

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM
VAZIRLIGI**

**GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI
AXBOROT TEXNOLOGIYALARI FAKUL‘TETI**

MATEMATIKA KAFEDRASI

“Анализнинг махсус боблари”

fanidan

O‘QUV –USLUBIY MAJMUA



BILIM SOHASI: 500000- Tabiiy fanlar, matematika va statistika

TA‘LIM SOHASI: 540000-Matematika va statistika

TA‘LIM YO‘NALISHI: 70540101-Matematika(йўналишлар бўйича)

GULISTON – 2022

Н.Норжигитов. “Анализнинг махсус боблари” fanidan tayyorlangan o’quv uslubiy majmua.

Ushbu o’quv-uslubiy majmua 70540101-„Matematika” magistratura ta’lim yo’nalishida ta’lim olayotgan talabalarga mo’ljallangan.

O’quv-uslubiy majmua Guliston Davlat universiteti ilmiy Kengashi tomonidan (№__ sonli bayonnoma 29.08.2022) ko’rib chiqilgan va o’quv jarayonida qo’llashga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar: H.Norjigitov – dotsent

Taqrizchilar:

- 1. Jamuratov – Gul.DU, „ Matematika” kafedrasi dotsenti, fizika – matematika, fanlar nomzodi.**

\

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР	4
II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ.....	14
III. НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР МАТЕРИАЛЛАРИ.....	16
1-мавзу: ЧЕКЛИ ВАРИАЦИЯЛИ ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.	16
2-мавзу: ГАРМОНИК ВА СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР	39
3-мавзу: СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯНИНГ ЎРТА ҚИЙМАТЛАРИ $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ ЛАР	44
4-мавзу: ЧЕКЛИ ВА ЧЕКСИЗ СОНДАГИ СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР СУПРЕМУМИ, ЮҚОРИ ЛИМИТИ.....	53
V. КЕЙСЛАР БАНКИ.....	91
VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ ТОПШИРИҚЛАРИ.....	95
VII. ГЛОССАРИЙ	98
VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ	102

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

70540101–Magistratura “Matematika” (yoʻnalishlar boʻyicha) taʼlim yoʻnalishi boʻyicha oʻqiyotgan magistrnlarni yuksak malakali, ijodkorlik va tashabbuskorlik qobiliyatiga ega, kelajakda kasbiy va hayotiy muammolarni mustaqil hal qila oladigan, yangi texnika va texnologiyalardan foydalana oladigan hamda atrof-muhitdagi jarayonlarini matematik qonun-qoidalar nuqtai nazaridan tahlil qila oladigan layoqatli kadrlarni tayyorlashda “Analizning maxsus boblari” kursi katta oʻrin egallaydi. Analizning maxsus boblari kursi 70540101– Magistratura “Matematika” (yoʻnalishlar boʻyicha) yoʻnalishi boʻyicha oʻqiyotgan magistrnlarga majburiy fanlar doirasida oʻqitishga moʻljallangan boʻlib, unda matematik analiz fani dasturida belgilangan mavzularga qoʻshimcha ravishda talabalar tomonidan egallanishi lozim boʻlgan bilim, koʻnikma, malaka va kompetentsiyalarni shakllantirishni, oʻquv jarayonini kompleks loyihalash asosida kafolatlangan natijalarni olishni, mustaqil bilim olish va oʻrganishni hamda nazoratni amalga oshirishni taʼminlaydigan, talabaning ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirishga yoʻnaltirilgan oʻquv – uslubiy manbalar, didaktik vositalar va materiallar, elektron taʼlim resurslari, oʻqitish texnologiyasi, baholash metodlari va mezonlarini oʻz ichiga oladi.

Mazkur dastur rivojlangan xorijiy davlatlarning oliy taʼlim sohasida erishgan yutuqlari hamda orttirgan tajribalari asosida magistratura “Matematika” (yoʻnalishlar boʻyicha) yoʻnalishi namunaviy oʻquv reja hamda dastur holda tuzilgan boʻlib, u zamonaviy talablar asosida oʻqitish jarayonlarining mazmunini takomillashtirish hamda oliy taʼlim muassasalari pedagog kadrlarining kasbiy kompetentligini muntazam oshirib borishni maqsad qiladi.

Jamiyat taraqqiyoti nafaqat mamlakat iqtisodiy salohiyatining yuksakligi bilan, balki bu salohiyat har bir insonning kamol topishi va uygʻun rivojlanishiga qanchalik yoʻnaltirilganligi, innovatsiyalarni tatbiq etilganligi bilan ham oʻlchanadi. Demak, taʼlim tizimi samaradorligini oshirish, pedagoglarni zamonaviy bilim hamda amaliy koʻnikma va malakalar bilan qurollantirish, chet el ilgʻor tajribalarini oʻrganish va taʼlim amaliyotiga tatbiq etish bugungi kunning dolzarb vazifasidir. “Analizning maxsus boblari” moduli aynan mana shu yoʻnalishdagi masalalarni hal etishga qaratilgan.

Oliy taʼlim muassasalari pedagog kadrlarining malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash bugungi kunning eng dolzarb masalalaridan biri boʻlib kelmoqda. Mamlakatimiz taʼlim tizimida bosqichma-bosqich amalga oshirilayotgan islohotlar bu masalaga yanada masʼuliyat bilan yondoshishni talab qilmoqda.

Ushbu “Analizning maxsus boblari” moduli mutaxassislik fanlari blokidagi asosiy modullardan biri boʻlib, unda matematik analiz fanining ayrim boblari tanlab oʻqitiladi.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Анализнинг махсус боблари модулининг мақсади олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси тингловчиларининг билимларини мустаҳкамлаш, олий математика фанининг айрим бўлимлари ва уларни ўқитиш бўйича малакаларини ошириш ва янада такомиллаштириш.

Модулнинг вазифаси тингловчиларда математиканинг зарурий маълумотлари мажмуаси (тушунчалар, тасдиқлар ва уларнинг исботи, амалий масалаларни ечиш усуллари ва бошқалар) бўйича кўникмаларни шакллантириш ва янада ривожлантиришдан иборат.

Модул бўйича талабаларнинг билими, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар

“Математик анализнинг махсус боблари” курсини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида:

Тингловчи:

- математик анализ ва унинг бўлимлари, уни ўқитиш бўйича янги технологияларни билиши;
- математик анализнинг муаммолари ва унинг ривожланиш истиқболлари;
- математик анализ ва уни ўқитиш бўйича янги назарий **билимларга эга бўлиши;**

Тингловчи:

- математик анализнинг амалиётга татбиқлари;
- параметрларга боғлиқ интеграллар
- параметрларга боғлиқ хосмас интеграллар;
- биринчи ва иккинчи тур параметрларга боғлиқ хосмас интегралларидан фойдаланиш **амалий кўникмаларини эгаллаши лозим.**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Математик анализнинг махсус боблари” курси маъруза ва амалий (семинар) машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;

- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш ва бошқа интерактив таълим усуллари қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа фанлар билан ўзаро боғлиқлиги ва услубий жиҳатдан узвий кетма-кетлиги

Анализнинг махсус боблари модули алгебраик тизимлар, геометриянинг замонавий масалалари, сонли усуллар ва амалий статистика каби модуллар билан чамбарчас боғлиқдир.

Ушбу фанни ўқитиш жараёнида ўқитишнинг анъанавий шаклларида ташқари янги педагогик технологиялардан ҳам бевосита фойдаланиш назарда тутилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Математик анализ фани республика олий ўқув юртларида математика фанини юқори илмий ва методик савияда ўқитишни таъминлашда, математика фани ўқитувчиларининг юқори савиядаги педагог бўлишларида, келажакда илмий изланишлар олиб боришларида асосий ўрин тутди.

Бу курсда олий математиканинг анализ курсига оид бўлимлари, унинг асосий тушунчаларини ўқитиш методикаси билан таништириш кўзда тутилган. Бундан ташқари математик анализ фанини ўқитишда замонавий педагогик технологиялардан фойдаланишни ўргатиш ҳам кўзда тутилган.

“Математик анализнинг махсус боблари” модул бўйича соатлар тақсимооти

№	Модул мавзулари	Талабанинг ўқув юкламаси, соат				
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси			Мустақил таълим
			Жами	жумладан		
				Назарий	Амалий машғулот	
1.	Chekli variatsiyali funktsiyalar va ularning xossalari	10	4	2	2	6
2.	Chekli variatsiyali funktsiyalar sinfi	10	4	2	2	6
3.	Chekli variatsiyali funktsiyalar uchun zaruriy va etarli shartlar	10	4	2	2	6
4.	To'g'rilanuvchi chiziqlar. Jordan teoremasi	10	4	2	2	6
5	Stiltes integrali ta'rif va mavjudlik sharti	10	4	2	2	6
6	Stiltes integrali xossalari.	10	4	2	2	6
7	Stiltes integralini baholash.	10	4	2	2	6
8	Stiltes integralini hisoblash.	10	4	2	2	6
9	Stiltes integrali belgisi ostida limitga o'tish	10	4	2	2	6
10	Parametrga bog'liq xosmas integrallar	10	4	2	2	6
11	Birinchi va ikkinchi tur parametrga bog'liq xosmas integrallar	10	4	2	2	6
12	Ba'zi xosmas integrallarni hisoblashda parametrga bog'liq integrallarning tadbiqu.	10	4	2	2	6
13	Eyler integrallari	10	4	2	2	6
14	Stirling formulasi	10	4	2	2	6

15	Parametrga bog'liq karrali integrallar	10	4	2	2	6
ЖАМИ		24	20	8	12	4

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўла вариацияси ва уларнинг хоссалари.

Математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, геомеханика ва бошқа соҳалардаги кенг қўлланилиши. Математик анализнинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденциялари. Чекли вариацияли функциянинг таърифи, мисоллар, хоссалари. Чекли вариацияга эга бўлган функциялар синфи. Тўғриланувчи чизиклар ва Жордан теоремаси. Стилтес интеграл ва унинг хоссалари.

Гармоник ва субгармоник функциялар.

Гармоник функциялар. Хоссалари. Пуассон формуласи. Гармоник функцияни C^∞ синфга тегишлилиги. Харнак теоремаси. Субгармоник функциялар. C^2 синфга тегишли субгармоник функциянинг Лаплас оператори. Узлуксиз бўлмаган субгармоник функциялар.

3-мавзу: Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари: $m(u,r)$ ва $n(u,r)$.

Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси. Субгармоник функциянинг лапласиани. Рисс теоремаси.

4-мавзу: Чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар супремуми, юқори лимити.

Текис чегараланган субгармоник функциялар оиласи. Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимити. Хартогс леммаси.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1 ва 2 амалий машғулотлар: Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўла вариацияси ва уларнинг хоссалари.

Математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, геомеханика ва бошқа соҳалардаги кенг қўлланилишини тушунтириш. Чекли вариацияли функциянинг таърифи ва хоссаларини, ҳамда Стилтес интеграли ва унинг хоссаларини кенгроқ ўрганиш ва мисоллар ёрдамида татбиқ этиш.

3 ва 4 амалий машғулотлар: Гармоник ва субгармоник функциялар.

Гармоник ва субгармоник функцияларнинг энг содда, зарур хоссаларини ўрганиш билан бир қаторда, уларнинг голоморф функциялар билан боғлиқ масалалар.

5-амалий машғулот: Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар.

Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар ва уларнинг хоссалари ҳамда улар орасидаги боғланишни ўрганиш.

6-амалий машғулот: Чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар супремуми, юқори лимити.

Ушбу амалий машғулот давомида чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар хоссалари ва супремуми, текис чегараланган субгармоник функциялар оиласига ва субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимитини ҳисоблашга доир мисолларни, Хартогс леммасининг татбиқига оид масалаларни ўрганилади.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича куйидаги ўқитиш шаклларида фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- баҳс ва мунозаралар (эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

TALABANING KREDITLARNI TO'PLASH TARTIBI

Talabalar joriy, oraliq nazorat uchun berilgan vazifa va topshiriqlarni o'z vaqtida bajarishi, Yakuniy nazoratni muvaffaqiyatli topshirishi lozim. To'plangan reyting ballari asosida talabanning bahosi aniqlanadi.

Jami	Ma'ruza	Amaliy	Mustaqil ta'lim
100 ball	50 (40 +10)	15 (10+5)	35 (10+25)

“Анализнинг махсус боблари” fanidan 1 ta oraliq va 1 ta yakuniy nazorat o'tkaziladi.

2 ta oraliq nazoart (ON) va yakuniy (YaN) ma'ruza o'qituvchisi tomonidan o'tkaziladi (har bir talaba uchun 0.3 ball nazorat bali beriladi).

JN lar amaliy o'qituvchi tomonidan o'tkaziladi (har bir talaba uchun 0.2 ball beriladi).

Mustaqil ta'lim uchun topshiriqlar to'plamini tuzish, uni talabaga berish, uni metodik ishlanmasini tayyorlash va bajarilishini nazorat qilish, topshiriqlar bo'yicha tegishli ballarni ajratish ma'ruza o'qituvchisi (10 ball) va amaliyot o'qituvchisi (25 ball) zimmasiga yuklanadi.

“Анализнинг махсус боблари” fanidan baholash mezonlari

1. Oraliq nazoratlar yozma test va yozma ish tarzida o'tkazilib, undan 20 ta test yoki 3 ta savolga javob berishi so'raladi. Har bir test savol 0.25 ballgacha, yozma ish 1.7 ballgacha baholanadi.
2. ТМІ: “Анализнинг махсус боблари”ning « Ўзгариши чегараланган функциялар» moduli yuzasidan mustaqil ish topshirig'ini bajarish, amaliy ish daftariga konspekt qilib kelish va qisqacha og'zaki hisobot berish (5 ball):
 - Topshiriq to'liq bajarilgan, topshiriq bo'yicha asosli xulosa chiqarilgan bo'lsa – 5 ball
 - Topshiriq mohiyati ochilgan, natijalar to'g'ri, xulosasi bor – 4 ball

- Topshiriq mohiyati yoritilgan, natijalar asoslanmagan, juz'iy kamchiligi bo'lsa 3 ball beriladi.
3. TMI: “Анализнинг махсус боблари”ning “Параметрга боғлиқ хосмас интеграллар” mavzusini amaliy ish daftariga konspekt qilib kelish va qisqacha mazmunini so‘zlab berish (5 ball):
- Topshiriq to‘liq bajarilgan, topshiriq bo‘yicha asosli xulosa chiqarilgan bo‘lsa – 5 ball
 - Topshiriq mohiyati ochilgan, natijalar to‘g‘ri, xulosasi bor – 4 ball
 - Topshiriq mohiyati yoritilgan, natijalar asoslanmagan, juz'iy kamchiligi bo‘lsa – 3 ball beriladi.
4. JN: Amaliyot darsi bo‘yicha berilgan TMI topshiriqlarini bajarilishi mazmuni va sifatiga qarab 1- 2 ballgacha beriladi (jami 15-20 ball):
- Topshiriq to‘liq bajarilgan, berilgan topshiriq bo‘yicha asosli xulosa chiqarilgan bo‘lsa – 2 ball
 - Topshiriq mohiyati ochilgan, natijalar to‘g‘ri, xulosasi bor – 1- 1.5 ball
 - Topshiriq mohiyati yoritilgan, natijalar to‘liq asoslanmagan, ayrim juz'iy kamchiligi bo‘lsa – 0.5 - 1 ball beriladi.
5. TMI: Talabaning mustaqil ishi berilgan ish natijalari asosida yozma hisobot tayyorlanadi. Hisobot sifatiga karab baholanadi:
- Berilgan toshiriqlar to‘liq bajarilgan, kuzatish olingan natijalar to‘g‘ri, topshiriq bo‘yicha asosli xulosa chiqarilgan bo‘lsa – 5 ball
 - Topshiriq mohiyati ochilgan, natijalar to‘g‘ri, xulosasi bor – 4 ball
 - Topshiriq mohiyati yoritilgan, natijalar asoslanmagan, juz'iy kamchiligi bo‘lsa – 3 ball beriladi.
6. Yakuniy nazoratda talaba 20 ta yozma test savolga javob berishi lozim. Har bir savolga 2 ball ajratiladi (yozma 3 ta savol $\times 13,3 = 40$ ball) (Test savollari kamida 200 ta bo‘lishi lozim, jumladan 80 tasi amaliy mashg‘ulotga oid.)
- Eslatma:** Talabaning umumiy bali hisoblanganda yaxlitlab olinadi.

Baho	Baholash mezonlari	To‘plan gan ball
A‘lo	Yetarli nazariy bilimga ega. Topshiriqlarni mustaqil yechgan. Berilgan savollarga to‘liq javob beradi. Masalaning mohiyatiga to‘liq tushunadi. Auditoriyada faol. O‘quv tartib intizomiga to‘liq rioya qiladi. Topshiriqlarni namunali rasmiylashtirgan.	90-100
Yaxshi	Yetarli nazariy bilimga ega. Topshiriqlarni yechgan. Berilgan savollarga yetarli javob beradi. Masalaning mohiyatini tushunadi. O‘quv tartib intizomiga to‘liq rioya qiladi.	70-89

Qoniqarli	Topshiriqlarni yechishga harakat qiladi. Berilgan savollarga javob berishga harakat qiladi. Masalaning mohiyatini chala tushungan. O'quv tartib intizomiga rioya qiladi.	60-69
Qoniqarsiz	Talaba amaliy mashg'ulot darsi mavzusiga nazariy tayyorlanib kelmasa, mavzu bo'yicha masala, misol va savollariga javob bera olmasa, darsga sust qatnashsa bilim darajasi qoniqarsiz baholanadi	0-59

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни:

Тингловчи мустақил ишни муайян модулнинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- амалий машғулотларда берилган топшириқларни бажариш.

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“ФСМУ” методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзунини сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизнинг баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

“Брифинг” методи

“Брифинг” – (инг. briefing – қисқа) бирор-бир масала ёки саволнинг муҳокамасига бағишланган қисқа пресс-конференция.

Ўтказиш босқичлари:

1. Тақдимот қисми.
2. Муҳокама жараёни (савол-жавоблар асосида).

Брифинглардан тренинг якунларини таҳлил қилишда фойдаланиш мумкин. Шунингдек, амалий ўйинларнинг бир шакли сифатида қатнашчилар билан бирга долзарб мавзу ёки муаммо муҳокамасига бағишланган брифинглар ташкил этиш мумкин бўлади. Талабалар ёки тингловчилар томонидан яратилган мобил иловаларнинг тақдимотини ўтказишда ҳам фойдаланиш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР МАТЕРИАЛЛАРИ

ЧЕКЛИ ВАРИАЦИЯЛИ ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

РЕЖА:

- 1.1.Чекли вариацияли функциянинг таърифи. Чекли вариацияли функциялар синфи.
- 1.2.Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари.
- 1.3.Чекли вариацияли функциялар учун зарурий ва етарли шартлар.
- 1.4.Тўғриланувчи чизиқлар. Жордан теоремаси.
- 1.5.Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шарти.
- 1.6.Стилтьес интегралининг хоссалари.
- 1.7.Стилтьес интегралини ҳисоблаш.
- 1.8.Стилтьес интегралини баҳолаш.
- 1.9.Стилтьес интегрални белгиси остида лимитга ўтиш.

Таянч иборалар: чекли вариация, ўзгариши чегараланган функция, функциянинг тўлиқ вариацияси, мажоранта, Стилтьес интеграл.

1.1. Чекли вариацияли функциянинг таърифи. Чекли вариацияли функциялар синфи

Айтайлик, $f(x)$ функция чекли $[a;b]$ ораликда аниқланган бўлсин. Бу ораликни ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатларттирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та ораликқа бўламиз ва қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \quad (1)$$

1-таъриф. Агар (1) -йиғиндилар $\forall n \in N$ учун юқоридан текис чегараланган бўлса, унда $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада **чекли вариацияга эга ёки ўзгариши**

чегараланган функция дейлади. Шу йиғиндиларнинг аниқ юқори чегарасига функциянинг **тўлиқ вариацияси** ёки **тўлиқ ўзгариши** деб аталади ҳамда у $\bigvee_a^b f(x)$ каби белгиланади:

$$\bigvee_a^b f(x) := \sup \{ \mathcal{G}_n \} \quad (2)$$

Баъзи ҳолларда $f(x)$ функциянинг чексиз ораликдаги (масалан, $[a, +\infty)$ ораликдаги) вариацияси тўғрисида ҳам гапириш мумкин бўлади. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда берилган бўлсин. [1]

2-таъриф. Агар $f(x)$ функция $\forall [a, A] \subset [a, +\infty)$ ораликда чекли вариацияга эга бўлиб, $\bigvee_a^A f(x)$ тўлиқ вариациялар текис чегараланган бўлса, унда $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда чекли вариацияга эга, деб аталади ҳамда:

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A > a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\} \quad (3)$$

деб қабул қилинади. [1-3]

Изох. $f(x)$ функциянинг чекли вариацияга эга бўлишида унинг узлуксизлиги мутлақо аҳамиятга эга эмас.

Мисоллар. 1) $[a; b]$ кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади.

◀ а) $[a; b]$ – чекли бўлсин. $\Rightarrow$

$$\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = (\text{функция монотон бўлгани учун модулар}$$

$$\text{йиғиндиси йиғиндининг модулига тенг бўлади}) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \right| =$$

$$|f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f(x_n) - f(x_0)| =$$

$$|f(b) - f(a)| \Rightarrow \bigvee_a^b f(x) = \sup \{ \mathcal{G}_n \} = |f(b) - f(a)|.$$

б) $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ ораликда берилган бўлсин. $\Rightarrow$

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) := \sup_{A>a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\} = \sup_{A>a} \{ |f(A) - f(a)| \} = |f(+\infty) - f(a)|,$$

бу ерда $f(+\infty) = \lim_{A \rightarrow \infty} f(A)$. ►

2) Энди узлуксиз, лекин чекли вариацияга эга бўлмаган функцияга мисол келтирамиз.

◀ Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0, \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни $[0;1]$ кесмада караймиз. Қуйидаги:

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар ёрдамида $[0;1]$ кесмани оралиқларга ажратамиз ва (1)-йиғиндини ҳисоблаймиз ҳамда ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\mathcal{G}_n = \sum |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\bigvee_0^1 f(x) = \sup \{ \mathcal{G}_n \} = \sup_n \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right\} = +\infty. \text{ ►}$$

Чекли вариацияли функциялар синфи.

Аввалги пунктда кўрганимиздек $[a;b]$ кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади. Бу хоссадан фойдаланиб, чекли вариацияли функциялар синфини кенгайтириш мумкин.

1-теорема. $[a;b]$ кесмада берилган $f(x)$ функция шу кесмада бўлакли монотон бўлса, яъни:

$$[a,b] = \bigcup_{k=0}^{m-1} [a_k, a_{k+1}], \quad (a_0 = a, \quad a_m = b)$$

бўлиб, $f(x)$ функция ҳар бир $[a_k, a_{k+1}]$ кесмада монотон бўлса, унда $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлади. [2]

◀ $[a;b]$ кесманинг ихтиёрий бўлинишини олиб:

$$\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

йиғинди тузамиз. Бу бўлинишга $a_k (k = 0, m)$ нуқталарни қўшиб, $[a; b]$ кесманинг янги бўлинишини оламиз. Янги бўлиниш учун:

$$\bar{\mathcal{G}}_{n(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)| = B$$

бўлиб, $\mathcal{G}_n \leq \bar{\mathcal{G}}_{n(m)}$ тенгсизлик бажарилади. Демак, $\sup\{\mathcal{G}_n\} \leq B \Rightarrow f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чекли вариацияга эга. ►

2-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада Липицц шартини қаноатлантирса, яъни шундай $L > 0$ сон топилсаки, ихтиёрий $x, \bar{x} \in [a, b]$ нуқталар учун:

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq L \cdot |\bar{x} - x| \quad (4)$$

тенгсизлик бажарилса, унда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чекли вариацияли функция бўлади ва:

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L \cdot (b - a)$$

тенгсизлик бажарилади. [1]

$$\blacktriangleleft \mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \stackrel{(4)}{\leq} L \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = L \cdot (b - a), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ учун} \Rightarrow$$

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L \cdot (b - a) \blacktriangleright$$

3-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада чегараланган ҳосилага эга бўлса, унда $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлади. [1-2]

◀ Теорема шартига кўра шундай ўзгармас $L > 0$ сон топиладики, $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f'(x)| \leq L$$

тенгсизлик бажарилади. $\forall x, \bar{x} \in [a, b]$ нуқталар олиб $[x; \bar{x}]$ (ёки $[\bar{x}; x]$) кесмада Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасидан фойдаланамиз:

$$|f(\bar{x}) - f(x)| = |f'(\xi) \cdot (\bar{x} - x)| \leq L \cdot |\bar{x} - x|.$$

Демак, $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада Липшиц шартини қаноатлантирар экан.

Унда 2-теоремага кўра у чекли вариацияга эга бўлади. ►

4-теорема. Агар $[a; b]$ кесмада аникланган $f(x)$ функцияни шу кесмада ушбу

$$f(x) = c + \int_a^x \phi(t) dt \quad (5)$$

кўринишда ифодалани мумкин бўлса, бу ерда $\phi(t)$ функция $[a, b]$ кесмада абсолют интегралланувчи функция, у ҳолда $f(x)$ функция шу кесмада чекли вариацияга эга бўлиб,

$$V_a^b f(x) \leq \int_a^b |\phi(t)| dt$$

тенгсизлик бажарилади [1,3].

◀ Теореманинг исботи ушбу:

$$\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\phi(t)| dt \leq \int_a^b |\phi(t)| dt$$

тенгсизликдан келиб чиқади. ►

1.2. Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари.

Айтайлик, чекли $[a, b]$ кесма берилган бўлсин.

5-теорема. $[a, b]$ кесмадаги ихтиёрий чекли вариацияли функциялар шу кесмада чегараланган бўлади.

◀ $\forall x' \in (a, b]$ нуқта оламитиз. Унда шартга кўра:

$$\mathcal{G}_2 = |f(x') - f(a)| + |f(b) - f(x')| \leq V_a^b f(x) \quad (6)$$

бўлади. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x')| = |f(x') - f(a) + f(a)| \leq |f(x') - f(a)| + |f(a)| \stackrel{(6)}{\leq} V_a^b f(x) + |f(a)| = M \Rightarrow$$

$f(x)$ чегараланган. ►

6-теорема. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли бўлса, унда:

а) $f(x) \pm g(x)$;

б) $f(x) \cdot g(x)$

функциялар ҳам шу кесмада чекли вариацияли бўлади.

7-теорема. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли бўлиб, шу кесмада $|g(x)| \geq c > 0$ бўлса, унда $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат ҳам $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли бўлади.

8-теорема. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва $c \in (a,b)$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ да чекли вариацияли бўлса, унда у $[a,c]$ ва $[c,b]$ кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияли бўлади ва аксинча. Шунингдек,

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \quad (7)$$

тенглик бажарилади.

◄ Фараз қилайлик $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли бўлсин $[a,c]$ ва $[c,b]$ оралиқнинг ҳар бирини $\forall$ усул билан алохида кесмаларга ажратамиз:

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots y_m = c; \quad c = z_0 < z_1 < z_2 < \dots z_\ell = b \quad (8)$$

Натижада, бутун $[a,b]$ кесма ҳам қисмларга ажралади. $[a,c]$ ва $[c,b]$ кесмалар учун қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$\mathcal{G}_1^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|; \quad \mathcal{G}_2^{(\ell)} = \sum_{i=0}^{\ell-1} |f(z_{i+1}) - f(z_i)|.$$

$$\Rightarrow [a,b] \text{ учун } \mathcal{G}_n = \mathcal{G}_1^{(m)} + \mathcal{G}_2^{(\ell)} \text{ бўлади. } \Rightarrow \mathcal{G}_1^{(m)} + \mathcal{G}_2^{(\ell)} = \mathcal{G}_n \leq \bigvee_a^b f(x) \Rightarrow \mathcal{G}_1^{(m)} \leq \bigvee_a^b f(x)$$

ва

$$\mathcal{G}_2^{(\ell)} \leq \bigvee_a^b f(x) \Rightarrow$$

$f(x)$ функция $[a,c]$ ва $[c,b]$ кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга ва қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leq \bigvee_a^b f(x) \quad (9)$$

Энди фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,c]$ ва $[c,b]$ кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга бўлсин. $[a,b]$ кесманинг ихтиёрий бўлинишини оламиз. Агар c нукта бўлиниш нукталарига кирмаса, унда c ни ҳам бўлиниш нукталарига қўшамиз. Натижада, $\mathcal{Q}_n$ йиғинди фақат катталашиши мумкин:

$$\mathcal{Q}_n \leq \mathcal{Q}_1^{(m)} + \mathcal{Q}_2^\ell \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга ва:

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \quad (10)$$

тенгсизлик бажарилади. (9)- ва (10)-тенгсизликлардан (7)-тенгсизлик келиб чиқади. ►

Бу теоремадан натижа сифатида қуйидаги хосса келиб чиқади.

9-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлса, унда ихтиёрий $x \in [a,b]$ учун:

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

тўлиқ вариация x ўзгарувчининг монотон ўсувчи ва чегараланган функцияси бўлади.

1.3. Чекли вариацияли функциялар учун зарурий ва етарли шартлар.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ ораликда аниқланган бўлсин. Бу параграфда биз берилган $f(x)$ функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши мезонларини келтирамиз.

10-теорема. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун шу кесмада монотон ўсувчи ва чегараланган шундай $F(x)$ функциянинг мавжуд бўлиб ихтиёрий $[x', x''] \subset [a,b]$ кесмада:

$$|f(x'') - f(x')| \leq F(x'') - F(x') \quad (11)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли [1,2].

Шундай хоссага эга бўлган $F(x)$ функцияга $f(x)$ функция учун **мажоранта** дейилади.

11-теорема. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун уни шу оралиқда иккита монотон ўсувчи ва чегараланган функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлиши зарур ва етарли:

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad (12)$$

◀ **Зарурлиги.** Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлсин. Унда 10-теоремага кўра шундай мажоранта $F(x)$ топиладики, унинг учун (11)- тенгсизлик бажарилади. Тузилишига кўра $F(x)$ функция монотон ўсувчи ва чегараланган. Агар:

$$g(x) = F(x) \text{ ва } h(x) = F(x) - f(x)$$

деб белгиласак, $f(x) = g(x) - h(x)$ бўлади ҳамда қуйидаги муносабат бажарилади:

$$h(x'') - h(x') = [F(x'') - F(x')] - [f(x'') - f(x')] \stackrel{(11)}{\geq} 0,$$

$x'' \geq x$ ва $x'', x' \in [a,b] \Rightarrow h(x) \uparrow$ ва чегараланган, чунки:

$$|h(x)| \leq |F(x)| + |f(x)| \leq M.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада монотон ўсувчи ва (12)-тенгсизлик бажарилсин.

$$F(x) = g(x) + h(x)$$

деб олиб, унинг $f(x)$ учун мажоранта бўлишини кўрсатамиз:

$$|f(x'') - f(x')| = |[g(x'') - g(x')] - [h(x'') - h(x')]| \leq |g(x'') - g(x')| + |h(x'') - h(x')| = [g(x'') - g(x')] + [h(x'') - h(x')] = [g(x'') + h(x'')] - [g(x') + h(x')] = F(x'') - F(x') \Rightarrow F(x) - \text{мажоранта.}$$

Унда 10-теоремага кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлади. ►

Натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлса, унда $\forall x_0 \in [a, b]$ нуктада унинг чекли бир томонли лимитлари мавжуд:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x); \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \quad (13)$$

◀ 11-теоремага кўра шундай ўсувчи ва чегараланган $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар топиладики,

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

тенглик бажарилади. Математик анализ курсидан маълумки, монотон функциялар учун чекли:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} g(x) = g(x_0 \pm 0) \text{ ва } \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} h(x) = h(x_0 \pm 0)$$

лар мавжуд $\Rightarrow$ (13). ►

1.4. Тўғриланувчи чизиқлар. Жордан теоремаси.

12-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чекли вариацияли функция бўлиб, $x_0 \in [a, b]$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз бўлса, унда:

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

функция ҳам x_0 нуктада узлуксиз бўлади.

◀ $x_0 < b$ деб фараз қиламиз ва $g(x)$ функциянинг x_0 нуктада ўнгдан узлуксиз эканлигини исботлаймиз. $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, $[x_0; b]$ кесмани ушбу:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай нукталар ёрдамида кесмаларга ажратамизки, натижада:

$$\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_{x_0}^b f(t) - \varepsilon \quad (14)$$

тенгсизлик бажарилсин.

$f(x) \in C\{x_0\}$, бўлгани учун, x_1 нуқтани x_0 нуқтага шундай яқин олиш мумкинки, $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ бўлсин. Унда (14) га кўра:

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_0}^b f(t) &< \varepsilon + \mathcal{G}_n = \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \varepsilon + |f(x_1) - f(x_0)| + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon + \varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^b |f(t)| \end{aligned}$$

бўлади. Демак, $\bigvee_{x_0}^b f(t) - \bigvee_{x_1}^b f(t) < 2\varepsilon$ ёки $\bigvee_{x_0}^{x_1} f(x) < 2\varepsilon$ муносабат ўринли. $\Rightarrow$

$g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$. $g(x)$ функция ўсувчи бўлгани учун $\Rightarrow$

$$0 \leq g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

Бу тенгсизлик ва ε нинг ихтиёрийлигидан фойдалансак,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0)$$

тенгликни, яъни $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз эканлигини ҳосил қиламиз.

$x_0 > a$ бўлган ҳолда $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада чапдан узлуксиз эканлиги ҳам шу каби кўрсатилади. ►

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. $[a, b]$ кесмадаги чекли вариацияли узлуксиз $f(x)$ функцияни шу кесмада иккита узлуксиз, ўсувчи функциянинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин:

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

13-теорема. Айтайлик, $f(x) \in C[a, b]$ бўлсин. $[a, b]$ кесмани ушбу

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида қисмларга ажратамиз ва:

$$\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]$$

йигиндини оламиз. Унда, агар:

$$\lambda = \max_{k=0, n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

бўлса, Ушбу:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{G}_n = \bigvee_a^b f(x) \quad (15)$$

тенглик ўринли бўлади.

◀ Бизга маълумки,

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \{ \mathcal{G}_n \}$$

ва бўлиниш нуқталарига нисбатан $\{ \mathcal{G}_n \} \uparrow$. Демак, теоремани исботлаш учун ушбу:

$$\sup \{ \mathcal{G}_n \} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{G}_n \quad (16)$$

тенгликнинг бажарилишини кўрсатиш кифоя.

Фараз қилайлик,

$$\text{Sup} \{ \mathcal{G}_n \} = A \quad (12)$$

бўлсин. Унда аниқ юқори чегаранинг таърифга кўра қуйидагиларни хосил қиламиз:

$$1) \forall n \in N \text{ учун } \mathcal{G}_n \leq A$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \text{ сон олинганда ҳам } \exists n_0 \in N \text{ топиладики,}$$

$$\mathcal{G}_{n_0} > A - \varepsilon \text{ тенгсизлик бажарилади.}$$

$$\{ \mathcal{G}_n \} \uparrow. \Rightarrow \forall n > n_0 \text{ учун } \mathcal{G}_n > A - \varepsilon \text{ бўлади.}$$

Демак, $\forall n > n_0$ учун:

$$A - \varepsilon < \mathcal{G}_n \leq A < A + \varepsilon$$

экан. $\Rightarrow$ Кетма-кетлик лимитининг таърифига кўра:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{G}_n = A \quad (18)$$

тенглик ўринли. (17) ва (18) дан $\Rightarrow$ (16). ►

Чекли вариацияли функция тушунчаси эгри чизикнинг тўғриланувчилиги масаласида ўз татбиқини топган.

Айтайлик,

$$\overset{\cup}{AB} = (L): \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [t_0; T] \end{cases} \quad (19)$$

сода эгри чизик берилган бўлиб, $\phi(t), \psi(t) \in C[t_0; T]$ бўлсин. Фараз қилайлик, t параметр t_0 дан T га қараб ўзгарганда, унга L эгри чизикда мос келувчи:

$$(x, y) = (\phi(t), \psi(t))$$

нуқта A нуқтадан B нуқтага қараб ўзгарсин.

$[t_0; T]$ кесмада ушбу: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталарни олиб, уларга (L) эгри чизикда мос келган нуқталарни $A = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n = B$ деб белгилаймиз. Бу нуқталарни кетма-кет туташтириш натижасида (L) эгри чизикқа чизилган синик чизикни ҳосил қиламиз. Бу синик чизикнинг периметри:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \quad (20)$$

тенглик ёрдамида ифодаланади.

3-таъриф. Агар ушбу:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P_n = L \quad (\lambda = \max_{k=0, n-1} (t_{k+1} - t_k))$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, унда (L) эгри чизик **тўғриланувчи чизик** дейилади ҳамда лимитнинг қиймати L га унинг **узулиги** деб аталади.

14-теорема (Жордан теоремаси). (19)-эгри чизикнинг тўғриланувчи бўлиши учун $\phi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг $[t_0; T]$ ораликда чекли вариацияга эга бўлиши зарур ва етарли.

Эгри чизик ёйи узунлигини $L = L(t)$ деб уни $[t_0; t]$ ораликда қараймиз. Унда $L(t) \uparrow$ бўлади ва $\Delta t > 0$ бўлганда $\Delta L = L(t + \Delta t) - L(t)$ учун:

$$0 < \Delta L < \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) + \int_t^{t+\Delta t} \psi(t)$$

тенгсизликлар бажарилади. $\Rightarrow$ Узлуксиз тўғриланувчи эгри чизик учун $L(t)$ функция t параметрининг узлуксиз функцияси бўлади.

1.5. Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шarti.

Стилтьес интеграл Римаи интегралининг табиий умумлашмаси бўлиб, қуйидагича аниқланади. Айтайлик, $[a, b]$ кесмада 2 та чегараланган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. $[a, b]$ кесмани ушбу:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нукталар ёрдамида n та $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, қисмларга ажратамиз. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ва $\lambda = \max_{k=0, n-1} \Delta x_k$ деб белгилаймиз. $\forall \xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ нукта олиб, ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) \quad (21)$$

(1)-йиғиндига **Стилтьеснинг интеграл йиғиндиси** дейилади.

1-таъриф. Агар $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$ мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати $[a, b]$ кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги ξ_k нукталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, унда шу сонга $f(x)$ **функциянинг** $g(x)$ **функция бўйича Стилтьес интеграл** дейилади ва $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$ каби белгиланади [1-3].

Демак,

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k). \quad (22)$$

Агар (22)-интеграл мавжуд бўлса, унда $f(x)$ **функция** $[a, b]$ кесмада $g(x)$ **функция бўйича интегралланувчи** деб аталади.

Энди Стилтьес интегралининг мавжудлик шартини аниқлаймиз. Фараз қилайлик, $g(x)$ функция монотон ўсувчи бўлсин. У ҳолда $\Delta x_k > 0$ бўлганда $\Delta g(x) > 0$ бўлади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}, \quad M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\},$$

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k), \quad \bar{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k). \quad (23)$$

2-таъриф. $\underline{S}$ ва $\bar{S}$ йигиндилар мос равишда Дарбу – Стильтеснинг қуйи ва юқори йигиндилари деб аталади.

Оддий Дарбу йигиндилари каби бу йигиндилар ҳам қуйидаги хоссаларга эга.

1⁰. Агар $[a, b]$ кесманинг бўлиниш нуқталарига янгилари қўшилса, унда $\underline{S}$ фақат ортиши, $\bar{S}$ эса камайиши мумкин.

Демак, $\{\underline{S}\} \uparrow$ ва $\{\bar{S}\} \downarrow$.

2⁰. Дарбу–Стильтеснинг ихтиёрий қуйи йигиндисининг унинг ихтиёрий юқори йигиндисидан катта бўла олмайди (агар у бошқа бўлинишга мос келса ҳам).

Агар ушбу:

$$I_* = \sup \{\underline{S}\} \quad \text{ва} \quad I^* = \inf \{\bar{S}\}$$

тенгликлар ёрдамида Дарбу–Стильтеснинг қуйи ва юқори интегралларини аниқласак, унда:

$$\underline{S} \leq I_* \leq I^* \leq \bar{S}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликлар ва Дарбу - Стильтес йигиндиларидан фойдаланиб, оддий Риман интеграл ҳолидаги каби қуйидаги теорема осонгина исботланади.

1-теорема. Стильтес интегралининг мавжуд бўлиши учун ушбу:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{S} - \underline{S}) = 0$$

ёки:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0 \quad (24)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли ($\omega_k = M_k - m_k$).

Стилтьес интеграли мавжуд бўлган функциялар синфи

2-теорема. Агар $f(x) \in C[a, b]$ бўлиб, $g(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлса, у ҳолда:

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad (25)$$

Стилтьес интеграли мавжуд бўлади [1,3].

◀ $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow$ Кантор теоремасига кўра текис узлуксиз $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган бўлақларга ажратилганда, $f(x)$ функциянинг шу бўлақлардаги тебраниши ω_k учун ушбу: $\omega_k < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$ тенгсизлик бажарилади. Энди $[a, b]$ кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган қисмларга ажратамиз. $\Rightarrow \lambda < \delta$ ва

$$\omega_k < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) &< \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \\ &= \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \cdot [g(b) - g(a)] = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

(25)-интеграл мавжуд. ▶

3-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция Липицц шартини қаноатлантирса, яъни:

$$\begin{aligned} |g(\bar{x}) - g(x)| &\leq L \cdot (\bar{x} - x) \\ (L = \text{const}, a \leq x \leq \bar{x} \leq b) \end{aligned} \quad (26)$$

тенгсизлик бажарилса, унда (5)-Стилтьес интеграли мавжуд бўлади [1,3].

◀ а) Аввал хоссани $g(x)$ функция (6)-шартни бажаришдан ташқари монотон ўсувчи бўлган ҳол учун исботлаймиз.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) &\stackrel{(6)}{\leq} L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (x_{k+1} - x_k) = \\ &= L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k\end{aligned}\quad (27)$$

$f(x)$ функция $[a, b]$ да Риман маъносида интегралланувчи бўлгани учун

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0 \quad \text{ва мос равишда (27)-тенгсизликка кўра} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0$$

бўлади. $\Rightarrow$ (25)-интеграл мавжуд.

б) Умумий ҳол. Липшиц шартини қаноатлантирувчи $g(x)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$g(x) = L \cdot x - [L \cdot x - g(x)] = g_1(x) - g_2(x). \quad (28)$$

(28)-тенгликдаги $g_1(x) = L \cdot x$ функция Липшиц шартини қаноатлантириши билан бир қаторда монотон ўсувчи ҳам бўлади. Шу шартларни $g_2(x) = L \cdot x - g(x)$ функция ҳам бажаради. Дарҳақиқат, $a \leq x \leq \bar{x} \leq b$ учун:

$$\begin{aligned}g_2(\bar{x}) - g_2(x) &= L(\bar{x} - x) - [g(\bar{x}) - g(x)] \stackrel{(6)}{\geq} L \cdot (\bar{x} - x) - L \cdot (\bar{x} - x) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{g_2(x)\} \uparrow\end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned}|g_2(\bar{x}) - g_2(x)| &\leq L(\bar{x} - x) + |g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \stackrel{(6)}{\leq} L(\bar{x} - x) + L(\bar{x} - x) = \\ &= 2L(\bar{x} - x).\end{aligned}$$

а) ҳолга кўра $g_1(x)$ ва $g_2(x)$ лар учун (24) шарт бажарилади $\Rightarrow$ (24)-шарт $g(x)$ функция учун ҳам бажарилади $\Rightarrow$ (25)-интеграл мавжуд. ►

4-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функцияни ушбу:

$$g(x) = c + \int_a^x \phi(t) dt, \quad (29)$$

бу ерда $\phi(x) - [a, b]$ кесмада абсолют интегралланувчи функция, кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, унда (25)-интеграл мавжуд бўлади.

1.6. Стилтьес интегралининг хоссалари.

Стилтьес интегралининг таърифидан тўғридан тўғри қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

$$1^0. (S) \int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$$

$$2^0. (S) \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) = (S) \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm (S) \int_a^b f_2(x) dg(x).$$

$$3^0. (S) \int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = (S) \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm (S) \int_a^b f(x) dg_2(x).$$

$$4^0. (S) \int_a^b k \cdot f(x) d(\ell \cdot g(x)) = (S) k \cdot \ell \int_a^b f(x) dg(x).$$

$$5^0. (S) \int_a^b f(x) dg(x) = (S) \int_a^c f(x) dg(x) + (S) \int_c^b f(x) dg(x) \quad (a < c < b)$$

Мисол. $[-1; 1]$ кесмада берилган ушбу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -1 \leq x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 < x \leq 1 \text{ бўлса} \end{cases} \quad \text{ва} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -1 \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 \leq x \leq 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияларни оламитиз. Унда $(S) \int_{-1}^0 f(x) dg(x)$ ва $(S) \int_0^1 f(x) dg(x)$ интеграллар

мавжуд ва нолга тенг бўлади, чунки иккала ҳолда ҳам Стилтьес йиғиндисид

қатнашган ҳадлар 0 га тенг. Энди $(S) \int_{-1}^1 f(x) dg(x)$ интегралнинг мавжуд

эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун $[-1; 1]$ кесманинг шундай бўлинишини оламитизки, 0 нуқта бўлиниш нуқтаси бўлмасин. Интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) = ((\text{айтайлик, } 0 \in [x_k, x_{k+1}] \text{ бўлсин} \Rightarrow x_k < 0 < x_{k+1} \Rightarrow$$

йиғиндидаги k -чи қўшилувчидан бошқа ҳаммаси нолга тенг бўлади, чунки $i \neq k$ да

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0) = f(\xi_k) \cdot [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = f(\xi_k) \cdot (1 - 0) =$$

$$= f(\xi_k) = \begin{cases} 0, & \text{агар } \xi_k \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } \xi < 0 \text{ бўлса} \end{cases} \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma - \mathbb{Z} \Rightarrow (S) \int_{-1}^1 f(x) dg(x) - \mathbb{Z}$$

1.7. Стилтьес интеграллари учун бўлак-бўлак интеграллаш формуласи.

5-теорема. Агар $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$ ва $(S) \int_a^b g(x) df(x)$ Стилтьес

интегралларидан бири мавжуд бўлса, унда иккинчиси ҳам мавжуд бўлади ва ушбу бўлак-бўлак интеграллаш формуласи ўринли:

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - (S) \int_a^b g(x) df(x) \quad (30)$$

Стилтьес интеграллари ҳисоблашга доир мисоллар.

Аввалги пунктда кўрганимиздек, маълум шартлар бажарилганда Стилтьес интеграллари ҳисоблаш учун қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \phi(x) dx, \quad (31)$$

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx, \quad (32)$$

ва

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a) \cdot [g(a+0) - g(a)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k) \cdot [g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b) \cdot [g(b) - g(b-0)] \quad (33)$$

Шу формулалардан фойдаланиб мисоллар ечамиз.

1-мисол. Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:

$$a) (S) \int_0^2 x^2 d \ln(1+x); \quad б) (S) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x; \quad в) (S) \int_{-1}^1 x d \arctg x.$$

◀ а) $(S) \int_0^2 x^2 d \ln(1+x) = ((12) - \text{формуладан фойдаланамиз}))$

$$= (R) \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^2 = 2 - 2 + \ln 3 = \ln 3.$$

б) $(S) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x = (R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \Rightarrow \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \end{array} \right) =$

$$= x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

в) $(S) \int_{-1}^1 x d \arctg x = (R) \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_{-1}^1 = 0. \blacktriangleright$

2-мисол. Қуйидаги Стилтъес интеграллари ҳисоблансин:

а) $(S) \int_{-1}^3 x dg(x)$, бу ерда

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = -1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } -1 < x < 2 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } 2 \leq x \leq 3 \text{ бўлса;} \end{cases}$$

ва

б) $(S) \int_0^2 x^2 dg(x)$, бу ерда

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } x = \frac{3}{2} \text{ бўлса,} \\ -2, & \text{агар } \frac{3}{2} < x \leq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

◀а) $g(x)$ функциянинг $x = -1$ нуқтадаги сакраши 1 га, $x = 2$ нуқтадаги сакраши -2 га тенг ҳамда $x \neq -1; 2$ нуқталарда $g'(x) = 0$. Унда (13)-формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(S) \int_{-1}^2 x dg(x) = -1 \cdot (1 - 0) + 2(-1 - 1) = -1 - 4 = -5$$

б) $g(x)$ функциянинг $x = \frac{1}{2}$ нуқтадаги сакраши 1 га, $x = \frac{3}{2}$ нуқтадаги сакраши -2 га тенг ва $x \neq \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ бўлганда $g'(x) = 0$. Интегрални (13) – формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$(S) \int_0^2 x^2 dg(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0 + 1) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (-2 - 0) = \frac{1}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{17}{4}. \blacktriangleright$$

3-мисол. *Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

$$а) (S) \int_{-2}^2 x dg(x), \quad б) (S) \int_{-2}^2 x^2 dg(x), \quad в) (S) \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dg(x).$$

Бу ерда

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{агар } -2 \leq x \leq -1 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } -1 < x < 0 \text{ бўлса,} \\ x^2 + 3, & \text{агар } 0 \leq x \leq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

◀ $g(x)$ функциянинг $x = -1$ ва $x = 0$ нуқталаридаги сакраши 1 га тенг ҳамда:

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } -2 \leq x < -1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } -1 < x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} а) (S) \int_{-2}^2 x dg(x) &= \int_{-2}^{-1} x dx + \int_0^2 x \cdot 2x dx + (-1) \cdot (2 - 1) + 0 \cdot (3 - 2) = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^2 - 1 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{16}{3} - 1 = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

$$б) (S) \int_{-2}^2 x^2 dg(x) = \int_{-2}^{-1} x^2 dx + \int_0^2 x^2 2x dx + (-1)^2 \cdot 1 +$$

$$+0 \cdot 1 = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^4}{2} \Big|_0^2 + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 8 + 1 = 11\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } (S) \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dg(x) &= \int_{-2}^{(24)-1} (x^3 + 1) dx + \int_0^2 (x^3 + 1) 2x dx + \\ &+ \left[(-1)^3 + 1 \right] \cdot 1 + (0^3 + 1) \cdot 1 = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_{-2}^{-1} + 2 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 + 0 + 1 = \\ &= \frac{1}{4} - 1 - 4 + 2 + \frac{64}{5} + 4 = 15\frac{1}{20}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

1.8. Стильтес интегралини баҳолаш.

Стильтес интегралини ўрганиш жараёнида амалиётда $f(x)$ функция узлуксиз ва $g(x)$ функция чекли вариацияга эга бўлган ҳол муҳим аҳамиятга эга. Бундай ҳолда Стильтес интегралини қуйидагича баҳолаш мумкин.

6-теорема. *Агар $f(x) \in C[a, b]$ ва $g(x)$ чекли вариацияли функция бўлса, унда:*

$$\left| (S) \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M \cdot V \quad (34)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу ерда:

$$M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad V = \bigvee_a^b g(x).$$

◀ Стильтес йиғиндисини тузиб, уни баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) \right| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \cdot |\Delta g(x_k)| \leq \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq M \bigvee_a^b g(x) = M \cdot V \xRightarrow{\lambda \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (35)$$



11-теорема. $f(x) \in C[a, b]$, $g(x)$ - чекли вариацияли функция ва $I = (S) \int_a^b f(x) dg(x)$ бўлсин. Унда $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta > 0$: $\lambda < \delta$ бўлганда:

$$|\sigma - I| \leq \varepsilon \cdot V_a^b g(x) \quad (36)$$

бўлади.

1.9. Стилтес интегралли белгиси остида лимитга ўтиш.

7-теорема. Фараз қилайлик, $[a, b]$ кесмада $\{f_n(x)\}$ ($n=1, 2, \dots$) функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

бўлсин. Агар:

- 1) $f_n(x) \in C[a, b]$,
- 2) $n \rightarrow \infty$ да $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x)$,
- 3) $g(x)$ -чекли вариацияли функция бўлса, у ҳолда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S) \int_a^b f_n(x) dg(x) = (S) \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dg(x) = (S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad (37)$$

бўлади.

◀ $n \rightarrow \infty$ да $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x)$, бўлгани учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сон топиладики, $\forall n > n_0$ ва барча $x \in [a, b]$ лар учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Унда 15-пунктдаги (29)-тенгсизликка кўра $n > n_0$ бўлганда қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & \left| (S) \int_a^b f_n(x) dg(x) - (S) \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \\ & = \left| (S) \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dg(x) \right| \leq \varepsilon \cdot V_a^b g(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (38)$$

8-теорема. Фараз қилайлик, $[a,b]$ кесмада $f(x)$ функция ва $\{g_n(x)\}$ ($n=1,2,\dots$) функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$1) f(x) \in C[a,b],$$

$$2) g_n(x) \ (n=1,2,\dots)\text{-чекли вариацияли функциялар},$$

$$3) V_a^b g_n(x) \leq V \ (n=1,2,\dots),$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x).$$

У ҳолда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S) \int_a^b f(x) dg_n(x) = (S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad (39)$$

бўлади.

Назорат саволлари:

1. Чекли вариацияли функциялар таърифи.
2. Функциянинг тўлиқ вариацияси нима?
3. Чекли вариацияли функциялар синфи.
4. Чекли вариацияли функциялар учун зарурий шартлар.
5. Чекли вариацияли функциялар учун етарли шартлар.
6. Стильтес интегралининг таърифини келтиринг.
7. Стильтес интегралининг мавжудлик шарти.
8. Стильтес интегралининг хоссаларини келтиринг.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Кутлимуратов А.Р., Каримов Ж.Ж. Дополнительные главы анализа, Т. “Университет”. 2015.
2. Brian S. Thomson Theory of integral. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, 2012.

ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

РЕЖА:

- 2.1. Гармоник функциялар ва уларнинг хоссалари.
- 2.2. Харнак теоремаси.
- 2.3. Субгармоник функциялар ва уларнинг хоссалари.
- 2.4. Максимумлар принципи.
- 2.5. C^2 -синфга тегишли субгармоник функциянинг Лаплас оператори.

Таянч иборалар: гармоник функциялар, субгармоник функциялар, монотон камаювчи, текис яқинлашувчи, максимумлар принципи.

2.2. Харнак теоремаси

в) **Теорема 1 (Харнак).** Гармоник функцияларнинг монотон кетма-кетлиги D соҳа ичида ёки ∞ текис яқинлашади, ёки бирор гармоник функцияга текис яқинлашади [1-2].

д) $\square \square \square^2$ комплекс текислигида гармоник функциялар голоморф функциялар билан узвий боғлиқдир. Лаплас операторининг комплекс кўриниши-

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \text{бунда} \quad z = x_1 + ix_2 \in \square, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad \text{Бундан эса,} \quad f \in O(D) \quad \text{голоморф функция учун}$$

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i} \quad \text{тенгликлардан} \quad \Delta \operatorname{Re} f = 0, \quad \Delta \operatorname{Im} f = 0 \quad \text{келиб чиқади.}$$

Шунинг учун, f голоморф функциянинг хақиқий ва мавҳум қисмлари гармоник функциялар бўлади. Аксинча, агар $u(z) \in h(D)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $z^0 \in D$

нуқта ва унинг $B(z^0, r) \subset D$ атрофи учун унда голоморф $f(z)$ функция мавжуд бўлиб, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $z \in B(z^0, r)$ бўлади [1].

2.3. Субгармоник функциялар.

Фараз қилайлик, $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳада $u: D \rightarrow [-\infty, \infty)$ функция берилган бўлсин.

Таъриф. Агар $u(x)$ функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирса:

1) $u(x)$ юқоридан яримузлуксиз, яъни $\forall x^0 \in D$ учун:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x^0} u(x) \leq u(x^0)$$

тенгсизлик ўринли

(Бундан, D соҳанинг ихтиёрий компакт қисмида функция юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади);

2) ихтиёрий $x^0 \in D$ нуқта учун $r(x^0) > 0$ сон топилсаки ҳар қандай $r \leq r(x^0)$ учун:

$$u(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma \quad (4)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $u(x)$ функция D соҳада субгармоник дейилади. D соҳада субгармоник функциялар синфини $sh(D)$ каби белгилаймиз.

Келгусида қулайлик учун биз тривиал $u(x) \equiv -\infty$ функцияси ҳам D да $sh(D)$ га тегишли, деб қараймиз. Энди субгармоник функцияларнинг хоссаларини келтирамиз:

а) субгармоник функцияларнинг мусбат коэффициентли чизиқли комбинацияси субгармоник функция бўлади [1]:

$$\begin{aligned} u_k(x) \in sh(D), \quad a_k \in R_+ \quad (k=1, 2, \dots, m) &\Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_m u_m(x) &\in sh(D); \end{aligned}$$

б) чекли сондаги субгармоник функцияларнинг максимуми субгармоник функция бўлади[1]:

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \in sh(D) \Rightarrow \\ \Rightarrow \max \{ u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \} \in sh(D);$$

в) монотон камаювчи субгармоник функциялар кетма – кетлигининг лимити субгармоник функция бўлади [1]:

$$u_j(x) \in sh(D), \quad u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad (j=1, 2, \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \in sh(D);$$

г) текис яқинлашувчи субгармоник функциялар кетма – кетлиги субгармоник функцияга яқинлашади [1]:

$$u_j(x) \in sh(D), \quad (j=1, 2, \dots), \quad u_j(x) \rightrightarrows u(x) \Rightarrow u(x) \in sh(D);$$

2.4. Максимумлар принципи.

д) *Максимумлар принципи* [1-2]. Агар $u(x) \in sh(D)$ функция бирор $x^\circ \in D$ нуқтада ўзининг максимумига эришса, яъни:

$$u(x^\circ) = \sup_{x \in D} u(x) \quad (5)$$

бўлса, у ҳолда $u(x) \equiv \text{const}$ бўлади.

◀ Ушбу:

$$M = \{ x \in D : u(x) = u(x^\circ) \}$$

тўпламни қарайлик. $u(x)$ функциянинг юқоридан яримузлуксиз бўлганлигидан ва (8) шартдан M тўпламнинг D да ёпиклиги келиб чиқади.

Иккинчи томондан, ихтиёрий $p \in M$ учун (7) формулага кўра:

$$u(x^\circ) = u(p) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(p,r)} u(x) d\sigma \leq u(x^\circ), \quad r \leq r(p),$$

бўлади. Бу муносабатдан $u|_{S(p,r)} \equiv u(x^\circ)$, яъни p нинг $B(p, r(p))$ атрофида $u(x) = u(x^\circ)$ бўлишини кўрамиз. Бу эса M тўпламнинг D да очиқ эканлигини кўрсатади. Демак, $M = D$. ▶

ўринли бўлади.

◀ Бу хоссанинг исботи юқоридаги д) хоссадан келиб чиқади ▶;

$e)$ – хоссадан қуйидаги муҳим ҳулосага келамиз. Фараз қилайлик,

$\mathcal{G}(x) \in sh(D) \cap C(D)$ $e)$ Агар $\mathcal{G}(x) \in sh(D)$, $u(x) \in h(D)$ функциялар учун $S(x^\circ, r) \subset\subset D$ сферада:

$$\mathcal{G}|_S \leq u|_S$$

бўлса, у ҳолда $B(x^\circ, r)$ шарда $\mathcal{G}(x) \leq u(x)$ тенгсизлик

берилган бўлиб, $B(x^\circ, r) \subset\subset D$ бўлсин. Ушбу:

$$u(x) = \int_{S(x^\circ, r)} \mathcal{G}(y) P(x, y) d\sigma(y), \quad x \in B(x^\circ, r).$$

Пуассон интегралини қарайлик. $u(x) \in h(B)$, $u|_S = \mathcal{G}|_S$ бўлиб, $e)$ – хоссага кўра $B = B(x^\circ, r)$ да $\mathcal{G}(x) \leq u(x)$ бўлади. Узлуксиз функциялар учун исботланган бу хосса ихтиёрий $\mathcal{G} \in Sh(D)$ учун ҳам ўринлидир: $\mathcal{G}(x) \leq u(x)$ ва деярли барча $x \in S$ лар учун $\mathcal{G}(x) = u(x)$ ўринлидир;

Субгармоник функциялар синфида гармоник функция экстремал(максимал) хоссага эга: агар $D \subset \mathbb{R}^n$ соҳа чегарасида узлуксиз $\varphi(\xi)$, $\xi \in \partial D$, функция берилган бўлса у ҳолда $\Pi = \{v \in sh(D) \cap C(D) : v|_{\partial D} \equiv \varphi\}$ синфда гармоник $u(x) : u|_{\partial D} \equiv \varphi$ функция максимал бўлади, яъни $u(x) \geq v(x)$, $\forall v \in \Pi$

2.5. C^2 синфга тегишли субгармоник функциянинг Лаплас оператори.

Теорема. Икки карра силлиқ $u(x) \in C^2(D)$ функция D соҳада субгармоник бўлиши учун унинг Лаплас оператори $\Delta u \geq 0$ тенгсизликни қаноатлантриши зарур ва етарли [1-2].

Назорат саволлари:

1. Гармоник функциянинг таърифи.
2. Гармоник функциянинг асосий хоссаларини келтиринг.
3. Гармоник функция ва голоморф функциялар орасидаги боғланиш.

4. Субгармоник функциялар таърифи.
5. Субгармоник функцияларнинг хоссалари.
6. Субгармоник функциянинг Ласпасиани.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Садуллаев А., *Теория плюрипотенциала. Применения.* Palmarium Akademic Publishing, 2012.
2. Klimek M. *Pluripotential theory.* Clarendon Press., 1991.
3. Tien Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony, *Dynamics of holomorphic maps*, p. 2.1.1 *Subharmonic and quasi-subharmonic functions . Introductory Lectures (Master)*, Paris-2011, available at: <http://www.math.jussieu.fr/~dinh>

3-мавзу: СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯНИНГ ЎРТА ҚИЙМАТЛАРИ $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ ЛАР

РЕЖА:

- 3.1. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ лар.
- 3.2. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси.
- 3.3. Субгармоник функциянинг лапласиани.
- 3.4. Рисс теоремаси.

Таянч иборалар: субгармоник функция, локал интегралланувчи, монотон тўпламлар, Рисс теоремаси.

3.1. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ лар

$u(x) \in Sh(D)$ функция ва $x^0 \in D$ нукта берилган бўлсин. Ушбу:

$$m(x^0, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma$$

ва

$$n(x^0, r) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x^0, r)} u(x) dV,$$

бунда $V_n r^n$ миқдор $B(x^0, r)$ нинг ҳажми, интегралларни (ўрта қийматларни) қарайлик.

2 – т е о р е м а[1-2]. Фараз қилайлик, $u(x) \in Sh(D)$ ва $u(x) \not\equiv -\infty$ бўлсин.

У ҳолда ихтиёрий $x^0 \in D$ учун:

$$u(x^0) \leq n(x^0, r) \leq m(x^0, r), \quad n(x^0, r) > -\infty, \quad 0 < r < \rho(x^0, \partial D),$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бундан ташқари, агар r монотон камайиб нолга интилса, унда $n(x^0, r)$ ва $m(x^0, r)$ ўрта қийматлар монотон камайиб, $u(x^0)$ га интилади.

2 – теоремадан ушбу муҳим натижага эга бўламиз: $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада субгармоник $u(x) \neq -\infty$ функция D да локал интегралланувчидир, яъни ихтиёрий $B \subset\subset D$ учун $\int_B |u(x)| dV$ интеграл мавжуддир. Бундан ташқари агар иккита $u(x)$ ва $v(x)$ субгармоник функциялар D соҳада деярли устма-уст тушса у ҳолда улар D соҳада айнан тенг бўлади: $u(x) \equiv v(x)$, $x \in D$.

3.2. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси

Субгармоник функция узлуксиз бўлиши шарт эмас. У D соҳанинг ҳар бир нуқтасида узилишга эга бўлиши мумкин. Айни пайтда, қуйидаги теорема ўринли бўлади.

3 – т е о р е м а [1-2]. Агар $u(x) \in Sh(D)$ бўлса, у ҳолда шундай монотон ўсувчи очиқ тўпламлар:

$$D_j \subset D_{j+1} \subset D, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$$

кетма – кетлиги ва шундай монотон камаювчи функциялар:

$$u_j(x) \in Sh(D_j) \cap C^{\infty}(D_j), \quad j=1, 2, 3, \dots$$

кетма – кетлиги мавжудки,

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \quad (x \in D)$$

бўлади.

◀ Ушбу:

$$K(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{агар } |x| \leq 1 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } |x| > 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ синфга тегишли бўлиб, унинг салмоғи $\text{supp} K(x) = B(0,1)$ дир. Энди $K(x)$ нинг ифодасидаги ўзгармас c ни шундай танлаб оламизки,

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

бўлсин. $u(x) \neq -\infty$ деб, бу ядро ёрдамида ушбу:

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{|y-x| \leq \delta} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV, \quad \delta > 0, \quad (6)$$

интегрални қарайлик. $u_\delta(x)$ функцияси:

$$D_\delta = \{x \in D : \rho(x, \partial D) < \delta\}$$

очиқ тўпламда аниқланган бўлиб, $x \in D_\delta$ да:

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbf{R}^n} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV = \int_{\mathbf{R}^n} u(x + \delta y) K(y) dV$$

бўлади. Кейинги тенгликдаги биринчи интеграл $C^\infty(D_\delta)$ синфга, иккинчи интеграл эса $Sh(D_\delta)$ синфга тегишли бўлади. Бинобарин,

$$u_\delta(x) \in Sh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta).$$

$u(x)$ нинг субгармоник функция эканлигидан, u_δ нинг $\delta \downarrow 0$ да, монотон камаювчи бўлишлиги ва:

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

тенгликдан, $u_\delta(x)$ нинг $u(x)$ га интилишини топамиз. ►

3.3. Субгармоник функциянинг лапласиани

$F(D)$ - синф. $\mathbf{R}^n$ фазода D соҳа ($D \subset \mathbf{R}^n$) олиб, бу соҳадаги C^∞ синфга тегишли ва финит функциялар тўпламини (синфини) $F(D)$ деб белгиланади. Демак, $\varphi \in F(D)$ бўлса, у ҳолда $\varphi \in C^\infty(D)$ бўлиб, унинг салмоғи

$$\text{supp } \phi = \overline{\{x \in D : \phi(x) \neq 0\}} \subset\subset D$$

бўлади.

Энди $F(D)$ да яқинлашиш тушунчасини киритамиз.

Агар

$$\text{supp } \varphi_k \subset D_0 \subset\subset D \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлиб, бу $\varphi_k(x)$ кетма – кетлик $\varphi(x)$ га ўзининг ихтиёрий хусусий ҳосиласи билан текис яқинлашса, унда

$$k \rightarrow \infty \text{ да } \varphi_k \rightarrow \varphi$$

дейилади. Бундай яқинлашиш маъносида $F(D)$ топологик чизикли фазодир.

$F(D)$ топологик фазога *асосий функциялар фазоси* (синфи) дейилиб, потенциаллар назариясида $F(D)$ да аниқланган чизикли, узлуксиз функционаллар муҳим аҳамиятга эгадир.

Умумлашган функциялар. Чизикли $F(D)$ фазода ушбу

$$f : F(D) \rightarrow \mathbf{R}$$

акслантириш аниқланган бўлсин. Бу акслантириш қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

а) f - чизикли, яъни ихтиёрий $\varphi, \psi \in F$ ва ихтиёрий $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ учун

$$f(\lambda \varphi + \mu \psi) = \lambda f(\varphi) + \mu f(\psi);$$

б) f - узлуксиз, яъни ихтиёрий $\varphi_k \in F$ ва $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$ кетма – кетлик

учун

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\varphi_k) = f(\varphi) .$$

У ҳолда f акслантириш F фазода аниқланган *чизикли узлуксиз функционал* дейилади.

Айтайлик, f функция D соҳада аниқланган бўлиб, у интегралланувчи бўлсин: $f \in L^1(D)$. Бу функция $F(D)$ чизикли фазода узлуксиз ва чизикли бўлган ушбу

$$f(\varphi) = \int_D f \varphi dV, \quad \varphi \in F(D) \quad (2)$$

функционални аниқлайди. Айни пайтда, $F(D)$ фазода (2) кўринишга эга бўлмаган чизикли функционаллар ҳам мавжуд. Бундай функционалга қуйидаги

$$f(\varphi) = \varphi(x^0), \quad \varphi \in F(D), \quad x^0 \in D$$

функционал мисол бўла олади (Диракнинг δ - функцияси).

Интегралланувчи функциялар синфини кенгайтириш мақсадида умумлашган функциялар тушунчаси киритилади.

2 – т а ь р и ф. $F(D)$ фазода аниқланган чизикли ва узлуксиз функционал D соҳада аниқланган *умумлашган функция* дейилади.

Агар $\varphi(x) \geq 0$ учун $f(\varphi) \geq 0$ бўлса, умумлашган f функцияга *мусбат функция* дейилади.

Масалан, ушбу

$$f(\varphi) = \int \varphi d\mu \quad (3)$$

функционал мусбат функция бўлади, бунда μ D аниқланган ихтиёрий Борел ўлчами. Аксинча, ҳар қандай мусбат функционал (3) кўринишда ифодаланади

Айталик, $f(x)$ функция D да дифференциалланувчи функция бўлсин:

$f(x) \in C^1(D)$. Агар ушбу

$$f(\varphi) = \int f \varphi dV, \quad \varphi \in F(D)$$

формула ёрдамида ифодаланган f ни функционал (умумлашган функция) деб қарайдиган бўлсак, унинг хусусий ҳосиласи қуйидаги

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) = \int \frac{\partial f}{\partial x_k} \varphi dV, \quad (1 \leq k \leq n),$$

тенглик орқали бошқа бир функционални аниқлашини кўрамиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални бўлаклаб интеграллаш билан

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_k} \varphi dV = - \int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dV$$

тенгликка келамиз. Натижада

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) = - \int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dV \quad (4)$$

бўлади. Бундаги

$$- \int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dV$$

интеграл ихтиёрий f функционал учун аниқланган бўлиб, бу ҳолат $F(D)$ фазода аниқланган ихтиёрий f функционалнинг ҳосиласини қуйидагича аниқлашни тақозо этади.

3 – т а ъ р и ф. Ушбу

$$F(\varphi) = - f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)$$

функционал f нинг x_k бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ каби

белгиланади.

Шунингдек, f нинг юқори тартибли хусусий ҳосилаларига ҳам таъриф бериш мумкин:

$$D^k f(\varphi) \equiv (-1)^{|k|} f(D^k \varphi),$$

бунда

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_n).$$

Демак, ихтиёрий умумлашган функция (функционал) нинг исталган тартибдаги хусусий ҳосиласи мавжуд ва у ҳам умумлашган функция бўлади.

Соболев фазоси. $\Omega \subset R^n$ очик тўплам ва $1 \leq p \leq \infty$ бўлсин.

4 – т а ъ р и ф. Агар $f \in L^p(\Omega)$ бўлиб, унинг умумлашган хосилари ҳам ҳар қандай $k=1\dots n$ учун $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^p(\Omega)$ бўлса, $f \in W^{1,p}(\Omega)$ Соболев фазога тегишли деймиз. Ҳар қандай $f \in W^{1,p}(\Omega)$ учун $\nabla f := (\nabla_1 f, \dots, \nabla_n f)$ белгилаймиз.

$W^{1,p}(\Omega)$ банах фазо бўлиб ($p=2$ да Гилберт фазо), ундаги норма

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|f\|_p^p + \sum_{k=1}^n \|\nabla_k f\|_p^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|f\|_\infty + \sum_{k=1}^n \|\nabla_k f\|_\infty, \quad p = \infty$$

$W^{1,p}(\Omega)$ фазо $1 \leq p < \infty$ учун сепарабел ва $1 < p < \infty$ учун рефлексив. $W^{1,p}(\Omega)$ фазога тегишли бўлиш учун етарли шартларни келтирамиз.

4 – т е о р е м а. $\Omega \subset R^n$ очик тўплам бўлсин, $\{f_m\}$ – $W^{1,p}(\Omega)$ фазодаги кетма-кетлик бўлиб, бирор $f \in L^p$ функцияга яқинлашсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

(а) Агар $1 \leq p \leq \infty$ ва ҳар қандай $k \in \{1, \dots, n\}$ учун шундай $g_k \in L^p$ топилсаки ушбу $\nabla_k f_m \rightarrow g_k$ шартни қаноатлантирувчи уҳолда $f \in W^{1,p}(\Omega)$ ва $\nabla_k f \rightarrow g_k$ бўлади.

(в) Агар $1 < p \leq \infty$ ва ҳар қандай $k \in \{1, \dots, n\}$ учун $\nabla_k f_m$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда $f \in W^{1,p}(\Omega)$ ва ҳар қандай $k \in \{1, \dots, n\}$ учун $\nabla_k f_m \rightarrow \nabla f$ бўлади.

5 – т е о р е м а. Фараз қилайлик f ва g функциялар $L^1_{loc}(\Omega)$ фазога тегишли бўлиб, $k \in \{1, \dots, n\}$ бўлсин. У ҳолда $g = \nabla_k f$ бўлиши учун

$f_m \rightarrow f$ ва $\nabla_k f_m \rightarrow g$ шартларни қаноатлантирувчи $\{f_m\} \subset C^\infty(\Omega)$ кетма-кетликнинг мажуд бўлиши зарур ва етарлидир.

Субгармоник функциялар умумий ҳолда C^2 синфга тегишли бўлмаслигидан, Δu - Лаплас операторини фақат умумлашган функция сифатида қараш мумкин бўлади[1-2]:

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi, \quad \phi \in F(D).$$

6 – т е о р е м а. Ҳар қандай субгармоник функция $u(x) \in Sh(D)$, $u \not\equiv -\infty$, учун умумлашган маънода $\Delta u \geq 0$ бўлади, яъни ихтиёрий $\phi \in F(D)$, $\phi \geq 0$ учун $\int u \Delta \phi \geq 0$ муносабат ўринлидир.

Жумладан, $u(x)$ функция C^2 синфга тегишли булиб, у субгармоник булса, $u \in Sh(D) \cap C^2(D)$, у ҳолда $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \geq 0$ дир.

Юқорида келтирилган теореманинг акси ҳам ўринли: агар умумлашган функция u учун:

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi \geq 0, \quad \phi \in F(D), \quad \phi \geq 0,$$

муносабат бажарилса, у ҳолда u субгармоник функция бўлади;

3.4. Рисс теоремаси

Ф.Рисс теоремаси. Ҳар қандай $u(x) \in Sh(D)$, $u \not\equiv -\infty$, функция олинганда ҳам D соҳада шундай мусбат ўлчам μ мавжудки, ихтиёрий $D^0 \subset\subset D$ соҳа учун:

$$u(x) = \int_{D^0} K(x-y) d\mu_y + \Phi_{D^0}(x) \quad (7)$$

бўлади, бунда $\Phi_{D^0}(x) \in H(D^0)$ ва:

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{агар } n = 2 \text{ бўлса} \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{агар } n > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бунда, $K(x)$ функцияси Лаплас тенгламасининг фундаментал ечимидир: $\Delta K(x) = \delta(x)$ бўлиб, бу ерда $\delta(x)$ - Диракнинг умумлашган функцияси, $\delta \circ \phi(x) = \phi(0)$, $\phi \in F(\mathbf{R}^n)$. δ га массаси $x = 0$ да бўлган бирлик ўлчам (заряд) мос келади.

Назорат саволлари:

1. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ лари.
2. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ лар орасидаги боғланишлар.
3. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси.
4. Субгармоник функциянинг лапласиани. Умумий ҳол.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Садуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Academic Publishing, 2012.
2. Klimek M., Pluripotential theory. Clarendon Press., 1991.
3. L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara Functions of bounded variations and free discontinuity problems, GB, 2000.

4-мавзу: ЧЕКЛИ ВА ЧЕКСИЗ СОНДАГИ СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР СУПРЕМУМИ, ЮҚОРИ ЛИМИТИ.

РЕЖА:

- 4.1. Текис чегараланган субгармоник функциялар оиласи.
- 4.2. Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимити.
- 4.3. Хартогс леммаси.

Таянч иборалар: субгармоник функциялар, текис чегараланган, юқори лимит, локал чегараланган, Хартогс леммаси.

4.1. Текис чегараланган субгармоник функциялар оиласи

Субгармоник функциялар назариясида юқоридан локал текис чегараланган функциялар синфи муҳим роль ўйнайди: агар ҳар бир $x^0 \in D$ нукта учун шундай атроф $B(x^0, r) \subset\subset D$ ва шундай M константа топилсаки, $\{u_\alpha\} \subset Sh(D)$ синфдан олинган ҳар бир $u_\alpha(x)$ функция учун ушбу:

$$u_\alpha(x) \leq M \quad (x \in B(x^0, r))$$

тенгсизлик бажарилса, $\{u_\alpha\}$ синфга D да юқоридан локал текис чегараланган субгармоник функциялар синфи дейилади. Равшанки, қаралаётган $\{u_\alpha\}$ синф учун:

$$u(x) = \sup_\alpha u_\alpha(x)$$

функция мавжуд ва у D дан олинган ҳар бир компакт $K \subset\subset D$ да юқоридан чегаралангандир. Агар бу функция юқоридан ярим узлуксиз бўлса, унинг субгармоник бўлишлигини исботлаш қийин эмас. $u(x)$ функция юқоридан ярим узлуксиз бўлмаса, унда, одатда қуйидаги регуляризи операцияси қаралади, яъни:

$$u^*(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{y \in B(x, r)} u(y) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} u(y).$$

Бунда $u^*(x)$ функция $u(x)$ нинг *регулярланган* функцияси дейилади. Регулярланган $u^*(x)$ функция юқоридан ярим узлуксиз бўлади.

Поляр тўпламлар. Айтайлик, D соҳа ва ундаги бирор E тўплам берилган бўлсин: $E \subset D$.

Агар шундай $u(x) \in Sh(D)$ ва $u(x) \not\equiv -\infty$ функция мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ да $u(x) = -\infty$ тенглик бажарилса, E тўплам D соҳада *поляр тўплам* дейилади.

Поляр тўпламлар қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

а) ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада поляр тўплам бутун $\mathbf{R}^n$ да ҳам поляр тўплам бўлади, яъни

$$u(x) \in Sh(D), \quad u(x) \not\equiv -\infty, \quad u|_E = -\infty$$

бўлса, у ҳолда шундай $\mathcal{G}(x) \in Sh(\mathbf{R}^n)$ функция топиладики,

$$\mathcal{G}(x) \not\equiv -\infty \quad \text{ва} \quad \mathcal{G}|_E = -\infty$$

бўлади;

б) санокли сондаги поляр тўпламлар йиғиндиси поляр тўплам бўлади:

$E_1, E_2, \dots$ поляр тўпламлар бўлса, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ҳам поляр тўплам бўлади;

5 – т е о р е м а [1-2]. Юқоридан локал чегараланган субгармоник функцияларнинг ихтиёрий синфи $\{u_\alpha\}$ учун $u(x) = \sup_\alpha u_\alpha(x)$ бўлсин

У ҳолда

$$u^*(x) \in Sh(D)$$

бўлиб, $N = \{x \in D : u(x) < u^*(x)\}$ тўплам D да поляр тўплам бўлади.

4.2. Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимити

6 – т е о р е м а. Фараз қилайлик,

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

юқоридан локал чегараланган субгармоник функциялар кетма-кетлиги бўлиб, $u(x) = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$ бўлсин. У ҳолда, $u^*(x) \in Sh(D)$ бўлиб,

$N = \{x \in D : u(x) < u^*(x)\}$ тўплам D да поляр тўплам бўлади.

4.3. Хартогс леммаси

Хартогс леммаси. Фараз қилайлик, $D \in \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан локал текис чегараланган:

$$u_j(x), \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

субгармоник функциялар кетма – кетлиги берилган бўлиб, ҳар бир тайинланган $x \in D$ нуқтада:

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \leq A$$

бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ ва $K \subset\subset D$ компакт учун шундай $j_0 \in N$ топиладики, $\forall j \geq j_0, \quad x \in K$ да:

$$u_j(x) \leq A + \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади[1-2].

◀ Ушбу $K \subset\subset G \subset\subset D$ муносабатда бўлган G соҳада $\{u_j(x)\}$ кетма – кетликни юқоридан локал текис чегараланганлигидан, шундай $C = \text{const}$ мавжудки, $u_j(x) \leq C \quad (x \in G)$ тенгсизлик бажарилади. u_j ларнинг ўрнига $u_j - C$ кетма – кетликни қараб, биз G да $u_j(x) \leq 0$ деб қарашимиз мумкин.

Агар $0 < r < \frac{1}{3} \rho(K, \partial G)$ сони олинса, унда ихтиёрий $x^0 \in K$ да $B(x^0, r) \subset G$

бўлиб, Фату теоремасига кўра:

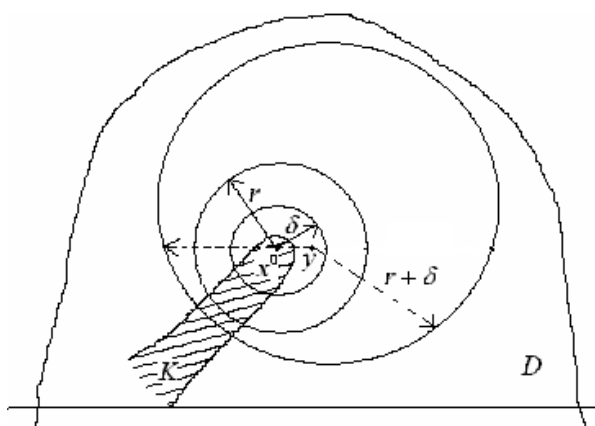
$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{B(x^0, r)} u_j(x) dV \leq \int_{B(x^0, r)} \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(x) dV \leq AV_n r^n$$

бўлади. Бундан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай j_0 топилиб, $j \geq j_0$ бўлганда, ушбу :

$$\int_{B(x^0, r)} u_j(x) dV \leq \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right) V_n r^n$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Энди $0 < \delta < r$ шартни қаноатлантирувчи δ сонини тайинлаб, $y \in B(x^0, \delta)$ нуқталарни қараймиз.



1 – ч и з м а.

2 – теорема ва $u_j(x) \leq 0$ ($x \in G$, $j = 1, 2, \dots$) шартидан фойдаланиб, $j \geq j_0$ да:

$$\begin{aligned} u_j(y) &\leq \frac{1}{V_n (r + \delta)^n} \int_{B(y, r + \delta)} u_j(x) dV \leq \frac{1}{V_n (r + \delta)^n} \int_{B(x^0, r)} u_j(x) dV \leq \\ &\leq \frac{V_n r^n}{V_n (r + \delta)^n} \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Равшанки, етарлича кичик δ лар учун:

$$u_j(y) \leq A + \varepsilon, \quad j \geq j_0, \quad y \in B(x^0, \delta),$$

тенгсизлақ бажарилади.

Демак, компакт K га тегишли ҳар бир x^0 нуқта ($x^0 \in K$) олинганда ҳам, бу нуқтага боғлиқ шундай $j(x^0)$ ва $\delta(x^0) > 0$ сонлар топиладики, $j \geq j(x^0)$, $y \in B(x^0, \delta(x^0))$ бўлганда:

$$u_j(y) \leq A + \varepsilon$$

бўлади. Ушбу:

$$\bigcup_{x^0 \in K} B(x^0, \delta(x^0))$$

йиғинди (шарлар йиғиндиси) K компактни тўла қоплайди. Демак, $B(x^0, \delta(x^0))$ шарларнинг чекли сондагиси ҳам K ни қоплайди. Бундан эса шундай j_0 топилиб, $j \geq j_0$, $y \in K$ да:

$$u_j(y) \leq A + \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. ►

И з о ҳ. Хартогс леммаси қуйидаги вариантда ҳам ўринлидир: фараз қилайлик, $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан локал текис чегараланган $\{u_j(x)\} \subset Sh(D)$ кетма – кетлик ва $A(x) \in C(D)$ функция берилган бўлиб, ҳар бир тайинланган $x \in D$ да:

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \leq A(x)$$

бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ ва $\forall K \subset\subset D$ учун $\exists j_0 : \forall j \geq j_0$, $x \in K$ да $u_j(x) \leq A(x) + \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

◄ Бу тасдиққа ишонч ҳосил қилиш учун Хартогс леммаси исботидаги r сонини шундай танлаш зарурки, ихтиёрий $x, y \in B(x^0, r)$ учун $|A(x) - A(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

бўлсин. У ҳолда:

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{B(x^0, r)} u_j(x) dV \leq \int_{B(x^0, r)} A(x) dV \leq V_n r^n \left[A(x^0) + \frac{\varepsilon}{3} \right]$$

бўлиб, A сони ўрнига $A(x^0) + \frac{\varepsilon}{3}$ иштирок қилади. Бундан ташқари, ихтиёрий $y \in B(x^0, \delta)$ учун $|A(x^0) - A(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ лигидан биз $B(x^0, \delta)$ да $u_j(y)$ ни $j \geq j_0(x^0)$ ларда юқоридан $A(y) + \varepsilon$ билан текис чегараланганлигини ва ниҳоят, бутун K компактда $u_j(x) \leq A(x) + \varepsilon$, $j \geq j_0$, $x \in K$, эканлигини исботлай оламиз.[1] ►

Назорат саволлари:

1. Чегараланган субгармоник функциялар оиласининг аниқ юқори чегараси.
2. Субгармоник функциянинг регулязацияси.
3. Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг аниқ юқори чегараси ва юқори лимити.
4. Хартогс леммаси.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Садуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademik Publishing, 2012.
2. Klimek M., Pluripotential theory. Clarendon Press., 1991.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

I- ва 2– амалий машғулотлар: Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўла вариацияси ва уларнинг хоссалари

Ишдан мақсад: Математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, геомеханика ва бошқа соҳалардаги кенг қўлланилишини тушунтириш. Чекли вариацияли функциянинг таърифи ва хоссаларини, ҳамда Стилтес интеграли ва унинг хоссаларини кенгроқ ўрганиш ва мисоллар ёрдамида татбиқ этиш.

Ишни бажариш учун намуна:

1-Мисол. Ушбу:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0, \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция ихтиёрий чекли $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга.

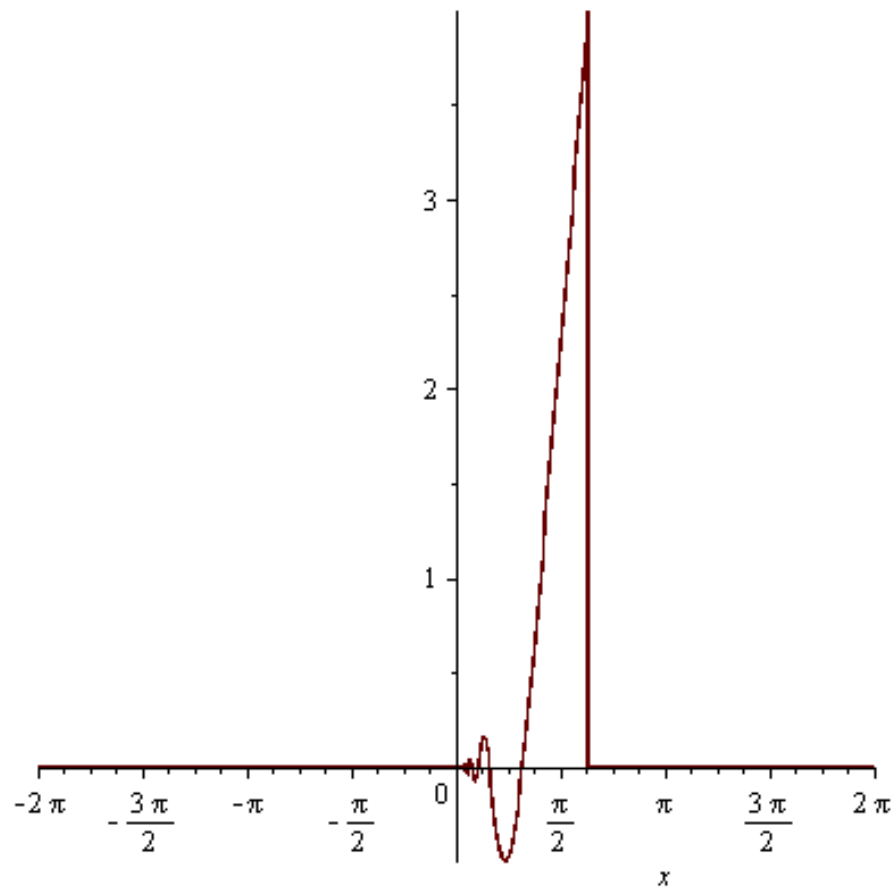
> *with(plots) :*

$$f := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & 0 < x \leq 2; \\ 0 & x = 0 \end{cases};$$

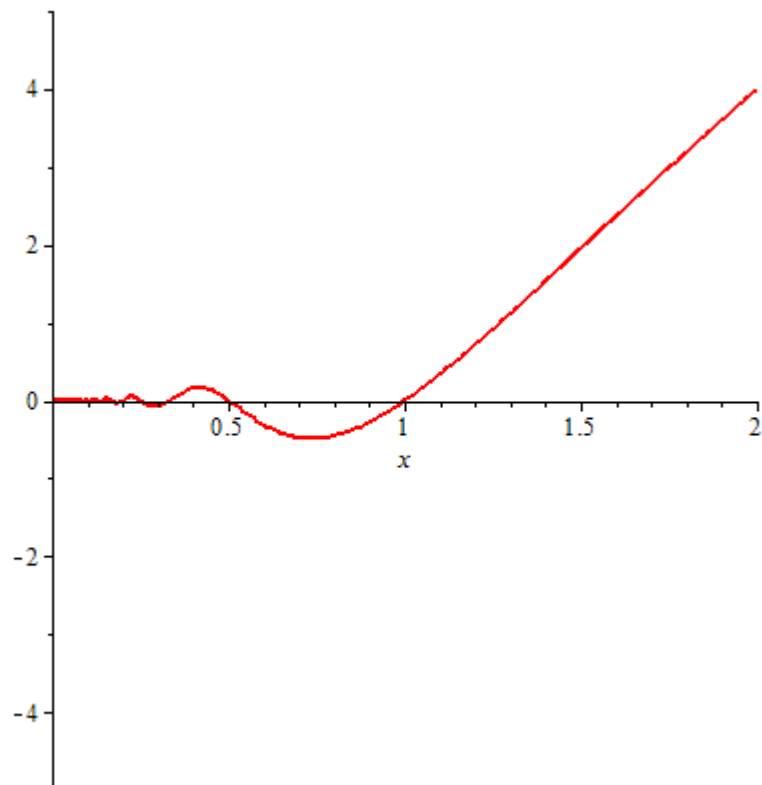
$$f := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & 0 < x \text{ and } x \leq 2 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

> ;

> **smartplot();**



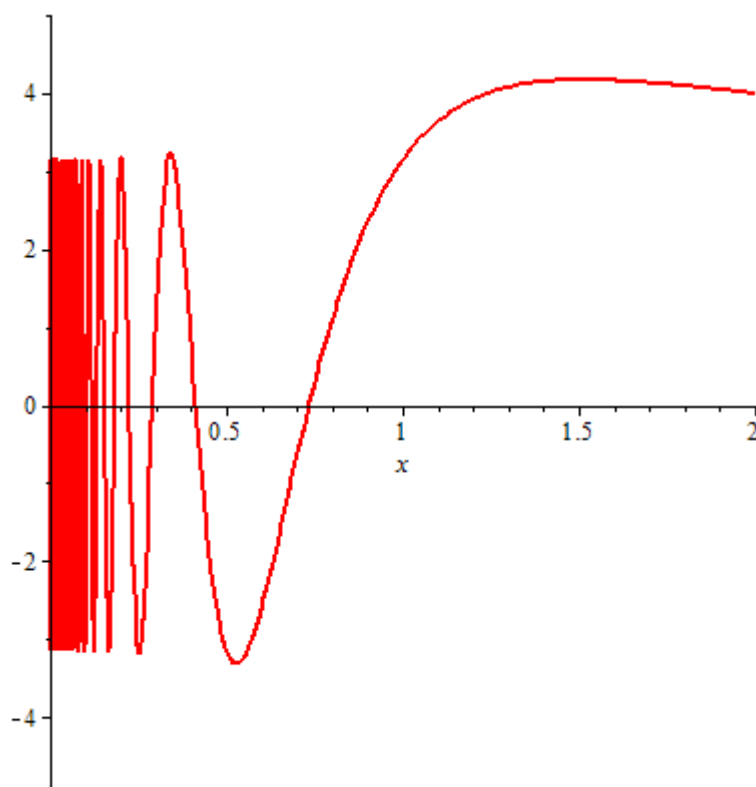
`plot(f, x = 0 .. 2, -5 .. 5, color = red, thickness = 2, discont = [ usefdiscont = [ bins = 35 ] ], grid = [ 100, 100 ] );`



$$> g := \frac{d}{dx} f;$$

$$g := \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \pi & 0 < x \text{ and } x \leq 2 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$> \text{plot}(g, x = 0 \dots 2, -5 \dots 5, \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 2, \text{discont} = [\text{usefdiscont} = [\text{bins} = 35]], \text{grid} = [100, 100]);$



◀ 3-теоремадан фойдаланиб кўрсатамиз:

$$x \neq 0 \text{ да } f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x} \quad \text{ва}$$

$$x = 0 \text{ да } f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{\pi}{\Delta x} = 0$$

бўлгани учун ихтиёрий чекли $[a, b]$ кесмада ушбу:

$$|f'(x)| \leq 2 \cdot |b| + \pi = L$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Унда 3-теоремага кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да чекли вариацияга эга. ►

2-Мисол. Қуйидаги Стильтес интегрални ҳисоблансин:

$$(S) \int_0^2 x^2 d \ln(1+x);$$

$$\blacktriangleleft (S) \int_0^2 x^2 d \ln(1+x) = ((12) - \text{формуладан фойдаланамиз}))$$

$$= (R) \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^2 = 2 - 2 + \ln 3 = \ln 3.$$

3-мисол. Қуйидаги Стильтес интегрални ҳисоблансин:

$$(S) \int_{-1}^3 x dg(x),$$

бу ерда:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = -1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } -1 < x < 2 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } 2 \leq x \leq 3 \text{ бўлса;} \end{cases}$$

$\blacktriangleleft g(x)$ функциянинг $x = -1$ нуқтадаги сакраши -1 га, $x = 2$ нуқтадаги сакраши -2 га тенг ҳамда $x \neq -1; 2$ нуқталарда $g'(x) = 0$. Унда (13)-формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(S) \int_{-1}^3 x dg(x) = -1 \cdot (1 - 0) + 2(-1 - 1) = -1 - 4 = -5$$

> **Мисол 9**

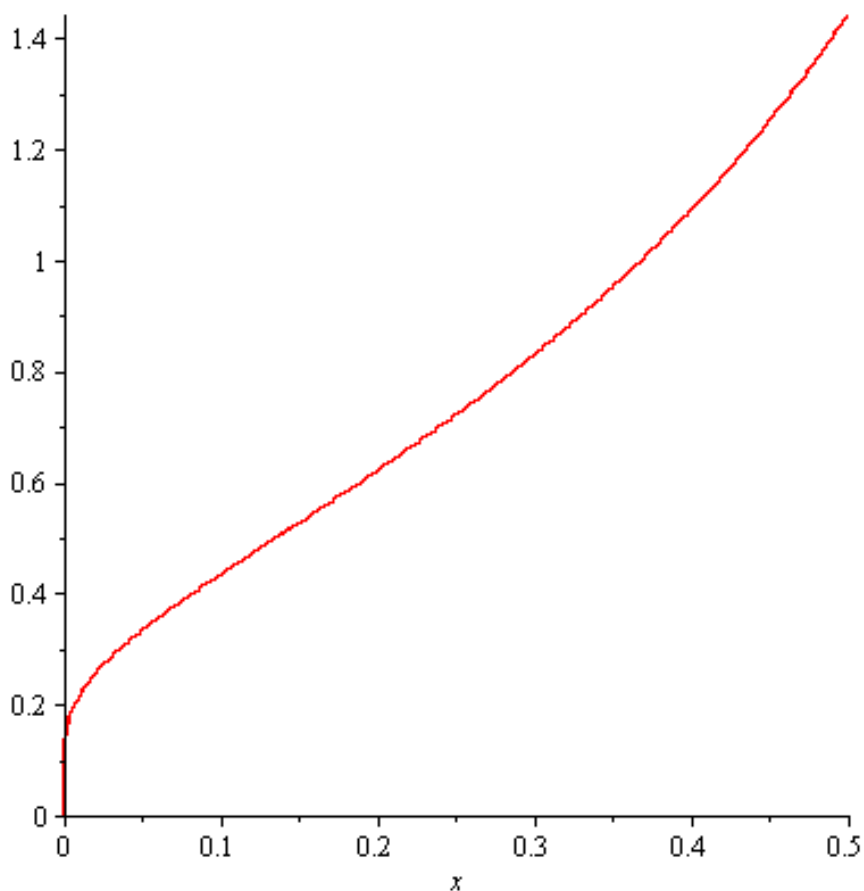
> *with(plots) :*

$$> v(x) := \begin{cases} \frac{-1}{\ln(x)} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x = 0 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x)}{x};$$

$$v := x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 < x \text{ and } x \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{\ln(x)}, x = 0, 0\right)$$

undefined

$$> \text{plot}\left(v(x), x = 0 .. \frac{1}{2}, \text{color} = [\text{red}]\right);$$



>

> **Мисол 10**

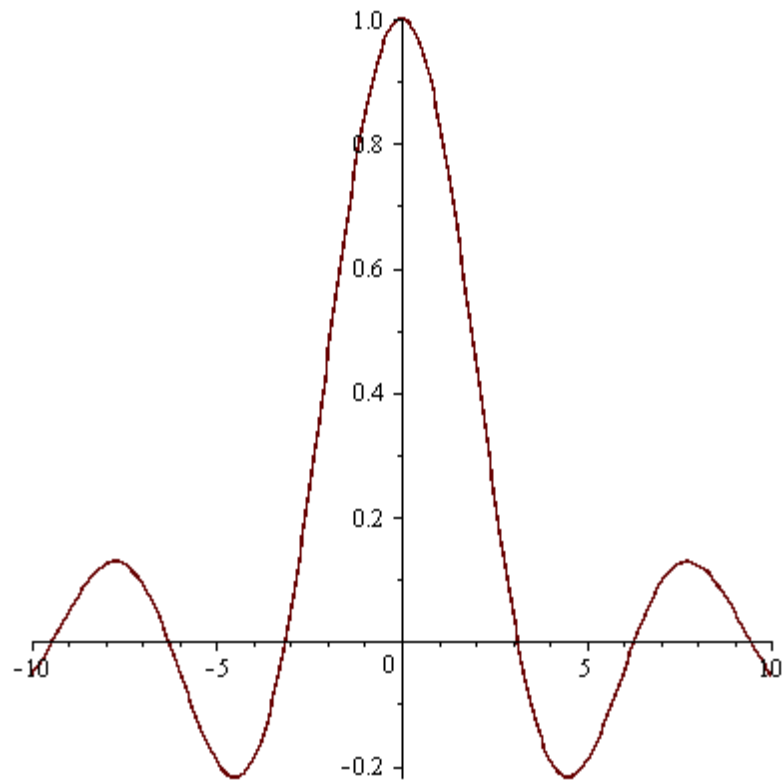
$$> f(x) := \frac{\sin(x)}{x}; \quad x \geq \pi$$

$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\pi \leq x$$

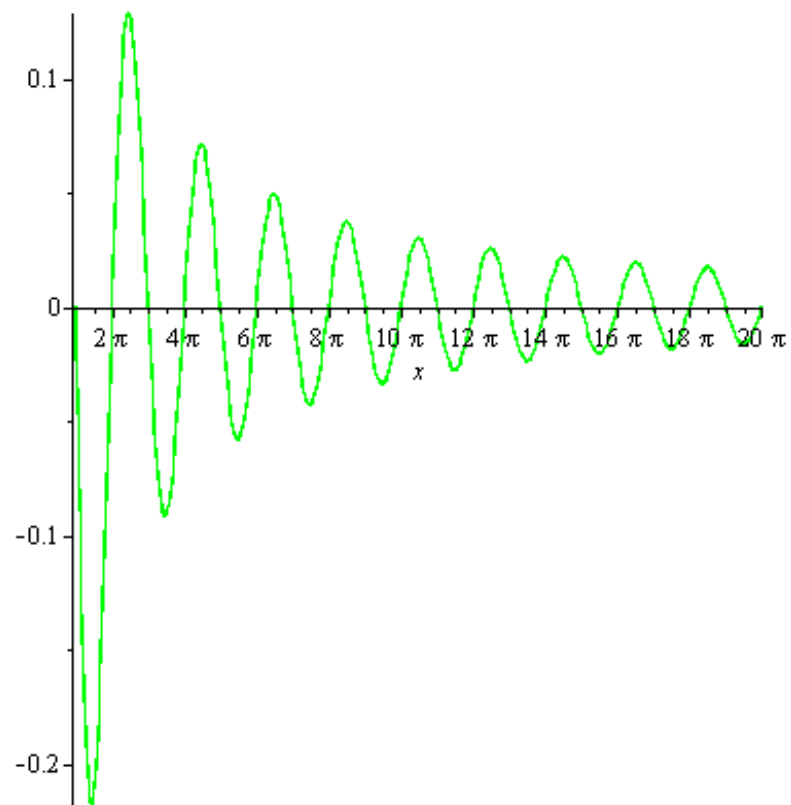
>

> plot();



> with(plots) :

> plot($f(x)$, $x = \text{Pi} .. 20 \cdot \text{Pi}$, $color = [green]$);



>

>

> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x);$

0

>

>

> $\frac{d}{dx} f(x);$

$$\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

>

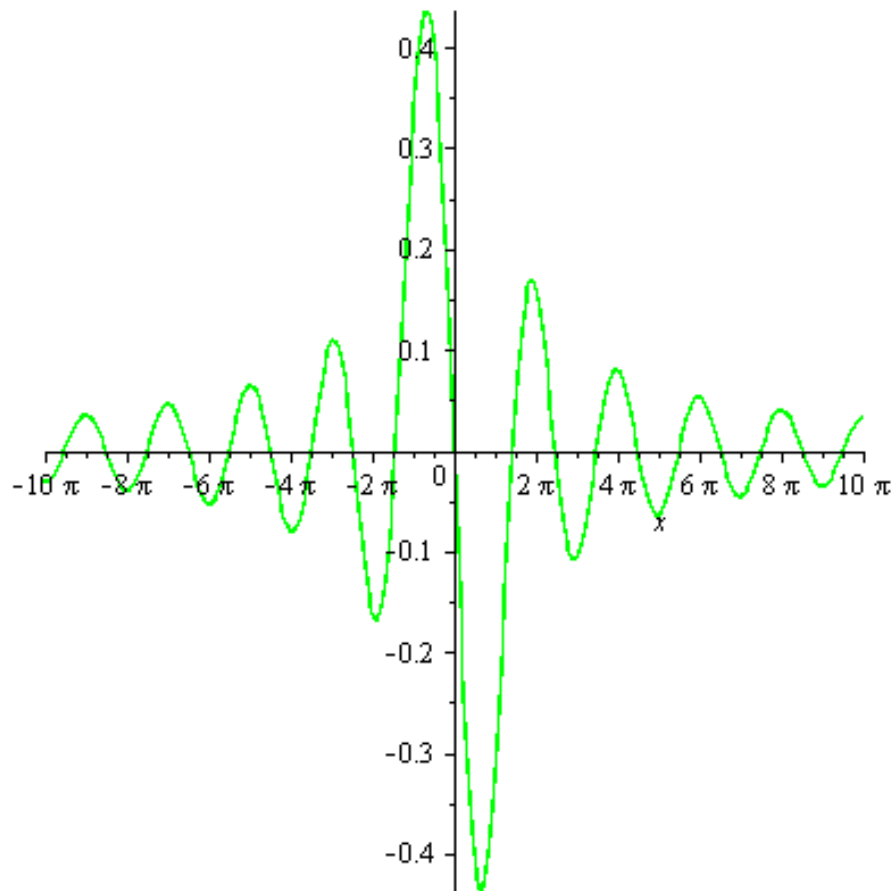
>

> $g := x \rightarrow \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2};$

$$g := x \rightarrow \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

>

> `plot(g(x), x = -10·Pi .. 10·Pi, color = [green]);`



>

>

> $\text{Pi} = x_0 < x_1 = 3 \text{ Pi} / 2 < x_2 = 2 \text{ Pi} < \dots < x_{2n-1} = n \text{ Pi} - \text{Pi} / 2 < x_{2n} = n \text{ Pi};$

$\text{Pi} = x_0 < x_1 = 3 \text{ Pi} / 2 < x_2 = 2 \text{ Pi} < \dots < x_{2n-1}$

>

> $f(\pi);$

0

> $f\left(\frac{3 \pi}{2}\right);$

$-\frac{2}{3 \pi}$

> $f\left(\frac{5\pi}{2}\right);$

$$\frac{2}{5\pi}$$

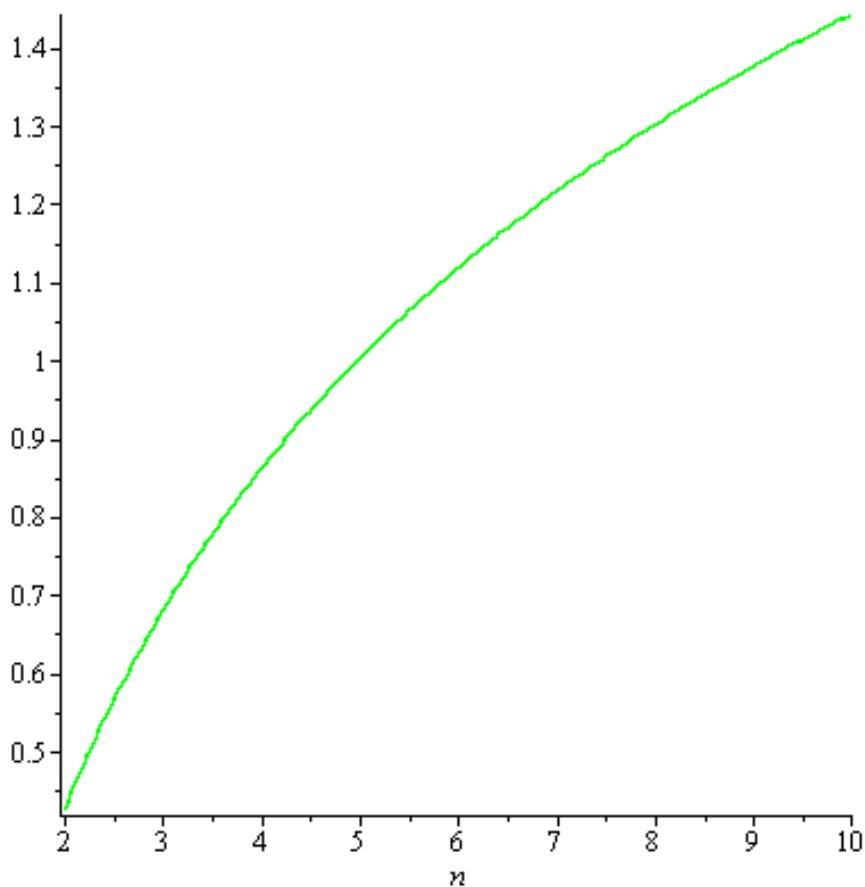
> *with(plots) :*

> $v(n) := \sum_{i=2}^n \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot i - 1}\right);$

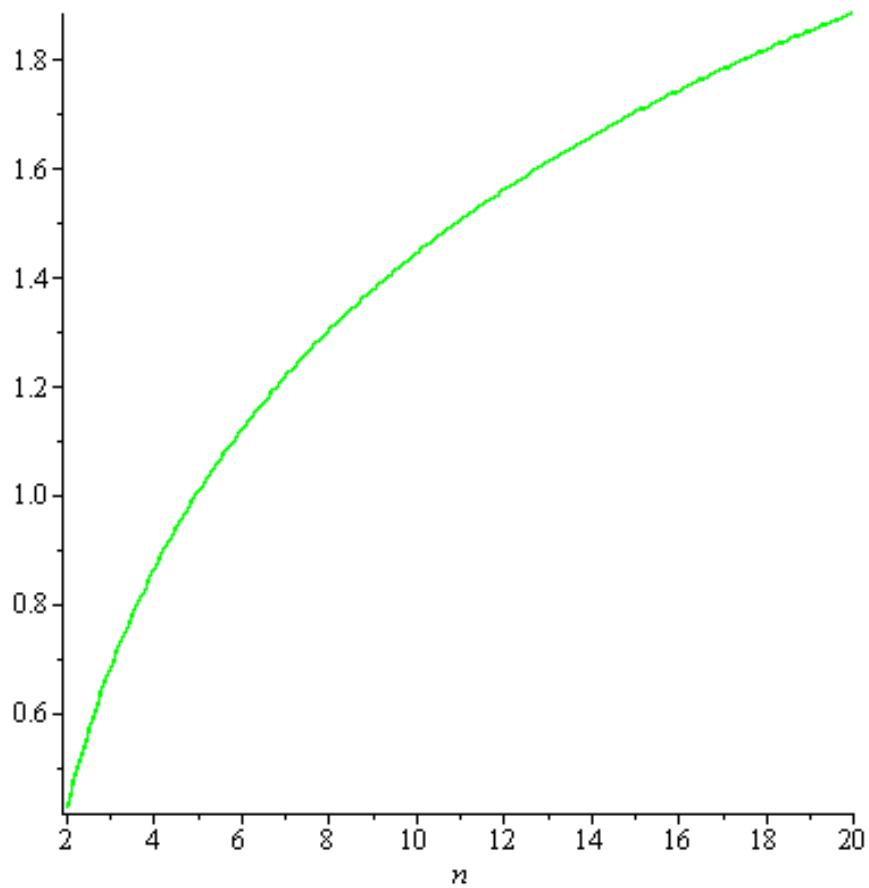
$$v := n \rightarrow \sum_{i=2}^n \frac{4}{\pi (2i - 1)}$$

>

> $\text{plot}(v(n), n = 2 .. 10, \text{color} = [\text{green}]);$



> $\text{plot}(v(n), n = 2 .. 20, \text{color} = [\text{green}]);$



>

$$> \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot i - 1};$$

∞

>

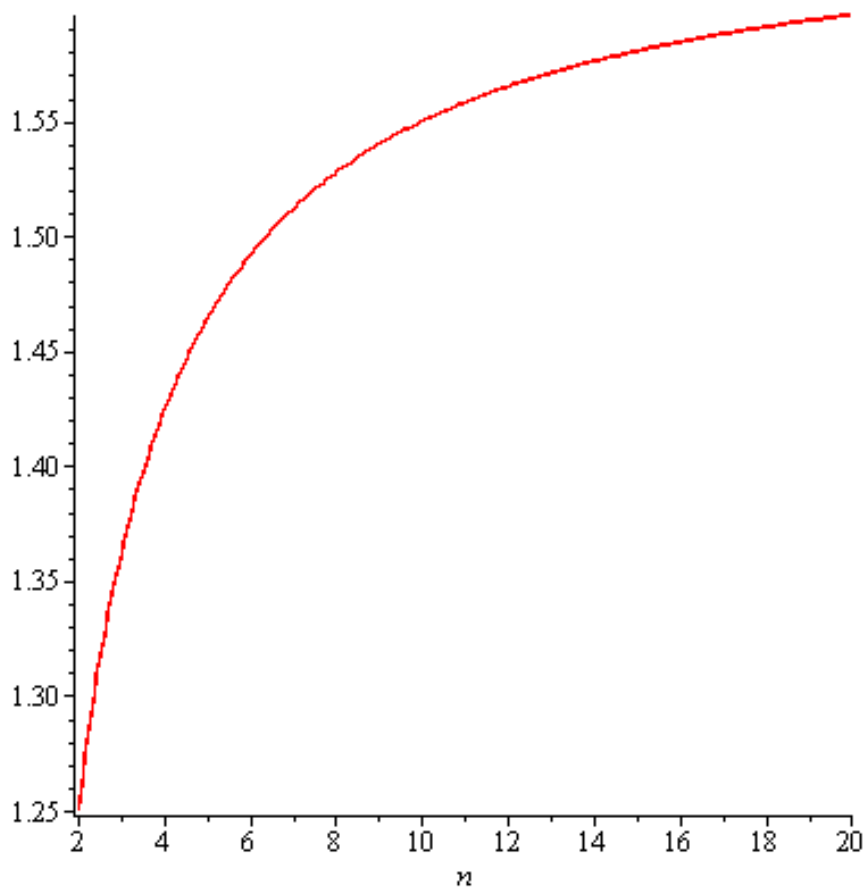
$$> w(n) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2};$$

$$w := n \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$$

>

>

> plot(w(n), n = 2 .. 20, color = [red]);



>

> Мисол 14

> $u := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, x^2, x = 1, 2, 1 < x \text{ and } x \leq 2, 3);$

$u := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, x^2, x = 1, 2, 1 < x \text{ and } x \leq 2, 3)$

> $w := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, 2 \cdot x^2, 1 \leq x \text{ and } x \leq 2, 2);$

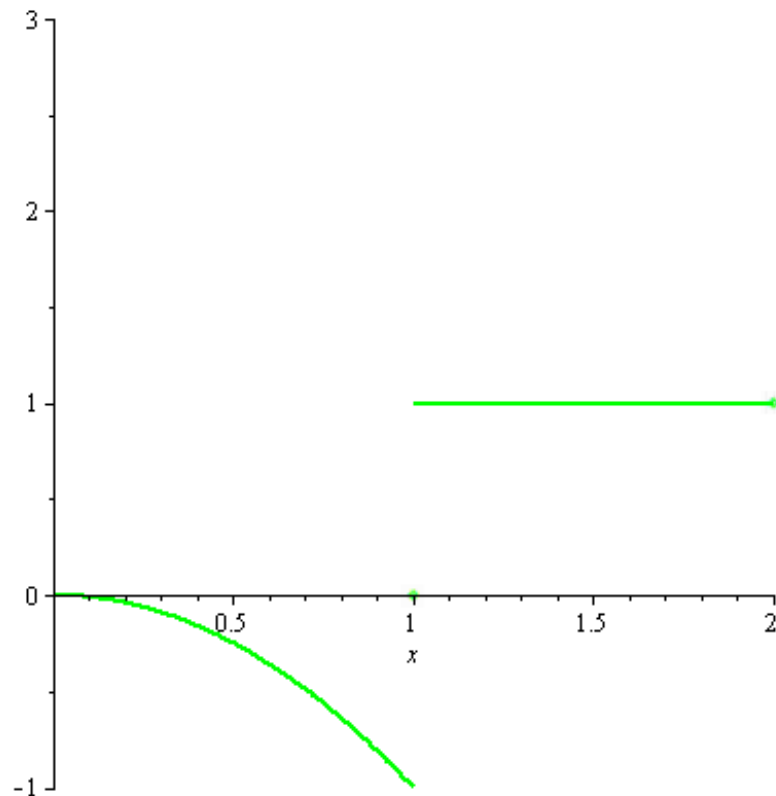
$w := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, 2x^2, 1 \leq x \text{ and } x \leq 2, 2)$

> $p := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, -x^2, x = 1, 0, 1 < x \text{ and } x \leq 2, 1);$

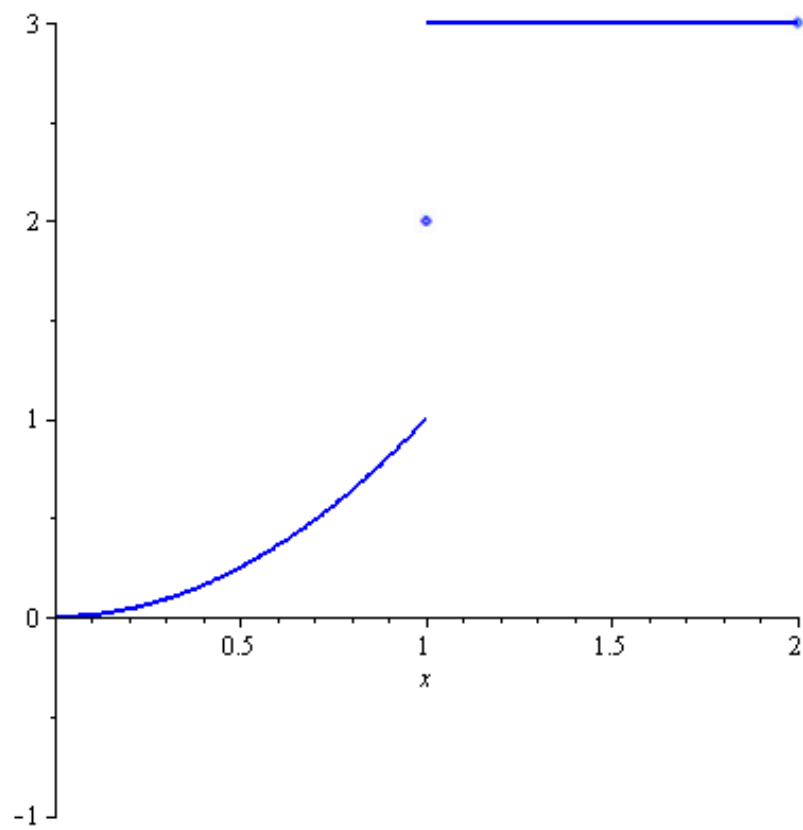
$p := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, -x^2, x = 1, 0, 1 < x \text{ and } x \leq 2, 1)$

>

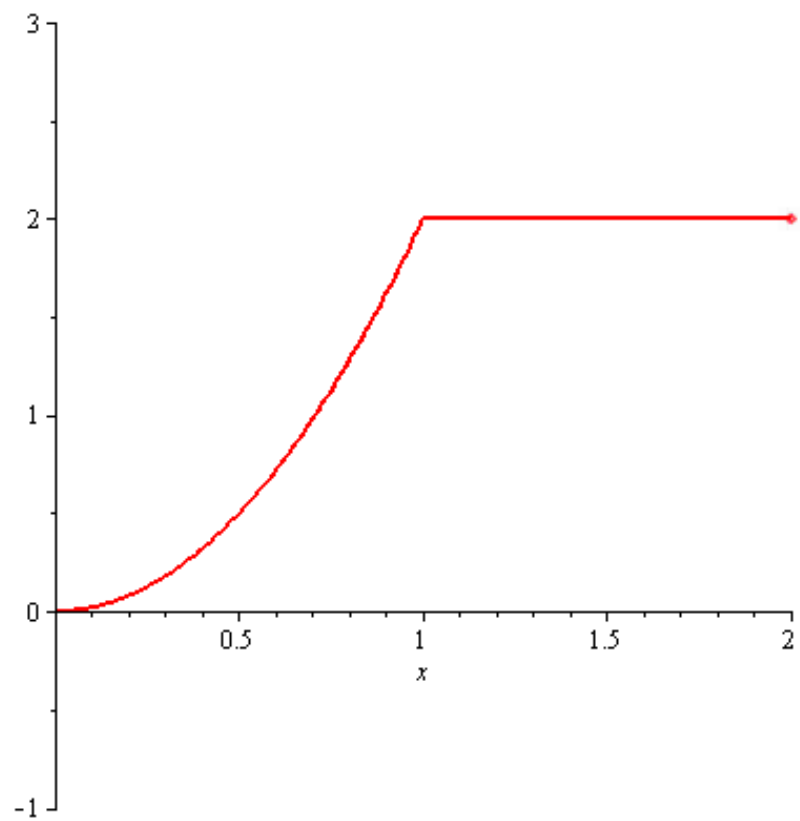
> $\text{plot}(p(x), x = 0 .. 2, -1 .. 3, \text{color} = \text{green}, \text{thickness} = 2, \text{discont} = \text{true});$



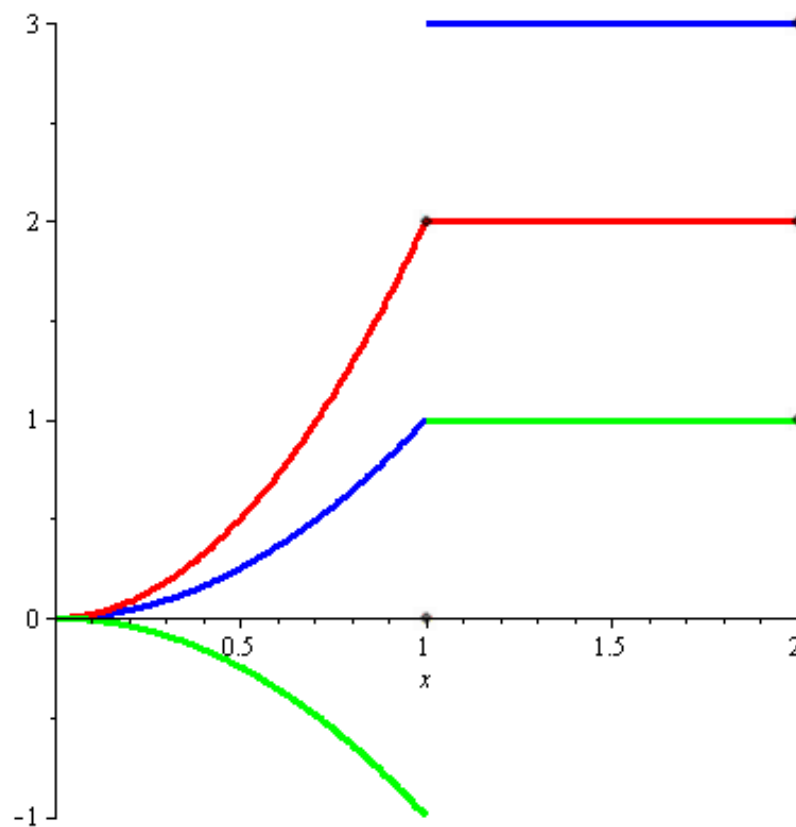
> $\text{plot}(u(x), x = 0 .. 2, -1 .. 3, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 2, \text{discont} = \text{true});$



> *plot(w(x), x = 0..2, -1..3, color = red, thickness = 2, discontin = true);*



> `plot([u(x), w(x), p(x)], x=0..2, -1..3, color=[blue, red, green], thickness=3, discount=true, grid=[100, 100]);`



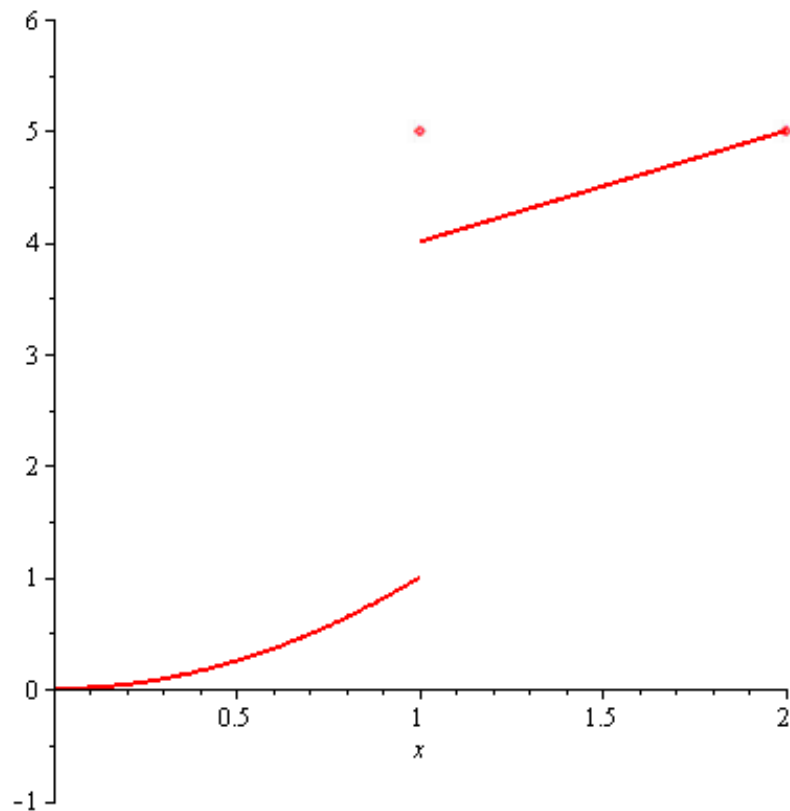
>

Мисол 15

> `g := x → piecewise(0 ≤ x and x < 1, x2, x = 1, 5, 1 < x and x ≤ 2, x + 3);`

`g := x → piecewise(0 ≤ x and x < 1, x2, x = 1, 5, 1 < x and x ≤ 2, x + 3)`

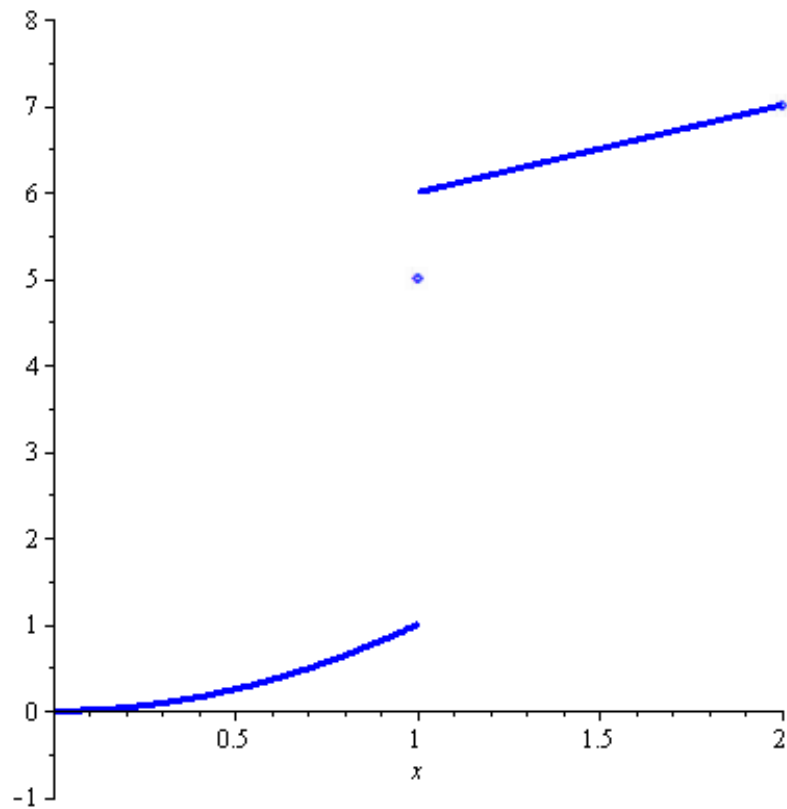
> `plot(g(x), x=0..2, -1..6, color=red, thickness=2, discount=true);`



> $f1 := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, x^2, x = 1, 5, 1 < x$
and $x \leq 2, x + 5)$

$f1 := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x < 1, x^2, x = 1, 5, 1 < x$
and $x \leq 2, x + 5)$

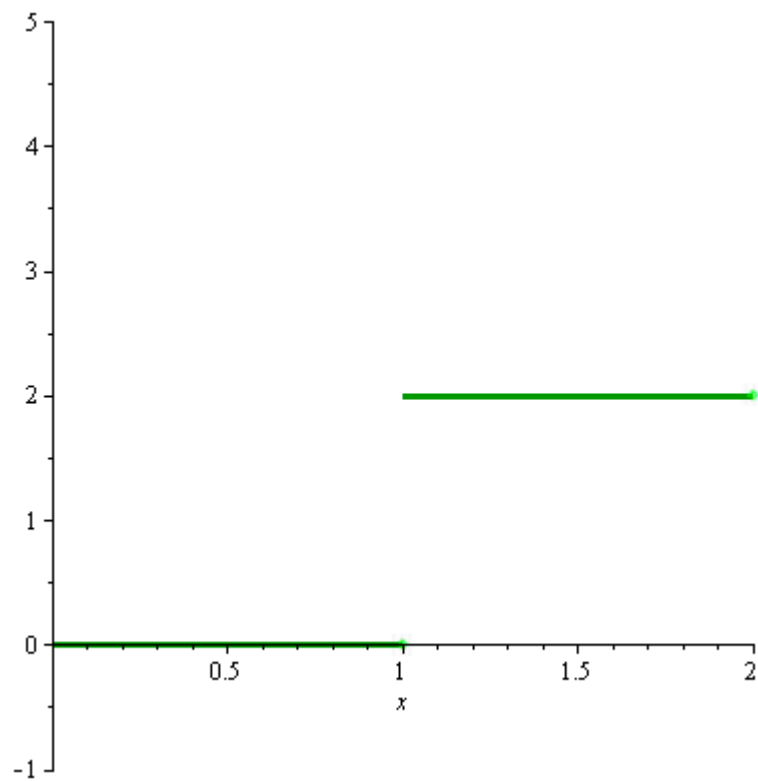
> $\text{plot}(f1(x), x = 0 \dots 2, -1 \dots 8, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3,$
 $\text{discont} = \text{true});$



> $f2 := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x \leq 1, 0, 1 < x \text{ and } x \leq 2, 2);$

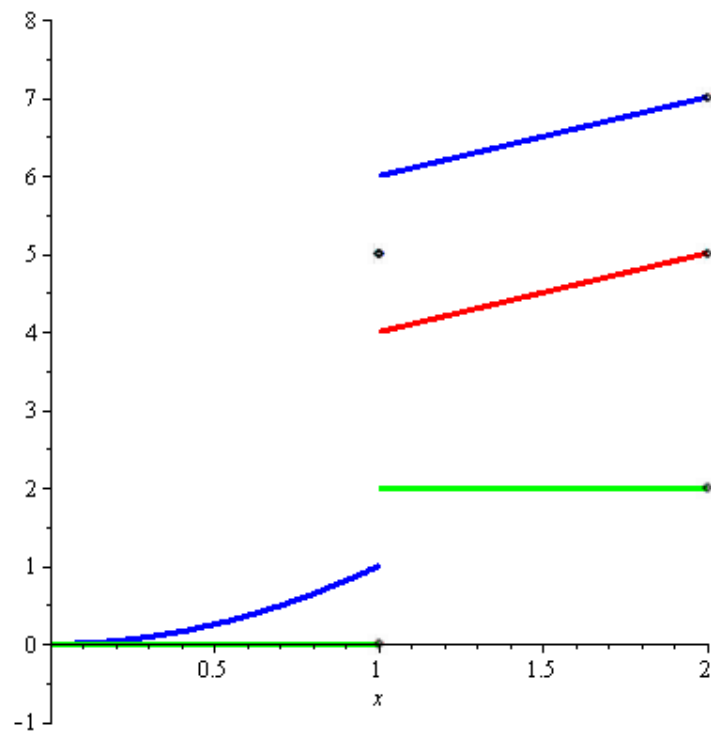
$f2 := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x \leq 1, 0, 1 < x \text{ and } x \leq 2, 2)$

> $\text{plot}(f2(x), x = 0 .. 2, -1 .. 5, \text{color} = \text{green}, \text{thickness} = 3, \text{discont} = \text{true});$



>

> `plot([g(x), f1(x), f2(x)], x=0..2, -1..8, color=[red, blue, green], thickness=3, discontin=true);`



Мустақил ечиш учун мисоллар:

1-мисол. Қуйидаги Стильтес интеграллари ҳисоблансин:

$$a) (S) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x; \quad б) (S) \int_{-1}^1 x \arctg x.$$

2-мисол. Қуйидаги Стильтес интеграллари ҳисоблансин:

$$(S) \int_0^2 x^2 dg(x),$$

бу ерда:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } x = \frac{3}{2} \text{ бўлса,} \\ -2, & \text{агар } \frac{3}{2} < x \leq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3-мисол. Стильтес интеграллари ҳисоблансин:

$$a) (S) \int_{-2}^2 x dg(x), \quad б) (S) \int_{-2}^2 x^2 dg(x), \quad в) (S) \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dg(x).$$

4. Интегрални ҳисобланг.

$$1) \int_0^{\pi} \sin x de^x$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x$$

$$3) \int_{-1}^1 x^2 d \arctg x$$

$$4) \int_{-2}^2 x d \phi(x) \text{ бу ерда } \phi(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } x = -2 \\ 0, & \text{агар } -2 < x < 1 \\ -1, & \text{агар } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$5) \int_{-3}^2 (x-1) d \phi(x) \text{ бу ерда } \phi(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{агар } -3 \leq x < -2 \\ 0, & \text{агар } -2 \leq x \leq -1 \\ 2x + 1, & \text{агар } -1 < x < 1 \\ x, & \text{агар } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{агар } x = 2 \end{cases}$$

$$6) \int_{-3}^3 x d \phi(x) \text{ бу ерда } \phi(x) = \begin{cases} 2, & \text{агар } x = -3 \\ x + 2, & \text{агар } -3 < x \leq -1 \\ 4, & \text{агар } -1 < x < 0 \\ x^2 - 1, & \text{агар } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$7) \int_0^{\pi} \sin x d \phi(x) \text{ бу ерда } \phi(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2, & \text{агар } x = \frac{\pi}{2}, x = \pi \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{агар } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$8) \int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d(e^x \operatorname{sgn} \sin x)$$

$$9) \int_0^{\pi} (x-1) d(\cos x \operatorname{sgn} x)$$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 1) d\phi(x)$$

бу ерда

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{агар } -2 \leq x \leq -1 \\ 2, & \text{агар } -1 < x < 0 \\ x^3 + 3, & \text{агар } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

3 ва 4 – амалий машғулотлар: Гармоник ва субгармоник функциялар

Ишдан мақсад: Биз қуйида гармоник ва субгармоник функцияларнинг энг содда, зарур хоссаларини ўрганиш билан бир қаторда, уларнинг голоморф функциялар билан боғлиқ масалаларини кўриб чиқамиз.

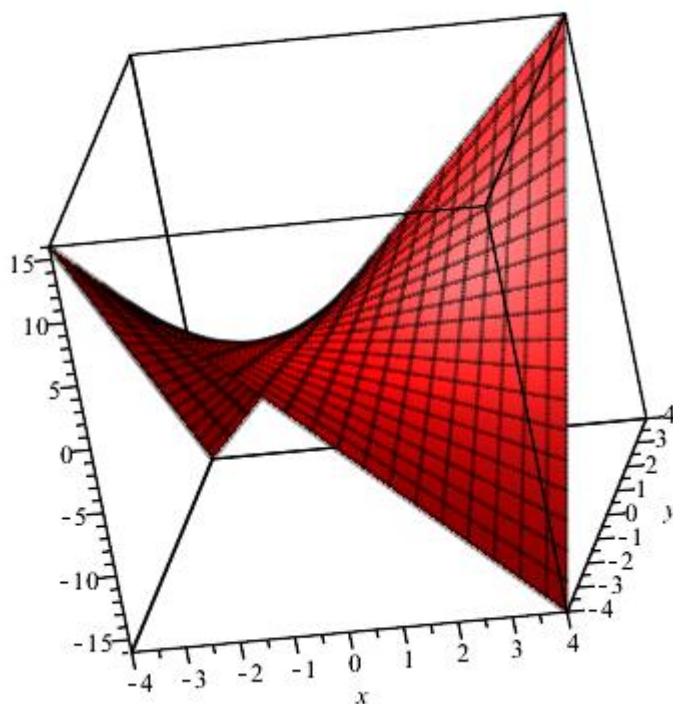
Ишни бажариш учун намуна:

1. $U(x, y) = xy$ функция гармоник функция бўла оладими?

```
> u := x·y;
```

$u := xy$

```
> plot3d(u, x = -4 .. 4, y = -4 .. 4, color = red, thickness = 2, grid = [100, 100]);
```



Лаплас тенгламаси бўйича функцияни гармоникликга текширамиз, яъни:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

Демак, U функция гармоник бўлади.

2. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ функция гармоник функция бўла оладими?

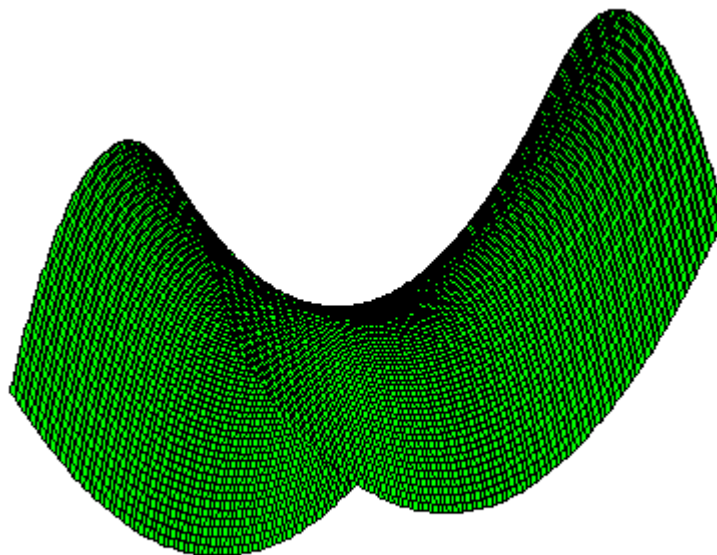
Лаплас тенгламаси бўйича функцияни гармоникликга текширамиз, яъни:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Delta = 2 - 2 = 0$$

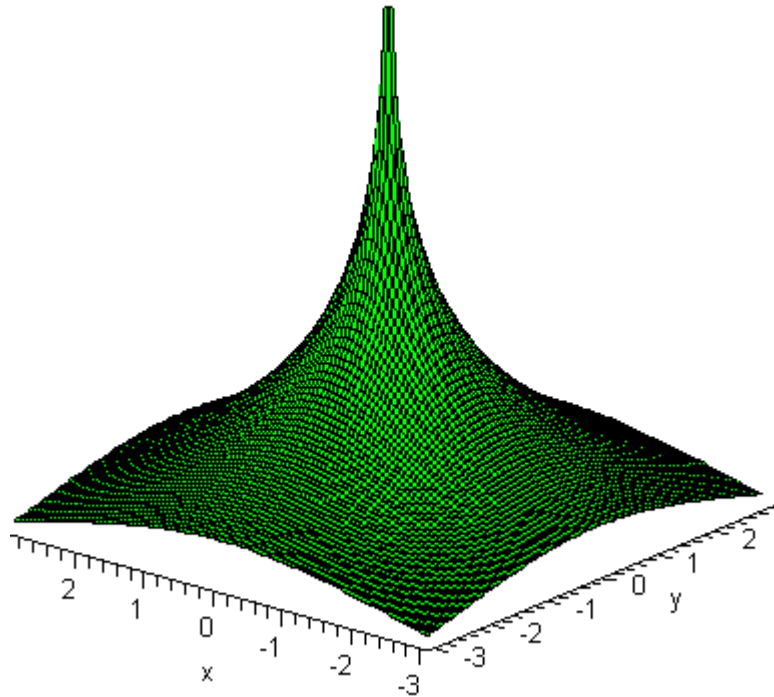


Демак, U функция гармоник бўлади.

$$> f := \ln(\sqrt{x^2 + y^2});$$

$$f := \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$> \text{plot3d}(f, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{green}, \text{grid} = [100, 100]);$$



> *Laplacian* (**(1)**)

$$\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

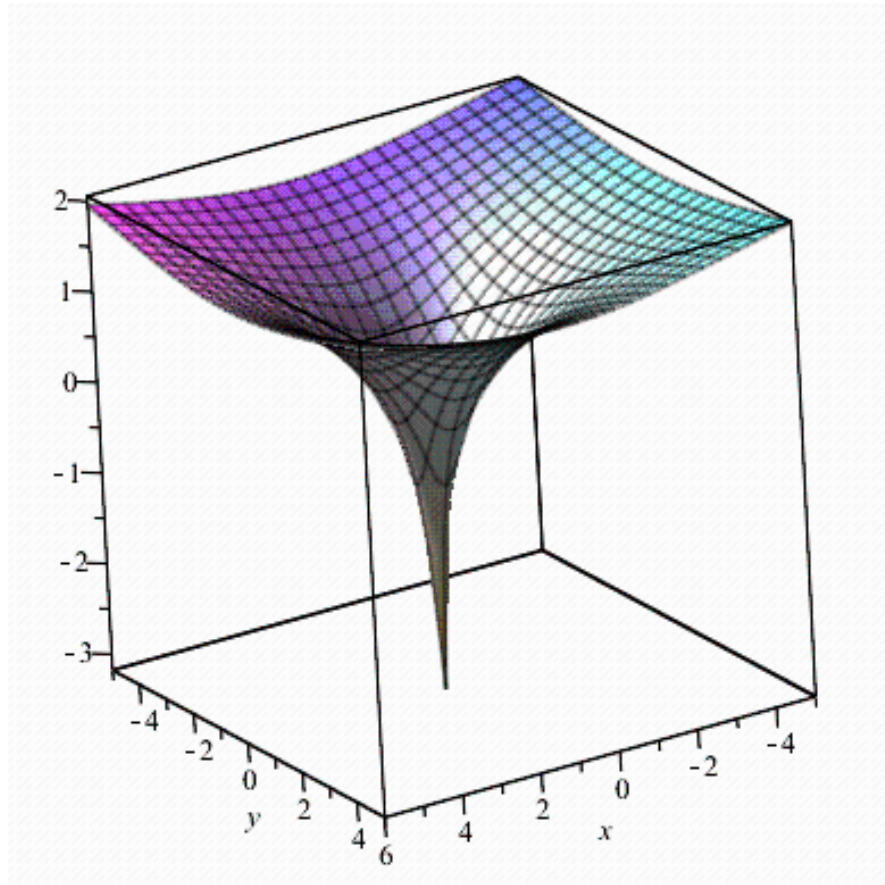
> *with*(*plots*) :

> $f(z) := \ln(|z - 1|)$;

$f := z \rightarrow \ln(|z - 1|)$

>

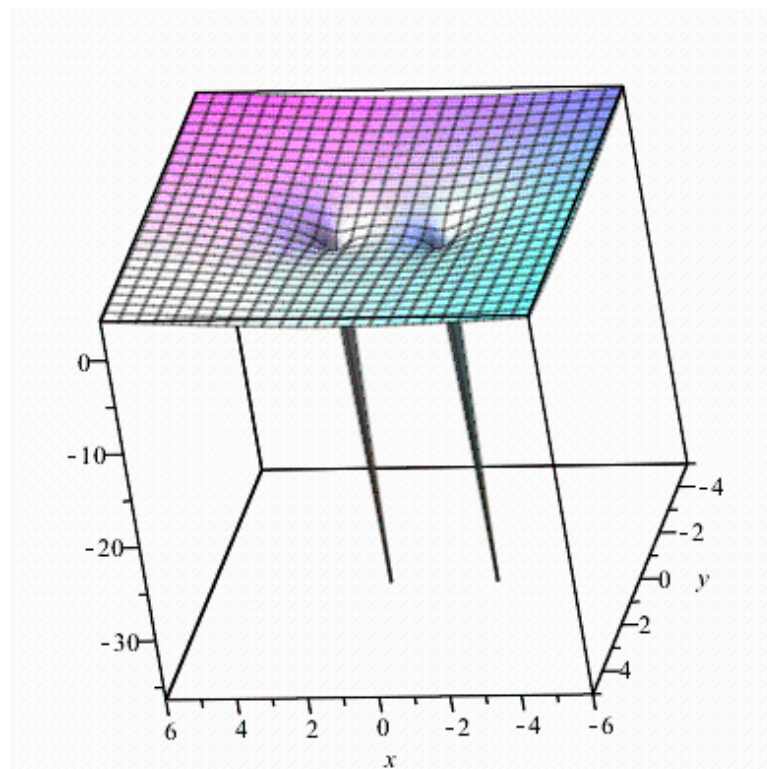
> $\text{plot3d}(\ln(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}), x = -5..6, y = -5..5);$



> $g(z) := \ln(|z - 1| \cdot |z + 4|);$

$$g := z \rightarrow \ln(|z - 1| |z + 4|)$$

> $\text{plot3d}(\ln(\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+2)^2 + y^2}), x=-6..6, y=-5..5);$



Мустақил ечиш учун мисоллар:

1. Агар $f(x)$ функция $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M \in \mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x \in D: f(x) < M\}$ тўпламнинг очик тўпламлиги исботлансин.

2. $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган ихтиёрий $\omega(x)$ функцияси учун ушбу:

$$\omega_1(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{B(y,r)} \omega(x),$$

$$\omega_2(y) = \overline{\lim_{x \rightarrow y} \omega(x)}$$

функцияларни қарайлик. ω_1 ва ω_2 ларни D да юқоридан ярим узлуксизлиги исботлансин. $\omega_1 = \omega_2$ ҳақида нима дейиш мумкин?

3. $S(x^0, r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x) = \int_{S(x^0, r)} P(x, y) d\mu$ - Пуассон интеграллари ҳақида нима дейиш мумкин?

Интегралнинг $B(x^0, r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

4*. $D \subset \mathbf{R}^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай $u_j(x) \in Sh(D) \cap C^\infty(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \rightarrow \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

5*. $u(x) \in Sh(D)$ бўлиб, $0 < \alpha \leq 2$ тайинланган сон бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $U_\varepsilon \subset D$ мавжудки, $H_{2n-2+\alpha}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ бўлиб, $u(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D \setminus U_\varepsilon)$ бўлади. Бундан соҳада шундай $\omega(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудки, $\omega(x) = u(x)$, $x \in D \setminus U$ эканлиги келиб чиқади. Қуйидаги муаммо ҳақида нима дейиш мумкин? Шундай $\omega(x) \in Sh(D) \cap Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудмики, $x \in D \setminus U$ да $\omega(x) = u(x)$ бўлсин.

*) юлдузча билан мураккаб ёки ҳозиргача ҳал қилинмаган масалалар белгиланган.

6. $F(D)$ синфга тегишли функцияга мисол келтиринг. $F(D)$ да очик тўплам, атроф тушунчасини беринг.

7. Бир нуктага, дискрет нукталарга, $[a, b]$ кесмага, $S(0,1)$ сферага, $B(0,1)$ шарга текис жойлашган бирлик заряд (ўлчам)ларга мос умумлашган функциялар хусусиятлари ўрганилсин. Улар учун хусусий ҳосилалар ҳисоблансин. Хусусий ҳосилалар ўлчам бўла оладими?

5 – амалий машғулот:

Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ лар

Ишдан мақсад: Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u, r)$ ва $n(u, r)$ лар ва уларнинг хоссалари, ҳамда улар орасидаги боғланишни ўрганишдан иборат.

Ишни бажариш учун намуна:

Монотон камаювчи субгармоник функциялар кетма-кетлигининг лимити субгармоник бўлишини исботланг.

$$u_j(x) \in Sh(D), u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad (j=1, 2, \dots) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \in Sh(D)$$

Исбот:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad u_{j+1}(x) \leq u_j(x)$$

$$(j=1, 2, \dots) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \in Sh(D) \quad \forall x_0,$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} u_j(x) \leq u_j(x_0)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} u_j(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x_0)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \leq u_j(x) \leq u(x_0)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0).$$

Мустақил ечиш учун мисоллар:

1) Субгармоник функциялар учун локал максимум принципи ўринли эмаслигини кўрсатинг, яъни, субгармоник функция $x^0 \in D$ нуқтада локал максимумга эришишидан унинг константа бўлиши келиб чиқмайди. Айни пайтда, гармоник функциялар учун эса бу принцип ўринли.

2) Қуйидаги Хартогс леммасининг умумлашмасини исботланг: $D \subset \mathbb{R}^n$ соҳада юқоридан текис чегараланган $u_j(x)$, $j=1,2,\dots$ субгармоник функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар ҳар бир фиксирланган $x \in D$ нуқтада $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \leq g(x)$ тенгсизлик бажарилса, бу ерда $g(x) \in C(D)$, унда ихтиёрий $K \subset D$ компакт ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $j_0 \in \mathbb{N}$ сон топиладики, барча $j \geq j_0$, $x \in K$ лар учун

$$u_j(x) \leq g(x) + \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

3) Агар $g(x)$ фақатгина ярим узлуксиз функция бўлса узлуксиз $g(x)$ функциялар учун Хартогс леммасининг умумлашмаси тўғри бўлмаслигини исботланг.

4) I_K регуляр нуқталар тўпламини F_σ типидagi тўплам эканлиги, яъни уни санокли сондаги ёпиқ тўпламлар йиғиндиси эканлиги исботлансин.

5) Агар $K \subset D_1 \cap D_2$ бўлиб, $x^0 \in K$ нуқта $K \subset D_1$ га нисбатан регуляр бўлса, у ҳолда у $K \subset D_2$ га нисбатан ҳам регуляр бўладими? Мисоллар келтиринг.

Қайси ҳолда регулярлик тушунчаси K ни ўз ичига олган соҳага боғлиқ эмас.

6) Агар ихтиёрий $B(x^0, \varepsilon)$ атроф учун ($\varepsilon > 0$), $K \cap \overline{B}(x^0, \varepsilon)$ компакт x^0 нуқтада регуляр бўлса, x^0 га *локал регуляр нуқта* дейилади. Агар $\mathbb{R}^n / K$ - боғланган бўлса, у ҳолда $x^0 \in K$ нинг регуляр бўлиши учун унинг локал регуляр бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.*)

7) Ихтиёрий поляр бўлмаган компакт $K \subset \mathbf{R}^n$ учун $K_1 \subset K$ - регуляр компакт мавжудми? K ни ичидан регуляр компактлар билан яқинлаштириш мумкинми? $K_j \subset K_{j+1}$, K_j - регуляр ($j=1,2,\dots$) компактлар мавжудмики, $j \rightarrow \infty$ да $\omega(x, K_j, D) \uparrow \omega(x, K, D)$ бўлсин.

8) Умумлашган функциялар кетма – кетлиги $\{f_j\}_j$ берилган бўлиб, ихтиёрий $\phi \in F(D)$ учун $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\phi) = f(\phi)$ бўлсин. У ҳолда f_j кетма – кетлик f га (кучсиз) яқинлашувчи дейилади ва каби белгиланади. f ни умумлашган функция эканлигини исботланг.

9) Агар $f(x)$ функция $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M \in \mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x \in D: f(x) < M\}$ тўпламнинг очик тўпламлиги исботлансин.

10) $S(x^0, r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x) = \int_{S(x^0, r)} P(x, y) d\mu$ - Пуассон интеграллари ҳақида нима дейиш мумкин?

Интегралнинг $B(x^0, r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

11) $D \subset \mathbf{R}^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай $u_j(x) \in Sh(D) \cap C^\infty(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \rightarrow \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

6 – амалий машғулот: Чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар супремуми, юқори лимити.

Ишдан мақсад: Ушбу амалий машғулот давомида чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар хоссалари ва супремуми, текис чегараланган субгармоник функциялар оиласига ва субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимитини ҳисоблашга доир мисолларни, Хартогс леммасининг татбиқига оид масалаларни ўрганамиз.

Ишни бажариш учун намуна:

Юқоридан локал текис чегараланган $\{u_j(x)\} \subset Sh(D)$ кетма – кетлик $\forall x \in D$ да $\overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} u_j(x) \leq A(x)$ шартни бажарсин. Агар $A(x) \in C(D)$ бўлса, Хартогс леммасига кўра $u_j(x) \leq A(x) + \varepsilon$ тенгсизлик D соҳанинг ичида текис ўринлидир. Бу лемма яна қандай $A(x)$ лар учун ўринли? Юқоридан ёки қуйидан ярим узлуксиз $A(x)$ функциялар учун унинг ўринли эмаслигини кўрсатинг.

К ў р с а т м а. Фараз қилайлик, $u(x) \in Sh(\mathbf{R}^n)$ функцияси $x = 0$ нуқтада узилишга эга бўлган, $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) < u(0)$, функция бўлиб, $u_j(x) \in Sh(\mathbf{R}^n)C^\infty(\mathbf{R}^n)$ монотон камаювчи, $u(x)$ га интилувчи кетма – кетлик бўлсин: $u_j(x) \downarrow u(x)$. У ҳолда $\{u_j(x)\}$ ва $A(x) = u(x)$ учун Хартогс леммаси ўринли эмас. Бу ерда $A(x) = u(x)$ узлуксиз бўлмасдан, фақат юқоридан ярим узлуксиз.

Энди қуйидан ярим узлуксиз функция учун ҳам Хартогс леммаси ўринли бўлмаслигини кўрсатиш учун $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ текисликда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{U}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \left| z - \frac{1}{k} \right| \leq \delta_k \right\}$ доиралар йиғиндисини шундай танлаш керакки, $V^*(z, E)|_{z=0} = 1$ бўлсин. У ҳолда

$E_m = \bigcup_{k=1}^m \bar{U}_k$ деб, $z_m \in E$ нуқталарни ва $\alpha_m \geq 0$ сонларни шундай танлаш мумкинки,

$$u_m(z) = V^*(z, E_m) + \max \left\{ \frac{1}{\alpha_m} \ln |z|, 0 \right\}$$

субгармоник функциялар кетма – кетлиги учун $u_m(z_m) \geq \frac{1}{2}$ бажарилади. Демак,

$z^0 \in E$ учун $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} u_m(0) = 0$ лигидан, бу кетма – кетлик учун ҳам Хартогс леммаси ўринли эмас. Бунда $A(z) = V(z, E \cup \{0\})$.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

1) Айтайлик, $u_j(x) \in sh(D) \cap C(D)$ ва $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \leq 0$ бўлсин. У ҳолда шундай ҳеч қаерда зич бўлмаган $S \subset D$ тўплам топилиб, $D \setminus S$ да $\{u_j(x)\}$ кетма-кетлик локал юқоридан текис чегараланган бўлишини исботланг. Шундай қилиб, $D \setminus S$ да Хартогс леммаси ўринли.

2) □ да аниқланган $u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{q}, & \text{агар } x = \frac{p}{q} - \text{рационал сон} \\ -1, & \text{агар } x - \text{иррационал сон} \end{cases}$ функция

қуйидаги хоссага эга: $u(x) \neq 0$, аммо $u^*(x) \equiv 0$. Ҳамма ерда $u(x) < u^*(x)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи, қуйидан ярим узлуксиз бўлган $u(x)$ функция мавжудми?

3) Деярли ҳамма ерда қандайдир субгармоник функция билан устма-уст тушувчи юқоридан ярим узлуксиз функция у билан ҳамма ерда устма-уст тушишини исботланг.

4) Фараз қилайлик, $u_j(x) \in Sh(D) \cap C(D)$ бўлиб, $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \leq 0$ бўлсин. У ҳолда шундай бўш бўлмаган $B \subset D$ атроф мавжудки, B да Хартогс леммаси ўринли

бўлишини, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай j_0 нинг мавжуд бўлишини, $j > j_0$ ларда $u_j(x) \leq \varepsilon$ бўлишини исботланг.

5) Агар $f(x)$ функция $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M \in \mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x \in D: f(x) < M\}$ тўпламнинг очик тўпламлиги исботлансин.

6) $S(x^0, r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x) = \int_{S(x^0, r)} P(x, y) d\mu$ - Пуассон интеграллари ҳақида нима дейиш мумкин?

Интегралнинг $B(x^0, r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

7) $D \subset \mathbf{R}^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай $u_j(x) \in Sh(D) \cap C^\infty(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \rightarrow \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

8) $D = \{0 < |z| < 1\} \subset \mathbf{C}$ тешик доирада гармоник $u(z) = \ln|z|$ функцияси учун $f(z) \in Sh(D)$, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

9) (Лелон). Агар $u(z)$ функцияси ҳар бир аргументи бўйича гармоник бўлса, у n - гармоникдир, яъни ҳар бир аргументи бўйича гармониклигидан унинг $C^2(D)$ синфга тегишлилиги келиб чиқади. Исботланг.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

Case 1. Функцияни чекли вариацияга эга бўлишлик билан унинг чекли лимитга эга бўлишлик орасидаги муносабатни аниқланг.

Фараз қилайлик $f(x)$ функция $[a, +\infty]$ ораликда аниқланган бўлиб, ҳар қандай $[a, t]$, $(t > a)$ кесмада чекли вариацияга эга бўлсин. Агар $\lim_{t \rightarrow \infty} V_a^t f$ лимит мавжуд бўлса, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ мавжудлигини исботланг. Тескариси ўринлими? Мисоллар келтиринг.

Case 2. Липшиц шартини қаноатлантирувчи функция чекли вариацияга эга [2-теорема, 1-маъруза]. Ушбу тасдиқнинг тескариси ўринлими? Мисоллар келтиринг.

Case 3. Maple дастури ёрдамида функцияни тўлиқ вариациясини ҳисобланг.

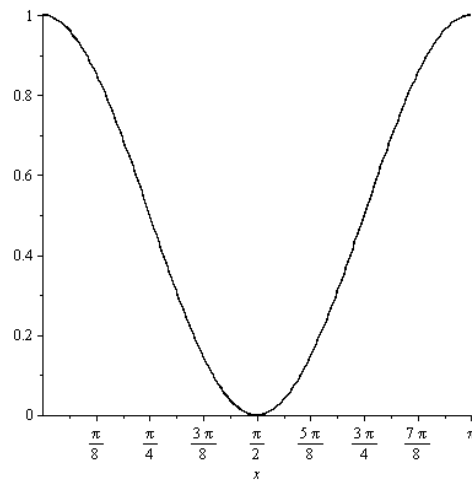
$f(x) = \cos^2 x$ функцияни $[0, \pi]$ ораликда иккита ўсувчи функциялар айирмаси шаклида ифодаланг.

> *with(plots) :*

> $f(x) := \cos^2(x);$

$$f := x \rightarrow \cos(x)^2$$

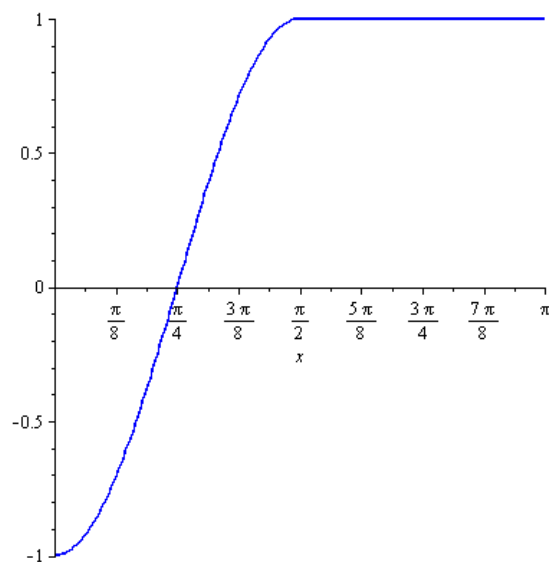
> $\text{plot}(f(x), x = 0 .. \text{Pi}, \text{color} = [\text{black}]);$



$$h := x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq x \text{ and } x \leq \frac{1}{2} \pi, 1 - 2 \cos(x)^2, \frac{1}{2} \pi < x \text{ and } x \leq \pi, 1\right)$$

$$x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq x \text{ and } x \leq \frac{1}{2} \pi, 1 - 2 \cos(x)^2, \frac{1}{2} \pi < x \text{ and } x \leq \pi, 1\right)$$

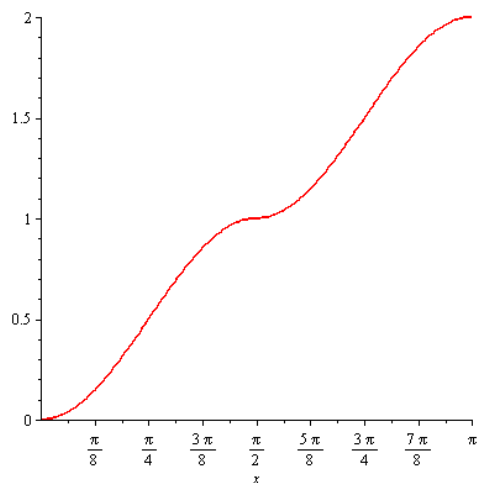
> plot(h(x), x = 0 .. Pi, color = [blue]);



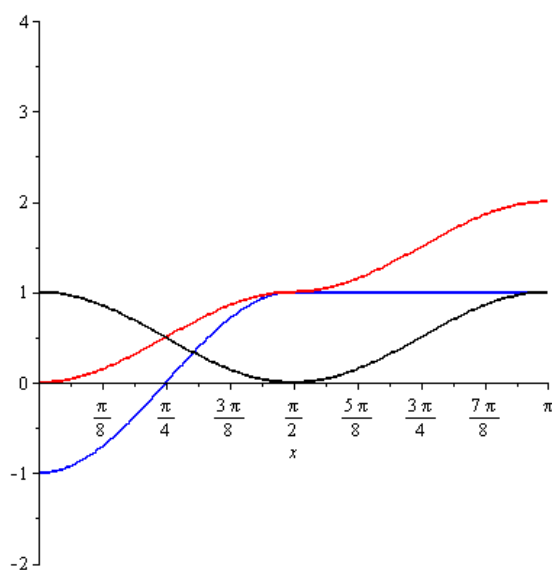
$$g := x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq x \text{ and } x \leq \frac{1}{2} \pi, 1 - \cos(x)^2, \frac{1}{2} \pi < x \text{ and } x \leq \pi, 1 + \cos(x)^2\right)$$

$$x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq x \text{ and } x \leq \frac{1}{2} \pi, 1 - \cos(x)^2, \frac{1}{2} \pi < x \text{ and } x \leq \pi, 1 + \cos(x)^2\right)$$

> plot(g(x), x = 0 .. Pi, color = [red]);



> plot([h(x), g(x), f(x)], x = 0 .. Pi, -2 .. 4, color = [blue, red, black]);



Case 4. Стилтьес интегралида аддитивлик хоссаси қайси ҳолда ўринли?

Case 5. Стилтьес интеграли мавжуд бўладиган $f(x), g(x)$ функциялар учун минимал синфни аниқланг.

Case 6. Голоморф функцияни унинг ҳақиқий ёки мавхум қисми ёрдамида қандай усуллар билан тиклаш мумкин?

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ ТОПШИРИҚЛАРИ

1. Ушбу:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг ихтиёрий кесмада чекли вариацияга эга бўлиши кўрсатилсин.

2. $\overset{b}{V}_a f(x) = \overset{c}{V}_a f(x) + \overset{b}{V}_c f(x)$, $a > c > b$ тенглик исботлансин.

3. $f(x)$ функция $[a, b]$ да чекли вариацияга эга бўлса, унда

$$g(x) = \overset{x}{V}_a f(t)$$

функциянинг $[a, b]$ да ўсувчи ва чегараланган бўлиши исботлансин.

4. Тўғриланувчи бўлмаган чизикқа мисол келтирилсин.

5. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1; 4]$

2) $f(x) = \arctg x$, $x \in [-1; 1]$

3) $f(x) = [x]$, $x \in [-1; 3]$

4) $f(x) = x^2$, $x \in [-2; 3]$

5) $f(x) = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$

6. Функциянинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

7. Функциянинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ 10, & x = 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

8. Ушбу:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

функцияни $[0,1]$ кесмада чекли вариацияга эга эканлигини исботланг.

9. Ушбу:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

функцияни $[0,2/\pi]$ кесмада чекли вариацияга эга эмаслигини исботланг.

10. Агар $\bigvee_a^b f(x) = A$ бўлса, у ҳолда $\bigvee_a^b (kf(x) + m)$

11. Агар $f(x)$ функция $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M \in \mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x \in D: f(x) < M\}$ тўпламнинг очик тўпламлиги исботлансин.

12. $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган ихтиёрий $\omega(x)$ функцияси учун ушбу:

$$\omega_1(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{B(y,r)} \omega(x),$$

$$\omega_2(y) = \overline{\lim_{x \rightarrow y} \omega(x)}$$

функцияларни қарайлик. ω_1 ва ω_2 ларни D да юқоридан ярим узлуксизлиги исботлансин. $\omega_1 = \omega_2$ ҳақида нима дейиш мумкин?

13. $F(D)$ синфга тегишли функцияга мисол келтиринг. $F(D)$ да очик тўплам, атроф тушунчасини беринг.

14. Бир нуқтага, дискрет нуқталарга, $[a,b]$ кесмага, $S(0,1)$ сферага, $B(0,1)$ шарга текис жойлашган бирлик заряд (ўлчам)ларга мос умумлашган функциялар

хусусиятлари ўрганилсин. Улар учун хусусий ҳосилалар ҳисоблансин. Хусусий ҳосилалар ўлчам бўла оладими?

15. Умумлашган функциялар кетма–кетлиги $\{f_j\}$ берилган бўлиб, ихтиёрий $\phi \in F(D)$ учун $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\phi) = f(\phi)$ бўлсин. У ҳолда f_j кетма – кетлик f га (кучсиз) яқинлашувчи дейилади ва $f_j \xrightarrow{\text{кучсиз}} f$ каби белгиланади. f ни умумлашган функция эканлигини исботланг.

16. Ихтиёрий борел ўлчами μ учун шундай дискрет (дискрет нуқталарга жойлашган) ўлчамлар кетма–кетлиги μ_j мавжудки, $\mu_j \xrightarrow{\text{кучсиз}} \mu$ бўлади. Исботланг.

17. $S(x^0, r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x) = \int_{S(x^0, r)} P(x, y) d\mu$ - Пуассон интегралли ҳақида нима дейиш мумкин?

Интегралнинг $B(x^0, r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

18. $D \subset \mathbb{R}^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай $u_j(x) \in Sh(D) \cap C^\infty(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \rightarrow \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbb{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

VII. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Чекли вариацияли функция Function of finite variation	$\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) $ йиғиндилар $\forall n \in N$ учун юқоридан текис чегараланган	For every $n \in N$ the sums $\mathcal{G}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) $ upper uniformly bounded
Тўлиқ вариация Combined variation	$\bigvee_a^b f(x) := \text{Sup}\{\mathcal{G}_n\}$	$\bigvee_a^b f(x) := \text{Sup}\{\mathcal{G}_n\}$
Бўлакли монотон Piecewise monotone	функция ҳар бир $[a_k, a_{k+1}]$ кесмада монотон	If function monotone on every $[a_k, a_{k+1}]$
Липшиц шарти Lipschits condition	шундай $L > 0$ сон топилсаки, ихтиёрий $\bar{x}, x \in [a, b]$ нуқталар учун $f(\bar{x}) - f(x) \leq L \cdot \bar{x} - x$	For any $\bar{x}, x \in [a, b]$ there exists $L > 0$ such that $f(\bar{x}) - f(x) \leq L \cdot \bar{x} - x$
Стилтьес интеграл йиғиндиси The sum of Stieltjes integral	$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] =$ $= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k)$	$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] =$ $= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k)$
Стилтьес интеграл Stieltjes integral	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$ мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати $[a, b]$ кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги ξ_k нуқталарнинг танланишига	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$ exists and finite, and its value isn't depending on partition of $[a, b]$ and selection of the points ξ_k on $[a, b]$

	боғлиқ бўлмаса.	
Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари Upper and lower sums Darbu- Stieltjes	$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\},$ $M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\},$ $\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k),$ $\bar{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k).$	$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\},$ $M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\},$ $\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k),$ $\bar{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k).$
Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори интеграллари Upper and lower integrals Darbu- Stieltjes	$I_* = \sup \{ \underline{S} \} \quad \text{ва} \quad I^* = \inf \{ \bar{S} \}$	$I_* = \sup \{ \underline{S} \} \quad \text{and} \quad I^* = \inf \{ \bar{S} \}$
Гармоник функция Harmonic function	$D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган $u \in C^2(D)$ функция ушбу $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ тенгликни қаноатлантирса	$u \in C^2(D)$ function defined on an open set $D \subset \mathbf{R}^n$ if it satisfies the Laplace equation: $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$
Лаплас оператори Laplace operator	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$
$h(D)$	D соҳада гармоник бўлган барча функциялар тўплами	Set of all harmonic functions on an open set D
σ_n	$\mathbf{R}^n$ фазодаги бирлик сферанинг юзаси	The square of unit sphere on $\mathbf{R}^n$
Пуассон формуласи Poisson formula	$P(x, y) = \frac{r^2 - x - x^0 ^2}{\sigma_n r x - y ^n}$	$P(x, y) = \frac{r^2 - x - x^0 ^2}{\sigma_n r x - y ^n}$

Дирихле масаласи Dirichlet problem	$\Delta u = 0, \quad u _{\partial D} = \varphi(x)$	$\Delta u = 0, \quad u _{\partial D} = \varphi(x)$
Чексиз силлик Infinitely smooth	$u \in C^\infty(D)$	$u \in C^\infty(D)$
Голоморф функция Holomorphic function	$f(z)$ функция $z_0 \in C$ нуктанинг бирор $U(z_0, \varepsilon)$ атрофида C -дифференциалланувчи	Function $f(z)$ C -differentiable at the any neighborhood of the point $z_0 \in C$
Субгармоник функция Subharmonic function	$u(x)$ функция куйидаги икки шартни қаноатлантиради: 1) $u(x)$ юқоридан яримузлуксиз, яъни $\forall x^0 \in D$ учун $\overline{\lim}_{x \rightarrow x^0} u(x) \leq u(x^0)$ тенгсизлик ўринли 2) ихтиёрий $x^0 \in D$ нукта учун $r(x^0) > 0$ сон топиладики, ҳар қандай $r \leq r(x^0)$ учун $u(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma$ тенгсизлик ўринли.	Function $u(x)$ satisfies following conditions: 1) $u(x)$ – upper semicontinuous function: for $\forall x^0 \in D$ satisfying $\overline{\lim}_{x \rightarrow x^0} u(x) \leq u(x^0)$ 2) For every $x^0 \in D$ exists $r(x^0) > 0$, for any $r \leq r(x^0)$ following inequality holds $u(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma$
$sh(D)$	D соҳада субгармоник функциялар синфи	Family of subharmonic functions on an open set D

Максимумлар принципи Principles of maximums	Агар $u(x) \in Sh(D)$ функция бирор $x^o \in D$ нуқтада ўзининг максимумига эришса, яъни $u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x)$ бўлса, у ҳолда $u(x) \equiv const$ бўлади.	If function $u(x) \in Sh(D)$ reaches its maximum at the any point of $x^o \in D$, i.e. if $u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x) \quad \text{then}$ $u(x) \equiv const$
---	---	---

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Махсус адабиётлар:

1. Sadullaev A. *Pluripotential theory. Application*. Palmarium academic publishing. Germany. 2012
2. Brian S. Tomson *Theory of integral*. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, British Columbia 2012
3. Sadullaev A., *On separately subharmonic functions (Lelong's problem)*. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse* ,V.XX :S , Toulouse 2011, 181-185.
4. Riihenta J., *Subharmonic functions, generalizations and separately subharmonic functions*. arXiv:math / 0610259v5.2008.
5. Dinh T.- C., Sibony N., *Dynamics of holomorphic maps, p. 2.1.1. subharmonic and quasi-subharmonic functions*. Introductory Lectures (Master), Paris-2011, available at www.math.jussieu.fr/~dinh
6. Dinh T.- C., Sibony N., *Pull-back currents by holomorphic maps*. *Manuscripta Math.*,V123:3 (2007), 357-371.
7. L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*, GB, 2000.
8. Тўйчиев Т.Т., Тишабоев Ж.К. *Дополнительные главы анализа*. «Университет», Ташкент 2015.
9. Leja F., *Theory of analytic functions*. Warsawa, 1957.
10. Tsuji M., *Potential theory in modern function theory*.Tokyo, 1959.
11. Klimek M., *Pluripotential Theory*. Clarendon Press, Oxford-New York-Tokyo, 1991.
12. Lelong P., *Fonctions plurisousharmoniques et formes differentielles positive*. Dunod, Paris, Gordon & Breach, New York,1968.
13. Fornæss J.-E.,Stensones B., *Lectures on counterexamples in several complex variables*. Mathematical notes 33, Princeton University Press, Princeton 1987.
14. Sadullaev A., *The extremal Psh function of unite ball*. *Ann.Pol.Mat.*, XLVI, (1985), 433-437.

15. Armitage D.M., Gardiner S.J., *Conditions for separately subharmonic functions to be subharmonic*. Potential Anal., V 2, (1993), 225-261.
16. Alexander H., *Projective capacity*. Ann.of Math.Studies ,№100, (1981),1-27.
17. Wermer J., *Potential theory and function algebras*. Expository paper submitted to Texas Tech.,Math. Series, June - 1980.
18. Ancona A., *Sur une conjecture concernant la capacité et l'effilement. Théorie du potentiel* , Orsay, (1983), 34–68.
19. Arsove M.G., *On subharmonicity of doubly subharmonic functions*. Proc. Amer. Math. Soc. V17, (1966), 622-626 .
20. Cegrell U., *Delta-plurisubharmonic functions*. Math.Scand., V43, (1978), 343-352.
21. Levenberg N., *Weighter Pluripotential theory results of Bermann-Boucksom*, arXiv,0907.4490,81p.
22. Wermer J., *Subharmonicity and hulls*. Pacific J. Math. V58, (1975), 283-290.
23. Wiegerinck J., *Separately subharmonic functions need not be subharmonic*. Proc. Amer. Math. Soc. ,V104, (1988), 770-771.
24. Wiegerinck J., Zeinstra R., *Separately subharmonic functions: when are they subharmonic*. Proc. Sympos. Pure Math. V52:1, (1991), 245-249.
25. Yamaguchi H., *Sur une uniformite des surfaces constants dune fonction entire de deux variables complexes*. Math. Kyoto Univ. V13, (1973), 417-433.

Интернет манбаалар:

1. <http://www.allmath.ru/>
2. <http://www.mcce.ru/>
3. <http://lib.mexmat.ru/>
4. <http://www.webmath.ru/>
5. <http://www.exponenta.ru/>
6. <http://www.ziyonet.uz/>

