O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

X.Norjigitov, O.G.Gaimnazarov, D.X.Turdiboyev, O.N.Dushaboyev, J.T.Raxmonov, G‘.A.Nafasov

ELEMENTAR MATEMATIKA (ALGEBRA)

(5130100- matematika va 5110100 matematika va informatika bakalavr yo‘nalishi talabalari uchun o‘quv qo‘llanma)

Guliston 2022

UDK 512. 517
KBK 22.14
A 45
Elementar matematika (Algebra) // o‘quv qo‘llanma. X.Norjigitov, O.G.Gaimnazarov, D.X.Turdiboyev, O.N.Dushaboyev, J.T.Raxmonov, G‘.A.Nafasov. - Guliston, 2022-378 b.

Taqrizchilar:

K.Eshquvvatov Sirdaryo viloyati XTXQTMOHM dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi;

K.Jamuratov GulDU “Matematika” kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

KIRISH

Mazkur o‘quv qo‘llanma 5130100- matematika va 5110100 matematika va informatika bakalavr yo‘nalishi talabalari uchun tayyorlangan bo‘lib, tanlov fan o‘quv dasturining mavzularini to‘la qamrab olgan bo‘lib, sodda, tushunarli tarzda bayon etilgan.

O‘quv qo‘llanma 9 bob va 79 paragrafdan iborat. Har bir paragraf bir nechta bandlarga bo‘lingan bo‘lib, ularning har birining oxirida shu bandga doir misol va masalalar yechib ko‘rsatilgan, mustaqil yechish uchun mashqlar keltirilgan. O‘quv qo‘llanma hajmi jihatidan uncha katta bo‘lmasa ham, mazmunan “Algebra va matematik analiz asoslari” kursiga doir barcha mavzularni to‘la qamrab olgan.

I BOB TO‘PLAM VA UNING ELEMENTLARI

1-§ To‘plam haqida tushuncha. To‘plamlar orasidagi munosabatlar.

To‘plam tushunchasi matematikaning asosiy va ayni paytda muhim tushunchalaridan biridir. Ma’lumki asosiy tushuncha ta’rifsiz qabul qilinadi. Shuning uchun to‘plamni misollar yordamida tushuntiramiz. Masalan, sirtqi ta’lim fakulteti talabalari to‘plami, boshlang‘ich ta’lim bo‘limi talabalari to‘plami, birinchi kurs talabalari to‘plami, juft sonlar to‘plami, natural sonlar to‘plami. Matematikada to‘plamlar lotin alifbosining bosh harflari *A, B, C, ...* bilan belgilanadi. To‘plamni tashkil etgan ob’yektlar shu to‘plamning **elementlari** deb ataladi. To‘plamning elementlari lotin alifbosining kichik harflari *a*, *b*, *c*, ... bilan belgilanadi.

To‘plam va unga kiruvchi elementlar o‘zaro “tegishli” munosabati bilan bog‘lanadi. Masalan, 8 juft sonlar to‘plamiga tegishli. Agar *a* element *A* to‘plamga tegishli bo‘lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va “*a* element *A* to‘plamga tegishli” deb o‘qiladi. Agar *a* element *A* to‘plamga tegishli bo‘lmasa, $a \notin A$ kabi yoziladi va uni “*a* element *A* to‘plamga tegishli emas” deb o‘qiladi.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to‘plamni **chekli to‘plam** deb ataladi. Cheksiz ko‘p elementlardan tuzilgan to‘plamni **cheksiz to‘plam** deb ataladi. Masalan, natural sonlar to‘plami cheksiz to‘plam bo‘ladi. Xuddi shuningdek, butun sonlar to‘plami, ratsional sonlar to‘plami va haqiqiy sonlar to‘plami cheksiz to‘plam bo‘ladi. Matematikada bu to‘plamlar maxsus harflar bilan belgilanadi: ***N*** –

natural sonlar to‘plami, $\boldsymbol{Z}$ – butun sonlar to‘plami, $\boldsymbol{Q}$ – ratsional sonlar to‘plami, $\boldsymbol{R}$ –haqiqiy sonlar to‘plami.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plamni **bo‘sh to‘plam** deb ataladi va Ø orqali belgilanadi.

To‘plamning elementlari ham to‘plam bo‘lishi mumkin. Masalan, sirtqi ta’lim fakulteti guruhlari to‘plami. Bu to‘plamning elementlari guruhlar bo‘lib, ular studentlar to‘plamlarini tashkil etadi. Lekin studentlar guruhlar to‘plamining elementlari bo‘lmaydi.

To‘plamning har bir elementi unda faqat bir martagina olinadi. Shu sababli to‘plamdagi elementlar har xil hisoblanadi. Demak, to‘plamdagi har bir element faqat o‘ziga teng. To‘plamning bir-biridan farqli ikki elementi bir-biriga teng bo‘lmaydi.

Agar har bir elementning ma’lum bir to‘plamga tegishli yoki tegishli emasligi bir qiymatli aniqlangan bo‘lsa, u vaqtda to‘plam berildi deyiladi. Odatda to‘plamlar ikki xil usulda beriladi. Birinchi usulda to‘plamning barcha elementlari katta qavsga olib yoziladi. Masalan, $A=\{3;5;7;9;11\}$, B = {oq, qora, ko‘k}, $C=\{a;b;c;d\}$. Ikkinchi usulda to‘plamga kirgan elementlarning xarakteristik xossalari ko‘rsatiladi.

To‘plamning **xarakteristik xossasi** deb, faqatgina qaralayotgan to‘plam elementlari ega bo‘lgan xossaga aytiladi. Masalan, A to‘plam ikki xonali sonlardan tuzilgan. Bu to‘plam elementlarining xarakteristik xossasi “ikki xonali son”. Xuddi shuningdek B – o‘zbek alifbosi harflari to‘plami, C – kamalak ranglari to‘plami. Sonli to‘plamlar uchun xarakteristik xossani formula bilan berish qo‘lay.

Misol $C = \{c \mid c \leq 10,\ c \in N\}$, $X = \{x \mid x^2 - 8 = 0,\ x \in R\}$, $Y = \{y \mid -4 \leq y \leq 8,\ y \in Z\}$.

Ta'rif. Bir xil elementlardan tuzilgan ikki to'plamni **teng to'plamlar** deb ataladi. *A* va *B* to'plamlarning tengligi *A* = *B* kabi yoziladi.

Masalan, *A* = {1; 3; 7; 10}, *B* = {1; 3; 7; 10} va *C* = {1; 2; 7; 10} to'plamlar berilsa *A* = *B*. Lekin *A* va *C* hamda *B* va *C* to'plamlar teng emas: $A \neq C$, $B \neq C$.

Ta'rif. Agar *A* to'plamning barcha elementlari *B* to'plamning ham elementlari bo'lsa, u holda *A* to'plam *B* to'plamning **qism to'plami** deb ataladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Masalan, *A* = {1; 3; 5} va *B* = {1; 2; 3; 4; 5} to'plamlar berilsa, $A \subset B$ bo'ladi. Bu ta'rifdan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

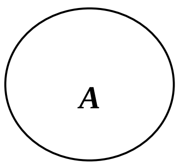
Ba'zan ixtiyoriy to'plamni o'zining qism to'plalariga nisbatan **universal to'plam** deb ataladi va ***I*** bilan belgilanadi.

Demak, agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar *A* to'plamning qism to'plamlari bo'lsa, u vaqtda *A* to'plam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar uchun universal to'plam bo'ladi.

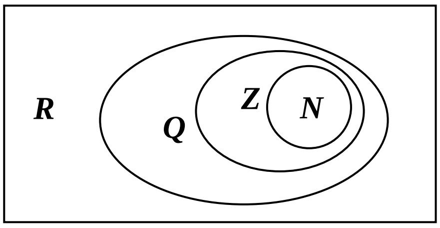
Misol. Universitetning uchinchi kurs talabalari to'plami *A*, universitet kunduzgi bo'lim talabalari to'plami *B*, universitet sirtqi ta'lim fakulteti talabalari to'plami *C* bo'lsa, u vaqtda ***I*** universal to'plam sifatida universitetning barcha talabalari to'plamini olish mumkin, chunki $A \subset I, B \subset I, C \subset I$.

Misol. Barcha natural sonlar to'plami ***N***, barcha butun sonlar to'plami ***Z***, barcha ratsional sonlar to'plami ***Q***, barcha haqiqiy sonlar to‘plami $\boldsymbol{R}$ uchun $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$ munosabati o‘rinli bo‘lgani sababli, $\boldsymbol{R}$ to‘plam $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ to‘plamlar uchun universal to‘plam bo‘ladi.

To‘plamlar orasidagi munosabatlarni yaqqolroq tasavvur qilish uchun to‘plamlar doira yoki oval shaklida tasvirlanadi. Masalan, 1-rasmda A to‘plam tasvirlangan. To’plamlarni bunday tasvirlashni odatda **Eyler-Benn diagrammalari** deb ataladi. Eyler-Benn diagrammasida universal to‘plamni to‘g‘ri to‘rtburchak bilan, uning qism to‘plamlarini shu to‘rtburchak ichidagi doiralar yoki ovallar bilan tasvirlash qabul qilingan. Masalan, $N\subset Z\subset Q\subset R$ munosabati 2-rasmda tasvirlangan.



1 - rasm



2 - rasm

MASHQLAR:

1. Tug‘ilgan yilingizda qatnashgan raqamlar to‘plamini tuzing.

2. – 4, – 2, 0, 2, 4 elementlardan tuzilgan A to‘plamni yozing. Shu elementlarga qarama-qarshi bo‘lgan sonlardan tuzilgan B to‘plamni yozing.

3. 30 gacha bo‘lgan tub sonlar to‘plamini yozing. Yozilgan to‘plamda nechta element bor?

4. 10 dan katta 20 dan kichik toq sonlardan iborat to‘plam tuzing. Uning nechta elementi bor?

5. 50 gacha bo‘lgan natural sonlar orasida yozuvida 5 qatnashgan sonlardan tuzilgan to‘plamni yozing. Nechta uning elementi bor?

6. $\frac{17}{23}$ dan katta, birdan kichik, maxraji 23 bo‘lgan kasrlardan to‘plam tuzing. Uning nechta elementi bor?

7. Maxraji 30 bo‘lgan, $\frac{23}{30}$ dan katta, 1 dan kichik bo‘lgan kasrlardan to‘plam tuzing. Elementlar sonini aniqlang?

8. $A=\left\{3;\ 5{,}2;\ 9;\ -8;\ 18\frac{1}{3}\right\}$ to‘plamning qaysi elementlari natural sonlar to‘plamiga tegishli, qaysilari tegishli emasligini aniqlang. Javobni $\in, \notin$ bilan ifodalang.

9. Quyidagi to‘plamning elementlarini yozib chiqing:

1) $A=\{x \mid x\in N, -2<x<4\}$;

2) $B=\{x \mid x(x+1)(x-2)=0\}$;

3) $C=\{x \mid 4x-5=x+3\}$;

4) $D=\{x \mid x\in N, x^2<16\}$;

5) $E=\{x \mid x\in R, x^2=2\}$;

6) $F=\{x \mid x\in R, x^2=3\}$.

10. Quyidagi to‘plamlarni son o‘qida belgilang.

1) $A=\{x \mid x\in N, x\le 5\}$;

2) $B=\{x \mid x\in Z, -1\le x\le 2\}$;

3) $C=\{x \mid x\in R, x\le -1\}$;

4) $D=\{x \mid x\in R, -2{,}1<x<1{,}7\}$;

5) $E=\{x \mid x^2=9\}$;

6) $F=\{x \mid x(x^2-1)=0\}$.

11. 1, 2, 3 raqamlarining har biridan faqat bir marta foydalanib yoziladigan uch xonali sonlar to‘plamini yozing. Bu to‘plamning nechta elementi bor?

12. 2 bilan tugaydigan 100 dan katta bo‘lmagan natural sonlar to‘plamini tuzing. Elementlar sonini aniqlang.

13.Quyidagi keltirilgan to‘plamlardan bo‘sh to‘plamlarni aniqlang.

1) $A=\{x \mid x\in N,\ x<0\}$; 2) $B=\{x \mid x\in N,\ -2\le x\le 1\}$;

3) $C=\{x \mid x\in N,\ 5<x<6\}$; 4) $D=\{x \mid x^2+1=0\}$

5) $E=\{x \mid x<3,\ x>4\}$; 5) $F=\{x \mid x\in R,\ |x|=2\}$

14. Quyidagi juftliklardan teng to‘plamlarni aniqlang.

1) $A=\{2;\ 3;\ 5\}$ va $B=\{3;\ 5;\ 2\}$;

2) $A=\{1;\ 3;\ 2\}$ va $B=\{1;\ 11;\ 111\}$;

3) $A=\{1;\ 3;\ 4\}$ va $B=\{1;\ \sqrt{9};\ 2^2\}$;

4) $A=\{4;\ 9;\ 16\}$ va $B=\{1^2;\ 2^2;\ 3^2\}$

2-§ To‘plamlar ustida amallar

Agar F to‘plamning har bir elementi E to‘plamning ham – elementi bo‘lsa, u holda F to‘plam E to‘plamning qism to‘plami yoki to‘plamostisi deyiladi va $F\in E$ kabi belgilanadi. Har qanday E to‘plam uchun $\varnothing\subset E$ va $E\subset E$, ya’ni bo‘sh to‘plam, to‘plamning o‘zi shu to‘plamning qism to‘plamlari bo‘ladi, bular xosmas qism – to‘plamlar deyiladi. E to‘plamning qolgan barcha qism to‘plamlari shu to‘plamning xos qism to‘plamlari deyiladi.

Masalan,

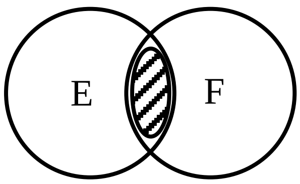
$N \subset Z,\ Z \subset Q,\ Q \subset R\ \Rightarrow\ N \subset Q,\ N \subset R,\ Z \subset Q,\ Z \subset R,\ Q \subset R.$

$\varnothing$ va Z to‘plamlar Z ning xosmas qism to‘plamlaridir. Boshqa misol, A ikki xonali sonlar to‘plami, B ikki xonali toq sonlar to‘plami bo‘lsin, u holda $B \subset A$, chunki ikki xonali toq sonlar A ning ham elementlaridir. Agar $A = B$ bo‘lsa $A \subset B$ va $B \subset A$ va aksincha $A \subset B$, $B \subset A$ bo‘lsa, $A = B$ bo‘ladi.

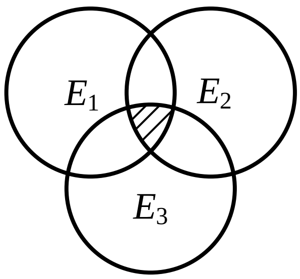
Ta’rif. Bir vaqtning o‘zida E to‘plamni ham, F to‘plamni ham elementlari bo‘lgan elementlar to‘plami E va F to‘plamlarning kesishmasi deyiladi va $E \cap F$ kabi belgilanadi.

◀**Misol.** $E = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, $F = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ bo‘lsa $E \cap F = \{1;\ 3;\ 5\}$ bo‘ladi, umuman $E \cap F = \{x \mid x \in E,\ x \in F\}$.▶

3-rasmda E va F to‘plamlarning kesishmasi (Eyler-Vann diagrammasi) tasvirlangan.



3 - rasm.



4 - **rasm.**

4-rasmda uchta to‘plam E, F, G larning kesishmasi (umumiy qismi) tasvirlangan. Umuman, E_i ($i = 1, 2, \ldots n$) to‘plamlarning kesishmasi deb bir vaqtning o‘zida hamma E_i to‘plamlarga tegishli bo‘lgan elementlardan iborat to‘plamga aytiladi va $\cap E_i$ ko‘rinishida belgilanadi.

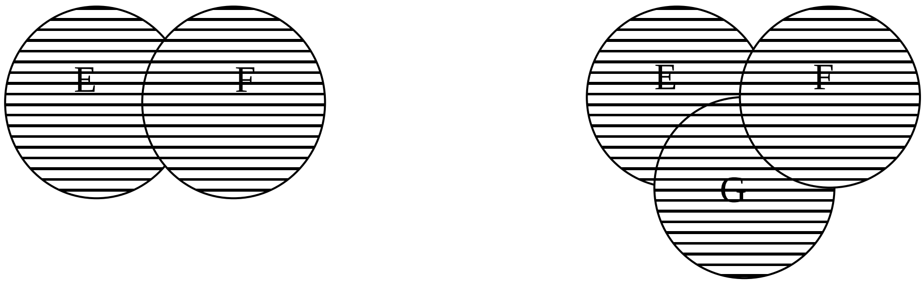
Ta’rifdan kelib chiqadiki

$$E \cap F = F \cap E,$$

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G).$$

Ta’rif. E va F to‘plamlarning barcha elementlaridan tuzilgan to‘plam E va F to‘plamlarining birlashmasi (yig‘indisi) deyiladi va $E \cup F$ ko‘rinishida belgilanadi:

$$E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ yoki } x \in F\}$$

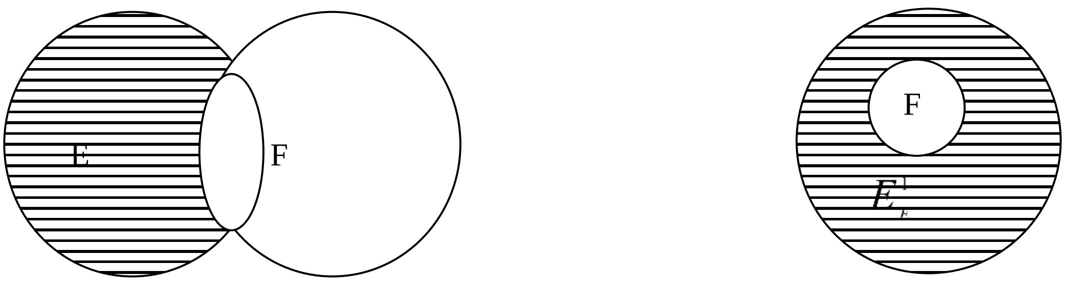


a) $E \cup F$ b) $E \cup F \cup G$

5 - rasm.

5-rasmda E va F (*a*) hamda E, F va G to‘plamlarining (*b*) birlashmasi tasvirlangan. Ta’rifdan $E \cup F = F \cup E$, $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ kelib chiqadi.

Ta’rif. E va F to‘plamlarning ayirmasi deb E to‘plam elementlaridan F to‘plamda ham qatnashgan elementlarini olib tashlashdan qolgan elementlaridan tuzilgan elementlar to‘plamiga aytiladi va *E**F* kabi belgilanadi: $E \setminus F = \{x \mid x \in E, x \notin F\}$.



a) $E \setminus F$ b) $E \setminus F = F_E^1$

6 - rasm.

6-rasmda E va F to‘plamlarning ayirmasi (shtrixlangan qismi) tasvirlangan. Bundan tashqari, b) rasmda shtrixlangan soha, F to‘plamning E to‘plamgacha to‘ldiruvchisi deyiladi va F_E^1 yoki F^1 kabi belgilanadi. Bu holatda $F \subset E$ va $E \backslash F$ to‘plam F to‘plamning to‘ldiruvchisi deyiladi.

Ta’rif. Agar qaralayotgan barcha to‘plamlar uning qism to‘plamlari bo‘lsa, V to‘plam universal to‘plam deyiladi,. Bu holatda V to‘plam qism to‘plamlarining kesishmasi, birlashmasi, ixtiyoriy qism to‘plamining to‘ldiruvchisi ham V to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi. Masalan, $A=\{1;\ 2;\ 3\}$, $B=\{1;\ 4;\ 5\}$, $C=\{2;\ 5;\ 7\}$ to‘plamlar uchun $V=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$ universal to‘plam bo‘ladi. Umuman, agar $A \subset V$, $B \subset V$, $C \subset V$ bo‘lsa, V universal to‘plam bo‘ladi.

Mavzuni mustahkamlash uchun quyidagi amallarni mustaqil isbot qilish tavsiya etamiz.

1) $E \cap F = F \cap E$;

2) $E \cup F = F \cup E$;

3) $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$;

4) $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$;

5) $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$;

6) $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$.

To‘plamlar elementlarini aniqlash uchun foydali bo‘lgan ba’zi teoremalarni isbotsiz keltiramiz. E to‘plamning elementlar sonini $n(E)$ kabi belgilansin.

Teorema. A va B chekli to‘plamlar bo‘lib, $A \cap B = \varnothing$ bo‘lsa, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ bo‘ladi.

Teorema. Agar A va B ixtiyoriy chekli to‘plamlar bo‘lsa, u holda $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Misol. Qutida ikki xil sharlar bor: qizil sharlar soni 60 ta, oq sharlar soni 40 ta. A to‘plam qizil sharlar, B to‘plam oq sharlar bo‘lsa $n(A) = 60$, $n(B) = 40$, $A \cap B = \varnothing$.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 60 + 40 = 100$.

Misol. $A \cap B = \{2;\ 5\}$, $n(A) = 4$, $n(B) = 3$, $n(A \cap B) = 2$ bo‘lsin.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 3 - 2 = 5$.

Haqiqatan ham, $A \cup B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

MASHQLAR:

1. $A = \{2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 10\}$, $B = \{13;\ -8;\ 12;\ 2;\ 4\}$ va $C = \{12;\ 3;\ 7;\ 9\}$ to‘plamlar berilgan. $A \cap B$ $A \cap C$ $A \cap B \cap C$ larni toping.

2. A – 12 ning hamma natural bo‘luvchilari to‘plami bo‘lsin.

B – 20 ning hamma natural bo‘luvchilari to‘plami bo‘lin. $A \cap B$ va $A \cup B$ to‘plamlarni tuzing.

3. [-2, 5] va [3, 7] kesmalarning kesishmasini toping.

4. $A = \{n \mid n \in N, n < 8\}$, $B = \{n \mid n \in N, n > 10\}$ to‘plamlar berilgan. $A \cup B$ ni toping.

1) $-2 \in A \cup B$;

2) $6 \in A \cup B$;

3) $12 \in A \cup B$ deyish to‘g‘rimi?

5. E ikki xonali sonlar to‘plami, F barcha juft sonlar to‘plami bo‘lsa, $E \cup F$ to‘plamga qanday elementlar kiradi?

6. $A = \{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 10\}$, $B = \{3;\ 4;\ 7;\ 9\}$ va $C = \{1;\ 9;\ 11\}$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Quyidagi to‘plamlarda nechtadan element mavjud:

1) $A \cup (B \cup C)$; 2) $(C \cup B) \cup A$;

3) $A \cap (B \cup C)$; 4) $A \cup (B \cap C)$;

5) $A \cap (B \cap C)$; 6) $B \cap (A \cup C)$.

7. $E = \{x \mid -4 \le x \le 6\}$, $F = \{x \mid x \in N, 3 \le x \le 12\}$ bo‘lsin. $E \backslash F$ va $F \backslash E$ to‘plamlar elementlarini toping.

8. E ikki xonali natural sonlar to‘plami, F – toq natural sonlar to‘plami bo‘lsin. $E \backslash F$ va $F \backslash E$ to‘plamlarni tuzing.

9. N^1 orqali natural sonlar to‘plami N ning butun sonlar to‘plami Z ga to‘ldiruvchisini belgilaymiz. Quyidagilar to‘g‘rimi?

1) $-5 \in N^1$; 2) $3 \in N^1$;

3) $12 \in N^1$; 4) $-4 \notin N^1$;

5) $-2,7 \notin N^1$; 6) $0 \notin N^1$.

10. $A = \{x \mid x = 2k,\ k \in Z\}$ to‘plamning Z to‘plamga to‘ldiruvchisini toping.

11. $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in Z\}$ to‘plamning Z to‘plamga to‘ldiruvchisini toping.

12. $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{1;\ 3\}$ bo‘lsa, $A = B$ bo‘lishini isbotlang.

13. $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$ tenglikni isbotlang.

14. $(A \cup B) \setminus B = A$ tenglikni isbotlang.

15. Guruh talabalaridan 15 tasi tennis bo‘yicha seksiyaga qatnashadi, 11 tasi basketbolga, 6 tasi tennisga ham, basketbolga ham qatnashadi. Ikkala seksiyada nechta talaba qatnashadi.

16. 50 ta sayyohdan 5 tasi ingliz tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi. Agar 38 sayyoh ingliz tilini, 43 tasi fransuz tilini bilsa, ikkala tilni biladigan sayyoh nechta?

17. 30 talabadan 18 tasi shaxmatga, 16 tasi shashkaga qiziqadi. Ham shaxmatga, ham shashkaga qiziqadigan o‘quvchilar nechta?

18. 30 talabadan 12 tasi voleybol seksiyasiga, 13 tasi basketbol seksiyasiga, 7 kishi ikkala seksiyaga qatnashadi. Nechta talaba birorta ham seksiyaga qatnashmaydi?

19. 1 dan 100 gacha natural sonlar orasida 2 ga ham 5 ga ham bo‘linmaydiganlari nechta?

20. 1 dan 100 gacha natural sonlar orasida 3 ga ham 7 ga ham bo‘linmaydiganlari nechta?

21. 1 dan 100 gacha natural sonlar orasida 2 ga ham 5 ga ham 7 ga ham bo‘linmaydiganlari nechta?

22. $A = \{-2 \le x \le 8,\ \ x \in N\}$ to‘plamning barcha qism to‘plamlarini yozinig. Ular nechta?

23. $A = \{-12 \le x \le 8,\ \ x \in Z\}$ to‘plamning barcha qism to‘plamlari. nechta?

II BOB SONLAR TO‘PLAMI

1-§ Sonli to‘plamlar. Arifmetikaning asosiy teoremasi.

Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri son tushunchasi hisoblanadi. Son haqidagi tushuncha qadimda paydo bo‘lib, uzoq vaqt davomida kengaytirilib va umumlashtirib borilgan. Eng avval sanashda ishlatiladigan sonlar: 1, 2, 3, … n … hosil bo‘lgan, bu sonlar natural sonlar deyiladi. Natural sonlar to‘plami N bilan belgilanadi: N = {1, 2, … n …}. Eng kichik natural son 1, eng kattasi mavjud emas. Har bir natu-ral sondan keyin ma’lum bitta natural son keladi; 3 dan keyin albatta 4 keladi, 100 dan keyin – 101 va hokazo.

Natural sonlar to‘plami ustida faqat ikkita amal: qo‘shish va ko‘paytirish bajariladi. Agar $a \in N, b \in N$ bo‘lsa, $(a+b) \in N,\ ab \in N$ bo‘ladi.

Natural sonlarga 0 ni va hamma butun manfiy sonlarni qo‘shsak, sonlarning yangi to‘plami – butun sonlar to‘plami hosil bo‘ladi, uni Z bilan belgilash qabul qilingan; Z = {…, – 2, – 1, 0, 1, 2, …}. Butun sonlar ustida qo‘shish, ko‘paytirish amallaridan tashqari ayirish amali ham bajariladi, haqiqatda agar $a \in Z,\ b \in Z$ bo‘lsa, $-a \in Z,\ -b \in Z$. Bundan $a-b=a+(-b)$ bo‘ladi. Butun sonlar hosil qilinishidan $N \in Z$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $\frac{p}{q}(p \in Z,\ \ q \in N)$ ko‘rinishdagi kasrlarni, oddiy kasr ham deyiladi, ko‘rib chiqamiz. p ixtiyoriy butun qiymatni, q ixtiyoriy natural qiymatni qabul qilganda $\frac{p}{q}$ hosil qiladigan sonlar to‘plamiga ratsional sonlar to‘plami deyiladi va Q bilan belgilanadi: $Q=\left\{\frac{p}{q},\ p\in Z,\ q\in N\right\}$,

Q ustida to‘rt amal: qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish bajariladi. Natural sonlar va butun sonlar ratsional sonlar to‘plamiga qism to‘plam bo‘ladi, ya’ni $N\subset Q, Z\subset Q$.

Ta’rif. $\frac{a}{b}$ va $\frac{b}{a}$ kasrlar o‘zaro teskari kasrlar deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ko‘paytmasi 1 ga teng bo‘lgan kasrlar o‘zaro teskari kasrlar deyiladi. $\frac{5}{7},\frac{14}{10}$ o‘zaro teskari kasrlar, chunki $\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{10}=1$ Shunga o‘xshash, $2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}=1$ bo‘lgani uchun ular o‘zaro teskari sonlardir.

Ta’rif. Agar kasrning surati maxrajidan katta yoki teng bo‘lsa, kasr noto‘g‘ri kasr deyiladi.

Bu holda suratni maxrajga bo‘lib noto‘g‘ri kasrni butun son va to‘g‘ri kasr (surat maxrajdan kichik) yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin: $\frac{27}{4}$ noto‘g‘ri kasr, suratni maxrajga bo‘lsak, 27:4=6(3 qoldiq) hosil bo‘ladi, shuning uchun $\frac{27}{4}=6+\frac{3}{4}=6\frac{3}{4}$ hosil bo‘ladi. Boshqa misol $\frac{117}{23}=5\frac{2}{23},\ \frac{17}{3}=5\frac{2}{3}$

Ta’rif. Agar kasrning maxraji 10^n dan iborat bo‘lsa, o‘nli kasr deyiladi.

Bu holda suratni maxrajga bo‘lish yakunlanadi.

$\frac{3}{10}=0{,}3;\ \frac{27}{10}=2{,}7;\ \frac{97}{100}=0{,}97$

$$\frac{5237}{1000} = 5\frac{237}{1000} = 5{,}237; \ \frac{17}{1000} = 0{,}017$$

Ta’rif. Cheksiz davriy o‘nli kasrlar ratsional sonlar to‘plamiga kiradi.

Ta’rif. Davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlar irratsional sonlar to‘plamini tashkil etadi. $\sqrt{2},\ 2-\sqrt{3},\ \pi,\ 1{,}2109327...$

Teorema (Arifmetikaning asosiy teoremasi). Har qanday murakkab son tub sonlar ko‘paytmasi shaklida yagona yoziladi.

2-§ Evklid algoritmi. Sonning bo‘luvchilari.

Ta’rif. Agar *a* soni *b* ga bo‘linsa, u vaqtda *a* ni *b* ga karrali deb ataladi.

Ma’lumki 0 soni barcha sonlarga bo‘linadi. Shu sababli u barcha sonlarga karralidir. Biz bundan keyin *b* ga karrali sonlar deganimizda natural karrali sonlarni, ya’ni *b, 2b, …, nb* sonlarni tushunamiz. Bularning eng kichigi *b* soni bo‘ladi. Masalan, 3 ga karrali sonlar: 3, 6, 18, 24, … bo‘lib, ularning eng kichigi 3. Bu sonlar $x = 3\cdot p$ formula yordamida hosil qilinishi mumkin, bu yerda *p*: 1, 2, 3, … qiymatlarni qabul qiladi. Umuman *b* ga karrali sonlar $p\cdot b$ bo‘lib, $p = \overline{1,\infty}$ bo‘ladi..

Ta’rif. *a* va *b* sonlarning har biriga karrali bo‘lgan sonni *a* va *b* sonlarning umumiy karralisi deb ataladi.

a va *b* sonlarning umumiy karralilaridan biri, ularning ko‘paytmasi bo‘lgan *ab* sonidir. Chunki $a\cdot b$ soni *a* ga ham, *b* ga ham bo‘linadi. *a* va *b* sonlarning umumiy karralilarining to‘plami *a* ga karrali sonlar to‘plami bilan *b* ga karrali sonlar to‘plamining kesishmasidan iborat bo‘ladi.

Misol. 6 va 8 sonlarining umumiy karralilarining to‘plamini aniqlang.

Yechish: 6 soniga karrali sonlar to‘plami: A = {6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; …}.

8 soniga karrali sonlar to‘plami: B = {8; 16; 24; 32; 40; 48; …}. Bu to‘plamlarning kesishmasi bo‘lgan $A \cap B = \{24;\ 48;\ \ldots\}$ to‘plamning elemantlari 6 va 8 sonlarining umumiy karralilari bo‘ladi.

Ta’rif. a va b sonlar umumiy karralilarining eng kichigini a va b sonlarning eng kichik umumiy karralisi deb ataladi va $K(a,\ b)$ kabi belgilanadi. Masalan, $K(6,\ 8) = 24$.

Teorema. a va b sonlarning har qanday umumiy karralisi bu sonlarning eng kichik umumiy karralisiga bo‘linadi.

Teorema. Agar $K(a,\ b) = k$ bo‘lsa, u vaqtda har qanday c natural son uchun $K(a \cdot c,\ b \cdot c) = k \cdot c$ tenglik o‘rinli.

Ta’rif. a va b sonlarning har birining bo‘luvchisi bo‘lgan songa a va b sonlarning umumiy bo‘luvchisi deb ataladi.

Masalan, 12 va 8 sonlarining umumiy bo‘luvchisi 1, 2 va 4 sonlardir.

a va b sonlarning umumiy bo‘luvchilari to‘plami, a sonning bo‘luvchilari to‘plami bilan b sonning bo‘luvchilari to‘plamining kesishmasidan iborat.

Misol. 24 va 60 sonlarining umumiy bo‘luvchilarini toping.

Yechish: 24 conining bo‘luvchilari to‘plami: A = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24}. 60 sonining bo‘luvchilari to‘plami: B = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}. Bu to‘plamlarning kesishmasi bo‘lgan $A \cap B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$ to‘plamning elementlari 24 va 60 sonlarining umumiy bo‘luvchilari bo‘ladi.

Ta'rif. *a* va *b* sonlar umumiy bo'luvchilarining eng kattasiga *a* va *b* sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi deb ataladi va *B*(*a*, *b*) kabi belgilanadi. Masalan, *B*(8, 12) = 4, *B*(24, 60) = 12.

Ta'rif. Eng katta umumiy bo'luvchisi 1 ga teng bo'lgan *a* va *b* ikki natural sonni o'zaro tub sonlar deb ataladi.

Demak, *B*(*a*, *b*) = 1 bo'lsa, *a* va *b* sonlar o'zaro tub sonlar bo'lar ekan. Masalan, 16 va 45 sonlari 1 sonidan boshqa umumiy bo'luvchilarga ega emas. Shu sababli 16 va 45 sonlari o'zaro tub sonlar bo'ladi.

Teorema. Agar *c* soni *a* va *b* natural sonlarning umumiy bo'luvchisi bo'lsa, u vaqtda $m = \frac{a \cdot b}{c}$ soni *a* va *b* sonlarning umumiy karralisi bo'ladi.

Isbot. *m* sonining *a* va *b* sonlarga bo'linishini isbotlashimiz kerak. Ma'lumki, agar $a = a_1 \cdot c$, $b = b_1 \cdot c$ bo'lsa, u vaqtda $m = \frac{a_1 \cdot c \cdot b_1}{c} \cdot c = a_1 \cdot b_1 \cdot c = b_1 \cdot (a_1 \cdot c) = b_1 \cdot a$ bo'lib, *m* soni *a* ga bo'linadi. Xuddi shuningdek $m = a_1 \cdot b_1 \cdot c = a_1 \cdot (b_1 \cdot c) = a_1 \cdot b$ bo'lib, *m* soni *b* ga ham bo'linadi. Demak, *m* soni *a* va *b* sonlarning umumiy karralisidir.

Masalan, 3 soni 21 va 36 sonlarning umumiy bo'luvchisi bo'ladi: 21 = 3·7 va 36 = 3·12. Shu sababli $m = \frac{21 \cdot 36}{3} = 3 \cdot 7 \cdot 12 = 252$ soni 21 soniga ham, 36 soniga ham karralidir.

Teorema. Agar $k = K(a, \ b)$ bo'lsa, u vaqtda $d = \frac{a \cdot b}{k}$ soni *a* va *b* sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'ladi.

Isbot. k soni b ga bo‘lingani uchun ak soni ab ga bo‘linadi. $d=\frac{a\cdot b}{k}$ bo‘lganidan $a\cdot b=d\cdot k$ bo‘lib, $a\cdot k$ soni $d\cdot k$ ga ham bo‘linishi kelib chiqadi. Shu sababli a soni d ga bo‘linadi. Xuddi shu usul bilan b ning d ga ham bo‘linishini isbotlaymiz. Demak, d soni a va b sonlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi.

Endi $d = B(a, b)$ bo‘lishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik a va b sonlarning d dan katta bo‘lgan umumiy bo‘luvchilari mavjud bo‘lsin. Uni c bilan belgilaylik. U vaqtda 1-teoremaga asosan $m=\frac{a\cdot b}{c}$ soni a va b sonlarining umumiy karralisi bo‘ladi. Lekin $c>d$ bo‘lgani uchun $m=\frac{a\cdot b}{c}<\frac{a\cdot b}{d}=k$ bo‘ladi. Shunday qilib a va b sonlarning umumiy karralisi bo‘lgan m soni, a va b sonlarning eng kichik umumiy karralisidan kichik bo‘lar ekan. Bu esa mumkin emas. Shu sababli farazimiz noto‘g‘ri bo‘lib, $d = B(a, b)$ bo‘lishligi kelib chiqadi.

Teorema. Ikkita natural sonning eng katta umumiy bo‘luvchisi shu sonlar umumiy bo‘luvchilarining istalganiga bo‘linadi.

Isbot. Faraz qilaylik a/c va b/c bo‘lsin. U vaqtda 1- teoremaga asosan $\frac{a\cdot b}{c}$ soni a va b sonlarining umumiy karralisi bo‘ladi. Shu sababli u $k=\frac{ab}{d}$ soniga bo‘linadi, bu yerda $k = K(a, b)$ va $d = B(a, b)$. Demak,

$$\frac{a\cdot b}{c}=\frac{a\cdot b}{d}\cdot m.$$

U vaqtda $d\cdot a\cdot b = a\cdot b\cdot c\cdot m$ bo‘lib, bu yerdan $d = c\cdot m$ kelib chiqadi. Oxirgi tenglik esa d ning c ga bo‘linishini bildiradi.

Teorema. Agar a va b natural sonlarning $a \cdot b$ ko‘paytmasi m natural songa bo‘linib, a va m o‘zaro tub sonlar bo‘lsa, u vaqtda b soni m ga bo‘linadi.

Haqiqatan, ab soni a ga ham, m ga ham bo‘lingani uchun, u a va m lar bilan umumiy karrali bo‘ladi. Demak, $a \cdot b$ soni $k = K(a, m)$ ga bo‘linadi. a va m o‘zaro tub sonlar bo‘lgani uchun $k = K(a, m) = a \cdot m$ bo‘ladi. Shunday qilib, $a \cdot b$ ko‘paytma $a \cdot m$ ga bo‘linadi. Shu sababli b soni m ga bo‘linadi.

Ta’rif. Faqatgina ikkita har xil bo‘luvchiga ega bo‘lgan sonni tub son deb ataladi. Masalan, 7 tub son, chunki uning bo‘luvchisi ikkita son bo‘lib, ular 1 va 7 dir.

Ta’rif. Ikkitadan ortiq har xil bo‘luvchiga ega bo‘lgan sonni murakkab son deb ataladi. Masalan, 6 murakkab son, chunki uning har xil bo‘luvchilari ikkitadan ortiq bo‘lib, ular 1, 2, 3, 6 sonlaridir.

1 soni tub son ham emas, murakkab son ham emas. Chunki uning faqat bitta bo‘luvchisi bor. 0 soni cheksiz ko‘p bo‘luvchilarga ega. Shu sababli 0 soni ham tub son ham emas, murakkab son ham emas.

Shunday qilib butun nomanfiy sonlar to‘plami Z_0 quyidagi to‘rtta sinfga ajratildi:

1) Cheksiz ko‘p bo‘luvchilarga ega bo‘lgan bitta 0 sonini o‘z ichiga olgan sinf;

2) Faqat bitta bo‘luvchiga ega bo‘lgan bitta 1 sonini o‘z ichiga olgan sinf;

3) Ikkita bo‘luvchiga ega bo‘lgan tub sonlar sinfi;

4) 0 sonidan farqli va ikkitadan ortiq har xil bo‘luvchilarga ega bo‘lgan murakkab sonlar sinfi.

Endi tub sonlarning ba’zi xossalarini ko‘rib chiqamiz.

1-xossa. Agar p tub soni 1 sonidan farqli biror n natural songa bo‘linsa, u vaqtda $p=n$ bo‘ladi.

Haqiqatan, agar p tub son n natural songa teng bo‘lmasa, u vaqtda p uchta bo‘luvchiga ega bo‘ladi. Ular 1, n va p sonlari bo‘lib, natijada p murakkab son bo‘lib qoladi.

2-xossa. Agar p va q sonlari har xil tub sonlar bo‘lsa, u vaqtda p soni q ga bo‘linmaydi.

Haqiqatan, p tub son bo‘lgani uchun, u faqat 1 va p sonlariga bo‘linadi. Shartga ko‘ra q soni p dan farqli tub son bo‘lgani uchun, u 1 dan ham farqli bo‘ladi. Demak, q soni p ning bo‘luvchisi bo‘lmaydi.

3-xossa. Agar a natural son p tub songa bo‘linmasa, u vaqtda a va p lar o‘zaro tub sonlar bo‘ladi.

Haqiqatan, a va p sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi d bo‘lsin. U vaqtda p soni d ga bo‘linadi. Lekin p tub son bo‘lgani uchun, u faqat ikkita har xil bo‘luvchiga ega bo‘lib, ular 1 va p sonlaridir. Shu sababli yoki $d = 1$, yoli $d = p$ bo‘ladi. Agar $d = p$ bo‘lsa, u vaqtda a soni p ga bo‘linib, xossa shartiga zid bo‘ladi. Shu sababli faqatgina $d = 1$ bo‘ladi. Demak, a va p sonlar o‘zaro tub sonlar.

4-xossa. Agar a va b ikkita natural sonning ko‘paytmasi p tub songa bo‘linsa, u vaqtda a va b sonlarining kamida bittasi p ga bo‘linadi.

Haqiqatan, faraz qilaylik a soni p ga bo‘linmasin. U vaqtda 3-xossaga asosan ular o‘zaro tub sonlar bo‘ladi. Agar $a{\cdot}b$ ko‘paytma p ga bo‘linib, a va p o‘zaro tub sonlar bo‘lsa, u vaqtda b soni p ga bo‘linadi.

Bu xossadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar biror ko‘paytma p ga bo‘linib, barcha ko‘paytuvchilar tub sonlar bo‘lsa, u vaqtda ko‘paytuvchilardan biri p ga teng bo‘ladi.

5-xossa. Har bir sonning 1 dan farqli eng kichik bo‘luvchisi tub sondir.

Isbot. Faraz qilaylik p_1 son a ning 1 dan farqli eng kichik bo‘luvchisi bo‘lsin. Uning tub son ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, aks holda, ya’ni p_1 murakkab son bo‘lganda edi, u biror q bo‘luvchiga ega bo‘lib, $1 < q < p_1$ bo‘lar edi. Hamda a/p_1 va p_1/q bo‘lgani uchun a/q bo‘lar edi. Bu esa p_1 ning eng kichik bo‘luvchiligiga ziddir.

Teorema. Tub sonlar soni cheksizdir.

Agar berilgan son yetarlicha katta bo‘lsa, uning tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash muhim masalalardan biridir. Bu masalani hal etishda quyidagi teoremaning ahamiyati katta.

Teorema. a murakkab sonning eng kichik tub bo‘luvchisi $\sqrt{a}$ sondan katta emas.

Misol. 187 tub son bo‘ladimi ?

Yechish: Savolga javob berish uchun 187 sonini kvadrat ildizdan chiqaramiz: $13<\sqrt{187}<14$. Demak, 187 soni 14 dan kichik tub sonlarga bo‘linmasa, u tub son bo‘ladi. 14 dan kichik tub sonlar 2, 3, 5, 7, 11 va 13 sonlaridir. 187 soni 11 ga bo‘linadi. Shu sababli 187 soni murakkab son bo‘ladi.

N gacha bo‘lgan barcha natural sonlar yozib olinadi. Bunda tub sonlar ta’rifini qanoatlantiruvchi birinchi son 2 dir. So‘ngra 2 dan boshqa barcha 2 ga karrali sonlar o‘chiriladi. Chunki ular murakkab sonlar. 2 dan boshqa birinchi o‘chmagan son 3 dir. Bu tub son bo‘ladi. 3 dan keyin keladigan barcha 3 ga karrali sonlarni o‘chirib chiqamiz. By ikki marta o‘chirishdan so‘ng o‘chirilmay qolgan birinchi son 5 bo‘ladi, albatta 2 va 3 dan tashqari. Bu tub son, chunki aks holda u 2 yoki 3 ga bo‘linadigan bo‘lib, o‘chirib tashlangan bo‘lar edi. 5 ni qoldirib, unga bo‘linadigan barcha sonlarni o‘chirib tashlaymiz. O‘chirib tashlanmagan son endi 7 dir. Bu ham tub son bo‘ladi. Bu jarayonni birinchi o‘chirilmay qoladigan son $\sqrt{N}$ dan katta bo‘lmagan holgacha davom ettirib, N gacha bo‘lgan barcha tub sonlarni hosil qilamiz. Bunday usul bilan tanlab olingan tub sonlar jadvali “**Eratosfen g‘alviri**” deb ataladi.

Eratosfen o‘z usulini dastlab quyidagicha bajargan. U N gacha bo‘lgan barcha sonlarni mum bilan qoplangan taxtachaga yozib chiqqan. So‘ng murakkab sonlarga teshikchalar teshib chiqqan. Natijada taxtacha g‘alvirga o‘xshab qolgan. Taxtachadagi teshilmay qolgan o‘rinlardagi sonlar tub sonlardir. Eratosfen o‘z usuli bilan minggacha bo‘lgan barcha tub sonlar jadvalini tuzgan. Hozirgi vaqtda kompyuterlar yordamida istalgan songacha bo‘lgan tub sonlar jadvalini tuzish mumkin.

Misol. 50 gacha bo‘lgan natural sonlar orasidagi tub sonlar jadvalini tuzing.

Yechish: Buning uchun 2 dan 50 gacha bo‘lgan sonlarni ketma-ket yozib chiqamiz: 2, 3, $\overline{4}$, 5, $\overline{6}$, 7, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, 11, $\overline{12}$, 13, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$, 17, $\overline{18}$, 19, $\overline{20}$, $\overline{21}$, $\overline{22}$, 23, $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{26}$, $\overline{27}$, $\overline{28}$, 29, $\overline{30}$, 31, $\overline{32}$, $\overline{33}$, $\overline{34}$, $\overline{35}$, $\overline{36}$, 37, $\overline{38}$, $\overline{39}$, $\overline{40}$, 41, $\overline{42}$, 43, $\overline{44}$, $\overline{45}$, $\overline{46}$, 47, $\overline{48}$, $\overline{49}$, $\overline{50}$.

2 sonini olib, ketma-ketlikdagi 2 dan boshqa barcha 2 ga karrali sonlarning ustiga chizib chiqamiz. Endi 3 dan keyin keladigan barcha 3 ga karrali sonlarning ustiga chizib chiqamiz. 5 dan keyin keladigan 5 ga karrali barcha sonlarning ustiga chizib chiqamiz. Va nihoyat 7 dan keyin keladigan 7 ga karrali sonlarning ustiga chizib chiqamiz. Natijada 2, 3,

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 sonlari qoladi. Ular tub sonlar bo‘ladi, chunki $7<\sqrt{50}<8$.

Ikki sonning kanonik yoyilmasi bo‘yicha, ularning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish uchun berilgan ikki sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratish kerak bo‘ladi. Agar berilgan sonlar katta bo‘lsa, ularning kanonik yoyilmasini topish qiyinroq bo‘ladi. Ikki sonning eng katta umumiy bo‘luvchisini topishning osonroq usulini Evklid taklif qilgan bo‘lib, uni **Evklid algoritmi** deb ataladi. Evklid algoritmi quyidagi uchta teoremaga asoslangan.

Teorema. Agar a soni b ga bo‘linsa, u vaqtda $B(a, b) = b$.

Teorema. Agar $a = b\cdot q+r$ bo‘lib, a, b va r sonlar noldan farqli bo‘lsa, u vaqtda a va b larning umumiy bo‘luvchilari to‘plami b va r larning umumiy bo‘luvchilari to‘plamiga teng bo‘ladi.

Teorema. Agar $a=b\cdot q+r$ bo‘lib, a, b, r lar noldan farqli bo‘lsa, u vaqtda $B(a, b) = B(b, r)$ bo‘ladi.

$a>b$ bo‘lsin. Agar a soni b ga qoldiqsiz bo‘linsa, u vaqtda 1-teoremaga asosan $B(a,\ b)=b$ bo‘ladi. a soni b ga r qoldiqli bo‘linsin: $a=b\cdot q+r$. U vaqtda 3-teoremaga asosan $B(a,\ b)=B(b,\ r)$ bo‘lib, masala b va r larning eng katta umumiy bo‘luvchisini topishga keladi. Agar b soni r ga bo‘linsa, u vaqtda $B(a,\ b)=r$ bo‘lib, $B(a,\ b)=B(b,\ r)=r$ bo‘ladi. Agar b sonni r ga bo‘lganda r_1 qoldiq qolsa, u vaqtda $b = r\cdot q_1 + r_1$ bo‘lib, $B(a, b) = B(b, r) = B(r, r_1)$ bo‘ladi.

Bu jarayonni davom ettirib, kamayib boruvchi r_1, r_2, …, r_i qoldiqlarni hosil qilamiz. Butun nomanfiy sonlar to‘plami quyidan chegaralangani uchun biror m raqamdan boshlab $r_m \neq 0$ va $r_{m+1} = 0$

bo‘ladi. a va b sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi noldan farqli eng oxirgi qoldiqqa teng bo‘ladi: $B(a,\ b) = r_m$.

Misol. 2231 va 1679 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini toping.

Yechish: $2231=1679\cdot 1+552.$

$$1679=552\cdot 3+\underline{23}.$$

$$552=\underline{23}\cdot 24.$$

Demak, $B(1679,\ 2231)=23$.

MASHQLAR

2. Berilgan natural sonning tub yoki murakkab ekanligini aniqlang:

1) n = 1559; 2) n = 1627;

3) n = 1783; 4) n = 3061;

5) n = 3709; 6) n = 4057;

7) n = 1987; 8) n = 2339;

9) n = 2671; 10) n = 3343.

3. Berilgan n natural sonning natural bo’luvchilari soni va yig’indisini:

1) n = 60; 2) n = 1000;

3) n = 100; 4) n = 1200;

5) n = 360; 6) n = 1542;

7) n = 375; 8) n = 3500;

9) n = 720; 10) n = 680;

11) n = 957; 12) n = 410;

13) n = 990; 14) n = 865.

4. Ikki usulda berilgan sonlarning EKUBini toping:

1) 1232 va 1662; 2) 135 va 8211;

3) 589 va 343; 4) 29719 va 76501;

5) 469459 va 519203; 6) 179370199 va 4345121;

7) 12606, va 6494; 8) 162891 va 32176;

9) 7650 va 25245; 10) 35574 va 192423;

11) 10140 va 92274; 12) 46550 va 37730.

3-§ Butun sonlar. Qoldiqli bo‘lish.

Nol sonini natural sonlar to‘plamiga kiritib, butun **manfiymas sonlar to‘plami** deb ataladigan yangi sonli to‘plam hosil qilamiz va bu kengaytirilgan to‘plamni $N_0 = \{0, 1, 2\ 3\ , , ..., n, ...\}$ orqali belgilaymiz. Katta sonni kichik sondan ayirish mumkin bo‘lishi uchun N_0 sonlar to‘plamini yangi sonlar kiritish yo‘li bilan yanada kengaytirish zarur.

To‘g‘ri chiziqni olib, unda yo‘nalish, 0 boshlang‘ich nuqta va masshtab birligini olamiz. Boshlang‘ich nuqtaga 0 sonini mos qo‘yamiz. Boshlang‘ich nuqtadan o‘ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga 1, 2, 3, ... natural sonlarni mos qo‘yamiz, boshlang‘ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga – 1, – 2, – 3, ... simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo‘yamiz.

Bu sonlar **butun manfiy sonlar** deb ataladi. Sonlar belgilangan bu to‘g‘ri chiziq **son o‘qi** deb ataladi. O‘qning strelka bilan ko‘rsatilgan yo‘nalishi **musbat yo‘nalish**, bunga qarama-qarshi yo‘nalish esa **manfiy yo‘nalish** deb ataladi. Natural sonlar son o‘qida boshlang‘ich nuqtadan musbat yo‘nalishda qo‘yiladi, shuning uchun ular **musbat butun sonlar** deb ataladi.

Butun manfiymas sonlar to‘plami bilan butun manfiy sonlar to‘plamining birlashmasi yangi sonli to‘plamni hosil qiladi, bu to‘plam **butun sonlar to‘plami** deb ataladi va *Z* simvoli bilan belgilanadi:

$$Z = \{. . ., -4, \ -3, -2, -1, 0, 1, \ 2, 3, \ 4, . . .\}$$

a va – *a* sonlar **qarama-qarshi** sonlar deb ataladi. Son o‘qida bu sonlarga mos keladigan nuqtalar nolga nisbatan simmetrik joylashadi .

O‘lchash natijasi butun sonlarda, o‘nli yoki oddiy kasrlarda ifodalanadi. Agar miqdor qarama-qarshi (o‘sish-kamayish, yuqoriga-quyiga, foyda-zarar, issiq-sovuq va hokazo) ma’noga ham ega bo‘lsa, uning qiymatlari oldiga mos ravishda musbatlik (“+”) yoki manfiylik (“-“) ishorasi qo‘yiladi: $x = -2$, $y = 3$, $t = +5°$.

a va *b* natural sonlar berilib, $b \le a$ bo‘lganda ham, ba’zan *a* soni *b* soniga bo‘linmaydi. Masalan, 38 soni 9 soniga bo‘linmaydi. Lekin 38 = 9·4 + 2 bo‘ladigan 4 va 2 sonlari mavjud. 38 sonini 9 ga bo‘lish, qoldiqli bo‘lish bilan bajariladi. Bunda 4 soni to‘liqmas bo‘linma va 2 qoldiq topilda deyiladi. Endi qoldiqli bo‘lishining ta’rifini keltiramiz.

Ta’rif. *a* natural sonni *b* natural songa qoldiqli bo‘lish deb, $a = b \cdot q + r$, bunda $r < b$, bo‘ladigan *q* va *r* natural sonlarni topishga aytiladi. *q* sonini *a* ni *b* ga bo‘lishdagi to‘liqmas bo‘linma, *r* sonini bo‘lishdagi qoldiq deb ataladi.

Teorema. Agar $b \le a$ bo‘lib, *a* soni *b* soniga bo‘linmasa, u vaqtda shunday *q* va *r* natural sonlar mavjudki, $a = b \cdot q + r$ bo‘lib, bu yerda $r < b$ bo‘ladi. (*q*; *r*) sonlar jufti (*a*; *b*) sonlar jufti orqali bir qiymatli aniqlanadi.

MASHQLAR:

1.*a* ni *b* ga bo‘lgandagi qoldiqni toping:

1) $a = 39^{46}$, $b = 5$; 2) $a = 64^{29}$, $b = 7$;

3) $a = 103^{15}$, $b = 17$; 4) $a = 10^{10} + 28^{2} - 1$, $b = 3$;

5) $a = 7\cdot 10^{30}$, $b = 9$; 6) $a = 12^{39} + 13^{41}$, $b = 10$;

7) $a = 2^{2002} + 3^{2002}$, $b = 11$; 8) $a = 3^{2002} + 7^{2002}$, $b = 11$;

9) $a = 43215436$, $b = 10$; 10) $a = 1234567$, $b = 9$;

11) $a = 1234321$, $b = 3$; 12) $a = 3456785$, $b = 6$.

2. Bo’lish natijasida hosil bo’lgan qoldiqni toping:

1) 15^{231}, $b = 14$; 2) $a = 15^{231}+2$, $b = 16$;

3) $a = 1532^{5} - 1$, $b = 9$; 4) $a = 12^{1231} + 14^{41}$, $b = 13$;

5) $a = 208^{208}$, $b = 23$; 6) $a = 2^{15783} - 7$, $b = 25$;

7) $a = 3^{79821} + 5$, $b = 17$; 8) $a = 10^{2732} + 10$, $b = 22$;

9) $a = 18^{2815} - 5$, $b = 14$; 10) $a = 2^{100} + 5^{200}$, $b = 29$.

4-§ Ratsional sonlar.

Bizga *a* butun nomanfiy son va *b* natural son berilsin. Ushbu $\frac{a}{b}$ ko‘rinishdagi songa **oddiy kasr** yoki qisqacha **kasr** deb ataladi va “*b* dan *a*” deb o‘qiladi. *a* soniga kasrning **surati**, *b* ga esa kasrning **maxraji** deyiladi. Surati maxrajidan kichik bo‘lgan kasrni **to‘g‘ri kasr**, surati maxrajidan katta yoki unga teng bo‘lgan kasrni **noto‘g‘ri kasr** deyiladi. Masalan, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ to‘g‘ri kasrlar, $\frac{3}{3}$ va $\frac{7}{4}$ noto‘g‘ri kasrlar bo‘ladi.

Ta’rif. Natural son va to‘g‘ri kasrdan iborat songa aralash son deyiladi. Bunda natural son aralash sonning butun qismi, to‘g‘ri kasr esa aralash sonning kasr qismi deb ataladi. Masalan, $4\frac{2}{5}$ aralash son bo‘lib, 4 uning butun qismi, $\frac{2}{5}$ esa kasr qismidir. Har qanday noto‘g‘ri kasrni aralash son ko‘rinishida va aksincha, har qanday aralash sonni noto‘g‘ri kasr ko‘rinishida yozish mumkin.

Ta’rif. Agar $a{\cdot}d = b{\cdot}c$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u vaqtda $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ kasrlar **teng** yoki **ekvivalent** deb ataladi.

Agar berilgan kasrning surat va maxraji bir xil natural songa ko‘paytirilsa yoki bo‘linsa, u vaqtda berilgan kasrga teng kasr hosil bo‘ladi.

Berilgan kasrni unga teng, lekin surat va maxraji undan kichik bo‘lgan kasrga almashtirishni **kasrni qisqartirish** dab ataladi. Masalan, $\frac{5}{10} = \frac{2}{5}$.

Surat va maxraji o‘zaro tub bo‘lgan kasrlarni **qisqarmas kasrlar** deb ataladi. Masalan, $\frac{3}{5}$ qisqarmas kasrdir.

Kasrlarni o‘zaro teng va bir xil maxrajli kasrlarga almashtirishni **kasrlarni umumiy maxrajga keltirish** deb ataladi.

$\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ ikki kasrning umumiy maxraji b va d sonlarning umumiy karralisi, eng kichik umumiy maxraji esa ularning eng kichik umumiy karralisi $K(b, d)$ bo‘ladi.

Ta’rif. Kasrlar ko‘rinishida beriluvchi sonlarni **musbat ratsional sonlar** deb ataladi.

Musbat ratsional sonlar to‘plami Q_+ bilan belgilanadi. Bitta $\frac{1}{3}$, yoki $\frac{2}{6}$, yoki $\frac{3}{9}$ va xakozo kasr musbat ratsional son bo‘lmasdan, ularning $\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{6};\frac{3}{9};...;\ \frac{n}{3^n};...\right\}$ to‘plami musbat ratsional son bo‘ladi. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ va xakozo kasrlar esa shu musbat ratsional sonning turli ifodalaridir. $\left\{\frac{3}{2};\frac{6}{4};\frac{9}{6};...\right\}$ to‘plam boshqa ratsional sonni aniqlaydi.

Musbat ratsional sonning barcha ifodalari orasidan qisqarmas kasr ajratib olinadi. Chunki qisqarmas kasrni ko‘pincha musbat ratsional sonning ifodalari sifatida qaraladi.

Teorema. Har qanday ratsional sonning ifodasi bo‘lgan bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjud.

Har qanday n natural sonni har doim $\frac{m \cdot n}{n}$ kasr ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lgani uchun, n natural soni $\left\{\frac{n}{1};\frac{2n}{2};\frac{3n}{3};...;\frac{mn}{m};...\right\}$ ko‘rinishdagi musbat ratsional sondan iborat bo‘ladi. Shu sababli natural sonlar to‘plami N musbat ratsional sonlar to‘plami Q_+ ning qism to‘plami bo‘ladi: $N \subset Q_+$.

Teorema. Q_+ musbat ratsional sonlar to‘plamidagi har qanday ikki a va b sonni bir xil maxrajli kasr ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Endi musbat ratsional sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish qoidalarini keltiramiz.

Ta’rif. Agar a va b musbat ratsional sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{q}{n}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u vaqtda ***a* va *b* sonlarning yig‘indisi** deb $\frac{p+q}{n}$ kasr bilan ifodalangan songa aytiladi:

$$\frac{p}{n}+\frac{q}{n}=\frac{p+q}{n}.$$

Agar *a* va *b* musbat ratsional sonlar har xil maxrajli kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u vaqtda avvalo bu kasrlar bir xil maxrajli kasrlarga keltiriladi va undan keyin qo‘shiladi.

Ta’rif. *a* va *b* musbat ratsional sonlarning **ayirmasi** deb, shunday *c* musbat ratsional songa aytiladiki, uning uchun $a = b + c$ tenglik o‘rinli bo‘lsa. *a* va *b* musbat ratsional sonlar ayirmasi *a*-*b* kabi yoziladi.

Demak, $c = a – b$.

Agar *a* va *b* musbat ratsional sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{q}{n}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u vaqtda *a* va *b* sonlarning ayirmasi $\frac{p-q}{n}$ kasr bilan ifodalanadi:

$$\frac{p}{n}-\frac{q}{n}=\frac{p-q}{n}.$$

a va *b* musbat ratsional sonlar har xil maxrajli kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, avvalo ular bir xil maxrajli kasrlarga keltiriladi va undan keyin ayriladi.

Ta’rif. Agar *a* va *b* musbat ratsional sonlar $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u vaqtda ularning ko‘paytmasi $\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$ kasr bilan ifodalangan son bo‘ladi:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}.$$

Ta’rif. Ikki *a* va *b* musbat ratsional sonning **bo‘linmasi** deb, shunday *c* songa aytiladiki, u uchun $a = b\cdot c$ bo‘ladi.

Agar a va b musbat ratsional sonlar $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u vaqtda ularning bo‘linmasi quyidagi formula bo‘yicha topiladi:

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}.$$

Shuni ta’kidlab o‘tamizki, $\frac{m}{n}$ kasrdagi chiziq belgisini bo‘lish amalining belgisi deb ham qarash mumkin. Haqiqatan, ikkita m va n natural sonini olamiz va musbat ratsional sonlarni bo‘lish qoidasiga asosan, ularning bo‘linmasini topamiz:

$$m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{m}{n}.$$

Aksincha, agar $\frac{m}{n}$ kasr berilgan bo‘lsa, u vaqtda $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=m:n$. Demak, har qanday musbat ratsional sonni ikki natural sonning bo‘linmasi deb qarash mumkin ekan. Shuni aytish kerakki, “ratsional” termini lotincha *ratio* so‘zidan kelib chiqqan bo‘lib, nisbatni anglatadi.

Misol: $5\frac{1}{4}-2\frac{2}{3}=3\frac{3-8}{12}=2\frac{15-8}{12}=2\frac{7}{12}$

Misol: $4\frac{1}{5}:2\frac{1}{3}=\frac{21}{5}:\frac{7}{3}=\frac{21}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 3}{5}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$.

Ta’rif. Maxraji 10 ning darajalaridan iborat bo‘lgan kasrlarni **o‘nli kasrlar** deb ataladi. Masalan, $\frac{4}{10^2}$, $\frac{5}{10^4}$ kasrlar o‘nli kasrlardir.

Sonning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvining ma’nosini aniqlaylik. $\frac{m}{10^n}$ o‘nli kasr berilsin. m sonining o‘nli sanoq sistemasidagi ifodasini olaylik:

$m = m_k \cdot 10^k + \ldots + m_0$. U vaqtda $n \leq k$ bo‘lganda

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m_k \cdot 10^k + \ldots + m_n \cdot 10^n + m_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + m_o}{10^n} =$$

$$= m_k \cdot 10^{k-n} + \ldots + m_n + \frac{m_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{m_0}{10^n}.$$

Bu yerda $m_k \cdot 10^{k-n} + \ldots + m_n$ yig‘indi $m_k \cdots m_n$ sonining yozuvi, $\frac{m_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{m_0}{10^n}$ yig‘indi esa $\frac{m}{10^n}$ son kasr qismining yozuvidir. Bunday kasr qismini maxrajsiz yozish qabul qilingan va bunda kasr qismi butun qismidan vergul bilan ajratilgan:

$$m_k \cdots m_n, m_{n-1} \cdots m_0.$$

Masalan, $\frac{5461}{10^2} = 54{,}61$.

O‘nli kasrlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarish natural sonlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarishga keltiriladi. Shu sababli, har qanday oddiy kasrni o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkinmi ? – degan savol tug‘iladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. $\frac{a}{b}$ qisqarmas oddiy kasr o‘nli kasrga teng bo‘lishi uchun, bu kasr maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida faqat 2 yoki 5 sonlari bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Misol. $\frac{11}{20}$ kasrni o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin. Chunki u qisqarmas va maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasi faqat 2 va 5 sonlaridan iborat: $20 = 2^2 \cdot 5$.

Misol. $\frac{7}{30}$ kasrni o‘nli kasr ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi. Chunki maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida 3 soni bor: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

$\frac{5}{6}$ qisqarmas oddiy kasr maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida 3 soni bo‘lgani uchun, bu oddiy kasrni o‘nli kasr ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi. Lekin 5 ni 6 ga bo‘lish natijasida quyidagi cheksiz tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$0{,}83 < \frac{5}{6} < 0{,}84,$$

$$0{,}833 < \frac{5}{6} < 0{,}834,$$

$$0{,}8333 < \frac{5}{6} < 0{,}8334.$$

Umuman, ixtiyoriy *n* uchun

$$0{,}\underbrace{833\cdots3}_{n\, ta\, raqam} < \frac{5}{6} < 0{,}\underbrace{833\cdots4}_{n\, ta\, raqam}.$$

Bu cheksiz tengsizliklarni yozish o‘rniga, quyidagicha yozish qabul qilingan

$$\frac{5}{6} = 8{,}333\cdots3\cdots$$

va uni **cheksiz o‘nli kasr** deb ataladi.

Chekli o‘nli kasrlarni ham cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida yosish mumkin. Buning ushun chekli o‘nli kasrning o‘ng tomoniga 0 larni yozish yetarli. Masalan, $0,35 = 0,35000\cdots0\cdots$.

5 ni 6 ga bo‘lganimizda bo‘linmada raqamlar takrorlanmoqda. Sonning cheksiz o‘nli kasrli yozuvida takrorlanib turuvchi raqamlar guruhiga **davr** deyiladi. Yozuvida davr qatnashgan o‘nli kasrni **davriy cheksiz o‘nli kasr** deb ataladi. Davrni kichik qavs ichida bir marta yozish qabul qilingan, masalan, $\frac{5}{6} = 0,8(3)$.

Teorema. Agar $\frac{m}{n}$ kasr qisqarmas va maxrajining yoyilmasida 2 va 5 dan farqli tub ko‘paytuvchilar bo‘lsa, u vaqtda bu kasr davriy cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalanadi.

Davri berguldan keyinoq boshlanadigan davriy cheksiz o‘nli kasrlarni **sof davriy kasr** deb ataladi, masalan, $\frac{1}{3} = 0,(3)$.

Vergul va davr orasida boshqa raqamlari bor davriy cheksiz o‘nli kasrlarni **aralash davriy kasrlar** deb ataladi, masalan, $\frac{5}{6} = 0,8(3)$.

Agar qisqarmas oddiy kasr maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida 2 va 5 soni bo‘lmasa, u vaqtda bu kasrni cheksiz o‘nli kasrga aylantirganda sof davriy kasr hosil bo‘ladi.

Agar qisqarmas oddiy kasr maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida 2 va 5 sonlari qatnashsa, u vaqtda bu kasrni cheksiz o‘nli kasrga aylantirganda aralash davriy kasr hosil bo‘ladi. Bu holda vergul bilan davr orasidagi raqamlar soni, maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasidagi 2 va 5 ko‘paytuvchilarning eng yuqori darajasiga teng bo‘ladi. Masalan, agar $\frac{a}{b}$ kasrda $b = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ bo‘lsa, u vaqtda bu kasrning aralash davriy kasrida vergul bilan davr orasidagi raqamlar soni 3 ta bo‘ladi.

Endi davriy cheksiz o‘nli kasrni oddiy kasr ko‘rinishida qanday yozish mumkinligini o‘rganamiz.

Bizga sof o‘nli kasr 0,(26) berilsin. Unga mos ratsional sonni a bilan belgilaylik: $a = 0{,}2626\cdots$. Bu tenglikning ikki tomonini 100 ga ko‘paytiraylik:

$$100 \cdot a = 26{,}2626\cdots,$$

yoki

$$100 \cdot a = 26 + 0{,}2626\cdots,$$

yoki

$$100 \cdot a = 26 + a.$$

Oxirgi tenglamani yechamiz:

$$a = \frac{26}{99}.$$

Bu kasr qisqarmasdir. Shunday qilib quyidagi xulosaga kelamiz.

Sof davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrga teng bo‘lib, maxraji esa kasr davrida nechta raqam bo‘lsa, shuncha to‘qqizdan iborat.

Endi 0,6(41) aralash davriy kasr berilsin. Unga mos ratsional sonni b bilan belgilaymiz: $b = 0{,}64141\cdots$. Bu tenglikning ikki tomonini 10 ga ko‘paytirib $10 \cdot b = 6{,}4141\cdots$ sof davriy kasrni hosil qilamiz va $x = 6{,}4141\cdots$ deb belgilaymiz. Oxirgi tenglikning ikki tomonini 100 ga ko‘paytiramiz:

$$100 \cdot x = 641{,}4141\cdots$$

yoki

$$100\cdot x = 614 + 0{,}4141\cdots.$$

So‘nggi tenglikning ikkala qismiga 6 ni qo‘shamiz:

$$100\cdot x + 6 = 641 + 6{,}4141\cdots.$$

Bu yerda $6{,}4141\cdots = x$ bo‘lgani uchun

$$100\cdot x + 6 = 641 + x$$

tenglama hosil bo‘ladi. Uni yechsak

$$x = \frac{641-6}{99}.$$

x ning bu qiymatini $10b=6{,}4141\cdots$ tenglikka qo‘yamiz:

$$10\cdot b = \frac{641-6}{99}.$$

Bu yerdan

$$b = \frac{641-6}{990}.$$

Shunday qilib quyidagi xulosaga keldik.

Butun qismi 0 bo‘lgan aralash davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati ikkinchi davrgacha yozilgan sondan birinchi davrgacha yozilgan sonning ayirmasidan, maxraji esa davrda nechta raqam bo‘lsa shuncha to‘qqizdan va birinchi davrgacha nechta raqam bo‘lsa shuncha noldan iborat bo‘ladi.

Masalan, $0{,}62(31) = \frac{6231-62}{9900} = \frac{6169}{9900}$.

Davriy cheksiz o‘nli kasrlar bilan birga davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlar ham mavjud. Masalan, biz bilamizki aylana uzunligining diametriga nisbati π = 3,141592653… davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr bo‘ladi. Agar cheksiz o‘nli kasr davriy bo‘lmasa, u ratsional son bo‘lmaydi. Masalan, $\sqrt{2}$ soni ratsional son emas.

Faraz qilaylik $\sqrt{2}$ ratsional son bo‘lsin. U vaqtda bu sonni qisqarmas oddiy kasr ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Bu tenglikdan

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

yoki

$$m^2 = 2 \cdot n^2.$$

Oxirgi tenglikning o‘ng tomoni 2 ga bo‘lingani uchun, chap tomoni ham 2 ga bo‘linadi. Shu sababli m^2 va demak, m soni ham 2 ga karrali, ya’ni

$m = 2 \cdot k$ bo‘lib, bu yerda k natural son. U vaqtda $4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2$ yoki $2 \cdot k^2 = n^2$.

Demak, n ham 2 ga karrali, ya’ni $n = 2 \cdot p$ bo‘lar ekan, bu yerda p natural son. Shunday qilib $\frac{m}{n}$ kasrning surati ham, maxraji ham 2 ga karrali bo‘lib, kasrning 2 ga qisqarishi kelib chiqadi. Bu esa $\frac{m}{n}$ kasrning qisqarmas kasr ekanligiga ziddir.

Demak, $\sqrt{2}$ soni ratsional son emas ekan. U davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr bilan ifodalanadi: $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$

MASHQLAR:

1. Hisoblang:

1) 0,14 va 0,15 sonlari orasiga 9 ta ratsional son joylashtiring;

2) 0,245 va 0,246 sonlari orasiga 99 ta ratsional son joylashtiring;

3) $\frac{13}{17}$ va $\frac{14}{17}$ sonlari orasiga 99 ta ratsional son joylashtiring;

4) $\frac{18}{19}$ va $\frac{19}{20}$ sonlari orasiga 99 ta ratsional son joylashtiring;

5-§ Irratsional sonlar.

Miqdorlarni o‘lchash butun sonlar to‘plamini kengaytirish zaruriyatini vujudga keltirdi. Q ratsional sonlar to'plami ham matematikaning ko‘pgina amaliy va nazariy masalalarini hal etishdagi ehtiyojlarimizni qanoatlantira olmaydi. Q to'plamni ham kengaytirish ehtiyojlari sezilib turadi. Masalan, amaliyotda kesma uzunligining taqribiy qiymatini ratsional sonlar yordamida yetarlicha aniqlikda o‘lchab topish mumkin. Lekin o‘lchanayotgan miqdorning qiymatlarini aniq ifoda qilish uchun ratsional sonlar to‘plami yetarli emas.

Ta’rif. Davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlarni **musbat irratsional sonlar** deb ataladi.

Masalan, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$, $lg5$, $sin31^{o}$ sonlari irratsionaldir. Musbat irratsional sonlar to‘plamini $\boldsymbol{I}_{+}$ bilan belgilanadi.

Ta’rif. Musbat ratsional sonlar to‘plani $\boldsymbol{Q}_{+}$ bilan musbat irratsional sonlar to‘plami $\boldsymbol{I}_{+}$ ning birlashmasini **musbat haqiqiy sonlar to‘plami** deyiladi va $\boldsymbol{R}_{+}$ bilan belgilanadi.

Demak, $\boldsymbol{R}_{+}= \boldsymbol{Q}_{+}\cup \boldsymbol{I}_{+}$.

Har qanday musbat haqiqiy sonni cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin. Agar musbat haqiqiy son ratsional bo‘lsa, u vaqtda cheksiz o‘nli kasr davriy bo‘ladi, agar musbat haqiqiy son irratsional bo‘lsa, u vaqtda cheksiz o‘nli kasr davriy bo‘lmaydi.

$a = n,n_1n_2\cdots n_k\cdots$ biror haqiqiy son bo‘lsin. Agar a sonning butun qismi va verguldan keyingi dastlabki k ta raqami olinib, qolganlari olinmasa, u vaqtda a sonining $\frac{1}{10^k}$ gacha aniqlikda kami bilan olingan taqribiy qiymati hosil bo‘ladi. Bu taqribiy qiymat $a_k = n,n_1n_2\cdots n_k$ son bo‘ladi.

Agar a soninig a_k taqribiy qiymatidagi oxirgi raqami bitta orttirilsa, u vaqtda a sonining $\frac{1}{10^k}$ gacha aniqlikda ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymati hosil bo‘ladi. Bu qiymat $a'_k = n,n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$ sondan iborat bo‘ladi. Har qanday a haqiqiy son uchun $a_k \le a < a'_k$ tengsizlik o‘rinli. Bu tengsizlikni a sonining $\frac{1}{10^k}$ gacha aniqlikdagi **o‘nli yaqinlashishi** deb ataladi. Masalan, $\sqrt{5} = 2,2360679\cdots$ sonining $\frac{1}{10^5} = 0,00001$ gacha aniqlikda kami bilan olingan taqribiy qiymati 2,23606, ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymati 2,23607 soni bo‘lib,

$$2,23606 \le \sqrt{5} < 2,23607$$

tengsizlik $\sqrt{5}$ sonining 0,00001 gacha aniqlikdagi o‘nli yaqinlashishi bo‘ladi.

Bizga cheksiz o‘nli kasrlar bilan ifodalangan a va b musbat haqiqiy sonlar berilsin.

Ta’rif. Ikkita a va b musbat haqiqiy sonlardan qaysi birining butun qismi katta bo‘lsa, shu son katta hisoblanadi. Agarda butun qismlari teng bo‘lsa, u vaqtda qaysi birining verguldan keyingi xonalaridagi raqami katta bo‘lib, undan oldingi raqamlari teng bo‘lsa, shunisi katta hisoblanadi.

Agar *a* soni *b* sondan katta bo‘lsa, u vaqtda *b* son *a* sondan kichik bo‘ladi.

Bir xil o‘nli kasr bilan ifodalangan musbat haqiqiy sonlar bir-biriga teng hisoblanadi.

Masalan, $4,263\cdots > 3,871\cdots$, $5,327\cdots < 5,415\cdots$, $7,0126\cdots > 7,0128\cdots$, 1,(7) = 1,(7).

a va *b* musbat haqiqiy sonlar, a_k va b_k sonlar ularning kami bilan olingan taqribiy qiymatlari, a_k' va b_k' lar esa ularning ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlari bo‘lsin.

Ta’rif. *a* va *b* musbat haqiqiy sonlarning **yig‘indisi** deb, $a_k + b_k \le a + b < a_k^{'} + b_k^{'}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi *a* + *b* soniga aytiladi.

Misol. $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ yig‘indini $0,0001 = \frac{1}{10^4}$ gacha aniqlikda topaylik. $\sqrt{5}$ va $\sqrt{7}$ sonlarning 0,00001 gacha aniqlikdagi o‘nli yaqinlashishlarini olamiz:

$$2,23606 \le \sqrt{5} < 2,23607,$$

$$2,64575 \le \sqrt{7} < 2,64576.$$

U vaqtda

$$4,88181 \le \sqrt{5}+\sqrt{7} < 4,88183.$$

Bu yerdan $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ = 4,8818…

Demak, 0,0001 gacha aniqlikda $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ yig‘indi 4,8818 ga teng.

MASHQLAR:

1. Hisoblang.

1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{49}$;

3) $\sqrt{144}$; 4) $\sqrt{361}$;

5) $\sqrt{0,04}$; 6) $\sqrt{0,36}$;

7) $\sqrt{2,89}$; 8) $\sqrt{1,44}$;

9) $\sqrt{0,0081}$; 10) $\sqrt{3,61}$.

6-§ Sonning moduli va uning xossalari

Ta'rif. Haqiqiy son a ning absolut qiymati yoki moduli deb ($|a|$ bilan belgilanadi) a songa, agar $a \geq 0$ bo'lsa, va $-a$ songa, agar $a < 0$ bo'lsa, aytiladi, ya'ni:

a sonining
$$|a| = \begin{cases} a, \ agar, a \geq 0 \ \text{bo'lsa}, \\ -a, \ agar, a < 0 \ \text{bo'lsa}. \end{cases}$$

absolyut qiymati $|a|$ kabi belgilanib, unga ba'zan a sonining **moduli** deb ham ataladi.

Quyidagi shartlarni qabul qilamiz.

1. Har qanday musbat haqiqiy son istalgan manfiy haqiqiy sondan katta: $a > -b$.

2. Har qanday manfiy haqiqiy son istalgan musbat haqiqiy sondan kichik: $-b < a$.

3. Nol har qanday musbat haqiqiy sondan kichik, istalgan manfiy haqiqiy sondan katta: $0 < a$, $0 > -b$.

4. Ikki manfiy haqiqiy sondan qaysi birining moduli katta bo'lsa, o'sha son kichik bo'ladi va qaysi birining moduli kichik bo'lsa, o'sha son katta bo'ladi.

5. Agar $a > b$ bo‘lsa, u vaqtda $-a < -b$ bo‘ladi.

Berilgan har qanday a va b haqiqiy sonlar uchun $a < b$, $a > b$, $a = b$ munosabatlarning bittasi va faqat bittasi o‘rinli.

Ikkita musbat haqiqiy sonning yig‘indisi musbat son bo‘lib, u musbat haqiqiy sonlar to‘plamida ta’riflangan qoidalar bo‘yicha topiladi.

Ikkita manfiy haqiqiy sonning yig‘indisi deb, qo‘shiluvchilarning modullari yig‘indisiga qarama-qarshi bo‘lgan manfiy songa aytiladi:

$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Turli ishorali ikki haqiqiy sonning yig‘indisi deb, moduli katta qo‘shiluvchining ishorasi bilan olingan, modullar ayirmasiga aytiladi:

$$a + (-b) = (-b) + a = \begin{cases} a - b, \text{ agar } a > b \text{ bo'lsa}, \\ -(b - a), \text{ agar } b > a \text{ bo'lsa}. \end{cases}$$

Ikkita qarama-qarshi sonning yig‘indisi nol hisoblanadi: $a+(-a)=0$.

Agar qo‘shiluvchilarning biri nolga teng bo‘lsa, u vaqtda yig‘indi qo‘shiluvchilarning ikkinchisiga teng bo‘ladi:

$$a + 0 = a,\ \ (-a) + 0 = -a,\ \ 0 + 0 = 0.$$

Ikkita haqiqiy son qarama-qarshi bo‘lgandagina yig‘indisi nolga teng bo‘ladi.

Misol: $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-4| = 4$.

Ta’rifdan har qanday haqiqiy a son uchun $a \leq |a|$ munosabat kelib chiqadi.

Absolut qiymatning ba’zi xossalarini ko‘rib chiqamiz:

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$, ya’ni ikkita haqiqiy son algebraik yig‘indisining moduli shu sonlar modullarining yig‘indisidan katta emas.

Isbot: Agar $a + b \geq 0$ bo‘lsa, $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$ chunki $a \leq |a|$ va $b \leq |b|$.

Agar $a + b < 0$ bo‘lsa, $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \le |a| + |b|$.

Misol: 1) $|-3 + 5| < |-3| + |5| = 3 + 5 = 8$ yoki $2 < 8$;

2) $|-2 - 4| = |-2| + |-4| = 2 + 4 = 6$ yoki $6 = 6$.

Isbot qilish mumkinki, $|a + b + ... + c| \le |a| + |b| + ... + |c|$;

2. $|a - b| \ge |a| - |b|$, ya’ni ayirmaning absolut qiymati kamayuvchi va ayriluvchi absolut qiymatlarining ayirmasidan kichik emas.

Isbot uchun $a - b = c$ deb, $a = b + c$ ni topamiz.

$|a| = |b + c| \le |b| + |c| = |b| + |a - b|$, bundan

$|a| - |b| \le |a - b|$ kelib chiqadi.

Misol: 1. $|(-7) - 4| > |-7| - |-4| = |7 - 4| = 3$, $11 > 3$.

2. $|5 - 2| = |5| - |2| = 5 - 2 = 3$ yoki $3 = 3$.

3. Ko‘paytmaning moduli ko‘payuvchilar modullarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$|a \cdot b \cdot ... \cdot c| = |a| \cdot |b| \cdot ... \cdot |c|$;

4. Bo‘linmaning moduli bo‘linuvchi bilan bo‘luvchi modullarining nisbatiga teng, ya’ni

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Oxirgi ikkita xossaning isboti modulning ta’rifidan kelib chiqadi.

$$\begin{cases} -3x + 2, & x < -\dfrac{1}{2} \\ x + 4, & -\dfrac{1}{2 \le x < 3} \\ 3x - 2, & x > 3 \end{cases}$$

MASHQLAR:

1. Modulning quyidagi xossalarini isbotlang:

1) $|a| \geq -a$;

2) $|a| = |-a|$;

3) $|a-b| \leq |a| + |b|$;

4) $|a+b| \geq |a| - |b|$.

2. Tenglikni isbotlang:

1) $\left|a^2\right| = |a|^2 = a^2$;

2) $\left|a^{2n}\right| = |a|^{2n} = a^{2n}$.

3. Sonlarni taqqoslang:

1) $|6,7|$ va 6; 2) $-|0,5|$ va $-0,5$;

3) $|4,2|$ va $4,2$; 4) $|-3,4|$ va $3,4$;

5) $|-3\frac{2}{3}|$ va $-3\frac{2}{3}$; 6) $|a|$ va a.

4. Harflarning berilgan qiymatlarida ifodaning qiymatini hisoblang:

1) $|a| + |2b|,\ a = -4, b = 3$;

2) $|a+b| - 2|b|,\ \ a = 5,\ \ b = -3$;

3) $\dfrac{3 - |3a| + 2|b|}{|a| - |b|},\ \ a = 1,\ \ b = 3$;

4) $\dfrac{2 + |a-b| - 3|a|}{2|a| + |b|},\ \ a = -1,\ \ b = 3$.

5. 1) $|x| = y$, $|x| = -y$ bo‘lsa y qanday son?

6. 1) $|x| = |y|$, $|x| = x$, $|y| = -x$ bo‘lsa *y* qanday son?

7. Ifodalarni modul belgisisiz yozing.

1) $|x+1|$; 2) $|x-2|$;

3) $|2x-3|$; 4) $|4x+5|$;

5) $|3x-7|$; 6) $|-2x+3|$;

7) $|-2x+3|$; 8) $|-6x+5|$;

9) $|-2x-5|$; 10) $|3x|$;

11) $|-3x+4|$; 12) $|4x-7|+2$.

8. Ifodani modul belgisisiz yozing.

1) $|x+1|+|x+2|$; 2) $|2x+1|+|x-3|$;

3) $|2x-4|-2|x+3|$; 4) $|4x+5|-3|x+2|$;

5) $||x|+3|$; 6) $||x|-1|$;

7) $|x+2-|x||$; 8) $|x-3-|x||$;

7-§ Kompleks son tushunchasi.

Ixtiyoriy ko‘rinishdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to‘plami yetarli emas. Haqiqatan ham, sonlar to‘plamida diskriminanti manfiy bo‘lgan kvadrat tenglama yechimga emas. Masalan, $x^2+1=0$ Bu qiyinchilikdan qutulish maqsadida kompleks sonlar to‘plami kiritiladi. Bu to‘plamga haqiqiy sonlar to‘plami to‘plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to‘plami *C* bilan belgilanadi. $D<0$; $x^2+1=0$ tenglama yechimi kompleks sonlar to‘plamida bor deb, ya’ni bilan belgilanuvchi mavhum birlik kiritamiz. Bu mavhum birlik yuqoridagi tenglamani yechimi bo‘ladi, ya’ni $i^2+1=0$; $i^2=-1$. Shunday qilib, biz haqiqiy sonlar to‘plamini mavhum sonlar bilan to‘ldiramiz. Haqiqiy a sonini mavhum *bi* soniga qo‘shishdan $a+bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

Ta’rif. $z = a + bi$ ifodaga kompleks son deyiladi, bunda a, b haqiqiy sonlar, i esa mavhum birlik, $i^2 = -1$. a kompleks sonining haqiqiy, bi esa mavhum qismlari. $\mathrm{Re}(z) = a$ kompleks sonining haqiqiy koeffitsiyenti, $\mathrm{Im}(z) = b$ kompleks sonining mavhum koeffitsiyenti.

Masalan, $2 + 3i$, $-3 + 2i$ kompleks sonlar. $-3i$, $5i$, 0, 5, – 3 sonlar ham kompleks sonlar, chunki $5i = 0 + 5i$, $5 = 5 + 0 \cdot i$. Bundan kelib chiqadiki, barcha haqiqiy sonlar kompleks sonlar bo‘ladi, ya’ni haqiqiy sonlar to‘plami kompleks sonlar to‘plamining qism to‘plami bo‘ladi.

$-3i$, $5i$,va h. k. mavhum sonlar, $2 + 3i$, $5 - 2i$ sonlar esa aralash kompleks sonlar deyiladi. $z = a + bi$ kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo‘lsa, ya’ni $a = 0$ va $b = 0$ bo‘lsa, u nolga teng bo‘ladi.

Ta’rif. Agar $a_1 + b_1 i$ va $a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarida $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ bo‘lsa, ular teng deyiladi.

Ta’rif. Mavhum qismlar bilan farq qiluvchi $z = a + bi$ va $z = a - bi$ kompleks sonlar qo‘shma deyiladi.

Ta’rif. Haqiqiy va mavhum qismlarning ishora lari bilan farq qiluvchi ikkita $z_1 = a + bi$ va $z_2 = -a - bi$ kompleks sonlar qarama qarshi kompleks sonlar deyiladi.

MASHQLAR:

1. Hisoblang:

1) $\sqrt{-1}$; 2) $\sqrt{-4}$;

3) $\sqrt{-8}+5$; 4) $\sqrt{-16}+8$;

5) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}$; 6) $\sqrt{-16}+\sqrt{25}$;

7) $(3+2i)+(2-4i)$; 8) $(5-2i)-(1-3i)$;

9) $(6+3i)-(5-3i)$; 10) $(12+i)-(-3i)$.

2. Kompleks sonning qo‘shmasini toping:

1) $3+2i$; 2) $5+3i$;

3) $2-i$; 4) $i+4$;

5) $4i+3$; 6) $2-3i$;

7) $(3+2i)\cdot(5+i)$; 8) $(5-i)\cdot(2-3i)$;

9) $(2-i)-(3-5i)$; 10) $(5-2i)+(2-3i)$.

3. Hisoblang:

1) $(3+2i)\cdot(i+2)$; 2) $(1-i)\cdot(5-i)$;

3) $\frac{2-i}{3-i}$; 4) $\frac{i+4}{2-i}$;

5) $\frac{4i+3}{i-4}$; 6) $\frac{1-2i}{3-i}$;

7) $\frac{2}{2+2i}$; 8) $\frac{5}{4-i}$;

9) $\frac{5i}{2-i}$; 10) $\frac{4i}{5-4i}$.

8-§ Zanjir kasrlar

Ushbu $$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots}} \qquad \cdots+\cfrac{b_k}{a_k}$$

($a_i(i=\overline{0,k}),\ b_j(j=\overline{1,k})$ butun sonlar) ko'rinishdagi ifoda uzluksiz zanjir kasr deyiladi.

Agar (1) da $b_1=b_2=b_3=\cdots=b_k=1$, a_0 - butun son, $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$ -natural sonlar bo'lib $a_k>1$ bo'lsa, u holda ushbu

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots \atop \cdots+\cfrac{1}{a_k}}}$$

ifodani chekli zanjir kasr deyiladi.

$$P=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots \atop \cdots+\cfrac{1}{a_k}}}$$ bo'lsin.

$A_0=a_0$ deb olaylik. U holda buni nolinchi tartibli munosib kasr deyiladi.

$A_1=a_0+\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{a_0\cdot a_1+1}{a_1}$ birinchi tartibli munosib kasr deyiladi.

$A_2=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}$ ikkinchi tartibli munosib kasr deyiladi

....

$A_n=P$ esa n-tartibli munosib kasr deyiladi

$A_0=\dfrac{a_0}{1}=\dfrac{R_0}{Q_0}$ deb belgilaylik. U holda $R_0=a_0$, $Q_0=1$ hosil bo'ladi;

$A_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} = \frac{R_1}{Q_1}$ desak, u xolda $R_1 = a_0 \cdot a_1 + 1$, $Q_1 = a_1$

xosil buladi;

$$A_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{R_2}{Q_2}$$ - ikkinchi tartibli munosib kasr;

....

.

$A_n = P = \frac{R_n}{Q_n}$ n- tartibli munosabat kasr.

Shu yo'l bilan $R_0, R_1, R_2, \cdots$, $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots$ ketma-ketliklarni hosil qilamiz.

Bu ketma-ketliklardan quyidagi rekurrent formulalarni hosil qilamiz:

$R_k = R_{k-1} \cdot a_k + R_{k-2}$, $Q_k = Q_{k-1} \cdot a_k + Q_{k-2}$.

$\frac{R_k}{Q_k}$ k - tartibli munosib kasr deyiladi.

$R_2 = 1$, $R_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $R_1 = 1$ deb belgilaylik. Lekin ularning o'zi ma'noga ega emas. Yuqoridagi tushunchalardan quyidagi jadvalni tuzamiz:

k	-2	-1	0	1	2	…	n-1	n
A_k	-	-	a_0	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
R_k	0	1	R_0	R_1	R_2		R_{n-1}	R_n
Q_k	1	0	Q_0	Q_1	Q_2		Q_{n-1}	Q_n

Misol. Berilgan $\frac{104}{23}$ kasrni chekli zanjir kasr ko'rinishida ifodalang va uning munosib kasrlarini toping.

Yechish: $\frac{104}{23}$ kasrni chekli zanjir kasr ko'rinishida ifodalash uchun 104 va 23 sonlari uchun Evklid algoritmini tuzamiz.

$$104 = 23 \cdot 4 + 12;$$

$$23 = 12 \cdot 1 + 11;$$

$$12 = 11 \cdot 1 + 1;$$

$$11 = 1 \cdot 11 + 0.$$

Evklid algoritmidagi tengliklarning har ikkala tomonini bo'luvchilarga
bo'lamiz:

$$\frac{104}{23} = 4 + \frac{12}{23};$$

$$\frac{23}{12} = 1 + \frac{11}{12};$$

$$\frac{12}{11} = 1 + \frac{11}{11};$$

$$\frac{11}{1} = 11.$$

Hosil bo'lgan tengliklarning o'ng tomonidagi kasr sonni uning teskarisi bilan almashtirish natijasida

$$\frac{104}{23} = 4 + \frac{12}{23} = 4 + \frac{1}{\frac{23}{12}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{11}{12}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{12}{11}}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11}}}$$

chekli zanjirni hosil qilamiz. Uni qisqacha $\frac{104}{23} = [4;1,1,11]$ ko'rinishida ifodalaymiz. Agar berilgan kasr manfiy bo'lsa, birinchi qoldiqni musbat qilib olamiz.

Misol. $-\frac{23}{13}=-2+\frac{3}{13}$ va kasr qismi chekli zanjir ko'rinishida ifodalanadi: $-\frac{23}{13}=-2+\frac{3}{13}=-2+\frac{1}{\frac{13}{3}}=-2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}=[-2;4,3]$.

Yechish: Berilgan $\frac{104}{23}=[4;1,1,11]$ ning munosib kasrlarini topish uchun quyidagi
jadvalni tuzamiz:

k	-1	0	1	2	3
A_k	-1	4	1	1	11
R_k	1	4	5	9	104
Q_k	0	1	1	2	23

Demak, $\frac{R_0}{Q_0}=4,\ \frac{R_1}{Q_1}=5,\ \frac{R_2}{Q_2}=\frac{9}{2},\ \frac{R_3}{Q_3}=\frac{104}{23}$.

Misol. Berilgan $\sqrt{14}$ sonni zanjir kasr ko'rinishida ifodalang.

Yechish: $\sqrt{14}=3+\frac{1}{\alpha_1}$;

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{14}-3}=\frac{\sqrt{14}+3}{5}=1+\frac{1}{\alpha_2};$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{14}+3}{5}-1}=\frac{5}{\sqrt{14}-2}=\frac{\sqrt{14}+2}{2}=2+\frac{1}{\alpha_3};$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\frac{\sqrt{14}+2}{2}-2}=\frac{2}{\sqrt{14}-2}=\frac{\sqrt{14}+2}{5}=1+\frac{1}{\alpha_4};$$

$$\alpha_4=\frac{1}{\frac{\sqrt{14}+2}{5}-1}=\frac{5}{\sqrt{14}-3}=\sqrt{14}+3=6+\frac{1}{\alpha_5};$$

$$\alpha_5=\frac{1}{\sqrt{14}+3-6}=\frac{1}{\sqrt{14}-3}.$$

$\alpha_5=\alpha_1$ bo'lganligi uchun, yana yuqoridagi jarayon hosil bo'ladi.

Demak, $\sqrt{14}=[3;1,2,1,6]$.

MASHQLAR:

1. Berilgan kasrni chekli zanjir kasr ko'rinishida ifodalang:

1) $\frac{323}{17}$; 2) $\frac{135}{79}$;

3) $\frac{228}{43}$; 4) $\frac{56}{17}$;

5) $\frac{73}{12}$; 6) $\frac{225}{102}$;

7) $\frac{125}{48}$; 8) $\frac{28}{11}$;

9) $\frac{241}{101}$; 10) $\frac{22}{8}$;

2. **Berilgan irratsional sonlarni chekli zanjir kasr orqali ifodalang:**

1) $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{14}$;

3) $\sqrt{13}$; 4) $\sqrt{26}$;

5) $\sqrt{30}$; 6) $\sqrt{59}$;

7) $1+\sqrt{2}$; 8) $3+\sqrt{5}$;

9) $2+\sqrt{7}$; 10) $2+\sqrt{5}$;

11) $5+\sqrt{7}$;

12) $4+\sqrt{6}$;

13) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$;

14) $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$;

15) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$;

16) $\frac{2+\sqrt{7}}{2}$;

17) $\frac{3+\sqrt{10}}{3}$;

18) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$.

3. **Quyidagi zanjir kasrlar orqali ifodalanuvchi qisqarmas kasrlarni toping:**

1) [4;1,2,1];

2)[1,2];

3) [2;2,1,3];

4) [1;2,1];

5) [5,3,2];

6) [2;5;4;1];

7) [1;1,1,21];

8) [3;5;1;1;2];

9) [1;1,2,1,5];

10) [4;2,1,1,5].

9-§ Foiz va murakkab foizlar

Hayotda ko‘p ishlatiladigan $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$ kasr sonlarning maxsus nomlari mavjud. $\frac{1}{2}$ – yarim, $\frac{1}{4}$ – chorak va hakazolar. Xuddi shunday kasrlardan biri $\frac{1}{100}$ dir.

Berilgan sonning bir protsenti (foizi) deb, uning yuzdan bir qismiga aytiladi va % bilan belgilanadi.

Masalan, p sonning 1% i $\frac{p}{100}$ kasrni bildiradi.

Demak, $1\%=\frac{1}{100}$, $10\%=\frac{1}{10}$ va hakazolar.

Sonning “promille” deyiladi va ‰ bilan belgilanadi. 2000 ning 5‰ si $\frac{2000}{1000}\cdot 5=10$ ‰.

Protsentlarga doir 4 xil masala uchraydi:

1) sonning protsentini topish;
2) protsentiga ko‘ra sonni topish;
3) ikki sonning protsent nisbatini topish;
4) murakkab protsentga doir masalalar.

Misol. a sonining p % i bo‘lgan x sonini toping.

Yechish: $p\%=\frac{p}{100}$, $x\%=\frac{ap}{100}$.

Masalan, 200 ning 20% i quyidagicha topiladi:

$$x=\frac{200\cdot 20}{100}=\frac{4000}{100}=40.$$

Misol. Sonning p% i P ga teng. Shu sonni toping.

Yechish: $\frac{p}{100}$ bo‘lagi P ga teng bo‘lgan x son $x=\frac{P\cdot 100}{p}$ dir. Sonning 40% i 25 bo‘lsa, sonning o‘zi $x=\frac{25\cdot 100}{40}=62{,}5$.

Misol. m soni a sonining necha protsentini tashkil etadi. Bu yerda m sonining a soniga nisbatini protsentlarda ifoda qilish kerak: $x=\frac{m}{a}\cdot 100$

Akademik litseyda 400 nafar o‘quvchi bo‘lib, 180 nafari qizlar. Qizlar akademik litsey o‘quvchilarining necha protsentini tashkil etadi? $x=\frac{180\cdot 100}{400}=45\%$.

Misol. Bank mijozlarga p% foyda beradi. Mijoz bankga a so‘m pul topshirsa, n yildan so‘ng necha so‘mga ega bo‘ladi?

Yechish: Xalq bankiga a so‘m qo‘ygan mijoz 1 yildan so‘ng

$$A_1 = a + \frac{a}{100} \cdot p = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

so‘mga, 2 yildan so‘ng

$$A_2 = A_1 + \frac{A_1}{100} \cdot p = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

so‘mga, 3 yildan so‘ng

$$A_3 = A_2 + \frac{A_2}{100} \cdot p = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

so‘mga ega bo‘ladi.

Shu jarayonni davom ettirib, mijoz n yildan so‘ng

$$A_n = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad (1)$$

so‘mga ega bo‘lishiga ishonch hosil qilamiz. (1) tenglik odatda **murakkab protsentlar formulasi** deb ataladi.

Masala. Korxonadagi ayollar hamma ishchilarning 35%ini tash-kil qiladi. Agar korxonada erkaklar ayollardan 252 kishiga ortiq bo‘lsa, korxonada ayollar soni nechta?

Yechish: Korxonada erkaklar umumiy ishchilarning 100 – 35 = 65% ni tashkil etadi. Erkaklar ayollardan 65 – 35 = 30% ga ortiq. 30% ishchilar 252 tani tashkil etsa, 35% i nechta bo‘ladi?

$$\frac{35 \cdot 252}{30} = 294.$$

Masala. Ikki sonning yig‘indisi 90 ga, nisbati esa 8 ga teng bo‘lsa, bu sonlarni toping.

Yechish: Masala shartiga ko‘ra $\begin{cases} x+y=90 \\ \dfrac{x}{y}=8 \end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz.

Bu sistemani yechib x = 80, y = 10 ni hosil qilamiz.

Masala. Shaxsiy korxona chiqargan mahsulotni 3348 so‘mga sotib 4% zarar ko‘rdi. Bu mahsulotning tannarxi qancha bo‘lgan?

Yechish: Mahsulotning tannarxi 100% deb qabul qilinadi, u holda ko‘rilgan zarar tannarxiga nisbatan hisoblanadi. Demak, 3348 so‘m tannarxining 100 – 4 = 96%ini tashkil qiladi. Tannarxni x bilan belgilasak, uni topish uchun 3348:96 = x:100 proporsiyaga ega bo‘lamiz, buni yechib $x=\dfrac{3348\cdot 100}{96}=3487,5$ so‘mni topamiz.

Masala. Mahsulotning 1 kilogrammi 640 so‘m turar edi. Narxi tushirilganidan keyin u 570 so‘m bo‘ldi. Mahsulotning narxi necha foiz tushirilgan?

Yechish: Mahsulot narxi 640 – 570 = 70 so‘mga kamaytirildi. Bu 640 – ning necha foizini (x%) tashkil qilishini topish uchun 640:100=70:x proporsiyaga ega bo‘lamiz. Buni yechib $x=\dfrac{100\cdot 70}{640}\approx 10,94$ ni topamiz.

Masala. Mayiz quritiladigan uzum og‘irligining 32%ini tashkil qiladi. Necha kg uzum quritilganda 2 kg mayiz chiqadi?

Yechish: Masala shartiga ko‘ra 2 kg mayiz quritiladigan uzumning 32%ini tashkil qiladi. Shuning uchun $2:32=x:100$ bo‘lib, bundan $x=\dfrac{2\cdot 100}{32}=6,25$.

Masala. Mahsulot 30% ga arzonlashtirildi. Yangi narx yana 15% ga kamaytirildi. Mahsulotning dastlabki narxi necha foizga arzonlashtirildi?

Yechish: Mahsulotning dastlabki narxini x deb belgilaymiz. Uning narxi 30% kamaygan bo‘lsa, endi x – 0,3x = 0,7x bo‘ladi. Bu narx yana 15%ga kamaytirilgan bo‘lsa, uning narxi 0,7x – 0,15·0,7x = 0,595x ni tash-kil etadi. Avvalgi narx x, oxirgi narx 0,595x bo‘lsa, mahsulot narxi $x-0{,}595x=0{,}405x$ ga arzonlashtirildi. Bulardan foydalanib, 0,405x ni necha foiz (P) ekanligini topamiz. $P=\frac{100\cdot 0{,}405x}{x}=40{,}5\%$.

Masala. Guruhdagi talabalarning 12%i matematikadan yozma ishni umuman bajarmagan, 32%i xatolar bilan bajargan, qolgan 14 tala-ba hammasini ishlagan. Guruhda nechta talaba bo‘lgan?

Yechish: 14 ta to‘g‘ri ishlagan talabalar, talabalar umumiy sonining $100-12-32=56$%ni tashkil qiladi. Agar talabalarning umumiy soni x bo‘lsa, $x:100=14:56$ bo‘ladi. Bundan $x=\frac{100\cdot 14}{56}=25$ ni topamiz.

Masala. Kema oqim bo‘ylab A portdan B portgacha 2 sutka, B dan A gacha 3 sutkada yetadi. Sol A dan B gacha necha sutkada yetadi?

Yechish: A dan B gacha masofa a ga teng bo‘lsin. Bu masofani sol x sutkada bosib o‘tsin, demak uning tezligi $\frac{a}{x}$ km/sutka bo‘ladi. Shartga ko‘ra, oqim bo‘ylab harakat qilayotgan kemaning tezligi $\frac{a}{2}$ km/sutka, turg‘un suvdagi tezligi esa $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{x}\right)$ km/sutka bo‘ladi. Shunga o‘xshash, oqimga qarshi harakatdagi kemaning tezligi $\frac{a}{3}$ km/sutka bo‘lib, turg‘un suvdagi tezligi $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{x}\right)$ km/sutka bo‘ladi. Bularni tenglashtirib $\frac{a}{2}-\frac{a}{x}=\frac{a}{3}+\frac{a}{x}$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib $x=12$ ni topamiz.

MASHQLAR:

1. a ning p % va q % ini toping:

1) a = 75; p = 4, q = 3;

2) a = 84; p = 15, q = 20;

3) a = 330; p = 18, q = 15;

4) a = 82,25; p = 160, q = 13.

2. Mahsulotni 138600 so‘mga sotib, 10% foyda olindi. Mahsulotning tannarxi qancha?

3. Bir quti sigaret 800 so‘m turar edi. Narxi tushirilgandan keyin u 704 so‘m bo‘ldi. Narxi necha foizga arzonlashdi?

4. Ekskursiya uyushtirish uchun har bir qatnashchidan 225 so‘mdan yig‘ilsa, hamma xarajatlar uchun 1320 so‘m yetmaydi. Agar har bir qatnashchidan 240 so‘mdan yig‘ilsa, 1320 so‘m ortib qoladi. Ekskursiya qatnashchilari nechta bo‘lgan?

5. Kollej talabalarining 55%*i* qizlar. Qizlar o‘g‘il bolalardan 120 taga ortiq. Barcha talabalarning soni nechta?

6. Bir necha kishi 8100 so‘m yig‘ishi lozim edi. Agar ular 3 kishiga kam bo‘lganda, har bir kishi 450 so‘mdan ortiq to‘lashi lozim bo‘lar edi. Ular necha kishi bo‘lgan?

7. A va B shaharlar orasidagi masofa suv bo‘ylab 20 km. Qayiq A dan B ga va B dan A ga borib kelishi uchun 10 soat vaqt sarf qildi. Agar qayiqni oqim bo‘ylab 3 km ga sarf qilgan vaqti, oqimga qarshi 2 km ga sarf qilgan vaqtiga teng bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligi-ni toping.

8. Kema oqim bo‘ylab 36 km va oqimga qarshi shuncha yo‘l bosib, hammasi bo‘lib 5 soat vaqt sarf qildi. Agar oqim tezligi 3 km/soat bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligini toping.

9. Yo‘lovchi poyezd stansiyasiga keta turib, avvalgi 1 soatda 3,5 km masofani o‘tdi. Shu tezlikda harakatlanayotgan yo‘lovchi 1 soat kechikishini sezib, tezligini 5 km/soatgacha oshirdi va stansiyaga 30 minut oldin yetib keldi. Yo‘lovchi qancha masofani o‘tishi kerak edi?

10-§ Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni butun sonlarda yechish

Ta’rif. Agar tenglamalar sistemasida ishtirok etayotgan noma’lumlar soni tenglamalar sonidan ortiq bo‘lsa, bunday tenglamalar Diofant tenglamalari yoki aniqmas tenglamalar deyiladi. Xususiy holda

$$3x^2-5y^2=8,\ \ x^2+3x^3-y=12,$$

$$x^3+y^2-3x^2+5=0,\ \ x^3+y^3=z^3,\ \ldots$$

ko‘rinishidagi tenglamalar aniqmas tenglamalardir. Ko‘plab qo‘llanmalarda aniqmas tenglama yoki tenglamalar sistemasining yechimini butun sonlarda topishga doir misollar ko‘p uchraydi. Yuqori darajali aniqmas tenglamalarni yechishda aniq bir matematik usulni taklif etish qiyin, ammo bunday masalalarni yechishda qisqa ko‘paytirish formulalari, qoldiqlar nazariyasi hamda mantiqiy fikrlar yuritish asosiy vosita bo‘lib xizmat qiladi. Ammo ikki noma’lumli $a^4+b^4=c^2$ ko‘rinishdagi tengamalarni yechishning bo‘linish nazariyasida munosib kasrlarga bog’liq yechish formulalari mavjud. Biz dastlab bu ko‘rinishdagi tenglamalarni butun sonlarda yechishning bo‘linish nazariyasiga asoslangan asosiy xususiyatlarini, yechish formulalarini keltiramiz va nihoyat munosib kasrlar orqali yechishni misollar vositasida bayon etamiz. Keyingi qadamda yuqori darajali aniqmas tenglamalarni yechishga oid namunalar keltiramiz

Bo‘linish nazariyasidan kelib chiqadigan asosiy natijalarni quyidagi teoremani isbotlash asosida bayon etamiz.

1-teorema: Agar $(a,\ b) = d > 1$ bo‘lib, c (⋮) d bo‘lsa, u holda

$$ax + by = c \qquad (1)$$

tenglama butun sonlarda yechimga ega emas.

2-teorema. Agar (1) tenglamada $(a,\ b) = d > 1$ bo‘lib, $c \vdots d$ bo‘lsa, u holda (1) tenglama

$$ax_1 + by_1 = c_1 \qquad (2)$$

tenglamaga teng kuchli, bu yerda (a_1 , b_1) = 1.

3-teorema. Agar $(a,\ b) = d$ bo‘lsa, u holda

$$a + b = d \qquad (3)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi x va y butun sonlar mavjud.

Misol. 1232 va 1672 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini berilgan sonlar orqali chiziqli ifodalang.

Yechish: 1672 = 1232·1 + 440, 1232 = 440·2 + 352,

440 = 352·1 + 88, 352 = 88·4 + 0 tengliklardan

88 = 440 − 352·1 = 440 − (1232 − 440·2)·1 = 440·3 − 1232·1 =

= (1672 − 1232·1)·3 − 1232·1 = 1672·3 − 1232·4 = 1672·3 + 1232·(−4).

Demak, 1672·3 + 1232·(−4) = 88. Bundan $x_0 = 3$, $y_0 = -4$ sonlar 167x + 1232y = 88 tenglama yechimlari ekanligi ayon bo‘ladi.

Diofant tenglamalarini yechishda yana quyidagi tenglamalar muhim ahamiyatga ega:

4-teorema. Agar $(a, b) = 1$ bo‘lsa, u holda

$$a + b = 1 \qquad (5)$$

tenglama hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega.

5-teorema. Agar $(a, b) = 1$ bo‘lib, (x_0, y_0) juftliklar (1) tenglamani qanoatlantirsa, u holda bu tenglamaning barcha yechimlarini

$$x = x_0 + b, y = y_0 - a \qquad (6)$$

formula bilan berish mumkin, bu yerda t- ixtiyoriy butun son.

6-teorema. Agar $(a, b) = 1$ bo‘lsa, u holda (1) tenglamaning barcha butun sonli yechimlarini (5) tenglamaning (x_0, y_0) yechimlari orqali

$$x = cx_0 + b, y = cy_0 - a \qquad (7)$$

formula bilan ifodalash mumkin.

Misol. $37x - 256y = 3$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish: $256 = 37\cdot6 + 34$, $37 = 34\cdot1 + 3$, $34 = 3\cdot11 + 1$ bo‘lgani uchun $1 = 34 - 3\cdot11 = 34 - (37 - 34\cdot1)\cdot11 = 34\cdot12 - 37\cdot11 = (256 - 37\cdot6)\cdot12 - 37\cdot11 = 37\cdot(-83) - 256\cdot(-12)$, ya’ni $37\cdot(-83) - 256\cdot(-12) = 1$ dan $x_0 = -83$, $y_0 = -12$ va $c = 3$ bo‘lganligi uchun (7) ga ko‘ra berilgan tenglamaning yechimlari $x = -249 - 256t$; $y = -36 - 37t$ dan iborat.

Yuqori darajali diofant tenglamalarini yechish. Yuqori darajali aniqmas tenglamalarni butun sonlarda yechishning konkret usullari bo‘lmasa-da, biz ba’zi usullar: qoldiqlar nazariyasidan, qisqa ko‘paytirish formulalaridan hamda mantiqiy fikrlardan foydalanamiz: a) qoldiqlar nazariyasidan foydalanish: har qanday sonning kvadratini 3 ga yoki 4 ga bo‘lishda qoldiqda 0 yoki 1 sonlari hosil bo‘ladi.

Haqiqatan ham:

$(2m)^2 = 4m^2$; $(2m + 1)^2 = 4(m^2 + m) + 1$;

$(3m - 1)^2 = 3(3m^2 - 2m) + 1$; $(3m)^2 = 3 \cdot 3m^2$;

$(3m + 1)^2 = 3(3m^2 + 2m) + 1$

ayniyatlar fikrimizni tasdiqlaydi.

Endi tenglamalarni yechish uchun namunalar keltiramiz.

Misol. $99x^2 - 97y^2 = 2005$ tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan tenglamani $4(25x^2 - 24y^2 - 501) = x^2 + y^2 + 1$ ko‘rinishida yozamiz. Sonning kvadratini 4 ga bo‘lishda qoldiqda 0 yoki 1 qolgani uchun $x^2 + y^2 + 1$ ifodani 4 ga bo‘lishda qoldiqda 1, 2, 3 sonlari hosil bo‘ladi. Bunday tenglikning bo‘lishi mumkin emas, demak, berilgan tenglama yechimga ega emas.

Misol. $x^3 + x = 3y^2 + 1$ tenglamani natural sonlarda yeching.

Yechish: Berilgan tenglamani $x(x - 1)(x + 1) = 3y^2 + 1$ ko‘rinishida yozsak, tenlamaning chap tomonida doimo 3 ga karrali, o‘ng tomonida esa 3 ga bo‘lishda doimo 1 qoldiq bo‘ladi. Bunday tenglikning bo‘lishi mumkin emas va berilgan tenglama yechimga ega emas.

b) qisqa ko‘paytirish formulalaridan foydalanish: bu holda

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

formulalaridan foydalanib misollar yechiladi.

Misol. $x^3+91=y^3$ tenglamani natural sonlarda yeching.

Yechish: Tenglamani $x^3-y^3=91$, ya'ni $(x-y)(x^2+xy+y^2)=91$ $(x-y)(x^2+xy+y^2)=7\cdot 13$ ko'rinishida yozib,

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=91 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$$

sistemalarini hosil qilamiz. Bularni yechib, $x=5,\ y=6$ yechimni topamiz.

MASHQLAR:

1**. Qoldiqlar nazariyasidan foydalanib, quyidagi tenglamalarni butun sonlarda yeching.**

1) $x^2-3y^2=-1$; 2) $17x^2-3y^2=17$;

3) $3x^2+2=y^2$; 4) $x^3-3y^2=17$;

5) $3x^2-4y^2=13$; 6) $2x^2-5y^2=7$;

7) $y^2=5x^2+6$; 8) $3x^2+8=y^2$.

2. **Quyidagi tenglamalarni natural sonlarda yeching.**

1) $x^2-y^2=91$; 2) $x^3-y^3=2005$;

3) $x^2-y^2=2005$; 4) $x^2-656x-65y^2=1983$;

5) $x^3+91=y^3$; 6) $x^3+y^3=1972$;

7) $x^3+y^3=2005$; 8) $49x^2-36y^2=625$.

III BOB. ALGEBRAIK IFODALAR

1-§ Bir va ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlar.

Ta’rif. Butun ratsional ifoda yoki ko‘phad deb argumentlar va o‘zgarmas miqdordan faqat qo‘shish va ko‘paytirish amallari yordamida tuzilgan ifodaga aytiladi.

$$9,\ x,\ x^2,\ (x-y)^2,\ x^3+5ax^2-a^2,\ x^3+5ax^2-a^3,\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6},$$

$$(ax+by)^2[(x-y^4+3(a^x+b^3y))]$$

ko‘phadlarda misol bo‘la oladi. $\frac{1}{x-y},\ \frac{x}{y},\ \frac{x-5y-3}{x}+x^2-5y^2$ ifodalarning maxrajlarida argument qatnashgani sababli ko‘phad bo‘la olmaydi.

Biz faqat bir argumentli o‘zgaruvchili ko‘phadlarni ko‘rib chiqamiz: $x^2+6x-3,\ \frac{1}{3}x^3-2x^2+x-4$ bir argumentli ko‘phadlarga misol bo‘ladi.

Ko‘phad birhadlarning yig‘indisidan iborat. Ko‘phad tarkibidagi eng katta darajali birhadning daraja ko‘rsatkichi shu ko‘phadning darajasi deyiladi. Ko‘phadni darajasi pasayib borish tartibida yozish, ko‘phadni standart shaklda yozish deyiladi:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Agar ko‘phadning hamma o‘xshash hadlari keltirilgan bo‘lib, standart shaklda yozilgan bo‘lsa, bu shakl ko‘phadning kanonik shakli deyiladi.

Misol: $P(x) = (x-2)^2 + x^3 - 2x^2 + 1$ ko‘phadni kanonik shaklga keltiring.

Yechish: $P(x) = x^2 - 4x + 4 + x^3 - 2x^2 + 1 = x^3 - x^2 - 4x + 5$ ko‘phad kanonik ko‘rinishga keltirildi.

Ikkita ko‘phad $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ va $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n$ o‘zaro teng deyiladi, agar bir xil darajali noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar teng, ya’ni $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... $a_n = b_n$ bo‘lsa, bu holda $P(x) = Q(x)$ deb yoziladi.

Ko‘phadlarni qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish mumkin. Natijada yana ko‘phad hosil bo‘ladi:

$(x^3 – 2x^2 + 3) + (x^4 – 2x^2 + 1) = x^3 – 2x^2 + 3 + x^4 – 2x^2 + 1 = x^4 + x^3 – 4x^2 + 4$

$(3x^3 – 2x^2 + 1) – (x^3 – 2x^2 + 4) = 3x^3 – 2x^2 + 1 – x^3 + 2x^2 – 4 = 2x^3 – 3$

$(x^2 – x)(x^3 + 1) = x^5 – x^4 + x^2 – x.$

MASHQLAR:

1. Ko‘phadlarni kanonik shaklga keltiring.

1) $P(x) = 3x^3 – 2x^2 + x – 1 + (x + 2)^2$;

2) $P(x) = x^4 – 3x + (x – 3)^3$;

3) $P(x) = (x + 3)^5 + (x – 4)^2$;

4) $P(x) = x^4 + 6x^2 + 5x – 4 + (3x + 4)^5$;

5) $P(x) = 3(x + 3)^3 – 2x^2 + (x – 2)^2$;

6) $P(x) = 4x^3 – 2x + 2 – (2x + 1)^4$;

7) $P(x) = (2x – 1)^4 + 2x^2 – 3x+4$;

8) $P(x) = (3x + 2)^3 + 4x^2 – 2x – 4 + 3x^3$;

2. Hisoblang.

1) $P(x) = 2x^2 – 3x + 5$ bo‘lsa, $P(–2)$, $P(1/2)$, $P(3)$ ni toping;

2) $P(x) = x^3 – 4x^2 + x$ bo‘lsa, $P(–1)$, $P(1/2)$, $P(2)$ ni toping;

3) $P(x) = x^5 – 4x^3 – x^2 + 1$ bo‘lsa, $P(2)$, $P(3/2)$, $P(–2)$ ni toping;

4) $P(x) = 3x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x$ bo‘lsa, $P(1)$, $P(–1/2)$, $P(4)$ ni toping;

1) $P(x) = x^7 - x^6 - 6x^5 + x^2 - 5x$ bo‘lsa, $P(2)$, $P(3/2)$, $P(-1)$ ni toping;

2) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x + 2$ bo‘lsa, $P(-1/2)$, $P(-2)$, $P(3)$ ni toping;

1) $P(x) = x^5 + 4x^4 + x^2 + 3$ bo‘lsa, $P(1)$, $P(3)$, $P(-1)$ ni toping;

2) $P(x) = x^8 + 4x^6 - 3x^3 + x + 3$ bo‘lsa, $P(-3/2)$, $P(2)$, $P(1)$ ni toping.

4. *P*(*x*) va *Q*(*x*) ko‘phadlar teng bo‘lsa, noma’lum koeffitsiyentlarni toping.

1) $P(x) = ax^5 + 2x^6 + 3x^2 - 1$, $Q(x) = 3x^6 + bx^2 - 1$;

2) $P(x) = ax^3 + 2x + 3$, $Q(x) = 4x^3 + bx + 3$;

3) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$, $Q(x) = (x + 1)(x^3 + ax^2 - 17x + b)$;

4) $P(x) = 2x^5 - 4x^2 + 5x - 3$, $Q(x) = (x - 1)(2x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x + 3)$;

5) $P(x) = x^5 + x^3 - 2$, $Q(x) = (x - 1)(x^4 - ax^3 + 2x^2 + 2x + b)$;

6) $P(x) = x^5 + x^3 - 2$, $Q(x) = (x - 1)(x^4 - ax^3 + 2x^2 + 2x + b)$.

5. $P(x) \pm Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$ ko‘phadlarni toping, agar:

1) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x^3 + x$;

2) $P(x) = x - 2$, $Q(x) = 2x^2 + 3x$;

3) $P(x) = 6x^4 + x^3 + x$, $Q(x) = 2x^4 - 3x^2$;

4) $P(x) = 15x^6 - 5x^4 + 6x^3 - 1$, $Q(x) = 3x^3 - x$;

5) $P(x) = x^2 + x - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$;

6) $P(x) = x^2 + x - 4$, $Q(x) = x^2 + 3x + 3$;

7) $P(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$, $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 3$;

8) $P(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^2 - x + 1$, $Q(x) = 3x^2 - x + 1$ bo‘lsa.

2-§ Ko‘phadlarni qoldiqli va qoldiqsiz bo‘lish.

Berilgan $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_{\underline{n}}$ ko‘phadni

$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ ko‘phadga bo‘lish talab qilinsin. Agar shunday $S(x)$ va $R(x)$ ko‘phadlar mavjud bo‘lib,

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x) \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $P(x)$ – bo‘linuvchi, $Q(x)$ – bo‘luvchi $S(x)$ – bo‘linma va $R(x)$ – qoldiq ko‘phadlar deyiladi. Bu yerda $R(x)$ ning daraja ko‘rsatkichi, $Q(x)$ daraja ko‘rsatkichidan kichik bo‘ladi. $R(x) = 0$ bo‘lsa, $P(x)$ ko‘phad $Q(x)$ ga qoldiqsiz bo‘linadi deyiladi, aks holda bo‘lish qoldiqli deyiladi (yoki bo‘linmaydi deyiladi).

Bo‘linma $S(x)$ va qoldiq $R(x)$ ni topishda “aniqmas koeffitsiyentlar usuli” yoki “burchakli bo‘lish” usulidan foydalanish mumkin.

Bo‘luvchi $Q(x)$ va bo‘linma $S(x)$ daraja ko‘rsatkichlarining yig‘indisi $P(x)$ daraja ko‘rsatkichiga tengligini hisobga olgan holda, (1) tenglikni $S(x)$ va $R(x)$ koeffitsiyentlari noma’lum bo‘lgan shaklda yozamiz. Ikki ko‘phad tengligidan (qavslarni ochib, ma’lum amallarni bajargandan keyin) foydalanib, noma’lum koeffitsiyentlarni topish uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bunday sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. Buni misolda ko‘ramiz.

Misol. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ ko‘phadni $Q(x) = x^2 + x + 2$ ko‘phadga bo‘lamiz.

Yechish: Bo‘linmani $S(x) = c_0x + c_1$ ko‘rinishda qidiramiz. $Q(x)$ ni darajasi 2 ga $P(x)$ ning darajasi 3 ga teng, demak $S(x)$ ning darajasi birga teng bo‘lishi kerak, qoldiqni $R(x) = d_0x + d_1$ ko‘rinishda qidiramiz. (1) tenglikni yozamiz: $x^3 + 2x^2 - 1 = (x^2 + x + 2) \cdot (c_0x + c_1) + d_0x + d_1$.

Bundan ko‘rinadiki, $c_0 = 1$ bo‘lishi kerak. Qavslarni ochib, o‘xshashlarini keltirib

$x^3+2x^2-1=x^3+(1+c_1)x^2+(2+c_1+d_0)x+(2c_1+d_1)$ tenglikni hosil qilamiz. Mos koeffitsiyentlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} 1=1 \\ 1+c_1=2 \\ 2+c_1+d_0=0 \\ 2c_1+d_1=-1 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz, uni yechib c_1 = 1, d_0 = – 3, d_1 = – 3 ni topamiz. Bo‘linma $S(x) = x + 1$ va qoldiq $R(x) = -3x - 3$ ekan.

“Burchakli bo‘lish” usulini misolda ko‘ramiz.

MASHQLAR:

1. Bo‘linmani toping:

1) $(x^2 + 3x - 4):(x + 4)$;

2) $(x^2 - 7x + 10):(x - 5)$;

3) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1):(3x - 1)$;

4) $(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9):(4x + 3)$;

5) $(6x^3 - 11x^2 - 4):(x - 2)$;

6) $(3x^3 + 4x^2):(3x + 4)$;

7) $(15x^3 - x^2 + 8x - 4):(3x^2 + x + 2)$;

8) $(9x^4 - 9x^3 - x^2 + 3x - 2):(3x^2 - 2x + 1)$.

2. “Noma’lum koeffitsiyentlar usuli” dan foydalanib, bo‘linma va qoldiqni toping:

1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, $Q(x) = x + 2$;

2) $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$, $Q(x) = x^2 + 3x$;

3) $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 + 3$;

4) $P(x) = x^2 - 5x + 6,$ $Q(x) = x + 4;$

5) $P(x) = 4x^2 - x - 38,$ $Q(x) = x + 3;$

6) $P(x) = x^3 - x^2 + 4,$ $Q(x) = x + 2;$

7) $P(x) = 2x^3 + 8x^2 - 7,$ $Q(x) = 2x^2 - 1;$

8) $P(x) = 4x^4 + 3x^3 - x,$ $Q(x) = 2x^2 + 3x - 1.$

3. “Burchakli bo‘lish” usulidan foydalanib, *P*(*x*) ni *Q*(*x*) ga bo‘ling:

1) $P(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5,$ $Q(x) = 2x^2 - x;$

2) $P(x) = x^5 + 10x^4 - 14x^3 + 16x^2 - x + 3,$ $Q(x) = 2x^2 - 3x;$

3) $P(x) = 5x^5 - 7x^3 + 4x - 5,$ $Q(x) = x^2 - 3;$

4) $P(x) = 6x^6 - 5x^4 + 7x^2 - 3x,$ $Q(x) = 2x^3 + 3x;$

5) $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 13,$ $Q(x) = x^3 + 2x^2;$

6) $P(x) = 3x^5 + 2x^4 + 3x + 7,$ $Q(x) = 3x + 2;$

7) $P(x) = 6x^4 + x^3 + x,$ $Q(x) = 2x^4 - 3x^2;$

8) $P(x) = 15x^6 - 5x^4 + 6x^3 - 1,$ $Q(x) = 3x^3 - x.$

3. *P* (*x*) ko‘phad *D* (*x*) ko‘phadga bo‘linadimi:

1) $P(x) = x^7 + x^6 - 6x^5 + x^2 - 5x,$ $D(x) = x^2 + x - 6;$

2) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x - 2,$ $D(x) = x^2 - 4;$

3) $P(x) = x^{100} - 3x^2 + 2,$ $D(x) = x^2 - 1;$

4) $P(x) = x^{100} - 3x + 2,$ $D(x) = 2x^2 - 1;$

5) $P(x) = 3x^5 + 3x^4 + x^3 - x - 2,$ $D(x) = x + 1;$

6) $P(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + x - 2,$ $D(x) = x + 2.$

3-§ Ko‘phadning ildizlari soni haqida teorema.

Teorema. Agar *a* soni $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ko‘phadning ildizi bo‘lsa, $P(x)$ ko‘phad $x - a$ ga bo‘linadi.

Isbot. Bezu teoremasiga ko‘ra, $P(x)$ ni $x - a$ ga bo‘lishdan chiqadigan qoldiq $P(a)$ ga teng, shart bo‘yicha esa $P(a) = 0$.

Bu teorema $P(x) = 0$ tenglamani yechish masalasini $P(x)$ ko‘phadni chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratish masalasiga keltirish imkonini beradi.

1- natija. Agar $P(x)$ ko‘phad har xil $a_1, ..., a_n$ ildizlarga ega bo‘lsa, u $(x - a_1) ... (x - a_n)$ ko‘paytmaga qoldiqsiz bo‘linadi.

2- **natija.** n - darajali ko‘phad n tadan ortiq har xil ildizga ega bo‘la olmaydi.

Misol. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ ko‘phad uchun 1 son ildiz bo‘ladi.

Haqiqatda, $P(1) = 1 - 3 + 5 - 3 = 0$ a son $P(x) = a_0x^n + ... + a_n$ ko‘phadning ildizi bo‘lishi uchun, $P(x)$ ni $x - a$ ga bo‘linishi zarur va yetarlidir.

Ta’rif. Agar $(x - a)^k$, $k \in \mathbf{N}$ **,** ko‘phad $f(x)$, ning bo‘luvchisi bo‘lsa, lekin $(x - a)^{k+1}$ ko‘phad esa $f(x)$ ning bo‘luvchisi bo’lmasa, u holda a soni $f(x)$ ko‘phadning k **- karrali ildizi deyiladi** $k = 1$ bo‘lgan holda ildiz **sodda ildiz** deyiladi.

MASHQLAR:

1. Agar tenglamaning bitta ildizi aniq bo‘lsa uning qolgan ildizlarini toping.

1) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$, $x_1 = 2$;

2) $2x^4 + 12x^3 + 11x^2 + 6x + 5 = 0$, $x_1 = -1$;

3) $2x^5 - x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 18x - 9 = 0$, $x_1 = 1/2$;

4) $3x^5 + x^4 - 15x^3 - 5x^2 + 12x + 4 = 0$, $x_1 = -1/3$.

2. Tenglamaning butun ildizlarini toping.

1) $x^3 + 3x^2 + 3x – 2 = 0$;

2) $x^3 – 2x^2 – x – 6 = 0$;

3) $2x^4 – x^3 + 2x^2 + 3x – 2 = 0$;

4) $x^3 + 3x^2 – 1 = 0$.

3. Tenglamani yeching.

1) $(x^2 + 2x)^2 – 2x^2 – 4x – 3 = 0$;

2) $(x^2 – x – 3)(x^2 – x – 2) = 12$;

3) $(x^2 + x)^2 + (3x – 1)x^2 + 5x(x – 1) = 6$;

4) $x^2(x^2 – 5) – 2x(x^2 – 4) + 4 = 0$;

5) $(x^2 – 2x)^2 – 4x(x^2 + 2) + 4(10x – 1) = 7x^2$;

6) $(x^2 – 2)^2 + x(x – \mathrm{l})(x + \mathrm{l}) = \mathrm{l}$;

7) $x^4 + 2x^3 – x^2 + 2x + 1 = 0$;

8) $2x^4 + x^3 – 10x^2 – x + 2 = 0$;

9) $(x – 1)x(x + 1)(x + 2) = 24$;

10) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3$.

4. Tenglamaning barcha ildizlarini toping.

1) $x^3 + x^2 – 4x – 4 = 0$;

2) $x^3 – 3x^2 – 4x + 12 = 0$;

3) $3x^4 – 4x^3 – 7x^2 + 4x + 4 = 0$;

4) $2x^4 + 3x^3 – 8x^2 – 9x + 6 = 0$;

5) $9x^3 + 12x^2 – 10x + 4 = 0$;

6) $x^4 + x^3 – 5x^2 + x – 6 = 0$;

7) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 6 = 0$;

8) $x^5 – 2x^4 – 3x^3 + 6x^2 – 4x + 8 = 0$.

5. Uchinchi darajali tenglamaning barcha ildizlarini toping.

1) $4x^3 – x$;

2) $x^3 – x^2 – 16x + 16$;

3) $x^3 + 2x^2 – x – 2$;

4) $2x^3 – x^2 – 50x + 25$.

6. Tenglamaning barcha ratsional ildizlarini toping.

1) $(2x + 1)(x^3 + 1) + x^2 = 2x(x^3 + 3) – 5$;

2) $(2x^2 – 1)2 + x(2x – 1)^2 = (x + 1)^2 + 16x^2 – 6$.

3) $x^2(x – 2)(6x + 1) + x(5x + 3) = 1$;

4) $x^2(3x + l) – (x^2 + l)^2 = 3$.

4-§ Bezu teoremasi va Gorner-Ruffini sxemasi

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ ko‘phadni $Q(x) = x - a$ ikkihadga bo‘lsak:

$P(x) = (x – a)\cdot S(x) + R$ ni hosil qilamiz.

Qoldiq R ning darajasi 0 ga teng bo‘lgan ko‘phad, chunki uning darajasi bo‘luvchi Q(x) ning darajasidan kichik.

1-teorema (Bezu). Ko‘phad $P(x)$ ni $x - a$ ga bo‘lganda qoldiq R ko‘phadni $x = a$ dagi qiymatiga teng, ya’ni $R = P(a)$

Isbot. $P(x) = (x - a)\cdot S(a) + R$ tenglikda x ning o‘rniga a ni qo‘yib topamiz:

$R = P(a)$, teorema isbotlandi.

Etyen Bezu (1730–1783) – fransuz matematigi.

Natija. Agar $R = 0$ bo‘lsa, $P(x)$ $x – a$ ga qoldiqsiz bo‘linadi, $R \neq 0$ bo‘lsa, $P(x)$ $x – a$ ga qoldiqli bo‘linadi (bo‘linmaydi).

Misol. $P(x) = 3x^3 – 4x^2 + 5$ ni $x – 3$ ga bo‘lganda qoldiqni toping.

Yechish: $R = P(3) = 3*3^3 – 4*3^2 + 5 = 81 – 36 + 5 = 50$.

Misol. $P(x) = x^n - a^n$ ni $x - a$ ga qoldiqsiz bo‘linishini ko‘rsating.

Yechish: $R = P(a) = a^n - a^n = 0$.

Misol. $P(x) = x^{2n} + a^{2n}$ $x + a$ ga bo‘linmasligini ko‘rsating.

Yechish: $R = P(-a) = a^{2n} + a^{2n} = 2a^{2n} \neq 0$.

Bezu teoremasidan $P(x)$ ko‘phadni $ax + b$ ikkihadga bo‘lishdan hosil bo‘ladigan qoldiq R ni $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ ga tengligi kelib chiqadi.

Misol. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 3$ ni $2x + 1$ ga bo‘lganda qoldiq nimaga teng?

Yechish: $R = P(-\frac{1}{2}) = 2\cdot(-\frac{1}{2})^3 - 3\cdot(-\frac{1}{2})^2 + 5\cdot(-\frac{1}{2}) + 3 =$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{5}{2} + 3 = \frac{-1-3-10+12}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Endi $P(x)$ ko‘phadni $Q(x) = x - a$ ikkihadga bo‘lganda bo‘linma $S(x)$ ning koeffitsiyentlarini aniqlashga o‘tamiz.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - a)\cdot S(x) + R \qquad (2)$$

tenglikda $S(x)$ bo‘linmani $S(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ ko‘rinishda qidiramiz. (2) tenglikda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarini tenglashtirib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - ab_0,\ a_2=b_2 - ab_1\ \ldots\ a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2},\ a_n = R - ab_{n-1}$$

Bu tengliklardan ketma-ket noma’lum koeffitsiyentlarni topamiz: $b_0 = a_0$, $b_1 = ab_0 + a_1$, $b_2 = ab_1 + a_2$, …, $b_{n-1} = ab_{n-2}+a_{n-1}$, $R = ab_{n-1} + a_n$. Topilganlarni quyidagi jadvalga joylashtirish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n

$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	…	$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$	$R = a_0b_{n-1} + a_n$

Keltirilgan usul Gorner (Xorner Uilyam (1786 – 1837) – ingliz matematigi) sxemasi deb ataladi.

Misol. Gorner sxemasi yordamida $P(x) = x^5 - 3x^3 + 5x - 4$ ko‘phadni $x + 2$ ga bo‘lganda bo‘linma va qoldiqni toping.

Yechish: Jadvalning birinchi qatorida $P(x)$ ning koeffitsiyentlari 1, 0, – 3, 0, 5, – 4 ni joylashtiramiz. Ikkinchi qatoriga $a = -2$ ni qo‘yib quyidagilarni topamiz:

	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = -3$	$a_3 = 0$	$a_4 = 5$	$a_5 = -4$
$a = -2$	$b_0 = 1$	$b_1 = -2$	$b_2 = 1$	$b_3 = -2$	$b_4 = 9$	$R = -22$

Topilgan koeffitsiyentlarga ko‘ra bo‘linma $S(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 9$ qoldiq $R = -22$ ga teng.►

MASHQLAR:

1. Bo‘lishni bajaring.

1) $(15x^5 + 6x^4 - 20x^2 - 8x):(3x^3 - 4)$;

2) $(12x^5 - 9x^4 + 8x^2 - 6x):(4x^2 - 3x)$;

3) $(x^5 + 1):(x + 1)$;

4) $(x^6 - 1): (x - 1)$.

2. *P*(*x*) ko‘phad *Q*(*x*) ga bo‘linadimi?

1) $P(x) = x^{80} - 4x + 3$, $Q(x) = x - 1$;

2) $P(x) = x^{80} - 4x + 3$, $Q(x) = x + 1$;

3) $P(x) = x^{50} + x^{25} + 4$, $Q(x) = x^2 - 1$;

4) $P(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1}$, $Q(x) = x + a$.

3. 1) $x^4 - 3x + 1$ ni $x - 2$ ga

2) $3x^5 - 4x^3 + 2x - 1$ ni $x + 2$ ga

3) $2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 13$ ni $x^3 + 2x^2$ ga

4) $x^4 + 2x^3 - 3x + 2$ ni $2x + 1$ ga va $2x - 3$ ga bo‘lganda qoldiqni toping.

4. 1) m ning qanday qiymatlarida $3x^3 - 4x^2 - m$ ko‘phad $x - 1$ ga bo‘linadi?

2) a va b ning qanday qiymatlarida $2x^4 + ax^3 + bx - 2$ ko‘phad $x^2 - x - 2$ uchhadga qoldiqsiz bo‘linadi?

3) a ning qanday qiymatlarida $x^6 + x^5 - 4x^4 - 4x^3 + ax^2 + 4x + a$ ko‘phad $x + 1$ ga bo‘linadi?

4) a ning qanday qiymatlarida $x^3 + ax^2 + ax - 15$ ko‘phad $x - 3$ ga qoldiqsiz bo‘linadi?

5. Tenglamani Gorner sxemasi yordamida yeching.

1) $P(x) = x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$;

2) $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 40x + 48$.

6. Gorner-Ruffini sxemasi yordamida *P*(*x*) ni *Q*(*x*) ga bo‘ganda bo‘linma va qoldiqni toping.

1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$, $Q(x) = x + 2$;

2) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$, $Q(x) = x - 2$;

3) $P(x) = 5x^5 - 4x^3 + 8x$, $Q(x) = x - 1$;

4) $P(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 + 3$, $Q(x) = x + 1$.

5) $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$, $Q(x) = 2x^2 + x - 1$;

6) $P(x) = x^3 - 3x^2$, $Q(x) = 2x^2 + 5$;

7) $P(x) = 3x^4 + 7x^3 - 22x^2 - x - 7$, $\qquad Q(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$;

8) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x$, $\qquad Q(x) = x^2 + x + 1$.

7. Gorner-Ruffini sxemasi yordamida bo‘lishni bajaring.

1) $(6x^3 - 11x^2 - 1):(x - 2)$;

2) $(2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2):(x + 2)$;

3) $(3x^5 + 3x^4 + x^3 - x - 2):(x + 1)$;

4) $(3x^3 + 4x^2):(3x + 2)$.

5-§ Butun koeffitsiyentli tenglamalarning ratsional ildizlarini topish.

Ratsional koeffitsiyentli har qanday $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$ tenglama unga teng kuchli butun koeffitsiyentli tenglamaga keltirilishi mumkin.

Masalan, $\frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 1 = 0$ tenglamaning ikkala qismi 6 ga ko‘paytirilsa, unga teng kuchli butun koeffitsiyentli $5x^3 + 4x^2 - 6x + 6 = 0$ tenglama hosil bo‘ladi. Endi butun koeffitsiyentli tenglamalar bilan shug‘ullanamiz.

Teorema. $x = \frac{p}{q}$ qisqarmas kasr butun koeffitsiyentli

$$a_n x^n + \cdots + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{1}$$

tenglamaning ildizi bo‘lishi uchun p soni a_0 ozod hadning, q esa a_n bosh had koeffitsiyentining bo‘luvchisi bo‘lishi zarur.

Haqiqatan, $\frac{p}{q}$ soni (1) tenglamaning ildizi bo‘lsin:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$ yoki tenglikning ikkala

qismi q^n ga ko‘paytirilsa, $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$

tenglik hosil bo‘ladi.

Bundan: $a_0 q^n = -a_n p^n - a_{n-1}p^{n-1}q - \cdots - a_1 pq^{n-1}$

Tenglikning o‘ng qismi p ga bo‘linadi. Demak, chap qismdagi a_0q^n ham p ga bo‘linishi kerak. Lekin, qp qisqarmas kasr, ya’ni p va q^n lar o‘zaro tub. Demak, p soni a_0 ning bo‘luvchisi. Shu kabi q soni a_n ning bo‘luvchisi ekani isbot qilinadi.

Agar (1) tenglama *keltirilgan tenglama* bo‘lsa, ya’ni bosh had koeffitsiyenti $a_n = 1$ bo‘lsa, tenglamaning ratsional ildizlari ozod hadning bo‘luvchilari orasidan izlanadi.

Misol. $2x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$ tenglamaning ratsional ildizlarini toping.

Yechish: Ozod hadning barcha butun bo‘luvchilari: – 2; – 1; 1; 2.

Bosh koeffitsiyentning barcha natural bo‘luvchilari: 1; 2.

Tenglamaning ratsional ildizlarini quyidagi sonlar orasidan izlaymiz: –2; -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2. Bu sonlarni berilgan tenglamaga bevosita qo‘yib ko‘rish bilan, ularning ildiz bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlaymiz.

Tekshirish ko‘rsatadiki, $-\frac{1}{2}$ soni berilgan tenglamaning ildizi, qolgan sonlar esa ildiz emas. Shunday qilib, berilgan tenglama faqat bitta ratsional ildizga ega: $x-\frac{1}{2}$

Misol. $x^3+3x^2-1=0$ tenglamaning butun ildizlarini toping.

Yechish: Butun ildizlarini – 1; 1 sonlari orasidan izlaymiz. Bu sonlarning ikkalasi ham tenglamaning ildizi emasligini ko‘rish qiyin emas.

Tenglama butun ildizga ega emas.

Misol. $2x^3-7x^2+5x-1=0$ tenglamaning $\frac{p}{q}$ ratsional ildizlarini topamiz, bunda *p* va *q* lar o‘zaro tub, $B(p; q) = 1$.

Yechish: *p* sonini ozod hadning, *q* ni esa bosh koeffitsiyentning bo‘luvchilari orasidan izlaymiz. Ular ±1 va ±2 Demak, ratsional ildizlar ±1, $\pm\frac{1}{2}$ sonlari ichida bo‘lishi mumkin. Bu sonlarni tenglamaga ketma-ket qo‘yib hisoblash, $\frac{1}{2}$ ning ildiz ekanini ko‘rsatadi. Tenglamaning qolgan ildizlarini topish uchun uning chap qismini $2x-1$ ga bo‘lamiz. Bo‘linmada $x^2-3x+1=0$ uchhad hosil bo‘ladi. Uning ildizlari: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

MASHQLAR:

1. Tenglamaning ratsional ildizlarini toping:

1) $3x^3-4x^2+5x-18=0$;

2) $x^3-4x^2-27x+90=0$;

3) $x^4-x^3+x+2=0$;

4) $2x^3-5x^2+8x-3=0$;

5) $4x^4+8x^3-3x^2-7x+3=0$;

6) $x^4+x^3+x^2+3x+2=0$;

7) $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$;

8) $3x^4+4x^2+5x-12=0$;

9) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6=0$;

10) $3x^4-2x^3+4x^2-x+2=0$;

11) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$;

12) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36=0$.

2.Tenglamaning butun ildizlarini toping:

1) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$;

2) $3x^4+5x^3+x^2+x-2=0$;

3) $2x^5+7x^4+3x^3-11x^2-16x-12=0$;

4) $6x^4+x^3+2x^2-4x+1=0$;

5) $3x^6-5x^4-10x^3-8x^2+x-2=0$;

6) $x^4+x^2+x+2=0$;

7) $x^4-x^3+2x^2-x+1=0$;

8) $x^4+2x^3+4x^2+3x-10=0$.

3.Tenglamaning haqiqiy ildizlarini toping:

1) $2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 9x + 6 = 0$;

2) $2x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$;

3) $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$;

4) $4x^4 - 3x3 - 8x2 + 3x + 4 = 0$;

5) $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$;

6) $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 7x + 3 = 0$.

6-§ Ayniyatlar. Qisqa ko‘paytirish formulalari va ularning umumlashmalari

Teorema. O‘zgaruvchi x bo‘yicha tuzilgan har qanday butun ratsional ifoda

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi ifodaga aynan tengdir, bunda $\boldsymbol{a_n}$**, ...,** $\boldsymbol{a_0}$ **–** haqiqiy sonlar, $a_n \neq 0$**.**

Isbot. Teorema sonlar va x ifoda uchun har doim o‘rinli. U $A(x)$ va $B(x)$ ifodalar uchun o‘rinli, deylik: $A(x) = a_mx^m + \dots + a_0$ $(m > n)$, $B(x) = = b_nx^n + \dots + b_0$. U holda $A(x) + B(x) = (a_mx^m + \dots + a_0) + (b_nx^n + \dots + b_0) = = (a_mx^m + \dots + a_0) + (0 \times x_m + \dots + 0 \times x_{n+1} + b_nx^n + \dots + b_0) = (a_m + 0)x_m + \dots + (a_0 + b_0)$ yig‘indi (1) ko‘rinishda bo‘ladi. Shu kabi,

$$A(x)B(x) = (a_mx^m + \dots + a_0)(b_nx^n + \dots + b_0) = \dots = \sum_{i=0}^{m+n} c_ix^i \qquad (2)$$

$c_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \dots + a_1b_{i-1}a_0b_i$ (agar $i > m$ bo‘lsa, $a_i = 0$ bo‘ladi).

Shunday qilib, teorema barcha sonlar va x ifoda uchun o‘rinli, uning $A(x)$ va $B(x)$ uchun o‘rinli bo‘lganidan $A(x) + B(x)$ va $A(x) \times B(x)$ uchun o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, teorema barcha ratsional ifodalar uchun o‘rinli.

(2) tenglikka qaraganda, ikki ko‘phad ko‘paytmasining bosh hadi ko‘payuvchilar bosh hadlarining ko‘paytmasiga, ozod hadi ozod hadlarining ko‘paytmasiga teng, ko‘paytmaning darajasi ko‘payuvchilar darajalarining yig‘indisiga teng. Bir xil darajali ko‘phadlarni qo‘shganda kichik darajali ko‘phad hosil bo‘lishi mumkin, turli darajali ko‘phadlarni

qo‘shganda esa darajasi kata darajali qo‘shiluvchining darajasi bilan bir xil bo‘lgan ko‘phad hosil bo‘ladi.

Masalan, $(4x^2 - x + 3) + (-4x^2 - 2x + 1) = -3x + 4$, $(4x^2 - x + 3) + +(-2x + 1) = 4x^2 - 3x + 4$.

Ikki ko‘phadning aynan teng bo‘lish shartini ifodalovchi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $P(x)$ ko‘phadning hech bo‘lmaganda bitta koeffitsiyenti noldan farqli bo‘lsa, shunday $x_0 \in R$ soni topiladiki, unda ko‘phad nolga aylanmaydi, ya’ni $P(x) \neq 0$ bo‘ladi.

1-xulosa. Agar x ning har qanday qiymatida P(x) ko‘phad nolga teng bo‘lsa, u holda uning barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo‘ladi.

Isbot. Barcha $x \in R$ uchun $P(x) = 0$ bo‘lsin. Agar $P(x)$ ning biror koeffitsiyenti nolga teng bo‘lmasa, teoremaga muvofiq shunday $x = b$ soni topiladiki, unda $P(b) \neq 0$ bo‘ladi. Bu esa $\forall x \in R$ uchun $P(x) = 0$ bo‘lishlik shartiga zid. Demak, barcha koeffitsiyentlar nolga teng.

2-xulosa. Aynan teng P(x) va Q(x) ko‘phadlarda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlari teng bo‘ladi.

Isbot. $P(x) \equiv Q(x)$ bo‘lgani uchun $P(x) - Q(x) \equiv 0$ bo‘ladi.

1- xulosaga ko‘ra, bu ayirmaning barcha koeffitsiyentlari nolga teng. Bundan, $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlarning mos koeffitsiyentlari teng bo‘lishi kelib chiqadi.

Misol. Agar $P(x) = (x^2 + 2)^3 - 6(x^2 - 2)^2 - 4x^3 - 36x^2 + 20$ va $Q(x) = (x^3 - 2)^2$ bo‘lsa, $P(x) \equiv Q(x)$ bo‘lishini isbot qilamiz.

Isbot. $P(x) = (x^6 + 3 \cdot 2x^4 + 3 \cdot 4x + 8) - 6(x^4 - 4x^2 + 4) - 4x^3 - 36x^2 + +20 = x^6 - 4x^3 + 4$, $Q(x) = x^6 - 4x^3 + 4$.

Demak, $P(x) \equiv Q(x)$.

Amalda (masalan, kalkulatorda hisoblashlar sonini kamaytirish maqsadida) butun ratsional ifodalarning quyidagi ko‘rinishdagi yozuvidan foydalanish qulay:

$$(...((a_n x + a_{n\text{-}1})x + a_{n\text{-}2})\, x + ...) + a_0. \qquad (3)$$

Agar x_1 va x_2 $ax^2 + bx + c = 0$ tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Qisqa ko‘paytirish formulalari va ba’zi umumlashtirilganlari:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;

4) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;

5) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$;

6) $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$;

7) $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$;

8) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a - b)(a + b)(a^2 + +b^2)$;

9) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

va hokazo.

Endi $x + a$ ikkihadni m natural ko‘rsatkichli darajaga ko‘tarish qonuniyati bilan tanishamiz. Shu maqsadda $(x + a)$, $(x + a)^2$, $(x + a)^3$,

$(x + a)^4$ va hokazo darajalarga ko‘tarishlarni bajarib, hosil bo‘lgan *yoyilma*ning koeffitsiyentlarini kuzataylik:

$$(x + a)^1 = 1x + 1a,$$

$$(x + a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2,$$

$$(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3.$$

Yoyilmalardan bosh koeffitsiyentlar 1 ga tengligini ko‘ramiz. Oxirgi ko‘phadni $x + a$ ga ko‘paytirib, $(x + a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4a^3x + 1a^4$ ni hosil qilamiz. Shu kabi, $(x + a)^5 = 1x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + 1a^5$ va hokazolarni hosil qilamiz.

$(x + a)^n$ uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

1) yoyilmadagi barcha hadlarning soni $x + a$ ikkihad ko‘tarilayotgan daraja ko‘rsatkichidan bitta ortiq, ya’ni hadlar soni $n + 1$ ga teng;

2) x o‘zgaruvchining ko‘rsatkichi n dan 0 gacha 1 taga ketma-ket kamayib, a o‘zgaruvchining darajasi esa 0 dan n gacha ketma-ket o‘sib boradi. Har bir hadda x va a ning darajalari yig‘indisi n ga teng;

3) yoyilma boshidan va oxiridan teng uzoqlikdagi hadlarning koeffitsiyentlari o‘zaro teng, bunda birinchi va oxirgi hadlarning koeffitsiyentlari 1 ga teng;

4) $(x + a)^0$, $(x + a)^1$, $(x + a)^2$, $(x + a)^3$, $(x + a)^4$, $(x + a)^5$ va $(x + a)^6$ yoyilmalari koeffitsiyentlarini uchburchaksimon ko‘rinishda joylashtiraylik:

$$
\begin{array}{c}
1 \quad (n = 0) \\
1 \quad 1 \quad (n = 1) \\
1 \quad 2 \quad 1 \quad (n = 2) \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad (n = 3) \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad (n = 4) \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \quad (n = 5) \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \quad (n = 5).
\end{array}
$$

Har bir satrning koeffitsiyenti undan oldingi satr qo‘shni koeffitsiyentlari yig‘indisiga teng.

Koeffitsiyentlarning bu uchburchak jadvali **Paskal uchburchagi** nomi bilan ataladi. Undan foydalanib, $(x + a)^6 = x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$ ekanini ko‘ramiz. n ning katta qiymatlarida Paskal uchburchagidan foydalanish ancha noqulay.

Masalan, $n = 10$ da hisoblash uchun dastlabki 9 qatorni yozish kerak bo‘lardi. Umumiy holda ushbu **Nyuton binomi** formulasidan foydalaniladi:

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + n\cdot a\cdot b^{n-1} + b^n \qquad (1)$$

MASHQLAR:

1. Ko‘phad shaklida yozing:

1) $(x + y + z)^2$; 2) $(x + y - z)^2$;

3) $(a + b)^7$; 4) $(x + y + z)^3$;

5) $(x + y - z)^3$; 6) $(2x + 3y)^8$;

7) $(a + b + c + d)^2$; 8) $x^6 + y^6$;

9) $(5x - 4y)^6$; 10) $(a + 4y)^4$.

2. Ayniyatlarni isbot qiling:

1) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1$;

2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$;

3) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 1 = (x - 3)(x - 2)(x - 1)x$;

4) $x^5 + 1 = (x + 1)[x(x - 1)(x^2 + 1) + 1]$;

5) $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = (ax + by)^2 - (ay + bx)^2$;

6) $x^4 - 8x + 63 = (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7)$;

7) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$;

8) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 10 = (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5)$;

9) $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$;

10) $x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 - 2x + 5)$.

3. Kasrlarni qisqartiring:

1) $\dfrac{1-a^3}{1+a+a^2}$; 2) $\dfrac{8-a^3}{2-a}$;

3) $\dfrac{a^3+8}{a^2-2a+4}$; 4) $\dfrac{a^3+27}{a+3}$;

5) $\dfrac{a^3-1}{a^2+a+1}$; 6) $\dfrac{9a^2-4}{3a+2}$;

7) $\dfrac{a^2+6a+9}{a+3}$; 8) $\dfrac{b^2-6b+9}{b-3}$.

4. Ifodani soddalashtiring:

1) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$; 2) $\dfrac{x^4-x^3+x-1}{x^3+1}$;

3) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; 4) $\dfrac{x^3+8}{3x+6}$;

5) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$; 6) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$;

7) $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$; 8) $\dfrac{a^2+7a+12}{a^2+6a+8}$;

9) $\dfrac{a^4+7a^2+10}{a^4+6a^2+5}$; 10) $\dfrac{x^3-x^2-7x+7}{x^2-7}$.

7-§ Ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratish

Bu mavzuda biz berilgan ko‘phadni turli usullar yordamida bir nechta chiziqli ko‘paytuvchilarning ko‘paytmasi shaklida yozishni o‘rganamiz. Ko‘paytuvchilarga ajratishning quyidagi usullari mavjud.

Ko‘phadni qisqa ko‘paytirish formulalari yordamida ko‘paytuvchilarga ajratish

1) $25x^2-4^2=(5x+2)\cdot(5x-2)$

2) $1-(2x-3)^2=(1-2x+3)(1+2x-3)$

Hisoblashlarni bajarishda ham qisqa ko‘paytirish formulalarini to‘g‘ri qo‘llasak hisoblashlarni soddaroq bajarish mumkin

Misol: $\frac{1{,}6^2-1{,}6\cdot 0{,}8+0{,}4^2}{1{,}4^2-0{,}2^2}=\frac{(1{,}6-0{,}4)^2}{(1{,}4-0{,}2)(1{,}4+0{,}2)}=\frac{1{,}2^2}{1{,}6\cdot 1{,}2}=\frac{1{,}2}{1{,}6}=0{,}75$

Misol: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{101}{100}=\frac{1}{2}\cdot\frac{101}{100}=\frac{101}{100}.$

Misol: Ifodani eng kichik qiymatini toping

$(2a-1)(2a+1)+3b(3b-4a)=4a^2-1+9b^2-12ab=4a^2+9b^2-12ab-1=$
$=(2a-3b)^2-1$

$(2a-3b)^2\geq 0$ bo’ladi,eng kichigi 0, endi 0 – 1 bo‘ladi.

MASHQLAR:

1. Ko‘pxadni ko‘paytuvchilarga ajrating:

1) $2a^2b-3a+10ab^2-15b$; 2) $2n^2-3an-10n+15a$;

3) $b^2+ab-2a^2-b+a$; 4) $1-(2x-3)^2$;

5) $9-(2c-1)^2$; 6) $(a^2-4)^2-16a^2$;

7) $(x^2+9)^2-36x^2$; 8) $1-(8a-3)^2$;

9) $a^3+9a^2+27a+19$; 10) x^4+x^2+1.

2. Soddalashtiring:

1) $\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}$; 2) $\frac{x^2+2x^2+x}{(x+1)^2}$;

3) $\frac{a^2-2ab}{4b^2-a^2}$; 4) $\frac{x^2+3xy}{9y^2-x^2}$;

5) $\frac{x^{2\pi}-y^{2\pi}}{x^{\pi}+y^{\pi}}$; 6) $\frac{x^6-y^6}{x^3+y^2}$;

7) $\frac{x^2-y^2}{2xy}:\frac{x+y}{2x}$; 8) $\frac{p-q}{p^3\cdot q^2}-\frac{p+q}{p^2\cdot q^3}$.

8-§ Simmetrik ko‘phadlar

Tarif. Agar $P(x,y,...,z)$ ko‘phad tarkibidagi harflarning har qanday o‘rin almashtirilishida unga aynan teng ko‘phad hosil bo‘lsa, P ko‘phad **simmetrik ko‘phad** deyiladi. Simmetrik ko‘phadda qo‘shiluvchilar o‘rin almashtirilganda yig‘indi, ko‘paytuvchilar o‘rin almashtirilganda ko‘paytma o‘zgarmaydi.

Xususan, $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z$ va $\sigma_3 = x\cdot y\cdot z$ ko‘phadlar x, y va z – o‘zgaruvchilarning elementar simmetrik ko‘phadlari deyiladi. Umumiy xolda $x_1, x_2, \cdots x_n$ argumentlarning k darajali elementar simmetrik ko‘phadi σ_k - bu $(Y+x_1)(Y+x_2)\cdots(Y+x_n)$ ko‘phadning Y^{n-k} hadining koeffisentidir.

Ta’rif. Agar (λ + x)(λ + y)...(λ + z) ifodadagi qavslar ochilsa, λ darajalarining koeffitsiyentlari sifatida x, y, ..., z o‘zgaruvchilarning simmetrik ko‘phadlari turgan bo‘ladi. Ular **asosiy simmetrik ko‘phadlar** deyiladi. Masalan, o‘zgaruvchilar soni $n = 2$ bo‘lsa, $(\lambda + x)(\lambda + y) = \lambda^2 + (x + y)\lambda + xy$ bo‘lib, asosiy simmetrik ko‘phadlar $x + y$ va xy bo‘ladi. Ularni $s_1 = x + y$, $s_2 = xy$ orqali ifodalaymiz va $n = 3$ da $s_1 = x + y + z$, $s_2 = =xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$ bo‘ladi.

Bulardan tashqari, quyidagi ko‘rinishdagi $s_1 = x + + y +...+ z$ (n ta qo‘shiluvchi), $s_2 = x^2 + y^2 +...+ z^2$, ..., $s_k = x^k + y^k +...+ z^k$ **darajali yig‘indilar** ham simmetrik ko‘phadlardir.

Teorema. Ixtiyoriy $s_k = x^k + y^k$ darajali yig‘indi $s_1 = x + y$ *va* $s_2 = xy$ larning ko‘phadi ko‘rinishida tasvirlanishi mumkin.

Isbot. $k = 1$ da $s_1 = x + y = \sigma_1$ $k = 2$ da $s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 + 2xy = =\sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Teorema s_{n-1} va s_n (bunda $1 \le n \le k$, $k \le 2$) uchun to‘g‘ri bo‘lsin. Uning s_{n+1} uchun to‘g‘riligini isbotlaymiz:

$s_{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} = (x^n + y^n)(x + y) - x^n y - xy^n = (x^n + y^n)(x + y) - (x^{n-1} +$

$+ y^{n-1})\times xy = s_n \sigma_1 - s_{n-1}\sigma_2$.

Faraz bo‘yicha s_n va s_{n-1} lar uchun teorema to‘g‘ri edi. Demak, teorema s_{n+1} uchun ham to‘g‘ri.

Teorema. x, ..., z o‘zgaruvchilari har qanday simmetrik P ko‘phad yagona ravishda shu o‘zgaruvchilardan tuzilgan asosiy simmetrik ko‘phadlardan iborat bo‘ladi.

Isbot. $n = 2$ bo‘lgan holni qaraymiz. $P(x,y)$ simmetrik ko‘phad $ax^m y^k$ qo‘shiluvchiga ega bo‘lsin. Agar $m = k$ bo‘lsa, bu qo‘shiluvchi $a(xy)^k$ ga, ya’ni $a\sigma^k$ ga teng, $k > m$ bo‘lsa, $P(x, y)$ ning tarkibida $ax^m y^k$ bilan bir qatorda x va y larni o‘rin almashtirishdan hosil bo‘luvchi $ax^m y^k$ qo‘shiluvchi ham bo‘ladi: $ax^k y^m + ax^m y^k = a(xy)^m(x^{k-m}+y^{k-m}) = a\sigma_2^m s_{k-m}$. Lekin teoremaga muvofiq ixtiyoriy s_{k-m} darajali yig‘indi, demak, P simmetrik ko‘phad ham har doim σ_1, σ_2 orqali ifodalanadi.

Misol. $P(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2$ simmetrik ko‘phadni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalaymiz.

$P(x, y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 2xy) = (x + y)((x + y)^2 - xy) = \sigma_1(\sigma_1^2 - \sigma_2)$.

MASHQLAR:

1. *k* ning istalgan natural qiymatida

1) $(k + 1)^2 - (k - 1)^2$ ning qiymati 4 ga;

2) $(2k + 3)^2 - (2k - 1)^2$ ning qiymati 8 ga;

3) $k^3 - k$ ning qiymati 6 ga;

4) $(3k + 1)^2 - (3k - 1)^2$ ning qiymati 12 ga bo‘linishini isbotlang.

2. Ayniyatlarni isbotlang:

1) $(x^2 + y^2 + z^2)(u^2 + v^2 + w^2) =$

$= (xu + yv + zw)^2 + (zv - yw)^2 + (xw - zu)^2 + (xv + yu)^2$;

2) $(y - z)^5 + (z - x)^5 + (x - y)^5 =$

$= 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$.

3. 1) x, y, z ning s_2, s_3, s_4 darajali yig‘indilarini σ_1 va σ_2 asosiy aimmetrik ko‘phadlar orqali ifodalang;

2) $x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma^2 + 2\sigma_1^2$ tenglikni isbot qiling.

4. σ_1 va σ_2 lardan iborat ko‘paytuvchilarga ajrating:

1) $x^4 - 12x^3y + 15x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$;

2) $16x^4 + 13x^3y + 8x^2y^2 + 13xy^3 + 16y^4$;

9 - § Ratsional ko‘rsatkichli daraja va uning xossalari. n - darajali ildiz, n - darajali arifmetik ildiz va ularning xossalari.

Arifmetik ildiz. Ratsional ko‘rsatkichli daraja. $a \geq 0$ sonning n – darajali **arifmetik ildizi** deb ($n \in N$), n – darajasi a ga teng bo‘lgan $b \geq 0$ songa aytiladi va $b = \sqrt[n]{a}$ orqali belgilanadi. Ta’rif bo‘yicha:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $a>0$, $m\in Z$ va $n\in N$ bo‘lsa, $\sqrt[n]{a^m}$ soni a ning $r=\dfrac{m}{n}$ **ratsional ko‘rsatkichli darajasi** deb ataladi, ya’ni $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Xususan, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Misol: $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[4]{81}=3$

1-eslatma: $\sqrt[n]{a}$ ifodada n – musbat son bo‘lsa $a\geq 0$ bo‘lishi shart

2-eslatma: $\sqrt[n]{a}$ ifodada n – toq son bo‘lsa $a\in(-\infty;\infty)$ bo‘lishi mumkin.

3-eslatma: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ tenglik o‘rinli $\sqrt{a}$ ifodani kasr ko‘rsatkichli daraja shaklida yozish mumkin. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ shu formulaga ko‘ra a – b ifodani quyidagicha almashtirish mumkin.

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$a-b=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$$

Ko‘pincha shakl almashtirishlarda quyidagi formulalar ham ishlatiladi.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

Bu formulalarni chapdan o‘ngga yoki o‘ngdan chapga qarab qo‘llay olish kerak. Xuddi shuningdek ushbu formulalarni ham bilish muhimdir.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3=\sqrt{a^3}+3\sqrt{a^2b}+3\sqrt{ab^2}+\sqrt{b^3}$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3=\sqrt{a^3}-3\sqrt{a^2b}+3\sqrt{ab^2}-\sqrt{b^3}$$

$(\sqrt[3]{a})^3=a$ ekanini bilgan holda ushbu formulalarni yozish mumkin.

$$a+b=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$
$$a-b=(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

Ixtiyoriy darajali ildizni ham kasr ko‘rsatkichli daraja shaklida yoziladi. Masalan: $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[5]{a}=a^{\frac{1}{5}}$; ...; $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

Ratsional ko‘rsatkichli darajaning xossalari butun ko‘rsatkichli daraja xossalariga o‘xshash. *a*, *b* – ixtiyoriy musbat sonlar, *n*, *m* va *k* – ixtiyoriy natural sonlar bo‘lsin. U holda:

1-xossa: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ va aksincha $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ tengliklar o‘rinli.

Misol: $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{18}=\sqrt[5]{32}=2$.

2-xossa: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ va aksincha $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ tengliklar o‘rinli.

Misol: $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}=\sqrt[4]{\frac{3}{48}}=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$.

3-xossa: $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$ ko‘paytuvchini ildiz belgisi ostidan chiqarish.

Misol: $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\cdot 8}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$.

4-xossa: $a\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a^n c}$ ko‘paytuvchini ildiz belgisi ostiga kiritish.

Misol: $3\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2}=\sqrt[4]{81\cdot 2}=\sqrt[4]{162}$.

5-xossa: $(\sqrt[n]{a})^n=a$ tenglik o‘rinli.

6-xossa: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ tenglik o‘rinli.

Misol: $\sqrt[4]{16^3}=(\sqrt[4]{16})^3=2^3=8$.

7-xossa: $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$ tenglik o‘rinli.

Misol: $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$.

8-xossa: $\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}=\sqrt[n]{a^m}$ ildiz ko‘rsatkichi bilan ildiz ostidagi sonning darajasi umumiy ko‘paytuvchisini qisqartirish.

Misol: $\sqrt[8]{a^6}=\sqrt[4\cdot 2]{a^{3\cdot 2}}=\sqrt[4]{a^3}$.

9-xossa: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$ ildiz ko‘rsatkichi bilan ildiz ostidagi sonning bir xil darajaga ko‘tarish.

Misol: I-usul: $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-5}\cdot\sqrt[6]{(2\sqrt{6}+5)^2}=\sqrt[3]{2\sqrt{6}-5}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6}+5}=$

$=\sqrt[3]{24-25}=\sqrt[3]{-1}=-1$;

II-usul: $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-5}\cdot\sqrt[6]{49-20\sqrt{6}}=-\sqrt[6]{(2\sqrt{6}-5)^2}\cdot\sqrt[6]{49-20\sqrt{6}}=$

$=-\sqrt[6]{49+20\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{49-20\sqrt{6}}=-\sqrt[6]{49^2-(20\sqrt{6})^2}=-\sqrt[6]{2401-2400}=\sqrt[3]{-1}=-1$

.

10-xossa: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ tenglik o‘rinli.

Misol: $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^2b}}=\sqrt[6]{a^2b}$.

MASHQLAR:

1. Ifodani soddalashtiring.

1) $15\sqrt{\frac{3}{5}}-0,5\sqrt{60}-2\sqrt{3\frac{3}{4}}$;

2) $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{98}-\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$;

3) $\sqrt{192}-\sqrt{108}+\frac{\sqrt{243}}{3}$;

4) $\left(\sqrt{0,2}-\sqrt{0,8}+\sqrt{1,8}+\sqrt{3,2}\right):\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}-2$;

5) $3\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{\frac{4}{5}}$;

6) $3\sqrt{3\frac{2}{3}}-\sqrt{132}+4\sqrt{2\frac{1}{16}}$;

7) $\frac{\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{-375}}$;

8) $\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{18}}\cdot\sqrt[6]{96}$;

9) $\sqrt[7]{243\cdot 81^2\cdot 9^4}$;

10) $4\sqrt{3\frac{1}{2}}-0,5\sqrt{56}-3\sqrt{1\frac{5}{9}}$;

11) $\sqrt{0,9}+\sqrt{14,4}-\sqrt{8,1}$;

12) $\frac{\sqrt{196}\cdot\sqrt{19,6}}{\sqrt{0,196}\cdot\sqrt{1,96}}$.

2. Hisoblang.

1) $5-\frac{1}{7}\cdot\sqrt{1\frac{27}{169}}$; 2) $2\cdot\sqrt{1\frac{9}{16}}-1$;

3) $8\cdot\sqrt{5\frac{1}{16}}+3$; 4) $4-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{5\frac{11}{49}}$;

5) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{196}+1,5\sqrt{0,36}$; 6) $0,5\cdot\sqrt{0,04}+\frac{1}{6}\sqrt{144}$;

7) $3,6\cdot\sqrt{0,25}+\frac{1}{32}\cdot\sqrt{256}$; 8) $2,5\cdot\sqrt{3,24}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{225}$;

9) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{7}+1-\sqrt{2}\right)$;

10) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}+\sqrt{12}\right)$.

10-§ Ifodalarni ildiz belgisi ostidan chiqarish va ildiz ostiga kiritish. Murakkab ildiz formulasi.

$x^2 = 81$ Tenglama ikkita ildizga ega 9 va $-$ 9 sonlari 81 ning kvadrat ildizlari deyiladi.

Ta'rif: musbat *a* sonning kvadrat ildizlari deb kvadrati *a* ga teng bo'lgan sonlarga aytiladi.

Masalan: 64 ning kvadrat ildizlari 8 va $-$ 8 chunki $8^2 = 64$ va $(-8)^2 = 64$ 64 ning kvadrat ildizlaridan bittasi musbat ya'ni 8 ana shu musbat bo'lgani ya'ni 8 soni 64 ning kvadrat ildizi deyiladi va qisqacha bunday yoziladi: $\sqrt{64}=8$.

Misol: $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=$

$=3+\sqrt{2}+\ 3-\sqrt{2}=6$.

Misol: $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

I-hol uchun: $k=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ bo'lsin $k>0$

$$k^2=(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$$
$$k^2=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2-2(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}})+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=$$
$$=2+\sqrt{3}-2(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}})+2-\sqrt{3}$$
$$k^2=4-2\cdot1=2 \qquad k^2=2 \qquad k_1=\sqrt{2}; \quad k_2=-\sqrt{2} \qquad \text{J: } k_1=\sqrt{2}.$$

II-hol uchun:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ bo‘lganda $\sqrt{2}$ ga ko‘paytirib bo‘lamiz,

$$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=2.$$

Misol: $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}}}=$

$$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+3}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{3}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}=\sqrt{1}=1.$$

Misol: $\sqrt{t^5+3}-\sqrt{t^5-2}=1$ bo'lsa $\sqrt{t^5+3}+\sqrt{t^5-2}=x$ ni toping. Birinchi qatordagi ifodani ikkinchi qatordagi ifodaga ko’paytiramiz, $\sqrt{(t^5+3)^2}-\sqrt{(t^5-2)^2}=1\cdot x; \qquad t^5+3-t^5+2=x; \quad x=5.$

MASHQLAR:

1. Murakkab ildiz formulasidan foydalanib ifodalarni ildiz belgisi ostidan chiqaring.

1) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{14+6\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{14-6\sqrt{3}}$;

5) $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$;

7) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 8) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

9) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;   10) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

11) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;   12) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$;

13) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$;   14) $\sqrt{34+24\sqrt{2}}$;

15) $\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}$;   16) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

2. Murakkab ildiz formulasidan foydalanib ifodalarni ildiz belgisi ostidan chiqaring.

1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;   2) $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

3) $\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}$;   4) $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$;

5) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$;   6) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}$;

7) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2\cdot 0{,}5^{-2}$;   8) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

9) $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$;   10) $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$;

11) $\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{65}}{2}}+\sqrt{\dfrac{9-\sqrt{65}}{2}}$;   12) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$;

13) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;   14) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

15) $\sqrt{52-30\sqrt{3}}-\sqrt{52+30\sqrt{3}}$;   16) $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

17) $\sqrt{21-2\sqrt{21+2\sqrt{19-6\sqrt{2}}}}$;   18) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

3. Murakkab ildiz formulasidan foydalanib ifodalarni ildiz belgisi ostidan chiqaring.

1) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}\cdot\left(6+4\sqrt{2}\right)$;   2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{73}}$;

3) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-5}\cdot\sqrt[6]{49+20\sqrt{6}}$;   4) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt{2\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{2}}$;   6) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$;

7) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$; 8) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$;

9) $\sqrt[3]{216\cdot 512}+\sqrt[5]{32\cdot 243}$; 10) $\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}:\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$;

11-§ Kasr maxrajini irratsionallikdan qutqarish

$\sqrt{7}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ kabi sonlar irratsional sonlardir. Odatda agar kasr maxraji irratsional son iborat bo'lsa maxrajni irratsionallikdan qutqarib olinadi. Buning uchun kasrning surat va maxrajini kerakli songa ko'paytirish kerak.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

Ba'zida kasrning maxraji yig'indi yoki ayirma shaklidagi irratsional son bo'ladi. Bunday kasrda maxrajni irratsionallikdan qutqazish uchun surat va maxrajini maxrajning qo'shmasiga ko'paytirish kerak

Misol: $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1\cdot(2+\sqrt{3})}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}$.

Misol: $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2}=$

$=\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

Misol: $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=$

$$=\frac{1(2-\sqrt{3})}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}-\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}-\frac{1\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=$$

$$2-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+2-\sqrt{5}=4.$$

1-xossa: maxrajni irratsionallikdan qutqarish

Misol: $\frac{b}{\sqrt[n]{a}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$.

Misol: $\frac{a}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{a(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{a(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$.

Misol: $\frac{c}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{c(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}=\frac{c(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{x+y}$.

MASHQLAR:

1. Ifodaning maxrajini irratsionallikdan qutqarish.

1) $\frac{1}{3-\sqrt{8}}-2\sqrt{2}+6$;

2) $\frac{19}{\sqrt{20}+1}+6-2\sqrt{5}$;

3) $2\sqrt{3}-5-\frac{11}{\sqrt{12}-1}$;

4) $\frac{19}{\sqrt{20}-1}-2\sqrt{5}+3$;

5) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}$;

6) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}-\frac{10}{\sqrt{5}}$;

7) $4\sqrt{7\frac{1}{2}}-\frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$;

8) $4+5\sqrt{2}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$;

9) $\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}+\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$;

10) $\frac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}+\frac{4-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}$;

11) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}$;

12) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$;

13) $\frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}-\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}$;

14) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

15) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$; 16) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

2. Soddalashtiring:

1) $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2$;

2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;

3) $\frac{3}{a-\sqrt{a^2-3}}+\frac{3}{a+\sqrt{a^2-3}}$;

4) $\frac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}$;

5) $\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right)\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)$;

6) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

7) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$;

8) $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+2}{a^3+2\sqrt{2}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$;

9) $\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\frac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}$;

10) $\left(\sqrt[4]{13}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{13}-1}{(\sqrt[4]{13}+1)^2}}+\frac{\sqrt[4]{13}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt[4]{13}-1)^2}}\right)^{3/5}\cdot(\sqrt[4]{13}-1)^{4/5}$;

11) $\left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-\sqrt{xy}+x}+\frac{x}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{y^3}$;

12) $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}$.

3. Ifodaning maxrajini irratsionallikdan qutqarish.

1) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}+x$;

2) $\dfrac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}}$;

3) $\dfrac{729a+1}{81\sqrt[3]{a^2}-9a^{1/3}+1}-\dfrac{729a-1}{81a^{2/3}-9\sqrt[3]{a}+1}$;

4) $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$;

5) $\dfrac{2a^{-1/3}}{a^{2/3}-3a^{-1/3}}-\dfrac{a^{2/3}}{a^{5/3}-a^{2/3}}-\dfrac{a+1}{a^2-4a+3}$;

6) $\dfrac{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})}{7-4\sqrt{3}}$;

7) $\dfrac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2a^{1/3}b^{1/3}+4b^{2/3}}:\left(1-\dfrac{2b^{1/3}}{a^{1/3}}\right)-4a^{2/3}$;

8) $\dfrac{2}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

IV BOB ALGEBRAIK TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR.

1 - § Tenglama. Tenglamaning ildizi. Algebraning asosiy teoremasi.

Tenglama. Harf bilan belgilangan noma'lum son qatnashgan tenglik **tenglama** deyiladi.

Masalan, $ax+b=0$, bu yerda $a\neq 0$va $b-$ ixtiyoriy haqiqiy son. Tenglik belgisidan chap va o'ngda turgan ifodalar tenglamaning chap va o'ng qismlari deyiladi. Tenglamaning chap yoki o'ng qismidagi har bir o'shiluvchi tenglamaning hadi deyiladi.

Xususan, $3x+5=0$, $x+5=7x-3$ va $F=mg$ larni ham misol qilib keltirish mumkin.

Tenglamarning paydo bo'lishida asosan, u yoki bu ijtimoiy yoki texnik masalalar sabab bo'ladi.

Masala. Olma nok birgalikda 17000 so'm turadi. Olma nokdan 9000 so'm arzon. Nokning bahosini toping.

Yechish. Nok x so'm tursin, u holda olma (x – 90) so'm turadi. Masalaning shartiga ko'ra (x + x – 9000) = 17000, bundan 2x = 17000 + 9000, 2x = 26000, x = 13000.

Javob: Nok 13000 so'm turadi.

Ta'rif. Tenglamaning ildizi deb, noma'lumning shu tenglamani to'g'ri tenglikka aylantiradigan qiymatiga aytiladi.

Tenglama ikkita, uchta va hokazo ildizlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan,

$$(x-5)(x+2)=0$$

tenglama ikkita ildizga ega: 5 va – 2, chunki x = 5 va x = – 2 da tenglama to'g'ri tenglikka aylanadi.

$$(x+3)(x-7)(x+9)=0$$

tenglama esa uchta ildizga ega: -3, 7 va -9.

Tenglama ildizlarining soni cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin.

Masalan, $4(x-4) = 4x - 16$ tenglamaning ildizlari soni cheksiz ko‘p: x ning istalgan qiymati tenglamaning ildizi bo‘ladi, chunki har bir x da tenglamaning chap qismi o‘ng qismiga teng.

Tenglama ildizlarga ega bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $3x - 7 = 3x + 2$ tenglamaning ildizlari yo‘q, chunki x ning istalgan qiymatida bu tenglamaning chap qismi o‘ng qismidan kichik bo‘ladi.

Tenglamani yechish — uning barcha ildizlarini topish yoki ularning yo‘qligini ko‘rsatish demakdir.

Ko‘pgina amaliy masalalarni yechish

$$ax = b \tag{1}$$

ko‘rinishdagi tenglamaga keltiriladi, bunda a va b — berilgan sonlar, x— noma’lum son. (1) tenglama **chiziqli tenglama** deb ataladi. tenglamani yechishda tenglamaning quyidagi asosiy xossalaridan foydalaniladi.

Algebraning asosiy teoremasi. Ko‘phadlarning ildizlari bilan ish ko‘rilganda, har qanday ko‘phad ham ildizga ega bo‘laveradimi? Degan savol tug‘uladi. Koeffitsientlari haqiqiy bo‘lib, haqiqiy ildizga ega bo‘lmagan ko‘phadlar mavjudligi ma’lum, x^2+1 ana shunday ko‘phadlardan biridir. Koeffitsientlari ixtiyoriy kompleks (haqiqiy koeffitsientli ko‘phadlar bularning xususiy holidir) sonlardan iborat bo‘lgan ko‘phadlar ichida ham ildizga ega bo‘lmaganlari mavjudmi degan savol tug‘iladi? Shunday ko‘phadlar majud bo‘lganda edi, kompleks sonlar sistemasini kengaytirishga to‘g‘ri kelar edi. Ushbu kompleks sonlar algebrasining asosiy teoremasi o‘rinlidir.

Teorema. Darajasi birdan kichik bo‘lmagan, istalgan son koeffitsientli, har qanday ko‘phad hech bo‘lmaganda , umumiy holda bitta kompleks ildizga ega bo‘ladi.

Bu teorema matematikaning eng katta yutuqlaridan biri hisoblanadi va fanlarning xilma-xil sohalarida tatbiq qilinadi. Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Natija. n- darajali $(n \geq 1)$ istalgan kompleks koeffitsientli ko‘phad, xuddi n ta kompleks ildizga ega bo‘ladi. Bunda ildizlar necha karrali bo‘lsa, xuddi shuncha marta sanaladi.

Algebraning asosiy teoremasi $n = 0$ bo‘lganda ham o‘rinli, chunki 0- darajali ko‘phad ildizlarga ega emas. Algebraning asosiy teoremasi darajasi aniqlanmagan nolg‘ ko‘phadgagina (nolg‘ soniga) qo‘llanishi mumkin emas.

Tenglamalarning teng kuchliligi. Bir hil ildizlarga ega tenglamalar **teng kuchli** tenglamalar deyiladi.

Ildizga ega bo‘lmagan har bir tenglama ham teng kuchli hisoblanadi. Tenglamani yechish jarayonida uni soddaroq, lekin berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘lgan tenglama bilan almashtirishga harakat qilinadi. Shuning uchun har qanday shakl almashtirishlarda berilgan tenglama unga teng kuchli tenglamaga o‘tishini bilish muhimdir.

Teorema: Agar tenglamada birorta qo‘shiluvchini tenglamaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga ishorasini o‘zgartirib o‘tkazilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

Masalan,

$$5x - 13 = 16x - 7$$

tenglama

$$5x-13-16x+7=0$$

ga teng kuchlidir.

Teorema: Agar tenglamaning har ikkala tomonini noldan farqli bir songa ko‘paytirilsa yoki bo‘linsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

Masalan,

$$5x-7=\frac{10x-3}{4}$$

tenglama

$$20x-28=10x-3$$

tenglamaga teng kuchli (birinchi tenglamaning har ikkala tomonini 3 ga ko‘paytirildi).

Tenglamalarning asosiy xossalari. Tenglama tarkibidagi algebraik ifodalar ustida turli amallar bajarish mumkin. Bunda tenglamaning ildizlari o‘zgarmaydi. Keng tarqalgan amallar quyidagilardir:

1. Tenglamaning har ikki tomoniga aynan bir xil **haqiqiy sonni** qo‘shish mumkin.
2. Tenglamaning har ikki tomonidan aynan bir xil haqiqiy sonni ayirish mumkin.
3. Tenglamaning har ikki tomonini 0 dan boshqa har qanday haqiqiy songa bo‘lish mumkin.
4. Tenglamaning har ikki tomonini har qanday haqiqiy songa ko‘paytirish mumkin.

5. Tenglamaning istagan tomonida qavslarni ochish mumkin.

6. Tenglamaning istagan qismida o‘xshash qo‘shiluvchilarni keltirish mumkin.

7. Tenglamaning istalgan hadini bir qismdan ikkinchi qismga qarama-qarshi ishora bilan olib o‘tish mumkin.

8. Ba'zi hollarda har ikki tomonga ayrim bir **funksiyalarni** qo‘shish mumkin.

Bunday amal bajarayotganda tenglama ildizlari yo‘qotilmasligiga e’tibor berish kerak. Masalan, $yx = x$ tenglamasida ikki guruh yechim bor: $y = 1$ (har qanday x bilan) va $x = 0$ (har qanday y bilan). Ikkala tomonni ikkinchi darajaga ko‘tarish (ya’ni, ikki tomonga $f(s) = s^2$ funksiyasini kiritish) berilgan tenglamani $(yx)^2 = x^2$ qilib o‘zgartiradi. Bu yangi tenglamada eski tenglamaning barcha ildizlari bilan birga yangi ildizlar ham bor: $y = -1$ va x har qanday son.

Masalan, $7x + 1 = 1 - x$ va keyingi qadamda $7x = x$ tenglama olinadi, bu yerda bir soni tashlab yuborildi.

MASHQLAR:

1. Chiziqli tenglamalarni yeching.

1) $3x + 1 = -48$; 2) $5x + 12 = -49$;

3) $3\frac{1}{2}x + 8 = 8$; 4) $3x + 5 = -4x - 16$;

5) $2{,}6x + 18x = -206$; 6) $x + 0.(3)x = 7\frac{1}{3}x - 48$;

7) $\frac{x}{1} + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x}{3\cdot 4} + \frac{x}{5\cdot 6} + \frac{x}{6\cdot 7} = \frac{13}{49}$;

8) $\frac{x}{18}-\frac{2x-3}{36}=\frac{x}{72}-\frac{5x-14}{9}$;

9) $\frac{x}{18}-\frac{2x-3}{36}=\frac{x}{72}$; 10) $\frac{x+2}{15}-\frac{2x+33}{30}=\frac{x-16}{45}$.

2. Quyidagi tenglamalarni yechib, ularning ildizlari soni haqida hulosa qiling.

1) $2{,}6x+18=-20-0{,}4x+3x$; 2) $2x+18=3^2\cdot 2-0,(6)x+2\frac{2}{3}x$;

3) $x+18=-20+0,(9)x$; 4) $-38+0,(2)x+18=-20-\frac{5}{9}x+\frac{7}{9}x$

.

3*. Tenglamani yeching

1) $$\frac{0{,}125x}{\frac{16}{24}-\frac{21}{40}\cdot 8\frac{7}{16}}=\frac{1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\cdot 0{,}7}{0.675\cdot 2{,}4-0{,}02};$$

2) $$\frac{x}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{9\cdot 1\frac{11}{90}-0{,}45:0{,}9}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$$

4. Tenglamani ildizini toping

1) $1-\frac{x-3}{2}=\frac{2-x}{3}+4$; 2) $\frac{a+13}{10}-\frac{2a}{5}=\frac{3-a}{15}+\frac{a}{2}$;

3) $4-x(x+8)=11-x^2$; 4) $4x(3x-1)-2x(6x+8)=5$.

5. **Tenglamani yeching**

1) $\frac{2m+1}{4}+3=\frac{m}{6}-\frac{6-m}{12}$; 3) $2^{65}\left(x+\frac{1}{16}\right)=4^{32}$;

2) $\frac{65^3-60^3}{65^2+65\cdot 60+60^2}(x+1)=125$; 4) $\frac{135^2-131^2}{4}\cdot\frac{x-1}{2}=266^2$.

6. Tenglama ildizlari soni nechta?

1) $x(x+1)(x+2)\ldots(x+99)=0$;

2) $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\dots(x+99)=0$.

2- § To‘la kvadrat tenglama, ildizlarini topish formulasini keltirib chiqarish. Kvadrat tenglamaning xususiy hollari.

Ikkinchi darajali bir noma’lumli tenglama soddalashtirishdan keyin

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishga keltiriladi. ($a \neq 0, b, c -$berilgan haqiqiy sonalar.)

Ta’rif. $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama **kvadrat tenglama** deyiladi.

End, tenglamani yechish masalasiga o‘taylik.

Tenglamaning o‘ng tomonidan to‘la kvadrat ajratamiz:

$a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$ yoki $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}=-c$ bundan $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}$ yoki $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ikkala tomonidan kvadrat ildizlarni topamiz va $\frac{b}{2a}$ hadni manfiy ishora bilan o‘ng qismiga o‘tkazib quydagilarni olamiz:

$$x_{1,2}=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ va } x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

yoki

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2)$$

b^2-4ac – kvadrat tenglamaning diskriminanti deyiladi va D bilan belgilanadi:

$$D = b^2 - 4ac. \qquad (3)$$

Diskriminant qiymatlariga muvofiq quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1. Agar $D > 0$ bo‘lsa, (1) tenglama $x_1 \neq x_2$ haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi;

2. Agar $D = 0$ bo‘lsa, (1) tenglama $x_1 = x_2$ haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi;

3. Agar $D < 0$ bo‘lsa, (1) tenglama kompleks ildizlarga ega bo‘ladi.

Masalan: $x^2 + x + 1 = 0$ tenglama birorta ham haqiqiy ildizga ega emas, chunki $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

Misol: $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ikkita haqiqiy ildizga ega. Haqiqatda:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}; \quad x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = 1.$$

Misol: $4x^2 - 12x + 9 = 0$ tenglamada $D = 144 - 144 = 0$ bo‘lib tenglama $(2x - 3)^2 = 0$ ko‘rinishini oladi, bundan $x_{1,2} = \frac{3}{2}$.

Misol: $5x^2 - 4x + 1 = 0$ tenglamani yechib:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{10} = \frac{4 \pm 2i}{10} = \frac{2 \pm i}{5}; \quad x_1 = \frac{2 - i}{5}; \quad x_2 = \frac{2 + i}{5}$$ kompleks ildizlarni hosil qilamiz.

Keltirilgan kvadrat tenglama deb

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (3)$$

ifodaga aytiladi. Buni yechish uchun (2) formuladan tashqari yana

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (4)$$

formuladan foydalanish mumkin.

Misol: $x^2 - 6x + 5 = 0$ tenglamani yechamiz.

Xususiy holda kvadrat tenglama. $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm 2;\ x_1 = 1;\ x_2 = 5.$

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad (5)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, ildizlarini

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (6)$$

formula yordamida topish qulay bo‘ladi.

Chala kvadrat tenglamalar.

1. (1) tenlamada $c = 0$ bo‘lsa:

$ax^2 + bx = 0$ bo‘lib, bundan $(ax + b)x = 0$ ni hosil qilamiz va $x_1 = 0$, $ax + b = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$ ni topamiz.

2. $b = 0$ bo‘lsa, $ax^2 + c = 0$ hosil bo‘ladi. Bundan $ax^2 = -c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ni topamiz. Bu holda $-\frac{c}{a} \geq 0$ bo‘lganda tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi.

3. $b = c = 0$ bo‘lsa, $ax^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x_{1,2} = 0$ hosil bo‘ladi.

Viyet teoremasi: Agar x_1 va x_2 sonlari keltirilgan (3) kvadrat tenglamaning ildizlari bo‘lsa,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \qquad \text{bo‘ladi.}$$

ya’ni keltirilgan kvadrat tenglama ildizlarining yig‘indisi qarama – qarshi ishora bilan olingan ikkinchi koeffitsiyentga, ildizlarining ko‘paytmasi esa ozod hadga teng.

Teorema (Viyet teoremasi). Agar x_1 va x_2 lar $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglama $x^2 - \frac{b}{a}x + c = 0$ ga keltirsak va $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ o‘zgartirish kiritamiz.

U holda

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

formulalar o‘rinli, ya’ni to‘la kvadrat tenglama ildizlarining yig‘indisi qarama – qarshi ishora bilan olingan ikkinchi koeffitsiyent $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ ga, ildizlarining ko‘paytmasi esa ozod had $\left(\dfrac{c}{a}\right)$ ga teng.

Misol. $x^2 + px - 6 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri $x_1 = 2$. Shu tenglamaning p koeffitsiyentini va ikkinchi ildizi x_2 ni toping.

Viyet teoremasiga ko‘ra:

$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$

$x_1 = 2$ bo‘lgani uchun $2x_2 = -6$, bundan $x_2 = -3$, $x_1 + x_2 = -p$, $-1 = -p$, $2 - 3 = -p$, $p = 1$.

Javob: $x_2 = -3$, $p = 1$.

Teorema (Viyet teotemasiga teskari teorema). Agar p, q, x_1 va x_2 lar sonlar uchun

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q \qquad (4)$$

munosabatlar bajarilsa, u holda x_1 va x_2 sonlar $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning ildizlari bo‘ladi.

Haqiqatan ham, $x^2 + px + q = 0$ ifodada p ning o‘rniga $-(x_1 + x_2)$ ni, q ning o‘rniga esa $x_1 x_2$ ko‘paytmani qo‘yamiz. Natijada quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 - x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1 x_2 =$$
$$= x(x - x_1) - x(x - x_2) = (x - x_1)(x - x_2)$$

Shunday qilib, agar p, q, x_1 va x_2 sonlar (4) munosabatlar bilan bog‘langan bo‘lsa, u holda x ning har qanday qiymatida kvadrat uchhad quyidagicha ko‘paytuvchilarga ajraladi

$$x^2+px+q=(x_1-x_1)(x_1-x_2)$$

Teorema Agar x_1 va x_2 kvadrat tenglama (1) yoki (3) ning ildizlari bo‘lsa, u holda

$$ax^2+bx+c=a(x_1-x_1)(x_1-x_2)$$

$$x^2+px+q=(x_1-x_1)(x_1-x_2)$$

bo‘ladi.

Tenglikning o‘ng qismida turgan ifodaning shaklini almashtiramiz:

$$ax^2+bx+c=ax^2-axx_1-axx_2+ax_1x_2=ax^2-a\left(x_1-x_2\right)+ax_1x_2.$$

x_1 va x_2 lar $ax^2+bx+c=0$ tenglamaning, ya’ni $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

tenglamaning ildizlari bo‘lgani uchun Viyet teoremasiga ko‘ra,

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$, bundan $a(x_1+x_2)=-b$, $ax_1x_2=c$.

Bu ifodalarni (6) tenglikka qo‘yib, (5) formulani hosil qilamiz.

Misol. x^2+4x-5 kvadrat uchhadni ko‘paytuvchilarga ajrating.

Yechish: Viyet teoremasiga ko‘ra $x_1+x_2=-4$, $x_1x_2=-5$ bo‘ladi.

Bundan, $x_1=1$, $x_2=-5$ kelib chiqadi va $x^2+4x+5=(x-1)(x+5)$ bo‘ladi.

Misol. $2x^2+3x=0$ bo‘lsa, $x(2x+3)=0$; $x_1=0$, $x_2=-\frac{3}{2}$.

Misol. $x^2-9=0$ bo‘lsa, $x^2=9$; $x_1=-3$; $x_2=3$ bo‘ladi.

Misol. $5x^2 = 0$ bo‘lsa, $x^2 = 0$; $x_{1,2} = 0$ bo‘ladi.

MASHQLAR:

1. Chala kvadrat tenglamalarni yeching.

1) $2x^2 - 18 = 0$; 2) $51x^2 - 7x = 18x + x^2$;

3) $125x^2 - 60 = 20$; 4) $\left(35^2 - 15^2\right)x^2 + 24 = 2^{10}$;

5) $343x^2 - 7x = 0$; 6) $125x^2 - 5x = 0$;

7) $2\frac{1}{3}x^2 - \frac{343}{27} = 0$; 8) $17x^2 - 7\frac{1}{12}x = 0$.

2. Kvadrat tenglamalarni yeching.

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 6) $x^2 + x + 9 = 0$;

2) $x^2 - x - 6 = 0$; 7) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

3) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 8) $4x^2 + 5x + 1 = 0$;

4) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 9) $3x^2 + 7 + 4 = 0$;

5) $x^2 - 4x + 5 = 0$; 10) $7x^{2+}10x + 3 = 0$;

11) $343x^2 - 342x - 1 = 0$; 12) $2003x^2 + 2001x - 2 = 0$;

13) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; 14) $60x^2 - 3601x + 60 = 0$.

3. Ildizlari

1) 2 va 3; 2) -1 va 4;

3) 0 va 4; 4) $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{3}$;

5) a va $a+3$; 6) $a-8$ va $2a+8$. (bu yerda, $a \in R$)

bo‘lgan kvadrat tenglamalarni tuzing.

4. Tenglamalarni yeching.

1) $\frac{ax-b}{a+b} + \frac{bx+a}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0$;

3) $\frac{2x}{x+b} - \frac{x}{b-x} = \frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$; 4) $\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x-2} = \frac{5}{x^2-4}$.

5. Keltirilagan kvadrat tenglamarni yeching

1) $x^2-6x+9=0$; 2) $x^2-x-2=0$;

3) $x^2+5x+6=0$; 4) $x^2-5x+6=0$;

5) $x^2+15x+50=0$; 6) $x^2-12x+32=0$;

7) $x^2-49x-50=0$; 8) $x^2-51x+50=0$;

9) $x^2+2\frac{7}{16}x+\frac{7}{8}=0$; 10) $x^2-2\frac{7}{16}x+\frac{7}{8}=0$.

6. Viyet teoremasidan foydalanib, tenlamaning ildizlariga ko'ra ularni tuzing.

1) $x_1 = 1$ va $x_2 = 18$; 2) $x_1 = -5$ va $x_2 = 5$;

3) $x_1 = 0{,}2$ va $x_2 = 1{,}8$; 4) $x_1 = -8$ va $x_2 = 0{,}5$.

7. *a*) $x^2+3x-15=0$; *b*) $x^2+13x-7=0$ **tenglamalar uchun quyidagilarning qiymatini toping:**

1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1^3+x_2^3$;

3) $x_1^2-x_2^2$; 4) $x_1^3-x_2^3$;

5) $\frac{x_1^3x_2^3}{x_1+x_2}$; 6) $\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1+x_2}$;

7) $\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1+x_2}$; 8) $\frac{x_1^3x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$.

8. Tenlama ildizlari uchun $x_1=5x_2$ **tenglik o'rinli bo'lsa, u holda *a* ning qiymatini toping.**$(a>0)$

1) $x^2-12x+a+3=0$; 2) $x^2-12ax+25=0$;

3) $x^2-3x+a-9=0$; 4) $x^2+18ax+180=0$.

9. $x_1=-3$ **son** $5x^2+12x+q=0$ **tenglamaning ildizi bo'sin.** x_1+5x_2 **ni toping.**

10. Ildizlari, $5x^2+6x+q=0$ **tenglamaning ildizlariga teskari bo‘lgan kvadrat tenglama tuzing.**

11. Ildizlaridan biri quyidagiga teng ratsional koeffitsiyentli tenglamani tuzing:

1) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$;   2) $\frac{1}{4-5\sqrt{2}}$;

3) $4-\sqrt{7}$;   4) $5-2\sqrt{3}$.

3 - § Umumlashgan Viyet teoremasi. Kvadrat uchhadni ko‘paytuvchilarga ajratish

Umumlashgan Viyet teoremasi. Uchinchi darajali keltirilgan tenglama deb

$$x^3+px^2+tx+q=0 \qquad (1)$$

tenglamaga aytiladi.

Viyet teoremasi: agar x_1, x_2, x_3 –sonlari (1) tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda quidagilar o‘rinli:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=t \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-q \end{cases}$$

Misol: $x^3+4x^2+3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-4 \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-3 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1 \end{cases}$.

Ta’rif. n – darajali keltirilgan tenglama deb

$$x^n+px^{n-1}+tx^{n-2}+...+rx+q=0 \qquad (2)$$

tenglamaga aytiladi.

Viyet teoremasi. Agar $x_1, x_2, x_3, x_4 ...... x_n -$ sonlari (2) tenglamaning ildizlari bo‘lsa u holda quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -p \\ .... \\ .... \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n q \end{cases}$$

Kvadrat uchhadni ko‘paytuvchilarga ajratish.

Ta’rif: Kvadrat uchhad deb, $ax^2 + bx + c$ ifodaga aytiladi.

Teorema: Agar x_1 va x_2 sonlari $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadni ildizlari bo‘lsa u holda $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ tenglik o ‘rinlidir.

Misol: $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ni ko‘paytuvchilarga ajrating.

$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16,$

$$x_1 = \frac{2+4}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{2-4}{2 \cdot 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)(x + \frac{1}{3}).$$

Misol: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ni ko‘paytuvchilarga ajrating.

$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3, \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

MASHQLAR:

1. Kvadrat uchhadlarni ko‘paytuvchilarga ajrating

1) $x^2 - 5x + 6$; 2) $x^2 - 3x + 4$;

3) $x^2 - 15x + 56$; 4) $x^2 - 9x + 20$;

5) $7x^2 - 5x - 2$; 6) $3x^2 + 5x + 2$;

7) $x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}$; 8) $x^2-x-\sqrt{6}$.

2. Kasrlarni qisqartiring.

1) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; 2) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$;

3) $\dfrac{x^2-8x+15}{-x^2-5x-6}$; 4) $\dfrac{25x^2+10x+1}{5x^2-14x-3}$;

5) $\dfrac{t+2}{t^2-t-2}$; 6) $\dfrac{-5a^2-5a+10}{a^2-4}$.

3. Ifodalarni soddalashtiring.

1) $\dfrac{1}{x^2-25x+156}+\dfrac{2}{x^2-144}$; 2) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}+\dfrac{2-x}{x+3}$;

3) $\dfrac{5x+1}{x^2-9x-10}:\dfrac{2}{x^2+2x+1}$; 4) $\dfrac{(x-3)(x-13)}{x^2-25x+156}\cdot\dfrac{x^2-144}{9-x^2}$.

4. Tengalmalarda haqiqiy ildizlari soni nechta?

1) $x^4+17x^2+16=0$; 2) $x^4-17x^2+16=0$;

3) $x^3+17x^2+16x-34=0$; 4) $x^3+3x^2+6x-27=0$;

5) $x^3-6x^2+9x-27=0$; 6) $x^3+6x^2+9x+27=0$.

5.Tenglamalarni yeching.

1) $x^4+16=0$; 2) $x^4-17x^2+16x=0$;

3) $x^3+5x^2+4x-10=0$; 4) $x^3+3x^2+3x+1=0$;

5) $x^3-6x^2+9x-27=0$; 6) $x^3+6x^2+9x+27=0$.

6. -1; 2; -3 **– sonlari** $x^3+px^2+qx+r=0$ **tenglama ildizlari bo‘lsa, u holda quyidagilarni toping.**

1) $p+r$; 2) p^2+3r;

3) p^2-3qr; 4) p^4-3r^2.

7. -1; 2; -3 **va** 1**– sonlari** $x^4+px^3+qx^2+rx+t=0$ **tenglama ildizlari bo‘lsa, u holda quyidagilarni toping.**

1) p,q,r,t; 2) p^2-2t;

3) p^2-3qr; 4) p^4-3t^2.

4 - § Bikvadrat tenglamalarni yechish. Tengalamalarda o‘zgaruvchini almashtirish usuli. Qaytma tenglamalar.

Bikvadrat tenglamalarni yechish. Bikvadrat tenglama deb, odatda $ax^4+bx^2+c=0$ ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Yechish usuli: $x^2=y$ deb belgilansa, $ay^2+by+c=0$ kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamani yechib, y_1 va y_2 ldizlarni topamiz. Topilgan y_1 va y_2 ni belgilashga ketma-ket qo‘yib, 1) $x^2=y_1$ va 2) $x^2=y_2$ tenglamalarni hosil qilamiz.

1) Agar y_1 va y_2 larning ikkalasi ham musbat bo‘lsa berilgan tenglama 4 ta haqiqiy ildizga ega bo‘ladi.

2) Agar ulardan biri musbat ikkinchisi manfiy bo‘lsa berilgan tenglama faqat 2 ta haqiqiy ildizga ega bo‘ladi.

3) Agar y_1 va y_2 manfiy bo‘lsa berilgan tenglama umuman, haqiqiy ildizga ega bo‘lmaydi.

Misol: $x^4-7x^2+12=0$, $x^2=y$ deb belgilasak $y^2-7y+12=0$

$D = 49 - 48 = 1.$

$$y_1=\frac{7+1}{2}=4,\quad y_2=\frac{7-1}{2}=3.$$

1) $x^2=y_1,\quad x^2=4,\quad x_1=2,\quad x_2=-2.$

2) $x^2=y_2,\quad x^2=3,\quad x_1=\sqrt{3},\quad x_2=-\sqrt{3}.$

Misol: $9x^4+5x^2-4=0$, $x^2=y$ deb belgilasak, $9y^2+5y-4=0$ bu yerda, $D=25+144=169$ ga teng.

$$y_1=\frac{-5+13}{18}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9},\quad y_2=\frac{-5-13}{18}=-1.$$

$$x^2=y_1,\ x^2=\frac{4}{9},\ x_1=\frac{2}{3}\ \text{va}\ x_2=-\frac{2}{3}$$

$x^2=y_2$, $x^2=-1$, $-1<0$ va bu holda haqiqiy ildiz yo‘q.

Misol: $x^4+5x^2+6=0$, $x^2=y$ deb belgilasak $y^2+5y+6=0$ va $D=25-24=1$ ga teng.

$$y_1=\frac{-5+1}{2}=-2,\quad y_2=\frac{-5-1}{2}=-3.$$

1) $x^2=y_1$, $x^2=-2$, $-2<0$,

2) $x^2=y_2$, $x^2=-3$, $-3<0$ ikkala holda ham yechim mavjud emas.

Tengalamalarda o‘zgaruvchini almashtirish usuli. Qaytma tenglamalar.

Misol. Ushbu $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglama $x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$ bo‘lganda aniqlangan. Tenglamaning har ikkala qismini $\frac{x^2-4}{x^2-1}$ ga bo‘lamiz va

$$20\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}-5\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}+48=0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamada $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=t$ belgilash kiritib, $20t^2+48t-5=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning yechimlari: $t_1=-\frac{5}{2}$; $t_2=\frac{1}{10}$.

Bu yechimlardan foydalanib, x o‘zgaruvchiga qaytamiz:

1) $t_1 = -\frac{5}{2}$ bo‘lganda $7x^2 + 9x + 14 = 0$ tenglamani olamiz va uning ildizlari

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm i\sqrt{311}}{14}.$$

2) $t_2 = \frac{1}{10}$ bo‘lganda $3x^2 - 11x + 6 = 0$ tenglamani olamiz va uning ildizlari

$$x_3 = 3; \qquad x_4 = \frac{2}{3}.$$

Javob: $x_1 = \frac{-9 - i\sqrt{311}}{14}$; $x_2 = \frac{-9 + i\sqrt{311}}{14}$; $x_3 = 3$; $x_4 = \frac{2}{3}$.

Misol. Ushbu $x^6 - 64 = 0$ tenglamani to‘liq kvadrat ajratish usuli bilan yeching.

Yechish: $(x^3)^2 - 8^2 = 0$; $(x^3 - 8)(x^3 + 8) = 0$; $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$;

1) $x - 2 = 0$ tenglamadan $x_1 = 2$ yechim olinadi.

2) $x + 2 = 0$ tenglamadan $x_1 = -2$ yechim olinadi.

3) $x^2 + 2x + 4 = 0$ tenglamadan

$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ yechimlar topiladi.

4) $x^2 - 2x + 4 = 0$ tenglamadan

$x_{5,6} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ ildizlarni hosil qilamiz.

Javob: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1 - i\sqrt{3}$; $x_4 = -1 + i\sqrt{3}$; $x_5 = 1 - i\sqrt{3}$ va $x_6 = 1 + i\sqrt{3}$.

Misol. Ushbu $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$ qaytma tenglamani yeching.

Yechish: $x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$;

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$;

$x+\frac{1}{x}=t$ deb almashtirish kiritamiz. Natijada quyidagi kvadrat tenglamani hosil qilamiz: $t^2+5t-14=0$. Bu tenglamaning yechimlarini topamiz:

$$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot1\cdot(-14)}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\frac{-5\pm9}{2}$$

bundan $t_1=-7$; $t_2=2$.

Bu topilgan qiymatlardan $x_{1,2,3,4}$ qiymatlarni topamiz:

1) $t_1=-7$ bo‘lganda $x+\frac{1}{x}=-7$ bo‘lib, $x^2+7x+1=0$ kvadrat tenglamani olamiz. Uning ildizlari $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-4}}{2}=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

2) $t_2=2$ bo‘lganda $x+\frac{1}{x}=2$ bo‘lib, $x^2-2x+1=0$ tenglamadan $(x-1)^2=0$ tenglamaga kelamiz va $x_{3,4}=1$ ildizlarni olamiz.

Javob: $x_1=\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$; $x_3=1$; $x_4=1$.

Ta’rif. Ushbu

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...+cx^2+bx+a=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi butun algebraik tenglama **qaytma tenglama** deyiladi.

Bunda tenglamaning boshidan va oxiridan bir xil uzoqlikda yotgan hadlarning koeffitsientlari bir-biriga teng bo‘ladi. Qaytma tenglamaning ildizlaridan hech biri nolga teng emasligini ko‘rish oson.

Agar $x = 0$ tenglamaning ildizi bo‘lsa, u holda biz $a = 0$ ga ega bo‘lamiz va tenglamaning darajasi pastroq bo‘ladi.

Oldin juft ($n = 2k$) darajali qaytma tenglamani qaraymiz.

Tenglamaning har ikkala qismini x^k ga bo‘lib, hadlarni guruhlash natijasida uni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$a(x^k + \frac{1}{x^k}) + b(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) + ... + l(x + \frac{1}{x}) + f = 0.$$

(2)

Agar (5) tenglamada $x + \frac{1}{x} = y$ desak, ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y; ... . \qquad (3)$$

(6) ni (5) ga qo‘yib, y ga nisbatan k darajali tenglamani hosil qilamiz. x ning qiymatlarini esa $x^2 - yx + 1 = 0$ tenglamadan topamiz.

Toq darajali ($n = 2k + 1$) qaytma tenglamani yechish juft darajali qaytma tenglamani yechishga keltiriladi.

Ushbu $ax^{2k+1} + bx^{2k} + cx^{2k-1} + ... + cx^2 + bx + a = 0$

tenglamaning $x = -1$ ildizga ega ekanligini ko‘rish qiyin emas. Demak, –buning chap qismi $x + 1$ ga bo‘linadi. Tenglamaning ikkala qismini har biri $x + 1$ ga bo‘linadigan qo‘shiluvchilar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalaymiz:

$$a(x^{2k+1} + 1) + bx(x^{2k-1} + 1) + cx^2(x^{2k-3} + 1) + ... + lx^k(x + 1) = 0,$$
$$(x+1)(ax^{2k} + b_1 x^{2k-1} + ... + b_1 x + a) = 0.$$

Shunday qilib, masala juft ko‘rsatkichli ushbu $ax^{2k} + b_1 x^{2k-1} + ... + b_1 x + a = 0$ qaytma tenglamani yechishga keltiriladi.

Qaytma tenglamaning yana o‘ziga xos bir xususiyati bor. Agar $x = x_0$ soni qaytma tenglamaning ildizi bo‘lsa, u holda $x = \frac{1}{x_0}$ soni ham shu tenglamaning ildizi bo‘ladi.

Misol. $21x^6 + 82x^5 + 103x^4 + 164x^3 + 103x^2 + 82x + 21 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamaning har ikkala qismini x^3 ga bo‘lamiz:

$$21(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 82(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 103(x + \frac{1}{x}) + 164 = 0.$$

Agar $x + \frac{1}{x} = t$ desak, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ bo‘ladi. Natijada t ga nisbatan tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$21t^3 + 82t^2 + 40t = 0 \Rightarrow t(21t^2 + 82t + 40) = 0.$$

Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi: $t_1 = 0$ va $21t^2 + 82t + 40 = 0$. Bu tenglamalarni yechib, ildizlarni topamiz: $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{4}{7}$, $t_3 = -\frac{10}{3}$.

Agar: 1) $t_1 = 0$ bo‘lsa, $x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari: $x_1 = -i$, $x_2 = i$.

2) $t_2 = -\frac{4}{7}$ bo‘lsa, $7x^2 + 4x + 7 = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari: $x_3 = \frac{-2 - 3i\sqrt{5}}{7}$; $x_4 = \frac{-2 + 3i\sqrt{5}}{7}$.

3) $t_3 = -\frac{10}{3}$ bo‘lsa, $3x^2 + 10x + 3 = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari: $x_5 = -\frac{1}{3}$; $x_6 = -3$.

Javob: $x_1 = -i$; $x_2 = i$; $x_3 = \frac{-2 - 3i\sqrt{5}}{7}$; $x_4 = \frac{-2 + 3i\sqrt{5}}{7}$;

va $x_5=-\dfrac{1}{3}$; $x_6=-3.$

Ushbu $ax^4+bx^3+cx^2+dx+l=0$ $(l\neq 0)$ tenglama qaytma tenglama bo‘lishi uchun uning koeffitsientlari quyidagicha bog‘langan bo‘lishi kerak:

$$d=\lambda b,\ l=\lambda^2 a.$$

Bunday holda berilgan tenglama $y=x+\dfrac{\lambda}{x}$ almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keladi.

Ushbu

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m \qquad (4)$$

tenglamani qaytma tenglamaga keltirish uchun uning koeffitsientlari orasida $a+b=c+d$ (yoki $a+c=b+d$, yoki $a+d=b+c$) tenglik bajarilishi kerak.

Ushbu

$$(x+a)^4+(x+b)^4=c \qquad (5)$$

ko‘rinishdagi tenglama

$$x=t-\frac{a+b}{2} \qquad (6)$$

almashtirish bilan bikvadrat tenglamaga keltiriladi. Haqiqatan, berilgan tenglamada $x+a=t+m$, $x+b=t-m$ almashtirishlarni bajarsak,

$a-b=2m$, $m=\dfrac{a-b}{2}$ bo‘ladi. Bunday holda $x+a=t+\dfrac{a-b}{2}$ yoki $x=t-\dfrac{a+b}{2}$. Natijada (5) tenglama t ga nisbatan quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(t-\frac{a-b}{2}\right)^4=c.$$

Bu tenglamani soddalashtirgandan keyin esa $t^4+6\left(\frac{a-b}{2}\right)^2t^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=\frac{c}{2}$ bikvadrat tenglamani olamiz.

Ushbu

$$\frac{dx}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c \qquad (7)$$

ko‘rinishdagi tenglama

$$px+\frac{q}{x}=t \qquad (8)$$

almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keladi. Agar c = 0 bo‘lsa, u holda (10) tenglama x_1 = 0 ildizga ega bo‘ladi. Qolgan ildizlari x ga nisbatan kvadrat tenglamaga keltirib topiladi.

Agar $c\neq 0$ bo‘lsa, u holda $x\neq 0$ bo‘lib, bunday holda (10) tenglama chap qismining surat va maxrajini x ga bo‘lib, uni $\frac{a}{px+n+\frac{q}{x}}+\frac{b}{px+m+\frac{q}{x}}=c$ ko‘rinishga keltiramiz. Bu tenglamada $px+\frac{q}{x}=t$ almashtirish bajarsak, $\frac{a}{t+n}+\frac{b}{t+m}=c$ tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama $t\neq n,\quad t\neq m$ shartlarda $ct^2+(mc+nc-a-b)t+mnc-am-bn=0$ kvadrat tenglamaga keladi.

MASHQLAR:

1. Tenglamani yeching.

1) $x^4-15x^2+14=0$; 2) $7x^4+5x^2-12=0$;

3) $6x^4-15x^2-19=0$; 4) $16x^4-25x^2-41=0$;

5) $x^8-12x^2-2=0$; 6) $x^8+7x^2-2=0$;

7) $x^6-4x^3+4=0$; 8) $x^{12}-5x^6+4=0$;

9) $5x^{18}-6x^9+1=0$; 10) $x^{10}-14x^5-51=0$.

2. Qaytma tenglamalarni yeching.

1) $x^4-3x^3-15x^2-3x+1=0$; 2) $7x^3+5x^2+5x+7=0$;

3) $6x^4-15x^2+6=0$; 4) $3x^4+5x^3+4x^2+5x+3=0$;

5) $5x^2-12x+5=0$; 6) $x^3+7x^2+7x+1=0$;

7) $x^4+5x^3+4x^2+5x+1=0$; 8) $4x^4+6x^3+5x^2+6x+4=0$.

3. Tenglamani yeching.

1) $(x-1)^4-14(x-1)^2-51=0$; 2) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^4+8\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-9=0$;

2) $5(5x-2)^8+9(5x-2)^4+4=0$; 4) $7(2x-5)^8-9(2x-5)^4+2=0$.

4.Tenglamani yeching.

1) $(x-2)^4+(x-4)^4=8$; 2) $(x+2)^4+(x-4)^4=6$;

3) $(x+5)^4+(x+7)^4=12$; 4) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^4+\left(x+\frac{3}{2}\right)^4=4$.

5. Tenglamani yeching.

1) $\frac{x}{2x^2+3x+1}+\frac{2x}{2x^2+4x+1}=\frac{19}{42}$;

2) $\frac{x}{x^2-2x+1}+\frac{2x}{x^2+4x+1}=0.75$.

5 - § Yuqori darajali tenglamalarni yechish. O‘zgaruvchilarni almashtirish.

Ikki hadli tenglamalar. Yuqori tartibli tenglamalardan ikki hadli va uch hadli tenglamalarni ko‘rib chiqamiz.

Tarif: $x^n - a = 0$ (1)

(a – berilgan son) ikki hadli tenglama deyiladi.

$px^n + q = 0$, $p \neq 0$, tenglama $x^n - a = 0$ tenglamaga ekvivalentdir.

(1) tenglamaning ildizlari

$$x = \sqrt[n]{a} \qquad (2)$$

formuladan topiladi.

Ildizlarning xossalaridan foydalanib, (1) tenglama ildizlarini tahlil qilamiz.

1. Agar $a = 0$ bo‘lsa (ixtiyoriy sonlar maydonida), tenglama yagona yechim $x = 0$ ga ega bo‘ladi.

2. Agar $a \neq 0$ va haqiqiy son bo‘lsa, haqiqiy sonlar to‘plamida,

$n = 2k + 1$ bo‘lganda, tenglama yagona haqiqiy yechim $x = \sqrt[2x+1]{a}$ ga ega bo‘ladi.

3. $a > 0$ va $n = 2k$ bo‘lganda, tenglama haqiqiy sonlar to‘plamida ikkita yechim $x = \pm\sqrt[2k]{a}$ ga ega bo‘ladi.

4. $a < 0$ va $n = 2k$ bo‘lsa, haqiqiy sonlar to‘plamida tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

5. $a \neq 0$ va ixtiyoriy kompleks (xususiy holda haqiqiy) son bo‘lganda, tenglama kompleks sonlar to‘plamida n ta yechimga ega bo‘ladi. Bu yechimlar $\sqrt[n]{a}$ ning turli qiymatlari bo‘ladi.

Misol. $x^3 - 1 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglama $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ ga teng kuchli.

Bundan $x_1 = 1$, $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ni hosil qilamiz.

Misol. $x^4 - 1 = 0$ ildizlari qiymatlari topilsin.

Yechish: $x^4 - 1 = 0$ tenglamani yechamiz. Ko‘paytuvchilarga ajratib, dastlab,

$$\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) = 0$$

ni olamiz va chap tomonini yana ko‘paytuvchilarga ajratib,

$(x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = 0$ ni olamiz va uni yechib,

$x_1 = -1, x_2 = -1,\ x_{3,4} = \pm i$ larni olamiz.

Misol. $\sqrt[4]{-1}$ hisoblansin.

Yechish: Buning uchun $\sqrt[4]{-1}$ ni x bilan belgilab, $x^4 - 1 = 0$ ni hosil qilamiz va uni yechamiz. Chap tomonini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = 0$ va bundan $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}, x_{3,4} = \dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ ni topamiz.

Uch hadli tenglamalar.

Tarif. $ax^{2n} + bx^n + c = 0 \ (a \neq 0)$ (1)

ko‘rinishdagi tenglama uch hadli tenglama deyiladi. Agar $x^n = y$ deb belgi- lasak, (1) uch hadli tenglama y ga nisbatan quyidagi kvadrat tenglamaga keltiriladi:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Natijada, $x = \pm\sqrt[n]{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ ni hosil qilamiz.

Xususiy holda, $n = 2$ bo‘lganda, bikvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz va uning hamma to‘rtta ildizlari uchun

$x = \pm\sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ ni topamiz.

Bikvadrat tenglamani $a > 0$ bo‘lganda ildizlarini tekshiramiz.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$, $c > 0$, $b > 0$ bo‘lsa, yordamchi $ay^2 + by + c = 0$ tenglamaning ildizlari musbat va turli. Bikvadrat tenglama to‘rtta haqiqiy ildizga ega.

2. $D > 0$, $c > 0$ bo‘lganda x^2 uchun har xil ishorali ikkita qiymatni hosil qilamiz. Bikvadrat tenglama ikkita haqiqiy, ikkita mavhum ildizga ega bo‘ladi.

3. $D > 0$, $c > 0$, $b > 0$ bo‘lganda x^2 uchun ikkita manfiy qiymatlarni topamiz. Bikvadrat tenglama faqat mavhum ildizlariga ega bo‘ladi.

4. $c = 0$ bo‘lsa, yordamchi tenglama $ay^2 + by = 0$ bo‘lib,

$y_1 = x^2 = 0$, $y_2 = x^2 = -\dfrac{b}{a}$ bo‘ladi.

$b \neq 0$ bo‘lganda bikvadrat tenglama ikki karrali ildiz $x = 0$ ga va yana ikkita haqiqiy ildizlarga, $b < 0$ bo‘lganda, mavhum ildizlarga, $b > 0$ bo‘l- ganda ega bo‘ladi.

$b = c = 0$ bo‘lsa, bikvadrat tenglama to‘rkarrali ildiz $x = 0$ ga ega bo‘ladi.

5. $D < 0$ bo‘lganda, x^2 uchun ikkita qo‘shma mavhum qiymatlarni topamiz. Bikvadrat tenglama uchun to‘rtta har xil (juft = juft qo‘shma) mavhum ildizlarni topamiz.

6. $D = 0$ bo‘lganda, yordamchi tenglama ikki karrali ildiz $y = x^2 = -\dfrac{b}{2a}$ ga ega bo‘ladi. Bikvadrat tenglama, $b > 0$ bo‘lganda, ikkita ikki karrali mavhum ildizlarga, $b < 0$ bo‘lganda, ikkita ikki karrali haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi.

Misol. $x^6 - 3x^3 - 2 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $y = x^3$ deb belgilab $y^2 - 3y + 2 = 0$ yordamchi tenglama topamiz, uning ildizlari $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

Natijada $x^3 = 1$ va $x^3 = 2$ tenglamalarga ega bo‘lamiz. Bular $(x-1)(x^2+x+1)=0$ va $\left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}\right)=0$ tenglamalarga teng kuchlidir. Birinchisidan, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ni, ikkinchi- sidan $x_4 = \sqrt[3]{2}$, $x_5 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$, $x_6 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ ni hosil qilamiz.

Misol. $3x^4 + 26x^2 - 9$ bikvadrat uchhad ko‘paytuvchilarga ajratil-sin.

Yechish: $3x^4 + 26x^2 - 9 = 0$ tenglamani yechamiz: $x^2 = \dfrac{-13 \pm 14}{3}$ va $x^2 = \dfrac{1}{3}$ dan $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x^2 = -9$ dan $x_3 = 3i$, $x_4 = - 3i$ ni topamiz va $3x^4 + 26x^2 - 9 = 3\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)(x-3i)(x+3i)$ ni hosil qilamiz, yoki $3x^4 + 26x^2 - 9 = \left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right)(x-3i)(x+3i)$ hosil bo‘ladi (kompleks sonlar to‘plamida), Haqiqiy sonlar to‘plamida esa $3x^4 + 26x^2 - 9 = \left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right)(x^2+9)$ bo‘ladi.

Hadlarni guruhlash. Belgilash yo‘li bilan yechiladigan tenglamalar. Ko‘pgina tenglamalar agar qulay belgilash kiritilsa kvadrat tenglamaga aylanib qoladi. Muhim ana shu qulay belgilashni topishdadir.

Misol: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$

Kerakli hadlarni guruhlaymiz: $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 120$

$\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=120$ va $x^2+5x+4=y$ deb olsak, $y\left(y+2\right)=120$ ni olamiz va undan esa $y^2+2y-120=0$ ni hosil qilamiz va uni yechib $y_1=-12$ va $y_2=10$ larni olamiz va ularni esa x^2+5x+4 ifodaga ketma-ket tenglashtirib

1) $x^2+5x+4=10$, $x^2+5x+4-10=0$ va $x^2+5x-6=0$ ni hosil qilamiz. $x^2+5x-6=0$ ni yechib, $x_1=1$ va $x_2=-6$ ildizlarni olamiz.

2) $x^2+5x+4=-12$, $x^2+5x+4+12=0$ va $x^2+5x+16=0$ kvadrat tenglamani olamiz. Uning diskriminanti – $D=25-64=-39<0$ ekanidan, ikkinchi holda yechim mavjud emas.

Javob: $x_1=1$ va $x_2=-6$.

Misol: $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5$ $\frac{x^2+1}{x}=y$ ni belgilab olsak, u holda $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{y}$ bo‘ladi. Undan esa, quyidagilarni hosil qilamiz:

$y+\frac{1}{y}=-2{,}5$ uni esa ikkala tomonini y ga ko‘paytirib, $y^2+2{,}5y+1=0$ kvadrat tenglamani olamiz. Uni yechib, $y=-2$ va $y=-0{,}5$ larni olamiz va ularni yuqriga y ning o‘rniga qo‘yib,

1) $\frac{x^2+1}{x}=-\frac{1}{2}$, $2x^2+x+2=0$, $\left(x\neq 0\right)$ $D=-16<0$, demak yechim mavjud emas;

2) $\frac{x^2+1}{x}=-2$, $x^2+2x+1=0$, $\left(x\neq 0\right)$, $\left(x+1\right)^2=0$ va $x=-1$.

Javob: $x=-1$.

Misol: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$ tenlamada $x+\frac{1}{x}=y$ desak, $y^2-2y-3=0$, $D=16>0$ va undan esa $y_1=\frac{2+4}{2}=3$ $y_2=\frac{2-4}{2}=-1$ larni olamiz

1) $x+\frac{1}{x}=3, x^2-3x+1=0, x\neq 0, D=9-4=5$ va bundan esa $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ larni olamiz.

2) $x+\frac{1}{x}=-1$ $x^2+x+1=0$ $x\neq 0$ $D=1-4=-3$, $D<0$ va yechim mavjud emas

Demak, javob – $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

MASHQLAR:

1. Quyidagi ikki hadli tenglamalarni yeching.

1) $x^3-8=0$;	5) $x^4-16=0$;
2) $x^3+8=0$;	6) $x^4+16=0$;
3) $x^5-32=0$;	7) $x^4-81=0$;
4) $x^5+32=0$;	8) $x^4+81=0$;
9) $64x^{16}=128$;	10) $64-x^5=32$.

2. Quyidagi uch hadli tenglamalarni yeching:

1) $x^4+5x^2-36=0$;	5) $x^4+3x^2-18=0$;
2) $x^4-8x^2-9=0$;	6) $x^4+4x^2-32=0$;
3) $x^{12}-x^6-6=0$;	7) $x^4+x^2-1=0$;
4) $x^4+2x^2-15=0$;	8) $x^8-2x^4+4=0$;
9) $x^4+5x^2+17=0$;	10) $x^4-5x^2-16=0$;
11) $x^4+10x^2+25=0$;	12) $x^4-12x^2+36=0$.

3. Quyidagi tenglamalar haqiqiy ildizlari topilsin.

1) $x^6 - 3x^3 - 12 = 0$; 2) $x^{10} + 12x^5 - 17 = 0$;

3) $x^3 + 12x^{1,5} - 13 = 0$; 4) $x^{12} + 6x^6 + 9 = 0$.

4. Quyidagi ifodalarni ko‘paytuvchilarga ajrating.

1) $x^4 - 2x^2 - 3$; 2) $x^4 - 2x^2 + 1$;

3) $x^4 + 5x^2 + 17$; 4) $x^4 + 5x^2 - 16$;

5) $x^4 + 10x^2 + 25$; 6) $x^4 + 12x^2 + 36$.

5. Tenglamani yeching.

1) $x(x+2)(x+4)(x+6) = 9$; 2) $x(x+3)(x+6)(x+9) = 19$;

3) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3$; 4) $x(x-5)(x-10)(x-15) = -49$.

6. Tenglamani yeching.

1) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)-2=0$; 2) $\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(3x+\frac{1}{2}\right)-2=0$;

3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$; 4) $\left(x-\frac{1}{3x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{3x}\right)+1=0$;

5) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+9=0$; 6) $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-9\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+8=0$.

7. Tenglamani yeching

1) $\frac{x^2+1}{2x}+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{17}{4}$; 2) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-3\frac{1}{3}$;

3) $\frac{x^2+x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+x+1}=7\frac{1}{7}$; 4) $\frac{3x^2+2x+1}{x+1}+\frac{x+1}{3x^2+2x+1}=2{,}9$.

8.Tenglamani yeching.

1) $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$; 2) $x^2+\frac{1}{4x^2}+5\left(x+\frac{1}{2x}\right)+7=0$;

3*) $x^4+3x^3+5x^2+3x+1=0$; 4*) $2x^4+3x^3+6x^2+3x+2=0$.

****Ko‘rsatma.*** Tenglikning ikkala tomonini x^2 ga bo‘lib yuboring.

9. 1) Ildizlari $1-2i$, $2-i$ bo‘lgan haqiqiy koeffitsiyenti to‘rtinchi darajali tenglamani tuzing.

2) Ildizlari 1, $1-2i$, $2-i$ bo‘lgan haqiqiy koeffitsiyenti beshinchi darajali tenglamani tuzing.

10. Tenglamalarni yeching.

1) $x^4-100x^2+2400=0$; 2) $3x^4+17x^2-20=0$;

3) $3x^8+5x^4-15=0$; 4) $5x^{14}-2x^7-3=0$.

11. Quyidagi ifodalarni ko‘paytuvchilarga ajrating

1) x^6-2x^3-3; 2) x^4-2x^2+1;

3) x^4+5x^2-6; 4) x^4+4x^2+4;

5) x^4-3x^2+2; 6) x^4-14x^2+49;

7) $x^6-16x^4-17x^2$; 8) $x^8-2x^6-3x^4$.

6-§ Kasr-ratsional tenglamalarni yechishning maxsus usullari.

Ta’rif. Agar tenglama tarkibida ratsional(kasr)da noma‘lum qatnashgan had ishtirok etsa bunday tenglama kasr – ratsional tenglama deyiladi.

Masalan: *a*) $\frac{9}{x-1}+\frac{7x+2}{x}=\frac{1}{2}$ b) $\frac{9}{x+5}+\frac{7x}{x-3}=\frac{7}{2}$

Kasr – ratsional tenglamani yechish uchun uni maxrajidan qutilish kerak. Buning uchun tenglamani hadma – had umumiy maxrajga ko‘paytiriladi va butun tenglama hosil qilinadi.Hosil bo‘lgan tenglamani yechib ildizlar topiladi.Topilgan ildizlarni berilgan tenglamaning maxrajiga qo‘yib maxrajini nolga aylantiradimi yoki yoqmi tekshirib ko‘rish kerak Maxrajni nolga aylantirgan ildizlar chet ildiz deb tashlab yuboriladi. Qolganlari javob bo‘ladi.

Misol: $\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x-3}=3$ tenglamani yeching. Uni yechish uchun ikkala tomonini $(x+2)(x\text{-}3)$ ga ko‘paytiramiz, bunda $x\neq-2,\ x\neq3$.

$$\frac{3}{x+2}(x+2)(x-3)-\frac{4}{x-3}(x+2)(x-3)=3(x+2)(x-3)$$

$3(x-3)-4(x+2)=3(x+2)(x-3)$ va undan

$3x-9-4x-8=3x^2-3x-18$ ni olamiz. Uni soddalashtirib,

$3x^2-2x-1=0$ ni olamiz va uning diskriminanti – $D=4+12=16$.

Bundan esa,

$x_1=\frac{2+4}{6}=1,\quad x_2=\frac{2-4}{6}=-\frac{1}{3}.$ ildizlarni olamiz.

Misol: $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{3}{x-1}=\frac{3-x}{x-2}$ tenglamaning maxrajini $(x-1)(x-2)$ ga ko‘paytiramiz, bunda $x\neq1,\ x\neq2$.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}(x-1)(x-2)+\frac{3}{x-1}(x-1)(x-2)=\frac{3-x}{x-2}(x-1)(x-2)$$

$1+3(x-2)=(3-x)(x-1),\quad 1+3x-6=3x-3-x^2+x.$

$x^2-x-2=0,\quad D=1+8=9.$

$x_1=\frac{1+3}{2}=2,\ x_2=\frac{1-3}{2}=-1\ \ x=2$ chet ildiz $J{:}\,x=-1$.

MASHQLAR:

1. Tenglamalarni yeching.

1) $\frac{x}{x-3}-\frac{x-2}{x-6}=0$**;** 2) $\frac{3x+4}{x-6}-\frac{x-2}{4x+3}=0.$

3) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}$**;** 4) $\frac{x^2}{x+3}-\frac{x}{-x-3}=\frac{6}{x+3};$

5) $5+\frac{2}{x-2}-\frac{17}{x+3}=0$; 6) $\frac{3}{x^2-7x+12}=\frac{1-x}{x-4}-\frac{3}{x-3}$.

2. Tenglamalarni yeching.

1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x^2-7x+12}+\frac{x-5}{x-4}=0$;

3) $\frac{y+3}{y^2-y}+\frac{6-y}{1-y^2}=\frac{y+5}{y+y^2}$; 4) $\frac{y+4}{y-4}+\frac{4}{y}=2+\frac{y}{4-y}$.

3. ***x*** **ning qanday qiymatlarida berilgan ifodalarning qiymatlari bir- biriga teng bo‘ladi.**

1) $\frac{9}{2x+2}+\frac{x}{x-1}$ va $\frac{1-3x}{2-2x}$; 2) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{1}{2}$ va $\frac{3}{2x-2}$;

3) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}$ va $2-\frac{x+4}{x+1}$; 4) $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}$ va $\frac{4}{4-x^2}+1$.

4. Tenglamani yeching.

1) $(x-1)^4-5(x-1)^2+4=0$; 2) $(x+5)^4+8(x+5)^2-9=0$;

2) $5(x-2)^8+9(x-2)^4+4=0$; 4) $7(2x+3)^8+9(2x+3)^4+2=0$.

5. Tenglamani yeching.

1) $\frac{5x+1}{2x}+\frac{2x}{5x+1}=\frac{7}{3}$; 2) $\frac{x^2+5x+1}{x^2-4x+3}+\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+1}=1\frac{1}{3}$;

3) $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2-x+1}=-2$; 4) $\frac{7x^2}{x+1}+\frac{x+1}{7x^2}=8{,}125$.

5) $\frac{5x}{4x^2+3x+2}+\frac{2x}{4x^2+5x+2}=-\frac{4}{3}$;

6) $\frac{7x}{x^2+2x+1}+\frac{2x}{x^2+4x+1}=2\frac{1}{12}$.

7-§ Algebraik tenglamalar sistemalari. Noma’lumlarni yo‘qotish. O‘zgaruvchilarni almashtirish. Simmetrik va bir jinsli ko‘phadlar tadbiqlari.

Algebraik tenglamalar sistemalari. Maktab algebra kursidan ma’lumki, ushbu $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x-5y=2 \end{cases}$ ko‘rinishidagi tenglamalar sistemalari odatda, o‘rniga qo‘yish, qo‘shish va grafik usullarida yechimlari juftliklari topiladi.

Ularni umumiy ko‘rinishda quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\begin{cases} f(x,y)=b \\ g(x,y)=c \end{cases} \qquad (1)$$

(1)tenglamadagi $f=f(x,y)$ va $g=g(x,y)$ chiziqli algebraik ko‘phadlar bo‘ladi. Bu yerda b, c – ixtiyoriy haqiy sonlar.

$\begin{cases} x^2-5y=12 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$ ko‘rinishidagi tenglamalar sistemalari odatda, o‘rniga qo‘yish va grafik usullarida yechimlari juftliklari topiladi.

Ularni umumiy ko‘rinishda quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\begin{cases} l(x,y)=b_1 \\ r(x,y)=c_1 \end{cases} \qquad (2)$$

(1)tenglamadagi $l=l(x,y)$ va $r=r(x,y)$ ko‘phadlar chiziqli va albatta birortasi chiziqli bo‘lmagan algebraik ko‘phadlar bo‘ladi. Bu yerda b_1, c_1 – ixtiyoriy haqiy sonlar.

Ularni yanada umumlashtirib, quyidagicha ko‘rinishda yozib olish mumkin:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=b_1 \\ f_2(x,y)=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x,y)=b_n \end{cases} \qquad (3)$$

Bu yerda $f_n = f_n(x, y)$ lar – ikki nomalumli n – darajali ko‘phadlar, b_n lar esa – ixtiyoriy haqiqiy sonlar$(n \in N)$.

Ta’rif. (3) tenglamalr sistemasi ikki nomalumli n – darajali **algebraik tenglamalar sistemasi** deyiladi.

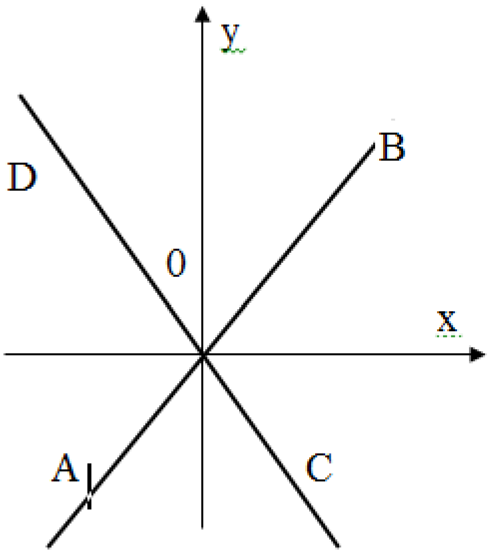
Ikki noma’lumli algebraik tenglamaning geometrik ma’nosi. Umumiy qilib aytganda, har qanday ikki x va y noma’lumga bog‘liq bo‘lgan tenglama tekislikda shunday nuqtalarning geometrik o‘rnini bildiradiki, bu nuqtalarning koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradi. x va y ga bog‘liq bo‘lgan tenglamani

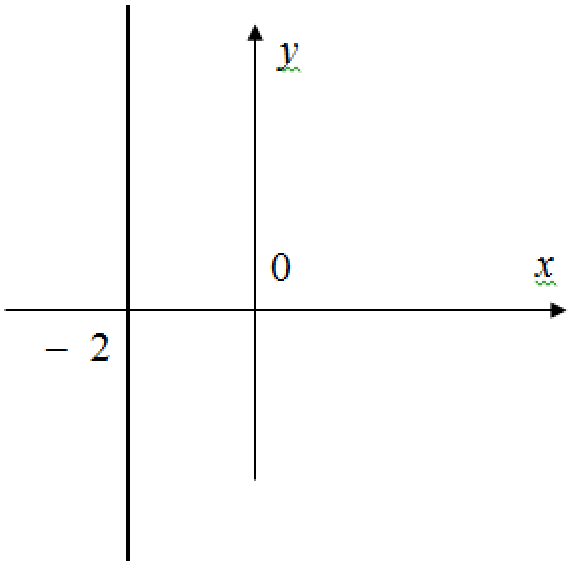
$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

(1) ko‘rinishida yozish mumkin. Bu tenglama qanday bo‘lganda, qanday chiziq aniqlanishini misollarda ko‘rib chiqamiz. (1) tenglama $Ax + By + C = 0$ ko‘rinishidagi chiziqli tenglama bo‘lsin. Bu holda o‘zgaruvchi x ning har bir qiymatiga y ning bitta qiymati mos keladi. Bunday (x, y) juftlardan bir nechtasini topib tekislikda belgilaymiz va ularni tutashtirib, to‘g‘ri chiziqni hosil qilamiz.

Misol. 1) $y = x$ tenglama birinchi va uchinchi koordinatalar burchagining bissektrisasini bildiradi (*AB* to‘g‘ri chiziq).

2. $y = – x$ tenglama esa ikkinchi va to‘rtinchi koordinatalar burchagi- ning bissektrisasini aniqlaydi (*CD* to‘g‘ri chiziq) (1 – rasm).





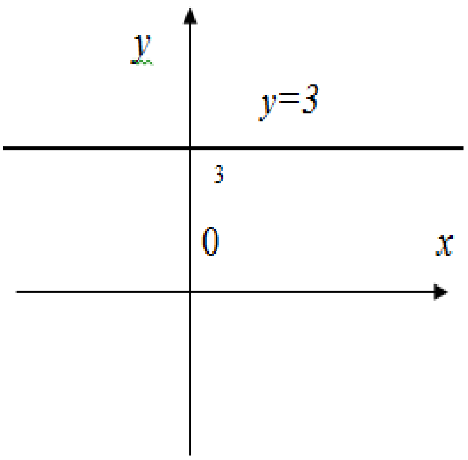
1 – rasm. **2 – rasm.**

Tenglamada o‘zgaruvchilardan faqat bittasi qatnashishi mumkin. Bu holda ham tenglama biror chiziqni bildiradi.

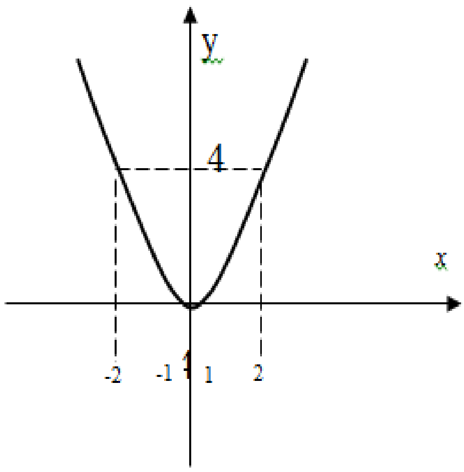
Misol. $x + 2 = 0$ tenglama berilgan bo‘lsin.

Bundan $x = -2$ ni topamiz. Bu tenglama shunday nuqtalarning geo- metrik o‘rnini aniqlaydiki, ularning har birining abssissasi $x = -2$ bo‘lib, ordinatasi ixtiyoriy bo‘ladi, bunday nuqtalar abssissa o‘qidan – 2 ga teng nuqtadan o‘tadi va O*y* o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (2 – rasm).

Shunga o‘xshash, $y - 3 = 0$ tenglama ordinata o‘qidan 3 ga teng kesmani ajratuvchi va 0x o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni bildiradi (3 – rasm).



3 – rasm.



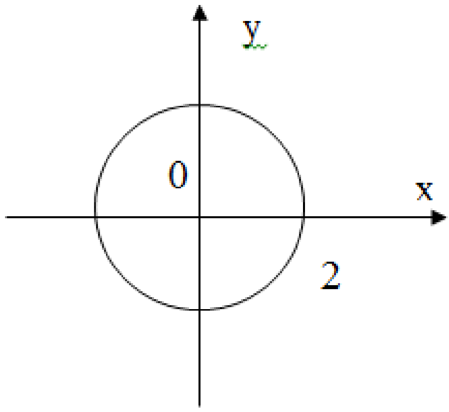
4 – rasm.

Ikkinchi darajali noma’lum qatnashgan tenglamani ko‘rib chiqamiz.

Misol. 1) $x^2 - y = 0$ tenglama uchi koordinatalar boshida va tarmoqlari yuqoriga qaragan parabolani bildiradi (4 – rasm).

2) $x^2 + y^2 = 4$ tenglama markazi koordinatalar boshida, radiusi –

$R = 2$ bo‘lgan aylanani bildiradi (5 – rasm).



5 – rasm.

3) Agar (1) tenglamaning chap tomoni ko‘paytuvchilarga ajralsa, har bir ko‘paytuvchini alohida – alohida nolga tenglashtirib, bir nechta chiziqlarni hosil qilamiz.

Misol. $x^2 - y^2 = 0$ yoki $(x + y)(x - y) = 0$ tenglama $x + y = 0$ va $x - y = 0$ to‘g‘ri chiziqlar juftini aniqlaydi.

Xususiy holda $F(x, y) = 0$ tenglama bitta yoki bir nechta nuqtalardan iborat bo‘lgan to‘plamni aniqlashi mumkin.

Misol. $x^2 + y^2 = 0$ tenglama faqat O(0, 0) nuqtani ifodalaydi

$(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0$ tenglama to‘rtta nuqta $(-2; -1)$, $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $(2; 1)$ ni aniqlaydi.

$F(x, y) = 0$ tenglama birorta ham nuqtani aniqlamasligi mumkin. Misol, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ tenglamani haqiqiy sonlar juftining birontasi ham qanoatlantirmaydi, demak bu tenglamaga hech qanday nuqta mos kelmaydi.

Tenglamalar sistemasining geometrik ma’nosi. Chiziqli $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

Ma’lumki, sistemadagi har bir tenglama to‘g‘ri chiziqni bildiradi. Sistemaning yechimi ikkala to‘g‘ri chiziqqa umumiy bo‘lgan nuqtasining koordinatalaridan iborat bo‘ladi. Bu nuqta to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidir. Isbotsiz quyidagini keltiramiz.

1. Agar $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi (to‘g‘ri chiziqlar kesishadi).

2. Agar $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ bo‘lsa, sistema yechimga ega emas (to‘g‘ri chiziqlar parallel)

3. Agar $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi (to‘g‘ri chiziqlar ustma – ust tushadi).

Misol. 1) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$ sistema yagona yechimga ega, chunki $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3}$.

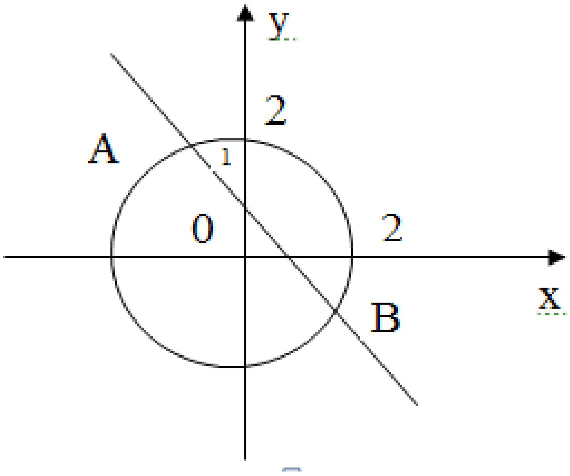
2) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$ sistema yechimga ega emas, chunki $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{-5}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ sistema cheksiz ko‘p yechimga ega, chunki $\frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1}$.

Agar $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$ sistemada tenglamalar har xil darajali bo‘lsa, har bir tenglama biror chiziqni anglatadi. Sistemaning yechimi esa bu chiziqlarning kesishish nuqtalarining koordinatalaridan iborat bo‘ladi.

Misol. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ sistema nechta yechimga ega?

Yechish: $x + y = 1$ to‘g‘ri chiziq va $x^2 + y^2 = 4$ aylanani bitta chizmada tasvirlaymiz. Ularning kesishish nuqtalari A va B ning koordinatalari sistemaning yechimi bo‘ladi. Demak, sistema 2 ta yechimga ega ekan (11 – rasm).



6 – rasm.

Tenglamalar sistemasini yechishning turli usullari. Tenglamalar sistemasini yechishda turli usullar: noma’lumlarni ketma – ket yo‘qotish, o‘rniga qo‘yish, o‘zgaruvchilarni almashtirish va boshqalar qo‘llanilishi mumkin. Bularni misolda ko‘rib chiqamiz.

Misol $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ sistemani o‘zgaruvchini yo‘qotish yo‘li bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib, ikkinchi teng lamani 3 ga ko‘paytiramiz va ularni qo‘shsak, hosil bo‘lgan tenglama faqat x ga nisbatan bo‘ladi, ya’ni:

$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 9x-3y=3 \end{cases}$ bo‘lib, qo‘shib $11x = 11$ va $x = 1$ ni topamiz.

Ikkinchi tenglamada x ning o‘rniga $x = 1$ ni qo‘yib, y ning qiymatini topamiz: $1 - y = 1$; $y = 3 - 1 = 2$.

Yechim: (1; 2).

Misol. $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching.

Yechish: Birinchi tenglamadan $y = 7 - x$ ni topib, ikkinchi tenglama- dagi y ning o‘rniga qo‘yib topamiz:

$x(7 - x) = 12,$

$7x - x^2 - 12 = 0,$

$x^2 - 7x + 12 = 0,$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2},$$

$x_1 = 3, \qquad x_2 = 4.$

$y = 7 - x$ da x ning o‘rniga topilgan qiymatlarni qo‘yib, $y_1 = 4$ va $y_2 = 3$ ni topamiz.

Yechim: (3, 4); (4, 3).

Misol. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$ sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching.

Yechish: Birinchi tenglamadan $x = y + 1$ topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz:

$$(y+1)^3 - y^3 = 7 \Rightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 7 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

$y_1 = 1, \; y_2 = -2.$

$x_1 = 2, \; x_2 = -1.$

Yechim: (2; 1), (– 1; – 2).

Misol. $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases}$ sistemani belgilab yeching.

Yechish: Sistemani $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ xy(x + y) = 30 \end{cases}$ shaklda yozib, $x + y = u$,

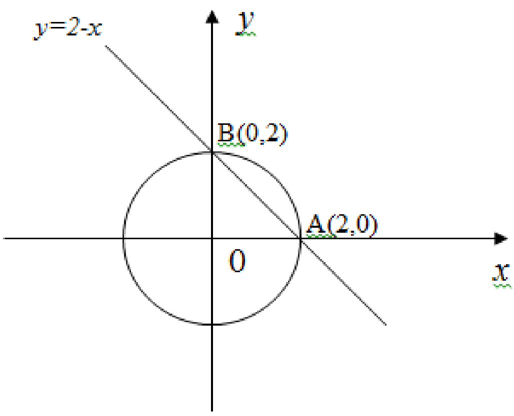
$xy = v$, deb belgilab, $\begin{cases} u+v=11 \\ uv=30 \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz. Viyet teore- masiga ko‘ra u va v lar $z^2 - 11z + 30 = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari bo‘ladi:

$z_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 1}{2}$; $z_1 = 5$, $z_2 = 6$.

Bundan $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ va $u_2 = 6$, $v_2 = 5$ ni topamiz va ikkita sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ va $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$ ni hosil qilamiz. Bularni yechib, sistemaning yechimi (2; 3), (3; 2), (5; 1), (1; 5) ni hosil qilamiz.

Misol. $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ sistemani grafik usulda yeching.

Yechish: $x + y = 2$ to‘g‘ri chiziqni va $x^2 + y^2 = 2^2$ aylanani bitta chizmada chizamiz va ularning kesishish nuqtalari $A(2; 0)$ va $B(0; 2)$ ni topamiz. Sistemaning yechimi (2; 0) va (0; 2) bo‘ladi (12 – rasm).



7 – rasm.

Simmetrik va bir jinsli ko‘phadlar tadbiqlari. ***Bir jinsli ko‘phad*** deb, barcha birhadlari bir xil daraja yig‘indisiga ega bo‘lgan ko‘phadga aytiladi.

Har qanday algebraik shakl bir jinsli polinomdir(ko‘phaddir). Kvadrat shakl ikkinchi darajali bir jinsli ko‘phad bilan, kvadratik forma ikki o‘zgaruvchidagi istalgan darajadagi bir jinsli ko‘phad bilan beriladi.

Masalan, 1) x^2+y^2 2) $x^2+2xy+y^2$ 3) $x^3+xy^2+x^2y$

Ta’rif. Agar x va y bog‘liq ko‘phad x – o‘zgaruvchini y – o‘zgaruv- chiga y ni esa x ga o‘zgartirilganda o‘zgarmasa, bu ko‘phad **simmetrik ko‘phad** deyiladi.

Masalan, $x^2y + xy^2$ ko‘phad – simmetrik, $x^3 - 3y^3$ ko‘phad esa – simmetrik emas, chunki o‘zgaruvchilarni almashtirilganda $y^3 - 3x^3$ olinadi. $x + y$ va xy lar ham simmetrik ko‘phadlar hisoblanadi va ular uchun maxsus belgilash kiritib olamiz.

$$\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$$

Ulardan tashqari darajali yigindilar deb ataluvchi simmetrik ko‘phadlar – $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, ..., $x^n + y^n$.... uchraydi va ularni ham maxsus shaklada belgilab olamiz:

$S_1 = x + y$, $S_2 = x^2 + y^2$, $S_3 = x^3 + y^3$, $S_4 = x^4 + y^4$, ... $S_n = x^n + y^n$,....

Agar σ_1 va σ_2 larning istalgan ko‘phadni olib, undagi σ_1 va σ_2 larning o‘rniga $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ ifodalarini qo‘ysak, x va y larning simmetrik ko‘phadiga erishamiz.

Ikki o‘zgaruvchili darajali ko‘phadlar σ_1 и σ_2 lar orqali qiyinchiliksiz ifodalanadi:

$S_1 = x + y = \sigma_1$;

$S_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$;

$S_3 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)$;

$S_4 = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2$;

$S_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$;

$S_6 = x^6 + y^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^2\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$;

$S_7 = x^7 + y^7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$;

$S_8 = x^8 + y^8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$;

$S_9 = x^9 + y^9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$;

$S_{10} = x^{10} + y^{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$.

Tenglamalar sistemasini yechishda **simmetrik ko‘phadlar** tatbiqini ko‘rib o‘taylik.

Misol. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} y+z=5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$$

$\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz. Endi quyidagi tengla- malar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1 - 4\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_2^2 = 97 \end{cases}$$

Bundan σ_2 uchun kvadrat tenglamani olamiz:

$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0$.

Uni yechamiz. $\sigma_2 = t$ bo‘lsin**,**

$t_2 - 50t + 264 = 0$.

Viyet teoremasiga ko‘ra $\begin{cases} t_1 + t_2 = 50 \\ t_1 t_2 = 264 \end{cases}$, $\begin{cases} t_1 = 6 \\ t_2 = 44 \end{cases}$.

Shunday qilib, $\sigma_2 = 6$ *va* $\sigma_2 = 44$ bo‘ladi**.** Biz ikkita tenglamalar siste- masini oldik: $\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 44 \end{cases}$.

yoki: $\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 44 \end{cases}$.

Birinchi sistema ikkita yechimga ega: $\begin{cases} y_1 = 2 \\ z_1 = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} y_2 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases}$.

Ikkinchi sistema y va z uchun kompleks bo‘lsada, yana ikkita yechimni beradi va ratsional tenglamalar uchun bu holda, faqat haqiqiy qiymatlarni olamiz.

Birjisli ko‘phadlar tatbiqlari.

Misol. Tenlamalar sistemasini yeching. $\begin{cases} 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 3 \\ x^2 + 5xy + y^2 = 7 \end{cases}$

Yechish: Ko‘rinib turibdiki, tenglamalar sistemasining ikkala tenglamasi ham bir jinsli ko‘phaddan iborat. Shuning uchun birinchi sistemani ikkinchisiga bo‘lib yuboramiz va $\dfrac{4x^2 - 5xy + 4y^2}{x^2 + 5xy + y^2} = \dfrac{3}{7}$ bir jinsli tenglamani olamiz. Uning surat va mahrajini y^2 ga bo‘lib yuborib, $\dfrac{4\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 5\dfrac{x}{y} + 4}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 5\dfrac{x}{y} + 1} = \dfrac{3}{7}$ tenglamani olamiz. Undagi $\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ni t bilan belgilab, $\dfrac{4t^2 - 5t + 4}{t^2 + 5t + 1} = \dfrac{3}{7}$ tenglamani olamiz va uni soddalashtirib $25t^2 - 50t + 25 = 0$ tenglamani olamiz va uni ikkala tomonini 25 ga bo‘lib yuborib, $t^2 - 2t + 1 = 0$ yoki $(t-1)^2 = 0$ olamiz undan esa, $t = 1$ kelib chiqadi.

Demak, $\dfrac{x}{y} = 1$ va $x = y$ ekanligi ma’lum bo‘ladi. y ning o‘rniga x ni qo‘yib, masalan, ikkinchi tenglamada quyidagini olamiz:

$x^2 + 5x^2 + x^2 = 7$ va undan esa, $7x^2 = 7$ va nihoyat, $x^2 = 1$ kvadrat tenglama hosil bo‘ladi undan esa, $x_{1,2} = \pm 1$ yechim hosil bo‘ladi va shuningdek, $y_{1,2} = \pm 1$ ham hosil bo‘di.

MASHQLAR:

1. Quyidagi tenglamalarga mos keluvchi chiziqlarni yasang.

1) $y + 3x - 6 = 0$; 2) $2y - x + 4 = 0$;

3) $x - 3 = 0$; 4) $y + 2 = 0$;

5) $x = 0$; 6) $y = 0$;

7) $y^2 - x = 0$; 8) $y + 2x^2 = 0$;

9) $y + x^2 - 3 = 0$; 10) $y - 2x^2 + 4 = 0$;

11) $x^2 + y^2 - 2x = 0$; 12) $x^2 + y^2 + 2x = 0$;

13) $2x^2 + 4y^2 = 0$; 14) $2x^2 + 3y^2 = 0$;

15) $(x^2 - 9)^2 + y^2 = 0$; 16) $x^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$;

17) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$;

18) $x^2 + y^2 - 6y - 4x - 3 = 0$.

2. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 6x - 5y = 3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = 4 \\ 2x + \dfrac{y}{5} = 3 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} y - 5x = 6 \\ -2y + 10x = 9 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 2{,}2x - 5y = -6 \\ -x + 3{,}5y = -4 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x - 7y = 8 \\ -x + 2{,}5y = 4 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2x + 2y = -6 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

3. Quyidagi sistemalar nechtadan yechimga ega.

1) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y + x^2 = 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$.

4. Quyidagi sistemalarni qulay usul bilan yeching.

1) $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} + 1 = 0 \\ \dfrac{x}{4} + y - \dfrac{13}{2} = 0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2} - \dfrac{y}{5} - 2 = 0 \\ 2x - \dfrac{y}{3} - \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} -x + y = 6 \\ x^2 - 4y = -3 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y^2 + x = 32 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y^2 = 4 \end{cases}$;

12) $\begin{cases} y - 3x = 7 \\ x^2 + xy = 2 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ x^2 - 2y = 3 \end{cases}$;

14) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$;

15) $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$;

16) $\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$;

17) $\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{4}xy \\ x^2+y^2=\dfrac{5}{4}xy \end{cases}$; 18) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$;

19) $\begin{cases} (x^2-y^2)xy=180 \\ x^2-xy-y^2=-11 \end{cases}$; 20) $\begin{cases} 3x^2-2xy+5y^2=35 \\ 5x^2-10y^2=5 \end{cases}$;

21) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ xyz=0 \end{cases}$; 22) $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$;

23) $\begin{cases} 3x^2-2xy+3y^2=4 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$; 24) $\begin{cases} 2x^2+7xy+2y^2=24 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$.

5. Tenglamalar sitemasini yeching.

1) $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} (x+y)xy=2{,}5 \\ x^3+y^3=7(x+y) \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x^2+2xy+3y^2=25 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x^2-xy+2y^2=8 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 2x^2-xy+2y^2=8 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$.

6. Tenglamalar sitemasini yeching.

1) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x-y=3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} (x+y)^2=25 \\ x^3+y^3=25(x+y) \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5(1+x^2) \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2(x+y)=5xy \\ 8(x^3+y^3)=65 \end{cases}$.

8 - § Determinant haqida tushuncha. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss va Kramer usullarida yechish.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

Ta’rif. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ son **ikkinchi tartibli determinant** deyiladi. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$ son uchinchi tartibli determinant deyiladi (hisoblash qoidasi o‘ng tomonida tuzilgan hadlar tuzilishi qoidasidan iborat).

Misol. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 1 = 15 + 2 = 17$.

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-3) + 3\cdot 6\cdot 4 + 0\cdot 0\cdot(-2) - (-2)\cdot 5\cdot 4 - 3\cdot 0\cdot(3) - 6\cdot 0\cdot 1 =$$

$$= -15 + 72 + 40 = 97 .$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish.

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ sistema berilgan bo‘lsa, uning yechimi $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ bo‘ladi, bu yerda $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Misol. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ sistemani yeching.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -7;\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4;$$

$$x=\frac{-27}{-7}=3\frac{6}{7};\;\; y=-\frac{4}{7}.$$

Javob. $\left(3\frac{6}{7};\; -\frac{4}{7}\right)$.

$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ sistemaning yechimi $x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\; y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\; z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$

bo‘lib,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\; \Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\; \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\; \Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Keltirilgan usul chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish deyiladi.

Misol. $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-3y+5z=11 \\ 2x+4y-2z=4 \end{cases}$

Yechish: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=6+24+20+18+8-20=56$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 11 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}=84+132+40+36+44-280=56$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-22+24+140-66-20+56=112$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & -3 & 11 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-12+44+112+84-16-44=168$$

$$x=\frac{56}{56}=1,\ y=\frac{112}{56}=2,\ \ z=\frac{168}{56}=3.$$

Javob: (1; 2; 3).

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli. Bizga n ta no‘ malumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4)$$

Bu yerda $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ - noma’lumlar, $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$ - koeffitsientlar, $b_1, b_2, ..., b_n$ - ozod sonlar. Bunday tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar yordamida, uchburchak yoki trapetsiya shakliga keltirish mumkin. Faraz qilaylik, $a_{11}\neq 0$ bo‘lsin(aks holda tenglamalar o‘rnini almashtirish mumkin). Birinchi tenglamani $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ga ko‘paytirib 2-tenglamaga, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ga ko‘paytirib 3-tenglamaga va hakozo $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ ga ko‘paytirib *m*-tenglamaga qo‘shamiz va quyidagi ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ...+ a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ .... \\ \qquad\qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + ...+ a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases} \qquad (5)$$

Bunda $a_{22}^{(1)}\neq 0$ deb faraz qilib, 2-tenglamani $-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ ga ko‘paytirib *i*-tenglamaga qo‘shamiz va 3-dan boshlab barcha tanglamalardan x_2

noma’lum yo‘qoladi. Bu usulni $m-1$ marta qo‘llab, quyidagi ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ....+ a_{1k}x_k + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ...+ a_{2k}^{(1)}x_k + ...+ a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ .... \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + ...+ a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{k+1}^{(k-1)} \\ \qquad\qquad\qquad .... \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(k-1)} \end{cases} \qquad (6)$$

Agar bu matritsada $b_{k+1}^{(k)}, b_{k+2}^{(k+1)}, ..., b_m^{(m-1)}$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, (4) sistema yechimga ega bo‘lmaydi. Agar $b_{k+1}^{(k)}, b_{k+2}^{(k+1)}, ..., b_m^{(m-1)}$ larning barchasi nolga teng bo‘lsa, berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘ladi va bunda ikki hol bo‘lishi mumkin. Birinchi holda, (6) sistema uchburchak shaklga keladi, ya’ni $k = n$ va sistema yagona yechimga ega. Yechimlarni aniqlashda oxirgi tenglamadan oxirgi noma’lumni topishdan boshlanadi, topilganlarni bitta oldinga tenglamaga qo‘yib bitta oldingi noma’lum topiladi va bu jarayon birinchi noma’lum topilguncha davom ettiriladi. Ikkinchi holda, (6) sistema trapetsiya shaklga keladi va sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Oxirgi tenglamadagi birinchi noma’lumdan boshqa barcha noma’lumlarni erkli son deb, barcha tenglamalarda tenglikning o‘ng tomoniga o‘tkaziladi va qolgan noma’lumlar uchbuchak shakldagi kabi aniqlanadi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechishda uning matritsaviy yozuvidan foydalanish qulay.

Misol. Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+2y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$$

Berilgan tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasini – 2 va – 3 ga ko‘paytirib, mos ravishda 2- va 3-tenglamalarga qo‘shamiz.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \qquad -5z=-15 \\ -4y-z=-5 \end{cases}$$

Bu holda, 2- va 3-tenglamalar o‘rinlarini almashtiramiz, chunki $a_{22}^{(1)}=0$.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -4y-z=-5 \\ \qquad -5z=-15 \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan oxirgi noma’lumni topamiz.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4y+z=11 \\ z=3 \end{cases}$$

So‘ngra, $z=3$ ni ikkinchi tenglamaga qo‘yib, y ni topamiz:

$$4y+3=11,\ y=2.$$

Endi $y=2$ va $z=3$ ni 1- tenglamaga qo‘yib, x ni topamiz:

$$x+2+3=6,\ x=1.$$

Demak, $x=1, y=2,\ z=3$.

MASHQLAR:

1. Determinantlarni hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$;   4) $\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}$;   6) $\begin{vmatrix} 14 & 28 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Quyidagi sistemalarni Kramer va Gauss usullarida yeching.

1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x-y=7 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} 3x-5y=2 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 4x+5y=18 \\ x-2y=-2 \end{cases}$;   4) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-4y=7 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x+5y=0 \\ 3x-y=2 \end{cases}$;   6) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 5x-y=6 \end{cases}$.

3. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 3x-y+2z=4 \\ 2x+5y+z=8 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} 2x-y+z=6 \\ 5x+3y=-1 \\ x+4z=9 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+2y-3z=11 \\ -2x+3y+4z=1 \end{cases}$;   4) $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 3x-y+2z=2 \\ 2y+3z=1 \end{cases}$.

4. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+5y+z=3 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 5x+3y=3 \\ x+y+4z=5 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 7x-y+2z=13 \\ x+2y-3z=4 \\ -2x+3y+4z=2 \end{cases}$;   4) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x-y+2z=-2 \\ 2y+3z=1 \end{cases}$.

5. Determinantlarni hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -15 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -12 & 3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a^2+b^2 & 2 \\ ab & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 21 & 2 & 783 \\ 0 & -42 & 155 \\ 0 & 0 & -84 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 11 & 2565 & 1243 \\ 0 & -8 & 5875 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 7 & 3{,}5 & 5 \\ 3 & 1{,}5 & -2 \end{vmatrix}$

6. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x+5y-z=7 \\ x-y+2z=-2 \\ x+3y-z=4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 5x+3y=11 \\ x+y+4z=3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 7x-y+2z=50 \\ x+2y-3z=6 \\ -2x+3y+4z=-7 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x-y+z=-1 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$.

7. Tenglamalarni yeching.

1) $\begin{cases} 7x_1-3x_2+5x_3=32 \\ 5x_1+2x_2+x_3=11 \\ 2x_1-x_2+3x_3=14 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$.

9-§ Tenglamalar sistemalarini yechishning maxsus usullari. Yuqori darajali tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari.

Umumiy holatda bir nechta noma’lumli yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechish masalasi juda qiyin, ko’pincha elementar algebra yordamida hal qilishga imkon bermaydi. Biroq, ko‘p hollarda tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechishning ma’lum usullarini– qo’shish va ayirish, noma’lumni almashtirish orqali yo‘q qilish, yangi noma'lumni kiritish usullarini birlashtirib, sistemani yechish yo'lini topish mumkin. Ammo har bir alohida muammoda muvaffaqiyatli hal qilish usulini topish uchun uning o'ziga xos xususiyatlaridan foydalanish kerak. Keling, bir nechta misollarni ko'rib chiqaylik.

Masala. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 18 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Yechish. 1-usulda avvalgidek oddiy tarzda ikkinchi tenglamadan $y = 3 - x$ ni topib, sistemaning birinchisiga qo'ysak, $x^3 + (3-x)^3 = 18$ ni hosil qilamiz va uni yechib, dastlab, x ni topamiz va uni $y = 3 - x$ ga qo'yib umumiy yechimlarni avvalgidek topib olish mumkin.

2-usul. $x^3 + y^3 = 18$ ni quyidagicha yozib olaylik, ya'ni

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y) = 18$$

Sistema ikkinchi tenglamasiga e'tibor qaratib, $27 - 9xy = 18$ ni olamiz va uni soddalashtirib, $xy = 1$ ni hosil qilamiz.

Yuqoridagilardan kelib chiqib

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini tuzamiz. Uni avvalgi usullarda yechib,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

yechimlarni olamiz.

Masala. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases}(x+1)^2(y+1)^2=27xy\\(x^2+1)(y^2+1)=10xy\end{cases}$$

Yechish. Birinchi va ikkinchi tenglamalarda har bir qavsni ochib chiqamiz. Keyin har birining ikkala tomonini xy ga bo‘lib yuborib,

$$\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}+2\right)\left(y+\dfrac{1}{y}+2\right)=27\\\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=10\end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Ular uchun $x+\dfrac{1}{x}=z$ va $y+\dfrac{1}{y}=t$ yangi belgilashlarni kiritamiz. Yangi o‘zgaruvchilarga almashtirilgan tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{cases}(z+2)(t+2)=27\\zt=10\end{cases}$$

Bu sistemani yechib,

$$z_1=\frac{5}{2},\ t_1=4\ ,\ z_2=4,\ t_2=\frac{5}{2}$$

yechimlarni olamiz.

$x+\dfrac{1}{x}=z$ va $y+\dfrac{1}{y}=t$ tenglamalarga z va t ning qiymatlarini ketma–ket qo‘yib ushbu yechimlar juftlarini olamiz:

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=2+\sqrt{3}\end{cases},\ \begin{cases}x_2=2\\y_2=2-\sqrt{3}\end{cases},\ \begin{cases}x_3=\dfrac{1}{2}\\y_3=2+\sqrt{3}\end{cases},\ \begin{cases}x_4=\dfrac{1}{2}\\y_4=2-\sqrt{3}\end{cases},\ \begin{cases}x_5=2+\sqrt{3}\\y_5=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_6=2-\sqrt{3}\\y_6=2\end{cases},\ \begin{cases}x_7=2+\sqrt{3}\\y_7=\dfrac{1}{2}\end{cases},\ \begin{cases}x_8=2-\sqrt{3}\\y_8=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Masala. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a-yz \\ y(x+y+z)=b-xz \\ z(x+y+z)=c-xy \end{cases}$$

Yechish: Yuqoridagi sistemani quyidagicha ham yozib olish mumkin:

$$\begin{cases} (x+z)(x+y)=a \\ (y+z)(y+x)=b \\ (z+x)(z+y)=c \end{cases}$$

Sistemaning uchchala tenglamasini o‘zaro ko‘paytirib, va natijaning ikkala tomonidan kvadrat ildiz chiqarib, quyidagini olamiz:

$$(x+z)(x+y)(y+z)=\pm\sqrt{abc}\,.$$

Bundan esa,

$$(y+z)=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a};\ (x+z)=\pm\frac{\sqrt{abc}}{b};(x+y)=\pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$$

larni hosil qilamiz. Ularni hadma had qo‘shib yuborib,

$$x+y+z=\pm\sqrt{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

ni hosil qilamiz. Lekin,

$$y+z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a}$$

bo‘lgani uchun, x ning qiymati hosil bo‘ladi:

$$x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right).$$

Huddi shu tarzda keyingi ildizlarni topamiz:

$$y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right);\ z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right).$$

Yuqoridagi yechimlar uchligida bir vaqtda “+” yoki bir vaqtda “–” ishorani olish lozim.

MASHQLAR:

1. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+v=b \\ x+z+v=c \\ y+z+v=d \end{cases}$;

2) $\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=c \\ \dfrac{xz}{az+cx}=b \\ \dfrac{yz}{bz+cy}=a \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x(x+y+z)=a^2 \\ y(x+y+z)=b^2 \\ z(x+y+z)=c^2 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y+2x+z=a(y+x)(z+x) \\ x+y+z=b(y+z)(y+x) \\ x+y+z=c(y+z)(z+x) \end{cases}$;

5) $\begin{cases} y+z+yz=a \\ x+z+xz=b \\ x+y+xy=c \end{cases}$;

6) $\begin{cases} yz=ax \\ xz=by \\ xy=cz \end{cases}$ $\quad (a>0, b>0, c>0)$;

7) $\begin{cases} x(y+z)=a^2 \\ y(x+z)=b^2 \\ z(x+y)=c^2 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} x^3=ax+by \\ y^3=bx+ay \end{cases}$;

2. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x^2+y^2=cxyz \\ x^2+z^2=bxyz; \\ y^2+z^2=cxyz \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=c^2 \\ z^2+x^2+xz=b^2 \\ y^2+z^2+yz=a^2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=a^3 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=a \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x^4+y^4+z^4+v^4=a^4 \\ x^3+y^3+z^3+v^3=a^3 \\ x^2+y^2+z^2+v^2=a^2 \\ x+y+z+v=a \end{cases}$.

10 - § Tenglamalarga olib kelinadigan matnli masalalar. Harakatga oid masalalar. Ishga doir masalalar. Foizga, aralashmalarga oid masalalar. Boshqa turdagi matnli masalalar.

Tenglamalarga olib kelinadigan matnli masalalar. Harakatga oid masalalar. Matematika kursida matnli masalalar juda ko‘p uchraydi.Ularni yechsh ba’zida o‘quvchilarda qiyinchilik tug‘diradi. Agar matnli masalaga oid aniq tenglama tuzilmasa uni yechimi hato bo‘ladi.

Maktab matematika kursida matnli masalalar odatda quyidagi usullar yordamida yechiladi:

1. Kesimlar usuli
2. Arifmetik usul
3. Tenglamar yoki tenglamalar sistemasi

Biz masalalarni asosan, 3-usul tenglamalar yoki tenglamalar sistemasiga keltirish orqali yechish usulini bu mavzuda ko‘rib chiqamiz.

Harakatga oid masalalar.

Bunda biz 3 xil tipdagi harakatga oid masalalarni qaraymiz:

I. Quruqlikda harakatlanuvchi vositalar: Poyezd, avtomobil, velosiped, ….

II. Suvda harakatlanuvchi vositalar: paroxod, kater, sol, ….

III. Quruqlikda harakatlanuvchi jonli vositalar:odam,turli hayvonlar, ….

Bu mavzudagi masalalarni yechish uchun quyidagilarni bilish muhim:

1) agar yo‘l – *S*, vaqt – *t*, tezlik – *v* deb belgilansa $v=\frac{S}{t}$, $S=vt$ $t=\frac{S}{v}$ bo‘ladi.

Matematik masalalar yechishda biz *S*, *v*, *t* ko‘rinishdagi belgilash-lardan foydalanishimiz shart emas. Masala berilganda iloji boricha topish kerak bo‘lgan kattalikni *x* deb belgilab,boshqa kattaliklarni ham shu *x* ga bog‘lab olib,tenglama tuzishga to‘g‘ri keladi.

Ayrim masalalarda vaqtlarni tenglashda ayrimlarida vaqtlar ayirmasini yoki yig‘indisini qarashga to‘g‘ri keladi.Ayrim masalalarda bosib o‘tilgan yo‘llarni tenglash yoki yo‘llar yig‘indisi, ayirmasini qarashga to‘g‘ri keladi.Xuddi shuningdek tezliklarni tenglash,yoki tezliklar yig‘indisi, ayirmasini qarash kerak bo‘ladi.

2) A va B shaharlardan 2 ta avtomobil tezliklar bilan bir biriga qarab harakatlansa va shaharlar orasidagi masofa s bo‘lsa avtomobillar t soatda uchrashsa quyidagi tenglama tuzish mumkin $S = v_1 t + v_2 t$.

3) Oralaridagi masofa S bo‘lgan A va B shaharlardan bir tomonga qarab tezliklar bilan harakatlanayotgan vositalar t soatda uchrashsa ushbu tenglik o‘rinli $S = v_1 t - v_2 t \quad v_2 > v_1$.

4) bir – biriga qarab v_1 va v_2 tezliklar bilan harakatlanayotgan avtomobillarning yaqinlashish tezligi $v_1 + v_2 = v$.

(uzoqlashish tezligi ham $v_1 + v_2 = v$ bo‘ladi) agar masofa S bo‘lsa ular $t = \dfrac{S}{v_1 + v_2}$.

5) Teploxodning xususiy tezligi deb – uning ko‘ldagi, yani sokin suvdagi tezligiga aytiladi. Faraz qilaylik teploxodning xususiy tezligi x bo‘lsin. Daryo oqimining tezligi a bo‘lsin.Teploxodning oqim bo‘yicha tezligi $v = x + a$, teploxodning oqimga qarshi tezligi $v = x - a$.

6) Sol ko‘lda va daryoda oqimga qarshi suza olmaydi. Sol faqat oqim bo‘yicha harakatlanishi mumkin va solning tezligi oqim tezligiga teng bo‘ladi.

7) Tenglama tuzayotganda, uning chap va o‘ng qismlaridagi kattaliklar bir xil o‘lchovda bo‘lishi kerak.

8) 1 min – 1km/60 soat

k min – km/60 soat

Masala. Poyezd yo‘lda 30 minut to‘xtab qoldi. Poyezd jadval bo‘yicha yetib kelishi uchun mashinist qolgan masofada tezligini 8 $\frac{km}{soat}$ ga oshirdi. Poyezd jadval bo‘yicha qanday tezlik bilan yurishi kerak edi?

Yechish: Poyezd jadval bo‘yicha tezligi x $\frac{km}{soat}$ bo‘lsin, harakat vaqti $\frac{80}{x}$ soat bo‘ladi.Keyingi tezligi (x + 8) $\frac{km}{soat}$ bo‘ladi va harakat vaqti $\frac{80}{x+8}$ soatga bosib o‘tadi. 30 minut $=\frac{30}{60}$ soat $=\frac{1}{2}$ soat .

$$\frac{80}{x}-\frac{80}{x+8}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{80(x+8-x)}{x(x+8)}=\frac{1}{2}, \qquad 1280=x^2+8x, \qquad x^2+8x-1280=0,$$

$x_1=-40$ chet ildiz, $x_2=32$, $J:32$.

Masala. Teploxod oqim bo‘yicha *A* pristandan *B* (ga) pristanga bordi.Teploxod yarim soat to‘xtagandan keyin orqaga qaytdi va *A* dan chiqqanidan 8 soat o‘tgandan so‘ng shu pristanga qaytib keldi. Agar *A* va *B* pristanlar orasidagi masofa 36 km, daryo oqimining tezligi 2$\frac{km}{soat}$ gat eng bo‘lsa, teploxodning turg‘un suvdagi tezligini toping.

Yechish: teploxodning turg‘un suvdagi tezligi x $\frac{km}{soat}$ bo‘lsin, Teplo- xodning oqim bo‘yicha tezligi (x + 2) $\frac{km}{soat}$ bo‘ladi. Teploxodning oqimga qarshi tezligi (x – 2) $\frac{km}{soat}$ bo‘ladi.

30 minut = $\frac{1}{2}$ soat

Mos tenglamani tuzamiz:

$\frac{36}{x+2}+\frac{1}{2}+\frac{36}{x-2}=8$ va udan $\frac{36}{x+2}+\frac{36}{x-2}=\frac{15}{2}$ ni hosil qilamiz, keyin uni soddalashtirib, $72(x-2)+72(x+2)=15(x^2-4)$ ni olamiz va uni soddalashtirib, $15x^2-144x-60=0$ ga kelamiz. Unig ikkala tomonini 3 ga bo‘lib, $5x^2-48x-20=0$ ni olamiz va uni yechib (manfiy ildizni tashlab yuborib) $x=\frac{48+52}{10}=10$ ni olamiz. *J:* $x=10\ \frac{km}{soat}$.

1 – eslatma: Ayrim masalalarni yechishda tenglama tuzmasdan sodda mulohaza yuritib sonli ifodalar yordamida javobni topish mumkin.

Masala. Kema oqim bo‘ylab *A* portdan *B* portgacha 2 sutka, *B* dan *A* gacha 3 sutkada yetadi. Sol *A* dan *B* gacha necha sutkada yetadi?

Yechish: *A* dan *B* gacha masofa *a* ga teng bo‘lsin. Bu masofani sol *x* sutkada bosib o‘tsin, demak uning tezligi $\frac{a}{x}$ km/sutka bo‘ladi. Shartga ko‘ra, oqim bo‘ylab harakat qilayotgan kemaning tezligi $\frac{a}{2}$ km/sutka, turg‘un suvdagi tezligi esa $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{x}\right)$ km/sutka bo‘ladi. Shunga o‘xshash, oqimga qarshi harakatdagi kemaning tezligi $\frac{a}{3}$ km/sutka bo‘lib, turg‘un suvdagi tezligi $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{x}\right)$ km/sutka bo‘ladi. Bularni tenglashtirib $\frac{a}{2}-\frac{a}{x}=\frac{a}{3}+\frac{a}{x}$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib $x=12$ ni topamiz.

Javob: 12 sutka.

Ishga doir masalalar. Foizga, aralashmalarga oid masalalar. Agar ishga oid masalalarda ish hajmi berilmasa ish hajmini 1 ga teng deb olish kerak.

Masala: Biror ishni Ali a kunda bajarsa,bir kunda shu ishning $\frac{1}{a}$ qismini bajaradi. Shu ishni Vali b kunda bajarsa, bir kunda $\frac{1}{b}$ qismini bajaradi. Shu ishni ikkalasi birgalikda c kunda bajarsa, bir kunda shu ishning $\frac{1}{c}$ qismini bajaradi.

Quyidagi jadvalni tuzish mumkin.

	Jami	1kunda
Ali	a	$1/a$
Vali	b	$1/b$
Birgalikda	c	$1/c$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Bu jadvalda shu mavzudagi deyarli barcha masalalarni avvalgi mavzudagi eskalatorga bog‘liq masalalar bajariladi.

Masala: Birinch va ikkinchi birgalikda quvur hovuzni 12 soatda to‘ldiradi. Birinch va uchinchi birgalikda quvur hovuzni 15 soatda to‘ldiradi. Ikkinchi va uchinchi quvur hovuzni birgalikda 20 soatda to‘ldiradi.Agar uchalasi burdaniga ishlasa hovuzni necha soatda to‘ldiradi.

Yechish:

1- quvur hovuzni x soatda to‘ldirsa: 1soatda hovuzning $\frac{1}{x}$ qismini

2- quvur y soatda to‘ldirsa: 1soatda hovuzning $\frac{1}{y}$ qismini

3- quvur z soatda to‘ldirsa: 1soatda hovuzning $\frac{1}{z}$ qismini to‘ldiradi

$$+\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$$

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$$

$J:10\ \text{kunda}$.

Prosentga oid masalalar. Prosent so‘zi lotincha “prosentum” so‘zidan kelib chiqqan bo‘lib, “yuzdan bir” degan ma’noni bildiradi.

Ta’rif. Sonning 1 prosenti deb – uning 100 dan bir qismiga aytiladi. Prosent so‘zi o‘rniga qisqacha % belgisi yoziladi.

Demak: 100% – 1 soni deganidir.

Masala: a)800% ning 1%i $\frac{800}{100}=8$ ga teng b)324 ning 1%i $\frac{324}{100}=3{,}24$ ga teng.

Prosentga oid quyidagicha masalalar yechiladi.

Berilgan a sonining *k%* ini topish masalasi

Bu masala 2 xil usulda: sonli ifoda tuzib yoki proporsiya shaklidagi soda tenglama tuzib yechiladi.

Masala:740 ning 15%ni toping.

I – usul: $(740:100)\cdot 15=17{,}4\cdot 15=111$

II – usul:

$740 - 100\%$

$x - 5\%$ $\qquad \dfrac{740}{x} = \dfrac{100}{15}, \quad x \cdot 100 = 740 \cdot 15, \quad x = 111.$

***k%* i *a* ga teng bo‘lgan sonning o‘zini topish.**

Masala: 13%i 78 ga teng bo‘lgan sonni toping.

I – usul: $(78:13) \cdot 100\% = 6 \cdot 100 = 600$

II – usul:

$78 - 13\%$

$x - 100\%$ $\qquad \dfrac{78}{x} = \dfrac{13}{100}, \quad x \cdot 13 = 78 \cdot 100, \quad x = 600.$

Biror *a* sonini *k%* ga orttirish.

Biror a sonini k % ga orttirish uchun a ni $1 + \dfrac{k}{100}$ ga ko‘paytirish kerak.

Masalan: berilgan sonni 1%, 40%, 72%, 187% ga orttirish uchun o‘sha sonni mos ravishda 1,01 ga, 1,4 ga, 1,72 ga, 1,87 ga ko‘paytirihs kerak.

Masala: 742 ni 18% ga orttiring.

Yechish: $742 \cdot 1{,}18 = 875{,}56$.

Masala. Berilgan asonni avval 20% ga so‘ngra 30% ga ortiriladi. Berilgan son jami necha foizga ortgan?

Yechish: $1{,}3 \cdot (1{,}2a) = 1{,}56a$ demak, 56% ga ortgan.

Berilgan *a* sonni *k%* ga kamaytirish.

Berilgan a sonni k % ga kamaytirish uchun a ni $1 - \dfrac{k}{100}$ ga ko‘pay- tirish kerak.

Masalan: Berilgan sonni 1%, 10%, 32%, 57%, 85% ga ko‘paytirish uchun shu sonni mos ravishda 0,99 ga, 0,9 ga, 0,68 ga, 0,43 ga, 0,15 ga ko‘paytirish kerak.

Masala: 730 ni 25% ga kamaytiring.

Yechish: $0{,}75 \cdot 730 = 547{,}5$.

Masala. Berilgan a soni avval 20% ga orttirib, so‘ngra 20% ga kamaytirildi.berilgan son qanday o‘zgargan?

Yechish: $0{,}8(1{,}2a) = 0{,}96a\ \ 4\%$ ga kamaygan.

***a* sonining *b* songa % nisbati.**

a sonining *b* songa % nisbati deb $-\ \frac{a}{b}$ ga aytiladi.

2 – eslatma: prosentga oid masalalarning hammasi ham proporsiya tuzib yechilmaydi. Ayrimlarida chiziqli tenglama tuziladi.

Masala. Korxonadagi ayollar hamma ishchilarning 35%ini tashkil qiladi. Agar korxonada erkaklar ayollardan 252 kishiga ortiq bo‘lsa, korxonada ayollar soni nechta?

Yechish: Korxonada erkaklar umumiy ishchilarning 100 – 35 = 65% ni tashkil etadi. Erkaklar ayollardan 65 – 35 = 30% ga ortiq. 30% ishchilar 252 tani tashkil etsa, 35% i nechta bo‘ladi?

$$\frac{35 \cdot 252}{30} = 294$$

Javob: Korxonada ayollar soni 294 ta ekan.

Aralashmaga oid masalalar.

Ikkita turli moddalar aralashmasidan iborat modda qaralayotgan bo‘lsin. Bu aralashma eritma yoki qotishma shaklida bo‘lishi mumkin. Faraz qilaylik, qandaydir eritma tarkibida *A* modda 13 litr, *B* modda 20 litr ekan, har bir moddaning shu eritmadagi present miqdorini aniqlaymiz.

$20\ l\ -\ 100\%$

$13\ l\ -\ x\ \%$

$x = \dfrac{13 \cdot 100}{20} = 65\%$, $100\% - 65\% = 35\%$

Demak, eritma tarkibida A moddaning protsent miqdori (konsentrasiyasi) 65% ekan, B moddaning konsentrasiyasi 35% ekan.

3 – eslatma: Agar massasi *m*, konsentrasiyasi *x* % bo‘lgan eritmaga massasi *n*, konsentrasiyasi *y* % bo‘lgan eritma qo‘shilsa massasi m + n, konsentrasiyasi: $z = \dfrac{mx + ny}{m + n}\%$

Masala: Mis va qo‘rg‘oshindan iborat aralashmaning 60%i mis va u aralashma tarkibida qo‘rg‘oshindan 2 kg ko‘p.Aralashma tarkibida qancha mis bor.

Yechish:

mis 60% – x

qo‘rg‘oshin – $x - 2$

$\dfrac{60}{40} = \dfrac{x}{x-2} \Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{x}{x-2}$ $x = 6$ kg.

Boshqa turdagi matnli masalalar.

Masala. Ikki sonning yig‘indisi 90 ga, nisbati esa 8 ga teng bo‘lsa, bu sonlarni toping.

Yechish: Masala shartiga ko‘ra $\begin{cases} x + y = 90 \\ \dfrac{x}{y} = 8 \end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistemani yechib $x = 80$, $y = 10$ ni hosil qilamiz.

Javob: 80 va 10.

Masala. Shaxsiy korxona chiqargan mahsulotni 3348 so‘mga sotib 4% zarar ko‘rdi. Bu mahsulotning tannarxi qancha bo‘lgan?

Yechish: Mahsulotning tannarxi 100% deb qabul qilinadi, u holda ko‘rilgan zarar tannarxiga nisbatan hisoblanadi. Demak, 3348 so‘m tannarxining 100 – 4 = 96% ini tashkil qiladi. Tannarxni x bilan belgilasak, uni topish uchun 3348:96 = x:100 proporsiyaga ega bo‘lamiz, buni yechib $x = \frac{3348 \cdot 100}{96} = 3487,5$ so‘mni topamiz.

Javob: 3487 so‘m 50 tiyin.

Masala. Mahsulotning 1 kilogrammi 640 so‘m turar edi. Narxi tushirilganidan keyin u 570 so‘m bo‘ldi. Mahsulotning narxi necha foiz tushirilgan?

Yechish: Mahsulot narxi 640 – 570 = 70 so‘mga kamaytirildi. Bu 640 – ning necha foizini (x %) tashkil qilishini topish uchun 640:100 = 70:x proporsiyaga ega bo‘lamiz. Buni yechib $x = \frac{100 \cdot 70}{640} \approx 10,94$ ni topamiz.

Javob 10,94 %.

Masala. Mayiz quritiladigan uzum og‘irligining 32%ini tashkil qiladi. Necha kg uzum quritilganda 2 kg mayiz chiqadi?

Yechish: Masala shartiga ko‘ra 2 kg mayiz quritiladigan uzumning 32% ini tashkil qiladi. Shuning uchun 2:32 = x:100 bo‘lib, bundan

$$x = \frac{2 \cdot 100}{32} = 6,25$$

J: 6,25 kg.

Masala. Mahsulot 30% ga arzonlashtirildi. Yangi narx yana 15% ga kamaytirildi. Mahsulotning dastlabki narxi necha foizga arzonlashtirildi?

Yechish: Mahsulotning dastlabki narxini x deb belgilaymiz. Uning narxi 30% kamaygan bo‘lsa, endi x – 0,3x = 0,7x bo‘ladi. Bu narx yana 15%ga kamaytirilgan bo‘lsa, uning narxi 0,7x – $0{,}15 \cdot 0{,}7x$ = 0,595x ni tashkil etadi. Avvalgi narx x, oxirgi narx 0,595x bo‘lsa, mahsulot narxi x – – 0,595x = 0,405x ga arzonlashtirildi. Bulardan foydalanib, 0,405x ni necha foiz (P) ekanligini topamiz. $P = \frac{100 \cdot 0{,}405x}{x} = 40{,}5\%$

J: 40,5%.

Masala. Guruhdagi talabalarning 12%i matematikadan yozma ishni umuman bajarmagan, 32%i xatolar bilan bajargan, qolgan 14 talaba hammasini ishlagan. Guruhda nechta talaba bo‘lgan?

Yechish: 14 ta to‘g‘ri ishlagan talabalar, talabalar umumiy sonining $100 - 12 - 32 = 56\%$ ni tashkil qiladi. Agar talabalarning umumiy soni x bo‘lsa, $x : 100 = 14 : 56$ bo‘ladi. Bundan $x = \frac{100 \cdot 14}{56} = 25$ ni topamiz.

J: 25 ta talaba.

Tenglama yoki tenglamalar sistemasi yordamida yechiladigan masalalar.

Berilgan masalani tenglama tuzib yechish uchun avvalo masala shartidagi biror kattalikni, iloji boricha toppish talab etilayotgan kattalikni noma’lum x deb belgilab qolgan kattaliklarni x ga bog‘lab shartga mosa tenglama tuzib tenglama yechiladi.Topilgan yechim masalani qanoatlantiradimi yoki yo‘qmi ekani ko‘riladi.

Ayrim masalalarni yechishda ikki noma'lumli tenglamalar sistemasi tuzishga to‘g‘ri keladi.Lekin ko‘pincha sistema tuziladigan masalalarni bitta tenglama tuzib ham yechish mumkin.Demak, eng muhimi belgilashni qulay tanlab masala shartini to‘g‘ri tushunib shartga mos tenglama tuzishdadir.Ushbu mavzudagi masalalarni yechish uchun quyidagilarni yodda tutish zarur bo‘ladi.

I. x_1, x_2, x_3, …, x_n o‘rta arifmetigi deb, $\frac{x_1+x_2+x_3+x_n}{n}$ songa aytiladi.

II. x_1, x_2, x_3, …, x_n o‘rta geometrigi $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot ...\cdot x_n}$ deb ga aytiladi.

III. Har qanday 2 xonali sonni $10x + y$, 3 xonali sonni esa $100x +$ $+10y + z$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda x, y va z raqamlar.

Masalan: a) $97 = 10\cdot 9 + 7$ b) $236 = 100\cdot 2 + 10\cdot 3 + 6$

4 – eslatma: Agar 2 xonali sonning raqamlari aniq bo‘lmasa 1 – raqami x, 2 – raqami y bo‘lsa bu sonni $\overline{xy}$ deb belgilaymiz.

Demak, $\overline{xy} = 10x + y$

Masalan: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

IV. Ayrim tenglama yoki tenglamalar sistemasi tuzib yechish mumkin bo‘lgan masalalarni javoblardan foydalanib og‘zaki yechish mumkin.

Masala: 2 xonali son o‘zining raqamlari yig‘indisidan 4 marta katta.Raqamlari kvadratlarining yig‘indisi 5 ga teng.shu 2 xonali sonning kvadratini hisoblang.

Yechish:

I – usul: Bu masalani ushbu sistemani yechib bajarish mumkin.

$\overline{xy} = 10x + y$ $\begin{cases} 10x + y = 4(x + y) \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

II – usul: Javoblarni masala shartini qanoatlantirishi tekshirib ko‘riladi. $a) 441 = 21^2 \quad 4(2+1) = 21?$

$b) 169 = 13^2 \quad 4(1+3) = 13?$

$c) 121 = 11^2 \quad 4(1+1) = 11?$

$d) 144 = 12^2 \quad 4(1+2) = 12$ to'g'ri keladi. $1^2 + 2^2 = 5$

V. Ayrim masalalarni yechishda bo‘linish alomatlaridan foydalanish ham mumkin bo‘ladi.

MASHQLAR:

1. Mahsulotni 138600 so‘mga sotib, 10% foyda olindi. Mahsulotning tannarxi qancha?

2. Bir quti sigaret 800 so‘m turar edi. Narxi tushirilgandan keyin u 704 so‘m bo‘ldi. Narxi necha foizga arzonlashdi?

3. Ekskursiya uyushtirish uchun har bir qatnashchidan 225 so‘mdan yig‘ilsa, hamma xarajatlar uchun 1320 so‘m yetmaydi. Agar har bir qatnashchidan 240 so‘mdan yig‘ilsa, 1320 so‘m ortib qoladi. Ekskursiya qatnashchilari nechta bo‘lgan?

4. Kollej talabalarining 55%*i* qizlar. Qizlar o‘g‘il bolalardan 120 taga ortiq. Barcha talabalarning soni nechta?

5. Bir necha kishi 8100 so‘m yig‘ishi lozim edi. Agar ular 3 kishiga kam bo‘lganda, har bir kishi 450 so‘mdan ortiq to‘lashi lozim bo‘lar edi. Ular necha kishi bo‘lgan?

6. A va B shaharlar orasidagi masofa suv bo‘ylab 20 km. Qayiq A dan B ga va B dan A ga borib kelishi uchun 10 soat vaqt sarf qildi. Agar qayiqni oqim bo‘ylab 3 km ga sarf qilgan vaqti, oqimga qarshi 2 km ga sarf qilgan vaqtiga teng bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligini toping.

7. Kema oqim bo‘ylab 36 km va oqimga qarshi shuncha yo‘l bosib, hammasi bo‘lib 5 soat vaqt sarf qildi. Agar oqim tezligi 3 km/soat bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligini toping.

8. Yo‘lovchi poyezd stansiyasiga keta turib, avvalgi 1 soatda 3,5 km masofani o‘tdi. Shu tezlikda harakatlanayotgan yo‘lovchi 1 soat kechiki- shini sezib, tezligini 5 km/soatgacha oshirdi va stansiyaga 30 mi nut oldin yetib keldi. Yo‘lovchi qancha masofani o‘tishi kerak edi?

9. Do‘kondan ma‘lum miqdordagi pulga 10 ta shokolad va 15 ta bulochka olish mumkin. Shuncha pulga 20 ta shokolad va 8 ta bulochka olish mumkin. Shu pulga faqat bulochka sotib olinsa, nechta bulochka olish mumkin?

10. Sotuvchi 40% li spirtning litrini 1000 so‘mdan sotib olib, unga suv qo‘shib 20%li spirtga aylantirmoqda va litrini yana 1000 so‘mdan sotmoqda. Bu ishda sotuvchi necha % foyda qiladi?(Qo‘shilgan suv tekin deb olinsin)

11. 7 ta sonning o‘rta arifmetigi 13 ga teng. Bu sonnlarga qaysi son qo‘shilsa ularning o‘rta arifmetigi 18 bo‘ladi?

12. 5 ta sonning o‘rta arifmetigi 13 ga teng. Shu sonlarga qaysi son qo‘shilsa ularning o‘rta arifmetigi 19 ga teng bo‘ladi?

13. n soni 10; 12 va m sonlarining o‘rta arifmetigidan 1,5 marta ko‘p. m ni n orqali ifodalang.

14. Qutiga 25 kg massali yuk joylandi. Agar qutining massasi yuk massasining 12% ini tashkil etsa, qutining massasini toping.

15. Noma'lum sonning 14%i 80 ning 35%iga teng. Noma'lum sonni toping.

16. Kutubxonadagi kitoblarning 55%i o'zbek tilida, qolgan kitoblar rus tilida. Rus tilidagi kitoblar 270 ta. Kutubxonada o'zbek tilida nechta kitob bor?

17. Qutiga 12kg massali yuk joylandi. Agar qutining massasi yuk massasining 25% ini tashkil etsa, qutining massasini toping.

18. Punktlardan bir vaqtning o'zida ikki turist bir-biriga qarama-qarshi yo'lga chiqdi. Birinchisi avtobusda tezligi 40 km/soat, ikkinchisi avtomobilda. Agar ular 2 soatdan keyin uchrashgan bo'lishsa, avtomobil- ning tezligini toping.

19. Muayyan masofani bosib o'tish uchun ketadigan vaqtni 25% ga kamaytirish uchun tezlikni necha foiz orttirish kerak?

20. It o'zidan 30m masofada turgan tulkini quva boshladi. It har sakraganda 2 m, tulki esa 1 m masofani o'tadi. Agar it 2 marta sakragan- da, tulki 3 marta sakrasa, it qancha (m) masofada tulikini quvib etadi?

21. A va B shaharlar orasidagi masofa 188 km. Bir vaqtning o'zida bir-biriga qarab A shahardan velosipedchi, B shahardan mototsiklchi yo'lga tushdi va ular A shahardan 48 km masofada uchrashdi. Agar velosi- pedchining tezligi 12 km/soat bo'lsa, mototsiklchining tezligini toping.

22. Hovuzga 2 ta quvur o‘tkazilgan. Birinchi quvur bo‘sh hovuzni 10 soatda to‘ldiradi, ikkinchisi esa 15 soatda bo‘shatadi. Hovuz bo‘sh bo‘lgan vaqtda ikkala quvur birdaniga ochilsa, hovuz necha soatdan keyin to‘ladi?

23. Usta muayyan ishni 12 kunda, uning shogirdi 30 kunda bajaradi. Agar 3 ta usta va 5 ta shogird birga ishlasalar, o‘sha ishni necha kunda bajarishadi?

24. 800 kg mevaning tarkibida 80% suv bor. Bir necha kundan keyin mevaning og‘irligi 500kg ga tushdi. Endi uning tarkibida necha foiz suv bor?

25. 20 litr tuzli suvning tarkibida12% tuz bor. Bu eritmada tuz miqdori 15% bo‘lishi uchun necha litr suv bug‘lantirilishi kerak?

26. Qotishma kumush va oltindan iborat bo‘lib, o‘zaro 3:5 nisbatda. Agar qotishmada 0,45 kg oltin bo‘lsa, qotishmaning og‘irligini (kg) toping.

27. Eritma tarkibida 60g tuz bor. Unga 400g toza suv qo‘shilsa, tuzning konsentratsiyasi 1,5 marta kamaydi. Dastlabki eritma necha gramm bo‘lgan?

28. A aralashmaning bir kilogrammi 1000 so‘m, B aralashmaning bir kilogrammi esa 2000 so‘m turadi. B va A aralashmadan 3:1 nisbatda tayyorlangan 1kg aralashma necha so‘m turadi?

29. Daryodagi A va B pristanlar orasidagi masofa 84km ga teng. Bir vaqtning o‘zida oqim bo‘ylab A pristandan kater (turg‘un suvdagi tezligi 21km/soat). B pristandan sol jo‘natildi. 3km/soat bo‘lsa, qancha vaqtda keyin kater solga etib oladi?

30. Motorli qayiqning daryo oqimi bo‘yicha tezligi 21 km/soat dan ortiq va 23 km/soat dan kam. Oqimga qarshi tezligi esa 19 km/soat dan ortiq va 21 km/soat dan kam. Qayiqning turg‘un suvdagi tezligi qanday oraliqda bo‘ladi?

11- § Tengsizliklarning umumiy xossalari. Bevosita isbotlash usuli. Tengsizlikni kuchaytirish usuli.

Tengsizliklarning umumiy xossalari.

Ta’rif. Agar x ga bog‘liq bo‘lgan $A(x)$ *va* $B(x)$ ifodalar quyidagi munosabatlardan $A(x) > B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) < B(x)$, $A(x) \leq B(x)$ birini qanoatlantirsa, bir noma’lumli tengsizlik berilgan deyiladi.

Ta’rif. Bu ifodalarni ikkala tomoni ma’noga ega bo‘ladigan x ning qiymatlari to‘plami tengsizliklarning mavjudlik sohasi deyiladi.

Ta’rif. O‘zgaruvchi x ning tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlar to‘plami tengsizlikning yechimi deyiladi.

$2x - 6 \leq 0$ bo‘lsin, bundan $2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 3$ bo‘lib, tengsizlikning ye- chimi $x \in (-\infty, 3)$ bo‘ladi.

Tengsizliklarning yechimini topishda quyidagi qoidalarga rioya qilish lozim:

1. Tengsizlikning ikkala tomoniga bir xil ifodani qo‘shish yoki ayirishdan tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi;

2. Tengsizlikning ikkala tomonini bir xil musbat ifodaga ko‘paytirish yoki bo‘lishdan tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi;

3. Tengsizlikning ikkala tomonini bir xil manfiy ifodaga ko‘paytirsak yoki bo‘lsak, tengsizlik ishorasi teskarisiga o‘zgaradi, ya’ni $A(x) > B(x)$ bo‘lsa:

1) $A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$;

2) $C(x) > 0$ bo‘lsa, $A(x)\cdot C(x) > B(x)\cdot C(x)$ va $\frac{A(x)}{C(x)} > \frac{B(x)}{C(x)}$;

3) $C(x) < 0$ bo‘lsa, $A(x)\cdot C(x) < B(x)\cdot C(x)$ va $\frac{A(x)}{C(x)} < \frac{B(x)}{C(x)}$ bo‘ladi.

Bevosita isbotlash usuli. Tengsizlikni kuchaytirish usuli.

Misol. Istalgan a,b va c sonlari uchun $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ ekanligini isbotlang.

Yechish: Istalgan a,b va c sonlari uchun, $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b+c)$ ayirmaning manfiy emasligini ko’rsatamiz:
$2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b+c) = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2bc + c^2) = (a-b)^2 + (a-c)^2$

Istalgan sonning kvadrati nomanfiy son bo‘lgani bois, $(a-b)^2 \geq 0$ va $(a-c)^2 \geq 0$ bo‘ladi. Demak, $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b+c)$ istalgan a,b va c sonlari uchun nomanfiydir, ya’ni $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b+c) \geq 0$ va undan berilgan tengsizlik kelib chiqadi.

Misol. Istalgan a,b va c musbat sonlari uchun $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$ (1) tengsizlik isbotlansin.

Yechish: Tengsizlik chap qismida shakl almashtirish bajarib, uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right).$$

Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2;\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}=2;\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2.$$

Bu tegsizliklarni hadma-had qo‘shib, (1) tengsizlikni hosil qilamiz.

Misol. Agar $x>0$ bo‘lsa, $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ ni isbotlang.

Yechish. $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot\sqrt{2^{\sqrt[12]{x}}\cdot 2^{\sqrt[4]{x}}}=2\cdot\left(2^{x^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}=2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$**.**

MASHQLAR:

1. Agar $x,y>0$ bo‘lsa, $x^4+y^4+8\geq 8xy$ ni isbotlang.
2. Agar $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5>0$ bo‘lsa, quyidagini isbotlang:

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+x_4^{\ 2}+x_5^{\ 2}\geq x_1(x_2+x_3+x_4+x_5)$$

3. $x,y,z>0$ $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$ ni isbotlang.
4. $a,b,c>0$ bo‘lsa, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$ ni isbotlang.
5. $a,b,c>0$ bo‘lsa, $(a+1)(b+1)(c+a)(b+c)\geq 16abc$ ni isbotlang.
6. $2^x+2^{\frac{2-x-y}{2}}+2^y$ ning eng kichik qiymatini aniqlang.
7. $2a^2-2ab+b^2-2a+2$ ning eng kichik qiymatini toping.
8. $a,b,c>0$ bo‘lsa, $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2$ ni isbotlang.
9. $x,y,z>0$ $\frac{1}{(x+y+z)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{28\sqrt{3}}{9\sqrt{xyz(x+y+z)}}$ ni isbotlang.

10. $a,b,c>0$ bo‘lsa, $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \dfrac{a+b+c}{3}$ ni isbotlang.

11. $a,b,c>0$, $ab^2c^3=1$ bo‘lsa, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 6$ ni isbotlang.

12 - § Koshi -Bunyakovskiy tengsizligi va uning tadbiqlari. Bernulli tengsizligi.

Koshi -Bunyakovskiy tengsizligi va uning tadbiqlari. Biz bu mavzuda tengsizliklarni isbotlashda qo‘llanadigan klassik tengsizliklardan biri Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini keltirib o‘tamiz. $a_1, a_{,2},...., a_n$ va $b_1, b_{,2},...., b_n$ haqiqiy sonlari berilgan bo‘lsin.

Teorema. $a_1, a_{,2},...., a_n$ va $b_1, b_{,2},...., b_n$ haqiqiy sonlari uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+....a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2,....,a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2,....,b_n^2\right) \qquad (1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Dastlab, yuqoridagi tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \qquad (2)$$

(2) tengsizlik (1) ning aynan o‘zidir.

Isbotni $\sum_{i=1}^{n}\left(a_ix+b_i\right)^2$ yig‘indi ostidagi ifodani kvadratga oshirib uni baholash orqali olib boramiz, bu yerda $x-$ ixtiyoriy haqiqiy son.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_ix+b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2x^2+2a_ib_ix+b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2x^2 + \sum_{i=1}^{n} 2a_ib_ix + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 =$$

$= x^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ ni olamiz. Bunda biz yig‘indi faqat i ga bog‘liq bo‘lgani bois, 2 va x larni yig‘indidan chiqarib oldik. Uning boshi va ohirini birlashtirib uni baholaymiz:

$\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2 = x^2\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2} + 2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2} \geq 0$ bo‘ladi, chunki dastlab yig‘indi ostida nomanfiy son joylashgan edi. Biz kvadrat uchhadni hosil qildik. Uni soddaroq qilib, quyidagicha yozib olamiz:

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0 \qquad (3)$$

Bu yerda, $A=\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2}, B=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i, C=\sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2}$. (3) kvadrat tengsizlik uchun $A\geq 0, C\geq 0$, shundan kelib chiqib, (3) ifoda har doim o‘rinli bo‘lishi uchun uning diskriminanti nomanfiy bo‘lishi lozim. Demak, $D=4B^2-4AC\geq 0$ kelib chiqadi. Uni $AC\leq B^2$ ko‘rinishda yozib olish mumkin. Oxirgi tengsizlikda A, B, C lar o‘rniga ularning qiymatlarini qo‘yib,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Bernulli tengsizligi. Endi bernulli tengsizligiga to‘xtalib o‘taylik.

Teorema. $x\geq -1$ haqiqiy sonlar uchun va $n\in N$ larda ushbu tengsizlik o‘rinli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad (4)$$

Bu teoremani matematik induksiya metodi bilan isbotlash mumkin.

Misol. Quyidagi ifodaning eng kichik qiymati – y toping.

$$y=\sqrt{4^{3x^2+2}}+4\sqrt{4^{1-3x^2}}.$$

Yechish: Har bir qo‘shiluvchi musbat ekanligidan, o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik qiymat haqidagi teoremani qo‘llaymiz $(a+b\geq 2\sqrt{ab},\ a\geq 0,\ b\geq 0)$. Shunday qilib, quyidagilarni olamiz

$$y=\sqrt{4^{3x^2+2}}+4\sqrt{4^{1-3x^2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{4^{3x^2+2}}\times 4\sqrt{4^{1-3x^2}}} = 4\sqrt{\sqrt{4^{3x^2+2}\times 4^{1-3x^2}}} = 8\sqrt{2}.$$

va nihoyat, $y_{eng}=8\sqrt{2}$.

J: $y_{eng}=8\sqrt{2}$.

Masala. Agar *a* va *b* musbat, *m* va *n* – natural son bo‘lsa, *x* ning musbat qiymatlari uchun $ax^n+\frac{b}{x^m}$, ifodaning eng kichik qiymatini toping.

Yechish: $ax^n+\frac{b}{x^m}=\underbrace{\frac{a}{m}x^n+\frac{a}{m}x^n+\cdots+\frac{a}{m}x^n}_{m\text{ marta}}+\underbrace{\frac{b}{nx^m}+\frac{b}{nx^m}+\cdots+\frac{b}{nx^m}}_{n\text{ marta}}$

U holda, o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik qiymat haqidagi Koshi tengsizligiga ko‘ra quyudagiga egamiz

$$\frac{ax^n+\frac{b}{nx^m}}{n+m}\geq\sqrt[m+n]{\frac{a^m x^{mn}}{m^m}\cdot\frac{b^n}{x^{mn}n^n}}=\sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}$$

tenglik $\frac{a}{m}x^n=\frac{b}{nx^m}$ bo‘lganda yuz beradi, ya’ni $x^{m+n}=\frac{bm}{an}$, yoki $x=\sqrt[m+n]{\frac{bm}{an}}$ bo‘lganda.

Sunday qilib, berilgan ifoda eng kichik qiymati $(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}$ bo‘ladi.

J: $(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}$.

MASHQLAR:

1. Quyidagilarni toping.

1) *y* ning eng kichik qiymatini toping.

$$y=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$$

2) Ifodaning eng katta qiymatini toping.

$z = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}$ va u qiymatga qaysi nuqtalarda erishishini ko‘rsa- ting.

3) y ning eng kichik qiymatini toping.

$y = \sqrt{5x^2 - 3x + 1} + \sqrt{5x^2 + 3x + 1}$

4) $\dfrac{x^4 + x + 3}{x}$, $x \in (0; \infty)$ ifodaning eng kichik qiymati topilsin.

2. $\sqrt{x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1} + \sqrt{3x^2 - x^4 - x^3} = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 2x + 3)$ tenglamani yeching.

3. Tenglamani yeching. $\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{1 - x - x^2} = x^2 + x + 2$

4. Tengsizlikni yeching. $(2 - 5^{x-2} - 5^{2-x})^{-1} \cdot (x^2 - x - 2) \cdot \sqrt{3 - x} \geq 0$

5. Tenglamani yeching. $\dfrac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}$.

6. Tenglamani yeching. $\sqrt[4]{1 - x^2} + \sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{1 + x} = 3$

7. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ va $abcd = 1$ ekanligi ma’lum bo’lsa**,**

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + ad + ac + bd \geq 10$ni isbotlang.

8. Agar $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ bo’lsa, quyidagilar o‘rinli ekanini ko‘rsating:

1) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$;

2) $(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$;

3) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 3$;

4) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$;

5) $\dfrac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$.

13 - § Chiziqli tengsizliklar.

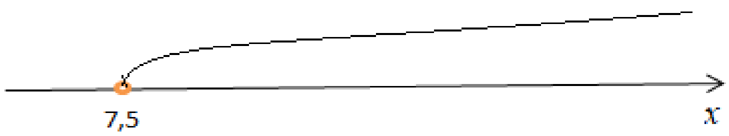
Soddalashtirishdan keyin *ax* > *b*, *ax* ≥ *b*, *ax* < *b*, *ax* ≤ *b* ko‘rinishidan biriga keltirilishi mumkin bo‘lgan tengsizlik chiziqli (birinchi darajali) tengsizlik deyiladi.

Misol. $\dfrac{2x-1}{2}-3>x-\dfrac{x+3}{3}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Ikkala tomonini 6 ga ko‘paytirib 6*x* – 3 – 18 > 6*x* – 2*x* – 6 ni, bundan esa 2*x* > 15 ni hosil qilamiz. Ikkala tomonini 2 ga bo‘lib, x > 7,5 ni topamiz.

J: $x\in(7{,}5;\infty)$.

Endi tengsizlik yechimiga oid grafikni, ya’ni son o‘qidagi tasvirni keltiramiz.



1-rasm

Misol. $3x-3>6-\dfrac{x}{3}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Ikkala tomonini 3 ga ko‘paytirib 9*x* – 9 > 18 – *x* ni, bundan esa 10*x* > 27 ni hosil qilamiz. Ikkala tomonini 10 ga bo‘lib, *x* > 2,7 ni topamiz.

J: $x\in(2{,}7;\infty)$.

Misol. $\dfrac{7x}{6}-3>4+\dfrac{5x}{3}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Ikkala tomonini 6 ga ko‘paytirib 7x – 18 > 24 + 10x ni, bundan esa – 3x > 42 ni hosil qilamiz. Ikkala tomonini –3 ga bo‘lib, x < –14 ni topamiz.

J: $x \in (-\infty; -14)$.

Yechimga mos chizmani chizaylik:

2-rasm.

Misol. $\frac{7-10x}{6} - 5 \geq 4 - \frac{5x}{3}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Bu yerda noqat’iy tengsizlik keltirilgan. Ikkala tomonini 6 ga ko‘paytirib 7 – 10x – 30 > 24 – 10x ni, bundan esa 0 > 57 ni hosil qila- miz. Bu noto‘g‘ri ifodadi. Demak yechim yo‘q.

J: ∅.

Eslatma. Agar yuqoriga o‘xshash tengsizlikda to‘g‘ri tengsizlik olinsa, yechim ixtiyoriy x da o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $x \in (-\infty; +\infty)$ bo‘ladi.

Chiziqli tengsizliklar sistemasi. Chiziqli tengsizlikar sistemasi deganda, odatda ushbu sistemalarni tushiniladi:

$$\begin{cases} f_1(x) \geq g_1(x) \\ f_2(x) \geq g_2(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1(x) \leq g_1(x) \\ f_2(x) \geq g_2(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1(x) \leq g_1(x) \\ f_2(x) \leq g_2(x) \end{cases} \text{ va } \begin{cases} f_1(x) \geq g_1(x) \\ f_2(x) \leq g_2(x) \end{cases}$$

ifodalarni tishunish mumkin, bu yerda $f(x)$ va $g(x)$ lar x ga bog‘liq qandaydir birinchi darajali ko‘phadlardir,

Chiziqli tengsizlikar sistemasi yechimi – odatda sistemaning har bir tengsizligini yechib, keyin ularni umumlashtirish natijasida hosil qilinadi.

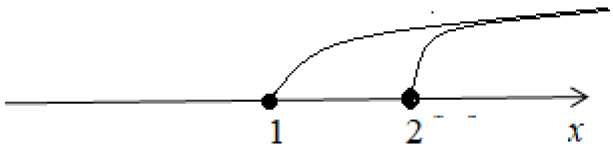
Misol. $\begin{cases} 3x - 5 \geq -2x \\ 7x \geq 20 - 3x \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemaning birinchi tengsizligini yechamiz: $3x - 5 \geq -2x$,$3x + 2x \geq 5$, $5x \geq 5$ va $x \geq 1$.

Endi sistemaning ikkinchi tengsizligini yechamiz: $7x \geq 20 - 3x$, $7x + 3x \geq 20$, $10x \geq 20$ va $x \geq 2$.

Demak, $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ yechimlar juftini oldik. Uni son o‘qida tasvirlab, uni olamiz. 3-rasmdan ayonki, umumiy yechim $x \geq 2$ bo’ladi chunki, oraliqlarning umumiy qismi son o‘qida ikkadan o‘ng tomonda joylashgan.

J: $x \geq 2$.



3-rasm.

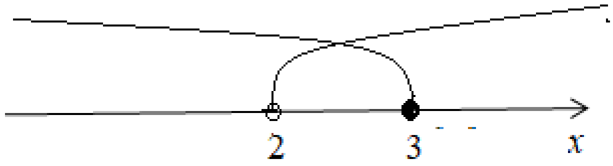
Misol. $\begin{cases} 5x - 14 > -2x \\ 7x \leq 30 - 3x \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemaning birinchi tengsizligini yechamiz: $5x - 14 > -2x$,$5x + 2x > 14$, $7x > 14$ va $x > 2$.

Endi sistemaning ikkinchi tengsizligini yechamiz: $7x \leq 30 - 3x$, $7x + 3x \leq 30$, $10x \leq 30$ va $x \leq 3$.

Demak, $\begin{cases} x > 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ yechimlar juftini oldik. Uni son o‘qida tasvirlab, uni olamiz. 4-rasmdan ayonki, umumiy yechim $2 < x \leq 3$ bo’ladi chunki, oraliqlarning umumiy qismi son o‘qida ikki va uch orasida joylashgan.

J: $2 < x \le 3$.



4-rasm.

Eslatma. Yuqoridagi chizmada son o‘qida 2 soniga mos nuqta bo‘yalmadi, lekin 3 soniga mos keluvchisi esa bo‘yaldi, chunki qat’iy tengsizliklardagi chizmalarada nuqta ichi bo‘yalmaydi noqat’iylari esa mos nuqta ichi bo‘yaladi.

MASHQLAR:

1. Tengsizliklarni yeching:

1) $4(x-2) \le 2x-5$; 2) $5-6(x+1) \ge 2x+3$;

3) $3x-7 < 4(x+2)$; 4) $7-6x \ge \frac{1}{3}(9x-1)$;

5) $1{,}5(x-4)+2{,}5x < x+6$; 6) $1{,}4(x+5)+1{,}6x > 9+x$;

7) $\frac{x-1}{3}-\frac{x-4}{2} \le 1$; 8) $\frac{x+4}{5}-\frac{x-1}{4} \ge 1$;

9) $\frac{2x-5}{4}-\frac{3-2x}{5} < 1$; 10) $\frac{x+2}{4}+x < 3$;

11) $3(x+2)+\frac{2}{3}x < 4x+5$; 12) $\frac{5x+6}{3}+2 \le 3x-\frac{x}{2}$;

13) $\frac{2}{2+x} > 0$; 14) $\frac{5}{x-3} < 0$;

15) $\frac{-7}{x+3} > 1$; 16) $\frac{2+x^2}{x-5} < 0$;

17) $\begin{cases} 3x-14 > -2x-16 \\ x \le 30-3x \end{cases}$; 18) $\begin{cases} 5x-2 > x \\ 15x > 30-3x \end{cases}$;

19) $\begin{cases} 5\frac{3}{5}x-14>-2x \\ 7x\le 13-3x \end{cases}$; 20) $\begin{cases} x+14>-2 \\ 7\frac{1}{7}x\ge 15-3x \end{cases}$;

21) $\begin{cases} 5x+21>-2x \\ 2x\le 48-4x \end{cases}$; 22) $\begin{cases} 5x+21\le -2x \\ 3x\le 30+6x \end{cases}$;

23) $\begin{cases} 5x-14>x \\ 7x-21\le 1{,}5-\frac{3x}{5} \end{cases}$; 24) $\begin{cases} (5x-25)\frac{3}{5}-21>-3x+3 \\ 7x\ge 30-3x \end{cases}$;

25) $\begin{cases} 5-x-14\left(\frac{x}{7}+\frac{1}{28}\right)>-2x+5 \\ 7+5x\ge 300-\frac{-3x}{2} \end{cases}$; 26) $\begin{cases} 3\left(\frac{x}{12}-\frac{1}{3}\right)-\frac{14}{3}>\frac{-2x}{6} \\ 7x-36>3x-\frac{1}{3} \end{cases}$;

27) $\frac{3x-1}{3}-\frac{2x-4}{2}\le 21$; 28) $\frac{5x+4}{5}-\frac{4x-1}{4}\ge 12$;

29) $\frac{6x-1}{3}-\frac{27x+4}{12}\le 2$; 30) $\frac{3x+1}{3}+\frac{2x-4}{2}\le\frac{0{,}3}{6}$;

31) $\begin{cases} 5,(6)x-14>3,(3)x \\ 7x+12\le 1{,}5-\frac{3x}{5} \end{cases}$; 32) $\begin{cases} (5x-25)\frac{3}{5}-21>-3{,}2x+3 \\ 7x-2{,}5\ge 30-3x \end{cases}$;

33) $\begin{cases} -x+14\left(\frac{x}{35}+\frac{1}{14}\right)>\frac{x}{14}+5 \\ 7+2x\ge 31-\frac{3x}{2} \end{cases}$; 34) $\begin{cases} 3{,}6\left(\frac{x}{12}-\frac{1}{36}\right)-\frac{14x}{3}>\frac{-2x}{6} \\ 1{,}5x-36>3x-\frac{1}{3} \end{cases}$.

14 - § Kvadrat tengsizliklar.

Ta’rif. $\begin{matrix} ax^2+bx+c>0 & (ax^2+bx+c\ge 0) \\ ax^2+bx+c<0 & (ax^2+bx+c\le 0) \end{matrix}$ ko‘rinishidagi yoki shu ko‘rinishga keltirilishi mumkin bo‘lgan tengsizlik kvadrat tengsizlik deyiladi (bunda x – o‘zgaruvchi, a, b, c – o‘zgarmas sonlar).

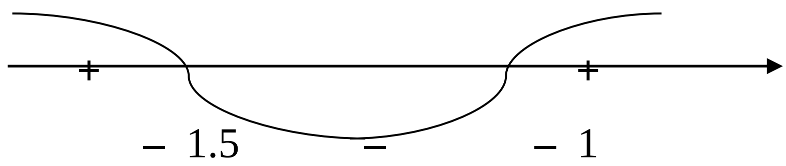
Kvadrat tengsizlikni yechishda quyidagilarga amal qilish kerak. $ax^2+bx+c<0$ kvadrat uchhadni $a(x-x_1)(x-x_2)<0$ ko‘rinishida tasvirlaymiz (x_1 va x_2 ($x_1<x_2$) kvadrat uchhadlarning nollari).

$a(x-x_1)(x-x_2)<0$ yechimi $a>0$ bo‘lganda $x\in(x_1,x_2)$, $a<0$ bo‘lganda $x\in(-\infty,x_1)\bigcup(x_2,\infty)$ bo‘ladi, chunki ax^2+bx+c ning ishorasi a ning qiymatiga qarab u yoki bu oraliqning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi. $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ bo‘lganda, aksincha.

Agar ax^2+bx+c uchhadning diskriminanti $D<0$ bo‘lsa, $ax^2+bx+c>0$ tengsizlik $a>0$ bo‘lganda x ning barcha qiymatlarida o‘rinli, $a<0$ bo‘lsa, yechimga ega emas. Amalda bu qoidaning qo‘llanishini misollarda ko‘rib chiqamiz.

Misol. 1) $2x^2+5x+3>0$ tengsizlik yechilsin.

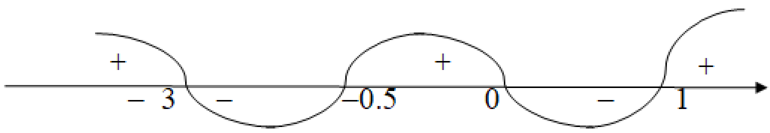
Yechish: Kvadrat uchhadning ildizlarini topib, tengsizlikni $2(x+\frac{3}{2})(x+1)>0$ ko‘rinishida yozamiz. Kvadrat uchhadning aniqlanish sohasi $(-\infty,\infty)$ ekanligini bilgan holda, uni $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-1$ nuqtalar yordamida oraliqlarga ajratamiz: $(-\infty,-\frac{3}{2}),\ (-\frac{3}{2},-1)\ va\ (-1,\infty)$. Bu oraliqlarni sonlar o‘qida tasvirlaymiz:



$2(x+\frac{3}{2})(x+1)>0-$ tengsizlikda ikkala qavsning ishorasi chapdagi oraliqda hamma vaqt musbat bo‘ladi, undan bitta oldingi oraliqda esa qavslarning ishorasi qarama – qarshi bo‘lib, umumiy ishora minus bo‘ladi, keyingisida musbat bo‘ladi va hokazo. Tengsizlik yechimi $x\in(-\infty;\frac{3}{2})\cup(-1,\infty)$ bo‘ladi. Bu usulda ko‘paytuvchilar (qavslar) soni ko‘p bo‘lganda ham foydalanish mumkin.

Misol. 2) $x(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)<0$ bo‘lsin.

Bu tengsizlikda chap tomondagi ifodaning nollari $-3;\ -\frac{1}{2};\ 0{,}1$ bo‘ladi, shuning uchun yechim tasviri quyidagicha bo‘ladi:



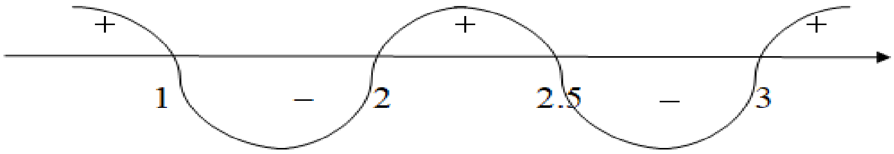
Ifoda manfiy qiymatlarni $\left(-3;-\frac{1}{2}\right)$ va $(0;1)$ oraliqlarda qabul qiladi. *J:* $x\in\left(-3;-\frac{1}{2}\right)\cup(0;1)$.

Keltirilgan usuldan (u intervallar usuli deyiladi) kasr ifoda bo‘lganda ham foydalanish mumkin.

Misol: 3) $\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+6}\geq 0$ tengsizlik yechilsin.

Yechish: Bu tengsizlikni quyidagicha yozamiz:

$\frac{2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-2)(x-3)}\geq 0$ va sonlar o‘qida belgilab topamiz:



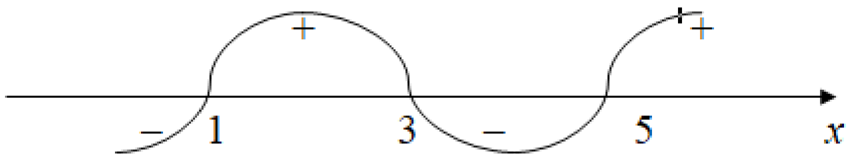
Yechim: $x \in (-\infty, 1] \cup (2, \frac{5}{2}] \cup (3, \infty)$.

Misol. $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \le 0$ tengsizlik yechilsin.

Yechish:
$$\frac{2x+14+3x^2+x-15x-5}{2(x-5)} \le 0,$$

$$\frac{3x^2-12x+9}{2(x-5)} \le 0,$$

$$\frac{3(x-1)(x-3)}{2(x-5)} \le 0$$



Yechim: $x \in (-\infty;1] \cup [3;5)$.

Tengsizliklar sistemasini yechish. Tengsizliklar sistemasida qatnashgan bir noma'lumli har bir tengsizlik alohida–alohida yechilib, ularning yechimlarini umumiy qismi sistemaning yechimi bo'ladi. Buni misollarda ko'ramiz.

Misol. $\begin{cases} 2x+1 \ge 4 \\ x^2-3x+2<0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

Yechish: $\begin{cases} 2x \ge 3 \\ (x-1)(x-2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1{,}5 \\ 1<x<2 \end{cases} \Rightarrow x \in [1{,}5;2)$.

Yechim: $x \in [1{,}5;2)$.

Misol. $y=\frac{1}{\sqrt{3x-5}}+\frac{1}{x-5}$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish: Birinchi kasr mavjud bo‘lishi uchun $3x-5>0$ bo‘lishi, ik- kinchi kasr mavjud bo‘lishi uchun $x-5\neq 0$ bo‘lishi zarur. Bularni birlashtirib $\begin{cases}3x-5>0\\ x-5\neq 0\end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistemani yechib,

$\begin{cases}x>\frac{5}{3}\\ x\neq 5\end{cases}\Rightarrow x\in(\frac{5}{3},5)\cup(5,\infty)$ yechimni topamiz.

Misol. $y=\sqrt{\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2-5x+6}}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Ildiz mavjud bo‘lishi uchun, $\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2-5x+6}}\geq 0$ bo‘lishi zarur.

Kasr mavjud bo‘lishi uchun, maxraj noldan farqli bo‘lishi zarur, demak:

$\begin{cases}x^2-5x+6>0\\ x^2+4x\geq 0\end{cases}$ sistemani hosil qilamiz.

Har bir tengsizlikni alohida – alohida yechib, topamiz:

$$\begin{cases}(x-2)(x-3)>0\\ x(x+4)\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<2 \quad x>3\\ x\leq -4 \quad x\geq 0\end{cases}$$

Bu yechimlarni umumiy qismi $x\in(-\infty;-4]\cup[0;2)\cup(3;\infty)$ ni topamiz. Bu sistemaning yechimi funksiyaning aniqlanish sohasini beradi.

MASHQLAR:

1. Tengsizliklarni yeching.

1) $x^2+5x+4\geq 0$; 2) $x^2+7x+6\leq 0$;

3) $3x^2-5x+2\leq 0$; 4) $4x^2+5x+1\leq 0$;

5) $2x^2+3x\geq 0$; 6) $5x^2-2x\leq 0$;

7) $2x^2+3<0$; 8) $4x^2+1>0$;

9) $2x^2-3x+5<0$; 10) $3x^2+4x+2>0$.

2. Tengsizliklarni yeching.

1) $x^2(x+1)(x-2)(x-5)>0$; 2) $x^2(x+2)(x-1)(x-3)<0$;

3) $(x+3)^2(x-2)(x-4)\leq 0$; 4) $(x+2)(x+1)^2(x+\frac{1}{2})(x-2)^2\geq 0$;

5) $(2x-1)(x-4)(x-3)\geq 0$; 6) $(3x+2)(x^2-1)(x-2)\leq 0$.

3. Tengsizliklarni yeching.

1) $\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+2}\leq 0$; 2) $\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+x-6}\geq 0$;

3) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}<1$; 4) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-2}<0$;

5) $\dfrac{2}{3x-1}+\dfrac{1}{3x+1}<1$; 6) $\dfrac{-x^2+5x-16}{2x^2-3x-5}\leq 0$.

4. Tengsizliklarni yeching.

1) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\leq 12$;

2) $(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)\leq -10$;

3) $(x+2)(x+1)^2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)(x+3)\geq 0$;

4) $\dfrac{(x+2)(x+1)^2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)(x+3)}{x^2-4}\geq 0$;

5) $\dfrac{(x+12)(5x+1)^2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^3(x+3)}{(x^2-144)}\geq 0$;

6) $\dfrac{1}{5x^2-1}-\dfrac{1}{5x^2+1}<-12$;

7) $\frac{2}{3x-1}+\frac{1}{3x+1}<\frac{1}{9x^2-1}$;

8) $\frac{(x^2+12x+36)(5x+1)^2\left(x+\frac{3}{4}\right)^4(5x-3)}{\left(x^2-36\right)}\le 0$.

5. Sistemalarni yeching.

1) $\begin{cases} 2x+5>1 \\ x^2-3<6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2-3x<0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}-\frac{1}{3}<\frac{x}{6} \\ 3x-\frac{1}{4}>\frac{5x-1}{2}-3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{x}{3}-1<\frac{2x+1}{2}+2 \\ 2x^2-5x+2>0 \end{cases}$.

15 - § Parametrli chiziqli tenglama.

Chiziqli tenglama deb $ax = b$ tenglamaga aytilishi bizga ma’lum. Bunda a va b berilgan sonlar Agar a yoki b ning o‘rniga biror harf yoki harfiy ifoda kelsa bunday tenglama parametrli tenglama deyiladi va unga harf parametr deyiladi.Masalan: *a*) $kx = 7$ *b*) $(k^2-1)x = k + 7$

c) $(a-3)x = a + 4$ *d)* $3x = a-1$

Ko‘pincha parametrli chiziqli kvadrat tenglama berilganda quyidagi uchta savoldan bittasi qo‘yiladi.

1) parametrning qanday qiymatida tenglama bitta (yagona) ildizga ega bo‘ladi.

2) parametrning qanday qiymatida tenglama cheksiz ko‘p ildizga ega bo‘ladi.

3) parametrning qanday qiymatida tenglama ildizga ega bo‘lmaydi.

a) $ax = b$ tenglama **bitta yechimga** ega bo‘lishi uchun $a\neq 0$ bo‘lishi kerak, b esa har qanday son bo‘lishi mumkin.

Misol: p ning qanday qiymatida $p^2x-4=x+p-5$ tenglama bitta ildizga ega bo‘ladi.

Yechish:

$$p^2x-4=x+p-5,$$

$$xp^2-x=p-1,$$

$$x\left(p^2-1\right)=p-1,$$

$$p^2-1\neq 0,\ p\neq \pm 1.$$

b) *ax* = *b* tenglama **cheksiz ko‘p yechimga** ega bo‘lishi uchun bir vaqtda *a* = 0 va *b* = 0 bo‘lishi kerak.

Misol: *a* ning qanday qiymatida $(a^2-4)x=a+2$ tenglama cheksiz ko‘p ildizga ega bo‘ladi.

Yechish: 1) $a^2-4=0$, $a^2=4$, $a=\pm 2$,

2) $a+2=0$ $a=-2$.

J: $a=-2$.

c) *ax* = *b* tenglama yechimga ega bo‘lmasligi uchun *a* = 0 *va* $b\neq 0$ bo‘lishi kerak.

Misol: n ning qanday qiymatida $n^2x-n=x+1$ tenglama ildizga ega emas.

Yechish: $n^2x-x=n+1$, $x(n^2-1)=n+1$, $n^2-1=0$, $n=\pm 1$, $1+n\neq 0$, $n\neq -1$.

J: $n=1$.

1 – eslatma: parametrli chiziqli tenglama berilib yuqoridagi 3 ta savoldan birortasi qo‘yilganda berilgan tenglamani *ax* = *b* shaklga keltirib so‘ngra uch holatdan biri bo‘yicha tekshiriladi

2 – eslatma: shu savollarga javob berish uchun javoblarni qo‘yib tekshirish ham mumkin.

3 – eslatma: misollarga mos tengsizlikni yechish kerak

Misol: $3x - 4 = 2(x - t)$, $3x - 4 = 2x - 2t$, $3x - 2x = 4 - 2t$,

$x = 4 - 2t$, $4 - 2t > 0$, $-2t > -4$, $t < 2$.

Parametrli kvadrat tenglamalar. Kvadrat tenglama deb,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bunda a,b,c berilgan sonlar bo‘lib, $a \neq 0$ bo‘ladi.

Agar a,b yoki c koeffisentlar o‘rinlarida biror harf yoki harfiy ifoda ishtirok etsa bunday tenglama parametrli kvadrat tenglama deyiladi.

Masalan: $a)$ $px^2 + x + p - 2 = 0$,

$b)$ $(a - 3)x^2 + ax + a^2 = 0$,

$c)$ $ax^2 + (a - 3)x - 2a + 5 = 0$.

Parametrli kvadrat tenglamalar berilganda quyidagicha savollar qo‘yilishi mumkin.

I. Berilgan parametrning qanday qiymatlarida tenglama ikkita ildizga ega bo‘ladi deyilsa, $D > 0$ tengsizlikni yechish kerak

II. Berilgan parametrning qanday qiymatlarida tenglama ildizga ega bo‘lmaydi deyilsa, $D < 0$ tengsizlikni yechish kerak.

III. Berilgan parametrning qanday qiymatlarida tenglama bitta yoki 2 ta bir xil ildizga ega bo‘ladi deyilsa, $D = 0$ tengsizlikni yechish kerak.

IV. Qachon tenglama ildizlaridan biri 0 ga teng bo‘ladi $c = 0$ tenglamani yechish kerak.

V. Qachon tenglama ildizlari qarama-qarshi sonlardan iborat bo‘ladi deyilsa, $b = 0$ tenglamani yechish kerak.

VI. Agar parametrning qanday qiymatida kvadrat tenglamaning ikkala ildizi musbat yoki manfiy yoki har xil ishorali bo‘ladi deb so‘ralsa Viyet teoremasidan foydalaniladi.

Buning uchun berilgan tenglamani $x^2 + px + q = 0$ shaklga keltirib $x_1 + x_2 = -p \quad x_1x_2 = q$ ekanini bilish kerak

a) ildizlari har xil ishorali bo‘lsa $q < 0$ tengsizlikni yechish yetarli.

b) ikki ildiz ham musbat deyilsa $q > 0$ va $p < 0$ tengsizlikning umu- miy yechimi topiladi

c) agar ikkita manfiy ildiz so‘ralsa $q > 0$ va $p > 0$ tengsizliklar umu- miy yechimini topish kerak

VII. Agar parametrli tenglamada tenglama ildizlaridan biri berilsa parametrni topish uchun berilgan ildizni noma’lum o;rniga qo‘yish kerak

VIII. Ko‘pgina parametrli masalalar Viyet teoremasi yordamida bajariladi.

Teorema: Agar x_1 va x_2 sonlari $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning il- dizlari bo‘lsa $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$ bo‘ladi.

Misol: $x^2 + px + 21 = 0$ tenglamada $x_1 = 3$ bo‘lsa, p ni toping.

$$x_1 \cdot x_2 = 21, \ 3x_2 = 21, \ x_2 = 7, \ x_1 + x_2 = -p, \ 3 + 7 = -\text{p}, \ p = 10, \ p = -10$$
.

Misol: $x^2 + |a|x + 6 = 0$ tenglamada $x_1^2 + x_2^2 = 13$ bo‘lsa, $x_1 + x_2 = ?$

$$x_1 + x_2 = -|a|, \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 13,$$

$$(-|\text{a}|)^2 - 2 \cdot 6 = 13, \quad a^2 = 13 + 12 = 25, \quad a = \pm 5,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6, \ x_1 + x_2 = -|\text{a}| = -5, \ J: \ x_1 + x_2 = -5.$$

Misol: $x^2 + x + a = 0$ tenglamada $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{5}$ bo‘lsa a = ?

$$x_1\cdot x_2=a,\; x_1+x_2=-1,\; \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{5},\; \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{5}\;\Rightarrow\;\frac{-1}{a}=\frac{1}{5},\;\; a=-5$$

J: $a=-5$.

Misol: $x^2 + px + 12 = 0$ tenglamada $|x_1-x_2|=1$ bo‘lsa p = ?

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p,\;\; |x_1-x_2|^2=1^2,\;\; x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=1 \\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1 \\ p^2=48+1=49,\quad p=\pm 7 \\ x_1\cdot x_2=12 \end{cases}$$

J: $p=\pm 7$.

Misol: y_1 va y_2 sonlari $y^2 + my + n = 0$ tenglamaning ildizi

$y_1+y_2=-m$, $(y_1+4)(y_2+4)=n-24$,

$y_1y_2+4y_1+4y_2+16=n-24$,

$n+4(y_1+y_2)+16=n-24$,

$y_1\cdot y_2=n,\; n-n+4(-m)+16+24=0, -4m=-40,\quad m=10.$

Misol: x_1 va x_2 sonlari $3x^2 + 2x + b = 0$ tenglamaning ildizlari va $2x_1=-3x_2$ bo‘lsa, u holda bo‘ladi. b = ?

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{b}{3}=0,\quad x_1+x_2=-\frac{2}{3},\quad x_1\cdot x_2=\frac{b}{3},$$

$$\begin{cases} 2x_1=-3x_2 \\ x_1+x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow\; 2x_1=-3\left(-\frac{2}{3}-x_1\right),\quad 2x_1=2+3x_1,\;\; x_1=-2.$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{b}{3},\quad -2\cdot\frac{4}{3}=\frac{b}{3},\quad b=-8.$$

1 – eslatma: Agar $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglama qachon bitta ildizga ega bo‘ladi deyilsa D = 0 tenglamani yechish yetarli Agar masala shartida kvadrat tenglama deb ta’kidlanmasa a = 0 holatda ham qarash kerak.

Parametrli tengsizliklar.

Ta’rif. Tengsizlik tarkibida biror o‘zgarmas sonning o‘rniga qandaydir harf ishtirok etsa, bunday tengsizlik **parametrli tengsizlik** deyiladi, o‘sha harf esa **parametr** deyiladi.

Bunday tengsizliklarda shu parametrga bog‘liq savollar qo‘yiladi va bu savolga javob berish uchun shu parametrga nisbatan chiziqli yoki kvadrat tengsizlikni yechishga to‘g‘ri keladi. Kvadrat tenglama $D > 0$ bo‘l- ganda 2 turli ildizga $D < 0$ da esa umuman ildizga ega bo‘lmasligini yodda tutish kerak. Bu mavzudagu savollarga o‘rganganlarimizga asosan javob bera olamiz

Misol: $x^2 + kx + 9 = 0$ tenglama k ning qanday qiymatlarida yechimga ega emas.

Yechish: $x^2 + kx + 9 = 0$, $D = k^2 - 36 < 0$, $(k - 6)(k + 6) < 0$.

J: $(-6; 6)$.

Misol: $\begin{cases} ax > 5a - 1 \\ ax < 3a + 1 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi a ning qanday qiymat- larida yechimga ega emas.

Yechish: $5a - 1 < ax < 3a + 1$

$$5a - 1 < 3a + 1$$

tengsizlik yechimga ega bo‘lmasligi uchun

$$5a - 1 \geq 3a + 1$$

$$2a \geq 2$$

$$a \geq 1$$

J: $[1,\ \infty)$.

Agar $ax^2 + bx + c > 0$ tengsizlik x ning barcha qiymatlarida to‘g‘ri bo‘lsa bu tengsizlikning yechimi barcha sonlar to‘plamidan iborat bo‘ladi. Aksincha bu tengsizlik x ning birorta ham qiymatida bajarilmasa bu tengsizlik yechimga ega emas deyiladi.

I. Agar $a > 0$ va $D < 0$ bo‘lsa $ax^2 + bx + c > 0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty, \infty)$ bo‘ladi.

II. Agar $a < 0$ va $D < 0$ bo‘lsa $ax^2 + bx + c > 0$ tengsizlik yechimga ega bo‘lmaydi.

III. Agar $a < 0$ va $D < 0$ bo‘lsa $ax^2 + bx + c < 0$ tengsizlikning yechi- mi $(-\infty, \infty)$ bo‘ladi.

IV. Agar $a > 0$ va D < 0 bo‘lsa $ax^2 + bx + c < 0$ tengsizlik yechimga ega bo‘lmaydi.

Misol: $kx^2 + 2x + k + 2 > 0$ yechimga ega bo‘lmaydigan k ning butun qiymatlari orasida eng kattasini toping.

Yechish: 1) $k < 0$ bo‘lishi shart.

2) $D = 4 - 4k(k + 2) < 0$,

$$4 - 4k^2 - 8k < 0,\ \ k^2 + 2k - 1 > 0,\ \ \ D = 4 + 4 = 8,$$

$$k_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2},\ k_2 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2};$$

$\left(-\infty; -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}; \infty\right)$ yoki $\left(-\infty; -1-\sqrt{2}\right)$ va eng kata butun ildizi 3 ga teng.

MASHQLAR:

1. m ning qanday qiymatlarida $m(mx-3) = 7x + 5$ tenglama echimga ega bo‘lmaydi?

2. a ning qanday qiymatlarida $ax+a=x+a$ tenglama echimga ega bo‘lmaydi?

3. a ning qanday qiymatlarida $ax=3x-5$ tenglama echimga ega bo‘lmaydi?

4. n ning qanday qiymatlarida $nx-2=2n+3x$ tenglama cheksiz ko‘p echimga ega bo‘ladi?

5. a ning qanday qiymatlarida $ax-2=3a+4x$ tenglamaning birorta ham yechimi bo‘lmaydi?

6. m ning qanday qiymatlarida $m^2x-4m=x+1$ tenglamaning ildizlari cheksiz ko‘p bo‘ladi?

7. n ning qanday qiymatlarida $nx+2=3n+7x$ tenglamaning ildizi bo‘lmaydi?

8. Ushbu $(a^2-4)x-3=0$ tenglama yechimga ega bo‘lmaydigan a ning barcha qiymatlari yig‘indisini hisoblang.

9. Ushbu $10(ax-1)=2a-5x-9$ tenglama a ning qanday qiymatlarida yagona echimga ega?

10. k ning qanday qiymatlarida $k^2(y-1)=y-k$ tenglamaning ildizi mavjud emas?

11. $4(ax+1)=2a+7x$ – tenglama a ning qanday qiymatlarida cheksiz ko‘p echimga ega?

12. a ning $(a^2-9)x+16=0$ tenglama echimga ega bo‘lmaydigan barcha qiymatlari ko‘paytmasini hisoblang.

13. Tenglama a ning qanday qiymatida yechimga ega emas? $5x-a-5=(a+2)(x+2)$

14. Ushbu $nx=n^2-9$ tenglamaning ildizlari natural son bo‘ladigan $n\in N$ ning barcha qiymatlari yig‘indisini toping.

15. $\frac{2kx+5}{3}=\frac{2k+3+3x}{2}$ – tenglama k ning qanday qiymatida echim- ga ega emas?

16. Tenglamaning ildizi 0 ga teng bo'ladigan m ning barcha qiymatlari ko'paytmasini toping.

$x^2-9x+(m^2-4)(m^2-9)=0$

17. b ning qanday qiymatida $x^2-\frac{4}{5}x+3b=0$ uchhad to'la kvadrat bo'ladi?

18. k ning qanday qiymatlarida $x^2-9x+k^2-8k=0$ ifodani to'la kvadrat shaklida tasvirlab bo'ladi?

19. Ushbu $x^2-px+8=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 4 ga teng. Bu tenglamaning barcha koeffitsentlari yig'indisini toping.

20. p ning qanday qiymatida $x^2+3px+20=0$ tenglamaning ildiz- laridan biri 5 ga teng bo'ladi?

21. Ushbu $x^2+5px-16=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 4 ga teng. Shu tenglamaning koeffitsentlari yig'indisini toping.

22. Ushbu $x^2+4px-16=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 2 ga teng. $\frac{p}{16}$ nimaga teng?

23. a ning qanday qiymatida $x^2+4(p^2-4)x-12=0$ tenglamaning ildizlaridan biri –3 ga teng bo'ladi?

24. x_1 va x_2 sonlar $x^2+2x+a=0$ tenglamaning ildizlari bo'lib, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3}$ tenglikni qanoatlantiradi. a ni toping.

25. k ning qanday qiymatlarida $kx^2 - 6kx + 2k + 3 = 0$ tenglama ildizlari kublarining yig‘indisi 72 ga teng bo’ladi?

26. x_1 va x_2 sonlar $x^2 + 2ax + 8 = 0$ kvadrat tenglamaning echimlari va $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$ bo’lsa, *a* ning qiymatini toping.

27. *m* ning qanday qiymatlarida $4x^2 + 2\sqrt{2}ax - 50 = 0$ tenglamaning ildizlari qarama-qarshi sonlar bo’ladi?

28. Ushbu $x^2 + 2(a-3)x - 5 = 0$ tenglama ildizlari ayirmasining kvad- rati 36 ga teng bo’lsa, ildizlarining yig‘indisi qancha bo’lishini toping?

29. $kx^2 + 2x + k + 2 > 0$tengsizlik yechimga ega bo‘lmaydigan k ning butun qiymatlari orasida eng kattasini toping.

30. *a* ning qanday qiymatlarida $\begin{cases} 3 - 7x < 3x - 7 \\ 1 + 2x < a + x \end{cases}$ tengsizliklar siste-masi yechimga ega emas?

31. Ushbu$(x-a)(x-b) \le 0$ tengsizlikning yechimlar to‘plami [2; 6] joraliqdan iborat. *ab* ning qiymatini toping.

32. *a* ning qanday qiymatlarida $ax^2 + 8x + a < 0$ tengsizlik x ning barcha qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?

33. $\begin{cases} ax \ge 7a - 3 \\ ax \le 3a + 3 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi a ning qanday qiymatlarida yechimga ega bo‘lmaydi?

34. k ning qanday qiymatida $k(k+6)x = 3k + 5(x+2)$ tenglama echmga ega bo‘lmaydi?

35. *a* ning qanday qiymatida $(a^2 - 2)x = a(x + 2a) + 4$ tenglamaning ildizlari cheksiz ko‘p bo‘ladi?

36. a ning qanday qiymatlarida $(3x-2a)a=6x-4$ tenglama bitta musbat yechimga ega?

37. m ning qanday qiymatida $\frac{6x-m}{2}=\frac{7mx+2}{5}$ tenglamaning ildizi nolga teng bo‘ladi?

38. a ning qanday qiymatida $\frac{3x-2a}{4}=\frac{4ax-2}{5}$ tenglama ildizga ega emas?

39. Ushbu $3x^2+21x+45a=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 5 ga teng. Ikkinchi ildizning kvadratini toping toping.

40. m ning qanday qiymatlarida $3x^2-(3m-15)x-27=0$ tenglamaning ildizlari qarama-qarshi sonlar bo’ladi?

41. Ushbu $x^2+px+6=0$ tenglama ildizlari ayirmasining kvadrati 40 ga teng. p ning qiymatini toping.

42. Agar $x^2-x+q=0$ tenglamaning x_1 va x_2 $x_1^2+x_2^2=19$ ildizlari shartni qanoatlantirsa, q ning qiymati qanchaga teng bo’ladi?

43. $x^2+3px-21=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 7 ga teng. Ikkinchi ildizi va p ning qiymatini toping.

44. $x^2+px+q=0$ tenglamaning ildizlari $x^2-3x+2=0$ tenglamaning ildizlaridan ikki marta katta. p va q ning qiymati topilsin.

45. Ushbu $x^2-\frac{1}{5}px+p^2-10p+21=0$, $p=const$. Tenglamaning ildizlaridan biri 0 ga teng. Shu shartni qanoatlantiruvchi ildizlarning yig‘indisini toping.

46. b ning qanday qiymatlarida yechimga ega emas?

$$\begin{cases} bx \geq 6b - 2 \\ bx \leq 4b + 2 \end{cases}$$

47. Tengsizliklar sistemasi b ning qanday qiymatlarida yechimga ega bo‘lmaydi?

$$\begin{cases} bx \geq 5b - 3 \\ bx \leq 4b + 3 \end{cases}$$

48. k ning $kx^2 + 4x + k + 1 > 0$ tengsizlik yechimga ega bo‘lmaydigan butun qiymatlari orasidan eng kattasini toping.

16 - § Modul qatnashgan tenglama va tengsizliklar.

Modulli ifodalarni shakl almashtirish. Modulli ifodalarni soddalashtirish uchun moduldan qutulish ya’ni modulni ochib chiqish kerak. Buning uchun modul ichidagi ifodaning son qiymati musbat yoki manfiyligini aniqlash kerak. So‘ngra ta’rifga ko‘ra modulni ochib chiqiladi.

Ta’rif: Musbat sonning moduli o‘ziga teng. Nolning moduli nolga teng. Manfiy sonning moduli qarama – qarshisiga teng.

Shu ta’rif qisqacha quyidagicha yoziladi.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{agar } a \geq 0 \text{ bo'lsa} \\ -a, & \text{agar } a < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$a) |8| = 8, \quad b) |0| = 0, \quad c) |-7| = -(-7) = 7, \quad d)$ agar $x > 0$ bo'lsa $|x| = x,$

$e)$ agar $a > b$ bo'lsa $|a-b| = a-b, \quad f)\ a < b$ bo'lsa $|a-b| = -(a-b) = b-a,$
$g)\ x > y$ bo'lsa $-|y-x| = y-x.$

$$\text{Masalan}: x > y > z \quad |x-y| - |z-x| + |z-y| = x - y + z - x - z + y = 0$$

Ta’rif. Modul ichida noma’lum son qatnashgan tenglamalar modulli tenglamalar deyiladi.

Masalan: $a) |x| = 7, \quad b) |x-3| = |x+5|, \quad c) |x+56| = 3|x|.$

I. $|f(x)| = c$ (c – berilgan son) **ko‘rinishdagi tenglamalar**

a) Agar $c > 0$ bo‘lsa $|f(x)| = c$ tenglama 2 ta tenglamaga ajratib yechiladi: $f(x) = c$ va $f(x) = -c$.

Misol: 1) $|4x+5| = 9$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglama quyidagi ikki holga ajraladi:

1) $\begin{cases} 4x+5 \geq 0 \\ 4x+5 = 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+5 < 0 \\ 4x+5 = -9 \end{cases}$

Bularni yechamiz: 1) $\begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{4} \\ x = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -\dfrac{5}{4} \\ x = -3{,}5 \end{cases}$

Ikkala yechim ham tenglamani qanoatlantiradi.

J: – 3,5 va 1.

Misol: $|2x+4| - |x-2| = 3$ tenglamani yeching.

Yechish: Modul ostidagi ifodalarni nolga tenglashtirib $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ qiymatlarni topamiz. Bu qiymatlar yordamida sonlar o‘qini qismlarga ajratamiz (13– rasm). Har qismda tenglamani alohida – alohida yechamiz:

I II III

– 2 2

13 – rasm.

I) $x \leq -2$; $-(2x+4) + (x-2) = 3$

$$-2x - 4 + x - 2 = 3$$

$$-x = 9, \qquad x_1 = -9$$

II) $-2 < x \leq 2$; $2x + 4 + x - 2 = 3$

$$3x = 1, \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

III) $x > 2$ $\qquad 2x + 4 - x + 2 = 3$

$$x \neq -3$$

J: $x_1 = -9; \qquad x_2 = \frac{1}{3}.$

Misol: $|3x-1| = 17$ tenglamani yeching.

$1)\, 3x - 1 = 17 \qquad 3x = 17 + 1 \qquad 3x = 18 \qquad x = 6$

$2)\, 3x - 1 = -17 \qquad 3x = -17 + 1 \qquad 3x = -16 \qquad x = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$

J: $x_1 = 6$ *va* $x_2 = -5\frac{1}{3}.$

b) Agar *c* = 0 bo‘lsa $|f(x)| = 0$ tenglama faqat bitta f(x) = 0 yechimga ega bo‘ladi.

Misol: $|7x - 15| = 0, \quad 7x - 15 = 0, \quad 7x = 15, \quad x = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}.$

c) Agar c < 0 bo‘lsa $|f(x)| = c$ tenglama yechimga ega bo‘lmaydi. Chunki hech qanday modul manfiy emas.

Misol: $\left.\begin{array}{ll} a) & |3x-1| = -2 \\ b) & |x^2 - 4x + 5| = -3 \end{array}\right\}$ tenglamalar yechimga ega emas.

II. $|f(x)| = |g(x)|$ **ko‘rinishdagi tenglamalar**

Bunday tenglamalarni 2 xil usulda yechish mumkin.

1 – usul: $|a| = |b|$ tenglik. $a = \pm b$ bol’ganda to‘g‘ri bo‘lishini hisobga olsak $|f(x)| = |g(x)|$ tenglamani quyidagicha 2 ta tenglamaga ajratib yechish mumkin.

$f(x) = g(x)$ va $f(x) = -g(x)$.

Misol: $|x - 3| = |x + 1|$ tenglamani yeching.

1) $x-3=x+1, \quad x-x=1+3, \quad 0=4$ yechimga ega emas;

2) $x-3=-x-1, \quad x+x=-1+3, \quad 2x=2, \quad x=1.$

2 – usul: $|a|^2=a^2$ va $|a\pm b|^2=(a\pm b)^2$ tengliklardan foydalanib $|f(x)|=|g(x)|$ tenglamani $f^2(x)=g^2(x)$ tenglamaga aylantirib yechiladi.

Misol: $|x-3|=|x+1|,$

$$(x-3)^2=(x+1)^2,$$

$$x^2-6x+9=x^2+2x+1,$$

$$-6x-2x=1-9,$$

$$-8x=-8, \; x=1. \blacktriangleright$$

1 – eslatma: $|x-a|=|x-b|$ tenglamaning ildizi $x=\dfrac{a+b}{2}$ bo‘ladi.

$a)\,|x-5|=|x-3|$ $\qquad$ $b)\,|x+7|=|x-1|$

$x=\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{8}{2}=4$ $\qquad$ $x=\dfrac{-7+1}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

III. $f(|x|)=0$ **ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish.**

Bunday tenglamalarga misollar: $a)\,|x|-3x=1, \quad b)\; x^2-5|x|+8=0$ bunday tenglamalarni yechish uchun:

1) $x\geq 0$ deb shart qo‘yib modulni tashlab, hosil bo‘lgan tenglamani yechib topilgan ildiz shartni qanoatlantirsa javob olinadi, qanoatlantirmasa chet ildiz sifatida tashlab yuboriladi.

2) $x<0$ deb shart qo‘yib modulni ochib hosil bo‘lgan tenglama yechiladi va topilgan ildiz shartni qanoatlantiradimi yoki yo‘qmi aniqlanadi.

Misol: $|x|-3x=1$ tenglamani yeching.

1) $x \geq 0$ bo'lsin, $x - 3x = 1, \quad -2x = 1, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < 0$ *chet ildiz*

2) $x < 0$ bo'lsin, $-x - 3x = 1, \quad -4x = 1, \quad x = -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4} < 0.$

J: $-\frac{1}{4}$.

Misol: $x^2 - 5|x| + 4 = 0$ tenglamani yeching.

1) $x \geq 0$ bo'lsin, $x^2 - 5x + 4 = 0 \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4 \qquad 1{,}4 > 0$

2) $x < 0$ bo'lsin, $x^2 + 5x + 4 = 0 \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -4 \qquad -1, \ -4 < 0$

$J\!: \pm 1$ va $\pm 4.$

Misol: $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ tenglamani yeching.

1) $x \geq 0$ bo'lsin, $x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \ \ 3 > 0, \ \ -1 < 0$

$x_2 = -1$ - chet ildiz

2) $x < 0$ bo'lsin, $x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1, \ \ -3 < 0, \ \ 1 > 0$

$x_2 = 1$ - chet ildiz

J: $x = \pm 3.$

IV. $|f(x) = g(x)|$ **–** ko‘rinishdagi tenglamalar.

Bunday tenglamalar ham shartlar qo‘yib 2 ta tenglamaga ajratib yechiladi.

1) $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, $f(x) = g(x)$ 2) $f(x) < 0$ bo‘lsa, $f(x) = -g(x)$.

3) $g(x) \geq 0$ bo‘lsa, $f(x) = g(x)$ 4) $g(x) < 0$ bo‘lsa, $f(x) = -g(x)$.

Misol: $|x - 3| = 3x - 13$ tenglamani yeching.

1) $x - 3 \geq 0, \ \ x \geq 3$ bo'lsa, $x - 3 = 3x - 13, \ \ x - 3x = -13 + 3$

$-2x = -10, \ \ x = 5, \ \ 5 - 3 = 2 > 0.$

2) $x - 3 < 0, \ x < 3$ bo'lsa, $-x + 3 = 3x - 13, \ \ -4x = -16, \ x = 4, \ 4 - 3 = 1 > 0.$
$x = 4$ – chet ildiz.

J: x = 5.

V. $|f(x)| = f(x)$ **ko‘rinishdagi tenglamalar.**

Misol: $a)|x+5| = x+5$ $\quad b)|x^2+3x| = x^2+3x$

$|f(x)| = f(x)$ tenglamani yechish uchun $f(x) \geq 0$ tengsizlikni yechish yetarli.

Misol: $|x+5| = x+5, \quad x+5 \geq 0, \quad x \geq -5 \quad J{:}[-5,\infty)$.

Misol: $|x^2-3x| = x^2-3x, \;\; x^2-3x \geq 0, \;\; x(x-3) \geq 0, \;\; x_1 = 0; \;\; x_2 = 0.$

Oraliqlar usuli bilan yechamiz, J: $(-\infty; 0] \cup [3; \infty)$.

VI. $|f(x)| = -f(x)$ **ko‘rinishdagi tenglamalar.**

Bunday tenglamalarga misollar:

$a)\ \ |x-2| = 2-x \qquad b)|x^2-5x| = -x^2+5x$

$|f(x)| = -f(x)$ tenglamani yechish uchun $f(x) \leq 0$ tengsizlikni yechish yetarli.

Misol: $|x-2| = 2-x, \quad x-2 \leq 0, \quad x \leq 2.$ J: $(-\infty; 2]$.

Misol: $|x^2-5x| = -x^2+5x, \quad x^2-5x \leq 0, \quad x(x-5) \leq 0, \quad x_1 = 0, \;\; x_2 = 5,$

oraliqlar usuli bilan yechamiz, J: [0; 5].

VII. $|x-a|+|x-b|+|x-c| = d$ **ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish**

Bunday tenglamalarni yechish uchun *a*, *b* va c nuqtalar yordamida sonlar o‘qini oraliqlarga ajratamiz. Aytaylik $a < b < c$ bo‘lsin:

Bunda 4 ta oraliq hosil bo‘ladi:

1) $(-\infty; a)$, 2) $[a; b)$, 3) $[b; c)$, 4) $[c, \infty)$.

berilgan tenglama har bir oraliqda alohida–alohida yechiladi. Tenglamani biror oraliqda yechish degani o‘sha oraliqdan biror son tanlab x ning o‘rniga o‘sha sonni qo‘yganda har bir modul ichidagi qiymat musbat yoki manfiyligini aniqlab modulni ochib hosil bo‘lgan tenglama yechiladi va topilgan ildiz qaralayotgan oraliqda tegishli bo‘lsa javobga kiritiladi. Aks holda chet ildiz sifatida tashlab yuboriladi. Barcha oraliqlar uchun shu ish takrorlanadi.

1 – eslatma: mabodo tenglamani biror oraliqda yechayotganimizda x lar yo‘qolib to‘g‘ri sonli tenglik hosil bo‘lsa o‘sha qaralayotgan oraliqdagi barcha sonlar yechim bo‘ladi.

Misol: $|x+3|+|x-7|-|x-3|=9$ tenglamani yeching.

1) $x\in(-\infty,-3)$ bo‘lsin, $-x-3-x+7+x-3=9,\ \ x=-8\in(-\infty,3)$;

2) $x\in[-3,3)$ bo‘lsin, $x+3-x+7+x-3=9,\ \ x=2\in[-3,3)$;

3) $x\in[3,7)$ bo‘lsin, $x+3-x+7-x+3=9,\ \ -x=-4\ \ \ x=4\in[3,7)$;

4) $x\in[7,\infty)$ bo‘lsin, $x+3+x-7-x+3=9,\ \ \ x=10\in[7,\infty)$.

J: $x_1=-8,\ x_2=2,\ x_3=4,\ x_4=10$.

Misol: $|2x^2-7x+3|=2x^2-7x+3$ tenglamani yeching.

Yechish: Ikkala tomonda bir xil ifoda turibdi. Bir tomonda modul ostida, boshqa tomonda modulsiz. Tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun bu ifoda manfiy bo‘lmasligi yetarli, ya’ni:

$$2x^2-7x+3\ge 0\ \Rightarrow\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\ge 0\Rightarrow$$

$$x\le\frac{1}{2};\ \ x\ge 3.$$

J: $x\in(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[3,\infty)$.

Eng sodda modulli tengsizliklar. Eng sodda modulli tengsizlik deb $|x| < a,\ \ |x| > a$ koʻrinishdagi tengsizliklarga aytiladi. Bunda a – berilgan son.

a) $|x| < 3$ tengsizlikning mazmuni quyidagicha: qanday sonlarning modullari 3 dan kichik boʻladi, deb soʻraladi. Bunday sonlar esa son oʻqida –3 va 3 sonlari orasida joylashgan barcha sonlardir.

$|x| < 3$ tengsizlikning yechimlari (– 3,3) oraliqdan iborat ekan.

$|x| < 3$ tengsizlikni –3 < x < 3 koʻrinishdagi qoʻshtengsizlik shaklida yozish mumkin.

$|x| < -3$ tengsizlik yechimga ega emas.

$|x| < 0$ tengsizlik ham yechimga ega emas.

$|x| \le 0$ tengsizlikni yechish uchun $|x| = 0$ tenglamani yechish yetarli.

I. $a > 0$ boʻlganda modul $|x| < a$ tengsizlik $-a < x < a$ qoʻshteng- sizlik shaklida yozsa boʻladi.

II. 1) $|x| < a$ tengsizlikni $\begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases}$ sistema shaklida ham yozsa boʻladi.

2) $a \le 0$ boʻlsa $|x| < a$ boʻladi.

Misol: 1) $|x| < 7, \quad -7 < x < 7.$ J: (–7: 7).

2)$|x| < -5$ yechim yoʻq.

Oʻrganganlarimizni sal murakkab boʻlgan modulli tengsizliklarga ham qoʻllaymiz.

Misol: $|3x + 1| < 11$ tengsizlikni yeching.

$-11<3x+1<11$

$-12<3x<10$

$-4<x<\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$

J: $\left(-4;\ 3\frac{1}{3}\right)$.

2) $|x|>3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlarni son o‘qida tasvirlaymiz:

Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$ oraliqdagi barcha sonlardir.

$|x|>3$ tengsizlikni qo‘shtengsizlik shaklida yozib bo‘lmaydi. Demak sistema shaklida ham yozib bo‘lmaydi.

$|x|>3$ tengsizlik 2 ta mustaqil tengsizliklar shaklida yozish mumkin:

$x<-3$ va $x>3$.

1 – eslatma: $|f(x)|>a$ $a>0$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni ham 2 ta mustaqil f(x)< – a va f(x)>a tengsizliklarga ajratib yechib, ikkalasining ham yechimlarini to‘laligicha javobga kiritamiz.

Misol: $|5x+1|>24$ tengsizlikni yechish.

1) $5x+1>24$ 2) $5x+1<-24$

$5x>23$ $5x+1<-24$

$x>23:5=4{,}6$ $x<-25:5=-5$

J: (4,6; ∞), J: (–∞; –5),

Umumiy yechim: (–∞; –5)$\cup$(4,6; ∞).

Misol: $|x|>-5$ tengsizlikning yechimi (–∞; ∞).

Misol: $|x|>0$ tengsizlikning yechimi (–∞; 0)∪(0; ∞).

Misol: $|x|\geq 0$ tengsizlikning yechimi (–∞; ∞).

Misol: $1<|x|<4$ tengsizlikning yechimi (–4; 1)∪(1; 4).

2. $|f(x)|>|g(x)|$ **tengsizliklarni yechish.**

Bunday tengsizliklarni ikkala qismini kvadratga ko‘tarib $f^2(x) > g^2(x)$ ko‘rinishga keltirib yechamiz.

Misol: $2|x-1|\leq|x+3|$ tengsizlikning butun yechimlarini toping.

$$4(x^2-2x+1)\leq x^2+6x+9$$

$$4x^2-8x+4-x^2-6x-9\leq 0$$

$$3x^2-14x-5\leq 0,\quad 3x^2-14x-5=0,\quad D=196+60=256$$

$$x_1=\frac{14+16}{6}=5,\qquad x_2=\frac{14-16}{6}=-\frac{1}{3}\ .$$

J: [–1/3; 5], butun sonlardan iborat yechimi 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$|f(x)|>g(x)$ va $f(|x|)>0$ tengsizliklarni yechish.

1) $|f(x)|>g(x)$ tengsizliklar quyidagicha yechiladi.

$a)\, f(x)\geq 0$ bo'lganda $f(x)\geq g(x)$. $\quad b)\, f(x)<0$ bo'lganda $f(x)>g(x)$.

2) $f(|x|)>0$ tengsizlikni yechishda ham *x* ga nisbatan 2 marta shart qo‘yib hosil bo‘lgan tengsizlikni yechib shartga mos vavob tanlanadi.

Misol: $|x|\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$ tengsizlikni yeching.

1) $x>0$ bo‘lsin $x\left(x-\frac{1}{2}\right)<0,\quad x=0;\ x=\frac{1}{2}.$

J: $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

2) $x<0$ bo‘lsin $-x\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$, $x=0$; $x=\frac{1}{2}$.

J: $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Misol: $|x-2|\le 6$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $-6\le x-2\le 6 \Rightarrow -4\le x\le 8$

J: $x\in[-4,8]$.

Misol: $|x+3|>1$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Agar modul ostidagi ifoda manfiy bo‘lsa, $x+3<-1$, bun- dan $x<-4$ bo‘lishi, agar modul ostidagi ifoda musbat bo‘lsa, $x+3>1$ bo‘lishi, bundan $x>-2$ bo‘lishi lozim.

J: $x\in(-\infty,-4)\cup(-2,\infty)$.

Misol: $|x^2-5x+4|>0$ tengsizlik $x^2-5x+4=0$ tenglamaning ildizlaridan tashqari x ning barcha qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $x\ne 1,\ x\ne 4$.

J: $x\in(-\infty,1)\cup(1,4)\cup(4,\infty)$.

Misol: $|x^2+3x+1|>5$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Bu tengsizlik quyidagi ikkita tengsizlikka teng kuchli.

1) $x^2+3x+1<-5$ 2) $x^2+3x+1>5$

Birinchisini yechamiz:

$x^2+3x+6<0$, $D=9-24<0$ bo‘lgani uchun x^2+3x+6 ifoda hamma vaqt musbat bo‘ladi.

Ikkinchi tengsizlikni yechamiz:

$x^2+3x-4>0$, yoki $(x+4)(x-1)>0$.

Bundan, $x\in(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$ yechimni topamiz.

MASHQLAR:

1. Tenglamalarni yeching.

1) $|x+2|=4$; 2) $|3x-5|=6$;

3) $|2x+3|=7$; 4) $|5x-4|=9$.

2. Tenglamalarni yeching.

1) $|x+3|=2(x-1)$; 2) $|4x-2|=7x+1$;

3) $|2x-1|=9-x$; 4) $|4x-1|=10-2x$;

5) $|5-x|=2x+3$; 6) $|3-2x|=4-3x$.

3. Tenglamalarni yeching.

1) $|x-2|+|x+2|=4$; 2) $|x+4|-|x-1|=3$;

3) $|x+3|-|x-1|=2$; 4) $|2x-6|-|x+2|=4$;

5) $|x+3|+|x-2|-|x-1|=4$; 6) $|x-5|+|x-2|+|x+1|=3$.

4. Tenglamalarni yeching.

1) $|x^2-5x+6|=x^2-5x+6$; 2) $|x^2-x-6|=x^2-x-6$;

3) $|2x^2-7x+5|=7x-2x^2-5$; 4) $|-3x^2-8x-5|=3x^2+8x+5$;

5) $|x^2+3x-4|=x-1$; 6) $|x^2-3x+3|=x$.

5. Tengsizliklarni yeching.

1) $|x-3|<5$; 2) $|x-4|<6$;

3) $|5x-4|\le 6$; 4) $|3x+2|\le 7$.

6. Tengsizliklarni yeching.

1) $|x+4|>2$; 2) $|x-5|>6$;

3) $|2x-3|\ge 5$; 4) $|3x-7|\ge 9$.

7. Tengsizliklarni yeching.

1) $x^2-3x+2>|x-3|$; 2) $x^2-2>|x^2+3x|$;

3) $|x^2-3x+2|<5$; 4) $|x^2+4x-6|<3x-6$.

8. Tengsizliklarni yeching.

1) $|x+2|\geq|x-1|$; 2) $|3x-1|\leq|x+5|$;

3) $|x-1|+3>|x+2|$; 4) $|x+1|-2|x|\geq-4$.

9. a ning qanday qiymatlarida $ax\leq|a|$ tengsizlikning echimlari to‘plami $[-1;\infty)$ oraliqdan iborat bo‘ladi?

10. a ning qanday qiymatlarida $a^6x\geq|a|^3$ tengsizlikning echimlari $x\geq\frac{1}{8}$ bo‘ladi?

11. Tengsizlikni eching. $\frac{2}{|x-4|}\leq 1$

12. Ushbu $\left|\frac{3}{x-7}\right|>\frac{6}{7}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha butun echimlari yig‘indisini toping.

13. Ushbu $x^2-3|x|-4\leq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun sonlarning yig‘indisini aniqlang.

14. Ushbu $|5-2x|\leq 3$ tengsizlikning butun echimlari yig‘indisini toping.

15. Ushbu $y=\sqrt{\frac{x}{|x|-3}}$ funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

16. Ushbu $|8-x|<4$ tengsizlikning eng katta butun yechimini toping.

17 - § Irratsional tenglama va tengsizliklar.

Ta'rif: Noma'lum son ildiz belgisi ostida qatnashgan tenglamalar irratsional tenglamalar deyiladi.

$a)\sqrt{x}=3, \quad b)\sqrt[4]{x+3}=7, \quad c)\sqrt{2x^2-5x+6}=23+x.$

Irratsional tenglamani yechish uchun biror usulda ildizdan qutulib olish kerak va hosil bo'lgan rasional tenglamani yechib ildizlarini topib topilgan ildizlarni dastlabki tenglamaga qo'yib tekshirish kerak.agar chet ildizlar bo'lsa aniqlab tashlab yuboriladi.

Quyidagilarni esda tutish zarur:

I. $\sqrt[2n]{a}$ – ifoda $a>0$ bo'lganda ma'noga ega;

II. $\sqrt[2n+1]{a}$ – ifoda $a\in(-\infty,\infty)$ bo'lganda ma'noga ega;

III. $\sqrt{a^2}=|a|$, a – har qanaday son bo'lsa;

IV. $\sqrt{a^2}=a, \ \ a\geq 0$ bo'lsa;

V. $(\sqrt[n]{a})^n=a$ agar n – toq natural son bo 'lsa.

Irratsional tenglamalarni yechishda ko'pincha tenglamaning ikkala qismini bir xil darajaga ko'tarish usulidan foydalaniladi. Qanday darajaga ko'tarish berilgan tenglamaga qarab aniqlanadi. Ayrim tenglamalar bir marta darajaga ko'tarish bilan yechiladi. Ayrim tenglamalarda esa 2 yoki 3 marta darajaga ko'tarishga to'g'ri keladi. Ayrim tenglamalar belgilash yo'li bilan soddaroq tenglamalarga aylantirib olish mumkin bo'ladi.

1 – eslatma: Irratsional tenglamani u yoki bu usul bilan yechib topilgan ildizlarni dastlabki berilgan tenglamaga qo'yib tekshirish shart.

Bitta ildiz qatnashgan sodda irratsional tenglamalar.

Misol: $a)\sqrt{x}=3, \quad (\sqrt{x})^2=3^2, \quad x=9.$

$b)\ \sqrt[3]{2x-1}=2, \quad (\sqrt[3]{2x\text{-}1})^3=2^3, \quad 2x-1=8, \quad 2x=9, \quad x=9:2, \quad x=4{,}5.$

$c)\ \sqrt{8x}+\sqrt{2x}=6\,, \quad 2\sqrt{2x}+\sqrt{2x}=6\,, \quad 3\sqrt{2x}=6, \quad (\,3\sqrt{2x})^2=6^2,$
$9\cdot 2x=36, \quad 18x=36, \quad x=2.$

Bitta ildiz qatnashgan va ildizdan tashqarida ham noma'lum ishtirok etadigan tenglamalar.

Misol: $\sqrt{x}=x-6$

$(\sqrt{x})^2=(x-6)^2$

$x=x^2-12x+36$

$x^2-13x+36=0$

$D=169\text{-}144=25.$

$x_1=\dfrac{13+5}{2}=9, \quad x_2=\dfrac{13-5}{2}=4.$

$x=4$ - *chet ildiz.*

J: x = 9.

4. Faqat ikkita ildiz qatnashgan irratsional tenglamalar.

Misol: $\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x}=0$

$(\sqrt{x^2-2})^2=(\sqrt{x})^2$

$x^2-x-2=0$

$x_1=2, \quad x_2=-1.$

$x_2=-1\ -\ $ *chet ildiz.*

J: x = 2.

Ikkita ildizdan tashqari o'zgarmas qo'shiluvchisi bo'lgan $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=c$ **ko'rinishdagi tenglamalarni yechish.**

Bunday tenglamalarni yechishni 2 xil bajarish mumkin.

Misol: $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$ tenglamani yeching.

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x})^2=4^2$$

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16$$

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6$$

$$(2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x})^2=6^2$$

$$4(11x-x^2-11+x)=36$$

$$4(x^2-12x+20)=0$$

$$x^2-12x+20=0$$

$x_1=2$, $x_2=10$.

6. $\sqrt{f^2(x)}=f(x)$ va $\sqrt{f^2(x)}=-f(x)$ **ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish.**

$\sqrt{f^2(x)}=f(x)$ tenglamani $|f(x)|=f(x)$ ko‘rinishga keltiriladi.

Demak, $f(x)\geq 0$tengsizlikni yechish kerak.xuddi shuningdek, $\sqrt{f^2(x)}=-f(x)$ tenglamani ham $|f(x)|=-f(x)$ ko‘rinishga keltirib $f(x)\leq 0$ tengsizlik yechiladi.

Misol: $\sqrt{(3-2x)^2}=2x-3$

$$|3-2x|=2x-3$$

$$3-2x\leq 0$$

$$-2x\leq -3$$

$$x\geq 1{,}5$$

J: (1,5; ∞).

Belgilash usuli bilan yechiladigan tenglamalar**.**

Misol: $\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0$ tenglamani yeching. $\sqrt[4]{x^2+77}=y$ deb belgilasak,

$y^2-2y-3=0$

$y_1=-1, \quad y_2=3.$

$\sqrt[4]{x^2+77}=-1$ ma’noga ega emas.

$\sqrt[4]{x^2+77}=3$

$(\sqrt[4]{x^2+77})^4=3^4$

$x^2+77=81$

$x^2=4$

J: $x=\pm 2$.

Modul ostidagi ifodani $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ formula bo‘yicha yo‘yib soddalashtiriladigan tenglamalar.

Misol: $\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}+\sqrt{8+2\sqrt{x+7}+x}=4$

$8+2\sqrt{x+7}+x=1+7+2\sqrt{x+7}+x=x+7+2\sqrt{x+7}+1=(\sqrt{x+7}+1)^2$

$\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}+\sqrt{(\sqrt{x+7}+1)^2}=4$

$\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+7}+1=4 \qquad (\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}})^2=(3-\sqrt{x+7})^2$

$x+1-\sqrt{x+7}=9-6\sqrt{x+7}+x+7 \quad 5\sqrt{x+7}=15 \quad \sqrt{x+7}=3$

$(\sqrt{x+7})^2=3^2 \qquad x+7=9 \quad x=9-7=2$

J: $x = 2$.

Irratsional tengsizliklar. Irratsional tengsizliklar asosan quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

I. $\sqrt{f(x)}>g(x)$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechish.

Bunday tengsizliklarni yechish uchun avvalo $f(x)\geq 0,\quad g(x)\geq 0$ va $f(x)>g(x)$ tengsizliklarning umumiy yechimini topish kerak, so‘ngra $g(x)\leq 0$ va $f(x)\geq 0$ tengsizliklarning umumiy yechimini topib ikkala holdagi yechimlarning har biri olinadi.Boshqacha aytganda $\sqrt{f(x)}>g(x)$ tengsizliklarni yechish uchun ushbu 2 ta sistemalarni yechib ikkalasini ham yechimlari olinadi.

$$1)\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \quad \text{va} \quad 2)\begin{cases} \mathrm{g(x)}\leq 0 \\ \mathrm{f(x)}\geq 0 \end{cases}$$

Misol: $\sqrt{x+2}>x$ tengsizlikni yeching.

$$1)\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+2>x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq 0 \\ x\in(-1,2) \end{cases} \Rightarrow [0,2) \quad \text{va} \quad 2)\begin{cases} \mathrm{x}\leq 0 \\ \mathrm{x}+2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ x\geq -2 \end{cases} \Rightarrow [-2,0]$$

II. $\sqrt{f(x)}<g(x)$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechish.

Bu tengsizlikni yechish uchun $f(x)\geq 0,\quad g(x)\geq 0$ va $f(x)<g^2(x)$ tengsizliklarni yechib umumiy yechimi olish yetarli:

$$\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)<g^2(x) \end{cases}$$

1 – eslatma: $c>0$ bo‘lsa $\sqrt{f(x)}>c$ tengsizlikni yechish uchun $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)>c^2 \end{cases}$ sistemani yechish yetarli.

2 – eslatma: $c<0$ bo‘lsa $\sqrt{f(x)}>c$ tengsizlikni yechish uchun $f(x)\geq 0$ sistemani yechish yetarli.

Misol: $\sqrt{x+1}>-3$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $x+1\geq 0,\quad x\geq -1.$

J: [-1; ∞).

3 – eslatma: $c > 0$ bo‘lsa $\sqrt{f(x)} < c$ tengsizlikni yechish uchun

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < c^2 \end{cases}$ sistemani yechish yetarli.

4 – eslatma: $c < 0$ bo‘lsa $\sqrt{f(x)} < c$ tengsizlik yechimga ega emas.

III. $\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x)$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechish uchun $f(x) > (g(x))^{2k+1}$ tengsizlikni yechish yetarli.

IV. $\sqrt[2k+1]{f(x)} < g(x)$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechish uchun $f(x) < (g(x))^{2k+1}$ tengsizlikni yechish yetarli.

V. $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechish uchun

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ sistemani yechish yetarli.

Berilgan tengsizlik ushbu ko‘rinishlardan farq qilsa shu paytgacha o‘rganilgan tushunchalarni qo‘llash kerak.

Misol: $(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \leq 0$ tengsizlikni yeching.

1) $6+x-x^2=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=3.$

2) $\begin{cases} 6+x-x^2>0 \\ x-1\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2)>0 \\ x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty;-2)\cup(3; \\ x\leq 1 \end{cases}$

J: $(-\infty; -2) \cup \{3\}$.

5 – eslatma: Berilgan tengsizlikning eng katta yoki eng kichik butun yechimini topish talab etilganda berilgan javoblarning tengsizlikka qo‘yib tekshirib topish mumkin.

MASHQLAR:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini toring:

1) $y=\sqrt{|x-1|(x-3)}$;   2) $y=\sqrt{|x+2|(2x-5)}$;

3) $y=\sqrt{(x+3)\sqrt{2-x}}$;   4) $y=\sqrt{(4-x)\sqrt{2x+3}}$;

5) $y=\dfrac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}$;   6) $y=\dfrac{x}{(x+3)\sqrt{4x+x^2}}$;

7) $y=\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$;   8) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{x^2-6x+8}$.

2. Tenglamani yeching.

1) $\sqrt{(3x-13)^2}=13-3x$;   2) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;

3) $\sqrt{x^4-9x^2}=-4x$;   4) $\sqrt[6]{25+\sqrt{x+13}}-2=0$;

5) $\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0$;   6) $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}-6$;

7) $\sqrt{x^3-2x^2-4x}=0$;   8) $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$.

3. Tenglamani yeching.

1) $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0$;   2) $(x^2-9)\sqrt{x+1}=0$;

3) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$;   4) $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2...}}}=49$;

5) $\sqrt{x+4\sqrt{x+1}+5}+\sqrt{18+6\sqrt{9-x}-x}=9$;

6) $\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}+\sqrt{8+2\sqrt{x+7}+x}=4$;

7) $\sqrt{x^2+10+6\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{2+x^2-2\sqrt{x^2+1}}+1=0$;

8) $\sqrt{x^2-4x-21}+\sqrt{10+3x-x^2}=2$.

4. Tengsizliklarni yeching.

1) $(x+3)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$;   2) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\leq 0$;

3) $(x-2)\sqrt{3+2x-x^2} \geq 0$; 4) $\sqrt{5x-2x^2-42} > 3$;

5) $\sqrt{x^2-6x+9} < 3$; 6) $\sqrt{9-x} \leq 2$.

5. Tengsizliklarni yeching.

1) $\sqrt{3x+10} > \sqrt{6-x}$; 2) $\sqrt{x^2-16} < \sqrt{4x+16}$;

3) $\sqrt{3x-8} > \sqrt{5-x}$; 4) $\sqrt{5-x^2} > x-1$;

5) $\sqrt{x-50}\sqrt{100-x} > 0$; 6) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x-7} \geq 1$.

6. Tengsizliklarni yeching.

1) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{5x+7}} \geq -2$; 2) $\sqrt{\dfrac{8-x}{x-18}} > -1$;

3) $\sqrt{\dfrac{x^2-2}{x}} \leq 1$; 4) $\sqrt{\dfrac{2-3x}{x+4}} > -2$;

5) $\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2} \leq 0$; 6) $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{6-3x} \geq 0$.

7. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2} = x+2 \\ \sqrt{(x-2)^2} = 2-x \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \sqrt{(x+5)^2} = x+5 \\ \sqrt{(x-5)^2} = 5-x \end{cases}$.

8. Tengsizliklarni yeching.

1) $\dfrac{\sqrt{x+2} \cdot (x-1)^2 x^3}{(x+1)^4} < 0$; 2) $(\sqrt{4-x})^2 \leq \dfrac{21-x^2}{4}$;

3) $x \cdot (x^2+4x+4) \cdot \sqrt{25-x^2} \geq 0$; 4) $\dfrac{(x^2-9) \cdot \sqrt{x+5}}{(x^2-4) \cdot \sqrt{3-x}} \leq 0$;

5) $(x+2) \cdot (x^2+10x+25) \cdot \sqrt{49-x^2} \geq 0$;

6) $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$.

V BOB FUNKSIYA TUSHUNCHASI VA GRAFIKLARI

1-§ Funksiya tushunchasi. Aniqlanish va qiymatlar sohasi.

Kundalik hayotimizda tabiatdagi, jamiyatdagi hodisalarni bir-biriga bog‘liqligini ko‘ramiz: havo haroratini vaqtga nisbatan o‘zgarishi, transport vositasini kelmaganligi sababli talabaning darsga kechikishi va h.k.

Matematika bunday hodisalarni o‘rganishni umumlashtiradi va umumiy xulosalar chiqaradi.

Faraz qilaylik ikkita sonli to‘plamlar X va Y berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar o‘zgaruvchi miqdor x ning har bir qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi miqdor y ning ma’lum qiymati mos keltirilgan bo‘lsa, y x ning funksiyasi deyiladi va $y = f(x)$ (yoki $y = f\quad(x), y = y(x),...)$ kabi belgilanadi.

O‘zgaruvchi x o‘zgarish jarayonida boshqa o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan holda o‘zgaradi, shuning uchun erkli o‘zgaruvchi yoki argument deyiladi, y ning o‘zgarishi esa x ning qiymatlariga bog‘liq holda amalga oshadi, shuning uchun u bog‘liq o‘zgaruvchi yoki funksiya deyiladi. x va y orasidagi bog‘lanish funksional bog‘lanish deyiladi. Funksional bog‘lanishni bildiruvchi $y = f(x)$ ifoda y ning qiymatini hosil qilish uchun x va o‘zgarmas miqdorlar ustida bajarilishi kerak bo‘lgan amallar majmuasini bildiradi.

Bu misollarda argument (kub qirrasi x, doira radiusi R, vaqti t) boshqa o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan holda o‘zgaradi, funksiya (hajm, yuza, masofa) esa argumentning o‘zgarishiga bog‘liq holda o‘zgaradi.

Agar $y = f(x)$ funksional bog‘lanishda argument x ning har bir qiymatiga funksiya y ning ikkita (yoki ko‘p) qiymatlari mos kelsa, funksiya ikki (yoki ko‘p) qiymatli deyiladi.

Misol. $y = 2x + 3$ bir qiymatli funksiya, $y^2 = |x|$ ikki qiymatli funksiya $(y = \pm\sqrt{1x1})$. $y = c$ $(c = const)$ ham funksional bog‘lanishni bildiradi. Bu yerda argument x ning barcha qiymatlari uchun funksiya y o‘zgarmas miqdor c ni qabul qiladi.

Ta’rif. Funksiyaning aniqlanish (yoki mavjudlik) sohasi deb argument x ning shunday qiymatlar to‘plamiga aytiladiki, bu qiymatlar uchun funksiya y aniqlangan bo‘lsin. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)$ yoki $D(f)$ orqali belgilanadi.

Misol. $y = x - 5$ funksiya uchun: $D(y) = (-\infty, \infty)$ yoki $x \in (-\infty, \infty)$.

$y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ funksiya uchun: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2, 2) \cup (2; \infty)$ yoki $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 2) \cup (2, \infty)$, yani $x = -2$ va $x = 2$ da kasr maxraji nolga teng bo‘lsa, funksiya ma’noga ega bo‘lmaydi.

Ta’rif. Funksiyaning qiymatlar (yoki o‘zgarish) sohasi deb funksiya y ning aniqlanish sohasida qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymat-lari to‘plamiga aytiladi va $E(y)$ bilan belgilanadi.

Misol. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ funksiya uchun $D(y) = (-\infty, \infty)$ bo‘lsa, $E(y) = (0, 1]$ bo‘ladi.

MASHQLAR:

1. Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

1) $y = \dfrac{3}{x + 2}$; 2) $y = \dfrac{2}{3x - 2}$;

3) $y=\dfrac{2x}{x-3}$; 4) $y=\dfrac{5x}{4x+3;}$

5) $y=\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-2)}$; 6) $y=\dfrac{x+6}{(x+2)(x-3)}$;

7) $y=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)(x-2)}$; 8) $y=\dfrac{x+1}{x(x-2)(x-3)}$;

9) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$; 10) $y=\dfrac{x-3}{x^2+4x+3}$;

11) $y=\dfrac{2x-3}{x^2+2x+5}$; 12) $y=\dfrac{5x+1}{2x^2-3x+10}$;

13) $y=x^2+\dfrac{1}{x+1}$; 14) $y=x+1-\dfrac{1}{x+2}$;

15) $y=\sqrt{x-4}$; 16) $y=\sqrt{9-x^2;}$

17) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3x+2}}$; 18) $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+4}}$;

19) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^2+2x+5}$; 20) $y=\dfrac{1}{2x+1}-\sqrt{x^2-x+3}$.

2. Funksiyaning qiymatlar sohasini aniqlang.

1) $y=|x-3|$; 2) $y=|1-2x|$;

3) $y=2x^2-1$; 4) $y=3-x^2$;

5) $y=\dfrac{x}{x-3}$; 6) $y=\dfrac{2x}{1+3x}$;

7) $y=\sqrt{x-3}-2$; 8) $y=3+\sqrt{2-x}$;

9) $y=\sqrt{x^2+x+2}$; 10) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

2-§ Funksiyaning berilish usullari

1. Jadval usuli: Argumentning $x_1, x_2 ... x_n$ ma’lum qiymatlariga mos keluvchi funksiyaning $y_1, y_2, ... y_n$ qiymatlari jadval ko‘rinishda berilgan bo‘ladi. Bunga trigonometrik funksiyalarning qiymatlar jadvallari, logorifmlar jadvallari va hokazolar misol bo‘lishi mumkin.

Masalan: $f(x) = x^2$ va $f(x) = x^3$ funksiyani jadval ko‘rinishida yozamiz.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^3$	-8	-1	0	1	8

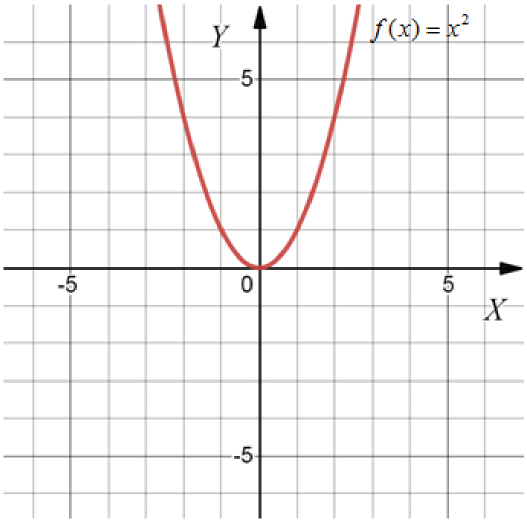
2. Grafik usuli: Bu usulda Oxy tekisligida funksiyaning grafigi berilgan bo‘ladi.

Ta’rif: Funksiyaning grafigi deb shunday nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladiki, ularning abssissalari argument x ning qiymatlari bo‘lib, ordinatalari funksiya y ning mos qiymatlaridan iborat bo‘ladi.

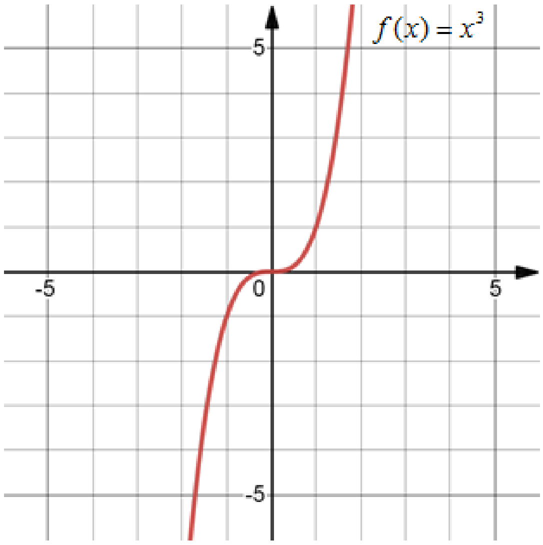
Masalan: $f(x) = x^2 + 3x$ funksiyaning grafigini chizamiz.

3. Analitik usul: Bu usulda funksional bog‘lanish formula yordamida beriladi.

Masalan: $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$; $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $Q = \pi R^2$.



1-rasm.



2-rasm.

Keltirilgan usullardan eng muhimi analitik usuldir. Bu usulda funksiya ixcham berilgan bo‘lib, x ning mumkin bo‘lgan har qanday qiymati uchun funksiya y ning mos qiymatini hisoblash mumkin bo‘ladi. Eng asosiy afzalligi esa bu usulda berilgan funksiya uchun matematik analiz usullarini qo‘llash mumkin bo‘ladi. Analitik usulda berilgan funksiya uchun qiymatlar jadvalini tuzish mumkin, grafikni ham yasash mumkin.

Aniqlanish sohasining turli qismlarida funksional bog‘lanish turli analitik ko‘rinishlarda berilishi mumkin. Masalan:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & -\infty < x < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \le x < 1 \\ 2x^2-2 & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

MASHQLAR:

1. Funksiya berilishini jadval ko‘rinishini aniqlang.

1) $y=x^2-5x+4$; 2) $y=x^5+6x^3-7$;

3) $y=-x^2+8x-7$; 4) $y=3x-x^2$;

5) $y=\frac{x^2}{x-3}$;

6) $y=\frac{2x^2+3x}{1+3x}$;

7) $y=x^3-2x$;

8) $y=3+\sqrt{2x-3}$;

9) $y=\sqrt{x^2+2x+1}$;

10) $y=x^3+2x-4$.

2. Funksiyalarning grafigini chizing.

1) $y=x+3$;

2) $y=3x^2+2x-7$;

3) $y=-x^2+x+8$;

4) $y=x-2x^2$;

5) $y=3x^3-x^2+2$;

6) $y=3x^2-6x$;

7) $y=\frac{x}{x-3}$;

8) $y=3x^3-7x^2+3$;

9) $y=\frac{2x+3}{x-7}$;

10) $y=\frac{x^2+5x}{x-3}$.

3. Berilgan funksiyalarning grafigini bitta koordinatalar sistemasida chizing.

1) $y=2x$ va $y=-2x$;

2) $y=-x^2$ va $y=-3x^2$;

3) $y=x^2$ va $y=(x-1)^2$;

4) $y=-x^2$ va $y=-\frac{1}{3}x^2$;

5) $y=x^3$ va $y=(x+1)^3$;

6) $y=x^3$ va $y=x^3+2$;

7) $y=x^3$ va $y=x^3-2$;

8) $y=\sqrt[3]{x}$ va $y=\sqrt[3]{x-2}$;

9) $y=\sqrt{x}$ va $y=\sqrt{x}+3$;

10) $y=\sqrt{x}$ va $y=\sqrt{x}-1$.

4. $f(x)=x^2-3x+1$ funksiya berilgan.

$f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, larni hisoblang.

5. $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$ funksiya berilgan.

$f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, larni hisoblang.

6. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & -3\le x<0 \\ 2x-3 & 0\le x\le 5 \end{cases}$ funksiya berilgan $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(5)$ larni toping.

7. $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x<0 \\ 2 & 0\le x\le 2 \\ x+2 & x>2 \end{cases}$ funksiya berilgan $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ larni toping.

8. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini nuqtalar bo‘yicha yasang:

1) $y=3-2x^2$;

2) $y=\frac{1}{2}x^2-2$;

3) $y=\frac{1}{3}-2x$;

4) $y=3x^3-4x+5$;

6) $y=x^2-5$;

6) $y=3x+8$;

7) $y=x^3+2x-5$;

8) $y=\frac{1}{2}x^2+3x$;

9) $y=x^4-4x^2+5$;

10) $y=x^4+2x-1$.

11) $y=[x]$ (x ning butun qismi)

12) $y=\{x\}$ (x ning kasr qismi)

13) $y=\begin{cases} 3 & x\le 0 \\ 2x-1 & 0<x<3 \\ x^2+1 & x\ge 3 \end{cases}$

14) $y=\begin{cases} x-3 & x<1 \\ 2 & 1\le x\le 3 \\ x^2 & x>3 \end{cases}$

15) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 3\\ 2x & x>1\\ 2 & x<1\end{cases}$

16) $y=\begin{cases}x+2 & x<1\\ \sqrt{4-x^2} & 1\le x\le 2\end{cases}$

3-§ Funksiyaning juft-toqligi

Agar $\forall x\in D$ uchun $-x\in D$ bo‘lsa: D soha simmetrik to‘plam (soha) deyiladi, $(-\infty,\infty)$, $(-a,a)$, $(-10,-3)\cup(3;10)$ oraliqlar simmetrik sohalar, chunki ularning har biri $\mathrm{O}(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik sohalardir.

Ta’rif. Agar $\mathrm{O}(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik sohada $f(-x)=f(x)$ shart bajarilsa, bu sohada $y=f(x)$ juft funksiya deyiladi: $f(x)=2x^4+x^2+6$, $f(x)=5$, $f(x)=|x|$, $f(x)=\cos x$ umuman olganda $y=f(x^{2n})$ ($n\in N$) juft funksiyaga misol bo‘la oladi.

Ta’rif. Agar $\mathrm{O}(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik D sohada $f(-x)=-f(x)$ shart bajarilsa, bu sohada $y=f(x)$ toq funksiya deyiladi: $f(x)=2x^3+x,\quad f(x)=\sin x,\quad y=f(x^{2n+1})$, ($n\in N$) toq funksiyaga misol bo‘la oladi.

Funksiya toq ham, juft ham bo‘lmasligi mumkin: $y=2x^3-3x^2+5$ juft ham, toq ham emas.

Juft yoki toq funksiyalarning bazi xossalarini (isbotsiz) keltiramiz.

$y=f(x)$ funksiya $D(f)$ sohada, $y=\varphi(x)$ funksiya $D(\varphi)$ sohada juft (yoki toq) bo‘lsin.

Bu ikkala funksiyaga umumiy bo‘lgan $D(f)\cap D(\varphi)$ sohada ularning yig‘indisi $f(x)+\varphi(x)$ ayirmasi $f(x)-\varphi(x)$ juft (yoki toq) funksiya bo‘ladi. Ikkalasi ham juft (yoki toq) bo‘lsa, ko‘paytmasi juft, juft-toqligi har xil bo‘lsa – toq bo‘ladi agar maxrajdagi funksiya noldan farqli bo‘lsa ikki funksiya bo‘linmasi ham huddi ko‘paytmadek aniqlanadi.

Natija. $y=f(x)$ funksiya juft (yoki toq) bo‘lsa, $y=a\cdot f(x)(a=const)$ juft (yoki toq) ligini saqlaydi. Shunga o‘xshash $f(x)\pm\varphi(x)$ juft (yoki toq) bo‘lsa, $a\cdot f(x)\pm b\cdot\varphi(x)$ ham juft (yoki toq) bo‘ladi.

Agar D simmetrik sohada ixtiyoriy $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa, uni $\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(x))$ juft va $\psi(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ toq funksiyalar yig‘indisi shaklida tasvirlab bo‘ladi. Ya’ni $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$. Bu tenglikning tog‘riligi yaqqol ko‘rinib turibdi. Juft funksiyalarning grafigi O*y* o‘qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrikdir.

Aytaylik, $f_1(x)$ funktsiya $X_1\subset R$ to‘plamda, $f_2(x)$ funktsiya esa $X_2\subset R$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

Agar

1) $X_1=X_2$

2) $\forall x\in X_1$ da $f_1(x)=f_2(x)$

bo‘lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funktsiyalar o‘zaro teng deyiladi va $f_1(x)=f_2(x)$ kabi belgilanadi.

MASHQLAR:

1. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang.

1) $f(x) = 195;$

2) $f(x) = 0;$

3) $f(x) = 2x^2 - |x|;$

4) $f(x) = 2|x| - 4x^4 + 5;$

5) $f(x) = (3-x)^3 + (3+x)^3;$

6) $f(x) = (2x-7)^4 + (2x+7)^4;$

7) $f(x) = 3x^3 - 5x^5;$

8) $f(x) = 4x^5 + 7x^7;$

9) $f(x) = \dfrac{|x+3|}{x-2} + \dfrac{|x-3|}{x+2};$

10) $f(x) = \dfrac{|2-x|}{4-x} + \dfrac{|2+x|}{4+x};$

11) $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5) - (x+1)(x+3)(x+5);$

12) $f(x) = (x-2)(x-4) + (x+2)(x+4);$

13) $f(x) = (x+3)^4(x-4)^5 + (x-3)^4(x+4)^5;$

14) $f(x) = (2x^2 - 3x)(3x^3 + 4x^2 + 4x - 5) - (2x^2 + 3x);$

15) $f(x) = 2^{x^2};$

16) $f(x) = 4^{|x|};$

17) $f(x) = 3^x;$

18) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$

2. Quyidagi funksiyalarni juft va toq funksiyalar yig‘indisi shaklida ifodalang:

1) $f(x) = 2x^4 + 3x - 1;$

2) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3;$

3) $f(x) = |3x + 1| + x^2 - 3;$

4) $f(x) = x^2|x - 1| + 4;$

5) $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{3x+1} - \dfrac{(x-1)^2}{x+2};$

6) $f(x) = \dfrac{(x-4)^2}{x+3} - \dfrac{(x+3)^2}{x-2}.$

4-§ Funktsiyaning chegaralanganligi, nollari, o‘sishi va kamayishi va monoton funktsiyalar.

Funktsiyaning chegaralanganligi. $f(x)$ funktsiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas M soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda yuqoridan chegaralangan deyiladi. Agar shunday o‘zgarmas m soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \geq m$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda quyidan chegaralangan deyiladi.

Ta’rif. Agar $f(x)$ funktsiya X to‘plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda chegaralangan deyiladi.

Misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ funktsiyani qaraylik. Bu funktsiya R da chegaralangan bo‘ladi.

Ravshanki, $\forall x\in R$ da $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}>0$.

Demak, berilgan funktsiya R da quyidan chegaralangan.

Ayni paytda, $f(x)$ funktsiya uchun

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\le 1+\frac{x^2}{1+x^4}$$

bo‘ladi. Endi

$$0\le (x^2-1)^2=x^4-2x^2+1 \quad\Rightarrow\quad 2x^2\le x^4+1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{x^4+1}\le\frac{1}{2}$$

bo‘lishini e’tiborga olib, topamiz: $f(x)\le 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Bu esa $f(x)$ funktsiyaning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, berilgan funktsiya R da chegaralangan.

Ta’rif. Agar har qanday $M>0$ son olinganda ham shunday $x_0\in X$ nuqta topilsaki,

$$f(x_0)>M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda yuqoridan chegaralanmagan deyiladi.

Monoton funktsiyalar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $\forall\, x_1, x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo‘lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda o‘suvchi deyiladi. Agar $\forall\, x_1, x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo‘lganda $f(x_1)<f(x_2)$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda qat’iy o‘suvchi deyiladi.

Ta’rif. Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda kamayuvchi deyiladi. Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya X to‘plamda qat’iy kamayuvchi deyiladi.

Ta’rif. O‘suvchi hamda kamayuvchi funktsiyalar umumiy nom bilan monoton funktsiyalar deyiladi.

Misol. Ushbu $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ funktsiyaning $X = [1, +\infty)$ to‘plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

$[1, +\infty)$ da ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo‘lsin deylik. Unda

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1 x_2^2 - x_2 - x_2 x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 (x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0, \qquad 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo‘lishini e’tiborga olib,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

ya’ni, $f(x_1) > f(x_2)$ ekanini topamiz. Demak,

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar $X \subset R$ to‘plamda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, $C = const$ bo‘lsin. U holda

a) $f(x)+C$ funktsiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

b) $C>0$ bo‘lganda $C\cdot f(x)$ o‘suvchi, $C<0$ bo‘lganda $C\cdot f(x)$ kamayuvchi bo‘ladi.

v) $f(x)+g(x)$ funktsiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

Funksiyalarning nollari, o‘sishi va kamayishi.

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning nollari deb shunday $x_i\,(i = 0,1,2,...,k)$, $(x_i \in D(f))$ sonlarga aytiladiki, bu qiymatlar uchun $f(x_i) = 0$ bo‘lsin.

Boshqacha qilib aytganda, funksiyaning nollari deb $f(x) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi x ning qiymatlariga aytiladi. $f(x) = x^2 - 4$ funksiyaning nollari $x_1 = -2,$ $x_2 = 2$ dan iborat, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$ funksiyaning noli $x = -1$.

Faraz qilaylik, $x_1 \in (a,b),$ $x_2 \in (a,b)$ bo‘lib, $x_1 < x_2$ uchun $f(x_1) < f(x_2)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘suvchi va $f(x_1) > f(x_2)$ bo‘lsa – kamayuvchi funksiya deyiladi: $y = 3x+5$ funksiya butun sonlar o‘qida o‘suvchi, $Q = \pi R^2$ $0 < R < \infty$ uchun o‘suvchi, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ $x \in (0,\infty)$ oraliqda kamayuvchi funksiyadir.

Biror D sohada o‘suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi. Agar $x_1 < x_2$ uchun $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya noqat’iy o‘suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi.

Bunday funksiyalarga noqat'iy monoton funksiyalar deyiladi. $y = x^2$ aniqlanish sohasi $(-\infty, \infty)$ da monoton emas, lekin $(-\infty, 0)$ oraliqda monoton kamayuvchi, $(0, \infty)$ oraliqda esa monoton o'suvchidir.

Monoton funksiyalarning ba'zi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

$y = f(x)$ funksiya D sohada o'suvchi bo'lsin, u holda:

1) $f(x) \pm c \ \ (c \in R)$ o'suvchi bo'ladi;

2) $c \cdot f(x) \ \ (c \in R^+)$ o'suvchi, $-c \cdot f(x)$ - kamayuvchi bo'ladi,

3) $f(x) \neq 0$ o'suvchi bo'lsa, $\dfrac{1}{f(x)}$ kamayuvchi ($f(x) > 0$ yoki $f(x) < 0$) bo'ladi.

$y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalar D sohda o'suvchi bo'lsin:

4) $f(x) + \varphi(x)$ ham shu sohada o'suvchi,

5) $f(x) > 0, \ \varphi(x) > 0$ bo'lsa, $f(x)\varphi(x)$ ham o'suvchidir;

6) $f(x) > 0$ bo'lsa $f^n(x)$, $(n \in N)$ o'suvchidir.

MASHQLAR:

1. Quyidagi funksiyalarning nollarini toping.

1) $f(x) = 4x^2 - 9$; 2) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$;

3) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$; 4) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x$;

5) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 5x + 4}$; 6) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 7x + 6}$;

7) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x + 5}$; 8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$;

9) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 3x + 5}$; 10) $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}$.

2. **Funksiyalarning o'suvchi yoki kamayuvchi ekanligini isbotlang:**

1) $y=\frac{1}{2}x+3$; 2) $y=-2x+3$;

3) $y=x^3-3$; 4) $y=2-x^3$;

5) $y=\sqrt{x+3}$; 6) $y=2-\sqrt{2+x}$.

7) $y=\frac{1}{(x^2-6x+8)^2}$; 8) $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$;

9) $y=(x-2)^3+1$; 10) $y=\frac{x^2-8x+15}{x^2-8x+17}$;

11) $y=\frac{1}{x^2+4}$; 12) $y=\frac{-1}{x^2-6x+8}$.

3. Quyidagi funksiyalarning o‘sish yoki kamayish oraliqlarini aniqlang.

1) $y=2x^2+4x+5$; 2) $y=x^2+3x+8$;

3) $y=-3x^2+6x-4$; 4) $y=-5x^2+8x-3$;

5) $y=3x^2-2x$; 6) $y=4x-5x^2$;

7) $y=2-x^2$; 8) $y=2x^2-5x$;

9) $y=\frac{3}{x-1}$; 10) $y=\frac{2}{2+x}$;

11) $y=\frac{x+1}{2x-1}$; 12) $y=\frac{3x+1}{x-2}$.

4. Quyidagi funksiyalar argumentning qanday qiymatida eng katta qiymatga erishadi?

1) $y=3-|x-2|$; 2) $y=7-2|x+3|$;

3) $y=4-\sqrt{2+x}$; 4) $y=3-\sqrt{x-2}$;

5) $y=\frac{3}{x^2+2x+3}$; 6) $y=\frac{3}{x^2-2x+5}$.

5-§ Davriy funksiyalar

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $D(f)$ sohada aniqlangan bo‘lsin va shunday eng kichik T son mavjud bo‘lsinki, agar $x \in D(f)$ bo‘lsa, $(x \pm n\mathrm{T}) \in D(f)$ bo‘lsin $(n \in N)$.

Ta’rif. Agar $f(x \pm n\mathrm{T}) = f(x)$ bo‘lsa, $f(x)$ davriy funksiya deyiladi, T funksiyaning asosiy davri deyiladi: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $tg(x+\pi) = tgx$, $ctg(x+\pi) = ctgx$ funksiyalar davriy, $\sin x$ va $\cos x$ ning asosiy davrlari 2π, tgx va $ctgx$ ning asosiy davrlari π ga teng.

$y = x - [x] = \{x\}$ ($[x] - x$ sonning butun qismi, $\{x\}$ –x sonning kasr qismi) funksiyaning asosiy davri 1 ga teng. Haqiqatda, $\{x+n\} = \{x\}, n \in N$. Bunday n lardan eng kichigi 1 dir.

Davriy funksiyalarning bazi xossalarini (isbotsiz) keltirasiz.

Agar T son $f(x)$ funksiyaning davri bo‘lsa, kT $k \in Z,$ ham funksiyaning davri bo‘ladi. Agar T_1 va T_2 funksiyaning turli davrlari bo‘lsa, $\mathrm{T}_1 \pm \mathrm{T}_2$ ham funksiyaning davri bo‘ladi.

MASHQLAR:

Quyidagi funksiyalarni davriylikka tekshiring.

1) $y = \{x\} + 3;$ 2) $y = \{x\} - 2;$

3) $y = -3;$ 4) $y = 4;$

5) $y = 3x;$ 6) $y = \frac{x^2}{2};$

7) $y = [x+3];$ 8) $y = [2-x];$

9) $y = \{5-x\};$ 10) $y = \{x+2\};$

Quyidagi funksiyalarning asosiy davrini toping.

1) $y = \sin 3x;$ 2) $y = \cos \frac{3}{4} x;$

3) $y = tg \frac{x}{2};$ 4) $y = |\sin x|;$

5) $y = \sin \frac{2x}{3};$ 6) $y = ctg 3x$.

Davrlari T ga teng bo‘lgan $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar uchun $f(x) \pm \varphi(x),\ \ f(x) \cdot \varphi(x),\ \ \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ham T davrga ega ekanligini ko‘rsating.

6-§ O‘zaro teskari va murakkab funksiyalar

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiya bu oraliqda monoton o‘suvchi (yoki o‘suvchi) deyiladi. Shunga o‘xshash monoton kamayuvchi funksiya ta’riflanadi: agar argumentning ixtiyoriy ikkita qiymatidan kichik qiymatiga funksiya oraliqda kamayuvchi deyiladi, agar funksiyaning katta qiymati mos kelsa, ya’ni agar $x_1 < x_2$ bo‘lib $f(x_1) > f(x_2)$ bo‘lsa.

Masalan, $y = 2x - 5$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda o‘suvchi, $y = 3 - x$ funksiya esa aniqlanish sohasida kamayuvchi.

Monoton o‘suvchi funksiyaning grafigi chapdan o‘ngga qarab ko‘tarilib boradi, monoton kamayuvchi funksiyaniki esa chapdan o‘ngga qarab pasayib boradi.

Ta’rif. Agar funksiya (a, b) oraliqda faqat o‘suvchi yoki faqat kamayuvchi bo‘lsa, monoton funksiya deyiladi.

Faraz qilaylik, (a, b) oraliqda $y = f(x)$ funksiya monoton bo‘lsin. Bu holda argument x ning har bir qiymatiga y funksiya ning yagona qiymati mos keladi. Demak $y = f(x)$ tenglamadan x ni y orqali ifodalash mumkin bo‘ladi: $x = \varphi(y)$. Bu tenglikda y bog‘liq emas o‘zgaruvchi (argument) sifatida, x esa funksiya sifatida keladi. $y=f(x)$ va $x=\varphi(y)$ funksiyalarning grafiklari bitta chiziqni beradi (birining aniqlanish sohasi ikkinchisining o‘zgarish sohasi va aksincha bo‘ladi). Agar $x=\varphi(y)$ tenglikda x va y joylarini almashtirsak (rollarini o‘zgartirsak) yangi funksiya

$$y=\varphi(x) \qquad (1)$$

hosil bo‘ladi. Bu funksiya avvalgi funksiya

$$y=f(x) \qquad (2)$$

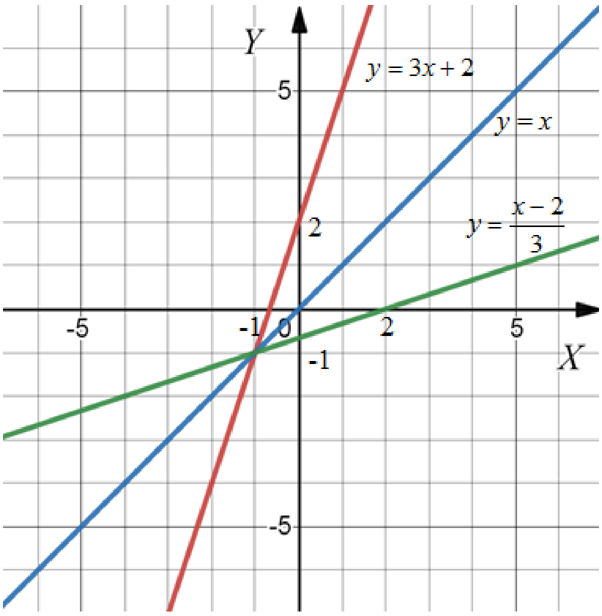
ga nisbatan teskari funksiya deyiladi va aksincha $y=f(x)$ ham $y=\varphi(x)$ ga nisbatan teskari funksiya deyiladi, ya’ni ular bir-biriga nisbatan teskari funksiya deyiladi.

Avval ta’kidlanganidek, birining aniqlanish sohasi ikkinchi uchun o‘zgarish sohasi bo‘ladi va aksincha.

Misol. $y=3x+2$ funksiya uchun teskari funksiya topilsin.

Yechish: Berilgan tenglikdan x ni topamiz $x=\frac{y-2}{3}$. Hosil bo‘lgan tenglikda x va y ning joylari almashtirilib teskari funksiya $y=\frac{x-2}{3}$ ni topamiz. Bularni grafigini bitta chizmada yasaymiz. $y=3x+2$. Ular $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi (3-rasm).

Umuman, o‘zaro teskari bo‘lgan (1) va (2) funksiyalarning grafiklari $y=x$ to‘g‘ri chiziqga nisbatan simmetrik joylashadi.



3-rasm.

Agar funksiya o‘zining aniqlanish sohasida monoton bo‘lmasa, funksiya uchun teskari funksiya mavjud bo‘lmaydi. Bu holda aniqlanish sohasini shunday qismlarga bo‘lish kerakki, har bir qismda funksiya yo o‘suvchi, yo kamayuvchi bo‘lsin va har bir qism uchun funksiyaga teskari funksiyani topamiz.

Misol. $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasi $(-\infty, \infty)$ da monoton emas. Bu sohani shunday $(-\infty, 0)$ va $[0, \infty)$ qismlarga bo‘lamizki, birinchi oraliqda berilgan funksiyaga teskari funksiya $y = -\sqrt{x}$ (funksiya bu oraliqda kamayuvchi), ikkinchi oraliqda esa teskari funksiya $y = \sqrt{x}$ (bu oraliqda funksiya o‘suvchi) mavjud bo‘ladi.

Ta’rif. Aytaylik, Y_f to‘plamda $u = F(y)$ funktsiya berilgan bo‘lsin. Natijada X to‘plamdan olingan har bir *x* ga Y_f to‘plamda bitta *y*:

$$f : x \to y \quad (y = f(x)),$$

va Y_f to‘plamdagi bunday *y* songa bitta *u*:

$$F: y \to u \quad (u = F(y))$$

son mos qo‘yiladi. Demak, X to‘plamdan olingan har bir x songa bitta u son mos qo‘yilib, yangi funktsiya hosil bo‘ladi: $u = F(f(x))$. Odatda bunday funktsiyalar murakkab funktsiya deyiladi.

MASHQLAR:

1. Teskari funksiyani toping. Ikkala funksiya uchun aniqlanish va o‘zgarish sohalarini toping.

1) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$; 2) $y = \dfrac{x}{2x-3}$;

3) $y = \dfrac{1}{x^3}$; 4) $y = -\dfrac{1}{x^3}$.

2. Teskari funksiyani toping va ikkala funksiyaning grafigini bitta chizmada chizing:

1) $y = 2x-3$; 2) $y = \dfrac{1}{2}x+2$;

3) $y = \dfrac{1}{x+2}$; 4) $y = \dfrac{2}{x-2}$.

3. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalar mavjudmi:

1) $y = x^3 - 3$; 2) $y = 2 - x^3$;

3) $y = 2 + x^2$; 4) $y = 1 - x^2$.

4. a va b qanday shartni qanoatlantirganda $y = \dfrac{ax+3}{bx+4}$ funksiyaning teskarisi o‘ziga teng bo‘ladi?

5. c va d qanday shartni qanoatlantirganda $y = \dfrac{x+c}{x+d}$ funksiyaning teskarisi o‘ziga teng bo‘ladi.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalar mavjudmi:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = 5x + 2$;

3) $y = 2 + 4x$; 4) $y = 3 - x$;

5) $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$; 6) $y = \dfrac{3-2x}{5x+1}$;

7) $y = \dfrac{4-3x}{1+x}$; 8) $y = \dfrac{2x-5}{1+2x}$.

7. Quyidagi funksiyalar teskari funksiyasini toping va ularning grafigini tasvirlang:

1) $y = x^2, \quad x \ge 0$; 2) $y = (x-1)^2, \ x \le 1$;

3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{x+4}$;

5) $y = x^3$; 6) $y = 1 - x^3$;

7) $y = (x-2)^2$; 8) $y = (x+3)^3 - 1$.

8. Quyidagi funksiyalarning berilgan oraliqda teskari funksiyasi mavjudmi, agar mavjud bo‘lsa toping va ularning grafigini tasvirlang:

1) $y = x^3 + 4x - 8, \quad x \in [-3; 0]$; 2) $y = x^2 + 4x - 8, \quad x \in [-\infty; -2]$;

3) $y = -x^2 + 2x + 6, \quad x \in [0; 3]$; 4) $y = -x^2 + 2x + 6, \quad x \in [3; +\infty]$;

9. Agar $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ bo‘lsa, $f(f(f(x)))$ topilsin.

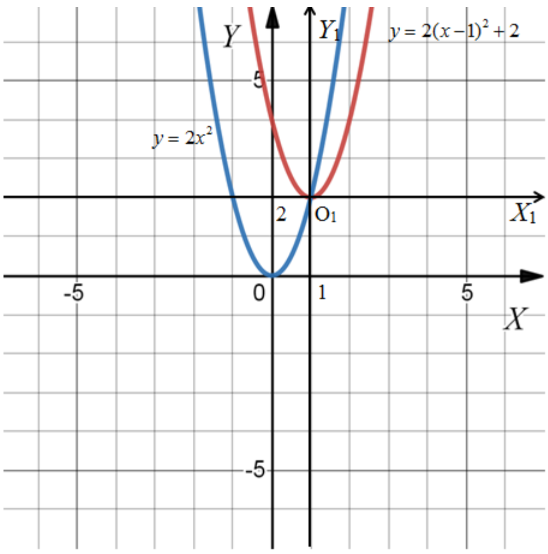
7-§ Funksiya grafigini almashtirish

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksional bog‘lanish berilgan bo‘lsin. Bu tenglama albatta *Oxy* koordinatalar sistemasida tekshiriladi va grafigi yasaladi. Ko‘p hollarda bu tenglamadan foydalanib, grafikni yasash qiyinchiliklar bilan bog‘liq bo‘ladi. Shunday hollarda yangi koordinatalar sistemasi $O_1x_1y_1$ tanlanadiki, bu sistemada tenglama sodda ko‘rinishni qabul qilsin va grafigini chizish oson bo‘lsin.

Parallel ko‘chirish. Bunda koordinatalar boshi oldingi sistemaga nisbatan $O_1(a;b)$ nuqtaga ko‘chiriladi va koordinata o‘qlarining yo‘nalishi o‘zgarmaydi. Yangi $O_1x_1y_1$ sistemada funksiya $y_1 = f(x_1)$ ko‘rinishni olsa, eski Oxy sistemada funksiya $y = f(x-a)+b$ bo‘lgan bo‘ladi.

Misol. $y = 2x^2 - 4x + 4$ funksiya grafigi yasalsin.

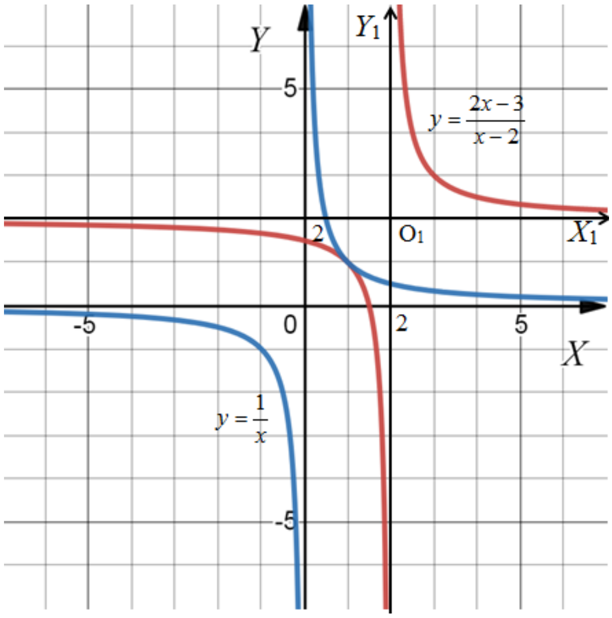
Yechish: Funksiyani $y = 2(x-1)^2 + 2$ ko‘rinishda yozamiz va koordinatalar boshini $O(1;\ 2)$ nuqtaga ko‘chiramiz, natijada yangi $O_1x_1y_1$ sistemada funksiya $y_1 = 2x_1^2$ ko‘rinishini oladi. Uning grafigi 4-rasmda ko‘rsatilgan.



4-rasm.

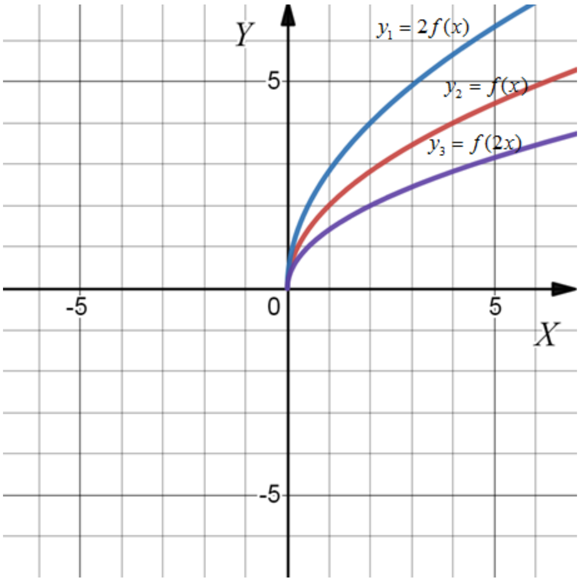
Misol. $y = \dfrac{1}{x}$ funksiya grafigidan foydalanib, $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: Funksiyani $y=\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$ ko‘rinishda yozamiz va koordinata boshini $O_1(2;\ 2)$ nuqtaga ko‘chiramiz, yangi $O_1x_1y_1$ sistemada funksiya $y_1=\dfrac{1}{x_1}$ ko‘rinishda bo‘lib, uning grafigi 5-rasmda ko‘rsatilgan.



5-rasm.

2. Cho‘zish. $y=f(x)$ funksiya grafigidan foydalanib $y=k\cdot f\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$ funk-siya grafigini yasash talab qilinsa, grafikning har bir nuqtasini abssissa-lar o‘qidan *k* marta, ordinatalar o‘qidan *l* marta cho‘zish kerak.



6-rasm.

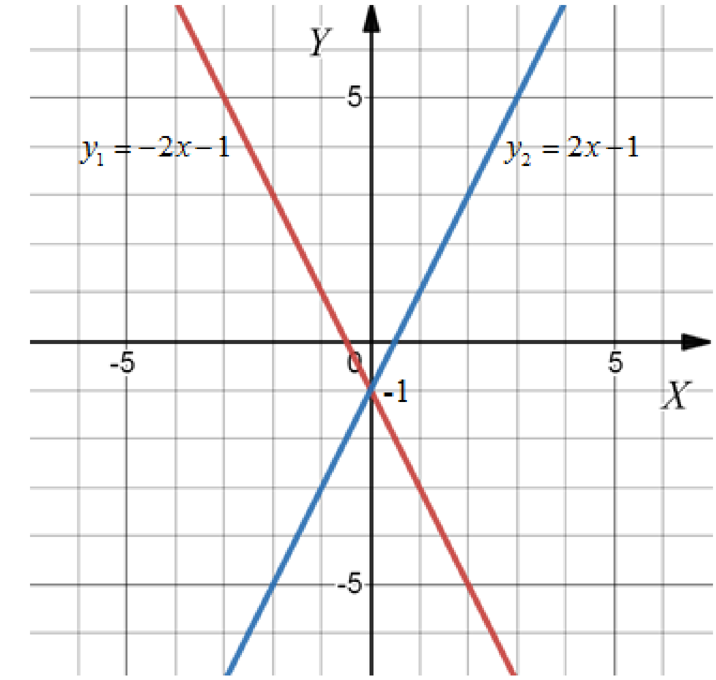
Misol. $y = f(x)$ funksiya grafigidan foydalanib, $y_1 = 2f(x)$, $y_2 = f(2x)$ funksiyalar grafiklari yasalsin.

Yechish: 6-rasmda keltirilgan $y = f(x)$ funksiya grafigi har bir nuqtasining ordinatasini 2 ga ko‘paytirsak, y_1 egri chiziqni, $f(x)$ grafikni *Oy* o‘qidan $l = \frac{1}{2}$ marta cho‘zish (ya’ni ikki marta siqish) bajarilsa y_2 grafigi hosil bo‘ladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya grafigini abssissalar o‘qiga nisbatan simmetrik almashtirsak, $y = -f(x)$ funksiyaning grafigini, ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik almashtirsak, $y = f(-x)$ funksiya grafigini, koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik almashtirsak, $y = -f(-x)$ funksiyaning grafigini hosil qilamiz.

Misol. $f(x) = 2x - 1$ funksiyaning grafigidan foydalanib, $f(-x) = -2x - 1$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: $f(x) = 2x - 1$ funksiya grafigini yasab, uni *Oy* o‘qiga nisba-tan simmetrik almashtirsak (akslantirsak), $f(-x) = -2x - 1$ funksiya grafigi hosil bo‘ladi, (7-rasm).



7-rasm.

MASHQLAR:

1. $y = x^2$ **funksiya grafigidan foydalanib,**

1) $y = x^2 - 3$; 2) $y = -x^2 + 2$;

3) $y = -x^2 - 2$; 4) $y = x^2 + 3x$;

5) $y = 2x - x^2$; 6) $y = x^2 - x + 1$.

funksiya grafiklari yasalsin.

2. $y = \dfrac{1}{x}$ **funksiya grafigidan foydalanib,**

1) $y = -\dfrac{1}{x-3}$; 2) $y = \dfrac{x}{x-3}$;

3) $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$; 4) $y = \dfrac{2-3x}{x}$.

funksiyalarning grafiklari yasalsin.

3. $\varphi(x) = \dfrac{(x+1)}{3x+5}$ berilgan, $\varphi(\dfrac{1}{x})$, $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ ifodalarni toping.

4. $\varphi(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ funksiya uchun $\varphi(0)$, $\varphi(2x)$ ifodalarni toping.

5. $y=u^2$, $u=\cos v$, $v=2x+1$ bo‘lsa, $y(x)$ elementar funksiyani yozing.

6. $y=u^{\frac{1}{2}}$, $u=1+\cos v,$ $v=1-x^2$ bo‘lsa, $y(x)$ elementar funksiyani yozing.

7. $y=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\le x\le 1 \\ 1+x, & x>1 \end{cases}$ funksiya elementar funksiya bo‘ladimi?

8. $f(n)=n!=1*2*3....n$ funksiya elementar funksiya bo‘ladimi?

9. Quyidagi funksiyalarni elementar funksiya zanjiri bo‘g‘inlari ko‘rinishida yozing.

1) $y=(3x-4)^8$; 2) $y=\sqrt[3]{2x^2+1}$;

3) $y=\sin(x+tgx)$; 4) $y=\cos^2(2x+1)$.

10. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ bo‘lsa, $f\{f[f(x)]\}$ni toping.

11. $f(x-1)=x^2+3$ bo‘lsa , $f(x+1)$ ni toping.

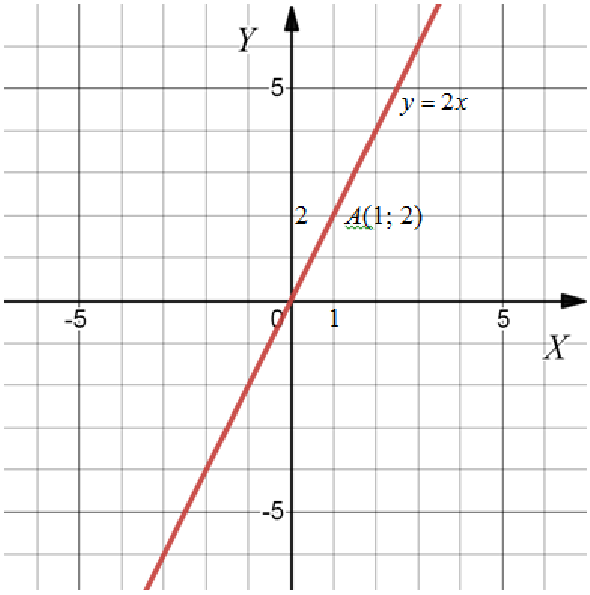
8-§ *y = kx+b* chiziqli funksiyaning geometrik ma’nosi

Ta’rif: $y=kx+b$, $k,b\in R$ chiziqli funksiya yoki to‘g‘ri proporsional bog‘lanish deyiladi. Bu funksiya uchun $D(y)=(-\infty,\infty)$, $E(y)=(-\infty,\infty)$, bo‘lib, grafigi to‘g‘ri chiziqdan iborat ekanligini ko‘rsatamiz. To‘g‘ri chiziq grafigini yasash uchun uning ikkita nuqtasini bilish yetarli.

Misol. $y=2x$ ning grafigini yasaymiz.

Bu yerda $k=2,$ $b=0,$ $x=0$ deb $y=0$, ya’ni $O(0,0)$ nuqtani $x=1$ deb $y=2$, ya’ni $A(1,2)$ nuqtani topamiz.

Bu nuqtalarni koordinatalar tekisligida belgilaymiz va ularni to‘g‘ri chiziq bo‘yicha tutashtirib, $y = 2x$ funksiyaning grafigini topamiz (8-rasm).



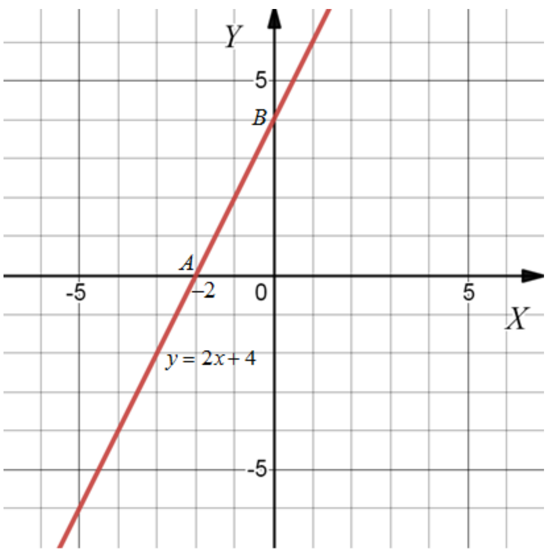
8-rasm.

Shunga o‘xshash, $y = kx$ funksiya grafigi $O(0,0)$ nuqtadan o‘tishini ko‘rish mumkin. Demak, $y = kx + b$ funksiyada $b = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi.

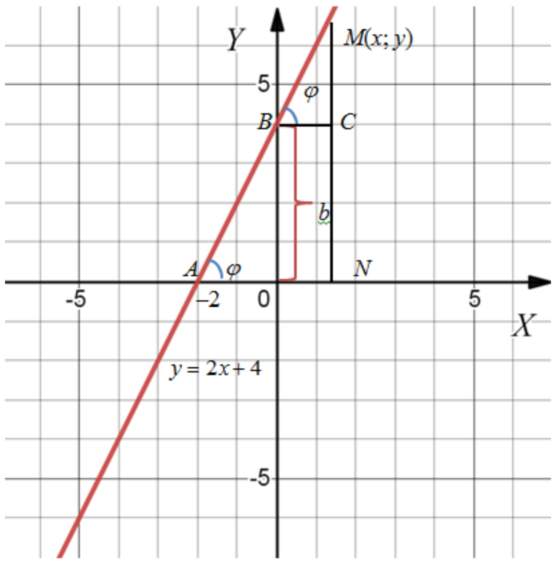
Misol. $y = 2x + 1$ grafigini yasaymiz.

Bu yerda $k = 2,$ $b = 1,$ $x = 0$ desak $y = 1$ bo‘ladi, $B(0,1)$ nuqtani topamiz. $y = kx + b$ tenglikda $x = 0$ desak $y = b$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq (0;b) nuqtadan o‘tadi. Bundan xulosa chiqarib aytish mumkinki, $y = kx + b$ tenglikdagi b to‘g‘ri chiziqni Oy o‘qida kesib ajratgan kesmasining miqdorini beradi.

Misolda $y = 0$ deb $x = -\frac{1}{2}$, ya’ni $A(-\frac{1}{2},0)$ nuqtani topamiz va to‘g‘ri chiziq grafigini (9-rasm) yasaymiz.



9-rasm.



10-rasm.

Quyidagi masalani ko‘rib chiqamiz.

Misol: Koordinatalar boshidan o‘tmaydigan, koordinata o‘qlarini kesib o‘tadigan *AB* to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish: To‘g‘ri chiziqni O*x* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagini φ bilan va O*y* o‘qida kesib ajratgan kesma (*OB*) miqdorini *b* bilan belgilaymiz. *M*(*x*,*y*) to‘g‘ri chiziqning o‘zgaruvchan nuqtasi bo‘lsin (10-rasm).

$$\Delta\ BCM\ dan:\ BC = x,\ CM = y - b$$

$$tg\varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Bundan $y - b = xtg\varphi$. $tg\varphi = k$ desak, $y = kx + b$ ni hosil qilamiz. Hosil bo‘lgan tenglamani, shartga ko‘ra faqat to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi.

$y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi. $k = tg\varphi$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deyiladi: $k > 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq O*x* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak hosil qiladi, $k<0$ bo‘lsa – o‘tmas burchak hosil qiladi, $k=0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq $y=b$ ko‘rinishini olib, Ox o‘qiga parallel bo‘ladi. Agar $\varphi=90^0$ bo‘lsa, k mavjud emas. Bu holga Oy o‘qiga parallel bolgan to‘g‘ri chiziq mos keladi, uning tenglamasi $x=a$ bo‘ladi. $x=0$ Oy o‘qining tenglamasi bo‘ladi.

Ko‘rib chiqilgan tahlildan ma’lum bo‘ladiki, $y=kx+b$. k va b ning barcha hollarida to‘g‘ri chiziqni bildirar ekan.

Endi $Ax+By+C=0$ funksiyaning geometrik ma’nosini ko‘rib chiqamiz.

1. $B\neq 0$ bo‘lsin.

Ikkala tomonini B ga bo‘lamiz va y ni topamiz:

$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, $-\frac{A}{B}=k$, $-\frac{C}{B}=b$ desak, $y=kx+b$ hosil bo‘ladi.

2. $B=0$ ($A\neq 0$) bo‘lsa, $Ax+C=0$ bo‘lib, bundan $x=-\frac{C}{A}=a$ hosil bo‘ladi.

3. $A=0$ ($B\neq 0$) bo‘lsa, $By+C=0$ bo‘lib, bundan $y=-\frac{C}{B}=b$ hosil bo‘ladi.

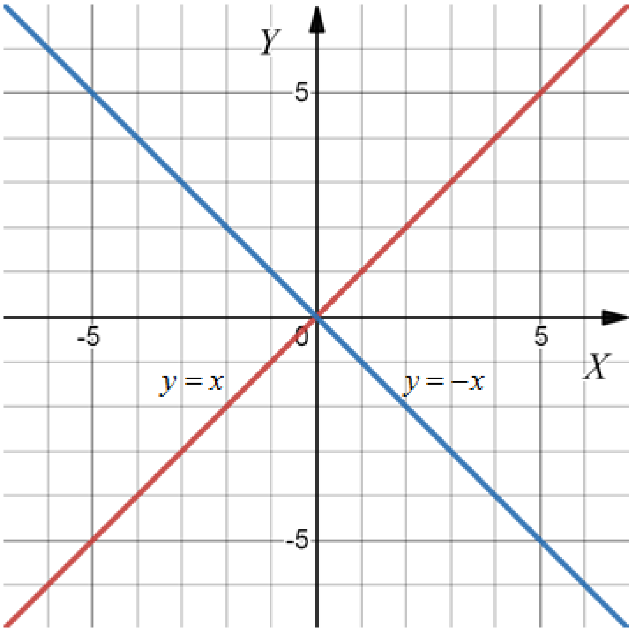
4. $C=0$ bo‘lsa, $Ax+By=0 \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x=kx$ hosil bo‘ladi.

5. $B = C = 0$ bo‘lsa, $Ax = 0$ va $x = 0$ bo‘ladi.

6. $A = C = 0$ bo‘lsa, $By = 0$ va $y = 0$ bo‘ladi.

Ko‘rib chiqilgan barcha holatlarda to‘g‘ri chiziq tenglamasini ($y=kx+b$, $x=a$, $x=b$, $y=kx$) hosil qildik. Demak $Ax + By + C = 0$ funksiya to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekan.

7. Misol tariqasida $y=|x|$ funksiyaning grafigini ko‘rib chiqamiz. Bu funksiyani $y=|x|=\begin{cases} -x & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ deb yozish mumkin. Har bir qismining grafini alohida-alohida chizib, $y=|x|$ ning grafigini (11-rasm) hosil qilamiz.



11-rasm.

MASHQLAR:

1. $y=2x+3$ va $y=-x+4$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Ularni $A(-1;\ 1)$, $B(2;-3)$, $C(4;\ 0)$, $D(3;\ 1)$, $E(2;\ 7)$, $O(0;\ 0)$ nuqtalardan o‘tish-o‘tmasligini tekshiring.

2. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlarini va *Oy* o‘qidan kesib ajratadigan kesma miqdorlarini toping:

1) $y=2x+3$;   2) $y=\frac{1}{3}x-2$;

3) $y=4x-5$;   4) $y=-\frac{2}{3}x+1$;

5) $y = 2x$;

6) $y = -\frac{x}{3}$;

7) $y = 3$;

8) $y = 2$.

3. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

1) $y = x - 3$;

2) $y = -x + 1$;

3) $y = \frac{x}{2} - 3$;

4) $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$;

5) $y = 2x - 2$;

6) $y = -2x + 3$;

7) $y = 5$;

8) $y = -6$;

9) $y = -2x$;

10) $y = 3x$;

11) $x = 5$;

12) $x = -4$.

4. Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamalaridan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti *k* va *Oy* o‘qidan kesib ajratiladigan kesma *b* ning miqdorini toping:

1) $2x + 3y - 5 = 0$;

2) $3x - 4y + 7 = 0$;

3) $-x + 2y + 3 = 0$;

4) $2x + 4y - 3 = 0$;

5) $3x + y = 0$;

6) $4x + 3y = 0$;

7) $-x + 4y + 7 = 0$;

8) $6x + 2y - 4 = 0$.

5. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

1) $3x + 4y = 0$;

2) $x - 2y = 0$;

3) $x + 2y - 3 = 0$;

4) $2x + 3y - 1 = 0$;

5) $5x + 4 = 0$;

6) $4x + 5 = 0$;

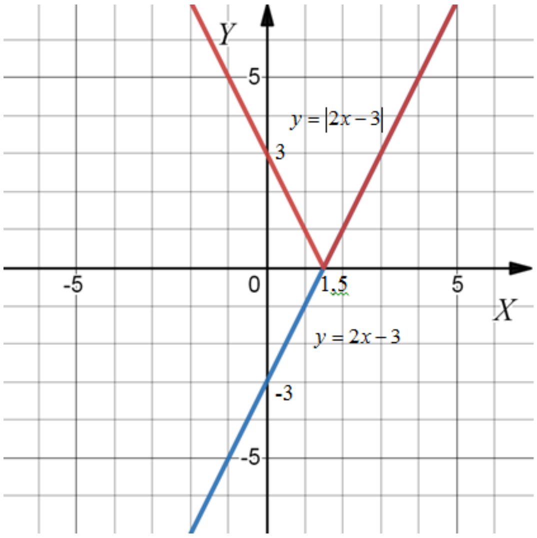
7) $3y - 5 = 0$;

8) $5y + 3 = 0$.

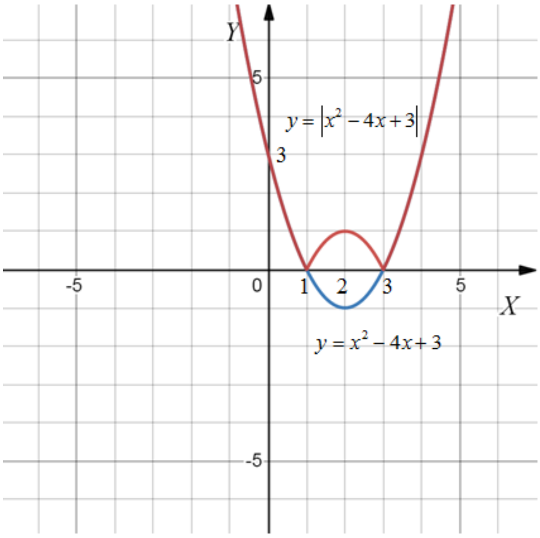
9-§ Modul bilan bog‘liq ifodalarning grafiklari

Ma’lumki: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & agar \quad f(x) \geq 0 \quad bo'lsa, \\ -f(x), & agar \quad f(x) < 0 \quad bo'lsa. \end{cases}$

Bundan ko‘rinadiki, $y = |f(x)|$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y = f(x)$ grafigini yasash va bu grafikning Ox o‘qidan pastda joylashgan qismini Ox o‘qiga nisbatan yuqori yarim tekislikka akslantirish kerak.



12-rasm.



13-rasm.

Misol $y = |2x - 3|$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: Avval $y = 2x - 3$ funksiyaning grafigini yasaymiz. (*ABC* to‘g‘ri chiziq, 12-rasm). $y = |2x - 3|$ ning grafigini hosil qilish uchun $y = 2x - 3$ grafikning *OX* o‘qidan pastda joylashgan qismi *AB* ni *Ox* o‘qiga nisbatan akslantirish lozim. Natijada *DBC* siniq chiziqni hosil qilamiz, bu $y = |2x - 3|$ ning grafigi bo‘ladi.

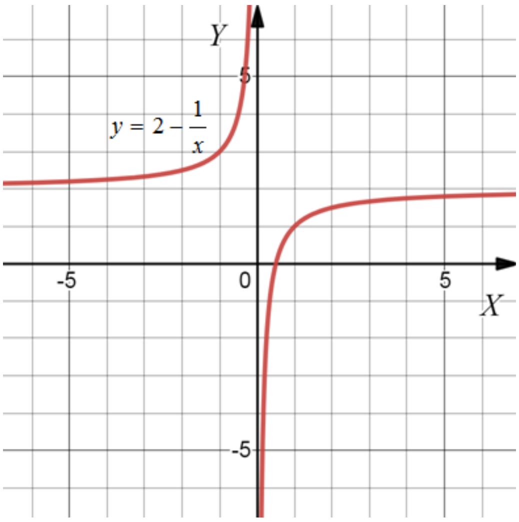
Misol. $y = |x^2 - 4x + 3|$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: Avval $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Bu ABC paraboladan iborat bo‘ladi (13-rasm).

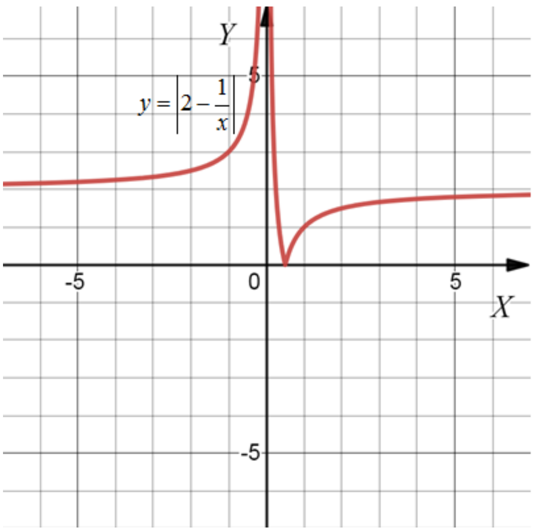
$y=|x^2-4x+3|$ ning grafigini yasash uchun $y=x^2-4x+3$ grafigining *Ox* o‘qidan pastda joylashgan qismi *EBF* ni *Ox* o‘qiga nisbatan akslantirib, *AEDFC* egri chiziqni hosil qilamiz. Bu berilgan funksiyaning grafigidan iborat.

Misol. $y=\left|2-\frac{1}{x}\right|+2$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: Avval $y=-\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Bu ikkinchi va to‘rtinchi choraklarda joylashgan giperbola bo‘ladi. Agar bu grafikni *Oy* o‘qi yo‘nalishida ikki birlik yuqoriga siljitsak, $y=2-\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi hosil bo‘ladi (14-rasm). Endi $y=\left|2-\frac{1}{x}\right|$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Buning uchun $y=2-\frac{1}{x}$ funksiya grafigining *Ox* o‘qidan pastda joylashgan *AB* qismini *OX* o‘qiga nisbatan akslantiramiz (15-rasm).



14-rasm.

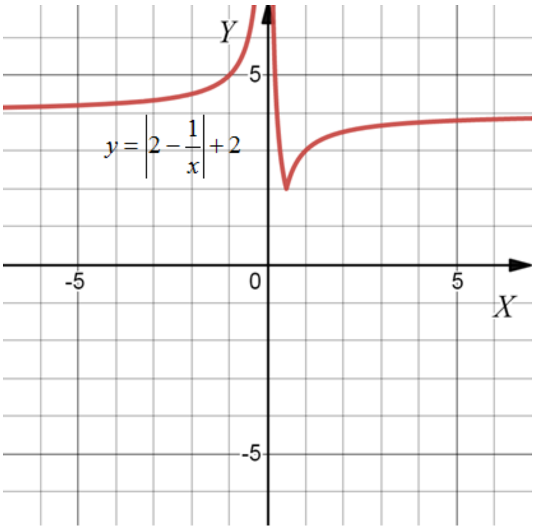


15-rasm.

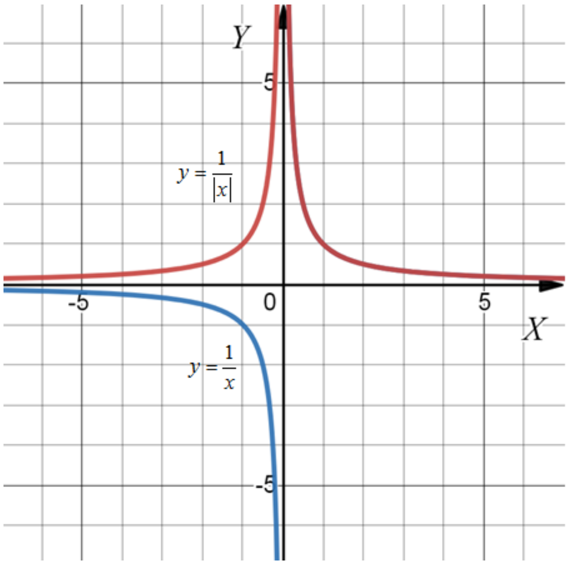
Endi $y=\left|2-\dfrac{1}{x}\right|+2$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Buning uchun $y=\left|2-\dfrac{1}{x}\right|$ funksiya grafigini *Oy* o‘qi yo‘nalishda ikki birlikka yuqoriga siljitish yetarli bo‘ladi (16-rasm).

Misol. $y=\dfrac{1}{|x|}$ ning grafigi yasalsin.

Yechish: $y=\dfrac{1}{x}$ grafigi birinchi va uchinchi choraklardagi giperbola bo‘lsa, $y=\dfrac{1}{|x|}$ grafigini hosil qilish uchun $y=\dfrac{1}{x}$ ning birinchi chorakdagi qismini o‘zgarishsiz qoldirib, uchinchi chorakdagi *Ox* o‘qiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak (17-rasm).►



16-rasm.

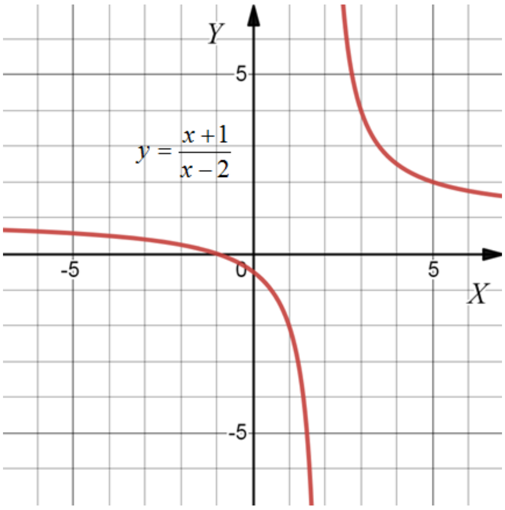


17-rasm.

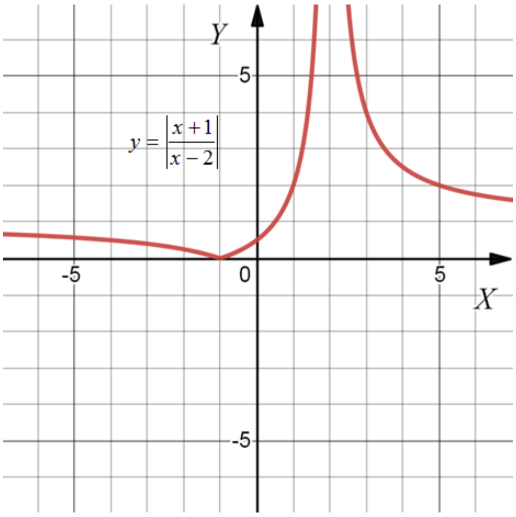
Misol. $y=\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: Avval $y=\dfrac{x+1}{x-2}=1+\dfrac{3}{x-2}$ funksiyaning grafigini yasaymiz, Bu 18-rasmda keltirilgan giperboladan iborat bo‘ladi.

$y=\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y=\frac{x+1}{x-2}$ grafigida AB qismini, ya'ni Ox o'qidan pastda joylashgan qismini, Ox o'qiga nisbatan akslantirish kerak (19-rasm).



18-rasm.



19-rasm.

MASHQLAR:

1. Funksiyalar grafiklarini yasang:

1) $y=|x-2|$; 2) $y=|2-3x|$;

3) $y=\left|\frac{x}{2}+3\right|$; 4) $y=\left|1+\frac{x}{4}\right|$;

5) $y=|x^2-3|$; 6) $y=|2-x^2|$;

2. Funksiyalar grafiklarini yasang:

1) $y=\frac{1}{|x+3|}$; 2) $y=-\frac{2}{|x+2|}$;

3) $y=\left|\frac{2x}{x-2}\right|$; 4) $y=-\left|\frac{x}{x+3}\right|$;

5) $y=-\left|\frac{x+3}{x-1}\right|$; 6) $y=\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$.

VI. KO‘RSATKICHLI VA LOGORIFMIK TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR

1-§ Ko‘rsatkichli tenglama va ularni yechish.

Algebra kurida ko‘rsatkichli tenglama umumiy holda, $a^x = a^b$ ko‘rinishga keltiriladi. Bu yerda $a > 1$ $a \neq 1$. Bu tenglama yagona yechim $x = b$ ga ega, chunki quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo‘lsa, $a^{x_1} = a^{x_2}$ tenglikdan $x_1 = x_2$ hosil bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $x_1 = x_2$ tenglik bajarilmasin, ya’ni $x_1 < x_2$ yoki $x_1 > x_2$ bo‘lsin. U holda $x_1 < x_2$ va $a > 1$ bo‘lganda $y = a^x$ funksiya o‘suvchiligidan $a^{x_1} < a^{x_2}$ kelib chiqadi, $0 < a < 1$ bo‘lganda esa, $a^{x_1} > a^{x_2}$ bo‘ladi. Ikkala holda ham $a^{x_1} = a^{x_2}$ shart bajarilmadi, demak farazimiz noto‘g‘ri va teorema isbotlandi.

Misol. $\sqrt{5} \cdot 5^x = 1$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^x = 1$ yoki $5^{\frac{1}{2}+x} = 5^0$ shaklda yozamiz va $\frac{1}{2} + x = 0$ ni hosil qilib, bundan $x = -\frac{1}{2}$ ni topamiz.

Javob: $x = -\frac{1}{2}$.

Misol. $2^{2x} \cdot 3^x = 144$ tenglamani yeching.

Yechish: $2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$ va $144 = 12^2$ bo‘lgani uchun, tenglamani $4^x \cdot 3^x = 12^2$ yoki $12^x = 12^2$ ko‘rinishda yozib, $x = 2$ ni topamiz.

Javob: $x = 2$.

Misol. $5^{x^2-2x-1} = 25$ tenglamani yeching.

Bu tenglamani $5^{x^2-2x-1}=5^2$ ko‘rinishda yozamiz. Ko‘rsat-kichlarni tenglashtirib, $x^2-2x-1=2$ni yoki $x^2-2x-3=0$ni hosil qilamiz. Buni yechib $x_1=-1$ va $x_2=3$ni topamiz. Ikkala ildiz ham tenglamani qanoatlantiradi.

Javob: $x_1=-1$ va $x_2=3$

MASHQLAR:

1. Tenglamalarni yeching:

1) $8^{x-1}=2$; 2) $3^{2x}=1$; 3) $0{,}5^{x^2-x}=1$;

4) $2^{2x-1}=\frac{1}{4}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}=9$; 6) $25^x=\sqrt{5}$;

7) $4\cdot 2^{2x}=16$; 8) $\frac{3^x}{27}=9$; 9) $0{,}7^{x-1}=0{,}7^{2x+3}$;

2. Tenglamalarni yeching:

10) $\left(\frac{2}{9}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{81}{256}$; 11) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=216$; 12) $5^{2x}\cdot 3+5^{2x+1}=40.$

13) $7^x+7^{x-1}=56$; 14) $5^{x-1}=4^{x-1}$; 15) $2^{\frac{x+1}{2}}=3^{x+1}$;

16) $3^{x+1}+3^{x-1}=2^{x+1}+7\cdot 2^{x-1}$; 17) $3^{x+1}+3^{x-1}=7^{x+1}+5\cdot 7^x$;

18)* $4^x+2^x-6=0$; 19)* $100^x-11\cdot 10^x+10=0$;

20)** $3^x+5^x=2\cdot 8^x$

2-§ Logarifmik tenglamalar va ularni yechish.

Ta’rif. Noma’lum o‘zgaruvchi logarifm belgisi ostida qatnashgan tenglama *logarifmik tenglama* deyiladi.

Logarifmik tenglamalarni yechish logarifmlarning quyidagi xossalariga asoslanadi:

$\log_a x=b$ tenglamani aniqlanish sohasiga e’tibor qaratish lozim $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$, logarifmik tenglama $x=a^b$ yagona yechimga ega, ya’ni $b=\log_a a^b$.

$\log_x N = b$ ko‘rinishdagi tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaning aniqlanish sohasining $(x>0,\ x\neq 1)$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlaridan tashkil topadi. Agar $N \le 0$ bo‘lsa, bu tenglama yechimga ega bo‘lmaydi. $N>0$ bo‘lsa, $x = N^{\frac{1}{b}}$ dan iborat yagona yechimga ega bo‘ladi.

Logarifmik tenglamalarni yechishda logarifm belgisi ostidagi ifoda faqat musbat qiymatlar qabul qilish, logarifm asosidagi ifoda musbat va birdan farqli bo‘lishi kerakligini hisobga olish kerak bo‘ladi.

Misol. $\log_3 x = 2$ tenglamani yeching.

Yechish: $\log_3 x = 2$ tenglama $\begin{cases} x=9 \\ x>0 \end{cases}$ sistemaga teng kuchli

Javob: $x=9$

Misol. $\log_3 x - \log_9 x + \log_{27} x = \dfrac{5}{3}$ tenglamani yeching.

Yechish: Quyidagicha shakl almashtiramiz:

$$\log_a x - \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = \frac{5}{3}$$

Logarifmning xossalaridan foydalanib, $\log_3 x - \dfrac{1}{2}\log_3 x + \dfrac{1}{3}\log_3 x = \dfrac{5}{3}$ yoki $\dfrac{5}{6}\log_3 x = \dfrac{5}{3}$ tenglamani hosil qilamiz va $\log_3 x = 2$.

Bu tenglama $\begin{cases} x=9 \\ x>0 \end{cases}$ sistemaga teng kuchli

Javob: $x=9$

Misol. $\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30;$ tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan tenglamada x ning qabul qiladigan qiymatlari sohasini belgilaymiz:

$$\begin{cases} x-5>0 \\ 2x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>1{,}5 \end{cases}$$

Bundan $x > 5$ kelib chiqadi, logarifmlarning asosiy xossalaridan foydalanib

dastlabki tenglamani quyidagicha yozamiz:

$\lg\left(\sqrt{x-5}\sqrt{2x-3}\right) = \lg 30 - 1$

$\lg\left(\sqrt{(x-5)(2x-3)}\right) = \lg 3;$

$\left(\sqrt{(x-5)(2x-3)}\right)^2 = 3^2;$

$(x-5)(2x-3) = 9$ bu tenglama $2x^2 - 13x + 6 = 0$ ko‘rinishga keladi va $x_1 = 6;\ x_2 = \dfrac{1}{2}$ ildizlarga ega, $x_2 < 5$ demak u berilgan tenglamaning ildizi bo‘lmaydi, chunki qabul qiladigan qiymatlari sohasi $x > 5$.

Ikkinchi ildiz qabul qiladigan qiymatlari sohasiga mos , ya’ni $x_1 = 6 > 5$.

Javob: $x = 6$.

Misol. $\log_x(x^2 - 3x + 3) = 1$ tenglamani yeching.

Yechish: bu tenglama x ning $x > 0$, $x \neq 1$ *(* x - logarifmning asosi bo‘lgani uchun) shartlar va tenglamaning qabul qiladigan qiymatlari sohasini belgilaymiz:

$x^2 - 3x + 3 > 0$

Tenglama $x^2 - 3x + 3 = x$ ko’rinishda keladi va $x > 0$ foydalanib qabul qiladigan qiymatlari sohasi o’z-o’zidan o’rinli bo’lib, faqat $x^2 - 3x + 3 = x$ tenglamani yechamiz . Bu tenglama $x^2 - 4x + 3 = 0$ ko’rinishga keladi va $x_1 = 3;\ x_2 = 1$ ildizlarga ega.

Javob: $x_1 = 3;\ x_2 = 1$.

Endi $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ ko‘rinishdagi tenglamani qaraymiz. Bu tenglama $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$ sistemalarning biriga teng kuchli.

Misol. $\log_3(2x+3) = \log_3(x+1)$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglama x ning $2x+3>0$ va $x+1>0$ shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun aniqlangan. Bu tengsizliklarni yechib tenglamaning mavjudlik sohasi $x > -1$ ni aniqlaymiz va

$\begin{cases} 2x+3 = x+1 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ sistemani yechamiz.

$$\begin{cases} x = -2 \\ x > -1 \end{cases}$$

Bo’lgani uchun tenglama yechimga ega emas.

Misol. $\log_5 x - 6\log_x 5 = 1$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ bo`ladi. $x$ asosli logarifmdan 5 asosli logarifmga o`tib, $\log_5 x - \dfrac{6}{\log_5 x} - 1 = 0$ ni, bundan $\log_5^2 x - \log_5 x - 6 = 0$ ni hosil qilamiz. Bundan $\log_5 x = t$ deb belgilab kvadrat tenglamani noma`lum t ga nisbatan yechib, $\log_5 x_1 = 3$ va $\log_5 x_2 = -2$ ni topamiz. Bu tenglamalardan $x_1 = 5^3 = 125$ va $x_2 = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$ larni topamiz. Bu ildizlarning ikkalasi ham tenglamani qanoatlantiradi.

MASHQLAR:

1. Tenglamani yeching.

1) $\log_4 x = 3$

2) $\log_2 x = 5$

$\log_7 x + 3\log_7 x = 8$

4) $\log_6(x-3)+\log_6(x+2)=1;$

2.Tenglamani yeching.

5) $\log_5(7x+5)=\log_5(5x+3);$

6) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x+1);$

7) $\log_5 x\log_5(x-3)=\log_5(x-3);$

8) $\log_{\sqrt{2}}(x+2)\log_5 x=2\log_2(x+2).$

3.Tenglamani yeching.

9) $\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$

10) $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$

11) $\log_2^2 x-4\log_2 x-1=0$

12) $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$

4.Tenglamani yeching.

13) $\log_{25}(x^2-10x+9)=2$

14) $\lg(10x^2)\lg x=1$

15) $\lg^2 x-\lg^2(10x)=6-\lg^2(100x)$

16) $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=1;$

5.Tenglamani yeching.

17) $\log_{\frac{1}{5}}\log_5\sqrt{5x}=0;$

18) $\log_8\log_4\log_2 x=0;$

19) $\log_2\log_3\log_4\sqrt{x^3}=0;$

20) $\lg(3+2\lg(1+x))=0;$

6*.Tenglamani yeching.

21) $\log_2\dfrac{x+3}{x+4}+\log_2((x+3)(x+4))=2;$

22) $\log_2 \frac{x+2}{2} + \log_2 x^2 = 3;$

23) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1;$

24) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1.$

7*. Tenglamani yeching.

25) $\sqrt{2 + \log_3 \sqrt{x}} \cdot \log_x 9 + \sqrt{2} = 0;$

26) $\log_{4x} \frac{4}{x} + \frac{1}{\log_x^2 4} = 1;$

27) $\log_{0,2}^2 \frac{x}{25} + \log_{0,2}^2 \frac{x}{5} = 1;$

28) $\log_x 2 + \log_{4x} 4 = 1;$

29) $\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \log_{9x} 3;$

3-§ Ko‘rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasi va ularni yechish.

Bu turdagi sistemalarni yechishda oldingi bandlarda bayon qilingan algebraik qo‘shish, o‘rniga qo‘yish, yangi o‘zgaruvchi kiritish, ko‘paytuvchilarga ajratish, grafik yechish usullaridan, shuningdek, funksiyalarning xossalaridan foydalaniladi. Logarifmik tenglamalarni o‘z ichiga olgan sistemalarni yechishda ham algebraik tenglamalar sistemasini yechishdagi usullardan foydalaniladi.

Misol. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200 \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: $u = 5^{\sqrt[3]{x}}, \quad v = 2^{\sqrt{y}} \quad (u > 0,\ v > 0)$ belgilash kiritamiz. U holda berilgan sistema quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases} u \cdot v = 200 & (1) \\ u^2 + v^2 = 689 & (2) \end{cases}$$

(1) tenglamani har ikki qismini 2 ga ko‘paytirib, (2) tenglamaga qo‘shsak, $u^2+2uv+v^2=1089 \Leftrightarrow (\mathrm{u}+\mathrm{v})^2=1089$ ni olamiz. $u>0,\ v>0$ bo‘lgani uchun $u+v>0$, ya’ni $u+v=\sqrt{1089}=33$ bo‘ladi.

Shunday qilib, (1) va (2) tenglamalar sistemasi quyidagi simmetrik

sistemaga teng kuchli bo‘ladi:

$$\begin{cases} u\cdot v=200 \\ u+v=33 \end{cases}$$

$t^2-33t+200=0$ xarakteristik tenglama tuzamiz. Uning ildizlari $t_1=8$

va $t_2=25$ bo‘ladi. Bundan esa

$\begin{cases} u=25 \\ v=8 \end{cases}$ va $\begin{cases} u=8 \\ v=25 \end{cases}$ bo‘ladi. u va v larning ifodalarini o‘rniga qo‘yib, quyidagi sistemalarni hosil qilamiz:

$\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}=25 \\ 2^{\sqrt{y}}=8 \end{cases}$ va $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}=8 \\ 2^{\sqrt{y}}=25 \end{cases}$ .Ularni yechamiz:

1). $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}=25 \\ 2^{\sqrt{y}}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}=2 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=9 \end{cases}$,

2). $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}=8 \\ 2^{\sqrt{y}}=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}=\log_5 8 \\ \sqrt{y}=\log_2 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(\log_5 8)^3 \\ y=(\log_2 25)^2 \end{cases}$

Misol. $\begin{cases} \log_{\sqrt{3}} x+\log_3 y=\log_{\sqrt[5]{3}} 3 \\ \log_3 x-\log_{\sqrt{3}} y=-\log_3 243 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Logarifmlarni bir asosga (a=3 ga) keltirilib, potensirlashlar va soddalashtirishlar bajariladi:

$\log_{\sqrt{3}} x = 2\log_3 x$; $\log_{\sqrt[3]{3}} x = 5\log_3 x$ $\log_3 3 = 1$; $\log_3 x = u$;

$\log_3 y = v$;

$$\begin{cases} 2u + v = 5 \\ u - 2v = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^3 = 27 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Misol. $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Asosiy logarifmik ayniyatni hisobga olsak, $y^{\log_3 x} = 3^{\log_3 y \cdot \log_3 x} = x^{\log_3 y}$ ekanligidan $\begin{cases} 3 \cdot x^{\log_3 y} = 27 \\ \log_3 \dfrac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_3 y} = 9 \\ \dfrac{y}{x} = 3 \end{cases}$ ni topamiz. Sistemaning 1-tenglamasini 3 asosga ko‘ra logarifmlaymiz:

$$\begin{cases} \log_3 x \cdot \log_3 y = 2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \cdot \log_3 (3x) = 2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x(1 + \log_3 x) - 2 = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^2 x + \log_3 x - 2 = 0 \\ y = 3x \end{cases}$ ni hosil qilamiz. Uning 1- tenglamasini $\log_3 x$ ga nisbatan kvadrat tenglama qilib yechsak, $\log_3 x = 1$ yoki $x_1 = 3$ ikkinchi ildizi $\log_3 x = -2$ yoki $x_2 = \dfrac{1}{9}$ ni hosil qilamiz.

$y_1 = 3 \cdot x_1 = 9$ va $y_2 = 3 \cdot x_2 = \dfrac{1}{3}$

MASHQLAR:

1. Sistemani yeching.

1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 2{,}75, \\ 2^x - 3^y = -0{,}75. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x - 2 \cdot 6^x \cdot 2^y + 6 \cdot 12^y = 0, \\ 2 \cdot 3^y 4 \cdot 6^y \cdot 2^x - 12^x = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{x/2} - 2^y = 7. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25. \end{cases}$

2. Sistemani yeching.

7) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7, \\ \log_4 (x+y) = 2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_3 (y-x) = 1. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_2 (x+y-3) = 1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 9y^2 + 8 = 0. \end{cases}$

---

3. Sistemani yeching.

13) $\begin{cases} \left(\frac{1}{13}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{-y} = 169 \\ \log_2 4x - \log_2 y = 2 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \cdot \log_y (y-3x) = 1. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x^{x-2y} = 36, \\ 4(x-2y) + \log_6 x = 9. \end{cases}$

17)* $\begin{cases} 2^x \cdot 2^{-y} = 8, \\ \log_4 x + \log_4 y = 1. \end{cases}$ 18)*

$\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48, \\ 2\log_5 (2y - x - 12) = \log_5 (y-x) + \log_5 (y+x). \end{cases}$

4-§ Ko‘rsatkichli tengsizliklar va ularni yechish.

Ko‘rsatkichli tengsizlik algebraik soddalashtirishlardan so‘ng $a^x > a^b$ yoki $a^x < a^b$ ko‘rinishiga keltiriladi. Bu tengsizliklar ko‘rsatkichli funksiyaning o‘suvchi yoki kamayuvchi xossasini hisobga olgan holda yechiladi:

$$a^x > a^b \Rightarrow \begin{cases} x > b, & \text{agar } a > 1 \text{ bolsa}, \\ x < b, & \text{agar } 0 < a < 1 \text{ bo'lsa}, \end{cases}$$

yoki

$$a^x < a^b \Rightarrow \begin{cases} x < b, & \text{agar a} > 1 \text{bolsa,} \\ x > b, & \text{agar } 0 < \text{a} < 1 \text{bo'lsa} \end{cases}$$

Misol: 1. $2^{x^2} > 4$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Asosi 2>1 bo‘lgani uchun $2^{x^2} > 2^2$ dan $x^2 > 2$ ni hosil qilamiz. Bundan esa $|x| > \sqrt{2}$ yoki $x < -\sqrt{2}$ va $x > \sqrt{2}$ hosil bo‘ladi.

Javob: $x \in \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$.

Misol. $0{,}5^{2-3x} < 4$2. tengsizlikni yeching.

Yechish: Tengsizlikni $0{,}5^{2-3x} < 2^2 = 0{,}5^{-2}$ ko‘rinishida yozamiz va asos 0,5<1 ekanligini hisobga olib, $2 - 3x > -2$ ni hosil qilamiz. Bundan -3*x*>-4 yoki $x < \frac{4}{3}$ hosil bo‘ladi.

Javob: $x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$.

Misol. $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x \ge \frac{3}{16}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Qavsdan $\left(\frac{4}{3}\right)^x$ ni chiqarib, topamiz:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x \left(\frac{4}{3} - 1\right) \ge \frac{3}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{3} \ge \frac{3}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \ge \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \ge \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$$

asos $\frac{4}{3} > 1$ bo‘lgani uchun *x*≥-2 ni topamiz.

$x \in [-2, \infty)$.

Misol. $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \ge 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Tengsizlikni $\frac{1}{6^{2x}} - \frac{5}{6^x} - 6 \ge 0$ ko‘rinishida yozamiz va 6^x=t deb belgilab, $\frac{1}{t^2} - \frac{5}{t} - 6 \le 0$ ni hosil qilamiz. Ikkala tomonni $t^2 = 6^{6x} > 0$ ga ko‘paytirib, $1-5t-6t^2 \le 0$ yoki $6t2+5t-1 \le 0$ ni hosil qilamiz. Bu tengsizlikni yechamiz:

$6(t+1)(t-\frac{1}{6}) \le 0 \Rightarrow -1 \le t \le \frac{1}{6}$, noma’lumga o‘tsak, $-1 \le 6^x \le 6^{-1}$ hosil bo‘ladi. Chap tomondagi tengsizlik barcha x uchun bajariladi, o‘ng tomon esa $x \le -1$ bo‘lganda bajariladi.

Javob: $x \in (-\infty, -1]$.

MASHQLAR:

1. Tengsizliklarni yeching.

1) $2^x > \frac{1}{4}$, 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$, 3) $9^x > \frac{1}{2}$,

4) $3^{3x} \le \frac{1}{3}$, 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} < 8$, 6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2-x} > 27$.

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x} > 4$, 8) $\left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \le \frac{9}{7}$, 9) $4^{\frac{x}{2}} > 8$,

2. Tengsizliklarni yeching.

10) $3^{2x} - 3^x < 6$, 11) $2^{2x} - 2^x > 12$, 12) $3^{3x+6} > 2^{x+3}$,

13) $5^{x-2} < 4^{2x-4}$, 14) $2^x \cdot 3^x < 36^{x^2}$, 15) $27 < 9^{\sqrt{x-1}}$.

16)* $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$;

17)* $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot 10^{3(x-1)}$

18)* $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$

5-§ Logarifmik tengsizliklar va ularni yechish.

Logarifmik tengsizlikning yechimini umumiy holda,

$$\log_a x \ge b \Rightarrow \begin{cases} x \ge a^b, & \text{agar } a > 1 \text{ bo'lsa,} \\ x \le a^b, & \text{agar } 0 < a < 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

$$\log_a x \geq \log_a b \Rightarrow \begin{cases} x \geq b, agar\, a > 1 bo'lsa, \\ x \leq b, agar\, 0 < a < 1 bo'lsa, \end{cases}$$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol. *lg(x+3)<1* tengsizlikni yeching.

Yechish: Ushbu tengsizlikning mavjudlik sohasi *x+3>0*, yechimi esa *x+3<10* bo‘ladi. tengsizlik yechimini topish uchun

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3<10 \end{cases}$$ tengsizliklar sistemasiga ega bo‘lamiz,

Uni yechib $\begin{cases} x>-3 \\ x<7 \end{cases}$ ni yoki $x \in (-3,\ 7)$ ni hosil qilamiz.

Javob: $x \in (-3,\ 7)$.

Misol. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Yechim mavjudlik sohasi uchun *2x-4>0, x+1>0,* tengsizlikning bajarilishi uchun *2x-4<x+1* (asos $\frac{1}{3}<1$ bo‘lgani uchun tengsizlik ishorasi teskarisiga o‘zgaradi) tengsizliklarga, ya’ni

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ x+1>0 \\ 2x-4<x+1 \end{cases}$$ sistemaga ega bo‘lamiz.

Bundan $\begin{cases} x>2 \\ x>-1 \\ x<5 \end{cases}$ ni hosil qilamiz, demak yechim $x \in (2{,}5)$ bo‘ladi.

Misol. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geq -2$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Tengsizlikning mavjudlik sohasi

$\begin{cases} x-2>0 \\ 12-x>0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} x>2 \\ x<12 \end{cases}$ dan iborat.

Tengsizlikni $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)(12-x) \geq \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{-2}$ teng kuchli tengsizlik bilan almashtirib, $\begin{cases} (x-2)(12-x) \leq 3^2 \\ 2<x<12 \end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz.

Sistemani yechib, $\begin{cases} x \le 3, x \ge 11 \\ 2 < x < 12 \end{cases}$ ni topamiz.

Javob: $x \in (2,3] \cup [11,12)$

MASHQLAR:

1.Tengsizliklarni yeching.

1) $\log_2 x > 3;$ 2) $\log x_3 < -2;$ 3) $\log_{2,5} x > 1;$

4) $\log_3 (x+5) > 2;$ 5) $\log_{0,7}(2x-0,3) < 1;$ 6) $\log_{\frac{1}{7}}(5x-6) > -2.$

7) $\lg(4x-5) > \lg(x+1);$ 8) $\log_{0,3}(2x-3) > \log_{0,3}(x+2);$

9) $\log_{0,5} x > \log_2(3-2x);$ 10) $\log_\pi (x+3) + \log_\pi x < 2\log_\pi 2.$

2.Tengsizliklarni yeching.

11) $\log_{1,2}(x^2 - 10x + 10) > 0;$ 12) $\log_{\frac{4}{5}}(x^2 - 3x - 3) \ge 0;$

13) $\log_{0,6}(x^2 - 12x + 21) > 0;$ 14) $\log_{0,5}(x^2 - 5x - 6) \ge -3.$

16) $\log_2^2 x - 4 \le 0;$ 17) $\log_{\frac{1}{2}} x - 9 > 0;$

18) $\log_{0,5} x > \log_2(3-2x);$ 19)* $|2 - \log_2 x| < 1;$

20)* $|3\log x - 1| < 2.$

6-§ Ko‘rsatkichli va darajali tenglamalar va tengsizliklar sistemasini yechish.

Mavzuni misollarda tushunib boramiz:

Misol. $\begin{cases} y + 3x = 5 \\ 2^{x^2+y} = 8 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemadagi birinchi tenglama chiziqli tenglama bo‘lsa, ikkinchisi ko‘rsatkichli tenglamadir.

O‘rniga qo‘yish usuli bilan yechamiz. Birinchi tenglamadan *y=5-3x* ni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz: $2^{x^2-3x+5} = 2^3$ hosil bo‘ladi.

Bundan x^2-$3x+5=3$ va x^2-$3x+2=0$ hosil bo‘ladi. Buni yechib, $x_1=1$ va $x_2=2$ ni topamiz. y ning mos qiymatlarini $y=5$-$3x$ dan topamiz: $y_1=2$, $y_2=-1$.

Javob: (1, 2), (2, -1)

Misol. $\begin{cases} 2^{x+2y} = \frac{1}{8} \\ 4^{x-y} = 16 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Ikkala tenglama ham ko‘rsatkichli tenglamadir. Ularda chap va o‘ng tomonlardagi asoslarni tenglashtiramiz. $\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^{-3} \\ 4^{x-y} = 4^2 \end{cases}$ va daraja ko‘rsatkichlarini tenglashtirib teng kuchli $\begin{cases} x+2y=-3 \\ x-y=2 \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib $x=\frac{1}{3}, \quad y=-\frac{5}{3}$ ni topamiz.

Javob: $\left(\frac{1}{3};1\frac{2}{3}\right)$.

Misol. $\begin{cases} 3^x+3^y=12 \\ 6^{x+y}=216 \end{cases}$ sistemasini yeching.

Yechish: Ketma-ket berilgan sistemani unga teng kuchli bo‘lgan sistema bilan almashtirib borib, topamiz:

$$\begin{cases} 3^x+3^y=12 \\ 6^{x+y}=6^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x+3^{3-x}=12 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x+\dfrac{27}{3^x}-12=0 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{2x}-12\times 3^x+27=0 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3^x=6\pm 3 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x=3,\ 3^x=9 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1,\ x_2=2 \\ y_1=2,\ y_2=1 \end{cases}$$

Javob: (1; 2); (2; 1).

Misol. $\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}}-3^y=-7 \\ 2^x-3^y=-5 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Ketma-ket amallarni bajarib topamiz:

$$\begin{cases}2^{\frac{x}{2}}-(2^x+5)=-7\\3^y=2^x+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x-2^{\frac{x}{2}}-2=0\\3^y=2^x+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{\frac{x}{2}}\neq-1, 2^{\frac{x}{2}}=2,\\3^y=2^x+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\3^y=4+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$

Javob: (2;2)

Misol. $\begin{cases}x^2-16\leq 0\\3.5^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}}>1\end{cases}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Sistemadagi har bir tengsizlikni alohida-alohida yechib, ularga umumiy bo‘lgan qismi sistemaning yechimi bo‘ladi.

1) $x^2-16\leq 0\Rightarrow \qquad x^2\leq 16\Rightarrow \qquad [x]\leq 4 \;\Rightarrow\; -4\leq x\leq 4$

2) $3.5^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}} > 3{,}5^0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x\;+2x-15}{x-4}>0\Rightarrow\dfrac{(x+5)(x-3)}{x-4}>0\Rightarrow -5<x<3,\; 4<x<\infty$

sistema uchun $\begin{cases}-4\leq x\leq 4\\-5<x<3,\; 4<x<\infty\end{cases}$ yoki $-4\leq x<3$ yechimni topamiz.

Javob: $-4\leq x<3$.

Misol. $\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64}\\2^{x^2-6x-3.5}<8\sqrt{2}\end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Har bir tengsizlikni alohida-alohida o‘zgartirib boramiz:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\times\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64}\\2^{x^2-6x-3.5}<2^{3,5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{8}\right)^x>\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\\x^2-6x-3.5<3.5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{3}{4}\right)^x>\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\\(x+1)(x-7)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\-1<x<7\end{cases}\Rightarrow -1<x<3$$

Javob: $x\in(-1,3)$

MASHQLAR:

1. Tenglamalar sistemasini yeching:

1) $\begin{cases}x-2y=3\\3^{x+y}=27\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2x+y=5\\4^{x-y}=\dfrac{1}{8}\end{cases}$; 3) $\begin{cases}4^x-4^y=48\\4^{x-1}+4^{y-1}=20\end{cases}$;

4) $\begin{cases} 2\times5^{x}-9\times3^{x}=23 \\ 5^{x}\times3^{-x}=8\dfrac{1}{3} \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 3^{x+y}=9 \\ 3^{x+2y-1}=1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 3^{x+y}=2187 \\ 7^{3x-2y-1}=1 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x-y}=9 \\ 5^{9x-y}=\sqrt{5} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 2^{x-y}=128 \\ 0.5^{x-2y+1}=\dfrac{1}{8} \end{cases}$.

2. Tengsizliklar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{10x}>64^{\frac{8}{3}-x^{2}} \\ x^{2}-25<0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^{-4x}<(\sqrt{5})^{x^{2+3.75}}=6 \\ x^{2}-9<0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}>0 \\ 0{,}5^{1-x}>1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3\times(\sqrt{3})^{-3x-2}<9^{-1} \\ 3^{x+2}+3^{x-1}<84 \end{cases}$.

3. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} 3^{2x}-2^{y}=725 \\ 3^{x}-2^{\frac{y}{2}}=25 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}} \\ x^{2}+5y^{2}-6xy=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{x}\times3^{2y}=18 \\ 3^{x}\times2^{2y}=12 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{-x}\times2^{y}=112 \\ x+y=5 \end{cases}$.

7-§ Logarifmik tenglamalar va tengsizliklar sistemasini yechish.

1. Tenglamalar sistemasi.

Misollar yechish bilan tushuntiramiz.

Misol. $\begin{cases} \log_{3}x-\log_{3}y=1 \\ 2y^{2}-x+1=0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish: Tenglamalarning mavjudlik sohasini topamiz. Ikkinchi tenglama *x* va *y* ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Birinchi tenglamadan *x>0* va *y>0* ni topamiz.

Birinchi tenglamadan $\log_3 \frac{x}{y} = 1,\ \frac{x}{y} = 3,\ x = 3y$ ni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz: $2y^2-3y+1=0$. Bundan $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 1$ ni topamiz. Bunga mos x ning qiymatlarini $x=3y$ dan topamiz: $x_1 = \frac{3}{2},\quad x_2 = 3$.

Javob: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right),\ (3,1)$.

Misol. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+y) = 2 \\ \log_2(x-y) = 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Tenglamalarning mavjudlik sohasini aniqlovchi

$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$ sistemasini yechib

$\begin{cases} x>+y \\ x>-y \end{cases}$ ni topamiz.

Sistemani potensirlab quyidagi teng kuchli sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x+y = \frac{1}{4} \\ x-y = 4 \end{cases}$$

Bu tenglamalarni qo‘shib $x = 2\frac{1}{8}$ ni, ayirib esa $y = -1\frac{7}{8}$ ni topamiz.

Javob: $\left(2\frac{1}{8},\ -1\frac{7}{8}\right)$

Misol. $\begin{cases} xy = 27 \\ \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Birinchi tenglama x va y ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Ikkinchi tenglamadan $x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ y\neq 1$ shartlarni aniqlaymiz.

Ikkinchi tenglamani quyidagicha o‘zgartirib yozamiz:

$2\log_y x + \frac{2}{\log_y x} - 5 = 0$ yoki

$2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0$ hosil bo‘lgan kvadrat tenglamadan noma’lum $\log_y x$ ni topamiz.

$$\left(\log_y x\right)_{1,2} = \frac{5\pm 3}{4};\ 1)\ \left(\log_y x\right)_1 = \frac{1}{2},\ x = y^{\frac{1}{2}}$$
$$2)\ \left(\log_y x\right)_2 = 2,\ x = y^2.$$

Bularni ketma-ket birinchi tenglamaga qo‘yib, topamiz:

$$1)\ y^{\frac{1}{2}}\cdot y = 27 \qquad y^{\frac{3}{2}} = 27 \qquad y_1 = (27)^{\frac{2}{3}} = 9, \qquad x_1 = \sqrt{9} = 3$$
$$2)\ y^2\cdot y = 27 \qquad y^3 = 27 \qquad y_2 = \sqrt[3]{27} = 3 \qquad x_2 = 3^2 = 9$$

Javob: (3; 9), (9; 3)

Misol. $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right) = 2\\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y\end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Birinchi tenglamadan $x\neq 0,\ y\neq 0$ ni ikkinchi tenglamadan sistemaning mavjudlik sohasi $x>0$ va $y>0$ ni topamiz. Tenglamalarni o‘zgartirib, topamiz: $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right) = 2\\ \log_2(xy) = \log_2 16 + \log_2 3\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2 = 100\\ xy = 48\end{cases}$

Ikkinchi tenglamani 2 ga ko‘paytiramiz va tenglamalarni qo‘shib, $x^2+2xy+y^2=196$ yoki $(x+y)^2=196$ ni hosil qilamiz. Bundan $x+y=\pm 14$ ni topamiz.

Ikkinchi tenglamaga $y=-x-14$ va $y=-x+14$ ni qo‘yamiz.

1) $x(-x-14)=48$. Bundan $x^2+14x+48=0$ ni va $x_1=-6,\ x_2=-8$ ni topamiz.

Bu qiymatlar sistemaning mavjudlik sohasiga tegishli bo‘lmagani uchun sistemaning yechimi bo‘lmaydi.

2) $x(-x+14)=48$. Bundan $x^2-14x+48=0$ ni va $x_1=6$ va $x_2=8$ ni topamiz. Bu qiymatlarni $y=-x+14$ ga qo‘yib $y_1=8$ va $y_2=6$ ni topamiz.

Javob: (6, 8); (8, 6).

2. Tengsizliklar sistemasi.

Misol. $\begin{cases} \log_2(x+2) < 3 \\ \log_3(x+1) > -1 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemadan mavjudlik shartlari $\begin{cases} x+2>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ va tengsizliklarni bajarilishi sharti $\begin{cases} x+2<2^3 \\ x+1>3^{-1} \end{cases}$ ni hosil qilamiz. Bu tengsizliklarni birgalikda yechib:

$$\begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \\ x<6 \\ x>-\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{ ni topamiz.}$$

Bu tengsizliklarga umumiy qismi $-\frac{2}{3}<x<7$ sistemaning yechimi bo‘ladi.

Javob: $x \in (-\frac{2}{3}, 7).$

Misol. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(7-3x) < -4 \\ \log_2(x+4) > 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Oldingi misolga o‘xshab, topamiz:

$$\begin{cases} 7-3x>0 \\ x+4>0 \\ 7-3x>16 \\ x+4>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7-3x>16 \\ x+4>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-3 \\ x>0 \end{cases}$$

-3 dan kichik, lekin 0 dan katta sonlar mavjud emas. Sistemaning yechimi bo‘sh to‘plamdan iborat.

Javob: Ø

MASHQLAR:

1. Sistemani yeching.

1) $\begin{cases} \log_7(x+y)=1 \\ \lg x+\lg y=1, \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2 x+\log_7 y=6 \\ x+y=34 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^y * 3^{2x} = 81 \\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3, \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3^x * 2^y = 576 \\ \log_2(y-x)=2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3(x-y)=5-\log_2(x+y) \\ \lg x-\lg 4=\lg y-\lg 3, \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_x y=2 \\ \log_{x+1}(y+23)=2 \end{cases}$

2. Tengsizliklar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} \log_4(4-2x)\ge 2 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+2)\le -1, \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg x<\lg 8+1 \\ \log_2(x-4)>1, \end{cases}$

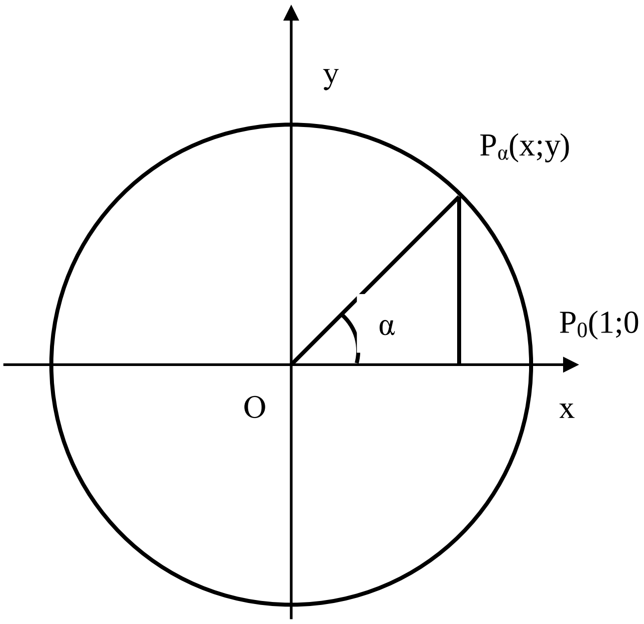
3) $\begin{cases} \log_3(5-4x)\ge \log_3(x-1) \\ \log_{0,3}(2x+5)\le \log_{0,3}(x+1), \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x+\log_2(x-3)<2 \\ \log_2(x^2-1)<3. \end{cases}$

VI-BOB. TRIGONOMETRIYA

1-§ Ixtiyoriy burchakning trigonometrik funksiyalari

Birlik aylanada R_0 (1;0) boshlang’ich nuqtani olamiz. R_0 (1;0) nuqtani aylana bo’ylab soat strelkasiga qarama-qarshi yo’nalishda α burchakka buramiz. Natijada R(1;0) nuqta $R\alpha$ (x;u) nuqtaga o’tadi (3-chizma).



3-чизма

Ta’riflar:

1. $R\alpha$ nuqtaning ordinatasiga α burchakning *sinusi* deyiladi va $\sin\alpha$ deb yoziladi. Demak, $y = \sin\alpha$.

2. $R\alpha$ burchakning abssissasiga α burchakning *kosinusi* deyiladi va uni $\cos\alpha$ deb yoziladi. Demak, $x = \cos\alpha$.

3. $R\alpha$ nuqtaning ordinatasini uning abssissasiga nisbati, α burchakning *tangensi* deyiladi va uni $tg\,\alpha$ deb yoziladi. Demak, $tg\alpha = \frac{y}{x}$.

4. Rα nuqtaning abssissasini uning ordinatasiga nisbati α burchakning *kotangensi* deyiladi va uni $ctg\ \alpha$ deb yoziladi. Demak, $ctg\alpha=\frac{x}{y}$.

Agar x=cosα va y=sinα ekanligini e'tiborga olsak, $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ va $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ larni hosil qilamiz.

Xuddi shuningdek, $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ va $\mathrm{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$ larni ham yozish mumkin.

Quyida bu ayniyatni qo'llashga doir misollar qaraymiz.

Misol. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-2$ ni soddalashtiring.

Yechish: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \bullet \cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \bullet \cos\alpha + \cos^2\alpha - 2 = 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 2 =$ $= 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2 = 2\bullet 1-2 = 0.$

Misol. $\sin^2x+\cos^2x+tg^2x$ ni soddalashtiring.

Yechish: $\sin^2x+\cos^2x+tg^2x=1+tg^2x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

MASHQLAR:

Soddalashtiring.

1. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta$

2. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^6\alpha\cdot\cos^6\alpha$

3. $\sin^2x+\cos^2x+tg^2x$

4. $(ctg\alpha - \cos\alpha)\cdot\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + tg\alpha\right)$

5. $\dfrac{1-\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}$

6. $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}$

7. $\dfrac{3\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}{1+\sin^2\alpha + \sin^4\alpha}$

8. $\dfrac{1+\cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{3\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}$

9. $\dfrac{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}$

10. $\dfrac{1-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}$

11. $(tgx+ctgx)^2-(tgx - ctgx)^2$

12. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha - \cos\alpha)^2-2$

13. $1+\dfrac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

2-§ Trigonometrik funksiyalarning ishoralari.

Trigonometrik funksiyalarning ishoralari qaralayotgan burchakning qaysi chorakda yotishiga qarab aniqlanadi.

α burchakning sinusi Rα nuqtaning ordinatasidan iborat bo’lganligi uchun u I va II choraklarda musbat, III va IV choraklarda manfiy bo’ladi.

α burchakning kosinusi Rα nuqtaning abssissasidan iborat bo’lganligi uchun u I va IV choraklarda musbat, II va III choraklarda manfiy bo’ladi.

α burchakning tangensi va kotangensi Rα nuqta koordinatalarining nisbatlaridan iborat bo’lganligi uchun, ular Rα nuqtaning koordinatalari bir xil ishorali bo’lgan I va III choraklarda musbat, koordinatalari har xil ishorali bo’lgan II va IV choraklarda manfiy bo’ladi.

Bularni barchasini umumlashtirib quyidagi jadvalni tuzamiz:

Choraklar / Funksiyalar	I	II	III	IV
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
ctg α	+	-	+	-

Misol: cos3, sin4, sin2, tg2 va cos9 lardan qaysi biri musbat.

Yechish: 3 radian II-chorakdagi burchak bo’lganligi uchun cos3<0, 4 radian III-chorakdagi burchak bo’lganligi uchun sin4<0, 2 radian II-chorakdagi burchak bo'lganligi uchun $\sin 2>0$ va 9 radian II-chorakdagi burchak bo'lganligi uchun $\cos 9<0$.

Javob: sin2.

Misol: $\sin 122^0 \bullet \cos 322^0$ va $\cos 148^0 \bullet \cos 289^0$ lardan qaysi biri manfiy?

Yechish: 122^0 II-chorakda bo'lganligi uchun $\sin 122^0>0$, 322^0 IV-chorakda bo'lganligi uchun $\cos 322^0>0$. Demak, $\sin 122^0 \bullet \cos 322^0>0$.

148^0 II-chorakda bo'lganligi uchun $\cos 148^0<0$, 289^0 IV-chorakda bo'lganligi uchun $\cos 289^0>0$. Demak, $\cos 148^0 \bullet \cos 289^0<0$.

Quyidagi sonli ifodalarning ishoralarini aniqlang?

1. $M = \dfrac{\cos 320^0}{\sin 217^0}$

2. $N = \dfrac{ctg 187^0}{tg 340^0}$

3. $P = \dfrac{tg 185^0}{\sin 140^0}$

4. $Q = \dfrac{\sin 135^0}{ctg 140^0}$

5. $tg 247^0 \sin 125^0$

6. $ctg 215^0 \cos 300^0$

7. $tg 135^0 ctg 340^0$

8. $\sin 247^0 \cos 276^0$

9. $\sin 260^0 \cos 276^0$

10. $\dfrac{ctg187^0}{\sin 316^0}$

11. $\dfrac{\cos 340^0}{\sin 185^0}$

12. $\dfrac{\sin 148^0}{\cos 317^0}$

13. $\dfrac{ctg105^0}{tg185^0}$

14. $\dfrac{tg\,215^0}{\cos 125^0}$

3-§ Trigonometrik funksiyalarning qiymatlari.

α burchak trigonometrik funksiyalarining qiymatlari Rα nuqtaning koordinatalariga bog'liq. Chunki sinα =yα, cosα =xα, tgα = $\dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$, ctg$\alpha = \dfrac{x_\alpha}{y_\alpha}$

α burchak 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ va 2π qiymatlarni qabul qilganda Rα nuqtaning koordinatalari osongina topiladi. α burchak $30^0 = \dfrac{\pi}{6}$, 45^0= $\dfrac{\pi}{4}$ va 60^0=$\dfrac{\pi}{3}$ qiymatlarni qabul qilganda Rα nuqtaning koordinatalarini o'tkir burchagi α bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdan topiladi.

Quyidagi jadvalda trigonometrik funksiyalarning ba'zi bir burchaklardagi qiymatlari keltirilgan.

Burchak / Funksiya	0	$\frac{\pi}{6}=30^0$	$\frac{\pi}{4}=45^0$	$\frac{\pi}{3}=60^0$	$\frac{\pi}{2}=90^0$	$\pi=180^0$	$\frac{3\pi}{2}=270^0$	$2\pi=360^0$

sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Eslatma: jadvaldagi " – " belgi ko'rsatilgan burchakda trigonometrik funksiyaning qiymati mavjud emasligini bildiradi.

Misol: Hisoblang: 1) $5\sin 90^0+2\cos 0^0-2\sin 270^0+10\cos 180^0+\sin 30^0$;

Yechish: $5\sin 90^0+2\cos 0^0-2\sin 270^0+10\cos 180^0+\sin 30^0= \; =5\bullet 1+2 \bullet 1-2\bullet(-1)+ \; +10\bullet(-1)+\frac{1}{2}=5+2+2-10+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

Misol: $\sin 180^0+\sin 270^0-ctg 90^0+tg 45^0-\cos 90^0+5$

Yechish: $\sin 180^0+\sin 270^0-ctg 90^0+tg 45^0-\frac{1}{2}\cos 90^0+5=0-1-0+1-0+5=5$.

2) MASHQLAR:

3) Hisoblang.

1. $\sin 180^0+\sin 270^0-ctg 90^0+tg 180^0-\cos 90^0$
2. $5\sin 90^0+2\cos 0^0-2\sin 270^0+10\cos 180^0$
3. $\sin(1050^0)-\cos(-90^0)+ctg(660^0)$
4. $\sin(-45^0)-\cos(405^0)+tg(-945^0)$
5. $\cos(-45^0)+\sin(315^0)+tg(-885^0)$

6. $tg\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{5\pi}{4}$

7. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg(\pi+\beta)$

8. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot tg(\pi-\beta)$

9. $ctg37^0\ ctg38^0\ ctg39^0\ldots\ ctg52^0\ ctg53^0$

10. $\lg tg22^0+\lg tg68^0+\lg tg90^0$

4-§ Asosiy trigonometrik ayniyatlar

Quyidagilarni asosiy trigonometrik ayniyatlar deb ataladi:

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $(\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha})$

2. $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0)$; $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$.

3. $tg\alpha\bullet ctg\alpha=1$ $(tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}$, , $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha})$.

4. $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$; $1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{cosec}^2\alpha$.

Trigonotmetrik ifodalarni soddalashtirishda, trigonometrik tenglama va tengsizliklarni yechishda bu ayniyatlardan foydalaniladi.

Misol: $(ctg\alpha-\cos\alpha)\bullet\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+tg\alpha\right)$ni soddalashtiring.

Yechish: $(ctg\alpha-\cos\alpha)\bullet\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+tg\alpha\right)=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\cos\alpha\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$

$$=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha\bullet\cos\alpha}{\sin\alpha}\bullet\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha}\bullet\frac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=$$

$=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$.

Keltirish formulalari

O'tkir burchak trigonometrik funksiyalarining qiymatlarini jadval yordamida yoki to'g'ri burchakli uchburchakdan foydalanib hisoblash mumkin. Ixtiyoriy burchak (90^0 dan 360^0gacha bo'lgan) trigonometrik funksiyalarining qiymatlarini esa *keltirish formulalari* deb ataluvchi formulalar yordamida doimo o'tkir burchak trigonometrik funksiyalarining qiymatlarini hisoblashga keltirish mumkin. Quyidagi jadval keltirish formulalari jadvalidir.

Argument / funksiya	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Jadvaldan, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ burchaklarning trigonotmerik funksiyalaridan α burchakning trigonometik funksiyalariga o'tishda funksiyalarning nomlari o'zgarishini, ya'ni sinusdan kosinusga, kosinusdan sinusga, tangensdan kotangensga va kotangensdan tangensga o'tishini qolgan hollarda esa o'zgarmasligini ko'rish mumkin. Misollar:

Misol: Hisoblang sin (-1560^0).

Yechish: $\sin(-1560^0) = -\sin1560^0 = -\sin(4 \bullet 360^0 + 120^0) = -\sin120^0$ $= -\sin(90^0+30^0) = -\cos30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Misol: Hisoblang $\cos 2010^0$.

Yechish: $\cos2010^0 = \cos(5 \bullet 360^0+210^0) = \cos210^0 = \cos(180^0+30^0)$ $= -\cos30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Misol: Hisoblang $\mathrm{tg}\, 225^0$

Yechish: $\mathrm{tg}\, 225^0 = \mathrm{tg}(180^0 + 45^0) = \mathrm{tg}45^0 = 1$.

5 - § Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining trigonometrik funksiyalari

Ba'zi hollarda berilgan burchakning trigonometrik funksiyalari qiymatlarini bevosita hisoblab bo'lmaydi. Lekin bu burchakni ikkita burchakning yig'indisi yoki ayirmasi sifatida qaralib quyidagi formulalardan foydalanib hisoblash mumkin bo'ladi. Ular:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \bullet \cos\beta + \cos\alpha \bullet \sin\beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \bullet \cos\beta - \cos\alpha \bullet \sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \bullet \cos\beta - \sin\alpha \bullet \sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \bullet \cos\beta + \sin\alpha \bullet \sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \bullet tg\beta}$; $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \bullet tg\beta}$;

$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1 - tg\alpha \bullet tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$; $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{1 + tg\alpha \bullet tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$

Misol: $\sin15^0$ ni hisoblang.

Yechish: $\sin15^0=\sin(45^0-35^0)=\sin45^0\bullet\cos30^0-\cos45^0\bullet\sin30^0=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\frac{1}{2}==\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

Misol: $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2$ bo'lsa, ctgα ni toping.

Yechish: $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\alpha}{1+tg\frac{\pi}{4}\bullet tg\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$. Demak, $\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$=2. Bundan tg α ni topamiz. 1-tgα=2+2 tgα; 3 tgα=-1; tgα=-$\frac{1}{3}$; ctgα=

$\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-3$.

Javob: -3.

Ikkilangan va uchlangan burchakning trigonometrik funksiyalari. Qiymatlarini bilgan holda 2α va 3α burchakning trigonometrik funksiyalari qiymatlarini aniqlashga to'g'ri keladi. U quyidagi formulalar yordamida amalga oshiriladi:

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\bullet\cos\alpha$; $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; $ctg2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$; $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$; $ctg3\alpha=\frac{1-3tg^2\alpha}{3tg\alpha-tg^3\alpha}$.

Agar dastlabki 4 ta formuladagi 2α ni α bilan almashtirsak, u holda quyidagi formulalar hosil bo'ladi.

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\bullet\cos\frac{\alpha}{2}$; $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Xuddi shuningdek dastlabki 4 ta formuladagi 2α ni 4α, 6α, 8α, … lar bilan almashtirib yana qo'shimcha formulalarni hosil qilish mumkin.

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ formulada $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ yoki $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ ekanligini e'tiborga olib kuyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Bu formulalardan esa quyidagilarni hosil qilamiz:

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ yoki $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ yoki $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Misol: $14\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{3\pi}{8} - \cos^4\frac{3\pi}{8}\right)$ ni hisoblang

Yechish: $14\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{3\pi}{8} - \cos^4\frac{3\pi}{8}\right) = 14\sqrt{2}\left(\sin^2\frac{3\pi}{8} - \cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$
$\left(\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}\right) = -14\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{3\pi}{8} - \sin^2\frac{3\pi}{8}\right) =$

$$-14\sqrt{2}\cos 2\bullet\frac{3\pi}{8} = -14\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = -14\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$-14\sqrt{2}\bullet\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = 14\sqrt{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2} = 14.$$

Misol: $\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ $-\sin\alpha$ ni soddalashtiring:

Yechish: $\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$-$\sin\alpha$ $=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\bullet\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$-$\sin\alpha$ $=$

$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\sin\alpha$ $=\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha$.

Trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga almashtirish formulalari. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishda, trigonometrik tenglama va tengsizliklarni yechishda ko'pincha trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga almashtirish formulalaridan foydalanish qulay bo'ladi. Bu formulalarni ikki burchak yig'indisi va ayirmasining trigonometrik funksiyalari uchun yozilgan formulalardan osongina keltirib chiqariladi. Ular:

$$\sin\alpha\bullet\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\bullet\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\bullet\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$tg\alpha\bullet tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta};$$

$$ctg\alpha\bullet ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}.$$

Misol: $\sin^4 105^0\bullet\cos^4 75^0$ ni hisoblang.

Yechish: $\sin^4 105^0\bullet\cos^4 75^0=(\sin 105^0\bullet\cos 75^0)^4=$

$[\frac{1}{2}(\sin 180^0+\sin 30^0)]^4=\frac{1}{16}(0+\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}\bullet\frac{1}{16}=\frac{1}{256}$.

Misol: $\cos 92^0\bullet\cos 2^0+\frac{1}{2}\sin 4^0+1$ ni hisoblang.

Yechish: $\cos92^0 \bullet \cos2^0+\frac{1}{2}\sin4^0+1=\frac{1}{2}(\cos94^0+\cos90^0)+\frac{1}{2}\sin4^0+1=$

$\frac{1}{2}$ $[\cos(90^0+4^0)++0]+\frac{1}{2}\sin4^0+1=\frac{1}{2}(-\sin4^0)+\frac{1}{2}\sin4^0+1=-\frac{1}{2}\sin4^0+\frac{1}{2}$

$\sin4^0+1=1$.

Trigonomterik funksiyalar yig'indisi va ayirmasini ko'paytmaga almashtirish. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ko'pgina topshiriqlarni bajarishda trigonometrik funksiyalar yig'indisi yoki ayirmasini ko'paytmaga almashtirishga to'g'ri keladi. Ular quyidagilardan iborat:

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\bullet\cos\frac{x-y}{2}$; $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\bullet\cos\frac{x+y}{2}$;

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\bullet\cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\bullet\sin\frac{x-y}{2}$;

$\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\bullet\cos y}\quad(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\quad y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi)$;

$\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\bullet\cos y}\quad(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\quad y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi)$;

$\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\bullet\sin y}\quad(x\neq k\pi;\quad y\neq k\pi)$;

$\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\bullet\sin y}\quad(x\neq k\pi;\quad y\neq k\pi)$.

Misol: $\sin10^0+\sin50^0-\cos20^0$ ni hisoblang.

Yechish: $\sin10^0 + \sin50^0\cos20^0 = 2\sin\frac{10^0+50^0}{2}\bullet\cos\frac{10^0-50^0}{2}-\cos20^0=$

$=2\sin30^0\bullet\cos20^0 - \cos20^0 = 2\bullet\frac{1}{2}\bullet\cos20^0 - \cos20^0 = \cos20^0 - \cos20^0 = 0$.

Misol: $\mathrm{tg}15^0- \mathrm{ctg}15^0$ ni hisoblang.

Yechish: $ctg15^0 = tg75^0$ dan foydalanamiz. $tg15^0 - ctg15^0 = tg15^0 - tg75^0 = \frac{\sin(15^0 - 75^0)}{\cos 15^0 \bullet \cos 75^0} = \frac{-\sin 60^0}{\frac{1}{2}(\cos 90^0 + \cos 60^0)} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2})} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \bullet 4 = -2\sqrt{3}$.

MASHQLAR:

Soddalashtiring.

1. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta$

2. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^6\alpha \cdot \cos^6\alpha$

3. $\sin^2 x + \cos^2 x + tg^2 x$

4. $(ctg\alpha - \cos\alpha) \cdot \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + tg\alpha\right)$

5. $\frac{1 - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}$

6. $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}$

7. $\frac{3\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}{1 + \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}$

8. $\frac{1 + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{3\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}$

9. $\frac{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}$

10. $\frac{1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{1 + \sin\alpha}$

11. $(tgx+ctgx)^2$-$(tgx - ctgx)^2$

12. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-2$

6-§ Yarim burchakning trigonometrik funksiyalari

Ko'p hollarda α burchakning trigonometrik funksiyalarini qiymatlarini bilgan holda $\frac{\alpha}{2}$ burchakning trigonometrik funksiyalarini qiymatlarini aniqlashga to'g'ri keladi. Bunda quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\quad tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

"$\pm$" ishoralardan qaysi birini olinishi $\frac{\alpha}{2}$ burchakning qaysi chorakda yotishiga bog'liq.

Misol: $\sin\frac{5\pi}{12}$ ni hisoblang.

Yechish: $\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos 2\bullet\frac{5\pi}{12}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos(\pi-\frac{\pi}{6})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=$

$\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Misol: $\cos 2227^0 30^1$ ni hisoblang.

Yechish: $\cos 2227^0 30^1=\cos(6\bullet 360^0+67^0 30^1)=\cos 67^0 30^1=$

$=\sqrt{\frac{1+\cos 135^0}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Butun burchak trigonometrik funksiyalarini yarim burchakning tangensi orqali ifodalash. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan topshiriqlarni bajarishda ko'pincha sinα, cosα, tg α va ctgα larni tg$\frac{\alpha}{2}$ orqali ifodasidan foydalanish qulaylik tug'diradi. Ular quyidagilardan iborat:

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Bu formulalarni ikkilangan burchakning trigonometrik funksiyalari uchun yozilgan formulalardan keltirib chiqariladi.

Misol: $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$ bo'lsa, sinα va cosα lar topilsin.

Yechish: $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\bullet\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}}=\frac{3}{2}\bullet\frac{16}{25}=\frac{24}{25};$

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}}=\frac{7}{25}.$$

Agar yuqoridagi formulalarda α ni 2α bilan almashtirsak quyidagi formulalar hosil bo'ladi.

$$\sin2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha};\quad \cos2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha};\quad \mathrm{tg}2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};\ \mathrm{ctg}2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$$

Misol. $tg\alpha=0{,}2$ bo'lsa, $\frac{2}{3+4\cos2\alpha}$ ni hisoblang.

Yechish: Dastlab cos2α ni hisoblaymiz.

$$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-0{,}04}{1+0{,}04} = \frac{0{,}96}{1{,}04} = \frac{96}{104} = \frac{12}{13};$$

$$\frac{2}{3+4\cos 2\alpha} = \frac{2}{3+4\bullet\frac{12}{13}} = \frac{2}{\frac{39+48}{13}} = \frac{26}{87}.$$

Trigonometrik funksiyalardan birini qolganlari orqali ifodalash. Ko'p hollarda trigonometrik funksiyalardan biri ma'lum bo'lib qolganlarini topishga to'g'ri keladi. Bunda quyidagi jadvalda keltirilgan formulalardan foydalaniladi.

Ifodalanishi kerak bo'lgan funksiya / Funksiya	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$
$sos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\pm\frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$
$tg\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$tg\alpha$	$\frac{1}{ctg\alpha}$
$stg\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\alpha}$	$ctg\alpha$

Misol: Agar $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ va $tg\alpha = 2$ bo'lsa, $sos\alpha$ ni toping.

Yechish: $\cos\alpha$ ni I chorakda musbat ekanligini e'tiborga olib, uni $tg\alpha$ orqali ifodasidan foydalanamiz.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

MASHQLAR:

Soddalashtiring.

1. $\cos55^0\cos65^0\cos75^0$

2. $tg10^0\ tg50^0\ tg70^0$

3. $\sin20^0\sin40^0\sin80^0$

4. $\sin(202^0 30')$

5. $\sin112{,}5^0$

6. $8\cos30^0+tg^2 15^0$

7. $\sin105^0+\sin75^0$

8. $4ctg30^0+tg^2 15^0$

9. $\cos\frac{5\pi}{12}$

10. $\sin\frac{5\pi}{12}$

11. $\frac{\cos^2 68^0-\cos^2 38^0}{\sin106^0}$

12. $\cos^8 165^0-\sin^8 165^0$

13. $2\sin44^0\cos16^0+2\sin^2 31^0-1$

14. $\frac{\sin^4\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha-\cos^4\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$

7-§ Trigonometrik tenglamalar.

Ta’rif. Noma’lum miqdor trigonometrik funksiya argumenti sifatida qatnashgan tenglamalar *trigonometrik tenglamalar* deyiladi.

sinx=a, cosx=a, tgx=a, ctgx=a ko’rinishdagi tenglamalar *eng sodda trigonometrik tenglamalar* deyiladi.

Ancha murakkab ko’rinishda bo’lgan tenglamalar turli xil almashtirishlar yordamida eng sodda trigonometrik tenglamalarga keltiriladi va yechiladi.

sinx=a, $|a|\le 1$ ko’rinishdagi tenglama

Sinusning qiymatlar sohasi [-1;1] kesmadan iborat bo’lgani uchun |a|>1 da berilgan tenglama yechimga ega emas. Quyida a ning [-1;1] kesmadagi ba’zi bir qiymatlaridagi yechimlarni yozamiz.

1. sinx=-1 bo’lsa, $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in z$.

2. $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo’lsa, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in z$.

3. $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo’lsa, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in z$.

4. $\sin x=-\frac{1}{2}$ bo’lsa, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in z$.

5. sinx=0 bo’lsa, $x=k\pi,\ k\in z$.

6. $\sin x=\frac{1}{2}$ bo’lsa, $x=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in z$.

7. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo’lsa, $x=(-1)^{k}\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in z$.

8. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in z$.

9. $\sin x=1$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in z$.

Misol: $2\sin x=-\sqrt{3}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $2\sin x=-\sqrt{3}$, $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in z$.

Misol: $2\sin 2x=-1$ tenglama yechilsin.

Yechish: $2\sin 2x=-1$, $\sin 2x=-\frac{1}{2}$, $2x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$,

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in z$.

Misol: $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$ tenglama yechilsin.

Yechish: $\sin 2x=\cos^2 x-2\sin x\bullet\cos x+\sin^2 x$,

$\sin 2x=1-\sin 2x$, $2\sin 2x=1$, $\sin 2x=\frac{1}{2}$,

$2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=(-1)\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in z$.

cosx=a, |a|$\le$1 ko'rinishdagi tenglama

$|a|>1$ bo'lganda tenglama yechimga ega emas.

$|a|\le 1$ bo'lganda tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega.

Agar $x=\alpha$ tenglamaning biror yechimi bo'lsa, u holda $x=-\alpha$ ham uning yechimi bo'ladi. Bu holda berilgan tenglamaning umumiy yechimlari to'plami $x=\pm\alpha+2k\pi$ dan iborat bo'ladi.

Quyida a ($|a|\le 1$) ning ba'zi bir qiymatlari uchun $\cos x=a$ tenglamani yechimlarini keltiramiz:

1. cosx=-1 bo'lsa, x=π+2kπ, $k \in z$.

2. cosx=-$\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, x=$\pm\frac{5\pi}{6}$+2kπ, $k \in z$.

3. cosx=-$\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, x=$\pm\frac{3\pi}{4}$+2kπ, $k \in z$.

4. cosx=-$\frac{1}{2}$ bo'lsa, x=$\pm\frac{2\pi}{3}$+2kπ, $k \in z$.

5. cosx=0 bo'lsa, x=$\frac{\pi}{2}$+kπ, $k \in z$.

6. cosx=$\frac{1}{2}$ bo'lsa, x=$\pm\frac{\pi}{3}$+2kπ, $k \in z$.

7. cosx=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, x=$\pm\frac{\pi}{4}$+2kπ, $k \in z$.

8. cosx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, x=$\pm\frac{\pi}{6}$+2kπ, $k \in z$.

9. cosx=1 bo'lsa, x=2kπ, $k \in z$.

Misol: 2cosx=-$\sqrt{3}$ tenglama yechilsin.

Yechish: 2cosx=-$\sqrt{3}$, cosx=-$\frac{\sqrt{3}}{2}$, x=$\pm\frac{5\pi}{6}$+2kπ, $k \in z$

Misol: 2cos^{2}x-1=-$\frac{1}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: 2cos^{2}x=1+cos2x dan foydalanamiz.

1+cos2x-1=-$\frac{1}{2}$, cos2x=-$\frac{1}{2}$, 2x=-$\pm\frac{2\pi}{3}$+2kπ, x=$\pm\frac{\pi}{3}$+kπ, $k \in z$.

tgx=a ko'rinishdagi tenglama

tgx=a tenglama a ning har qanday qiymatlarida yechimga ega. Bitta davrga teng oraliqda tangens har bir qiymatni faqat bir marta qabul qiladi. Shuning uchun tgx=a tenglamaning yechimi α bo'lsa, u hola uning qolgan yechimlarini bu yechimga uning davrini qo'shish orqali hosil qilinadi. Ya'ni, x=α+kπ $k \in z$ bo'ladi.

Quyida biz a ning ko'proq uchrab turadigan qiymatlari uchun tgx=a tenglamaning yechimlarini keltiramiz:

1. tgx=-1 bo'lsa, x=-$\frac{\pi}{4}$+kπ, $k \in z$;

2. tgx=-$\sqrt{3}$ bo'lsa, x=-$\frac{\pi}{3}$+kπ, $k \in z$;

3. tgx=-$\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, x=-$\frac{\pi}{6}$+kπ, $k \in z$;

4. tgx=0 bo'lsa, x=kπ, $k \in z$;

5. tgx=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, x=$\frac{\pi}{6}$+kπ, $k \in z$;

6. tgx=$\sqrt{3}$ bo'lsa, x=$\frac{\pi}{3}$+kπ, $k \in z$;

7. tgx=1 bo'lsa, x=$\frac{\pi}{4}$+kπ, $k \in z$.

Misol: (1+cosx)$\bullet$tg$\frac{x}{2}$=0 tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglamadan 1+cosx=0 va tg$\frac{x}{2}$=0 tenglamalarni hosil qilamiz. Ularni yechamiz: 1+cosx=0, cosx= -1, x=π+2kπ, $k \in z$.

tg$\frac{x}{2}$=0, $\frac{x}{2}$=kπ, x=2kπ, $k \in z$.

Bu yechimlardan x=2kπ, $k \in z$ ni hosil qilamiz.

ctgx = a ko'rinishdagi tenglama

Kotangensning qiymatlar sohasi $(-\infty;+\infty)$ dan iborat bo'lgani uchun u a ning har qanday qiymatlarida yechimga ega. Bitta davrga teng oraliqda kotangens har bir qiymatni faqat bir marta qabul qiladi. Shuning uchun ctgx=a tenglamaning yechimi α bo'lsa, uning qolgan yechimlarini bu yechimga uning davrini qo'shish bilan hosil qilinadi. Ya'ni x=α+kπ, $k \in z$.

Quyida biz a ning ba'zi bir qiymatlari uchun ctgx=a tenglamani yechimlarini keltiramiz:

1. ctgx=-$\sqrt{3}$ bo'lsa, x=$\frac{5\pi}{6}$+kπ, $k \in z$.

2. ctgx=-$\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, x=$\frac{2\pi}{3}$+kπ, $k \in z$.

3. ctgx=-1 bo'lsa, x=$\frac{3\pi}{4}$+kπ, $k \in z$.

4. ctgx=0 bo'lsa, x=$\frac{\pi}{2}$+kπ, $k \in z$.

5. ctgx=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, x=$\frac{\pi}{3}$+kπ, $k \in z$.

6. ctgx=$\sqrt{3}$ bo'lsa, x=$\frac{\pi}{6}$+kπ, $k \in z$.

7. ctgx=1 bo'lsa, x=$\frac{\pi}{4}$+kπ, $k \in z$.

Misol: ctg$\frac{\pi}{2}$(x-1)=0 tenglama (1;5) oraliqda nechta yechimga ega?

Yechish: Berilgan tenglama ctgx=a ko'rinishdagi eng sodda tenglamadir. Undan $\frac{\pi}{2}$(x-1)=$\frac{\pi}{2}$+kπ, x-1=2k+1, x=2k+2 kelib chiqadi.

Bu yechimlardan (1;5) oraliqqa tegishli bo'lganlarini ajratamiz.

k=0 da $x_1=2$, k=1 da $x_2=4$. $k\geq 2$ bo'lganda hosil bo'lgan yechimlar (1;5) oraliqqa tegishli bo'lmaydi. Demak, berilgan tenglama (1;5) oraliqda ikkita yechimga ega ekan.

MASHQLAR:

Tenglamani yeching.

1. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=0$

2. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0$

3. $\sin\frac{\pi x}{2}=1$

4. $2\cos x=-\sqrt{3}$

5. $2\sin x=-\sqrt{3}$

6. $2\sin 3x=-1$

7. $4\sin^2 2x=3$

8. $tg\,\pi x^2=tg\left(\pi x^2+2\pi x\right)$

9. $\left|\sin 3x\right|=\frac{1}{2}$

10. $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$

8-§ Trigonometrik tenglamalarning turlari

Ko'pincha trigonometrik tenglamalarni ularni ko'rinishiga qarab, ularni yechishda foydalaniladigan formulalarga qarab, ba'zan aralash, ko'rinishiga va foydalaniladigan formulalarga qarab turlarga ajratiladi. Ular quyidagilardan iborat.

I. *Trigonometrik funksiyalardan birortasiga nisbatan algebraik bo'lgan tenglama.*

Masalan, $2\sin^2 x+\sin x-2=0$ tenglama sinx ga nisbatan kvadrat tenglamadir. Uni yechib $\sin x=\frac{1}{2}$ va sinx=-2 larni hosil qilamiz. Bu tenglamalardan birinchisi $x=(-1)^k \bullet \frac{\pi}{6}+ k\pi,\ k\in z$ yechimga ega. Sinx=-2 tenglama esa yechimga ega emas.

II. *Trigonometrik formulalar yordamida almashtirishlar qilib yechiladigan tenglamalar.*

Masalan sinx+sin2x+sin3x=0 tenglamani yechish uchun dastlab sinx+sin3x yig'indi ko'paytmaga almashtiriladi. YA'ni $2\sin 2x\bullet \cos x+\sin 2x=0$ $\sin 2x\bullet(2\cos x+1)=0$, Bu tenglamadan esa sin2x=0 va $\cos x=-\frac{1}{2}$ eng sodda trigonometrik tenglamalar hosil bo'ladi. Ularni yechamiz: sin2x=0, $2x=k\pi$, $x=\frac{k\pi}{2},\ k\in z$. $\cos x=-\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$.

III. *Bir jinsli tenglamalar*

Agar tenglamadagi har bir qo'shiluvchi bir xil darajali bo'lsa, u holda tenglamani bir jinsli tenglama deyiladi. Masalan, $\sin^2 x-5\sin x\bullet \cos x+6\cos^2 x=0$ tenglama 2-darajali bir jinsli tenglamadir. Uni yechish uchun har ikkala tomonini hadma-had $\cos^2 x$ yoki $\sin^2 x$ ga bo'lamiz va natijada tgx yoki ctgx ga nisbatan kvadrat tenglamaga kelamiz. Ya'ni,

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-5\bullet\frac{\sin x\bullet\cos x}{\cos^2 x}+6\bullet\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,\qquad tg^2x-5tgx+6=0.$$

Bu tgx ga nisbatan kvadrat tenglamadir. Uni yechib tgx=2 va tgx=3 lardan iborat eng sodda tenglamalarni hosil qilamiz.

asinx+bcosx=0 ($a\neq 0$, $b\neq 0$) tenglama sinx va cosx ga nisbatan birinchi darajali bir jinsli tenglamadir. Bu tenglama har ikkala tomonini cosx ga bo'lish yordamida atgx+b=0 yoki tgx=$-\frac{b}{a}$ ko'rinishdagi tenglamaga keltiriladi va yechiladi.

asinx+bcosx=c ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$) tenglama ham yordamchi burchak kiritish yo'li bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Bu quyidagicha amalga oshiriladi. asinx+b cosx=c, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\bullet\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Agar $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$ deb olsak, u holda $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$ bo'ladi.

Chunki $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$.

Buni e'tiborga olsak, berilgan tenglama $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ko'rinishdagi eng sodda tenglamadan iborat bo'ladi. Uni yechish usuli esa bizga ma'lum.

Ba'zi hollarda $a\sin x+b\cos x=0$ tenglamani ham yuqoridagi usul bilan $\sin(x+\alpha)=0$ ko'rinishga keltiriladi va yechiladi.

Misol: 2cosx-3sinx=0 tenglama yechilsin

Yechish: 2cosx-3sinx=0, 3sinx=2cosx, 3tgx=2, tgx=$\frac{2}{3}$,

x=arctg$\frac{2}{3}$+kπ, $k\in z$.

MASHQLAR:

Tenglamani yeching.

1. $\sin x\cdot\cos 3x+\cos x\cdot\sin 3x=1$

2. $\sin x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\sin 2x=0$

3. $\sin 5x\cdot\cos 2x=\cos 5x\cdot\sin 2x-1$

4. $\cos 2x\cdot\sin 3x+\sin 2x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}$

5. $\sin kx\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos kx=0$

6. $\cos x-\sin 2x\cos x=0$

7. $tgx-tg\frac{\pi}{3}-tgx\cdot tg\frac{\pi}{3}=1$

8. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$

9. $\sin 2x+\sin 4x=0$

10. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0,5$

11. $\sin 6x+\sin 2x=\sin 4x$

12. $\cos 2x-\cos 6x-\sin 4x=0$

9-§ Trigonometrik tengsizliklar

Ta'rif. Noma'lum miqdor trigonometrik funksiyaning argumenti sifatida qatnashgan tengsizliklar *trigonometrik tengsizliklar* deyiladi.

Trigonometrik tengsizliklarni yechishda o'quvchilardan trigonometrik funksiyalar bo'yicha barcha formulalarni va trigonometrik funksiyalarni xossalarini mukammal bilishlari talab qilinadi. Har qanday trigonometrik tengsizliklarni yechish doimo sinx>a (sinx<a), cosx>a (cosx<a), tgx>a (tgx<a) va ctgx>a (ctgx<a) ko'rinishdagi tengsizliklarni

yechishga keltiriladi. Bu tengsizliklarni eng sodda trigonometrik tengsizliklar deyiladi.

sinx>a va sinx<a ko'rinishdagi tengsizliklar

sinx>a yoki sinx<a tengsizliklarni yechishda birlik aylanadan, y=sinx va y=a funksiyalar grafiklaridan yoki tengsizliklarni umumiy yechimini yozish formulalaridan foydalaniladi. Bunday tengsizliklarni yechishda ham a ning ba'zi bir qiymatlari uchun yechimlarni yozishni bilish muhimdir. Quyida biz ularni keltiramiz:

1. $\sin x>\frac{1}{2}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

2. $\sin x\le\frac{1}{2}$ bo'lsa, $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

3. $\sin x\ge-\frac{1}{2}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

4. $\sin x\le-\frac{1}{2}$ bo'lsa, $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

5. $\sin x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

6. $\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{4\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

7. $\sin x\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

8. $\sin x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le x\le-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

9. $\sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

10. $\sin x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{5\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

11. $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

12. $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x < -\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

13. $\sin x > 0$ bo'lsa, $2k\pi < x < \pi+2k\pi,\ k\in z$

14. $\sin x < 0$ bo'lsa, $-\pi+2k\pi < x < 2k\pi,\ k\in z$

Misol: $2\sin 2x \geq \sqrt{2}$ tengsizlik yechilsin.

Yechish: $2\sin 2x \geq \sqrt{2}$, $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi}{4}+2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $\frac{\pi}{8}+k\pi < x < \frac{3\pi}{8}+k\pi,\ k\in z$.

cosx<a va cosx>a ko'rinishdagi tengsizliklar

cosx<a yoki cosx>a tengsizliklarni yechishda ham birlik aylanadan, y=cosx va y=a larning grafiklaridan yoki umumiy yechimni yozish formulalaridan foydalaniladi. Bunday tengsizliklarni yechishda ham a ning ba'zi bir qiymatlari uchun tengsizliklarni yechimlarini yozishni bilish muhimdir. Quyida ularni keltiramiz:

1. $\cos x > 0$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in z$

2. $\cos x < 0$ bo'lsa, $\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in z$

3. $\cos x \geq \frac{1}{2}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

4. $\cos x \leq \frac{1}{2}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

5. $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ bo'lsa, $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

6. $\cos x \le -\frac{1}{2}$ bo'lsa, $\frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$

7. $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

8. $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

9. $\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

10. $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, $\frac{5\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

11. $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

12. $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{7\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

13. $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

14. $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lsa, $\frac{3\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

Misol: $\sin^2 3x-\cos^2 3x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tengsizlik yechilsin

Yechish: $\sin^2 3x-\cos^2 3x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos^2 3x-\sin^2 3x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 6x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$ $+2k\pi \le 6x \le \frac{\pi}{6}+2k\pi$, $-\frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3},\ k\in z$.

tgx<a va tgx>a ko'rinishdagi tengsizliklar

tgx>a va tgx<a ko'rinishdagi tengsizliklarni yechishda birlik aylanadan yoki tangensning grafigidan foydalaniladi. Bunda quyidagilarni bilish muhimdir.

tgx>0 agar, $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in z$. tgx<0 agar, $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi$, $k \in z$.

Bulardan tashqari a ning ba'zi bir qiymatlari uchun tengsizliklarning yechimlarini yozishni bilishlari kerak bo'ladi. Ular:

1. $tgx \geq 1$ bo'lsa, $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in z$.

2. $tgx \leq 1$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in z$.

3. $tgx \geq \sqrt{3}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in z$.

4. $tgx \leq \sqrt{3}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in z$.

5. $tgx > -\sqrt{3}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in z$.

6. $tgx < -\sqrt{3}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in z$.

7. $tgx > -1$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in z$.

8. $tgx < -1$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in z$.

9. $tgx > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in z$.

10. $tgx < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in z$.

11. $tgx > \frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in z$.

12. $tgx < \frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in z$.

Misol: $y = \sqrt{tgx + 1}$ funksiyani aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi tgx+1$\geq$0 tengsizlikning yechimlaridan iborat. Uni yechamiz. tgx$\geq$-1, $-\frac{\pi}{4}+k\pi \leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in z$.

Misol: tg(x+$\frac{\pi}{4}$)$\geq$1 tengsizlik yechilsin.

Yechish: $\frac{\pi}{4}+k\pi \leq x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in z,\quad k\pi \leq x<\frac{\pi}{4}+\frac{\kappa\pi}{4},\ k\in z.$

ctgx>a va ctgx<a ko'rinishdagi tengsizliklar

ctgx>a va ctgx<a tengsizliklar a ning har qanday qiymatlarida yechimga ega. Ularni yechishda birlik aylanadan ctgx ning grafigidan yoki umumiy yechimni yozish formulalaridan foydalanish mumkin. Quyida biz ularni keltiramiz:

1. ctgx>-$\sqrt{3}$ bo'lsa, $k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in z$.

2. ctgx>-1 bo'lsa, $k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in z$.

3. ctgx>$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, $k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in z$.

4. ctgx>0 bo'lsa, $k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in z$.

5. ctgx>$\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo'lsa, $k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in z$.

6. ctgx>1 bo'lsa, $k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in z$.

7. ctgx>$\sqrt{3}$ bo'lsa, $k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in z$.

8. ctgx<-$\sqrt{3}$ bo'lsa, $\frac{5\pi}{6}+k\pi<x<\pi+k\pi,\ k\in z$.

9. ctgx<-1 bo'lsa, $\frac{3\pi}{4}+k\pi<x<\pi+k\pi,\ k\in z$.

10. ctgx$<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo’lsa, $\frac{2\pi}{3}$+kπ<x<π+kπ, k$\in z$.

11. ctgx<0 bo’lsa, $\frac{\pi}{2}$+kπ<x<π+kπ, k$\in z$.

12. ctgx$<\frac{\sqrt{3}}{3}$ bo’lsa, $\frac{\pi}{3}$+kπ<x<π+kπ, k$\in z$.

13. ctgx<1 bo’lsa $\frac{\pi}{4}$+kπ<x<π+kπ, k$\in z$.

14. ctgx$<\sqrt{3}$ bo’lsa, $\frac{\pi}{6}$+kπ<x<π+kπ, k$\in z$.

Misol: ctg($\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}$)$\le$-1 tengsizlik yechilsin.

Yechish: Berilgan tengsizlik ctg$\le$-1 ko’rinishdagi eng sodda tengsizlikdir. Uni yechamiz:

$\frac{3\pi}{4}$+k$\pi \le \frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}<\pi$+k$\pi$, $\frac{7\pi}{12}$+k$\pi \le \frac{2}{3}x<\frac{5\pi}{6}$+k$\pi$, $\frac{7\pi}{4}$+3k$\pi \le 2x<\frac{5\pi}{2}$ +3kπ, $\frac{7\pi}{8}+\frac{3k\pi}{2} \le x<\frac{5\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}$.

MASHQLAR:

Tengsizlikni yeching.

1. $2\sin 2x \ge ctg\frac{\pi}{4}$

2. $\sin x\cos x > \frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $2\sin x \ge \sqrt{2}$

4. $1-2\sin 4x < \cos^2 4x$

5. $\sin 5x\cos 4x+\cos 5x\sin 4x > \frac{1}{2}$

6. $\cos^2 x - \frac{5}{2}\cos x + 1 > 0$

7. $\cos^2 x - \frac{5}{2}\cos x + 1 \le 0$

8. $1 - 2\cos 2x > \sin^2 2x$

9. $(\cos x + 2)|x-5|(x-2) \le 0$

10. $\sin x > \cos x$

11. $\sin 2x < \cos 2x$

12. $\sqrt{\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4}} \ge \frac{1}{2}$

13. $|\sin x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

14. $1 \le \frac{tg3x + tgx}{1 - tg3x \cdot tgx} \le \sqrt{3}$

VIII - BOB. HOSILA VA UNING TADBIQLARI.

1 - § Hosila tushunchasi. Hosila olish qoidalari.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan x va x_0 qiymatlarni olib, $x - x_0$ ayirmani hosil qilamiz. Bu ayirmani erkli o'zgaruvchining x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \text{bu yerdan} \qquad x = x_0 + \Delta x.$$

Bu holda erkli o'zgaruvchining boshlang'ich x_0 qiymati Δx orttirma oldi deb aytiladi, bunda Δx musbat yoki manfiy bo'lgan yetarlicha kichik miqdor. Bunda funksiyaning qiymati

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

miqdorga o'zgaradi. Uni biz funksiyani x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Tayin x_0 da $\Delta f(x_0)$ Δx ning funksiyasidan iborat.

Misol keltiramiz. $y = x^2$ uchun $x = 3{,}9$ va $x_0 = 3{,}75$ bo'lganda Δx va Δy ni aniqlaymiz.

$$\Delta x = x - x_0 = 3{,}9 - 3{,}75 = 0{,}15,$$

$$\Delta y = f(3{,}9) = f(3{,}75) = 3{,}9^2 - 3{,}75^2 = (3{,}9 - 3{,}75)(3{,}9 + 3{,}75)$$
$$= 0{,}15 * 7{,}65 = 1{,}1475.$$

Ta'rif: $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb quyidagi limitga aytiladi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Bu limitni $f'(x_0)$ kabi belgiladi. Demak, ta'rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Biror nuqtada hosilaga ega bo'lgan funksiyani shu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. $D_1 \subset D = D(f)$ $f(x)$ differeniallanuvchi bo'lgan nuqtalar to'plami bo'lsin. Har bir $x_0 \in D_1$ uchun $f'(x_0)$ sonni mos qo'yib, D_1 da aniqlangan funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya $f(x)$ funksiyani hoslasi deyiladi va $f'(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, $f'(x)$ quyidagicha akslantirishdan iborat.

$$x \xrightarrow{f'(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f x_0)}{\Delta x}.$$

Berilgan funksiyani hsilasini topishga bu funksiyani differensiallash deyiladi.

Misol. $f(x) = x^2$; $f'(x) = ?$

Yechish: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \cdots = 2x_0$

Bu namuna $(x^2)' = 2x$ kabi yoziladi.

1) $f(x) = x\,,\quad x' = 1$

$$x' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$$

2) $f(x) = C\quad,\quad C' = 0$

$$C' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

Misol. Differensial yordamida taqribiy hisoblang.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}},\quad x = 1{,}58.$$

Yechish: Agar x argumentning ortirmasi $\Delta x = x - x_0$ absolyut qiymati kichik bo'lsa, u holda

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x$$

$x_0 = 1{,}5$ ni deb olamiz

U holda:

$$\Delta x = 0{,}08$$

Hisoblaymiz:

$$y(1{,}5) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1{,}5+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)' = \left((2x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}.$$

$$y'(1{,}5) = -\frac{1}{\sqrt{(2\cdot 1{,}5+1)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{8}.$$

Natijada:

$$y(1{,}58) \approx y(1{,}5) + y'(1{,}5) \cdot 0{,}08 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot 0{,}08 = 0{,}5 - 0{,}01 = 0{,}49.$$

MASHQLAR:

1. Differensial yordamida taqribiy hisoblang.

1. $y = \sqrt[3]{x},\ x = 7{,}76.$ **2.** $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x},\ x = 1{,}012.$

3. $y = \dfrac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2},\ x = 0{,}98.$ **4.** $y = \sqrt[3]{x},\ x = 27{,}54.$

5. $y = \arcsin x,,\ x = 0{,}08.$ **6.** $y = \sqrt[3]{x^2 + 7x + 5},\ x = 0{,}97.$

7. $y = \sqrt[3]{x},\ x = 26{,}46.$ **8.** $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 3},\ x = 1{,}97.$

9. $y = x^{11},\ x = 1{,}021.$ **10.** $y = \sqrt[3]{x},\ x = 1{,}21.$

11. $y = x^{21},\ x = 0{,}998.$ **12.** $y = \sqrt[3]{x^2},\ x = 1{,}03.$

13. $y = x^6,\ x = 2{,}01.$ **14.** $y = \sqrt[3]{x},\ x = 8{,}24.$

15. $y = x^7,\ x = 1{,}996.$ **16.** $y = \sqrt[3]{x},\ x = 7{,}64.$

17. $y = \sqrt{4x - 1},\ x = 2{,}56.$ **18.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}},\ x = 1{,}016.$

19. $y = \sqrt[3]{x},\ x = 8{,}36.$ **20.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x = 4{,}16.$

21. $y = x^7,\ x = 2{,}002.$ **22.** $y = \sqrt{4x - 3},\ x = 1{,}78.$

23. $y = \sqrt{x^3},\ x = 0{,}98.$ **24.** $y = x^5,\ x = 2{,}997.$

25. $y = \sqrt[5]{x^2},\ x = 1{,}03.$ **26.** $y = x^4,\ x = 3{,}998.$

27. $y = \sqrt{1 + x + \sin x},\ x = 0{,}01.$ **28.** $y = \sqrt[3]{3x + \cos x},\ x = 0{,}01.$

29. $y = \sqrt[4]{2x - \sin \frac{\pi x}{2}},\ x = 1{,}02.$ **30.** $y = \sqrt{x^2 + 5},\ x = 1{,}97.$

2-§ Hosila olish qoidalari.

Hosilani hisoblashda bir nechta foydali qoidalar mavjud:

1^0. Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funsiyalarni yig'indisi ham differensiallanuvchi bo'ladi va

$$(u + v)' = u' + v'.$$

2^0. Agar u va v x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uv ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Natija: agar u x_0 nuqtada differensiallanuvchi, $C = const$ bo'lsa, u holda Cu x_0 nuqtada differensiallanuvchi va

$$(Cu)' = Cu'$$

3^0. Agar u va v funksiyalar x_0 nuqtada differensiallanuvchi va $v(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\frac{u}{v}$ funksiya ham x_0 nuqtada differensiallanuvchi va

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

4^0. Agar $g(x)$ funksiya y_0 nuqtada $\left(y_0 = f(x_0)\right)$, $f(x)$ esa x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $h = g(f(x))$ murakkaba funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

5^0. Agar $f(x)$ $x = x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda teskari funksiya $y = y_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$x'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Yuqoridagilarda va ta'rifdan kelib chiqqan holda elementar funkfiyalarni hosilalar jadvali hosilalarni topishda ishlatiladi.

H o s i l a l a r j a d v a l i

1. $C' = 0$,

2. $x' = 1$,

3. $(xp)' = px^{p-1}$,

4. $(sinx)' = cosx$,

5. $(cosx)' = -sinx$,

6. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$, $cosx \neq 0$,

7. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$, $sinx \neq 0$,

8. $(a^x)' = a^x lna$, $a > 0$, $a \neq 1$,

9. $(e^x)' = e^x$,

10. $(lnx)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$,

11. $(lgx)' = \frac{1}{xln10}$, $x > 0$,

12. $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

13. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$

Amaliyotda funksiyalani hosilalarini $1^0 - 5^0$ qoidalar va hosilalar jadvali yordamida topiladi.

Misol. Funksiyaning hosilasini toping.

Yechish:

$$y' = \left(\frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}} \right)' =$$

$$= \frac{\left(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2\right)' \sqrt{1+x^2} - \left(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{15(1+x^2)} =$$

$$= \frac{\left(18x^5 + 16x^3 - 2x\right)\sqrt{1+x^2} - \left(3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{15(1+x^2)} =$$

$$=\frac{\left(18x^5+16x^3-2x\right)\sqrt{1+x^2}-\left(3x^6+4x^4-x^2-2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{15(1+x^2)}=$$

$$=\frac{x\left(18x^4+16x^2-2\right)(1+x^2)-\left(3x^6+4x^4-x^2-2\right)\cdot x}{15\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}=$$

$$=\frac{x\left(18x^4+16x^2-2+18x^6+16x^4-2x^2-3x^6-4x^4+x^2+2\right)}{15\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}=$$

$$=\frac{x\left(15x^6+30x^4+15x^2\right)}{15\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}=\frac{15x^3\left(x^4+2x^2+1\right)}{15\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}=\frac{x^3\left(x^4+2x^2+1\right)}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}.$$

MASHQLAR:

1. $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$ **.**

2. $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

3. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.

4. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

5. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

6. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

7. $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.

8. $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

9. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\cdot\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.

10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$.

11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

12. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

14. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}\cdot(3x+2)}{4x^2}$.

15. $y=\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$.

16. $y=\frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

17. $y=\frac{\sqrt{2x+3}\cdot(x-2)}{x^2}$.

18. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$.

19. $y=\frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

20. $y=\frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

21. $y=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

22. $y=2\cdot\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

3 - § Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.

1^0. Agar $f(x)$ (x_0) nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(x)$ funksiya grafigiga urinma mavjud bo'ladi va bu urinmaning burchak koeffietsiyenti $f'(x_0)$ ga teng bo'ladi.

Urinmaning tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

2^0. Moddiy nuqta $s=s(t)$ qonunga muvofiq to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. u holda t momentdagi oniy tezlik nuqtaning harakat qonuni $s(t)$ funksiyadan olingan hosilaga teng bo'ladi, ya'ni

$$v(t)=s'(t)$$

t momentdagi tezlanish esa $v(t)$ dan olingan hosilaga teng bo'ladi, ya'ni

$$a(t)=v'(t)$$

3^0. Funksiya hosilasining mavjud bo'lishini zaruriy sharti funksiyaning uzluksizligidir.

Xulosa qiladigan bo'lsak, funksiyani differensiallashni $\frac{d}{dx}$ operator bajaradi. Bu operator $f(x)$ funksiyaga ta'sir qilganda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

limitni hisobaydi, ya'ni $\frac{d}{dx}$ qandaydir limitga o'tish amalini bajaradi.

Differensial hisobda $\frac{d}{dx}$ operator yordamida yuqoridagi $1^0 - 5^0$ hosilalar jadvali hosil qilinadi. Shundan so'ng operator funksiyasini (limitga o'tish) esdan chiqarib, boshqa funksiyalarni hosilalarini qoidalar va jadvalga asoslanib topamiz. Maktabda asosan $\frac{d}{dx}$ operatorini bajargan qoidalar va jadvallar bilan o'quvchilarni hosilalar olish o'rgatiladi. Limitga o'tish amallarni deyarli ishlatilamaydi.

Misol. Funksiya grafigining abssissasi x_0 bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

$$y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16\sqrt[4]{x}}{3}, \quad x_0 = 1.$$

Yechish:

$$y' = \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{16\sqrt[4]{x}}{3}\right)' = \left(6\cdot x^{\frac{1}{3}} - \frac{16\cdot x^{\frac{1}{4}}}{3}\right)' =$$

$$= 6\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}} = 2\cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}\cdot x^{-\frac{3}{4}}.$$

$$y_0' = y_0'(x_0) = 2\cdot 1^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}\cdot 1^{-\frac{3}{4}} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

y' funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega ekanligidan, urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0), \text{ bu yerda } \; y_0' = \frac{2}{3}$$

$$y_0 = y(x_0) = 6\sqrt[3]{1} - \frac{16\sqrt[4]{1}}{3} = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$$

U holda:

$$y - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot (x - 1)$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot x$$

Shunday qilib, urinma tenglamasi:

$$y = \frac{2}{3} \cdot x.$$

Funksiya grafigining abssissasi x_0 bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan normal (1–12 variantlarda) yoki urinma (13–30 varintlarda) tenglamasini tuzing.

MASHQLAR:

1. $y = \dfrac{4x - x^2}{4}, \quad x_0 = 2.$

2. $y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2.$

3. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \; x_0 = 4.$

4. $y = x + \sqrt{x^3}, \; x_0 = 1.$

5. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \; x_0 = -8.$

6. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \; x_0 = 4.$

7. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \; x_0 = 16.$

8. $y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1.$

9. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, \quad x_0 = 3.$

10. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, \; x_0 = 64.$

11. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}, \quad x_0=2.$ **12.** $y=2x^2+3, \quad x_0=-1.$

13. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1}, \quad x_0=1.$ **14.** $y=2x+\dfrac{1}{x}, \; x_0=1.$

15. $y=\dfrac{-2(x^8+2)}{3(x^4+1)}, \quad x_0=1.$ **16.** $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}, \quad x_0=1.$

17. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}, \quad x_0=1.$ **18.** $y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right), \quad x_0=1.$

19. $y=\dfrac{1}{3x+2}, \quad x_0=2.$ **20.** $y=\dfrac{x}{x^2+1}, \quad x_0=-2.$

21. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{3}, \quad x_0=3.$ **22.** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}, \quad x_0=1.$

23. $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right), \quad x_0=1.$ **24.** $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0=1.$

25. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2, \quad x_0=1.$ **26.** $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}, \; x_0=1.$

27. $y=\dfrac{3x-2x^3}{3}, \quad x_0=1.$ **28.** $y=\dfrac{x^2}{10}+3, \quad x_0=2.$

29. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4}, \quad x_0=4.$ **30.** $y=x-x^3, \quad x_0=-1.$

4 - § Hosila yordamida funksiyani tekshirish.

Funksiyani tekshirish, ya’ni xossalarini o’rganish muhim amaliy ahamiyatga ega. Bunda berilgan funksiya bilan ifodalangan real jarayonni holatini aytib berishga yordam berdi.

Hozirgi maktab dasturida funksiyani tekshirish ikki darajada amalga oshiriladi.

Birinchi darajada funksiyani tekshirish elementar usullarda amalga oshiriladi (mos tenglama va tengsizliklarni yechish, ayniyatlarni isbotlash kabi).

Ikkinchi darajada funksiyani tekshirish limit tushunchasini (hosilani) ishlatish bilan amalga oshiriladi.

Birinchi darajad funksiyani barcha xossalarini o'rganish imkoni bo'lmaydi. Funksiyani uzluksizligi, ekstremumlar shular jumlasidan bo'lib, ularni ikkinchi darajada o'rganiladi. Funksiyani elementar yo'llar bilan o'rganish didktik nuqtai nazardan zaruriy hisoblanadi.

Funksiyani juft yoki toqligini tekshirish, davriyligini aniqlash va monotonligini elementar yo'llar bilan ham aniqlash mumkin. Monotonlikni tekshirish, ekstremumlarni aniqlashda differensial hisob metodlaridan foydalanish qulay va matematik nuqtai nazardan chuqurroq bo'ladi.

Ikkinchi bosqichdagi ishlarni asosiy bosqichlarini keltiramiz.

Funksiyani monotonligini teksirish. Bunda funksiyani o'sish yoki kamayish oraliqlari aniqlanadi.

1^0. Agar $f(x)$ funksiya biror I oraliqda musbat hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ bu oraliqda o'suvchi bo'ladi.

2^0. Agar $f(x)$ funksiya biror I oraliqda manfiy hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ bu oraliqda kamayuvchi bo'ladi.

Ma'lumki, bu tasdiqlarning isboti Logranj teoremasiga asoslangan edi.

Teorema: $f(x)$ funksiya qandaydir $[a, b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli bo'lsa, u holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'ladi.

Funksiyani kritik nuqtalari uning maksimum va minimumlari.

Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan yoki mavjud bo'lmagan nuqtalarni uning kritik nuqtalari deyiladi.

1-ta'rif: Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofidagi barcha x nuqtalar uchun

$$f(x_0) \le f(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ ni minimum nuqtasi deyiladi.

2-ta'rif: Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofidagi barcha x nuqtalar uchun

$$f(x_0) \ge f(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ ni maksimum nuqtasi deyiladi.

$f(x)$ ning minimum va maksimum nuqtalari bu funksiyaning ekstremum nuqtalari deyiladi. Bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlarini funksiyaning ekstremumlari deyiladi.

Ferma teoremasidan ekstremum nuqtalar kritik nuqta ekanligi kelib chiqadi:

Teorema (Ferma): Agar x_0 nuqta $f(x)$ ni ekstremum nuqtasi bo'lib, bu nuqtada funksiyani hosilasi mavjud bo'lsa, u holda $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Izoh: Bu teoremadan $f'(x_0) = 0$ x_0 nuqtani ekstremum bo'lishini zaruriy sharti ekanligi kelib chiqadi. Endi, agar hosila mavjud bo’lmagan kritik nuqtani olsak, unda ham funksiya ekstremumga erishishi yoki erishmasligi mumkin.

Izoh: $y = x^3, y = |x|, y = 2x + |x|$ kabi funksiyalarning $x_0 = 0$ nuqtadagi holati bilan tushuntiriladi.

Ferma teoremasidan ekstremum nuqtalarini aniqlash uchun dastlab kritik nuqtalarini aniqlash kerakligi kelib chiqadi. Shundan so’ng qo’shimcha izlanishlar qilib nuqtada ekstremum bor yoki yo’qligi topiladi.

Matematik analiz kursida ma’lumki, bunda birinchi tartibli hosila yordamida yoki yuqori tartibli hosilalar yordamda ekstrmumning yetarli shartlaridan foydalaniladi.

Bu yerda biz birinchi tartibli hosilalar yordamida ekstremumni aniqlashga oid teoremalarni keltiramiz. Maktabda aynan shu teoremalar bilan ishlanadi.

1-teorema. Agar x_0 $f(x)$ ni kritik nuqtasi va $f(x)$ bu nuqtada uzluksiz bo’lib, (a, x_0) intervalda $f'(x) > 0$, (x_0, b) da $f'(x) < 0$ bo’lsa, u holda x_0 $f(x)$ ni maksimum nuqtasi bo’ladi.

Bu teoremani soddalashtirgan formasi amalda qulay bo’ladi, u quyidagicha: agar $f(x)$ x_0 nuqtada ishorasini plusdan minusga o’zgartirsa, u holda x_0 nuqta maksimum nuqta bo’ladi.

2-teorema. Agar $f(x)$ kritik x_0 nuqtada uzluksiz bo’lib, (a, x_0) intervalda $f'(x_0) < 0$ va (x_0, b) da $f'(x) > 0$ bo’lsa, u holda x_0 $f(x)$ ni minimum nuqtasi bo’ladi.

Yoki soddalashgan holda: agar x_0 nuqtada hosila ishorasini minusdan plusga o’zgartirsa, u holda x_0 $f(x)$ ni minimum nuqtasi bo’ladi.

Teoremalarni $y = 3x - x^3$ funksiya misolida tushuntirish mumkin. Ularning isboti esa funksiyani x_0 nuqta atrofida monotonligi va ekstremumning ta'riflaridan kelib chiqadi.

$y = ax^2 + bx + c$ funksiyani misolida ekstremumlarni aniqlash bu uchun ………. xossalarini to'la o'rganishga imkon beradi.

Endi hosila yordamida funksiyalarni grafigini chizish haqida fikr yuritamiz.

Elementar usulda grafik chzishda funksiyani ba'zi xossalarini bilgan holda grafikdagi ba'zi nuqtalarni aniqlab birlashtirish bilan bajarilar edi. Bunda albatta ekstremum nuqtalarini aniqlash qiyin bo'lgani uchun grafik ko'p holda taqribiy topilar edi.

Quyidagi ikkinchi bosqichda grafikni chizish sxemasini keltiramiz.

Berilgan funksiya uchun quyidagilar aniqlanadi:

1) Uning aniqlanish sohasi;
2) Grafikni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi.
3) Juft, toqligi, davriyligi aniqlanadi;
4) Asimptotalari bo'lsa, topiladi
5) Hosilasi;
6) Kritik nuqtalari;
7) Kritik nuqtalardagi qiymatlari;
8) O'sish va kamayish oraliqlari;
9) Ekstremumlari;

Botiqlik va qavariqlik oraqliqlari, egilish nuqtalari maktabda o'rganilmagani uchun o'qituvchi o'quvchilarga qo'shimcha tushuntirishlar bilan grafikni chizishni o'rgatadi. Bunda aniqlanish sohasini bo'laklarga bo'lib, o'sish, kamayish oraliqlarini, ekstremum nuqtalarini ajratga holda jadval chizib, so'ng grafikni yasash tushunish uchun oson bo'ladi.

Misol sifatida $y = 3x^5 - 5x^3 + 2,\ y = ax^2 + bx + c$ funksiyalarni grafiklarini chizib ko'rsatish yana ham mavzuni o'rgatishda foyda bo'ladi.

Funksiyani eng kata va eng kichik qiymatlarini aniqlash.

Bu masala matematik analiz kursida to'la o'rganiladi. Veyershtrass teoremasiga ko'ra $[a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiya o'zining eng kata va eng kichik qiymatiga erishadi.

Maktabda deyarli uzluksiz funksiyalar qaralgani uchun bu masalani yechimini bu kesmada chekli sonda kritik nuqtalar bo'lgan holda hal qilinadi.

Agar $f(x)$ $[a, b]$ da kritik nuqtalarga ega bo'lmasa va funksiya o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lsa, u holda funksiya eng katta yoki eng kichik qiymatini kesmani chetki nuqtalarida qabul qiladi.

Agar $f(x)$ $[a, b]$ da chekli sonda kritik nuqtalarga ega bo'lsa, u holda bu nuqtalar $[a, b]$ ni chekli sondagi kesmalarga ajratib, bu kesmalar ichida kritik nuqtalar bo'lmaydi. U holda avvalgi holga asosan funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini kesmaning uchlarida ya'ni kritik nuqtalarda qabul qiladi.

Shunday qilib, kesmada funksiyaning eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topish uchun shu kesma ichidagi kritik nuqtalarda va kesmaning uchlarida funksiyaning qiymatlari topiladi. Hosil bo'lgan sonlardan esa eng katta va eng kichigi topiladi.

Misol. Berilgan kesmada funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish: $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59, \quad [2,\ 4].$

$x \neq 0.$

$y' = 4x - \dfrac{108}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 108}{x^2}.$

$y' = 0$ da, $x = 3 \in [2;\ 4];$

$x = 0 \notin [2;\ 4]$ da y' mavjud emas.

$$y(2) = 3,$$
$$y(3) = -5,$$
$$y(4) = 0.$$
$$\max_{[2;4]} y = y(2) = 3;$$
$$\min_{[2;4]} y = y(3) = -5;$$

MASHQLAR:

1. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16,\ [1,\ 4].$ **2.** $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2},\ [1,\ 4].$

3. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1,\ [0,\ 6].$ **4.** $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5},\ [-3,\ 3].$

5. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)},\ [-1,\ 5].$ **6.** $y = 2\sqrt{x} - x,\ [0,\ 4].$

7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5,\ [1,\ 9].$ **8.** $y = \dfrac{10x}{1+x^2},\ [0,\ 3].$

9. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2,\ [-3,\ 3].$ **10.** $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2},\ [-1,\ 2].$

11. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)},\ [-1,\ 6].$ **12.** $y = \dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2 - 2x + 2},\ [1,\ 4].$

13. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8,\ [-1,\ 7].$ **14.** $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)},\ [1,\ 5].$

15. $y=\frac{4x}{4+x^2}, \ [-4,\ 2].$

16. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8, \ [-4,\ -1].$

17. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}, \ [-2,\ 4].$

18. $y=\frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}, \ [1,\ 4].$

19. $y=-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}, \ [-5,\ 1].$

20. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}, \ [0,\ 4].$

21. $y=x^2-2x+\frac{16}{x-1}-13, \ [2,\ 5].$

22. $y=2\sqrt{x-1}-x+2, \ [1,\ 5].$

23. $y=-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{8}{x-2}+5, \ [-2,\ 1].$

24. $y=8x+\frac{4}{x^2}-15, \ \left[\frac{1}{2},\ 2\right].$

Misol. Quyidagi funksiyani tekshiring va ularni grafigini yasang.

$$y=e^{\sin x+\cos x}.$$

Yechish: 1) $D(y)=(-\infty;+\infty).$

2) Funksiya juft ham, toq ham emas.

3. a) – vertikal asimptotalari yo'q.

б) og'ma asimptotalari yo'q .

4) davriy funksiya

$$T=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

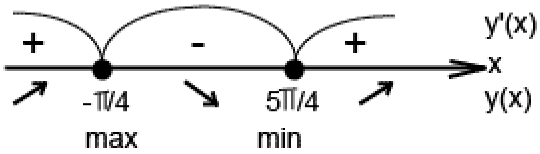
5) $y=e^{\sin x+\cos x}.$

$$y=e^{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})},$$

$$y'=-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})e^{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}$$

$y'=0$, u holda $\sin(x-\frac{\pi}{4})=0,$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z.$$



6)

$$y'' = -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} +$$

$$+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\left(-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\left(\sqrt{2}-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$y'' = 0$ при $x = \pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$,

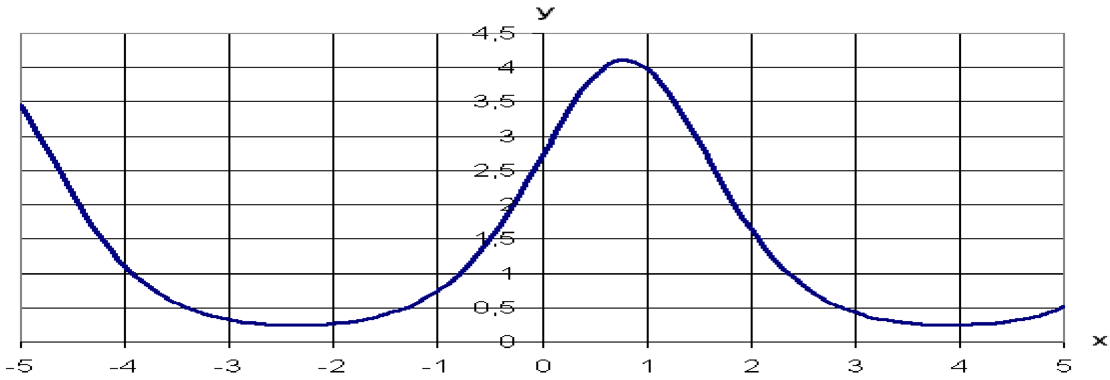
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z. \\ x = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in Z. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z. \\ x = 2\pi k,\ k\in Z. \end{array}\right.$$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$ da funksiya botiq, chunki $y'' > 0$.

$x \in \left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ da funksiya qavariq, chunki $y'' < 0$.

Egilish nuqtasi:

$$(2\pi k; e),\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).$$



MASHQLAR:

1. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{(\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right).$ **2.** $y=\ln(\cos x+\sin x).$

3. $y=\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right).$ **4.** $y=e^{\sqrt{2}\sin x}.$

5. $y=\operatorname{arctg}\sin x.$ **6.** $y=\ln(\sqrt{2\sin x}).$

7. $y=\left(\frac{1}{\sin x-\cos x}\right).$ **8.** $y=e^{\sin x-\cos x}.$

9. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right).$ **10.** $y=\ln(\sin x-\cos x).$

11. $y=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}.$ **12.** $y=e^{-\sqrt{2}\cos x}.$

13. $y=-\operatorname{arctg}\cos x.$ **14.** $y=\ln(-\sqrt{2\cos x}).$

15. $y=\frac{1}{(\sin x-\cos x)^2}.$ **16.** $y=e^{-\sin x-\cos x}.$

17. $y=\sqrt[3]{\sin x}.$ **18.** $y=\ln(-\sin x-\cos x).$

19. $y=\sqrt{\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}}.$ **20.** $y=e^{-\sqrt{2}\sin x}$

21. $y=\sqrt[3]{\cos x}$ **22.** $y=\ln(-\sqrt{2}\sin x).$

23. $y=\sqrt{\cos x}.$ **24.** $y=e^{\cos x-\sin x}.$

25. $y=\sqrt[3]{\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}}.$ **26.** $y=\ln(\cos x-\sin x).$

27. $y=\sqrt{\sin x}.$ **28.** $y=e^{\sqrt{2}\cos x}$

29. $y=\sqrt{\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}}.$ **30.** $y=\ln(\sqrt{2\cos x}).$

IX -BOB. BOSHLANG'ICH FUNKSIYA VA UNING INTEGRALI.

1 - § Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari.

Ma'lumki matematik analiz kursidan differensiallashga teskari amal mavjud edi, uni biz integrallash deb nomlagan edik. $f(x)$ funksiyani integrallash berilgan funksiya uchun boshlang'ich funksiyani izlash amlidir.

1-ta'rif: agar (a,b) ga tegishli ixtiyoriy x uchun $F'(x)=f(x)$ bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a,b) oraliqda $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, $f(x)=2x^2-3x$ funksiyani $(a,b)=(-\infty,\infty)$ ga qaraylik.

$$f'(x)=(2x^2-3x)'=4x-3$$

Endi shunday $F(x)$ funksiyani topaylikki, uni differensiallaganda $f(x)$ hosil bo'lsin. Bu funksiya $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$ ekanligini hosila olish qoidalari va jadvaldan foydalanib topish mumkin. Haqiqatda to'g'ri ekanligini tekshiramiz:

$$F(x)=\frac{2}{3}3x^2-\frac{2}{3}2x=2x^2-3x=f(x)$$

Endi o'zgarmas $y=C$ funksiyani hosilasi nol ekanligidan, $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$ desak ham to'g'ri bo'ladi. Demak boshlang'ich funksiyani topish, ya'ni integrallash bir qiymatli amal emasligi kelib chiqmoqda. Bundan foydalanibaniqmas integral tushunchasi kiritiladi.

1^0. Agar $F(x)$ $f(x)$ ning biror oraliqdagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ ning barcha boshlang'ich funksiyalari $F(x)+C$ $(C - ixtiyoriy\ o'zgarmas\ son)$ kabi yoziladi.

2-ta'rif: $F(x)+C$ ko'rinishdagi barcha funksiyalar to'plami $f(x)$ ning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Demak $\int f(x)dx = F(x) + C$. bunda $\int -$ integral belgisi, $f(x) -$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

2-ta'rifni geometrik mazmuniga to'xtaylik.

Agar $F(x)$ biror boshlang'ich funksiyani grafigi bo'lsa, uni OY o'qi bo'ylab parallel ko'chirish natijasida biz $f(x)$ ni boshlang'ichfunksiyalaridan iborat grafiklar oilasin hosil qilamiz.

Turli boshlang'ich funksiyalarni bitta sinfga tegishli bo'lishi grafikda oson ko'ringani bilan, lekin funksiyani analitik ifodasi bilan berilganda uni darrov aniqlash oson emas. Buni quyidagi bitta sinfga tegishli bo'lgan boshlang'ich funksiyalar misolida ko'rish mumkin:

$a)\ F_1(x) = -cosx \quad va \quad F_2(x) = 3 - 2cos^2\frac{x}{2};$

$b)\ F_1(x) = x^2 - 2x + 3 \quad va \quad F_2(x) = (x-1)^2;$

$c)\ F_1(x) = tgx\ sinx + cosx \quad va \quad F_2(x) = \frac{2cosx+1}{cosx};$

Buni tekshirish uchun $F_1'^{(x)} = F_2'(x)$ yoki $F_1(x) - F_2(x) = C$ ekanligini aniqlash kerak bo'ladi. 1^0 dan $F(x)$ va $\Phi(x)$ $f(x)$ ning ikki boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda $\Phi(x) = F(x) + C$ ya'ni $\Phi(x) - F(x) = C$ ekanligi kelib chiqadi.

1-ta'rif yordamida boshlang'ich funksiyani aniqlash hosilalar jadvali va hosila olish qoidalarini jalb qilishni taqazo etadi. Lekin biz matematik analiz kursidan blamizki, integrallashning (aniqmas integralni topishning) turli qoidalari va maxsus jadvallar, usullar mavjud. Umumiy holda integrallash amali hosila olishga nisbatan qiyin amal hisoblanadi.

Ixtiyoriy elementar funksiyani biz bilgan differensiallashni amalga oshirishimiz mumkin. Bizga ma'lumki, ba'zi sodda elementar funksiyalarni ham boshlang'ich funksiyasi ya'ni aniqmas integralini topa olmaymiz. Masalan,

$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{lgx}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \int \frac{sinx}{x} dx,$ kabi

Ma'lumki, eng sodda elementar funksiyalar $x^m, x^{-n}, x^{\frac{1}{n}}, sinx, cosx, tgx, ctgx, arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx, a^x,$ log kabi bo'lsa, elementar funksiyalar deganda shu sodda elementar funksiyalar ustida chekli sondagi qo'shish, ayrish, k'paytirish, bo'lish, darajaga oshirish, ildiz chiqarish, modul olish hamda teskari va murakkab funksiyalarni hosil qilish qoidalari yordamida hosil bo'lgan larni tushunamiz.

Hozirda amalda qo'llanilayotgan maktab darsliklarida avvalgilaridan farqli ravishda " Boshlang'ich funksiya (aniqmas integral)ni topishni uch qoidasi" dan farqli bo'laklab integrallash qoidasi ham mavjud. Qisqacha bularni ifoda etamiz.

Uch qoida:

1^0. Agar $F(x) - f(x)$ ni, $G(x) - g(x)$ ni boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x) + g(x)$ ni boshlang'ich funksiyasi $F(x) + G(x)$ bo'ladi, ya'ni

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2^0. Agar $F(x) - f(x)$ ni boshlang'ich funksiyasi $C -$ o'zgarmas son bo'lsa, u holda $Cf(x)$ ni boshlang'ich funksiyasi $CF(x)$ bo'ladi, ya'ni

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx$$

3^0. Agar $F(x) - f(x)$ ni boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, a va b o'zgarmas sonlar bo'lganda $f(ax + b)$ ni boshlang'ich funksiyasi $\frac{1}{a}F(ax + b)$ bo'ladi, ya'ni

$$\int f(ax + b)dx\ [t = ax + b] = \frac{1}{a}\int f(t)dt$$

Bunda 3^0 $-$qoida aniqmas integral ni o'zgaruvchilarni almashtirish bilan toppish qoidasini xususiy holidan iborat.

Bu uch qoida 1-ta'rifga asosan differensiallash qoidalarni ishlatib isbotlanadi.

Endi hozirda qo'shilgan to'rtinchi qoidani keltiramiz (bo'laklab integrallash qoidasi).

4^0. Agar biror X oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

formula o'rinli.

Ma'lumki, bu formula funksiyalar ko'paytmasining hosilasi va boshlang'ich funksiya ta'rifidan kelib chiqadi. Formulani ishlatishda:

1) Integral ostidagi ifoda $f(x)$ va $g'(x)$ lar ko'paytmasi ko'rinishda yozib olinadi;

2) $g'(x)$ va $g(x)f(x)$ ifodalarni integrallarini oson (qulay) hisoblanadigan qilib olish nazarda tutiladi.

Masalan,

1)

$$\int x\, e^x dx = [f(x) = x; g'(x) = e^x, g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x,$$
$$f'(x) = 1] = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x + C$$

2)

$$\int lnxdx = \Big[f(x) = lnx, g'(x) = 1, lnx = f(x)g'(x), \quad f'(x) = \frac{1}{x},$$
$$g(x) = \int 1dx = x + C\Big] = x\, lnx - \int x\, \frac{1}{x} dx = xlnx - x + C$$

Booshqacha aytganda biz matematik analiz kursida ko'rgan belgilashlarimizdan maktab darsligidagi belgilashlarga o'tib olishimiz kerak. Chunki o'quvchilarga shu tilde o'rgatilmoqda.

Yana shuni qo'shimcha qilish kerakki, boshlang'ich funksiyalar (aniqmas integral) jadvali biz analiz kursida bilgan jadvaldan farqli $1^0 - 4^0$ qoidalar va hosilalar jadvallariga asoslangan holda berilgan.

Masalan, jadvalda quyidagicha berilgan:

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} ln|kx + b| + C\,,\ \ k \neq 0;$$

$$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C\,,\ \ k \neq 0;$$

$$\int \sin(kx + b)\, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C\,,\ \ k \neq 0;$$

$$\int \cos(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + C\,,\quad k \neq 0;$$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C;$$

$$\int f\big(g(x)\big)dx = F\big(g(x)\big) + C.$$

O'quvchilarga misollarni tushuntirishda shu qoidalar va jadvallarga asoslanishimiz zarur. Ya'ni matematik analiz kursidagi "Erkin tildan" maktab dasturidagi "chegaralangan tilga " o'tib olishimiz kerak bo'ladi. Bu albatta o'qituvchidan mahorat talab qiladi.

Aniqmas integralning xossalari

Agar $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. $\int dF(x) = F(x) + C.$

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx,$ bu yerda $A = const.$

5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$

Bu xossalarning to'g'riligi differensiallash orqali tekshiriladi.

Integrallashning asosiy usullarini qarab chiqishdan avval asosiy integrallar jadvalini jiddiy kengaytiradigan bir muhim integrallash qoidasini ko'rib chiqamiz. Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ va $z = \varphi(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int f(z)dx = F(z) + C\,. \qquad (1)$$

Bu qoida. integrallash formulasining ko'rinishi integrallash o'zgaruvchisining xarakteriga bog'liq emasligini bildiradi. Bu qoidaning to'g'riligi (1) tenglikning har ikki tomonini differensiallash orqali oson tekshiriladi. Jumladan,

1. $$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(ax)d(ax) = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

2. $$\int f(ax \pm b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax \pm b)d(ax \pm b) = \frac{1}{a}F(ax \pm b) + C.$$

Masalan:

$$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

$$\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2\int e^{\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{3x-5} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-5)}{3x-5} = \frac{1}{3}\ln|3x-5| + C.$$

2 - § Yoyish (integral ostidagi ifodani yoyib integrallash) usuli

Agar $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ bo'lsa, u holda 1- § dagi 5- xossaga ko'ra yozish mumkin:

$$\int f(x)dx = \int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

1. $$\int (2-3\sqrt{x})^3 dx = \int (8 - 36\sqrt{x}dx + 54xdx - 27\sqrt{x^3})dx =$$

$$= 8\int dx - 36\int \sqrt{x}dx + 54\int dx - 27\int \sqrt[3]{x}dx =$$

$$= 8x - 36\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 54\cdot\frac{x^2}{2} - 27\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= 8x - 24x\sqrt{x} + 27x^2 - \frac{54}{5}x^2\sqrt{x} + C.$$

Shuni qayd qilib o’taymizki, har qaysi qo’shiluvchini integrallagandan so’ng ixtiyoriy o’zgarmasni yozish shart emas, chunki bu o’zgarmaslarning yig’indisi yana o’zgarmas bo’lib, uni biz eng oxirida yozishimiz yetarli.

$$\int \frac{x^3-2x^2+3x+1}{x^2}dx=\int\left(x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

2. $$=\int xdx-2\int dx+3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$$

3.

$$\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C.$$

4. $$\int ctg^2 xdx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int dx=-ctgx-x+C.$$

Bu misollardan ko’rinadiki, yoyish usuli bilan integrallaganimizda integral ostidagi funksiyani elementar matematika vositalari yordamida shunday qo’shiluvchilarga yoyganimizda ulardan olingan integral jadvaldagi integraldan iborat bo’lsin.

3 - § Bevosita integrallash usuli

Bu usul asosida (1) qoida yotadi. Unga ko’ra aniqmas integrallarni hisoblaganda integrallash o’zgaruvchisi x erkli o’zgaruvchi yoki $z=\varphi(x)$ funksiyadan iborat bo’lishidan qat’i nazar 1- § da bayon qilingan 1 – 5 xossalarni va I — XVI jadval integrallarni tatbiq qilish mumkin.

Bu usulni tadbig’ini quyidagi misollarda ko’rsatamiz.

1. $$\int\frac{dx}{3-x}=-\int\frac{d(3-x)}{3-x}=-\ln|3-x|+C.$$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x} = \frac{1}{7}\int \frac{d(7x)}{\cos^2 7x} = \frac{1}{7} tg7x + C.$

3. $$\int (2-3x)^5 dx = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^5 d(2-3x) =$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{(2-3x)^6}{6} + C = -\frac{1}{18}(2-3x)^6 + C.$$

4. $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3} arctg 3x + C.$

Ko'pchilik hollarda dastlab integral ostidagi funksiyani yoyib olib, so'ngra bevosita integrallashni tatbiq qilishga to'g'ri keladi.

1. $\int tg^2(ax)dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(ax)} - 1\right)dx = \frac{1}{a} tg(ax) - x + C.$

2. $$\int \frac{2x-1}{2x+3}dx = \int \frac{2x+3-4}{2x+3}dx = \int \left(1 - \frac{4}{2x+3}\right)dx =$$
$$= x - 4\int \frac{dx}{2x+3} = x - 2\ln|2x+3| + C.$$

3. $$\int \frac{x^2+3}{x-2}dx = \int \frac{x^2-4+7}{x-2}dx = \int \left(x+2+\frac{7}{x-2}\right)dx =$$
$$= \frac{(x+2)^2}{2} + 7\ln|x-2| + C.$$

Integral ostidagi kasrning surati maxrajining differensalidan iborat bo'lsa, integral maxrajning logarifmiga teng bo'ladi.

4. $\int \frac{(x^3-1)dx}{x^4-4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-4x+1)}{x^4-4x+1} = \frac{1}{4}\ln\left|x^4-4x+1\right| + C.$

5. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x} = \ln\left|1+\ln x\right| + C.$

6. $\int \frac{x^3-1}{x+1}dx = \int \frac{x^3+1-2}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)-2}{x+1}dx =$

$$=\int\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+x-2\ln|x+1|+C.$$

Misol. Aniqmas integralni toping.

Yechish:

$$\int\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx=\left|\begin{array}{c}x-\sin x=t\\(1-\cos x)dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^2}=-t^{-1}+C=-\frac{1}{x-\sin x}+C.$$

MASHQLAR:

1. $\int(4-3x)e^{-3x}dx.$

2. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx.$

3. $\int(3x+4)e^{3x}dx.$

4. $\int(4x-2)\cos 2xdx.$

5. $\int(4-16x)\sin 4xdx.$

6. $\int(5x-2)e^{3x}dx.$

7. $\int(1-6x)e^{2x}dx.$

8. $\int\ln(x^2+4)dx.$

9. $\int(2-4x)\sin 2xdx.$

10. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}dx.$

11. $\int(4x-3)e^{-2x}dx.$

12. $\int(2-9x)e^{-3x}dx.$

13. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx.$

14. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}dx.$

15. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx.$

16. $\int(5x+6)\cos 2xdx.$

17. $\int(3x-2)\cos 5xdx.$

18. $\int(x\sqrt{2}-3)\cos 2xdx.$

19. $\int(4x+7)\cos 3xdx.$

20. $\int(2x-5)\cos 4xdx.$

4 - § Bo’laklab integrallash usuli.

Bo’laklab integrallash usuli quyidagi formula orqali topiladi:

$$\int udv=uv-\int vdu, \qquad (2)$$

bunda, $u(x)$, $v(x)$ lar uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar.

(2) formula bo’laklab integrallash formulasi deyiladi.

Bo’laklab integrallashning mohiyati shundan iboratki, berilgan integralni hisoblashda integral ostidagi $f(x)dx$ ifodani $u \cdot dv$ ko’paytma shaklida tasvirlab va (2) formulani tatbiq qilib, berilgan $\int udv$ integralni $\int vdu$ jadval itegrali yoki osongina olinadigan integral bilan almashtiriladi.

Misol. Aniqmas integralni toping.

$$\int \ln(4x^2+1)dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(4x^2+1) & dv = dx \\ du = \dfrac{8x}{4x^2+1} & v = x \end{array} \right| = x\ln(4x^2+1) - 8\int \frac{x^2}{4x^2+1}dx =$$

$$= x\ln(4x^2+1) - 2\int\left(1-\frac{1}{4x^2+1}\right)dx = x\ln(4x^2+1) - 2\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x\right) + C =$$

$$= x\ln(4x^2+1) + \operatorname{arctg}2x - 2x + C.$$

MASHQLAR:

1. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

2. $\int \dfrac{1+\ln x}{x}dx$.

3. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4. $\int \dfrac{x^2+\ln x^2}{x}dx$.

5. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$.

6. $\int \dfrac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

7. $\int \operatorname{tg}x \cdot \ln\cos x dx$.

8. $\int \dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$.

9. $\int \dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$.

10. $\int \dfrac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5}dx$.

11. $\int \dfrac{x\cdot\cos x + \sin x}{(x\cdot\sin x)^2}dx$.

12. $\int \dfrac{x^3+x}{x^4+1}dx$.

13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} dx.$ **14.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$

15. $\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$ **16.** $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$

17. $\int \frac{4\mathrm{arctg}x - x}{1+x^2} dx.$ **18.** $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx.$

19. $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x} dx.$ **20.** $\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx.$

5 - § Kvadrat uchhadni o'z ichiga olgan funksiyalarning integrallari

Kvadrat uchhadni o'z ichiga olgan

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx; \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx; \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$$

funksiyalarni integrallash jadvalidagi fomulalarga keltirib integrallash uchun avvalo kvadrat uchhaddan to'liq kvadratni ajratib olish kerak bo'ladi. Bu holda ax^2+bx+c kvadrat uchhad quyidagi ko'rinishga keladi:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{a}\right)x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right).$$

So'ngra almashtirishlar yo'li bilan yuqoridagi integrallarni integrallash jadvalidagi formulalarga keltirish mumkin.

Masalan,

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+7} =$$

1. $$= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{x+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+5}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2+x+2}} dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-\frac{3}{2}}{\sqrt{2+x-x^2}} dx =$$

2. $$= -\frac{3}{2}\int \frac{1-2x-\frac{5}{2}}{\sqrt{2+x-x^2}} dx = -\frac{3}{2}\int \frac{d(2+x-x^2)}{\sqrt{2+x-x^2}} + \frac{5}{3}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= -3\sqrt{2+x-x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{2x-1}{3} + C.$$

3. $$\int \sqrt{x^2-2x-1}dx = \int \sqrt{(x-1)^2-2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right| + C.$$

Misol. $\int \frac{1}{x^2+x-2} dx$ аниқмас интегрални ҳисоблайлик:

$$\int \frac{1}{x^2+x-2} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

MASHQLAR:

1. $\int \frac{dx}{x^2+x+5}$ **2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$

3. $\int\sqrt{x^2+8x+25}dx$ **4.** $\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}dx$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ **6.** $\int\sqrt{8+2x-x^2}dx$

7. $\int\frac{5x-7}{x^2+3x+8}dx$ **8.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

9. $\int\frac{x+7}{x^2+11x+42}dx$ **10.** $\int\frac{dx}{x^2-x+14}$

6 - § Ratsional kasrlarni integrallash.

Ratsional kasr deb,

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n},$$

Ko'rinishdagi kasrga aytiladi, bu yerda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$– darajalari mos ravishda n va m ga teng bo'lgan x ga nisbatan butun ko'phadlar.

Agar $n\geq m$ bo'lsa, ratsional kasr noto'g'ri, $n<m$ bo'lsa, to'g'ri kasr deyiladi.

Har qanday noto'g'ri kasrning suratini maxrajiga bo'lish natijasida butun qismini ajratib, uni biror ko'phad va to'g'ri kasr yig'indisi shaklida yozish mumkin:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=q(x)+\frac{Q_k(x)}{P_n(x)},\quad k<n.$$

Masalan, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ noto'g'ri kasrning suratini maxrajiga bo'g'sak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\frac{-3x+14}{x^2+3x-1}.$$

Misol. Aniqmas integralni toping.

$$\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx.$$

Yechish: Kasrni bo'lamiz

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2-12 & \underline{x^3-9x^2+26x-24} \\ \underline{x^3-9x^2+26x-24} & \qquad\qquad 1 \\ 6x^2-26x+12 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx = \int\left(1+\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\right)dx$$

$\dfrac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}$ to'g'ri kasrni sodda ratsional kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2} =$$
$$= \frac{A(x-3)(x-2)+B(x-4)(x-2)+C(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-3)(x-2)}.$$

$$A(x-3)(x-2)+B(x-4)(x-2)+C(x-4)(x-3) = 6x^2-26x+12$$

.

A, B, C noma'lum koeffitsiyentlarni topish uchun maxrajni nolga

aylantiradigan son qiymatlarni x ning o'rniga qo'yish bilan topamiz.

Odatda, bu usulni xususiy qiymatlar usuli deyiladi.

$x=4$ da, $2A=4 \Rightarrow A=2;$

$x=3$ da, $-B=-12 \Rightarrow B=12;$

$x=2$ da, $2C=-16 \Rightarrow C=-8;$

Bundan

$$\int\left(1+\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\right)dx=\int\left(1+\frac{2}{x-4}+\frac{12}{x-3}-\frac{8}{x-2}\right)dx=$$

$$=x+2\ln|x-4|+12\ln|x-3|-8\ln|x-2|+C.$$

MASHQLAR:

1. $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx.$ **2.** $\int\frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

3. $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx.$ **4.** $\int\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx.$

5. $\int\frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx.$ **6.** $\int\frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx.$

7. $\int\frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$ **8.** $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx.$

9. $\int\frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx.$ **10.** $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)\cdot x}dx.$

11. $\int\frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx.$ **12.** $\int\frac{3x^2-2}{x^3-x}dx.$

13. $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx.$ **14.** $\int\frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx.$

15. $\int\frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx.$ **16.** $\int\frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx.$

7 - § Noma'lum koeffitsiyentlar usuli.

Agar integral ostidagi kasr to'g'ri $(n>m)$ bo'lsa, quyidagicha ish tutamiz:

1. $Q_m(x)$ maxrajni ko'paytuvchilarga yoyamiz. Aytaylik,

$$Q_m(x) = (x-a)\cdot(x-b)^{\alpha}\cdot(x^2+p_1x+q_1)\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{\beta}$$

bo'lsin, bu yerda $a-$sodda haqiqiy ildiz, $b-$karraligi α bo'lgan haqiqiy ildiz, $x^2+p_1x+q_1$ va $x^2+p_2x+q_2$ – okmpleks qo'shma ildizlarga ega bo'lgan uchhadlar.

Alebradagi teoremaga ko'ra to'g'ri ratsional $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ kasrni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha} + \frac{Mx+N}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_\gamma x+q_\gamma\right)^2} + \ldots + \frac{M_\beta x+N_\beta}{\left(x^2+p_\gamma x+q_\gamma\right)^\beta}.$$

Masalan, agar $Q_m(x) = (x-1)(x+2)^3(x^2+2x+2)(x^2+3x+5)^2$ bo'lsa, u holda yoyilma quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2} +$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+3x+5} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+3x+5)^2}.$$

Bu yerda $A, B_1, B_2, B_3, M, N, M_1, N_1, M_2, N_2-$ hozircha noma'lum koeffitsiyentlar. Bu koeffitsiyentlarni topish uchun yoyilmaning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va chap hamda o'ng tomondagi suratlarni aynan tenglaymiz. Hosil bo'lgan ayniyatda x ning o'ngdagi va chapdagi bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab, noma'lum koeffitsiyentlarni topish uchun tenglamalar sistemasi tuziladi. Tenglamalar sistemasini yechish bilan noma'lum koeffitsiyentlar topiladi. Bu usulni odatda *noma'lum koeffitsiyentlar usuli* deyiladi.

Misol. Aniqmas integralni toping.

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$$

Yechish:

$\dfrac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}$ to'g'ri kasrni sodda ratsional kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+\frac{B_3}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{A(x+2)^3+B_1(x+1)(x+2)^2+B_2(x+1)(x+2)+B_3(x+1)}{(x+1)(x+2)^3}.$$

$$A(x+2)^3+B_1(x+1)(x+2)^2+B_2(x+1)(x+2)+B_3(x+1)=x^3+6x^2+13x+9$$

$x=-1$ da, $A=1;$

$x=-2$ da, $-B_3=-1\Rightarrow B_3=1;$

x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglaymiz:

$x^3:\qquad A+B_1=1\Rightarrow B_1=0;$

$x^0:\qquad 8A+4B_1+2B_2+B_3=9\Rightarrow B_2=0;$

Demak,

$$\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+2)^3}.$$

Bundan:

$$\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+2)^3}\right)dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+2)^2}+C.$$

MASHQLAR:

1. $\int\frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx.$ **2.** $\int\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

3. $\int\frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx.$ **4.** $\int\frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

5. $\int\frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}dx.$ **6.** $\int\frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}dx.$

7. $\int\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx.$ **8.** $\int\frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx.$

9. $\int\frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx.$ **10.** $\int\frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx.$

11. $\int\frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}dx.$ **12.** $\int\frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}dx.$

13. $\int\frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx.$ **14.** $\int\frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx.$

15. $\int\frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx.$ **16.** $\int\frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx.$

17. $\int\frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx.$ **18.** $\int\frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3}dx.$

19. $\int\frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx.$ **20.** $\int\frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

8 - § Maxrajining ildizlari kompleks va karrali.

Misol. Aniqmas integralni toping.

Yechish:

$$\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx.$$

$\dfrac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}$ to'g'ri kasrni sodda ratsional kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=$$

$$=\frac{A(x+2)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+4)}.$$

$$A(x+2)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+4x+4)=x^3+5x^2+12x+4.$$

$x=-2$ da, $8B=-8 \Rightarrow B=-1;$

x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglaymiz:

$x^3:\quad A+C=1 \Rightarrow A=0;$

$x:\quad 4A+4C+4D=12 \Rightarrow C=1;$

$x^0:\quad 8A+4B+4D=4 \Rightarrow D=2;$

Bundan:

$$\int\left(-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{x+2}{x^2+4}\right)dx=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)+2\int\frac{dx}{x^2+4}=.$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+arctg\frac{x}{2}+C.$$

MASHQLAR:

1. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx.$ **2.** $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$

3. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx.$ **4.** $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

5. $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$ **6.** $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx.$

7. $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx.$ **8.** $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx.$

9. $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx.$ **10.** $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx.$

11. $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx.$ **12.** $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx.$

13. $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx.$ **14.** $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx.$

15. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$ **16.** $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

17. $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$ **18.** $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx.$

19. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx.$ **20.** $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx.$

9 - § $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ differensial binomlari integrali.

bu yerda a, $b-$o'zgarmas sonlar, m, n va $p-$ratsional sonlar. $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash m, n va p

ratsional sonlarga bog'liqligini rus matematigi P.L.Chebishev ko'rsatgan va uchta holdagina elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

1. Agar p–butun son bo'lsa, u holda integral $x=t^s$ o'rniga qo'yish yordamida (bunda $s-$kasrlar maxrajining m va n ning eng kichik umumiy karralisi) ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

$\int\sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2dx$ integralda $p=2-$butun son. Hisoblaymiz

$$\int x^{\frac{1}{3}}(x+x^{\frac{1}{2}})dx=\begin{vmatrix} m=\frac{1}{3}; \quad n=\frac{1}{2} \\ x=t^6, \ dx=6t^5dt \end{vmatrix}=\int t^2(2+t^3)^2 6t^5dt=$$

$$=6\int(4t^7+4t^{10}+t^{13})dt=6\left(\frac{1}{2}t^8+\frac{4}{11}t^{11}+\frac{1}{14}t^{14}\right)+C=$$

$$=\left|t=\sqrt[6]{x}\right|=3\sqrt[3]{x^4}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C.$$

2. Agar $\frac{m+1}{n}-$butun son bo'lsa, u holda integral $a+bx^n=t^s$ o'rniga qo'yish bilan ratsional funksiya integrallanadi, bunda s son p kasrning maxraji.

$\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$ integralda $m=5,$ $n=3,$ $p=\frac{2}{3};$

$\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{3}=2-$butun son. $s=3$, ya'ni p kasrning maxraji.

Tegishli o'rniga qo'yishdan, $1+x^3=t^3,$ $x=(t^3-1)^{\frac{1}{3}},$ $dx=t^2(t^3-1)^{-\frac{2}{3}}dt.$

Demak,

$$\int (t^3-1)^{\frac{5}{3}} \cdot t^2 \cdot t^2 (t^3-1)^{-\frac{2}{3}} dt = \int (t^3-1)t^4 dt = \int (t^7-t^4)dt =$$

$$= \frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C = t^5\left(\frac{t^3}{8} - \frac{1}{5}\right) + C.$$

x o’zgaruvchiga qaytib, uzil-kesil topamiz:

$$\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx = (1+x^3)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1+x^3}{8} - \frac{1}{5}\right) + C.$$

3. $\frac{m+1}{n} + p$–butun son bo’lganda $ax^{-n} + b = t^s$ o’rniga qo’yish bilan, bu yerda s son p kasrning maxraji.

Misol. Aniqmas integralni toping.

$$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}}.$$

Yechish: Berilgan integralni $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}} = \int x^{-\frac{7}{5}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}}dx$ ko’rinishda yozib olamiz. Integral ositidagi ifoda $x^m(a+bx^n)^p$ ekanligidan

$$m = -\frac{7}{5}, \quad n = \frac{1}{3}, \quad p = \frac{1}{5}, \quad \frac{m+1}{n} + p = -1.$$

$x^{-\frac{1}{3}} + 1 = t^5$ o’rniga qo’yishdan foydalanamiz.

$x = \left(t^5-1\right)^{-3}, \quad dx = -3(t^5-1)^{-4}5t^4dt$ ga egamiz.

$$\int x^{-\frac{7}{5}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}}dx = \int (t^5-1)^{\frac{21}{5}}\left(1+(t^5-1)^{-1}\right)^{\frac{1}{5}}\frac{(-15)t^4}{(t^5-1)^4}dt =$$

$$= -\frac{15}{6}t^6 + C = -\frac{5}{2}\left(x^{-\frac{1}{3}}+1\right)^{\frac{6}{5}} + C = -\frac{5}{2}\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{\frac{5}{6}} + C.$$

MASHQLAR:

1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}dx.$ **2.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}dx.$ **3.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt{x}}dx.$

4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^4}}dx.$ **5.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^8}}dx.$ **6.** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[9]{x^5}}dx.$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\cdot\sqrt[9]{x}}dx.$ **8.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx.$ **9.** $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\cdot\sqrt{x}}dx.$

10. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\cdot\sqrt[8]{x^7}}dx.$ **11.** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\cdot\sqrt[12]{x^7}}dx.$ **12.** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\cdot\sqrt[6]{x}}dx.$

13. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\cdot\sqrt[8]{x}}dx.$ **14.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}dx.$ **15.** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\cdot\sqrt[4]{x}}dx.$

10 - § Aniq integral. Nyuton-Leybnist formulasi.

Matematik analiz kursidan ma'lumki, aniq integral tushunchasi, integral yig'indi, Darbu yig'indilari yordamida limit tushunchasi orqali kiritiladi yoki boshlang'ich funksiya yordamida aniqlanadi. Aynan Nyuton-Leybnist formulasi aniq integralni bu ikki usul bilan kiritilishini bog'laydi.

Avvalgi maktab darsliklarida bu ikki usulda aniq integral kiritishga harakat bo'lsa, hozirdagi darslikda aniq integral tushunchasi boshlang'ich funksiya yordamida "Berilgan funksiyani boshlang'ich funksiyasi orttirmasi sifatida " aninqlangan. Biz bu yerda shu usulni tahlil qilamiz.

Egri chiziqli trapetsiya yuzasi masalasi.

$[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Faraz qilamiz, $f(x)$ ishorasi bu kesmada bir xil bo'lsin.

Aniq integral mavzusida Nyuton–Leybnits formulasi bilan tanishasiz va uni aniq integrallarni yechishdagi tatbiqi, hamda boshlang'ich funksiyalarni topishda qo'llaysiz. Undan tashqari geometrik masalalarni aniq integrallar yordamida yassi figuralarning yuzi, egri chiziq yoyi uzunligi va jismning hajmini topish bilan bog'liq masalalarni o'zlashtirasiz.

Agar $F(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi bo'lsa, u holda quyidagi formula o'rinlidir:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Nyuton–leybnits formulasi deb ataluvchi (1) formula aniqmas integral bilan aniq integral o'rtasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish.

Bu holda ushbu formula o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\varepsilon^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt,$$

bu yerda $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ lar, $[\alpha,\ \beta]$ kesmada uzluksiz funksiyalar, $a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta).$

Masalan, $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ integralni topish talab etilsin. $\sqrt{1+x} = t$

belgilash kiritamiz, u holda $1+x = t^2,\ dx = 2tdt.$ Yangi o'zgaruvchi t ning o'zgarish chegaralarini topamiz: x o'zgaruvchi $[3,\ 8]$ intervalda o'zgaradi. $x = 3$ da $t = \sqrt{1+3} = 2;$ $x = 8$ da $t = \sqrt{1+8} = 3.$

Demak,

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = \frac{32}{3}.$$

Misol. Aniq integralni hisoblang.

Yechish:

$$\int_0^{1/2} \frac{8x - arctg2x}{1+4x^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{8x}{1+4x^2}dx - \int_0^{1/2} \mathrm{arctg}\,2x\,d(\mathrm{arctg}2x) =$$

$$= \ln\left|1+4x^2\right|\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 2x\Big|_0^{1/2} = \ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} + 0 = \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.$$

MASHQLAR:

1. $\displaystyle\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}.$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\mathrm{arctg}x - x}{1+x^2}dx.$

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}.$

5. $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3}dx.$

7. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx.$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}dx.$

9. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

10. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

11. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}x + x}{1+x^2}dx.$

12. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\mathrm{arctg}x)^4}{1+x^2}dx.$

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx.$

14. $\displaystyle\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

15. $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$ **16.** $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

Bo'laklab integrallash.

Agar $u(x)$ va $v(x)$ lar $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda ushbu formula o'rinlidir:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Misol. Aniq integralni hisoblang.

Yeshish:

$$\int_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3xdx = \left|\begin{matrix} u = x^2-4 & dv = \cos 3xdx \\ du = 2xdx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-4)\sin 3x\Big|_{-2}^{0} - \frac{2}{3}\int_{-2}^{0} x\sin 3xdx = \left|\begin{matrix} u = x & dv = \sin 3xdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{3}\int_{-2}^{0}\cos 3xdx\right) =$$

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\cos 6 + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_{-2}^{0}\right) = \frac{4}{9}\cos 6 - \frac{2}{27}\sin 6.$$

MASHQLAR:

1. $\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2xdx.$ **2.** $\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\cos xdx.$

3. $\int_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3xdx.$ **4.** $\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos xdx.$

5. $\int_{0}^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2xdx.$ **6.** $\int_{0}^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3xdx.$

7. $\int\limits_0^{\pi}(8x^2+16x+17)\cos 4xdx.$

8. $\int\limits_0^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2xdx.$

9. $\int\limits_0^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3xdx.$

10. $\int\limits_0^{2\pi}(3-7x^2)\cos 2xdx.$

11. $\int\limits_0^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4xdx.$

12. $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3xdx.$

13. $\int\limits_0^{3}(x^2-2x)\sin 2xdx.$

14. $\int\limits_0^{\pi}(x^2-3x+2)\sin xdx.$

15. $\int\limits_0^{\pi/2}(x^2-5x+6)\sin 3xdx.$

16. $\int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2xdx.$

17. $\int\limits_0^{\pi/4}(x^2+17{,}5)\sin 2xdx.$

18. $\int\limits_0^{\pi/2}(1-5x^2)\sin xdx.$

19. $\int\limits_{\pi/4}^{3}(3x-x^2)\sin 2xdx.$

20. $\int\limits_1^{2}x\ln^2 xdx.$

$R(\sin x,\ \cos x)dx$ ko'rinishdagi integrallar

$R(\sin x,\ \cos x)dx$ ko'rinishdagi integralar ($R-\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan ratsional funksiya) $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirish yordamida ratsional funksiyalarning integrallariga keltiriladi.

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\sin x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\mathrm{arctg}t; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$ ko’rinishga keladi.

Bunday almashtirish *universal almashtirish* deyiladi.

Misol. Aniq integralni hisoblang.

Yechish:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx = \left|\begin{array}{ll} tg\frac{x}{2}=t & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right| = \int_0^1\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$=\int_0^1\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t)^4}dt.$$

$\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t^4)}$ to’g’ri kasrni sodda ratsional kasrlar yig’indisi ko’rinishida yozamiz:

$$\frac{2-4t-2t^2)}{(1+t)^4} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t^3)}+\frac{D}{(1+t)^4} =$$

$$=\frac{A(1+t)^3+B(1+t)^2+C(1+t)+D}{(1+t)^4}.$$

$$A(1+t)^3+B(1+t)^2+C(1+t)+D = 2-4t-2t^2.$$

$t=-1$ da, $D=4;$

x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglaymiz:

$t^3: \quad A=0;$

$t^2: \quad 3A+B=-2 \Rightarrow B=-2;$

$$t: \qquad 3A+2B+C=-4 \Rightarrow C=0;$$

$$\int_0^1\left(\frac{4}{(1+t)^4}-\frac{2}{(1+t)^2}\right)dt=\left(-\frac{4}{3(1+t)^3}+\frac{2}{1+t}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{4}{3\cdot 8}+1+\frac{4}{3}-2=\frac{1}{6}.$$

MASHQLAR:

1. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2}\frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.

3. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2}\frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

4. $\displaystyle\int_{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$.

5. $\displaystyle\int_{2\operatorname{arctg}2}^{2\operatorname{arctg}3}\frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$.

6. $\displaystyle\int_{2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$.

7. $\displaystyle\int_{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\pi/2}\frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$.

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$.

9. $\displaystyle\int_0^{2\pi/3}\frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

10. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}$.

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{(1+\cos x)dx}{1+\cos x+\sin x}$.

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$.

13. $\displaystyle\int_0^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$.

14. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

15. $\displaystyle\int_0^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}\frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

16. $\displaystyle\int_{-2\pi/3}^{0}\frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$.

17. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

19. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} \frac{(1-\sin x)dx}{\cos x(1+\cos x)}$. **20.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$.

$\int tg^m x dx$ va $\int tg^m x dx$ (bu yerda $m-$butun musbat son) ko’rinishdagi integrallarda mos ravishda

$$tgt = t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$ctgt = t, \qquad dx = -\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}$$

o’rniga qo’yish orqali hisoblanadi.

Misol. Aniq integralni hisoblang.

Yechish:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg}x+5)\sin 2x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \right| =$$

$$= \int\limits_{1}^{3} \frac{dt}{(3t+5)\dfrac{2t}{1+t^2}(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} \frac{dt}{t(3t+5)}.$$

$$\frac{1}{t(3t+5)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3t+5} = \frac{A(3t+5)+Bt}{t(3t+5)},$$

$$A(3t+5)+Bt = 1.$$

$t = 0$ da , $A = \dfrac{1}{5}$;

$t = -\dfrac{5}{3}$ da , $B = -\dfrac{3}{5}$;

Shunday qilib,

$$\frac{1}{10}\int_1^3\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{3t+5}\right)dt=\frac{1}{10}\left(\ln|t|-\ln|3t+5|\right)\Big|_1^3=\frac{1}{10}(\ln 3-\ln 14-0+\ln 8)=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{24}{14}=\frac{1}{10}\ln\frac{12}{7}.$$

MASHQLAR:

1. $\displaystyle\int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4}\frac{2\mathrm{ctg}x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}dx.$

2. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3}\frac{4tgx-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}dx.$

3. $\displaystyle\int_{0}^{\arccos(4/\sqrt{17})}\frac{3+2tgx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}dx.$

4. $\displaystyle\int_{0}^{\mathrm{arctg}\frac{1}{3}}\frac{(8+\mathrm{tg}x)}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}dx.$

5. $\displaystyle\int_{0}^{\arccos\sqrt{2/3}}\frac{tgx+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}dx.$

6. $\displaystyle\int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4}\frac{6\mathrm{tg}x\,dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}.$

7. $\displaystyle\int_{-arctg(1/3)}^{0}\frac{3tgx+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}dx.$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\frac{2\mathrm{tg}^2 x-11\mathrm{tg}x-22}{4-\mathrm{tg}x}dx.$

9. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})}\frac{tgx}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}dx.$

10. $\int\limits_{\pi/4}^{arctg3} \frac{1+ctgx}{(\sin x+2\cos x)^2}dx.$

11. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}dx.$

12. $\int\limits_{0}^{arctg3} \frac{4+tgx}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}dx.$

13. $\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}(2/3)} \frac{6+tgx}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx.$

14. $\int\limits_{0}^{arctg2} \frac{12+tgx}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}dx.$

15. $\int\limits_{0}^{\arcsin\sqrt{3/7}} \frac{tg^2 x dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}.$

16. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{7+3tgx}{(\sin x+2\cos x)^2}dx.$

17. $\int\limits_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2tgx+5}{(5-tgx)\sin 2x}dx.$

18. $\int\limits_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^{0} \frac{3tg^2 x-50}{2tgx+7}dx.$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alimov Sh. A. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari, o‘rta maktabning 10-11 sinflari uchun darslik. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1996-yil va keyingi nashrlari.

2. Kolmogorov A. N. tahriri ostida. Algebra va analiz asoslari. 10-11 sinflar uchun darslik. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1992-yil.

3. Vafoyev R. H. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent, “O‘qituvchi”, 2001-yil.

4. Abduhamidov A. U. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun sinov darsligi. Toshkent, “O‘qituvchi”, 2001 yil.

5. Antonov K. P. va boshqalar. Elementar matematika masalalari to‘plami. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1975-yil va keyingi nashrlari.

6. Skanavi M. N. tahriri ostida. Matematikadan masalalar to‘plami. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1983-yil va keyingi nashrlari.

7. A.R.Roishev Algebra va matematik analiz asoslari. Toshkent, “Iqtisod-moliya”, 2009 yil va keyingi nashr.

MUNDARIJA