



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •  
• МОСКВА •  
• КРАСНОДАР •  
2012



---

С. В. МИКОНИ

**Дискретная математика  
для бакалавра:  
МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ,  
ФУНКЦИИ, ГРАФЫ**

•

*Рекомендовано  
НМС по математике вузов  
Северо-Западного региона России  
в качестве учебного пособия для студентов  
инженерных специальностей и направлений вузов*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2012

---

ББК 22.176я73

М 59

**Микони С. В.**

**М 59** Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2012. — 192 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1386-7**

Определяется множество, его виды (четкое, нечеткое и мультимножество) и способы их задания. Устанавливается связь между прямым (декартовым) произведением множеств, бинарным и функциональным отношением. Приводятся формы представления бинарного отношения, показывается его связь с графом. Излагаются алгебры с различным числом операций как конкретизации алгебраической системы. Алгебры логики, множеств и отношений рассматриваются как частные случаи алгебры с тремя операциями. Особое внимание уделено алгебре бинарных отношений. Ее операции иллюстрируются в трех формах — множественной (перечислительной), матричной и графовой, что показывает изоморфизм соответствующих алгебр. Рассматриваются элементарные и неэлементарные свойства бинарных отношений.

Центральное место в книге отведено графам, их свойствам и типовым задачам, решаемым на графах. На невзвешенных графах решаются задачи анализа структур, а на взвешенных графах — оптимизационные задачи. Приводятся основные сведения комбинаторики и сложности вычислений, иллюстрируемые на графах. Целью книги является изложение языка дискретных моделей, широко применяемых в компьютерном моделировании.

Книга рассчитана на обучение бакалавров инженерных и экономических направлений и преподавателей вузов.

ББК 22.176я73

**Рецензенты:**

*В. Г. ДЕГТЯРЕВ* — доктор технических наук, профессор кафедры математики и моделирования Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения, заслуженный деятель науки и техники РФ, председатель НМС; *Б. А. КУЛИК* — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН.

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2012

© С. В. Микони, 2012

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2012

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

**В**остребованность дискретной математики обычно связывают с появлением и развитием информатики. Действительно, такие разделы дискретной математики, как булева алгебра, машинная арифметика, теория алгоритмов и конечные автоматы, математическая лингвистика, теория кодирования, имеют прямое отношение к информатике, и в этом смысле их можно отнести к специальным разделам дискретной математики. Не случайно в США их относят к компьютерным дисциплинам (Computer Science). К неспецифическим разделам дискретной математики относятся: теория множеств, общая алгебра, теория графов, комбинаторика.

Все перечисленные разделы (и не только одни они) с различной детальностью и строгостью изложения вошли в состав многочисленных учебников и учебных пособий по дискретной математике, изданных за последнюю четверть века. Одним из первых таких отечественных учебников стала книга О. П. Кузнецова и Г. М. Адельсона-Вельского «Дискретная математика для инженера», изданная в 1988 году.

На современном этапе развития науки и техники курс дискретной математики востребован не только для инженерных специальностей. В связи с развитием компьютерного моделирования она стала актуальной практически для всех специальностей. В основе компьютерного моделирования лежит понятие модели. С концептуальной модели начинается проектирование любой сложной системы.

А концептуальная модель по определению (*concept* — понятие) дискретна, как дискретны сами понятия любой предметной области. Для проектирования этих моделей необходимо знать язык дискретной математики.

С появлением бакалавриата дискретная математика стала включаться в учебные программы бакалавров разных специальностей. Изучение всех ее разделов рассчитано на два семестра.

Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие рассчитано на односеместровый курс начального ознакомления бакалавров любого профиля с языком дискретной математики. В него включены разделы дискретной математики, представляющие собой теоретическую основу для проектирования моделей любого назначения. В основу дисциплины, которую автор читал в течение последних двадцати лет, положена теория графов, объединяющая остальные разделы курса.

Большую помощь автору в преподавании этого курса и в редактировании рукописи книги оказала доцент, канд. техн. наук М. И. Гарина. Ряд полезных замечаний сделала канд. техн. наук Е. Ю. Бурсиан. В подготовке рукописи к изданию приняли участие студенты А. И. Титов и К. А. Ветлугин. Всем перечисленным лицам автор выражает глубокую благодарность. Особая благодарность выражается рецензентам книги — профессору В. Г. Дегтяреву и доктору физико-математических наук Б. А. Кулику, взявшим на себя труд ознакомиться с рукописью и сделавшим ряд ценных замечаний.

---

## ВВЕДЕНИЕ

Согласно математическому словарю дискретная математика — это раздел математики, изучающий свойства дискретных множеств и определенных на них отношений и операций. Как следует из этого определения, центральным понятием дискретной математики является *множество*. Практическое значение имеют конечные множества, которые и являются основным объектом изучения дискретной математики.

Ключевыми понятиями непрерывной математики являются *точка* и *непрерывность точек*, влекущие за собой понятие *бесконечности*. Тем не менее уместно отметить тесную связь между дискретной и непрерывной математикой. Иллюстрацией тому служит связь между многозначной и бесконечнозначной логикой. Как правило, решение любой сложной задачи требует применения методов как дискретной, так и непрерывной математики, но язык дискретной математики при построении моделей сложных систем первичен.

Развитие математики отвечает потребностям своего времени. В доиндустриальный период развития общества, связанный с освоением природных ресурсов Земли, получила развитие *элементарная математика*. Она включает арифметику, геометрию, тригонометрию, элементарную алгебру и др. Математические модели, применяемые в элементарной математике, основываются на понятии *числа и точки*.

Индустриальный период развития общества связан с созданием машин, преобразованием энергии и освоением

динамических процессов. В этот период оказалась наиболее востребованной *высшая* математика. Она включает математический анализ, аналитическую и дифференциальную геометрию, топологию, высшую алгебру, теорию вероятностей, теорию случайных процессов, математическую статистику и др. В основе математических моделей, применяемых в технологиях индустриального периода, лежит понятие *функции*.

С появлением вычислительных машин в середине XX века начался постиндустриальный период развития общества. Первые вычислительные машины использовались как «большие арифмометры» и стимулировали развитие численных методов вычислений. Однако вскоре выяснилось, что возможности ЭВМ гораздо шире и наряду с вычислениями они способны выполнять исчисления (проверку истинности высказываний, предикатов), присущие логическому выводу. Этому способствовало применение двоичной системы кодирования, общей как для представления чисел, так и элементов двоичной (булевой) логики.

Возникли новые научные направления, такие как *кибернетика* (наука об управлении) и *информатика* (наука об информационных процессах). Поскольку неотъемлемым элементом управляющих и информационных систем является человек, принципиально новым объектом моделирования стала умственная деятельность человека. Ее моделирование исследуется в рамках научного направления, названного *искусственным интеллектом*.

Моделирование умственной деятельности человека и развитие информационных технологий потребовало развития *дискретной математики*. В отличие от моделей материального мира, ориентированных только на расчетные методы, дискретная математика предоставляет еще и *язык* описания мыслительных процессов. Поскольку элементы множеств не ограничиваются числовыми типами, методы дискретной математики могут использоваться для обработки как численных, так и символьных данных. Использование символьных переменных позволяет на основе формальных систем создавать системы понятий, онтологии и другие нечисловые и смешанные системы.

К исторически первым разделам дискретной математики следует отнести теорию графов. Ее началу послужила одна из первых задач теории графов об обходе кенигсбергских мостов, сформулированная Леонардом Эйлером в XVIII веке. Как теория она впервые была опубликована в 1936 году в монографии Д. Кенига «Теория конечных и бесконечных графов».

В настоящее время графы, благодаря своей наглядности и универсальности, стали наиболее распространенным языком описания не только концептуальных, но и конструктивных моделей, характерных для задач управления и информатики. Это относится к моделям баз данных и знаний, последовательных и параллельных вычислений, архитектур информационных систем, управления предприятиями и многих других явлений и процессов. Наглядность графов проявляется в пространственном представлении связей между рассматриваемыми сущностями, а их универсальность объясняется отвлечением от таких деталей, как угол наклона и кривизна линий, используемых в геометрии.

Учитывая эти свойства, важные в прикладном отношении, теорию графов предлагается поставить во главу угла при изучении дискретной математики. В основе теории графов лежат понятия множества и отношений на множествах. Поэтому изучение свойств множеств и отношений должно предшествовать изучению теории графов. Задачи структурного анализа графов малой размерности можно решить вручную. Однако для задач большей размерности необходимо использовать алгебраические способы решения. Они изучаются в рамках алгебр логики, множеств и отношений, являющихся разделами общей алгебры. Поскольку задачам теории графов присущ дискретно-комбинаторный характер, для перечисления и пересчета получаемых вариантов решений привлекаются методы комбинаторики. Для оценки трудоемкости решения логико-комбинаторных задач привлекается теория сложности вычислений.

Тесная связь указанных разделов дискретной математики является основанием для их изучения в едином

модуле. Разделы этого модуля обладают наибольшей степенью общности по отношению к областям применения. Помимо задач информатики и упомянутой выше задачи обхода кенигсбергских мостов, теория графов успешно используется в областях, изучающих законы материи и энергии. Например, задача нахождения распределения токов в электрической сети с помощью законов Кирхгофа, изучаемая в электротехнике, представляет собой частный случай задачи о максимальном потоке в транспортной сети, решаемой на взвешенных графах.

Разделы дискретной математики, имеющие непосредственное отношение к информатике, обычно изучаются в теории информационных систем и других дисциплинах информационного профиля. Они имеют меньшую общность в силу конкретности своего применения. Например, для представления конечного автомата применяется язык теории графов, позволяющий объединить функции переходов и выходов в одной наглядной модели.

Изложение разделов дискретной математики в настоящем учебном пособии организовано следующим образом. Первые три главы являются вступительными по отношению к теории графов, изложенной в главах с четвертой по девятую. Завершающая глава содержит основные сведения по комбинаторике и сложности вычислений.

В первой главе излагаются основные понятия дискретной математики: множество, отношение и функция. Эти понятия и язык их описания используются во всех последующих главах пособия. Граф рассматривается как одна из форм представления бинарного отношения.

Вторая глава начинается с краткого описания алгебраической системы, указания ее роли в порождении различного рода алгебр и моделей (реляционных систем). Далее рассматриваются алгебры с одной, двумя и тремя операциями. Алгебры с тремя операциями представляются основными разновидностями — изоморфными друг другу булевой алгеброй и алгеброй множеств, важными в практических приложениях.

Третья глава посвящена изложению алгебры отношений (реляционной алгебры). Ее операции определяются

на двухэлементных множествах, матрицах и графах, что показывает единство различных форм представления бинарного отношения. Приводятся свойства операций. Специальные бинарные отношения систематизированы относительно свойств рефлексии, симметрии и транзитивности.

В четвертой главе излагаются основные понятия теории графов. Описываются свойства и способы представления графов. Приводятся виды графов и их частей. Рассматриваются разновидности соответствия графов: изоморфизм и автоморфизм, и способы установления изоморфизма.

В пятой главе приводятся свойства элементов графа (вершин и дуг), определяемые на отношениях смежности и инцидентности. Они иллюстрируются на примерах для улучшения наглядности их представления и упрощения доказательств теорем. Для формализации решения задач, связанных с обнаружением заданных свойств (их наличием либо отсутствием), применяются операции булевой алгебры.

В шестой и седьмой главах пособия приводятся методы структурного анализа, основанные на понятии связности графа.

В шестой главе на основе понятия достижимости вершин рассматриваются методы нахождения маршрутов в графе и вычисления их количеств. Свойство сильной связности используется для преобразования орграфа — конденсации и ранжирования его вершин.

В седьмой главе на основе понятия минимальной связности неорграфа (остова) рассматриваются методы связывания его вершин циклами и изоляции — разрезами. Матрицы вектор-циклов и вектор-разрезов используются для обоснования базисов циклов и разрезов. Приводится метод их нахождения, основанный на двойственности этих базисов. Рассматриваются специальные циклы в графе — эйлеровы и гамильтоновы. Даются методы их нахождения.

Восьмая глава посвящена нахождению расстояний в невзвешенных и взвешенных графах. Расстояния в невзвешенных графах определяются на основе  $s$ -достижимости его вершин. Определение расстояний во взвешенных графах формулируется как задача однокритериальной

оптимизации. Показывается ее решение двумя методами — возведением в степень матрицы расстояний по методу Форда — Фолкерсона и методом динамического программирования Дейкстра. Расстояния используются для формулирования понятий диаметра, радиуса и центра графа. Приводятся методы их нахождения в невзвешенных и взвешенных графах.

В девятой главе приводятся типовые задачи на взвешенных графах, рассматриваемые как подкласс оптимизационных задач. К ним относятся задачи: нахождения максимального потока в транспортной сети, кратчайшей сети, минимального и максимального паросочетания, минимизации обхода всех вершин (задача коммивояжера) и всех дуг графа (задача китайского почтальона). Приводятся методы нахождения глобального и локальных оптимумов при решении этих задач.

В десятой главе излагаются элементы комбинаторики и сложности вычислений. Методы комбинаторики рассматриваются применительно к задачам, решаемым на графах, а именно к оценке числа вариантов решения. Трудоемкость решения задач на графах оценивается вычислительной сложностью по памяти и по времени. Приводятся асимптотические оценки вычислительной сложности решения типовых задач на графах.

Материал книги излагается таким образом, чтобы максимально облегчить усвоение предмета. Это достигается минимизацией строгих доказательств теоретических положений, компенсированной большим количеством примеров, а также изложением всех основных методов решения типовых задач.

# МНОЖЕСТВО. ОТНОШЕНИЕ. ФУНКЦИЯ

## 1.1. МНОЖЕСТВО

**Под** множеством понимается любое собрание определяемых и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое.

Символом  $\in$  обозначается отношение *принадлежности*. Запись  $x \in X$  означает, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ , а  $x \notin X$  означает, что элемент  $x$  не принадлежит множеству  $X$ .

Число элементов  $n$  в множестве  $X$  называется *мощностью* множества  $X$  и обозначается как  $|X| = n$ . Множество  $X$  — *пустое*:  $X = \emptyset$ , если  $n = 0$ .

Множества  $X$  и  $Y$  считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов (принцип объемности) и  $|X| = |Y|$ . Это отношение записывают как  $X = Y$  и  $X \neq Y$  — в противоположном случае.

Множество  $Y$  называется *подмножеством*  $X$ , если любой элемент, принадлежащий множеству  $Y$ , принадлежит и множеству  $X$ :  $\forall x \in Y \rightarrow x \in X$ . Эта связь обозначается как  $Y \subseteq X$ . При  $Y \subseteq X$  и  $X \neq Y$  множество  $Y$  считается *собственным* подмножеством  $X$  и обозначается как  $Y \subset X$ .

## 1.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА

**1. Перечислительный способ.** Множество задается *перечислением* его элементов:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Этот способ применим к заданию конечных множеств. Согласно принципу равенства множеств по их объему (содержимому) порядок перечисления элементов множества несуществен.

**Пример 1.1.**  $X_1 = \{2, 4, 6\}$ ,  $X_2 = \{4, 2, 6\}$ ,  $X_1 = X_2$ .

Множество, допускающее включение одного и того же элемента несколько раз, называется *мультимножеством*. Число копий  $i$ -го элемента называется его *кратностью*  $m_i$ . В сокращенной записи мультимножества имя элемента  $x_i$  сопровождается кратностью  $m_i$ . Кратность  $m_i = 1$  может опускаться.

**Пример 1.2.** Представить мультимножеством простые множители целого числа 120. Этими множителями являются:  $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ . Они образуют мультимножество  $X = \{2, 2, 2, 3, 5\}$ . В сокращенной записи оно имеет вид

$$X = \{(2, 3), 3, 5\}$$

или в другой записи:

$$X = \{(3/2), 3, 5\},$$

где  $m_1 = 3$ , а  $m_2 = m_3 = 1$ .

**2. Описательный способ.** Множество, не обязательно конечное, задается *описанием* свойств его элементов. Оно записывается как

$$X = \{x \mid P(x)\}$$

или

$$X = \{x : P(x)\},$$

здесь  $P(x)$  — одноместный предикат, истинность которого свидетельствует о том, что элемент  $x$  обладает некоторым свойством  $P$ .

**Пример 1.3.**  $X = \{x \mid x \bmod(2) = 0\}$ . Тожество справа от разделителя « $\mid$ » (« $:$ ») означает, что остаток от деления элемента  $x$  на 2 должен равняться нулю. Этому условию удовлетворяют все натуральные четные числа.

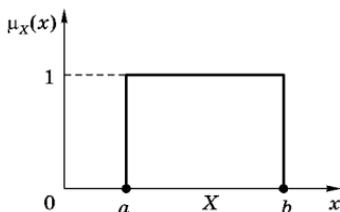
### 1.3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ МНОЖЕСТВА

Она характеризует факт принадлежности элемента  $x$  множеству  $X$ :

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X; \\ 0, & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

**Пример 1.4.** Показать принадлежность точек отрезка  $[a, b]$  множеству  $X$  (рис. 1.1).

В более общем случае, предложенном Л. Заде, функция  $\mu_X(x)$  отражает *частичную* принадлежность элемента  $x$  множеству  $X$ , принимая значения из интервала  $(0, 1]$ :  $0 < \mu_X(x) \leq 1$ .



**Рис. 1.1**  
Характеристическая функция множества  $X$  на отрезке  $[a, b]$

#### 1.4. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

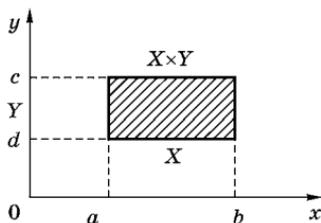
Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — множества. *Прямым* или *декартовым* произведением множеств  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  называется множество всех упорядоченных наборов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$ . Набор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  также называют *кортежем*, *вектором* или просто *n-кой*.

**Пример 1.5.** Пусть  $X = [a, b]$  и  $Y = [c, d]$  — отрезки числовой оси. Тогда декартово произведение  $X \times Y$  есть множество точек прямоугольника со сторонами  $[a, b]$  и  $[c, d]$  (рис. 1.2).

Как следует из рис. 1.2, отрезки  $[a, b]$  и  $[c, d]$  на осях абсцисс и ординат можно рассматривать как *проекции* декартова произведения  $X \times Y$  на соответствующую ось:  $[a, b] = \text{Пр}_x(X \times Y)$  и  $[c, d] = \text{Пр}_y(X \times Y)$ .

**Пример 1.6.** Пусть  $X$  — множество студентов в группе,  $|X| = n$ , а  $Y$  — множество мест в аудитории,  $|Y| = m$ . Тогда декартово произведение множеств  $X$  и  $Y$  есть двумерное множество  $X \times Y$  всевозможных пар (студент, место). Всего таких пар:  $n \cdot m$ . Если  $n = m$ , каждому студенту выделяется единственное место. При  $n < m$  имеет место избыток мест, а при  $n > m$  — их недостаток.

*Обратное* декартово произведение множеств  $X$  и  $Y$  представляет собой двумерное множество



**Рис. 1.2**  
Декартово произведение отрезков  $[a, b]$  и  $[c, d]$

$Y \times X$  всевозможных пар. В примере это пары (место, студент). В силу коммутативности умножения чисел  $n$  и  $m$  число пар остается неизменным:  $n \cdot m = m \cdot n$ , но элементы пар имеют обратный порядок.

Если множества  $X_1, X_2, \dots, X_n$  совпадают:  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ , то декартово произведение  $X \times X \times \dots \times X$  с  $n$  сомножителями называется *степенью* множества  $X$  и обозначается как  $X^n$ .

## 1.5. БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ

**Определение 1.1.** Подмножество  $R$  декартового произведения  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  называется  *$n$ -местным отношением* на множествах  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :  $R^n \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ .

Согласно этому определению в  $n$ -местное отношение  $R$  входят часть  $n$ -ок или все  $n$ -ки из  $n$ -местного декартового произведения (универсума)  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ .  $R^n \subseteq X^n$  при  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ .

**Определение 1.2.** *Бинарным* или *двухместным отношением* на множествах  $X$  и  $Y$  называется подмножество<sup>1</sup>  $R \subseteq X \times Y$ . При  $x \in X$  и  $y \in Y$  бинарное отношение состоит из упорядоченных пар вида  $(x, y)$ . Наряду с записью  $(x, y) \in R$  употребляется запись  $x R y$ . Элементы  $x$  и  $y$  называются *компонентами* (или *координатами*) отношения  $R$ .

**Определение 1.3.** Множество  $D_R = \{x \mid \forall y \in Y (x, y) \in R\}$  называется областью *определения* бинарного отношения  $R$ ,  $D_R \subseteq X$ , а множество  $I_R = \{y \mid \forall x \in X, (x, y) \in R\}$  называется областью *значений* бинарного отношения  $R$ ,  $I_R \subseteq Y$ .

**Пример 1.7.** Пусть  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ , а  $R = \{(1,2), (2,4), (3,3), (2,1)\}$ . В бинарное отношение  $R$  вошли 4 пары из 12, составляющих декартово произведение  $X \times Y$ . Областью определения  $R$  является множество  $D_R = \{1, 2, 3\}$ , а областью значений — множество  $I_R = \{2, 4, 3, 1\}$ .

<sup>1</sup> Обычно верхний индекс 2 в обозначении бинарного отношения  $R$  опускается.

## 1.6. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Пусть  $X$  и  $Y$  — два непустых множества с элементами  $x \in X$  и  $y, z \in Y$ .

**Определение 1.4.** Бинарное отношение  $R$  называется *функциональным* (или функцией), если из  $(x, y) \in R$  и  $(x, z) \in R$  следует  $y = z$ . Этому условию соответствует отображение множества  $X$  в множество  $Y$ , обозначаемое как  $f: X \rightarrow Y$ .

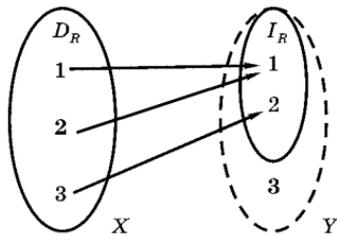
Функция  $f$  устанавливает соответствие между элементами множеств  $X$  и  $Y$ . Символ  $f$  играет роль *правила*, сопоставляющего каждому элементу  $x \in X$  однозначно определенный элемент  $y = f(x) \in Y$ . Здесь множество  $X = D_R$  является областью *определения* отображения  $f$ , элемент  $x$  — *аргументом* отображения, а элемент  $y = f(x)$  — *образом* элемента  $x$  при отображении  $f$ . Элемент  $f^{-1}(y) \in X$  называется *прообразом* элемента  $y$  при обратном отображении  $f^{-1}$  из множества  $Y$  в множество  $X$ .

**Пример 1.8.** Пусть  $X = Y = \{1, 2, 3\}$ . Отображение  $f: X \rightarrow Y$  задано следующим образом:  $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2$  (рис. 1.3).

Согласно рис. 1.3 каждый элемент из множества  $X$  имеет единственный образ на множестве  $Y$ . Однако не каждый элемент из множества  $Y$  имеет прообраз на множестве  $X$ . Элемент  $1 \in Y$  имеет два прообраза — 1 и 2, элемент  $2 \in Y$  имеет один прообраз — 3, а у элемента  $3 \in Y$  нет прообраза в  $X$ . Этой ситуации соответствуют следующие отношения между множествами  $X$  и  $Y$  и областями определения и значений отображения  $f: D_R = X, I_R \subset Y$ .

**Определение 1.5.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *сюръективным* (или отображением «на»), если для каждого элемента из  $Y$  есть прообраз в  $X$ .

Этому условию не соответствует отображение из примера 1.8, так как у элемента  $3 \in Y$  нет прообраза в  $X$ . Оно становится сюръективным, если из



**Рис. 1.3**  
Графическое представление  
отображения  $f: X \rightarrow Y$

множества  $Y$  исключить элемент 3, т. е. приравнять множества  $I_R$  и  $Y$ :  $I_R = Y$ .

**Определение 1.6.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *инъективным* (или отображением «в»), если для каждого элемента из  $Y$  имеется не более одного прообраза в  $X$ .

Этому условию также не соответствует отображение из примера 1.8, так как элемент  $1 \in Y$  имеет два прообраза — 1 и 2. Отображение из примера 1.8 можно сделать инъективным, если из множества  $X$  исключить элемент 2.

**Определение 1.7.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *биективным* (или взаимно однозначным), если оно одновременно *сюръективно и инъективно*, т. е. это отображение «на» и каждый элемент из  $Y$  имеет только один прообраз в  $X$ .

**Пример 1.9.** Если в примере 1.8 из множества  $Y$  исключить элемент 3, а из множества  $X$  исключить элемент 2, то отображение  $f: X \rightarrow Y$  станет взаимно однозначным (рис. 1.4):  $D_R = X$ ,  $I_R = Y$ .

Из модификаций примера 1.8 следует, что одно и то же правило соответствия может быть *сюръективным, инъективным* или *биективным* отображением в зависимости от состава исходных множеств  $X$  и  $Y$ .

**Определение 1.8.** Отображение  $f$  множества  $X$  в себя  $f: X \rightarrow X$  называется *преобразованием* множества  $X$ .

**Определение 1.9.** *Тождественным* преобразованием множества  $X$  называется преобразование  $e_X$  такое, что  $e_X(x) = x$ ,  $\forall x \in X$ .

**Утверждение 1.1.** Отображение  $f^{-1}$  множества  $X$  в себя называется *обратным*, если композиция  $f^{-1}$  и  $f$  является тождественным преобразованием:  $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ .

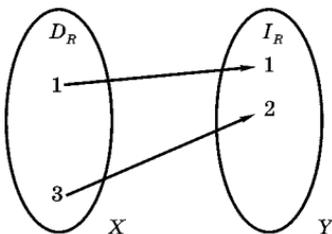


Рис. 1.4

Пример взаимно однозначного отображения  $f: X \rightarrow Y$

Отображение  $f$ , имеющее обратное отображение  $f^{-1}$ , называется *биективным*.

Доказательство утверждения 1.1 основывается на таком свойстве взаимно обратного отображения, как наличие единственного прообраза для каждого образа из множества значений бинарного отношения.

### 1.7. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

Для решения различных задач удобно использовать разные формы представления бинарного отношения.

**1. Списочная** (или перечислительная) форма представления данных соответствует определению бинарного отношения как множества упорядоченных пар.

**Пример 1.10.** Пусть  $X = \{a, b\}$ ,  $Y = \{c, d\}$ , а в бинарное отношение  $R$  входят пары с первым символом  $a$ . Этому условию соответствует следующий список пар, входящих в бинарное отношение  $R$ :  $R = \{(a, c), (a, d)\}$ .

**2. Проекция** (сечение, срез). Под проекцией  $\text{Пр}_x R$  отношения  $R \subseteq X \times Y$  по аргументу  $x$  понимается подмножество всех элементов  $y \in Y$ , которые находятся в парах с элементом  $x$ .

Применительно к предыдущему примеру проекция отношения  $R \subseteq X \times Y$  по первому аргументу  $\text{Пр}_a R = \{c, d\}$ . Аналогичным образом определяется проекция  $\text{Пр}_y R$  по второму аргументу отношения  $R \subseteq X \times Y$ . Для предыдущего примера  $\text{Пр}_c R = \text{Пр}_d R = \{a\}$ . Проекцию отношения  $R \subseteq X \times Y$  по первому аргументу называют также *нижним срезом* (сечением) отношения  $R$ , а проекцию по второму аргументу отношения  $R$  — его *верхним срезом*.

Множество сечений (срезов) отношения  $R$  по *всем* элементам множества  $X$  на множество  $Y$ , обозначаемое через  $Y/R$ , или *фактор-множество* множества  $Y$  по отношению к  $R$  полностью определяет отношение  $R$  и, следовательно, является альтернативной формой представления бинарного отношения. Аналогичным образом формируется фактор-множество  $X/R$  множества  $X$  по отношению к  $R$ .

**Пример 1.11.** Пусть  $X = \{a, b\}$ ,  $Y = \{c, d\}$ . Представить фактор-множество множества  $Y$  по отношению к декартову произведению  $X \times Y$ . В наглядной форме фактор-множество  $Y/X \times Y$  представляется через множество нижних срезов следующим образом:

$$Y/X \times Y = \begin{pmatrix} a & b \\ \{c, d\} & \{c, d\} \end{pmatrix}.$$

### 3. Матричная форма бинарного отношения.

Элементы матрицы  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , бинарного отношения  $R \subseteq X \times Y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  формируются по правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in R; \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin R. \end{cases} \quad (1.1)$$

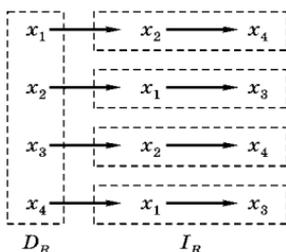
**Пример 1.12.** Пусть  $X = Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Представить в матричной форме бинарное отношение  $R = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_3)\}$ . Матрица, построенная по правилу (1.1), имеет вид

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

### 4. Интенциональная (описательная) форма.

Так же, как и унарное множество, двумерное множество может задаваться описанием свойств элементов, входящих в него.

**Пример 1.13.** Задать в описательной форме бинарное отношение  $R$  из предыдущего примера. Анализ индексов элементов пар, входящих в множество  $R$ , показывает, что их разность нечетна для элементов любой пары. Отсю-



**Рис. 1.5**  
Список инцидентий бинарного отношения  $R$  из примера 1.12

да следует способ определения принадлежности любой пары отношению  $R$ :

$$R = \{(x_i, x_j) : |i - j| \bmod 2 = 1\}.$$

**5. Список инцидентий.** Эту форму представления бинарного отношения можно рассматривать как фактор-множество  $Y/R$ , выраженное на языке структур данных. Подобно фактор-множеству  $Y/R$

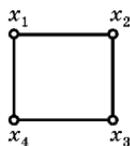
список инциденций состоит из двух секций: в первой перечисляются элементы, принадлежащие области *определения*  $D_R$  бинарного отношения  $R$ , а во второй — связанные с ними элементы из области *значений*  $I_R$  бинарного отношения  $R$ . В качестве связей используются указатели.

**Пример 1.14.** Представить бинарное отношение  $R$  из примера 1.12 списком инциденций (рис. 1.5).

**6. Граф.** Граф является наиболее наглядной формой представления бинарного отношения благодаря графической интерпретации пары  $(x_i, x_j)$ : ее элементы обозначаются кружками, называемыми *вершинами*, а связь между ними — стрелкой, называемой *дугой*. В теории графов переменная  $x_i$ , интерпретируемая вершиной, обозначается так же как  $v_i \in V$  (по начальной букве слова вершина — vertex), а дуга — символом  $e \in E$  (edge). В дальнейшем будут применяться и те и другие обозначения на равноправной основе.

Две дуги противоположной направленности, соответствующие парам  $(x_i, x_j)$  и  $(x_j, x_i)$ , обозначаются *ребром* (связью без стрелки). Графы, содержащие одни дуги, называются ориентированными (орграфами), одни ребра — неориентированными (неорграфами), а ребра наряду с дугами — смешанными графами.

**Пример 1.15.** Представить графом бинарное отношение  $R$  из примера 1.12 (рис. 1.6).



**Рис. 1.6**  
Граф бинарного отношения  $R$  из примера 1.12

### У п р а ж н е н и я

1. Заданы множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{5, 4, 2, 3, 1\}$ ,  $C = \{2, 1, 4\}$ . В каких отношениях они состоят друг с другом?
2. Задать нечетные числа до 9 перечислительным и описательным способами. Определить, какой из них универсальный, какой экономичный?
3. Записать в виде мультимножества экзаменационные оценки по пяти предметам: две отличные, две хорошие, одна удовлетворительная.

4. Представить прямым (декартовым) произведением все варианты положительных оценок, которые могут получить студенты Иванов, Петров, Сидоров, Гусев.
5. Представить бинарным отношением отличную успеваемость студентов в предыдущем примере.
6. Является ли бинарное отношение отличной успеваемости четырех студентов функциональным?
7. Привести пример биективного отображения успеваемости студентов.
8. Построить бинарное отношение «быть севернее» на множестве из семи выбранных городов и представить его во всех формах.
9. Построить бинарное отношение «иметь равное количество букв» на множестве из семи выбранных городов и представить его во всех формах.
10. Построить бинарное отношение «быть четным» на числах от 1 до 7 и представить его во всех формах.

## БУЛЕВА АЛГЕБРА И АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

### 2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

**А**лгебраическая система, или структура, — это множество  $A$  (носитель) с заданным на нем набором операций и отношений (сигнатурой) и удовлетворяющее некоторой системе аксиом. Алгебраическая система представляется следующей четверкой символов [3]:

$$\langle A, C, F, P \rangle.$$

Эти символы представляют собой множества:  $A$  — предметных переменных (носитель);  $C$  — констант;  $F$  — функций;  $P$  — предикатов.

Многосортная алгебраическая система является моделью языка первого порядка  $\Omega$  [4]. Ее элементы — результаты интерпретации этого языка с применением функций  $D, Cnst, Fn, Pr$ :

$$D: \pi \rightarrow A_\pi, \pi \in Srt;$$

$$Cnst: cnst \rightarrow c;$$

$$Fn: fn \rightarrow f;$$

$$Pr: pr \rightarrow p.$$

Элемент  $\pi$  множества  $Srt$  называется *сортом* объекта. Ему соответствует *тип* переменной в программировании. Для каждого сорта фиксируется множество предметных переменных  $a(\pi_1), \dots, a(\pi_n) \in A_\pi$  (носитель<sup>2</sup>) и констант  $c(\pi_1), \dots, c(\pi_k) \in C_\pi$ . Множество констант  $C_\pi$  характеризует *диапазон значений* соответствующей переменной (домен в базе данных).

---

<sup>2</sup> Носитель можно считать вырожденной алгебраической системой с пустым набором операций и отношений.

Функциональному символу  $fn$  сопоставляется  $n$ -местная функция (алгебраическая операция)  $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A$ . Задать  $n$ -арную ( $n$ -местную) операцию на множестве  $X$  — значит задать правило, которое любому упорядоченному набору из  $n$  элементов множества  $X$  ставит в соответствие однозначно определенный элемент того же множества  $X$ .

Предикатному символу  $pr$  сопоставляется  $n + 1$ -местный предикат  $p: A_1 \times \dots \times A_{n+1} \rightarrow B$ . Двоичный предикат имеет всего два значения: истина и ложь (true, false). В двоичной (булевой) логике они часто обозначаются через 1 и 0:  $B = \{1, 0\}$ . В нечеткой логике, предложенной Л. Заде, значения предиката могут принимать любые промежуточные значения между нулем и единицей:  $B \in [0, 1]$ . Они трактуются как *частичная истина*. Поскольку предикат имеет смысл некоторого свойства  $P$  объекта  $x$ , он представляется функцией принадлежности  $\mu_P(x)$ ,  $0 < \mu_P(x) \leq 1$ .

Содержательная разница между функцией и предикатом обуславливается их ролью: функция применяется для *вычисления* значения переменной, а предикат — для *исчисления* истинности полученного значения. При этом возможен переход от  $n$ -местной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$  к  $n + 1$ -местному предикату тогда и только тогда, когда предикат  $p(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  истинен. Например, функции  $+(2, 2) = 4$  соответствует предикат  $+(2, 2, 4) = \text{true}$ , а функции  $+(2, 2) = 5$  — предикат  $+(2, 2, 5) = \text{false}$ .

Функция принадлежности отражает частичную истину. Например, освоение студентом Ивановым курса дискретной математики на 80% представляется функцией принадлежности  $\mu_{DM}(\text{Иванов}) = 0,8$ .

В силу тождественности (изоморфизма)  $n$ -местного отношения  $R \subset A_1 \times \dots \times A_n$  и  $n + 1$ -местного предиката  $p$ :

Таблица 2.1

Таблица истинности предиката  $P_{пч}$ 

$X \times X$	$P_{пч}$	$X \times X$	$P_{пч}$	$X \times X$	$P_{пч}$	$X \times X$	$P_{пч}$
(1,1)	0	(2,1)	1	(3,1)	0	(4,1)	1
(1,2)	1	(2,2)	0	(3,2)	1	(4,2)	0
(1,3)	0	(2,3)	1	(3,3)	0	(4,3)	1
(1,4)	1	(2,4)	0	(3,4)	1	(4,4)	0

$A_1 \times \dots \times A_{n+1} \rightarrow B$ , справедлива другая форма записи алгебраической системы  $\langle A, C, F, R \rangle$ , в которой символ предикатора заменен на символ отношений  $R$ .

Тождественность  $n$ -местного отношения  $R \subset A_1 \times \dots \times A_n$  и  $n + 1$ -местного предиката  $p$  наглядно иллюстрируется следующим примером.

**Пример 2.1.** На носителе  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  определить бинарное отношение «нечетные суммы индексов пар»  $R_{\text{нч}}$ . В матричной форме отношение  $R_{\text{нч}}$  имеет вид

$$R_{\text{нч}} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Единицами помечены клетки матрицы, соответствующие нечетным суммам индексов пар, таких как  $(1, 2) \in R_{\text{нч}}$ . Предикат «нечетные суммы индексов пар»  $P_{\text{нч}}$  представляется табл. 2.1.

Единицами помечена истинность вхождения пар из прямого (декартова) произведения  $X \times X$  в бинарное отношение «нечетные суммы индексов пар»  $R_{\text{нч}}$ .

Пару  $\langle F, R \rangle$  называют *сигнатурой* системы. Использование только одного из этих символов представляет собой частные случаи алгебраической системы. К ним относятся соответственно *алгебра*  $\langle A, F \rangle$  и *модель*  $\langle A, R \rangle$ , или реляционная система.

## 2.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

**Определение 2.1.** Пусть  $\langle X, * \rangle$  — алгебра. Операция  $*$  называется *ассоциативной* (сочетательной), если для всякой тройки элементов  $x, y, z \in X$  выполняется равенство

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Операция  $*$  называется *коммутативной* (перестановочной), если для всякой пары элементов  $x, y \in X$  выполняется равенство  $x * y = y * x$ .

Элемент  $e$  называется *нейтральным* по отношению к этой операции, *если* для всех  $x \in X$  выполняется равенство

$$x * e = e * x = x.$$

**Теорема 2.1.** Если нейтральный элемент существует, то он — единственный.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть таких элементов два:  $e$  и  $e_1$ . Тогда  $e * e_1 = e$  и  $e * e_1 = e_1$ . Отсюда  $e = e_1$ .

**Определение 2.2.** Пусть  $\langle X, * \rangle$  — алгебра, причем существует нейтральный элемент  $e$ . Элемент  $y$  называется *обратным* к элементу  $x$ , а  $x$  — *обратным* к  $y$ , если

$$x * y = y * x = e.$$

Для ассоциативной операции выражение  $x * x * x * \dots * x$ , в котором участвует  $n$  раз один элемент  $x \in X$ , не требует скобки. В связи с этим удобно использовать для обозначения ассоциативной операции  $*$  два вида записи: *аддитивную* (+) и *мультипликативную* ( $\cdot$ ). При этом получаем два случая записи операции.

1. В случае аддитивной записи операции пишут:

$$x * x * \dots * x = x + x + \dots + x = n \cdot x,$$

нейтральный элемент называют *нулем* и обозначают  $0$ , а обратный элемент к  $x$  — *противоположным* и обозначают  $(-x)$ , т. е.

$$x + 0 = x, \quad x + (-x) = 0.$$

2. В случае мультипликативной записи операции пишут:

$$x * x * \dots * x = x \cdot x \cdot \dots \cdot x = x^n,$$

нейтральный элемент называют *единицей* и обозначают  $1$ , а обратный элемент к  $x$  обозначают  $x^{-1}$ , т. е.

$$x \cdot 1 = x, \quad x \cdot x^{-1} = 1.$$

Свойства операций определяются относительно элементов носителя, являющихся их аргументами. Элементами носителя могут быть числа, которые делятся на *натуральные*  $\mathbf{N}$ , *целые*  $\mathbf{Z}$ , *рациональные*  $\mathbf{Q}$ , *вещественные*

(действительные)  $\mathbf{R}$ . Натуральные числа включают целые положительные числа, кроме нуля. Рациональное число представляется несократимой обыкновенной дробью. Рациональные и иррациональные числа входят в множество вещественных чисел. Если натуральные числа возникли для выполнения счета, рациональные — из потребности оперировать частями целого, то вещественные числа предназначены для измерения непрерывных величин.

**Пример 2.2.** Рассмотрим множество целых чисел  $Z$  с обычными операциями сложения и умножения  $\langle Z, +, \cdot \rangle$ . Обе операции здесь ассоциативны и коммутативны. Для них существуют нейтральные элементы:  $0$  — для сложения и  $1$  — для умножения.

**Определение 2.3.** Пусть  $\langle X, \cdot, \dots \rangle$  и  $\langle Y, \circ, \dots \rangle$  — две алгебры с одинаковым числом алгебраических операций.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется изоморфизмом алгебр, если оно биективно, все операции первой алгебры поставлены в биективное соответствие всем операциям второй алгебры и результаты этих операций тождественны:

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \quad x, y \in X, \quad f(x), f(y) \in Y.$$

Смысл понятия изоморфизма заключается в том, что изоморфные множества с операциями не различимы, когда предметом изучения является сама алгебраическая операция, а природа элементов, из которых составлены множества, не имеет значения.

**Пример 2.3.** Возьмем множество положительных действительных чисел:

$$\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}.$$

Определим отображение  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$  формулой  $f(x) = 10^x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

Тогда  $f$  — изоморфизм из  $\langle \mathbf{R}, + \rangle$  в  $\langle \mathbf{R}^+, \cdot \rangle$ . В самом деле, отображение  $f$  биективно и  $f(x + y) = 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y = f(x) \cdot f(y)$ .

На свойствах данного изоморфизма основан принцип действия логарифмической линейки и вообще использование логарифмов: умножение чисел можно заменить сложением их логарифмов.

### 2.3. АЛГЕБРЫ С ОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ. ГРУППЫ

Алгебры с одной алгебраической операцией образуют полугруппы, моноиды, группы.

**Определение 2.4.** Множество с заданной на нем одной ассоциативной бинарной операцией называется *полугруппой*. Полугруппа с нейтральным элементом (с единицей) называется *моноидом*, или *полугруппой с единицей*.

Если заданная бинарная операция еще и коммутативна, то полугруппа, или моноид, называется *коммутативной* (абелевой).

Итак, в полугруппе может не существовать обратный элемент и даже нейтральный элемент. В моноиде обязательно есть нейтральный, но может не быть обратного.

**Пример 2.4.** Множество натуральных чисел с операцией сложения  $\langle \mathbf{N}, + \rangle$  является коммутативной полугруппой (нет нейтрального элемента — нуля).

**Пример 2.5.** Множество натуральных (положительных целых) чисел с операцией умножения есть коммутативная полугруппа  $\langle \mathbf{N}, \cdot \rangle$  с единицей. Здесь есть нейтральный элемент, но нет обратных для всех элементов, не равных единице. Это коммутативный (абелев) моноид.

**Определение 2.5.** Алгебра  $A = \langle X, * \rangle$  называется *группой*, если она полугруппа с единицей (моноид), в которой каждый элемент обратим.

Если  $Y \subseteq X$  и алгебра  $B = \langle Y, * \rangle$  с той же операцией, что и в  $A$ , является сама группой, то она называется *подгруппой* группы  $A$ . Группа называется *циклической*, если она имеет единственный образующий элемент  $x_0$ , т. е. для любого  $x \in X$  найдется такое целое число  $k \in \mathbf{Z}$ , что  $x = x_0^k$ .

В группе есть одна ассоциативная операция, есть нейтральный элемент (единица) и есть обратный элемент для любого.

**Пример 2.6.** Полугруппа  $(\mathbf{Z}, +)$  есть группа. В ней единицей служит число 0, а обратным к  $z \in \mathbf{Z}$  является число  $-z$ . Это коммутативная (абелева) циклическая группа с образующим элементом  $x_0 = 1$ .

**Пример 2.7.** Полугруппы  $(\mathbf{N}, +)$  и  $(\mathbf{N}, \cdot)$  не являются группами. У первой нет нейтрального элемента (нуля), у второй никакой элемент, кроме 1, не имеет обратного.

**Пример 2.8.** Множество целых чисел относительно умножения  $(\mathbf{Z}, \cdot)$  не образует группу, так как нет обратного для любого элемента множества, кроме единицы.

**Пример 2.9.** Все отличные от нуля рациональные числа и все отличные от нуля действительные числа образуют группы относительно умножения, причем коммутативные (абелевы).

## 2.4. АЛГЕБРЫ С ДВУМЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ. КОЛЬЦА И ПОЛЯ

**Определение 2.6.** *Кольцом* называется алгебра  $\langle X, +, \cdot \rangle$  с двумя ассоциативными бинарными операциями: сложением (+) и умножением ( $\cdot$ ), которая удовлетворяет аксиомам.

1.  $\langle X, + \rangle$  — коммутативная группа (по сложению).
2.  $\langle X, \cdot \rangle$  — полугруппа (по умножению).
3. Для любых элементов  $x, y, z \in X$  имеет место дистрибутивность (распределительный закон):

$$\begin{aligned}(x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z; \\ z \cdot (x + y) &= z \cdot x + z \cdot y.\end{aligned}$$

Если при этом существует нейтральный элемент (единица) для умножения, то кольцо называется *кольцом с единицей*.

Если операция умножения коммутативна, то кольцо называется *коммутативным*.

**Пример 2.10.** Рассмотрим множество целых чисел с обычными операциями сложения и умножения  $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle$ . Это коммутативное кольцо с единицей.

**Пример 2.11.** Множество квадратных матриц порядка  $n$  относительно операций сложения и умножения матриц есть кольцо с единицей  $E$  — единичной матрицей. При  $n > 1$  это кольцо некоммутативное.

Среди алгебр с двумя операциями центральное место занимают *поля*, широко применяемые в приложениях. Часто вместо термина «поле» используют термин «арифметика».

**Определение 2.7.** Коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обладает обратным относительно операции умножения, называется *полем*.

**Пример 2.12.** Кольцо целых чисел  $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle$  с обычными операциями сложения и умножения полем не является (нет обратного элемента у каждого элемента).

**Пример 2.13.** Среди бесконечных полей особое значение имеют три. Это — множество рациональных чисел  $\langle \mathbf{Q}, +, \cdot \rangle$ , множество действительных чисел  $\langle \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$  и множество комплексных чисел  $\langle \mathbf{C}, +, \cdot \rangle$  с операциями сложения и умножения.

Наряду с бесконечными полями имеются многочисленные конечные поля, называемые *полями Галуа* в честь французского математика Э. Галуа, который в возрасте около 20 лет создал основы современной алгебры и, в частности, открыл конечные поля. Конечные поля играют центральную роль в криптографии (кодировании и шифровании). Определим сравнимость целых чисел по модулю  $m$ , т. е. бинарное отношение эквивалентности на множестве целых чисел  $R_m \subset \mathbf{Z}^2$ .

**Определение 2.8.** Два целых числа  $k, l$  называют *равными по модулю  $m$*  и пишут  $k = l \pmod{m}$ , если они имеют равный остаток от деления каждого на  $m$ .

Отношение эквивалентности  $R_m$  определяет разбиение множества  $\mathbf{Z}$  на  $m$  подмножеств — классов эквивалентности,  $[0], [1], \dots, [m-1]$ . Обозначим фактор-множество  $\mathbf{Z}/R_m$  через  $\mathbf{Z}_m$ .

**Определение 2.9.** Введем на  $\mathbf{Z}_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$  операции следующим образом:

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y] \text{ — сложение;} \\ [x] \cdot [y] &= [x \cdot y] \text{ — умножение.} \end{aligned}$$

Если  $x_1 = x \pmod{m}$ ,  $y_1 = y \pmod{m}$ , то  $x_1 + y_1 = (x + y) \pmod{m}$  и

$$x_1 \cdot y_1 = x \cdot y \pmod{m}.$$

Алгебра  $\langle \mathbf{Z}_m, +, \cdot \rangle$  есть коммутативное кольцо с единицей:

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y] = [y \cdot x] = [y] \cdot [x] \quad \text{для} \quad \forall x, y \in \mathbf{Z},$$

и называется *кольцом вычетов по модулю  $m$* .

Важным частным случаем  $\mathbf{Z}_m$  является кольцо и одновременно поле  $\mathbf{Z}_2$ . Оно имеет единственный ненулевой элемент  $[1]$ , и он обратим  $[1] \cdot [1] = [1]$ .

Операции сложения и умножения в поле  $\mathbf{Z}_2$  приведены в таблицах Кэли (табл. 2.2 и 2.3), где для простоты  $[0]$  и  $[1]$  заменены на 0 и 1.

Таблица 2.2  
Сложение

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблица 2.3  
Умножение

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Кольцо  $\mathbf{Z}_m$  обладает свойствами поля при следующем условии.

**Теорема 2.2.** Кольцо  $\mathbf{Z}_m$  является полем тогда и только тогда, когда  $m$  — простое число.

**Пример 2.14.** В поле  $\mathbf{Z}_5$  решить уравнение  $3 \cdot x = 4$ . Умножим обе части уравнения на число, обратное трем в поле  $\mathbf{Z}_5$ , т. е. на 2. Получим  $2 \cdot 3 \cdot x = 2 \cdot 4$  или  $x = 3$ .

**Пример 2.15.** В поле  $\mathbf{Z}_5$  решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 3; \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y = 1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, обратный элемент к 2 в поле  $\mathbf{Z}_5$ . Второе уравнение умножим на 2, обратный элемент к 3 в поле  $\mathbf{Z}_5$ . Тогда получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x + 4 \cdot y = 4; \\ x + 3 \cdot y = 2. \end{cases}$$

После вычитания второго уравнения из первого получается  $y = 2$ . Подставим это число в первое уравнение. Получим  $x = 1$ . Решение системы найдено.

**Определение 2.10.** Кольцо  $\langle X, \oplus, \cdot \rangle$  называется *булевой*, если оно имеет единицу и для всех элементов  $x \in X$  справедливо равенство  $x^2 = x$ .

В булевом кольце операция сложения обозначается  $\oplus$ .

Кольцо называется булевым по имени английского математика Дж. Буля (1815–1865) — основоположника математической логики.

Всякое булево кольцо коммутативно:  $x \cdot y = y \cdot x$  и обладает свойством

$$\forall x, y \in X \quad x \oplus x = 0.$$

## 2.5. АЛГЕБРЫ С ТРЕМЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ. БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

**Определение 2.11.** Алгебра  $\langle X, \vee, \wedge, \neg \rangle$  с тремя алгебраическими операциями, которые называются *дизъюнкцией*, *конъюнкцией* и *отрицанием*, называется *булевой*, если операции дизъюнкции (или)  $\vee$  и конъюнкции (и)  $\wedge$  — бинарные, операция отрицания (не)  $\neg x$  или  $\bar{x}$  — унарная, и все они обладают следующими свойствами:

1.  $\langle X, \vee \rangle$  — коммутативный моноид с нейтральным элементом «0».

2.  $\langle X, \wedge \rangle$  — коммутативный моноид с нейтральным элементом «1».

Выполняются следующие равенства для  $\forall x, y, z \in X$ .

3.  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  — дистрибутивность.

4.  $x \wedge (x \vee y) = x$  — поглощение.

5.  $\overline{\bar{x}} = x$  — двойное отрицание.

6.  $x \vee \bar{y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$  — первый закон де Моргана.

7.  $x \wedge \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  — второй закон де Моргана.

8.  $x \wedge \bar{x} = 0$  — существует дополнительный элемент.

Булеву алгебру  $B = \langle X, \vee, \wedge, \neg \rangle$  согласно теореме 2.2 можно рассматривать как конечное поле  $\mathbf{Z}_2$  из двух элементов  $\langle B, +, \cdot \rangle$ .

Если в  $\mathbf{Z}_2$  операцию  $\vee$  задать так же, как сложение в алгебре вычетов, т. е. исправить случай  $1 \vee 1 = 1$  на  $1 \vee 1 = 0$ , то получим другую булеву алгебру.

**Теорема 2.3.** Пусть  $\langle X, \vee, \wedge, \neg \rangle$  — булева алгебра. Положим:

$$\begin{aligned}x \oplus y &= (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}), \\x \cdot y &= x \wedge y.\end{aligned}$$

Тогда  $\langle X, \oplus, \cdot \rangle$  будет *булевым кольцом*.

И обратно, если  $\langle X, \oplus, \cdot \rangle$  — булево кольцо, то, полагая

$$\begin{aligned}x \vee y &= x \oplus y \oplus x \cdot y, \\x \wedge y &= x \cdot y, \\\bar{x} &= 1 \oplus x,\end{aligned}$$

получим булеву алгебру.

Для доказательства следует проверить, удовлетворяют ли приведенные формулы определения булева кольца и булевой алгебры соответственно.

Рассмотрим декартову степень  $B^n = B \times \dots \times B$  простейшей булевой алгебры  $B = \langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg \rangle$ . Элементами этой степени будут  $n$ -мерные векторы  $(x_1, \dots, x_n)$  из нулей и единиц. Операции над векторами определим следующим образом:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) \vee (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n), \\(x_1, \dots, x_n) \wedge (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n), \\(x_1, \dots, x_n) &= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).\end{aligned}$$

Такую булеву алгебру называют *координатной* [4]. В частности, для  $n = 1$  пишут  $B^1 = B$ . Относительно разложения функции на аргументы координатная булева алгебра подобна линейному пространству  $R^n$  в непрерывной математике.

Всякую координатную булеву алгебру  $B^n$  можно интерпретировать как *булеву алгебру подмножеств*  $\langle 2^A, \cup, \cap, - \rangle$  для некоторого конечного множества  $A$  мощности  $|A| = n$ . Здесь:  $\cup$  — объединение,  $\cap$  — пересечение, « $-$ » — дополнение некоторого подмножества до множества  $A$ . Роль нуля здесь играет пустое множество, а роль единицы — само множество  $A$ , играющее роль универсума.

Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Тогда всякий вектор  $(x_1, \dots, x_n)$  из нулей и единиц задает характеристическую функцию подмножества  $A$ . Например, пустое подмножество  $\emptyset$  задается

вектором  $(0, \dots, 0)$ , все множество  $A$  задается вектором  $(1, \dots, 1)$  и т. д.

**Теорема 2.4.** Любая конечная булева алгебра  $\langle X, \vee, \wedge, \neg \rangle$  изоморфна некоторой координатной булевой алгебре  $B^n$ .

## 2.6. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Рассмотрим применение булевых алгебр для описания важного класса функций в дискретной математике.

### 2.6.1. ТАБЛИЧНОЕ ЗАДАНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

**Определение 2.12.** Функцию вида  $f: B^n \rightarrow B$  называют *булевой функцией*  $n$  переменных и пишут:  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ .

Булевы функции одной и двух переменных удобно задавать в табличной форме. Так как всего разных векторов-значений  $y$  из нулей и единиц длины два равно  $2^2 = 4$ , то всего разных булевых функций одной переменной будет четыре (табл. 2.4):

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \bar{x}, \quad f_4(x) = 1.$$

Аналогично, различных булевых функций двух переменных будет всего  $2^{2^2} = 16$ . В табл. 2.5 приведены семь

Таблица 2.4

Функции одной переменной

x	f <sub>1</sub> (x)	f <sub>2</sub> (x)	f <sub>3</sub> (x)	f <sub>4</sub> (x) = 1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2.5

Булевы функции двух переменных

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>	f <sub>4</sub>	f <sub>5</sub>	f <sub>6</sub>	f <sub>7</sub>
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

наиболее часто используемых булевых функций двух переменных.

Для них введены специальные обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 \vee x_2, & f_2(x_1, x_2) &= x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2; \\ f_3(x_1, x_2) &= x_1 \oplus x_2, & f_4(x_1, x_2) &= x_1 \equiv x_2, \\ f_5(x_1, x_2) &= x_1 \rightarrow x_2; \\ f_6(x_1, x_2) &= x_1 | x_2, & f_7(x_1, x_2) &= x_1 \downarrow x_2. \end{aligned}$$

Функцию  $f_1$  называют дизъюнкцией,  $f_2$  — конъюнкцией,  $f_3$  — сложением по модулю 2 ( $\text{mod } 2$ ),  $f_4$  — эквивалентностью,  $f_5$  — импликацией,  $f_6$  — штрихом Шеффера,  $f_7$  — стрелкой Пирса.

### 2.6.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим один вид аналитического задания булевых функций, который называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ). Пусть булева функция  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задана  $n$ -мерными двоичными векторами.

**Определение 2.13.** Булева функция  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  вида

$$K_s = x_1^{s_1} \cdot x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$$

называется *совершенной элементарной конъюнкцией* или *конъюнктом*. В зависимости от значения  $s_i \in \{0, 1\}$   $i$ -й аргумент  $x_i^{s_i}$  конъюнкции  $K_s$ , представляет прямое  $x_i^1 = x_i$  либо инверсное  $x_i^0 = \bar{x}_i$  значение  $i$ -й переменной.

Число различных конъюнктов  $n$  переменных равно  $2^n$ . Каждый конъюнкт обладает следующим важным свойством.

**Теорема 2.5.** Конъюнкт  $K_s = x_1^{s_1} \cdot x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$  равен 1 лишь на одном наборе  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  нулей и единиц, когда  $x_i = s_i$ , т. е.  $K_s(s) = 1$ .

Из этой теоремы следует, что дизъюнкция  $m$  различных конъюнктов равна 1 лишь на  $m$  наборах из нулей и единиц, соответствующих этим конъюнктам. Отсюда следует вывод.

**Теорема 2.6.** Если булева функция  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не является тождественно равной нулю и задана таблицей

с  $m \geq 1$  единичными значениями, то существует *единственная* дизъюнкция  $m$  различных конъюнктов, соответствующих этим значениям, которая задает булеву функцию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{s, f(s)=1} K_s(x)$$

и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) данной булевой функции.

**Пример 2.16.** Рассмотрим булеву функцию трех переменных  $f(x_1, x_2, x_3)$ , заданную в табл. 2.6. Эту функцию называют *функцией голосования*.

Если пронумеровать строки таблицы десятичными эквивалентами, то из нее видно, что в строках с номерами 3, 5, 6, 7 значения функции равны 1. Это записывают так:

$$f(x) = \{3, 5, 6, 7\}.$$

В силу теоремы (2.6) функция голосования задается в СДНФ аналитически как дизъюнкция четырех следующих конъюнктов:

$$f(x) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Помимо СДНФ, булева функция может быть задана в других формах. Альтернативой *конъюнкту*  $K_s(x)$  является *дизъюнкт*  $D_s(x)$ , или *совершенная элементарная дизъюнкция*. Для дизъюнкта определяющим будет значение 0. Конъюнкция  $m$  различных дизъюнктов однозначно представляет любую булеву функцию, не равную тождественно 1, в форме конъюнкции  $m \geq 1$  дизъюнктов, соответст-

Таблица 2.6

Задание булевой функции голосования

Номер	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

вующих нулевым значениям функции. Эта форма аналитического задания булевых функций называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) булевой функции:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{s, f(s)=1} D_s(x).$$

В СКНФ удобно представлять функции с малым числом единиц.

**Пример 2.17.** Представить импликацию  $f_5(x_1, x_2)$  из табл. 2.5 в СКНФ.

$$f_5(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2.$$

## 2.7. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Произвольная булева функция может быть выражена через набор некоторых выделенных основных булевых функций подобно тому, как любая сложная функция выражается через основные элементарные функции.

**Определение 2.14.** Пусть даны булевы функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ...,  $g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Подставим функции  $g_i$  в функцию  $f$ . Получим новую булеву функцию:

$$f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

которую называют *суперпозицией* функций  $f, g_1, \dots, g_m$ . Метод получения произвольных булевых функций через базисные называют *операцией суперпозиции* булевых функций.

**Определение 2.15.** Набор булевых функций  $M = \{f_1, \dots, f_m\}$  называется *полной системой булевых функций*, или *базисом*, если любая булева функция выражается через них при помощи операции суперпозиции в конечном числе раз.

Набор булевых функций  $M = \{\vee, \wedge, \neg\}$  является полной системой булевых функций, так как любая булева функция может быть аналитически представлена в форме СДНФ или СКНФ. Эту полную систему называют *стандартным базисом*.

Приведем примеры выражения трех булевых функций, представленных в табл. 2.5, в стандартном базисе:

$$\begin{aligned}x_1 \rightarrow x_2 &= \bar{x}_1 \vee x_2; \\x_1 \mid x_2 &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2; \\x_1 \oplus x_2 &= (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2).\end{aligned}$$

**Теорема 2.7 (о двух системах).** Пусть имеется полная система булевых функций  $M = \{f_1, \dots, f_m\}$ . Тогда для полноты некоторой другой системы булевых функций  $N = \{g_1, \dots, g_n\}$  необходимо и достаточно, чтобы любая функция  $f_i \in M$  выражалась через функции системы  $N$  при помощи операции суперпозиции.

Приведем примеры других полных систем.

$$1. N = \{\oplus, \cdot, 1\}.$$

Она является полной, так как любая функция из стандартного базиса выражается через функции из  $N$ :

$$\begin{aligned}x_1 \wedge x_2 &= x_1 \cdot x_2, \\ \bar{x} &= x \oplus 1, \\ x_1 \vee x_2 &= \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus 1 = \\ &= (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2.\end{aligned}$$

Эта полная система называется *базисом Жегалкина*. Любая булева функция может быть представлена в этом базисе в форме многочлена Жегалкина по степеням неизвестных, например:

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

2. Полной является система, состоящая из одной функции Шеффера:  $N = \{\mid\}$ . Через нее выражаются функции стандартного базиса:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \mid x, \\ x_1 \wedge x_2 &= (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2), \\ x_1 \vee x_2 &= (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2).\end{aligned}$$

**Определение 2.16.** Класс булевых функций  $K$  называется *замкнутым*, если всякая суперпозиция функций этого класса будет функцией из этого класса.

Приведем пять важных замкнутых классов Поста, отличных от  $K$ :

- класс  $T_0$  — множество булевых функций, равных 0 на нулевых значениях всех переменных;

- класс  $T_1$  — множество булевых функций, равных 1 на единичных значениях всех переменных;
- класс  $S$  — множество *самодвойственных* функций, которые обладают свойством:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)};$$

- класс  $L$  — множество *линейных* функций, которые в базисе Жегалкина представляются многочленом не выше первой степени;
- класс  $M$  — множество *монотонных* функций, которые обладают свойством:

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n), \quad \text{если все } x_i \leq y_i.$$

С классами Поста связан второй алгоритм определения полноты системы булевых функций, основанный на следующей теореме.

**Теорема 2.8 (теорема Поста — Яблонского).** Для того чтобы множество  $N$  булевых функций было полной системой, необходимо и достаточно найти для каждого из пяти замкнутых классов Поста  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $L$ ,  $M$  функцию из  $N$ , которая ему не принадлежит.

Рассмотрим множество из одной функции Шеффера  $N = \{\mid\}$ . Известно, что это полная система. Проверим это вторым алгоритмом. Согласно теореме Поста такая единственная функция не должна принадлежать ни одному из классов Поста. Так как  $x_1 \mid x_2 = x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ , то имеем  $0 \mid 0 = 1$ . Следовательно, штрих Шеффера не принадлежит классу  $T_0$ . Так как  $1 \mid 1 = 0$ , то штрих Шеффера не принадлежит классу  $T_1$ . Теперь покажем, что он не самодвойственная функция:

$$\overline{\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \neq x_1 \mid x_2.$$

Штрих Шеффера не является линейной функцией, так как

$$x_1 \mid x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus 1.$$

Штрих Шеффера не принадлежит классу монотонных функций, так как

$$0 \mid 0 = 1, \quad 1 \mid 1 = 0.$$

## 2.8. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Для выполнения операций над множествами задается *универсальное*, или опорное, множество  $U$ . Все входящие в него множества рассматриваются как его собственные подмножества. Относительно множества  $U$  определяется множество  $\bar{X} = U \setminus X$ , дополнительное по отношению к исходному множеству  $X$ . Помимо единственной унарной операции, используются следующие бинарные операции над множествами  $X$  и  $Y$ .

1. Объединение  $X \cup Y$ . В него входят элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств  $X$  или  $Y$ .

2. Пересечение  $X \cap Y$ . В него входят элементы, принадлежащие каждому из множеств  $X$  и  $Y$ .

3. Разность  $X \setminus Y$ . В нее входят элементы, принадлежащие множеству  $X$  и не принадлежащие множеству  $Y$ :

$$X \setminus Y = X \cap (U \setminus Y).$$

4. Симметрическая разность  $X \oplus Y$ . Она объединяет прямую и обратную разности множеств  $X$  и  $Y$ :

$$X \oplus Y = X \setminus Y \cup Y \setminus X = (X \cap (U \setminus Y)) \cup (Y \cap (U \setminus X)).$$

Рассмотренные операции имеют геометрическую интерпретацию, показанную на рис. 2.1 и 2.2 с применением диаграмм Венна.

Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — подмножества универсального множества  $U$ . Тогда для них справедливы следующие тождества:

1)  $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$  — ассоциативность объединения;

2)  $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$  — ассоциативность пересечения;

3)  $X \cup Y = Y \cup X$  — коммутативность объединения;

4)  $X \cap Y = Y \cap X$  — коммутативность пересечения;

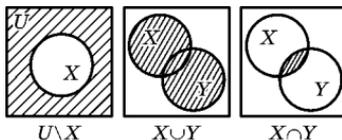


Рис. 2.1

Диаграммы Венна для операций  $U \setminus X$ ,  $X \cup Y$ ,  $X \cap Y$

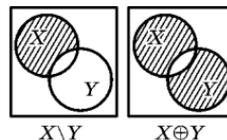


Рис. 2.2

Диаграммы Венна для операций  $X \setminus Y$ ,  $X \oplus Y$

5)  $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$  — дистрибутивность относительно операции  $\cup$ ;

6)  $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$  — дистрибутивность относительно операции  $\cap$ ;

7)  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ ,  $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$  — законы де Моргана.

Любое из тождеств наглядно доказывается с применением логических операций И ( $\wedge$ ), ИЛИ ( $\vee$ ), НЕ ( $\neg$ ) над характеристическими функциями (функциями принадлежности) множеств  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

**Пример 2.18.** Привести доказательство закона де Моргана  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$  с применением логических операций над характеристическими функциями множеств  $X$  и  $Y$ .

Как следует из рис. 2.3, графики функций принадлежности  $\mu_{\overline{X \cup Y}}(x)$  и  $\mu_{\overline{X} \cap \overline{Y}}(x)$  совпадают.

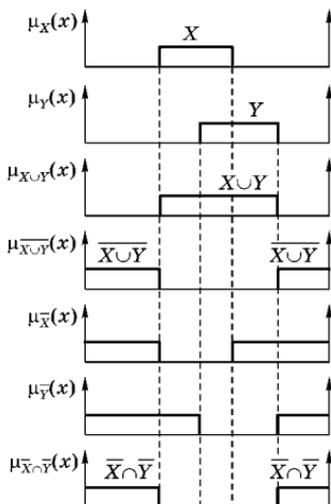


Рис. 2.3

Графическое доказательство тождества  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

### У п р а ж н е н и я

1. Представить в теоретико-множественной форме функцию  $y = f(x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_1, x_2, x_3 \in X$ ,  $y \in Y$ .
2. Оценить истинность выражения  $5 \times 5 = 25$  с помощью предиката.
3. Оценить истинность выражения  $5 \times 5 = 40$  с помощью предиката.
4. Привести обратные элементы для числа  $4 \in \mathbf{R}$  для операций сложения и умножения.
5. Существуют ли обратные элементы для числа  $4 \in \mathbf{N}$ ?
6. Выполнить вычитание  $45 - 27$  через сложение по mod 100.
7. Доказать равенство  $17 = 72 \pmod{11}$ .
8. Задать булевыми функциями трех переменных принадлежность чисел от 0 до 7 к каждому из трех классов поля  $\mathbf{Z}_3$ .
9. Преобразовать многочлен Жегалкина  $x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$  в стандартный базис.
10. Выразить импликацию через штрих Шеффера.
11. Привести доказательство закона де Моргана  $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$  с применением логических операций над характеристическими функциями множеств  $X$  и  $Y$ .

**АЛГЕБРА ОТНОШЕНИЙ**

Алгебру отношений будем рассматривать на примере бинарных отношений с одно- и двухместными операциями. Они позволяют получать произвольные бинарные отношения на основе отношений-аргументов. Важную роль в практических применениях играют специальные бинарные отношения, обладающие некоторыми элементарными и неэлементарными свойствами. Согласно теореме 2.4 алгебра подмножеств изоморфна конечной булевой алгебре. А поскольку отношения, заданные на фиксированной паре множеств  $X$  и  $Y$ , суть *подмножества* множества  $X \times Y$ , то совокупность всех этих отношений образует булеву алгебру относительно операций объединения, пересечения и дополнения отношений. Исходя из понятия координатной булевой алгебры, следует помнить, что соответствующие операции над множествами обозначаются как  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $-$  ( $'$ ), а операции над булевыми переменными через  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ .

Операции алгебры отношений были использованы Е. Ф. Коддом в 1972 г. в созданной им реляционной алгебре, нашедшей применение в реляционных базах данных.

Выше было показано, что бинарное отношение может быть представлено в различных формах. Для иллюстрации свойств бинарных отношений и операций над бинарными отношениями будем использовать три формы: перечислительную (списочную), матричную и графовую формы. Первая из них принята в алгебре отношений, вторая удобна для компьютерной реализации операций над отношениями, а третья органична для человеческого вос-

приятия. Паре  $(v_i, v_j)$  из множества пар, входящих в бинарное отношение  $R$ , в матричной форме соответствует элемент  $a_{ij}$ , а в графе — дуга, исходящая из  $i$ -й и заходящая в  $j$ -ю вершину.

### 3.1. ОДНОМЕСТНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ

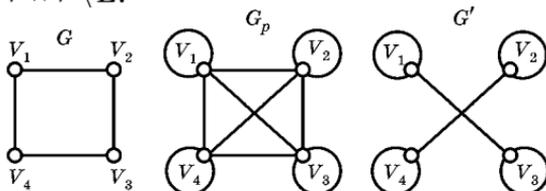
#### 3.1.1. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Дополнительное отношение  $R'$  (дополнение  $R$ ) на множестве  $X$  содержит только те пары  $(x_i, x_j)$  элементов универсума (декартового произведения)  $U = X \times X$ , которые не входят в  $R$ :  $R' = U \setminus R$ .

2. Пара  $(x_i, x_j) \in R'$  выражается через отрицание элемента  $a_{ij}$  матрицы исходного отношения  $R$ :  $a'_{ij} = \bar{a}_{ij}$ .

3. Дополнительный граф  $G'$  включает дуги (ребра), дополняющие исходный граф  $G$  до полного графа  $G_p$  с петлями (рис. 3.1):  $E' = V \times V \setminus E$ .

Рис. 3.1  
Графы: исходный  $G$ , полный  $G_p$ ,  
дополнение  $G'$



#### 3.1.2. ОБРАТНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Обратное отношение  $R^{-1}$  строится на основе исходного отношения  $R$  по следующему правилу:  $\forall (x_i, x_j) \in R (x_j, x_i) \in R^{-1}$ , т. е. элементы в парах *меняются местами*. Поэтому оно не имеет аналога в одномерных множествах.

2. Этому условию соответствует транспонирование матрицы  $A$  исходного отношения  $R$ :

$$a_{ji} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

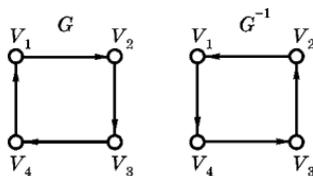


Рис. 3.2  
Графы: исходный  $G$   
и обратный  $G^{-1}$

3. Обратное отношение  $R^{-1}$  представляется графом  $G^{-1}$  с противоположным направлением дуг по отношению к исходному графу  $G$  (см. рис. 3.2). Очевидно, что обратное отношение  $R^{-1}$  применимо только к орграфам, оставляя неорграфы без изменения.

### 3.1.3. ДВОЙСТВЕННОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Двойственное отношение  $R^d$  содержит пары, дополняющие обратное отношение  $R^{-1}$  до универсума  $U$ :  $R^d = (V \times V) \setminus R^{-1} = (R^{-1})'$ . Поскольку двойственное отношение выражается через обратное отношение, оно не имеет аналога в одномерных множествах.

2. Элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности  $A^d$  двойственного отношения вычисляется как  $a_{ij}^d = \bar{a}_{ji}$ . Матрица смежности  $A^d$  для графа  $G$ , изображенного на рис. 3.2, вычисляется следующим образом:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad A^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix};$$

$$A^d = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Граф  $G^d$  строится относительно исходного графа  $G$  следующим образом (рис. 3.3):

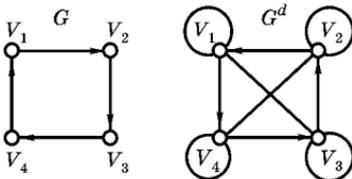


Рис. 3.3  
Графы: исходный  $G$   
и двойственный  $G^d$

- 1) из графа  $G$  исключаются все ребра и петли;
- 2) несвязанные пары вершин связываются ребрами;
- 3) добавляются все петли, которых не было в  $G$ ;
- 4) направление дуг меняется на обратное.

## 3.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

### 3.2.1. СВОЙСТВО, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ НА ОДНОИМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

#### 3.2.1.1. РЕФЛЕКСИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Рефлексивное отношение включает все пары, состоящие из *одноименных* элементов:  $\forall x_i \in X \quad (x_i, x_i) \in R$ .

2. Матрица  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$  рефлексивного отношения имеет единичную диагональ  $\mathbf{I}$ :  $a_{ii} = 1, i = \overline{1, n}$ .

3. Граф рефлексивного отношения имеет *петлю* в каждой вершине.

#### 3.2.1.2. АНТИРЕФЛЕКСИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Антирефлексивное отношение не включает ни одной пары, состоящей из одноименных элементов:  $\forall x_i \in X \quad (x_i, x_i) \notin R$ .

2. Матрица антирефлексивного отношения имеет нулевую диагональ:  $a_{ii} = 0, i = \overline{1, n}$ .

3. Граф антирефлексивного отношения не имеет петель.

#### 3.2.1.3. НЕРЕФЛЕКСИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. В нерефлексивное (частично рефлексивное) отношение входит *часть* пар, состоящих из одноименных элементов.

2. Матрица нерефлексивного отношения включает как единичные, так и нулевые элементы в главной диагонали.

3. Граф нерефлексивного отношения имеет петли не у всех вершин.

### 3.2.2. СВОЙСТВО, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ НА ПАРАХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### 3.2.2.1. СИММЕТРИЧНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Каждой прямой паре элементов симметричного отношения  $(x_i, x_j) \in R^{(s)}$  соответствует обратная пара:

$$\forall (x_i, x_j) \in R^{(s)} \quad (x_j, x_i) \in R^{(s)}.$$

2. Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали:  $a_{ji} = a_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

3. Симметричное отношение  $R^{(s)}$  представляется неорграфом.

## 3.2.2.2.

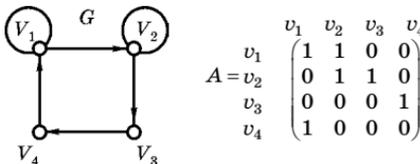
## АНТИСИММЕТРИЧНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Наличие прямой пары элементов исключает обратную пару:

$$\forall (x_i, x_j) \in R^{(a)} \quad (x_j, x_i) \notin R^{(a)}.$$

2. Матрица антисимметричного отношения несимметрична относительно главной диагонали:  $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

3. Антисимметричное отношение  $R^{(a)}$  представляется оргграфом (рис. 3.4).

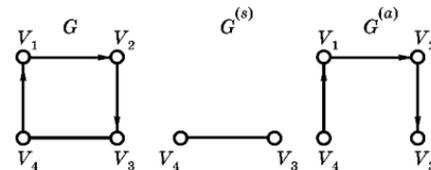


**Рис. 3.4**  
Граф и матрица  
антисимметричного  
отношения

## 3.2.2.3.

## НЕСИММЕТРИЧНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Несимметричное (частично симметричное) отношение  $R^{(ns)}$  включает симметричную и антисимметричную составляющие и представляется смешанным графом (рис. 3.5).



**Рис. 3.5**  
Граф несимметричного  
отношения и его части

## 3.2.3.

СВОЙСТВО, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ  
НА ТРОЙКАХ ЭЛЕМЕНТОВ

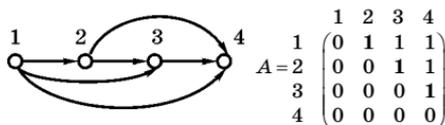
## 3.2.3.1.

## ТРАНЗИТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Для двух пар, принадлежащих отношению  $R$ :  $(x_i, x_j)$ ,  $(x_j, x_k) \in R$ , в транзитивном отношении присутствует третья пара:  $(x_i, x_k) \in R$ :

$$\forall x_i, x_j, x_k \in X \quad (x_i, x_j), (x_j, x_k) \in R \rightarrow (x_i, x_k) \in R.$$

**Рис. 3.6**  
Граф и матрица  
транзитивного замыкания



2. Для элемента  $a_{ik}$  матрицы транзитивного отношения  $R$  имеет место условие:

$$a_{ij} = a_{jk} = 1 \rightarrow a_{ik} = 1, \quad i \neq j, j \neq k, \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

3. Любая пара дуг  $(v_i, v_j), (v_j, v_k)$  графа транзитивного отношения имеет замыкающую дугу  $(v_i, v_k)$ . Дополнение исходного графа  $G(V, E)$  замыкающими дугами  $E_t$  до получения графа транзитивного отношения  $G(V, E, E_t)$  называется *транзитивным замыканием* графа  $G(V, E)$ . Транзитивное замыкание и матрица смежности графа  $G(V, E)$  с  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ , включающие дополнительные дуги  $E_t = \{(1, 3), (2, 4), (1, 4)\}$ , приведены на рис. 3.6, причем на рисунке и в матрице выделены дуги исходного отношения.

### 3.2.3.2.

#### АНТИТРАНЗИТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. Для двух пар, принадлежащих отношению  $R: (x_i, x_j), (x_j, x_k) \in R$ , в антитранзитивном отношении отсутствует третья пара:  $(x_i, x_k) \in R$ :

$$\forall v_i, v_j, v_k \in V \quad (v_i, v_j), (v_j, v_k) \in R \rightarrow (v_i, v_k) \notin R.$$

2. Для элемента  $a_{ik}$  матрицы транзитивного отношения  $R$  имеет место условие:

$$a_{ij} = a_{jk} = 1 \rightarrow a_{ik} = 0, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

3. Любая пара дуг  $(v_i, v_j), (v_j, v_k)$  графа антитранзитивного отношения не имеет замыкающей дуги  $(v_i, v_k)$ .

### 3.2.3.3.

#### СЛАБО ТРАНЗИТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Оно характеризуется *частичной* транзитивностью: не всем парам смежных дуг  $(v_i, v_j), (v_j, v_k)$  соответствует замыкающая дуга  $(v_i, v_k)$ .

### 3.2.3.4. НЕГАТРАНЗИТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ

1. К дополнению  $R'$  отношения  $R$  предъявляется требование *транзитивности*, в то время как само  $R$  не обязательно должно быть транзитивным.

2. Для элемента  $a'_{ik}$  матрицы негатранзитивного отношения  $R$  имеет место условие:

$$a'_{ij} = a'_{jk} = 1 \rightarrow a'_{ik} = 1, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

3. Дополнительный граф  $G'$  является транзитивным. На рис. 3.7 приведен граф  $G$ , обладающий свойством частичной негатранзитивности<sup>3</sup>.

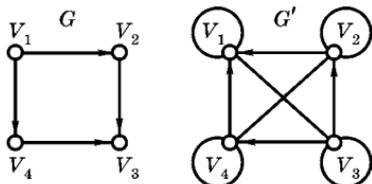


Рис. 3.7

Графы:  $G$  — нетранзитивный  
и  $G'$  — транзитивный

*Сильно транзитивное* отношение одновременно *транзитивно* и *негатранзитивно* (и исходный, и дополнительный графы транзитивны).

Графы и матрицы *сильно транзитивного* отношения приведены на рис. 3.8.

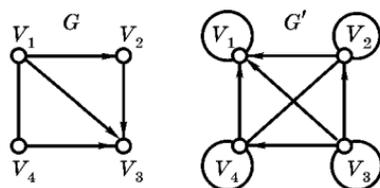


Рис. 3.8

Графы и матрицы  
сильно транзитивного отношения

$$A = \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_2 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ v_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A' = \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ v_4 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

### 3.2.4. НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Приведенные выше бинарные отношения отражали одно из элементарных свойств, определяемых на различных группах элементов. Теперь рассмотрим бинарные отношения, формируемые по нескольким свойствам. Назо-

<sup>3</sup> Для пар  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_3, v_4)$  и  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_3, v_2)$  в графе  $G'$  отсутствуют замыкающие дуги.

вем эти свойства неэлементарными. В качестве составляющих свойств будем использовать рефлексивность, симметрию и транзитивность. В табл. 3.1 приведены наиболее употребляемые неэлементарные свойства бинарных отношений.

1. *Эквивалентность* разбивает множество  $X$  на непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности). Каждый элемент класса тождествен себе (рефлексивен) и любому другому элементу этого класса (симметрия и транзитивность). Класс эквивалентности представим полным неорграфом.

**Пример 3.1.** Отношением эквивалентности на множестве целых чисел является отношение их равенства по модулю  $m$ . Два числа, имеющие одинаковый остаток от деления числа на модуль  $m$ , считаются равными по модулю  $m$ :  $x = y \pmod{m}$ . При этом множество целых чисел разбивается на  $m$  классов по числу остатков — от 0 до  $m - 1$ .

2. *Толерантности* (допустимости или попарному сходству) присущи рефлексия и симметрия, а транзитивность не имеет значения. Изображающий его неорграф имеет петли, но не имеет замыкающих ребер.

**Пример 3.2.** Дружба человека с двумя другими не означает, что они дружны между собой.

3. Отношение *строгого порядка* антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Оно выражает отношение

Таблица 3.1

Неэлементарные свойства бинарных отношений

	Свойства отношения						Обозначение
	Рефлексия*		Симметрия		Транзит.		
	Да	Нет	Да	Нет	Да	Нет	
Эквивалентность	✓		✓		✓		$x \equiv y$
Безразличие (толерантность)	✓		✓				$x \Delta y$
Строгий порядок		✓		✓	✓		$x < y = (x \leq y) \wedge (x \neq y)$
Нестрогий порядок	✓*			✓	✓		$x \leq y = (x < y) \wedge (x = y)$
Доминирование (слабый порядок)		✓		✓			$x \gg y$

\* Рефлексия хотя бы одной переменной.

превосходства и представляется транзитивным оргграфом без петель. Строгий порядок представим через нестрогий порядок и неравенство элементов множества.

**Пример 3.3.** Отношением строгого порядка является отношение «быть больше» на множестве целых чисел.

**4. Нестрогую порядок**, в отличие от строгого порядка, присуще свойство рефлексии, поскольку он отражает как превосходство, так и равнозначность элементов множества. Группа равных элементов представляется вершиной графа с петлей, кратность которой равна числу этих элементов.

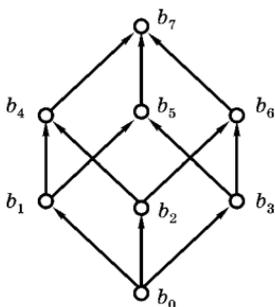
**Пример 3.4.** Отношением нестрогого порядка является отношение «быть больше или равно» на множестве повторяющихся целых чисел.

**5. Доминированию**, или слабому порядку, присущи антирефлексия и антисимметрия, а транзитивность не имеет значения. Оно представляется оргграфом без петель. Замыкающие дуги не обязательны.

**Пример 3.5.** Парное превосходство объектов  $A$  над  $B$  и  $B$  над  $C$  не требует превосходства  $A$  над  $C$ .

Множество  $X$ , на котором задано отношение порядка  $\leq$ , называется *частично упорядоченным* и обозначается как  $\langle X, \leq \rangle$ . Каждая пара частично упорядоченного множества либо несравнима, либо реализует отношения следования (превосходства) или равенства.

Частично упорядоченное множество, в котором все элементы сравнимы, т. е. для любых двух элементов  $a$  и  $b$  место имеет  $a > b$  или  $a = b$ , называется *линейно упорядоченным* множеством или *цепью*. Оно представляется полным ориентированным или смешанным графом.



**Рис. 3.9**  
Граф попарного  
включения множеств

Важнейшим частным случаем частично упорядоченных множеств является *вполне упорядоченное* множество. Любые два элемента этого множества имеют наибольший и наименьший, сравнимый с ними элемент.

**Пример 3.6.** Имеется множество  $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ . Рассмотрим множе-

**Пример 3.6.** Имеется множество  $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ . Рассмотрим множе-

ство  $B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ , состоящее из всевозможных объединений элементов  $a_1, a_2, a_3$ :  $b_0 = \emptyset$ ,  $b_1 = a_1$ ,  $b_2 = a_2$ ,  $b_3 = a_3$ ,  $b_4 = a_1 \cup a_2$ ,  $b_5 = a_1 \cup a_3$ ,  $b_6 = a_2 \cup a_3$ ,  $b_7 = a_1 \cup a_2 \cup a_3 = X$ . Отношение включения между элементами множества  $B$  представляется диаграммой Хассе (рис. 3.9).

Любые два элемента из этого примера имеют наибольший и наименьший сравнимый с ними элемент. В примере для  $b_1$  и  $b_2$  наименьшим является элемент  $b_0 = \inf(b_1, b_2)$ , а наибольшим —  $b_4 = \sup(b_1, b_2)$ .

Такие частично упорядоченные множества называют *решетками*.

### 3.3. ОПЕРАЦИИ НАД БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ

Рассмотрим различные операции над отношениями  $R_1$  и  $R_2$ . Как и при изложении свойств бинарных отношений, определим их в трех формах представления:

1) перечислительной (списочной) — над двухэлементными множествами:

$$R = R_1 \circ R_2;$$

2) матричной — над элементами  $a_{ij}^{(1)}$  и  $a_{ij}^{(2)}$  матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ :  $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} \circ a_{ij}^{(2)}$ ;

3) графовой — над множествами дуг  $E_1$  и  $E_2$ , принадлежащим графам  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$ ,  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $E = E_1 \cup E_2$ .

#### 3.3.1. ОБЪЕДИНЕНИЕ

1. Объединение  $R = R_1 \cup R_2$  бинарных отношений  $R_1$  и  $R_2$  на множестве  $X$  включает все пары, содержащиеся в этих отношениях.

2. Элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности объединения отношений  $R_1$  и  $R_2$  вычисляется как дизъюнкция одноименных элементов из матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ :  $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} \vee a_{ij}^{(2)}$ .

3. Граф  $G$  включает все ребра (дуги) графов  $G_1$  и  $G_2$ :  $E = E_1 \cup E_2$  (рис. 3.10).

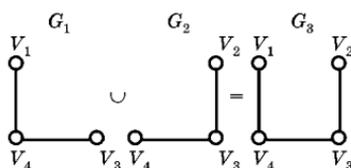


Рис. 3.10  
Объединение графов  $G_1$  и  $G_2$

### 3.3.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ

1. Пересечение  $R = R_1 \cap R_2$  включает *только общие* пары, содержащиеся в отношениях  $R_1$  и  $R_2$ .

2. Элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности пересечения отношений  $R_1$  и  $R_2$  вычисляется как конъюнкция одноименных элементов из матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ :  $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} \wedge a_{ij}^{(2)}$ .

3. Граф  $G$  включает только общие ребра графов  $G_1$  и  $G_2$ :  $E = E_1 \cap E_2$  (рис. 3.11).

### 3.3.3. РАЗНОСТЬ

1. Разность  $R = R_1 \setminus R_2$  включает те пары  $(x_i, x_j)$ , которые *содержатся* в отношении  $R_1$ , но *не содержатся* в отношении  $R_2$ . Вычитаемое множество выражается через дополнение  $R_2$ :  $R = R_1 \cap R'_2 = R_1 \cap (U \setminus R_2)$ .

2. Элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности разности отношений  $R_1$  и  $R_2$  вычисляется как конъюнкция прямого элемента матрицы  $\mathbf{A}_1$  и обратного элемента матрицы  $\mathbf{A}_2$ :  $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} \wedge \overline{a_{ij}^{(2)}}$ .

3. Граф  $G$  включает ребра, содержащиеся в графе  $G_1$ , но не содержащиеся в графе  $G_2$ :  $G = G_1 \setminus G_2$ ;  $E = E_1 \cap (U \setminus E_2)$  (рис. 3.12).

### 3.3.4. СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ

1. Симметрическая разность  $R = R_1 \oplus R_2$  объединяет пары из противоположных разностей  $R_1 \setminus R_2$  и  $R_2 \setminus R_1$ :  $R = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$  или  $R = (R_1 \cup R_2) \setminus (R_2 \cap R_1)$ .

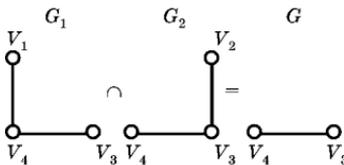


Рис. 3.11  
Пересечение графов  $G_1$  и  $G_2$

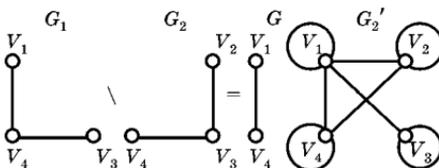


Рис. 3.12  
Разность графов  $G_1$  и  $G_2$   
и дополнение графа  $G_2$

2. Элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности симметрической разности отношений  $R_1$  и  $R_2$  вычисляется как дизъюнкция противоположных разностей:

$$a_{ij} = (a_{ij}^{(1)} \wedge \overline{a_{ij}^{(2)}}) \vee (\overline{a_{ij}^{(1)}} \wedge a_{ij}^{(2)}).$$

Для рассматриваемого примера матрица  $\mathbf{A}$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \oplus & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}.$$

3. Граф симметрической разности  $G$  включает ребра из прямой и обратной разности графов  $G_1$  и  $G_2$ , объединяя различающиеся ребра этих графов (рис. 3.13):

$$G = G_1 \oplus G_2; E = (E_1 \cap (U \setminus E_2)) \cup (E_2 \cap (U \setminus E_1)).$$

### 3.3.5.

#### СУЖЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ

1. Сужение  $R_1$  отношения  $R$  ( $R_1 \subset R$ ) состоит из пар  $(v_i, v_j) \in R$  с элементами  $v_i, v_j \in V_1$ , где  $V_1 \subset V$ :  $R_1 = R \cap (V_1 \times V_1)$ .

2. Матрица  $\mathbf{A}_1$  является подматрицей матрицы  $\mathbf{A}$ . Из матрицы  $\mathbf{A}$  выделяются строки и столбцы, соответствующие  $v_i, v_j \in V_1$ .

3. Граф  $G_1$  является *подграфом*  $G$ , поскольку сохраняются все дуги графа  $G$ . В примере подграф  $G_1$  выделен из графа  $G$  относительно вершин  $v_1, v_4 \in V_1, V_1 \subset V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  (рис. 3.14).

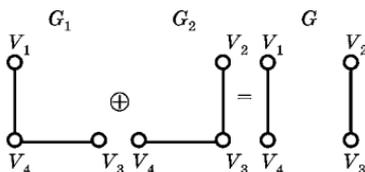


Рис. 3.13  
Симметрическая разность  
графов  $G_1$  и  $G_2$

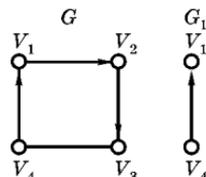


Рис. 3.14  
Графы: исходный  
 $G$  и подграф  $G_1$

### 3.3.6. КОМПОЗИЦИЯ ОТНОШЕНИЙ

1. Композиция  $R = R_2(R_1)$  или произведение  $R = R_1 \times R_2$  содержит пару  $(v_i, v_k)$  тогда и только тогда, когда существует элемент  $v_j \in V$  такой, что  $(v_i, v_j) \in R_1$  и  $(v_j, v_k) \in R_2$ .

2. Матрица смежности композиции отношений  $R_1$  и  $R_2$  вычисляется по правилам произведения матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  с заменой арифметических операций  $(+ \text{ и } \times)$  на логические  $(\vee \text{ и } \wedge)$ :

$$a_{ik} = \bigvee_{j=1}^n (a_{ij}^{(1)} \wedge a_{jk}^{(2)}).$$

Произведение матриц смежности  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$ , приведенных на рис. 3.15, вычисляется как

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Произведение графов  $G_1 \times G_2$  находится как совокупность дуг, замыкающих пары дуг  $(v_i, v_j) \in G_1$  и  $(v_j, v_k) \in G_2$ ,  $i, j, k = 1, n$  (рис. 3.15).

В общем случае произведение не коммутативно:  $R_1 \times R_2 \neq R_2 \times R_1$ .

Проиллюстрируем некоммутативность произведения на предыдущем примере:

$$\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

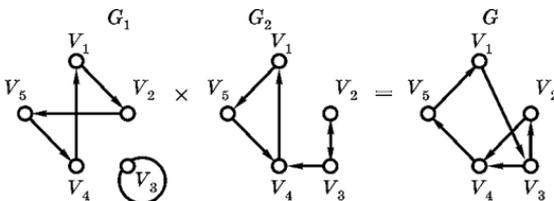


Рис. 3.15  
Произведение  
графов  $G_1$  и  $G_2$

## 3.3.7.

**S-я СТЕПЕНЬ ОТНОШЕНИЯ R**

1. S-я степень отношения  $R$   $R^s = R^{s-1} \times R$  содержит пару только тогда, когда существует цепочка элементов  $x_1, \dots, x_k$ , в которой  $(x_j, x_{j+1}) \in R$  для  $j = \overline{1, s-1}$ .

2. S-я степень матрицы смежности вычисляется по формуле

$$a_{ik}^s = \bigvee_{j=1}^n (a_{ij}^{s-1} \wedge a_{jk}).$$

3. Вычислению s-й степени отношения  $R$  соответствует нахождение всех путей в графе  $G$ , состоящих из  $s$  дуг.

## 3.3.8.

**СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ  
НАД БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ**

Рассмотрим свойства, присущие операциям над бинарными отношениями  $R_i, i \in I$ .

1. *Обратный* результат операции над бинарными отношениями равен результату операции над *обратными* бинарными отношениями:

$$\begin{aligned} \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right)^{-1} &= \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}; \\ \left( \bigcup_{i \in I} R_i \right)^{-1} &= \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}; \\ (R_1 \circ R_2)^{-1} &= R_2^{-1} \circ R_1^{-1}. \end{aligned}$$

2. *Сужение*  $X_1 \subseteq X$  результата операции над бинарными отношениями равно результату операции над *сужениями* бинарных отношений:

$$\begin{aligned} (R^{-1})_{X_1} &= (R_{X_1})^{-1}; \\ \left( \bigcap_{i \in I} R_i \right)_{X_1} &= \bigcap_{i \in I} (R_i)_{X_1}; \\ \left( \bigcup_{i \in I} R_i \right)_{X_1} &= \bigcup_{i \in I} (R_i)_{X_1}. \end{aligned}$$

3. Относительно операции двойственности для любых  $R_1$  и  $R_2$  справедливы аналоги *закона де Моргана*:

$$\begin{aligned} (R_1 \cup R_2)^d &= R_1^d \cap R_2^d; \\ (R_1 \cap R_2)^d &= R_1^d \cup R_2^d; \\ (R^d)^d &= R. \end{aligned}$$

4. Композиция бинарных отношений *ассоциативна*:

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

5. Для любых  $R_1, R_2, R_3$  относительно операции  $\cup$  справедлив *распределительный закон*:

$$(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3).$$

6. Для любых  $R_1, R_2, R_3$  относительно операции  $\cap$  справедливо *включение*:

$$(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_3) \cap (R_2 \circ R_3).$$

7. Если  $R_1 \subseteq R_2$ , то

$$R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}; \quad R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3; \quad R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2.$$

### У п р а ж н е н и я

1. Охарактеризовать элементарными и неэлементарными свойствами отношение  $R_1$  «быть больше» на целых числах от 1 до 7.
2. Охарактеризовать элементарными и неэлементарными свойствами отношение  $R_2$  «быть четным» на целых числах от 1 до 7.
3. Выполнить все унарные операции над отношением  $R_1$ .
4. Выполнить все унарные операции над отношением  $R_2$ .
5. Выполнить все бинарные операции над отношениями  $R_1$  и  $R_2$ .
6. Постройте граф отношения «Эквивалентность по модулю 2» на множестве  $X = \{1 \dots 6\}$ . Охарактеризуйте его элементарными свойствами, определите его класс. Сделайте отношение антирефлексивным. Какое получилось отношение (дайте название) и какие у него свойства? Уберите дуги вида  $i < j$ . Какое теперь получилось отношение и какие у него свойства?
7. Постройте граф отношения «быть меньше» на множестве  $X = \{1 \dots 5\}$ . Постройте дополнительное отношение. Что это за отношение (охарактеризуйте)? Постройте обратное отношение. Что это за отношение?
8. На множестве  $X = \{1 \dots 5\}$  заданы два отношения:  $R_1 = \{(i, j) \mid i = j \cdot 2\}$  и  $R_2 = \{(i, j) \mid i = j + 2\}$ . Найдите их объединение  $R_3 = R_1 \cup R_2$  и пересечение  $R_4 = R_1 \cap R_2$ . Определите интенсиональные формы отношений  $R_3$  и  $R_4$ .
9. Дано отношение  $R = \{(i, j) \mid i < j\}$  на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Вычислите вторую степень этого отношения. Как изменится интенсиональная форма?
10. Докажите правомерность утверждения 6 о свойствах операций над бинарными отношениями.
11. Докажите правомерность утверждения 7 о свойствах операций над бинарными отношениями.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

## 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФА

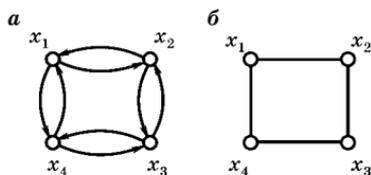
**Определение 4.1.** Графом  $G$  называют геометрическую интерпретацию бинарного отношения  $R \subseteq X \times X = X^2$ . Элементам множества  $X$  сопоставляются вершины (или узлы), а упорядоченным парам — дуги графа. Вершины изображаются кружками, а дуги — линиями произвольной кривизны.

Упорядоченную пару  $(u, v)$  называют дугой, ее первую вершину  $u$  — началом дуги, а вторую вершину  $v$  — ее концом. Направленность дуги от начала к концу на рисунке помечается стрелкой. Дуга  $(v, v)$ , соединяющая вершину  $v$  саму с собой, называется *петлей*. Ее направленность в общем случае безразлична.

В отличие от аналитической записи бинарного отношения  $R$ , связанного со своими областями определения и значений через их декартово произведение, аналитическая запись графа  $G$  включает эти множества и определенное на них бинарное отношение  $R$ . В зависимости от способа представления упорядоченных пар бинарного отношения  $R$  (дуг графа) применяются две аналитические записи графа.

Если используется *списочная* форма перечисления упорядоченных пар бинарного отношения  $R$ , граф представляется двойкой  $G = (X, R)$ . В англоязычной литературе по теории графов употребляется обозначение  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин (vertex) графа, а  $E$  — множество его дуг.

Если бинарное отношение  $R$  выражается через *проекции* его элементов, то граф записывается как  $G = (X, \Gamma)$ , где  $\Gamma$  — прямые (верхние) проекции всех элементов множества  $X$ .



**Рис. 4.1**  
Два способа  
изображения отношения  $R$

**Пример 4.1.** Выразить списочную форму представления графа через проекции его элементов и изобразить отношение  $R$  в виде графа.  
Записи  $G = (X, R)$ , представленной списками вершин  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  и дуг  $E = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_3)\}$ , соответствует запись  $G = (X, \Gamma)$ :  $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_4\}$ ,  $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3\}$ ,  $\Gamma(x_3) = \{x_2, x_4\}$ ,  $\Gamma(x_4) = \{x_1, x_3\}$ . Граф, изображающий отношение  $R$  на множестве  $X$ , представлен на рис. 4.1а, б.

Граф, изображенный на рис. 4.1а, представляет все пары отношения  $R$  через дуги. В графе, изображенном на рис. 4.1б, пары дуг, имеющие противоположную направленность, заменены на ребра, не имеющие ориентации.

## 4.2. СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ГРАФОВ

Как следует из предыдущего раздела, к элементам графа относятся вершины и дуги. Поэтому наряду с выражениями  $v \in V$  и  $e \in E$  допускаются выражения  $v \in G$  и  $e \in G$ . Количество вершин и дуг графа оцениваются мощностью соответствующих множеств:  $|V| = n$ ,  $|E| = m$  ( $|X| = n$ ,  $|R| = m$ ). В общем случае  $n \neq m$ .

Дуги и вершины графа связаны отношением *инцидентности*  $R_{\text{и}} \subseteq E \times V$ . Говорят, что дуга  $(u, v)$  инцидентна (incidence) вершинам  $u$  и  $v$ :  $(u, v) \text{ inc } u$  и  $(u, v) \text{ inc } v$ . По отношению к вершине  $u$  дуга  $(u, v)$  является *исходящей* (из  $u$ ), а по отношению к вершине  $v$  — *заходящей* (в  $v$ ).

Количественно отношение инцидентности с дугами для вершины  $v$  выражается числом  $\rho^+(v)$  заходящих в нее дуг и числом  $\rho^-(v)$  исходящих из нее дуг. Эти числа называются соответственно полустепенями *захода* и *исхода*. Их сумма называется степенью  $\rho(v)$  или  $\text{deg}(v)$  вершины  $v$ :

$$\rho(v) = \rho^+(v) + \rho^-(v).$$

Вершина  $u$  с  $\rho(u) = 0$  называется *изолированной*.

**Теорема 4.1.** В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

Поскольку каждая дуга  $(v_i, v_j)$  в вершинах  $v_i$  и  $v_j$  учитывается два раза (как заходящая и исходящая), имеет место выражение

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = 2 \cdot m.$$

В противном случае один конец дуги не инцидентен никакой вершине, что невозможно. Исходя из правой части выражения, сумма дуг, а следовательно, и число вершин нечетной степени, всегда четна.

**Пример 4.2.** Изобразить транзитный пункт, в который можно попасть из трех пунктов и отправиться в два пункта (рис. 4.2).

Этим условиям соответствует граф, имеющий вершину  $v$  с полустепенью захода  $\rho^+(v) = 3$  и полустепенью исхода  $\rho^-(v) = 2$ . Все шесть вершин графа имеют нечетные степени, что соответствует теореме 4.1.

Число дуг, инцидентных двум вершинам  $u$  и  $v$ , определяет их кратность:

$$\rho(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если нет дуги } (u, v); \\ 1, & \text{если есть одна дуга } (u, v); \\ \alpha > 1, & \text{если есть несколько дуг } (u, v). \end{cases}$$

**Пример 4.3.** Представить улицу с двухсторонним двухрядным движением. Граф улицы, соединяющей два перекрестка (вершины  $u$  и  $v$ ), имеет две дуги противоположной направленности:  $(u, v)$  с  $\rho(u, v) = 2$  и  $(v, u)$  с  $\rho(v, u) = 2$  (рис. 4.3).

На однородных множествах вершин или дуг формулируются *отношения смежности*. С учетом направленности дуги  $(u, v)$  вершина  $v$  смежна вершине  $u$  ( $v \text{ adj } u$ ), но

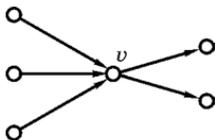


Рис. 4.2

Граф транзитного пункта

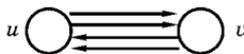


Рис. 4.3

Граф улицы с двухсторонним двухрядным движением

вершина  $u$  не смежна вершине  $v$  ( $u \overline{\text{adj}} v$ ), поскольку в нее нельзя попасть из вершины  $v$  за один шаг. Следовательно, отношение смежности вершин *зависит от направленности дуг*.

Дуги  $(u, v)$  и  $(v, w)$  смежны, если существует вершина  $v$ , которой они обе инцидентны, т. е. дуги смежны относительно общей вершины  $v$ . Отношению смежности дуг отвечают также пары:  $(u, v)$  и  $(w, v)$ ;  $(v, u)$  и  $(v, w)$ ;  $(v, u)$  и  $(w, v)$ . Отсюда следует, что отношение смежности дуг *не зависит от их направленности*.

### 4.3. МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ И ИНЦИДЕНТНОСТИ

Отношения смежности и инцидентности могут быть представлены в матричной форме. Элементы матрицы смежности  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , вершин графа<sup>4</sup> относительно дуг с кратностью 1 формируются по тому же правилу, что и элементы матрицы бинарного отношения  $R$ . Матрица смежности вершин графа имеет размерность  $n \times n = n^2$ .

В более общем случае матрица смежности вершин графа отражает кратность  $\rho(v_i, v_j)$  дуг, соединяющих пары вершин:

$$a_{ij} = \rho(v_i, v_j).$$

Количество дуг, исходящих из  $i$ -й вершины, определяется суммой элементов  $a_{ij}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , в  $i$ -й строке матрицы смежности, а количество дуг, заходящих в  $j$ -ю вершину, — суммой элементов  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в  $j$ -м столбце этой матрицы. Исходя из этого полустепени исхода и захода вершин графа вычисляются по следующим формулам:

а) полустепень исхода вершины  $v_i$ :  $\rho^-(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ;

б) полустепень захода вершины  $v_j$ :  $\rho^+(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}$ .

<sup>4</sup> Часто слово «вершины» в названии матрицы смежности графа опускается.

**Пример 4.4.** Найти полустепени вершин графа, заданного матрицей смежности:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \rho^-(v_i) \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \rho^+(v_i) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{array} \end{array} .$$

Полустепени исхода вершин графа образуют правый вектор-столбец, а полустепени захода — нижнюю вектор-строку.

Матрица смежности ребер графа  $\mathbf{A}_e$  строится по правилу:

$$a_{ij}^e = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \text{ adj } e_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Размерность матрицы смежности ребер  $E \times E$ , строками и столбцами которой являются дуги, равна  $m \times m$ .

Матрица инцидентности  $\mathbf{A}_и$ , отражающая отношение *инцидентности*  $R_и \subseteq E \times V$ , имеет размерность  $m \times n$ . Строкам матрицы  $\mathbf{A}_и$  соответствуют дуги графа, а столбцам — вершины. В транспонированной матрице  $\mathbf{A}_и^T$  они меняются местами. Матрица инцидентности  $\mathbf{A}_и$  графа с кратностью ребер<sup>5</sup>  $\rho(u, v) \geq 1$  строится по следующему правилу:

$$a_{ij}^u = \begin{cases} -\rho(v_j, v_k), & \text{если } e_i = (v_j, v_k); \\ +\rho(v_k, v_j), & \text{если } e_i = (v_k, v_j); \\ \alpha, & \text{если } (v_j, v_j) \text{ — петля}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В каждой строке матрицы  $\mathbf{A}_и$  отличны от 0 *только два элемента*, соответствующие началу и концу дуги. Минусом помечается начало дуги. Символом  $\alpha$  обозначается петля в вершине  $v_i$ .

<sup>5</sup> В списочной форме кратные дуги представляются мультимножеством.

**Пример 4.5.** Построить матрицу инцидентности  $A_{\Pi}$  для бинарного отношения  $R = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_4)\}$ .

$$A_{\Pi} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (x_1, x_2) \\ (x_1, x_4) \\ (x_2, x_1) \\ (x_2, x_3) \\ (x_3, x_2) \\ (x_3, x_4) \\ (x_4, x_1) \\ (x_4, x_4) \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

#### 4.4. ВИДЫ ГРАФОВ

Графы классифицируются относительно свойств их элементов.

1. По направленности дуг графы делятся на:

- *ориентированные*, или орграфы:  $\forall (u, v) \in R \ (v, u) \notin R$ ;
- *неориентированные*, или неорграфы:  $\forall (u, v) \in R \ (v, u) \in R$ .

Каждому орграфу можно поставить в соответствие неорграф, лишив его ориентации, т. е. заменив дуги ребрами. Полученный неорграф называется *соотнесенным*<sup>6</sup>. Граф, имеющий и дуги, и ребра, называется *смешанным*.

2. Относительно кратности дуг графы делятся на:

- *простые графы*:  $\forall (u, v) \in R \ \rho(u, v) = 1$ ;
- *мультиграфы*, содержащие только кратные ребра:  $\forall (u, v) \in R \ \rho(u, v) > 1$ .

Смешанный относительно кратности ребер граф содержит как кратные, так и одиночные ребра:  $\forall (u, v) \in R \ \rho(u, v) \geq 1$ .

3. Относительно структуры дуг графы делятся на:

- графы с простыми ребрами;
- *гиперграфы*  $H = (V, E)$ , ребра которых соединяют более чем две вершины.

<sup>6</sup> В его обозначении часто разделяют множества ребер  $E$  и дуг  $A$ :  $G = (V, E, A)$ .

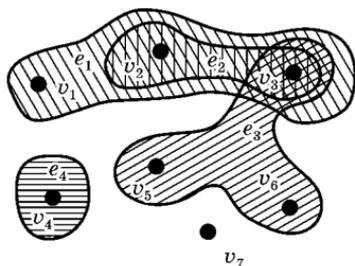


Рис. 4.4  
Гиперграф  $H$

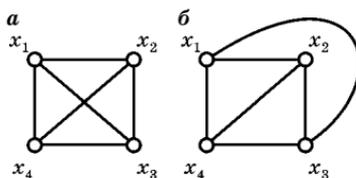


Рис. 4.5  
Графы:

$a$  — нарисованный как неплоский;  
 $b$  — карта графа.

Пример гиперграфа  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\}$  изображен на рис. 4.4.

4. Относительно степени вершин графы делятся на:

- неоднородные;
- однородные (регулярные).

У однородного графа степень всех вершин одинакова:  
 $\forall u \in V \rho(u) = s$ .

В ориентированном однородном графе через  $s$  обозначается полустепень исхода и захода вершин  $v_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ :  $\rho^-(v_i) = \rho^+(v_i) = s$ . Сумма полустепеней всех вершин ориентированного однородного графа степени  $s$ :

$$\sum_{j=1}^n \rho^+(v_j) = \sum_{j=1}^n \rho^-(v_j) = s \cdot n.$$

5. Относительно пересечения дуг на плоскости графы делятся на:

- плоские (планарные);
- неплоские.

Граф  $G = (V, E)$  называется плоским, если он может быть нарисован на плоскости (или сфере) таким образом, что произвольные две дуги графа не пересекаются друг с другом. Надо отличать плоские графы от графов, нарисованных как неплоские, но допускающих устранение пересечения дуг (рис. 4.5).

На рис. 4.5а изображен граф, нарисованный как неплоский. На рис. 4.5б он представлен как плоский за счет другого начертания ребра  $(x_1, x_3)$ . Такое представление называют также *картой* графа.

**Звездный граф.** Одна его вершина  $v_i$  (центр графа) имеет степень  $\rho(v_i) = n - 1$ , а остальные вершины имеют степень  $\rho(v_j) = 1$ . Такие вершины называют *висячими*, или *листьями*.

**Двудольный граф**  $K = (X, Y, E)$  устанавливает соответствие между двумя множествами вершин:  $X$  и  $Y$ ,  $|X| = n_1$ ,  $|Y| = n_2$ , причем  $X \cap Y = \emptyset$ . Каждая дуга (ребро) графа  $K$  соединяет вершины, принадлежащие только разным подмножествам.

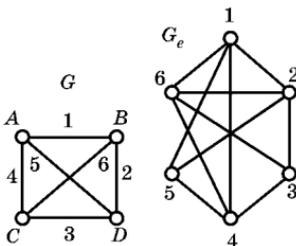
Возможность представления двудольным графом отображения множеств, в том числе и функциональных, следует из рис. 1.3 и 1.4.

Помимо преобразований из одного вида графа в другой, интерес представляет порождение производных графов. К таким графам, в частности, относится *реберный граф*. Ребрам исходного графа  $G$  ставятся в соответствие вершины реберного графа  $G_e$ . Ребра графа  $G_e$  строятся относительно вершин исходного графа  $G$ . Две вершины реберного графа  $G_e$  соединяются ребром, если соответствующие им ребра инцидентны одной и той же вершине в исходном графе.

**Пример 4.6.** На основе графа  $G$ , ребра которого пронумерованы натуральными числами, построить реберный граф  $G_e$  (рис. 4.6).

Согласно рис. 4.6 число вершин реберного графа  $G_e$  равно числу ребер графа  $G$ :  $n_e = m$ .

Граф с обозначенными (пронумерованными) вершинами называется *помеченным*. Пометка служит не только для идентификации вершин и дуг, но, как правило, отражает семантику (смысл) предметной области.



**Рис. 4.6**  
Графы: исходный  $G$   
и реберный  $G_e$

Примером помеченного графа является граф переходов конечного автомата, вершины которого помечаются внутренними состояниями, а дуги — входными (выходными) состояниями автомата.

Граф, каждой вершине которого сопоставлен вес  $c_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , называется графом со *взвешенными вершинами*.

Граф, каждому ребру которого  $e_j$  сопоставлен вес  $c_j$ , называется графом со *взвешенными ребрами*.

У полностью взвешенного графа взвешены и вершины, и дуги (ребра), причем веса вершин и дуг имеют разный смысл.

Понятие «вес» интерпретируется в зависимости от контекста задачи. Например, для вершин вес может означать стоимость обработки, потенциал, высоту и т. д., а для дуг — стоимость транспортировки, величину тока, расстояние и т. д. В задачах многокритериальной оптимизации каждой вершине и дуге может сопоставляться вектор весов.

#### 4.5. ПОЛНОТА БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

Полнота бинарного отношения определяется относительно множества пар, составляющих декартово произведение  $X \times X$ . Парам бинарного отношения ставится в соответствие множество ребер (дуг)  $E$  графа  $G$ .

1. *Нуль-отношению*  $R \subseteq X \times X = \emptyset$  соответствует нуль-граф  $G = (X, \emptyset)$ , у которого все вершины — изолированные и не имеют петель (рис. 4.7а). *Нуль*, или нулевая полнота, может интерпретироваться как отношение «быть несравнимым».

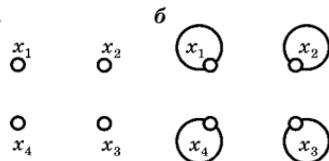
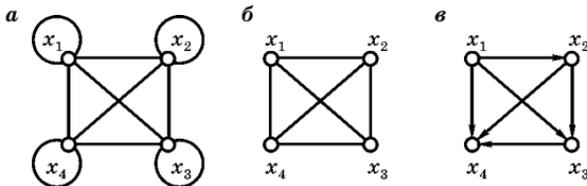


Рис. 4.7  
Отношения «нуль» (а)  
и «единица» (б)

2. *Единица*, или единичное отношение,  $I$  представляется диагональной матрицей смежности  $\forall x_i \in X a_{ii} = 1$  и двумерным множеством  $R = \{(x_i, x_i) | x_i \in X\}$ . Ему соответствует граф, все вершины которого изолированы и имеют петли (рис. 4.7б). Единичное отношение может интерпретироваться как «быть сравнимым с собой».

Рис. 4.8  
Отношения:  
а — полное; б — слабополное; в — полное  
однаправленное.



3. *Универсальное*, или полное, отношение  $X \times X = X^2$  — это декартово произведение множества  $X$ . Оно выражается полным неорграфом с петлями и интерпретируется как «быть сравнимым со всеми и с собой» (см. рис. 4.8а). Из универсального отношения выделяют слабополное и однонаправленное универсальное отношения.

*Слабополное* отношение  $X \times X \setminus \mathbf{I}$  (без единицы), или *полный неорграф  $G$  без петель* (рис. 4.8б), интерпретируется как «быть сравнимым со всеми, но не с собой» или «быть разными элементами».

*Однонаправленное универсальное отношение*, или *полный орграф  $G$  без петель*, — это бинарное отношение, наличие в котором дуги  $(x_i, x_j)$  исключает присутствие дуги  $(x_j, x_i)$  противоположной направленности,  $x_i, x_j \in X$  (рис. 4.8в). Оно интерпретируется как «быть предпочтительнее».

В дальнейшем будем рассматривать графы без петель. На основе приведенных примеров несложно доказываются следующие утверждения для полных графов.

**Теорема 4.2.** Степень всех вершин полного графа равна  $n - 1$ .

**Теорема 4.3.** Степень всех вершин реберного графа  $G_e$ , построенного на основе полного графа  $G_p$ , равна  $(n - 2) \cdot 2$ , где  $n$  — число вершин графа  $G_p$  (см. рис. 4.6).

**Теорема 4.4.** Степень вершин, принадлежащих множеству  $X$  полного двудольного графа  $K$ , равна мощности множества  $Y$ :  $\forall v \in X \rho(v) = n_2$ , а степень вершин, принадлежащих множеству  $Y$ , — мощности множества  $X$ :

$$\forall v \in Y \rho(v) = n_1.$$

**Теорема 4.5.** Число дуг в полном двудольном графе равно произведению числа вершин долей графа:  $m_K = n_1 \times n_2$ .

## 4.6.

### ЧАСТИ, СУГРАФЫ И ПОДГРАФЫ

Понятие «часть» предполагает порождение на основе исходного графа  $G = (V, E)$  графа  $H$ , содержащего не все вершины и/или дуги (ребра) графа  $G$ , т. е.  $V(H) \subseteq V(G)$  и/или  $E(H) \subseteq E(G)$ . Рассмотрим различные варианты формирования частей на примере графа  $G$ , изображенного на рис. 4.9а.

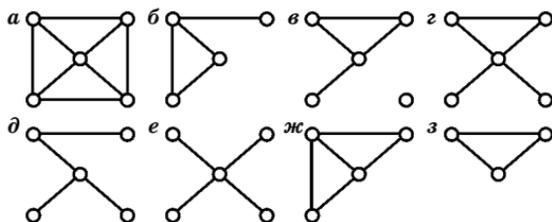


Рис. 4.9  
Части графа

Пример произвольной части графа  $G$  показан на рис. 4.9б. Однако в ряде задач к частям графа предъявляются специальные требования. Например, сохранение всех вершин исходного графа  $G$ :  $V(H) = V(G)$ . Графы, обладающие этим свойством, получили название *суграфов*. Пример произвольного суграфа  $G$  показан на рис. 4.9в.

Рассмотрим различные разновидности суграфов в направлении усиления предъявляемых к ним требований.

1. Связный суграф называется *покрывающим*. Ни одна из вершин графа не является изолированной (рис. 4.9г).

2. Покрывающий суграф с минимальным числом ребер называется *остовом*, или *стягивающей сетью* (рис. 4.9д).

3. К частному случаю остова относится *звездный* граф (см. раздел 4.4), изображенный на рис. 4.9е.

4. Суграф, в котором отсутствуют дуги ( $E(H) = \emptyset$ ), называется *нулевым*, а его вершины — *изолированными*.

Часть  $H$  графа  $G$ , сохраняющая все дуги, инцидентные выделенным вершинам графа  $G$ , называется *подграфом*, порожденным графом  $G$ . Пример произвольного подграфа  $G$  показан на рис. 4.9ж.

Полный подграф  $H$  графа  $G$  называется *кликой*. Пример клики, порожденной на трех вершинах графа  $G$ , приведен на рис. 4.10з.

**Теорема 4.6.** Каждый подграф полного графа является кликой.

#### 4.7. ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Изоморфизм  $\varphi$  графов  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  — это взаимно однозначное соответствие между их вершинами, сохраняющее смежность, т. е. вершина  $\varphi(v_i) \in V_2$  в графе  $G_2$  смежна вершине  $\varphi(v_j) \in V_2$  тогда и только тогда, когда вершина  $v_i \in V_1$  в графе  $G_1$  смежна вершине  $v_j \in V_1$ .

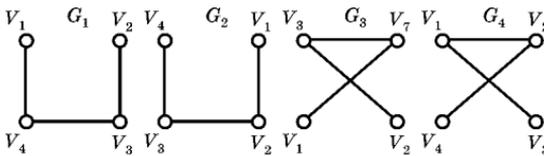


Рис. 4.10  
Изоморфные  
графы

Изоморфизм сохраняет степень вершин (узлов) графа. Взаимное расположение вершин, их нумерация, длина и кривизна ребер не имеют значения. Графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны, если они различаются нумерацией вершин и/или их взаимным расположением.

**Пример 4.7.** Определить изоморфизм графов, изображенных на рис. 4.10. Графы  $G_1$  и  $G_2$  различаются только нумерацией (пометкой) вершин. Графы  $G_1$  и  $G_3$  различаются только местами (расположением) вершин, сохраняющих смежность. Графы  $G_1$  и  $G_4$  различаются как нумерацией, так и местами вершин.

Смежность всех вершин графа описывается его матрицей смежности. Из сопоставления матриц смежности  $A_1$  и  $A_4$  можно сделать вывод, что они различаются лишь нумерацией строк и столбцов. Число единиц в строках и столбцах при этом остается неизменным. Справа от каждой матрицы приведены степени их вершин  $\rho(v_i)$ :

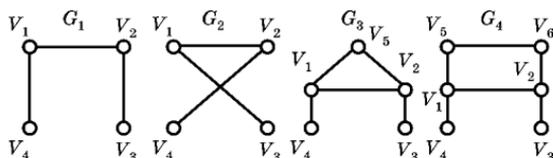
$$\mathbf{A}_1 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \rho(v_i) \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \rho(v_i) \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix} .$$

#### 4.8. АВТОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Аutomорфизмом графа называется изоморфизм (отображение) графа  $G$  на себя. Он реализуется путем перенумерации вершин. Ниже приведена вершинная группа подстановок для графа с четырьмя вершинами:

$$P_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_2 & v_1 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} v_2 & v_1 & v_3 & v_4 \\ v_2 & v_1 & v_4 & v_3 \end{pmatrix}; \\
 P_3 = \begin{pmatrix} v_2 & v_1 & v_4 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_4 & v_3 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

**Рис. 4.11**  
Три вида  
изоморфизма  
графов



Эта группа называется циклической, поскольку исходная нумерация вершин в  $P_1$  совпадает с конечной в  $P_4$ . Путем подстановки ребер аналогичным образом конструируется реберная группа подстановок.

Автоморфизм может быть использован для тождественных преобразований сети.

Относительно соотношения множеств вершин графов различают 3 вида тождественности (рис. 4.11):

1) *изоморфизм*, если  $V_1(G_1) = V_2(G_2)$  и отождествлены все вершины из множеств  $V_1$  и  $V_2$ : ( $G_1 = G_2$ );

2) *изоморфное вхождение*, если  $V_1(G_1) \subset V_3(G_3)$  и отождествлены все вершины из  $V_3$  и его подмножества  $V_1$ : ( $G_1 \subset G_3$  и  $G_2 \subset G_3$ );

3) *общий подграф*, если  $V_1(G_1) \subset V_3(G_3)$  и  $V_1(G_1) \subset V_4(G_4)$  и отождествлены все вершины из множеств  $V_3$  и  $V_4$  с вершинами подмножества  $V_1$ : ( $G_1 \subset G_3$  и  $G_1 \subset G_4$ ).

#### 4.9.

### МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗОМОРФИЗМА ДВУХ ГРАФОВ

Метод решения задачи основан на сопоставлении всех пар вершин  $v_i \in G_1$  и  $v_j \in G_2$  в направлении возрастания их нумерации. Алгоритм, реализующий этот метод, основан на нижеследующей совокупности утверждений.

**Утверждение 4.1.** Две вершины  $v_i \in G_1$  и  $v_j \in G_2$  образуют  $k$ -ю пару тождественных вершин в графах  $G_1$  и  $G_2$  с числом вершин  $n_1 = n_2 = n$ , если их степени  $\rho_i$  и  $\rho_j$  равны и все  $n - k$  последующих пар смежных вершин также тождественны.

Второе условие утверждения 4.1 предполагает перебор всех пар оставшихся вершин, и до его завершения пары, отвечающие условию 1, считаются *условно тождественными*.

**Утверждение 4.2.** Для установления изоморфизма графов  $G_1$  и  $G_2$  необходимо и достаточно отождествить пары

всех вершин из  $G_1$  и  $G_2$ . Отсюда число ярусов  $s$  дерева перебора в глубину равно  $n$ , а порядковый номер максимального яруса  $s = n - 1$ , поскольку корневая вершина дерева нумеруется нулем.

Перебор описывается деревом в силу возможности отрицательных результатов отождествления вершин и возврата в этих случаях на предыдущие ярусы. При отсутствии отрицательных результатов дерево сводится к цепи. В процессе перебора пары условно тождественных вершин образуют двухмерное множество  $VP_-$ , а пары нетождественных вершин — двухмерное множество  $VP_+$ .

**Утверждение 4.3.** Множество  $VP_-$  в процессе перебора зависит от начальной пары вершин  $(v_{i0}, v_{j0})$ ,  $v_{i0} \in G_1$ ,  $v_{j0} \in G_2$ .

Согласно утверждению 4.1 при положительном исходе перебора множество  $VP_-$  образует цепь пар тождественных вершин.

**Утверждение 4.4.** Если пара  $(v_i, v_j)$  участвовала в переборе, то либо  $(v_i, v_j) \in VP_-$ , либо  $(v_i, v_j) \in VP_+$ .

**Утверждение 4.5.** Условиями выбора пары вершин  $(v_l, v_r)$ , смежных вершинам  $v_i$  и  $v_j$ , т. е. условиями продвижения вглубь по дереву от яруса  $s$  к ярусу  $s + 1$ , являются:

- 1)  $\rho_i = \rho_j$ ;
- 2)  $V_{iH}^s \neq \emptyset$ ;  $V_{jH}^s \neq \emptyset$ ;  $V_{iH}^s \subset V_i^s$ ;  $V_{jH}^s \subset V_j^s$ ;
- 3)  $\exists (v_l \in V_{iH}^s, v_r \in V_{jH}^s) ((v_l, v_r) \notin VP_+)$ .

Второе условие означает, что пара  $(v_l, v_r)$  ищется в списках смежностей  $V_i^s$  и  $V_j^s$  среди *нетождественных* вершин  $V_{iH}^s$  и  $V_{jH}^s$ .

Третье условие означает, что выбранная пара вершин  $(v_l, v_r)$ ,  $v_l \in V_{iH}^s$ ,  $v_r \in V_{jH}^s$  не принадлежит множеству *нетождественных* пар  $VP_+$ . Это условие уменьшает размерность перебора.

При невозможности выполнения любого из трех условий осуществляется возврат к предыдущему ярусу дерева перебора.

**Утверждение 4.6.** Построение цепи пар тождественных вершин имеет отрицательный исход, если для яруса  $s = 0$  (корня дерева перебора) имеет место условие

$$\forall (v_l \in V_i^s, v_r \in V_j^s) ((v_l, v_r) \in VP_+).$$

Это условие означает завершение построения дерева перебора для начальной пары вершин  $(v_{i_0}, v_{j_0})$ ,  $v_{i_0} \in G_1$ ,  $v_{j_0} \in G_2$ . Оно является условием перенумерации начальной вершины  $v_{j_0} \in G_2$ , номер которой увеличивается на 1.

**Утверждение 4.7.** Графы  $G_1$  и  $G_2$  *неизоморфны*, если для каждой вершины графа  $G_2$ , взятой в качестве начальной, построение цепи пар тождественных вершин имеет отрицательный исход.

Очевидно, что в самом неблагоприятном случае при переборе всех вершин из множества  $V_2$  число операций отождествления вершин составит  $n!$ .

**Утверждение 4.8.** Графы  $G_1$  и  $G_2$  *изоморфны*, если на  $s$ -м ярусе дерева перебора  $V_{iH}^s = \emptyset, V_{jH}^s = \emptyset$ , т. е. все вершины, смежные паре  $(v_i, v_r)$ , отождествлены.

**Пример 4.8.** Отождествим графы, изображенные на рис. 4.12.

Решение задачи с помощью алгоритма перебора в глубину приведено в табл. 4.1. В множествах смежных вершин  $V_i^s$  и  $V_j^s$  вершины, условно отождествленные на предыдущих шагах, подчеркнуты. Они не используются повторно

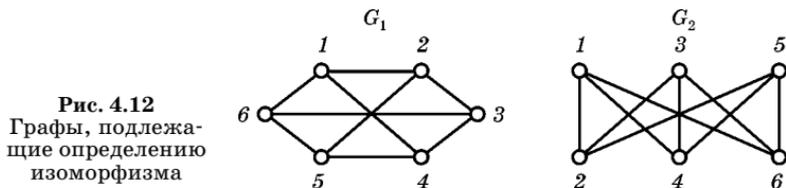


Таблица 4.1

Определение изоморфизма графов  $G_1$  и  $G_2$ 

№ шага (яруса дерева)	Текущая пара		Степень вершины		Множества смежных вершин		Множе- ство тождес- твенных пар $VP_2$	Множес- тво нетож- дествен- ных пар $VP_*$
	$v_i^s$	$v_j^s$	$\rho_i^s$	$\rho_j^s$	$V_i^s$	$V_j^s$		
0	1	1	3	3	2,4,6	2,4,6	(1,1)	
1	2	2	3	3	<u>1</u> ,3,5	<u>1</u> ,3,5	(2,2)	
2	3	3	3	3	<u>2</u> ,4,6	<u>2</u> ,4,6	(3,3)	
3	4	4	3	3	<u>1</u> , <u>3</u> ,5	<u>1</u> , <u>3</u> ,5	(4,4)	
4	5	5	3	3	<u>2</u> , <u>4</u> ,6	<u>2</u> , <u>4</u> ,6	(5,5)	
5	6	6	3	3	<u>1</u> , <u>3</u> , <u>5</u>	<u>1</u> , <u>3</u> , <u>5</u>	(5,6)	

при одном проходе дерева перебора. Пара смежных вершин  $(v_l, v_r)$ ,  $v_l \in V_{iH}^s, v_r \in V_{jH}^s$ , выбранная на  $s$ -м шаге алгоритма, в столбцах  $V_i^s$  и  $V_j^s$  выделено жирным.

В рассмотренном примере неотожествленные пары вершин отсутствуют ( $VP_{\neq} = \emptyset$ ), что объясняется абсолютной однородностью графов  $G_1$  и  $G_2$ . По этой же причине нумерация графов не влияет на трудоемкость перебора. Положительный результат, свидетельствующий об изоморфизме графов  $G_1$  и  $G_2$ , получен за один их проход (единственная цепь в дереве перебора).

### У п р а ж н е н и я

1. По матрице смежности  $\mathbf{A}$  вычислить степени вершин и построить граф

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

2. По матрице смежности  $\mathbf{A}$  построить матрицу инцидентности графа.
3. На основе матрицы смежности  $\mathbf{A}$  построить реберный граф.
4. Предложите алгоритм преобразования графа в реберный.
5. Полный граф с  $n = 6$  преобразовать в двудольный граф. Будет ли он также полным?
6. Привести примеры всех частей графа, изображенного на рис. 4.12.
7. Привести пример подграфа, общего для двух графов, изображенных на рис. 4.12.
8. Установить изоморфизм двух произвольных графов с  $n = 6$ .

## СВОЙСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ НА ОТНОШЕНИЯХ СМЕЖНОСТИ И ИНЦИДЕНТНОСТИ

**Р**ассмотрим ряд важных свойств, которыми обладают подмножества переменных и их пар в бинарных отношениях. Эти свойства определяются на отношениях смежности и инцидентности и иллюстрируются на графах для улучшения наглядности их представления и упрощения доказательств теорем. Однако неформальному решению задач по выявлению подмножеств вершин и дуг графа не помогает даже его наглядность, поскольку при размерности  $n$  свыше 5–7 умозрительное решение задачи становится затруднительным. Для формализации решения задач, связанных с обнаружением наличия либо отсутствия некоторого свойства, применима булева алгебра.

### 5.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ МНОЖЕСТВ НА ОТНОШЕНИЯХ СМЕЖНОСТИ И ИНЦИДЕНТНОСТИ

Для нахождения всех подмножеств вершин  $X$  либо дуг  $E$  графа  $G = (X, E)$ , обладающих требуемым свойством, будем использовать алгебраический метод.

Поскольку смежность и инцидентность вершин и дуг графа представляется в матрицах единицами, задача нахождения подмножеств, обладающих требуемым свойством, сводится к определению различных вариантов покрытий единицами вершин либо дуг графа. При этом

в зависимости от формируемого свойства множества к покрытию может предъявляться требование *минимальности* или *максимальности*. Для некоторых задач может ставиться требование, чтобы покрытия вершин или дуг не пересекались, т. е. не имели общих единиц в строках (столбцах) матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_n$ .

Нахождение всех подмножеств  $A_q$ ,  $q = \overline{1, n}$ , алгебраическим способом осуществляется путем преобразования выражения

$$\bigwedge_{i=1}^l \left( \bigvee_{a_{ij}=1} u_j \right) \quad (5.1)$$

в выражение

$$\bigvee_{q=1}^r \left( \bigwedge_{u_k \in A_q} u_k \right). \quad (5.2)$$

Дизъюнктивный член выражения (5.1) формируется из элементов  $u_j$  графа (вершин или дуг), находящихся в заданном отношении (смежности или инцидентности) к элементу  $u_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Элементы  $u_j$  образуют дизъюнкции с элементом  $u_i$ . Количество конъюнктивных членов определяется числом элементов  $u_i$ , которые отвечают требуемому свойству. Если отношение определяется относительно вершин, то  $l_{\max} = n$ , а если относительно дуг, то  $l_{\max} = m$ .

Результатом логического перемножения всех скобок выражения (5.1) является выражение (5.2). Входящие в него конъюнкции  $u_k$  представляют собой варианты подмножеств вершин или дуг  $A_q$ ,  $q = \overline{1, r}$ , обладающих заданными свойствами. Из  $r$  конъюнкций выбираются те, которые имеют максимальное или минимальное число элементов.

Полнота семейства множеств  $A_q$ ,  $q = \overline{1, r}$ , обуславливается полным перебором свойств по всем элементам графа в выражении (5.1).

При логическом перемножении скобок в выражении (5.1) с целью упрощения используются известные логические законы поглощения:

- 1)  $a \wedge a = a$ ;  $a \vee a = a$ ;
- 2)  $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$ ;
- 3)  $(a \vee b) \wedge (a \vee b \vee c) = (a \vee b)$ .

## 5.2. ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

### 5.2.1. ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРШИН

Внутренняя устойчивость вершин определяется на основе отношения *несмежности* вершин графа. Оно *не зависит* от направленности дуг графа: вершины  $u$  и  $v$  несмежны, если не существует дуг  $(u, v)$  и  $(v, u)$ . Это означает, что для определения несмежности вершин в орграфе можно использовать соотнесенный ему неорграф.

Подмножество попарно несмежных вершин графа  $G = (X, \Gamma)$  образует *внутренне устойчивое* или *независимое* множество вершин  $X_H \subset X$ :

$$X_H \cap \Gamma(X_H) = \emptyset \quad \text{и} \quad X_H \cap \Gamma^{-1}(X_H) = \emptyset.$$

Поскольку для графа  $G = (X, \Gamma)$  в общем случае существуют различные варианты независимых множеств  $X_{nk}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , они образуют семейство независимых множеств  $Q$ . Независимое множество  $X_H$  *максимально*, если оно не входит ни в какое другое независимое множество  $X'_H \in Q$ .

**Теорема 5.1.** В связном графе для каждой вершины  $x_j \in X \setminus X_H$  найдется смежная ей вершина в максимальном множестве  $X_H$ .

*Доказательство.* Если вершина  $x_j \in X \setminus X_H$  не смежна ни одной из вершин  $x_i \in X_H$ , то ее можно включить в  $X_H$ , что невозможно, так как оно максимально.

Максимальная мощность множества  $X_H$  называется *вершинным числом независимости* графа  $G = (X, \Gamma)$ :

$$\alpha_v = \max_{X_{ni} \in Q} |X_{ni}|. \quad (5.3)$$

**Лемма 5.1.** Для полного графа  $\alpha_v(G_p) = 1$ .

Действительно, в полном графе *каждая* вершина соединена со всеми остальными и, следовательно, не может иметь несмежных с ней вершин.

**Пример 5.1.** По графу, изображенному на рис. 5.1, найти варианты независимых множеств вершин  $X_H$  и вершинное число независимости  $\alpha_v$ .

$Q(G)$	$ X_{ni} $
$X_{n1} = \{x_1, x_3, x_6\}$	3
$X_{n2} = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$	4 = $\alpha_v$
$X_{n3} = \{x_3, x_7\}$	2
$X_{n4} = \{x_3, x_6, x_8\}$	3
$X_{n5} = \{x_4, x_7\}$	2
$X_{n6} = \{x_4, x_1, x_6\}$	3
$X_{n7} = \{x_5, x_2, x_8\}$	3
$X_{n8} = \{x_5, x_1\}$	2

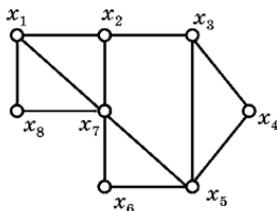


Рис. 5.1

Граф  $G$  и его независимые множества вершин

Если за начальную вершину при поиске несмежных вершин принять  $x_1$ , то формируется множество  $X_{n1}$ . Если за начальную вершину принять  $x_2$ , то формируется множество  $X_{n2}$  и т. д. Для определения вершинного числа независимости  $\alpha_v$  из них выбирается множество большей мощности.

### 5.2.2.

#### ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕБЕР

Отношение несмежности применимо также и к дугам графа  $G = (X, E)$ . Пара дуг  $(u, v)$  и  $(w, z)$  является несмежной, если они не имеют общей вершины. Поскольку несмежность дуг не зависит от их направленности, можно говорить о несмежности *ребер*, переходя от орграфа к соотношенному с ним неорграфу.

Подмножество попарно несмежных ребер  $E_n \subset E$  получило название *внутренне устойчивого множества ребер* графа. Другие его названия — независимое множество ребер или паросочетание. Последний термин объясняется выделением из множества  $E$  всех несмежных пар вершин. При нечетном числе вершин одна из них остается без пары.

Так же как и независимые множества вершин  $X_n$ , независимые множества ребер  $E_n$  образуют семейство  $D$  независимых множеств ребер  $E_n$ . Независимое множество

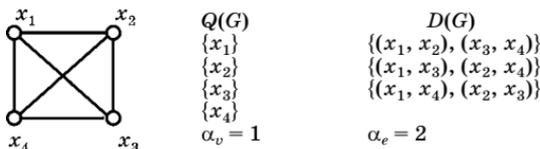


Рис. 5.2

Полный граф и его множества  $X_n$  и  $E_n$

ребер  $E_n$  *максимально*, если оно не входит ни в какое другое независимое множество  $E'_n \subset E$ .

Мощность максимального множества  $E_n$  называется *реберным числом независимости* графа  $G = (X, \Gamma)$ :

$$\alpha_e = \max_{E_{ni} \subset D} |E_{ni}|. \quad (5.4)$$

**Лемма 5.2.** Для полного графа  $\alpha_e(G_p) = n/2$ , если  $n \pmod{2} = 0$ , и  $\alpha_e(G_p) = (n-1)/2$ , если  $n \pmod{2} \neq 0$ .

Доказательство предоставляется читателю.

**Пример 5.2.** Найти варианты множеств  $X_n$  и  $E_n$  и числа  $\alpha_v$ ,  $\alpha_e$  для полного графа без петель (рис. 5.2).

### 5.3. РАСКРАСКА ГРАФА

Граф  $G$  называют *r-хроматическим*, если его вершины могут быть раскрашены с использованием  $r$  цветов (красок) так, что не найдется двух смежных вершин одного цвета.  $\gamma(G) = r_{\min}$  называется *хроматическим числом* графа  $G$ .

*Гипотеза четырех красок.* Каждый плоский граф можно раскрасить в четыре цвета так, что любые две смежные вершины будут раскрашены в *разные* цвета.

Гипотеза подтверждается невозможностью расширения транзитивного замыкания, представленного на рис. 3.6, на пять вершин без пересечения новых замыкающих дуг.

Раскраска графа разбивает множество его вершин на  $\gamma(G)$  подмножеств, каждое из которых содержит вершины одного цвета. По условию задачи эти вершины должны быть несмежными. Этому требованию отвечают вершины внутренне устойчивого множества. Отсюда следует метод нахождения раскраски графа.

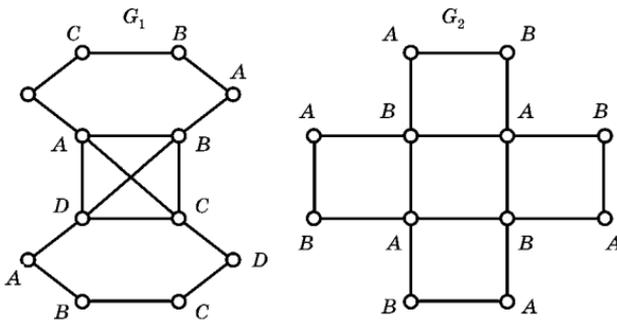
1. Строится матрица смежности соотнесенного неорграфа  $A_n$ .

2. Находятся все независимые множества вершин  $X_{ni}$  графа  $G = (X, E)$ .

3. Из семейства независимых множеств  $\{X_{ni}\}$  выделяются те, которые:

а) вместе содержат *все* вершины графа  $\bigcup_{i=1}^{\gamma(G)} X_{ni} = X$ ;

б) попарно не пересекаются  $X_{ni} \cap X_{nj} = \emptyset, i \neq j, i, j = \overline{1, n}$ .



**Рис. 5.3**  
Графы с  
одинаковым  
числом  
вершин и  
разными  $\gamma(G)$

4. Вершинам каждого из найденных множеств присваивается свой цвет.

**Пример 5.3.** Для графов с одинаковым количеством вершин ( $n = 12$ ) и ребер ( $m = 16$ ), изображенных на рис. 5.3,  $\gamma(G_1) = 4$  и  $\gamma(G_2) = 2$ .

#### 5.4. НАХОЖДЕНИЕ ВНУТРЕННЕ УСТОЙЧИВЫХ МНОЖЕСТВ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Условием вхождения вершин во внутренне устойчивое множество  $X_n$  является попарная несмежность вершин. Отношение несмежности вершин, так же как и смежности, характеризуется матрицей смежности **A**. Поскольку отношение несмежности является симметричным, выражение (5.1) может формироваться как по строкам, так и по столбцам матрицы **A**.

Несмежность вершин  $x_i$  и  $x_j$  определяется как отрицание смежности. Условие смежности  $j$ -й вершины  $i$ -й выразим логической формулой  $x_i \wedge x_j$ . Функция несмежности находится по закону де Моргана:  $x_i \wedge x_j = \bar{x}_i \vee \bar{x}_j$ . За признак смежности принимается элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности **A**, равный единице. Для каждого элемента  $a_{ij} = 1$  формула  $(\bar{x}_i \vee \bar{x}_j)$  включается в виде конъюнктивного члена в выражение (5.1):

$$\bigwedge_{a_{ij}=1} (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j). \quad (5.5)$$

Количество конъюнктивных членов в выражении (5.5) равно числу ребер соотнесенного графа. Поскольку функ-

ция несмежности обладает свойством коммутативности относительно дизъюнкции (тождественной перестановки аргументов), для формирования выражения (5.5) достаточно использовать треугольную подматрицу матрицы смежности  $\mathbf{A}$  соотнесенного графа. Это позволяет упростить выражение (5.5) для неорграфов в два раза.

Затем выражение (5.5), отражающее несмежность вершин графа, преобразуется в выражение (5.2) перемножением конъюнктивных членов с применением логических законов поглощения, приведенных в разделе 5.1.

Каждая конъюнкция инверсных логических переменных  $X'_{nq}$   $q = \overline{1, n}$ , полученного выражения (5.2) представляет собой логическое условие формирования одного из вариантов внутренне устойчивого множества. Переход от конъюнкции к внутренне устойчивому множеству вершин заключается в нахождении дополнения  $X_{nq} = X \setminus X'_{nq}$   $q = \overline{1, n}$ , включающего попарно несмежные вершины графа.

Пример 5.4. Найти все внутренне устойчивые множества  $X_{ni}$ , число вершинной независимости  $\alpha_v$  и раскраску графа  $G(X, E)$  по его матрице смежности  $\mathbf{A}$  (рис. 5.4).

1. Строится матрица смежности соотнесенного неорграфа  $\mathbf{A}_n$ .

2. По строкам верхней треугольной подматрицы смежности  $\mathbf{A}_n$  составляется выражение (5.5)<sup>7</sup>:

$$\bigwedge_{a_{ij}=1} (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_5) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_5).$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

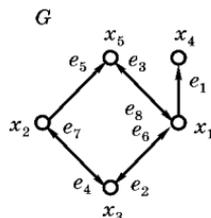


Рис. 5.4

Граф  $G$  и матрицы смежности графа  $G$  и соотнесенного ему неорграфа

<sup>7</sup> Для упрощения выражений знак конъюнкции ( $\wedge$ ) в них заменяется на знак логического умножения ( $\cdot$ ).

3. После перемножения и упрощения получаем выражение

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_5)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_5) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_5.$$

4. Для каждой конъюнкции формируется множество  $X_{ni}$  как дополнение до  $X$ :  $X_{n1} = \{x_3, x_4, x_5\}$ ;  $X_{n2} = \{x_2, x_4\}$ ;  $X_{n3} = \{x_1, x_2\}$ .

5. Число вершинной независимости  $\alpha_v = 3$ .

6. Раскраска графа  $G$  требует двух красок, поскольку два множества  $X_{n1}$  и  $X_{n3}$  удовлетворяют условиям:  $X_{n1} \cup X_{n3} = X$  и  $X_{n1} \cap X_{n3} = \emptyset$ .

## 5.5. ВНЕШНЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Внешняя устойчивость определяется на основе отношения смежности вершин графа  $G(X, \Gamma)$ . Поскольку последнее *зависит* от направления дуг, для орграфов необходимо рассматривать внешнюю устойчивость отдельно относительно исходящих и заходящих дуг.

Отношение смежности разделяет вершины графа на два подмножества:  $X_d$  и  $X \setminus X_d$ . В подмножество  $X_d^+$  включаются вершины, смежные всем вершинам из  $X \setminus X_d^+$ . В подмножество  $X_d^-$  включаются вершины, которым смежны все вершины из  $X \setminus X_d^-$ .

Множество  $X_d^+$  называется *доминируемым*, если в нем найдется смежная вершина для любой вершины из его дополнения  $X \setminus X_d^+$ .

Множество  $X_d^-$  называется *доминирующим*, если любая вершина из его дополнения  $X \setminus X_d^-$  является смежной какой-либо его вершине.

Доминируемое внешне устойчивое множество  $X_d^+$  образует вершины, в которые можно попасть из всех остальных вершин за один шаг, а из вершин, принадлежащих множеству  $X_d^-$ , можно за один шаг попасть во все остальные вершины.

Подмножество  $X_d \subset X$  *минимально*, если в него не входит другое доминируемое (доминирующее) подмножество  $X'_d \subset D$ . Минимальная мощность множества  $X_d$  в зависимости от направленности дуг называется числом *вершин-*

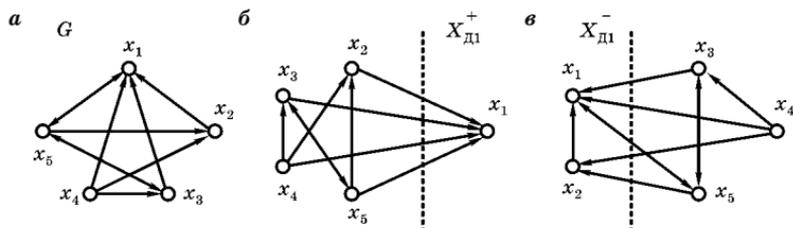


Рис. 5.5  
Граф и варианты множеств  $X_d^+$  и  $X_d^-$

ной доминирруемости, или числом вершинного доминирования:

$$\beta_d = \min_{X_d \subset D} |X_d|. \quad (5.6)$$

Очевидно, что в общем случае множества  $X_d^+$  и  $X_d^-$  и числа  $\beta_d^+$  и  $\beta_d^-$  в орграфе не совпадают, а в неорграфе совпадают.

**Пример 5.5.** Найти варианты множеств  $X_d^+$  и  $X_d^-$  и числа  $\beta_d^+$ ,  $\beta_d^-$  для графа  $G$ , изображенного на рис. 5.5а.

Варианты множеств  $X_d^+$  и  $X_d^-$  строятся от вершины, принятой за начальную. Если при нахождении множества  $X_d^+$  за начальную принять вершину  $x_1$ , то  $X_{d1}^+ = \{x_1\}$ , поскольку в нее заходят дуги из всех остальных вершин (рис. 5.5б). Варианты  $X_{d2}^+ = \{x_2, x_3\}$  и  $X_{d3}^+ = \{x_4, x_5\}$  соответствуют начальным вершинам  $x_2$  и  $x_4$ . Аналогичным образом находят варианты множеств  $X_d^-$ :  $X_{d1}^- = \{x_1, x_2\}$  (рис. 5.5в) и  $X_{d2}^- = \{x_1, x_4\}$  — для начальной вершины  $x_1$ ,  $X_{d3}^- = \{x_2, x_3\}$ ,  $X_{d4}^- = \{x_2, x_5\}$ ,  $X_{d5}^- = \{x_3, x_4\}$ ,  $X_{d6}^- = \{x_4, x_5\}$  — для вершин  $x_2, x_3, x_4$ .

## 5.6. НАХОЖДЕНИЕ ВНЕШНЕ УСТОЙЧИВЫХ МНОЖЕСТВ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Условием вхождения вершин во внешне устойчивое множество  $X_d^+$  является их смежность остальным вершинам графа. Множество  $X_d^-$  формируется на основе обратной направленности дуг. Первое из них формируется по строкам, а второе — по столбцам матрицы смежности  $A$ . При формировании отношения смежности в конъюнктивный

член выражения (5.1) вместе с рассматриваемой вершиной  $x_i$  включаются все смежные ей вершины ( $x_i \vee (x_j \vee, \dots)$ ). Выражение (5.1) имеет вид

$$\bigwedge_{i=1}^n \left( x_i \vee \left( \bigvee_{\Gamma(x_i)} x_j \right) \right), \quad i \neq j. \quad (5.7)$$

Результатом логического перемножения всех конъюнктивных членов выражения (5.7) являются конъюнкции, вершины которых образуют доминируемые множества  $X_{dk}^+$ . Доминирующие множества  $X_{dl}^-$  находятся по *столбцам* матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Пример 5.6.** Найти все внешне устойчивые множества  $X_{dk}^+$  и  $X_{dl}^-$  и числа  $\beta_d^+$  и  $\beta_d^-$  для графа  $G$ , приведенного на рис. 5.4.

1. По строкам матрицы смежности  $\mathbf{A}$  составляется выражение (5.7):

$$(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee x_5) \cdot (x_3 \vee x_1 \vee x_2) \cdot x_4 \cdot (x_5 \vee x_1).$$

2. После перемножения и упрощения получаем выражение

$$\begin{aligned} & (x_2 \vee x_3 \vee x_5) \cdot (x_1 \vee x_3 \cdot x_5 \vee x_2 \cdot x_5) \cdot x_4 = \\ & = x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_5 \cdot x_4 \vee x_3 \cdot x_5 \cdot x_4. \end{aligned}$$

3. Каждая конъюнкция определяет вариант множества  $X_{dk}^+$ :

$$X_{d1}^+ = \{x_1, x_2, x_4\},$$

$$X_{d2}^+ = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$X_{d3}^+ = \{x_2, x_4, x_5\},$$

$$X_{d4}^+ = \{x_3, x_4, x_5\}.$$

4. Число вершинной доминируемости  $\beta_d^+ = 3$ .

5. Выражение (5.7) для нахождения внешне устойчивых множеств  $X_{dl}^-$  составляется по *столбцам* матрицы смежности  $\mathbf{A}$ :

$$(x_1 \vee x_3 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot (x_3 \vee x_1 \vee x_2) \cdot (x_4 \vee x_1) \cdot (x_5 \vee x_1 \vee x_2).$$

6. После перемножения и упрощения получаем выражение

$$\begin{aligned}
& (x_1 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee x_3 \cdot x_1 \vee x_3 \cdot x_5) \cdot (x_4 \vee x_1) = \\
& = (x_1 \vee x_3 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_4 \cdot x_5) \cdot (x_2 \vee x_3 \cdot x_1 \vee x_3 \cdot x_5) = \\
& = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_3 \cdot x_4 \cdot x_5.
\end{aligned}$$

7. Каждая конъюнкция определяет вариант множества  $X_{dl}^-$ :

$$X_{d1}^- = \{x_1, x_2\},$$

$$X_{d2}^- = \{x_1, x_3\},$$

$$X_{d3}^- = \{x_2, x_4, x_5\},$$

$$X_{d4}^- = \{x_2, x_3, x_4\},$$

$$X_{d5}^- = \{x_3, x_4, x_5\}.$$

8. Число вершинного доминирования  $\beta_d^- = 2$ .

9. Из сопоставления множеств  $X_{dk}^+$  и  $X_{dl}^-$  следует совпадение ряда из них:

$$X_{d3}^+ = X_{d3}^- = \{x_2, x_4, x_5\} \text{ и } X_{d4}^+ = X_{d5}^- = \{x_3, x_4, x_5\}.$$

10. Числа доминируемости  $\beta_d^+$  и доминирования  $\beta_d^-$  у данного графа различаются.

### 5.7. ЯДРА ГРАФА

Множество  $X_{я}$  называется *ядром* графа  $G = (X, E)$ , если оно является *одновременно* максимальным внутренне устойчивым и минимально внешне устойчивым. Иными словами, ядром является максимальное число попарно несмежных вершин, минимально доминирующих (доминируемых) остальные вершины графа. Эти определения выражаются тождеством  $X_{я} = X_{н} = X_{д}$ .

В отличие от неорграфа, для орграфов следует различать два варианта ядер: *доминируемые*  $X_{я}^+$  и *доминирующие*  $X_{я}^-$  — в соответствии с принятой выше классификацией внешне устойчивых множеств вершин.

На рис. 5.6 представлены важные частные случаи графов. Граф, представленный на рис. 5.6а, иллюстрирует случаи *неединственности* ядра и *независимости* ядер данного орграфа от направления внешней устойчивости:  $X_{я1} = \{x_1, x_3\}$ ,  $X_{я1} = \{x_2, x_4\}$ .

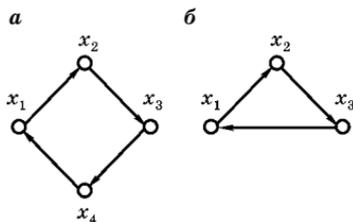


Рис. 5.6  
Граф:

$a$  — с ядром  $(X_{я}^+ = X_{я}^-)$ ;  $b$  — без ядра.

Последнее свойство позволяет утверждать о равенстве ядер этого орграфа с ядрами соотнесенного ему неорграфа.

Более сложный граф, изображенный на рис. 5.4, также имеет и доминируемое  $X_{я}^+$ , и доминирующее  $X_{я}^-$  ядро:

$$X_{я}^+ = X_{я}^- = \{x_3, x_4, x_5\},$$

поскольку это множество является также внутренне устойчивым (см. примеры 5.4 и 5.6).

Граф, изображенный на рис. 5.6б, не имеет ядер, поскольку внутренне и внешне устойчивые множества не совпадают:

$$X_{н1} = \{x_1\}; \quad X_{н2} = \{x_2\}; \quad X_{н3} = \{x_3\};$$

$$X_{д1}^+ = X_{д1}^- = \{x_1, x_2\}, \quad X_{д2}^+ = X_{д2}^- = \{x_2, x_3\}, \quad X_{д3}^+ = X_{д3}^- = \{x_1, x_3\}.$$

Из рассмотренных примеров следует, что граф может иметь несколько ядер, а может не иметь ни одного ядра. У ориентированного графа доминируемое и доминирующее ядра могут совпадать.

**Утверждение 5.1.** В неориентированном графе, а также в ориентированном графе с циклами только четной длины (см. раздел 6.1) ядра всегда есть, и их несколько.

**Утверждение 5.2.** В ориентированном графе, имеющем хотя бы один цикл нечетной длины, ядра не существует.

**Утверждение 5.3.** В ациклическом ориентированном графе существует единственное доминирующее и единственное доминируемое ядро.

Доказательства изложенных утверждений предоставляются читателю.

## 5.8.

### ПОКРЫТИЯ В НЕОРГРАФАХ

Распространим понятие доминирования на отношение *инцидентности*. Поскольку начало и конец дуги  $(u, v)$  инцидентны вершинам  $u$  и  $v$ :  $((u, v) \text{ inc } u)$  и  $((u, v) \text{ inc } v)$ , будем рассматривать отношение *инцидентности* приме-

нительно к неорграфам. Исходные орграфы будем представлять соотношенными неорграфами.

Множество вершин  $X_{\Pi}$ , которым инцидентны все ребра неорграфа, называется *вершинным покрытием* графа  $G$ . Из различных вершинных покрытий  $D_v$  графа  $G$  выбирается вершинное покрытие с минимальным числом вершин. Оно определяет *число* вершинного покрытия графа  $G$ :

$$\beta_v = \min_{X_{\Pi} \in D_v} |X_{\Pi}|. \quad (5.8)$$

Минимальным вершинным покрытием называется вершинное покрытие, в которое не входит никакое другое вершинное покрытие. Различные минимальные покрытия одного и того же графа могут содержать различное число вершин. Одним из вариантов минимального вершинного покрытия ребер графа  $G$  в примере 5.1 является  $X_{\Pi} = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$ . Число вершинного покрытия в этом графе  $\beta_v = 4$ .

Двойственным вершинному является понятие *реберного* покрытия  $E_{\Pi}$  графа  $G$ . Оно включает множество ребер, инцидентных всем вершинам графа  $G$ . Из различных реберных покрытий  $D_e$  графа  $G$  выбирается реберное покрытие с минимальным числом ребер. Оно определяет *число* его реберного покрытия:

$$\beta_e = \min_{E_{\Pi} \in D_e} |E_{\Pi}|. \quad (5.9)$$

Минимальным реберным покрытием называется реберное покрытие, в которое не входит никакое другое реберное

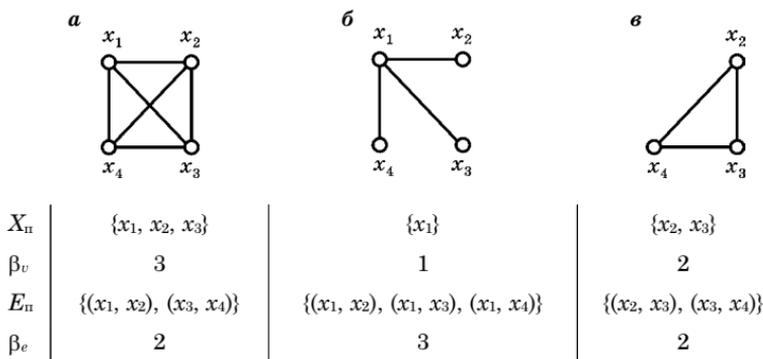


Рис. 5.7

Примеры вершинных и реберных покрытий

покрытие. Одним из вариантов минимального реберного покрытия вершин графа  $G$  в примере 5.1 является  $E_{\Pi} = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_7, x_8)\}$ . Число реберного покрытия в этом графе  $\beta_e = 4$ .

На рис. 5.7 приведены примеры вершинных и реберных покрытий и их чисел  $\beta_v, \beta_e$  для полного графа  $G_p$  (рис. 5.7а), его звездного суграфа (рис. 5.7б) и клики (рис. 5.7в).

**Лемма 5.3.** Для полного графа  $\beta_v(G_p) = n - 1$ .

**Лемма 5.4.** Для полного графа  $\beta_e(G_p) = n/2$ , если  $n \pmod{2} = 0$ , и  $\beta_e(G_p) = (n + 1)/2$ , если  $n \pmod{2} \neq 0$ .

Справедливость этих лемм для случая полного графа с  $n = 4$  подтверждается на рис. 5.7а.

## 5.9.

### НАХОЖДЕНИЕ ВЕРШИННОГО И РЕБЕРНОГО ПОКРЫТИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Поскольку вершинное и реберное покрытия графа определяются на основе отношения инцидентности между его дугами и вершинами, в качестве исходной информации для нахождения множеств  $X_{\Pi}$  и  $E_{\Pi}$  используется матрица инцидентности.

*Вершинное покрытие*  $X_{\Pi k}$  графа  $G$  определяется путем нахождения минимального покрытия всех дуг вершинами с возможным перекрытием с использованием выражения

$$\bigwedge_{k=1}^m (x_i \vee x_j)_k, \quad (5.10)$$

где  $x_i$  и  $x_j$  — вершины, инцидентные дуге  $e_k = (x_i, x_j)$ .

*Реберное покрытие*  $E_{\Pi i}$  графа  $G$  определяется на основе выражения

$$\bigwedge_{i=1}^n (e_1 \vee e_j \dots \vee e_k)_i. \quad (5.11)$$

В  $i$ -й конъюнктивный член включаются все дуги, инцидентные рассматриваемой вершине  $x_i$ .

В силу симметричности отношения инцидентности для нахождения множеств  $X_{\Pi k}$  и  $E_{\Pi i}$  можно использовать соотнесенный граф, что позволяет сократить размерность задачи.

**Пример 5.7.** Найти множества  $X_{пк}$  и  $E_{пн}$  графа  $G$ , изображенного на рис. 5.4, по его матрице инцидентности  $A_{пн}$ . Решим задачу алгебраическим способом

$$A_{пн} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Из восьми дуг орграфа будем рассматривать первые пять, принимая их за ребра соотнесенного графа, поскольку дуги  $e_6, e_7, e_8$  имеют обратное направление по отношению к дугам  $e_2, e_4, e_3$ . Выполняется следующая последовательность действий.

1. По строкам матрицы инцидентности составляется выражение (5.10), состоящее из пар вершин, инцидентных ребрам графа:

$$(x_1 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_5).$$

2. После перемножения и упрощения получаем выражение

$$(x_1 \vee x_3 \cdot x_4 \cdot x_5) \cdot (x_2 \vee x_3 \cdot x_5) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \vee x_3 \cdot x_4 \cdot x_5.$$

3. Каждая конъюнкция определяет множество  $X_{пк}$ :

$$X_{п1} = \{x_1, x_2\}; \quad X_{п2} = \{x_1, x_3, x_5\}; \quad X_{п3} = \{x_3, x_4, x_5\}.$$

4. Число вершинного покрытия  $\beta_v = 2$ .

5. По столбцам матрицы инцидентности составляется выражение, состоящее из дуг, инцидентных каждой вершине графа  $G$ :

$$(e_1 \vee e_2 \vee e_3) \cdot (e_4 \vee e_5) \cdot (e_2 \vee e_4) \cdot e_1 \cdot (e_3 \vee e_5).$$

6. После перемножения и упрощения получаем выражение

$$(e_4 \vee e_2 \cdot e_5) \cdot e_1 \cdot (e_3 \vee e_5) = e_1 \cdot e_3 \cdot e_4 \vee e_1 \cdot e_4 \cdot e_5 \vee e_1 \cdot e_2 \cdot e_5.$$

7. Каждая конъюнкция определяет множество  $E_{n_i}$ :

$$E_{n1} = \{e_1, e_3, e_4\}; \quad E_{n2} = \{e_1, e_4, e_5\}; \quad E_{n3} = \{e_1, e_2, e_5\}.$$

8. Число реберного покрытия  $\beta_e = 3$ .

### 5.10. НАХОЖДЕНИЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Поскольку паросочетания  $E_{n_i}$  представляют собой множества попарно несмежных дуг, они вычисляются на основе выражения, аналогичного выражению, используемому для вычисления внутренне устойчивых (независимых) множеств  $X_n$  по матрице смежности реберного графа:

$$\bigwedge_{a_{ij}=1} (\bar{e}_i \vee \bar{e}_j). \quad (5.12)$$

Аналогичное выражение строится по матрице инцидентности  $A_n$  исходного графа:

$$\bigwedge_{a_{ik}^n \cdot a_{jk}^n \neq 0} (\bar{e}_i \vee \bar{e}_j). \quad (5.13)$$

**Пример 5.8.** Найти все варианты паросочетаний графа  $G$ , изображенного на рис. 5.4, по его матрице инцидентности  $A_n$ . Последние три строки матрицы не участвуют в составлении выражения (5.13) в силу симметричности отношения инцидентности вершин и дуг.

1. Относительно каждой вершины графа составляется выражение (5.13) для всех пар инцидентных ей дуг:

$$(\bar{e}_1 \vee \bar{e}_2) \cdot (\bar{e}_1 \vee \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_2 \vee \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_4 \vee \bar{e}_5) \cdot (\bar{e}_2 \vee \bar{e}_4) \cdot (\bar{e}_3 \vee \bar{e}_5).$$

2. После перемножения и упрощения получаем выражение

$$\begin{aligned} & (\bar{e}_1 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_2 \vee \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_4 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_5) \cdot (\bar{e}_3 \vee \bar{e}_5) = \\ & = (\bar{e}_1 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_3 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_5) \cdot (\bar{e}_4 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_5) = \\ & = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_4 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_4 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_5 \vee \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_5. \end{aligned}$$

3. Для каждой конъюнкции формируется множество  $E_{n_i}$  как дополнение до  $E$ :

$$\begin{aligned} E_{n1} &= \{e_2, e_5\}; & E_{n2} &= \{e_1, e_5\}; \\ E_{n3} &= \{e_1, e_4\}; & E_{n4} &= \{e_3, e_4\}. \end{aligned}$$

4. Число реберной независимости  $\alpha_e = 2$ .

### 5.11. ИНВАРИАНТЫ НЕОРГРАФОВ

Инвариантом называется число или набор чисел, определяющий граф с точностью до изоморфизма. Примерами инвариантов, то есть чисел, одинаковых у всех изоморфных графов, являются: число вершин, число ребер, степени вершин, числа вершинной и реберной независимости, вершинного и реберного покрытия. Некоторые инварианты графа связаны соотношениями, позволяющими значения одних инвариантов графа вычислять через другие.

Рассмотрим соотношения между числом вершин графа и числами его вершинной  $\alpha_v$  и реберной  $\alpha_e$  независимости, вершинного  $\beta_v$  и реберного  $\beta_e$  покрытий.

**Теорема 5.2.** Для любого нетривиального (без изолированных вершин) неориентированного графа  $G$  имеет место

$$\alpha_v + \beta_v = n = \alpha_e + \beta_e. \quad (5.14)$$

Проверим эту теорему на примере полных графов с использованием сформулированных для них лемм 5.1–5.4:

$$\begin{aligned} \alpha_v + \beta_v &= 1 + n - 1 = n; \\ \alpha_e + \beta_e &= (n - 1)/2 + (n + 1)/2 = n. \end{aligned}$$

**Пример 5.9.** Проверить правильность расчетов множеств  $X_{ni}$ ,  $X_{nk}$ ,  $E_{nj}$ ,  $E_{nl}$  для графа, приведенного на рис. 5.4. Выражение, составленное по результатам, полученным в примерах 5.4, 5.7, 5.8, соответствует теореме 5.2:

$$\alpha_v + \beta_v = 3 + 2 = \alpha_e + \beta_e = 2 + 3 = 5 = n.$$

**Следствие 1.** Если найдено множество  $X_{ni}$ , то  $X_{ni} = X \setminus X_{ni}$ , и наоборот.

Для двудольных графов дополнительная взаимосвязь между инвариантами утверждается следующей теоремой.

**Теорема 5.3.** Для двудольного графа  $K(n_1, n_2)$  число ребер  $\alpha_e$  в наибольшем паросочетании  $E_n$  равно числу  $\beta_v$  вершинного покрытия  $X_n$ :

$$\alpha_e = \beta_v. \quad (5.15)$$

Проиллюстрируем теорему 5.3 на примере двудольного графа  $G(V, W, E)$ , изображенного вместе с матрицей инцидентности на рис. 5.8.

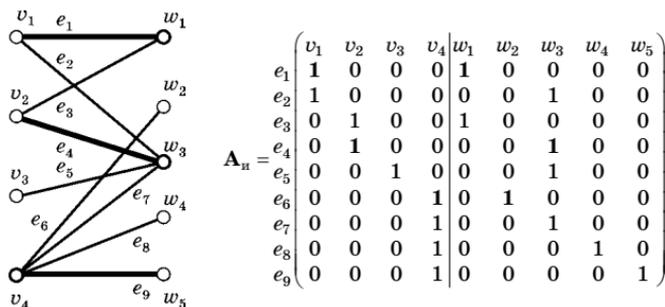


Рис. 5.8

Двудольный граф и его матрица инцидентности

**Пример 5.10.** Убедимся в справедливости тождества (5.15).

Для нахождения вершинного покрытия по строкам матрицы инцидентности составим выражение, состоящее из пар вершин, инцидентных ребрам графа:

$$\begin{aligned} & (v_1 \vee w_4) \cdot (v_1 \vee w_3) \cdot (v_2 \vee w_1) \cdot (v_2 \vee w_3) \cdot (v_3 \vee w_3) \cdot \\ & \quad \cdot (v_4 \vee w_2) \cdot (v_4 \vee w_3) \cdot (v_4 \vee w_4) \cdot (v_4 \vee w_5) = \\ = & (v_1 \vee w_1 \cdot w_3) \cdot (v_2 \vee w_1 \cdot w_3) \cdot (v_3 \vee w_3) \cdot (v_4 \vee w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot w_5). \end{aligned}$$

После перемножения и упрощения получаем выражение

$$\begin{aligned} & (w_1 \cdot w_3 \vee v_1 \cdot v_2) \cdot \\ & \cdot (v_3 \cdot v_4 \vee v_3 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot w_5 \vee v_4 \cdot w_3 \vee w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot w_5) = \\ = & w_1 \cdot w_3 \cdot v_3 \cdot v_4 \vee v_3 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot w_5 \vee v_4 \cdot w_1 \cdot w_3 \vee \dots \end{aligned}$$

Завершим перемножение на самой короткой конъюнкции  $v_4 \cdot w_1 \cdot w_3$ . Ей соответствует вершинное покрытие  $X_{\text{и}} = \{v_4, w_1, w_3\}$  с числом вершинного покрытия  $\beta_v = 3$ . Вершины, принадлежащие этому множеству, выделены на рисунке и в матрице.

Для нахождения паросочетания относительно каждой вершины графа составим выражение для всех пар инцидентных ей дуг:

$$\begin{aligned} & (\bar{e}_1 \vee \bar{e}_2) \cdot (\bar{e}_3 \vee \bar{e}_4) \cdot (\bar{e}_6 \vee \bar{e}_7) \cdot (\bar{e}_6 \vee \bar{e}_8) \cdot \\ & \cdot (\bar{e}_6 \vee \bar{e}_9) \cdot (\bar{e}_7 \vee \bar{e}_8) \cdot (\bar{e}_7 \vee \bar{e}_9) \cdot (\bar{e}_8 \vee \bar{e}_9) \cdot \\ & \cdot (\bar{e}_1 \vee \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_2 \vee \bar{e}_4) \cdot (\bar{e}_2 \vee \bar{e}_5) \cdot (\bar{e}_2 \vee \bar{e}_7) \cdot \\ & \quad \cdot (\bar{e}_4 \vee \bar{e}_5) \cdot (\bar{e}_4 \vee \bar{e}_7) \cdot (\bar{e}_5 \vee \bar{e}_7). \end{aligned}$$

После перемножения и поглощения получаем промежуточное выражение

$$(\bar{e}_2 \vee \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_4 \cdot \bar{e}_5 \cdot \bar{e}_7) \cdot (\bar{e}_3 \vee \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_4) \cdot (\bar{e}_5 \vee \bar{e}_4 \cdot \bar{e}_7) \cdot \\ \cdot (\bar{e}_6 \vee \bar{e}_7 \cdot \bar{e}_8 \cdot \bar{e}_9) \cdot (\bar{e}_7 \vee \bar{e}_4 \cdot \bar{e}_8 \cdot \bar{e}_9) \cdot (\bar{e}_8 \vee \bar{e}_9).$$

Из 64 произведений, которые дает перемножение шести скобок, приведем 4 варианта с максимальным числом сомножителей:

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_5 \cdot \bar{e}_6 \cdot \bar{e}_7 \cdot \bar{e}_8 \vee \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_5 \cdot \bar{e}_6 \cdot \bar{e}_7 \cdot \bar{e}_9 \vee \bar{e}_1 \cdot \\ \cdot \bar{e}_4 \cdot \bar{e}_5 \cdot \bar{e}_6 \cdot \bar{e}_7 \cdot \bar{e}_8 \vee \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_4 \cdot \bar{e}_5 \cdot \bar{e}_6 \cdot \bar{e}_7 \cdot \bar{e}_9 \vee \dots$$

Этим произведениям соответствуют следующие паросочетания  $E_{n_l}$  (дополнения до  $E$ ) с числом реберной независимости  $\alpha_e = 3 = \beta_v$ :

$$E_{n_1} = \{e_1, e_4, e_9\}; \quad E_{n_2} = \{e_1, e_4, e_8\}; \\ E_{n_3} = \{e_2, e_3, e_9\}; \quad E_{n_4} = \{e_2, e_3, e_8\}.$$

Ребра, вошедшие в множество  $E_{n_1}$  и инцидентные вершинам вершинного покрытия  $X_{\Pi} = \{v_4, w_1, w_3\}$ , на рисунке выделены жирными линиями.

### У п р а ж н е н и я

1. Доказать, что внутренне устойчивые множества (множества вершинной независимости) одинаковы у орграфа и соотнесенного ему неорграфа.
2. Доказать, что внешне устойчивые множества — доминируемое  $X_d^+$  и доминирующее  $X_d^-$  в общем случае различны. Показать, при каких условиях они совпадают.
3. Проанализировать связь между множеством вершинного покрытия  $X_{\Pi}$  и множествами  $X_d^+$  и  $X_d^-$ . Каково их соотношение в неорграфе?
4. Справедлива ли теорема 5.2 для орграфов и если нет, то почему?
5. Определите вершинное число независимости графа, соотнесенного отношению «эквивалентность по модулю  $N$ », исходя из свойства этого отношения.
6. Определите вершинное число независимости графа, соотнесенного отношению «быть больше», исходя из свойства этого отношения.
7. Определите реберное число независимости графа типа «кольцо».
8. Определите реберное число независимости звездного графа.
9. Может ли быть  $\alpha_e > n/2$ , где  $n$  — число вершин?

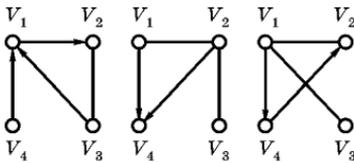


Рис. 5.9

Варианты графов

10. Определить числа доминируемости и доминирования полного орграфа. Будут ли ядрами соответствующие им множества?
11. Привести пример орграфа с  $n = 4$ , имеющего лишь одно минимальное внешне устойчивое множество, причем состоящее из одной вершины.
12. Найти алгебраическим способом максимальные внутренне устойчивые и минимальные внешне устойчивые множества вершин орграфов, изображенных на рис. 5.9.
13. Определить число вершинного покрытия полного графа и построенного на его основе реберного графа.
14. Определить число вершинного покрытия звездного графа и построенного на его основе реберного графа.
15. Найти хроматическое число полного графа, доказать.
16. Найти хроматическое число дерева, доказать.

## ДОСТИЖИМОСТЬ И СВЯЗНОСТЬ

### 6.1.

#### МАРШРУТЫ, ЦЕПИ И ЦИКЛЫ

**Маршрут**, или *путь*, — это такая последовательность дуг  $(e_1, \dots, e_i, \dots, e_l)$ , что каждые две соседние дуги имеют общую, инцидентную им вершину, причем  $e_1$  — *первая* дуга, а  $e_l$  — *последняя* дуга маршрута,  $l \leq m$ . В неорграфе маршрут выражается через последовательность *ребер*, поскольку направленность маршрута несущественна. Дуга  $e_i$  может встречаться в маршруте более одного раза.

Поскольку каждая дуга графа может быть представлена парой смежных вершин, маршрут может выражаться через последовательность попарно смежных вершин, число которых на единицу больше числа дуг:  $(v_1, \dots, v_j, \dots, v_{l+1})$ . Здесь *началом* маршрута является вершина  $v_1$ , инцидентная дуге  $e_1$  и неинцидентная дуге  $e_l$ , а *концом* маршрута — вершина  $v_{l+1}$ , инцидентная  $e_l$  и неинцидентная  $e_{l-1}$ . *Внутренние (промежуточные)* вершины инцидентны дугам маршрута. Начало (конец) маршрута может оказаться внутренней вершиной, если она входит в маршрут более одного раза.

**Пример 6.1.** Выразить маршруты  $\mu$ , соединяющие вершины  $v_1$  и  $v_3$  графа  $G$ , через дуги и вершины (рис. 6.1)

$$\mu_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_2) = (v_1, v_2, v_3, v_5, v_2, v_3);$$

$$\mu_2 = (e_1, e_4, e_5, e_6, e_2) = (v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3);$$

$$\mu_3 = (e_1, e_2) = (v_1, v_2, v_3).$$

Маршруты  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , соединяющие вершины  $v_1$  и  $v_3$ , включают одинаковое число дуг (вершин), но различаются их составом. От маршрута  $\mu_3$  их отличает *число* входящих в них дуг, называемое *длиной* маршрута  $l$ .

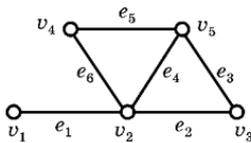


Рис. 6.1  
Неориентированный  
граф  $G$

Если пара вершин  $(v_i, v_j)$  является элементом бинарного отношения  $R^2$ , то последовательность вершин  $(v_1, \dots, v_j, \dots, v_{l+1})$ , представляющая собой маршрут  $\mu$  длины  $l$ , можно считать элементом  $l + 1$ -арного отношения  $R^{l+1}$ .

В графе  $G = (V, E, C)$  со взвешенными дугами (ребрами) маршруту  $\mu$  сопоставляется вес:

$$c(\mu) = \sum_{i=1}^l c(e_i), \quad (6.1)$$

где  $c(e_i)$  — вес дуги  $e_i$ .

Как следует из примера 6.1, маршруты различаются как длиной ( $\mu_1$  и  $\mu_3$ ), так и перечнем входящих в них дуг ( $\mu_1$  и  $\mu_2$ ).

*Цепью* называется маршрут, в котором *все дуги* различны ( $\mu_2$  в примере 6.1).

*Простой* называется цепь, в которой *все вершины* различны ( $\mu_3$  в примере 6.1)

*Циклическим* называется маршрут с  $v_1 = v_{l+1}$ . Он может содержать повторяющиеся дуги и вершины.

*Циклом* называется замкнутая цепь (циклический маршрут, в котором все дуги различны).

*Простым* называется цикл, у которого все *вершины* различны.

*Участком* маршрута  $(e_1, \dots, e_i, \dots, e_l)$  называется его часть:

$$(e_1, \dots, e_i) \subset (e_1, \dots, e_i, \dots, e_l).$$

В простом графе ( $\forall (v_i, v_j) \in E \rho(v_i, v_j) = 1$ ) маршруты однозначно представляются как через дуги, так и через вершины. Маршрут в мультиграфе однозначно представляется только последовательностью дуг (ребер).

## 6.2. ДОСТИЖИМОСТЬ

Вершина  $v_j$  *s-достижима* из вершины  $v_i$ , если существует маршрут длины  $s$ , соединяющий вершины  $v_i, v_j \in V$ . Обозначим множество *s-достижимых* из  $v_i$  вершин через  $V_i^s$ . Множество  $V_i^s$  определяется путем нахождения  $s$ -кратно-

го соответствия  $\Gamma^s(v_i)$  вершины  $v_i$  со смежными вершинами:  $V_i^s = \Gamma^s(v_i)$ , причем  $\Gamma^0(v_i) = v_i$ , что соответствует 0-достижимости вершины  $v_i$ . Множество *всех* вершин, достижимых из  $v_i$ :

$$V_i = \bigcup_{s=0}^{s_{\max}} \Gamma^s(v_i). \quad (6.2)$$

Достижимость из *всех* исходных вершин графа описывается матрицей достижимости  $\mathbf{R}$  (reach), элемент которой  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, n$ :

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_j \text{ достижима из } v_i \text{ за } s \leq s_{\max} \text{ шагов;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку каждая вершина достижима из себя самой, 0-достижимые вершины описываются диагональной матрицей с  $r_{ii} = 1$ .

1-достижимость  $\Gamma^1(v_i) = v_j$  отражает отношение смежности  $j$ -й вершины  $i$ -й. Для всех вершин графа 1-достижимость представима матрицей смежности  $\mathbf{A}$ . Единицам в  $i$ -й строке матрицы смежности соответствует множество вершин  $V_i^1 = \Gamma^1(v_i)$ , смежных вершине  $v_i$ .

### 6.3. НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВ S-ДОСТИЖИМЫХ ВЕРШИН

Представление элемента  $a_{ik}$  матрицы  $\mathbf{A}$  логической переменной позволяет определить достижимость вершины  $v_k$  из  $v_i$  через промежуточную вершину  $v_j$  с помощью следующей логической формулы:

$$a_{ik} = \bigvee_{j=1}^n (a_{ij} \wedge a_{jk}). \quad (6.3)$$

Формула (6.3) характеризует перебор всех  $n$  вершин графа в качестве *промежуточных* между вершинами  $v_i$  и  $v_k$ . Пример перебора (в ширину) промежуточных вершин графа с  $n = 5$  при определении достижимости вершины  $v_k$  из  $v_i$  показан на рис. 6.2. Значениям элементов матрицы смежности  $a_{i2} = a_{2k} = a_{i4} = a_{4k} = 1$  соответствуют два маршрута

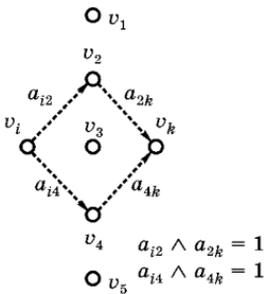


Рис. 6.2

Графическая интерпретация перебора вершин в графе с  $n = 5$

$\mu_1 = (v_i, v_2, v_k)$  и  $\mu_2 = (v_i, v_4, v_k)$  через промежуточные вершины  $v_2$  и  $v_4$ .

На основании формулы (6.3) находятся все  $s$ -достижимые вершины из всех  $n$  исходных вершин графа с помощью рекуррентной формулы, соответствующей  $s$ -й степени бинарного отношения (см. раздел 3.3.7):

$$a_{ik}^s = \bigvee_{j=1}^n (a_{ij}^{s-1} \wedge a_{jk}), \quad i, j, k = \overline{1, n}. \quad (6.4)$$

Достижимости наиболее удаленной вершины соответствует максимальная степень матрицы  $\mathbf{A}$ , определяемая по правилу:

$$s_{\max} = \begin{cases} s, & \text{если } \mathbf{A}^{s+1} = \mathbf{0} \text{ и } s < n-1; \\ n-1, & \text{если } \mathbf{A}^{s+1} \neq \mathbf{0} \text{ и } s = n-1. \end{cases} \quad (6.5)$$

Первое условие означает отсутствие вершин, достижимых из исходной вершины за  $s$  шагов, а следовательно, и по более длинным маршрутам. Второе условие означает максимальную достижимость вершин без возврата в исходную вершину.

Формула (6.5) определяет построение матрицы  $s$ -достижимости  $\mathbf{R}_s$  как  $s$ -ю степень матрицы смежности:  $\mathbf{R}_s = \mathbf{A}^s$ ,  $r_{ik}^{(s)} = a_{ik}^s$ .

Матрица достижимости  $\mathbf{R}$  маршрутами любой длины вычисляется путем логического сложения всех матриц  $s$ -достижимости  $\mathbf{R}_s$ ,  $s = 0, s_{\max}$ :

$$\mathbf{R} = \bigvee_{s=0}^{s_{\max}} \mathbf{R}_s. \quad (6.6)$$

Включение в логическую сумму матрицы 0-достижимости  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ , т. е. единичной матрицы, обуславливается отсутствием единиц в главной диагонали исходной матрицы смежности  $\mathbf{A}^1$ .

Максимальная достижимость  $s = s_{\max}$  из вершины  $v_i$  характеризуется отсутствием приращения единиц в  $i$ -й строке матрицы  $\mathbf{A}^{s+1}$ . Очевидно, что все возможные вер-

шины достигнуты из исходных, если отсутствуют приращения единиц во *всех* строках этой матрицы.

**Теорема 6.1.** Для транзитивного замыкания графа  $G_t$   $\mathbf{A}^s = \mathbf{R} - \mathbf{I}$ .

Если в графе  $G_t$  существует путь  $\mu_{ik}$  между вершинами  $v_i$  и  $v_k$ , то каждой промежуточной вершине  $v_j \in \mu_{ik}$  смежна вершина  $v_{j+1} \in \mu_{ik}$ . Значениям  $a_{ij} = a_{i,j+1} = \dots = a_{k-1,k} = 1$  соответствует достижимость всех промежуточных вершин в графе, соответствующем матрице  $\mathbf{R}$ .

#### 6.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВ МАРШРУТОВ

Представление элемента  $a_{ik}$  матрицы  $\mathbf{A}$  целочисленной переменной позволяет определить количество маршрутов, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_k$  через промежуточную вершину  $v_j$  с помощью формулы с арифметическими операциями:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot a_{jk}). \quad (6.7)$$

Аналогично формуле (6.4) количество маршрутов для всех  $s$ -достижимых вершин графа вычисляется с помощью рекуррентной арифметической формулы:

$$a_{ik}^s = \sum_{j=1}^n (a_{ij}^{s-1} \cdot a_{jk}), \quad i, j, k = \overline{1, n}, \quad (6.8)$$

определяя матрицу  $\mathbf{H}_s$  количеств маршрутов длины  $s$  ( $h_{ik}^s = a_{ik}^s$ ).

**Теорема 6.2.** Элемент  $a_{ik}^s$  матрицы смежности  $\mathbf{A}^s$ , полученной по формуле (6.8), равен числу маршрутов длины  $s$ , идущих из вершины  $v_i$  в вершину  $v_k$ .

На основании матриц  $\mathbf{H}_s$ ,  $s = \overline{1, s_{\max}}$ , можно определить количество маршрутов *любой* длины, соединяющих исходные вершины графа со всеми достижимыми вершинами. Эти числа суммируются в матрице  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \sum_{s=1}^{s_{\max}} \mathbf{H}_s + \Delta. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) определяет максимальное число маршрутов к достижимым вершинам.

**Лемма 6.1.** Ненулевые элементы матриц  $\mathbf{R}_s$  и  $\mathbf{H}_s$  совпадают.

Действительно, количество путей длины  $s > 0$  не равно нулю только для  $s$ -достижимой вершины.

*Следствие 1.* Матрица  $\mathbf{H}_s$  преобразуется в матрицу  $\mathbf{R}_s$  путем замены значений ее элементов  $h_{ij}^{(s)} > 1$  на 1:

$$r_{ij}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{если } h_{ij}^{(s)} > 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6.10)$$

*Следствие 2.* Для графа, все вершины которого 1-достижимы,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^1 + \mathbf{I}. \quad (6.11)$$

Помимо 1-достижимости, матрица  $\mathbf{R}$  включает также маршруты нулевой длины ( $s = 0$ ) для всех вершин графа.

Проверьте следствие 2 на примере полного графа.

Исходя из леммы 6.1 и следствий 1 и 2 матрицу достижимости  $\mathbf{R}$  можно строить на основе матриц количеств маршрутов  $\mathbf{H}_s$  по следующим правилам:

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } h_{\max} = 0; \\ 1, & \text{если } h_{\max} > 0 \text{ или } i = j. \end{cases} \quad (6.12)$$

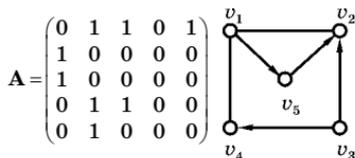
Условие  $i = j$  соответствует логическому добавлению единичной матрицы  $\mathbf{I}$  к матрице  $\mathbf{R}$ , полученной из матрицы  $\mathbf{H}_{\max}$ .

Правила (6.12) полезно использовать в том случае, когда требуется найти не только множество достижимых вершин, но и число путей, ведущих в них из исходных вершин. Матрица достижимости  $\mathbf{R}$  строится на основе матрицы  $\mathbf{H}_{\max}$ .

Формулы (6.7)–(6.12) могут использоваться также применительно к *единственной* вершине  $v_i$  графа  $G$ . В этом случае матрица-строка  $\mathbf{a}_i^{s-1}$  умножается на матрицу  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{a}_i^s = \mathbf{a}_i^{s-1} \times \mathbf{A}$ .

Если требуется найти путь между *двумя* заданными вершинами  $v_i$  и  $v_k$ , то вычисление *каждого* элемента  $a_{ik}^s$  матрицы-строки  $\mathbf{a}_i^s$  сопровождается его анализом на 0. Если  $a_{ik}^s \neq 0$ , то при вычислении по формуле (6.4) найдена  $s$ -достижимая вершина  $v_k$ , а при вычислении по формуле (6.7) найдено количество ведущих к ней путей.

**Пример 6.2.** Для графа с двумя ребрами и четырьмя дугами, изображенного на рис. 6.3, найти матрицы количеств всех маршрутов  $\mathbf{H}$  и достижимости  $\mathbf{R}$ .



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Рис. 6.3**  
Граф  $G$   
и его матрица смежности

На основе матрицы  $\mathbf{A}$  вычисляются матрицы количеств маршрутов  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  и  $\mathbf{H}_4$  как степени матрицы смежности  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^3$  и  $\mathbf{A}^4$ :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Арифметическим суммированием матриц  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  и  $\mathbf{H}_4$  вычисляем матрицу общего количества путей  $\mathbf{H}_{\max}$ , а по ней строится матрица  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{H}_{\max} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 6.5. НАХОЖДЕНИЕ ВАРИАНТОВ МАРШРУТОВ

Очевидно, что рекуррентную формулу (6.8), применяемую для выявления наличия маршрута  $\mu_{ik}$  между вершинами  $v_i$  и  $v_k$ , можно использовать и для определения самого маршрута, т. е. промежуточных вершин, через которые проходит путь  $\mu_{ik}$ . Эта задача решается с применением *модифицированной* матрицы смежности  $\mathbf{B}$ , получаемой из матрицы смежности  $\mathbf{A}$  заменой  $a_{ij} = 1$  на имя  $j$ -й вершины:  $b_{ij} = v_j$ .

В соответствии с этой заменой рекуррентная формула (6.4) преобразуется в формулу нахождения путей длины  $s$ :

$$p_{ik}^s = \bigvee_{j=1}^n (b_{ij} \wedge p_{jk}^{s-1}), \quad i, j, k = \overline{1, n}. \quad (6.13)$$

В ней смежная вершина  $v_j = b_{ij}$  задает первую промежуточную вершину пути. При вычислении матрицы  $\mathbf{P}_2$  в качестве исходной матрицы путей принимается матрица смежности:  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}$ . Умножение на матрицу  $\mathbf{P}_1$  переводит элементы модифицированной матрицы смежности  $\mathbf{B}$  из смежных в промежуточные вершины.

Элементом  $p_{ik}^s$  матрицы путей  $\mathbf{P}_s$  длины  $s$  является совокупность цепочек промежуточных вершин  $j = \overline{1, s-2}$ , соединяющих  $i$ -ю и  $k$ -ю вершины. В формуле (6.13) промежуточные вершины связываются в цепочку с помощью конъюнкции, а цепочки объединяются в набор с помощью дизъюнкции (см. пример 7.8).

Для нахождения путей любой длины применяется формула, аналогичная формуле (6.6) достижимости вершин:

$$\mathbf{P} = \bigvee_{s=1}^{\max} \mathbf{P}_s. \quad (6.14)$$

## 6.6. СВЯЗНОСТЬ И СВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ НЕОРГРАФА

Вершины  $u$  и  $v$  неорграфа  $G = (V, E)$  называют *связанными*, если существует соединяющий их маршрут  $\mu_{uv}$ . Отношение связности вершин неорграфа характеризуется следующими элементарными свойствами:

1) *рефлексивностью* — вершина достижима из самой себя за 0 шагов;

2) *симметричностью*:  $\mu_{uv} = \mu_{vu}$ ;

3) *транзитивностью*:  $\mu_{uv}$  и  $\mu_{vw}$  влечет  $\mu_{uw}$ .

Симметричность маршрута следует из симметричности ребер неорграфа.

Транзитивности маршрутов соответствует возможность рассматривать маршрут  $\mu_{uv}$  как сумму составляющих его участков  $\mu_{uw}$  и  $\mu_{wv}$ .

Таким образом, отношение связности обладает свойством *эквивалентности*, определяющим разбиение связанных между собой вершин на непересекающиеся подмножества. Подмножества связанных между собой вершин называют *связными компонентами*  $G = (V_i, E_i)$ ,  $i \in I$ , неорграфа  $G = (V, E)$ . Они образуют *прямую* сумму подграфов:

$$G = \sum_{i \in I} (V_i, E_i).$$

Связные компоненты неорграфа  $G = (V, E)$  находятся на основе матрицы достижимости  $\mathbf{R}$ . Полученная матрица связности представляет собой матрицу двусторонней достижимости вершин. Каждой группе одинаковых строк соответствует связная компонента неорграфа.

Неорграф называется *связным*, если все его вершины связаны между собой. Связный граф представляет собой единственную связную компоненту.

В качестве примеров приведем две важных разновидности неорграфа: *дерево* и *лес*. Дерево представляет собой ациклический *связный* граф, а лес — ациклический *несвязный* граф. Связными компонентами леса являются деревья.

Возможность разбиения неорграфа на связные компоненты характеризуется его *вершинной* и *реберной связностью*.

*Вершинной связностью*  $\chi(G)$  неорграфа  $G = (V, E)$  называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному, или тривиальному, графу (с изолированными вершинами).

Связность  $\chi(G)$  несвязного неорграфа равна 0.

Связность полного неорграфа  $\chi(G_p) = n - 1$ .

*Реберной связностью*  $\lambda(G)$  неорграфа  $G = (V, E)$  называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному, или тривиальному, графу.

**Теорема 6.3.** Для любого неорграфа  $\chi(G_p) \leq \lambda(G) \leq \rho_{\min}(G)$ .

**Теорема 6.4.** Если неорграф имеет  $n$  вершин и  $\rho_{\min}(G) \geq [(n - 1)/2]$ , то  $\lambda(G) = \rho_{\min}(G)$ .

*Следствие.* Наибольшая реберная связность неорграфа равна его наибольшей степени.

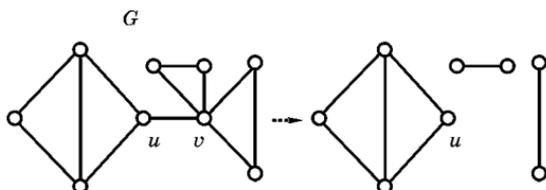


Рис. 6.4  
Разбиение неграфа  $G$  исключением вершины  $v$

Отношение связности порождает такие элементы неорграфа, как *точка сочленения*, *мост* и *блок*.

*Точкой сочленения* неорграфа называется вершина, удаление которой увеличивает число связных компонент. На рис. 6.4 точками сочленения графа  $G$  являются вершины  $u$  и  $v$ . Удаление вершины  $v$  делит граф  $G$  на три связных компоненты.

**Лемма 6.2.** Связность связного графа, имеющего хотя бы одну точку сочленения, равна 1. Такой граф называется *1-связным*.

*Неразделимым* называется связный непустой неорграф, не имеющий точек сочленения.

*Мостом* называется ребро, удаление которого увеличивает число связных компонент. На рис. 6.4 мостом является ребро  $(u, v)$ .

*Блоком* неорграфа называется его максимальный неразделимый подграф. На рис. 6.4 исключение вершины  $v$  приводит к образованию трех блоков.

Мост не принадлежит ни одному простому циклу графа, но принадлежит любой простой цепи, соединяющей связанные им блоки.

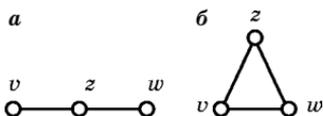


Рис. 6.5  
Односвязный и двусвязный неорграфы

**Теорема 6.5.** Любые две вершины дерева соединены единственной простой цепью.

Следовательно, каждая вершина дерева, кроме *концевых* (*висячих*) вершин с  $\rho(v) = 1$ , является *точкой сочленения*, а каждое ребро — *мостом* (рис. 6.5а). *Концевое* (*висячее*) ребро инцидентно концевой вершине.

Граф *двусвязен*, если для любой тройки вершин  $v, w, z$  существует маршрут, не содержащий точки сочленения  $z$  (рис. 6.5б).

### 6.7. СИЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ ОРГРАФА

В отличие от неорграфа, наличие пути  $\mu_{ik} = (v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$  в орграфе, соединяющего вершину  $v_i$  с вершиной  $v_k$  через вершину  $v_j$ , не гарантирует пути обратной направленности  $\mu_{ki}$ , тем более через ту же вершину  $v_j$ . Поэтому в случае существования путей обеих направленностей между двумя вершинами орграфа говорят об отношении *сильной связности*.

Орграф  $G = (V, E)$  *сильносвязен*, если для любых двух вершин  $v_i, v_k \in V$  существует соединяющий их путь  $\mu_{ik} = (v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$ .

*Сильной компонентой* (СК) графа  $G = (V, E)$  называется сильносвязный подграф  $G' = (V', E')$ .

**Теорема 6.6.** В орграфе существует *единственная* СК, содержащая вершину  $v_i$ .

Если предположить противное, т. е. принадлежность вершины  $v_i$  СК<sub>1</sub> и СК<sub>2</sub>, то должны существовать два пути: из СК<sub>1</sub> в СК<sub>2</sub> и обратно. Но тогда СК<sub>1</sub> и СК<sub>2</sub> объединяются в одну СК, что и утверждается в теореме.

Сильные компоненты орграфа так же, как и связные компоненты неорграфа, находятся на основе матрицы достижимости  $\mathbf{R}$ . Одинаковые строки в матрице  $\mathbf{R}$  характеризуют принадлежность соответствующих вершин *сильной компоненте* графа. Все принадлежащие ей вершины *взаимно достижимы*. Число строк матрицы сильной связности определяет число СК орграфа.

**Пример 6.3.** Найти сильные компоненты в орграфах  $G_1, G_2$  и  $G_3$  (рис. 6.6).

Орграф  $G_1$  сильносвязен, поскольку существуют пути между каждой парой вершин графа в прямом и обратном

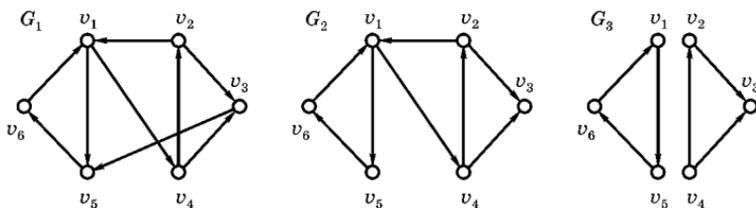


Рис. 6.6

Орграфы различной степени связности

направлении. Орграф  $G_2$ , полученный из  $G_1$  удалением дуги  $(v_3, v_5)$ , состоит из двух связных компонент:  $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$  и  $\{v_3\}$ . Это видно уже из матрицы смежности  $\mathbf{A}$  графа  $G_2$ , в которой  $\rho^-(v_3) = 0$  (строка  $v_3$  с нулями), и построенной на ее основе матрицы достижимости  $\mathbf{R}$  с различающейся от других строкой  $v_3$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несвязный орграф  $G_3$  состоит из четырех сильных компонент:  $\{v_1, v_5, v_6\}$ ,  $\{v_2\}$ ,  $\{v_3\}$ ,  $\{v_4\}$ .

## 6.8. БАЗЫ ОРГРАФА

Если в орграфе более одной СК, каждой из них можно поставить в соответствие вершину  $v_i^*$ . Вершины  $v_i^*$  и  $v_j^*$  соединяются дугой  $e^* \in E^*$ , если существует путь из  $i$ -й СК графа  $G$  в  $j$ -ю СК. Граф  $G^* = (V^*, E^*)$  называется *конденсацией* графа  $G$ .

Конденсация графа  $G$  находится следующим образом:

1. Вычисляется матрица достижимости  $\mathbf{R}$  орграфа  $G$ .
2. Каждому подмножеству одинаковых строк матрицы  $\mathbf{R}$  (вершин графа  $G$ ) ставится в соответствие вершина  $v_i^*$  графа  $G^*$ .
3. Если строка  $i$ -го подмножества вершин покрывает единицами строку  $j$ -го подмножества, то вершина  $v_i^*$  графа  $G^*$  соединяется дугой с  $v_j^*$ .

В ациклическом орграфе можно выделить минимальные множества вершин, из которых можно достичь любой вершины и в которые можно попасть из любой вершины. Назовем эти подмножества вершин соответственно *базами истока*  $B_*^-$  и *стока*  $B_*^+$ .

**Теорема 6.7.** В базах истока и стока орграфа  $G = (V, E)$  нет двух вершин, которые принадлежат *одной и той же* СК.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.6.

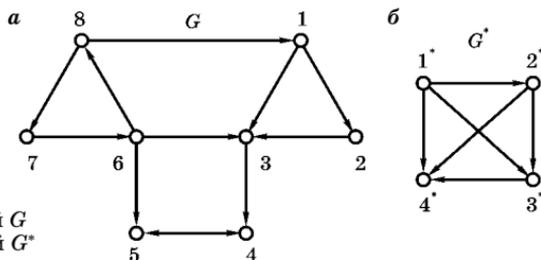


Рис. 6.7  
Орграфы: исходный  $G$   
и конденсированный  $G^*$

**Теорема 6.8.** В любом графе без циклов существуют *единственные* базы истока  $B_*^-$  и стока  $B_*^+$ .

База истока  $B_*^-$  состоит из всех вершин орграфа  $G$  с полустепенями захода  $\rho^+(v) = 0$ , а база стока  $B_*^+$  — из вершин с полустепенями исхода  $\rho^-(v) = 0$ .

Для нахождения баз в графе с циклами выполняются следующие действия.

1. Строится конденсация графа.
2. Определяются базы  $B_*^-$  и  $B_*^+$ .
3. Базы исходного орграфа  $G$  составляются из представителей вершин, принадлежащих СК и вошедших в базы  $B_*^-$  и  $B_*^+$ .

Пример 6.4. Найти базы орграфа  $G$ , изображенного на рис. 6.7а.

Матрица конденсации графа  $\mathbf{R}^*$  и построенная на основе ее матрица смежности  $\mathbf{A}^*$  конденсированного орграфа  $G^*$  изображены ниже:

$$\mathbf{R}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \{6, 7, 8\} \\ \{1\} \\ \{2, 3\} \\ \{4, 5\} \end{matrix};$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^* & 2^* & 3^* & 4^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1^* \\ 2^* \\ 3^* \\ 4^* \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Слева строки матрицы  $\mathbf{R}^*$  помечены вершинами конденсированного орграфа  $G^*$ , а справа — вершинами исходного

орграфа  $G$ . Согласно матрице смежности  $A^*$  конденсированный орграф  $G^*$  представляет собой транзитивное замыкание.

Как следует из рис. 6.7б,  $B_*^- = \{1^*\}$  и  $B_*^+ = \{4^*\}$ . Им соответствуют базы истока и стока  $B^- = \{6, 7, 8\}$ ,  $B^+ = \{4, 5\}$  исходного графа  $G$ .

Небезынтересно отметить, что в данном конденсированном орграфе  $G^*$  ядра и базы совпадают:  $X_{\bar{\alpha}}^- = B_*^- = \{1^*\}$ ,  $X_{\bar{\alpha}}^+ = B_*^+ = \{4^*\}$ .

## 6.9. УРОВНИ ОРГРАФА

Упорядочим множество вершин ациклического орграфа  $G = (V, \Gamma)$  по  $s$ -достижимости относительно базы истока  $B^-: V^0, V^1, \dots, V^{s_{\max}-1}$ . Полученные множества вершин называются *уровнями* орграфа. Каждому уровню ставится в соответствие целочисленный ранг  $s$ .

**Теорема 6.9.** Уровни ациклического орграфа  $G = (V, \Gamma)$  являются непустыми множествами, образующими разбиение его вершин  $V$ .

Доказательство теоремы основывается на том факте, что в ациклическом орграфе всегда найдутся вершины  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , с полустепенями  $\rho^-(v_i) = 0$  и  $\rho^+(v_i) = 0$ , образующие базы истока и стока (см. теорему 6.8). В противном случае должен существовать цикл в орграфе, что противоречит условию теоремы. Все остальные вершины орграфа  $V \setminus (B^- \cup B^+)$  упорядочиваются по  $s$ -достижимости от базы  $B^-$  до базы  $B^+$ , что гарантирует непустые промежуточные по достижимости множества.

Рассмотрим задачу *ранжирования* — нахождения уровней орграфа. Первым ее этапом является определение базы истока  $B^-$  на основе матрицы смежности  $A$  орграфа. Вершинам с полустепенями  $\rho^+(v_i) = 0$ , образующим базу истока  $B^-$ , соответствуют нулевые столбцы матрицы смежности  $A$ . Остальные уровни графа могут находиться либо как  $s$ -достижимые множества вершин возведением матрицы смежности  $A$  орграфа в степень  $s$ ,  $s = \overline{1, s_{\max}}$ , относительно вершин  $v_i \in B^-$ , либо путем редукции матрицы смежности.

При ранжировании вершин *от базы истока* орграфа редукция заключается в поэтапном вычитании из векто-

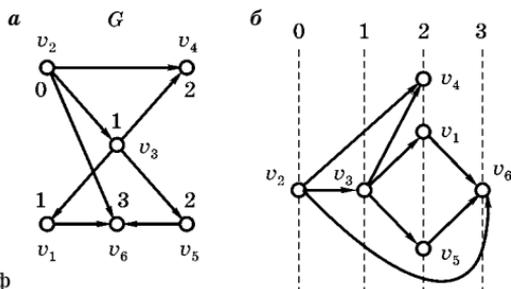


Рис. 6.8  
Исходный  
и ранжированный оргграф

ра полустепеней захода  $\rho^+$  строк матрицы смежности по мере включения соответствующих им вершин в текущий уровень оргграфа. Процедура завершается после обнуления вектора полустепеней захода  $\rho^+$ .

При ранжировании вершин *от базы стока* оргграфа редукция заключается в поэтапном вычитании из вектора полустепеней исхода  $\rho^-$  столбцов матрицы смежности по мере включения соответствующих им вершин в текущий уровень оргграфа. Процедура завершается после обнуления вектора полустепеней исхода  $\rho^-$ .

**Теорема 6.10.** Уровни оргграфа зависят от направления ранжирования.

Доказательство теоремы предоставляется читателю.

**Пример 6.5.** Ранжировать граф, изображенный на рис. 6.8а.

1. Построим матрицу смежности оргграфа  $G$  и вычислим векторы полустепеней захода  $\rho^+$  и исхода  $\rho^-$  сложением соответственно строк и столбцов матрицы  $A$ .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\rho^- = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\rho^+ = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

2. Будем ранжировать вершины орграфа  $G$  от базы истока  $B^-$ . В нулевой уровень графа войдут вершины с нулевой полустепенью захода в векторе  $\rho^+$ . К ним относится вершина  $v_2$  с  $\rho^+(v_2)=0$ . Соответствующая ей компонента вектора  $\rho^+$  помечена жирным нулем.

3. Находим вершины 1-го уровня вычитанием строки  $v_2$  матрицы смежности из нулевой строки (вектора  $\rho^+$ ) матрицы уровней. Новый нуль, полученный в строке 1 (выделен жирным шрифтом), относит к уровню 1 вершину  $v_3$ .

4. Находим вершины 2-го уровня вычитанием строки  $v_3$  матрицы смежности из строки 1 матрицы уровней. Три новых нуля, полученные в ее строке 2, относят к уровню 2 вершины  $v_1, v_4, v_5$ .

5. Находим вершины 3-го уровня вычитанием строк  $v_1, v_4, v_5$  матрицы смежности из строки 2 матрицы уровней. Полученный новый нуль в строке 3 относят к уровню 3 вершину  $v_6$ .

6. Процесс заканчивается, поскольку в строке 3 матрицы уровней все значения нулевые.

Полученными рангами помечены вершины в исходном графе  $G$ . На основе уровней строится ранжированный орграф (см. рис. 6.8б). Его дуги определяются из строк матрицы смежности.

Аналогичным образом осуществляется ранжирование орграфа в обратном направлении от базы стока  $B^+$  относительно вектора полустепеней исхода  $\rho^-$ . По жирным нулям в матрицах уровней отметим различие в уровнях, полученных при разных направлениях ранжирования.

Из алгоритма ранжирования орграфа следует теорема, формулирующая условия обнаружения цикла в орграфе.

**Теорема 6.11.** Орграф содержит цикл, если при нахождении уровня в соответствующей ему строке не появляется нового нуля.

Доказательство теоремы предоставляется читателю.

### У п р а ж н е н и я

1. Доказать, что прямой  $\mu_{ij}$  и обратный  $\mu_{ji}$  пути между вершинами  $v_1$  и  $v_2$  неорграфа  $G$  различаются лишь порядком обхода вершин.
2. Доказать, что прямой  $\mu_{ij}$  и обратный  $\mu_{ji}$  пути в орграфе в общем случае различаются перечнем входящих в них дуг.

3. Найти множества  $s$ -достижимых вершин,  $s = 1, s_{\max}$ , для всех вершин орграфа  $G$ , изображенного на рис. 6.9.

4. Найти матричным способом множества количеств путей между вершинами графа (рис. 6.9). Показать, как на основе матриц количеств путей  $\mathbf{H}_s$  получить матрицы достижимостей  $\mathbf{R}_s$ .

5. Показать, как получить матрицы обратных достижимостей  $\mathbf{R}_s^{-1}$ .

6. Можно ли утверждать, что при перестановке перемножаемых орграфов число путей в результирующем орграфе не меняется?

7. Определить вершинную  $\chi(G)$  и реберную  $\lambda(G)$  связности неорграфа, соотнесенного орграфу (рис. 6.9). Сравнить с аналогичными показателями сильной связности исходного орграфа.

8. Найти конденсацию орграфа (рис. 6.9) и его базы истока  $B_*^-$  и стока  $B_*^+$ . Показать их соответствие множествам вершинного доминирования  $X_d^-$  и доминируемости  $X_d^+$ .

9. Найти уровни орграфов, заданных матрицами смежности  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  относительно баз истока  $B^-$  и стока  $B^+$ :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Установить, сохраняется ли множество путей при изменении порядка умножения матриц смежности.

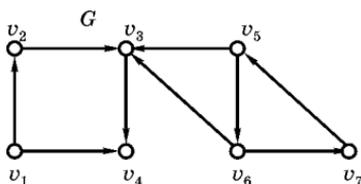


Рис. 6.9  
Орграф  $G$

## ЦИКЛЫ И РАЗРЕЗЫ

### 7.1. ВЕКТОР-ЦИКЛЫ И ВЕКТОР-РАЗРЕЗЫ СВЯЗНОГО ГРАФА

Представим цикл  $c_k$  двоичным вектором  $c_k$  размерности  $m$  (по числу ребер графа). В нем единицами обозначим ребра, входящие в цикл, а нулями — не входящие в него, причем компоненты вектора упорядочены по возрастанию индексов ребер. Совокупность *всех* вектор-циклов связного графа  $G$  образует его матрицу циклов (*цикломатричную матрицу*).

**Пример 7.1.** Построить матрицу циклов для графа  $G$  (рис. 7.1). Матрица циклов  $C$  графа  $G$  представлена на рис. 7.1. Она состоит из трех вектор-циклов:  $c_1 = (01101)$ ,  $c_2 = (11110)$ ,  $c_3 = (10011)$ .

Циклы в *орграфах* учитывают направленность дуг. Элемент матрицы циклов  $c_{ij} = 1$ , если  $i$ -й цикл проходит через дугу  $e_j$  в прямом направлении, и  $c_{ij} = -1$  — в случае обратного направления. При неоднократном проходе через дугу значение  $c_{ij}$  отражает суммарное количество проходов.

*Разрезом*, или *коциклом*, связного графа называется подмножество его ребер  $E^* \subset E$ , удаление которых приводит к несвязному графу, т. е. отделяет одни вершины от других.

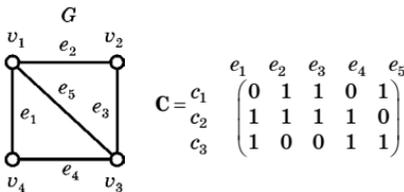
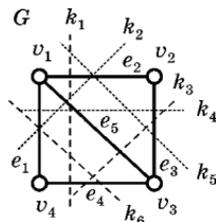


Рис. 7.1

Граф  $G$  и его матрица циклов  $C$

**Рис. 7.2**  
Разрезы графа  $G$  и  
его матрица разрезов

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} k_{Б2} \\ k_{Б3} \\ k_{Б1} \end{matrix} \end{matrix}$$



Представим разрез  $K_i$  вектор-разрезом  $k_i$  на упорядоченном множестве ребер  $E$  графа  $G$ . Единицами обозначим ребра, входящие в разрез. Совокупность *всех* вектор-разрезов связного графа  $G$  образует его матрицу разрезов  $\mathbf{K}$ .

**Пример 7.2.** Найти все разрезы графа  $G$ , изображенного на рис. 7.2, и построить матрицу разрезов  $\mathbf{K}$ .

На рис. 7.2 все шесть вектор-разрезов графа  $G$ , образующие матрицу разрезов  $\mathbf{K}$ , помечены пунктирными линиями, а в матрице представлены единицами.

## 7.2. БАЗИСНЫЕ ЦИКЛЫ И РАЗРЕЗЫ

Из приведенных выше примеров матриц циклов  $\mathbf{C}$  и разрезов  $\mathbf{K}$  нетрудно выявить их избыточность. Она проявляется в линейной зависимости их строк, в соответствии с которой некоторая строка этих матриц может быть получена как линейная комбинация других ее строк. Продемонстрируем избыточность циклов и разрезов по соответствующим матрицам, построенным для графа  $G$ , изображенного на рис. 7.1.

**Пример 7.3.** Проверить линейную зависимость вектор-циклов и вектор-разрезов по матрицам  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  из примеров 7.1 и 7.2.

Строки матрицы циклов  $\mathbf{C}$  связаны следующими соотношениями относительно операции «сумма по mod 2»:

$$c_1 \oplus c_2 = c_3, \quad c_2 \oplus c_3 = c_1, \quad c_1 \oplus c_3 = c_2.$$

Строки матрицы разрезов  $\mathbf{K}$  связаны, например, следующими соотношениями относительно операции «сумма по mod 2»:

$$k_1 \oplus k_6 = k_2, \quad k_1 \oplus k_3 = k_5, \quad k_3 \oplus k_6 = k_4.$$

Приведенные в примере 7.3 тождества вектор-циклов показывают достаточность двух из них для получения третьего. При этом каждая пара вектор-циклов в сумме покрывает единицами все ребра связного циклического графа (в котором отсутствуют ациклические части). Это означает, что двух циклов оказывается достаточно для *связывания* всех вершин графа.

Тождества вектор-разрезов в примере 7.3 также показывают возможность получения с применением операции «сумма по mod 2» всех остальных разрезов матрицы на основе разрезов  $k_1, k_3, k_6$ . При этом они в сумме также покрывают единицами все ребра связного циклического графа. Это означает, что трех вектор-разрезов, отобранных для порождения остальных разрезов графа  $G$ , достаточно для *изоляции* всех вершин циклического графа (обращения исходного графа в нуль-граф).

Из линейной алгебры известно, что максимальная совокупность линейно независимых векторов образует базис линейного пространства. Отсюда следует определение базиса циклов и разрезов графа.

*Базисом* циклов (разрезов) графа назовем максимальную совокупность линейно независимых относительно операции сложения по модулю 2 вектор-циклов (вектор-разрезов) графа.

В примере 7.3 базис циклов (циклический базис) образуют вектор-циклы  $C_B = \{c_1, c_2\}$ , а базис разрезов (коциклический базис) — вектор-разрезы  $K_B = \{k_1, k_3, k_6\}$ . Из примера следует также неединственность этих базисов.

Учитывая тот факт, что циклы связывают, а разрезы изолируют все вершины связного циклического графа, рассмотрим нахождение циклов и разрезов на основе отношения *минимальной связности*.

### 7.3.

## ОСТОВ И КОДЕРЕВО СВЯЗНОГО ГРАФА

Определим циклы и разрезы на основе отношения *минимальной связности*. Из раздела 4.6 следует, что минимальной связностью обладает остов  $T$ , как суграф, покрывающий исходный граф  $G$  минимальным числом ребер.

В силу указанного свойства будем рассматривать циклы и разрезы относительно остова графа.

**Лемма 7.1.** Число ребер в остове  $T$  связного графа  $G$ :

$$v^*(G) = n - 1. \quad (7.1)$$

Лемма доказывается по индукции, начиная с графа, состоящего из двух вершин ( $n - 2$ ), соединяемых *одним* ребром  $m = 1$  для обеспечения их связности.

**Лемма 7.2.** Остов не содержит циклов.

Эта лемма доказывается от противного. Если предположить, что остов содержит цикл, то два ребра  $(v_i, v_j)$  и  $(v_j, v_k)$ , связывающие вершины  $v_i, v_j, v_k$ , должны иметь замыкающее ребро  $(v_i, v_k)$ . Но оно избыточно для связности вершин  $v_i, v_j, v_k$  и, следовательно, не входит в остов. Таким образом, остов является *ациклическим* графом, или *деревом*.

Остовом  $T$  все ребра графа  $G$  делятся на *древесные*  $e_t \in T$ , или *ветви*, и *обратные*, или *хорды*,  $e_s \in T^*$ , принадлежащие *кодереву*  $T^* = G \setminus T$ .

**Пример 7.4.** Разложить граф  $G$ , изображенный на рис. 7.1, на остов  $T$  и кодерево  $T^*$ . Вариант остова  $T$  и кодерева  $T^*$  представлен на рис. 7.3.

Остов  $T$  состоит из трех древесных ребер  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , а кодерево  $T^*$  — из двух хорд  $\{e_4, e_5\}$ .

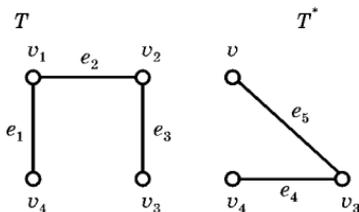
**Лемма 7.3.** Число хорд в кодереве  $T^*$  связного графа  $G$ :

$$v(G) = m - (n - 1). \quad (7.2)$$

Эта лемма доказывается на основе дополнительности остова  $T$  и кодерева  $T^*$  связного графа  $G$ , т. е. на основе принципа построения остова  $T$  на основе графа  $G$ . Именно  $m - (n - 1)$  ребер нужно *удалить* из произвольного графа  $G$ , чтобы получить его остов  $T$ .

Суммарное количество ребер в остове  $T$  и кодереве  $T^*$  связного графа  $G$  равно  $n - 1 + m - (n - 1) = m$ , что и доказывает лемму.

Очевидно, что остов  $T$  и порожденное им кодерево  $T^*$  для графа  $G$  неединственны.



**Рис. 7.3**  
Остов  $T$  и кодерево  $T^*$   
графа  $G$

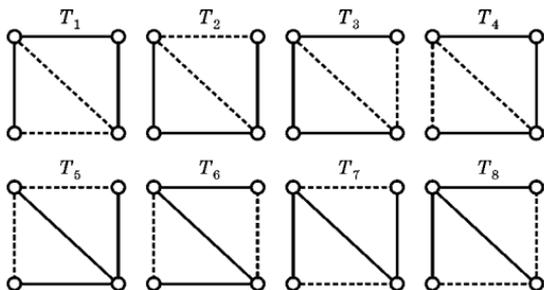


Рис. 7.4  
Семейство остовов и  
кодереьев графа  $G$

Их семейство порождается комбинированием древесных ребер и хорд на графе  $G$ .

**Пример 7.5.** Найти все варианты остовов и кодереьев для графа  $G$ , изображенного на рис. 7.1. Умозрительным решением задачи являются восемь вариантов остовов и соответствующих им кодереьев, обозначенных пунктиром (рис. 7.4).

Число остовов графа  $G$  зависит от числа его ребер и, следовательно, определяется степенями вершин  $\rho(v_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Это позволяет найти аналитическое решение числа остовов по матрице  $\Delta - \mathbf{A}$ , где  $\Delta$  — диагональная матрица, элементы которой  $\delta_{ii} = \rho(v_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , равны степеням соответствующих вершин, а  $\mathbf{A}$  — матрица смежности. Число остовов определяется через дополнительный минор первого порядка любого диагонального элемента матрицы  $\Delta - \mathbf{A}$ .

Матрицу  $\Delta - \mathbf{A}$  можно получить ее построением на основе матрицы смежности  $\mathbf{A}$  путем включения в нее элементов  $\delta_{ii} = \rho(v_i)$  и заменой  $a_{ij} = 1$  на  $a_{ij} = -1$ .

**Пример 7.6.** Найти число остовов для графа  $G$  из примера 7.1 (см. рис. 7.1). Вычислим матрицу  $\Delta - \mathbf{A}$ :

$$\Delta - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор элемента  $a_{11}$  матрицы  $\Delta - \mathbf{A}$ :  $M_{11} = 12 - 2 - 2 = 8$ . Число  $M_{11}$  совпадает с числом полученных вручную остовов графа  $G$ .

#### 7.4. НАХОЖДЕНИЕ БАЗИСНЫХ ЦИКЛОВ И РАЗРЕЗОВ ГРАФА

Число остовов связного графа  $G$  задает максимальное число базисов линейного пространства, которые можно получать на основе отношения *минимальной связности*.

Число базисных циклов и разрезов, получаемых на основе разделения связного графа на остов и кодереву, оценивается с помощью соответствующих показателей — *циклического* и *коциклического рангов*, называемых также *цикломатическим* и *коцикломатическим* числами.

Как следует из леммы 7.3, число базисных циклов графа  $G$  определяется числом хорд  $\nu(G)$  его кодеревы  $T^*$ , каждая из которых порождает в остове  $T$  новый цикл. Это является основанием теоремы 7.1.

**Теорема 7.1.** Циклический ранг  $\nu(G)$  связного графа  $G$  равен числу хорд любого его кодеревы:  $m - n + 1$ .

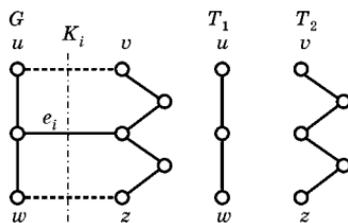
Для несвязного графа  $\nu(G) = m - n + p$ , где  $p$  — число связных компонент графа  $G$ .

**Теорема 7.2.** Коциклический ранг  $\nu^*(G)$  связного графа  $G$  равен числу ребер любого его остова  $\nu^*(G) = n - 1$ . Для несвязного графа коциклический ранг  $\nu^*(G) = n + p$ .

Эта оценка обуславливается способом получения базисных разрезов, формулируемым следующей теоремой.

**Теорема 7.3.** Если  $T$  — остов графа  $G$ , то в базисный разрез, определяемый ребром  $e_i \in T$ , кроме него, входят те хорды кодеревы  $e_j \in T^*$ , которые дают *базисные циклы*, содержащие  $e_i$ .

Теорема доказывается с помощью рис. 7.5. Разрезом  $K_i$  дерево  $T$  (сплошные линии графа  $G$ ) разбивается на два поддерева:  $T_1$  и  $T_2$ . Если граф  $G$  имеет циклы, то в разрез  $K_i$ , помимо ребра  $e_i$ , разрывающего путь из  $T_1$  к  $T_2$ , должны входить ребра  $e_j \in G$ , через которые существует путь в обратном направлении от  $T_2$  к  $T_1$ . На рис. 7.5 к ним относятся хорды  $(u, v)$  и  $(z, w)$  кодеревы,



**Рис. 7.5**  
Исходный граф  $G$  с остовом  $T$   
и его частями  $T_1$  к  $T_2$

изображенные пунктирными линиями. С участием каждой из них образуется базисный цикл.

Теорема 7.1 задает размерность линейного пространства циклов и определяет способ формирования базисных циклов на основе хорд кодерева. Теорема 7.2 задает размерность линейного пространства разрезов (коциклов), а теорема 7.3 определяет способ формирования базисных разрезов на основе ветвей остова.

Принцип формирования базисных циклов «от хорд кодерева», а базисных разрезов — «от ветвей остова» позволяет применить взаимосвязанную процедуру нахождения базиса циклов и разрезов<sup>8</sup>.

1. Для удобства построения матриц базисных циклов  $\mathbf{C}_B$  и разрезов  $\mathbf{K}_B$  они делятся на две части. Левую часть матриц образуют ребра, принадлежащие выбранному остову  $T$ , а в правую часть — хорды, принадлежащие кодереву  $T^* = G \setminus T$ .

2. Базис линейного пространства циклов формируется в матрице базисных циклов  $\mathbf{C}_B$  последовательным включением хорд в подматрицу кодерева. В базисный вектор-цикл включаются те ветви остова, которые образуют цикл на основе очередной хорды  $e_i$ .

3. Базис линейного пространства разрезов формируется последовательным включением ветвей остова в подматрицу остова. В базисный вектор-разрез включаются те хорды кодерева, которые входят в базисные циклы матрицы  $\mathbf{C}_B$ , включающие очередную ветвь  $e_j$  из остова  $T$ .

**Пример 7.7.** Найти циклический и коциклический базисы графа  $G$  (см. рис. 7.1) на основе его остова, изображенного на рис. 7.3.

Для образования первого базисного цикла  $\mathbf{c}_{B1}$  в матрице  $\mathbf{C}_B$  в подматрицу кодерева заносится единица в клетку хорды  $e_4$  (выделена жирным шрифтом). В клетки подматрицы остова ставятся единицы для ветвей, которые участвуют в образовании базисного цикла  $\mathbf{c}_{B1}$ . Аналогичным образом формируется базисный цикл  $\mathbf{c}_{B2}$  на основе хорды  $e_5$ :

<sup>8</sup> Метод предложен М.И. Гариной.

$$\mathbf{C}_B = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ c_{B1} & \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ c_{B2} & \end{matrix}.$$

Для образования первого базисного разреза  $\mathbf{k}_{B1}$  в матрице  $\mathbf{K}_B$  в подматрицу остова заносится единица в клетку ветви  $e_1$  (выделена жирным шрифтом). В подматрице кодеревя находится хорда  $e_4$ , через которую проходит базисный цикл  $\mathbf{c}_{B1}$ . Она включается в базисный разрез  $\mathbf{k}_{B1}$  матрицы  $\mathbf{K}_B$ . Во второй базисный разрез  $\mathbf{k}_{B2}$ , формируемый на основе ветви  $e_2$ , включаются обе хорды  $e_4$  и  $e_5$ , участвующие в базисных циклах  $\mathbf{c}_{B1}$  и  $\mathbf{c}_{B2}$ , которые проходят через ветвь  $e_2$ . Аналогичным образом на основе ветви  $e_3$  формируется базисный разрез  $\mathbf{k}_{B3}$ :

$$\mathbf{K}_B = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ k_{B1} & \left( \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{array} \right) \\ k_{B2} & \\ k_{B3} & \end{matrix}.$$

На рис. 7.2 базисные разрезы выделены от остальных редким пунктиром и помечены в матрице разрезов. В примере 7.3 показано порождение остальных циклов и разрезов на основе базисных.

## 7.5. ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ И ЦЕПИ

Эйлеровы и гамильтоновы циклы и цепи относятся к числу специальных маршрутов в графах. К эйлерову циклу предъявляется требование *одноразового* прохода всех ребер, а к гамильтонову — всех вершин графа. Граф, в котором возможно провести эйлеров цикл, называется *эйлеровым* (задача о кенигсбергских мостах).

**Теорема 7.4.** Конечный неориентированный граф *эйлеров* тогда и только тогда, когда он *связен* и степени всех его вершин *четны*.

Необходимость условия теоремы объясняется тем, что вход в вершину и выход из нее реализуются по *разным* ребрам.

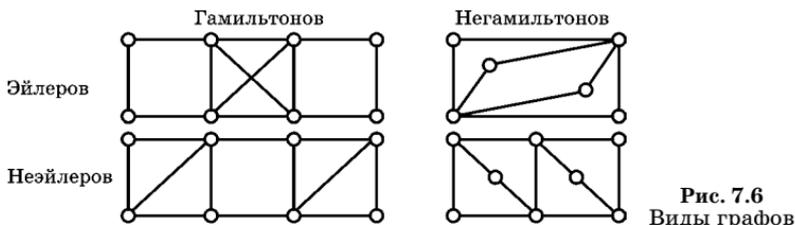


Рис. 7.6  
Виды графов

Достаточность условия объясняется тем, что каждый раз при расширении цикла число ребер в нем увеличивается не менее чем на два, пока эйлеров цикл не будет построен.

**Теорема 7.5.** Для того чтобы связный граф обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно две вершины нечетной степени.

Из вершины-истока лишний раз исходим, а в вершину-сток лишний раз заходим. Для получения *эйлерова цикла* в ориентированном графе каждая его вершина  $v \in V$  должна иметь равенство полустепеней захода и исхода:  $\rho^+(v) = \rho^-(v)$ .

*Гамильтонов цикл* — простой цикл, проходящий через все вершины графа. Гамильтонова цепь имеет *разные* начальную и конечную вершины.

Для гамильтонова графа критичными являются степени его вершин. Не имеющий ограничений по степени вершин полный граф является гамильтоновым. Нижняя граница степени вершин определяется точкой сочленения с  $\rho(v) = 2$ . Однако отсутствует критерий существования гамильтонова цикла в графе.

**Теорема 7.6.** Если граф  $G$  не является кольцом и обладает гамильтоновым циклом, то в нем отсутствуют точки сочленения.

На рис. 7.6 приведены примеры эйлеровых и неэйлеровых, гамильтоновых и негамильтоновых графов (на пересечениях горизонтальных и вертикальных рядов).

## 7.6.

### МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ЦИКЛОВ

*Параллельный* поиск всех циклов длины  $s$  выполняется путем алгебраического умножения модифицированной матрицы смежности  $\mathbf{B}$  на матрицу путей  $\mathbf{P}_{s-1}$ :  $\mathbf{P}_s = \mathbf{B} \times \mathbf{P}_{s-1}$  (см. раздел 6.5).

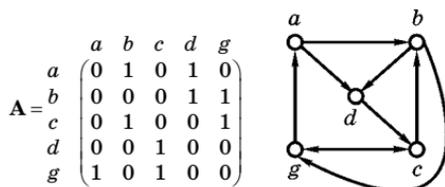
Диагональный элемент  $p_{ii}^s$  представляет совокупность всех циклов длины  $s$ , начинающихся в  $i$ -й вершине.

Для исключения промежуточных циклов (меньше заданной длины) перед очередным перемножением матрицы  $\mathbf{B}$  на матрицу  $\mathbf{P}_{s-1}$  из последней удаляются диагональные элементы и дизъюнктивные члены в элементах  $p_{ik}^{s-1}$ , содержащие имя начальной вершины пути. Эти элементы помечаются подчеркиванием.

Для  $s = n - 1$  элемент  $p_{ik}^s$  представляет совокупность гамильтоновых цепей, а для  $s = n$  — совокупность гамильтоновых циклов.

**Пример 7.8.** Найти гамильтоновы циклы графа  $G$  (рис. 7.7).

**Рис. 7.7**  
Граф  $G$   
и его матрица смежности



Преобразуем матрицу смежности  $\mathbf{A}$  в модифицированную матрицу смежности  $\mathbf{B}$  и вычислим  $\mathbf{P}_2$  перемножением матрицы  $\mathbf{B}$  на матрицу  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ g \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & g \\ 0 & b & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad \mathbf{P}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ g \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & d & b & b \\ g & 0 & d \vee g & 0 & 0 \\ g & 0 & \underline{g} & b & b \\ 0 & c & 0 & 0 & c \\ 0 & a \vee c & 0 & a & \underline{c} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Вычислим матрицу  $\mathbf{P}_3$  перемножением матрицы  $\mathbf{B}$  на матрицу  $\mathbf{P}_2$ :

$$\mathbf{P}_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ g \end{matrix} & \begin{pmatrix} \underline{bg} & dc & bd \vee bg & 0 & dc \\ 0 & dc \vee ga \vee gc & 0 & ga & dc \\ \underline{bg} & \underline{ga \vee gc} & \underline{bd \vee bg} & ga & 0 \\ \underline{cg} & 0 & 0 & \underline{cb} & cb \\ \underline{cg} & 0 & ad & ab \vee cb & \underline{ab \vee cb} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Вычислим матрицу  $P_4$  перемножением матрицы  $B$  на матрицу  $P_3$ :

$$P_4 = \begin{matrix} & a & b & c & d & g \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ g \end{matrix} & \left( \begin{array}{ccccc} \underline{d}c\underline{g} & 0 & 0 & \underline{b}g\underline{a} & \underline{b}d\underline{c} \vee \underline{d}c\underline{b} \\ \underline{d}c\underline{g} & 0 & \underline{g}a\underline{d} & \underline{g}a\underline{b} \vee \underline{g}c\underline{b} & \underline{d}c\underline{b} \\ 0 & 0 & \underline{g}a\underline{d} & \underline{b}g\underline{a} \vee \underline{g}a\underline{b} \vee \underline{g}c\underline{b} & \underline{b}d\underline{c} \\ \underline{c}b\underline{g} & \underline{c}g\underline{a} & 0 & \underline{c}g\underline{a} & 0 \\ \underline{c}b\underline{g} & \underline{a}d\underline{c} \vee \underline{c}g\underline{a} & \underline{a}b\underline{d} \vee \underline{a}b\underline{g} & \underline{c}g\underline{a} & \underline{a}d\underline{c} \end{array} \right) \end{matrix}.$$

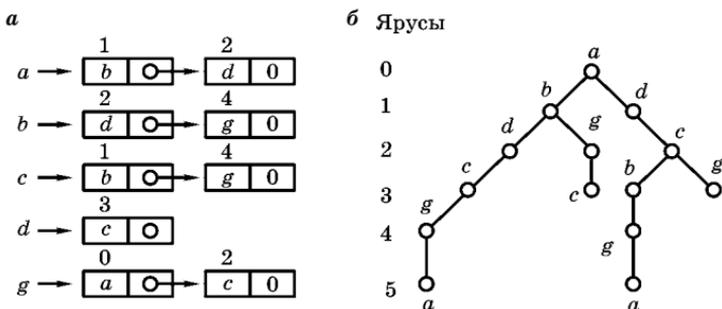
Двойным подчеркиванием выделены неповторяющиеся промежуточные вершины. В первой строке матрицы из вершины  $a$  следуют гамильтоновы циклы  $abcdcga$  и  $adcbga$ . Недостатком метода является усложнение элементов матриц.

## 7.7. МЕТОДЫ ПОИСКА В ГЛУБИНУ И В ШИРИНУ

Эти методы являются универсальными не только для поиска циклов, но и для решения большинства переборных задач. Они основаны на переборе, в данном разделе — вершин или дуг графа с целью нахождения его части, обладающей заданными свойствами: гамильтонова или эйлерова цикла, остова и др.

Методы поиска в глубину (depth first search) и в ширину (breadth first search) получили свое название относительно *дерева перебора* вариантов. Поиск в глубину ориентирован на поочередный синтез каждого варианта *в целом*, с возвратом к предыдущим вершинам в случае невыполнения условий синтеза. Поиск в ширину позволяет выполнять одновременный синтез всех вариантов *по частям*. Он не требует возврата, поскольку недопустимые варианты отсеиваются на каждом ярусе дерева.

Рассмотрим оба метода поиска для нахождения гамильтоновых циклов в графе  $G$ , изображенном на рис. 7.8. С этой целью представим граф  $G$  списком *инциденций* (рис. 7.8a), удобным для перебора как вершин, так и дуг



**Рис. 7.8**  
Список инцидентий графа  $G$   
и дерево поиска гамильтоновых циклов

графа. Он состоит из двух секций. Первая (левая на рис. 7.8а) содержит все вершины графа. Во второй секции, представленной прямоугольниками, с помощью указателей перечисляются вершины, смежные вершинам первой секции. Поскольку они являются концами дуг графа, их число равно числу дуг  $m$  графа  $G$ .

Алгоритм построения гамильтонова цикла основан на последовательном посещении *всех* вершин графа с целью включения их в цикл и исключения их повторения. Рассмотрим алгоритм поиска в глубину.

1. В качестве начальной выбирается произвольная вершина графа  $G$  (вершина  $a$  на рис. 7.8). Ей соответствует корень дерева перебора на рис. 7.8б. Все экземпляры начальной вершины помечаются в списке инцидентий номером яруса 0.

2. В цепочке вершин, смежных выбранной, ищется первая непомеченная вершина.

3. Если все вершины в списке инцидентий помечены, то гамильтонов цикл найден. Конец алгоритма.

4. Если в цепочке вершин, смежных выбранной, все вершины помечены, а в списке остались непомеченные вершины, то осуществляется *возврат* к той цепочке, в которой есть непомеченные вершины. При этом снимаются пометки с вершин, обходимых в обратном порядке (вершины  $c$  и  $g$  во второй ветви и вершина  $g$  в четвертой ветви дерева перебора на рис. 7.8б), и они исключаются из цикла.

5. Если в цепочке вершин, смежных выбранной, найдена непомеченная вершина, то она включается в цикл и все ее экземпляры в списке инцидентий помечаются номером следующего яруса дерева. Эта вершина фиксируется в левой секции списка инцидентий, идти к п. 2.

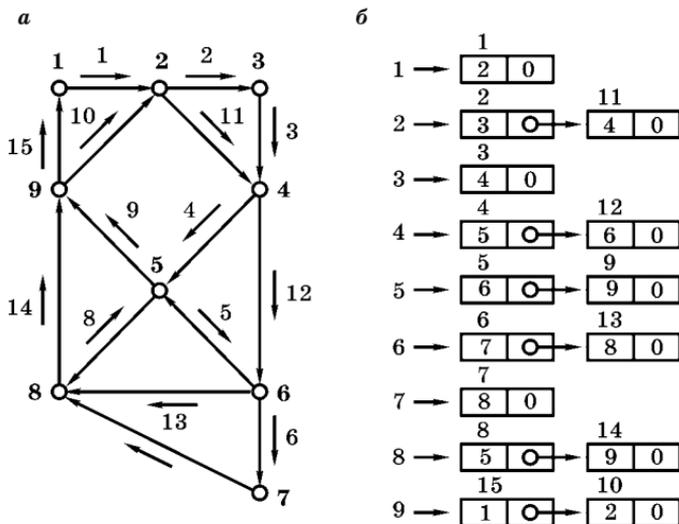
На рис. 7.8а показана пометка вершин для варианта гамильтонова цикла, представленного левой ветвью дерева перебора.

Дерево перебора, изображенное на рис. 7.8б, представляет поиск как в глубину, так и в ширину из начальной вершины  $a$ . Разница заключается лишь в последовательности обхода вершин.

Нетрудно убедиться, что гамильтоновы циклы, полученные матричным методом и методами поиска в глубину и в ширину, совпадают. Следует заметить также, что методы поиска в глубину и в ширину относят к методам *последовательного* поиска, имея в виду последовательный способ перебора вершин графа. Однако по способу нахождения вариантов результата метод поиска в ширину, так же как и матричный метод, можно отнести к *параллельному* поиску.

Если поиск гамильтонова цикла реализуется алгоритмом с возвратом, то поиск эйлерова цикла не сопряжен с возвратом. Это достигается за счет следующего. Во-первых, перед поиском эйлерова цикла необходимо убедиться, что граф *эйлеров* (см. теорему 7.4). Во-вторых, при обходе всех дуг (ребер) графа с целью включения их в эйлеров цикл проверяется условие связности остаточного графа, получаемого после удаления из исходного графа дуг, включенных в эйлеров цикл (алгоритм Флери). То есть рассматриваемая дуга включается в эйлеров цикл, если ее удаление не разбивает остаточный граф на две связные компоненты. Это условие не касается изолированных промежуточных вершин, полученных при поиске эйлерового цикла и последнего шага алгоритма.

Помимо отмеченных особенностей, алгоритм поиска эйлерового цикла отличается от алгоритма поиска гамильтонова цикла пометкой не вершин, а дуг графа. В списке



**Рис. 7.9**  
Орграф  $G$  и его список инцидентий

инцидентий эта особенность проявляется в том, что пометки включенных в эйлеров цикл вершин из прямоугольников *различны*, поскольку эти вершины рассматриваются как концы дуг, т. е. как дуги.

Поиск эйлерова цикла иллюстрируется на рис. 7.9 стрелками на орграфе  $G$  с номерами пометок включаемых в цикл дуг. Последовательность поиска задается списком инцидентий (слева направо), на котором концы дуг также помечены шагами алгоритма.

### Упражнения

1. Показать, что у дерева с  $n \geq 2$  найдутся по крайней мере две висячие вершины.
2. Выбрать остовы графов  $G_1$  и  $G_2$  (см. рис. 7.10). Сколько вариантов остовов можно построить для этих графов?
3. Найти циклический и коциклический ранги графов  $G_1$  и  $G_2$ . Определить базисы циклов и разрезов. Построить матрицы циклов и разрезов.
4. Определить, являются ли эти графы эйлеровыми и гамильтоновыми.
5. Найти гамильтоновы циклы в графах  $G_1$  и  $G_2$  матричным способом и методом поиска в глубину.

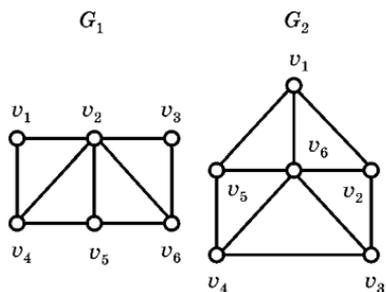


Рис. 7.10  
Графы  $G_1$  и  $G_2$

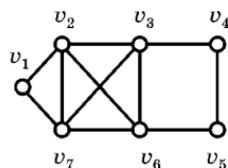


Рис. 7.11  
Граф  $G$

6. Предложите граф, в котором эйлеров и гамильтонов циклы совпадают.
7. Предложите способ проверки, является ли граф эйлеровым, на основе анализа матрицы базисных циклов.
8. Найти эйлеров цикл в графе  $G$ , изображенном на рис. 7.11, методом поиска в глубину.

## РАССТОЯНИЕ И ЦЕНТРЫ ГРАФА

### 8.1.

#### РАССТОЯНИЯ В ГРАФЕ

##### 8.1.1.

##### РАССТОЯНИЯ В НЕВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ

Расстоянием  $d(v_i, v_j)$  называется *вес* кратчайшей простой цепи  $\mu_{ij}$ , соединяющей вершины  $v_i$  и  $v_j$ ,  $v_i, v_j \in V$ . Расстояние относительно самой вершины  $d(v_i, v_i) = 0$ . Если вершина  $v_j$  недостижима из вершины  $v_i$ , то  $d(v_i, v_j) = \infty$ . Если граф не взвешенный, то вес цепи выражается через ее длину  $l$ , так как вес  $c_k$  каждой дуги графа  $e_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , равен 1.

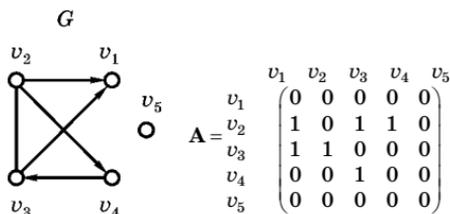
Расстояния  $d(v_i, v_j)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , в невзвешенном неорграфе  $G = (V, E)$  удовлетворяют аксиомам *метрики*:

- 1)  $d(v_i, v_j) \geq 0$ , причем  $d(v_i, v_j) = 0$ , когда  $v_i = v_j$ ;
- 2)  $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ ;
- 3)  $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ , причем цепь  $\mu_{ik} = (v_i, v_k)$  является кратчайшей по сравнению с  $\mu_{ik} = (v_i, v_j, v_k)$ .

Расстояние  $d(v_i, v_j)$  в невзвешенном графе определяется итеративно по матрице смежности через минимальную достижимость  $s_{\min}$  вершины  $v_j$  из вершины  $v_i$ . Элементы матрицы расстояний  $D_s$  связаны со степенями матрицы смежности  $A$  следующими соотношениями:

$$d_{ik}^s = \begin{cases} 0, & \text{если } i = k; \\ \infty, & \text{если } a_{ij}^t = 0, t = \overline{1, s}; \\ \min(t : t \leq s, a_{ij}^t > 0). & \end{cases} \quad (8.1)$$

Рассмотрим нахождение расстояний между всеми вершинами невзвешенного орграфа на примере.



**Рис. 8.1**  
Несвязный орграф  $G$  и его матрица смежности

**Пример 8.1.** Найти расстояния между вершинами несвязного орграфа  $G$  по его матрице смежности  $A$  (рис. 8.1).

Исходя из  $\rho^-(v_1) = 0$  и  $\rho^+(v_5) = \rho^-(v_5) = 0$ , устанавливаем, что орграф  $G$  состоит из трех сильных компонент:  $G_1 = \{v_1\}$ ,  $G_2 = \{v_5\}$ ,  $G_3 = \{v_2, v_3, v_4\}$ .

Вычислим матрицу 2-достижимости  $R$  как вторую степень матрицы смежности  $A$ :

$$A^2 = \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_2 & \\ v_3 & \\ v_4 & \\ v_5 & \end{matrix} ; \quad D_2 = \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & 1 & 0 & 2 & \infty \\ 2 & 2 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \\ v_2 & \\ v_3 & \\ v_4 & \\ v_5 & \end{matrix}.$$

В матрице  $A^2$  новые по сравнению с матрицей  $A$  единицы выделены жирным шрифтом, кроме двух единиц в диагонали, означающих наличие цикла между вершинами  $v_2$  и  $v_3$  через ребро  $(v_2, v_3)$ . Логическая складываемая матрицы  $A$  и  $A^2$ , убеждаемся, что все связанные вершины  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  достижимы либо за 1, либо за 2 шага. Поэтому, учитывая изолированность вершины  $v_5$ , дальнейшее возведение в степень матрицы  $A$  не имеет смысла.

На основе матриц  $R_1 = A$  и  $R_2 = A^2$  находим элементы  $d_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , матрицы расстояний  $D_s$ . Элементы  $d_{ij} = 1$  в матрице  $D_1$  соответствуют элементам  $a_{ij} = 1$  матрицы  $A$ , а элементы  $d_{ij} = 2$  определяются степенью 2 матрицы  $A^2$  для единиц, выделенных жирным шрифтом. В соответствии с правилами (8.1) диагональным элементам матрицы расстояний  $D_s$  присваивается нуль, а элементам, характеризующим недостижимость вершин (которым соответствует  $r_{ij}^s = 0$  в матрице  $R$ ), — символ  $\infty$ .

### 8.1.2. РАССТОЯНИЯ ВО ВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ

Элемент матрицы расстояний  $\mathbf{D}$  взвешенного графа  $G = (V, E, C)$  определяется следующими правилами, выраженными через достижимость вершин:

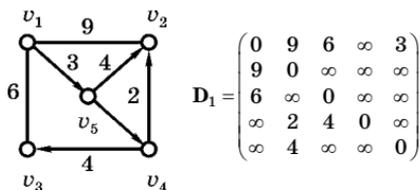
$$d_{ik}^s = \begin{cases} 0, i = k; \\ \infty, r_{ik} = 0, i \neq k; \\ \min \sum_{e_{ij} \in \mu_{ik}} c(e_{ij}), r_{ik} > 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Расстояние  $d(v_i, v_k)$  во взвешенном графе определяется итеративно на основе матрицы расстояний  $\mathbf{D}_1$ . Матрица расстояний  $\mathbf{D}_1$  определяет расстояния до смежных вершин графа и строится по матрице весов  $\mathbf{C}$  путем замены недиагональных элементов ( $i \neq j$ )  $c_{ij} = 0$  на  $d_{ij}^1 = \infty$  и  $c_{ij} > 0$  на  $d_{ij}^1 = c_{ij}$ .

Расстояния во взвешенном графе не удовлетворяют третьей аксиоме метрики, т. е. допускается неравенство  $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) < d(v_i, v_k)$ . Это объясняется тем, что расстояние по кратчайшему маршруту (длиной  $l_{\min}$ ) может превышать расстояние между вершинами  $v_i$  и  $v_k$  по более длинному маршруту. Следовательно, на каждом шаге нахождения расстояния  $d(v_i, v_k)$  необходимо сопоставлять веса маршрутов предыдущей длины  $l - 1$  с маршрутами текущей длины  $l$  и выбирать из них *минимальный*. Эти операции осуществляются путем возведения в степень  $s$  матрицы расстояний  $\mathbf{D}_1$  по следующей формуле:

$$d_{ik}^s = \min\{d_{ik}^{s-1}, \min_j (d_{ij}^{s-1} + d_{jk}^1)\}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (8.3)$$

Элемент  $d_{ik}^{s-1}$  в формуле (8.3) характеризует расстояние маршрута длины  $s - 1$ , вычисленное на предыдущем шаге. Выражение  $\min_j (d_{ij}^{s-1} + d_{jk}^1)$  определяет выбор минимальной суммы при «умножении»  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{D}_1$  на  $k$ -й столбец матрицы  $\mathbf{D}_1$  по правилам (8.2). Из весов маршрутов длины  $s - 1$  и  $s$  выбирается меньший. Таким образом, элемент  $d_{ik}^s$  матрицы  $\mathbf{D}_s$  определяет расстояние между вершинами  $v_i$  и  $v_k$ .



**Рис. 8.2**  
Взвешенный орграф  $G$   
и его матрица расстояний  $D_1$

Вычисление расстояний по формуле (8.3) реализует алгоритм Форда — Беллмана. Рассмотрим его на примере.

**Пример 8.2.** Найти расстояния между всеми вершинами орграфа  $G$ , представленного на рис. 8.2, по его матрице расстояний  $D_1$ .

Вычислим 2-ю и 3-ю степени матрицы расстояний  $D_1$ , пользуясь формулой (8.3):

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & \infty & 3 \\ 9 & 0 & 15 & \infty & 12 \\ 6 & 15 & 0 & \infty & 9 \\ 10 & 2 & 4 & 0 & \infty \\ 13 & 4 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}; \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & \infty & 3 \\ 9 & 0 & 15 & \infty & 12 \\ 6 & \mathbf{13} & 0 & \infty & 9 \\ 10 & 2 & 4 & 0 & 13 \\ 13 & 4 & 19 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

В матрицах  $D_2$  и  $D_3$  последовательно уменьшается число элементов со значениями  $\infty$ , что означает достижение вершин маршрутами с длинами 2 и 3. Дальнейшего возведения в степень матрицы  $D_1$  не требуется, поскольку вычислены расстояния до всех достижимых вершин. Наряду с достижением новых вершин в матрицах  $D_2$  и  $D_3$  расстояния  $d_{12}^2$  и  $d_{32}^3$  скорректировались в меньшую сторону:  $d_{12}^2$  — с 9 на 7, а  $d_{32}^3$  — с 15 на 13 (новые значения выделены жирным шрифтом).

Если требуется найти расстояния только от вершины  $v_i$  до остальных  $j \neq i$ , то достаточно умножить матрицу-строку  $\mathbf{d}_i$  на матрицу  $D_1$ .

## 8.2. АЛГОРИТМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЕЙКСТРА

Он был разработан для нахождения кратчайших цепей в графах. Из определения расстояния нетрудно заключить, что задача алгоритма совпадает с задачей определения расстояний в графе. В основу обеих задач положена

идея независимости расстояния между вершинами  $v_i$  и  $v_k$  от длины пути между ними. Ее нетрудно проиллюстрировать на примере графа, изображенного на рис. 8.2, где вес ребра  $(v_1, v_2)$   $c_{12} = 9$ , соединяющего вершины  $v_1$  и  $v_2$ , больше суммарного веса двух дуг  $(v_1, v_5)$  и  $(v_5, v_2)$  с  $c_{15} = 3$  и  $c_{52} = 4$ .

Необходимость сопоставления расстояний маршрутов длины  $s - 1$  и  $s$  положена в основу рекуррентной формулы (8.4). Она используется в алгоритме Дейкстры для последовательного уменьшения расстояния между вершинами  $v_i$  и  $v_k$ :

$$d_{ik}^s = \min \left\{ d_{ik}^{s-1}, \min_j d_{ij}^{s-1} + d_{tk} \right\}; \quad t = \arg \left( \min_j d_{ij}^{s-1} \right). \quad (8.4)$$

Начальные оценки расстояний от вершины-источника  $v_i$  к остальным вершинам  $v_k$ ,  $k = \overline{1, n-1}, k \neq i$ , формируются как *временные* (верхние) оценки расстояний  $d(v_i, v_k)$  и берутся из строки матрицы расстояний  $D_1$  графа  $G$ .

На очередном шаге алгоритма осуществляется выбор вершины  $v_k$  с минимальной *временной* оценкой  $\min d(v_i, v_k)$ . Эта вершина исключается из исходного списка вершин  $T$ , а оценка расстояния меткой «+» переводится из временной в *постоянную*:  $d(v_i, v_k) \rightarrow d^+(v_i, v_k)$ . После этого вычисляются новые *временные* оценки расстояний для маршрутов, проходящих через исключенную вершину  $v_k$ .

Таблица 8.1

## Нахождение расстояний алгоритмом Дейкстры

№	Действия	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
1	Извлечение строки $v_4$ из $G$ , $T: = T \setminus v_4$	$\infty$	2	4	$0^+$	$\infty$
2	Выбор $v_4$ с $\min d(v_4, v_2)$ , $T: = T \setminus v_2$		$2^+$			
3	$\min\{\infty, 2 + 9\} \rightarrow d(v_4, v_1)$	11				
4	Выбор $v_3$ с $\min d(v_4, v_3)$ , $T: = T \setminus v_3$			$4^+$		
5	$\min\{11, 4 + 6\} \rightarrow d(v_4, v_1)$	10				
6	Выбор $v_1$ с $\min d(v_4, v_1)$ , $T: = T \setminus v_1$	$10^+$				
7	$\min\{\infty, 10 + 3\} \rightarrow d(v_4, v_5)$					13
8	Выбор $v_5$ с $\min d(v_4, v_5)$ , $T: = T \setminus v_5$					$13^+$

Вычисления повторяются от вершины  $v_i$  до тех пор, пока все оценки расстояний не станут постоянными. Они представляют собой кратчайшие пути от вершины  $v_i$  до всех остальных вершин графа.

Последовательный обход вершин графа с реализацией целевой функции (8.4) относится к классу задач динамического программирования.

**Пример 8.3.** Найти кратчайшие пути от вершины  $v_4$  графа  $G$ , изображенного на рис. 8.2, до всех остальных вершин. Решение примера представлено в табл. 8.1.

Найденные в табл. 8.1 расстояния (с пометками +) совпадают со значениями строки  $d_{4k}^3$  матрицы  $D_3$ , вычисленной по алгоритму Форда — Беллмана умножением четвертой строки матриц  $D_s$ ,  $s = 1, 2$ , на матрицу расстояний единичной длины  $D_1$ .

### 8.3. ДИАМЕТР, РАДИУС И ЦЕНТРЫ ГРАФА

*Внешним диаметром* связного орграфа в вершине называется расстояние  $d_{\text{вн}}(v_i)$  от нее до наиболее удаленной вершины  $v_j$ :

$$d_{\text{вн}}(v_i) = \max_j d(v_i, v_j).$$

*Внутренним диаметром* связного орграфа в вершине называется расстояние до нее из наиболее удаленной вершины:

$$d_{\text{вн}}(v_i) = \max_j d(v_j, v_i).$$

*Диаметр* неорграфа в вершине равен и внешнему, и внутреннему диаметру:

$$d(v_i) = d_{\text{вн}}(v_i) = d_{\text{вн}}(v_i) = \max_j d(v_i, v_j).$$

*Диаметр*  $d(G)$  неорграфа определяется на основе диаметров всех вершин:

$$d(G) = \max_i d(v_i) = \max_i \max_j d(v_i, v_j).$$

Аналогичным образом определяются внешний и внутренний диаметры орграфа.

*Диаметральной простой цепью* называется кратчайшая простая цепь между вершинами, образующими диаметр.

*Внешним радиусом*  $r_{\text{вн}}(G)$  орграфа называется его минимальный внешний диаметр:

$$r_{\text{вн}}(G) = \min_i d_{\text{вн}}(v_i) = \min_i \max_j d(v_i, v_j).$$

*Внутренним радиусом*  $r_{\text{вн}}(G)$  орграфа называется его минимальный внутренний диаметр:

$$r_{\text{вн}}(G) = \min_i d_{\text{вн}}(v_i) = \min_i \max_j d(v_j, v_i).$$

*Радиусом*  $r(G)$  неорграфа называется его минимальный диаметр:

$$r(G) = \min_i d(v_i) = \min_i \max_j d(v_i, v_j).$$

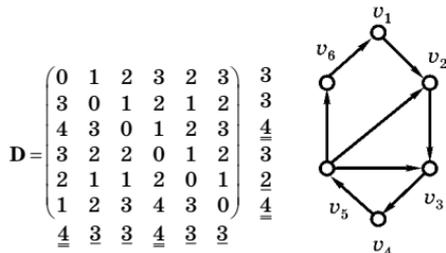
Вершина  $v_i$  называется *центром* графа  $G$ , если *максимальное* удаление от нее *минимально*.

*Радиальной цепью* называется любая кратчайшая цепь от центра до максимально удаленной от него вершины.

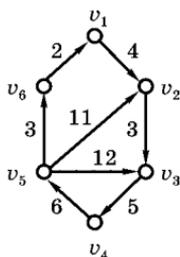
Граф, у которого все вершины являются центрами, называется *уницентральным*. Примерами уницентральных графов являются полный граф и кольцо.

**Пример 8.4.** Найти внешние и внутренние центры невзвешенного орграфа  $G$ , изображенного на рис. 8.3.

По строкам матрицы расстояний находятся *внешние* диаметры и радиусы вершин орграфа  $G$ , а по столбцам — *внутренние*. Двойным подчеркиванием выделены веса внешних и внутренних диаметров орграфа  $G$ , а веса радиусов выделены подчеркиванием. По радиусам находятся множества внешних  $\{v_5\}$  и внутренних  $\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$  центров орграфа. Вершина  $v_5$  является и внутренним, и внешним центром орграфа  $G$ .



**Рис. 8.3**  
Невзвешенный орграф  
и его матрица расстояний



$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 12 & 15 & 18 \\ 16 & 0 & 3 & 8 & 11 & 14 \\ 16 & 20 & 0 & 5 & 11 & 14 \\ 11 & 15 & 18 & 0 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 12 & 17 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 9 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 18 & 56 \\ \underline{16} & 52 \\ \underline{20} & \underline{66} \\ 18 & 59 \\ 17 & \underline{46} \\ 17 & 48 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \underline{16} & \underline{20} & 18 & 17 & 17 & 18 \\ 50 & 54 & \underline{49} & 56 & \underline{60} & 58 \end{matrix}$$

**Рис. 8.4**  
Взвешенный  
орграф и его  
матрица  
расстояний

**Пример 8.5.** Найти внешние и внутренние центры взвешенного орграфа, изображенного на рис. 8.4.

Внешние и внутренние центры взвешенного орграфа находятся так же, как и для невзвешенного орграфа. Внешним центром этого орграфа является вершина  $v_2$  с  $d_{\text{вн}}(v_2) = 16$ , а внутренним — вершина  $v_1$  с  $d_{\text{вн}}(v_1) = 16$ .

Решенная в первом справа от матрицы расстояний столбце и первой снизу строке задача размещения центров во взвешенном графе является *минимаксной*. Она формулируется следующим образом: минимизировать *наибольшее* расстояние от (до) произвольной точки сети до (от) ближайшего к ней пункта обслуживания.

На этой же модели решается *минисуммная* задача (правый столбец и нижняя строка таблицы): минимизировать сумму расстояний от всех точек сети до пункта обслуживания. Для ее решения вычисляются суммы расстояний от (к) вершин орграфа  $\sum_{i=1}^n d_{\text{вн},i}$  и  $\sum_{i=1}^n d_{\text{вн},i}$ .

В примере 8.5 *внутренним* минисуммным центром является вершина  $v_5$  с минимальным суммарным расстоянием 46 от нее до всех остальных вершин, а *внешним* минисуммным центром является вершина  $v_3$  с минимальным суммарным расстоянием 49 до нее от всех остальных вершин графа.

## 8.4. ЦЕНТРЫ ДЕРЕВЬЕВ

Для нахождения центров деревьев определяются типы вершин. Вершиной *типа 1* является концевая вершина. При удалении из дерева всех вершин типа 1 оставшимся концевым вершинам присваивается тип 2 и т. д. *Центра-*

ми дерева  $v_0$  являются вершины максимального типа  $k$ . Так как каждая вершина дерева  $G$ , кроме концевых, имеет соседей на единицу меньшего типа, максимальное удаление от  $v_0$  равно ее типу  $k$  или  $k - 1$ . Если вершина имеет немаксимальный тип, она является началом более длинной цепи, чем цепь длины  $k$ .

**Теорема 8.1.** Каждое дерево имеет центр, состоящий из одной или из двух смежных вершин.

Две вершины имеют место в случае, когда оценки самой длинной цепи с противоположных ее концов не совпадают.

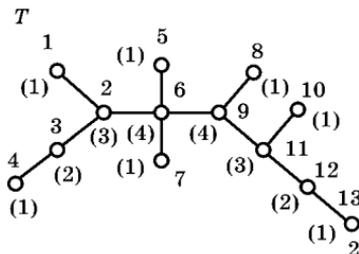
Диаметральные цепи в деревьях проходят через его центр  $v_0$  или через оба центра  $v_{01}$  и  $v_{02}$ , если их два. Такая цепь строится из двух радиальных цепей  $\mu(v_0, v)$  и  $\mu(v_0, v')$  длиной  $k - 1$ , не имеющих общих вершин. Когда в дереве существуют два центра, эти цепи соединяются общим ребром. При этом длина общей цепи равна  $2 \cdot k - 1$ . Цепь  $\mu$ , не содержащая центра, не является диаметральной.

**Пример 8.6.** Найти центры дерева  $T$ , изображенного на рис. 8.5.

У каждой вершины в скобках показан ее тип. Диаметральной простой цепью является  $\mu_{4,13} = (4, 3, 2, 6, 9, 11, 12, 13)$ . Радиальными цепями являются  $(4, 3, 2, 6, 9)$  и  $(13, 12, 11, 9, 6)$ . Соответственно центрами дерева являются вершины 6 и 9 с радиусами  $r(6) = r(9) = 4$ . Введем ряд определений, касающихся деревьев.

*Корнем* является отмеченная вершина  $v_0$  дерева  $G$ . В *ориентированном* дереве все ребра ориентированы от корня (разбиение) либо к корню (сеть сборки).

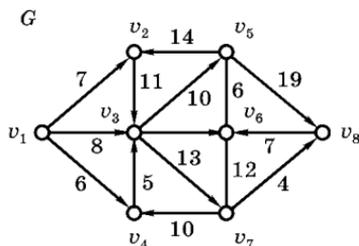
*Ветвью* вершины  $v$  называется множество вершин и ребер (дуг), соединяющих ее с висячими вершинами дерева.



**Рис. 8.5**  
Нахождение центров дерева  $T$

## Упражнения

1. Найти расстояния от вершины  $v_6$  невзвешенного орграфа (см. рис. 8.3) до всех остальных вершин по матрице достижимости.
2. Найти расстояния от вершины  $v_1$  орграфа  $G$  (рис. 8.6) до всех остальных вершин по формуле Форда — Беллмана.



**Рис. 8.6**  
Орграф  $G$

3. Найти расстояния от вершины  $v_1$  орграфа  $G$  до всех остальных вершин с помощью алгоритмов Дейкстры.
4. Для графа  $G$  решить минимаксную задачу.
5. Для графа  $G$  решить минисуммную задачу.

## ЗАДАЧИ НА ВЗВЕШЕННЫХ ГРАФАХ

Задачи на взвешенных графах относятся к классу оптимизационных задач, которые описываются целевой функцией и набором ограничений. К задачам этого класса относится нахождение расстояний и центров во взвешенных графах, которые были рассмотрены в предыдущей главе. Ниже рассматриваются другие типовые оптимизационные задачи на графах.

### 9.1.

#### ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

##### 9.1.1.

##### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Эта задача формулируется относительно *транспортной* сети. Под последней понимается взвешенный ациклический оргграф  $G = (V, E, C)$ , чьи базы истока и стока состоят из единственных вершин:  $|B^-| = 1$  и  $|B^+| = 1$ , а веса всех дуг неотрицательны:  $\forall e \in E \ c(e) \geq 0$ . Вершина  $v_1 \in B^-$  как исток сети часто обозначается через  $s$  (source), а вершина  $v_n \in B^+$  как сток — через  $t$  (target). Вес  $c(e)$  графа  $G$  в этой задаче интерпретируется *пропускной способностью* дуги  $e$ .

Функция  $\varphi(e)$ , определенная на множестве  $E$  транспортной сети и принимающая целочисленные значения, называется *допустимым* потоком или просто потоком, если:

- 1)  $\forall e \in E \quad 0 \leq \varphi(e) \leq c(e)$ ;
- 2) для любой промежуточной вершины  $v_i$  (рис. 9.1а)

$$\sum_{v_i \in \Gamma^{-1}(v_j)} \varphi(v_i, v_j) - \sum_{v_k \in \Gamma(v_j)} \varphi(v_j, v_k) = 0 \quad (9.1)$$

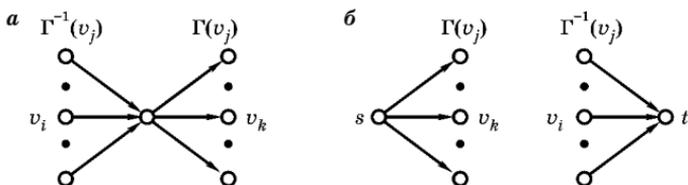


Рис. 9.1

Промежуточная и терминальные вершины транспортной сети

Уравнение (9.1) характеризует *сохранение* потока для всех промежуточных вершин: поток, вытекающий в вершину, равен потоку, вытекающему из нее.

*Величиной* потока в транспортной сети  $G$  называется величина  $\Phi(G)$ , равная сумме потоков по *всем* дугам, *исходящим* из вершины  $s$ , либо величина, равная сумме потоков по *всем* дугам, *заходящим* в вершину  $t$ :

$$\Phi(G) = \sum_{v_k \in \Gamma(s)} \varphi(s, v_k) = \sum_{v_i \in \Gamma^{-1}(t)} \varphi(v_i, t). \quad (9.2)$$

Дуга  $e \in E$  называется *насыщенной*, если поток по ней равен ее пропускной способности, т. е.  $\varphi(e) = c(e)$ .

Поток называется *полным*, если *любой* путь из  $s$  в  $t$  содержит по крайней мере одну насыщенную дугу.

Поток называется *максимальным*, если его величина  $\Phi(G)$  принимает максимальное значение по сравнению с другими допустимыми потоками в транспортной сети.

Если в сети существует более чем один полный поток, то все полные потоки могут быть упорядочены по величине. Поскольку порядок нахождения полных потоков является функцией порядка обхода путей  $\mu_{st}$  в *транспортной* сети, нахождение *максимального* потока связано с оценкой каждого полного потока.

Таким образом, для решения задачи нахождения максимального потока можно применять один из двух способов:

- 1) поиск максимального из всех полных потоков;
- 2) построение максимального потока на основе произвольно полученного полного потока.

Ниже рассматривается второй путь решения задачи как более изощренный.

### 9.1.2. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПОЛНОГО ПОТОКА

1. Полагаем начальный поток в транспортной сети  $G$  нулевым:  $\forall e \in E \varphi(e) = 0$ , а множество  $E'$  ненасыщенных потоком дуг — равным множеству всех дуг  $E$  графа  $G$ :  $E' = E$ .

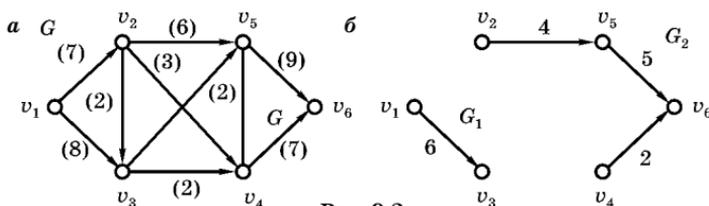
2. Удаляем из списка  $E'$  ненасыщенных дуг насыщенные на очередном шаге алгоритма потоком  $\varphi(\mu_k)$  дуги:  $E' = E \setminus E_n$ .

3. Ищем  $i$ -й простой путь  $\mu_i$ , проходящий через ненасыщенные дуги  $E'$  от истока  $s$  к стоку  $t$  графа  $G$ .

4. Если невозможно провести путь  $\mu_k$ , то  $\Phi(G)$  — полный поток ( $\Phi_n$ ) в транспортной сети  $G$  (конец алгоритма).

5. Увеличиваем поток  $\varphi(e)$  по каждой дуге  $e \in \mu_k$  на одинаковую величину  $\Delta\varphi$  такую, чтобы хотя бы одна из дуг  $e_j \in \mu_k$  оказалась насыщенной ( $c(e_j) - \varphi(e_j) = 0$ ), а для остальных дуг  $e_r \in \mu_k, r \neq j$ , увеличенный поток не превышал их пропускной способности:  $\varphi(e_r) + \Delta\varphi \leq c(e_r)$ , далее идти в 2.

**Пример 9.1.** Найти полный поток в транспортной сети  $G$ , изображенной на рис. 9.2а. Процесс нахождения полного потока показан в табл. 9.1. В ее первой строке представлены



**Рис. 9.2**  
Графы:

*a* — исходный; *b* — остаточных пропускных способностей.

Таблица 9.1

Нахождение полного потока

$E$	$v_1, v_2$	$v_1, v_3$	$v_2, v_3$	$v_2, v_4$	$v_2, v_5$	$v_3, v_4$	$v_3, v_5$	$v_4, v_6$	$v_5, v_6$	$\Delta\varphi_i$
$c(e)$	7	8	2	3	6	2	2	7	9	
$\mu_1$	4			0				4		-3
$\mu_2$	2		0			0		2		-2
$\mu_3$		6					0		7	-2
$\mu_4$	0				4				5	-2
$\Phi_n(G)$	7	2	2	3	2	2	2	5	4	9

пропускные способности дуг графа, а в остальных строках — *остаточные* пропускные способности дуг после проведения потока по очередному пути  $\mu_i$ . В нижней строке табл. 9.1 приведены потоки в дугах, входящие в полный поток  $\Phi_{\Pi}(G)$ . Жирным шрифтом выделены потоки  $\varphi(e) = c(e)$ . Проводящие их дуги исключаются из графа (рис. 9.2б).

Ниже приведены пути в графе  $G$  и проведенные через них потоки, в сумме составившие полный поток  $\Phi_{\Pi}(G)$ :

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = (v_1, v_2, v_4, v_6) & \Delta\varphi_1 = 3; \\ \mu_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_6) & \Delta\varphi_2 = 2; \\ \mu_3 = (v_1, v_3, v_5, v_6) & \Delta\varphi_3 = 2; \\ \mu_4 = (v_1, v_2, v_5, v_6) & \Delta\varphi_4 = 2. \end{array}$$

Доказательством полноты потока  $\Phi_{\Pi}(G)$  является граф остаточных пропускных способностей, состоящий из двух несвязных компонент  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 9.2б).

### 9.1.3. УСЛОВИЯ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

Ответ на вопрос, является ли величина  $\Phi_{\Pi}(G)$  максимальной, дает теорема Форда — Фолкерсона.

**Теорема 9.1** (о максимальном потоке и минимальном разрезе). Величина  $\Phi_{\max}(G)$  *максимального* потока из  $s$  в  $t$  равна величине *минимального* разреза  $c(K_{st})$ , разделяющего вершины  $s$  и  $t$ .

Величиной  $c(K_{st})$  разреза  $K_{st}$ , отделяющего  $s$  от  $t$ , называется сумма пропускных способностей всех дуг  $e \in K_{st}$ , начальные вершины которых  $v_i \in G_1$ , а конечные  $v_j \in G_2 = G \setminus G_1$ :

$$c(K_{st}) = \sum_{e \in K_{st}} c(e). \quad (9.3)$$

Доказательство теоремы предоставляем читателю.

Исходя из теоремы 9.1 величина потока  $\Phi_{\Pi}(G) = 9$  в примере 9.1 не является максимальной, так как величина любого сечения в графе  $G$  больше 9 (рис. 9.2а).

Теорему 9.1 реализует алгоритм Форда — Фолкерсона. Он может применяться либо с самого начала (нулевого потока), либо улучшать полный поток. Идея алгоритма основана на перераспределении потока в сети с приме-

нием графа приращений  $I(G, \Phi)$ . Помимо *прямых* дуг  $e_{ij} \in E$ , в граф  $I(G, \Phi)$  включаются *обратные* дуги  $e_{ji}$ . Каждой прямой и обратной дуге ставится в соответствие длина  $l(e_{ij})$  и  $l(e_{ji})$ , которая является индикатором возможности провести через нее путь в прямом (обратном) направлении. Возможность проведения пути обозначается нулем (0), а невозможность — бесконечностью ( $\infty$ ).

Возможность проведения пути через прямую дугу  $e_{ij}$  графа  $I(G, \Phi)$  определяется исходя из ее *ненасыщенности*:

$$l(e_{ij}) = \begin{cases} 0, & \varphi(e_{ij}) < c(e_{ij}); \\ \infty, & \varphi(e_{ij}) = c(e_{ij}). \end{cases}$$

Возможность проведения пути через обратную дугу  $e_{ji}$  графа  $I(G, \Phi)$  определяется исходя из *наличия* в ней потока  $\varphi(e_{ij})$ :

$$l(e_{ji}) = \begin{cases} 0, & \varphi(e_{ij}) > 0; \\ \infty, & \varphi(e_{ij}) = 0. \end{cases}$$

Если в графе приращений найдется простой путь  $\mu_{k+1}$  с  $l_{k+1} = 0$  (через нулевые длины прямых и обратных дуг), то  $\Phi(G)$  можно увеличить на величину  $\Delta\varphi_k$ , равную минимуму среди остаточных пропускных способностей прямых дуг  $e_{ij} \in \mu_{k+1}$  и потоков по обратным дугам  $e_{ji} \in \mu_{k+1}$ . Если  $l_{k+1} = \infty$ , то величина потока  $\Phi(G)$  является *максимальной*.

#### 9.1.4. АЛГОРИТМ ФОРДА — ФОЛКЕРСОНА

1. Пусть найден любой допустимый поток  $\Phi_k(G)$  ( $k = 0$ ), необязательно полный. Каждая дуга  $e_j \in E$  характеризуется значением потока  $\varphi(e_j)$  и остаточной пропускной способностью  $c(e_j) - \varphi(e_j)$ .

2. По графу  $G$  и потоку  $\Phi_k$  строится граф приращений  $I(G, \Phi)$ .

3. Находится простой путь  $\mu_{k+1}$  через нулевые длины дуг в графе  $I(G, \Phi)$ .

4. Если невозможно провести путь через нулевые длины прямых и обратных дуг графа приращений  $I(G, \Phi)$ , то длина пути  $l_{k+1} = \infty$  и поток  $\Phi_k$  максимален (конец), иначе

$l_{k+1} = 0$  и поток  $\Phi_k$  вдоль пути  $\mu_{k+1}$  увеличивается на максимально допустимую величину  $\Delta\varphi_{k+1} = \max_j (c(e_j) - \varphi(e_j))$ , определяемую по остаточным пропускным способностям дуг  $e_j \in \mu_{k+1}$ . При этом остаточная пропускная способность  $c(e_j)$  дуги  $e_j \in \mu_{k+1}$  вычисляется по следующему правилу:

$$c(e_j) = \begin{cases} c(e_j) - \Delta\varphi_{k+1}, & \text{если } e_j \text{ прямая дуга;} \\ c(e_j) + \Delta\varphi_{k+1}, & \text{если } e_j \text{ обратная дуга.} \end{cases}$$

5. После вычисления нового значения потока  $\Phi_k(G)$   $k = k + 1$  и переход к п. 2.

**Пример 9.2.** На основе полного потока, найденного в примере 9.1, найти максимальный поток в транспортной сети  $G$  (см. рис. 9.2а).

Процесс нахождения максимального потока показан в табл. 9.2.

В строке  $c(e_k)$  приведены пропускные способности дуг графа, а в строке  $c_4(e_k)$  — остаточные пропускные способности дуг после проведения четырех путей. Граф приращений  $I(G, \Phi_4)$ , построенный на основе полного потока  $\Phi_4(G)$ , представлен через длины прямых и обратных дуг в строках  $l(e_{ij})$  и  $l(e_{ji})$  табл. 9.2. Стрелками показан путь  $\mu_5 = (v_1, v_3, v_2, v_5, v_6)$ , проходящий в обратном направлении через дугу  $(v_2, v_3)$ . В строке  $\mu_5$  приведены остаточные пропускные способности дуг, вошедших в путь  $\mu_5$ . Они вычислены вычитанием из остаточных пропускных способностей прямых дуг максимального в пути  $\mu_5$  прираще-

Т а б л и ц а 9.2

## Нахождение максимального потока

$E$	$v_1, v_2$	$v_1, v_3$	$v_2, v_3$	$v_2, v_4$	$v_2, v_5$	$v_3, v_4$	$v_3, v_5$	$v_4, v_6$	$v_5, v_6$	$\Delta\varphi_i$
$c(e_k)$	7	8	2	3	6	2	2	7	9	
$c_4(e_k)$	0	6	0	0	4	0	0	2	5	9
$l(e_{ij})$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	0	0	-2
$l(e_{ji})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+2
$\mu_5$		4	2		2				3	
$\Phi_5(G)$	7	4	0	3	4	2	2	5	6	11
$l(e_{ij})$	$\infty$	0	0	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	0	0	
$l(e_{ji})$	0	0	$\infty$	0	0	0	0	0	0	

ния потока  $\Delta\varphi_5 = 2$  и прибавления его к остаточной пропускной способности обратной дуги  $(v_3, v_2)$ .

Поскольку попытка нахождения пути через граф приращений  $I(G, \Phi_5)$ , построенный в двух нижних строках табл. 9.2, не увенчалась успехом, поток  $\Phi_5(G) = 11$  признается максимальным. На примере 9.2 несложно проверить теорему Форда — Фолкерсона. Разрез, обеспечивающий минимальную величину  $c(K_{st}) = 7 + 2 + 2 = 11$ , образуют дуги  $K_{st} = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_3, v_5)\}$ .

## 9.2. НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШЕЙ СЕТИ

Под кратчайшей сетью понимается остов графа с наименьшей суммой весов дуг. Поскольку остов графа определяется на основе отношения связности, при нахождении его для *орграфа* необходимо определять степень связности (сильную или слабую).

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшей сети  $T^*$  для неорграфа  $G$ . Она сводится к поиску варианта остова из множества  $T$  с минимальным весом ребер и формализуется с помощью целевой функции  $L(T)$ :

$$L(T) = \min_{T_k \in T} \sum_{j=1}^{n-1} c(e_j). \quad (9.4)$$

В качестве ограничений используются следующие свойства остова:

- 1) связность графа  $T_k$ :  $\forall v_i \in V \quad \rho(v_i) > 0$ ;
- 2) отсутствие циклов:  $m = n - 1$ .

Первое условие задает требование к неизолированности вершин результирующего графа  $T$ , а второе задает число его ребер. Решением задачи является остов  $T^* = \arg \min_T L(T_k)$ .

Задача решается путем последовательного связывания предварительно изолированных вершин взвешенного неорграфа  $G = (V, E, C)$  совокупностью ребер с наименьшими весами. В зависимости от способа анализа весов ребер различают два алгоритма нахождения кратчайшей сети: алгоритм Крускала (Cruscal) с предварительным упорядочиванием ребер и алгоритм Прима (Prima) с анализом весов ребер *в процессе* связывания вершин.

### 9.2.1. АЛГОРИТМ КРУСКАЛА

1. Ребра графа  $G$  упорядочиваются в направлении возрастания весов.

2. Формируется исходное множество связных компонент в виде изолированных вершин графа  $G = (V, E, C)$ . ПОКА количество связных компонент больше 1:

а) из упорядоченного списка ребер выбирается очередное ребро с наименьшим весом;

б) ЕСЛИ вершины, инцидентные ребру, принадлежат *различным* связным компонентам, ТО последние заменяются их объединением, а ребро включается в список ребер кратчайшей сети, ИНАЧЕ выполняется переход к следующему ребру.

Полученная односвязная компонента и представляет собой кратчайшую сеть  $T^*$  исходного графа  $G$ .

Рассмотрим реализацию алгоритма Крускала на примере связного неорграфа.

**Пример 9.3.** Найти кратчайшую сеть  $T^*$  для взвешенного неориентированного графа  $G$ , изображенного на рис. 9.3.

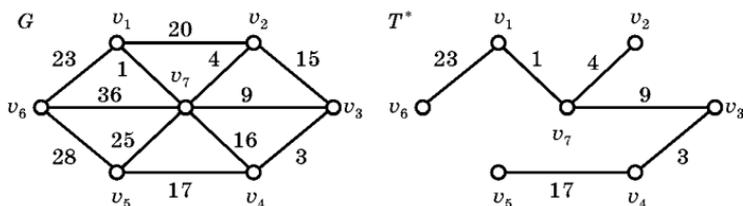


Рис. 9.3

Графы: исходный  $G$  и кратчайшая сеть  $T^*$

1. Упорядочим ребра графа  $G$  на основе его матрицы весов  $C$ :

№	Ребро	Вес	№	Ребро	Вес
1	$(v_1, v_7)$	1	7	$(v_4, v_5)$	17
2	$(v_3, v_4)$	3	8	$(v_1, v_2)$	20
3	$(v_2, v_7)$	4	9	$(v_1, v_6)$	23
4	$(v_3, v_7)$	9	10	$(v_5, v_7)$	25
5	$(v_2, v_3)$	15	11	$(v_5, v_6)$	28
6	$(v_4, v_7)$	16	12	$(v_6, v_7)$	36

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 23 & 1 \\ 20 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 17 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 28 & 25 \\ 23 & 0 & 0 & 0 & 28 & 0 & 36 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица 9.3

## Нахождение кратчайшей сети

№	Ребро	Действие	Множество связанных компонент
			$\{v_1\}\{v_2\}\{v_3\}\{v_4\}\{v_5\}\{v_6\}\{v_7\}$
1	$(v_1, v_7)$	Включить в $T$	$\{v_1, v_7\}\{v_2\}\{v_3\}\{v_4\}\{v_5\}\{v_6\}$
2	$(v_3, v_4)$	Включить в $T$	$\{v_1, v_7\}\{v_2\}\{v_3, v_4\}\{v_5\}\{v_6\}$
3	$(v_2, v_7)$	Включить в $T$	$\{v_1, v_7, v_2\}\{v_3, v_4\}\{v_5\}\{v_6\}$
4	$(v_3, v_7)$	Включить в $T$	$\{v_1, v_7, v_2, v_3, v_4\}\{v_5\}\{v_6\}$
5	$(v_2, v_3)$	Отвергнуть	
6	$(v_4, v_7)$	Отвергнуть	
7	$(v_4, v_5)$	Включить в $T$	$\{v_1, v_7, v_2, v_3, v_4, v_5\}\{v_6\}$
8	$(v_1, v_2)$	Отвергнуть	
9	$(v_1, v_6)$	Включить в $T$	$\{v_1, v_7, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

2. Исходное множество связанных компонент состоит из семи изолированных вершин графа  $G$  (табл. 9.3).

3. В качестве ребра с наименьшим весом выбирается  $(v_1, v_7)$ .

4. Это ребро включается в остов  $T$ , поскольку связывает вершины  $v_1$  и  $v_7$ , уменьшая число связанных компонент на 1.

5. Аналогичным образом в остов  $T$  включаются ребра  $(v_3, v_4)$ ,  $(v_2, v_7)$  и  $(v_3, v_7)$ , уменьшившие число связанных компонент до 3.

6. Ребра  $(v_2, v_3)$  и  $(v_4, v_7)$  не включаются в остов, поскольку не уменьшают число связанных компонент.

Все вычисления по алгоритму Крускала до получения одной связной компоненты приведены в табл. 9.3. Полученное остовное дерево с наименьшим весом (кратчайшая сеть) приведено в правой части рис. 9.3. Его вес  $L(T^*) = 57$ .

Очевидно, что нахождение сети с максимальным весом является противоположной задачей и различается лишь порядком рассмотрения ребер.

## 9.2.2.

## АЛГОРИТМ ПРИМА

Анализ весов ребер в алгоритме Прима реализуется с применением пометки вершин. В пометку вершины  $v_i$  входят имя ближайшей вершины  $\alpha_i$  и расстояние до нее  $\beta_i$ . Последнее служит для выбора кратчайшего ребра, а имя — для формирования этого ребра.

На каждом шаге алгоритма к остову  $T$  присоединяется ребро с *наименьшей* пометкой. Поскольку вершина может входить в остов многократно, после включения в  $T$  кратчайшего ребра  $(v_i, v_j)$  определяются *новые* пометки вершин  $v_i$  и  $v_j$ . Они используются при поиске нового кратчайшего ребра на следующем шаге алгоритма.

Так же, как в алгоритме Крускала, каждое новое ребро должно уменьшать число компонентов связности графа на 1. В противном случае ребро исключается из рассмотрения. Пометки вершин при этом тоже модифицируются.

Таблица 9.4

## Нахождение кратчайшей сети по алгоритму Прима

№	Ребро	Включить/ отвергнуть	$v_1$		$v_2$		$v_3$		$v_4$		$v_5$		$v_6$		$v_7$	
			$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\alpha_4$	$\beta_4$	$\alpha_5$	$\beta_5$	$\alpha_6$	$\beta_6$	$\alpha_7$	$\beta_7$
			$v_7$	1	$v_7$	4	$v_4$	3	$v_3$	3	$v_4$	17	$v_1$	23	$v_1$	1
1	$(v_1, v_7)$	Включить	$v_7$	1												
2	$(v_3, v_4)$	Включить					$v_4$	3								
3	$(v_2, v_7)$	Включить			$v_7$	4										
4	$(v_3, v_7)$	Включить					$v_7$	9								
5	$(v_2, v_3)$	Отвергнуть			$v_3$	15										
6	$(v_4, v_7)$	Отвергнуть							$v_7$	16						
7	$(v_4, v_5)$	Включить									$v_4$	17				
8	$(v_1, v_2)$	Отвергнуть	$v_2$	20												
9	$(v_1, v_6)$	Включить											$v_1$	23		

Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Начальные установки:  $T = \emptyset$ , все вершины без пометок.

2. ПОКА количество связных компонент больше 1:

а) для не имеющих пометок вершин  $v_i \in V$  вычислить пометку  $(\alpha_i, \beta_i)$ :

$$\beta_i = \min_{v_j \in V} c(v_i, v_j);$$

$$\alpha_i = \arg \min_{v_j \in V} c(v_i, v_j);$$

б) выбрать минимальную пометку  $\beta_i$  среди всех  $i = \overline{1, n}$ ;

в) ЕСЛИ ребро  $(v_i, v_j)$ , где  $v_j = \alpha_i$ , уменьшает число компонент связности графа, ТО следует включить его в остов  $T$ , ИНАЧЕ отвергнуть;

г) удалить пометки для вершин  $v_i$  и  $v_j$ .

**Пример 9.4.** Найти с помощью алгоритма Прима кратчайшую сеть  $T^*$  для взвешенного неориентированного графа  $G$ , изображенного на рис. 9.3.

Процесс нахождения кратчайшей сети показан в табл. 9.4.

Задача нахождения кратчайшей сети может решаться также в евклидовом пространстве путем введения *дополнительных* вершин, минимизирующих евклидово расстояние между вершинами графа.

Если вершины и ребра сети располагаются на координатной сетке, то выбираются *дополнительные* вершины в точках ее пересечения. Минимизируемое расстояние между вершинами определяется по формуле

$$d(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

### 9.3.

#### ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Во взвешенном графе  $G = (V, E, C)$  требуется найти *минимальный* по расстоянию маршрут  $\mu_{H^*} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_1)$ ,  $\mu_{H^*} \in M$ , проходящий однократно через *все* пункты сети и возвращающийся в исходный пункт  $v_1$ . Расстояние  $d(v_i, v_j)$  между каждой парой пунктов,  $v_i, v_j \in V$ , определяется весом  $c(e_j)$  соединяющего их ребра  $e_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , из матрицы весов  $C$ .

Эта задача является оптимизационной с целевой функцией

$$L_{\mu_H} = \min_{\mu_{Hk \in M}} \sum_{j=1}^n c(e_j) \quad (9.5)$$

и ограничениями:

$$\begin{aligned} \forall v_i \in V \quad v_i \in \mu_H; \\ \forall v_i \in \mu_H \quad \rho(v_i) = 2. \end{aligned}$$

Приведенным ограничениям отвечает *гамильтонов* цикл в графе  $G = (V, E, C)$  при условии, что граф является гамильтоновым. В противном случае условие однократного прохождения каждого пункта сети не удовлетворяется. Поскольку отсутствует конструктивный алгоритм нахождения гамильтонова графа, это свойство определяется в процессе нахождения гамильтонова цикла. Таким образом, в соответствии с целевой функцией требуется найти гамильтонов цикл с минимальной суммой весов ребер. Прямым решением этой задачи является нахождение всех гамильтоновых циклов в графе и выбор из них варианта с наименьшим суммарным весом ребер, что связано с полным перебором вариантов.

В ряде случаев можно упростить решение этой задачи, отказавшись от гарантии нахождения минимального гамильтонова цикла. Для этого можно воспользоваться аналогией между целевыми функциями  $L(T)$  и  $L(\mu_H)$  в задачах нахождения кратчайшей сети и оптимального маршрута коммивояжера (бродячего торговца).

При условии нахождения гамильтонова цикла на основе гамильтоновой цепи можно использовать сходство ограничений в этих задачах:

- 1) отсутствие циклов:  $m = n - 1$ ;
- 2) связность результирующего графа  $T$ :  $\forall v_i \in V \quad (\rho(v_i) > 0)$ .

По сравнению с кратчайшей сетью гамильтонова цепь имеет более жесткие ограничения для степеней вершин:

- 1)  $\forall v_j \in V \setminus (v_1, v_n) \quad \rho(v_j) = 2$ ;
- 2)  $\rho(v_1) = \rho(v_n) = 1$ .

Все вершины, входящие в гамильтонову цепь, имеют степень, равную 2, а концевые вершины  $v_1$  и  $v_n$  — степень, равную 1.

Таким образом, различие  $\varepsilon$  между кратчайшей сетью  $T^*$  и гамильтоновой цепью  $H$  может быть оценено через степени их вершин с помощью функции штрафов:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n |\rho_T(v_i) - 2| - 2.$$

В ней первый член фиксирует отклонение степени  $i$ -й вершины остова  $T^*$  от степени промежуточной вершины гамильтоновой цепи, а последний является поправкой для двух концевых вершин. Чем больше величина  $\varepsilon$ , тем больше гамильтонова цепь отличается от кратчайшей сети.

Исходя из изложенного, задачу коммивояжера можно решать через нахождение кратчайшего остова:

1) найти кратчайший остов;  
 2) если  $\varepsilon = 0$ , остов совпадает с гамильтоновой цепью, иначе он содержит хотя бы одну промежуточную вершину  $v_i$  с  $\rho(v_i) > 2$ ;

3) выбирается вершина  $v_i$  с  $\rho(v_i) > 2$ ;

4) поочередно каждое инцидентное ей ребро  $(v_i, v_j)$  заменяется ребром исходного графа, инцидентным со смежными ей  $\rho(v_i) - 1$  вершинами с целью сохранения связности графа;

5) из всех полученных таким образом остовов выбирается гамильтонова цепь с минимальным весом всех ребер;

6) если в остове есть другая вершина  $v_j$  с  $\rho(v_j) > 2$ , идти к 3;

7) соединить две концевые вершины  $v_1$  и  $v_n$  полученной гамильтоновой цепи ребром исходного графа. Если оно отсутствует, граф не является гамильтоновым.

Нижняя граница построенного таким образом цикла:

$$L(\mu_H) = L(T) + \max_v c(v_1, v_n),$$

где  $L(T)$  — вес остова.

**Пример 9.5.** Решить задачу коммивояжера для графа, изображенного на рис. 9.3а, на основе построенного для него остова  $T^*$ .

Остовное дерево  $T^*$  (см. рис. 9.3) повторено на рис. 9.4а. В нем только одна вершина  $v_7$  имеет степень  $\rho(v_7) > 2$ . На рис. 9.4б, в, г представлены все варианты замены ребер,

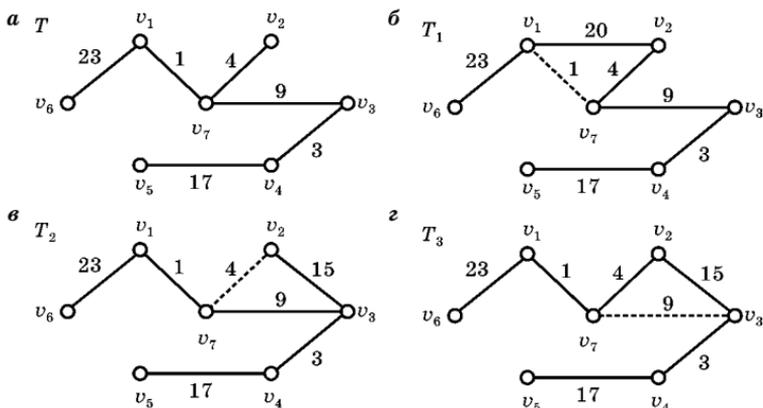


Рис. 9.4

Кратчайшая сеть  $T^*$  и варианты остовов  $T_1$ ,  $T_2$ , и  $T_3$

инцидентных вершине  $v_7$  (заменяемые ребра выделены пунктиром).

На рис. 9.4 приведены приращения весов полученных остовов  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  для каждого варианта замены ребер:

$$\begin{aligned} (v_1, v_7) \rightarrow (v_1, v_2) & \quad L(T_1) = L(T^*) + 19; \\ (v_2, v_7) \rightarrow (v_1, v_2) & \quad L(T_2) = L(T^*) + 11; \\ (v_1, v_7) \rightarrow (v_2, v_3) & \quad L(T_3) = L(T^*) + 6. \end{aligned}$$

Приращения получаются за счет замены ребер кратчайшей сети ребрами с большими весами. Остов  $T_2$  (рис. 9.4б) не является гамильтоновой цепью. А из остовов  $T_1$  и  $T_3$  наименьшим весом обладает последний:  $L(T_3) = 63$ . Вес гамильтонова цикла увеличивается на вес замыкающего ребра  $(v_5, v_5)$ :  $L(\mu_H) = 63 + 28 + 91$ .

При переборе остовов может быть реализован метод штрафных функций. Суть его заключается в добавлении штрафов к весам ребер, инцидентных вершинам с  $\rho(v_i) > 2$ , пропорционально разности  $\rho_T(v_i) - 2$ . Величина штрафа подбирается таким образом, чтобы веса этих ребер превысили веса ребер, инцидентных вершинам с  $\rho_T(v_i) = 2$ .

После введения штрафа ребра упорядочиваются согласно новым весам. Находится остов по *новой* матрице весов. Если он снова не отвечает свойствам гамильтоновой цепи, процедура начисления штрафов повторяется до тех пор, пока не находится гамильтонова цепь с наименьшим весом.

#### 9.4. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Паросочетание (внутренне устойчивое или независимое множество ребер) определено в разделе 5.2 как множество попарно несмежных ребер. В разделе 5.10 изложен один из способов формального нахождения паросочетаний в невзвешенном графе.

Под *минимальным* понимается паросочетание  $E_H$  из множества  $E_H$  во взвешенном графе  $G = (V, E, C)$ , имеющее минимальный суммарный вес ребер. Ему соответствует целевая функция

$$L(E_H) = \min_{E_{Hk} \in E_H} \sum_{j=1}^{\alpha_e} c(e_j), \quad (9.6)$$

где  $\alpha_e$  — реберное число независимости.

В качестве ограничений оптимизационной задачи используется такое свойство паросочетания, как несмежность ребер.

Прямым решением оптимизационной задачи является нахождение всех паросочетаний графа  $G$  и выбор из них минимального, что требует полного перебора всех вариантов паросочетаний.

Другой способ решения задачи, не гарантирующий глобального оптимума, основан на возможности получения паросочетания из минимального гамильтонова цикла. Действительно, и гамильтонов цикл, и паросочетание связывают *все* вершины графа  $G$ . Различие заключается в количестве связных компонент. Гамильтонов цикл представляет собой односвязную компоненту, а паросочетание —  $\lfloor n/2 \rfloor$  связных компонент. Следовательно, второе может быть получено из первого как *чередующаяся* (альтернирующая) замкнутая цепь. Она представляет собой множество попарно несмежных ребер, определенное на гамильтоновом цикле.

Таким образом, задача нахождения минимального паросочетания может быть решена на основе задачи коммивояжера. Полученный в этой задаче гамильтонов цикл обходит *все* вершины и является *кратчайшим*. Из его ребер и составляется *минимальное* паросочетание  $E_{H, \min}$ .

**Лемма 9.1.** На основе гамильтонова цикла с *четным* количеством вершин возможно построение двух вариантов паросочетания.

Доказательство очевидно в силу существования всего двух вариантов обхода гамильтонова цикла в прямом и обратном направлении от вершины, принятой за начальную.

**Лемма 9.2.** На основе гамильтонова цикла с *нечетным* количеством вершин возможно построение  $n$  вариантов паросочетания.

Поскольку признаком различия двух паросочетаний являются вершины, не вошедшие в пары (при нечетном числе вершин), число вариантов равно общему числу вершин, т. е.  $n$ . Отсюда все варианты паросочетаний получаются поочередным выбором в качестве начальной каждой вершины цикла. Из полученных паросочетаний выбирается то, которое обладает меньшим весом.

**Пример 9.6.** Найти минимальное паросочетание для графа  $G$ , представленного на рис. 9.3а.

Задача коммивояжера для этого графа решена в примере 9.4. Решением является гамильтонов цикл, выраженный следующей совокупностью ребер:

$$\mu_H = ((v_1, v_7), (v_7, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_1))$$

с весом  $L(\mu_H) = 91$ . Поскольку число вершин в графе  $G$  нечетно, существует 7 вариантов паросочетаний со следующими весами:

- 1)  $\{(v_1, v_7), (v_2, v_3), (v_4, v_5)\}$  с  $L(E_{H1}) = 33$ ;
- 2)  $\{(v_7, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$  с  $L(E_{H2}) = 35$ ;
- 3)  $\{(v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_1)\}$  с  $L(E_{H3}) = 55$ ;
- 4)  $\{(v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_1, v_7)\}$  с  $L(E_{H4}) = 32$ ;
- 5)  $\{(v_4, v_5), (v_6, v_1), (v_7, v_2)\}$  с  $L(E_{H5}) = 44$ ;
- 6)  $\{(v_5, v_6), (v_1, v_7), (v_2, v_3)\}$  с  $L(E_{H6}) = 44$ ;
- 7)  $\{(v_6, v_1), (v_7, v_2), (v_3, v_4)\}$  с  $L(E_{H7}) = 30$ .

Минимальным паросочетанием графа  $G$  является вариант 7 с  $L(E_{H7}) = 30$ .

Аналогичным образом решается задача нахождения *максимального* паросочетания с учетом обратного упорядочения весов ребер и противоположного направления оптимизации целевой функции.

### 9.5. ЗАДАЧА КИТАЙСКОГО ПОЧТАЛЬОНА

В отличие от задачи коммивояжера, нацеленной на поиск кратчайшего цикла, охватывающего *все пункты* некоторой сети, задача китайского почтальона ориентирована на поиск кратчайшего цикла, проходящего по *всем дугам* некоторой сети. Математически она формулируется как задача минимизации обхода взвешенной сети:

$$L(P) = \min_P \sum_{j=1}^m k_j \cdot c(e_j), \quad (9.7)$$

где  $c(e_j)$  — вес  $j$ -й дуги;  $k_j$  — число проходов по  $j$ -й дуге;  $P$  — множество вариантов обхода сети.

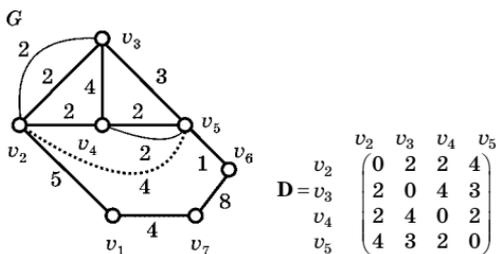
Решение задачи тривиально для эйлерова графа, поскольку в нем все дуги обходятся по одному разу и, следовательно, сумма весов не зависит от порядка их обхода. Если граф не эйлеров, однократный обход всех его дуг невозможен. Часть из них необходимо обходить *дважды*. С целью минимизации суммарного веса  $L(P)$  эти дуги должны обладать наименьшим весом.

Рассмотрим неэйлеров неорграф  $G = (V, E, C)$ . Поставим задачу нахождения множества ребер с минимальным суммарным весом, дополняющих граф  $G$  до эйлерова. Их называют *искусственными* ребрами, поскольку они вносятся параллельно существующим и имеют тот же вес.

**Лемма 9.3.** Число искусственных ребер четно.

Согласно теореме 7.4 для получения эйлерова графа каждую вершину исходного графа  $G$  с нечетной степенью следует дополнить инцидентным ей ребром. Поскольку согласно теореме 4.1 число вершин с нечетной степенью четно, то и количество ребер, соединяющих эти вершины, также четно и вдвое меньше числа связываемых вершин.

Так как последнему условию удовлетворяют паросочетания, нахождение эйлерова графа с минимальным весом сводится к нахождению минимального паросочетания  $L(E_H)$  в подграфе  $G_{нс}$ , содержащем вершины с нечетными степенями. В том случае, когда две вершины с нечетными степенями несмежны, они соединяются *составным* искусственным ребром, представляющим собой минимальный



**Рис. 9.5**  
Неорграф  $G$  и матрица  
весов подграфа  $G_{nc}$

маршрут между ними. Поскольку составное искусственное ребро может иметь меньший вес, чем некоторые исходные ребра, а подграф, состоящий из вершин с нечетными степенями, связан, для нахождения минимального паросочетания следует подграф дополнить до полного составными искусственными ребрами. Отсюда следует алгоритм решения задачи китайского почтальона.

1. В графе  $G$  выделяется подграф  $G_{nc}$ , содержащий вершины с нечетными степенями  $\rho(v_i) \bmod 2 = 1$ .

2. Подграф  $G_{nc}$  достраивается до полного графа с помощью составных искусственных ребер  $(v_i, v_j)$  с минимальным расстоянием  $d(v_i, v_j)$  между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ .

3. В полученном подграфе находится минимальное паросочетание.

4. Ребра, входящие в минимальное паросочетание, добавляются в качестве искусственных в исходный граф  $G$ .

**Пример 9.7.** Решить задачу китайского почтальона для графа, изображенного на рис. 9.5.

1. Из графа  $G$  выделим подграф  $G_{nc}$ , содержащий все вершины с нечетными степенями  $V_{nc} = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ .

2. Подграф  $G_{nc}$  не содержит вершин с четными степенями, но является неполным. Дополним его до полного графа ребром  $(v_2, v_5)$ . На рис. 9.5 оно изображено штрихпунктирной линией.

3. Вычислим матрицу расстояний  $D$  подграфа  $G_{nc}$ . Она представлена справа от графа  $G$ .

4. Находим все варианты паросочетаний в подграфе  $G_{nc}$  и определяем их вес по матрице расстояний  $D$ :

- а)  $\{(v_2, v_3), (v_4, v_5)\}$  с  $L(E_{H1}) = 2 + 2 = 4$ ;
- б)  $\{(v_2, v_4), (v_3, v_5)\}$  с  $L(E_{H2}) = 2 + 3 = 5$ ;
- в)  $\{(v_2, v_5), (v_3, v_4)\}$  с  $L(E_{H3}) = 4 + 4 = 8$ .

5. Из трех вариантов паросочетаний выбираем первое с наименьшим весом 4.

6. Граф  $G$  преобразуется в эйлеров граф добавлением искусственных ребер  $(v_2, v_3)$  и  $(v_4, v_5)$ , обозначенных тонкими линиями на рис. 9.5.

Маршрут китайского почтальона описывается эйлеровым циклом:

$$\mu_{\text{кп}} = (v_1, v_7, v_6, v_5, v_3, v_4, v_5, v_4, v_2, v_3, v_2, v_1)$$

с весом  $L(P) = 31$ .

В примере 9.7 до полного подграфа (клики) не хватало одного ребра. Рассмотрим применение паросочетания для нахождения искусственных ребер в подграфе, представляющем собой остов, образованный на четырех вершинах с нечетными степенями<sup>9</sup>.

**Пример 9.8.** Решить задачу китайского почтальона для подграфа-остова  $G_1$ , изображенного на рис. 9.6 сплошными линиями.

Для получения полного подграфа дополним подграф  $G_1$  искусственными ребрами  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_3, v_1)$ , образованными на основе маршрутов

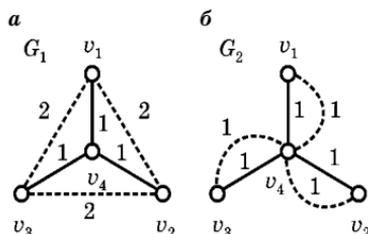
$\mu_1 = (v_1, v_4, v_2)$ ,  $\mu_2 = (v_2, v_4, v_3)$ ,  $\mu_3 = (v_3, v_4, v_1)$ . На рис. 9.6а эти ребра изображены пунктирными линиями, а их веса вычислены как суммы весов ребер, вошедших в соответствующие маршруты.

Для полученного полного подграфа находятся три варианта паросочетаний:

$$E_{n1} = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\},$$

$$E_{n2} = \{(v_2, v_3), (v_1, v_4)\}, \quad E_{n3} = \{(v_3, v_1), (v_4, v_2)\}.$$

Весы всех вариантов паросочетаний одинаковы:  $c(E_{ni}) = 3$ . На основе любого из них строится эйлеров граф  $G_2$  (рис. 9.6б) приведением составных искусственных ребер  $(v_1, v_2)$ ,



**Рис. 9.6**  
Подграф  $G_1$  (а), подграф  $G_2$  с искусственными ребрами (б)

<sup>9</sup> Пример предложен М. И. Гариной.

$(v_2, v_3), (v_3, v_1)$  к исходным ребрам. Например, паросочетание  $E_{n1}$  предполагает включение в граф  $G_2$  ребер  $(v_1, v_4), (v_4, v_2)$ , входящих в составное ребро  $(v_1, v_2)$ , и исходного ребра  $(v_3, v_4)$ .

### Упражнения

1. Найти максимальные потоки в транспортных сетях (рис. 9.7).
2. Найти кратчайшие сети во взвешенных графах, изображенных на рис. 9.8а, б.
3. Решить задачу коммивояжера для взвешенного графа  $G$ , изображенного на рис. 9.9, на основе кратчайшей сети графа.
4. Найти минимальное паросочетание для графа, изображенного на рис. 9.9, используя результат предыдущей задачи.
5. Найти максимальное паросочетание на основе максимальной сети графа (рис. 9.9).
6. Решить задачу китайского почтальона для взвешенного графа, изображенного на рис. 9.9.

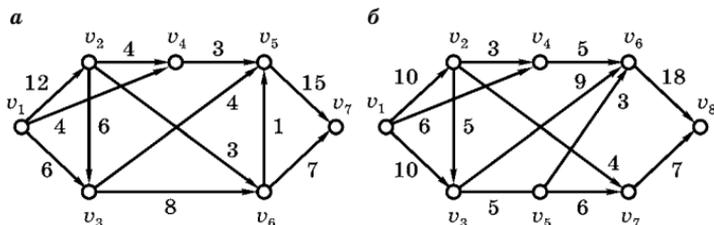


Рис. 9.7  
Варианты транспортной сети

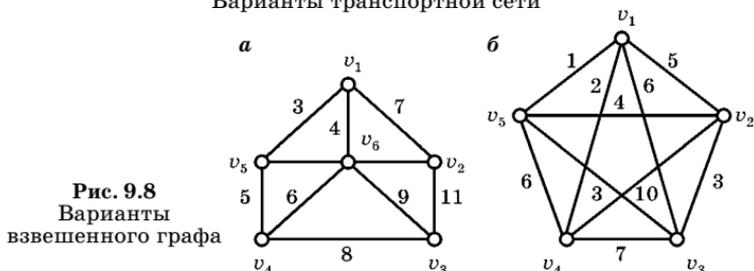


Рис. 9.8  
Варианты  
взвешенного графа

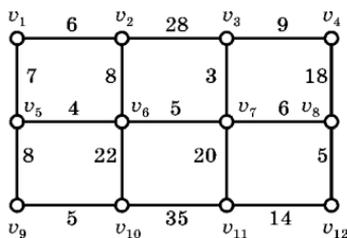


Рис. 9.9  
Взвешенный граф

## ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

## 10.1.

## ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРИКИ

**Р**ешение задач дискретной математики выполняется путем полного или сокращенного перебора вариантов, представляемым *деревом перебора*. Оно сопряжено с *перечислением* и *пересчетом* элементов в конечных множествах, что и является предметом изучения одного из разделов дискретной математики, называемого *комбинаторикой*.

В задачу перечисления входит *выделение* или *конструирование* (синтез) всех элементов некоторого конечного множества. Она отвечает на вопрос: «Какие?»

Задача пересчета имеет целью определение *числа* элементов в исходном или полученном конечном множестве. Она отвечает на вопрос: «Сколько?»

В качестве примера рассмотрим матричный способ решения задач, применявшийся в предыдущих разделах и характеризующийся обобщенной формулой «перемножения»  $i$ -й строки матрицы на  $k$ -й столбец:

$$a_{ik} = \prod_{j=1}^n \varphi(a_{ij}, a_{jk}),$$

где  $F$  и  $\varphi$  — функции вычисления элемента  $a_{ik}$  из элементов  $a_{ij}$  и  $a_{jk}$ , определяемые особенностями каждой задачи. Каждый элемент  $a_{ik}$  матрицы  $\mathbf{A}^s$ ,  $i, k = \overline{1, n}$ , можно интерпретировать как элемент результирующего множества (достижимостей, расстояний и пр.). В матрице  $\mathbf{A}^s$  *перечисляются* все элементы множества с требуемыми свойствами как функция степени  $s$  матрицы  $\mathbf{A}$ . Их число оценивается величиной  $n \times n$ , что означает полный перебор вариантов элементов с заданными свойствами. При этом не

каждый элемент содержит решение задачи. Таким образом, матричные способы решения задач имеют комбинаторный характер.

В оптимизационных задачах, изложенных в предыдущем разделе, из элементов результирующего множества выделяются *экстремальные*, отвечающие минимуму или максимуму целевой функции задачи.

Если *перечисление* элементов результирующего множества определяется способом решения комбинаторной задачи, то *пересчет* числа элементов подчиняется некоторым общим схемам, из которых рассмотрим ряд типовых.

## 10.2. ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть  $X$  — конечное множество, состоящее из  $n$  элементов. Говорят, что элемент  $x \in X$  может быть выбран из  $X$   $n$  способами.

Пусть  $X_1, \dots, X_k$  попарно непересекающиеся множества, т. е.  $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j$ . Тогда имеет место равенство

$$\left| \bigcup_{i=1}^k X_i \right| = \sum_{i=1}^k |X_i|. \quad (10.1)$$

В комбинаторике оно называется *правилом суммы* и для  $k = 2$  формулируется следующим образом. Если объект  $x_i \in X_1$  может быть выбран  $n$  способами, а объект  $x_j \in X_2$  —  $m$  способами, то выбор *либо*  $x_i$ , *либо*  $x_j$  может быть осуществлен  $n + m$  способами.

Если при  $k = 2$  объект  $x_i$  может быть выбран  $n$  способами и *после* каждого из выборов объект  $x_j$  может быть выбран  $m$  способами, то выбор пары  $(x_i, x_j)$  может быть осуществлен  $n \cdot m$  способами. Выбор упорядоченной пары обобщается на  $k$ -местный кортеж (вектор) следующим образом:

$$\left| \prod_{i=1}^k X_i \right| = |X_1 \times \dots \times X_k| = \prod_{i=1}^k |X_i|. \quad (10.2)$$

Эта формула выражает правило произведения.

**Пример 10.1.** Найти количество элементов в универсальном бинарном отношении  $X^2$ .

Представим  $X^2$  полным неорграфом  $G = (V, E)$  с петлями. Количество петель в графе равно числу его вершин  $n = |V|$ . Число ребер полного графа определим по правилу произведения. Если начало каждого ребра может быть выбрано по числу вершин  $n$  способами, то конец ребра инцидентен одной из оставшихся  $n - 1$  вершин. Таким образом, существует  $n \cdot (n - 1)$  способов выбора начала и конца ребра. Поскольку число ребер вдвое меньше числа инцидентных им вершин, общее их число в полном графе равно  $n \cdot (n - 1)/2$ .

Поскольку элементы универсального бинарного отношения  $X^2$  включают как ребра, так и петли полного графа  $G$ , число их определяется по правилу суммы:  $n \cdot (n - 1)/2 + n$ . Так, например, число элементов в  $X^2$  для  $|X| = 4$  будет  $4 \cdot 3/2 + 4 = 10$ .

**Пример 10.2.** Найти число  $N$  висячих вершин дихотомического дерева, имеющего  $k$  ярусов.  $N$  определяется по формуле (10.2) как произведение  $k$  двоек:  $N = 2^k$ . Так, например, дерево с числом ярусов  $n = 4$  имеет 16 висячих вершин как максимум возможных вариантов.

### 10.3. РАЗМЕЩЕНИЯ

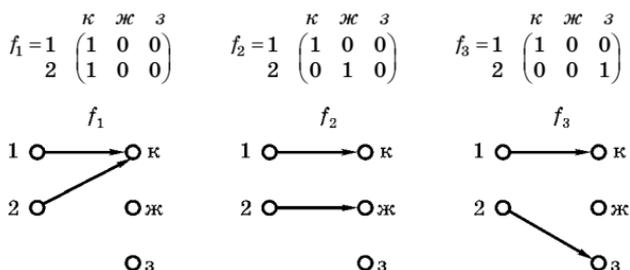
Пусть задано множество объектов (переменных)  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $|X| = n$  и множество ячеек (значений, состояний)  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ ,  $|Y| = m$ .

Функция  $f: X \rightarrow Y$  определяет *размещение*, указывая для каждого объекта (переменной)  $x_i \in X$  ячейку, в которую он помещен (либо состояние, в котором он находится, либо значение переменной).

**Пример 10.3.** Каждый из двух светофоров  $X = \{1, 2\}$  может находиться в одном из трех состояний  $Y = \{к, ж, з\}$ . Рассмотрим три функции, определяющие цвета двух светофоров. На рис. 10.1 они представлены двудольными графами.

Функция  $f_1$  не биективна в силу неоднозначности ее обратного отображения  $f_1^{-1}$ .

Представим каждую функцию упорядоченной последовательностью значений  $(f(1), \dots, f(n))$ , определенных на



**Рис. 10.1**  
Графы состояний двух светофоров

*Таблица 10.1*

	1	2		1	2		1	2
$f_1$	<u>к</u>	<u>к</u>	$f_4$	ж	к	$f_7$	з	к
$f_2$	к	ж	$f_5$	<u>ж</u>	<u>ж</u>	$f_8$	з	ж
$f_3$	к	з	$f_6$	ж	з	$f_9$	<u>з</u>	<u>з</u>

множестве  $X = \{1, \dots, n\}$ , т. е. каждой функции ставится в соответствие набор ее значений. В примере это  $f_1 = (\text{к}, \text{к})$ ,  $f_2 = (\text{к}, \text{ж})$ ,  $f_3 = (\text{к}, \text{з})$ .

Оценим множество всех функций (отображений).

**Теорема 10.1.** Если  $|X| = n$ ,  $|Y| = m$ , то число всех функций  $f: X \times Y$

$$\bar{A}_m^n = m^n. \quad (10.3)$$

Поскольку каждый из  $n$  членов последовательности может быть выбран  $n$  способами, то согласно правилу произведения общее число наборов равно  $m^n$ . Эта оценка справедлива для размещений с повторениями, т. е. включающих наборы одинаковых значений функции. В табл. 10.1 приведены всевозможные комбинации сигналов на двух светофорах (одинаковые значения подчеркнуты), число которых  $3^2 = 9$ .

Как следует из табл. 10.1, количество наборов с одинаковыми значениями определяется числом объектов  $n$ . Исключение этих наборов позволяет получить множество всех взаимно однозначных функций. Таким образом, множество всех взаимно однозначных функций определяется размещениями без повторений.

**Теорема 10.2.** Если  $|X| = n$ ,  $|Y| = m$ , то число всех взаимно однозначных функций  $f: X \times Y$ :

$$A_n^m = m(m-1) \dots (m-n+1). \quad (10.4)$$

Первый элемент последовательности  $(y_1, \dots, y_m)$  может принять одно из  $m$  различных значений, второй —  $m-1$  неиспользованных значений,  $n$ -й — одно из оставшихся  $m-n+1$ . При  $n=0$   $A_m^0 = 1$ .

Число последовательностей  $(f(1), f(2))$  с различными значениями, представленных в табл. 10.1, рассчитывается как  $3 \times 2 = 6$ .

#### 10.4. ПЕРЕСТАНОВКИ

Рассмотрим множество  $S_n$  всех биективных отображений  $n$ -элементного множества  $X$  в себя, т. е. множество взаимно однозначных функций  $f: X \times X$ . Оно может рассматриваться как частный случай размещений без повторений с  $m = n$ .

Каждое взаимно однозначное отображение  $f: X \times X$  называется *перестановкой* множества  $X$ . Оно представляет собой упорядоченную последовательность неповторяющихся элементов из  $X$ , определенную на множестве  $X = \{1, \dots, n\}$ , и часто задается *сечением*.

**Пример 10.4.** Представить две перестановки на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  как функции  $f$  и  $g$ , заданные сечениями (проекциями):

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Число перестановок определяется путем подстановки  $n$  вместо  $m$  в формулу для  $A_n^m$ .

**Теорема 10.3.** Число перестановок  $n$ -элементного множества

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \dots (n-n+1) = n! \quad (10.5)$$

Рассмотрим бинарную операцию над перестановками  $f$  и  $g$ , называемую *суперпозицией*  $f(g)$ . Перестановка  $gf$  получается путем *переупорядочения* столбцов перестановки  $f$  таким образом, чтобы ее первая строка совпала со

второй строкой перестановки  $g$ . В суперпозиции  $f(g)$  первая строка заимствуется из  $g$ , а вторая — из  $f$ .

**Пример 10.5.** Найти суперпозицию  $f(g)$  функций из примера 10.4 переупорядочением столбцов перестановки  $f$ :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 10.2 показано получение суперпозиции  $f(g)$  с применением композиции двудольных графов  $g$  и  $f$ .

Транзитивные дуги, соединяющие вершины из левого столбца на рис. 10.2 с вершинами правого столбца, вычисляются как логическое перемножение матриц смежности  $A_g \times A_f$  двудольных графов  $g$  и  $f$ , характеризующее достижимость вершин с помощью двух различных функций.

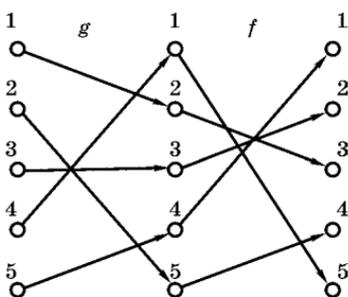


Рис. 10.2

Получение суперпозиции  $f(g)$  на двудольных графах

Единичной матрице смежности  $I$  соответствует *тождественная*, или *единичная*, перестановка  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

Множество  $S_n$  всех перестановок образует *симметрическую группу* степени  $n$  относительно суперпозиции, поскольку для произвольной перестановки  $f \in S_n$  выполняются следующие условия:

- 1) ассоциативность  $(fg)h = f(gh)$ ;
- 2) симметрия относительно единицы  $ef = fe = f$ ;
- 3)  $ff^{-1} = f^{-1}f = e$ ,

где  $f^{-1}$  — перестановка, обратная  $f$  (меняются строки).

**Пример 10.6.** Найти перестановку, обратную функции  $f$  из примера 10.3.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для решения комбинаторных задач, использующих свойство цикличности, перестановка представляется *разложением на циклы*. Цикл строится как совокупность дуг, соединяющих элементы (вершины) первой строки сечения с элементами второй строки. По способу построения циклов нетрудно заключить, что максимальным числом циклов (петель) обладает тождественная перестановка.

Аналитически перестановка представима в виде суперпозиции циклов:

$$f = [a_1^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}] \dots [a_1^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)}] \dots [a_1^{(k)}, \dots, a_{n_k}^{(k)}].$$

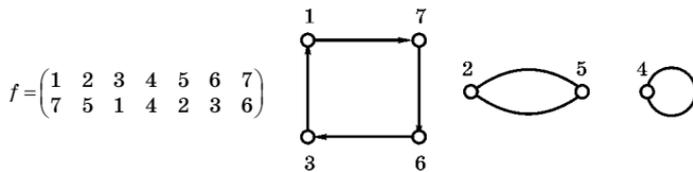
**Пример 10.7.** Разложить на циклы перестановку  $f$ , определенную на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  (рис. 10.3).

Перестановка  $f$  выражается через следующую суперпозицию циклов:  $f = [4][2, 5][1, 7, 6, 3]$ .

*Тип* перестановки, рассмотренной в примере 10.7:  $1^1 2^1 4^1$ , где цифры характеризуют *длину* циклов в перестановке, а степени — *число* циклов соответствующей длины.

Лексикографический порядок элементов в перестановке оценивается отсутствием *инверсий*. Инверсией перестановки  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  называется пара  $\langle a_i, a_j \rangle$ ,  $i < j$ , если  $a_i > a_j$ , т. е. нарушается порядок следования цифр по возрастанию. Число инверсий в перестановке обозначается через  $I(f)$ . Четность  $I(f)$  определяет *знак* перестановки:  $\text{sgn}(f) = (-1)^{I(f)}$ .

Перестановка, являющаяся циклом длины 2, называется *транспозицией*. Она означает обмен местами соседними элементами:  $[i, i + 1]$ . Произвольную перестановку  $f \in S_n$  можно представить в виде суперпозиции  $I(f)$  транспозиций соседних элементов.



**Рис. 10.3**  
Разложение на циклы перестановки  $f$

Элемент, стоящий в исходной перестановке на месте  $r_1 + 1$ , можно переставить на 1-е место, произведя  $r_1$  транспозиций соседних элементов. Аналогично, другой элемент переставляется на 2-е место за  $r_2$  транспозиций и т. д. Через  $r_1 + r_2 + \dots + r_n$  шагов получается последовательность  $[1, 2, \dots, n]$ .

**Пример 10.8.** Установить лексикографический порядок элементов в перестановке  $(2, 4, 3, 5, 1)$  и оценить число требуемых транспозиций.

Выпишем инверсии этой перестановки:  $\langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle$ , отражающие нарушение лексикографического порядка. Число инверсий равно пяти:  $I(f) = 5$ , а знак перестановки отрицательный:  $\text{sgn}(f) = -1$  в силу нечетности числа инверсий.

Для установления лексикографического порядка элементов в перестановке  $(2, 4, 3, 5, 1)$  требуется выполнить пять транспозиций:  $(2, 4, 3, 1, 5), (2, 4, 1, 3, 5), (2, 1, 4, 3, 5), (1, 2, 4, 3, 5), (1, 2, 3, 4, 5)$ .

## 10.5.

### МНОЖЕСТВА И ПОДМНОЖЕСТВА

#### 10.5.1.

##### МНОЖЕСТВО ВСЕХ ПОДМНОЖЕСТВ

Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ . Поставим задачу нахождения всех подмножеств множества  $X$ :  $X_i \subset X, i = 1, 2, \dots$  Подмножества  $X_i$  и  $X_j$  должны различаться хотя бы одним элементом:  $\exists x_k \in X_i, x_k \notin X_j, i \neq j$ . Следовательно, если пометить включение элемента  $x_k \in X_i$  в  $X_i$  *единицей* ( $b_k = 1$ ), а не включение — *нулем* ( $b_k = 0$ ),  $k = 1, n$ , то вариацией двоичных векторов  $B_i = \{b_1^i, \dots, b_k^i, \dots, b_n^i\}$ , определенных на  $X$ , возможно получить всевозможные подмножества:  $X_i \subset X$ .

Каждому подмножеству  $X_i$  ставится в соответствие двоичный вектор  $\mathbf{b}_i$ , называемый *характеристической функцией* этого подмножества. Два вектора из множества векторов — нулевой и единичный — характеризуют предельные случаи. Нулевому вектору  $\mathbf{b}_0$  соответствует пустое подмножество  $X_i = \emptyset$ , а единичному  $\mathbf{b}_1$  — подмножество, равное самому исходному множеству  $X_i = X$  (парадокс теории множеств).

Таблица 10.2

Булеан  $B(X)$ 

$A$	$B$	$C$	Подмножества
0	0	0	$X_0 = \emptyset$
0	0	1	$X_1 = \{C\}$
0	1	0	$X_2 = \{B\}$
0	1	1	$X_3 = \{B, C\}$
1	0	0	$X_4 = \{A\}$
1	0	1	$X_5 = \{A, C\}$
1	1	0	$X_6 = \{A, B\}$
1	1	1	$X_7 = \{A, B, C\} = X$

По принципу порождения на двух значениях переменных ( $m = 2$ ) множество всех подмножеств, выражаемое совокупностью двоичных векторов, называется *булеаном*  $B(X)$ . Мощность булеана определяется по правилу произведения:  $N = 2^n$ .

**Пример 10.9.** Сгенерировать все подмножества множества  $X = \{A, B, C\}$  на основе двоичных векторов. Результаты сведены в табл. 10.2.

**Пример 10.10.** Оценить мощность множества неориентированных графов без петель, которые можно построить на четырех вершинах.

Из примера 10.1 известна формула определения числа ребер полного неорграфа:  $t = n(n - 1)/2$ . Примем множество всех ребер графа за исходное и построим для него булеан. Его мощность  $2^t$ . Подставив  $n = 4$ , получим  $t = 6$ , а  $2^t = 2^6 = 64$ . Это и будет количество всевозможных неорграфов (включая пустой и полный), которые можно построить на четырех вершинах.

## 10.5.2.

## ВЫБОРКА ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА

Подмножество элементов  $x_1^i, \dots, x_k^i, \dots, x_n^i$  из множества  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  называется *выборкой* объема  $n$  из  $t$  элементов, или иначе  $(t, n)$ -выборкой.

Выборка называется *упорядоченной*, если в ней задан порядок следования элементов. К упорядоченным выборкам

относятся  $(m, n)$ -размещения с повторениями и без повторений (см. п. 10.3).

*Неупорядоченная  $(m, n)$ -выборка*, в которой порядок элементов несуществен, называется *сочетанием*. Так же как и размещения, в зависимости от повторяемости элементов сочетания бывают с *повторениями* и *без повторений*.

Пусть  $X = \{1, 2, 3\}$ . Из  $X$  возможны следующие  $(3, 2)$ -выборки:

1)  $(3, 2)$ -размещения с повторениями:

$$(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); \\ (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3);$$

2)  $(3, 2)$ -размещения без повторений:

$$(1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2);$$

3)  $(3, 2)$ -сочетания с повторениями:

$$(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 3);$$

4)  $(3, 2)$ -сочетания без повторений:

$$(1, 2); (1, 3); (2, 3).$$

Формулы для размещений были даны в п. 10.3. Определим на основе размещения  $A_m^n$  формулу для сочетания  $C_m^n$ , устраняя порядок элементов в размещении. Поскольку элементы в  $(m, n)$ -размещении без повторений упорядочены  $n!$  способами, то

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \\ = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \quad (10.6)$$

Сочетание с повторениями определяется на основе сочетания без повторений:  $V_m^n = C_{m+n-1}^n$  (с учетом  $n-1$  ненулевых повторений).

Поскольку *булеан* включает все  $n$ -элементные подмножества  $n = \overline{1, m}$  и его мощность равна  $2^m$ , то

$$\sum_{n=1}^m C_m^n = 2^m.$$

**Пример 10.11.** Подсчитать для примера 10.10 количество графов с разным числом ребер. В диапазоне от 0 до 6 ребер количество графов определяется следующей совокупностью сочетаний (слагаемых булеана):

$$\begin{aligned} C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 &= \\ &= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64. \end{aligned}$$

### 10.5.3.

#### РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА БЛОКИ

Разбиением  $m$ -элементного множества  $X$  на  $k$  блоков (ячеек) называется такое произвольное семейство  $\pi = \{X_1, \dots, X_k\}$ , где каждый элемент  $x_r \in X$  принадлежит *только одному* из его подмножеств (блоков  $X_i$ ):

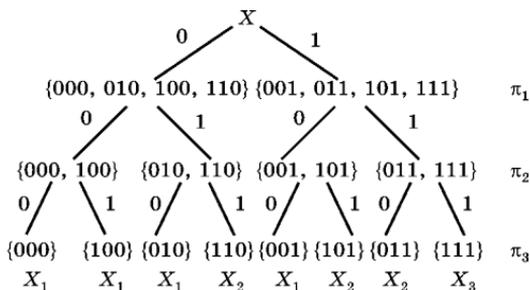
- 1)  $X_i \cap X_j = \emptyset, \quad i \neq j;$
- 2)  $\bigcup_{i=1}^k X_i = X;$
- 3)  $\sum_{i=1}^k n_i = m, \quad |X_i| = n_i, \quad i = \overline{1, k}.$

**Пример 10.12.** Выполнить разбиение множества  $X$  двоичных векторов длины 3 на блоки векторов с одинаковым количеством единиц.

Очевидно, что множество трехкомпонентных двоичных векторов по числу единиц в векторе делится на четыре блока (класса эквивалентности):

$$\begin{aligned} X_0 &= \{000\}; & X_1 &= \{001, 010, 100\}; \\ X_2 &= \{011, 101, 110\}; & X_3 &= \{111\}. \end{aligned}$$

Дерево разбиения на блоки показано на рис. 10.4.



**Рис. 10.4**  
Графическая интерпретация процесса разбиения

Разбиение на рис. 10.4 ведется путем *измельчения* блоков относительно количества единиц в векторе. За три шага каждый блок измельчается до одного элемента:

$$\pi_1 = \{\{000, 100, 010, 110\}, \{001, 101, 011, 111\}\}, \quad |\pi_1| = 4;$$

$$\pi_2 = \{\{000, 100\}, \{010, 110\}, \{001, 101\}, \{011, 111\}\}, \quad |\pi_1| = 2;$$

$$\pi_3 = \{\{000\}, \{100\}, \{010\}, \{110\}, \{001\}, \{101\}, \{011\}, \{111\}\}, \quad |\pi_1| = 1.$$

По числу элементов в блоках разбиения упорядочиваются следующим образом:  $\pi_1 > \pi_1 > \pi_1$ .

Затем одноэлементные блоки объединяются относительно числа единиц в путях дерева безотносительно от их позиции в двоичном векторе. Они образуют фактормножество  $\pi(X) = \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ .

Элементы каждого блока образуют класс эквивалентности по отношению  $R$  (число единиц в векторе):  $X_i / R = \{x / R: x \in X_i\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Оценим число способов разбиения множества  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ .

Каждое из его подмножеств (блоков) можно рассматривать как сочетание без повторений. Для образования сочетания, соответствующего подмножеству  $X_1$ , могут быть использованы *все* элементы множества  $X$ , т. е. подмножество  $X_1$  может быть выбрано  $C_m^{n_1}$  способами. Множество  $X_2$ , являющееся подмножеством  $X \setminus X_1$ , может быть выбрано  $C_{m-n_1}^{n_2}$  способами ( $m - n_1 = |X \setminus X_1|$ ). Таким образом, по индукции, на основе правила произведения, упорядоченную последовательность разбиения множеств  $X: X_1, \dots, X_k$  можно выполнить  $C_m^{n_1} \cdot C_{m-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{m-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = C_m^{n_1 \dots n_k}$  способами.

После преобразований формула имеет вид

$$C_m^{n_1 \dots n_k} = \frac{m!}{n_1! \dots n_k!}. \quad (10.7)$$

**Теорема 10.4.** Число  $C_m^{n_1 \dots n_k}$ , где  $n_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i = m$ , равно числу  $(k, m)$ -размещений с повторениями, среди элемен-

тов которых содержится  $n_1$  элементов 1-го типа, ...,  $n_k$  элементов  $k$ -го типа.

Теорема отвечает условиям разбиения множества  $X = \{1, \dots, m\}$  номеров элементов в выборке на подмножества  $X_i$  номеров  $i$ -го типа. Каждому разбиению ставится в соответствие размещение указанного типа.

**Пример 10.13.** Число способов раскраски квадрата, состоящего из девяти клеток, вычисляемое с учетом того, что в первый цвет окрашены 3 части, во второй — 2, в третий — 3, в четвертый — 1, будет

$$C_m^{3,2,3,1} = \frac{9!}{3!2!3!1!} = 5040.$$

Здесь каждое раскрашивание рассматривается как упорядоченная выборка с повторениями, т. е. (4, 9)-размещение с повторениями.

#### 10.5.4. ПРИНЦИП ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

Он формулируется применительно к подсчету числа элементов  $|X|$  в множестве  $X$  на основании чисел элементов в его подмножествах. Решим задачу вначале для двух подмножеств  $X_1 \cup X_2 = X$ .

Решение тривиально для случая  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ :

$$|X| = |X_1| + |X_2|. \quad (10.8)$$

В случае  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  в формуле (10.8) элементы, принадлежащие множеству  $X_1 \cap X_2$ , будут учтены дважды. Отсюда следует формула

$$|X| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|. \quad (10.9)$$

Приведем формальный вывод:

$$\begin{aligned} |X_1| &= |X_1 \cap \bar{X}_2| + |X_1 \cap X_2|; \\ |X_2| &= |\bar{X}_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_2| \Rightarrow \\ \Rightarrow |X_1| + |X_2| &= |X_1 \cap \bar{X}_2| + |X_1 \cap X_2| + |\bar{X}_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_2| = \\ &= |X_1 \cup X_2| + |X_1 \cap X_2|. \end{aligned}$$

Отсюда  $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$ .

Таблица 10.3

## Количество студентов, изучающих иностранные языки

Английский	+			+	+		+
Французский		+		+		+	+
Немецкий			+		+	+	+
	19	17	11	12	7	5	2

Для трех подмножеств необходимо учитывать лишний раз вычитаемое число  $|X_1 \cap X_2 \cap X_3|$ , что требует его восстановления:

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|.$$

Для случая  $n$  подмножеств формула суммирования обобщается по индукции.

**Теорема 10.5.** Для конечных множеств  $X_i, i = 1, \dots, n$ , справедлива формула включений и исключений:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n X_i = & \sum_{i=1}^n |X_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |X_i \cap X_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \dots \\ & \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i < \dots < l \leq n} |X_1 \cap \dots \cap X_k|. \end{aligned} \quad (10.10)$$

**Пример 10.14.** Сколько студентов в группе, если известно, сколько студентов изучают различные языки: английский, французский и немецкий, причем может изучаться как один, так и несколько языков одновременно? В клетках табл. 10.3 изучаемый язык помечается крестиком, а в нижней строке указывается число студентов, изучающих помеченные языки.

Подставляя числа в выражение для суммы трех подмножеств, получаем  $N = 25$ .

## 10.6. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Часто решение одной комбинаторной задачи удается свести к решению аналогичных задач меньшей размерности с помощью некоторого соотношения, называемого *рекуррентным* (возвратным). Рекуррентное соотношение

позволяет с помощью функции  $f$  по известным предыдущим значениям переменной  $x_1, \dots, x_{n-1}$  вычислить ее текущее значение  $x_n$ :

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Смысл возвратного соотношения состоит в том, что для вычисления текущего значения переменной следует вернуться к уже вычисленным ее значениям.

Наиболее наглядной иллюстрацией рекуррентных соотношений является треугольник Паскаля. Приведем его для случая  $n_{\max} = m_{\max} = 4$  (табл. 10.4).

На рис. 10.5 он представлен в виде равнобедренного треугольника.

Из рис. 10.5 нетрудно выявить следующую закономерность: в нем каждое число, кроме единиц на боковых сторонах, является суммой двух чисел, стоящих над ним. Над числом 2 стоят две единицы, над тройками — числа 1 и 2, над четверками — 1 и 3, над числом 6 — две тройки. Налицо рекуррентное соотношение  $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ .

Проверим его:

$$C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}.$$

Таблица 10.4

Треугольник Паскаля

$m \backslash n$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

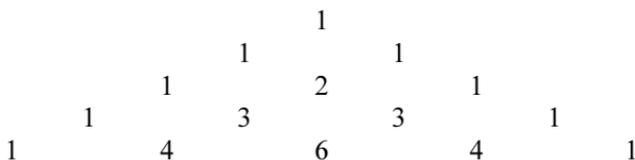


Рис. 10.5  
Треугольник Паскаля

После приведения к общему знаменателю имеем

$$\frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Аналогичное рекуррентное соотношение имеет место для чисел Фибоначчи:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...).

Помимо рекуррентного соотношения, числа в треугольнике Паскаля являются коэффициентами разложения бинома Ньютона  $(x+a)^n$  в ряд:

$$\begin{aligned}(x+a)^0 &= 1; \\(x+a)^1 &= 1 \cdot x + 1 \cdot a; \\(x+a)^2 &= 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot a + 1 \cdot a^2; \\(x+a)^3 &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot a + 3 \cdot x \cdot a^2 + 1 \cdot a^3; \\(x+a)^4 &= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot a + 6 \cdot x^2 \cdot a^2 + 4 \cdot x \cdot a^3 + 1 \cdot a^4.\end{aligned}$$

Выразим параметры биномиальных коэффициентов  $C_n^m$  и степени переменных  $x$  и  $a$  через степень бинома  $n$  на примере разложения  $(x+a)^4$ :

$$\begin{aligned}(x+a)^4 &= C_4^0 x^{4-0} a^0 + C_4^1 x^{4-1} a^1 + \\&+ C_4^2 x^{4-2} a^2 + C_4^3 x^{4-3} a^3 + C_4^4 x^{4-4} a^4.\end{aligned}$$

Представим разложение бинома Ньютона  $(x+a)^n$  в общем виде:

$$(x+a)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m a^{n-m}. \quad (10.11)$$

На использовании бинома Ньютона основано построение *производящей функции*, позволяющей находить последовательность биномиальных коэффициентов  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^m, \dots, C_n^n$  без вычисления факториалов:

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m 1^{n-m} = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m. \quad (10.12)$$

При  $n=1$  получаем  $1+x$  с коэффициентом  $C_1^0 = 1$  перед 1 и  $C_1^1 = 1$  перед  $x$ . При  $n=2$  получаем  $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$  с коэффициентом  $C_2^0 = 1$  перед 1 и  $C_2^1 = 2$  перед  $x$  и  $C_2^2 = 1$  перед  $x^2$  и т. д.

## 10.7. СЛОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

### 10.7.1. РАЗМЕРНОСТЬ ЗАДАЧИ

Сложность решения комбинаторной задачи определяется двумя компонентами — *способом представления* исходных данных и *алгоритмом вычисления* результата.

Способ представления исходных данных определяет объем занимаемой ими памяти и характеризует *размерность задачи* или, иначе, *сложность по памяти*. Объем занимаемой памяти определяется относительно переменных задачи. Каждая переменная соотносится с ячейкой памяти определенного размера.

Рассмотрим проблему представления данных на примере произвольного графа  $G(V, E)$ . Размерность задачи, решаемой на графе, определяется числом его вершин и дуг. Покажем, что размерность задачи зависит от формы его представления (см. раздел 1.7).

1. Размерность  $n \times n$  матрицы, смежности графа определяет  $n^2$  ячеек, требуемых для хранения ее элементов, причем эта величина не зависит от числа дуг графа (числа единиц в матрице). Очевидно, что эта форма представления графа *неэкономична* для случая разреженных матриц. Однако ответ на вопрос, существует ли дуга между вершинами  $u$  и  $v$ , требует всего одного шага анализа.

2. Количество ячеек, занимаемое матрицей инцидентности графа, определяет размерность задачи как  $m \times n$ . Однако ответ на предыдущий вопрос требует  $m$  шагов анализа для худшего случая просмотра всех дуг графа ( $m$  строк матрицы инцидентности).

3. Списочная, или *теоретико-множественная*, форма представления графа требует  $2m$  ячеек без служебной информации (указатель на следующий элемент списка тоже занимает определенное место в памяти). Эта величина определяет объем анализа для определения наличия конкретной дуги. Ускорить поиск конкретной дуги можно за счет предварительного лексико-графического упорядочения списка дуг.

4. Количество ячеек, требуемое при представлении графа *сечением*, определяется совокупностью проекций вершин:  $m + n$ , так как каждая вершина используется один раз при перечислении всех смежных ей вершин ( $n$  записей). Благодаря этому свойству списки инциденций широко используются в программировании.

5. *Список инциденций* требует  $n + m$  ячеек (не считая служебной информации) — по числу  $n$  вершин в левой секции списка. За счет служебной информации (указатели или ссылки) список инциденций, аналогичный по структуре сечению, занимает несколько больше памяти, чем сечение. С другой стороны, динамическая организация списка инциденций делает его более гибкой формой представления. Благодаря этому свойству списки инциденций широко используются в программировании.

Приведенные оценки объема анализа на наличие дуги между вершинами позволяют судить о связи между представлением задачи и сложностью ее решения.

#### 10.7.2.

#### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ

Подобно способам представления исходных данных, задающих размерность задачи, трудоемкость решения последней зависит от выбранного алгоритма. Для сравнения эффективности различных алгоритмов, применяемых для решения задачи, используется такой показатель, как *вычислительная сложность* алгоритма.

Вычислительная сложность алгоритма — это наибольшее число его шагов как функция от размерности задачи. Примером функций является  $f(n)$  при представлении графа матрицей смежностей и  $f(n, m)$  — при представлении его матрицей инцидентности.

Под шагом алгоритма понимается выполнение *любой* машинной команды. Число шагов определяет время решения задачи. Отсюда для оценки алгоритмов применяется также термин «*временная сложность*».

Поскольку получение точной оценки  $f(n)$  числа шагов алгоритма для общего случая может вызвать затруднения, трудоемкость вычислений можно оценивать либо

для конкретной модели, либо использовать асимптотические оценки: верхнюю или нижнюю.

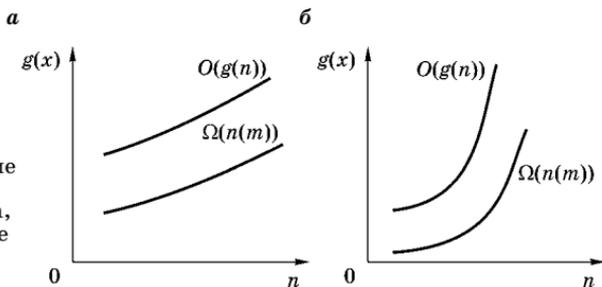
*Асимптотическая сложность* алгоритма определяет *рост* числа его шагов с ростом размерности задачи. В качестве асимптотической оценки функции  $f(n)$  принимается функция  $g(n)$ , которая дает:

1) *верхнюю* оценку  $O(g(n))$ , такую, что  $f(n) \leq c \cdot g(n)$  для  $\forall n \geq N$ ;

2) *нижнюю* оценку  $\Omega(g(n))$  такую, что  $f(n) \geq c \cdot g(n)$  для  $\forall n \geq N$ , где  $c$  и  $N$  — положительные константы.

Алгоритм называется *полиномиальным*, если  $g(n)$  — полиномиальная функция  $n^i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Алгоритмы, для которых не существует такой оценки, называются *неполиномиальными*, или *экспоненциальными*. Рост верхней и нижней полиномиальной и экспоненциальной оценок числа шагов алгоритма как функции от  $n$  показан на рис. 10.6а, б.

В теории алгоритмов классом NP (от *англ.* non-deterministic polynomial) называют множество задач распознавания, решение которых при наличии некоторых дополнительных сведений (сертификата решения) возможно за время, не превосходящее полинома от размера данных, проверить на машине Тьюринга. Эквивалентное определение использует понятие *недетерминированной* машины Тьюринга (у программы которой могут существовать разные строки с одинаковой левой частью). Если машина встретила «развилку», т. е. неоднозначность в программе, то дальше возможны разные варианты вычисления. Предикат  $P(x)$ , который представляет недетерминированная машина Тьюринга, считается равным единице, если существует *хотя бы один вариант вычисления*, возвращающий 1, и нулю, если все



**Рис. 10.6**  
Верхние и нижние оценки числа шагов алгоритма, полиномиальные (а) и экспоненциальные (б)

Таблица 10.5

Зависимость роста времени вычислений от размерности задачи

$O(g(n)) \backslash n$	10	30	50
$n$	$10^{-5}$ с	$3 \cdot 10^{-5}$ с	$5 \cdot 10^{-5}$ с
$n^2$	$10^{-4}$ с	$9 \cdot 10^{-4}$ с	$25 \cdot 10^{-4}$ с
$n^3$	$10^{-3}$ с	$27 \cdot 10^{-3}$ с	$125 \cdot 10^{-3}$ с
$n^5$	$10^{-1}$ с	24,3 с	5,2 мин
$2^n$	$10^{-3}$ с	17,9 мин	35,7 лет
$3^n$	$59 \cdot 10^{-3}$ с	6,5 лет	$2 \cdot 10^8$ столетий

варианты возвращают 0. Если длина вычисления, дающего 1, не превосходит некоторого многочлена от длины  $x$ , то предикат называется принадлежащим классу NP. Если у языка существует распознающий его предикат из класса NP, то язык называется принадлежащим классу NP. Эти задачи связаны с полным перебором.

*Хорошо решаемая задача (P-задача)* характеризуется полиномиальным алгоритмом. Зависимость роста времени вычислений на ЭВМ второго поколения от размерности задачи для алгоритмов с разной сложностью приведена в табл. 10.5.

Приемлемыми являются степени 2, 3 и не слишком большие коэффициенты при старших членах полинома.

Некоторые экспоненциальные алгоритмы при малых  $n$  могут оказаться более эффективными, чем полиномиальные (например,  $2^n$  против  $n^5$  при  $n = 10$ ). Увеличение быстродействия ЭВМ не оказывает решающего влияния на NP-задачи большой размерности.

### 10.7.3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

Поскольку многие прикладные задачи удобно формулировать на языке графов, представляет интерес классификация типовых задач на графах относительно вычислительной сложности алгоритмов, применяемых для их решения. Эти задачи можно разбить на следующие классы:

1) задачи, решаемые алгоритмами со сложностью  $O(n + m)$ ;

2) задачи, решаемые алгоритмами со сложностью  $O(P(n + m))$ , где  $P$  — нелинейный полином;

3) задачи, для которых неизвестны алгоритмы полиномиальной сложности (но в принципе могут быть найдены) — задачи класса NP.

Среди всех задач класса NP можно выделить «самые сложные» — NP-полные задачи. Если удастся решить любую из них за полиномиальное время, то все задачи класса NP также можно будет решить за полиномиальное время.

*К первому классу* относятся следующие задачи:

- нахождение остова графа;
- выделение связной (сильносвязной) компоненты графа;
- нахождение пути в графе;
- нахождение эйлера цикла.

*Второй класс* включает следующие из рассмотренных задач:

- нахождение циклового базиса графа (сложность алгоритма  $O(n \cdot m)$ );
- нахождение минимального пути в графе методом Форда — Беллмана (сложность алгоритма  $O(n^4)$ );
- нахождение минимального остова во взвешенном графе (сложность алгоритма  $O(m^2)$ ).

*К третьему классу* относятся следующие задачи:

- о существовании гамильтонова цикла (сертификат решения — последовательность вершин, образующих гамильтонов цикл);
- по данному графу узнать, есть ли в нем клики (полные подграфы) заданного размера (сертификат решения — номера вершин, образующих клику);
- установление изоморфизма графов и другие задачи оп-ределения существования некоторого заданного условия.

#### 10.7.4.

#### КОНСТРУИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

В общем случае любая неизвестная задача может считаться NP-полной (требует полного перебора вариантов). Сведение ее к  $P$ -задаче может осуществляться с помощью следующих мер:

- 1) сужения класса задачи или сведения его к частному случаю (*массовой задачи к индивидуальной*);
- 2) поиска приближенного решения;
- 3) использования известной закономерности.

Рассмотрим пример последнего способа решения задачи. Если разработчику алгоритма не известна теорема 7.4 об эйлеровом графе, то при поиске эйлерова цикла он вынужден использовать полный перебор вариантов. При этом в случае неэйлерового графа будет получен отрицательный результат. Если же разработчику алгоритма теорема 7.4 известна, то решение задачи нахождения эйлерова цикла разделяется на два этапа: установление принадлежности графа к классу эйлеровых (сложность алгоритма  $O(n)$ ) и в случае положительного ответа — нахождение эйлерова цикла (общая сложность алгоритма  $O(n + m)$ ).

Знание закономерности задачи можно реализовать через способ ее представления (кодирования). Использование способа представления, адекватного решаемой задаче, существенно снижает ее вычислительную сложность. Например, из п. 10.7.1 следует, что объем решения задачи о том, существует ли дуга между вершинами  $u$  и  $v$ , сокращается в  $m$  раз при представлении графа матрицей смежности вместо матрицы инцидентности. Приведем другие примеры.

**Пример 10.15.** Определить делимость натурального числа  $n \in \mathbb{N}$  на 4. При *десятичном* представлении вычислительная сложность алгоритма пропорциональна величине числа, т. е.  $O(n)$ . При *двоичном* представлении числа  $n$  сложность оценивается константой  $O(2)$ , так как достаточно проанализировать на 0 два младших разряда числа.

**Пример 10.16.** Подсчитать число единиц в числе  $n$ . При унитарном кодировании вычислительная сложность определяется как  $O(n)$ , поскольку выполняется суммирование всех единиц. Если же число единиц поместить в ячейку памяти с адресом  $n$ , то сложность равна  $O(1)$ .

Последний пример характерен как предельный случай. Ответ задачи находится в самих исходных данных.

Это означает, что процесс формирования исходных данных в данном примере совпал с процессом решения задачи.

В общем случае можно считать, что уменьшение вычислительной сложности *решения* задачи достигается за счет увеличения вычислительной сложности *подготовки* исходных данных. Но для этого нужно *знать*, к какому виду нужно привести исходные данные.

Таким образом, конструирование полиномиального алгоритма решения задачи подчиняется закону *сохранения вычислительной сложности*, суть которого заключается в перераспределении вычислительной сложности между этапами подготовки и решения задачи. Он имеет два крайних случая. Если подготовка к решению задачи отсутствует (закономерности задачи неизвестны), то оно сводится к полному перебору. Если результат решения задачи содержится в исходных данных, то процесс их подготовки совпадает с процессом решения задачи.

### У п р а ж н е н и я

1. Сколько времени в наихудшем случае потребуется для открытия замка в автоматической камере хранения, если пользователь забыл набранный код, а на набор каждого пробного кода уходит 5 с?
2. Определить количество прямоугольных матриц размерности  $m \times n$  с элементами из  $\{0, 1\}$  с попарно различными строками ( $m \leq 2^n$ ).
3. Перечислить все упорядоченные и неупорядоченные (3, 2)-выборки с повторениями и без повторений из множества цветов светофора.
4. Найти число всех неорграфов с  $n = 6$  без петель и с петлями.
5. Найти число всех оргграфов с  $n = 6$  без петель и с петлями.
6. Найти число неорграфов с  $n = 5$ , содержащих  $i$  ребер,  $i = 0, m$ .
7. Сколько графов входят в множество, если из них 13 графов обладают 1-м свойством, 14 — 2-м, 16 — 3-м, 11 — 1-м и 2-м, 10 — 1-м и 3-м, 4 — 2-м и 3-м, 3 — всеми тремя свойствами.
8. Сколько чисел от 1 до 100 не делится на 2, 3, 5, т. е. не обладает соответствующими свойствами (решето Эратосфена)?
9. Сколькими способами можно разбить граф, содержащий 9 ребер, на части, в которых 1-м свойством обладали бы 4 ребра, 2-м — 3, 3-м — 2, 4-м — одно ребро?

10. Вывести формулу числа  $k$  разбиений множества  $X$ ,  $|X| = m$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i = m$ , если порядок подмножеств в разбиении не является существенным. Так, например, разбиения множества  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  вида  $\{1, 3\}; \{4\}; \{2, 5\}$ ;  $\{4\}; \{2, 5\}$ ;  $\{1, 3\}; \{2, 5\}$ ;  $\{1, 3\}; \{4\}$  считаются одинаковыми.
11. Сколькими способами можно расставить восемь ладьей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга?
12. За сколько шагов упорядочивается перестановка 5, 4, 3, 2, 1?
13. Сколькими способами можно сдать четыре экзамена, чтобы в сумме получить 17 баллов?
14. Определить количество шестизначных чисел, в которых сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр.
15. Найти число ребер, дополняющих граф типа «кольцо» до плоского и до полного.
16. Доказать, что число вершин в дихотомическом дереве с  $n$  ярусами равно  $2^{n+1} - 1$ .

---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**В**ажной особенностью учебного пособия является его направленность не на изучение компьютерной науки, а на ее применение в различных областях знания. Именно этой цели и служит язык дискретной математики. Об этом писали еще четверть века тому назад О. П. Кузнецов и Г. М. Адельсон-Вельский в своей книге «Дискретная математика для инженера»: «...Главной проблемой становится не работа с существующими моделями, а создание новых моделей... В такой ситуации математика нужна уже не как метод расчета, а как метод мышления, как язык, как средство формулирования и организации понятий.» Согласно этой концепции в настоящее учебное пособие включены те разделы дискретной математики, которые в совокупности дают теоретическую основу для конструирования концептуальных моделей сложных систем, и в этом смысле оно является самодостаточным.

Действительно, создание модели любой сложной системы начинается с выделения присущих ей понятий (концептов — отсюда и название модели). Следующим шагом является установление отношений на множестве понятий (конструирование сетей). Эффективным средством представления сетей являются графы. Аппарат теории графов предоставляет средства для структурного анализа сетей (нахождение маршрутов, циклов, разрезов, центров и т. п.). Для формального решения этих задач используются алгебраические методы, которым в книге уделено особое внимание. Для оценки числа вариантов решения

задач на графах в книгу включены основные сведения из комбинаторики, а для оценки трудоемкости их решения — сведения по сложности вычислений.

Для количественной оценки функционирования сетей применяются взвешенные (нагруженные) графы. Решаемые на них задачи относятся к классу оптимизационных задач дискретной математики. В книгу включен ряд типовых задач, решаемых на взвешенных графах.

Другой разновидностью сетей являются семантические (смысловые) сети. Они используются в базах данных и знаний. Здесь широко используются помеченные графы, на которых решаются задачи поиска информации и логического вывода.

Следует отметить, что пособие, рассчитанное на обучение бакалавров, дает лишь начальный уровень знаний по соответствующим разделам дискретной математики. Более углубленное их изучение требует привлечения дополнительной литературы.

Необходимо также иметь в виду, что дискретная математика находится в постоянном развитии: конструируются новые эффективные алгоритмы решения комбинаторных задач, в том числе и на многопроцессорных ЭВМ, осваиваются новые области применения, в частности такие слабоструктурированные, как принятие решений и искусственный интеллект. К одной из интересных теорий относится разработанная Б. А. Куликом алгебра кортежей. Она дает возможность унифицировать представление и анализ баз данных и знаний на основе общего математического аппарата.

Изучение материала, содержащегося в пособии, должно сопровождаться решением задач на практических занятиях и лабораторных работах. Это позволяет автору надеяться на то, что, несмотря на ограниченный объем, учебное пособие будет способствовать успешному освоению интересной и перспективной области знаний.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Авондо-Бодино Дж.* Применение в экономике теории графов. — М.: Прогресс, 1966.
2. *Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф.* Дискретная математика и математическая логика. — М.: Финансы и статистика, 2006.
3. *Акимов О. Е.* Дискретная математика. Логика. Группы. Графы. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
4. *Андерсон, Джеймс А.* Дискретная математика и комбинаторика / Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
5. *Берж К.* Теория графов и ее применения. — М.: Иностранная литература, 1962.
6. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.
7. *Гаврилов Г. П.* Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005.
8. *Гери М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и трудноразрешимые задачи. — М.: Мир, 1982.
9. *Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М.* Дискретная математика: теория множеств, алгоритмов, алгебры логики. — Таганрог: Издательство ТТИ ЮФУ, 2009.
10. *Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М.* Дискретная математика: теория графов. — Таганрог: Издательство ТТИ ЮФУ, 2010.
11. *Горбатов В. А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. — М.: Наука; Физматлит, 2000.
12. *Зыков А. А.* Теория конечных графов. — Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1969.
13. *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Введение в математическую логику. — М.: Изд-во МГУ, 1962.
14. *Кристофидис Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Наука, 1978.
15. *Компьютер и задачи выбора.* — М.: Наука, 1966.
16. *Кук Д., Бейз Д.* Компьютерная математика. — М.: Наука, 1990.
17. *Кулик Б. А., Зуенко А. А., Фридман А. Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010.

18. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
19. *Кузнецов О. П.* Дискретная математика для инженера. — СПб.: Лань, 2009.
20. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. — СПб.: Лань, 2007.
21. *Микони С. В.* Элементы дискретной математики. — СПб.: ПГУПС, 1999.
22. *Нефедов В. Н., Осипова В. А.* Курс дискретной математики. — М.: Издательство МАИ, 1992.
23. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2007.
24. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1968.
25. *Петровский А. Б.* Пространства множеств и мультимножеств. — М.: УРСС, 2003.
26. *Свами Д., Тхуласирами С.* Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984.
27. *Соболева Т. С., Чечкин А. В.* Дискретная математика. — М.: Академия, 2006.
28. *Тишин В. В.* Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
29. *Фор Р., Кофман А., Дени-Папен.* Современная математика. — М.: Мир, 1966.
30. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
31. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Физматлит, 2003.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Введение</b> .....	7
<i>Глава 1</i>	
<b>Множество. Отношение. Функция</b> .....	13
1.1. Множество .....	13
1.2. Способы задания множества .....	13
1.3. Характеристическая функция множества .....	14
1.4. Декартово произведение множеств .....	15
1.5. Бинарное отношение .....	16
1.6. Функциональное отношение .....	17
1.7. Формы представления бинарного отношения .....	19
<i>Глава 2</i>	
<b>Булева алгебра и алгебра множеств</b> .....	23
2.1. Алгебраическая система .....	23
2.2. Алгебраические операции .....	25
2.3. Алгебры с одной алгебраической операцией. Группы .....	28
2.4. Алгебры с двумя алгебраическими операциями. Кольца и поля .....	29
2.5. Алгебры с тремя алгебраическими операциями. Булевы алгебры .....	32
2.6. Булевы функции .....	34
2.6.1. Табличное задание булевых функций .....	34
2.6.2. Аналитическое задание булевых функций .....	35
2.7. Полные системы булевых функций .....	37
2.8. Операции над множествами .....	40
<i>Глава 3</i>	
<b>Алгебра отношений</b> .....	42
3.1. Одноместные операции над бинарными отношениями .....	43
3.1.1. Дополнительное отношение .....	43
3.1.2. Обратное отношение .....	43
3.1.3. Двойственное отношение .....	44
3.2. Элементарные свойства бинарных отношений .....	45

3.2.1. Свойство, определяемое на одноименных элементах . . . . .	45
3.2.2. Свойство, определяемое на парах элементов . . . . .	45
3.2.3. Свойство, определяемое на тройках элементов . . . . .	46
3.2.4. Неэлементарные свойства бинарных отношений . . . . .	48
3.3. Операции над бинарными отношениями . . . . .	51
3.3.1. Объединение . . . . .	51
3.3.2. Пересечение . . . . .	52
3.3.3. Разность . . . . .	52
3.3.4. Симметрическая разность . . . . .	52
3.3.5. Сужение отношения . . . . .	53
3.3.6. Композиция отношений . . . . .	54
3.3.7. $s$ -я степень отношения $R$ . . . . .	55
3.3.8. Свойства операций над бинарными отношениями . . . . .	55

#### Глава 4

<b>Основные понятия теории графов . . . . .</b>	<b>57</b>
4.1. Определение и способы представления графа . . . . .	57
4.2. Свойства элементов графов . . . . .	58
4.3. Матрицы смежности и инцидентности . . . . .	60
4.4. Виды графов . . . . .	62
4.5. Полнота бинарного отношения . . . . .	65
4.6. Части, суграфы и подграфы . . . . .	66
4.7. Изоморфизм графов . . . . .	67
4.8. Автоморфизм графов . . . . .	68
4.9. Метод решения задачи изоморфизма двух графов . . . . .	69

#### Глава 5

<b>Свойства, определяемые на отношениях смежности и инцидентности . . . . .</b>	<b>73</b>
5.1. Алгебраический способ нахождения множеств на отношениях смежности и инцидентности . . . . .	73
5.2. Внутренняя устойчивость . . . . .	75
5.2.1. Внутренняя устойчивость вершин . . . . .	75
5.2.2. Внутренняя устойчивость ребер . . . . .	76
5.3. Раскраска графа . . . . .	77
5.4. Нахождение внутренне устойчивых множеств алгебраическим способом . . . . .	78
5.5. Внешняя устойчивость . . . . .	80
5.6. Нахождение внешне устойчивых множеств алгебраическим способом . . . . .	81
5.7. Ядра графа . . . . .	83
5.8. Покрытия в неорграфах . . . . .	84
5.9. Нахождение вершинного и реберного покрытий алгебраическим способом . . . . .	86
5.10. Нахождение паросочетания . . . . .	88
5.11. Инварианты неорграфов . . . . .	89

*Глава 6*

<b>Достижимость и связность</b> . . . . .	93
6.1. Маршруты, цепи и циклы . . . . .	93
6.2. Достижимость . . . . .	94
6.3. Нахождение множеств $s$ -достижимых вершин . . . . .	95
6.4. Вычисление количеств маршрутов . . . . .	97
6.5. Нахождение вариантов маршрутов . . . . .	99
6.6. Связность и связные компоненты неорграфа . . . . .	100
6.7. Сильная связность орграфа . . . . .	103
6.8. Базы орграфа . . . . .	104
6.9. Уровни орграфа . . . . .	106

*Глава 7*

<b>Циклы и разрезы</b> . . . . .	110
7.1. Вектор-циклы и вектор-разрезы связного графа . . . . .	110
7.2. Базисные циклы и разрезы . . . . .	111
7.3. Остов и кодереве связного графа . . . . .	112
7.4. Нахождение базисных циклов и разрезов графа . . . . .	115
7.5. Эйлеровы и гамильтоновы циклы и цепи . . . . .	117
7.6. Матричный метод поиска циклов . . . . .	118
7.7. Методы поиска в глубину и в ширину . . . . .	120

*Глава 8*

<b>Расстояние и центры графа</b> . . . . .	125
8.1. Расстояние в графе . . . . .	125
8.1.1. Расстояния в невзвешенном графе . . . . .	125
8.1.2. Расстояния во взвешенном графе . . . . .	127
8.2. Алгоритм динамического программирования Дейкстра . . . . .	128
8.3. Диаметр, радиус и центры графа . . . . .	130
8.4. Центры деревьев . . . . .	132

*Глава 9*

<b>Задачи на взвешенных графах</b> . . . . .	135
9.1. Задача о максимальном потоке . . . . .	135
9.1.1. Основные понятия . . . . .	135
9.1.2. Алгоритм нахождения полного потока . . . . .	137
9.1.3. Условия нахождения максимального потока . . . . .	138
9.1.4. Алгоритм Форда — Фолкерсона . . . . .	139
9.2. Нахождение кратчайшей сети . . . . .	141
9.2.1. Алгоритм Крускала . . . . .	142
9.2.2. Алгоритм Прима . . . . .	143
9.3. Задача коммивояжера . . . . .	145
9.4. Нахождение минимального паросочетания . . . . .	149
9.5. Задача китайского почтальона . . . . .	151

*Глава 10*

<b>Элементы комбинаторики</b> . . . . .	155
10.1. Задачи комбинаторики . . . . .	155
10.2. Правила суммы и произведения . . . . .	156
10.3. Размещения . . . . .	157
10.4. Перестановки . . . . .	159

10.5. Множества и подмножества . . . . .	162
10.5.1. Множество всех подмножеств . . . . .	162
10.5.2. Выборка элементов множества . . . . .	163
10.5.3. Разбиение множества на блоки . . . . .	165
10.5.4. Принцип включения и исключения . . . . .	167
10.6. Рекуррентные соотношения и производящие функции . . . . .	168
10.7. Сложность решения комбинаторных задач на графах . . . . .	171
10.7.1. Размерность задачи . . . . .	171
10.7.2. Вычислительная сложность . . . . .	172
10.7.3. Вычислительная сложность задач на графах . . . . .	174
10.7.4. Конструирование алгоритма полиномиальной сложности . . . . .	175
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>179</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>181</b>

*Станислав Витальевич МИКОНИ*

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ БАКАЛАВРА:  
МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ФУНКЦИИ, ГРАФЫ**

*Учебное пособие*

Зав. редакцией физико-математической  
литературы *О. Ю. Краснокутская*  
Корректоры *В. О. Логунова, Т. А. Кошелева*  
Подготовка иллюстраций *Е. М. Николаева*  
Верстка *М. И. Хетерели*  
Выпускающие *О. В. Шилкова, О. И. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 08.10.12.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 10,08. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.iprps.ru