказининг ҳаракат қонуниятларини қараймиз.

Жисм барча зарралари ҳаракат миқдорларининг вектор йиғиндиси ёки биз атаганимиздек, жисмнинг ҳаракат миқдори бутун жисмнинг массаси ва инерция марказининг тезлиги билан аниқланишини кўрсатамиз. Жисмнинг Δm_i массали i-заррасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан тезлигини $\boldsymbol{v}_i$ орқали белгилаймиз. Айтайлик, жисм инерция маркази билан ҳаракатчан координаталар системаси боғланган бўлиб, шунинг билан бирга, координаталар боши ҳамма вақт инерция маркази билан мос тушсин, ўқлар эса фазода доимий йўналиш сақласин. Агар жисм инерция марказининг ҳаракат тезлиги $\boldsymbol{v}_0$, i-зарранинг ҳаракатчан координаталар системасига нисбатан ҳаракат тезлиги $\boldsymbol{v}_i'$ бўлса, у ҳолда

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_i',$$

ёки: i-зарранинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан тезлиги инерция марказининг тезлиги $\boldsymbol{v}_0$ билан зарранинг ҳаракатчан координаталар системасига нисбатан ҳаракат тезлиги $\boldsymbol{v}_i$ нинг йиғиндисига тенг. i-зарранинг ҳаракат миқдори, маълумки, ушбуга тенг:

$$\Delta \boldsymbol{k}_i = \Delta m_i \boldsymbol{v}_i = \Delta m_i \boldsymbol{v}_0 + \Delta m_i \boldsymbol{v}_i'.$$

Жисмнинг ҳаракат миқдорига тенг бўлган барча зарралари ҳаракат миқдорлари йиғиндисини бундай ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{K} = \sum_i \Delta \boldsymbol{k}_i = \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_0 + \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i'. \qquad (56.2)$$

Биринчи ҳад

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0 \sum_i \Delta m_i = m\boldsymbol{v}_0$$

(m — жисм массаси), иккинчи ҳад эса

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i' = 0;$$

кейинги тенглик ҳаракатчан координаталар системасининг боши инерция маркази билан мос тушади, деган шартдан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\boldsymbol{r}_i'$ — зарранинг ҳаракатчан координаталар системасига нисбатан радиус-вектори ҳамда $\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt} = \boldsymbol{v}_i'$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай вақт моменти учун ўринли бўлган (56.1) тенгламадан $\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$ келиб чиқади. Шу сабабли (56.2) ифодани шундай кўчириб ёзиш мумкин:

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_0. \tag{56.3}$$

Ҳар қандай жисмнинг **K** *ҳаракат миқдори унинг m массасининг инерция марказининг ҳаракат тезлиги $\mathbf{v}_0$ га кўпайтмасига тенг.* Яхлит жисмнинг ҳаракат миқдори жисм инерция маркази билан илгариланма ҳаракат қилаётган ҳаракатчан координаталар системасига нисбатан унинг зарраларининг ҳаракатига боғлиқ эмас. Қаттиқ жисм ҳаракатланаётганда фақат ҳаракатчан координаталар системасига нисбатан айланиши мумкин. Шу сабабли қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи ўқ атрофида айланишига боғлиқ эмас.

Энди жисм ҳаракат миқдорининг унга таъсир этаётган ташқи кучлар катталигига боғланишини топайлик.

Динамиканинг иккинча қонунини ҳар бир зарранинг ҳаракатига татбиқ қилайлик. Айтайлик, жисмнинг i-заррасига

$$(\mathbf{f}_i)_{\text{ич.}} + (\mathbf{f}_i)_{\text{таш.}}$$

куч қўйилган бўлсин, бунда $(\mathbf{f}_i)_{\text{ич.}}$ — ўша жисмнинг зарралари томонидан қўйилган куч (ички куч), $(\mathbf{f}_i)_{\text{таш.}}$ бўлса, бошқа жисмлар томонидан қўйилган куч (ташқи куч). Ҳар бир зарра ҳаракат миқдорининг ҳосиласи таъсир этувчи кучга тенг ёки

$$\frac{d\Delta \mathbf{k}_i}{dt} = (\mathbf{f}_i)_{\text{ич.}} + (\mathbf{f}_i)_{\text{таш.}} \tag{56.4}$$

Шундай тенгламаларни барча зарралар учун ёзиб чиқсак, ҳамда уларни қўшсак, натижада ушбу ҳосил бўлади:

$$\sum_i \frac{d\Delta \mathbf{k}_i}{dt} = \sum_i (\mathbf{f}_i)_{\text{ич.}} + \sum_i (\mathbf{f}_i)_{\text{таш.}} \tag{56.5}$$

$(\mathbf{f}_i)_{\text{ич.}}$ кучлар ички бўлганидан (ҳар бир куч ўзига тенг ва қарама-қаршисига эга), биринчи йиғинди $\sum\limits_i (\mathbf{f}_i)_{\text{ич.}} = 0$, иккинчи йиғинди $\sum\limits_i (\mathbf{f}_i)_{\text{таш.}} = \mathbf{F}$ — жисмга таъсир этаётган барча ташқи кучларнинг йиғиндиси. Шунинг учун ҳам (56.5) тенгликни қуйидагича кўчириб ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \Delta \mathbf{k}_i = \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{56.6}$$

Агар жисмнинг ҳаракат миқдори учун (56.3) ифодани ҳисобга олсак, у ҳолда кейинги тенгликни шундай кўчириб ёзиш мумкин:

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{F}, \tag{56.7}$$

бунда $d\mathbf{v}_0/dt$ — жисм инерция марказининг тезланиши.

Демак, *ҳар қандай жисм учун ҳаракат миқдоридан олинган ҳосила жисмга таъсир этувчи кучларнинг йиғиндисига тенг* (56.6);

ҳаракат миқдори эса жисм бутун массасининг инерция маркази тезлигига кўпайтмасига тенг бўлгани сабабли, *инерция марказининг тезланиши барча ташқи кучлар йиғиндисининг бутун жисм массасига нисбатига тенг* (56.7). Бу ҳол эса инерция марказининг тезланиши ташқи кучнинг жисмга қўйилиш жойига боғлиқ бўлмай, балки фақат куч катталигига ҳамда унинг таъсир йўналишига боғлиқлигини билдиради.

Айтайлик, биз столда ётган гугурт қутичасини шундай урдикки, зарба кучи унинг инерция марказидан ўтди; қутича илгариланма ҳаракат қилиб, унинг ҳаракат миқдори қуйидагича бўлади:

$$mv_0 = \int F dt. \tag{56.8}$$

Энди қутичанинг бурчагига урайлик ва зарба кучи аввалгидек бўлган деб фараз қилайлик; у ҳолда қутича айланиш билан ҳаракатланади, лекин F куч аввалгидек йўналган ҳамда ўшанча вақт таъсир қилган бўлса, у ҳолда ҳаракат миқдори (56.8) формулага кўра mv_0 га тенг бўлади[1]. Жисмни қандай қилиб, қайси нуқтасига урмайлик, у шундай учадики, инерция маркази зарба кучи йўналишида ҳаракатланади ва жисмнинг ҳаракат миқдори катталиги нуқта учун бўлганидек, (56.8) формула бўйича аниқланади. Демак, динамиканинг иккинчи қонуни ҳар қандай жисм учун муайян маънога эга; шу сабабли динамикада инерция маркази тушунчаси катта аҳамиятга эга.

Бу параграфда киритилган асосий тушунчаларга нисбатан бир нечта эслатма бериб ўтамиз.

1) Жисмга қўйилган барча ташқи кучларнинг таъсир чизиқлари битта нуқтада кесишса ёки параллел бўлса, уларнинг мажмуаси умумий ташкил этувчисига, яъни барча $(f_i)_{\text{таш}}$ кучларни тўла алмаштирувчи битта кучга эга бўлиши мумкин. Шу сабабли умумий ҳолда $F = \sum\limits_i (f_i)_{\text{таш.}}$ ни жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг *натижавийси* деб атаймиз. Натижавий куч барча $(f_i)_{\text{таш.}}$ ларнинг вектор йиғиндисига тенг бўлиб, уларни *битта нуқтага* қўйилган деб тасаввур қилмоқ лозим. Натижавий куч жисм ҳаракат миқдорининг ҳосиласини, яъни жисмнинг илгариланма ҳаракат динамикасини белгилайди.

2) Натижавий куч ҳам, жисмнинг ҳаракат миқдори ҳам жисмнинг ҳаракат вақтида қандай айланаётгани ҳақида ҳеч қандай кўрсатма бермайди. Бироқ, инерция марказининг ҳаракати асосий қонуни (56.6), (56.7)дан муҳим хулоса чиқариш мумкин: агар натижавий куч нолга тенг бўлса, у ҳолда жисмнинг ҳаракат миқдори ўзгармайди ёки: натижавийси нолга тенг бўлган ташқи кучлар таъсир

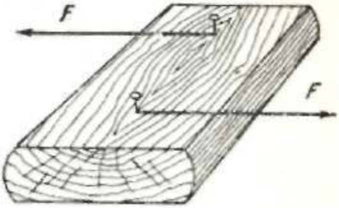
---

[1] Ўйлаб кўриб саволга жавоб беринг: кўрсатилган иккита ҳолда F кучнинг иши бирдай бўладими?

қилаётганда жисм инерция марказининг тезлиги доимий қолади. Агар қаттиқ жисм қандайдир инерциал саноқ системага нисбатан тинчликда турган бўлса, у ҳолда нолинчи натижавий ташқи кучлар таъсир қилганда, жисм ҳаракатлана бошласа-да, унинг инерция маркази тинчликда қолади. Бундай шароитда жисм фақат инерция марказидан ўтувчи ўқ атрофидагина айлана олади.

Нолинчи натижавийга эга бўлган ташқи кучлар системасининг энг содда мисоли жуфт кучлардир. *Жуфт кучлар* турли нуқталарга қўйилган ва турли томонга йўналган *иккита тенг параллел кучларнинг мажмуасидан иборат* (146-расм). Жуфтнинг таъсири жисм инерция марказининг кўчишига олиб келмайди.

3) Алоҳида жисм учун исботланган инерция марказининг ҳаракати қонуни ёки ҳаракат миқдорининг ўзгариши қонуни (56.6) ва (56.7) лар жисмларнинг (зарраларнинг) ҳар қандай системаси учун ҳам ўринли бўлар экан. Кейинги даъвонинг исботи шунга ўхшаш тарзда бажарилади Системага кирувчи ҳар бир жисм зарраларга ажратилади ҳамда (55.2) ёки (55.4) формула бўйича исталган вақт моменти учун жисмлар системасининг инерция маркази ҳолати аниқланади. Бунда системанинг m массаси системага кирувчи барча жисмлар массаларининг йиғиндисига тенг. *Ташқи кучлар деб, системага кирмайдиган жисмлар томонидан келиб чиқувчи* кучлар олинади. Қаралаётган системага кирувчи турли жисмларнинг зарралари орасидаги таъсир этувчи кучларни, албатта, ички кучлар дейилади. Уларнинг йиғиндиси ҳамма вақт нолга тенг. (56.6) ёки (56.7) қонуннинг кўрсатишича, ташқи кучларнинг натижавийси нолга тенг бўлганда механикавий системага кирувчи жисмлар фақат яхлит системанинг ҳаракат миқдори ўзгаришсиз қоладиган, инерция маркази эса, тинчликда қоладиган ёки текис ва тўғри чизиқли кўчадиган тарздагина ҳаракатланишлари мумкиндир.



146- расм.

Механикавий системага қўйилган ташқи кучларнинг натижавийси икки ҳолда нолга тенг бўлади: ё ташқи кучларнинг мажмуаси жуфт кучларга келтирилиши мумкин ёки механикавий система ўз таркибига кирмайдиган жисмларнинг таъсиридан изоляцияланган — унга ташқи кучлар таъсир қилмайди. Кейинги ҳолда механикавий системани *изоляцияланган* ёки *ёпиқ* система дейилади. Ёпиқ системада фақат ички кучлар таъсир қилиб, улар системанинг ҳаракат миқдорини ўзгартира олмайди.

Аввал моддий нуқта (зарра) учун таърифланган инерция қонуни энди механикавий система ҳосил қилувчи моддий нуқталарнинг (зарраларнинг) ҳар қандай мажмуаси учун умумлаштирилиши мумкин: *изоляцияланган механикавий системанинг ҳаракат миқдори* *доимий қолади, жисмларнинг бундай системасининг инерция маркази ё тинчликда бўлади, ё текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланади.* Бу ҳар қандай моддий жисмлар системаси учун ўринли бўлган ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунининг (инерция қонунининг) энг тўлиқ ва аниқ таърифидир. Шундай қилиб, инерция қонуни изоляцияланган алоҳида зарра учун ҳам, зарраларнинг ҳар қандай изоляцияланган системаси учун ҳам ўринли бўлади. Зарралар бутун системасининг тезлиги унинг инерция марказининг (массалар марказининг) тезлигидир. Ташқи кучлар бўлмаса, бутун система (алоҳида зарра ҳолидагидек) текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланади.

Ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонуни (56.6) ва (56.7) системанинг ташқи кучларнинг муайян мажмуаси таъсирида ўзини тутиши ҳақида — унинг илгариланма ҳаракати ёки унинг массалари марказининг ҳаракати ҳақида энг дастлабки тасаввурларни беради. Бунда системани ҳосил қилувчи ҳар бир жисмнинг (зарранинг) ҳаракати билан боғлиқ бўлган тафсилотлар яшириниб қолади. Шу сабабли (56.6) ёки (56.7) битта тенгламанинг ўзи механикавий системадаги процессни бирор даражада тўлиқ *баён қилиш учун етарли эмас.* Бироқ агар система зарраларининг инерция марказига нисбатан ҳаракати билан боғлиқ бўлган тафсилотларни қарамасдан, системанинг фақат илгариланма ҳаракати билан қизиқсак, бу ҳолда у қанчалик мураккаб бўлмасин, уни системанинг бутун массаси жамланган ва системага таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг натижавийси қўйилган (массалар марказида жойлашган) моддий нуқта билан алмаштириш мумкин бўлади. Бунинг учун битта (56.7) тенглама етарли бўлади. Курснинг бошланишида динамика масалаларига айнан шундай ёндашган эдик.

57-§. Жисмнинг ясси ҳаракати

Қаттиқ жисмга кучнинг қўйилиш нуқтасининг ихтиёрий ҳолатида жисм ҳаракатининг таҳлили анча мураккаб масалани ташкил қилади. Шу сабабли аввал жисмнинг барча зарралари муайян текисликка параллел ҳаракатланадиган ясси ҳаракатини қараймиз. Масалан, яшикнинг силлиқ ва текис муз сиртида ҳаракати, кутичанинг стол сиртида ҳаракати, цилиндрнинг думалаши, ғилдиракнинг думалаши ва бошқалар шундай ҳаракат намуналаридир.

147- расм.

Аввал баъзи тажрибаларнинг натижаларига қарайлик. Айтайлик, силлиқ тахта фақат муз сиртида ёки столнинг текис сиртида ҳаракатлана олади (147-расм). Тахтага мих қоқамиз ва михга боғланган ип бўйича горизонтал тортамиз. Тахта шундай ҳаракатланадики, инерция марказининг тезланиши куч йўналишига мос келади. Агар ҳаракат тинчликдан бошланса ва ип фазода ўзгармас йўналишга эга бўлса, у ҳолда инерция марказининг тезлиги ип йўналишига мос тушади. Лекин, бундан ташқари, тахта вертикал ўқ атрофида айлана олади. Михнинг тахтадаги ҳолатини ўзгартирсак, кучнинг қўйилиш нуқтаси инерция марказига яқинлашган сари айланиш секинлашишини кўрамиз. Ниҳоят, агар мих тахтанинг инерция марказидан ўтса, тахта илгариланма ҳаракат, айланишсиз ҳаракат қилади. Бу ҳолда ташқи кучнинг инерция марказидан ўтувчи ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлади. Бундан айланиш ташқи кучнинг инерция марказидан ўтувчи вертикал ўққа нисбатан моментига боғлиқ деган хулосага келамиз.

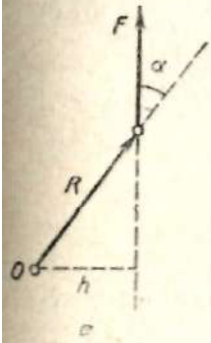
Жисмнинг айланиши бу моментга қандай боғланган? Бу инерция марказидан ўтувчи қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм учун қандай бўлса шундай бўлади, яъни *куч моменти жисм инерция моментининг бурчак тезланишига кўпайтмасига тенг.*

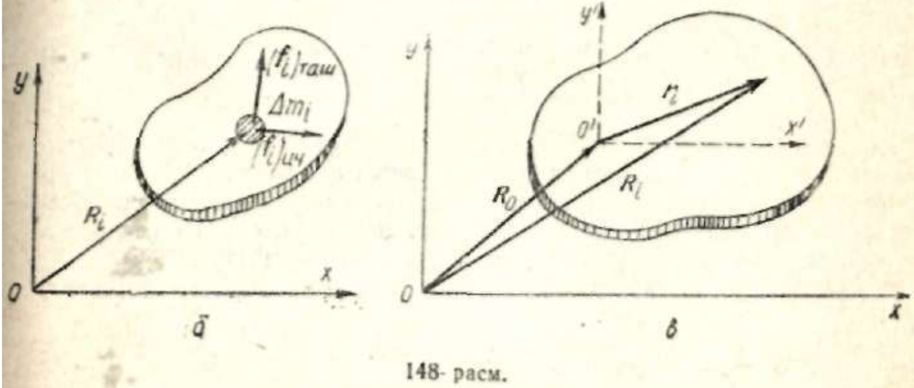
Энди буни исботлайлик. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида кучнинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш учун янада умумийроқ формулани келтирамиз. **F** кучнинг ўққа нисбатан моменти деб вектор **R** нинг **F** кучга вектор кўпайтмасини атаймиз ёки

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{RF}], \tag{57.1}$$

бунда **R** катталик *O* нуқтадан ўтувчи ўқдан **F** кучнинг қўйилиши нуқтасигача масофа (148-*а* расм). Айланиш ўқи ҳаракат текислигига (чизма текислигига) тик. Вектор кўпайтма қоидасига кўра, моментнинг модули

$$M = FR \sin \alpha = Fh$$





148- расм.

олдин аниқланган куч моменти (елка $h = R\sin\alpha$) катталигига мос келади. (57.1) формула, автоматик равишда, ҳамма вақт ҳаракат текислигига тик бўлган моментнинг ишорасини ва йўналишини кўрсатади.

Жисм билан боғланмаган бирор *қўзғалмас Oxy* координаталар системасига нисбатан жисмнинг ясси ҳаракатини қарайлик (148-б расм). Жисмдан моддий нуқта деб қараш мумкин бўлган Δm_i массали бирор кичик заррани ажратиб олайлик; унинг ҳолати O координата бошидан ўтказилган $\boldsymbol{R}_i$ радиус-вектор билан белгиланади. Айтайлик, i нуқтага $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}$ ташқи куч ва $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{ич}}$ ички куч таъсир қилаётган бўлсин. У ҳолда нуқтанинг ҳаракат қонуни қуйидагича ёзилади:

$$\Delta m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = (\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}} + (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ич.}} \tag{57.2}$$

бунда $\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt}$ — қўзғалмас Oxy координаталар системасига нисбатан тезлик. (57.2) тенгламанинг ҳар бир ҳадига $\boldsymbol{R}_i$ ни вектор кўпайтирамиз:

$$\Delta m \left[\ \boldsymbol{R}_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right] = [\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}] + [\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{f}_i)_{\text{ич}}]. \tag{57.3}$$

Агар $\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt}$ эканлигини эсласак, биринчи ҳадни $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{R}_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i]$ кўринишда ёзиш мумкин ва шунинг учун

$$\left[\frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt} \Delta m_i \boldsymbol{v}_i\right] \equiv 0.$$

Жисмнинг барча нукталари учун (57.3) тенгламаларни ёзиб, қўшиб чиқсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{d}{dt}\sum_i [\boldsymbol{R}_i \Delta m_i v_i] = \sum_i [\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш}}] + \sum_i [\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{f}_i)_{\text{ич.}}]. \tag{57.4}$$

Ҳар бир ички куч учун унга катталиги жиҳатидан тенг ва йўналиши қарама-қарши бўлган, жисмнинг бошқа нуқтасига қўйилган кучнинг мавжудлиги ҳамда кучларнинг йўналиши қарама-қарши, елкалари эса бирдайлиги сабабли уларнинг моментлари йиғиндиси нолга тенглигидан ўнг қисмдаги иккинчи йиғинди нолга тенг.

$[\boldsymbol{R}_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i]$ катталикни нуқтанинг *ҳаракат миқдори моменти*,

$$\sum_i [R_i \Delta m_i v_i] = \boldsymbol{N}$$

катталикни эса *бутун жисмнинг O нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти* дейилади. Энди қаттиқ жисм ясси ҳаракатининг умумий қонунини унинг O дан ўтувчи қўзғалмас ўққа нисбатан айланиши сифатида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{dt}=\boldsymbol{M}, \tag{57.5}$$

ёки *ҳаракат миқдори моментининг ҳосиласи ташқи кучлар моментлари йиғиндисига тенг*:

$$\boldsymbol{M}=\sum_i[\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш}}].$$

(57.5) тенгламанинг кўриниши худди қаттиқ жисмнинг жисм билан доимий боғланган ўқ атрофидаги айланиши ҳолидагидек (53.4) бўлиб, фақат бунда нуқталарнинг $\boldsymbol{v}_i$ ҳаракат тезликлари $\boldsymbol{R}_i$ га тик бўлмайди, $\boldsymbol{R}_i$ нинг катталиги ва йўналиши вақт ўтиши билан ўзгаради.

Агар инерция марказининг ҳаракати қонуни (56.7) ни ҳисобга олинса, (57.5) тенглама янада равшанроқ физикавий талқин олади. Айтайлик,

$$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}_i,$$

бунда $\boldsymbol{R}_0$ — массалар маркази O' нинг радиус-вектори, $\boldsymbol{r}_i$ — жисмнинг массалари маркази билан боғланган, айланмайдиган $O'x'y'$ координаталар системасига нисбатан нуқтанинг радиус-вектори (148-*в* расм). У ҳолда i-нуқтанинг тезлиги ушбуга тенг бўлади:

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}_i,$$

бунда

$$\boldsymbol{v}_0=\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt},\quad \boldsymbol{u}_i=\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}.$$

Ҳар бир нуқтанинг радиус-вектори массалар марказининг радиус-вектори билан ўша нуқтанинг массалар маркази билан боғланган системадаги радиус-вектори йиғиндисидан ташкил топади. Шундай муносабатларни тезликлар учун ҳам ёзиш мумкин. Агар биз шу ифодаларни (57.4) формулага қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{d}{dt}\sum_i[(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}_i)\Delta m_i(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}_i)]=\sum_i[(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}_i)(\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}],$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\left\{[\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{v}_0]\sum_i\Delta m_i+\left[\boldsymbol{R}_0\sum_i\Delta m_i\boldsymbol{u}_i\right]+\left[\sum_i\boldsymbol{r}_i\Delta m_i\boldsymbol{v}_0\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_i[\boldsymbol{r}_i\Delta m_i\boldsymbol{u}_i]\right\}=\left[\boldsymbol{R}_0\sum_i(\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}\right]+\sum_i[\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}] \tag{57.6}$$

(57.6) чап қисмининг катта қавс ичидаги иккинчи ва учинчи йиғиндилар массалар маркази таърифига кўра нолга тенг. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i = 0,$$

ҳамда бу тенгликни дифференциалласак, ушбуни топамиз:

$$\sum_i \Delta m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i = 0.$$

У ҳолда

$$\frac{d}{dt}\left\{ [\boldsymbol{R}_0 m \boldsymbol{v}_0] + \sum_i [\boldsymbol{r}_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i] \right\} = [\boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{F}] + \sum_i [\boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}], \qquad (57.7)$$

бунда $m = \sum_i \Delta m_i$ — бутун жисм массаси ва $\boldsymbol{F} = \sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}$ — жисмга таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг йиғиндиси. (57.7) да ўнг ва чапдаги биринчи ҳадлар қисқариб кетади. Ҳақиқатдан ҳам, (56.7) га кўра

$$\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt} = \boldsymbol{v}_0 \text{ ва } m\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} = \boldsymbol{F} \text{ бўлгани сабабли}$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{R}_0 m \boldsymbol{v}_0] = \left[\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt} m \boldsymbol{v}_0\right] + \left[\boldsymbol{R}_0 m \frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}\right] = [\boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{F}].$$

Натижада ажойиб муносабат ҳосил бўлиб, уни шундай ёзиш мумкин:

$$\frac{d\boldsymbol{N}_0}{dt} = \boldsymbol{M}_0, \qquad (57.8)$$

бунда $\boldsymbol{N}_0 = \sum_i [\boldsymbol{r}_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i]$ — массалар маркази O' дан (ушбу пайтда) ўтувчи ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти, $\boldsymbol{M}_0 = \sum_i [\boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}]$ — ўша ўққа нисбатан ташқи кучлар моменти.

(57.8) қонуннинг кўрсатишича, жисмнинг мураккаб ясси ҳаракатида *массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моментининг ҳосиласи ташқи кучларнинг ўша ўққа нисбатан моментига тенг.* Айланиш худди жисмда ва фазода қўзғалмас бўлган ўқ атрофидагидек юз беради ((53.4) га. қ.).

Қаттиқ жисмда массалар маркази доимий ҳолатни сақлагани сабабли $\boldsymbol{u}_i$ тезликни $\boldsymbol{u}_i = [\omega \boldsymbol{r}_i]$ кўринишда ифодалаш мумкин, бунда ω нинг йўналиши ҳамма вақт ҳаракат текислигига тик бўлади. Шу сабабли ҳаракат миқдори моменти қуйидагига тенг бўлади[1]:

---

[1] Чиқаришда векторлар алгебрасидан маълум бўлган $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$ формулани ҳисобга оламиз.

$$\sum_i [r_i \Delta m_i u_i] = \sum_i [r_i \Delta m_i [\omega r_i]] = \omega \sum_i \Delta m_i r_i^2 .$$

$I_0 = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ катталик жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти эканлиги бизга маълум. У ҳолда (57.8) тенглама қўзғалмас ўқ атрофида айланишдагидек, одатдаги кўринишни олади:

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = M_0. \tag{57.9}$$

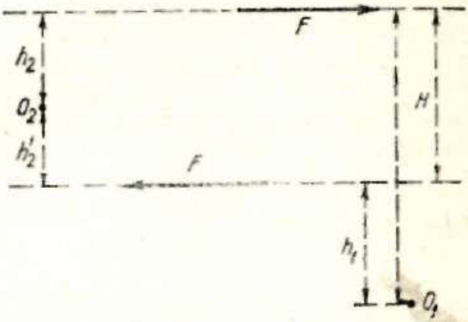
ω, $\frac{d\omega}{dt}$, M векторлар ҳамма вақт жисмнинг ҳаракат текислигига тик эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

Ташқи куч инерция марказидан ўтувчи ўққа томон йўналган ҳолда $M_0 = 0$ ва $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

Агар жисм бошланғич пайтда куч қўйилгунча тинчликда, яъни $\omega = 0$ бўлса, у ҳолда кейин ҳам ω нолга тенг бўлади. Бошқача айтганда, агар ташқи кучларнинг умумий таъсир этувчисининг чизиғи инерция маркази ётган ўқ орқали ўтса, ҳамда жисм ҳаракатини тинч вазиятидан бошласа, жисм илгариланма ҳаракат қилади. Агар шу ҳолда бошланғич пайтда жисм ω_0 бурчак тезликка эга, яъни жисм айланаётган бўлса, бу ҳолда $\frac{d\omega}{dt} = 0$ бўлгани сабабли у ўша бурчак тезлик билан айланишда давом этади.

Ясси ҳаракатнинг жуфт кучлар таъсирида юзага келувчи хусусий ҳолини кўрсатиб ўтамиз. Жуфт кучни ҳосил қилувчи параллел кучлар тенг ва бир-бирларига қарама-қарши бўлганларидан жуфт кучнинг натижавийси нолга тенг бўлади. Инерция маркази кучлар қўйилгунча тинчликда бўлган бўлса, бу ҳолда у тинчликда қолади. Демак, *жисм жуфт куч таъсирида*, кучлар қаерга қўйилганидан қатъи назар, *инерция марказидан ўтувчи ва жисмнинг ҳаракат текислигига тик ўқ атрофида айланади*.

Ҳар қандай ўққа нисбатан жуфт кучлар моменти куч F нинг улар орасидаги масофа H (елка) га кўпайтмасига тенг бўлган ягона қийматга эга бўлади (149-расм). Ҳақиқатдан ҳам, кучларнинг O_1 ва O_2 нуқталардан ўтувчи ўқларга нисбатан моментлари қуйидагига тенг бўлади:



149- расм.

$$M = F(H + h_1) - Fh_1 = FH, \ M = Fh_2 + Fh_2' = FH.$$

Якунлаб, барча айтилганларни қисқача яна шундай баён қилиш мумкин. Ясси ҳаракатда жисм ташқи кучлар таъсирида бир вақтда ҳам илгариланма, ҳам айланма ҳаракат қилади. Жисм ҳар бир нуқтасининг тезланиши илгариланма ҳаракат тезланиши билан массалар марказидан ўтувчи ўқ атрофида айланишдаги тезланиш йиғиндисидан иборат бўлади. Илгариланма ҳаракат тезланиши жисмнинг барча нуқталари учун бирдай ва қуйидагига тенг:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}, \tag{57.10}$$

бунда $\boldsymbol{F} = \sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{таш.}}$ — барча ташқи кучларнинг натижавийси, m — жисм массаси. Тезланишнинг йўналиши $\boldsymbol{F}$ натижавийнинг йўналишига мос келади. Масса марказидан ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракатнинг тезланиши қуйидагига тенг:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I}, \tag{57.11}$$

бунда M — барча ташқи кучларнинг масса марказидан ўтувчи ўққа нисбатан моменти, I — жисмнинг ўша ўққа нисбатан инерция моменти.

58-§. Цилиндрнинг текисликда думаланиши. Максвелл маятниги

Ясси ҳаракатнинг намунаси тариқасида цилиндрнинг ёки ғилдиракнинг текисликда думаланишини қараймиз.

Цилиндр ўқи бирор $\boldsymbol{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланади ҳамда цилиндр жисми ω бурчак тезлик билан айланади. Агар цилиндр текислик бўйлаб сирпанишсиз думаласа, у ҳолда v ва ω орасида қуйидагича муносабат мавжуд бўлади:

$$\boldsymbol{v}_0 = \omega R_0, \tag{58.1}$$

бунда R_0 — цилиндр радиуси. Бу муносабат ўқнинг $v_0 dt$ кўчиши тегишиш нуқтаси ўша вақт ичида кўчадиган цилиндр айланаси ёйи узунлиги $\omega R_0 dt$ га тенглигидан келиб чиқади.

Агар $\boldsymbol{v}_0 > \omega R_0$ ёки $v_0 < \omega R_0$ бўлса, цилиндрнинг тегишиш нуқтаси сирпанади — цилиндр сирпаниш билан думаланади. Биринчи ҳолда тегишиш нуқтасининг тезлиги олдинга, иккинчисида орқага йўналган.

Ҳар қандай ҳолда цилиндр нуқталарининг тезлиги ушбу формула бўйича аниқланади:

$$\boldsymbol{v}_0 + [\omega \boldsymbol{r}], \tag{58 2}$$

бунда $\boldsymbol{r}$ — цилиндр ўқидан муайян нуқтагача вектор масофа. Цилиндрнинг ҳаракати $\boldsymbol{v}_0$ тезлик билан илгариланма ҳаракатдан ва ω

бурчак тезлик билан айланишидан ташкил топади. Лекин бу ҳаракатни оний ўқ атрофида айланиш сифатида тасаввур қилсак ҳам бўлади.

Жисмнинг ҳар қандай ясси ҳаракатида *оний айланиш ўқини* — жисм билан муттасил боғланган, муайян онда тинчликда турган нуқталар орқали ўтувчи чизиқни кўрсатиш мумкин. Цилиндр ёки ғилдирак сирпанишсиз думалаётганда оний ўқ цилиндрнинг текисликка тегишиш нуқталаридан ўтади, цилиндрнинг бу нуқталари шу пайтда ҳаракатсиз қолади (нолинчи тезликка эга бўлади). Цилиндр dt вақт ичида ω бурчак тезлик билан A нуқтадан ўтувчи оний ўқ атрофида бурилади деб ҳисоблаб, жисмнинг барча бошқа нуқталарининг тезлигини, уларнинг йўналишини ва катталигини аниқлаш мумкин (150-*а* расм). Ҳақиқатдан ҳам айтайлик, $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0+\mathbf{r}$ — оний ўқдан B нуқтанинг масофа вектори, $\mathbf{R}_0$ — цилиндр ўқига ўтказилган вектор бўлсин; у ҳолда нуқтанинг тезлигини қуйидагича ёзиш мумкин:

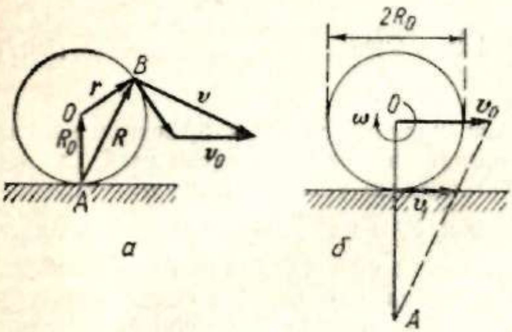
$$\mathbf{v}=[\omega \mathbf{R}],$$

ёки

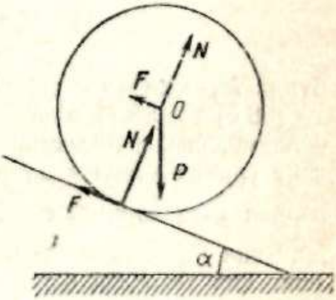
$$\mathbf{v}=[\omega(\mathbf{R}_0+\mathbf{r})]=\mathbf{v}_0+[\omega\mathbf{r}], \qquad (58.3)$$

бунда $\mathbf{v}_0=[\omega \mathbf{R}_0]$ — цилиндр ўқининг тезлиги, илгариланма ҳаракат тезлиги. Равшанки, оний ўқ текислик бўйлаб $\mathbf{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланади ва ҳар сафар цилиндр сиртининг турли нуқталаридан ўтади. Цилиндр ўқидан ўтувчи айланиш ўқи ҳам фазода ҳаракатланса-да, цилиндр зарраларига нисбатан доимий ҳолатни сақлайди.

Цилиндр сирпаниш билан думалаганда оний ўқ энди тегишиш нуқтасидан ўтмайди. $v_0>\omega R_0$ да (150-*б* расм) оний ўқ думаланиш текислигидан пастроқдаги A нуқта орқали ўтади, цилиндр $\mathbf{v}_1$ тезлик билан сирпанади[1]. $v_0<\omega R_0$ да оний ўқ думаланиш текислиги



150- расм.



151- расм.

---

[1] Цилиндр билан доимий бириктирилган етарлича катта радиусли вазнсиз дискни тасаввур қилиш мумкин; у ҳолда оний ўқ бу дискнинг OA радиусли айланада пастда ётувчи нуқтасидан ўтади.

устидан ўтади, айланиш илгариланма ҳаракатдан устунлик қилади. Барча думаланиш ҳолларида оний ўқ думаланиш текислиги бўйлаб, цилиндр ўқи тезлиги v_0 да ҳаракатланади.

Энди цилиндрнинг думаланиш динамикасини қараб чиқайлик. Айтайлик, R_0 радиусли цилинр горизонт билан α бурчак ҳосил қилган қия текисликдан думалаб тушаётир (151-расм). Цилиндрга учта куч: тортишиш кучи $\boldsymbol{P}$, текисликнинг цилиндрга нормал босим кучи $\boldsymbol{N}$ ва цилиндрнинг текисликка ишқаланиш кучи $\boldsymbol{F}$ таъсир қилади. Охирги куч қия текисликда ётади. Даставвал илгариланма ҳаракатдаги тезланишни аниқлаймиз; бунинг учун барча кучлар массалар марказига қўйилган деб тасаввур қиламиз ёки ишқаланиш кучини цилиндр ўқига кўчирамиз, чунки қолган кучлар O орқали ўтади. Цилиндр ҳаракат вақтида текисликдан ажралмаслиги сабабли массалар марказининг текисликка тик йўналишдаги тезланиши нолга тенг, бундан

$$P\cos\alpha - N = 0. \tag{58.4}$$

Иккинчи томондан, барча кучларнинг қия текисликка параллел ташкил этувчиси қуйидагига тенг:

$$f = P\sin\alpha - F. \tag{58.5}$$

Бу куч цилиндр масса марказининг тезланишини ёки унинг қия текислик бўйича илгариланма ҳаракатининг тезланишини аниқлайди, шу сабабли тезланиш

$$a = \frac{f}{m} = \frac{1}{m}(P\sin\alpha - F), \tag{58.6}$$

бунда m — цилиндр массаси. Бурчак тезланиш (57.11) формула бўйича фақат ишқаланиш кучи F нинг моменти ва цилиндрнинг унинг ўқига нисбатан инерция моменти I билан аниқланади. У қуйидагига тенг:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = \frac{FR_0}{I}, \tag{58.7}$$

бунда R_0 — цилиндр радиуси.

(58.6) ва (58.7) тенгламалар цилиндр текислик бўйича сирпаниш биланми, сирпанишсизми, ҳаракатланаётганидан қатъи назар, ҳамма вақт ўринли эканликларини таъкидлаб ўтамиз. Лекин бу тенгламалардан учта номаълум катталик: F, a ва $\frac{d\omega}{dt}$ ларни аниқлаб бўлмайди, яна қандайдир қўшимча шарт бўлиши лозим. Агар цилиндрнинг қия текислик бўйича думалаши сирпанишсиз содир бўлаётган бўлса, у ҳолда бурчак тезланиш ва чизиқли тезланиш бир-бирлари билан (58.1) формуладан келиб чиқувчи ушбу тенглик орқали боғланган:

$$a = R_0\frac{d\omega}{dt}\cdot \tag{58.8}$$

(58.6), (58.7) ва (58.8) учта тенгламани ечсак, a тезланишни топамиз. Ҳақиқатдан ҳам, кейинги иккитасидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$F = \frac{aI}{R_0^2}; \tag{58.9}$$

буни биринчига қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$ma = P\sin\alpha - \frac{Ia}{R_0^2},$$

ёки

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m+\frac{I}{R_0^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{mR_0^2}}, \tag{58.10}$$

бунда g — оғирлик кучи тезланиши.

Бинобарин, a тезланиш фақат текисликнинг қиялик бурчагига ва I/mR_0^2 нисбатга боғлиқ. Бу нисбат қанча катта бўлса, тезланиш шунча кичик. a тезланиш $^1/_2 g\sin\alpha$ дан кичик бўлиши мумкин эмас, чунки ҳар қандай цилиндр учун ҳамавақт

$$I < mR_0^2.$$

Ҳақиқатдан ҳам, жуда юпқа деворли кавак цилиндр ҳолидагина

$$I \approx mR_0^2.$$

I/mR_0^2 нисбат цилиндр массасига эмас, балки фақат массанинг цилиндр ҳажми бўйича тақсимланишига боғлиқ.

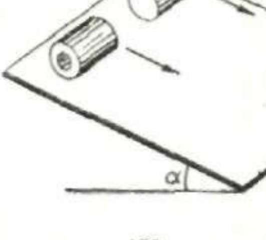
Бир жинсли цилиндр учун $I=1/2mR_0^2$, демак, бир жинсли цилиндрнинг қия текисликдан сирпанишсиз думалаш тезланиши фақат текисликнинг қиялик бурчагига боғлиқ бўлиб, у $^2/_3 g\sin\alpha$ га тенг.

Иккита цилиндр бир жинсли материалдан ясалган ва радиуслари бирдай: лекин улардан бири кавак, иккинчиси эса туташ (152-расм). Улардан қайси бири тезроқ думалаб тушади? Равшанки, кавак цилиндр учун I/mR_0^2 каттароқ, чунки уни ташкил этувчи зарралар ўқдан каттароқ масофада жойлашган (кейинроқ (59.4) ва (59.5) ларни қ.). Шунинг учун туташ цилиндрнинг тезланиши каттароқ ва у тезроқ думалаб тушади.

(58.9) ва (58.10) тенгламалардан ишқаланиш кучини ҳисоблаш мумкин, у қуйидагига тенг:

$$F = \frac{mg\sin\alpha}{I+\frac{mR_0^2}{2}}. \tag{58.11}$$

Ишқаланиш кучи ҳам қиялик бурчаги α га, оғирлик кучи $P=mg$



152- расм.

га ва $\frac{mR^2}{I}$ нисбатга боғлиқ. Ишқаланишсиз думаланиш бўлмайди.

Текисликнинг қиялик бурчаги орттирилганда думалаётган цилиндр ўқининг тезланиши $\sin\alpha$ га пропорционал равишда ўсади; у ҳамма вақт ўша қия текисликдан ишқаланишсиз сирпаниб тушаётган жисмнинг тезланиши $g\sin\alpha$ дан кичик, лекин шу тезланишнинг ярмидан катта бўлади. Думалаётган цилиндр сирпанаётган жисм каби тезланувчан ҳаракат қилса-да, унинг тезланиши кичикроқ бўлади; цилиндрнинг «инерция»си айланиш туфайли гўё ортиб, «инерция»нинг бу ортиши I/mR_0^2 нисбатга боғлиқ.

Айтилганларнинг барчаси цилиндрнинг сирпанишсиз думалашига тааллуқлидир. Цилиндрнинг сирпанишли думаланишини ҳам қараб *чиқиш мумкин. Агар думаланишдаги ишқаланиш кучи, тинчлик* ишқаланиш кучи каби μN га тенг бўлган максимал қийматга эга десак, буни бажариш осон, бунда μ — коэффициент, N — цилиндрнинг текисликка нормал босим кучи. У ҳолда, агар ишқаланиш кучи

$$F < \mu N \tag{58.12}$$

бўлсагина, сирпанишсиз думаланиш мавжуд бўлади ёки (58.11) ва (58.4) ларни ҳисобга олсак, ушбуни топамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha < \mu\left(1 + \frac{mR_0^2}{I}\right), \tag{58.13}$$

яъни қиялик бурчаги муайян қийматдан кичик бўлиши лозим. Текисликнинг қиялик бурчаги тангенси

$$\mu\left(1 + \frac{mR_0^2}{I}\right) \tag{58.14}$$

катталикдан ортиқ бўлгандагина думалаш сирпанишли бўлади. Бу ҳолда цилиндр ўқининг тезланиши катталиги қуйидагига тенг бўлади:

$$a = \frac{1}{m}(P\sin\alpha - \mu N) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \tag{58.15}$$

Максвелл маятниги. Ўққа зич ўрнатилган кичик диск (маховикча) унинг ўқига ўралган иккита ипда оғирлик кучи таъсирида тушади (153- расм). *Пастга ҳаракат вақтида иплар тўла узунлигигача очилади, айланишга келган* маховикча ўша йўналишда айланма ҳаракатини давом эттириб, ипни ўққа ўрайди, натижада ўз айланишини секинлаштирган ҳолда у юқорига кўтарилади. Юқориги нуқтага етгандан кейин диск яна пастга туша бошлайди ва ҳоказо. Маховикча юқорига ва пастга тебрана бошлайди; шу сабабли бундай қурилмани маятник дейилади.

Маховикчанинг ҳаракат тенгламасини тузайлик. Айтайлик, P — оғирлик кучи, f — битта ипнинг таранглик кучи, R — валикнинг радиуси, I — маховикчанинг инерция моменти бўлсин; у ҳолда илгариланма ҳаракат учун тенглама қуйидагича бўлади:

$$P - 2f = ma, \tag{58.16}$$

бунда a— массалар марказининг тезланиши; айланма ҳаракат учун эса тенглама қуйидагича бўлади:

$$2fR = I\frac{d\omega}{dt}, \tag{58.17}$$

бунда ω — дискнинг айланиш бурчак тезлиги. Массалар марказининг v тезлиги ёки маховикча ўқининг тезлиги ҳамда дискнинг ω айланиш тезлиги $v = \omega R$ шарт орқали боғланган; бинобарин, уларнинг тезланишлари қуйидагича муносабатда бўлади:

$$a = R\frac{d\omega}{dt}. \tag{58.18}$$

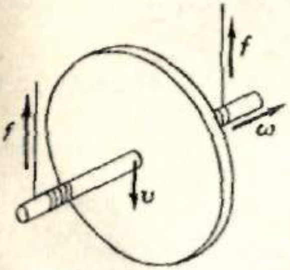
(58.15), (58.16) ва (58.17) тенгламаларни учта номаълумга нисбатан ечиб, массалар марказининг тезланиши

$$a = \frac{P}{m + \frac{I}{R^2}} \tag{58.19}$$

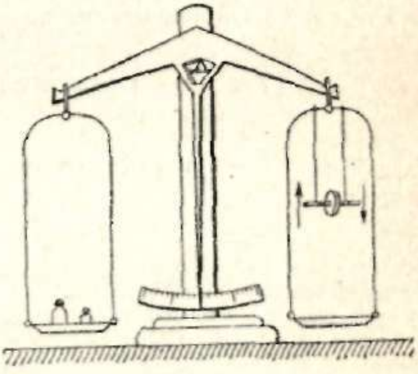
ва ипнинг таранглик кучини топамиз:

$$f = \frac{P}{2}\,\frac{I}{I + mR^2}\ . \tag{58.20}$$

Тезланиш ва таранглик кучи маховикча қайси томонга, юқорига ҳаракатланаётиптими, пастга ҳаракатланаётиптими, бунга тамомила боғлиқ эмаслигини таъкидлаб ўтамиз. *Маятникнинг тебранишларида тезлик ўз ишорасини ўзгартиради*, тезланиш эса *кучлар ўз ишораларини ўзгартирмагани сабабли ишорасини ўзгартирмайди.*



153- расм.



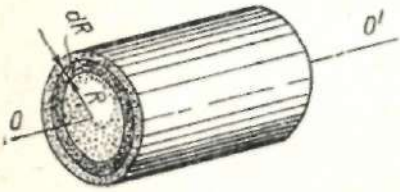
154- расм.

Юқорига ва пастга ҳаракат вақтида ипнинг таранглик кучи бирдай қолишини *маятник ипларини торозига бириктирилса, осон кўрсатиш мумкин* (154- расм). Тарози арретирини маятникнинг тушиш ёки кўтарилиш пайтларида бўшатиш билан маятникнинг «оғирлиги» маховикчанинг ҳаракати йўналишига боғлиқ эмаслигига ишонч ҳосил қиламиз. *Равшанки, ушбу ҳолда маятникнинг* оғирлиги $2f$ га — ипларнинг таранглигига тенг.

Тарози арретирини ҳамма вақт бўшатиб қўйиш ярамайди, чунки пастда маятникнинг ҳаракати йўналиши ўзгараётганда содир бўлувчи зарба тарозини бузиши мумкин.

59-§. Баъзи жисмларнинг инерция моментлари. Гюйгенс—Штейнер теоремаси

1) *Бир жинсли цилиндр, кавак цилиндр ва бошқаларнинг геометрик ўқларига нисбатан инерция моментлари.* Бу жисмлардан исталган бирини зарралари ўқдан бирдай масофада жойлашган юпқа цилиндрик қатламларга фикран ажратиш мумкин. Радиуси R_0 бўлган цилиндрни қалинлиги dR бўлган концентрик қатламларга ажратамиз (155-расм). Бирор қатламнинг радиуси R бўлсин; у ҳолда шу қатламдаги зарраларнинг массаси қуйидагига тенг:



155-расм.

$$dm = 2\pi Rh\rho dR, \qquad (59.1)$$

бунда h — цилиндрнинг баландлиги, ρ — цилиндр моддасининг зичлиги. Қатламнинг барча зарралари ўқдан R масофада жойлашган, бинобарин, бу қатламнинг инерция моменти

$$dI = dmR^2 = 2\pi\rho hR^3dR. \qquad (59.2)$$

Бутун цилиндр шундай қатламларга ажратилган деб тасаввур қилайлик; у ҳолда бутун цилиндрнинг инерция моменти чексиз кичик моментларнинг йиғиндисига тенг ёки бутун цилиндрнинг инерция моменти

$$I = \int dI = \int R^2dm = 2\pi\rho h \int\limits_0^{R_0} R^3dR = 2\pi\rho h\,\frac{R_0^4}{4}. \qquad (59.3)$$

Цилиндрнинг массаси $m = \pi R^2{}_0 h\rho$ эканлигини эсласак, (59.3) ни шундай ёзиш мумкин:

$$I = \frac{1}{2}\,mR^2{}_0. \qquad (59.4)$$

Туташ бир жинсли цилиндрнинг инерция моменти унинг массаси билан унинг *радиуси квадрати ярмининг кўпайтмасига тенг.*

Ички радиуси R_1, ташқи радиуси R_0 бўлган кавак цилиндрнинг инерция моментини фақат интегралда бошқа чегаралар қўйиш билан (59.3) формула асосида осон ҳисоблаш мумкин, яъни

$$I = 2\pi\rho h \int\limits_{R_1}^{R_2} R^3dR = 2\pi\rho h\left(\frac{R_0^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right). \qquad (59.5)$$

Кавак цилиндрнинг массаси $m = \pi\rho(R_0^2 - R_1^2)h$ эканлигини назарга олиб, унинг инерция моментини шундай ёзамиз:

$$I = \frac{1}{2}\,m(R_0^2 + R_1^2). \qquad (59.6)$$

Шундай содда йўл билан кавак цилиндрлар, ҳалқалар, дисклар мажмуасига ажратиш мумкин бўлган исталган жисмнинг инерция моментини ҳисоблаш мумкин.

2) **Айланиш жисмининг инерция моменти.** Айланиш жисми деб, *сирти бирор ясси эгри чизиқнинг ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган жисмни* айтилади, бу эгри чизиқни эса ясовчи дейилади. OO' ўқ билан бир текисликда ётувчи (156-расм) ва учлари билан ўққа таянувчи бирор $f(h)$ эгри чизиқ шу ўқ атрофида айланади ҳамда бу билан бирор бир жинсли жисмнинг сиртини ҳосил қилади деб тасаввур қилайлик. Агар $f(h)$ боғланиш ва модданинг зичлиги ρ бизга маълум бўлса, жисмнинг инерция моменти қандай бўлади? Жисмни баландликлари dh бўлган чексиз юпқа дискларга ажратайлик. У ҳолда бундай дискнинг инерция моменти қуйидагига тенг бўлади:

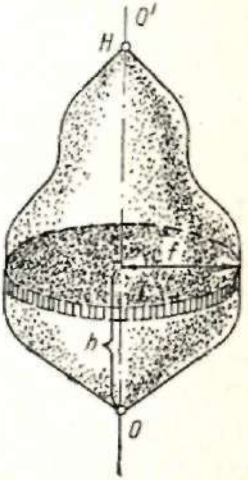
$$dI = \frac{1}{2} dmf^2 = \frac{1}{2}\pi\rho f^4 dh. \qquad (59.7)$$

Демак, бутун жисмнинг инерция моменти қуйидагига тенг

$$I = \frac{1}{2}\int dmf^2 = \frac{\pi}{2}\rho\int_0^H f^4 dh. \qquad (59.8)$$

Агар бизга h нинг функцияси сифатида f маълум бўлса, биз ҳамма вақт айланиш жисмининг инерция моментини ҳисоблай оламиз.

Конус ва шарнинг инерция моменти. Баландлиги H бўлган конус учун $f = \frac{R_0}{H}h$ (157-*а* расм). Бу ифодани (59.8) формулага қўйсак, конуснинг инерция моментини топамиз:



156-расм.

$$I = \frac{\pi}{2}\rho\left(\frac{R_0}{H}\right)^4\int_0^H h^4 dh = \frac{\pi}{2}\rho\left(\frac{R_0}{H}\right)^4\frac{H^5}{5}. \qquad (59.9)$$

Агар конуснинг ҳажми $\frac{\pi R_0^2 H}{3}$ га тенглигини эсласак, у ҳолда (59.9) формулани бундай ёзса бўлади:

$$I = \frac{3}{10} mR_0^2, \qquad (59.10)$$

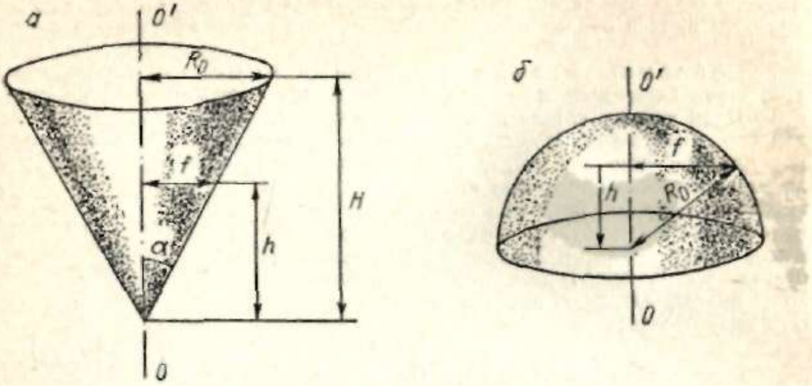
бунда m — конус массаси.

Шундай йўл билан шарнинг инерция моментини ҳисоблаш мумкин. Аввал айланиш ўқига тик кесилган шар ярмининг инерция моментини аниқлаш қулайрокдир. У ҳолда $f^2 + h^2 = R_0^2$ (157-б расм).

Бундан

$$f^2 = R_0^2 - h^2. \qquad (59.11)$$

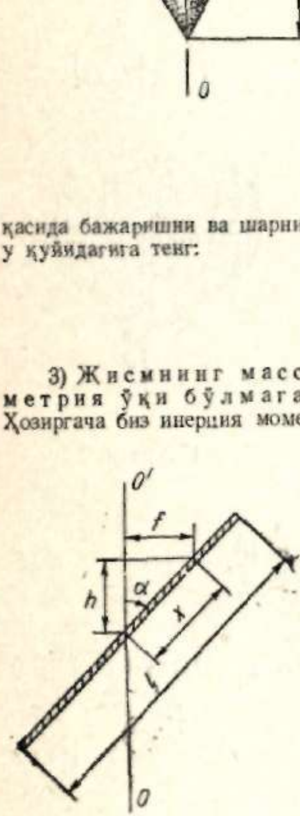
Бу ифодани (59. 8) формулага қўйиб ва h бўйича 0 дан R_0 гача интеграллаб шар ярмининг инерция моментини ҳосил қиламиз. Ўқувчига буни машқ тари-



157- расм.

қасида бажаришни ва шарнинг инерция моментини ҳисоблашни тавсия қиламиз; у қуйидагига тенг:

$$I = \frac{2}{5} mR_0^2, \tag{59.12}$$



158- расм.

3) **Жисмнинг массалар марказидан ўтувчи, лекин симметрия ўқи бўлмаган ўққа нисбатан инерция моменти.** Ҳозиргача биз инерция моментини симметрия ўқига нисбатан ҳисоблар эдик, инерция моментини массалар марказидан ўтувчи ихтиёрий ўққа нисбатан ҳисоблаш анча мураккаб масалани ташкил этади. Шунинг учун аввал энг содда мисолни қарайлик: узунлиги l ва массаси m бўлган ингичка бир жинсли таёқчанинг таёқча йўналиши билан α бурчак ҳосил қилувчи ва унинг массалари марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаймиз (158- расм) Таёқчанинг ўртасидан узунлиги dx бўлган бирор заррагача масофани x орқали белгилаймиз. Зарранинг массаси $dm = \frac{m}{l} dx$ ҳамда у ўқдан f масофада жойлашган, $f = x \sin\alpha$. Унинг инерция моменти қуйидагига тенг:

$$dI = dmf^2 = \frac{m}{l} dx\ x^2 \sin^2\alpha,$$

бутун таёқчанинг инерция моменти эса

$$I = 2 \int_0^{l/2} dmf^2 = \frac{2m}{l} \sin^2\alpha \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2\alpha. \tag{59.13}$$

Равшанки, агар таёқча айланиш ўқига тик бўлса, у ҳолда

$$I = \frac{1}{12} ml^2. \tag{59.14}$$

Бунда инерция моментини ҳисоблашда биз таёқчани жуда ингичка деб қарадик; бу математика жиҳатдан таёқчанинг кесим юзи диаметри чексиз кичик катталикни ташкил этади демакдир, одатдаги тақрибий ҳисоблашларда эса таёқчанинг диаметри унинг узунлигига нисбатан ғоят кичик деб оламиз.

Юпқа дискнинг диск текислигида ётувчи ўққа нисбатан инерция моменти. Таёқча учун топилган натижани дискнинг инерция моментини ҳисоблашда қўллаш мумкин. Радиуси R_0 бўлган дискни ўққа тик бўлган ингичка «таёқча»ларга ажратамиз; марказдан h масофада жойлашган, кенглиги dh бўлган «таёқча» нинг массаси ушбуга тенг:

$$dm = \frac{2m\sqrt{R_0^2 - h^2}}{\pi R_0^2} dh,$$

унинг инерция моменти (59.14) формулага кўра

$$dI = \frac{2}{12} \frac{m\sqrt{R_0^2 - h^2}}{\pi R_0^2} \cdot 4(R_0^2 - h^2) dh.$$

Демак, бутун дискнинг инерция моменти қуйидагига тенг бўлади[1]

$$I = \frac{4}{3} \frac{m}{\pi R^2_0} \int_0^{R_0} (R_0^2 - h^2)^{3/2} dh = \frac{1}{4} mR_0^2. \tag{59.15}$$

4) **Жисмнинг массалар марказидан ўтмайдиган ўққа нисбатан инерция моменти.** Агар биз бирор усул билан жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини аниқласак, у ҳолда унга параллел исталган ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш жуда осон бўлади. Айтайлик, массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция момент I_0 бўлса, у ҳолда параллел ўққа нисбатан инерция момент

$$I = I_0 + ma^2, \tag{59.16}$$

бунда m — жисм массаси, a — ўқлар орасидаги масофа. Бу Гюйгенс — Штейнер теоремасидир, уни исботлаймиз.

OO' тўғри чизиқни тўғри бурчакли координаталар системасининг z ўқи деб оламиз ҳамда (x, y) текисликни жисмнинг массалар марказидан ўтказамиз, шунинг билан бирга, координаталар боши массалар марказига мос тушади (159- a расм). Бошқа $O''O'''$ ўқ (x_0, y_0) нуқтадан ўтади. Агар ўқлар орасидаги масофа a бўлса, у ҳолда

$$a^2 = x^2_0 + y^2_0. \tag{59.17}$$

Айтайлик, жисмнинг Δm_i массали зарраси x_i ва y_i координаталарга эга бўлсин;

---

[1] Интегрални ҳисоблашда $R_0 \sin\alpha = h$ алмаштиришдан фойдаланиш ҳамда $\int_0^{\pi/2} \cos^4\alpha d\alpha = \frac{3}{16}\pi$ эканлигини назарга олиш лозим.

унда жисмнинг инерция марказидан ўтувчи OO' ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

$$I_0 = \sum_i \Delta m_i (x^2{}_i + y^2{}_i). \tag{59.18}$$

Иккинчи $O''O''$ ўқдан i- заррагача масофанинг квадрати қуйидагига тенг:

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2,$$

шунинг учун жисмнинг иккинчи ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагича ёзилади:

$$I = \sum_i \Delta m_i [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2].$$

Қавсларни очамиз ва йиғишни бажарамиз, у ҳолда

$$I = (x_0^2 + y_0^2 \sum_i \Delta m_i + \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \underline{- 2x_0 \sum \Delta m_i x_i -}$$

$$\underline{-2y_0 \sum \Delta m_i y_i}. \tag{59.19}$$

(59.17) ва (59.18) формулаларни, шунингдек, (59.19) тенгликнинг тагига чизилган ҳадларининг массалар маркази формулалари (55.1) га кўра нолга тенглигини назарга олсак, изланаётган (59.16) ифодани ҳосил қиламиз.

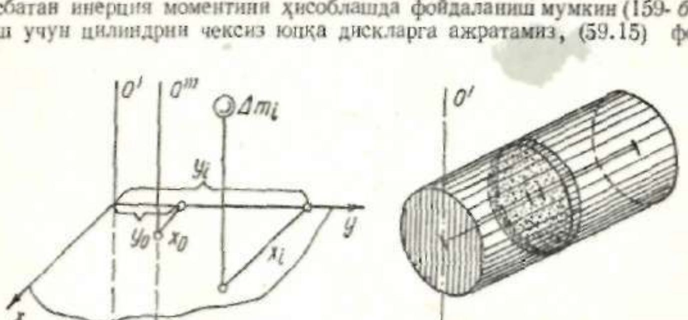
Шундай қилиб, жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаш етарлидир. Уни билган ҳолда, (59.16) формула асосида жисмнинг ҳар қандай параллел ўққа нисбатан инерция моментини осон топиш мумкин.

Шу қоида асосида цилиндрнинг унинг ясовчиси бўйича ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини осонликча аниқлаш мумкин.

(59.4) ва (59.16) формулаларни ҳисобга олиб, шу инерция моментини топайлик:

$$I = \frac{1}{2}\ mR_0^2 + mR_0^2\ = \frac{3}{2}\ mR_0^2. \tag{59.20}$$

Шунингдек, (59.16) формуладан цилиндрнинг унинг ўқига тик бўлган OO' ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблашда фойдаланиш мумкин (159- *б* расм). Ҳисоблаш учун цилиндрни чексиз юпқа дискларга ажратамиз, (59.15) формула



159- расм.

бўйича ҳар бир дискнинг унинг текислигида ётувчи ва *OO′* га параллел ўққа нисбатан моментини аниқлаймиз, сўнгра, дискнинг *OO′* ўққача масофасини билган ҳолда (59.16) бўйича шу дискнинг ўша ўққа нисбатан моментини топамиз. Цилиндрни ташкил этувчи барча дискларнинг моментларини йиғиб, унинг *OO′* ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаймиз. Ўқувчига машқ тариқасида ушбу ҳисоблашларни бажариш тавсия қилинади.

60-§. Илгариланма ва айланма ҳаракат қилаётган жисмнинг кинетик энергияси

Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси жисм алоҳида зарралари кинетик энергияларининг йиғиндисидан иборат бўлади. Жисмнинг Δm_i массали заррасининг кинетик энергияси қуйидагига тенг:

$$\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}.$$

Зарранинг $\boldsymbol{v}_i$ чизиқли тезлигини ҳамма вақт иккита тезликнинг: массалар марказининг $\boldsymbol{v}_0$ тезлиги ва массалар маркази билан доимий боғланган ва у билан бирга илгариланма ҳаракат қилувчи координаталар системасига нисбатан $\boldsymbol{u}_i$ ҳаракат тезлиги йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}_i, \tag{60.1}$$

у ҳолда бутун жисмнинг кинетик энергияси

$$E_{\text{қин.}} = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}_i)^2 = \frac{v_0^2}{2}\sum_i \Delta m_i +$$

$$+\boldsymbol{v}_0 \sum \Delta m_i \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\sum \Delta m_i u_i^2,$$

ёки

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i = 0 \text{ бўлганидан (56-§ га қ.),}$$

$$E_{\text{кин.}} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i u_i^2. \tag{60.2}$$

Бу асосий қоида қаттиқ жисмнинг, фақат қаттиқ жисмнинггина эмас, балки *жисмларнинг исталган системасининг* ҳар қандай ҳаракати учун ўринлидир.

Демак, жисмнинг кинетик энергияси икки қисмдан: илгариланма ҳаракат кинетик энергияси $\left(\frac{mv_0^2}{2}\right)$ дан ва массалар маркази билан ҳаракатланаётган саноқ системасига нисбатан ҳаракатнинг кинетик энергияси $(\sum_i \Delta m_i u_i^2)$ дан ташкил топади.

Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай ясси ҳаракатини иккита ҳаракатдан: массалар маркази билан илгариланма ва массалар марказидан ўтувчи ҳамда фазода доимий йўналишга эга бўлган ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат, дейиш мумкин. Шу сабабли массалар марказига нисбатан ҳаракатнинг кинетик энергияси жисмнинг ўқ атрофида айланиш энергиясидан иборат.

(54.2) бўйича маълумки, жисмнинг ω бурчак тезлик билан айланиш кинетик энергияси ушбуга тенг:

$$\frac{I\omega^2}{2}, \tag{60.3}$$

бунда $I = \sum\limits_i \Delta m_i r_i^2$ — жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти.

Хуллас, тўла кинетик энергия қуйидагига тенг:

$$E_{\text{кин.}} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{60.4}$$

ёки исталган ясси ҳаракат бажарувчи жисмнинг кинетик энергияси илгариланма ҳаракатдаги $\frac{mv_0^2}{2}$ ва айланма ҳаракатдаги $\frac{I\omega^2}{2}$ кинетик энергиялардан йиғилади.

Энергиянинг сақланиш қонунини татбиқ қилиш масалани ечишнинг оддий йўлини берадиган ҳолга мисол қарайлик.

Бирдай m массали ва бирдай R радиусли цилиндр қия текисликдан сирпанишсиз думалаб тушмоқда, $v = \omega R$ (152- расмга қ.) Агар цилиндрларнинг инерция моментлари турлича, бироқ улар бир вақтда ва бирдай H баландликдан қўйиб юборилган бўлса, улардан қайси бири горизонталга олдин етиб келади? Цилиндрлар горизонталга етиб келганларида уларнинг кинетик энергиялари бирдай бўлади, у PH потенциал инергияга тенг бўлади, бунда $P = mg$ — цилиндрнинг оғирлик кучи. Демак (60.4) формулага кўра, ҳар бир цилиндр учун ушбуни ёзиш мумкин:

$$PH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}, \tag{60.5}$$

бунда v_1, v_2, ω_1, ω_2 — катталиклар H баландликдан думалаб тушишдаги тезликлар ва I_1, I_2 — цилиндрларнинг инерция моментлари. Сирпаниш йўқлигини ҳисобга олинса, $v_1 = \omega_1 R$, $v_2 = \omega_2 R$, (60.5) тенгликни шундай ёзиш мумкин:

$$v_1^2\left(m + \frac{I_1}{R^2}\right) = v_2^2\left(m + \frac{I_2}{R^2}\right) \tag{60.6}$$

Бундан равшанки, кичик инерция моментли цилиндр эртароқ думалаб тушади.

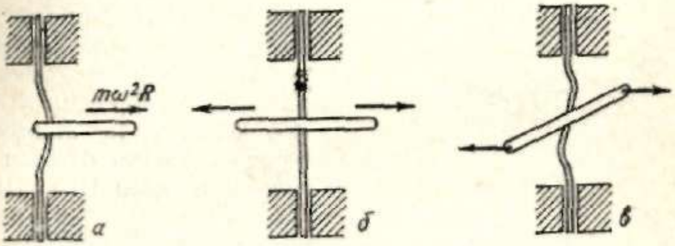
Энергиянинг сақланиш қонуни (60.5) цилиндрнинг қия текисликдан сирпанишсиз думалашида цилиндрнинг думалаб тушиш баландлиги билан думалаш тезлиги орасида, худди жисмларнинг эркин тушиш ҳолларидагидек, бир қийматли боғланиш ўрнатиш имконини беради.

61-§. Эркин айланиш ўқлари

Агар жисмнинг айланиш ўқи жисмнинг массалари марказидан ўтмаса, марказдан қочма инерция кучлари ўққа босим берадилар. Масалан, агар таёқчани унинг учи яқинидан ўтувчи ўқ атрофида айлантирилса (160-*а* расм), у ҳолда

$$m\omega^2R$$

бўлган марказдан қочма кучлар (бунда m — таёқча массаси, R таёқча массалари марказидан ўққача масофа) ўқни эгади. Агар айланиш ўқи таёқчанинг массалари марказидан ўтса, бундай кучларнинг бўлмаслиги тамомила аёндир (160-*б* расм); бу ҳолда таёқчанинг бир томонига таъсир этувчи марказдан қочма кучлар таёқчанинг иккинчи ярмига таъсир этувчи марказдан қочма кучлар билан мувозанатланади. Агар айланиш ўқи массалар марказидан ўтгани ҳолда, таёқча ўққа шундай бириктирилган бўлсаки, у айланиш ўқи билан ўткир бурчак ҳосил қилса (160-*в* расм), бунда натижавий инерция кучлари жуфт кучлар ҳосил қилиб, у ўқни эгади. Бу ҳолда ўққа жуфт кучлар моменти таъсир қилади.



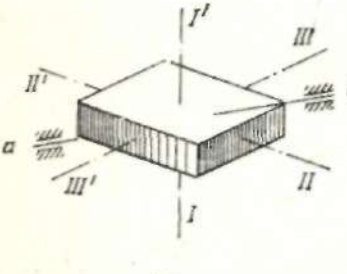
160- расм.

Демак, ўқ массалар марказидан ўтиб, инерция кучларининг ўққа тик бўлган исталган йўналишга нисбатан моменти нолга тенг бўлсагина, айланаётган жисмнинг ўққа таъсири нолга тенг бўлади.

Жисм симметрияга эга бўлган ҳолларда бундай йўналишларни кўрсатиб бериш осон. Масалан, бир жинсли моддадан ясалган, шакли гугурт қутисига ўхшаш тўғри бурчакли параллелепипед учта ўзаро тик ўққа эга бўлиб, улар параллел томонларнинг марказидан ўтади (161-расм). Агар жисм шу кўрсатилган ўқлардан бири атрофида айланса, у ҳолда айланиш шу ўқни тутиб турувчи таянчларга ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди ва шунинг учун бундай ўқларни эркин ўқлар ёки *эркин айланиш ўқлари* дейилади.

Ҳақиқатдан ҳам, эркин жисмга шундай ўқлардан бири бўйича айланиш имконини берсак, у ҳолда ташқи кучлар бўлмаганда, бу айланиш исталганча узоқ давом этади. Аксинча, жисмни эркин ўққа мос тушмайдиган бирор ўқ атрофида айлантириб юборсак, масалан, агар параллелепипедни 161-расмда кўрсатилган *аб* қия ўқ атрофида айлантириб юборсак, у ҳолда ўз ихтиёрига қўйилган жисм бу ўқ атрофида соф айланиш бажармайди, жисмнинг ҳаракати энди мураккаб бўлади.

Параллелепипеднинг энг катта томонидан ўтувчи $I - I'$ ўқ (161-расмга қ.) энг катта инерция моментига, II — II′ ўқ эса энг кичигига мос келади. 64-§ да ҳар қандай жисм учун массалар марказидан ўтувчи учта эркин ўзаро тик эркин айланиш ўқи мавжудлиги кўрсатилади. Умумий назарияда инерция моментининг катталиги жиҳатдан ўртачасига мос келувчи ўқ атрофида айланиш нотурғун бўлиши кўрсатилади; масалан III — III′ ўқ атрофида айланиш (161-расмга қ.) нотурғундир.



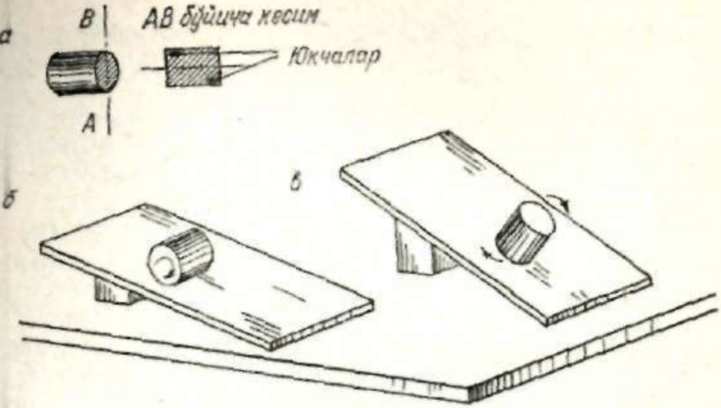
161-расм.

162-расм.

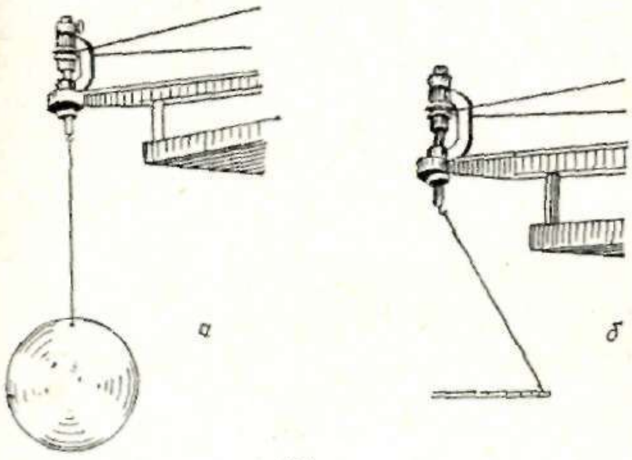
Энг катта (ва энг кичик) инерция моментли ўқ атрофида ҳаракатнинг турғунлигини бўш гугурт кутичасини айлантириб ташлаш орқали осон кўрсатиш мумкин (162-расм). Қутича I—I′ ва II — II′ ўқларга нисбатан айлантириб ташланганда (161-расмга қ.) турғун айланади. Учинчи III — III′ эркин ўққа нисбатан айлантириб ташланганда қутича унинг атрофида аниқ *айланмайди, ҳаракат иккига олдинги* ҳолларда кузатиш мумкин бўлганидек, ясси ҳаракат бўлмайди.

«Думбалоқ ошувчи цилиндр» мисолида эркин айланиш ўқлари ролини содда ва кўргазмали қилиб намойиш қилиш мумкин. Енгил моддадан, масалан, пенопластдан цилиндр ясалади (163-*а* расм). Цилиндрнинг асос кесими орқали расмда кўрсатилгандек иккита бирдай қўрғошин юкчаларни киритиб, устидан ёпиб қўйилади. Массалар маркази цилиндр ўқида жойлашган бўлса-да, унинг ўқи эркин айланиш ўқи бўла олмайди. Цилиндрни қия текисликдан думалатиб туширилади. Қиялик унча катта бўлмаганда, цилиндр одатдаги бир жинсли цилиндр каби думалайди (163-*б* расм). Уни катта қияликли текисликдан думалатишга уринсак, айланиш тезлиги ортиши билан цилиндр норегуляр ҳаракатлана бошлайди, сакрайди ва «думбалоқ ошади» (163-*в* расм).

Турли жисмларнинг эркин ўқлар атрофида айланишининг турғунлигини қуйидагича кўрсатиш ҳам мумкин: бирор жисмни, масалан, металл дискни ип билан марказдан қочма машинанинг шпинделига боғланади (164-*а* расм) ва унда тез айлантирилади (164-*б* расм). Айланиш тезлиги орттирилганда жисм бир оз тебраниб, сўнг жисмнинг айланиш ўқини ўзгартиришга интилувчи оғирлик кучининг таъсирига қарамай, турғун айланиш эркин ўқи атрофида айланади. Энди, агар машинани тўхтатсак ва ипни шпиндель илгагидан олсак, жисм турғун айланиш ўқи атрофида айланишда давом этади.



163- расм.

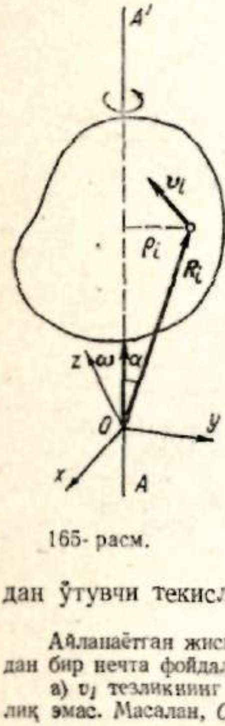


164- расм.

62-§. Қаттиқ жисм ҳаракатининг кинематикаси

Қаттиқ жисмга кучлар массалар марказига қўйилмаган умумий ҳолда ҳаракат мураккаб бўлиб қолади; буни жисмнинг эркин айланиш ўқига мос тушмайдиган ихтиёрий ўқ атрофида айланишига қараб сезиш мумкин. Жисмнинг массалар марказидан ўтувчи кучлар таъсиридаги ҳаракати қонуни моддий нуқтанинг ҳаракат қонуни каби соддадир. Жисмнинг барча нуқталари бирдай тезланишга эга бўлади ва жисм фазода илгариланма ҳаракатланади; шу сабабдан жисм билан боғланган ҳар қандай чизиқ фазода йўналишини доимий сақлайди. Демак, жисм ҳаракатини иккига: массалар марказининг ҳаракати билан боғлиқ бўлган илгариланма ҳаракатга ва массалар марказидан ўтувчи бирор ўққа нисбатан айланишга ажратиш мумкин Умумий ҳолда бу ўқ ўзининг жисмдаги ҳолатини ва фазодаги йўналишини ўзгартиради.

Биз бу ерда қаттиқ жисм кинематикасининг мураккаб қонунларини умумий кўринишда баён қилмасдан, келгусида муҳим бўлган, жисмнинг битта нуқтаси ҳаракатсиз қоладиган баъзи мисолларни қараймиз.



165- расм.

Аввало, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги ҳаракатини қараш а жисмнинг турли нуқталарининг тезликларини қуйидаги тарзда ёзиш қулайлигини қайд қилиб ўтамиз. AA' айланиш ўқида қўзғалмас координаталар системаси ($Oxyz$) нинг боши сифатида тасаввур қилиш мумкин бўлган бирор O нуқтани танлайлик; у ҳолда жисмнинг ҳар бир нуқтасининг вазияти муайян пайтда $\boldsymbol{R}_i$ радиус-вектор билан белгиланади (165-расм). i-нуқтанинг тезлигини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{v}_i = [\omega R_i], \tag{62.1}$$

бунда бурчак тезлик вектори $\boldsymbol{\omega}$ *ўқ бўйича ўнг* винт қоидасига кўра йўналган. Ҳақиқатдан ҳам нуқтадан ўққача масофа $\rho_i = R_i \sin\alpha$, ҳамда (62.1) формула нуқтанинг $\boldsymbol{v}_i$ тезлигининг тўғри йўналишини ва катталигини беради. Аёнки, ҳар қандай нуқтанинг тезлиги $\boldsymbol{\omega}$ ва R_i лардан ўтувчи текисликка нормал йўналган ҳамда $\omega\rho_i$ катталикка эга.

Айланаётган жисм нуқталари $\boldsymbol{v}_i$ тезлигининг ҳозиргина келтирилган таърифидан бир нечта фойдали хулосалар чиқарайлик.

а) $\boldsymbol{v}_i$ тезликнинг катталиги ва йўналиши O нуқтанинг ўқдаги ҳолатига боғлиқ эмас. Масалан, O' нуқта учун (166- *а* расм)

$$\boldsymbol{v}_i = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i'] = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i] \text{ ва } v_i = \omega\rho_i.$$

б) $\boldsymbol{\omega}$ — вектор катталик, шунинг учун уни ҳамма вақт ω_1 ва ω_2 иккита векторга ажратиш ҳамда AA' ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланишни бир вақтда OC ва OE иккита ўқ атрофида тегишлича ω_1 ва ω_2 бурчак тезликлар билан айланишлар сифатида тасаввур қилиш мумкин (166- *б* расм). Ҳақиқатдан ҳам, агар $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ бўлса, у ҳолда

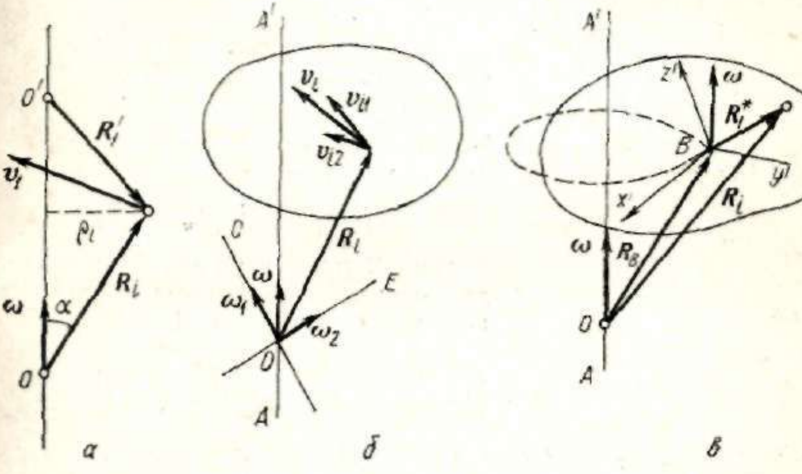
$$\boldsymbol{v}_i = [\omega \boldsymbol{R}_i] = [\omega_1 \boldsymbol{R}_i] + [\omega_2 \boldsymbol{R}_i] = \boldsymbol{v}_{i1} + \boldsymbol{v}_{i2},$$

бунда $\boldsymbol{v}_{i1} = [\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{R}_i]$ лар OC ўқ атрофида айланиш тезликлари, $\boldsymbol{v}_{i2} = [\boldsymbol{\omega}_2 \boldsymbol{R}_i]$ лар эса, OE ўқ атрофида айланиш тезликлари.

в) Баъзида жисмнинг AA' ўқ атрофида айланишини қуйидагича тасвирлаш қулай: жисмнинг бирор (умуман айтганда, ҳар қандай) B нуқтаси билан *илгариланма* (айлана бўйича!) ҳаракатланаётган ($Bx'y'z'$) саноқ система боғланган бўлиб, жисм шу саноқ системага нисбатан B дан ўтувчи ўқ атрофида $\boldsymbol{\omega}$

бурчак тезлик билан айланади (166- *в* расм). Ҳақиқатдан ҳам, $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{R}_i^*$ эканлигини назарга олиб, (62. 1) формуладан қуйидагини топамиз:

$$\boldsymbol{v}_i = [\boldsymbol{\omega}_i \boldsymbol{R}_i] = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_B] + [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i^*] = \boldsymbol{v}_B + [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i^*],$$

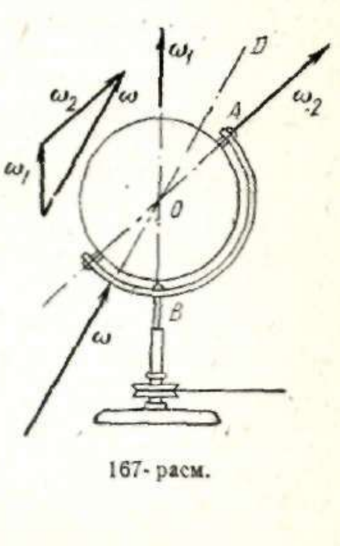


а *б* *в*

166- расм.

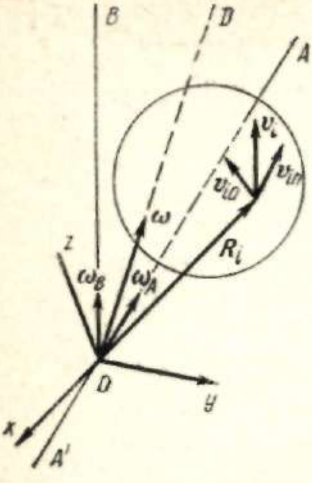
бунда $\boldsymbol{v}_B = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_B]$; бошқача айтганда, *жисм ҳар бир* нуқтасининг тезлиги *B* нуқтанинг ҳаракат тезлигидан ва жисмнинг *B* нуқтадан *AA'* га параллел ўтувчи ўққа нисбатан **ω** бурчак тезликда айланиши билан боғлиқ бўлган тезликдан ташкил топади.

Энди қаттиқ жисмнинг янада мураккаброқ ҳаракатини қараймиз (167-расм). Жисм билан боғланган *OA* ўқнинг ўзи бошқа бир қўзғалмас *OB* ўқ атрофида айланади, яъни бу ҳолни марказдан қочма машина шпинделига ўрнатилган глобус ҳаракатига ўхшатиш мумкин.



167- расм.

Умуман, айтайлик, жисм ўзининг доимий *OA* ўқи атрофида $\boldsymbol{\omega}_A$ бурчак тезлик билан, *OA* ўқ эса ўз навбатида *OB* қўзғалмас ўқ атрофида $\boldsymbol{\omega}_B$ бурчак тезлик билан айлансин (168-расм). Жисмнинг мураккаб ҳаракати иккита содда ҳаракатдан: қўзғалмас ($\boldsymbol{\omega}_B = 0$ да) *OA* ўқ атрофида айла-



168- расм.

нишдан ҳамда OA ўққа нисбатан айланиш бўлмаганда ($\boldsymbol{\omega}_A = 0$ да) OB ўқ атрофида айланишдан иборат. Жисмнинг бир вақтда OA ва OB ўқларда айланишида $\boldsymbol{R}_i$ радиус-векторнинг учида жойлашган i-нуқтанинг $\boldsymbol{v}_i$ натижавий тезлигини иккита тезликнинг йиғиндисидан: нуқта $\boldsymbol{\omega}_B = 0$ да эга буладиган $\boldsymbol{v}_{io}$ билан $\boldsymbol{\omega}_A = 0$ да эга бўладиган $\boldsymbol{v}_{in}$ нинг йиғиндисидан иборат дейиш мумкин бўлгин. У ҳолда

$$\boldsymbol{v}_{i0} = [\boldsymbol{\omega}_A \boldsymbol{R}_i[, \ \boldsymbol{v}_{in} = [\boldsymbol{\omega}_B \boldsymbol{R}_i]$$

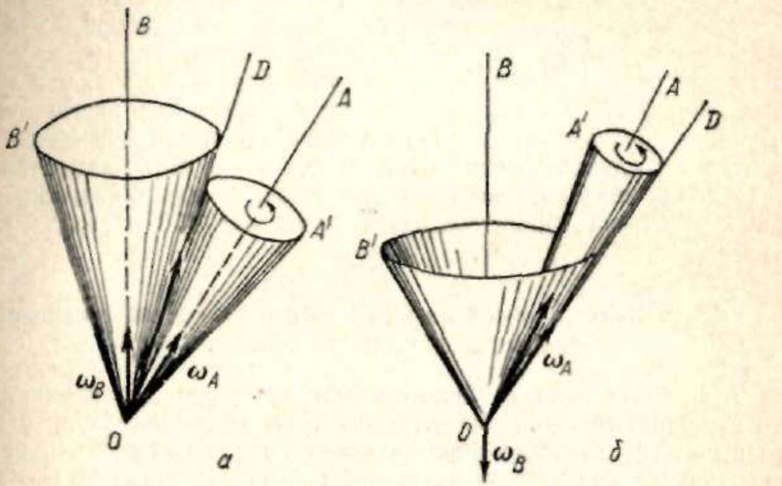
бўлади. Шунинг учун мураккаб ҳаракатда жисмнинг i-нуқтасининг тезлиги қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i0} + \boldsymbol{v}_{in} = [\boldsymbol{\omega}_A \boldsymbol{R}_i] + [\boldsymbol{\omega}_B \boldsymbol{R}_i] = [(\boldsymbol{\omega}_A + \\ + \boldsymbol{\omega}_B)\boldsymbol{R}_i] = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i], \qquad (62.2)$$

бунда $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B$ — бурчак тезликларнинг геометрик йиғиндиси. $\boldsymbol{\omega}_B$ вектор ўз ҳолатини доимий сақлайди, у қўзғалмас OB ўқ бўйича йўналган. $\boldsymbol{\omega}_A$ ва $\boldsymbol{\omega}$ векторлар фазода ўз ҳолатларини ўзгартиради, $\boldsymbol{\omega}$ вектор жисмнинг қўзғалмас ва қўзғалувчан ўқларидан ўтувчи текисликда ётади. Демак, жисмнинг мураккаб ҳаракатини унинг ушбу вақт моментида O орқали $\boldsymbol{\omega}$ йўналишда ўтувчи OD ўқ атрофида айланиши деб қараш мумкин; бу ўқни оний айланиш ўқи дейилади. У узлуксиз равишда фазодаги йўналишини ҳам, жисмга нисбатан ҳолатини ҳам ўзгартиради. Маълумки, жисмнинг ушбу вақт моментида оний айланиш ўқида жойлашган нуқталари *нолга тенг бўлган* $\boldsymbol{v}_i$ *тезликка* ёки $\boldsymbol{v}_{in} = -\boldsymbol{v}_{i0}$ га эга бўлади, яъни оддий айланишларда тезликлар тенг ва қарама-қаршидир.

Глобуснинг иккита ўқ атрофида мураккаб айланишини (167- расмга қ.) қараётганда *биз оний ўқнинг ҳолатини ва ҳаракатини кузата оламиз*: OD ўқ унинг сирти орқали ўтадиган жойларда карта бошқа жойлардагидан равшанроқ туюлади. Баъзида глобусга газета қоғози ёпиштирилади. Бу ҳолда айтилган эффект яққолроқ бўлади.

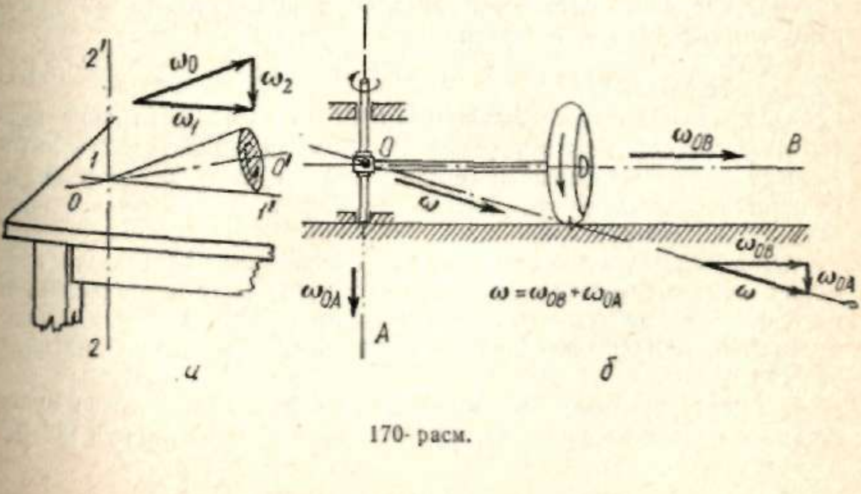
Жисмнинг $\boldsymbol{\omega}_A$ ва $\boldsymbol{\omega}_B$ доимий тезликлар билан иккита ўқ атрофидаги баён қилинган мураккаб айланишига оддий геометрик талқин берилади. Жисмнинг ҳаракатини жисм билан доимий боғланган, фазода қўзғалмас ҳамда тасаввур қилинувчи OB' конус бўйича думаланувчи, тасаввурдаги OA' конуснинг ҳаракати сифатида кўрсатилади; конусларнинг OD тегишиш чизиғи айнан *оний ўқ* бўлади (169- *а* расм). OA' конус ҳар бир пайтда OD оний ўқ атрофида бурилади, яъни OB' конус бўйлаб сирпанишсиз думаланади. $\boldsymbol{\omega}_A$ ва $\boldsymbol{\omega}_B$ ларнинг катталиги ва йўналишига боғлиқ тарзда OD' ўқ OA ва OB ўқлар ҳосил қилган бурчакнинг ташқарисидан ўтиши мумкин; у ҳолда OA' конус OB' конуснинг ичида жойлашади ва унинг ички сирти бўйича думаланади (169- *б* расм). Агар OA ва OB ўқлар атрофидаги айланиш бурчак тезликлари 169- *б* расмдагидек, турли томонларга йўналган бўлса, шундай ҳол мавжуд бўлади.



169- расм.

Бурчак тезликларнинг қўшилишига доир яна иккита мисол қарайлик.

Конуснинг стол сиртида думаланиши (170- *a* расм) қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракатидан иборат. Конус ҳар бир вақт моментида конуснинг текислик билан тегишиш чизиғида ётувчи *11′* оний ўқ ат-



170- расм.

рофида ω_1 бурчак тезлик билан айланади. Шу ҳаракатнинг ўзини иккита: 22′ вертикал (фазода қўзғалмас) ўқ атрофида $\boldsymbol{\omega}_2$ бурчак тезлик билан ва OO' қия (конуснинг геометрик ўқига мос тушувчи) ўқ атрофида $\boldsymbol{\omega}_0$ бурчак тезлик билан бир вақтдаги айланиш сифатида қаралса бўлади. $\boldsymbol{\omega}_1$ вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ ва $\boldsymbol{\omega}_0$ векторларнинг йиғиндисига тенг.

170- *б* расмда кўрсатилган тош-югурикнинг айланиш бурчак тезликларини тахминан шундай тарзда тасаввур қилиш мумкин. Тош текислик бўйлаб думалаётганда мураккаб ҳаракат қилиб, уни қаттиқ жисмнинг *О* қўзғалмас ўқ атрофидаги айланиши деб қараш мумкин. Тошнинг ҳаракатини худди конуснинг асоси қирраси билан горизонтал текисликда унинг геометрик ўқи ҳамма вақт горизонтал қолгани ҳолда айланиши каби тасаввур қилса бўлади. Ўқларнинг йўналиши ва бурчак тезлик орасидаги муносабат 170- *б* расмда кўрсатилган.

63- §. Нуқтага нисбатан куч моменти ва қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори моменти

Агар битта нуқтада бириктирилган қаттиқ жисмга таъсир қилувчи кучнинг йўналиши бириктириш нуқтаси орқали ўтса, у ҳолда равшанки, бу куч жисмнинг ҳолатини ўзгартирмайди, кучнинг таъсири жисмга бириктириш нуқтасига ташқаридан қўйилган куч билан мувозанатланади. Шу сабабли мувозанат ҳолатини ёки ҳаракат ҳолатини жисмга қўйилган, таъсир чизиғи бириктириш нуқтасидан ўтмайдиган кучгина ўзгартира олади.

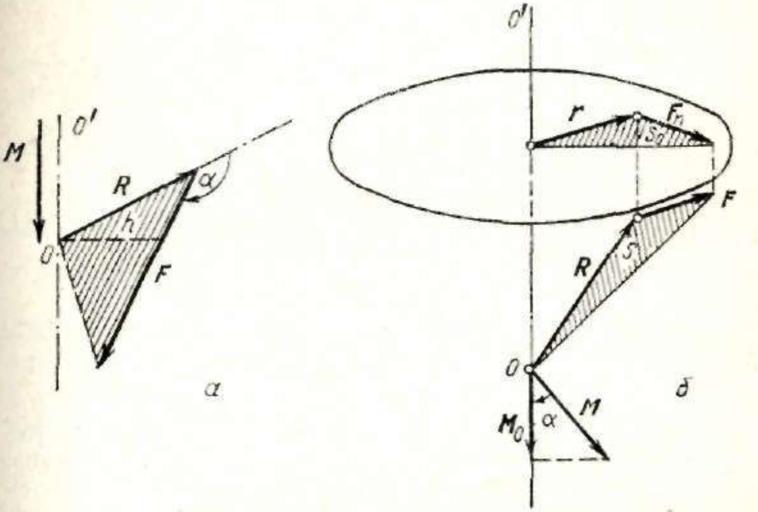
Бу ҳолда, худди аввалгидек, куч таъсирини ўлчовчи катталик унинг моменти бўлиб, куч жисмни кучнинг таъсир чизиғи ва бириктириш нуқтаси орқали ўтувчи текисликка тик ўқ атрофида бурашга интилади. Шунинг учун *О* нуқтага нисбатан $\boldsymbol{M}$ куч моменти (171- *а* расм) вектор катталик бўлиб, уни $\boldsymbol{R}$ радиус-векторнинг (*О* нуқтадан кучнинг қўйилиш нуқтасига ўтказилган) $\boldsymbol{F}$ куч векторига вектор кўпайтмаси сифатида аниқланади:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{RF}],\ M = RF\sin\alpha = Fh, \tag{63.1}$$

бунда h — куч $\boldsymbol{F}$ нинг «елкаси» ($h = R\sin\alpha$). Куч моментининг вектор катталик сифатидаги таърифи куч жисмни айлантиришга интиладиган ўқнинг йўналишини беради, ҳамда бириктириш нуқтасидан кучнинг таъсир чизиғигача масофадан иборат куч «елкаси» h нинг катталигини ҳисобга олади.

Аёнки, қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг мувозанати қўзғалмас нуқтага нисбатан барча куч моментларининг йиғиндиси нолга тенглигида ёки барча кучлар моментлари векторларининг мажмуаси ёпиқ (умуман айтганда, фазовий) кўпбурчак ҳосил қилганда мавжуд бўлади.

Биз битта нуқтада бириктирилган жисмнинг ҳаракати ва мувозанати ҳақидаги масалани қараш билан нуқтага нисбатан куч моменти тушунчасига келдик. Бироқ механиканинг кўпчилик бошқа масалаларида одатда қутб деб юритилувчи, *исталган берилган О нуқтага нисбатан куч моменти* ҳақидаги тасаввур жуда муҳимдир. Агар **F** куч ва унинг қўйилиш нуқтаси маълум бўлса, у ҳолда ҳамма вақт кучнинг қўйилиш нуқтасига ўтказилган **R** вектор бошланадиган бирор *О* қутбга нисбатан куч моменти {**RF**} ни топиш мумкин бўлади.



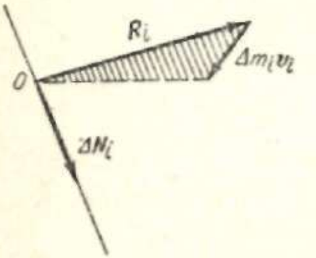
171- расм.

Ясси ҳаракатдан иборат (57- § га қ.) хусусий ҳолда биз қутбга нисбатан куч моменти таърифини учратган эдик. Бироқ, у ерда куч моменти ҳамма вақт фазода муайян йўналишга эга бўлиб, ҳаракат текислигига тик бўлган ўққа нисбатан моментга мос тушар эди.

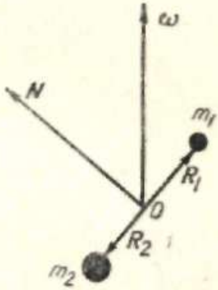
Таърифи 54- § да келтирилган, берилган *OO′* ўққа нисбатан куч моменти M_0 га—*OO′* ўқда ётувчи *исталган О нуқтага* нисбатан кучнинг **M** моментининг *OO′* ўққа проекциясига тенг (171- *б* расм). Ҳақиқатан, *S* юзанинг *OO′* ўққа тик текисликка проекциясига тенг бўлган S_0 юза ўқда ётувчи барча *O* нуқталар учун бирдай; агар 2 *S* сон жиҳатдан *F* кучнинг моменти **M** нинг модулига тенг бўлса, у ҳолда 2 S_0 ўша кучнинг ўққа нисбатан моменти M_0 га тенг ва $S_0 = S\cos\alpha$ тенгликдан (171- *б* расмга қ.) $M_0 = M\cos\alpha$ келиб чиқади.

Қаттиқ жисмнинг ҳаракат қонунларини қараётганда *О* қутбга нисбатан ҳаракат миқдори моменти муҳим роль ўйнайди. Жисмнинг массаси Δm_i бўлган айрим моддий нуқтасининг муайян нуқтага нисбатан ҳаракат миқдори моменти деб зарра радиус-вектори $\boldsymbol{R}_i$ нинг шу зарра ҳаракат миқдори вектори $\Delta m_i v_i$ га (172- расм) вектор кўпайтмасини айтилади. Яхлит қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори моменти жисм барча зарраларининг ҳаракат миқдори моментлари йиғиндиси сифатида аниқланади:

$$N = \sum_i \Delta m_i [R_i v_i]. \tag{63.2}$$



172- расм.



173- расм.

Равшанки, қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори моменти вектор катталикдир. Жисмнинг қўзғалмас ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти $I\omega$ га тенг (53- §) эканлигини эслайлик, бунда I — жисмнинг берилган ўққа нисбатан инерция моменти, ω бўлса, айланиш бурчак тезлиги. Куч моменти учун бўлгани каби, ўқнинг исталган нуқтасига нисбатан ҳаракат миқдори моментининг қўзғалмас ўққа проекцияси $I\omega$ га тенг бўлади.

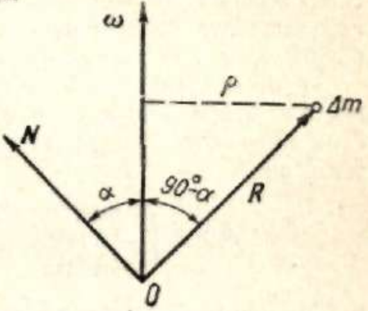
Ҳаракат миқдори моменти вектори, умуман айтганда, оний ёки қўзғалмас ўқ йўналишига *мос келмайди*. Масалан, айтайлик, фақат m_1 ва m_2 массали иккита заррадан ташкил топган жисм O нуқта атрофида, ушбу вақт моментида зарраларни туташтирувчи чизиққа бурчак остида ўтувчи ω ўқ атрофида айланаётган бўлсин (173- расм). Айланиш ўқи ва зарралар чизма текислигида ётади. У ҳолда, маълумки, v_1 ва v_2 тезликлар чизма текислигига, N вектор—O га нисбатан ҳаракат миқдори моменти вектори эса зарраларни туташтирувчи чизиққа тик бўлиши лозим ва чизма текислигида ётади. Марказ атрофида айланаётган бир жинсли шар учун ҳаракат миқдори моменти оний айланиш ўқига мос тушади.

Юқорида айтилганидек, ҳар бир жисм ўзаро тик ва массалар марказидан ўтувчи *учта эркин айланиш ўқига эга;* уларни яна *бош инерция ўқлари* деб ҳам юритилади. Агар айланиш ўқи бош инерция ўқига мос тушса, у ҳолда ҳаракат миқдори моменти ҳам айланиш ўқига мос тушади.

64- §. Қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори (импульси) моменти ва инерция моменти

Агар қаттиқ жисм O қўзғалмас нуқтадан ўтувчи ω ўқ атрофида айланаётган бўлса (174- расм), у ҳолда Δm массали зарранинг импульс моменти қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta \boldsymbol{N} = \Delta m[\boldsymbol{Rv}] = \Delta m[\boldsymbol{R}[\omega \boldsymbol{R}]]; \qquad (64.1)$$



174- расм.

$\Delta \boldsymbol{N}$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ ва $\boldsymbol{R}$ текисликда ётади ҳамда $\boldsymbol{R}$ га нормал бўлади: ΔN нинг $\boldsymbol{\omega}$ га проекцияси $\Delta N_\omega = \Delta m \rho^2 \omega$. Ҳақиқатан ҳам,

$$\Delta N_\omega = \Delta N \cos\alpha = \Delta mRv \cos\alpha = \Delta mvR \sin(90^\circ - \alpha) = mv\rho = \Delta m \rho^2 \omega,$$

чунки $v = \omega\rho$. Демак, олдин, жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланиши ҳақида гапирганда биз ҳаракат миқдори моментининг зарра инерция моменти $\Delta I = \Delta m \rho^2$ нинг ω га кўпайтмасига тенг бўлган ΔN_ω проекциясини назарда тутган эдик. Маълумки, ΔN_ω нуқта O нинг айланиш ўқидаги ҳолатига боғлиқ эмас. $\Delta N = \Delta I \omega$ тенглик сонлар (скалярлар) орасидаги оддий боғанишни кўрсатади.

Умумий ҳолда $\Delta \boldsymbol{N}$ ва $\boldsymbol{\omega}$ векторлар орасида боғланишни топиш мумкин эмасмикан? Маълум бўлишича, буни амалга ошириш мумкин экан. У иккиланма вектор кўпайтма билан ифодаланади ва уни янги физикавий катталик — *тензор* орқали кўрсатиш қулай бўлиб, у вектор катталик ҳақидаги тасаввурнинг кенгайтирилиши ва умумлашмасидан иборат.

$\Delta \boldsymbol{N}$ ва $\boldsymbol{\omega}$ векторлар орасидаги бевосита боғланишни аниқлаш учун $\Delta \boldsymbol{N}$ ва $\boldsymbol{\omega}$ нинг координата ўқларига проекциялари орасидаги боғланишни топамиз. Даставвал векторлар алгебрасининг

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$$

формуласи асосида (64. 1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta \boldsymbol{N} = \Delta m R^2 \boldsymbol{\omega} - \Delta m \boldsymbol{R} (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}). \qquad (64.2)$$

Бу ΔN ни $\boldsymbol{\omega}$ ва $\boldsymbol{R}$ бўйича ташкил этувчиларга ёйилмасидан иборат. Энди $\Delta \boldsymbol{N}$ нинг жисм билан боғланган тўғри бурчакли координаталар системасининг x, y, z ўқларига проекцияларини ёзиб чиқамиз:

$$\Delta N_x = \Delta m R^2 \omega_x - \Delta m x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z),$$

ёки

$$\Delta N_x = \Delta m (R^2 - x^2) \omega_x - \Delta m xy \omega_y - \Delta m xz \omega_z,$$

шунингдек,

$$\Delta N_y = -\Delta mxy\,\omega_x + \Delta m(R^2 - y^2)\,\omega_y - \Delta myz\,\omega_z$$
$$\Delta N_z = -\Delta mzx\,\omega_x - \Delta mzy\,\omega_y + \Delta m(R^2 - z^2)\omega_z, \qquad (64.3)$$

бунда, одатдагича, x, y, z — вектор $\boldsymbol{R}$ нинг проекциялари. Ҳар бир $\Delta \boldsymbol{N}$ проекция $\boldsymbol{\omega}$ нинг барча проекцияларига чизиқли боғлиқдир; коэффициентларнинг қонуниятларини пайқаш қийин эмас: уларнинг ҳар бири Δm массали зарранинг инерция моменти ўлчамлигига эга.

ω проекцияларидаги тўққизта кўпайтувчининг мажмуаси Δm массали зарра *инерция моменти тензоридан* иборат. Бу тензорни ёзма ҳарф билан белгиланади ва жадвал (*матрица*) кўринишида ёзилади:

$$\Delta \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \Delta m(R^2 - x^2) & -\Delta mxy & -\Delta mxz \\ -\Delta myx & \Delta m(R^2 - y^2) & -\Delta myz \\ -\Delta mzx & -\Delta mzy & \Delta m(R^2 - z^2) \end{pmatrix}. \qquad (64.4)$$

(64.3) нинг учта кейинги тенгламаси қуйидаги формула билан ифодаланади.

$$\Delta \boldsymbol{N} = \Delta \mathcal{J} \omega. \qquad (64.5)$$

(64. 5) формула кўриниш жиҳатдан $\Delta N_\omega = \Delta I\,\omega$ га ўхшаш бўлса-да фақат бундаги $\Delta \mathcal{J}$ — сон бўлмай, иккинчи ранг тензордир; $\Delta \mathcal{J}$ ни $\boldsymbol{\omega}$ векторга кўпайтириш матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра бажарилади. Бу қоидани (64. 3) дан англаш мумкин. $\Delta \boldsymbol{N}$ векторнинг x ўққа проекцияси $\Delta \mathcal{J}$ нинг биринчи қатори элементларининг вектор $\boldsymbol{\omega}$ нинг тегишли проекцияларига кўпайтмалари йиғиндисига, $\Delta \boldsymbol{N}$ нинг y ўққа проекцияси иккинчи қатор кўпайтмаларининг ўхшаш йиғиндисига ва ҳоказога тенг.

Тензор — тензорнинг компоненталари дейилувчи ва координаталарнинг танланган системасига боғлиқ бўлган тўққизта (физикавий катталиклардан иборат) соннинг тартибланган мажмуасидир. Улар координаталар *кўпайтмалари* каби алмашинади. Эслатиб ўтамизки, вектор уч соннинг тартибланган системаси бўлиб, улар координаталар системаси ўзгарганда координаталар каби алмашинади. Скаляр (сон) координаталарнинг алмашинувида ўзгармайди. Тензорни сонга кўпайтириш ҳар бир компонентани шу сонга кўпайтиришдан иборат бўлади.

Агар тензорнинг ҳар бир компонентаси «қўшилувчи» тензорларнинг тегишли компоненталарининг йиғиндиси ёки айирмасига тенг бўлса, тензор иккита тензорнинг йиғиндиси ёки айирмасидан иборат бўлади.

Тензорлар ичида

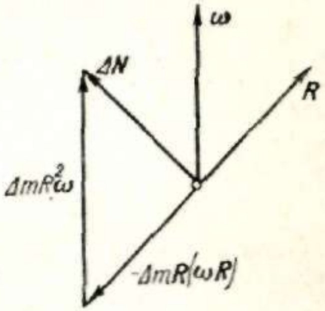
$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

га тенг бўлган бирлик тензор мавжуд бўлиб, унинг векторга кўпайтмаси бу векторни ўзгартирмайди. Координаталарни алмаштирганда бирлик тензор ўзгармайди. $a\mathcal{E}$ тензорни векторга кўпайтириш a скалярни векторга кўпайтиришга тенг қийматлидир. Тензорни векторга кўпайтириш қоидаси олдин кўрсатилган эди.

Тензор $\Delta\mathcal{J}$ нинг барча компонентлари (64.4) нуқта координаталарининг (Δm доимий массага кўпайтирилган) кўпайтмаларидан иборат. Шу сабабли $\Delta\mathcal{J}$. катталикни *тензор* деб юритамиз: унинг ҳар бир компонентаси тензор компонентларини алмаштиришнинг кўрсатилган шартларига мослаб алмаштирилади.

Битта зарра учун, балки $\Delta\mathcal{J}$ инерция тензорини киритиш зарурати йўқдир, чунки $\Delta \boldsymbol{N}$ билан $\boldsymbol{\omega}$ орасидаги боғланишни (64.2) *тенгликдан бевосита осон кузатиш* мумкин: $\Delta \boldsymbol{N}$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ ва $\boldsymbol{R}$ текислигида ётади ва унинг ясалиши 175-расмда кўрсатилган. Бироқ $\mathcal{J}$ тензор қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида айланишини баён қилишда керак бўлади. Бу ҳолда

$$\boldsymbol{N}=\sum_i \Delta m_i [\boldsymbol{R}_i [\boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{R}_i]] = \sum_i \Delta m_i R_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{R}_i (\boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{R}_i)$$



175- расм.

катталикка тенг бўлган ҳаракат миқдори моменти тензор ёрдамида қуйидагича ёзилади:

$$\boldsymbol{N}=\mathcal{J}\boldsymbol{\omega}, \tag{64.6}$$

бунда $\mathcal{J}=\sum_i \Delta\mathcal{J}_i$ ёки

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

$\mathcal{J}$ тензорнинг компонентлари эса,

$$I_{xx}=\sum_i \Delta m_i (R_i^2-x_i^2),\quad I_{yy}=\sum_i \Delta m_i (R_i^2-y_i^2),$$

$$I_{zz}=\sum_i \Delta m_i (R_i^2-z_i^2),\quad I_{xy}=I_{yx}=-\sum_i \Delta m_i x_i y_i, \tag{64.7}$$

$$I_{xz}=I_{zx}=-\sum_i \Delta m_i x_i z_i,\quad I_{yz}=I_{zy}=-\sum_i \Delta m_i y_i z_i.$$

Равшанки, иккита бирдай индексли компоненталар тегишли ўқларга нисбатан инерция моментларидан иборат, масалан,

$$I_{xx}=\sum_i \Delta m_i (R_i^2-x_i^2)=\sum_i \Delta m_i (y_i^2+z_i^2)$$

—жисмнинг x ўққа нисбатан инерция моменти ва ҳоказо. Турли индексли компонентaларни *инерция кўпайтмалари* дейилади.

$I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$ бўлгани сабабли $\mathcal{I}$ тензор фақат *олтита* эркли компоненталарга эга; бундай тензорни *симметрик* тензор дейилади.

Тензорнинг компоненталари координаталар системасининг танланишига, ўқларнинг йўналишига боғлиқ. Агар $Oxyz$ координаталар системаси жисм билан муттасил боғланган бўлса, у ҳолда $\mathcal{I}$ тензорнинг компоненталари вақт давомида доимий катталикдир. У ҳолда $\boldsymbol{N}$ ва $\boldsymbol{\omega}$ компоненталар шу ўқларнинг ўзига нисбатан аниқланадилар. Демак, олтита (I_{xx}, I_{xy}, ...) катталик $\boldsymbol{N}$ нинг $\boldsymbol{\omega}$ нинг исталган йўналишига мос келувчи кўплаб қийматларини белгилайди ҳамда ҳар бир $\boldsymbol{N}$, умуман айтганда, йўналиши жиҳатдан $\boldsymbol{\omega}$ га мос келмайди.

Бироқ ҳар қандай жисм ва исталган O нуқта учун $\boldsymbol{\omega}$ нинг (айланиш ўқининг) камида учта ўзаро тик йўналиши мавжуд бўлиб, бу йўналишлар учун $\boldsymbol{N}$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ векторга мос тушар экан. Бундай йўналишларни *бош* йўналишлар ёки *бош айланиш ўқлари* дейилади. Бош йўналиш учун

$$\boldsymbol{N} = \lambda\boldsymbol{\omega},$$

бунда λ — сон. Асосий умумий тенглик (64.6) ни координата ўқларига проекцияларда ёзамиз:

$$\begin{aligned} N_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ N_y &= I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ N_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \tag{64.8}$$

Бош йўналиш учун бу тенгламалар қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} \lambda\omega_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ \lambda\omega_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ \lambda\omega_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z; \end{aligned} \tag{64.9}$$

улар ω_x, ω_y, ω_z номаълумларга нисбатан учта бир жинсли тенгламадан иборат. Агар системанинг коэффициентлари детерминанти нолга тенг бўлсагина, бундай система нолдан фарқли ечимларга эга бўлади ёки

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{64.10}$$

Ушбу λ номаълумга нисбатан учинчи тартибли алгебраик тенгламадир:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{64.11}$$

бунда a_1, a_2, a_3 лар маълум I_{xx}, I_{xy}, ... — инерция тензорининг компоненталарига боғлиқ.

Айтайлик, биз (64.11) тенгламани ечиб, илдизнинг учта турли λ_1, λ_2, λ_3 қийматларини топган бўлайлик. Сўнгра, λ сонлардан бирини, масалан, λ_1 ни қайтадан (64.9) системага қўйиб, $\boldsymbol{N} = \lambda_1\boldsymbol{\omega}_1$ бўлган бош йўналиш $\boldsymbol{\omega}_1$ ни топамиз. (64.9) системанинг дастлабки иккита тенгламасини ёзайлик:

$$\lambda_1 - I_{xx} = I_{xy}\frac{\omega_y}{\omega_y} + I_{xz}\frac{\omega_z}{\omega_x},$$

$$I_{yx} = (I_{yy} - \lambda_1)\frac{\omega_y}{\omega_x} + I_{yz}\frac{\omega_z}{\omega_x}.$$

Булардан ω_y/ω_x ва ω_z/ω_x, яъни бош айланиш ўқининг йўналиши ёки $\boldsymbol{\omega}_1$ йўналиш, векторнинг катталиги ҳар қандай бўлиши мумкин. Шунга ўхшаш λ_2 ва λ_3 лар учун бош ўқлар йўналишларини топиш мумкин.

λ_1, λ_2, λ_3 ларга тегишли бош ўқларнинг йўналишларини $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ бирлик векторлар орқали белгилайлик. Агар барча λ_1, λ_2; λ_3 лар турлича бўлса, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ лар ўзаро тик бўлишини исботлайлик.

$\boldsymbol{n}_1$ нинг компоненталари учун $\lambda_1\boldsymbol{n}_1 = \mathcal{J}\boldsymbol{n}_1$ тенгламалар системасини ёзиш мумкин ёки проекцияларда:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 n_{1x} &= I_{xx}n_{1x} + I_{xy}n_{1y} + I_{xz}n_{1z},\\
\lambda_1 n_{1y} &= I_{yx}n_{1x} + I_{yy}n_{1y} + I_{yz}n_{1z},\\
\lambda_1 n_{1z} &= I_{zx}n_{1x} + I_{zy}n_{1y} + I_{zz}n_{1z}.
\end{aligned} \tag{64.12}$$

Биринчи тенгламани n_{2x} га, иккинчисини n_{2y} га, учинчисини n_{2z} га кўпайтирамиз ва уларни ҳадма-ҳад қўшамиз, у ҳолда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\lambda_1\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_1,$$

бунда A_1 орқали $\boldsymbol{n}_2$ векторнинг $\mathcal{J}\boldsymbol{n}_1$ векторга скаляр кўпайтмаси белгиланган ёки $A_1 = \boldsymbol{n}_2\mathcal{J}\boldsymbol{n}_1$. Агар $\lambda_2\boldsymbol{n}_2 = \mathcal{J}\boldsymbol{n}_2$ тенгламалар системасини ёзсак, ҳамда ҳар бир тенгламани $\boldsymbol{n}_1$ нинг тегишли компоненталарига кўпайтириб, уларни қўшсак, у ҳолда $\lambda_2\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_2 = \boldsymbol{n}_1\mathcal{J}\boldsymbol{n}_2$ ҳосил бўлади. $\mathcal{J}$ тензор симметрик бўлгани сабабли (яъни $I_{xy} = I_{yx}$ ...) $A_1 = A_2$ эканлигига осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шунинг учун

$$\lambda_1\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_1 = \lambda_2\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 \tag{64.13}$$

ёки $(\lambda_1 - \lambda_2)\,\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0$. Агар $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлса, охирги тенглик фақат $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0$ да қаноатлантирилади, демак, $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ векторлар ортогонал. Шунга ўхшаш, агар $\lambda_2 \neq \lambda_3$ бўлса, $\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3 = 0$, ҳамда $\lambda_1 \neq \lambda_3$ да $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3 = 0$ эканлиги исботланади.

Агар $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ йўналишларни координата ўқлари йўналиши учун олинса, у ҳолда инерция тензори ва бошқа ифодалар айниқса содда кўриниш олишини қайд қилиб ўтиш муҳимдир. У ҳолда $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\boldsymbol{n}_3$ ҳамда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} = N_1\boldsymbol{n}_1 + N_2\boldsymbol{n}_2 + N_3\boldsymbol{n}_3 = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{J}(\omega_1\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\boldsymbol{n}_3) =\\
= \omega_1\mathcal{J}\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\mathcal{J}\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\mathcal{J}\boldsymbol{n}_3 = \omega_1\lambda_1\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\lambda_2\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\lambda_3\boldsymbol{n}_3.
\end{aligned}$$

Бундан бош ўқлар системасида

$$\begin{gathered}
N_1 = \lambda_1\omega_1,\ N_2 = \lambda_2\omega_2,\ N_3 = \lambda_3\omega_3,\\
N^2 = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = \lambda_1^2\,\omega_1^2 + \lambda_2^2\,\omega_2^2 + \lambda_3^2\,\omega_3^2.
\end{gathered} \tag{64.14}$$

Шу сабабли инерция тензори бу координаталар системасида қуйидаги содда кўринишни олади:

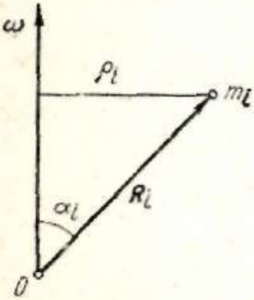
$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Фақат бош диагоналдагина компоненталар нолдан фарқли бўлади.

Равшанки, λ_1, λ_2, λ_3 лар бош инерция ўқлари атрофида айланиш вақтида жисмнинг инерция моментлари ёки *бош инерция моментлари* ҳисобланади. Улар бутун жисм массасининг тақсимланиши билан белгиланиб танланган координаталар системасига боғлиқ эмас. Агар бош ўқлар массалар марказига нисбатан аниқланган бўлса, у ҳолда бу ўқлар эркин айланиш ўқлари бўлади.

Шундан сўнг, агар иккита λ илдиз бир-бирига тенг, масалан, $\lambda_1 = \lambda_2$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{n}_3$ га нормал текисликда ётувчи чексиз кўп бош ўқлар мавжуд бўлишини кўрсатиш мумкин. Агар жисм бирор ўққа нисбатан симметрик, $\boldsymbol{n}_3$ шу ўқ бўйича йўналган бўлса, шундай бўлади. Бир жинсли жисмлар — доиравий ёки квадрат кесимли цилиндр, айланиш жисми ва бошқалар — ўққа нисбатан симметрияга эга бўлади. Бир жинсли шар марказий симметрияга эга бўлиб, марказдан ўтувчи ҳар қандай ўқ бош ўқ бўлади.

Энди жисмнинг қўзғалмас O нуқтасидан ўтувчи ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси учун ифода келтирайлик (176- расм). Биз T кинетик энергия $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{N}$ ва $\mathcal{J}$ билан қуйидагича боғланганлигини кўрсатамиз:



176- расм

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega N} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathcal{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{64.15}$$

Ҳақиқатдан ҳам, (64.6) ни ҳисобга олсак,

$$\boldsymbol{\omega N} = \sum \Delta m_i \boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{R}_i [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i]],$$

бундаги кўпайтма эса

$$\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{R}_i [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i]] = \boldsymbol{\omega} \{R_i^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{R}_i (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i)\} = \omega^2 R_i^2 - $$
$$- (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i)^2 = \omega^2 R_i^2 (1 - \cos \alpha_i) = \omega^2 \rho_i^2 = v_i^2.$$

Шунинг учун $\omega N = \sum \Delta m_i v_i^2 = 2T$.

Кинетик энергияни қўзғалмас ўқда айланиш ҳолидагидек, қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$T = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i vi^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_i \rho i^2 = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2, \tag{64.16}$$

бунда $I_\omega = \sum \Delta m_i \rho_i^2$ жисмнинг ω га мос тушувчи ўққа нисбатан инерция моменти; I_ω — сон (скаляр).

Маълумки:

$$2T = \omega \boldsymbol{N} = \omega N_\omega = I_\omega \omega^2; \tag{64.17}$$

буни ҳисобга олиш билан таниш тенгликка келамиз:

$$N_\omega = I_\omega \omega, \tag{64.18}$$

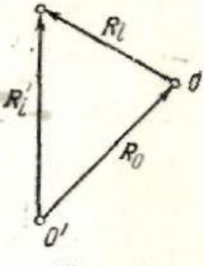
яъни $\boldsymbol{N}$ нинг $\boldsymbol{\omega}$ га проекцияси $\boldsymbol{\omega}$ га мос тушувчи ўққа нисбатан инерция моментининг $\boldsymbol{\omega}$ га кўпайтмасига тенг. Аввал жисмда ва фазода қўзғалмас айланиш ўқи учун ўринли бўлган ҳолат исталган оний айланиш ўқи учун ҳам ўринли экан.

Исталган O' нуқтага (177- расм) нисбатан $\boldsymbol{N}$ ҳаракат миқдори моменти ҳамма вақт

$$\boldsymbol{N} = m [\boldsymbol{R}_0 [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_0]] + \boldsymbol{N}_0 \tag{64.19}$$

бўлишини кўрсатиш мумкин бўлгани сабабли (бунда $m = \sum \Delta m_i$ — яхлит жисмнинг массаси, $\boldsymbol{R}_0$ — жисм масса марказининг O' нуқтадан ўтказилган радиус-вектори (177- расмга қ.) $\boldsymbol{N}_0$ — жисмнинг массалар маркази O дан ўтувчи ўқ атрофида $\boldsymbol{\omega}$ бурчак тезлик билан айланишдаги ҳаракат миқдори моменти) одатда аввал массалар маркази O дан ўтувчи ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти ҳисобланади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\boldsymbol{R}_i' = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_i$ бўлса, у ҳолда

$$\boldsymbol{N} = \sum \Delta m_i \left[\boldsymbol{R}_i' [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{R}_i'] \right] = \sum \Delta m_i \left[(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_i) \times \right.$$
$$\left. \times [\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_i)] \right].$$



177- расм.

Мураккаб вектор кўпайтмани очиб ва $\sum \Delta m_i \boldsymbol{R}_i = 0$ эканини ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\boldsymbol{N} = m\left[\boldsymbol{R}_0\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_0]\right] + \sum \Delta m_i \left[\boldsymbol{R}_i\,[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{R}_i]\right].$$

Юқорида $\boldsymbol{N}_0$ орқали белгиланган охирги йиғинди O дан ўтувчи ўқ атрофида $\boldsymbol{\omega}$ бурчак тезлик билан айланишдаги ҳаракат миқдори моментидан иборат, биринчи ҳад эса бутун жисмнинг худди m массали зарра каби яхлит ҳолда O' дан ўтувчи ўққа нисбатан $\boldsymbol{\omega}$ бурчак тезлик билан айланаётгандаги ҳаракат миқдори моменти.

Массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моментини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{N}_0 = \mathcal{J}_0\boldsymbol{\omega}, \tag{64.20}$$

бунда $\mathcal{J}_0$ — бош массалар марказига мос тушувчи координаталар системасига нисбатан инерция моменти тензори. Агар координаталар системаси жисм билан доимий боғланишда бўлса, $\mathcal{J}_0$ компоненталар вақт ўтиши билан ўзгармайди.

$\mathcal{J}_0$ ни билган ҳолда жисмнинг массалари маркази O дан ўтувчи исталган ўққа нисбатан инерция моментини топиш мумкин. Айтайлик, айланиш ўқининг йўналиши $\boldsymbol{n}$ бирлик вектор орқали берилган бўлсин. У ҳолда, (64.18) ва (64.20) ларни ҳисобга олиб, $\boldsymbol{N}$ нинг $\boldsymbol{n}$ га проекциясини бундай ифодалаш мумкин:

$$N_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{N}_0\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\mathcal{J}_0\,\boldsymbol{n}\omega = I_n\omega,$$

бунда J_n — ўқ $\boldsymbol{n}$ га нисбатан инерция моменти. Ёки:

$$I_n = \boldsymbol{n}\,\mathcal{J}_0\boldsymbol{n}. \tag{61.21}$$

Агар I_n сонни $\mathcal{J}_0$ тензорнинг ва $\boldsymbol{n}$ векторнинг компоненталари орқали ёзилса, у ҳолда анча қўпол ифода ҳосил бўлади. Координата ўқлари учун $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ бош йўналишларни қабул қилиб, анча қисқа ва равшан формулани келтирамиз; у ҳолда $\boldsymbol{n} = \alpha_1\,\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\,\boldsymbol{n}_2 + \alpha_3\,\boldsymbol{n}_3$, бунда α_1, α_2, α_3 — ўқлар $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ ларга нисбатан $\boldsymbol{n}$ нинг йўналтирувчи косинуслари. Демак,

$$\mathcal{J}_0\,\boldsymbol{n} = \alpha_1\,\mathcal{J}_0\,\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\,\mathcal{J}_0\,\boldsymbol{n}_2 + \alpha_3\,\mathcal{J}_0\,\boldsymbol{n}_3 = \alpha_1\lambda_1\,\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\lambda_2\,\boldsymbol{n}_2 + \alpha_3\lambda_3\boldsymbol{n}_3.$$

Шунинг учун

$$I_n = \boldsymbol{n}\,\mathcal{J}_0\,\boldsymbol{n} = \alpha_1^2\,\lambda_1 + \alpha_2^2\,\lambda_2 + \alpha_3^2\,\lambda_3, \tag{64.22}$$

бунда λ_1, λ_2, λ_3 — массалар марказидан ўтувчи бош ўқларга нисбатан инерция моментлари, λ_1, λ_2, λ_3 ва α_1, α_2, α_3 лар маълум бўлганда (64.22) бўйича исталган $\boldsymbol{n}$ ўққа нисбатан I_n инерция моментини аниқлашимиз мумкин.

Исталган йўналиш бўйича I_n нинг катталиги ҳақида яққол тасаввур «инерция эллипсоиди» ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин. Асосий тенглик (64.22) ни I_n га бўлиб, $\alpha/\sqrt{I_n} = x_1$, $\alpha_2/\sqrt{I_n} = x_2$, $\alpha_3/\sqrt{I_n} = x_3$ белгилашлар киритилса, (64.22) тенглик ушбу кўринишни олади:

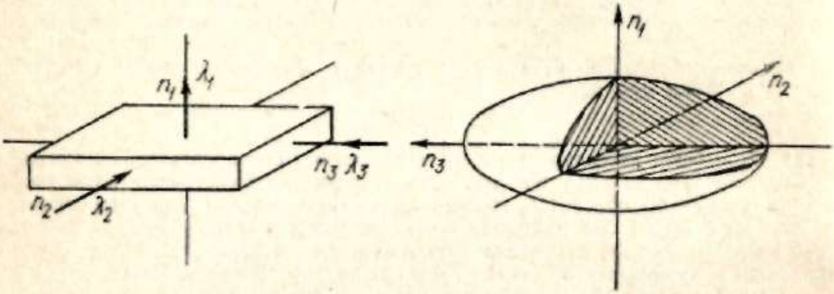
$$\lambda_1\,x_1^2 + \lambda_2\,x_2^2 + \lambda_3\,x_3^2 = 1.$$

Бу ифода инерция тензорининг бош ўқлари $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ га қўйилувчи x_1, x_2, x_3 координаталардаги эллипсоид тенгламасидир. Эллипсоиднинг ярим ўқлари, аёнки, $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$, $1/\sqrt{\lambda_3}$ ларга, эллипсоиднинг марказидан сиртигача $\boldsymbol{n}$ йўналишдаги масофа ρ га тенг, шунинг билан бирга, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ бўлгани сабабли

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1/I_n.$$

Шунинг учун ρ катталик $\mathbf{n}$ йўналишли ўққа нисбатан I_n инерция моментидан олинган квадрат илдизнинг тескари қийматига тенг. Шундай қилиб, инерция эллипсоидининг сирти массалар марказидан ўтувчи ўқларга нисбатан барча мумкин бўлган инерция моментларининг катталиги ҳақида яққол тасаввур беради[1]. Эллипсоиднинг энг қисқа ўқи мумкин бўлган энг катта инерция моментли ўқ бўйича, узун ўқи эса энг кичик инерция моментли ўқ бўйича йўналган.

Инерция эллипсоидининг умумий кўриниши бир жинсли жисм шаклига «ўхшашлигига» ишонч хосил қилиш мумкин. Масалан, қирраларининг узунлиги ҳар хил бўлган бир жинсли параллелепипед (гугурт қутичаси шаклидаги) 178-расмда кесимда кўрсатилгандек, инерция эллипсоидига эга; энг узун ярим ўқи $\mathbf{n}_3$ бўйича, қисқаси — $\mathbf{n}_1$ бўйича йўналган. Массалар марказига нисбатан инерция моменти тензорининг бош ўқлари *эркин* айланиш ўқлари бўлади. Жисмнинг исталган нуқтасига нисбатан инерция моменти тензорининг бош ўқлари жисмнинг бу ўқлардан бирида айланишида ўққа марказдан қочма инерция кучлари таъсир қилиши туфайли эркин айланиш ўқлари бўлмайди, бироқ $\mathbf{N}$ нинг йўналиши $\boldsymbol{\omega}$ га мос тушади.



178- расм.

Айланиш жисми учун инерция эллипосиди айланиш эллипсоиди ҳам бўлиб, бир бош ўқ симметрия ўқига мос тушади ва массалар марказидан ўтувчи ҳамда унга тик бўлган ҳар қандай ўқ бош ўқ бўлади. Айланиш ўқига тик текисликдаги иккита ўзаро тик йўналишни эллипсоиднинг ўқи сифатида қабул қилиш мумкин. Бир жинсли моддадан ясалган шар учун массалар марказидан ўтувчи ҳар қандай йўналиш бош йўналиш бўлади, яъни инерция эллипсоди сферага ўтади.

Агар ўққа нисбатан симметрияга эга бўлган жисм бирдай инерция моментли иккита ўзаро тик бош ўқларга эга бўлса, у ҳолда тегишли инерция эллипсоиди айланиш эллипсоиди бўлади. Бундай ҳол квадрат кесимли стерженда кузатилади; симметрия шартларидан иккита бош йўналиш бирдай инерция моментига эга бўлади деган хулосага келамиз. Шу мулоҳазаларнинг ўзидан куб учун инерция эллипсоиди сферага ўтишини аниқлаш мумкин.

Параграфнинг ниҳоясида Гюйгенс—Штейнер теоремаси (64.19) тенгликдан келиб чиқишини қайд қилиб ўтамиз. Бу тенгликни бирлик векторга кўпайтирамиз, (64.20) ни эътиборга оламиз ва $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}\omega$ деймиз, у ҳолда

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{n}\mathbf{N} = m\omega\mathbf{n}[\mathbf{R}_0[\mathbf{n}\mathbf{R}_0]] + \mathbf{n}\mathcal{J}_0\mathbf{n}\omega = \mathcal{J}\mathbf{n}\omega;$$

$I_{On} = \mathbf{n}\mathcal{J}_0\mathbf{n}$ — массалар маркази O дан ўтувчи $\mathbf{n}$ йўналишдаги ўққа нисбатан инерция моменти; $I_n = \mathbf{n}\mathcal{J}\mathbf{n}$ — бирор O' нуқтадан ўтувчи $\mathbf{n}$ йўналишидаги ўққа нисбатан инерция моменти (179- расм).

---

[1] Инерция эллипсоидини жисмнинг исталган нуқтасидан ўтувчи ўққа нисбатан айланишда ясаш мумкин.

Скаляр кўпайтма қуйидаги кўринишга эга:

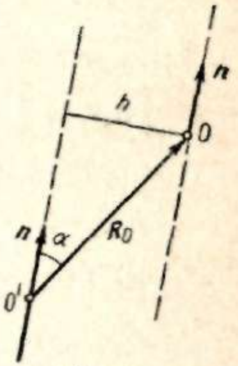
$$\boldsymbol{n}\,[\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{n}\boldsymbol{R}_0]] = R_0^2 - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{R}_0)^2 = R_0^2\,(1 - \cos^2\alpha) = h^2,$$

бунда h — нуқталар O ва O' орқали ўтувчи ва $\boldsymbol{n}$ йўналишга эга ўқлар орасидаги масофа. Бу ифодани асосий тенгликка қўйсак, ҳамда ω га қисқартирсак,

$$mh^2 + I_{0n} = I_n$$

— *параллел ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳақидаги теорема* ҳосил бўлади.

Шу теоремадан фойдаланиб, турли айланиш нуқталари учун шарнинг инерция эллипсоидларини аниқлаймиз.

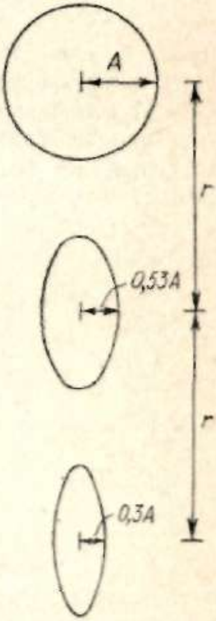


179- расм.

Шар унинг марказидан h масофада турган O' нуқта атрофида айланаётган бўлсин. У ҳолда симметриядан кўринишича, бош ўқ O' нуқтадан ва шар марказидан ўтади ва O' нуқтадан ўтувчи ва OO' га тик бўлган исталган ўққа нисбатан инерция моментлари бирдай. OO' га тик бўлган текисликдаги бошқа иккита ўзаро тик ўқлар бирдай инерция моментларига мос келади ва *бош ўқлардан иборатдир*. Шу сабабли инерция эллипсоиди OO' ўқ бўйича биринчи бош ўқ атрофида айланиш эллипсоиди бўлади. Шу ўққа нисбатан инерция моменти шарнинг инерция моменти I_0 га тенг эканлиги аёндир. Иккинчи (ва учинчи) бош ўққа нисбатан инерция моменти $I_0 + mh^2$ га тенг. Шу сабабли O' нуқта учун инерция эллипсоиди ярим ўқларининг нисбати, агар $I_0 = \frac{2}{5}\, m r^2$, бунда r — шар радиуси ((59.12) *га қ.*) эканлигини эслсак, қуйидагига тенг:

$$\frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0 + mh^2}} = \frac{\sqrt{2/5}}{\sqrt{2/5 + h^2/r^2}} = \left(1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

180- расмда учта нуқта: $h = 0$, $h = r$, $h = 2r$ учун инерция эллипсоидларининг қиёсий ўлчовлари кўрсатилган. Бунда $A = 1/\sqrt{I_0}$.



180- расм.

65- §. Қаттиқ жисм динамикасининг асосий қонуни

Қаттиқ жисмнинг боши O нуқтага мос тушувчи координаталар системасига нисбатан ҳаракатини тасаввур қилайлик ҳамда бизга жисмнинг ҳар бир заррасига таъсир қилувчи кучлар маълум бўлсин. O дан ўтказилган радиус-вектори $\boldsymbol{R}_i$ бўлган нуқтадаги Δm_i массали заррага $\boldsymbol{F}_i$ куч таъсир қилаётган бўлсин. $\boldsymbol{F}_i$ куч деб шу заррага таъсир этаётган ҳам ташқи, ҳам ички барча кучларнинг йиғиндисини тушунамиз. У ҳолда динамиканинг иккинчи қонунига кўра

$$\Delta m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i. \tag{65.1}$$

Тенгликнинг иккала томонини зарранинг R_i радиус-векторига вектор кўпайтирамиз:

$$\Delta m_i \left[R_i \frac{dv_i}{dt} \right] = [R_i F_i] = \Delta M_i \tag{65.2}$$

Энди ўша зарранинг O нуқтага нисбатан ҳаракат миқдори моментини ёзамиз

$$\Delta N_i = \Delta m_i [R_i v_i] \tag{65.3}$$

ва ундан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d}{dt} \Delta N_i = \frac{d}{dt} \left(\Delta m_i \left[R_i v_i \right] \right) = \Delta m_i \left[\frac{dR}{dt} v_i \right] + \Delta m_i \left[R_i \frac{dv_i}{dt} \right] \tag{65.4}$$

Радиус-векторнинг ҳосиласи нуқтанинг тезлигига тенг ёки

$$\frac{dR_i}{dt} = v_i,$$

шунинг учун

$$\left[\frac{dR_i}{dt} v_i \right] = \left[v_i v_i \right] = 0.$$

(65.4) ва (65.2) ларни таққослаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d}{dt} \Delta N_i = \Delta m_i \left[R_i \frac{dv_i}{dt} \right] = \Delta M_i, \tag{65.5}$$

яъни жисм заррасига таъсир этувчи куч моменти шу зарранинг ҳаракат миқдори моментининг ҳосиласига тенг.

Энди жисмнинг барча зарраларига таъсир этувчи барча куч моментларини ҳамда уларга тенг бўлган жисмнинг барча зарралари ҳаракат миқдорлари мометларидан олинган ҳосилаларни йиғамиз:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \Delta N_i = \sum_i \Delta M_i,$$

ёки

$$\frac{dN}{dt} = M, \tag{65.6}$$

бунда

$$\sum_i \Delta N_i = N \quad \text{ва} \quad \sum_i \Delta M_i = M.$$

Барча ички кучлар ҳамма вақт жуфт ҳолда кирганликлари туфайли ички кучларнинг исталган нуқтага нисбатан моментлари йиғиндиси нолга тенг, шунинг учун барча кучларнинг моменти деганда фақат жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг моменти назарда тутилади.

Демак, қаттиқ жисм динамикасининг асосий қонунини шундай таърифлаш мумкин: *барча ташқи кучларнинг моменти жисмнинг исталган қўзғалмас 0 нуқтага нисбатан ҳаракат миқдори моментидан олинган ҳосилага тенг.*

Бу қонунни яна қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин: ҳаракат миқдори моментининг dt вақт ичида $d\boldsymbol{N}$ орттирмаси катталиги ва йўналиши жиҳатидан барча ташқи кучлар моменти $\boldsymbol{M}$ нинг dt вақтга кўпайтмасига мос тушади (dt ва $d\boldsymbol{N}$ — чексиз кичик катталиклар).

(65.6) қонунга яна ҳамма вақт ўринли бўлган, 56-§ да чиқарилган массалар марказининг ҳаракат қонунини қўшиш лозим:

$$m\,\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}=\boldsymbol{F}, \tag{65.7}$$

бунда $\boldsymbol{v}_0$ — жисмнинг масса маркази тезлиги ва $\boldsymbol{F}$ — ташқи кучларнинг йиғиндиси.

Ҳаракат миқдори моментининг ўзгариш қонуни (65.6) ни илгарилама ҳаракатланувчи ва массалар маркази билан боғланган, координаталарнинг айланмайдиган системасига ўтказиш ҳамда

$$\frac{d\boldsymbol{N}_0}{dt}=\boldsymbol{M}_0 \tag{65.8}$$

эканлигини исботлаш мумкин, бунда $\boldsymbol{N}_0$ — массалар марказига нисбатан ҳаракат миқдори моменти ва $\boldsymbol{M}_0$ — массалар марказига нисбатан ташқи кучлар моменти. Исботи ясси ҳаракат учун 57-§ да шунга ўхшаш формулани ((57.8) га қ.) чиқаришда қандай йўл тутилган бўлса, шундай йўл билан ўтказилиб, фақат бу ерда барча векторлар ($\boldsymbol{R}_i$, $\boldsymbol{v}_i$ ва б.) умумий ҳолда фазода исталган йўналишга эга.

Шундай қилиб, (65.7) ва (65.8) формулалар қаттиқ жисм ҳаракатининг динамикасини тўла баён қилиб беради. Одатда (65.8) ёрдамида амалий ҳисоблашлар ва ҳаракат таҳлили унчалик содда эмас. Кўпчилик ҳолларда оддий усул билан ҳаракат миқдори моментининг йўналишини аниқлашнинг қийинлиги ҳолатни мураккаблаштиради.

Қаттиқ жисм динамикасининг асосий қонунларини чиқаришни қараётиб,

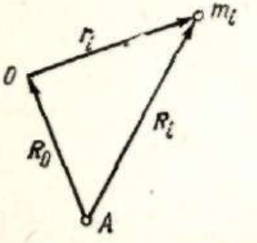
$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\boldsymbol{F},\ \frac{d\boldsymbol{N}}{dt}=\boldsymbol{M} \tag{65.9}$$

қонунлар моддий нуқталарнинг ҳар қандай системаси учун ўринли эканлигига қаноат ҳосил қилиш қийин эмас. $\boldsymbol{K}=\sum\limits_i \boldsymbol{K}_i$ — барча зарраларнинг импульслари (ҳаракат миқдорлари) йиғиндиси, $\boldsymbol{F}=\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i$ — ташқи кучларнинг йиғиндиси ва ҳоказо эканлигини эслатиб ўтамиз.

Нисбатан моментлар аниқланаётган қутбнинг алмашувида (65.6) моментларнинг (зарралар системаси ва қаттиқ жисм учун) ўзгариши характерини алоҳида қайд қилмоқ лозим. Айтайлик, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_i$, $\mathbf{R}_i$ ва ҳ. к. қўзғалмас саноқ системада бирор A нуқтага нисбатан (181-расм) ҳисобланаётган бўлсин. Моментлар қонуни $\mathbf{R}_0$ вектор билан белгиланувчи бошқа O қутбга ўтишда қандай ўзгаради?

Умумийлик мақсадида ҳозирча $\mathbf{R}_0$ катталик t нинг функцияси, яъни O қутб ҳаракатлана олади, дейлик. У ҳолда ҳар бир i-зарра учун (181-расмга қ.)

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i.$$



181-расм.

Зарралар системасининг

$$N_0 = \sum_i [\mathbf{r}_i \mathbf{K}_i]$$

бўлган O га нисбатан импульслари моменти

$$\frac{d\mathbf{N}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 - \left[\frac{d\mathbf{R}_0}{dt}\mathbf{K}\right] \qquad (65.10)$$

шартни қаноатлантиришини кўрсатайлик, бунда $\mathbf{M}_0 = \sum_i \left[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i\right]$. Ҳақиқатан ҳам, $\mathbf{N} = \sum_i \left[\mathbf{R}_i \mathbf{K}_i\right]$ формулага $\mathbf{R}_i$ нинг қийматини қўйиб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\mathbf{N} = \sum_i \left[(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i)\mathbf{K}_i\right] = \left[\mathbf{R}_0 \sum_i \mathbf{K}_i\right] + \sum \left[\mathbf{r}_i \mathbf{K}_i\right],$$

ёки

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{R}_0 \mathbf{K}\right] + \mathbf{N}_0.$$

Бундан

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{R}_0}{dt}\mathbf{K}\right] + \left[\mathbf{R}_0 \frac{d\mathbf{K}}{dt}\right] + \frac{d\mathbf{N}_0}{dt},$$

(65.6) га кўра бу қуйидагига тенг бўлиши керак:

$$\mathbf{M} = \sum_i \left[\mathbf{R}_i \mathbf{F}_i\right] = \sum_i \left[(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i)\, \mathbf{F}_i\right] = \left[\mathbf{R}_0 \sum_i \mathbf{F}_i\right] + \sum_i \left[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i\right] =$$
$$= [\mathbf{R}_0 \mathbf{F}] + \mathbf{M}_0.$$

$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt}$ эканлигини ҳисобга олиб, (65.10) муносабатни топамиз. Унинг кўрсатишича, O қўзғалмас қутбни ихтиёрий танлаш мумкин, у ҳолда $\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = 0$, ҳамда ҳаракат моментининг ўзгариш қонуни одатдаги (65.6) кўринишни олади; бу ҳол O қутб зарралар системасининг (жисмнинг) ҳаракат миқдори векторига, яъни массалар марказининг тезлигига паралел ҳаракатланаётган $\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \parallel \mathbf{K}$ ҳолда ва ниҳоят, $m\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{K}$ — системанинг инерция маркази O қутб сифатида олинганда ўринли бўлади. $\boldsymbol{N}_0$ ни аниқлашда қўзғалмас саноқ системага нисбатан тезлик (ва ҳаракат миқдори) ҳисобга олинишини айтиб ўтиш лозим. Бироқ, агар зарранинг инерция маркази билан илгариланма ҳаракатланувчи саноқ системага нисбатан тезлиги ҳисобга олинса, йиғинди момент ўша $\boldsymbol{N}_0$ катталикнинг ўзига тенглигини кўрсатиш мумкин.

Зарранинг шу саноқ системага нисбатан ҳаракат миқдори (импульси) $\boldsymbol{k}_i$ га тенг бўлсин, у ҳолда

$$\boldsymbol{K}_i = m_i \frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt} + \boldsymbol{k}_i,$$

бунда $\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt}$ — массалар марказининг тезлиги. Бинобарин,

$$\boldsymbol{N}_0 = \sum_i \left[\boldsymbol{r}_i\, \boldsymbol{K}_i\right] = \sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \left(m_i \frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt} + \boldsymbol{k}_i\right)\right] =$$

$$= \left[\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt}\right] + \sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{k}_i\right] = \sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{k}_i\right].$$

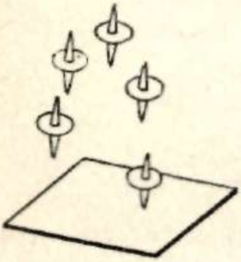
O қутб — зарралар системасининг масса маркази бўлгани туфайли $\sum\limits_i m_i \boldsymbol{r}_i = 0$. Шу сабабли массалар марказининг ҳаракат қонуни (65.7) зарралар системаси учун ҳам, қаттиқ жисм учун ҳам ҳамма вақт ўринлидир.

66-§. Гироскоплар

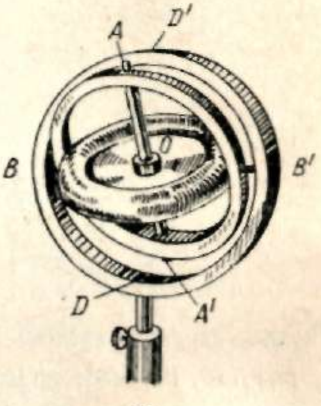
Жисм бир ўққа нисбатан тез айланиш, бошқаларига нисбатан секин айланиш бажараётган ҳолларда ҳаракат миқдори моментининг йўналишини соддагина тақрибан аниқлаш мумкин. Бу ҳолат жисмнинг бу ҳоллардаги ҳаракат қонунларининг таҳлилини анча соддалаштиради.

Пилдироқ ва гироскопларнинг айланишида юз берувчи физикавий ҳодисалар одатда юқорида кўрсатилган шароитларда содир бўлади. Шунинг учун гироскоп ҳаракат қонунларининг элементар таҳлилини ўтказиш нисбатан енгилдир.

Болалар ўйинчоғи—пилдироқ (юла) ҳаммага маълум. Пилдироққа ўқ атрофида тез айланиш бериб ҳар ким болалигида ўз ўқининг ўткир учида турган пилдироқнинг ажойиб турғунлигини кузатган. Пилдироқни картон варақ устида айлантириб юбориб, уни юқорига ирғитишимиз мумкин. Учиш пайтида пилдироқ ўз ўқининг йўналишини сақлайди ва учи билан картонга тушаётиб, ҳали ўз ўқи атрофида етарлича айланиш тезлигига эга бўлса, барқарор туришда давом этади (182-расм). Бу барча ҳодисалар ҳаракат миқдори моментининг ўзгариш қонунлари ((65.8) формула) билан тушунтирилиб, улар ҳақида гироскопларнинг ҳаракат қонунларини таҳлил қилаётганда қуйида гапирамиз. Айланиш ўқига нисбатан симметрик бўлган ва ўз ўқи атрофида тез айлана оладиган жисм (одатда диск) *гироскоп* деб аталади. Гироскоп айланишининг асосий қонуниятларини аниқлаш учун уни дискнинг масса марказида маҳкамлаб қўйиш маъқулдир. Бундай бириктиришни, 183- расмда кўрсатилганидек, дискни маҳкамлаш иккита ҳалқада «кардан» осмаси воситасида амалга оширилади.



182-расм.

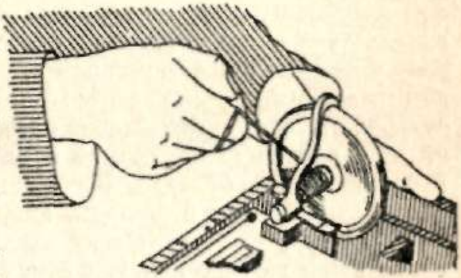


183- расм.

Дисксимон жисм — гироскоп AA' ўққа бириктирилган бўлиб, у ички ҳалқада маҳкамланган подшипникларда мумкин қадар кичик ишқаланиш билан айланади. Ички ҳалқа ўз навбатида ташқи ҳалқада маҳкамланган подшипникларга таянувчи BB' ўқ атрофида айлана олади. BB' ўқни шартли равишда горизонтал деб хисоблаймиз, горизонтал ўқ гироскоп ўқи билан 90° бурчак ташкил этади. Ташқи ҳалқа тагликнинг қўзғалмас подшипникларидан ўтувчи DD' ўқ аттофида эркин айлана олади. DD' ўқ горизонтал ўққа тик бўлганидан уни ҳам шартли равищда «вертикал» деб ҳисоблаймиз. Демак, AA', BB' ва DD' барча учта ўқнинг кесишиш нуқтаси ҳамма вақг гироскопнинг масса марказига мос тушади.

Агар ҳалқалар ўз ўқларига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда диск ва ҳалқалар, оғирлик кучларининг умумий ташкил этувчиси учта ўқнинг кесишиш нуқтасига қўйилганлиги сабабли ҳар қандай ҳолатда мувозанатда қолади. Бундай «бириктириш»да гироскопни массалар марказида бириктирилган симметрик қаттиқ жисм деб қараса бўлади. Гироскопнинг ўқи горизонтал ва вертикал ўқлар атрофида бурилиб, фазода исталган йўналишни олиши мумкин. Бундан ташқари, диск ўз ўқига нисбатан исталган бурчакка бурилиши мумкинлиги сабабли, O нуқта қўзғалмай қолган ҳолда у исталган ҳолатни эгаллаши мумкин. Бундай гироскопни, агар албатта, барча учта ўқнинг подшипникларидаги ишқаланиш кучларини ва ҳалқаларнинг ҳаракат миқдорлари моментларини назарга олмаслик мумкин бўлса, *эркин гироскоп* деб юритилади.

Диск ўз ўқида айланмаётган вақтда, биз жуда кичик таъсир кўрсатиш билан (чунки подшипниклардаги ишқаланиш минимумга келтирилган) дискни ҳалқалар билан биргаликда исталган ўқ атрофида осонликча айлантира оламиз. Энди гироскоп дискига, ўққа ўралган ип воситасида тез айланиш берайлик (184- расм). Гироскоп муайян ҳаракат миқдори моментига эга бўлади; гироскопнинг симметрия ўқи фазода ҳаракатсиз қолганидан, равшанки, ҳаракат миқдори моменти N ўқ йўналишига мос тушади ва *катталиги жиҳатидан* $N = I\omega$ —инерция моменти I нинг бурчак тезлик ω га кўпаймасига тенг.



184- расм.

Гироскоп ўқининг йўналишини билиб, бутун асбобни таглигидан ушлаб кўтарамиз ҳамда тагликни турли тарзда бурамиз, бутун асбобни ҳам кўтарамиз, ҳам туширамиз; барча манипуляцияларда гироскоп дискининг ўқи ўз йўналишини ўзгартирмаслиги, гироскоп ўқи фазода доимий йўналишни сақлаши кўзга ташланади. Энди таёқча *билан ички ҳалқани урсак, ҳатто нисбатан кучли зарбалар таъсирида* ҳам гироскоп ўқи ҳаракатланмаслигини, ўз йўналишини ўзгартирмаслигини, гироскоп гўёки қотиб қолгандай туюлишини кўрамиз. Агар гироскоп айланмаётганида шундай турткилар берилса, бу ҳолда унинг ўқи бундай турткидан кейин ҳалқа билан биргаликда тез айланишга келган бўларди.

Бу ҳодисаларни нуқтада бириктирилган қаттиқ жисмнинг ҳаракати асосий қонуни асосида осон тушунтириш мумкин. Подшипниклардаги ишқаланиш кучлари моментлари ғоят кичиклиги ва оғирлик кучининг бириктириш нуқтасига нисбатан моменти нолга тенглиги *сабабли асбобнинг ҳаракати вақтида айланувчи дискка ташқи* кучларнинг моментлари таъсир қилмайди; демак, ҳаракат миқдори моменти вектори доимий қийматни ва фазода доимий йўналишни сақлайди. Гироскопнинг ўқи бошда йўналиши жиҳатдан ҳаракат миқдори моментига мос келади ва кейин ҳам у билан мос келади ҳамда фазода доимий йўналишни сақлайди. Худди шу сабабли учаётган пилдироқ ҳам (182- расмга қ.) ўз ўқи йўналишини сақлайди. Учиш вақтида пилдироқ эркин бўлади, массалар марказига нисбатан оғирлик кучи моменти нолга тенг, оғирлик кучининг бир ўзи жисмнинг айланишини ўзгартира олмайди. Шу сабабли пилдироқ учаётганда ҳаракат миқдори *моментини катталиги ва йўналиши бўйича доимий сақлайди.*

Гироскоп ҳалқасига берилган зарба dt вақт давомида бирор M

моментни юзага келтириб, шу вақт ичида ҳаракат миқдори моменти бирор dN орттирма олади, бироқ гироскоп тез айланаётгани ва каттагина ҳаракат миқдори моментига эга бўлганидан ҳаракат миқдорининг орттирмаси момент йўналишини жуда кичик $d\alpha$ бурчакка ўзгартиради. Қўшимча dN ҳаракат миқдори моменти N га нисбатан жуда кичик ҳамда, ҳатто dN ўзгариш N га тик бўлганида ҳам гироскопнинг ўқи ҳаракат миқдори моментининг йўналишидан чекли бурчакка оғмас эди; бинобарин, амалда у қўзғалмай қолади.

Назарий жиҳатдан бундай эркин гироскопдан компас сифатида фойдаланиш мумкин эди. Агар ўқнинг подшипникларида ва ҳалқаларнинг ўқларида ишқаланишни нолга тенг қилиш мумкин бўлса эди, у ҳолда бундай гироскопнинг ўқи, Ернинг айланиши ва ҳаракатига қарамай, ҳамма вақт муайян йўналишни кўрсатиб турган бўларди. У ҳолда гироскопнинг ўқи Ернинг ҳаракатида иштирок этмайди ва ҳамма вақт доимий йўналишни масалан, Қутб юлдузини кўрсатиб турган бўларди. Бироқ, ишқаланишни тўла йўқотиб бўлмайди ҳамда кичик бўлса ҳам, ишқаланиш кучлари моментларининг мавжудлиги узоқ муддат вақт ичида ҳаракат миқдори моментининг йўналишини ва гироскоп ўқи йўналишини бошланғич вазиятдан четга «олиб кетади». Шунинг учун эркин гироскопдан йўналишни кўрсатувчи компас сифатида фақат қисқа муддатдагина фойдаланилади. Компаслар сифатида бошқа тип гироскоплар ишлатилади.

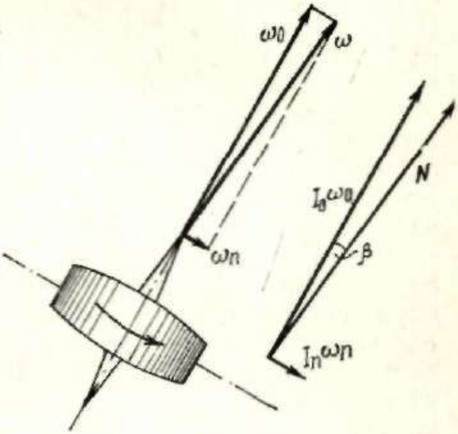
67-§. Гироскоп ўқининг ҳаракати

Бунда айланаётган гироскоп ўқининг ҳаракати қаралади. Гироскоп диски бир нечта ҳаракатда бўла олади, бири — ўз ўқи атрофида ҳаракат билан, қолганлари шу ўқнинг ҳаракати билан боғлиқдир. Бу ҳолда ҳаракат миқдори моменти гироскопнинг айланиш ўқига мос тушмайди. Лекин гироскоп диск ўқи атрофида жуда тез айланиш билан бир қаторда диск ўқининг жуда секин айланишида иштирок этаётган бўлса, у ҳолда ҳаракат миқдори моменти тақрибан ҳамма вақт айланаётган дискнинг ўқига мос тушади дейиш мумкин.

Масалан, гироскоп билан одатдаги тажрибаларда диск секундига бир неча ўн (ва ундан ортиқ) айланишга тенг бурчак тезлик билан айланади, ўқнинг ўзининг айланиши эса 10 секундда 1 айланишдан секинроқ юз беради. Бундай ҳаракатларда ҳаракат миқдори моменти векторининг йўналиши ўқнинг йўналишидан $^1/_{100}$ бурчак ўлчовидан камроққа ёки 1° дан камга фарқ қилади.

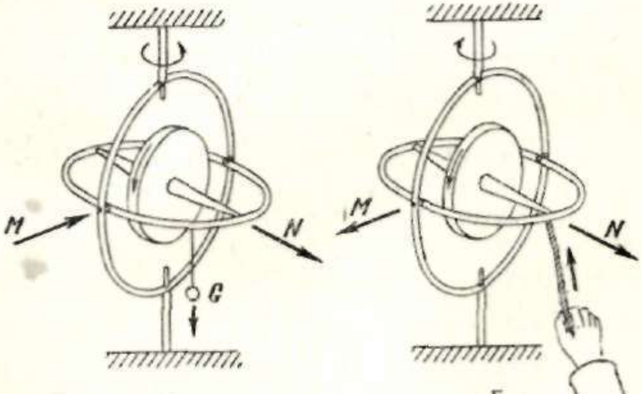
Ҳақиқатдан ҳам, 64-§ да кўрсатилганидек, ҳаракат миқдори моментини ҳамма вақт жисмнинг бош ўқлари йўналишларига ажратиб қараш мумкин ва бу ҳолда унинг ташкил этувчиларини жисмнинг тегишли инерция моментларининг бурчак тезликнинг ташкил этувчиларига кўпайтмалари сифатида осон ҳисоблаш мумкин. Дискнинг айланиш ўқи ва унга тик ўқлар бош ўқлар бўлади.

Оний айланиш тезлиги ω ни ω_0 ва $\omega_{\text{п}}$ ташкил этувчиларга ажратамиз (185-расм). У ҳолда дискнинг диск ўқига нисбатан ва унга тик ўққа нисбатан инерция моментларини (I_0 ва $I_{\text{п}}$) билган ҳолда N нинг йўналишини ҳамда N билан айланиш ўқи ёки ω_0 орасидаги β бурчакни аниқлаш мумкин. $I_0 > I_{\text{п}}$ эканлиги маълум, у ҳолда $\beta < \operatorname{arctg} \frac{\omega_{\text{п}}}{\omega_0}$. Шунинг учун амалда ҳаракат миқдори моменти вектори N билан ω_0 ўқнинг йўналишлари орасидаги фарқ жуда кичик ва уни назарга олмаслик асосий хулосаларга таъсир кўрсатмайди. Бундан буён биз ҳамма жойда N амалда ω_0 ға мос тушади деб хисоблаймиз.



185-расм.

Гироскоп диски ўқини горизонтал жойлаштирамиз ва унга тез айланиш бериб, диск ўқи яқинида ички ҳалқага кичик юкча осамиз (186-*а* расм). Юкчанинг оғирлик кучи G таъсирида ҳалқа пастлашмайди, балки диск ўқи ва ташқи ҳалқа билан биргаликда вертикал ўқ атрофида соат стрелкаси ҳаракат йўналишига тескари секин айлана бошлайди. Агар юкчани олсак, у ҳолда айланиш дарҳол тўхтайди. Агар юкчани орттирсак, ҳалқанинг вертикал ўқ атрофида айланиш тезлиги ортади. Юкчани оламиз ва юкча осилган жойда ички ҳал-



а *б*

186-расм.

қани таёқча билан енгилгина босамиз — ҳалқа худди юкча таъсирида бўлганидек, четга кета бошлайди. Таёқча билан юқорига босамиз *(186-б расм) — ҳалқа яна четга кета бошлайди, лекин бунда у* таёқча билан пастга босгандаги томонга тескари йўналишда ҳаракатланади.

Биринчи қарашда гироскопнинг бундай табиати жуда ғалати туюлади. Ҳақиқатдан ҳам, жисмга юқорига томон боссак, у горизонт бўйлаб, кучнинг таъсир чизиғига тик йўналишда юради. Сўнгра «инерция» нинг йўқлиги аломатдир: биз таёқча билан итараётганимизда ҳаракат бор эди, таёқчани олдик — ҳаракат шу заҳоти тўхтади.

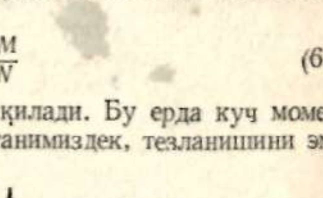
Гироскоп ўқининг куч таъсирида, масалан, юкчанинг оғирлик кучи таъсирида ҳаракатини *прецессия* дейилади ва қаттиқ жисмнинг аввал таърифланган ҳаракат қонуни асосида осон тушунтирилади (*(65.6) формулага қ.). Ўқи горизонтал бўлган айланаётган дискка* юкчанинг оғирлик кучи моменти таъсир қилади; шу сабабли дискнинг ҳаракат миқдори моменти ўзгариши лозим. (65.6) қонунга кўра, ҳаракат миқдори моментининг dt вақт ичидаги $d\mathbf{N}$ орттирмаси $\mathbf{M}dt$ га тенг бўлади. Дискнинг бириктириш нуқтасига (учта ўқнинг кесишиш нуқтасига) нисбатан оғирлик кучининг моменти горизонтал текисликда ётувчи $\mathbf{M}$ вектор билан ифодаланади. Ҳаракат миқдори моменти ҳам диск ўқи йўналиши билан мос тушувчи ҳамда горизонтал текисликда ётувчи вектордан иборат бўлади. $d\mathbf{N} = \mathbf{M}dt$ орттирма ҳаракат миқдори моменти $\mathbf{N}$ га тик йўналган (187-расм). Демак, dt вақт ичида ҳаракат миқдори моменти вектори:

$$d\alpha = \frac{Mdt}{N} \tag{67.1}$$

бурчакка бурилади ва у билан бирга гироскоп диски ўқи ҳам ўша $d\alpha$ бурчакка бурилади. (67.1) формула $\mathbf{N}$ йўналиши бурилиш бурчагининг *аниқ қийматини ва гироскоп ўқи бурилишининг тақрибий* қийматини беради. Куч моментининг таъсири доимийлиги ва ҳамма вақт ҳаракат миқдори моментига тик йўналганлиги сабабли дискнинг ўқи вертикал ўқ атрофида

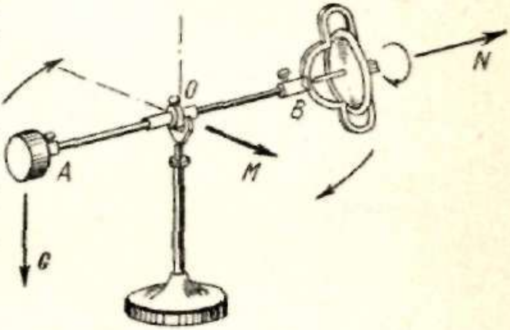
$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{M}{N} \tag{67.2}$$

бурчак тезлик билан айланма ҳаракат қилади. Бу ерда куч моменти гироскоп диски ўқининг, биз одатланганимиздек, тезланишини эмас, балки айланиш тезлигини белгилайди ва шунинг учун кучнинг таъсирини тўхтатиш ўқ ҳаракатининг тўхташига олиб келади. Ўқнинг айланиш бурчак тезлиги Ω ни прецессия бурчак тезлиги дейилиб, у кучлар моментининг гидроскоп ҳаракат миқдори моментига нисбатига тенг.



187- расм.

Агар куч шундай қўйилганки, унинг моменти ҳаракат миқдори моментига тик бўлмаса, масалан, юкча ички ҳалқага ёндан осилган бўлса, у ҳолда прецессия тезлигини аниқлаш учун G ташқи куч моменти векторининг фақат ҳаракат миқдори моментига тик ташкил этувчисини олиш лозим, яъни $dN = M_{\text{п}}\, dt$. Момент M_0 нинг диск ўқи бўйича йўналган ташкил этувчиси ташқи ҳалқанинг таянчи таъсири билан мувозанатлашади.



188- расм.

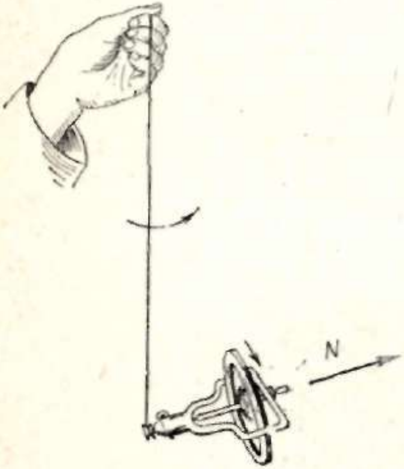
Гироскоп ўқи учининг ҳаракати кучлар йўналишида эмас, балки кучлар моменти йўналишида юз бериши сабабли гироскопнинг «ғайри-табиий» феъл-атворини тушуниш мумкин.

Гироскопнинг 188- расмда кўрсатилган бир оз бошқачароқ, «кардан» осмасида ҳам худди шундай ҳодисаларни кузатиш мумкин. Гироскоп дискининг айланиш ўқи ўрнатилган ҳалқа AB стерженда маҳкамланган бўлиб, у айланиш ўқининг давомидан иборат. Стержень горизонтал ўқда тагликли вертикал айланиш ўқининг ярим ҳалқасига таянувчи O нуқтада ўрнатилган. Барча учта айланиш ўқлари O нуқтада кесишади, шу сабабли, гироскопнинг диски, агар унинг ўқидаги O нуқта маҳкамланган деб ҳисобланса, фазода исталган ҳолатни олиши мумкин. Дискли ҳалқани горизонтал ўқ атрофида бурашга интилувчи оғирлик кучи моменти AB стерженнинг давомида жойлашган G посанги кучнинг моменти билан мувозанатланади.

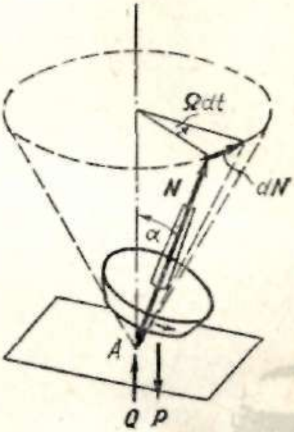
Посанги балансининг бузилиши диск ўқини горизонтал ўқ атрофида айлантирувчи ва гироскоп прецессиясини вужудга келтирувчи моментни беради. Агар ричагнинг гироскоп турган томони босиб кетса, айланиш бир томонга бўлади; агар посанги босиб кетса, айланиш йўналиши ўзгаради.

Прецессияни яна қуйидаги тарзда намойиш қилиш мумкин. Ипга айланувчи гироскопли ҳалқани (189- расм) ёки гироскопли ҳалқа бириктирилган стерженни осиб қўйиб, айланаётган дискнинг ўқини вертикалга бурчак ҳосил қилиб йўналтирилади. Айланмаётган диск ҳолида бўладиганидек, гироскоп пастга «тушиб» кетишга интилмай, прецессион ҳаракат қилади.

Прецессияни пилдироқда ҳам осон кузатиш мумкин. Аниқроқ қилиб айтганда, прецессия пилдироқда ҳамма вақт мавжуд, бироқ катта айланиш тезликларида, прецессия тезлиги жуда кичик бўлди. Ҳақиқатдан ҳам, пилдироқ A учликка таяниб (190- расм), бу учлик унинг масса марказидан пастда жойлашган бўлади, шунинг учун оғишда жуфт кучлар: таянч реакцияси кучлари $\boldsymbol{Q}$ ва оғирлик кучи $\boldsymbol{P}$, яъни прецессияни юзага келтирувчи момент вужудга келади.



189- расм.



190- расм.

Пилдироқ ўқи шундай прецессион ҳаракат қиладики, у учи A нуқтада бўлган конуснинг сиртида жойлашади ҳамда у билан бирга ҳаракат миқдори моменти вектори ҳам ҳаракатланади[1]. Агар h — учликдан пилдироқнинг массалар марказигача масофа, I — пилдироқнинг ўқига нисбатан инерция моменти, ω — айланиш бурчак тезлиги бўлса, у ҳолда жуфт кучнинг моменти $M = Qh\sin\alpha = Ph\sin\alpha$ бўлади, ҳаракат миқдори моментининг орттирмаси $dN = Mdt = \Omega dtN\sin\alpha$ бўлади, бунда Ω — прецессия тезлиги (190- расмга қ.). N ни $I\omega$ га алмаштирсак, прецессия тезлигини ҳосил қиламиз.

$$\Omega = \frac{Ph\sin\alpha}{I\omega\sin\alpha} = \frac{Ph}{I\omega}. \tag{67.3}$$

Пилдироқнинг айланиш тезлиги ω жуда катта бўлганда прецессия тезлиги кичик бўлади. Пилдироқнинг айланиши сусайганда ҳамма вақт прецессия кузатилади.

Лекин, юқорида кўрсатилган жуфт кучлар моментидан ташқари, пилдироққа яна ишқаланиш кучи моменти ҳам таъсир қилиб, унинг таъсири шундайки, пилдироқнинг ўқи вертикал ҳолатни олишга интилади. Ҳақиқатдан ҳам, пилдироқни горизонтга ўткир бурчак ҳосил қилдириб айлантириб юбориб, бир оз вақтдан кейин унинг ўқи вер-

---

[1] 190- расмда пунктир орқали боши $\boldsymbol{A}$ нуқтада жойлашган $\boldsymbol{N}$ вектор учи чизадиган фаразий конус кўрсатилган.

тикал бўлиб қолганини кўрамиз. Пилдироқ ўқининг учи тўмтоқроқ бўлганда тикланиш эффекти айниқса сезиларли бўлади.

N вектори ўқ бўйича юқорига йўналган пилдироқнинг учлигини *катталаштирилган ҳолда қарайлик* (191-расм). *Учликнинг сиртга B* тегишиш нуқтаси пилдироқ ўқида жойлашмайди, шунинг учун учликка қўйилган, чизма текислигидан биз томон йўналган ишқаланиш кучи пилдироқнинг массалар марказига нисбатан $M_{\text{ишқ}}$ момент беради. $M_{\text{ишқ}}$ момент чизма текислигида жойлашган ва вертикалга томон йўналганлиги сабабли пилдироқ ҳаракат миқдори моментининг орттирмаси $dN = M_{\text{ишқ}}\,dt$ ҳам вертикал томон йўналган ҳамда пилдироқнинг ўқи текисликка тик жойлашишга интилади.

191-расм.

Қияланган пилдироққа иккита момент: жуфт куч (таянч реакцияси ва оғирлик кучи) моменти ва ишқаланиш кучи моменти таъсир қилади; ҳаракат ҳамма вақт, агар ҳавонинг қаршилик кучини назарга олмаса, шу иккита моментларнинг мавжудлигида содир бўлади.

68-§. Гироскопик кучлар

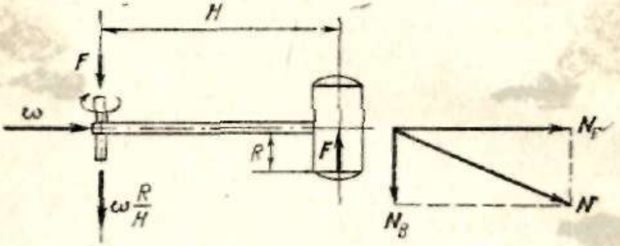
Гироскопнинг прецессиясига оид тажрибалардан яна шундай хулоса чиқариш мумкин: агар биз гироскоп ўқи муайян йўналишда бурилаётганини кўрсак, бу ҳолда, демак, гироскопга моменти гироскоп ўқи мусбат учининг[1] ҳаракати йўналишида кучлар таъсир этаётган экан.

Масалан, 170-б расмда кўрсатилган тегирмон тошнинг ҳаракати вақтида цилиндрик каток (югурик) «югураётган» сирт томонидан юқорига йўналган куч таъсир қилиб, унинг моменти югурик ўқининг горизонтал текисликда бурилишини белгилайди; югурик томонидан сиртга эса тенг ва қарама-қарши куч таъсир қилади. Бу гироскопик кучнинг катталиги прецессия қонуни (67.2) бўйича аниқланиши мумкин. Агар югурикнинг ўз ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги ω га тенг бўлса, у ҳолда югурик ўқининг айланиш тезлиги $\omega\frac{R}{H}$ бўлади (192-расм) (думаланиш сирпанишсиз юз беради, деб ҳисоб.

---

[1] Гироскоп ўқининг мусбат учи деб ҳаракат миқдори моменти стрелкаси чиқаётган учини айтилади. Ҳаракат миқдори моментининг ва айланиш бурчак тезлигининг мусбат йўналишини *бир хил* йўл билан, ҳамма вақт «ўнг винт» қоидаси бўйича аниқлаймиз.

лаймиз). Катокни вертикал ўқдан H масофада турган R радиусли бир жинсли цилиндр деб қараш мумкин. Югурикнинг сиртга босим кучи унинг оғирлигидан анча катта бўлиши мумкинлиги келгуси ҳисоблардан кўрилади; шу сабабли ҳам ушбу конструкциядан фойдаланилади.



192- расм.

Югурикнинг ҳаракат миқдори моменти ҳамма вақт айланиш ўқидан ўтувчи текисликда ётади ҳамда вертикалга бирор бурчак ҳосил қилиб йўналган (192- расмга қ.). Бизга ҳаракат миқдори моментининг фақат горизонтал ташкил этувчисини билиш лозим:

$$N_{\text{г}} = I\omega = \frac{1}{2} m R^2 \omega, \tag{68.1}$$

бунда m — каток массаси. Равшанки, ҳаракат миқдори моментининг горизонтал ташкил этувчисигина ўз йўналишини ўзгартира боради; вертикал ташкил этувчи N_B катталиги ва йўналиши бўйича ўзгаришсиз қолади. Шунинг учун dN югурик айланиш ўқи йўналишининг ўзгаришидан иборат бўлган горизонтал ташкил этувчининг орттирмасига тенг. Шу сабабли

$$dN = N_{\text{г}} \omega \frac{R}{H} dt = FH\, dt. \tag{68.2}$$

Бу ерга $N_{\text{г}}$ нинг (68.1) дан қийматини қўйсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \frac{R}{H} = FH; \tag{68.3}$$

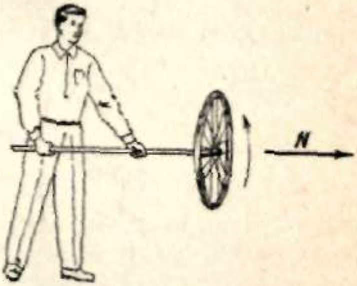
бундан F куч қуйидагига тенг:

$$F = \frac{1}{2} m \frac{R^3}{H^2} \omega^2. \tag{68.4}$$

Демак, катокнинг сиртга босим кучи («янчувчи» куч) унинг оғирлигидан F куч катталигича ортиқ бўлади.

Гироскопнинг ёки тез айланаётган жисмнинг ўқини буришда қўйиш зарур бўлган куч моментини, қўлимизга айланаётган жисмнинг ўқини, масалан, велосипед ғилдираги айланаётган ўқни (193- расм) олиб, шу ўқни бирор йўналишда буришга интилсак, жуда осон сезиш мумкин. Сиз дарҳол ғилдиракнинг қўлингиздан тик йўналишда «чиқиб» кетаётганини пайқайсиз; ўқни қўлда тутиб туриш учун анчагина зўриқиш зарур бўлади; буриш қанча тез бўлса, бу зўриқиш шунча кўпроқ бўлади.

Машина бурилаётганда унинг тез айланаётган қисмлари ўқларидаги подшипниклар худди шундай гироскопик зўриқишларни сезади. Масалан, кемадаги трубина валининг подшипниклари, самолётдаги трубина валининг ёки винтнинг подшипниклари кема ёки самолётнинг манёвраларида анчагина зўриқиш сезади; шунинг билан бирга, манёврда бурилиш бурчак тезлиги қанча катта бўлса, бу зўриқиш шунча катта бўлади.

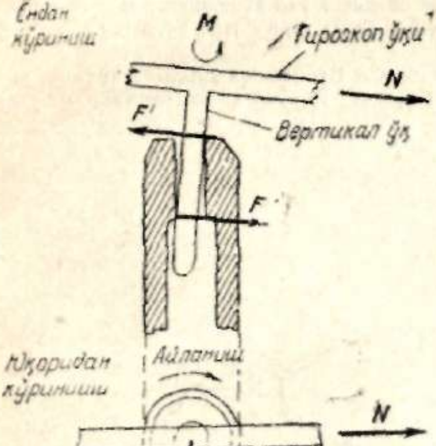


193- расм.

69-§. Эркин бўлмаган гироскоп ўқининг айланиши

Агар гироскопнинг битта эркинлик даражасини камайтирсак, ёки у ўқлардан бири атрофида айлана олмайдиган қилиб маҳкамласак, бу ҳолда бошқа ўқ атрофида айланаётганда «қаршилик» кўрсатмай, ўзини одатдаги жисм каби тутади, куч таъсир қилганда унинг таъсири йўналишида бурилади.

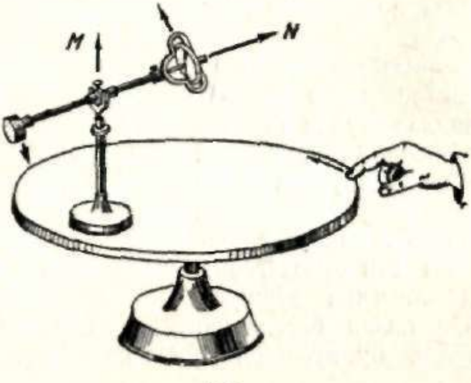
188- расмда кўрсатилган гироскопнинг горизонтал ўқини маҳкамлаб қўямиз. У ҳолда кичик турткидан сўнг гироскоп вертикал ўқ атрофида айлана бошлайди. Шунингдек, агар фақат вертикал ўқни маҳкамлаб қўйсак, у ҳолда гироскоп турткидан сўнг, горизонтал ўқ атрофида ҳаракатлана бошлайди. Бунинг сабаби шундаки, ҳаракат миқдори моментини (ёки гироскоп ўқини) буриш учун зарур бўлган кучлар моменти ташқаридан қўйилган кучлар томонидан эмас, балки атрофида гироскопли стержень билан айлана олиши мумкин бўлган ўқ подшипнигининг босимидан вужудга келади.



194- расм.

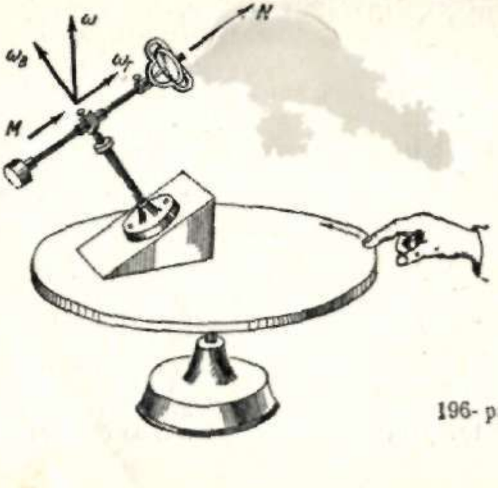
Биз таёқча билан гироскопли стерженга горизонтал йўналишда босайлик. Агар гироскоп эркин бўлса эди, таёқчанинг куч моменти $M_т$ пастга йўналганлиги сабабли, ҳалқа гироскоп билан горизонтал ўқ атрофида пастга тушадиган тарзда айлана бошлаган бўларди. Бироқ, горизонтал ўқ маҳкамланган ҳолда бу ҳаракатга вертикал ўқнинг подшипниги, 194- расмда схематик кўрсатилганидек, халақит беради: подшипник вертикал ўққа M моменти горизонтал ўққа нормал бўлган F ва F' кучлар билан босади ҳамда унинг таъсири гироскоп ўқининг худди таёқчанинг кучи таъсир қилаётган йўналишда кўчишини юзага келтиради.

Гироскопнинг вертикал ўқини маҳкамлаб қўямиз ва унинг таглигини айланаётган дискка маҳкамлаб ўрнатамиз (195- расм). Дискнинг гироскоп билан биргаликдаги айланишини кузатаётганда гироскоп ўқининг дискнинг ва гироскопнинг айланиш йўналишлари мос тушадиган тарзда бурилишга интилишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Тушунтирилиши жуда содда: диск айланаётганда гироскопга таглик ва вертикал ўқ орқали йўналиши дискнинг айланиш ўқига параллел бўлган M куч моменти узатилади. Бу момент гироскопнинг айланиш ўқи йўналиши бўйича M моментга, дискнинг айланиш ўқи йўналишига мос тушгунча ёки гироскоп стержени чеклагичга етгунча фақат горизонтал ўқ атрофида айланишни вужудга келтира олади.



195- расм.

Энди гироскопнинг таянчини катта дискка 196- расмда кўрсатилганидек, қия қилиб ҳамда «горизонтал» ўқни гироскоп фақат ўз ўқига ва «вертикал» ўққа



196- расм.

нисбатангина айлана оладиган қилиб маҳкамлаймиз. Бундай қурилмада гироскопга ҳамма вақт дискнинг айланиш ўқидан ўтувчи вертикал текисликда ётувчи кучлар моменти таъсир қилади. Ҳақиқатдан ҳам, таянчнинг $\boldsymbol{\omega}$ бурчак тезлигини иккига—$\boldsymbol{\omega}_{\text{в}}$ ва $\boldsymbol{\omega}_{\text{г}}$ га ажратамиз; «вертикал» ўқ эркин бўлгани сабабли $\boldsymbol{\omega}_{\text{в}}$ тезлик билан айланиш билинмайди, $\boldsymbol{\omega}_{\text{г}}$ тезлик билан айланиш эса йўналиши жиҳатдан $\boldsymbol{\omega}_{\text{г}}$ га мос тушувчи M моментни юзага келтиради; $\boldsymbol{\omega}_{\text{г}}$ эса албатта, юқорида кўрсатилган текисликда ётади.

Дискнинг айланиш йўналишини алмаштирганда гироскоп бошқа томонга бурилиши туфайли бу тажрибалар жуда кўргазмалидир. Улар гироскопик компас ясаш мумкин эканлигини кўрсатади.

70-§. Эркин гироскопнинг ҳаракати

Ташқи кучларнинг моменти $\boldsymbol{M} = 0$ шартда, «эркин» гироскоп — массалар марказида маҳкамланган гироскоп ҳаракатига доир масаланинг аниқ ечилиши мисолини келтирамиз. Бу ҳолда ҳаракат миқдори моменти

$$\boldsymbol{N} = \text{const}, \quad \frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = 0. \tag{70.1}$$

Бу шартни ёзишдан аввал, координаталарнинг айланувчи системасида векторнинг ҳосиласига оид қоидани эслаб олайлик (48-§). $\boldsymbol{N}$ векторнинг ҳосиласи (70.1) да координаталарнинг инерциал (ҳаракатсиз) системасига нисбатан олинади. $\boldsymbol{\omega}$ бурчак тезлик билан айланаётган гироскоп жисми билан боғланган саноқ системага нисбатан ҳосила, умуман айтганда, қуйидагига тенг:

$$\frac{(d\boldsymbol{N})_0}{dt} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dt} + [\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\omega}]$$

ёки бизнинг ҳолда

$$\frac{(d\boldsymbol{N})_0}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{N}] = 0. \tag{70.2}$$

Бу тенглама массалар маркази нуқтасида маҳкамланган эркин айланаётган қаттиқ жисмнинг ҳаракатини тўлиқ белгилайди. $\boldsymbol{N}$ вектор фазода доимий ва қўзғалмас, лекин ўз йўналишини айланувчи жисмга нисбатан ўзгартиради, шунга кўра жисмнинг ҳаракатини аниқлаш мумкин. Албатта, $\boldsymbol{\omega}$ ва $\boldsymbol{N}$ мос тушадиган ҳолатни истисно қилгандагина шундай бўлади; бунда $\frac{(d\boldsymbol{N})_0}{dt} = 0$ ва жисм фазода ва жисмда $\boldsymbol{\omega}$ айланиш ўқини ўзгаришсиз сақлаган ҳолда айланади.

Жисмнинг бош инерция ўқларини координата ўқлари деб оламиз, ҳамда (70.2) тенгламани шу ўқларга проекцияларда ёзамиз. Проекциялар

$$N_1 = \lambda_1\omega_1, \; N_2 = \lambda_2\omega_2, \; N_3 = \lambda_3\omega_3$$

эканлигини эслатамиз, бунда λ_1, λ_2, λ_3 — жисмнинг бош инерция моментлари; N_1, ω_1 лар эса λ_1 моментли биринчи бош ўққа проекциялар ва ҳоказо. Бу системада λ_1, λ_2, λ_3 катталиклар доимийдир. Шунинг учун

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt}, \tag{70.3}$$

чунки

$$\frac{(d\boldsymbol{\omega})_0}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \text{ ва } (d\boldsymbol{N})_0 = dN_1\boldsymbol{n}_1 + dN_2\boldsymbol{n}_2 + dN_3\boldsymbol{n}_3,$$

бунда $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ — бош ўқлар йўналишларининг бирлик векторлари.

(70. 3) ни ҳисобга олган ҳолда (70.2) тенгламани бош ўқларга проекцияларда ёзса бўлади:

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 = 0,$$
$$\lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 N_1 - \omega_1 N_3 = 0$$
$$\lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = 0,$$

ёки

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\, \omega_3 (\lambda_3 - \lambda_2) = 0, \\ \lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_1 (\lambda_1 - \lambda_3) = 0, \\ \lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0. \end{aligned} \tag{70.4}$$

Бу тенгламаларни $\boldsymbol{M} = 0$ ҳолидаги *Эйлер тенгламалари* дейилади.

Умумий ҳолда бу тенгламаларнинг таҳлили етарлича мураккабдир. Биз фақат айланиш жисмидан иборат бўлган эркин гироскоп ҳолини қараймиз. Бундай гироскопнинг иккита бош инерция моментлари бирдай, айтайлик, $\lambda_2 = \lambda_3$ бўлсин. У ҳолда (70.4) тенгламалар шундай кўриниш олади:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_0 = 0, \quad \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_2\omega_0 = 0, \tag{70.5}$$

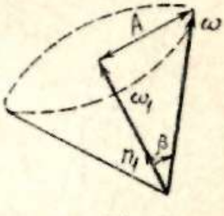
бунда $\omega_0 = \omega_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}$.

Биринчи тенглама $\omega_1 = \text{const}$ ни беради, $\boldsymbol{\omega}$ нинг биринчи бош ўққа (симметрия ўқига, фигуранинг ўқига) проекцияси вақт давомида доимий қолади. Демак, ω_0 доимий катталикдир ҳамда қолган тенгламалар жуфтини осон ечиш мумкин. Ўрнига қўйиш орқали ечимлар қуйидагича бўлишига осон ишонч ҳосил қилиш мумкин.

$$\omega_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_3 = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{70 6}$$

бунда A ва φ — бошланғич шартларга боғлиқ бўлган доимийлар.

Бу ечимни таҳлил қилиш билан жисмга нисбатан ω вектор катталиги бўйича доимий қолишини ва фигура ўқи атрофида конус бўйича (197-расм) ω_0 бурчак тезлик билан ҳаракат қилишини кўриш мумкин. $A = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$ катталик бошланғич шартларга боғлиқ, конуснинг β очилиш бурчаги эса A/ω_1 нисбат билан аниқланади. ω_0/ω_1 катталик фақат бош инерция моментларининг нисбатига, яъни гироскоп массасининг тақсимланишига боғлиқ.



$\mathrm{tg}\beta = A/\omega_1$

197-расм.

Бу ҳолда гироскоп ўқининг ҳаракатини тасаввур қилиш учун айланувчи системадан қўзғалмас саноқ системага ўтиш лозим. Буни қуйидаги йўл билан бажариш осон. (64.14) формулани эслайлик. Ҳамма вақт

$$\mathbf{N} = \lambda_1\omega_1\mathbf{n}_1 + \lambda_2\omega_2\mathbf{n}_2 + \lambda_3\omega_3\mathbf{n}_3,$$

гироскоп учун эса $\lambda_3 = \lambda_2$; у ҳолда

$$\mathbf{N} = \lambda_1\omega_1\mathbf{n}_1 + \lambda_2(\omega_2\mathbf{n}_2 + \omega_3\mathbf{n}_3) + \lambda_2\omega_1\mathbf{n}_1 - \lambda_2\omega_1\mathbf{n}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\,\omega_1\mathbf{n}_1 + \lambda_2\omega. \qquad (70.7)$$

Бундан, $\mathbf{n}_1$ (фигуранинг ўқи) $\mathbf{N}$ ва ω нинг битта текисликда ётиши кўриниб турипти. Бу ҳолни ва (70.7) тенгликни ҳисобга олиб, гироскоп ўқининг ҳаракатини аниқлаш мумкин. Бунинг учун (70.7) ни шундай кўчириб ёзамиз:

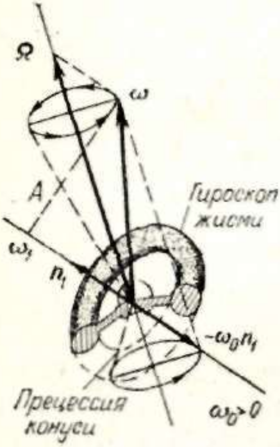
$$\omega = \frac{\mathbf{N}}{\lambda_2} - \omega_0\mathbf{n}_1, \qquad (70.8)$$

бунда $\frac{\mathbf{N}}{\lambda_2} = \Omega$ бурчак тезликнинг $\mathbf{N}$ нинг йўналишлари бўйича ташкил этувчиларидан иборат. Ω вектор катталиги ва йўналиши бўйича доимий қолади. ω ва $-\omega_0\mathbf{n}_1$ модуллари жиҳатидан доимий ва Ω дан ўтувчи текисликда ётганликлари туфайли улар Ω бурчак тезлик билан айланади ва векторлар орасидаги бурчак ўзгаришсиз қолади. Шунинг учун Ω гироскопнинг *прецессия тезлигидан* иборат. Прецессия манзаралари 198- ва 199-расмларда кўрсатилган.

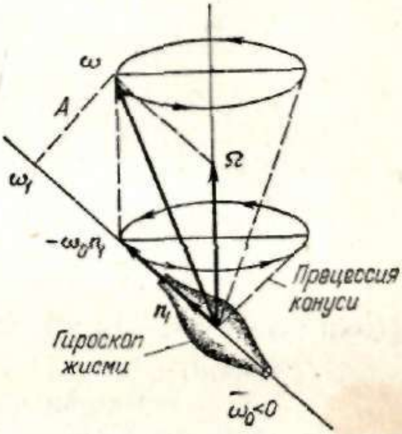
Бизга ω ва $\mathbf{n}_1$ (гироскоп ўқи) орасидаги β бурчак маълум деб ҳисоблайлик, у ҳолда: $\omega_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3}\,\omega_1$. $\lambda_1 > \lambda_2$ бўлганда (198-расм) $\omega_0 > 0$ бўлади, шу сабабли гироскопнинг ўз ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги $-\omega_0\mathbf{n}_1$ прецессия тезлиги Ω га қарама-қарши бўлади. Гироскоп ўқи ўз айланишига қарама-қарши йўналишда прецессияланади. $\lambda_1 > \lambda_2$ шарт гироскоп жисми симметрия ўқига нисбатан «пачоқланганлигини» акс эттиради, бу расмдан ҳам кўриниб турипти. Жисм ўқи бўйича «чўзилган» ҳол $\lambda_1 < \lambda_2$ учун 199-расмда прецессиянинг бошқача манзараси кўрсатилган.

$\omega_0 < 0$ бўлгани учун прецессия фигуранинг ўқи атрофидаги айланиш йўналишида юз беради. β бурчак (ёки A катталик) бошланғич шартларга боғлиқ.

Гироскоп ўқининг $\mathbf{N}$ импульс моменти йўналиши атрофида конус бўйлаб бундай ҳаракатини, оғирлик кучи доимий моменти таъсирида юзага кулувчи *псевдорегуляр* прецессиядан фарқли равишда, *регуляр* прецессия дейилади. Бу ҳолда, гироскопнинг ўқи атрофида хусусий айланишининг олдинги параграфда тахмин қилингандек, нисбатан катта тезликларида одатдаги кузатишлар вақтида псевдорегуляр прецессиянинг характери регуляр прецессия характеридан фарқ қилмайди. Псевдорегуляр прецессия вақтида, умуман айтганда, гироскоп ўқининг прецессия доиравий конуси сиртида кичик тебранишлари (*нутациялари*) мавжуд бўлади. Лекин улар катта айланиш тезликларида кўзга чалинмайди.



198- расм.



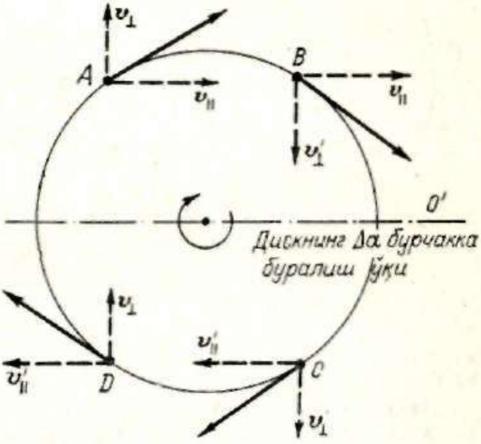
199- расм.

$A = 0$ ва $\mathbf{N}$ йўналиш жиҳатдан $\boldsymbol{\omega}$ га мос келганда прецессиясиз ҳаракат бўлиши ҳам мумкинлигини эслатиб ўтамиз. «Шар» гироскоп учун ҳамма вақт $\mathbf{N} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ бўлгани сабабли прецессия бўлиши мумкин эмас.

71-§. «Гироскопик» кучларни тушунтиришга доир

Гироскопик ҳодисаларнинг таҳлили учун қаттиқ жисмнинг 65-§ да чиқарилган ҳаракат қонуни, қисқача $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}$ формула орқали ифодаланувчи динамика қонуни асос қилиб олинган; биз ундан фойдаланиб, гироскоп феъл-атворининг барча хусусиятларини тушунтирдик. Бироқ, айланаётган диск алоҳида зарраларининг тезланишини қараш билан бунда гироскопга қандай кучлар таъсир қилиши мумкинлигини тасаввур қилишимиз мумкин; бу кучларни одатда «гироскопик» кучлар дейилади.

Айтайлик, айланаётган дискнинг ўқи dt вақт ичида қандайдир $d\alpha$ бурчакка бурилган бўлсин. Бунда дискнинг турли нуқталари қандай тезланишга эга бўлади? Атрофида дискнинг ўқи айланаётган OO_1 ўққа нисбатан t вақт моментида дискда симметрик жойлашган A, B, C ва D нуқталарни олайлик (200-расм). Танланган тўртта нуқтанинг тезликларини иккита ташкил этувчига: OO^1 ўққа параллел $(\boldsymbol{v}_{\parallel}, \boldsymbol{v}'_{\parallel})$ ва унга тик $(\boldsymbol{v}_{\perp}, \boldsymbol{v}'_{\perp})$ ташкил этувчиларга ажратайлик. A ва B нуқталар тезликларининг ҳар бирининг параллел ташкил этувчиси $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ га, C ва D нуқталар учун эса $\boldsymbol{v}'_{\parallel}$ га тенг; A ва D нуқталар тезликларининг ҳар бирининг вертикал ташкил этувчиси $\boldsymbol{v}_{\perp}$ га, C ва B нуқталар учун эса $\boldsymbol{v}'_{\perp}$ га тенг. Ҳар бир нуқта тезлигининг бу иккита ташкил этувчисидан (диск текислигида ётувчи ташкил этувчиларидан) ташқари OO' ўқ атрофида ҳаракат туфайли вужудга келувчи, диск текислигига тик ташкил этувчилари ҳам мавжуд. Бироқ OO' ўқ атрофида айланиш дискнинг ўз ўқи атрофида айланишга нисбатан анча секин бўлади деб қараб, мулоҳазаларни соддалаштириш мақсадида нуқта тезликларининг дискка тик ташкил этувчиларини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

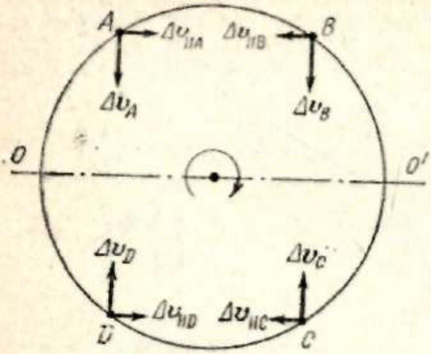


200- расм.

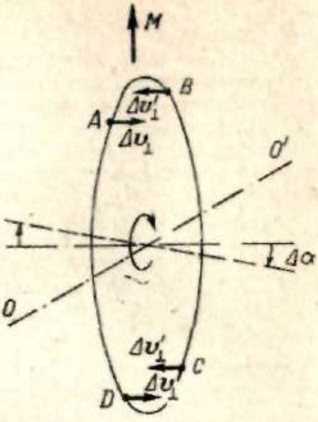
Энди нуқта тезликларининг dt вақт ичидаги орттирмасини қарайлик. Барча нуқталар dt вақт ичида ўз ҳолатларини ўзгартиради. Улар дискнинг айланиш йўли бўйича бирор ёй бўлаги миқдорида силжийди ва OO' ўқ атрофида айланиши натижасида A ва B нуқталар чизма текислигидан чиқади, C ва D нуқталар эса чизма текислиги орқасига ўтади (200- расмга қ.).

Ҳар бир нуқта тезликлари турли ташкил этувчиларининг орттирмаларига эътибор берайлик. Симметрия асосида хулоса чиқариш мумкинки, A ва B нуқталар учун $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ ташкил этувчилар диск текислигида ётувчи, тенг ва қарама-қарши йўналган (201- расм) $\Delta\boldsymbol{v}_{\parallel A}$ ва $\Delta\boldsymbol{v}_{\parallel B}$ орттирмалар олади, C ва D нуқталар учун ҳам худди шундай. $\boldsymbol{v}_{\perp}$ ва $\boldsymbol{v}'_{\perp}$ ташкил этувчиларнинг орттирмалари диск текислигида ётмайди ва дискка тик ташкил этувчиларга эга бўлиб, уларни $\Delta\boldsymbol{v}_{\perp}$ ва $\Delta\boldsymbol{v}'_{\perp}$ орқали, дискка параллел ташкил этувчиларни эса $\Delta\boldsymbol{v}_{A}$, $\Delta\boldsymbol{v}_{B}$, $\Delta\boldsymbol{v}_{C}$, Δv_{D} орқали белгилаймиз (201- расмга қ.). Орттирмаларнинг барча ташкил этувчилари жуфт-жуфти билан тенгдир, хулосани яна A, B, C ва D нуқталарнинг жойлашишидаги симметриклик асосида чиқариш мумкин. Шу сабабли, тезлик орттирмаларининг диск текислигида ётувчи барча ташкил этувчилари йиғиндида нолни беради.

Орттирмалар катталиклари таърифини тасаввур қилиш қийин эмас: диск текислигида ётувчи тезлик орттирмаси (201- расмга қ.) нуқталарнинг айлана бўйлаб текис ҳаракатига тааллуқли орттирмалар бўлгани сабабли бу тезлик орттирмаларининг йиғиндиси ушбу нуқтанинг марказга интилма тезланишини белгилайди. Дискнинг OO' ўқ атрофида айланиши натижасида фақат OO' ўққа тик $\boldsymbol{v}_{\perp}$ ва $\boldsymbol{v}'_{\perp}$ ташкил этувчиларгина йўналишларини ўзгартиради, шунинг



201- расм.



202- расм.

учун A, B, C ва D нуқталар тезликлари орттирмаларининг катталиклари дискка тик йўналишда тенг бўлади: $\Delta v_\perp = \Delta\alpha \cdot v_\perp$.

Тезлик орттирмаларининг дискка тик ташкил этувчилари (202- расмга қ.) катталиклари жиҳатидан тенг, бироқ турли томонларга йўналган. Тўрттадан қилиб қаралувчи барча қолган нуқталар учун ҳам худди шундай натижа оламиз. Демак, дискнинг барча нуқталари йўналиши жиҳатдан тезликнинг 202-расмда кўрсатилган орттирмаларига мос тушувчи тезланишга эга бўлиши керак, шунинг учун дискка моменти диск ўқига ва OO' айланиш ўқига тик йўналган жуфт кучлар таъсир қилиши керак. Бундан осонлик билан тескари хулоса чиқариш ҳам мумкин: агар айланаётган дискка жуфт кучлар таъсир қилаётган бўлса, бу ҳолда унинг ўқи

$$M = \frac{dN}{dt}$$

умумий муносабатдан келиб чиқадиган тарзда бурилади; бунда диск ўқи ва N йўналиши жиҳатдан мос тушади деб ҳисоблаймиз.

VIII БОБ

ДУМАЛАНИШ ИШҚАЛАНИШИ

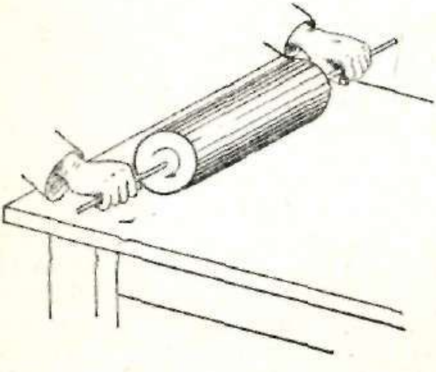
72-§. Думаланишда вужудга келувчи кучлар. Цилиндрнинг думаланишида сирпаниш ишқаланиши кучлари

Техникада ва физикада ғилдиракнинг (цилиндрнинг) текисликда думаланишида юзага келувчи кучларга алоҳида эътибор берилади. Бу кучларни, умуман, ишқаланиш кучлари дейилади. Бироқ ҳодиса манзарасини ойдинлаштириш учун уч хил кучни: хусусан, *думаланиш ишқаланиши*, *сирпаниш ишқаланиши* ва *тутиниш ишқаланиши* кучларини фарқ қилиш лозим. Думаланиш ишқаланиши кучлари, илгариланма ҳаракатдаги ишқаланиш кучлари каби ҳамма вақт мавжуд ва ҳамма вақт ҳаракатни тормозлайди. Сирпаниш ишқаланиши кучлари ва тутиниш ишқаланиши кучлари думаланаётган жисмни ҳам тезлаштиришлари, ҳам тормозлашлари мумкин, шунинг билан бирга, ишқаланиш кучининг кейинги хили (тинчлик ишқаланиши кучи каби) механикавий энергиянинг, албатта иссиқликка ўтишига олиб келиши шарт эмас.

Бир жинсли цилиндр қия текислик бўйлаб сирпанаётган бўлсин, бу ҳолда, умуман айтганда, ишқаланиш кучининг барча учта хили мавжуд бўлади. Агар сирпаниш бўлмаса, у ҳолда тутиниш ва думаланиш ишқаланиши кучлари таъсир қилади; кўпчилик ҳолларда думаланиш ишқаланиши кучлари кичик ва у ҳолда 58-§ да биз қабул қилганимиздек, фақат тутиниш ишқаланиши кучлари қолади. Фақат тутиниш ишқаланиши кучлари таъсир қилаётганда— —цилиндрнинг тегишиш нуқтаси текисликка нисбатан кўчмаётганда, тинчлик ишқаланиши ҳолидагидек, механикавий энергиянинг йўқолиши бўлмайди.

Фараз қилайлик, думаланиш ишқаланиши кучлари ва қовушоқлик кучлари бўлмасин, ҳамда цилиндр ўқи ҳаракат тезлигига тик бўлган ҳолда цилиндрнинг текислик бўйича думаланишини қарайлик. Айтайлик, цилиндр горизонтал текислик бўйича сирпанишсиз текис думаланаётир; текислик билан цилиндр орасидаги ўзаро таъсир кучи нимага тенг? (Ҳавога ишқаланиш йўқ деб оламиз.) Равшанки, цилиндр текис ҳаракатланаётгани сабабли уринма ўзаро таъсир кучи (тутиниш ишқаланиши кучи) нолга тенг.

Энди горизонтал текисликка, олдиндан ўз ўқи атрофида айланишга келтирилган ҳамда ω_0 бурчак тезликка эга бўлган цилиндрни эҳтиёт билан қўйгач бўлайлик (203- расм). Цилиндр ўқини шу зоҳотиёқ қўйиб юборганимиздан кейин нима содир бўлади? Цилиндр текислик бўйича думалаб кетади. Йўлнинг бошида, шубҳасиз, ҳаракат йўналиши бўйича *тезланиш мавжуд бўлади*, демак, цилиндрга ташқи куч таъсир қилади. Бу куч горизонтал сирт *томонидан таъсир қилиб*, у цилиндр массасининг цилиндр ўқида ётган нуқталар тезланишига кўпайтмасига тенг. *Цилиндр* ҳаракатининг чизиқли тезлиги нолдан бошлаб ўсади, шунинг учун йўлнинг бошида, *албатта*, сирпаниш бўлади ва сирпаниш ишқаланиши кучи цилиндрни *тезлаштиради*, лекин унинг айланишини секинлаштиради. Шу сабабли илгариланма ҳаракат тезлиги v нинг ортиши билан айланиш бурчак тезлиги ω камаяди. Цилиндрнинг текисликка тегиб турган нуқталарининг v_c сирпаниш тезлиги $\omega R > v$ ҳамда $v_c = \omega R - v$ бўлгани сабабли, модули жиҳатдан камая боради, бунда R — цилиндр радиуси. $v_c = 0$ да сирпаниш ишқаланиши кучи йўқолади, ҳамда кейинчалик, олдин эслатилган ҳолдагидек, ҳаракат текис бўлади.



203- расм.

Агар сирпаниш ишқаланиши кучини тақрибан Кулон қонуни (42- § га қаранг) бўйича $f_0 = \mu N$ десак, цилиндр ҳаракатини ҳисоблаш мумкин, бунда N — цилиндрнинг оғирлиги. Цилиндрни текисликка қўйишимиз биланоқ, бошланғич пайтда тезлаштирувчи куч f_0 га тенг бўлади ва кейин доимийлигича қолади; унда цилиндрнинг a чизиқли тезланиши ҳам ушбу тенгламадан аниқланади:

$$a = \frac{f_0}{m}, \tag{72.1}$$

бунда m — цилиндр массаси. Шу вақтнинг ўзида цилиндр манфий бурчак тезланишга эга бўлади:

$$\beta = \frac{f_0 R}{I}, \tag{72.2}$$

бунда I — цилиндрнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моменти. Бинобарин, цилиндр ўқининг тезлиги чизиқли қонун бўйича ўсади:

$$v = at = \frac{f_0}{m} t, \tag{72.3}$$

бурчак тезлик эса чизиқли қонун бўйича камаяди:

$$\omega = \omega_0 - \beta t = \omega_0 - \frac{f_0 R}{I} t, \tag{72.4}$$

бунда ω_0 — цилиндрни текисликка қўйиш бошланғич $t=0$ пайтдаги унинг бурчак тезлиги.

Равшанки, v чизиқли тезлик ωR га тенг бўлиб қоладиган t_0 пайт келиб, бунда сирпаниш йўқолади ва, демак, сирпаниш кучи ҳам йўқолади. Шунинг учун t_0 пайтдан кейин цилиндр бундан буён сирпанишсиз текис

$$v_0=\frac{\omega_0 R}{1+\frac{mR^2}{I}} \tag{72.5}$$

тезлик билан думаланади. (72.3) ва (72.4) ифодалардан t вақтни йўқотсак, ҳамда $\omega R=v_0$ десак, бу ифодани осон ҳосил қилиш мумкин. (72.3) ва (72.5) формулалардан t_0 вақт, равшанки, шундай аниқланади:

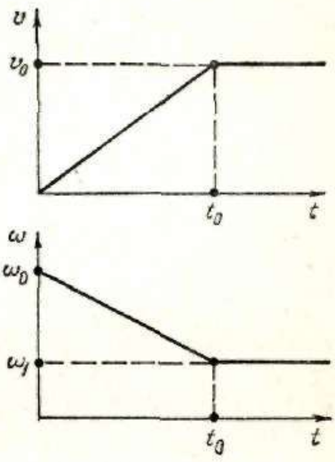
$$t_0=\frac{mv_0}{f_0}=\frac{m\omega_0 R}{f_0\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}. \tag{72.6}$$

Чизиқли ва бурчак тезлик графиклари 204- расмда кўрсатилган. Фақат 0 дан t_0 гача вақт оралиғидагина f_0 ишқаланиш кучи таъсир қилади ва сирпаниш мавжуд бўлади. Кейин сирпанишсиз текис думаланиш бошланади.

Ушбу ҳолда цилиндрнинг кинетик энергияси бошланғич запасининг бир *қисми иссиқликка ўтганини қайд қилиб* ўтамиз. Энергия бошланғич запасининг иссиқликка ўтган ҳиссаси

$$\frac{mR^2I}{(I+mR^2)^2}$$

эканлигини ҳисоблаб текшириб кўришни ўқувчига тавсия қиламиз.



204- расм.

Бошланғич пайтда, албатта сирпаниш бўлишини таъкидлаб ўтамиз, акс ҳолда текис ҳаракат бошланиши учун зарба кучи чексиз (тўғрироғи етарлича катта) бўлиши лозим бўларди. Бундай ҳол, масалан, агар цилиндр сиртида тишчалар бўлса, мавжуд бўлиши мумкин. Бу ерда бошланғич (ноэластик!) зарбадан кейин сирпанишсиз текис ҳаракат юзага келади.

Урилишдан сўнг, цилиндрнинг текисликка тегишувчи нуқтаси цилиндрга тегиш нуқтасида қўйилган f кучнинг $P=\int f dt$ импульси таъсирида тўхтаб қолди. f кучнинг бу импульси цилиндрга $mv=P$ ҳаракат миқдори берди ва бундан ташқари, цилиндрнинг айланишини $I\Delta\omega=RP$ шартдан белгиланувчи $\Delta\omega$ катталик миқдорида камайтиради. Зарбадан кейин соф думаланиш бошланади ва $v=(\omega-\Delta\omega)R$ бўлади. P ва $\Delta\omega$ ларни йўқотсак, қуйидагини топамиз

$$v=\frac{\omega_0 R}{1+\frac{mR^2}{I}}.$$

Агар v_c сирпаниш тезлиги орқага йўналган бўлса ($\omega R>v$), у ҳолда сирпаниш ишқаланиши кучи олдинга йўналган бўлади. Агар v_c сирпаниш тезлиги олдинга йўналган бўлса ($\omega R<v$), сирпаниш ишқаланиш кучи цилиндр ҳаракатини тормозлайди. Цилиндрни айланишсиз v_0 бош-

ланғич тезлик билан текислик бўйлаб йўналтирамиз, уни шундай туртамизки, у текисликка айланмасдан тегади; бунда сирпаниш ишқаланиши кучи илгариланма ҳаракат v тезлигини камайтиради ҳамда айланиш бурчак тезлиги ω ни ωR катталик v га тенглашгунча орттира боради, шундан сўнг сирпанишсиз текис ҳаракат бошланади.

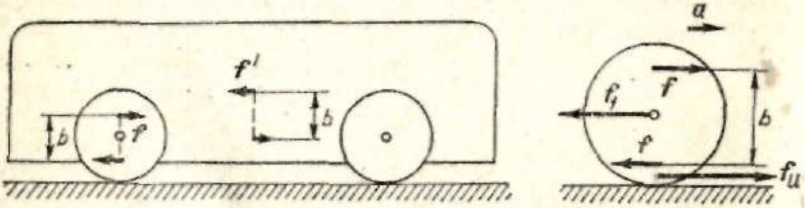
Сирпанишсиз думаланишда тутиниш ишқаланиши кучлари юзага келиши мумкин; ушбу мисолда ташқи горизонтал кучлар нолга тенг бўлгани учунгина улар юзага келмайди. Сирпанишсиз думаланишда цилиндрга ташқи кучлар таъсир қила бошлаши биланоқ, тегишлича тутиниш ишқаланиши кучи юзага келади. Демак, тутиниш ишқаланиши кучи, тинчлик ишқаланиши кучи каби, жисмга таъсир қилувчи ташқи кучларнинг катталиги билан белгиланади.

73-§. Думаланишда тутиниш ишқаланиши

Автомобиль ва паровознинг ҳаракатида ғилдиракларнинг сирпанишсиз думаланишида тутиниш ишқаланиши кучи муҳим роль ўйнайди. Сирпанишсиз думаланишда ғилдирак ва йўл полотноси сиртлари бир-бирларига нисбатан ҳаракатланмайди, бунда тутиниш ишқаланиши кучи мавжуд бўлиб, у тинчлик ишқаланиши ҳолидагидек, бирор f_0 катталикдан ортиқ бўлмайди. f_0 катталик N га— ғилдиракнинг йўлга, рельсга босим кучига пропорционалдир. Автомобиль ғилдираги учун тутиниш кучининг ғилдиракка босимига боғланиши, ғилдирак шинасининг деформацияси ҳам босимдан ўзгариши туфайли, анча мураккабдир.

Автомобиль (ёки трамвайнинг) 205-*а* расмда кўрсатилган схемасини тасаввур қилайлик. Етакчи ғилдиракка машина корпуси томонидан моторнинг $M=fb$ га тенг айлантирувчи моменти қўйилган (205-*б* расм). Ўз навбатида корпусга қарама-қарши ва тенг $M'=f'b$ момент қўйилган бўлиб, динамиканинг учинчи қонунига кўра $f=f'$. Ғилдирак сирпанишсиз ҳаракатланаётганлиги сабабли, ғилдиракка қўйилган кучлар қуйидаги тенгликлар асосида унинг a тезланишини белгилайди:

$$M-f_{\text{т}}R=I\beta, \quad f_{\text{т}}-f_1=ma, \quad a=\beta R, \qquad (73.1)$$



а *б*

205- расм.

бунда f_1 — машина корпуси томонидан ғилдирак ўқига таъсир қилувчи куч (205-*б* расмга қ.); m — ғилдирак массаси; f_m — ғилдиракка қўйилган тутиниш ишқаланиши кучи, I — инерция моменти; R — ғилдирак радиуси. Бу тенгламалардан f_1 куч билан M орасидаги боғланишни аниқлаш мумкин, чунончи,

$$f_1 = \frac{M}{R} - \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a. \tag{73.2}$$

Автомобиль (ёки трамвай) корпусига тенг ва қарама-қарши f_1 куч қўйилган. *Шунинг учун f_1 корпусни ҳаракатлантирувчи кучнинг* катталигини беради. У катталиги жиҳатдан тутиниш ишқаланиши кучи f_m дан фақат ma га фарқ қилади. Текис ҳаракатда $a = 0$ ва (73.1) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f_1 = f_m = \frac{M}{R}. \tag{73.3}$$

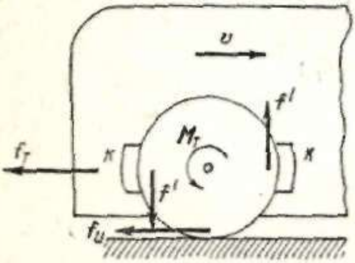
Демак, f_1 ҳаракатлантирувчи куч тутиниш ишқаланиш кучи f_m га тенг ҳамда унинг катталиги мотор эришадиган M моментга боғлиқ (73.1), (73.2) ва (73. 3) муносабатлар $f_m < f_0$, яъни ғилдирак сирпанмайдиган шароит учун ҳосил қилинган, акс ҳолда $\omega R = v$ (ёки $\beta R = a$) ўринли бўлмайди. Етакчи ғилдиракка ташқаридан қўйилган куч f_0 катталикдан ортиқ бўла олмайди. Агар моторнинг M куч моменти ортса, у ҳолда *сирпаниш* бошланади. Бу ҳолда (73.1) нинг дастлабки иккита тенглиги кучга эга бўлгани ҳолда, кейингиси $a = \beta R$ ўринли эмасдир; сирпанишда $a < \beta R$. Масалан, $a = 0$ ва $\beta > 0$ да M айлантирувчи моментнинг бир қисми ҳаракатлантирувчи кучнинг ортишига эмас, балки ғилдиракнинг бурчак тезлигини орттиришга кетади.

Автомобиль жойидан (қор ва лойда) қўзғалганда, шунингдек, трамвай ёки паровоз қўзғалганда двигателнинг айлантирувчи моменти M ни кескин орттирганда ғилдиракларнинг *бир жойда айланиши* бошланади. Ғилдираклар сирпаниб кета бошлайди, ҳаракатлантирувчи куч жуда кичик бўлишига қарамасдан, улар анча катта тезлик билан айланади, ҳамда машина жойида туради ёки секин қўзғалади. Ҳаракатлантирувчи кучнинг кескин камайиши сирпаниш ишқаланиши кучи катталиги сирпаниш тезлигининг ортиши билан камайиши орқали тушунтирилади. Шу сабабли жойидан қўзғалишда M моментни жуда равон ошира бориш (автомобилда равон «газ бериш») лозим.

Барча мулоҳазаларимизда биз двигателнинг M айлантирувчи моменти шундай йўналганки, машинага олдинга тезланиш беради деб ҳисоблаган эдик. Агар машина юраётганда мотор томонидан қўйилган момент ўз ишорасини ўзгартирса, у ҳолда барча олдин ҳосил қилинган тенгламалар ўз кучида қолиб, фақат тезланиш ва f_1 ҳаракатлантирувчи кучгина ишорасини ўзгартиради. Бу ҳолда «ҳаракатлантирувчи куч» орқага, машина ҳаракатига қарши йўналиши ва уни тормозлаши равшандир. *Демак, машина ҳаракатини* двигателнинг айланишлар сонини камайтириш («газни камайтириш») билан тормозлаш мумкин (сирпанчиқ йўлда—лозим!).

74-§. Тормозлаш ва тойғаниш

Машинани тормоз қурилма воситасида секинлаштириш қуйидаги тарзда юз беради: айланаётган ғилдиракка K тормоз колодкаларни (206- расм) босиш билан биз f' ишқаланиш кучларини юзага келтирамиз, улар ғилдиракка, агар ғилдиракнинг сирпаниши бўлмаса, тормозловчи $f_т$ куч билан (73.2) га ўхшаш тенглама орқали боғланган қарама-қарши ишорали $M_т$ момент беради. Ҳаракатнинг бошидаги сингари, ғилдиракларнинг сирпанишига ва ҳаракатлантирувчи кучнинг камайишига йўл қўймаслик учун моторнинг айлантирувчи моментини кескин ошириш ярамайди, шунингдек, автомобилни (машинани) тормозлашда $M_т$ тормозловчи моментни кескин ошириш ярамайди.

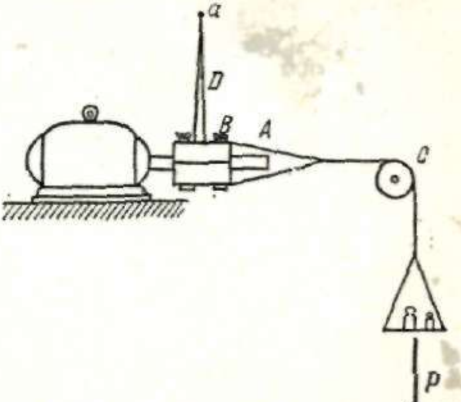


206- расм.

Сирпанишда йўлга ишқаланиш кучи тутиниш кучидан кичик бўлиши ва, шунинг билан бирга, сирпаниш тезлигининг ортиши билан бу ишқаланиш кучининг камайиши сабабли тормозловчи куч ҳам камаяди. Шу сабабли кескин тормозлашда ғилдиракни сирпанишгача олиб бормасдан, балки тормозлаш моментини худди сирпаниш бошланиши олдидаги чегарада тутиш лозим; бу ҳолда машина тормозланадиган йўл энг кичик бўлади. Қўл (ёки оёқ) билан тормозлашда зарур бўлган тормозловчи момент катталигини аниқлаш учун катта тажриба бўлиши лозим, шу сабабли шошилинч тормозлашда деярли ҳамма вақт сирпаниш кузатилади.

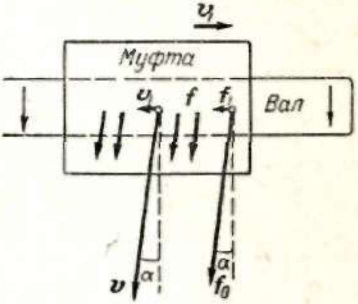
Рельссиз транспорт учун тормозлашдаги сирпаниш *тойғаниш* ва бошқарувнинг йўқотилиши туфайли жуда хавфли бўлиши мумкин. Шунинг учун йирик машиналарга тормозловчи моментнинг зарурий катталигини тутиб турувчи махсус автоматлар ўрнатиш мақсадга мувофиқдир. Автомобилнинг ҳўл ёки сирпанчиқ тош йўлда кескин тормозлашда кузатиладиган тойғанишни ҳам сирпаниш ишқаланиши кучининг ҳаракат тезлиги йўналишига алоҳида боғланиши билан тушунтирилади.

Агар жисм горизонтал текисликда бирор v йўналишда сирпанаётган бўлса, у ҳолда v га тик қўйилган f кичик куч жисмнинг шу йўналишда сезиларли кўчишини юзага келтиради. Муайян йўналишда сирпанаётган жисм тик йўналишда кўчишда жуда кичик ишқаланиш кучига эга бўлар экан. Бунинг сабаби шундаки, бу ҳолда жисмлар бир-бирларига нисбатан ҳаракатланаётганликлари сабабли, улар сиртларининг тутиниши ҳақида гап бўлиши ҳам мумкин эмас. Бу эффект С. Э. Хайкин томонидан тавсия қилинган тажрибада жуда яққол кўрсатилган (207- расм).



207- расм.

Горизонтал силлиқ A айланувчи валга B муфта кийдирилиб, унга C блок орқали ташланган тизимча боғланган; тизимчага бирор юк осилган. Юкнинг оғирлиги тизимчани тортади ва муфтани валдан суғуриб олишга интилади, Муфта винтлар тортиб турадиган иккита бўлакдан иборат. Винтлар воситасида муфта тортгичини созлашдан кейин айланмаётган валдан муфтани судровчи P юкнинг оғирлигини аниқлаймиз. Муфтага бириктирилган D ричаг чизмага тик тортилган каноп орқали a нуқтага боғлаб қўйилган бўлиб, у муфтанинг вал билан бирга айланишига йўл қўймайди, сўнгра вал айланишга келтирилади; энди анча кичик юкка (тахминан 0,1 P ва ундан кичик!) ҳам муфта вал бўйлаб сурилади. Агар муфтани қўл билан ҳаракатсиз вал бўйича, сўнгра ҳаракатланаётган вал бўйича суришга интилсак, ишқаланиш кучларининг камайиш эффекти, айникса сезиларли бўлади. Сиз ишқаланиш кучининг кескин камайишини сезасиз; гўё ҳални яхши мойлагансиз ва муфтани мойланган вал бўйича ҳаракатлантираётгандек бўласиз.



208- расм.

Агар сирпаниш ишқаланиши кучи ҳамма вақт сирпаниш тезлигига қарши йўналганини назарга олинса, бу ҳодисани оддий тушунтириш мумкин бўлади. Муфта вал бўйлаб бирор v_1 тезлик билан ҳаракатланаётганда муфтага нисбатан вал зарраларининг сирпаниш натижавий тезлиги вал ўқига тик текисликка бирор жуда кичик α бурчак остида йўналади (208-расм) ва демак, f_0 ишқаланиш кучлари ҳам шу текисликка α бурчак остида йўналган. Вал ўқи бўйлаб тик йўналишда f_0 кучнинг фақат f_1 кичик компонентасигина таъсир қилади, айнан:

$$f_1 = f_0 \operatorname{tg} \alpha \approx f_0 \alpha \approx f_0 \frac{v_1}{v}. \tag{74.1}$$

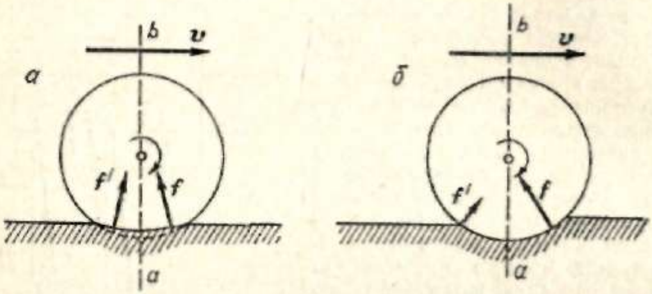
Одатда, $v_1 \ll v$ бўлганидан, $f_1 \ll f_0$ бўлади.

Энди автомобилни тормозлашдаги тойғаниш ҳодисасини тушуниш мумкин. Кескин тормозлашда тормоз колодкалари ғилдиракларни қисиб олади ва натижада машинанинг олдинга «инерция бўйича» ҳаракати юзага келади. Йўлдаги кичик нотекислик (дўнглик) ёки ғилдиракларнинг турли ишқаланиши ва бошқалар ёнаки кучлар ёки вертикал ўққа нисбатан момент юзага келтира олади; булар ўз навбатида автомобилнинг вертикал ўқ атрофида айланишини ёки унинг ёнга кўчишини вужудга келтиради. Чунки, автомобиль ғилдиракларининг унинг йўлига тик йўналишда ён томонга ҳаракатига халақит берувчи ишқаланиш кучлари йўқ (ёки улар жуда кичикдир!). Бу, албатта, автомобиль тойғаниши ҳодисасининг соддалаштирилган талқини бўлса-да, у бу хавфли ҳодисанинг бош хусусиятларини ва сабабларини тўғри акс эттиради.

75- §. Думаланиш ишқаланиши

Олдинги параграфларда думаланиш ишқаланиши кучлари ҳақида ҳеч нарса айтилмай, фақат *думаланишдаги тутиниш кучлари* (тинчлик ишқаланиши кучига ўхшаш) ёки *цилиндрнинг текисликда сирпаниш кучи* (ясси сиртлар орасидаги сирпаниш ишқаланиши кучига ўхшаш) ҳақида гапирилган эди. Улар орасидаги принципиал фарқ шундаки, тутиниш кучи иш бажармайди (механикавий энергиянинг иссиқликка ўтиши йўқ), сирпаниш ишқаланиши кучи эса, албатта, механикавий энергиянинг иссиқликка ўтиши билан боғлиқ иш бажаради.

Лекин цилиндрнинг сирпанишсиз думаланишида ҳамма вақт думаланиш ишқаланиши кучи—энергиянинг «йўқолиши» билан боғлиқ бўлган, яъни механикавий энергиянинг иссиқлик энергияга ўтиши билан боғлиқ бўлган куч мавжуд бўлади. Текис горизонтал текислик бўйича сирпанишсиз думалаётган цилиндр аста-секин тўхтайди; ҳавонинг қаршилик кучидан ташқари, ушбу ҳолда цилиндр ва текислик материали хоссаларига боғлиқ бўлган думаланиш ишқаланиши кучи ҳам мавжуд бўлади. Думаланишда цилиндр ва текислик цилиндрни текисликка қисувчи куч таъсирида деформацияланади (209- *а* расм). Агар бу деформациялар эластик бўлса, у ҳолда цилиндр ва текислик орасидаги ўзаро таъсир кучлари цилиндр ўқидан ўтувчи *ab* вертикал текисликка нисбатан тамомила симметрик бўлади; ҳар бир f кучга тегишиш сатҳининг симметрик жойлашган участкасида унга тенг f' куч мос келади. (Текислик сиртига нисбатан цилиндрнинг сирпаниш ишқаланиши кучини назарга олмаймиз[1].)



209- расм.

Думаланиш сиртининг барча эластик деформация кучларининг натижавийси вертикал йўналган ва бу кучларнинг цилиндр ўқига нисбатан моменти нолга тенг. Шунинг учун цилиндр ва текисликнинг эластик деформация кучлари думаланишда думаланиш тезлигига таъсир қилмайди ва ҳаракат гўё ҳеч қандай деформация бўлмагандагидек содир бўлади. Бу ҳолда ҳеч қандай думаланиш ишқаланиши кучлари вужудга келмайди.

Демак, думаланиш ишқаланиши кучларини тушунтириш учун цилиндр ва думаланиш текислигининг деформацияларини ноэластик деб ҳисоблаш лозим; бу ҳолат, албатта, амалда ҳамма вақт ўринли бўлади. Хулоса чиқариш учун нима деформацияланаётир — цилиндрми ёки текисликми, уларнинг иккаласи биргаликдами, бунинг аҳамияти йўқ. Шу сабабли мулоҳазаларни соддалаштириш мақсадида цилиндр деформацияланмайди, балки думаланиш сиртигина

---

[1] Тегишиш сиртлари (контактлари), умуман бир-бирларига нисбатан, турли тегишиш нуқталарида турли бўлса-да, бир оз сирпанади.

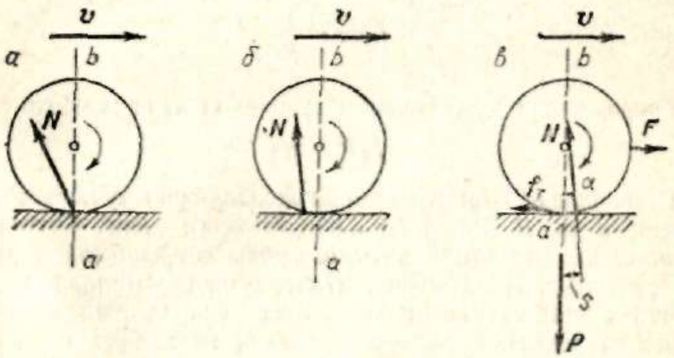
бир оз қолдиқ деформацияга эга бўлади деб ҳисоблаймиз. Равшанки, цилиндрга думаланиш текислиги томонидан таъсир қилувчи кучлар энди *ab* текисликка нисбатан симметрик эмас, масалан, *ab* текислик орқасида жойлашган симметрик участкада f куч f' кучдан катта бўлади (209- *б* расм). Шунинг учун бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси, албатта, орқага йўналган горизонтал ташкил этувчига эга ва бу кучларнинг цилиндр ўқига нисбатан моменти ҳам нолга тенг бўлмай, у айланиш йўналишига *қарама-қаршидир*.

Думаланиш ишқаланиши кучини ҳисоблаш жуда мураккаб ва ҳозиргача қониқарли назария мавжуд эмас, бунга асосий сабаб шуки, кучлар ва вақтга боғлиқ тарзда ўзгарувчи мураккаб ноэластик деформацияларни боғловчи қонунлар етарлича ўрганилмаган.

Бироқ, агар горизонтал текисликда *сирпанишсиз* думаланаётган цилиндрнинг аста-секин тўхташини ҳисобга олсак, у ҳолда бундан цилиндрга горизонтал текислик томонидан таъсир қилувчи кучнинг, агар тегишиш участкаси цилиндрнинг радиусига нисбатан жуда кичик деб қаралса, характери ва йўналиши ҳақида муайян хулоса чиқариш мумкин.

Айтайлик, ҳавога ишқаланиш йўқ — цилиндр ўз ҳаракатини фақат думаланиш ишқаланиши кучи таъсирида секинлаштирсин; бунда у *a* манфий чизиқли тезланиш ҳамда β манфий бурчак тезланишга эга бўлиб, улар сирпаниш йўқлиги шарти айнан, $a = \beta R$ билан боғланган. Аввало, цилиндрга таъсир қилаётган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси, цилиндр манфий чизиқли тезланишга эга бўлгани учун орқага оғганлигини қайд қилиб ўтамиз. Энди тенг таъсир этувчи цилиндр марказига нисбатан қаердан ўтишини аниқлайлик.

Тенг таъсир этувчининг қўйилиш нуқтаси марказдан ўтувчи *ab* вертикал текисликда ҳам, 210- *a* ва *б* расмда кўрсатилгандек, унинг орқасида ҳам жойлашиши мумкин эмас, чунки бунда шу куч ци-



210- расм.

линдрга мусбат бурчак тезланиш берган бўларди. Демак, сўнгги *имкон қолади: $\boldsymbol{N}$ кучнинг қўйилиш нуқтаси олдинда жойлашиши* (210-*в* расм), шунинг билан бирга, $\boldsymbol{N}$ кучнинг чизиғи цилиндр марказидан юқоридан ўтиши лозим, акс ҳолда у мусбат бурчак тезланиш берган бўларди. Шундай қилиб, текисликнинг думаланиш ишқаланиши кучи таъсирида секинланиш билан думаланаётган *цилиндрга таъсири 210-в расмда кўрсатилгандек қўйилган*

$\boldsymbol{N}$ кучнинг горизонтал компонентаси думаланиш ишқаланиши кучи $\boldsymbol{f}_д$ дан иборат s масофа, $\boldsymbol{N}$ кучнинг қўйилиш нуқтасининг четлаштирилиши, амалда цилиндр радиуси R га нисбатан жуда кичик, яъни α қиялик бурчаги жуда кичик, у ҳолда N нинг абсолют катталиги цилиндрни текисликка босувчи босим кучига, бизнинг ҳолда, цилиндрнинг $\boldsymbol{P}$ оғирлик кучига деярли тенг бўлади.

Думаланиш ишқаланиши кучи ва бошқа катталиклар орасидаги боғланишни тажриба йўли билан, принципда, қуйидагича тарзда аниқланади. Горизонтал текислик бўйича текис думаланаётган цилиндр ўқига ҳаракат йўналишида думаланиш ишқаланиши кучи $\boldsymbol{f}_д$ га тенг бўлган (210-*в* расмга қ.) доимий $\boldsymbol{F}$ горизонтал куч қўйилган (ҳавога ишқаланиш кучини назарга олмаслик мумкин). Цилиндрнинг айланиши текис ва бурчак тезланиши нолга тенг бўлгани туфайли $\boldsymbol{N}$ куч цилиндр ўқидан ўтади. Иккита бошқа куч, оғирлик кучи $\boldsymbol{P}$ ва ташқи куч $\boldsymbol{F}$ шартга кўра, цилиндр ўқидан ўтади. Бинобарин,

$$P = N\cos\alpha, \quad F = N\sin\alpha = f_д. \tag{75.1}$$

Бурчак α амалда жуда кичик, шу сабабли, (75.1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P \approx N, \; f_д \approx N\alpha \approx P\frac{s}{R}. \tag{75.2}$$

Одатда жадвалларда s катталикнинг қийматлари берилиб, думаланиш ишқаланиши кучи

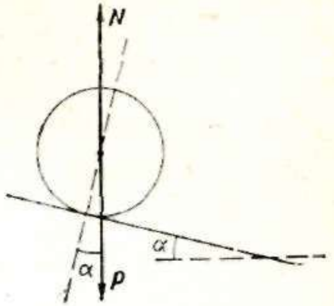
$$f_д \approx P\frac{s}{R} \tag{75.3}$$

ҳақида эмас, балки думаланиш ишқаланиши кучи моменти

$$f_д R \approx Ps \tag{75.4}$$

ҳақида гапирилади ёки: думаланиш ишқаланиши кучи моменти нормал босим кучи P нинг s га кўпайтмасига тенг. Катталик s ни *думаланиш ишқаланиши кучи моменти коэффициенти* дейилади.

Тажрибанинг кўрсатишича, пўлат, бошқа металлар ва қаттиқ ёғоч учун s нинг катталиги маълум чегараларда амалда думаланиш тезлигига ва цилиндр радиусига боғлиқ эмас, ваҳоланки, умумий мулоҳазаларга кўра бундай боғланиш мавжуд бўлиши равшан. s нинг катталиги фақат цилиндр материалига ва текисликка боғлиқ.



211- расм.

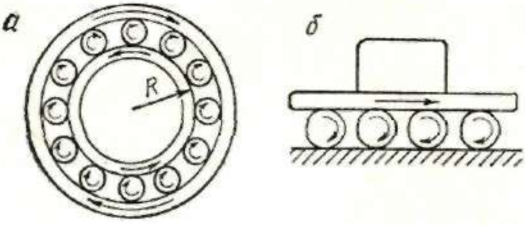
s нинг катталигини цилиндрнинг қия текислик бўйича думаланишидан аниқлаш мумкин. Айтайлик, текисликнинг α қиялик бурчаги шундай танланганки, цилиндр текислик бўйлаб сирпанишсиз текис думаланади (211- расм). Бу ҳолда, цилиндр текис думаланиши сабабли, текисликнинг цилиндрга таъсир кучи, албатта, тик ва цилиндр ўқидан ўтади. Демак, думаланиш ишқаланиши кучи қуйидагига тенг:

$$f_{д} = P \sin \alpha \approx P\alpha \approx \frac{s}{R} P. \qquad (75.5)$$

Бу тажрибаларни бажараётганда ҳавонинг қовушоқлиги туфайли ишқаланиш кучи думаланиш ишқаланиши кучига нисбатан кичик эканлигига ишонч ҳосил қилиш лозим.

Арава ғилдираги ерда думалаётганда, афтидан, ишқаланиш кучи тезликка боғлиқ бўлади, бироқ бу боғланишнинг характери ва катталиги ҳақидаги тажриба маълумотлари ҳали етарли эмас. Автомобиль ғилдирагининг думаланиш ишқаланиши кучини аниқлаш масаласи анча мураккаб, бироқ биринчи яқинлашишда автомобиль ғилдирагининг думаланиш ишқаланиши кучи моментини ҳам доимий деб *қаралади ва тегишли жадвалларда s нинг қийматлари* йўлни ва ғилдирак шинасини характерловчи параметрларга боғлиқ тарзда берилади.

Цилиндрнинг думаланиш ишқаланиши кучи сирпаниш ишқаланиши кучидан анча кичик, шунинг учун ҳозирги замон машиналарида сирпаниш подшипниклари шарикли ёки роликли подшипниклар билан алмаштирилади. Осон кўриш мумкинки, тегишиш сирти ясси (212- *б* расм) бўлган ҳолида ролик-цилиндрларнинг соф думаланиши амалга оширилади, одатдаги, шарикли ёки роликли подшипник ҳолида (212- *a* расм) роликларнинг соф думаланишини амалга ошириб бўлмайди; бироқ шарик радиусининг цилиндр радиуси R га нисбати қанча кичик бўлса, сирпаниш шунча кам бўлади. Лекин шарикнинг (ро-



212- расм.

ликнинг) тегиб турган сиртига босиши катта бўлиб кетиши туфайли унинг радиусини жуда кичрайтириш мумкин эмас.

Агар цилиндр (шарча) ва думаланиш сирти моддаси етарлича қаттиқ бўлса ва босим унча катта бўлмаса, у ҳолда думаланиш ишқаланиши кучи кичик бўлади. Шунинг учун, шарчанинг қия тарновда ёки цилиндрнинг қия сиртда думаланишини ўрганиш орқали жисмнинг ҳавосиз фазода тушишига ўхшаш текис тезланувчан ҳаракат қонунларини текшириш мумкин. Ушбу ҳолат Галилей тажрибалари учун муҳим бўлиб, бунда у қия тарновдан думаланиб тушаётган шарчани кузатиш орқали жисмларнинг тушиш қонунларини ўрганган эди.

Айталик, γ текисликнинг горизонтга қиялик бурчаги α бурчакдан катта бўлсин ((75.5) га қ.). У ҳолда тезлаштирувчи куч $mg\sin\gamma$ га тенг бўлади. Думаланиш ишқаланиши кучи $mg\sin\alpha$ га тенг. Агар ҳавога ишқаланиш кучини назарга олмаслик мумкин бўлса, у ҳолда (58.10) ва (59.12) формулаларга кўра шарчанинг тезланиши доимий ва қуйидагига тенг бўлади:

$$a = \frac{5}{7} g (\sin\gamma - \sin\alpha). \tag{75.6}$$

γ нинг тегишли қийматларини танлаб, a тезланишни етарлича кичик қилиш ҳамда биз олдин (40- §) кўрганимиздек, ҳавога ишқаланиш кучини назарга олмаслик мумкин бўладиган[1] даражадаги кичик тезлик билан юз берувчи тезланувчан ҳаракатни кузатиш мумкин.

---

[1] Тўғри, у ерда гап илгарилама ҳаракат ҳақида борган эди, лекин кичик ҳаракат тезлигида айланаётган, ҳаракатланаётган шарчага ҳавонинг қаршилиги ўша тартибда бўлади.

IX БОБ

ЖИСМЛАРНИНГ ТОРТИШИШИ

76-§. Бутун олам тортишиш қонуни

Барча физикавий жисмлар ўзаро тортишиш кучлари таъсирида бўлади. Тортишиш кучларини белгиловчи асосий қонун Ньютон томонидан таърифланган бўлиб, *Ньютоннинг тортишиш қонуни* номи билан юритилади.

Тортишиш қонуни бундай таърифланади: *массалари* m_1 *ва* m_2 *га тенг бўлган ва бир-бирларидан* $\boldsymbol{R}$ *масофада турган иккита жисм орасида бир жисмдан иккинчисига йўналган* F_{12} *ва* F_{21} *ўзаро тортишиш кучлари мавжуд бўлиб (213-расм), тортишиш кучининг катталиги ҳар иккала жисм массаларининг кўпайтмасига тўғри пропорционал ва улар орасидаги масофа квадратига тескари пропорционалдир*. Ёки тортишиш кучлари қуйидагига тенг:

$$F_{12} = F_{21} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \tag{76.1}$$

бунда γ — қандайдир доимий катталик — *тортишиш доимийси* ёки *гравитацион доимий*.

Бу кўринишдаги тортишиш қонуни жисмларнинг ўлчовлари улар орасидаги масофага нисбатан жуда кичик бўлгандагина, яъни жисмларни моддий нуқталар дейиш мумкин бўлгандагина ўринлидир.

Нуқта деб ҳисоблаш мумкин бўлмайдиган иккита жисм орасидаги ўзаро тортишиш кучини аниқлашда қуйидагича иш кўрилади. Бутун жисмни шундай майда бўлакларга бўлинадики, уларни нуқталар дейиш мумкин бўлсин ҳамда иккинчи жисмда битта заррани танлаб олиб, унга биринчи жисмнинг барча зарралари томонидан тортишиш кучларининг умумий ташкил этувчиси топилади. Сўнгра, шундай амални иккинчи жисмнинг барча қолган зарралари учун бажарилади ва йиғилади; шу йиғинди биринчи жисмнинг иккинчи жисмга таъсир кучидан иборат бўлади. Учинчи қонунга кўра биринчи жисмга таъсир қилувчи кучни аниқланади.

213-расм.

Бир жинсли моддадан ясалган шарлар учун ўтказилган ҳисоблашларнинг кўрсатишича, натижавий тортишиш кучи ҳар бир шарнинг марказига қўйилган бўлиб, у қуйидагига тенг:

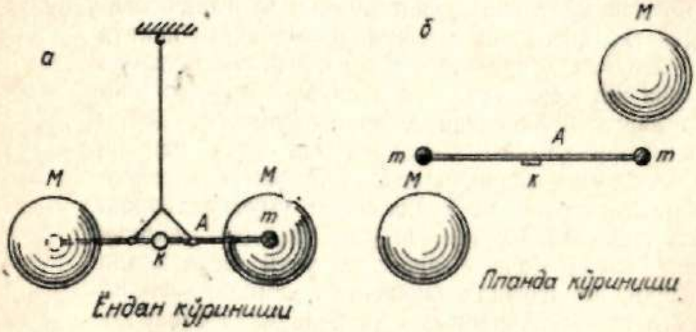
$$\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \qquad (76.2)$$

бунда m_1 ва m_2 — шарлар массалари; R — шарлар марказлари орасидаги масофа ва γ эса (76.1) ифодада турган катталикнинг ўзи. Шундай қилиб, Ньютоннинг (76.1) шаклдаги тортишиш қонуни моддий нуқталар учун ҳам, бир жинсли моддадан ясалган шарлар учун ҳам кучга эга.

Жисмлар орасидаги тортишиш кучи уларнинг оғирликларига нисбатан кичик бўлгани сабабли лаборатория тажрибаларида бу кучларни сезмаймиз ҳамда уларни бевосита ўлчаш анча қийинчилик туғдиради. Бироқ бундай ўлчашлар олимлар томонидан бажарилган.

Тортишиш кучини ўлчаш биринчи марта Кавендиш томонидан 1798 йили буралма тарози воситасида бажарилган Шу принцип тортишиш кучини келгуси ўлчашларда ҳам қўлланилди.

Кавендиш асбобининг схемаси 214- расмда кўрсатилган. Нисбатан енгил A шайиннинг учларида ҳар бири m катталикдаги иккита бирдай масса жойлаштирилади. Шайин ўртасидан етарлича узун, ингичка чийралмаган ипга осиб қўйилади. Шайиннинг ўртасига *Қ* кўзгу ўрнатилган бўлади; кўзгудан қайтган ёруғлик нурининг бурилишини A шайин осилган ипнинг буралиши кўрсатади. m массаларга турли томонлардан иккита катта M қўрғошин шарлар (массалари тахминан 158 кг дан) асбоб планида кўрсатилганидек (214-*б* расм), муайян масофаларга яқинлаштирилади. Тортишиш кучи таъсирида буралма тарозининг A шайини шарлар орасидаги тортишиш кучининг моменти ипнинг кўзгудан қайтган шуъланинг силжиши бўйича аниқланувчи буралиши моменти билан мувозанатлашгунча бурилади. Кавендиш массаларни турли масофаларга келтириб, тор-



Ёндан кўриниши

Планда кўриниши

214- расм.

тишиш кучини масофага боғлиқ тарзда аниқлади ва Ньютон қонунининг ўринли эканлигини тасдиқлади.

Кавендишдан кейин унинг тажрибалари турли вариантларда бир неча бор текширилди. Шу тажрибалар асосида ҳозирги вақтда СИ системада тортишиш доимийси учун қуйидаги қиймат қабул қилинган:

$$\gamma = 6{,}65 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{сек}^2); \qquad (76.3)$$

СГС бирликлар системасида

$$\gamma = 6{,}65 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{сек}^2).$$

γ катталик ўлчамликка эга. Бирликлар системасини γ ўлчамсиз бўладиган қилиб тузиш мумкин эди. Бироқ у ҳолда колган катталикларнинг ўлчамликларини ўзгартиришга тўғри келарди; лекин амалда бундай система қўлланилмайди.

Тортишиш доимийсини билган ҳолда жисмнинг Ер сиртидаги эркин тушиш тезланиши g бўйича Ернинг $m_{\text{Ер}}$ массасини аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, Ньютон қонунига кўра, m массали жисмнинг тортишиш кучи

$$P = \gamma \frac{m \cdot m_{\text{Ер}}}{r_0^2},$$

бунда r_0 — Ернинг радиуси; иккинчи томондан,

$$P = mg.$$

Бу тенгликлардан ушбу ҳосил бўлади:

$$m_{\text{Ер}} = \frac{g r_0^2}{\gamma}. \qquad (76.4)$$

Бунга Ернинг радиуси қиймати $r_0 \approx 6{,}4 \cdot 10^8$ см ни қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$m_{\text{Ер}} = \frac{981 \cdot 6{,}4^2 \cdot 10^{16}}{6{,}65 \cdot 10^{-8}} \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ г} = 6 \cdot 10^{21} \text{ тонна}. \qquad (76.5)$$

Ньютон ўз қонунини, аввало, Ойнинг Ер атрофида ҳаракатини таҳлил қилиш орқали текшириб кўрди. Ой фақат Ернинг тортиш кучи таъсирида айлана бўйлаб текис ҳаракатланади деб қараб, Ойнинг Ер атрофида айланиш даври (ой) $T = 27{,}3$ кунини хамда Ердан Ойгача масофа $r = 3{,}844 \cdot 10^{10}$ см ни билган ҳолда Ойнинг w марказга интилма тезланишини аниқлаш мумкин. Уни ҳисоблайлик:

$$w = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3{,}844 \cdot 10^{10}}{2{,}358^2 . 10^{12}} \text{ см/сек}^2,$$

чунки $T = 27{,}3$ кун $= 2{,}358 \cdot 10^6$ сек. Арифметик амалларни бажарамиз ва Ойнинг тезланишини топамиз:

$$w \approx 0{,}27 \text{ см/сек}^2. \qquad (76.6)$$

Бу марказга интилма тезланишни Ойга Ер бергани туфайли динамиканинг иккинчи қонунига кўра

$$m_{\text{Оа}} \cdot w = \gamma \frac{m_{\text{Оа}} \cdot m_{\text{Ер}}}{r^2}, \qquad (76.7)$$

бунда $m_{\text{Ой}}$ — Ойнинг массаси. Бундан

$$w = \gamma \frac{m_{\text{Ер}}}{r^2}. \qquad (76.8)$$

Иккинчи томондан, Ер сиртидаги g тезланишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$g = \gamma \frac{m_{\text{Ер}}}{r_0^2},$$

бунда r_0 — Ернинг радиуси. Бундан $m_{\text{Ер}}$ ни (76.8) га қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$w = g \frac{r_0^2}{r^2} \qquad (76.9)$$

ёки Ойнинг тезланиши ушбуга тенг:

$$w = 981 \left(\frac{6,4}{3,844}\right)^2 \cdot \frac{10^{16}}{10^{20}} \approx 0,273 \text{ см/сек}^2. \qquad (76.10)$$

Шундай йўл билан ҳисобланган тезланиш юқорида кинематик шартлардан топилганга ((76.6) га қ.) мос келади.

Бундай таққослаш Ньютонни ўзи таклиф қилган тортишиш қонунининг тўғрилигига ишонтирди. Астрономик кузатишлар ва ҳисоблашлар ҳам тортишиш қонунининг тўғрилигини тасдиқлайди. Шуни таъкидлаш лозимки, тортишиш қонунини Ойнинг ҳаракати бўйича текшириб кўриш учун Ньютонга γ тортишиш доимийсини билиш шарт эмас эди.

Тортишиш қонунининг очилиши Ердаги жисмлар билан ўтказилган тажрибалар асосида аниқланган механика қонунларининг қўлланиш соҳасини кенгайтириш, бу қонунларнинг татбиқини коинотнинг барча физикавий жисмларига ёйиш имконини берди.

77- §. «Инерт» масса ва «тортишиш» массаси

Тортишиш қонуни (76.1) ни таърифлаётганда бу қонунга кирувчи жисмнинг массаси инерция ўлчови бўлган ўша массанинг ўзи деб фараз қилдик. Бироқ қўшимча тадқиқотларсиз бу тахмин тамомила асоссиздир.

Тажриба натижаларига кўра жисм тортишиш хоссасига эга дейиш тўғрироқдир. Жисмнинг «тортишиш» массаси ёки «гравитацион» масса шу хоссанинг ўлчови бўлади. Умуман айтганда, «гравитацион» масса «инерт» массадан тамомила фарқли бўлса-да, тажрибавий тадқиқотлар бизга бу катталикларнинг бир-бирига *пропорционаллигини* кўрсатади ва одатда физикада қилинганидек, бирликларни махсус танлаш орқали уларни ҳамма вақт бир-бирига тенг қилиб қўйиш мумкин.

«Инерт» масса ва «тортишиш» массасининг пропорционаллиги ҳақидаги хулосани турли массали *барча* жисмлар учун эркин тушиш тезланиши (муайян жойда) *бирдайлигини* кўрсатувчи тажриба асосида чиқариш мумкин. Жисм $m_{\text{и}}$ «инерт» масса катталиги билан ўлчанувчи инертлик хоссасига ҳамда $m_{\text{г}}$ «гравитацион» масса катталиги билан ўлчанувчи тортишиш хоссасига эга. У ҳолда тортишиш кучини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P = km_{\text{г}}\,, \tag{77.1}$$

бунда k — ўлчамликка эга бўлган доимий катталик ёки: Ерга тортишиш кучи шу жисмнинг тортишиш массасига пропорционалдир. Иккинчи томондан, жисмнинг эркин тушиши, айнан жисмнинг тортишиш кучи таъсиридаги ҳаракатнинг ўзидир. Шунинг учун динамиканинг иккинчи қонунига кўра қуйидагини ёзиш мумкин:

$$P = m_{\text{и}}g, \tag{77.2}$$

бунда g — оғирлик кучи тезланиши, (77.1) ва (77.2) ларни ўзаро тенгласак, ушбуни ҳосил қиламиз:

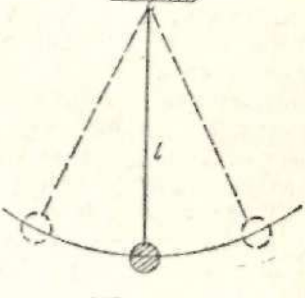
$$g = k\frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}}. \tag{77.3}$$

Тезланиш g барча жисмлар учун бирдайлиги ва жисм материалига, унинг ўлчамларига боғлиқ эмаслиги сабабли, $m_{\text{и}}$ инерт масса $m_{\text{г}}$ «тортишиш» массасига пропорционалдир. Агар «инерт» масса бирлиги учун килограмм (кг) қабул қилинса, у ҳолда «тортишиш» массаси бирлигини k катталик 9,81 м/сек^2 га тенг бўладиган қилиб танлаш мумкин. Бирликларни шундай танлаганда «гравитацион» массанинг катталиги ўша жисмнинг «инерт» массаси катталигига аниқ тенг бўлади.

«Инерт» масса билан «тортишиш» массаси орасидаги пропорционалликни текшириш учун Ньютон турли моддалардан ясалган маятниклар билан тажрибалар ўтказди. У бирдай узунликли, лекин турли материалдан ясалган маятникларнинг тебраниш даврларини аниқлади. Назариядан маълумки (кейинроқ 124- § га қ.), математикавий маятникнинг тебраниш даври фақат унинг l узунлигига, (77.1) формуладаги k доимийга ва $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}}$ нисбатга қуйидагича боғланган:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{k}\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}}}. \tag{77.4}$$

Ипга осилган жисмнинг чизиқли ўлчовлари ипнинг узунлигига нисбатан жуда кичик, ипнинг массаси эса осилган жисмнинг массасига (215-расм) нисбатан арзимаган даражада кичик бўлганда маятникни математикавий маятник дейилади. Тажрибанинг кўрсатишича, ҳар қандай математикавий маятник учун тебраниш даври фақат унинг узунлигидан олинган $\sqrt{l}$ квадрат илдизга пропорционал бўлади. Демак, $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}}$ катталик доимий қолади ёки $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}} = \text{const}$. Бирлик-



215- расм.

ларнинг олдин кўрсатилганидек танланишида катталик $k = g$, нисбат $\frac{m_и}{m_т} = 1$, шу сабабли математикавий маятникнинг даври учун (77.4) формула ҳам қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{77.5}$$

Ньютон тажрибалари Бессел томонидан катта аниқликда такрорланди. Ҳозирги юз йилликнинг бошларида Ньютон тажрибаларини аниқроқ усулларни қўллаб, анча мукаммал асбоблардан фойдаланиб, академик Крилов томонидан яна бир қайта текшириб кўрилди.

Равшанки, муайян узунликдаги маятникнинг тебраниш даврини ўлчаш натижалари асосида эркин тушиш тезланиши катталигини ёки муайян жойдаги тортишиш кучи катталигини топиш мумкин. Маятникнинг тебраниш даврини ўлчашдаги катта аниқлик муайян жойдаги тортишиш кучининг анча аниқ ўлчанишини таъминлайди.

Битта маятникнинг Ер сиртининг турли жойларидаги тебраниш даврлари орасидаги фарқни билган ҳолда тортишиш кучининг жойдан-жойга ўзгаришини аниқлаш мумкин. Маълум бўлишича, Ер қобиғи сиртининг бир жинсли бўлмагани туфайли тортишиш кучи ҳатто битта географик кенгламанинг ўзида ҳам жойдан-жойга ўзгарар экан. Муайян сатҳда тортишиш кучининг ўзгариши бўйича геологлар Ер қобиғи сирти зичлигининг ўзгаришини биладилар ва бу маълумотлар асосида фойдали қазилмаларнинг борлиги ҳақида хулоса чиқарадилар. Айнан шуни фойдали қазилмаларнинг гравитацион разведкаси дейилади.

Гравитацион ва инерт массаларнинг *пропорционаллиги* қонунининг физикадаги аҳамияти фақат нисбийлик назариясидагина баҳоланган бўлиб, у *муайян жисм учун гравитацион ва инерт массаларнинг эквивалентлиги қонуни* номи билан юритилади ҳамда ундан фазонинг исталган, етарлича кичик соҳасида ҳамма вақт оғирлик кучи майдони бўлмайдиган тезлашган саноқ системани кўрсатиш мумкин, деган муҳим хулосалар чиқарилган.

78- §. Тортишиш потенциал энергияси

Жисмлар орасидаги тортишиш кучи жисмларнинг (ёки жисмларни ташкил қилувчи зарраларнинг) ўзаро жойлашишига боғлиқ бўлгани сабабли бир-бирига нисбатан муайян тарзда жойлашган жисмларнинг ҳар бир мажмуаси тортишиш потенциал энергиясининг қандайдир запасига эга бўлади. Жисмларнинг ўзаро жойлашиши ўзгартирилганда тортишиш кучлари муайян иш бажаради ва, демак, жисмлар системасининг потенциал энергияси ўзгаради.

Тортишиш потенциал энергиясининг ўзгариши жисмлар системаси конфигурациясининг ўзгаришида тортишиш кучлари ишининг тескари ишора билан олинганига тенглигини эслатиб ўтамиз. Умумий ҳолда ўзаро таъсир кучларининг иши системанинг бир конфигурациядан бошқасига ўтиш усулига боғлиқ бўлмаганида система потенциал энергия запасига эга бўлади.

m_1 ва m_2 массали иккита моддий нуқта (ёки ўшандай массали шарлар) учун потенциал энергияни (36.8) формула асосида унга

$$f(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (78.1)$$

(бунда r — зарралар орасидаги масофа ва γ — тортишиш доимийси) катталикни қўйиш орқали ҳисоблаш мумкин. У ҳолда r_1 ва r_2 икки нуқтадаги потенциал энергиялар фарқи қуйидагига тенг бўлади:

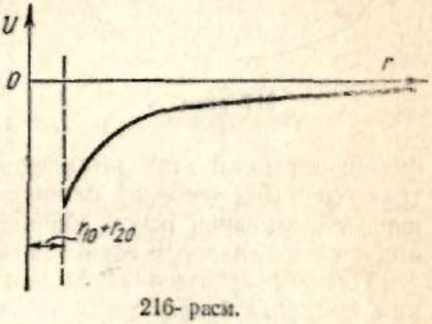
$$U_2 - U_1 = \gamma \int_1^2 \frac{m_1 m_2}{r^2}\, dr = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r}\Big|_1^2 =$$

$$= \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2}. \qquad (78.2)$$

Амалда биз ҳамма вақт икки ҳолатдаги потенциал энергиялар фарқини ҳисоблаб оламиз. Қулайлик учун ҳисоблашларда чексиз узоқликдаги ($r \to \infty$) потенциал энергияни нолга тенг ёки $U\ (\infty) = 0$ деб олинади. У ҳолда (78.2) ни шундай ёзиш мумкин:

$$U_1 = U(r_1) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}. \qquad (78.3)$$

Нолинчи қийматни шундай танлаганда иккита шарнинг (ёки моддий нуқтанинг) потенциал энергияси ҳар доим манфий бўлиш билан бирга (216- расм), масофанинг ортиши билан у орта боради. Бунинг сабаби шуки, жисмлар орасида тортишиш кучлари мавжуд бўладч, демак, уларни бир-бирларидан узоқлаштириш учун иш бажариш зарур ёки: узоқлаштиришда потенциал энергия ўса боради. Потенциал энергиянинг максимуми — жисмларни чексиз узоқлаштирганда, минимуми — улар орасидаги масофа энг кичик бўлганда эришилади.



216- расм.

Агар шарлар мос равишда r_{10} ва r_{20} радиусларга эга бўлса, у ҳолда уларнинг минимал ўзаро таъсир потенциал энергияси қуйидаги катталикка эга:

$$U_{\min} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{10} + r_{20}}. \qquad (78.4)$$

Бир жинсли бўлмаган жисмларнинг ёки моддий нуқталар системасининг тортишиш потенциал энергиясини ҳисоблаш мураккаброқ бўлса-да, у принципиал ўша йўл билан боради. Жисмлар орасидаги масофа ортиши билан тортишиш потенциал энергияси ўса боради.

79- §. Осмон механикасининг асосий қонунлари

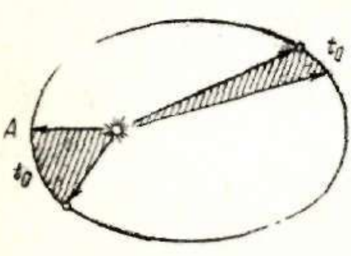
Осмон жисмларининг ҳаракат қонунлари, хусусан, планеталарнинг Қуёш атрофида ҳаракати қонунлари Ньютон қонунлари деб аталувчи — динамиканинг учта қонуни ва бутун олам тортишиш қонунидан иборат механиканинг асосий қонунларининг оддий натижасидир.

Ньютондан олдин Тихо Брагенинг кузатишлари асосида Кеплер планеталарнинг Қуёш атрофида ҳаракати қонунларини топди. Бу қонунлар Кеплер қонунлари деб юритилади ва қуйидагича таърифланади:

1. *Барча планеталарнинг орбиталари эллипслардан иборат бўлиб, фокуслардан бирида Қуёш туради.*

2. *Ҳар бир планетанинг ҳаракати шундай содир бўладики, Қуёшнинг марказидан планетага ўтказилган радиус-вектор бирдай вақт оралиқларида бирдай юзларни ўтади* (217- расм).

3. *Турли планеталарнинг Қуёш атрофида айланиш даврлари квадратлари нисбати орбита эллипслари катта ярим ўқлари кублари нисбати каби бўлади.*



217- расм.

Кеплернинг биринчи қонуни планеталар орбиталарини аниқлашга доир масаланинг ечимидан ва уларнинг орбита бўйича ҳаракати қонунидан келиб чиқади. Бунинг учун катталиги марказдан бошлаб ҳисобланган масофанинг квадратига тескари пропорционал бўлган марказий куч[1] таъсиридаги моддий нуктанинг ҳаракат траекторияларини ҳисоблаб топилади. Бу масалани ечиш натижаларининг кўрсатишича, осмон жисмларининг траекториялари текисликда ётади ва ё эллипс,, ё парабола ё гиперболадан иборат бўлади.

Планета орбитаси айланадан иборат хусусий ҳолда марказий куч таъсирида бундай ҳаракатнинг мумкинлиги элементар йўл билан исботланади. Ҳақиқатан ҳам, планетанинг Қуёш томонидан тортилиш кучи марказга интилма кучга тенг бўлгандагина, у айлана бўйлаб ҳаракатлана олади. Планета Қуёшдан R узоқликда турган нуқтадан ўтиб айлана бўйлаб ҳаракатлана олиши учун у радиус-

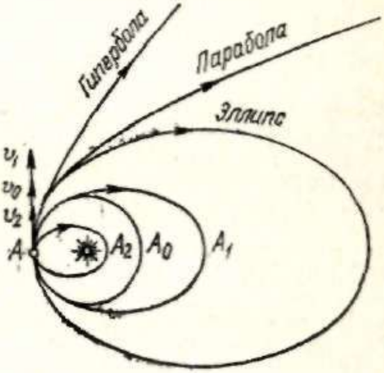
---

[1] Ҳамма жойда бир нуқтага, марказга йўналган куч.

векторга тик йўналган ва ушбуга тенг[1] муайян тезликка эга бўлиши лозим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}, \qquad (79.1)$$

бунда M — Қуёш массаси, γ — тортишиш доимийси. Шундай қилиб, орбита бўйича ҳаракат тезлиги ва орбита радиуси бир-бири билан боғланган бўлиб, шу билан бирга бу тезлик планета массасига боғлиқ эмас.



218- расм.

Анча мураккаб ҳисоблашларнинг кўрсатиши ва кузатишларнинг тасдиқлашича, орбитанинг шакли ва кўриниши бошланғич тезликка боғлиқ бўлар экан. Масалан, агар A нуқтадаги (218- расм) v_2 ҳаракат тезлиги (79.1) формуладаги v_0 дан кичик бўлса, у ҳолда планета эллипс бўйлаб шундай ҳаракат қиладики, Қуёш эллиптик орбитанинг узоқдаги фокусида жойлашади (218- расмдаги AA_2 орбита). Агар v_1 тезлик «айлана» тезлик v_0 дан катта бўлса, у ҳолда ҳам планета эллипс бўйича ҳаракатланса-да, Қуёш орбитанинг яқиндаги фокусида жойлашади (218- расмдаги AA_1 орбита). Бироқ A нуқтадаги тезлик планета парабола бўйлаб ҳаракатланадиган ва ушбуга тенг бўлган

$$v_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \qquad (79.2)$$

тезликдан кичик бўлгандагина ҳаракат эллипс бўйлаб юз беради. Агар A нуқтадаги ҳаракат тезлиги «параболик» тезликдан ((79.2) формулага қ.) катта бўлса, у ҳолда энди планета деб атаб бўлмайдиган осмон жисми гипербола бўйича ҳаракатланади ва аввалги нуқтага ҳеч қачон қайтиб келмайди.

Орбита бўйлаб ҳаракат вақтида кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндиси доимий қолади. Масалан, эллипс бўйича ҳаракат вақтида Қуёшдан узоқлик ортиши билан потенциал энергия ўсади, кинетик энергия эса мос равишда камаядики, узоқдаги нуқталарда Қуёшга яқин жойлардагига нисбатан тезлик кичик бўлади. Агар A нуқтадаги бошланғич тезлик «айлана» тезликдан ортиб кетса, орбита эллипси нуқул ўса боради ва чўзилади. Орбитанинг A га қарама-қарши бўлган A_1 нуқтаси Қуёшдан узоқлаша боради. Агар биз A_1 нуқтанинг Қуёшдан узоқлигини билсак, у ҳолда энергиянинг сақланиш қонунига кўра

---

[1] Бу формула $mv_0^2/R = \gamma Mm/R^2$ тенгликдан чиқарилган, бунда m — планета массаси.

бу нуқтадаги тезликни A нуқтадаги бошланғич тезлик билан боғлиқ тарзда аниқлай оламиз. Ҳақиқатан ҳам, A нуқтадаги

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_1} \tag{79.3}$$

энергия траекториянинг исталган нуқтасидаги

$$E = \frac{mv_{\text{к}}^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_{\text{к}}} \tag{79.4}$$

энергияга тенг, бунда $v_{\text{к}}$ ва $R_{\text{к}}$ — мос равишда қайсидир нуқтадаги тезлик ва ўша нуқтанинг Қуёшдан узоқлиги. (79.3) ва (79.4) формулаларни таққослаш билан, агар бизга «бошланғич» A нуқтадаги E энергия катталиги маълум бўлса, тезлик ва масофа орасидаги боғланишни топамиз. Эллиптик орбиталарда $E < 0$, потенциал энергия (абсолют катталиги жиҳатдан) кинетик энергиядан катта бўлади.

Параболик орбита ҳолида чексизликда тезлик нолга тенг бўлади, шунинг учун у нолга тенг бўлган тўла энергияга, яъни $E = 0$ мос келади; бундан (79.3) бўйича, A нуқтадаги «параболик» тезлик қийматини топамиз, айнан

$$\frac{mv_{\text{п}}^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = 0 \tag{79.5}$$

ўзгартишлар ўтказиб $v_{\text{п}}$ учун юқорида ёзилган (79.2) формулани ҳосил қиламиз.

A нуқтадан бошланувчи гиперболик орбиталарда энергия $E > 0$, яъни кинетик энергия потенциал энергиянинг абсолют катталигидан катта бўлади.

Шундай қилиб, бирор танланган A нуқтадан ўтувчи хилма-хил орбиталарнинг шакли орбиталар бўйича ҳаракатланаётган жисм эга бўлган энергия катталиги билан бир қийматли боғланган.

Кеплернинг иккинчи қонуни ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонуни натижасидир. Ҳақиқатан ҳам, Қуёш атрофида айланаётган планетага ҳамма вақт Қуёшга томон йўналган $\gamma \frac{Mm}{r^2}$ тортишиш кучи таъсир қилади, шунинг учун планетанинг Қуёш марказига нисбатан ҳаракат миқдори моменти доимийдир, яъни

$$[\boldsymbol{r} \cdot m\boldsymbol{v}] = \text{const}$$

ёки

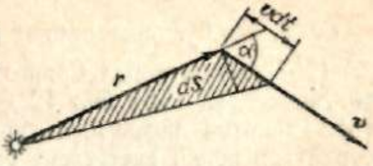
$$[\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}] = \text{const}, \tag{79.6}$$

бунда 219- расмда кўрсатилганидек, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, $\boldsymbol{v}$ — планетанинг тезлик вектори. Радиус-вектор dt вақт ичида босиб ўтадиган юза ушбуга тенг:

$$dS = \frac{1}{2} rv \sin \alpha \cdot dt,$$

бунда α катталик r ва v орасидаги бурчак; (79.6) ифодани назарга олиб, шундай ёзиш мумкин:

$$2\frac{dS}{dt} = rv\sin\alpha = \text{const} \text{ ёки } \frac{dS}{dt} = \text{const}. \quad (79.7)$$



219- расм.

Бу қонундан, планета ўз орбитаси бўйича ҳаракатланаётганда у Қуёшга энг яқин (217-расмда A нуқта) бўлган пайтларида энг катта тезликларга эга бўлади, деган хулоса келиб чиқади.

Кеплернинг учинчи қонуни, планеталар орбиталари айланалардан иборат деб ҳисобланса, осон исботланади. Ҳақиқатан ҳам, орбиталар эллипсларининг эксцентриститетлари жуда кичик, масалан, Ер орбитаси учун у ≈ 0,017. Меркурий орбитаси учун ≈ 0,205. Эллиптик орбиталарнинг эксцентриситетлари ҳисобга олинадиган аниқ ҳисоблашларда ҳам ўша натижалар олинишини таъкидлаб ўтамиз.

Айтайлик, бир планета m_1 массага, радиуси r_1 бўлган айлана орбитага ва орбита бўйлаб T_1 айланиш даврига, иккинчи планета бўлса, тегишлича m_2, r_2, T_2 га эга бўлсин. У ҳолда биринчи планетанинг айлана орбита бўйича ҳаракати чизиқли тезлигининг квадрати ушбуга тенг:

$$v_1^2 = \frac{\gamma M}{r_1},$$

бунда M — қуёш массаси. Планетанинг орбита бўйича ҳаракат тезлиги қуйидагига тенг:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

Бу ифодани олдинги формулага қўйсак, қуйидагини топамиз:

$$\frac{4\pi^2 r_1^2}{T_1^2} = \frac{\gamma M}{r_1} \quad \text{ёки} \quad \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} \qquad (79.8)$$

Иккинчи планета учун ҳам худди шундай ифодани ёзиш мумкин

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}. \qquad (79.9)$$

(79.8) ва (79.9) ни таққослаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3},$$

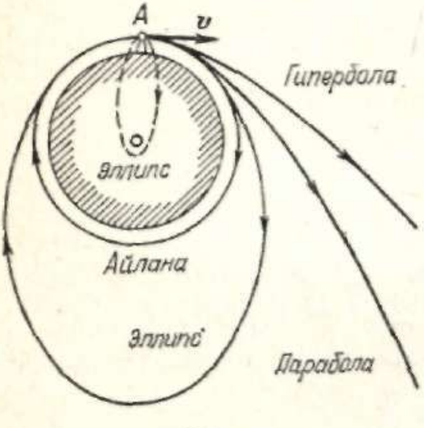
бу Кеплер учинчи қонунининг мазмунини ташкил қилади.

Шундай қилиб, Ньютон механикаси осмон жисмларининг ҳаракат қонунларини тўла тушунтириб берди. Ҳозиргача астрономлар томонидан осмон жисмлари ҳаракат йўлларининг ажойиб назарий тадқиқлари давом эттирилаётган бўлиб, бу тадқиқотлар космик кемалар ва йўлдошлар ҳаракатларини экспериментал ўлчашлар орқали тасдиқланмоқда.

80-§. Ер йўлдошларининг ва космик снарядларнинг ҳаракати

1957 йил октябрда Ернинг биринчи совет сунъий йўлдоши учирилганидан ва 1961 йил 12 апрелда Ю. А. Гагариннинг Ер атрофида тарихий парвозидан кейин космик учишлар техникаси тез суръатлар билан ривожлана бошлади ва ҳозирги кунда Ер атрофида кўплаб сунъий йўлдошлар айланиб юрипти, инсон учирган космик снарядларнинг бир қанчаси эса Қуёш йўлдошларига айланди.

Ер йўлдошларининг учиш қонунлари планеталарнинг Қуёш атрофида айланиш қонунларига ўхшашдир. Агар космик снарядни бирор h баландликдан v тезлик билан горизонтал отилган одатдаги снаряд ёки оддий тош деб тасаввур қилсак, у ҳолда атмосферанинг таъсири бўлмаганида, унинг барча мумкин бўлган траекториялари (220-расм), аёнки, планеталарнинг мумкин бўлган ҳаракатларига ўхшаш бўлади.



220- расм.

Бошланғич тезлиги v ушбу

$$v_{\text{кр}} = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r_0+h}}$$

тезликдан кичик бўлганда снаряд тракториялари фокуслари Ернинг маркази билан мос тушувчи эллипс кесмаларидан иборат бўлади. Жуда ҳам кичик бошланғич тезликда бу кесмаларни катта аниқликда парабола кесмалари дейиш мумкин.

Тақрибан 7,93 км/сек га тенг бўлган $v_{\text{кр}}$ тезликда снаряд траекторияси айлана бўлади ва снаряд Ернинг йўлдошига айланади. Снаряднинг айлана орбита бўйлаб ҳаракати тезлигини снаряднинг марказга интилма тезланиши $\frac{v^2_{\text{кр}}}{r_0+h}$, эркин тушиш тезланиши g га тенг бўлиши шартидан осон ҳисоблаб топиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам h баландликда эркин тушиш тезланиши

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0+h)^2}, \tag{80.1}$$

бунда g_0 — Ер сиртида унинг марказидан r_0 масофада тезланиш; у ҳолда

$$\frac{v^2_{\text{кр}}}{r_0+h} = g = \frac{g_0 r_0^2}{(r_0+h)^2}$$

ёки

$$v_{\text{кр}} = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r_0+h}}. \qquad (80.2)$$

Агар $h \ll r_0$ бўлса, у ҳолда

$$v_{\text{кр}} \approx \sqrt{r_0 g_0} \approx 7{,}93 \text{ км/сек} \qquad (80.3)$$

йўлдошнинг Ер радиусига тенг радиусли айлана орбита бўйича ҳаракат тезлиги бўлади; бу тезликни *биринчи космик тезлик* деб аташ қабул қилинган. Бошланғич тезлик $v_{\text{кр}}$ дан катта, лекин

$$v_{\text{п}} = r_0 \sqrt{\frac{2g}{r_0+h}}$$

қийматдан кичик бўлганда снаряд траекторияси эллипсдан иборат бўлиб, эллипснинг учиб чиқиш нуқтасига яқин фокусида Ер маркази жойлашган. $v = v_{\text{п}}$ да снаряд траекторияси парабола кўринишига эга ва у бўйлаб ҳаракатланаётган снаряд Ерга қайтмайди. Ерга нисбатан «параболик» тезлик ҳам (79.5) формула бўйича аниқланиб, фақат γM ўрнига $\gamma M_{\text{ер}}$ қўйилиши лозим, бунда $M_{\text{ер}}$ — Ернинг массаси. Тортишиш кучи тезланиши катталиги учун ёзилган (80.1) формулани ҳисобга олсак, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\frac{\gamma M_{\text{ер}}}{(r_0+h)^2} = \frac{g_0 r_0^2}{(r_0+h)^2}, \quad \gamma M_{\text{ер}} = g_0 r_0^2. \qquad (80.4)$$

Буни (79.5) га қўйсак, Ер учун параболик тезликни топамиз:

$$v_{\text{п}} = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0+h}}. \qquad (80.5)$$

$h \ll r_0$ ҳолда ёки снарядни Ер сиртига уринма бўйича отилганда,

$$v_{\text{п}} \approx \sqrt{2g_0 r_0} \approx 11{,}2 \text{ км/сек}. \qquad (80.6)$$

Бу катталикни *иккинчи космик тезлик* дейилади.

Бинобарин, агар снаряд h баландликдан горизонтал тарзда $v_{\text{п}} = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0+h}}$ дан катта тезлик билан отилса у *гиперболик* траектория бўйича ҳаракатланиб, Ернинг тортиш соҳасидан чиқиб кетади ёки Қуёшнинг мустақил йўлдоши, яъни кичкина сунъий планетага айланади.

Бу барча ҳисоблашлар космик снаряднинг ҳаракатига Қуёшнинг ва планеталарнинг таъсирини ҳисобга олмасдан бажарилади. Бошқача айтганда, Ер ҳаракатсиз ва йўлдош унга нисбатан ҳаракатланади, бутун система (Ер—йўлдош) Қуёш атрофида ҳаракатини муттасил давом эттиради деб ҳисобланади.

Йўлдошнинг массаси Ернинг массасига нисбатан жуда кичик, шунинг учун Ер—йўлдош системанинг инерция маркази амалда Ер-

нинг инерция марказига мос тушади. Бундан ташқари, йўлдош ва Ер маркази орасидаги масофа Ердан Қуёшгача масофага нисбатан жуда кичик бўлганидан Қуёш тортиши ўзгаришининг йўлдош орбитасига таъсирини назарга олмаса ҳам бўлади. Йўлдош Ердан катта масофаларга узоқлашганда, албатта, ҳисоблашни олиб бораётганда Қуёшнинг, Ойнинг ва Қуёш системасининг бошқа планеталарининг тортишиш кучларини ҳисобга олиш лозим. Иккинчи томондан, Ер йўлдошлари айлана орбиталар бўйича унинг атрофида ҳаракатланаётганида бу ҳаракат Ернинг тортиш кучи майдонининг ҳам Ер сиртининг сферадан четлашишидан, ҳам Ер зичлигининг (айниқса, унинг юқори қатламларида) ўзгаришидан юзага келувчи нобиржинслигига боғлиқ.

Мураккаброқ ҳисоблашларнинг кўрсатишича, *учинчи космик тезлик*, яъни снаряд Қуёш системасини ташлаб кетиши учун унга Ерда бериш зарур бўлган тезлик қуйидагига тенг:

$$v_{\text{косм}} \approx 16{,}7 \text{ км/сек}. \tag{80.7}$$

Уни тақрибан қуйидаги тарзда ҳисоблаш мумкин. Аввало, $r_{п} = v_{кр}\sqrt{2}$ эканлигини, у (80.2) ва (80.5) ларни қиёслашдан келиб чиқишини ёки: параболик тезлик айлана тезликдан $\sqrt{2}$ марта катта эканлигини қайд қилиб ўтамиз. Ер учун ёки аниқроғи, биз айлана орбита деб ҳисоблайдиган Ер орбитаси бўйлаб ҳаракатланаётган жисм учун ҳам шундай бўлиши равшан. Агар биз снарядни Ер орбитасига мос тушувчи орбитага чиқара олсак эди, бу ҳолда у шу орбита бўйлаб Ернинг Қуёшга нисбатан тахминан 30 км/сек (29,76 км/сек) га тенг бўлган тезлиги r_0 билан ҳаракатланган бўларди. Демак, у Қуёш системаси чегараларини ташлаб кетиши учун унга яна

$$v_0\left(\sqrt{2}-1\right) \tag{80.8}$$

тезлик бериш лозим бўларди. Бошқача айтганда, бу снарядга орбита бўйлаб Ер каби ҳаракатланаётган координаталар системасига нисбатан

$$\frac{mv_0^2}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \tag{80.9}$$

кинетик энергия бериш лозим (m — снаряд массаси). Снарядни Ернинг тортиш майдонидан узоқлаштириш учун унга

$$v_{п} = \sqrt{2g_0 r_0} \approx 11{,}2 \text{ км/сек}$$

тезлик ёки

$$\frac{mv_{п}^2}{2} \tag{80.10}$$

кинетик энергия бериш лозим бўлиб, у Ернинг тортиш кучларига қарши иш бажаришга сарфланади. Демак, агар биз снарядга Ерга нисбатан $v_{\text{косм}}$ тезлик ёки

$$\frac{mv^2{}_{\text{косм}}}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \frac{mv_{п}^2}{1} \tag{80.11}$$

кинетик энергия берсак, у Қуёш системасини ташлаб кетиши лозим. (80.11) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$v_{\text{косм}}^2 = v_0^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + v_{п}^2. \tag{80.12}$$

Бу ерга сонларни қўйсак, ушбуни топамиз: $v_{\text{косм}} \approx 16,75$ км/сек.

Бундан келиб чиқишича, планеталар ва умуман, осмон жисмларининг ҳаракат қонунлари тушувчи ёки улоқтирилган тош қонунларининг худди ўзидир ва улар эркин тушишни, яъни ягона бир тортишиш кучи таъсиридаги ҳаракатни тавсифлайди.

Бу ҳодисаларни таққослаш бизга олма ҳақидаги афсонани эслатади, унда ҳикоя қилинишига кўра, тупидан узилиб тушган олма ҳақида фикрлаш Ньютонни бутун олам тортишиш қонунини очишга олиб келган.

Бу афсона Ньютон томонидан қонуннинг очилишини нотўғри баён қилсада, лекин у олманинг тупидан тушиши, космик кеманинг ҳаракати ва осмон жисмларининг ҳаракати кабилар ягона қонуниятга бўйсунувчи ҳодисалар, битта синфга оид физикавий ҳодисалар эканлигини яққол кўрсатади.

ИККИНЧИ ҚИСМ

ДЕФОРМАЦИЯЛАНУВЧИ ЖИСМЛАР МЕХАНИКАСИ

X БОБ

ДЕФОРМАЦИЯЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМЛАР МЕХАНИКАСИ

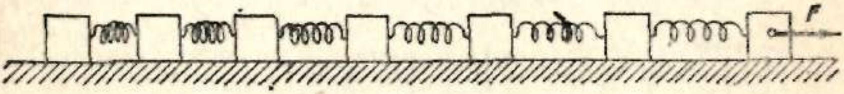
81-§. Эластик жисм тўғрисида тушунча. Чўзилишдаги кучлар ва деформациялар

Жисмга таъсир этувчи кучлар ўзгарар экан, жисмнинг шакли ўзгаради, ёки физикада айтилишича, қаттиқ жисм *деформацияланади.* Қаттиқ жисмлар механикаси қонунларини ўрганганимизда биз жисмнинг деформациялари анча кичик ва улар жисмнинг ҳаракатига таъсир кўрсатмайди, деб фараз қилиб, жисмнинг деформацияларини эътиборга олмаган эдик. Бироқ, механиканинг бошқа кўп масалаларида кучларнинг жисмга кўрсатадиган таъсири билан бу кучлар юзага келтирадиган деформациялар орасидаги боғланиш қонунларини билиш зарур бўлади; биз бу бобда айни ўша қонунларни ўрганамиз.

Аввало шуни қайд қилиб ўтамизки, жисм тинч турибдими (статика), ёки нотекис ҳаракат ҳолатидами (динамика), бундан қатъи назар, жисмга куч таъсир этган ҳамма ҳолларда жисм деформацияланади (92-§ га қ.) Масалан, чизғичнинг учларига уни чўзувчи тенг ва қарама-қарши йўналган икки куч қўйилган; бу кучларнинг ортиши билан чизғич чўзилади, чизғичнинг алоҳида зарралари орасидаги масофа ортади, чизғич деформацияланади. Чизғичнинг учларига қўйилган кучлар ортиши билан барча алоҳида зарралар орасидаги масофалар ортади.

Энди айни ўша чизғичга унинг бир учига қўйилган куч таъсир этяпти, деб тасаввур қилайлик. Чизғич бу куч таъсири остида тезланма ҳаракат қилади, худди шу сабабдан (яъни куч таъсиридан) чизғичда деформациялар пайдо бўлади. Бироқ бунда деформациялар характери олдинги ҳолдагидан бошқача бўлади. Олдинги ҳолда бир жинсли чизғичнинг ҳамма қисмларининг деформациялари бир хил эди, бу ҳолда эса бир жинсли чизғичнинг турли қисмлари турлича деформацияланади: куч қўйилган учга яқин жойдаги қисмлар бу учидан узоқдаги қисмларга қараганда кўпроқ чўзилади.

Чизғичнинг деформациясини 221-расмда кўрсатилган моделнинг деформацияси сифатида схематик равишда тасаввур этиш мумкин; бу модель бир-бирига пружиначалар билан бириктирилган айрим масса-лардан («жисм зарраларидан») иборат. Моделнинг энг четки массасига ташқи куч қўйилганда бутун тизим тезланма ҳаракат қилади; ҳар бир пружиначага таъсир этувчи кучлар пружинадан пружинага узатилиши билан камайиб боради. Бирор пружиначани чўзаётган куч бу пружинача орқасида келаётган ҳамма массаларга тезланиш беради ва шунинг учун пружиначалар деформацияси турлича бўлади. Худди шу сабабларга кўра бир жинсли чизғичнинг турли қисмларининг чўзилиши турлича бўлади. Деформацияланган жисмнинг турли қисмлари орасида пайдо бўладиган кучлар, ташқи кучлардан фарқли равишда, *ички кучлар* ёки *зўриқишлар* деб аталади.



221- расм.

Бу мисоллар деформацияларни анализ қилишда кучни, абсолют қаттиқ жисмда қилингани каби, унинг таъсир чизиғи бўйлаб кўчириш тўғри эмаслигини кўрсатади. Кучнинг биринчи массага (221-расмга қ.) ёки, масалан, учинчи массага қўйилган бўлишига қараб деформациялар *мутлақо бошқа-бошқа бўлади.*

Қўйилган кучлар, яъни нагрузкалар ўзгарганда деформациялар ҳам ўзгаради; кучлар ўзгармас бўлганда, умуман айтганда, деформациялар ўзгармайди, яъни доимий бўлади.

Жисмнинг турли қисмларида кучлар ва деформациялар тақсимоти анча мураккаб бўлгани учунгина эмас, балки одатда кучлар билан деформациялар орасидаги боғланиш бир қийматли эмаслиги ва у қўйилган кучларнинг катталигига ва ўзгариш характерига ҳамда бошқа сабабларга боғлиқ бўлгани учун ҳам кучлар билан деформацияларни боғловчи қонунлар умумий ҳолда жуда мураккаб бўлади.

Фақат *эластик* жисмда, бунинг устига, кучлар (ташқи ва ички кучлар) ва деформациялар катталиги ўзгаришининг *маълум бир* диапазонида кучлар деформацияларни ва аксинча, деформациялар кучларни бир қийматли аниқлайди[1].

Куч билан деформацияни боғловчи қонуниятларни аниқлаш учун деформациянинг энг содда турини, яъни бир жинсли стерженнинг (цилиндрнинг) ўз ўқи бўйлаб чўзилишини (ёки сиқилишини) кўриб чиқамиз.

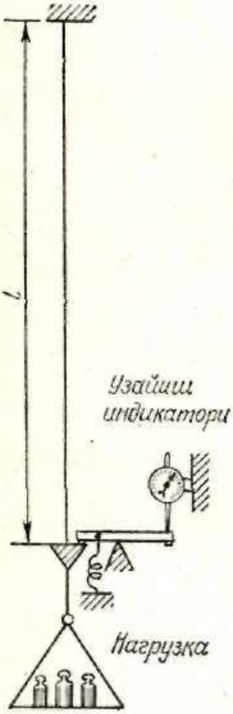
---

[1] Эҳтимол, эластик жисм ҳақида эмас, балки жисмнинг эластик зонаси ҳақида гапириш тўғрироқ бўлар эди; бу ерда «зона» деганда мазкур жисм ўзини эластик жисм каби тутадиган ҳолдаги шароитлар мажмуаси тушунилади. Бироқ бундай терминология қабул қилинмаган, шунинг учун биз уни ишлатмаймиз.

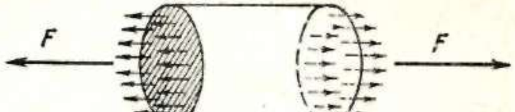
Узун пўлат стержень ёки симнинг чўзилишига оид тажрибаларнинг натижаларини таҳлил қилиб чиқамиз (222- расм). Агар стержень материали бир жинсли бўлса, стерженнинг исталган жойида белгилаб қўйилиши мумкин бўлган барча бир хил бўлаклари ҳар қандай тайинли нагрузкада бир хил чўзилади. Стерженнинг чўзилиш деформацияси бир жинсли бўлади, бу чўзилиш деформациясини *нисбий* ε *узайиш* билан ифодалаш мумкин:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_1}{l_1}. \tag{81.1}$$

бу ерда Δl_1 — стерженнинг бошланғич узунлиги l_1 бўлган бирор кесмасининг узайиши. Ҳар қандай кесма учун, шу жумладан, бутун сим учун ε нинг катталиги бир хил бўлиб, чўзувчи F кучнинг катталигига боғлиқдир. F куч таъсирида стерженда ички кучлар пайдо бўлади, стерженнинг қисмлари бир-бирига ўша ички кучлар (зўриқишлар) билан таъсир қилади. Стерженнинг бирор бўлагини фикран кесиб олиб (223- расм), бу бўлакнинг мувозанат шартларини кўриб чиқамиз. Мувозанат шартларидан бу кесманинг учларига стерженнинг қўшни қисмлари томонидан таъсир этувчи кучлар бир-бирига тенг бўлиб, қарама-қарши йўналган деган хулоса чиқади. Бу хулоса стерженнинг ҳар қандай кесмаси учун тўғри бўлгани сабабли, стерженнинг ҳар қандай кўндаланг кесимида F га тенг бўлган ички кучлар пайдо бўлади.



222- расм.

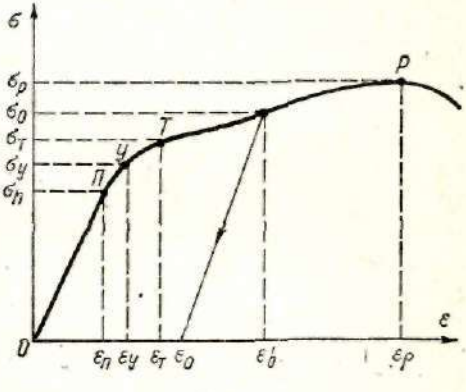


223- расм.

F зўриқишни кўндаланг кесим сиртига қўйилган куч сифатида, «сиртга таъсир этувчи куч» сифатида тасаввур этиш мумкин. Агар материал *бир жинсли* бўлса, у ҳолда зўриқишни кўндаланг кесим сирти бўйлаб *текис* тақсимланган, деб ҳисоблаш мумкин. Кўндаланг кесимнинг бирлик юзига таъсир этувчи зўриқиш катталиги *кучланиш* деб аталади ва σ билан белгиланади. Чўзилаётган стерженда пайдо бўлаётган σ кучланиш қуйидагига тенг:

$$\sigma = \frac{F}{S}, \qquad (81.2)$$

бу ерда S — стержень кўндаланг кесимининг юзи. Тажрибанинг кўрсатишича, нисбий ε деформация σ кучланиш билан аниқланади.



224- расм.

Чўзаётган F куч ёки σ кучланишни аста-секин орттира бориб, стерженнинг узайишини, яъни нисбий ε деформацияни қайд қиламиз. Бу тажрибалар асосида σ кучланиш билан ε деформация орасидаги боғланиш диаграммасини ҳосил қиламиз, бу диаграмма 224-расмда кўрсатилган. Зўриқиш унча катта бўлмаганда σ кучланиш билан ε деформация бир-бирига деярли *пропорционал* бўлади. *П* нуқтага боргунча боғланиш шундай давом этади. Ундан кейин деформация тезроқ ортади, эгри чизиқ ε деформациялар ўқига томон эгилади, T нуқтадан бошлаб эса эгри чизиқ бирор қисмда деформация ўқига ҳатто деярли параллел бўлиб боради — бу қисмда кучланишлар деярли ортмайди, деформациялар эса ортади. Эгри чизиқнинг T нуқтадан бошланадиган қисмига тегишли деформациялар (ёки кучланишлар) соҳаси *оқувчанлик соҳаси* ёки *пластик деформациялар соҳаси* деб аталади. Сўнгра ε деформациялар ортиши билан кучланишлар эгри чизиғи бир оз кўтарилади, P нуқтада максимумга эришади ва ундан кейин пасайиб узилади. Эгри чизиқнинг охири стерженнинг узилишига мос келади; равшанки, чўзаётган куч максимал σ_p кучланишга мос келувчи $F = \sigma_p S$ қийматга етгандан кейингина стержень узилади.

σ (ε) диаграммани чизиб олгандан кейин ўша материалдан ясалган янги намуна оламиз ва қуйидаги тартибда янги-янги тажрибалар ўтказамиз: кучланиш бирор σ қийматга эришгунча намунага қўйилган кучни (яъни осилган юкни) аста-секин орттира борамиз. Сўнгра стерженга қўйилган кучни оз-оздан камайтирамиз ва ҳамма вақт *кучланиш ва деформацияларнинг бир-бирига мос қийматларини* қайд қиламиз. Бу тажрибаларнинг натижалари куч билан деформация орасида *бир қийматли* боғланиш борлигини кўрсатади. Агар намунага қўйилган куч орттирилаётганда олинган σ (ε) эгри чизиқ куч камайтирилаётганда олинган эгри чизиқ билан бир хил бўлса, деформация кучланишни ва аксинча, кучланиш деформацияни бир қийматли аниқлайди. Бундай тажрибаларни бирин-кетин ўтказиб, ҳар гал кучланишнинг куч камайтира бошланадигандаги максимал қийматини орттирамиз. Кучланиш бирор σ_y максимал қийматга эришгандан сўнг (224-расмга қ.) кучни орттиришда олинган эгри чизиқ кучни камайтиришда олинган эгри чизиқ билан бир хил бўлмай қолишини пайқаймиз; стерженга қўйилган куч камайтирилаётганда кучланишнинг айни ўша қийматларида деформациялар қиймати каттароқ бўлади ва намунага қўйилган кучни бутунлай олиб ташлаганда деформациялар нолга тенг бўлмайди, бу ҳолда стерженда *қолдиқ деформациялар* пайдо бўлди деб гапиришади.

«Кучланиш — деформация» эгри чизиғининг $O - \sigma_y$ қисмига мос келадиган деформация ва кучланишларнинг кичик қийматлари соҳаси мазкур материалнинг (пўлатнинг) *эластик деформациялар* соҳасидир. ε_y дан кичик бўлган деформациялардагина пўлат стержень чўзилишда эластик жисм каби бўлади. Синалаётган намунанинг ёки тўғрироғи, синалаётган материалнинг чўзилишдаги *эластиклик чегарасига* тўғри келувчи $У$ (σ_y, ε_y) нуқта (224-расм) $\sigma_П$ ва $\sigma_Т$ нинг қийматлари орасида ётади.

Деформациялар мазкур материалга тегишли эластиклик чегарасидан кичик бўлгандагина жисм эластик жисм бўлади. Фақат эластик деформациялар зонасида ёки соддароқ айтганда, эластиклик зонасида кучланиш билан деформациялар бир қийматли боғланган.

Шуни қайд қилиб ўтиш керакки, эластиклик чегарасини баён этилган усул билан топишда σ_y ва ε_y нинг қийматлари тажрибаларда куч ва деформацияларни ўлчаш аниқлигига кўп боғлиқ бўлади. Аниқлиги паст бўлган хомаки тажрибаларда айни ўша материал учун σ_y ва ε_y нинг қийматлари каттароқ бўлиб чиқади. Шунинг учун материалларни синаш лабораторияларида эластиклик чегарасини шундай кучланишларда ҳисоблашга келишиб олинадики, бунда куч олингандан сўнгги қолдиқ деформациялар куч қўйилгандаги деформациянинг маълум бир жуда кичик улушига, масалан, 0,1% ига тенг бўлади.

$\sigma(\varepsilon)$ эгри чизиқнинг бош қисми (224-расмга қ.) тўғри чизиқдир; кучланиш билан деформация орасидаги боғланишни бу қисмда тахминан *П* нуқтагача тўғри пропорционаллик қонуни билан тасвирлаш мумкин:

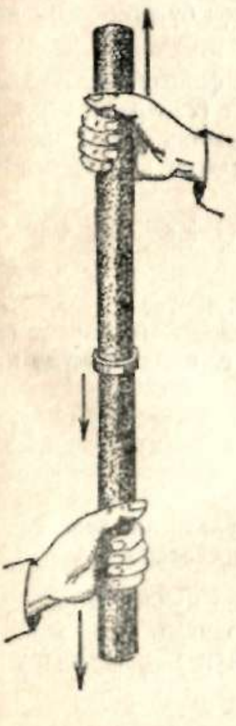
$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \qquad (81.3)$$

бу муносабат *Гук қонуни* деб аталади. Ўлчамлиги Н/м^2 ёки Н/мм^2 бўлган ўзгармас E пропорционаллик коэффициенти *Юнг модули* деб аталади ва мазкур материалнинг муҳим характеристикаларидан бири бўлиб ҳисобланади (кўпгина қўлланма ва техник справочникларда Юнг модули кг-куч/мм^2 билан ифодаланган). Гук қонуни ўринли бўладиган соҳа *пропорционаллик соҳаси* деб аталади; кучланиш ва деформациянинг Гук қонуни ўринли бўладиган ҳолдаги энг катта $\sigma_П$ ва $\varepsilon_П$ қийматлари *пропорционаллик чегараси* деб аталади. Пўлатнинг пропорционаллик чегараси эластиклик чегарасига жуда яқин туради, умуман, улар бир-бири билан устма-уст тушмаслиги ҳам мумкин.

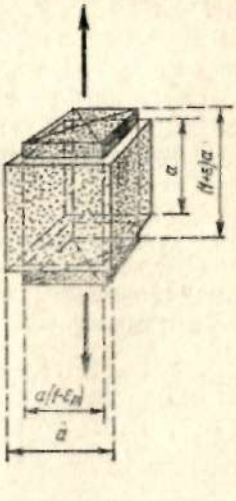
«Деформация — кучланиш» эгри чизиғининг эластиклик чегарасидан ташқарида ётган қисми *пластик деформациялар соҳаси* деб аталади ва *деформациялар бундай бўлганда синалаётган жисм эластик бўлмайди.*

Агар деформацияни пластик деформациялар соҳасида ётувчи бирор ε_0' қийматга етказиб, кейин куч камайтирилса, деформация катталиги 224-расмда тақрибан кўрсатилгандек бир оз камаяди. Куч бутунлай олиб қўйилганда ε_0 қолдиқ деформация деярли ε_0' каби қийматга эга бўлади. Пластиклик соҳасида қолдиқ деформациялар бошланғич деформацияларга деярли тенг бўлади. Бу соҳада, одатда, иккита характерли нуқта бўлади; оқувчанлик чегараси (T нуқта ёки σ_T)ва мустаҳкамлик чегараси (P нуқта ёки σ_P). Оқувчанлик чегарасига эришилгач, материал «сқа» бошлайди; бу эса нагрузка орттирилмаган ҳолда ҳам деформациялар ортаверишини билдиради. σ_P мустаҳкамлик чегараси — намуна ҳали емирилмай турадиган ҳолдаги *энг катта кучланиш; кучланиш бу чагарадан* ортса, синалаётган намуна емирилади.

Стерженнинг чўзилиши ёки сиқилишидаги деформациялар жуда содда бўлади. Стерженда фикран ажратиб олинган куб бундай деформацияда параллелепипед бўлиб қолади. Бунда кубнинг ва бутун стерженнинг кўндаланг кесими ҳам ўзгаради: чўзилишда



225- расм.



226- расм.

кўндаланг кесимлар кичраяди, сиқилишда эса катталашади, бундай эканлиги тажрибада ўлчаб топилган.

Резина найга зич қилиб металл ҳалқа кийдириб, сўнгра най чўзилса, диаметри кичрайишини пайқаш осон. Найни вертикал вазиятда тутиб туриб чўзсак, маълум бир тарангликда ҳалқа пастга тушади (225-расм). Стерженларни узадиган машинада худди шундай тажрибани металл стержень билан ҳам ўтказиш мумкин (228-расмга қ.).

Тажриба стерженнинг кўндаланг кесими камайиши ε узайиш деформациясига пропорционал эканини кўрсатади. Кубнинг (226-расм) кўндаланг ёғини[1] чегаралаб турган қирранинг нисбий қисқаришини $\varepsilon_п$ билан белгиласак,

$$\varepsilon_\Pi = \mu\varepsilon \tag{81.4}$$

бўлади, бу ерда μ — *кўндалангига сиқилиш модули* ёки *Пуассон коэффициенти* деб аталади. Кўндалангига сиқилиш модули μ, Юнг модули каби, материалнинг эластиклик хоссаларининг муайян характеристикасидир.

Соддагина мулоҳазалардан бир жинсли изотроп материалнинг кўндалангига сиқилиш модули (μ) $\frac{1}{2}$ дан ортиқ бўлолмаслиги келиб чиқади.

Стержень чўзилишдан олдин унинг ичида фикран ажратиб олинган a томонли бирор кубнинг ҳажми a^3 бўлсин (226-расмга қ.), деб фараз қилайлик. Агар кубнинг қирралари стержень ўқига параллел бўлса, деформациялангандан сўнг кубнинг ҳажми қуйидагига тенг бўлади:

$$a^3(1+\varepsilon)(1-\varepsilon_\Pi)^2 = a^3(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2 = a^3(1+\varepsilon-2\mu\varepsilon+\mu^2\varepsilon^2- \\ -2\mu\varepsilon^2+\mu^2\varepsilon^3). \tag{81.5}$$

Чўзилишда ҳажм камая олмайди, шунинг учун

$$\varepsilon(1-2\mu) + \text{жуда кичик миқдорлар} \geqslant 0; \tag{81.6}$$

шу сабабли $\varepsilon > 0$ эканлигини ҳисобга олиб ва жуда кичик миқдорларни эътиборга олмай,

$$\mu \leqslant \frac{1}{2} \tag{81.7}$$

экан деган хулосага келамиз.

82-§. Деформацияланаётган жисмда бўладиган ҳодисалар манзараси. Материалларнинг хоссалари

Деформацияланаётган жисмда бўладиган ва кучлар билан деформациялар орасидаги боғланишни изоҳлаб берадиган физикавий процесслар жуда мураккаб бўлиб, бу соҳадаги кўп масалалар шу чоққача етарлича тадқиқ этилган эмас.

---

[1] Чўзилиш кучланишларига нормал (тик) бўлган ёқ.

81-§ да тавсиф этилган ҳодисалар металларга хосдир. Рентгеноскопик тадқиқотларнинг кўрсатишича, одатдаги ҳолатда металлар бир-бирига нисбатан хаотик жойлашган майда-майда кристаллчалар тўпламидан иборат. Маълумки, кристалларда атомлар кристалл панжара ҳосил қилиб тайинли бир тартибда жойлашади. Масалан, алюминийнинг кристалл панжараси бир-бирига тақалиб турган бир хил ячейкалар тўпламидан иборат. Панжаранинг ҳар бир ячейкаси куб бўлиб, унинг учларида атомлар жойлашган, шу билан бирга, кубнинг ҳар бир ёғи марказида яна битта атом бор. Кристалл панжаранинг бундай тузилиши ёқлари марказлаштирилган кубик панжара деб аталади.

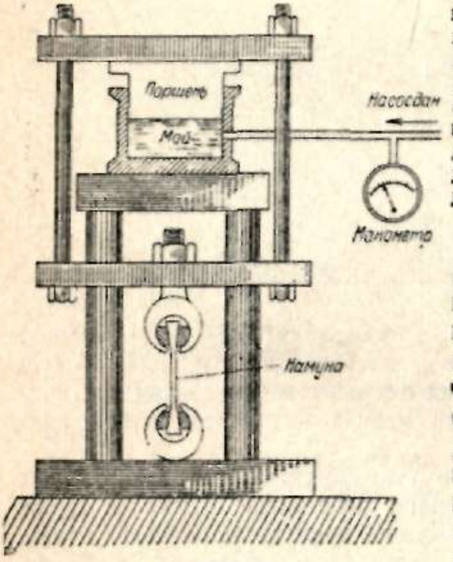
227- расм.

Равшанки, агар материалнинг бутун намунаси бир кристаллдан иборат (монокристалл) бўлса эди, унинг эластиклик хоссалари турли йўналишларда турлича бўлар эди. Бундай жисмлар *анизотроп жисмлар* деб аталади. Ҳақиқатда эса металлдаги майда кристаллчалар хаотик жойлашган бўлиб, бир-бирига нисбатан тахминан 227-расмда схематик равишда тасвирлангандек мутлақо ҳар хил жойлашади. Шунинг учун ҳар хил йўналишлар бўйича металлнинг эластиклик хоссалари бир хил бўлиб, металл *изотроп* жисмдир. Монокристаллар пластик деформацияланганда бирор тайинли текисликлар бўйлаб *сирпаниш* юз беради. Кристаллнинг қисмлари бир-бирига нисбатан мана шу *сирпаниш текисликлари* бўйлаб осонроқ ҳаракатланади ва нагрузка олингандан (куч таъсири тўхтатилгандан) кейин ўша вазиятда қолади. Афтидан, пластик деформацияланишда жисм таркибидаги майда кристаллчалар ҳам шундай бўлса керак.

Металлдаги деформация манзарасини тахминан қуйидагича тасаввур этиш мумкин. Эластик деформациялар зонасида кристаллчалар силжимасдан ва бузилмасдан ўз шаклини ўзгартиради. Нагрузка олингандан кейин кристаллчалар аввалги ҳолатига келади. Пластик деформациялар зонасида эса кристаллчаларнинг шакли ўзгаришидан ташқари, уларда сирпаниш юз беради, шунингдек, улар бир-бирига нисбатан силжийди ва синади. Энди бу ўзгаришлар нагрузка олингандан кейин йўқола олмайди ва жисм деформацияланганича қолади, унда қолдиқ деформациялар пайдо бўлади.

Пластик деформациялар технологияда муҳим аҳамият касб этади: металларни штамповка қилиш, эгиш, болғалаб буюм ясаш пластик деформациялар туфайлигина мумкин бўлади. Равшанки, агар металлда фақат эластик деформациялар бўлганда эди, юқорида айтиб ўтилган усуллар билан металлдан ҳеч нарса ясаб бўлмас эди.

Шуни айтиб ўтамизки, пластиклик зонасига мос келадиган деформациялар ҳосил бўлгунча деформацияланган намунага куч таъсири тўхтатилгандан кейин бу намунанинг эластиклик хоссалари, умуман айтганда, ўзгаради. Агар биз унга қайтадан нагрузка бера бошласак, пропорционаллик чегараси ортганлигини кўрамиз. Масалан, пўлат сим ясалишида одатда унга шундай механикавий ишлов бериладики, бунинг натижасида симнинг мустахкамлиги айни ўшандай навли пўлатнинг мустаҳкамлигидан анча юқори бўлади.

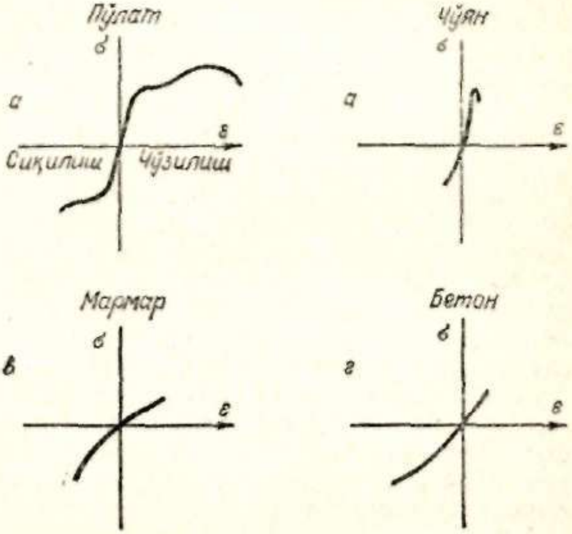


228- расм.

Металл ва бошқа материалларнинг механикавий хоссалари маълум бир тарзда тайёрланган маълум ўлчам ва маълум шаклга эга бўлган стерженларнинг чўзилишига қараб аниқланади. Бу стерженлар материаллар синаладиган махсус машиналарда чўзиб кўрилади (228- расм), бу машиналар одатда гидравлик пресс принципи билан ишлайди. Поршень цилиндридаги босимга қараб чўзувчи куч аниқланади, поршеннинг аниқ асбоб билан ўлчанган сурилиши стерженнинг деформациясини топишга имкон беради.

Стерженларнинг сиқилишидаги деформациялар билан кучланишлар орасидаги боғланишни аниқлаш усули ҳам принцип жиҳатидан олганда худди шундай, фақат бу мақсадда сиқилишда стержень эгилиб қолмаслиги учун қисқа ва йўғон стерженлар ишлатилади. Металларнинг сиқилишидаги Юнг модули катталиги чўзилишдаги модули катталиги билан бир хил бўлади; 229-*а* расмда одатдаги пўлат учун характерли бўлган «деформация — кучланиш» эгри чизиғи кўрсатилган. Сиқилишда пропорционаллик чегарасининг қиймати чўзилишдаги қийматидан бошқача бўлади ва эгри чизиқнинг пластик деформациялар зонасидаги характери бир оз бошқачадир.

Бошқа материаллар учун «кучланиш — деформация» эгри чизиғининг шакли, умуман айтганда, бутунлай бошқача бўлади. Масалан, чўянга оид бу эгри чизиқ 229-*б* расмда кўрсатилган. Чўзилишда чўян учун пластик деформациялар зонаси йўқ деса бўлади. Эластиклик чегарасига етгандан кейин деярли сезиларсиз оқувчанлик зонаси бўлади ва намуна бирданига емирила бошлайди. $\sigma(\varepsilon)$ диаграммаси чўяннинг диаграммасига ўхшаган материаллар *мўрт* материаллар деб, пўлатга ўхшаб пластик деформациялар зонаси анча катта бўлган материаллар эса қовушоқ материаллар деб аталади. Бирор материални амалда ишлатишда қовушоқ ва мўрт материаллар хоссаларининг бу фарқини билиш жуда муҳимдир. Агар бирор машина ишлаб турганда кучланишлар баъзи жойларда эластиклик чегарасидан катта бўлса, қовушоқ материалдан ясалган машина синмайди, мўрт материалдан ясалган машина эса синиб қолади.



229- расм.

Қайд қилиб ўтамизки, сиқилишда чўяннинг пропорционаллик зонаси йўқ деса бўлади, ε нинг қийматлари жуда кичик бўлганда ҳам кучланишнинг деформацияга боғланиши чизиқли боғланиш эмас. 229- *в* ва *г* расмларда баъзи материаллар учун кучланиш билан деформация орасидаги боғланиш эгри чизиқлари солиштириш мақсадида берилган. Мармар ва бетон каби мўрт материаллар чўзилишдан кўра сиқилишга анча яхши бардош беради, яъни уларнинг сиқилишдаги мустаҳкамлик чегаралари чўзилишдагидан анча юқори бўлади.

Материалларнинг эластиклик хоссаларини билган ҳолда анча мустаҳкам ва ихчам машина, иншоот ва шу кабилар қуриш мумкин.

83-§. Ички кучлар ва кучланишлар

Ташқи кучлар таъсири остидаги ҳар қандай қаттиқ жисмдаги зўриқиш ва кучланишларни аниқ тасаввур этиш учун бутун жисмдан унинг бирор қисмини фикран ажратиб олиш керак. Ажратиб олинган мана шу қисмга жисмнинг қолган қисмларидан кучлар таъсир қилади, бошқача айтганда, ажратиб олинган қисмнинг сиртида кучланишлар пайдо бўлади. Ҳамма вақт кучланишлар ажратиб олинган бу ҳажмга қўйилган кучлар тинчлик ҳолатида нолга ёки ҳаракат ҳолатида бу ҳажмнинг массаси билан тезланиши кўпайтмасига тенг бўлиши кераклигидан келиб чиқадиган маълум бир шартларга бўйсунади; бундан ташқари, бу кучларнинг моментларига тегишли худди шундай шартлар бажарилиши керак. Шундай қилиб, агар куч ва моментларнинг уч координата ўқига туширилган проекциялари *билан иш кўрилса, мазкур ҳажмга таъсир этувчи кучлар* қаноатлантирадиган *олтита* тенгламага эга бўламиз: буларнинг учтаси кучлар проекцияларига, яна учтаси учала ўқ атрофидаги моментларга тегишли тенгламалардир. Равшанки, бу шартлар деформацияга ҳеч ҳам боғлиқ бўлмай, эластик деформациялар зонаси учун ҳам, пластик деформациялар зонаси учун ҳам айни бир кўринишга эга бўлади.

Бир жинсли стерженнинг чўзилишидек энг содда ҳолда пайдо бўладиган кучланишларни кўриб чиқамиз. Стерждан призмача шаклида бир бўлак кесиб олинган деб фараз этайлик, бу призмачанинг асослари стержень ўқига перпендикуляр бўлсин (230-*а* расм). Унда призмачанинг тўрт ёғида кучланишлар нолга тенг бўлиб, фақат унинг асосларида бир хил σ_0 кучланишлар бўлади: булар призмача асосларига нормал равишда бир-бирига қарама-қарши йўналади. Кучланишлар қуйидагига тенг:

$$\sigma_0 = \frac{F}{S}, \tag{83.1}$$

бу ерда F — стерженнинг кўндаланг кесимидаги зўриқиш, S — кўндаланг кесим юзи. Агар стержень бир жинсли бўлса, σ_0 кучланишлар стерженнинг бутун кўндаланг кесимида бир хил бўлади, агар стержень тинч ҳолатда бўлса, ҳар қандай кўндаланг кесимда ҳам σ_0 лар бир хил бўлади.

Умумий ҳолда кучланиш қаттиқ жисмда ўзи тегишли бўлган сирт қисмига бирор бурчак ҳосил қилиб қия йўналади. Биз текшираётган ҳолда ажратиб олинган ҳажмни бошқа кўринишда деб, масалан, призмачани нормали стержень ўқи билан α бурчак ҳосил қиладиган текислик билан кесишдан ҳосил бўлган ҳажм деб тасаввур этиш мумкин (230-*б* расм). У ҳолда призмачанинг қия кесимидаги σ кучланиш σ_0 кучланишга тенг бўлмайди; σ кучланиш стержень ўқи бўйлаб йўналиб, қия кесимдаги юз билан $90° - \alpha$ бурчак ҳосил қилади. σ кучланиш қийматини ажратиб олинган ҳажмнинг мувозанат шартларидан аниқлаймиз. Равшанки, ажратиб олинган ҳажмга таъсир этувчи кучлар тенг ва қарама-қарши йўналган; шунинг учун

$$\sigma_0 S = \sigma \frac{S}{\cos\alpha}$$

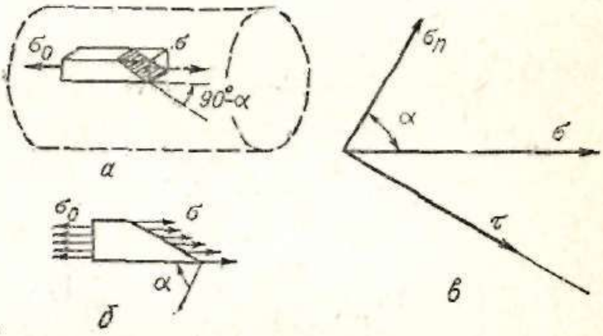
ёки

$$\sigma=\sigma_0 \cos\alpha, \tag{83.2}$$

бу ерда S — призмачанинг нормал кесими юзи.

σ кучланишнинг кесим юзига нормал бўлган σ_n нормал ташкил этувчиси ва тангенциал τ ташкил этувчиси бор (230-*в* расм). Нормал ташкил этувчиси

$$\sigma_n=\sigma \cos\alpha=\sigma_0\cos^2\alpha, \tag{83.3}$$



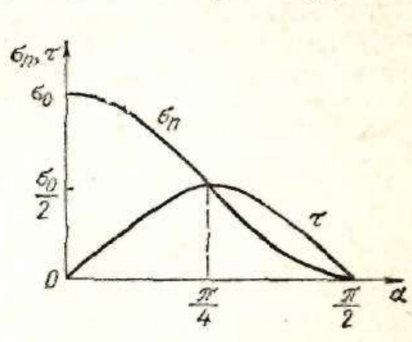
230- расм.

тангенциал ташкил этувчи эса

$$\tau=\sigma \sin\alpha=\sigma_0\cos\alpha \sin\alpha. \tag{83.4}$$

Булар кесимдаги юзга ўтказилган нормаль билан стержень ўқи орасидаги α бурчакка боғлиқ. Кесимдаги юзни турли хил α бурчак остида олиб, (83.2), (83.3) ва (83.4) формулалардан кучланишнинг турли хил қийматларини топамиз. Кесимдаги юз стержень ўқи билан 45° бурчак ҳосил қилганда тангенциал ташкил этувчи $\sigma_0/2$ га тенг бўлган энг катта қийматга эга бўлади; бу ҳолда нормал ташкил этувчи, равшанки, тангенциал ташкил этувчига тенг бўлади (231- расм).

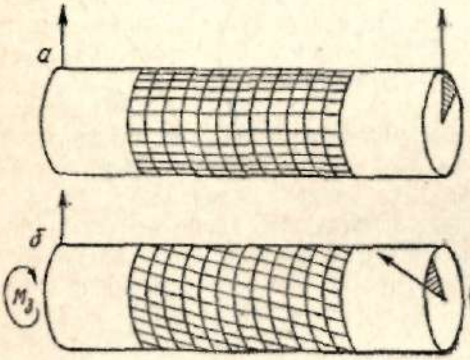
Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг кучланган энг содда ҳолати бўлмиш чўзилишни анализ қилиб, умумий ҳолда қаттиқ жисмдаги кучланишлар манзараси нақадар мураккаб эканини тасаввур этиш мумкин.



231- расм.

84-§. Силжишдаги кучланишлар ва деформациялар

Бир жинсли доиравий кесимга эга бўлган стерженни бир асоси стержень ўқи атрофида иккинчи асосига нисбатан бирор φ бурчакка буриладиган қилиб буралганда соф силжиш деформацияси юз беради. Сиртига ортогонал чизиқлар тўри чизилган резина стерженни ёки найни бураб, силжиш деформациясини яққол тасаввур этиш мумкин (232-*а* расм). Стерженни бундай бурашда цилиндр айланаси бўйлаб чизилган чизиқларнинг шакли ўзгармайди, ўқи бўйлаб чизилган чизиқлар эса винт шаклига келади (232-*б* расм).



232-расм.

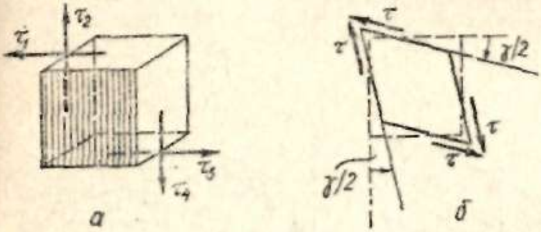
Стерженни фикран шундай юпқа дискларга бўлиш мумкинки, буралишда винт чизиқ кесмасини диск ичида тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисобласа бўлади. Дискдан ҳалқа, ҳалқадан эса кичикроқ кубча ажратиб оламиз (235-*б* расмга қ.). Диск жуда юпқа бўлганидан стержень деформацияланганда кубчанинг юқориги ёғи пастки ёғига нисбатан силжийди (ён ёқлар қийшайиб қолади), ён ёқлар билан пастки ёқ орасидаги бурчак тўғри бурчакдан фарқ қилади. Кубчанинг деформацияси *соф силжиш деформацияси* бўлиб, бунда деформацияланаётган жисмдан тегишлича қилиб кесиб олинган параллелепипеднинг фақат бурчаклари ўзгаради.

Параллелепипед ёқларида уринма кучланиш бўлган ҳолдагина силжиш деформацияси пайдо бўлади. Қирраси 1 *см* бўлган куб шаклидаги жисм билан иш кўрмоқдамиз ва бу кубнинг тўрт ёғига бир текис тақсимланган уринма зўриқишлар 233-*а* расмда кўрсатилгандек таъсир қилмоқда деб фараз этайлик. Равшанки, кубчанинг мувозанат шартларига риоя қилиш учун барча уринма кучланишлар тенг бўлиши зарур:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau.$$

Уринма зўриқишлар таъсири остида кубчанинг тегишли ёқлари орасидаги бурчаклар кичик γ бурчакка камаяди (233-*б* расм).

Кубча деформациясининг γ бурчак билан аниқланадиган катталиги кубчанинг тегишли қирраларидаги τ уринма кучланишларнинг катталигига қонуний равишда боғланган.

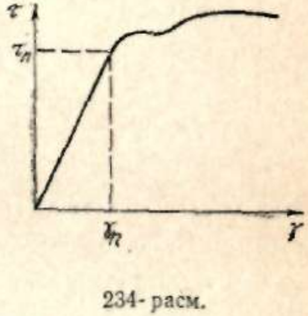


233- расм.

Тажриба маълум материал учун γ билан τ орасидаги боғланиш ўша материал учун ε билан σ орасидаги боғланиш билан деярли бир хил эканини кўрсатади (234- расм). Эластиклик зонасида тўғри чизиқли қисм бўлиб, унда

$$\tau = G\gamma \qquad (84.1)$$

муносабат ўринлидир. Ўлчамлиги Н/м² бўлган G коэффициент *силжиш модули* деб аталади.



234- расм.

Энди доиравий кесимли стерженни буровда пайдо бўладиган деформация ва зўриқишларни аниқлаймиз; бу деформациялар тўғрисида биз юқорида бир оз гапирган эдик. Диаметри D ва узунлиги l_0 бўлган стержень силжиш модули G бўлган материалдан ясалиб, M_3 буралиш моменти билан φ_0 бурчакка буралган (демак, унинг асослари бир-бирига нисбатан φ_0 бурчакка бурилган) бўлсин.

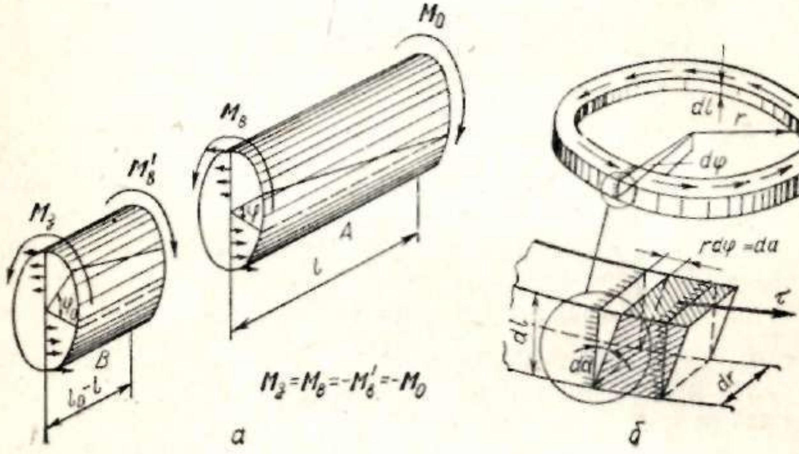
Аввало шуни қайд қиламизки, стерженнинг ўқига перпендикуляр бўлган ҳар қандай кесимида ички зўриқишларнинг стержень ўқига нисбатан моменти стерженни бураётган кучларнинг M_3 моментига тенг. Ҳақиқатан ҳам, буралган стерженнинг бирор B қисмини фикран кесиб олдик, деб тассавур этайлик (235- *а* расм); B қисм тинч тургани учун унга таъсир этувчи кучларнинг моментлари нолга тенг. Бу қисмга бир томондан ташқи кучларнинг M_3 моменти, иккинчи томондан кесимга уринма йўналишда таъсир этувчи ички зўриқишларнинг $M'_в$ *моменти таъсир қилади;* $M'_в$ *нинг катталиги* M_3 *га тенг бўлиб,* ишораси қарама- қаршидир.

Сўнгра стержень кесимида уринма кучланишлар қандай тақсимланганини ва улар деформацияга қандай боғланганини аниқлаймиз. Стерженнинг қўзғалмас асосидан l масофада турган жойидан баландлиги dl етарлича кичик бўлган диск кесиб олиб, буралишда бу дискнинг пастки асоси φ бурчакка, юқориги асоси $\varphi + d\varphi$ бурчакка бурилди, деб фараз қиламиз. Бу дискдан ички радиуси r ва ташқи радиуси $r + dr$ бўлган ҳалқа кесиб оламиз (235- *б* расм). У ҳолда бу ҳалқадан кесиб олинган ҳамма кубчаларнинг сурилиш деформацияси бир хил бўлиб, айни бир $d\alpha$ бурчакка тенг бўлади. Дискнинг юқориги асоси деформацияланмасдан пастки асосига нисбатан жуда кичик $d\varphi$ бурчакка бурилгани учун $d\alpha$ силжиш бурчаги ҳалқанинг r радиусига пропорционал бўлади. Ҳалқанинг юқориги сирти пастки сиртига нисбатан da миқдорда кўчади:

$$da = dl\ d\alpha = r\ d\varphi. \tag{84.2}$$

Шунинг учун силжиш бурчаги

$$d\alpha = r\,\frac{d\varphi}{dl}, \tag{84.3}$$



235- расм.

яъни ҳалқанинг силжиш бурчаги ҳалқа радиуси билан стерженнинг бурилиш бурчагидан унинг узунлиги бўйича олинган $\frac{d\varphi}{dl}$ ҳосила кўпайтмасига тенг. Энди ҳалқанинг юзи $2\,\pi rdr$ бўлган сиртидаги уринма зўриқишни аниқлаймиз; (84.1) ва (84.3) формулаларга асосан, τ кучланиш қуйидагига тенг:

$$\tau = Gd\alpha = Gr\,\frac{d\varphi}{dl}, \tag{84.4}$$

шунинг учун ҳалқа сиртидаги зўриқиш

$$\tau\cdot 2\pi rdr = 2\pi r^2 G\,\frac{d\varphi}{dl}\,dr. \tag{84.5}$$

Бу зўриқишнинг стержень ўқига нисбатан моменти қуйидагига тенг:

$$dM = 2\pi r^3 G\,\frac{d\varphi}{dl}\,dr. \tag{84.6}$$

Энди дискнинг бутун сиртидаги зўриқишлар моментларини қўшамиз, бошқача айтганда, (84.6) ни r бўйича интеграллаймиз:

$$M = 2\pi G\,\frac{d\varphi}{dl}\int\limits_0^{D/2} r^3 dr = \frac{\pi D^4}{2^5}\;G\,\frac{d\varphi}{dl}. \tag{84.7}$$

Бу момент стерженни бураётган $M_{\text{з}}$ моментга тенг бўлиши керак, чунки исталган икки қўшни дискка қўйилган моментлар бир-бирига тенг.

(84.7) тенглама шуни кўрсатадики, агар стержень бир жинсли бўлса, стерженнинг буралиш бурчагининг $\frac{d\varphi}{dl}$ ҳосиласи стержень бўйлаб ўзгармас бўлади. *Стерженнинг бир-биридан* l_0 *масофада турган четки кесимларининг* буралиш бурчаги қуйидагига тенг:

$$\varphi_0 = l_0 \frac{d\varphi}{dl} \quad \text{ёки} \quad \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\varphi_0}{l_0}. \tag{84.8}$$

(84.8) ифодани (84.7) формулага қўйиб, стерженнинг φ_0 буралиш бурчаги билан буровчи $M_{\text{з}}$ момент орасидаги боғланишнинг қуйидаги кўринишда эканини топамиз:

$$M_{\text{з}} = M_0 = \frac{\pi D^4}{2^5} G \frac{\varphi_0}{l_0}. \tag{84.9}$$

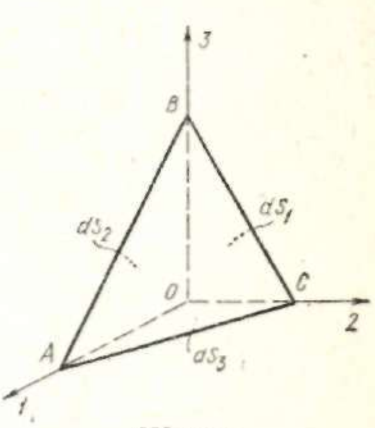
$\frac{\pi D^4 G}{32 l_0}$ катталик *стерженнинг буралишдаги қаттиқлик коэффициенти* деб аталади.

Буровчи моментни валлар воситасида узатишда валнинг номақбул буралиб қолишининг олдини олиш учун етарлича катта D диаметрли вал танлаш керак

85-§. Эластик жисмдаги кучланишлар. Умумий ҳол

Олдинги параграфларда кўриб ўтилган мисоллар шуни кўрсатадики, куч таъсири остидаги жисмнинг тайинли бир нуқтаси орқали ўтган ҳар хил юзачаларда ҳар хил кучланишлар таъсир этади, лекин улар бир-бирига бирор қонун билан боғланган. Куч таъсири ҳар қандай бўлган энг умумий ҳолда нуқта атрофида (нуқта яқинидан *ўтадиган барча юзачаларда) бўлиши мумкин бўлган барча* кучланишлар тўплами иккинчи ранг симметрик тензорнинг компоненталари бўлмиш олти миқдор (сон) билан аниқланади. Кучланиш ва бошқа физикавий катталикларни тавсифлашда тензорлардан фойдаланиш қулай.

Тайинли бир нуқта яқинидан ўтадиган ҳар хил юзачалардаги кучланишлар орасидаги боғланишни тасаввур этиш учун жисмдан ўша нуқта атрофидан кесиб олинган чексиз кичик тетраэдрнинг мувозанати кўриб чиқилади. Жисмнинг биз текшираётган нуқтасида тўғри бурчакли координаталар системасининг боши жойлашган, деб фараз қилайлик (236-расм); ўқларни *1*, *2*, *3* рақамлари билан, векторларнинг бу ўқлардаги проекцияларини тегишли



236- расм.

рақамли индекслар билан белгилаймиз. Ўзига ўтказилган нормали бирлик $\mathbf{v}$ вектор билан белгиланган юзача O нуқта яқинидан ўтади ва координата текисликлари билан биргаликда $ABCO$ тетраэдр ҳосил қилади.

Бу тетраэдрнинг ёқларига жисмнинг қолган қисмлари томонидан қўйилган зўриқишлар таъсир этади. Ажратиб олинган $ABCO$ тетраэдр ҳажмининг бу зўриқишлар таъсири остида мувозанатда бўлишининг шартини ёзамиз. Дастлаб ABC ёқнинг dS юзи *1* ўққа нормал бўлган ёқнинг dS_1 юзига $dS_1 = \nu_1 dS$ тенглик билан боғланган эканини қайд қиламиз, бу ерда ν_1—вектор $\mathbf{v}$ билан *1* ўқ орасидаги бурчак косинуси. Худди шунга ўхшаш, $dS_2 = \nu_2 dS$ ва $dS_3 = \nu_3 dS$; бу ерда dS_1, dS_2 ва dS_3 — мос равишда тетраэдрнинг *1*, *2* ва *3* ўқларга нормал бўлган ёқларининг юзлари.

dS юзачадаги зўриқишни $\boldsymbol{\sigma}_\nu dS$ билан белгилаймиз, бу ерда $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ — бу юзачадаги кучланиш (вектор). Ҳар бир юзачада иккита қарама-қарши зўриқишни кўриб чиқиш мумкин: булардан бири юзачадан бир тарафдаги зарраларга юзачадан иккинчи тарафдаги зарралар томонидан қўйилган кучлар (масалан, 237-*а* расмдаги $\boldsymbol{\sigma} dS$) бўлиб, иккинчиси (яъни $-\boldsymbol{\sigma} dS$) «қарама-қарши таъсир этувчи» зўриқишдир. Маълум бир шартлашувга қараб юзачанинг бир томони «мусбат» ва иккинчи томони «манфий» деб олинади.

Биз текширадиган тенгламаларда мусбат томондан манфий томонга таъсир этувчи $\boldsymbol{\sigma} dS$ зўриқишларни ёзамиз. Зўриқиш ва кучланишлар «чўзувчи» (237-*а* расм) ва «сиқувчи» (237-*б* расм) бўлиши мумкин; бу ерда албатта зўриқишнинг юзачага нормал бўлган компонентаси назарда тутилади. Одатда чўзувчи нормал кучланишлар мусбат деб, сиқувчи нормал кучланишлар манфий деб ҳисобланади. Координата текисликларида юзачаларнинг мусбат томони деб учинчи ўқ йўналган томон олинади; бу ўқнинг бирлик вектори минусдан плюсга қараб йўналган. dS юзачанинг мусбат томони тетраэдрнинг ташқарисида ётади (238-расмга қ.; бу ерда тетраэдрнинг *1* ўққа нормал бўлган *abc* текислик билан кесилгандаги кесими кўрсатилган).

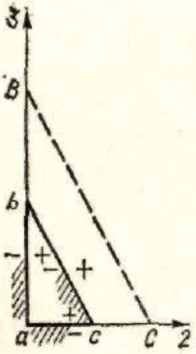
Тетраэдр сиртига таъсир этувчи барча кучларнинг мувозанат шарти қуйидагича бўлади:

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu dS - \boldsymbol{\sigma}_1 dS_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 dS_2 - \boldsymbol{\sigma}_3 dS_3 = 0 \qquad (85.1)$$

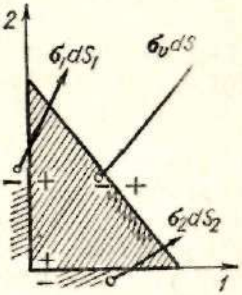
237- расм.

(бу ерда кучланишлар ишораси эътиборга олинган). Ҳамма зўриқишлар (*1*, *2*) текисликка параллел бўлган «текис» ҳолни яққолроқ тасаввур этиш учун 239-расмда зўриқиш векторларини кўрсатамиз; бу ҳолда тетраэдр ўрнида призмача олиш мумкин (унинг кесими кўрсатилган), ҳамма векторлар текисликда ётади. Равшанки, бу ҳолда (85.1) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\sigma_v\,dS - \sigma_1 dS_1 - \sigma_2 dS_2 = 0.$$



238- расм.



239- расм.

Тетраэдр ҳажми ичидаги зарраларга қўйилган ва модданинг зичлигига пропорционал бўлган кучларни (тортишиш кучлари, инерция кучлари каби масса кучларини) ҳисобга олмаса бўлади, чунки тетраэдрнинг ҳажми учинчи тартибли чексиз кичик миқдор, сирти эса иккинчи тартибли чексиз кичик миқдордир.

Агар (85.1) тенгликни dS га бўлсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$\sigma_v = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3, \tag{85.2}$$

бу ерда v_1, v_2, v_3 — dS юзачага ўтказилган нормалнинг йўналтирувчи косинуслари. Бу ифода шаклан векторнинг таърифини билдирувчи

$$a_v = v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 = \mathbf{v}a$$

ифодага ўхшайди: a_1, a_2, a_3 — векторнинг проекциялари бўлиб, скаляр миқдорлардир. Векторнинг координата ўқларидаги уч проекцияси маълум бўлса, унинг ихтиёрий $\mathbf{v}$ йўналишдаги проекцияларини топиш мумкин.

(85.2) формула иккинчи ранг тензорнинг таърифи бўла олади: σ_1, σ_2, σ_3 уч вектор нормали $\mathbf{v}$ бўлган ҳар қандай юзачадаги кучланишни, яъни σ_v векторни аниқлайди. Агар координата ўқларига нормал бўлган учта юзачадаги учта кучланиш вектори берилган бўлса, нормали $\boldsymbol{\nu}$ бўлган ҳар қандай юзачада нуқта атрофидаги кучланиш маълум бўлади. Уч вектор тўққизта сон, яъни бу векторларнинг координата ўқларидаги проекциялари тўпламидан иборат. $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ векторларни компоненталари орқали ёзамиз:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_1 &= \sigma_{11}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{21}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{31}\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{\sigma}_2 &= \sigma_{12}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{22}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{32}\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{\sigma}_3 &= \sigma_{13}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{23}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{33}\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned} \tag{85.3}$$

Индекслар тартибини билиб қўйинг: биринчи индекс ўқ номери, иккинчиси — юзачанинг номери, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — мос равишда *1, 2, 3* координата ўқларининг бирлик векторлари. Индекслари бир хил бўлган σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} компоненталар — юзачага *нормал* бўлган кучланишлар, индекслари турли хил бўлган σ_{12}, $\sigma_{31}, \ldots$ компоненталар *уринма* кучланишлар.

$\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ векторларнинг (85.3) даги қийматларини (85.2) тенгликка қўямиз ва уни навбатма-навбат $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ га скаляр равишда кўпайтириб, $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ векторнинг *1, 2, 3* ўқлардаги проекцияларини топамиз: бунда, албатта ўқларнинг ортогоналлигини ($i = k$ бўлганда $\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_k = 1$, $i \neq k$ бўлганда $\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_k = 0$ эканлигини) ҳисобга оламиз. Амалларни бажариб, қуйидаги ифодаларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1\nu} &= \sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{12}\nu_2 + \sigma_{13}\nu_3,\\
\sigma_{2\nu} &= \sigma_{21}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{23}\nu_3,\\
\sigma_{3\nu} &= \sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3.
\end{aligned} \tag{85.4}$$

Бу тенгликлар системасини $\mathcal{T}$ тензор ёрдамида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = \mathcal{T}\boldsymbol{\nu}, \tag{85.5}$$

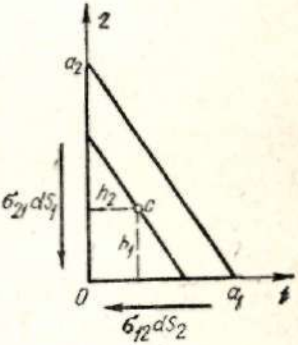
яъни нормали $\boldsymbol{\nu}$ бўлган юзачадаги кучланиш вектори $\mathcal{T}$ тензор билан нормалнинг $\boldsymbol{\nu}$ вектори кўпайтмасига тенг. $\mathcal{T}$ тензор матрица орқали тасвирланади:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \tag{85.6}$$

унинг компоненталари $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларидир. (85.2), (85.4), (85.6) формулалар айни бир нарсани ифодалайди.

(85.4) ва (85.5) формулаларда σ_{ik} компоненталарнинг ёзилиш тартибига диққат қилинг. Координаталар системасини алмаштирганда (бураганда) тензорнинг σ_{ik} компоненталари нуқтанинг тегишли координаталарининг $x_i\,x_k$ кўпайтмалари каби ўзгаришини кўрсатиш мумкин. Бу эса σ_{ik} сонлар тўплами тензор эканини билдиради.

(85.1) шартлар *ABCO* тетраэдрнинг мувозанатда бўлиши учун зарурий, лекин етарли эмас. Тетраэдр сиртига таъсир этувчи барча кучларнинг исталган ўққа нисбатан олинган моментларининг ҳам нолга тенг бўлишини талаб қилиш керак[1]. Мулоҳазаларимиз соддароқ бўлиши учун кучларнинг *3* координата ўқига параллел бўлиб, dS юзачанинг оғирлик марказидан ўтадиган ўққа нисбатан олинган *моментлари* йиғиндиси нолга тенглигини кўриб чиқамиз. dS юзачанинг жуда кичик экани туфайли кучланишни бутун юзача бўйлаб ўзгармас деб ҳисоблаймиз, шунинг учун ҳар бир dS юзачадаги барча зўриқишларнинг тенг таъсир этувчиси юзачанинг оғирлик марказига қўйилган бўлади. 240-расмда тетраэдрнинг *3* ўқ бўйлаб юқоридан қаралгандаги кўриниши тасвирланган. Танлаб олинган ўқ (240-расмдаги *c* нуқта) dS_3 юзачанинг оғирлик марказидан ўтишига ва шунинг учун σ, dS ва $\sigma_3 dS_3$ зўриқишлар ўқ орқали ўтиб, момент бермаслигига тушуниб етиш осон. Энди $\sigma_1 dS_1$ ва $\sigma_2 dS_2$ зўриқишлар моментларини кўриб чиқиш қолди. Равшанки,



240-расм.

$$\sigma_{21}\, dS_1 h_1 - \sigma_{12}\, dS_2 h_2 = 0,$$

бу ерда h_1 ва h_2 — c ўқдан мос равишда dS_1 ва dS_2 юзачаларгача бўлган масофалар. Агар тетраэдрнинг a_1, a_2, a_3 қирралари ҳар бир ўқ бўйлаб йўналган бўлса, $dS_1 = \frac{1}{2}\ a_2 a_3$, $dS_2 = \frac{1}{2} a_1 a_3$ бўлади. Буни ва $a_2 = 3h_2$, $a_1 = 3h_1$ эканини ҳисобга олиб,

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{85.7}$$

эканини топамиз. dS_1 ва dS_2 юзачалардаги уринма кучланишларнинг *3* ўққа нормал бўлган компоненталари бу ўқ бўйлаб ётган қиррага томон (ёки қиррадан) йўналади ва бир-бирига *тенг* бўлади.

Шунга ўхшаш йўл билан

$$\sigma_{31} = \sigma_{13},\ \sigma_{32} = \sigma_{23} \tag{85.8}$$

эканини кўрсатиш мумкин.

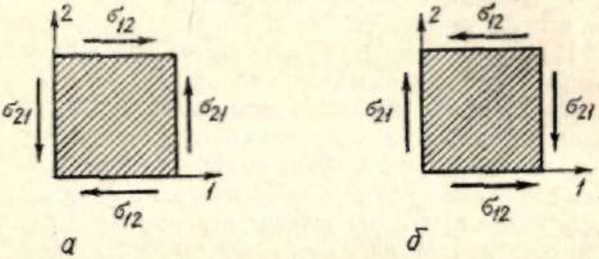
Шундай қилиб, нуқта атрофидаги кучланишни аниқлаш учун тўққизта эмас, балки фақат *олтита* сон бериш керак; кучланиш тензори ($\mathscr{G}$) *симметрик* тензор бўлиб, унинг турли индексли компонен-

---

[1] Тетраэдрга таъсир этаётган барча кучлар йиғиндиси нолга тенг бўлгани учун у жуфт куч билан тасвирланиши мумкин. Жуфт кучнинг ҳар қандай нуқтага нисбатан моменти бир хил бўлади. Бинобарин, ҳар қандай параллел ўқларга нисбатан олинган моментлар ҳам бир хил бўлади.

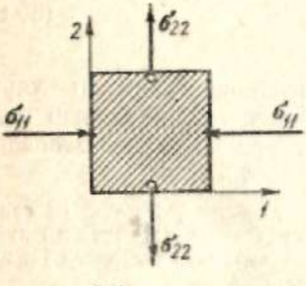
талари жуфти-жуфти билан бир-бирига тенг ((85.7), (85.8) га қ.); баъзан бу ҳол уринма кучланишларнинг *жуфтлик* шарти деб аталади.

Уринма кучланишларнинг жуфтлиги жуда муҳимдир, чунки бу ҳол жисмнинг тайинли бир нуқтасида координаталар системасини истаганча танлаб олишга имкон беради. Шунинг учун тўғри бурчак остида кесишувчи иккита кичик юзачадаги уринма кучланишларнинг компоненталари, яъни юзачаларнинг кесишиш қиррасига нормал бўлган чизиқ бўйлаб йўналган компоненталари ҳамиша бир-бирига тенг ва қиррага томон ёки қиррадан йўналади. У ҳолда жисмдан кесиб олинган жуда кичик ҳар қандай кубчанинг томонларидаги уринма кучланишлар бир-бирига бирор қонун билан боғланган бўлади. Масалан, уринма кучланишларнинг (*1*, *2*) текисликка параллел бўлган компоненталари бу текисликка нормал бўлган ёқларда бир-бирига *тенг бўлиб*, 241-расмда кўрсатилгандек йўналади. (*а*) ҳолдаги уринма кучланишлар мусбат деб, (*б*) ҳолдаги уринма кучланишлар манфий деб ҳисобланади, чунки юзачаларнинг мусбат томонларидаги компоненталар (*а*) ҳолда координата ўқлари бўйлаб йўналади, (*б*) ҳолда эса унга тескари йўналади. Уринма кучланишларнинг (*2*, *3*) текисликка ва (*3*, *1*) текисликка параллел бўлган компоненталари тўғрисида ҳам худди шу гапларни айтиш мумкин.



241-расм.

Бу мулоҳазадан ҳар қандай кичик кубчага таъсир этувчи уринма зўриқишлар йиғиндиси нолга тенг эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун кубчанинг ёқларига таъсир этувчи нормал зўриқишлар, уринма зўриқишлардан қатъи назар, ўзаро мувозанатлашиши лозим. Масалан, 242-расмда *3* ўққа параллел бўлган ёқлардаги нормал кучланишлар кўрсатилган. σ_{22} кучланишлар *мусбат* (чўзувчи), σ_{11} кучланишлар *манфий* (сиқувчи).



242-расм.

Шуни қайд қилиш жуда *муҳимки, кучланган жисмнинг исталган нуқтасида бўлиши мумкин бўлган* барча $\mathbf{v}$ йўналишлар ичида ўзаро перпендикуляр бўлган камида учта йўналиш топиладики, бу йўналишлар учун кучланиш вектори $\mathbf{v}$ нормаль билан бир хил бўлади, ёки бошқача айтганда, бу юзачаларда уринма кучланишлар нолга тенг бўлади. Бундай йўналишлар *бош кучланиш ўқлари* деб аталади; агар бу ўқлар координата ўқлари деб қабул этилса, у ҳолда кучланишлар тензори атиги учта сон билан тасвирланади.

Бош кучланиш ўқлари худди инерция моментининг симметрик тензори бош ўқлари топилган йўл билан (64-§) аниқланади, фарқ фақат шундаки, инерция моментининг тензори ҳолида бош ўкларга нисбатан олинган моментлар ҳамиша мусбат миқдор бўлиб, бу ерда эса бош ўқлар бўйлаб олинган кучланишлар мусбат (чўзувчи) бўлиши ҳам, манфий бўлиши (ажратиб олинган кичик ҳажмни сиқувчи бўлиши) ҳам мумкин. Шунинг учун инерция эллипсоидига ўхшаш сирт ясасак, умуман айтганда, иккинчи тартибли марказий сирт, яъни эллипсоид ёки гиперболоид сирти ҳосил бўлади.

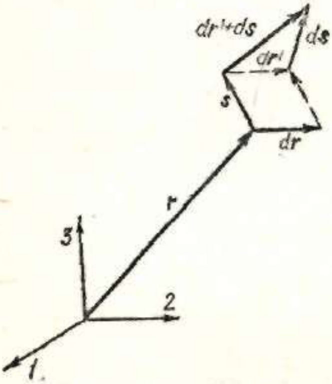
86-§. Жисмнинг кичик деформациялари

Қаттиқ жисм зарралари ўзларининг бир-бирига нисбатан тутган вазиятини ташқи кучлар таъсири остида бирор тарзда ўзгартиради. Жисм ўз «шаклини» ўзгартиради, бу ўзгаришлар *деформациялар* деб аталади.

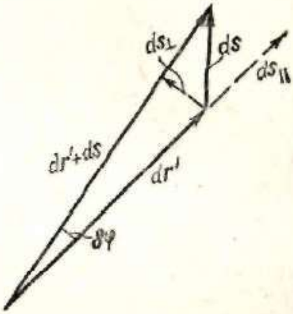
Маълум бир нагрузка таъсирида ҳар бир зарра бирор $\mathbf{s}$ векторга кўчади. Агар жисмнинг ҳамма зарралари ўзгармас $\mathbf{s}$ вектор қадар кўчса, жисмда ҳеч қандай деформация юз бермайди, у фақат $\mathbf{s}$ вектор қадар кўчади, холос. Ҳар хил зарралар ҳар хил $\mathbf{s}$ векторлар қадар кўчгандагина, яъни $\mathbf{s}$ вектор зарранинг деформацияланишдан олдинги $\mathbf{r}$ вазиятининг функцияси бўлгандагина деформация юз беради; $\mathbf{r}$ нуқтадаги зарра $\mathbf{s}$ га, $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ нуқтадаги зарра $\mathbf{s}+d\mathbf{s}$ га кўчади (243-расм). $d\mathbf{s}$ миқдор деформацияни характерлайди, аниқроқ айтганда, деформацияни $d\mathbf{s}$ билан $d\mathbf{r}$ орасидаги муносабат характерлайди. $d\mathbf{s}$ миқдор $d\mathbf{r}$ га чизиқли боғлиқ бўлганда $d\mathbf{s}$ билан $d\mathbf{r}$ орасидаги боғланиш $\mathfrak{S}$ *деформация тензори* орқали аниқланади, биз ўша тензорнинг компоненталарини топишимиз керак.

$d\mathbf{s}$ билан $d\mathbf{r}$ орасидаги боғланишнинг чизиқли боғланиш эканлиги шуни билдирадики, деформацияланишдан олдин $d\mathbf{r}$ вектор чизиғида ётган зарралар кўчиб, 244-расмда кўрсатилгандек $d\mathbf{r}'+d\mathbf{s}$ чизиқда жойлашиб қолади, $d\mathbf{r}'=d\mathbf{r}$. Биз деформацияларни етарлича кичик деб фараз қиламиз: бу эса $ds \ll dr$ эканлигини ёки бошқача айтганда, dr кесма жуда кичик $ds_{\parallel}$ кесма қадар чўзилиб (ёки сиқилиб), кичик $\delta\varphi=\frac{ds_{\perp}}{dr} \ll 1$ бурчакка бурилганини билдиради. $\varepsilon=\frac{ds_{\parallel}}{dr}$ миқдор *нисбий узайиш* деб аталади.

Зарранинг деформацияланишдан олдинги $\boldsymbol{r}$ вазияти $Ox_1x_2x_3$ Декарт координаталари системасига нисбатан аниқланаётган бўлсин; бу система ўқларининг йўналиши мос равишда $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ бирлик векторлар билан берилган. Унда



243- расм.



244- расм.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= s_1\boldsymbol{e}_1 + s_2\boldsymbol{e}_2 + s_3\boldsymbol{e}_3, \\ d\boldsymbol{s} &= ds_1\boldsymbol{e}_1 + ds_2\boldsymbol{e}_2 + ds_3\boldsymbol{e}_3, \\ d\boldsymbol{r} &= dx_1\boldsymbol{e}_1 + dx_2\boldsymbol{e}_2 + dx_3\boldsymbol{e}_3; \end{aligned} \tag{86.1}$$

s_1, s_2, s_3, ларнинг ҳар бири x_1, x_2, x_3 ларга ($\boldsymbol{r}$ нинг проекцияларига) боғлиқ, шунинг учун қуйидаги тенгликларни ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} ds_1 &= \frac{\partial s_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial s_1}{\partial x_3}dx_3, \\ ds_2 &= \frac{\partial s_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial s_2}{\partial x_9}dx_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_3}dx_3, \\ ds_3 &= \frac{\partial s_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial s_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial s_3}{\partial x_3}dx_3. \end{aligned} \tag{86.2}$$

Бу тенгликлар $\boldsymbol{r}$ нуқта яқинидаги жуда кичик бирор соҳада $d\boldsymbol{s}$ нинг $d\boldsymbol{r}$ га чизиқли боғлиқ эканини билдиради. $\frac{\partial s_1}{\partial x_1}$, ... ҳосилаларнинг қийматлари бу соҳада ўзгармас бўлади[1].

---

[1] $\frac{\partial s_k}{\partial x_l}$ хусусий ҳосила $\boldsymbol{r}$ векторнинг фақат i-компонентаси ўзгариши туфайли s векторнинг k-компонентаси олган ∂s_k орттирманинг ∂x_l га нисбатини билдиради.

(86.2) тенгликлар ds билан dr бир-бирига

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_1} & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{86.3}$$

тензор орқали боғланган эканлигини кўрсатади ёки (86.2) тенгликларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$ds = \mathfrak{S}\, d\boldsymbol{r}. \tag{86.4}$$

Бундан кейинги текшириш шуни кўрсатадики, $\mathfrak{S}$ тензор $\boldsymbol{r}$ нуқта яқинидаги бирор элементар ҳажмчанинг деформациясинигина эмас, балки бу ҳажмчанинг деформацияланмасдан бутунлай *бурилишини* ҳам аниқлайди. Бу масалани ойдинлаштириш учун $\mathfrak{S}$ тензорни қуйидагича қилиб икки тензорга ажратамиз: бири симметрик $\mathfrak{S}_c$ тензор, иккинчиси антисимметрик $\mathfrak{S}_a$ тензор, яъни

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_c + \mathfrak{S}_a, \tag{86.5}$$

бу ерда

$$\mathfrak{S}_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{86.6}$$

$$\mathfrak{S}_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{S}_a d\boldsymbol{r} = [\delta \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{r}]$ эканлигини текшириб кўриш мумкин, бу ерда $\delta \boldsymbol{\varphi}$ вектор *1, 2, 3* ўқлардаги компоненталари

$$\delta \varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right), \quad \delta \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right),$$

$$\delta \varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right)$$

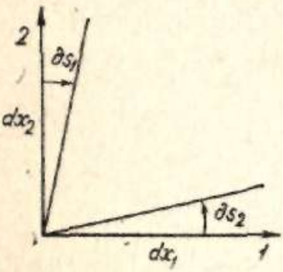
бўлган жуда кичик бурилиш бурчагидир. Дарҳақиқат,

$$\mathfrak{S}_{a} d\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\varphi_3 & \delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 & 0 & -\delta\varphi_1 \\ -\delta\varphi_2 & \delta\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{S}_{a} d\boldsymbol{r})_1 = -\delta\varphi_3\, dx_2 + \delta\varphi_2\, dx_3 = [\delta\boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{r}]_1 \text{ ва ҳ. к.}$$

$[\delta\boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{r}]$ векторлар $\delta\boldsymbol{\varphi}$ нинг йўналиши билан бир хил бўлган ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг $\delta\varphi$ бурчакка бурилишида унинг нуқталари олган кўчишларни билдиришига ишонч ҳосил қилиш осон. Шунинг учун $\boldsymbol{r}$ нуқта атрофидаги кичик соҳада юз берган деформацияни $\mathfrak{S}$ тензорнинг симметрик қисми, яъни $\mathfrak{S}_c$ тензор аниқлайди.

$\mathfrak{S}_c$ тензорнинг алоҳида компоненталарининг физикавий маъносини тушунтириб ўтамиз. Диагоналда турган $\frac{\partial s_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial s_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial s_3}{\partial x_3}$ компоненталар деформацияланишдан олдин мос равишда $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ўқларга параллел бўлган чизиқларда ётган зарралар орасидаги масофаларнинг нисбий узайишини (ёки сиқилишини) билдиради. Қолган компоненталар эса деформацияланишдан олдин координата ўқларига параллел бўлган чизиқларнинг бурилишларини билдиради. Бу чизиқлар бирор кичик бурчакларга бурилади; *1*, *2* ўқларга мос келган чизиқларнинг (*1*, *2*) текисликка туширилган проекцияси 245-расмда кўрсатилган. Чизмадан кўриниб турибдики,



245- расм.

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}$$

ифода *3* ўққа нормал бўлган текисликдаги тўғри бурчакларнинг деформацияланиш натижасида ўзгаришидир, бу ўзгариш $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ билан белгиланади. Худди шунингдек,

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} = \gamma_{13} = \gamma_{31} \tag{86.7}$$

ифода *2* ўққа нормал бўлган текисликдаги тўғри бурчакларнинг ўзгаришига тенг. Яна

$$\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} = \gamma_{23} = \gamma_{32}. \tag{86.8}$$

Бу тенгликларнинг ҳаммаси $\boldsymbol{r}$ нуқта атрофидаги етарлича кичик соҳада тўғри бўлади. Нисбий чўзилишлар катталиклари қуйидагича белгиланади:

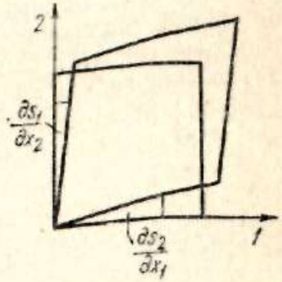
$$\varepsilon_1 = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial s_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial s_3}{\partial x_3}; \tag{86.9}$$

манфий қийматлар нисбий сиқилишга тўғри келади.

Унда деформация тензорини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{86.10}$$

Деформацияланишдан олдинги етарлича кичик кубчани тасаввур этайлик, деформациялангандан сўнг кубчанинг қирралари ортади (ёки камаяди), тўғри бурчаклари эса γ_{ik} миқдорларда ўзгаради. 246-расмда кубчанинг *3* ўққа нормал бўлган текислик билан кесилгандаги кесими кўрсатилган; бир жуфт тўғри бурчак γ_{12} бурчак миқдорида камайди, тўғри бурчакларнинг иккинчи жуфти худди шундай γ_{12} бурчак миқдорида ошди.



246- расм.

$\mathfrak{S}_c$ тензор симметрик тензор, шунинг учун у ҳар қандай симметрик тензор каби ўзаро ортогонал бўлган камида учта *бош* йўналишга эга бўлади. Ёқлари *бош* йўналишларга перпендикуляр бўлган кичик кубча қирралари бўйлаб чўзилади (ёки сиқилади), холос, деформацияланишда кубчанинг бурчаклари ўзгармайди.

Деформацияланишнинг бундай хусусий ҳоли ҳам бўлиши мумкин: кубча қирраларининг узунлиги ўзгармайди, фақат қирралар орасидаги бурчакларгина ўзгаради; бундай деформация соф силжиш деб аталади.

87-§. Кучланишлар билан деформациялар орасидаги боғланиш

Эластик деформациялар зонасида деформациялар тензори билан кучланишлар тензори орасида чизиқли боғланиш бор, бу боғланиш Гук қонунидир; биз бу қонунни бир ўқли кучланишдек энг содда ҳолда ишлатдик. Эластиклик хоссалари турли йўналишларда турлича бўлган кристалл жисм (анизотроп жисм) учун энг умумий ҳолда деформациялар тензорининг ҳар бир компонентаси билан кучланишлар тензорининг ҳамма компоненталари орасида чизиқли боғланиш бўлиши керак. Ҳисоб кўрсатишича, тензорлар симметрик бўлгани туфайли эркли коэффициентлар сони 21 га тенг бўлади. Анизотроп модданинг эластиклик хоссаларини йигирма битта параметр белгилайди.

Изотроп жисм ҳолида эса деформациялар билан кучланишлар *орасидаги боғланишни топиш учун атиги* иккита коэффициент етарлидир. Кучланишлар тензори бош ўқларга нисбатан ёзилганда бу боғланиш соддагина кўринишда бўлади. Равшанки, бу ўқларнинг ўзи деформациялар тензорининг ҳам бош ўқлари бўлади. Ёқларига фақат нормал кучланишлар таъсир кўрсатаётган етарлича кичик кубча шундай деформацияланадики, бунда унинг ёқлари нормал бўйича сурилиб, ёқлари орасидаги тўғри бурчаклари ўзгармайди. У ҳолда *1* ўққа нормал бўлган ёқлардаги σ_{11} кучланишлар туфайли кубча *1* ўқ бўйлаб ε_1 миқдорида чўзилади. Гук қонунига асосан, $\sigma_{11} = E\varepsilon_1$, бу ерда E — материалнинг Юнг модули.

Агар *2* ва *3* ўқларга нормал бўлган ёқларда кучланиш бўлмаса эди, у ҳолда *1* ўқ бўйлаб бўладиган нисбий чўзилиш ε_1 га тенг бўлар эди: $\varepsilon_1 = \sigma_{11}/E$. Ўша ёқларда σ_{22} ва σ_{33} кучланишлар таъсир қиляпти, булар кубчани кўндалангига сиқади; сиқилиш деформацияси бу нагрузкалар таъсиридан пайдо бўладиган чўзилишга пропорционал бўлиб, пропорционаллик коэффициенти μ га, яъни Пауссон коэффициентига (81-§) тенг. Шунинг учун *1* ўқдаги чўзилиш σ_{11}/E дан қолган иккита қўш ёқлардаги чўзувчи (мусбат) кучланишлар туфайли ҳосил бўлган сиқилиш миқдорида кам бўлади. σ_{22} кучланиш таъсиридан ҳосил бўлган сиқилиш қуйидагига тенг:

$$\mu\,\varepsilon_2 = \mu\,\frac{\sigma_{22}}{E}.$$

σ_{33} кучланиш таъсиридан ҳосил бўлган сиқилиш қуйидагига тенг:

$$\mu\,\varepsilon_3 = \mu\,\frac{\sigma_{33}}{E}.$$

Кучлар таъсирини мустақил деб ҳисоблаб ва барча қўш ёқларда нагрузкалар таъсиридан ҳосил бўлган деформацияларни қўшиб, *1* ўқ бўйича олинган умумий чўзилишни топамиз:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{11}}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E}\right) = \frac{1}{E}\left\{\sigma_{11} - \mu\,(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right\}. \tag{87.1}$$

Деформациялар тензорининг битта ε_1 компонентаси билан кучланишлар тензорининг компонентлари орасидаги пропорционал боғланиш бизга элементар тажрибалардан маълум бўлган фақат иккита $1/E$ ва μ/E коэффициентлар орқали, материалнинг E ва μ эластиклик параметрлари орқали аниқланади.

Юқоридагига ўхшаш, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left\{\sigma_{22} - \mu\,(\sigma_{33} + \sigma_{11})\right\},\quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left\{\sigma_{33} - \mu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right\}. \tag{87.2}$$

Буларни келтириб чиқаришда (пропорционаллик қонунига асосан) турли нагрузкалар туфайли ҳосил бўладиган деформациялар қўшилади деб фараз қилинди. Агар бирор *a* нагрузка туфайли *b* деформация, *c* нагрузка туфайли *d* деформация ҳосил бўлса, нагрузка билан деформация орасидаги боғланиш чизиқли бўлгани туфайли, *a* ва *c* нагрузкалар биргаликда таъсир этганда $b + d$

деформация ҳосил бўлади. Қуйидаги алмаштиришдан фойдалансак, яъни

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma \tag{87.3}$$

деб олсак, юқоридаги формулаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\Big\{(1+\mu)\,\sigma_{11} - 3\mu\,\sigma\Big\}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\Big\{(1+\mu)\,\sigma_{22} - 3\mu\,\sigma\Big\}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\Big\{(1+\mu)\,\sigma_{33} - 3\mu\,\sigma\Big\}. \end{aligned} \tag{87.4}$$

Бу тенгликлар координата ўқлари сифатида фақат бош йўналишлар танлаб олинган ҳол учун чиқарилган, ўқлар (ва кубча қирраларининг йўналиши) бошқача танланганда кубчада силжиш деформацияси юз беради. Бироқ деформацияларнинг кучланишларга чизиқли боғлиқ бўлгани туфайли масалани умумий ҳолда ечишда ҳам биз бу формулалардан фойдалана оламиз. Дастлаб тензорни шундай икки тензор йиғиндисига ажратамизки, булардан биринчисида фақат нормал кучланишлар, иккинчисида фақат уринма кучланишлар бўлсин:

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\text{н}} + \mathscr{T}_{\text{к}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{87.5}$$

У ҳолда $\mathscr{T}_{\text{н}}$ тензор орқали тасвирланган кучланишлар туфайли ҳосил бўлган деформацияларни (87.4) формулалардан фойдаланиб ҳисоблаб чиқариш мумкин, чунки бу ҳолда фақат нормал кучланишларни ҳисобга оламиз. Бироқ бу деформацияларга $\mathscr{T}_{\text{к}}$ тензор орқали тасвирланган уринма кучланишлар туфайли ҳосил бўлган деформацияларни қўшиш мумкин.

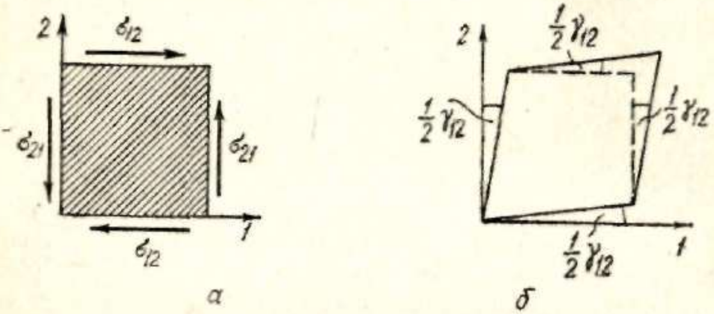
Тажрибалар кўрсатишича, кубчанинг тўрт ёғидаги уринма кучланишлар компоненталари масалан, σ_{12} кучланишлар (247-*а* расм) кубнинг тўғри бурчакларини *3* ўққа нормал бўлган текисликда (247-*б* расм) γ_{12} бурчак миқдорида ўзгартиради, шу билан бирга

$$\sigma_{12} = G\,\gamma_{12}, \tag{87.6}$$

бу ерда G — бир жинсли изотроп материалнинг эластиклик зонасидаги ўзгармас коэффициент (силжиш модули). *1* ва *2* ўқларга параллел бўлган ёқлардаги уринма кучланишлар қуйидагига тенг:

$$\sigma_{23} = G\,\gamma_{23},\ \sigma_{31} = G\,\gamma_{31}. \tag{87.7}$$

Бурчакларнинг бирор координата текислигидаги γ деформацияси бу текисликка нормал бўлган тўрт ёқдаги уринма кучланишларнинг бир хил компоненталаригагина боғлиқ бўлиб, уринма кучланишларнинг бошқа компоненталарига ҳеч боғлиқ эмас. Шунинг учун $\mathcal{T}_к$ тензор (кучланиш тензори) билан тегишли $\mathcal{S}''_с$ *силжиш тензори* орасидаги боғланиш жуда соддадир. $\mathcal{S}_с$ деформациялар тензорининг силжишларни аниқлайдиган қисми бўлмиш $\mathcal{S}_с$ тензор қуйидаги тенглик дан топилади:



а б

247- расм.

$$\mathcal{S}_c = \mathcal{S}'_c + \mathcal{S}''_c,$$

бу ерда

$$\mathcal{S}'_c = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}''_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (87.8)$$

(87.6) ва (87.7) ни эътиборга олиб, тензорлар орасида изланаётган боғланиш қуйидаги кўринишда бўлишини топамиз:

$$\mathcal{T}_к = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix} = 2G\,\mathcal{S}''_c. \qquad (87.9)$$

$\mathcal{T}_и$ тензорни эса (87.4) га асосан бундай ёзиш мумкин:

$$\mathcal{T}_и = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\mu}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} + \frac{3\mu\,\sigma}{1+\mu}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (87.10)$$

3σ катталикни $3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ катталик орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар учала (87.4) тенглик қўшилса,

$$3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E}\,3\sigma - \frac{9\mu}{E}\,\sigma = \frac{3\sigma}{E}(1 + \mu - 3\mu)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан

$$\sigma = \frac{E}{1-2\mu}\,\varepsilon. \qquad (87.11)$$

σ нинг бу ифодасини (87.10) га қўямиз:

$$\mathcal{T}_{н} = \frac{E}{1+\mu}\left(\mathcal{S}'_c + \frac{3\mu\varepsilon}{1-2\mu}\mathcal{E}\right), \qquad (87.12)$$

бу ерда

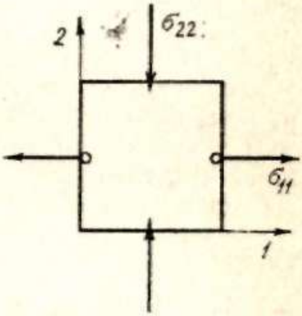
$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— «бирлик» тензор.

(87.12) ифода нормал кучланишларнинг $\mathcal{T}_н$ тензори, $\mathcal{S}'_c$ *чўзилишлар тензори* ва ε миқдор (ёки σ) орасидаги боғланишни кўрсатади. Гарчи ε_1, ε_2, ... ва σ_{11}, σ_{22}, ... миқдорларнинг ҳар бири координаталар системасига боғлиқ бўлишига қарамай, ε нинг (шунингдек, σ нинг ҳам) танлаб олинган координаталар системасига боғлиқ эмас, яъни скаляр миқдор эканлигини кейинчалик кўрсатамиз.

Энди G силжиш модули билан E Юнг модули ва μ Пауссон коэффициенти орасидаги доимий боғланишни аниқлаймиз. Бунинг учун фақат нормал кучланишлар таъсирида юз берган энг содда деформацияни кўриб чиқамиз, бу деформация бошқа ўқларда соф силжиш бўлади. $\sigma_{33} = 0$ бўлсин, деб фараз қилайлик, бунда деформация фақат σ_{11} ва σ_{22} кучланишлар таъсирида юз беради. $\sigma_{11} = \sigma_0$ ва $\sigma_{22} = -\sigma_0$, $\sigma_{33} = 0$ уринма кучланишлар бўлмасин (248-расм). Бундай кучланишлар таъсири остида *1* ўқ бўйлаб чўзилиш деформацияси, *2* ўқ бўйлаб эса худди шундай сиқилиш деформацияси ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам (87.1) ва (87.2) га асосан,

$$E\varepsilon_1 = \sigma_{11} - \mu\sigma_{22} = (1+\mu)\sigma_0, \qquad (87.13)$$
$$E\varepsilon_2 = \sigma_{22} - \mu\sigma_{11} = -(1+\mu)\sigma_0,$$



248- расм.

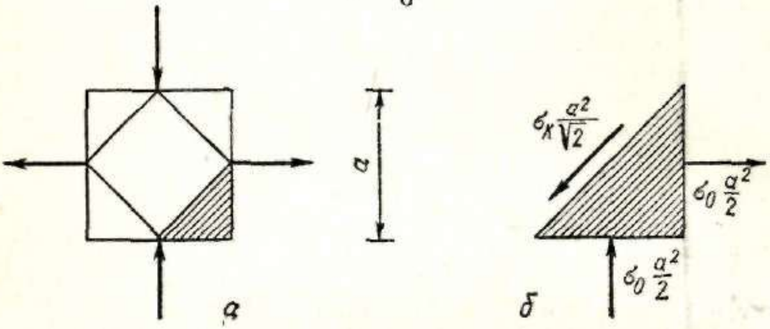
ёки

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_0 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_0. \qquad (87.13)$$

$\frac{\pi}{4}$ бурчак остида қияланган ўқлардаги бу деформация соф силжишдир. Шундай эканини исбот этамиз.

Текширилаётган квадратда 249-*a* расмда кўрсатилгандек қилиб янги квадрат кесиб оламиз. Кубчанинг томони *a* га тенг деб фараз этамиз: у ҳолда асоси штрихланган учбурчак бўлган призмачага 249-*б* расмда кўрсатилган зўриқишлар таъсир қилади. Равшанки, $\sigma_к = \sigma_0$ шарт бажарилганда ҳамма зўриқишлар нолга тенг бўлади, бу шарт қолган учта призмача учун ҳам ярайди. Шунинг учун ички призмача фақат уринма кучланишлар таъсири остида бўлади ва ўз бурчакларини

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{G}$$



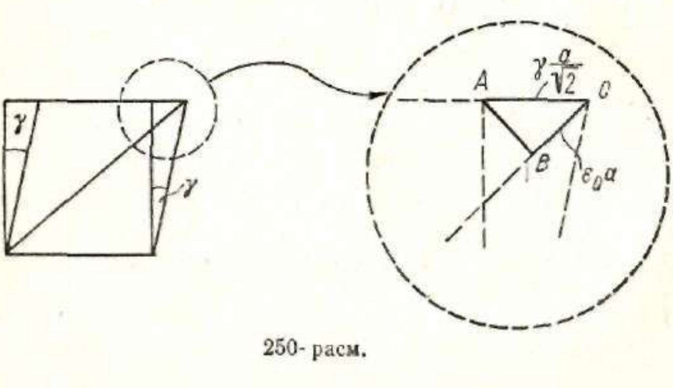
249- расм.

миқдорида ўзгартиради. Ички призмача кесимининг бир диагоналининг нисбий узайиши қуйидагича бўлади:

$$\varepsilon_0 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_0.$$

μ, E, G параметрлар орасидаги боғланишни геометрик шартлардан топиш мумкин. Призмачанинг деформацияланишдан олдинги ва кейинги кесими 250- расмда кўрсатилган. γ деформация етарли даражада кичик бўлгани туфайли ABC учбурчакнинг тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчак эканини ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$\frac{\gamma a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\varepsilon_0 a \text{ ёки } \gamma = 2\varepsilon_0.$$



250- расм.

Бунга олдинги икки тенгликни қўйиб, изланаётган боғланишни топамиз:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{87.14}$$

Бу боғланишни билиш кучланиш ва деформация тензорлари орасидаги боғланишни умумий ҳолда (87.9) ва (87.12) га асосан қуйидагича ёзишга имкон беради:

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_{ш} + \mathscr{T}_{к} = \frac{E}{1+\mu}\left(\mathfrak{S}_{ш} + \frac{3\mu\,\varepsilon}{1-2\mu}\mathscr{E}\right) + \frac{E}{1+\mu}\,\mathfrak{S}_{к}$$

ёки (87.8) ни эътиборга олсак:

$$\mathscr{T} = \frac{E}{1+\mu}\left(\mathfrak{S}_{c} + \frac{3\mu\,\varepsilon}{1-2\mu}\mathscr{E}\right). \tag{87.15}$$

Бу ифода E ва μ параметрлари маълум бўлган изотроп материал учун $\mathfrak{S}_c$ деформациялар тензорининг компоненталарига қараб $\mathscr{T}$ кучланишлар тензорининг компоненталарини ҳисоблаб чиқаришга имкон беради.

Бундан тескари боғланишни, яъни $\mathfrak{S}_c$ нинг $\mathscr{T}$ га боғланишини ҳам топиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам (87. 15) дан қуйидагини топамиз:

$$\frac{1+\mu}{E}\mathscr{T} = \mathfrak{S}_c + \frac{3\mu\,\varepsilon}{1-2\mu}\mathscr{E}.$$

(87.11) тенгликни эътиборга олиб, кучланишлар тензори билан деформациялар тензори орасидаги боғланишни узил-кесил аниқлаймиз:

$$\mathfrak{S}_c = \frac{1+\mu}{E}\mathscr{T} - \frac{3\mu\,\sigma}{E}\mathscr{E}. \tag{87.16}$$

Энди ε ва σ нинг скаляр эканлигини, яъни координаталар системасига боғлиқ бўлмаган миқдорлар эканлигини изоҳлаб беришгина қолди. Ҳар бир тензор учун $\mathscr{T}$ ёки $\mathfrak{S}_c$ тензорнинг бош ўқларидаги нормал кучланишларга мос келувчи λ_1, λ_2, λ_3 хусусий қийматлар топиш мумкин. Биз бу масалани инерция моментининг тензорида (64-§) батафсил кўриб чиққан эдик λ_1, λ_2, λ_3 хусусий қийматлар координаталар системасига боғлиқ эмас, масалан кучланишлар тензори учун бу хусусий қийматлар

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

тенгламадан аниқланади ((64.11) га қ.). Бу тенгламани

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар бу тенгламанинг илдизлари скаляр бўлса, a_1, a_2, a_3 коэффициентлар ҳам скаляр бўлиши, яъни координата ўқларининг қандай танланишига боғлиқ бўлмаслиги керак. Қуйидаги тенгликнинг тўғри эканига ишонч ҳосил қилиш осон:

$$-a_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma. \tag{87.17}$$

Шунинг учун σ — скаляр. ε нинг скаляр эканлиги ҳам худди шундай исбот этилади.

σ миқдорни ўртача нормал кучланиш, яъни

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \tag{87.18}$$

деб талқин этиш мумкин; ўртача нормал кучланиш σ манфий бўлган ҳолда суюқликдаги босим табиатига ўхшаш бўлади. σ кучланиш таъсири остида ҳамма томонлама $\varepsilon = \frac{1+\mu}{E}\sigma$ миқдорида чўзилиш деформацияси ёки $-\sigma$ босим остида $-\varepsilon$ сиқилиш деформацияси юз беради, $\mathcal{T}_{\text{н}}$ тензорни икки қисмга ажратиш мумкин.

$$\mathcal{T}_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix}. \tag{87.19}$$

Биринчи қисми ($\sigma\mathcal{E}$ тензор) ҳар томонлама ўртача кучланиш, яъни манфий σ босимни, иккинчи қисми ўртача кучланишдан четланишни билдиради. Равшанки, координаталар алмаштирилганда $\sigma\mathcal{E}$ тензор ўзгармайди.

88-§. Деформация потенциал энергияси

Модда ҳажмининг $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ элементини деформациялашга сарф бўладиган ишни ҳисоблайлик. Нормал кучланишлар силжиш деформациясига боғлиқ эмас, улар фақат чўзилиш (сиқилиш) деформацияларига боғлиқ; шу билан бирга, бирор ўқ бўйлаб олинган кучланишлар учала ўқ бўйлаб олинган деформацияларга боғлиқ. Шунинг учун нормал зўриқишларнинг деформацияланишда бажарган ишини зўриқишларнинг силжиш деформациясида бажарган ишидан мустақил равишда ҳисоблаб чиқариш мумкин.

(87. 12) ифодани ва $\frac{E}{1+\mu} = 2G$ тенгликни ҳисобга олиб, нормал зўриқишларнинг элементар ишини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{gathered} \sigma_{11}\, dx_2\, dx_3\, d\varepsilon_1\, dx_1 = 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\, 3\varepsilon\right) d\varepsilon_1\, dv, \\ \sigma_{22} dx_3\, dx_1\, d\varepsilon_2\, dx_2 = 2G\left(\varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\, 3\varepsilon\right) d\varepsilon_2\, dv, \\ \sigma_{33}\, dx_1\, dx_2\, d\varepsilon_3\, dx_3 = 2G\left(\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu}\, 3\varepsilon\right) d\varepsilon_3 dv. \end{gathered} \tag{88.1}$$

Учала тенгламани қўшамиз:

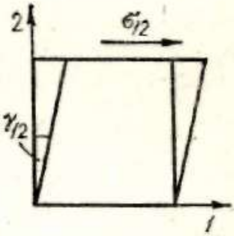
$$2G\left[\varepsilon_1 d\varepsilon_1 + \varepsilon_2 d\varepsilon_2 + \varepsilon_3\, d\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon\, d\,(3\varepsilon)\right] dv,$$

чунки $3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ва $d\,\varepsilon_1 + d\,\varepsilon_2 + d\,\varepsilon_5 = d\,(3\varepsilon)$.

0 дан ε_1, ε_2, ε_3 гача бўлган бутун деформацияга сарф этилган иш қуйидагига тенг:

$$dA_1 = 2G\left(\int\limits_0^{\varepsilon_1} x\,dx + \int\limits_0^{\varepsilon_2} x\,dx + \int\limits_0^{\varepsilon_3} x\,dx + \frac{\mu}{1-2\mu}\int\limits_0^{3\varepsilon} x\,dx\right) dv =$$

$$= G\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\,(3\varepsilon)^2)\,dv.$$



251-расм.

Бу ерда x ҳар гал интегралланувчи функцияни билдиради. Деформацияда нормал зўрикишлар бажарган иш «зичлиги» деформациялар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$u_1 = \frac{dA_1}{dv} = G\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\,(3\varepsilon)^2\right). \qquad (88.2)$$

Уринма зўриқишлар бажарган ишни ҳисоблаш янада осон, чунки уринма зўриқишларнинг бирор ўққа нормал бўлган ташкил этувчилари ўша ўққа нормал бўлган текисликдаги силжиш деформацияларигагина боғлиқдир, масалан, $\sigma_{12} = G\,\gamma_{12}$ ва ҳоказо. *3* ўққа параллел бўлган ёқлардаги уринма зўриқишлар ташкил этувчилари бажарган элементар ишни қуйидагича ёзиш мумкин (251-расм):

$$\sigma_{12}\, dx_1 dx_3 d\,\gamma_{12}\, dx_2 = \sigma_{12} d\,\gamma_{12}\, dv.$$

Бу группага қарашли қолган уч ёқда зўриқишлар иш бажармайди: икки dx_2dx_3 ёқда зўрикишлар кўчишга нормал йўналган, пастки dx_1dx_3 ёқда эса кўчиш нолга тенг. Шунинг учун уринма зўриқишларнинг ажратиб олинган ҳажмда бажарган ҳамма иши:

$$dA_2 = \left(\int\limits_0^{\gamma_{12}} \sigma_{12}\, d\,\gamma_{12} + \int\limits_0^{\gamma_{13}} \sigma_{13}\, d\,\gamma_{13} + \int\limits_0^{\gamma_{23}} \sigma_{23}\, d\,\gamma_{23}\right) dv =$$

$$= G\left(\int\limits_0^{\gamma_{12}} xdx + \int\limits_0^{\gamma_{13}} xdx + \int\limits_0^{\gamma_{23}} xdx\right) dv = \frac{1}{2}\,G\,(\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2)\,dv. \qquad (88.3)$$

Бинобарин, деформацияланишда бажарилган ишнинг тўлиқ зичлиги:

$$u = u_1 + \frac{dA_2}{dv} =$$

$$= G\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2}\,\gamma_{12}^2 + \frac{1}{2}\,\gamma_{13}^2 + \frac{1}{2}\,\gamma_{23}^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\,(3\varepsilon)^2\right). \qquad (88.4)$$

Ишнинг бу зичлиги деформацияланган жисм потенциал энергиясининг деформациялар катталиги орқали ифодаланган зичлигига тенг бўлади.

Потенциал энергия зичлигини кучланишлар орқали ҳам қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$u = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 - \frac{\mu}{1+\mu}(3\sigma)^2\right). \qquad (88.5)$$

Бу формулани келтириб чақаришни машқ тариқасида китобхоннинг ўзига ҳавола этамиз. (Кўрсатма. Масалан, $\sigma_{11}\,d\varepsilon_1$ кўпайтмада $d\varepsilon_1$ ни, (87.16) га асосан $\frac{1}{2G}\left(d\sigma_{11} - \frac{\mu}{1+\mu}\,d(3\sigma)\right)$ билан алмаштириш керак ва ҳоказо).

Кучланиш ва деформациялар қуйидагича аниқланишига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_1}, \; \ldots, \; \sigma_{12} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{12}}, \; \ldots; \qquad (88.6)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{11}}, \; \ldots, \; \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{12}}, \; \ldots, \qquad (88.7)$$

89-§. Стерженлар (балкалар) эгилишида пайдо бўладиган зўриқиш ва деформациялар

Стерженлар (балкалар) нинг[1] ўз ўқига нормал бўлган кучлар (кўндаланг нагрузкалар) таъсири остида эгилиши қаттиқ жисмнинг деформациясига оид жуда муҳим мисол бўлади. Ён сиртига тўр чизилган резина брусни эгсак, куч таъсирида стерженда юз берадиган деформациялар манзарасини тасаввур этиш мумкин. Бруснинг ён сирти 252-расмдаги тўгарак ичида кўрсатилганидек бўлади; бруснинг юқориги қатламлари чўзилади, пастки қатламлари сиқилади, *OO′* қатламнинг узунлиги деярли ўзгармайди.

Эластик балка ёки стерженнинг деформация ва кучланишларини аниқ таҳлил қилиш анча мураккаб масаладир. Бироқ тақрибий натижалар берадиган тадқиқот анча содда бўлиб, у Бернулли таклиф этган қуйидаги гипотезага асосланади: стержень ёки балка эгилганда унинг барча кўндаланг кесимлари *ясси* *лигича* қолади.

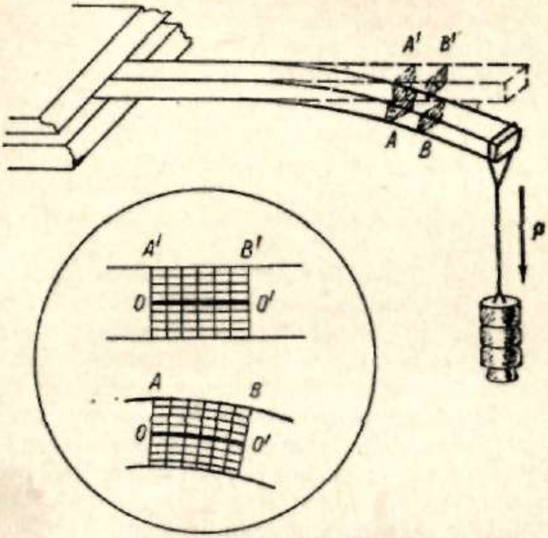
Горизонтал балканинг бир учи қаттиқ маҳкамлаб қўйилган (252-расм), иккинчи учига юк осилган ёки вертикал йўналган ***P*** куч қўйилган деб фараз қилайлик. ***P*** куч таъсирида балка эгилади, балканинг ўқига перпендикуляр бўлган ва куч қўйишдан олдин вертикал текисликда турган ҳар бир кўндаланг кесими эгувчи куч томонга оғиб ясси бўлганича қолаверади.

Қуйидагиларни аниқлаш талаб этилади: балка мана шу нагрузкага (кучга) бардош бера оладими, балканинг деформациялари қан-

---

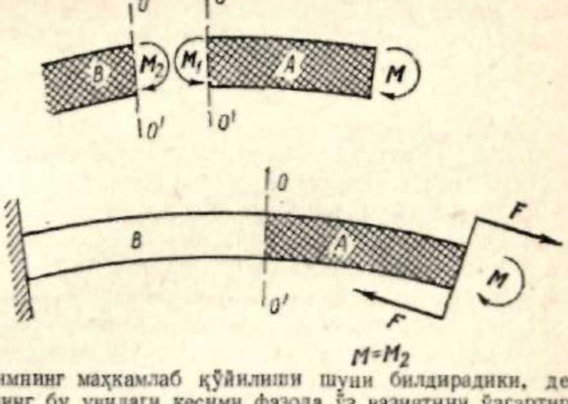
[1] Бир йўналишдаги ўлчами (узунлиги) бошқа икки йўналишдаги ўлчамларидан анча катта бўлган цилиндрик жисм стержень деб олинади.

дай бўлади, балка материалида қандай кучланишлар пайдо бўлади, нагрузка таъсирида балканинг учи қанчага пасаяди ва ҳоказо. Бу саволларнинг ҳаммасига бериладиган жавоб балка ёки стерженнинг техникавий ҳисоби натижасида топилиши мумкин.



252- расм.

Таҳлилимиз соддароқ бўлиши учун дастлаб бир учи қаттиқ маҳкамланган[1], бироқ иккинчи учига куч эмас, балки 253- расмда кўрсатилгандек қилиб жуфт куч қўйилган балканинг деформацияларини кўриб чиқамиз. Амалда бундай ҳол анча кам учрайди, бироқ унинг назарий анализи соддадир.



253- расм.

---

[1] Учидаги кесимнинг маҳкамлаб қўйилиши шуни билдирадики, деформацияланишда балканинг бу учидаги кесими фазода ўз вазиятини ўзгартирмайди. Одатда реал шароитларда «маҳкамланган кесим» текис бўлиб қолмай деформацияланади, бироқ тажриба натижаларини ҳисоб натижаларига солиштириш ва шунга тегишли анализ маҳкамланган учидаги кесим балка деформацияланганда ҳам яссилигича қолаверади деган фаразнинг ўринли эканлигини тасдиқлайди.

Деформацияланишда ҳар қандай жисмда пайдо бўладиган ички зўриқишлар катталиги ва характерини аниқлаш учун жисмнинг бирор қисмини «ажратиб олиш» усулидан фойдаланамиз. Ташқи кучлар таъсири остида балка деформацияланиб бўлган ва мувозанат қарор топган ҳолда биз балканинг бирор, умуман айтганда, ихтиёрий қисмини фикран ажратдик деб тасаввур этамиз ва бу қисмнинг мувозанат шартларини ёзамиз; бунда ташқи кучларнинг таъсири ҳам, текширилаётган қисмнинг ажралиш сиртига таъсир этаётган «ички» зўриқишларнинг таъсири ҳам ҳисобга олинади. Одатда «ички зўриқишлар» бизга маълум бўлмайди, бироқ ташқи кучлар маълум бўлгани ҳолда ажратиб олинган қисмнинг мувозанат шартидан бу зўриқишларнинг характери ва катталиги тўғрисида зарур маълумотлар оламиз.

Масалан, бу ҳолда биз балкани OO' кесим бўйича қирқамиз (253- расмга қ.); A қисмнинг мувозанат шартидан OO' кесимда уринма зўриқиш нолга тенг эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, агар A қисмга OO' чизиқ бўйлаб куч қўйилганда эди, у ҳолда A қисм мувозанатда бўлолмас эди. Чунки моменти $\boldsymbol{M}$ бўлган ташқи $\boldsymbol{F}$ жуфт кучни фақат умумий моменти $\boldsymbol{M}$ га қарама-қарши бўлган жуфт кучлар тўплами (ёки битта жуфт) мувозанатлай олади. Шунинг учун OO' кесимдаги зўриқиш умумий моменти $\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}$ бўлган жуфтлар тўпламидан иборат.

Биз A бўлакнинг узунлигини ҳар қандай қилиб ололганимиз учун, ихтиёрий кўндаланг кесимда ички зўриқишлар жуфт кучлар тўплами бўлиб, буларнинг умумий моменти катталиги ташқи кучлар жуфтининг моментига тенг. Динамиканинг учинчи қонунига асосан, балканинг қолган B қисмига қўйилган зўриқишлар моменти (253-расмга қ.) балканинг учига қўйилган ташқи кучлар жуфтининг моментига тенг:

$$\boldsymbol{M}_2 = -\boldsymbol{M}_1$$

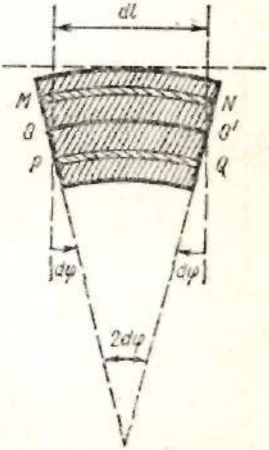
ёки

$$\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}.$$

Шуни қайд қиламизки, ҳар қандай кўндаланг кесимдаги, масалан, $00'$ кесимдаги натижавий зўриқиш нолга тенг. Бироқ бундан уринма ва нормал кучланишлар нолга тенг деган хулоса чиқмаслиги керак. Бироқ кесимдаги зўриқишларнинг $\boldsymbol{M}_1$ моменти нормал зўриқишлар (нормал кучланишлар) тақсимоти туфайли ҳосил бўлади; бир текисликда ётган уринма зўриқишлар (уринма кучланишлар) момент ҳосил қила олмайди (уларнинг «елкаси» нолга тенг). Тақрибий назарияда кесимдаги уринма кучланишлар таъсири эътиборга олинмайди, чунки улар жуда кичик. Ҳисоблаш натижаларини тажриба натижаларига таққослаш уринма кучланишлар таъсирини эътиборга олмаслик ўринли эканлигини тасдиқлайди.

Масалага бундай тақрибий ёндашишда деформациялар билан нагрузка орасидаги боғланиш қуйидаги йўл билан топилади.

Балканинг учига қўйилган момент таъсири остида ҳосил бўлган деформациясини аниқлаймиз. Балкадан dl узунлиги етарлича кичик бўлган бўлак кесиб оламиз. Эгилишда бу бўлак тахминан 254-расмда кўрсатилгандек деформацияланади. Балка деформациялангандa бўлакнинг иккала кўндаланг кесими $d\varphi$ бурчакка қийшайиб қолди. Балкани унинг ўрта чизигига параллел бўлган жуда юпқа горизонтал қатламларга бўлинган деб фаразан тасаввур этайлик. Равшанки, OO' ўрта чизиққа ёндашган қатламнинг узунлиги ўзгармайди, шунинг учун бу қатлам «нейтрал» қатлам деб аталади; нейтрал қатламдан юқорида ётган қатлам ёки толалар[1] узаяди, масалан, MN қатлам узаяди (254-расмга қ.); нейтрал қатламдан пастда ётган қатламлар, масалан, PQ қатлам сиқилади. Қатламларнинг сиқилиши ёки узайиши улардан нейтрал қатламгача бўлган масофага пропорционал бўлади, чунки деформацияланганда ҳам кўндаланг кесим ясси бўлганича қолади.



254-расм.

Агар деформация катталиги пропорционаллик зонасидан чиқиб кетмаса, ҳар бир қатламдаги нормал кучланишни унинг узайиши ёки қисқаришига пропорционал деб фараз қилиш мумкин. У ҳолда узунлиги dl бўлган бу бўлакнинг учларидаги ёки балканинг кўндаланг кесимидаги кучланишлар 255-расмда кўрсатилгандек бўлади. Агар тайинли бир қатламдан нейтрал қатламгача бўлган масофа x билан белгиланса, бу ердаги кучланиш

$$\sigma = \sigma_0 \frac{x}{b} \tag{89.1}$$

бўлади, бу ерда σ_0 — нейтрал қатламдан b масофада турган энг узоқ қатламдаги кучланиш.

Балканинг ҳамма кесимлари бир хил бўлиб, тўғри тўртбурчак шаклида бўлсин; у ҳолда нейтрал қатлам балканинг ўртасига жойлашган бўлиб, $b = \frac{h}{2}$ бўлади, бу ерда h—балка кўндаланг кесими баландлиги. Шундай қилиб, кесимининг кенглиги a га тенг бўлган балкада нейтралдан x масофада турган ва қалинлиги dx бўлган қатламдаги зўриқиш қуйидагига тенг:

$$dF = \sigma a\, dx = \frac{\sigma_0}{b} x a\, dx = \frac{3\sigma_0 a}{h} x\, dx. \tag{89.2}$$

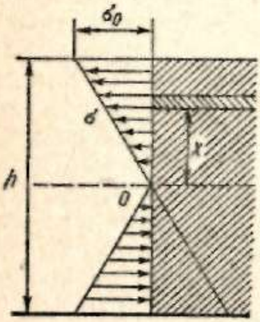
Кўндаланг кесимдаги ҳамма зўриқишлар жуфт-жуфт бўлиб қўйилган, шунинг учун ҳамма кучларнинг натижаловчиси нолга тенг,

---

[1] Балкадан унинг ўқига параллел йўналишда фаразан кесиб олинган етарлича ингичка цилиндрча одатда тола деб аталади.

барча зўриқишлар моменти қўйилган кучлар жуфтининг M моментига тенг бўлиши керак.

Энди кўндаланг кесимдаги зўриқишлар моментини ҳисоблаб топиш мумкин; равшанки, бу момент (89.2) дан бутун кесим бўйича олинган интегралга тенг бўлади:



255- расм.

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} x\,dF = \frac{\sigma_0}{b}\int_{-h/2}^{h/2} ax^2\,dx = \frac{2\sigma_0}{h} I. \quad (89.3)$$

Бу ифодадаги

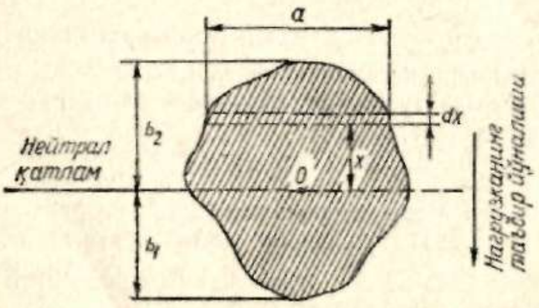
$$I = \int_{-h/2}^{h/2} ax^2\,dx \quad (89.4)$$

миқдор балка *кўндаланг кесимининг* нейтрал қатлам орқали ўтувчи ўққа нисбатан *«инерция» моменти* деб аталади; биз текшираётган балка учун

$$I = \frac{ah^3}{12}.$$

Ҳақиқатан ҳам, (89.4) формула текис (ясси) жисмнинг инерция моменти формуласига ўхшайди; бу ерда $a\,dx$ юз ўққача бўлган масофанинг квадратига, яъни x^2 га кўпайтирилиб, бу кўпайтма кесимнинг бутун юзи бўйича интегралланади. Юзнинг инерция моменти жисмнинг массага оид инерция моментига фақат формал томондан ўхшайди, бу ерда жисмнинг ҳеч қандай инерцияси тўғрисида гап йўқ: юзнинг инерция моменти ўлчамлиги тўртинчи даражали узунликдир, яъни (узунлик)^4, шунинг учун I миқдор фақат геометрик маънога эга.

Агар балканинг S кўндаланг кесими тўғри тўртбурчак шаклида бўлмаса ва балка M момент ўқига (нагрузка текислигига) перпендикуляр бўлган текисликда эгилса, у ҳолда нейтрал ўқ кесимнинг O оғирлик марказидан нагрузка текислигига перпендикуляр ҳолда ўта-



256- расм.

ди (256-расм). Балканинг кўндаланг кесимидаги зўриқишлар моменти қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$M = \frac{\sigma_0}{b}\int\limits_s ax^2dx = \frac{\sigma_0}{b} I, \qquad (89.5)$$

бу ерда $I = \int ax^2 dx$, b — нейтрал қатламдан ҳисобланган энг катта масофа бўлиб, у b_1 ва b_2 дан катта, σ_0 — максимал кучланиш. Бу формула балка деформацияланганда унинг ҳамма кўндаланг кесимлари яссилигича қолиш фактидан келиб чиқади.

Кўндаланг кесимдаги зўриқишларнинг M моменти билан кўндаланг кесимдаги максимал σ_0 кучланиш бир-бирига (89.5) формуладан келиб чиқадиган соддагина шарт орқали боғланган:

$$M = \sigma_0 \frac{I}{b} = \sigma_0 w, \quad \text{бу ерда } w = \frac{I}{b}. \qquad (89.6)$$

Нейтрал қатламдан энг узоқдаги қатламда максимал кучланиш ҳосил бўлади. w катталик кўндаланг кесимнинг фақат шаклига боғлиқ бўлади. Бу w катталик кесимнинг *қаршилик моменти* деб аталиб, кесим инерция моментининг энг узоқдаги қатламгача бўлган масофага нисбатига тенг. Тайинли бир кесим учун ҳамиша w миқдорини олдиндан аниқлаб қўйиш мумкин. Балкаларнинг техник ҳисобида кўпинча максимал σ_0 кучланиш катталигини аниқлаш билан чегараланилади ва бу кучланиш катталигига қараб балканинг мустаҳкамлиги тўғрисида фикр юритилади, бунда σ_0 кучланиш балка емириладиган ҳолдаги σ_p кучланишга солиштирилади.

Балканинг учига жуфт куч қўйилган ҳолда (253-расмга қ.) зўриқишларнинг M моменти ҳамма жойда, ҳар қандай кўндаланг кесим учун бир хил бўлади; балкага қўйилган нагрузка бошқача бўлганда бундай бўлмайди. Кўп масалаларда берилган ташқи нагрузкаларга қараб ҳар бир кўндаланг кесимдаги зўриқишлар моментини аниқласа бўлар экан. Агар зўриқишлар моменти w қаршилик моментига бўлинса, тайинли бир нагрузкада ҳар қандай кесимдаги максимал кучланишни топиш мумкин. Шунинг учун балкалар мустаҳкамлигини ҳисоб қилишдаги биринчи масала «хавфли» кесимни, яъни нагрузка маълум бўлган ҳолда кучланиши максимал бўладиган кесимни топишдан иборат.

90-§. Балканинг эгилишларини аниқлаш

Балканинг (стерженнинг) деформацияси, яъни эгилиши эгилишлар чизиғи («эластик чизиқ») шакли билан характерланади, бу чизиқ сифатида одатда стержень кўндаланг кесимларининг оғирлик марказлари орқали ўтувчи чизиқ ёки бошқача айтганда, стержень ўқи орқали ўтувчи чизиқ олинади. Биз эластик чизиқ ташқи кучларнинг таъсир этиш текислигида ётган ҳолни, яъни эгилиш текислиги билан кучларнинг таъсир этиш текислиги бир хил бўлган ҳолни текширамиз.

Бир учи қаттиқ маҳкамланган ва иккинчи учига жуфт кучлар моменти қўйилган тўғри балканинг (253- расмга қ.) эгилишлар чизиғини аниқлаймиз. 89- § да қайд қилинганидек, балканинг узунлиги dl бўлган бўлагидаги кўндаланг кесимларининг бурилиш бурчаклари $d\varphi$ га тенг (254- расмга қ.)

Изланаётган эластик чизиқнинг тенгламаси $y=f(l)$ бўлсин, бу ерда y — деформацияланишдан олдин стерженнинг тўғри ўқида ётган l координатали нуқталарнинг ўша ўқдан четланиши. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dl}$ миқдор эластик чизиққа координатаси l бўлган нуқтада ўтказилган уринма йўналиши билан тўғри ўқ орасидаги бурчакдир (257- расм). Агар уринманинг α бурчаклари жуда кичик эканлиги ҳисобга олинса, $\alpha \approx \frac{dy}{dl}$ деб ёзиш мумкин, координатаси l бўлган нуқтадан координатаси $l+dl$ бўлган нуқтага ўтилганда уринма йўналишининг ўзгариши эса қуйидагига тенг:

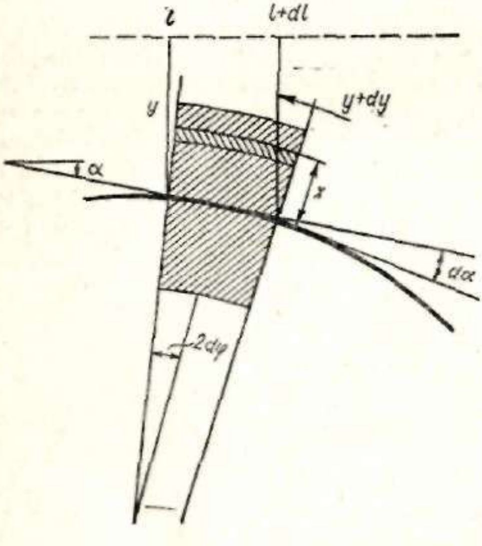
$$d\alpha \approx \frac{d^2y}{dl^2}\,dl.$$

Кўндаланг кесимлар ҳамиша эластик чизиққа перпендикуляр бўлгани учун $d\alpha = 2d\varphi$ (қ. 254- ва 257- расм) ва бинобарин,

$$2d\varphi = d\alpha \approx \frac{d^2y}{dl^2}\,dl \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2y}{dl^2} \approx \frac{2d\varphi}{dl}. \qquad (90.1)$$

(89.5) формулада кўндаланг кесимдаги зўриқишлар моменти $M = \frac{\sigma_0}{b}\ I$ эканини эслайлик. Максимал σ_0 кучланишни (яъни энг узоқда жойлашган қатламдаги кучланишни) Гук қонунига асосан қатламнинг деформациясига боғлаш мумкин. 254- ва 257- расмлардан кўринишича, нейтрал қатламдан энг узоқ b масофада жойлашган қатламнинг ε узайиши

$$\varepsilon = \frac{d\alpha}{dl}\,b = 2\,\frac{d\varphi}{dl}\ b, \qquad (90.2)$$



257- расм.

ундаги кучланиш эса

$$\sigma_0 = E\varepsilon = 2E\frac{d\varphi}{dl}\ b.$$

(90.1) ни ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\sigma_0 \approx Eb\,\frac{d^2y}{dl^2}. \tag{90.3}$$

Энди (89.5) да σ_0 ўрнига унинг (90.3) ифодасини қўйиб, эластик чизиқ аниқланадиган

$$M = EI\,\frac{d^2y}{dl^2} \tag{90.4}$$

тенгламани топамиз. Биз текшираётган ҳолда зўриқишларнинг M моменти ҳамма кўндаланг кесимларда бир хил ва ташқи нагрузканинг $M_{\text{в}}$ моментига тенг. (90.4) тенгламани интеграллаб эластик чизиқ тенгламасини топамиз. (90.4) ни $l = 0$ маҳкамланиш нуқтасидан $l = \eta$ бўлган бирор нуқтагача бир марта интеграллаб, эгилишлар чизиғининг (эластик чизиқнинг) η нуқтадаги биринчи ҳосиласини топамиз:

$$\left(\frac{dy}{dl}\right)_{\eta} - \left(\frac{dy}{dl}\right)_{0} = \int\limits_0^{\eta} \frac{d^2y}{dl^2}\,dl = \int\limits_0^{\eta} \frac{M_{\text{в}}}{EI}\,dl = \frac{M_{\text{в}}}{EI}\ \eta. \tag{90.5}$$

$\left(\frac{dy}{dl}\right)_0 = 0$ эканини, яъни маҳкамланиш жойида уринманинг йўналиши ўзгармас ёки бошқача айтганда, маҳкамланган жойда кесим бурилмас эканини ҳисобга олиб, (90.5) ни нолдан координатаси l бўлган ихтиёрий нуқтагача оралиқда яна бир марта интеграллаймиз:

$$y(l) - y(0) = \int\limits_0^{l} \left(\frac{dy}{dl}\right)_{\eta} d\eta = \int\limits_0^{l} \frac{M_{\text{в}}}{EI}\eta\,d\eta = \frac{M_{\text{в}}}{EI}\,\frac{l^2}{2}. \tag{90.6}$$

Маҳкамланган жойда эгилиш нолга тенг, яъни $y(0) = 0$. Шунинг учун эластик чизиқ тенгламаси парабола тенгламаси бўлади:

$$y(l) = \frac{M_{\text{в}}}{2EI}\ l^2. \tag{90.7}$$

Балканинг учидаги ($l=L$ бўлган жойдаги) максимал эгилиш қуйидагига тенг:

$$\frac{M_{\text{в}}}{2EI}\,L^2. \tag{90.8}$$

Энди бир учи маҳкамлаб қўйилиб, иккинчи учига вертикал $\boldsymbol{P}$ куч таъсир этган ҳолда узунлиги L бўлган балканинг (252- расмга қ.) деформациялари қандай ўзгаришини кўриб чиқамиз. Яна аввалгича иш кўрамиз: маҳкамланган жойидан l масофада турган бирор жойида балкани кесамиз ва балканинг кесиб олинган қисмига кесилиш жойида қандай кучлар таъсир қилиши кераклигини аниқлаймиз (258- расм). Энди кўндаланг кесимдаги зўриқишлар характери бирмунча ўзгаради[1], кучланишларнинг уринма ташкил этувчилари ҳам бўлиши керак, чунки кесиб олинган қисми мувозанатда бўлиши учун кесимда сон қиймати P га тенг ва унга қарама-қарши йўналган уринма зўриқиш Q' бўлиши зарур. Q' зўриқиш *кесувчи куч* деб аталади. Равшанки, ҳар қандай кесимда кесувчи куч P га тенг бўлган айни бир қийматга эга. Қолган қисмига таъсир этувчи Q кесувчи куч бошқа йўналишда қўйилиб, лекин қиймати аввалгича бўлади.

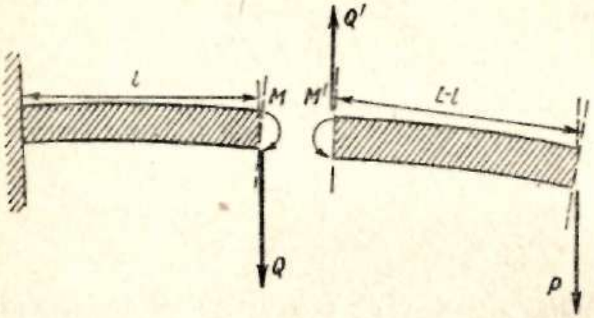
---

[1] 89- § да кўрилганларга нисбатан ўзгаради.

Бироқ кесиб олинган қисмига таъсир этувчи P ва Q' жуфт кучлар моменти қуйидагича бўлади:

$$P(L-l)=M_1. \tag{90.9}$$

Шу туфайли кесиб олинган қисмнинг мувозанатда бўлиши учун яна жуфтлар керак, бу жуфтларнинг моменти M_1 га тенг ва унга қарама-қарши йўналиши лозим. Бу кучлар фақат кесилиш жойидаги кесимда қўйилиши мумкин. Демак, балка кўндаланг кесимда M' момент ҳосил қиладиган нормал зўриқишлар пайдо бўладиган тарзда деформацияланиши, яъни учига жуфт куч қўйилган балкада бўлгани каби деформацияланиши керак.



258- расм.

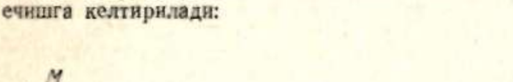
M' момент миқдор жиҳатидан M_1 моментга тенг ва ишораси қарама-қарши; бундан балканинг қолган қисмига қўйилган зўриқишларнинг M моменти M_1 га тенг деган хулоса чиқади. Энди кўндаланг кесимдаги нормал зўриқишларнинг M моменти ҳар хил кесимлар учун бир хил эмас. Ҳақиқатан ҳам M_1 момент катталиги кесимнинг l координатасига боғлиқ бўлади, бинобарин,

$$M=M_1=P(L-l). \tag{90.10}$$

Кесимдаги зўриқишлар қатламларнинг чўзилишига ва сиқилишига алоқадор бўлган нормал кучланишлардан ва кесувчи Q кучнинг бўлишини таъминлайдиган уринма кучланишлардан ташкил топган бўлади. Шунинг учун балка элементининг деформациясини ҳисоблашда уринма кучланишларни ҳам эътиборга олиш керак эди. Бироқ ҳисоб натижасини тажриба натижасига солиштириш уринма зўриқишлар таъсири унча катта эмас эканлигини кўрсатади, шунинг учун балка элементининг деформацияларини, аввалгидек, уринма зўриқишлар бўлмаган ҳолдагидек ҳисоб қилиш мумкин.

Бинобарин, балканинг эластиклик чизиғи ҳисоби ўша (90. 4) тенгламани ечишга келтирилади:

$$M=EI\frac{d^2y}{dl^2}. \tag{90.11}$$



259- расм.

Бироқ (90.10) ифодадан кўриниб турганидек, бу ҳолда зўриқишларнинг M моменти координатага боғлиқ бўлади. Моментнинг балка бўйлаб тақсимот графиги 259- расмда кўрсатилган.

Агар балканинг кўндаланг кесими балканинг бутун узунлиги бўйича бир хил бўлса, «хавфли» кесим, яъни нормал кучланишлар энг катта бўлган кесим балка маҳкамлаб қўйилган жойда, координатаси $l = 0$ бўлган учи ёнида бўлади. Энг катта кучланиш

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{M_{\max}}{w} = \frac{PL}{I} b \qquad (90.12)$$

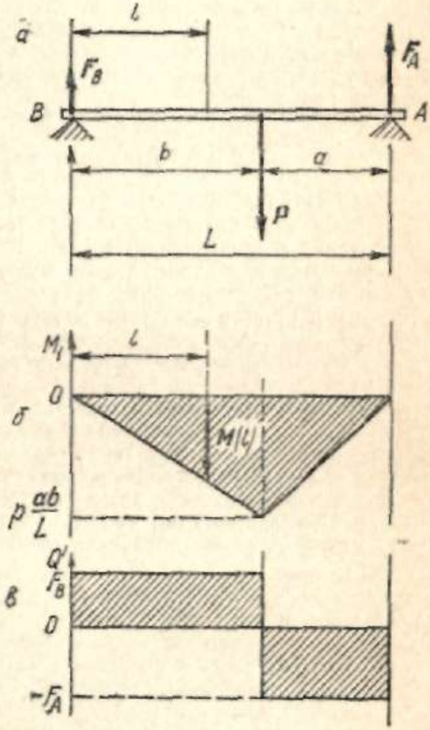
бўлади, бу ерда b — нейтрал қатламдан энг узоқдаги қатламгача бўлган масофа, I — маҳкамланган жойдаги кесимнинг инерция моменти. Агар маҳкамланган жойда балканинг кучланишлари етарлича кичик бўлса, у ҳолда балканинг барча бошқа кесимларида кучланишлар янада кичик бўлади. Агар балка катта нагрузка таъсиридан синса, синиқ маҳкамланган жойга тўғри келади.

Шундай қилиб, балкаларнинг мустаҳкамлигини ҳисоб қилишга оид масала балка бўйлаб олинган барча кўндаланг кесимлардаги эгувчи моментларни аниқлашдан бошланади. Кўпчилик ҳолларда эгувчи моментлар тақсимоти берилган нагрузка ва балка таянчларидаги шартлар асосида осонгина ҳисоблаб топилади.

Масалан, балка 260-*а* расмда кўрсатилгандек икки таянч устида эркин ётади ва унга ўнг томондаги A таянчдан a масофада пастга йўналган P куч қўйилган. Таянчларнинг F_B ва F_A реакцияларини, яъни балкага таянчлар томонидан таъсир этадиган кучларни аниқлаймиз. Бундан кейинги ишимизда бизга фақат F_A реакцияни билиш керак. Таянчлар реакциясини бутун балканинг мувозанат шартидан топамиз. Мувозанат вазиятда кучларнинг ихтиёрий нуқтага нисбатан, *масалан, B нуқтага нисбатан моментлари* йиғиндиси нолга тенг. Шунинг учун

$$F_A L = Pb \text{ ёки } F_A = \frac{Pb}{L}. \qquad (90.13)$$

Кесиб олинган $L - l$ қисмнинг мувозанат шартидан, худди олдинги мисолдаги каби, координатаси $l<b$ бўлган кўндаланг кесимдаги нормал зўриқишлар моменти эгувчи моментга (кесиб олинган қисмга таъсир этувчи ҳамма кучларнинг моментига) тенг эканини топамиз:



260- расм.

$$M_l = P(b - l) - F_A(L - l) = -P\,\frac{la}{L}. \qquad (90.14)$$

Эгувчи моментнинг тақсимоти балканинг B таянчдан куч қўйилган нуқтагача бўлган қисмидагина шундай бўлади. Ундан наридаги кесимларда, яъни координатаси $l>b$ бўлган кесимларда момент қуйидагича бўлади:

$$M_l = -F_A(L - l) = -Pb\left(\frac{L - l}{L}\right). \qquad (90.15)$$

Моментларнинг балка бўйлаб $M_1 = M(l)$ тақсимот графиги 260-*б* расмда кўрсатилган. Қесувчи кучлар графиги 260-*в* расмда кўрсатилган, ташқи P куч қўйилган нуқтадаги Q' кесувчи куч ташқи куч миқдорида сакраб ўзгаради.

Агар балканинг ҳар бир кесимидаги $w = \frac{I}{b}$ қаршилик моменти маълум бўлса, эгувчи моментларнинг $M(l)$ тақсимотидан фойдаланиб, «хавфли» кесимни аниқлай оламиз.

Эгилишлар чизиғини (эластик чизиқни) аниқлаш учун

$$\frac{d^2y}{dl^2} = \frac{1}{EI} M(l) \tag{90.16}$$

тенгламанинг ўнг томонини икки марта интеграллаш керак, бу тенгламада $M(l)$ — l нинг маълум функцияси, E — Юнг модули, I—кесимнинг инерция моменти бўлиб, буларнинг ҳаммаси маълум миқдорлардир.

Биз кўриб ўтган ҳолларда эгувчи моментнинг балка бўйлаб ўзгариши ташқи нагрузкаларга боғлиқ бўлиб, таянчлар хоссасига ва балканинг ўзининг хоссаларига боғлиқ эмас.

91-§. Таянчлар деформацияси ҳақида

Икки таянч устида ётган балканинг деформацияланиши ҳақидаги масалани (90-§) ечиш учун биз аввало балкага таянчлар томонидан таъсир этадиган кучларни (таянч реакцияларини) топдик. Бу кучлар топилгандан кейин эса балканинг маълум ташқи кучлар (булар жумласига таянч реакциялари ҳам кирган) таъсиридаги деформацияланиши ҳақидаги масалани ҳал қилишга киришдик. Таянчлар реакцияси балканинг деформациясига ва таянчлар деформациясига *боғлиқ бўлмаган*, балканинг ўзининг деформацияси эса таянчлар деформациясига *ҳеч ҳам боғлиқ бўлмаган* ҳолдагина масалани ечишнинг бундай йўли тўғри бўлиши мумкин.

Реакциялар катталиги балканинг ва таянчнинг деформацияларига боғлиқ бўлган мураккаброқ бошқа масалаларда бу йўл ярамайди, у ҳолда мураккаброқ масалани ечиш керак, яъни таянч реакцияларини ҳамда балка ва таянч деформацияларини бараварига аниқлаш керак.

Бундай масалаларнинг ўзига хос томонларини аниқлаш учун таянч реакциялари ўлчанадиган икки мисол кўриб чиқамиз. Ёғоч планка (балка) *икки* динамометрга A ва B пружиналар воситасида осиб қўйилган бўлсин (261-расм). Стерженга P юк осамиз, унда динамометрлар таянч реакцияларининг катталигини кўрсатади. Агар A пружинанинг бикрлигини ўзгартирсак, масалан, бикрликни орттирсак, планка таянчларининг реакцияси амалда ўзгармайди. Агар планкани ўз ўқи атрофида 90° га буриб бикрлигини камайтирсак, таянч реакциялари яна ўзгармайди.

261-расм.

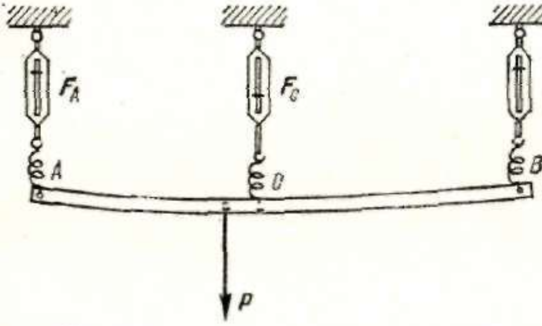
Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда балканинг мувозанат шартидан A пружинанинг кучи

$$F_A = \frac{a}{a+b} P, \tag{91.1}$$

B пружинанинг кучи

$$F_B = \frac{b}{a+b} P$$

эканлиги келиб чиқади. Пружиналар ва планка деформацияланганда a ва b миқдорлар деярли ўзгармагани учун динамометрнинг кўрсатишлари ҳам таянчлар деформациясига ва балканинг ўзининг деформациясига амалда боғлиқ бўлмайди. (91.1) тенгламалар планканинг тинч туриш шартидан келиб чиққан бўлиб, планканинг ўзининг деформациясига ҳам, A ва B таянч пружиналарининг деформациясига ҳам боғлиқ эмас. Балка деформацияларини 90-§ да анализ қилишда ҳам шундай бўлган эди, у ерда биз таянчлар деформациясининг катталиги ҳақидаги масалани текширмаган эдик.



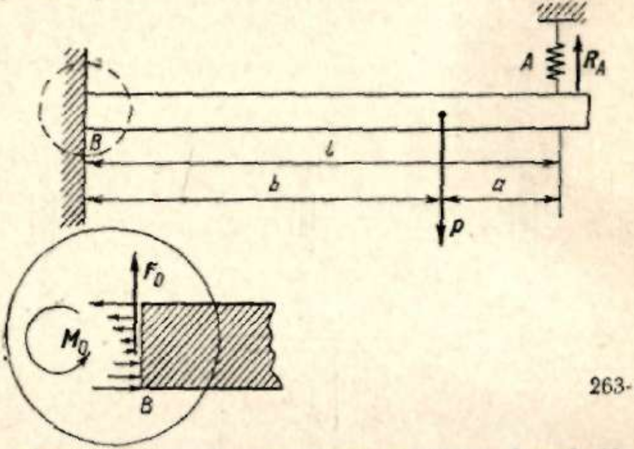
262- расм.

Агар ўша планканинг ўзи учта пружина воситасида осиб қўйилган бўлса (262- расм), манзара бутунлай бошқача бўлади. Бу ҳолда динамометрларнинг кўрсатишлари планка ва пружиналар бикрлигига боғлиқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар C пружина A ва B пружиналарга қараганда каттиқроқ (яъни бикрлиги катта) бўлса, C динамометр P юкнинг оғирлик кучига деярли тенг бўлган кучни кўрсатади, A ва B динамометрлар кўрсатишлари жуда кичик бўлади. Аксинча, C пружинани юмшатсак, планканинг учларидаги реакция кучларини (91.1) формулалар билан аниқланадиган қийматларига қалар орттира оламиз. Худди шунингдек, пружиналарни аввалгича қолдириб, планканинг бикрлигини орттирсак, ўртадаги диномометр кўрсатаётган F_C куч оғтади.

Бинобарин, уч таянчда ётувчи балканинг деформацияланиши ҳақидаги масалани балка ва таянчлар деформациясини ҳисобга олмасдан ҳал қилиб бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, балка мувозанатда бўлиши учун қуйидаги иккита шарт бажарилиши кераклигини биламиз: ҳамма кучларнинг нолга тенглиги ва барча кучлар моментларининг нолга тенглиги, лекин бу шартларга кирувчи номаълум кучлар (реакциялар) учта. Икки тенгламадан учта номаълумнинг қийматларини топиб бўлмайди. Шунинг учун механиклар *статик аниқ бўлмаган реакциялар* қатнашган масалалар деб атайдиган бундай масалаларда балканинг деформациялари ҳақидаги масалани ёки жисм ва унинг таянчларининг деформациялари ҳақидаги масалани ҳал қилмай туриб таянч реакцияларини топиб бўлмайди, бундай ҳолда мураккаброқ масалани ечиш лозим. Қизиқарли икки мисол кўриб ўтамиз.

1) Бир учи деворга бостириб маҳкамланган, иккинчи учи A пружинага таянадиган балка (263- расм). Балкага таянч томонидан пружинанинг юқорига йўналган $\boldsymbol{R}_A$ кучи, яъни таянч реакцияси таъсир қилади. Маҳкамланган жойдаги бурила олмайдиган B кесимда балкага ёйилган кучларнинг мураккаб тўплами таъсир қилади, бу кучлар тўпламини $\boldsymbol{F}_0$ кучга ва $\boldsymbol{M}_0$ моментга келтириш мумкин. Балканинг ҳар бир кесимидаги эгувчи момент ва кесувчи кучларни аниқлаш учун R_A ва P нинг катталигини билиш керак. F_0 ва M_0 маълум бўлмаса, R_A нинг катталигини аниқлаб бўл-

майди, статиканинг икки тенгламасидан эса учта F_0, M_0 ва R_A миқдорни аниқлаб бўлмайди. R_A ва F_0 кучлар ва M_0 момент катталиги A таянчдаги пружинанинг бикрлигига кўп боғлиқ.



263- расм.

Таянчлар деформацияси ҳисобга олинадиган масалалар бундай йўл билан ечилади. Дастлаб пружина йўқ деб ва балкага P кучдан ташқари яна A нуқтада бирор (ихтиёрий) R куч таъсир этади, деб фараз қилинади; бу R куч P *кучга тескари йўналган.* Бундай шартда *балканинг A нуқтадаги деформацияси* R куч катталигининг функцияси сифатида аникланади: $y_A = f(R)$. Балканинг эластиклик чизиғининг асосий (90.4) тенгламасидан фойдаланиб, y_A нинг катталигини осон ҳисоблаб топиш мумкин. Узунлиги бўйлаб кесими бир хил бўлган *балканинг инерция моменти* I, материалнинг Юнг модули E деб фараз қиламиз; у ҳолда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \tag{91.2}$$

бу ерда $M(x)$ — маҳкамланган жойдан ҳисобланган x масофадаги эгувчи момент бўлиб, ҳар хил интервалда у қуйидаги қийматларга эга бўлади:

$$0 < x < b \text{ интервалда } M(x) = P(b - x) - R({}' - x),$$
$$b < x < l \text{ оралиқда } M(x) = -R(l - x).$$

$\frac{1}{EI} M(x)$ ни кетма-кет икки марта интеграллаб, $0 < x < b$ интервалда $\frac{dy}{dx}$ ва y миқдорларини аниқлаймиз. Бундан $\frac{dy}{dx}(b)$ ва $y(b)$ ни аниқлаб, $y(x)$ ни $b < x < l$ оралиқда худди шу йўл билан аниқлаймиз. Натижада $y(l)$ ни топамиз:

$$y(l) = y_A = \frac{Pb^2}{3EI}\left(b + \frac{3}{2}a\right) - \frac{Rl^3}{3EI}, \text{ бу ерда } a = l - b. \tag{91.3}$$

Шундай қилиб, биз балканинг P ва R кучлар таъсирида олган деформациясини топдик. Сўнгра таянч пружинасининг R куч таъсирида олган y_A деформациясини топамиз:

$$y_A = \frac{1}{k} R, \tag{91.4}$$

бу ерда k—пружинанинг бикрлик коэффициенти. Балканинг y_A деформацияси билан таянч пружинасининг деформациясини бир-бирига тенглаштириб, пружинанинг балкага таъсир этадиган R_A кучини аниқлаймиз.

(91.3) ва (91.4) ифодаларнинг тенглигидан R_A ни топамиз:

$$R_A = P\frac{b^2(b + {}^3/{}_2 a)}{\left(1 + \frac{3EI}{kl^3}\right) l^3}.$$

Энди пружинанинг A таянч нуқтасида балкага таъсир этадиган R_A кучини билган ҳолда деворга бостириб маҳкамланган ҳамда P ва R_A кучлар таъсири остида турган балканинг деформациясини одатдаги йўл билан аниқлаймиз; масалан, l нуқтадаги эгилишни топиш учун R нинг дастлаб топилган $R = R_A$ қийматини (91.3) га қўямиз.

Шуни қайд қиламизки, пружина абсолют бикр бўлганда ($k \to \infty$) таянч реакциясининг катталиги балканинг эластиклик хоссаларига боғлиқ бўлмай,

$$R_A = \left(\frac{b}{l}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{a}{b}\right) P \qquad (91.5)$$

бўлади, бунда

$$R_A < P\frac{b}{l}.$$

$P\frac{b}{l}$ миқдор A ва B нуқталардаги икки таянч устида ётган балканинг A таянчи реакциясига тенг (260-a расмга қ.). $R_A < P\frac{b}{l}$ бўлгани туфайли балканинг деворга бостириб маҳкамланган жойидаги кесимда $Pb - R_A l$ момент нолдан катта бўлади.

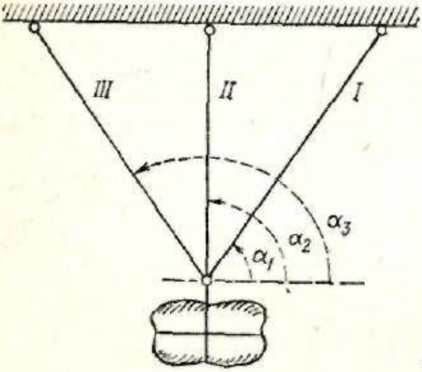
$k \to 0$ бўлганда, яъни пружина жуда заиф бўлганда пружинанинг R_A таъсири ҳам нолга интилади. Бу ҳолда маҳкамланиш жойидаги $M(0)$ момент ташқи кучнинг Pb моментини тўла мувозанатлайди, яъни $M(0) = Pb$, бундай эканлиги бевосита кўриниб турибди.

Бундан мураккаброқ масалалар ҳам тахминан шундай йўл билан ечилади. Ечилиш йўлини эслатиб ўтамиз: дастлаб таянчларнинг ҳали номаълум бўлган барча реакциялари бирор кучлар билан алмаштирилади ва балканинг ҳали номаълум бўлган бу кучлар таъсири остидаги деформацияси тўғрисидаги масала ечилади. Ундан кейин таянчларнинг ўша кучлар таъсирида олган деформациялари аниқланади. Таянчлар ва балка деформацияларининг иккала ҳолдаги катталикларини ўзаро тенглаб, номаълум реакциялар аниқланадиган тенгламалар системаси ҳосил қилинади. Реакциялар катталиги топилгач, одатдагича жисмнинг деформациялари аниқланади.

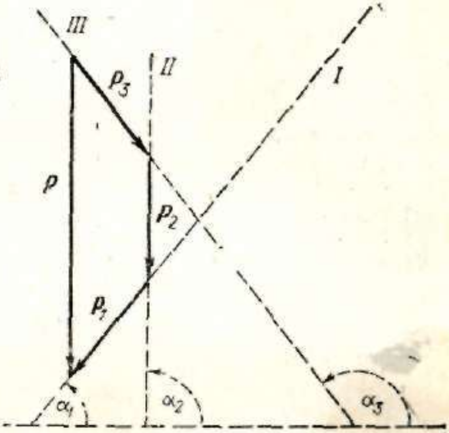
2) Юк уч арқонга осиб қўйилган. Буниси бир оз бошқача типдаги мисолдир, биз уни бошқа усул билан ечамиз, бироқ масаланинг моҳияти аввалгича қолади.

Бир текисликда ётувчи уч ип, арқон ёки стерженга юк осилган (264-расм). Агар юк икки арқонга осилган бўлганда эди, у ҳолда ҳар бир арқондаги зўриқишлар катталиги арқонларнинг эластиклик хоссаларига эмас, балки улар билан вертикал йўналиш орасидаги бурчакларгагина боғлиқ бўлар эди, чунки ҳамма вақт юкнинг P оғирлик кучини тайинли икки йўналиш бўйлаб бир қийматли равишда иккига ажратиш мумкин.

Юк уч арқонга осилган ҳолда арқонлар билан вертикал йўналиш орасидаги бурчаклар маълум бўлганда ҳам оғирлик кучини компоненталарга ажратиб бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, кучни тайинли уч йўналиш бўйлаб учта компонентага бир қийматли равишда ажратиб бўлмайди (265-расм). Арқонлар йўналишига параллел бўлган ва горизонтал билан α_1, α_2, α_3 бурчаклар ҳосил қилган чизиқлар пунктир билан чизилган бўлиб, пунктир чизиқлар бўйлаб йўналган учта вектордан иборат бўлган ва P векторга таянадиган ҳар қандай ёпиқ фигура бу масаланинг формал равишдаги ечимини билдиради.



264- расм.



265- расм.

Арқонларнинг эластиклик хоссалари бизга маълум бўлгандан кейингина арқонлардаги зўриқишларни аниқлаш масаласи ҳал қилиниши мумкин. Соддалик учун ён томондаги арқонлар бир хил бўлиб, ўртадагиси вертикал жойлашган, деб фараз қиламиз. Унда $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ва $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$. Ўртадаги арқон узунлигини l_1 билан, унинг Юнг модулини E_1 билан, ён томондаги арқоннинг Юнг модулини E_2 билан, ўртадаги арқоннинг кўндаланг кесимини S_1 билан, ён томондагиникини S_2 билан белгилаймиз. Ўртадаги арқоннинг Δl_1 деформацияси ён томондаги арқоннинг Δl_2 деформациясига қуйидаги тенглик билан боғланган (266- расм):

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \sin \alpha_1. \tag{91.6}$$

Ўртадаги арқондаги зўриқиш

$$P_1 = \frac{E_1 S_1}{l_1} \Delta l_1, \tag{91.7}$$

ён томондаги арқондаги зўриқиш

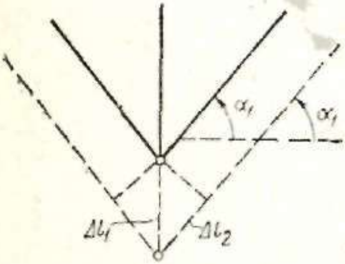
$$P_2 = \frac{E_2 S_2}{l_2} \Delta l_2.$$

(91.6) ни ҳисобга олиб, P_2 ни топамиз:

$$P_2 = \frac{E_2 S_2}{l_2} \Delta l_1 \sin \alpha_1. \tag{91.8}$$

Арқонлардаги кучлар йиғиндиси юкнинг оғирлигига тенг бўлиши керак:

$$P = P_1 + 2P_2 \sin \alpha_1. \tag{91.9}$$



266- расм.

(91.9) тенгликка кучларнинг (91.7) ва (91.8) қийматларини қўямиз:

$$P = \left(\frac{E_1S_1}{l_1} + \frac{2E_2S_2}{l_2}\sin^2\alpha_1\right)\Delta l_1, \tag{91.10}$$

бундан ўртадаги арқон узайишининг катталигини аниқлаймиз:

$$\Delta l_1 = \frac{P}{\frac{E_1S_1}{l_1} + \frac{2E_2S_2}{l_2}\sin^2\alpha_1}. \tag{91.11}$$

Бу ифодани (91.7) ва (91.8) формулаларга қўйиб, арқонлардаги зўриқишларни аниқлаймиз:

$$P_1 = \frac{P}{1+2\frac{E_2S_2l_1}{E_1S_1l_2}\sin^2\alpha_1},\quad P_2 = \frac{P\sin\alpha_1}{2\sin^2\alpha_1 + \frac{E_1S_1l_2}{E_2S_2l_1}}. \tag{91.12}$$

Бу мисолларда ҳам, бунга ўхшаган бошқа барча масалаларда хам деформациялар жисмнинг ўлчамларига нисбатан жуда кичик деб фараз қилинади. Шунинг учун, масалан, биринчи мисолда биз деформацияланишда балканинг узунлиги ўзгармайди ва эластик чизиқнинг оғмалик бурчаклари жуда кичик деб, иккинчи мисолда арқонлар юк таъсиридан чўзилганда улар орасидаги бурчаклар ўзгармайди деб фараз қилдик. Жисмлар деформацияси жуда катта бўлганда бу фаразлар ҳақиқатга тўғри келмай қолади ва унда хамма ҳисоб иши анча мураккаблашиб қолади.

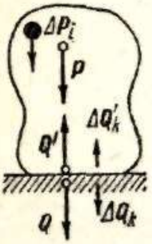
Шундай қилиб, икки ҳол бўлиши мумкин, биринчи, жисмнинг эластик деформациялари таянчлар бикрлигига боғлиқ бўлмаган ва системага таъсир этувчи ва уни деформацияловчи ҳамма кучлар берилган ташқи кучлар ва геометрия (ўлчамлар) орқали бир қийматли аниқланган энг содда ҳол; иккинчи, таянчлар деформациялари ҳар қанча кичик бўлганда ҳам системанинг эластик деформациялари таянчларнинг бикрлигига боғлиқ бўлган мураккаброқ ҳол. Бу ўринда таянчлар деформациялари принципиал аҳамиятга эга бўлиб, таянчлар реакциясининг катталигини ва шу билан бирга, бутун системанинг эластик деформацияларини аниқлайди. Иккинчи ҳолда эластик деформацияларни аниқлайдиган физикавий шартлар доираси кенгайтирилади. Шунинг учун кўринишдан бутунлай ўхшашдек бўлган кўп ҳодисаларга олдин маълум бўлган қонуниятларни жорий этишда жуда эҳтиёт бўлиш керак. Биринчи қарашда икки ипга осилган юк тўғрисидаги масала уч ипга осилган юк тўғрисидаги масалага жуда ўхшашдир. Бироқ биринчи масалада иплардаги зўриқиш ипнинг материалига боғлиқ эмас, иккинчисида эса иплардаги зўриқиш ипнинг материалига ва кесимига кўп даражада боғлиқдир.

92-§. Ортиқча юк, вазнсизлик ва кучланишлар

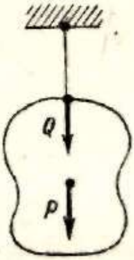
Жисмнинг ўз оғирлик кучи таъсирида жисмда ҳамиша кучланишлар пайдо бўлади. Агар жисм таглик устида ётган бўлса (267-расм), у ҳолда тортишиш кучи жисмнинг ҳар бир элементига қўйилган бўлади, тортишиш кучининг $\boldsymbol{P}$ натижаловчисини мувозанатловчи $\boldsymbol{Q}'$ куч, яъни тагликнинг реакция кучи жисмнинг тагликка тегиб турган сиртигагина қўйилган бўлади. Ҳақиқатда жисмга қуйидаги ташқи кучлар таъсир кўрсатади: Δm_i массали ҳар бир заррага $\Delta\boldsymbol{P}_i$ тортишиш кучи ва жисмнинг тагликка тегиб туриш сирти бўйлаб $\Delta\boldsymbol{Q}'_k$ кучлар. Равшанки,

$$\boldsymbol{P} = \sum\Delta\boldsymbol{P}_i \text{ ва } \boldsymbol{Q}' = \sum\Delta\boldsymbol{Q}'_k.$$

Бу кучлар таъсирида жисм деформацияланади ва унда ички зўриқиш ва кучланишлар пайдо бўлади; зўриқиш ва кучланишлар тақсимоти мураккаб бўлади; бу тақсимот жисмнинг тузилишига ва эластиклик хоссаларига боғлиқ. Бироқ шу нарса равшанки, жисмнинг пастки қисмида кучланишлар ортиқроқ бўлиб, тагликка яқин жойда энг катта қийматларга эга. $\boldsymbol{Q}=\sum \Delta \boldsymbol{Q}_k$ оғирлик кучи тагликка қўйилади; бу кучнинг физикавий табиати унга тенг бўлган $\boldsymbol{P}$ тортишиш кучидан бутунлай бошқачадир. Агар биз жисмни ўзига боғланган ипидан осиб қўйсак (268-расм), у ҳолда $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}$ бўлади, бироқ ўша жисмда зўриқиш ва кучланишлар тақсимоти бутунлай бошқача бўлади: биринчидан, кучланишлар ишораси бошқача бўлади, иккинчидан, кучланишлар жисмнинг юқориги қисмида каттароқ бўлиб, ипнинг жисмга боғланган жойида энг катта қийматларга эришади[1].



267- расм.



268- расм.

Оғирлик таъсирида бўладиган деформацияни ингичка симдан ясалган катта пружина мисолида яққол кўрсатиш мумкин (269-расм). Бир ҳолда пружина стол устида 269-*а* расмда кўрсатилгандек ётади, иккинчи ҳолда бир учидан осиб қўйилган (269-*б* расм), учинчи ҳолда стол сиртида горизонтал ётқизиб қўйилган (269-*в* расм). Ҳамма ҳолларда пружинанинг шакли ва ундаги кучланишлар мутлақо ҳар хил.

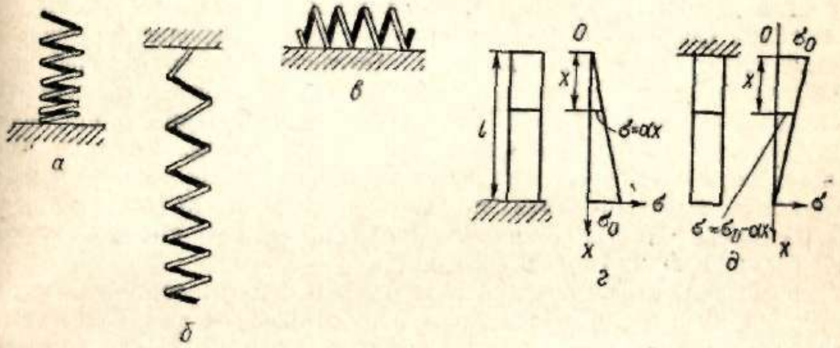
Узунлиги l ва кўндаланг кесим юзи S бўлган бир жинсли цилиндрла пайдо бўладиган нормал σ кучланишлар 269-*г* ва *д* расмларда икки хил ҳолда кўрсатилган. Таглик устида турган цилиндрда (269-*г* расм) юқориги учидан x масофада жойлашган кўндаланг кесимда ***сиқувчи*** нормал кучланишлар $\sigma=\alpha x$ га тенг, бу ерда $\alpha=\sigma_0/l$, $\sigma_0=Q/S$ — пастдаги (таглик яқинидаги) кучланишлар, Q — цилиндр оғирлиги. Юқориги асосидан ёпиштириб қўйилган цилиндрда (269-*д* расм) x кесимда ***чўзувчи*** нормал кучланишлар $\sigma=\sigma_0-\alpha x$ га тенг. Биринчи ҳолда пастга томон кучланишлар қиймати ортиб боради, иккинчи ҳолда эса камайиб боради. Иккала ҳолда ҳам пастга томон кўндаланг кесим диаметри ортиб боради; диаметр ортишини (84.1) формуладан фойдаланиб ҳисоблаб топиш мумкин.

Амалда ҳамма жисмларда ҳам шундай бўлади, бироқ баъзан жисмда пайдо бўладиган деформациялар жуда кичик; масалан, бир килограммли тарози тошида бу деформациялар ниҳоятда кичик бўлади.

---

[1] Равшанки, бу ҳолда ипни «таглик» деб ҳисоблашга, яъни жисмнинг оғирлик кучи ипга қўйилган бўлиб, уни таранглайди дейишга тўғри келади.

Жисмнинг *вазнсизлик* ҳолатида бу кучланишларнинг ҳаммаси барча кесимларда нолга тенг бўлади, яъни x нинг ҳар қандай қийматида $\sigma(x) = 0$.

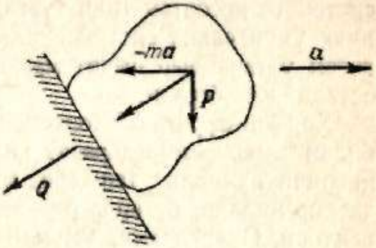


269- расм.

Ортиқча юк таъсирида жисмнинг оғирлиги ўзгариши туфайли пайдо бўладиган ички кучланишлар катталиги сезиларли бўлиб, улар муҳим аҳамиятга эга. Ортиқча юк деб тезлаштирилган саноқ системасида массага оид кучларнинг тортишиш кучига нисбатига айтилади. Агар жисмнинг тезланиш билан илгариланма ҳаракат қилувчи саноқ системасига нисбатан тинчлигини кўриб чиқсак, жисмнинг Δm массали ҳар бир заррасига иккита массага оид куч таъсир этади: ΔP тортишиш кучи, $-\Delta ma$ инерция кучи (270-расм). Бу системада жисмнинг оғирлик кучи

$$Q = P - ma \qquad (92.1)$$

ифодага тенг бўлиб, у жисмни тезлаштирилган саноқ системасида ушлаб турган тагликка қўйилган бўлади. Бу формулани оғирлик кучининг ҳар қандай саноқ системасига нисбатан ярайдиган таърифи деб ҳисоблаш лозим. Худди шунингдек, жисм зарраси учун ҳам оғирлик кучи тушунчаси киритиш мумкин:



270- расм.

$$\Delta Q = \Delta P - \Delta ma, \qquad (92.2)$$

бироқ бу ерда шундай бир изоҳ бериш керак бўлади: массага оид ΔP ва $-\Delta ma$ кучлар заррага қўйилган бўлиб, ΔQ куч текширилаётган заррани чегаралаб турган сиртга қўйилган бўлади.

Ортиқча юк деб қуйидаги нисбатга айтилади[1]:

$$n = \frac{|\Delta P - \Delta m a|}{|\Delta P|}. \tag{92.3}$$

Ортиқча юк мазкур координаталар системасида оғирлик кучининг модули тортишиш кучидан қанча марта катта эканини кўрсатади.

Шуни қайд қиламизки, тортишиш кучи жисмларнинг бир-бирига нисбатан жойлашишигагина боғлиқ. Тезланувчан ҳаракат қилиб кетаётган автомобиль, поезд ва самолёт ичида киши ўзида ортиқча юк сезади, айниқса a тезланиш ўзгараётган ёки унинг қиймати етарлича катта (бир неча g) бўлган пайтларда бу ҳолат сезиларли бўлади. $10g$ чамасидаги жуда катта тезланишларда киши оғриқ сезади, чунки бу ҳолда кишининг ҳамма аъзоларининг оғирлиги 10 марта ортади, машқ қилган соғлом организмгина бундай ортиқча юкларга қисқа вақт давомидагина бардош бера олади.

Равшанки, вазнсизлик ҳолатида $\Delta \boldsymbol{Q} = 0$ бўлади, тортишиш кучи инерция кучи билан мувозанатлашади, ортиқча юк ҳам нолга тенг ва жисмнинг исталган зарраси атрофдаги зарраларга таъсир кўрсатмайди. Жисмда оғирлик туфайли ҳеч қандай кучланишлар пайдо бўлмайди. Бу ҳолатда ҳар бир физикавий жисм *одатдаги* кучланишлардан холи бўлади[2]. Эркин тушиш ҳолатида бўлган жисмлардан бошқа ҳамма жисмларга, яъни Ерда тинч турган ва ҳаракатланаётган жисмларга оғирлик туфайли ҳосил бўлган зўриқишлар таъсир қилади, бу жисмларда тегишли ички кучланишлар бўлади. n га тенг бўлган ортиқча нагрузкада бу кучланишлар n марта ортади.

Оғирликнинг тезланма саноқ системаси *айлангандаги* ўзгаришини қайд қиламиз. Равшанки, ҳар қандай саноқ системасида оғирлик бу системага нисбатан тинч турган жисмлар учунгина маънога эга. Шунинг учун саноқ системасининг айланиши туфайли оғирликда бўладиган ўзгаришлар фақат марказдан қочма инерция кучлари таъсири остида юз беради.

Ҳар бир заррага $\Delta \boldsymbol{P}$ тортишиш кучи ва саноқ системасининг тезланиш билан илгариланма ҳаракат қилиши туфайли пайдо бўладиган $-\Delta m\,\boldsymbol{a}$ инерция кучидан ташқари, марказдан қочма $\Delta m\omega^2\rho$ инерция кучи таъсир қилади, бу ерда ρ — заррадан айланиш ўқигача бўлган масофа вектори. Охирги куч, умуман айтганда, жисмнинг ҳар хил нуқталари учун ҳар хил бўлади, бироқ натижаловчи куч жисмнинг массалар марказига қўйилган бўлади ва $m\omega^2\rho_0$ га тенг бўлади, бу ерда ρ_0—айланиш ўқидан жисмнинг массалар марказигача бўлган масофа вектори. У ҳолда

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} - m\boldsymbol{a} + m\omega^2\rho_0.$$

---

[1] Баъзан техникада ортиқча юк деб $n - 1$ миқдорга айтилади.

[2] Бу ўринда сўз фақат оғирлик туфайли ҳосил бўлган кучланишлар устида боради; жисмнинг тузилишига, бир жинсли эмаслигига, термик ишлов берилиши ва шу каби факторларга боғлиқ бўлган кучланишлар ҳам мавжуд бўлиши мумкин; бу кучланишлар вазнсизлик ҳолатида ҳам йўқолмайди.

Айланаётган Ер сиртидаги жисмнинг оғирлиги $\boldsymbol{P}$ тортишиш кучидан фақат марказдан қочма инерция кучи миқдорида фарқ қилади, $\boldsymbol{a} = 0$.

Оғирлик кучи ва тортишиш кучи тушунчаларининг бир-биридан фарқи бор эканлигини таъкидлаб ўтишимизга сабаб шуки, *вазнсизлик* ҳолатида жисмга *фақат тортишиш кучи* таъсир этади (инерциал системага нисбатан бўлаётган ҳаракат текширилаётганда), *оғирлик кучи* эса *нолга тенг* бўлиб, жисм ички кучланишлардан холи бўлади.

XI БОБ

МУВОЗАНАТ ҲОЛАТИДАГИ СУЮҚЛИК ВА ГАЗЛАР

93-§. Қаттиқ, суюқ ва газ ҳолатдаги жисмлар

Ҳамма жисмлар муттасил тўхтовсиз ҳаракатда бўладиган жуда майда зарралардан, яъни молекулалардан тузилган. Қаттиқ жисмларда молекулалар бирор мувозанат вазияти атрофида тебранма ҳаракат қилиб туради. Бироқ молекулаларнинг бу кўчишлари шу қадар кичик бўладики, улар жисмларнинг ёки жисм қисмларининг механикада ўрганиладиган ҳаракатига мутлақо таъсир этмайди. Қаттиқ жисмда молекулаларнинг бир-бирига нисбатан тутган ўртача вазиятлари мутлақо аниқ бўлади. Қаттиқ жисм ҳаракатини одатдагича анализ қилганда жисмнинг майда заррасида[1] молекулалар шу қадар кўп бўладики, жисмнинг ҳаракат қилиши ва деформацияланишида бу заррани яхлит ва узлуксиз деб ҳисоблаш мумкин.

Ҳар бир қаттиқ жисмнинг ўз шакли бўлади. Шаклини ўзгартириш, яъни жисмни деформациялаш учун жисмга ёки унинг қисмларига кучлар қўйиш керак. Шунинг учун қаттиқ жисм, суюқлик ва газдан фарқли ўлароқ, ўз шаклини ўзгартирмайди. Суюқлик ва газлар шундай физикавий жисмлардирки, уларнинг тайинли бир шакли бўлмайди ва улар ўзи турган идиш шаклини олади.

Шуни таъкидлаб ўтиш лозимки, қаттиқ жисм билан суюқлик ўртасидаги ҳозиргина айтиб ўтилган фарқ маълум даражада шартлидир, бу фарқ фақат механикага тегишли. Айни бир жисм қандай ҳодисада қатнашишига қараб ўзини қаттиқ жисм сифатида ҳам, суюқ жисм сифатида ҳам тутади. Масалан, диски асфальтдан ясалган пилдироқни юргизганимизда у ўзини қаттиқ жисм сифатида тутади; офтобда ётган ўша диск суюқлик каби ёйилиб кетади. Суюқлик билан қаттиқ жисм ўртасидаги аниқроқ ва умумийроқ фарқ қаттиқ жисм физикаси ўрганилаётганда кўрсатиб ўтилади. Бу ерда эса фақат механикавий масалалар назарда тутилади ва шунинг учун бу кўрсатилган фарқни мутлақо маъқул деб ҳисоблаш мумкин.

---

[1] Бир жисмнинг зарраси деб шу жисмда ажратилган етарлича кичик бўлган бирор ҳажмга айтилади; бу ҳажмнинг ўлчамлари жисмнинг ўзининг ўлчамларига қараганда жуда кичик бўлади.

Газда молекулалар қаттиқ материалдан ясалган майда шарчаларга ўхшаб бир-бири билан тўқнашиб, тартибсиз хаотик ҳаракат қилади. Ҳаракат вақтида молекулалар бир-бирига боғланган эмас, газ зарралари муттасил тўқнашишлари натижасида ҳамма томонга учиб кетишга интилади ва газ ўзига қўйиб берилган ҳажмни бир текис тўлдиради. Шунинг учун газ тайинли шаклга ҳам, тайинли ҳажмга ҳам эга бўлмаган физикавий жисмдир. Газ ҳажми ўзи эгаллаб турган идиш ҳажми билан белгиланади. Механикавий ҳодисаларни анализ қилишда газни ҳам кенгайишга ва ўзига қўйиб берилган ҳажмни бир текис тўлдиришга интиладиган узлуксиз яхлит жисм, деб тасаввур этиш мумкин. Газ ҳолатидаги жисмнинг майда зарралари ғоят кўп молекулага эга бўлгандагина юқоридаги тасаввур тўғри бўлади. Масалан, одатдаги шароитда ҳавонинг 1 мм^3 ҳажмида 10^{16} тартибидаги миқдорда молекула бўлади.

Суюқлик молекулалари, газлардаги каби, бир-бирига доимий боғланган бўлмайди; молекуляр хаотик ҳаракатда бир молекула бошқасига нисбатан истаганча ҳаракат қилади. Бироқ суюқликда, газдан фарқли ўлароқ, молекулалар орасидаги ўртача масофа *деярли ўзгармас* бўлади. Бинобарин, суюқлик тайинли шаклга эга бўлмаган, бироқ ҳажми деярли ўзгармайдиган физикавий жисмдир. Суюқликка таъсир этувчи ташқи кучлар анча ўзгаргандагина суюқликнинг ҳажми ўзгаради.

Суюқ жисм ҳамиша маълум бир сирт билан чегараланган бўлади, бу сирт уни қаттиқ жисм ёки газдан ажратиб туради; суюқликнинг газдан ажралиб туриш сирти *эркин сирт* деб аталади.

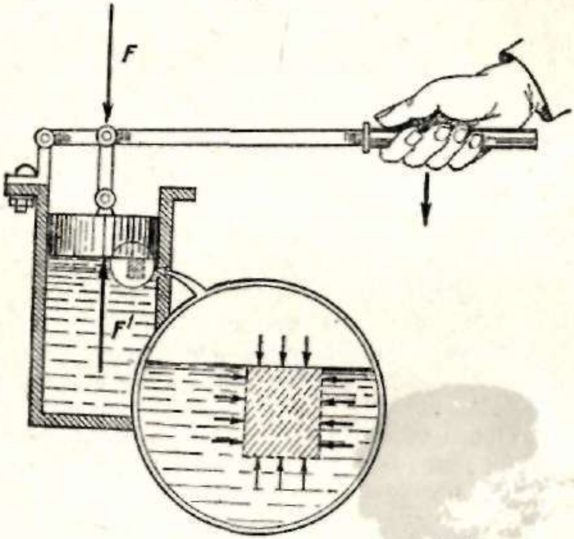
Газ ҳолатдаги жисмлар одатда ёки суюқлик сирти билан, ёки қаттиқ жисм сирти билан чегараланиб туради, лекин улар маълум бир чегаравий сиртга эга бўлмаслиги ҳам мумкин, масалан, Ер атмосферасининг юқориги қатламлари шундай.

Қаттиқ, суюқ ва газ ҳолатдаги жисмлар механика курсида етарлича аниқликда яхлит ва узлуксиз жисмлар деб қаралади, бунда ташқи шароитлар ўзгармас бўлганда қаттиқ жисм унинг ўзига хос *бўлган шакл ва ҳажмга*, суюқлик *эса тайинли бир ҳажмга* эга бўлади деб, газ ҳолатдаги жисм эса ўзига хос бўлган *шаклга ҳам, ҳажмга ҳам* эга бўлмайди, деб фараз қилинади.

94-§. Босим ҳақида тушунча

Ҳамма *томондан берк бўлган бирор идиш ичига солинган* суюқ ёки газ ҳолидаги жисмга доимо ташқи таъсир кўрсатилиши мумкин. Поршенли цилиндр ичига суюқлик (ёки газ) солинган бўлсин (271-расм) Агар поршенга маълум бир F куч таъсир қилиб, поршень билан суюқлик мувозанатда бўлса, у ҳолда суюқлик (ёки газ) поршенга аввалгига тенг ва қарама-қарши йўналган F' куч билан таъсир қилади. Суюқликнинг поршенга бевосита тегиб турган бирор ҳажмининг мувозанат шартидан бу ҳажмга суюқликнинг қолган қисми томонидан кучлар таъсир қилишини аниқлаш мумкин, яъни суюқликда, худди қаттиқ жисмдаги каби, ички куч ва зўриқишлар пайдо бўлади.

Суюқликда (ёки газда) пайдо бўладиган ва вақт ўтиши билан ўзгармайдиган (статик) кучланиш ва зўриқишлар қаттиқ жисмлардаги кучланишлардан шу билан принципиал фарқ қиладики, суюқлик ва газларда кучланишлар *уринма* ташкил этувчиларга эга бўлмайди. Суюқлик ва газдаги ички статик зўриқиш ва кучланишлар ажратиб олинган ҳар қандай ҳажмнинг сиртига *ҳамиша нормал* равишда йўналади. Мувозанат ҳолатида суюқлик ва газлар бир қисмидан бошқа қисмига уринма зўриқишларни «узата олмайди». Шундай эканлиги ишқаланишга бағишланган бобда айтиб ўтилган эди, унда суюқлик ва газларда тинчлик ишқаланиши нолга тенг эканлиги қайд қилинган эди (38- §). Бу қоидани бир қатор тажрибалар тасдиқлайди. Энг содда тажриба суюқликда сузиб юрган жисм билан ўтказиладиган тажрибадир (95- расмга қ.); унда горизонтал йўналишда қўйилган ҳар қандай *f* куч жисмни ҳаракатга келтиради.



271- расм.

Газларнинг ҳам худди шундай хоссаси бор. Масалан, уй ичида ҳавода эркин сузиб юрган резина шарчани ҳар қанча кичик куч жойидан қўзғатиб юборади. Газ (ҳаво) шарчанинг кўчишига тўсқинлик қилолмайди.

Соддагина тажрибалардан шу нарса аниқланганки, суюқ ва газ ҳолатдаги жисмлар мувозанат ҳолатида бўлганда уларда фақат нормал кучланишлар пайдо бўла олади, бу кучланишлар ажратиб олинган ҳажмни деярли ҳамма вақт (газларда эса ҳамма вақт) сиқади.

Шунинг учун суюқлик ва газлардаги кучланишлар *босим* деб аталади. Бинобарин, босим — ажратиб олинган ҳажм сиртининг бирлик юзига таъсир этадиган ва сиртга нормал равишда йўналган кучдир.

Босимнинг ўлчамлиги кучнинг юзга нисбати бўлиб, СИ системасида босим бирлиги қилиб *паскаль* (Па) олинган:

$$1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2} \cdot$$

СГС системасида босим бирлиги қилиб *бар* олинади: 1 бар = = 1 дин/см². Техникада босим одатда кг-куч/см² ёки кг-куч/м² бирликларда ўлчанади. Булардан биринчиси *техникавий атмосфера* (ат) деб аталади. Бундан ташқари, физикада босим кўпинча симобли манометрдаги симоб устунининг баландлиги билан ўлчанади. Бу усулнинг *физикавий атмосфера* (ёки нормал атмосфера) деб аталган(атм) бирлиги бор:

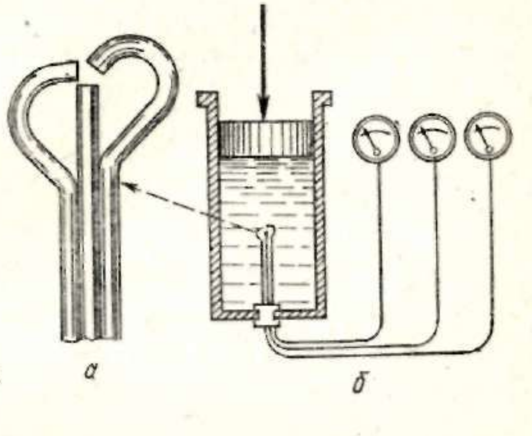
$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм Hg} = 1{,}033 \text{ ат} = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Суюқ ва газ ҳолдаги жисмлар мувозанатда бўлганда босим **Паскаль қонунига** бўйсунади. Паскаль қонунига асосан, *тинч турган суюқликнинг (ёки газнинг) исталган жойидаги босим ҳамма йўналишларда бир хил бўлади, шу билан бирга босим тинч турган суюқлик (ёки газ) эгаллаб ётган бутун ҳажм бўйлаб бир хил узатилади.*

Агар суюқлик (ёки газ) ичида ихтиёрий шакли ҳажм ажратдик, деб фараз қилсак, Паскаль қонунини ўша ҳажмнинг мувозанат шартларидан келтириб чиқариш мумкин.

Бу қонуннинг биринчи қисми деформацияланувчи жисмдаги кучланишларни аниқлашдагига (85-§) мутлақо ўхшаш йўл билан исбот этилади.

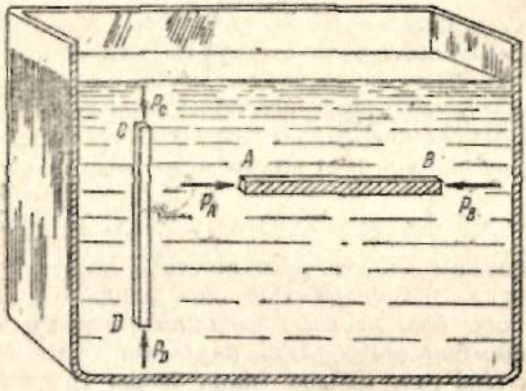
Бу қонуннинг тўғри эканлигини тажрибада исбот қилиш ҳам мумкин. 272-*а* расмда кўрсатилган «насадка» оламиз; у бириктириб қўйилган учта найчадан иборат бўлиб, найчаларнинг очиқ учлари бир нуқтада учрашадиган қилиб қўйилган. Ҳар бир найча босим ўлчайдиган асбобга—манометрга уланган. «Насадкани» босим остида турган суюқликка тушириб (272-*б* расм), поршенга таъсир этувчи куч ҳар қандай бўлганда, насадка ҳар қандай вазиятда турганда учала



272- расм.

манометр бир хил босим кўрсатганини аниқлаймиз. Поршенга таъсир этувчи кучни ўзгартириб, биз поршень яқинидаги босимни маълум миқдорда оширамиз, бу холда суюқлик ичида ҳар каерда ва ҳар қандай вазиятда жойлашган исталган насадка босимнинг ўша миқдорда ортганини кўрсатади.

Ажратиб олинган жуда кичик ҳажм учун оғирлик кучи унинг сиртида таъсир этувчи кучларга нисбатан эътиборга олмайдиган даражада кичик бўлгани туфайли, суюқликнинг тайинли нуқтасидан ўтадиган ва исталган вазиятда жойлашган кичик юзачага тушаётган босим *бир хил* бўлади.



273- расм.

Паскаль қонунининг иккинчи қисми қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади.

Тинч турган суюқлик (ёки газ) нинг айни бир горизонталда ётган ҳамма нуқталарида босим бир хил эканини кўрсатамиз. Бир горизонталда ётган икки (A ва B) нуқтадаги босимни солиштириб кўриш мақсадида (273- расм) суюқликда боши A нуқтада ва охири B нуқтада бўлган призмача шаклида ҳажм ажратиб оламиз. *Призмачанинг мувозанат шартидан унинг бир учидаги босим иккинчи учидаги босимга тенг бўлиши келиб чиқади.* Шундай қилиб, суюқликнинг айни бир горизанталда ётган ихтиёрий икки нуқтасида босим бир хил бўлиши керак эканлиги исбот этилди.

Энди суюқлик (ёки газ) ичида бир вертикалда ётган C ва D нуқталардаги (273- расм) босимлар орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Яна бу икки нуқтани ингичка призмача билан туташтирамиз, унинг асослари бу нуқталардан ўтади, сўнгра призмача ичидаги суюқликнинг мувозанат шартини ёзамиз:

$$S_0 p_C + P = S_0 p_D , \tag{94.1}$$

бу ерда P — призмача ичидаги суюқликнинг оғирлик кучи, S_0 — призмачанинг *кўндаланг кесими юзи*. Бундан

$$p_C + \frac{P}{S_0} = p_D$$

ёки

$$p_D - p_C = p_g = \frac{P}{S_0} \tag{94.2}$$

эканлиги келиб чиқади. $p_g = \frac{P}{S_0}$ — суюқликнинг C ва D нуқталар орасида жойлашган устунининг оғирлигидан ҳосил бўлган босим эканини қайд қиламиз. Агар суюқликнинг (ёки газнинг) оғирлиги эътиборга олинмаса, босим $p_C = p_D$ бўлади.

95-§. Босим билан газ зичлиги орасидаги муносабат

Суюқликнинг зичлиги босимга кам боғлиқ. Масалан, сувга берилаётган босим 1000 атм миқдорида ўзгарганда сув ҳажми атиги 5% ўзгаради. Шунинг учун биз ўтказадиган тажрибаларда босим кўпи билан бир неча ўн атмосфера миқдорида ўзгарса, деярли ҳамиша гидростатикада ҳисоб ишларида ҳажмнинг *ўзгаришини* эътиборга олмай, текширилаётган суюқлик *сиқилмайди* деб ҳисоблаш мумкин.

ρ *зичлик* ўлчамлиги $[m/V]$ бўлган турли хил бирликлар билан ўлчанади. СИ системасида зичлик кг/м^3 билан, бирликларнинг СГС физикавий системасида г/см^3 билан (техникавий системада кг-куч сек^2/м^4 билан) ўлчанади. Кўпинча тажриба ва ҳисоб ишларида зичлик ўрнида *солиштирма оғирлик* тушунчаси билан, яъни ҳажм бирлигидаги модданинг оғирлиги тушунчаси билан иш кўрилади. Солиштирма оғирлик одатда Н/м^3, г-куч/см^3 ёки кг-куч/м^3 билан ўлчанади. Одатдаги шароитларда сувнинг солиштирма оғирлиги СИ системасида 9800 Н/м^3, бирликларнинг физикавий системасида 1 г-куч/см^3, техникавий системада тахминан 1000 кг-куч/м^3 бўлади.

Газларнинг зичлиги ўша газга берилаётган босимга кўп боғлиқ. *Температура ўзгармаганда газларнинг зичлиги (ёки солиштирма оғирлиги) босимга пропорционалдир* (Бойль—Мариотт қонуни).

Газнинг бошланғич босимини $p_б$ билан, бу босимга мос келадиган солиштирма оғирликни $\gamma_б$ билан, γ солиштирма оғирликка мос келадиган бошқа бир босимни p билан белгилаймиз; унда Бойль—Мариотт қонуни

$$\frac{\gamma_б}{\gamma}=\frac{p_б}{p} \tag{95.1}$$

кўринишида ёзилади. Бу қонун ўрта мактаб физика курсидан маълум бўлган содда тажрибалар асосида топилган; бироқ одатда бу тажрибаларда газнинг маълум бир массаси эгаллаган ҳажм ва босим бир-бирига боғланади. Равшанки, газнинг ҳажми ва оғирлиги маълум бўлса, солиштирма оғирликни (ёки зичликни) аниқлаш осон.

Температура ўзгарганда *идеал* газлар деб аталувчи газларнинг босими ва солиштирма оғирлиги қуйидаги тенгламага бўйсунишини ўрта мактаб физика курсидан эсга олайлик:

$$p=\frac{R}{\mu}\gamma T, \tag{95.2}$$

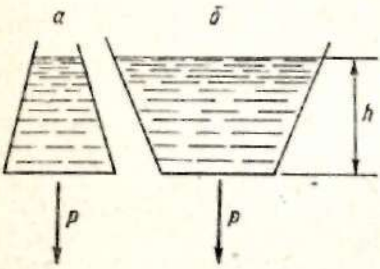
бу ерда T — газларнинг Кельвин шкаласи бўйича аниқланадиган температураси, R — ҳамма газлар учун доимий бўлган миқдор (*газ доимийси*), μ — газнинг молекуляр оғирлиги. T Кельвин шкаласи t Цельсий шкаласи билан $T=t+273$ муносабат орқали боғланган.

Одатдаги температурада кўпчилик газлар учун (95.2) тенглама тахминан тўғри бўлади. Бу тенглама Клапейрон тенгламаси деб аталади.

96-§. Тинч турган суюқликда босим тақсимоти

Биз Паскаль қонунини чиқаришда ва таърифлашда суюқлик (ёки газ) нинг оғирлигини эътиборга олмаган эдик. Энди тинч турган сиқилмайдиган суюқлик ичида босим тақсимотига суюқликнинг оғирлиги қандай таъсир кўрсатишини аниқлаймиз.

Равшанки, горизонтал бўйлаб босим ҳамиша бир хил бўлади, акс ҳолда мувозанат бўлмас эди. Демак, тинч турган суюқликнинг эркин сирти идиш деворларидан узоқда ҳамиша горизонтал бўлади. Бу хулоса бир жинсли бўлмаган суюқлик учун ҳам тўғри эканини қайд қиламиз. Вертикал бўйлаб эса босим ўзгаради, буни (94.2) ифодадан кўриш мумкин; C нуқтадан D нуқтага ўтишда чуқурлик ортган сари босим ортади (273-расмга қ.): асослари C ва D нуқталар яқинида турган вертикал деворли призмача ичидаги суюқликнинг оғирлиги ҳисобига босим ортади.



274- расм.

Агар суюқлик сиқилмайдиган бўлса, тўғрироғи, унинг сиқилиши эътиборга олинмаса, унда γ солиштирма оғирлик босимга боғлиқ бўлмайди У ҳолда суюқлик устунининг оғирлиги

$$P = \gamma S_0 l \qquad (96.1)$$

бўлади, бу ерда S_0— призмачанинг кўндаланг кесим юзи, l — унинг узунлиги. Бинобарин, призмачанинг пастки асосига тушаётган босим p_g миқдорида ортади:

$$p_g = \frac{P}{S_0} = \gamma l, \qquad (96.2)$$

яъни босим баландлик ўзгаришига қараб чизиқли равишда ўзгаради.

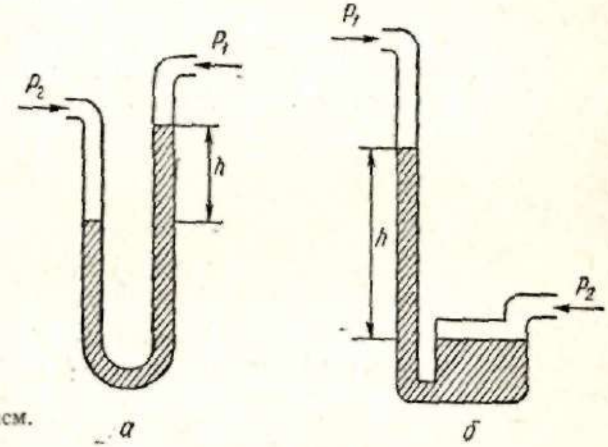
Суюқликда чуқурлик ортиши билан босимнинг ортиши суюқликка ботирилган ва сиртида сузиб юрган жисмларга таъсир этувчи итариб чиқарувчи кучларни аниқлайди (98-§ га қ.).

Идиш тубига бўлган босим кучига оид «гидростатик парадоксни» (274-расм) суюқликдаги босим тақсимоти изоҳлаб беради. Идиш тубига бўлган босим кучи идишдаги суюқлик оғирлигига тенг эмас, босим кучи идиш ичидаги суюқлик оғирлигидан ортиқ бўлиши ҳам (274-*а* расм), кам бўлиши ҳам (274-*б* расм) мумкин, чунки идиш тубига берилаётган босим суюқликнинг сатҳи баландлигига ва солиштирма оғирлигига боғлиқ бўлиб, босим кучи эса босим билан идиш тубининг S юзи кўпайтмасига тенг:

$$P = hS\gamma.$$

Босимлар айирмасини ўлчаш учун кўпинча туташ идишлар (275-*а* расм) шаклидаги манометрлар қўлланилади. Равшанки, туташ идишлардаги суюқлик сатҳлари айирмаси туфайли ҳосил бўлган γh акс босим идишлардаги суюқликлар устидаги босимларнинг $p_2 - p_1$ айирмасини мувозанатлаган ҳолдагина суюқлик мувозанатда бўлади. Мувозанат шартидан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$p_2 - p_1 = \gamma h,$$



275- расм.

бу ерда h — туташ идишдаги суюқлик сатҳлари айирмаси. (Агар идишнинг найлари бир хил бўлса, суюқликнинг сирт таранглик кучларини эътиборга олмаса бўлади.) Одатда бу типдаги манометрлар ишлатилганда босимлар айирмаси манометрга қуйилган суюқлик устунининг баландлиги билан ўлчанади. Масалан, сув, спирт ёки симоб устунининг сантиметрлари ёки миллиметрлари ҳисобидаги босимлар айирмаси тилга олинади.

Амалда саноқ қулай бўлиши учун турли диаметрли (275-*б* расм) туташ идишлардан фойдаланилади, чунки бу ҳолда кенг идишдаги сатҳнинг ўзгаришини эътиборга олмасдан, босимни тор найдаги суюқлик устунининг баландлигига қараб аниқлаш мумкин[1]. Агар идишлар кесими диаметрларининг нисбати 50 га тенг бўлса, хато 0,05% дан ошмаслигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин.

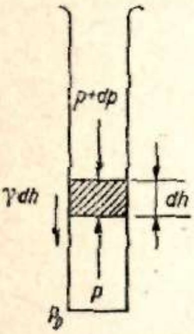
97-§. Газда босим тақсимоти

Тинч турган газда босим пастга томон ортиб боради, чунки бунда юқорида ётган қатламларнинг оғирлиги таъсир қилади. Равшанки, ҳар қандай горизонтал текисликда босим бир хил бўлади. Бироқ босимнинг вертикал бўйлаб ўзгаришини аниқлашда зичликнинг (ёки солиштирма оғирликнинг) босимга қараб ўзгаришини ҳисобга олиш лозим.

---

[1] Албатта, бу ерда сирт таранглигининг таъсирини эътиборга олмаслик мумкин эмас. Агар босимнинг ўзгаришларигина аниқланса, босимлар айирмасининг сирт таранглик туфайли ҳосил бўладиган доимий қўшимча қиймати натижани ўзгартирмайди.

Кесими 1 см^2 ва dh баландлиги жуда кичик бўлган цилиндрнинг (276-расм) мувозанат шартини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:



276- расм.

$$p+dp+\gamma\,dh-p=0$$

ёки

$$dp=-\gamma dh, \qquad (97.1)$$

бу ерда dp — цилиндрнинг юқориги ва пастки асосларидаги босимлар айирмаси. Бинобарин, босимнинг баландли h га ўзгаргандаги ўзгариши қуйидагига тенг:

$$p_h-p_0=\int\limits_0^h dp=-\int\limits_0^h \gamma dh$$

ёки

$$p_0-p_h=\int\limits_0^h \gamma\ dh. \qquad (97.2)$$

Агар газ температураси доимий бўлса, у ҳолда γ солиштирма оғирлик билан p босим (95.1) Бойль—Мариотт қонуни орқали боғланади:

$$p=\gamma\frac{p_0}{\gamma_0}. \qquad (97.3)$$

У ҳолда босимнинг баландликка қараб ўзгаришини қуйидагича ҳисоблаб чиқариш мумкин. (97.1) формулага (97.3) ни қўямиз:

$$dp=-p\frac{\gamma_0}{p_0}dh \quad \text{ёки} \quad \frac{dp}{p}=-\frac{\gamma_0}{p_0}dh.$$

Бу ифодани нолдан h гача оралиқда интеграллаймиз:

$$\int\limits_{p_0}^{p_h}\frac{dp}{p}=-\frac{\gamma_0}{p}\int\limits_0^h dh \quad \text{ёки} \quad \ln\frac{p_h}{p_0}=-\frac{\gamma_0 h}{p_0},$$

Охирги ифодани ўзгартириб,

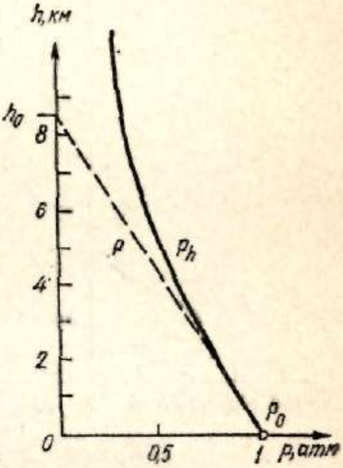
$$p_h=p_0 e^{-\frac{\gamma_0 h}{p_0}} \qquad (97.4)$$

барометрик формулани топамиз. Бу формула баландлик ортиши билан босим кўрсаткичли қонунга мувофиқ камайишини кўрсатади. Тинч турган атмосферадаги ҳаво босимининг ўзгаришини (97.4) қонундан фойдаланиб аниқлаймиз, бунда ҳаво температураси ҳамма баландликларда бир хил деб фараз қиламиз.

Яққол бўлиши учун аввало p босимнинг h баландликка боғланиш графигида (277-расм)

$$p=p_0-\gamma_0 h \qquad (97.5)$$

қонунга мувофиқ пунктир тўғри чизиқ ўтказамиз, бу ерда γ_0 — Ер сиртига яқин жойда денгиз сатҳидаги ($h = 0$) ҳавонинг солиштирма оғирлиги. Равшанки, бу пунктир чизиқ атмосфера солиштирма оғирлиги (γ_0) ўзгармас бўлган «сиқилмайдиган» газдан иборат бўлган фаразий ҳолда босимнинг баландликка қараб ўзгаришини характерлайди.



277-расм.

Бу ҳолда босим нолга тенг бўладигандаги h_0 баландлик «бир жинсли атмосфера» баландлиги деб аталади. (97.5) га асосан, h_0 баландлик

$$h_0 = \frac{p_0}{\gamma_0}. \tag{97.6}$$

Температура 15°C ва денгиз сатхида нормал атмосфера босими $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м^2 бўлган ҳолда ҳавонинг солиштирма оғирлиги $\gamma_0 \approx 12$ Н/м^3 бўлади. Бинобарин, бир жинсли атмосфера баландлиги

$$h_0 \approx 8400 \text{ м} = 8{,}4 \text{ км}.$$

Агар ҳавонинг зичлиги юқорида ҳам Ер юзига яқин жойдагича бўлса, деб фараз қилсак, Ер қалинлиги тахминан 8,4 км бўлган ҳаво қатлами билан қопланган бўлар ва бу қатлам пастда ҳақиқий атмосфера ҳосил қилгандек босим ҳосил қилган бўлар эди. Бир жинсли атмосфера баландлигининг (97.6) ифодасидан фойдаланиб (97.4) формулани

$$p_h = p_0 e^{-h/h_0} \tag{97.7}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Температура ўзгармас бўлган ҳолдаги босимнинг баландликка қараб қаерда қандай бўлишини кўрсатадиган бу қонун 277-расмда яхлит эгри чизиқ билан чизилган.

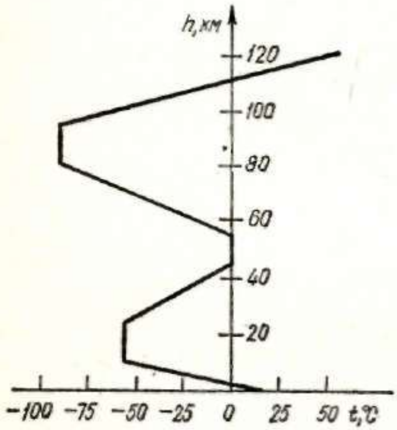
Ер сиртига яқин жойларда босимнинг баландликка қараб ўзгариши тахминан бир жинсли атмосферадагича бўлади; 277-расмда пунктир ва яхлит чизиқлар $h = 0$ га яқин бўлган бирор қисмда устма-уст тушади. Шунинг учун босимнинг унча катта бўлмаган (8,4 км га нисбатан) баландликдаги қийматини тақрибий ҳисоблашда (97.5) формуладан фойдаланиш мумкин.

Газ эгаллаган бутун ҳажмда босим бир хил бўлади, деб фараз қилинган тажрибаларда йўл қўйиладиган хатони бу газ ҳаво бўлган ҳолда (97.5) формулага асосланиб аниқлаш мумкин. Дарҳақиқат, ҳавосининг энг катта баландлиги 10 м дан ошмайдиган ҳажмли лабораториядаги тажрибаларда биз

$$\frac{10}{8400} \approx \frac{1}{8} \%$$

дан кам хато қиламиз.

Ҳақиқатда эса ҳавонинг температураси баландликка қараб ўзгармайди, деб ҳисоблаш тўғри эмас. Қиёсий техникавий ҳисобларда температуранинг тайинли бир баландликдаги бирор ўртача шартли қиймати қабул қилинади, бу ўрта қиймат кўпгина ўлчаш натижаларига асосланиб топилади (278-расм). Тахминан 11 км баландликка қадар температура чизиқли равишда камаяди, ундан юқорида эса тахминан — 55°С га тенг бўлиб ўзгармай туради. Кейинги йилларда реактив снарядлар воситасида ўтказилган ўлчашлар тахминан 25 км дан ≈45км гача баландлик орасида температура кўтарилишини кўрсатди; ≈ 45 км баландликда температура тахминан 0°С га тенг; 55 км дан бошлаб температура яна пасаяди ва 80 — 95 км баландликларда — 90°С га етади. Сўнгра температура яна кўтарилиб, 230 км га яқин баландликда деярли 1000°С га боради.



278- расм.

98- §. Суюқлик сиртида сузиб юрувчи жисмларнинг мувозанати

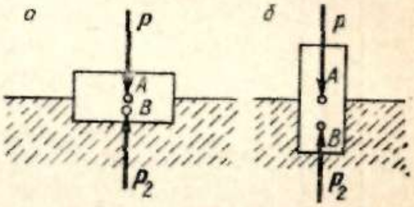
Суюқликка (ёки газга) тўлиқ ёки қисман ботирилган жисмга атрофдаги суюқлик ёки газ томонидан «кўтариш» кучи таъсир қилади. Архимед (эрамиздан олдинги III аср) асосий қонунни топган эди: *суюқликка (ёки газга) ботирилган ҳар қандай жисмга атрофдаги муҳит томонидан куч таъсир этади, бу куч жисм сиқиб чиқарган суюқлик (ёки газ) оғирлигига тенг; бу куч юқорига йўналган бўлиб, сиқиб чиқарилган суюқлик (ёки газ) нинг массалари марказидан ўтади.*

Бундай кучнинг мавжуд бўлиши ва унинг катталиги оғирлиги бор суюқликда босимнинг қаерда қандай бўлиши орқали осонгина изоҳланади. Архимед қонунини исбот этиш учун суюқликда турган жисмни ясовчилари вертикал ва кесимлари кичик бўлган цилиндрчаларга ажратилган деб фараз қилиш ва цилиндрчалардан ҳар бирига таъсир этувчи куч катталигини аниқлаб, жисмни ташкил этган ҳамма цилиндрчаларга қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчисини ҳисоблаб топиш керак.

Суюқликка жисмнинг бир қисмигина ботган бўлганда ҳам ҳисоб аввалгича бўлади-ю, фақат бунда жисмнинг суюқликликка ботган қисмини цилиндрчаларга ажратилган деб тасаввур этиш керак.

Суюқлик юзида сузиб юрувчи жисмнинг оғирлиги бу жисм сиқиб чиқарган суюқлик ҳажмининг оғирлигига тенг. Сузувчи жисмнинг оғирлик маркази сиқиб чиқарилган суюқликнинг оғирлик марказидан пастда бўлган ҳолдан, масалан, тубига питра солинган пробирканинг сувда сузиб юриш ҳолидан бошқа ҳолларда ҳам сузиб юрган жисмнинг мувозанати турғун мувозанат бўлади.

Жисмнинг оғирлик маркази сиқиб чиқарилган суюқликнинг массалар марказидан юқорида бўлган ҳолда ҳам мувозанат турғун мувозанат бўлади; бу ҳол ҳақиқатда кемаларда бўлади. Масалан, тўғри бурчакли параллелепипед шаклида ишланган ёғоч брусок сув юзида сузиб юрибди (279-расм). Ёғочнинг зичлиги сув зичлигининг тахминан ярмига тенг, шунинг учун брусок қандай вазиятда сузиб юрса ҳам брусокнинг массалар маркази (*A* нуқта) ҳамиша сиқиб чиқарилган сувнинг массалар марказидан (*B* нуқтадан) юқорида ётади. Бироқ тажриба шуни кўрсатадики, параллелепипеднинг энг катта ёғи горизонтал бўлган ҳолда (279-*а* расм) брусок турғун сузади, биз уни бошқа вазиятда (279-*б* расм) суздирмоқчи бўлганимиз ҳамоно брусок ағдарилиб, бирмунча тебраниб тургандан сўнг турғун мувозанат вазиятига келади.

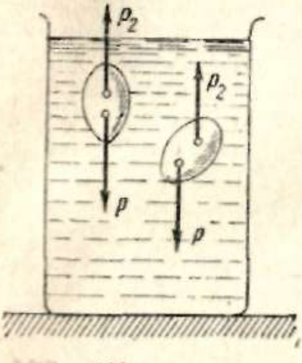


279- расм.

99- §. Суюқлик ёки газга ботирилган жисмнинг мувозанат шартлари

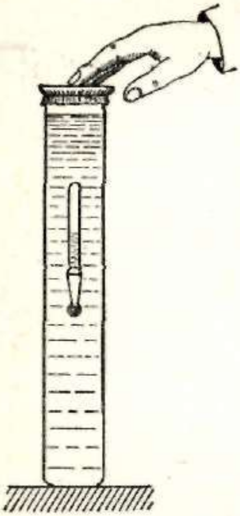
Ҳажми маълум даражада босимга боғлиқ бўлмаган қаттиқ жисм суюқлик юзида сузади ёки тубига чўкади. Агар жисмнинг оғирлиги сиқиб чиқарилган суюқликнинг оғирлигига роса тенг бўлса, жисм суюқликнинг исталган қисмида бефарқ мувозанат ҳолатида бўлади.

Сузиб юрган жисмнинг бундай мувозанатини содда тажрибаларда кўрсатиш осон. Масалан, товуқ тухумини унча чуқур бўлмаган шиша идишдаги сувга солиб ва сувда оз-оздан туз эритиб, тухумни сув ичида исталган чуқурликда сузадиган қилиш мумкин (280-расм), бунда тухумнинг оғирлик маркази билан сиқиб чиқарилган сувнинг оғирлик маркази айни бир вертикал чизиқда бўлиб, тухумнинг оғирлик маркази пастда ётади. Тухум бу вазиятидан оғганида ағдарилиб, оқибатда турғун вазиятга келади.



280- расм.

Одатда босим ортганда жисмнинг ҳажми камаяди, шунинг учун бундай жисмнинг зичлиги ўзгармас бўлган суюқлик ичидаги мувозанати ҳамиша турғунмас мувозанат бўлади. Дарҳақиқат, маълум бир босимда бирор чуқурликда жисмнинг оғирлиги сиқиб чиқарилган суюқлик оғирлигига тенг



281- расм.

бўлсин; жисм яна салгина ботирилса, унга берилаётган босим ортади ва ҳажми камаяди, бинобарин, кўтариш кучи ҳам камаяди, шунинг учун жисм янада чўкади; жисмни мувозанат вазиятидан салгина кўтарганда ҳам шунга ўхшаш манзара юз беради, лекин бунда ҳамма миқдорлар тескари тартибда ўзгаради: босим камаяди, ҳажм ортади, кўтариш кучи кўпаяди, жисм кўтарилади.

Босим ортганда ҳажми камаядиган жисмнинг мувозанати манзарасини «картезиан ғоввоси» деб аталадиган соддагина машҳур асбоб билан ўтказиладиган тажрибаларда кузатиш мумкин. Сувга тўлдириб, оғзига эластик парда тутилган баланд шиша идишда сузгич сузиб юради (281- расм); бу сузгич туби юқорида турадиган қилиб тўнкарилган шиша пробиркадан ва пробирканинг пастки очиқ учига боғланган юкдан иборат. Пробирканинг бир қисмида сув бўлиб, қолган қисмида ҳаво бор.

Эластик пардага қўл билан босилганда суюқлик устидаги ва бинобарин, суюқликнинг ўзидаги босим ортади, пробирка ичидаги ҳаво сиқилади, сузгич сиқиб чиқарадиган суюқлик ҳажми камаяди ва сузгич идишнинг тубига кетади. Пардага берилаётган босимни камайтириб, яна сузгични юқориги вазиятига қайтариш мумкин. Пардага берилаётган босимни ўзгартириш йўли билан сузгични юқорига ва пастга истаганча ҳаракатга келтириш мумкин. Бурунги замонда бу асбоб ибратли ва қизиқарли ўйинчоқ бўлган: шўнғиётган сузгичга одам, шайтон ва шу кабилар шакли берилган.

Газда сузиб юрган жисмнинг мувозанат шартлари суюқликда сузиб юрган жисмники билан бир хил. Агар газда сузиб юрган жисмнинг ҳажми босимга боғлиқ бўлмаса, мувозанат ҳамиша турғун мувозанат бўлади, чунки баландлик камайган сари газнинг солиштирма оғирлиги ортади. Босим ўзгарганда жисмнинг ҳажми ўзгарадиган ҳолда сузиб юрган жисм мувозанатининг турғунлигини аниқлаш анча мураккаб масаладир. Бу ҳолда газ ҳажмининг ўзгаришини ҳам, жисм ҳажмининг ўзгаришини ҳам ҳисобга олиш зарур.

XII БОБ

СУЮҚ ВА ГАЗ ҲОЛАТИДАГИ ЖИСМЛАРНИНГ ОҚИШИ

100-§. Суюқликнинг стационар оқиши

Суюқлик ёки газ ҳаракат қилганда айрим зарралар орасида ички ишқаланиш кучлари, яъни қовушоқлик кучлари пайдо бўлади. Масалан, ҳаво ва сув каби моддаларнинг қовушоқлик коэффициенти қиёсан унча катта эмас, шунинг учун маълум бир шароитларда (буларнинг қандай шароит эканини кейинроқ батафсил аниқлаймиз) суюқлик (ёки газ) оқишини *«идеал» суюқликнинг*, яъни қовушоқлиги бўлмаган суюқликнинг оқиши деб тахминан тасаввур этиш мумкин. Равшанки, бундай суюқлик ва бундай газ йўқ. Бироқ амалда муҳим бўлган кўп ҳолларда суюқлик ва газнинг оқишини тахминан идеал суюқликнинг оқиши деб қараш мумкин.

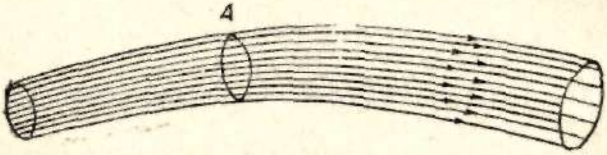
Идеал суюқликнинг оқиш қонунларини билган ҳолда, уларда қовушоқликни ҳисобга олувчи тузатмалар киритиш мумкин. Суюқлик ва газ ҳаракатининг қонуниятларини изчил ўрганишнинг бу йўли қовушоқ суюқлик ҳаракатининг мураккаб қонунларини қиёсан содда усуллар билан аниқлашга имкон беради.

Оқаётган суюқлик (газ) манзарасини зарралар тезликлари векторининг *майдони* ёрдамида тасаввур этиш мумкин. Фазонинг ҳар бир $\boldsymbol{r}$ нуқтасига t пайтда $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ вектор мос келади, бу $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ — $\boldsymbol{r}$ нуқтадан ўтаётган зарранинг тезлиги вектори бўлиб, у $\boldsymbol{r}$ нуқтанинг вазиятига ва t вақтга боғлиқдир.

Агар тезлик, босим, зичлик, температура ва бошқа миқдорларнинг ҳаммаси оқаётган суюқлик эгаллаб турган фазонинг ҳар бир жойида ҳамма вақт *доимий* бўлиб қолаверса, суюқлик (ёки газ)нинг оқиши *стационар оқим* дейилади. Акс ҳолда ҳаракат *беқарор (ностационар)* оқим деб аталади, оқиш қонунлари янада мураккаб бўлади.

Газнинг трубаларда стационар оқиши ёки сувнинг труба, канал ва дарёларда стационар оқиши ҳатто кинематика нуқтаи назаридан ҳам анча мураккаб манзарадир. Умуман айтганда, оқаётган суюқлик эгаллаб турган фазонинг ҳамма нуқталарида зарралар тезлиги катталик ва йўналиш жиҳатидан турличадир. Ҳаракатланаётган зарраларга таъсир этаётган босим зарралар ҳаракатига қонуний равишда боғлиқ бўлса-да, турличадир. Ҳаракатланаётган газда жойдан-жойга газнинг зичлиги ўзгаради, чунки босим ва температура ўзгаради ва ҳоказо.

Агар биз оқаётган суюқликни[1] етарлича ингичка оқим найларига ажратсак, стационар оқим манзарасининг анализи анча соддалашади. Суюқликнинг бирор жойида жуда ингичка имдан ясалган қаттиқ *A* ҳалқа (282- расм) оқимга кўндаланг равишда турибди, деб тасаввур



282- расм.

этайлик; ҳалқага ташқаридан тегиб ўтган ҳамма зарраларнинг траекторияларини чизамиз. Бу траекториялар тўплами най ҳосил қилади. Бу *найни оқим бўйлаб давом эттириш мумкин, бу най девори ҳалқа* ини яқинидан олдинлари ўтган зарралардан ҳосил бўлади; найни оқим бўйлаб юқорига ҳам давом эттирса бўлади, унинг девори ҳалқа ипи яқинидан келажакда ўтадиган зарралардан ҳосил бўлади.

Суюқлик узлуксиздир, бинобарин, найнинг деворини ҳеч нарса *ўтказмайдиган яхлит деб тасаввур этиш ҳам мумкин.* Най деворидаги зарраларнинг тезлиги най сиртига уринма бўлиб йўналади. Оқаётган суюқлик эгаллаб турган бутун фазони бундай оқим найларига ажратиш мумкин. Оқиш манзарасини кузатиш учун *баъзи оқим найларини кўринадиган қилиш мумкин.* Масалан, ҳаво оқимига тутун ёки рангли бошқа газ жараёни юбориш, сув оқимига эса маълум бир жойларда ўёқ солиш мумкин; суюқликнинг жисмни ялаб ўтиш манзараси намойиш қилиб кўрсатиладиган асбобда (283- расм) ана шундай қилинган. Бўёқ (ёки тутун) чиқарилган тешик яқинидан ўтган суюқлик зарралари оқимдаги

283- расм.

---

[1] Бундан буён биз газ билан суюқлик орасидаги фарқ жуда катта бўлгандан бошқа ҳолларда суюқлик оқими деганда ҳеч қандай писандасиз газ оқимини ҳам тушунаверамиз.

оқим найларини қайд қилади, буларни кўриш ёки расмга олиш мумкин.

Равшанки, бу ҳолда оқим найининг девори зарралар траекториясидан ҳосил бўлган. Суюқликнинг бирор най ичидаги зарраси бутун ҳаракат давомида ўша най ичида қолаверади. Най кесимини биз истаганча кичик қилиб олишимиз мумкин бўлганидан, суюқлик зарраларининг тезлиги ҳамиша найнинг кўндаланг кесимида бир хил бўлиб, найнинг нормал кесимига перпендикуляр равишда йўналган дея оламиз.

Суюқликнинг оқим найидаги ҳаракати кесими анча текис ўзгарадиган қаттиқ деворли найдаги ишқаланишсиз оқим билан бир хил бўлади.

Беқарор оқимда ҳам оқим найларини тасаввур этиш мумкин, бироқ улар зарраларнинг траекторияларидан ҳосил бўлган эмас. Дарҳақиқат, зарраларнинг t пайтдаги $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ тезликларининг вектор *майдонини* тасаввур этайлик. Бу майдонда фикран оқим чизиқлари ўтказиш мумкин; бу чизиқларга ўтказилган уринмалар ҳамма жойда $\boldsymbol{v}$ тезлик вектори билан бир хил йўналган бўлади. «Ҳалқадан» ўтувчи бу эгри чизиқлар оқим найи ҳосил қилади. Равшанки, тайинли бир «ҳалқадан» ўтган чизиқлардан ҳосил бўлган оқим найи вақтга боғлиқ бўлади. Ундан ташқари яна шуни маълум қиламизки, оқим найи умуман айтганда зарранинг траекторияси билан бир хил бўлмайди, чунки зарра қўшни $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ нуқтага ўтганда унинг бу нуқтадаги тезлик вектори dt вақт ичида бирор миқдорга ўзгариб қолади ва ҳоказо. Ҳолбуки оқим чизиқларини ясашда эса фазонинг ҳамма нуқталарида тайинли бир пайтдаги тезликларгина эътиборга олинади. Оқим чизиқлари турли зарраларнинг кўчишларидан, траектория эса битта зарранинг ҳаракатидан ҳосил бўлган.

Суюқлик (ёки газ) найда оққанда масса оқимининг доимий бўлиш шарти қандай эканини кўриб чиқамиз. Оқим стационар бўлганда найнинг ҳар қандай кўндаланг кесими орқали вақт бирлиги ичида ўтган суюқлик ёки газ массаси ҳамма кесимлар учун *бир хил* бўлади.

Кесим юзи S бўлган найни тасаввур этайлик. Бу кесимда тезлик v га тенг; бу кесим орқали бир секунд ичида ўтган суюқлик массаси

$$Q=\rho vS \qquad (100.1)$$

бўлади, бу ерда ρ — суюқлик ёки газнинг бу кесимдаги зичлиги. У ҳолда найнинг юзи S_1 бўлган бошқа кесимидан бир секундда ўтган суюқлик миқдори (массаси) ҳам Q га тенг бўлиши керак.

$$Q=\rho_1 v_1 S_1, \qquad (100.2)$$

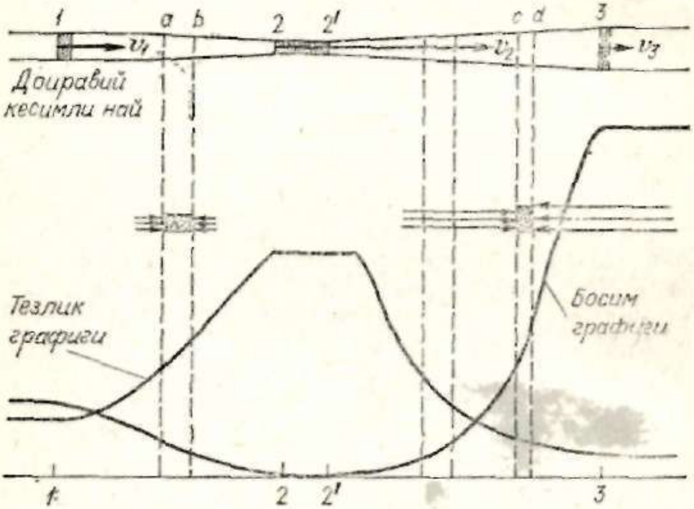
бу ерда v_1 ва ρ_1 — суюқликнинг бу кесимдаги тезлиги ва зичлиги. Акс ҳолда бу икки кесим орасидаги суюқлик миқдори ортган ёки камайган бўлар ва оқим стационар оқим бўлмай қолар эди.

Бинобарин, *масса оқимининг доимийлик қонуни* ихтиёрий оқим *найи бўйлаб*

$$Q = \rho v S = \text{const} \tag{100.3}$$

кўринишда ёзилиши мумкин.

Агар суюқлик сиқилмаса (масалан, одатдаги шароитда сув шундай бўлади), суюқликнинг ρ зичлиги доимий бўлади ва масса оқимининг (100.3) доимийлик қонунига асосан, найнинг ҳар қандай кесимида тезлик кўндаланг кесим юзига тескари пропорционал бўлади. Шундай қилиб, найнинг шакли оқиш тезлигини ҳам белгилайди: оқим найлари ингичка тортган жойларда тезлик ортади ва аксинча, оқим найлари йўғонлашган жойларда тезлик камаяди (284- расм).



284- расм.

Кесими бир текис ўзгарадиган кенг трубада оқишда ҳам манзара худди шундай бўлади; трубанинг диаметрига тахминан тенг бўлган масофада бу трубани цилиндрик труба деб олса кўп хато бўлмайди. Агар бундай трубада газ ёки суюқлик зичлиги ўзгармаса, оқим стационар бўлганда ҳар бир кўндаланг кесимдаги тезлик бу кесим юзига тескари пропорционал бўлади.

Оқим найи бўйлаб тезликнинг ўзгариши билан босимнинг ўзгариши орасидаги муносабатни топамиз. Оқим найининг бирор кесмасини эгаллаб турган суюқлик заррасини кузатиб борайлик (284- расмга қ.) Оқимни шундай тасаввур этиш мумкинки, бу зарра деформацияланган ва найнинг бутун кесимини эгаллаган ҳолда най бўйлаб ҳаракат қилади.

Агар биз зарранинг ҳаракатини кузатсак, оқим найи бўйлаб босим тўғрисида нима дейиш мумкин? Агар оқим найининг кўндаланг кесими мазкур қисмда бир хил бўлса, сиқилмайдиган суюқлик заррасининг *тезлиги ҳам доимий бўлиб қолаверади. Бинобарин, бу* қисмда зарра тезланишга эга бўлмайди. Агар най оқим бўйлаб ингичка тортса (*1—2* қисм), бу ерда суюқлик зарраси тезлашади, тезлиги ортади. Агар най кенгайса (*2′—3* қисм), суюқлик зарраси секинлашади, бу қисмда тезлиги камаяди.

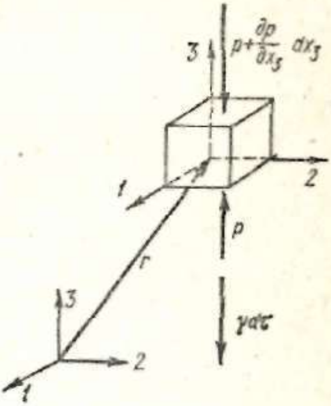
Агар най горизонтал бўлса, заррага тезланишни қандай кучлар беради? Тезланишни қўшни зарраларнинг босим кучигина беради; бинобарин, ингичкалашиб борадиган оқим найида (*1—2* қисм) босим оқим йўналишида камайиши керак, яъни (*ab*) заррага тезланиш бериш ва унинг тезлигини ошириш учун заррага орқадан бўлаётган босим олдидан бўлаётган босимдан ортиқ бўлиши керак. Кенгая борувчи найда (*2′—3* қисм) зарранинг тезлиги оқим бўйича камаяди, босим ортади, (*cd*) зарра манфий тезланишга эга, шунинг учун ҳар бир заррага олдидан бўлаётган босим орқадан бўлаётган босимдан ортиқ бўлиши керак. Шундай қилиб, сиқилмайдиган суюқликнинг оқим найи кесими ўзгаришини билган ҳолда най бўйлаб босимнинг қандай ўзгаришини сифат томонидан аниқлаш мумкин. Босимнинг най бўйлаб қаерда қандай бўлиши (тақсимоти) 284- расмда кўрсатилган[1].

101- §. Динамиканинг идеал суюқлик заррасига оид асосий қонуни

Оқаётган суюқлик (газ) нинг ҳар бир заррасига атрофдаги зарралар таъсир кўрсатади, бу таъсир *p* босим билан аниқланади. Биз босимнинг ўзгариши ҳаракатланаётган зарранинг тезланишини аниқлашини кўриб ўтдик. Бу тасаввурларга асосланиб динамиканинг суюқлик заррасига оид асосий қонунини келтириб чиқарамиз.

Ҳажми $d\tau = dx_1dx_2dx_3$ бўлган кубча шаклидаги заррани тасаввур этайлик, бу зарра $\boldsymbol{r}(x_1,\ x_2,\ x_3)$ нуқтада турган бўлсин (285- расм) Кубчанинг ҳар бир ёғига босим кучи таъсир қилади. Масалан, dx_1dx_2 ёққа пастдан pdx_1dx_3 куч, қарама-қарши ёғига эса

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2$$



285- расм.

---

[1] Босимнинг қаерда қандай бўлиши Бернулли қонуни билан аниқланади, бу қонун галдаги параграфларда келтириб чиқарилади.

куч таъсир қилади. Шунинг учун *3* ўқ бўйлаб кубчага

$$p\,dx_1dx_2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}d\tau$$

куч таъсир қилади. Бундан ташқари, заррага

$$-\gamma\,d\tau$$

бўлган тортишиш (оғирлик) кучи таъсир қилади, бироқ бу куч *3* ўққа тескари йўналган (бу ерда γ — суюқликнинг солиштирма оғирлиги). Унда динамиканинг иккинчи қонунига асосан,

$$\rho\,d\tau\frac{dv_3}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_3}d\tau - \gamma\,d\tau,$$

ёки

$$\rho\frac{dv_3}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - \gamma, \qquad (101.1)$$

бу ерда v_3 — тезликнинг *3* ўқдаги компонентаси.

$d\tau$ ҳажми етарлича кичик бўлгани учун ρ зичлик бутун ҳажмда бир хил деб ҳисоблаймиз. Шунингдек кубчанинг ёқларидаги p босим ҳамма нуқталарда бир хил ва $\boldsymbol{v}^1$ тезликлар бир хил.

Қолган икки ўқ бўйлаб

$$\rho\frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \rho\frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} \qquad (101.2)$$

эканини худди шу йўл билан топамиз, чунки оғирлик кучи *3* ўқ бўйлаб йўналган.

Энди (101.1) ва (101.2) учта формулани вектор шаклида ёзамиз. Агар $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — координата ўқларидаги бирлик векторлар бўлса, у ҳолда

$$\rho\frac{d}{dt}(v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3\right) - \gamma\boldsymbol{e}_3,$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho\boldsymbol{g}, \qquad (101.3)$$

бу ерда $\frac{\partial p}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3$ вектор $\operatorname{grad} p$ символ билан белгиланган бўлиб, у p босимнинг *градиенти*[1] деб аталади, $-\gamma\boldsymbol{e}_3$ вектор $\rho\boldsymbol{g}$ билан белгиланади, $\boldsymbol{g}$ — оғирлик кучи берадиган тезланиш вектори.

(101.3) формула гидродинамиканинг идеал (ишқаланишсиз) суюқлик ёки газга оид асосий қонунини ифодалайди. Стационар бўлмаган оқимда ρ, $\boldsymbol{v}$, p миқдорларнинг ҳаммаси $\boldsymbol{r}$ ўрин ва t вақтга боғлиқ бўлади. Стационар оқимда эса фақат $\boldsymbol{r}$ ўринга боғлиқ бў-

---

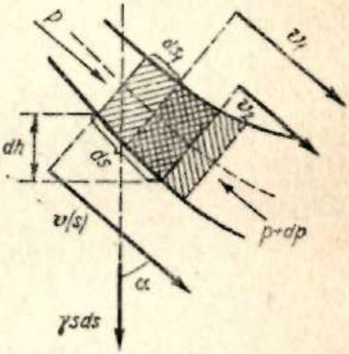
[1] Баъзан градиент $\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3} = \nabla$ символик вектор билан белгиланади, у ҳолда $\operatorname{grad} p = \nabla p$.

лади, шунинг учун стационар оқимни кўриб чиқишда оқим найлари тўғрисидаги тасаввурдан фойдаланиш қулай: бу ҳолда оқим найлари доимий бўлиб, етарлича ингичка оким найидаги идеал суюқликка оид динамика конунини қуйидагича тавсифлаш мумкин $v = v(s)$ тезлик *фақат* s координатанинг (найнинг ўқ чизиғи бўйлаб олинган координатанинг) функциясидир. t пайтда координатаси s бўлган зарра dt вақт ичида ds_1 кесмага силжийди (286- расм). Зарранинг янги жойдаги тезлиги қандайдир v_1 бўлади, бу тезликни ҳамиша қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$v_1 = v(s) + \frac{dv}{ds} ds_1.$$

Бинобарин, зарранинг t пайтдаги ва $t + dt$ пайтдаги тезликлари айирмаси унинг тезлиги орттирмасини ифодалайди:

$$dv = v_1 - v(s) = \frac{dv}{ds} ds_1.$$



286- расм.

Бу ифодада зарранинг ds_1 силжишини $v(s)\,dt$ билан алмаштириб, зарранинг тезланишини топамиз:

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{a}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right). \tag{101.4}$$

Стационар оқимда зарранинг тезланиши оқим тезлиги квадратининг ярмидан оқим найининг ўқи бўйлаб олинган ҳосилага тенг. Шунинг учун *бу ҳолда динамиканинг* идеал суюқлик заррасига *оид* асосий (101.3) тенгламасини бундай ёзиш мумкин:

$$-\frac{dp}{ds} + \gamma\cos\alpha = \rho v\frac{dv}{ds} = \rho\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right). \tag{101.5}$$

Бу ерда α — вертикал билан оқим найининг тайинли бир кесимдаги ўқ чизиғи йўналиши орасидаги бурчак. Бу тенглама қовушоқлиги бўлмаган сиқилмайдиган суюқликнинг стационар оқими учун ҳам, ички ишқаланиши бўлмаган сиқиладиган газнинг стационар оқими учун ҳам тўғри келади.

Энди бизга $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ майдон маълум бўлганда стационар бўлмаган оқимнинг умумий ҳолида зарранинг $\frac{dv}{dt}$ тезланишини аниқлаш масаласи устида тўхталамиз. Стационар оқимда оқим найи бўйлаб ҳаракатланаётган зарранинг тезланиши $v\frac{dv}{ds}$ га тенг эканини, яъни тезликнинг най бўйлаб ўзгариши билан аниқланишини кўрдик. Бироқ оқим найлари тушунчасидан фойдаланмасдан ҳам бу натижага келиш мумкин.

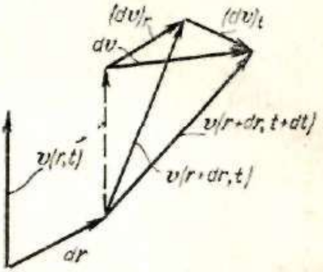
t пайтда $\boldsymbol{r}$ нуқтадан ўтаётган зарранинг тезлиги $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ бўлади, dt вақт ўтгач зарра $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$ нуқтада бўлиб, унинг тезлиги $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r},\ t + dt)$ бўлади. Унда бу зарра тезлигининг орттирмаси

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r},\ t + dt) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t) \qquad (101.6)$$

бўлиб, тезланиши $\frac{dv}{dt}$ бўлади. dv орттирмани икки қисмга ажратамиз: биринчиси $(d\boldsymbol{v})_t$ бўлиб, у тезликнинг фақат вақт ўзгаришидаги орттирмасини, иккинчиси $(d\boldsymbol{v})_r$ бўлиб, у эса тезликнинг зарра ўрни ўзгаришидаги орттирмасини билдиради (287-расмда $v(r + dr,\ t)$ тезлик ҳам чизиб кўрсатилган, буниси t пайтда $r + dr$нуқтада бўлган бошқа зарранинг тезлигидир). Шунинг учун

$$d\boldsymbol{v} = (d\boldsymbol{v})_t + (d\boldsymbol{v})_r, \qquad (101.7)$$

бу ерда



287- расм.

$$(d\boldsymbol{v})_t = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}, t + dt) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r},\ t)\ (d\boldsymbol{v})_r = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r},\ t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t). \quad (101.8)$$

Стационар оқимда тезланиш фақат $(d\boldsymbol{v})_r$ билан аниқланади, чунки фазонинг ҳар бир нуқтасида тезлик вақтга боғлиқ бўлмагани учун $(d\boldsymbol{v})_t = 0$. Ностационар оқимда, умуман айтганда, $d\boldsymbol{v}$ нинг иккала ҳади (иккала қисми) нолдан фарқ қилади. Биринчи $(d\boldsymbol{v})_t$ ҳад $\boldsymbol{v}$ дан $\boldsymbol{r} = \mathrm{const}$ бўлган ҳолда олинган хусусий ҳосилага тенг:

$$(d\boldsymbol{v})_t = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, dt.$$

Иккинчи ҳад (яъни $(d\boldsymbol{v})_r$ дифференциал) мураккаброқ бўлиб, у t=const бўлган ҳолда dr «йўналиш бўйича олинган ҳосилага» боғлиқдир; бу ҳосила баъзан $\frac{dv}{dr}$ кўринишда ёзилади. $(d\boldsymbol{v})_r$ ни зарранинг ўрни стационар оқимда dr га ўзгарганда $\boldsymbol{v}$ вектор олган орттирма сифатида ҳисоблаш керак. Ўзгармас вектор майдонида dr га силжишда бундай орттирмани биз эластик жисмнинг кичик деформацияларини таҳлил килишда (86- §) кўриб чиққан эдик. Тезликнинг ҳар бир $v_1,\ v_2,\ v_3$ компонентаси учта: $x_1,\ x_2,\ x_3$ ўзгарувчининг функцияси бўлади. $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$ ва $\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ эканини эслатиб ўтамиз, бу ерда $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — тўғри бурчакли координаталар системасининг ортлари (бирлик векторлари). Унда тезлик компонентларининг орттирмаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\,dx_3,\ dv_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_2}{dx_2}dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}dx_3, \quad (101.9)$$

$$dv_3 = \frac{\partial v_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_3}{dx_2}dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}dx_3.$$

ва $(d\boldsymbol{v})_r = dv_1\boldsymbol{e}_1 + dv_2\boldsymbol{e}_2 + d\,v_3\boldsymbol{e}_3$. (101.9) системани кўздан кечириб, уни U тензор билан $d\boldsymbol{r} = dx_1\boldsymbol{e}_1 + dx_2\boldsymbol{e}_2 + dx_3\boldsymbol{e}_3$ векторнинг кўпайтмаси тарзида

$$(d\boldsymbol{v})_r = \mathrm{U}d\boldsymbol{r} \qquad (101.10)$$

кўринишда ёзиш мумкин эканлигини кўрамиз, бу ерда

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{101.11}$$

Бу ҳолда гап dt вақт ичида $\boldsymbol{r}$ нуқтадан $d\boldsymbol{r}$ қадар силжиган тайинли бир зарра тезлигининг орттирмаси ҳақида боргани учун, $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$ бўлади. Буни (101.10) га қўямиз:

$$(d\boldsymbol{v})_r = U\boldsymbol{v}dt \tag{101.12}$$

ёки (101.7) ва (101.12) формулаларни ҳисобга олиб, зарранинг $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ тезланишини қуйидагича ифодалаймиз:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{(d\boldsymbol{v})_t}{dt} + \frac{(d\boldsymbol{v})_r}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + U\boldsymbol{v}. \tag{101.13}$$

Бу эса зарра тезланишининг умумий ифодасидир. Биринчи қисми тезликдан t бўйича олинган хусусий ҳосила, иккинчиси (101.11) тензор билан $\boldsymbol{v}$ нинг кўпайтмасидир.

Стационар оқимда $\partial \boldsymbol{v}/\partial t = 0$ бўлади, шунинг учун

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = U\boldsymbol{v}. \tag{101.14}$$

Агар оқимнинг тезлиги, зичлиги ва босими фақат битта координатага боғлиқ бўлиб, тезлик мана шу координата бўйлаб йўналса, масалан, $v_1 \neq 0, v_2 = v_3 = 0$ бўлиб, x_2 ва x_3 бўйича олинган барча ҳосилалар нолга тенг бўлса, у ҳолда $\frac{dv_1}{dt} = v_1 \frac{\partial v_1}{dx_1}$ бўлади; бундай бўлишини биз (101.4) да $x_1 = s$ ва $v_1 = v$ бўлган ҳолда кўрган эдик. p босим ҳам фақат x_1 координатанинг функциясидир, шунинг учун оғирлик кучи эътиборга олинмаса, гидродинамиканинг (101.3) тенгламаси бу ҳолда

$$\rho v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$$

кўринишга келади, бундай тенгламани биз олдин ҳам чиқарган эдик [(101.5) га қ.]

102- §. Сиқилмайдиган суюқликнинг стационар оқимига оид Бернулли тенгламаси

Зарранинг оқим найи бўйлаб қиладиган ҳаракати динамикасининг асосий тенгламасидан сиқилмайдиган идеал суюқликнинг стационар оқими учун соддароқ ва муҳимроқ бўлган тенглама ҳосил қилиш осон. Бу ҳолда суюқликнинг зичлиги ва солиштирма оғирлиги доимий бўлади ва шунинг учун (101.5) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$-\frac{dp}{ds} + \gamma \cos \alpha = \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right). \tag{102.1}$$

Координатаси s бўлган зарра турган жойнинг баландлигини h билан белгилаймиз; у ҳолда зарранинг ds кўчиши билан баландликнинг dh ўзгариши ўртасидаги муносабат қуйидагича бўлади (286- расмга қ.)

$$-dh = ds\cos\alpha; \tag{102.2}$$

шунинг учун (102.1) да $\cos\alpha$ ни $-\frac{dh}{ds}$ га алмаштириб,

$$-\frac{dp}{ds}-\gamma\frac{dh}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) \tag{102.3}$$

тенгламага эга бўламиз; бу ердаги ҳамма ҳадлар s координата бўйича олинган ҳосилалардир, бинобарин,

$$\frac{d}{ds}\left(p+\gamma h+\frac{\rho v^2}{2}\right)=0. \tag{102.4}$$

Ҳосиланинг нолга тенг бўлиши учала миқдорнинг йиғиндиси оқим найи бўйлаб ўзгармаслигини билдиради, яъни

$$Э = p+\gamma h+\frac{\rho v^2}{2} = \mathrm{const}. \tag{102.5}$$

Бу эса сиқилмайдиган суюқликнинг стационар оқимига оид машҳур Бернулли тенгламасидир. Бу тенглама барча гидродинамик тадқиқотларда асосий роль ўйнайди. Бернулли тенгламасидаги p босим — суюқлик заррасини сиқувчи «статик» босим; γh — босимнинг баландлик h миқдорида ўзгаргандаги ўзгариши; $\frac{\rho v^2}{2}$ — «динамик босим» дейилади (106- § га қ.)

Кўплаб мураккаб масалалар (102.5) Бернулли тенгламаси билан осонгина ҳал қилинади. Дарҳақиқат, агар биз оқаётган суюқлик майдонини оқим найларига бўла олсак ва h_0 баландлиги бизга маълум бўлган бирор нуқтада p_0 босим ва v_0 тезликнинг қийматларини бирор мулоҳазалар асосида аниқлай олсак, у ҳолда най бўйлаб тезлик, босим ва баландлик ҳар қандай ўзгарган тақдирда ҳам (102.5) формула билан ҳисоблаб топилган миқдор ўзгармайди. Бу шарт оқимнинг бошқа жойларидаги номаълум миқдорларни аниқлашга ёрдам беради. Бунинг қандай қилинишини турли хил мисол ва масалаларни таҳлил этишда кўрамиз.

Бернулли тенгламаси оқим найи бўйлаб ҳаракатланаётган суюқлик заррасига оид энергиянинг сақланиш қонунидан келиб чиқадиган натижадир. Бу тенглама босим кучларининг иши зарранинг кинетик ва потенциал энергиялари йиғиндисининг ортишига тенг бўлишидан келиб чиқади, чунки босим кучлари текширилаётган заррага нисбатан ташқи куч ҳисобланади.

t пайтда найнинг ds узунликдаги қисмини эгаллаб турган суюқлик заррасининг dt вақт ичида кўчишида энергияси ўзгаришини ва босим кучларининг бажарган ишини кўриб чиқамиз (286- расмга қ.). Шу вақт ичида зарранинг кетинги (оқим бўйлаб олинган) фронти ds_1 кесмага кўчсин; бу кесма, умуман айтганда, зарранинг ds узунлигига тенг эмас (расмда ds_1 кесма қисқароқ қилиб кўрсатилган). У ҳолда зарранинг кўчишида юз берган ўзгаришлар оқибатида ҳажми $dQ = Sds_1$ бўлган ва қия штрихланган юқориги қисм ҳажми ўшандай (dQ) бўлган ва қия штрихланган пастки қисм ўрнига тушади; гарчи катак шаклида штрихланган ўртадаги қисм dt вақтдан кейин бошқа моддий зарралардан иборат бўлса-да, бу қисм dt вақт ичида ўз ҳолатини ўзгартирмайди. Шунинг учун (102.2) тенгликни ҳисобга олганда зарранинг потенциал энергияси орттирмаси (камайиши)

$$-\gamma\, dQ \cos\alpha\, ds = \gamma\, dQdh \tag{102.6}$$

кўринишда ёзилади.

Кинетик энергиянинг орттирмаси қуйидагига тенг:

$$\left(\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}\right) dQ = \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) dQ\, ds, \tag{102.7}$$

бу ерда v_2 — узунлиги ds бўлган зарранинг олдинги фронтдаги тезлиги. Босим кучларининг кетинги фронт кўчишидаги иши $pSds_1 = pdQ$ га, олдинги фронт кўчишидаги иши $-(p+dp)\, dQ$ га тенг; барча босим кучларининг иши қуйидагига тенг:

$$[p - (p + dp)]\, dQ = -\, dp\, dQ. \tag{102.8}$$

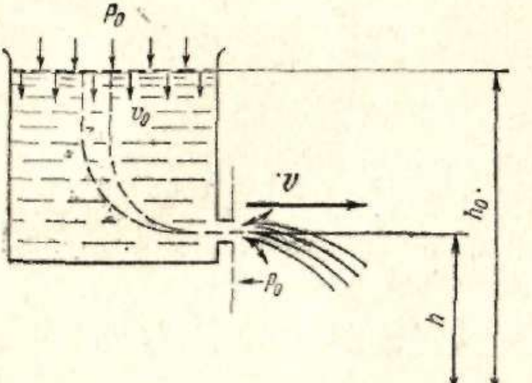
Босим кучларининг ишини зарранинг кинетик ва потенциал энергиялари ўзгаришига тенглаштириб,

$$\gamma\, dQ\, dh + \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) dQ\, ds = -\, dp\, dQ \tag{102.9}$$

тенгламага эга бўламиз. Буни $dQds$ га қисқартириб, (102.4) ни ҳосил қиламиз; уни оқим чизиғи бўйлаб интеграллаб, (102.5) Бернулли тенгламасига келамиз.

103- §. Суюқликнинг идишдан оқиб чиқиши

Идишдан оқиб чиқаётган оғирлиги бор суюқликнинг тезлигини (102.5) Бернулли тенгламаси ёрдамида аниқлаш осон. Суюқлик ён томонида тешиги бўлган идишдан оқиб чиқаётган бўлсин (288- расм). Тешикка жараённи йўналтириб турадиган «учлик» ўрнатилган. Тешикдан суюқлик оқа бошлаганда идишдаги бутун суюқлик ҳаракатга



288- расм.

келади ва бунда уни оқим найларига бўлиш мумкин бўлади. Идиш шакли жуда содда бўлган ҳолда ҳам суюқликни оқим найларига аниқ ажратиш анча мураккаб масаладир. Бироқ биз учун идишда оқаётган суюқликнинг бутун ҳажмида оқим найлари қандай боришини билишга зарурат йўқ, ҳамма оқим найлари суюқликнинг эркин сиртида бошланишини ва албатта учликдаги тешикдан ўтишини билсак, бизга ўшанинг ўзи етарлидир.

Суюқликнинг эркин сиртида барча оқим найлари бир хил v_0 тезликка, бир хил p_0 босим ва бир хил h_0 баландликка эга бўлади, чунки идишдан оқиб чиқаётганда суюқлик сирти (агар у тешик сатҳидан анча баланд бўлса) горизонтал бўлганича пасайиб боради. Бинобарин, (102.5) Бернулли тенгламасидаги доимий миқдор ҳамма оқим найлари учун бир хил бўлган қуйидаги қийматга эга бўлади:

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + h_0\gamma + p_0 = Э_0 = \text{const}. \qquad (103.1)$$

Идеал суюқликнинг ҳамма зарралари бир хил ҳолатдан бошлаб оққанда ҳамиша шундай бўлишини таъкидлаб ўтамиз, унда Бернулли тенгламасидаги доимий миқдор, олдин кўрганимиздагидек, маълум бир оқим найи учунгина эмас, балки оқаётган суюқликнинг бир хил шароитда оқиб чиқаётган зарралари эгаллаган бутун фазо учун ҳам бир хил қийматга эга бўлади. Бу ҳол оқишни анализ қилишни янада соддалаштиради.

Тешикнинг диаметри идишдаги суюқлик устунига қараганда жуда кичик бўлгани сабабли жараённинг бутун кўндаланг кесимида босимни бир хил ва атрофдаги p_0 босимга тенг деб ҳисоблаймиз. Жараёндаги оқиш тезлигини ҳам ҳамма оқим найлари учун бир хил ва v га тенг деб ҳисоблаш мумкин. Бинобарин, (102.5) Бернулли тенгламасига асосан,

$$Э_0 = \frac{\rho v^2}{2} + \gamma h + p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} + \gamma h_0 + p_0 \qquad (103.2)$$

ёки

$$\frac{\rho}{2}(v^2 - v_0^2) = \gamma(h_0 - h), \qquad (103.3)$$

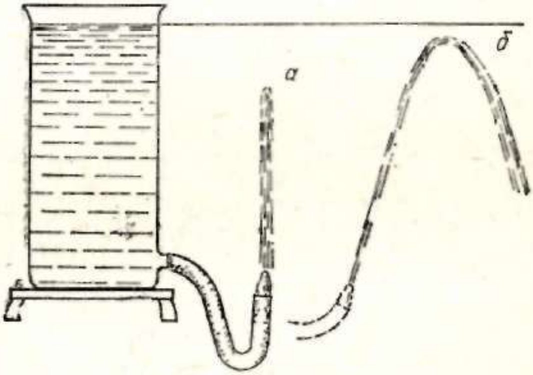
бу ерда h — тешикнинг баландлиги, h_0 — идишдаги эркин сирт баландлиги.

Агар тешикнинг юзи идишнинг кўндаланг кесими юзига нисбатан жуда арзимаган даражада кичик бўлса, у ҳолда v_0 тезлик v тезликка нисбатан жуда кичик бўлади, шунинг учун (103. 3) формулада v_0^2 қатнашган ҳадни эътиборга олмаса бўлади. Шунинг учун оқиб чиқаётган суюқлик тезлиги

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho}(h_0 - h)} = \sqrt{2g(h_0 - h)} \qquad (103.\ 4)$$

бўлади, чунки $\frac{\nu}{\rho}$ нисбат оғирлик кучининг g тезланишига тенг.

Бу формула *Торричелли формуласи* деб аталади. Оғирлиги бор суюқликнинг идишдаги тешикдан оқиб чиқиш тезлиги жисмнинг тешик баландлиги билан эркин сирт баландлиги айирмасига тенг бўлган ($h_0 - h$) баландликдан тушганда оладиган тезликка тенг. Тезликнинг қиймати оқиб чиқаётган жараённинг горизонт билан ҳосил қилган бурчагига мутлақо боғлиқ эмас эканлигини таъкидлаб ўтамиз. Жараён ҳар қандай бурчак ҳосил қилиб оқиб чиққанда ҳам тезликнинг қиймати бир хил бўлади. Шунинг учун жараён юқорига тик йўналтирилса, суюқлик зарралари, ҳар қандай жисм каби, суюқликнинг эркин сирти сатҳи баландлигига кўтарилиши керак[1]. Бироқ суюқликдаги ишқаланиш туфайли, асосан суюқликнинг пастга тушаётган зарраларига ишқаланиш ва ҳаводаги ишқаланиш туфайли, жараён идишдаги суюқлик сатҳига кўтарила олмайди (289-*а* расм). Бироқ жараён вертикал билан кичикроқ бурчак ҳосил қилиб йўналтирилса (289-*б* расм), у ҳолда жараён идишдаги суюқлик сатҳига якин кўтарилади.



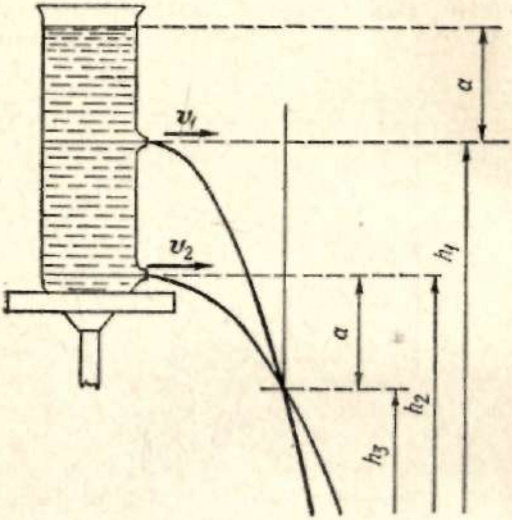
289- расм.

Торричелли формуласининг тўғрилигини турли хил усуллар билан текшириб кўриш мумкин. Масалан, турли баландликлардаги тешиклардан горизонтал йўналишда оқиб чиқаётган икки жараённинг кесишиш нуқтасини кузатиш мумкин (290-расм). Агар қовушоқлик эътиборга олинмаса, жараёнлар пастки тешикдан бирор масофада жойлашган бирор горизонтал чизиқда кесишишини ҳисоблаб кўрсатиш осон; бу масофа идишдаги суюқлик сатҳи билан юқориги

---

[1] Агар жараён оқиб чиқаётган «учликни» идиш билан туташтириб турган резинка трубканинг диаметри жараён диаметрига нисбатан катта бўлса, ишқаланиш (қовушоқлик) кучлари сувнинг бу резина трубкада оқишига катта таъсир кўрсатмайди.

тешик орасидаги масофага тенг. Буни тажриба тасдиқлайди. Идишга анча миқдорда сув қуйиб, сув сатҳини ўзгартириб турганда жараёнлар кесишадиган нуқтанинг вазияти ўзгариши айниқса кўргазмалидир.



290- расм.

Ҳисоблаш жуда осон. Агар оқиб чиқаётган суюқлик тезлиги Торричелли қонуни билан аниқланса, у ҳолда

$$v_1 = \sqrt{2\,g\,a}, \quad v_2 = \sqrt{2g\,(a + h_1 - h_2)}$$

(белгилар маъносини 290- расмдан билиб олиш мумкин). Зарранинг жараёнлар кесишган нуқтагача тушишига кетадиган вақт ҳар бир жараёнда

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\,(h_1 - h_3)}{g}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2\,(h_2 - h_3)}{g}}$$

формулалар билан аниқланади. Кесишиш нуқтасида иккала жараён идишдан бир хил масофага узоқлашган бўлади. Зарралар пастга тушаётганда тезликнинг горизонтал компонентаси ўзгармайди, бинобарин, $v_1 t_1 = v_2 t_2$; шунинг учун

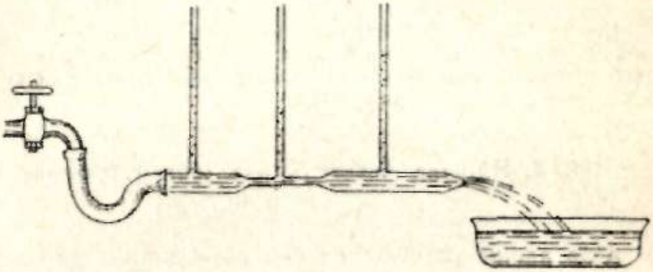
$$a\,(h_1 - h_3) = (a + h_1 - h_2)\,(h_2 - h_3)$$

ёки

$$h_2 - h_3 = a.$$

104-§. Кесими ўзгарадиган трубада оқаётган суюқликнинг босими

291-расмда деворида кичикроқ тешиклар бўлган ўзгарувчан кесимли шиша най кўрсатилган. Найнинг ўзи горизонтал вазиятда ётибди, тешикларга вертикал ўрнатилган шиша найчалар кавшарланган; бу найчалар маълум баландликка қадар сувга тўлиб, найнинг ўша кесимидаги босимни ўлчайдиган манометрлар вазифасини ўтайди. Вертикал манометрик найчадаги суюқлик устунининг баландлиги оқаётган суюқлик зарраларининг босимига пропорционал. Вертикал найчадаги ва бинобарин, тешикнинг ўзидаги суюқлик тинч туради, оқаётган суюқликнинг тешик яқинидан ўтаётган зарралари бирор тарзда сиқилган бўлиб, p босим остида бўлади, босим ҳамма томонга бир хил узатилгани сабабли тешикдаги суюқлик тинч туриши учун вертикал найчадаги суюқлик устуни ҳосил қилган босим оқаётган суюқликнинг p босимига тенг бўлиши керак.



291- расм.

Биз горизонтал ётган най етарлича ингичка деб фараз қиламиз, шунинг учун оқаётган суюқлик жараёнининг ҳар бир кўндаланг кесимида босим бир хил деб ҳисоблаш мумкин. Найнинг кўндаланг кесими шу қадар бир текис ўзгарадики, бутун горизонтал найни битта оқим найи деб ҳисобласа бўлади.

Найдан сув юбориб ва сув тезлигини ростлаб, манометрик найчаларда сув сатҳининг баландлигини кузатамиз, яъни най бўйлаб p босим ўзгаришини кузатамиз. Тажрибанинг кўрсатишича, найнинг энг тор жойидаги босим *энг кичик* бўлади ва сувнинг оқиш тезлиги қанча катта бўлса, Бернулли тенгламасига мувофиқ равишда бу босим шунча кичик бўлади.

Агар манометрик найчалар турган икки жойдаги кўндаланг кесимлар юзи бизга маълум бўлса, у ҳолда босимлар айирмасига қараб найдан ҳар секундда ўтадиган сув миқдорини, яъни сув «сарфини» аниқлаш мумкин.

Дарҳақиқат, кўндаланг кесимлар S_1 ва S_2 бўлсин, улардаги тезликлар мос равишда v_1 ва v_2, босимлар p_1 ва p_2 бўлсин.

У ҳолда (102.5) Бернулли тенгламасига асосан,

$$p_1 = \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \tag{104.1}$$

ҳар қандай кесим орқали сув сарфи доимий бўлиши шартидан эса,

$$Q = \gamma v_1 S_1 = \gamma v_2 S_2, \tag{104.2}$$

бу ерда одатдагича $\gamma = \rho g$ — солиштирма оғирлик.

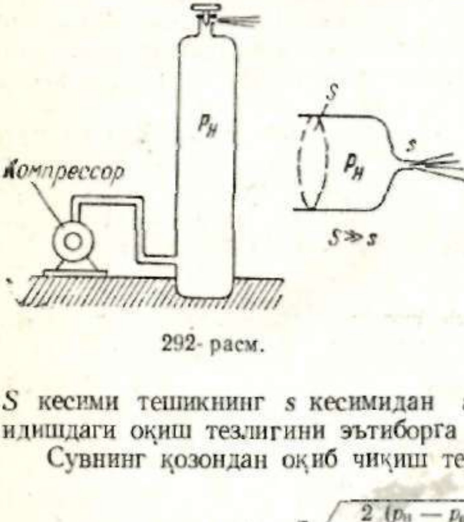
Номаълум v_1 ва v_2 тезликлар қатнашган (104.1) ва (104.2) икки тенгламани ечиб, тезликларни топамиз. Сўнгра сув сарфи қуйидагига тенг эканини аниқлаймиз:

$$Q = g\sqrt{\frac{2\,(p_2 - p_1)\,\rho}{\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}}}\,. \tag{104.3}$$

Сув сарфи билан босимлар орасидаги муносабатни ифодаловчи (104.3) формула сув ўлчайдиган асбоб («водомер») тузилишига асос қилиб олинган; бу *асбоб трубанинг кесимидан вақт бирлиги ичида ўтадиган суюқлик миқдорини* босимлар фарқига қараб аниқлайди.

105- §. Идишда босим остида турган суюқлик ёки газнинг оқиб кетиши

Агар идишдаги суюқлик ёки газ ўзининг оғирлигидан ҳосил бўладиган босимдан ортиқ бўлган босим остида турса, босимнинг суюқлик устуни бўйлаб ўзгаришларини эътиборга олмасдан, бу суюқликнинг оқиши ёпиқ идишда $p_н$ босим остида турган суюқликнинг оқиш конунларига бўйсунади, деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун қозонда буғнинг бир неча ўн атмосфера келадиган доимий босими остида турган сувнинг қозондан оқиб чиқиш тезлигини ёки ичидаги босим компрессор ёрдамида доимий қилиб туриладиган баллондан (292- расм) газнинг оқиб чиқиш тезлигини аниқлаш осон. Бу ҳолларда Бернулли тенгламасидаги доимий миқдорни оқаётган газ ёки суюқликнинг бутун ҳажмида ўзгармас ва идишдаги $p_н$ босимга тенг деб ҳисоблаймиз, чунки идишнинг S кесими тешикнинг s кесимидан анча катта бўлгани туфайли идишдаги оқиш тезлигини эътиборга олмаса бўлади.



292- расм.

Сувнинг қозондан оқиб чиқиш тезлиги

$$v = \sqrt{\frac{2\,(p_н - p_0)}{\rho}} \tag{105.1}$$

бўлишини (102. 5) тенгламадан ҳисоблаб топиш осон.

Газнинг тешикдан оқиб чиқиш тезлигини аниқлашга (102.5) формула ярамайди, чунки газ зарралари тешикка томон ҳаракатланганда газнинг ρ зичлиги ўзгаради. Стационар оқимда босимнинг оқим найи бўйлаб ўзгаришини (101.5) га асосан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$-\frac{dp}{ds}=\rho v\frac{dv}{dt}. \qquad (105.2)$$

Бироқ энди ρ зичлик p босим катталигига боғлиқ бўлиб қолади. Зарралар тешикка яқинлашиб келганда босим пасайиши керак, чунки зарралар ҳаракат йўналишида тезлашади. Тезлик катталиги ҳам *зичликнинг босим ўзгаришига қараб қандай қонун билан ўзгаришига боғлиқ бўлади.*

Умуман, босим билан зичлик ўртасидаги муносабат анча мураккабдир, чунки бу муносабат яна оқим найи бўйлаб температуранинг ўзгаришига боғлиқ. Бироқ зарра етарлича тез ҳаракат қилган кўп ҳолларда, тажрибанинг кўрсатишича, босим билан зичлик бир-бирига адиабата қонуни билан боғланган деб ҳисобласа бўлади:

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}}=\frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}}^{\varkappa}}=\text{const}, \qquad (105.3)$$

бу ерда $\varkappa$ — адиабатанинг газ табиатига боғлиқ бўлган кўрсаткичи (ҳаво учун бу кўрсаткич 1, 4 га тенг), $\rho_{\text{н}}$ — идишдаги газ зичлиги. *(105.3) адиабата қонуни кенгайиш вақтида* зарранинг атрофдаги зарралар билан иссиқлик алмашиниши юз бермаслигидан келиб чиқади

Зичликнинг босимга боғланиш муносабатини (105.2) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$-p^{-1/\varkappa}\frac{dp}{ds}=\frac{\rho_{\text{н}}}{p_{\text{н}}^{1/\varkappa}}\,v\frac{dv}{ds}. \qquad (105.4)$$

Бу ифодани оқим найи чизиғи бўйлаб интеграллаш мумкин. Агар баллондаги босим $p_{\text{н}}$ газ оқиб тушаётган жойдаги босим p_0 бўлса, босим бўйича $p_{\text{н}}$, дан p_0 гача, тезлик бўйича нолдан v_0 гача (яъни чиқиш жойидаги тезликкача) интеграллаш керак:

$$-\int\limits_{p_{\text{н}}}^{p_0} p^{-1/\varkappa}\quad dp=\frac{\rho_{\text{н}}}{p_{\text{н}}^{1/\varkappa}}\int\limits_0^{v_0} v\,dv.$$

Интегралларни ҳисоблаб ва шакл алмаштиришлар бажариб, оқиб чиқиш тезлигини топамиз:

$$v=\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\;\frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}}}\left[1-\left(\frac{p_0}{p_{\text{н}}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \qquad (105.5)$$

Агар биз газ сиқилмайди деб тахмин қилганимизда (105.1) дан *тезликнинг қуйидаги ифодасини топган бўлар эдик:*

$$v_{\text{сиқилмас}}=\sqrt{\frac{2\,(p_{\text{н}}-p_0)}{\rho_{\text{н}}}}. \qquad (105.6)$$

Газнинг босим остида баллондан чиқиш тезлигини бундай ёзиш мумкин:

$$v = v_{\text{сиқилмас}} \sqrt{\frac{x}{x-1} \frac{1-\left(\frac{p_0}{p_н}\right)^{\frac{x-1}{x}}}{1-\frac{p_0}{p_н}}}. \qquad (105.7)$$

Энди газ сиқилмайди деб фараз қилинганда бажарилган ҳисобларда йўл қўйиладиган хатони ссонгина аниқлаш мумкин; бунинг учун босимлар фарқининг тайинли бир қийматида (105.7) даги илдизнинг қийматини баҳолашнинг ўзи кифоя. Бевосита ҳисоблаб кўриб, шунга ишонч ҳосил қилиш мумкинки, $p_н$ ва p_0 босимлар фарқи жуда оз бўлганда, масалан, бир неча процент бўлганда илдизнинг қиймати бирдан жуда оз фарқ қилади. Унда газнинг оқишини ва тезлигини сиқилмайдиган суюқликники каби ҳисоблаш мумкин.

Ҳавони атмосфера босимига яқин босимда сиқилмайди деб фараз қилганимизда йўл қўйиладиган хатони аниқроқ топамиз. Идишдаги ва ундан ташқаридаги босимлар фарқи атмосфера босимининг 10 процентига тенг деб фараз қилиб, идишдаги $p_н$ босим 1 атм га, ташқаридаги босим $p_0 = 0{,}9$ атм га тенг деб оламиз. Агар ҳаво сиқилмайдиган суюқлик бўлганда оқиб чиқиш тезлиги қандай бўлар эди? (105.6) га ҳаво зичлигининг

$$\rho_н = 1{,}\ 293 \text{ кг/м}^3$$

қийматини ва атмосфера босимининг

$$p_н = 1{,}0133 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

қийматини қўйиб, тезликни топамиз:

$$v_{\text{сиқилмас}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0133 \cdot 10^5}{1{,}\ 293}} = 125 \text{ м/сек.}$$

Энди (105.7) даги илдизнинг қийматини ҳисоблаб топамиз. Белги киритамиз: $\Delta = 1 - \frac{p_0}{\rho_н}$ ва $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = a$, унда илдиз

$$\sqrt{\frac{1-(1-\Delta)^a}{a\Delta}}$$

кўринишга келади; $(1-\Delta)^a$ ни бир атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$(1-\Delta)^a = 1 - a\Delta + \frac{a\,(a-1)}{2}\Delta^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Бу ифодани илдизга қўйиб ва шакл алмаштиришлар бажариб, қуйидагини топамиз:

$$\sqrt{1 - \frac{\Delta}{2}\,(a-1) + \cdot\ \cdot\ \cdot} = \sqrt{1 + \frac{\Delta}{2\varkappa} +}\ \cdot\ \cdot\ \cdot \approx 1 + \frac{\Delta}{4\varkappa} + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Бунга $\Delta = 0{,}1$ ва $\varkappa = 1{,}4$ қийматларни қўйиб, тезликни аниқлашдаги хато 2% чамасида эканлигини топамиз. Бинобарин, босимлар фарқи атмосфера босимнинг 10% идан кам бўлганда тезликни топиш аниқлиги унча юқори бўлмаган ҳолларда хавонинг сиқилувчанлигини эътиборга олмасдан, ҳавонинг оқишини сиқилмайдиган суюқликнинг оқиши деб ҳисоблаш мумкин.

Равшанки, босимлар айирмаси бунчалик кичик бўлганда оқим найи бўйлаб зичлик ҳам жуда оз ўзгаради; босим ва зичликлар ўзгаришининг процентли нисбати тахминан ўшандай бўлади. Дарҳақиқат, газ озроқ миқдорда адиабатик кенгайганда босимнинг нисбий ўзгариши зичликнинг нисбий ўзгаришидан $\varkappa$ марта ортиқ бўлади, чунки (105.3) дан $\frac{dp}{p} = \varkappa \frac{d\rho}{\rho}$ тенгликни топамиз. Оқим найи бўйлаб зичликнинг салгина ўзгариши тезлик катталигига, бинобарин, оқиш характерига ҳам таъсир кўрсатмайди.

106- §. Суйри жисмнинг критик нуқтасидаги босим

Оқим тезлигини аниқлайдиган энг кенг тарқалган асбоб Пито трубкасидир; жисмнинг ҳавога нисбатан ҳаракат тезлиги, масалан, самолётнинг тезлиги ҳам мана шу трубка билан аниқланади. Бу асбобда суйри жисмнинг «критик» нуқтасидаги босим билан оқим тезлиги ўртасидаги муносабатдан фойдаланилади.

Агар суюқлик ва газ оқимида бирор жисм бўлиб, уни суюқлик ҳамма томондан ялаб ўтса, у ҳолда оқим найлари жисмнинг сирти бўйлаб бир-биридан узоқлашиб, тахминан 293-расмда кўрсатилгандек манзара ҳосил қилади. Шунинг учун жисмнинг оқимга қараган томонида критик *нуқта* деб аталадиган *A* нуқта бор; бу нуқтада оқим найлари турли томонларга тарқалиб, жисмни қамраб ўтади. Критик нуқтада оқим тарқалгани (ёйилгани) учун, равшанки, бу нуқтада оқим тезлиги нолга тенг бўлиши керак, узлуксиз бўлгани туфайли эса критик нуқта яқинида тезлик жуда кичик бўлиши лозим. Критик нуқтага тақалиб келадиган оқим найини тасаввур этайлик: бу най 293-расмда штрихлаб қўйилган.

Жисм сиқилмайдиган идеал суюқликнинг бир жинсли оқимида турибди, шунинг учун жисмдан етарлича узоқдаги бирор масофада ҳамма жойда p_0 босим ҳам, ρ_0 зичлик ҳам, v_0 тезлик ҳам бир хил бўлади; бинобарин, ҳамма оқим найлари учун, яъни оқимнинг ҳам-

293- расм.

ма нуқталари учун Бернулли доимийси $p_0 + \frac{\rho_0 v^2_0}{2}$ га тенг[1]. Критик нуқтада оқимнинг тезлиги нолга тенг, шунинг учун бу нуқтадаги $p_к$ босим (102.5) Бернулли тенгламасидан қуйидагича эканлиги келиб чиқади:

$$p_к = p_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \tag{106.1}$$

ёки

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 (p_к - p_0)}{\rho_0}}. \tag{106.2}$$

Критик нуқтадаги босим билан жисмдан узоқдаги оқим тезлиги орасидаги муносабат идишдан оқиб чиқаётган сиқилган суюқликдаги тезлик билан босим орасидаги муносабат каби ((105. 1) га қ.) эканлигини қайд қиламиз. Бироқ бу ҳоллардан биридаги оқим манзараси иккинчисидагини кўзгули акс эттиради.

Оқимда турган жисмнинг критик нуқтасидаги босимни манометр билан ўлчаш мумкин; бу босим техникада кўпинча «тўлиқ напор босими» деб аталади. Одатда критик нуқта яқинида (тўғрироғи, буни нуқта эмас, балки соҳа деса бўлади) очилган тешик узун най воситасида манометрга қўшилади. Оқимда турган жисмнинг критик нуқтасидаги босим бу оқимга тегишли Бернулли доимийсини билдиради; бу доимий «тўлиқ босим» дейилади. Агар оқимдаги статик p_0 босим ва суюқликнинг ρ_0 зичлиги маълум бўлса, тўлиқ босимни билган ҳолда оқимнинг ҳар қандай нуқтасидаги тезлигини аниқлаш мумкин.

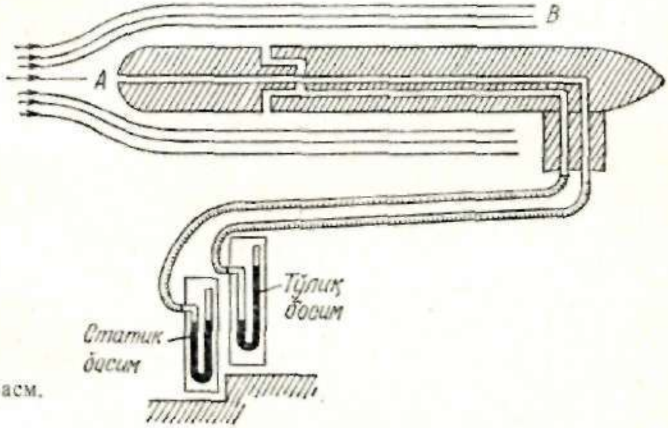
Суйри жисм сифатида тешиги оқимга қаратилган най олиш ҳаммасидан қулай. Найнинг иккинчи учи бу найдаги босимни ўлчайдиган манометрга уланган. Баъзан най ўрнига чети юмалоқ қилиб ишланган цилиндрик жисм олинади (294- расм), бу цилиндрнинг ўқи бўйлаб A тешиги бўлиб, у манометрга найча билан туташтирилган. Тегишли тутқичга ўрнатилган бу цилиндр оқимга A тешиги қараб турадиган қилиб шундай тутиладики, критик соҳа тешик зонасига тўғри келади.

Оқимнинг v_0 тезлигини аниқлаш учун тўлиқ $p_к$ босимдан ташқари яна оқимдаги статик p_0 босимни ҳам билиш керак. Оқимдаги статик босим суюқлик оқаётган найдаги босим ўлчангани каби аниқланади (291- расмга қ.). У ерда най тешилиб, тешикларга манометрик найчалар уланган эди. Бу ерда оқимдаги босимни ўлчаш учун цилиндр шаклидаги жисм шундай тутиладики, бунда унинг ясовчиси

---

[1] Бу масалада γh ҳадни эътиборга олмаса бўлади деб фараз қиламиз, чунки баландлик жуда кам ўзгаради. Керак бўлганда бу ҳадни ҳамма вақт ҳисобга олса бўлади.

тўлқинланмаган оқимдаги[1] оқим чизиқлари бўйлаб йўналади; бу жисм сиртида *очилган* бирор унча катта бўлмаган тешикдаги босим ўлчанади. Агар тешик яқинидан ўтаётган оқим найининг кесими бу найнинг жисмдан узоқ жойдаги кесими каби бўлса, тешик *олдидаги босим жисмдан узоқ жойдаги босимга тенг*[2] *бўлади*. Бу тешик най воситасида манометрга уланади, манометр эса p_0 статик босимни кўрсатади.



294- расм.

Оқимдаги статик босимни аниқлашда ишлатиладиган тешик тўлиқ босимни аниқлашда қўлланиладиган цилиндрик жисм сиртидан очилади. Кесими схемаси 294- расмда кўрсатилган Прандтль найида статик босим аниқланадиган тешиклар цилиндрнинг олдинги учидан бирор масофада (3 — 5 диаметр чамаси узоқда) туради, бу жойларда оқим найлари тўғриланиб қолган бўлади. Бу тешиклар махсус резина найчалар воситасида манометрга уланган бўлиб, манометр оқимдаги статик p_0 босимни ўлчайди.

Тўлиқ $p_к$ босим ва статик p_0 босим маълум бўлганда (106. 1) тенгламадан фойдаланиб, келаётган оқим тезлигини аниқлаш мумкин.

$p_c = \frac{\rho_0 v_0^2}{2}$ миқдор *динамик босим* ёки «тезликка оид» босим дейилади. Бу босимни бевосита ўлчаш мумкин, бунинг учун манометрга бир томондан тўлиқ $p_к$ босим, иккинчи томондан статик p_0 босим берила

---

[1] Агар цилиндр ўқи оқим бўйлаб йўналган ва унинг диаметри оқим жараёнининг кўндаланг ўлчамларига нисбатан жуда кичик бўлса, бу талаб ҳамиша қондирилади.

[2] Аниқроқ айтганда, бу нуқталарда температура бир хил бўлганда босим бир хил бўлади.

ди, у ҳолда манометр p_c фарқни, яъни динамик босимни кўрсатади. Динамик босим катталигига қараб тезлик аниқланади.

Ҳавонинг тезлигини тақрибан аниқлаш учун

$$v = 4\sqrt{h} \tag{106.3}$$

формуладан фойдаланиш мумкин эканлигини қайд қиламиз, бу ерда v тезлик м/сек ҳисобида, босимлар айирмаси (тезликка онд босим), яъни $p_c = h$ босим сув устуни миллиметрлари ҳисобида ўлчанади. Агар инженерлик ишида қилинадигани каби, ҳавонинг зичлиги

$$\rho \approx \frac{1}{8}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{куч}\cdot\text{сек}^2}{\text{м}^4}$$

деб олинса, (106.3) формула (106.2) дан келиб чиқади.

Сиқиладиган газ, масалан, ҳаво тезлигининг каттароқ қийматларини аниқлаш учун[1] зичликнинг ўзгаришини эътиборга олиш, оқим найидаги босим билан тезлик орасидаги муносабатни 105-§ да қилингани каби ҳисоблаш зарур. Тезликни босимга қараб ҳисоблаш учун (105.5) ва (105.7) формулалардан фойдаланиш мумкин, бунинг учун $p_н$ босим ўрнига критик нуқтадаги $p_к$ босимни қўйиш керак. Бироқ оқим тезлиги жуда катта бўлганда, яъни товушнинг газда тарқалиш тезлигига яқин бўлганда бу муносабатлар ҳам ярамай қолади, чунки оқим тезлигининг қийматлари бундай бўлганда жисм олдида «тезлик ва босим сакраши» деб аталадиган янги ҳодиса юз беради. Бу ҳодиса 120- § да баён этилади.

107- §. Босимнинг оқим найларига кўндаланг йўналишда ўзгариши

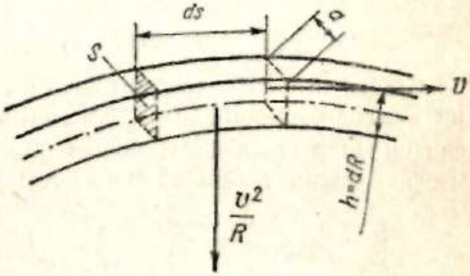
Оқим найидаги босимни аниқлашда (100- §) биз найнинг ҳар қандай кўндаланг кесимида босим доимий бўлиб қолаверади деб фараз этган эдик. У ерда кўндаланг кесимдаги ўртача босимни эътиборга олишимизга найнинг кесими унча катта бўлмаганигина эмас, балки зарранинг фақат оқим ўқи бўйлаб йўналган тезланиши аниқлангани ҳам сабаб бўлди.

Агар оқим найи маълум бир жойда тўғри бўлса, яъни найнинг ўқ чизиғи тўғри чизиқ бўлса, у ҳолда суюқлик зарраси най ўқи йўналишидагина тезланишга эга бўла олади, шунинг учун найнинг қарама-қарши деворлари яқинида ҳар қандай кесимда босим бир хил бўлиши ва бинобарин, бутун кўндаланг кесимда *роса бир хил* бўлиши лозим. Найнинг ўқ чизиғи эгриланган жойларда кўндаланг кесимдаги босим доимий бўлолмайди. Дарҳақиқат, эгриланган оқим

---

[1] 105- § да айтиб ўтилганидек, тезлик 130 м/сек дан кичик бўлганда ҳавони сиқилмайди деб фараз этилганда қилинадиган хато 2% дан кам бўлади.

найида ҳаракатланаётган зарра марказга интилма $\frac{v^2}{R}$ тезланишга эга бўлади, бу ерда R — найнинг ўқ чизиғининг эгрилик радиуси (295-расм). Шунинг учун заррага эгрилик текислигида ётган ва оқим чизиғига перпендикуляр равишда йўналган $\rho S\frac{v^2}{R}\,ds$ куч таъсир қилиши керак, бу ерда S — най кесимининг юзи, ds — суюқлик заррасининг узунлиги.



295- расм.

Бундай кучни оқаётган суюқликнинг зарра атрофидаги қатламларининг босимигина ҳосил қила олади. Шунинг учун эгрилик текислигида най томонларида босимлар айирмаси бўлиши лозим. Агар най кесими томонлари h ва a бўлган тўғри тўртбурчак ($S=ah$) деб фараз этилса, бу босимлар айирмасини ҳисоблаб топиш осон. У ҳолда динамиканинг иккинчи қонунига асосан, оқим чизиғига перпендикуляр бўлган йўналишда

$$(p_1-p_2)\,a\,ds=\rho ah\,\frac{v^2}{R}\,ds \qquad (107.1)$$

деб ёзиш мумкин. Буни $ah\,ds$ га қискартириб,

$$\frac{p_1-p_2}{h}=\frac{\rho v^2}{R} \qquad (107.2)$$

формулага эга бўламиз. Агар оқим найи етарли даражада ингичка бўлса, $\frac{p_1-p_2}{h}$ нисбатни $\frac{\partial p}{\partial R}$ билан алмаштириб, (107.2) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial p}{\partial R}=\frac{\rho v^2}{R}\,. \qquad (107.3)$$

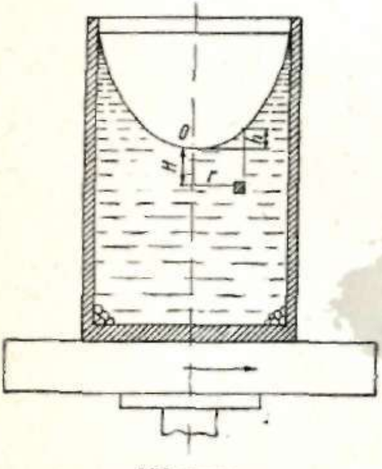
Бу тенглик оқим найлари эгрилангандагина босим оқим найларига кўндаланг йўналишда ўзгаришини билдиради, босимнинг $\frac{\partial p}{\partial R}$ пасайиши най ўқининг эгрилик марказига томон йўналишда юз беради.

Масалан, оқим жисм атрофидан ўтганда (293- расмга қ.) D нуқтадаги босим E нуқтадаги босимдан ортиқ бўлиши ва аксинча, N нуқтадаги босим M нуқтадагидан ортиқ бўлиши керак. Бинобарин, оқим чизиқларининг эгриланишига қараб ҳамиша оқим чизиқларига перпендикуляр йўналишда босимнинг ўзгариши тўғрисида бирор хулосалар чиқариш мумкин, чунки маълум босимлар айирмаси мавжуд бўлган ҳолдагина зарралар ўз йўлини эгрилантира олади.

Жисм сиртидаги босим жисмга оқим томонидан таъсир этаётган кучларни аниқлагани учун босимнинг оқим найларига кўндаланг йўналишда ўзгаришининг анализи суюқлик ва газ оқимида турган жисмга таъсир этувчи кучлар тўғрисида фойдали қатор хулосалар чиқаришга имкон беради.

108- §. Айланаётган суюқликда босим тақсимоти

Стакандаги чой аралаштирилганда айланаётган суюқлик сиртини кузатиш мумкин, бу сирт парабола шаклида бўлади. Стакан ёки цилиндр шаклидаги бошқа бир идишни марказдан қочирма машина диски устига қўйилган деб тасаввур этайлик (296- расм.)



296- расм.

Агар диск ω бурчак тезлик билан айланса, бир оз вақт ўтгач, суюқликнинг ҳамма зарралари айланалар бўйлаб ҳаракат қилиб, бутун суюқлик идиш деворларига нисбатан тинч туради. Оқим найида зарралар r радиусли айлана бўйлаб ҳаракат қилгани учун айланиш ўқидан узоқлашган сари горизонтал текисликда босим ортади. Босимнинг r радиус бўйлаб градиенти[1], (107.3) га асосан,

$$\frac{dp}{dr}=\frac{\rho v^2}{r}. \qquad (108.1)$$

(108. 1) да зарранинг чизиқли v тезлигини ωr билан алмаштирамиз:

$$\frac{dp}{dr}=\rho\omega^2 r; \qquad (108.2)$$

бу тенгламани r бўйича интеграллаш мумкин:

$$\int_{p_0}^{p_1} dp=\rho\omega^2\int_{0}^{r_1} r\,dr$$

ёки

$$p_1-p_0=\frac{\rho\omega^2}{2}\,r_1^2. \qquad (108.3)$$

Бундан кўринадики, идишнинг горизонтал кесимида босим айланиш ўқигача бўлган масофа квадратига пропорционал равишда ортади.

---

[1] Ҳаракат стационар ҳаракат бўлгани учун горизонтал текисликда p босимни фақат r нинг функцияси деб ҳисоблаш мумкин.

Маълумки, суюқликнинг ҳар бир нуқтасида босим ҳамма йўналишларда бир хил бўлиши керак, шунинг учун суюқлик сатҳи ҳам ўқдан узоқлашган сари кўтарилиши керак. Дарҳақиқат, суюқликнинг оғирлиги ҳисобигагина босим вертикал йўналишда ўзгаради; шунинг учун суюқлик зарраси стаканга нисбатан тинч туриши учун суюқликнинг r_1 радиусли ҳалқа шаклли майдончадан юқоридаги сатҳи суюқликнинг марказдаги сатҳидан h масофага юқори туриши зарур. Эркин сиртдаги пастки нуқта (296-расмдаги O нуқта) орқали ўтувчи горизонталга суюқлик оғирлигидан тушадиган босим $h\gamma$ га тенг бўлиб, бу босим $\frac{\rho\omega^2}{2} r_1^2$ га тенг бўлиши керак, бу ерда r_1 — текширилаётган нуқтадан ўққача бўлган масофа. Шунинг учун $h\gamma = \frac{\rho\omega^2}{2} r_1^2$ ёки

$$h = \frac{\omega^2}{2g} r_1^2 ,$$

чунки $\gamma = \rho g$, бу ерда g — оғирлик кучининг тезланиши. Суюқлик сатҳининг баландлиги айланиш ўқигача бўлган масофа квадратига пропорционал равишда ортади, яъни суюқликнинг эркин сирти айланиш параболоиди бўлади; тажрибада ҳам шундай бўлади.

Эркин сиртнинг шакли босимнинг радиус бўйлаб ўзгаришини кўрсатади. Бироқ буни қуйидагича текшириб кўриш ҳам мумкин: марказдан қочма машинага ўрнатилган сув қуйилган стаканга сувдан оғир модданинг майда бўлакларини ташланг, бир оз вақт ўтгач, буларнинг ҳаммаси стакан тубида деворлари олдига йиғилиб қолади. Сув юзида сузадиган модда бўлаклари O нуқта яқинига йиғилади.

Бир-бирига ип билан боғланган бир бўлак қўрғошин билан мум *шарча стакандаги сувда ўзини қандай тутишини кузатиш* қизиқарлидир (мум сувдан енгил). Бундай тажриба натижасини машқ тариқасида ўзингиз таҳлил қилиб кўринг. Ҳамма томони ёпиқ бўлган идиш айлантирилганда унда босим тақсимоти қандай бўлади? Агар стакан маркази машинанинг ўқидан четроқда бўлса, босим тақсимоти ва сув сирти қандай бўлади?

Идиш айланганда суюқлик зарралари ҳаракатининг биз кўриб ўтган ҳолида Бернулли доимийси фақат битта оқим найида ўз қийматини ўзгартирмай сақлаб, турли хил оқим найларида унинг қиймати турлича эканини қайд қилиб ўтамиз. (108. 3) ни ҳисобга олиб, (102. 5) ни оқим найи учун қуйидагича ёзамиз:

$$Э = p_1 + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} = p_0 + \rho\omega^2 r^2;$$

оқим найлари горизонтал бўлгани учун h қатнашган ҳадни эътиборга олмаса ҳам бўлади. Ўқдаги босимни билдирувчи p_0 миқдор чуқурликка боғлиқ бўлиб, γH га тенг (296-расмга қ.). Бинобарин, Бернулли доимийси (Э) чуқурликка қараб ҳам, айланиш ўқидан узоқликка қараб ҳам ўзгаради.

109-§. Суюқлик ва газнинг ҳаракат миқдори

Суюқлик ёки газнинг мураккаб ҳаракатини таҳлил қилишда кўп ҳолларда ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунидан фойдаланиш мумкин. Жисмга ва суюқликка таъсир этувчи кучларни ҳисоблаш ва аниқлаш учун бундай иш кўрилади: оқаётган суюқликда масаланинг шартига мувофиқ келадиган қилиб суюқлик билан банд бўлган фазодан бирор ҳажм ажратиб олинади. Ажратиб олинган ҳажм орқали ўтаётган суюқликка ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонуни татбиқ этилади. Стационар оқим учун бу қонунни бундай таърифлаш мумкин: *ажратиб олинган ҳажмдаги суюқлик зарраларига таъсир этувчи ташқи кучлар йиғиндиси шу ҳажмдаги суюқлик ҳаракат миқдорининг вақт бирлиги ичида ўзгаришига тенг.*

Ташқи кучлар ажратиб олинган ҳажмдаги суюқликнинг *ҳар бир заррасига* қўйилган кучлардан (кўпинча булар оғирлик кучлари бўлади) ва бу ҳажмнинг *сиртига* таъсир этувчи босим кучларидан иборат. Стационар ҳаракатнинг умумий ҳолида ҳаракат миқдорининг вақт бирлиги ичидаги ўзгаришини аниқлаш учун аввало сиртнинг жуда кичик қисми орқали ўтувчи суюқликнинг ҳаракат миқдори ўзгаришини аниқлаш лозим.

Сиртнинг тезликни бир хил деб ҳисоблаш мумкин бўлган бирор кичик $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\cdot dS$ қисмида (297-расм) вақт бирлиги ичида ўтадиган суюқлик миқдорини (*масса «оқимини»*) қуйидагига тенг дейиш мумкин:

$$\rho\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{S}=\rho v dS \cos\alpha, \tag{109.1}$$

бу ерда dS — сирт қисмининг юзи, α — сиртга ўтказилган ташқи нормал билан тезлик йўналиши орасидаги бурчак. Масса «оқими» — биз текшираётган ҳажмдан сиртнинг ўша қисми орқали бир секунд ичида чиққан суюқлик миқдори бўлиб, у скаляр миқдордир. Ҳажмдан чиқаётган оқимнинг ишораси плюс, кираётган оқим ишораси минус бўлади.

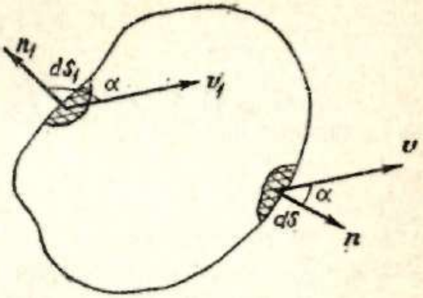
Массанинг (109.1) оқими билан $\boldsymbol{v}$ тезлик векторининг

$$\rho v dS \cos\alpha\cdot\boldsymbol{v} \tag{109.2}$$

кўпайтмаси вектор бўлиб, текширилаётган ҳажмдан сиртнинг бирор қисми орқали бир секунд ичида чиқиб кетаётган суюқликнинг ҳаракат миқдорини ифодалайди.

Сиртнинг бу ҳажмга суюқлик кирадиган қисми учун бу ҳажмга бир секундда суюқлик билан «кирадиган» ҳаракат миқдори ўша(109.2) ифода билан аниқланади (297-расмга қ.). Ажратиб олинган ҳажмнинг тўлиқ сиртини ташкил этувчи барча қисмлар бўйича ҳаракат миқдорининг ўзгаришини қўшиб (ёки интеграллаб), мазкур ҳажмдаги *суюқлик ҳаракат миқдорининг* бир секунд ичидаги *тўлиқ орттирмасини* топамиз. Бу миқдор вектор бўлиб, мазкур ҳажмга таъсир этувчи барча ташқи кучлар йиғиндисига, яъни оғирлик кучлари ва ажратиб олинган ҳажм сиртига таъсир этувчи босим кучлари йиғиндисига тенг.

Ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонуни суюқлик учун ҳам, газ учун ҳам бир хил таърифланади, фақат газ ҳаракатида ҳаракат миқдори катталигини *аниқлашда зичлик* билан босим орасидаги муносабатни ҳисобга олиш зарур.

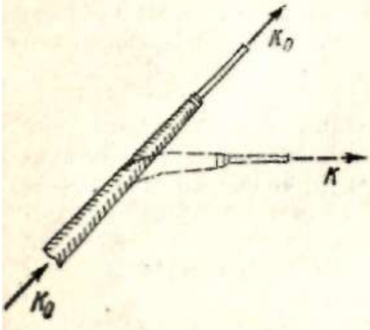


297-расм.

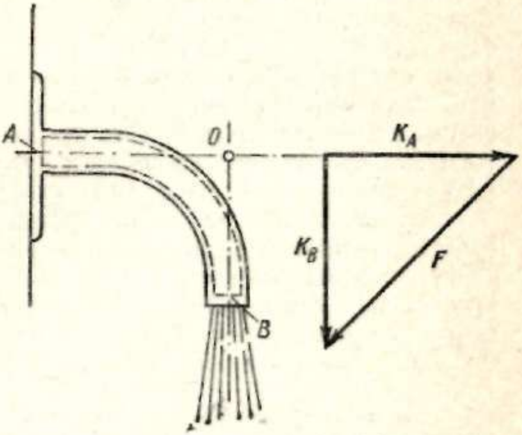
110-§. Оқаётган сувнинг реакция кучи

Суюқликнинг ўзи оқаётган трубага кўрсатадиган реакциясини аниқлаш мақсадида ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунини татбиқ этамиз. Кўчага сув сепиладиган эластик шлангга сув жараёни юборилганда унинг букилган жойлари тез тўғри бўлиб қолишини ҳамма кўрган. Букилган шланг сувнинг ҳаракат миқдори йўналишини ўзгартириши керак эди (298-расм), бироқ оқаётган сув ҳажмига шланг томонидан қўйилган кучлар жуда оз, шунинг учун шланг тўғриланади, оқибатда чиқаётган сув ҳаракат миқдорининг йўналиши кираётган сув ҳаракат миқдорининг йўналиши билан бир хил бўлади.

299-расмда кўрсатилган жўмракка сув кўрсатадиган реакцияни аниқлаймиз. Бу расмда пунктир билан кўрсатилгандек қилиб суюқлик ҳажми ажратиб оламиз; бу ҳажмнинг сирти жўмракнинг ички



298-расм.



299-расм.

сирти билан ва унинг икки A ва B кўндаланг кесимлари билан бир хил бўлади. Жўмрак трубасининг кўндаланг кесими ўзгармайди, шунинг учун ҳар бир кесимда $\boldsymbol{v}$ тезликнинг абсолют қиймати бир хил бўлади. Унда бу ҳажмга ҳар секундда кириб турган суюқликнинг ҳаракат миқдори

$$\boldsymbol{K}_A=\rho S\boldsymbol{v}_A v \qquad (11.1)$$

бўлади, бу ерда ρ—сувнинг зичлиги, $\boldsymbol{v}_A$ — сувнинг оқими тезлиги ва S — жўмрак кўндаланг кесимининг юзи. Ҳаракат миқдорининг $\boldsymbol{K}_A$ вектори A кесимга перпендикуляр йўналган. Ажратиб олинган ҳажмдан ҳар секундда чиқаётган суюқликнинг $\boldsymbol{K}_B$ ҳаракат миқдори сон жиҳатдан $\boldsymbol{K}_A$ нинг модулига тенг, бироқ унга тик йўналган. Шунинг учун ҳаракат миқдори ўзгаришининг вектори 299-расмда кўрсатилганча йўналади ва бу ҳолда

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}_B-\boldsymbol{K}_A \qquad (110.\ 2)$$

бўлиб, қиймати қуйидагига тенг:

$$F=\sqrt{2}\,K=_B\sqrt{2}\ \rho Sv^2.$$

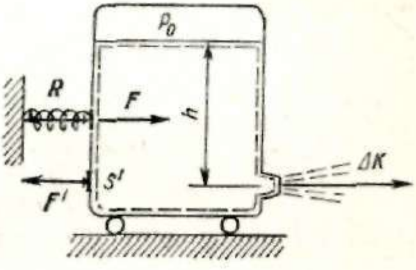
Энди ажратиб олинган (текширилаётган) ҳажмга таъсир этувчи кучларни кўриб чиқамиз. Оғирлик кучининг таъсирини эътиборга олмаса ҳам бўлади[1], шунинг учун текширилаётган ҳажм сиртига таъсир этувчи босим кучларигина қолади. Уларни бирин-кетин кўриб чиқамиз. Агар сувнинг қовушоқлиги эътиборга олинмаса, суюқликнинг кириш жойидаги A кесимда ва чиқиш жойидаги B кесимда босим кучлари бир хил бўлади. Дарҳақиқат, оқим найи бўйлаб тезлик бир хил бўлганда босим ҳам бир хил бўлиши Бернулли тенгламасидан келиб чиқади. Жараённинг чиқиш жойида босим атмосфера босимига тенг. Жараённинг кириш ва чиқиш жойида атмосфера босим кучлари жўмраккa ташқаридан кўрсатилаётган босим билан мувозанатлашади, шунинг учун уларнинг жўмраккa таъсир этувчи натижаловчи кучи нолга тенг; бу ҳол ҳавонинг кўтариш кучи эътиборга олинмаганда атмосфера босими бўш жўмраккa натижаловчи куч билан таъсир этмаслигига ўхшайди.

Ажратиб олинган ҳажмнинг қолган сирти бўйича жўмракнинг сувга кўрсатадиган босим кучларининг таъсиригина қолди. Бу кучларнинг йиғиндиси, яъни жўмракнинг оқиб чиқаётган суюқликка кўрсатадиган натижаловчи босим кучи $\boldsymbol{F}$ га, яъни ҳаракат миқдорининг ҳар секунддаги ўзгаришига тенг; ҳаракат миқдорининг секундига ўзгаришининг катталиги ва йўналиши (110.2) дан

---

[1] Биз текшираётган ҳажмдаги суюқликнинг оғирлик кучи изланаётган кучга нисбатан жуда кичикдир. Равшанки, оғирлик кучини ҳисобга олиш унча қийин эмас.

маълум. Шунинг учун оқиб чиқаётган суюқликнинг жўмракка кўрсатадиган реакцияси ҳаракат миқдори ўзгаришининг **F** векторига тенг ва унга қарама-қарши йўналган бўлиб, *O* нуқта орқали ўтади (299- расмга қ.); бу *O* нуқта кираётган ва чиқаётган суюқлик ҳаракат миқдорлари йўналишлари кесишган нуқтани билдиради.



300- расм.

Идишдан оқиб чиқаётган суюқлик жараёнининг идишга кўрсатадиган таъсир кучини аниқлаймиз (300- расм). (102.5) Бернулли тенгламасига асосан, суюқликнинг идишдан оқиб чиқиш тезлиги

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 + \gamma h)}, \qquad (110.3)$$

бу ерда p_0 — идишдаги суюқлик устидаги босим[1], h — суюқлик сатхининг тешикдан ҳисобланган баландлиги. Суюқлик ҳажмини 300-расмда кўрсатилгандек қилиб ажратиб оламиз. Ҳисобларимиз соддароқ бўлиши учун идишнинг горизонтал кесими тўғри тўртбурчак шаклида деб фараз қиламиз ва шунинг учун жараёнга фақат нормал бўлган сиртлардаги босим кучлари ва суюқлик ҳаракат миқдорининг ўзгаришларини кўриб чиқамиз; суюқлик ҳаракат миқдорининг қолган ҳамма йўналишлардаги ўзгариши нолга тенг. Шунинг учун жараён тезлиги йўналишидаги кучларни ва ҳаракат миқдорининг ўша йўналишдаги орттирмасини ҳисоблаб топамиз.

Агар жараённинг кўндаланг кесими S_0 бўлса, у ҳолда ҳаракат миқдорининг бир секунд ичида жараён йўналишида ўзгариши қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta K = \rho S_0 v^2 = Q v, \qquad (110.4)$$

бу ерда Q—суюқлик массасининг ҳар секунддаги сарфи. Идиш суюқликка $\boldsymbol{F} = \Delta \boldsymbol{K}$ куч билан таъсир қилади, суюқликнинг идишга кўрсатадиган **R** реакцияси миқдор жиҳатдан **F** га тенг бўлиб, унга қарама-қарши йўналган. **R** куч *реактив куч* деб аталади, у Мешчерский формуласи (27- §) билан аниқланган реактив кучга роппароса тенг.

Агар идишга таъсир этувчи куч 300- расмда схематик равишда кўрсатилгандек қилиб динамометр билан ўлчанса, оқиб чиқаётган жараённинг реактив кучини тажрибада аниқлаш мумкин. Реактив двигатель ва ракеталарнинг тортиш кучи ҳам деярли шундай усул билан ўлчанади.

---

[1] Аниқроқ айтганда, p_0 — идишдаги босимнинг атмосфера босимидан ортиғини кўрсатадиган миқдор.

Реактив кучнинг идиш деворига қандай узатилишини кўриб чиқиш қизиқарлидир. Идиш деворларига берилаётган босимлар айирмаси туфайли реактив куч пайдо бўлади; босимларнинг бу айирмаси жараённинг оқиб чиқишида пайдо бўлади. Кетинги девордаги босимни p_0 билан гидростатик γh босимнинг йиғиндиси деб ҳисоблаш мумкин (γ — суюқликнинг солиштирма оғирлиги, h — — нуқтанинг чуқурлиги), чунки бу девор яқинида оқим тезлиги кичик, оқиб чиқаётган жараён тезлигидан эса жуда кичик. Идишнинг тешик бор томонидаги, яъни олдинги деворидаги босим (300- расмга қ.) кетинги деворидаги босимга тенг бўлмайди. Агар аҳвол бундай бўлмасдан, олдинги ва кетинги деворлардаги босим бир хил бўлганда эди, у ҳолда юзи S_0 бўлган тешик қаршисидаги кетинги девордаги $S' = S_0$ майдончадан бошқа ҳамма қарама-қарши майдончаларда босимлар мувозанатлашган бўлар эди. Шунинг учун суюқликнинг кетинги деворга берадиган умумий босим кучи ортиқ бўлади, шундай бўлиши керак ҳам эди. S' майдончанинг ўлчамларини h га нисбатан жуда кичик деб фараз қилиб, бу майдончага тушаётган босим кучининг катталигини аниқлаймиз. Бу F' куч равшанки, қуйидагига тенг бўлади:

$$F' = S_0(p_0 + \gamma h). \tag{110.5}$$

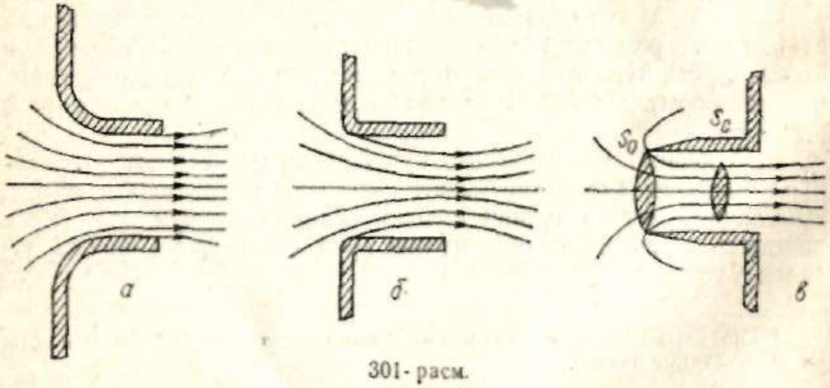
(110.3) формулани ҳисобга олиб, буни

$$F' = \frac{1}{2}\,\rho v^2 S_0$$

кўринишда ёзамиз; буни (110.4) билан солиштирсак, F' куч реактив R кучдан роса икки марта кичик эканини кўрамиз. Шунинг учун идишнинг қарама-қарши деворларидаги босимни бир хил деб ҳисоблаш тўғри эмас, яъни олдинги деворда тешикка яқин жойлардаги оқим тезлигини эътиборга олмасдан қўйиш ярамайди; тешик яқинида оқим тезлиги бўлгани учун бу соҳада босим пасаяди. Идиш деворларига берилаётган босим тақсимотининг ўзгаришларини аниқ топиш учун биз идишдаги бутун оқимни ҳисоблаб чиқишимиз керак эди, бу эса жуда мураккаб масаладир, ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунидан фойдаланилганда реакция кучини аниқлаш масаласи бундай мураккаб ҳисобни бажармасданоқ осонгина ҳал этилади.

Бу мулоҳазалардан кўриниб турибдики, олдинги девор атрофида тешик яқинида босимнинг пасайиши реактив R кучнинг ярмига тенг бўлган кучни билдиради. Шуни таъкидлаб ўтамизки, бу хулоса жараённинг энг кичик S_0 кесими тешикнинг юзига тенг бўлган тақдирдагина тўғри бўлади, бирок ҳамма вақт ҳам бундай бўлавермайди.

Шу чоққача биз жараён «учликдан» чиқишида учликка вертикал девордан силлиқ ўтиб келади, деб фараз этган эдик, бу ҳолда жараён тешикдан тахми-



301- расм.

ган 301-*а* расмда кўрсатилган параллел оқим найлари тарзида тешикни тўлдириб чиқади. Агар суюқлик деворлардан «учликка» силлиқ ўтиб келмаса, жараён сиқилади (301-*б* расм). Жараённинг бундай сиқилиш сабабларини кўрсатиш осон. Суюқликнинг тешикка девор бўйлаб келадиган четки жараёнлари ўз инерцияси туфайли жараённинг марказига ўтишга интилади, жараённинг марказига яқин жойда кетаётган зарраларнинг босими таъсири остидагина четки оқим найлари тўғриланади. Бу ҳолда жараённинг минимал кесими, яъни оқим найлари амалда тўғриланган жойдаги кесими тешикнинг кесимидан кичик бўлади. Жараённинг минимал кесим юзининг тешик юзига нисбати катталиги тешик четларининг шаклига боғлиқ бўлиб, тажрибада топилади.

Тешикнинг четлари ўткир бўлганда жараён кесимининг юзи тешик юзидан анчагина кам бўлиб, бироқ бу юзнинг ярмидан ортиқ бўлади. Агар жараён идиш ичига қаратилган ўткир қиррали найча орқали чиқаётган бўлса (301-*в* расм), у холда жараённинг энг кичик кесими юзи тешик юзининг роса ярмига тенг бўлади. Бу ерда идишнинг найча киргизилган вертикал девори бўйлаб бўладиган оқим тезлигини мутлақо эътиборга олмаса бўлади, чунки идишнинг вертикал девори тешикдан узоқда туради. Унда идиш деворларининг қарама-қарши қисмларида босим бир хил бўлади ва реакция кучи (110. 5) га асосан,

$$F' = S_0(p_0 + \gamma h) \tag{110.6}$$

бўлиши керак, бу ерда S_0 — найча тешигининг юзи. Ҳаракат миқдори ўзгаришининг қонунига асосан, реакция кучи

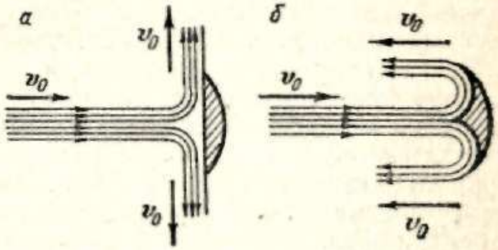
$$F' = S_c \rho v^2 = S_c \cdot 2\,(p_0 + \gamma h) \tag{110.7}$$

бўлиши керак, бу ерда S_c — жараённинг энг ингичка жойидаги кўндаланг кесим юзи (301-*в* расм). (110. 6) билан (110. 7) ни солиштириб,

$$2S_c = S_0 \tag{110. 8}$$

экан, яъни жараённинг ингичка тортиши (жараён юзининг тешик юзига нисбати) $\frac{1}{2}$ га тенг экан деган хулосага келамиз. Бу нисбат тажрибада яхши тасдиқланади.

Жараённинг йўналиши ва тезлиги осон аниқланадиган жойларда ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунидан фойдаланиш айниқса фойдалидир. Масалан, турбина ғилдирагининг 302-*б* расмда кўрсатилган шаклдаги ариқчалари бўлган паррагига жараён тушганда ҳосил бўладиган босим кучи ўшандай жараённинг (яъни тезлиги ва кесим юзи ўшандай жараённинг) 302-*а* расмда кўрсатилган ясси куракка тушгандаги босим кучидан икки марта катта бўлади. Албатта, бундай шароитда жараённинг ариқчали парракка келиб урилишдаги тезлиги қиймати тахминан ўзгармайди деб, иккала ҳолда ҳам парраклар тезлиги бир хил ва жараёндаги зарралар тезлигига нисбатан етарли даражада кичик деб ҳисоблаш мумкин.



302- расм.

111-§. Қовушоқ суюқликнинг трубада оқиши

Кўп ҳолларда қовушоқлик кучларини эътиборга олмасдан ходисани қовушоқлик кучлари бўлмаган ҳолдаги каби тахминан анализ қилиш мумкин. Қовушоқлик кучлари эътиборга олинган ҳолда оқимни анализ қилишнинг умумий методлари ҳали маълум бўлмагани сабаблигина эмас, балки асосан амалда аҳамиятга эга бўлган қатор мисолларда одатдаги суюқлик билан ўтказиладиган тажриба натижалари «идеал» суюқлик оқишини назарий равишда анализ қилиш натижаларига *маълум даражада аниқлик билан тўғри келиши сабабли ҳам ҳодисани қовушоқлик кучларини* эътиборга олмай *анализ* қилиш маъқул. Қовушоқликни эътиборга олмаслик қачон принципиал ва катта хатоларга олиб келишини билиб қўйиш муҳимдир.

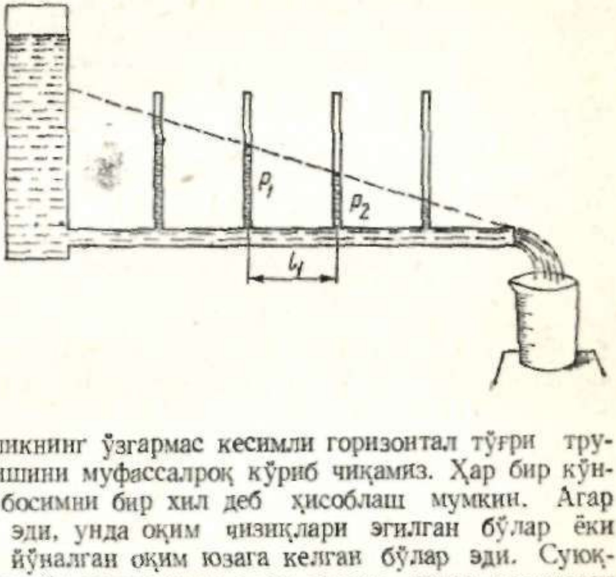
Маълумки, қовушоқлик кучлари оқим тезлигининг ўз йўналишига перпендикуляр бўлган йўналишдаги ўзгаришига пропорционалдир ва бинобарин, тезликнинг бу ўзгаришлари катта бўлган жойда қовушоқлик кучлари катта таъсир кўрсатади. Қовушоқ суюқлик қаттиқ жисмни ялаб ўтганда суюқликнинг жисмга бевосита ёндашган зарралари жисмга «ёпишиб қолиб», тезликлари жисмга нисбатан нолга тенг бўлади. Шунинг учун жисм сиртига бевосита яқин жойда оқим тезлиги ноль қийматидан бошлаб бирор қийматга қадар ортади. Жисмдан узоқда оқим тезлигининг ўзгаришлари жуда кичик бўлади, у жойларда ковушоқликнинг таъсири арзимаган даражада бўлади.

Суюқликнинг жисмни ўраб турган қатлами *чегаравий қатлам* деб аталади; чегаравий катламда тезлик ортади ва унда қовушоқликнинг таъсири сезиларли бўлади. Баъзи ҳолларда бу қатлам жуда юпқа бўлиб, унинг таъсирини эътиборга олмаслик мумкин: ковушоқ суюқлик ёки газнинг оқиши қовушоқлиги бўлмаган идеал суюқликнинг жисмни ялаб оқишига яқиндир. Бошқа ҳолларда чегаравий қатлам юпқа бўлмайди ва унда қовушокликни эътиборга олмай бўлмайди. Масалан, қовушоқ суюқлик тор трубада оққанда бундай қатлам бутун ҳажмни оқаётган суюқлик билан тўлдира олади ва бу оқимни анализ қилишда қовушоқлик кучларини ҳисобга олиш зарур.

Ўзгармас кесимли горизонтал трубада (303- расм) оқаётган суюқликда босим тақсимотини манометрик найчалар воситасида ўлчаш тажрибалари ўтказамиз. Агар суюқлик етарли даражада қовушоқ, масалан, глицерин ёки бирор шинни бўлса ёки труба анча ингичка бўлса, босим труба бўйлаб бир текис пасаяди. Буни бир-биридан бир хил масофада жойлашган манометрик найчалардаги суюқлик сатҳлари оғма тўғри чизиқда ётишидан кўриш мумкин (303- расмга қ.). Агар суюқлик қовушоқ бўлмаса эди, у ҳолда ҳамма манометрик найчалардаги сатҳлар бир хил бўлган, труба бўйлаб босим ўзгармаган бўлар эди.

Дарҳақиқат, суюқликни бутунлай сиқилмайди деб ҳисобласа бўлади, шунинг учун трубанинг ҳар бир кесимида оқим тезлиги бир хил, чунки трубанинг кесими ҳамма жойда бир хил, Бернулли тенгламасига асосан эса босим ҳам бир хил бўлиши керак эди. Бу ҳолда қовушоқ суюкликда заррага босим кучларидан ташқари, қовушоқлик кучлари ҳам таъсир қилади, шунинг учун тезлиги ўзгармайдиган стационар оқимда босим оқим найи бўйлаб пасаяди.

Суюқлик трубада тўғри чизиқ бўйлаб оқади, ҳамма зарралар тезлиги трубанинг ўқи бўйлаб йўналган, бинобарин, қовушоқлик кучлари фақат трубанинг ўқи йўналишида таъсир этади. Босимнинг оқим найи бўйлаб пасайиши қовушоқлик кучлари билан мувозанатлашади, шунинг учун суюқликнинг оқиш тезлиги труба бўйлаб ўзгармайди.



303- расм.

Қовушоқ суюқликнинг ўзгармас кесимли горизонтал тўғри трубада стационар оқишини муфассалроқ кўриб чиқамиз. Ҳар бир кўндаланг кесимдаги босимни бир хил деб ҳисоблаш мумкин. Агар бундай бўлмаганда эди, унда оқим чизиқлари эгилган бўлар ёки трубада кўндаланг йўналган оқим юзага келган бўлар эди. Суюқликнинг доиравий труба деворларига яқин турган ҳамма зарралари трубага ёпишиб, уларнинг тезлиги нолга тенг; уларга яқин турган ҳалқа тарзидаги қатлам симметрия шартлари туфайли бутун айланаси бўйлаб бир хил тезликка эга бўлиши керак. Агар суюқликни ҳалқа шаклидаги концентрик қатламларга бўлинган деб тасаввур қилсак, бундай қатламнинг ҳар бирида тезлик бир хил бўлади; шунинг учун оқим тезлигининг катталигини тайинли бир заррадан труба ўқигача бўлган r масофанинггина функцияси деб фараз қилиш мумкин.

Оқаётган суюқлик ҳажмидан радиуси r ва узунлиги dl бўлган цилиндр (304- расм) ажратиб оламиз ва цилиндрнинг ҳаракат шартларини ёзамиз. Суюқлик текис ҳаракат қиляпти, бинобарин, ажратиб олинган цилиндрга қўйилган барча кучлар йиғиндиси нолга тенг. Цилиндр учларидаги босим кучларининг

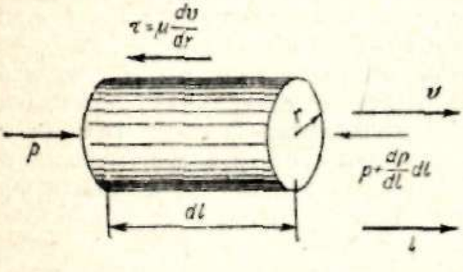
$$\left[p-\left(p+\frac{dp}{dl}\,dl\right)\right]\pi r^2=-\frac{dp}{dl}dl\pi r^2$$

фарқи цилиндр сиртига қўйилган қовушоқлик кучлари билан мувозанатлашган бўлиши керак. Қовушоқлик кучларининг йиғиндиси цилиндрнинг $2\pi r dl$ ён сирти юзи билан қовушоқлик кучларининг τ кучланиши кўпайтмасига тенг. Цилиндрга таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг нолга тенглиги шартини энди қуйидагича ёзиш мумкин:

$$-\frac{dp}{dl}\,dl\pi r^2-\tau\cdot 2\pi r dl=0$$

ёки

$$\frac{dp}{dl}r=-2\tau. \qquad (111.1)$$



304- расм.

Ньютон қонунига асосан [(39.1) га қ.], қовушоқлик кучларининг кучланиши тезликдан перпендикуляр йўналишда, яъни радиус йўналишида олинган ҳосилага пропорционалдир:

$$\tau=-\mu\frac{dv}{dr}, \qquad (111.2)$$

бу ерда μ — суюқликнинг қовушоқлик коэффициенти, радиус ортгани сари тезлик камайгани учун минус ишора қўйилган. (111.2) ифодани (111.1) тенгликка қўямиз:

$$\frac{dp}{dl}r=2\mu\frac{dv}{dr}. \qquad (111.3)$$

Босимнинг труба ўқи бўйлаб олинган $\frac{dp}{dl}$ градиенти қиймати радиусга боғлиқ эмас, чунки ҳар қандай кўндаланг кесимда босим бир хилдир. Шунинг учун (111.3) тенгламани радиус бўйича интеграллаб, оқим тезлигининг радиусга боғланишини топиш мумкин, бунда девор яқинида тезлик $v(R)=0$ эканини ҳисобга олиш керак:

$$\frac{dp}{dl}\int\limits_R^r r\,dr=2\mu\int\limits_0^v dv, \qquad (111.4)$$

бу ерда R — труба радиуси. Ҳисоблаб қуйидагиларни топамиз:

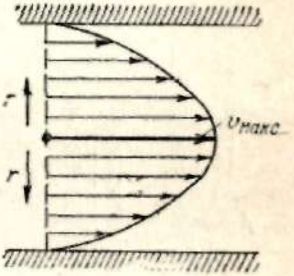
$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dl}(r^2-R^2)=2\mu v$$

ёки

$$\frac{1}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dl}\right)(R^2-r^2)=v. \qquad (111.5)$$

Босим тезлик йўналишида бир текис пасаяди, шунинг учун $-\frac{dp}{dl}$ *миқдор мусбат ва доимийдир.* Трубанинг ўқида тезлик максимал бўлади, тезлик қиймати трубанинг диаметри бўйича параболик қонун билан тақсимланади (305- расм). Максимал тезлик қуйидагича:

$$v_{\text{макс.}} = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dl}\right).$$



305- расм.

Қовушоқ суюқликнинг трубада оқиш тезликлари тақсимотини ранги турлича бўлган икки суюқлик ўртасидаги ажралиш чегарасининг ҳаракатига қараб кузатиш мумкин. Вертикал жойлашган трубага рангли шинни қуйилган (306- *а* расм), унинг устидан эҳтиёт бўлиб рангсиз ўшандай шинни қуйиш керак. Тинч ҳолатда ажралиш чегараси горизонтал бўлади. Трубанинг пастки қисмидаги жўмрак очилгандан сўнг қовушоқ суюқлик секин ҳаракатга келиб, ажралиш чегараси вақт ўтиши билан шаклан ўзгариб, тобора ўқ бўйлаб чўзилади (306- *а* расм).

Тезлик тақсимоти маълум бўлса, трубанинг кўндаланг кесими орқали сарф бўладиган суюқликнинг Q ҳажмини ҳисоблаб топиш мумкин. Радиуси r ва юзи $2\pi r\,dr$ бўлган ҳалқа орқали секундига ўтадиган суюқлик ҳажми $dQ = v2\pi r\,dr$ (306- *б* расм), бутун кесим орқали секундига ўтадиган суюқлик ҳажми Q бўлади:

$$Q = \int dQ = 2\pi \int_0^R vr\,dr = \frac{2\pi}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dl}\right)\int_0^R (R^2 - r^2)r\,dr = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dl}\right). \qquad (111.6)$$

Бу ерда биз (111.5) формуладан фойдаландик.

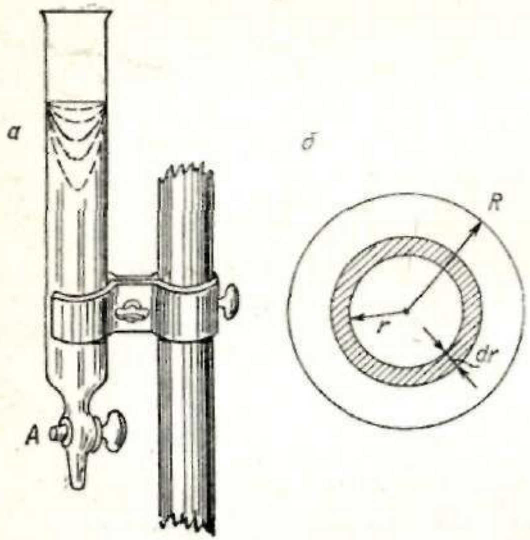
Бу қонундан фойдаланиб, суюқликнинг μ қовушоқлик коэффициентини ўлчайдиган содда асбоб ясаш мумкин, унинг схемаси 303- расмда кўрсатилган. $\frac{dp}{dl}$ миқдорни трубанинг ҳар хил нуқталаридаги босимни ўлчаш натижаларига асосланиб ҳисоблаб чиқариш мумкин. Босим узунликка пропорционал равишда пасайгани туфайли,

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\,\frac{p_б - p_о}{l}, \qquad (111.7)$$

бу ерда $p_б$ — трубанинг узунлиги l бўлган қисмининг бошидаги босим, $p_о$ — ўша қисмнинг охиридаги босим.

Трубадан маълум вақт ичида ўтган суюқлик миқдорини ўлчаб, Q сарф миқдорини бевосита ўлчаш мумкин. Трубанинг R радиуси маълум бўлса, бу маълумотларга асосланиб суюқликнинг μ қовушоқлик коэффициентини аниқлаш мумкин.

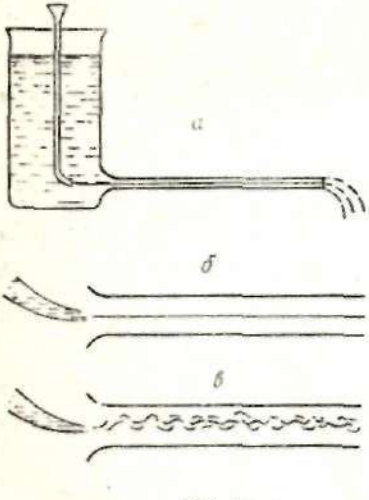
Суюқлик цилиндрик трубада оққанда унинг зарралари ҳамма жойда ўқ бўйлаб йўналган тезликка эга бўлса, бундай оқим *ламинар оқим* ёки *қатламли оқим* деб аталади. Оқим тезлиги унча катта бўлмаганда қовушоқ суюқлик ламинар оқим бўлиб оқади. Оқим тезлиги ортиши билан, труба учларидаги босимлар фарқи ортиши



306- расм.

билан оқим характери принципиал жиҳатдан ўзгаради: сокин ламинар оқим ўрнига суюқлик *турбулент (уюрмали)* оқим бўлиб оқади.

Идишдаги сув оқиб чиқаётган шиша найчага ранг берилган жараён юборилса (307-*а* расм), уюрмали оқим пайдо бўлишини кузатиш осон. Оқим тезлиги унча катта бўлмаганда суюқлик ламинар бўлиб оқади ва рангли жараён найчанинг ўқига параллел равишда деярли тўғри чизиқ шаклида кетади (307-*б* расм). Сўнгра оқим тезлиги аста-секин оширилганда бирданига уюрма ҳаракат пайдо бўлиб, рангли жараён четлари нотекис бўлган кенг йўл шаклида ёйилади (307-*в* расм).



307- расм.

308- расм.

Стационар турбулент ҳаракатда тайинли бир жойдаги тезлик миқдори ва йўналиши жиҳатидан ўзгариб, миқдори ва йўналиши тартибсиз равишда тез тебраниб туради. Бироқ тезликнинг ўртача қиймати найчанинг ўқи бўйлаб йўналган тайинли бир доимий миқдор бўлади. Шунинг учун уюрмали оқимда кўпинча тезликнинг *ўртача қиймати аниқланади*.

Турбулентликнинг юзага келиши нимага боғлиқ экани тўғрисида биз кейинчалик 113-§ да гапирамиз, бу ерда эса шуни қайд қиламизки, турбулент оқимда ўртача тезликнинг труба диаметри бўйлаб тақсимоти (308-расм) ламинар ҳаракат ҳолида кўрганимиздагидан (305-расмга қ.) бутунлай бошқача. Уюрма ҳаракатда ўртача тезлик трубанинг бутун кесими бўйлаб деярли ўзгармайди, фақат деворлар яқинида тезда нолгача тушиб қолади; деворлар яқинидаги *чегаравий қатлам* оқимнинг қиёсан озгина улушини эгаллайди, марказда эса тезликлар майдони деярли бир жинсли бўлиб, трубада суюқликнинг қовушоқлиги бўлмаган ҳолда кўринадиган манзарага кўпроқ ўхшайди. Ламинар оқимда (305-расмга қ.) аниқ чегаравий қатлам йўқ, трубанинг ҳамма қисмларида тезликлар майдони қовушоқлик кучлари туфайли деворлар яқинидаги каби ўзгаради; бу ҳолда чегаравий қатлам ҳатто суюқликнинг бутун оқимини эгаллайди, деб айтиш мумкин.

XIII БОБ

СУЮҚЛИК ЁКИ ГАЗ ОҚИМИНИНГ ЖИСМГА КЎРСАТАДИГАН ТАЪСИРИ

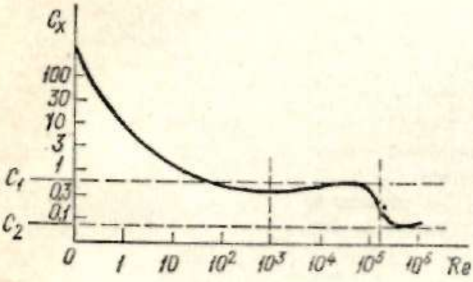
112- §. Оқимдаги жисмларнинг пешана қаршилиги

Оқимнинг қаттиқ жисмга кўрсатадиган таъсир кучларини ҳамма вақт битта натижаловчи кучга ва барча кучларнинг моментига келтириш мумкин. Натижаловчи кучни ҳамиша ўзаро перпендикуляр бўлган икки ташкил этувчига ажратиш мумкин: улардан бири оқим бўйлаб йўналган пешана қаршилик *кучи*, иккинчиси унга тик йўналган куч. Симметрия ўқи оқим бўйлаб жойлашган симметрик жисмларга оқимнинг кўрсатадиган таъсир кучи, равшанки, оқим бўйлаб йўналади; бу ҳолда фақат пешана қаршилик кучи бўлади.

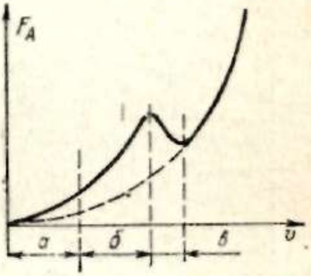
Пешана қаршилик кучи нималарга боғлиқ? Бу куч жисмнинг шакли ва ўлчамларига, оқим тезлигига ва суюқликнинг физикавий хоссаларига боғлиқ. Тажриба кўрсатадики, шакли бир хил бўлган жисмларнинг қаршилик кучи жисмнинг кўндаланг кесимига (v оқим тезлигининг йўналишига кўндаланг бўлган кесимига), тезликка оид $\rho v^2/2$ босимга ва бирор C_x коэффициентга пропорционалдир. Бу коэффициент мазкур шаклдаги жисм *пешана қаршилигининг коэффициенти* деб аталади. Умуман айтганда, пешана қаршилик коэффициенти ўзгармай қолмайди, у $\mathrm{Re} = vl\rho/\mu$. *Рейнольдс сонининг* катталигига боғлиқ, бу формулада l — жисмнинг характерли ўлчами, v — оқим тезлиги, ρ — суюқликнинг зичлиги ва μ — суюқликнинг қовушоқлик коэффициенти. Бу боғланишнинг физикавий аҳамияти тўғрисида кейинги параграфда гапирамиз.

Шар пешана қаршилиги коэффициентининг Re сонига боғланиш эгри чизиғи 309- расмда кўрсатилган. Рейнольдс сони оқим тезлигига пропорционал бўлгани сабабли, бу соннинг қиймати унча катта бўлмаганда, яъни тахминан $\mathrm{Re} \approx 100$ гача бўлганда қаршилик кучи оқим тезлигига пропорционал бўлади. Кейин ўтиш соҳаси келадики, бундан сўнг пешана қаршилик коэффициенти деярли ўзгармай қолади; демак, бу қисмда қаршилик кучи оқим тезлигининг квадратига пропорционал. $\mathrm{Re} \approx 1{,}5 \cdot 10^5$ қиймат яқинида C_x коэффициент кескин ўзгариб, кейин деярли ўзгармай туради. Шарнинг F_A қаршилик кучи билан оқим тезлиги орасидаги муносабат 310- расмда кўрсатилган. *а* соҳа — чизиқли боғланиш соҳаси; *б* соҳа — биринчи квадратик боғланиш соҳаси, бу соҳада пешана қаршилик коэффициенти $C_x \approx 0{,}4$; *в* соҳа — иккинчи квадратик боғланиш соҳаси, унда $C_x \approx 0{,}1 - 0{,}2$.

Жисмни суюқлик айланиб ўтиши (ялаб ўтиши) манзарасини анализ қилишга ва пешана қаршилик кучининг тезликка қараб ўзгариш



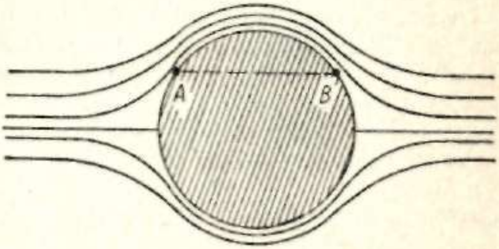
309- расм.



310- расм.

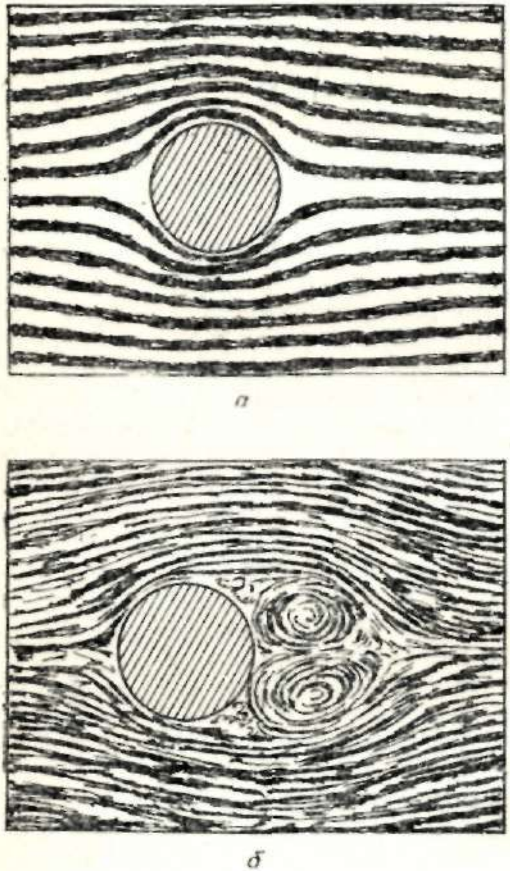
сабабларини аниқлашга киришишдан олдин идеал суюқликдаги (яъни қовушоқлиги йўқ суюқликдаги) жисмнинг пешана қаршилиги тўғрисида бир неча мулоҳаза юритамиз. Бу ҳолда оқим силлиқ жисмни, масалан, шарни силлиқ айланиб ўтади ва оқим найлари шарга нисбатан мутлақо симметрик жойлашади.

Қовушоқлик кучлари йўқ, шунинг учун шар сиртига фақат статик босим кучлари таъсир қилади. Оқим шар олдида ва орқасида симметрик бўлгани сабабли, оқим найининг ҳар қандай *А* нуқтадаги кесими унинг оқимга нисбатан шарнинг орқа томонида турган *В* нуқтадаги кесимига тенг (311- расм). Бинобарин, бу нуқталарда тезлик бир хил ва шунингдек босим ҳам бир хил. Шунинг учун идеал суюқлик оқимида турган шарга таъсир этувчи натижаловчи куч нолга тенг. Идеал суюқликнинг *ҳар қандай жисмни ажралмасдан* силлиқ айланиб ўтишини назарий жиҳатдан анализ қилиш шуни кўрсатадики, бу ҳолда ҳам қаршилик кучи нолга тенг (Даламбер «парадокси»).



311- расм.

Бироқ оқиш тезлиги жуда кичик бўлган ҳолдагина суюқлик жисм яқинида ундан ажралмасдан силлиқ ҳаракат қилади. Суюқликнинг жисмни силлиқ ялаб ўтишини 283-расмда кўрсатилган асбобнинг новида яхши кузатиш мумкин. Цилиндрчани новнинг тубига қўйиб, оқим чизиқлари цилиндрча олдида бир-биридан ажралиб, орқасида қўшилганини кузатиш мумкин.



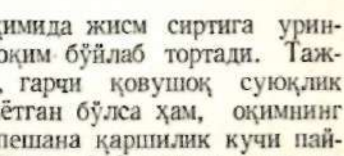
312-расм.

Суюқлик цилиндрчани силлиқ айланиб ўтган ҳолдаги оқим чизиқлари 312-*а* расмда кўрсатилган. Оқим тезлиги ортганда манзара тубдан ўзгаради. Оқим чизиқлари цилиндрча орқасида қўшилмай қўяди ва ундан «ажралади», бунда жисм орқасида кескин уюрмали фазо пайдо бўлади; суюқлик жисм атрофидан оқиб ўтаётганда оқим найлари жисмдан ажралади. Суюқлик цилиндрча атрофидан ажралиб оқиб ўтган ҳолдаги оқим чизиқлари 312-б расмда кўрсатилган. Цилиндр орқасида уюрмали соҳа бўлиб, бунда оқим чизиқлари кўринмайди, шунинг учун бу соҳа оқим чизиқлари аниқ кўринадиган регуляр оқим соҳасидан кескин ажралади. Бу ҳолда оқимнинг жисмга олд томондан ва орқадан таъсир қиладиган босимида симметрия бўлмайди. Жисмдан (цилиндрдан) олдиндаги манзара силлиқ айланиб ўтиш ҳолидагидек бўлади: критик соҳада ва унинг яқинида босим статик босимдан динамик босим (яъни $\rho v^2/2$) миқдорида ортиқ бўлади. Бироқ цилиндр орқасида оқим чизиқлари жисмдан ажралиб, тўғрироқ бўлиб кетади ва орқадаги уюрмали соҳада босим олдиндагидан ҳамиша кичик бўлади, бу босим уюрмаланмаган оқимдаги статик босимга деярли тенг бўлади. Бинобарин, оқим жисмдан ажралган ҳолда натижаловчи босим кучининг орқа томонга йўналган ташкил этувчиси бўлади, шунинг учун ҳатто «идеал» суюқлик жисмдан ажралиб оқиб ўтганда пешана қаршилик кучи вужудга келади.

Суюқлик ҳар қандай жисм атрофидан ажралиб оқиб ўтган умумий ҳолда жисм сиртига таъсир этаётган босим шундай қайта тақсимланадики, бунда натижаловчи босим кучи нолга тенг бўлмай қолиб, қовушоқлиги бўлмаган суюқлик оқими жисмга маълум бир куч билан таъсир этади.

Биз биламизки, қовушоқ суюқлик оқимида жисм сиртига уринма куч таъсир қилади, бу куч жисмни оқим бўйлаб тортади. Тажрибада кўрганимиздек (312-*а* расмга қ.), гарчи қовушоқ суюқлик жисмни ундан ажралмасдан айланиб ўтаётган бўлса ҳам, оқимнинг симметрик бўлишига қарамай, бари бир пешана қаршилик кучи пайдо бўлади; бу куч асосан тахминий тақсимоти 313-расмда схематик кўрсатилган уринма қовушоқлик кучларидан ташкил топади. Қовушоқ суюқлик жисмдан ажралиб оққан ҳолда манзара тубдан ўзгаради. Бу ерда қовушоқлик туфайли пайдо бўладиган уринма кучлардан ташқари, босим кучларининг оқимнинг жисмдан ажралиши *туфайли қайта тақсимланиши муҳим роль ўйнайди,* бу эса *оқим* бўйлаб таъсир этувчи натижаловчи босим кучини вужудга келтиради. Оқим тезлиги катта бўлганда (тўғрироғи, Re сони катта бўлганда) жисм сирти яқинида босимнинг қайта тақсимланиши туфайли пайдо бўладиган кучлар устунлик қилади.

Бундан ташқари, оқим жисмдан ажралганда оқимнинг уюрмали соҳасида алоҳида уюрмалар ҳосил бўладики, булар оқимнинг жисмдан ажралиш чегарасидан баъзан регуляр равишда, баъзан норегуляр равишда узоқлашиб, жисм орқасидаги уюрмали соҳани тўлдириб туради. Равшанки, уюрмалар ҳосил бўлиши ва уларнинг жисмдан узоқлашиши туфайли оқим тебранади ва бинобарин, жисм сирти яқинида босим



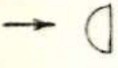
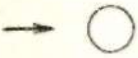
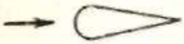
313-расм.

тебранади; бу тебранишлар уюрмалар ҳосил бўлишининг даврийлигига боғлиқ равишда баъзан регуляр, баъзан эса норегуляр бўлади. Босимнинг бу тебранишларини ўлчаш ва назарий жиҳатдан ҳисоб қилиш анча қийин, бироқ шу нарса шубҳасизки, босим тебранишларининг вакт бўйича ўртача қиймати олинса, бу қиймат қўшимча пешана каршиликни ифодалайди; бу қаршилик баъзан *уюрма қаршилик* деб ҳам аталади.

Бундай хулосага келишга асос бўлган мулоҳазалар қуйидагилардир. Жисм тинч муҳитда текис ҳаракат қиляпти ва унинг орқасида уюрмалар (*уюрмали из*) ҳосил бўляпти, деб фараз қилайлик. Издаги суюқлик жисмни айланиб ўтгандан кейин маълум бир айланма ҳаракат олади, маълум бир кинетик энергияга эга бўлади. Бу энергиянинг манбаи нимада? Бу манба жисмни текис ҳаракатга келтириш учун унга қўйилиши зарур бўлган куч бўлиши мумкин. Энергиянинг сақланиш қонунига асосан, издаги уюрмали ҳаракатнинг кинетик энергияси пешана қаршилик кучининг ишига тенг бўлиши керак.

Шундай қилиб, ковушоқ суюқликдаги жисмнинг пешана қаршилиги уч сабаб туфайли пайдо бўлади: а) ковушоқликнинг уринма кучлари, б) оқимнинг жисмдан ажралиши туфайли босимнинг қайта тақсимланиши, в) жисм орқасида уюрмалар ҳосил бўлиши туфайли босимнинг тебранишлари.

Қуйидаги жадвалда турли шаклли жисмлар учун пешана қаршилик коэффициентларининг ўртача қийматлари берилган.

Жисмнинг шакли ва оқим йўналиши		c_x	Re
	Диск	1,11	$0—5 \cdot 10^6$
	Ярим сфера шаклидаги коса	1,35—1,40	
		0,30—0,40	
	Шар	0,4	$2 \cdot 10^3—2,5 \cdot 10^5$
		0,1—0,2	$3 \cdot 10^5—7 \cdot 10^6$
	«Томчи шаклидаги» айланиш жисми	0,045	$1,5 \cdot 10^5—6 \cdot 10^6$
		0,1	

Жисмнинг орқа қисмининг шакли нақадар катта аҳамиятга эга эканлиги бу жадвалдан кўриниб турибди. Кўндаланг кесим бир хил бўлганда тумшуғи тўмтоқ ва орқа томони бир текис ингичкалашган «томчи шаклидаги» жисмларнинг қаршилиги энг кичик бўлади. Жисмни айланиб ўтаётган оқимнинг жараёнлари учрашадиган орқа қисм бундай учли қилинганда оқимнинг жисмдан ажралиш соҳаси унча катта бўлмайди ва оқим ажралмайди. Жисмнинг кўпроқ қисмини деярли «идеал» суюқликдаги каби силлиқ оқим ялаб ўтади; оқим босим катта бўлган орқа қисмда қўшилади, шу туфайли қаршилик кучи кам бўлади.

Аксинча, учли томони оқимга қаратиб қўйилган «томчи шаклидаги» жисмнинг қаршилиги катта бўлади, чунки жисмнинг деярли бутун орқа қисми оқимнинг ажралиш соҳасида туради, оқим жисм орқасида қўшилмайди ва қаршилик катта бўлади. Шунинг учун самолётдаги тиргович ва тортқилар, шунингдек оқим ичида қоладиган бошқа жисмлар одатда суйри қилиб ишланади. Бу жисмларнинг кўндаланг кесими «томчи шаклидаги» жисмникига ўхшайди: бундай тиргович ёки тортқилар орқасида оқим ҳеч ажралмайди ёки ажралиш соҳаси бу жисмлар сиртининг жуда оз қисмини эгаллайди.

113-§. Жисмларни муҳит айланиб ўтишида механикавий ўхшашлик қонуни

Бундан олдинги параграфлардан шундай хулосага келамиз: жисмларни қовушоқ суюқлик айланиб ўтишда юз берадиган ҳодисалар манзараси анча мураккаб, қаршилик кучини кўпчилик ҳолларда назарий йўл билан ҳали аниқлаб бўлмайди. Шунинг учун оқимда турган жисмга таъсир этадиган кучларни экспериментда аниқлашга тўғри келади.

Албатта, амалда қизиқарли бўлган кўп ҳолларда (самолёт, кема ва шу кабилар) катта жисмларга (ҳақиқий катталигидаги жисмларга) кўрсатиладиган таъсир кучларини экспериментда аниқлаш жуда қийин ва қимматга тушишидан ташқари, баъзан ҳал қилиб бўлмайдиган мураккаб масаладир. Шунинг учун қуйидаги саволлар ўртага ташланади: геометрик ўхшашликка амал қилинган ҳолда кичик моделдаги қаршилик кучларини ўлчаб, сўнгра эса оқимнинг катта жисмга кўрсатадиган таъсир кучини аниқлаб бўлмасмикан? Кичик моделни синаш асосида унга геометрик жиҳатдан ўхшаш бўлган катта жисмга таъсир этувчи кучларни аниқлаб бўладими ва агар аниқлаб бўлса, қандай шароитларда мумкин? Сувда ёки бошқа бир суюқлик ёки газда ўтказилган синовларга асосланиб туриб, геометрик жиҳатдан ўхшаш жисмга ҳавода қандай кучлар таъсир қилиши тўғрисида хулоса чиқариш мумкинми? Бу саволларга бериладиган умумий жавоб бундай: бунинг учун модель билан ҳақиқий жисм (натура) *ўртасида геометрик ўхшашликдан* ташқари *механикавий ўхшашлик*[1] ҳам бўлиши зарур.

---

[1] Баъзан динамик ўхшашлик деб ҳам гапирилади.

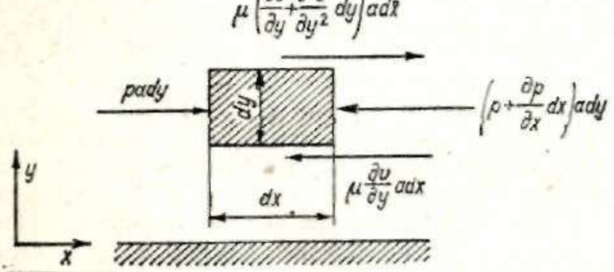
Дарҳақиқат, жисмнинг шакли ўзгармас бўлганда уни айланиб ўтадиган суюқлик ҳаракати оқим тезлигига ва суюқликнинг хоссаларига қараб ҳар хил бўлади; шунинг учун оқимлар механикавий жиҳатдан ўхшаш бўлганда оқим чизиқларининг шаклигина эмас, балки модель ва ҳақиқий катталикдаги жисмни айланиб ўтадиган оқимларнинг ҳар бир қисмида табиати турлича бўлган кучлар нисбатлари ҳам бир хил бўлиши зарурдир.

Қовушоқ суюқлик оқимида ҳар бир заррага икки куч таъсир қилади: босим кучи ва қовушоқлик кучи (агар зарраларнинг оғирлик кучини эътиборга олмаслик мумкин бўлса), буларнинг йиғиндиси «масса билан тезланиш кўпайтмасига» тенг. Қисқалик учун тескари ишора билан олинган «масса × тезланиш»ни «инерция кучи» деб[1] атасак, бундай дейиш мумкин: суюқликнинг ҳар бир зарраси ҳамиша мувозанатда бўлган учта куч: «инерция кучи», босим кучи ва қовушоқлик кучи таъсири остида бўлади. Учала кучнинг йиғиндиси нолга тенг, бинобарин, улардан фақат иккитаси эркли кучдир. Шунинг учун механикавий жиҳатдан ўхшашликка риоя қилиш шарти сифатида исталган икки кучнинг нисбатини танлаб олиш мумкин; одатда «инерция кучлари»нинг қовушоқлик кучларига нисбати олинади. Бу нисбат айни ўша ўхшашлик шартидир, у ўлчамсиз катталик бўлмиш Рейнольдс сонига *пропорционал.*

Агар модель ва натурани айланиб ўтадиган оқимларга тегишли Рейнольдс сонлари бир хил бўлса, бу оқимларда инерция кучларининг қовушоқлик кучларига нисбати ҳам бир хил бўлади ва бинобарин, модель ва натура атрофидаги суюқлик оқимлари геометрик жиҳатдангина эмас, балки *механикавий* жиҳатдан ҳам ўхшаш бўлади.

Инерция кучларининг қовушоқлик кучларига нисбатини аниқлаш учун ишқаланиш (қовушоқлик) кучлари мавжуд бўлган суюқлик зарраси ҳаракатининг *энг содда ҳолдаги тенгламасини ёзиш керак. Бу тенгламани ясси девор бўйлаб* доимий бир йўналишда кетаётган қовушоқ суюқлик оқими учун ёзамиз (314-расм).

v оқим тезлиги t вақтга ва y координатага (девордан ҳисобланган масофага) боғлиқ бўлиб, x ўқ бўйлаб йўналган, деб фараз қилайлик. Суюқликдан ҳажми $a\,dx\,dy$ бўлган элемент ажратиб оламиз, бу ерда a — элементнинг чизмага ўтказилган перпендикуляр бўйлаб олинган ўлчами. Ажратиб олинган заррага (эле-



314- расм.

---

[1] «Инерция кучи»нинг бу таърифи қўлингиздаги китобда қабул қилинган таърифидан фарқ қилади.

ментга) чап томондан $pa\,dy$ босим кучи, пастдан ва юқоридан $\mu\frac{\partial v}{\partial y}\,a\,dx$ ва $\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,dy\right)a\,dx$ қовушоқлик кучлари, ўнг томондан $p+\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\right)\,a\,dy$ босим кучи таъсир этади. Бу кучларнинг ҳаммасининг йиғиндиси масса билан тезланиш кўпайтмасига, яъни

$$\rho\,\frac{dv}{dt}\,a\,dx\,dy$$

ифодага тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, динамика тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\rho\,\frac{dv}{dt}\,a\,dx\,dy=-\frac{\partial p}{\partial x}\,a\,dx\,dy+\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,a\,dx\,dy. \tag{113.1}$$

(101.3) га асосан, *стационар оқим* учун

$$\frac{dv}{dt}=v\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлгани сабабли (113. 1) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\left(\rho v\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)a\,dx\,dy=0. \tag{113.2}$$

Бу эса қовушоқ суюқликдаги заррага таъсир этувчи кучларнинг асосий тенглигидир; бунга асосланиб қуйидаги шартни топамиз:

$$\frac{\rho_\text{н}v_\text{н}\,\dfrac{\partial v_\text{н}}{\partial x_\text{н}}}{\mu_\text{н}\,\dfrac{\partial^2 v_\text{н}}{\partial y_\text{н}^2}}=\frac{\rho_\text{м}v_\text{м}\,\dfrac{\partial v_\text{м}}{\partial x_\text{м}}}{\mu_\text{м}\,\dfrac{\partial^2 v_\text{м}}{\partial y_\text{м}^2}}, \tag{113.3}$$

бу ердаги «н» индекс бу катталикнинг натура атрофидан ўтаётган оқимга тегишли эканини, «м» индекс эса катталикнинг модель атрофидаги оқимга тегишли эканини билдиради. (113.3) ифодани қуйидагича ўзгартириб ёзиш мумкин:

$$\frac{\rho_\text{н}v_\text{н}\partial y_\text{н}}{\mu_\text{н}}=\frac{\rho_\text{м}v_\text{м}\partial y_\text{м}}{\mu_\text{м}}\;\frac{\partial^2 v_\text{н}}{\partial^2 v_\text{м}}\;\frac{\partial v_\text{м}}{\partial v_\text{н}}\;\frac{\partial x_\text{н}}{\partial x_\text{м}}\;\frac{\partial y_\text{м}}{\partial y_\text{н}}. \tag{113.4}$$

Моделнинг бирор характерли ўлчамининг узунлиги $l_\text{м}$ бўлсин, ўша ўлчамнинг натурадаги узунлиги $l_\text{н}$ бўлади. У ҳолда, равшанки, ўхшаш оқимларда қуйидаги шартлар ўринли бўлади:

$$\frac{\partial x_\text{н}}{\partial x_\text{м}}=\frac{l_\text{н}}{l_\text{м}},\quad \frac{\partial y_\text{н}}{\partial y_\text{м}}=\frac{l_\text{н}}{l_\text{м}},\quad \frac{\partial v_\text{н}}{\partial v_\text{м}}=\frac{v_\text{н}}{v_\text{м}},\quad \frac{\partial^2 v_\text{н}}{\partial^2 v_\text{м}}=\frac{v_\text{н}}{v_\text{м}}. \tag{113.5}$$

Бу шартларни эътиборга олсак, механикавий ўхшашликнинг (113.4) асосий шартини бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{\rho_\text{н}v_\text{н}l_\text{н}}{\mu_\text{н}}=\frac{\rho_\text{м}v_\text{м}l_\text{м}}{\mu_\text{м}}. \tag{113.6}$$

$\frac{\rho v l}{\mu}=\mathrm{Re}$ бўлгани учун Рейнольдс сони қанча катта бўлса, қовушоқлик кучларининг нисбий қиймати шунча кичик, қовушоқ суюқлик оқими «идеал», яъни қовушоқлиги йўқ суюқлик оқимига шунча яқин бўлади, деб айтиш мумкин. Бу соннинг жуда кичик бўлиши мазкур оқимда қовушоқлик кучлари устунлик қилишини билдиради

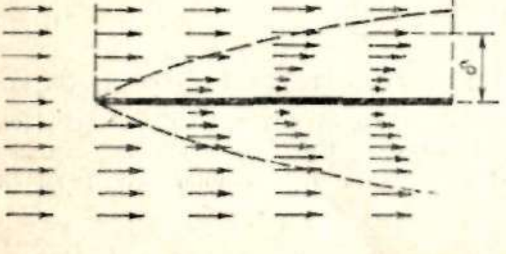
Жисм ва оқимлар геометрик жиҳатдан ўхшаш бўлган ҳолдагина Рейнольдс сонини солиштириш мумкин; фақат шу ҳолдагина Рейнольдс сонининг, айтайлик, беш марта ортишига инерция кучларининг қовушоқлик кучларига нисбати беш марта ортиши мос келади.

Шакли ҳар хил бўлган, лекин бир-бирига ўхшаш жисмлар атрофидаги, масалан, турли кесимли трубалар, турли самолётларнинг қанотлари ва шу кабилар атрофидаги оқимларни солиштиришда Re сони инерция кучлари билан қовушоқлик кучлари орасидаги муносабатнинг ўзгаришини тахминан кўрсатади. Оқимнинг жисм яқинидаги характери, масалан, оқимнинг ажралиши фақат жисмнинг шаклигагина эмас, балки инерция кучлари билан қовушоқлик кучлари орасидаги муносабатга ҳам боғлиқ. Бу муносабатнинг жисмни айланиб ўтадиган оқим характерига кўрсатадиган таъсирини аниқлаш учун бундан кейинги параграфда чегаравий қатламни ва унинг уюрмалар ҳосил бўлиши ва оқимнинг ажралиши билан боғланишини муфассалроқ кўриб чиқамиз.

Шуни қайд қиламизки, бундан олдинги параграфда тилга олинган *ламинар* (*қатламли*) оқим ўрнига трубада турбулент (уюрмали) ҳаракат пайдо бўлиши ҳам «инерция кучлари» билан қовушоқлик кучлари орасидаги муносабатга боғлиқ. Юмалоқ трубаларда тахминан $Re \approx 1000$ га мос келадиган тезликларга қадар оқим ламинар оқим бўлади, тезлик бундан катта бўлганда ($Re > 1000$ бўлганда) оқим одатда турбулент оқим бўлади.

114-§. Чегаравий қатлам

Жисмни қовушоқлиги жуда *кичик* бўлган суюқлик ёки газ айланиб ўтганда, қовушоқлик кучи, олдин айтиб ўтилганидек, фақат жисм яқинида, тезлик жисм сиртидаги нолга тенг қийматидан бошлаб ортадиган унча катта бўлмаган *чегаравий қатламдагина* муҳим аҳамиятга эга бўлади. Чегаравий қатлам суюқликнинг хоссаларигагина эмас, балки жисмнинг шаклига ҳам боғлиқ. Масалан, оқим бўйлаб қўйилган текис пластинкада (315-расм) чегаравий қатлам оқим бўйлаб кенгайиб боради, суюқликнинг қовушоқлиги туфайли тормозланган бу қатлам пластинканинг кетинги қиррасига томон



315- расм.

қалинлашиб боради. Пластинка яқинидаги зарралар тезликларининг майдони 315-расмда схема тарзида кўрсатилган, бунда чизма равшан бўлиши учун чегаравий қатлам кенгайтириб, зарралар тезликларини тасвирловчи стрелкалар қатламда зичроқ қилиб чизилган.

Назарий ҳисобларнинг кўрсатишича, чегаравий қатламнинг δ қалинлигини қуйидаги формула билан тахминан баҳолаш мумкин:

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \tag{114.1}$$

Бу қатлам қалинлигининг жисмнинг характерли l узунлигига нисбати (чегаравий қатламнинг нисбий қалинлиги) Рейнольдс сонидан чиқарилган квадрат илдизга тескари пропорционал. Биз бу формулани келтириб чиқармаймиз, бироқ соддагина бу муносабатни билиб қўйишни фойдали деб ҳисоблаймиз. Масалан, тезлиги 30 м/сек бўлган ҳаво оқимида турган 10 см диаметрли шар учун $\mathrm{Re} = \frac{10 \cdot 30 \cdot 10^2}{0.15} = 2 \cdot 10^5$ бўлади (20°C ли ҳаво учун $\mu/\rho \approx 0,15$ см^2/сек). Бинобарин, шар сиртида чегаравий қатлам қалинлиги тахминан

$$\delta \approx \frac{10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10^4}} \approx 0,022 \text{ мм}$$

бўлиб, оқим тезлиги ортган сари қатлам юпқа тортади.

Рейнольдс сони жуда кичик (1 чамасида) бўлганда чегаравий қатламнинг қалинлиги тахминан жисмнинг ўлчамлари билан бир хил бўлади ((114.1) га қ.). Гарчи ушбу ҳолда бу формула унча тўғри бўлмаса-да, юқоридаги хулоса ҳақиқатга зид келмайди: Рейнольдс сони бунчалик кичик бўлганда чегаравий қатламни ажратиб бўлмай қолади, у бутун оқимни ёки оқимнинг жисм атрофидаги каттароқ қисмини эгаллайди. Бундай ҳаракатни биз қовушоқ суюқликнинг трубада ламинар ҳаракати (111-§ га қ.) ва майда шарчанинг глицериндаги ҳаракати (40-§ га қ.) мисолларида кўрганмиз. Масалан, диаметри 2 мм бўлган пўлат шарча глицеринда 2 см/сек тезлик билан тушади. Ҳақиқатан ҳам, (40.3) га асосан:

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{c}}}{\mu} g r_0^2 = \frac{2}{9} \frac{8-1}{8,5} \cdot 10^3 \cdot 0,1^2 \approx 2 \text{ см/сек}.$$

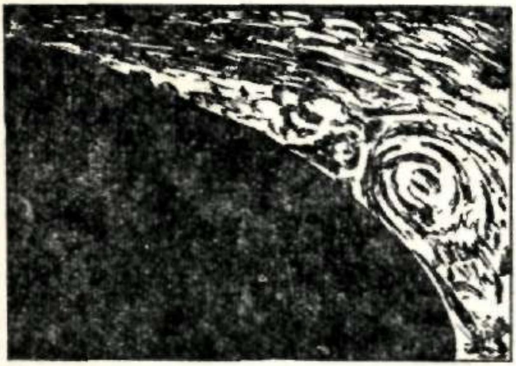
Шунинг учун Рейнольдс сони $\mathrm{Re} = \frac{2 \cdot 0,2}{6,8} \approx 0,06$, чунки глицеринда $\frac{\mu}{\rho} \approx 6,8$ см^2/сек. Бу ерда «чегаравий» қатламнинг қалинлиги шарчанинг ўлчамларидан анча катта.

Рейнольдс сони 10^4 дан катта бўлганда чегаравий қатлам қалинлиги жисм ўлчамининг 0,01 қисмидан кичик бўлади. Бинобарин, Рейнольдс сони катта ($\mathrm{Re} \geqslant 10^4$) бўлганда жисм атрофидаги чегаравий қатлам ҳақиқатан ҳам юпқа чегаравий қатлам бўлади. Бундан буён ҳамма ерда гап фақат худди мана шундай қатлам устида боради.

Цилиндр атрофидаги қовушоқлиги жуда кичик бўлган суюқлик оқимини қўпол қилиб бундай тасаввур этиш мумкин: цилиндр сирти яқинида тормозланган суюқлик қатлами (чегаравий қатлам) ҳосил бўлади, ундан ташқарида эса суюқлик оқими идеал суюқлик оқимидан жуда кам фарқ қилади. Юзаки қараганда чегаравий қатлам борлиги фақат унча катта бўлмаган уринма кучлар пайдо бўлишига ва цилиндрнинг эффектив ўлчамларининг озгина ўзгаришига сабаб бўлгандек туюлади. Ҳақиқатда эса Рейнольдс сони катта бўлганда оқимнинг жисмдан ажралиши ва уюрмалар ҳосил бўлиши оқибатида оқим анча кўп ўзгаради.

Чегаравий қатламнинг жисмни айланиб ўтаётган оқимга кўрсатадиган таъсирини кўриб чиқамиз. Цилиндрнинг олдинги қисмида чегаравий қатламдан ташқарида оқим тезлиги оқим йўналишида ортади, босим пасаяди; чегаравий қатлам бу қисмда ҳеч қандай муҳим ўзгаришлар юзага келтирмайди ва бундаги босим суюқлик оқимининг чегаравий қатламга яқин жойдаги босими билан деярли бир хил бўлади. Жисмнинг олдинги қисмида босим оқим йўналишида пасайиб боради ва шу туфайли чегаравий қатлам юпқалашади, зарраларнинг қовушоқлик кучлари туфайли юзага келган тормозланиши камаяди; оқим бўйлаб босим пасайиши натижасида зарралар чегаравий қатламдан «сиқиб чиқарилгандек» бўлади.

Цилиндрнинг (шар ёки бошқа жисмнинг) кетинги қисмида манзара бутунлай бошқача бўлади: бу ерда оқим найлари оқим бўйлаб кенгайиб боради ва тезлик камаяди, босим эса оқим бўйлаб *ортади*. Бу ерда босим чегаравий қатламдаги зарралар ҳаракатини янада кўпроқ тормозлайди; оқим тезлиги ошганда, босим кўпроқ камайганда жисм яқинида суюқлиқ зарралари бутунлай тўхтаб қолиши, ҳатто оқимга қарши *қайтма* ҳаракатга келиши мумкин (316-расм). Жисм сирти бўйлаб оқимга қарши борувчи зарралар келаётган оқим зарралари билан бирор чегарада («ажралиш» чегарасида) учрашади ва уларни келаётган оқим орқага буриб юборади; шундай қилиб, зарралар айланма ҳаракатда катнашади, бу ҳаракатни оқим тобора кўпроқ бурайди ва



316- расм.

у тобора кўпроқ суюқликни ўзига тортади ва ниҳоят, оқимга эргашиб, инерцияси билан айланма ҳаракатини давом эттириб жисмдан ажралади. Жисм орқасида *уюрмали соҳа* юзага келади, оқим уюрмаланади. Рейнольдс сонининг бирор қийматидан (шар учун бу қиймат $\approx 3 \cdot 10^5$) юқорида чегаравий қатламнинг ўзи турбулент бўлиб қолади ва бунинг оқибатида ажралиш соҳаси камаяди, пешана қаршилик коэффициенти катталиги ҳам камаяди (309- расмга қ.).

115- §. Оқимдаги жисмга таъсир этадиган кучларни ўлчаш

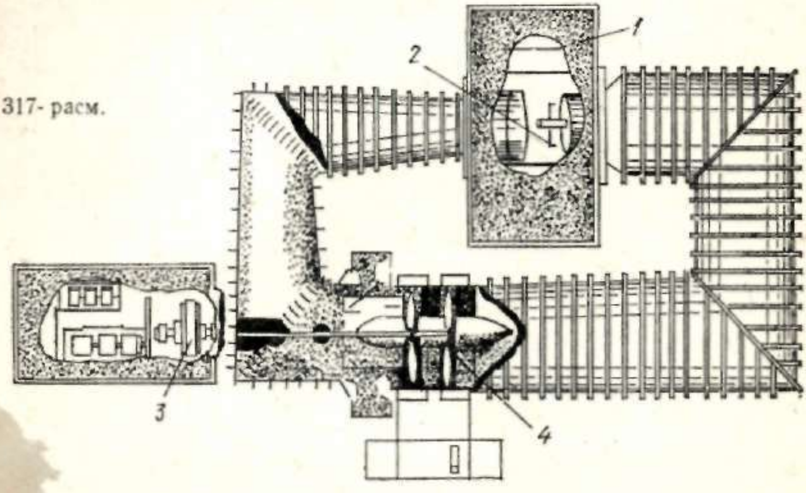
Оқимнинг таъсири жисмнинг суюқлик зарраларига нисбатан киладиган ҳаракатига боғлиқ. Равшанки, жисмнинг қўзғалмас муҳитга нисбатан ҳаракат қилиши ёки муҳитнинг ўшандай тезлик билан жисмга нисбатан ҳаракат қилишидан қатъи назар, оқимнинг жисмга кўрсатадиган таъсир кучи бир хил бўлади.

Самолёт ёки умуман ҳавода учадиган, сувда ва сув остида юрадиган кемаларни лойиҳалашда муҳитнинг (яъни ҳаво ёки сувнинг) бу кемаларга кўрсатадиган таъсир кучлари катталигини билиш зарур. Шунинг учун одатда муҳитда ҳаракат қилганда жисмларга таъсир этадиган кучлар дастлаб моделларда аниқланади. Бунинг учун модель, масалан, кема модели махсус ҳовуздаги сув юзида маълум тезлик билан шатакка олиб тортиб юргизилади ва бунда ҳосил бўладиган кучлар ўлчанади ёки ҳаво оқимида турган моделга, масалан, самолёт ва бошқа жисмларнинг аэродинамик труба ичида турган моделига (317- расм) таъсир этувчи кучлар ўлчанади.

Синалаётган модель амалда ҳамиша труба, канал ва шу кабилардаги чекланган оқимда тургани учун жисмнинг чегарасиз тинч муҳитда ҳаракатланадиган ҳолдаги тажрибалар билан жисм ҳаракатланувчи муҳитда (оқимда) турган ҳолдаги тажрибалар орасида принципиал фарқ бор. Трубада (ёки каналда) деворлар, яъни оқим чегаралари жисмни айланиб ўтаётган оқим характерини маълум даражада бузади, шунинг учун бу таъсирларни бартараф қилиш мақсадида моделларнинг чизиқли ўлчамларини оқим ўлчамларига (трубанинг диаметри, каналнинг эни ва чуқурлиги ва ҳоказоларга) нисбатан анча кичик қилиб олиш керак.

317- расмда берк оқимли аэродинамик трубанинг кўриниши схематик равишда тасвирланган; унинг «ишчи» қисми очиқ. *3* мотор айлантирадиган *4* венти-

317- расм.



лятор деярли ёпиқ трубада доимий ҳаво оқими ҳосил қилади. *1* қисмда труба очиб қўйилган бўлиб, худди ўша жойда бир текис оқим ҳосил қилинади. «тарозига» қўйилган *2* модель шу оқимга тутилади. Ҳаво трубанинг соплосидан чиқади, моделга урилади ва яна трубага кириб кетади. Аэродинамик тарози деб аталадиган «тарози» моделга таъсир этувчи кучларни аниқлашга мўлжалланган. Оқим, труба ва моделнинг ўлчамлари оқим атрофидаги бошқа жисмларнинг таъсири эътиборга олинмайдиган ёки ҳисобга олинадиган қилиб танланади. «Тарози»га турли моделларни қўйиб, моделларга таъсир этувчи куч ва моментларни ўлчаш мумкин.

Кучларни тарози билан ўлчаш ҳамма вақт ҳам қулай бўлавермайди, шунинг учун ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунидан фойдаланиш мумкин (109-§ га қ.). Жисмга таъсир этувчи кучни жисм атрофидаги тезлик ва босимлар *майдонини ўлчаш йўли билан аниқлаш мумкин.*

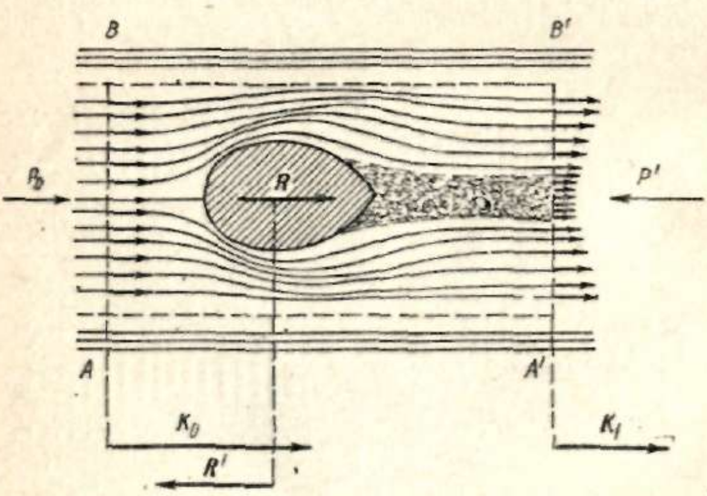
Агар бир жинсли ҳаво оқимига симметрия ўқи бўлган чоғроқ жисм қўйиб (318- расм), жисмдан олдинда ва кейинда бирор масофада тезлик ва босим *майдони* ўлчанса, у ҳолда бу ўлчаш натижаларига асосланиб жисмнинг пешана қаршилик кучини аниқлаш мумкин. Дарҳақиқат, оқимга перпендикуляр бўлган AB текислик орқали бир секунд ичида ўтган суюқликнинг K_0 ҳаракат миқдорини ва шу текисликка параллел бўлган $A'B'$ текислик орқали бир секунд ичида ўтган суюқликнинг K_1 ҳаракат миқдорини, шунингдек AB ва $A'B'$ *текисликлардаги* босимларни аниқлаймиз. Бу босим кучлари мос равишда P_0 ва P' бўлсин; унда жисм томонидан суюқликка таъсир этувчи R' пешана қаршилик кучи

$$K_1 - K_0 = P_0 + P' + R' \text{ ёки } R' = K_1 - K_0 - (P_0 + P')$$

тенгликдан аниқланади.

Бунда AB ва $A'B'$ текисликлардаги майдончалар ўлчамлари етарлича катта ва цилиндрик ён сиртлардан ўтувчи зарраларнинг (уларнинг изи 318- расмда пунктир билан кўрсатилган) ҳаракат миқдорини ҳисобга олмаса бўлади, деб фараз қиламиз.

Кўпинча жисмнинг олдидан ва орқасидан бўлаётган босимлар тенг бўлади ва $P' + P_0 \approx 0$, бунда босимни эътиборга олмаса ҳам бўлади. Бу ҳолда жисмнинг $R = -R'$ пешана қаршилик кучи жисм олдидан ҳар секундда ўтаётган суюқ-



318- расм.

ликнинг ҳаракат миқдори билан жисм орқасидан ҳар секундда ўтаётган суюқликнинг ҳаракат миқдори айирмасига тенг:

$$R = K_0 - K_1.$$

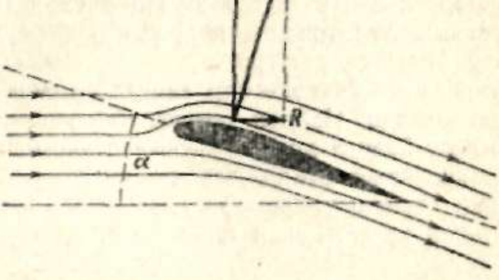
Жисмга пешана қаршилик кучигина (оқим бўйлаб йўналган куч) эмас, балки оқимга нормал равишда йўналган куч ҳам таъсир этган умумий ҳолда жисмни ўраб олган ёпиқ сиртдаги тезлик ва босим ўлчаб топилган бўлса, шу сирт орқали ҳар секундда ўтувчи суюқликнинг ҳаракат миқдорининг ўзгаришига қараб жисмга оқим томонидан таъсир этувчи куч тўғрисида фикр юритиш мумкин.

116-§. Самолёт қанотининг кўтариш кучи

Оқимнинг жисмга кўрсатадиган таъсирининг амалда ниҳоятда муҳим аҳамиятга эга бўлган мисоли самолёт қанотининг кўтариш кучи ёки оқимга қия тутилган пластинканинг кўтариш кучидир. Самолёт қаноти маълум профилли пластинка бўлиб, олдинги қирраси юмалоқ қилиб ва кетинги қирраси ўткир қилиб ишланган (319-расм). Агар пластинка оқимга нисбатан бирор α бурчак ҳосил қилиб қия тутилган бўлса (бу бурчак *атака бурчаги* дейилади), у ҳолда суюқликнинг жисмга кўрсатадиган реакциясини иккита ташкил этувчига: оқимга нормал бўлган $F_к$ кучга ва $\boldsymbol{R}$ пешана қаршилик кучига ажратиш мумкин. α атака бурчаги кичкина бўлганда $F_к$ куч R кучдан анча катта бўлади. Одатда самолёт атака бурчаги шундай бўлганда учадики, бунда $F_к$ кўтариш кучи («фойдали» куч) R кучдан («зарарли» пешана қаршилик кучидан) анча катта бўлади.

Кўтариш кучи пайдо бўлишининг Ньютон таклиф этган элементар изоҳи жуда содда. Яқинидан самолёт қаноти ўтишидан анча олдин ҳаво зарралари тинч туради; уларга қанот яқин келганда қанот тагидаги зарраларга босим ортади ва бунда зарралар пастга ва олға қараб ҳаракатга келади. Агар биз зарралар ҳаракат миқдорининг ҳар секунддаги умумий ўзгаришини (бу ўзгариш пастга йўналган) ва қанотнинг сиртларига (юқориги ва пастки сиртлар) бўлган босимлар айирмасини ҳисоблаб топа олсак, кўтариш кучини аниқлаган бўлар эдик.

Шундай қилиб, қанот ўз йўлида учраган ҳаво зарраларига пастга йўналган бирор ҳаракат миқдори беради, қанот бу зарраларни



319- расм.

пастга итаради, бинобарин, зарралар ўз навбатида қанотга юқорига қараб йўналган таъсир кўрсатади. Самолётнинг ҳавода «туриш» сабаби шундаки, қанот ҳамиша ҳаво зарраларини уриб, уларни пастга юборади. Қанотнинг пастки сиртидаги босим юқориги сиртидаги босимдан ортиқ бўлади, натижада қанотга самолёт оғирлигини мувозанатловчи кўтариш кучи таъсир қилади.

Оқимнинг қанотни айланиб ўтиш манзарасидан шу нарса кўринадики, қанотнинг юқориги сирти яқинидаги зарралар тезлиги пастки сирти яқинидаги зарралар тезлигидан катта, чунки оқим жараёнлари қанот устида остидагидан ингичкароқ. Бернулли тенгламасига асосан эса тезлик кичик бўлган жойда босим катта, бинобарин, юқориги сиртга бўлаётган босим пастки сиртга бўлаётган босимдан кичик, шу туфайли кўтариш кучи пайдо бўлади. Юқориги ва пастки сиртлардаги босимлар айирмасини тажрибада пайқаш осон.

Кўтариш кучини назарий равишда аниқлашга Ньютоннинг ўзи биринчи бўлиб уриниб кўрган. У кўтариш кучини аниқлашнинг қуйидаги усулини таклиф этган: оқимга α бурчак остида оғишган S юзли пластинкага ҳар секундда тушадиган зарралар массаси

$$\rho S v_0 \sin\alpha$$

бўлади, бу ерда одатдагича ρ — ҳавонинг зичлиги, v_0 — тезлик. Бу зарралар ўз тезлигини ўзгартириб, тезликнинг пастга йўналган $v_0 \sin\alpha$ компонентасига эга бўлади. Бинобарин, ҳаво ҳар секундда пастга қараб йўналган

$$\rho S v_0^2 \sin^2\alpha$$

ҳаракат миқдори олади, кўтариш кучи эса шу катталикка тенг бўлиши керак. Биз бажарган ҳисоб жуда қўпол бўлгани сабабли, бирдан фарқли бирор k коэффициент қўйиш ва кўтариш кучини қуйидагига тенг деб олиш лозим:

$$F_{\text{к}} = k\rho S v_0^2 \sin^2\alpha, \tag{116.1}$$

бу ердаги k тажрибадан аниқланади.

Бироқ α бурчак кичик бўлган ҳолда қанотнинг (пластинканинг) кўтариш кучини аниқлашга бағишланган тажрибалар (116.1) формуланинг тўғри эмаслигини кўрсатади: кўтариш кучи аслида v_0^2 га пропорционал, лекин у ҳақиқатда $\sin^2\alpha$ га эмас, балки $\sin\alpha$ га (ёки бурчак кичик бўлганда α нинг ўзига) пропорционалдир. Демак, Ньютоннинг хулосаси нотўғри.

Агар ҳаво (ёки суюқлик) зарралари бир-бири билан ўзаро таъсирлашмаганда эди, Ньютон тавсифлаган манзара ҳақиқатга тўғри келар эди. Қанот йўлида шундай зарралар учрайдики, улар қанотга урилганидагина қанот бўйлаб ҳаракат қилишга мажбур. Зарра пластинкага ёки қанотга урилишдан олдин тинч туради, бу зарра қанотнинг унга томон келаётганини «билмайди». Ҳақиқатда эса зарралар бир-

бири билан ўзаро таъсирлашгани сабабли аҳвол бундай бўлмайди; газдаги босим туфайли қанот яқинидаги зарралар ҳаракати, умуман айтганда, ҳамма ёққа узатилади, қанотдан олдинда турган зарралар уларга қанот яқинлашиб келаётгани туфайли ҳаракатга келади (321- расмга қ.), бутун суюқлик (ёки газ) зарралари тайинли бир ҳаракат қилади. Шунинг учун кўтариш кучини ҳисоблаш Ньютон ўйлагандек осон эмас. Шуни назарда тутиш керакки, яқинидан қанот ўтаётган зарралар энг интенсив ҳаракат қилади ва бу ерда ҳам босим энг кўп ўзгаради. Қанотдан узоқдаги зарралар жуда суст ҳаракат қилади, бироқ бундай зарралар кўп ва шунинг учун уларнинг ҳаракат миқдорини эътиборга олмаслик мумкин эмас.

Аммо товушнинг муҳитдаги тезлигидан катта (121-§ га қ.), яъни *гипертовуш* тезликлари деб аталадиган тезликларда ҳавонинг қанотни айланиб ўтиш манзараси кескин ўзгаради: фақат қанотга яқин турган зарраларгина қанот билан ўзаро таъсирлашади, бирор юпқа қатламда ётган зарраларгина қанотнинг келаётганини «сезади». Шунинг учун бундай учиш тезлигида қанотни ҳаво оқими айланиб ўтишида жуда мураккаб ҳодисалар юз беришига қарамай, Ньютоннинг (116.1) формуласи кўтариш кучини амалда аниқлаш учун мутлақо яроқли бўлади ва тажриба натижалари уни тасдиқлайди.

117-§. Қанотни суюқлик айланиб ўтиши. Циркуляция ва кўтариш кучи

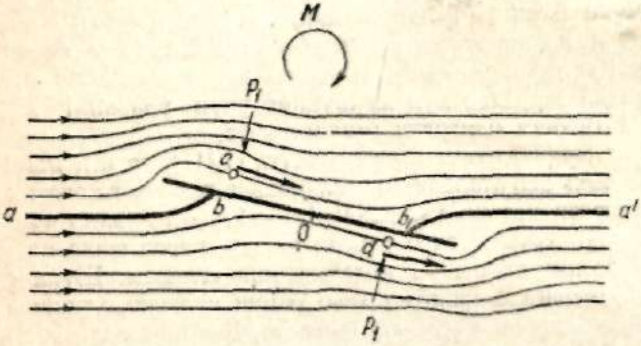
Қанотни қовушоқ суюқлик айланиб ўтиши моҳиятига тушуниб олиш учун чексиз пластинка (ёки қанот)ни идеал суюқлик айланиб ўтишининг назарияси қандай натижалар беришини кўриб чиқамиз.

Биз қанотни (пластинкани) чизма текислигига перпендикуляр бўлган йўналишда чексиз деб ҳисоблаймиз; бундай айланиб ўтишда ҳамма оқим найлари бир-бирига параллел бўлган текисликларда, жумладан чизмага параллел текисликларда ётади, бунда ушбу текисликларнинг ҳар биридаги оқим чизиқларининг шакли бир хил бўлади. Бундай оқим *ясси оқим* дейилади; ичида суюқлик ёки газ оқаётган канал деворларига тиралиб турган пластинкани суюқлик ёки газ айланиб ўтган ҳолдаги оқимни маълум даражадаги аниқликда ясси оқим дейиш мумкин.

Бу ҳисобларда қовушоқлик эътиборга олинмайди, бироқ суюқлик (ёки газ) зарраларининг қанот атрофидаги бутун фазода қиладиган ҳаракати ҳисобга олинади.

Бу ерда икки хил ҳол бўлиши мумкин: узлуксиз айланиб ўтиш ва узлукли айланиб ўтиш. Узлуксиз айланиб ўтишда оқимнинг ҳамма нуқталарида босим ва тезлик узлуксиз бўлади, узлукли айланиб ўтишда суюқликдаги босим узлуксиз ўзгаради, бироқ жойдан-жойга ўтилганда тезлик ўзгаришлари узлуксиз бўлмаслиги ҳам мумкин.

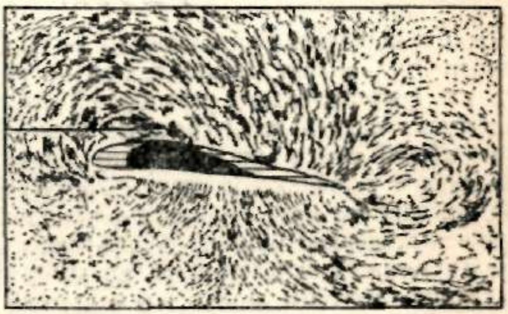
Жисмни идеал суюқлик узлуксиз айланиб ўтганда, 112-§ да айтиб ўтилгандек, куч нолга тенг бўлади. Пластинкани оқим айланиб ўтганда оқим найлари тахминан 320-расмда кўрсатилгандек бўлади. Олдинги ва кетинги сиртларда b ва b_1 критик нуқталар бўлиб, оқим тезлиги бу нуқталарда нолга тенг бўлади. Пластинкани оқим айланиб ўтиш манзараси пластинканинг ўртасига нисбатан маълум даражада симметрик бўлади; O нуқтадан ўтадиган ва чизма текислигида ётган ҳар қандай чизиқда марказдан бир хил масофада оқим тезликлари бир хил бўлади. Масалан, c ва d нуқталарда оқим тезлиги бир хил, шунинг учун бу нуқталардаги босим ҳам бир хил. Бинобарин, пластинкага таъсир этувчи босим кучларининг натижаловчиси нолга тенг бўлади. Бу ҳолда кучларнинг пластинкани соат стрелкаси йўналишида буришга интилувчи M моментигина таъсир қилади. Оқимнинг юпқа қанотни айланиб ўтиш манзараси ҳам деярли мана шундай бўлади.



320- расм.

Қанотни реал суюқлик айланиб ўтиш манзараси узлуксиз айланиб ўтиш назариясидан келиб чиқадиган манзарага мутлақо ўхшамайди. Ҳақиқатда эса манзара тахминан 319-расмда кўрсатилгандек бўлади. Кетинги қирра яқинида оқим бу қирра атрофида бурилмайди. балки юқорида ва пастда қанот бўйлаб йўналиб, қанотни иккала томондан ялаб ўтади ва кетинги қиррадан кейинда шундай қўшиладики, бунда тезликлар қанот бўйлаб йўналади. Олдинги қирра яқинида манзара тахминан идеал суюқлик оқими ҳолидагидек бўлади: критик нуқта бор, оқим кетинги қиррага ўхшаб учлик қилиб эмас, балки юмалоқ қилиб ишланган олдинги қиррани ёнлаб ўтади ва қанотнинг юқориги сиртига тақалиб бориб кетинги қиррага етиб боради.

Одатдаги шароитда қанот энди ҳаракат бошлаган вақтда қанотнинг кетинги қирраси яқинида уюрмалар ҳосил бўлганини пайқаш мумкин (321-расм). Бунинг сабаби шундаки, тезлик ҳали катта бўлмаган дастлабки вақтда оқим қанотни тахминан идеал суюқлик каби айланиб ўтади; суюқлик зарралари босим таъсири остида кетинги қирраси пастдан айланиб ўтишга интилади, бироқ қовушоқлик туфайли ўз кинетик энергиясини сарфлаб қўйиб, тўхтаб қолади; тўхтаб қолиши керак бўлган қаршидан келаётган оқим орқага кетаётган зарралар босими таъсири остида тормозланади ва шунинг учун у тўхтамайди, балки *уюрма* ҳосил қилиб қанот сирти бўйлаб ҳаракатини давом эттиради. Уюрма кетинги қиррадан ажралади ва уни оқим ўзи билан олиб кетади. Бундан сўнг оқим 319-расмда кўрсатилган стационар шаклга киради. Уюрма қанотдан ажралаётганда ўзи билан бирор ҳаракат миқдори моментини олиб кетади.

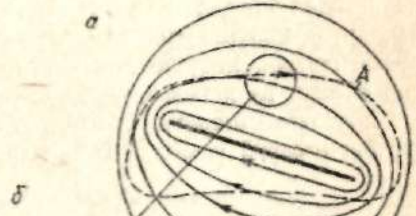


321- расм.

Уюрма билан бирга кетган суюқлик маълум ҳаракат миқдори моментига эга бўлади; бинобарин, қолган суюқлик бунга тескари ишорали ҳаракат миқдори моменти олиши керак, чунки ҳаракат бошланишидан олдин суюқликнинг ҳаракат миқдори моменти нолга тенг эди. Шунинг учун суюқлик қанот атрофида уюрманинг айланишига тескари йўналишда айланади, шу йўл билан қанот атрофида *циркуляцион ҳаракат* юзага келади. Бундай циркуляцион ҳаракат мавжудлигини гидродинамика тенгламалари тўла-тўкис изоҳлаб беради.

Шундай қилиб, қанотни (қия қўйилган пластинкани) реал суюқлик айланиб ўтишини идеал суюқликнинг 320-расмда кўрсатилган силлиқ оқими билан пластинка атрофида бўладиган циркуляцион оқимнинг (322-*а* расм) қўшилишидан иборат деб тасвирлаш мумкин.

Циркуляцион ҳаракат суюқлик зарраларининг ёпиқ чизиқлар бўйлаб қиладиган ҳа-



322- расм.

ракатидир, бу ҳаракат давомида ҳар бир зарра деформацияланади, бироқ айланмайди; зарра ёпиқ траектория бўйлаб илгариланма ҳаракат қилгандек бўлади. Назариянинг кўрсатишича, бундай ҳаракат қуйидаги муҳим хоссага эга: *жисмни ўраб олган ҳар қандай ёпиқ геометрик контур бўйлаб тезлик циркуляцияси доимий катталикдир.* Тезлик циркуляцияси деб,

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\, ds \tag{117.1}$$

скаляр катталикка айтилади, бу ерда $\boldsymbol{v}$—тезлик, ds—контур элементи. Бу эса контурнинг исталган ds элементини олиш (322-*б* расм), уни $\boldsymbol{v}$ тезликка скаляр равишда кўпайтириш ва сўнгра мазкур ёпиқ контурни ташкил этган барча ds элементларга тегишли натижаларни қўшиб чиқиш (интеграллаш) кераклигини билдиради. Γ нинг катталиги у ўзи ҳисобланган A контурнинг шаклига боғлиқ эмас. Гарчи қанотни ўраб турган турли контурларнинг ҳар хил нуқталарида тезликлар мутлақо бошқа-бошқа бўлса-да, Γ нинг бу контурларга тегишли қиймати айни бир хил бўлади. Шунинг учун Γ циркуляция катталиги мазкур жисм атрофидаги циркуляцион оқим характерини бир қийматли равишда аниқлайди. Қанотни ўраб олмаган ёпиқ контур бўйлаб ҳисобланган циркуляция нолга тенг эканини қайд қиламиз.

Н. Е. Жуковский қанот яқинидаги ҳақиқий оқимни идеал суюқликнинг бир вақтда мавжуд бўладиган қуйидаги икки оқимдан иборат бўлган оқими деб тасаввур этиш мумкинлигини кўрсатди: а) қанотни идеал суюқликнинг узлуксиз силлиқ айланиб ўтиши (унинг оқим чизиқлари 320-расмда кўрсатилган) ва б) қанот атрофидаги циркуляцион ҳаракат (унинг оқим чизиқлари 322-*а* расмда кўрсатилган). Бу ҳолда циркуляция катталиги шундайки, *иккинчи критик* b_1 *нуқта* (320-расмга қ.) кетинги қиррада туради (323-расм), b_1 нуқта c' нуқтага, b нуқта c нуқтага ўтади. Бу шароитда *кетинги қиррани оқим силлиқ айланиб ўтади*, бу ҳол худди тажрибада кузатиладигандек бўлади. Γ циркуляция катталигини бундай танлаб олиш ҳақиқатда қовушоқлик таъсири муҳим эканлигини эътиборга олишга имкон беради, қовушоқлик таъсири катта бўлганда циркуляция ҳосил бўлади ва кетинги қиррани оқим силлиқ айланиб ўтади.

Жуковский шарти деб аталган бу шартдан Γ_0 циркуляция катталигини назарий равишда аниқлаш[1] мумкин:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\pi\lambda v\alpha, \tag{117.2}$$

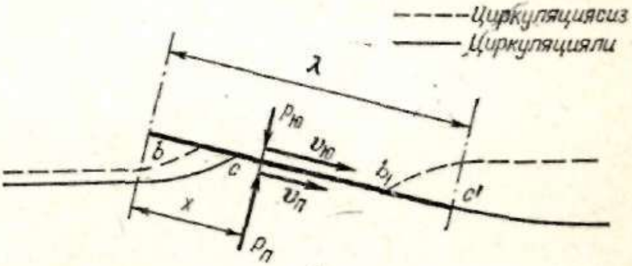
бу ерда λ—қанотнинг ватари, яъни қанотнинг олдинги қиррасидан кетинги қиррасигача оқим бўйлаб олинган масофа (323-расм), α—атака бурчаги. Агар қанот атрофидаги циркуляция бизга маълум

---

[1] Мураккаб бўлгани сабабли, бу формуланинг қандай келтириб чиқарилишини кўрсатмаймиз.

бўлса, у ҳолда қанотга таъсир этувчи кўтариш кучи катталигини топиш мумкин.

Қанотнинг атака бурчаги α, оқим қанотни маълум бир Γ_0 циркуляция билан айланиб ўтади ва оқимнинг қанотдан етарлича узоқ жойдаги тезлиги v_0, босими p_0 га тенг, деб фараз қилайлик. Пластинканинг (қанотнинг) юқориги томонидаги тезлик $v_ю(x)$, босим $p_ю(x)$ бўлсин, бу ерда x—олдинги қиррадан бошлаб ҳисобланган масофа; пластинканинг пастки сиртидаги тезликни $v_п(x)$ билан, босимни $p_п(x)$ билан белгилаймиз (323-расмга қ.). У ҳолда эни dx ва узунлиги l бўлган элементга оқим томонидан таъсир этувчи куч



323- расм.

$$(p_п - p_ю)\ ldx$$

бўлади, узунлиги l бўлган бутун пластинкага оқим томонидан таъсир этадиган кучни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$P_0 = \int_0^\lambda (p_п - p_ю)\ ldx. \tag{117.3}$$

Бернулли тенгламасига асосан,

$$p_п = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v_п^2}{2}, \qquad p_ю = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v_ю^2}{2}.$$

Бундан

$$p_п - p_ю = \frac{1}{2}\rho\,(v_ю^2 - v_п^2) = \frac{1}{2}\rho\ (v_ю + v_п)(v_ю - v_п). \tag{117.4}$$

α атака бурчаги кичик бўлганда тезликлар v_0 дан кам фарқ қилади; шунинг учун

$$v_ю + v_п \approx 2v_0, \tag{117.5}$$

деб ҳисоблаш мумкин[1]. (117. 5) ни ҳисобга олган ҳолда (117.4) ни (117. 3) га қўйиб,

$$P_0 = \int_0^\lambda \frac{\rho}{2}\, 2v_0\,(v_ю - v_п)\,ldx = \rho v_0 l \int_0^\lambda (v_ю - v_п)\,dx \tag{117.6}$$

---

[1] Жисмни оқим айланиб ўтиши (циркуляцияли ва циркуляциясиз) манзарасининг симметрик бўлиш шартига асосланиб, бу тенгликнинг тўғри эканлигини қатъий исботлаб кўрсатиш мумкин.

ифодани оламиз. Таърифга кўра,

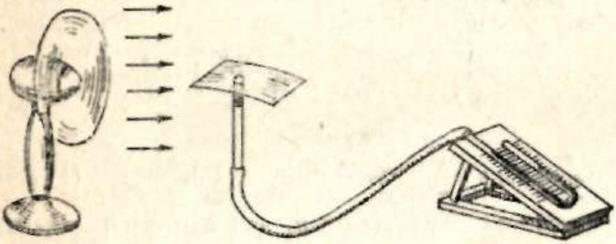
$$\int_0^{\lambda}(v_{ю}-v_{п})dx=\Gamma_0$$

интеграл қанот атрофидаги циркуляция катталигини ифодалайди. Бинобарин, (117. 6) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$P_0=\rho l\Gamma_0 v_0 \qquad (117.\ 7)$$

Бу эса *Жуковский—Куттнинг* машҳур формуласи бўлиб, қанотнинг кўтариш кучини циркуляция орқали аниқлайди. (117. 2) га асосан Γ_0 циркуляция α атака бурчаги ва тезликка пропорционал равишда ўсгани учун қанотнинг кўтариш кучи тезликнинг квадратига, ҳавонинг зичлигига ва атака бурчагига пропорционал равишда ортади. Қанот назариясининг барча бу хулосалари атака бурчаги унча катта бўлмаган ҳолларда тажриба натижаларига яхши мос келади.

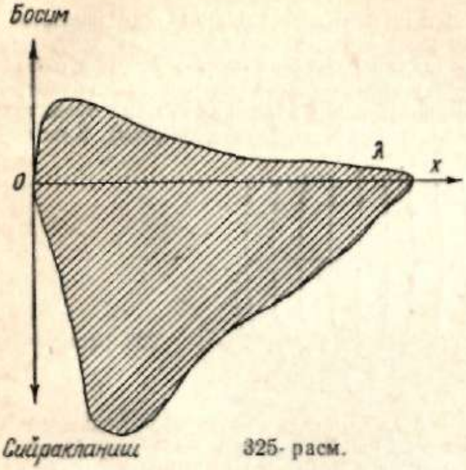
Кўтариш кучининг пайдо бўлиши нима сабабдан соат стрелкаси бўйлаб йўналган циркуляцияга боғлиқ бўлишини тасаввур этиш осон. Циркуляция борлиги туфайли қанотнинг юқори томонида, айниқса олдинги қиррага яқин жойда v тезлик v_0 дан катта бўлади. Қанотдан юқорида циркуляция тезлиги 320-расмда кўрсатилган циркуляциясиз оқим тезлигига қўшилади, пастда эса айрилади, шунинг учун $v_{ю}$ тезлик $v_{п}$ тезликдан катта бўлади. Шунинг учун $p_{ю}$ босим ҳам $p_{п}$ босимдан кичик бўлади; юқоридаги қисмда сийракланиш, пастки қисмда зичланиш бўлади. Агар қанот сиртидаги кичикроқ тешиклар манометрга уланса, қанот ёки пластинка сиртидаги босимни ўлчаш мумкин. Босим ўзгаришини сифат томондан кўрсатадиган бундай тажрибаларни ҳар ким ўзи вентилятор шамолига тутилган содда моделда қилиб кўра олади (324-расм).



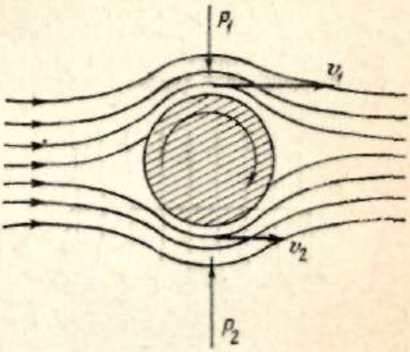
324- расм.

Одатдаги қанот кесими бўйлаб босимнинг ўзгариш эгри чизиғи тахминан 325-расмда кўрсатилган кўринишда бўлади, қанотга таъсир этувчи куч штрихлаб қўйилган юзга пропорционал. Агар қанотда тешик бўлса, ҳаво пастдан юқорига оқа бошлайди ва тешик яқинида кўтариш кучи кескин камайиб кетади.

Маълумки, агар айланаётган цилиндр ҳаво оқимига қўйилса, цилиндрга ҳаво оқимига нисбатан кўндаланг равишда йўналган куч таъсир қилади, бу кучнинг келиб чиқиши қанотнинг кўтариш кучи пайдо бўлиши билан мутлако бир хил. Дарҳақиқат, цилиндрнинг айланиш тезлиги оқим тезлиги билан бир хил бўлган жойда (326-



325-расм.

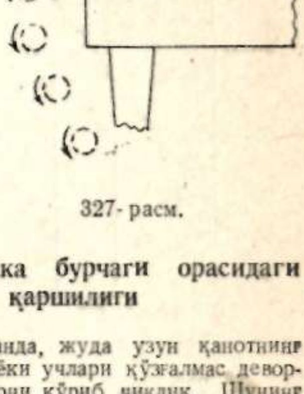


326-расм.

расм) оқим тезлиги қовушоқлик кучлари туфайли цилиндрнинг қарама-қарши томонидаги оқим тезлигидан катта бўлади, шунинг учун бир томондан бўлаётган босим иккинчи томондан бўлаётган босимдан катта бўлади. Ён томондан таъсир қиладиган (кўндаланг) куч умуман оқим тезлиги ортиши билан ҳам, цилиндрнинг айланиш тезлиги ортиши билан ҳам ортиши кўрсатилган.

Қаттиқ қоғоздан ясалган цилиндрни стол устидан юмалатиб юбориб, кўндаланг куч борлигини осонгина намойиш қилиш мумкин (327-расм). Цилиндр пастга тушаётиб, ҳамиша ўзини стол тагига томон уради. Равшанки, цилиндрнинг стол юзида юмаланишида ва пастга тушишида айланиши натижасида стол тагига томон йўналган куч ҳосил бўлади. Цилиндр айланганда кўндаланг куч пайдо бўлиш ҳодисаси *Магнус эффекти* деб аталади.

Гарчи елканлари ўрнига айланувчи цилиндрлар *(Флеттнер роторлари)* қўйилган кема қурилган бўлса-да, елканларни ёки самолёт қанотларини айланувчи цилиндрлар билан алмаштириш кўнгилдагидек натижалар бермади.

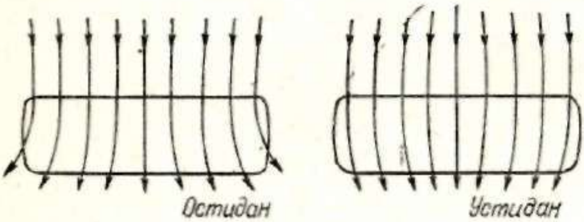


327-расм.

118-§. Қанотнинг кўтариш кучи билан атака бурчаги орасидаги муносабат. Қанотнинг пешана қаршилиги

Шу чоққача биз чексиз қанотни, аниқроқ айтганда, жуда узун қанотнинг ўртасидаги чоғроқ қисмга таъсир этувчи кучларни ёки учлари қўзғалмас деворларга тиралиб турган қанотга таъсир этувчи кучларни кўриб чиқдик. Шунинг учун биз оқим чизиқлари ҳамиша қанотга перпендикуляр бўлган текисликларда ётади ва қанотнинг ҳар қандай кесими учун бир хил деб ҳисоблаган эдик.

Агар биз тайинли l узунликдаги қанот ёки пластинка олсак, у ҳолда оқим чизиқлари қанотга перпендикуляр бўлган текисликда ётмайди, бундан ташқари, уларнинг қанотнинг юқориги ва пастки сиртларидаги йўналиши ҳар хил бўлади. Бундай қанотнинг юқоридан кўринишини тасаввур этайлик (328-расм). Қанотнинг ўртасида жараёнлар қанотнинг устида ҳам, остида ҳам оқим бўйлаб кетади. Бироқ қанотнинг четига яқинлашган сари қанот тагидаги жараёнлар қанот учига томон бурилади, қанотнинг устидаги жараёнлар эса қанотнинг ўртасига томон бурилади. Дарҳақиқат, қанотнинг устида сийракланиш, тагида босим (зичланиш) ҳосил бўлади, шунинг учун босим қанот тагидан ҳавони четга сиқиб чиқаради, ҳаво сийракланган соҳага томон интилади ва шунинг учун юқориги сирт бўйлаб келаётган жараёнларни қанотнинг марказига томон сиқади. Шундай қилиб, қанотнинг юқориги ва пастки сиртлари бўйлаб келаётган жараёнлар кетинги қиррадан кейинда қўшилиб, оқим бўйлаб айланма ҳаракат олади ва қанот орқасида ўзига хос уюрма шнурлари ҳосил бўлади, булар қанотнинг энг учида жуда кучли бўлади. Қанотнинг учлари яқинида оқим олдинги қиррага нисбатан бирор бурчакка оғиб ўтгани учун атака бурчаги камаяди ёки қанот учларида кўтариш кучи камаяди, шундай бўлиши ўз-ўзидан равшан, чунки қанот тагидан ҳаво қанот учлари орқали юқориги сиртга оқиб ўтиши туфайли қанот тагида босим пасаяди, юқорида эса босим ортади.



328- расм.

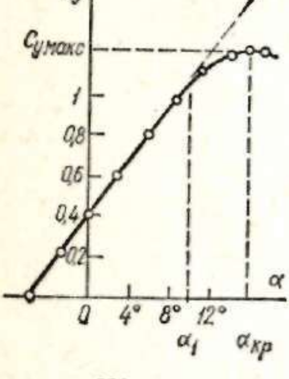
Шунинг учун қисқа ва узун қанотларнинг кўтариш кучи уларнинг юзига пропорционал бўлмайди—узун қанотнинг бирлик юзига тўғри келадиган кўтариш кучи катта бўлади.

Самолёт қанотлари синалганда ва ҳисоб қилинганда қанотнинг кўтариш кучи

$$P_{\text{к}} = C_y S \frac{\rho v^2}{2} \qquad (118.1)$$

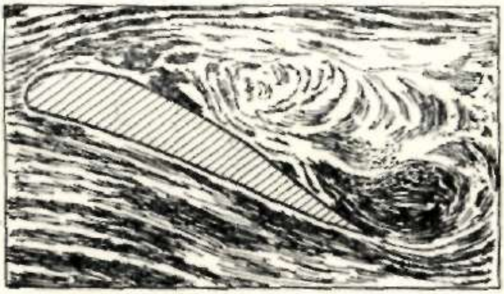
формула билан ифодаланади, бу ерда S—қанотнинг юзи, C_y—ўлчамсиз коэффициент бўлиб, Рейнольдс сонига, қанотнинг узайишига (яъни қанот узунлигининг унинг ватарига нисбатига) ва атака бурчагининг катталигига боғлиқ. Узайиш ортиши билан C_y катталик ортади.

Атака бурчаги кичик бўлганда бу бурчак ортиши билан кўтариш кучи чизиқли равишда ортади. Бинобарин, C_y катталик ҳам α га пропорционал равишда ортади (329-расм). Бироқ бундай ўсиш атака бурчагининг маълум бир α_1 қийматигача давом этади, сўнгра C_y коэффициент (ёки кўтариш кучи) секинроқ орта бориб, ниҳоят бирор $\alpha_{\text{кр}}$ қийматда максимумга эришади ва α нинг бундан кейинги ортишида камая бошлайди. $\alpha_{\text{кр}}$ қиймат *критик атака бурчаги* деб



329- расм.

аталади, унинг катталиги (10—15° чамасида) асосан қанот профилининг шаклига ва Рейнольдс сонига боғлиқ. C_y нинг $\alpha_{\text{кр}}$ даги қиймати максимал C_y деб ёки $C_{y\text{макс}}$ деб аталиб, жуда муҳим аҳамиятга эга, чунки самолёт ҳавода ўзини ҳали тутиб тура оладиган ҳолдаги энг кичик учиш тезлиги $C_{y\text{макс}}$ нинг катталиги билан аниқланади. Қўниш хавфсизлигини ошириш мақсадида $C_{y\text{макс}}$ ни ошириш йўли билан бу минимал тезликни («қўниш тезлигини») камайтиришга ҳаракат қилинади.



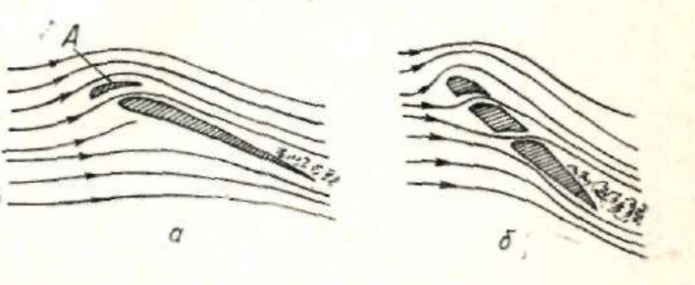
330- расм.

α нинг қийматлари $\alpha_{\text{кр}}$ дан катта бўлганда кўтариш кучи пасайишининг сабаби шундаки, α ортиши билан қанотнинг юқориги сиртида оқим қанотдан ажралади ва ажралиш соҳаси катталашади. Атака бурчаги критик қийматидан катта бўлганда оқим қанотнинг юқориги қисмига тегмайди, балки тахминан 330-расмда кўрсатилгандек «ажралади». Ажралиш зонасида босим деярли атмосфера босимига тенг, у ерда сийракланиш йўқ ва равшанки, бунинг натижасида кўтариш кучи кескин камайиб кетади.

Қанотнинг юқориги сиртидан оқим ажралишининг олдини олиш ва шу билан $C_{y\text{макс}}$ ни орттиришнинг қатор усуллари мавжуд, масалан, пешқанот ўрнатиш (331-*а* расм) ёки кесилган қанот усули (331-*б* расм). Оқим пешқанот (*A*) билан қанот орасидаги тирқишдан ўтади, шунинг учун оқим қанотнинг юқориги сиртига сиқилади, *бунинг оқибатида* $C_{y\text{макс}}$ ортади ва $\alpha_{\text{кр}}$ катталашади. Кесилган қанот қўлланилганда ҳам шундай бўлади. Шуни қайд қилиш қизиқарлидирки, қушлар қўнишда кўпинча қанотларидаги патларини шундай ёядики, бунда қанотлари кесилган қанотга ўхшаб қолади.

Суюқлик оқимининг қанотга кўрсатадиган реакция кучи ҳамиша орқага оғган бўлади: $P_{\text{к}}$ *кўтариш кучидан* ташқари ҳамиша R *пешана қаршилик* ҳам мавжуд. Пешана қаршилик кучининг катталиги

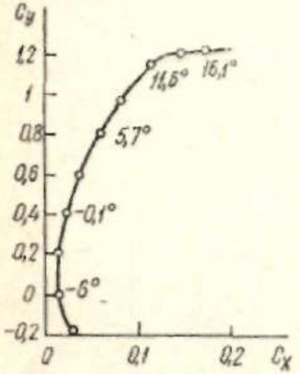
$$R = C_x S \frac{\rho v^2}{2} \qquad (118.2)$$



331- расм. *а* *б*

билан белгиланади, бу ерда C_x—ўлчамсиз коэффициент ва S—қанотнинг юзи. Яхши қанотларда C_x нинг қиймати C_y дан анча кичик. Пешана қаршилик ҳам қанотнинг атака бурчагига боғлиқ равишда ўзгаради. Қанотнинг учиш сифатларини аниқлаш учун C_x ва C_y катталикнинг иккаласи атака бурчагига боғлиқ равишда бир вақтда қандай ўзгаришини билиш ниҳоятда муҳимдир. Бу боғланишлар 332-расмда тасвирланган бўлиб, C_y ва C_x лар учун турли масштаб олинган.

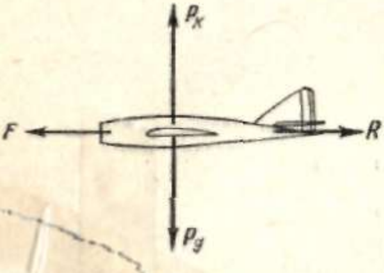
Атака бурчаги ортиши билан пешана қаршилик ошади. Кўтариш кучининг пешана қаршилик кучига нисбати энг катта бўладиган ҳолдаги атака бурчагини билиш ҳам муҳимдир. Кўтариш кучининг пешана қаршилик кучига нисбати *«қанотнинг сифати»*, яъни фойдали кўтариш кучининг зарарли пешана қаршилик кучига нисбатини аниқлайди. Бошқа шароитлар бир хил бўлганда «сифати» каттароқ қанот афзалроқ ҳисобланади, чунки атака бурчагининг «сифат» энг катта бўладиган ҳолдаги қийматларида учиш режими энг фойдали эканлиги равшандир.



332- расм.

119-§. Самолёт ҳаракатланаётганда пайдо бўладиган кучлар

Горизонтал йўналишда текис учиб кетаётган самолётга таъсир этувчи барча ташқи кучлар йиғиндиси нолга тенг. Самолётга қандай кучлар таъсир қилишини алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз. Самолётга вертикал йўналишда P_g оғирлик кучи ва қанотларнинг $P_к$ кўтариш кучи, горизонтал йўналишда винтнинг F тортиш кучи ва R пешана қаршилик кучи таъсир қилади (333-расм).



333- расм.

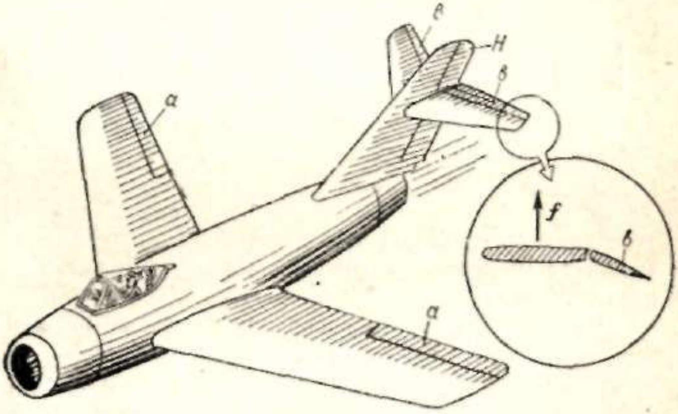
Агар $P_к > P_g$ бўлса, самолётнинг тезланиши юқорига йўналади, аксинча, $P_к < P_g$ бўлса, тезланиш пастга йўналади. Самолётнинг вертикал текисликда учиши горизонтал дум-қанотга жойлашган ва *баландлик рullари* деб аталувчи мосламалар билан бошқарилади. Горизонтал дум-қанот, яъни *стабилизатор* самолётнинг вертикал текисликда турғун учишини таъминлайди. Самолёт мувозанат ҳолатидан тасодифан оғганда горизонтал дум-қанотнинг атака бурчаги шундай ўзгарадики, бунда унга таъсир этувчи куч самолётни тўғрилаб, аввалги ҳолатига келтиради.

Баландлик рullари горизонтал дум-қанот орқасига жойлаштирилган бўлиб, унинг оғувчи қисмларидан иборат (334- расмдаги *в* ва *в*). Баландлик рули пастга оғганда горизонтал дум-қанотга таъсир этувчи юқорига йўналган куч ортади, шунинг учун самолёт тумшуғи пастга тушади. Баландлик рули юқорига оғганда самолёт тумшуғи юқори кўтарилади.

Самолётни кўндалангига бошқариш, қанотларини горизонталга нисбатан оғдириш ёки самолётни унинг горизонтал бўйлама ўқига нисбатан буришда *элеронлар* хизмат қилади (334- расмдаги *а* ва *а*). Элеронларнинг ишлаш принципи худди баландлик рulларининг ишлаш принципига ўхшайди. Элерон одатда қанот охирининг кетинги қисми бўлиб, учувчининг хоҳишига қараб бир қанотда юқорига, иккинчисида пастга оғдирилади ёки аксинча.

Самолёт вертикал ўқ атрофида *буриш рули* (ёки йўналиш рули) ёрдамида бурилади; бу руль одатда вертикал дум-қанотга жойлашган бўлади (334- расмда буриш рули *H* билан белгиланган).

Самолётнинг ***R*** пешана қаршилик кучини ***F*** тортиш кучи енгади. ***F*** тортиш кучини айланаётган винт (паррак) ёки реактив двигатель ҳосил қилади. Реактив двигателнинг тортиш кучи, 27-§ да айтиб ўтганимиздек, ҳавонинг ҳар секунддаги «сарфи» ва бу ҳавонинг двигателдан отилиб чиқиш тезлиги билан



334- расм.

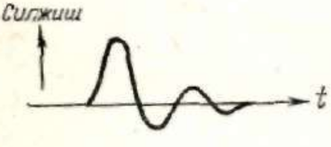
аниқланади. Винтнинг ишлаш принципи ҳам худди шундай: айланаётган винт атрофидаги ҳавони қамраб олиб, орқага отади. Винтнинг тортиш кучи ҳам орқага отилган ҳаво миқдорига ва унинг отилиш тезлигига боғлиқ. Винт кураклари одатда атака бурчаги узунлиги бўйича ўзгарадиган қанотдан иборат бўлади. Винт курагига таъсир этувчи кўтариш кучи куракнинг тортиш кучининг худди ўзгинасидир.

120-§. Сиқиладиган суюқликда (газда) босим ғалаёнларининг тарқалиши ва жисмнинг товушдан тез ҳаракат қилиши

Жисмнинг ҳаракат тезлиги кичик бўлганда ҳавони сиқилмайди деб ҳисоблаш мумкин. Юқорида кўриб ўтганимиздек (105-§ га қ.), тезлик 100 м/сек дан кичик бўлганда бунда йўл қўйиладиган хато унча катта эмас. Одатдаги шароитда ($t = 15°C$, $p = 760$ мм сим. уст.) товуш тезлиги ҳавода 340 м/сек га тенг. Жисмнинг ҳавода қиладиган ҳаракат тезлиги ортганда ҳавонинг *сиқилувчанлигини* ҳисобга олиш зарур.

Ҳавода бирор босим импульси (агар бу импульс унча катта бўлмаса) товушнинг ҳавода тарқалиш тезлигига тенг тезлик билан тарқалади. Ҳаво муҳитининг бирор жойида босимни оширсак, ҳавони сиқиб, кейин ўз ҳолига қўйсак, ҳаво кенгайиб, қўшни зарраларни (ҳаво зарраларини) ҳаракатга келтиради, булар эса ўз навбатида улардан кейинда турган зарраларни ҳаракатга келтиради ва ҳоказо. Муҳитда *тўлқин* (яъни *ғалаёнланиш*) ≈ 340 м/сек тезлик билан тарқалади.

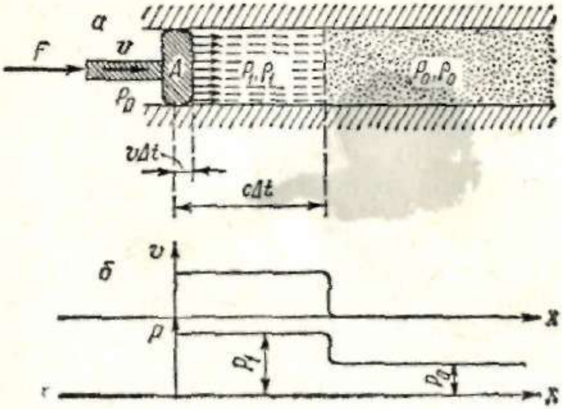
Агар бошда сиқилган газ зарраси (ҳажми) жуда кичик бўлса ёки шар шаклида бўлса, бундай заррадан *сферик* товуш тўлқини тарқалади: сферада ётган зарралар бир хил тебранади, яъни физикада айтилишича, *тўлқин фронти* сферадан иборат бўлади. Сферик симметрия туфайли, тебранишларда зарралар радиус бўйлаб силжийди ва бирор нуқтанинг вақт ўтиши билан тебранишлар характери тахминан 335-расмда кўрсатилган кўринишда бўлади. Тўлқин марказидан узоқлашган сари бу тебранишлар катталиги (интенсивлиги) камаяди.



335- расм.

Тажрибанинг кўрсатишича, зичлик тебранишлари кичик бўлганда товуш тўлқинининг тарқалиш тезлиги тебранишлар шаклига боғлиқ бўлмайди ва муҳитнинг физикавий хоссаларига боғлиқ бўлган ўзгармас катталик бўлади.

Шунинг учун товуш тезлигининг катталигини аниқлаш учун ҳаво ёки бошқа газ билан тўлдирилган цилиндрик трубада босимлар импульси тарқалишининг энг содда мисолини кўриб чиқамиз. p_0 босим остида турган газ билан тўлдирилган цилиндрик трубанинг бир томонида A поршень бор (336- *а* расм), деб фараз қилайлик. Бирор $t = 0$ пайтда поршень бир онда унча катта бўлмаган ўзгармас v тезлик билан ҳаракатга келади. Трубадаги газга нима бўлади? Труба бўйлаб «тезликлар тўлқини» ва поршень олдида «босимлар тўлқини» тарқалади[1]. Δt вақт ўтгач, поршень олдида узунлиги $c\Delta t$ бўлган бирор қатлам (газ қатлами) v тезлик билан ҳаракат қилади, бу қатламдаги босим энди p_0 га эмас, балки $p_1 = p_0 + \Delta p$ га тенг бўлади. Зарраларнинг Δt пайтдаги тезликлари графиги 336-*б* расмда тасвирланган; босимлар графигининг ҳам шакли шундай бўлади; зар-



336- расм.

---

[1] Тўлқин поршеннинг иккинчи томонида ҳам тарқалади, бироқ биз уни текширмаймиз.

ралар сиқилишиб, поршень тезлигига тенг тезлик билан ҳаракат қилмоқда, бироқ ҳаракатланаётган зарралар вақт ўтиши билан кўпаяди, чунки босимлар тўлқини олға томон тарқалаяпти.

Ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунини тўлқин тарқалишига татбиқ этамиз. Поршеннинг газга босим берадиган F кучи импульсини

$$F\,\Delta t = \Delta p\, S\, \Delta t$$

кўринишда ёзиш мумкин; бу импульс газ олган ҳаракат миқдорига тенг:

$$(\rho_0 + \Delta\rho)\; cSv\,\Delta t,$$

бу ерда $\rho_0 + \Delta\rho = \rho_1$ — тўлқиндаги, зарраларнинг сиқилган қатламидаги зичлик. Кўрсатиб ўтилган тенгликдан

$$\Delta p = (\rho_0 + \Delta\rho)\; cv \tag{120.1}$$

эканлиги келиб чиқади. Газнинг тўлқин тарқалаётган ҳажмидаги ҳаво массасининг ўзгармаслик шартини бундай ёзиш мумкин:

$$\rho_0 cS\,\Delta t = (\rho_0 + \Delta\rho)\,(c - v)\, S\,\Delta t$$

ёки

$$\Delta\rho + \rho_0 = \rho_0 \frac{c}{c - v}. \tag{120.2}$$

Бундан

$$\rho_0 + \Delta\rho = \Delta\rho \frac{c}{v}. \tag{120.3}$$

(120. 3) ни (120. 1) га қўйиб, трубада босимлар тўлқинининг тарқалиш тезлиги учун умумий ифода чиқарамиз:

$$c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}. \tag{120.4}$$

Агар $\Delta p \ll p_0$ ва $\Delta\rho \ll \rho_0$ бўлса, у ҳолда тўлқиннинг тарқалиш тезлиги

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{120.5}$$

кўринишда ёзилади. Бу формула товушнинг тарқалиш тезлигини аниқлайди, чунки товуш тўлқинида босим ва зичлик жуда кичик dp ва $d\rho$ миқдорда ўзгаради.

Товуш тўлқинида босим ва зичлик ўзгаришлари адиабата[1] қонуни (105- §) билан боғланган:

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^{\varkappa}}\, \rho^{\varkappa},$$

---

[1] Босим билан зичликни боғловчи адиабатик қонун ($p = \text{const}\cdot\rho^{\varkappa}$) шундай процессларга тааллуқлики, бу процессларда атрофдаги жисмлар билан иссиқлик алмашиш юз бермайди. Биз текшираётган ҳолда газ зарраси учун босим жуда тез ошади, шунинг учун бу процессни, Лаплас кўрсатиб берганидек, адиабатик процесс деб ҳисоблаш мумкин.

бу ерда p_0 ва ρ_0—босим ва зичликнинг тўлқин йўқ жойдаги қийматлари; шунинг учун

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0} \varkappa d\rho. \qquad (120.6)$$

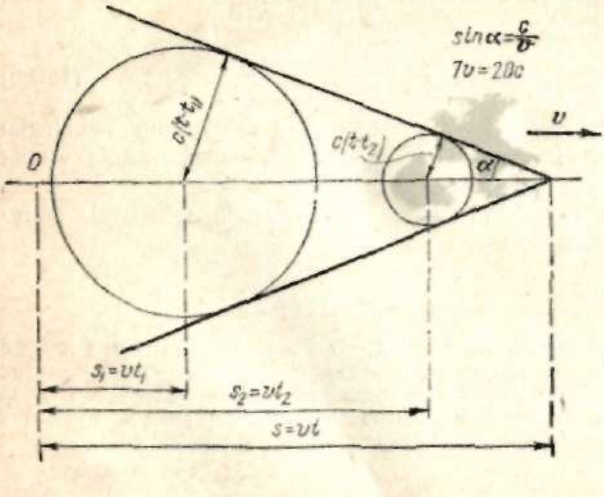
(120. 6) ни (120. 5) га қўйиб, товушнинг газдаги тезлиги қуйидагича эканини топамиз:

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p_0}{\rho_0}}. \qquad (120.7)$$

Газ ёки суюқликда тўлқиннинг тарқалиш тезлиги $\frac{\Delta p}{\Delta \rho}$ дан чиқарилган квадрат илдизга пропорционал, бу ерда $\Delta\rho$ — бирор газ зарраси зичлигининг босимнинг Δp га ўзгариши туфайли ўзгариши. Агар Δp нинг тайинли бир қиймати зичликни салгина ўзгартирса, яъни газ ёки суюқлик жуда оз сиқилса, товушнинг тезлиги катта бўлади. *Сиқилмайдиган* суюқлик Δp *чекли бўлганда* $\Delta\rho \to 0$ га мос келади ёки бошқача айтганда, сиқилмайдиган суюқликда товушнинг тезлиги чексизликка интилиши керак.

Нуқта деб ҳисоблаш мумкин бўлган кичкина қаттиқ жисм му*ҳитда (газда) товуш тезлигидан катта бўлган v тезлик билан тўғри* чизиқ бўйлаб ҳаракатланяпти, деб фараз қилайлик. Ҳаракат вақтида жисм муҳитнинг тинч турган зарралари билан тўқнашади. Бу тўқнашишлар натижасида импульслар пайдо бўлиб, улар атрофдаги *фазода ўзгармас c товуш тезлиги билан ҳамма томонга тарқалади.* Равшанки, муҳитнинг зарралари ҳаракат қилмагани сабабли тўлқин фронти сферадан иборат бўлади.

Бу процесс узлуксиз процессдир: t_1 пайтда жисм координатаси s_1 *бўлган нуқтада бўлади* (337-расм) ва dt вақт ичида узунлиги



337- расм.

vdt бўлган газ зарраси билан тўқнашади; $t - t_1$ вақт ичида бу заррадан радиуси $c\,(t - t_1)$ бўлган сферик товуш тўлқини тарқалади; бундан кейинги вақт оралиқларида ҳам шундай процесс юз беради. Масалан, координатаси $s_2 = vt_2$ бўлган нуқтадан t_2 пайтда ($t_2 > t_1$) худди шундай сферик тўлқин тарқала бошлайди, бу тўлқин $t > t_2$ пайтда $c\,(t - t_2)$ радиусга эга бўлади ва ҳоказо. Барча сферик тўлқинлар тўпламининг ўрама сиртини тасаввур этиш мумкин: бу сирт конус шаклида бўлиб, унинг учи муайян t пайтда координатаси $s = vt$ бўлган нуқтада, яъни ҳаракатланаётган жисм турган нуқтада бўлади. Конуснинг учидаги бурчаги 2α га тенг; α нинг қиймати

$$\sin\alpha = \frac{c\,(t - t_2)}{v\,(t - t_2)} = \frac{c}{v} \qquad (120.8)$$

тенгламадан аниқланади. Тўлқинларнинг конус сиртига ёндашган ҳамма қисмларининг шакли айни бир хил бўлади; улар қўшилиб, бу ерда бир-бирини кучайтиради.

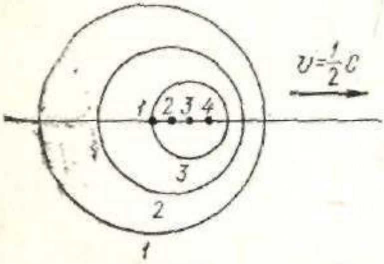
Шуниси муҳимки, ҳаракатланаётган зарра *Мах конуси* деб аталадиган конус ичидаги фазонинг бир қисминигини «ғалаёнлантиради». Муҳитнинг қолган ҳамма зарралари t пайтда тинч туради. Бинобарин, жисмнинг (нуқтанинг) товуш тезлигидан катта тезлик билан қиладиган ҳаракати манзарасини жисм билан бирга ҳаракатланадиган *Мах конуси* ичида товуш тўлқинлари кетма-кетлиги тарқалишининг узлуксиз процесси деб тасаввур этиш мумкин. v тезлик қанча катта бўлса, α шунча кичик, конуснинг учидаги бурчак шунча кичик, фазонинг ҳаракатланаётган зарра таъсиридан ғалаёнланадиган қисми шунча кичик бўлади.

Тўлқинлар ҳосил бўлишига энергия сарф этилиши ҳаммага тушунарли; жисмнинг кинетик энергияси қисман товуш тўлқинларининг энергиясига айланади ва, бинобарин, жисмга «ҳаракатга қаршилик кўрсатувчи куч» таъсир этади; бу куч *тўлқиний қаршилик* кучи деб аталади. Товуш тўлқинларида тебранишлар вақт ўтиши билан сусаяди, чунки вақт ўтиши билан тўлқинлар фазонинг тобора кўп соҳасини эгаллаб боради ва газдаги ички ишқаланиш туфайли сўнади; охир-оқибатда конуснинг «думи» фазода сочилиб кетади.

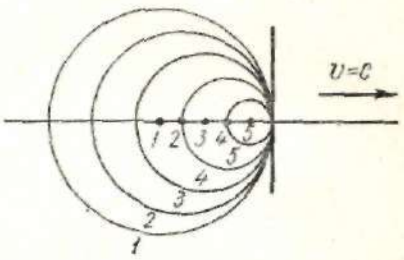
Агар зарра товуш тезлигидан катта бўлмаган тезлик билан тарқалса ҳам ундан товуш тўлқинлари тарқалган бўлар эди, бироқ буларнинг характери бошқача бўлар эди: ғалаёнланиш газ эгаллаб турган бутун фазони эгаллаган бўлар эди, буни 338- расмни кўриб тасаввур этиш мумкин; бу расмда жисмнинг вазияти ва ундан тарқаладиган тўлқин фронти бир хил рақамлар билан белгиланган. Агар зарра мазкур вазиятга узоқ вақт ҳаракат қилиб келган бўлса, тўлқинлар фазони тўлиқ эгаллайди.

Жисм тезлиги товуш тезлигига тенг бўлганда ғалаёнланиш соҳаси фазонинг ярмини эгаллайди, чунки Мах конусининг учидаги бурчаги $2\alpha = \pi$ га тенг (бунга тегишли манзара 339- расмда кўрсатилган).

Бу ерда баён этилган кичик жисм (нуқта) ҳаракати тўғрисидаги фаразий мисол катта жисмларнинг товуш тезлигидан катта тезлик билан қиладиган ҳаракатида юз берадиган процесслар манзарасини тасаввур этишимизга имкон беради. Агар самолёт қаноти етарлича юпқа ва олдинги қирраси ўткир бўлса, у ҳолда қанотни дастлабки чамалашда майда жисмлар (нуқталар, зарралар) тўплами деб ҳисоблаш мумкин;

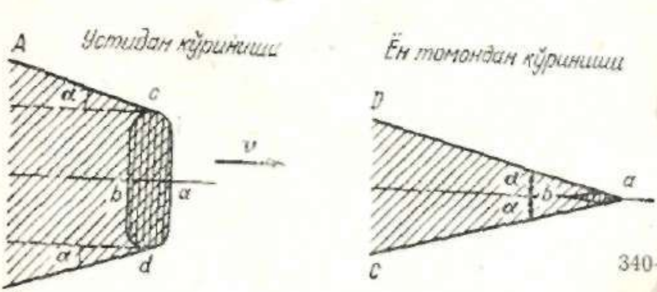


338- расм.



339- расм.

бу майда жисмларнинг ҳар бири теварак-атрофга сферик товуш тўлқини тарқатади. Натижаловчи тўлқин қанот сиртининг ҳар бир нуқтасидан келаётган алоҳида элементар тўлқинларнинг бир-бирига қўшилишидан иборат бўлиб, ғалаёнланиш соҳаси қанот сиртининг ҳар бир нуқтаси билан бирга ҳаракатланувчи Мах конусларининг тўплами орқали аниқланади. Фазонинг ғалаёнланган соҳасининг сирти энди конус бўлмай қолади, бироқ бу сирт барча Мах конусларининг ўрамасини эканлигини ҳисобга олсак, уни тасаввур этиш қийин бўлмайди. Масалан, 340- расмга қараб бирор юпқа *adbc* пластинка атрофидаги ўрама сирт вазиятини тасаввур этиш мумкин. (Расмда бу сиртнинг горизонтал *AcadB* ва вертикал *DaC* текисликлар билан кесишуви кўрсатилган.) Биринчи яқинлашишда қанот атрофида элементар тўлқинлар тарқалишининг бу содда манзарасидан фойдаланиб, қанотнинг тўлқиний қаршилиги ва кўтариш кучини ҳисоблаш мумкин.



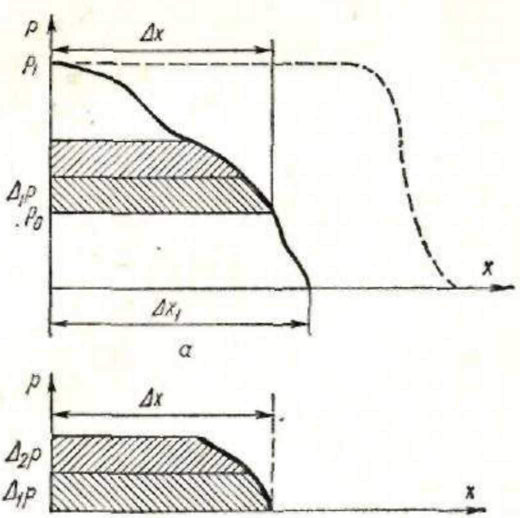
340- расм.

Ҳақиқатда ҳодисанинг манзараси мураккаброқдир, муҳит зарраларининг жисмга берадиган зарблари жуда кучли, яъни бу зарблар натижасида босим анчагина ўзгаради ва атрофдаги фазода тарқалувчи ғалаёнланиш характери бирмунча бошқача бўлиб қолади: энди ғалаёнланишларни муҳитнинг зичлиги ва босими оз ўзгарадиган оддий акустик тўлқинлар тўплами (йиғиндиси) орқали ифодалаб бўлмайди. Тумшуғи тўмтоқ бўлган қиёсан йўғон жисмларда бу фарқ айниқса сезиларли бўлади; бу тўғрида биз кейинги параграфда гапирамиз.

121- §. Босим кўп ўзгарган ҳолдаги тўлқинлар ва жисмнинг катта тезлик билан қиладиган ҳаракати

Бундан олдинги параграфда биз поршеннинг ҳаракат тезлиги жуда кичик, яъни $v \ll c$ деб ва Δp катталик p_0 га нисбатан жуда кичик деб фараз қилган эдик. Ундан сўнг биз поршень бир онда ҳаракатга келади ва бирданига чекли v тезликка эга бўлади, деб ҳисоблаган эдик. Агар поршень тезлигининг нолдан v гача ошувига кетган $\Delta\tau$ вақт Δt дан анча кичик бўлса, у ҳолда биз чиқарган хулосаларнинг ҳаммаси ўз кучида қолади, бироқ босим (ёки тезлик) тўлқини олдинги фронтининг графиги 336- *б* расмдагидек тиккароқ бўлмай қолади. Тўлқин фронтидаги зарранинг тезлиги $\Delta\tau$ вақт ичида нолдан v гача ортади.

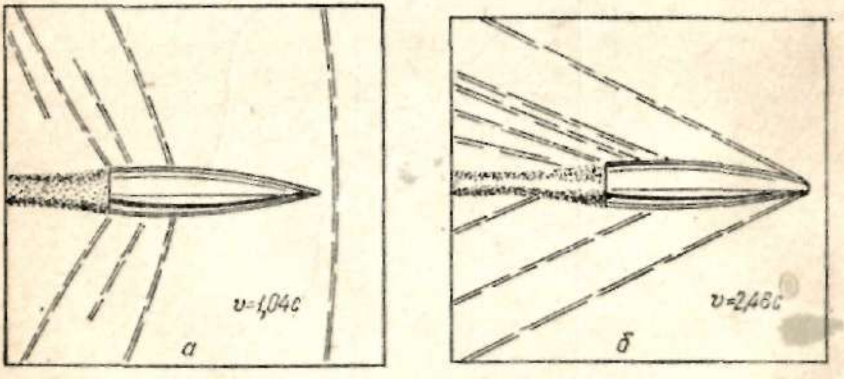
Энди босим кўп ўзгарган ҳолдаги тўлқинни кўриб чиқамиз. Поршень босими $\Delta\tau$ вақт ичида каттагина p_1 миқдорда ортди ва поршень олдидаги босим тақсимоти $\Delta\tau$ пайтда 341- *а* расмда кўрсатилгандек шаклда бўлади, деб фараз қиламиз. Бундай мураккаб тўлқиннинг



341- расм.

тарқалишини бундан олдинги параграфда кўриб ўтилган ва интенсивлиги кичик бўлган кетма-кет келган элементар тўлқинларнинг тарқалиши сифатида тассавур этиш мумкин. Бу элементар тўлқинларнинг ҳар бири бири кетидан бири тарқалади ва бу тўлқинда босим оз ўзгариб, бу ўзгариш Δp га тенг бўлади; у ҳолда $\Delta x_1 = c\Delta\tau$. Босимнинг $\Delta_1 p$ катталикдаги элементар тўлқини p_0 босимга қадар сиқилган муҳитда 341- *б* расмда кўрсатилгандек тарқаляпти, деб фараз қилайлик.

Босим $p_0 + \Delta_1 p$ миқдорида бўлгунча сиқилган муҳитда босимнинг $\Delta_2 p$ катталикдаги элементар тўлқини олдинги тўлқинидан орқада тарқалади ва шу тариқа босим катталиги p_1 га етгунча давом этади. Кейинда келаётган элементар тўлқинларнинг ҳар бири тобора зичроқ муҳитда тарқалади. Зичлик ва босим ўзгариши $p = \mathrm{const} \cdot \rho^{\varkappa}$ адиабата қонуни билан боғланган; ҳаво учун $\varkappa = 1{,}4$; адиабатага ўтказилган уринманинг оғмалик бурчаги тангенси (120. 5) га асосан, товуш тезлигининг квадратига тенг; шунинг учун зичлик ортиши билан товуш тезлиги ортади. Бинобарин, кечроқ пайдо бўлган элементар тўлқинлар олдин чиққан тўлқинларни қувлаб етади ва *тўлқин фронти* вақт ўтиши билан тобора *тикроқ* бўла боради ва ниҳоят 341- *а* расмда пунктир билан кўрсатилган шаклга келади; демак, трубада бундан сўнг *босимларнинг узлукли тўлқини* тарқалади, бу тўлқинда босим ва тезлик деярли бир зумда *сакраб* ортади, сакрашдан сўнг босим ва тезлик қийматлари ўзгармайди[1]. Узлукли тўлқиннинг тарқалиш тезлигини аниқлаш қийинроқ, бу тезлик товуш тезлигидан фарқ қилиб, босим сакрашининг катталигига боғлиқдир. Бинобарин, босим бирданига кўп ўзгарганда, масалан, ҳавода снаряд ёки бомба портлаганда босимнинг узлукли тўлқинлари



342- расм.

---

[1] Бунга ўхшаш мулоҳазалар шуни кўрсатадики, агар муҳитда *сийракланиш* тўлқини тарқалса, у ҳолда сийракланиш тўлқинининг фронти ёйилиб, тўлқин тарқала борган сари тобора *ётикроқ* бўла боради.

тарқалади. Бу тўлкинларда босим сакрашининг катталиги ҳам масофа ортган сари камаяди, айниқса бомба ёки снаряд кичикроқ соҳада портлаган ва ундан деярли сферик шаклдаги тўлқинлар тарқалган ҳолда босим сакраши тез камаяди.

Узлукли тўлқин фронти муайян заррадан ўтган вақтда бу зарра ҳаракатланаётган зарралар томонидан *зарб* ейди, бунда зарранинг тезлиги бир зумда нолдан бирор чекли қийматга қадар ортади. Шунинг учун узлукли тўлқинлар *зарб* тўлқинлари деб ҳам аталади.

Товушнинг муҳитдаги тезлигидан катта тезлик билан ҳаракатланаётган тўмтоқ жисмдан олдинда ва ён томонда тахминан худди шундай манзара юз беради. Бу ҳолда зарб тўлқинининг бош қисми бўлиб, жисм учлик қилиб ишланган ва тезлиги етарлича катта бўлган ҳолда бу қисм найзага яқин бўлади. Жисм билан бирга келаётган зарб тўлқинининг қисми жисмдан олдиндаги зарраларни учратмагунча бу зарралар бутунлай тинч туради.

Муҳитнинг зарраси орқали зарб тўлқини ўтган пайтда зарра бир зумда сиқилиб, бирор тезлик олади. Жисм билан зарб тўлқини фронти орасидаги ҳаво ҳаракатланади, зарралар жисмга жой бўшатиб бериб, четга тарқалади. Бу манзара цилиндрик трубада юз берадиган тўлқин процессга ўхшайди, бироқ цилиндрик трубада зарб тўлқини билан поршень орасидаги сиқилган газ қатлами ҳамма вақт ортади, бу ерда эса сиқилган газ зарралари муттасил четга кетиб туради (чунки девор йўқ) ва зарб тўлқини билан жисм орасидаги қатламнинг қалинлиги ўзгармайди; бу қатламга муттасил равишда келиб турган ҳаво зарралари атрофдаги муҳитда ғалаёнланиш юзага келтириб ҳамма томонга тарқалади. Ғалаёнланишлар босим сакрашининг катталигига боғлиқ бўлган бирор тезлик билан тарқалади. Бироқ табиийки, жисмдан узоқлашилган сари босим сакрашининг қиймати камаяди ва ғалаёнланишларнинг тарқалиш тезлиги товуш тезлигидан кам фарқ қиладиган бўлиб қолади, шунинг учун зарб тўлқинининг шакли тегишли Мах конусига ўхшаш бўлиб қолади.

Ўткир учли жисмлар $v > c$ тезлик билан ҳаракат қилганда тумшуқ билан зарб тўлқини орасидаги қатлам жуда юпқа бўлади ва зарб тўлқини жисмнинг олдинги нуқтасидан олдинда кетади. Тезлик жуда катта (яъни $v \gg c$) бўлганда зарб тўлқини жисм сиртига жуда яқин ўтади, Мах конуси анча чўзилиб қолган бўлади.

Зарб тўлқини ҳамма вақт товушдан тез учар самолёт билан бирга боради; агар самолёт етарлича юқори бўлмаган баландликда учса, у ҳолда босимлар сакрашининг катталиги ер юзига яқин жойларда янада катта бўлади. Бундай тўлқин киши қулоғига етиб келганда граната ёки снаряднинг портлашига ўхшаган кескин «портлаш» овози эшитилади ва ундан сўнг учиб кетаётган самолётнинг одатдаги шовқини келади. Табиийки, учувчи бундай портлаш овозини ҳеч эшитмайди, у тўлқин билан бирга ҳаракатланади. 342-расмда $v = 1{,}04\ c$ ва $v = 2{,}48c$ тезлик билан учаётган ўқлар кўрсатилган; зарб тўлқинининг сояси нуқталар тарзида тасвирланган.

Товуш тезлигидан катта тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг (снаряд, ўқ ва шу кабиларнинг) энергияси асосан у билан бирга борадиган зарб тўлқинлари ҳосил қилишга сарф этилади. Жисмнинг бундай тезлик билан қиладиган ҳаракатига кўрсатиладиган қаршилик асосан *тўлқиний қаршиликдир*. Жисмнинг ўз йўлида учраган зарраларга зарб бериши натижасида муҳит зарралари ҳаракатга келади. Жисм келиб урилган зарралар жисмга йўл бўшатиб бериб, атрофдаги муҳит зарраларини ҳаракатга келтиради, бу ҳаракат зарб тўлқинининг бош қисми ўтгандан сўнг бошланади. Зарраларни ҳаракатга келтиришга ва зарралар тўқнашганда чиқадиган иссиқликка сарфланган энергия ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергияси камайиши ҳисобига ёки жисмни ҳаракатга келтираётган манба ҳисобига ҳосил бўлади. Жисм олдинги қисмининг шакли пешана қаршилик катталигига кўп таъсир қилади: тумшуғи ўткир қилинган ва кўндаланг кесими кичик бўлган жисмларнинг пешана қаршилиги кичик бўлади. Жисмнинг кетинги қисмининг шакли бу ҳолда унча катта аҳамиятга эга эмас, ваҳоланки ҳавонинг жисмни айланиб ўтиш тезлиги унча катта бўлмаган ҳолда кетинги қисм шаклининг аҳамияти катта бўлади.

122-§. Трубада оқимнинг товушдан тез ҳаракат қилиши

105-§ да кўрганимиздек, идишда $p_н$ босим остида турган газнинг тешикдан оқиб чиқиш тезлиги назарий ҳисобларга кўра жуда катта бўлиши мумкин. Масалан, бир атмосферага тенг босим остида турган ҳавонинг ноль босимли фазога (вакуумга) оқиб чиқиш тезлиги, (105. 5) формулага асосан, қуйидагича бўлади:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_н}{\rho_н}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1,405\cdot 1,0133\cdot 10^5}{0,405\cdot 1,293}} \approx 750 \text{ м/сек},$$

бу ерда адиабата коэффициенти $\varkappa = 1,405$, атмосфера босими $p_н = 1,0133\cdot 10^5$ кг/м·сек^2 ва ҳавонинг бошланғич зичлиги $\rho_н = 1,293$ кг/м^3.

Бу оқим тезлиги товуш тезлигидан икки баравардан зиёд ортиқ. Бироқ тешик 301-*а* расмда кўрсатилгандек торайиб борадиган тешик бўлса, оқим тезлиги амалда бунга етмайди. Дарҳақиқат, идишдан ташқарида ва идиш ичида босим бир хил бўлсин, ташқаридаги босимни аста-секин камайтирамиз, бунда идишдаги босим ўзгармай (бир атмосфера бўлганича) туради деб фараз қиламиз. У ҳолда тешикнинг тор кесимида максимал тезлик аста-секин ортади. Ташқаридаги босимнинг (105. 5) формуладан аниқланиши мумкин бўлган бирор қийматида оқим тезлиги товуш тезлигига тенглашади ва тешикнинг бутун кесими товуш тезлиги билан ҳаракат қилувчи газ билан тўлади.

Агар ташқаридаги босимнинг ўзгариши идиш ичига бирор даражада ўтса, у ҳолда унинг ҳар қандай ўзгариши идиш ичидаги оқимга таъсир кўрсатади. Газдаги босимнинг ўзгариши товуш тезлиги билан тарқалади ва, бинобарин, бу ўзгариш идишнинг ичига товуш тезлиги билан ҳаракатланаётган зарралар эгаллаган соҳа орқали ўта олмайди. Шундай қилиб, ташқаридаги босимнинг янада камайиши тешикдаги оқим тезлигини оширмайди. Тешикдаги ҳаво жараёни атрофдагидан каттароқ бўлган тайинли бир босимга эга бўлади Товуш тезлиги билан ҳаракатланаётган оқим тешикни «бекитиб» қўяди. Бу хулоса ўзгарувчан кесимли оқим найи бўйлаб сиқилувчан газнинг стационар оқими мавжудлиги шартларининг анализи билан ҳам тасдиқланади.

Сиқилувчан газ стационар оқимининг оқим найи S кесимга эга бўлсин, бу кесимни x координатанинг функцияси деб ҳисоблаймиз; x координата ўқини най ўқи бўйлаб оқим томонга йўналтирамиз. У ҳолда стационар оқимда най бўйлаб масса оқимининг доимий бўлиш шарти қуйидагича ёзилади:

$$\rho v S = \mathrm{const}, \tag{122.1}$$

бу ердаги ҳамма катталиклар фақат x нинг функцияларидир. Координатаси x бўлган кесимдан координатаси $x + dx$ бўлган кесимга ўтилганда ҳамма катталиклар ўзгаради, бироқ уларнинг дифференциаллари қуйидаги муносабатга бўйсунади:

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0\,, \tag{122.2}$$

бу муносабат (122.1) ни дифференциаллашдан топилади. Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан,

$$-dp = \rho v\, dv, \tag{122.3}$$

бу ерда dp — босимнинг x координатали кесимдан $x + dx$ га ўтилган ҳолдаги орттирмаси. Энди товуш тезлигига оид (120-§ га қ.)

$$dp = c^2\, d\rho \tag{122.4}$$

муносабатни эътиборга оламиз; уни (122.3) га қўямиз:

$$\rho v\, dv = -\, c^2\, d\rho$$

ёки

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\,\frac{v dv}{c^2}\,. \tag{122. 5}$$

Бу ифодани (122.2) га қўйиб, найнинг кўндаланг кесими билан оқим тезлиги орасидаги боғланишни топамиз:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right). \tag{122.6}$$

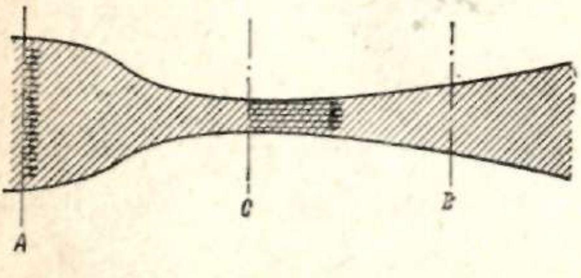
Бу формула най кесимининг dS ўзгариши билан v тезлик ўзгариши орасидаги муносабатни ифодалайди, айни вақтда бу формула оқим тезлигининг товуш тезлигига (c га) нисбатининг принципиал аҳамиятини ҳам кўрсатади.

Агар оқим найи оқим бўйлаб торайиб борса (яъни dS манфий бўлса), у ҳолда (122.6) га асосан, $\frac{v}{c} < 1$ бўлган шароитдагина $dv > 0$ бўлади. Демак, торайиб борувчи оқим найида v тезлик оқим бўйлаб товушнинг c тезлигидан катта бўлмаган бирор қийматигагина қадар ортади. dv нинг қиймати мусбат бўлганда, яъни тезлик ошганда ρ зичлик ҳамиша камайиши (122.5) шартдан кўриниб турибди. *Торайиб борувчи оқим найида оқим тезлиги ошади, зичлик ва босим оқим бўйлаб камаяди, бироқ тезлик c дан катта бўлолмайди*. Бу хулосага биз бундан олдин элементар мулоҳазалар асосида ҳам келган эдик.

Агар оқим найи кенгая борса ($dS > 0$) ва оқим тезлиги най бошида c дан кичик бўлса, (122.6) га асосан, $dv < 0$ бўлади. Демак, оқим тезлиги оқим бўйлаб *камаяди*, босим ва зичлик *ортади*; шундай эканлиги (122.5) дан кўриниб турибди. Агар кенгая борувчи оқим найида v оқим тезлиги c тезликдан катта бўлса, у ҳолда $dv > 0$ ва оқим тезлиги оқим бўйлаб *ортади*, босим ва зичлик *камаяди*.

Бу ерда манзара оқим тезлиги c тезликдан кичик бўлган сиқилмайдиган суюқлик оқимидаги ёки газ оқимидаги манзарадан бутунлай бошқача бўлади. Дарҳақиқат, оқим тезлиги c тезликдан кичик бўлганда кенгая борувчи найда тезлик оқим бўйлаб камаяди, босим ва зичлик ортади. Сиқилмайдиган суюқликда $c \to \infty$, шунинг учун кенгаювчи ва тораювчи найда тезлик ўзгаришининг сифат томони c дан кичик v тезликда газда бўладиган ҳол билан бир хил бўлади.

Шундай қилиб, оқимни трубада товушдан катта тезлик билан ҳаракатланадиган қилиш учун трубани олдин тораядиган ва кейин кенгаядиган қилиш шарт (343-расм). Босимлар айирмаси тегишлича қилиб олинганда оқимнинг A кесимдан C кесимгача бўлган оралиқда тезлиги товуш тезлигига қадар ортади, сўнгра эса C кесимдан D кесимгача оралиқда тезлик товуш тезлигидан ортиқ бўлгани ҳолда оқим бўйлаб ортади. Трубанинг кесимини шундай танлаб олиш керакки,



343-расм.

тайинли бир тезликка эришиш учун кетадиган босим исрофлари минимал бўлсин. Агар трубанинг кенгайиши мақбул бўлмаса, у ҳолда товуш тезлигидан катта тезликлар зонасида труба деворларига нисбатан қимирламайдиган «сакраш» (*узлукли тўлқинлар*) ҳосил бўлиши мумкин, сакрашдан сўнг тезлик пасаяди. Сакраш пайдо бўлиш сабаблари устида биз тўхталиб туролмаймиз.

Моделларни товуш тезлигидан катта тезликли оқимда синаш учун мана шундай оқимли аэродинамик трубалар қурилади; буларнинг кесими тахминан 343-расмда кўрсатилгандек бўлиб, бунда модель D кесим зонасига қўйилади. Модель яқинида узлукли тўлқинлар пайдо бўлади, булар тинч турган ҳавода товуш тезлигидан катта тезлик билан учганда ҳосил бўладиган узлукли тўлқинлар кабидир.

УЧИНЧИ ҚИСМ

ТЕБРАНИШЛАР ВА ТЎЛҚИНЛАР. АКУСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ. МАХСУС НИСБИЙЛИК НАЗАРИЯСИ АСОСЛАРИ

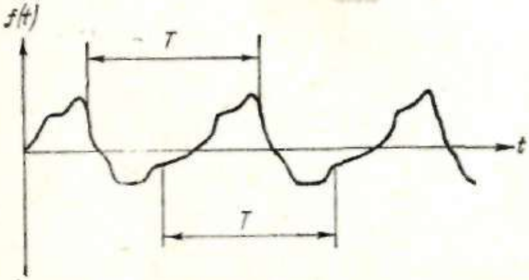
XIV БОБ

ТЕБРАНИШЛАР

123-§. Даврий процесслар

Табиат ҳодисалари орасида биз даврий процессларни тез-тез кўриб турамиз: булар кун ва тун алмашиниши, Ойнинг Ер атрофида ҳаракат қилиши, планеталар ҳаракати ва ҳоказо. Турмуш ва техникада ҳам соат маятнигининг тебранишлари, хилма-хил машина қисмларининг айланиши ва ҳаракати — буларнинг ҳаммаси даврий ҳодисалардир.

Даврий ҳодисада бирор катталикнинг ўзгариши айни ўша кўринишда тайинли бир вақтда такрорланади, бу вақт давр дейилади. Даврий катталикнинг математикавий таърифи бундай: агар $f(t)$ функция t нинг T даврли функцияси бўлса, у ҳолди t нинг ихтиёрий қийматида $f(t+T)=f(t)$ бўлади. Даврий равишда ўзгарадиган катталикнинг графиги бир даврдан кейин аниқ такрорланади (344-расм). Биз кўпинча даврий ҳаракатга ўхшайдиган даврий бўлмаган ҳодисаларни учратамиз: масалан, ипга осиб қўйилган юкчанинг маятникка ўхшаб тебранишлари, жойидан қимирлатилган дарахт шохчасининг тебранишлари ва ҳоказо. Бу ҳодисаларнинг ҳаммасида процесслар даврий бўлмайди, тебранишлар аста-секин сўнади. Бу процессларнинг ҳаммаси ва уларга ўхшаганлари умумийроқ ном билан *тебранишлар* деб аталади, даврий тебранишлар эса умуман тебранишларнинг хусусий ҳолидир.



344-расм.

Агар тебранишлар бир заррадан бошқасига узатилса, масалан, тош тушганда сув юзининг тебранишлари сувнинг қўшни зарраларига узатилгани каби узатилса, у ҳолда ҳамма зарралар тебранишларининг бундай тўплами *тўлқин процесс* деб аталади.

Табиатда юз берадиган хилма-хил тебранишлар орасида *гармоник тебранишлар* асосий ва жуда муҳим роль ўйнайди.

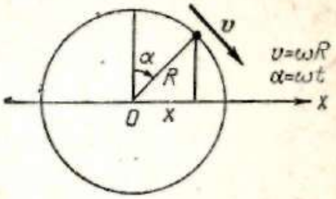
124-§. Гармоник тебранишлар

Гармоник тебранишлар шундай даврий процессдирки, бунда кузатилаётган катталик синус (ёки косинус) қонуни билан ўзгаради. Масалан, айлана бўйлаб текис ҳаракат қилаётган нуқтанинг (345-расм) шу ҳаракат текислигидаги тўғри чизиққа туширилган проекцияси вақт ўтиши билан синусоидал қонунга мувофиқ ўзгаради. Агар айлананинг радиуси R бўлиб, у ω бурчак тезлик билан айланса, у ҳолда x проекция

$$x = R\sin\alpha = R\sin\omega t. \qquad (124.1)$$

Равшанки, x нинг ўзгариш даври

$$T = \frac{2\mu}{\omega}; \qquad (124.2)$$



345-расм.

T вақтдан, яъни нуқтанинг бир айланиб чиқишига кетган вақтдан сўнг бутун процесс аниқ такрорланади. Шунинг учун T *гармоник тебранишлар даври* деб, ω эса *гармоник тебранишларнинг доиравий* (ёки *циклик*) *частотаси* деб аталади. Вақт бирлиги ичидаги тебранишлар сони *тебраниш частотаси* деб аталади:

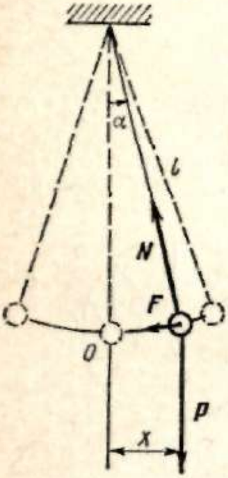
$$\nu = \frac{1}{T}.$$

ν частота *герц* ҳисобида ўлчанади, ўлчамлиги [Гц] = 1/сек. Агар жисм секундига N та тебранса, унинг тебранишлар частотаси $\nu = N$ Гц бўлади.

Гармоник ҳаракат кўпинча текис айланма ҳаракат бўлаётган жойда учрайди. Бироқ, масалан, маховик бир текис айланганда буғ машинаси (ёки ички ёнув двигатели) поршенининг ҳаракати соф гармоник ҳаракат бўлмайди, бу даврий ҳаракатлар тайинли бир шароитлардагина гармоник ҳаракатга яқин бўлади.

Биз гармоник ҳаракатнинг фақат кинематик тафсилотини бердик, гармоник тебранишлар юз берадиган ҳолдаги физикавий шароитлар кейинчалик аниқлаштирилади.

Ипга 346-расмда кўрсатилгандек қилиб чоғроқ юк осиб қўямизда, уни мувозанат вазиятидан четга оғдириб қўйиб юборамиз. Юк мувозанат вазиятига тезланиш билан ҳаракат қилади, бу тезланиш ипнинг $\boldsymbol{N}$ таранглик кучи ва юкнинг $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ оғирлик кучи таъсиридан ҳосил бўлади. Юк тезланиш берувчи куч нолга тенг бўлган O мувозанат вазиятига етганда инерцияси билан мувозанат вазиятидан ўтади ва бундан сўнг уни олдин тезлаштираётган куч энди тормозлай бошлайди (секинлаштиради). Сўнгра у тўхтаб, орқага қайтади— —маятникнинг *хусусий тебранишлари* шу тариқа ҳосил бўлади. Бу тебранишлар *хусусий* тебранишлар дейилишининг сабаби шундаки, тебранаётган вактда юкка бошқа жисмлар эмас, балки маятникнинг ўзининг физикавий тузилиши билан аниқланадиган кучларгина таъсир қилади.



346- расм.

Маятникнинг тебранишлари вакт ўтиши билан камаяди, ёки физикада айтилишича, *сўнади*. Чунки маятник юкини қўл билан ушлаб четга оғдирганда унга берилган бошланғич энергия ишқаланиш кучлари борлиги туфайли аста-секин иссиқликка айланади. Маятник тебранишлари нодаврий ва ногармоник тебранишлар бўлади, бироқ ишқаланиш кучлари камайтирилса, бу тебранишлар гармоник тебранишларга *жуда яқин* бўлади.

Маятник тебранишларининг қонунларини аниқроқ тасаввур этиш учун дастлаб маятникнинг ишқаланиш кучлари бўлмаган ҳолдаги тебранишларини анализ қиламиз; равшанки, булар даврий тебранишлар бўлади. Бундай маятникнинг[1] унча катта бўлмаган хусусий тебранишларини кўриб чиқамиз.

Маятникнинг оғиш бурчагини α билан белгилаймиз. Биз бу бурчак вақт ўтиши билан қандай ўзгаришини топишимиз керак. Массаси m бўлган юкка таъсир этувчи куч икки кучдан ҳосил бўлади: пастга тик йўналган $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ оғирлик кучи ва ип бўйлаб осилиш нуқтасига томон йўналган $\mathbf{N}$ таранглик кучи (346-расмга қ.). Агар α оғиш бурчаги ҳамиша жуда кичик бўлиб қолаверса, у ҳолда юк траекториясининг ёйини тахминан тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисоблаш мумкин. Юкнинг мувозанат вазиятидан оғишини x билан белгилаймиз; у ҳолда α бурчак кичик бўлганда тахминан

$$x \approx l\alpha, \tag{124.3}$$

деб ҳисоблаш мумкин, бу ерда l — маятникнинг ип осилган нуқтадан юкнинг оғирлик марказигача бўлган узунлиги. Ёй бўйлаб таъсир этувчи F куч $P\sin\alpha$ га тенг ёки α жуда кичик бўлганда

$$F \approx mg\alpha. \tag{124.4}$$

---

[1] Агар юкнинг ўлчамлари жуда кичик бўлиб, уни моддий нуқта деб, ипни оғирликсиз ип деб ҳисоблаш мумкин бўлса, бундай маятник *математикавий маятник* деб аталади

У ҳолда юк ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\ddot{x} = -F \tag{124.5}$$

бўлади. Биз бу ерда F олдига минус ишора қўйдик, чунки F куч x координата (силжиш) ҳисобланадиган мусбат йўналишга қарши йўналган. Агар (124.4) да α ўрнига x/l қўйсак, (124.5) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}, \tag{124.6}$$

буни m га қисқартирамиз:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \tag{124.7}$$

Юк $F = mg\frac{x}{l}$ куч ((124.6) га қ.) таъсири остида ҳаракат қилади, бу кучнинг катталиги юкнинг мувозанат вазиятидан ($x = 0$) бошлаб ҳисобланадиган x оғишига пропорционал равишда ўзгаради ва бу куч ҳамиша мувозанат вазиятига томон йўналади. Шунинг учун F куч *қайтарувчи куч* деб аталади.

(124.7) тенгламанинг ечимини топиш осон. У қуйидагича бўлади:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right), \tag{124.8}$$

бу ерда A ва φ — ҳозирча ихтиёрий доимий катталиклар. (124.8) ечим (124.7) тенгламани қаноатлантиришини исбот этамиз. Дарҳақиқат, x ни икки марта дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right) = -\frac{g}{l}x. \tag{124.9}$$

(124.9) тенглик (124.7) тенглама билан бутунлай бир хил. Энди $\frac{g}{l}$ ни белгилаб оламиз, яъни

$$\frac{g}{l} = \omega^2; \tag{124.10}$$

юкнинг (124.8) ҳаракат қонунини

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{124.11}$$

кўринишда ёзамиз.

Шундай қилиб, вақт ўтиши билан x синусоидал қонун бўйича ўзгаришини топдик. Юкнинг мувозанат вазиятидан максимал оғишига тенг бўлган A катталик гармоник тебранишлар *амплитудаси* деб аталади. Амплитуда катталиги бошланғич оғишга ва маятникнинг тебранишига сабаб бўлган турткига боғлиқ. Синус белгиси ичидаги $\omega t + \varphi$ катталик *фаза* деб аталади. Фаза вақтга пропорционал равишда ортади. φ катталик *бошланғич фаза* (ёки $t = 0$ пайтдаги фаза); бошланғич фаза t вақт ҳисоби бошидаги оғиш ва тезликка боғлиқ.

Тебранишлар даврий равишда юз беради, процесс *хусусий тебранишларнинг T давридан* сўнг такрорланади. Равшанки, $\omega t + \varphi$ фаза 2π катталикка ўзгарганда юкнинг x силжиши ва $\dot{x}$ тезлиги аввалги қийматига эга бўлади. Вақт T давр миқдорида ўзгарганда фаза 2π катталикка ортади. Бинобарин,

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}}\,T;$$

бундан даврни топамиз:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{124.12}$$

Бир давр ўтгач маятник аввалги вазиятига қайтиб келади ва тезлиги аввалгича бўлади. Тебранишлар даври маятникнинг l узунлигидан чиқарилган квадрат илдизга пропорционалдир; буни тажрибада текшириб кўриш осон. Узунлиги тўрт марта катта бўлган маятникнинг даври икки марта катта бўлади. Маятникнинг даври юкнинг массасига[1] ва тебранишлар амплитудасига боғлиқ эмас. Оғиш бурчаклари жуда кичик бўлган ҳолдагина давр амплитудага боғлиқ эмас. Амплитудаси 2° бўлган тебранишлар даври амплитудаси 4° бўлган тебранишлар даври билан бир хил деса бўлади, даврни ўлчашнинг одатдаги аниқлигида (0,2 % гача) эса маятникнинг оғиш бурчаклари 10° дан ошмаган ҳолларда давр амплитудага боғлиқ бўлмайди.

Маятникнинг оғиш бурчаклари катта бўлганда тақрибий (124.6) тенглама тўғри бўлмайди. Бу ҳолда тебранишлар тенгламасини осилиш нуқтаси орқали ўтган горизонтал ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тенгламаси сифатида қуйидагича ёзиш керак:

$$ml^2 \alpha = -mgl \sin \alpha. \tag{124.13}$$

Оғиш бурчаклари катта бўлганда маятникнинг ҳаракати даврий бўлади, бироқ *гармоник ҳаракат эмас*, тебранишлар даври амплитудага боғлиқ бўлади.

Оғиш бурчаклари кичик бўлганда маятник тебранишларининг частотаси, яъни *хусусий частота* (124.12) га асосан,

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{124.14}$$

га тенг. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ катталик эса *маятникнинг хусусий доиравий частотаси* деб аталади. (124.10) ва (124.14) ифодаларни солиштиришдан маятникнинг доиравий частотаси

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{124.15}$$

---

[1] Юкнинг ўлчамлари l га нисбатан жуда кичик бўлган ҳолларда.

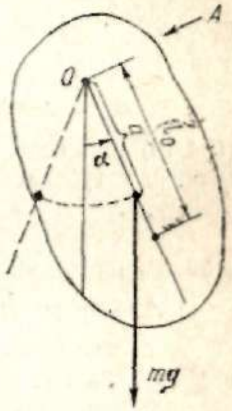
эканини кўрамиз. Оғиш бурчаклари кичик бўлганда математикавий маятник тебранишларининг даври ва частотаса унинг l узунлигига ва мазкур жойдаги оғирлик кучининг g тезланишига боғлиқ.

Физикавий маятникнинг, яъни бирор ўқ атрофида эркин айланадиган оғир жисмнинг *хусусий тебранишлари* худди юқорида кўриб ўтилган математикавий маятникнинг тебранишлари каби бўлади. *А жисм* (347- расм) чизма текислигига перпендикуляр бўлган горизонтал O ўқ атрофида эркин айланаётган бўлсин. Массалар марказидан ўққача бўлган масофа a га тенг; у ҳолда жисм мувозанат вазиятидан α бурчакка оғганда оғирлик кучининг

$$mga\sin\alpha$$

ифодага тенг бўлган қайтарувчи моменти ҳосил бўлади. бу ерда m — жисм массаси.

Жисм тебранганда унга фақат мана шу моментгина таъсир қилади, бинобарин, динамиканинг иккинчи қонунига асосан, айланаётган жисм учун



347- расм.

$$I\ddot{\alpha} = -mga\sin\alpha$$

деб ёзиш мумкин, бу ерда I — жисмнинг чизмага перпендикуляр равишда O нуқтадан ўтадиган горизонтал ўққа нисбатан олинган инерция моменти. Оғиш бурчаклари кичик бўлганда $\sin\alpha \approx \alpha$; у ҳолда

$$I\ddot{\alpha} + mga\alpha = 0$$

ёки

$$\ddot{\alpha} + \frac{mg\,a}{I}\alpha = 0. \tag{124.16}$$

Бу тенгламанинг кўриниши (124.7) тенглама кўриниши билан бир хил. Бинобарин, α бурчак гармоник равишда

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{124.17}$$

частота билан ўзгаради: бу частотани (124.16), (124.7) ва (124.15) формулаларни солиштириб топиш осон. Бинобарин, узунлиги l_0, яъни

$$l_0 = \frac{I}{ma} \tag{124.18}$$

бўлган математикавий маятник ушбу физикавий маятникнинг тебранишлар частотасидек частотага эга. Айланиш ўқидан массалар маркази орқали ўтадиган тўғри чизиқда l_0 масофада турган нуқта *физикавий маятникнинг тебраниш маркази* деб аталади. Агар айланиш ўқи тебраниш марказига қўйилса, у ҳолда маятник аввалги частота билан тебранади.

Бунга ҳисоблаб кўриб ишонч ҳосил қилиш мумкин: инерция моментига оид Гюйгенс— Штейнер формуласидан ((59.16) га қ.), яъни $I = I_0 + ma^2$ дан фойдаланамиз ва (124.18) ифодани

$$l_0 = \frac{I_0}{ma} + a \qquad (124.19)$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда I_0 — жисмнинг массалар маркази орқали ўтувчи параллел ўққа нисбатан олинган инерция моменти. (124.19) дан a ни топамиз:

$$a = \frac{I_0}{m(l_0 - a)}; \qquad (124.20)$$

(124.19) га асосан, ағдарилган маятникнинг тебранишлар маркази l'_0 масофада туради:

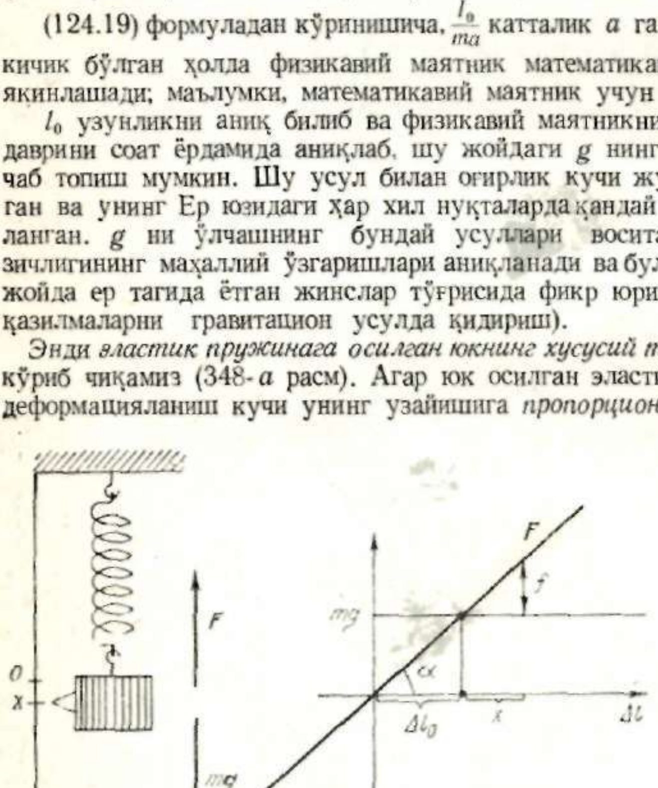
$$l'_0 = \frac{I_0}{m(l_0 - a)} + l_0 - a. \qquad (124.21)$$

(124.20) ни ҳисобга олиб, $l_0 = l'_0$ эканини топамиз.

(124.19) формуладан кўринишича, $\frac{I_0}{ma}$ катталик a га нисбатан жуда кичик бўлган ҳолда физикавий маятник математикавий маятникка яқинлашади; маълумки, математикавий маятник учун $I_0 = 0$.

l_0 узунликни аниқ билиб ва физикавий маятникнинг тебранишлар даврини соат ёрдамида аниқлаб, шу жойдаги g нинг қийматини ўлчаб топиш мумкин. Шу усул билан оғирлик кучи жуда аниқ ўлчанган ва унинг Ер юзидаги ҳар хил нуқталарда қандай ўзгариши аниқланган. g ни ўлчашнинг бундай усуллари воситасида ер қобиғи зичлигининг маҳаллий ўзгаришлари аниқланади ва буларга қараб ўша жойда ер тагида ётган жинслар тўғрисида фикр юритилади (фойдали қазилмаларни гравитацион усулда қидириш).

Энди эластик пружинага осилган юкнинг хусусий тебранишларини кўриб чиқамиз (348-*а* расм). Агар юк осилган эластик пружинанинг деформацияланиш кучи унинг узайишига *пропорционал* бўлса, муво-



348- расм.

занат вазиятидан оғдирилгандан кейин юк вертикал *гармоник* тебранишлар қилади. Пружинанинг F деформацияланиш кучининг узайиш катталигига боғлиқ равишда ўзгариш графиги $F = k\Delta l$ тўғри чизиқ билан тасвирланади (348-*б* расм). Пружина mg куч таъсири остида Δl_0 миқдорида узаяди ёки бошқача айтганда, мувозанат ҳолатида пружина Δl_0 деформацияга эга бўлади. Юкнинг мувозанат вазиятидан оғишини x билан белгилаймиз, x нинг мусбат қиймати юкнинг пастга силжишига мос келади. Юкни x миқдорда оғдирилганда унга $f = kx$ қайтарувчи куч таъсир қилади, бу куч пружинанинг деформацияланиш кучи билан юкнинг оғирлик кучи айирмасига тенг.

Массаси m бўлган юк ҳаракатининг тенгламаси маятникнинг кичик тебранишлари тенгламаси билан деярли бир хил бўлади:

$$m\ddot{x} = -f = -kx, \qquad (124.22)$$

бу ерда k— бикрлик коэффициенти (31-§ га қ.). (124. 22) тенгламанинг ечими ҳам гармоник ҳаракатдир:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right). \qquad (124.23)$$

Тебранишлар даври

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (124.24)$$

хусусий доиравий частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (124.25)$$

Доиравий частота пружинанинг k бикрлик коэффициентининг юк массасига (m га) нисбатидан чиқарилган квадрат илдизга тенг. Пружинанинг бикрлиги ошса, частота ортади, масса ортса, хусусий частота камаяди. Шуни қайд қиламизки, оғирлик кучининг катталиги пружинага осиб қўйилган юкнинг тебранишлари характерига ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди; агар пружинани горизонтал жойлаштириб, юк ишқаланишсиз ҳаракатлана оладиган шароит яратилса, пружинага осилган мана шу юкнинг тебранишлар даври аввалгича бўлади.

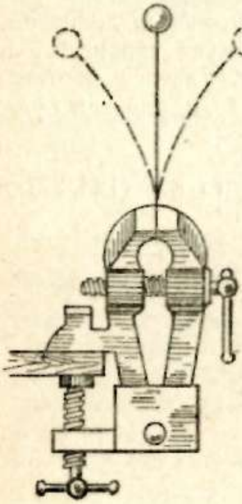
Бинобарин, пружинага осилган юк Ер шари сиртининг ҳар хил нуқталарида, ҳатто уни бошқа планеталарга кўчириш мумкин бўлганда ҳам ва ҳоказо ҳолларда бир хил тебранади. Хусусий тебранишлар характери жисмга таъсир этувчи доимий оғирлик кучига боғлиқ эмас, балки фақат пружинанинг ўзгарадиган қайтарувчи кучигагина боғлиқ.

125-§. Хусусий тебранишлар. Тебраниш вақтида энергиянинг ўзгариши

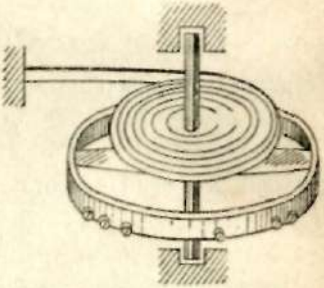
Кўриб ўтилган мисолларни (оғишлар кичик бўлган ҳолда математикавий ва физикавий маятниклар тебранишларини, пружинага осилган юк тебранишларини) ва уларга ўхшаш мисолларни таққослаб, бундай хулоса чиқариш мумкин: қайтарувчи куч тебранаётган жисмнинг мувозанат вазиятидан оғишига *пропорционал* бўлган ҳолда *хусусий гармоник тебранишлар* ҳамиша турғун мувозанат вазияти атрофида юз беради.

Хусусий тебранишлар кўп учрайди; тавсифлаб ўтилган мисоллардан ташқари, суюқликка ботирилган ареометрнинг тебранишлари, тискига қистириб қўйилган пластинкага бириктирилган юкнинг тебранишлари (349- расм), чўнтаки соат маятнигининг тебранишлари (350- расм) ва ҳоказоларни мисол қилиб келтириш мумкин.

Хусусий гармоник тебранишлар жисм мувозанат вазиятидан чиқарилгандан ёки унга бирор импульс воситасида бошланғич тезлик берилгандан ёхуд бу иккаласи бараварига қилинган, яъни жисм *мувозанат ҳолатидан* чиқарилгандан сўнг юзага келади. Агар системада ишқаланиш бўлмаса, тебранишлар бошланғич «туртки»дан сўнг истаганча узоқ вақт давом этади. Бошқача айтганда, мувозанат вазиятида турган системага бошланғич пайтда бирор энергия запаси берилди, ишқаланиш бўлмаганда бу энергия системада тебранишлар энергияси сифатида ўзгармай сақланади.

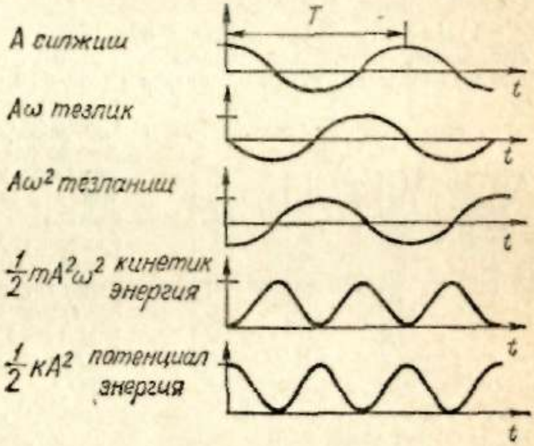


349- расм.



350- расм.

Шунинг учун энергиянинг сақланиш қонунига асосан, гармоник тебранишларда *тўлиқ энергия* доимий бўлиб қолгани ҳолда кинетик ёки потенциал энергиянинг ҳар бири алоҳида-алоҳида вақт ўтиши билан тебранади. Тебранаётган жисм энг четки вазиятига етган ва тезлиги ноль бўлган пайтда бутун энергия *потенциал энергия* бўлади, кинетик энергия нолга тенг бўлади. Жисм мувозанат вазиятидан ўтаётган пайтда бутун энергия *кинетик энергия* бўлиб, потенциал энергия нолга тенг бўлади (албатта, агар мувозанат вазиятида потенциал энергия нолга тенг деб фараз қилиниши олдиндан маълум бўлса). Жисм бир тебраниш даври давомида мувозанат вазиятидан икки марта ўтади, шунинг учун кинетик энергиянинг тебранишлар даври юкнинг тебранишлар давридан икки марта кичик. Потенциал энергия ҳам худди шундай давр билан тебранади. Тебранишларни характерловчи барча катталикларнинг вақт ўтиши билан қандай ўзгариши 351-расмда кўрсатилган.



351-расм.

Энергиянинг сақланиш қонуни тебранишларнинг хусусий частотасини (ёки даврини) осонгина аниқлашга имкон беради. Массаси m бўлган жисм

$$x = A\sin\omega t$$

гармоник тебранма ҳаракат қилаётган бўлсин. У ҳолда тебранишлар тезлиги

$$\dot{x} = -\omega A\cos\omega t$$

бўлади. Жисм мувозанат вазиятидан ўтаётган пайтларда тезлик ωA га тенг бўлган максимал қийматга эга бўлади (ωA — тезлик амплитудасининг қиймати). Бу пайтда тўлиқ энергия кинетик энергияга тенг бўлади, яъни

$$E_{\text{тўл}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2}{2}. \qquad (125.1)$$

Чорак даврдан сўнг, яъни жисм энг четки вазиятга етганда ($x = A$ ва тезлик $\dot{x} = 0$) тўлиқ энергия потенциал энергияга тенг бўлади. Пружинага бириктирилган юкнинг горизонтал тебранишларида потенциал энергия $\frac{kx^2}{2}$ га тенг[1] бўлади, бинобарин,

$$E_{\text{тўл}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \qquad (125.2)$$

---

[1] Деформацияланган пружина потенциал энергиясининг ифодасини 31-§ дан қараб олинг.

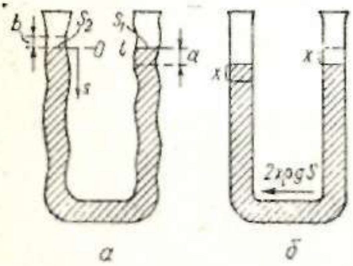
(125.1) ва (125.2) ифодаларни таққослаб, хусусий частота аниқланадиган (124.25) формулани ҳосил қиламиз. $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Тебранишлар частотасини кинетик энергия билан потенциал энергияни таққослаш йўли билан бундай аниқлаш энг содда усул ҳисобланади. Буни қуйидаги мисолларда кўрсатамиз.

1-мисол. Шакли мунтазам бўлмаган туташ идишлардаги (352-*а* расм) суюқликнинг тебранишлар частотасини аниқланг. Кесими ўзгармайдиган цилиндр шаклида ишланган туташ идишлардаги (352-*б* расм) суюқлик тебранишларининг хусусий частотасини аниқлаш жуда осон. Суюқлик сатҳлари мувозанат вазиятидан x миқдорда четлашганда суюқликка мувозанатлашмаган қисмининг $2x\rho Sg$ га тенг бўлган оғирлик кучи таъсир этади, бу қайтарувчи куч суюқликнинг бутун ρlS массасини ҳаракатга келтиради, бу ерда l — идишдаги ҳамма суюқлик устунининг узунлиги, ρ — суюқликнинг зичлиги, S — идишнинг кўндаланг кесими. Суюқликнинг ҳамма зарралари бир хил x га силжигани учун, суюқликнинг ҳаракат тенгламаси

$$\rho Sl\ddot{x} = -2x\rho Sg$$

кўринишда бўлади; буни ρS га қисқартирамиз:



352-расм.

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0. \tag{125.3}$$

Шунинг учун тебранишларнинг доиравий частотаси қуйидагига тенг:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}. \tag{125.4}$$

Бироқ туташ идишларнинг шакли мунтазам бўлмаса, у ҳолда тебранганда суюқликнинг турли зарралари турлича силжийди, шунинг учун (125.3) тенгламани осонгина тузиб бўлмайди.

Шакли мунтазам бўлмаган туташ идишлардаги (352-*а* расмга қ.) хусусий тебранишларни қараб чиқишда энергиянинг сақланиш қонунидан фойдаланган маъқул; лекин бунда суюқликнинг бутун массаси айни бир ω частота билан жуда кичик гармоник тебранишлар қилади, зарраларнинг силжиш катталиги идишнинг кўндаланг кесимига боғлиқ, деб фараз қилиш керак. Идишнинг кенг жойида суюқлик зарраларининг силжиши тор жойидагидан кичик бўлади. Найнинг S кўндаланг кесими най ўқи бўйлаб ҳисобланган s масофанинг тайинли функцияси бўлсин. Найнинг шакли $S(s)$ функция билан ифодаланган. Идишдаги суюқликнинг m массаси суюқлик эгаллаб турган бутун l кесма бўйича олинган интегралга тенг: $m = \int \rho S\, ds$; ρ — суюқлик зичлиги. Тебранишлар шу қадар кичикки, тебранишлар амплитудасидан икки марта катта масофада найнинг кўндаланг кесими амалда ўзгармайди, деб ҳисобланса бўлади. Шунинг учун S_1 ва S_2 мос равишда ўнг ва чап томондаги найлардаги эркин сиртларнинг кўндаланг кесимлари бўлса, у ҳолда

$$S_1a = S_2b \tag{125.5}$$

бўлади, бу ерла a — ўнг найдаги тебранишлар амплитудаси, b — чап найдаги амплитуда. s координатанинг саноқ боши чап найдаги суюқликнинг эркин сирти текислигида олингач бўлсин, бу ҳолда ўнг найдаги эркин сирт координатаси $s = l$ бўлади; булар мувозанат вазиятга тегишлидир. У ҳолда координатаси s ва юзи $S(s)$ бўлган кесимдаги тебранишларнинг A амплитудаси

$$aS_1 = AS$$

шартдан аниқланади; шунинг учун s координатали кесимдаги тезлик тебранишларининг амплитудаси қуйидагига тенг бўлади:

$$v = \omega A = \omega a \frac{S_1}{S}.$$

Суюқлик зарралари мувозанат вазиятидан ўтаётган пайтда суюқликнинг кинетик энергияси тўлиқ энергияга тенг бўлади:

$$E_{\text{тўл}} = E_{\text{кин}} = \int_0^l \frac{\rho S\,ds v^2}{2} = \frac{\rho\omega^2 a^2 S_1^2}{2} \int_0^l \frac{ds}{S}. \tag{125.6}$$

Чорак даврдан сўнг бутун энергия потенциал энергия бўлади, бу энергия суюқликнинг $S_1 a = S_2 b$ ҳажмини

$$\frac{a+b}{2}$$

баландликка кўтариш учун бажариш лозим бўлган ишга тенг бўлади (352-*а* расмга қ.). Дарҳақиқат, суюқликнинг мувозанат вазиятидан кўчишини бундай тасаввур этиш мумкин: ҳамма зарралар ўз жойида қолган-у, фақат $S_1 a$ ҳажм $S_2 b$ ҳажм ўрнини эгаллаган. Шунинг учун потенциал энергия қуйидагига тенг бўлади:

$$E_{\text{пот}} = \rho S_1 a \frac{a+b}{2} g;$$

(125.5) дан $b = \frac{S_1}{S_2} a$, шунинг учун

$$E_{\text{пот}} = \frac{\rho S_1 a^2 g}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right). \tag{125.7}$$

(125.6) ва (125.7) ни тенглаштириб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\rho\omega^2 a^2 S_1^2}{2} \int_0^l \frac{ds}{S} = \frac{\rho S_1 a^2 g}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right)$$

ёки

$$\omega^2 = \frac{g\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right)}{S_1 \int_0^l \frac{ds}{S}}; \tag{125.8}$$

$S = \text{const}$ бўлганда бу ифода кесими ҳамма жойида бир хил бўлган (яъни кесими ўзгармайдиган) идишдаги суюқлик тебранишларининг доиравий частотасини ифодалайдиган одатдаги (125.4) формулага айланади.

2-**мисол.** Оғир эластик пружинага осилган юк тебранишларининг хусусий частотасини аниқланг. Агар пружинанинг оғирлиги юкнинг оғирлиги билан таққосланадиган даражада бўлса (348-*а* расмга қ.), у ҳолда хусусий тебранишлар частотасини (124.24) формула билан аниқлаб бўлмайди, чунки бу формулани чиқаришда пружинанинг массаси нолга тенг деб ҳисобланган эди. Бир жинсли пружина учун даврнинг аниқроқ қийматини энергиянинг сақланиш қонунидан фойдаланиб топиш мумкин. Юк кичик гармоник хусусий тебранишлар қиляпти, деб фараз қилайлик, бу тебранишларнинг частотаси ω ва амплитудаси a бўлсин; у ҳолда пружинанинг осилиш нуқтасидан тинч ҳолатда y масофада турган ҳар бир ҳалқаси A га тенг амплитуда билан тебранади:

$$A = \frac{y}{l}\, a,$$

бу ерда l — тинч ҳолатдаги пружинанинг бутун узунлиги. Пружинанинг ўрамлари (ҳалқалари) сони N бўлсин, у ҳолда i-ҳалқанинг (осилиш нуқтасидан бошлаб ҳисобланган ҳалқанинг) амплитудаси қуйидагига тенг бўлади:

$$A_i = \frac{ia}{N}.$$

Юк мувозанат вазиятдан ўтаётган пайтда пружинанинг кинетик энергияси қуйидагича бўлади:

$$E^0_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_{\text{пр}}}{N}\,\omega^2 A_i^2 = \frac{m_{\text{пр}}}{2N}\,\frac{\omega^2 a^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i^2 =$$

$$= \frac{m_{\text{пр}}\,\omega^2 a^2}{2N^3}\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \tag{125.9}$$

бу ерда $m_{\text{пр}}$ — пружинанинг массаси.

Агар $N \gg 1$ бўлса, у ҳолда

$$E^0_{\text{кин}} \approx \frac{1}{2}\,\frac{m_{\text{пр}}}{3}\,\omega^2 a^2,$$

бутун кинетик энергия, яъни юк ва пружинанинг энергияси эса қуйидагича бўлади:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\,ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m_{\text{пр}}}{3}\,a^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_{\text{пр}}}{3}\right)a^2\omega^2.$$

Пружина энг кўп чўзилган пайтдаги потенциал энергия

$$E_{\text{пот}} = \frac{ka^2}{2}.$$

бу ерда k — пружинанинг бикрлик коэффициенти. $E_{\text{пот}} = E_{\text{кин}}$ тенгликдан:

$$ka^2 = \left(m + \frac{m_{\text{пр}}}{3}\right)a^2\omega^2$$

ёки

$$\omega^2 = \frac{k}{m + \frac{m_{\text{пр}}}{3}}. \tag{125.10}$$

Шундай қилиб, пружинага осилган юкнинг тебранишлар даврини янада аниқроқ топиш учун юкнинг массасига пружина массасининг $^1/_3$ қисмини қўшиш керак. Равшанки, агар пружина массаси юк массасига қараганда жуда кичик бўлса, бу аниқлик янги натижага олиб келмайди. Агар пружинанинг ҳалқалари кўп бўлмаса, у ҳолда тебранишлар частотасини аниқлашда (125.9) формулани ҳисобга олиш керак.

Агар тебранишда система нуқталарининг амплитудалари турлича бўлиб, бироқ бир-бирига тайинли бир шарт билан боғланган бўлса, яъни бир нуқтанинг амплитудасига қараб қолган ҳамма нуқталар амплитудасини бир қийматли аниқлаш мумкин бўлса, у ҳолда энергияларни таққослаш йўли билан частотани аниқлаш ҳамиша осон бўлади.

Кейинчалик кўрамизки, хусусий гармоник тебранишлар қилаётган системанинг хусусий частотаси катталиги кўп ҳодисаларда жуда муҳим аҳамиятга эга; шунинг учун уни тўғри аниқлаш масаласи зарур масала ҳисобланади.

126- §. Сўнувчи хусусий тебранишлар

Маятник тебранишлари, суюқликда сузиб юрган ареометр тебранишлари ва шулар каби гармоник тебранишлар устида ўтказилган энг содда тажрибалардан кўринишича, бирор турткидан сўнг пайдо бўлган тебранишлар аста-секин сусаяди, сўнади. Тебранаётган жисм охир-оқибатда тинч ҳолатга келади. Бундай бўлишига сабаб шуки, ҳар қандай жисм ҳаракат қилганда ҳамма вақт ишқаланиш кучлари пайдо бўлади ва тебранишларни юзага келтиришда бошда берилган механикавий энергия аста-секин иссиқликка айланади.

Ишқаланиш кучлари билан тезлик орасидаги боғланиш жуда мураккаб, бироқ тезликнинг абсолют қиймати жуда кичик бўладиган тебранишларда етарлича аниқлик билан ишқаланиш кучлари ҳаракат тезлигига пропорционал бўлади, деб (39- § га қ.) айтиш мумкин Шунинг учун пружинага осилган юкнинг 124- § да баён этилган тебранишларида ҳаракат тенгламаси

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \tag{126.1}$$

кўринишда бўлади, бу ерда $h\dot{x}$ — ишқаланиш кучи ва h — ишқаланиш кучининг коэффициенти бўлиб, доимий катталикдир. (126.1) нинг ечимини

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi) \tag{126.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда A ва φ — бошланғич шартларга боғлиқ бўлган доимий катталиклар,

$$\delta = \frac{h}{2m} \tag{126.3}$$

ва

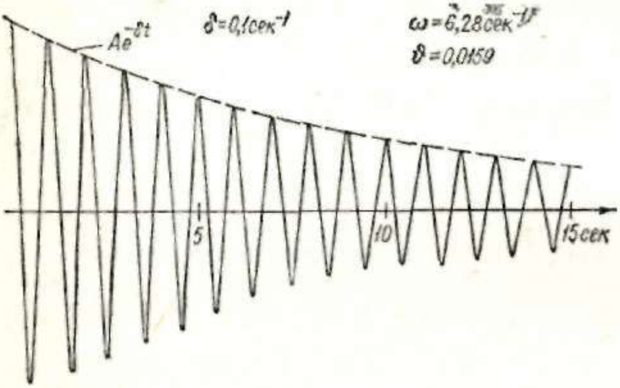
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}. \tag{126.4}$$

Ҳаракат $e^{-\delta t}$ экспоненциал функция (сўнувчи функция) билан даври

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

бўлган даврий $\cos(\omega_1 t + \varphi)$ функциянинг кўпайтмаси орқали ифодаланади. T_1 катталик баъзан (126.2) *сўнувчи тебранишнинг шартли даври* деб аталади.

Ҳаракат 353- расмда кўрсатилган «сўнувчи синусоидал» тебранишлардан иборат. Тебранишлар вақт ўтиши билан аста-секин сусаяди ва тебранишлар графигининг ўрамаси $\pm Ae^{-\delta t}$ эгри чизиқлар чегарасидан ташқарига чиқмайди. Тебранишларнинг вақт ўтиши билан сўниш жадаллигини ифодалайдиган $\delta = \frac{h}{2m}$ коэффициент *сўниш коэффициенти* деб аталади. Бу коэффициент ишқаланиш кучи коэффициентининг тебранаётган массанинг иккиланганига нисбатига тенг.



353- расм.

Шарчаларининг катталиги бир хил, бироқ массаси турлича (масалан, қўрғошин ва пўкак) бўлган маятниклар оламиз ва тебранишлар қулочи маълум сон марта камайгунча ўтадиган вақтни кузатамиз. Қўрғошин шарчанинг массаси пўкак шарчанинг массасидан тахминан 50 марта катта бўлгани учун пўкак шарчали маятникнинг сўниш коэффициенти тахминан 50 марта катта бўлади. Шунинг учун, масалан, тебранишлар икки марта камайишига кетадиган вақт ҳам қўрғошин шарчали маятникда пўкак шарчали маятникдагига қараганда 50 марта катта бўлади.

(126.2) типидаги ҳамма процесслар маълум бир пайда бошланади ва назарий жиҳатдан чексиз узоқ давом этади. Шунинг учун бундай процессларнинг давом этиш вақтини баҳолаш учун вақт ўлчамлигига эга бўлган ва *релаксация вақти* деб аталувчи $\tau = \frac{1}{\delta}$ катталик шартли равишда киритилган. τ релаксация рақти ичида системада мувозанат вазиятидан оғиш $e \approx 2.73$ марта камаяди. Релаксация вақти шартли равишда бундай процесснинг «давом этиш» вақти деб аталади.

δ сўниш коэффициенти (шунингдек, релаксация вақти) тебранувчи системани характерламайди. Турли системаларнинг айни бир τ

вақт ичида қиладиган тебранишлари сони тебранишлар даврига қараб турлича бўлади. Шу сабабли система тебранишларининг сўнишини тебранишлар сонига қараб баҳолаш учун сўниш коэффициентидан эмас, балки *декрементдан* (ёки логарифмик декрементдан) фойдаланилади; декремент ўлчамсиз катталик бўлиб, қуйидагига тенг:

$$\vartheta = \frac{T}{\tau} = \delta T.$$

Бу ерда T — сўнувчи тебранишнинг шартли даври.

Декрементга тескари бўлган

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{\tau}{T} = N$$

катталик тебранишлар қулочи e марта камайгунча, яъни шартли равишда қабул қилинганидек, процесс сўниб, система мувозанат вазиятига келгунча система қанча тебраниш қилишини кўрсатади. Декремент 1/10 га тенг, деб фараз қилайлик, демак, 10 тебранишдан сўнг тебранишлар қулочи деярли уч марта камаяди.

ϑ декремент экспериментал равишда қуйидагича аниқланади.

Агар бирор пайтда оғиш x_1 бўлса, шартли даврга тенг бўлган T_1 вақт ўтганда оғиш қуйидагича бўлади:

$$x_2 = x_1 e^{-\delta T_1}.$$

Дарҳақиқат,

$$x_1 = Ae^{-\delta t_1}\cos(\omega_1 t_1 + \varphi),$$
$$x_2 = Ae^{-\delta t_1 - \delta T_1}\cos(\omega_1 t_1 + \varphi + 2\pi) = x_1 e^{-\delta T_1},$$

чунки

$$\omega_1(t_1 + T_1) = \omega_1 t_1 + \omega_1 T_1 = \omega_1 t_1 + 2\pi.$$

$\vartheta = \delta T_1$ бўлгани учун оғишлар нисбати қуйидагига тенг:

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\vartheta}$$

ёки

$$\ln\frac{x_1}{x_2} = \vartheta. \qquad (126.5)$$

Шу сабабли ϑ катталик *логарифмик декремент* деб аталади. Шуни қайд қиламизки, бир томонга бўлган галдаги ҳар бир оғиш T_1 вақт ўтганда бўлгани учун *декремент бир томонга ва бирин-кетин бўлган энг четки икки оғиш нисбатининг натурал логарифмига тенг.*

x_N оғиш NT_1 вақт ўтгандаги оғиш, яъни x_1 оғишдан кейинги N-тебранишдаги оғиш бўлсин. Юқоридагича мулоҳаза юритиб,

$$\frac{x_N}{x_1} = e^{-N\vartheta}$$

ва

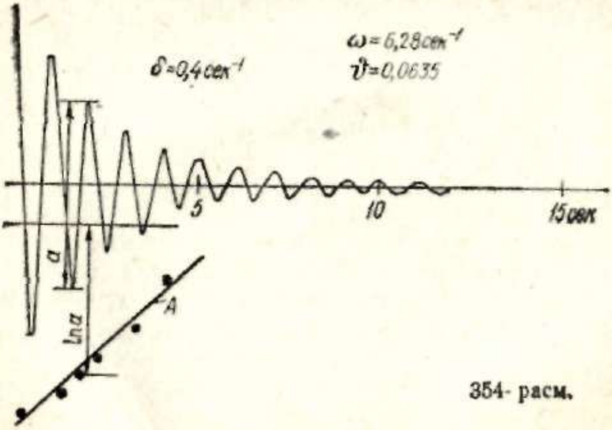
$$\ln\frac{x_1}{x_N} = N\vartheta \text{ ёки } \vartheta = \frac{1}{N}\ln\frac{x_1}{x_N} \quad (126.6)$$

эканини топамиз.

Ипга осилган шарчадан иборат маятник тебранишларининг экспериментал равишда ёзиб олинган эгри чизиғи 353-расмда кўрсатилган. Бу ёзувга қараб маятникнинг сўниш декрементини ҳисоблаб чиқариш мумкин; у 0,0159 га тенг. Узунлиги ўшандай, шарчасининг диаметри ҳам ўшандай, бироқ массаси тўрт марта кичик бўлган маятникнинг сўниш декременти 0,0635 га тенг; бу маятник тебранишларининг ёзиб олинган эгри чизиғи 354- расмда кўрсатилган. Сўниш коэффициентларининг қиймати 353- ва 354- расмларда кўрсатилган.

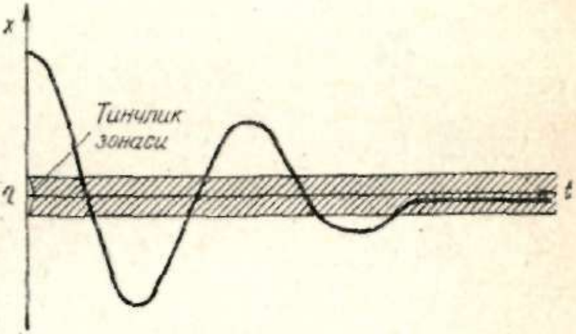
Сўнувчи тебранишларнинг ёзувига қараб, бизнинг (126.2) формулани келтириб чиқаришда қилган фаразларимиз тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бундай қилиш жуда осон: тебранишлар ёзуви графигида ординаталар ўқига ҳар бир даврга тегишли тебранишлар қулочи катталигининг логарифмларига пропорционал кесмалар ётқизиб, бу кесмаларнинг учлари орқали чизиқ ўтказилади. Масалан, 354- расмда кўрсатилган тебранишлар учун бундай логарифмик чизиқ чизилган, бу чизиқ A тўғри чизиқ бўлиб, у бирор марказдан пастга қаратиб ётқизилган кесмаларнинг учлари орқали ўтказилган.

Агар A чизиқнинг ҳамма нуқталари бир тўғри чизиқда ётса, у ҳолда сўнувчи тебранишларнинг (126.2) қонунини чиқаришдаги барча назарий фаразлар мазкур ҳолда тўғри бўлади. Тебранаётган жисмнинг массаси ўзгармайди, қайтарувчи кучнинг мувозанат вазиятдан силжишга пропорционаллигини тажрибада осонгина текшириб кўриш мумкин; одатда ишқаланиш кучлари тўғрисидаги масалагина



354- расм.

ноаниқлигича қолади. Шунинг учун A чизиқнинг нуқталари бир *тўғри чизиқда ётмаса, бу ҳол тебранишлардаги* ишқаланиш кучи тезликка пропорционал бўлмай, балки мураккаброқ бошқа қонунга бўйсунишини билдиради. Агар нуқталар A тўғри чизиқда ётса, у ҳолда унинг абсциссалар ўқига оғмалик бурчагига қараб декрементни аниқлаш мумкин.



355- расм.

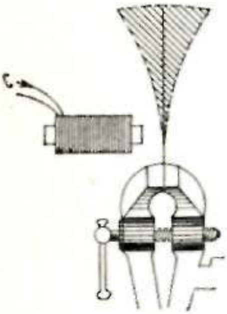
Агар тебранишларда бир жисм бошқа жисмнинг ёғланмаган сиртида сирпанса, у ҳолда тебранишлар характерига қуруқ ишқаланиш кучи катта таъсир кўрсатади. Қуруқ ишқаланиш кучи катталик жиҳатидан тахминан доимий бўлиб, тезликка қарши йўналган. Қуруқ ишқаланиш кучи тезликка пропорционал бўлган қовушоқ ишқаланиш кучидан устунлик қилган ҳолдаги тебранишлар ёзувининг эгри чизиги 355-расмда кўрсатилган. Бу расмда «тинчлик зонаси» штрихлаб қўйилган; жисм тинчлик зонасида силжитилганда пружинанинг тикловчи кучи ишқаланиш кучидан кичик бўлади ва агар жисм тинчлик зонасида силжитилса, ҳеч қандай тебраниш ҳосил бўлмайди — жисм силжитилган вазиятида тинч туради.

127- §. Мажбурий тебранишлар ва резонанс

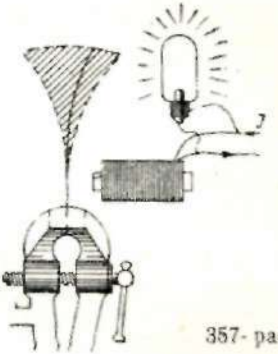
*Хусусий тебранишлардан фарқли ўлароқ, **мажбурий тебранишлар*** ташқи даврий куч таъсири остида юз беради. Масалан, тискига қистириб қўйилган пўлат пластинкага (356- расм) чулғамидан маълум частотали ўзгарувчан I ток ўтаётган электромагнит яқинлаштирилса, бевосита кузатиш орқали (товушга қараб ёки пластинкага бириктирилган кўзгудан қайтган ёруғлик нурининг экрандаги тебранишларига қараб) пластинканинг тебраниб турганини аниқлашимиз мумкин. Бу тебранишлар мажбурий тебранишлар бўлади.

Мажбурий тебранишлар ҳамма вақт ташқи кучнинг ўзгариш частотаси билан юз беради. Агар биз электромагнитга юборилаётган токнинг частотасини ўзгартирсак, пластинка тебранишларининг частотаси ҳам ўзгаради. Ток тебранишларининг частотоси пластинка тебранишларининг частотасига тенг эканига стробоскоп ёрдамида ишонч ҳосил қилиш осон.

Стробоскоп ясаш учун ёруғлик кучи ўзига берилаётган J электр токи билан бирга тебранадиган неон лампа (ёки бошқа газ-разрядли лампа) олиб, бу неон лампа ёруғлигида пластинка тебранишларини кўриш керак (357-расм). Пластинка бир давр давомида фақат бир марта ва ҳар гал айни бир вазиятда ёритилади. Шунинг учун кўриш сезгисининг инерцияси туфайли биз пластинкани тебранмасдан тинч тургандек кўрамиз. Агар пластинка тебранишлари билан ток тебранишлари синхрон бўлмаганда, яъни бу тебранишлар турли частоталар билан юз берганда эди, у ҳолда биз пластинканинг одатдаги ёритишдагига ўхшаш чаплашган тасвирини кўрган бўлар эдик.

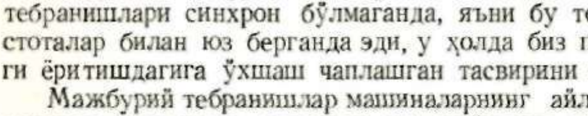


356-расм.



357-расм.

Мажбурий тебранишлар машиналарнинг айланадиган ёки даврий ҳаракат қиладиган қисмлари бор жойларда кўп учрайди. Масалан, текис айланаётган маховик (358-расм) валини ва вал турган подшипникларни ҳамиша мажбурий тебранма ҳаракатга келтиради. Дарҳақиқат, ҳамма вақт озгина бўлса-да, балансдан четлашишлик мавжуддир, яъни маховикнинг O' оғирлик маркази подшипниклар марказидан ўтадиган ўқда расо ётмайди. Шунинг учун айланишда марказдан қочма $F = m\rho\omega^2$ куч[1] пайдо бўлади, бу кучнинг, масалан, горизонтал йўналишдаги проекцияси валга айланишлар частотасига



358-расм.

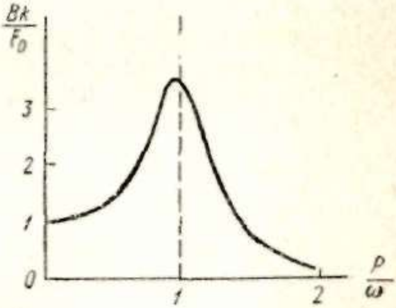
---

[1] Бу ерда биз марказдан қочма куч деб валга қўйилган ва динамиканинг учинчи қонунига асосан марказга интилма кучга қарши йўналган кучни айтамиз.

тенг бўлган частота билан таъсир этувчи гармоник куч ҳосил қилади (бу ерда ρ — маховикнинг оғирлик маркази билан подшипниклар ўқи орасидаги OO' масофа, m — маховикнинг массаси, ω — айланишнинг бурчак тезлиги).

Электр мотор ишлаётганда пойдеворнинг ва унга ёпишган иншоотларнинг титраши мотор роторининг балансировкасизлиги туфайли пайдо бўладиган мажбурий тебранишлардир. Ички ёнув двигателининг, буғ двигателининг ишлашидан пайдо бўлган силкинишлар ҳам мажбурий тебранишлардир. Қайтма-илгариланма даврий ҳаракат, масалан, ички ёнув двигателида поршеннинг ҳаракати ҳамиша тебранишлар юзага келтирадиган даврий куч манбаидир.

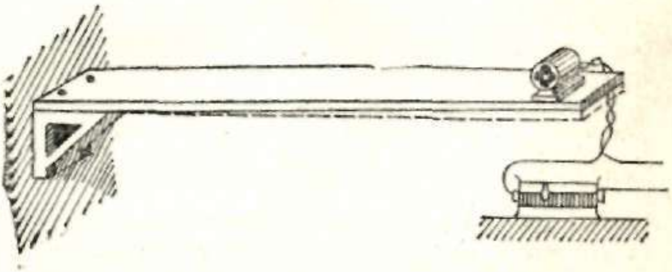
Мажбурий тебранишлар амплитудаси таъсир этувчи куч катталигигагина эмас, балки унинг частотасига кўпроқ боғлиқ. Агар ташқи куч частотаси хусусий тебранишлар частотасига *яқин* бўлса, мажбурий тебранишлар амплитудаси жуда кескин ортиб кетади.



359- расм.

Ташқи куч тебранишларининг амплитудасини ўзгартирмай қолдириб, унинг частотасини поғоналаб ўзгартирамиз ва ҳар гал мажбурий тебранишлар амплитудасини қайд қиламиз. Бу ўлчаш натижаларини график равишда тасвирлаймиз: абсциссалар ўқига ташқи таъсир частотасининг (p нинг) хусусий тебранишлар частотасига (ω га) нисбатини, ординаталар ўқига мажбурий тебранишларнинг B амплитудасига (128- § га қ.) пропорционал бўлган ўлчамсиз катталикни қўямиз. Бу график *резонанс эгри чизиғи* дейилади; унинг намунаси 359- расмда кўрсатилган.

Ташқи куч частотаси хусусий частотага яқинлашганда тебранишлар амплитудасининг кескин ортиш ҳодисаси *резонанс* деб аталади. Бир учи деворга маҳкамланган тахта устига (360- расм) электр мотор ўрнатамиз-да, моторчанинг айланишлар частотасини реостат восита-



360- расм.

сида аста-секин ошира борамиз. Айланишлар сони кичик бўлганда тахта сал-сал тебраниб туради, буни тахтага қўл тегизиб кўрибгина сезиш мумкин. Сўнгра айланишлар сони маълум бир қийматга эришганда тахтанинг вертикал тебранишлари амплитудаси кескин ортади ва кўзга яхши сезилади. Моторчанинг айланишлари сонини ошира бориб, *биз тебранишлар амплитудаси камайганини, тебранишлар* кўзга кўринмайдиган бўлиб қолганини, фақат салгина титраб тургани қўлга сезилишини кузатамиз. Резонанс юз берган вақтдаги айланишлар сонини қайд қилиб қўямиз. Кейин моторчани тўхтатамиз ва уни юқоридан пастга қаратиб бир урамиз, ургандан сўнг устида моторча турган тахта хусусий тебранма ҳаракатга келади, бу тебранишлар частотаси резонанс ҳолатдаги частотага яқин бўлади.

Шуни қайд қилиш керакки, бу ҳолда ташқи кучнинг амплитудаси доимий қолмайди, балки айланишлар сонининг квадратига пропорционал равишда ортади, чунки ташқи кучнинг манбаи марказдан қочма куч бўлиб, бу кучнинг катталиги айланишлар сонининг квадратига пропорционал равишда ортади. Шунга қарамасдан, айланишлар частотаси хусусий частотадан (яъни резонанс ҳолатдаги частотадан) ортганда тахтанинг тебранишлари кескин пасаяди.

128- §. Мажбурий тебранишлар амплитудаси билан частота орасидаги муносабат

Резонанс вақтида амплитуда нима сабабдан ортади?

Резонанс вақтида система хусусий тебранишлар қилгандек бўлади, ташқи куч эса тебранаётган жисмни фақат туртиб туради. Резонанс вақтида тикловчи (қайтарувчи) куч, хусусий тебранишлар ҳолидаги каби, массага керакли тезланиш беради, ташқи куч эса фақат ишқаланиш кучини мувозанатлайди. Резонанс ҳолатдан узоқда ташқи куч ишқаланиш кучидан бошқа кучларни ҳам мувозанатлайди, шунинг учун тебранишлар заиф бўлади. Масалан, агар ташқи куч тебранишларининг частотаси хусусий частотага нисбатан жуда кичик бўлса, у ҳолда ташқи куч амалда пружинанинг эластиклик кучи билан мувозанатлашади, яъни ташқи куч пружинани ўзининг ўзгаришларига уйғун равишда чўзиб-сиқиб туради. Бироқ ташқи гармоник куч таъсири остида юз берадиган тебранишларни назарий равишда анализ қилгандан сўнггина бутун манзарани яққолроқ тасаввур этиш мумкин.

Маятник юкига горизонтал йўналишда ташқи $F = F_0 \cos pt$ гармоник куч таъсир қиляпти, деб фараз қилайлик, бу ерда F_0 — кучнинг амплитудаси, p_0 — унинг доиравий частотаси. У ҳолда $-mg\frac{x}{l}$ қайтарувчи кучга ((124.6) га қ.) ва $-h\dot{x}$ ишқаланиш кучига ((126.1) га қ.) яна F куч қўшилади ва оғиш бурчаклари унча катта бўлмаган ҳолда маятник юкининг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишга[1] эга бўлади:

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x - h\dot{x} + F_0\cos pt. \qquad (128.1)$$

Агар аввалгидек $\frac{h}{2m}$ сўниш коэффициентини δ билан, $\sqrt{\frac{g}{l}}$ хусусий частотани ω билан белгилаб олсак, ҳаракат тенгламаси

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos pt \qquad (128.2)$$

кўринишда бўлади. Тажриба маятникнинг p частота билан тебранишини кўрсатади. Тебранишлар B амплитудага ва φ бошланғич фазага эга, деб фараз қилайлик. x тебранишларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = B\cos(pt + \varphi). \qquad (128.3)$$

Мажбурий тебранишларнинг B амплитудаси катталигини ва уларнинг φ бошланғич фазасини топиш талаб этилади. Олдин (128.3) ни дифференциаллаб, уни (128.2) га қўямиз:

$$B[(\omega^2 - p^2)\cos(pt + \varphi) - 2p\delta\sin(pt + \varphi)] = \frac{F_0}{m}\cos pt.$$

Бу ифодани маълум тригонометрик формулаларга қараб ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned}&\left\{B[(\omega^2 - p^2)\cos\varphi - 2p\delta\sin\varphi] - \frac{F_0}{m}\right\}\cos pt + \\ &\qquad + B[-(\omega^2 - p^2)\sin\varphi - 2p\,\delta\cos\varphi]\sin pt = 0. \qquad (128.4)\end{aligned}$$

Бу ифода иккита гармоник ҳад йиғиндисидан иборат:

$$a\cos pt + b\sin pt = 0, \qquad (128.5)$$

бу ерда a ва b — вақт ўтиши билан ўзгармайдиган катталиклар. Равшанки, a ва b катталикларнинг иккаласи нолга тенг бўлганда ва фақат шундагина t нинг исталган қиймати учун бу тенглик ўринли бўлади. Шунинг учун (128.4) га асосан:

$$\begin{gathered}B[(\omega^2 - p^2)\cos\varphi - 2\delta\,p\,\sin\varphi] = \frac{F_0}{m}, \qquad (128.6)\\ (\omega^2 - p^2)\sin\varphi + 2\delta\,p\,\cos\varphi = 0.\end{gathered}$$

Бу икки тенгламадан B ва φ катталикларни аниқлаш мумкин. φ фазанинг қийматини бевосита иккинчи тенгламадан топамиз:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\delta p}{p^2 - \omega^2}. \qquad (128.7)$$

---

[1] Хусусий тебранишлари (126.1) тенглама билан тавсифланадиган пружинадаги юкнинг мажбурий тебранишлари учун ҳам мана шундай тенглама ўринли бўлади, фақат унда $-\frac{mg}{l}x$ қайтарувчи куч ўрнида пружинанинг $-kx$ қайтарувчи кучи туради.

(128.6) тенгламанинг биринчисини B га бўлиб, $\sin\varphi$ га кўпайтирамиз ва иккинчисини $\cos\varphi$ га кўпайтириб, бирини иккинчисидан айирамиз:

$$\frac{F_0}{mB}\sin\varphi = -2\delta p. \qquad (128.8)$$

$\sin\varphi = -\frac{2\,\delta p m B}{F_0}$ ифодани (128.6) тенгламанинг иккинчисига қўямиз:

$$\cos\varphi = \frac{mB}{F_0}(\omega^2 - p^2). \qquad (128.9)$$

(128.8) ва (128.9) тенгликларни квадратга кўтариб, қўшамиз:

$$\frac{m^2B^2}{F_0^2}(\omega^2 - p^2)^2 + \frac{4\delta^2p^2m^2B^2}{F_0^2} = 1. \qquad (128.10)$$

Бу тенгликни ўзгартириб, ундан мажбурий тебранишлар амплитудасининг ифодасини топамиз:

$$B = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2p^2}}. \qquad (128.11)$$

Бу формуладан кўринадики, мажбурий тебранишлар амплитудаси ҳамиша таъсир этувчи F_0 кучнинг амплитудасига пропорционал, ундан ташқари, частотага жуда мураккаб тарзда боғлиқ. Агар сўниш катталиги кичик (δ сўниш ω га нисбатан жуда кичик) бўлса, (128.11) *нинг махражидаги радикал $p = \omega$ қиймат яқинидаги бирор жойда* минимумга эга бўлади ва шунинг учун p частотанинг қийматлари ω га яқин бўлганда тебранишларнинг B амплитудаси энг катта қийматга эга бўлади.

Агар юкка доимий F_0 куч таъсир этса, юк мувозанат вазиятидан $B_{\text{ст}}$ миқдорда силжийди. $B_{\text{ст}}$ силжиш қуйидаги тенгликдан топилади:

$$\frac{mg}{l}\cdot B_{\text{ст}} = F_0$$

ёки

$$B_{\text{ст}} = \frac{F_0 l}{mg}. \qquad (128.12)$$

Агар маятникнинг хусусий частотаси $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ эканини эсга олсак, $p = 0$ бўлганда (128.11) дан $B_{\text{ст}}$ нинг (128.12) ифодасини топамиз. $p \to \infty$ да, яъни частота жуда катта бўлганда тебранишлар амплитудаси нолга интилади.

Мажбурий тебранишларда турли кучлар орасидаги муносабат p частотага қараб қандай ўзгаришини муфассалроқ кўриб чиқамиз; буни билиш бизга частота ўзгарганда тебранишлар амплитудаси ўзгаришининг сабабларини аниқлашга имкон беради.

(128.1) тенглама «масса × тезланиш» кўпайтмаси учта куч, яъни қайтарувчи куч, ишқаланиш кучи ва ташқи куч йиғиндисига тенг эканини ифодалайди. Мажбурий тебранишларда учала куч p частота билан гармоник тебранишлар қилади.

Кучлар орасидаги асосий (128.4) муносабатни қуйидагича ёзамиз:

$$\underbrace{mB(\omega^2 - p^2)\cos(pt + \varphi)}_{\text{«консерватив куч»}} - \underbrace{2\delta pmB \sin(pt + \varphi)}_{\text{ишқаланиш кучи}} = \underbrace{F_0 \cos pt}_{\text{ташқи куч}}. \qquad (128.13)$$

$\frac{mg}{l} B \cos(pt + \varphi)$ қайтарувчи куч билан жисм массасининг тезланишга кўпайтмаси ($m\ddot{x} = -mp^2 B \cos(pt + \varphi)$) йиғиндисини «консерватив куч» деб атаймиз (қайтарувчи кучни $m\omega^2 B \cos(pt + \varphi)$ кўринишда ёзиш мумкин, чунки $\omega^2 = \frac{g}{l}$). Бу кучнинг бир давр давомидаги иши нолга тенг эканини текшириб кўриш осон. Иккинчи ҳад ишқаланиш кучидир. Шундай қилиб, (128.13) тенглама ташқи F кучнинг ишқаланиш кучи ва консерватив куч билан мувозанатлашганини кўрсатади.

Частоталар жуда кичик ($p \to 0$) бўлганда ишқаланиш кучи ва масса билан тезланиш кўпайтмаси жуда кичик бўлади, шунинг учун $F_0 \cos pt$ ташқи куч фақат $mB\omega^2 \cos(pt + \varphi)$ қайтарувчи куч билан мувозанатлашади, бинобарин, $\varphi = 0$. Частота кичик бўлганда ташқи куч билан силжиш бир хил фазада бўлади; бу ҳолда системанинг тебранишлари фақат қайтарувчи куч бор-у, лекин масса ва ишқаланиш кучи йўқ бўлган ҳолдагидек бўлади.

Частоталар жуда катта ($p \to \infty$) бўлганда консерватив кучнинг иккинчи ҳади, яъни $-mBp^2 \cos(pt + \varphi)$ куч бошқа кучлардан устунлик қилади. Масса билан тезланиш кўпайтмаси қайтарувчи куч ва ишқаланиш кучидан анча катта бўлади. Тезланишни амалда фақат ташқи куч аниқлайди, шунинг учун қуйидагини тахминан ёзиш мумкин:

$$-mBp^2 \cos(pt + \varphi) \approx F_0 \cos pt. \qquad (128.14)$$

Бундан $\varphi \approx 180°$, $B \approx \frac{F_0}{mp^2}$ эканлиги келиб чиқади. $p \gg \omega$ ва $p \gg \delta$ бўлган ҳолда (128.11) дан ҳам худди шу натижа келиб чиқади. Тебранишлар частотаси катта бўлганда силжиш билан куч қарама-қарши фазада бўлади ва тебранишлар деярли $F_0 \cos pt$ ташқи куч эркин m массага қўйилган ҳолдагидек бўлади. Тебранишлар частотаси катта бўлганда масса асосий роль ўйнайди, частота кичик бўлганда эса асосий ролни қайтарувчи куч ўйнайди.

Хўш, ташқи куч частотаси ўртача бўлганда манзара қандай бўлар экан? Равшанки, $p = \omega$ бўлганда консерватив куч, яъни (128.13) нинг биринчи ҳади ҳамиша нолга тенг, ташқи куч эса фақат ишқаланиш кучи билан мувозанатлашади:

$$-hpB \sin(pt + \varphi) = F_0 \cos pt. \qquad (128.15)$$

t нинг исталган қиймати учун ёзилган бу тенглик $\varphi = -90°$, яъни $x = B \cos(pt - 90°)$ бўлгандагина ўринли бўлади. $p = \omega$ да, яъни резонансда силжиш тебранишлари куч тебранишларидан ҳамиша 90° орқада қолади. Резонансда ишқаланиш кучи асосий роль ўйнайди. Шунинг учун биз буни билмасдан ишқаланиш кучини эътиборга олмаганимизда ва $h=0$ деб фараз қилганимизда эди, бундай хулосага келган бўлар эдик: $p=\omega$ бўлганда тебранишларнинг B амплитудаси чексиз бўлиши керак, амалда бундай бўлиши жисман мумкин эмас. ($h=\delta=0$ ва $p=\omega$ бўлганда бу хулоса (128.11) формуладан ҳам, (128.13) тенгликдан ҳам келиб чиқади.) Бироқ ишқаланиш етарлича кичик бўлганда резонанс вақтида тебранишлар амплитудаси катта бўлади. $p=\omega$ бўлганда (128.13) дан $B_{\text{рез}}$ ни топамиз:

$$B_{\text{рез}}=\frac{F_0}{2\delta m\omega}=\frac{F_0}{h\omega}. \qquad (128.16)$$

Шунинг учун h нинг қиймати унча катта бўлмаганда тебранишларнинг резонанс вақтидаги амплитудаси жуда катта бўлиши мумкин. Амплитудаси катта бўлган резонанс тебранишлар машина ёки иншоотнинг тебранувчи қисмлари учун хавфли бўлади, баъзан эса бу қисмларнинг бузилишига сабаб бўлади.

Қимматбаҳо машиналар резонанс тебранишлардан бузилган ҳоллар маълум, шунинг учун инженерлар машинадаги айрим қисмларнинг хусусий частоталарини резонанс юз бермайдиган қилиб ҳисоб қилади. Шунингдек, масалан, резонанс ҳодисасининг олдини олиш учун ҳарбий қисмларнинг кўприкдан бараварига қадам ташлаб ўтиши тақиқланади: қадам частотаси кўприкнинг хусусий частотаси билан бир хил бўлганда кўприк вайрон бўлган ҳоллар маълум.

Ташқи кучнинг мажбурий тебранишлар даври ичида бажарган иши ишқаланиш кучининг ўша вақт ичида бажарган ишига тенг; қолган кучларнинг иши нолга тенг. Қарор топган мажбурий тебранишларда ташқи кучнинг иши иссиқликка айланади.

Частоталар кичик бўлганда тебранишлар амплитудаси, (128.12) га асосан, тахминан қуйидагича бўлади:

$$B\approx B_{\text{ст}}=\frac{F_0l}{mg}=\frac{F_0}{k_0}, \qquad (128.17)$$

бу амплитуда ташқи кучнинг F_0 амплитудаси ва тикловчи (қайтарувчи) кучнинг $k_0=\frac{mg}{l}$ коэффициентига боғлиқ бўлиб, ишқаланиш кучига боғлиқ эмас. Пружинага осилган юкнинг мажбурий тебранишларида пружинанинг $k=k_0$ бикрлиги[1] m массага боғлиқ бўлмайди, бинобарин, паст частоталарда B амплитуда ҳам m га боғлиқ бўлмайди.

Частоталар катта бўлганда тебранишлар амплитудаси, (128.14) га асосан, тахминан

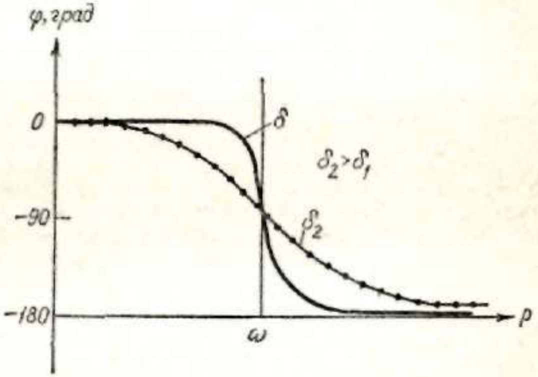
$$B\approx\frac{F_0}{mp^2} \qquad (128.18)$$

---

[1] (128.1) тенгламага берилган изоҳга қаранг.

бўлади, яъни p^2 га тескари пропорционал бўлади; тебранишлар амплитудаси тебранишлар частотасига ва массага боғлиқ бўлиб, тикловчи кучга ва ишқаланиш кучига деярли боғлиқ эмас.

Юқорида айтиб ўтилганидек ((128.16) га қ.) резонанс вақтида амплитуда ишқаланиш кучининг h коэффициенти ва ω хусусий частотага боғлиқ бўлиб, $h\omega$ кўпайтмага тескари пропорционалдир.



361- расм.

Яна бир марта эслатиб ўтамизки, *тебранишлар амплитудаси ҳамиша таъсир этувчи кучнинг амплитудасига пропорционал.*

(128.7) формуладан кўриниб турибдики, фаза бўйича силжиш частотага боғлиқ равишда тахминан 361- расмда кўрсатилгандек ўзгаради. Частоталар кичик бўлганда силжиш тебранишлари куч билан бир хил фазада бўлади, резонанс вақтида силжиш тебранишлари кучдан фаза жиҳатдан 90° орқада қолади, частоталар жуда катта бўлганда, силжиш тебранишлари билан куч қарама-қарши фазада бўлади. Буларнинг ҳаммаси тебранишларда айрим кучларнинг ролини анализ қилишдан чиқадиган хулосаларга мос келади. Шуни қайд қиламизки, паст частоталарга тегишли мулоҳазаларнинг ҳаммаси $p \ll \omega$ бўлган ҳолда, яъни тебранишлар частотаси хусусий частотадан анча кичик бўлганда тўғри бўлади; $p \gg \omega$ бўлганда бу мулоҳазалар юксак частоталар учун тўғри бўлади; бошқача қилиб айтганда, резонансга тегишли барча қонуниятлар p нинг ω га бўлган нисбати билан аниқланади.

Ишқаланиш кучи ёки δ сўниш коэффициенти камайиши билан резонанс чўққиси (359- расмга қ.) тобора ўткирроқ бўлади, резонанс яқинида амплитуда кескин ортади; сўниш оз бўлганда резонанс частотаси яқинида тебранишлар фазаси ҳам жуда кескин ўзгаради (361- расмга қ.).

Мажбурий тебранишларнинг ҳамма қонунларини биз маятник тебранишлари мисолида кўриб чиқдик. Равшанки, бу қонунлар ҳаракатининг тенгламасини (128.2) кўринишга келтириш мумкин бўлган ҳар қандай система учун тўғри бўлади. Пружинадаги юк, суюқликка ботирилган ареометр, пружинага осилган жисм (чўнтаки соат маятнигига ўхшаб буралма тебранишлар қиладиган жисм) ва шу каби системаларга гармоник куч таъсир этганда бу системаларнинг тебранишлари шундай мажбурий тебранишларга мисол бўлади.

129- §. Дискли валнинг тебранишлари

Кўп машиналарнинг (масалан, буғ турбинаси, маховик, вентилятор ва ҳоказо) валида диск айланади, валда айланаётган дискнинг энг содда модели 362- расмда кўрсатилган. Вертикал ўрнатилган спицага (ингичка стерженга) кичик радиусли диск ўрнатилган; дискда ҳамиша бирмунча балансировкасизлик бўлади, яъни дискнинг массалар маркази вал ўқида ётмайди. Тажрибаларимиз яққолроқ бўлиши учун балансировкасизликни кичикроқ m' юк билан оширамиз. Агар биз спицани унга перпендикуляр йўналишда бир уриб қўйсак, хусусий тебранишлар пайдо бўлади, буларнинг ω частотаси спицанинг эгилишидаги бикрлигига ва дискнинг M массасига боғлиқ бўлади. Диск x миқдорда четга силжиганда қайтарувчи kx эластиклик кучи пайдо бўлсин, у ҳолда спицанинг эгилиши туфайли дискнинг хусусий частотаси

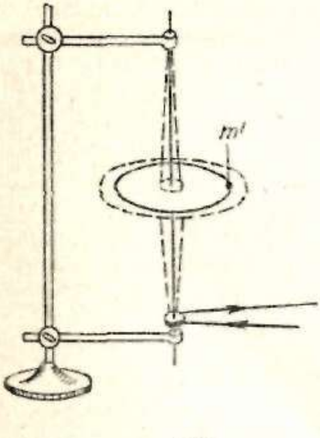
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad (129.1)$$

бўлади. Хусусий тебранишлар исталган йўналишда бир хил частота билан содир бўлади. Агар биз дискни тортиб туриб, четга туртиб юборсак, диск икки йўналишда ω частота билан гармоник тебранишлар қилади ва дискнинг маркази эллипс бўйлаб ҳаракат қилади (363- расм). (x, y) текислик спицага перпендикуляр, тинч ҳолатда диск маркази ва спицанинг ўқи координаталар бошида бўлади. Тебраниш бўлаётганда бу марказ x ўқ бўйлаб

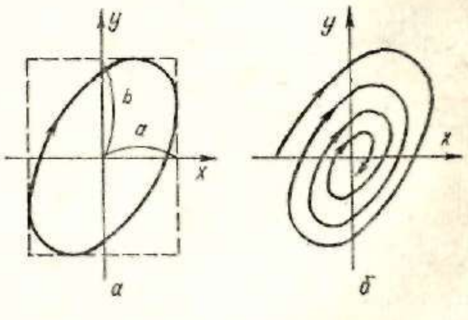
$$x = a\cos\omega t \qquad (129.2)$$

гармоник тебраниш қилади, y ўқ бўйлаб ҳам худди ўша частота билан

$$y = b\cos(\omega t + \varphi) \qquad (129.3)$$



362- расм.



363- расм.

гармоник тебраниш қилади. ωt ни йўқотиб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\varphi=\sin^2\varphi, \tag{129.4}$$

бу тенглама эллипс тенгламасидир. Ўзаро перпендикуляр йўналишларда бир хил частота билан юз берган икки гармоник тебраниш эллипс бўйлаб бўладиган ҳаракатдан иборат; бу эллипс томонлари 2 a ва $2b$ бўлган тўғри тўртбурчак ичига жойлашган (363- a расм). Эллипснинг шакли тебранишлар орасидаги фазалар силжишига, яъни φ га боғлиқ. $\varphi = 90°$ ва $\varphi = 270°$ бўлганда эллипснинг бош ўқлари координата ўқлари билан устма-уст тушади; $\varphi = 0°$ ва $\varphi = 180°$ бўлганда эллипс тўғри чизиққа айланади, бу тўғри чизиқ томонлари 2 a ва 2 b бўлган тўғри тўртбурчакнинг диагонали бўйлаб кетади. Агар $a = b$ ва $\varphi = 90°$ бўлса, эллипс айлана бўлиб қолади.

Ҳақиқатда ҳаракат (129.2) ва (129.3) формулалар билан ифодалангандек юз бермайди, чунки ҳамиша сўниш мавжуд бўлиб, дискнинг маркази эллипсга яқин бўлган спираль бўйлаб (363- $б$ расм) ёки хусусий ҳолда айланага яқин бўлган спираль бўйлаб ҳаракат қилади.

Кези келганда шуни айтиб ўтамизки, ипга осилган юк (364- расм) бир четга тортилиб, ўз текислигига перпендикуляр бўлган йўналишда туртиб юборилса, у ҳам юқоридагига ўхшаган ҳаракат қилади; бу конус шаклидаги маятник бўлиб, унинг ипи конус сиртида бўлади. Конус шаклидаги маятникнинг тебранишлари ўзаро перпендикуляр бўлган икки йўналишда бир хил частота билан юз берадиган икки гармоник тебраниш тўпламидан иборат.

Энди спицага ўрнатилган дискнинг мажбурий тебранишлари масаласига қайтамиз. Бир лаҳза тебранишлар йўқ, M массали диск p бурчак тезлик билан айланмоқда, деб фараз қиламиз; у ҳолда диск ўқига марказдан қочма

$$F_{м.қ} = MR_0p^2 \tag{129.5}$$

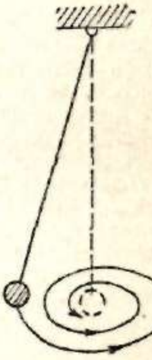
куч таъсир қилади (448- бетдаги изоҳга қ.) ва диск ҳамиша p бурчак тезлик билан айланади, бу формулада R_0 — дискнинг оғирлик марказидан айланиш ўқигача бўлган масофа. $t = 0$ бошланғич пайтда оғирлик маркази y ўқда ётган бўлсин; у ҳолда x ўқ бўйлаб

$$F_{м.қ}\sin pt$$

куч, y ўқ бўйлаб эса

$$F_{м.қ}\cos pt$$

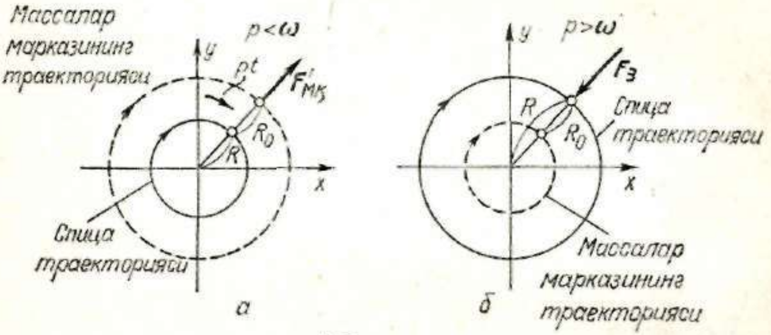
куч таъсир қилади. Бу кучларнинг ҳар бири таъсири остида диск x ўқ бўйлаб ва y ўқ бўйлаб бўладиган икки тебранма ҳаракатда бараварига қатнашади. Бу кучларнинг амплитудалари бир хил бўлгани ва спицанинг ўзаро перпендикуляр йўналишлардаги хоссалари бир хил бўлгани учун, мажбурий тебранишлар ўзаро перпендикуляр икки йўналишда бир хил амплитуда билан юз беради, яъни марказдан қочма куч таъсири остида спица айлана бўйлаб айланишлар частотаси билан «юради». Айланишлар сони жуда кичик бўлганда спица шундай тебранадики, диск оғирлик марказининг силжиши ўқ силжишидан (ёки дискнинг геометрик маркази силжишидан) катта бўлади ва ўқ айлана бўйлаб 365- a расмда кўрсатилгандек ҳаракат қилади. Спица эгилиб, айланиш ўқидан R миқдорда четлашади, бироқ дискнинг оғирлик маркази координаталар бошидан деярли ўша радиус миқдорида узоқда ётади. Спица эгилгани туфайли дискнинг маркази айланиш ўқидан оғади, шунинг учун марказдан қочма кучлар спицанинг бу эгилишига, яъни спица тебранишларининг амплитудасига боғлиқ бўлади. Айланиш тезлиги $p \ll \omega$ бўлган ҳолдаги жуда кичик частотада марказдан қочма куч



364- расм.

эгилган спицанинг эластиклик кучи таъсири билан мувозанатлашмагунча спица эгилаверади.

Валнинг айланиш тезлиги катта, яъни $p \gg \omega$ бўлганда спица айлана бўйлаб 365- *б* расмда кўрсатилгандек ҳаракат қилади, бироқ энди спицанинг силжиши диск марказининг силжишидан ортиқ бўлади. Дискнинг оғирлик маркази билан геометрик маркази орасидаги R_0 масофа одатда жуда кичик; шунинг учун спица тебранишларининг амплитудаси жуда кичик бўлади; айланишлар частотаси ортгани сари массалар маркази тобора координаталар бошига яқинлаша



365- расм.

боради ва спица тебранишларининг амплитудаси R_0 га яқинлашади. Айланиш тезлиги катта бўлганда спицанинг тебранишлари жуда кичик бўлади, буни 362-расмда кўрсатилган асбобни тез айлантирганда кузатиш мумкин. Дискни синхрон стробоскопик ёритиш воситасида кузатиб, бизнинг хулосаларимиз тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. R_0 ни каттароқ қилиб олиб ва m ни орттириб, спица дискнинг оғирлик маркази атрофида «юришини» яққол кўрамиз.

Тажрибалар яққолроқ бўлиши учун яна бундай қилиш ҳам мумкин. Дискни спицадан чиқариб олиб, спицага ён томондан юк бириктириб қўйиш мумкин (366- *а* расм). Айланиш тезлиги кичик бўлганда резонансдан олдин юк спицани тортиб эгади (366- *б* расм). Айланиш тезлиги катта бўлганда спица шундай эгиладики, бунда юк айланиш ўқига яқин туради (366- *в* расм). Айланиш тезлиги қанча катта бўлса, юк айланиш ўқига, яъни подшипниклар марказидан ўтадиган ўққа шунча яқин бўлади.

366- расм.

Резонанс вақтида, яъни p айланиш бурчак тезлиги хусусий ω частотага яқин бўлганда спицанинг катта резонанс тебранишлари бошланади; агар улар чеклаб қўйилмаса, амплитуда жуда ортиб кетиб, спица синиб қолади. Агар айланишлар сонини тез орттириб, резонанс соҳасида тўхтаб турилмаса, спица озгина силкиниб тинчийди ва $p \gg \omega$ бўлганда, юқорида айтганимиздек, жуда кичик тебранишлар қилади.

Диск резонанс юз беришдан олдин ёки ундан кейин айланмоқда, деб фараз қилиб, диск тебранишларининг амплитудасини ҳисоблаб чиқариш мумкин.

Дискнинг ҳаракатини p бурчак тезлик билан айланаётган координаталар системасида тасаввур этайлик. Бу системада диск тинч туради ва бу ҳолда марказдан қочма куч билан спица деформациясининг эластиклик кучи мувозанатлашади.

Айланиш тезлиги кичик (яъни $p < \omega$) бўлганда марказдан қочма куч

$$F'_{\text{м.қ}} = Mp^2\,(R+R_0)$$

(белгиларни 365- расмдан қараб олинг), деформацияланишдаги қайтарувчи куч

$$F_э = k\,R.$$

Бу кучлар ифодасини тенглаштириб, спица тебранишлари амплитудасининг қуйидаги ифодасини топамиз:

$$R = \frac{R_0}{\frac{k}{Mp^2}-1} = \frac{R_0}{\frac{\omega^2}{p^2}-1},$$

бу ерда (129. 1) га асосан $\sqrt{\frac{k}{M}} = \omega$ — спицадаги диск тебранишларининг хусусий частотаси.

Айланиш тезлиги катта (яъни $p > \omega$) бўлганда 365- расмдаги белгиларга мувофиқ равишда марказдан қочма куч

$$F''_{\text{м.қ}} = Mp^2\,(R-R_0)$$

бўлади, эластиклик кучи эса $p < \omega$ бўлган ҳолдаги кўринишда ифодаланади.

Бу кучларнинг тенглигидан R ни топамиз:

$$R = \frac{R_0}{1-\frac{k}{Mp^2}} = \frac{R_0}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}.$$

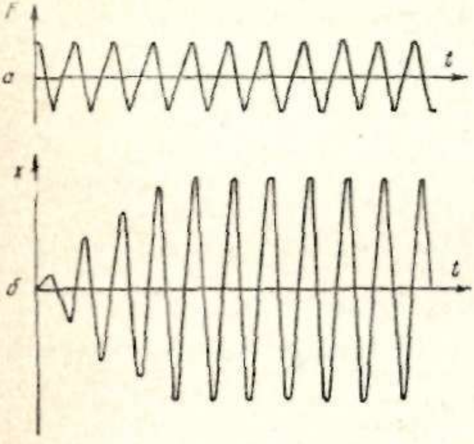
Резонанс вақтида (яъни $p = \omega$) амплитуда чексиз бўлади; агар ишқаланиш кучи ҳисобга олинса, у ҳолда амплитуда чекли бўлади.

Спицадаги дискнинг бу ерда тавсиф этилган тебранишлари ўз даврида анча мураккаб ҳисобланган техникавий масаланинг ечими бўлган. Ўтган аср охирларида буғ турбиналари қуришга киришилган; схематик равишда бу турбиналарни валга ўтказилган диск деб тасаввур этиш мумкин. Турбиналарнинг қуввати ва айланиш тезлиги ортиши билан ҳалокатга олиб келувчи емирилишлар бошланган. Шундай катта тебранишлар вужудга келганки, бунинг натижасида машина бузилиб кетган. Шундан сўнг, табиийки, валлар қаттиқроқ ва пишиқроқ қилиб ишланадиган бўлди, бироқ булар ижобий натижа бермади: тебраниш ва емирилишлар валнинг олдингидан каттароқ айланишларида содир бўлди. Шундай бўлиши кераклиги мутлақо равшандир: валнинг қаттиқлиги оширилганда ω частота ортган, шунинг учун резонанс ҳодисаси айланиш тезлигининг қиймати каттароқ бўлганда юз берган. Ўшанда тўғри йўл топилди: вални янада ингичка, қаттиқлигини камроқ қилиш ва $p > \omega$ айланиш тезлигида ишлаш тавсия этилди. Бундай қилиш анча осон ва арзонга тушади, шунинг учун худди шундай қилинадиган бўлди.

Валнинг хусусий частотага мос келадиган айланиш тезлиги *критик тезлик* деб аталади. Ҳозирги вақтда ҳар бир машина шундай лойиҳаланадики, у ишлаганда вал ҳеч қачон критик тезликка эга бўлолмасин; ишлатишга доир кўрсатмаларда машинани тезлаштиришда уни критик тезликлар зонасидан имкон борича тезроқ олиб ўтиб кетиш тавсия этилади; маълумки, бу зонада хавфли резонанс тебранишлари юз бериши мумкин.

130- §. Ўткинчи процесслар ва мураккаб тебранишлар. Гармоник анализ

Биз стационар мажбурий тебранишларни муфассал кўриб чиқдик. Ташқи куч амплитудаси ўзгарганда ёки унинг частотаси ўзгарганда бу ташқи куч таъсир этаётган системада ҳамиша хусусий сўнувчи тебранишлар пайдо бўлади. Шунинг учун ташқи гармоник кучнинг бирор тарзда ўзгаришидан бирор вақт ўтгандан кейингина бу куч таъсир этаётган системадаги тебранишлар гармоник тебранишлар бўлади; дастлаб хусусий тебранишлар мажбурий тебранишларга қўшилиб, мураккаб ҳаракатни юзага келтиради, бу *ҳаракат ўткинчи процесс* деб аталади.



367- расм.

Маятникка частотаси унинг хусусий частотасига тенг бўлган ташқи гармоник куч (367-*а* расм) таъсир эттирилгандаги тебранишлар графиги 367- *б* расмда кўрсатилган. Куч берилгандан бирор вақт ўтгандан кейингина маятник стационар гармоник мажбурий тебранишлар қилади; бундай тебранишлар ҳақида биз олдинги параграфларда гапириб келдик. Бу ҳолдаги ўткинчи процесс графиги 367- *б* расмда кўрсатилган.

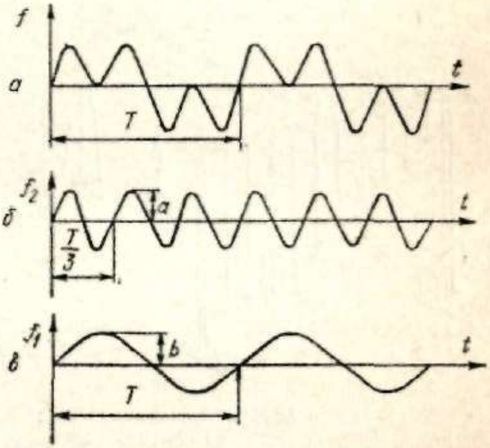
Дастлабки вақтда пайдо бўладиган хусусий тебранишлар мажбурий тебранишлар амплитудасини камайтиради; хусусий тебранишлар сўнгач, маятник фақат мажбурий тебранишлар қилади. Хусусий тебранишлар қанча секин сўнса, ўткинчи процесс шунча узоқ давом этади.

Агар тебранувчи системага, масалан, маятникка битта эмас, балки частоталари ҳар хил бўлган бир нечта гармоник куч таъсир қилса, тажрибанинг кўрсатишича, бу кучларнинг ҳар бири ўзининг частотасига тенг бўлган частотали мажбурий тебранишлар юзага келтиради. Шундай қилиб, натижавий тебраниш мураккаб бўлиб, гармоник тебраниш бўлмайди, маятник бир вақтнинг ўзида ташқи гармоник кучларнинг частотасидек турли хил частотали бир нечта тебранишда қатнашади; ҳар бир куч ҳосил қилган мажбурий тебраниш шу кучнинг бошқа кучлар бўлмаганда ҳосил қиладиган мажбурий тебранишидек бўлади.

Даври T бўлган ҳар қандай даврий функция даврлари $\frac{T}{n}$ бўлган гармоник функциялар йиғиндиси тарзида тасвирланиши математикада исбот этилади; бу ерда *n*, умуман айтганда, барча натурал сон қийматларини қабул қилади, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Масалан, 368-*а* расмда кўрсатилган даврий куч 368-*б* ва *в* расмларда кўрсатилган икки гармоник куч йиғиндиси тарзида ифодаланиши мумкин:

$$f = b\sin\frac{2\pi}{T}t + a\sin\frac{6\pi}{T}t. \tag{130.1}$$

$f_1 = b\sin\frac{2\pi}{T}t$ ва $f_2 = a\ \sin\frac{6\pi}{T}t$ кучлар f кучнинг *гармоникалари* деб аталади. Даври f кучнинг даври билан бир хил бўлган f_1 гармоника *асосий гармоника* деб аталади Гармоникаларнинг ҳар бирининг таъсири остида мажбурий гармоник тебранишлар пайдо бўлади: f_1 куч таъсири остида $p_1 = \frac{2\pi}{T}$ частотали тебранишлар, f_2 куч таъсири остида $p_2 = \frac{6\pi}{T}$ частотали тебранишлар пайдо бўлади.



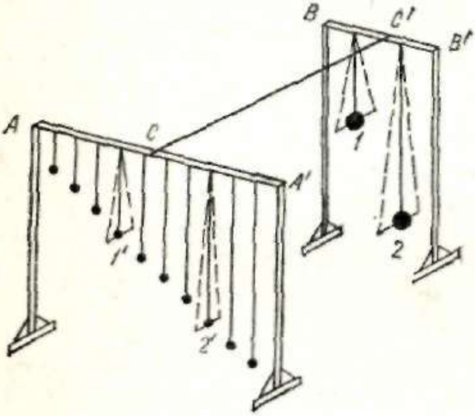
368- расм.

Агар гармоникалардан бирининг частотаси хусусий частота билан бир хил бўлиб қолса, масалан, f_2 гармониканинг p_2 частотаси $p_2 = \omega$ бўлиб қолса, у ҳолда f_2 кучдан ҳосил бўлган тебранишлар асосий гармоникадан ҳосил бўлган тебранишлардан устунлик қилади. f куч таъсири остидаги система бу ҳолда резонатор, яъни f мураккаб тебранишдан частотаси тахминан ω га тенг ва f_2 га тегишли бўлган тебранишларни ажратадиган асбоб бўлади.

Резонанс эгри чизиғи қанча ўткир бўлса, резонаторнинг хусусий тебранишлари қанча секин сўнса, резонанс ҳолатдаги тебранишлар гармоник тебранишга шунча яқин бўлади ва резонатор ўзининг хусусий частотасига яқин частотали тебранишларни шунча яхши ажратади. Албатта, бошқа гармоникалардан ҳосил бўладиган тебранишлар ҳам ҳамиша қатнашади, бироқ сўниш кам бўлганда бу тебранишлар жуда кичик бўлади. Резонаторнинг бундай *сайлаш хоссаси* қатор техникавий қурилмаларда кенг қўлланилади.

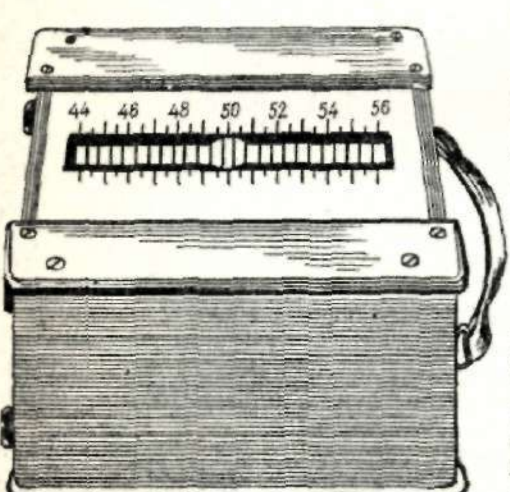
Агар бизнинг ихтиёримизда хусусий частоталари турлича бўлган ва турли частотали мураккаб кучлар таъсири остида турган резонаторлар тўплами бўлса, биз бу резонаторларнинг тебранишларига қараб резонаторга таъсир этувчи мураккаб кучнинг таркиби тўғрисида фикр юрита оламиз ва мураккаб таъсирни анализ қилиб, ундан маълум частотали тебранишни ажрата оламиз.

Масалан, AA' стерженга узунлиги турлича бўлган енгил маятниклар бир қатор қилиб осиб қўйилган (369- расм). AA' таглик иккита (*1*, *2*) оғир маятник осиб қўйилган BB' тагликка енгил CC' штанга билан бириктирилган. Оғир маятникларни тебрантирамиз; уларнинг тебранишидан улар осилиб турган BB' таглик тебранма ҳаракатга келади, CC' штанга воситасида эса AA' таглик сал-сал тебранади; маълумки, AA' га бир тўда маятник осиб қўйилган. Бир оз вақт ўтгач ҳамма маятниклар тебранма ҳаракатга келади, улар мажбурий тебранишлар қилади. Бироқ частоталари *1* ва *2* маятникларнинг частоталарига яқин бўлган *1′* ва *2′* маятниклар ҳаммасидан кўпроқ тебранади



369- расм.

CC' штанга томонидан берилаётган таъсир AA' тагликни оғир маятникларнинг хусусий частоталарига тенг бўлган икки частота билан тебранма ҳаракатга келтиради, таглик билан бирга унга осилган маятниклар ҳам тебранади. Бу таъсир ҳамма маятникларга тахминан бир хил даражада қўйилган бўлади ва уларнинг ҳаммаси икки частота билан тебранади, бироқ *2′* маятникда паст частотали тебранишлар устунлик қилади, *1′* маятникда эса юқорироқ частотали тебранишлар устунлик қилади. Биз BB' тагликни кўрмадик, деб фараз қилайлик, у ҳолда AA' тагликдаги маятникларнинг тебранишига асосланиб туриб, CC' штанга тебранишлари-



370- расм.

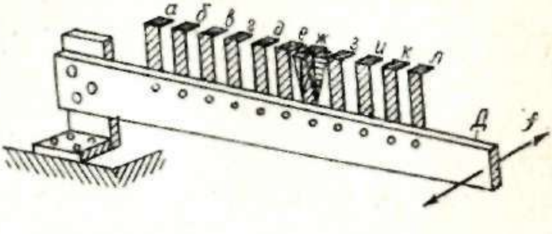
нинг частоталари тўғрисида тайинли бир хулосага келишимиз мумкин. Маятниклар (резонаторлар) системаси бу ерда мураккаб таъсирнинг гармоник анализатори бўлиб хизмат қилади.

Резонаторларнинг бу хоссалари тебранишларни ўлчаш ва анализ қилишга мўлжалланган техникавий асбобларда қўлланилиши мумкин.

Ўзгарувчан токка мўлжалланган тилли частотомер (370- расм) ва тилли тахометр — резонанс принципи асосида қурилган асбоблардир. Тилли частотомер ўзгарувчан ток частотасини аниқлашга, тилли тахометр эса вал айланишлари частотасини аниқлашга мўлжалланган. Бу асбобларнинг асосий қисми бир асосга бириктирилган турли хил хусусий частотали резонаторлар тўпламидан иборат. Одатда бир пластинкага узунлиги турлича бўлган тиллар (*а*, *б*, *в*,...) бир қатор қилиб бириктирилган бўлиб, тиллар учида кичикроқ масса бўлади (371- расм). Тилларнинг ўлчами ва материали, шунингдек, учидаги массалар шундай танланадики, улардан ҳар бирининг хусусий частотаси берилган тайинли ω_1, ω_2 ва ҳоказо частоталарга мос келадиган бўлсин.

ω_0 частотаси ўлчанмоқчи бўлган тебраниш тиллар бириктирилган *Д* пластинкани тебрантиради; бунинг оқибатида хусусий частотаси ҳаммадан кўра ω_0 частотага энг яқин бўлган тил энг катта амплитуда билан тебранма ҳаракат қилади, бу амплитудани тил учи шаклининг чаплашиб кетганидан аниқлаш осон. Частотомерда электромагнитга ўзгарувчан ток юборилади, электромагнит ўз навбатида *Д* пластинкани тебрантиради, тил тебранишларининг манзараси эса 370-расмда кўрсатилган; ҳар бир тил қаршисига унинг хусусий частотаси герц ҳисобида ёзиб қўйилган. Бинобарин, бу ҳолда ўзгарувчан токнинг ўлчанаётган частотаси 50 Гц га тенг (секундига 50 тебраниш). Тахометрда асбоб корпуси ичидаги *Д* пластинка стерженга («шчупга») боғланган; бу стерженнинг тебранишлари *Д* пластинкага узатилади. Вали тайинли бир тезлик билан айланаётган машинага тахометр шчупини тегизиб, биз шчупни ва *Д* пластинкани машина корпуси тебранаётган частота билан тебранишга мажбур этамиз; бу частота деярли ҳамма вақт вал айланишларининг сонига тенг бўлади.

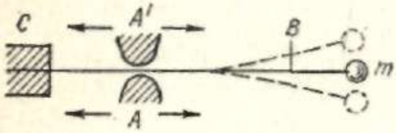
Агар тиллар бириктирилган пластинка гироскоп гардишига уланса, бу асбобнинг ишини яққол кўрсатиш мумкин. Агар олдин айлантириб юборилган гироскоп аста-секин тўхтаса, у ҳолда тиллар бирин-кетин катта-катта амплитудали тебранишлар қилишини кўриш



371- расм.

мумкин. Моторнинг айланиш тезлиги вақт ўтиши билан пасайишини ҳам худди шу йўсинда кузатиш мумкин.

Тебранишлар частотасини ўлчашга мўлжалланган бир қатор асбобларнинг тузилишига резонанс ҳодисалари асос қилиб олинган. Масалан, 372- расмда тилли частотомернинг схемаси кўрсатилган, бу асбобнинг асоси учида m массаси бўлган B пластинка (тил) бўлиб, пластинканинг иккинчи учи асбобнинг C корпусига маҳкамланган; маҳкамланган жойидан бирор масофада пластинка A ва A' таянчлар билан қисиб қўйилган. Частотаси ўлчанмоқчи бўлган тебранувчи жисмга асбобнинг корпуси тегизилганда тил мажбурий тебранма ҳаракатга келади. Сўнгра AA' таянчлар пластинка бўйлаб сурилиб, уларнинг тил максимал амплитуда билан тебранадигандаги вазияти аниқланади. AA' таянчнинг мазкур вазиятидаги тебранишларнинг хусусий частотаси маълум ва у тилли частотомер шкаласида кўрсатилган. Бинобарин, бу частота тебранишларнинг ўлчанаётган частотасига тенг.



372- расм.

Агар тебраниш мураккаб бўлиб, турли частотали гармоник тебранишлардан иборат бўлса, у ҳолда бу частоталар бир-бирига унча яқин бўлмаганда асбоб ҳамма частоталарни топа олади.

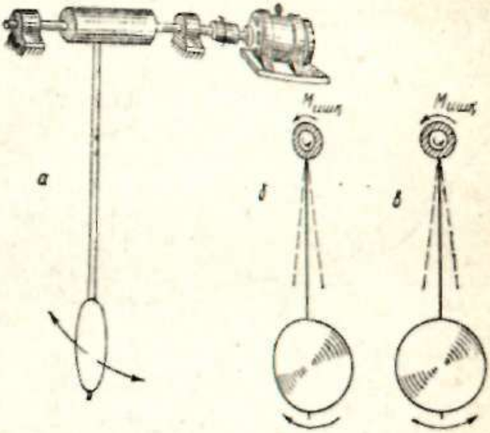
Бу турдаги ҳамма асбобларда асосий сезгир элемент «резонатор» бўлиб, унинг хусусий частотасини осонгина ўзгартириш мумкин.

Акустика, оптика, радиотехника ва қатор бошқа соҳаларда резонаторлар анализ қилиш қобилияти туфайли катта роль ўйнайди.

131- §. Автотебранишлар

Ташқи даврий куч таъсири остида бўлмаган системада маълум бир шароитларда доимий даврий тебранишлар юз беради. Масалан, торга кучи ўзгармайдиган шамол уриб турибди, тор қимирламай турганда бу куч торни бир томонга доимий миқдорда оғдиради, холос. Бироқ бундай муттасил шамол таъсирида биз кўпинча торнинг даврий стационар тебранишлар қилишини кўрамиз, бу тебранишлар частотаси торнинг хусусий частотасига деярли тенг.

Ғижжак торига камонча бир текис босиб юргизилади, камончанинг торга ишқаланиш кучи торни тортиши керак эди, бироқ ҳаммага маълумки, бунда тор даврий тебранма ҳаракатга келади. Агар шамол ва камонча бўлмаган вақтда биз торни мувозанат вазиятидан чиқариб, кейин қўйиб юборсак, хусусий тебранишлар пайдо бўлиб, улар бирор вақт ўтгандан сўнг тўхтаб қолган бўлар эди. Бироқ шамол бўлганда ёки камончани юргизганда тебранаётган торга таъсир этувчи кучлар шундай ўзгарадики, бунда улар тебранишларни *сўндирмай* туради; бу кучларнинг иши тор тебранганда муқаррар равишда пайдо бўладиган бошқа ишқаланиш кучларининг ишини компенсациялашга сарф бўлади. Торнинг тебранишларида шундай шароитлар юзага келадики, бу шароитларда мазкур тебранишларни сўндирмай турадиган маълум бир даврий куч пайдо бўлади; тебранишлар бўлмаганда камонча томонидан берилаётган ташқи таъсир ўзгармаган бўлар эди.



373- расм.

Тайинли даврий ташқи таъсир бўлмаган ҳолда ўзида даврий тебранишлар пайдо бўладиган системалар автотебранишли системалар деб, процесснинг ўзи автотебранишлар деб аталади.

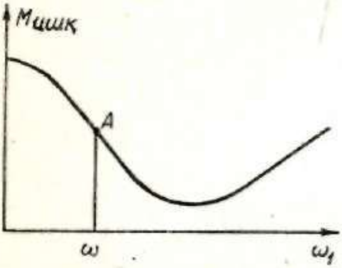
Автотебранишларга энг содда мисол сифатида айланувчи валга ўрнатилган маятникнинг автотебранишларини кўриб чиқамиз (373-*а* расм). Маятник муфтасининг айланаётган валга ишқаланиш кучлари маятникка таъсир қилиб, маълум $M_и$ момент ҳосил қилади[1]. Маятник даврий тебранма ҳаракат қилган ҳолда бу момент бажарадиган ишни кўриб чиқамиз. Даврнинг вал билан маятник қарама-қарши йўналишларда айланадиган бир ярми (бир бўлаги) ичида ишқаланиш кучлари $M_и$ моментининг иши маятникдан олинган энергияга тенг бўлади (373- *б* расм); даврнинг вал билан маятник бир томонга айланадиган иккинчи ярми давомида ишқаланиш кучлари $M_и$ моментининг иши маятникка энергия қўшиб беради (373- *в* расм). Баъзи шароитларда қуруқ ишқаланиш кучи сирпаниш тезлигига деярли боғлиқ бўлмайди; у ҳолда ишқаланиш кучларининг маятник берган иши *нолга* тенг бўлади ва бундай осмага ишқаланишдан тебранишлар сўнмайди.

Агар валнинг маятник муфтасига ишқаланиш кучи сирпаниш тезлигига боғлиқ бўлса, у ҳолда манзара ўзгаради. Ишқаланиш кучи

---

[1] Валнинг айланиш тезлиги абсолют қиймат жиҳатидан ҳамиша маятникнинг тебраниш вақтидаги айланиш тезлигидан катта деб фараз қилинади.

сирпаниш тезлигига қараб ортмоқда, деб фараз этайлик; у ҳолда 373-*б* расмда кўрсатилган ҳолатда ишқаланиш кучларининг моменти 373-*в* расмда кўрсатилган ҳолатдагидан ортиқ бўлади; бинобарин, бир давр ичида ишқаланиш кучларининг таъсири натижасида маятник *энергия сарф қилади* ва маятник тебранишлари кўпроқ сўнади. Маятник тебранишларининг энергияси осмада сарф бўлади; айланаётган валга ишқаланиш тебранишларни кўпроқ сўндиради, холос.



374- расм.

Агар сирпаниш тезлиги ортганда ишқаланиш кучи *камайса*, манзара принципиал жиҳатдан ўзгариб кетади. Вал бир оз мойланганда сирпаниш тезлиги ўзгаришининг маълум бир диапазонида бундай шароитларни юзага келтириш мумкин. Маятник қимирламай турганда ишқаланиш кучи моменти билан валнинг айланиш тезлиги орасидаги муносабатнинг типик эгри чизиғи 374- расмда кўрсатилган.

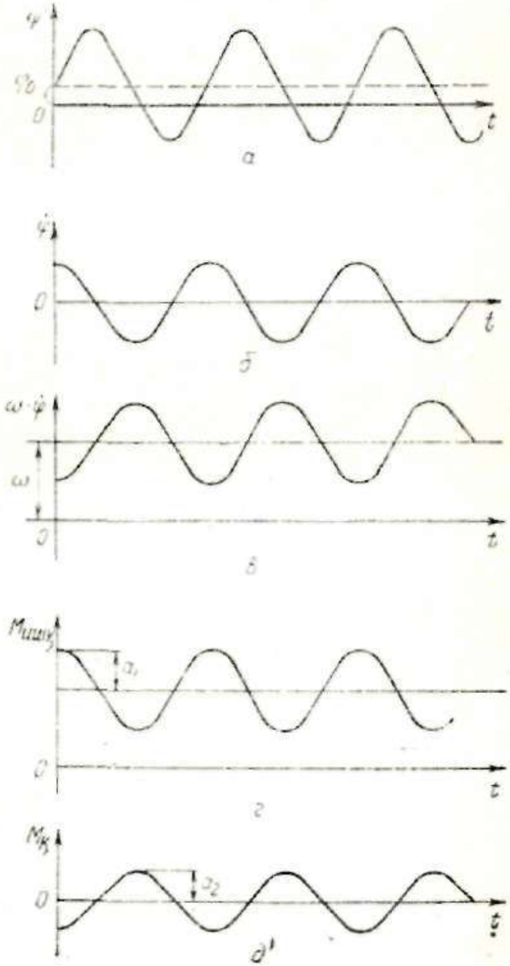
Валнинг айланиш тезлигига *A* нуқтанинг абсциссаси тўғри келсин, деб фараз қилайлик; у ҳолда маятник тебранишларининг энергияси давр давомида ортишини юқорида қилинганга ўхшаш мулоҳазалар асосида исбот этиш осон. Тебранаётган маятник давр давомида валдан маълум бир порция энергия олади; агар бу энергия порцияси ҳавога ишқаланишга сарф бўладиган энергиядан ортиқ бўлса, у ҳолда маятник тебранишларининг амплитудаси вақт ўтиши билан *ортади*.

375-расмда тасвирланган графикларни кўриб чиқиб, тебранишлар манзарасини тасаввур этиш мумкин. *а* график маятникнинг φ оғиш бурчагининг вақт ўтиши билан қандай тебранишини кўрсатади; *б* график маятникнинг φ айланиш тезлигининг ўзгаришини кўрсатади; *в* график нисбий айланиш тезлигининг (сирпаниш тезлигининг), яъни $\omega_1 = \omega - \dot{\varphi}$ нинг тебранишларини кўрсатади; бу тебранишлар валнинг ω доимий айланиш тезлиги атрофида юз беради; *г* график валнинг муфтага ишқаланиш кучлари $M_и$ моментининг тебранишларини кўрсатади (бунда сирпаниш тезлиги ортганда ишқаланиш кучлари камаяди); *д* график ҳавога ишқаланиш кучларининг $M_х$ моменти ўзгаришини кўрсатади; бу момент ҳамиша φ тебранишларига қарама-қарши фазада бўлади. Равшанки, a_1 амплитуда a_2 амплитудадан катта бўлса, тебранишлар кучаяди.

Маятник тебранишларининг амплитудаси ортиши билан валга ишқаланиш кучлари моментининг a_1 амплитудаси ҳавога ишқаланиш кучлари моментининг a_2 амплитудасига қараганда секинроқ ўсади ва маятник тебранишлари амплитудасининг бирор қийматида a_1 ва a_2

амплитудалар тенглашиб қолади; бунда маятник стационар тебранишлар, яъни *автотебранишлар* қилади.

Моторнинг айланаётган вали маятникка стационар автотебранишларда иссиқликка исроф бўладиган энергия ўрнини босишга зарур бўлган энергия беради. Бу энергия мотордан маятникка сирпаниш ишқаланиш кучи воситасида берилади. Бу мулоҳазаларнинг ҳаммасидан автотебранишлар частотаси маятник тебранишларининг хусусий частотаси билан аниқланиши кўриниб турибди. Тажрибанинг кўрсатишича, автотебранишлар частотаси бошқа ҳолларда ҳам теб-



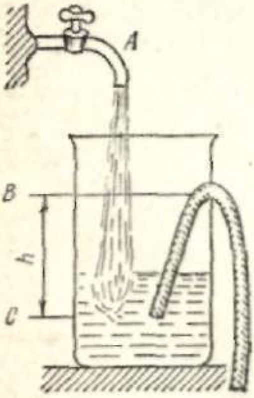
375- расм.

ранувчи система таркибига кирувчи резонаторнинг хусусий частотасига яқин бўлади.

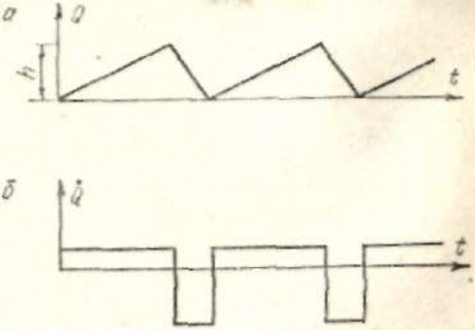
Деярли гармоник тебранишлар қиладиган автотебраниш системалар ҳамиша тебранма ҳаракат қиладиган *резонатордан* (маятникдан) ва у билан боғлиқ бўлган энергия манбаидан (мотордан) иборатдир; резонатор тебранаётганда у энергия манбаига шундай таъсир кўрсатадики, бунда резонаторга таъсир этувчи куч даврий куч бўлиб қолади ва резонатордаги тебранишларни қувватлаб туради. Ҳамиша энергия манбаи билан резонатор ўртасида *тескари алоқа* бор, бу алоқа энергия манбаи ҳосил қилаётган кучнинг тебранишини таъминлаб туради. Бу мисолда сирпаниш тезлигининг тебранишлари тескари алоқани таъминлаб турди, бу алоқа валга ишқаланиш кучларининг маятник тебранишларини қувватлаб турадиган тебранишлари орқали амалга оширилади. Автотебранишлар пайдо бўлиши учун бирор (жуда кучсиз бўлса-да) туртки керак, чунки юқорида тавсифланган бутун процесс маятник мувозанат вазиятидан оғиб, тебранма ҳаракатга келган вақтда бошланади.

Айланаётган валдаги маятникнинг тебранишлари деярли гармоник бўлган автотебранишларга мисол бўлади. Бироқ автотебранишлар гармоник тебранишлар бўлмаслиги ҳам мумкин; масалан, *очилаётган эшикнинг ғичирлаши* эшик ошиқмошиқларидаги қуруқ ишқаланиш кучига алоқадор бўлган автотебранишлар туфайли пайдо бўлади ва ҳоказо. Ногармоник автотебранишларга оид типик мисолга қадим замонлардаёқ маълум бўлган *галма-гал оралатиладиган* манбаларнинг автотебранишларини кўрсатса бўлади.

Бундай манба қурилмасининг тузилиш схемаси 376-расмда кўрсатилган. Идишнинг деворидан сифон найи ўтказилган. Агар идишга *A* жўмракдан доимий сув жараёни туширилса, унинг оқиш тезлигини шундай ростлаш мумкинки, бу ҳолда идишдаги сув сатҳи даврий равишда тебраниб турадиган бўлади. Дастлаб идишда сув йўқ эди, деб фараз этайлик. Жўмракдан сув оқизиб қўямиз, идишдаги сув сатҳи аста-секин кўтарила бошлайди; сув сатҳи *B* тамғага етган ҳамоно (376- расмга қ.) сув сифон найидан оқиб тўкила бошлайди, сув оқими най ичидаги ҳавони ўзи билан бирга олиб кетиб, сифоннинг анча йўғон



376- расм.



377- расм.

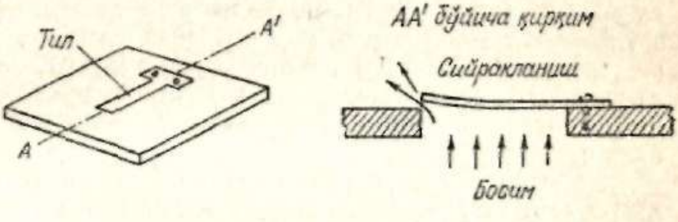
найини бутунлай тўлдиради; сўнгра сув жўмракдан идишга тушаётганидан кўра сифондан анча тез оқиб тушади, натижада сув сатҳи сифон найининг пастки учидаги C тамғагача камаяди. Энди сифон найининг қисқа томонидан унга ҳаво киради, сифондан сув тўкилади ва шу билан сифоннинг иши тўхтайди. Сўнгра биз тавсифлаган бу процесс истаганча узоқ муддат давомида такрорланаверади: сув идишда тахминан 377- *а* расмда кўрсатилгандек даврий равишда кўтарилиб-пасайиб туради, сифон эса идишни даврий равишда B тамғадан C тамғагача бўшатиб туради. Сув сатҳининг ўзгариш тезлиги 377- *б* расмда кўрсатилган.

Графиклардан бу ердаги тебранишлар мутлақо гармоник тебранишлар эмас эканлиги кўринади. Сув сатҳи ҳаракатининг тезлиги сифон «ишлаган» ва «тўхтаган» пайтларда айниқса кескин ўзгаради. Бироқ бу ердаги тебранишлар соф даврий тебранишлар бўлиб, уларни жўмракдан тушаётган сувнинг бир текис оқими қувватлаб туради. Процессни қуйидагича тавсифлаш мумкин: идишдаги сув сатҳи маълум баландликка етганда идиш «тешилиб», ундан сув кета бошлайди, сув сатҳи пасайиб маълум жойга келганда «тешик» бекилади. «Тешик»ни идишга қуйилаётган сув ёпади ва очади—«тескари алоқа» ана шундан иборат. Сув сатҳининг тебранишлари идиш хоссаларини ўзгартирганда бўлади.

Пружинага илинтирилган жисмнинг қуруқ сирт устида сирпанишида худди мана шу типдаги автотебранишлар пайдо бўлади. Идишдаги сув сатҳининг ёки пружинага илинтирилган юкнинг автотебранишлари *ногармоник* тебранишлар бўлиб, *узлукли автотебранишлар* деб аталади, чунки буларнинг ҳаракат графиклари ёки тезлик графиклари шакли жиҳатидан узлукли функцияларга яқин бўлган эгри чизиқлар билан тасвирланади.

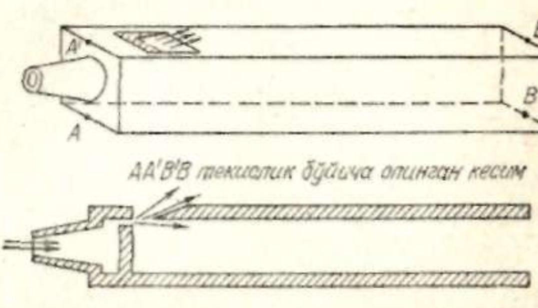
Ҳаво ёки сув жараёни туфайли пайдо бўладиган автотебранишларга яна бир нечта мисол келтирамиз, чунки бундай ҳодисалар кундалик турмушда кўп учрайди.

Гармонь ёки бошқа тилли музика асбобларида пайдо бўладиган товуш тилнинг (клапаннинг) автотебранишлари натижасидир, тил жуда юпқа пластинка бўлиб, у тирқишдан отилиб чиқадиган ҳаво жараёнида туради (378- расм).



378- расм.

Орган трубалари, хуштак ва шуларга ўхшаш бошқа қурилмаларда ҳавонинг тебранишлари ўткир тиғга урилиб ажралаётган муттасил ҳаво жараёни қувватлаб турган автотебранишлар туфайли пайдо бўлади (379- расм). Бу ерда труба ичида турган ҳаво резонатордир.



379- расм.

Яхши маҳкамланмаган водопровод трубасидаги жўмракни очганда трубадан чиқадиган кескин товуш ҳам жўмрак тирқишидан оқиб ўтаётган сув жараёни туфайли пайдо бўладиган автотебранишлар натижасидир.

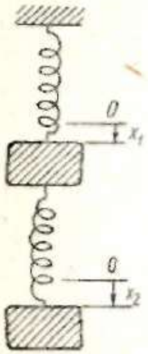
Чўнтаки соат ва девор соати маятнигининг тебранишлари автотебранишларга яққол мисол бўлади.

132-§. Эркинлик даражалари кўп бўлган системаларнинг хусусий тебранишлари

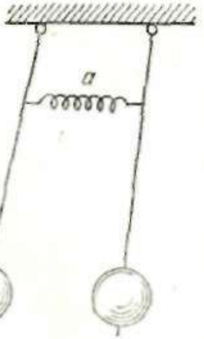
Олдинги параграфларда биз бир жисмнинг, яъни ипга осилган юкнинг, пружинага бириктирилган жисмнинг, суюқликка ботирилган жисмнинг ва ҳоказоларнинг тебранишларини кўриб чиқдик. Агар *туташ идишларда* турган суюқлик тебранса, у ҳолда бир зарранинг гармоник тебранишлари суюқликнинг ҳамма зарраларининг тебранишларини *бир қийматли* аниқлайди. Бундай ҳаракатларнинг *эркинлик даражаси битта* бўлади; бутун ҳаракат процессини тўлиқ билиш учун фақат битта катталикнинг ўзгаришини билиш етарлидир.

Энди *пружиналарга устма-уст қилиб осиб қўйилган* икки юкни вертикал тебранма ҳаракатга келтирдик, деб фараз қилайлик (380-расм). Бу ерда пастки пружина тебраниш вақтида деформацияланади ва юқориги юкнинг (массанинг) x_1 силжиши пастки массанинг x_2 силжишига тенг бўлмай қолади. Тебраниш вақтида бараварига икки катталик — x_1 ва x_2 ўзгаради. Масалан, фақат пастки юкни тебрантирамиз, унга кескин туртки билан бирор тезлик берамиз; шу ҳамоно юқориги масса ҳам тебранма ҳаракатга келади, улар орасидаги пружина чўзилиб-қисқариб, юқориги юкни ҳам тебранма ҳаракатга келтиради. Шунинг учун тебранишларни анализ қилишда биз иккала юкнинг бараварига қиладиган ҳаракатини ҳисобга олишга мажбурмиз; бундай тебранма системанинг *эркинлик даражаси иккита* бўлади.

Худди шунингдек, *бир-бирига енгил a пружина билан боғланган* (381- расм) ва ўзларининг осилиш нуқталаридан ўтадиган вертикал текисликдагина тебрана оладиган икки маятник ҳам эркинлик даражаси иккита бўлган системадир. Бир маятникнинг тебранишлари иккинчисининг тебранишларига қонуний равишда боғланган.



380- расм



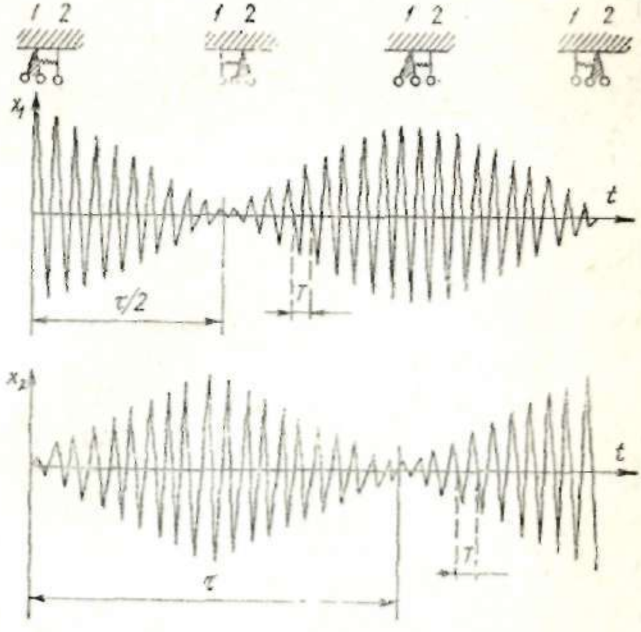
381- расм.

Бир-бирига пружиналар билан боғланган уч, тўрт ва ҳоказо маятникларнинг тебранишларини кузатиш мумкин; уч, тўрт ва ҳоказо маятникдан иборат тўпламни эркинлик даражалари уч, тўрт ва ҳоказо бўлган ягона система деб ҳисоблаш лозим, чунки буларда уч, тўрт ва ҳоказо маятник бир вақтда тебранади.

Агар бундай системада битта ёки бир неча *маятникни оғдириб*, тебранишларни кузатсак, маятниклардан ҳар бирининг тебраниш манзараси жуда мураккаб эканлигини кўрамиз. Даставвал, *ишқаланиш кучлари ҳали* сезиларли таъсир этмаган бирор қисқа вақт ичида тебранишларни кузатганда маятниклардан ҳар бирининг тебраниши *ногармоник* эканлигини кўрамиз.

Содда системалардан бирида бўладиган тебранишларни, чунончи бир-бирига пружина билан боғланган иккита бир хил маятник тебранишларини батафсилроқ кўриб чиқамиз (381-расм). Улардан бирини оғдириб, иккинчисини жойида тутиб турамиз. Сўнгра иккала маятникни бараварига қўйиб юбориб, иккала маятник тебранишларини айни бир қоғозга ёзиб оламиз. Тебранишлар манзарасини 382-расмда кўрсатилган графикка қараб тасаввур этиш мумкин.

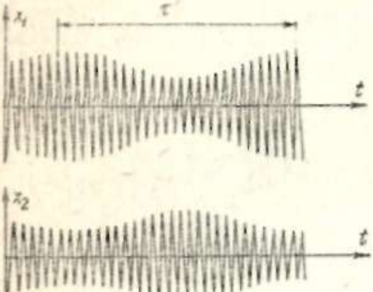
Дастлаб биринчи *маятник гўё иккинчи маятникни биз қўлимиз* билан ушлаб тургандек тебранади, улар орасидаги пружина эса сезиларли равишда сиқилиб-чўзилиб туради; пружинанинг кучи иккинчи маятникка таъсир этади ва бу маятник аста-секин тебрана бошлайди. Биринчи маятникка берилган энергиянинг бир қисми иккинчи маятникка узатилгани учун, биринчи маятник тебранишларининг амплитудаси аста-секин камаяди, айни вақтда иккинчи маятникнинг амплитудаси ўсиб боради.



382- расм.

Бу процесс биринчи маятник тўхтаб, иккинчиси эса биринчи маятникнинг энг бошдаги тебраниш амплитудасига деярли тенг бўлган (агар ишқаланишга кетадиган исроф оз бўлса) амплитуда билан тебрана бошлагунча ўтган бирор $\tau/2$ вақт давом этади. Сўнгра маятникларнинг роллари алмашади: иккинчи маятник биринчисини тебрантиради ва процесс тўлиқ такрорланади, чунки маятниклар бир хил. Маятниклар гоҳ ўсувчи, гоҳ камаювчи тебранишлар қилиб, τ вақт ўтганда энергия алмашишади. Бундай тебранишлар *тепкили тебранишлар* (титраш) деб, τ вақт эса *тепкили тебраниш даври* деб аталади. Механикавий энергия иссиқлик энергиясига айланиб, маятниклар тўхтаб қолмагунча механикавий энергия ҳамма вақт бир маятникдан иккинчисига деярли тўлиқ ўтиб туради.

Энди иккала маятникни четга тортиб қўйиб юборамиз ва яна тебранишлар процессини ёзиб оламиз. Бу ҳолда бир маятникнинг тебранишлар амплитудаси доимий қолмайди — у гоҳ ортади, гоҳ камаяди; иккинчи маятникда ҳам шунга ўхшаш манзара юз беради; аввалгидек, маятниклардан бирининг амплитудаси ошганда иккинчисининг амплитудаси албатта камаяди. Бироқ энди бир маятникнинг амплитудаси нолгача эмас, балки бирор максимал қийматидан бирор минимал қийматигача камаяди; бу ҳол 383-расмда схематик равишда тахминан кўрсатилган. Энергиянинг бир маятникдан иккинчи маятникка ўтишига кетган вақт, яъни тебранишлар амплитудаси ўзининг максимал қийматидан минимал қийматига ўзгаргунча ўтган вақт эса аввалгича $\tau/2$ га тенг. Маятниклар ҳар қандай усулда тебрантириб юборилганда ҳам ҳамиша тепкили тебраниш даври айни бир хил бўлади; маятник тебранишлари амплитудасининг максимал ва минимал қийматлари орасидаги айирмагина маятникларни тебрантириб юбориш усулига боғлиқ равишда ўзгаради.



383- расм.

Умуман айтганда, маятниклардан ҳар бирининг тебранишлари ҳамма ҳолларда ногармоник тебранишлар бўлади. Ҳар бир маятник гармоник ҳаракат қилгандек бўлади, бироқ унинг амплитудаси даврий равишда ўзгаради, бу давр τ тепкили тебраниш даврига тенг бўлади. Тепкили тебранишда амплитуда ўзгаришларининг катталиги (ёки чуқурлиги) тебранишларни ҳосил қилиш усулига боғлиқ. Равшанки тепкили тебраниш жуда заиф ва тебранишлар гармоник тебранишларга яқин бўладиган уйғотиш усулларини топишга уриниб кўриш мумкин.

Маятникларнинг симметрик эканлигига асосланган мулоҳазалардан фойдаланиб, маятникларни тебрантириб юборишнинг шундай икки усулини кўрсатиш мумкинки, бу усуллар қўлланилганда маятниклар соф гармоник тебранма ҳаракат қилади: биринчи усул — иккала маятникни бир томонга бир хил оғдириб, қўйиб юборилади, иккинчи усул — иккала маятникни турли томонга бир хил оғдириб, қўйиб юборилади. Биринчи усул билан тебрантириб юборилганда иккала маятник орасида пружина бўлмагандагидек тебранади, тебраниш вақтида пружинанинг узунлиги ўзгармайди. Агар пружинанинг оғирлиги ҳисобга олинмайдиган даражада кичик бўлса, у ҳолда маятникларнинг T_2 тебраниш даври битта маятникнинг ёлғиз ўзи тебрангандаги хусусий тебранишлари даврига тенг бўлади.

Иккинчи усул билан тебрантириб юборилганда маятниклар карама-қарши фазада тебранади, пружина сиқилади ва чўзилади, бироқ унинг ўртаси тинч туради; бу нуқтани маҳкамлаб қўйилган нуқта деб ҳисоблаш мумкин. Иккала маятник бир хил шароитда бўлиб, T_1 давр билан гармоник тебранма ҳаракат қилади. T_1 даврнинг T_2 даврдан кичик бўлишини тушуниш осон, чунки иккинчи ҳолда маятникнинг тикловчи кучига пружинанинг тикловчи кучи ҳам қўшилади.

Агар маятникларнинг бошланғич оғишлари салгина фарқ қилса, у ҳолда иккала маятникда ҳам унча катта бўлмаган тепкили тебраниш пайдо бўлади.

133-§. Тепкили тебранишни назарий равишда анализ қилиш

Тепкили тебраниш манзарасига тушуниб олиш учун турли частотали икки гармоник тебранишни қўшиш тўғрисидаги масалани назарий жиҳатдан кўриб чиқамиз. Айни бир частотали икки тебранишни қўшиш натижасида ўшандай частотали гармоник тебраниш ҳосил бўлишини олдиндан айтиб ўтамиз.

Дарҳақиқат, нуқта бирор саноқ системасига нисбатан маълум йўналишда $A \sin(\omega t + \varphi_1)$ қонун билан тебранаётган, саноқ системасининг ўзи эса ўша йўналишда $B \sin(\omega t + \varphi_2)$ қонун билан тебранаётган бўлсин. У ҳолда нуқта қўзғалмас саноқ системасига нисбатан қуйидаги қонун билан тебранади:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) + B \sin(\omega t + \varphi_2) = (A \cos\varphi_1 + B \cos\varphi_2) \sin\omega t + \\ + (A \sin\varphi_1 + B \sin\varphi_2) \cos\omega t = C \sin(\omega t + \varphi), \qquad (133.1)$$

бу ерда

$$C = \sqrt{(A \cos\varphi_1 + B \cos\varphi_2)^2 + (A \sin\varphi_1 + B \sin\varphi_2)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A \sin\varphi_1 + B \sin\varphi_2}{A \cos\varphi_1 + B \cos\varphi_2}.$$

Йўналиши бир хил, бироқ частотаси ҳар хил бўлган икки гармоник тебранишнинг қўшилишидан ҳосил бўлган тебраниш бошқача манзарани тасвирлайди, у гармоник тебраниш бўлмайди. Фараз қилайлик,

$$x_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

бўлсин. У ҳолда натижаловчи тебраниш қўйидагича бўлади:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$= A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(\omega_2 t + \varphi_2) + (B - A)\sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) +$$
$$+ (B - A)\sin(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (133.2)$$

Биринчи ҳад гармоник тебраниш эмас, чунки у икки гармоник кўпайтувчининг кўпайтмасидан иборат бўлиб, улардан бирининг частотаси $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$, иккинчисининг частотаси, $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Агар ω_1 ва ω_2 частоталар бир-биридан кўп фарқ қилмаса, $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ частота ω_1 (ёки ω_2) билан бир хил тартибда бўлади, бироқ $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ частота ω_1 (ёки ω_2) га нисбатан жуда кичик бўлади. У ҳолда натижаловчи (133. 2) тебранишнинг биринчи ҳадини ω_1 (ёки ω_2) *частотали деярли гармоник тебраниш деб тасаввур этиш мумкин,* бу тебранишнинг «амплитудаси» $2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$ га тенг, бошқача айтганда «амплитула» вақт ўтиши билан секин ўзгаради. Бундай тебранишларнинг графиги 382- расмда биринчи маятник учун кўрсатилган график билан расо мос тушади; *бу тебранишларни «соф тепкили тебраниш» деб аташ мумкин,* бунда равшанки, тепкили тебраниш даври қуйидагига тенг:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \qquad (133.3)$$

Натижаловчи (133. 2) тебранишнинг иккинчи ҳади ω_2 частотали гармоник тебранишдир. «Соф тепкили тебраниш» билан гармоник тебранишларни қўшишдан тепкили тебраниш ҳосил бўлиб, бунда тебранишлар «амплитудаси» τ титраш даврига тенг бўлган давр билан ўзгаради, лекин ҳеч қачон нолга тенг бўлмайди; бундай тебранишларнинг графиги 383- расмда кўрсатилган. Амплитудалари бир хил (яъни $A=B$) бўлган икки тебранишни қўшганда ҳосил бўлган тепкили тебраниш соф тепкили тебраниш бўлади, $A \neq B$ бўлганда эса натижавий тебраниш одатдаги тепкили тебраниш бўлади; бу тепкили тебранишнинг $\nu_{\text{т}} = \frac{1}{\tau}$ частотаси, (133. 3) га асосан, ҳамиша қуйидагига тенг бўлади:

$$\nu_T = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2,$$

бу ерда $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$, $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ —қўшилганда тепкили тебраниш ҳосил қиладиган гармоник тебранишларнинг частоталари. *Тепкили тебраниш частотаси қўшилувчи тебранишлар частоталарининг айирмасига тенг бўлиб, тебранишларнинг амплитудаси ва бошланғич фазасига боғлиқ эмас.*

Бир томонга қараб ноль орқали кетма-кет икки ўтиш орасидаги

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

вақтни (382- расмга қ.) мураккаб тебранишларнинг *кичик даври* деб аташ мумкин.

Тепкили тебраниш ҳодисасини яна бундай яққол тасаввур этиш мумкин. Бир йўналишда бўлаётган, бир-бирига яқин икки гармоник тебраниш қўшилганда иккала тебранишнинг фазаси бир хил бўлган

t_1 пайтда натижаловчи тебраниш амплитудаси максимал бўлади; сўнгра вақт ўтиши билан натижаловчи тебранишлар амплитудаси камаяди ва қўшилувчи тебранишлар фазаси қарама-қарши бўлган t_2 пайтда натижаловчи тебранишлар амплитудаси минимумга эришади; сўнгра тебранишлар яна ортади ва қўшилувчи тебранишлар фазаси бир хил бўлган t_3 пайтда натижаловчи тебранишлар амплитудаси яна максимал бўлиб қолади ва ҳоказо.

Равшанки, τ тепкили тебраниш даври қуйидагига тенг:

$$t_3 - t_1 = \tau. \tag{133.4}$$

t_1 пайтда фазалар айирмаси нолга тенг, яъни

$$\omega_1 t_1 + \varphi_1 - \omega_2 t_1 - \varphi_2 = 0 \tag{133.5}$$

эди, деб фараз қиламиз, у ҳолда t_3 пайтда фазалар айирмаси 2π га тенг, яъни

$$\omega_1 t_3 + \varphi_1 - \omega_2 t_3 - \varphi_2 = 2\pi. \tag{133.6}$$

(133.5) дан (133.6) ни ҳадма-ҳад айирамиз:

$$(\omega_1 - \omega_2)\ (t_3 - t_1) = 2\pi;$$

(133.4) ни эътиборга олиб, юқоридаги тенгламадан тепкили тебраниш даврини топамиз:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \tag{133.7}$$

Турли частотали иккита гармоник тебранишни қўшишнинг назарий анализи натижаларини солиштириб, биз қуйидаги хулосага келамиз: икки маятникнинг хусусий тебранишлари икки гармоник тебранишнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, *бу тебранишлар частоталарининг айирмаси тепкили тебраниш частотасига тенг.*

134-§. Боғланган маятникларнинг хусусий частоталари

Боғланган маятникларни ҳар қандай усул билан тебранма ҳаракатга келтирганда уларнинг хусусий тебранишлари бир характердаги тепкили тебраниш бўлади[1]. Шундай эканлиги тажрибадан кўринади ва уни назарий ҳисоблар тасдиқлайди; демак, маятниклардан ҳар бирининг тебранишлари мос равишда $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{\tau}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{\tau}$ частотали иккита гармоник тебранишлар йиғиндисидан иборат бўлади.

ω_1 ва ω_2 частоталар маятникларнинг узунлиги, юкларининг массаси, пружинасининг *бикрлиги каби физикавий параметрларига* ва пружина маятникнинг қаерига уланганига боғлиқ бўлиб, тебранишлар пайдо бўлишдан олдинги бошланғич шартларга *боғлиқ эмас*. Шунинг учун

---

[1] Бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда τ тепкили тебраниш даври ва T «кичик давр» айни бир қийматга эга.

ω_1 ва ω_2 частоталар икки маятникдан иборат системанинг хусусий *частоталари* деб аталади. Биринчи ёки иккинчи маятникнинг бирор гармоник тебраниши қандай амплитуда ва қандай бошланғич фазага эга бўлишигина маятникларни тебрантириб юбориш усулига ва бошлангич шартларга боғлиқ бўлади.

Маятникларни тебранма ҳаракатга келтириш усулига фақат тепкили тебраниш «чуқурлиги»гина боғлиқ; агар бир частотали тебраниш амплитудаси иккинчи частотали тебраниш амплитудасига қараганда жуда кичик бўлса, у ҳолда титраш «чуқурлиги» ҳам жуда кичик бўлади ва демак, бундай тебранишлар катта амплитудали гармоник тебранишларга яқин бўлади.

Агар бошланғич шароитни шундай танлаб олсакки, бунда ҳар бир маятник битта частота билан (тепкили тебраниш қилмасдан) тебранса, бу тебранишларнинг частотаси ω_1 ёки ω_2 хусусий частоталардан бири бўлади. Шунинг учун маятникларни бир хил фазада оғдиргандан кейинги гармоник тебранишлар (132-§ га қ.), кичик ω_2 частотали хусусий тебранишлар бўлади; иккала маятникни қарама-қарши фазада оғдирганда катта ω_1 частотали хусусий тебранишлар ҳосил бўлади. Демак, кичик частотали хусусий тебранишлар иккала маятникнинг *синфазали* гармоник тебранишлари экан, катта частотали хусусий тебранишлар эса иккала маятникнинг *антифазали* гармоник тебранишлари экан.

Синчиклаб ўтказилган тадқиқотларнинг кўрсатишича, маятникларнинг ҳар кандэй бошланғич шароитлардан кейин пайдо бўладиган ҳар қандай хусусий тебранишлари иккала маятникнинг ω_2 частотали синфазали тебранишлари билан ω_1 частотали антифазали тебранишларининг *йиғиндисидан* иборат экан.

Бундай хулосанинг тўғри эканлигини қуйидаги мулоҳазалар тасдиқлайди. Биринчи маятникнинг бошланғич оғиши бирор x_{10} эди, иккинчисиники эса x_{20} эди, деб фараз қилайлик. Ҳар доим иккала маятникнинг оғишларини улар бир томонга шундай a миқдорга оғадиган ва турли томонга шундай b миқдорга оғадиган қилиб танлаш мумкинки, натижада оғишлар бошда берилган x_{10} ва x_{20} оғишларга тенг бўлади. Дарҳақиқат, a ва b катталиклар қуйидаги тенгламалардан бир қийматли равишда аниқланади:

$$x_{10} = a - b, \quad x_{20} = a + b$$

ёки

$$a = \frac{x_{10} + x_{20}}{2}, \qquad b = \frac{x_{20} - x_{10}}{2}.$$

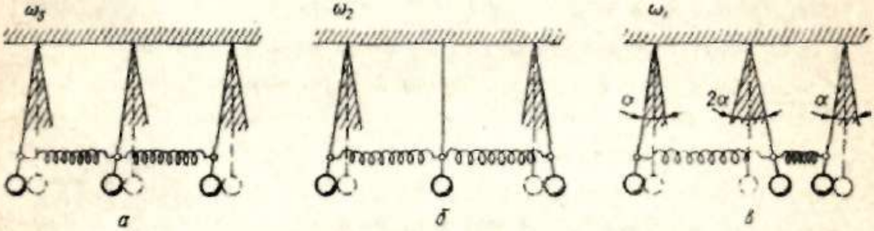
Маятниклар бир томонга оғганда x_{10} ва x_{20} оғишлар мусбат деб ҳисобланади.

Маятниклар бир томонга a миқдорга оғганда ω_2 частотали синфазали хусусий тебранишлар юзага келади, улар турли томонга b миқдорга оғганда эса ω_1 частотали антифазали тебранишлар юзага келади. Бу ҳаракатларни қўшсак, натижаловчи тебранишни топамиз; шунинг учун иккала маятникни x_{20} ва x_{20} миқдорларга оғдиргандан кейин пайдо бўладиган тебранишлар амплитудаси a ва частотаси ω_2 бўлган синфазали тебранишлар билан амплитудаси b ва частотаси ω_1 бўлган антифазали тебранишлардан иборат бўлади. Иккита бир хил маятник хусусий тебранишларининг умумий манзараси ана шундай.

Маятниклар ҳар хил бўлганда ҳам исталган бошланғич шароитларда ҳар бир маятникнинг тебранишлари ω_1 ва ω_2 частотали икки гармоник тебранишнинг йиғиндисидан иборат бўлади; ω_1 ва ω_2 — шу маятниклар системасининг хусусий частоталари. Бошланғич шароитларни тегишлича танлаб олиш йўли билан иккала маятникни хусусий частоталарнинг фақат биттаси билан тебранадиган қилиш мумкин, бироқ узунлиги турлича бўлган маятниклар учун назарий ҳисоб бўлмаса, бу шароитларни олдиндан аниқлаш қийин.

135- §. Боғланган учта маятникнинг хусусий тебранишлари

Боғланган учта маятникнинг, яъни *эркинлик даражаси учта бўлган системанинг* хусусий тебранишлари янада мураккаб бўлиб, учта гармоник тебранишнинг йиғиндиси билан тасвирланади. Учта маятникдан тузилган система учта хусусий частотага эга.



384- расм.

Бир-бирига боғланган учта бир хил маятник системасининг хусусий частоталардан бири билан бўладиган тебранишларини тажрибада кузатиш осон. Агар икки маятник ҳолидаги каби, бу ерда ҳам биз бошланғич шароитларни шундай танлаб ололсакки, бу шароитлардан сўнг ҳамма маятниклар *битта частота* билан гармоник тебранишлар қилса, у ҳолда бу тебранишларнинг частотаси системанинг хусусий частоталаридан бири бўлади.

384- расмда боғланган маятниклардан иборат системада (унинг хусусий частоталари $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$) учта хусусий тебранишнинг ҳар бири вужудга келадиган бошланғич шароитлар кўрсатилган. Равшанки, 384- *а* ва *б* расмларда кўрсатилган бошланғич шароитлардан кейин маятникларнинг ω_2 ва ω_3 частотали гармоник тебранишлари пайдо бўлади[1].

Биринчи ҳолда ҳамма маятниклар шундай частота билан синфазали тебранадики, бу частота маятниклар бир-бирига боғланмаган ҳолда ҳар бир маятник алоҳида тебранадигандаги частота билан бир

---

[1] Иккинчи ҳолда ўртадаги маятникнинг тебранишлар амплитудаси нолга тенг, шунинг учун у нолга тенг амплитуда ва ω_2 га тенг частота билан тебранади, дейиш мумкин.

хил бўлади, пружиналар эса тебранма ҳаракатда иштирок этмайди ва деформацияланмайди.

Иккинчи ҳолда четки маятниклар антифазали тебранади, ўртадаги маятникка таъсир этадиган пружиналарнинг кучлари бир-бири билан мувозанатлашади ва шунинг учун ўртадаги маятник тебранмайди. Иккинчи ҳолда тебранишлар частотаси биринчи ҳолдагидан катта бўлади, чунки бу ерда тикловчи кучнинг[1] «маятникдан келадиган» қисмига пружинанинг деформацияланиш кучи ҳам қўшилади.

384-*в* расмда кўрсатилган ҳолда бошланғич оғишлардан сўнг гармоник тебранишлар пайдо бўлиши дарров тушунарли бўла қолмайди. Бироқ ҳар бир маятникнинг тикловчи кучи оғишга пропорционал эканлигини тушуниб олиш мумкин; пропорционаллик коэффициенти бир хил. Дарҳақиқат, тикловчи кучнинг «маятникдан келадиган» қисми ўртадаги маятникда *икки марта* ортиқ, чунки унинг оғиши α га тенг, четки маятникларнинг оғиши эса атиги $\frac{1}{2}\alpha$ га тенг; худди шунингдек, тикловчи кучнинг ўртадаги маятникка таъсир этувчи пружиналардан келадиган қисми четки маятникларга таъсир этувчи пружиналардан келадиган қисмидан *икки марта* ортиқ бўлади, чунки бир пружина $\frac{3}{2}\alpha$ га пропорционал катталикка чўзилиб, иккинчиси худди шундай катталикка сиқилди. Маятникларнинг массалари бир хил, тикловчи кучларнинг коэффициентлари бир хил, бинобарин, тебранишларнинг даврлари ҳам бир хил. Равшанки, $\omega_1 > \omega_2$, чунки учинчи ҳолда пружиналар (четки маятникнинг амплитудаси аввалгича бўлганда) иккинчи ҳолдаги тебранишлардагидан анча кўп деформацияланади. Уч маятникнинг 384-расмда кўрсатилган бошланғич шароитлардан сўнг пайдо бўладиган тебранишлари учала маятникнинг хусусий частоталардан бири билан қиладаган уйғунлашган гармоник тебранишларидан иборатдир.

Худди икки маятник ҳолидаги каби, уч маятникнинг ҳар қандай хусусий тебранишлари учта тебранишнинг йиғиндиси орқали ифодаланиши мумкин, бу тебранишларнинг ҳар бири битта хусусий частота билан юз берадиган уйғунлашган гармоник тебранишга мос келади. Бундай уйғунлашган тебранишларнинг ҳар бири бутун мураккаб системанинг тайинли бир хусусий частотасига мос келадиган *нормал тебраниш* деб аталади. Шунинг учун қисқа қилиб: *системанинг ҳар қандай хусусий тебранишлари нормал тебранишлар йиғиндисидан иборат* дейилади.

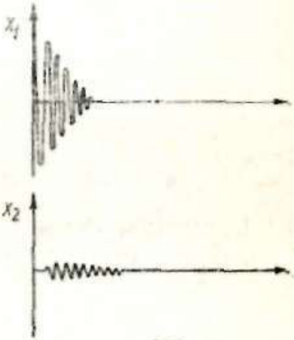
Жуда кўп хилма-хил маятник ёки тебранувчи жисмлардан иборат системанинг тебранишлари учун ҳам манзара худди юқоридагига ўхшаш бўлади. Ҳар қандай бошланғич шароитлардан кейин пайдо

---

[1] Тикловчи кучнинг «маятникдан келадиган» қисми $mg\alpha$ га тенг, бу ерда α – оғиш бурчаги, mg — маятникнинг оғирлик кучи.

бўлган хусусий тебранишларнинг мураккаб манзараси содда гармоник тебранишлар, яъни нормал тебранишлар тўпламидан иборат бўлади. Нормал тебранишлар сони, худди хусусий частоталар сони каби, тебранувчи ҳамма жисмларнинг эркинлик даражалари сонига тенг.

Пировардида шунга диққатни жалб қиламизки, мураккаб системалар тебранишларининг манзарасини текширганимизда биз ишқаланиш кучлари йўқ ёки ишқаланиш кучлари жуда кичик деб фараз қилдик. Унча катта бўлмаган ишқаланиш кучлари тебранишлар манзарасига бирор вақт ичида кам ўзгариш киритади, бироқ вақт ўтиши билан тебранишлар сўнади. Агар ишқаланиш кучлари катта бўлса, хусусий тебранишлар манзараси тубдан ўзгаради. Масалан, маятникларни туташтириб турган пружина юмшоқ, лекин ишқаланиш сезиларли бўлганда икки маятникнинг тебранишлар манзараси 385-расмда кўрсатилгандек бўлиши мумкин; ҳаракатга келтирилган биринчи маятникнинг тебранишлари тинч турган иккинчи маятникка сезиларли равишда ўтгунча сўниб улгуради (382- расм билан таққосланг).



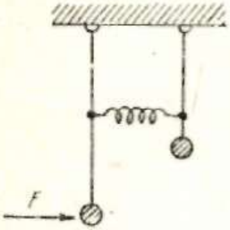
385- расм.

Ишқаланиш кучи жуда катта бўлганда маятникларнинг ҳаракати *тебранма ҳаракат бўлмай қолади*; мувозанат вазиятидан оғдирилгандан сўнг оғдирилган маятник аста-секин мувозанат вазиятига яқинлашади ва бошқа маятникларни ҳам худди мана шундай секин ҳаракатга келтиради; ҳаракатга келтирилган маятникка заиф боғланган маятниклар ҳеч оғмайди, деса бўлади.

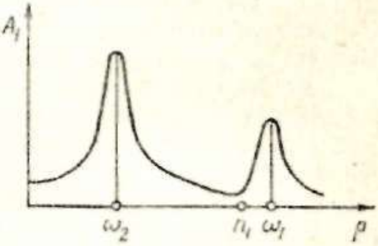
136- §. Мураккаб системалардаги мажбурий тебранишлар

Боғланган икки маятникдан бирига қўйилган p частотали ташқи F гармоник куч таъсири остида (386- расм) иккала маятник p частотали гармоник мажбурий тебранма ҳаракат қилади. Эркинлик даражаси битта бўлган ҳолдаги мажбурий тебранишлар каби, ҳар бир маятник тебранишларининг амплитудаси частотага боғлиқ бўлади; *сўниш кичик бўлганда* амплитуда билан частота орасидаги боғланиш айниқса ошкор ифодаланади. Боғланган маятникларнинг хусусий частоталаридан бири ташқи куч частотасига тенг бўлганда *тебранишлар резонанси* юз беради ёки, бошқача айтганда, иккала маятник максимал амплитуда билан тебранади. n та маятникдан тузилган системада резонанс ҳодисаси ташқи куч частотасининг n та қийматида юз беради.

Ташқи куч амплитудаси доимий бўлган ҳолда маятниклардан бири тебранишларининг амплитудаси билан частота орасидаги боғланиш 387- расмда кўрсатилган; бу расмда ω_1 ва ω_2 хусусий частоталар яқинида иккита резонанс чўққи кўриниб турибди. n_1 билан белгиланган частотада тебранишлар амплитудасининг характерли минимуми ҳам муҳим аҳамиятга эга; бу минимум тўғрисида кейинроқ гапирамиз. Бу резонанс эгри чизиги ташқи $F = a \cos pt$ куч таъсири остидаги узун маятник тебранишларининг амплитудаси



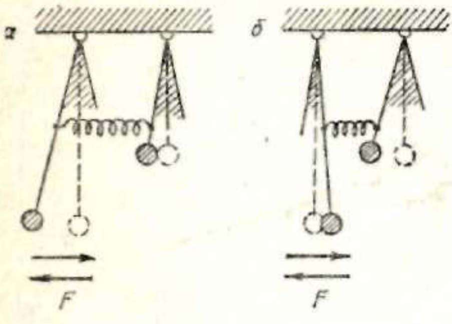
386- расм.



387- расм.

учун чизилган. Резонанс вақтида, яъни $p = \omega_2$ (ёки $p = \omega_1$) бўлганда ташқи кучнинг таъсири ишқаланиш кучининг таъсири билан мувозанатлашади. Агар ишқаланиш кучлари жуда кичик, ташқи куч етарлича кичик бўлса, системадаги мажбурий тебранишлар резонанс вақтида нормал тебранишларга ўхшайди, чунки мажбурий тебранишлар частотаси хусусий частотага тенг.

Биринчи резонансда ($p = \omega_2$ бўлганда) амплитудалар билан фазалар орасидаги муносабат тахминан 388-*а* расмда кўрсатилгандек бўлади. Иккала маятник бир хил фазада «юради», бироқ узун маятникнинг оғиш бурчаги каттароқдир; ω_2 частота битта узун маятникнинг хусусий частотасига яқин, узун маятник ўзининг хусусий частотасига яқин частота билан тебраниб, хусусий частотаси анча катта бўлган қисқа маятникни ўша частота билан (яъни ω_2 билан) ўз орқасидан «эргаштиради»; пружинанинг кучи[1] қисқа маятникка унинг тебранишлари билан бир хил фазада таъсир қилади; 388-*а* расмда кўрсатилган вазиятда пружина энг кўп чўзилган бўлиб, у ярим даврдан сўнг энг кўп сиқилади.



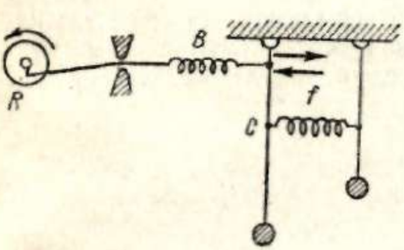
388- расм.

Иккинчи резонансда (яъни $p = \omega_1$ бўлганда) маятникларнинг тебранишлари ω_1 частотали нормал тебранишга яқин бўлади; уларнинг тахминий шакли 388-*б* расмда кўрсатилган. Бу тебранишлар қисқа маятникнинг хусусий частотасига яқин бўлган ω_1 частота

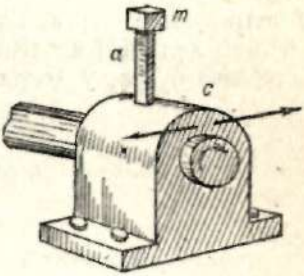
---

[1] Пружинанинг кучини қисқа маятникка нисбатан «ташқи» куч деб ҳисоблаш мумкин.

билан юз берадиган антифазали тебранишлардир. Энди қисқа маятник ўзининг хусусий частотасидан каттароқ частота билан тебранаётган узун маятникни «итаради»; шунинг учун пружинанинг кучи билан узун маятникнинг силжиши қарама-қарши фазада бўлади. 388-расмда резонанс вақтидаги амплитудалар унча каттага ўхшамайди, бироқ резонанс вақтидагидан бошқа частоталарда кичик F куч таъсирида маятниклар деярли жойидан қимирламайди.



389- расм.



390- расм.

Икки маятникнинг мажбурий тебранишларига оид ҳамма ҳодисаларни схемаси 389-расмда кўрсатилган қурилмада намойиш қилиб кўрсатиш жуда осон. B пружина етарлича енгил ва юмшоқ бўлиши керак, кривошипникнинг R радиуси пружинанинг иккинчи учининг тебраниш вақтидаги силжишидан анча катта бўлиши керак.

Тебранишлар частотаси $p = n_1$ бўлган ҳол айниқса диққатга сазовордир, бунда узун маятник тебранишларининг амплитудаси жуда кичик бўлади. Бу ҳодисадан номақбул тебранишларни тинчитишда (демпфирлашда) фойдаланилади. Тажриба ва ҳисобнинг кўрсатишича, n_1 частота қисқа маятникнинг узун маятник тинч турган ҳолда тебранишидаги хусусий частотасига тенг экан. Мажбурий тебранишлар частотаси $p = n_1$ бўлганда қисқа маятник n_1 хусусий частота билан шундай тебранадики, бунда C нуқтадаги пружинанинг кучи (389-расмга қ.) ташқи f кучнинг таъсирини мувозанатлайди ва узун маятник деярли жойидан қимирламайди.

Зарарли вибрациялар частотаси доимий бўлган ҳолдагина бу вибрацияларни тинчитиш учун боғланган система тебранишларидан фойдаланиш мумкин. Масалан, айланишлар сони (n) доимий бўлган машинадаги c подшипникнинг горизонтал йўналишдаги номақбул вибрацияларини йўқотиш учун (390-расм) подшипникка учида m массаси бўлган a пластинка ўрнатилади. Пластинкадаги масса тебранишларининг хусусий частотаси n га тенг қилиб олинади. Машина ишлаб турганда пластинка анча катта тебранишлар қилади, бироқ машинанинг подшипниги деярли қимирламай туради ва унинг хавфли тебранишлари шу тариқа йўқ қилинади. Бундай қурилма *динамик демпфер* деб аталади.

Ички ёнув двигателлари тирсакли валларининг хавфли буралма тебранишларини бартараф қилиш учун қўлланиладиган динамик демпферлар ҳам шу принцип асосида ясалади.

Эркинлик даражалари кўп ва бир қатор хусусий частоталарга эга бўлган системага ташқи даврий куч таъсир этганда, умуман айтганда, хусусий частоталарнинг ҳар бирида резонанс юз беришини кузатиш мумкин. Шу сабабли резонанснинг номақбул оқибатлари олдини олиш учун ташқи куч частотасини ҳар бир хусусий частотага тенг келтирмаслик керак. Бу талабни ишқаланиш кучлари жуда кичик бўлган ҳолларда албатта қондириш зарур. Агар тинчитувчи кучлар етарлича бўлса, у ҳолда резонансдан хавфланмаса ҳам бўлади.

XV БОБ

ТУТАШ МУҲИТ ТЕБРАНИШЛАРИ

137- §. Тўлқинлар

Биз энди биламизки (120- §), туташ муҳит босими ёки зичлигининг ҳар қандай ўзгариши қўшни зарраларга маълум бир тезлик билан узатилади ва у ерда ҳам ўшандай ўзгаришлар юз беради; муҳитда босим (зичлик ва шу кабилар) ўзгаришлари тўлқини тарқалади. Ҳаво зарраларининг кишининг овоз пайлари тебранишларидан ёки громкоговоритель диафрагмаси тебранишларидан пайдо бўладиган тебранишлари ҳавонинг бир заррасидан бошқасига узатилади ва ҳавода товуш тўлқини тарқалади.

Громкоговорителдан чиқаётган товуш тўлқини бир жинсли муҳитда ҳамма йўналишда бир хил тарқалади. Товуш манбаидан етарлича узоқда маълум бир пайтда ғалаёнланиш етиб келган нуқталар тахминан сферада жойлашади. Шунинг учун бундай тўлқинлар *сферик тўлқинлар* деб аталади. Бир жинсли муҳитнинг ҳамма зарралари бир хил ҳаракат қиладиган сиртлар *тўлқиний сирт* деб аталади. Равшанки, сферик тўлқиннинг тўлқиний сирти исталган сфера бўлиб, унинг марказида тебранишлар ҳосил қилувчи жуда кичик ўлчамли манба туради.

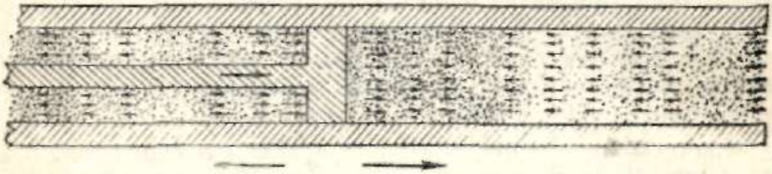
Суюқлик сиртида тарқалувчи тўлқинлар тўлқин тарқалишига яққол мисол бўлади. Сувга ташланган тошдан сув сиртида тарқалувчи тўлқинлар *доиравий тўлқинлар* деб аталади. Агар бирор жисм, масалан, қалқович бирор частота билан гармоник тебранишлар қилса, бу қалқовичдан доиравий регуляр тўлқинлар тарқалади. Бу ерда тўлқиннинг «ўркачлари» ва «чуқурчалари» сув юзида доира бўлиб тарқалади (391- расм); равшанки, бу ҳолда тўлқин чизиғи айлана бўлади.

Тўлқин ҳаракатнинг энг содда кўриниши бир йўналишда тарқалувчи тўлқинлардир, масалан, тебранаётган поршендан (392- расм) труба ўқи бўйлаб ҳавода тарқалаётган тўлқинлар. Қуюқланиш ва сийракланиш тўлқинлари поршендан бир йўналишда қочади, ҳавонинг тебранма тўлқин ҳаракатда қатнашаётган ҳамма зарралари

391- расм.

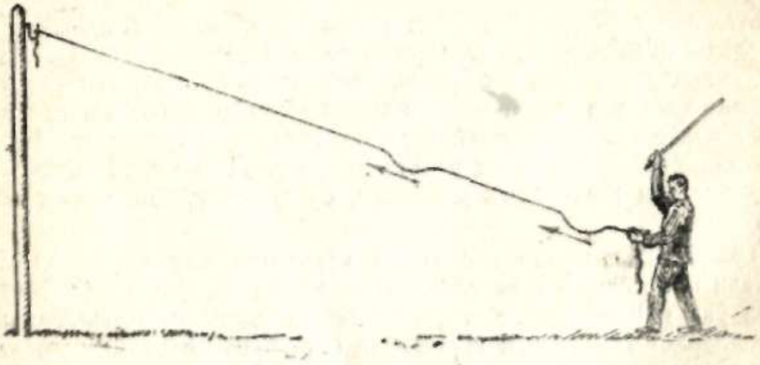
труба ўқи бўйлаб ҳаракат қилади. Агар стерженнинг учларидан бирига уриб-уриб турилса, бир йўналишда тарқаладиган бундай тўлқинларни эластик стерженда ҳам ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳолда труба ўқига ёки стержень ўқига перпендикуляр бўлган текисликлар тўлқиний сиртлар бўлади; шунинг учун бундай тўлқинлар *ясси тўлқинлар* дейилади.

Зарралар тебранишлар тарқаладиган йўналишда тебранадиган ҳолдаги тўлқинлар *бўйлама тўлқинлар* деб аталади 392- расмда бўйлама тўлқинларга мисол кўрсатилган). Зарралар тўлқин тарқаладиган йўналишга перпендикуляр ҳаракат қиладиган ҳолдаги тўлқинлар *кўндаланг тўлқинлар* деб аталади (391- расмда кўндаланг тўлқинга мисол кўрсатилган).



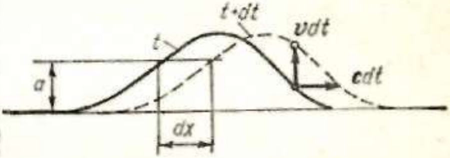
392- расм.

Кўндаланг тўлқин таранг тортилган арқон, резина най, тор ва шу кабилар бўйлаб тарқала олади (393- расм). Агар таранг тортилган резина найга бир урсак, зарб тушган жойдан най бўйлаб «ўркач» тарқалганини кўрамиз. «Ўркач» найнинг бирор қисмидан ўтаётганда най зарралари кўндаланг йўналишда тебранади.

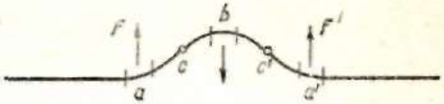


393- расм.

Тор бўйлаб тарқаладиган тўлқин энг содда тўлқин ҳаракатдир. Тўлқиннинг тор бўйлаб қандай тарқалишини батафсилроқ кўриб чиқайлик. Тор бўйлаб «ўркач» маълум c тезлик билан тарқалади, бу тезлик торнинг хоссалари ва таранглигига боғлиқ, Тарқалиш вақтида тўлқин ўз шаклини ўзгартирмайди. c катталик *тўлқиннинг тарқалиш тезлиги*[1] деб аталади. c тўлқин тарқалиш тезлигини торнинг маълум бир зарраси ҳаракатининг v тезлигидан фарқ қилиш керак. Агар тор бўйлаб кетаётган тўлқинни жуда кичик dt вақт оралиғидан сўнг тасаввур этсак (394- расм), у ҳолда вертикал $v\,dt$ кесма тордаги маълум бир нуқтанинг силжишини, горизонтал $c\,dt$ кесма эса тўлқиннинг dt вақт ичидаги силжишини кўрсатади. Тор нуқтасининг v тезлиги вақтга боғлиқ равишда ўзгаради ва тўлқиннинг шаклига боғлиқ бўлади; бу тезлик ҳар хил нуқталар учун ҳар хил бўлади, c тезлик эса вақт ўтиши билан ўзгармайди ва торнинг ҳамма жойлари учун бир хил бўлади. Агар dx масофа торнинг dt вақт ўтгандан сўнг мувозанат вазиятидан бир хил a оғишга эга бўлган энг яқин нуқталари орасидаги масофа бўлса, у ҳолда $c = \frac{dx}{dt}$ бўлиши равшан.



394- расм.



395- расм.

Таранг тортилган тор бирор пайтда 395- расмда кўрсатилган шаклда бўлсин, деб фараз қилайлик. Торнинг мазкур пайтдаги кўриниши тўлқиннинг шаклини тасвирлайди, бироқ тўлқиннинг қайси йўналишда ҳаракатланаётганини кўрсатмайди, бундай тўлқин ўнг томонга ҳам, чап томонга ҳам ҳаракат қилиши мумкин; биз торнинг кўринишига қараб a ва a' элементларга юқорига йўналган куч, b элементга эса пастга йўналган куч таъсир қилади, деган хулоса чиқара оламиз, холос. Бу кучлар торнинг тарангланиши ва эгилиши туфайли пайдо бўлади; торнинг берилган жойдаги эгилиши қанча катта бўлса, бу кучлар шунча катта бўлади; c, c' бурилиш нуқталарида (395- расмга қ.) кучлар нолга тенг. Бу кучларнинг пайдо бўлиш сабаби қуйидагича.

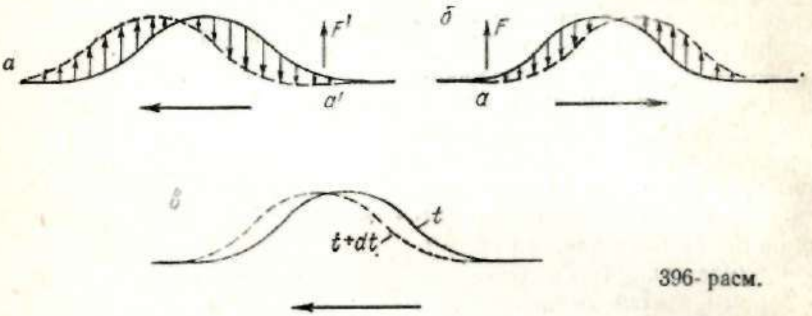
Фикран тордан чоғроқ кесма (399- расм) кесиб оламиз, бу кесманинг учларига торнинг қолган қисмларидан тор кесимига нормал йўналган T ва T' таранглик кучлари қўйилган бўлиб, уларнинг F тенг таъсир этувчиси торга деярли перпендикуляр равишда йўналади. Шундай қилиб, тарангланган торнинг эгилиши торнинг бирор

---

[1] Тўлқин шаклининг кўчиш тезлиги десак янада аниқроқ бўлади.

қисмига таъсир этувчи кучнинг йўналишини ҳам, катталигини ҳам аниқлайди, бироқ бунга асосланиб торнинг мазкур қисми қаёққа қараб ҳаракатланаётганлиги тўғрисида ҳеч қандай хулоса чиқариб бўлмайди; куч тор заррасининг кўндаланг йўналишдаги ҳаракати тезлиги қандай ўзгаришинигина кўрсатади.

Агар тор нуқталари ҳаракатининг муайян пайтдаги тезликлари маълум бўлса, у ҳолда тўлқин ҳаракатининг йўналишини аниқлаш мумкин.

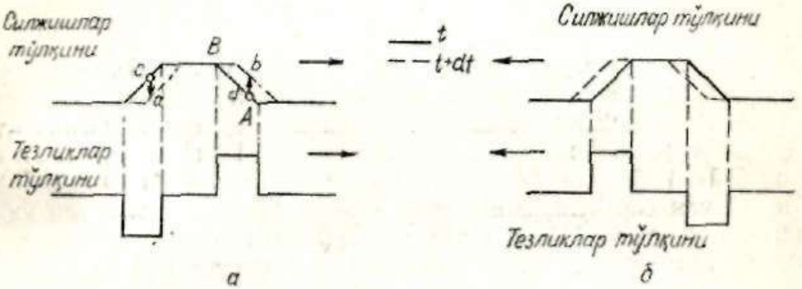


396- расм.

Тор нуқталарининг ҳаракат тезликлари 396- *а* расмда стрелкалар билан кўрсатилгандек бўлсин, деб фараз қиламиз. У ҳолда *а'* заррага таъсир этувчи *F'* куч бу зарра тезлигини камайтириб, уни тўхтатади. Равшанки, тезликларнинг бундай тақсимоти чапга кетаётган тўлқинга мос келади.

Агар биз торнинг айрим нуқталарининг t пайтдаги тезликларини билсак, биз уларнинг галдаги $t + dt$ пайтдаги вазиятини ясай оламиз. 396- *а* расмда кўрсатилган тўлқин учун тор нуқталарининг $t + dt$ пайтдаги вазиятлари 396- *в* расмда чизиб кўрсатилган. Бунга тескари масалани ҳам аниқлаш мумкин: агар тор эгилишининг бутун тўлқини ўз шаклини ўзгартирмасдан маълум бир йўналишда кўчса, торнинг турли хил нуқталарининг бирор пайтдаги ҳаракат тезликлари қандай бўлади. Ўнг томонга ҳаракатланаётган тўлқин учун тор зарраларининг тезликлари қандай бўлиши 396- *б* расмда кўрсатилган. Агар биз торни тайинли бир жойда тортиб (оғдириб), унга туртки билан тегишли тезликлар берсак, бунинг оқибатида маълум бир йўналишда тўлқин импульси тарқалган бўлар эди.

Силжишлар тўлқини билан тезликлар тўлқини орасидаги муносабатни трапеция шаклидаги силжишлар тўлқини мисолида кўрсатиш жуда қулай. 397- *а* расмда ўнг томонга ҳаракатланаётган тўлқиндаги торнинг икки ҳолати кўрсатилган; t пайтда (яхлит эгри чизиқ) ва $t + dt$ пайтда (пунктир чизиқ) торнинг c нуқтаси a вазиятга кўчади, d нуқтаси эса b вазиятга кўчади. Равшанки, ca ва db кесмалар тезликларга пропорционалдир, торнинг ҳамма нуқталари тўлқиннинг олдинги ва кетинги ён бағирларида (тўлқин фронтларида) бир хил ва ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилади, чунки бу ён бағирлар тўғри чизиқлидир. Тўлқиннинг эгилиш жойидан ўтишда тезлик сакраб ўзгаради: t пайтда A нуқтада тезлик сакраб ортади, B нуқтада эса нолгача камаяди ва ҳоказо. Чап томонга ҳаракатланувчи тўлқин 397-*б* расмда кўрсатилган.



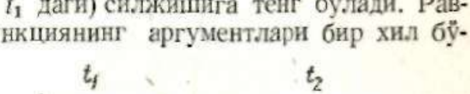
397- расм.

Тор бўйлаб бузилмасдан тарқаладиган ҳар қандай шаклдаги тўлқинни ҳамиша қуйидаги умумий кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{137.1}$$

бу ерда $y\ (x,\ t)$ — тор заррасининг t пайтдаги оғиши бўлиб, бу зарранинг тор бўйлаб ҳисобланган координатаси x га тенг. y оғиш икки ўзгарувчининг, яъни x ва t нинг функциясидир; $t - \frac{x}{c}$ иккиҳаднинг f функцияси торнинг бирор t пайтдаги шаклини x нинг функцияси сифатида тасвирлайди. f функция билан тасвирланган ҳар қандай шаклдаги тўлқин c тезлик билан тарқалишини кўрсатиш мумкин.

t_1 пайтга келиб тўлқин 398-расмда яхлит чизиқ билан тасвирланган кўринишда бўлсин. t_2 пайтга келиб тўлқин ўз шаклини ўзгартирмасдан ўнг томонга силжийди (пунктир чизиқ). Бунда координатаси x_2 бўлган зарра $y\ (x_2,\ t_2) = y\ (x_1,\ t_1)$ катталикка силжийди, бу масофа x_1 координатаси x_2 дан кичик бўлган зарранинг t_2 дан олдинроқ пайтдаги (яъни t_1 даги) силжишига тенг бўлади. Равшанки, бу ҳолда $y\ (x,0)$ функциянинг аргументлари бир хил бўлиши керак:



398- расм.

$$t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}.$$

Бундан

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

эканлиги келиб чиқади, яъни $x_2 > x_1$ бўлганда тўлқин x нинг мусбат қийматлари йўналишида c тезлик билан кўчган.

Координатаси x бўлган зарралар t пайтдаги мувозанат вазиятидан бир хил $y(x, t)$ га оғган ҳолда тўлқиннинг (137. 1) умумий ифодаси x ўқи йўналиши бўйлаб тарқаладиган ҳар қандай ясси тўлқин учун ярайди. Шунингдек, худди шу йўл билан

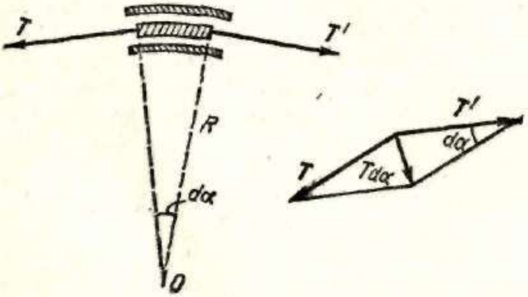
$$y(x, t) = f(t + \frac{x}{c})$$

ифода x нинг манфий қийматлари томонга c тезлик билан тарқаладиган тўлқин эканлигига ишонч хосил қилиш мумкин.

Таранг тортилган тордаги тўлқиннинг ҳаракат тезлигини қуйидагича мулоҳаза юритиб аниқлаш мумкин. Тўлқин тарқалаётганда тор бўйлаб «ўркач» чопади, бу ўркачнинг шакли *ўзгармайди*. Торга тайинли бир тўлқин шаклида эгилган ингичка шиша най кийдирилган ва у тор бўйлаб c тўлқин тезлигида ҳаракатланаяпти, деб фараз қилайлик, бу ҳолда торга най ҳеч қандай куч билан таъсир қилмайди. Энди бундай манзарани тассаввур этамиз: най жойида турибди, тарангланган тор эса тескари йўналишда доимий c тезлик билан най ичидан тортиб ўтказилмоқда; бу ерда ҳам найга тор ҳеч қандай куч билан таъсир қилмайди; дарҳақиқат, тўлқин ҳаракатланаётган тор бўйлаб ўша c тезлик билан ўнг томонга чопиб, фазода қимирламай туради. Агар най эҳтиёткорлик билан синдирилса, тўлқин «ўркачи» жойида қолган бўлар эди.

Энди бу схемага асосланиб туриб, c тезлик қандай бўлганда эгилган най ўзи орқали тортилаётган таранг торга босим бермаслигини аниқлаймиз. Найнинг мана шу жойдаги бурилиш радиуси R га тенг бўлсин (399- расм), деб фараз этамиз. Фикран тордан узунлиги $R\,d\alpha$ бўлган элемент кесиб оламиз; бу элемент учларига торнинг T ва T' таранглик кучлари таъсир этади, бу кучларнинг катталиги тенг бўлиб, улар бир-бирига $\pi - d\alpha$ бурчак остида йўналган. Агар $d\alpha$ бурчак жуда кичик бўлса, у ҳолда бу кучларнинг натижаловчиси

$$T\,d\alpha$$



399- расм.

га тенг бўлиб, O эгрилик марказига йўналади. Фаразимизга кўра, най торга ҳеч қандай куч билан таъсир қилмагани учун фақат $T d\alpha$ кучгина R радиусли айлана бўйлаб c тезлик билан ҳаракатланувчи элементга марказга интилма тезланиш беради, яъни

$$T\,d\alpha = \rho R\,d\alpha\,\frac{c^2}{R}, \tag{137.2}$$

бу ерда $\rho R\,d\alpha$ — тор элементининг массаси, ρ — тор узунлик бирлигининг массаси («погон масса» ёки «чизиқли зичлик»).

Қисқартиргандан сўнг тўлқиннинг тарқалиш тезлиги учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{137.3}$$

Тўлқиннинг тарқалиш тезлиги T тарангликнинг тор узунлик бирлигининг ρ массасига нисбатидан чиқарилган квадрат илдизга тенг. (137.3) формуланинг ўлчамлигини текшириб кўрамиз:

$$[T] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{сек}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}}, \quad \left[\frac{T}{\rho}\right] = \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}.$$

Тўлқиннинг тарқалиш тезлиги формуласини келтириб чиқаришда тор абсолют эгилувчан деб ҳисобланган эди: демак, тарангланмаган ҳолатида торни эгиш учун, яхшилаб мойланган занжирни эгишдаги каби, ҳеч қандай куч керак эмас. Таранглаган қаттиқ пўлат симда эгувчи кучларнинг таъсирини таранглик кучларининг таъсирига солиштирса бўлади; шунинг учун тўлқиннинг бундай сим бўйлаб тарқалиши мураккаб процесс бўлади; тўлқин импульси вақт ўтиши билан деформацияланади ва шакли турлича бўлган импульслар, умуман айтганда, турлича тарқалади.

138-§. Ясси синусоидал товуш тўлқини

Агар труба ичидаги ҳавони тебрантираётган поршень тебранишларининг частотаси товуш частоталари соҳасида (тахминан 16 дан 10 000 Гц гача) ётса ва амплитудаси жуда кичик бўлса, у ҳолда труба ичидаги ҳавода тарқалаётган тўлқин ясси товуш тўлқини бўлади. Поршень ω частотали гармоник тебранишлар қилганда ундан ясси синусоидал тўлқин тарқалади.

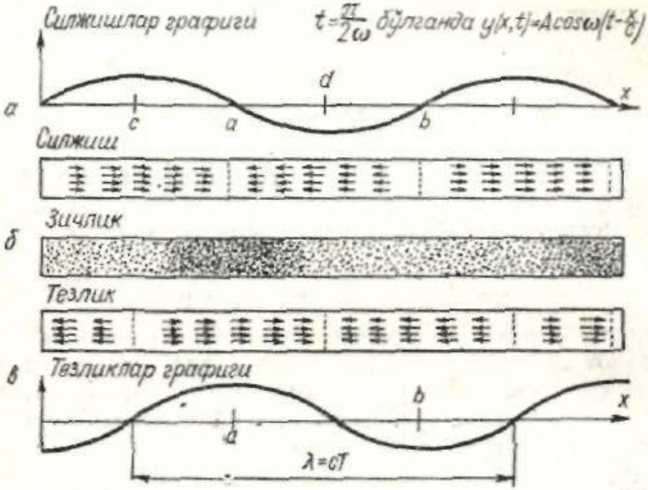
Поршень $y_0(t) = A\cos\omega t$ қонун билан гармоник тебранаётган бўлсин. У ҳолда газнинг поршенга ёндашган зарралари ҳам худди поршень каби силжийди.

Поршенга тегиб турган зарралардан x масофада тинч ҳолатда турган газ зарралари эса $\tau = x/c$ вақт кечикиб силжийди, чунки тўлқин x масофага тарқалгунча худди шунча вақт ўтади. Шунинг учун бу зарралар силжишларининг тебранишларини

$$y(x,\ t) = A\cos\omega\,(t-\tau) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \tag{138.1}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ифода *ҳаракатланаётган ясси синусоидал тўлқиннинг аналитик ифодасидир*, бу ифода саноқ бошидан x масофада тинч ҳолатда турган газ заррасининг ихтиёрий t пайтда мувозанат вазиятдан оғишини кўрсатади. $y(x, t)$ силжиш (оғиш) зарранинг тинч ҳолатдаги x координатасининг ҳам, t вақтнинг ҳам функциясидир. Барча зарралар A амплитуда ва ω частота билан гармоник тебранма ҳаракат қилади, бироқ x координатаси ҳар хил бўлган зарралар тебранишларининг фазаси турлича бўлади. Равшанки, тўлқин *фронти* x ўқига нормал бўлган текисликдир. Қуйидаги



400- расм.

$$y = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

функция x нинг манфий қийматларига томон тарқалаётган синусоидал тўлқинни ифодалайди.

Тарқалаётган (138. 1) синусоидал тўлқиндаги ҳамма нуқталарнинг $t = T/4$ пайтдаги силжишларининг графиги 400- a расмда кўрсатилган; y ўқининг мусбат йўналиши координатаси x бўлган нуқтанинг x ортадиган йўналишда силжишини билдиради.

a нуқтада энг кўп қуюқлашиш, b нуқтада эса энг кўп сийракланиш эканлигига ишонч ҳосил қилиш осон, чунки a нуқтадан орқадаги зарралар олға силжиди, олдиндаги зарралар орқага силжиди; b нуқта яқинида эса бутун процесс тескарича бўлади (400-б расм). c ва d нуқталарда зичлик ўзгармайди, чунки қўшни зарралар деярли бир хил силжиди.

a ва b нуқталардаги зарраларнинг тезлиги энг катта бўлади, a нуқтадаги зарраларнинг тезлиги олға қараб, b нуқтадаги зарраларнинг тезлиги эса орқага қараб йўналади (400- *в* расм). Зарралар тезликларининг тўлқини куйидаги кўринишда бўлади:

$$v\ (x,\ t)=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\left(\omega\ t-\frac{\omega x}{c}\right).\qquad(138.2)$$

Бу тўлқиннинг t пайтдаги тезликларининг графиги 400- *в* расмда кўрсатилган.

Бир-бири билан *бир хил фазада* тебранувчи энг яқин турган икки нуқта орасидаги масофа λ *тўлқин узунлиги* деб аталади. Бир-биридан s масофада турган нуқталар тебранишларининг фазалар айирмаси қуйидагига тенг:

$$\varphi_s=\frac{\omega s}{c}=\frac{2\pi s}{cT},\qquad(138.3)$$

бу ерда $T=2\pi/\omega$ — синусоидал тўлқиндаги нуқталарнинг гармоник тебранишлари даври. У ҳолда бир хил фазада тебранаётган энг яқин нуқталарнинг фазалар айирмаси 2π га тенг бўлади, яъни

$$\varphi_\lambda=2\pi=\frac{\omega\lambda}{c}=\frac{2\pi\lambda}{cT}.\qquad(138.4)$$

Бундан λ тўлқин узунлигини топамиз:

$$\lambda=cT.\qquad(138.5)$$

Бу формулага асосланиб туриб тўлқин узунлиги катталигини бир оз бошқачароқ таърифлаш мумкин: тўлқин узунлиги тебранишлар даври (T) мобайнида тўлқин босиб ўтадиган йўлга тенг. Равшанки, кетма-кет келган икки қуюқлашиш (ёки сийраклашиш) орасидаги масофа λ га тенг.

Таранг тортилган бир жинсли узун тор бўйлаб ҳам силжиш ва тезликларнинг худди шундай синусоидал тўлқинлари тарқалиши мумкин, бу ҳолда $y(x,t)$ — координатаси x бўлган нуқтанинг t пайтда тор йўналишига кўндаланг оғиши.

Товуш тўлқинида юз берадиган процессларни (400-расмга қ.) кузатар эканмиз, силжишлар тўлқини ҳамиша зичлик ўзгаришлари тўлқинига боғлиқ эканини, у эса босим ўзгаришлари тўлқинига, зарралар тезликларининг тўлқинига, тезланишлар тўлқинига ва шу кабиларга боғлиқ эканлигини, хуллас бу катталикларнинг ҳаммаси вақт ўтиши билан гармоник равишда ўзгаришини (тебранишини), уларнинг тебранишлари эса фазода c тезлик билан тарқалишини кўрамиз. Шунга ўхшаш манзарани тор бўйлаб тарқаладиган тўлқин учун ҳам тасаввур этиш мумкин. Шунинг учун *тўлқин ҳаракат муҳит зарралари зичлиги ўзгаришларининг ёки уларнинг ҳаракат ҳолатларининг фазода тарқалишидан иборат*, дейиш мумкин.

Ҳаракат ҳолати тарқалиши билан бирга тўлқинда муҳитнинг бир заррасидан бошқасига *энергия* ҳам узатилади. Шунинг учун *тўлқин ҳаракат фазода энергия тарқалишининг бир туридир*, дейиш мумкин.

139-§. Товуш тўлқинининг энергияси

Муҳитнинг товуш тўлқинида тебранувчи зарралари ҳам кинетик энергияга, ҳам деформациянинг потенциал энергиясига эга бўлади. Муайян пайтда максимал қуюқлашиш ёки сийраклашиш жойида турган зарралар сиқилиш (ёки кенгайиш) максимал потенциал энергиясига ҳам, максимал кинетик энергияга ҳам эга бўлади, чунки бу жойларда ҳаракат тезлиги ҳам энг катта қийматга эга бўлади (400-*в* расмга қ.), зичлик ўзгармайдиган жойда турган зарралар эса на кинетик энергияга, на потенциал энергияга эга бўлади.

Ҳажм бирлиги ичида турган зарралар ҳаракатининг кинетик энергияси (кинетик энергия зичлиги) қуйидагига тенг:

$$E_к = \frac{(\rho_0 + \rho)v^2}{2} \tag{139.1}$$

ёки

$$E_к \approx \frac{\rho_0 v^2}{2}, \tag{139.2}$$

бу ерда ρ_0 — муҳитнинг тўлқин келишдан олдинги зичлиги, ρ — тўлқинда сиқилиш туфайли ҳосил бўлган қўшимча зичлик, v — зарралар тезлиги. Одатда товуш тўлқинида муҳитнинг зичлиги жуда оз ўзгаради, шунинг учун (139.1) формулада ρ ни ρ_0 га нисбатан эътиборга олмаслигимиз мумкин. Агар тезликлар тўлқинининг (138.2) ифодасини (139.2) га қўйсак, гармоник тўлқиннинг исталган нуқтасидаги кинетик энергия зичлигини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$E_к = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \tag{139.3}$$

Ҳажм бирлигидаги сиқилиш потенциал энергиясини аниқлаш учун p босим орттирмасининг қийматини топамиз. Тинч ҳолатда босим p_0 бўлсин. Босим билан ҳажм ўзгаришлари ўзаро

$$(p + p)(V_0 + V)^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa} \tag{139.4}$$

адиабата қонуни (105-§ га қ.) орқали боғланган, бу ерда V_0 — тинч ҳолатдаги зарранинг ҳажми, V — ҳажмнинг тўлқинда олган орттирмаси. Агар (139.4) да $\frac{p}{p_0}$ ва $\frac{V}{V_0}$ катталикларга нисбатан иккинчи тартибли кичик ҳадларни эътиборга олмасак, (139.4) дан

$$p = -\varkappa \frac{p_0}{V_0} V \tag{139.5}$$

эканлиги келиб чиқади[1].

---

[1] Шакл алмаштиришда $\frac{V}{V_0}$ нисбат жуда кичик бўлганда қуйидаги

$$(V_0 + V)^{\varkappa} = V_0^{\varkappa}\left(1 + \frac{V}{V_0}\right)^{\varkappa} \approx V_0^{\varkappa}\left(1 + \varkappa\frac{V}{V_0}\right)$$

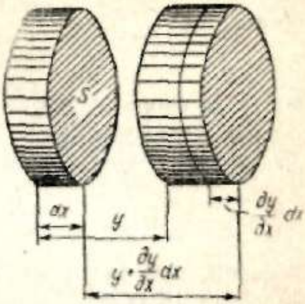
тенгликлар ўринли бўлишини назарда тутиш керак.

Ҳажмнинг тўлқинда ўзгаришини топамиз. $S\,dx = V_0$ ҳажмни кўриб чиқамиз, бу ерда S — труба кўндаланг кесимининг юзи. Зарралар силжиш туфайли энди

$$V_0 + V = S\left(dx + \frac{\partial y}{\partial x}dx\right)$$

ҳажмни эгаллайди (401-расм). Бундан

$$V = S\frac{\partial y}{\partial x}dx. \qquad (139.6)$$



401-расм.

(139.6) ни (139.5) га қўйиб, босимнинг тўлқинда олган ўзгаришини топамиз:

$$p = -\varkappa\frac{p_0}{V_0}S\frac{\partial y}{\partial x}dx = -\varkappa\frac{p_0}{Sdx}S\frac{\partial y}{\partial x}dx = -\varkappa p_0\frac{\partial y}{\partial x}. \qquad (139.7)$$

Тўлқиннинг маълум бир жойида босим олган орттирма y силжишдан x координата бўйича олинган ҳосилага пропорционал бўлиб, ишораси тескаридир. Товушнинг муҳитдаги тезлиги $c = \sqrt{\varkappa\frac{p_0}{\rho_0}}$ (120-§ га қ.) эканини назарда тутиб, p босимнинг (139.7) ифодасини қуйидагича ёзамиз:

$$p = -\rho_0 c^2\frac{\partial y}{\partial x}. \qquad (139.8)$$

Бинобарин, (138.1) силжишлар тўлқинига мос келувчи босимлар тўлқини қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p(x,t) = -\rho_0 c^2\frac{A\omega}{c}\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) = -\rho_0 A\omega c\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \qquad (139.9)$$

яъни босим тебранишларининг фазаси зарралар тезликлари тебранишларининг фазаси билан ҳамма вақт бир хил бўлади ((138.2) ва (139.9) ларни солиштиринг). Маълум бир пайтда кинетик энергия зичлиги энг катта бўлган жойларда сиқилиш потенциал энергияси ҳам энг катта *бўлади.*

Потенциал энергия газ босимини унча катта бўлмаган p миқдорда орттириш (ёки камайтириш) учун ёки V_0 ҳажмни V миқдорда камайтириш (орттириш) учун сарф қилиш лозим бўлган ишга тенг. Босим ва ҳажм кам ўзгарганда $\left(\frac{p}{p_0} \ll 1, \frac{V}{V_0} \ll 1\right)$ ҳамма вақт p босим ўзгаришини (139.5) га асосан V ҳажм ўзгаришига пропорционал деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда V_0 ҳажмни сиқиш иши

$-\frac{pV}{2}$ га тенг бўлади[1]. Шунинг учун ҳажм бирлигининг потенциал энергиясини

$$E_{\text{п}} = -\frac{pV}{2V_0} \tag{139.10}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ифодага ҳажм ўзгаришининг (139.6) ифодасини ва босим ўзгаришининг (139. 8) ифодасини қўйиб, потенциал энергия зичлигини топамиз:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}\rho_0 c^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \tag{139.11}$$

Бинобарин, потенциал энергия зичлиги ўзгаришларининг тўлқини қуйидагича бўлади:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}\rho_0 c^2\left[\frac{\partial}{\partial x}A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\rho_0 A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \tag{139.12}$$

Бу ифодани кинетик энергия зичлигининг (139. 3) ифодаси билан солиштириб, тарқалаётган товуш тўлқинининг ҳар бир нуқтасида исталган пайтда зарранинг кинетик ва потенциал энергиялари зичликлари *бир хил* эканлигини кўрамиз. Шунинг учун тўлқиндаги тўлиқ энергия зичлиги қуйидагига тенг бўлади:

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \rho_0 A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \tag{139.13}$$

Жуда қисқа Δt вақт ичида тўлқин ҳаракат $c\,\Delta t$ қисмга тарқалади; бинобарин, тўлқиннинг тарқалиш йўналишига перпендикуляр бўлган текисликнинг бирлик юзи орқали

$$\Delta U_{\text{э}} = Ec\Delta t \tag{139.14}$$

энергия ўтади. Δt вақт ичида юз бирлиги орқали ўтган энергия миқдорининг Δt вақтга нисбати *энергия оқими* деб аталади. Биз текшираётган ҳолда энергия оқими қуйидагига тенг:

$$U_{\text{э}} = \frac{\Delta U_{\text{э}}}{\Delta t} = Ec = \rho_0 A^2\omega^2 c\sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \tag{139.15}$$

Энергия оқими вектор билан тасвирланади; бу вектор энергия тарқалаётган йўналишни ва юз бирлиги орқали вақт бирлиги ичида ўтадиган энергия миқдорини кўрсатади. Бу вектор *Умов вектори* деб аталади.

402-расмда силжишлар тўлқини, тезликлар тўлқини, босимлар тўлқинининг графиклари, шунингдек, энергия зичлиги ва энергия оқимининг тўлқин тарқалаётган йўналишдаги тақсимоти кўрсатилган. 402-

---

[1] Дарҳақиқат, босим ўзгариши $p = -aV$, бу ерда a — константа. У ҳолда иш қуйидагига тенг:

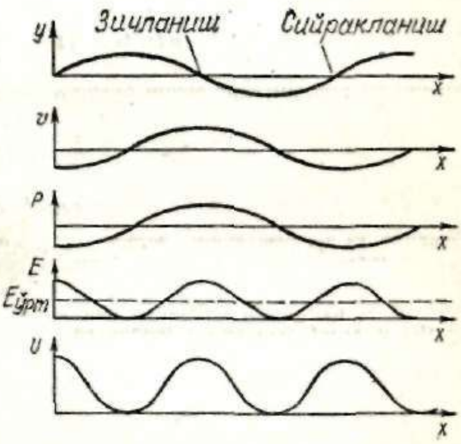
$$-\int_0^p p\,dV = \frac{1}{a}\int_0^p p\,dp = \frac{p^2}{2a} = -\frac{pV}{2}.$$

расмдаги графиклардан кўринишича, тўлиқ энергиянинг ўртача зичлиги[1] (139. 13) энергия зичлиги максимал қийматининг ярмига тенг, яъни

$$E_{\text{ўрт}}=\frac{1}{2}\rho_0 A^2\omega^2. \qquad (139.16)$$

Бинобарин, энергиянинг ўртача зичлиги кинетик (ёки потенциал) энергия зичлигининг максимал қийматига тенг.

Биз трубадаги ясси тўлқинда зарралар ҳаракати ва энергия тарқалишини анализ қилдик; трубанинг диаметри истаганча бўлиши мумкин, бинобарин, айтиб ўтилган гапларнинг ҳаммаси ҳаракатланаётган *ҳар қандай* ясси гармоник товуш тўлқинига тааллуқлидир.



402- расм.

140- §. Газдаги ва бир жинсли эластик муҳитдаги ясси тўлқинлар

Ясси тўлқиннинг фронти тўлқин тарқалаётган йўналишга нормал бўлган текисликдир. Цилиндрик трубада ясси тўлқин тарқалмоқда. Биз синусоидал тўлқинларни кўриб чиқдик, бироқ трубада тордаги каби, ҳар қандай шаклдаги ясси тўлқинлар тарқалиши мумкин. (137. 1) функция билан ифодаланган ҳар қандай ясси тўлқин бўйсуналиган умумий тенгламани газ учун аниқлаймиз.

Узунлиги dx бўлган газ цилиндрчаси оламиз (403- расм). 138- ва 139- § лардаги белгиларни ҳисобга олиб, динамиканинг иккинчи қонунига асосан қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$pS-\left(P+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)S=\rho_0 Sdx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ёки

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (140.1)$$

---

[1] Тайинли $x=\text{const}$ нуқтадаги «вақт бўйича олинган ўртача зичлик» ёки $t=\text{const}$ бўлгандаги «x бўйича олинган ўртача зичлик» ўртача зичлик деб ҳисобланади; биринчиси $x=\text{const}$ бўлганда $E^{\text{T}}_{\text{ўрт}}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T E\,dt$ формула билан, иккинчиси $t=\text{const}$ бўлганда $E^{x}_{\text{ўрт}}=\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda E\,dx$ формула билан ҳисобланади, бу ерда $\lambda=cT$—тўлқин узунлиги. Равшанки, $E^{x}_{\text{ўрт}}=E^{T}_{\text{ўрт}}=E_{\text{ўрт}}$.

(139. 8) ифодани эсга олиб, ундан

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

эканлигини топамиз. Бу ифодани (140. 1) билан солиштириб, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{140.2}$$

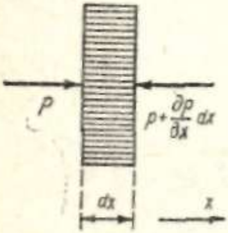
Бу тенглама газдаги ясси тўлқиннинг *тўлқин тенгламасидир*. Қуйидаги

$$y(x, t) = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

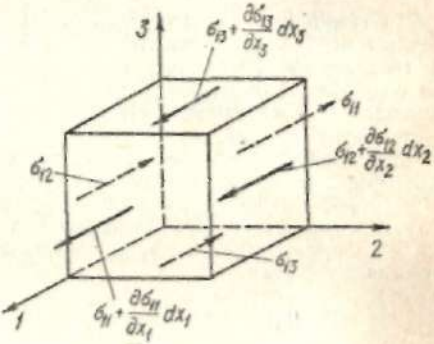
функция бу тенгламанинг ечими бўлишига ишониш осон. Дарҳақиқат,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f'', \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f'',$$

бу ерда f'' — f функциянинг $t \mp \frac{x}{s}$ аргумент бўйича олинган иккинчи ҳосиласи. f функция ўз аргументининг истаган узлуксиз функцияси бўлиши мумкин, бу функция ўзгармас c тезлик билан бузилмасдан тарқаладиган тўлқиннинг шаклини аниқлайди. Фронт текислигининг x координатанинг бирор қийматига мос келувчи ҳамма нуқталари тайинли t пайтда зарраларнинг бир хил y силжишига, бир хил p босим, бир хил ρ зичлик ва ҳоказоларга эга бўлади.



403- расм.



404- расм.

Туташ эластик қаттиқ жисмдан ёки бир жинсли изотроп эластик модда ишғол этган фазодан иборат эластик муҳитда ҳам деформация, кучланиш ва силжишлар тўлқини тарқала олади.

Эластик тўлқинларнинг тарқалиш қонунлари умумий ҳолда ҳатто бир жинсли изотроп муҳитда ҳам анча мураккабдир. Агар бирор сабаб билан бирор жойда бир жинсли бўлмаган деформация пайдо бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган кучланишлар қўшни элементларни деформациялайди ва силжитади, улар эса ўз навбатида атрофдаги элементларни деформациялайди ва силжитади, шундай қилиб муҳитда эластик тўлқинлар тарқалади.

dv ҳажмли элементнинг бир жинсли бўлмаган кучланишлар таъсири остида қиладиган ҳаракат тенгламасини тузиш учун бу ҳолда етарлича кичик $dv = dx_1\, dx_2\, dx_3$ элементга атрофдаги муҳит томонидан таъсир этувчи кучни топамиз. Ҳар бир нуқтадаги кучланишлар x_1, x_2, x_3 координаталарга боғлиқ, деб фараз қиламиз. Кучнинг *1* ўқ йўналишида олинган ташкил этувчисини аниқлаймиз (404-расм). *dv* элементга бу ўқ йўналишида таъсир этаётган ҳамма кучларни ёзиб чиқамиз (85-§ га қ.):

$$dF_1 = \left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\,dx_1\right)dx_2dx_3 - \sigma_{11}\,dx_2\,dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\,dx_2\right)dx_3\,dx_1 -$$

$$-\sigma_{12}dx_3\,dx_1 + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2 - \sigma_{13}dx_1dx_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3.$$

Бинобарин, кучнинг *1* ўқ бўйлаб олинган ташкил этувчисининг «зичлиги» қуйидагича бўлади:

$$f_1 = \frac{dF_1}{dv} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}. \tag{140.3}$$

Худди шу йўл билан қуйидагиларни ҳам топамиз:

$$f_2 = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}, \qquad f_3 = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}. \tag{140.4}$$

Динамика қонунига асосан, *dv* ҳажмга таъсир этувчи куч бу ҳажмнинг $\rho\,dv$ массаси билан тезланиши кўпайтмасига тенг бўлиши керак. Шунинг учун

$$f_1dv = \rho\,dv\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2},\ f_2dv = \rho\,dv\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2},\ f_3\,dv = \rho dv\frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}, \tag{140.5}$$

бу ерда ρ — муҳитнинг зичлиги, s_1, s_2, s_3 — (x_1, x_2, x_3) нуқтадаги зарралар силжишининг компоненталари.

Силжишлар тўлқинининг тенгламасини топиш учун f_1, f_2, f_3 ларни s кўчишнинг компоненталари орқали ифодалаш керак. Умумий ҳолда (140.5) тенгламаларнинг шакли мураккаб бўлиб, уларни анализ қилиш жуда оғир масаладир. Биз бу ерда энг содда ясси тўлқинни кўриб чиқамиз. Масалан, x_1 ўқ бўйлаб тарқаладиган ясси тўлқин учун ҳамма катталиклар фақат x_1 координата ва t вақтга боғлиқ бўлади, шунинг учун x_2 ва x_3 бўйича олинган барча ҳосилалар нолга тенг.

У ҳолда (140.3) ва (140.5) дан

$$f_1 = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} \tag{140.6}$$

эканлиги келиб чиқади (87.15) ни эсга оламиз: $\sigma_{11} = 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}3\varepsilon\right)$, бу ерда

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \text{ ва } 3\varepsilon = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3}.$$

Шунинг учун

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = 2G\left[\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\mu}{1-2\mu}\ \frac{\partial}{\partial x_1}(3\varepsilon)\right] = 2G\left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\ \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}\right].$$

Энди. (140.6) ни бундай ёзиш мумкин:

$$2G\left(1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\right)\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} = \rho\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}. \tag{140.7}$$

Бу тенглама бўйлама эластик тўлқиннинг тарқалиш тенгламаси ёки, бошқача айтганда, *ясси бўйлама тўлқиннинг тўлқин тенгламаси*, чунки тўлқиндаги зарралар x_1 ўқ бўйлаб, тўлқин тарқалаётган йўналиш бўйлаб s_1 га силжийди,

(140. 7) тенглама (140. 2) кўринишдаги тенгламадир, шунинг учун x_1 ўқ бўйлаб s_1 силжишлар тўлқинининг тарқалиш тезлиги қуйидагича бўлади:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2G}{\rho}\left(1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\right)} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}. \tag{140.8}$$

Тўлқиннинг тезлиги E, ρ ва μ га боғлиқ.

2 ва *3* ўқлар бўйлаб бўладиган s_2 ва s_3 силжишлар учун аввалги шароитда (140. 4) ва (140. 5) лардан қуйидаги тенгламаларни ёзиш мумкин:

$$f_2 = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}, \quad f_3 = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}. \tag{140. 9}$$

(87. 6) дан $\sigma_{12} = G\gamma_{12} = G\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right)$. Бундан

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} = G\frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2}.$$

Буни (140. 9) га қўйиб, s_2 учун тўлқин тенглама ҳосил қиламиз:

$$G\frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2} = \rho\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}. \tag{140.10}$$

Худди шунингдек, s_3 учун ҳам:

$$G\frac{\partial^2 s_3}{\partial x^2_1} = \rho\frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}.$$

Бу тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}}. \tag{140.11}$$

Бундай тўлқинлар *кўндаланг тўлқинлар* ёки *силжиш тўлқинлари* дейилади; бу ерда s_2 (ва s_3) силжиш тўлқин тарқалаётган x_1 йўналишга ўтказилган нормаль бўйича бўлади.

Шуни қайд қиламизки, стержендаги бўйлама тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги қуйидагига тенг:

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{140.12}$$

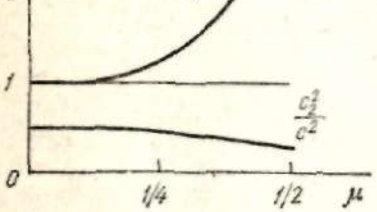
Дарҳақиқат, агар стержень ўқи *1* ўқ билан устма-уст тушса, бу ҳолда $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ бўлиб, (87. 1) билан белгиланган умумий $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$ тенгликдан

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_1 \text{ ёки } \sigma_{11} = E\frac{\partial s_1}{\partial x_1}$$

келиб чиқади. Шунинг учун (140. 6) тенглама

$$E\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} \tag{140.13}$$

кўринишга келади. Бундай тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги муҳитдаги бўйлама тўлқинлар тезлигидан кичик, му-



405- расм.

ҳитдаги кўндаланг тўлқинлари тезлигидан катта. Дарҳақиқат, $\frac{1}{2} > \mu \geqslant 0$ бўлганда

$$\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \geqslant 1 > \frac{1}{2(1+\mu)}. \qquad (140.14)$$

Тўлқинлар тарқалиш тезликларининг μ Пуассон коэффициенти қийматига боғланиши 405- расмда кўрсатилган. Бу ҳолларнинг ҳаммасида ҳар қандай частотали синусоидал тўлқинлар бир хил тезлик билан тарқалади. Демак, бундай тўлқинлар учун муҳит *дисперсияга* эга эмас, яъни тарқалиш тезлиги частотага боғлиқ эмас.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, чегарасиз фазодаги биз текширган ясси тўлқинлар маълум бир абстракт тушунчадир. Ҳақиқатда бундай тўлқинларни трубада, стерженда ёки фазонинг чегараланган қисмида кузатиш мумкин. Масалан, бўйлама (ёки кўндаланг) ясси тўлқинларни тегишли тебранишлар юзага келтираётган қаттиқ поршень яқинидаги бирор соҳада кузатиш мумкин; бу тўлқинлар тебранаётган пластинкадан ҳосил бўлиб, сув юзида тарқалаётган тўлқинларга ўхшаб кетади.

Поршендан узоқроқдаги соҳаларда унинг текислигига ўтказилган нормалдан четроқда ясси тўлқинлар бўлмайди, у жойларда мураккаброқ тўлқиний тебранишлар кузатилади.

Фазонинг бирор соҳасида газда тўлқинларнинг нуқтавий манбаидан узоқда тўлқинларни ясси тўлқин деб ҳисобласа бўлади, бироқ бунинг учун соҳанинг ўлчамлари манбагача бўлган масофадан етарлича кичик бўлиши керак. Бу ерда сферик тўлқиннинг қисмларини тақрибан ясси тўлқин деб ҳисоблаш мумкин.

141- §. Тўлқинларнинг қўшилиши (интерференцияси)

Тажрибанинг кўрсатишича, агар муҳитда бир вақтда бир қанча тўлқин тарқалса, у ҳолда муҳитнинг зарраси бараварига бир қанча тўлқин ҳаракатда қатнашади: товуш тўлқинлари учун *қўшилиш принципи* (ёки *суперпозиция принципи*) ўринли бўлади. Тўлқинларнинг қўшилиш принципи ҳар бир тўлқиннинг муҳитда бошқа тўлқинлар бор-йўқлигига боғлиқ бўлмаган ҳолда *мустақил* тарқалишини билдиради; ҳар бир тўлқин процесс қолган ҳамма тўлқинлар бўлмаган ҳолдагидек юз беради. Муҳит заррасининг ҳаракатини аниқлаш учун биз зарранинг ҳар бир тўлқиндаги ҳаракатини алоҳида топишимиз, сўнгра эса бу ҳаракатларнинг ҳаммасини қўшишимиз керак.

Маълум бир шароитларда иккита (ёки бир неча) тўлқин ҳаракатни қўшиш ҳодисаси *интерференция* деб аталади.

Трубадаги икки товуш тўлқинининг интерференциясини кўриб чиқамиз. Трубада бир хил частотали икки тўлқин бир вақтда қарама-қарши йўналишларда тарқаляпти, деб фараз қиламиз. Силжишлар тўлқинининг бири x ўқининг мусбат йўналиши бўйлаб тарқалиб,

$$y_1 = A\cos\,\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

орқали ифодаланган, иккинчиси эса биринчисига қарши йўналишда тарқалиб,

$$y_2 = B\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

билан ифодаланган бўлсин.

Натижаловчи мураккаб тўлқин ҳаракат қандай ҳаракат бўлади? Мутлақо равшанки, ҳар бир нуқтанинг мувозанат вазиятидан t пайтдаги оғиши қуйидагига тенг бўлади:

$$y_1 + y_2 = y.$$

Ҳамиша иккинчи y_2 тўлқинни иккита югурувчи (тарқалувчи) тўлқиннинг йиғиндиси сифатида тасвирлаш мумкин:

$$y_2 = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + (B - A)\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right). \qquad (141.1)$$

У ҳолда натижавий $y\ (x,\ t)$ тебранишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = y_1 + y_2 =$$

$$= A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + (B - A)\ \cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) =$$

$$= 2A\cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t + (B - A)\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right). \qquad (141.2)$$

Натижаловчи тўлқин ҳаракат икки қисмдан, яъни

$$2A\cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t \qquad (141.3)$$

билан ифодаланган *турғун тўлқиндан* ва

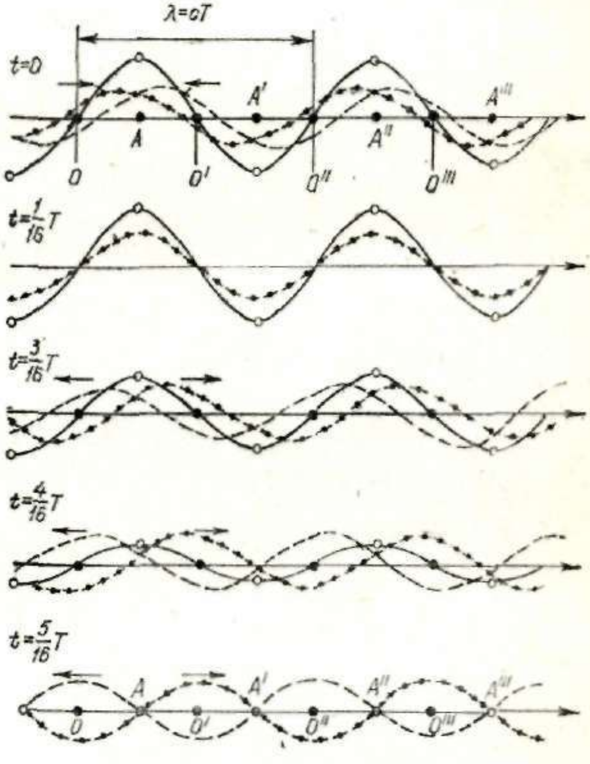
$$(B - A)\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) \qquad (141.4)$$

билан ифодаланган *югурувчи тўлқиндан* иборат.

$B = A$ бўлганда, яъни қарама-қарши йўналишларда тарқалувчи икки тўлқиннинг амплитудаси бир хил бўлганда натижаловчи тўлқин ҳаракат *турғун тўлқин* бўлади. Тарқалувчи иккита бир хил тўлқинда зарраларнинг оғишларини 406-расмда кўрсатилгандек қилиб, бир хил вақт оралатиб график равишда қўшсак, турғун тўлқиндаги зарралар ҳаракатини яққол тасаввур этиш мумкин; бу расмда чапга кетаётган тўлқин пунктир билан, ўнгга кетаётган тўлқин нуқталар билан, турғун тўлқиндаги зарралар вазияти яхлит чизиқ билан тасвирланган (чизма яққол бўлиши учун 406-расмда бошланғич фазаси — $\pi/8$ бўлган тўлқин тасвирланган).

(141. 3) формуладан кўринишича, турғун тўлқиндаги ҳамма зарралар ёки бир хил фазада, ёки қарама-қарши фазада тебранади, бироқ ҳамма нуқталарнинг тебранишлар амплитудаси умуман турлича-

дир; 406-расмдан ҳам худди шу нарса кўринади. O, O', O''... нуқталардаги зарралар ҳамма вақт тинч туради; бу нуқталар *силжишлар турғун тўлқинининг тугунлари* деб аталади, бу нуқталарнинг амплитудалари нолга тенг. Тугунлар бир-биридан $\frac{\lambda}{2}$ ярим тўлқин узунлигича масофада жойлашади. Агар $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$ эканлигини



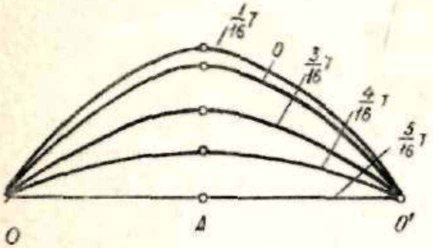
406- расм.

эътиборга олсак, турғун тўлқиннинг (141.3) ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\ \omega t. \qquad (141.5)$$

Бундан кўринишича, мазкур тўлқинда тугунлар координатанинг $x = \frac{2n+1}{2}\,\frac{\lambda}{2}$ қийматларида жойлашади. A, A', A''... нуқталарда тинч турган, доирачалар билан белгиланган зарралар энг катта амплитуда билан тебранади; бу нуқталар *силжишлар турғун тўлқинининг зичланишлари* деб аталади. Агар турғун тўлқин (141.5) формула билан тасвирланган бўлса, зичланишлар координаталари $x_n = n\frac{\lambda}{2}$ бўлган нуқталарга мос келади, бу ерда n — бутун сон.

407-расмда $O - O'$ икки тугун орасидаги зарраларнинг 406-расмда кўрсатилган пайтлардаги кетма-кет вазиятлари кўрсатилган. Иккита қўшни тугун орасида турган ҳамма зарралар *бир хил фазали* гармоник тебранма ҳаракат қилади, яъни уларнинг ҳаммаси энг четки вазиятга баравар боради ва нолдан баравар ўтади, бироқ ҳамма зарраларнинг тебраниш *амплитудалари турлича* бўлади.



407-расм.

Тугунларда жойлашган зарралар ҳеч ҳаракат қилмагани сабабли, тугун нуқталар орқали энергия узатилмайди, турғун тўлқин бўйлаб энергия тарқалмайди; фақат тугунлар орасида турган зарраларгина бир-бири билан энергия алмашинади. Шунинг учун гарчи турғун тўлқиндаги ҳаракат *бир хил амплитуда билан тарқалувчи икки тўлқиннинг интерференцияси натижасида* пайдо бўлса ҳам, аслида у тўлқин ҳаракат эмас.

Агар *бир-бирига қарама-қарши тарқалувчи тўлқинларнинг амплитудалари* тенг бўлмаса, у ҳолда тўлқин ҳаракат (141.3) турғун тўлқиндан ва (141.4) тарқалувчи тўлқиндан иборат бўлади, бу тарқалувчи тўлқиннинг амплитудаси асосий тарқалувчи тўлқинлар амплитудаларининг айирмасига тенг. Баъзан

$$k_s = \frac{|A-B|}{B} \tag{141.6}$$

катталик *югурувчанлик коэффициенти* деб аталади. Бу коэфициентнинг нолдан фарқли бўлиши энергия катта амплитудали тўлқин тарқалаётган йўналишда узатилишини билдиради.

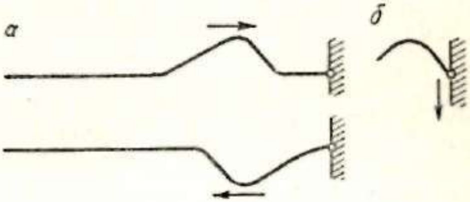
142-§. Тўлқинларнинг қайтиши

Турғун тўлқинлар одатда югурувчи тўлқиннинг муҳит чегарасидан қайтишида ҳосил бўлади. Муҳитнинг хоссалари кескин ўзгарадиган чегарага етганда тўлқин қайтади ва келаётган тўлқинга қўшилиб, у билан бирга турғун тўлқинлар ҳосил қилади.

Тўлқинларнинг қайтиш моҳиятини таранг тортилган резина най, тор, арқон ва шу кабиларда тарқалаётган тўлқин импульсининг («ўркач»нинг) қайтиши мисолида кўриб чиқамиз.

Таранг тортилган резина най бўйлаб 393-расмда кўрсатилгандек, тўлқин импульслари юборилада. Бу импульслар найнинг маҳкамлаб қўйилган жойига етиб боради, қайтади ва орқага югуради. Тажрибанинг кўрсатишича, қайтган импульснинг ҳам шакли келаётган импульс шакли каби бўлади, бироқ «фазаси» *қарама-қарши* бўлади. Агар келаётган импульс юқорига қараган «ўркач» бўлса, қайтган импульсда «ўркач» пастга қарайди ва аксинча.

Тўлқин импульси қайтган пайтда найнинг маҳкамлаб қўйилган заррасига найга тик йўналган куч таъсир этади. Бу кучнинг таъсири найнинг маҳкамлаб қўйилган нуқтадаги заррасининг тинч туришини таъминлабгина қолмай, тескари йўналишда оғадиган қайтган тўлқинни ҳам ҳосил қилади (408-*а* расм).



408- расм.

Дарҳақиқат, агар най юқорига қараб букилган бўлса (яъни «ўркач» юқорига қараган бўлса), маҳкамланиш жойи томонидан таъсир этадиган куч пастга қараб йўналади, бу эса пастга қараб йўналган зарбга мос келади (408-*б* расм).

Маҳкамланиш нуқтаси ҳамма вақт қимирламай туради, шунинг учун тўлқин ҳаракат энергияси нарига узатила олмайди, бинобарин, энергиянинг сақланиш қонунига асосан, қайтган тўлқин импульсининг шакли келаётган импульснинг шакли билан бир хил бўлиши керак. Назарий равишда ўтказилган ҳисоблар буни тасдиқлайди. (Най (тор) эгилганда энергиянинг исрофи эътиборга олинмайдиган миқдорда бўлади, деб фараз қиламиз, албатта.)

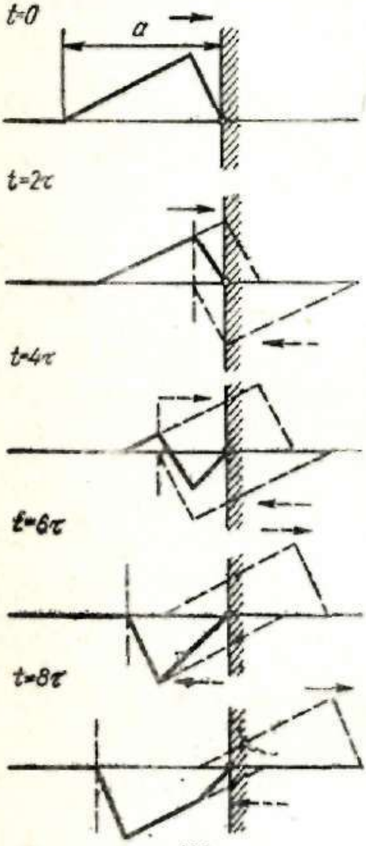
Агар фаразан қуйидаги манзарани тасаввур этсак, тор эгилишининг импульс қайтиш пайтидаги шаклини топиш осон: келаётган импульс маҳкамланиш нуқтасидан нариги томонга бузилмасдан ўтиб кетади, бироқ у билан бир вақтда тескари йўналишда бузилмаган импульс «чопиб боряпти»; ҳар бир пайтда торнинг маҳкамланиш нуқтасидаги заррасининг келаётган импульсдаги оғиши қайтган импульсдаги оғишига тенг ва қарама-қарши бўлиб, тор зарраларининг ихтиёрий пайтдаги ҳақиқий вазияти бу икки «фаразий» импульсларни қўшиш натижасида ҳосил бўлади[1].

---

[1] Англашилмовчиликка ўрин қолдирмаслик учун шуни айтиб ўтиш керакки, бу тўлқинларнинг тор маҳкамланган нуқтадан нариги томондаги қисмларигина бўлмайди, маҳкамланиш нуқтасигача бўлган «фаразий» тўлқинлар тушаётган ва қайтаётган импульсларнинг таркибий қисмлари сифатида ҳақиқатда мавжуддир.

409-расмда келаётган ва қайтаётган фаразий импульсларнинг турли пайтлардаги вазиятлари пунктир билан, тор нуқталарининг шу пайтлардаги вазияти эса яхлит чизиқ билан кўрсатилган. Тўлқиннинг тезлиги c га тенг, импульснинг узунлиги a, унинг шакли $2\tau = \frac{a}{5c}$ вақт оралатиб кўрсатилган.

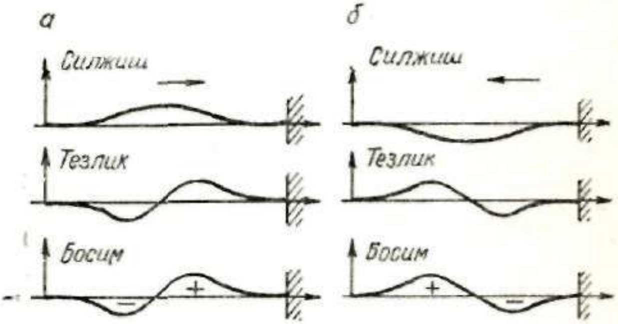
Қайтиш манзарасини кўриб чиқишдан олдин 409-расмдаги импульснинг шаклига диққатни жалб қиламиз: бунда унинг шакли шундайки, тўлқиннинг тикроқ қисмидаги зарралар тезлиги ётиқроқ қисмидаги зарралар тезлигидан тўрт марта катта. Буни билган ҳолда ҳамиша қайтган тўлқин шаклидан ташқари, яна тор зарраларининг қайтишдаги тезликларини ҳам топиш мумкин; бунинг учун келаётган ва қайтаётган импульслардаги тезликларни геометрик равишда қўшиш керак. Масалан, торнинг маҳкамланиш нуқтасига ёндашган тўғри қисми 2τ дан 6τ гача бўлган вақт ичида нолга тенг бўлган тезликка эга бўлишини кўриш мумкин. Торнинг бу қисмдаги зарралари $t = 6\tau$ вақтдан сўнг керакли тезлик ола бошлайди; синиш жойидан маҳкамланиш нуқтасига яна битта синиқ чопади, бу синиқни торда $t = 8\tau$ пайтда кўриш мумкин. Бу синиқ маҳкамланиш нуқтасига $t = 10\tau$ пайтда етиб боради, бу пайтда қарор топган қайтган тўлқин кета бошлаган бўлади.



409- расм.

Диққат билан қарасак, зарранинг вертикал тезлиги заррадан тўлқиннинг синиқ жойи ўтган пайтларда ўзгаришини кўрамиз; бу пайтда зарра туртки олиб, шу туртки таъсиридан унинг тезлиги ўзгаради. Дарҳақиқат, тор заррасига икки томондан таъсир этувчи таранглик кучлари ана шу пайтдагина вертикал ташкил этувчи ҳосил қилади. Тор заррасига таъсир этувчи куч мазкур жойдаги тўлқин фронтининг оғмалик бурчаги ўзгаришига (ҳосиласига) пропорционалдир. Тўлқин импульсининг тор маҳкамланган жойдан қайтишини ўрганиш шуни кўрсатадики, қайтиш вақтида импульснинг шакли деформацияланади, бироқ қайтган (кетаётган) импульс айни ўша шаклга эга бўлиб, фақат унинг фазаси тескарисига ўзгаради.

Товуш тўлқини ҳам қўзғалмас девордан худди шу қонунга биноан қайтади. Трубада импульс тарзида чопувчи товуш тўлқини тарқаляпти деб фараз этайлик, ҳар бир зарра ўз орқасида энг яқин турган зарра таъсиридан сиқилади, маълум бир тезлик олади ва ўз олдида турган қўшни заррага ҳам худди шундай таъсир узатади ва ҳоказо. Қўзғалмас девор яқинида манзара бошқача бўлади деворга ёндашган зарралар сиқилади, бироқ тезлик ололмайди, бинобарин, улар қолган зарралардан кўра кўпроқ сиқилиши керак; мана шу қўшимча сиқилиш натижасида девордан тескари фаза билан орқага чопувчи қайтган тўлқин ҳосил бўлади. Ўнг томонга кетаётган тўлқин импульсидаги турли хил катталикларнинг графиклари 410-*а* расмда кўрсатилган: зарралар силжишининг графиги, зарралар тезлигининг графиги ва босимлар (ёки зичликлар) ўзгаришининг графиги. 410-*б* расмда эса шу катталикларнинг ўша тўлқин импульси учун унинг қўзғалмас девордан қайтгандан кейинги графиклари кўрсатилган. Бу графиклардан кўринишича, зичланиш ҳамиша тўлқиннинг олдинги қисмида бўлади, тарқалаётган тўлқиндаги тезлик ва босим эса ҳамма вақт бир-бири билан бир хил фазада бўлади.

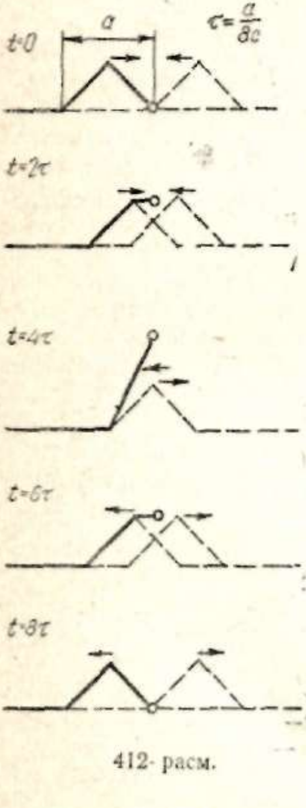


410- расм.

Тўлқин муҳитнинг эркин сиртидан қайтганда бутунлай бошқача манзара кузатилади. Масалан, эластик пўлат стержень бўйлаб тарқалувчи товуш тўлқини стерженнинг охирига боради ва акс этиб, орқага қайтади, чунки ҳавонинг зичлиги пўлатнинг зичлигига нисбатан жуда кичик ва ҳавонинг стержень атрофидаги зарралари ҳаракати стержень зарраларининг ҳаракатига ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди. Пўлатнинг стержень сиртидаги зарралари деярли стержень бўшлиқда тургандагидек ҳаракат қилади. Тўлқиннинг ҳаракат энергияси нарига узатилмайди ва шунинг учун тўлқин акс этиб, орқага кетади.

Торнинг эркин учидан кўндаланг тўлқин қайтишини қуйидаги тажрибада кўриш мумкин (411- расм). Резинка най учига енгилгина ингичка тизимча боғлаймиз, тизимчанинг иккинчи учи ҳам маҳкамлаб қўйилган. Сўнгра найни таранг тортиб туриб, унга кескин зарблар берамиз ва най бўйлаб тўлқин импульслари кетишини кўрамиз. Импульслар тизимча боғланган жойдан қайтиб, орқага *ўша* фаза билан кетади, яъни зарраларни пастга силжитувчи импульс қайтгандан кейин ҳам зарраларни пастга томон силжитади. Найнинг тизимчага боғланган учини эркин деб ҳисоблаш мумкин, чунки тизимчанинг чизиқли зичлиги найнинг чизиқли зичлигидан анча кам, най ва тизимчанинг таранглиги эса ўзгармайди. Шунинг учун тизимча тўлқин билан бирга келаётган энергиянинг жуда оз улушини олади, деярли ҳамма энергия орқага қайтади. Тизимчанинг учи унга кўндаланг йўналишда ҳеч қандай кучлар таъсир қилмаган ҳолдагидек ҳаракат қилади: исталган пайтда тизимча маҳкамланиш нуқтасидан (*A* дан) найнинг *B* учига кетган тўғри чизиқ тарзида бўлади (411- расм). Тизимчанинг β оғмалик бурчаги найнинг унда тўлқин ҳаракат қилган ҳолдаги оғмалик бурчагига нисбатан жуда кичик, шунинг учун тизимча таранглик кучининг кўндаланг ташкил этувчисини най эгилгандаги ташкил этувчига нисбатан эътиборга олмаса бўлади.

411- расм.



412- расм.

Эркин чегарадан қайтган тўлқин билан келаётган тўлқиннинг фазаси бир хил. Дарҳақиқат, пўлат стерженнинг эркин учи яқинидаги зарраси сиқила олмайди, чунки унга эркин чегара томонидан таъсир этувчи куч йўқ, шунинг учун бу заррага унинг орқасида турган зарранинг кўрсатадиган таъсири унга тезлик беради ва бу зарра қолган зарраларга қараганда кўп силжиши керак. Бундай силжиш (яъни келаётган тўлқиндаги силжишдан икки марта катта бўлган силжиш) эркин учдан чопувчи *қайтган тўлқин* ҳосил қилади. Қайтган тўлқин амплитудаси келаётган тўлқин амплитудасига тенг бўлиши керак, бу энергиянинг сақланиш қонунидан келиб чиқади.

Учбурчак шаклидаги тўлқин импульсининг тор эркин учидан қайтишининг кетма-кет босқичлари 412- расмда кўрсатилган. Келаётган тўлқиннинг максимуми торнинг эркин учига етган пайтда бу уч икки марта кўп силжийди.

Олдин кўрсатиб ўтилганидек, частоталари ва амплитудалари бир хил бўлган қарама- қарши йўналишда тарқалувчи икки синусоидал тўлқин *турғун тўлқин* ҳосил қилади. Агар трубада тарқалаётган синусоидал тўлқин трубанинг ёпиқ (ёки очиқ) учидан қайтганда энергия исроф бўлмаса, у ҳолда трубада ҳамиша турғун тўлқин ҳосил бўлади. Шундай қилиб, иккала учи берк трубада ёки учлари маҳкамлаб қўйилган торда турғун тўлқин тарзидаги гармоник тебранишлар юз бериши мумкин; бундай ҳаракатда трубанинг ёпиқ учида *силжиш тўлқинининг тугуни* бўлади; торнинг маҳкамлаб қўйилган учларида ҳам худди шундай бўлади.

Турғун тўлқинда энергия тўлқин бўйлаб тарқалмайди, чунки энергия трубанинг силжишлар тўлқини тугуни билан устма-уст тушган кесимлари орқали узатила олмайди; бу кесимнинг нуқталари ҳамма вақт тинч туради ва шунинг учун улар бир заррадан бошқа заррага иш (энергия) узата олмайди. Фақат икки тугун орасидагина зарралар тебранишларда энергия алмашинади.

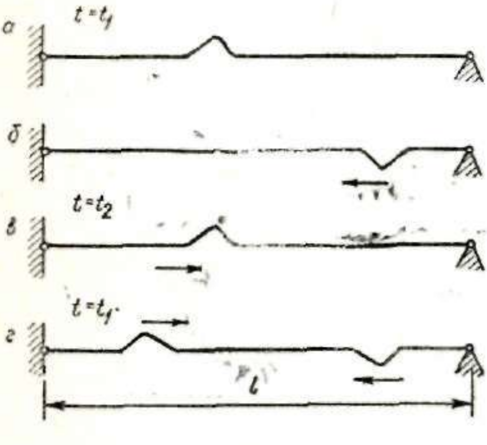
Дарҳақиқат, зарралар мувозанат вазиятидан ўтаётган пайтда ($t = \frac{5}{16}T$ бўлганда, 407-расмга қ.) ҳамма зарралар фақат кинетик энергияга эга бўлади, тугунлар ўртасида турган зарра энг катта тезликка эга, бинобарин, бу пайтда зарраларнинг тўлиқ энергияга тенг бўлган кинетик энергияси ўртада катта бўлиб, тугун нуқталарига томон аста-секин камайиб боради. Ҳамма зарралар энг четки вазиятга етган пайтда ($t = \frac{1}{16}T$ бўлганда) уларнинг тезлиги нолга тенг бўлади, шунинг учун улар фақат сиқилиш (ёки чўзилиш) потенциал энергиясига эга бўлади; ўртадаги зарралар деформацияланмайди, чунки тугунлар ўртасида $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ бўлиб, (139.6) формулага асосан босимнинг ўзгариши нолга тенг; бироқ тугунларга яқин ётган зарралар тугунга қанча яқин бўлса, уларнинг деформацияси шунча катта бўлади, бинобарин, бу пайтда тугунлар яқинида ётган зарралар энг катта энергия запасига эга бўлади. Шундай қилиб, турғун тўлқинда тугунлар орасида энергия оралиқнинг учларидан ўртасига бир давр ичида икки марта «оқиб ўтади».

Турғун тўлқинда ҳар икки тугун орасидаги интервалда тебранишлар бошқа интервалларга мутлақо боғлиқ бўлмагандек юз беради. Дарҳақиқат, турғун тўлқиннинг *тугуни* турган кесимга трубада қаттиқ деворлар қўйилган, деб тассавур этайлик, у ҳолда трубанинг бу жойидаги тебранишлар бундан олдингича бўлаверади. Торда ҳам худди шундай бўлади; агар торни турғун тўлқиннинг тугунларида маҳкамлаб қўйсак, тебранишлар торнинг бу жойлари маҳкамланмаган ҳолдагидек давом этаверади.

143- §. Торнинг ва трубадаги ҳавонинг хусусий тебранишлари

Қўзғалмас икки қисқич орасида тортилган торни ёки икки томони ёпиқ труба ичига қамалган ҳавони тасаввур этайлик. Агар тор зарраларини мувозанат ҳолатдан чиқарадиган бошланғич «ҳаракат» (ғалаёнланиш) берсак, торда тебранишлар пайдо бўлади.

Торга бир урамиз ёки уни тортиб туриб қўйиб юборамиз; трубадаги ҳавони поршень билан бирданига сиқамиз, сўнгра поршенни бўшатамиз ва маҳкамлаб қўямиз ва ҳоказо; барча бу «ҳаракатлардан» сўнг тебранишлар пайдо бўлади, буларни *торнинг хусусий тебранишлари* (ёки трубадаги ҳавонинг хусусий тебранишлари) деб аташ керак, чунки бу тебранишлар тебранувчи зарралар системасига тегишли бўлган кучлар таъсири остида юз беради. Умумий ҳолда, яъни ҳар қандай бошланғич «ҳаракатдан» сўнг пайдо бўлган тебранишлар анча мураккаб кўринишга эга бўлади: тор зарралари қондайдир мураккаб даврий тебранишлар қилади (агар сўниш ҳисобга олинмаса), шу билан бирга ҳамма зарралар турлича тебранади. Тебранишларнинг даврий тебранишлар бўлишига қуйидаги соддагина мулоҳазалар асосида ишонч ҳосил қилиш мумкин.



413- расм.

Бошланғич ҳаракатдан кейин торда ўнг томонга чопувчи битта импульс пайдо бўлди, деб фараз қилайлик. 413-*а* расмда бу импульснинг t_1 пайтдаги вазияти тасвирланган; бирор вақт ўтгач, импульс тор маҳкамланган нуқтадан қайтиб (413-*б* расм), орқага кетади, сўнгра яна бир марта қайтиб, $t = t_2$ пайтда (413-*в* расм) бошланғич $t=t_1$ пайтдаги вазиятини эгаллайди. Бундан кейинги вақт оралиқларида зарралар t_2-t_1 вақт оралиғидаги ҳаракатларини айнан такрорлайди ва ҳоказо; шунинг учун $t_2-t_1=T$ вақт оралиғи торнинг ҳамма нуқталарининг тебраниш даври бўлади. Равшанки, $t_2-t_1=T$ вақт импульснинг $2l$ масофани, яъни торнинг иккиланган узунлигини босиб ўтишига кетган вақтга тенг[1]. Шунинг учун тўлқин импульсининг тарқалиш тезлиги c бўлганда торнинг хусусий тебранишлари даври қуйидагига тенг бўлади:

$$T=\frac{2l}{c}. \qquad (143.1)$$

Агар бошланғич ҳаракат биттагина содда тўлқин импульсидан иборат бўлмаса, у ҳолда ҳамиша уларни содда ҳаракатлар йиғиндиси тарзида тасвирлаш мумкинки, буларнинг ҳар бири учун тебранишлар даври тўғрисидаги хулоса ўз кучида қолади.

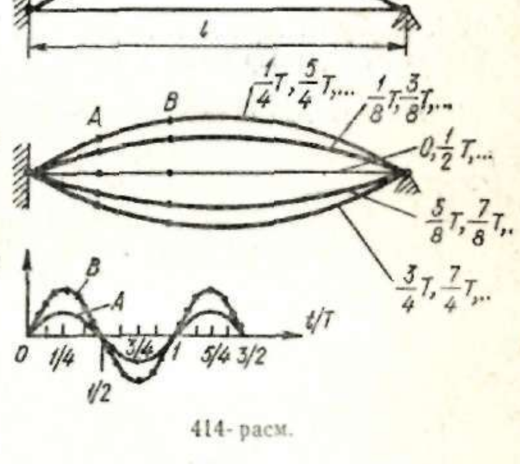
---

[1] Агар тарқалишда ва қайтишда импульс ўз шаклини ўзгартирмасагина бу мулоҳазалар тўғри бўлади.

Фақат бу ерда жуда муҳим эслатма қилиш керак: (143.1) формула билан аниқланган давр тебранишларнинг энг катта даври бўлади. Шундай махсус бошланғич ҳаракатларни тасаввур этиш мумкинки, буларда тебранишлар даври T дан икки, уч, тўрт ва ҳоказо марта кичик бўлади. Дарҳақиқат, бошлангич ҳаракат натижасида бошланғич пайтда тор бўйлаб чопувчи икки импульс ҳосил бўлсин, улар $t = t_1$ пайтда 413-*г* расмда кўрсатилган вазиятни эгаллаб турсин. Шакли бир хил бўлган икки импульс тор учларидан бир хил масофада туриб, уларнинг фазалари ва йўналишлари қарама-қарши бўлади. Бу ҳолда ҳар бир зарранинг тебранишлар даври $\frac{1}{2}T$ га тенг эканлигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шунингдек, импульсларнинг шундай бошланғич вазиятларини топиш мумкинки, бунда тебранишлар даври $\frac{1}{3}T$, $\frac{1}{4}T$ га тенг бўлади ва ҳоказо.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, умумий ҳолда тор зарраларининг (ёки трубадаги ҳаво зарраларининг) хусусий тебранишлари *даврий бўлади-ю, бироқ гармоник тебраниш бўлмайди,* яъни ҳар бир зарранинг тебраниши, умуман айтганда, вақт ўтиши билан синус (ёки косинус) қонуни билан юз бермайди.

Бироқ тайинли бир бошланғич ҳаракат берилгандан сўнг тор *гармоник* хусусий тебранишлар қилиши мумкин. Торнинг ҳамма қисмлари мувозанат вазиятидан 414-*а* расмда кўрсатилгандек «синусоидал» қонун билан четлатилиб, кейин қўйиб юборилган, деб тасаввур этайлик. Тор зарралари қандай ҳаракат қилади? Бу ҳаракат зарраларнинг ўша торда тўлқин узунлиги $\lambda = 2l$ бўлган турғун тўлқинда қиладиган ҳаракати билан бир хил бўлади.



414-расм.

Дарҳақиқат, таранглиги ва зичлиги учлари маҳкамлаб қўйилган қисқа торнинг таранглиги ва зичлигига тенг бўлган етарлича узун торни тасаввур этайлик. Агар узун торда ҳосил бўлган турғун тўлқинлардаги тугунлар орасидаги масофа қисқа торнинг l узунлигига расо тенг ва турғун тўлқиндаги максимал силжиш қисқа торнинг бошланғич силжиши билан бир хил бўлса, у ҳолда узун торнинг тугунлар орасидаги ҳаракати билан қисқа тор ҳаракати бир хил бўлади, чунки бу ҳаракатлар бир хил таранглик кучлари таъсири остида ва *бир хил бошланғич шарт-шароитларда юз беради.* Шунинг учун торнинг ҳар бир зарраси гармоник тебранма ҳаракат қилади, торнинг ҳамма нуқталари бир-бири билан бир хил фазада синусоидал қонун бўйича тебранади (414-*б* ва *в* расм).

λ тўлқин узунлиги ва T тебранишлар даври c тўлқин тарқалиш тезлигига қуйидаги тенглик воситасида боғланган эканлигини эсга олайлик:

$$T = \frac{\lambda}{c}. \tag{143.2}$$

Тебранишлар даври ва тўлқин узунлиги тўлқиннинг амплитудасига боғлиқ эмас, хусусий тебранишлар даври ҳам амплитудага боғлиқ эмас. (143.1) ва (143.2) шартлардан 414-*а* расмда кўрсатилган тор хусусий тебранишларининг энг катта даври

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{2l}{c}$$

эканлигини топамиз. Тор бошланғич пайтда 415-*а* расмда кўрсатилгандек қилиб оғдирилганда, у даври

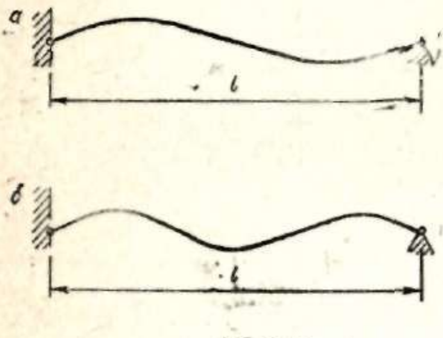
$$T_2 = \frac{l}{c}$$

бўлган хусусий гармоник тебранма ҳаракат қилишига юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар асосида ишонч ҳосил қиламиз, чунки бу ҳолда $\lambda = l$.

415-*б* расмда кўрсатилган вазиятда эса тор даври

$$T_3 = \frac{2l}{3c}$$

бўлган хусусий гармоник тебранма ҳаракат қилади, чунки $\lambda = 2/3\, l$.



415-расм.

Шундай қилиб, учлари маҳкамлаб қўйилган тор бошланғич ҳолати қандай бўлишига қараб турли

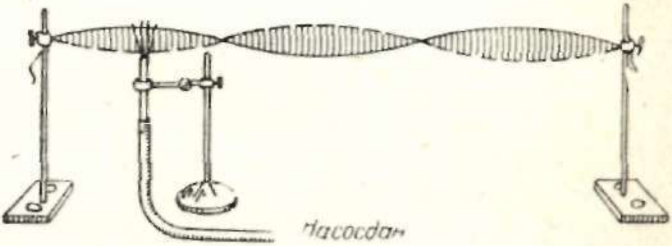
$$T_1 = \frac{2l}{c},\ T_2 = \frac{2l}{2c},\ T_3 = = \frac{2l}{3c}, \dots, T_n = \frac{2l}{nc}, \dots \tag{143.3}$$

даврлар билан хусусий гармоник тебранма ҳаракатлар қилади. Торнинг *хусусий даврлари* сони ёки *хусусий частоталари* чексиз кўп бўлади:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{2l} nc = \frac{\pi nc}{l}, \tag{143.4}$$

бу ерда $n = 1, 2, 3, \dots,$ Ихтиёрий ω_n хусусий частота билан тебранганда тор ҳар *бир* пайтда маълум бир *шаклга* эга бўлади. Бу ҳолда хусусий тебраниш шакли шундай синусоида билан тасвирланадики, бунда тор узунлигига бу синусоиданинг n та ярми жойлашади.

Агар тор бирор бошқа усул билан, масалан, бир уриб қўйиш ёки мувозанат вазиятидан оғдириш билан тебранма ҳаракатга келтирилган бўлса, у ҳолда турли хил частотали бир неча хусусий тебраниш юзага келиб, ҳаракат хусусий гармоник тебранишлардан иборат бўлган мураккаб ҳаракат бўлади.



416- расм.

Торнинг фақат битта частота билан юз берадиган соф хусусий тебранишларини кузатиш қийин, чунки улар қиёсан қисқа вақт ичида тез сўнади. Шунинг учун торнинг хусусий тебранишларини *автотебранишлар режимида кузатиш* ҳаммасидан осонроқ. Олдин айтиб ўтилганидек (131-§ га қ.), автотебранишларда деярли ҳамиша хусусий частотага яқин частотали тебранишлар юз беради, шунинг учун уларнинг шакли хусусий тебранишлар шаклига яқин бўлади.

Таранг тортилган резина шнурнинг хусусий тебранишлари шаклини қуйидаги демонстрацион тажрибада кўриш мумкин. Узунлиги бир неча метр келадиган таранг тортилган резина шнурнинг (одатда диаметри 3—5 мм бўлган резина найнинг) автотебранишлари диаметри 1—2 мм бўлган кичикроқ соплодан[1] чиқаётган ҳаво жараёни *(416-расм) таъсирида юзага келади*. *Агар жараён шнурга* перпендикуляр равишда шундай йўналган бўлсаки, мувозанат вазиятида шнур жараённинг марказидан ўтмаса, у ҳолда шнур хусусий частоталардан бири билан автотебранишлар қилади. Тугун жойига қўлни салгина тегизиб, шнурни исталган хусусий частота билан тебрантириш мумкин. Амалда узун шнурда хусусий частотаси тартиб билан биринчидан тортиб еттинчигача бўлган турғун тебранишлар ҳосил қилиш мумкин. Шнур тебранишларини сояли проекция усулида намойиш қилиб кўрсатиш жуда яққол бўлади.

Шунингдек, ғижжак камончаси воситасида ҳам торнинг хусусий тебранишларини ҳосил қилиш мумкин: камончани керакли жойга

---

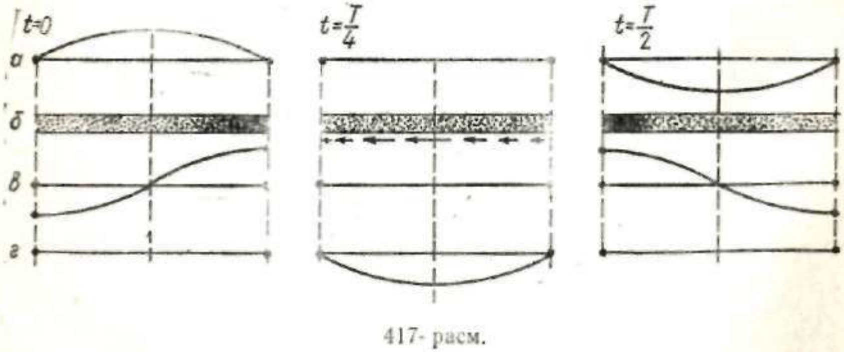
[1] Оқим манбаи сифатида уйда ишлатиладиган пилесос насосини ёки ҳаво пуфлагични олиш мумкин.

енгилгина бир текис босиб ва панжани изланаётган тоннинг тугуни турадиган жойга салгина тегизиб, бир оз машқ қилгандан сўнг торнинг турли хил хусусий тебранишларини ҳосил қилиш мумкин. Бу тебранишлар шаклини аудиторияда кузатиш қийин, бироқ частотасини тебранаётган тордан чиқаётган товуш баландлигига қараб аниқлаш осон.

Трубага қамалган ҳаво (ёки бошқа газ) устунининг хусусий тебранишлари торнинг хусусий тебранишларига мутлақо ўхшашдир, фарқи фақат шундаки, торда зарралар кўндаланг (тўлқинлар тарқаладиган йўналишга перпендикуляр) тебранишлар қилади, газда эса зарралар бўйлама (тўлқинлар тарқаладиган йўналиш бўйлаб) тебранишлар қилади.

Икки томони ёпиқ труба ичида энг паст $\omega = \frac{\pi c}{l}$ хусусий частота билан юз берадиган хусусий тебранишларнинг графиклари 417-расмда кўрсатилган. Бу расмда бир даврнинг учта пайти учун тўртта катталикнинг: а) зарралар силжишлари, б) зичликлар, в) босим ўзгаришлари, д) тезликлар графиклари келтирилган. $t = 0$ да ҳамма зарралар тезлиги нолга тенг ва улар мувозанат вазиятидан ўнг томонга қараб энг кўп силжиган; чорак давр ўтганда, яъни $t = T/4$ да ҳамма зарралар тезлиги максимал бўлиб, чапга йўналади, бироқ босим ва зичлик ҳамма зарралар учун бир хил бўлиб, зарралар мувозанат вазиятида туради; $T/2$ пайтда ҳамма зарралар чап томонга максимал силжиган бўлади ва ҳоказо.

Энг паст $\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$ частотали тебраниш (биринчи тон) шундай юз берадики, бунда зарралар галма-галдан трубанинг гоҳ у учида, гоҳ бу учида зичлашади. Трубанинг бир учидаги сиқилиш $t=0$ пайтда текислашади (417-расмга қ.) ва зарралар сийрак томонга қараб ҳаракатга келади; $t = T/4$ пайтда сиқилиш йўқолади, зичлик ҳамма ерда бир текис бўлади, бироқ зарралар энг катта тезликка эга бўлади; кейин инерцияси билан ҳаракат қилиб зарралар газни трубанинг иккинчи учида яна сиқади ($t = T/2$) ва ҳоказо.



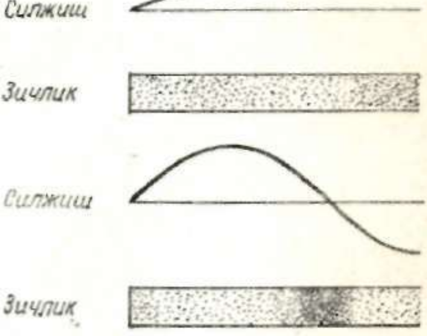
417-расм.

Силжишлар тўлқинининг *тугунларидаги* (трубанинг учларидаги) зарралар тебранмайди ва уларнинг тезлиги ҳамма вақт нолга тенг бўлади, бироқ улар босим ва зичлик тебранишларининг *дўнглигида* туради, уларда босим ва зичлик энг кўп ўзгаради, тебраниш вақтида мувозанат вазиятидан энг кўп оғадиган зарралар, яъни силжиш *дўнглигида* (трубанинг ўртасида) турган зарралар босим вa зичлик ўзгаришини ҳеч сезмайди—улар босим ва зичлик тебранишларининг *тугунида* туради.

$t = 0$ пайтда ҳамма зарралар фақат сиқилиш потенциал энергиясига эга бўлади, трубанинг учлари яқинида ётган зарраларнинг энергияси максимум бўлади. Чорак давр ўтгач, яъни $t = T/4$ пайтда ҳамма зарралар фақат кинетик энергияга эга бўлади; зарралар зичлиги мувозанат ҳолатдаги зичлигидек бўлади, сиқилиш потенциал энергияси нолга тенг, трубанинг ўртасида турган зарралар максимал кинетик энергияга эга бўлади. Шу икки пайт орасидаги вақтда зарралар ҳам кинетик энергияга, ҳам потенциал энергияга эга бўлади, бу вақт ичида энергия трубанинг учларидан (босим дўнглигидан) ўртага (силжиш дўнглигига) ўтади.

Трубада турли даврли хусусий тебранишлар ҳосил қилиниши мумкин; масалан, икки учи бекитилган трубада фақат шундай хусусий тебранишлар юз берадики, уларнинг ҳар бирида труба узунлигига жойлашган ярим тўлқинлар сони бутун сон бўлади. Агар биринчи тебранишнинг икки тугуни (силжишлар тугуни) бўлса, иккинчи тебранишнинг уч тугуни бўлади ва ҳоказо. Ҳар қандай хусусий тебранишларнинг икки тугуни орасидаги тебранишлар манзараси биринчи тон манзараси каби (417-расмга қ.) бўлади.

Бир учи очиқ трубадаги хусусий тебранишлар мутлақо бошқача кўринишда бўлади. Максимал оғиш пайтидаги силжишлар тақсимотининг графиклари 418-расмда кўрсатилган: юқоридаги график биринчи хусусий тебранишга, пастдагиси иккинчи хусусий тебранишга оиддир. Бу ҳолда трубанинг очиқ учида ҳамма вақт силжишлар тўлқинининг дўнглиги бўлади, шунинг учун труба узунлигига жойлашадиган чорак тўлқинлар сони тоқ бўлади. Бундай трубада ҳаво тебранишларининг хусусий частоталари бир-бирига тоқ сонларнинг 1, 3, 5, 7, ... натурал қатори каби нисбатда бўлади.



418-расм.

Хусусий тебранишларнинг умумий қонунини қайд қилиб ўтамиз. Агар тебранаётган система битта эркинлик даражасига эга бўлса (маятник ва шу кабилар), у *битта* частота билан хусусий тебранишлар қилади. Эркинлик даражаси иккита бўлган система (боғланган икки маятник) *иккита* хусусий частотага эга. Торнинг чексиз кўп зарраси бор, унинг эркинлик даражалари сони чексиз, шунинг учун унинг хусусий частоталари *чексиз кўп*: ω_1, ω_2 ... Бинобарин, *системанинг хусусий частоталари сони эркинлик даражалари сонига тенг.*

XVI БОБ

АКУСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

144- §. Асосий ҳодисалар

Кишининг эшитиш аппаратига механикавий тебранишлар таъсир кўрсатиши натижасида товуш туйғуси пайдо бўлади. Киши қулоғи маълум частота ва интенсивликли тебранишларни қабул қилади, шунинг учун частотаси 16 дан 20 000 Гц гача оралиқда ётган ва қулоқ сезадиган тебранишлар *товуш тебранишлари* деб аталади.

Юқорида кўрсатилган диапазон ичидаги частоталар билан механикавий тебраниш қиладиган ҳар қандай жисм товуш манбаи бўлади. Масалан, тебранаётган тор, мембрана, пластинка ва шу кабилар атрофдаги муҳитда бўйлама тебранишлар ҳосил қилади. Товуш манбаи қаттиқ жисмгина эмас, балки газ ёки суюқ ҳолатдаги жисм бўлиши ҳам мумкин, масалан, паровоз ҳуштаги, орган трубаси, кишининг овоз аппарати, водопровод жўмраги (унинг «пишиллаши») ва бошқалар. Бу ерда *маълум бир ҳажмга қамалган ёки бирор каналлардан оқиб ўтаётган* газ ёки суюқликнинг тебранишлари товуш манбаидир. Товуш манбаи ўз яқинида зичлик (ёки босим) нинг маълум тебранишларини юзага келтириб, атрофдаги муҳит зарралари зичлигининг худди шундай тебранишларини ҳосил қилади, бу тебранишлар эса, умуман айтганда, ҳамма томонга тўлқин тарзида тарқалади.

Тайинли бир манбадан товуш тўлқинларининг тарқалиш қонунлари манбанинг ўзининг тузилишига ҳам, атрофдаги муҳитнинг хоссаларига ҳам боғлиқ. Агар товуш манбаининг ўлчамлари ўзи чиқараётган товуш тўлқинининг λ узунлигига нисбатан жуда кичик бўлса, у ҳолда бундай манбани «нуқтавий манба» деб ҳисоблаш мумкин: агар бу манбани бир жинсли муҳитда турибди деб тасаввур этсак, ундан *сферик тўлқинлар* тарқалади (эслатиб ўтамизки, $\lambda = cT$, бу ерда c — товушнинг муҳитда тарқалиш тезлиги, T — тебранишлар даври).

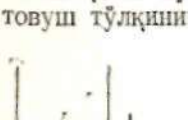
Масалан, паровоз ҳуштагининг частотаси тахминан 350 Гц бўлган товуш тўлқини қандай бўлади? Ҳавода бундай частотали тўлқиннинг узунлиги тахминан 1 м бўлади, паровоз ҳуштаги тешигининг ўлчами 1 см чамасида, шунинг учун ҳуштакдан тарқалаётган тўлқинни тахминан нуқтавий манбадан тарқалаётган тўлқин, яъни сферик тўлқин деб ҳисоблаш мумкин. Албатта, ер ва паровоз қисмлари борлиги туфайли тўлқиннинг сферик шакли бузилади, бироқ юқорига ва ён томонга (ҳаво тинч бўлганда) тарқалаётган тўлқин шаклини сферанинг бир қисми деб ҳисоблаш мумкин.

Агар манбанинг ўлчамлари тўлқин узунлигига нисбатан катта бўлса, тарқалаётган тўлқиннинг шакли мураккаб бўлади; уни Френель — Гюйгенс принципидан фойдаланиб топиш мумкин. Бу принципга асосан, тўлқин сиртининг ҳар бир кичик қисми *элементар сферик тўлқин* чиқаради ва бундан кейинги пайтда тўлқин сиртининг вазияти элементар тўлқинларнинг интерференцияси натижасида ҳосил бўлган ўрамаси билан мос тушади. Агар тебранаётган жисмнинг сирти ҳамма нуқталари бир хил фаза билан тебранаётган текислик бўлса ва бу текисликнинг ўлчамлари тўлқин узунлигига нисбатан катта бўлса, у ҳолда текисликка ўтказилган перпендикуляр йўналишида ясси тўлқин чиқарилади, текисликнинг четлари яқинида ва улардан бирор масофада бу тўлқин бузилади, унинг бузилишига элементар тўлқинларнинг интерференцияси сабаб бўлади.

145-§. *Товуш тўлқинларининг тўсиқдан қайтиши*

Товуш тўлқинлари турли хил икки муҳитнинг механикавий хоссалари кескин ўзгарадиган чегарасидан қайтади. Масалан, тўлқин ҳаводан сувга (ёки сувдан ҳавога) ўтганда энергиянинг кўп қисми қайтади ва озгина қисми иккинчи муҳитга ўтади.

Ҳавода товуш тўлқинлари қаттиқ жисмлардан ҳам қайтади, масалан, ер сиртидан қайтади, буни ҳамма *акс-садо* ҳодисасидан билади. Товуш тўлқинларининг қайтишида муҳит зичлиги (ρ) нинг ва товуш тезлиги (c) нинг ўзгариши, аниқроғи, ρc катталикнинг ўзгариши муҳим роль ўйнайди. Бир муҳитдан иккинчи муҳитга ўтилганда ρc катталик қанча кўп ўзгарса, бу икки муҳитнинг ёндашиш чегарасидан товуш тўлқинининг энергияси шунча кўп қайтади.



419- расм.

Икки муҳитнинг ясси ёндашиш чегарасига ясси тўлқин нормал равишда (тик) тушган энг содда ҳол учун товуш тўлқинларининг қайтиш қонунларини келтириб чиқарамиз. Ўқи бўйлаб ясси тўлқин тарқалаётган узун труба турли хил моддалар билан тўлдирилган (419-расм), деб фараз қилайлик.

Манба I муҳитда турган бўлиб, ундан силжишларнинг $y_1 = a_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$ югурувчи тўлқини тарқалаётган бўлсин, бу ерда a_1 — амплитуда, x — труба ўқи бўйлаб ҳисобланган координата, ω ва λ_1 — тўлқин частотаси ва узунлиги. Муҳитларнинг ёндашиш чегарасидан орқага

$$y_2 = a_2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda_1} + \varphi_1\right)$$

қайтган тўлқин кетади ва ёндашиш чегарасидан нарида иккинчи муҳитда $y_3 = a_3 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_2} + \varphi_2\right)$ ўтувчи тўлқин кетади. Ёндашиш чегарасида, масалан, $x = 0$ да ҳар бир t пайтда силжишнинг узлуксизлик шарти

$$y_1 + y_2 = y_3 \tag{145.1}$$

ва босимлар тенглиги

$$p_1 + p_2 = p_3 \tag{145.2}$$

бажарилиши керак. Бу формулаларда p_1 — тушаётган тўлқинда босим ўзгариши, p_2 ва p_3 — қайтган ва ўтувчи тўлқинларда босим ўзгаришлари. (145.1) шартга асосан, қуйидаги тенглик ўринли бўлиши керак ($x = 0$ да):

$$a_1 \cos \omega t + a_2 \cos(\omega t + \varphi_1) = a_3 \cos(\omega t + \varphi_2). \tag{145.3}$$

Ясси тўлқиндаги босим $p = -\varkappa p_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ эканлигини эсга олайлик ((139.7) га қ.), бу ерда $\varkappa$ — адиабата кўрсаткичи; бунга силжишлар ифодасини қўйиб,

$$p_1 = -\varkappa_1 p_0 a_1 \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$$

ифодани ва p_2 ва p_3 лар учун ҳам шунга ўхшаш ифодаларни топамиз. Бу ифодаларни (145.2) шартга қўйиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\frac{\varkappa_1}{\lambda_1} \{-a_1 \sin \omega t + a_2 \sin(\omega t + \varphi_1)\} = -\frac{\varkappa_2}{\lambda_2} a_3 \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{145.4}$$

(145.3) ва (145.4) тенгликлар t нинг исталган қийматида қаноатланиши керак; шунинг учун ҳар бир тенгликда $\cos \omega t$ ва $\sin \omega t$ ларни ўз ичига олган ҳадларни ажратиб олиб, улар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштирамиз. Натижада тўртта a_1, a_2, φ_1 ва φ_2 номаълум аниқланадиган тўртта тенгламага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 + a_2 \cos \varphi_1 &= a_3 \cos \varphi_2, \\
-a_1 + a_2 \cos \varphi_1 &= -\frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} a_3 \cos \varphi_2, \\
a_2 \sin \varphi_1 &= a_3 \sin \varphi_2, \\
a_2 \sin \varphi_1 &= -\frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} a_3 \sin \varphi_2.
\end{aligned}\right\} \tag{145.5}$$

Бу тенгламаларни ечамиз. Иккинчи тенгламадан тўртинчи тенгламани айирамиз:

$$a_3 (1 + \Delta) \sin \varphi_2 = 0 \quad \text{бу ерда } \Delta = \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} \neq 0 \quad \text{ва} \quad \Delta > 0.$$

Буни ҳисобга олиб, охирги тенглама φ_2 нинг қиймати фақат $\varphi_2 = k\pi$ бўлгандагина қаноатланишини кўрамиз, бу ерда $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Иккинчи тенгламада $a_3 \neq 0$ эканлигини назарга олиб, ундан $\varphi_1 = m\pi$ эканини топамиз, бу ерда $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Биринчи тенгламадан учинчи тенгламани айириб, $2a_1 = a_3(1 + \Delta)\cos\varphi_2$ эканини топамиз. $a_3 > 0$ ва $\Delta > 0$ бўлгани сабабли, $\cos\varphi_2 = +1$, яъни $\varphi_2 = 0,\ 2\pi,\ \ldots$ Бинобарин, ўтувчи тўлқиннинг амплитудаси

$$a_3 = a_1\,\frac{2}{1+\Delta}. \qquad (145.6$$

Буни биринчи тенгламага қўйиб ва $\cos\varphi_2 = +1$ эканини ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$a_2\cos\varphi_1 = a_1\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}. \qquad (145.7)$$

Юқоридагиларга асосан, $\cos\varphi_1$ нинг қиймати $+1$ ёки -1 бўла олади. Ҳамма катталиклар мусбат эканлигини ҳисобга олиб, (145.7) дан қуйидаги ечимларни топамиз:

$$\Delta < 1 \text{ бўлганда } \cos\varphi_1 = +1,\ \ \varphi_1 = 0;$$

$$\Delta > 1 \text{ бўлганда } \cos\varphi_1 = -1,\ \ \varphi_1 = \pi.$$

Энди ҳисоб натижаларини таҳлил қиламиз. $\varphi_2 = 0,\ 2\pi,\ \ldots$ шарт ўтувчи тўлқин фазаси тушаётган тўлқин фазасига тенг эканлигини, ёндашиш чегарасида ўтувчи тўлқин фазаси ўзгармаслигини билдиради. Охирги тенгликлар қайтган тўлқиннинг фазаси Δ нинг бирдан катта ёки кичик бўлишига қараб, нолга тенг ёки π га тенг бўлишини, яъни қайтган тўлқиннинг фазаси тушаётган тўлқин фазаси билан бир хил ёки унга қарама-қарши бўлишини билдиради. Δ катталик муҳитнинг физикавий хоссаларини акс эттиради.

$c_1 = \sqrt{\dfrac{\varkappa_1 p_0}{\rho_1}}$ ёки $c_1^2\rho_1 = \varkappa_1 p_0$ эканини эсга олиб, Δ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta = \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} = \frac{c_1 \varkappa_2}{c_2 \varkappa_1} = \frac{c_1 \varkappa_2 p_0}{c_2 \varkappa_1 p_0} = \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}. \qquad (145.8)$$

ρc катталик *муҳитнинг акустик тўлқин қаршилиги* деб аталади. Қайтган тўлқиннинг фазаси қайси муҳитнинг тўлқин қаршилиги катта эканлигига боғлиқ. Агар иккинчи муҳитнинг акустик қаршилиги кичик бўлса, у ҳолда тўлқин фазасини йўқотмасдан қайтади; аксинча, агар иккинчи муҳитнинг акустик қаршилиги катта бўлса, қайтган тўлқин тескари фазага эга бўлади.

Қайтган ва ўтувчи тўлқинларнинг амплитудалари муҳитнинг акустик қаршиликлари нисбатига (Δ нинг катталигига) боғлиқ бўлади. Масалан, ҳавода $\rho c \approx 43$ г/(см$^2\cdot$сек), сувда $\rho c \approx 14{,}2\cdot 10^4$ г/(см^2. сек), ҳаводан сувга ўтишда $\Delta = \dfrac{14{,}2}{43}\cdot 10^4 \approx 3300$. Бинобарин, ўтувчи тўлқиннинг a_2 амплитудаси тушаётган тўлқин амплитудасининг тахминан бир ярим мингдан бир улушига тенг: $a_2 = a_1 \frac{2}{1+\Delta} \approx \frac{1}{1650} a_1$. Тўлқин сувдан ҳавога тушганда ўтувчи тўлқин амплитудаси

$$a_3 = a_1 \frac{2}{1 + \frac{1}{3300}} \approx 2a_1.$$

Ҳавода тебранишлар амплитудаси сувда тебранишлар амплитудасидан тахминан икки марта катта.

Агар иккала муҳитнинг акустик қаршилиги тенг бўлса, у ҳолда $\Delta = 1$ ва $a_2 = 0$, $a_1 = a_3$ бўлиб, тўлқин қайтмайди ва бутун энергия иккинчи муҳитга ўтиб кетади.

Энди икки муҳит ёндашган чегара орқали энергиянинг қандай ўтишини кўриб чиқамиз. Тўлқин ёндашиш чегараси орқали ўтганда амплитуданинг ўзгариши бу чегара орқали ўтган энергия оқимининг катталигини бевосита характерлай олмайди.

Ясси тўлқинда энергиянинг ўртача оқими

$$\frac{1}{2} \rho c a^2 \omega^2$$

катталик билан аниқланишини эсга олайлик, бу формулада a — силжиш амплитудаси (139-§ га қ.). У ҳолда (145.6) ва (145.8) ларни ҳисобга олиб, ўтувчи тўлқин энергиясининг ўртача оқимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho_2 c_2 a_2^2 \omega^2 = \frac{\rho_2 c_2 \omega^2 4 a_1^2}{2(1+\Delta)^2} \cdot \frac{\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1} = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} \frac{1}{2} \rho_1 c_1 a_1^2 \omega^2 = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} E_1,$$

бу ерда E_1 — тушаётган тўлқин энергиясининг ўртача оқими Ёндашиш чегарасидан ўтадиган энергия улуши тўлқиннинг тарқалиш йўналишига боғлиқ эмас. Дарҳақиқат,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} = \frac{4\Delta'}{(1+\Delta')^2}.$$

бу ерда $\Delta' = \frac{1}{\Delta}$.

Масалан, тўлқин сув — ҳаво чегарасига нормал равишда тушганда (ва тескари йўналишда тушганда) энергиянинг фақат $\approx \frac{1}{825}$ қисми иккинчи муҳитга ўтади: агар E_2/E_1 нисбат ифодасига $\Delta' \approx \approx \frac{1}{3300}$ қиймат қўйилса, ўтган энергия улушини ҳисоблаб топиш осон.

146-§. Товуш тўлқинларининг тарқалиши

Одатдаги шароитларда товуш тўлқинларининг тарқалишида биз анча мураккаб манзара билан иш кўрамиз. Товуш тўлқинининг узунлиги тўсиқ ўлчамларидан анча катта бўлганда товуш тўлқинлари учраган тўсиқни осонгина айланиб ўтади. Тўлқин узунлиги тўсиқ ўлчамларидан анча кичик бўлганда товуш тўлқинлари учраган тўсиқдан ёруғлик каби қайтади.

Товуш тоғ, девор ва шу каби катта тўсиқлардан қайтганда тўлқиннинг тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенг бўлишини кўриш мумкин.

Тўсиқ ўлчамлари тўлқин узунлиги билан таққосланадиган даражада бўлган ҳолларда товуш тўлқинининг тўсиқлар яқинида тарқалиш қонунлари анча мураккаб бўлиб қолади, бунда тўлқин қисман қайтади ва тўлқин узунлигига нисбатан унча катта бўлмаган тўсиқлар атрофида бўлгани каби, айланиб ўтади (дифракция юз беради). Шуни қайд қилиб ўтамизки, ρc катталик, яъни модданинг акустик қаршилиги катталиги ўзгарадиган ҳар қандай чегара тўлқин қайтадиган тўсиқ бўлади. Масалан, ҳавонинг кўпроқ исиган қатламидан, туман чегарасидан, булут ва шу кабилардан тўлқин қайтиши мумкин.

Турли температурали ҳаво қатламларининг ёндашиш чегараларида товушнинг синиш ва қайтиш ҳодисалари товушнинг атмосферада тарқалиш қонунларини мураккаблаштиради. Масалан, товуш тўлқинларининг 40 — 50 км баландликдаги атмосфера қатламидан қайтиши портлаш товушини ўрганишда аллақачонлар кузатилган, бунинг оқибатида портлаш узоқ-узоқларда эшитилади-ю, бироқ бевосита портлаш тўлқини келмаган яқинроқ жойларда эшитилмайди.

Бу кузатиш натижаларини муҳокама қилишда 40 — 50 км баландликда температура кўтарилади, деган гипотеза ўртага ташланди; кейинги йилларда ўтказилган бевосита ўлчаш ишлари бу гипотезани тасдиқлади.

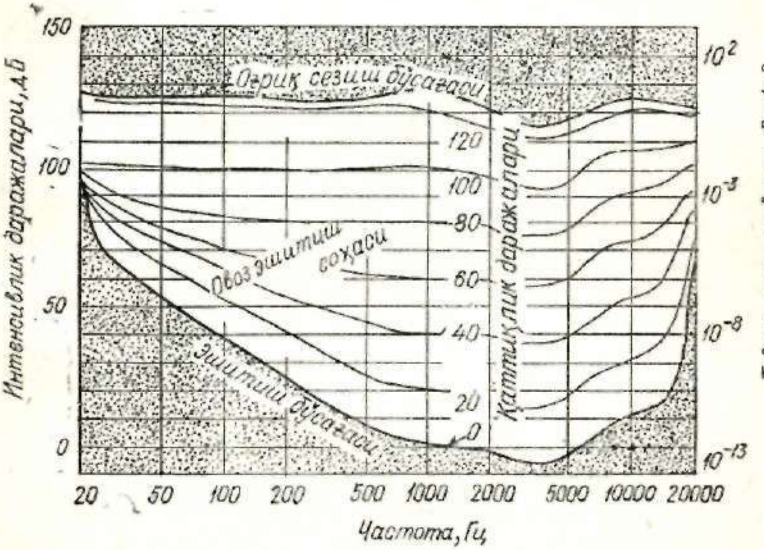
147- §. Эшитиш

Киши қулоғи маълум частота ва интенсивликли ҳаво тебранишларини қабул қилади. Товуш тўлқинининг интенсивлиги вақт бирлиги ичида 1 м² орқали ўтадиган энергия миқдори билан ўлчанади; одатда бу бирлик Вт/м² билан (СИ системасида) ёки эрг/(см²·сек) билан (СГС системасида) ўлчанади.

Интенсивликнинг тайинли бир минимал қийматида киши қулоғи товушни эшитмай қолади; бу минимал интенсивлик *эшитиш бўсағаси* деб аталади, умуман айтганда, бу интенсивлик турли частоталар учун турлича бўлади.

420-расмда эшитиш бўсағасининг эгри чизиғи бутун товуш диапазони учун берилган. Бизнинг қулоғимиз частотаси тахминан 3000 Гц бўлган тўлқинларни яхши сезади: 10^{-12} Вт/м² интенсивлик қулоқ товушни эшитиши учун етарлидир. Частота 50 Гц бўлганда эшитиш бўсағаси 10^{-7} Вт/м² интенсивликка тўғри келади, яъни бундай частотада товушни эшитиш мумкин бўлиши учун тебранишлар интенсивлиги тахминан 100 000 марта катта бўлиши керак.

Тебранишлар интенсивлиги ҳаддан ташқари кўп орттирилганда қулоқ тебранишларни товуш сифатида қабул этмай қўяди, балки оғриқ сезади; салгина оширилганда оғриқ сезиладиган ҳолдаги интенсивлик *оғриқ сезиш бўсағаси* деб аталади. Оғриқ сезиш бўсағаси ҳамма частоталарда тахминан 1 Вт/м^2 интенсивликка тўғри келиши 420- расмдан кўриниб турибди.



420- расм.

Шундай қилиб, қулоқ товуш интенсивлиги ўзгаришининг 1 дан 10^{-12} Вт/м^2 гача бўлган кенг диапазонини қабул қилади; шу туфайли техникада товуш интенсивлигининг ўзгаришини 420- расмнинг ўнг томонида белгиланганидек тўлқин энергиясининг ўзгаришига қараб эмас, балки 420- расмнинг чап томонида кўрсатилгандек *децибел* (дБ) деб аталувчи бошқа бирлик билан ўлчаш маъқул кўрилади.

Агар товушнинг бирор I_0 интенсивлиги бошланғич интенсивлик деб олинса, у ҳолда бирор бошқа I_1 интенсивликка интенсивлик даражасининг $10 \lg \frac{I_1}{I_0}$ дБ миқдорда ўзгариши мос келади. Бошқача айтганда, децибеллар сонининг 10 га нисбати интенсивликлар нисбатининг ўнли логарифмига тенг. Одатда I_0 деб, частота 1000 Гц бўлган ҳолда эшитиш бўсағасидаги товуш интенсивлиги қабул қилинади, у ҳолда оғриқ сезиш бўсағасига тегишли интенсивлик даражаси тахминан 120—130 дБ га тенг катталикка мос келади. Интенсивлик даражалари децибел ҳисобида ўлчанганда частота 50 Гц бўлган ҳолдаги эшитиш бўсағаси тахминан 50 дБ га тўғри келади. Эшитиш бўсағаси частотага қараб ўзгаради; *товуш қаттиқлиги* ҳам шундай ўзгаради. Қаттиқлиги бир хил бўлган товушлар интенсивлигининг эгри чизиқлари турли хил частоталар учун 420-расмда яхлит чизиқлар билан кўрсатилган.

Масалан, 1000 Гц частотада интенсивлик даражаси 20 дБ бўлган товушнинг қаттиқлиги 100 Гц частотада интенсивлиги 50 дБ бўлган товушники билан бир хил бўлади ва ҳоказо. Товуш интенсивлиги даражасини децибел ҳисобида ўлчаш осон, шунинг учун техникада ҳам, физикада ҳам бу бирлик ишлатилади. Бир хил қаттиқлик эгри чизиқлари децибел ҳисобидаги интенсивликнинг турли қийматларига мос келади; шунинг учун қаттиқлик даражасининг *фон* деб аталган янги бирлиги киритилган. Бирор товушнинг қаттиқлиги N фонга тенг бўлиши бу товушнинг қаттиқлиги эшитиш бўсағасида интенсивлиги N дБ бўлган 1000 Гц частотали товуш қаттиқлиги билан бир хил эканлигини билдиради. Қаттиқлик бир хил бўлганда паст частотали (1000 Гц дан кичик) товушлар интенсивлиги юқорироқ частотали (1000—3000 Гц) товушларникидан каттароқ бўлади. Турли хил товушларнинг қаттиқлик даражаси тахминан қуйидагича бўлади: тез кетаётган метро вагонидаги шовқин — 90—95 фон, 0,5 м масофадан туриб қаттиқ гаплашиш — тахминан 30 фон, шивирлаб гаплашиш — 10 фонга яқин.

148-§. Ультратовуш тебранишлари

Частоталари 20 000 Гц дан юқори бўлган, яъни қулоқнинг сезгирлик чегарасидан ташқарида бўлган акустик тебранишлар (аниқроғи, муҳит ёки жисмларнинг механикавий тебранишлари) *ультратовуш* деб аталади. Бунчалик юқори частотали механикавий тебранишлар одатда пъезоэффект ёки магнитострикция ҳодисалари воситасида юзага келади.

Кристалларнинг электр майдони таъсирида деформацияланиш ва, аксинча, деформацияланганда маълум тарзда электрланиш хоссаси *пьезоэффект* деб аталади. *Магнитострикция* эса магнит майдон таъсирида юз берадиган шунга ўхшаш ҳодисадир.

Юқори частотали электромагнитик генератордан берилаётган ўзгарувчан электр ёки магнит майдон таъсири остида юқори частотали механикавий тебранишлар қилаётган пластинка ультратовуш тўлқинларининг манбаи бўла олади. Ультратовуш манбаидан тарқалаётган тўлқинлар манзарасини текширишда бу тўлқинларнинг қисқа эканлигини эътиборга олиш лозим. Масалан, частота 350 кГц бўлганда ҳавода ультратовуш тўлқинининг узунлиги 1 мм чамасида, частота 3 МГц бўлганда эса тўлқин узунлиги 0,1 мм чамасида бўлади. Бинобарин, агар ультратовуш манбаи бўлиб турган ясси пластинканинг ўлчамлари тўлқин узунлигига нисбатан катта бўлса, у ҳолда пластинкадан ясси тўлқин тарқалади; бу тўлқин прожектордан ёруғлик тарқалгани каби, пластинка юзидан тарқалаётган параллел нурлар дастасига ўхшайди. Шунинг учун бундай ультратовуш нурлари сувда масофа ўлчашда қўлланилади.

Кемадаги ультратовуш манбаидан маълум бир пайтда сувга тайинли йўналишда ультратовуш тўлқинлари импульси юборилади. Бу импульс ўз йўлида тўсиққа учраб, тўсиқдан қайтади ва бирор вақт ўтгач бу қайтган тўлқинлар кеманинг ўзидаги приёмникка келиб тушади. Махсус асбоблар импульс юборилган пайт билан қайтган сигнал келган пайт орасидаги вақтни ўлчайди ва шунга *қараб, тўлқинларни қайтарган тўсиққача бўлган масофа аниқланади.*

Сувда масофани ультратовуш импульслари воситасида аниқлашнинг бундай принципи денгиз чуқурлигини ўлчайдиган *эхолот* тузилишига, шунингдек, сув ости кемаси, айсберг ва шу каби объектларгача бўлган масофаларни ўлчайдиган турли хил гидролокацион қурилмалар тузилишига асос қилиб олинган. Кейинги йилларда ультратовуш тебранишлари техника, медицина ва бошқа соҳаларда хилма-хил мақсадларда қўлланилмоқда.

XVII БОБ

МАХСУС НИСБИЙЛИК НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСЛАРИ

149- §. Галилейнинг нисбийлик принципи

Агар бир-бирига нисбатан илгариланма текис ҳаракат қилаётган саноқ системаларининг бирида (исталган бирида) Ньютон динамикасининг қонунлари ўринли бўлса, барча бундай саноқ системалари *инерциал* саноқ системалари деб аталади. У ҳолда барча инерциал системаларда классик динамика қонунларининг шакли бир хил бўлади. Бу — *Галилей нисбийлик принципининг* асосий қоидасидир. Инерциал системалар *Галилей системалари* деб ҳам аталади; бу системаларнинг ҳаммаси динамика нуқтаи назаридан тенг ҳуқуқли бўлиб, бироқ ҳар хил инерциал системаларга нисбатан бўладиган ҳаракат кинематикаси, равшанки, ҳар хилдир.

Агар B инерциал саноқ системасининг A саноқ системасига нисбатан ҳаракат тезлиги маълум бўлса, нуқтанинг A системадаги ҳаракат қонунини билган ҳолда унинг B системадаги ҳаракат қонунини топиш осон.

B система A системага нисбатан ўзгармас $\boldsymbol{v}$ тезлик билан илгариланма ҳаракат қиляпти, деб фараз қилайлик. У ҳолда ихтиёрий бир нуқтанинг A системада $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ орқали белгиланган координаталари билан B системага нисбатан олинган координаталари орасидаги муносабат (421-расм)

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \qquad (149.1)$$

421- расм.

кўринишда, тезликлари орасидаги муносабат

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \ \boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \text{ ва } \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}.$$

Агар $t = 0$ пайтда $\boldsymbol{r}_0 = 0$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}t$ бўлади; натижада координаталар орасидаги муносабат

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \qquad (149.2)$$

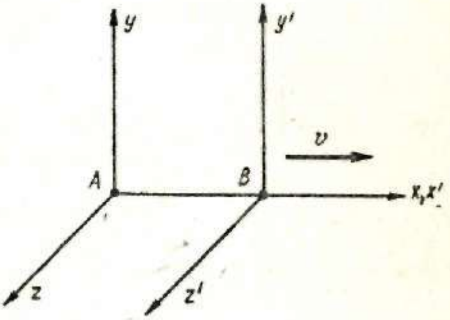
кўринишга келади. Равшанки, иккала системада тезланишлар бир хил:

$$\frac{du'}{dt}=\frac{du}{dt}.$$

Бундан кейин қилинадиган ҳисоб ишларини соддалаштириш мақсадида бундай фараз қиламиз. B система A системага нисбатан v тезлик билан шундай ҳаракат қиладики, бунда x ва x' ўқлар бир тўғри чизиқда (422- расм) бир томонга қараб йўналган бўлади, бундан ташқари, $t=0$ пайтда иккала системанинг координаталар боши устма-уст тушади. У ҳолда t пайтда бирор нуқтанинг A системадаги координаталари x, y, z бўлса, унинг B системадаги координаталарини

$$\left.\begin{aligned} x'&=x-vt,\\ y'&=y,\\ z'&=z \end{aligned}\right\}\qquad(149.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгликларни келтириб чиқаришда ҳамма саноқ системаларида вақт ўтиши *абсолют* ва *ўзгармас* деб ҳисобланади. Бу интуитив қоида классик механикада исботсиз қабул қилинади. Бу қоида «табиий», «ўз-ўзидан равшан» ва асослашни талаб этмайдиган қоида деб ҳисобланади. Бу қоида механика ва техникада ўтказиладиган барча тажрибаларга зид келмайди; маълумки, бу тажрибаларда c ёруғлик тезлигидан (яъни $c=3\cdot10^8$ м/сек дан) анча кичик тезликда ҳаракат қилувчи жисмлар билан иш кўрилади.



422- расм.

Агар B системадаги вақтни ҳозирча расман t' билан белгиласак, Ньютон механикасида ҳамиша

$$t'=t\qquad(149.4)$$

бўлади. (149.1) ва (149.2) формулалар *Галилей алмаштиришлари* деб аталади; бу формулалар A системада юз берган бирор воқеанинг «координаталари» билан ўша воқеанинг B системадаги координаталари орасидаги муносабатни аниқлайди. Масалан, моддий нуқта A системага нисбатан ҳаракат қила туриб, t пайтда (x, y, z) нуқтада бўлади, деб фараз қилайлик. Бу фактни A системадаги «координаталари» x, y, z, t бўлган «воқеа» деб қараш мумкин; айни ўша «воқеа» B системада x', y', z', t' «координаталарга» эга бўлади.

Биз механикани эндигина ўргана бошлагандан таниш бўлган тезликларни қўшиш қонуни Галилей алмаштиришларидан келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - v, \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy}{dt}, \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (149.5)$$

Жисмнинг A системага нисбатан x ўқ бўйлаб қиладиган ҳаракат тезлиги ўша жисмнинг B системадаги тезлигининг x ўқдаги проекцияси билан B системанинг ўзининг v га тенг бўлган тезлиги йиғиндисига тенг.

Кўрсатиб ўтилган муносабатларнинг ҳаммаси содда бўлиб, улар классик механикадан маълум. Махсус нисбийлик назариясининг асосий қоидалари шуларга ўхшаган математикавий ифодалар билан таърифлангани сабабли, биз бу муносабатлар устида тўхталдик.

Координаталар алмаштиришда улар ўртасида ҳамиша шундай муносабатларни кўрсатиш мумкинки, улар бу алмаштиришда ўзгармай қолади (инвариант бўлади); бундай муносабатлар *инвариантлар* дейилади. Масалан, Галилей алмаштиришларида икки нуқта орасидаги масофа инвариантдир.

Механикавий катталиклар устида ҳам худди шу гапларни айтиш мумкин: Галилей алмаштиришларида бу катталикларнинг баъзилари ўзгаради, улар *вариант* катталиклардир; бошқалари ўзгармай қолади, улар *инвариантлардир*. Масалан, координаталар, тезлик, импульс, кинетик энергия ва ҳоказолар вариант катталиклар.

Бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтилганда асосий механикавий катталиклар қандай ўзгаришини ва бу ўзгаришлар динамика қонунларига ва зарралар (ёки жисмлар) системасининг ҳаракат миқдори ва энергияси сақланиш қонунларига қандай боғланган эканлигини кўриб чиқамиз.

Агар жисмлар (зарралар) системасининг ҳаракати A инерциал саноқ системасига нисбатан қаралаётган бўлса, у ҳолда иккинчи B инерциал системага ўтилганда зарралар (жисмлар) системасининг ҳаракат миқдори (импульси) ҳам, кинетик энергияси ҳам ўзгаради. i-зарранинг B системадаги тезлигини $\mathbf{u}'_i$ билан, A системадаги тезлигини $\mathbf{u}_i$ билан белгилаймиз; у ҳолда (149.1) га асосан,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}'_i + \mathbf{v}. \qquad (149.6)$$

Зарралар системасининг A системага нисбатан ҳаракат миқдорини бундай ёзиш мумкин:

$$K = \sum m_i \mathbf{u}_i = \sum m_i \mathbf{u}'_i + \sum m_i \mathbf{v} = K' + m,\mathbf{v} \qquad (149.7)$$

бу ерда $K' = \sum m_i \mathbf{u}_i'$ — зарралар системасининг B системага нисбатан ҳаракат миқдори, $m = \sum m_i$ — зарралар системасининг массаси. Бу тенглик ҳамма шароитда тўғри. (149.7) тенгликдан, агар A системада ҳаракат миқдори вақт ўтиши билан ўзгармаса, у B системада ҳам ўзгармай қолади, деган хулоса келиб чиқади, чунки m ва $\mathbf{v}$ ўзгармайди. Ҳар қандай инерциал системада ҳам худди шундай бўлади. *Инерция қонуни ҳамма инерциал саноқ системаларида ўринлидир.*

Зарралар системасининг A саноқ системасидаги кинетик энергияси:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i u_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i (\mathbf{u}_i' + \mathbf{v})^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\sum m_i u_i'^2 + \sum m_i \mathbf{u}_i'\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \sum m_i =$$
$$= T' + K'v + \frac{1}{2} mv^2, \qquad (149.8)$$

бу ерда T' — B системадаги кинетик энергия. (149.8) тенглик бир инерциал системадан бошқасига ўтилганда кинетик энергиянинг қандай ўзгаришини кўрсатади, бу тенглик ҳамма шароитда ўринли.

Агар зарралар (жисмлар) системаси яккаланган (ёпиқ) бўлса, K' ҳаракат миқдори вақт ўтиши билан ўзгармайди. Агар бунда зарралар ўртасида фақат эластик ўзаро таъсир (масалан, эластик зарб) бўлса, у ҳолда T' ўзгармай қолади, бинобарин, T ҳам (бошқа A инерциал саноқ системасига нисбатан кинетик энергия) ўзгармай қолади. *Агар кинетик энергиянинг сақланиш қонуни бир инерциал саноқ системасида ўринли бўлса, у ҳамма инерциал системаларда ўринли бўлади.*

Зарраларнинг *яккаланган* системасининг ҳаракат миқдори эластик бўлмаган ўзаро таъсирда ҳам, эластик бўлмаган зарбларда ҳам ҳамма вақт *ўзгармай* қолади, бу ҳолда кинетик энергия эса камаяди. (149.8) дан зарраларнинг ёпиқ системаси учун T ва T' лар ҳамма инерциал саноқ системаларида вақт ўтиши билан бир хил миқдорда камаяди деган хулоса чиқади. Бу камайиш — инвариантдир.

Зарралар системаси яккаланган бўлмаган ҳолда ҳам K' доимий қоладиган ҳол бўлиши мумкин эканлигини қайд қилиш зарур. Барча ташқи кучларнинг (яъни системага қарашли бўлмаган жисмлар томонидан таъсир этувчи кучларнинг) натижаловчиси (геометрик йиғиндиси) нолга тенг бўлган вақтда ҳозиргина айтилган ҳол юз беради. Унда кинетик энергия вақт ўтиши билан ўзгариши мумкин, шу билан бирга, (149.8) га асосан, бундай ўзгариш ҳамма инерциал саноқ системаларида бир хил бўлади. Энергиянинг бу ўзгариши — инвариантдир.

Зарралар ўртасида улар орасидаги масофагагина боғлиқ бўлиб, шу зарраларни туташтирувчи тўғри чизиқ бўйича йўналган (36-§

га қ.) кучлар таъсир этиши мумкин. Унда зарраларнинг ҳар бир конфигурацияси маълум U потенциал энергияга эга бўлади. Бошқа инерциал саноқ системасига ўтилганда зарраларнинг алоҳида жуфтлари орасидаги ўзаро масофалар ўзгармайди. Шунинг учун U потенциал энергия ўзгармайди ва (149.8) тенгликка U ҳадни қўшиш мумкин, яъни

$$T + U = T' + U + \mathbf{K}'\mathbf{v} + \frac{1}{2} mv^2. \qquad (149.9)$$

Агар яккаланган системанинг зарралари ўртасида шундай ўзаро таъсирлар юз берсаки, бунда кинетик ва потенциал энергиялар йиғиндиси вақт ўтиши билан ўзгармаса, у ҳолда бу йиғинди ҳамма инерциал саноқ системаларида *ўзгармай* қолаверади. *Энергиянинг сақланиш қонуни ҳамма саноқ системаларида ўринли.*

Кучлар жисмларнинг бир-бирига нисбатан тутган вазиятига ёки уларнинг нисбий тезликларига боғлиқ, буларнинг иккови ҳам инвариант. Шунинг учун *куч* ҳам *инвариантдир.*

Бинобарин, бир инерциал системадан бошқасига ўтилганда кинетик энергия ва импульс ўзгаради, шунинг учун улар вариант катталиклар, бироқ потенциал энергия, масса, куч — инвариантлардир. Юқорида айтиб ўтилган ҳолларда энергиянинг вақт ўтиши билан ўзгаришлари ҳам инвариант катталиклар бўлади.

Равшанки, *динамиканинг учала қонуни ҳамма инерциал саноқ системаларида ўринли.*

150-§. Ёруғлик тезлигининг доимий эканлиги

Ёруғликнинг табиати ва тарқалиш қонунларини ўрганиш ўтган аср физикасининг бош муаммоларидан бири бўлган эди. Ньютон замонасидаёқ даниялик олим Олаф Рёмер Юпитер йўлдошларининг тутилишини кузатиб, ёруғлик тезлиги катталигини биринчи бўлиб тахминан аниқлаган эди. Тўлқин назарияга асосан, ёруғлик муҳитда товуш тўлқинларига ўхшаб тарқаладиган тўлқинлардан иборат. Ёруғлик қандай муҳитда тарқалади ва у қандай саноқ системасига нисбатан тарқалади? Бу савол XIX асрнинг иккинчи ярмида ўртага ташланди.

«Ёруғлик элтувчи» муҳит Қуёшга боғланган, деб фараз қилайлик; ўша вақтда бу муҳит «эфир» деб аталган. Унда ёруғликнинг Ердаги тезлиги Ернинг Қуёшга боғланган координаталар системасига нисбатан қиладиган ҳаракат тезлигига боғлиқ бўлиши керак. Агар ёруғликнинг муҳитга нисбатан тезлиги c га тенг бўлса, у ҳолда тезликларни қўшиш қонунига асосан, ёруғликнинг Ер ҳаракати йўналишидаги тезлиги $c - v$ га, тескари йўналишдаги тезлиги $c + v$ га тенг бўлиши керак.

Гарчи Ернинг ҳаракат тезлиги ($v = 30$ км/сек) одатдаги механикада бўладиган тезликларга нисбатан жуда катта бўлса-да, у ёруғликнинг $c = 3 \cdot 10^5$ км/сек тезлигига қараганда жуда кичикдир. Шунинг учун Ер ҳаракатининг ёруғлик тезлигига кўрсатадиган таъсирини кузатиш ва ўлчаш иши катта қийинчиликларга дуч келди. Ёруғлик ва Ернинг тезликларини қўшиш қонунини текширишга мўлжалланган жуда аниқ махсус тажрибалар ўйлаб топилди ва қилиб кўрилди. Биринчи бўлиб бундай тажрибаларни 1887 йилда Майкельсон ва Морли ўтказди; кейинчалик бориб шунга ўхшаш тажрибаларнинг натижалари кўп марта текширилди ва аниқлаштирилди[1]. Бу тажрибаларнинг ҳеч бирида Ер ҳаракати тезлигининг ёруғлик тезлиги катталигига *таъсири борлигини пайқаб бўлмади.* Ёруғлик тезлиги *фақат* Ерга нисбатан доимий бўлади, деган фараз астрономик ва бошқа кузатиш натижаларига зид келади.

Тажриба ва кузатишларнинг ҳамма натижаларини узоқ ва синчиклаб муҳокама қилиш оқибатида олимлар XX аср бошида бундай хулосага келдилар: *ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги доимий бўлиб, ёруғлик манбаининг ва ёруғликни қабул этувчининг ҳаракатига боғлиқ эмас.*

Бу факт Галилейнинг нисбийлик принципига, тезликларни қўшиш қонунига мутлақо зиддир.

Бу зиддиятни бартараф қилиш йўлини 1905 йилда А. Эйнштейн бутунлай бошқа йўналишда кўрсатиб берди. «Абсолют саноқ системасига» нисбатан бўладиган текис ҳаракатни экспериментда пайқашга қаратилган қуруқ уринишлар бундай системанинг йўқ эканлигини, барча инерциал системалар механикадагина эмас, балки табиатнинг ҳамма ҳодисалари учун тенг ҳуқуқли эканлигини кўрсатди. Шу муносабат билан фазо ва вақт каби асосий тушунчаларни қуйидаги икки постулат тўғри деган фаразга асосланиб қайта кўриб чиқиш зарур:

1. Барча инерциал системалар тенг ҳуқуқлидир.

2. Ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги манбанинг ҳаракатига боғлиқ эмас.

Бу постулатлар тажрибадан топилган фактлар ва ёруғлик тарқалишининг тадқиқотлари натижаси сифатида қабул қилинади. Биринчи постулат табиатнинг ҳамма ҳодисалари учун «махсус нисбийлик назарияси» ўринли, яъни физикавий ҳодисаларнинг асосий қонунлари инерциал саноқ системаларининг ҳаммасида ўзгармасдир, деб даъво қилади. Иккинчи ва биринчи постулатлардан ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги ҳамма инерциал саноқ системаларида исталган йўналишда бир хил эканлиги келиб чиқади.

151-§. Воқеаларнинг бир вақтда юз беришлиги

Эйнштейн постулатларининг натижаларини анализ қилишдан олдин турли жойларда юз бераётган икки воқеанинг бир вақтда юз

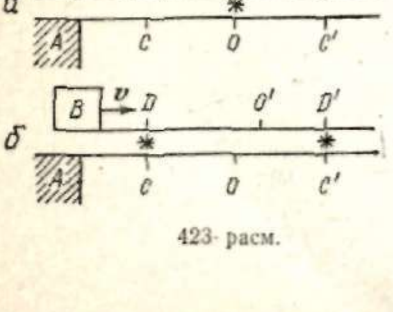
---

[1] Бу тажрибалар тўғрисида оптика бўлимида батафсилроқ гапирилади.

беришини аниқлашни батафсилроқ кўриб чиқиш зарур. Воқеалар деярли бир жойда (бир-бирига яқин, «бир нуқтада») юз берганда уларнинг бир вақтда юз беришини қайд қилиш осон, бунинг учун уларнинг суратини фотоплёнкага тушириш ёки бошқа бирор усул билан қайд қилиш керак. Турли жойларда юз бераётган воқеаларнинг бир вақтда бўлаётганлигини бир жойдан иккинчи жойга маълумот узатувчи бирор сигнал воситасидагина аниқлаш мумкин.

Ёруғлик тезлиги етарлича катта ва *доимий* бўлгани учун Эйнштейн бу мақсадда ёруғлик сигналларидан фойдаланишни таклиф этди. Табиатда бундан тез тарқаладиган бошқа сигналлар йўқ, ақалли улар тўғрисида ҳеч қандай маълумот ҳам йўқ. Агар ёруғлик тезлиги чексиз бўлганда эди, турли жойлардаги воқеаларнинг бир вақтда юз беришини аниқлаш, принцип жиҳатидан олганда, бир жойдаги воқеаларнинг бир вақтда юз беришини аниқлашдек бўлар эди. Норелятивистик физикада бундай қилиб аниқлаш мумкин ва шунинг учун норелятивистик физикада вақт оралиқлари абсолют деб ҳисобланган; тажрибага хилоф натижалар чиқмаган, чунки ёруғлик тезлиги норелятивистик физикадаги тезликларга нисбатан жуда каттадир. Ёруғлик тезлиги ниҳоятда катта бўлгани билан *чеклидир*, шунинг учун жисмлар тезлиги катта бўлганда воқеаларнинг бир вақтда юз беришини аниқлашга ёруғлик тезлигининг чекли ва доимий бўлиши кўп таъсир кўрсатади.

Иккита бир хил A ва B саноқ системасини тасаввур этайлик, булар бир-бирига нисбатан v тезлик билан ҳаракат қилаётган бўлсин (423-*а* расм). Системалар бир-бирига жуда яқин жойлашган иккита параллел чизиқдан иборат бўлиб, улар ўша чизиқлар бўйлаб ҳаракат қилади; B система A системага нисбатан ўнг томонга ҳаракат қилади. A системанинг O нуқтасида ёруғлик чақнаган бўлсин, деб фараз этайлик, бу чақнаш айни вақтда B системанинг қаршида ётган O' нуқтасида қайд қилинди. Агар C ва C' нуқталар O нуқтадан бир хил масофада турган бўлса, у ҳолда ёруғлик сигналлари бирор вақтдан сўнг C ва C' нуқталарга баравар етиб боради, чунки ёруғлик тезлиги иккала йўналишда бир хил. A системада воқеа (ёруғлик чақнаши) шундай қайд қилинади (423-*б* расм). Бироқ A да бир вақтда (баравар) юз берадиган бу воқеалар ҳаракатланаётган B системада турли пайтда қайд қилинади, чунки ёруғлик тезлиги B системага нисбатан ҳам ўша қийматга эга.



423- расм.

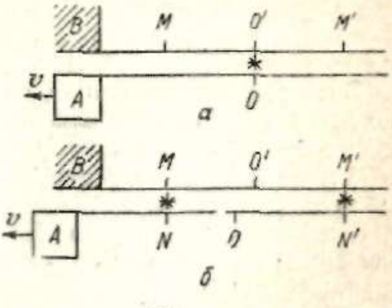
Дарҳақиқат, ёруғликнинг O нуқтадан C гача (ёки C' гача) тарқалишида ўтган Δt вақт ичида B система ўнг томонга бирор масофага сурилади, O' нуқта ҳам худди шундай масофага сурилади, шунинг учун C ва C' даги чақнашлар B системанинг O' нуқтадан ҳар хил масофада жойлашган D ва D' нуқталарида қайд қилинади. Ёруғлик тезлигининг доимийлигини эътиборга олиб, B системага нисбатан D' да воқеа D дагидан *олдин* юз берди, деган хулосага келиш керак. Бошқача айтганда, воқеаларнинг *бир вақтда юз беришлиги нисбийдир*, бинобарин, икки воқеа орасида ўтган вақт саноқ системасига боғлиқ.

Бир системадан бошқасига ўтилганда вақт ўзгаришини ҳисобга олиш керак, *абсолют вақт йўқ*. B системанинг D нуқтасида воқеаларнинг D' нуқтадаги воқеага нисбатан кечикиши CC' масофага, воқеаларнинг A системадаги координаталари айирмасига боғлиқ эканлигини пайқаш қийин эмас. Шунинг учун A системада бўлаётган ҳодисаларни B система томонидан тавсифлашда вақт ўзгаришини ва унинг координатага боғлиқ эканлигини ҳисобга олиш керак.

Ҳамма мулоҳазаларнинг қайтувчан, яъни тескари тартибда ҳам олиб борилиши мумкин эканлигини қайд қилиш муҳимдир: B системада бир вақтда (баравар) қайд қилинган воқеалар A системада бир нақтда қайд қилинмайди. B системада O' дан баравар масофада турган M ва M' нуқталар танлаб оламиз (424-расм); у ҳолда M ва M' нуқталарга ёруғлик сигналлари келиши A системанинг O нуқтадан турли масофаларда жойлашган N ва N' нуқталарида қайд қилинади, бундан ҳам олдингига ўхшаш хулоса чиқади. Турли системаларнинг яқин (ёки устма-уст тушадиган) O ва O', M ва N, M' ва N' нуқталаридаги воқеаларнинг бир вақтда юз беришини аниқлашда бу нуқталар орасидаги масофалар B да бир хил ($MO' = O'M'$), бироқ A да турлича ($NO<ON'$) эканлигини эътиборга олиш зарур.

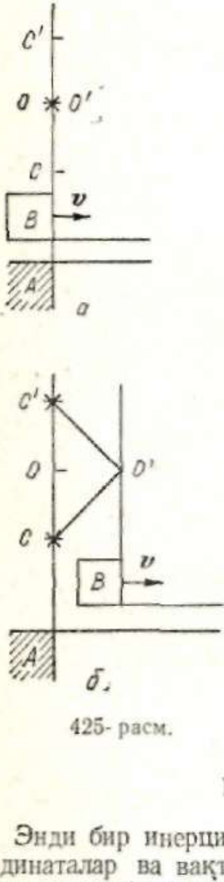
$v \ll c$ бўлганда O ва O' нуқталар Δt вақт ичида жойидан деярли қимирламаслигига ишонч ҳосил қилиш мумкин, у ҳолда A да бир вақтда қайд қилинган воқеалар B да ҳам бир вақтда қайд қилинади. Бу ҳол вақт абсолют (яъни ҳаракатланувчи ҳамма саноқ системаларида вақт бир хил) деган фаразга, вақтнинг ньютонча тушунчасига мос келади. Фақат эндигина вақтнинг доимийлиги умумийроқ қонуннинг ҳаққоний тақрибий натижаси ҳисобланади.

Вақтнинг ўзгаришини яққол тасаввур этиш учун кўпинча қуйидаги усулдан фойдаланилади. Ҳар бир саноқ системасида вақтни қайд қиладиган бир хил соатлар бир-бирига етарлича яқин қилиб қўйилган, деб фараз қилайлик. Ҳар бир системадаги соатлар ёруғлик сигналлари воситасида синхрон равишда юрадиган қилинган. Соатлар қуйидаги йўл билан синхронлаштирилади. Икки соат орасидаги масофа тенг



424-расм.

иккига бўлинади ва бўлиниш нуқтасида ёруғлик чақнатилади. Агар ёруғлик келганда соатлар бир хил вақтни кўрсатиб турган бўлса, *улар синхрон равишда юриб турган бўлади.* Равшанки, агар *a* соат *b* соат билан синхрон равишда юриб турган ва *b* соат *c* соат билан синхрон равишда юриб турган бўлса, у ҳолда *a* соат *c* соат билан синхрон равишда юради ва ҳоказо. Ҳар бир системада ҳамма соатларни шундай қилиб синхронлаш мумкин. Масофа ҳар бир системада ҳамиша айни бир эталон билан ўлчанади, деб ҳисоблаймиз.



425- расм.

Воқеаларнинг бир вақтда юз беришининг нисбий эканлиги тўғрисидаги хулосани энди бундай таърифлаш мумкин. *A* системада синхрон равишда юриб турган соатлар *B* система томондан кузатилганда синхрон равишда юрмайди ва аксинча. Агар вақт *B* системанинг турли жойларида турган соатларга қараб қайд қилинса, у ҳолда *A* системадаги соатлар турлича вақт кўрсатади. Буларнинг ҳаммаси бир системадан бошқа системага ўтиш қонуни асосида батафсил тушунтириб ўтилади.

Шуни қайд қиламизки, агар соатлар системаларнинг **v** тезлигига перпендикуляр қилиб ўтказилган чизиқда турган бўлса, у ҳолда *A* системада синхрон бўлган соатлар *B* га нисбатан ҳам синхрон равишда юради. Дарҳақиқат, *O* дан чиққан ёруғлик сигналлари *C* ва *C'* нуқталарга (425- расм) етгунча ўтган Δt вақт ичида *B* система $v\Delta t$ масофага сурилади, бироқ *O'* нуқтадан *C* ва *C'* нуқталаргача бўлган масофалар тенг, шунинг учун бу воқеалар *B* системада бир вақтда қайд қилинади. Бир системадан бошқа (ҳаракатланувчи) системага ўтишда вақтнинг ўзгариши **v** тезлик бўйлаб йўналган координатагагина боғлиқ.

152- §. Лоренц алмаштириши

Энди бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтилганда координаталар ва вақтни алмаштириш тўғрисидаги асосий масалани олдимизга қўйишимиз ва ечишимиз мумкин. Олдин айтиб ўтилганидек, *A* ва *B* системалар бир хил, иккаласида узунлик ва вақт масштаблари (эталонлари) айни бир хил, деб фараз қиламиз. *B* система *A* системага нисбатан устма-уст тушган *x* ва *x'* ўқлар бўйлаб *v* тезлик билан шундай ҳаракат қиладики, бунда $t = t' = 0$ пайтда координата ўқларининг боши бир нуқтада бўлади.

$t = t' = 0$ пайтда координаталар бошида ёруғлик чақнади, деб фараз этамиз. Унда бирор t вақт ўтгач ёруғлик A системада ct радиусли сферада ётган нуқталарга етиб боради, худди шунга ўхшаш, B системада ҳам t' вақтда ёруғлик ct' масофа босиб ўтади. Бошқача айтганда, A системада «ёруғлик» сферасининг нуқталари

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (152.1)$$

тенгламани, B системада эса

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \qquad (152.2)$$

тенгламани қаноатлантиради. Булар Эйнштейн постулатларидан келиб чиқади.

Фазо ва вақт бир жинсли деб ҳисоблаб, турли системаларнинг координаталари билан улардаги вақт ўртасида чизиқли боғланиш бор, деб фараз қиламиз. У ҳолда x ва x' координаталар бир-бирига қуйидагича боғланади:

$$x' = \gamma(x - vt). \qquad (152.3)$$

Бу боғланиш қуйидагидан келиб чиқади: $x' = 0$ нуқта (B системанинг саноқ боши) A системага нисбатан v тезлик билан ҳаракат қилади ва $t = 0$ пайтда $x = 0$ ва $x' = 0$ нуқталар устма-уст тушади. γ катталик ҳозирча номаълум коэффициент бўлиб, у $v \ll c$ бўлганда Галилей алмаштиришидаги каби бирга айланиши керак; γ коэффициент v га ва c га боғлиқ бўлса керак.

Системалар x ўқ бўйлаб ҳаракат қилганда y ва y', z ва z' координаталар ўзгармаслиги, яъни Галилей алмаштиришидаги каби

$$y' = y, \ z = z' \qquad (152.4)$$

бўлиши керак.

B системадаги t' вақт A системадаги t вақтга ва x координатага чизиқли боғлиқ бўлади; шунинг учун

$$t' = at + bx \qquad (152.5)$$

деб оламиз, бу ерда a ва b—номаълум доимийлар бўлиб, $v \ll c$ бўлганда $a \to 1$, $b \to 0$ бўлиши керак.

(152.3), (152.4) ва (152.5) ни (152.2) га қўямиз:

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(at + bx)^2. \qquad (152.6)$$

γ, a ва b коэффициентларнинг қийматларини шундай танлаш лозимки, бунда (152.6) тенглама (152.1) тенгламага эквивалент бўлиши керак. Равшанки, бунинг учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлиши керак:

$$\gamma^2 - c^2b^2 = 1, \ \gamma^2v + c^2ab = 0, \ c^2a^2 - \gamma^2v^2 = c^2.$$

Иккинчи тенгламадан топиладиган b ни биринчи тенгламага қўйиб ва учинчи тенгламани эътиборга олиб,

$$a^2 = \gamma^2$$

эканлигини топамиз. Унда учинчи тенгламадан

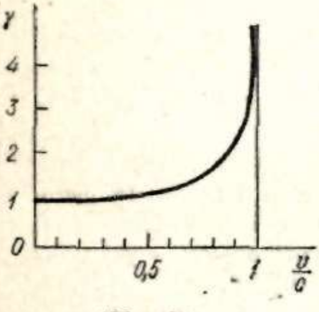
$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

эканлигини топамиз. Сўнгра иккинчи тенгламадан

$$b = -\gamma \frac{v}{c^2}$$

эканини топамиз. Физикавий маъносига кўра, γ билан *a* нолдан катта, шунинг учун (426- расм)

$$\gamma = a = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (152.7)$$



426- расм.

Шу йўл билан биз *A* система координаталарини *B* система координаталарига алмаштиришнинг Эйнштейн постулатларига бўйсунадиган формулаларини топамиз:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),$$

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad (152.8)$$

$$y' = y, \ z' = z,$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Булар ҳозир машҳур бўлиб қолган *Лоренц алмаштиришларидир*, уларни Лоренц электромагнитик ҳодисалар назариясида топган. Бироқ Эйнштейннинг фикрича, бу алмаштириш универсал характерга эга, чунки у фақат фазо ва вақтга тегишлидир. $v \ll c$ бўлганда Лоренц алмаштириши Галилей алмаштиришига айланади.

(152.8) тенгликларни *A* системанинг координаталарига нисбатан ечиб, аввалгига тескари алмаштириш (*B* дан *A* га ўтиш) формулаларини топиш мумкин; улар бундай бўлади:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right),$$

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad (152.9)$$

$$y = y', \ z = z'.$$

Тескари алмаштириш (152.8) дан *v* тезликнинг ишораси билангина фарқ қилади; шундай бўлиши ҳам керак, чунки *A* система *B* га нисбатан *x'* нинг манфий қийматлари томонга ҳаракат қилади.

γ коэффициентнинг кўриниши *v* тезлик *c* дан кичик эканлигини билдиришини қайд қилиб ўтамиз. Саноқ системалари ҳамиша моддий жисмларга боғланган бўлади, бинобарин, жисмларнинг нисбий тезлиги ёруғлик тезлигидан ортиқ бўлолмайди. Ёруғлик тезлиги — ҳаракатнинг энг катта тезлигидир. Бу хулоса нисбийлик назариясининг асосий хулосаларидан биридир.

153- §. Лоренц алмаштиришларининг натижалари

Лоренц алмаштиришларини анализ қилиш координаталар билан вақт ўртасидаги боғланишдан келиб чиқадиган қатор муҳим хулосалар чиқаришга имкон беради.

Олдин бу алмаштиришларни орттирмалар орқали ёзамиз:

$$1)\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x\right), \qquad 2)\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\,\Delta x'\right), \qquad (153.1)$$

$$3)\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\,\Delta t), \qquad 4)\ \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\,\Delta t'),$$

$$5)\ \Delta y' = \Delta y, \qquad 6)\ \Delta z' = \Delta z.$$

(152.8) ва (152.9) даги ҳамма муносабатлар чизиқли муносабатлар бўлгани сабабли, улар орттирмалар учун ҳам тўғри бўлади.

1. **Бир вақтда юз беришликнинг нисбийлиги.** Олдинлари бир вақтда юз беришликнинг нисбийлигига сифатга асосланган мулоҳазаларгина келтирилар эди. Энди вақтнинг турли инерциал саноқ системаларида қайд қилинадиган фарқини миқдор жиҳатидан ҳам аниқлаш мумкин. Вақт ўтиши фақат x ва x' координаталарга боғлиқ.

A системада икки воқеа бир-биридан Δx масофада бир вақтда юз берган, деб фараз қилайлик, булар учун $\Delta t = 0$; *B* системада бу воқеалар учун $\Delta t'$ қандай бўлади?

$\Delta t = 0$ қийматни (153.1) даги биринчи тенгликка қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\Delta t' = -\gamma\frac{v}{c^2}\,\Delta x. \qquad (153.2)$$

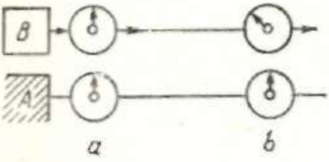
Бинобарин *A* системада бир вақтда юз берадиган воқеалар *B* системада турли пайтларда қайд қилинади. Шу билан бирга, x координатаси катта бўлган жойда юз берган воқеа *B* системада олдин юз беради. *B* системанинг ҳаракати томонида жойлашган нуқтадаги воқеа олдинроқ юз беради. v тезлик ва Δx масофа ортган сари воқеа тобора олдинроқ юз беради.

Худди шунингдек, *B* системада бир вақтда юз берадиган воқеалар (улар учун $\Delta t' = 0$ ва $\Delta x' \neq 0$) *A* системада Δt вақтдан сўнг қайд қилинади:

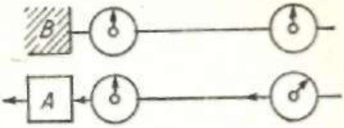
$$\Delta t = \gamma\frac{v}{c^2}\,\Delta x', \qquad (153.3)$$

бу эса (153.1) даги иккинчи тенгликдан келиб чиқади. Яна ҳаракат йўналишида жойлашган нуқтадаги воқеа олдин юз беради.

A системадан кузатилганда *B* системадаги соатлар синхрон равишда юрмаслигини соатли схемада тушунтириш мумкин. Ҳар бир саноқ системасида x ва x' ўқлар бўйлаб синхронлаштирилган бир хил соатлар бир-бирига яқин қўйилган деб тасаввур этайлик. Соатлар ҳар бир системада, олдин айтиб ўтилганидек (151-§), ёруғлик сигналлари билан синхронлаштирилган. A системада бир-биридан Δx масофада жойлашган икки a ва b соатни танлаб оламиз. a ва b соатлар тўғрисига келган ҳаракатланувчи соатларнинг (B система соатларининг) кўрсатишларини A системанинг соатларига қараб айни бир пайтда қайд қиламиз. Бу соатлар (153.2) га асосан турлича вақтни кўрсатади, бунда олдинда ҳаракатланаётган соат орқада қолади (427-расм).



427-расм.



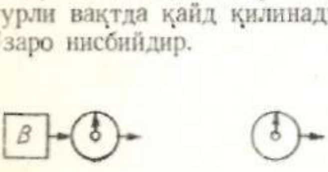
428-расм.

Агар B системада бир-биридан $\Delta x'$ масофада турган икки соат олиб, бу соатларга қараб улар ёнидан ўтаётган соатларнинг кўрсатишини бир вақтда қайд қилсак ҳам, аввалгига ўхшаш манзара кузатилади (428-расм).

Бу фаразий тажрибаларни бундай талқин этиш ҳам мумкин. Масалан, A системада унинг яқинидан ўтаётган B системанинг соатлари кўрсатган вақт A нинг соатлари бўйича турли пайтларда қайд қилинади. Ҳамиша Δt ни (яъни қайд қилиш вақтлари фарқини) яқиндан ўтаётган соатлар айни бир вақтни кўрсатадиган (яъни $\Delta t' = 0$ бўладиган) қилиб танлаб олиш мумкин. (153.1) нинг биринчи тенглигидан

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\ \Delta x$$

эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳаракат йўналишида кетинда турган соатларда вақтни Δt қадар *олдин* қайд қилиш керак (429-расм). B системада бир вақтда юз берадиган воқеалар A системада турли вақтда қайд қилинади. Бу системалардаги соатларнинг юриши ўзаро нисбийдир.



429-расм.

2. Масофаларнинг қисқариши. B системада $l_0 = \Delta x'$ кесма ажратиб олинган бўлсин, уни x' ўқ бўйлаб жойлашган тайинли бир стерженнинг узунлиги деб тушуниш мумкин. B системада бу стерженнинг узунлигини ўлчаш жуда осон, бунинг учун стержень устига ўлчов чизғичи қўйиб, унда стержень учларини белгилаб олиш

лозим. Аммо стержень A системага нисбатан ҳаракат қилаётганда унинг A системадаги узунлигини қандай қилиб ўлчаш мумкин? Бунинг учун A системада $l_0 = \Delta x'$ стерженнинг учларини x ўқда A нинг соатларига қараб айни бир пайтда қайд қилиш лозим; бу кесма $l_x = \Delta x$ бўлсин. $l_0 = \Delta x'$ билан $\Delta t = 0$ бўлган ҳолдаги $l_x = \Delta x$ орасидаги боғланишни топиш керак. (153.1) нинг учинчи тенглигидан

$$\Delta x' = \gamma \Delta x, \quad l_x = \frac{l_0}{\gamma} \qquad (153.4)$$

эканлиги келиб чиқади, бу ерда l_0 — тинч турган (B даги) стержень узунлиги, l_x — ҳаракатланаётган (A даги) ўша стерженнинг узунлиги. Тинч турган стерженнинг узунлиги ҳаракатланаётган стерженнинг узунлигидан катта, чунки $\gamma > 1$. Бошқача айтганда, ҳаракатланаётган стержень «қисқаради». Бундай десак янада яхши бўлади: *узунлик нисбийдир*, у ўзи ўлчанаётган саноқ системасига боғлиқ.

Шунга ўхшаш мулоҳазалар кўрсатадики, A системада тинч туриб, B системада ўлчанаётган стержень B да қисқароқ бўлади. Бу ҳолда $\Delta x = l_0$ бўлиб, у $\Delta t' = 0$ бўлганда аниқланади. (153.1) нинг тўртинчи тенглигидан

$$\Delta x = \gamma \Delta x', \quad l_x = \frac{l_0}{\gamma} \qquad (153.5)$$

эканлиги маълум бўлади. Ҳаракатланаётган стержень қисқа бўлади.

(153.4) ва (153.5) формулалар ўртасида зиддият йўқ, чунки ҳар бир саноқ системасига нисбатан ўлчаш иши мутлақо бир хил бўлишига қарамай ҳар гал турли хил ўлчашлар назарда тутилади. Ҳар бир системада бир хил натижага эга бўламиз; узунликнинг нисбийлиги, вақтнинг нисбийлиги каби, *ўзародир*.

Равшанки, A системадан B га ва B дан A га ўтилганда y ва z ўқлар бўйлаб ҳисобланадиган масофалар ўзгармайди. Фақат x ва x' ўқлар бўйлаб, системаларнинг ҳаракат тезлиги бўйлаб ҳисобланадиган координаталар айирмаси ўзгаради.

3. **Ҳаракатланаётган соатлар юришининг секинлашиши.** B системада турган соат A системага нисбатан ҳаракат қилади. A системадан кузатилганда бу соатнинг $\Delta t'$ кўрсатиши тинч турган соатнинг Δt кўрсатишига қандай боғланган?

Ҳаракатланаётган соат Δt вақт ичида $\Delta x = v\Delta t$ масофага силжийди ва у учун $\Delta x' = 0$ бўлади, шунинг учун (153.1) нинг биринчи тенглигидан $\Delta t'$ учун қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v^2}{c^2}\Delta t\right) = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma}, \qquad (153.6)$$

чунки $\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$. Ҳаракатланаётган соатлар қайд қиладиган $\Delta t'$ вақт оралиғи тинч турган соатларнинг тегишли кўрсатишларидан кичик. Ҳаракатланаётган соатлар секинроқ «юради». Буни биз соатлар юришининг *секинлашиши* деймиз.

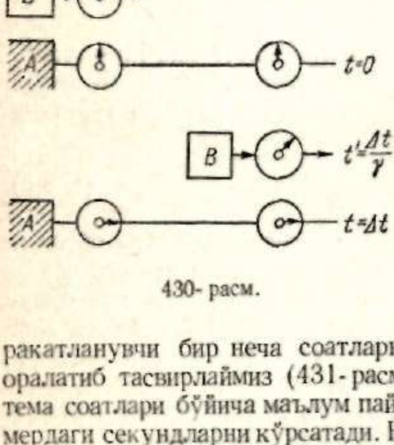
Шуни қайд қиламизки, (153.6) шартни биз $\Delta x' = 0$ деб фараз қилган ҳолда (153.1) нинг иккинчи тенглигидан бевосита топа оламиз.

B системага нисбатан ҳаракатланувчи соатларнинг юришига оид шунга ўхшаш мулоҳазалардан биз

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} \tag{153.7}$$

деган хулосага келамиз, бу ерда Δt — ҳаракатланувчи соатнинг кўрсатишлари. Ҳаракатланаётган соат «орқада қолади».

Вақтнинг секинланишини соатлар билан ўтказиладиган қуйидаги фаразий тажрибаларда намойиш қилиб кўрсатиш мумкин. *A* га нисбатан ҳаракатланувчи баъзи соатлар *A* системада тинч турган синхрон соатлар билан турли пайтларда таққосланади (430- расм). $t = 0$ пайтда *A* ва *B* системадаги соатлар бир хил вақтни кўрсатади, деб фараз қилайлик. Ҳаракатланаётган соатлар Δt вақт ичида бошқа жойга сурилди ва ўзларининг қаршисида турган соатлардан бошқа вақтни кўрсатади ва ҳоказо.



430- расм.

B системадаги синхрон соатларнинг *A* системадан кузатилган ҳолдаги кўрсатишлари манзарасини бирлаштириш мумкин. Бу манзарада ҳаракатланувчи бир неча соатларни (секундомерларни) $\Delta t = 2$ сек вақт оралатиб тасвирлаймиз (431- расм). Доирачалар ичидаги рақамлар *A* система соатлари бўйича маълум пайтларда қайд қилинган ҳар бир секундомердаги секундларни кўрсатади. Вақт ва масофа $\gamma = 2$ бўлган ҳол учун, яъни $v \approx 0{,}87\ c$ учун ҳисобланган. Қия чизиқлар *B* системадаги айни бир секундомерни туташтиради. Ҳисоблар қуйидаги формулалар бўйича бажарилган: $\Delta x = v\,\Delta t$, $\Delta t' = \Delta t/\gamma$

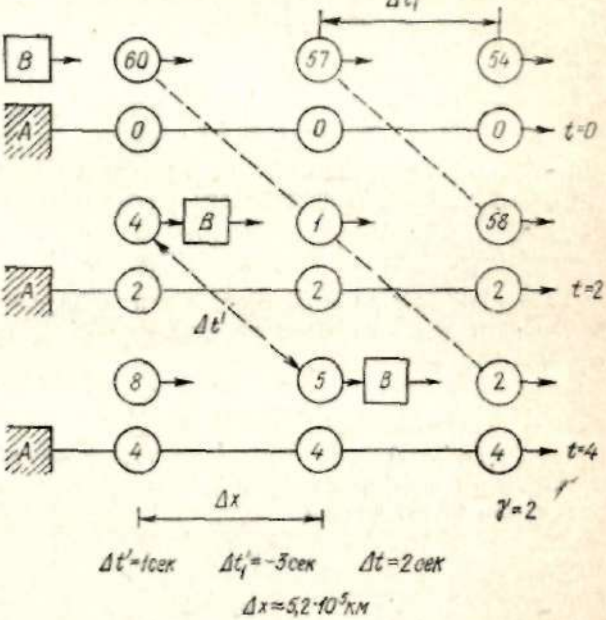
$$\Delta t_1' = -\gamma \frac{v}{c^2}\ \Delta x = (1 - \gamma^2)\,\Delta t'.$$

Бинобарин,

$$\Delta t' = 1\ \text{сек},\ \Delta t = 2\,\text{сек},\ \Delta t_1' = -3\ \text{сек},\ \Delta x \approx 5{,}2 \cdot 10^5\ \text{км}.$$

Ҳаракатланаётган соатлар юришининг секинланиши ҳам, кўрсатишлари бир вақтда бўлмаслиги ҳам 431- расмдан кўриниб турибди. Масофалар катталиги ва вақт ўзгаришларига диққат қилинг. Агар биз шундай манзарани $\Delta t = 2$ мксек бўлган ҳолда тасаввур этганимизда эди, у ҳолда $\Delta x \approx 520$ м бўлар эди.

Ҳаракатланувчи мезонлар яшаш вақтининг узоқ бўлишига вақтнинг секинланиши сабаб бўлади. Мезонлар — тез учаётган зарралар модда билан тўқнашганда ҳосил бўладиган элементар зарралардир. Улар космик нурларда ва зарядли зарралар тезлаткичларида ўтказиладиган тажрибаларда учрайди. Мезон[1] барқарор бўлмаган зарра бўлиб, ўрта ҳисобда тахминан 10^{-6} сек ичида парчаланиши аниқланган.



431-расм.

Маълумки, мезонлар 10—20 км чамаси баландликда учрайди ва айни вақтда улар Ер юзидаги космик нурлар лабораторияларида қайд қилинади. Агар ўртача яшаш вақти ўзгармай қолганда эди, мезон ёруғлик тезлигига яқин тезлик билан ҳаракат қилганда ҳам бу вақт ичида 300 м чамаси масофа босиб ўтган бўлар эди. Ер сирти яқинида мезонлар бўлишига сабаб — ҳаракатланаётган мезон вақтининг секинлашишидир. *B* системада тинч турган мезоннинг $\Delta t' \sim 2\cdot 10^{-6}$ сек га тенг бўлган ўртача яшаш вақти Ерга нисбатан тинч турган (*A* система) соатларда аниқланувчи Δt интервалга мос келади. Бу вақт оралиқлари бир-бирига $\Delta t = \gamma\ \Delta t'$ (153.6) тенглик билан боғланган.

Агар γ етарлича катта бўлса, Δt вақт ичида мезон Ер сиртига етиб келиши мумкин. Дарҳақиқат, космик нурлардаги мезонлар учун $\gamma \sim 50$, шунинг учун Δt вақт ичида мезон

$$s \sim c\,\Delta t = c\gamma\,\Delta t' = 3\cdot 10^8\cdot 50\cdot 2\cdot 10^{-6} = 30 \text{ км}$$

чамаси масофа босиб ўта олади.

---

[1] Ўртача яшаш вақти $2{,}2\cdot 10^{-6}$ сек бўлган мю-мезон назарда тутилади.

Шуни қайд қиламизки, $\gamma \sim 50$ бўлганда зарра ёруғлик тезлигидан тахминан 60 км/сек кам тезлик билан ҳаракат қилади.

Ҳаракатланувчи зарралар вақти чўзилиши тўғрисидаги хулосага физиклар бу зарраларнинг тезлаткичларда емирилишини анализ қилишда келадилар. Тезлаткичларда зарраларнинг югуриш йўли ортиши (тахминан 100 мартагача) қайд қилинган, бунга вақтнинг секинлашиши сабаб бўлади. Тез ҳаракатланувчи ($\sim c$) зарралар билан ўтказилган бошқа тажрибаларнинг натижалари ҳам махсус нисбийлик назариясининг қоидалари тўғри эканлигини ишонарли қилиб тасдиқлайди.

4. Тезликларни алмаштириш (тезликларни «қўшиш»). B системада бир зарра $\boldsymbol{u}'(u'_x, u'_y, u'_z)$ тезлик билан ҳаракат қиляпти, деб фараз этайлик. B системадаги тезлик одатдагича[1] аниқланади:

$$\boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}\left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right),$$

бу ерда $\boldsymbol{r}'(x', y', z')$ — B системадаги радиус-вектор. Зарранинг A системадаги тезлиги қандай бўлади? Равшанки, уни бундай аниқлаш керак:

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

бу ерда $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ — A системадаги радиус-вектор. Турли саноқ системаларидаги дифференциаллар ўртасидаги муносабатлар (153.1) тенгламалардан келиб чиқади:

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dx\right), \\ dx' &= \gamma\,(dx - v\,dt), \\ dy' &= dy, \quad dz' = dz. \end{aligned} \tag{153.8}$$

Бу тенгликларни ҳисобга олиб, қуйидаги ифодаларни ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\,(dx - v dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dx\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \delta\,(u_x - v), \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dx\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{\delta}{\gamma}\,u_y, \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{\delta}{\gamma}\,u_z, \end{aligned} \tag{153.9}$$

бу ерда қисқалик учун қуйидаги белги киритилган:

$$\delta = \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}. \tag{153.10}$$

$\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$ эканини эслатиб ўтамиз.

---

[1] Бундан буён биз векторнинг компоненталарини вектор ёнидаги қавслар ичига ёзамиз.

Қуйидаги ифодаларни ҳам худди шу йўл билан ҳосил қилиш мумкин:

$$u_x = \delta' (u'_x + v), \quad u_y = \frac{\delta'}{\gamma} u'_y, \quad u_z = \frac{\delta'}{\gamma} u'_z , \tag{153.11}$$

бу ерда

$$\delta' = \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^{-1}. \tag{153.12}$$

(153.9) билан (153.11) ни солиштириб,

$$\delta\delta' = \gamma^2 \tag{153.13}$$

эканлигини топамиз.

Аввало шуни қайд қиламизки, тезликларни алмаштириш қонуни Ньютон механикасидаги тезликларни қўшиш қонунидан принципиал жиҳатдан фарқ қилади. Галилей алмаштиришларида, яъни $v \ll c$ бўлганда

$$u_x = u'_x + v, \; u_y = u'_y, \; u_z = u'_z.$$

Эндиликда x ўқдаги тезликлар йиғиндиси δ' га кўпайтирилади; δ' эса u'_x, v ва c га боғлиқ бўлган катталикдир. Гарчи координаталар айирмаси ўзгармаса-да, тезликнинг y ва z ўқлардаги компоненталари ҳам ўзгаради, бироқ вақтлар айирмаси бошқача бўлади:

$$dt \neq dt'.$$

Ньютон механикасидаги тезликларни қўшиш қонуни ёруғлик тезлигига қўлланилмаслигини қайд қилиш муҳимдир. Агар B системада ёруғлик тезлиги $u'_x = c$ бўлса, A системада ҳам тезлик $u_x = c$ бўлади. Дарҳақиқат, (153.11) га асосан,

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c,$$

нисбийлик назариясининг асосий қоидаларидан ҳам худди шундай натижа келиб чиқиши керак.

Кези келганда яна шуни ҳам айтиб ўтамизки, агар ёруғлик нури B системада y' ўқ бўйлаб тарқалса, у ҳолда $u'_y = c$, $u'_x = 0$, $u'_z = 0$ деб фараз қилиб, унинг A системадаги тезлигининг компоненталари

$$u_y = \frac{c}{\gamma}, \;\; u_x = v, \;\; u_z = 0$$

бўлишини, тезлик катталиги эса

$$\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c$$

бўлишини (153,11) формулалардан фойдаланиб топиш мумкин. Бинобарин, B системада x' ўққа тик тарқалувчи ёруғлик нури A системада бошқа йўналишда тарқалади, бироқ тезлик катталиги c га тенглигича қолади, албатта.

Агар ёруғлик нури B системада x' ўқ билан φ' бурчак ҳосил қилса, ёруғлик нурининг A системада x ўқ билан ҳосил қилган φ бурчаги

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi'}{\gamma\left(\cos\varphi' + \frac{v}{c}\right)}$$

формуладан аниқланишини яна (153.11) ифодалардан фойдаланиб кўрсатиш мумкин. Ёруғлик нури йўналиши бурчагининг бундай ўзгариши юлдузлар аберрацияси ҳодисасини, яъни Ернинг орбитада ҳаракат қилиши туфайли юлдузларнинг осмондаги вазияти ўзгаргандай бўлиб кўринишини изоҳлаб беради. Зенитда турган юлдуз ярим йил мобайнида 40″ чамаси силжийди.

Биринчи қарашда бу хулосаларнинг ҳаммаси одатдан ташқаридек туюлади, бироқ булар кузатилган фактлардан табиий равишда келиб чиққан натижалардир: инерциал системалар тенг ҳуқуқли ва уларга нисбатан ёруғлик тезлиги бир хил.

A ва B системадаги тезликларнинг модуллари ўртасидаги муҳим муносабатни кўрсатиб ўтамиз; бу муносабат бизга кейинчалик керак бўлади. Тезликларни белгилаб оламиз:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad \text{ва} \quad u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2,$$

у ҳолда (153.9) дан қуйидагини топамиз.

$$u'^2 = \delta^2\left[(u_x - v)^2 + \frac{1}{\gamma^2}(u_y^2 + u_z^2)\right]. \tag{153.14}$$

Бажариладиган баъзи содда амалларни ёзиб кўрсатмасдан, $1 - \frac{u'^2}{c^2}$ катталикни ҳисоблаб топамиз:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{u'^2}{c^2} &= \delta^2\left[\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{c^2}\,(u_x - v)^2 - \frac{1}{c^2\gamma^2}\,(u_y^2 + u_z^2)\right] = \\ &= \delta^2\left\{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\,(u_x - v)^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(u_y^2 + u_z^2)\right] = \\ &= \delta^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{\delta^2}{\gamma^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{153.15}$$

Бундан буён бу тенглик кўп қўлланилади, шунинг учун уни қисқача қилиб қуйидагича ёзамиз:

$$\delta\alpha' = \gamma\alpha, \tag{153.16}$$

бу ерда

$$\alpha = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha' = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{153.17}$$

((153.16) даги ҳамма катталиклар мусбат.) (153.13) ни эътиборга олиб

$$\delta'\alpha = \gamma\alpha' \tag{153.18}$$

эканини кўрсатиш мумкин.

Бу параграфнинг охирида Лоренц алмаштиришларининг тенгламаларини вектор кўринишида тасвирлаймиз. Агар x, y, z ўқлардаги бирлик векторларни мос равишда $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ билан белгиласак, у ҳолда $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ ва $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$ бўлади. Бу белгилардан фойдаланганда

$$\mathbf{r}' = \gamma (x - vt)\,\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + x\mathbf{e}_1 - x\mathbf{e}_1 =$$
$$= \mathbf{r} + (\gamma - 1)\,x\mathbf{e}_1 - \gamma vt\mathbf{e}_1 \qquad (153.19)$$

бўлади, яъни координаталар алмаштириш битта формула билан ифодаланади. Кўриниб турган тенгликларни ёзамиз:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}}{v}, \; x = \mathbf{r}\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{v}, \; vx = \mathbf{v}\mathbf{r}$$

ва (153.19) ни умумий кўринишда ифодалаймиз:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)\,\frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{v^2}\,\mathbf{v} - \gamma\mathbf{v}t. \qquad (153.20)$$

Вақтни алмаштириш тенгламаси энди бундай кўринишга келади:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{c^2}\right). \qquad (153.21)$$

(153.20) ва (153.21) формулалар ҳар қандай йўналишдаги $\mathbf{v}$ тезлик ва ҳар қандай $\mathbf{r}$ нуқтага тегишли Лоренц алмаштиришларидир; фақат шуни эсда тутиш керакки, B система A системага нисбатан илгариланма ҳаракат қилади ва $t = t' = 0$ да $\mathbf{r}' = \mathbf{r} = 0$ бўлади. Ажратиб олинган йўналиш $\mathbf{v}$ тезлик векторининг йўналишидир; $\mathbf{r}$ векторнинг $\mathbf{v}$ тезликка нормал бўлган компоненталари ўзгармайди. $\mathbf{r}$ векторнинг $\mathbf{v}$ га туширилган проекцияси ва $\mathbf{v}$ векторнинг ўзи фазовий координаталарни ва вақтни бир-бирига боғлайди. $\gamma \to 1$ бўлганда Галилей алмаштириши вектор кўринишида ҳосил бўлади:

$$t' \to t, \; \mathbf{r}' \to \mathbf{r} - \mathbf{v}t.$$

Лоренц алмаштиришлари вақт фазодан ва, аксинча, фазо вақтдан ажралмас эканлигини кўрсатади. Дунёдаги ҳамма физикавий ҳодисалар, ҳамма процесслар фазода ва вақтда юз беради. Фазо билан вақт материянинг ҳар қандай ҳаракати юз берадиган шароитларнинг ягона мажмуидир. Бу ҳол фазо ва вақтнинг диалектик материализм берадиган фалсафий таърифига, яъни фазо ва вақт материянинг яшаш формаларидир дейилган таърифга тўла мос келади.

154- §. Ҳаракат миқдори (импульс)

Ёруғлик тезлигига солиштирса бўладиган тезликлар физикада биринчи марта радиоактив модда чиқарадиган зарядли зарралар (электронлар) оқимини тадқиқ қилишда учради. Ҳаракатланаётган зарядга электр ва магнит майдонлар кўрсатадиган таъсир қонунларини билган ҳолда электронларнинг тезлиги катталигини ва массасини аниқлаш мумкин.

Бизнинг асримиз бошида ўтказилган тажрибалар инерт массанинг тезликка, тўғрироғи, ҳаракат тезлигининг ёруғлик тезлигига нисбатига боғлиқ эканлигини кўрсатди. Аввалига электрон атрофидаги электромагнитик майдоннинг «инерцияси» («электромагнитик масса») туфайли фақат зарядли зарраларгина бундай хоссага эга деб ҳисобланган. Бироқ Эйнштейн массанинг тезликка боғлиқ бўлиши ҳамма моддий жисмларга тааллуқли хосса эканлигини кўрсатди. Жисмлар массасининг доимий эмаслиги нисбийлик назариясининг постулатларидан келиб чиқадиган натижадир.

Механикада ҳар қандай (қаттиқ, суюқ, газ ҳолатидаги) жисмни ўзаро таъсирлашувчи ҳаракатдаги зарралар тўплами — зарралар системаси сифатида тасаввур этиш мумкин. Бу зарралар жисмнинг етарлича кичик қисми ёки молекула бўлиши муҳим эмас. Ҳар бир зарранинг ўлчамлари жисмнинг (ҳамма зарралар системасининг) ўлчамларига қараганда кичик бўлишигина муҳимдир.

Зарраларнинг *яккаланган* системаси (яккаланган жисм) ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини инерция қонунининг натижаси сифатида талқин этиш мумкин. Зарраларнинг ўзаро таъсирлашуви оқибатида айрим зарралар тезлиги ҳар қандай ўзгарганда ҳам яккаланган бутун системанинг тезлиги (илгариланма ҳаракат тезлиги) доимийлигича қолади.

Зарралар системасининг ҳаракат миқдори айрим зарралар импульсларининг йиғиндиси сифатида тасвирланади:

$$K = \sum m_i \boldsymbol{u}_i, \tag{154.1}$$

фақат релятивистик механикада зарранинг m_i массаси ўзгарувчи катталик ҳисобланади. Зарралар системасининг *ўртача* тезлигини *бутун* системанинг ҳаракат тезлиги сифатида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{u}_i}{\sum m_i}. \tag{154.2}$$

Бу тезлик масса бирлигига тўғри келган ўртача ҳаракат миқдорига тенг.

Ньютон механикасида (яъни $m_i = \text{const}$ бўлганда) бу таърифдан $\boldsymbol{u}$ тезлик зарралар системаси массалари марказининг тезлиги эканлиги келиб чиқади. Бу ҳолда эса бу хулоса унча тўғри эмас, чунки m_i — ўзгарувчи (вақтга боғлиқ бўлган) катталик. Шунинг учун $\boldsymbol{u}$ ўртача тезликни (154.2) формуладан аниқлаш билан кифояланамиз, фақат бунда $\boldsymbol{u}\,dt$ катталикни бутунича олиб қаралган зарралар системасининг dt вақт ичидаги илгариланма кўчиши (жисмнинг кўчиши) деб фараз қиламиз. Бундан буён $\boldsymbol{u}$ ни шартли равишда система «массалари марказининг» тезлиги деб атаймиз.

Яккаланган система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини бундай ёзиш мумкин:

$$K = \sum m_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u} \sum m_i = m\boldsymbol{u} = \text{const}, \qquad (154.3)$$

бу ерда $m = \sum m_i$.

Гарчи ҳар бир m_i ўзгарувчи катталик бўлса-да, бу ҳолда $m = \sum m_i$ ўзгармас эканлигини таъкидлаб ўтиш лозим. K ва m доимий бўлган ҳолдагина $\boldsymbol{u}$ тезлик доимий бўлади, яъни инерция қонуни *яккаланган* системанинг массаси *доимий* бўлишини талаб қилади.

155- §. Массанинг ҳаракат тезлигига боғлиқлиги

Энди асосий масалани, яъни массанинг тезликка боғланиш муносабатини аниқлаш масаласини кўриб чиқишга киришамиз. Бунинг учун B саноқ системасидан A системага ўтилганда

$$\sum m_i' \boldsymbol{u}_i' = \boldsymbol{u}' \sum m_i'$$

тенглик

$$\sum m_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u} \sum m_i \qquad (155.1)$$

тенгликка ўтишини талаб қилиш лозим, бу ерда m_i' — i-зарранинг B системадаги массаси қиймати; $\boldsymbol{u}_i'$ ва $\boldsymbol{u}'$ тезликлар $\boldsymbol{u}_i$ ва $\boldsymbol{u}$ тезликларга (153.9) Лоренц формулаларига мувофиқ равишда алмашади. Бундан массанинг тезликка боғланиш муносабатини, сўнгра эса B системадан A системага ўтилганда масса ва ҳаракат миқдорларини алмаштириш қонунларини топиш мумкин.

Ҳисоб осон бўлиши учун фақат иккита заррадан иборат бўлган системани кўриб чиқамиз, шу билан бирга, B га нисбатан ҳаракат миқдори нолга тенг, яъни

$$\begin{aligned} m_1' u_{1x}' + m_2' u_{2x}' &= 0, \\ m_1' u_{1y}' + m_2' u_{2y}' &= 0, \\ m_1' u_{1z}' + m_2' u_{2z}' &= 0, \end{aligned} \qquad (155.2)$$

деб фараз қиламиз. Бинобарин, массалар марказининг тезлиги B системада нолга тенг, шунинг учун бу тезлик A га нисбатан v га, яъни B системанинг ҳаракат тезлигига тенг бўлади. Шундай эканлигини (153.11) формулаларга қараб ҳам текшириб кўриш мумкин: $u_x' = 0$, $u_y' = u_z' = 0$, шунинг учун $u_x = v$, $u_y = u_z = 0$.

Аввало зарралар системаси ҳаракат миқдорининг x ўқдаги компонентасини кўриб чиқамиз. A системада бу компонента қуйидагига тенг:

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = (m_1 + m_2) v. \qquad (155.3)$$

(155.2) нинг биринчи тенгламасига A системага нисбатан олинган тезликларни қўйиб, (153.9) дан қуйидаги тенгликни топамиз:

$$\delta_1 m_1' (u_{1x} - v) + \delta_2 m_2' (u_{2x} - v) = 0.$$

(155.3) тенгликни

$$m_1(u_{1x} - v) + m_2(u_{2x} - v) = 0 \qquad (155.4)$$

кўринишда ёзамиз. Иккита номаълум катталикка (қавслар ичида турган катталикларга) нисбатан ёзилган бир жинсли икки тенгламага эга бўлдик. Бу тенгламалар нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун

$$\delta_1 m_1' m_2 - \delta_2 m_2' m_1 = 0 \qquad (155.5)$$

бўлиши лозим. Бунга δ_1 ва δ_2 нинг (153.16) формуладан топиладиган қийматларини қўямиз:

$$\frac{\gamma \alpha_1}{\alpha_1'} m_1' m_2 = \frac{\gamma \alpha_2}{\alpha_2'} m_2' m_1.$$

Бу тенгликни γ га қисқартириб, қуйидагича ифодалаймиз:

$$\frac{\alpha_1 m_1'}{\alpha_1' m_1} = \frac{\alpha_2 m_2'}{\alpha_2' m_2}. \qquad (155.6)$$

Чап томонда фақат биринчи зарранинг хосса ва характеристикаларига боғлиқ бўлган катталиклар, ўнг томонда эса фақат иккинчи зарранинг хосса ва характеристикаларига боғлиқ бўлган катталиклар турибди. Бинобарин, (155.6) нинг иккала томони константага, масалан, D га тенг бўлгандагина бу тенглик ўринли бўлади. У ҳолда

$$\frac{m_1'}{m_1} = D\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}, \quad \frac{m_2'}{m_2} = D\,\frac{\alpha_2'}{\alpha_2}.$$

α_1 ва α_1' ларнинг (153.17) ифодасидан фойдаланиб, биринчи тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{m_1'}{m_1} = D\,\frac{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1'^2}{c^2}}}. \qquad (155.7)$$

Зарра массаси билан тезлиги модули орасидаги муносабат шу тенгликдан аниқланади.

B системада тезлик $u_1' = 0$ бўлсин, яъни B системада зарра тинч туради; унинг m_1' массаси m_{10} га, яъни *тинч* турган зарранинг массасига тенг. У ҳолда биринчи зарранинг A системадаги массаси қуйидагига тенг эканлиги (155.7) дан келиб чиқади:

$$m_1 = \frac{1}{D}\,\frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}. \qquad (155.8)$$

$u_1 \ll c$ бўлган ҳолда (Ньютон механикасида) ҳам бу муносабат тўғри бўлиши керак, у ҳолда $m_1 = m_{10}$, шунинг учун $D = 1$. Иккинчи зарра учун ҳам шунга ўхшаш тенглик ҳосил қиламиз.

Бинобарин, A га нисбатан u тезлик билан ҳаракат қилувчи ҳар қандай зарра

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 \alpha \qquad (155.9)$$

массага эга бўлади, бу ерда m_0 — тинч турган (ёки $u \ll c$ тезлик билан ҳаракатланаётган) зарранинг массаси, u — тезлик модули.

Бундан буён тинч турган зарранинг массасини m_0 билан эмас, балки соддагина қилиб, m билан белгилаймиз. Унда A га нисбатан u тезлик билан ҳаракатланувчи зарранинг массаси

$$m\alpha = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (155.10)$$

кўпайтма кўринишида, худди ўша зарранинг B системадаги массаси

$$m\alpha' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \qquad (155.11)$$

кўпайтма кўринишида ёзилади.

Массанинг тезликка боғлиқлиги Эйнштейн механикасининг асосий қоидаларидан биридир: *инерт* масса тезлик катталигига, тўғироғи, тезликнинг ёруғлик тезлигига бўлган *нисбатига* боғлиқ; тезлик ортиши билан жисмнинг инерцияси ортади ва $u \to c$ да ∞ га интилади. Демак, $m > 0$ бўлганда ҳеч бир жисм c тезликка эга бўла олмайди.

Тезлиги ёруғлик тезлигига яқин бўлган тез ҳаракатланувчи зарралар ҳаракати ўрганиладиган тезлаткичларда ўтказилган тажрибалар массанинг тезликка боғлиқ эканлигини ва (155.9) формуланинг тўғрилигини ишонарли қилиб тасдиқлади.

156- §. Импульс ва массани алмаштириш

Массанинг тезликка боғланиш муносабати икки заррадан иборат система ҳаракат миқдорининг саноқ системалари ҳаракат қиладиган x ўқдаги проекцияларини алмаштиришда ҳосил қилинди. Бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтишда ҳаракат миқдорининг ўзгаришини аниқлаш учун шунинг ўзи кифоя. Биринчидан, B системада массалар маркази тезлигининг y' ва z' ўқлардаги компоненталари нолга тенг эди, улар A системада ҳам шундайлигича қолади. Иккинчидан, агар масса тезликка (155.10) формулага биноан боғлиқ бўлса, у ҳолда A системага ўтилганда ҳар бир зарра ҳаракат миқдорининг y' ва z' ўқлардаги компоненталари ўзгармай қолади; шундай эканлигини биз кейинчалик кўрсатамиз.

Масса тезликка (155.10) муносабат бўйича боғланган, шунинг учун зарранинг A системага нисбатан ҳаракат миқдори (импульси) қуйидагича аниқланади:

$$\boldsymbol{K} = m\alpha \boldsymbol{u} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (156.1)$$

Айни шу зарранинг B га нисбатан ҳаракат миқдори қуйидагига тенг:

$$\boldsymbol{K}' = m\alpha'\boldsymbol{u}'. \qquad (156.\ )$$

Тезликларни алмаштиришни эсга олиб, B системага ўтишда $\boldsymbol{K}$ ҳаракат миқдорининг компоненталарини алмаштиришни топиш мумкин. B системадаги K_x' компонентани оламиз:

$$K_x' = m\alpha' u_x'.$$

$u_x' = \delta(u_x - v)$, $\delta = \frac{\gamma\alpha}{\alpha'}$ эканлигини эсга олиб ва (153.16) дан фойдаланиб,

$$K_x' = m\alpha'\delta(u_x - v) = \gamma m\alpha(u_x - v)$$

ёки

$$K_x' = \gamma(K_x - vm\alpha) \qquad (156.3)$$

эканлигини топамиз. Агар x ни K_x га, t ни $m\alpha$ га алмаштирсак, K_x' компонента x' координата каби алмашади.

Энди K_y' ва K_z' компоненталарни кўриб чиқамиз. Улардан бирини кўриб чиқиш етарлидир. Таърифга асосан:

$$K_y' = m\alpha' u_y';$$

$u_y' = \frac{\delta}{\gamma} u_y$ эканлигини эсга олиб, (153.16) дан фойдаланамиз:

$$K_y' = m\alpha' \frac{\delta}{\gamma} u_y = m\alpha u_y = K_y. \qquad (156.4)$$

y ва z координаталар ўзгармаганидек, зарра ҳаракат миқдорининг y ўқдаги (ва z ўқдаги) проекцияси ўзгармайди. Бинобарин, ҳаракат миқдори проекцияларининг алмашинуви B системадан A системага ўтишдаги координаталар алмашинуви каби (албатта, A дан B га ўтишдаги каби ҳам) бўлади. Фақат алмаштириш формулаларида t вақт ўрнида $m\alpha$ масса қатнашади.

Энди $m\alpha'$ билан $m\alpha$ орасидаги муносабатни, яъни массани алмаштириш қонунини кўриб чиқиш табиийдир. Бунинг учун катталикларни (153.10) ва (153.16) формулалар бўйича алмаштириш етарли:

$$m\alpha' = m\frac{\gamma\alpha}{\delta} = \gamma m\alpha\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

ёки

$$m\alpha' = \gamma\left(m\alpha - \frac{K_x v}{c^2}\right). \qquad (156.5)$$

Бу ерда ҳам, кутилгандек, ўша ўхшашлик бор: $t \sim m\alpha$ ва $x \sim K_x$.

Шундай қилиб, $m\alpha$ масса, худди K ҳаракат миқдори каби, *нисбийдир*. Бу факт релятивистик физикадан олдинги физикада маълум бўлмаган эди.

Масса ва импульс алмаштиришларининг ҳамма формулаларини бирга ёзиш фойдалидир:

$$\begin{aligned} m\alpha' &= \gamma\left(m\alpha - \frac{vK_x}{c^2}\right), \\ K_x' &= \gamma(K_x - vm\alpha), \\ K_y' &= K_y, \ K_z' = K_z. \end{aligned} \qquad (156.6)$$

A системадан *B* системага ўтилганда t вақт ва $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ вазият вектори алмашади, ҳар қандай зарранинг $m\alpha$ массаси ва $\boldsymbol{K}$ ҳаракат миқдори вектори худди шундай алмашади. Равшанки, *B* дан *A* га ўтишдаги тескари алмаштириш формулалари ҳам шу кўринишда бўлади, фақат бунда v тезлик ишораси мусбат бўлади.

(153.20) дагига ўхшаб, (156.6) ни ҳам вектор шаклида ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} m\alpha' &= \gamma\left(m\alpha - \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}}{c^2}\right), \\ \boldsymbol{K}' &= \boldsymbol{K} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v} - \gamma m\alpha\boldsymbol{v}. \end{aligned} \qquad (156.7)$$

Агар сўз жисмнинг илгариланма ҳаракати устида бораётган бўлса, ҳар қандай жисмни зарра деб ҳисоблаш мумкин, шунинг учун жисмнинг импульси қуйидагига тенг бўлади:

$$\boldsymbol{K} = m\alpha\boldsymbol{u},$$

бу ерда m — жисмнинг тинчликдаги ($u \ll c$ бўлгандаги) массаси, $\boldsymbol{u}$ — унинг тезлиги. Жисм инерциал саноқ системасига нисбатан ҳаракат қилган ҳолда динамиканинг иккинчи қонунини Ньютоннинг ўзи бундай таърифлаган (19- § га қ.): куч ҳаракат миқдоридан олинган ҳосилага тенг, яъни

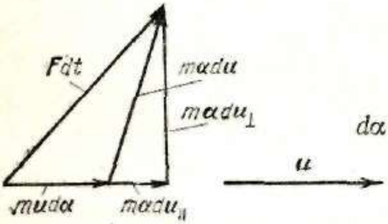
$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\alpha\boldsymbol{u}) = m\frac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{u}). \qquad (156.8)$$

Жисмга таъсир этувчи куч маълум бўлган ҳолда жисмнинг катта тезликлар билан қиладиган ҳаракатига доир масалани шу қонундан фойдаланиб ечиш мумкин. Умумий ҳолда $\boldsymbol{F}$ куч $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ тезланиш билан устма-уст тушмайди, чунки

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{u}\frac{d\alpha}{dt} + m\alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}. \qquad (156.9)$$

Бундан куч, тезлик ва тезланиш векторлари бир текисликда ётиши кўринади. Куч билан тезланиш ўртасидаги муносабатни аниқлаш учун куч ва тезланиш векторларини шу текисликда $\boldsymbol{u}$ тезлик йўналишида ва унга нормал бўлган йўналишда (432- расм) ташкил этувчиларга ажратиш керак. Энди бундай ёзиш мумкин:

$$F_{\perp} dt = m\alpha du_{\perp}, \quad F_{\parallel} dt = mu\, d\alpha + m\alpha\, du_{\parallel}. \qquad (156.10)$$



432- расм.

$du_{\parallel}$ катталик du га ($\boldsymbol{u}$ тезлик модулининг орттирмасига) тенг бўлгани учун

$$d\alpha = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{u\, du}{2} = \frac{\alpha^3}{c^2} u\, du \qquad (156.11)$$

эканлигини эътиборга олиб, (156.10) даги иккинчи тенгликни бундай ифодалаймиз:

$$F_{\parallel} dt = m\alpha \left(1 + \alpha^2 \frac{u^2}{c^2}\right) du_{\parallel} = m\alpha^3 du_{\parallel}.$$

Куч тезликка нормал бўлганда ёки тезлик бўйлаб йўналганда куч тезланиш билан бир хил йўналади.

Бинобарин, куч ва тезланиш компоненталари орасидаги боғланишни ҳамиша қуйидаги шаклда ифодалаш мумкин:

$$\begin{pmatrix} F_{\perp} \\ F_{\parallel} \end{pmatrix} = m\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du_{\perp}}{dt} \\ \dfrac{du_{\parallel}}{dt} \end{pmatrix}. \qquad (156.12)$$

Масса ва тезланиш маълум бўлганда кучни аниқлашда ва аксинча, куч маълум бўлганда масса ва тезланишни аниқлашда бу ифодадан фойдаланиш қулай. Одатда

$$m\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

матрица «масса» деб аталмайди, балки $m\alpha$ катталик динамикавий масса деб ҳисобланади, бунда импульснинг масса билан тезлик кўпайтмаси сифатидаги таърифи эътиборга олинади.

157- §. Энергия

u тезлик билан ҳаракатланаётган жисм массасининг умумий

$$m\alpha = m\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ифодасидан масса билан энергия ўртасидаги қонуний муносабатлар тўғрисида муҳим хулосалар чиқариш мумкин. Тезлик ортиши билан масса ортади, бинобарин, массани кинетик энергияга боғлиқ деб фараз қилиш мумкин.

Ньютон механикасида u/c нинг қийматлари кичик бўлганда масса билан кинетик энергия ўртасидаги муносабат қандай эканлигини кўриб чиқамиз. α ни u/c бўйича қаторга ёямиз:

$$m\alpha = m + \frac{1}{c^2}\frac{mu^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{mu^4}{c^4} + \ldots \tag{157.1}$$

Бундан кўринадики, u/c нисбат жуда кичик бўлганда

$$m\alpha \approx m + \frac{1}{c^2}\frac{mu^2}{2} = m + \frac{1}{c^2}T, \tag{157.2}$$

бу ерда $T = \frac{mu^2}{2}$ ифода u тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг Ньютон механикасида аниқланадиган кинетик энергияси. Нисбийлик принципига асосан, агар бирор қонун бир инерциал системага нисбатан тўғри бўлса, у катта тезлик билан ҳаракатланувчи ҳар қандай системага нисбатан тўғри бўлиши керак. Шунинг учун ҳаракат тезлиги катта бўлган ҳолдаги кинетик энергия (157.2) га ўхшаш аниқланиши керак, яъни

$$T = m\alpha c^2 - mc^2 = mc^2(\alpha - 1). \tag{157.3}$$

(157.1) ёйилмани назарда тутиб, u/c нисбатнинг ҳар қандай қиймати учун (фақат $u < c$ бўлганда) кинетик энергияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$T = \frac{mu^2}{2}\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{157.4}$$

T нинг бу ифодаларидан шу нарса кўринадики, $u \to c$ бўлганда кинетик энергия $T \to \infty$, чунки бу ҳолда $m\alpha \to \infty$.

$m\alpha c^2 = E$ катталикни ҳаракатланаётган жисмнинг *тўлиқ* энергияси деб, $mc^2 = E_0$ ни эса тинч турган жисмнинг энергияси деб аталади. Энди (157.3) тенгликни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$E = E_0 + T, \tag{157.5}$$

яъни тўлиқ энергия кинетик энергия билан тинчликдаги E_0 энергия йиғиндисига тенг.

Бундай катталик релятивистик физикадан олдинги физикада бўлган эмас, у бутун физика учун асосий аҳамиятга эга бўлган бутунлай янги тушунчадир. *Тинчликдаги инерт массаси* ($u \ll c$ ҳолдаги массаси) m бўлган жисм m га пропорционал бўлган маълум бир энергия запасига эга бўлади ва бунда $u \ll c$ бўлганда бу энергия кинетик энергияга нисбатан унча кичик бўлмайди.

Энергия билан массани бир-бирига боғловчи

$$E = m\alpha c^2 \tag{157.6}$$

қонуннинг физикавий аҳамиятини муҳокама қилишдан олдин T га оид асосий тенгликни бир оз бошқачароқ йўл билан келтириб чиқарамиз.

Эркин жисмга қўйилган кучнинг иши, Ньютон механикасидаги каби, жисм кинетик энергиясининг ортишига тенг деб фараз қиламиз. Фақат куч

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{K}}{dt}=m\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{u}) \qquad (157.7)$$

эканини ҳисобга оламиз, бу ерда α миқдор массанинг релятивистик ўзгаришини ҳисобга олади. У ҳолда

$$dT=\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\frac{d\mathbf{K}}{dt}\,d\mathbf{r}=d\mathbf{K}\mathbf{u},$$

чунки $\mathbf{u}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Бу тенгликка $d\mathbf{K}=m\,d(\alpha\mathbf{u})$ ифодани қўямиз:

$$dT=m\,d(\alpha\mathbf{u})\,\mathbf{u}=m\,d\alpha\mathbf{u}\mathbf{u}+m\alpha\mathbf{u}\,d\mathbf{u}=mu^2d\alpha+m\alpha d\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot \qquad (157.8)$$

(156.11) тенгликка асосан, $d\alpha=\frac{\alpha^3}{c^2}d\left(\frac{u^2}{2}\right)$, бундан

$$\alpha d\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{c^2}{\alpha^2}\,d\alpha=c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)d\alpha=(c^2-u^2)\,d\alpha$$

эканлиги кўриниб турибди. Буни (157.8) га қўйиб, соддагина муносабатга эга бўламиз:

$$dT=mc^2d\alpha.$$

Уни интеграллаймиз:

$$T=mc^2\alpha+C,$$

бу ерда C—интеграллаш доимийси. Тинч ҳолатда $T=0$ ва $\alpha=1$ деб ҳисоблаймиз, бу шартдан C ни аниқлаймиз: $C=-mc^2$. Бинобарин, биз (157.3) ифодани келтириб чиқардик.

$E=m\alpha c^2$ қонун жисмнинг E энергияси билан $m\alpha$ инерт массаси ўртасида ўзгармас содда пропорционал боғланиш борлигини кўрсатади. Энергия билан инерт масса жисмнинг турли хил физикавий характеристикаларидир: булардан биринчиси жисмнинг иш бажара олиш қобилиятини, иккинчиси жисмнинг инертлик ўлчовини билдиради. Бироқ бу миқдорлар бир-бирига ўзаро *универсал* равишда боғланган. Агар инерт масса бирор $\Delta(m\alpha)$ миқдорда ортгани маълум бўлса, бу факт энергиянинг $c^2\Delta(m\alpha)$ қадар ортганини билдиради ва аксинча, бирор физикавий объектнинг энергияси ΔE миқдорда ортиши унинг инерт массасининг $\Delta E/c^2$ миқдорда ортганини билдиради.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, бу қоида энергиянинг маълум бўлган ҳар қандай турига, масалан, кинетик, потенциал, электромагнитик ва бошқа тур энергияларга тегишли бўлиши керак. 1905 йилдаёқ Эйнштейн электромагнитик нурланишнинг E энергия миқдори E/c^2 инерт массага эга эканлигини соддагина мисолда кўрсатди. Баъзан бу ҳол масса билан энергиянинг *эквивалентлиги* дейилади. Шунинг учун $m\alpha$ масса ўрнига унга тенг бўлган E/c^2 миқдор қўйилса, масса ва ҳаракат миқдорини алмаштиришнинг (156.6) тенгламаларини бошқача ифодалаш мумкин; унда бу алмаштириш тенгламалари

$$E' = \gamma (E - vK_x), \quad K'_x = \gamma \left(K_x - \frac{vE}{c^2} \right) \qquad (157.9)$$

кўринишга келади. Энергия ва импульсни алмаштиришнинг умумий тенгламалари вектор шаклида қуйидагича ёзилади:

$$E' = \gamma (E - \boldsymbol{v}\boldsymbol{K}), \ \boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} - \gamma \frac{E}{c^2} \boldsymbol{v}. \qquad (157.10)$$

(157.10) тенгликлар (156.7) да $m\alpha$ масса ўрнига E/c^2 ифодани қўйишдан ҳосил бўлган. Энергиянинг ва ҳаракат миқдори (импульс) нинг сақланиш қонунлари бир-бирига боғлиқ эканлиги бу тенгликлардан кўриниб турибди. Агар A системада E энергия ва $\boldsymbol{K}$ импульс доимий бўлса, улар B системада ҳам доимий бўлади.

Тинч ҳолатдаги E_0 энергия муҳим аҳамиятга эга; айтиб ўтганимиздек, релятивистик физикадан олдинги физикада бундай энергия тўғрисида тасаввур бўлмаган. Иситилган жисмнинг массаси совуқ бўлган ўша жисм массасидан ортиқ бўлиши керак; сиқилган пружинанинг массаси кўпроқ бўлади; реакцияга кириишб энергия чиқарган моддалар массаси кичик бўлади ва ҳоказо. Бироқ амалда массанинг бундай ўзгаришлари ҳеч сезилган эмас, чунки массанинг нисбий ўзгаришлари жуда кичик, яъни $\Delta E/c^2$ миқдор (ΔE — энергия орттирмаси) жисмларнинг m массасига нисбатан арзимаган даражада кичик. Ўлчаш аниқлиги бундай ўзгаришларни аниқлашга етарли эмас.

Бироқ тез учаётган элементар зарралар бир-бирига тўқнашганда юз берадиган ядро процесслари ва ҳодисалари физикасида массанинг тегишли ўзгаришларини ўлчаб бўлади ва бу ўзгаришлар бундай процессларда ютиладиган ва чиқадиган энергияни ишончли равишда баҳолайди. Бу жиҳатдан олганда массаси бир хил, бироқ заряди қарама-қарши бўлган икки зарра (масалан, электрон ва позитрон) тўқнашиб, уларнинг массаси электромагнитик нурланиш энергиясига «айланган» ҳолдаги «аннигиляция» (ёки жуфт зарра «туғилиши») ҳодисаси жуда ибратлидир. Ёки бундай десак, яна ҳам яхши чиқади: ўзаро таъсирлашувчи зарралар энергиясининг сақланиш қонунига мувофиқ равишда энергия электромагнитик нурланишнинг шундай миқдор энергиясига айландики, бу энергия миқдори тўқнашувчи зарралар массасига тенг бўлган массага эга. Атом ва ядро физикасидаги тажрибалар нисбийлик назариясининг хулосаларини тасдиқлабгина қолмай, балки бу тажрибаларнинг кўпчилиги бу назариянинг хулосаларига асосланиб ўтказилган.

Яна бир мисол келтирамиз. Классик механикада икки жисмнинг бутунлай эластик бўлмаган тўқнашувида ҳаракат миқдори сақланар, механик энергия сақланмас эди. Нисбийлик назариясида ҳаракат миқдори ҳам, энергия ҳам сақланади, фақат тўқнашувдан кейинги тинчликдаги масса тўқнашувчи жисмларнинг тинчликдаги массалари йиғиндисидан ортиқ. Кинетик энергиянинг бир қисми (ёки бутун энергия) тинчликдаги масса энергиясига айланди. Иккита бир хил зарра бир хил тезлик билан бир-бирига қарши учиб келаётган бўлиб, бутунлай эластик бўлмаган равишда тўқнашсин. У ҳолда зарраларнинг кинетик энергиясига эквивалент бўлган масса зарбдан кейин ҳосил бўлган зарранинг тинчликдаги массасига айланади. Шунинг учун бу зарранинг тинчликдаги массаси зарраларнинг тинчликдаги массалари йиғиндисидан ортиқ бўлади.

Назариянинг энергия билан масса ўртасидаги доимий боғланиши тўғрисидаги тасаввурларидан келиб чиқадиган амалий хулосалар бебаҳодир. $c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ м^2/сек^2 кўпайтувчининг қиймати одатдаги моддада ғоят кўп энергия запаси борлигини кўрсатади: 1 г-моль моддада $9 \cdot 10^{13}$ Ж энергия бор. Ҳозирча моддадаги бундай энергия запасларининг фақат озгина улуши атом энергетикаси қурилмаларида қўлланилмоқда. Атом энергетикаси қурилмалари одатдаги иссиқлик қурилмаларига нисбатан истеъмол қилинадиган ёқилғи миқдори ҳал қилувчи аҳамиятга эга бўлган ҳолларда айниқса кўп афзалликларга эга.

158-§. Зарралар системасининг ҳаракат миқдори ва энергияси

Механикада ҳар қандай жисмни бир-бирига бевосита текканда ёки «тўқнашганда» ўзаро таъсир қилишувчи зарралар системаси деб ҳисоблаш мумкин. Шу билан жисмнинг алоҳида зарралари ўртасидаги тортишиш кучлари эътибордан четда қолдирилади[1].

Ядро физикасида бир-биридан бирор масофада туриб ўзаро таъсир қилишадиган ва тез ҳаракатланаётган зарядли зарраларнинг тўқнашиши билан иш кўришга тўғри келади, бироқ у ерда бу ўзаро таъсир энергияси тўлиқ $m\alpha c^2$ энергияга қараганда жуда кичик, шунинг учун у эътиборга олинмайди. Шунинг учун зарралар бир-бирига бевосита текканда ўзаро таъсир қилишади деб ҳисобланади. Тўқнашишда зарралар энергияси ўзгармайди.

Ҳар бир зарранинг тўлиқ энергияси ўша зарранинг ўзидаги локал энергия (тинчликдаги энергияси) ва кинетик энергияси йиғиндисидан иборат бўлгани учун, зарралар системасининг тўлиқ энергиясини алоҳида зарралар энергияларининг йиғиндиси тарзида ифодалаб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$c^2 \sum m_i \alpha_i = c^2 m \alpha, \tag{158.1}$$

---

[1] Тортишиш кучлари ҳал қилувчи роль ўйнайдиган космик масштабларда ҳаракатга бундай қараб бўлмайди. Бироқ бу масалалар умумий нисбийлик назариясига тегишли бўлиб, улар махсус нисбийлик назариясига кирмайди.

бу ерда m — «массалар марказининг» саноқ системасида, яъни

$$\mathbf{u} = \frac{\sum m_i \alpha_i \mathbf{u}_i}{\sum m_i \alpha_i}$$

тезлик билан ҳаракатланувчи системада *тинч турувчи* зарралар системасининг массаси. $\alpha^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = 1$ эканлигини эслатиб ўтамиз. Шунинг учун зарралар системасининг (жисмнинг) тўлиқ импульсини ҳам битта зарраники каби, қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\mathbf{K} = m\alpha\mathbf{u} = \sum m_i \alpha_i \mathbf{u}_i. \tag{158.2}$$

A системадан инерциал B системага ўтишда энергия ва ҳаракат миқдорини алмаштиришнинг ҳамма тенгламалари худди заррага оид (156.6) ва (156.7) тенгламалар каби шаклга эга бўлади.

Яккаланган системага оид сақланиш қонунларини кўриб чиқамиз. (156.6) алмаштириш формулалари зарраларнинг яккаланган (ёпиқ) системаси ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни билан энергияси (массаси) сақланиш қонуни узвий боғлиқ эканлигини кўрсатади. Зарраларнинг яккаланган системаси A инерциал саноқ системасига нисбатан *вақт ўтиши билан ўзгармайдиган ҳаракат миқдорига эга* деб фараз қиламиз. Агар зарраларнинг ўша системаси A системада доимий ҳаракат миқдоригагина эмас, балки доимий энергияга (массага) ҳам эга бўлса, яъни $\mathbf{K} = \text{const}$, $E = \text{const}$ бўлса, ўшандагина бу зарралар системасининг бошқа инерциал B системага нисбатан ҳаракат миқдори доимий бўлади. Яккаланган система учун энергия (масса) ва ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунлари ўзаро узвий боғлиқдир.

Ньютон механикасида ҳамма шароитларда масса ўзгармас деб ҳисобланган, шунинг учун унда зарраларнинг яккаланган системаси массасининг сақланиш қонуни муҳим эканлигига алоҳида эътибор берилмаган.

Релятивистик механика билан Ньютон механикаси тасаввурлари ўртасидаги фарқни оддий мисолда кўрсатиш мумкин. Икки зарра бир-бирига тўқнашяпти, деб фараз қилайлик, унда ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунидан

$$m_1\alpha_1\mathbf{u}_1 + m_2\alpha_2\mathbf{u}_2 = \overset{*}{m}_1\overset{*}{\alpha}_1\overset{*}{\mathbf{u}}_1 + \overset{*}{m}_2\overset{*}{\alpha}_2\overset{*}{\mathbf{u}}_2$$

эканлигини топамиз, бу ерда тўқнашишдан кейинги миқдорлар юлдузча билан белгиланган. Бу муносабат Ньютон механикасида ҳам, релятивистик механикада ҳам тўғри. Бироқ Ньютон механикасида алоҳида зарранинг массаси доимий, релятивистик механикада эса фақат

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = \overset{*}{m}_1\overset{*}{\alpha}_1 + \overset{*}{m}_2\overset{*}{\alpha}_2$$

йиғинди доимийдир. Биринчи ҳолда ҳар бир зарранинг массаси сақланади, иккинчи ҳолда эса зарраларнинг бутун системасининг массаси сақланади (ўзгармайди); зарра яккаланган эмас, шунинг учун у бошқа зарра билан ўзаро таъсир қилишади, бутунича олинганда система яккаланган, у бошқа жисмлар билан ўзаро таъсир қилишмайди.

Бошқача сўз билан айтганда: *яккаланган* жисм (система) ёки яккаланган зарра *инерцияси бўйича* ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилади, уларнинг ҳаракат миқдори ва массаси доимийдир. Улар учун инерция қонуни «эски» механикада ҳам, «янги» механикада ҳам ўринли бўлади. Бироқ яккаланмаган система «янги» механикага кўра («эски» механикадагидан фарқли ўлароқ), фақат ҳаракат миқдоринигина эмас, ўз массасини ҳам ўзгартира олади.

Худди мана шу хулоса умумий кўринишда зарралар системаси массасининг таърифидан келиб чиқади:

$$m\alpha = \sum m_i\alpha_i,$$

бу ерда m — *системанинг* тинчликдаги массаси, m_i — ҳар бир зарранинг тинчликдаги массаси. Агар $\boldsymbol{u}$ тезлик билан ҳаракат қилувчи саноқ системасига ўтсак, у ҳолда ҳаракат миқдори $\boldsymbol{K}' = 0$ ва $\boldsymbol{u}' = 0$. Шунинг учун $\alpha' = 1$ ва

$$m = \sum m_i\alpha_i.$$

Демак, $m \geqslant \sum m_i$, чунки $\alpha_i' \geqslant 1$. Системанинг тинчликдаги массаси алоҳида зарраларнинг тинчликдаги массалари йиғиндисидан катта ёки унга тенг. Ҳамма зарралар бир-бирига нисбатан тинч турганда, $\alpha_i' = 1$ бўлганда ёки $\alpha_i = \alpha'$ бўлганда тенглик ўринли бўлади, бу ҳол ҳамма $\boldsymbol{u}_i' = \boldsymbol{u}'$ бўлганда юз беради.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, икки зарра бир-бирига тўқнашганда ҳар бирининг тинчликдаги массаси ўзгариши ёки икки зарра ўрнига битта зарра ёки иккитадан ортиқ зарра ҳосил бўлиши мумкин. Ҳар бир зарранинг тинчликдаги массаси ўзгармай қолиши ҳам мумкин, бу ҳолда зарб *эластик зарб* дейилади, бошқа ҳолларнинг ҳаммасида зарб *ноэластик зарб* дейилади. Тўқнашишда икки зарра битта зарра ҳосил қилса, зарб бутунлай ноэластик бўлади. Бу тўқнашишларнинг ҳаммасида норелятивистик механикадагидан фарқли ўлароқ, тўқнашишдаги тўлиқ энергия ҳамиша сақланади.

159- §. Инвариантлар

Лоренц алмаштиришларида координаталар ва вақт ўзгаради, улар нисбийдир. Бироқ бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтилганда ўзгармай қоладиган миқдорлар ҳам бор, улар *инвариантлар* деб аталади.

Инвариант миқдорларнинг мавжудлиги принципиал аҳамиятга эга: бир системадан бошқасига ўтилганда ҳамма миқдорлар ҳам ўзгаравермайди. «Нисбийлик назарияси» деган ном назариянинг фақат бир томонини — нисбийликни акс эттиради, ҳақиқатда эса баъзи миқдорлар ўзгаради, баъзилари доимий бўлиб қолаверади. Шунинг учун «нисбийлик назарияси» деган ном назариянинг иккинчи томонини тўғри акс эттирадиган «инвариантлар назарияси» номи каби унча маъқул эмас.

Аввало шуни қайд қиламизки, назариянинг асослари ёруғлик тезлиги инвариантдир деган қоидага таянади. Вақеанинг *интервали* муҳим инвариантдир. Воқеа интервалининг квадрати қуйидагича аниқланади·

$$s^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t^2 - r^2. \qquad (159.1)$$

A системадан B системага ўтилганда y^2 ва z^2 миқдорлар ўзгармайди ва

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \qquad (159.2)$$

бўлади. Бу муносабатни вақт ва x координатани алмаштиришнинг (152.8) формулаларига қараб текшириб кўриш қийин эмас:

$$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2\left[c^2\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2 - (x - vt)^2\right] =$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(c^2t^2 - x^2) = c^2t^2 - x^2.$$

Воқеа интервалининг s катталиги ҳамма инерциал саноқ системаларида ўзгармай қолади.

Шунга ўхшаш, энергия ва ҳаракат миқдорини алмаштиришнинг (157.9) формулаларида қуйидаги миқдор ўзгармай қолиши лозим:

$$\frac{E^2}{c^2} - K^2 = \frac{E^2}{c^2} - (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2). \qquad (159.3)$$

(159.1) ни (159.3) га солиштириб, t га E/c^2 мос келишини $x \sim K_x$, $y \sim K_y$ ва $z \sim K_z$ эканлигини кўрамиз; шунинг учун (159.2) тенгликка

$$c^2\frac{E^2}{c^4} - K_x^2 = c^2\frac{E'^2}{c^4} - K'^2_x$$

тенглик мос келади, яъни

$$\frac{E^2}{c^2} - K^2 = \frac{E'^2}{c^2} - K'^2 \qquad (159.4)$$

миқдор бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтилганда энергия ва ҳаракат миқдорини алмаштириш *инвариантидан* иборат.

Бундан E энергия билан K ҳаракат миқдори ўртасидаги муҳим боғланиш келиб чиқади. B системада жисм тинч турибди деб фараз қилайлик; у ҳолда $K' = 0$ ва $E' = E_0$ — тинч турган жисм энергияси, (159.4) дан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$E^2 - c^2K^2 = E_0^2$$

ёки

$$E^2 = c^2K^2 + E_0^2. \qquad (159.5)$$

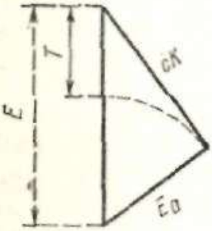
Жисм энергиясининг квадрати жисмнинг тинчликдаги энергияси квадрати билан K ҳаракат миқдорининг c га кўпайтмаси квадрати йиғиндисига тенг (433-расм). Баъзан тинчликдаги энергия $E_0 = mc^2$ кўринишда ёзилади. Унда (159.5) тенглик

$$E^2 - c^2K^2 = m^2c^4 \qquad (159.6)$$

кўринишга келади. Бундан тинчликдаги масса (ва тинчликдаги E_0 энергия) *инвариант* эканлиги келиб чиқади, бу хулоса уларнинг физикавий маъносига мутлақо тўғри келади.

Дарвоқе, v тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг тўлиқ энергияси билан тинчликдаги массаси орасидаги қуйидаги муносабат (159.6) тенгликдан келиб чиқади:

$$E = m\gamma c^2. \qquad (159.7)$$



433- расм.

Дарҳақиқат, жисмнинг ҳаракат миқдори $K = \frac{E}{c^2} v$. Буни (159.6) га қўйиб ва $\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$ эканини эсга олиб, (159.7) тенгликни ҳосил қиламиз.

$T = E - mc^2$ кинетик энергия K ҳаракат миқдори орқали қуйидагича ифодаланади:

$$T = mc^2\left(\sqrt{1 - \frac{K^2}{m^2c^2}} - 1\right),$$

буни (159.6) дан фойдаланиб топиш осон.

$K \ll mc$ бўлганда илдизни қаторга ёямиз ва $c \rightarrow \infty$ да лимитга ўтамиз, у ҳолда

$$T \approx \frac{K^2}{2m} \qquad (159.8)$$

тенгликка, машҳур норелятивистик тенгликка эга бўламиз.

160-§. Тўрт ўлчовли вектор ва интервал

Нисбийлик назарияси механикасида, айниқса, катта тезликлар билан ҳаракатланувчи зарралар динамикаси массаларини анализ қилишда бирликларнинг одатдаги системасидан, масалан, СИ системасидан ёруғлик тезлиги бирлик қилиб олинган ($c = 1$) системага ўтиш қулай.

Дарҳақиқат, кўп формулаларда c қатнашади, бу кўпайтувчи йўқотилса, бу формулалар соддалашиб қолади. Агар $c = 1$ деб олсак, унда яна фақат иккита асосий бирлик танлаб олиш керак. Бу бирликлар сифатида узунлик ва энергия бирликларини оламиз, содда бўлиши учун метр (м) ва жоулни (Ж) оламиз[1]. Бу ҳолда вақт бирлиги қилиб 1 м ни ёруғлик босиб ўтишига кетадиган вақт, яъни $^1/_3 \cdot 10^{-8}$ сек олинади.

Баъзи асосий тенгликларни эсга олайлик (ҳаракатланаётган жисм массаси $m\alpha$ ёки E/c^2, импульси $\boldsymbol{K} = m\alpha\boldsymbol{u} = E\boldsymbol{u}/c^2$):

$$E^2 - c^2K^2 = m^2c^4,\quad T = E - mc^2,\quad \boldsymbol{F} = m\,\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dt} \text{ ва ҳоказо.}$$

Бу формулаларда $c = 1$ деб олиб, уларни [м, Ж, $c = 1$] системада ифодалаймиз. Ҳозирча тегишли миқдорларнинг бу системадаги қийматларини юлдузча билан белгилаймиз.

Ўлчамликлардан фойдаланиб, миқдорларнинг СИ бирликларида ифодаланган қийматлари билан $c = 1$ деб олинган янги система бирликларида ифодаланган қийматлари ўртасидаги боғланиш жадвалини топамиз:

Ўлчамлик / Система	м		Ж			$м^{-1}$	$Ж \cdot м^{-1}$	Ўлчамсиз		
СИ	$\boldsymbol{r}$	ct	mc^2	$c\boldsymbol{K}$	E	$\boldsymbol{w}c^{-1}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{u}c^{-1}$	α	γ
м, Ж, $c = 1$	$\boldsymbol{r}$	t^*	m^*	$\boldsymbol{K}^*$	E	$\boldsymbol{w}^*$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{u}^*$	α	γ

Жадвалдаги ҳамма миқдорларнинг белгиси бизга маълум, бу ерда фақат $\boldsymbol{w} = d\boldsymbol{u}/dt$ тезланишгина ишлатилмади. Жадвалга назар ташласак, бирликлар системаси алмаштирилганда узунлик, энергия, куч ва ўлчамсиз миқдорлар бўлмиш α ва γ миқдорлар ўзгармаганини кўрамиз. Тинчликдаги масса ва ҳаракат миқдори (импульс) янги системада энергия бирликлари билан ўлчанади, тезлик ўлчамсиз бўлиб, у ёруғлик тезлигининг улушлари ҳисобида ўлчанади.

Янги системадан одатдаги системага ўтиш осон: тенгламалардаги юлдузчали миқдорлар ўрнига уларнинг жадвалда биринчи сатрда турган тегишли қийматларини (СИ бирликларидаги қийматларини) қўйиш керак. СИ дан бевосита янги системага ўтиш жуда осон: $c = 1$ деб оламиз, тегишли миқдорлар эса янги системада ифодаланади. Шунинг учун бундан кейин янги системадаги миқдорларни юлдузча билан белгиламай, ўша белгиларнинг ўзини қолдирамиз, фақат ҳамма миқдорларнинг [м, Ж, $c = 1$] системада ифодаланган эканлигини назарда тутамиз.

Бирликларнинг янги системасида $\boldsymbol{K} = m\alpha\boldsymbol{u}$ худди СИ бирликларидагидек бўлади, бироқ $\boldsymbol{K} = E\boldsymbol{u}$ ва $E = m\alpha$ энергия бу ерда c^2 кўпайтувчига фарқ қилади.

---

[1] Метр ва ньютон ёки секунд ва жоуль олишимиз мумкин ва ҳоказо.

Мисол сифатида Лоренц алмаштиришларини, энергия-импульс алмаштиришларини ёзамиз:

$$\begin{gathered} t' = \gamma(t - vx), \quad E' = \gamma(E - vK_x), \\ x' = \gamma(x - vt), \quad K'_x = \gamma(K_x - vE), \\ y' = y, \;\; z' = z, \;\; K'_y = K_y, \;\; K'_z = K_z, \\ \gamma^2(1 - v^2) = 1, \end{gathered} \qquad (160.1)$$

$$\text{инвариант: } s^2 = t^2 - r^2; \text{ инвариант: } m^2 = E^2 - K^2 \qquad (160.2)$$

$x(K_x)$ координата ва $t\,(E)$ вақтни алмаштириш формулалари мутлақо симметрикдир, x координата $\boldsymbol{v}$ йўналиши билан устма-уст тушади.

Ҳар бир воқеа тўрт сон, тўрт «координата»: t, x, y, z билан белгиланади — воқеа t пайтда $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ жойда юз беради. Математикада тўрт сон («координата») дан иборат тартибли система нуқтани тасвирлайди; барча нуқталар тўплами тўрт ўлчовли математик фазо ҳосил қилади. Шунинг учун воқеани тўрт ўлчовли фазо-вақтдаги «нуқта» деб тасаввур этиш мумкин. Бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтилганда нуқталар (воқеалар) координаталари фазо-вақтда Лоренц алмаштиришларига мувофиқ равишда ўзгаради.

Система нисбий ҳаракатининг $\boldsymbol{v}$ тезлиги билан бир хил йўналган x ва x' ўқлардаги координаталар биз текшираётган ҳолда t ва t' га ўзаро боғланган. t' координата t ва x га боғлиқ бўлгани каби, x' координата x ва t га боғлиқ (бу боғланиш текисликдаги Декарт координаталари системасини бирор бурчакка бурган ҳолдаги координаталар орасидаги боғланишга ўхшайди). $\boldsymbol{v}$ га нормал равишда йўналган ўқлардаги координаталар ўзгармайди

Тўрт ўлчовли фазо-вақтда t, x, y, z (ёки t, $\boldsymbol{r}$) компоненталик катталик сифатида $\boldsymbol{R}$ вектор киритиш ва уни $\boldsymbol{R}(t, x, y, z)$ ёки $\boldsymbol{R}\,(t, \boldsymbol{r})$ шаклида ёзиш мумкин. $\boldsymbol{R}$ вектор *тўрт ўлчовли вектор* деб аталади. Одатдаги уч ўлчовли фазода Декарт системаси бурилганда радиус-вектор узунлиги, $\boldsymbol{r}$ нинг узунлиги, яъни $\boldsymbol{rr}$ дан ($\boldsymbol{r}$ нинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтмасидан) чиқарилган квадрат илдиз ўзгармай қолади. Умуман айтганда, координаталар системаси бурилганда икки векторнинг скаляр кўпайтмаси ўзгармай қолади. Тўрт ўлчовли фазо-вақтда Лоренц алмаштиришлари бажарилганда, 158-§ да кўрсатилгандек, s интервал катталиги ўзгармайди. Энди интервал квадратини бундай ёзиш мумкин:

$$s^2 = t^2 - r^2 = t^2 - \boldsymbol{rr} = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \qquad (160.3)$$

$t = 0$ пайтда $\boldsymbol{r} = 0$ координаталар бошида юз берадиган $R(0,0)$ воқеа билан t пайтда $\boldsymbol{r}$ нуқтада юз берадиган $\boldsymbol{R}(t, \boldsymbol{r})$ воқеа орасидаги s интервал t ва $\boldsymbol{r}$ дан t' ва $\boldsymbol{r}'$ га ўтилганда айни бир қийматга эга бўлади. Интервал квадратининг катталигини фазо-вақтдаги $\boldsymbol{R}$ векторнинг

$\boldsymbol{R}$ векторга *скаляр* кўпайтмаси деб тасаввур этиш мумкин, $s^2 = \boldsymbol{RR} = t^2 - \boldsymbol{rr}$. Одатдаги фазода

$$\boldsymbol{rr} = x^2 + y^2 + z^2,$$

яъни $\boldsymbol{r}$ нинг $\boldsymbol{r}$ га скаляр кўпайтмаси векторнинг Декарт системасидаги компоненталари квадратларининг йиғиндисига тенг. Интервалнинг квадрати ҳам $\boldsymbol{R}$ вектор компоненталари квадратларининг алгебраик йиғиндиси бўлиб, фақат вақтга оид компонентаси квадрати ва фазовий компоненталари квадратининг ишораси турлича бўлади. Вақтга оид компонентанинг фазовий компоненталардан қиладиган энг муҳим физикавий фарқи ва фазо-вақтнинг тўрт ўлчовли математик Евклид фазосидан фарқи ана шундан иборат.

$t^2 > r^2$ бўлганда $\boldsymbol{R}$ (0,0) билан $\boldsymbol{R}$ $(t, \boldsymbol{r})$ орасидаги $s = \sqrt{\boldsymbol{RR}}$ интервал *ҳақиқий* сон, $t^2 < r^2$ бўлганда бу интервал *мавҳум* сон бўлади.

Мавҳум интервал модулини s_0 билан белгилаймиз, унда

$$s = is_0 \quad \text{ёки} \quad s_0^2 = t^2 - r^2.$$

Ҳақиқий интервал бир-бирига бирор сабаб билан боғланиши мумкин бўлган икки 0 ва $\boldsymbol{R}$ воқеани ўзаро «боғлайди», яъни бир воқеа иккинчисига таъсир кўрсата олади. Дарҳақиқат, жисм (ёки сигнал) $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор бўйлаб доимий

$$u = r/t < 1$$

тезлик билан ҳаракат қилиб, t вақт ичида 0 нуқтадан $\boldsymbol{r}$ нуқтага (ёки $\boldsymbol{r}$ нуқтадан 0 нуқтага) ўтиши мумкин. Шунинг учун бир нуқтада бўлаётган ҳодисалар бошқа нуқтадаги ҳодисаларга таъсир кўрсатиши мумкин.

Бу ҳолда $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор бўйлаб $\boldsymbol{u}$ тезлик билан ҳаракатланаётган B саноқ системасини тасаввур этиш мумкинки, 0 ва $\boldsymbol{R}$ воқеалар бу системада бир жойда юз беради. $t > 0$ бўлганда $\boldsymbol{u}$ тезлик $\boldsymbol{r}$ нинг йўналиши билан бир хил бўлади, $t < 0$ бўлганда $\boldsymbol{u}$ тезлик $\boldsymbol{r}$ га тескари бўлади. Биринчи ҳолда B системанинг саноқ боши t вақт ичида 0 дан $\boldsymbol{r}$ га кўчади ва иккала воқеа B системанинг *бир жойида* $(\boldsymbol{r}' = 0)$ юз беради. Иккинчи ҳолда (яъни $t < 0$ да) B системанинг *саноқ боши t вақт ичида $\boldsymbol{r}$ нуқтадан 0 га ўтади ва $t = 0$ пайтда* A системанинг саноқ боши билан устма-уст тушади. B системада иккала воқеа юз бергунча ўтган t' вақт оралиғи

$$t'^2 - r'^2 = t^2 - r^2$$

интервалнинг доимий эканлигидан аниқланади. $r' = 0$ бўлгани учун

$$t' = \sqrt{t^2 - r^2} = t\sqrt{1 - u^2} = \frac{t}{\alpha},$$

чунки $r = ut$.

Ҳақиқий интервал *вақтга ўхшаш* интервал деб аталади, чунки ҳамиша шундай саноқ системасини кўрсатиш мумкинки, бу системада тайинли икки воқеа орасидаги интервал фақат вақт оралиғи билан аниқланади.

Агар $t^2 < r^2$ бўлган ҳолда $\boldsymbol{R} = 0$ ва $\boldsymbol{R}$ воқеалар бир-бирига мавҳум интервал билан «боғланган» бўлса, бу воқеалар бир-бирига бирор сабаб билан боғланган бўлмайди, чунки ҳеч қандай жисм (сигнал) $u = r/t > 1$ тезлик билан ҳаракат қила олмайди. $\boldsymbol{R} = 0$ воқеа $\boldsymbol{R}$ воқеага таъсир кўрсата олмайди. Бу ҳолда ҳамиша шундай саноқ системасини кўрсатиш мумкинки, бу системада иккала воқеа ҳар хил жойда бир вақтда юз беради. Бу хулоса интервалнинг доимий эканлиги шартидан келиб чиқади, чунки интервал модулининг квадрати

$$s_0^2 = r^2 - t^2 = r'^2 - t'^2 > 0.$$

Шунинг учун ўзида $t' = 0$ бўладиган B система ҳамма вақт мавжуд, яъни бу системада иккала воқеа

$$r' = \sqrt{r^2 - t^2}$$

масофада *бир вақтда* юз беради. Агар бу B система $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор бўйлаб v тезлик билан ҳаракат қилса, у ҳолда B системада вақт $t' = \gamma(t - rv)$ бўлади. Агар B система тезлигининг катталигини[1]

$$v = \frac{t}{r} < 1$$

бўладиган қилиб олсак, $t' = 0$ бўлади. Бошқача айтганда, бундай B системада иккала воқеа бир вақтда юз беради. Бу саноқ системасида воқеалар орасидаги масофа қуйидагича бўлади:

$$r' = \sqrt{r^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - r^2 v^2} = r\sqrt{1 - v^2} = \frac{r}{\gamma},$$

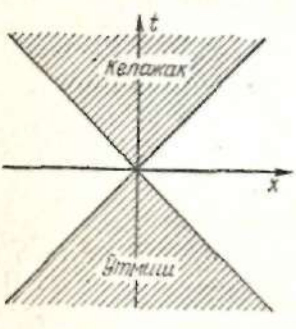
тезлик $v < 1$.

Мавҳум интервал *фазога ўхшаш* интервал деб аталади, чунки ҳамма вақт шундай инерциал саноқ системаси мавжудки, бу системада иккала воқеа ҳар хил жойда бир вақтда юз беради.

$s = \sqrt{\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}} = 0$ ва $t^2 = r^2$ бўлган нолинчи интервал $\boldsymbol{R} = 0$ воқеага ёруғлик сигнали билан боғланган воқеаларга мос келади; бу интервал *ёруғликка ўхшаш* интервал деб аталади. Бу интервал фазога ўхшаш интервалли воқеаларни вақтга ўхшаш интервалли воқеалардан ажратиб туради. Нолинчи интервалли ҳамма воқеалар қуйидаги тенглама билан аниқланадиган сиртда жойлашади:

$$t^2 - r^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (160.4)$$

бу сирт фазо-вақтдаги «конус» сирти бўлиб, бу конуснинг учи координаталар бошида, ўқи эса t вақт ўқи билан бир хил. Бу конус *ёруғлик* конуси деб аталади.



434- расм.

---

[1] Қабул қилинган бирликларни унутиш ярамайди, уларда v тезликнинг ўлчови йўқ. СИ системада $v = c\,(ct/r)$ ва $r^2 > c^2t^2$.

Ёруғлик конусининг (x, t) координата текислиги билан кесилишидан ҳосил бўлган кесими 434-расмда кўрсатилган. t ўқдан ўтадиган ҳар қандай текислик билан кесилганда ҳам худди шундай кесимлар ҳосил бўлади. $t < 0$ бўлганда юз берадиган ва ёруғлик конуси ичида ётадиган (штрихланган қисм) воқеалар принцип жиҳатдан олганда 0 нуқтадаги воқеага таъсир кўрсата олар эди, бу воқеалар 0 га нисбатан *ўтмиш* ҳисобланади. Иккинчи томондан, 0 нуқтадаги воқеа $t > 0$ бўлганда ёруғлик конуси ичида ётадиган воқеаларга (*келажакка*) таъсир кўрсата олади. Ёруғлик конусидан ташқарида ётган воқеалар 0 нуқтадаги воқеаларга ҳеч қандай таъсир кўрсата олмайди, улар 0 нуқтадаги воқеага нисбатан мутлақо «бефарқдир».

Шу чоққача биз $\mathbf{R} = 0$ ва $\mathbf{R}$ воқеалар орасидаги интервални текшириб келдик. Бироқ ихтиёрий икки $\mathbf{R}_1$ ва $\mathbf{R}_2$ воқеа орасидаги интервални ҳам худди шу йўл билан топиш мумкин. Интервал квадрати қуйидагига тенг бўлишини бевосита ҳисоблаб кўрсатиш мумкин:

$$s^2 = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)^2 = (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) =$$
$$= (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2].$$

Лоренц алмаштиришлари қўлланилганда

$$s^2 = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)^2 = (\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}'_1)^2, \qquad (160.5)$$

s катталик ўзгармайди. Бундан олдин кўриб ўтилган интервал бу умумий интервалнинг хусусий ҳоли бўлиб, у $\mathbf{R}_1 = 0$ бўлган ҳолга мос келади. Худди шунингдек, $\mathbf{R}$ ва $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$ воқеалар орасидаги интервалнинг квадрати қуйидагига тенг:

$$ds^2 = d\mathbf{R}\, d\mathbf{R} = dt^2 - d\mathbf{r}\, d\mathbf{r} = dt^2 - dr^2.$$

Интервалнинг умумий таърифини эътиборга олиб, ёруғлик конусининг учини фазо-вақтнинг ихтиёрий $\mathbf{R}_1$ нуқтаси орқали ўтади деб тасаввур қилиш ва дунёдаги ҳамма воқеаларни интервал квадратининг ишорасига қараб $\mathbf{R}_1$ воқеага нисбатан келажак, ўтмиш ва мутлақо бефарқ соҳаларига ажратиш мумкин.

161-§. Нисбийлик назариясининг механикаси

Одатдаги фазонинг уч ўлчовли $\mathbf{r}$ векторидан фарқли равишда $\mathbf{R}$ вектор тўрт ўлчовли вектор (4-вектор) дейилади. Декарт координаталари системасини бирор бурчакка бурганда $\mathbf{r}$ векторнинг компоненталари каби ўзгарадиган учта сон билан тасвирланган ҳар қандай физикавий катталик, таърифга кўра, уч ўлчовли фазодаги вектор катталик ёки содда қилиб ўша фазодаги вектор деб аталади. Шунга ўхшаш, маълум бир физикавий катталикларни ифода этадиган тўрт сондан, яъни бир инерциал саноқ системасидан бошқасига ўтилганда Лоренц алмаштиришларига мувофиқ равишда ўзгарадиган сонлардан иборат тартибли ҳар қандай тўплам фазо-вақтнинг тўрт ўлчовли вектори деб ҳисобланади. Тўрт ўлчовли икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бундай аниқланади:

$$R_1R_2 = t_1t_2 - r_1r_2, \qquad (161.1)$$

бу кўпайтма Лоренц алмаштиришларининг инвариантидир[1].

R вектор фазо-вақтдаги нуқтанинг инерциал саноқ системасига (масалан, A системага) нисбатан «вазиятининг» векторидир. Тезликнинг тўрт ўлчовли векторини аниқлаймиз. Агар зарра фазода $u = \frac{dr}{dt}$ тезлик билан ҳаракат қилса, у ҳолда тўрт ўлчовли R вектор вақтга боғлиқ равишда ўзгаради: равшанки, dt вақт ичида бу вектор $dR(dt, dr)$ катталикка ўзгаради, бу катталик тўрт ўлчовли вектор бўлиб, унинг «узунлиги» (тегишли интервал) Лоренц алмаштиришларида ўзгармайди. Бироқ $\frac{dR}{dt}\left(1, \frac{dr}{dt}\right)$ нисбат тўрт ўлчовли векторнинг таърифига мувофиқ тўрт ўлчовли вектор бўлмайди, чунки B системага ўтилганда 1, u_x, u_y, u_z катталиклар t, x, y, z каби ўзгармайди.

Шунинг учун dt вақт орттирмаси ўрнига «хусусий вақт» τ деб аталадиган бошқа миқдорнинг орттирмаси олинади; $d\tau$ қуйидагича аниқланади:

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2. \qquad (161.2)$$

Бу ифода (t, r) ва $(t + dt,\ r + dr)$ воқеалар орасидаги интервалнинг квадратидир. $d\tau$ катталикни қуйидаги тарзда талқин этиш мумкин.

A системага нисбатан доимий $u = \frac{dr}{dt}$ тезлик билан ҳаракат қилувчи системада соат бор, бу соат dt вақт ичида вақт $d\tau$ миқдорда орттирма олганини кўрсатади. У ҳолда ҳаракатланаётган системадаги вазият радиус-вектори $r' = \text{const}$ ва $dr' = 0$. Бу икки системадаги элементар интервални ёзамиз:

$$d\tau^2 - dr'^2 = dt^2 - dr^2$$

ва $dr' = 0$ деб фараз қилиб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$d\tau = dt\ \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1-u^2}\,.$$

Қисқалик учун

$$\alpha\, d\tau = dt \qquad (161.3$$

деб ёзиш мумкин, бу ерда аввалгича $\alpha = (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}}$. Равшанки, $d\tau$ катталик dR интервалга ўхшаб, Лоренц алмаштиришларининг инвариантидир.

---

[1] Буни (160.1) формула билан бевосита ҳисоблаш йўли билан текшириб кўриш мумкин.

«Хусусий» τ вақтнинг орттирмаси жисм билан бирга доимий $\boldsymbol{u}$ тезликда ҳаракатланувчи системада тинч турган соатнинг муайян пайтда кўрсатган вақт орттирмасидир. $\boldsymbol{u}$ тезлик катталиги ўзгариши билан $d\tau$ ва dt орасидаги муносабат ўзгаради, чунки α нинг катталиги ўзгаради. Шунинг учун хусусий вақтни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-u^2}\, dt. \tag{161.4}$$

Равшанки, $\tau_2 - \tau_1$ хусусий вақт $t_2 - t_1$ вақтдан ҳамма вақт кичик бўлади, харакатланаётган системада вақт «секин ўтади».

Фазо-вақтдаги *«тезликнинг» тўрт ўлчовли вектори* деб,

$$\boldsymbol{U} = \frac{d\boldsymbol{R}}{d\tau} \tag{161.5}$$

катталикка айтилади, бу векторнинг компоненталари Лоренц алмаштиришларига мувофиқ равишда ўзгаради. «Тезликнинг» тўрт ўлчовли вектори компоненталарини қуйидагича топамиз:

$$\boldsymbol{U} = \frac{d\boldsymbol{R}\,(dt,\ d\boldsymbol{r})}{d\tau} = \boldsymbol{U}\left(\frac{dt}{d\tau},\ \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right) = \boldsymbol{U}(\alpha,\ \alpha\,\boldsymbol{u}), \tag{161.6}$$

чунки $\frac{dt}{d\tau} = \alpha$, $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \alpha\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \alpha\,\boldsymbol{u}$. Бинобарин, зарра (жисм) «тезлигининг» тўрт ўлчовли вектори вақтга оид α компонентага ва фазовий $\alpha\boldsymbol{u}$ компоненталарга эга, бу ерда $\boldsymbol{u}$ — одатдаги тезлик (уч ўлчовли вектор). U «тезлик» векторининг «узунлиги» 1 га тенг эканлигини қайд қиламиз. Дарҳақиқат,

$$U^2 = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = \alpha^2 - \alpha^2 u^2 = \alpha^2(1-u^2) = 1; \tag{161.7}$$

бундай бўлиши керак ҳам эди, чунки $d\tau$ катталик $d\boldsymbol{R}$ интервалга тенг.

«Тезланишнинг» тўрт ўлчовли вектори тушунчасини ҳам киритиш мумкин (бироқ у деярли қўлланилмайди):

$$\boldsymbol{W} = \frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau} = \boldsymbol{W}\left(\frac{d\alpha}{d\tau},\ \frac{d}{d\tau}(\alpha\boldsymbol{u})\right) = \boldsymbol{W}\left(\alpha\,\frac{d\alpha}{dt},\ \alpha\,\frac{d\,(\alpha\boldsymbol{u})}{dt}\right). \tag{161.8}$$

Импульснинг тўрт ўлчовли вектори кўп қўлланилади, уни масса билан тезлик кўпайтмаси сифатида таърифлаш табиий:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}(m\alpha,\ m\alpha\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{P}(E,\ \boldsymbol{K}). \tag{161.9}$$

Импульснинг тўрт ўлчовли векторининг вақтга оид компонентаси энергияга тенг, фазовий компоненталари ҳаракат миқдорининг (импульснинг уч ўлчовли векторининг) компоненталарига тенг. Шунинг учун $\boldsymbol{P}$ вектор фазо-вақтдаги *энергия-импульс вектори* деб аталади. Равшанки, бу вектор «узунлигининг» квадрати қуйидагига тенг:

$$P^2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = E^2 - K^2.$$

Одатда бу тенглик

$$\mathbf{PP} = E^2 - \mathbf{K}^2 = m^2 \qquad (161.10)$$

шаклда ёзилади, чунки жисм тинч турган системада $\mathbf{K}' = 0$ ва E энергия тинчликдаги m масса энергиясига тенг бўлади. Бу тенгламани қуйидаги йўл билан ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$\mathbf{PP} = m^2 \mathbf{UU} = m^2,$$

чунки $\mathbf{UU} = 1$.

Энергия, масса ва ҳаракат миқдори ўртасидаги универсал (161.10) муносабатдан энергия билан кучнинг иши ўртасидаги муносабат келиб чиқади. Агар (161.10) тенглик вақт бўйича[1] интегралланса,

$$E \frac{dE}{dt} = \mathbf{K} \frac{d\mathbf{K}}{dt}$$

ёки

$$E \frac{dE}{dt} = \mathbf{KF}$$

тенгликларга эга бўламиз; чунки $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}$.

$E = m\alpha$ ва $\mathbf{K} = m\alpha\mathbf{u}$ эканлигини ҳисобга олиб, ўзимизга таниш бўлган

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{Fu} \qquad (161.11)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик СИ системасида ҳам ўшандай кўринишда бўлади. Дарҳақиқат, t ни ct га ва $\mathbf{u}$ ни $\mathbf{u}/c$ га алмаштириб, c қисқариб кетишини кўрамиз, чунки E ва $\mathbf{F}$ лар ўзгармайди. (161.11) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dE = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}.$$

Энергия орттирмаси, Ньютон механикасидаги каби, заррага (жисмга) таъсир этувчи ташқи куч бажарган ишга тенг. Ҳаракатланаётган жисм энергиясининг релятивистик қийматини аниқлашда биз бу тенгликдан фойдаланган эдик, унда бу тенгликка $\mathbf{F}$ нинг қуйидаги қийматини қўйган эдик:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} = m \frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{u}).$$

Сўнгра тўрт ўлчовли

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \qquad (161.12)$$

---

[1] τ бўйича дифференциаллаш ҳам мумкин, натижа бир хил чиқади.

вектор ҳосил қилиш ва уни «кучнинг» фазо-вақтдаги тўрт ўлчовли вектори деб ҳисоблаш табиий. Унинг компоненталари қийматини аниқлаш учун ўша йўлдан фойдаланамиз:

$$f = f\left(\frac{dE}{d\tau}, \frac{dK}{d\tau}\right) = f\left(\alpha\frac{dE}{dt}, \alpha\frac{dK}{dt}\right) = f\left(\alpha\frac{dE}{dt}, \alpha F\right).$$

Бинобарин, кучнинг тўрт ўлчовли векторининг «вақтга оид» компонентаси энергиядан вақт бўйича олинган ҳосила (қувват) билан α нинг кўпайтмасига тенг, фазовий компоненталари кучнинг α га кўпайтирилган уч ўлчовли вектори компоненталарига тенг. Ньютоннинг «масса билан тезланиш кўпайтмаси кучга тенг» дейилган қонунига шаклан ўхшаш қилиб «кучни» қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$f = m\frac{dU}{d\tau} = mW. \qquad (161.13)$$

P ва f векторлар фазо-вақтда ортогоналдир. Дарҳақиқат, (160.10) га асосан,

$$PP = m^2,$$

шунинг учун

$$P\frac{dP}{d\tau} = Pf = 0,$$

бу шартдан (161.11) тенгликни ҳосил қилиш мумкин.

Зарраларнинг яккаланган системаси (яккаланган жисм) учун сақланиш қонунини энди қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum P_i = \text{const}. \qquad (161.14)$$

Бу қонунда энергиянинг

$$\sum E_i = \text{const}$$

сақланиш қонуни ҳам, ҳаракат миқдорининг

$$\sum K_i = \text{const}$$

сақланиш қонуни ҳам бор. Тўрт ўлчовли векторлар билан амал бажарганда бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси Лоренц алмаштиришларининг инварианти эканлигини назарда тутиш керак. Масалан, $PR = Et - Kr$, $fR = \alpha\frac{dE}{dt} - \alpha Fr$ ва бошқа скаляр кўпайтмалар — инвариантлардир.

Хулоса қилиб, нисбийлик назариясида нуқта кинематикаси ва динамикасининг асосий таърифларини тўрт ўлчовли векторлар ёрдамида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$
\begin{array}{llll}
\text{«вазият»} & \boldsymbol{R}, & \text{«тезланиш»} & \boldsymbol{W} = \dfrac{d\boldsymbol{U}}{d\tau}, \\
\text{«тезлик»} & \boldsymbol{U} = \dfrac{d\boldsymbol{R}}{d\tau}, & \text{«импульс»} & \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U}, \\
 & & \text{«куч»} & f = \dfrac{d\boldsymbol{P}}{d\tau} = m\dfrac{d\boldsymbol{U}}{d\tau} = m\boldsymbol{W}.
\end{array}
\tag{161.15}
$$

Равшанки, бу таърифларнинг ҳаммаси шаклан Ньютон механикасига тўлиқ мос келади, фақат тўрт ўлчовли векторлар ўрнига уч ўлчовли векторлар қўйиш, τ «вақтни» t билан алмаштириш ва массани аввалгича қолдириш лозим.

Бу ерда шуни қайд қилиш зарурки, тўрт ўлчовли векторларнинг компоненталари [м, Ж, $c = 1$] системада ёзилган; булар СИ бирликларида бир оз бошқача кўринишда бўлади. Таққослаш учун қуйидаги жадвални келтирамиз:

Вектор Система	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{P}$	f
СИ	ct, $\boldsymbol{r}$	αc, $\alpha\boldsymbol{u}$	$\alpha c\dfrac{d\alpha}{dt}$, $\alpha\dfrac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dt}$	$c^{-1}E$, $\boldsymbol{K}$	$c^{-1}\alpha\dfrac{dE}{dt}$, $\alpha\boldsymbol{F}$
м, Ж, $c = 1$	t, $\boldsymbol{r}$	α, $\alpha\boldsymbol{u}$	$\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}$, $\alpha\dfrac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dt}$	E, $\boldsymbol{K}$	$\alpha\dfrac{dE}{dt}$, $\alpha\boldsymbol{F}$

Фақат вақтга оид компоненталарнинг шакли ўзгаради, фазовий компоненталар шакли аввалгича қолади. $\boldsymbol{R}$ ва f векторлардан бошқа тўрт ўлчовли векторлар компоненталарининг ўлчамликлари бошқача бўлишини эътиборга олиш лозим.

Биз асосий таърифларнинг фақат шакли Ньютон механикасидаги таърифлар шакли билан бир хил эканлигини айтиб ўтдик. Аслида, албатта, ёруғлик тезлигининг приёмник (ёруғликни қабул қилгич) ва манба ҳаракатига боғлиқ эмаслиги постулати ва нисбийлик постулатига асосланган аниқроқ релятивистик механиканинг бирор ҳоли сифатидаги механикага, яъни Ньютон механикасига $u \ll 1$ бўлгандагина ўтамиз. Бу қоидалардан ягона фазо-вақт тўғрисидаги, масса, узунлик ва вақтнинг саноқ системасига боғлиқ эканлиги тўғрисидаги, энергия билан масса орасидаги ўзгармас муносабат тўғрисидаги тасаввурлар келиб чиқди. Ҳаракат тезлиги ёруғлик тезлигига нисбатан жуда кичик бўлгани туфайли бу муносабатлар норелятивистик механикада бўлмайди, Лоренц алмаштиришлари Галилей алмаштиришларига айланади, фазо ва вақт бир-бирига боғлиқ бўлмайди, ҳар қандай саноқ системаларида масса, узунлик ва вақт ўзгармайди, энергия жисм массасига боғлиқ бўлмайди.

162-§. Икки зарранинг эластик зарби назарияси

Икки зарранинг эластик тўқнашиши тўғрисидаги масалада қисқагина ўзаро таъсирдан сўнг (зарб пайтида) зарраларнинг тинчликдаги массаси ўзгармай қолган ҳол текширилади. Бошқа ҳолларнинг ҳаммасини эластик бўлмаган зарблар соҳасига тегишли деб ҳисоблаш лозим, буларда тўқнашувчи зарраларнинг тинчликдаги энергияси ўзгара олади ва ҳатто зарб натижасида янги зарралар пайдо бўла олади («емирилиш»). Ҳосил бўлган зарранинг тинчликдаги массаси ортадиган бутунлай ноэластик зарбнинг классик ҳолини бу зарблар жумласига киритиш лозим, албатта.

Эластик зарб (шунингдек, ноэластик зарб) масаласини ҳал қилишда ҳаракатни «лаборатория» саноқ системасига нисбатан текшириш ёки аввало «массалар маркази системасида» (бу ерда тўлиқ ҳаракат миқдори нолга тенг) текшириб, кейин лаборатория системасига ўтиш мумкин. Иккинчи усул маъқулроқ. Буни яққол тасаввур этиш учун аввало биринчи усулни, кейин иккинчи усулни кўриб чиқамиз.

Массаси m_1 бўлган биринчи *1* зарра ҳаракатланиб бориб, массаси m_2 бўлган ва тинч турган иккинчи *2* заррага урилади деб фараз қиламиз. Бу ҳол тажриба шароитига мувофиқ келади; бу тажрибаларда тезлашган зарралар оқими «нишонга», яъни тинч турган атом ядроларига тушади.

Тўқнашишдан олдин *1* зарранинг ҳаракат миқдори $\mathbf{K}$ га тенг бўлиб, унинг тўлиқ энергияси $E_{\text{и}}$:

$$E_{\text{и}}^2 = K^2 + m_1^2. \qquad (162.1)$$

Иккинчи зарранинг энергияси m_2 га тенг.

Тўқнашишдан кейин *1* ва *2* зарраларнинг ҳаракат миқдорлари (импульслари) мос равишда $\mathbf{K}_1$ ва $\mathbf{K}_2$, энергиялари E_1 ва E_2 бўлади. Бу ҳол учун сақланиш қонунларидан

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \qquad (162.2)$$

$$E = E_{\text{и}} + m_2 = E_1 + E_2 \qquad (162.3)$$

муносабатлар келиб чиқади.

Тўқнашишдан кейин *2* зарранинг тезлиги *1* зарранинг тўқнашишдан олдинги тезлигига ($\mathbf{K}$ векторга) ϑ бурчак остида йўналган бўлади деб фараз этайлик. У ҳолда ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини 435-расмда кўрсатилгандек қилиб тасвирлаб,

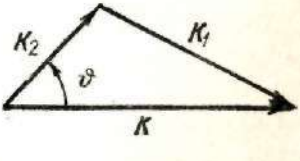
$$K_1^2 = K^2 + K_2^2 - 2KK_2\cos\vartheta \qquad (162.4)$$

шаклда ёзиш мумкин. K_1^2 ни маълум E, m_2 ва K орқали ифодалаб, (162.4) га қўямиз. *1* зарра ҳаракат миқдорининг квадрати

$$K_1^2 = E_1^2 - m_1^2. \qquad (162.5)$$

(162.1) ва (162.3) тенгликларни ҳисобга олсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$K_1^2 = E_1^2 + K^2 - (E - m_2)^2. \qquad (162.6)$$



435- расм.

$E_2^2 = K^2 + m_2^2$ эканини эътиборга оламиз. У ҳолда энергиянинг (162.3) сақланиш қонуни

$$E_1 = E - \sqrt{K^2 + m_2^2} \qquad (162.7)$$

кўринишга келади. Буни аввало (162.6) га, сўнгра (162.4) га қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$(E - \sqrt{K_2^2 + m_2^2})^2 = (E - m_2)^2 + K_2^2 - 2KK_2 \cos\vartheta.$$

Радикални йўқотиб, ϑ бурчакнинг қиймати ҳар қандай бўлганда маълум K, E, m_2 ва номаълум K_2 миқдорни бир-бирига боғловчи

$$E^2K_2^2 = K^2K_2^2\cos^2\vartheta + 2Em_2KK_2\cos\vartheta \qquad (162.8)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. *2* зарранинг тўқнашишдан кейинги ҳаракат миқдорининг мумкин бўлган ҳамма қийматларини бу тенгламадан топиш мумкин.

$K_2 \cos\vartheta = x$, $K_2 \sin\vartheta = y$ деб белгилаб олиб, уларни (162.8) га қўямиз. Натижада K_2 вектор охирининг мумкин бўлган ҳамма қийматларини тасвирлайдиган эгри чизиқ тенгламасини топамиз. Бу

$$E^2(x^2 + y^2) = K^2x^2 + 2EKm_2x \qquad (162.9)$$

тенглама $x = y = 0$ координаталар бошидан, яъни K вектор бошидан ўтувчи эллипс тенгламасидир. Бу эллипснинг x ўқдаги ярим ўқи:

$$a = \frac{m_2E}{E^2 - K^2}K, \qquad (162.10)$$

y ўққа параллел ўқдаги ярим ўқи:

$$b = \frac{m_2}{\sqrt{E^2 - K^2}}K. \qquad (162.11)$$

Шуни қайд қиламизки, $b < a$, чунки

$$b = a\sqrt{1 - \frac{K^2}{E^2}}. \qquad (162.12)$$

Агар a нинг ифодасини ўзгартирсак, $m_1 > m_2$ бўлганда $2a < K$ бўлишини, $m_1 < m_2$ бўлганда $2a > K$ бўлишини, $m_1 = m_2$ бўлганда $2a = K$ бўлишини кўрамиз. Дарҳақиқат, (162.1) ва (162.3) ни эътиборга олиб,

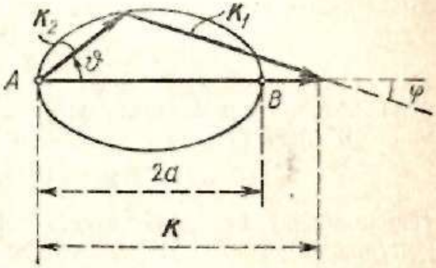
$$E^2 - K^2 = 2E_н m_2 + m_1^2 + m_2^2 = 2Em_2 + m_1^2 - m_2^2 \qquad (162.13)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ифодани (162.10) га қўйиб, a ни топамиз:

$$a = \frac{K}{2 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{Em_2}}. \qquad (162.14)$$

Бундан юқорида айтилган фикрлар келиб чиқади.

Шундай қилиб, $m_1 > m_2$ бўлганда K_2 векторнинг охири чизадиган эллипс 436-расмда кўрсатилган шаклда бўлади. Тўқнашгандан сўнг иккала зарра ҳамиша **K** йўналишида олға томон учади. ϑ бурчак $\pi/2$ дан 0 гача бўлган ихтиёрий қийматлар олади, бурчак $\varphi < \varphi_{макс}$, $\varphi_{макс}$ эса $\pi/2$ дан кичик. Умуман айтганда, φ нинг бир қийматига ϑ нинг икки қиймати мос келади. *B* нуқта «пешанадан бўлган зарбни» билдиради, тўқнашгандан кейин иккала зарра **K** йўналишида ҳаракат қилади. *A* нуқта *1* зарранинг тинч турган *2* заррага тегмасдан, у билан ўзаро таъсир қилишмасдан ўтиб кетишини, яъни $K_1 = K$ бўлишини билдиради.

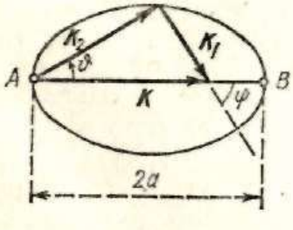


436- расм.

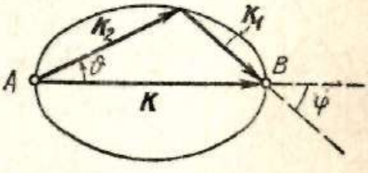
$m_1 < m_2$ бўлганда тўқнашишдан кейинги импульслар манзараси бир оз бошқача бўлиб, у 437- расмда тасвирланган. Келаётган зарранинг φ оғмалик бурчаги 0 дан π гача ўзгаради, *1* зарра тўқнашишдан кейин орқага кетиши («акс этиши») мумкин. *B* нуқта «пешанадан бўлган» зарбга мос келади, бу ҳолда *1* зарра орқага кетади, *2* зарра эса **K** йўналишида олға томон ҳаракат қилади, $K_2 > K$. *A* нуқта зарраларнинг бир-бирига тегмай қолишига мос келади. ϑ нинг ҳар бир қийматига φ нинг бир қиймати мос келади.

$m_1 = m_2$ бўлган ҳолда бўлиши мумкин бўлган тўқнашишлар манзараси 438- расмда кўрсатилган. Бу ерда φ бурчак 0 дан $\pi/2$ гача ўзгаради. «Пешанадан бўлган» зарбда (*B* нуқта) *1* зарра тўхтайди, *2* зарра эса *1* зарранинг тўқнашишдан олдинги тезлиги билан ҳаракатини давом эттиради, $\boldsymbol{K_2} = \boldsymbol{K}$, $\varphi = 0$.

Энди икки зарранинг эластик тўқнашиши масаласини «массалар маркази» системасида кўриб чиқамиз. Бу системада натижавий ҳаракат миқдори нолга тенг, шунинг учун иккала зарра бир-бирига томон ҳаракат қилиб, тўқнашгандан сўнг бир хил ҳаракат миқдор-



437- расм.



438- расм.

лари олиб, қарама-қарши йўналишларда учиб кетади. Зарралар системаси «массалар марказининг» $\boldsymbol{v}$ тезлиги қуйидагича ёзиладиган (қабул қилинган бирликларда) машҳур тенгликдан топилади:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\sum K_i}{\sum E_i}.$$

Биз кўриб чиқаётган ҳолда массалар маркази системасининг лаборатория саноқ системасига нисбатан олган тезлиги

$$\boldsymbol{v} = \frac{K}{E} \tag{162.15}$$

бўлади. Массалар маркази системасида тўқнашишдан олдинги ҳаракат миқдори ва энергиянинг сақланиш қонунлари:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0,\ e_1 + e_2 = E', \tag{162.16}$$

тўқнашишдан кейинги ҳаракат миқдори ва энергиянинг сақланиш қонунлари:

$$\varkappa_2^* + \varkappa_2^* = 0,\ e_1^* + e_2^* = E,$$

бу ерда $\varkappa$ — *зарранинг тегишли импульси,* e — унинг тегишли энергияси.

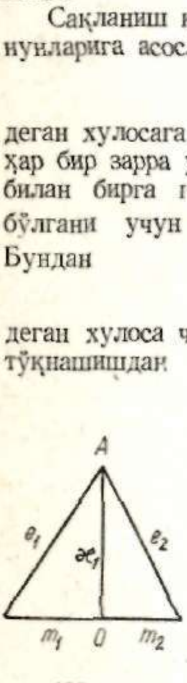
Сақланиш қонунлари ва тинчликдаги массанинг доимийлиги қонунларига асосланиб,

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_1^* = \varkappa_2^* = \varkappa, \tag{162.17}$$

деган хулосага келиш мумкин. Дарҳақиқат, тўқнашишдан олдинги ҳар бир зарра учун $e^2 = \varkappa^2 + m^2$ қонунни 439-расмда $\varkappa_1 = \varkappa_2$ шарт билан бирга геометрик равишда тасвирлаймиз. $e_1^* + e_2^* = e_1 + e_2$ бўлгани учун OA масофа $\varkappa_1^* = \varkappa_2^* = \varkappa$ га тенг бўлиши керак. Бундан

$$e_1 = e_1^*,\ e_2 = e_2^* \tag{162.18}$$

деган хулоса чиқади. Ҳар бир зарранинг тўқнашишдан олдинги ва тўқнашишдан кейинги импульсларининг абсолют қийматлари бир-бирига тенг, массалар маркази системасидаги тўқнашиш манзарасининг энг асосий соддалаштириши ана шундан иборат. Тўқнашишда зарралар ҳаракат миқдорларининг фақат йўналиши ўзгариши мумкин (440-расм), φ бурчак исталганча бўла олади.



439- расм.

Массалар маркази системаси лаборатория саноқ системасига нисбатан $\boldsymbol{v}$ тезлик билан $\boldsymbol{K}$ йўналишида *ҳаракат қилади, шунинг учун унда* тинч турган *2* зарра тўқнашишдан олдин массалар маркази системасида $\varkappa_2$ импульсга эга бўлади:

$$\varkappa_2 = -\gamma m_2 \boldsymbol{v},$$

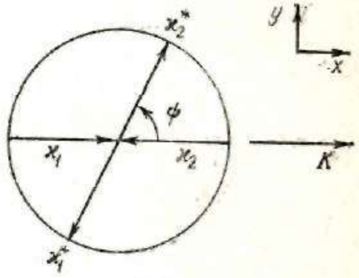
бу ерда одатдагидек $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. Бундан (162.17) га асосан

$$\varkappa = \gamma m_2 v \tag{162.19}$$

деган, *2* зарранинг массалар маркази системасидаги энергияси

$$e_2 = \gamma m_2 = e_2^* \tag{162.20}$$

деган хулоса чиқади. *1* зарранинг массалар маркази системасидаги энергияси қийматини ҳаракат миқдори ва энергияни алмаштириш қонунларига асосан ёзиш мумкин, бироқ бу ифода келгусида керак эмас.



440- расм.

Энди массалар маркази системасидан лаборатория системасига ўтамиз ва бу системада *2* зарранинг тўқнашишдан кейинги импульсининг $\boldsymbol{K}_2$ векторини топамиз. $\boldsymbol{K}_2$ векторнинг $\boldsymbol{K}$ (ёки $\boldsymbol{v}$) йўналишидаги проекциясини x билан, $\boldsymbol{v}$ га тик йўналишдаги проекциясини y билан белгилаймиз. Унда 440-расмдаги белгилардан фойдалансак, импульснинг ҳаракатланувчи массалар маркази системасидан лаборатория системасига ўтишдаги алмаштириш формулаларига асосан, қуйидаги тенгламаларни ёзиш мумкин:

$$x = \gamma(\varkappa \cos\psi + v e_2) = \gamma\varkappa(1 + \cos\psi), \tag{162.21}$$

$$y = \varkappa \sin\psi \tag{162.22}$$

((162.19) ва (162.20) га қ.). Бу тенгламалардан ψ ни йўқотиб, эллипс тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{x}{\varkappa\gamma} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{\varkappa}\right)^2 = 1. \tag{162.23}$$

Бу эса координаталар бошидан ($x = 0$, $y = 0$) ўтадиган ва иккинчи зарранинг тўқнашишдан кейинги ҳаракат миқдори векторининг учи чизган ўша (162.9) эллипснинг тенгламасидир. (162.15) ва (162.19) ларни эътиборга олганда, бу эллипснинг

$$a = \gamma\varkappa, \quad b = \varkappa$$

ярим ўқлари (162.10) ва (162.11) қийматларга тенг бўлиши равшан.

Иккинчи усул анча қулай, чунки м.м. системасида тўқнашиш қонунлари соддароқ ифодаланади.

Агар зарралар ноэластик равишда тўқнашса ва зарраларнинг тинчликдаги массалари тўқнашишда ўзгарса, у ҳолда м.м. системасида тўқнашишдан кейинги импульслар тенг ва бир-бирига қарама-қарши бўлади, бироқ катталиги тўқнашишдан олдингича бўлмайди.

Ҳисоблаш мураккаблашиб қолади, шунинг учун ҳисобни аввал м.м. системаси учун бажариш маъқул кўрилади.

Зарраларнинг Ньютон механикасидаги тўқнашиш қонунларини релятивистик муносабатлардан топиш мумкин, бунинг учун u тезликларни $u \ll c$ деб олиш, яъни K миқдорни m_1 га нисбатан эътиборга олмаслик лозим. Бу шарт СИ системасида $m_1 u_1 \ll m_1 c$ шарт шаклида ёзилишига ишонч ҳосил қилиш осон, бу ерда u_1 — *1* зарранинг тўқнашишдан олдинги тезлиги. (162.1) ва (162.3) дан

$$E = m_2 + \sqrt{K^2 + m_1^2}$$

эканлиги келиб чиқади ва K ни эътиборга олмаганда

$$E = m_1 + m_2.$$

Шунинг учун (162.10) ва (162.11) формулаларда K^2 ни E^2 га нисбатан эътиборга олмаймиз:

$$a = \frac{m_2 E}{E^2 - K^2} K \approx \frac{m_2}{E} K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K,$$

$$b = \frac{m}{\sqrt{E^2 - K^2}} K \approx \frac{m_2}{E} K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K.$$

Эллипс **K** векторнинг бошидан ўтадиган айланага айланиб қолади (шундай эканлигини 34- § да топган эдик).

Нисбийлик назариясининг *Эйнштейн механикасидан* иборат натижалари физиканинг турли соҳаларида (аввало атом ва ядро физикасида) ўтказилган лаборатория тажрибаларининг натижаларига тўла равишда мувофиқ келибгина қолмай, улар физиканинг кейинги ўн йилликлар мобайнида қўлга киритган ютуқларига асос ҳам бўлди. Физиканинг бу ютуқлари ўз навбатида техниканинг ядро ёқилғиси билан ишлайдиган қувватли энергетик қурилмалари ва двигателлари ва шулар каби мутлақо янги соҳаларини ривожлантирди. Шунинг учун *Эйнштейн механикаси қонунларининг худди Ньютон механикаси қонунлари каби, тўғри эканлигини инсониятнинг техника соҳасидаги тажрибаси тасдиқлайди,* дейиш мумкин.

МУНДАРИЖА

ИККИНЧИ ҚИСМ

ДЕФОРМАЦИЯЛАНУВЧИ ЖИСМЛАР МЕХАНИКАСИ