**SHAVKAT ALIMOV**
**RAVSHAN ASHUROV**

# MATEMATIK ANALIZ

2-qism

*Darslik O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta-maxsus ta'lim vazirligining 2018-yil 25-avgust 744-sonli buyrug'iga asosan nashrga tavsiya etilgan (Ro'yxatga olish raqami 744-226)*

Toshkent
"MUMTOZ SO'Z"
2018

UO‘K 51(075)

KBK 71.2

A 50

Matematik analiz / Sh.O.Alimov, R.R.Ashurov; mas’ul muharrir Y.E.Fayziyev. – Toshkent: MUMTOZ SO‘Z, 2018.
Jild 2. 448 bet.

*Ushbu "Matematik analiz" kitobi universitetlarning "Matematika", "Amaliy matematika va informatika", "Informatika va axborot texnologiyalari" yo‘nalishlari bo‘yicha ta’lim oluvchi hamda oliy matematika chuqur o‘rganiladigan texnika oliy o‘quv yurtlarida ta’lim oluvchi talabalar uchun mo‘ljallangan.*

**Taqrizchilar:** *f.-m.f.d., professor Xolmuhammedov O. R.,*

*f.-m.f.d., professor Ikromov I.A.*

**Mas’ul muharrir:** *f.-m.f.n., dotsent Fayziyev Y. E.*

ISBN 978-9943-5562-7-0

# M U N D A R I J A

Qisqacha sharh ........ 5

So‘z boshi ........ 8

11-bob. **Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar** ........ 9

11.1-§. $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosi ........ 9
11.2-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi ........ 29
11.3-§. Vektor qiymatli ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar ........ 39
11.4-§. Misollar ........ 50

12-bob. **Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni differensiallash** ........ 53

12.1-§. Xususiy hosilalar ........ 53
12.2-§. Teylor formulasi ........ 72
12.3-§. Oshkormas funksiyalar ........ 88
12.4-§. Funksiyalar sistemasining bog‘liq va bog‘liqmasligi 107
12.5-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi ........ 117
12.6-§. Misollar ........ 133

13-bob. **Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyani integrallash** ........ 137

13.1-§. Kvadratlanuvchi shakllar ........ 137
13.2-§. Ikki karrali Riman integralining ta’rifi ........ 148
13.3-§. Darbu nazariyasi ........ 156
13.4-§. Ikki karrali integral xossalari ........ 170
13.5-§. Ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish 187
13.6-§. Ikki karrali integralda o‘zgaruvchini almashtirish 194
13.7-§. Uch karrali integrallar ........ 206
13.8-§. $n$ o‘zgaruvchili funksiyalarni integrallash ........ 227
13.9-§. Misollar ........ 240

14-bob. **Karrali xosmas integrallar** ........ 244

14.1-§. $\mathbb{R}^n$ fazosi bo‘yicha integrallash ........ 244
14.2-§. Ixtiyoriy soha bo‘yicha xosmas integrallar ........ 264
14.3-§. Karrali xosmas integralning bosh qiymati ........ 274
14.4-§. Misollar ........ 284

15-bob. **Egri chiziqli integrallar** ..... 289
15.1-§. Birinchi tur egri chiziqli integrallar ..... 289
15.2-§. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar ..... 297
15.3-§. Grin formulasi ..... 324
15.4-§. Egri chiziqli integralning integrallash yo‘liga bog‘liqmaslik sharti ..... 334
15.5-§. Misollar ..... 347
16-bob. **Sirt bo‘yicha integrallar** ..... 351
16.1-§. Sirt yuzi ..... 351
16.2-§. Sirtning birinchi kvadratik formasi ..... 375
16.3-§*. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi ..... 384
16.4-§. Birinchi tur sirt integrallari ..... 409
16.5-§. Ikkinchi tur sirt integrallari ..... 414
16.6-§. Stoks formulasi ..... 425
16.7-§. Gauss-Ostrogradskiy formulasi ..... 433
16.8-§. Misollar ..... 437

## Qisqacha sharh

Ushbu darslik mualliflarning Matematik Tahlil deb nomlangan 2 qismlik o‘quv qo‘llanmalarini qayta ishlash natijasida yozilgan 3 qismli kitobning ikkinchisidir. Ushbu qism o‘z ichiga ko‘p haqiqiy o‘zgaruvchili funksiya differensial va integral hisobining klassik kursiga kiruvchi bo‘limlarini olgan. Kitobda dastlab ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar xossalari o‘rganiladi (11-bob). So‘ngra bunday funksiyalarni differensiallash va integrallash nazariyalari (12–13-boblar) hamda ko‘p o‘zgaruvchili holda xosmas integrallarning yaqinlashish shartlari tadqiq qilinadi (14-bob). Bundan so‘ng egri chiziqli (15-bob) va sirt (16-bob) integrallarining xossalari o‘rganiladi.

Mazkur kitobda, xuddi birinchi qismdagi singari, barcha matematik xulosalar qisqa va sodda isbotlar asosida bayon qilingan va ko‘p sonli misollar bilan oydinlashtirilgan. Har bir bobning oxirida mavzularni chuqur o‘zlashtirishga yo‘naltirilgan masalalar keltirilgan.

Ushbu darslik Mirzo Ulug‘bek nomli O‘zbekiston Milliy universiteti va M. V. Lomonosov nomli Moskva davlat universitetining Toshkentdagi filiali talabalariga mualliflar tomonidan o‘qilgan ma’ruzalar asosida tayyorlangan. Ushbu darslik universitetlarning "Matematika ", "Amaliy matematika va Informatika", "Mexanika", "Informatika va axborot texnologiyalari" yo‘nalishlari bo‘yicha ta’lim oluvchi hamda oliy matematika chuqur o‘rganiladigan texnika oliy o‘quv yurtlarida ta’lim oluvchi talabalar uchun mo‘ljallangan.

## Аннотация

Данная книга является второй из трех книг написанных в результате переработки двухтомного учебного пособия авторов по математическому анализу. Она включает в себя разделы, входящие в классический курс дифференциального и интегрального исчисления функций многих действительных переменных. Вначале изучаются свойства функций многих переменных (Глава 11). Затем излагаются теории дифференцирования и интегрирования таких функций (Главы 12 и 13), а также вопросы сходимости несобствнннных интегралов в многомерном случае (Глава 14). Далее изучаются свойства криволинейных (Глава 15) и поверхностных интегралов (Глава 16).

Так же как и в первом томе, все математические утверждения снабжены краткими и простыми доказательствами и проиллюстрированы большим количеством примеров. В конце каждой главы приводится набор задач, предназначенных для лучшего усвоения материала.

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций, читавшихся авторами студентам Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Ташкентского филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Предназначено для студентов университетов по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информатика и информационные технологии» и «Механика» а также для студентов технических вузов с углубленным изучением высшей матаматики.

## Annotation

This book is the second volume of the second edition of the two volume books of these authors named Mathematical Analysis. This book includes sections belonging to a classical course of differential and integral calculus of functions of several real variables. First, we study properties of functions of several variables (Chapter 11). Then we outline the theory of differentiation and integration of functions (Chapters 12 and 13), as well as issues of convergence of improper integrals in the multidimensional case (Chapter 14). Next, we study properties of curvilinear integrals (Chapter 15) and surface integrals (Chapter 16).

As in the first volume, all mathematical statements are equipped with short and simple proofs and are illustrated by many examples. At the end of each chapter there is a set of tasks designed to enable better absorption of the material.

This manual is based on lectures given by the authors to students of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek and the Tashkent branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov. It is designed for students of universities in areas of "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Information technology"and "Mechanics"as well as for advanced students of engineering with indepth study of higher mathematics.

# So'z boshi

Ushbu kitob mualliflarning Matematik Tahlil deb nomlangan 2 qismlik (1-qism 2012 yil va 2-qism 2017 yil chop etilgan) o'quv qo'llanmalarini qayta ishlash natijasida yozilgan 3 ta kitobdan ikkinchisidir. Ushbu qismda ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning xossalari, ularni differensiallash va integrallash nazariyalari, karrali xosmas integrallar, egri chiziqli va sirt integrallari o'rganiladi.

Shuni alohida qayd etish zarurki, o'zgaruvchilarning biri bo'yicha hosila uchun bu so'zning original kelib chiqishi lotincha *"partialis-qismiy"* ekanini hisobga olgan holda, "qismiy hosila" degan atamani ishlatish maqsadga muvofiq bo'lar edi. Lekin bu hosila uchun o'zbek tilidagi adabiyotlarda an'ana bo'yicha "xususiy hosila" atamasi qabul qilingani uchun, biz ham shu atamani ishlatdik.

Xuddi birinchi kitobdagidek, ayrim paragraflar, bandlar hamda alohida tasdiqlarning tartib raqamlariga yulduzcha qo'yilgan. Buning ma'nosi shundan iboratki, bu paragraf va bandlar, asosiy matndan unchalik qiyin bo'lmasada, matematik tahlil bo'yicha odatdagi dasturlarga kirmagan, lekin matematik tahlilni hamda uning tadbiqlarini kelgusidagi o'rganishlarda foydali bo'lgan materiallarga egadirlar.

Darslikda qulaylik uchun isbotlar yakuni qora kvadrat ■ orqali belgilangan.

Kitob Mirzo Ulug'bek nomli O'zbekiston Milliy universiteti va Lomonosov nomli Moskva davlat universitetining Toshkentdagi filiali talabalariga mualliflar tomonidan o'qilgan ma'ruzalar asosida yozilgan.

Ushbu "Matematik analiz" deb nomlangan 3 ta kitob birgalikda universitetlarning "Matematika", "Amaliy matematika va informatika", "Mexanika", "Informatika va axborot texnologiyalari" va "Axborat tizimlarini matematik va dasturiy ta'minoti" yo'nalishlari bo'yicha hamda oliy matematika chuqur o'rganiladigan texnika oliy o'quv yurtlarida ta'lim oluvchi talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, u differensial va integral hisobi kursini to'la qamrab oladi.

# 11-bob. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar

## 11.1-§. $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosi

**1. $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosi**. Ushbu paragrafda biz $n$ ni birdan katta tayinlangan natural son deb, $\mathbf{x}$ orqali quyidagi

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{11.1.1}$$

tartiblangan $n$ ta son jamlamasini belgilaymiz. Barcha bunday jamlamalar to‘plami $\mathbb{R}^n$ fazoni tashkil qiladi. (11.1.1) jamlamalarning o‘zini esa, $\mathbb{R}^n$ fazoning nuqtalari yoki elementlari deb ataymiz. Har qanday (11.1.1) ko‘rinishdagi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ element uchun $x_j$ haqiqiy sonlar bu elementning *komponentalari* yoki uning *koordinatalari* deyiladi.

$\mathbb{R}^n$ fazoda har qanday ikki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ va $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ elementning yig‘indisi tabiiy ravishda mos koordinatalarning yig‘indisi sifatida aniqlanadi:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...,\ x_n + y_n). \tag{11.1.2}$$

Xuddi shu singari istalgan $\mathbf{x}$ elementning $\lambda$ haqiqiy songa ko‘paytmasi bu sonni har bir koordinataga ko‘paytirish orqali kiritiladi:

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n). \tag{11.1.3}$$

Kiritilgan amallar $\mathbb{R}^n$ ni *vektor fazoga* (*chiziqli fazo* deb ham ataladi) aylantiradi. Vektor fazo elementlari *vektorlar* deb ham ataladi. $\mathbb{R}^n$ fazosida nol element sifatida

$$\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$$

vektor olinadi. Agarda vektor fazosida skalyar ko‘paytma aniqlangan bo‘lsa, bunday fazo *Evklid fazosi* deyiladi. Biz istalgan ikki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ element uchun *skalyar ko‘paytmani*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;=\; \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \;=\; \mathbf{x}\mathbf{y} \;=\; x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \tag{11.1.4}$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

Bunday aniqlangan skalyar ko‘paytma, ravshanki, quyidagi to‘rtta xossaga ega:

(i) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;=\; (\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
(ii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) \;=\; (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$,
(iii) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;=\; \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
(iv) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ va, agar $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \;=\; 0$ bo‘lsa, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bo‘ladi.

Berilgan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ element uzunligi $|\mathbf{x}|$ simvoli orqali belgilanib, u kvadrati $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ skalyar ko‘paytmaga teng manfiy bo‘lmagan son sifatida aniqlanadi, ya’ni:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \;=\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}. \tag{11.1.5}$$

Bunda, ravshanki, istalgan $j$ nomer uchun $\mathbf{x}$ vektorning $x_j$ komponentasi shu vektor uzunligi bilan baholanadi:

$$|x_j| \;\leq\; |\mathbf{x}|.$$

Bundan tashqari, vektor uzunligi o‘zining eng katta komponentasining absolyut qiymati bilan yuqoridan baholanadi. Haqiqatan,

$$|\mathbf{x}|^2 \;=\; x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \;\leq\; n \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|^2$$

va shuning uchun,

$$|\mathbf{x}| \;\leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Bevosita yuqoridagi (11.1.5) ta’rif va skalyar ko‘paytmaning xossalariga ko‘ra

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \;=\; |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2\,. \tag{11.1.6}$$

Agar

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; = \; 0$$

bo'lsa, $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ elementlar *ortogonal* (yoki perpendikulyar) deyiladi.

Xususan, nol istalgan elementga ortogonaldir. Bundan tashqari, agar $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ elementlar ortogonal bo'lsa, u holda (11.1.6) ayniyatga ko'ra

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \; = \; |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 \, .$$

Bu tenglik bizga ma'lum bo'lgan Pifagor teoremasining vektor ko'rinishidir.

**11.1.1 - jumla.** *Ixtiyoriy ikki* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *va* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *element uchun, Koshi tengsizligi deb ataluvchi,*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \; \le \; |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \tag{11.1.7}$$

*tengsizlik o'rinli.*

**Isbot.** Albatta, agar $\mathbf{x}$ yoki $\mathbf{y}$ elementlardan aqalli bittasi nolga teng bo'lsa, (11.1.7) tengsizlik tenglikka aylanadi va uning bajarilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi.

Shuning uchun $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ va $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ deymiz. U holda, skalyar ko'paytma xossalaridan va (11.1.6) ayniyatdan foydalanib,

$$\left| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \pm \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right|^2 \; = \; 1 \; \pm \; 2\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} + 1 \; \ge \; 0$$

tengsizlikni olamiz. Bundan esa, quyidagi

$$\mp \, \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \; \le \; 1$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,

$$-1 \; \le \; \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \; \le 1.$$

Ravshanki, bu tengsizlik (11.1.7) ning aynan o'zidir.■

**11.1.2 - jumla.** *Ixtiyoriy ikki* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *va* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *element uchun, uchburchak tengsizligi deb ataluvchi,*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \ \leq \ |\mathbf{x}| \ + \ |\mathbf{y}| \tag{11.1.8}$$

*tengsizlik o'rinli.*

**Isbot.** (11.1.6) ayniyat va (11.1.7) Koshi tengsizligiga ko'ra,

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = \ |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2 \ \leq$$

$$\leq \ |\mathbf{x}|^2 + 2 \cdot |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \ = \ (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 .$$

Bu tengsizlikning har ikki tomonidan kvadrat ildiz olsak, talab qilingan (11.1.8) tengsizlikka kelamiz.■

Yuqoridagi (11.1.8) munosabatning uchburchak tengsizligi deb atalishiga asos quyidagidan iborat. Ikki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *va* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *nuqtalar orasidagi masofa* deb $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ manfiy bo'lmagan songa aytamiz. Agar $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ va $\mathbf{z}$ nuqtalar tomonlari $(\mathbf{x} - \mathbf{z})$, $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ va $(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ bo'lgan uchburchakning uchlari bo'lsa, u holda (11.1.8) dan

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \ \leq \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ + \ |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \tag{11.1.9}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik esa, uchburchakning istalgan tomoni uzunligi uning qolgan ikki tomoni uzunliklari yig'indisidan katta emasligini anglatadi.

**2.** $\mathbb{R}^n$ fazosida istalgan $\{\mathbf{x}_k\}$ nuqtalar ketma-ketligini qaraylik. Yuqorida kiritilgan ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi bu ketma-ketlik uchun limit tushunchasini kiritish imkonini beradi.

**Ta'rif.** *Biror* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *nuqta va* $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *vektorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $N = N(\varepsilon)$ *nomer topilsaki,* $k \geq N$ *bo'lganda*

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \ < \ \varepsilon \tag{11.1.10}$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda* $\mathbf{a}$ *nuqta* $\{\mathbf{x}_k\}$ *ketma-ketlikning* ***limiti*** *deyiladi.*

Bunda $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlik $\mathbf{a}$ nuqtaga yaqinlashadi deyiladi va

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$$

yoki

$$k \to \infty \quad \text{da} \quad \mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$$

kabi yoziladi.

**11.1.1 - teorema.** *Berilgan*

$$\mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk}), \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{11.1.11}$$

*elementlar ketma-ketligining*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

*elementga yaqinlashishi uchun istalgan $j = 1, 2, ..., n$ nomerlarda $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklarning $a_j$ elementlarga yaqinlashishi, ya'ni*

$$\lim_{k\to\infty} x_{jk} = a_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

*tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

**Isbot** yuqorida qayd etilgan

$$|x_{jk} - a_j| \le |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \le \sqrt{n} \max_{1\le j\le n} |x_{jk} - a_j| \tag{11.1.12}$$

qo'shaloq tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi.

Keltirilgan teorema sonli ketma-ketliklar nazariyasidagi barcha asosiy natijalarni $\mathbb{R}^n$ elementlaridan tuzilgan ketma-ketliklarga o'tkazish imkonini beradi. Bunda ta'riflar, tasdiqlar va ularning isboti sonli ketma-ketliklar holidan deyarli farq qilmaydi.

**Ta'rif.** *Agar $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ elementlar ketma-ketligi uchun har qanday $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $k \ge N$ va $m \ge N$ bo'lganda*

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| < \varepsilon \tag{11.1.13}$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlik **Koshi ketma-ketligi** deyiladi.* Koshi ketma-ketligi *fundamental* ketma-ketlik deb ham ataladi. Ravshanki,

$$|x_{jk} - x_{jm}| \ \le \ |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| \ \le \ \sqrt{n} \max_{1\le j\le n} |x_{jk} - x_{jm}| \qquad (11.1.14)$$

qo'sh tengsizlikdan (11.1.11) ko'rinishdagi $\mathbf{x}_k$ elementlar ketma-ketligi fundamental bo'lishi uchun istalgan $j = 1, 2, ..., n$ larda $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ ketma-ketliklarning fundamental bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

**11.1.2 - teorema (Koshi kriteriysi).** *$\mathbb{R}^n$ fazo elementlaridan tuzilgan ketma-ketlikning yaqinlashishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va yetarli.*

**Isbot** 11.1.1 - teorema va sonli ketma-ketliklar uchun Koshi kriteriysidan (2.5.1 - teorema) kelib chiqadi. Haqiqatan, $\mathbb{R}^n$ fazosining $\mathbf{x}_k$ elementlaridan tuzilgan ketma-ketlikning yaqinlashishi uchun, 11.1.1 - teoremaga ko'ra, bu elementlar komponentlaridan iborat $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklarning yaqinlashishi zarur va yetarli. Buning uchun esa, 2.5.1 - teoremaga ko'ra, bu komponentalardan iborat sonli ketma-ketliklarning fundamental bo'lishi zarur va yetarli, bundan chiqdi, $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlikning fundamental bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlik uchun shunday $M > 0$ soni topilib, barcha $k$ nomerlarda

$$|\mathbf{x}_k| \le \ M \qquad (11.1.15)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda bu ketma-ketlik *chegaralangan* deyiladi.

Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralangan ekanini ko'rsatish qiyin emas. Albatta, teskari tasdiq o'rinli emas, lekin, xuddi sonli ketma-ketliklar holidagi singari, har qanday chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikka ega. Bunda $\mathbb{R}^n$ elementlarining qismiy ketma-ketligi xuddi sonli qismiy ketma-ketliklar singari aniqlanadi.

**11.1.3 - teorema (Bolsano-Veyershtrass).** *$\mathbb{R}^n$ fazosining har qanday chegaralangan ketma-ketligidan yaqinlashuvchi qismiy* *ketma-ketlik ajratish mumkin.*

**Isbot**. Aytaylik, $\{\mathbf{x}_k\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘lsin. Ravshanki, har bir $j = 1, 2, ..., n$ uchun $\{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ komponentalar ketma-ketligi ham chegaralangan bo‘ladi. Xususan, birinchi komponentalardan tuzilgan $\{x_{1k}\}$ sonli ketma-ketlik chegaralangan, va shuning uchun, klassik Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra, biror $a_1$ soniga yaqinlashuvchi $\{x_{1p_k}\}$ ketma-ketlik mavjud.

Endi ikkinchi komponentalarning chegaralangan qismiy $\{x_{2p_k}\}$ ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlikdan, xuddi yuqoridagi singari, biror $a_2$ soniga yaqinlashuvchi qismiy $\{x_{2q_k}\}$ ketma-ketlikni ajratishimiz mumkin. Bu jarayonni davom ettirib, biz oxirgi $n$ - komponentalarning biror $a_n$ soniga yaqinlashuvchi $\{x_{nm_k}\}$ qismiy ketma-ketligini olamiz. Shubhasiz, $m_k$ nomerli barcha qismiy ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$k \to \infty \quad \text{da} \quad x_{jm_k} \;\to\; a_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

11.1.1 - teoremaga asosan, bundan

$$\mathbf{x}_{m_k} \;\to\; \mathbf{a} \;=\; (a_1, a_2, ..., a_n)$$

ekani, ya’ni $\{\mathbf{x}_{m_k}\}$ qismiy ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekani kelib chiqadi.■

Shuni aytish kerakki, Koshi kriteriyasi ham, Bolsano-Veyershtrass teoremasi ham haqiqiy sonlar to‘plamining to‘lalik xossasiga asoslanadi.

**3. Ochiq va yopiq to‘plamlar.** Ushbu bandda biz $E$ orqali $\mathbb{R}^n$ fazosining biror to‘plamini belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosining ixtiyoriy $\mathbf{a}$ nuqtasi va istalgan musbat $r > 0$ son berilgan bo‘lsin. Radiusi $r$ va markazi $\mathbf{a}$ nuqtada bo‘lgan ($n$ o‘lchovli) *ochiq shar* deb

$$B(\mathbf{a}, r) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\} \tag{11.1.16}$$

to‘plamga aytamiz.

Radiusi $r$ va markazi $\mathbf{a}$ nuqtada bo‘lgan ($n$ o‘lchovli) *yopiq shar* deb

$$\overline{B(\mathbf{a}, r)} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \le r\} \tag{11.1.17}$$

to‘plamga aytamiz.

Agar $\varepsilon > 0$ bo‘lsa, berilgan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning *$\varepsilon$-atrofi* deb markazi $\mathbf{a}$ nuqtada va radiusi $\varepsilon$ bo‘lgan ochiq sharga aytamiz.

**Ta'rif.** *Agar $\mathbf{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$ nuqta o‘zining biror $\varepsilon$-atrofi bilan birga $E$ to‘plamga tegishli bo‘lsa, bu nuqta $E$ to‘plamning* ***ichki*** *nuqtasi deyiladi.*

Ochiq $B(\mathbf{a}, r)$ sharning barcha nuqtalari ichki nuqta bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. Haqiqatan, faraz qilaylik, $\mathbf{b} \in B(\mathbf{a}, r)$, ya'ni $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| < r$ bo‘lsin. Musbat $\varepsilon$ sonini

$$0 \; < \; \varepsilon \; < \; r - |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olaylik.

U holda radiusi $\varepsilon$ va markazi $\mathbf{b}$ nuqtada bo‘lgan $B(\mathbf{b}, \varepsilon)$ shar $B(\mathbf{a}, r)$ sharning ichida yotadi. Chunki, agar $\mathbf{x} \in B(\mathbf{b}, \varepsilon)$ bo‘lsa,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{b}| + |\mathbf{b} - \mathbf{a}| < \varepsilon + |\mathbf{b} - \mathbf{a}| < r$$

bo‘ladi, ya'ni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$.

**Ta'rif.** *Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plam berilgan bo‘lib, markazi $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada bo‘lgan har qanday shar bu to‘plamga ham tegishli bo‘lgan, ham tegishli bo‘lmagan nuqtalarni o‘z ichiga olsa, u holda $\mathbf{a}$ nuqta $E$ to‘plamning* ***chegaraviy*** *nuqtasi deyiladi.*

Masalan,

$$S(\mathbf{a}, r) \; = \; \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \; : \; |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = r\} \qquad (11.1.18)$$

tenglik bilan aniqlangan, radiusi $r$ va markazi $\mathbf{a}$ bo‘lgan $S(\mathbf{a}, r)$ sfera $B(\mathbf{a}, r)$ sharning barcha chegaraviy nuqtalari to‘plami bo‘ladi. Bayonimizni murakkablashtirmaslik maqsadida, biz bu tasdiqni sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan holda, ya'ni $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ bo‘lgan holda isbotlaymiz.

Aytaylik, $\mathbf{b} \in S(\mathbf{0}, r)$, ya'ni $|\mathbf{b}| = r$ bo‘lsin. Ravshanki, $0 < \delta < 1$ intervaldan olingan istalgan $\delta$ uchun

$$\mathbf{x}_\delta \; = \; (1 - \delta)\mathbf{b}$$

nuqta $B(\mathbf{0}, r)$ sharga tegishli bo'lib,

$$\mathbf{y}_\delta = (1+\delta)\mathbf{b}$$

nuqta esa, bu shardan tashqarida yotadi. Shu bilan birga,

$$|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{b}| = |\mathbf{y}_\delta - \mathbf{b}| = r\delta.$$

Demak, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $\delta$ ni $r\delta < \varepsilon$ shartdan tanlab olsak, har ikki $\mathbf{x}_\delta$ va $\mathbf{y}_\delta$ nuqta $\mathbf{b}$ ning $\varepsilon$-atrofida yotadi. Bundan chiqdi, $\mathbf{b}$ nuqta $B(\mathbf{0}, r)$ shar uchun chegaraviy nuqta bo'lar ekan.

Berilgan $E$ to'plamning barcha chegaraviy nuqtalari to'plami $\partial E$ orqali belgilanadi va $E$ ning *chegarasi* deb ataladi. Demak, $\partial B(\mathbf{a}, r) = S(\mathbf{a}, r)$.

Shubhasiz, istalgan $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning har bir nuqtasi uning ichki yoki chegaraviy nuqtasi bo'ladi.

E'tibor bering, $E$ to'plamning chegaraviy nuqtalari $E$ ga tegishli bo'lishi ham, va aksincha, tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, agar $E$ ochiq shar bo'lsa, ya'ni $E = B(\mathbf{a}, r)$ bo'lsa, u holda $S(\mathbf{a}, r)$ sferaning barcha nuqtalari $E$ to'plamning chegaraviy nuqtalari bo'lib, ular $E$ to'plamga tegishli bo'lmaydi. Ammo, agar $E$ yopiq shar bo'lsa, ya'ni $E = \overline{B(\mathbf{a}, r)}$ bo'lsa, bunda ham $S(\mathbf{a}, r)$ sferaning barcha nuqtalari $E$ to'plamning chegaraviy nuqtalari bo'ladi, lekin endi ularning barchasi $E$ ga tegishli bo'ladi.

**Ta'rif.** *Agar berilgan to'plamga uning* ***birorta ham*** *chegaraviy nuqtasi tegishli bo'lmasa, bunday to'plam* ***ochiq*** *to'plam deyiladi.*

**Ta'rif.** *Agar berilgan to'plamga uning* ***barcha*** *chegaraviy nuqtalari tegishli bo'lsa, bunday to'plam* ***yopiq*** *to'plam deyiladi.*

Masalan, har qanday to'plam chegarasi yopiq to'plam bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Agar to'plam umuman chegaraviy nuqtaga ega bo'lmasa, bunday to'plam bir vaqtning o'zida ham ochiq va ham yopiq bo'ladi. $\mathbb{R}^n$ fazosida bunday to'plamlar faqat ikkita: $\mathbb{R}^n$ fazosining o'zi va $\emptyset$ simvol bilan belgilanuvchi bo'sh to'plam, ya'ni birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam.

Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, har qanday ochiq shar ochiq to'plam bo'ladi va har qanday yopiq shar yopiq to'plam bo'ladi.

Albatta, na ochiq va na yopiq bo‘lgan to‘plamlar ham mavjud. Bu shunday to‘plamlarki, ular chegarasining bir qismini o‘z ichiga olib, qolgan qismini o‘z ichiga olmaydi. Bunday to‘plamga misol sifatida

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : r < |\mathbf{x}| \leq R\}$$

to‘plamni olishimiz mumkin.

Berilgan $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamning *to‘ldiruvchisi* deb $\mathbb{R}^n$ fazoning $E$ to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha nuqtalari to‘plamiga aytiladi. $E$ to‘plamning to‘ldiruvchisi

$$CE = \mathbb{R}^n \setminus E \tag{11.1.19}$$

simvol orqali belgilanadi.

Bevosita chegaraviy nuqtaning ta’rifidan, berilgan to‘plamning har bir chegaraviy nuqtasi to‘ldiruvchisining ham chegaraviy nuqtasi ekani kelib chiqadi. Shunday ekan, agar $E$ to‘plam ochiq bo‘lsa, uning barcha chegaraviy nuqtalari $E$ dan tashqarida yotadi, ya’ni $CE$ ga tegishli bo‘ladi va demak, $CE$ yopiq to‘plam bo‘ladi. Xuddi shu singari, agar $E$ yopiq bo‘lsa, u o‘zining barcha chegaraviy nuqtalarini o‘z ichiga oladi, ya’ni birorta ham chegaraviy nuqta $CE$ ga tegishli bo‘lmaydi, bu esa, o‘z navbatida, $CE$ ning ochiq ekanini anglatadi.

Shunday qilib, agar to‘plamning to‘ldiruvchisi yopiq bo‘lsa, to‘plamning o‘zi ochiq bo‘ladi va aksincha, to‘ldiruvchisi ochiq bo‘lsa, to‘plam yopiq bo‘ladi.

Ochiq to‘plamga, avvalgisiga teng kuchli ravishda, quyidagicha ham ta’rif berish mumkin: agar to‘plamning barcha nuqtalari ichki nuqta bo‘lsa, bunday to‘plamga ochiq to‘plam deyiladi. Yopiq to‘plamni esa, ochiq to‘plamning to‘ldiruvchisi sifatida aniqlashimiz mumkin.

$E$ to‘plamni o‘z ichiga oluvchi eng kichik yopiq to‘plamga $E$ to‘plamning *yopilmasi* deyiladi. Yopilma, odatda, $\overline{E}$ simvol orqali belgilanadi. Aynan shu sababli biz ochiq va yopiq sharlar uchun yuqoridagi belgilashlarni kiritgan edik.

To‘plam yopilmasini *limit nuqta* tushunchasi yordamida konstruktiv ravishda tavsiflash mumkin.

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik,* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *nuqta va* $E \subset \mathbb{R}^n$ *to'plam berilgan bo'lsin. Agar shunday* $\mathbf{x}_k \in E$ *elementlar ketma-ketligi topilsaki, barcha* $k$ *larda* $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ *bo'lib,* $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ *bo'lsa, u holda* $\mathbf{a}$ *nuqta* $E$ *to'plamning* ***limit nuqtasi*** *deyiladi.*

To'plam faqat va faqat barcha limit nuqtalarini o'z ichiga olganda yopiq bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Agar $E$ to'plamning barcha limit nuqtalari to'plamini $E'$ bilan belgilasak, u holda $E$ to'plamning yopiqligi quyidagi

$$E' \subset E$$

munosabat bajarilishini anglatadi.

Har qanday $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam yopilmasini olish uchun unga limit nuqtalarini kiritish kifoya, ya'ni:

$$\overline{E} = E \cup E'.$$

Yuqorida biz $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning $\varepsilon$-atrofi tushunchasini kiritgan edik. Ko'pincha nuqta atrofining markazi shu nuqtada bo'lgan shar ko'rinishida bo'lishi ahamiyatga ega emas. Shuning uchun, odatda, navbatdagi ta'rifdan foydalaniladi:

**Ta'rif.** *Berilgan* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *nuqtaning* ***atrofi*** *deb shu nuqtani o'z ichiga oluvchi istalgan ochiq to'plamga aytiladi.*

Berilgan $\mathbf{a}$ nuqtaning bunday atrofiga misol sifatida, har bir qirrasining uzunligi $2\delta$ ga teng,

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j - \delta < x_j < a_j + \delta, \quad j = 1, 2, ..., n\}$$

ochiq kubni, yoki istalgan musbat $\beta_j$ va $\gamma_j$ haqiqiy sonlar uchun

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j - \beta_j < x_j < a_j + \gamma_j, \quad j = 1, 2, ..., n\}$$

ko'rinishdagi ochiq parallelepipedni olishimiz mumkin.

**4. Bog'langan to'plamlar.** $\mathbb{R}^n$ fazosida uzluksiz egri chiziq tushunchasini kiritamiz.

**Ta'rif.** $\mathbb{R}^n$ *fazosida* ***uzluksiz egri chiziq*** *deb, barcha komponentalari sonlar o'qining biror* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *kesmasida bir o'zgaruvchili* *uzluksiz funksiyadan iborat bo'lgan, $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ akslantirishning qiymatlari to'plamiga aytamiz.*

Boshqacha aytganda, $L \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning uzluksiz egri chiziq bo'lishi uchun shunday $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ kesma va $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ akslantirish topilishi kerak ekanki, bunda quyidagi 3 ta shart bajarilsin:

(i) $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ bo'lib, $\varphi_j(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsin;

(ii) istalgan $t \in [\alpha, \beta]$ uchun $\Phi(t)$ nuqta $L$ to'plamga tegishli bo'lsin;

(iii) istalgan $\mathbf{x} \in L$ nuqta uchun shunday $t \in [\alpha, \beta]$ topilsinki, $\Phi(t) = \mathbf{x}$ tenglik bajarilsin.

Misol uchun,

$$\Phi(t) \ = \ (t, \ t^2, \ ..., \ t^n), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

akslantirish $\mathbb{R}^n$ da uzluksiz egri chiziqni aniqlaydi.

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik, $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ akslantirish hamda $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Agar*

$$\Phi(\alpha) \ = \ \mathbf{a}, \quad \Phi(\beta) \ = \ \mathbf{b}$$

*tengliklar bajarilsa, $\Phi$ akslantirish bilan aniqlangan uzluksiz egri chiziq $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalarni tutashtiradi deymiz.*

Ravshanki, yuqoridagi misolda keltirilgan uzluksiz egri chiziq $(0, 0, ..., 0)$ va $(1, 1, ..., 1)$ nuqtalarni tutashtiradi.

**11.1.1 - misol.** Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ dan olingan biror $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalar berilgan bo'lsin. U holda

$$\Phi(t) \ = \ (1-t)\mathbf{a} \ + \ t\mathbf{b}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

akslantirish $\mathbb{R}^n$ da *kesma* deb ataluvchi va $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ simvol bilan belgilanuvchi uzluksiz egri chiziqni aniqlaydi.

**Ta'rif.** *Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning istalgan ikki nuqtasini barcha nuqtalari shu to'plamda yotuvchi kesma bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda $E$* ***qavariq*** *to'plam deyiladi.*

Qavariq to'plamga eng sodda misol sifatida istalgan sharni olishimiz mumkin. Haqiqatan, masalan markazi koordinatalar boshida va radiusi $r$ ga teng bo'lgan $B(\mathbf{0}, r)$ sharni olaylik. Agar $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ bu sharning ixtiyoriy ikki nuqtasi bo'lsa,

$$|\mathbf{a}| \ < \ r, \quad |\mathbf{b}| \ < \ r$$

bo'ladi. Bundan chiqdi, $0 \leq t \leq 1$ kesmadan olingan istalgan $t$ uchun

$$|(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}| \ \leq (1-t)|\mathbf{a}| \ + \ t|\mathbf{b}| \ < \ (1-t)r + tr = r$$

tengsizlik o'rinli. Demak, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ kesmaning barcha nuqtalari $B(\mathbf{0}, r)$ sharda yotadi.

**Ta'rif.** *Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning istalgan ikki nuqtasini barcha nuqtalari shu to'plamda yotuvchi uzluksiz egri chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda $E$* ***bog'langan (bog'lamli)*** *to'plam deyiladi.*

Ravshanki, har qanday qavariq to'plam bog'langan bo'ladi. Xususan, har qanday shar bog'langan to'plamdir.

**11.1.2 - misol.** Agar $\mathbf{a} = (r, 0, 0, ..., 0)$ desak, ikki o'zaro kesishmaydigan sharlardan tashkil topgan

$$E \ = \ B(-\mathbf{a}, r) \cup B(\mathbf{a}, r)$$

to'plam bog'langan emas.

Haqiqatan, ixtiyoriy $\mathbf{x} \in B(-\mathbf{a}, r)$ nuqtaning birinchi koordinatasi manfiy, ya'ni $x_1 < 0$; ixtiyoriy $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r)$ nuqtaning esa birinchi koordinatasi musbat, ya'ni $y_1 > 0$. Endi faraz qilaylik, $L$ bunday ikki nuqtani tutashtiruvchi ixtiyoriy uzluksiz egri chiziq bo'lsin. U holda bu egri chiziq, barcha $\varphi_j(t)$ komponentalari $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lgan biror $\Phi(t) \ = \ (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ akslantirish bilan aniqlanib, bunda

$$\varphi_1(\alpha) = x_1 < 0, \quad \varphi_1(\beta) = y_1 > 0$$

munosabatlar bajariladi.

Bundan chiqdi, $\varphi_1$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra, shunday $\xi$, $\alpha < \xi < \beta$, nuqta topiladiki, bu nuqtada $\varphi_1(\xi) = 0$ bo'ladi.

Shunday ekan, $E$ to'plam barcha elementlarining birinchi koordinatalari noldan farqli bo'lgani sababli, $\Phi(\xi)$ nuqta $E$ to'plamga tegishli emas. Bu degan so'z, $L$ egri chiziq barcha nuqtalari bilan $E$ to'plamda yotmaydi. Demak, $E$ bog'langan to'plam emas.

**Ta'rif.** *Ochiq bog'langan to'plam* ***soha*** *deyiladi.*

Masalan, har qanday ochiq shar soha bo'ladi. Yana boshqa misol sifatida, barcha komponentalari $a_j < b_j$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan ikki $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ nuqtalar bilan aniqlangan,

$$P \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, ..., n\}$$

ochiq parallelepipedni olishimiz mumkin.

Shuni aytish kerakki, soha uchun bog'langanlik ta'rifini biroz soddalashtirish mumkin. Chunonchi, har qanday ikki nuqtani uzluksiz egri chiziq bilan emas, balki kesmalardan iborat maxsus egri chiziq bilan tutashtirish mumkinligini talab qilish yetarli. Bu tasdiqning isboti kompakt to'plamlar xossalariga asoslangan bo'lib, biz uni 6* bandda keltiramiz.

**Ta'rif.** *Agar $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ akslantirish bilan aniqlangan uzluksiz egri chiziq uchun shunday*

$$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_m = \beta\} \tag{11.1.20}$$

*bo'linish topilsaki, bunda har bir qismiy $[t_{k-1}, t_k]$ kesmada $\Phi(t)$ akslantirishning har bir komponentasi chiziqli funksiya bo'lsa, u holda bunday egri chiziq* ***siniq chiziq*** *deyiladi.*

Albatta, har qanday kesma siniq chiziqdir va har qanday siniq chiziq chekli sondagi kesmalarning birlashmasidir. Siniq chiziqni aniqlovchi akslantirish uzluksiz bo'lakli-chiziqli akslantirish deb ataladi.

Har qanday uzluksiz egri chiziqni siniq chiziqlar bilan yaqinlashtirish mumkin. Bu tasdiqni isbotlashda biz navbatdagi sodda lemmadan foydalanamiz. Bu lemma har qanday chegaralangan funksiyani, shu funksiya bilan kesmaning chekkalarida ustma-ust tushuvchi chiziqli funksiya bilan yaqinlashtirish usulini beradi.

Berilgan $f$ funksiyaning $\Delta = [a, b]$ kesmadagi tebranishi

$$\omega(f, \Delta) \;=\; \sup_{a \le t < s \le b} |f(t) \;-\; f(s)| \tag{11.1.21}$$

kattalik bilan aniqlanganini eslatib o'tamiz.

**11.1.1 - lemma.** *Berilgan $f$ funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralangan bo'lsin. Agar*

$$g(t) \;=\; \frac{b-t}{b-a}\, f(a) \;+\; \frac{t-a}{b-a}\, f(b) \tag{11.1.22}$$

*deb belgilasak,*

$$|f(t) \;-\; g(t)| \;\le\; \omega(f, \Delta) \tag{11.1.23}$$

*baho bajariladi.*

**Isbot.** Talab qilingan baho

$$f(t) \;-\; g(t) \;=\; \frac{b-t}{b-a}\,[f(t) - f(a)] \;+\; \frac{t-a}{b-a}\,[f(t) - f(b)]$$

ayniyat va (11.1.21) ta'rifdan bevosita kelib chiqadi:

$$|f(t) \;-\; g(t)| \;\le\; \frac{b-t}{b-a}\,|f(t) - f(a)| \;+\; \frac{t-a}{b-a}\,|f(t) - f(b)| \;\le$$

$$\le\; \frac{b-t}{b-a}\,\omega(f, \Delta) \;+\; \frac{t-a}{b-a}\,\omega(f, \Delta) \;=\; \omega(f, \Delta). \quad \blacksquare$$

**11.1.1 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $L$ uzluksiz egri chiziq $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ akslantirish bilan berilgan bo'lsin. U holda, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $K$ siniq chiziq topiladiki, bunda $K$ ni aniqlovchi uzluksiz bo'lakli-chiziqli $\Psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ akslantirish*

$$\Phi(\alpha) \;=\; \Psi(\alpha), \quad \Phi(\beta) \;=\; \Psi(\beta)$$

*tengliklarni va*

$$|\Phi(t) \;-\; \Psi(t)| \;<\; \varepsilon$$

*tengsizlikni qanoatlantiradi.*

**Isbot.** Berilgan $[\alpha, \beta]$ kesmani $m$ ta teng bo'lakka bo'lamiz va bunda hosil bo'lgan bo'linishni

$$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_m = \beta\}$$

orqali belgilaymiz. $K$ siniq chiziqni aniqlovchi $\Psi$ akslantirish sifatida har bir $[t_{k-1}, t_k]$ kesmada chiziqli bo'lib, bo'linish nuqtalarida berilgan $\Phi$ akslantirish bilan ustma-ust tushuvchi, ya'ni

$$\Psi(t_k) = \Phi(t_k), \quad k = 0, 1, ..., m,$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi uzluksiz akslantirishni olamiz.

Tekis uzluksizlik haqidagi teoremaga ko'ra, $m$ nomerni shunday katta qilib olish mumkinki, bunda $\Phi$ akslantirishni har bir $\varphi_j(t)$ komponentasining $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ qismiy kesmadagi tebranishi $\varepsilon/\sqrt{n}$ dan kichik bo'ladi. Shunday ekan, 11.1.1 - lemmaga asosan, $\Psi$ akslantirishning $\psi_j(t)$ komponentalari uchun har bir $\Delta_k$ qismiy kesmada

$$|\psi_i(t) - \varphi_j(t)| \leq \omega(\varphi_j, \Delta_k) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

baho bajariladi.

Demak,

$$|\Psi(t) - \Phi(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\psi_j(t) - \varphi_j(t)|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Eslatma.** $\mathbb{R}^n$ fazosida ikki nuqta va ularni tutashtiruvchi uzluksiz egri chiziq berilgan bo'lsin. Isbotlangan tasdiqqa ko'ra, berilgan chiziqni o'z ichiga oluvchi yo'lakchani qanchalik tor olmaylik, bu yo'lakchaga berilgan ikki nuqtani tutashtiruvchi siniq chiziqni joylashtirish mumkin.

**5. Kompakt to'plamlar.** Zamonaviy matematik tahlilda muhim ahamiyatga ega bo'lgan yana bir tushunchani kiritamiz.

**Ta'rif.** *Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamga tegishli har qanday $\mathbf{x}_k \in E$ nuqtalar ketma-ketligidan $E$ ga tegishli nuqtaga yaqinlashuvchi qismiy* *ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, bu to'plam* **kompakt** *to'plam deyiladi.*

Navbatdagi tasdiqlar $\mathbb{R}^n$ dagi kompakt qismiy to'plamlarning to'la tavsifini beradi.

Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam berilgan bo'lib, shunday $M > 0$ son topilsaki, barcha $\mathbf{x} \in E$ elementlar uchun

$$|\mathbf{x}| \leq M, \quad x \in E, \tag{11.1.24}$$

tengsizlik bajarilsa, $E$ to'plam *chegaralangan* deyiladi.

**11.1.3 - jumla.** $\mathbb{R}^n$ *ning har bir kompakt qismiy to'plami yopiq va chegaralangandir.*

**Isbot.** Faraz qilaylik, $E$ to'plam kompakt bo'lsin. Biz uning yopiq va chegaralangan ekanini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $\mathbf{a}$ nuqta $E$ to'plamning ixtiyoriy chegaraviy nuqtasi bo'lsin. Chegaraviy nuqta ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\mathbf{x} \in E$ nuqta topiladiki, shu uchun

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon \tag{11.1.25}$$

bo'ladi.

Biz $\varepsilon$ ga ketma-ket $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, ..$ qiymatlarni beramiz. Har bir $\varepsilon = \frac{1}{k}$ uchun shunday $\mathbf{x}_k \in E$ nuqta topiladiki, u (11.1.25) tengsizlikka ko'ra,

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \frac{1}{k}$$

shartni qanoatlantiradi.

Ma'lumki, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ va $E$ ning kompaktligi tufayli $\mathbf{a} \in E$, ya'ni $E$ to'plam o'zining barcha chegaraviy nuqtalarini o'z ichiga olar ekan. Bundan chiqdi, $E$ - yopiq to'plam.

Endi, agar $E$ chegaralanmagan deb faraz qilsak, yuqoridagi chegaralangan to'plam ta'rifiga ko'ra, shunday $\mathbf{x}_k \in E$ nuqtalar ketma-ketligi topiladiki, u uchun $|\mathbf{x}_k| > k$ bo'ladi. Albatta, bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi. Bu esa $E$ to'plamning kompaktligiga ziddir. Demak, $E$ - chegaralangan to'plam.■

**11.1.4 - jumla.** *$\mathbb{R}^n$ fazosining har bir yopiq chegaralangan qismiy to'plami kompaktdir.*

**Isbot.** $E$ to'plamni yopiq va chegaralangan deb faraz qilib, uni kompakt ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun ixtiyoriy $\mathbf{x}_k \in E$ nuqtalar ketma-ketligini olamiz. Tasdiq shartiga ko'ra, bu ketma-ketlik chegaralangan. Demak, Bolsano-Veyershtrass teoremasiga (11.1.3 - teorema) asosan, bu ketma-ketlikdan biror $\mathbf{a}$ elementga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Endi $\mathbf{a} \in E$ ekanini ko'rsatish yetarli.

Faraz qilaylik, $\mathbf{a}$ nuqta $E$ to'plamga tegishli bo'lmasin. U holda istalgan $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ sharda $E$ to'plamga tegishli bo'lgan (masalan, $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlikning yetarlicha katta $k$ nomerli elementlari) va tegishli bo'lmagan (masalan, $\mathbf{a}$ nuqtaning o'zi) nuqtalar topiladi. Bundan chiqdi, $\mathbf{a}$ yopiq $E$ to'plamning chegaraviy nuqtasi ekan. Demak, $\mathbf{a} \in E$. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik tasdig'imizning to'g'ri ekanini ko'rsatadi.■

Bevosita 11.1.3 - va 11.1.4 - tasdiqlardan ushbu bandning quyidagi asosiy natijasi kelib chiqadi.

**11.1.4 - teorema.** *$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning kompakt bo'lishi uchun uning yopiq va chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

$\mathbb{R}^n$ dagi kompakt to'plamlarga quyidagi misollarni keltirish mumkin:

1) chekli sondagi nuqtalar to'plami - bu to'plam chegaralangan va yopiq, chunki u o'zining barcha chegaraviy nuqtalaridan iborat;

2) $\overline{B(a, r)}$ yopiq shar;

3) $\mathbb{R}^n$ fazosining, koordinatalari

$$a_j \leq \ b_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

shartlarni qanoatlantiruvchi, istalgan $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ elementlari yordamida aniqlangan

$$P[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \ = \ \{\mathbf{x} \in R^n \ : \ a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, 2, ..., n\}$$

yopiq parallelepiped.

Yuqoridagidek tanlangan **a** va **b** lar orqali aniqlanuvchi

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \;=\; \{\mathbf{x} \in R^n \;:\; a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, ..., n\}$$

ochiq parallelepiped kompakt emas, chunki u chegaralangan bo'lsada, yopiq emas.

$\mathbb{R}^n$ fazosining oxirgi koordinatalari manfiy bo'lmagan nuqtalaridan tashkil topgan

$$\mathbb{R}^n_+ \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; x_n \geq 0\}$$

yarim fazo kompakt emas, chunki u yopiq bo'lsada, chegaralangan emas.

Kompakt to'plamlar *kompaktlar* deb ham ataladi.

**6*. To'plamlar orasidagi masofa.** Ikki $E \subset \mathbb{R}^n$ va $F \subset \mathbb{R}^n$ to'plam orasidagi masofa deb manfiy bo'lmagan

$$\mathrm{dis}\{E, F\} \;=\; \inf_{\mathbf{x} \in E}\; \inf_{\mathbf{y} \in F} |x - y|$$

songa aytamiz.

Albatta, agar $F$ va $E$ to'plamlar aqalli bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda ular orasidagi masofa nolga teng. Shuningdek, har qanday to'plam va uning to'ldiruvchisi orasidagi masofa ham nolga teng, ya'ni o'zaro kesishmaydigan to'plamlar orasidagi masofa ham nol bo'lishi mumkin. Ammo, agar ikki o'zaro kesishmaydigan to'plamlardan biri yopiq va ikkinchisi kompakt bo'lsa, u holda bu ikki to'plam orasidagi masofa musbat ekanini, ya'ni noldan qat'iy katta ekanini ko'rsatish qiyin emas.

Ikki to'plam orasidagi masofaning navbatdagi xossasidan zamonaviy matematik tahlilda ko'p foydalaniladi.

**11.1.2 - tasdiq.** *Agar $K$ istalgan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohasining kompakt qismiy to'plami bo'lsa, u holda* $\mathrm{dis}\{K, \partial\Omega\} > 0$ bo'ladi.

**Isbot.** Sohaning ta'rifiga ko'ra, $\Omega$ ochiq to'plam. Demak, u $\partial\Omega$ chegaraning birorta ham nuqtasini o'z ichiga olmaydi. Bundan chiqdi, $K \subset \Omega$ shartdan $K \cap \partial\Omega = \emptyset$ kelib chiqadi.

Endi, faraz qilaylik, $\mathrm{dis}\{K, \partial\Omega\} = 0$ bo‘lsin. U holda shunday $\mathbf{x}_k \in K$ va $\mathbf{y}_k \in \partial\Omega$ ketma-ketliklar topiladiki, ular uchun

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| \ \to \ 0, \quad k \to \infty,$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

$K$ kompakt to‘plam bo‘lgani sababli, zarur bo‘lsa qismiy ketma-ketlik olib va uni qayta nomerlab, $\mathbf{x}_k$ ketma-ketlikni biror $\mathbf{a} \in K$ ga yaqinlashadi deyishimiz mumkin. U holda, ravshanki, $\mathbf{y}_k \to \mathbf{a}$ va $\partial\Omega$ chegara yopiq bo‘lgani uchun $\mathbf{a} \in \partial\Omega$. Bundan chiqdi, $\mathbf{a}$ nuqta $K$ kompakt va $\partial\Omega$ chegara uchun umumiy nuqta ekan. Hosil bo‘lgan qarama-qarshilik tasdiqning to‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi.■

Isbotlangan tasdiq yordamida soha uchun bog‘langanlik ta’rifini biroz soddalashtirish mumkin.

**11.1.3 - tasdiq.** *Sohaning har qanday ikki nuqtasini shu sohada yotuvchi siniq chiziq orqali tutashtirish mumkin.*

**Isbot.** Aytaylik, $\Omega$ sohaning istalgan ikki $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra, $\Omega$ soha bog‘langan. Demak, bu ikki nuqtani tutashtiruvchi $L$ uzluksiz egri chiziq mavjud. Uni aniqlovchi akslantirish $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ bo‘lsin, ya’ni $\Phi([0, 1]) = L$ bo‘lsin. Ravshanki, $L$ yopiq va chegaralangan to‘plam, ya’ni kompakt. Demak, 11.1.2 - tasdiqqa asosan,

$$\mathrm{dis}\{L, \partial\Omega\} \ > \ 0.$$

11.1.1 - tasdiqqa ko‘ra esa, $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalarni tutashtiruvchi shunday $K$ siniq chiziq topiladiki, uni aniqlovchi $\Psi : [0, 1] \to K$ akslantirish

$$|\Psi(t) \ - \ \Phi(t)| \ < \ \mathrm{dis}\{L, \partial\Omega\}$$

bahoni qanoatlantiradi. Bu tengsizlikdan, shubhasiz, $K \subset \Omega$ kelib chiqadi.■

Shunday qilib, har qanday ikki nuqtasini siniq chiziq bilan tutashtirish mumkin bo‘lgan ixtiyoriy ochiq to‘plamni soha deb atash mumkin ekan.

## 11.2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

**1.** Ushbu paragrafda biz $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi funksiyalarni o'rganamiz. Ya'ni, o'rganiladigan $f$ funksiyalar biror $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning har bir $\mathbf{x}$ elementiga $f(\mathbf{x})$ haqiqiy sonni mos qo'yadi. Bunda $E$ to'plam $f$ funksiyaning aniqlanish sohasi deb ataladi va ba'zan $D(f)$ simvol orqali belgilanadi. Bunday funksiyalarni biz $f : E \to \mathbb{R}$ ko'rinishda ham belgilaymiz.

Ba'zan, $f$ funksiyaning $n$ ta o'zgaruvchiga bog'liq ekanini ko'rsatish maqsadida, funksiya qiymatini

$$f(\mathbf{x}) \;=\; f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ko'rinishda ham yozamiz.

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek, bir xil aniqlanish sohasiga ega bo'lgan har qanday ikki $f$ va $g$ funksiyaning $f+g$ yig'indisi, $f-g$ ayirmasi, $f \cdot g$ ko'paytmasi va $\dfrac{f}{g}$ nisbati tabiiy ravishda quyidagicha kiritiladi:

$$(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad (f-g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}),$$

$$(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}), \quad \frac{f}{g}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \text{ (agar } g(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ bo'lsa)},$$

bunda nisbat faqat maxraj noldan farqli bo'lgan nuqtalarda aniqlangan deb hisoblanadi.

Ikki $f$ va $g$ funksiya ustidagi arifmetik amallarni bu funksiyalar turli aniqlanish sohasiga ega bo'lganda ham, ya'ni $D(f) \neq D(g)$ bo'lganda ham aniqlash mumkin. Odatda, bu holda arifmetik amallar ikki funksiyaning aniqlanish sohalari kesishmasida, ya'ni $D(f) \cap D(g)$ da aniqlangan deb hisoblanadi.

**2.** Bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishda ham ularning grafiklari muhim rol o'ynaydi.

Eslatib o'tamiz, bir o'zgaruvchili $f$ funksiya grafigi deb, koordinatalari $x_2 = f(x_1)$ ko'rinishda bog'langan, tartiblangan $(x_1, x_2)$ juftliklar to'plamiga aytgan edik.

Bundan chiqdi, $n$ o'zgaruvchili funksiya grafigini aniqlash uchun $(n+1)$ - o'lchovli $\mathbb{R}^{n+1}$ fazoni qarashimiz kerak. Bu fazoning $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ nuqtalarini biz $(\mathbf{x}, x_{n+1})$ ko'rinishda ham belgilaymiz, bunda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya *grafigi* deb

$$\Gamma(f) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{x} \in E\}$$

ko'rinishda aniqlangan $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to'plamga aytiladi.

Boshqacha aytganda, $f$ funksiya grafigi - bu koordinatalari $x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ munosabat bilan bog'langan barcha $(x_1, x_2, \ ..., \ x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nuqtalar to'plamidir.

Ayniqsa ikki $(x_1, x_2) \in E \subset \mathbb{R}^2$ o'zgaruvchili funksiya grafigini ko'z oldimizga yaqqol keltirishimiz mumkin. Bunda grafik funksiyaning $E$ aniqlanish sohasi ustida joylashgan $\Gamma$ sirtdan iborat bo'lib, $\mathbb{R}^2$ ga perpendikulyar istalgan to'g'ri chiziq bu sirtni ko'pi bilan bir nuqtada kesishi mumkin.

**3.** Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalar holidagidek, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun limit qiymat va uzluksizlik tushunchalari kiritiladi.

Bu tushunchalarni kiritishdan avval, berilgan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqta $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plam limit nuqtasi bo'lishining ta'rifini eslataylik: agar $E$ to'plamning $\mathbf{a}$ ga yaqinlashuvchi va shu bilan birga, $\mathbf{a}$ dan farqli $\mathbf{x}_k$ elementlari mavjuq bo'lsa, $\mathbf{a}$ nuqta $E$ to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

**Ta'rif (H.E.Heine).** *$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan $f$ funksiya va bu to'plamning biror $\mathbf{a}$ limit nuqtasi berilgan bo'lsin. Agar argumentning $\mathbf{a}$ ga yaqinlashuvchi va $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\mathbf{x}_k \in E$ ketma-ketligi uchun $f(\mathbf{x}_k)$ qiymatlar ketma-ketligi biror $c$ soniga yaqinlashsa, bu son $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi limit qiymati deyiladi.*

Agar $c$ soni $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi limit qiymati bo'lsa,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = c$$

deb yoziladi.

Ta'rifdagi $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ shartning mohiyati shundan iboratki, unga ko'ra funksiya, umuman aytganda, $\mathbf{a}$ nuqtada aniqlanmagan bo'lishi mumkin. Bordiyu $f$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtada aniqlangan bo'lsa, bu shartga asosan, $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi limit qiymati $f(\mathbf{a})$ bilan ustma-ust tushishi shart emas.

Funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi limit qiymati funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi *limiti* deb ham ataladi.

Navbatdagi tasdiq xuddi bir o'zgaruvchili funksiya holidagidek isbotlanadi.

**11.2.1 - teorema.** *Agar*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \ = \ b \ , \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \ = \ c \tag{11.2.1}$$

*bo'lsa,*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f+g)(\mathbf{x}) = b+c, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f-g)(\mathbf{x}) = b-c, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f\cdot g)(\mathbf{x}) = b\cdot c \tag{11.2.2}$$

*tengliklar bajariladi va $c \neq 0$ bo'lganda*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) \ = \ \frac{b}{c} \tag{11.2.3}$$

*tenglik o'rinli bo'ladi.*

Bir o'zgaruvchili funksiyaning limit qiymatiga biz boshqacha ham ta'rif bergan edik. Chunonchi, agar $a$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida $f$ funksiya qiymatlari $b$ dan juda kam farq qilsa, biz $b$ soniga $f$ funksiyaning $a$ nuqtadagi Koshi ma'nosidagi limit qiymati degan edik. Boshqacha aytganda, agar $x$ nuqta $a$ nuqtaning $\delta$-atrofida bo'lib, $\delta > 0$ yetarlicha kichik bo'lsa, $f(x)$ qiymatlar $b$ sonidan $\varepsilon$ dan kichik songa farq qilishi kerak, ya'ni $b$ nuqtaning $\varepsilon$-atrofida yotishi kerak. Ravshanki, bu ta'rifni ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham keltirish mumkin.

**Ta'rif (A.L.Cauchy).** *Berilgan $f$ funksiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda aniqlangan bo'lib,* $\mathbf{a}$ *nuqta $E$ to'plamning biror limit nuqtasi bo'lsin. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki,*

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \qquad \mathbf{x} \in E, \tag{11.2.4}$$

*shartni bajaruvchi barcha* $\mathbf{x} \in E$ *lar uchun*

$$|f(\mathbf{x}) - b| \ < \ \varepsilon \tag{11.2.5}$$

*tengsizlik bajarilsa,* $b$ *soniga* $f$ *funksiyaning* $\mathbf{a}$ *nuqtadagi limit qiymati deyiladi.*

(11.2.4) tengsizlikning chap tomoni $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ ekanini, ya’ni $\mathbf{a}$ nuqtaning $\delta$-atrofida yotuvchi va $\mathbf{a}$ nuqtaning o‘zidan farqli barcha $\mathbf{x} \in E$ nuqtalar uchun (11.2.5) tengsizlik bajarilishini anglatadi. Bundan chiqdi, xuddi Heine ta’rifidagidek, limit qiymatni $\mathbf{a}$ nuqtada aniqlanmagan funksiyalar uchun ham aniqlash mumkin, bordiyu funksiya bu nuqtada aniqlangan bo‘lsa, $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi limit qiymati $f(\mathbf{a})$ bilan ustma-ust tushishi ham, tushmasligi ham mumkin.

Xuddi bir o‘zgaruvchili funksiyalar holidagidek, limit qiymatning yuqorida keltirilgan Koshi va Heine ta’riflari o‘zaro teng kuchli, ya’ni navbatdagi teorema o‘rinli.

**11.2.2 - teorema.** *Berilgan* $f$ *funksiya* $E \subset \mathbb{R}^n$ *to‘plamda aniqlangan bo‘lib,* $\mathbf{a}$ *nuqta shu to‘plam limit nuqtasi bo‘lsin. U holda,* $b$ *son* $f$ *funksiyaning* $\mathbf{a}$ *nuqtadagi Koshi ma’nosida limit qiymati bo‘lishi uchun bu son* $f$ *funksiyaning* $\mathbf{a}$ *nuqtadagi Heine ma’nosida limit qiymati bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isbot xuddi 3.1.2 - teorema isboti singari olib boriladi.

**3.** Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uzluksizligi ham, funksiya limit qiymati tushunchasiga suyangan ravishda, bir o‘zgaruvchili funksiya uzluksizligi kabi ta’riflanadi.

**Ta’rif.** *Berilgan* $f$ *funksiya* $E \subset \mathbb{R}^n$ *to‘plamda aniqlangan bo‘lib,* $\mathbf{a} \in E$ *nuqta* $E$ *to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. Agar* $f$ *funksiyaning* $\mathbf{a}$ *nuqtadagi limit qiymati mavjud bo‘lib, u* $f(\mathbf{a})$ *ga teng bo‘lsa, ya’ni*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \ = \ f(\mathbf{a}) \tag{11.2.6}$$

*bo‘lsa,* $f$ *funksiya* $\mathbf{a} \in E$ *nuqtada* ***uzluksiz*** *deyiladi.*

Limit qiymatining Heine va Koshi ta’riflarini esga olsak, biz funksiyaning nuqtadagi uzluksizligiga ikki o‘zaro teng kuchli ta’rif berishimiz mumkin.

Uzluksizlikning Heine bo‘yicha ta’rifi quyidagi ko‘rinishga ega:

**Ta’rif (H.E.Heine).** *Berilgan $f$ funksiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $\mathbf{a} \in E$ nuqta $E$ to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.*

*Agar argumentning $\mathbf{a}$ ga yaqinlashuvchi istalgan $\mathbf{x}_k \in E$ ketma-ketligi uchun unga mos $f(\mathbf{x}_k)$ funksiya qiymatlari ketma-ketligi $f(\mathbf{a})$ ga yaqinlashsa, $f$ funksiya $\mathbf{a} \in E$ nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Uzluksizlikning Koshi bo‘yicha ta’rifi esa quyidagi ko‘rinishga ega:

**Ta’rif (A.L.Cauchy).** *Berilgan $f$ funksiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $\mathbf{a} \in E$ nuqta $E$ to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.*

*Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki,*

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \qquad \mathbf{x} \in E,$$

*shartni qanoatlantiruvchi barcha $\mathbf{x}$ lar uchun*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

*tengsizlik bajarilsa, $f$ funksiya $\mathbf{a} \in E$ nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Bundan buyon biror funksiyani $E$ to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz deyish o‘rniga, biz, qisqaroq qilib, o‘sha funksiyani $E$ to‘plamda uzluksiz deymiz.

Berilgan $f(\mathbf{x})$ funksiyaning $n-1$ ta argumentini tayinlab, faqat bitta, masalan $j$ - argumentini o‘zgaruvchi deb qarasak, biz bir o‘zgaruvchili

$$\varphi(x_j) = f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n)$$

funksiyani hosil qilamiz. Agar bu $\varphi(x_j)$ funksiya $a_j$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, $f(\mathbf{x})$ funksiyani $\mathbf{a}$ nuqtada $x_j$ o‘zgaruvchi bo‘yicha uzluksiz deymiz. Masalan,

$$f(\mathbf{x}) \;=\; x_1 \cdot \operatorname{sign} x_2$$

funksiya $x_1$ o‘zgaruvchi bo‘yicha har bir $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ nuqtada uzluksiz bo‘lib, $x_2$ o‘zgaruvchi bo‘yicha esa, abssissalar o‘qining musbat va manfiy nurlaridan tashqari, barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Uzluksiz funksiyalar quyidagi xossaga ega:

*agar* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya* $\mathbf{a}$ *nuqtada har bir* $x_j$ *bo'yicha uzluksiz bo'ladi.*

Masalan, ikki o'zgaruvchili $f = f(x_1, x_2)$ uzluksiz funksiyani qaraydigan bo'lsak, bu xossa bir o'zgaruvchili $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2)$ funksiyaning $x_1 = a_1$ nuqtada va bir o'zgaruvchili $\psi(x_2) = f(a_1, x_2)$ funksiyaning $x_2 = a_2$ nuqtada uzluksizligini anglatadi.

Yuqoridagi xossaning teskarisi o'rinli emasligini ko'rish oson. Haqiqatan, quyidagi

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{agar } (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } (x_1, x_2) = (0,0) \text{ bo'lsa}, \end{cases} \tag{11.2.7}$$

ikki o'zgaruvchili funksiyani qaraylik.

Ravshanki, har qanday tayinlangan $a_1 \in \mathbb{R}$ uchun $f(a_1, x_2)$ bir o'zgaruvchili funksiya sonlar o'qida, ya'ni $-\infty < x_2 < +\infty$ da uzluksiz va har qanday tayinlangan $a_2 \in \mathbb{R}$ uchun $f(x_1, a_2)$ bir o'zgaruvchili funksiya sonlar o'qida, ya'ni $-\infty < x_1 < +\infty$ da uzluksiz. Ammo o'rganilayotgan (11.2.7) ikki o'zgaruvchili funksiya $\mathbf{a} = (0, 0)$ nuqtada uzluksiz emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$\mathbf{x}_k = \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \tag{11.2.8}$$

ketma-ketlikni qaraylik.

Albatta, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{0}$ va shuning uchun $f(\mathbf{x}_k) \to f(\mathbf{0}) = 0$ tenglik bajarilishi kerak edi, ammo

$$f(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2}$$

va bundan chiqdi, (11.2.6) munosabat bajarilmaydi, ya'ni (11.2.7) funksiya nol nuqtada uzluksiz emas.

Shunday qilib, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning har bir argumenti bo'yicha uzluksizligidan uning ko'p o'zgaruvchili funksiya sifatida uzluksizligi kelib chiqmas ekan.

Agar biz

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2}{x_1^4 + x_2^4}, & \text{agar } (x_1,x_2) \neq (0,0) \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } (x_1,x_2) = (0,0) \text{ bo'lsa}, \end{cases} \qquad (11.2.9)$$

ko'rinishdagi funksiyani qaraydigan bo'lsak, tasdiqimiz yanada kuchayishi mumkin.

Ravshanki, $f(x_1, 0) = 0$ va noldan farqli har qanday $a_2 \in \mathbb{R}$ uchun

$$f(x_1, a_2) = \frac{x_1 \cdot a_2}{x_1^4 + a_2^4},$$

tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, (11.2.9) funksiya ikkinchi argument tayinlanganda, birinchi argument bo'yicha uzluksiz ekan. (11.2.9) funksiya simmetrik bo'lganligi uchun, u birinchi argument tayinlanganda, ikkinchisi bo'yicha ham uzluksizdir. Ammo bu funksiya nol nuqtada ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida nafaqat uzluksiz emas, balki chegaralangan ham emasdir. Haqiqatan, yana nolga intiluvchi (11.2.8) ketma-ketlikni qarasak,

$$f(\mathbf{x}_k) = \frac{k^2}{2}$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni (11.2.9) funksiya koordinatalar boshining istalgan atrofida chegaralanmagan ekan.

**4.** Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar ham xuddi bir o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar kabi xossalarga ega. Bunda xossalar isboti xuddi bir o'zgaruchili funksiyalar holidagidek bo'lgani sababli, biz navbatdagi teoremalardan ba'zilarini to'la isbotlamasdan, isbotning asosiy qadamlarinigina keltiramiz.

**11.2.1 - tasdiq (uzluksiz funksiya ishorasi saqlanishi haqida).** *Berilgan* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *nuqtaning biror atrofida aniqlangan* $f$ *funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar* $f(\mathbf{a}) > 0$ *bo'lsa, shunday* $B(\mathbf{a}, R)$ *shar topiladiki, unda*

$$f(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2} f(\mathbf{a}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < R,$$

*tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.*

**Isbot** bir o‘zgaruvchili holga to‘la o‘xshash bo‘lib, bevosita uzluksizlik ta’rifidan kelib chiqadi.

**11.2.3 - teorema.** *Biror* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *nuqtada uzluksiz bo‘lgan ikki uzluksiz funksiya yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbati (maxraj noldan farqli bo‘lganda) shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

**Isbot** bevosita uzluksizlik ta’rifi va 11.2.1 - teoremadan kelib chiqadi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun superpozitsiya tushunchasini, ya’ni murakkab funksiya tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamda aniqlangan $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya va $V \subset \mathbb{R}^m$ to‘plamda aniqlangan $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bunda $\varphi$ vektor-funksiya bo‘lib, agar $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$ desak, u

$$\varphi(\mathbf{t}) = (\varphi_1(\mathbf{t}), \varphi_2(\mathbf{t}), ..., \varphi_n(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in V,$$

ko‘rinishga ega (vektor-funksiyalar keyingi paragrafda batafsil o‘rganiladi).

Biz $\varphi$ akslantirish qiymatlari to‘plami $E$ da yotsin deb faraz qilamiz, ya’ni istalgan $\mathbf{t} \in V$ uchun $\varphi(\mathbf{t}) \in E$ bo‘lsin deymiz. Boshqacha aytganda,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_m), \\ &\cdots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_m) \end{aligned}$$

koordinatalarga ega bo‘lgan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nuqta $E$ to‘plamga tegishli bo‘lsin.

U holda

$$F(\mathbf{t}) = f[\varphi(\mathbf{t})], \quad t \in V,$$

ko‘rinishda ta’sir qiluvchi $F = f[\varphi] : V \to \mathbb{R}$ murakkab funksiyani aniqlash mumkin.

$F$ funksiya $f$ va $\varphi$ akslantirishlar superpozitsiyasi deb ham ataladi va

$$F = f \circ \varphi$$

ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib,

$$(f \circ \varphi)(t) = f[\varphi(t)].$$

Navbatdagi teorema uzluksiz akslantirishlar superpozitsiyasi uzluksiz ekanini ta'kidlaydi.

**11.2.4 - teorema.** *Faraz qilaylik, $V \subset \mathbb{R}^m$ to'plamda aniqlangan $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ vektor-funksiya qiymatlari $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda yotsin va $E$ to'plamda aniqlangan $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin.*

*Agar $\varphi(\mathbf{t})$ vektor-funksiya biror $\mathbf{a} \in V$ nuqtada va $f(\mathbf{x})$ funksiya esa, $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f[\varphi(\mathbf{t})]$ murakkab funksiya $\mathbf{t} = \mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

**Isbot** bevosita uzluksizlik va limit qiymatning Heine bo'yicha ta'riflaridan kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $\mathbf{t}_k \to \mathbf{a}$ bo'lsa, $\mathbf{x}_k = \varphi(\mathbf{t}_k) \to \mathbf{b}$ va demak, $f(\mathbf{x}_k) \to f(\mathbf{b}) = f[\varphi(\mathbf{a})]$ bo'ladi.

**11.2.5 - teorema (har qanday oraliq qiymatni qabul qilish haqida).** *Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ sohada uzluksiz $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lib,*

$$f(\mathbf{a}) = A, \quad f(\mathbf{b}) = B, \quad \mathbf{a} \in E, \quad \mathbf{b} \in E,$$

*bo'lsin.*

*U holda $A$ va $B$ orasidan istalgan $C$ haqiqiy son olganda ham shunday $\mathbf{c} \in E$ nuqta topiladiki, u uchun*

$$f(\mathbf{c}) = C$$

*bo'ladi.*

**Isbot.** Soha ta'rifiga ko'ra, $E$ to'plam bog'langandir. Shunday ekan, $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ nuqtalarni butunlay $E$ da yotuvchi biror uzluksiz $L$ egri chiziq bilan tutashtirish mumkin. Faraz qilaylik, mana shu $L$ egri chiziq $\Phi : [\alpha, \beta] \to E$ akslantirish orqali aniqlangan bo'lib, $\Phi(\alpha) = \mathbf{a}$ va $\Phi(\beta) = \mathbf{b}$ bo'lsin. Quyidagi

$$F(t) = f[\Phi(t)], \quad \alpha \le t \le \beta,$$

murakkab funksiyani qaraymiz.

Bu murakkab funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, $F(\alpha) = A$ va $F(\beta) = B$ shartlarni qanoatlantiradi. Demak, 3.5.3 - teoremaga ko‘ra, shunday $\xi \in (\alpha, \beta)$ nuqta topiladiki, u uchun $F(\xi) = C$ bo‘ladi. Endi $\mathbf{c} = \Phi(\xi)$ deb olish yetarli.■

**11.2.6 - teorema (Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalari).** *Kompakt to‘plamda uzluksiz bo‘lgan funksiya chegaralangan bo‘lib, u o‘zining maksimal va minimal qiymatlariga erishadi.*

**Isbot.** Aytaylik, $f$ funksiya biror $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktda uzluksiz bo‘lsin. Quyidagi

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = \sup_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}) \tag{11.2.10}$$

shartni qanoatlantiruvchi $\mathbf{x}_k \in K$ ketma-ketlikni qaraymiz (bunda biz $\sup f(\mathbf{x}) = +\infty$ holni ham inkor qilayotganimiz yo‘q). $K$ kompakt bo‘lgani uchun $\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{a} \in K$ qismiy ketma-ketlik topiladi. Bundan chiqdi, uzluksizlikka ko‘ra,

$$\lim_{j\to\infty} f(\mathbf{x}_{k_j}) = f(\mathbf{a}). \tag{11.2.11}$$

Agar (11.2.10) va (11.2.11) tengliklarni taqqoslasak, talab qilingan

$$\sup_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni aniq yuqori chegara chekli bo‘lib, unga $f$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtada erishar ekan.■

Xuddi bir o‘zgaruvchili funksiyalar holidagidek, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham $\mathbb{R}^n$ dagi to‘plamlarda tekis uzluksizlik tushunchasini kiritish mumkin.

**Ta’rif.** *Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamda aniqlangan $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo‘lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $\mathbf{x} \in E$ va $\mathbf{y} \in E$ lar uchun*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$$

*tengsizlik bajarilsa, $f$ funksiya $E$ to‘plamda tekis uzluksiz deyiladi.*

**11.2.7 - teorema (kompaktda tekis uzluksizlik haqidagi Kantor teoremasi).** *$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt to‘plamda uzluksiz funksiya shu to‘plamda tekis uzluksiz bo‘ladi.*

**Isbot** xuddi bir o‘zgaruvchili funksiya holidagidek, teskarisini faraz qilish usuli bilan olib boriladi. Chunonchi, teorema tasdig‘i o‘rinli emas deb faraz qilsak, biz shunday $\varepsilon_0 > 0$ son hamda ikki $\mathbf{x}_k \in E$ va $\mathbf{y}_k \in E$ ketma-ketlikka ega bo‘lamizki, ular uchun

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| < \frac{1}{k}$$

bo‘lsada,

$$|f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k)| \geq \varepsilon_0 \qquad (11.2.12)$$

bo‘ladi.

$K$ to‘plamning kompaktligiga ko‘ra, $\{\mathbf{x}_k\}$ ketma-ketlikdan biror $\mathbf{a} \in K$ ga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Biz bu ketma-ketlikni, belgilashni soddalashtirish maqsadida, yana $\{\mathbf{x}_k\}$ orqali belgilaymiz. Ravshanki, bunga mos $\{\mathbf{y}_k\}$ ketma-ketlik ham o‘sha $\mathbf{a}$ soniga yaqinlashadi. U holda, $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksizligi sababli, $\{f(\mathbf{x}_n)\}$ va $\{f(\mathbf{y}_n)\}$ sonli ketma-ketliklar $f(\mathbf{a})$ ga teng bo‘lgan umumiy limitga ega. Bu esa (11.2.12) tengsizlikka ziddir.■

**1-eslatma.** Agar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soha kompakt bo‘lmasa, ya’ni yopiq yoki chegaralangan bo‘lmasa, u holda $\Omega$ da uzluksiz bo‘lib, lekin tekis uzluksiz bo‘lmagan funksiyaga misol keltirish qiyin emas.

**2-eslatma.** Xuddi bir o‘zgaruvchili funksiyalar holidagidek, tekis uzluksizlik haqidagi Kantor teoremasi ko‘p o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning integrallanuvchi ekanini isbotlashda muhim rol o‘ynaydi.

## 11.3-§. Vektor qiymatli ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar

**1. O‘zaro bir qiymatli akslantirishlar.** Ushbu paragrafda ixtiyoriy $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamni $\mathbb{R}^m$ fazosining biror to‘plamiga o‘tkazuvchi akslantirishlar o'rganiladi. Har bir shunday $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ akslantirish $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ nuqtani biror $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ nuqtaga o'tkazadi va $n$ o'zgaruvchili $m$ ta sonli funksiya orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ ... & \quad ... \quad ... \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

Har bir $\mathbf{x} \in E$ uchun $\mathbf{f}$ akslantirishning qiymati $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^m$ ko'rinishdagi vektor bo'lgani sababli, $\mathbf{f}$ akslantirish *vektor qiymatli* funksiya yoki soddaroq qilib, *vektor-funksiya* deb ataladi.

Agar $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ akslantirish turli nuqtalarni turli nuqtalarga o'tkazsa, ya'ni istalgan $\mathbf{x}' \in E$ va $\mathbf{x}'' \in E$ uchun $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ shartdan $\mathbf{f}(\mathbf{x}') \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}'')$ shart kelib chiqsa, u holda bunday akslantirishni $E$ to'plamda *teskarilanuvchi* deb ataymiz. Har qanday teskarilanuvchi $\mathbf{f}$ vektor-funksiya $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $M = \mathbf{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Ravshanki, bunda $\mathbf{f}^{-1} : M \to E$ teskari akslantirish mavjud bo'lib, bu akslantirish qiymatlari $\mathbb{R}^n$ da yotgan vektor-funksiya bo'ladi.

Bundan buyon vektor-funksiyani, faqat vektor qiymat qabul qilishini qayd etish zarur bo'lsagina, qalin $\mathbf{f}$ harfi bilan belgilaymiz.

Agar $E \subset \mathbb{R}^n$ va $M \subset \mathbb{R}^m$ to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ya'ni o'zaro bir qiymatli $f : E \to M$ akslantirish mavjud bo'lsa, bunday to'plamlarni ekvivalent deb atagan edik. Bunda $E$ va $M$ to'plamlar bir xil quvvatga ega ham deyiladi. Chunonchi, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ kesmaga ekvivalent bo'lgan barcha to'plamlar kontinuum quvvatli to'plamlar deyiladi.

Bu borada shuni qayd etish kerakki, istalgan natural $n$ va $m$ larda $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$ fazolarning bir xil quvvatga ega bo'lishi haqidagi G. Kantor natijasi nihoyatda kutilmagan hol bo'ldi. G. Kantor, xususan, $n$ o'lchovli

$$Q^n = \{\mathbf{x} \in R^n : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

birlik kubning $[0,1]$ kesmaga ekvivalentligini isbotladi.

Masalan, $Q^2$ kvadratning $Q^1 = [0,1]$ kesmaga ekvivalentligini quyidagicha ko‘rsatish mumkin. Aytaylik, $(a,b)$ – birlik $Q^2$ kvadratning istalgan nuqtasi bo‘lsin. Bu nuqtaning koordinatalarini cheksiz o‘nli kasr sifatida yozamiz:

$$a = 0,a_1a_2a_3\ldots$$

$$b = 0,b_1b_2b_3\ldots$$

Agar bu koordinatalardan birortasi ikki xil o‘nli kasr ko‘rinishiga ega bo‘lsa (ya’ni 0 yoki 9 sonlari davriy qatnashsa), biz 9 soni davriy qatnashgan holni olamiz. Birlik $Q^2$ kvadratning $(a,b)$ nuqtasiga $Q^1 = [0,1]$ kesmaning

$$c = 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

nuqtasini mos qo‘yamiz. Ravshanki, bunday qurilgan $c = f(a,b)$ akslantirish teskarilanuvchidir, ya’ni u turli nuqtalarga turli nuqtalarni mos qo‘yadi. Bundan chiqdi, $Q^2$ kvadrat $[0,1]$ kesmaning biror $f(Q^2)$ qismiga ekvivalent ekan. E’tibor bering, bunda $f(Q^2) \neq Q^1$, chunki, masalan

$$c = 0,4590909090\ldots$$

nuqta $[0,1]$ kesmada yotsada, u $f(Q^2)$ to‘plamga tegishli emas.

Lekin shunga qaramasdan, $Q^2$ va $Q^1$ to‘plamlar bir xil quvvatga ega. Chunki, hozir ko‘rsatganimizdek, $Q^2$ kvadrat $Q^1$ kesmaning biror qismiga ekvivalent, kesma bo‘lsa, ravshanki, kvadratning biror qismiga ekvivalent. Bundan $Q^2$ va $Q^1$ to‘plamlarning o‘zaro ekvivalent ekanini keltirib chiqarish qiyin emas.

Shunday qilib, o‘zaro bir qiymatli akslantirishlar $n \neq m$ ko‘rsatkichli $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$ fazolarini farqlamas ekan, chunki bu fazolarning barchasi $\mathbb{R}$ sonlar o‘qiga ekvivalentdir.

**2. Uzluksiz akslantirishlar.** Uzluksiz akslantirishlar sinfi nisbatan muhimroq va ancha mazmundordir. Akslantirish uzluksizligining Koshi ma’nosidagi ta’rifini keltiraylik.

**Ta'rif.** *$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $\mathbb{R}^m$ fazoga o'tkazuvchi $f : E \to \mathbb{R}^m$ akslantirish va $\mathbf{a} \in E$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki,*

$$\mathbf{x} \in E, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta,$$

*shartdan*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| \ < \ \varepsilon$$

*tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f$ akslantirish $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Agar akslantirish $E$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u $E$ to'plamda uzluksiz deyiladi.

Navbatdagi tasdiqqa o'tishdan avval, $f : E \to \mathbb{R}^m$ akslantirish deganda biz $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$ vektor-funksiyani tushunishimizni yana eslatamiz, bunda har bir $f_j$ komponenta $n$ o'lchovli $\mathbf{x} \in E$ o'zgaruvchining funksiyasidir.

**11.3.1 - tasdiq.** *Berilgan $f : E \to \mathbb{R}^m$ vektor-funksiyaning $\mathbf{a} \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun shu nuqtada har bir $f_j,\ j = 1, 2, ..., m$ komponentaning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.*

**Isbot** 11.1.1-teoremaning isbotiga o'xshash bo'lib,

$$|f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a})| \ \leq \ |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| \ = \ \left( \sum_{k=1}^{m} |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{a})|^2 \right)^{1/2}$$

munosabatdan kelib chiqadi.

Biror kesmada berilgan uzluksiz sonli funksiyalar uchun o'rinli bo'lgan bir qator tasdiqlar vektor qiymatli funksiyalar uchun ham o'rinlidir. Bunda faqat kesmani ixtiyoriy kompakt bilan almashtirish yetarli. Misol sifatida navbatdagi ko'p foydalaniladigan tasdiqni keltiramiz.

**11.3.2 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ fazosining $E$ kompakt to'plami berilgan bo'lsin. Agar $f : E \to \mathbb{R}^m$ akslantirish uzluksiz bo'lsa, u holda $f(E)$ to'plam $\mathbb{R}^m$ fazosininig kompakt qismiy to'plami bo'ladi.*

**Isbot.** Ixtiyoriy $\mathbf{y}_k \in f(E)$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Ushbu $f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\mathbf{x}_k \in E$ ketma-ketlikni qaraymiz. Kompakt to'plam ta'rifiga ko'ra, biror $\mathbf{a} \in E$ nuqtaga yaqinlashuvchi $\mathbf{x}_{k_j}$ qismiy ketma-ketlik topiladi. O'z navbatida, $f$ akslantirishning uzluksizligiga ko'ra, mos $\mathbf{y}_{k_j} = f(\mathbf{x}_{k_j})$ ketma-ketlik $f(\mathbf{a}) \in f(E)$ nuqtaga yaqinlashadi. Bu esa $f(E)$ to'plamning kompaktligini anglatadi.

Ixtiyoriy uzluksiz akslantirishlar nihoyatda umumiy tabiatga ega va ularning xossalari, yuqorida keltirilgan G. Kantor natijasi singari, geometrik intuitsiyaga ziddek ko'rinishi mumkin. Masalan, Italiyalik matematik G. Peano $[0,1]$ kesmani butun $\{(x_1, x_2) \;:\; 0 \leq x_1 \leq 1,\; 0 \leq x_2 \leq 1\}$ kvadratga o'tkazuvchi uzluksiz akslantirish qurdi (bu akslantirish Peano egri chizig'i deb ataladi). Bundan $\mathbb{R}$ sonlar o'qini $\mathbb{R}^2$ tekislikka o'tkazuvchi uzluksiz akslantirish (ya'ni, butun tekislikni to'ldiruvchi uzluksiz egri chiziq) mavjudligi kelib chiqadi. Demak, $n < m$ shart bajarilganda, istalgan $\mathbb{R}^n$ fazosini $\mathbb{R}^m$ fazoga uzluksiz akslantirish mavjud ekan.

Shuni qayd etish zarurki, Peano qurgan uzluksiz akslantirish o'zaro bir qiymatli emas.

**3. Homeomorfizm.** Agar o'zaro bir qiymatli akslantirishning o'zi va teskarisi uzluksiz bo'lsa, bunday akslantirish *homeomorfizm* (yoki *homeomorf akslantirish*) deyiladi.

Masalan,

$$f(\mathbf{x}) \;=\; \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+|\mathbf{x}|^2}}$$

funksiya $\mathbb{R}^n$ fazo va $n$ o'lchovli $B = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \;:\; |\mathbf{y}| < 1\}$ ochiq shar orasida homeomorfizm o'rnatadi. Bunda teskari akslantirish

$$f^{-1}(\mathbf{y}) \;=\; \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{1-|\mathbf{y}|^2}}$$

ko'rinishga ega.

Xususan, $n = 1$ da bu akslantirish $\mathbb{R}$ sonlar o'qi va $(-1,1)$ interval o'rtasida o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz moslik o'rnatadi.

Bir o'lchovli holda har qanday uzluksiz akslantirish kesmani kesmaga o'tkazishini ko'rgan edik. Agarda bu uzluksiz akslantirish yana o'zaro bir qiymatli ham bo'lsa, u homeomorfizm bo'ladi, chunki bunda teskari akslantirishning uzluksiz bo'lishi shart (3-bobdagi 3.5.6 - teoremaga qarang).

Bu teoremaning ko‘p o‘lchovli analogi navbatdagi tasdiqdan iborat.

**11.3.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $E \in \mathbb{R}^n$ va $M \in \mathbb{R}^m$ kompakt to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar o‘zaro bir qiymatli $f : E \to M$ akslantirish uzluksiz bo‘lsa, uning teskarisi ham uzluksiz bo‘lib, natijada $f$ homeomorfizm bo‘ladi.*

**Isbot** 3.5.6 - teorema isbotidagi mulohazalarni so‘zma-so‘z qaytarishdan iborat.

**Eslatma.** 11.3.1 - teoremada kompaktlilik sharti muhimdir. Ko‘p o‘lchovli holda ixtiyoriy (kompakt bo‘lmagan) bog‘langan to‘plamni o‘zaro bir qiymatli akslantirishning uzluksizligidan, umuman aytganda, uning teskarisining uzluksizligi kelib chiqmaydi.

**11.3.1* - misol.** Quyidagi

$$Q = \{\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < t_1 < b, \ 0 \le t_2 < 2\pi\}$$

to‘g‘ri to‘rtburchakda aniqlangan va

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{t}) = t_1 \cos t_2, \\ f_2(\mathbf{t}) = t_1 \sin t_2 \end{cases} \tag{11.3.1}$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan $f : Q \to \mathbb{R}^2$ akslantirishni qaraylik.

Agar $b > a > 0$ bo‘lsa, $\mathbf{x} = f(\mathbf{t})$ akslantirish $Q$ to‘g‘ri to‘rtburchakni

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\}$$

halqaga o‘tkazadi.

Ravshanki, bu akslantirish uzluksiz va o‘zaro bir qiymatlidir.

Bunda, agar $\varphi(\mathbf{x})$ deb quyidagi

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}, & \text{birinchi kvadrantda,} \\[2ex] \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}, & \text{ikkinchi va uchinchi kvadrantlarda,} \\[2ex] 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}, & \text{to'rtinchi kvadrantda,} \\[2ex] 0, & \text{abssissa o'qida,} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & \text{ordinata o'qining musbat qismida,} \\[2ex] \dfrac{3\pi}{2}, & \text{ordinata o'qining manfiy qismida,} \end{cases}$$

funksiyani olsak, u holda teskari $\mathbf{t} = f^{-1}(\mathbf{x})$ akslantirish

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ t_2 = \varphi(x_1, x_2), \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili $\varphi(x_1, x_2)$ funksiyani

$$I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x_1 < b, \ x_2 = 0\}$$

intervalda uzluksizlikka tekshiraylik. Ravshanki, bunda $\varphi(x_1, 0) = 0$ bo'lsada, $\varphi(x_1, 0 - 0) = 2\pi$ ekanini tekshirish qiyin emas. Demak, $\varphi(x_1, x_2)$ funksiya uzluksiz emas; u $x_2$ o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $I$ intervalning har bir nuqtasida birinchi turdagi uzilishga ega bo'lib, bunda uning sakrashi $2\pi$ ga teng.

Shunday qilib, yuqoridagi eslatmada qayd qilinganidek, o'zaro bir qiymatli akslantirish uzluksiz bo'lsa ham, uni teskarisining uzluksiz bo'lishi shart emas ekan. Shuning uchun homeomorfizm ta'rifida akslantirishning o'zining ham, teskarisining ham uzluksizligi talab qilinadi.

Ravshanki, 11.3.1*-misolda qaralgan $Q$ ni $R$ ga akslantirish homeomorfizm emas.

**Eslatma.** Agar 11.3.1*-misolda $Q$ va $R$ o'rniga mos ravishda quyidagi ko'rinishda aniqlangan

$$Q_1 \ = \ \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : a < t_1 < b, 0 < t_2 < 2\pi\}$$

va

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\} \backslash \{(x_1, x_2) : a < x_1 < b, x_2 = 0\}$$

ochiq to'plamlarni olsak, u holda (11.3.1) akslantirish homeomorfizm bo'ladi.

Aytaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ va $M \subset \mathbb{R}^m$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlar orasidagi $f : E \to M$ uzluksiz akslantirish tushunchasi ochiq to'plam tushunchasi bilan chambarchas bog'liq. Ochiq to'plam deb har bir nuqtasi ichki nuqta bo'lgan to'plamga, ya'ni har bir nuqtasi o'zining biror atrofi bilan shu to'plamga tegishli bo'lgan to'plamga aytgan edik.

Yuqoridagi fikrimiz tasdig'i sifatida $\mathbf{a} \in E$ nuqtada uzluksizlikning Koshi ta'rifini eslatamiz: agar $f(\mathbf{a}) \in M$ nuqtaning istalgan $\varepsilon$-atrofi $V$ uchun $\mathbf{a}$ nuqtaning shunday $\delta$-atrofi $U$ topilsaki,

$$f(U \cap E) \ \subset \ V \tag{11.3.2}$$

shart bajarilsa, $f : E \to M$ akslantirish $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

E'tibor bering, bu ta'rifda atroflar o'lchovini ko'rsatish zarur emas, chunonchi, navbatdagi teng kuchli ta'rif o'rinlidir:

*agar $f(\mathbf{a}) \in M$ nuqtaning istalgan $V$ atrofi uchun $\mathbf{a}$ nuqtaning shunday $U$ atrofi topilib, (11.3.2) tegishlilik sharti bajarilsa, $f : E \to M$ akslantirishni $\mathbf{a} \in E$ nuqtada uzluksiz deymiz.*

Uzluksiz akslantirishda ochiq to'plamning aksi ochiq bo'lishi shart emasligini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan, masalan, $E$ to'plamda o'zgarmas bo'lgan funksiya, uning ixtiyoriy qismiy to'plamini nuqtaga akslantiradi, qaysiki ochiq to'plam emas.

Shunga qaramasdan, navbatdagi sodda tasdiq oʻrinli.

**11.3.3 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ ochiq toʻplam boʻlsin. Agar $f : E \to M \subset \mathbb{R}^n$ akslantirish uzluksiz va teskarilanuvchi boʻlsa, $f^{-1} : M \to E$ akslantirish ochiq toʻplamni ochiq toʻplamga oʻtkazadi.*

**Isbot.** Ixtiyoriy $G \subset M$ ochiq toʻplam uchun $\Omega = f^{-1}(G)$ toʻplamning ochiqligini isbotlaymiz. Buning uchun har bir $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqta oʻzining biror atrofi bilan $\Omega$ ga tegishli ekanini, ya'ni bunday nuqta $\Omega$ toʻplamining ichki nuqtasi ekanini koʻrsatamiz.

$G$ ochiq toʻplam boʻlgani uchun, $f(\mathbf{a})$ nuqta oʻzining biror $V$ atrofi bilan $G$ toʻplamga tegishli. $f$ akslantirishning uzluksizligi sababli, $\mathbf{a}$ nuqtaning shunday $U$ atrofi topiladiki, u uchun (11.3.2) shart bajariladi. Endi, birinchidan, $E$ ning ochiqligi tufayli, $U_1 = U \cap E$ toʻplam ham $\mathbf{a}$ nuqtaning atrofi boʻladi, ikkinchidan, (11.3.2) ga koʻra, $U_1 \subset \Omega$, ya'ni, $\mathbf{a}$ nuqta $\Omega$ toʻplamning ichki nuqtasi boʻladi.■

**Eslatma.** 11.3.1* - misoldan koʻrinib turibdiki, agar 11.3.3 - tasdiqda $E$ toʻplamning ochiqligini talab qilmasak, tasdiq oʻrinli boʻlmay qoladi. Haqiqatan, qayd qilingan misolda $R$ ochiq xalqa ochiq boʻlmagan $Q$ toʻgʻri toʻrtburchakka akslantiriladi.

Homeomorfizm, ya'ni oʻzi va teskarisi uzluksiz boʻlgan akslantirish, toʻplamning ochiqligini saqlash xossasiga ega.

**11.3.2 - teorema.** *Ochiq $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ toʻplamni ochiq $M \subset \mathbb{R}^n$ toʻplamga oʻtkazuvchi $f : \Omega \to M$ homeomorf akslantirish berilgan boʻlsin. U holda istalgan ochiq $G \subset \Omega$ qismiy toʻplam uchun $f(G)$ toʻplam ochiq boʻladi.*

**Isbot.** Aytaylik, $f : \Omega \to M$ akslantirish teorema shartlarini qanoatlantirsin. U holda, ravshanki, teskari $f^{-1} : M \to \Omega$ akslantirish ham homeomorfizm boʻladi. Bundan chiqdi, bu akslantirishga teskari boʻlgan $f$, 11.3.2 - tasdiqqa koʻra, har bir ochiq $G \subset \Omega$ toʻplamni ochiq $f(G) \subset M$ toʻplamga akslantiradi.■

**11.3.4 - tasdiq.** *Homeomorfizm bogʻlangan toʻplamni bogʻlangan toʻplamga akslantiradi.*

**Isbot**. Aytaylik, $f$ bogʻlangan $E$ toʻplamni $M$ toʻplamga homeomorf akslantirsin. $M$ toʻplamning bogʻlanganligini koʻrsatamiz.

Faraz qilaylik, $M$ toʻplamning ixtiyoriy ikki $\mathbf{b}_1$ va $\mathbf{b}_2$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. $E$ to‘plamdan shunday $\mathbf{a}_1$ va $\mathbf{a}_2$ nuqtalarni olamiz-ki, ular uchun $f(\mathbf{a}_j) = \mathbf{b}_j$, $j = 1, 2$ tengliklar bajarilsin. $E$ to‘plam bog‘langanligi sababli, $\mathbf{a}_1$ va $\mathbf{a}_2$ nuqtalarni tutashtiruvchi va butunligicha $E$ to‘plamda yotuvchi uzluksiz $L$ egri chiziq mavjud. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi 11.2.4 - teoremadan $f(L)$ ning ham uzluksiz egri chiziq ekani kelib chiqadi. Ravshanki, bu chiziq $\mathbf{b}_1 = f(\mathbf{a}_1)$ va $\mathbf{b}_2 = f(\mathbf{a}_2)$ nuqtalarni tutashtiradi hamda butunligicha $M$ da yotadi. Bu esa $M$ ning bog‘langan to‘plam ekanini anglatadi.■

Ochiq bog‘langan to‘plamni biz soha deb atagan edik. Sohaning yopilmasi $\overline{G} = G \cup \partial G$ ko‘rinishdagi yopiq to‘plam bo‘lib, bunda $\partial G$ berilgan $G$ soha chegarasidir.

**11.3.3 - teorema.** *Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ochiq to‘plamni $M \subset \mathbb{R}^n$ ochiq to‘plamga akslantiruvchi $f : \Omega \to M$ homeomorfizm berilgan bo‘lsin. U holda, $\overline{G} \subset \Omega$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $G$ soha uchun $E = f(G)$ to‘plam ham soha bo‘lib, bu akslantirishda $\partial G$ chegara $\partial E$ chegaraga o‘tadi.*

**Isbot.** 11.3.2 - teoremaga ko‘ra, $E = f(G)$ ochiq to‘plam bo‘lib, uning bog‘langan ekani 11.3.4 - tasdiqdan kelib chiqadi. Demak, $f(\partial G) = \partial f(G)$ tenglikni ko‘rsatish yetarli.

Agar $G^* = \Omega \setminus \overline{G}$ desak, $G$, $\partial G$ va $G^*$ to‘plamlar, ravshanki, o‘zaro kesishmaydi va ularning yig‘indisi $\Omega$ ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$G \cup \partial G \cup G^* = \Omega.$$

Agar $E^* = M \setminus \overline{E}$ deb belgilasak, $E^* = f(G^*)$ tenglik bajarilishini ko‘rish qiyin emas.

Agar yana $F = f(\partial G)$ desak, $f$ akslantirish o‘zaro bir qiymatli bo‘lgani sababli, $G$, $\partial G$ va $G^*$ to‘plamlar aksi, ya’ni, mos ravishda, $E$, $F$ va $E^*$ to‘plamlar ham o‘zaro kesishmaydi va ularning yig‘indisi $M$ ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$E \cup F \cup E^* = M.$$

Shunday qilib, yuqoridagi bayonimizdan $E$ va $E^*$ to‘plamlarning ochiq ekani kelib chiqadi. Demak, ularning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lib, chegaraga tegishli bo'la olmaydi. Shunday ekan, $E$ to'plam chegarasi $F$ to'plamda yotadi, ya'ni

$$\partial E \subset F.$$

Teskari tasdiq ham o'rinli ekanini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\mathbf{b} \in F$ va $V$ shu nuqtaning ixtiyoriy atrofi bo'lsin. U holda, $F$ to'plam ta'rifiga ko'ra, $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\mathbf{a} \in \partial G$ nuqta topiladi. $f$ akslantirishning uzluksizligi sababli, $\mathbf{a}$ nuqtaning shunday $U$ atrofi topiladiki, u uchun $f(U) \subset V$ bo'ladi.

Nihoyat, $\mathbf{a}$ nuqta $G$ to'plamning chegaraviy nuqtasi bo'lgani uchun, uning ko'rsatilgan $U$ atrofida $\mathbf{x} \in G$ va $\mathbf{y} \notin G$ nuqtalar topiladi. Ravshanki, u holda $f(\mathbf{x}) \in E$ va $f(\mathbf{y}) \notin E$, buning ustiga bu ikki nuqta $\mathbf{b}$ nuqtaning $V$ atrofida yotadi. Demak, $\mathbf{b}$ nuqta $E$ sohaning chegaraviy nuqtasi bo'lar ekan va bu nuqtaning tanlanishi erkin bo'lgani sababli,

$$F \subset \partial E.$$

Shunday qilib, $F = \partial E$, ya'ni $f(\partial G) = \partial f(G)$.■

**Eslatma.** "Homeomorfizm" iborasini atoqli fransuz matematigi A. Puankare (H. Poincare) kiritgan.

Shuni ta'kidlash joizki, Kantorning barcha $\mathbb{R}^n$ fazolarining teng kuchliligi haqidagi natijasi u qurgan o'zaro bir qiymatli, lekin uzluksiz bo'lmagan akslantirishga asoslangan. Boshqa tomondan, $n < m$ bo'lganda Peano misoliga asoslanib qurilgan $\mathbb{R}^n$ fazosini $\mathbb{R}^m$ fazosiga o'tkazuvchi akslantirish uzluksiz, lekin o'zaro bir qiymatli emas. Shunday qilib, o'zaro bir qiymatli akslantirish ham, xuddi uzluksiz akslantirish kabi, fazo o'lchovini saqlamasligi mumkin ekan.

Bu borada, agar $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$ fazolari homeomorf bo'lsa, u holda albatta $n = m$ bo'lishi haqidagi Hollandiyalik matematik L. Brauerning (L. Brouwer) teoremasi ajoyib bo'lib chiqdi. Shunday qilib, homeomorfizmda (ya'ni, o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz akslantirishda), bizga geometrik intuitsiyamiz bildirganidek, fazolar o'lchovi saqlanar ekan.

## 11.4-§. Misollar

**1 - misol**. Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ elementlaridan tuzilgan $\mathbf{x}_k$ ketma-ketlik yaqinlashsin, $\mathbf{y}_k$ ketma-ketlik esa, uzoqlashsin. U holda $\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k$ ketma-ketlikning yaqinlashishi haqida nima deyish mumkin?

**Ko'rsatma**. Sonli ketma-ketliklarda ikki yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ayirmasi ham yaqinlashuvchi bo'ladi (birinchi qismdagi 2.1.1 - va 2.1.2 - teoremalar natijasiga qarang). 11.1.1 - teoremadan foydalanib, bu tasdiqni $\mathbb{R}^n$ elementlari uchun isbotlang.

**2 - misol**. $z = f(\sqrt{x+y})$ tenglama bilan berilgan sirt xarakterini aniqlang hamda sath chiziqlarini toping.

**Ko'rsatma**. Faqat bitta $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ o'zgaruvchiga bog'liq funksiyalar radial funksiyalar deyiladi. Berilgan funksiya aynan shunday funksiyadir. Bunday funksiyalar grafigi $z = f(t)$ bir o'zgaruvchili funksiya grafigini $Oz$ o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladi. Masalan, $f(t) = t$ bo'lsa, bunga mos grafik konusdan iboratdir.

Biror $g(\mathbf{x})$ ko'p o'zgaruvchili funksiya sath chizig'i (argumentlar soni uchdan katta bo'lganda sath sirti deyiladi) deb bu funksiya bir xil qiymat qabul qiladigan nuqtalar to'plamiga aytiladi, ya'ni sath chizig'i $g(\mathbf{x}) = C$ tenglama bilan aniqlanadi.

**3 - misol**. Quyidagi

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x_1 \to 0}\{\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)\} = 1, \qquad \lim_{x_2 \to 0}\{\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)\} = -1$$

bo'lsada, $\lim_{\mathbf{x} \to 0} f(\mathbf{x})$ mavjud emas ekanini tekshiring.

**Ko'rsatma**. Birinchi ikki limitni hisoblash oson. Oxirgi limitni tekshirish uchun $\mathbf{x_k} = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ va $\mathbf{y_k} = (\frac{2}{k}, \frac{1}{k})$ ketma-ketliklarga mos kelgan limitlarni hisoblang.

**4 - misol**. Quyidagi

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin\frac{1}{x_1} \sin\frac{1}{x_2}$$

funksiya uchun

$\lim_{x_1\to 0}\{\lim_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)\}$ va $\lim_{x_2\to 0}\{\lim_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)\}$ takroriy limitlar mavjud bo‘lmasada, $\lim_{\mathbf{x}\to 0} f(\mathbf{x}) = 0$ ekanini tekshiring.

**Ko‘rsatma**. Takroriy limitlar mavjud emasligini tekshirish oson. Oxirgi limitni hisoblash maqsadida berilgan funksiya uchun, barcha $x_1 \neq 0$ va $x_2 \neq 0$ larda o‘rinli bo‘lgan, $0 \leq |f(x_1,x_2)| \leq |x_1|+|x_2|$ bahodan foydalaning.

**5 - misol**. Agar $f(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$ funksiyada qutb koordinatalariga o‘tsak, ya’ni $x = \rho\cos\varphi$ va $y = \rho\sin\varphi$ almashtirish bajarsak, $\varphi$ burchakning qanday qiymatlari uchun quyidagi

$$\lim_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

limit mavjud bo‘ladi?

**Ko‘rsatma**. $f(x,y)$ funksiya qutb koordinatalarida $e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$ ko‘rinishga ega ekanini qayd qilish yetarli.

**6 - misol**. $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 9$ chiziqli funksiyani $\mathbb{R}^3$ fazoda tekis uzluksizlikka tekshiring.

**Ko‘rsatma**. $\mathbb{R}^3$ fazosining ixtiyoriy $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ nuqtalari uchun

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq 2|x_1 - y_1| + 3|x_2 - y_2| + 5|x_3 - y_3|$$

bahodan foydalaning.

**7 - misol**. Quyidagi $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ funksiyani $\mathbb{R}^n$ fazoda tekis uzluksizlikka tekshiring.

**Ko‘rsatma**. Istalgan $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ uchun

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$$

tengsizlik o‘rinli ekanini isbotlang.

**8 - misol**. Agar biror $G \subseteq \mathbb{R}^2$ sohada aniqlangan $f(x_1,x_2)$ funksiya $x_1$ bo‘yicha uzluksiz bo‘lib, $x_2$ bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, ya’ni bu funksiya uchun biror $L$ o‘zgarmas bilan

$$|f(x_1,x_2') - f(x_1,x_2'')| \leq L|x_2' - x_2''|, \quad (x_1,x_2'),(x_1,x_2'') \in G,$$

baho o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x_1, x_2)$ funksiya $G$ sohada uzluksiz ekanini ko‘rsating.

**Ko‘rsatma**. Lipshits shartidan foydalanib, $G$ sohaning istalgan $\mathbf{x}$ va $\mathbf{x^0} = (x_1^0, x_2^0)$ nuqtalari uchun

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x^0})| \leq L|x_2 - x_2^0| + |f(x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)|$$

bahoni isbotlang. So‘ngra berilgan funksiyaning birinchi argument bo‘yicha uzluksizligidan foydalaning.

**9 - misol**. Agar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ lar uchun aniqlangan $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$ akslantirishda

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{|x_1| + |x_2| + \cdots |x_n|}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \sin\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$$

bo‘lsa, bu akslantirishning uzluksiz ekanini ko‘rsating.

**Ko‘rsatma**. 11.3.1 - tasdiqdan foydalaning.

**10 - misol**. Quyidagi

$$f(x) = \mathrm{ctg}\,\big(\pi\frac{x-a}{b-a}\big)$$

funksiya $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ochiq interval va $\mathbb{R}$ sonlar o‘qi orasida homeomorfizm o‘rnatishini ko‘rsating.

**Ko‘rsatma**. Teskari funksiya uzluksiz ekanini isbotlash yetarli.

# 12-bob. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni differensiallash

## 12.1-§. Xususiy hosilalar

**1. Xususiy hosilalar.** Faraz qilaylik, ko‘p o‘zgaruvchili $f$ funksiya berilgan bo‘lsin. Agar bitta o‘zgaruvchidan boshqa barcha o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qarasak, biz bir o‘zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. Bu bir o‘zgaruvchili funksiyani differensiallasak, biz xususiy hosila deb ataluvchi hosilaga ega bo‘lamiz. Aniqroq tasavvur qilish maqsadida, biz avval ikki o‘zgaruvchili funksiyalarni qaraymiz va $\mathbb{R}^2$ fazo elementlarini $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ deb belgilaymiz, bunda $x \in \mathbb{R}$ va $y \in \mathbb{R}$.

**Ta’rif.** *$f(x, y)$ funksiya $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin. $f$ funksiyaning $(a, b)$ nuqtadagi $x$ o‘zgaruvchi bo‘yicha **xususiy hosilasi** deb*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

*limitga aytiladi va u quyidagi*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f'_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \qquad (12.1.1)$$

*simvollardan biri orqali belgilanadi.*

Xuddi shu singari $y$ o‘zgaruvchi bo‘yicha $f'_y$ xususiy hosila ham aniqlanadi.

**12.1.1 - misol.** Quyidagi

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

funksiyaning istalgan $(x, y)$ nuqtadagi xususiy hosilalari uchun

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y \cos(xy), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \cos(xy)$$

tengliklar o'rinli.

**12.1.2 - misol.** Avvalgi bobda qaralgan (11.2.9) funksiya, ya'ni

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{x^4+y^4}, & \text{agar } (x,y)\neq(0,0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x,y)=(0,0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \tag{12.1.2}$$

funksiya misolida har ikki $f'_x$ va $f'_y$ xususiy hosilaga ega bo'lgan funksiya hattoki chegaralanmagan ham bo'lishi mumkinligini ko'rsa bo'ladi. Haqiqatan,

$$f'_x(x,y) \;=\; \begin{cases} y\dfrac{y^4-3x^4}{(x^4+y^4)^2}, & \text{agar } (x,y)\neq(0,0) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (x,y)=(0,0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \tag{12.1.3}$$

tenglik bajarilishini ko'rish qiyin emas. Xuddi shu singari tenglik $f'_y$ uchun ham o'rinli. Demak, qaralayotgan funksiya $\mathbb{R}^2$ fazoning har bir nuqtasida xususiy hosilalarga ega bo'lsada, u koordinatalar boshining istalgan atrofida chegaralanmagan.

Umumiy holda ixtiyoriy $n$ ta o'zgaruvchili funksiyaning qismiy hosilalari ham yuqoridagidek kiritiladi. Buning uchun $\mathbf{e}_k$ orqali $k$-nomerli komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentalari nolga teng bo'lgan

$$\mathbf{e}_k \;=\; (0,...,1,0,...,0)$$

vektorni belgilaylik. Shubhasiz, har qanday $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}$ vektor uchun

$$\mathbf{a} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{e}_k$$

tenglik o'rinli.

**Ta'rif.** *$f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi $x_k$ o'zgaruvchi bo'yicha* ***xususiy hosilasi*** *deb*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_k)-f(\mathbf{a})}{h}$$

*limitga aytiladi va u quyidagi*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \;=\; f'_{x_k}(\mathbf{a}) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_k)-f(\mathbf{a})}{h} \tag{12.1.4}$$

*simvollardan biri orqali belgilanadi.*

(12.1.4) tenglikdan ko'rinib turibdiki, berilgan funksiyaning biror o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasini topish uchun, biz qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb hisoblab, funksiyani o'sha o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashimiz kerak ekan.

**12.1.3 - misol.** Quyidagi

$$f(\mathbf{x}) \;=\; |\mathbf{x}|^2 \;=\; x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \tag{12.1.5}$$

funksiyaning ixtiyoriy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nuqtadagi xususiy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \;=\; 2x_k \tag{12.1.6}$$

ko'rinishga ega.

**12.1.4 - misol.** Bir o'zgaruvchili holdagidek, $|\mathbf{x}|$ funksiya $\mathbb{R}^n$ fazoda uzluksiz bo'lib, koordinatalar boshidan tashqari barcha nuqtalarda qismiy hosilalarga ega. Haqiqatan,

$$f(\mathbf{x}) \;=\; |\mathbf{x}| \;=\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \tag{12.1.7}$$

funksiyaning ixtiyoriy $\mathbf{x} \neq 0$ nuqtadagi qismiy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{x_k}{|\mathbf{x}|} \tag{12.1.8}$$

ko'rinishga ega.

**2. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi.** Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun differensiallanuvchanlik tushunchasini xususiy hosilalarning mavjudligi bilan bog'lamaslik kerak ekani (12.1.2) misoldan ko'rinib turibdi. Buning o'rniga funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishining 4.1.1 - teoremada keltirilgan ta'rifini asos qilib olish tabiiyroq bo'ladi.

Bir o‘zgaruvchili funksiya holidagi kabi, agar $\alpha(\mathbf{h})$ funksiya yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ larda aniqlangan bo‘lib,

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\alpha(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|^k} = 0 \tag{12.1.9}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\alpha(\mathbf{h})$ kattalikni $\mathbf{h} \to 0$ da $|\mathbf{h}|^k$ ga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik deymiz va

$$\alpha(\mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|^k), \quad \mathbf{h} \to 0, \tag{12.1.10}$$

deb yozamiz.

Xususan,

$$\alpha(\mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|), \quad \mathbf{h} \to 0, \tag{12.1.11}$$

belgilash

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\alpha(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = 0 \tag{12.1.12}$$

tenglikning bajarilishini anglatadi.

**Ta’rif.** *Agar $f$ funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, shunday $\mathbf{A} = (A_1, A_2, ..., A_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor topilsaki, u uchun*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = (\mathbf{A}, \mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|), \quad \mathbf{h} \to 0, \tag{12.1.13}$$

*tenglik bajarilsa, u holda bu funksiyani $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi deymiz.*

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi qo‘shiluvchi $\mathbf{A}$ va $\mathbf{h}$ vektorlarining skalyar ko‘paytmasidir. (12.1.13) tenglikni batafsilroq

$$f(a_1 + h_1\,, a_2 + h_2\,, ..., a_n + h_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) =$$

$$= A_1 h_1 + A_2 h_2 + ... + A_n h_n + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + ... + h_n^2}\right) \tag{12.1.14}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Keltirilgan ta’rifdan ko‘p o‘zgaruvchili differensiallanuvchi funksiyaning har bir o‘zgaruvchisi bo‘yicha xususiy hosilaga ega bo‘lishi kelib chiqadi.

**12.1.1 - teorema.** *Agar $f$ funksiya biror $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu nuqtada $f$ funksiyaning har bir o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilalari mavjud bo'lib,*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\, h_k \ + o(|\mathbf{h}|), \quad \mathbf{h} \to 0, \quad (12.1.15)$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Shartga ko'ra $f$ differensiallanuvchi bo'lgani uchun (12.1.13) tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, unga teng kuchli bo'lgan (12.1.14) tenglik ham bajariladi. Faraz qilaylik, $\mathbf{h}$ vektor

$$\mathbf{h} \ = \ (h_1, 0, 0, ..., 0)$$

ko'rinishga ega bo'lib, $h_1$ shunday haqiqiy son bo'lsinki, $\mathbf{a}+\mathbf{h}$ vektor $f$ funksiyaning aniqlanish sohasida yotsin. U holda (12.1.14) tenglikni

$$f(a_1 + h_1\,, a_2, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) \ = \ A_1 h_1 + o\,(|h_1|)$$

deb yozish mumkin.

Demak,

$$\frac{f(a_1 + h_1\,, a_2, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h_1} \ = \ A_1 + o(1).$$

Agar $h_1$ ni nolga intiltirsak, xususiy hosila ta'rifiga ko'ra,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \ = \ A_1$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Xuddi shu usulda boshqa o'zgaruvchilar bo'yicha ham qismiy hosilalar mavjudligini va ular uchun

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \ = \ A_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

tengliklarning bajarilishini ko'rsatish mumkin.

Endi $A_k$ larning topilgan qiymatlarini (12.1.14) formulaga qo‘ysak, talab qilingan (12.1.15) munosabatni olamiz.■

(12.1.15) formulani ixchamroq ko‘rinishga keltirish maqsadida quyidagi

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right) \tag{12.1.16}$$

belgilashni kiritamiz ($\nabla$ belgisi irlandiyalik matematik Hamilton (W. R. Hamilton, (1805–1865)) tomonidan kiritilgan bo‘lib, ko‘rinishi o‘xshash bo‘lgan musiqa asbobi nomi bilan ≪nabla≫ deb o‘qiladi).

(12.1.16) tenglikning o‘ng tomonidagi vektor $f$ funksiyaning $\mathbf{x}$ nuqtadagi *gradienti* deb ataladi va u

$$\mathrm{grad} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \tag{12.1.17}$$

simvollar orqali ham belgilanadi.

Agar $f$ funksiya $\mathbf{x}$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, (12.1.16) belgilash yordamida (12.1.15) tenglikni

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \tag{12.1.18}$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu yerda nuqta orqali skalyar ko‘paytirish belgilangan.

**3. Ikki o‘zgaruvchili funksiya differensiallanuvchi bo‘lishining geometrik ma’nosi.** Aytaylik, ikki o‘zgaruvchili $f(x, y)$ funksiya $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin. Yuqorida qayd qilganimizdek, bunday funksiyaning grafigi uch o‘lchovli fazoda

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y)\}$$

ko‘rinishdagi sirtdan iborat.

Agar $c = f(a, b)$ desak, $(a, b, c)$ nuqta, albatta, shu grafikda yotadi. Ravshanki, har qanday $\lambda$ va $\mu$ haqiqiy sonlar uchun $\mathbb{R}^3$ fazosida

$$z = f(a, b) + \lambda(x - a) + \mu(y - b) \tag{12.1.19}$$

tenglama bilan berilgan $P$ tekislik grafikning $(a, b, c)$ nuqtasidan o‘tadi.

Agar

$$f(x, y) = f(a, b) + \lambda(x - a) + \mu(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}) \qquad (12.1.20)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $P$ tekislik $f$ funksiya grafigiga $(a, b, f(a, b)) \in \mathbb{R}^3$ nuqtada urinadi deymiz. Boshqacha aytganda, agar berilgan funksiya bilan tekislik tenglamasi orasidagi farq biror nuqta atrofida bu nuqtagacha bo‘lgan masofaga nisbatan yuqoriroq tartibdagi cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, u holda $P$ tekislik $f$ funksiya grafigiga o‘sha nuqtada urinadi deymiz.

Ravshanki, agar (12.1.20) tenglik bilan (12.1.15) differensiallanuvchi bo‘lishlik shartini solishtirsak, biz navbatdagi tasdiqqa ega bo‘lamiz: $P$ tekislikning $f$ funksiya grafigiga $(a, b, f(a, b))$ nuqtada urinishi uchun $f$ funksiya $(a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, urinma tekislik tenglamasining

$$z \;=\; f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \qquad (12.1.21)$$

ko‘rinishga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

**4. Murakkab funksiyaning differensiallanuvchanligi.** Ushbu bandda biz ko‘p o‘zgaruvchili murakkab funksiyaning differensiallanuvchi bo‘lish shartlarini o‘rganamiz.

Buning uchun biz $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamda aniqlangan biror $f : E \to \mathbb{R}$ funksiyani va $V \subset \mathbb{R}^m$ to‘plamda aniqlangan $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ funksiyani qaraymiz. Bunda $\varphi$ vektor-funksiya bo‘lib, agar $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$ desak, u

$$\varphi(\mathbf{t}) \;=\; (\varphi_1(\mathbf{t}), \varphi_2(\mathbf{t}), ..., \varphi_n(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in V,$$

ko‘rinishga ega.

Biz $\varphi$ akslantirishning qiymatlar to‘plami $E$ da yotsin deb faraz qilamiz, ya’ni istalgan $\mathbf{t} \in V$ uchun

$$x_1 \;=\; \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m),$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_m), \\
&\dots \\
x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_m),
\end{aligned}
$$

koordinatalarga ega bo‘lgan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nuqta $E$ to‘plamga tegishli bo‘lsin.

U holda, yuqorida qayd qilinganidek,

$$F(\mathbf{t}) \;=\; f[\varphi(\mathbf{t})], \quad t \in V,$$

ko‘rinishda ta’sir qiluvchi $F = f[\varphi] : V \to \mathbb{R}$ murakkab funksiyani aniqlash mumkin.

Navbatdagi teoremada murakkab funksiyaning differensiallanuvchi bo‘lishi uchun shartlar va uning xususiy hosilalarini hisoblash qoidasi keltiriladi.

**12.1.2 - teorema.** *$V \subset \mathbb{R}^m$ to‘plamda aniqlangan $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ vektor-funksiyaning qiymatlar to‘plami $E \subset \mathbb{R}^n$ da yotsin va shu to‘plamda aniqlangan $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo‘lsin.*

*Agar $\varphi(\mathbf{t})$ funksiyaning har bir komponentasi biror $\mathbf{a} \in V$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $F(\mathbf{t}) = f[\varphi(\mathbf{t})]$ murakkab funksiya $\mathbf{t} = \mathbf{a}$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, uning xususiy hosilalari uchun*

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}), \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{12.1.22}$$

*formulalar o‘rinli bo‘ladi.*

**Isbot.** Shartga ko‘ra, $\varphi_j(\mathbf{t})$ funksiyalar $\mathbf{a}$ nuqtada differensiallanuvchi. Bundan chiqdi, ixtiyoriy yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ vektor uchun, (12.1.15) formulaga ko‘ra,

$$\varphi_j(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \varphi_j(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}) h_k + o(|\mathbf{h}|) \tag{12.1.23}$$

tenglik bajariladi.

Agar

$$\Delta\varphi = \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{a}) \tag{12.1.24}$$

deb belgilasak, (12.1.23) tenglikka ko‘ra, bu vektorni har bir komponentasi $\mathbf{h} \to 0$ da nolga intiladi. Demak, 11.1.1 - teoremaga asosan, $\mathbf{h} \to 0$ da $\Delta\varphi \to 0$, yoki, yanada aniqroq,

$$\Delta\varphi = O(|\mathbf{h}|). \tag{12.1.25}$$

Shunday ekan, $f$ funksiyaning differensiallanuvchanligi tufayli, (12.1.17) va (12.1.15) tengliklarga ko‘ra,

$$f(\mathbf{b}+\Delta\varphi)-f(\mathbf{b}) = \nabla f(\mathbf{b})\cdot\Delta\varphi+o(|\Delta\varphi|) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b})\Delta\varphi_j+o(|\mathbf{h}|) \tag{12.1.26}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Ma’lumki, $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$ va (12.1.24) belgilashga ko‘ra, $\mathbf{b} + \Delta\varphi = \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{h})$. Shuning uchun, bevosita $F(\mathbf{t}) = f[\varphi(\mathbf{t})]$ murakkab funksiyaning ta’rifi va (12.1.23)-(12.1.26) formulalardan

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}+\Delta\varphi) - f(\mathbf{b}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b})\Delta\varphi_j + o(|\mathbf{h}|) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \left( \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}) h_k + o(|\mathbf{h}|) \right) + o(|\mathbf{h}|).$$

tenglik kelib chiqadi.

Bundan, yig‘ish tartibini o‘zgartirib, quyidagi

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{b}) \, \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{a}) \right) h_k + o(|\mathbf{h}|)$$

tenglikni olamiz.

Hosil bo'lgan tenglik, (12.1.15) ga ko'ra, $F(\mathbf{t})$ murakkab funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini va uning xususiy hosilalarini (12.1.22) formulalar bilan hisoblanishini anglatadi.■

**1 - eslatma.** Agar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_k} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k}, ..., \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\right)$$

deb belgilash kiritsak, ravshanki, (12.1.22) tenglikni

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(\mathbf{a}), \quad k = 1, 2, ..., m,$$

kabi yozish mumkin.

**2 - eslatma.** Agar $\varphi$ akslantirish har bir $k$ o'lchovli $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ vektorga biror $n$ o'lchovli $\varphi(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$ vektorni mos qo'ysa, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ deb yozamiz. Bunda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix} \tag{12.1.27}$$

simvol orqali $\varphi$ vektor-funksiya komponentalarining qismiy hosilalaridan iborat $(n \times k)-$ matritsani belgilaymiz. (12.1.16) vektorni (12.1.27) matritsaga ko'paytirish qoidasiga ko'ra, (12.1.22) tenglikni

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{t}} \tag{12.1.28}$$

ko'rinishda, ya'ni xuddi bir o'zgaruvchili funksiya uchun zanjir qoidasi singari yozish mumkin (bunda biz (12.1.17) belgilashdan foydalandik).

**5. Yo'nalish bo'yicha hosila.** Faraz qilaylik, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu nuqtaning o'zida differensiallanuvchi bo'lgan $f$ funksiya berilgan bo'lsin. 12.1.1 - teoremaga ko'ra,

$f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya har bir $x_j$ o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilaga ega, ya'ni $f$ ni, qolgan koordinatalarni tayinlab, shu bir o'zgaruvchining funksiyasi deb qarasak, bu funksiya o'sha koordinata o'qi bo'ylab differensiallanuvchidir. Boshqacha aytganda, agar $\mathbf{s}$ simvoli orqali koordinata o'qlaridan biri bo'ylab yo'naltirilgan birlik vektorni belgilasak, u holda faqat $t$ o'zgaruvchi funksiyasi deb qaralgan $f(\mathbf{a} + t\mathbf{s})$ funksiya $t = 0$ nuqtada hosilaga ega va bu hosila mos xususiy hosila bilan ustma-ust tushadi.

Endi $\mathbf{s}$ deb koordinata o'qlari bilan $\alpha_1, \alpha_2$ va $\alpha_3$ burchaklarni tashkil qiluvchi birlik vektorni belgilaylik. Bu vektorning koordinata o'qlariga proeksiyalari yuqoridagi burchaklarning kosinuslari bo'lgani sababli,

$$\mathbf{s} \;=\; (\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \cos\alpha_3) \tag{12.1.29}$$

deb yozishimiz mumkin.

Agar $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s})$ ni $t$ ning bir o'zgaruvchili funksiyasi deb qarasak, u $t = 0$ da differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi, 12.1.2 - teoremaga ko'ra,

$$F'(t) \;=\; \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}\cos\alpha_j$$

formula yordamida hisoblanadi.

Bu hosilaga *$f$ funksiyaning* $\mathbf{s}$ *yo'nalish bo'yicha hosilasi* deb ataladi va u

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \;=\; \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}\cos\alpha_j$$

kabi belgilanadi.

Agar gradient ta'rifini yodga olsak, oxirgi tenglikni gradient va $\mathbf{s}$ vektorning skalyar ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \;=\; \nabla f \cdot \mathbf{s}.$$

**12.1.5 - misol.** Quyidagi

$$f(\mathbf{x}) \;=\; |\mathbf{x}|^2$$

funksiyaning ixtiyoriy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nuqtadagi (12.1.29) yo'nalish bo'yicha hosilasini hisoblang.

Ravshanki,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x_1, 2x_2, 2x_3) = 2\mathbf{x}.$$

Demak,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \nabla f \cdot \mathbf{s} = 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}.$$

Xuddi shu usulda ixtiyoriy $n$ o'zgaruvchili funksiya uchun yo'nalish bo'yicha hosila aniqlanadi. Chunonchi, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu nuqtaning o'zida differensiallanuvchi bo'lgan $f$ funksiya berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_n)$ ixtiyoriy birlik vektor bo'lsin, ya'ni

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2} = 1.$$

Bu vektorni har bir komponentasining absolyut qiymati 1 dan katta bo'lmagani uchun, bir qiymatli aniqlangan shunday $\alpha_j$ burchaklar topiladiki, ular uchun

$$s_j = \cos\alpha_j, \quad 0 \leq \alpha_j \leq \pi, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

tengliklar bajariladi.

Shunday qilib, har bir birlik vektorni

$$\mathbf{s} = (\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ ...,\ \cos\alpha_n) \tag{12.1.30}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vektor-funksiya

$$\varphi(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{s}$$

tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, u holda uning qiymatlar to'plami $\mathbf{a}$ nuqtadan $\mathbf{s}$ yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Endi $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s})$ funksiyani $t$ ning bir o'zgaruvchili funksiyasi deb qarasak, u $t = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi $\mathbf{s}$ yo'nalish bo'yicha hosilasi deyiladi. 12.1.2 - teoremaga ko'ra, $\mathbf{s}$ yo'nalish bo'yicha hosila

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cos \alpha_j = \nabla f \cdot \mathbf{s} \qquad (12.1.31)$$

ko'rinishga ega.

Navbatdagi tasdiqqa ko'ra, differensiallanuvchi funksiya gradienti bu funksiya grafigining «eng tik» ko'tarilishining yo'nalishini aniqlaydi.

**12.1.1 - tasdiq.** *Agar* $\mathbf{s}^* = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ *desak,*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}^*} = \max_{|\mathbf{s}|=1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = |\nabla f| \qquad (12.1.32)$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot.** (12.1.31) tenglikka Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llasak,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right| = |\nabla f \cdot \mathbf{s}| \leq |\nabla f| \cdot |\mathbf{s}| = |\nabla f| \qquad (12.1.33)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Yana o'sha (12.1.31) tenglikka ko'ra,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}^*} = \nabla f \cdot \mathbf{s}^* = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = |\nabla f|. \qquad (12.1.34)$$

Ravshanki, (12.1.33) va (12.1.34) munosabatlardan talab qilingan (12.1.32) tenglik kelib chiqadi.■

Shunday qilib, biror nuqtadagi yo'nalish bo'yicha hosila o'zining eng katta qiymatiga gradient yo'nalishi bo'yicha erishar ekan.

**12.1.1 - lemma.** *Berilgan* $f$ *funksiya biror* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sohada differensiallanuvchi bo'lib,* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *kesma butunligicha* $\Omega$ *da yotsin. Agar bu kesmaning har bir nuqtasida*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \qquad (12.1.35)$$

*tenglik o'rinli bo'lsa,* $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ *bo'ladi.*

**Isbot.** $\mathbf{h} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ deb belgilab, quyidagi

$$F(t) \;=\; f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

bir o'zgaruvchili funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya $t$ bo'yicha $[0,1]$ kesmada differensiallanuvchidir. Shunday ekan, hosilani murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bo'yicha topib, (12.1.35) shartni e'tiborga olsak,

$$F'(t) \;=\; \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \;=\; 0, \quad 0 \le t \le 1, \tag{12.1.36}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Lagranj formulasiga ko'ra, $0 < t < 1$ intervaldan shunday $t$ topiladiki, u uchun

$$F(1) \;-\; F(0) \;=\; F'(t)$$

tenglik bajariladi. Demak, (12.1.36) tenglikka asosan, $F(1) = F(0)$, ya'ni $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$.■

Eslatib o'tamiz, soha deb ochiq bog'langan to'plamga aytgan edik.

**12.1.3 - teorema.** *Faraz qilaylik,* $f$ *funksiya biror* $\Omega \subset R^n$ *sohada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar bu sohaning har bir nuqtasida*

$$\nabla f(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

*tenglik bajarilsa, u holda* $f$ *funksiya* $\Omega$ *da o'zgarmas bo'ladi.*

**Isbot.** Aytaylik, $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ berilgan $\Omega$ sohaning ixtiyoriy ikki nuqtasi bo'lsin. Bu ikki nuqtani $\Omega$ da butunligicha yotuvchi siniq chiziq bilan tutashtiramiz (11.1.3 - tasdiqqa asosan buning imkoni bor). U holda, 12.1.1 - lemmaga asosan, bu siniq chiziqning har bir kesmasida $f$ funksiya o'zgarmas bo'ladi. Demak, $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ va bundan chiqdi, $f$ funksiya $\Omega$ sohada o'zgarmas bo'lar ekan.■

**6. Yuqori tartibli xususiy hosilalar.** Faraz qilaylik, ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiya biror $\Omega \in \mathbb{R}^2$ sohada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ xususiy hosilaga ega bo'lib, bu hosila ham, o'z navbatida, $\Omega$ sohada xuddi o'sha

$x$ o‘zgaruvchi bo‘yicha

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

xususiy hosilaga ega bo‘lsin.

Bu hosila $f$ funksiyaning $x$ o‘zgaruvchi bo‘yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilasi deb atalib,

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

ko‘rinishda belgilanadi.

Xuddi shu kabi $y$ o‘zgaruvchi bo‘yicha ikkinchi tartibli qismiy hosila aniqlanadi:

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Endi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ xususiy hosila $\Omega$ da $y$ bo‘yicha xususiy hosilaga ega bo‘lsin deylik:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Bu hosila $f$ funksiyaning $x$ va $y$ bo‘yicha ikkinchi tartibli (aralash) xususiy hosilasi deb ataladi va

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

kabi belgilanadi.

Shunday qilib, bu ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilani topish uchun avval $f$ funksiyani $x$ bo‘yicha, so‘ngra $y$ bo‘yicha differensiallash kerak.

Xuddi shu kabi quyidagi

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

ikkinchi tartibli aralash xususiy hosila aniqlanadi.

**12.1.6 - misol.** Quyidagi

$$f(x,y) \;=\; y\sin x$$

funksiyani qaraylik.

Bu funksiyaning har ikki $f'_x$ va $f'_y$ xususiy hosilaga ega bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bunda

$$f'_x(x,y) \;=\; y\cos x$$

va

$$f'_y(x,y) \;=\; \sin x.$$

Demak, har qanday $x$ va $y$ lar uchun

$$f''_{xy}(x,y) \;=\; f''_{yx}(x,y) \;=\; \cos x.$$

Shunday qilib, $f(x,y) \;=\; y\sin x$ funksiyaning xususiy hosilalari barcha $x$ va $y$ lar uchun

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{12.1.37}$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Albatta, (12.1.37) tenglikni funksiyalarning juda keng sinfi uchun bajarilishini kutish tabiiydir. Bu haqiqatan ham shunday va biz bu tasdiqni quyida isbotlaymiz. Lekin, shunga qaramasdan, bu tenglikni doimo o'rinli bo'ladi deb bo'lmaydi, chunki shunday funksiyalar ham borki, ular har ikki xususiy hosilaga ega bo'lsada, bu hosilalar o'zaro teng emas.

**12.1.7 - misol.** Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiya quyidagi

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{xy\cdot(x+y)}{x^2+y^2}, & \text{agar } (x,y) \neq (0,0) \text{ bo'lsa,} \\ \quad 0 \quad , & \text{agar } (x,y) = (0,0) \text{ bo'lsa,} \end{cases} \tag{12.1.38}$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsin.

Bu funksiya va $(x-y)$ ning ko'paytmasidan iborat

$$u(x,y) \;=\; (x-y)f(x,y) \tag{12.1.39}$$

funksiyani qaraymiz.

Ravshanki, koordinata o‘qlarida $f$ nolga teng:

$$f(x,0) \;=\; f(0,y) \;=\; 0. \tag{12.1.40}$$

Bundan tashqari, to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblash orqali bu funksiyani $\mathbb{R}^2$ fazosining har bir nuqtasida $x$ va $y$ bo‘yicha xususiy hosilalarga ega ekanini ko‘rsatish mumkin. Bunda, agar $x \neq 0$ va $y \neq 0$ bo‘lsa,

$$f'_x(0,y) \;=\; 1, \quad f'_y(x,0) \;=\; 1 \tag{12.1.41}$$

tengliklar bajariladi.

Demak, (12.1.39) tenglik bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiya ham $x$ va $y$ bo‘yicha $\mathbb{R}^2$ fazosining har bir nuqtasida xususiy hosilalarga ega. Biz endi, bu funksiya koordinatalar boshida ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilalarga ega bo‘lsada, bu xususiy hosilalar o‘zaro teng bo‘lmasligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan,

$$u'_x(x,y) \;=\; f(x,y) + (x-y)f'_x(x,y)$$

va xususan, $u'_x(0,0) = 0$.

Shunday ekan, (12.1.40) va (12.1.41) tengliklarga ko‘ra,

$$u'_x(0,h) - u'_x(0,0) = f(0,h) + (0-h)f'_x(0,h) = -hf'_x(0,h) = -h,$$

va demak,

$$u''_{xy}(0,0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[u'_x(0,h) - u'_x(0,0)\right] \;=\; -1.$$

Xuddi shu usulda

$$u''_{yx}(0,0) \;=\; 1$$

ekani ko‘rsatiladi.

Shunday qilib, (12.1.39) funksiya uchun (12.1.37) tenglik koordinatalar boshida bajarilmas ekan.

Qaralgan misolda $u(x,y)$ funksiyaning aralash xususiy hosilalari koordinatalar boshida uzilishga ega ekanini ko‘rish qiyin emas. Bordiyu bu aralash hosilalar uzluksiz bo‘lsa, navbatdagi teorema ularning o‘zaro teng bo‘lishini ta’kidlaydi.

**12.1.4 - teorema.** *Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiya $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida $f'_x(x,y)$ va $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Agar o'sha atrofda ikkinchi tartibli $f''_{xy}(x,y)$ va $f''_{yx}(x,y)$ aralash xususiy hosilalar mavjud bo'lib, ular $(a,b)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \ = \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) \qquad (12.1.42)$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot.** Ixtiyoriy yetarlicha kichik $h$ sonini tayinlab,

$$\Phi(x) \ = \ f(x,b+h)-f(x,b) \qquad (12.1.43)$$

funksiyani qaraymiz.

Ikki marta Lagranj formulasini qo'llasak, $a$ va $a+h$ orasida yotuvchi shunday $\xi_1$ hamda $b$ va $b+h$ orasida yotuvchi shunday $\eta_1$ sonlar topiladiki, ular uchun

$$\Phi(a+h)-\Phi(a)=\Phi'(\xi_1)\cdot h=$$

$$= \ [f'_x(\xi_1,b+h)-f'_x(\xi_1,b)]h \ = \ f''_{xy}(\xi_1,\eta_1)\cdot h^2 \qquad (12.1.44)$$

tenglik bajariladi.

Xuddi shunga o'xshash,

$$\Psi(y) \ = \ f(a+h,y)-f(a,y)$$

funksiyani qarasak, $a$ va $a+h$ orasida yotuvchi shunday $\xi_2$ hamda $b$ va $b+h$ orasida yotuvchi shunday $\eta_2$ sonlar topiladiki, ular uchun

$$\Psi(b+h)-\Psi(b) \ = \ \Psi'(\eta_2)\cdot h \ =$$

$$= \ [f'_y(a+h,\eta_2)-f'_y(a,\eta_2)]h \ = \ f''_{yx}(\xi_2,\eta_2)\cdot h^2 \qquad (12.1.45)$$

tenglik bajariladi.

Boshqa tomondan, to'g'ridan-to'g'ri hisoblash orqali

$$\Phi(a+h)-\Phi(a) \ = \ \Psi(b+h)-\Psi(b)$$

ekanini ko'rish mumkin.

Shunday ekan, (12.1.44) va (12.1.45) tengliklarni taqqoslab,

$$f''_{xy}(\xi_1, \eta_2) \;=\; f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)$$

munosabatni olamiz.

Oxirgi tenglikda $h \to 0$ deb (bunda, albatta, $\xi_k \to a$ va $\eta_k \to b$), aralash hosilalarning uzluksizligini esga olsak, talab qilingan (12.1.42) tenglikka ega bo'lamiz.■

Endi biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan $f(\mathbf{x})$ funksiyani qaraymiz. Faraz qilaylik, bu funksiya $\Omega$ sohada $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ qismiy hosilaga ega bo'lib, bu xususiy hosila ham, o'z navbatida, $\Omega$ da $x_j$ o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilaga ega bo'lsin:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Bu hosila $f$ funksiyaning $x_k$ va $x_j$ o'zgaruvchilar bo'yicha *ikkinchi tartibli xususiy hosilasi* deb ataladi va u

$$f''_{x_k x_j} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Agar $f''_{x_k x_j}$ va $f''_{x_j x_k}$ ikkinchi tartibli hosilalar uzluksiz bo'lsa, 12.1.4 - teoremaga ko'ra,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Umumiy holda, $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_m}$ o'zgaruvchilar bo'yicha $m$ - tartibli xususiy hosila induktiv ravishda quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \partial x_{k_{m-1}} ... \partial x_{k_1}} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_{k_m}}\,\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_{m-1}} \partial x_{k_{m-2}} ... \partial x_{k_1}}. \qquad (12.1.46)$$

Agar berilgan funksiyaning $m$ - tartibgacha bo'lgan barcha qismiy hosilalari biror sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaga o'sha sohada $m$ marta uzluksiz differensiallanuvchi deyiladi.

Albatta, $m$ marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya uchun $m$ - tartibgacha bo'lgan xususiy hosilalarning qaysi tartibda hisoblanishi ahamiyatga ega emas. Bunda, agar (12.1.46) ta'rifdagi indekslardan ba'zilari o'zaro ustma-ust tushsa, maxrajdagi ko'paytma, odatda, daraja bilan almashtiriladi. Masalan,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} .$$

## 12.2-§. Teylor formulasi

**1. Differensial.**

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi differensiali $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ deb argumentning yetarlicha kichik $\mathbf{h}$ orttirmasiga mos kelgan funksiya orttirmasining $\mathbf{h}$ ga nisbatan chiziqli qismiga aytiladi, ya'ni*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|), \quad h \to 0. \tag{12.2.1}$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensialining aniq ko'rinishi haqidagi navbatdagi tasdiq bevosita 12.1.1 - teoremadan kelib chiqadi.

**12.2.1 - tasdiq.** *Agar $f$ funksiya biror $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi differensiali*

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\, h_k = \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{a}) \tag{12.2.2}$$

*ko'rinishga ega.*

Shunday qilib, agar $f$ funksiya har bir $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning differensiali ikki $\mathbf{x}$ va $\mathbf{h}$

vektor o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, $\mathbf{h}$ argument bo'yicha chiziqli bo'ladi:

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \;=\; \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{x}).$$

Odatda, $\mathbf{h}$ o'zgaruvchi $\mathbf{dx}$ simvol orqali belgilanadi va differensial

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})\, dx_k \tag{12.2.3}$$

ko'rinishda yoziladi.

### 2. Birinchi differensial formasining invariantligi.

Berilgan $f(\mathbf{x})$ funksiyaning $\mathbf{x}$ argumenti $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ o'zgaruvchining vektor-funksiyasi bo'lgan vaqtdagi differensialini topamiz. Bunda, agar bu vektor-funksiyaning har bir komponentasi differensiallanuvchi bo'lsa, uni differensiallanuvchi deymiz. Shunday qilib,

$$F(\mathbf{t}) = f[\mathbf{x}(\mathbf{t})] \tag{12.2.4}$$

ko'rinishdagi murakkab funksiyani qaraymiz va bu funksiyani $\mathbf{t}$ argumentining $\mathbf{dt}$ orttirmasiga mos keluvchi differensialini topamiz.

Agar $f(\mathbf{x})$ va $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, $F$ murakkab funksiya ham differensiallanuvchi bo'lib, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$dF \;=\; dF(\mathbf{t}, \mathbf{dt}) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial t_j} \cdot dt_j \;=\; \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \right) \cdot dt_j$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bundan, yig'ish tartibini o'zgartirib,

$$dF \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \left( \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \cdot dt_j \right)$$

formulaga ega bo'lamiz.

E'tibor bering, bu formulaning o'ng tomonida turgan qavs ichidagi ifoda $x_k(\mathbf{t})$ funksiyaning $dx_k$ differensialidir. Shuning uchun bu tenglikni

$$dF \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib,

$$d[f(\mathbf{x}(\mathbf{t})] \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k. \qquad (12.2.5)$$

Bu formuladan ko'rinib turibdiki, $f(\mathbf{x})$ funksiyaning birinchi differensiali, $\mathbf{x}$ argumentining o'zi biror o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan vaqtda ham, xuddi (12.2.3) ko'rinishda bo'lar ekan. Bunda farq shundan iboratki, (12.2.5) tenglikda $dx_k$ funksiya differensialidir va shuning uchun, bu formulani aslida

$$df(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{dt}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k(\mathbf{t}, \mathbf{dt}) \qquad (12.2.6)$$

deb tushuniladi.

Keltirilgan tasdiq *birinchi differensial formasining invariantligi* deb yuritiladi.

**3. Ikkinchi differensial.**

$1^0$. Biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada differensiallanuvchi bo'lgan $f$ funksiyani qaraylik. Faraz qilaylik, bu funksiyaning differensiali, ya'ni

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) \;=\; \nabla f(\mathbf{x})\; \mathbf{dx}$$

funksiya, orttirmaning har bir tayinlangan $\mathbf{dx}$ qiymatida $\mathbf{x}$ o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin. U holda, $\mathbf{x}$ ga $\mathbf{h}$ orttirma berib,

$$df(\mathbf{x}+\mathbf{h}, \mathbf{dx}) - df(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) \;=\; [\nabla f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \nabla f(\mathbf{x})]\; \mathbf{dx} \;=$$

$$= \{\nabla [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}] + \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}\} \, \mathbf{dx}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda $\mathbf{h} \to 0$ da $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \to 0$.

Demak, birinchi differensialning differensiali, ya'ni birinchi differensial orttirmasining $\mathbf{h}$ ga nisbatan chiziqli qismi,

$$\nabla [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}] \, \mathbf{dx}$$

ko'rinishga ega.

Uning $\mathbf{h} = \mathbf{dx}$ dagi qiymatiga $f$ funksiyaning ikkinchi differensiali deb ataladi va u $d^2 f = d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{dx})$ simvol bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) = \nabla [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx}] \, \mathbf{dx} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot dx_j dx_k, \tag{12.2.7}$$

ya'ni ikkinchi differensial $dx$ orttirmaning kvadratik funksiyasi bo'lar ekan.

Masalan,

$$d^2[\sin(x+y)] = -\sin(x+y) \, (dx+dy)^2.$$

$2^0$. Endi berilgan $f(\mathbf{x})$ funksiyaning ikkinchi differensialini $\mathbf{x}$ argumentning o'zi biror $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan vaqtda hisoblaymiz. Boshqacha aytganda,

$$F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}) = f[\mathbf{x}(\mathbf{t})] \tag{12.2.8}$$

murakkab funksiyani qaraymiz va uning $\mathbf{t}$ argumentini $\mathbf{dt}$ orttirmasiga mos kelgan ikkinchi differensialini topamiz.

Agar $f(\mathbf{x})$ va $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ funksiyalar ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $F$ murakkab funksiya ham ikki marta differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial t_\beta} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 x_j}{\partial t_\beta \partial t_\alpha}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak,

$$d^2F = d^2F(\mathbf{t}, \mathbf{dt}) = \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} dt_\alpha \, dt_\beta =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial t_\beta} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 x_j}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} \right) dt_\alpha \, dt_\beta.$$

Agar yig'ish tartibini o'zgartirsak, (12.2.8) murakkab funksiya uchun

$$d^2 f \;=\; \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot dx_j \, dx_k \;+\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot d^{\,2} x_j \tag{12.2.9}$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikni olishda biz

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial t_\alpha} \cdot dt_\alpha \;=\; dx_j$$

ekanini, ya'ni yig'indi $x_j(\mathbf{t})$ funksiyaning birinchi differensialiga teng ekanini va

$$\sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial^2 x_j}{\partial t_\beta \partial t_\alpha} \cdot dt_\alpha \, dt_\beta \;=\; d^{\,2} x_j$$

tenglikni, ya'ni qo'sh yig'indi o'sha funksiyaning ikkinchi differensialiga teng ekanini hisobga oldik.

Agar (12.2.7) va (12.2.9) tengliklarni taqqoslasak, $\mathbf{x}$ o'zgaruvchining o'zi boshqa bir $\mathbf{t}$ o'zgaruvchining funksiyasi bo'lganda ikkinchi differensialda qo'shimcha had paydo bo'lganini ko'ramiz. Bu qo'shimcha had (12.2.9) ning o'ng tomonidagi ikkinchi yig'indidan iborat. Bunda, yuqorida qayd etilganidek, $d^2x_j$ simvol $x_j$ o'zgaruvchining ikkinchi differensialini anglatadi. Shunday qilib, murakkab funksiyaning ikkinchi differensialining ko'rinishi (12.2.7) dan farq qilar ekan, ya'ni ikkinchi differensial invariantlik xossasiga ega emas ekan.

Shuni aytish kerakki, agar $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ bo‘lib, $x_k(\mathbf{t})$ o‘zgaruvchilar $t_j$ o‘zgaruvchilarga chiziqli bog‘liq bo‘lsa (ya’ni biror $a_{k,j}$ o‘zgarmas koeffitsientlar bilan $x_k = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{k,j}t_j$ tenglik bajarilsa), $d^2x_k(\mathbf{t})$ ikkinchi differensiallar nolga teng bo‘lib, (12.2.9) ga ko‘ra, $f$ funksiyaning ikkinchi differensiali o‘zining (12.2.7) ko‘rinishini saqlaydi.

$3^0$. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning turli xossalarini o‘rganishda ikkinchi differensialning muhimligi tufayli, ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan quyidagi

$$H = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{Vmatrix} \qquad (12.2.10)$$

matritsa bilan bog‘liq

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot h_j h_k \qquad (12.2.11)$$

kvadratik forma maxsus *hessian* degan nom olgan (nemis matematigi O. Hesse (Otto Hesse (1811-1874)) sharafiga). Ravshanki, (12.2.7) tenglikka ko‘ra, ikkinchi differensial hessian orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) = (H\mathbf{dx}, \mathbf{dx}).$$

12.1.4 - teoremaga asosan, (12.2.10) matritsa simmetrikdir. Shuning uchun (12.2.11) kvadratik forma ham *simmetrik* deyiladi. Bundan tashqari, agar ixtiyoriy $\mathbf{h} \neq 0$ vektor uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0, \quad \mathbf{h} \neq 0, \qquad (12.2.12)$$

tengsizlik bajarilsa, (12.2.11) kvadratik forma *musbat aniqlangan* deb ataladi.

(12.2.11) kvadratik forma $\mathbf{h}$ argumentning uzluksiz funksiyasi bo‘lgani uchun u, Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga asosan, kompakt bo‘lgan $\{\mathbf{h} \in R^n : |\mathbf{h}| = 1\}$ birlik sferada o‘zining aniq quyi chegarasiga erishadi, ya’ni

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \ \geq \ (H\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0), \quad |\mathbf{h}| = |\mathbf{h}_0| = 1.$$

Agar $\mu = (H\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)$ deb belgilasak, musbat aniqlangan kvadratik forma uchun, (12.2.12) shartga ko‘ra, $\mu > 0$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Demak,

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \ \geq \ \mu \ > \ 0, \quad |\mathbf{h}| = 1.$$

Endi, agar $\mathbf{h}$ noldan farqli ixtiyoriy vektor bo‘lsa, $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$ deb, oxirgi tengsizlikka ko‘ra,

$$0 < \mu \leq \ (H\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ = \ \left(H\frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}, \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}\right) \ = \ \frac{1}{|\mathbf{h}|^2}(H\mathbf{h}, \mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \neq 0,$$

munosabatni olamiz.

Bunda biz kvadratik formaning 2-darajali bir jinsli funksiya ekanini, ya’ni istalgan $\lambda$ haqiqiy son uchun

$$(H\lambda\mathbf{h}, \lambda\mathbf{h}) \ = \ \lambda^2(H\mathbf{h}, \mathbf{h})$$

tenglik bajarilishini hisobga oldik.

Shunday qilib, agar (12.2.11) kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lsa, u holda istalgan $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \ \geq \ \mu\,|\mathbf{h}|^2, \quad \mu > 0, \qquad (12.2.13)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Shuni aytish kerakki, $\mu > 0$ kattalik, umuman aytganda, hessian hisoblanayotgan $\mathbf{x}$ nuqtaga bog‘liq. Lekin, agar $f$ funksiyaning ikkinchi hosilalari uzluksiz bo'lsa, u holda $\mu$ kattalikni ixtiyoriy kompaktda, undan olingan barcha $\mathbf{x}$ lar uchun o'zgarmas qilib olish mumkin. Bunga ishonch hosil qilish uchun, yana yuqoridagidek, Veyershtrassning ikkinchi teoremasini qo'llash yetarli.

Agar ixtiyoriy $\mathbf{h} \neq 0$ vektor uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \ < \ 0, \quad \mathbf{h} \neq 0,$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (12.2.11) kvadratik forma *manfiy aniqlangan* deyiladi.

Manfiy aniqlangan kvadratik forma uchun

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \ \leq \ -\mu\,|\mathbf{h}|^2, \quad \mu > 0,$$

tengsizlik o'rinli.

$4^0$. Faraz qilaylik, $\mathbf{h}$ vektor $\mathbf{t}$ o'zgaruvchining chiziqli funksiyasi bo'lsin, ya'ni biror kvadratik $S$ matritsa bilan

$$\mathbf{h} \ = \ S\mathbf{t}$$

tenglikni qanoatlantirsin. Bundan tashqari, bu almashtirishni ortogonal deb faraz qilaylik, ya'ni $S^{-1} = S^*$ bo'lsin deylik. U holda

$$(H\mathbf{h}, \mathbf{h}) \ = \ (HS\mathbf{t}, S\mathbf{t}) \ = \ (S^{-1}HS\mathbf{t}, \mathbf{t})$$

tenglikka ega bo'lamiz.

$H$ matritsa simmetrik bo'lgani uchun, $S$ matritsani shunday tanlash mumkinki, natijada yangi hosil bo'lgan $\widetilde{H} = S^{-1}HS$ matritsa diagonal ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\widetilde{H} \ = \left\| \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{array} \right\|.$$

Bunda $\lambda_k$ sonlar haqiqiy bo'lib, agar ularni o'sish tartibida joylashgan desak, ular bir qiymatli aniqlanadilar.

Agar barcha $\lambda_k$ sonlar noldan farqli bo‘lsa, $\widetilde{H}$ matritsa *xosmas* deb va aks holda bu matritsa *xos* deb hisoblanadi. Bunga mos ravishda yuqoridagi $(H\mathbf{h}, \mathbf{h})$ kvadratik forma ham xosmas yoki xos deb ataladi.

Agar barcha $\lambda_k$ sonlar bir xil ishorali bo‘lsa, xosmas $(H\mathbf{h}, \mathbf{h})$ kvadratik formaning ishorasi aniqlangan deyiladi va agar bu sonlardan ba’zilari (hammasi emas) musbat bo‘lib, qolganlari manfiy bo‘lsa, bu kvadratik formaning ishorasi o‘zgaruvchan deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi differensial xos yoki xosmas kvadratik formadan iborat bo‘lib, oxirgi holda bu formaning ishorasi aniqlangan yoki aniqlanmagan bo‘lishi mumkin. Funksiya ikkinchi differensiali ishorasining aniqlanganligi ekstremal nuqtalarni topishda muhim ahamiyatga egadir.

### 4. Yuqori tartibli differensiallar.

Berilgan $f$ funksiyaning $m$-tartibli differensiali induktiv ravishda aniqlanadi. Chunonchi, faraz qilaylik, $f$ funksiya biror $\Omega$ sohada $m$ marta differensiallanuvchi bo‘lib, uning $(m-1)$-tartibli $d^{m-1}f(\mathbf{x}, \mathbf{dx})$ differensiali barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun aniqlangan bo‘lsin. U holda bu $(m-1)$-tartibli differensial $\mathbf{x}$ o‘zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo‘ladi. Demak,

$$d^{m-1}f(\mathbf{x}+\mathbf{h}, \mathbf{dx}) - d^{m-1}f(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) = \nabla[d^{m-1}f(\mathbf{x}, \mathbf{dx})] \cdot \mathbf{h} \; + \; o(|\mathbf{h}|).$$

Bu orttirmaning $\mathbf{h}$ bo‘yicha chiziqli qismi

$$\nabla[d^{m-1}f(\mathbf{x}, \mathbf{dx})] \cdot \mathbf{h} \tag{12.2.14}$$

ga teng bo‘lib, uning $\mathbf{h} = \mathbf{dx}$ dagi qiymati $f$ funksiyaning *$m$-tartibli differensiali* deyiladi.

Bu differensialning ko‘rinishini aniqlash maqsadida quyidagi

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla) \; = \; \sum_{k=1}^{n} \, h_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

formal ko‘rinishdagi amalni kiritamiz.

Bu amal yordamida istalgan differensiallanuvchi $f$ funksiya uchun

$$(\mathbf{h}\cdot\nabla)f(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \qquad (12.2.15)$$

deb yozish mumkin.

Endi $m = 2, 3, ...$ uchun induktiv ravishda

$$(\mathbf{h}\cdot\nabla)^m f(\mathbf{x}) \;=\; (\mathbf{h}\cdot\nabla)[(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{m-1} f(\mathbf{x})] \qquad (12.2.16)$$

deb aniqlaymiz.

Yuqorida keltirilgan $m$-tartibli differensialning (12.2.14) ta'rifini hisobga olib, $m = 1, 2, ...$ uchun induktiv ravishda bu differensialning

$$d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) \;=\; (\mathbf{dx}\cdot\nabla)^m f(\mathbf{x}) \qquad (12.2.17)$$

ko'rinishga ega ekanini ko'rsatish mumkin.

O'z navbatida, (12.2.15) va (12.2.16) ta'riflardan foydalanib,

$$(\mathbf{h}\cdot\nabla)^m f(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}...\partial x_{k_m}} h_{k_1}h_{k_2}\cdots h_{k_m} \qquad (12.2.18)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, biz quyidagi tasdiqqa kelamiz.

**12.2.2 - tasdiq.** *$m$-tartibli differensial uchun*

$$d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) \;=\; \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}...\partial x_{k_m}} dx_{k_1}dx_{k_2}\cdots dx_{k_m} \qquad (12.2.19)$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot** bevosita (12.2.17) va (12.2.18) tengliklardan kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlash joizki, agar $\mathbf{x}$ argument $\mathbf{t}$ o'zgaruvchining chiziqli bo'lmagan funksiyasi bo'lsa, u holda $m \geq 2$ lar uchun $f(\mathbf{x})$ funksiya $m$-tartibli differensialining ko'rinishi biroz murakkabroq bo'ladi, ya'ni yuqori tartibli differensial invariantlik xossasiga ega bo'lmaydi.

Biror nuqtada $m$ marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun quyidagi tasdiq o'rinli.

**12.2.3 - tasdiq.** *Agar $f$ funksiya biror $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada $m$ marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning $m$-tartibli differensiali ham shu nuqtada uzluksiz bo'lib, yetarlicha kichik $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ lar uchun*

$$d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \ - \ d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \ = \ \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \, |\mathbf{h}|^m \tag{12.2.20}$$

*tenglik o'rinli bo'ladi; bunda $\mathbf{h}$ bo'yicha tekis ravishda*

$$\mathbf{x} \to \mathbf{a} \ \ da \ \ \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \ \to \ 0.$$

Bu yerda "tekis ravishda"deganimiz quyidagini anglatadi: istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ bo'lganda *barcha qaralayotgan* $\mathbf{h}$ *lar uchun*

$$|\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \ < \ \varepsilon \tag{12.2.21}$$

tengsizlik bajariladi.

**Tasdiqning isboti** bevosita 12.2.2 - tasdiqdan kelib chiqadi. Haqiqatan, 12.2.2 - tasdiqqa ko'ra,

$$d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \ - \ d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \ =$$

$$\sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} \left( \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} ... \partial x_{k_m}} - \frac{\partial^m f(\mathbf{a})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} ... \partial x_{k_m}} \right) h_{k_1} h_{k_2} \cdots h_{k_m}. \tag{12.2.22}$$

Berilgan $f$ funksiyaning barcha $m$-tartibli xususiy hosilalari $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun, har qanday $\varepsilon' > 0$ olsak ham, shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ bo'lganda qavs ichidagi ifoda $\varepsilon'$ dan kichik bo'ladi. Shunday ekan, (12.2.22) ga ko'ra,

$$|\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \cdot |\mathbf{h}|^m \ = \ |d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \ - \ d^m f(\mathbf{a}, \mathbf{h})| \leq$$

$$\leq \varepsilon' \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} |h_{k_1} h_{k_2} \cdots h_{k_m}| \ = \ \varepsilon' \left( \sum_{k=1}^{n} |h_k| \right)^m .$$

Lekin Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga asosan,

$$\sum_{k=1}^{n} |h_k| \ \le \ \sqrt{n} \left( \sum_{k=1}^{n} h_k^2 \right)^{1/2} \ = \ \sqrt{n}\,|\mathbf{h}|.$$

Demak,

$$|\alpha(\mathbf{x},\mathbf{h})| \cdot |\mathbf{h}|^m \ \le \varepsilon' n^{m/2} |\mathbf{h}|^m$$

yoki

$$|\alpha(\mathbf{x},\mathbf{h})| \ \le \ \varepsilon' n^{m/2}. \tag{12.2.23}$$

Shunday ekan, $\varepsilon' = n^{-m/2}\varepsilon$ deb tanlab, (12.2.23) dan talab qilingan (12.2.21) bahoni olamiz.■

**5. Teylor formulasi.**

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasining eng ixcham ko'rinishi differensiallarda yoziladi. Bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasining diffrensiallardagi ko'rinishi 4.6 - paragraf oxiridagi eslatmada keltirilgan edi.

**12.2.1 - teorema (Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi).** *Faraz qilaylik, $m \ge 0$ butun son bo'lib, $f$ funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda $(m+1)$ marta differensiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ shunday vektor bo'lsinki, $\mathbf{a}+\mathbf{h}$ nuqta $\mathbf{a}$ ning yuqoridagi atrofida yotsin. U holda $0 < \theta < 1$ intervaldan shunday $\theta$ son topiladiki, u uchun*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \ = \ \frac{df(\mathbf{a},\mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h})}{2!} + \ldots + \frac{d^m f(\mathbf{a},\mathbf{h})}{m!} + R_{m+1}(\mathbf{a},\mathbf{h}) \tag{12.2.24}$$

*tenglik bajariladi, bunda*

$$R_{m+1}(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \frac{d^{m+1} f(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h},\mathbf{h})}{(m+1)!}. \tag{12.2.25}$$

**Isbot.** Ushbu

$$F(t) \ = \ f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$$

tenglik bilan $0 \leq t \leq 1$ kesmada aniqlangan bir o'zgaruvchili $F(t)$ funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $[0,1]$ kesmada $(m+1)$ marta differensiallanuvchi va bundan chiqdi, uning uchun Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli

$$F(1)-F(0) = \frac{F'(0)}{1!}+\frac{F''(0))}{2!}+...+\frac{F^{(m)}(0)}{m!}+\frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!},\ 0<\theta<1, \tag{12.2.26}$$

Teylor formulasi o'rinli.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga asoslanib, $F$ funksiyaning hosilasini topamiz:

$$F'(t) \ = \ \mathbf{h}\cdot\nabla f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}).$$

Hosila olishni davom ettirib,

$$F^{(k)}(t) \ = \ (\mathbf{h}\cdot\nabla)^k f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}), \quad k=1,2,...,m+1,$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan formulani (12.2.17) bilan taqqoslasak,

$$F^{(k)}(t) \ = \ d^k f(\mathbf{a}+t\mathbf{h},\mathbf{h}) \tag{12.2.27}$$

tenglikni olamiz.

Xususan, $t=0$ da $k=1,2,...,m$ uchun

$$F^{(k)}(0) \ = \ d^k f(\mathbf{a},\mathbf{h}) \tag{12.2.28}$$

bo'ladi.

Shunga o'xshash, $k = m+1$ uchun yana (12.2.27) formulani qo'llasak,

$$F^{(m+1)}(\theta) \ = \ d^{m+1} f(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h},\mathbf{h}) \tag{12.2.29}$$

tenglikka kelamiz.

Endi $F$ funksiya hosilalari uchun topilgan (12.2.28) va (12.2.29) ifodalarni (12.2.26) formulaga qo'ysak, talab qilingan (12.2.24) va (12.2.25) tengliklarni olamiz.■

**Natija (Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi).** *Faraz qilaylik, $m \geq 0$ butun son bo'lib, $f$ funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu nuqtada $m$ marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda quyidagi*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a},\mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2f(\mathbf{a},\mathbf{h})}{2!} + ... + \frac{d^mf(\mathbf{a},\mathbf{h})}{m!} + o(|\mathbf{h}|^m) \tag{12.2.30}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Agar 12.2.1 - teoremada $m$ o'rniga $m-1$ ni olsak,

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a},\mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2f(\mathbf{a},\mathbf{h})}{2!} + ... +$$
$$+ \frac{d^{m-1}f(\mathbf{a},\mathbf{h})}{(m-1)!} + \frac{d^mf(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h},\mathbf{h})}{m!} \tag{12.2.31}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Lekin, 12.2.3 - tasdiqqa ko'ra,

$$\frac{d^mf(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h},\mathbf{h})}{m!} = \frac{d^mf(\mathbf{a},\mathbf{h})}{m!} + o(|\mathbf{h}|^m).$$

Shunday ekan, talab qilingan (12.2.30) formula bevosita (12.2.31) tenglikdan kelib chiqadi.■

**6*. Multiindekslar.** Ushbu bandda biz zamonaviy matematik adabiyotlarda formulalar ko'rinishini ixchamlashtirish maqsadida foydalaniladigan maxsus belgilashlar bilan tanishamiz. Quyida biz biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan funksiyalarni qaraymiz.

Multiindeks deb komponentalari manfiy bo'lmagan butun sonlardan iborat vektorga aytamiz. Multiindekslarni yunoncha harflar orqali belgilaymiz, masalan:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \quad \alpha_j = 0, 1, 2, ..., \quad 1 \leq j \leq n.$$

Multiindeksning uzunligi deb manfiy bo'lmagan $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ butun songa aytamiz va uni $|\alpha|$ simvoli orqali belgilaymiz, ya'ni $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Aynan shu simvol orqali (11.1.5) vektorning ham uzunligini belgilaganimiz hech qanday anglashmovchilik keltirmaydi, chunki har gal shu simvolga duch kelganimizda qanday uzunlik to‘g‘risida gap ketayotgani matn mazmunidan tushunarli bo‘ladi.

Har qanday $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor va $\alpha$ multiindeks uchun

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{12.2.32}$$

belgilashni kiritamiz va bu belgilashdan foydalanishda $0^0 = 1$ deb kelishib olamiz.

Endi

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{12.2.33}$$

deb belgilab, quyidagi

$$D = (D_1, D_2, ..., D_n) \tag{12.2.34}$$

differensiallash vektorini kiritaylik.

(12.2.33) va (12.2.34) belgilashlardan

$$Df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$$

tenglik kelib chiqadi.

Har qanday $\alpha$ multiindeks uchun

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} \tag{12.2.35}$$

deymiz.

Bu belgilash quyidagi

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{12.2.36}$$

tenglik o‘rinli ekanini anglatadi.

Masalan, agar $n = 3$ va $\alpha = (3, 2, 1)$ desak, $|\alpha| = 6$ bo‘lib,

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^6 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2^2 \partial x_3}$$

tenglik bajariladi.

Multiindekslar matematik tahlildagi ko'p tasdiqlarni ixcham ko'rinishda yozishga imkon beradi. Masalan, Teylor formulasi va ikki funksiya ko'paytmasini differensiallashning Leybnits qoidasi shular jumlasidandir.

Har qanday $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ multiindeks uchun

$$\alpha! \;=\; \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ...\alpha_n!$$

deb belgilaymiz.

Yuqoridagi belgilashlarda, masalan, Teylor formulasi

$$\boxed{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x})}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha + R_{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{h})} \qquad (12.2.37)$$

kabi yoziladi, bunda Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had

$$\boxed{R_{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h})}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha} \qquad (12.2.38)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Keltirilgan (12.2.37) va (12.2.38) formulalarda, odatdagidek, $f$ funksiya $x \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida $(m+1)$ marta differensiallanuvchi deb faraz qilinadi va $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ yetarlicha kichik vektor, $\theta$ esa $0 < \theta < 1$ intervaldan olingan biror son deb hisoblanadi.

Istalgan $\gamma$ multiindeks uchun ikki funksiya ko'paytmasini differensiallashning Leybnits formulasi quyidagi

$$D^\gamma[u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})] \;=\; \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} D^\alpha u(\mathbf{x}) \cdot D^\beta v(\mathbf{x}) \qquad (12.2.39)$$

ko'rinishda yoziladi, bunda yig'indi, yig'indisi $\gamma$ ga teng bo'lgan, barcha $\alpha$ va $\beta$ multiindekslar bo'yicha olinadi.

Yuqoridagi (12.2.37)-(12.2.39) formulalardan xususiy hosilali differensial tenglamalarning zamonaviy nazariyasida keng foydalaniladi.

## 12.3-§. Oshkormas funksiyalar

**1. Oshkormas funksiyalar.** $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosidan biror $\Omega$ sohani olib, barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ va barcha $u \in \mathbb{R}$ larda aniqlangan hamda sonli qiymat qabul qiluvchi $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyani, ya'ni

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

funksiyani qaraymiz.

Agar shunday $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiya topilsaki, barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun

$$F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0 \tag{12.3.1}$$

tenglik bajarilsa, u holda $f$ funksiya (12.3.1) tenglama orqali oshkormas ko'rinishda berilgan deyiladi va bu funksiya *oshkormas funksiya* deb ataladi.

**12.3.1 - misol.** Quyidagi

$$F(\mathbf{x}, u) = e^u - 1 - |\mathbf{x}|^2$$

ko'rinishda aniqlangan $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyani qaraylik.

Ravshanki, bunda (12.3.1) tenglama birgina

$$f(\mathbf{x}) \ = \ \ln(1 + |\mathbf{x}|^2)$$

oshkormas funksiyani aniqlaydi. Bundan chiqdi, ushbu misolda oshkormas funksiya mavjud, yagona, uzluksiz va istalgan marta differensiallanuvchi bo'lar ekan.

**12.3.2 - misol.** Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tekislikdagi birlik doira bo'lsin:

$$\Omega \ = \ \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Ushbu

$$F(\mathbf{x}, u) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - u^2 \tag{12.3.2}$$

ko'rinishdagi $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyani qaraylik.

Bu holda (12.3.1) tenglik birdan ko‘p oshkormas funksiyani aniqlashini ko‘rish qiyin emas. Masalan, bunday oshkormas funksiyalardan biri

$$f_1(\mathbf{x}) \;=\; \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

kabi aniqlanadi. Ravshanki, (12.3.1) tenglik

$$f_2(\mathbf{x}) \;=\; -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

oshkormas funksiyani ham aniqlaydi.

Bundan tashqari, agar $E$ to‘plam $\Omega$ sohasining istalgan qismiy to‘plami bo‘lsa,

$$f(\mathbf{x}) \;=\; \begin{cases} \sqrt{1-|\mathbf{x}|^2}, & \text{agar } \mathbf{x} \in E \text{ bo‘lsa}, \\ -\sqrt{1-|\mathbf{x}|^2}, & \text{agar } \mathbf{x} \in \Omega \setminus E \text{ bo‘lsa}, \end{cases} \tag{12.3.3}$$

ko‘rinishdagi funksiya ham (12.3.1) tenglik bilan aniqlangan oshkormas funksiya bo‘ladi.

Shunday qilib, oshkormas funksiya, umuman aytganda, bir qiymatli aniqlanmas ekan. Bundan tashqari, (12.3.3) funksiya misolida ko‘rinib turibdiki, oshkormas funksiyani aniqlovchi $F$ funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo‘lishiga qaramasdan, oshkormas funksiyaning o‘zi uzilishga ega bo‘lishi ham mumkin ekan (qaralayotgan misolda $F$ funksiya (12.3.2) ko‘rinishdagi polinomdir).

Shuni qayd qilish kerakki, agar $F$ funksiya hech bir nuqtada nol qiymatni qabul qilmasa, masalan,

$$F(\mathbf{x}, u) \;=\; e^u + 1 + |\mathbf{x}|^2$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, (12.3.1) tenglama hech qanday oshkormas funksiyani aniqlamaydi, ya’ni oshkormas funksiya, umuman aytganda, mavjud bo‘lmasligi ham mumkin.

**2. Oshkormas funksiyaning mavjudligi va differensiallanuvchanligi.**

$F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaning $u$ o‘zgaruvchi bo‘yicha qat’iy monotonligi (12.3.1) tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiya uchun muhim mavjudlik va yagonalik shartidir.

Buni ko'rish uchun $\mathbb{R}^{n+1}$ fazoda silindr tushunchasini kiritamiz. Chunonchi, agar $B$ (ochiq yoki yopiq) $\mathbb{R}^n$ dagi biror shar bo'lib, $I = [\alpha, \beta]$ biror kesma bo'lsa, $Q = B \times I$ to'plamga *silindr* deymiz. Shunday qilib,

$$Q \;=\; \{(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in B, \quad \alpha \leq u \leq \beta\}. \tag{12.3.4}$$

Berilgan $[\alpha, \beta]$ kesmadan olingan istalgan $t$ uchun

$$S(t) \;=\; \{(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in B, \quad u = t\}$$

to'plamga $Q$ silindrning *kesimi* deymiz, bunda $S(\alpha)$ kesimga $Q$ silindrning *quyi asosi* va $S(\beta)$ kesimga esa, silindrning *yuqori asosi* deymiz.

Monotonlik shartining ahamiyati quyidagi lemmada yaqqol ko'rinadi.

**12.3.1 - lemma.** *Faraz qilaylik, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya (12.3.4) ko'rinishdagi biror silindrda aniqlangan bo'lib, uning quyi asosida manfiy va yuqori asosida musbat qiymatlarni qabul qilsin.*

*Agar har bir tayinlangan $\mathbf{x}$ uchun $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya $u$ bo'yicha uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'lsa, u holda (12.3.1) tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiya mavjud va yagonadir.*

**Isbot.** Aytaylik, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya $Q = B \times [\alpha, \beta]$ silindrning barcha nuqtalarida aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy tayinlangan $\mathbf{x} \in B$ uchun

$$F(\mathbf{x}, \alpha) \;<\; 0, \quad F(\mathbf{x}, \beta) \;>\; 0$$

tengsizliklar bajarilsin.

U holda, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya $u$ o'zgaruvchi bo'yicha $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun, 3.5.3 - teoremaga ko'ra, u barcha oraliq qiymatlarni qabul qiladi. Shunday ekan, har bir $\mathbf{x} \in B$ nuqta uchun $[\alpha, \beta]$ kesmada yotuvchi shunday $\xi = \xi(\mathbf{x})$ son topiladiki,

$$F(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in B,$$

tenglik bajariladi. $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaning $u$ o'zgaruvchi bo'yicha qat'iy monotonligidan esa, bu nuqtaning yagonaligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $f(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})$ oshkormas funksiya mavjud va u yagona ekan.■

Albatta, lemmadagi $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaga, silindrning yuqori va quyi asoslarida har xil ishoralarga ega bo‘lib, silindr ichida $u$ o‘zgaruvchi bo‘yicha uzluksiz va qat’iy monoton bo‘lsin deb shart qo‘yish yetarlidir.

Bunga misol tariqasida $B$ deb radiusi $1/2$ ga teng va markazi koordinatalar boshida bo‘lgan doirani olib, ya’ni $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1/2\}$ deb, 12.3.2 - misoldagi (12.3.2) funksiyani endi

$$Q = B \times [0, 2]$$

silindrda qaraylik. U holda, barcha $\mathbf{x} \in B$ lar uchun

$$F(\mathbf{x}, 0) > 0, \quad F(\mathbf{x}, 2) < 0$$

tengsizliklar bajariladi. Bundan $B$ doirada aniqlangan yagona oshkormas funksiyaning mavjudligi kelib chiqadi. Bu funksiyaning

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2}$$

ko‘rinishga ega ekanini ko‘rsatish oson.

Ma’lumki, funksiya hosilasining noldan farqliligi uni monotonligining yetarlilik shartidir. Navbatdagi lemmada faqat bir nuqtadagina hosilaning noldan farqli va uzluksiz bo‘lishi shu nuqtaning biror atrofida funksiya monotonligini ta’minlashi ko‘rsatiladi.

Ixtiyoriy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ va $\delta > 0$ uchun $B_{\mathbf{a},\delta}$ orqali quyidagi sharni belgilaymiz:

$$B_{\mathbf{a},\delta} = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\}. \tag{12.3.5}$$

**12.3.2 - lemma.** *Faraz qilaylik, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya $(\mathbf{a}, w) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo‘lib,*

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{a}, w) \neq 0$$

*shartni qanoatlantiruvchi va $(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ nuqtada uzluksiz $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ xususiy hosilaga ega bo‘lsin. Bundan tashqari,*

$$F(\mathbf{a}, w) = 0 \tag{12.3.6}$$

*bo'lsin.*

*U holda ixtiyoriy yetarlicha kichik* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $\delta > 0$ *son topiladiki,*

$$Q = B_{\mathbf{a},\delta} \times [w - \varepsilon, w + \varepsilon] \tag{12.3.7}$$

*silindrda* $F$ *funksiya* $u$ *o'zgaruvchi bo'yicha qat'iy monoton bo'lib, bu silindrning quyi va yuqori asoslarida turli ishorali qiymatlar qabul qiladi.*

**Isbot.** Aniqlik uchun

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{a}, w) > 0$$

deylik (teskari tengsizlik bajarilgan hol ham bir xilda o'rganiladi).

Bu tengsizlik va xususiy hosilaning $(\mathbf{a}, w)$ nuqtada uzluksizligidan, 11.2.1 - tasdiqqa ko'ra, qayd etilgan nuqtada markazga ega bo'lgan biror $(n+1)$-o'lchovli sharda

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u) > 0 \tag{12.3.8}$$

shartning bajarilishi kelib chiqadi.

Xususan, $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ desak, $F(\mathbf{a}, u)$ funksiyaning $u$ o'zgaruvchi bo'yicha biror $(w - \varepsilon_0, w + \varepsilon_0)$ intervalda qat'iy monotonligini olamiz. Shunday ekan, istalgan musbat $\varepsilon < \varepsilon_0$ uchun (12.3.6) shartdan

$$F(\mathbf{a}, w - \varepsilon) < 0, \quad F(\mathbf{a}, w + \varepsilon) > 0$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Lekin, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaning $\mathbf{x}$ o'zgaruvchi bo'yicha uzluksizligiga ko'ra, shunday $\delta > 0$ topiladiki, bu ikki tengsizliklar $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning $\delta$-atrofida ham saqlanadi, ya'ni

$$F(\mathbf{x}, w - \varepsilon) < 0, \quad F(\mathbf{x}, w + \varepsilon) > 0, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta.$$

Demak, $F$ funksiya (12.3.7) silindrning quyi asosida manfiy va yuqori asosida esa, musbat bo'ladi.

Nihoyat, agar $\delta$ ni yetarlicha kichik qilib olsak, qaralayotgan silindr (12.3.8) tengsizlik bajariladigan yuqoridagi $(n+1)$-o'lchovli sharning ichida yotadi, ya'ni bunday silindrda $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya $u$ o‘zgaruvchi bo‘yicha qat'iy o‘sadi.■

Shuni aytish kerakki, umumiy holda (12.3.1) tenglamaning yechimga ega bo‘lishini ta'minlaydigan shartlar lokal xarakterga ega, ya'ni bunday shartlar yechimning qaralayotgan nuqtaning yetarlicha kichik atrofida mavjud va yagonaligini kafolatlaydi. Muhimi shundaki, bu atrof $\mathbf{x}$ o‘zgaruvchining $\mathbb{R}^n$ fazosidan emas, balki $(\mathbf{x}, u)$ o‘zgaruvchining $\mathbb{R}^{n+1}$ fazosidan olinadi. Chunonchi, navbatdagi teorema o‘rinli.

**12.3.1 - teorema.** *Faraz qilaylik,*

$$F : \Omega \times I \to \mathbb{R}$$

*funksiya $\mathbb{R}^n$ Evklid fazosidan olingan biror $\Omega$ sohasining barcha $\mathbf{x}$ nuqtalarida va biror $I$ intervalning barcha $u$ nuqtalarida aniqlangan bo‘lib, $\mathbf{x} \in \Omega$ bo‘yicha uzluksiz bo‘lsin. Bundan tashqari, biror $(\mathbf{a}, w) \in \Omega \times I$ nuqtada*

$$F(\mathbf{a}, w) = 0 \tag{12.3.9}$$

*tenglik bajarilsin.*

*Nihoyat, $(\mathbf{a}, w) \in \Omega \times I$ nuqtaning biror atrofida, shu nuqtada uzluksiz bo‘lgan va*

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{a}, w) \neq 0 \tag{12.3.10}$$

*shartni qanoatlantiruvchi $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ xususiy hosila mavjud bo‘lsin. U holda $(\mathbf{a}, w)$ nuqtaning*

$$Q = B_{\mathbf{a},\delta} \times [w-\varepsilon, w+\varepsilon], \quad B_{\mathbf{a},\delta} \subset \Omega, \quad [w-\varepsilon, w+\varepsilon] \subset I, \tag{12.3.11}$$

*ko‘rinishdagi shunday silindrik atrofi topiladiki,*

$$F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in Q, \tag{12.3.12}$$

*tenglama $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksiz bo‘lgan yagona $f : B_{\mathbf{a},\delta} \to \mathbb{R}$ oshkormas funksiyani aniqlaydi.*

**Isbot.** 12.3.1 - va 12.3.2 - lemmalarga ko‘ra, istalgan yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ uchun (12.3.11) ko‘rinishdagi shunday silindrik atrof topiladiki, unda oshkormas funksiyani aniqlaydigan (12.3.12) tenglama $f = f(\mathbf{x})$ ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lib, bu yechim yagona bo‘ladi. Bunda, albatta, $f(\mathbf{a}) = w$ munosabat o‘rinlidir.

Endi $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsatish yetarli. Lekin biz ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topdikki, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ bo‘lganda bu funksiyaning grafigi, 12.3.2 - lemmaga ko‘ra, (12.3.11) silindr ichida yotadi. Demak,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = |f(\mathbf{x}) - w| \leq \varepsilon.$$

Bu esa $f$ funksiyaning $\mathbf{a}$ nuqtadagi uzluksizligini anglatadi.■

**Eslatma.** Yuqoridagi teoremaning ma’nosi quyidagidan iborat: (12.3.11) silindrik atrofda yotuvchi va $F(\mathbf{x}, u) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar oshkormas funksiyaning grafigidan iborat sirtni tashkil etadi.

Isbotlangan teorema (12.3.10) shart bajarilganda (12.3.1) tenglama bilan aniqlanuvchi oshkormas funksiyaning mavjud, yagona va uzluksiz ekanini ko‘rsatadi. Agar, qo‘shimcha ravishda, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiyaning $(\mathbf{x}, u)$ argumentlar bo‘yicha uzluksiz differensiallanuvchiligi talab qilinsa, u holda oshkormas funksiyaning ham uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lishini isbotlash mumkin. Bunda, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi deganda, biz bu funksiyaning har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha birinchi tartibli uzluksiz qismiy hosilalarga ega ekanini tushunamiz.

**12.3.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $F(\mathbf{x}, u)$ funksiya 12.3.1 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantirsin hamda bunga qo‘shimcha ravishda, $(\mathbf{a}, w) \in \Omega \times I$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda, (12.3.1) tenglik bilan aniqlanuvchi $f(\mathbf{x})$ oshkormas funksiya (12.3.5) ko‘rinishdagi biror $B_{\mathbf{a},\delta}$ sharda uzluksiz differensiallanuvchi bo‘ladi.*

**Isbot.** 12.3.1 - teoremaga ko‘ra, (12.3.11) ko‘rinishdagi biror $Q$ silindrda

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u) \neq 0$$

tengsizlik bajariladi.

12.3.1 - teoremada $\mathbf{x} \in B_{\mathbf{a},\delta}$ uchun mavjudligi, yagonaligi va uzluksizligi kafolatlangan oshkormas funksiyani $f(\mathbf{x})$ deb belgilaylik. Istalgan $\mathbf{x} \in B_{\mathbf{a},\delta}$ nuqtani tayinlab, $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in B_{\mathbf{a},\delta}$ shartni qanoatlantiruvchi $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ orttirma olamiz. So‘ngra

$$\Delta f \;=\; f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$$

deb belgilaymiz.

U holda, (12.3.12) tenglikka asosan,

$$0 = F(\mathbf{x}+\mathbf{h}, f(\mathbf{x}+\mathbf{h})) - F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}+\mathbf{h}, f(\mathbf{x})+\Delta f) - F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})).$$

Lagranj formulasiga ko‘ra, $(0, 1)$ intervalda shunday $\theta$ son topiladiki, u uchun

$$0 \;=\; F(\mathbf{x}+\mathbf{h}, f(\mathbf{x})+\Delta f) - F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h},\; f(\mathbf{x})+\theta\Delta f)\cdot\mathbf{h} + \frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h},\; f(\mathbf{x})+\theta\Delta f)\cdot\Delta f$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikka ko‘ra,

$$\Delta f \;=\; -\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h},\; f(\mathbf{x})+\theta\Delta f)\cdot\mathbf{h}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h},\; f(\mathbf{x})+\theta\Delta f)}. \tag{12.3.13}$$

Quyidagi

$$A(\mathbf{x}) \;=\; -\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \tag{12.3.14}$$

vektorni qaraylik. Teorema shartiga ko‘ra, $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ xususiy hosila uzluksiz va (12.3.11) ko‘rinishdagi $Q$ yopiq silindrda noldan farqli. Shuning uchun, qaralayotgan funksiyalarning uzluksizligiga asosan,

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h},\; f(\mathbf{x})+\theta\Delta f)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h},\; f(\mathbf{x})+\theta\Delta f)} \;=\; A(\mathbf{x}) \;+\; o(1), \quad \mathbf{h}\to 0, \tag{12.3.15}$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Natijada, (12.3.13) tenglik va (12.3.15) bahodan

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \;=\; A(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h} \;+\; o(|\mathbf{h}|)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu esa $f$ funksiyaning $\mathbf{x}$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini anglatadi. Bundan tashqari, (12.3.15) va (12.3.14) munosabatlarga ko‘ra,

$$\nabla f(\mathbf{x}) \;=\; \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \;=\; -\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}. \qquad (12.3.16)$$

Bu tenglikdan, teorema shartiga ko‘ra, $f$ oshkormas funksiyani barcha xususiy hosilalarining uzluksizligi kelib chiqadi. Demak, $f$ uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lar ekan.■

**Eslatma.** (12.3.16) vektor tenglikni gradientning har bir komponentasi uchun alohida yozish mumkin. Bunda biz qismiy hosilalar uchun quyidagi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \;=\; -\,\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \qquad (12.3.17)$$

tengliklarni olamiz.

**3. Funksiyalar sistemasi va vektor funksiyalar.**

$1^0$. Ikki oshkormas funksiyani aniqlash uchun quyidagi ikki tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, u_1, u_2) &= 0, \\ F_2(\mathbf{x}, u_1, u_2) &= 0, \end{aligned} \qquad (12.3.18)$$

bu yerda, agar $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ desak, $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ berilgan haqiqiy funksiyalar bo‘lib, ular $n$ ta $(x_1, x_2, ..., x_n)$ va ikkita $(u_1, u_2)$ larning funksiyalaridir.

Faraz qilaylik, biror $(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ nuqtada

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \neq 0 \qquad (12.3.19)$$

bo'lsin. U holda, 12.3.1 - teoremaga ko'ra,

$$F_1(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, u_2), u_2) = 0$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi

$$u_1 = \varphi(\mathbf{x}, u_2) \qquad (12.3.20)$$

funksiya mavjud va yagonadir.

Topilgan $u_1$ qiymatni (12.3.18) ning ikkinchi tengligiga qo'ysak, $u_2$ funksiyani aniqlash uchun

$$F_2(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, u_2), u_2) = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz. 12.3.1 - teoremani yana bir marta qo'llash maqsadida,

$$v(\mathbf{x}, u_2) = F_2(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, u_2), u_2) \qquad (12.3.21)$$

funksiyaning $u_2$ bo'yicha xususiy hosilasining noldan farqli bo'lish shartini topamiz.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial v}{\partial u_2} = \frac{\partial F_2}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \frac{\partial F_2}{\partial u_2}.$$

Bundan tashqari, (12.3.17) formulaga asosan,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}}\,\frac{\partial F_1}{\partial u_2}.$$

Shunday ekan,

$$\frac{\partial v}{\partial u_2} = \frac{1}{\dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial u_2} - \frac{\partial F_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\right).$$

Agar $\mathbf{F}$ simvol orqali $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{x},\mathbf{u}), F_2(\mathbf{x},\mathbf{u}))$ vektor-funksiyani belgilasak, qavs ichidagi ifoda

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{Vmatrix}$$

matritsaning determinanti ekanini ko‘ramiz. Bu matritsa Yakobi matritsasi deb va uning determinanti esa, *yakobian* deb ataladi.

Shunday qilib, $\dfrac{\partial v}{\partial u_2}$ qismiy hosilaning noldan farqli bo‘lish sharti quyidagi

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a},\mathbf{w}) \neq 0 \tag{12.3.22}$$

ko‘rinishga ega ekan.

Bu shart bajarildi deb faraz qilib, (12.3.21) funksiyaga 12.3.1 - teoremani qo‘llasak,

$$v(\mathbf{x}, f_2(\mathbf{x})) = F_2[x, \varphi(\mathbf{x}, f_2(\mathbf{x})), f_2(\mathbf{x})] = 0$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi

$$u_2 = f_2(\mathbf{x})$$

funksiyaning mavjud va yagona ekaniga iqror bo‘lamiz.

Nihoyat,

$$f_1(\mathbf{x}) = \varphi(x, f_2(\mathbf{x}))$$

deb belgilasak, $(f_1, f_2)$ funksiyalar juftligi (12.3.18) tenglamalar sistemasini qanoatlantirishini ko‘ramiz.

$2^0$. Umumiy holda ham, ixtiyoriy sondagi tenglamalar sistemasining yechimga ega bo‘lishini mos yakobianning noldan farqli bo‘lishi kafolatlashini kutish tabiiydir. Ushbu bandda haqiqatan ham shunday ekanini ko‘rsatamiz.

Vektor qiymat qabul qiluvchi akslantirishlarni (ya’ni vektor-funksiyalarni), skalyar (ya’ni sonli qiymat qabul qiluvchi) funksiyalardan farqlash maqsadida, qalin harflar bilan belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektor-funksiya berilgan bo'lsin, ya'ni,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$$

bo'lib, har bir $f_k(\mathbf{x})$ funksiya $n$ ta $(x_1, x_2, ..., x_n)$ o'zgaruvchining haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyasi bo'lsin. Albatta, bu ko'rinishdagi oshkormas vektor-funksiyani aniqlash uchun biror $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ va $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ larda aniqlangan $m$ ta $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $j = 1, 2, ..., m$, funksiyani qarash lozim.

Agar $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_m)$ deb belgilasak,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \tag{12.3.23}$$

tenglama $\mathbf{x}$ ga bog'liq $m$ ta noma'lum funksiyani aniqlash uchun $m$ ta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.

$\mathbf{F}$ vektor-funksiyani differensiallanuvchi deb faraz qilamiz, ya'ni uning har bir komponentasi $\mathbf{x}$ va $\mathbf{u}$ bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin deymiz.

(12.3.23) sistemaga mos keluvchi

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \left\| \frac{\partial F_j}{\partial u_k} \right\|$$

Yakobi matritsasini qaraylik.

**Ta'rif.** $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_m)$ *vektor-funksiyaning* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ *o'zgaruvchilar bo'yicha Yakobi determinanti yoki* ***yakobiani*** *deb quyidagi*

$$J = \frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{u}} = \det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$$

*determinantga aytamiz.*

Bundan keyin $\mathbb{R}^n$ fazosidagi radiusi $r$ va markazi $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada bo'lgan sharni, o'lchovini alohida qayd etish maqsadida, $B_n(\mathbf{a}, r)$ simvoli orqali belgilaymiz, ya'ni

$$B_n(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

**12.3.3 - teorema.** *Faraz qilaylik,* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ *biror* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sohaning barcha* $\mathbf{x}$ *nuqtalarida va biror* $G \subset \mathbb{R}^m$ *sohaning barcha* $\mathbf{u}$ *nuqtalarida aniqlangan bo'lib, qiymatlar to'plami* $\mathbb{R}^m$ *da bo'lgan vektor-funksiya bo'lsin:*

$$\mathbf{F} : \Omega \times G \to \mathbb{R}^m.$$

*Bundan tashqari, biror* $(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \in \Omega \times G$ *nuqtada*

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \mathbf{0} \tag{12.3.24}$$

*tenglik bajarilib, shu* $(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ *nuqtaning biror atrofida* $\mathbf{F}$ *vektor-funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin va o'sha nuqtaning o'zida esa, yakobian noldan farqli bo'lsin:*

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \neq 0. \tag{12.3.25}$$

*U holda, istalgan yetarlicha kichik* $\varepsilon > 0$ *uchun* $(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \in \Omega \times G$ *nuqtaning shunday* $Q = B_n(\mathbf{a}, \delta) \times B_m(\mathbf{w}, \varepsilon)$ *atrofi, ya'ni*

$$Q = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \ |\mathbf{u} - \mathbf{w}| < \varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \ \mathbf{u} \in G\}$$

*atrofi topiladiki, bunda*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \tag{12.3.26}$$

*tenglamani qanoatlantiruvchi va* $B_n(\mathbf{a}, \delta)$ *sharda uzluksiz differensiallanuvchi* $\mathbf{f} : B_n(\mathbf{a}, \delta) \to B_m(\mathbf{w}, \varepsilon)$ *oshkormas vektor-funksiya mavjud va yagona bo'ladi.*

**Isbot.** Avval $m = 1$ bo'lganda bu teorema 12.3.2 - teorema bilan ustma-ust tushishini qayd etamiz. Shuning uchun, teoremani umumiy holda isbot qilish uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz.

Shunday qilib, $m = 1$ da teorema o'rinli. Endi birdan katta istalgan $m$ natural sonini olib, teorema $(m - 1)$ ta tenglama uchun o'rinli bo'lsin deylik. Biz bundan teoremaning $m$ ta tenglama uchun o'rinli bo'lishini keltirib chiqaramiz.

(12.3.25) shartga ko'ra, $(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ nuqtada (hosilalarning uzluksizligiga ko'ra, bu nuqtaning biror atrofida ham)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Shunday ekan, bu yakobianning biror $(m-1)$-tartibli minori ham noldan farqli bo'ladi. Faraz qilaylik, noldan farqli minor matritsaning chap yuqori burchagidagi minor bo'lsin, ya'ni

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Biz $u_m$ ni erkli o'zgaruvchi deb hisoblashimiz mumkin. U holda, induksiyaning faraziga ko'ra, shunday $(m-1)$ ta

$$u_k = \varphi_k(\mathbf{x}, u_m), \quad k = 1, 2, ..., m-1,$$

funksiyalar topiladiki, ular uchun quyidagi

$$F_j(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, u_m), ..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, u_m), u_m) = 0, \quad j = 1, 2, ..., m-1, \tag{12.3.27}$$

ayniyatlar bajariladi.

Endi $u_m$ ni shunday tanlash kerakki, yuqoridagi singari ayniyat $j = m$ da ham bajarilsin. Buning uchun

$$v(\mathbf{x}, u_m) = F_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, u_m), ..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, u_m), u_m) \tag{12.3.28}$$

deb, $\dfrac{\partial v}{\partial u_m}(\mathbf{a}, w_m) \neq 0$ ekanini ko'rsatamiz. Bundan so'ng 12.3.1 - teoremani qo'llasak, (12.3.27) ko'rinishdagi tenglamaning $j = m$ da ham yechimga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra,

$$\frac{\partial v}{\partial u_m} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F_m}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_m} + \frac{\partial F_m}{\partial u_m}. \tag{12.3.29}$$

Endi (12.3.27) ayniyatni $u_m$ bo‘yicha differensiallasak,

$$0 = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F_j}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_m} + \frac{\partial F_j}{\partial u_m}, \quad j = 1, 2, ..., m-1, \tag{12.3.30}$$

tengliklarni olamiz.

Ravshanki, hosil bo‘lgan (12.3.29) va (12.3.30) tengliklar birgalikda

$$A\mathbf{y} = \mathbf{g}$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasini tashkil qiladi, bu yerda

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$$

matritsa bo‘lib, $\mathbf{y}$ va $\mathbf{g}$ lar esa $\mathbb{R}^m$ fazosining

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_m}, ..., \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m}, 1\right) \quad \text{va} \quad \mathbf{g} = \left(0, 0, ..., 0, \frac{\partial v}{\partial u_m}\right)$$

ko‘rinishda aniqlangan vektorlaridir.

Shartga ko‘ra, $A$ matritsaning determinanti noldan farqli. Shuning uchun, agar $\dfrac{\partial v}{\partial u_m}(\mathbf{a}, w_m) = 0$ deb faraz qilsak, ya’ni $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ desak, yuqoridagi tenglamalar sistemasining o‘ng tomoni nolga teng bo‘lib, bundan $\mathbf{y} = 0$ tenglik kelib chiqar edi. Bu esa $y_m = 1$ tenglikka ziddir.

Demak, bizni qiziqtirayotgan hosila noldan farqli ekan. Bundan kelib chiqqan holda, (12.3.28) funksiyaga 12.3.1 - teoremani qo‘llashimiz mumkin. Bu teoremaga ko‘ra,

$$u_m = f_m(\mathbf{x})$$

ko‘rinishdagi shunday oshkormas funksiya topiladiki, u uchun

$$F_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, u_m), ..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, u_m), f_m(\mathbf{x})) \;=\; 0$$

ayniyat bajariladi.

Shunday ekan,

$$f_k(\mathbf{x}) \;=\; \varphi_k(\mathbf{x}, f_m(\mathbf{x})), \quad k = 1, 2, ..., m-1,$$

deb belgilab, biz (12.3.26) tenglamani qanoatlantiruvchi $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ vektor-funksiyaga ega bo‘lamiz.■

**Eslatma.** Keltirilgan isbotdan oshkormas funksiyaning $x_i$ o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasini hisoblash qoidasini topishimiz mumkin. Buning uchun (12.3.26) ayniyatni, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra, $x_i$ bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \;=\; \mathbf{0}.$$

So‘ngra hosil bo‘lgan tenglikni quyidagi

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \;=\; -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \tag{12.3.31}$$

$m$ ta chiziqli tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozamiz. Bu sistemada

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \;=\; \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$$

noma’lum vektordir.

Shartga ko‘ra, $\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$ matritsaning determinanti noldan farqli yakobiandir. Shu sababli, (12.3.31) sistema yechimga ega. Shunday ekan, chiziqli tenglamalar sistemasini bizga ma’lum usullar bilan yechib, izlanayotgan hosilalarni topishimiz mumkin.

**12.3.3 - misol.** Faraz qilaylik, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektor-funksiyaning komponentalari

$$F_1(x, y, u, v) \;=\; e^u + v - x, \quad F_2(x, y, u, v) \;=\; e^v - u - y$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin.

Bu funksiyaga mos kelgan yakobian oson hisoblanadi. Haqiqatan,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ & \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^u & 1 \\ -1 & e^v \end{vmatrix} = e^{u+v} + 1.$$

Demak, yakobian hech qaysi nuqtada nolga aylanmaydi. Ya’ni, istalgan $(x_0, y_0, u_0, v_0)$ nuqta atrofida $\mathbf{F}(x, y, u, v) = 0$ tenglama ikki $u = u(x, y)$ va $v = v(x, y)$ oshkormas funksiyani aniqlaydi.

Masalan, $x_0 = y_0 = 1$ va $u_0 = v_0 = 0$ koordinatalarga ega bo‘lgan nuqtani olaylik. U holda, 12.3.3 - teoremaga ko‘ra, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ oshkormas funksiyalar $(1, 1)$ nuqtaning biror atrofida mavjud va uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lib, ular $u(1, 1) = v(1, 1) = 0$ shartlarni qanoatlantiradi.

Misol tariqasida, bu funksiyalarning $x$ bo‘yicha $(1, 1)$ nuqtadagi xususiy hosilalarini hisoblaylik. Ravshanki, bu holda (12.3.31) sistema

$$\begin{cases} e^u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ \\ e^v \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Bundan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^v}{1 + e^{u+v}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + e^{u+v}}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Demak, $u(1, 1) = v(1, 1) = 0$ shartimizga ko‘ra,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2}.$$

**4. Teskari funksiya haqidagi teorema.**

Faraz qilaylik, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektor-funksiya berilgan bo‘lsin. Ushbu bandda biz teskari $f^{-1}$ vektor-funksiyaning mavjud bo‘lish shartlarini va uning qanday sohada aniqlanganligini hamda qanchalik silliq bo‘lishini o‘rganamiz.

Berilgan $f$ akslantirish har bir $\mathbf{x} \in \Omega$ nuqtaga $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in G$ nuqtani mos qo‘ysin deylik, ya’ni, agar $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ desak,

$$y_k = f_k(\mathbf{x}) = f_k(x_1, x_2, ..., x_n), \quad k = 1, 2, ..., n,$$

bo‘lsin.

**12.3.4 - teorema.** *Faraz qilaylik, $f(\mathbf{x})$ vektor-funksiya $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lib, $\mathbb{R}^n$ da qiymat qabul qilsin. Bundan tashqari, $\mathbf{a}$ nuqtaning o‘zida*

$$\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \neq 0 \tag{12.3.32}$$

*shart bajarilsin.*

*U holda, $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi teskari $f^{-1}$ funksiya aniqlangan bo‘lib, u bu atrofni $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofiga o‘tkazadi.*

**Isbot.** $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan shunday $\mathbf{u}$ vektor-funksiyani topish talab qilinadiki, u qayd qilingan atrofdan olingan barcha $\mathbf{y}$ lar uchun

$$f(\mathbf{u}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \tag{12.3.33}$$

tenglikni qanoatlantirsin.

Buning uchun

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) - \mathbf{y} \tag{12.3.34}$$

funksiyani qaraymiz.

(12.3.32) shartga ko‘ra,

$$\det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) \neq 0. \tag{12.3.35}$$

Bundan tashqari, (12.3.34) ta’rifdan, agar $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ va $\mathbf{y} = \mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ desak,

$$F(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{12.3.36}$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, oshkormas funksiya haqidagi 12.3.3 - teoremaning barcha shartlari o'rinli. Bundan chiqdi, $F(\mathbf{y}, \mathbf{u}(\mathbf{y})) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi va uzluksiz differensiallanuvchi $\mathbf{u}$ vektor-funksiya mavjud. Oxirgi tenglik esa, $F$ funksiyaning (12.3.34) ta'rifiga asosan, (12.3.33) tenglikka teng kuchlidir. Shunday ekan, $\mathbf{u}$ vektor-funksiya biz izlayotgan $f^{-1}$ funksiya bo'ladi.■

Shuni qayd etish kerakki, isbotlangan teorema lokal xarakterga ega, ya'ni u teskari funksiyani qaralayotgan nuqtaning faqat biror yetarlicha kichik atrofida mavjudligini kafolatlaydi, xolos. Bunga sabab masalaning mohiyatida ekanligini navbatdagi misolda ko'rish mumkin.

**12.3.4 - misol.** Faraz qilaylik, $f : (0, 1) \times (0, 4\pi) \to \mathbb{R}^2$ vektor-funksiya quyidagi

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x \cos y\,,\ x \sin y) \tag{12.3.37}$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsin.

Bu funksiyaning Yakobi matritsasi

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \left\| \begin{matrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{matrix} \right\|$$

ko'rinishga ega. Demak,

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = x > 0.$$

Shunday ekan, 12.3.4 - teoremaga ko'ra, $(0, 1) \times (0, 4\pi)$ to'g'ri to'rtburchakning har bir nuqtasi shunday atrofga egaki, uni qaralayotgan vektor-funksiya biror ochiq to'plamga o'zaro bir qiymatli ravishda akslantiradi. Lekin, shunga qaramasdan,

$$f(x,\ \pi) = (-x,\ 0), \quad f(x,\ 3\pi) = (-x,\ 0)$$

tengliklardan ko'rinib turibdiki, bu akslantirish to'g'ri to'rtburchakning ikki turli nuqtasini bir nuqtaga akslantirar ekan. Bundan chiqdi, qaralayotgan akslantirish butun to'g'ri to'rtburchakda o'zaro bir qiymatli emas. Demak, teoremaning global varianti to‘g‘ri bo‘lmas ekan.

Agar (12.3.37) vektor-funksiyani yopiq $[0,1]\times[0,4\pi]$ to‘g‘ri to‘rtburchakda qarasak, ravshanki, u to‘g‘ri to‘rtburchakning $x = r$ abssissali har bir vertikal kesmasini radiusi $r$ ga teng bo‘lgan aylanaga akslantiradi. Bunda $y$ o‘zgaruvchi 0 dan $4\pi$ gacha o‘zgarganda, bu aylanadan ikki marta o‘tiladi.

**5. Diffeomorfizm.** Agar o‘zaro bir qiymatli akslantirishning o‘zi va teskarisi differensiallanuvchi bo‘lsa, bu akslantirish *diffeomorfizm* deb ataladi.

Aytaylik, $\mathbb{R}^n$ fazosining biror ochiq $\Omega$ to‘plami berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamda $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ akslantirishni qaraymiz. Faraz qilaylik, $f$ akslantirish $\Omega$ da uzluksiz differensiallanuvchi va teskarilanuvchi bo‘lsin, ya’ni $f$ turli nuqtalarda turli qiymatlarni qabul qilsin. Bunda albatta, $f$ akslantirish $\Omega$ to‘plamni $E = f(\Omega)$ to‘plamga o‘zaro bir qiymatli akslantiradi.

Endi qo‘shimcha ravishda, $f$ akslantirishning yakobiani, ya’ni $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ matritsaning determinanti butun $\Omega$ da noldan farqli bo‘lsin, deb faraz qilaylik:

$$\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{12.3.38}$$

U holda, teskari funksiya haqidagi 12.3.4 - teoremaga ko‘ra, $f^{-1}$ funksiya har bir $\mathbf{b} \in E = f(\Omega)$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, (12.3.38) shart teskarilanuvchi funksiya uchun uning diffeomorfizm bo‘lishini ta’minlaydi.

## 12.4-§. Funksiyalar sistemasining bog‘liq va bog‘liqmasligi

Biror $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan bo‘lib, uzluksiz differensiallanuvchi va haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi $m$ ta

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n), \quad x \in \Omega, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{12.4.1}$$

funksiyalarni qaraylik.

Bu funksiyalardan birining, masalan $\varphi_m$ ning qolganlariga bog‘liqligi quyidagicha ta’riflanadi: agar $m-1$ ta o‘zgaruvchiga bog‘liq shunday $F(u_1, u_2, ..., u_{m-1})$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya topilsaki, barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun

$$\varphi_m(\mathbf{x}) = F(\varphi_1(\mathbf{x}),\ \varphi_2(\mathbf{x}),\ ...,\ \varphi_{m-1}(\mathbf{x})) \tag{12.4.2}$$

tenglik bajarilsa, u holda $\varphi_m$ funksiya $\Omega$ sohada (12.4.1) funksiyalarning birinchi $m-1$ tasiga bog‘liq deyiladi.

Agar (12.4.1) funksiyalardan birortasi (qaysi biri bo‘lishidan qat’iy nazar) qolganlariga $\Omega$ sohasida bog‘liq bo‘lsa, bu $m$ ta funksiyalarni $\Omega$ sohada *bog‘liq* deymiz. Aks holda esa, (12.4.1) funksiyalarni $\Omega$ sohada *bog‘liqmas* deymiz.

Bu ta’rifga ko‘ra, agar (12.4.1) funksiyalar biror $V \subset \Omega$ qismiy sohada bog‘liqmas bo‘lsa, ular, albatta butun $\Omega$ sohada ham bog‘liqmas bo‘ladi. Xususan, agar berilgan funksiyalar biror $a \in \Omega$ nuqtaning qandaydir atrofida bog‘liqmas bo‘lsa, ular $\Omega$ da ham bog‘liqmas bo‘ladi.

**Eslatma.** Chiziqli algebra kursida berilgan $m$ ta funksiyaning chiziqli bog‘liqlik tushunchasi kiritiladi: agar (12.4.2) tenglikda $F$ funksiya o‘z argumentlarining chiziqli funksiyasi bo‘lsa, u holda (12.4.1) funksiyalar chiziqli bog‘liq deyiladi.

Ravshanki, agar (12.4.1) funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, ular bo‘gliq ham bo‘ladi. Navbatdagi misol bu tasdiqning teskarisi o‘rinli emasligini ko‘rsatadi.

**12.4.1 - misol.** Uch o‘zgaruvchili quyidagi funksiyalarni qaraymiz:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,z) &= x+y+z, \\
\varphi_2(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2, \\
\varphi_3(x,y,z) &= xy+yz+xz.
\end{aligned}$$

Bu funksiyalarning chiziqli bog‘liqmasligi o‘z-o‘zidan ko‘rinib turibdi, chunki ularning chiziqli kombinatsiyasi ikkinchi tartibli ko‘phad bo‘lib, u aynan nolga teng bo‘lishi uchun chiziqli kombinatsiyaning barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo‘lishi zarur. Lekin shunga qaramasdan, qaralayotgan funksiyalar o'zaro bog'liqdir, chunki

$$\varphi_2 \ = \ (\varphi_1)^2 \ - \ 2\varphi_3.$$

Ko'plab amaliy masalalarni yechishda (12.4.1) ko'rinishdagi $m$ ta $\varphi_k(\mathbf{x})$ funksiyalar sistemasining bog'liq yoki bog'liqmasligini aniqlash muammosi muhimdir. Agar

$$\varphi(\mathbf{x}) \ = \ (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), ..., \varphi_m(\mathbf{x}))$$

deb belgilasak, bu muammoni yechishda quyidagi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \ = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{12.4.3}$$

$(m \times n)$ matritsaning rangi hal qiluvchi rol o'ynaydi.

**12.4.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, $n$ ta o'zgaruvchili $m$ ta (12.4.1) funksiya $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $x_j$ o'zgaruvchilarning biror $m$ tasi bo'yicha bu funksiyalardan tuzilgan yakobian qandaydir $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada noldan farqli bo'lsa, u holda bu funksiyalar $\Omega$ da bog'liqmas bo'ladi.*

**Isbot.** Aniqlik uchun, $(x_1, x_2, ..., x_m)$ o'zgaruvchilar bo'yicha olingan yakobian biror $\mathbf{a}$ nuqtada noldan farqli bo'lsin deylik, ya'ni

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \ \neq \ 0. \tag{12.4.4}$$

(12.4.1) funksiyalarning bog‘liqmas ekanini isbotlaymiz. Agar buning aksi bo‘lsa, bu funksiyalardan bittasi, masalan $\varphi_m$ , $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida qolganlariga bog‘liq bo‘lar edi, ya’ni, $b_k = \varphi_k(\mathbf{a})$ $(k = 1, 2, ..., m-1)$ koordinatalarga ega bo‘lgan $\mathbf{b} \in R^{m-1}$ nuqtaning atrofida uzluksiz differensiallanuvchi shunday $F(u_1, u_2, ..., u_{m-1})$ funksiya mavjud bo‘lar ediki, $\mathbf{a}$ nuqtaning ko‘rsatilgan atrofidan olingan barcha $\mathbf{x}$ lar uchun

$$\varphi_m(\mathbf{x}) \;=\; F\left(\varphi_1(\mathbf{x}),\; \varphi_2(\mathbf{x}),\; ...,\; \varphi_{m-1}(\mathbf{x})\right)$$

tenglik bajarilar edi.

Bundan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra,

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \;=\; \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial F}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

tengliklarga ega bo‘lamiz.

Demak, agar $\lambda_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{a})$ desak, u holda $\mathbf{a}$ nuqtada

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \;=\; \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

deb yozish mumkin.

Bu tenglik (12.4.4) determinantning $m$-satri $\mathbf{a}$ nuqtada qolgan satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini anglatadi. Bundan chiqdi, bu determinant nolga tengdir. Lekin bu tasdiq (12.4.4) shartga zid. Hosil bo‘lgan ziddiyat teoremani isbotlaydi.■

**12.4.2 - misol.** Hosilalari noldan farqli bo‘lgan, bir o‘zgaruvchili ikkita $f(t)$ va $g(t)$ differensiallanuvchi funksiyalar berilgan bo‘lsin. Ikki o‘zgaruvchili

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) \;&=\; f(x - y), \\ \psi(x, y) \;&=\; g(x + y) \end{aligned}$$

funksiyalarning bog‘liqmas ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun mos yakobianni hisoblaylik:

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \;=\; \begin{vmatrix} f'(x-y) & -f'(x-y) \\ g‘(x+y) & g‘(x+y) \end{vmatrix} \;=\; 2f'(x-y)g‘(x+y) \;\neq 0.$$

Shunday ekan, bu funksiyalarning bog'liqmas ekani 12.4.1 - teoremadan kelib chiqadi. Bu ikki funksiya quyidagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tenglikni qanoatlantirishiga e'tibor beraylik. Demak, qaralayotgan funksiyalar yuqoridagi xususiy hosilali differensial tenglamaning ikki o'zaro bog'liqmas yechimlaridan iborat ekan.

Isbotlangan 12.4.1 - teoremani (12.4.3) matritsa rangi iboralarida ifodalash mumkin. To'g'ri to'rtburchakli matritsa rangi deb uning chiziqli bog'liq bo'lmagan satrlarining maksimal soniga aytilishini eslatib o'tamiz. Berilgan matritsaning rangini hisoblash uchun uning noldan farqli minorlarini olib, ular ichida maksimal tartibni topish kerak. Ana shu tartib matritsaning rangi bo'ladi. Shunday qilib, 12.4.1 - teoremaga teng kuchli tasdiq quyidagi ko'rinishga ega.

**12.4.1* - teorema.** *Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, $n$ ta o'zgaruvchili $m$ ta (12.4.1) funksiya $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar (12.4.3) matritsaning rangi $\mathbf{a}$ nuqtada $m$ ga teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar $\mathbf{a}$ nuqtaning qayd etilgan atrofida bog'liqmas bo'ladi.*

Agar qaralayotgan (12.4.3) matritsaning rangi funksiyalar soni $m$ dan kichik bo'lsa, u holda (12.4.1) funksiyalar bo'g'liqmas bo'la olmaydi. Chunonchi, navbatdagi tasdiq o'rinli.

**12.4.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, (12.4.1) funksiyalar $\Omega$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, (12.4.3) matritsaning rangi barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ lar uchun $m-1$ ga teng bo'lsin. Agar biror $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada quyidagi*

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1})}{D(x_1, x_2, ..., x_{m-1})} \tag{12.4.5}$$

*yakobian noldan farqli bo'lsa, u holda $\varphi_m$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}$ funksiyalarga bog'liq bo'ladi.*

**Isbot.** (12.4.3) matritsa elementlarining uzluksizligiga ko'ra, (12.4.5) yakobianni $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida noldan farqli deyishimiz mumkin. Shunday ekan, ana shu atrofda (12.4.3) matritsaning birinchi $(m-1)$ ta satr va ustunlari bazis minorni tashkil qiladi. Shu sababli, $m$-satr, ya’ni,

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}\right),$$

birinchi $(m-1)$ ta satrning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Demak, shunday $\lambda_j$ koeffitsientlar topiladiki, umuman aytganda $\mathbf{x}$ ga bog‘liq bo‘lgan, ular uchun

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{x}}$$

tenglik bajariladi.

Bu tenglikni komponentalar bo‘yicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{12.4.6}$$

Quyidagi $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, ..., x_{m-1})$ va $\mathbf{x}' = (x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$ belgilashlarni kiritaylik. Bunda $\mathbf{a}^*$ va $\mathbf{a}'$ belgilashlar ham xuddi shu ma’noga ega bo‘lsin.

Birinchi $m-1$ ta komponentadan tashkil topgan

$$\varphi^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}') = (\varphi_1(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{x}'), \varphi_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}'),\ ..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}'))$$

vektor-funksiyani kiritib, uni $\mathbf{x}^*$ ning funksiyasi deb va $\mathbf{x}'$ ni esa, parametr deb qaraymiz.

Agar $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_{m-1})$ desak,

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}^*) = \varphi^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}')$$

vektor-funksiya, (12.4.5) shartga va 12.4.4 - teoremaga ko‘ra, teskari

$$\mathbf{x}^* = \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \tag{12.4.7}$$

vektor-funksiyaga ega. Teskari funksiya ta’rifiga asosan, bu funksiya

$$\varphi^*[\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}'), \mathbf{x}'] = \mathbf{y}$$

ayniyatni qanoatlantiradi.

Boshqacha aytganda, $\varphi^*(\mathbf{a})$ nuqtaning biror atrofidagi barcha $\mathbf{y}$ lar va $\mathbf{a}'$ nuqtaning biror atrofidagi barcha $\mathbf{x}'$ lar uchun

$$\varphi_j[\psi(\mathbf{y},\mathbf{x}'),\mathbf{x}'] \;=\; y_j, \quad j=1,2,...,m-1, \tag{12.4.8}$$

tengliklar o'rinli.

Shunday ekan, (12.4.8) ayniyatlarni $\mathbf{x}'$ o'zgaruvchi bo'yicha differensiallab, zanjir qoidasini qo'llasak,

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial\mathbf{x}^*}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}'} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial\mathbf{x}'} \;=\; 0, \quad j=1,2,...,m-1, \tag{12.4.9}$$

tengliklarni olamiz.

Agar (12.4.9) dagi har bir tenglikni $\lambda_j$ ga ko'paytirib, ularni yig'sak, (12.4.6) tenglikka ko'ra, quyidagi

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\mathbf{x}^*}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}'} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial\mathbf{x}'} \;=\; 0 \tag{12.4.10}$$

muhim munosabatga ega bo'lamiz.

Endi

$$F(\mathbf{y},\mathbf{x}') \;=\; \varphi_m[\psi(\mathbf{y},\mathbf{x}'),\mathbf{x}'] \tag{12.4.11}$$

funksiyani kiritib, uni $\mathbf{x}'$ parametrlarga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. 12.1.3 - teoremaga asosan, buning uchun

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}'} \;=\; \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}, \frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

vektorning nolga tengligini ko'rsatish yetarli.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}'} \;=\; \frac{\partial\varphi_m}{\partial\mathbf{x}^*}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}'} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial\mathbf{x}'}. \tag{12.4.12}$$

Agar (12.4.12) ni (12.4.10) bilan taqqoslasak, talab qilingan $\dfrac{\partial F}{\partial\mathbf{x}'} = 0$ munosabatga ega bo'lamiz. Demak, $F$ funksiya $\mathbf{x}'$ o'zgaruvchilarga bog'liqmas va shuning uchun, (12.4.11) tenglikni

$$\varphi_m[\psi(\mathbf{y},\mathbf{x}'),\mathbf{x}'] \;=\; F(\mathbf{y})$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bunda $\mathbf{y}$ va $\mathbf{x}'$ lar mos ravishda $\varphi^*(\mathbf{a})$ va $\mathbf{a}'$ nuqtalarning atroflaridan olingan ixtiyoriy vektorlardir. Oxirgi tenglikda $\mathbf{y} = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), ..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x}))$ desak, u holda (12.4.7) ga ko'ra,

$$\varphi_m(\mathbf{x}) \;=\; F(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), ..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x}))$$

ayniyatni olamiz. Bu esa, $\varphi_m$ funksiyaning qolgan (12.4.1) funksiyalarga bog'liq ekanini anglatadi.■

**12.4.3 - misol.** Berilgan

$$\varphi_1(x, y, z) \;=\; (z - x - y)^{100},$$

$$\varphi_2(x, y, z) \;=\; e^{x+y+z},$$

$$\varphi_3(x, y, z) \;=\; \sin(x + y)z$$

uchta funksiyaning o'zaro bog'liq yoki bog'liqmasligini aniqlang.

Avval bu funksiyalardan tuzilgan yakobianni hisoblaymiz:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x, y, z)} =$$

$$= \begin{vmatrix} -100(z-x-y)^{99} & -100(z-x-y)^{99} & 100(z-x-y)^{99} \\ e^{x+y+z} & e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \\ z\cos(x+y)z & z\cos(x+y)z & (x+y)\cos(x+y)z \end{vmatrix} =$$

$$= \; 100(z-x-y)^{99}e^{x+y+z}\cos(x+y)z \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ z & z & x+y \end{vmatrix} \; = \; 0.$$

Endi quyidagi

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} -100(z-x-y)^{99} & 100(z-x-y)^{99} \\ e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \end{vmatrix} =$$

$$= -200(z-x-y)^{99}e^{x+y+z}$$

yakobianni qarasak, uning $z = x + y$ tekislikdan tashqarida noldan farqli ekanini ko'ramiz.

Shunday ekan, 12.4.2 - teoremaga asosan, bu tekislikdan tashqarida yotgan har bir nuqtaning biror atrofida $\varphi_3$ funksiya $\varphi_1$ va $\varphi_2$ funksiyalarga bog'liq bo'ladi. Ya'ni, shunday uzluksiz differensiallanuvchi $F(u_1, u_2)$ funksiya topiladiki, qayd etilgan atrofda

$$\sin(x+y)z = F[(z-x-y)^{100}, \ e^{x+y+z}]$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Umumiy holda, (12.4.1) funksiyalar ichida o'zaro bog'liqmaslarining maksimal soni (12.4.3) matritsaning rangiga teng. Chunonchi, navbatdagi teorema o'rinli.

**12.4.3 - teorema.** *Faraz qilaylik, $n \geq m$ bo'lib, (12.4.1) funksiyalar $\Omega$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, (12.4.3) matritsaning rangi barcha $\mathbf{x} \in \Omega$ nuqtalarda $r < m$ ga teng bo'lsin. Agar biror $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada*

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r)}{D(x_1, x_2, ..., x_r)}$$

*yakobian noldan farqli bo'lsa, u holda barcha $k = r+1, r+2, ..., m$ lar uchun $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida $\varphi_k$ funksiya $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r$ funksiyalarga bog'liq bo'ladi.*

**Isbot** bevosita 12.4.2 - teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatan, buning uchun $r + 1$ ta

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r, \varphi_k$$

funksiyalarni olib, 12.4.2 - teoremani qo'llash yetarli.

12.4.2 - va 12.4.3 - teoremalar lokal xarakterga ega ekanini qayd etamiz, ya’ni, bu teoremalar (12.4.1) funksiyalarning (12.4.3) matritsa uchun bazis minorni tashkil qiluvchi funksiyalarga bog‘liqligini butun $\Omega$ sohasida emas, balki faqat qaralayotgan nuqtaning biror atrofidagina o‘rnatadi. Bunga sabab isbotning mukammal emasligi emas, balki masalaning mohiyatidadir. Navbatdagi misolda (12.4.2) formulaning butun $\Omega$ da o‘rinli bo‘lishini ta’minlaydigan yagona $F$ funksiyaning, umuman aytganda, mavjud emasligi ko‘rsatilgan.

**12.4.4 - misol.** $\mathbb{R}^3$ da aniqlangan quyidagi uchta

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y,z) &= (x+z)\cos y, \\ \varphi_2(x,y,z) &= (x+z)\sin y, \\ \varphi_3(x,y,z) &= y, \end{aligned}$$

funksiyani qaraymiz.

Chegaralanmagan

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x>0, \ z>0\}$$

sohani har bir nuqtasining biror atrofida uchinchi funksiya qolgan ikkitasiga bog‘liq ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun quyidagi yakobianni hisoblaymiz:

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \cos y & -(x+z)\sin y & \cos y \\ \sin y & (x+z)\cos y & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lekin navbatdagi yakobian

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \cos y & -(x+z)\sin y \\ \sin y & (x+z)\cos y \end{vmatrix} = x+z$$

$\Omega$ ning har bir nuqtasida noldan farqli.

Bundan chiqdi, 12.4.2 - teoremaga ko‘ra, $\Omega$ ning har bir nuqtasi uchun shunday uzluksiz differensiallanuvchi $F(u_1,u_2)$ funksiya topiladiki, o‘sha nuqtaning biror atrofida

$$\varphi_3 = F(\varphi_1,\varphi_2)$$

tenglik bajariladi.

Ammo, shunga qaramasdan, butun $\Omega$ da bu tenglikni qanoatlantiruvchi $F(u_1, u_2)$ funksiya mavjud emas. Chunki, har ikkala $\varphi_1(x, y, z)$ va $\varphi_2(x, y, z)$ funksiya, ravshanki, $y$ bo‘yicha $2\pi$ davriy funksiyadir. Albatta, bundan chiqdi, $F(\varphi_1, \varphi_2)$ funksiya ham $y$ bo‘yicha $2\pi$ davriy bo‘ladi. Lekin $\varphi_3$ funksiya esa davriy emas. Demak, yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi $F(u_1, u_2)$ funksiya mavjud bo‘lmas ekan.

Xuddi shu mulohazalar uzunligi $2\pi$ dan katta bo‘lib, $Oy$ o‘qiga parallel bo‘lgan kesmani o‘z ichiga oluvchi istalgan $\Omega_1 \subset \Omega$ sohada ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.

## 12.5-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi

**1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi. Ekstremumning zaruriylik shartlari.**

Faraz qilaylik, $n$ ta o‘zgaruvchili $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin.

**Ta’rif.** *Agar* $\mathbf{a}$ *nuqtaning shunday atrofi topilsaki, bu atrofdan olingan istalgan* $\mathbf{x}$ *nuqta uchun*

$$f(\mathbf{a}) \ \geq \ f(\mathbf{x}) \qquad (12.5.1)$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda $f$ funksiya* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *nuqtada* ***lokal maksimumga*** *ega deyiladi.*

Bunday xossaga ega bo‘lgan $\mathbf{a}$ nuqta *lokal maksimum nuqta* deb ataladi. Agarda (12.5.1) o‘rniga

$$f(\mathbf{a}) \ \leq \ f(\mathbf{x}) \qquad (12.5.2)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\mathbf{a}$ *lokal minimum nuqta* deyiladi.

Lokal maksimum nuqtalar va lokal minimum nuqtalar *lokal ekstremum* nuqtalar deb ataladi.

**12.5.1 - teorema (lokal ekstremumning zaruriylik sharti).** *Faraz qilaylik,* $f(\mathbf{x})$ *funksiya* $\mathbf{a}$ *nuqtada barcha birinchi tartibli* *xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Agar* **a** *lokal ekstremum nuqta bo'lsa, u holda*

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{12.5.3}$$

*bo'ladi.*

**Isbot.** Aniqlik uchun, **a** nuqtani lokal maksimum nuqta deylik, ya'ni bu nuqtaning biror atrofida

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$$

tengsizlik bajarilsin.

Bir o'zgaruvchili

$$g(t) = f(t, a_2, a_3, ..., a_n) \tag{12.5.4}$$

funksiyani qaraymiz.

Ravshanki, agar $t$ nuqta $a_1$ ga yetarlicha yaqin bo'lsa, bu funksiya

$$g(t) \leq g(a_1) = f(\mathbf{a})$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni $t = a_1$ nuqta $g(t)$ funksiya uchun lokal maksimum nuqta bo'ladi. Shunday ekan, Ferma teoremasiga (4.3.1 - teorema) ko'ra, $g'(a_1) = 0$ tenglik bajariladi. Demak, (12.5.4) ni esga olsak,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = 0.$$

Xuddi shu usulda qolgan xususiy hosilalarning nolga tengligi ko'rsatiladi.■

**Natija.** *Faraz qilaylik,* $f(\mathbf{x})$ *funksiya* **a** *nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar* **a** *lokal ekstremum nuqtasi bo'lsa, bu nuqtada* $f$ *funksiyaning differensiali nolga teng:*

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{dx}) = 0. \tag{12.5.5}$$

Bu tasdiqning o'rinli ekanligi bevosita (12.5.3) va (12.2.3) tengliklardan kelib chiqadi.

**Ta’rif.** *Agar* $\mathbf{a}$ *nuqtada* $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ *shart bajarilsa, u holda* $\mathbf{a}$ *nuqta* $f$ *funksiyaning* ***statsionar nuqtasi*** *deyiladi.*

Shunday ekan, lokal ekstremum nuqtalarni statsionar nuqtalar ichi-dan izlash kerak.

**2. Ekstremumning yetarlilik shartlari.**

**12.5.2 - teorema.** *Faraz qilaylik,* $f$ *funksiya* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *statsionar nuqtada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar* $f$ *funksiyaning ikkinchi differensiali shu nuqtada musbat aniqlangan kvadratik forma bo‘lsa, u holda* $\mathbf{a}$ *nuqta* $f$ *funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo‘ladi.*

**Isbot.** Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli quyidagi

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \ - f(\mathbf{a}) \ = \ \frac{df(\mathbf{a},\mathbf{h})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h})}{2!} + o(|\mathbf{h}|^2)$$

Teylor formulasidan foydalanamiz.

Bu formuladagi birinchi differensial, $\mathbf{a}$ nuqta statsionar bo‘lgani uchun, nolga teng. Shunday ekan, Teylor formulasi

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \ - f(\mathbf{a}) \ = \ \frac{d^2 f(\mathbf{a},\mathbf{h})}{2!} + o(|\mathbf{h}|^2) \tag{12.5.6}$$

ko‘rinishga keladi.

Shartga ko‘ra, ikkinchi differensial musbat aniqlangan kvadratik forma. Demak, (12.5.5) va (12.2.13) larga asosan,

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \ - f(\mathbf{a}) \ \geq \ \mu|\mathbf{h}|^2 + o(|\mathbf{h}|^2)$$

baho o‘rinli.

Bundan chiqdi, yetarlicha kichik $\mathbf{h}$ lar uchun

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \ - f(\mathbf{a}) \ \geq \ \frac{\mu}{2}|\mathbf{h}|^2$$

deb yozish mumkin. Bu esa $\mathbf{a}$ lokal minimum nuqta ekanini anglatadi.■

**Natija.** *Faraz qilaylik,* $f$ *funksiya* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *statsionar nuqtada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar* $f$ *funksiyaning* *ikkinchi differensiali shu nuqtada manfiy aniqlangan kvadratik forma bo‘lsa, u holda* **a** *nuqta* $f$ *funksiyaning lokal maksimum nuqtasi bo‘ladi.*

**12.5.3 - teorema.** *Faraz qilaylik,* $f$ *funksiya* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *statsionar nuqtada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar* $f$ *funksiyaning ikkinchi differensiali shu nuqtada ishorasi o‘zgaruvchi kvadratik forma bo‘lsa, u holda* **a** *nuqta* $f$ *funksiyaning lokal ekstremum nuqtasi bo‘lmaydi.*

**Isbot.** Agar ikkinchi differensial ishorasi o‘zgaruvchi kvadratik forma bo‘lsa, shunday ikki $\mathbf{h}^+$ va $\mathbf{h}^-$ vektorlar topiladiki, ular uchun $|\mathbf{h}^+| = |\mathbf{h}^-| = 1$ bo‘lib,

$$d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{h}^+) > 0, \quad d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{h}^-) < 0 \tag{12.5.7}$$

tengsizliklar bajariladi.

Berilgan **a** nuqtaning statsionarligini hisobga olib, Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli (12.5.6) Teylor formulasini qo‘llaymiz. Bu formulaga ko‘ra, ikkinchi differensial bir jinsli kvadratik forma bo‘lgani sababli, $|\mathbf{h}| = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy tayinlangan $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ vektor va yetarlicha kichik $t$ lar uchun

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \ - f(\mathbf{a}) \ = \ t^2 \, \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{2!} + o(t^2) \tag{12.5.8}$$

munosabat o‘rinli.

Shunday ekan, agar (12.5.7) dagi tengsizliklarni hisobga olsak, yetarlicha kichik $t$ larda quyidagi ikki

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}^+) \ - f(\mathbf{a}) \ = \ t^2 \left[ \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}^+)}{2!} + o(1) \right] \ > \ 0 \tag{12.5.9}$$

va

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}^-) \ - f(\mathbf{a}) \ = \ t^2 \left[ \frac{d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}^-)}{2!} + o(1) \right] \ < \ 0 \tag{12.5.10}$$

tengsizliklarga ega bo‘lamiz.

Demak, $\mathbf{a}$ nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida $f$ funksiya $\mathbf{a}$ nuqtadagi qiymatidan ham katta, ham kichik qiymatlar qabul qilar ekan. Bundan, $\mathbf{a}$ lokal ekstremum nuqta bo'la olmasligi kelib chiqadi.■

### 3. Shartli ekstremum. Lagranjning ko'paytuvchilar usuli.

$1^0$. Ushbu bandda biz berilgan funksiyalarning ekstremal qiymatlarini biror qo'shimcha shartlar bajarilganda topish masalasini o'rganamiz. Bunday masalalar matematika tatbiqida ko'p uchraydi. Bunda, odatda, qo'shimcha shartlar o'zgaruvchilarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini cheklash shaklida beriladi.

Masalan, uchta o'zgaruvchili $f(x, y, z)$ funksiya maksimal qiymatini, argumentlari

$$g(x, y, z) = 0$$

qo'shimcha shartni qanoatlantirganda topish masalasini olaylik. Bu qo'shimcha shart bog'lash sharti deb ham ataladi. Bunda $g$ uch o'zgaruvchili berilgan (odatda silliq, ya'ni yetarli marta differensiallanuvchi) funksiyadir. Bunday maksimal qiymat *shartli maksimum* deb ataladi. Bu masalani yechishning eng tabiiy usuli quyidagidan iborat:

1) $g(x, y, z) = 0$ shartdan $z$ ni ikki $x$ va $y$ o'zgaruvchining funksiyasi sifatida topamiz, ya'ni shunday $z = \varphi(x, y)$ funksiyani topamizki, $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ tenglik $x$ va $y$ bo'yicha ayniyatga aylansin;

2) topilgan $z$ ning qiymatini $f$ funksiyaga qo'yamiz; natijada u ikki o'zgaruvchining funksiyasiga aylanadi: $F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$;

3) nihoyat, $F(x, y)$ funksiyaning oddiy maksimumini topamiz.

Odatda, bunday ketma-ketlikdagi eng qiyin qadam ekstremal nuqtaning biror atrofida $g(x, y, z) = 0$ tenglama orqali aniqlanuvchi $z = \varphi(x, y)$ oshkormas funksiyani topishdan iboratdir.

J. Lagranj mana shu eng qiyin qadamni chetlab o'tish yo'lini topdi, ya'ni u izlanayotgan ekstremal qiymatni qayd etilgan oshkormas funksiyani aniqlamasdan topish usulini taklif qildi. Chunonchi, faraz qilaylik, ekstremal nuqta atrofida $g$ funksiya gradientining hech bo‘lmasa bitta komponentasi, masalan $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ noldan farqli bo‘lsin. U holda, bog‘lash shartini qanoatlantiruvchi $z = \varphi(x, y)$ oshkormas funksiya mavjud. Endi biz $(a, b)$ koordinatali nuqtada $F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ funksiyaning (hech qanday shartsiz) ekstremumi mavjudligining zaruriy shartidan foydalansak bo‘ladi. Bu shart quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \;=\; 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \;=\; 0.$$

Bu tengliklarni, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga binoan,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) = \;0 \tag{12.5.11}$$

va

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) = \;0 \tag{12.5.12}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Endi $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ ayniyatni $x$ va $y$ bo‘yicha differensiallasak,

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \;0 \tag{12.5.13}$$

va

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \;0 \tag{12.5.14}$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz.

Agar $c = \varphi(a, b)$ deb,

$$\mathbf{s} \;=\; \left(1,\; 0,\; \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b)\right)$$

va

$$\mathbf{h} \;=\; \left(0,\; 1,\; \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)\right)$$

belgilashlar kiritilsa, (12.5.11) va (12.5.12) tengliklarni

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{s} \;=\; \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{h} \;=\; 0$$

ko‘rinishda, (12.5.13) va (12.5.14) ayniyatlarni esa,

$$\nabla g \cdot \mathbf{s} \;=\; \nabla g \cdot \mathbf{h} \;=\; 0$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bundan chiqdi, $(a, b, c)$ nuqtada $\nabla f(a, b, c)$ va $\nabla g(a, b, c)$ uch o‘lchovli vektorlar o‘zaro kollinear bo‘lmagan $\mathbf{s}$ va $\mathbf{h}$ vektorlarga mos ravishda ortogonal ekan. Ya’ni, bu gradientlar $\mathbf{s}$ va $\mathbf{h}$ vektorlar bilan aniqlangan tekislikka ortogonal. Shuning uchun, bu ikki gradient o‘zaro kollinear bo‘ladi, ya’ni, $\nabla g(a, b, c) \neq 0$ ekanini esga olsak, shunday $\lambda$ soni topiladiki, u uchun

$$\nabla f(a, b, c) \;=\; \lambda \nabla g(a, b, c)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

*Lagranj funksiyasi* deb ataluvchi

$$L(x, y, z, \lambda) \;=\; f(x, y, z) \;-\; \lambda\, g(x, y, z) \tag{12.5.15}$$

funksiyani kiritamiz.

Agar $\lambda$ ni yuqoridagidek tanlasak, $f$ funksiyaning $g = 0$ bog‘lash sharti ostidagi lokal ekstremum nuqtasida $(x, y, z)$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha hisoblangan gradient uchun

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) \;=\; 0 \tag{12.5.16}$$

tenglik bajariladi.

Hosil bo‘lgan (12.5.16) tenglamani, gradient komponentalariga o‘tib, uchta skalyar tenglama ko‘rinishida yozish mumkin. Agar bunga $g = 0$ shartni qo‘shsak, biz to‘rtta $a, b, c$ va $\lambda$ haqiqiy sonlarni topish uchun to‘rtta skalyar tenglamaga ega bo‘lamiz.

Ravshanki, bog‘lash sharti bajarilganda, bevosita Lagranj funksiyasining (12.5.15) ta’rifidan

$$L(x, y, z, \lambda) - L(a, b, c, \lambda) \;=\; f(x, y, z) - f(a, b, c)$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, Lagranj funksiyasi hamda bog‘lash sharti bajarilgan holda, $f$ funksiya ekstremumga bir xil nuqtalarda erishadi.

O‘z-o‘zidan ko‘rinib turibdiki, keltirilgan mulohazalar o‘zgaruvchilar soniga bog‘liq emas; ular istalgan natural $n$ o‘lchovli funksiyalar uchun o‘rinli.

**12.5.1 - misol.** Faraz qilaylik, asosidagi aylananing radiusi $R$ ga va balandligi $H$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri silindr sirtining yuzi $S$ ga teng bo‘lib, bu son tayinlangan bo‘lsin. $R$ va $H$ o‘rtasida shunday munosabat topish kerakki, natijada silindr hajmi $V$ eng katta qiymat qabul qilsin.

Demak,

$$2\pi R^2 + 2\pi RH = S$$

shart bajarilganda

$$V(R, H) = \pi R^2 H$$

funksiyaning maksimumini topish talab qilinadi.

Bu holda Lagranj funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$L(R, H, \lambda) \; = \; \pi R^2 H \; - \lambda(2\pi R^2 + 2\pi RH - S).$$

Statsionar nuqtada navbatdagi ikki

$$\frac{\partial L}{\partial R} \; = \; 2\pi RH - \lambda(4\pi R + 2\pi H) \; = \; 0$$

va

$$\frac{\partial L}{\partial H} \; = \; \pi R^2 - \lambda 2\pi R \; = \; 0$$

shartlar bajariladi.

Ikkinchi tenglikdan

$$\lambda \; = \; \frac{R}{2}$$

ni topib, $\lambda$ ning bu qiymatini birinchi tenglikka qo‘yamiz:

$$RH \; = \; \frac{R}{2}(2R + H).$$

Demak,

$$H \; = \; 2R.$$

Shunday qilib, sirt yuzasi tayinlanganda, to‘g‘ri doiraviy silindr hajmi o‘zining maksimumiga silindr balandligi asosining diametriga teng bo‘lganda erishar ekan.

$2^0$. Xuddi yuqoridagi singari, bog‘lash sharti ikkita:

$$g_1(x,y,z) \;=\; 0 \quad \text{va} \quad g_2(x,y,z) \;=\; 0$$

bo‘lganda ham $f(x,y,z)$ funksiyaning ekstremal qiymatlarini topish masalasini o‘rganish mumkin.

Bu shartlar o‘zaro bog‘liqmas, deb faraz qilamiz. Buning uchun, masalan,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} \;\neq\; 0 \tag{12.5.17}$$

tengsizlikning bajarilishi yetarli.

Bu holda shunday oshkormas $y = \varphi(x)$ va $z = \psi(x)$ funksiyalarni topish mumkinki, ular uchun bog‘lash shartlari ayniyatga aylanadi, ya’ni

$$g_1(x,\ \varphi(x),\ \psi(x)) \;=\; 0, \quad g_2(x,\ \varphi(x),\ \psi(x)) \;=\; 0. \tag{12.5.18}$$

Endi biz $a$ nuqtada bir o‘zgaruvchili $F(x) = f(x, \varphi(x), \psi(x))$ funksiyaning (hech qanday shartsiz) ekstremumi mavjudligining zaruriy shartidan foydalansak bo‘ladi. Bu shartga ko‘ra, $x = a$ nuqtada

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial z}\psi'(x) \;=\; 0 \tag{12.5.19}$$

tenglik bajariladi.

(12.5.18) ayniyatlarni differensiallab,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial g_1}{\partial z}\psi'(x) \;=\; 0 \tag{12.5.20}$$

va

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial g_2}{\partial z}\psi'(x) \;=\; 0 \tag{12.5.21}$$

munosabatlarni olamiz.

Agar $b = \varphi(a)$ va $c = \psi(a)$ deb belgilasak, (12.5.19)-(12.5.21) tengliklar uch o‘lchovli $\nabla f$, $\nabla g_1$ va $\nabla g_2$ vektorlarning $(a, b, c)$ ekstremum nuqtada noldan farqli

$$\mathbf{s} \;=\; \big(1,\ \varphi'(a),\ \psi'(a)\big)$$

vektorga ortogonal ekanini anglatadi. Shunday ekan, bu uch vektor bir tekislikda yotadi. Demak, (12.5.17) shartga ko‘ra, $\nabla g_1$ va $\nabla g_2$ vektorlar o‘zaro chiziqli bog‘liqmas ekanini hisobga olsak, shunday haqiqiy $\lambda_1$ va $\lambda_2$ sonlar topiladiki, ekstremum nuqtasida

$$\nabla f \;=\; \lambda_1 \nabla g_1 \;+\; \lambda_2 \nabla g_2$$

tenglik bajariladi.

Agar Lagranj funksiyasini

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \;=\; f(x, y, z) \;-\; \lambda_1\, g_1(x, y, z) \;-\; \lambda_2\, g_2(x, y, z)$$

tenglik bilan aniqlasak, u holda ekstremum nuqtasida $(x, y, z)$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha olingan gradient uchun

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \;=\; 0$$

tenglik bajariladi.

Endi bu uchta skalyar tengliklarga ikkita bog‘lash shartini qo‘shsak, beshta haqiqiy $a, b, c, \lambda_1$ va $\lambda_2$ sonlarni topish uchun beshta tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, Lagranjning ko‘paytuvchilar usuli, bog‘lash shartlari bilan aniqlangan oshkormas funksiyalarni topmasdan turib, lokal shartli ekstremum nuqtasini aniqlashga imkon berar ekan.

$3^0$. Endi umumiy holni qaraymiz, ya’ni biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohasida aniqlangan $f$ funksiyaning ekstremal qiymatlarini $m$ ta

$$g_k(\mathbf{x}) \;=\; 0, \quad k = 1, 2, ..., m \qquad (12.5.22)$$

bog‘lash shartlari bo‘lgan holda topish masalasini o‘rganamiz.

Agar $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtaning shunday atrofi topilsaki, bu atrofdan olingan va (12.5.22) bog‘lash shartlarini qanoatlantiruvchi barcha $\mathbf{x}$ lar uchun

$$f(\mathbf{a}) \;\geq\; f(\mathbf{x}) \tag{12.5.23}$$

tengsizlik bajarilsa, $f(\mathbf{x})$ funksiya $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtada (12.5.22) shartlar ostida *shartli maksimumga* ega deymiz.

Xuddi shunga o‘xshab, shartli minimum aniqlanadi. Agar $\mathbf{a}$ nuqta yoki shartli maksimum nuqta yoki shartli minimum nuqta bo‘lsa, u *shartli ekstremum* nuqta deb ataladi.

Odatda $m < n$ deb, ya’ni bog‘lashlar soni o‘zgaruvchilar sonidan kichik deb va (12.5.22) dagi bog‘lash shartlar takrorlanmaydi deb faraz qilinadi. Oxirgi shart matematik tilda $g_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, ..., m$, funksiyalarning bog‘liqmasligini bildiradi. Buning uchun, 12.4.1 - teoremaga ko‘ra, bu funksiyalardan $m$ ta biror $x_j$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha tuzilgan yakobian noldan farqli ekanini talab qilish yetarli. Bu holda, oshkormas funksiya haqidagi 12.3.3 - teoremaga asosan, biz ko‘rsatilgan o‘zgaruvchilarni qolganlarining oshkormas funksiyasi sifatida yozishimiz mumkin. Keyingi mulohazalar xuddi yuqoridagidek olib boriladi.

Chunonchi, aytaylik, $g_k$ funksiyalardan $x_1, x_2, ..., x_m$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha olingan yakobian noldan farqli bo‘lsin:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \;\neq\; 0. \tag{12.5.24}$$

U holda, 12.3.3 - teoremaga asosan, (12.5.22) bog‘lash shartlari $m$ ta

$$x_k \;=\; \varphi_k(\mathbf{x}'), \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{12.5.25}$$

oshkormas funksiyalarni aniqlaydi, bunda $\mathbf{x}' = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Natijada, $f(\mathbf{x})$ funksiyani (12.5.22) shartlar ostidagi shartli ekstremumini topish masalasi

$$F(\mathbf{x}') \;=\; f(\varphi_1(\mathbf{x}'), \varphi_2(\mathbf{x}'), ..., \varphi_m(\mathbf{x}'),\ \mathbf{x}')$$

funksiyaning shartsiz ekstremumini topish masalasiga keladi.

Oxirgi funksiya uchun $\mathbf{a} \in \Omega$ nuqtadagi ekstremumining zaruriy sharti quyidagi

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \;=\; 0, \quad j = m+1, m+2, ..., n,$$

ko'rinishga ega.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra, bu tengliklarni

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \;=\; 0, \quad j = m+1, m+2, ..., n, \tag{12.5.26}$$

deb yozish mumkin.

Agar $g_k(\mathbf{x})$ funksiyalarda birinchi $m$ ta $x_j$ o'zgaruvchi o'rniga ularning (12.5.25) formuladagi qiymatini qo'ysak, (12.5.22) shartlar navbatdagi

$$g_k(\varphi_1(\mathbf{x}'), \varphi_2(\mathbf{x}'), ..., \varphi_n(\mathbf{x}'),\ \mathbf{x}') \;=\; 0$$

ayniyatlarga aylanadi. Bu ayniyatlarni differensiallab, yangi

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0,\ j = m+1, m+2, ..., n,\ k = 1, 2, ..., m$$

ayniyatlarga ega bo'lamiz.

Xususan, bu tengliklar $\mathbf{a}$ nuqtada ham o'rinli:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0,\ j = m+1, m+2, ..., n,\ k = 1, 2, ..., m. \tag{12.5.27}$$

Navbatdagi

$$\mathbf{s}_1 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{m+1}}, ..., \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{m+1}}, 1, 0, 0, ..., 0, \right),$$

$$\mathbf{s}_2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{m+2}}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{m+2}}, ..., \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{m+2}}, 0, 1, 0, ..., 0, \right),$$

$$...$$

$$\mathbf{s}_{n-m} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n-m}}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{n-m}}, ..., \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{n-m}}, 0, 0, ..., 0, 1, \right)$$

$(n-m)$ ta chiziqli bog‘liqmas $n$ o‘lchovli vektorlarni kiritamiz.

U holda (12.5.26) tengliklar

$$\nabla f \cdot \mathbf{s}_j = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-m, \tag{12.5.28}$$

ko‘rinishga, va (12.5.27) tengliklar esa,

$$\nabla g_k \cdot \mathbf{s}_j = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-m, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{12.5.29}$$

ko‘rinishga keladi.

Bundan chiqdi, $\mathbf{a}$ nuqtada olingan $n$ o‘lchovli $\nabla f$, $\nabla g_1$, $\nabla g_2$, ..., $\nabla g_m$ vektorlar $\mathbb{R}^n$ fazosining $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_{n-m}$ vektorlar tashkil qilgan $(n-m)$ o‘lchovli qism fazosiga ortogonaldir. Shunday ekan, qayd qilingan gradientlar (ya’ni $m+1$ ta vektor) $\mathbb{R}^n$ fazosining bitta $m$ o‘lchovli qism fazosida yotadi. (12.5.24) shartga ko‘ra, $\nabla g_k$, $k = 1, 2, ..., m$, vektorlar chiziqli bog‘liqmas ekan. Demak, shunday $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ sonlar topiladiki, ular uchun

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + ... + \lambda_m \nabla g_m \tag{12.5.30}$$

tenglik bajariladi.

Endi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ deb belgilab,

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) - ... - \lambda_m g_m(\mathbf{x}) \tag{12.5.31}$$

Lagranj funksiyasini kiritamiz.

Ma’lumki, (12.5.30) tenglik $f$ funksiyaning (12.5.22) shartlar ostidagi lokal ekstremum nuqtasi bo‘lgan $\mathbf{a}$ nuqtada

$$\nabla L(\mathbf{a}, \lambda) = \mathbf{0} \tag{12.5.32}$$

tenglikning bajarilishini anglatadi.

Bu $n$ ta skalyar tenglamaga $m$ ta bog‘lash shartini qo‘shsak, $n+m$ ta tenglamaga ega bo‘lamiz. Aniqlanishi lozim bo‘lgan noma’lumlar ham aynan $n+m$ ta haqiqiy sonlardan iborat, ya’ni lokal ekstremum nuqtasining $n$ koordinatasi va $m$ ta $\lambda_k$ larning qiymatlari.

Shunday qilib, biz navbatdagi tasdiqni isbotladik.

**12.5.1 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nuqta $f$ funksiyaning (12.5.22) bog‘lash shartlaridagi lokal ekstremum nuqtasi bo‘lib, (12.5.22) shartlarga kiruvchi $g_k$ funksiyalarning gradientlari chiziqli bog‘liqmas bo‘lsin. U holda, shunday haqiqiy $\lambda_k$, $k = 1, 2, ..., m$, sonlar topiladiki, ular uchun (12.5.31) Lagranj funksiyasi (12.5.32) shartni qanoatlantiradi.*

**12.5.2 - misol.** Berilgan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor uchun

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n$$

funksiyaning

$$|\mathbf{x}| = r$$

shart ostidagi ekstremum nuqtalari topilsin.

Bog‘lash shartini

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - r^2 = 0$$

ko‘rinishda yozib,

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{b}, x) - \lambda(|\mathbf{x}|^2 - r^2) =$$

$$= b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - r^2)$$

Lagranj funksiyasini kiritamiz.

U holda, 12.5.1 - tasdiqqa ko‘ra,

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_k} = b_k - 2\lambda x_k = 0$$

tenglamalarga ega bo'lamiz.

Bundan $x_k$ ni $\lambda$ ning funksiyasi sifatida aniqlaymiz:

$$x_k = \frac{b_k}{2\lambda}.$$

Endi $\lambda$ ni bog'lash shartidan topamiz. Bu shartga ko'ra,

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_k}{2\lambda}\right)^2 = r^2.$$

Bundan chiqdi, $|\mathbf{b}|^2 = (2\lambda)^2 r^2$, yoki

$$2\lambda = \pm\frac{|\mathbf{b}|}{r}.$$

Ravshanki, agar bu tenglikning o'ng tomonida $\ll + \gg$ ishorani olsak, lokal shartli ekstremum nuqtasi

$$x_k^* = r\frac{b_k}{|\mathbf{b}|}$$

koordinatalarga va agar $\ll - \gg$ ishora olinsa, lokal shartli ekstremum nuqtasi

$$x_k^{**} = -r\frac{b_k}{|\mathbf{b}|}$$

koordinatalarga ega bo'ladi.

Bu nuqtalardan biri shartli lokal minimum nuqtasi va ikkinchisi esa, shartli lokal maksimum nuqtasi bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Ayniqsa, (12.5.22) bog'lash shartlaridan oshkormas funksiyalarni topish murakkab bo'lgan hollarda Lagranj usuli samarali bo'lishini qayd etib o'tamiz.

**Eslatma.** Agar qo'shimcha $(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$ o'zgaruvchilarni kiritib, $\widetilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_{n+m})$ simvoli orqali $\mathbb{R}^{n+m}$ fazosining nuqtalarini belgilasak, u holda Lagranj funksiyasini

$$L(\widetilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{m} x_{n+k} g_k(\mathbf{x}) \qquad (12.5.33)$$

ko‘rinishda aniqlash mumkin.

Ravshanki, bunda Lagranj funksiyasining $x_{n+k}$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalari $g_k(\mathbf{x})$ funksiyalarga teng bo‘lib, $f$ funksiyaning (12.5.22) shartlar ostidagi shartli lokal ekstremum nuqtasida

$$\frac{\partial L}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$$

tenglik bajariladi. Bundan chiqdi, ekstremum nuqtada (12.5.33) Lagranj funksiyasidan barcha $n+m$ ta o‘zgaruvchi bo‘yicha olingan gradientning nolga teng bo‘lishi zarur ekan.

Shartli ekstremum topish masalasiga bunday yondashuv matematikaning turli tadqiqlarida keng qo‘llaniladi.

**4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni eng katta va eng kichik qiymatlarini topishning umumiy sxemasi.**

Biror yopiq $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sohada $f$ funksiyaning ekstremal qiymatlarini topish muammosi ikki masalaga bo‘linadi: birinchi masala ekstremal qiymatni ochiq $\Omega$ sohasida topishdan iborat bo‘lib, ikkinchi masala esa, ekstremumni soha chegarasi $\partial\Omega$ da topishdan iborat.

Birinchi masalani yechish uchun avval $\Omega$ sohasida $f$ funksiya gradienti nolga aylanadigan statsionar nuqtalar izlanadi, so‘ngra bu nuqtalarda ikkinchi differensialning ishorasi aniq kvadratik forma bo‘lish yoki bo‘lmasligi o‘rganiladi.

Ikkinchi masala, odatda, $f$ funksiyaning shartli ekstremumini topishga keltiriladi, bunda bog‘lash sharti $\Omega$ sohasi chegarasi $\partial\Omega$ ning tenglamasidan iborat bo‘ladi.

**Eslatma.** Keyingi bobdan boshlab $n$ o‘lchovli $\mathbb{R}^n$ fazosi nuqtalarini, yozuvni soddalashtirish maqsadida, ko‘pincha qalin harflar bilan emas, balki lotin alifbosining oddiy

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

harflari bilan belgilaymiz, bunda matndan bu harf bilan sonlar emas, vektorlar belgilangani tushunarli bo‘ladi.

## 12.6-§. Misollar

**1 - misol**. Agar

$$f(x,y) \;=\; x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

bo'lsa, $f'_x(x,1)$ ni toping.

**Ko'rsatma**. $f'_x(x,b) = \frac{d}{dx} f(x,b)$ tenglikdan, ya'ni $f(x,y)$ funksiyani $x$ bo'yicha xususiy hosilasining $y = b$ nuqtadagi qiymati bir o'zgaruvchili $f(x,b)$ funksiya hosilasiga teng ekanidan foydalaning.

**2 - misol**. Agar $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ bo'lsa, $f_x(0,0)$ va $f_y(0,0)$ xususiy hosilalarni toping. Bu funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

**Ko'rsatma**. Yuqoridagi misolda qo'llangan usuldan foydalanib, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ekanini ko'rsating. Differensiallanuvchanlikni (12.1.13) ta'rifdan foydalanib tekshiring. Bunda

$$f(x,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{xy} = \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

deb yozib olib, $\alpha(x,y) = \sqrt[3]{xy}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ funksiyaning $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ da cheksiz kichik emasligiga ishonch hosil qiling.

**3 - misol**. Quyidagi

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{agar } (x,y) \neq (0,0) \text{ bo'lsa,} \\ \quad 0 \qquad , & \text{agar } (x,y) = (0,0) \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning $f'_x$, $f'_y$ xususiy hosilalari $(0,0)$ nuqtada uzilishga ega bo'lib, bu nuqtaning istalgan atrofida chegaralanmagan ekanini isbotlang. Shunday bo'lsada, bu funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishini ko'rsating.

**Ko'rsatma**. Agar $(x,y) \neq (0,0)$ bo'lsa, oddiy hisoblash orqali $f'_x$ va $f'_y$ xususiy hosilalarni toping. Agarda $(x,y) = (0,0)$ bo'lsa, $f'_x(0,0) = 0$ va $f'_y(0,0) = 0$ ekanini, 1 - misolda qo'llangan usuldan foydalanib, ko'rsating. So'ngra, masalan, $f'_x$ funksiyaning $(0,0)$ nuqtada uzilishga ega va chegaralanmagan ekaniga ishonch hosil qilish uchun, $f'_x(\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{k\pi}})$ ketma-ketlikning $k \to \infty$ dagi limitini hisoblang.

Berilgan funksiyaning $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini ko‘rsatish uchun

$$f(x,y) - f(0,0) \;=\; (x^2+y^2)\;\sin\frac{1}{x^2+y^2} \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\;\alpha(x,y)$$

deb yozib olib, $f'_x(0,0) = 0$ va $f'_y(0,0) = 0$ tengliklarni hisobga olgan holda, $\alpha(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\;\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ funksiyani mos shartlarni bajarishga tekshiring.

**4 - misol.** $f(x,y) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ funksiyaning $\mathbf{M} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ nuqtada $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egri chiziqqa o‘tkazilgan ichki normal yo‘nalishi bo‘yicha hosilasini hisoblang. $\mathbf{M}$ nuqtada $f$ funksiya gradientini toping.

**Ko‘rsatma**. $\mathbf{M}$ nuqta atrofida egri chiziq tenglamasi $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ko‘rinishga ega. Qayd qilingan nuqtada egri chiziq normalining $Ox$ o‘qi bilan tashkil qilgan burchak tangensi $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{y'(\frac{a}{\sqrt{2}})}$ kabi aniqlanadi. Bundan ichki normal yo‘naltiruvchi kosinuslarini topib, (12.1.31) formula yordamida talab qilingan hosilani hisoblang. Gradientni (12.1.16) formula orqali toping.

**5 - misol**. Quyidagi

$$f(x,y) \;=\; (2x+y)^2 - x^3 + y^2$$

funksiyaning barcha ikkinchi va uchinchi tartibli qismiy hosilalarini hisoblang va

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

tenglikni tekshiring.

**Ko‘rsatma**. Oxirgi tenglik mos xususiy hosilalarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblash orqali ko‘rsatiladi.

**6 - misol**. Agar $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyada argumentlar chiziqli ravishda $x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3$, $x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3$ va $x_3 = a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3$ kabi almashtirilsa, bu funksiyani ixtiyoriy tartibli differensialining formasi saqlanishini ko'rsating ((12.2.9) formuladan keyingi Eslatmaga qarang).

**Ko'rsatma**. (12.2.9) formuladan foydalanib, ikkinchi differensial (12.2.7) formani saqlashini isbotlang. So'ngra, $d^2x_k = 0$, $k = 1, 2, 3$ tengliklardan foydalanib, (12.2.9) formulani

$$d^2 f \; = \; \big(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} dx_3\big)^2 f$$

ko'rinishga keltirib, matematik induksiya usuli yordamida, istalgan tartibli differensial uchun bu forma saqlanishiga ishonch hosil qiling.

**7 - misol**. $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ funksiyani $(x, y) = (1, -2)$ nuqta atrofida Teylor formulasiga yoying.

**Ko'rsatma**. Berilgan funksiyaning 3-tartibdan boshlab, barcha differensiallarining nolga teng ekanini hisobga olib, (12.2.24) formuladan foydalaning.

**8 - misol**. Faraz qilaylik, $(a, b)$ intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya uzluksiz va $(c, d)$ intervalda aniqlangan $g(y)$ funksiya esa, uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'lsin. Qanday hollarda $g(y) = f(x)$ tenglama $y = g^{-1}(f(x))$ funksiyani aniqlaydi? $\mathbb{R}$ sonlar o'qida aniqlangan quyidagi $e^y = |x|$ va $e^y = -|x|$ misollarni tahlil qiling.

**Ko'rsatma**. §12.3 dagi mulohazalardan quyidagi natija kelib chiqadi: agar $(c, d)$ intervalda uzluksiz va qat'iy o'suvchi $g(y)$ funksiya berilgan bo'lib, $A$ soni $g$ funksiya qiymatlar to'plamiga tegishli bo'lsa, $g(y) = A$ tenglama yagona $y = g^{-1}(A)$ yechimga ega. Mana shu tasdiqdan foydalaning.

**9 - misol**. Agar $x^2 + xy + y^2 = 3$ bo'lsa, $y', y''$ va $y'''$ hosilalarni toping.

**Ko'rsatma**. Avval $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ formuladan foydalanib ((12.3.16) ga qarang), $y'$ ni toping. So'ngra, topilgan formulani $x$ bo'yicha ikki marta differensiallang; bunda $y'$ uchun topilgan ifodadan foydalaning.

**10 - misol**. Agar $a > 0$ va $m > 1$ bo'lsa, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m$ funksiyaning $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = na$ bog'lash sharti ostidagi ekstremumini toping. Ekstremum nuqtada funksiya maksimum yoki minimumga erishishini aniqlang.

**Ko‘rsatma**. (12.5.15) Lagranj funksiyasini tuzib, (12.5.16) shartdan ekstremum nuqtalarni toping. Funksiya bunday nuqtada minimum yoki maksimumga erishishini aniqlash uchun 12.5.2 - teoremani qo‘llang.

# 13-bob. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyani integrallash

## 13.1-§. Kvadratlanuvchi shakllar

**1. Kvadratlanuvchi shakllar.** 7-bobda (§7.2 ga qarang) yassi shaklning kvadratlanuvchanligi va uning yuzi tushunchalari kiritilgan edi. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun integral yig‘indining ta’rifi aynan shu yassi shakl yuzi tushunchasiga asoslanadi. Shu sababli ushbu paragrafda, o‘quvchiga qulaylik tug‘dirish maqsadida, §7.2 da keltirilgan ba’zi ta’rif va tasdiqlarni takrorlab o‘tamiz.

Tomonlari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak regulyar to‘rtburchak deyiladi. Regulyar to‘rtburchak yuzi uning tomonlari uzunliklarining ko‘paytmasiga teng.

Chekli sondagi regulyar to‘rtburchaklar birlashmasi sifatida tasvirlash mumkin bo‘lgan shaklni ko‘pburchakli shakl deb ataymiz. Agar $P$ ko‘pbuchakli shaklni tashkil qiluvchi chekli sondagi to‘rtburchaklar o‘zaro umumiy ichki nuqtaga ega bo‘lmasa, u holda ko‘pburchakli shaklning $|P|$ yuzasi uni tashkil qiluvchi to‘rtburchaklar yuzalarini yig‘indisiga teng deb aniqlanadi.

Yassi shakl deb ixtiyoriy chegaralangan $E \subset \mathbf{R}^2$ to‘plamga aytiladi. Har qanday yassi shakl uchun ushbu

$$|E|_* \;=\; \sup_{P \subset E} |P|$$

tenglik orqali uning $|E|_*$ quyi yuzi aniqlanadi, bunda aniq yuqori chegara $E$ ga ichki chizilgan barcha $P$ ko‘pburchakli shakllar bo‘yicha olinadi. Agar $E$ ga birorta ham ko‘pburchakli shaklni ichki chizib bo‘lmasa, biz uning quyi yuzini nolga teng deb qabul qilamiz. Aslida, agar bo‘sh to‘plamni ham yuzi nolga teng bo‘lgan ko‘pburchakli shakl deb qarasak, bu kelishuvga hojat qolmaydi.

Shu singari $E$ to'plamning yuqori yuzi ham aniqlanadi:

$$|E|^* = \inf_{Q \supset E} |Q|,$$

bunda aniq quyi chegara $E$ ga tashqi chizilgan barcha $Q$ ko'pburchakli shakllar bo'yicha olinadi.

Agar yassi shaklning quyi yuzi yuqori yuziga teng bo'lsa, bunday shakl *kvadratlanuvchi* deyiladi. Bunda

$$|E| = |E|_* = |E|^*$$

son $E$ kvadratlanuvchi yassi shaklning *yuzi* (yoki *yuzasi*) deb ataladi.

Shakl yuzi bilan egri chiziq uzunligini farqlash zarur bo'lgan holda, biz $E$ to'plamning yuzini $|E|_2$ simvoli orqali va uzunlikni esa, $|E|_1$ simvoli orqali belgilaymiz.

Tomonlarini uzunliklari $a$ va $b$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi $ab$ ga teng bo'lib, ikki o'zgaruvchili ko'phadning uzluksizligiga ko'ra, bu kattalik tomonlar uzunligiga uzluksiz bog'liqdir. Demak, istalgan regulyar $P$ to'rtburchak uchun $P$ ni ichida yotuvchi shunday yopiq to'g'ri to'rtburchak topish mumkinki, uning yuzi $P$ to'rtburchakni yuzidan istalgancha kam farq qiladi. Buning uchun $P$ to'rtburchakning tomonlarini salgina kamaytirib, hosil bo'lgan to'rtburchakning yopig'ini olish yetarli. Xuddi shunga o'xshash, tomonlari uzunligini salgina oshirib, $P$ ni o'z ichiga oluvchi shunday to'g'ri to'rtburchak topish mumkinki, uning yuzi $P$ ni yuzidan istalgancha kam farq qiladi.

Ravshanki, har qanday $P$ regulyar to'g'ri to'rtburchak uchun uning barcha ichki nuqtalari $P$ ning ichida yotuvchi ochiq to'g'ri to'rtburchakni tashkil qiladi va $P$ ning yopilmasi esa, $P$ ni o'z ichiga oluvchi yopiq to'g'ri to'rtburchakni tashkil qiladi; bunda bu to'rtburchaklarning yuzlari $|P|$ ga teng bo'ladi.

Shunday ekan, agar $E$ to'plamning quyi yoki yuqori yuzalari ta'rifida aniq chegarani $E$ to'plamni mos ravishda ichida yotuvchi yoki uni o'z ichiga oluvchi yopiq ko'pburchakli shakllar bo'yicha olinsa, $E$ to'plamning $|E|_*$ quyi yuzi yoki $|E|^*$ yuqori yuzi qiymatlari o'zgarmaydi. Bunga sabab shundan iboratki, istalgan ko'pburchakli shakl uchun uni ichida yotuvchi yopiq $P$ ko'pburchakli shaklni va uni o'z ichiga oluvchi yopiq $Q$ ko'pburchakli shaklni, $|Q|-|P|$ ayirma qiymati istalgancha kichik bo'ladigan qilib, tanlash mumkin.

Xuddi shu eslatma aniq chegaralarni $E$ ni ichida yotuvchi barcha ochiq ko'pburchakli shakllar bo'yicha, yoki $E$ ni o'z ichiga oluvchi barcha ochiq ko'pburchakli shakllar bo'yicha olganda ham o'rinli.

Xususan, agar $E \subset \mathbf{R}^2$ yassi shaklni yuzi istalgancha kichik bo'lgan ochiq (yoki yopiq) ko'pburchakli shakl bilan qoplash mumkin bo'lsa, u holda bu yassi shakl yuzi nolga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, agar istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday chekli sondagi ochiq (yoki yopiq) $\{P_k\}_{k=1}^n$ to'g'ri to'rtburchaklar (o'zaro umumiy ichki nuqtaga ega bo'lishi ham mumkin) topilsaki, ular uchun

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k$$

munosabat o'rinli bo'lib,

$$\sum_{k=1}^{n} |P_k| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $E$ to'plam yuzi nolga teng bo'ladi.

Quyidagi xossalarning o'rinli ekanligi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi:

*1) yassi shakl yuzi nolga teng bo'lishi uchun uni yuqori yuzining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir*;

*2) yuzi nolga teng bo'lgan yassi shaklning istalgan qismiy to'plami kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi ham nolga teng bo'ladi*;

*3) yuzi nolga teng bo'lgan chekli sondagi yassi shakllarning birlashmasi ham yuzi nolga teng bo'lgan yassi shakl bo'ladi.*

Yuzi nolga teng bo'lgan kvadratlanuvchi shaklga muhim misol sifatida to'g'rilanuvchi egri chiziqni keltirish mumkin. To'g'rilanuvchi egri chiziq tushunchasi ham yuqorida qayd etilgan 7-bobda keltirilgan bo'lib (§7.1 ga qarang), to'g'rilanuvchi egri chiziq uzunligi unga ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunliklarining aniq yuqori chegarasiga teng qilib aniqlangan edi.

**13.1.1 - tasdiq.** *Tekislikdagi to‘g‘rilanuvchi egri chiziq kvadratlanuvchi bo‘lib, uning yuzi nolga teng.*

Haqiqatan, uzunligi $l$ teng bo‘lgan ixtiyoriy to‘g‘rilanuvchi $L$ egri chiziqni tomonlari $\varepsilon$ ga teng bo‘lib, umumiy soni $l/\varepsilon$ dan oshmaydigan kvadratchalar bilan qoplash mumkin. Bu kvadratchalar tashkil qilgan ko‘pburchakli shaklning yuzi $\varepsilon^2 \cdot l/\varepsilon = l\varepsilon$ dan oshmaydi. Demak, $\varepsilon$ ning ixtiyoriyligiga ko‘ra, $L$ egri chiziqning tashqi yuzi nolga teng. Shunday ekan, $L$ kvadratlanuvchi bo‘lib, uning yuzi ham nolga teng.

**2. Yassi shaklning chegarasi.** Eslatib o‘tamiz, agar $a \in \mathbf{R}^2$ nuqtaning istalgan atrofida berilgan $E \subset \mathbf{R}^2$ to‘plamga tegishli bo‘lgan va tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud bo‘lsa, bunday nuqta $E$ to‘plamning chegaraviy nuqtasi deyilar edi.

$E$ yassi shaklning barcha chegaraviy nuqtalari to‘plami uning *chegarasi* deb ataladi va $\partial E$ simvoli orqali belgilanadi. Ravshanki, $a \in \partial E$ bo‘lishi uchun $a$ ga yaqinlashuvchi ikki $x_n \in E$ va $y_n \notin E$ ketma-ketlikning topilishi zarur va yetarlidir. Bunda, bu ketma-ketliklardan birining barcha elementlari $a$ nuqta bilan ustma-ust tushishi ham mumkin.

$E$ yassi shaklning chegarasi quyidagi o‘z-o‘zidan tushunarli xossaga ega:

*agar $a \in E$ va $b \notin E$ bo‘lsa, $a$ va $b$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmada $c \in \partial E$ nuqta topiladi.*

Boshqacha aytganda, agar nuqtalardan biri biror to‘plamda yotsa va ikkinchisi esa, bu to‘plamda yotmasa, bu nuqtalarni tutashtiruvchi kesma albatta bu to‘plam chegarasini kesib o‘tadi.

Haqiqatan,

$$x(t) = (1-t)a + tb$$

deylik.

$M$ simvoli orqali $x(t) \in E$ shartni qanoatlantiruvchi $t \in [0,1]$ nuqtalar to‘plamini belgilaylik. U holda, ravshanki, $t = 0$ nuqta bu to‘plamga tegishli, lekin $t = 1$ nuqta esa, tegishli emas. Agar $t_0$

nuqta $M$ to'plamining aniq yuqori chegarasi bo'lsa,

$$c = x(t_0) = (1 - t_0)a + t_0 b$$

nuqta $E$ to'plamining $\partial E$ chegarasida yotishini ko'rsatish qiyin emas.

Yuzalar xossalarini o'rganishda yassi shaklning kvadratlanuvchi bo'lishining navbatdagi kriteriysi muhim ahamiyatga ega (7.2.2 - teorema natijasiga qarang).

**13.1.2 - tasdiq.** *Yassi shaklning kvadratlanuvchi bo'lishi uchun uning chegarasi yuzining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

**Isbot.** Haqiqatan, $E$ yassi shakl berilgan bo'lib, ikki ixtiyoriy $P$ (ochiq) va $Q$ (yopiq) ko'pburchakli shakllar quyidagi

$$P \subset E \subset Q$$

munosabatni qanoatlantirsin.

U holda $\partial E$ chegara ushbu

$$\partial E \subset Q \setminus P$$

shartni qanoatlantiradi, bunda $Q \setminus P$ yopiq ko'pburchakli shakl bo'lib, u $Q$ dan $P$ ko'pburchakli shaklning barcha nuqtalarini chiqazib tashlashdan hosil bo'lgan. Shuning uchun,

$$|\partial E|^* = \inf_{P\subset E\subset Q} |Q\setminus P| = \inf_{P\subset E\subset Q} (|Q|-|P|) = \inf_{Q\supset E} |Q| - \sup_{P\subset E} |P| \,.$$

Demak,

$$|\partial E|^* = |E|^* - |E|_* \,.$$

Shunday qilib, chegara yuqori yuzining nolga teng bo'lishi uchun yassi shaklni yuqori yuzining shu shaklni quyi yuziga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan, ya'ni kvadratlanuvchi yassi shaklda chegara yuzi nolga tengdir va aksincha, agar yassi shakl chegarasining yuzi nolga teng bo'lsa, u kvadratlanuvchidir.■

**13.1.3 - tasdiq.** *Agar yassi shakl chegarasi to'g'rilanuvchi egri chiziq bo'lsa, u holda bunday yassi shakl kvadratlanuvchi bo'ladi.*

Haqiqatan, bu tasdiqning to'g'riligi 13.1.1 - va 13.1.2 - tasdiqlardan kelib chiqadi.

O‘z-o‘zini kesmaydigan uzluksiz egri chiziqni sodda egri chiziq deb atagan edik. Agar $L$ sodda egri chiziq $x = \varphi(t)$ tenglama bilan berilib, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ biror $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmani $\mathbb{R}^2$ tekislikka uzluksiz differensiallanuvchi akslantirish bo‘lsa, bunday sodda egri chiziq silliq egri chiziq deyiladi. Bunda $L = \varphi([a, b])$.

7 - bobda har qanday silliq egri chiziqning to‘g‘rilanuvchi bo‘lishi ko‘rsatilgan edi.

Agar egri chiziqni har biri silliq bo‘lgan chekli sondagi qismlarga ajratish mumkin bo‘lsa, u *bo‘lakli-silliq* egri chiziq deyiladi. Ravshanki, har qanday bo‘lakli-silliq egri chiziq to‘g‘rilanuvchi bo‘lib, natijada uning yuzi nolga teng bo‘ladi.

**Natija.** *Agar yassi shaklning chegarasi bo‘lakli-silliq egri chiziq bo‘lsa, bu shakl kvadratlanuvchi bo‘ladi.*

Shuni qayd etish joizki, chegaraning to‘g‘rilanuvchi bo‘lishi - bu yassi shakl kvadratlanuvchi bo‘lishining faqat yetarli shartidir. Navbatdagi misol yassi shakl kvadratlanuvchi bo‘lib, chegara esa to‘g‘rilanuvchi bo‘lmasligi ham mumkinligini ko‘rsatadi.

**13.1.1 - misol.** Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmada berilgan bo‘lib, shu kesmada uzluksiz bo‘lsin. Bundan tashqari, quyidagi

$$\varphi(x) \ \le \ \psi(x), \quad a \le x \le b,$$

shart bajarilsin. U holda tekislikning bu ikki funksiya grafigi orasidagi nuqtalari to‘plami, ya’ni

$$E \ = \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \varphi(x) \le y \le \psi(x), \ a \le x \le b\}$$

kvadratlanuvchi shakl bo‘ladi.

Haqiqatan, 7 - bobda ko‘rsatilganidek ((7.2.16) formulaga qarang), $E$ shakl yuzi uchun ushbu

$$|E| \ = \ \int\limits_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx$$

tenglik o‘rinli.

$E$ shakl chegarasi to‘rtta qismdan, ya’ni $\varphi$ va $\psi$ funksiyalar grafigi hamda bu grafiklarning boshi va oxirini tutashtiruvchi ikki vertikal kesmalardan iborat. Agar $\psi$ uzluksiz funksiya grafigini to‘g‘rilanuvchi bo‘lmaydigan qilib tanlasak (7.1.2 - misolga qarang), kvadratlanuvchi $E$ yassi shaklning chegarasi ham to‘g‘rilanuvchi bo‘lmaydi.

**3. Kvadratlanuvchi shakllar xossalari.**

13.1.2 - tasdiq yordamida navbatdagi ikki xossani osongina isbotlash mumkin.

**13.1.4 - tasdiq.** *Ikki kvadratlanuvchi shakl birlashmasi yana kvadratlanuvchi shakl bo‘ladi.*

**Isbot.** Quyidagi sodda jumla o‘rinli: agar $E_1$ va $E_2$ ikki kvadratlanuvchi shakl bo‘lib, $E = E_1 \cup E_2$ bo‘lsa, u holda quyidagi

$$\partial E \subset (\partial E_1 \cup \partial E_2)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Haqiqatan, agar $a \in \partial E$ bo‘lsa, u holda $a$ ga yaqinlashuvchi ikki $x_n \in E$ va $y_n \notin E$ ketma-ketlik topiladi. Zarur bo‘lsa qismiy ketma-ketlikka o‘tib, barcha $x_n$ nuqtalarni $E_1$ va $E_2$ to‘plamlardan bittasiga tegishli deb hisoblash mumkin. Bu esa $a$ nuqtaning ko‘rsatilgan to‘plam chegarasiga tegishli ekanini anglatadi.

Endi 13.1.4 - tasdiqning to‘g‘riligi isbotlangan jumladan bevosita kelib chiqadi:

$$|\partial E| \leq |\partial E_1| + |\partial E_2| = 0. \quad \blacksquare$$

**13.1.5 - tasdiq.** *Ikki kvadratlanuvchi shakl kesishmasi yana kvadratlanuvchi shakl bo‘ladi.*

**Isbot.** Navbatdagi sodda jumla xuddi yuqoridagi jumla kabi isbotlanadi: agar $E_1$ va $E_2$ ikki kvadratlanuvchi shakl bo‘lib, $E = E_1 \cap E_2$ bo‘lsa, u holda

$$\partial E \subset (\partial E_1 \cup \partial E_2)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan, agar $a \in \partial E$ bo‘lsa, $a$ ga yaqinlashuvchi ikki $x_n \in E$ va $y_n \notin E$ ketma-ketlik topiladi. Lozim bo'lsa qismiy ketma-ketlikka o'tib, barcha $y_n$ nuqtalarni $E_1$ va $E_2$ to'plamlardan bittasiga tegishli emas deb hisoblash mumkin. Lekin barcha $x_n$ nuqtalar bu to'plamlarning har biriga tegishli bo'lgani uchun, $a$ nuqta $\partial E_1$ yoki $\partial E_2$ to'plamlardan biriga va demak, ularning birlashmasiga tegishli.

Isbotlangan jumladan, ravshanki, tasdiqimiz kelib chiqadi.■

Endi kvadratlanuvchi shakl yuzining xossalarini o'rganishga o'tamiz.

**1 - xossa (monotonlik)**. *Agar $E_1$ va $E_2$ yassi shakllar kvadratlanuvchi bo'lib, $E_1 \subset E_2$ bo'lsa, $|E_1| \leq |E_2|$ tengsizlik o'rinli.*

Ravshanki, bu tengsizlik yuqori va quyi yuzalar uchun o'rinli. Bundan chiqdi, xossa ham o'rinli bo'lar ekan.

Haqiqiy sonlar to'plamida arifmetik amallar distributivlik xossasiga ega bo'lgani sababli, tog'ri to'rtbuchaklar yuzi va demak, ko'pburchakli shakllar yuzalari ham additivlik xossasiga ega.

**2 - xossa (additivlik).** *Agar $E_1$ va $E_2$ kvadratlanuvchi shakllar kesishmasa, u holda*

$$|E_1 \cup E_2| \;=\; |E_1| \;+\; |E_2| \tag{13.1.1}$$

*tenglik o'rinli.*

Haqiqatan, $E = E_1 \cup E_2$ birlashmaning kvadratlanuvchi ekani 13.1.5 - tasdiqdan kelib chiqadi. Bundan tashqari, agar $P_1$ va $P_2$ ko'pburchakli shakllar $P_1 \subset E_1$ va $P_2 \subset E_2$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda

$$|P_1| \;+\; |P_2| \;=\; |P_1 \cup P_2| \;\leq\; |E_1 \cup E_2|$$

munosabat o'rinli bo'ladi va bu munosabatda aniq yuqori chegaraga o'tsak, quyidagi

$$|E_1| \;+\; |E_2| \;\leq\; |E_1 \cup E_2| \tag{13.1.2}$$

tengsizlikni olamiz.

Xuddi shu kabi, agar $Q_1$ va $Q_2$ ko'pburchakli shakllar $E_1 \subset Q_1$ va $E_2 \subset Q_2$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda

$$|E_1 \cup E_2| \;\leq\; |Q_1 \cup (Q_2 \setminus Q_1)| \;=\; |Q_1| \;+\; |(Q_2 \setminus Q_1)| \;\leq |Q_1| \;+\; |Q_2|$$

munosabat o'rinli bo'ladi va bu munosabatda aniq quyi chegaraga o'tsak, ushbu

$$|E_1 \cup E_2| \;\leq\; |E_1| \;+\; |E_2| \tag{13.1.3}$$

tengsizlikni olamiz.

(13.1.2) va (13.1.3) baholarni taqqoslab, talab qilingan (13.1.1) tenglikka ega bo'lamiz.

**Natija.** *Agar $E_1, E_2, ..., E_n$ kvadratlanuvchi shakllar o'zaro kesishmasa, u holda*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right| \;=\; \sum_{k=1}^{n} |E_k| \tag{13.1.4}$$

*tenglik bajariladi.*

Eslatib o'tamiz, kvadratlanuvchanlik nazariyasini qurayotganimizda to'g'ri to'rtburchak yuzini uning tomonlari uzunliklarining ko'paytmasi sifatida aniqlashimiz asos bo'lib xizmat qilgan edi. Bunday aniqlashni biz faqat to'g'ri to'rtburchakning tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lganda qo'lladik. Lekin, xuddi shu usulda, istalgan ikki o'zaro ortogonal $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ va $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vektorlar yordamida qurilgan to'g'ri to'rtburchak yuzini ham aniqlash mumkin.

Haqiqatan, analitik geometriya kursidan yaxshi ma'lumki, istalgan ikki $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ vektorlar yordamida qurilgan parallelogramm yuzi

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \;=\; |\det D(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \;=\; |a_1 b_2 - a_2 b_1| \tag{13.1.5}$$

kabi aniqlanadi, bunda o'ng tarafda

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \;=\; \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \tag{13.1.6}$$

matritsa determinantining absolyut qiymati turibdi.

Agar qayd qilingan vektorlar ortogonal bo'lsa, ya'ni ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \;=\; a_1 b_1 + a_2 b_2 \;=\; 0,$$

u holda

$$2a_1a_2b_1b_2 = -(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2)$$

va demak,

$$S^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 = (a_1^2 + a_2^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2)$$

tenglik o‘rinli.

Shunday ekan, to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi bu holda ham tomonlar uzunliklari ko‘paytmasi sifatida aniqlanadi, ya’ni

$$S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|. \tag{13.1.7}$$

Bundan, ortogonal akslantirishda kvadratlanuvchi shakl yuzining saqlanishi to‘g‘ridan to‘g‘ri kelib chiqadi.

Yana, bevosita to‘g‘ri to‘rtburchak yuzining ta’rifiga ko‘ra, parallel ko‘chirishda ham kvadratlanuvchi shakl yuzi o‘zgarmaydi. Demak, har qanday izometrik akslantirish, y’ani masofani saqlovchi akslantirish, ortogonal akslantirish va parellel ko‘chirishning superpozitsiyasi bo‘lgani sababli, izometrik akslantirishda kvadratlanuvchilik xossasi ham, shakl yuzining qiymati ham saqlanar ekan. Shunday qilib, navbatdagi tasdiqqa ega bo‘lamiz.

**3 - xossa (invariantlik).** *Faraz qilaylik, $U$ akslantirish $\mathbb{R}^2$ tekislikni o‘ziga izometrik akslantirsin, ya’ni istalgan $x \in \mathbb{R}^2$ va $y \in \mathbb{R}^2$ nuqtalar uchun*

$$|Ux - Uy| = |x - y|$$

*tenglik bajarilsin.*

*U holda istalgan kvadratlanuvchi $E$ shakl uchun $UE$ shakl ham kvadratlanuvchi bo‘lib,*

$$|UE| = |E|$$

*tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

Endi istalgan

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \tag{13.1.8}$$

matritsa yordamida aniqlangan xosmas chiziqli $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ akslantirishni qaraymiz.

Bu akslantirishning xosmas ekani $\det A \neq 0$ shart bajarilishini anglatadi.

Bunda $x = (x_1, x_2)$ vektor quyidagi

$$y \;=\; Ax \;=\; (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2,\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)$$

vektorga akslanadi (ko'paytma natijasida vektor-ustun vektor-satr ko'rinishida yozildi).

Demak, $\mathbf{a}_1 = (c_1, 0)$ va $\mathbf{a}_2 = (0, c_2)$ vektorlar bilan aniqlangan

$$P \;=\; \{0 \le x_1 \le c_1,\ 0 \le x_2 \le c_2\}$$

to'g'ri to'rtburchak

$$\mathbf{b}_1 = A\mathbf{a}_1 \;=\; (\alpha_{11}c_1,\ \alpha_{21}c_1) \quad \text{va} \quad \mathbf{b}_2 = A\mathbf{a}_2 \;=\; (\alpha_{12}c_2,\ \alpha_{22}c_2)$$

vektorlar bilan aniqlangan parallelogrammga o'tadi.

(13.1.5) va (13.1.6) formulalarga ko'ra, bu parallelogrammning $S(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ yuzi

$$B \;=\; \left\| \begin{matrix} \alpha_{11}\,c_1 & \alpha_{12}\,c_2 \\ \alpha_{21}\,c_1 & \alpha_{22}\,c_2 \end{matrix} \right\|$$

matritsa determinantining absolyut qiymatiga teng.

Bu matritsani (13.1.8) matritsa bilan taqqoslasak,

$$S(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \;=\; |\det B| \;=\; |c_1 \cdot c_2 \cdot \det A| \;=\; |P| \cdot |\det A|$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $P$ to'g'ri to'rtburchakning va $AP$ parallelogrammning yuzalari ushbu

$$|AP| \;=\; |P| \cdot |\det A| \tag{13.1.9}$$

munosabat yordamida bog'langan ekan.

Agar istalgan $Q$ ko'pburchakli shakl $AQ$ yassi shaklga akslantirilsa, bevosita (13.1.9) formuladan oxirgi shaklning kvadratlanuvchi ekani va

$$|AQ| \;=\; |Q| \cdot |\det A|$$

formulaning o'rinli ekani kelib chiqadi.

Bundan, o'z navbatida, quyidagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

**13.1.6 - tasdiq.** *$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xosmas chiziqli akslantirish kvadratlanuvchi $E$ shaklni kvadratlanuvchi $AE$ shaklga o'tkazadi va bunda*

$$|AE| \;=\; |E| \cdot |\det A| \tag{13.1.10}$$

*tenglik bajariladi.*

**Eslatma.** Bu tasdiqdan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi: agar $\varphi$ chiziqli funksiya bo'lib, $A$ akslantirish ushbu

$$Ax \;=\; \varphi(x)$$

tenglik bilan aniqlansa, u holda (13.1.10) formula

$$|\varphi(E)| \;=\; |E| \cdot \left|\det \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|$$

ko'rinishga keladi, bu tenglikning o'ng tomonida $\varphi$ vektor-funksiyaning Yakobiani turibdi.

## 13.2-§. Ikki karrali Riman integralining ta'rifi

**1. Riman integral yig'indilari.** Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^2$ kvadratlanuvchi shakl bo'lsin. Bu shaklning $P = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ *bo'linishi* deb quyidagi uch shartni:

*1) har bir $E_k$ to'plam kvadratlanuvchi shakl bo'lsin*;

*2) $E_k$ to'plamlar o'zaro kesishmasin*;

*3) $E_k$ to'plamlar birlashmasi $E$ shaklga teng bo'lsin*;

qanoatlantiruvchi qismiy to'plamlarining chekli sondagi oilasiga aytamiz.

Ravshanki, bu shartlarga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^{n} |E_k| \;=\; |E|.$$

$E_k$ qismiy to'plam *diametri* deb manfiy bo'lmagan

$$d(E_k) = \sup_{x \in E_k, y \in E_k} |x - y|$$

songa aytamiz. Bu $d(E_k)$ sonlardan eng kattasini $P$ *bo'linishning* $d(P)$ *diametri* deymiz.

$E$ to'plamda aniqlangan va haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchu ixtiyoriy $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tanlab,

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |E_k| \tag{13.2.1}$$

*integral yig'indini* tuzamiz.

**Ta'rif.** *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son olinganda ham shunday* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *son topilsaki,*
$d(P) < \delta$ *shartni qanoatlantiruvchi har qanday* $P = \{E_k\}$ *bo'linish uchun,* $\xi_k \in E_k$ *nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ravishda, quyidagi*

$$|\sigma_P(f) - I| < \varepsilon$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda I soniga (13.2.1)* ***integral yig'indilarning*** $d(P) \to 0$ ***dagi limiti*** *deyiladi.*

$E$ to'plamda aniqlangan har qanday funksiya uchun ham integral yig'indi limitga ega bo'lavermaydi. Bunga misol keltirish qiyin emas. Lekin, aynan mana shu limit mavjud bo'lgan funksiyalar alohida qiziqish uyg'otadi.

**Ta'rif.** *Agar E to'plamda aniqlangan f funksiyaning (13.2.1) integral yig'indilari* $d(P) \to 0$ *da biror I limitga ega bo'lsa, u holda bu funksiya E to'plamda Riman bo'yicha integrallanuvchi deyiladi.*

*Bu limit f funksiyadan E bo'yicha olingan ikki karrali Riman integrali deb ataladi va*

$$I = \iint_E f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

*ko'rinishda belgilanadi.*

Bu belgilash bilan bir qatorda zamonaviy matematik adabiyotlarda

$$I = \int\limits_E f(x)\,dx$$

belgilash ham ishlatiladi. Bunda integralning ikki karrali ekani $E$ orqali tekislikdagi kvadratlanuvchi shakl belgilanganidan kelib chiqadi.

Berilgan $f$ funksiya *integral ostidagi funksiya* va $E$ kvadratlanuvchi shakl esa, *integrallash sohasi* deb ataladi.

Integrallanuvchi eng sodda funksiya sifatida o'zgarmas funksiyani olish mumkin:

$$f(x) = c, \quad x \in E.$$

Haqiqatan, istalgan $P = \{E_k\}$ bo'linish uchun, $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni har qanday tanlaganda ham

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^{n} c \cdot |E_k| = c|E|$$

tenglik o'rinli.

Demak, integral yig'indilarning limiti mavjud, ya'ni o'zgarmas funksiya integrallanuvchi bo'lib, uning integrali

$$\int\limits_E c\,dx = c|E|$$

ga teng.

Kvadratlanuvchi to'plamlarning xarakteristik funksiyalari, sodda bo'lishiga qaramasdan, integrallanuvchi funksiyalarga muhim misol bo'ladi.

Berilgan $M \subset \mathbb{R}^2$ to'plamning xarakteristik funksiyasi deb quyidagi

$$\omega(x, M) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad x \in M \quad bo\text{'}lsa, \\ 0, & \text{agar} \quad x \notin M \quad bo\text{'}lsa, \end{cases} \tag{13.2.2}$$

tenglik bilan aniqlangan $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksiyaga aytamiz.

**13.2.1 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $E$ kvadratlanuvchi shakl bo'lib, $M$ esa $E$ ning kvadratlanuvchi qismiy to'plami bo'lsin. U holda $\omega(x, M)$ funksiya $E$ da Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, ushbu*

$$\int\limits_E \omega(x, M)\, dx = |M| \tag{13.2.3}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun yopiq ko'pburchakli $F$ shaklni va ochiq ko'pburchakli $G$ shaklni shunday tanlaymizki, $F \subset M \subset G$ bo'lib, quyidagi

$$|F| > |M| - \varepsilon, \quad |G| < |M| + \varepsilon \tag{13.2.4}$$

shartlar bajarilsin.

Bundan tashqari, $F$, $G$ va $M$ to'plamlar chegarasi o'zaro kesishmasin deb shart qo'yib, $\delta$ sonini quyidagi

$$\delta < \operatorname{dis}\{\partial F, \partial M\}, \quad \delta < \operatorname{dis}\{\partial M, \partial G\}$$

shartlardan tanlaymiz.

Kvadratlanuvchi $E$ shaklning, diametri $d(P) < \delta$ bahoni qanoatlantiruvchi, istalgan $P = \{E_k\}$ bo'linishini olib, $\omega = \omega(x, M)$ xarakteristik funksiya integral yig'indilarini uch qismga bo'lamiz:

$$\sigma_P(\omega) = \sum_k{}' \omega(\xi_k, M)|E_k| + \sum_k{}'' \omega(\xi_k, M)|E_k|$$
$$+ \sum_k{}''' \omega(\xi_k, M)|E_k|. \tag{13.2.5}$$

Birinchi yig'indiga $E_k$ to'plamlar to'laligicha berilgan $M$ da yotadigan hadlarni kiritamiz. Bu holda $\xi_k \in M$ va $\omega(\xi_k, M) = 1$, ya'ni, har bir had $|E_k|$ ga teng. $\delta$ sonini tanlashimizga ko'ra, birinchi yig'indiga kirgan to'plamlar ko'pburchakli $F$ shaklni to'la qoplaydi va shu sababli, birinchi yig'indi quyidan $|F|$ qiymat bilan baholanadi.

Ikkinchi yig'indiga $E_k$ to'plamining bir qismi (bo'sh bo'lmagan) $M$ da yotib, boshqa qismi (bo'sh bo'lmagan) $M$ dan tashqarida yotgan hadlarni kiritamiz. $\delta$ sonini tanlashimizga ko'ra, barcha bunday $E_k$ to'plamlar ko'pburchakli $Q$ shakldan tashqariga chiqmaydi. Shu sababli, birinchi va ikkinchi yig'indi birgalikda yuqoridan $|G|$ kattalik bilan baholanadi.

Uchinchi yig'indiga $E_k$ to'plamlar $M$ to'plamdan butunlay tashqarida yotgan hadlarni kiritamiz. Ravshanki, bu yig'indiga kiruvchi har bir had nolga teng.

Shunday qilib, (13.2.5) integral yig'indi navbatdagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$|F| \leq \sigma_P(\omega) \leq |G| \,. \tag{13.2.6}$$

Shunday ekan, (13.2.4) va (13.2.6) dan ushbu

$$|M| - \varepsilon < \sigma_P(\omega) < |M| + \varepsilon$$

munosabat kelib chiqadi.

Bu esa integral yig'indilar limiti mavjud ekanini va demak, $\omega(x, M)$ funksiya integrallanuvchi bo'lib, (13.2.3) tenglik o'rinli bo'lishini anglatadi.■

**Eslatma.** Biror kesmada integrallanuvchi bo'lgan bir o'zgaruvchili funksiyadan farqli o'laroq, ikki o'zgaruvchili funksiyaning istalgan kvadratlanuvchi shakl boyicha integrallanuvchiligidan bu funksiyaning chegaralangan ekani kelib chiqmaydi. Bunga eng sodda misol sifatida tekislikda yotuvchi biror kesmada aniqlangan va bu kesmada chegaralanmagan funksiyani olish mumkin. Haqiqatan, kesmaning yuzi nolga teng bo'lgani sababli, u kvadratlanuvchi shakl bo'ladi. Kesmani har bir qismiy to'plamining ham yuzi nolga teng bo'lgani uchun, barcha integral yig'indilar nolga teng, ya'ni kesmada chegaralanmagan funksiya ikki o'zgaruvchili funksiya sifatida integrallanuvchi bo'ladi.

Navbatdagi misolda yuzi musbat kvadratlanuvchi to'plamda aniqlangan funksiyani qaraymiz.

**13.2.1 - misol.** $Q$ simvol orqali

$$Q = \{0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

ko'rinishdagi birlik kvadratni va $I$ orqali esa, abssissalar o'qidagi

$$I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x_1 < 3, \ x_2 = 0\}$$

intervalni belgilab, $E = Q \cup I$ bog'langan to'plamni qaraymiz.

Bu to'plamda aniqlangan

$$f(x) \ = \ \begin{cases} \ \ 0 \quad , & \text{agar} \quad 0 \le x_1 \le 2 \quad \text{bo'lsa,} \\ \dfrac{x_1 - 2}{x_1 - 3}, & \text{agar} \quad 2 < x_1 < 3 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya $E$ da chegaralanmagan, ammo uning integral yig'indilari limitga ega bo'lib, bu limit nolga teng. Bu tasdiq $E$ to'plamning $d(P) < 1$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan $P$ bo'linishi uchun barcha mos integral yig'indilarining nolga tengligidan kelib chiqadi.

E'tibor bering, bu funksiya (yopiq bo'lmagan) $E$ to'plamda uzluksizdir. Albatta, bu misolni murakkablashtirib, aniq ifoda qilish qiyin bo'lgan qandaydir kvadratlanuvchi sohada Riman ma'nosida integrallanuvchi funksiya chegaralangan bo'lishi haqida umumiy tasdiq keltirish mumkin.

Lekin, bunday tasdiqqa hojat yo'q, chunki Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'la turib, chegaralanmagan funksiyalar to'plami mazmunan yuqorida keltirilgan misoldagiga o'xshash funksiyalardangina iborat ekan. Chunonchi, quyidagi tasdiq o'rinli.

**13.2.2 - tasdiq.** *Agar $f$ funksiya biror kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda yuzi nolga teng bo'lgan shunday $E_0 \subset E$ to'plam topiladiki, $f$ funksiya $E \setminus E_0$ to'plamda chegaralangan bo'ladi.*

**Isbot.** Faraz qilaylik, $f$ funksiya yuzi musbat kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni integral yig'indilar limiti mavjud bo'lib, u biror $I$ soniga teng bo'lsin. Bundan chiqdi, $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishni shunday tanlash mumkinki, quyidagi

$$|\sigma_P(f) \ - \ I| \ \le \ 1$$

tengsizlik $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni istalgancha tanlashda ham o'rinli bo'ladi.

Bu tengsizlik va integral yig'indilarining (13.2.1) ta'rifiga ko'ra,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot|E_k|\right| \;\le\; |I|+1. \tag{13.2.7}$$

Umuman aytganda, $P=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ bo'linishdagi ba'zi $E_k$ qismiy to'plamlar yuzi nolga teng bo'lishi mumkin. Shu sababli integral yig'indini ikki qismga bo'lamiz:

$$\sigma_P(f) \;=\; \sum_k{}' f(\xi_k)\cdot|E_k| \;+\; \sum_k{}'' f(\xi_k)\cdot|E_k|.$$

Bunda birinchi yig'indiga $|E_k|>0$ tengsizlikni qanoatlantirgan barcha hadlarni kiritamiz va ikkinchi yig'indiga esa, $|E_k|=0$ shartni qanoatlantiruvchi hadlarni kiritamiz. Ikkinchi yig'indiga kiruvchi barcha $E_k$ to'plamlar birlashmasini $E_0$ orqali belgilaymiz, ya'ni:

$$E_0 \;=\; \bigcup_k{}'' E_k.$$

Ravshanki, chekli sondagi yuzi nolga teng to'plamlarning birlashmasi bo'lgani sababli, $E_0$ to'plam yuzi nolga teng. Shunday ekan, (13.2.7) dan

$$\left|\sum_k{}' f(\xi_k)\cdot|E_k|\right| \;\le\; |I|+1$$

tengsizlikning $\xi_k\in E_k$ nuqtalarni istalgancha tanlaganda ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Bu tengsizlikka ko'ra, yuzi musbat bo'lgan har bir $E_k$ qismiy to'plamda $f$ funksiya chegaralangan bo'ladi. Haqiqatan, faraz qilaylik, $f$ yuzi musbat bo'lgan biror $E_m$ to'plamda chegaralanmagan bo'lsin. Oxirgi tengsizlikni

$$\left|f(\xi_m)|E_m| \;+\; \sum_{k\neq m}{}' f(\xi_k)\cdot|E_k|\right| \;\le\; |I|+1 \tag{13.2.8}$$

ko'rinishda yozamiz.

Barcha $k \neq m$ lar uchun $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tayinlab, biz $\xi_m \in E_m$ nuqtani (13.2.8) tengsizlikni chap qismi istalgancha katta bo'ladigan qilib tanlashimiz mumkin. Bu esa oxirgi tengsizlikka ziddir.

Demak, $f$ funksiya yuqoridagi birinchi yig'indiga kirgan barcha to'plamlar birlashmasida, ya'ni

$$E^* = \bigcup_k{}' E_k$$

to'plamda chegaralangan. Bu to'plam, $E \setminus E_0$ bilan ustma-ust tushadi.■

Bundan buyon, zaruriyat bo'lganda, biz integrallanuvchanlikka tekshirilayotgan funksiyani chegaralangan bo'lishini talab qilamiz. 13.2.2 - tasdiqqa ko'ra, funksiya qiymatini yuzi nolga teng bo'lgan biror to'plamda o'zgartirib, bunga doimo erishish mumkin.

### 2. Ikki karrali Riman integralining asosiy xossalari.

**13.2.1 - teorema (integralning chiziqliligi).** *Agar $f$ va $g$ funksiyalar kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda har qanday $\lambda$ va $\mu$ haqiqiy sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiya ham integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_E [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_E f(x)\, dx + \mu \int_E g(x)\, dx \qquad (13.2.9)$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot**

$$\sigma_P(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \sigma_P(f) + \mu\, \sigma_P(g)$$

tenglikdan kelib chiqadi. Haqiqatan, bu tenglikda $P$ bo'linishning $d(P)$ diametrini nolga intiltirsak, talab qilingan (13.2.9) munosabatni olamiz.

**13.2.1 - lemma.** *Agar $g$ funksiya kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, $E$ da $g(x) \geq 0$ shartni qanoatlantirsa, u hol-*

*da*

$$\int\limits_E g(x)\,dx \;\geq\; 0$$

*tengsizlik o'rinli.*

**Isbot** bevosita har qanday integral yig'indi uchun

$$\sigma_P(g) \;\geq\; 0$$

tengsizlik bajarilishidan kelib chiqadi.

**13.2.2 - teorema (tengsizlikni integrallash haqida).** *Agar $f$ va $g$ funksiyalar kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, $E$ da $f(x) \leq g(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \;\leq\; \int\limits_E g(x)\,dx$$

*tengsizlik bajariladi.*

**Isbot,** agar 13.2.1 - lemmani $g-f$ funksiyaga qo'llasak, bevosita 13.2.1 - teoremadan kelib chiqadi.

## 13.3-§. Darbu nazariyasi

**1. Darbuning quyi va yuqori yig'indilari.** Darbu nazariyasi funksiyaning kvadratlanuvchi to'plamda integrallanuvchi ekanini aniqlash masalasini samarali ravishda hal qiladi.

Berilgan $M \subset E$ to'plamining $\omega(x, M)$ xarakteristik funksiyasi (13.2.1) tenglik bilan aniqlangan bo'lsin. *Sodda funksiya* deb kvadratlanuvchi to'plamlar xarakteristik funksiyalarining

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k \omega(x, E_k)$$

ko'rinishdagi chiziqli kombinatsiyasiga aytamiz.

Ravshanki, har qanday sodda funksiya integrallanuvchi bo'lib, (13.2.3) tenglikka va 13.2.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\int\limits_E f(x)\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k\,|E_k| \tag{13.3.1}$$

munosabat o'rinli.

Endi kvadratlanuvchi $E \subset \mathbb{R}^2$ to'plamda ixtiyoriy chegaralangan $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linish uchun

$$m_k \;=\; \inf_{x\in E_k} f(x), \quad M_k \;=\; \sup_{x\in E_k} f(x) \tag{13.3.2}$$

belgilash kiritib, mos ravishda Darbuning quyi funksiyasi va Darbuning yuqori funksiyasi deb ataluvchi, quyidagi ikki sodda funksiyani qaraymiz:

$$h(x,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k\,\omega(x,E_k) \tag{13.3.3}$$

va

$$H(x,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k\,\omega(x,E_k). \tag{13.3.4}$$

Albatta, istalgan $P$ bo'linish uchun

$$h(x,P) \;\le\; f(x) \;\le\; H(x,P) \tag{13.3.5}$$

tengsizlik o'rinli.

Bundan istalgan ikki $P_1$ va $P_2$ bo'linishlar uchun

$$h(x,P_1) \;\le\; H(x,P_2) \tag{13.3.6}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilarini kiritamiz:

$$s(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k\cdot|E_k|, \quad S(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k\cdot|E_k|. \tag{13.3.7}$$

Bevosita (13.3.1) dan Darbuning quyi sodda funksiyasidan olingan integral Darbuning quyi yig'indisiga va Darbuning yuqori sodda funksiyadan olingan integral Darbuning yuqori yig'indisiga tengligi kelib chiqadi. Shunday ekan, istalgan $P_1$ va $P_2$ bo'linishlar uchun, (13.3.6) tengsizlik va 13.2.2 - teoremaga ko'ra,

$$s(f, P_1) \ \leq \ S(f, P_2) \tag{13.3.8}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

**2. Darbuning quyi va yuqori integrallari.** Darbuning quyi integrali deb

$$\underline{I(f)} \ = \ \sup_P s(f, P) \tag{13.3.9}$$

kattalikka va yuqori integrali deb

$$\overline{I(f)} \ = \ \inf_P S(f, P) \tag{13.3.10}$$

kattalikka aytamiz.

Bu integrallar uchun (13.3.8) dan kelib chiquvchi

$$\underline{I(f)} \ \leq \ \overline{I(f)} \tag{13.3.11}$$

tengsizlik ularga berilgan nomlarning to'g'ri ekanini tasdiqlaydi.

**Ta'rif.** *Agar $E$ to'plamda berilgan $f$ funksiya uchun Darbuning quyi integrali Darbuning yuqori integraliga teng bo'lsa, bu funksiya $E$* ***to'plamda Darbu ma'nosida integrallanuvchi*** *deyiladi va bu umumiy qiymat $f$ funksiyaning Darbu ma'nosidagi integrali deyiladi:*

$$I_D(f) \ = \ \underline{I(f)} \ = \ \overline{I(f)}.$$

Navbatdagi maqsadimiz Darbu ma'nosidagi integrallanuvchanlik Riman bo'yicha integrallanuvchanlik bilan ustma-ust tushishini isbotlashdan iborat. Buning uchun Darbuning quyi va yuqori yig'indilarining xossalarini mukammalroq o'rganish zarur.

Agar $P^* = \{E_j^*\}_{j=1}^m$ bo'linishning har bir $E_j^*$ qismiy to'plami $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishning biror $E_k$ qismiy to'plami ichida yotsa, $P^*$ bo'linishni $P$ bo'linishning *maydalangani* deymiz.

**13.3.1 - tasdiq.** *Agar $P^*$ bo‘linish $P$ ning maydalangani bo‘lsa, u holda*

$$s(f,P) \le s(f,P^*), \quad S(f,P^*) \le S(f,P) \tag{13.3.12}$$

*bo‘ladi.*

**Isbot.** Tengsizlikni yuqori yig‘indilar uchun isbotlaymiz. Quyi yig‘indilar uchun ham isbot shunga o‘xshash bo‘ladi.

$P$ bo‘linishning qismiy to‘plamlaridan biri, masalan $E_k$, maydalanish natijasida o‘zaro kesishmaydigan ikki $E_k'$ va $E_k''$ kvadratlanuvchi to‘plamlarga bo‘lingan holni qarash yetarli. Agar $f$ funksiyaning ana shu qismiy to‘plamlardagi aniq yuqori chegaralarini mos ravishda $M_k'$ va $M_k''$ orqali belgilasak,

$$M_k' \le M_k, \quad M_k'' \le M_k$$

bo‘ladi.

Bundan, Darbu yuqori yig‘indilarining mos hadlari uchun

$$M_k'|E_k'| + M_k''|E_k''| \le M_k\left(|E_k'| + |E_k''|\right) = M_k|E_k|$$

bahoga ega bo‘lamiz. Demak, $P$ bo‘linishning maydalanganiga mos keluvchi yuqori yig‘indilar dastlabki yuqori yig‘indilardan oshib ketmas ekan.■

Ikki $P' = \{E_j'\}$ va $P'' = \{E_k''\}$ bo‘linishlarning *ko‘paytmasi deb* $E_{jk} = E_j' \cap E_k''$ ko‘rinishdagi barcha bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlardan iborat bo‘linishga aytamiz.

Ikki bo‘linishning ko‘paytmasi bu bo‘linishlardan har birining maydalangani bo‘lishi aniq.

**13.3.1 - teorema (Darbu ma’nosida integrallanuvchi bo‘lish kriteriysi).** *Chegaralangan $f$ funksiyaning $E$ to‘plamda Darbu ma’nosida integrallanuvchi bo‘lishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham $E$ to‘plamning shunday $P = P(\varepsilon)$ bo‘linishi topilib, u uchun*

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \tag{13.3.13}$$

*tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

**Isbot.** 1) Istalgan $P$ bo'linish uchun bevosita yuqori va quyi yig'indilar hamda Darbu integrallari ta'rifidan quyidagi

$$s(f,P) \;\le\; \underline{I(f)} \;\le\; \overline{I(f)} \;\le\; S(f,P) \tag{13.3.14}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Avval (13.3.13) shart bajarildi deylik. U holda, (13.3.14) tengsizliklarga ko'ra, $\underline{I(f)} = \overline{I(f)}$ . Demak, $f$ funksiya Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lar ekan.

2) Endi $f$ funksiya Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin deylik. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $P'$ va $P''$ bo'linishlarni tanlaymizki, bunda ushbu

$$\underline{I(f)} - \varepsilon \;<\; s(f,P') \;\le\; S(f,P'') \;<\; \overline{I(f)} + \varepsilon$$

tengsizliklar bajarilsin.

U holda, $P$ bo'linish sifatida $P'$ va $P''$ bo'linishlar ko'paytmasini olib, 13.3.1 - tasdiqdan foydalansak, quyidagi

$$\underline{I(f)} - \varepsilon \;<\; s(f,P) \;\le\; S(f,P) \;<\; \overline{I(f)} + \varepsilon$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu esa (13.3.13) shartning bajarilishini anglatadi.■

**3. Riman integralining Darbu ma'nosidagi integral bilan ustma-ust tushishi.** Endi, xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, funksiyaning Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun uning Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli ekanini ko'rsatish mumkin. Buning uchun Darbuning yuqori va quyi yig'indilarining navbatdagi xossalarini isbotlash yetarli.

**Darbuning yordamchi lemmasi.** *Faraz qilaylik, kvadratlanuvchi $E$ to'plamda chegaralangan $f$ funksiya berilgan bo'lib, $P^*$ bu to'plamning ixtiyoriy tayinlangan bo'linishi bo'lsin.*

*U holda, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi $E$ to'plamning har qanday $P$ bo'linishi uchun ushbu*

$$s(f,P) > s(f,P^*) - \varepsilon, \quad S(f,P) < S(f,P^*) + \varepsilon \tag{13.3.15}$$

*tengsizliklar bajariladi.*

**Isbot.** Lemmani Darbuning yuqori yig'indilari uchun isbotlaymiz. Umumiylikni saqlagan holda, $f$ funksiya $E$ to'plamda manfiy bo'lmagan qiymatlar qabul qiladi, deb faraz qilishimiz mumkin. Chunki, har qanday o'zgarmas $C$ uchun

$$S(f + C, P) \; = \; S(f, P) \; + \; C|E|$$

tenglik o'rinli va $C > 0$ o'zgarmasni tanlash hisobiga $f + C$ funksiyani musbat qilishimiz mumkin.

Berilgan $P^*$ bo'linishning barcha qismiy to'plamlari chegaralarining birlashmasini, ya'ni

$$\Gamma \; = \; \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j^* \tag{13.3.16}$$

yopiq to'plamni qaraymiz.

Har bir $E_j^*$ to'plam kvadratlanuvchi bo'lgani sababli, uni $\partial E_j^*$ chegarasining yuzi nolga teng. Demak, $\Gamma$ ning yuzi ham nolga teng. Bundan chiqdi, agar $M \; = \; \sup\limits_{x \in E} f(x)$ desak, $\Gamma$ ni shunday ko'pburchakli ochiq $Q^\varepsilon$ shakl bilan qoplash mumkinki, uning yuzi quyidagi

$$|Q^\varepsilon| \; < \; \frac{\varepsilon}{M} \tag{13.3.17}$$

shartni qanoatlantiradi.

Har ikki $\Gamma$ va $\partial Q^\varepsilon$ chegara kompakt va o'zaro kesishmaydi, shuning uchun $\mathrm{dis}\{\Gamma, \partial Q^\varepsilon\} > 0$. Bu kattalikni (13.3.16) chegaraviy to'plamni qoplovchi ko'pburchakli $Q^\varepsilon$ shaklning eng kichik «yarim kengligi» deb qarash mumkin.

Endi

$$\delta \; = \; \delta(\varepsilon) \; = \; \frac{1}{2} \, \mathrm{dis}\{\Gamma, \partial Q^\varepsilon\} \tag{13.3.18}$$

deb, diametri $\delta$ dan kichik istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linish uchun (13.3.15) tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Bunday bo'linish uchun Darbuning yuqori yig'indisini ikki yig'indiga ajratish mumkin:

$$S(f, P) \; = \; \sum_k{}' \; M_k|E_k| \; + \; \sum_k{}'' \; M_k|E_k|, \tag{13.3.19}$$

bunda birinchi yig'indiga $E_k$ to'plamlar to'laligicha $Q^\varepsilon$ ko'pburchakli shakl ichida yotgan hadlar va ikkinchi yig'indiga esa, $E_k$ to'plamlar $Q^\varepsilon$ dan tashqarida aqalli bitta nuqtaga ega bo'lgan hadlar kiritilgan.

1) Birinchi yig'indining har bir hadi $M|E_k|$ dan katta emas. Bundan tashqari, yig'indidagi $E_k$ to'plamlar $Q^\varepsilon$ ko'pburchakli shakl ichida yotadi va o'zaro kesishmaydi. Shuning uchun, (13.3.17) ga ko'ra,

$$\sum_k{}' \ M_k|E_k| \ \le \ M \sum_k{}' \ |E_k| \ \le \ M|Q^\varepsilon| \ < \ \varepsilon\,. \tag{13.3.20}$$

2) $P$ bo'linish diametri (13.3.18) tenglik bilan aniqlangan $\delta$ sonidan kichik bo'lgani sababli, ikkinchi yig'indidagi har bir $E_k$ to'plam $\Gamma$ bilan umumiy nuqtaga ega emas va to'laligicha biror $E_j^*$ to'plamning ichida yotadi. Haqiqatan, agar $E_k$ to'plam $a \in E_i^*$ va $b \notin E_j^*$ nuqtalarga ega bo'lganda edi, uzunligi $\delta$ dan kichik bo'lgan $[a,b]$ kesma $\Gamma$ ni kesar va demak, $\delta$ ning tanlanishiga ko'ra, $E_k$ qismiy to'plam to'laligicha ko'pburchakli $Q^\varepsilon$ shakl ichida yotar edi va bundan chiqdi, mos had birinchi yig'indiga kirishi kerak edi.

Shunday qilib,

$$M_k \ \le \ M_j^*$$

va demak, har bir hadning musbatligiga ko'ra,

$$\sum_k{}'' \ M_k|E_k| \ \le \ \sum_{j=1}^{m} M_j^*|E_j^*| \ = \ S(f,P^*) \tag{13.3.21}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Endi (13.3.19), (13.3.20) va (13.3.21) lardan talab qilingan

$$S(f,P) \ < \ S(f,P^*) \ + \ \varepsilon$$

baho kelib chiqadi.

Quyi yig'indilar uchun isbot xuddi yuqoridagidek olib boriladi.■

Darbuning quyi va yuqori yig'indilarining yuqorida o'rnatilgan xossalari ularning, bo'linish diametri nolga intilganda, limitga (balki o'zaro ustma-ust tushmaydigan) ega ekanini isbotlashga imkon beradi.

**Ta’rif.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya kvadratlanuvchi $E$ to‘plamda chegaralangan bo‘lsin.*

*Agar $A$ biror haqiqiy son bo‘lib, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham, shunday $\delta > 0$ topilsaki, $E$ to‘plamining diametri $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $P$ bo‘linishi uchun quyidagi*

$$|S(f, P) - A| < \varepsilon$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda $A$ soni Darbu yuqori yig‘indilarining $d(P) \to 0$ dagi limiti deyiladi.*

Darbu quyi yig‘indilari limiti ham xuddi shu singari kiritiladi. Bir o‘zgaruvchili holdagi kabi navbatdagi tasdiq Darbu nazariyasidagi eng asosiy tasdiqdir.

**Darbuning asosiy lemmasi.** *Faraz qilaylik, $E$ kvadratlanuvchi to‘plam bo‘lib, $f$ shu to‘plamda aniqlangan chegaralangan funksiya bo‘lsin. U holda, Darbu yuqori yig‘indilarining limiti Darbuning yuqori integraliga, Darbu quyi yig‘indilarining limiti esa, Darbuning quyi integraliga teng bo‘ladi.*

**Isbot.** Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni berilgan bo‘lsin. Shunday $\delta > 0$ sonni topish mumkinligini ko‘rsatamizki, u uchun $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $P$ bo‘linish olganda ham quyidagi

$$\overline{I} \leq S(f, P) < \overline{I} + \varepsilon \tag{13.3.15}$$

qo‘sh tengsizlik bajarilsin. Bunda, albatta, tengsizlikning faqat o‘ng qismi isbot talabdir.

Yuqori integralning (13.3.10) ta’rifiga ko‘ra, $P^* = \{E_j^*\}_{j=1}^m$ bo‘linishni shunday tanlash mumkinki, u uchun

$$S(f, P^*) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{13.3.16}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Darbuning yordamchi lemmasiga ko‘ra esa, ko‘rsatilgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ soni topiladiki, diametri $\delta$ dan kichik har qanday $P = \{E_k\}$ bo‘linish olganda ham ushbu

$$S(f, P) < S(f, P^*) + \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Demak, bu bo‘linishlar uchun, (13.3.16) ga ko‘ra, (13.3.15) tengsizlik bajariladi.

Darbuning quyi yig‘indilari uchun isbot xuddi yuqoridagidek olib boriladi.■

**13.3.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $E$ kvadratlanuvchi to‘plam bo‘lsin. $E$ da chegaralangan funksiyaning Riman bo‘yicha integrallanuchi bo‘lishi uchun uning Darbu ma’nosida integrallanuvchi bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bunda, agar bu integrallardan biri mavjud bo‘lsa, ikkinchisi ham mavjud bo‘lib, Riman integrali Darbu ma’nosidagi integralga teng bo‘ladi.*

**Isbot**. Ravshanki, kvadratlanuvchi $E$ to‘plamining har qanday $P$ bo‘linishi uchun Riman integral yig‘indisi Darbuning quyi va yuqori yig‘indilari bilan quyidagi

$$s(f,P) \ \le \ \sigma_P(f,\{\xi_k\}) \ \le \ S(f,P) \tag{13.3.23}$$

tengsizlik orqali bog‘langan.

1) Agar $f$ Darbu ma’nosida integrallanuvchi bo‘lsa, u holda, Darbuning asosiy lemmasiga ko‘ra, yuqoridagi tengsizlikning chap va o‘ng tomoni Darbu ma’nosidagi integralga intiladi. Demak, Riman integral yig‘indilari ham xuddi o‘sha limitga ega.

2) Endi teskarisini ko‘rsatamiz. Agar funksiya Riman bo‘yicha integrallanuvchi bo‘lsa, $\xi_k$ nuqtalarni tanlash hisobiga, integral yig‘indilarni Darbuning quyi yig‘indilariga istalgancha yaqin qilib olish mumkin. U holda, Darbuning quyi yig‘indilari xuddi integral yig‘indilari ega bo‘lgan limitga ega bo‘ladi. Bundan chiqdi, Darbuning asosiy lemmasiga ko‘ra, Darbuning quyi integrali Riman integraliga teng bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash, $\xi_k$ nuqtalarni boshqacha tanlash natijasida integral yig‘indilarni Darbu yuqori yig‘indilariga istalgancha yaqin qilish va buning natijasida, Darbuning yuqori integrali Riman integraliga teng ekanini ko‘rsatish mumkin. Demak, Riman bo‘yicha integrallanuvchi funksiya Darbu ma’nosida ham integrallanuvchi bo‘lar ekan.■

**Eslatma.** 13.3.2 - teoremada $f$ funksiyaning chegaralanganligi muhimdir. Chunonchi, biror kvadratlanuvchi to‘plamda chegaralanmagan bo‘lib, ammo shu to‘plamda Riman bo‘yicha integrallanuvchi funksiyaga misol keltirish mumkin (13.2.1 - misolga qarang). Ravshanki, bunday funksiya Darbu bo‘yicha integrallanmaydi, chunki u uchun Darbu yig‘indilarini aniqlash mumkin emas.

Bundan buyon, ushbu paragrafda biz qaralayotgan funksiyalarni chegaralangan deb faraz qilamiz.

**1 - natija.** *Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo‘lish kriteriysi (13.3.1 - teorema) Riman bo‘yicha ham integrallanuchi bo‘lish kriteriysidir.*

**2 - natija.** *Agar $f$ funksiya biror kvadratlanuvchi $E$ to‘plamda Riman bo‘yicha integrallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiya istalgan kvadratlanuvchi $E_1 \subset E$ qismiy to‘plamda ham integrallanuvchi bo‘ladi.*

Haqiqatan, kvadratlanuvchi $E$ to‘plamning har qanday $P$ bo‘linishi tabiiy ravishda $E_1$ to‘plamning biror $P_1$ bo‘linishini hosil qiladi. U holda, ravshanki,

$$S(f, P_1) \ - \ s(f, P_1) \ \leq \ S(f, P) \ - \ s(f, P)$$

tengsizlik bajariladi.

Endi, $f$ funksiyaning $E$ to‘plamda integrallanuvchi bo‘lgani sababli, bu tengsizlikning o‘ng tomonini avvaldan berilgan istalgan sondan kichik qilib, Darbu kriteriysini qo‘llash yetarli.

Ikki karrali Riman integralining navbatdagi xossalarining to‘g‘ri ekani xuddi bir o‘zgaruvchili funksiya uchun 6 - bobda tekshirilgandek isbotlanadi.

**13.3.3 - teorema.** *Kvadratlanuvchi $E$ to‘plamda integrallanuvchi $f$ funksiyaning qiymatlar to‘plami $[A, B]$ kesmadan iborat bo‘lsin. Agar $g : [A, B] \to \mathbb{R}$ funksiya Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda $g[f(x)]$ murakkab funksiya $E$ da integrallanuvchi bo‘ladi.*

**Isbot** xuddi bir o‘zgaruvchili funksiya uchun mos tasdiq isboti singari olib boriladi.

**1 - natija.** *Agar $f$ funksiya kvadratlanuvchi $E$ to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda istalgan $g(t)$ ko‘phad uchun $g[f(x)]$ mu-*

*rakkab funksiya ham $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.*

**2 - natija.** *Agar $f$ va $g$ funksiyalar kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)g(x)$ funksiya ham $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.*

Haqiqatan, bu tasdiqning to'g'riligi quyidagi

$$fg \;=\; \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 \;-\; (f-g)^2\right]$$

ayniyat va 13.2.1 - teoremaning 1 - natijasidan kelib chiqadi.

**3 - natija.** *Agar $f$ funksiya kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.*

Haqiqatan, agar $g(t) = |t|$ desak, bu funksiya Lipshits shartini qanoatlantiradi. Endi $|f(x)| = g[f(x)]$ deb, 3.3.3 - teoremani qo'llash yetarli.

**4. Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lish kriteriysining natijasi.** Funksiya integrallanuvchi bo'lishining Darbu kriteriysi bir karrali va ikki karrali integrallar uchun bir xilda o'qilishi ajoyib natijalarga olib keladi. Darbu kriteriysining bu xossasini qo'llashga misol tariqasida navbatdagi sodda tasdiq isbotini keltiramiz; bunda bir o'lchovli holda zaruriylik va ikki o'lchovli holda esa, yetarlilik shartidan foydalanamiz.

**13.3.2 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya $[a, b]$ kesmada va $g$ funksiya esa, $[c, d]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. U holda ikki o'zgaruvchili $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$ funksiya*

$$Q \;=\; [a, b]\times[c, d] \;=\; \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; a\le x\le b, \quad c\le y\le d\}$$

*to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi bo'ladi.*

**Isbot.** Avval har ikki $f$ va $g$ funksiya chegaralangan ekanini, ya'ni $|f(x)| \le M_1$ va $|g(y)| \le M_2$ ekanini qayd etamiz. Bundan chiqdi, umumiylikni saqlagan holda, har ikki $f$ va $g$ funksiyani manfiymas deb hisoblasak bo'ladi (zarur bo'lsa, bunga o'zgarmas qo'shish bilan erishish mumkin).

Darbu kriteriysiga ko'ra, har qanday $\varepsilon > 0$ olganda ham $[a, b]$ kesmaning shunday $P_1$ bo'linishi topiladiki, bunda $f$ funksiya uchun

Darbuning $s(f, P_1)$ quyi va $S(f, P_1)$ yuqori yig'indilari

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) \ < \ \varepsilon \tag{13.3.24}$$

bahoni qanoatlantiradi.

Xuddi shu singari, $[c, d]$ kesmaning shunday $P_2$ bo'linishi topiladiki, bunda $g$ funksiya uchun Darbuning $s(g, P_2)$ quyi va $S(g, P_2)$ yuqori yig'indilari

$$S(g, P_2) - s(g, P_2) \ < \ \varepsilon \tag{13.3.25}$$

bahoni qanoatlantiradi.

$P_1$ va $P_2$ bo'linishlar tabiiy ravishda $Q$ to'g'ri to'rtburchakning $P = P_1 \times P_2$ bo'linishini hosil qiladi. Ravshanki, $\Phi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ funksiya uchun Darbuning $s(\Phi, P)$ quyi va $S(\Phi, P)$ yuqori yig'indilari mos ravishda

$$s(\Phi, P) = s(f, P_1) \cdot s(g, P_2), \qquad S(\Phi, P) = S(f, P_1) \cdot S(g, P_2) \tag{13.3.26}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Demak, (13.3.24) va (13.3.25) baholarga ko'ra,

$$S(\Phi, P) - s(\Phi, P) \ =$$

$$= S(f, P_1)\big[S(g, P_2) - s(g, P_2)\big] + s(g, P_2)\big[S(f, P_1) - s(f, P_1)\big] \ \leq$$

$$\leq M_1\big[S(g, P_2) - s(g, P_2)\big] + M_2\big[S(f, P_1) - s(f, P_1)\big] \leq (M_1 + M_2)\varepsilon.$$

Darbu kriteriysiga ko'ra, bundan $\Phi(x, y)$ funksiyaning $Q$ to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.■

**Eslatma.** Bevosita (13.3.26) munosabatlardan 13.3.2 - tasdiq shartlari bajarilganda

$$\iint\limits_Q f(x)g(y)\, dx\, dy \ = \ \left(\int\limits_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int\limits_c^d g(y)\, dy\right) \tag{13.3.27}$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Darbu kriteriysining yana bir tadbiqi sifatida navbatdagi foydali xossani isbotlaymiz. Bu xossa ixtiyoriy o‘lchovli integrallash sohalari uchun integrallanuvchi bo‘lishlikning sodda va oson tekshiriladigan yetarli shartini beradi.

Quyidagi teoremalar shartida $E$ to‘plam sifatida sonlar o‘qining biror kesmasini, yoki tekislikdagi istalgan kvadratlanuvchi to‘plamni olish mumkin.

**13.3.4 - teorema.** *Berilgan $f$ funksiya $E$ to‘plamda chegaralangan bo‘lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $E$ da integrallanuvchi shunday ikki $\varphi_\varepsilon(x)$ va $\psi_\varepsilon(x)$ funksiya topilsaki, ular uchun*

$$\varphi_\varepsilon(x) \ \le\ f(x) \ \le\ \psi_\varepsilon(x), \quad x \in E, \tag{13.3.28}$$

*munosabat o‘rinli bo‘lib, quyidagi*

$$\int\limits_E [\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)]\, dx \ <\ \varepsilon \tag{13.3.29}$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda $f$ funksiya $E$ da integrallanuvchi bo‘ladi.*

**Isbot.** Agar (13.3.24) shart bajarilsa, $E$ to‘plamning istalgan $P$ bo‘linishi uchun o‘z-o‘zidan ko‘rinib turgan, quyidagi

$$s(\varphi_\varepsilon, P) \ \le\ s(f, P) \ \le\ S(f, P) \ \le\ S(\psi_\varepsilon, P)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bundan

$$\underline{I(\varphi_\varepsilon)} \ \le\ \underline{I(f)} \ \le\ \overline{I(f)} \ \le\ \overline{I(\psi_\varepsilon)}$$

tengsizlik va $\varphi_\varepsilon(x)$, $\psi_\varepsilon(x)$ funksiyalar integrallanuvchi bo‘lgani sababli,

$$\int\limits_E \varphi_\varepsilon(x)\, dx \ \le\ \underline{I(f)} \ \le\ \overline{I(f)} \ \le\ \int\limits_E \psi_\varepsilon(x)\, dx$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shunday ekan, (13.3.25) bahodan $\underline{I(f)} = \overline{I(f)}$ tenglikni olamiz. Bu esa $f$ funksiyaning integrallanuvchi ekanini anglatadi.■

Bevosita 13.3.4 - teorema yordamida navbatdagi nihoyatda muhim tasdiqni isbotlash mumkin.

**13.3.5 - teorema.** *Faraz qilaylik, $E$ to'plamda integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi $f$ funksiyaga o'sha to'plamda tekis yaqinlashsin. U holda $f$ funksiya ham $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx \tag{13.3.30}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Tekis yaqinlashish ta'rifiga ko'ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ nomer ko'rsatish mumkinki, $n \geq N$ bo'lganda

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in E,$$

tengsizlik bajariladi.

Bu tengsizlikni

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \tag{13.3.31}$$

deb yozish mumkin.

Demak, 13.3.4 - teoremaga ko'ra, $f$ funksiya integrallanuvchi ekan.

Endi (13.3.31) tengsizlikni quyidagi

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

ko'rinishda yozib olib, uni integrallasak,

$$\int_E f(x)\,dx - \varepsilon|E| \leq \int_E f_n(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx + \varepsilon|E|, \quad n \geq N,$$

munosabatni olamiz. Bu esa (13.3.30) tenglik bajarilishini anglatadi.■

**Eslatma.** 13.3.5 - teorema tekis yaqinlashishda Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar sinfining saqlanishini, ya'ni limit funksiya shu sinfda qolishini ko'rsatadi.

## 13.4-§. Ikki karrali integral xossalari

**1. Kvadratlanuvchi to'plam funksiyasi sifatida Riman integralining additivligi.**

**13.4.1 - teorema (integralning additivligi haqida).** *Faraz qilaylik, $E_1$ va $E_2$ kvadratlanuvchi shakllar uchun $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ bo'lib, $E = E_1 \cup E_2$ bo'lsin. Agar $f$ funksiya $E_1$ va $E_2$ to'plamlarda chegaralangan va integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $E$ da ham integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx \tag{13.4.1}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** $E_1$ to'plamning istalgan $P_1$ bo'linishi va $E_2$ to'plamning istalgan $P_2$ bo'linishi birgalikda $E = E_1 \cup E_2$ to'plamning biror $P$ bo'linishini hosil qiladi. Bunda Darbuning mos quyi va yuqori yig'indilari uchun quyidagi

$$S(f,P) - s(f,P) = [S(f,P_1) - s(f,P_1)] + [S(f,P_2) - s(f,P_2)]$$

o'z-o'zidan ko'rinib turgan tenglik o'rinli bo'ladi.

$f$ funksiyaning $E_1$ va $E_2$ to'plamlarda integrallanuvchi bo'lgani sababli, Darbu kriteriysiga ko'ra, yuqoridagi tenglikning o'ng tomonini oldindan berilgan ixtiyoriy sondan kichik qilish mumkin. Bundan, yana o'sha Darbu kriteriysiga ko'ra, $f$ funksiyaning $E$ da integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.■

**1 - eslatma.** Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli. Ya'ni, agar $E_1$ va $E_2$ kvadratlanuvchi shakllar bo'lib, $E = E_1 \cup E_2$ bo'lsa, $E$ da integrallanuvchi $f$ funksiya $E_1$ va $E_2$ larda ham integrallanuvchi bo'ladi va (13.4.1) tenglik bajariladi. Bu xossaning to'g'riligi 13.3.2 - teoremaning 2 - natijasidan kelib chiqadi.

**2 - eslatma.** Bir o'zgaruvchili holdan farqli o'laroq, 13.4.1 - teorema shartlarida funksiyaning chegaralanganlik shartini tashlab yuborib bo'lmaydi. Haqiqatan, $E_1$ birlik ochiq kvadrat bo'lsin:

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1\},$$

$E_2$ esa abssissalar o‘qidagi birlik interval bo‘lsin:

$$E_2 \; = \; \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 < x_1 < 1, \quad x_2 = 0\} \; .$$

Shunday $f$ funksiyani qaraymizki, u $E_1$ da 0 ga teng bo‘lib, $E_2$ da esa chegaralanmagan bo‘lsin (misol uchun, $E_2$ da

$$f(x) \; = \; \frac{1}{x_1}, \quad 0 < x_1 < 1, \quad x_2 = 0,$$

deb olamiz).

Bunda $E_1$ va $E_2$ to‘plamlar kvadratlanuvchi bo‘lib, $|E_1| = 1$ va $|E_2| = 0$. Ravshanki, $f$ funksiya har bir $E_1$ va $E_2$ da integrallanuvchi bo‘lsada, ammo $E = E_1 \cup E_2$ da integrallanuvchi emas, chunki mos integral yig‘indilari chegaralanmagan.

**2. Uzluksiz funksiyalarni integrallanuvchanligi.**

**13.4.2 - teorema.** *Agar $E$ yopiq kvadratlanuvchi shakl bo‘lsa, u holda $E$ da uzluksiz har qanday funksiya $E$ da integrallanuvchi bo‘ladi.*

**Isbot.** Kantor teoremasiga ko‘ra, yopiq chegaralangan $E$ to‘plamda uzluksiz funksiya shu to‘plamda tekis uzluksiz bo‘ladi. Shunday ekan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, diametri $\delta$ dan kichik bo‘lgan ixtiyoriy $F$ to‘plamda $f$ funksiyaning tebranishi $\varepsilon$ dan kichik bo‘ladi. Bundan chiqdi, $E$ to‘plamning diametri $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ bo‘linishi uchun

$$S(f,P) \; - \; s(f,P) \; = \; \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot |E_k| \; < \; \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |E_k| \; = \; \varepsilon |E|$$

munosabat o‘rinli. Bundan, 13.3.1 - teoremaga ko‘ra, $f$ funksiyaning integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.■

Albatta, agar funksiya yopiq bo‘lmagan to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, bu funksiya chegaralanmagan ham bo‘lishi mumkin. Ammo, agar qo‘shimcha ravishda berilgan funksiyani ixtiyoriy kvadratlanuvchi (yopiq bo‘lishi shart bo‘lmagan) to‘plamda chegaralanganligini talab qilsak, navbatdagi teoremada tasdiqlanganidek, nafaqat uzluksiz funksiya, hatto uncha katta bo‘lmagan uzulish nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lgan funksiya ham, integrallanuvchi bo‘lar ekan.

**13.4.3 - teorema.** *Faraz qilaylik, $E$ kvadratlanuvchi shakl bo‘lsin. Agar $f$ funksiya $E$ da chegaralangan bo‘lib, yuzi nolga teng bo‘lgan uzilish nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsa, u holda bu funksiya $E$ da integrallanuvchi bo‘ladi.*

**Isbot.** Berilgan $f$ funksiya $E$ da $|f(x)| \leq M$ tengsizlikni qanoatlantirib, $E$ ning, $|F| = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $F \subset E$ qismiy to‘plamidan tashqari, barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lsin.

$E \setminus F$ to‘plam kvadratlanuvchi bo‘lib, $|E \setminus F| = |E|$ bo‘lgani uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday yopiq kvadratlanuvchi $P \subset E \setminus F$ shakl topiladiki, u uchun

$$|P| \ > \ |E| \ - \ \frac{\varepsilon}{2M} \tag{13.4.2}$$

tengsizlik bajariladi.

Quyidagi

$$\varphi(x) \ = \ \begin{cases} f(x), & \text{agar} \quad x \in P \quad \text{bo‘lsa,} \\ -M, & \text{agar} \quad x \notin P \quad \text{bo‘lsa,} \end{cases}$$

va

$$\psi(x) \ = \ \begin{cases} f(x), & \text{agar} \quad x \in P \quad \text{bo‘lsa,} \\ M, & \text{agar} \quad x \notin P \quad \text{bo‘lsa,} \end{cases}$$

funksiyalarni qaraymiz.

Ravshanki, bu ikki funksiya yopiq ko‘pburchakli $P$ shaklda uzluksiz va 13.4.2 - teoremaga ko‘ra, $P$ da integrallanuvchi. Demak, integralning additivligi haqidagi 13.4.1 - teoremaga asosan, bu ikki funksiya $E$ da integrallanuvchi.

Ravshanki,

$$\varphi(x) \ \leq \ f(x) \ \leq \ \psi(x), \quad x \in E,$$

va (13.4.2) ga ko‘ra,

$$\int\limits_E [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx \ = \ 2M\,(|E| - |P|) \ < \ \varepsilon$$

baho o'rinli.

Shunday ekan, $f$ funksiyaning integrallanuvchi ekani 13.3.4 - teoremadan kelib chiqadi.■

**3. O'rta qiymat formulasi.** Navbatdagi tasdiq bir o'zgaruvchili holdagi o'rta qiymat haqidagi umumiy formulaning ikki o'zgaruvchili ko'rinishidir.

**13.4.4 - teorema.** *Faraz qilaylik, $E$ kvadratlanuvchi shakl bo'lib, chegaralangan $f(x)$ va $\rho(x)$ funksiyalar $E$ da integrallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari, $\rho(x) \geq 0$ shart bajarilsin. U holda shunday $\mu$ soni topiladiki u uchun*

$$\inf_{x\in E} f(x) \ \leq \mu \ \leq \ \sup_{x\in E} f(x) \tag{13.4.3}$$

*shart o'rinli bo'lib, quyidagi*

$$\int\limits_E f(x)\rho(x)\,dx \ = \ \mu \int\limits_E \rho(x)\,dx \tag{13.4.4}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Agar

$$m \ = \ \inf_{x\in E} f(x), \qquad M \ = \ \sup_{x\in E} f(x)$$

belgilashlarni kiritsak, $\rho(x)$ funksiya manfiy bo'lmagani uchun, ushbu

$$m \cdot \rho(x) \ \leq \ f(x)\rho(x) \ \leq \ M \cdot \rho(x)$$

qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bu tengsizlikni integrallab, 13.2.2 - teoremaga ko'ra, quyidagi

$$m \int\limits_E \rho(x)\,dx \ \leq \ \int\limits_E f(x)\rho(x)\,dx \ \leq \ M \int\limits_E \rho(x)\,dx \tag{13.4.5}$$

munosabatni olamiz.

Agar (13.4.4) ning o'ng tomonidagi integral nolga teng bo'lsa, (13.4.5) ga ko'ra, chap tomondagi integral ham nolga teng bo'lib, isbotlanayotgan tenglik istalgan $\mu$ uchun o'rinli bo'ladi.

Agar (13.4.4) ning o‘ng tomonidagi integral musbat bo‘lsa, quyidagi

$$\mu \;=\; \frac{\int\limits_E f(x)\rho(x)\,dx}{\int\limits_E \rho(x)\,dx} \qquad (13.4.6)$$

belgilashni kiritib, (13.4.5) ga ko‘ra, ushbu

$$m \;\le\; \mu \;\le M$$

tengsizlikni olamiz. Bu esa, isbotlanayotgan (13.4.3) tengsizlikning o‘zidir.■

**Eslatma.** Agar $\rho$ funksiya musbat yuzali $E$ to‘plamda uzluksiz va chegaralangan bo‘lib, bu to‘plamning har bir nuqtasida $\rho(x) > 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda

$$\int\limits_E \rho(x)\,dx \;>\; 0$$

qat’iy tengsizlik bajarilib, natijada $\mu$ o‘rta qiymat (13.4.6) tenglikdan aniqlanadi. Haqiqatan, agar $Q$ yopiq ko‘pburchakli shakl $E$ ning ichida yotib, yuzi musbat bo‘lsa, Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra, $\rho$ funksiya biror $x_0 \in Q$ nuqtada $m(Q) > 0$ minimumga erishadi. Shunday ekan, quyidagi

$$\int\limits_E \rho(x)\,dx \;\ge\; m(Q)|Q| \;>\; 0$$

baho bajariladi.■

Agar integral ostidagi funksiya uzluksiz bo‘lib, integrallanayotgan soha bog‘langan to‘plam bo‘lsa, u holda o‘rta qiymat haqidagi formula eng sodda ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Eslatib o‘tamiz, bog‘langan to‘plam deganda biz *chiziqli bog‘langan* to‘plamni tushunar edik, ya’ni bu shunday to‘plamki, uning istalgan ikki nuqtasini, to‘laligicha shu to‘plamda yotuvchi, uzluksiz egri chiziq bilan bog‘lash mumkin.

Ravshanki, bog'langanlik xossasi to'plamni uzluksiz akslantirishda saqlanadi. Chunonchi, agar $\psi : E \to F$ akslantirish bog'langan $E$ to'plamni biror $F$ to'plamga uzluksiz va o'zaro bir qiymatli akslantirsa, $F$ to'plam ham bog'langan bo'ladi. Bu tasdiqning to'g'riligi $\varphi$ va $\psi$ uzluksiz akslantirishlarning $\Phi(t) = \psi[\varphi(t)]$ superpozitsiyasi ham uzluksiz bo'lishidan kelib chiqadi. Ya'ni, agar biz $E$ to'plamning istalgan ikki nuqtasini uzluksiz egri chiziq bilan tutashtirsak, biz $F$ to'plamning ham istalgan ikki nuqtasini uzluksiz egri chiziq bilan tutashtirgan bo'lamiz (11.3.3 - tasdiqqa qarang).

Bog'langan to'plamda ixtiyoriy uzluksiz funksiya barcha oraliq qiymatlarni qabul qilishini ko'rsatish qiyin emas (isbot xuddi 11.2.5 - teorema isboti kabidir). Bu xossa bog'langan to'plamni xarakterlovchi muhim xossadir.

**13.4.5 - teorema (o'rta qiymat formulasi).** *Faraz qilaylik, $E$ bog'langan kvadratlanuvchi to'plam bo'lib, $f$ funksiya $E$ da uzluksiz va chegaralangan bo'lsin. U holda shunday $\xi \in E$ nuqta topiladiki, u uchun quyidagi*

$$\boxed{\int\limits_E f(x)\,dx \;=\; f(\xi)\cdot|E|} \tag{13.4.7}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** 13.4.4 - teoremaga ko'ra, chekkalari yuqorida aniqlangan $[m, M]$ kesmada shunday $\mu$ soni topiladiki, u uchun

$$\int\limits_E f(x)\,dx \;=\; \mu\cdot|E|$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak, teoremani isbotlash uchun shunday $\xi \in E$ nuqta topishimiz kerakki, bu nuqtada $f(\xi) = \mu$ bo'lsin. E'tibor bering, bunda muammo shundan iboratki, $E$ to'plam, umuman aytganda, kompakt bo'lmagani sababli, qaralayotgan funksiya $m$ va $M$ qiymatlarga bu to'plamda erishmasligi mumkin.

Albatta, agar $|E| = 0$ bo‘lsa, bunday nuqta sifatida $E$ to‘plamning istalgan nuqtasini olishimiz mumkin. Shuning uchun, $|E| > 0$ deb hisoblaymiz.

Avval $m < \mu < M$ bo‘lgan holni qaraylik. Bunda shunday $a$ va $b$ nuqtalarni ko‘rsatish mumkinki, ular uchun $f(a)$ son $m$ ga, $f(b)$ son esa $M$ ga istalgancha yaqin bo‘ladi. Xususan, quyidagi $f(a) < \mu < f(b)$ qo‘sh tengsizlik o‘rinlidir. Demak, $f$ funksiya uzluksiz va $E$ to‘plam bog‘langan bo‘lgani sababli, shunday $\xi \in E$ nuqta topiladiki, u uchun $f(\xi) = \mu$ tenglik bajariladi. Ya’ni, bu holda (13.4.7) tenglik isbotlandi.

Endi, masalan, $\mu = M$ bo‘lsin deylik. U holda yuqoridagi mulohazalarga ko‘ra,

$$\int\limits_E [M - f(x)]\, dx \;=\; 0$$

bo’ladi. Demak, $M - f(x) \geq 0$. Lekin 13.4.4 - teoremaga berilgan eslatmadagi mulohazalarga ko‘ra, $M - f(x) > 0$ qat’iy tengsizlik barcha nuqtalarda o‘rinli bo‘la olmaydi, ya’ni shunday $\xi \in E$ nuqta topiladiki, unda $f(\xi) = M = \mu$ bo‘ladi.■

**1 - eslatma.** Agar $|E| > 0$ bo‘lsa, (13.4.7) formulani

$$\frac{1}{|E|} \int\limits_E f(x)\, dx \;=\; f(\xi) \qquad (13.4.8)$$

deb yozishimiz mumkin.

(13.4.8) ning chap tomondagi kattalikka $f$ funksiyaning $E$ to‘plamdagi *o‘rta qiymati* deyiladi. Shunday qilib, 13.4.5 - teorema uzluksiz funksiya biror nuqtada o‘rta qiymatni qabul qilishini tasdiqlaydi.

**2 - eslatma.** Agar $E$ to‘plam bog‘langan bo‘lmasa, teorema xulosasi o‘z kuchini yo‘qotadi. Haqiqatan, ikki bir xil o‘zaro kesishmaydigan yopiq doiralardan iborat $E$ sohani olib, bu doiralarning birida 0 va ikkinchisida esa, 1 qiymatni qabul qiluvchi funksiyani qaraylik. Albatta, bu holda funksiyaning o‘rta qiymati 1/2 ga teng, lekin hech qanday nuqtada funksiya bu qiymatni qabul qilmaydi.

**4. Integrallash sohasi.** Riman integrali ta’rifida integrallash sohasi sifatida ixtiyoriy kvadratlanuvchi shakl olinadi. Lekin bunda, yuqoridagi misollarda ko‘rsatilganidek, integral yaxshi xossalarini saqlab qolishi uchun, funksiyadan qo‘shimcha ravishda chegaralanganlikni talab qilishga to‘g‘ri keladi. Agar integrallash sohasi sifatida shunday shaklni olsakki, u 11 - bobda berilgan ta’rif ma’nosidagi soha bo‘lsa, bunday misollarni chetlab o‘tish mumkin.

Eslatib o‘tamiz, *soha* deb biz ochiq bog‘langan to‘plamga aytgan edik. Ochiq to‘plam ta’rifiga ko‘ra, u o‘zining chegarasi bilan umumiy nuqtaga ega emas, ya’ni istalgan $\Omega$ soha uchun $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$ munosabat o‘rinli.

Agar $\Omega$ (ochiq) soha bo‘lsa, u holda *yopiq soha* $\overline{\Omega}$ deb

$$\overline{\Omega} \;=\; \Omega \cup \partial\Omega$$

to‘plamga aytamiz.

Ochiq va yopiq soha chegaralari $\partial\overline{\Omega} \subset \partial\Omega$ munosabat bilan bog‘langan ekanini ko‘rsatish qiyin emas. Bu tegishlilik qat’iy ham, noqat’iy ham bo‘lishi mumkin. Masalan,

$$\Omega \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < 1\}$$

ochiq doiraning yopig‘i quyidagi

$$\overline{\Omega} \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

yopiq doiraga teng va bu holda ochiq va yopiq doiralarning chegaralari

$$\partial\overline{\Omega} = \partial\Omega \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}$$

aylanadan iborat.

Agar soha bir nuqtasi chiqarib tashlangan ochiq doira bo‘lsa, ya’ni

$$\Omega_0 \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

bo‘lsa, u holda, $\overline{\Omega_0}$ yana yopiq doira bo‘ladi va uning chegarasi yana aylanadan iborat bo’ladi. Lekin bu holda $\Omega_0$ ning chegarasi aylana va chiqarib tashlangan nuqtadan iborat:

$$\partial\Omega_0 \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\} \cup \{0\}.$$

Demak, bu holda $\partial\overline{\Omega_0} \subset \partial\Omega_0$ va lekin $\partial\overline{\Omega_0} \neq \partial\Omega_0$.

Kvadratlanuvchi shakllarning eng muhim sinfi bu kvadratlanuvchi sohalardir. 13.1.4 - tasdiq natijasiga ko‘ra, to‘g‘rilanuvchi chegaraga ega bo‘lgan har qanday soha kvadratlanuvchi bo‘ladi. Xususan, bo‘lakli uzluksiz chegaraga ega bo‘lgan soha kvadratlanuvchidir.

Agar ochiq soha kvadratlanuvchi bo‘lsa, uning yopig‘i ham kvadratlanuvchi bo‘lib, ularning yuzi o‘zaro teng bo‘lishi yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadi (chegaraning yuzi nolga tengligini eslatib o‘tamiz).

Bevosita kvadratlanuvchi shaklning ta’rifidan har qanday kvadratlanuvchi sohaning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Navbatdagi tasdiq o‘rinlidir.

**13.4.6 - teorema.** *Faraz qilaylik, $\Omega$ soha kvadratlanuvchi bo‘lsin. Agar $f$ funksiya $\Omega$ da integrallanuvchi bo‘lsa, u chegaralangandir.*

**Isbot.** Avval biz berilgan $\Omega$ sohasi uchun istalgan $\delta > 0$ olganda ham shunday $P = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ bo‘linish mavjudligini ko‘rsatamizki, u uchun $d(P) < \delta$ bo‘lib, har bir $\Omega_k$ ning yuzi musbat bo‘lsin.

Buning uchun istalgan $m$ natural son olib, tekislikni sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{i}{2^m} \leq x_1 < \frac{i+1}{2^m}\ , \ \frac{j}{2^m} \leq x_2 < \frac{j+1}{2^m} \right\}, \qquad i, j \in \mathbb{Z},$$

kvadratlarga bo‘lamiz.

Kvadratlanuvchi $\Omega$ sohamiz chegaralangan. Shunday ekan, ixtiyoriy tayinlangan $m$ nomer uchun bu sohani tomoni uzunligi $2^{-m}$ ga teng chekli sondagi yuqoridagi $\{Q_k\}_{k=1}^n$ kvadratlar bilan qoplash mumkin. Bunda biz qoplash uchun faqat $Q_k \cap \Omega \neq \emptyset$ shartni qanoatlantirgan $Q_k$ kvadratlarnigina olamiz.

Ravshanki, har bir tanlab olingan kvadrat $\Omega$ bilan umumiy ichki nuqtalarga ega. Shuning uchun, har bir $\Omega_k = Q_k \cap \Omega$ kvadratlanuvchi to‘plam bo‘sh bo‘lmagan ichki nuqtalar to‘plamiga ega. Demak, bunday to‘plamning yuzi, har qanday bo‘sh bo‘lmagan ochiq to‘plamning quyi yuzi qat’iy musbat bo‘lgani sababli, musbatdir.

Agar $f$ funksiyani $\Omega$ sohada chegaralanmagan deb faraz qilsak, u holda bu funksiya biror $\Omega_q$ to‘plamda chegaralanmagan bo‘ladi.

Integral yig'indini ushbu

$$\sigma_P(f) \;=\; f(\xi_q)|\Omega_q| \;+\; \sum_{k\neq q} f(\xi_k)\cdot|\Omega_k|$$

ko'rinishda yozib, $k \neq q$ lar uchun barcha $\xi_k \in \Omega_k$ nuqtalarni tayinlab qo'yamiz. $\sigma_P(f)$ integral yig'indini birgina $\xi_q \in \Omega_q$ nuqtani tanlash hisobiga istalgancha katta qilish mumkinligi ravshan (albatta, agar $\Omega_q$ qismiy to'plam yuzi nolga teng bo'lganda, biz bunga erisha olmas edik). Ammo bu $f$ funksiyaning integrallanuvchi ekaniga ziddir.■

Agar $\Omega$ ochiq sohada aniqlangan funksiya uning istalgan kompakt kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ qismiy to'plamida integrallanuvchi bo'lsa, bu funksiya $\Omega$ da *lokal integrallanuvchi* deyiladi. $\Omega$ da lokal integrallanuvchi bo'lib, lekin $\Omega$ boyicha integrallanmaydigan funksiyaga misol keltirish qiyin emas. Bunday misollar, asosan, $\Omega$ chegarasi yaqinida chegaralanmagan (demak, $\Omega$ da chegaralanmagan) funksiyalardan iborat.

Agar funksiya $\Omega$ da chegaralangan bo'lsa, navbatdagi tasdiqda ko'rsatilganidek, integrallanuvchanlik va lokal integrallanuvchanlik tushunchalari ustma-ust tushadi.

**13.4.7 - teorema.** *Kvadratlanuvchi $\Omega$ soha berilgan bo'lsin. Agar $\Omega$ da lokal integrallanuvchi funksiya chegaralangan bo'lsa, u butun $\Omega$ sohada integrallanuvchi bo'ladi.*

**Isbot.** Faraz qilaylik, $\Omega$ da lokal integrallanuvchi $f$ funksiya

$$|f(x)| \;\leq\; M, \quad x \in \Omega,$$

shartni qanoatlantirsin.

$\Omega$ soha kvadratlanuvchi bo'lgani sababli, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday yopiq ko'pburchakli $P \subset \Omega$ shakl topiladiki, $Q = \Omega \setminus P$ to'plam yuzi

$$|Q| \;<\; \frac{\varepsilon}{2M}$$

shartni qanoatlantiradi.

Endi $\omega(x,Q)$ orqali $Q$ to'plamning xarakteristik funksiyasini belgilab, quyidagi ikki

$$\varphi_\varepsilon^{\pm}(x) \;=\; f(x)[1-\omega(x,Q)] \;\pm\; M\omega(x,Q)$$

funksiyani kiritamiz.

Bu funksiyalar $P$ da $f$ funksiya bilan ustma-ust tushadi va demak, $P$ da integrallanuvchi (chunki $P$ - kompakt). Bundan tashqari, bu funksiyalar, o'zgarmas bo'lgani sababli, $Q$ da ham integrallanuvchidir. Shunday ekan, 13.4.1 - teoremaga asosan, ular $\Omega = P \cup Q$ da integrallanuvchi bo'ladi,ya'ni

$$\varphi_\varepsilon^{-}(x) \;\le\; f(x) \;\le\; \varphi_\varepsilon^{+}(x), \quad x \in \Omega.$$

Bundan tashqari,

$$\int\limits_{\Omega} [\varphi_\varepsilon^{+}(x) - \varphi_\varepsilon^{-}(x)]\, dx \;=\; 2M \int\limits_{\Omega} \omega(x,Q)\, dx \;=\; 2M|Q| \;<\; \varepsilon.$$

Bundan chiqdi, 13.3.4 - teoremaga ko'ra, $f$ funksiya $\Omega$ da integrallanuvchidir.■

**Eslatma.** Faraz qilaylik, $\Omega$ soha kvadratlanuvchi bo'lib, $f$ funksiya yopiq $\overline{\Omega}$ sohada aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. Agar $f$ funksiya ochiq $\Omega$ sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya yopiq $\overline{\Omega}$ sohada ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int\limits_{\overline{\Omega}} f(x)\, dx \;=\; \int\limits_{\Omega} f(x)\, dx \tag{13.4.9}$$

tenglik bajariladi.

Bu tasdiqning to'g'riligi 13.4.1 - teoremadan kelib chiqadi.

13.3.2 - teoremaning 2 - natijasiga ko'ra, $\Omega$ sohada integrallanuvchi har qanday $f$ funksiya ixtiyoriy kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ to'plamda ham integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun

$$\Phi(E) \;=\; \int\limits_{E} f(x)\, dx \tag{13.4.10}$$

integralni, $f$ funksiyani tayinlab qo'yib, kvadratlanuvchi $E$ to'plamning funksiyasi deb qarashimiz mumkin.

Berilgan $\Omega$ sohasining har bir kvadratlanuvchi qismiy to'plamiga biror haqiqiy sonni mos qo'yuvchi akslantirishga to'plam funksiyasi deyiladi. To'plam funksiyasiga eng sodda misol bu kvadratlanuvchi to'plam yuzidir: $\Phi(E) = |E|$.

Faraz qilaylik, $\Omega$ da aniqlangan $\Phi(E)$ to'plam funksiyasi berilgan bo'lsin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $|E| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ qismiy to'plam uchun $|\Phi(E)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\Phi(E)$ to'plam funksiyasi $\Omega$ da *absolyut uzluksiz* deyiladi.

Navbatdagi xossaga Riman integralining to'plam funksiyasi sifatida absolyut uzluksizligi deyiladi.

**13.4.8 - teorema (integralning absolyut uzluksizligi haqida).** *Berilgan $\Omega$ sohasi kvadratlanuvchi bo'lsin. Agar $f$ funksiya $\Omega$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda (13.4.10) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(E)$ kattalik $E \subset \Omega$ kvadratlanuvchi to'plamlarning absolyut uzluksiz funksiyasi bo'ladi.*

**Isbot.** 13.4.6 - teoremaga ko'ra, $f$ funksiya $\Omega$ da chegaralangan, ya'ni biror $M > 0$ o'zgarmas uchun $|f(x)| \leq M,\ x \in \Omega$, tengsizlik bajariladi. Bundan chiqdi, (13.4.10) tenglik va 13.2.2 - teoremaga ko'ra,

$$|\Phi(E)| \ \leq \ \int\limits_E |f(x)|\, dx \ \leq \ \int\limits_E M dx \ = \ M|E|.$$

Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon/M$ deymiz. U holda, ravshanki, $|E| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy kvadratlanuvchi $E \subset \Omega$ to'plam uchun $|\Phi(E)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli. Bu esa $\Phi(E)$ ning to'plam funksiyasi sifatida absolyut uzluksiz ekanini anglatadi.$\blacksquare$

Shuni alohida ta'kidlash joizki, faqat $E$ to'plam yuzini kichiklashtirish hisobiga (13.4.10) integral qiymatini istalgancha kichik qilish mumkin. Bunda $E$ ning shakli va uning $\Omega$ ichida joylashgan o'rni ahamiyatga ega emas.

**5. O'rtacha uzluksizlik.** Ravshanki, integrallanuvchi funksiyaning uzluksiz bo'lishi shart emas. Shunday bo'lsada, xuddi bir o'zgaruvchilik holdagidek (10.8.3 - teoremaga qarang), har qanday integrallanuvchi funksiyaning o'rtacha ma'noda uzluksiz ekanini ko'rsatish mumkin. Isbot har qanday integrallanuvchi funksiyani uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalash mumkinligi haqidagi navbatdagi teoremaga (10.3.1 - teoremaning ikki o'zgaruvchili holi) asoslandi.

**13.4.9 - teorema.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya kvadratlanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsin. U holda istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham $\mathbb{R}^2$ tekisligida uzluksiz bo'lgan shunday $\varphi$ funksiya topiladiki, u uchun quyidagi*

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|\, dx \;<\; \varepsilon \tag{13.4.11}$$

*tengsizlik bajariladi.*

**Isbot.** 1) Aytaylik, $h(x)$ shunday eng sodda pog'onasimon funksiya bo'lsinki, u tomoni $a$ ga teng biror $K$ kvadratda 1 ga va undan tashqarida nolga teng bo'lsin. Bu funksiya integrali, kvadrat yuziga, ya'ni $a^2$ ga teng. $h(x)$ funksiyani $\varepsilon > 0$ aniqlikda $\varphi(x)$ uzluksiz funksiya bilan, masalan, quyidagicha approksimatsiyalash mumkin. Asosi $K$ bo'lgan yetarlicha katta balandlikka ega bo'lgan to'g'ri piramida olaylik. U holda quyi asosi $K$ va balandligi 1 bo'lgan kesik piramida hajmi $a^2$ dan $\varepsilon$ dan kamga farq qiladi. Qidirilayotgan $\varphi(x)$ uzluksiz funksiya grafigini kesik piramida yon sirti va yuqori asosiga teng qilib olamiz ($K$ kvadratdan tashqarida bu funksiyani nolga teng deymiz). Bunday tanlashda, albatta,

$$\int_K |h(x) - \varphi(x)|\, dx \;<\; \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan chiqdi, qayd qilingan eng sodda pog'onasimon funksiyalarning istalgan chekli chiziqli kombinatsiyalarini uzluksiz funksiyalar bilan o'rtacha approksimatsiyalash mumkin ekan. Haqiqatan, aytaylik, $h_j(x)$ biror $K_j \subset K$ kvadratda 1 ga teng eng sodda pog'onasimon funksiya va

$$h(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j h_j(x)$$

bo‘lsin. Faraz qilaylik, $\varphi_j(x)$ uzluksiz funksiyalar $h_j(x)$ larni $\varepsilon_j$ aniqlikda o‘rtacha approksimatsiyalasin:

$$\int\limits_K \big|h_j(x) - \varphi_j(x)\big|\, dx \;<\; \varepsilon_j.$$

U holda, agar

$$\varphi(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

deb, $\varepsilon_j$ ni $\varepsilon_j|c_j| < \varepsilon/n$ shartdan tanlab olsak,

$$\int\limits_K \big|h(x) - \varphi(x)\big|\, dx \le \sum_{j=1}^{n} |c_j| \int\limits_K \big|h_j(x) - \varphi_j(x)\big|\, dx < \sum_{j=1}^{n} |c_j|\varepsilon_j < \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

2) Endi biror kvadratlanuvchi $E$ to‘plamda Riman bo‘yicha integrallanuvchi ixtiyoriy manfiymas $f$ funksiya berilgan bo‘lib, $K$ esa, $E$ ni o‘z ichiga oluvchi istalgan kvadrat bo‘lsin. $E$ to‘plamdan tashqariga $f$ funksiyani nol qilib davom ettiramiz.

$K$ kvadratni $n$ ta kichik $K_j$ kvadratlarga bo‘lib, $h(x)$ orqali Darbuning (13.3.3) quyi funksiyasini belgilaylik. Darbu nazariyasiga ko‘ra, yetarlicha kichik bo‘linish olib, $f$ funksiyani Darbu quyi funksiyalari yordamida o‘rtacha approksimatsiyalash mumkin. Boshqa tomondan, yuqoridagi mulohazalarga asosan, Darbu quyi funksiyasini uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalash mumkin. Bu ikki tasdiq teoremaning manfiy bo‘lmagan funksiyalar uchun to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

3) Agar $f$ istalgan integrallanuvchi funksiya bo‘lsa,

$$f(x) \;=\; f_+(x) - f_-(x)$$

deymiz, bu yerda $f_+(x) = \big(|f(x)| + f(x)\big)/2$ va $f_-(x) = \big(|f(x)| - f(x)\big)/2$ integrallanuvchi manfiymas funksiyalar. Agar bu funksiyalarni $\varepsilon/2$ aniqlikda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalasak, u holda $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ qidiralayotgan funksiya bo‘ladi.■

**Eslatma.** 13.4.9 - teorema isbotida keltirilgan $\varphi$ funksiyani qurish usulidan bu funksiyani

$$|\varphi(x)| \le |f(x)|, \quad x \in E, \tag{13.4.12}$$

shartni qanoatlantiruvchi qilib tanlash mumkinligi bevosita ko‘rinib turibdi.

**13.4.10 - teorema.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya kvadratlanuvchi $E$ to‘plamda integrallanuvchi bo‘lib, bu to‘plamdan tashqarida nolga teng bo‘lsin. U holda*

$$\lim_{h\to 0} \int_E |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0 \tag{13.4.13}$$

*tenglik o‘rinli.*

**Isbot.** Agar $\varphi$ funksiya $\mathbb{R}^2$ tekislikda uzluksiz bo‘lib, kvadratlanuvchi $E$ to‘plamdan tashqarida nolga teng bo‘lsa, u holda (13.4.13) tenglik tekis uzluksizlikdan kelib chiqadi (11.2.7 - teoremaga qarang). Haqiqatan, bu holda quyidagi

$$\int_E |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx \le \sup_{x\in E} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \cdot |E| \to 0, \quad h \to 0, \tag{13.4.14}$$

munosabat o‘rinli.

Agarda $f$ teoremamiz shartini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, 13.4.9 - teoremaga ko‘ra, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun (13.4.11) tengsizlikni qanoatlantiruvchi uzluksiz $\varphi$ funksiya mavjud. Bu holda,

$$\int_E |f(x+h) - f(x)|\, dx \le \int_E |f(x+h) - \varphi(x+h)|\, dx +$$

$$+ \int\limits_E |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx \ + \int\limits_E |f(x) - \varphi(x)|\, dx$$

deb yozish mumkin.

Har ikki $f$ va $\varphi$ funksiya $E$ dan tashqarida nolga teng bo‘lgani uchun, o‘ng tomondagi birinchi integral uchinchi integraldan kichik yoki unga teng. Demak, (13.4.11) ga ko‘ra,

$$\int\limits_E |f(x+h) - f(x)|\, dx \ \le \int\limits_E |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx \ + \ 2\varepsilon.$$

Bu tengsizlikda $h \to 0$ deb, yuqori limitga o‘tsak, (13.4.14) munosabatga ko‘ra,

$$\varlimsup_{h\to 0} \int\limits_E |f(x+h) - f(x)|\, dx \ \le \ 2\varepsilon$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

$\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko‘ra, bundan (13.4.13) munosabat kelib chiqadi.■

**Eslatma.** Agar $E$ ochiq yoki yopiq soha bo‘lsa, u holda har ikki 13.4.9 - va 13.4.10 - teorema "o‘rta kvadratik ma’noda" ham o‘rinli bo‘ladi.

Haqiqatan, bu holda 13.4.6 - teoremaga ko‘ra, integrallanuvchi $f$ funksiya chegaralangan bo‘ladi, ya’ni $|f(x)| \le M$. (13.4.12) bahoga asosan approksimatsiyalovchi funksiya ham $|\varphi(x)| \le M$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan chiqdi,

$$|f(x) - \varphi(x)|^2 \ \le \ 2M|f(x) - \varphi(x)|.$$

Demak,

$$\int\limits_E |f(x) - \varphi(x)|^2\, dx \ \le \ 2M \int\limits_E |f(x) - \varphi(x)|\, dx.$$

Shunday qilib, har qanday integrallanuvchi funksiyani o‘rta kvadratik ma’noda uzluksiz funksiyalar bilan approksimatsiyalash mumkin.

Navbatdagi

$$\int\limits_E |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx \ \leq \ 2M \int\limits_E |f(x+h) - f(x)| \, dx$$

tengsizlik xuddi yuqoridagidek ko‘rsatiladi.

Demak, har qanday integrallanuvchi funksiya o‘rta kvadratik ma’noda ham uzluksiz bo‘lar ekan.

Integrallanuvchi funksiyalarning bu xossalari muhim ahamiyatga ega bo‘lib, Fur’e integrallari va qatorlari nazariyasida keng foydalaniladi (19 - va 20 - boblarga qarang).

**6. Bo‘lakli-silliq chegarali sohalar.** Bundan buyon integrallash, asosan, ochiq yoki yopiq bo‘lgan biror soha bo‘yicha amalga oshiriladi. Avval quyidagi belgilashlarga kelishib olaylik.

$S^1$ simvol orqali quyidagi

$$S^1 \ = \ \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ko‘rinishdagi birlik aylanani belgilaymiz.

Har qanday sodda yopiq egri chiziq tenglamasi singari, aylananing ham tenglamasini parametrik ko‘rinishda berish mumkin, ya’ni

$$x_1(t) \ = \ \cos t, \quad x_2(t) \ = \ \sin t, \quad -\pi \leq \ t \ \leq \ \pi.$$

Agar birlik aylanada $f : S^1 \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo‘lib,

$$F(t) \ = \ f(\cos t, \sin t)$$

funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada bo‘lakli-silliq bo‘lsa, biz $f$ funksiyani aylanada bo‘lakli-silliq deymiz.

Agar $L \subset \mathbb{R}^2$ egri chiziq o‘zaro bir qiymatli $\varphi : S^1 \to L$ akslantirishda birlik aylananing aksi bo‘lib, bu akslantirishning har bir $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ komponentalari uzluksiz bo‘lakli-silliq bo‘lsa, u holda biz $L$ ni yopiq bo‘lakli-silliq egri chiziq deymiz.

Yopiq bo‘lakli-silliq egri chiziqqa misol sifatida

$$Q \ = \ \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x_1| < a, \quad |x_2| < a\Big\} \tag{13.4.15}$$

kvadratning $\partial Q$ chegarasini olishimiz mumkin.

Haqiqatan, bunda $\varphi$ akslantirish sifatida, masalan, quyidagi

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{sign} x_1, & \text{agar} \quad |x_1| \geq |x_2| \quad \text{bo'lsa}, \\ x_1 a\sqrt{2}, & \text{agar} \quad |x_1| < |x_2| \quad \text{bo'lsa}, \end{cases}$$

va

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{sign} x_2, & \text{agar} \quad |x_1| \leq |x_2| \quad \text{bo'lsa}, \\ x_2 a\sqrt{2}, & \text{agar} \quad |x_1| > |x_2| \quad \text{bo'lsa}, \end{cases}$$

komponentalarga ega bo'lgan akslantirishni olsak bo'ladi.

Ravshanki,

$$\Phi_k(t) = \varphi_k(\cos t, \sin t)$$

funksiya $[-\pi, \pi]$ kesmada bo'lakli-silliqdir.

Agar $\Omega$ sohasining $\partial\Omega$ chegarasi chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan qismlardan iborat bo'lib, bu qismlarning har biri yopiq bo'lakli-silliq egri chiziq bo'lsa, bu sohani bo'lakli-silliq chegaraga ega deymiz. Bo'lakli-silliq chegarali sohaga misol tariqasida (13.4.15) ochiq kvadratni, yoki bu kvadratdan o'zidan kichik yopiq kvadratni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'lgan shaklni olishimiz mumkin.

Agar soha chegarasi birgina yopiq bo'lakli-silliq egri chiziqdan iborat bo'lsa, bunday sohaga bir bog'lamli soha deyiladi. Har qanday doira bunday sohaga misol bo'ladi.

## 13.5-§. Ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish

**1**. Ikki karrali intergalni hisoblashning asosiy usuli uni ikki marta bir karrali integralni hisoblashga keltirishdan iboratdir.

**13.5.1 - teorema.** *Berilgan $f$ funksiya $Q = [a, b] \times [c, d]$ to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi bo'lib, har qanday $x_1 \in [a, b]$ qiymat uchun*

$$I(x_1) = \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2 \qquad (13.5.1)$$

*integral mavjud bo'lsin.*

*U holda $I(x_1)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, ushbu*

$$\int\limits_Q f(x)\,dx = \int\limits_a^b I(x_1)\,dx_1 \tag{13.5.2}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Agar istalgan (yopiq yoki ochiq) regulyar $Q_0 \subset Q$ to'g'ri to'rtburchakning xarakteristik funksiyasini olsak, (13.5.2) tenglikning chap va o'ng tomonini to'g'ridan-to'g'ri hisoblash yordamida, bu tenglikning o'rinli ekanini ko'rsatish mumkin. Aniqrog'i, bunda tenglikning ikki tomoni ham $Q_0$ ning yuziga, ya'ni $|Q_0|$ ga teng.

Bundan chiqdi, isbotlanayotgan tenglik bunday funksiyalarning istalgan chekli sondagi chiziqli kombinatsiyasi uchun ham o'rinli bo'ladi.

Endi berilgan $Q$ to'g'ri to'rtburchakning, vertikal va gorizontal to'g'ri chiziqlar yordamida $Q_k$ to'g'ri to'rtburchaklarga bo'lish natijasida hosil bo'lgan, $P$ bo'linishni qaraymiz. U holda, yuqoridagi mulohazalarimizga ko'ra, (13.5.2) formula, $P$ bo'linishga mos keluvchi va mos ravishda (13.3.3) hamda (13.3.4) formulalar bilan aniqlangan, Darbuning quyi $h(x,P)$ va yuqori $H(x,P)$ funksiyalari uchun o'rinli bo'ladi.

Quyidagi

$$\varphi(x_1) = \int\limits_c^d h(x_1,x_2,P)\,dx_2, \quad \psi(x_1) = \int\limits_c^d H(x_1,x_2,P)\,dx_2$$

belgilashlarni kiritaylik.

Ma'lumki, bu funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, ulardan olingan integrallar mos ravishda (13.3.7) tengliklar bilan aniqlangan Darbuning quyi va yuqori yig'indilariga teng:

$$\int\limits_a^b \varphi(x_1)\,dx_1 = s(f,P), \quad \int\limits_a^b \psi(x_1)\,dx_1 = S(f,P)\,. \tag{13.5.3}$$

Shartga ko‘ra $f$ funksiya integrallanuvchi bo‘lgani sababli, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun yuqoridagi $P$ bo‘linishni shunday tanlash mumkinki, u uchun quyidagi

$$\int_a^b [\psi(x_1) - \varphi(x_1)]\, dx_1 \;=\; S(f,P) - s(f,P) \;<\; \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Endi, o‘z-o‘zidan ko‘rinib turgan

$$\varphi(x_1) \;\le\; I(x_1) \;\le\; \psi(x_1) \tag{13.5.4}$$

tengsizlikni hisobga olsak, 13.3.4 - teoremadan $I(x_1)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. Demak, (13.5.3) va (13.5.4) ga ko‘ra,

$$s(f,P) \;\le\; \int_a^b I(x_1)\, dx_1 \;\le\; S(f,P).$$

Bundan talab qilingan (13.5.2) tenglikning kelib chiqishi aniq.■

**1 - eslatma.** Odatda (13.5.1) va (13.5.2) tengliklarni quyidagi

$$\iint_Q f(x,y)\, dxdy \;=\; \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy \tag{13.5.5}$$

formula ko‘rinishda yozishadi. E’tibor bering, chap tomonda ikki karra-li integral turibdi, o‘ng tomondagi integralni esa, takroriy integral deyishadi.

**2 - eslatma.** Agar $f$ funksiya 13.5.1 - teorema shartlarini qanoatlantirsa hamda har qanday $x_2 \in [c,d]$ qiymat uchun

$$J(x_2) \;=\; \int_a^b f(x_1,x_2)\, dx_1$$

integral mavjud bo'lsa, u holda bu teoremadan quyidagi

$$\iint\limits_Q f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \;=\; \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2 \;=$$

$$= \int\limits_c^d dx_2 \int\limits_a^b f(x_1, x_2)\, dx_1$$

tengliklar kelib chiqadi.

**3 - eslatma.** (13.5.5) ning o'ng tomonidagi takroriy integralning mavjudligidan, chap tomondagi ikki karrali integralning majudligi, umuman aytganda, kelib chiqmaydi. Bunga misol tariqasida quyidagi

$$Q \;=\; \{(x, y) \;:\; 0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1\}$$

to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan

$$f(x, y) \;=\; yD(x)$$

funksiyani qaraylik, bunda $D(x)$ orqali, odatdagidek, Dirixle funksiyasini belgiladik. $f(x, y)$ funksiya $Q$ to'g'ri to'rtburchakda integrallanuvchi emas, ammo u uchun (13.5.5) ning o'ng tomonidagi takroriy integral mavjud hamda nolga tengligini tekshirish qiyin emas.

**13.5.1 - misol.** Quyidagi

$$f(x, y) \;=\; y \cos xy$$

funksiyadan

$$Q \;=\; \{0 \le x \le \pi,\; 0 \le y \le 1\}$$

to'g'ri to'rtburchak bo'yicha olingan integralni hisoblang.

Buning uchun (13.5.5) formuladan foydalanish yetarli:

$$\iint\limits_Q y \cos xy\, dx dy \;=\; \int\limits_0^1 y\, dy \int\limits_0^\pi \cos xy\, dx \;=\; \int\limits_0^1 \sin \pi y\, dy \;=\; \frac{2}{\pi}.$$

**2**. Xuddi yuqoridagiga o‘xshash usulda, integrallash sohasi to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lmasdan, ikki funksiya grafiklari orasidagi soha bo‘lganda ham, ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish mumkin.

**13.5.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $\alpha$ va $\beta$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, $\Omega$ soha ushbu*

$$\Omega \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \quad a \leq x \leq b\}$$

*ko‘rinishga ega bo‘lsin.*

*Agar $f$ funksiya $\Omega$ sohada integrallanuvchi bo‘lib, istalgan $x \in [a, b]$ uchun*

$$I(x) \;=\; \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy$$

*integral mavjud bo‘lsa, u holda $I(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lib,*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy \;=\; \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \tag{13.5.6}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Avval $f$ funksiyani $\Omega$ sohasidan tashqariga nolga teng qilib davom ettiramiz. So‘ngra, $\Omega$ sohasini o‘z ichiga oluvchi biror $Q$ regulyar to‘g‘ri to‘rtburchakni olib, uning uchun 13.5.1 - teoremani qo‘llasak, talab qilingan (13.5.6) tenglikka ega bo‘lamiz.■

**13.5.2 - misol.** Quyidagi

$$f(x, y) \;=\; \sqrt{R^2 - y^2}$$

funksiyadan

$$\Omega \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < R^2\}$$

soha bo‘yicha olingan ikki karrali integralni hisoblang.

Buning uchun (13.5.6) tenglikni qo‘llash yetarli:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{R^2-y^2}\,dxdy \;=\; \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2-y^2}\,dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \;=$$

$$=\; 2\int\limits_{-R}^{R} (R^2-y^2)\,dy \;=\; \frac{8}{3}\,R^3.$$

Ba’zan, integrallash sohasi murakkabroq ko‘rinishga ega bo‘lganda ham, integrallash sohasini soddaroq ko‘rinishga ega chekli sondagi qismlarga bo‘lib, integral hisoblashni yuqorida ko‘rilgan holga keltirish mumkin.

**13.5.3 - misol.** Faraz qilaylik, $\Omega$ soha xalqadan iborat bo‘lib, bunda ichki doira radiusi $r$ ga va tashqi doira radiusi esa, $R$ ga teng bo‘lsin:

$$\Omega \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; r^2 < x^2+y^2 < R^2\}.$$

Shu sohada

$$f(x) \;=\; \frac{|x|}{(x^2+y^2)^2}$$

funksiyadan olingan ikki karrali integralni hisoblang.

Bu sohani to‘rt qismga bo‘lib, integralni har bir qismda alohida hisoblaymiz. Bunda

$$I_1 \;=\; \int\limits_{r}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{|x|\,dx}{(x^2+y^2)^2} \;=\; \int\limits_{r}^{R} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{2x\,dx}{(x^2+y^2)^2} \;=$$

$$=\; -\int\limits_{r}^{R} \frac{1}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} dy \;=\; \int\limits_{r}^{R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{R^2}\right) dy \;=\; \frac{(R-r)^2}{R^2 r}$$

va

$$I_2 = \int\limits_{-r}^{r} dy \int\limits_{\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-r}^{r} \frac{1}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=\sqrt{r^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} dy$$

$$= \frac{R^2-r^2}{R^2 r}.$$

Ravshanki, $I_3$ va $I_4$ integrallar hisoblab bo'lingan integrallarga teng va shuning uchun,

$$I = 2\frac{(R-r)^2}{R^2 r} + 2\frac{R^2-r^2}{R^2 r} = \frac{4(R-r)}{Rr}.$$

**3.** Yuqorida biz ikki karrali integrallarni takroriy integrallarga, ya'ni ketma-ket ikkita bir karrali integralga keltirib hisoblashni misollarda ko'rdik. Ba'zan bunga teskari amalni bajarish, ya'ni bir karrali integralni ikki karrali integral ko'rinishida yozib olib, so'ngra 13.5.1 - teoremadan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

**13.5.4 - misol.** Faraz qilaylik, bir o'zgaruvchili $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. U holda ikki o'zgaruvchining $h(x,y) = f(x)g(y)$ funksiyasi $Q = [a,b]\times[a,b]$ kvadratda integrallanuvchi bo'ladi (13.3.2 - tasdiqqa qarang). Ravshanki,

$$\iint\limits_{Q} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2\,dx\,dy \geq 0.$$

Qavslarni ochib, 13.5.1 - teoramadan foydalansak,

$$2\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \int\limits_a^b g^2(x)\,dx - 2\left[\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \geq 0$$

munosabatni olamiz.

Bu tengsizlikni, albatta,

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}} \qquad (13.5.7)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Eslatib o'tamiz, (13.5.7) munosabat *Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi.

## 13.6-§. Ikki karrali integralda o'zgaruvchini almashtirish

### 1. Silliq akslantirishda soha yuzining o'zgarishi.

Ushbu bandda kvadratlanuvchi shakllar yuzining uzluksiz akslantirishdagi o'zgarish qoidalari o'rganiladi. Lekin, shuni qayd etish kerakki, uzluksiz akslantirishda yuzi nolga teng bo'lgan shakl ham yuzi musbat bo'lgan shaklga akslanishi mumkin. Mana shunday g'alati hollarning oldini olish maqsadida biz, qo'shimcha ravishda, o'rganilayotgan akslantirishlarning uzluksiz diffrensiallanuvchi bo'lishini talab qilamiz.

Eslatib o'tamiz, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun biror nuqtada differensiallanuvchanlik tushunchasi qaralayotgan funksiya shu nuqtaning biror atrofida aniqlangan holda kiritilgan edi. Soha ochiq to'plam bo'lgani uchun, uning barcha nuqtalari o'zining biror atrofi bilan shu sohaga kiradi. Shu sababli, har qanday sohada aniqlangan funksiya uchun uzluksiz differensiallanuvchanlik tushunchasi nimani anglatishi ravshan.

Lekin, yopiq soha holida chegaraviy nuqtalarda differensiallanuvchanlikni aniqlashda muammo paydo bo'ladi. Bunga sabab shundaki, ba'zan soha chegarasi shunchalik murakkab tuzilishga ega bo'ladiki, natijada ba'zi chegaraviy nuqtalarda hech qaysi o'zgaruvchi bo'yicha ayirmali nisbatni tuzib bo'lmaydi, chunki istalgan yo'nalish bo‘yicha har qanday siljish nuqtani qaralayotgan sohadan chetga chiqarib yuboradi.

Agar funksiya tomonlari koordinatalar o‘qlariga parallel bo‘lgan yopiq to‘g‘ri to‘rtburchakda aniqlangan bo‘lsa, masala oson hal bo‘ladi. Bu holda har bir chegaraviy nuqtada har qaysi o‘zgaruvchi bo‘yicha aqalli bir tarafli hosilani aniqlash mumkin. Mana shu hosilani biz chegaraviy nuqtadagi hosila qiymati deb qabul qilamiz.

Shunday qilib, funksiyaning yopiq to‘g‘ri to‘rtburchakda uzluksiz defferensiallanuvchi ekani quyidagini anglatadi: 1) funksiya yopiq to‘g‘ri to‘rtburchakning barcha nuqtalarida (chegaraviy nuqtalar ham bunga kiradi) aniqlangan; 2) barcha ichki nuqtalarda differensiallanuvchi va chegaraviy nuqtalarda mos bir tarafli xususiy hosilaga ega; 3) bunday aniqlangan xususiy hosila yopiq sohada uzluksiz.

Ushbu paragrafdagi bizning asosiy maqsadimiz, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ silliq vektor-funksiya bilan berilgan, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kvadratlanuvchi sohani homeomorf akslantirishni o‘rganishdir. Bunda $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ vektor-funksiyani silliq deganda, biz uni har bir $\varphi_j(x)$ komponentasining uzluksiz differensiallanuvchi funksiya ekanini tushunamiz.

Ma’lumki, $y = \varphi(x)$ akslantirishning Yakobi determinanti yoki *yakobiani* deb quyidagi

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \det \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} \end{Vmatrix} \qquad (13.6.1)$$

determinantga aytilar edi.

Bu formulaning chap tarafida yakobianni belgilashda ishlatilayotgan simvol yakobian $(x_1, x_2)$ nuqtani $(y_1, y_2)$ nuqtaga o‘tkazuvchi akslantirish bilan bog‘liq ekaniga urg‘u beradi.

Akslantirishimizning silliqligidan $x$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida uning chiziqli akslantirishdan kam farq qilishi va bundan tashqari, bunday akslantirishda uzayish koeffitsienti $x$ nuqtadagi yakobianning absolyut qiymatiga teng ekani kelib chiqadi.

Bu mulohazalar navbatdagi tasdiqda o‘z aksini topgan.

**13.6.1 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $Q$ yopiq to'g'ri to'rtburchak bo'lib, $Q$ ni $\varphi(Q)$ yassi shaklga akslantiruvchi $\varphi : Q \to \mathbb{R}^2$ uzluksiz differensiallanuvchi homeomorfizm berilgan bo'lsin. U holda $\varphi(Q)$ shakl kvadratlanuvchi bo'lib, uning yuzi quyidagi*

$$|\varphi(Q)| = \int\limits_Q \left|\det \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right| dx \tag{13.6.2}$$

*tenglik bilan aniqlanadi.*

**Isbot.** $\varphi(Q)$ yassi shaklning kvadratlanuvchi ekani chegarasining bo'lakli-silliqligidan (chunonchi, chegara to'rtta silliq qismdan iborat) kelib chiqadi.

Berilgan $Q$ to'g'ri to'rtburchakning har bir tomonini $m$ ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bunda $n = m^2$ ta (yopiq yoki yarim ochiq) qismiy $Q_k$ to'g'ri to'rtburchaklarga ega bo'lamiz. Aytaylik, $\xi_k$ har bir qismiy to'g'ri to'rtburchakning markazi va $h$ uni katta tomonining uzunligi bo'lsin.

Yopiq $Q$ to'g'ri to'rtburchakning kompaktligiga ko'ra, $\varphi$ akslantirishning uzluksiz hosilalari $Q$ da tekis uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun, $Q_k$ to'g'ri to'rtburchakning chegarasida yotuvchi istalgan $x$ uchun

$$\varphi(x) = \varphi(\xi_k) + (x - \xi_k) \cdot \nabla\varphi(\xi_k) + o(h) \tag{13.6.3}$$

tenglik $k$ bo'yicha tekis ravishda bajariladi.

Ravshanki,

$$\psi_k(x) = \varphi(\xi_k) + (x - \xi_k) \cdot \nabla\varphi(\xi_k)$$

affin akslantirishidir, ya'ni bu akslantirishda to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa akslanadi. Demak, bu akslantirishda $Q_k$ to'g'ri to'rtburchak $P_k = \psi_k(Q_k)$ parallelogrammga o'tadi va bunda $P_k$ ning yuzi, 13.1.7 - tasdiqqa ko'ra,

$$|\psi_k(Q_k)| = \left|\det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x}\right| \cdot |Q_k| \tag{13.6.4}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

(13.6.2) tenglikka ko'ra, $\varphi$ akslantirish $Q_k$ to'g'ri to'rtburchakni shunday $\varphi(Q_k)$ to'plamga akslantiradiki, bunda bu to'plam $\psi_k(Q_k)$ parallelogrammdan, oshib borsa, $o(h)$ tartibli masofaga tashqariga chiqishi mumkin.

Modomiki $\psi_k$ silliq akslantirish Lipshits shartini qanoatlantirar ekan, u masofani ko'p uzaytirib yubormaydi. Bundan chiqdi, $\psi_k(Q_k)$ parallelogrammning perimetri, xuddi $Q_k$ to'g'ri to'rtburchak perimetri kabi, $h$ tartibga ega. Demak, $\varphi(Q_k)$ to'plamning $\psi_k(Q_k)$ parallelogrammdan tashqariga chiqqan qismi yuzining tartibi $h \cdot o(h) = o(h^2)$ ga teng. Bu esa,

$$|\varphi(Q_k)| \;=\; |\psi_k(Q_k)| \;+\; o(h^2)$$

munosabat o'rinli ekanini anglatadi.

Agar (13.6.4) tenglikni hisobga olsak, oxirgi tenglikni

$$|\varphi(Q_k)| \;=\; \left|\det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x}\right| \cdot |Q_k| \;\;+\;\; o(1)h^2$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Bundan, har bir qismiy $Q_k$ to'g'ri to'rtburchakning yuzi $h^2$ ga proporsional bo'lgani uchun,

$$|\varphi(Q_k)| \;=\; \left|\det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x}\right| \cdot |Q_k| \;+\; o(1)|Q_k|$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ravshanki, $o(1)$ kattalik $h \to 0$ da $k$ bo'yicha tekis ravishda nolga intiladi. Shunday ekan, yuqoridagi tenglikni barcha $k$ lar bo'yicha yig'ib chiqsak,

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi(Q_k)| \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left|\det \frac{\partial \varphi(\xi_k)}{\partial x}\right| \cdot |Q_k| \;+\; o(1) \sum_{k=1}^{n} |Q_k|$$

tenglikni olamiz.

Yuzaning additivligi sababli, chap tomon $|\varphi(Q)|$ ga teng. O'ng tomondagi birinchi yig'indi $\left|\det \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|$ uzluksiz funksiyaning integral yig'indisidan iborat, ikkinchi yig'indi esa, $|Q|$ ga teng. Shuning uchun, agar $h \to 0$ desak, talab qilingan (13.6.1) tenglikni olamiz.■

**13.6.1 - misol.** Faraz qilaylik, $0 < \lambda < 1$ bo'lib,

$$Q_\lambda = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \lambda \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le \pi\}$$

to'g'ri to'rtburchak berilgan bo'lsin. Bundan tashqari, $y = \varphi(x)$ bu to'g'ri to'rtburchakni $\mathbb{R}^2$ tekislikka akslantirish bo'lib, uning komponentalari

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= ax_1 \cos x_2, \\ \varphi_2(x) &= bx_1 \sin x_2 \end{aligned}$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Qaralayotgan to'g'ri to'rtburchakning $\varphi(Q)$ aksi quyidagi ikki

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y_1^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y_2^2}{\lambda^2 b^2} = 1$$

ellips bilan chegaralangan sohaning yuqori yarmidan iborat. Mana shu yopiq $\varphi(Q)$ sohaning yuzini topish talab qilinadi.

Buning uchun quyidagi yakobianni hisoblaymiz:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} a\cos x_2 & -ax_1 \sin x_2 \\ b\sin x_2 & bx_1 \cos x_2 \end{vmatrix} = abx_1 \;.$$

Shunday ekan, (13.6.1) formulaga ko'ra,

$$|\varphi(Q)| = \int_Q abx_1\, dx_1\, dx_2 = ab \int_0^\pi dx_2 \int_\lambda^1 x_1\, dx_1 = \frac{1}{2}\pi ab\left(1 - \lambda^2\right).$$

13.6.1 - tasdiq yordamida istalgan kvadratlanuvchi to'plam yuzining silliq akslantirishda qanday o'zgarishini ko'rishimiz mumkin.

**2. Ikki karrali integralda o'zgaruvchini almashtirish.**

**13.6.1 - teorema (ikki karrali integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish haqida).** *Faraz qilaylik, uzluksiz diffrensiallanuvchi* $\varphi : \Omega \to G$ *akslantirish kvadratlanuvchi* $\Omega$ *sohani kvadratlanuvchi* $G$ *sohaga homeomorf akslantirsin.*

*Agar (13.6.1) yakobian* $\Omega$ *da chegaralangan bo‘lsa, u holda* $G$ *da integrallanuvchi har qanday* $f$ *funksiya uchun*

$$\int\limits_G f(x)\,dx \;=\; \int\limits_\Omega f[\varphi(y)]\cdot\left|\det\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\right|\,dy \tag{13.6.5}$$

*tenglik o‘rinli bo‘lib, bunda o‘ng tarafdagi integral mavjuddir.*

**Isbot** silliq akslantirishda hajmning o‘zgarishi haqidagi 13.6.1 - asosoiy tasdiqqa asoslanadi. Bu tasdiqni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

*istalgan* $Q \subset \Omega$ *to‘g‘ri to‘rtburchak aksining xarakteristik funksiyasi, ya’ni quyidagicha aniqlangan*

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad x \in \varphi(Q), \\ 0, & \text{agar} \quad x \notin \varphi(Q), \end{cases}$$

*funksiya uchun (13.6.5) formula o‘rinli.*

Ikki karrali integralning additivligiga ko‘ra, (13.6.5) formula bu kabi funksiyalarning istalgan chiziqli kombinatsiyasi uchun ham o‘rinli. Boshqacha aytganda, *isbotlanayoitgan teorema istalgan* $Q \subset \Omega$ *ko‘pburchak va* $P = \varphi(Q)$ *to’plamda bo‘lakli-o‘zgarmas bo‘lgan ixtiyoriy* $f$ *funksiya uchun o‘rinli.*

Endi $G$ da integrallanuvchi ixtiyoriy $f$ funksiyani qaraylik. Darbuning asosiy lemmasiga ko‘ra (13.3 paragrafning 3-bandiga qarang), ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $P$ da bo‘lakli-o‘zgarmas bo‘lgan shunday ikki $g(x)$ va $h(x)$ funksiyalarni ko‘rsatish mumkinki, ular uchun

$$h(x) \;\le\; f(x) \;\le g(x), \quad x \in P = \varphi(Q),$$

bo‘lib, quyidagi

$$\int\limits_P [g(x) - h(x)]\,dx \;<\; \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Demak, ixtiyoriy $y \in Q$ uchun

$$h[\varphi(y)] \ \leq \ f[\varphi(y)] \ \leq g[\varphi(y)], \quad y \in Q,$$

tengsizlik bajarilib, yuqorida isbotlanganiga ko‘ra,

$$\int\limits_Q \big(g[\varphi(y)] - h[\varphi(y)]\big) \cdot \left|\det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}\right| dy \ < \ \varepsilon.$$

Shunday ekan, 13.3.4 - teoremadan Yakobianga ko‘paytirilgan $f[\varphi(y)]$ funksiyaning $Q$ ko‘pburchakda integrallanuvchi ekani, 13.3.5 - teoremadan esa, quyidagi

$$\int\limits_P f(x)\, dx \ = \ \int\limits_Q f\left[\varphi(y)\right] \left|\det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}\right| dy, \quad P = \varphi(Q), \quad (13.6.6)$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, (13.6.6) tenglik istalgan $Q \subset \Omega$ ko‘pburchak uchun o’rnatildi. Endi 13.4.7 - teoremani qo’llasak, (13.6.6) tenglikning o’ng tomonidagi integral ostida turgan funksiyaning butun $\Omega$ bo’yicha integrallanuvchi ekanini ko‘ramiz.

Nihoyat, (13.6.6) formulada $Q$ sifatida yuzalari kvadratlanuvchi $\Omega$ shaklga intiladigan kengayuvchi ko‘pburchaklar ketma-ketligini olib, ikki karrali integralning absolyut uzluksizligidan foydalansak (13.4.8 - teoremaga qarang), talab qilingan (13.6.5) tenglikka ega bo‘lamiz.■

**Eslatma.** Isbotlangan teorema ko‘pincha quyidagi ko‘rinishda qo‘llaniladi.

Faraz qilaylik, $\varphi$ uzluksiz vektor-funksiya ochiq kvadratlanuvchi $\Omega$ sohani ochiq kvadratlanuvchi $G$ sohaga homeomorf akslantirsin va $\Omega$ da bu vektor-funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. Bundan tashqari, $\varphi$ vektor-funksiyani va mos yakobianni $\Omega$ sohasining chegarasiga shunday davom ettirish mumkin bo‘lsinki, bunda davom ettirilgan funksiyalar yopiq $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sohada uzluksiz bo‘lsin.

U holda $G$ da integrallanuvchi har qanday $f$ funksiya uchun

$$\int\limits_{\overline{G}} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{\overline{\Omega}} f[\varphi(y)]\cdot\left|\det\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\right|\,dy \qquad (13.6.7)$$

formula o'rinli.

Haqiqatan, ochiq $\Omega$ va $G$ sohalarga 13.6.1 - teoremani qo'llash mumkin. Bu teoremaga ko'ra, (13.6.5) tenglik bajariladi. Endi, (13.4.9) tenglikka asosan, ochiq soha bo'yicha integrallashni yopiq soha bo'yicha integrallashga almashtirib, talab qilingan (13.6.7) tenglikni olamiz.

**13.6.2 - misol.** Agar $\alpha \geq 0$ va

$$\overline{G} \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$$

bo'lsa,

$$J_\alpha \;=\; \int\limits_{\overline{G}} \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\alpha}\,dx\,dy$$

integral hisoblansin.

Buning uchun yopiq

$$\overline{\Omega} \;=\; \{(s,t) \;:\; 0\leq s\leq 1,\; 0\leq t\leq 2\pi\}$$

to'g'ri to'rtburchakda $x=\varphi(s,t)$ va $y=\psi(s,t)$ komponentalarga ega bo'lgan vektor-funksiyani qaraymiz, bunda

$$\varphi(s,t)=as\cos t,\qquad \psi(s,t)=bs\sin t. \qquad (13.6.8)$$

Mos yakobianni hisoblaylik:

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} \;=\; \begin{vmatrix} a\cos t & -as\sin t \\ b\sin t & bs\cos t \end{vmatrix} \;=\; abs.$$

Endi (13.6.7) formulani qo'llasak,

$$J_\alpha=\int\limits_{\overline{\Omega}}\left(1-s^2\cos^2 t-s^2\sin^2 t\right)^{\alpha} absdsdt = ab\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_0^1(1-s^2)^\alpha\,ds=$$

$$= 2\pi ab\int\limits_0^1 (1-s^2)^\alpha\, s\,ds \;=\; \pi ab\int\limits_0^1 (1-u)^\alpha\, du \;=\; \frac{\pi ab}{\alpha+1}$$

tenglikni olamiz.

**Eslatma.** E’tibor bering, yuqoridagi yopiq $\overline{\Omega}$ to‘g‘ri to‘rtburchakni yopiq $\overline{G}$ ellipsga o‘tkazuvchi (13.6.8) akslantirish homeomorf ham emas va hattoki, o‘zaro bir qiymatli ham emas. Haqiqatan, (13.6.8) vektor-funksiya butun

$$I_0 \;=\; \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \;:\; s=0,\; 0\le t\le 2\pi\}$$

kesmani $x = 0$, $y = 0$ koordinatali nuqtaga akslantiradi. Lekin, shunga qaramasdan, bu akslantirish

$$\Omega \;=\; \{(s,t) \;:\; 0<s<1,\; 0<t<2\pi\}$$

ochiq to‘g‘ri to‘rtburchakni, ochiq ellipsdan $P_a = [0,a)$ yarim interval chiqarib tashlangan, quyidagi

$$G \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}\setminus P_a$$

ochiq sohaga homeomorf akslantiradi. Bu esa bizga (13.6.7) formuladan foydalanishga imkon beradi.

Yana shuni qayd etish joizki, (13.6.7) formulaning o‘rinli bo‘lishi uchun yakobian noldan farqli bo‘lishi shart emas. Haqiqatan, qaralayotgan misolda yakobian $I_0$ kesmaning barcha nuqtalarida nolga teng.

### 3. Egri chiziqli koordinatalar.

**1$^0$**. Faraz qilaylik, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ soha o‘zaro bir qiymatli ravishda $G\subset\mathbb{R}^2$ sohaga akslantirilsin. $\Omega$ soha nuqtalari koordinatalarini $(\xi,\eta)$ orqali, $G$ soha nuqtalari kordinatalarini esa, $(x,y)$ orqali belgilaylik. Qaralayotgan akslantirish sillq bo‘lib,

$$x \;=\; \varphi(\xi,\eta),$$

$$y = \psi(\xi, \eta),$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin va bundan tashqari, mos yakobian noldan farqli bo‘lsin:

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \equiv \frac{D(\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta)} \neq 0.$$

Bunda $\Omega$ sohasining $\{\xi = const\}$ ko‘rinishdagi koordinata to‘g‘ri chiziqlari, $G$ sohada joylashgan va koordinata egri chiziqlari deb ataluvchi qandaydir egri chiziqlarga akslanadi. Xuddi shu kabi, $\{\eta = const\}$ ko‘rinishdagi to‘g‘ri chiziqlar ham koordinata egri chiziqlari deb ataluvchi qandaydir egri chiziqlarga akslanadi. Akslantirish o‘zaro bir qiymatli bo‘lgani sababli, $G$ sohaning har bir nuqtasi orqali bitta birinchi ko‘rinishdagi koordinata egri chizig‘i va bitta ikkinchi ko‘rinishdagi koordinata egri chizig‘i o‘tadi.

Shunday qilib, $G$ sohaning $(x, y)$ koordinatali har bir nuqtasi, shu nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb ataluvchi ikkita $(\xi, \eta)$ son orqali o‘zaro bir qiymatli aniqlanar ekan.

**2**$^0$. $(\rho, \varphi)$ qutb koordinatalari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \tag{13.6.9}$$

tengliklar yordamida kiritiladi.

Bunda $(\rho, \varphi)$ nuqta

$$\Omega = \{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \rho > 0, \ 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

sohada o‘zgarganda $(x, y)$ nuqta $G = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ sohada o‘zgaradi.

$G$ sohasida $\rho = const$ koordinata chiziqlari markazi koordinatalar boshida bo‘lgan aylanalardan iborat bo‘lsa, $\varphi = const$ ko‘rinishdagi koordinata chiziqlari esa, koordinatalar boshidan chiquvchi nurlardan iborat.

(13.6.9) almashtirish yakobiani oson hisoblanadi:

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Faraz qilaylik, $(\rho, \varphi)$ o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kvadratlanuvchi soha bo'lib, u (13.6.9) funksiyalar sistemasi yordamida kvadratlanuvchi $G \subset \mathbb{R}^2$ sohaga homeomorf ravishda akslansin. Agar $f(x, y)$ funksiya $G$ sohada aniqlangan bo'lsa, u holda $f$ bilan (13.6.9) almashtirishning kompozitsiyasi deb $\Omega$ sohasida aniqlangan $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ funksiyaga aytamiz.

Agar $f$ funksiya $G$ sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda, 13.6.1 - teoremaga ko'ra,

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy \;=\; \iint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi$$

tenglik bajariladi.

$G$ integrallash sohasi o'zining biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lgan hollarda qutb koordinatalar sistemasi ayniqsa samarali qo'l-laniladi.

**Ta'rif.** *Agar $A \in G$ nuqta bilan ixtiyoriy $B \in \partial G$ nuqtani tutashtiruvchi $[AB]$ kesmaning barcha ichki nuqtalari $G$ sohada yotsa, u holda $G$ soha $A$ nuqtaga nisbatan* ***yulduzli*** *deyiladi.*

Masalan, ixtiyoriy qavariq soha o'zining har qanday nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'ladi.

Aytaylik, $G$ soha biror $A \in G$ nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lsin. Markazi $A$ da bo'lgan qutb koordinatalarini kiritamiz. Bu koordinatalarda $G$ soha chegarasini $0 \leq \varphi < 2\pi$ da aniqlangan biror $R(\varphi)$ yordamida

$$\partial G \;=\; \{(x, y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \;:\; \rho = R(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Odatda bu to'plamni qisqaroq qilib quyidagicha yozishadi:

$$\partial G \;=\; \{\rho = R(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \tag{13.6.10}$$

Bunda $G$ soha

$$\Omega \;=\; \{(\rho, \varphi) \;:\; 0 \leq \rho < R(\varphi),\; 0 \leq \varphi < 2\pi\} \tag{13.6.11}$$

to'plamning aksi bo'ladi.

13.6.1 - teoremadan navbatdagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi.

**13.6.2 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, kvadratlanuvchi $G \subset \mathbb{R}^2$ soha koordinatalar boshiga nisbatan yulduzli bo'lib, uning chegarasi (13.6.10) munosabat bilan berilgan bo'lsin. Agar $f(x, y)$ funksiya $G$ sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ funksiya (13.6.11) tenglik bilan aniqlangan $\Omega$ sohada integrallanuvchi bo'lib,*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad (13.6.12)$$

*tenglik bajariladi.*

Agar $G$ sohaning $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta$ koordinatalik nurlar tashkil qilgan burchak ichida yotuvchi $G_{\alpha\beta}$ qismiy to'plamini olsak, bu soha bo'yicha olingan integralning

$$\iint\limits_{G_{\alpha\beta}} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^{\beta} d\varphi \int\limits_0^{R(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad (13.6.13)$$

ko'rinishga ega ekanini tekshirish qiyin emas.

Koordinatalar boshi $G$ sohaning chegarasida yotganda ham (13.6.13) formula o'rinli ekanini qayd etamiz.

**13.6.3 - misol.** Arximed spirali o'ramasining birinchi yarmi va abssissalar o'qi orasida yotgan shakl yuzi topilsin.

Qutb koordinatalarida Arximed spirali tenglamasi quyidagi

$$\rho = a\varphi, \quad a > 0,$$

ko'rinishga ega. Demak, ushbu misolda

$$\Omega = \{(\rho, \varphi) \;:\; 0 < \rho < a\varphi,\; 0 < \varphi < \pi\}$$

uchburchakning aksidan iborat $G$ shakl yuzini topish talab qilinayapti.

Buning uchun (13.6.13) formuladan foydalanish yetarli:

$$|G| = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a\varphi} \rho\, d\rho = \int_0^{\pi} \frac{a^2\varphi^2}{2} d\varphi = \frac{1}{6}\pi^3 a^2.$$

## 13.7-§. Uch karrali integrallar

**1. Kublanuvchi sohalar.**

Uch karrali integrallar ham xuddi ikki karrali integrallar kabi kiritiladi. Chunonchi, avval ma'lum bir $E \subset \mathbb{R}^3$ to'plamlar sinfi uchun hajm deb ataluvchi biror o'lchov (ikki o'lchovli holdagi yassi shakl yuzi singari) tushunchasi aniqlanadi. Bunda hajmga ega to'plam kublanuvchi deb ataladi. Bundan so'ng, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi mayda kublanuvchi qismiy to'plamlarga bo'linib, integral yig'indi tuziladi. Agar kublanuvchi qismiy to'plamlarni cheksiz maydalashtirilganda integral yig'indilar limiti mavjud bo'lsa, funksiyani integrallanuvchi deb e'lon qilinadi va bu limit berilgan funksiyadan olingan integral deyiladi.

Ixtiyoriy uch o'lchovli to'plam hajmining ta'rifi to'g'ri burchakli parallelepiped hajmining tabiiy ta'rifiga, ya'ni parallelepiped hajmi uning uch tomoni uzunliklari ko'paytmasiga teng, degan ta'rifga asoslanadi.

Regulyar yopiq parallelepiped deb biz

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_1 \le x \le a_2, \quad b_1 \le y \le b_2, \quad c_1 \le z \le c_2\} \tag{13.7.1}$$

ko'rinishdagi to'plamga aytgan edik, bunda $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lib, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ va $c_1 < c_2$.

Regulyar ochiq parallelepiped

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2, \quad c_1 < z < c_2\} \tag{13.7.2}$$

ko'rinishdagi to'plamdan iborat.

Ravshanki, qayd etilgan ikki parallelepiped bir xil chegaraga ega: $\partial G = \partial F = F \setminus G$.

(13.7.1) ko'rinishdagi yopiq $F$ parallelepipedning ham, (13.7.2) ko'rinishdagi ochiq $G$ parallelepipedning ham hajmini

$$|F| \;=\; |G| \;=\; (a_2 - a_1) \cdot (b_2 - b_1) \cdot (c_2 - c_1) \qquad (13.7.3)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki, har qanday regulyar parallelepiped hajmi musbat sondir.

Yopiq ko'pyoqli jism deb biz chekli sondagi regulyar parallelepipedlar birlashmasiga aytgan edik, ya'ni

$$F \;=\; P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n,$$

bu yerda $P_k$ lar regulyar yopiq parallelepipedlardir.

Ochiq ko'pyoqli $G$ jism deb $F$ yopiq ko'pyoqli jismdan barcha chegaraviy nuqtalarni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'lgan to'plamga aytamiz:

$$G \;=\; F \;\setminus\; \partial F.$$

Nihoyat, agar biror $E \subset \mathbf{R}^3$ to'plam uchun shunday $G$ ochiq ko'pyoqli jism topilsaki, uning uchun

$$G \;\subset\; E \;\subset\; (G \cup \partial G)$$

munosabat bajarilsa, $E$ to'plamni *ko'pyoqli jism* deymiz. Bunda $G$ to'plam $E$ ko'pyoqli jismning *ichki qismi* deb ataladi.

Shunday qilib, biz ta'riflagan *ko'pyoqli jism chegarasini o'z ichiga olishi yoki olmasligi, yoki bo'lmasa chegaraning biror qisminigina o'z ichiga olishi mumkin ekan.*

Agar ikki ko'pyoqli jismning ichki qismlari umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, biz bu jismlarni *biri ikkinchisini ustiga tushmaydi* deymiz.

**Ta'rif.** *Agar $Q$ ko'pyoqli jism*

$$Q \;=\; P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$$

*ko'rinishga ega bo'lib, bunda $P_k$ regulyar parallelepipedlar o'zaro biri ikkinchisi ustiga tushmasa, u holda bu jismning $|Q|$ **hajmi** deb quyidagi songa aytamiz:*

$$|Q| = \sum_{k=1}^{n} |P_k|.$$

Bu ta'rifning korrektligi xuddi ko'pburchakli shakl yuzi ta'rifining korrektligi kabi ko'rsatiladi.

Quyi va yuqori yuza tushunchalari singari quyi va yuqori hajm tushunchalari kiritiladi.

Uch o'lchovli $\mathbb{R}^3$ fazosining chegaralangan $B$ to'plami berilgan bo'lsin.

**Ta'rif.** *Berilgan $B$ to'plamning **quyi hajmi** $|B|_*$ deb $B$ ga ichki chizilgan $P$ ko'pyoqli jismlar hajmlarining aniq yuqori chegarasiga aytiladi:*

$$|B|_* = \sup_{P \subset B} |P|.$$

Agar $B$ to'plam ichida birorta ham ko'pyoqli jism yotmasa, $|B|_* = 0$ deb qabul qilinadi. Lekin, agar, shakl yuzi holidagidek, bo'sh to'plamni ham hajmi nolga teng ko'pyoqli jism deb hisoblasak, bu tushuntirish talab qilinmaydi.

**Ta'rif.** *$B$ to'plamning **yuqori hajmi** $|B|^*$ deb $B$ ga tashqi chizilgan $Q$ ko'pyoqli jismlar hajmlarining aniq quyi chegarasiga aytamiz:*

$$|B|^* = \inf_{Q \supset B} |Q|.$$

**Ta'rif.** *Agar $B$ to'plamning quyi hajmi uning yuqori hajmiga teng bo'lsa, bu to'plam **kublanuvchi** deyiladi. Bunda*

$$|B| = |B|_* = |B|^*$$

*son kublanuvchi $B$ to'plamning **hajmi** deb ataladi.*

Kublanuvchi to'plam ta'rifidan bevosita navbatdagi tasdiq (ya'ni 7.3.1 - teorema) kelib chiqadi:

*$B$ to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham unga ichki va tashqi chizilgan shunday mos ravishda $P$ va $Q$ ko'pyoqli jismlar topilib, quyidagi*

$$|Q| - |P| < \varepsilon$$

*shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

Bundan, xuddi kvadratlanuvchi shakllar holidagidek, navbatdagi jumlaga ega bo'lamiz: $E \subset \mathbb{R}^3$ *to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun uni $\partial E$ chegarasi hajmining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Uch o'lchovli to'plam hajmi ham xuddi yassi shakl yuzi singari xossalarga ega. Biz $\mathbb{R}^3$ fazosini chiziqli almashtirish bilan bog'liq bo'lgan xossanigina keltiramiz.

**13.7.1 - tasdiq.** $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *chiziqli almashtirish kublanuvchi $E$ to'plamni hajmi*

$$|\mathbf{A}E| = |E| \cdot |\det A|$$

*ga teng bo'lgan $\mathbf{A}E$ kublanuvchi to'plamga akslantiradi; bu yerda $A$ orqali $\mathbf{A}$ chiziqli almashtirish matritsasi belgilangan.*

**2. Uch karrali Riman integralining ta'rifi.**

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^3$ kublanuvchi to'plam bo'lsin. Bu to'plamning $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ *bo'linishi* deb quyidagi uch shartni:

*1) har bir $E_k$ to'plam kublanuvchi bo'lsin*;

*2) $E_k$ to'plamlar o'zaro kesishmasin*;

*3) $E_k$ to'plamlarning birlashmasi $E$ to'plamga teng bo'lsin;*
qanoatlantiruvchi qismiy to'plamlarining chekli sondagi oilasiga aytamiz.

$E_k$ to'plamining *diametri* deb

$$d(E_k) = \sup_{x \in E_k,\ y \in E_k} |x - y|$$

ko'rinishdagi musbat songa aytiladi.

$d(E_k)$ sonlarning eng kattasiga $P$ *bo'linishning $d(P)$ diametri* deymiz.

Faraz qilaylik, $E$ da aniqlangan va haqiqiy qiymat qabul qiluvchi ixtiyoriy $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo‘lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tanlab,

$$\sigma_P(f, \{\xi_k\}) \ = \ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |E_k| \ . \qquad (13.7.4)$$

*integral yig‘indini* tuzamiz.

**Ta’rif.** *Ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son olganda ham shunday* $\delta > 0$ *son topilsaki, diametri* $d(P) < \delta$ *shartni qanoatlantiruvchi har qanday* $P = \{E_k\}$ *bo‘linish uchun,* $\xi_k \in E_k$ *nuqtalarning qanday tanlanishidan qat’iy nazar, biror* $I$ *soni bilan quyidagi*

$$|\sigma_P(f, \{\xi_k\}) \ - \ I| \ < \ \varepsilon$$

*baho o‘rinli bo‘lsa,* $I$ *soniga (13.7.4) integral yig‘indilarning* $d(P) \to 0$ *dagi limiti deyiladi.*

**Ta’rif.** *Agar* $f$ *funksiyani (13.7.4) integral yig‘indilarining* $d(P) \to 0$ *da limiti mavjud bo‘lsa, bu funksiya* $E$ *da Riman bo‘yicha integrallanuvchi deb ataladi. Bu limit* $f$ *funksiyaning* $E$ *bo‘yicha uch karrali Riman integrali deyiladi va*

$$I \ = \ \iiint\limits_E f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

*ko‘rinishda belgilanadi.*

Bu belgilash bilan bir qatorda matematik adabiyotlarda yana

$$I \ = \ \int\limits_E f(x)\, dx$$

belgilash ham ishlatiladi, bunda integralning uch karrali ekani $E$ to‘plamning uch o‘lchovli kublanuvchi jism ekanidan bilinadi.

Bunda $f$ funksiya *integral ostidagi funksiya* va kublanuvchi $E$ jism esa, *integrallash sohasi* deb ataladi.

**3. Darbu nazariyasi.** Uch karrali Riman integralining mavjudligini samarali aniqlash maqsadida Darbu nazariyasi quriladi.

Darbu nazariyasini qurishda avval berilgan funksiya kublanuvchi to‘plamlar xarakteristik funksiyalarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat sodda funksiya bo‘lgan hol qaraladi. Boshqacha aytganda, agar $\omega(x, M)$ ixtiyoriy $M \subset E$ to‘plamning (13.2.2) tenglik bilan aniqlangan xarakteristik funksiyasi bo‘lsa, berilgan funksiyamiz

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k \omega(x, E_k)$$

ko‘rinishda bo‘lsin, deb faraz qilinadi. Bunday funksiya uchun Riman integrali (13.3.1) kabi aniqlanadi.

So‘ngra kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^3$ to‘plamda ixtiyoriy chegaralangan $f : E \to \mathbb{R}$ funksiyani qaraymiz. Istalgan $P = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ bo‘linish uchun

$$m_k \;=\; \inf_{x \in E_k} f(x), \quad M_k \;=\; \sup_{x \in E_k} f(x)$$

belgilash kirirtib, mos ravishda Darbuning quyi funksiyasi va Darbuning yuqori funksiyasi deb ataluvchi, quyidagi ikki sodda funksiyani aniqlaymiz:

$$h(x, P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k\, \omega(x, E_k)$$

va

$$H(x, P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k\, \omega(x, E_k).$$

Ravshanki, istalgan $P$ bo‘linish uchun quyidagi

$$h(x, P) \;\le\; f(x) \;\le\; H(x, P)$$

baho o‘rinli.

Endi, xuddi ikki o‘lchovli holdagidek, mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig‘indilarini kiritamiz:

$$s(f, P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot |E_k|, \quad S(f, P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot |E_k|.$$

Bevosita sodda funksiyalarning ta'rifidan ((13.3.1) ga qarang) Darbuning quyi funksiyasidan olingan integral Darbuning quyi yig'indisiga va Darbuning yuqori funksiyasidan olingan integral esa, Darbuning yuqori yig'indisiga tengligi kelib chiqadi.

Darbuning quyi integrali

$$\underline{I(f)} = \sup_P s(f, P)$$

kabi, yuqori integrali esa,

$$\overline{I(f)} = \inf_P S(f, P)$$

kabi aniqlanadi.

Darbuning quyi va yuqori yig'indilari xossalaridan

$$\underline{I(f)} \le \overline{I(f)}$$

munosabat kelib chiqadi. Bu baho, xususan, quyi va yuqori integrallar to'g'ri nomlanganini ko'rsatadi.

Agar

$$\underline{I(f)} = \overline{I(f)}$$

tenglik bajarilsa, $f$ funksiyani Darbu ma'nosida integrallanuvchi deymiz.

Navbatdagi *Darbuning asosiy lemmasi* o'rinli:

*Faraz qilaylik, kublanuvchi $E$ to'plamda chegaralangan $f$ funksiya berilgan bo'lsin. U holda, Darbu yuqori yig'indilarining limiti Darbuning yuqori integraliga va Darbuning quyi yig'indilarining limiti Darbuning quyi integraliga teng bo'ladi.*

Bundan so'ng *chegaralangan funksiyaning Darbu ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun uning Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli* ekani isbotlanadi.

Bevosita Darbu nazariyasidan quyidagi Riman bo'yicha integrallanish kriteriysi kelib chiqadi:

*berilgan $f$ funksiyaning kublanuvchi $E$ to'plamda Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham $E$ to'plamining shunday $\{E_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi topilib, quyidagi*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, E_k)|E_k| \ < \ \varepsilon$$

*tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir, bu yerda $\omega(f, E_k)$ orqali $f$ funksiyaning $E_k$ qismiy to'plamdagi tebranishi belgilangan.*

Yuqorida keltirilgan barcha tasdiqlar isboti ikki o'zgaruvchili holdan farq qilmaydi.

**4. Uch karrali integral xossalari.** Uch karrali integral ham xuddi ikki karrali integral kabi xossalarga ega. Bu xossalardan eng asosiylarini navbatdagi uchta tasdiqda keltiramiz.

**13.7.2 - tasdiq (integralning chiziqliligi).** *Agar $f$ va $g$ funksiyalar kublanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, har qanday $\lambda$ va $\mu$ haqiqiy sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiya ham integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int\limits_E [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx \ = \ \lambda \int\limits_E f(x)\, dx \ + \ \mu \int\limits_E g(x)\, dx \qquad (13.7.5)$$

*tenglik bajariladi.*

**13.7.3 - tasdiq (integralning additivligi haqida).** *Faraz qilaylik, $E_1$ va $E_2$ kublanuvchi to'plamlar bo'lib, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ bo'lsin. Bundan tashqari, $f$ funksiya $E = E_1 \cup E_2$ to'plamda aniqlangan va chegaralangan bo'lsin.*

*i) Agar $f$ funksiya $E_1$ va $E_2$ to'plamlarda integrallanuvchi bo'lsa, u $E$ da ham integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int\limits_E f(x)\, dx \ = \ \int\limits_{E_1} f(x)\, dx \ + \ \int\limits_{E_2} f(x)\, dx \qquad (13.7.6)$$

*tenglik bajariladi.*

*ii) Agar $f$ funksiya $E$ da integrallanuvchi bo'lsa, u ham $E_1$ da, ham $E_2$ da integrallanuvchi bo'lib, (13.7.6) tenglik bajariladi.*

**13.7.4 - tasdiq (integralning monotonligi haqida).** *Agar $f$ va $g$ funksiyalar kublanuvchi $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, $E$ da $f(x) \le g(x)$ baho o'rinli bo'lsa, u holda*

$$\int_E f(x)\,dx \;\le\; \int_E g(x)\,dx \tag{13.7.7}$$

*tengsizlik bajariladi.*

Bu tasdiqlarning to'g'riligi xuddi ikki o'zgaruvchili holdagidek isbotlanadi. Bunda isbot ikki o'zgaruvchili holdagi isbotni deyarli so'zma-so'z qaytarishdan iborat bo'ladi. Bu fikrimizning tasdiqi sifatida uch karrali integrallarni kam o'lchovli takroriy integrallarga keltirish haqidagi tasdiqni isboti bilan keltiramiz.

**13.7.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ parallelepipedda integrallanuvchi bo'lib, $[a_3, b_3]$ kesmaning istalgan $x_3$ nuqtasi uchun*

$$I(x_3) \;=\; \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 dx_2 \tag{13.7.8}$$

*ikki karrali integral mavjud bo'lsin.*

*U holda $I(x_3)$ funksiya $[a_3, b_3]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_Q f(x)\,dx \;=\; \int_{a_3}^{b_3} I(x_3)\,dx_3 \tag{13.7.9}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** Agar istalgan (yopiq yoki ochiq) regulyar $Q_0 \subset P$ parallelepipedning xarakteristik funksiyasini olsak, (13.7.9) tenglikning chap va o'ng tomonini to'g'ridan-to'g'ri hisoblash yordamida, bu tenglikni o'rinli ekanini ko'rsatish mumkin. Aniqrog'i, tenglikning ikki tomoni ham $Q_0$ ning hajmiga, ya'ni $|Q_0|$ ga teng.

Bundan chiqdi, isbotlanayotgan tenglik bunday funksiyalarning istalgan chekli sondagi chiziqli kombinatsiyasi uchun ham o'rinli bo'ladi.

Endi berilgan $Q$ parallelepipedning, koordinatalar o'qlariga perpendikulyar tekisliklar yordamida $Q_k$ parallelepipedlarga bo'lish natijasida hosil bo'lgan, $P$ bo'linishni qaraymiz. U holda, (13.7.9) formula $P$ bo'linishga mos keluvchi Darbuning quyi $h(x,P)$ va yuqori $H(x,P)$ funksiyalari uchun o'rinli bo'ladi.

Quyidagi

$$\varphi(x_3) \ = \ \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} h(x_1,x_2,x_3,P)\,dx_1dx_2,$$

$$\psi(x_3) \ = \ \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} H(x_1,x_2,x_3,P)\,dx_1dx_2$$

belgilashlarni kiritaylik.

Ravshanki,

$$h(x,P) \ \le \ f(x) \ \le \ H(x,P),$$

bundan chiqdi,

$$\varphi(x_3) \ \le \ I(x_3) \ \le \ \psi(x_3) \ . \tag{13.7.10}$$

Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, $\varphi$ va $\psi$ funksiyalar $[a_3,b_3]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib, ulardan olingan integrallar mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilariga teng:

$$\int\limits_{a_3}^{b_3} \varphi(x_3)\,dx_3 \ = \ s(f,P), \quad \int\limits_{a_3}^{b_3} \psi(x_3)\,dx_3 \ = \ S(f,P) \ . \tag{13.7.11}$$

Berilgan $f$ funksiya integrallanuvchi bo'lgani sababli, (13.7.11) ga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olganda ham berilgan parallelepipedning yuqorida aniqlangan shunday $P$ bo‘linishini topish mumkinki, bunda

$$\int_{a_3}^{b_3} [\psi(x_3) - \varphi(x_3)]\, dx_3 \ = \ S(f,P) - s(f,P) \ < \ \varepsilon \qquad (13.7.12)$$

baho o‘rinli bo‘ladi.

U holda, 13.3.4 - teoremadan $I(x_3)$ funksiyaning $[a_3, b_3]$ kesmada integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. Shunday ekan, (13.7.10) tengsizlikni integrallab, (13.7.11) ga ko‘ra, quyidagi

$$s(f,P) \ \le \ \int_{a_3}^{b_3} I(x_3)\, dx_3 \ \le \ S(f,P)$$

qo‘sh tengsizlikni olamiz.

Bundan, Darbuning quyi $\underline{I(f)}$ va yuqori $\overline{I(f)}$ integrallari ta’rifini hisobga olib,

$$s(f,P) \ \le \ \underline{I(f)} \ \le \int_{a_3}^{b_3} I(x_3)\, dx_3 \ \le \ \overline{I(f)} \ \le \ S(f,P)$$

bahoga ega bo‘lamiz.

(13.7.12) bahoga asosan, bu tengsizliklarning chetki hadlari birbiridan $\varepsilon$ dan kichik songa farq qiladi. Bundan chiqdi, $\varepsilon$ ixtiyoriyligiga ko‘ra,

$$\underline{I(f)} \ = \ \int_{a_3}^{b_3} I(x_3)\, dx_3 \ = \ \overline{I(f)}.$$

Demak, talab qilingan (13.7.9) tenglik bajarilar ekan.■

**1 - eslatma.** (13.7.8) va (13.7.9) tengliklar, odatda, quyidagi

$$\iiint_Q f(x_1,x_2,x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 \ = \ \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \iint_P f(x_1,x_2,x_3)\, dx_1 dx_2 \qquad (13.7.13)$$

ko‘rinishda yoziladi, bu yerda $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

**2 - eslatma.** 13.5.1 - va 13.7.1 - teoremalarni birgalikda qo‘llasak,

$$\iiint\limits_Q f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 \;=\; \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \tag{13.7.14}$$

tenglikni olamiz.

Integrallash sohasi parallelepipeddan murakkabroq ko‘rinishga ega bo‘lganda ham uch karrali integralni takroriy integrallarga keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^3$ kublanuvchi to‘plam bo‘lib, $Oz$ o‘qiga proeksiyasi $[a, b]$ kesmadan iborat bo‘lsin, bu yerda $a < b$. Bundan tashqari, $S(t)$ berilgan $E$ to‘plamini $z = t$ $(a \le t \le b)$ tekislik bilan kesimining $Oxy$ tekislikka proeksiyasi bo‘lib, ya’ni

$$S(t) \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x, y, t) \in E\} \tag{13.7.15}$$

bo‘lib, $[a, b]$ kesmadan olingan har bir $t$ uchun $S(t)$ to‘plam kvadratlanuvchi bo‘lsin.

**13.7.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya $E$ to‘plamda integrallanuvchi bo‘lib, istalgan $z \in [a, b]$ uchun*

$$I(z) \;=\; \int\limits_{S(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \tag{13.7.16}$$

*integral mavjud bo‘lsin.*

*U holda $I(z)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi va quyidagi*

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \;=\; \int\limits_a^b dz \iint\limits_{S(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \tag{13.7.17}$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot.** $P$ simvoli bilan quyidagi

$$P \;=\; [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

to‘gri to‘rtburchakni belgilab, uni shunday tanlaylikki, $E$ to‘plam $Q = P \times [a, b]$ parallelepipedning ichida yotsin.

Bunda, ravshanki, har bir $z \in [a, b]$ uchun $S(z) \subset P$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Berilgan $f$ funksiyani butun $Q$ parallelepipedga, $E$ dan tashqarida nolga teng qilib, davom ettiramiz va davom ettirilgan funksiyani yana $f$ bilan belgilaymiz. Bunday aniqlangan $f$ funksiya $E$ da teorema shartiga ko‘ra integrallanuvchi va uning $Q \setminus E$ to‘ldiruvchisida esa, nolga teng bo‘lgani uchun integrallanuvchi bo‘ladi. Bundan chiqdi, integralning additivligiga ko‘ra (13.7.4.i - tasdiqqa qarang), $f$ funksiya $Q$ da integrallanuvchi bo‘lib,

$$\iiint\limits_{Q} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \;=\; \iiint\limits_{E} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad (13.7.18)$$

tenglik bajariladi.

Xuddi yuqoridagidek mulohazalar yordamida har bir tayinlangan $z \in [a, b]$ uchun $f(x, y, z)$ funksiya $(x, y)$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha nafaqat $S(z)$ to‘plamda, balki $P$ to‘g‘ri to‘rtburchakda ham integrallanuvchi bo‘lib,

$$\iint\limits_{P} f(x, y, z)\, dx\, dy \;=\; \iint\limits_{S(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \qquad (13.7.19)$$

tenglikning bajarilishini ko‘rsatish mumkin.

Endi (13.7.18) va (13.7.19) integrallar qiymatlarini (13.7.13) formulaga qo‘ysak, talab qilingan (13.7.17) tenglikni olamiz.■

**Eslatma.** (13.7.17) tenglikdan Kavaleri prinsipi kelib chiqadi: *agar $E_1$ va $E_2$ kublanuvchi jismlarning $S_1(z)$ va $S_2(z)$ kesimlari yuzi bir xil bo‘lsa, ya’ni $|S_1(z)| = |S_2(z)|$ bo‘lsa, u holda bu jismlar hajmi ham teng bo‘ladi: $|E_1| = |E_2|$.*

**13.7.1 - misol.** Agar $R > 0$ va $h > R$ bo‘lsa, uch karrali

$$I_R(h) \;=\; \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} \qquad (13.7.20)$$

integral hisoblansin.

Agar

$$S(z) \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2\le R^2-z^2\}, \quad -R\le z\le R,$$

desak, 13.7.2 - teoremaga ko'ra,

$$I_R(h) \;=\; \int_{-R}^{R} dz \iint_{S(z)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}.$$

Ichki integralni hisoblash uchun (13.6.21) qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. Natijada

$$\iint_{S(z)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} \;=\; 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}} \;=$$

$$=\; 2\pi\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}\;\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{R^2-z^2}} \;=\; 2\pi\left(\sqrt{R^2-2zh+h^2}\;-h+z\right)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$I_R(h) \;=\; 2\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{R^2-2zh+h^2}\;-h+z\right)dz \;=$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{3h}(R^2-2zh+h^2)^{3/2}\;-hz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=-R}^{z=R} = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{h}\;.$$

**Eslatma.** Butun olam tortishish qonuniga ko'ra, (13.7.20) integral radiusi $R$ ga va zichligi 1 ga teng bo'lgan shar hosil qilgan gravitatsiya maydonining potensialiga teng. Bunda potensial shar markazidan $h$ ga teng uzoqlikda yotgan nuqtada hisoblanayapti. Yuqorida keltirilgan hisoblashlar ko'rsatishicha, bu potensial, berilgan shar massasiga teng massali moddiy nuqta hosil qilgan gravitatsiya potensialiga teng bo'lar ekan.

**5. Uch karrali integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish.**

Faraz qilaylik, kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ soha va bu sohada $x = \varphi(y)$ silliq vektor-funksiya bilan aniqlangan homeomorf akslantirish berilgan bo‘lsin. Odatdagidek, agar har bir $\varphi_j(y)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, biz $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ vektor-funksiyani silliq deymiz.

Eslatib o‘tamiz, $x = \varphi(y)$ vektor-funksiyaning Yakobi determinanti yoki *yakobiani* deb quyidagi

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = \det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y_3} \end{Vmatrix} \tag{13.7.21}$$

determinantga aytgan edik.

Bu formulaning chap tomonida yakobianning belgilashda ishlatilayotgan simvol yakobianni $(y_1, y_2, y_3)$ nuqtani $(x_1, x_2, x_3)$ nuqtaga o‘tkazuvchi akslantirish bilan bog‘liq ekaniga urg‘u berayapti.

Akslantirish silliq bo‘lgani uchun, u $y$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida chiziqli akslantirishdan kam farq qiladi va bundan tashqari, bunday akslantirishda uzayish koeffitsienti $y$ nuqtadagi yakobian absolyut qiymatiga teng bo‘ladi. Bunga mos ravishda kublanuvchi sohaning hajmi va demak, bu soha bo‘yicha olingan integral ham o‘zgaradi.

Navbatdagi tasdiq ikki karrali integrallar uchun isbotlangan 13.6.2 - teoremaning uch o‘lchovli holidir.

**13.7.3 - teorema (uch karrali integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish haqida).** *Faraz qilaylik, uzluksiz diffrensiallanuvchi $\varphi : \Omega \to G$ akslantirish kublanuvchi $\Omega$ sohani kublanuvchi $G$ sohaga homeomorf o‘tkazsin.*

*Agar (13.7.21) yakobian $\Omega$ da chegaralangan bo‘lsa, u holda $G$*

*da integrallanuvchi har qanday $f$ funksiya uchun*

$$\int\limits_G f(x)\,dx \;=\; \int\limits_\Omega f[\varphi(y)]\cdot\left|\det\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\right| dy \qquad (13.7.22)$$

*tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tomondagi integral mavjuddir.*

Isbot 13.7.1 - tasdiqqa asoslangan bo'lib, xuddi 13.6.2 - teorema isboti singari olib boriladi.

**6. Egri chiziqli koordinatalar.**

**$1^0$**. Faraz qilaylik, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ soha o'zaro bir qiymatli ravishda $G\subset\mathbb{R}^3$ sohaga akslantirilsin. $\Omega$ soha nuqtalari koordinatalarini $(\xi,\eta,\zeta)$ orqali, $G$ soha nuqtalari kordinatalarini esa, $(x,y,z)$ orqali belgilaylik. Bu akslantirish sillq bo'lib,

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi,\eta,\zeta),\\ y &= \psi(\xi,\eta,\zeta),\\ z &= \chi(\xi,\eta,\zeta) \end{aligned}$$

ko'rinishga ega bo'lsin va bundan tashqari, mos yakobian noldan farqli bo'lsin:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \equiv \frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \neq 0.$$

Bunda $\Omega$ sohasining $\{\xi = const\}$ ko'rinishdagi koordinata tekisliklari $G$ sohada joylashgan va koordinata sirtlari deb ataluvchi qandaydir to'plamlarga akslanadi. Xuddi shu kabi, $\{\eta = const\}$ va $\{\zeta = const\}$ ko'rinishdagi tekisliklar ham, koordinata sirtlari deb ataluvchi qandaydir to'plamlarga akslanadi. Akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lgani tufayli, $G$ sohasining har bir nuqtasi orqali bittadan birinchi, bittadan ikkinchi hamda bittadan uchinchi ko'rinishdagi koordinata sirtlari o'tadi.

Shunday qilib, $G$ sohasining $(x,y,z)$ koordinatali har bir nuqtasi, shu nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb ataluvchi uchta $(\xi,\eta,\zeta)$ son orqali o'zaro bir qiymatli aniqlanar ekan.

**2**$^0$. Markazi Dekart koordinatalari boshida bo‘lgan, $(r, \theta, \varphi)$ *sferik koordinatalarni* kiritamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} x &= r\,\sin\theta\,\cos\varphi\,, \\ y &= r\,\sin\theta\,\sin\varphi\,, \\ z &= r\,\cos\theta, \end{cases} \tag{13.7.23}$$

deb belgilaylik.

Bunda $r$ o‘zgaruvchi $0 \le r < \infty$ yarim to‘g‘ri chiziqda o‘zgaradi, $(\theta, \varphi)$ burchak o‘zgaruvchilarining o‘zgarish sohasi esa,

$$\Sigma^2 \;=\; \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le \theta \le \pi,\; 0 \le \varphi < 2\pi\} \tag{13.7.24}$$

to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat.

Agar $c > 0$ bo‘lsa, $\{r = c\}$ koordinata sirti radiusi $c$ bo‘lgan sferadan iborat bo‘lib, $c = 0$ bo‘lganda bu sirt nuqtaga aylanadi.

$\{\theta = c\}$ koordinata sirti $0 < c < \pi$ bo‘lganda doiraviy to‘g‘ri konusning sirti bilan, $c = 0$ bo‘lganda $z$ o‘qining musbat nuri bilan va $c = \pi$ bo‘lganda esa, $z$ o‘qining manfiy nuri bilan ustma-ust tushadi.

Nihoyat, $\{\varphi = c\}$ koordinata sirti $0 \le c < 2\pi$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $c$ larda chegarasi $Oz$ o‘qi bo‘lgan yarim tekislikdan iborat.

(13.7.23) almashtirishning Yakobi matritsasi

$$A \;=\; \begin{Vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -\,r\sin\theta\sin\varphi \\ \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \\ \cos\theta & -\,r\sin\theta & 0 \end{Vmatrix}$$

ko‘rinishga ega.

Shunday ekan, (13.7.23) almashtirishning yakobiani uchun quyidagi

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} \;=\; \det A \;=\; r^2\sin\theta \tag{13.7.25}$$

tenglik o'rinli.

Sferik koordinatalar sistemasi $\Omega$ integrallash sohasi o'zining biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lgan hollarda ayniqsa samarali qo'llaniladi.

Eslatib o'tamiz, agar $A \in \Omega$ nuqta bilan ixtiyoriy $B \in \partial\Omega$ nuqtani tutashtiruvchi $[AB]$ kesmaning barcha ichki nuqtalari $\Omega$ sohada yotsa, $\Omega$ sohani $A$ nuqtaga nisbatan **yulduzli** degan edik.

Masalan, ixtiyoriy qavariq soha o'zining har qanday nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'ladi.

Aytaylik, $G$ soha o'zining biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lsin. Markazi shu nuqtada bo'lgan sferik koordinatalarini kiritamiz. Bu koordinatalarda $G$ sohaning chegarasini $(\theta, \varphi) \in \Sigma^2$ da aniqlangan biror $R(\theta, \varphi)$ funksiya yordamida ushbu

$$\partial G \;=\; \{(x, y, z) \;:\; r = R(\theta, \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in \Sigma^2\} \qquad (13.7.26)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Faraz qilaylik, $(r, \theta, \varphi)$ sferik o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to'plam bo'lib, bu to'plam (13.7.23) funksiyalar sistemasi yordamida $G \subset \mathbb{R}^n$ sohaga homeomorf akslantirilsin. Agar $f(x, y, z)$ funksiya $G$ sohada aniqlangan bo'lsa, $f$ funksiya va (13.7.23) almashtirishning kompozitsiyasi $\Omega$ da aniqlangan funksiya bo'ladi. Biz bu funksiyani $f(r, \theta, \varphi)$ simvoli orqali belgilaymiz.

Agar $R(\theta, \varphi)$ funksiya uzluksiz bo'lsa,

$$\Omega \;=\; \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 < r < R(\theta, \varphi),\; (\theta, \varphi) \in \Sigma^2\}, \quad (13.7.27)$$

soha $(r, \theta, \varphi)$ o'zgaruvchilar fazosida kublanuvchi bo'ladi.

(13.7.25) va 13.7.3 - teoremadan navbatdagi tasdiq kelib chiqadi.

**13.7.5 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, (13.7.27) soha (13.7.23) funksiyalar sistemasi yordamida (13.7.26) ko'rinishdagi chegaraga ega kublanuvchi $G \subset \mathbb{R}^n$ sohaga akslansin. Agar $f(x, y, z)$ funksiya $G$ sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(r, \theta, \varphi)$ funksiya $\Omega$ sohada* *integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{R(\theta,\varphi)} f(r,\theta,\varphi)\,r^2\,dr \tag{13.7.27}$$

*tenglik bajariladi.*

**Eslatma.** Agar $G_0$ berilgan $G$ sohasining quyidagi

$$\Phi = \{\alpha_1 < \varphi < \alpha_2, \quad \beta_1 < \theta < \beta_2\}$$

fazoviy burchak ichidagi qismi bo'lsa, u holda

$$\int\limits_{G_0} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\varphi \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{R(\theta,\varphi)} f(r,\theta,\varphi)\,r^2\,dr \tag{13.7.28}$$

tenglik o'rinli.

**13.7.2 - misol.** Ushbu

$$B_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 < R^2\}$$

shar hajmi topilsin.

Ma'lumki, bu sharning $\{0 < \varphi < \pi/2,\ 0 < \theta < \pi/2\}$ ko'rinishdagi birinchi oktantada joylashgan qismining hajmini topish yetarli. U holda, (13.7.28) formulaga ko'ra,

$$|B_R| = 8\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{R} r^2\,dr = 8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**$3^0$.** Ko'pincha uch o'lchovli matematik masalalarni yechishda silindrik koordinatalar sistemasidan foydalaniladi. Bu shunday koordinatalar sistemasiki, bunda $(x,y,z)$ Dekart koordinatalarining birinchi ikkitasini, ya'ni $(x,y)$ ni $(\rho,\varphi)$ qutb koordinatalariga o'zgartirib,

$z$ koordinatasini esa, o‘zgartirmay qoldiramiz. $(\rho, \varphi, z)$ silindrik koordinatalar sistemasiga o‘tish formulasi, odatda, quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi\,, \\ y &= \rho\sin\varphi\,, \\ z &= z\,. \end{cases} \tag{13.7.29}$$

Bunda $\rho$ o‘zgaruvchi $0 \le \rho < \infty$ yarim to‘g‘ri chiziqda, $\varphi$ burchak o‘zgaruvchisi $0 \le \varphi < 2\pi$ yarim intervalda va nihoyat $z$ o‘zgaruvchi $\mathbb{R}$ sonlar o‘qida o‘zgaradi.

$\{\rho = c\}$ koordinata sirti $c > 0$ bo‘lganda, o‘qi $Oz$ koordinatalar o‘qidan iborat to‘g‘ri doiraviy silindr sirti bilan, $c = 0$ bo‘lganda esa, $Oz$ o‘qining o‘zi bilan ustma-ust tushadi.

$\{\varphi = c\}$ koordinata sirti $0 \le c < 2\pi$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $c$ larda, chegarasi $Oz$ o‘qidan iborat yarim tekislik bilan, $\{z = c\}$ koordinata sirti esa, $Oz$ o‘qiga ortogonal tekislik bilan ustma-ust tushadi.

(13.7.29) almashtirishning Yakobi matritsasi

$$J = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, uning determinanti, ya’ni (13.7.29) almashtirishning yakobiani oson hisoblanadi:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \det J = \rho. \tag{13.7.30}$$

**13.7.3 - misol.** Agar $G$ soha

$$G = \{(x,y,z) \,:\, 0 \le \rho < R,\; -h/2 < z < h/2\}$$

silindrdan iborat bo‘lsa,

$$I = \int\limits_G (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz \tag{13.7.31}$$

integral hisoblansin.

Silindrik koordinatalar sistemasiga o'tib,

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_0^R (\rho^2 \cos^2\varphi + z^2)\,\rho\,d\rho = I_1 + I_2$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Oson hisoblashlar yordamida

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_{-h/2}^{h/2} dz \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4}$$

va

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int\limits_0^R \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{R^2}{2}$$

tengliklarni olamiz.

Demak,

$$I = \pi R^2 h \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right).$$

**Eslatma.** (13.7.31) integral zichligi 1 ga teng bo'lgan bir jinsli silindrning $Oy$ o'qiga nisbatan inersiya momentiga teng. E'tibor bering, $Oy$ o'qi silindr massasi markazidan uning simmetriya o'qiga perpendikulyar bo'lib o'tadi. Ravshanki, bunday silindr massasi uning hajmiga teng, ya'ni

$$m = \pi R^2 h.$$

Demak, 13.7.3 - misolda topilgan inersiya momentini quyidagi

$$I = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

## 13.8-§. $n$ o'zgaruvchili funksiyalarni integrallash

**1. $n$ o'lchovli hajm ta'rifi.**

$n > 3$ bo'lganda $n$ o'zgaruvchili funksiya ham xuddi ikki va uch o'zgaruvchili funksiya singari integrallanadi. Chunonchi, avval $\mathbb{R}^n$ fazosining istalgan to'plami uchun munosib ravishda o'lcham tushunchasini kiritib, uni $n$ o'lchovli hajm deb nomlanadi va hajmga ega to'plamni kublanuvchi deb ataladi. So'ngra qaralayotgan funksiyaning aniqlanish sohasini mayda kublanuvchi qismiy sohalarga bo'lib, integral yig'indi tuziladi. Agar kublanuvchi qismiy sohalarni cheksiz maydalashtirilganda integral yig'indilarining limiti mavjud bo'lsa, u holda funksiya integrallanuvchi deb e'lon qilinadi va bu limit berilgan funksiyadan olingan integral deb ataladi.

$n$ o'lchovli hajm ta'rifi uch o'lchovli to'g'ri burchakli parallelepiped hajmining tabiiy ta'rifiga, ya'ni parallelepiped tomonlarining uzunliklarini $a, b, c$ desak, $V = abc$ formulaga asoslangan.

$n$ o'lchovli regulyar parallelepiped deb

$$P \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; a_j \leq x_j \leq b_j,\; j = 1, 2, ..., n\}$$

ko'rinishda aniqlangan $P \subset \mathbb{R}^n$ to'plamga aytamiz, bu yerda $a_j$ va $b_j$ haqiqiy sonlar $a_j < b_j$ shartni qanoatlantiradi. $P$ parallelepipedning hajmi

$$|P| \;=\; \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) \;=\; (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$

formula bilan aniqlanadi.

Chekli sondagi $P_k$ regulyar parallelepipedlarning birlashmasini, ya'ni

$$F \;=\; P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_m$$

to'plamni ko'pyoqli jism deb ataymiz. Bunda, regulyar parallelepipedlarning istalgan ikkitasi faqat umumiy chegarasi bo'ylab kesishadi deb hisoblab, ko'pyoqli jism hajmi $|F|$ deb

$$|F| \;=\; \sum_{k=1}^{m}|P_k| \;=\; |P_1| + |P_2| + ... + |P_m|$$

musbat songa aytamiz.

Bunday aniqlangan hajm ko'pyoqli jismni regulyar parallelepipedlarga qanday bo'linishiga bog'liq emasligini ko'rish qiyin emas. Bo'sh to'plamni ham hajmi nolga teng bo'lgan ko'pyoqli jism deb hisoblashga kelishib olamiz.

Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ fazosining chegaralangan $E$ to'plami berilgan bo'lsin.

$E$ to'plamining $n$ o'lchovli quyi hajmi $|E|_*$ deb $E$ da joylashgan $P$ ko'pyoqli jismlar hajmining aniq yuqori chegarasiga aytamiz, ya'ni

$$|E|_* \;=\; \sup_{P\subset E} |P|.$$

$E$ to'plamining $n$ o'lchovli yuqori hajmi $|E|^*$ deb $E$ ni o'z ichiga oluvchi $Q$ ko'pyoqli jismlar hajmining aniq quyi chegarsiga aytamiz, ya'ni

$$|E|^* \;=\; \inf_{Q\supset E} |E|.$$

Agar $E$ to'plamning quyi hajmi yuqori hajmi bilan ustma-ust tushsa, bu to'plamni **kublanuvchi** deymiz. Bunda

$$|B| \;=\; |B|_* \;=\; |B|^*$$

songa kublanuvchi $E$ to'plamning **hajmi** deyiladi.

Bevosita kublanuvchi to'plam ta'rifidan navbatdagi tasdiq kelib chiqadi:

*$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun istalgan $\varepsilon > 0$ olganda ham shunday $E$ da joylashgan ko'pyoqli $P$ jism va $E$ ni o'z ichiga oluvchi ko'pyoqli $Q$ jism topilib, ular uchun*

$$|Q| \;-\; |P| \;<\; \varepsilon$$

*bahoning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

Xuddi ikki va uch o'zgaruvchili holdagidek, bundan quyidagi tasdiq kelib chiqadi: *$E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning kublanuvchi bo'lishi uchun uning $\partial E$ chegarasi hajmining nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

$n$ o'lchovli to'plam hajmi ham xuddi uch o'lchovli hajm kabi xossalarga ega. Biz $\mathbb{R}^n$ fazosini chiziqli almashtirish bilan bog'liq xossanigina keltiramiz.

**13.8.1 - tasdiq.** $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *chiziqli almashtirish kublanuvchi* $E$ *to'plamni,* $n$ *o'lchovli hajmi*

$$|\mathbf{A}E| \;=\; |E| \cdot |\det A|$$

*bo'lgan kublanuvchi* $\mathbf{A}E$ *to'plamga akslantiradi; bu yerda* $A$ *simvol bilan* $\mathbf{A}$ *chiziqli almashtirishning matritsasi belgilangan.*

**2. $n$ karrali Riman integralining ta'rifi.**

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ kublanuvchi to'plam bo'lsin. Bu to'plamning $P = \{E_k\}_{k=1}^n$ *bo'linishi* deb quyidagi uch shartni:

*1) har bir* $E_k$ *to'plam kublanuvchi bo'lsin*;

*2)* $E_k$ *to'plamlar o'zaro kesishmasin*;

*3)* $E_k$ *to'plamlarning birlashmasi* $E$ *to'plam bilan ustma-ust tushsin;*

qanoatlantiruvchi qismiy to'plamlarning chekli sondagi oilasiga aytamiz.

$E_k$ to'plamining *diametri* deb

$$d(E_k) \;=\; \sup_{x\in E_k,\; y\in E_k} |x-y|$$

ko'rinishdagi musbat songa aytiladi.

$d(E_k)$ sonlarning eng kattasiga $P$ *bo'linishning* $d(P)$ *diametri* deymiz.

Faraz qilaylik, $E$ da aniqlangan va haqiqiy qiymat qabul qiluvchi ixtiyoriy $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya berilgan bo'lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in E_k$ nuqtalarni tanlab, quyidagi

$$\sigma_P(f, \{\xi_k\}) \;=\; \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k) \cdot |E_k| \;. \tag{13.8.1}$$

*integral yig'indini* tuzamiz.

**Ta'rif.** *Ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son olganda ham shunday* $\delta > 0$ *son topilsaki, diametri* $d(P) < \delta$ *shartni qanoatlantiruvchi har qanday*

*$P = \{E_k\}$ bo'linish uchun, $\xi_k \in E_k$ nuqtalarning qanday tanlanishidan qat'iy nazar, biror $I$ soni bilan*

$$|\sigma_P(f, \{\xi_k\}) \; - \; I| \; < \; \varepsilon$$

*baho o'rinli bo'lsa, u holda $I$ soni (13.8.1) integral yig'indilarning $d(P) \to 0$ dagi limiti deyiladi.*

**Ta'rif.** *Agar $f$ funksiyani (13.8.1) integral yig'indilarining $d(P) \to 0$ da limiti mavjud bo'lsa, u holda bu funksiya $E$ da Riman bo'yicha integrallanuvchi deb ataladi*

*Bu limit $f$ funksiyaning $E$ bo'yicha $n$ karrali Riman integrali deyiladi va*

$$I \; = \; \int\limits_E f(x)\, dx.$$

*ko'rinishda belgilanadi.*

$f$ funksiya *integral ostidagi funksiya* va kublanuvchi $E$ jism esa, *integrallash sohasi* deb ataladi.

$n$ karrali integralning mavjudlik masalasi Darbu nazariyasi yordamida yechiladi. Bu nazariya xuddi ikki yoki uch o'lchovli integrallar holidagidek quriladi.

**3. $n$ karrali Riman integrali xossalari.**

Yuqorida kiritilgan $n$ karrali Riman integrali xuddi ikki va uch karrali integrallar singari xossalarga ega. Chunonchi, u integral ostidagi funksiyaga chiziqli bog'liq va integrallanish sohasining additiv funksiyasidir.

**13.8.2 - tasdiq (integralning chiziqliligi).** *Agar $f$ va $g$ funksiyalar kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, har qanday haqiqiy $\lambda$ va $\mu$ sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiya ham integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int\limits_E [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx \; = \; \lambda \int\limits_E f(x)\, dx \; + \; \mu \int\limits_E g(x)\, dx \qquad (13.8.2)$$

*tenglik bajariladi.*

**13.8.3 - tasdiq (integralning additivligi haqida).** *Faraz qilaylik, $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ va $E_2 \subset \mathbb{R}^n$ kublanuvchi to'plamlar bo'lib, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ bo'lsin. Bundan tashqari, $f$ funksiya $E = E_1 \cup E_2$ to'plamda aniqlangan va chegaralangan bo'lsin.*

*i) Agar $f$ funksiya $E_1$ va $E_2$ to'plamlarda integrallanuvchi bo'lsa, u $E$ da ham integrallanuvchi bo'lib, ushbu*

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{E_1} f(x)\,dx \;+\; \int\limits_{E_2} f(x)\,dx \tag{13.8.3}$$

*tenglik bajariladi.*

*ii) Agar $f$ funksiya $E$ da integrallanuvchi bo'lsa, u ham $E_1$ da, ham $E_2$ da integrallanuvchi bo'lib, (13.8.3) tenglik bajariladi.*

**13.8.4 - tasdiq (integralning monotonligi haqida).** *Agar $f$ va $g$ funksiyalar kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^n$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, $E$ da $f(x) \le g(x)$ baho o'rinli bo'lsa, u holda*

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx \;\le\; \int\limits_{E} g(x)\,dx \tag{13.8.4}$$

*tengsizlik bajariladi.*

Bu tasdiqlarning to'g'riligi xuddi ikki va uch o'zgaruvchili holdagidek isbotlanadi.

$n$ karrali integralni kamroq karrali integrallar yordamida hisoblash navbatdagi tasdiq yordamida amalga oshiriladi.

Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uchun $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ deymiz va $x = (\widetilde{x}, x_n)$ deb belgilaymiz. Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{R}^n$ kublanuvchi to'plam bo'lib, uning $Ox_n$ o'qiga proeksiyasi $[a, b]$ kesmadan iborat bo'lsin, bunda albatta, $a < b$.

Istalgan $t \in [a, b]$ uchun

$$S(t) \;=\; \{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \;:\; (\widetilde{x}, t) \in E\}$$

deb belgilaymiz.

$[a, b]$ kesmadan olingan har bir $t$ da $S(t)$ to'plam $(n-1)$ o'lchovli kublanuvchi to'plam bo'lsin, deb faraz qilamiz.

**13.8.5 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya $E$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, har bir $t \in [a, b]$ uchun*

$$I(t) \;=\; \int\limits_{S(t)} f(\widetilde{x}, t)\, d\widetilde{x}$$

*integral mavjud bo'lsin.*

*U holda $I(t)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int\limits_{E} f(x)\, dx \;=\; \int\limits_{a}^{b} dt \int\limits_{S(t)} f(\widetilde{x}, t)\, d\widetilde{x}$$

*tenglik bajariladi.*

**4. $n$ karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.**

Faraz qilaylik, kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soha va bu sohada $x = \varphi(y)$ silliq vektor-funksiya bilan aniqlangan $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ homeomorf akslantirish berilgan bo'lsin. Odatdagidek, agar har bir $\varphi_j(y)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, biz $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ vektor-funksiyani silliq deymiz.

Eslatib o'tamiz, $x = \varphi(y)$ vektor-funksiyaning Yakobi determinanti yoki *yakobiani* deb quyidagi

$$\frac{D(x_1, x_2, ..., x_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)} \;=\; \det \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \;=\; \det \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{matrix} \right\| \tag{13.8.5}$$

determinantga aytgan edik.

Akslantirish silliq bo'lgani uchun, u $y$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida chiziqli akslantirishdan kam farq qiladi va bundan tashqari, bunday akslantirishda uzayish koeffitsienti $y$ nuqtadagi yakobian absolyut qiymatiga teng bo'ladi. Bunga mos ravishda kublanuvchi jismning hajmi va demak, bu soha bo'yicha olingan integral ham o'zgaradi.

**13.8.6 - teorema ($n$ karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish haqida).** *Faraz qilaylik, uzluksiz diffrensiallanuvchi $\varphi : \Omega \to G$ akslantirish kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohani kublanuvchi $G \subset \mathbb{R}^n$ sohaga homeomorf o'tkazsin.*

*Agar (13.8.5) yakobian $\Omega$ da chegaralangan bo'lsa, u holda $G$ da integrallanuvchi har qanday $f$ funksiya uchun*

$$\boxed{\int\limits_G f(x)\,dx \;=\; \int\limits_\Omega f[\varphi(y)]\cdot\left|\det\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\right|\,dy} \tag{13.8.6}$$

*tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tomondagi integral mavjuddir.*

Isbot $\mathbb{R}^n$ fazosini chiziqli akslantirishda jismlar hajmini 13.8.1 - tasdiqda keltirilgan hisoblash qoidasiga asoslanadi.

**5. Sferik koordinatalar.**

Markazi koordinatalar boshida bo'lgan $(r, \theta)$ sferik koordinatalarni kiritamiz, bunda $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$. Buning uchun

$$\begin{cases} x_1 &= r\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\,, \\ x_2 &= r\,\cos\theta_1\,\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\,, \\ x_3 &= r\,\cos\theta_2\,\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-1}\,, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} &= r\,\cos\theta_{n-2}\,\sin\theta_{n-1}\,, \\ x_n &= r\,\cos\theta_{n-1} \end{cases} \tag{13.8.7}$$

bo'lsin deymiz.

Bu almashtirishda $r$ ning o'zgarish sohasi $0 < r < \infty$ yarim to'g'ri chiziqdan va $\theta$ burchak o'zgaruvchilarining o'zgarish sohasi

$$\Sigma^{n-1} \;=\; \{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \;:\; 0 \le \theta_1 < 2\pi,\; 0 \le \theta_k \le \pi,\; k = 2, 3, ..., n-1\} \tag{13.8.8}$$

to'plamdan iborat.

Endi $\theta_n = r$ deb, (13.8.7) almashtirish yakobianini, ya'ni $\left\| \dfrac{\partial x_j}{\partial \theta_k} \right\|$, $j, k = 1, 2, ..., n$, matritsa determinantini hisoblaymiz.

Agar (13.8.7) tengliklarni differensiallasak, $1 \leq j \leq k \leq n-1$ lar uchun

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = r \cos \theta_{j-1} \sin \theta_j \cdots \cos \theta_k \cdots \sin \theta_{n-1}$$

munosabatlar o'rinli ekanini ko'ramiz.

Demak, Yakobi matritsasining bosh diagonali va undan yuqorida to oxirgi ustungacha yotgan elementlarini

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = x_j \ \operatorname{ctg} \theta_k, \quad 1 \leq j \leq k \leq n-1,$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar (13.8.7) tengliklarni $k = (j-1)$-o'zgaruvchi bo'yicha differensiallasak,

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_{j-1}} = -r \sin \theta_{j-1} \sin \theta_j \cdots \sin \theta_{n-1}, \quad 2 \leq j \leq n,$$

tengliklarga kelamiz.

Bundan chiqdi, bosh diagonal tagidagi yon diagonal elimentlari

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_{j-1}} = -x_j \ \operatorname{tg} \theta_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq n,$$

ko'rinishga ega.

Ravshanki, Yakobi matritsasining $k < j-1$ bo'lgandagi (yani qayd qilingan yon diagonal tagidagi) barcha elementlari nolga teng, ya'ni

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = 0, \quad 1 \leq k < j-1.$$

Demak, Yakobi matritsasining birinchi $n-1$ ta ustun elementlari

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} = \begin{cases} 0 \quad , & \text{agar} \quad k < j-1 \quad \text{bo'lsa}, \\ -x_j \ \operatorname{tg} \theta_{j-1} \, , & \text{agar} \quad k = j-1 \quad \text{bo'lsa}, \\ x_j \ \operatorname{ctg} \theta_k \ , & \text{agar} \quad k > j-1 \quad \text{bo'lsa}, \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lar ekan.

Nihoyat, belgilashimizga ko'ra, oxirgi ustun elementlari uchun (ya'ni $k = n$ bo'lganda)

$$\frac{\partial x_j}{\partial \theta_n} \equiv \frac{\partial x_j}{\partial r} = \frac{x_j}{r}$$

tengliklar o'rinli.

Shunday qilib, (13.8.7) almashtirishning Yakobi matritsasi uchun quyidagi

$$\left\| \frac{\partial x_j}{\partial \theta_k} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccc} x_1 \operatorname{ctg} \theta_1 & x_1 \operatorname{ctg} \theta_2 & \dots & x_1 \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_1/r \\ -x_2 \operatorname{tg} \theta_1 & x_2 \operatorname{ctg} \theta_2 & \dots & x_2 \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_2/r \\ 0 & -x_3 \operatorname{tg} \theta_2 & \dots & x_3 \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_3/r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \operatorname{ctg} \theta_{n-1} & x_{n-1}/r \\ 0 & 0 & \dots & -x_n \operatorname{tg} \theta_{n-1} & x_n/r \end{array} \right\| \tag{13.8.9}$$

tenglikni olamiz.

Endi (13.8.9) matritsaning determinantini hisoblaymiz. Buning uchun yordamchi $(n \times n)$ lik, elementlari

$$a_{jk} = \begin{cases} 0 \quad , & \text{agar} \quad k < j-1 \quad \text{bo'lsa,} \\ -\operatorname{tg}^2 \theta_{j-1}\,, & \text{agar} \quad k = j-1 \quad \text{bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar} \quad k > j-1 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lgan,

$$A_n = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -\operatorname{tg}^2 \theta_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -\operatorname{tg}^2 \theta_2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\operatorname{tg}^2 \theta_{n-1} & 1 \end{array} \right\| \tag{13.8.10}$$

matritsani kiritamiz.

**13.8.1 - lemma.** *Quyidagi tenglik o‘rinli:*

$$\det A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos^2 \theta_k}. \qquad (13.8.11)$$

**Isbot.** (13.8.10) matritsa determinantini hisoblash uchun uni oxirgi satr bo‘yicha yoyamiz. Bunda oxirgi satr va oxirgi ikki ustundan birini o‘chirish bilan hosil bo‘lgan ikki matritsa ustma-ust tushib, $A_{n-1}$ matritsaga teng bo‘ladi. Bundan chiqdi, mos algebraik to‘ldiruvchilar faqat ishora bilan farq qiladi. Natijada

$$\det A_n = -(-\operatorname{tg}^2 \theta_{n-1}) \cdot \det A_{n-1} + 1 \cdot \det A_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta_{n-1}} \cdot \det A_{n-1}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan, induksiya bo‘yicha, talab qilingan (13.8.11) tenglikni olamiz.■

**13.8.1 - teorema.** *(13.8.7) almashtirishning $J(r,\theta)$ yakobiani quyidagi*

$$J(r,\theta) = \frac{\partial x}{\partial(r,\theta)} = r^{n-1} \sin\theta_2 \sin^2\theta_3 \cdots \sin^{n-2}\theta_{n-1} \quad (13.8.12)$$

*ko‘rinishga ega.*

**Isbot.** Agar $\theta_n = r$ desak, yuqorida (13.8.7) almashtirish yakobiani (13.8.9) matritsadan iborat ekanini ko‘rdik. Bu matritsaning $j$-satridan $x_j$ ko‘paytuvchini va $k < n$ bo‘lganda $k$-ustundan $\operatorname{ctg}\theta_k$ ko‘paytuvchini so‘ngra oxirgi ustundan $\frac{1}{r}$ ko‘paytuvchini matritsadan tashqariga chiqarsak, biz (13.8.10) matritsaga kelishimizni tekshirish qiyin emas.

Demak, (13.8.9) va (13.8.10) matritsalarning determinantlari ushbu

$$J(r,\theta) = (x_1 x_2 \cdots x_n) \cdot (\operatorname{ctg}\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_2 \cdots \operatorname{ctg}\theta_{n-1}) \cdot \frac{1}{r} \cdot \det A_n$$

munosabat bilan bog'langan ekan.

Bundan, 13.8.7 - lemmaga ko'ra,

$$J(r,\theta) \;=\; \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{r \cdot (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-1}) \cdot (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1})} \tag{13.8.13}$$

tenglikni olamiz.

Agar

$$\Phi(\theta) \;=\; \sin\theta_2 \sin^2\theta_3 \cdots \sin^{n-2}\theta_{n-1} \tag{13.8.14}$$

desak, (13.8.7) ga ko'ra,

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \;=$$

$$= \; r^n \cdot (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-1}) \cdot (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1}) \cdot \Phi(\theta) \tag{13.8.15}$$

tenglik bajarilishini tekshirish qiyin emas.

Endi (13.8.15) ni (13.8.13) kasrning suratiga qo'ysak,

$$J(r,\theta) \;=\; r^{n-1}\Phi(\theta)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik, (13.8.14) ni hisobga olsak, talab qilingan (13.8.12) tenglik bilan ustma-ust tushadi.■

$\Omega$ integrallash sohasi o'zining biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'lgan hollarda sferik koordinatalar sistemasi ayniqsa samarali qo'llaniladi.

Haqiqatan, markazi ana shu nuqtada bo'lgan sferik koordinatalar sistemasini kiritaylik. U holda $\Omega$ soha chegarasini barcha $\theta \in \Sigma^{n-1}$ nuqtalarda aniqlangan biror $R(\theta)$ funksiya yordamida quyidagi

$$\partial\Omega \;=\; \{(r,\theta) \;:\; r = R(\theta), \quad \theta \in \Sigma^{n-1}\} \tag{13.8.16}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Faraz qilaylik, (13.8.7) funksiyalar sistemasi $(r,\theta)$ sferik o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi bo'lgan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to'plamni $E \subset \mathbb{R}^n$ sohaga homeomorf akslantirsin. Agar $f(x)$ funksiya $E$ da aniqlangan bo'lsa, u holda $f$ va (13.8.7) akslantirish kompozitsiyasi $\Omega$ da aniqlangan funksiya bo‘ladi. Biz bu funksiyani $f(r,\theta)$ bilan belgilaymiz.

13.8.1 - teorema va 13.8.6 - tasdiq yordamida biror nuqtasiga nisbatan yulduzli bo‘lgan sohalar bo‘yicha integralni hisoblash uchun quyidagi qulay formulaga ega bo‘lamiz.

**Natija.** *Faraz qilaylik, chegarasi (13.8.16) munosabat bilan aniqlangan, kublanuvchi $\Omega$ soha (13.8.7) funksiyalar sistemasi orqali kublanuvchi $E \subset \mathbb{R}^n$ sohaga homeomorf akslantirilsin. Agar $f(x)$ funksiya $E$ sohada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $f(r,\theta)$ funksiya $\Omega$ sohada integrallanuvchi bo‘lib, quyidagi*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \cdots \int\limits_0^{\pi} \Phi(\theta)\,d\theta_{n-1} \int\limits_0^{R(\theta)} f(r,\theta)\,r^{n-1}\,dr \tag{13.8.17}$$

*tenglik bajariladi.*

**13.8.1 - misol** To‘rt o‘lchovli

$$B_4(R) = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ |x| \le R\}.$$

shar hajmi topilsin.

Buning uchun (13.8.17) formulada $f(x) \equiv 1$ deyish yetarli:

$$|B_4(R)| = \int\limits_{B_4(R)} dx = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta_2\,d\theta_2 \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta_3\,d\theta_3 \int\limits_0^{R} r^3\,dr =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi^2 R^4}{2}.$$

**1 - eslatma.** Agar $\Sigma_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (13.8.8) tenglik bilan aniqlangan to‘plam bo‘lsa,

$$\omega_n = \int\limits_{\Sigma^{n-1}} d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta_2\,d\theta_2 \cdots \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1} \tag{13.8.18}$$

belgilashni kiritib (bu kattalik 17 - bobda hisoblangan; (17.3.11) formulaga qarang), $n$ o‘lchovli

$$B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; |x| \leq R\}$$

shar hajmi uning radiusi bilan qanday bog‘langanini aniqlaymiz.

(13.8.17) ga ko‘ra,

$$|B_n(R)| \; = \int\limits_{B_n(R)} dx \; =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta_2 \, d\theta_2 ... \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \, d\theta_{n-1} \int\limits_0^{R} r^{n-1} \, dr \; .$$

Bundan, (13.8.18) belgilashga ko‘ra, talab qilingan

$$|B_n(R)| \; = \; \frac{\omega_n}{n} R^n \tag{13.8.19}$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

**2 - eslatma.** (13.8.19) formulaga asosan, shar hajmining radiusiga bog‘liqligi o‘zgaruvchilar soni oshgan sari sezilarliroq bo‘lar ekan. Masalan, shar radiusi ikki marta oshganda uch o‘lchovli shar hajmi 8 marta oshsa, 10 o‘lchovli shar hajmi esa, 1000 martadan ko‘p oshar ekan.

Umuman, $(1+\varepsilon)$ radiusga ega bo‘lgan $n$ o‘lchovli shar hajmi radiusi birga teng bo‘lgan shar hajmidan $(1+\varepsilon)^n$ marta katta, ya’ni istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ uchun $n$ ning oshishi bilan hajm istalgancha katta bo‘lishi mumkin. Bundan chiqdi, ko‘p o‘lchovli sharning asosiy massasi uning chegarasi atrofida to‘plangan bo‘lar ekan.

**Xulosa.** Ushbu bobda o‘rganilgan to‘plamlarni o‘lchash sxemasi birinchi marta Fransuz matematigi K. Jordan tomonidan taklif qilingan. Shuning uchun bu o‘lchov Jordan o‘lchovi deyiladi hamda $n = 2$ da kvadratlanuvchi shakl va $n \geq 3$ da kublanuvchi jism *Jordan ma’nosida o‘lchovli* deb ataladi. Shunday qilib, yassi kvadratlanuvchi shaklning Jordan o‘lchovi uning yuzidan, $n$ o‘lchovli kublanuvchi jismning Jordan o‘lchovi esa, jismning $n$ o‘lchovli hajmidan iborat bo‘lar ekan.

## 13.9-§. Misollar

**1 - misol**. Agar $D = [0,1]\times[0,1]$ kvadrat bo'lsa, $\int_D x\,y\,dx\,dy$ integralni integral yig'indilari yordamida hisoblang. Xuddi shu integralni avval (13.5.5) formulani, so'ngra Nyuton-Leybnits formulasini qo'llab ham hisoblang.

**Ko'rsatma**. $D$ sohaning bo'linishi sifatida tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lib, uzunligi $\frac{1}{k}$ ga teng bo'lgan kvadratchalarni va $\xi_j$ sifatida esa, kvadratchalarning o'ng cho'qqilarini oling. Natijada

$$\iint\limits_D x\,y\,dx\,dy \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^4}\sum_{i=1}^{k} i\sum_{j=1}^{k} j$$

tenglikni hosil qilib, limitni hisoblang.

**2 - misol**. Agar $D = [1,2]\times[1,3]$ to'g'ri to'rtburchak bo'lsa, $D$ ning $x = 1+\frac{i}{k}$, $y = 1+\frac{2j}{k}$, $(i,j = \overline{0,k})$, bo'linishini olib, $f(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y)\in D$, funksiyadan $D$ soha bo'yicha olingan integral uchun Darbuning quyi va yuqori yig'indilarini tuzing. Bu yig'indilarning $k\to\infty$ dagi limitini hisoblang.

**Ko'rsatma**. $D$ sohaning qayd etilgan bo'linishini $P = \{P_{i,j}\}$ deb belgilaylik, bunda $P_{i,j}$ tomonlari uzunligi $\frac{1}{k}$ va $\frac{2}{k}$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardir. Ravshanki, $|P_{i,j}| = \frac{2}{k^2}$ va $P_{i,j}$ da

$$f_{min} = f\big(1+\frac{i}{k}, 1+\frac{2j}{k}\big), \quad f_{max} = f\big(1+\frac{i+1}{k}, 1+\frac{2(j+1)}{k}\big).$$

Endi Darbu yig'indilarini tuzish va limitni hisoblash oddiy arifmetik amallar orqali amalga oshiriladi.

**3 - misol**. Agar $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 10\}$ bo'lsa, o'rta qiymat formulasidan foydalanib,

$$I \;=\; \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

integralni $0,1$ aniqlikda baholang.

**Ko'rsatma**. Maxrajdagi funksiyani $f(x,y)$ desak va $100 \leq f(x,y) \leq 102$ ekanligini hisobga olib, 13.4.5 - teoremani qo'llash kifoya.

**4 - misol**. Agar $D$ uchlari $O(0,0)$, $A(2,1)$ va $B(-2,1)$ bo'lgan uchburchak bo'lsa,

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$$

integralni takroriy integrallarga keltiring.

**Ko'rsatma**. Integrallash sohasini ikki qismga bo'ling: $D = D_1 \cup D_2$, bu yerda

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, \ -\frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$$

va

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \ \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}.$$

Endi integralning additivlik xossasini e'tiborga olib, (13.3.6) formuladan foydalaning.

**5 - misol**. Quyidagi

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)\,dy$$

takroriy integralda integrallash sohasini aniqlang va integrallash tartibini o'zgartiring.

**Ko'rsatma**. Integrallash sohasini chizmada aniqlang. So'ngra, $x$ argument 0 dan 1 gacha o'zgarganda $y$ argument 0 dan 2 gacha o'zgarishini hisobga olib, integralni avval $y$ bo'yicha, keyin $x$ bo'yicha takroriy integral ko'rinishida yozing.

**6 - misol**. Agar $D$ sohaning $\partial D$ chegarasi $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ $(x > 0,\ y > 0)$ tenglamalar bilan berilgan bo'lib, $f(t)$, $t > 0$, uzluksiz funksiya bo'lsa, $I = \iint\limits_D f(xy)\,dx\,dy$ integralda o'zgaruvchilarni almashtirib, bir karrali integralga keltiring.

**Ko'rsatma**. Integralda $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ deb, o'zgaruvchilarni almashtirish bajarsak, $D$ soha $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 4\}$ to'g'ri to'rtburchakka diffeomorf akslanadi. Endi (13.6.8) formuladan foydalanish kifoya.

**7 - misol**. Agar $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$ bo'lsa, $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dx\, dy$ integralni hisoblang.

**Ko'rsatma**. Agar integralda $\rho, \varphi$ qutb koordinatalariga o'tsak, $D$ sohaning $\partial D$ chegarasi uchun $\rho^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = 1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Demak,

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Endi (13.6.24) formuladan foydalanib, hosil bo'lgan bir karrali integralni hisoblang.

**8 - misol**. Agar $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$ bo'lsa,

$$\iiint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx\, dy\, dz$$

integralni hisoblang.

**Ko'rsatma**. Agar sferik koordinatalarga o'tsak,

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \cos \theta,$$

munosabatga ega bo'lamiz. Endi (13.7.27) formulani qo'llab, hosil bo'lgan bir karrali integralni hisoblang.

**9 - misol**. Agar $f(t)$, $t \geq 0$, uzluksiz funksiya bo'lsa, quyidagi

$$I(t) = \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \Big( \int\limits_0^t f(\tau) d\tau \Big)^n$$

formulani isbotlang.

**Ko'rsatma**. Avval $n = 2$ deylik. U holda, ravshanki,

$$I(t) = \int\limits_0^t f(t_1) dt_1 \int\limits_0^{t_1} f(t_2) dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t d\left(\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)^2.$$

Endi umumiy holda matematik induksiya usulini qo'llash kifoya.

**10 - misol**. Agar $D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_1 \le t,\ 0 \le x_j \le x_{j-1},\ j = \overline{2, n},\ t > 0\}$ bo'lib, $f(\mathbf{x})$ funksiya $D$ sohada uzluksiz bo'lsa,

$$I(t) = \int_0^t dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(\mathbf{x})dx_n = \int_0^t dx_n \int_{x_n}^t dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^t f(\mathbf{x})dx_1$$

tenglikni isbotlang.

**Ko'rsatma**. Integrallash sohasini $D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_n \le t,\ x_{j+1} \le x_j \le t,\ j = \overline{n-1, 1}\}$ ko'rinishda yozib, 13.5.2 - teoremadan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

# 14-bob. Karrali xosmas integrallar

## 14.1-§. $\mathbb{R}^n$ fazosi bo'yicha integrallash

**1. Xosmas integral ta'rifi.** Amaliyotda muhim bo'lgan masalalarni yechish uchun integralni chegaralangan soha bo'yicha hisoblashni bilish yetarli. Ammo nazariy izlanishlarda chegaralanmagan soha, xususan, butun fazo bo'yicha ham integrallashga to'g'ri keladi. Qizig'i shundaki, bunda olingan natijalar ko'pincha amaliy masalalarni yechishda ham foydali bo'ladi.

Avval $\mathbb{R}^n$ fazosida funksiyani integrallash masalasini ko'rib chiqaylik. Ushbu paragrafda biz, bunga ba'zan alohida urg'u bermasdan, $f$ funksiyani $\mathbb{R}^n$ fazosida aniqlangan va istalgan kublanuvchi ($n = 2$ bo'lganda kvadratlanuvchi) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada integrallanuvchi deb faraz qilamiz. Bunday funksiyalarni $\mathbb{R}^n$ da *lokal integrallanuvchi* deb ham ataymiz.

Bir o'zgaruvchili holda, $\mathbb{R}$ to'g'ri chiziq bo'yicha integrallash masalasini yechishda, avval istalgan $[a, b]$ kesma bo'yicha integrallanib, so'ngra $a \to -\infty$ va $b \to +\infty$ deb, limitga o'tilgan edi. Boshqacha aytganda, $[a_k, b_k] \subset [a_{k+1}, b_{k+1}]$ va $\lim_{k\to\infty}[a_k, b_k] = \mathbb{R}$ xossalarga ega bo'lgan $[a_k, b_k]$ kesmalar ketma-ketligiga o'tilgan edi. Agar bunda hosil bo'lgan integrallar ketma-ketligi limitga ega bo'lsa, ana shu limit $\mathbb{R}$ to'g'ri chiziq bo'yicha olingan xosmas integral deb atalgandi.

Ko'p o'zgaruvchili holda ham xuddi shu yo'lni tutishimiz mumkin. Tabiiyki, bunda

$$I(\Omega_k) = \int\limits_{\Omega_k} f(x)\, dx \tag{14.1.1}$$

integrallar ketma-ketligini qarab, $\Omega_k$ sifatida kengayib borib, limiti $\mathbb{R}^n$ fazosini batamom to'ldiruvchi (biz *qamrab oluvchi* degan jumlani ishlatamiz) kublanuvchi sohalar ketma-ketligini olish kerak. Ammo, bir o'lchovli holdan farqli o'laroq, ko'p o'lchovli fazo fazoni qamrab oluvchi to'plamlar ketma-ketligiga ancha boy. Masalan, ikki o'lchovli holda tekislikni qamrab oluvchi to'plamlar ketma-ketligi sifatida markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi cheksizga intiluvchi doiralar ketma-ketligini olish mumkin. Xuddi shu singari, markazi koordinatalar boshida bo'lib, tomonlari uzunligi cheksizga intiluvchi kvadratlar ketma-ketligini ham olsa bo'ladi. Lekin, agar faqat shunday ketma-ketliklar bilan cheklanib qolsak, biz bir qator muammolarga duch kelamiz. Masalan, shunday funksiya tuzish mumkinki, u uchun bu limitlardan biri mavjud bo'lib, ikkinchisi esa mavjud bo'lmaydi. Yoki bo'lmasa, shunday funksiya ko'rsatish mumkinki, u uchun bu limitlarning har ikkalasi mavjud bo'lsada, ular o'zaro farq qiladi.

Masalan, agar $\{\Omega_k\}$ lar $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi kengayuvchi kvadratlar ketma-ketligi bo'lsa, quyidagi

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Omega_k} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

limit mavjud bo'ladi. Lekin, agar $\{\Omega_k\}$ lar $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi kengayuvchi doiralar ketma-ketligi bo'lsa, u holda yuqoridagi limit mavjud bo'lmaydi (14.3.5 - misolga qarang).

Bunday hollarni istisno qilish uchun, (14.1.1) ketma-ketliklar limitining $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi har qanday $\{\Omega_k\}$ to'plamlar ketma-ketligi uchun mavjudligini talab qilish yetarlidir.

Xosmas integralning klassik ta'rifida $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi to'plamlar sifatida kublanuvchi (ikki o'lchovli holda - kvadratlanuvchi) sohalar, ya'ni bog'langan ochiq to'plamlar olinadi. Biz ham shu yo'lni tutamiz.

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik,* $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ *sohalarning* $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ketma-ketligi quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:*

*1) har bir* $\Omega_k$ *soha* $\Omega_{k+1}$ *sohada yotsin, ya'ni:*

$$\Omega_k \subset \Omega_{k+1}\ ; \tag{14.1.2}$$

*2) barcha $\Omega_k$ sohalarning birlashmasi $\mathbb{R}^n$ fazosini batamom to'ldirsin, ya'ni:*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \mathbb{R}^n . \qquad (14.1.3)$$

*U holda bunday ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ fazosini **qamrab oladi** deymiz.*

Masalan, $R_k$ radiusli bir-birining ichida joylashgan sharlar ketma-ketligi, $R_k$ sonlar ketma-ketligi o'sib borib, cheksizlikka intilganda, $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oladi.

**1 - eslatma.** Agar $\{\Omega_j\}$ sohalar ketma-ketligi $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab olsa, u holda istalgan $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt to'plam uchun shunday $N$ nomer topiladiki, $j \geq N$ bo'lganda

$$K \subset \Omega_j$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, agar bunday bo'lmasa, shunday $x_j \in K$ nuqtalar ketma-ketligi topilar ediki, u uchun

$$x_j \notin \Omega_j, \; j = 1, 2, ...$$

bo'lar edi.

Bu nuqtalar ketma-ketligidan, $K$ to'plamning kompaktligiga ko'ra, biror $x_0 \in K$ nuqtaga yaqinlashuvchi qismiy $x_{j_k}$ ketma-ketlik ajratish mumkin. (14.1.3) shartga asosan esa, shunday $\Omega_m$ soha topiladiki, $x_0$ nuqta o'zining biror atrofi bilan $\Omega_m$ sohada yotadi. U holda, biror nomerdan boshlab $x_{j_k}$ ketma-ketlikning barcha nuqtalari ham $\Omega_m$ da yotadi, demak, (14.1.2) ga binoan, bu nuqtalar $j_k \geq m$ bo'lganda $\Omega_{j_k}$ sohada yotadi. Bu esa $x_j$ ketma-ketlikning tanlanishiga ziddir.

Xuddi bir karralik integral holidagidek, quyidagi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \qquad (14.1.4)$$

simvol bilan $f$ funksiyadan $\mathbb{R}^n$ fazosi bo'yicha olingan (birinchi tur) xosmas integralni belgilaymiz.

**Ta'rif.** *Agar $f$ lokal integrallanuvchi funksiya bo'lib, $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oluvchi har qanday kublanuvchi $\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik uchun*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx \tag{14.1.5}$$

*limit mavjud bo'lsa, u holda (14.1.4) xosmas integral* ***yaqinlashadi*** *deyiladi.*

Bunda $f$ funksiyaga $\mathbb{R}^n$ fazo bo'yicha (xosmas ma'noda) integrallanuvchi deymiz.

Agar (14.1.5) limit mavjud bo'lmasa, (14.1.4) integralni *uzoqlashadi* deymiz.

**2 - eslatma.** Bu ta'rifda har bir $\Omega_k$ soha kublanuvchi va demak, chegaralangan. Bundan chiqdi, bunday sohada olingan integral oddiy aniq (xos) integral bo'ladi.

**3 - eslatma.** Agar $f$ funksiya $\mathbb{R}^n$ bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda (14.1.4) limit qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalarining tanlanishiga bog'liq emas.

Haqiqatan, agar bunday bo'lmasa, $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi shunday ikki $\{\Omega'_k\}$ va $\{\Omega''_k\}$ sohalar ketma-ketligi topilar ediki, ularga mos (14.1.5) integrallar limiti o'zaro teng bo'lmas edi:

$$\lim_{k\to\infty} I(\Omega'_k) \ = \alpha \ \neq \ \beta \ = \ \lim_{k\to\infty} I(\Omega''_k).$$

Lekin, 1 - eslatmaga ko'ra, $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalar ketma-ketligini shunday tuzish mumkinki, bunda $\{\Omega_{2k-1}\}$ elementlar $\{\Omega'_m\}$ ketma-ketlikning biror qismiy ketma-ketligi, $\{\Omega_{2k}\}$ lar esa, $\{\Omega''_m\}$ ketma-ketlikning biror qismiy ketma-ketligi bo'ladi. Ravshanki, bunday $\{\Omega_k\}$ lar uchun mos (14.1.5) sonli ketma-ketlik ikki xil limitga ega:

$$\lim_{k\to\infty} I(\Omega_{2k-1}) = \alpha, \quad \lim_{k\to\infty} I(\Omega_{2k}) = \beta\ .$$

Bundan chiqdi, $\{I(\Omega_k)\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lmas ekan. Bu esa xosmas integralning yaqinlashish ta'rifiga ziddir.

Shunday qilib, agar (14.1.5) limit $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi *ixtiyoriy* sohalar ketma-ketligi uchun mavjud bo'lsa, u holda bu limit sohalar ketma-ketligining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi. Bu limit $f$ funksiyadan $\mathbb{R}^n$ fazo bo'yicha olingan *xosmas integral* deyiladi va ushbu

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx \tag{14.1.6}$$

ko'rinishda belgilanadi.

E'tibor bering, (birinchi tur) xosmas integral deb (14.1.4) simvolga ham, (14.1.6) limitga (bu limit mavjud bo'lganda) teng songa ham aytilar ekan.

**14.1.1 - teorema.** *Agar $f$ va $g$ funksiyalardan $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integrallar mavjud bo'lsa, u holda istalgan haqiqiy $\lambda$ va $\mu$ sonlar uchun $\lambda f + \mu g$ funksiyadan olingan xosmas integral ham mavjud bo'lib, quyidagi*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx \;=\; \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \;+\; \mu \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot** xos integrallarning integral ostidagi funksiyaga chiziqli bog'liqligi hamda limitga o'tish amalining chiziqliligidan oson kelib chiqadi.

**2. Manfiymas funksiyadan olingan xosmas integral.** Agar ta'rifga qat'iy amal qilsak, (14.1.4) xosmas integralni yaqinlashishini isbotlash uchun (14.1.5) limitning *barcha* qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ ketma-ketliklar uchun mavjudligini ko'rsatish kerak. Ammo manfiymas funksiyalar uchun xosmas integralning yaqinlashishi ancha oson tekshiriladi.

**14.1.2 - teorema.** *Agar $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi $f$ funksiya manfiymas bo'lib,*

$$I(\Omega_k) \;=\; \int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx$$

*sonli ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalarni aqalli bitta tanlashda chegaralangan bo'lsa, u holda (14.1.4) integral yaqinlashadi.*

**Isbot.** Faraz qilaylik, $I(\Omega_k)$ sonli ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi biror ketma-ketlik uchun chegaralangan bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, $\Omega_k$ sohalar kengayadi va teorema shartiga ko'ra, $f$ funksiya manfiymas. Shunday ekan, $I(\Omega_k)$ ketma-ketlik o'suvchi, demak, chekli

$$\lim_{k\to\infty} I(\Omega_k) = I$$

limit mavjud. Bundan tashqari, istalgan $k$ nomer uchun

$$I(\Omega_k) \leq I \tag{14.1.7}$$

tengsizlik o'rinli.

Endi $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi boshqa bir $\{\Omega'_j\}$ ketma-ketlik olaylik. Yuqorida qayd qilinganidek, istalgan $j$ nomer uchun shunday $k$ nomer topiladiki, $\overline{\Omega'_j} \subset \Omega_k$ bo'ladi va integral ostidagi funksiya manfiymas bo'lgani uchun, $I(\Omega'_j) \leq I(\Omega_k)$. Demak, (14.1.7) ga ko'ra, istalgan $j$ nomer uchun

$$I(\Omega'_j) \leq I$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan chiqdi, $\{I(\Omega'_j)\}$ sonli ketma-ketlik o'suvchi va chegaralangan, demak, u yaqinlashadi.

Shunday qilib, (14.1.5) limit istalgan qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik uchun mavjud. Bu esa (14.1.4) xosmas integralning yaqinlashishini anglatadi.■

**Natija.** *Faraz qilaylik, $f$ va $g$ funksiyalar $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi bo'lib,*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

*shartni qanoatlantirsin.*

*Agar $g$ funksiyadan $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integral yaqinlashsa, u holda $f$ funksiyadan olingan xosmas integral ham yaqinlashadi.*

Haqiqatan,

$$\int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx \ \le \ \int\limits_{\Omega_k} g(x)\,dx$$

tengsizliklarga ko‘ra, agar o‘ng tomondagi integrallar ketma-ketligi yaqinlashsa, u holda chap tomondagi integrallar ketma-ketligi chegaralangan bo‘ladi, demak, 14.1.2 - teoremaga asosan, yaqinlashadi.

**14.1.1 - misol.** $p \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida

$$I_p \ = \ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1+|x|^p} \tag{14.1.8}$$

integral yaqinlashishini aniqlang.

Quyidagi

$$\Omega_k \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < k\}$$

sharlar ($n = 2$ da doiralar) ketma-ketligini qaraylik.

Ravshanki, $\Omega_k$ ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oladi. (14.1.1) integrallarni hisoblash uchun sferik koordinatalar sistemasiga o‘tib, (13.8.17) va (13.8.18) formulalardan foydalanamiz:

$$I_p(\Omega_k) \ = \ \int\limits_{\Omega_k} \frac{dx}{1+|x|^p} \ = \ \omega_n \int\limits_0^k \frac{r^{n-1}\,dr}{1+r^p}.$$

Agar $p > n$ bo‘lsa, oxirgi bir karrali integral $k$ bo‘yicha chegaralangan. Shunday ekan, 14.1.2 - teoremaga ko‘ra, (14.1.8) integral $p > n$ da yaqinlashadi va $p \le n$ da uzoqlashadi.

**3. Taqqoslash alomatlari.** Yuqorida o‘rnatilgan manfiymas funksiyalardan olingan xosmas integrallar xossalari yordamida xosmas integrallar yaqinlashishining taqqoslash alomatlari deb ataluvchi, yetarli shartlarini aniqlash mumkin.

**14.1.3 - teorema (taqqoslashning umumiy alomati).** *Faraz qilaylik, $f$ va $g$ funksiyalar $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi bo‘lib, quyidagi*

$$|f(x)| \ \le \ g(x)$$

*shartni qanoatlantirsin.*

*Agar $g$ funksiyadan $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integral yaqinlashsa, u holda $f$ dan olingan xosmas integral ham yaqinlashadi.*

**Isbot.** Ikki

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \qquad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \tag{14.1.9}$$

manfiymas funksiyalarni kiritaylik.

Ushbu funksiyalar lokal integrallanuvchi bo'lib,

$$0 \leq f_\pm(x) \leq |f(x)| \leq g(x)$$

tengsizliklar bajariladi.

14.1.2 - teoremaning natijasiga ko'ra, har ikki $f_\pm$ funksiyalar $\mathbb{R}^n$ da xosmas ma'noda integrallanuvchi, demak, 14.1.1 - teoremaga ko'ra, $f = f_+ - f_-$ funksiya ham integrallanuvchi bo'ladi.■

**14.1.4 - teorema (taqqoslashning xususiy alomati).** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya $\mathbb{R}^n$ da lokal integrallanuvchi bo'lsin.*

*1) Agar*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^p}, \quad p > n,$$

*shart bajarilsa, (14.1.4) xosmas integral yaqinlashadi.*

*2) Agar*

$$f(x) \geq \frac{C}{1+|x|^p}, \quad p \leq n,$$

*shart bajarilsa, (14.1.4) xosmas integral uzoqlashadi.*

**Isbot** 14.1.3 - teorema va 14.1.1 - misoldan kelib chiqadi.

$n$ karrali xosmas integralga muhim misollardan biri quyidagi

$$P_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \tag{14.1.10}$$

integraldir.

Taqqoslashning xususiy alomatidan bu integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Shuni aytish kerakki, bir o'zgaruvchili holda

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{14.1.11}$$

integralni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash oson emas, chunki integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi elementar funksiya bo'lmaydi.

Biz (14.1.10) integralni hisoblashni $n = 2$ holdan boshlaymiz.

**14.1.2 - misol.** Ikki karrali quyidagi

$$P_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \tag{14.1.12}$$

xosmas integralni hisoblang.

$\mathbb{R}^2$ tekislikni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < k^2\}$$

doiralarni olamiz.

Qutb koordinatalariga o'tib,

$$P_2(D_k) = \int_{D_k} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k e^{-r^2} r\, dr =$$

$$= -2\pi \cdot \frac{1}{2}\, e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=k} = \pi \left(1 - e^{-k^2}\right)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$P_2 = \lim_{k\to\infty} P_2(D_k) = \pi,$$

ya'ni

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi.$$

**14.1.3 - misol.** Bir o‘lchovli (14.1.11) integralni hisoblang.

Avval ikki karrali (14.1.12) integralni, $\mathbb{R}^2$ tekislikni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$Q_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : |x| < k, |y| < k\}$$

kvadratlarni olib, hisoblaymiz.

Ma’lumki,

$$P_2(Q_k) = \int\limits_{Q_k} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2} dx \int\limits_{-k}^{k} e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2} dx\right)^2.$$

Endi $k \to \infty$ deb limitga o‘tsak,

$$P_2 = P_1^2$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$P_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**14.1.4 - misol.** $n$ karrali (14.1.10) xosmas integralni hisoblang.

$\mathbb{R}^n$ fazoni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$Q_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < k, j = 1, 2, ..., n\}$$

kublarni olamiz.

U holda

$$P_n(Q_k) = \int\limits_{Q_k} e^{-(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)}\, dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$= \int_{-k}^{k} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-k}^{k} e^{-x_2^2} dx_2 \ldots \int_{-k}^{k} e^{-x_n^2} dx_n = \left( \int_{-k}^{k} e^{-x^2} dx \right)^n .$$

Endi $k \to \infty$ deb limitga o'tsak,

$$P_n = P_1^n = \sqrt{\pi}^n$$

tenglikka kelamiz.

Demak,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)} \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \pi^{n/2}. \qquad (14.1.13)$$

**4. Xosmas integrallarning absolyut yaqinlashishi.** Bir o'zgaruvchili holdagiga o'xshash karrali xosmas integrallar uchun ham absolyut yaqinlashish tushunchasini kiritish mumkin.

**Ta'rif.** *Agar quyidagi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx \qquad (14.1.14)$$

*integral yaqinlashsa, (14.1.4) xosmas integral* ***absolyut*** *yaqinlashadi deyiladi.*

Bevosita 14.1.3 - teoremadan lokal integrallanuvchi funksiyadan olingan absolyut yaqinlashuvchi xosmas integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Shartli yaqinlashuvchi xosmas karrali integral tushunchasini ham, odatdagidek, yaqinlashuvchi, lekin absolyut yaqinlashmaydigan xosmas integral deb kiritsa bo'lar edi. Lekin bunday integral mavjud emas. Bunga sabab $\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini tanlash imkoniyatining kengligidadir. Chunonchi, biz shunday qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini tuzishimiz mumkinki, bunda tuzilgan sohalarning katta qismi berilgan $f$ funksiyaning musbat bo'lgan to'plami bilan ustma-ust tushadi. Bunday to'plamda $f(x) = |f(x)|$ tenglik bajarilib, $f$ dan olingan integralning yaqinlashishi $|f|$

dan olingan integralning ham yaqinlashishini ta'minlaydi. Navbatdagi teorema bu mulohazalarimizning asosli ekanini ko'rsatadi.

**14.1.5 - teorema.** *Yaqinlashuvchi xosmas karrali integral absolyut yaqinlashadi.*

**Isbot.** (14.1.4) integral yaqinlashsin deb faraz qilib, (14.1.14) integralning ham yaqinlashishini isbotlaymiz. Haqiqatan, agar bunday bo'lmasa, (14.1.9) funksiyalarning biridan, masalan, $f_+(x)$ dan olingan xosmas integral uzoqlashadi.

$\mathbb{R}^n$ ni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligi sifatida radiusi monoton ravishda $+\infty$ ga intiluvchi

$$\Omega_k \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; |x| < R_k\}, \quad k = 1, 2, 3, ...,$$

sharlar ketma-ketligini olamiz.

Xosmas integral yaqinlashishining ta'rifidan (14.1.6) limitning mavjudligi kelib chiqadi. Boshqa tomondan, $f_+$ dan olingan xosmas integralni uzoqlashadi deb faraz qilganimiz uchun, 14.1.2 - teoremaga ko'ra,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f_+(x)\,dx \;=\; +\infty.$$

$L_k$ orqali

$$L_k \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; R_k \le |x| < R_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

ko'rinishdagi shar qatlamini ($n = 2$ da doiraviy xalqani) belgilaymiz va o'suvchi $\{R_k\}$ ketma-ketlikni quyidagi

$$\int\limits_{L_k} f_+(x)\,dx \;>\; k \tag{14.1.15}$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olamiz.

Endi quyidagicha yo'l tutish mumkin edi. Ya'ni, $P_k$ orqali $L_k$ qatlamning $f$ funksiya musbat bo'lgan nuqtalari to'plamini belgilab, bu to'plam ochiq, bog'langan va kublanuvchi bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda $\widetilde{\Omega}_k = \Omega_k \cup P_k$ sohalar ketma-ketligi ham qamrab oluvchi bo'lib, kublanuvchi to'plamlardan iborat bo'ladi. Shunday ekan, $f$ funksiyadan $\widetilde{\Omega}_k$ sohalar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi ham yaqinlashadi. Bundan chiqdi, $\widetilde{\Omega}_k \setminus \Omega_k = P_k$ sohalar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi ham yaqinlashishi kerak. Lekin bu (14.1.15) ga zid, chunki $x \in P_k$ uchun $f_+(x) = f(x)$ tenglik bajariladi va demak,

$$\int\limits_{P_k} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{P_k} f_+(x)\,dx \;=\; \int\limits_{L_k} f_+(x)\,dx \;>\; k.$$

Ammo bu mulohazalarning kamchiligi shundaki, $f_+(x) > 0$ shart o'rinli bo'lgan $P_k$ to'plam ochiq, bog'langan va kublanuvchi bo'lmasligi mumkin. Shu sababli, teoremani isbotlash uchun qo'shimcha mulohazalar yuritish zarur.

$L_k$ shar qatlamining bog'langan kublanuvchi to'plamlardan iborat bo'lgan shunday $\{E_j\}_{j=1}^m$ bo'linishini olamizki, bunda (14.1.15) ning chap tomonidagi integral uchun Darbuning quyi yig'indisi shu integraldan 1 sonidan kamga farq qilsin (bo'linish diametrini yetarlicha kichik qilib tanlab, bunga doim erishish mumkin). U holda, $m_j(f_+) = \inf\limits_{x \in E_j} f_+(x)$ desak, (14.1.15) dan

$$\sum_{j=1}^{N} m_j(f_+)|E_j| \;>\; k - 1 \tag{14.1.16}$$

baho kelib chiqadi.

Ushbu

$$F_k \;=\; {\bigcup_j}' E_j$$

to'plamni qaraylik, bu yerdagi shtrix yig'indining $m_j(f_+) > 0$ baho bajarilgan to'plamlar bo'yicha olinayotganini bildiradi. Ushbu to'plam kublanuvchi va unda $f_+$ funksiya qat'iy musbat. Bundan chiqdi, barcha $x \in F_k$ lar uchun

$$f_+(x) \;=\; f(x)$$

tenglik o‘rinli.

Ma’lumki, Darbuning quyi yig‘indisi integraldan oshib ketmaydi. Demak, (14.1.16) ga ko‘ra,

$$\int\limits_{F_k} f(x)\,dx \;\geq\; \sum_j{}' \; m_j(f_+)|E_j| \;\geq\; \sum_{j=1}^{N} m_j(f_+)|E_j| \;>\; k-1. \tag{14.1.17}$$

Hajmi nolga teng bo‘lgan $\partial F_k$ chegarani chiqarib tashlab, $F_k$ to‘plamni ochiq qilib olishimiz mumkin. Hosil bo‘lgan to‘plamga uni $\Omega_k$ shar bilan tutashtiruvchi radial ravishda joylashgan yetarlicha tor ko‘pyoqlilarni qo‘shib, shunday kublanuvchi $H_k \subset L_k$ to‘plamni olamizki, bunda $\Omega_k \cup H_k$ to‘plam ochiq va bog‘langan bo‘ladi. Tutashtiruvchi ko‘pyoqlilarda $f$ funksiya manfiy bo‘lib, (14.1.17) tengsizlik buzilishi mumkin. Lekin bu ko‘pyoqlilarni shunchalik tor qilib tanlash mumkinki, natijada

$$\int\limits_{H_k} f(x)\,dx \;>\; k-2 \tag{14.1.18}$$

tengsizlik bajariladi.

Endi quyidagi

$$\Omega'_k \;=\; \Omega_k \cup H_k$$

kengayuvchi sohalar ketma-ketligini qaraylik.

Har ikki $\{\Omega_k\}$ va $\{\Omega'_k\}$ ketma-ketlik $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oladi. Demak, $f$ funksiyadan olingan xosmas integralning yaqinlashishiga ko‘ra,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega'_k} f(x)\,dx$$

limitlar mavjud va o‘zaro teng.

Ammo bu, (14.1.18) ga ko‘ra o‘rinli bo‘lgan quyidagi

$$\int\limits_{\Omega'_k} f(x)\,dx \;-\; \int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{H_k} f(x)\,dx \;>\; k-2$$

tengsizlikka ziddir.

Hosil bo‘lgan ziddiyat absolyut yaqinlashmaydigan integralning umuman yaqinlashmasligini isbotlaydi.■

**14.1.5 - misol.** Ushbu

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \tag{14.1.19}$$

ikki karrali xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Qamrab oluvchi ketma-ketlik elementlari sifatida

$$\Omega_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2<R_k^2\}$$

doiralarni olamiz.

Qutb koordinatalariga o‘tsak,

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\pi\int\limits_0^{R_k} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2}\,\rho\,d\rho = \pi\int\limits_0^{R_k^2}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

tenglikka kelamiz.

Oxirgi bir karrali integralning limiti mavjud bo‘lib, u $\pi/2$ ga teng. Demak,

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{2}. \tag{14.1.20}$$

Shunday qilib, kengayuvchi doiralar ketma-ketligiga mos kelgan integrallar limiti $\pi^2/2$ ga teng ekan. Shu faktga asoslanib, (14.1.19) integralni yaqinlashadi deya olamizmi? Yo‘q, chunki ta’rifga ko‘ra, qayd qilingan limit qamrab oluvchi ketma-ketliklarni ixtiyoriy tanlashda ham mavjud bo‘lishi kerak.

(14.1.19) integralning yaqinlashish masalasini hal qilish uchun barcha qamrab oluvchi ketma-ketliklarda yaqinlashishni tekshirish o‘rniga, 14.1.5 - va 14.1.2 - teoremalardan foydalanamiz. Buning uchun integral ostidagi funksiya modulidan olingan integralni aqalli bitta qamrab oluvchi ketma-ketlik uchun tekshirish yetarli.

Haqiqatan, $\Omega_k$ sifatida yana yuqoridagi doiralar ketma-ketligini olsak,

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{|\sin(x^2+y^2)|}{x^2+y^2}\,dx\,dy \;=\; 2\pi\int\limits_0^{R_k} \frac{|\sin\rho^2|}{\rho^2}\,\rho\,d\rho \;=\; \pi\int\limits_0^{R_k^2} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

tenglikka kelamiz.

Ma'lumki, oxirgi bir karrali integral $R_k \to \infty$ da $+\infty$ ga intiladi, demak, (14.1.19) integral absolyut yaqinlashmaydi. Bundan chiqdi, u umuman yaqinlashmas ekan.

**5. Karrali xosmas integrallar bilan karrali sonli qatorlar yaqinlashishi orasidagi bog'liqlik.** Bir o'zgaruvchili holda sonli qator yaqinlashishining Koshi-Makloren alomati mos birinchi tur xosmas integral yaqinlashishiga asoslangan edi (9.2.5 - teoremaga qarang). Xuddi shu singari yaqinlashish alomati karrali sonli qatorlar uchun ham o'rinli.

Faraz qilaylik, $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0, y \geq 0\}$ kvadrantda aniqlangan ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiya har bir argumenti bo'yicha monoton kamaysin:

$$f(x+\xi, y+\eta) \;\leq\; f(x,y), \quad (x,y) \in Q, \quad \xi \geq 0,\ \eta \geq 0. \tag{14.1.21}$$

Bu funksiya lokal integrallanuvchi bo'lgani uchun biz quyidagi

$$I \;=\; \iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy \tag{14.1.22}$$

birinchi tur xosmas integralni qarashimiz mumkin.

Bu integral bilan birga ushbu

$$S \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(k,m) \tag{14.1.23}$$

ikki karrali qatorni olaylik.

E'tibor bering, bir o'zgaruvchili holdan farqli o'laroq, (14.1.23) qator yaqinlashishi jamlanishning qaysi nomerdan boshlab amalga oshirilishiga bog'liq. Masalan, (14.1.23) qator uzoqlashsada,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(k,m) \qquad (14.1.24)$$

qator yaqinlashishi mumkin. Misol sifatida koordinata o'qlarida birga va o'qlardan tashqarida nolga teng $f$ funksiyani olish kifoya.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

**14.1.6 - teorema.** *Faraz qilaylik, $Q$ kvadrantda aniqlangan manfiymas $f$ funksiya (14.1.21) monotonlik shartini qanoatlantirsin.*

*1) Agar (14.1.22) integral yaqinlashsa, (14.1.24) sonli qator ham yaqinlashadi.*

*2) Agar (14.1.22) integral uzoqlashsa, (14.1.23) sonli qator ham uzoqlashadi.*

*3) Yaqinlashuv o'rinli bo'lgan holda navbatdagi*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(k,m) \le \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy \le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(k,m) \qquad (14.1.25)$$

*tengsizliklar bajariladi.*

**Isbot.** Butun koordinatali har qanday $(k,m) \in Q$ nuqta uchun navbatdagi

$$Q(k,m) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, k \le x < k+1, \; m \le y < m+1\}$$

birlik kvadratni qaraymiz.

Ma'lumki, bunday kvadratlar o'zaro kesishmaydi va ularning birlashmasi butun $Q$ kvadrantni qoplaydi:

$$\bigcup_{k,m=0}^{\infty} Q(k,m) = Q. \qquad (14.1.26)$$

(14.1.21) monotonlik shartiga ko'ra, $Q(k,m)$ kvadratning har bir nuqtasida

$$f(k+1,m+1) \le f(x,y) \le f(k,m), \quad (x,y) \in Q(k,m),$$

tengsizlik o‘rinli.

Bu tengsizliklarni $Q(k,m)$ kvadrat bo‘yicha integrallab, kvadrat yuzi 1 ga tengligini hisobga olsak, quyidagi

$$f(k+1,m+1) \;\le\; \iint\limits_{Q(k,m)} f(x,y)\,dx\,dy \;\le\; f(k,m)$$

munosabatga kelamiz.

Bu tengsizliklarni barcha $k \ge 0$ va $m \ge 0$ lar bo‘yicha yig‘ib, (14.1.26) ni hisobga olsak, teorema tasdig‘iga va talab qilingan (14.1.25) munosabatga ega bo‘lamiz.■

**Eslatma.** Odatda, (14.1.22) xosmas integral yaqinlashishi biror $R > 0$ radiusli shardan tashqarida, ya’ni $x^2+y^2 \ge R^2$ da tekshiriladi.

**14.1.6 - misol.** Ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+m^2)^{\alpha/2}} \tag{14.1.27}$$

ikki karrali qator $\alpha > 0$ ning qaysi qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Agar

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}, & x^2+y^2 \ge 1, \\ \quad 1, & x^2+y^2 < 1, \end{cases}$$

desak, shubhasiz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(k,m) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+m^2)^{\alpha/2}} \tag{14.1.28}$$

tenglik bajariladi.

Bundan tashqari, agar $\zeta(\alpha)$ Riman dzeta-funksiyasi bo‘lsa ((9.6.17) formulaga qarang),

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(k,m) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+m^2)^{\alpha/2}} =$$

$$= \ 1 \ + 2\zeta(\alpha) \ + \ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2+m^2)^{\alpha/2}} \ . \qquad (14.1.29)$$

$f$ funksiyadan $Q$ kvadrantning birlik doiradan tashqaridagi qismi bo‘yicha olingan integralni baholaymiz. Buning uchun qutb koordinatalariga o‘tsak,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \ = \ 2\pi \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\rho\,d\rho}{\rho^{\alpha}}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu integral $\alpha > 2$ da yaqinlashadi, demak, 14.1.6 - teoremaga ko‘ra, (14.1.27) qator $\alpha > 2$ da yaqinlashadi.

Agarda $\alpha \leq 2$ bo‘lsa, integral uzoqlashadi va shuning uchun (14.1.29) qator uzoqlashadi. Bundan (14.1.27) qatorning $\alpha \leq 2$ da uzoqlashishi kelib chiqadi. Xususan, navbatdagi qator uzoqlashadi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+m^2} \ = \ +\,\infty.$$

Xuddi ikki karrali qator singari aniqlanadigan $n$ karrali qatorlar uchun ham yuqoridagi natija o‘rinli.

Butun $k_j \geq 1$ koordinatali $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ vektorni kiritaylik. Agar $a_k$ haqiqiy sonlar bo‘lsa,

$$S \ = \ \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} a_k \qquad (14.1.30)$$

formal yig‘indini $n$ karrali sonli qator deymiz. Ikki karrali qatorlar holidagidek, (14.1.30) qator yaqinlashishiga turli ta’riflar berish mumkin. Masalan, bu qatorni takroriy qator deb qarash mumkin, ya’ni avval bir indeks bo‘yicha 1 dan $\infty$ gacha yig‘ib chiqamiz, so‘ngra boshqa indeks bo‘yicha va hokazo.

Ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalarni o‘rganishda quyidagi

$$S_m \ = \ \sum_{k_1=1}^{m_1}\sum_{k_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} a_k$$

to‘g‘ri to‘rtburchakli qismiy yig‘indilarni qarashga to‘g‘ri keladi, bu yerda $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$ butun musbat koordinatali vektor. Agar

$$\lim_{\min\{m_j\}\to\infty} S_m \ = \ S$$

bo‘lsa, (14.1.30) qator $S$ soniga *to‘g‘ri to‘rtburchaklar* bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi.

Differensial operatorlarning spektral nazariyasida quyidagi

$$S_R \ = \ \sum_{|k|<R} a_k$$

*doiraviy* (yoki *sferik*) qismiy yig‘indilar muhim rol o‘ynaydi, bu yerda $R$ musbat son bo‘lib, yig‘indi esa indeksi

$$|k| \ = \ \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + ... + k_n^2} \ < \ R$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $a_k$ hadlar bo‘yicha olinadi.

Umumiy holda (14.1.30) qator yaqinlashishi qismiy yig‘indi ko‘rinishini tanlashga bog‘liq. Ammo, agar qatorning barcha hadlari manfiymas bo‘lsa, qator yaqinlashishi bu tanlovga bog‘liq emas (9.3.3 - teoremaga qarang). Bu holda 14.1.6 - teoremaga o‘xshash tasdiq o‘rinli.

**14.1.7 - teorema.** *Faraz qilaylik, manfiymas $f(x)$ funksiya*

$$\Omega \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n\}$$

*sohada aniqlangan bo‘lib, bu sohada quyidagi*

$$f(x + \xi) \ \leq \ f(x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_j \geq 0, \tag{14.1.31}$$

*monotonlik shartini qanoatlantirsin.*

*U holda ushbu*

$$\sum_{k_j \geq 1} f(k) \ \leq \ \int_{\Omega} f(x)\, dx \ \leq \ \sum_{k_j \geq 0} f(k) \tag{14.1.32}$$

*qo'sh tengsizlik bajarilib, agar tengsizlik biror qismi chekli bo'lsa, undan chapdagi qismi ham chekli bo'ladi.*

**Isbot** xuddi 14.1.6 - teorema isboti kabidir.

**14.1.7 - misol.** Ushbu

$$S_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, k\neq 0} \frac{1}{|k|^\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, k\neq 0} \frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)^{\alpha/2}} \qquad (14.1.33)$$

qator $\alpha > 0$ ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Xuddi 14.1.6 - misoldagidek mulohaza yuritib, (14.1.33) qatorning $\alpha > n$ da yaqinlashib, $\alpha \le n$ da esa, uzoqlashishini ko'ramiz.

## 14.2-§. Ixtiyoriy soha bo'yicha xosmas integrallar

**1.** Xosmas ma'noda integrallash muammosiga berilgan funksiya qaralayotgan sohada chegaralanmagan bo'lgan holda ham duch kelamiz. Odatda bunday funksiyalar sohaning istalgan kompakt qismida chegaralangan bo'ladi. Boshqacha aytganda, funksiya chegaralanmagan qiymatlarni faqat chegara atrofidagina qabul qiladi.

Bundan buyon bu bobda biz, bunga alohida urg'u bermasdan, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohada berilgan funksiya $\Omega$ ning istalgan kompakt kublanuvchi ($n = 2$ bo'lganda kvadratlanuvchi) qismiy to'plamida integrallanuvchi deb faraz qilamiz, ya'ni istalgan kompakt kublanuvchi $E \subset \Omega$ to'plam uchun quyidagi

$$I(E) = \int_E f(x)\,dx \qquad (14.2.1)$$

integralni mavjud deb hisoblaymiz.

Bunday funksiyalarni biz $\Omega$ da *lokal integrallanuvchi* deymiz. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{(R-|x|)^\alpha}$$

funksiya istalgan $\alpha > 0$ uchun

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$$

sharda lokal integrallanuvchi.

Boshqa bir misol sifatida shardan markazi chiqarib tashlangan

$$\Omega_0 \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; 0 < |x| < R\} \tag{14.2.2}$$

sohada (ya'ni, bir nuqtasi "o'yib olingan" sharda) lokal integrallanuvchi

$$f(x) \;=\; \frac{1}{|x|^\beta}, \quad \beta > 0,$$

funksiyani olish mumkin.

$\Omega$ sohada lokal integrallanuvchi $f$ funksiyadan $\Omega$ bo'yicha olingan xosmas integral, xuddi $\mathbb{R}^n$ bo'yicha olingan xosmas integral kabi, $\Omega$ ni qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ sohalar ketma-ketligi yordamida aniqlanadi. Bu holda, butun $\mathbb{R}^n$ fazosidan farqli o'laroq, qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini faqat monoton qilib olish (ya'ni (14.1.2) shartni qanoatlantiruvchi qilib olish) yetarli emas. Chunki, agar $\Omega$ soha kublanuvchi bo'lsa, u holda bunday ketma-ketlik elementi $\Omega$ bilan, yoki uning $f$ funksiya oddiy ma'noda integrallanuvchi bo'lmagan qismi bilan ustma-ust tushishi mumkin.

Bunday holni chetlab o'tish maqsadida, ketma-ketlik elementlarini $\Omega$ ichida yotuvchi biror kompaktning qismi qilib olish yetarli. Masalan, qamrab oluvchi ketma-ketlikning $\Omega_k$ elementlarini ularning $\overline{\Omega_k}$ yopig'i $\Omega$ da yotadigan qilib olish mumkin. U holda, $f$ funksiya lokal integrallanuvchi bo'lgani sababli, $\Omega_k$ sohalar bo'yicha $f$ dan olingan integrallar mavjud bo'ladi.

$\Omega$ sohani qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini quyidagi umum qabul qilingan ko'rinishda kiritamiz.

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik, $\Omega_k \subset \Omega$ sohalarning $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ ketma-ketligi quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:*

*1) $\Omega_k$ sohaning $\overline{\Omega_k} = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$ yopig'i $\Omega_{k+1}$ sohada yotsin, ya'ni:*

$$\overline{\Omega_k} \;\subset\; \Omega_{k+1}\;; \tag{14.2.3}$$

*2) barcha $\Omega_k$ sohalarning birlashmasi $\Omega$ soha bilan ustma-ust tushsin, ya'ni:*

$$\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k \;=\; \Omega. \tag{14.2.4}$$

*U holda bunday ketma-ketlik $\Omega$ sohani* ***qamrab oladi*** *deymiz.*

Masalan, markazi biror nuqtada bo'lgan konsentrik (ya'ni biri ikkinchisi ichida yotgan) sharlar ketma-ketligini olaylik. Agar ularning $R_k$ radiuslari qat'iy o'sib, $R$ soniga intilsa, bu ketma-ketlik markazi o'sha nuqtada va radiusi $R$ ga teng bo'lgan sharni qamrab oladi.

Boshqa bir misol sifatida bir nuqtasi o'yib olingan (14.2.2) sharni qamrab oluvchi

$$\Omega_k \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \frac{1}{k} < |x| < R\}$$

ketma-ketlikni olishimiz mumkin.

**1 - eslatma.** Agar $\{\Omega_m\}$ sohalar ketma-ketligi $\Omega$ sohasini qamrab olsa, u holda istalgan $K \subset \Omega$ kompakt to'plam uchun biror $N$ nomerdan boshlab

$$K \;\subset\; \Omega_m, \quad m \geq N,$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu tasdiq xuddi $\mathbb{R}^n$ fazo holidagidek isbotlanadi (§14.1 ning 1 - bandiga qarang).

Xuddi bir karralik integral holidagidek, quyidagi

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx \tag{14.2.5}$$

simvol bilan $f$ funksiyadan $\Omega$ soha bo'yicha olingan (ikkinchi tur) xosmas integralni belgilaymiz.

**Ta'rif.** *Agar $f$ funksiya $\Omega$ sohada lokal integrallanuvchi bo'lib, bu sohani qamrab oluvchi har qanday kublanuvchi $\{\Omega_k\}$ sohalar ketma-ketligi uchun*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f(x)\,dx \tag{14.2.6}$$

*limit mavjud bo'lsa, u holda (14.2.5) xosmas integral* ***yaqinlashadi*** *deyiladi.*

Bunda $f$ funksiyani $\Omega$ soha bo'yicha (xosmas ma'noda) integrallanuvchi deymiz.

Agar (14.2.6) limit mavjud bo'lmasa, (14.2.5) integralni *uzoqlashadi* deymiz.

**2 - eslatma.** Agar $f$ funksiya $\Omega$ soha bo'yicha xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsa, u holda yuqoridagi limit qamrab oluvchi $\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik tanlanishiga bog'liq emasligini ko'rsatish qiyin emas. Bu tasdiq xuddi $\mathbb{R}^n$ fazosi bo'yicha xosmas integrallar holidagidek isbotlanadi.

Agar (14.2.5) xosmas integral yaqinlashsa, (14.2.6) limit $f$ funksiyadan $\Omega$ soha bo'yicha olingan xosmas integral deyiladi va quyidagi

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx \tag{14.2.7}$$

ko'rinishda belgilanadi.

E'tibor bering, (ikkinchi tur) xosmas integral deb (14.2.5) simvolga ham, (14.2.6) limitga (bu limit mavjud bo'lganda) teng songa ham aytilar ekan.

**14.2.1 - teorema.** *Agar $f$ va $g$ funksiyalardan $\Omega$ soha bo'yicha olingan xosmas integrallar yaqinlashsa,u holda istalgan haqiqiy $\lambda$ va $\mu$ sonlari uchun $\lambda f+\mu g$ funksiyadan olingan xosmas integral mavjud va navbatdagi*

$$\int\limits_{\Omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx \;=\; \lambda \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx \;+\; \mu \int\limits_{\Omega} g(x)\,dx$$

*tenglik o'rinli bo'ladi.*

**Isbot** aniq integral va limitga o'tish amalining chiziqliligidan kelib chiqadi.

**2.** Butun fazo bo'yicha integral holidagidek, navbatdagi shart manfiymas funksiyadan istalgan soha bo'yicha olingan xosmas integralning yaqinlashishini ta'minlaydi.

**14.2.2 - teorema.** *Agar $f$ funksiya manfiymas bo'lib,*

$$I(\Omega_k) \;=\; \int\limits_{\Omega_k} f(x)\,dx$$

*sonli ketma-ketlik $\Omega$ sohani qamrab oluvchi aqalli bitta $\{\Omega_k\}$ ketma-ketlik uchun chegaralangan bo‘lsa, u holda (14.2.5) integral yaqinlashadi.*

**Isbot** butun fazo bo‘yicha integral holidagidek olib boriladi.

**14.2.1 - misol.** Agar

$$\Omega \; = \; \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; |x| < R\}$$

bo‘lsa,

$$A(\alpha) \; = \; \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{(R - |x|)^{\alpha}}$$

integralni $\alpha$ ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

$\Omega$ ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k \; = \; \left\{x \in \mathbb{R}^n \; : \; |x| < R - \frac{1}{k}\right\}$$

sharlarni olamiz.

Agar sferik koordinatalarga o‘tsak,

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{dx}{(R - |x|)^{\alpha}} \; = \; \omega_n \int\limits_{0}^{R-1/k} \frac{r^{n-1}}{(R - r)^{\alpha}}$$

tenglikni olamiz.

Oxirgi bir o‘lchovli integral $k \to \infty$ da $\alpha < 1$ lar uchungina yaqinlashadi. Demak, $A(\alpha)$ integral $\alpha < 1$ da yaqinlashadi va $\alpha \geq 1$ da uzoqlashadi.

**14.2.2 - misol.** Agar

$$\Omega \; = \; \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; 0 < |x| < R\}$$

bo‘lsa,

$$B(\beta) \; = \; \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{|x|^{\beta}}$$

integralni $\beta$ ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

$\Omega$ ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \frac{1}{k} < |x| < R \right\}$$

shar qatlamlarini olamiz.

Sferik koordinatalariga oʻtsak, $\beta < n$ lar uchun

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{dx}{|x|^\beta} = \omega_n \int\limits_{1/k}^{R} \frac{r^{n-1}}{r^\beta} = \frac{\omega_n}{n-\beta} \left[ R^{n-\beta} - \left(\frac{1}{k}\right)^{n-\beta} \right]$$

tengliklarni olamiz.

Demak, $\beta < n$ da $B(\beta)$ integral yaqinlashadi va u

$$B(\beta) = \frac{\omega_n}{n-\beta} R^{n-\beta}$$

ga teng.

Agar $\beta \geq n$ boʻlsa, $B(\beta)$ uzoqlashadi.

**14.2.3 - misol.** Agar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ixtiyoriy kublanuvchi soha boʻlib, $a$ uning biror tayinlangan nuqtasi boʻlsa,

$$I(\beta) = \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{|x-a|^\beta}$$

integralni $\beta$ ning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

Biz $I(\beta)$ ni berilgan $\Omega$ sohadan $a$ nuqtani oʻyib olingan $\Omega(a) = \Omega \setminus \{a\}$ soha boʻyicha xosmas integral deb qarashimiz mumkin. $\Omega(a)$ ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega \ : \ |x-a| > \frac{1}{k} \right\}$$

sohalar ketma-ketligini olamiz.

Endi $N$ nomerni shunday tanlaymizki, radiusi $\frac{1}{N}$ ga teng va markazi $a \in \Omega$ nuqtada boʻlgan shar toʻlaligicha $\Omega$ da yotsin. U holda $k > N$ lar uchun

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{dx}{|x-a|^\beta} = \int\limits_{\Omega_N} \frac{dx}{|x-a|^\beta} + \int\limits_{\Omega_k \setminus \Omega_N} \frac{dx}{|x-a|^\beta}$$

deb yozishimiz mumkin.

O‘ng tomondagi birinchi integral ostidagi funksiya chegaralangan va bu integral $k$ ga bog‘liq emas, ikkinchi integral esa, parallel ko‘chirish yordamida 14.2.2 - misolda qaralgan integralga keladi. Demak, $\beta < n$ bo‘lsa, $I(\beta)$ integral yaqinlashadi va $\beta \geq n$ da $I(\beta)$ integral uzoqlashadi.

**3 - eslatma.** Bundan buyon, biror $a \in \Omega$ nuqtada yakkalangan maxsuslikka ega bo‘lgan funksiyadan $\Omega$ soha bo‘yicha olingan integral deganda, aynan 14.2.3 - misoldagi integralni, ya’ni $\Omega \setminus \{a\}$ soha bo‘yicha olingan xosmas integralni tushunamiz.

**3. Taqqoslash alomatlari.** Xosmas integrallar yaqinlashishining, taqqoslash alomatlari deb ataluvchi yetarli shartlarini keltiramiz. Isbot xuddi butun fazo bo‘yicha integral holidagidek olib boriladi.

**14.2.3 - teorema (taqqoslashning umumiy alomati).** *Faraz qilaylik, $f$ va $g$ funksiyalar $\Omega$ da lokal integrallanuvchi bo‘lib,*

$$|f(x)| \ \leq \ g(x)$$

*shart bajarilsin.*

*Agar $\Omega$ bo‘yicha $g$ funksiyadan olingan xosmas integral yaqinlashsa, u holda $f$ funksiyadan olingan xosmas integral ham yaqinlashadi.*

**Isbot** 14.1.3 - teorema isbotiga o‘xshash.

**14.2.4 - teorema (taqqoslashning xususiy alomati).** *Faraz qilaylik, $a$ kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohasining ixtiyoriy nuqtasi bo‘lib, $f$ funksiya $\Omega \setminus \{a\}$ da lokal integrallanuvchi bo‘lsin.*

*1) Agar $x \neq a$ lar uchun*

$$|f(x)| \ \leq \ \frac{C}{|x-a|^{\beta}}, \quad \beta < n,$$

*shart bajarilsa, u holda (14.2.5) xosmas integral yaqinlashadi.*

*2) Agar $x \neq a$ lar uchun*

$$f(x) \ \geq \ \frac{C}{|x-a|^{\beta}}, \quad \beta \geq n,$$

*shart bajarilsa, (14.2.5) xosmas integral uzoqlashadi.*

**Isbot** 14.2.3 - teorema va 14.2.3 - misoldan kelib chiqadi.

**14.2.4 - misol.** Ushbu

$$\int\limits_{R^n} \frac{dx}{|x|^q}$$

integralni yaqinlashishga tekshiring.

Biz bu integralni $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soha, ya'ni butun fazodan koordinatalar boshi chiqarib tashlangan soha bo'yicha xosmas integral deb qarashimiz mumkin. Quyidagi

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \frac{1}{k} < |x| < k \right\}$$

sohalar ketma-ketligini kiritamiz.

Bu ketma-ketlik $\Omega$ sohasini qamrab oladi. Sferik koordinatalarga o'tsak,

$$\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega_k} \frac{dx}{|x|^q} = \int\limits_{1/k}^{k} r^{n-1-q}\, dr = \begin{cases} \dfrac{k^{n-q} - k^{q-n}}{n-q}, & q \neq n, \\ 2\ln k, & q = n, \end{cases}$$

munosabatni olamiz.

Shubhasiz, ixtiyoriy $q \in \mathbb{R}$ qiymatlarda bu integrallar ketma-ketligi $k \to \infty$ da cheksizga intiladi. Demak, ixtiyoriy $q \in \mathbb{R}$ lar uchun qaralayotgan xosmas integral uzoqlashar ekan.

**4.** Agar

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|\, dx.$$

xosmas integral yaqinlashsa, (14.2.5) integral *absolyut* yaqinlashadi deyiladi.

Istalgan $\Omega$ soha uchun 14.1.5 - teoremaga o'xshash tasdiq o'rinli, chunonchi, *lokal integrallanuvchi funksiyadan olingan integral faqat va faqat absolyut yaqinlashganda yaqinlashadi.* Isbot xuddi yuqoridagi sxema bo'yicha olib boriladi, lekin bunda $\Omega$ sohaning ixtiyoriy shaklda bo'lishi mumkinligi bilan bog'liq bo'lgan qo'shimcha qiyinchiliklar tug'iladi.

**14.2.5 - misol.** Agar

$$\Omega_0 \;=\; \{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < |x| < R\}$$

bo'lsa,

$$I \;=\; \int\limits_{\Omega} \frac{x_1}{|x|^3}\, dx \tag{14.2.8}$$

integralni yaqinlashishga tekshiring.

$\Omega_0$ ni qamrab oluvchi ketma-ketlik sifatida

$$\Omega_k \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{1}{k} < |x| < R\right\}, \quad k = 1, 2, ...$$

xalqalarni olamiz.

Qutb koordinatalariga o'tib, burchaklar bo'yicha integrallagandan so'ng,

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{x_1}{|x|^3}\, dx \;=\; \int\limits_{1/k}^{R} \rho\, d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\rho \cos\varphi}{\rho^3}\, d\varphi = \;0$$

tenglikni olamiz.

Demak, kengayuvchi xalqalar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi nolga intilar ekan. Ammo bu berilgan integral yaqinlashishini anglatmaydi, chunki buning uchun, $\Omega_0$ sohasini qamrab oluvchi *istalgan* ketma-ketlik olganda ham, unga mos integrallar ketma-ketligi yaqinlashishini isbotlashimiz kerak.

14.2.4 - teoremada keltirilgan taqqoslash alomatlari bu misol uchun ish bermaydi, chunki integral ostidagi funksiyaning yuqoridan aniq bahosi

$$\left|\frac{x_1}{|x|^3}\right| \;\leq\; \frac{1}{|x|^2}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu baho integral *yaqinlashishini* ta'minlamaydi. Boshqa tomondan, $x_1 = 0$ koordinatalar o'qida integral ostidagi funksiya nolga teng. Shunday ekan, biz bu funksiyani quyidan biror musbat funksiya bilan baholab, integralni *uzoqlashishini* ham ko‘rsata olmaymiz.

Shuning uchun biz, ikki karrali integral yaqinlashishi uning absolyut yaqinlashishiga teng kuchli ekanidan foydalanib, 14.2.2 - teoremani qo‘llaymiz.

Yuqoridagi kengayuvchi xalqalar ketma-ketligi uchun

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{|x_1|}{|x|^3}\, dx = \int\limits_{1/k}^{R} \rho\, d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\rho|\cos\varphi|}{\rho^3} d\varphi \geq \int\limits_{1/k}^{R} \frac{d\rho}{\rho} \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \pi \ln(Rk)$$

baho o‘rinli bo‘lib, bunday integrallar ketma-ketligi chegaralanmagan, demak, (14.2.8) integral uzoqlashadi.

**14.2.6 - misol.** Agar

$$\Omega_0 \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 < |x| < R\}$$

bo‘lsa, quyidagi

$$I_j \ = \ \int\limits_{\Omega_0} \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\, dx, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{14.2.9}$$

$n$ karrali integrallarni yaqinlashishga tekshiring.

Sferik koordinatalarga o‘tib, $\Omega$ ni qamrab oluvchi

$$\Omega_k \ = \ \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \frac{1}{k} < |x| < R\right\}$$

shar qatlamlari ketma-ketligi uchun

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\, dx \ = \ 0$$

tenglik bajarilishini tekshirish qiyin emas.

Endi, xuddi avvalgi misoldagidek, (14.2.9) integral absolyut yaqinlashmasligini va bundan chiqdi, uzoqlashishini ko‘rsatish oson.

**14.2.7 - misol.** Agar $a$ kublanuvchi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sohaning ixtiyoriy tayinlangan nuqtasi bo‘lsa, quyidagi

$$I_j = \int\limits_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, dx,\ j = 1, 2, ..., \tag{14.2.10}$$

integrallarni yaqinlashishga tekshiring.

Faraz qilaylik, $\varepsilon_k$ kamayib nolga intiluvchi biror ketma-ketlik bo‘lsin. Qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligi elementlari sifatida

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \,:\, |x-a| > \varepsilon_k\}$$

sohalarni olamiz.

$N$ nomerni shunday tanlaymizki, radiusi $\varepsilon_N$ ga teng bo‘lib, markazi $a \in \Omega$ nuqtada bo‘lgan shar to‘laligicha $\Omega$ da yotsin. U holda $k > N$ lar uchun

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, dx = \int\limits_{\Omega_N} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, dx + \int\limits_{\Omega_k \setminus \Omega_N} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, dx$$

tenglikni hosil qilamiz.

O‘ng tomondagi birinchi integral ostidagi funksiya chegaralangan va bu integral $k$ ga bog‘liq emas. Ikkinchi integral, parallel ko‘chirish yordamida, 14.2.6 - misolda qaralgan integralga keladi va demak, u nolga teng. Shunday qilib,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, dx = \int\limits_{\Omega_N} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, dx.$$

Lekin shunga qaramasdan, xuddi 14.2.6 - misoldagi kabi, (14.2.10) integrallar absolyut yaqinlashmaydi va shu sababli uzoqlashadi.

## 14.3-§. Karrali xosmas integralning bosh qiymati

**1.** Yuqorida aniqlangan xosmas karrali integrallar tadbiqiy masalalarni yechishda foydalaniladigan ko‘p zarur xossalarga ega. Ammo shunga qaramasdan, ba'zi muhim hollarda yuqoridagi ta'rifga ko'ra yaqinlashuvchi integralga ega bo'lgan funksiyalar sinfi ancha torlik qiladi. Integrallanuvchi funksiyalar sinfini kengaytirish uchun, tabiiyki, integralning yaqinlashish ta'rifidagi shartlarni kuchsizlantirish zarur. Bunday ta'riflar bir qancha, lekin tadbiqda eng ko'p uchraydigan ta'riflardan biri integralning Koshi ma'nosidagi yaqinlashishi ta'rifidir.

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ixtiyoriy kublanuvchi soha bo'lib, $a$ bu sohaning biror nuqtasi bo'lsin.*

*Bundan tashqari, $f$ funksiya ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \ : \ |x - a| > \varepsilon\}$ sohada integrallanuvchi bo'lsin.*

*Agar*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(x)\, dx$$

*limit mavjud bo'lsa, $a \in \Omega$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lgan*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx \tag{14.3.1}$$

*integralni Koshi ma'nosida yaqinlashadi deymiz.*

*Bu limit (14.3.1) xosmas integralning bosh qiymati deyilib,*

$$V.p. \int\limits_{\Omega} f(x)\, dx \ = \ \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(x)\, dx \tag{14.3.2}$$

*ko'rinishda belgilanadi.*

**14.3.1 - misol.** Faraz qilaylik, $a$ biror kublanuvchi $\Omega$ sohaning istalgan nuqtasi bo'lib,

$$f_j(x) \ = \ \frac{(x_j - a_j)}{|x - a|^{n+1}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

bo'lsin. $f_j(x)$ funksiyadan olingan integralni Koshi ma'nosida yaqinlashishga tekshiring.

Aytaylik, radiusi $R$ ga teng va markazi $a$ nuqtada bo'lgan shar to'laligicha $\Omega$ sohasida yotsin. U holda istalgan musbat $\varepsilon < R$ uchun

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\,dx \;=\; \int\limits_{\Omega_R} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\,dx \;+\; \int\limits_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_R} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\,dx$$

deb yozish mumkin.

O'ng tomondagi birinchi integral xos bo'lib, u $\varepsilon$ ga bog'liqmas, ikkinchi integral esa, 14.2.6 - va 14.2.7 - misollarga ko'ra, nolga teng. Bundan chiqdi, integralning bosh qiymati mavjud va u

$$V.p. \int\limits_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\,dx \;=\; \int\limits_{\Omega_R} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\,dx$$

ga teng. Bunda o'ng tomondagi integral xosdir.

**1 - eslatma.** 14.2.7 - misolga ko'ra, yuqoridagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashmaydi.

**2 - eslatma.** Oddiy («regulyar») yaqinlashuvchi xosmas integrallardan farqli o'laroq, bosh qiymat ma'nosidagi integrallar *singulyar* integrallar deb ham ataladi.

**2*.** 14.3.1 - misoldagiga o'xshash integrallar gravitatsiya nazariyasi va elektromagnetizmda muhim o'rin tutadi. Masalan, $n = 3$ da bunga o'xshash integrallar o'zgarmas $\mu$ zichlikli $\Omega$ jism hosil qilgan tortishish maydoni potensialining hosilasini hisoblashda hosil bo'ladi. $\mu(x)$ zichlik o'zgarmas bo'lmagan hollarda integral Koshi ma'nosida yaqinlashmasligi mumkin, ammo agar $\mu(x)$ funksiya biror silliqlikka ega bo'lsa, navbatdagi misolda ko'rsatilganidek, qaralayotgan integral Koshi ma'nosida yaqinlashadi.

Agar $0 < \alpha \leq 1$ berilgan son bo'lib, shunday $M > 0$ soni topilsaki, istalgan $x \in \Omega$ va $y \in \Omega$ nuqtalar uchun

$$|\mu(x) - \mu(y)| \;\leq\; M|x-y|^\alpha \tag{14.3.3}$$

tengsizlik bajarilsa, $\Omega$ sohasida aniqlangan $\mu(x)$ funksiya $\alpha$ ko'rsatkich bilan Holder shartini qanoatlantiradi deymiz.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, Holder sharti, odatda, Lipshits sharti deyiladi.

**14.3.2 - misol.** Agar $\mu(x)$ funksiya $\Omega$ sohasida aniqlangan bo'lib, (14.3.3) Holder shartini qanoatlantirsa, $a \in \Omega$ nuqtada maxsuslikka ega bo'lgan

$$I(a) \;=\; \int\limits_{\Omega} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, \mu(x)\, dx \tag{14.3.4}$$

integralni Koshi bo'yicha yaqinlashishini ko'rsating.

Quyidagi

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, \mu(x)\, dx \;=$$

$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, [\mu(x) - \mu(a)]\, dx \;+\; \mu(a) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, dx$$

ayniyatni qaraymiz.

14.3.1 - misolga ko'ra, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ larda oxirgi integral $\varepsilon$ ga bog'liq emas. Bu integralni $\lambda_j(a)$ simvoli bilan belgilab, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ larda

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, \mu(x)\, dx \;=\; \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, [\mu(x) - \mu(a)]\, dx + \lambda_j(a)\mu(a)$$

tenglikni yozishimiz mumkin.

O'ng tomondagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashishini ko'rish qiyin emas. Haqiqatan, (14.3.3) Holder shartiga binoan, integral ostidagi funksiya uchun

$$\left| \frac{(x_j - a_j)}{|x-a|^{n+1}}\, [\mu(x) - \mu(a)] \right| \le \frac{|x-a|}{|x-a|^{n+1}} \cdot M|x-a|^{\alpha} = \frac{M}{|x-a|^{n-\alpha}}$$

baho o'rinli. Shunday ekan, xosmas integral yaqinlashishi taqqoslashning xususiy alomatidan kelib chiqadi (14.2.4 - teoremaga qarang).

Demak, (14.3.4) integral Koshi ma'nosida yaqinlashib, uning bosh qiymati

$$V.p.\int\limits_{\Omega}\frac{(x_j-a_j)}{|x-a|^{n+1}}\,\mu(x)dx=\int\limits_{\Omega}\frac{(x_j-a_j)}{|x-a|^{n+1}}\,[\mu(x)-\mu(a)]\,dx+\lambda_j(a)\mu(a)$$

ga teng.

Ahamiyat bering, o'ng tomondagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashadi.

**3.** Xuddi yuqoridagidek, butun fazo bo'yicha integralning Koshi ma'nosida yaqinlashish tushunchasi kiritiladi.

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik, $f$ funksiya $\mathbb{R}^n$ da aniqlangan va lokal integrallanuvchi bo'lsin. Agar*

$$\lim_{R\to 0}\int\limits_{|x|<R} f(x)\,dx$$

*limit mavjud bo'lsa,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \tag{14.3.5}$$

*integralni Koshi ma'nosida yaqinlashadi deymiz.*

*Bu limit (14.3.5) xosmas integralning bosh qiymati deyiladi va*

$$V.p.\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \;=\; \lim_{R\to 0}\int\limits_{|x|<R} f(x)\,dx \tag{14.3.6}$$

*kabi belgilanadi.*

**14.3.3 - misol.** Ikki karrali

$$I \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \tag{14.3.7}$$

xosmas integralning bosh qiymati topilsin.

Qutb koordinatalarga o‘tsak,

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \;=\; 2\pi\int\limits_0^R \frac{\sin\rho^2}{\rho^2}\,\rho\,d\rho \;=\; \pi\int\limits_0^{R^2}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

tenglikni olamiz.

Oxirgi bir o‘lchovli integralning $R\to+\infty$ dagi limiti mavjud va $\pi/2$ ga teng. Shunday ekan,

$$V.p.\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \;=\; \frac{\pi^2}{2}.$$

**3 - eslatma.** (14.3.7) ko‘rinishdagi integrallar to‘lqin optikasida muhim o‘rin tutadi. 14.1.5 - misolga ko‘ra, bu xosmas integral oddiy ma’noda uzoqlashadi va shuning uchun u ma’noga ega emas. Lekin Koshi ma’nosida yaqinlashish unga yangi bir ma’no berib, undan amaliy hisob-kitoblarda foydalanishga imkon beradi.

**4 - eslatma.** 14.3.2 - misoldagiga o‘xshash, (14.3.7) integralni shunday o‘zgartirish mumkinki, natijada hosil bo‘lgan integral oddiy ma’noda yaqinlashadi. Buning uchun

$$u(\rho)=\frac{1}{\rho^2},\quad v(\rho)=1-\cos\rho^2$$

deb, bo‘laklab integrallash kifoya.

U holda

$$du(\rho)=-\frac{2}{\rho^3},\quad dv(\rho)=2\rho\sin\rho^2,$$

demak,

$$\iint\limits_{x^2+y^2<R^2}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \;=\; 2\pi\int\limits_0^R\frac{\sin\rho^2}{\rho^2}\,\rho\,d\rho \;=$$

$$=\;\pi\,\frac{1-\cos\rho^2}{\rho^2}\Bigg|_{\rho\to 0}^{\rho=R} \;+\; 2\pi\int\limits_0^R\frac{1-\cos\rho^2}{\rho^4}\,\rho\,d\rho \;=$$

$$= \pi \frac{1 - \cos R^2}{R^2} + \int\limits_{x_2 + y^2 < R^2} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy.$$

Bundan chiqdi,

$$V.p. \int\limits_{R^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy,$$

bunda o'ng tomondagi xosmas integral oddiy ma'noda yaqinlashadi.

**4*.** Endi umumiyroq ko'rinishga ega bo'lgan

$$I(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy \tag{14.3.8}$$

xosmas integralni qaraymiz.

**14.3.4 - misol.** Agar

$$G(\rho) = \int\limits_0^{2\pi} g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \, d\varphi \tag{14.3.9}$$

funksiya $\rho \to +\infty$ da monoton kamayib, nolga intilsa, (14.3.8) xosmas integralning Koshi ma'nosida yaqinlashishini ko'rsating.

Qutb koordinatalariga o'tib, quyidagi

$$\int\limits_{x^2 + y^2 < R^2} g(x, y) \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$= \int\limits_0^R \sin \rho^2 \, \rho \, d\rho \int\limits_0^{2\pi} g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R G(\rho) \, \sin \rho^2 \, \rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^{R^2} G(\sqrt{t}) \sin t \, dt$$

tenglikni olamiz.

$G(\sqrt{t})$ funksiya $t \to +\infty$ da monoton ravishda nolga intilgani uchun, oxirgi integral, Dirixle-Abel alomatiga ko'ra, $R \to +\infty$ da limitga ega.

Bundan chiqdi,

$$V.p. \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy \;=\; \frac{1}{2} \int_0^\infty G(\sqrt{t}) \sin t\, dt. \qquad (14.3.10)$$

**5 - eslatma.** Umuman aytganda, (14.3.10) tenglikning o'ng tomonidagi xosmas integral shartli yaqinalshadi. Agar (14.3.9) tenglik bilan aniqlangan $G(\rho)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi yetarlicha tez nolga intilsa, u holda bu integralni bo'laklab integrallab, absolyut yaqinlashuvchi integralga keltirish mumkin.

**5*.** Ba'zi hollarda kengayuvchi sharlar o'rniga $\mathbb{R}^n$ fazosini qamrab oluvchi boshqa tayinlangan ketma-ketliklar olinadi. Masalan, ikki o'zgaruvchili holda kengayuvchi konsentrik

$$D(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 < R^2\} \qquad (14.3.11)$$

doiralar o'rniga ba'zan, tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan quyidagi

$$Q(R) \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| < R,\; |y| < R\} \qquad (14.3.12)$$

ko'rinishdagi kengayuvchi kvadratlar olinadi.

Lekin bunda shuni hisobga olish kerakki, bunday kengayuvchi sohalar bo'yicha integrallarining limiti mavjud bo'lgan funksiyalar sinfi Koshi bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar sinfidan farq qiladi.

**14.3.5 - misol.** Quyidagi

$$I \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

xosmas integralni qaraylik.

Integral ostidagi funksiyaning har bir $x$ va $y$ o'zgaruvchi bo'yicha juft ekanini hisobga olib,

$$Q_R \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| < R,\; |y| < R\}$$

kvadrat bo'yicha qismiy integralni hisoblaymiz:

$$I(Q_R) = \int\limits_{Q_R} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2)\, dx\, dy =$$

$$= 2 \int\limits_{-R}^{R} \sin x^2 dx \int\limits_{-R}^{R} \cos y^2 dy = 8 \left( \int\limits_{0}^{R} \sin x^2 dx \right) \cdot \left( \int\limits_{0}^{R} \cos y^2 dy \right).$$

O'ng tomondagi har bir integral Dirixle-Abel alomatiga ko'ra (6.6.4 - misolga qarang), $R \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lib, 17 - bobda ko'rsatilganidek ((17.2.34) va (17.2.35) formulalarga qarang), bu limit $\sqrt{\pi/8}$ ga teng, ya'ni

$$\int\limits_{0}^{\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_{0}^{\infty} \cos y^2 dy = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Demak, kvadratlar bo'yicha integrallar ketma-ketligi limitga ega va

$$\lim_{R \to +\infty} I(Q_R) = \pi.$$

Ammo, kengayuvchi doiralar bo'yicha limitning mavjud emasligini ko'rsatish qiyin emas, ya'ni qaralayotgan funksiya Koshi ma'nosida integrallanuvchi bo'lmaydi. Haqiqatan, qutb koordinatalariga o'tib,

$$\int\limits_{x^2+y^2<R^2} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy = 2\pi \int\limits_{0}^{R} \sin r^2\, r\, dr = \pi\big(1 - \cos R^2\big)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ravshanki, $R \to +\infty$ da o'ng tomon limitga ega emas.

Navbatdagi misol yuqoridagi tasdiqning teskarisi ham o'rinli ekanini, ya'ni kengayuvchi doiralar bo'yicha integrallarning yaqinlashishidan kengayuvchi kvadratlar bo'yicha integrallarning yaqinlashishi kelib chiqmasligini ko'rsatadi.

**14.3.6 - misol.** $g(x, y)$ funksiyani qutb koordinatalarida

$$g(r, \varphi) \;=\; r^4 \cos 4\varphi$$

ko‘rinishda aniqlaylik.

Bu funksiyadan $R > 0$ radiusli doirada olingan integral nolga teng:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} g(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi \;=\; \int_0^R r^5\, dr \int_0^{2\pi} \cos 4\varphi\, d\varphi \;=\; 0.$$

Demak, integral Koshi ma’nosida yaqinlashadi va u nolga teng.

Lekin $g(r, \varphi)$ funksiyani

$$g(r, \varphi) \;=\; r^4(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - 6r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \;=\; x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$

ko‘rinishda ham yozishimiz mumkin. Shunday ekan, bu funksiyadan $\{|x| \le R, |y| \le R\}$ kvadrat bo‘yicha integral uchun

$$\int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} (x^4 + y^4 - 6x^2y^2)\, dx\, dy \;=\; \frac{4R^6}{5} + \frac{4R^6}{5} - 6\, \frac{2R^3}{3} \cdot \frac{2R^3}{3} \;=\; -\frac{16}{15}\, R^6$$

tenglik o‘rinli.

Demak, kvadratlar bo‘yicha integrallar $R \to +\infty$ da $-\infty$ ga intiladi, ya’ni qaralayotgan funksiya Koshi ma’nosida kvadratlar bo‘yicha integrallanuvchi emas.

**6 - eslatma.** Yuqorida shartli yaqinlashuvchi karrali integrallarning mavjud emasligi qayd qilingan edi. Shunday bo‘lsada, Koshi bo‘yicha yaqinlashuvchi karrali xosmas integrallar, aslida, xuddi bir o‘lchovli holdagi shartli yaqinlashuvchi integrallar rolini o‘ynaydi. Koshi bo‘yicha yaqinlashish xosmas ma’noda integrallanuvchi funksiyalar sinfini, demak, mos ravishda, karrali xosmas integrallar yordamida yechiladigan masalalar sinfini sezilarli darajada kengaytirishga imkon beradi.

## 14.4-§. Misollar

**1 - misol**. Quyidagi

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+|x|)^p(1+|y|)^q}$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

**Ko‘rsatma**. 14.1.2 - teoremadan foydalanib, $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini shunday tanlangki, natijada o‘rganilayotgan integralning yaqinlashish masalasi bir karrali integral yaqinlashishini o‘rganishga kelsin.

**2 - misol**. Quyidagi

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-3x^2-3y^2-2xy-2x+2y-2}dx\,dy$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

**Ko‘rsatma**. Agar $\xi = x - y + 1$ va $\eta = x + y$ almashtirish bajarsak, integral

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\xi^2-2\eta^2-1}d\xi\,d\eta = e^{-1}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\xi^2-2\eta^2}d\xi\,d\eta$$

ko‘rinishga keladi.

Endi $\mathbb{R}^2$ fazoni qamrab oluvchi ketma-ketlik elementlari sifatida $E_k = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2, |\xi| < k, |\eta| < k\}$ to‘plamlarni olish yetarli.

**3 - misol**. Agar $E = \mathbb{R}\times[0,1]$ bo‘lib, $E$ sohada integrallanuvchi $\varphi$ funksiya uchun $0 < m \le |\varphi(x,y)| \le M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, quyidagi

$$I = \iint\limits_{E} \frac{\varphi(x,y)\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

**Ko‘rsatma**. Ravshanki, $I$ integral quyidagi

$$I_1 = \iint\limits_E \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p} = \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy$$

integral bilan bir vaqtda yoki yaqinlashadi, yoki uzoqlashadi. Endi

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{agar} \quad (x,y)\in E \quad \text{bo‘lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad (x,y)\in \mathbb{R}^2\backslash E \quad \text{bo‘lsa,} \end{cases}$$

deb belgilasak, $I_1$ integral

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\,dx\,dy$$

ko‘rinishga keladi. Bu integralni, § 14.1 natijalaridan foydalanib, yaqinlashishga tekshirish qiyin emas.

**4 - misol**. Agar $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 0\le x\le y\}$ bo‘lsa, quyidagi

$$I = \iint\limits_E e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

**Ko‘rsatma**. Avval

$$F(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{agar} \quad (x,y)\in E \quad \text{bo‘lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad (x,y)\in \mathbb{R}^2\backslash E \quad \text{bo‘lsa,} \end{cases}$$

deb belgilab, $I$ integralni § 14.1 da o‘rganilgan

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\,dx\,dy$$

xosmas integral ko‘rinishiga keltiring. Endi integral ostidagi funksiyaning manfiymas ekanini hisobga olib, integralni 14.1.2 - teorema yordamida yaqinlashishga tekshiring.

**5 - misol**. Agar $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 < 1\}$ bo‘lib, $E$ sohada integrallanuvchi $\varphi$ funksiya uchun $0 < m \le |\varphi(x, y, z)| \le M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, quyidagi

$$I \ = \ \iiint\limits_E \frac{\varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p}$$

xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

**Ko‘rsatma**. Integral yaqinlashishiga $\varphi$ funksiya ta’sir qilmasligiga ishonch hosil qilib, $I$ integral yaqinlashishini 14.2.1 - misoldagi singari o‘rganing.

**6 - misol**. Agar $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ bo‘lsa, quyidagi

$$I \ = \ \iint\limits_E \ln \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

xosmas integralni hisoblang.

**Ko‘rsatma**. Qutb koordinatalar sistemasiga o‘ting. Integral $-\frac{\pi}{2}$ ga teng.

**7 - misol**. Ushbu

$$S \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + k)^p (1 + m)^q}$$

ikki karrali qator $p$ va $q$ larning qanday qiymatlarida yaqinlashishini aniqlang.

**Ko‘rsatma**. Agar $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0, y \ge 0\}$ desak, 14.1.6 - teoremaga ko‘ra, $S$ qator

$$\iint\limits_Q \frac{dx\, dy}{(1 + |x|)^p (1 + |y|)^q}$$

xosmas integral yaqinlashganda yaqinlashadi. Bu integralni yaqinlashishga tekshirish uchun 1 - misoldan foydalaning.

**8 - misol**. Ushbu

$$S \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-k^2 - m^2}$$

ikki karrali qatorni yuqoridan baholang.

**Ko'rsatma**. 14.1.6 - teorema va 14.1.2 - misoldan foydalaning.

**9 - misol.** Agar

$$\psi(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad |x| \le \frac{1}{2} \; \text{bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad |x| > \frac{1}{2} \; \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya berilgan bo'lsa,

$$f(x,y) \;=\; \psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \;-\; \psi(x)$$

funksiya uchun kengayuvchi doiralar va kengayuvchi kvadratlar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi limiti farq qilishini ko'rsating.

**Ko'rsatma**. Kengayuvchi doiralar bo'yicha integrallar limitini hisoblashda, $\psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$ funksiya $\psi(x)$ dan tekislikni koordinatalar boshi atrofida $\pi/4$ burchakka burish natijasida hosil bo'lgani sababli, bu ikki funksiyadan markazi koordinatalar boshida bo'lgan har qanday doira bo'yicha olingan integrallar o'zaro teng ekanini hisobga oling.

Kengayuvchi kvadratlar bo'yicha integrallar limitini hisoblashda esa, $\psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$ funksiyadan istalgan kvadrat bo'yicha olingan integral diagonal va undan 1 birlik yuqoridan o'tgan parallel to'g'ri chiziq orasidagi yo'lakchaning yuziga teng ekanidan foydalaning.

**10 - misol.** Yuqoridagi misol belgilashlarida

$$g(x,y) \;=\; \sqrt{2}\cdot\psi(x) \;-\; \psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$$

funksiya uchun kengayuvchi doiralar va kengayuvchi kvadratlar bo'yicha olingan integrallar ketma-ketligi limiti farq qilishini ko'rsating.

**Ko'rsatma**. Kengayuvchi kvadratlar bo'yicha integrallar limiti yuqoridagi misolda keltirilgan xossalarga tayanib hisoblanadi.

Kengayuvchi doiralar bo'yicha integrallar limitini hisoblashda esa, $g(x,y)$ funksiyani quyidagi

$$g(x,y) \;=\; (\sqrt{2}-1)\cdot\psi(x) \;+\; \left[\psi(x) - \psi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

ko'rinishda yozib olib, yuqorida keltirilgan misoldagi mulohazalardan foydalaning.

# 15-bob. Egri chiziqli integrallar

## 15.1-§. Birinchi tur egri chiziqli integrallar

**1.** Ma'lumki, $f$ funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan integralni, shu kesma bilan ustma-ust tushuvchi va chiziqli zichligi $f$ funksiyaga teng bo'lgan o'zakning massasi deb hisoblash mumkin. Endi bordiyu kesma bukilib, biror egri chiziqqa aylangan bo'lsa, u holda bunday bukilgan o'zak massasini qanday topish mumkin?

Buning uchun xuddi kesma bo'yicha olingan aniq integral holidagidek ish tutamiz. Chunonchi, bu egri chiziqni qismiy yoylarga bo'lamiz va har bir bo'lakni taxminan bir jinsli deb faraz qilib, barcha bo'laklar massasini yig'ib chiqamiz. Aynan mana shu hosil bo'lgan kattalik bukilgan o'zakning taxminiy massasi bo'lib, uning qiymati egri chiziqli integral tasavvurini beradi.

Shunday qilib, $A \in \mathbb{R}^2$ va $B \in \mathbb{R}^2$ nuqtalarni tutashtiradigan sodda (ya'ni o'zini o'zi kesmaydigan) to'g'rilanuvchi $L \subset \mathbb{R}^2$ yassi egri chiziq berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqni $M_0, M_1, ..., M_m$ nuqtalar yordamida $m$ ta $\Delta L_k$ yoylarga bo'lamiz. So'ngra $M_0 = A$ va $M_m = B$ deb, hosil bo'lgan bo'linishni $T$ harfi bilan belgilaymiz. Har bir $\Delta L_k$ yoy $M_{k-1}$ va $M_k$ nuqtalarni tutashtirsin va

$$L \;=\; \bigcup_{k=1}^{m} \Delta L_k,$$

$$|L| \;=\; \sum_{k=1}^{m} |\Delta L_k|$$

tengliklar bajarilsin deb faraz qilamiz. Bu yerda yoyning absolyut qiymati uning uzunligini anglatadi. $T$ bo'linishning diametri deb

$$d(T) \;=\; \max_{k} |\Delta L_k|$$

songa aytamiz.

Faraz qilaylik, $L$ da aniqlangan biror $f : L \to \mathbb{R}$ funksiya (masalan, $f(x)$ funksiya $x = (x_1, x_2) \in L$ nuqtadagi chiziqli zichlik bo‘lishi mumkin) berilgan bo‘lsin. Istalgan ravishda $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqtalarni tanlab,

$$\sigma_T(f) \;=\; \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k) \cdot |\Delta L_k| \tag{15.1.1}$$

integral yig‘indini tuzamiz.

*Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d(T) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $T$ bo‘linish uchun, $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqtalarni tanlanishiga bog‘liq bo‘lmagan ravishda biror $I$ soni topilib, quyidagi*

$$|\sigma_T(f) \;-\; I| \;<\; \varepsilon$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda $I$ soniga (15.1.1) integral yig‘indilarining $d(T) \to 0$ dagi limiti deyiladi.*

Integral yig‘indilarining limiti $f$ funksiyadan $L$ egri chiziq bo‘yicha olingan *birinchi tur egri chiziqli integral* deyiladi va

$$\int\limits_{L} f\,dl \;=\; \int\limits_{AB} f(x)\,dl(x) \tag{15.1.2}$$

ko‘rinishda belgilanadi.

**2.** Parametrik ko‘rinishda berilgan

$$L \;=\; \{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = \Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad a \le t \le b\} \tag{15.1.3}$$

egri chiziqni qaraymiz.

Eslatib o‘tamiz, agar $\Phi(t)$ vektor-funksiyaning har ikki $\varphi$ va $\psi$ komponentasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, $L$ egri chiziq silliq deyiladi.

Agar $\Phi'(\tau) = 0$ bo‘lsa, (15.1.3) parametrik ko‘rinishda berilgan $L$ egri chiziqning $\xi = \Phi(\tau)$ nuqtasi *maxsus* deyiladi. Bundan buyon biz egri chiziqni faqat shunday parametrlashtirishni qaraymizki, bunda egri chizig‘imiz maxsus nuqtaga ega bo‘lmasin.

Biz dastlab tabiiy parametrlashtirishni qaraymiz. Chunonchi, agar $L(x)$ berilgan $L$ egri chiziqning $A$ nuqtasidan $x$ nuqtasigacha bo‘lgan qismi bo‘lsa, $|L(x)| = l$ deb belgilaylik. U holda $L$ egri chiziqning quyidagi

$$x \;=\; \Phi^*(l) \;=\; (\varphi^*(l), \psi^*(l)) \tag{15.1.4}$$

ko‘rinishda berilishi *tabiiy parametrlash* deyiladi.

Navbatdagi tasdiq o‘rinli.

**15.1.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $L$ tabiiy parametrlashtirilgan sodda to‘g‘rilanuvchi yassi egri chiziq bo‘lib, $f$ shu egri chiziqda berilgan funksiya bo‘lsin. U holda*

$$\int_L f(x)\,dl \;=\; \int_0^{|L|} f[\varphi^*(l), \psi^*(l)]\,dl \tag{15.1.5}$$

*tenglik o‘rinli bo‘lib, agar bu integrallardan biri mavjud bo‘lsa, ikkinchisi ham mavjud bo‘ladi.*

**Isbot.** Agar $l_0 = 0,\ l_m = |L|$ deb, $[0, |L|]$ kesmaning

$$l_0 < l_1 < l_2 < ... < l_m$$

nuqtalari tashkil qilgan ixtiyoriy $P$ bo‘linishni qarasak, bunga mos ravishda $L$ egri chiziqning $x_k = \Phi^*(l_k)$ kabi aniqlangan $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ nuqtalari biror $T$ bo‘linishni aniqlaydi. Aksincha, $L$ egri chiziqning har qanday bo‘linishiga $[0, |L|]$ kesmaning biror bo‘linishi mos keladi. Bevosita tabiiy parametrlashtirishning ta’rifidan

$$\Delta l_k \;\equiv\; l_k - l_{k-1} \;=\; |\Delta L_k|$$

tenglik kelib chiqadi.

Agar ixtiyoriy ravishda $\lambda_k \in [l_{k-1}, l_k]$ nuqtani tanlasak, bu nuqtaga $\xi_k = \Phi^*(\lambda_k) = (\varphi^*(\lambda_k), \psi^*(\lambda_k))$ ko‘rinishda aniqlangan $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqta mos keladi va bu moslik o‘zaro bir qiymatli bo‘ladi.

Demak,

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\cdot|\Delta L_k| \;=\; \sum_{k=1}^{m} f(\varphi^*(\lambda_k), \psi^*(\lambda_k))\Delta l_k \tag{15.1.6}$$

tenglik o‘rinli.

Ahamiyat bering, bu tenglikning chap tomonida (15.1.5) ning chap tomonidagi egri chiziqli integralga mos keluvchi integral yig‘indi va o‘ng tomonida esa, (15.1.5) ning o‘ng tomonidagi aniq integralga mos keluvchi integral yig‘indi turibdi. Shunday ekan, agar bir integral yig‘indining limiti mavjud bo‘lsa, ikkinchi integral yig‘indining ham limiti mavjud bo‘lib, bu limitlar o‘zaro teng bo‘ladi.■

**3.** Endi umumiy parametrlashtirish holiga o‘tamiz, ya’ni (15.1.3) formulada $t$, yoy uzunligi bilan ustma-ust tushishi shart bo‘lmagan ixtiyoriy parametr bo‘lsin.

Navbatdagi tasdiq o‘rinli.

**15.1.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $L$ (15.1.3) formula bilan berilgan va maxsus nuqtaga ega bo‘lmagan egri chiziq bo‘lsin. Agar $f$ funksiya $L$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda $f$ dan $L$ egri chiziq bo‘yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral mavjud bo‘lib, u uchun*

$$\int\limits_L f(x)\,dl \;=\; \int\limits_a^b f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \qquad (15.1.7)$$

*formula o‘rinli bo‘ladi.*

**Isbot.** Ravshanki, (15.1.3) parametrlashtirish (15.1.4) tabiiy parametrlashtirish bilan quyidagicha bog‘langan: agar

$$x \;=\; \Phi^*(l) \;=\; \Phi(t)$$

bo‘lsa, u holda yuqorida aniqlangan $L(x)$ uchun

$$|L(x)| \;=\; l \;=\; \int\limits_a^t \sqrt{[\varphi'(s)]^2+[\psi'(s)]^2}\,ds \qquad (15.1.8)$$

munosabat o‘rinli ((7.1.12) ga qarang).

Endi (15.1.5) ning o‘ng tomonidagi integralda

$$l(t) \;=\; \int\limits_a^t \sqrt{[\varphi'(s)]^2+[\psi'(s)]^2}\,ds \qquad (15.1.9)$$

almashtirish bajarsak, integralda o‘zgaruvchi almashtirish qoidasiga ko‘ra, (15.1.7) formulaga ega bo‘lamiz.■

**Eslatma.** $L$ egri chiziq yopiq, ya'ni $\Phi(a) = \Phi(b)$ bo‘lganda ham (15.1.7) formula o‘rinli bo‘lib qolaveradi.

**15.1.1 - misol.** Agar $a > 0$ bo‘lsa, quyidagi

$$L \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$$

egri chiziq bo‘yicha ushbu

$$I \;=\; \int\limits_L |y|^{1/3} dl$$

birinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin.

Bu egri chiziq astroida deb ataladi. Uning parametrik ko‘rinishi quyidagicha

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t < 2\pi,$$

yoziladi.

Shuning uchun

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \;=\; 9a^2(\cos^4 t\,\sin^2 t + \sin^4 t\,\cos^2 t)$$

bo‘lib, ildiz olsak,

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \;=\; 3a|\cos t\,\sin t| \;=\; \frac{3a}{2}\,|\sin 2t|$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan tashqari, integral ostidagi funksiya $(x, y)$ o‘zgaruvchilarning har biri bo‘yicha juft bo‘lgani uchun,

$$I \;=\; \int\limits_0^{2\pi} |\psi(t)|^{1/3}\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \;=$$

$$=\; 4\int\limits_0^{\pi/2} |\psi(t)|^{1/3}\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

deb yozish mumkin.

Demak,

$$I \;=\; 4\int\limits_0^{\pi/2} a^{1/3}|\sin t|\cdot\frac{3a}{2}|\sin 2t|\,dt \;=\; 6a^{4/3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,\sin 2t\,dt \;=$$

$$=\; 3a^{4/3}\left(\sin t-\frac{1}{3}\,\sin 3t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2} \;=\; 4a^{4/3}.$$

**4.** Fazoviy egri chiziqlar uchun ham birinchi tur egri chiziqli integral xuddi yuqoridagidek kiritiladi. Chunonchi, $A\in\mathbb{R}^3$ va $B\in\mathbb{R}^3$ nuqtalarni tutashtiruvchi sodda (ya'ni o'zini o'zi kesmaydigan) to'g'rilanuvchi $L\subset\mathbb{R}^3$ egri chiziqni qaraylik. Berilgan egri chiziqni $M_1, M_2, ..., M_{m-1}$ nuqtalar yordamida $m$ ta $\Delta L_k$ yoyga bo'lamiz. $M_0=A$ va $M_m=B$ deb, hosil bo'lgan bo'linishni $T$ bilan belgilaymiz. Har bir $\Delta L_k$ yoy $M_{k-1}$ va $M_k$ nuqtalarni tutashtirsin va

$$L \;=\; \bigcup_{k=1}^{m}\,\Delta L_k,$$

$$|L| \;=\; \sum_{k=1}^{m}\,|\Delta L_k|$$

tengliklar bajarilsin deb faraz qilamiz. Bu yerda yoyning absolyut qiymati uning uzunligini anglatadi. $T$ bo'linishning diametri deb

$$d(T) \;=\; \max_k\,|\Delta L_k|$$

songa aytamiz.

Ixtiyoriy $f:L\to\mathbb{R}$ funksiya uchun istalgan ravishda $\xi_k\in\Delta L_k$ nuqtalarni tanlab, quyidagi

$$\sigma_T(f) \;=\; \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\cdot|\Delta L_k| \qquad (15.1.10)$$

integral yig'indini tuzamiz.

*Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d(T) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $T$ bo'linish uchun, $\xi_k \in \Delta L_k$ nuqtalarni tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ravishda biror $I$ soni topilib, quyidagi*

$$|\sigma_T(f) \; - \; I| \; < \; \varepsilon$$

*tengsizlik bajarilsa, u holda $I$ soniga (15.1.10) integral yig'indilarining $d(T) \to 0$ dagi limiti deyiladi.*

Integral yig'indilari limiti $f$ funksiyadan $L$ fazoviy egri chiziq bo'yicha olingan *birinchi tur egri chiziqli inetgral* deyiladi va

$$\int\limits_L f(x)\,dl \; = \; \int\limits_{AB} f(x)\,dl(x)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Faraz qilaylik, $L$ fazoviy egri chiziq parametrik ko'rinishda, ya'ni

$$L \; = \; \{x \in \mathbb{R}^3 \; : \; x = \Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad a \leq t \leq b\} \tag{15.1.11}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Eslatib o'tamiz, agar $\Phi(t)$ vektor-funksiyaning uchchala $\varphi$, $\psi$ va $\chi$ komponentasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, $L$ egri chiziq *silliq* deyiladi.

Agar $\Phi'(\tau) = 0$ bo'lsa, $\xi = \Phi(\tau)$ nuqta parametrik ko'rinishda berilgan (15.1.11) silliq egri chiziqning *maxsus* nuqtasi deyiladi. Xuddi yuqoridagidek, biz o'rganilayotgan parametrik ko'rinishdagi fazoviy silliq egri chiziqni maxsus nuqtaga ega emas deb hisoblaymiz.

**5.** Yassi egri chiziq holidagidek, fazoviy egri chiziq tabiiy parametrlashtirilganda, ya'ni parametr sifatida yoy uzunligi $l$ olinib, egri chiziq

$$x \; = \; \Phi^*(l) \; = \; (\varphi^*(l), \psi^*(l), \chi^*(l)),$$

ko'rinishda berilganda, egri chiziqli integral $[0, |L|]$ kesma bo'yicha olingan oddiy aniq integral orqali osongina ifodalanadi.

**15.1.3 - teorema.** *Faraz qilaylik, $L$ tabiiy parametrlashtirilgan sodda to'g'rilanuvchi egri chiziq bo'lib, $f$ shu egri chiziqda aniqlan-*

*gan funksiya bo'lsin. U holda*

$$\int_L f(x)\,dl \;=\; \int_0^{|L|} f[\varphi^*(l), \psi^*(l), \chi^*(l)]\,dl \tag{15.1.12}$$

*tenglik o'rinli bo'lib, agar bu integrallardan biri mavjud bo'lsa, ikkinchisi ham mavjud bo'ladi.*

**Isbot** xuddi 15.1.1 - teorema isbotidek.

Umumiy ko'rinishdagi parametrlashda 15.1.2 - teorema singari tasdiq o'rinli.

**15.1.4 - teorema.** *Faraz qilaylik, L (15.1.11) formula bilan berilgan maxsus nuqtasiz silliq egri chiziq bo'lsin. Agar f funksiya L bo'ylab uzluksiz bo'lsa, u holda f funksiyadan L bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral mavjud bo'lib, u uchun*

$$\int_L f(x)\,dl \;=\; \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt \tag{15.1.13}$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot** 15.1.2 - teorema isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

**15.1.2 - misol.** Burama egri chiziqning bir o'rami bo'lmish

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; x = R\cos t,\; y = R\sin t,\; z = ht,\; 0 \le t \le 2\pi\}$$

fazoviy egri chiziq bo'yicha olingan quyidagi

$$I \;=\; \int_L z\,dl$$

birinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin.

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + h^2 = R^2 + h^2.$$

tenglik va (15.1.14) formulaga ko‘ra,

$$I = \int_0^{2\pi} ht\sqrt{R^2+h^2}\,dt = 2\pi^2 h\sqrt{R^2+h^2}$$

bo’ladi.

## 15.2-§. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar

**1.** Egri chiziqli integrallarning yana boshqa xili $L$ egri chiziq bo‘yicha harakatdagi nuqtaga ta’sir qiluvchi $\boldsymbol{F}$ kuch bajarayotgan mexanik ish ta’rifi bilan bog‘liqdir. Avval $\boldsymbol{F}$ kuchni o‘zgarmas deylik. Agar harakat to‘g‘ri chiziq bo‘yicha ro‘y berayotgan bo‘lib, boshlang‘ich va oxirgi nuqtalarni tutashtiruvchi vektorni $\boldsymbol{s}$ deb belgilasak, u holda $A$ ish

$$A = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

skalyar ko‘paytmaga teng bo‘ladi.

Endi, faraz qilaylik, o‘zgaruvchi $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ kuch ta’sirida qaralayotgan nuqta $L = AB$ sodda egri chiziq bo‘ylab $A$ nuqtadan $B$ nuqtagacha harakatlansin. Bu kuch bajargan ishni topish maqsadida, odatdagidek $M_0 = A$ va $M_m = B$ deb, $L$ egri chiziqni $M_0, M_1, M_2, ..., M_m$ nuqtalar yordamida $\Delta L_k$ qismiy yoylarga bo‘lamiz. Hosil bo‘lgan $T = \{M_0, M_1, ..., M_m\}$ bo‘linish diametrini shunchalik kichik qilib tanlaylikki, bunda qismiy yoylarni taxminan kesma deb va $\boldsymbol{F}$ kuchni esa, bu yoylarda o‘zgarmas deb hisoblash mumkin bo‘lsin.

Fazoning $M_{k-1}$ va $M_k$ nuqtalarini tutashtiruvchi vektorni $\Delta\boldsymbol{l}_k$ orqali belgilaylik, ya’ni

$$\Delta\boldsymbol{l}_k = M_k - M_{k-1}, \quad k = 1,2,...,m.$$

$\boldsymbol{F}$ kuchning $M_{k-1}$ nuqtadan $M_k$ nuqtagacha bajargan ishini taxminan

$$\boldsymbol{F}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta\boldsymbol{l}_k \tag{15.2.1}$$

skalyar ko‘paytmaga teng deyish mumkin, bunda $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ nuqta $\Delta L_k$ qismiy yoyning istalgan nuqtasidir. Bundan chiqdi, $A$ dan to $B$ gacha bajarilgan to‘la ish taxminan quyidagi

$$\sigma_T(\boldsymbol{F}) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\; \cdot \Delta \boldsymbol{l}_k \tag{15.2.2}$$

integral yig‘indiga teng.

Agar $d(T) \to 0$ da (15.2.2) integral yig‘indilar limiti mavjud bo‘lsa, u holda bu limit $\boldsymbol{F}$ vektor-funksiyadan $AB$ egri chiziq bo‘yicha olingan *ikkinchi tur egri chiziqli integral* deyiladi va

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{l} \;=\; \lim_{d(T)\to 0} \sigma_T(\boldsymbol{F}) \tag{15.2.3}$$

kabi belgilanadi.

Birinchi tur egri chiziqli integralning ikkinchi tur egri chiziqli integraldan asosiy farqi shundaki, ikkinchi tur integral integrallanayotgan egri chiziqda o‘rnatilgan yo‘nalishga bog‘liqdir. Boshqacha aytganda, birinchi tur integral uchun

$$\int\limits_{AB} f(x)\, dl \;=\; \int\limits_{BA} f(x)\, dl$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, ikkinchi tur integral uchun esa,

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{l} \;=\; -\int\limits_{BA} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{l}$$

tenglik o‘rinli.

Bu tengliklarning fizik ma’nosi tushunarli: bukilgan o‘zakning massasini o‘lchash bu o‘zakning yo‘nalishiga bog‘liq emas, ammo biror masofada bajarilgan ishni hisoblashda harakat yo‘nalishiga qarab quvvat ortishi yoki kamayishi mumkin.

Navbatdagi bandda biz birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni bog‘lovchi matematik munosabatlarni o‘rnatamiz. Bunda biz $\mathbb{R}^3$ fazosi nuqtalari koordinatalarini $(x, y, z)$ ko'rinishda belgilaymiz.

**2.** Faraz qilaylik, kuch vektori quyidagi

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) \ = \ (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

komponentalarga va $\Delta \boldsymbol{l}_k$ vektor esa,

$$\Delta \boldsymbol{l}_k \ = \ (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)$$

komponentalarga ega bo'lsin.

Bunda (15.2.1) skalyar ko'paytma

$$\boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta \boldsymbol{l}_k \ =$$

$$= P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta z_k$$

ko'rinishda yoziladi.

Shunday ekan, (15.2.2) integral yig'indini, har bir komponentaga mos keluvchi uchta integral yig'indiga ajratish mumkin:

$$\sigma_T(\boldsymbol{F}) \ = \ \sigma_T^{(1)}(P) \ + \ \sigma_T^{(2)}(Q) \ + \ \sigma_T^{(3)}(R),$$

bu yerda

$$\sigma_T^{(1)}(P) \ = \ \sum_{k=1}^{m} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k, \qquad (15.2.4)$$

$$\sigma_T^{(2)}(Q) \ = \ \sum_{k=1}^{m} Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k, \qquad (15.2.5)$$

$$\sigma_T^{3}(R) \ = \ \sum_{k=1}^{m} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k \qquad (15.2.6)$$

deb belgilangan.

Biz har bir (15.2.4)-(15.2.6) integral yig'indini $T$ bo'linishning $d(T)$ diametri nolga intilganda limitga ega bo'lsin deb faraz qilamiz.

Bu limitlar ham ikkinchi tur egri chiziqli integral deb ataladi va quyidagi

$$\lim_{d(T)\to 0} \sigma_T^{(1)}(P) = \int_{AB} P(x,y,z)\,dx, \tag{15.2.7}$$

$$\lim_{d(T)\to 0} \sigma_T^{(2)}(Q) = \int_{AB} Q(x,y,z)\,dy, \tag{15.2.8}$$

$$\lim_{d(T)\to 0} \sigma_T^{(3)}(R) = \int_{AB} R(x,y,z)\,dz \tag{15.2.9}$$

ko‘rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, (15.2.3) ikkinchi tur egri chiziqli integralni koordinatalar bo‘yicha

$$\int_{AB} \boldsymbol{F}(x,y,z)\,d\boldsymbol{l} = \int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{15.2.10}$$

deb yozishimiz mumkin.

E’tibor bering, xuddi birinchi tur egri chiziqli integral singari, (15.2.3) ikkinchi tur egri chiziqli integral va (15.2.10) yig‘indi ham, Dekart koordinata sistemasini parallel ko‘chirish va burishda o‘z qiymatini saqlaydi. Bu bevosita egri chiziqli integral ta’rifidan kelib chiqadi. Lekin, shunga qaramasdan, har bir (15.2.7)-(15.2.9) ko‘rinishdagi ikkinchi tur egri chiziqli integral, ravshanki, koordinata sistemasining tanlanishiga bog‘liqdir.

Agar $L$ egri chiziq biror koordinata o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikda yotsa, u holda bu o‘qqa mos (15.2.7)-(15.2.9) ko‘rinishdagi egri chiziqli integral nolga aylanadi. Masalan, agar $L$ egri chiziq $Oxy$ tekislikda yotsa, u holda barcha $k$ larda $\Delta z_k = 0$ bo‘lgani sababli, (15.2.6) integral yig‘indida hamma hadlar nolga teng. Shuning uchun, integral yig‘indilarining limiti ham, ya’ni (15.2.9) integral ham nolga teng.

**3.** Berilgan $A \in \mathbb{R}^3$ va $B \in \mathbb{R}^3$ nuqtalarni tutashtiruvchi uzluksiz sodda (ya’ni o‘zini o‘zi kesmaydigan) $L \subset \mathbb{R}^3$ fazoviy egri chiziqni qaraylik. Bu egri chiziqni $L = AB$ deb ham belgilaymiz. Faraz qilaylik, bu egri chiziq

$$M \;=\; \Phi^*(l) \;=\; (\varphi^*(l), \psi^*(l), \chi^*(l)), \quad 0 \le l \le |L|,$$

ko‘rinishda tabiiy parametrlashtirilgan bo‘lib, $l$ parametr yoyning $A$ nuqtadan boshlab o‘lchalgan uzunligi bo‘lsin. Agar nuqta bu egri chiziq bo‘ylab harakatlanayotganda $l$ parametr o‘ssa, u holda nuqtani $A$ dan $B$ ga qarab harakatlanayapti deb hisoblaymiz. Bunda $L = AB$ egri chiziqda yo‘nalish o‘rnatilgan (yoki egri chiziq orientirlangan) deymiz. Xuddi shu egri chiziqni yoy uzunligini $B$ nuqtadan boshlab o‘lchab, teskari yo‘nalishda ham orientirlash mumkin. Boshqacha aytganda, $AB$ va $BA$ egri chiziqlar o‘zaro qarama-qarshi yo‘nalishlarda orientirlangan.

$L = AB$ silliq egri chiziqning, chetki $B$ nuqtasidan farqli, har qanday $M$ nuqtasida quyidagi ko‘rinishda aniqlangan $\boldsymbol{\tau}$ («tau» deb o‘qiladi) urinma vektorni kiritish mumkin. Aytaylik, $M$ nuqtani $L$ egri chiziq bo‘ylab $B$ ga qarab siljitish natijasida u biror $M' \in L$ nuqtaga o‘tsin. $M$ nuqtadan $M'$ nuqtaga yo‘naltirilgan birlik vektorni qaraymiz. Albatta bu vektor

$$\mathbf{e} \;=\; \frac{MM'}{|MM'|}$$

ko‘rinishga ega.

Agar $M'$ nuqta $M$ ga intilganda $\mathbf{e}$ birlik vektor biror $\boldsymbol{\tau}$ vektorga intilsa, ana shu limit vektorni $L$ egri chiziqqa $M$ nuqtada o‘tkazilgan *urinma* deb ataymiz.

Bunday ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, urinma vektor egri chiziqning shakli va unda o‘rnatilgan yo‘nalish orqali aniqlanib, egri chiziqning qanday parametrlashtirilganiga bog‘liq emas.

**4.** Aytaylik, $L$ silliq egri chiziqning, undagi yonalishni saqlovchi va

$$\Phi(t) \;=\; (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad a \le t \le b, \tag{15.2.11}$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan ixtiyoriy parametrlashtirishi berilgan bo‘lsin. Bu degani, $t$ parametr oshgan sari $A$ nuqta bilan $\Phi(t)$ nuqtani tutashtiruvchi yoy uzunligi ham oshib borsin.

Eslatib o‘tamiz, biz parametrik ko‘rinishda berilgan va maxsus nuqtaga ega bo‘lmagan silliq egri chiziqlarni qaraymiz, ya’ni butun $[a, b]$ kesmada $\Phi'(t) \neq 0$ deb faraz qilamiz.

Agar silliq egri chiziq maxsus nuqtaga ega bo‘lmasa, u holda $[a, b]$ kesmada

$$|\Phi'(t)|^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 > 0, \quad a \leq t \leq b,$$

tengsizlik bajariladi.

$[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $|\Phi'(t)|$ funksiya, Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra, shu kesmada o‘zining $M$ maksimal va $m$ minimal qiymatlariga erishadi. Ravshanki, $M \geq m > 0$ bo‘lib, quyidagi

$$m \leq |\Phi'(t)| \leq M, \quad a \leq t \leq b, \tag{15.2.12}$$

tengsizlik o‘rinli.

**5.** Faraz qilaylik, $\Phi(t)$ vektor-funksiya (15.2.11) tenglik bilan aniqlangan bo‘lsin. $t$ argumentga yetarlicha kichik $h > 0$ musbat orttirma berib, $\Phi(t)$ nuqtadan $\Phi(t+h)$ nuqtaga yo‘nalgan $\mathbf{e}(h)$ birlik vektorni qaraylik. Ma’lumki, bu vektor

$$\mathbf{e}(h) = \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{|\Phi(t+h) - \Phi(t)|} \tag{15.2.13}$$

ko‘rinishga ega.

Mana shu $\mathbf{e}(h)$ birlik vektorning $h \to 0+0$ da $\boldsymbol{\tau}$ vektorga, ya’ni biz $AB$ egri chiziqning $M$ nuqtadagi *urinmasi* deb atagan vektorga, intilishini ko‘rsatamiz.

Buning uchun (15.2.13) munosabatni

$$\mathbf{e}(h) = \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} \cdot \frac{h}{|\Phi(t+h) - \Phi(t)|} \tag{15.2.14}$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

Farazimizga koʻra $AB$ egri chiziq silliq boʻlgani uchun, (15.2.14) ning oʻng tomonidagi birinchi kasr $\Phi(t)$ vektor-funksiya hosilasiga intiladi, yaʼni

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{h} \;=\; \Phi'(t).$$

Demak,

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{h}\right| \;=\; |\Phi'(t)|.$$

Bundan chiqdi, urinma vektori mavjud va u

$$\boldsymbol{\tau}(t) \;=\; \frac{\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} \tag{15.2.15}$$

koʻrinishga ega ekan.

$L$ egri chiziq maxsus nuqtaga ega boʻlmagani uchun, (15.2.12) dan maxrajning noldan qatʼiy katta ekani kelib chiqadi.

**6*.** Yuqorida qayd qilinganidek, $L$ egri chiziqqa urinma vektorining taʼrifidan uning egri chiziq shakli va unda oʻrnatilgan yoʻnalishga bogʻliqligi va shu bilan birga, egri chiziqni qanday parametrlashtirilganiga bogʻliqmasligi kelib chiqadi. Bu tasdiqni bevosita (15.2.15) formuladan ham keltirib chiqarish mumkin. Haqiqatan, aytaylik, oʻsha $L$ egri chiziq yoʻnalishni saqlovchi boshqa koʻrinishda, yaʼni

$$\Phi_1(s) \;=\; (\varphi_1(s), \psi_1(s), \chi_1(s)), \quad a_1 \le s \le b_1\,,$$

koʻrinishda ham parametrlashtirilgan boʻlsin. $L$ egri chiziq sodda (yaʼni oʻzini oʻzi kesmaydigan) boʻlib, maxsus nuqtaga ega boʻlmagani uchun, shunday silliq $g : [a,b] \to [a_1,b_1]$ funksiya topiladiki, qayd qilingan ikki parametrlashtirish oʻzaro

$$\Phi(t) \;=\; \Phi_1[g(t)], \quad a \le t \le b,$$

kabi bogʻlangan boʻladi. Yoʻnalishning saqlanishi va maxsus nuqtaning yoʻqligidan $g'(t) > 0,\ t \in [a,b]$, tengsizlik kelib chiqadi. Shunday ekan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga koʻra,

$$\Phi'(t) = \Phi_1'(s)\cdot g'(t), \quad |\Phi'(t)| = |\Phi_1'(s)|\cdot g'(t)$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Demak,

$$\boldsymbol{\tau}(t) \;=\; \frac{\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} \;=\; \frac{\Phi_1'(s)}{|\Phi_1'(s)|} \;=\; \boldsymbol{\tau}_1(s),$$

ya'ni yangi parametrlashtirish bilan aniqlangan $\boldsymbol{\tau}_1$ urinma vektor $\boldsymbol{\tau}$ bilan, ya'ni dastlabki urinma vektor bilan ustma-ust tushar ekan.

**7.** (15.2.11) belgilashni hisobga olib, (15.2.15) tenglikni quyidagi

$$\boldsymbol{\tau}(t) \;=\; \frac{(\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}} \tag{15.2.16}$$

koordinatalar ko'rinishida yozish mumkin.

Bevosita bu tenglikka ko'ra, $[0, \pi]$ kesmada o'zaro bir qiymatli aniqlangan shunday uchta $\alpha, \beta, \gamma$ son topiladiki, ular uchun

$$\cos\alpha \;=\; \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}}, \tag{15.2.17}$$

$$\cos\beta \;=\; \frac{\psi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}}, \tag{15.2.18}$$

$$\cos\gamma \;=\; \frac{\chi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}}, \tag{15.2.19}$$

tengliklar va

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \;=\; 1$$

munosabat bajariladi.

(15.2.17)-(15.2.19) dagi kattaliklar $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektorning *yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi va odatda,

$$\boldsymbol{\tau} \;=\; (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Urinma vektor egri chiziq shakli va unda oʻrnatilgan yoʻnalish orqali aniqlanib, egri chiziqning qanday parametrlashtirilganiga bogʻliq boʻlmagani uchun, yoʻnaltiruvchi kosinuslar, odatda, parametrning emas, balki $M$ nuqtaning, aniqrogʻi bu nuqtani $(x, y, z)$ koordinatalarining funksiyasi deb hisoblanadi. Shuning uchun yuqoridagi tenglik batafsilroq

$$\boldsymbol{\tau}(x, y, z) \;=\; (\cos\alpha(x, y, z),\; \cos\beta(x, y, z),\; \cos\gamma(x, y, z))$$

kabi yoziladi.

**8.** Parametrik koʻrinishda berilgan

$$L \;=\; \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = \varphi(t),\; y = \psi(t),\; z = \chi(t), \quad a \le t \le b\} \tag{15.2.20}$$

egri chiziqni qaraymiz.

Eslatib oʻtamiz, agar $\varphi$, $\psi$ va $\chi$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi boʻlsa, $L$ egri chiziq silliq deb atalar edi. Biz $L$ silliq egri chiziqni maxsus nuqtaga ega emas deb, ya'ni $\Phi = (\varphi, \psi, \chi)$ akslantirishning $\Phi'(t)$ hosilasi $[a, b]$ kesmaning birorta ham nuqtasida nolga aylanmaydi deb faraz qilamiz. Bunday akslantirishlar quyidagi muhim xossaga ega.

**15.2.1 - lemma.** *Faraz qilaylik, $L$ (15.2.20) formula bilan berilgan silliq egri chiziq boʻlib, maxsus nuqtaga ega boʻlmasin. $[a, b]$ kesmaning istalgan $P$ boʻlinishini olib, $L$ egri chiziqning $\Phi$ akslantirish yordamida aniqlangan mos boʻlinishini $T$ bilan belgilaymiz. Agar $m$ va $M$ orqali $|\Phi(t)|$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi mos ravishda minimumi va maksimumini belgilasak, u holda bu boʻlinishlarning $d(P)$ va $d(T)$ diametrlari quyidagi*

$$m \cdot d(P) \;\le\; d(T) \;\le\; M \cdot d(P)$$

*tengsizlikni qanoatlantiradi.*

**Isbot.** $[a, b]$ kesmaning istalgan

$$P \;=\; \{a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b\}$$

boʻlinishi berilgan boʻlsin. $M_k = \Phi(t_k)$ deb, $L$ egri chiziqning $M_0, M_1, ..., M_m$ nuqtalari tashkil qilgan $T$ boʻlinishini qaraymiz.

Uzunligi $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ga teng bo‘lgan $[t_{k-1}, t_k]$ qismiy kesmani $\Phi$ akslantirish $\Delta L_k = M_{k-1}M_k$ qismiy yoyga otkazadi. Bu yoyning uzunligi

$$|\Delta L_k| \;=\; \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi'(t)|\, dt$$

ga teng.

Endi (15.2.12) tengsizlikni qo‘llasak,

$$m \cdot \Delta t_k \;\le\; |\Delta L_k| \;\le\; M \cdot \Delta t_k$$

bahoga ega bo‘lamiz.

Demak, istalgan $k$ nomer uchun

$$m \cdot \Delta t_k \;\le\; |\Delta L_k| \;\le\; M \cdot d(P)$$

va

$$m \cdot \Delta t_k \;\le\; d(T) \;\le\; M \cdot d(P)$$

tengsizliklar o‘rinli.

Ravshanki, bevosita oxirgi bahodan lemmaning tasdig‘i kelib chiqadi.■

Navbatdagi tasdiq ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni hisoblashni kesma bo‘yicha olingan oddiy aniq integralni hisoblashga olib keladi.

**15.2.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $L$ (15.2.20) formula bilan berilgan silliq egri chiziq bo‘lib, maxsus nuqtaga ega bo‘lmasin. Agar $f$ funksiya $L$ egri chiziq bo‘ylab uzluksiz bo‘lsa, bu funksiyadan $L$ bo‘yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar mavjud bo‘lib, quyidagi*

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dx \;=\; \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cdot \varphi'(t)\, dt, \qquad (15.2.21)$$

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dy \;=\; \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cdot \psi'(t)\, dt \qquad (15.2.22)$$

va

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dy \;=\; \int\limits_a^b f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\cdot\chi'(t)\,dt \qquad (15.2.23)$$

*tengliklar o‘rinli bo‘ladi.*

**Isbot.** (15.2.21) tenglikning to‘g‘ri ekanini ko‘rsatamiz. (15.2.8) ta’rifga ko‘ra, (15.2.21) ning chap tomonidagi integral (15.2.5) ko‘rinishdagi integral yig‘indilarning limitiga teng, ya’ni

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dx \;=\; \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k. \qquad (15.2.24)$$

Orientirlangan $L = AB$ egri chiziqning istalgan $M_0, M_1, ..., M_m$ nuqtalari tashkil qilgan $T$ bo‘linishi berilgan bo‘lsin. $[a,b]$ kesmaning bu bo‘linishga mos kelgan, ya’ni $\Phi(t_k) = M_k$ tenglik orqali aniqlanuvchi nuqtalar tashkil qilgan

$$P \;=\; \{a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b\}$$

bo‘linishini qaraymiz. Ravshanki,

$$\Delta x_k \;=\; \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \;=\; \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt.$$

Agar biror $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k) \in \Delta L_k$ nuqtani tanlasak, $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k) = \Phi(\tau_k)$ tenglik unga $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ nuqtani mos qo‘yadi.

Shunday ekan, (15.2.24) ning o‘ng tomonidagi integral yig‘indini

$$\sigma_P^{(1)}(f) \;=\; \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta x_k \;=\; \sum_{k=1}^{m} f(\Phi(\tau_k))\cdot\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Agar (15.2.21) tenglikning o‘ng tomonidagi integralni $I$ simvoli orqali belgilasak, bu integralning additivligiga asosan,

$$\sigma_P^{(1)}(f) \; - \; I \; = \; \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\Phi(\tau_k)) - f(\Phi(t))] \cdot \varphi'(t)\, dt$$

tenglikni olamiz.

15.2.1 - lemmaga ko‘ra, agar $L$ egri chiziqning $T$ bo‘linishining $d(T)$ diametri yetarlicha kichik bo‘lsa, u holda $[a, b]$ kesmaning mos $P$ bo‘linishining $d(P)$ diametri ham yetarlicha kichik bo‘ladi.

Shartga ko‘ra, $f(\Phi(t))$ funksiya $[a, b]$ kesmada tekis uzluksiz. Shunday ekan, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun $[a, b]$ kesma bo‘linishining diametrini shunchalik kichik qilsih mumkinki, har bir $[t_{k-1}, t_k]$ qismiy kesmada

$$|f(\Phi(\tau_k)) - f(\Phi(t))| \; < \; \varepsilon, \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k], \; t \in [t_{k-1}, t_k],$$

baho bajariladi.

Demak, $T$ bo‘linish diametri yetarlicha kichik bo‘lganda,

$$\left|\sigma_P^{(1)}(f) \; - \; I\right| \le \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varepsilon \left|\varphi'(t)\right| dt \le \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\Phi'(t)\right| dt =$$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{m} |\Delta L_k| = \varepsilon |L|$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Bu baho (15.2.24) integral yig‘indilarining limiti $I$ ga teng ekanini, ya’ni talab qilingan (15.2.21) tenglikning bajarilishini anglatadi.■

**15.2.1 - misol.** Parametrning o‘sish yo‘nalishi bo‘yicha quyidagi

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = R\cos t, \; y = R\sin t, \; z = ht, \; 0 \le t \le 2\pi\}$$

fazoviy egri chiziq bo‘ylab olingan

$$I = \int\limits_L y\,dx + x\,dy + z\,dz$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Buning uchun (15.2.21)-(15.2.23) formulalarni qo‘llash yetarli:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (R\sin t \cdot R\sin t + R\cos t \cdot R\cos t + ht \cdot h)\,dt = 2\pi\left(R^2 + \pi h^2\right).$$

**9.** Navbatdagi teorema ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni birinchi tur egri chiziqli integrallar orqali ifodalashga imkon beradi.

**15.2.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $L$ (15.2.20) formula bilan berilgan silliq egri chiziq bo‘lib, maxsus nuqtaga ega bo‘lmasin. $L$ egri chiziqqa $(x, y, z)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma vektorni*

$$\boldsymbol{\tau}(x,y,z) = (\cos\alpha(x,y,z), \cos\beta(x,y,z), \cos\gamma(x,y,z))$$

*deb belgilaymiz.*

*Agar $f$ funksiya $L$ bo‘ylab uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyadan $L$ egri chiziq bo‘ylab olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar birinchi tur egri chiziqli integral bilan quyidagi*

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dx = \int\limits_L f(x,y,z)\cos\alpha(x,y,z)\,dl, \qquad (15.2.25)$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dy = \int\limits_L f(x,y,z)\cos\beta(x,y,z)\,dl, \qquad (15.2.26)$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_L f(x,y,z)\cos\gamma(x,y,z)\,dl \qquad (15.2.27)$$

*tengliklar yordamida bog‘langan.*

**Isbot.** (15.2.25) formulaning o‘ng tomonidagi birinchi tur egri chiziqli integralni (15.1.13) formula yordamida parametr bo‘yicha olingan aniq integralga keltiramiz:

$$\int\limits_L f(x,y,z)\cos\alpha(x,y,z)\,dl =$$

$$= \int\limits_a^b f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\cos\alpha\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.$$

Oxirgi integralda $\cos\alpha$ ni uning (15.2.17) formuladagi qiymati, ya’ni

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}}$$

bilan almashtiramiz.

Natijada

$$\int\limits_L f(x,y,z)\cos\alpha(x,y,z)\,dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan va yuqorida isbotlangan (15.2.21) formuladan talab qilingan (15.2.25) tenglik kelib chiqadi.

(15.2.26) va (15.2.27) tengliklar ham xuddi shunga o‘xshab isbotlanadi.■

**1 - eslatma.** Isbotlangan teoremaga ko‘ra, (15.2.10) tenglikni quyidagi

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{F}(x,y,z)\,d\boldsymbol{l} =$$

$$= \int\limits_{AB} [P(x,y,z)\,\cos\alpha + Q(x,y,z)\,\cos\beta + R(x,y,z)\,\cos\gamma]\,dl \tag{15.2.28}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bu formulani ko‘pincha vektor ko‘rinishda, ya’ni

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{F}(x,y,z)\,\boldsymbol{dl} \;=\; \int\limits_{AB} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dl \tag{15.2.29}$$

deb yozishadi.

E’tibor bering, (15.2.29) ning chapida ikkinchi tur egri chiziqli integral va o‘ng tomonida esa, birinchi tur egri chiziqli integral turibdi. Birinchi tur egri chiziqli integral egri chiziqda o‘rnatilgan yo‘nalishga bog‘liq emas, ammo yo‘nalish teskarisiga o‘zgartirilganda $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektor $-\boldsymbol{\tau}$ ga o‘zgaradi va shuning uchun, ikkala integralning ishorasi o‘zgarib, tenglik o‘z kuchida qoladi:

$$\int\limits_{BA} \boldsymbol{F}(x,y,z)\,\boldsymbol{dl} \;=\; \int\limits_{BA} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dl.$$

**2 - eslatma.** Agar $\boldsymbol{dl}$ vektor $AB$ egri chiziqning $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektori va $dl$ skalyar differensial bilan quyidagi

$$\boldsymbol{dl} \;=\; \boldsymbol{\tau}\,dl$$

ko‘rinishda bog‘langan deb kelishib olsak, formal ravishda (15.2.29) tenglikning to‘g‘riligi o‘z-o‘zidan ko‘rinib turibdi.

**10.** Fazoviy egri chiziq bo‘yicha ikkinchi tur egri chiziqli integralni qanday aniqlagan bo‘lsak, xuddi shu usulda bunday integralni tekislikdagi egri chiziq bo‘yicha ham aniqlashimiz mumkin. Ammo bunga o‘rin yo‘q, chunki har qanday yassi egri chiziqni fazoviy egri chiziq deb ham qarashimiz mumkin.

Haqiqatan, egri chiziqning (15.2.20) tenglamasida oxirgi komponenta aynan nol bo‘lsin deylik, ya’ni $\chi(t) \equiv 0$ deb faraz qilaylik. Bu talab egri chiziqning tekislikda, aniqrog‘i, $Oxy$ tekisligida yotishini anglatadi. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning ta’rifiga ko‘ra, bu holda $\boldsymbol{F}$ vektor-funksiyaning oxirgi $R(x,y,z)$ komponentasi integral qiymatiga ta’sir qilmaydi va shuning uchun, $R(x,y,z) \equiv 0$ deb hisoblash mumkin. Natijada $z$ ga bog‘liqlik yo‘qoladi va biz tekislikdagi egri chiziq bo‘yicha ikkinchi tur egri chiziqli integralga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, $L$ yassi egri chiziq parametrik ko‘rinishda

$$L \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x=\varphi(t),\; y=\psi(t), \quad a\le t\le b\} \quad (15.2.30)$$

kabi berilgan bo‘lsin.

Bu egri chiziqni

$$\widetilde{L} \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x=\varphi(t),\; y=\psi(t),\; z=0, \quad a\le t\le b\}$$

ko‘rinishda berilgan fazoviy egri chiziq deb ham qarash mumkin. $L$ egri chiziqda berilgan $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ vektor-funksiyani esa, $\widetilde{L}$ egri chiziqda berilgan $\widetilde{\boldsymbol{F}} = (P,Q,0)$ vektor-funksiya deb hisoblashimiz mumkin.

Shunday ekan, $\boldsymbol{F}$ vektor-funksiyadan $L$ yassi egri chiziq bo‘yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integralni biz

$$\int\limits_L \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{dl} \;=\; \int\limits_{\widetilde{L}} \widetilde{\boldsymbol{F}}\,\boldsymbol{dl}$$

tenglik orqali aniqlaymiz.

Yassi egri chiziq bo‘yicha ikkinchi tur egri chiziqli integral koordinatalarda

$$\int\limits_L \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{dl} \;=\; \int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \qquad (15.2.31)$$

ko‘rinishda yoziladi.

(15.2.16) formulaga ko‘ra, $L$ egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma vektor shu egri chiziq bilan bitta tekislikda yotadi va koordinatalarda

$$\boldsymbol{\tau}(t) \;=\; \frac{(\varphi'(t),\psi'(t))}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}} \qquad (15.2.32)$$

ko‘rinishga ega.

Har qanday $t\in[a,b]$ son olganda ham $-\pi<\alpha\le\pi$ shartni qanoatlantiruvchi shunday yagona $\alpha$ soni topiladiki, u uchun

$$\cos\alpha \;=\; \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}},$$

$$\sin\alpha \;=\; \frac{\psi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}}$$

tengliklar bajariladi.

Bunda, agar $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ desak, $L$ egri chiziqqa $(x,y)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma vektor $Ox$ o‘q bilan $\alpha$ burchak tashkil qiladi deyiladi va

$$\boldsymbol{\tau}(x,y) \;=\; (\cos\alpha(x,y),\ \sin\alpha(x,y)) \qquad (15.2.33)$$

deb yoziladi.

Shunday qilib, yassi egri chiziq holida urinma vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari o‘rniga urinma vektor bilan abssissa o‘qi tashkil qilgan burchak tushunchasi ishlatilar ekan.

**15.2.2 - misol.** Parametrik ko‘rinishda berilgan

$$S \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x=R\cos t,\ y=R\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi\}$$

aylanaga o‘tkazilgan urinma vektorni toping.

Quyidagi

$$\varphi(t) \;=\; R\cos t,\quad \psi(t) \;=\; R\sin t$$

belgilashlarni kiritaylik.

U holda (15.2.32) formulaga ko‘ra, urinma vektor uchun quyidagi

$$\boldsymbol{\tau}(t) \;=\; \frac{(-R\sin t,\ R\cos t)}{\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}} \;=\; (-\sin t,\ \cos t)$$

tenglikni olamiz.

Agar $\sin t = y/R$ va $\cos t = x/R$ tengliklarni hisobga olsak, o‘ng tomondan parametrni yo‘qotib,

$$\boldsymbol{\tau} \;=\; \frac{(-y,x)}{R^2}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Bu vektor abssissa o‘qi bilan shunday $\alpha$ burchak tashkil qiladiki, u uchun

$$\cos\alpha \;=\; -\frac{y}{R},\quad \sin\alpha \;=\; \frac{x}{R}$$

tengliklar bajariladi.

**11*.** Agar $L \in \mathbb{R}^2$ silliq egri chiziqning $M_0 = (x_0, y_0) = \Phi(t_0)$ nuqtasi maxsus bo'lmasa, ya'ni $\Phi'(t_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $L$ egri chiziqni shu nuqtaning yetarlicha kichik atrofida yotgan qismi biror uzluksiz differensiallanuvchi funksiya grafigi bilan ustma-ust tushadi.

Haqiqatan, masalan $\varphi'(t_0) \neq 0$ deb faraz qilsak, $x_0 = \varphi(t_0)$ nuqtaning biror atrofida $t = \varphi^{-1}(x)$ teskari funksiya aniqlangan bo'ladi. Natijada, agar $f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ desak, egri chiziq tenglamasi $M_0 = (x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U$ atrofida

$$y = f(x)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Qulaylik uchun $M_0$ nuqtaning ko'rsatilgan $U$ atrofida lokal koordinatalarga o'tamiz. Bu koordinatalarni shunday tanlash mumkinki, bunda urinma tenglamasi nihoyatda sodda ko'rinishga ega bo'ladi. Bunday koordinatalarni kiritish uchun bizga muhim bir tushuncha, ya'ni yassi egri chiziqqa o'tkazilgan normal tushunchasi kerak.

$L \subset \mathbb{R}^2$ silliq yassi egri chiziqqa istalgan $M \in L$ nuqtasida o'tkazilgan *normal* deb $\boldsymbol{\tau}(M)$ urinma vektorga ortogonal birlik vektorga aytamiz. Agar $\mathbf{n}$ normal bo'lsa, $(-\mathbf{n})$ vektor ham normal bo'ladi va yassi egri chiziqning qaralayotgan nuqtasidan boshqa normal o'tmaydi.

**15.2.3 - misol.** Faraz qilaylik,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = R^2\}$$

aylana quyidagi

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu aylanaga o'tkazilgan normal topilsin.

15.2.2 - misolga ko'ra, $(x, y)$ nuqtadagi urinma vektor

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{(-y, \ x)}{R^2}$$

ko‘rinishga ega.

Ravshanki, $\mathbf{n} = \dfrac{(x,y)}{R^2}$ vektor urinma vektorga $(x,y)$ nuqtada ortogonal bo‘lib, uzunligi 1 ga teng, ya’ni bu vektor normaldir. Yana boshqa normal vektor $-\mathbf{n} = \dfrac{(-x,-y)}{R^2}$ ga teng.

Markazi $M_0 = (x_0, y_0)$ nuqtada bo‘lib, abssissa o‘qi $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektor bo‘ylab va ordinata o‘qi $\mathbf{n}$ normal bo‘ylab yo‘nalgan to‘g‘ri burchakli $\{M_0\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\}$ lokal koordinatalar sistemasini kiritamiz. $M$ nuqtaning yangi $(\xi,\eta)$ koordinatalari eski $(x,y)$ koordinatalari bilan quyidagicha

$$\begin{aligned}\xi &= (x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha,\\ \eta &= -(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha\end{aligned}$$

bog‘langan.

E’tibor bering, bu yerda $\alpha$ shunday burchakki, u uchun $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0, y_0)$.

Yangi koordinatalardan eski koordinatalarga o‘tish formulasi

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha,\\ y &= y_0 + \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha\end{aligned}$$

ko‘rinishga ega.

$M_0$ nuqtaning yuqorida ko‘rsatilgan $U$ atrofi yangi koordinatalarda koordinata boshining biror $V$ atrofiga o‘tadi. Ana shu $V$ atrofda $(\xi,\eta)$ o‘zgaruvchilarning

$$\begin{aligned}F(\xi,\eta) &= y(\xi,\eta) - f[x(\xi,\eta)] =\\ &= y_0 + \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \;-\; f[x_0 + \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha]\end{aligned}$$

funksiyasini qaraymiz.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra,

$$\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial\eta} = \cos\alpha \;+\; f'(x)\sin\alpha.$$

Shuning uchun $(\xi, \eta) = (0, 0)$ nuqtada

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial \eta} = \cos\alpha + f'(x_0)\sin\alpha = \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha\,\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \neq 0$$

shart bajariladi.

Demak, koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrofida $F(\xi, \eta) = 0$ tenglama $\eta$ ga nisbatan yechiladi. Bu degani, $L$ egri chiziq tenglamasi bu atrofda

$$\eta \;=\; g(\xi), \quad (\xi, \eta) \in L, \tag{15.2.34}$$

kabi beriladi; bu yerda $g$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, u $F(\xi, g(\xi)) = 0$ tenglama orqali oshkormas ko'rinishda berilgan. Bu funksiya hosilasi

$$g'(\xi) \;=\; -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}} \;=\; -\frac{\sin\alpha - f'(x)\cos\alpha}{\cos\alpha + f'(x)\sin\alpha}$$

ga teng.

Agar $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ tenglikni e'tiborga olsak,

$$g'(0) \;=\; -\frac{\sin\alpha - f'(x_0)\cos\alpha}{\cos\alpha + f'(x_0)\sin\alpha} \;=\; -\frac{\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha\,\cos\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha\,\sin\alpha} \;=\; 0$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak, $g$ funksiya koordinatalar boshida

$$g(0) \;=\; g'(0) \;=\; 0 \tag{15.2.35}$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Egri chiziqning qaralayotgan qismi $g$ funksiyaning lokal koordinatalardagi grafigi bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, har qanday maxsus nuqtasiz silliq egri chiziqni lokal ravishda (15.2.35) shartni qanoatlantiruvchi (15.2.34) tenglama orqali berish mumkin.

E'tibor bering, lokal koordinatalarda $M_0$ nuqtadagi urinma vektor va normal mos ravishda

$$\boldsymbol{\tau} = (1, 0), \quad \mathbf{n} = (0, 1)$$

kabi aniqlanadi.

**3 - eslatma.** Urinma vektor va normalni biz faqat maxsus nuqtasiz silliq egri chiziqlar uchun aniqladik. Kesmaga homeomorf boʻlgan har qanday uzluksiz egri chiziq uchun ham urinma vektor va normalni aniqlab boʻlmaydi. Agar $L$ egri chiziq boʻlakli-silliq boʻlsa, u holda urinma va normal faqat chiziq silliq boʻlgan nuqtalardagina kiritiladi. Egri chiziqning ikki silliq qismi ulangan nuqtalarda (bunday nuqtalar chekli sonda boʻladi) normal va urinma aniqlanmagan.

**12.** Yassi egri chiziq boʻylab ikkinchi tur egri chiziqli integrallar uchun 15.2.1 - va 15.2.2 - teoremalar oʻrinli. Biz ularni navbatdagi ikki tasdiq koʻrinishida keltiramiz.

**15.2.1 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, L (15.2.30) formula bilan berilgan silliq egri chiziq boʻlib, maxsus nuqtaga ega boʻlmasin. Agar f funksiya L boʻylab uzluksiz boʻlsa, u holda f dan L egri chiziq boʻylab olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar mavjud boʻlib,*

$$\int_L f(x, y)\, dx = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \varphi'(t)\, dt, \qquad (15.2.36)$$

$$\int_L f(x, y)\, dy = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \psi'(t)\, dt \qquad (15.2.37)$$

*tengliklar bajariladi.*

**15.2.2 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, L (15.2.30) formula bilan berilgan silliq egri chiziq boʻlib, maxsus nuqtaga ega boʻlmasin. L egri chiziqqa $(x, y)$ nuqtada oʻtkazilgan urinma vektorni*

$$\boldsymbol{\tau}(x, y) = (\cos\alpha(x, y), \cos\beta(x, y))$$

*deb belgilaymiz.*

*Agar $f$ funksiya $L$ bo'ylab uzluksiz bo'lsa, u holda $f$ funksiyadan $L$ egri chiziq bo'ylab olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar birinchi tur egri chiziqli integral bilan quyidagi*

$$\int_L f(x,y)\,dx = \int_L f(x,y)\cos\alpha(x,y)\,dl, \tag{15.2.38}$$

$$\int_L f(x,y)\,dy = \int_L f(x,y)\sin\alpha(x,y)\,dl \tag{15.2.39}$$

*tengliklar yordamida bog'langan.*

Bu tasdiqlarni to'g'riligi bevosita 15.2.1 - va 15.2.2 - teoremalardan kelib chiqadi.

E'tibor bering, agar $L$ egri chiziq ordinatalar o'qiga parallel kesmadan iborat bo'lsa, u holda bu kesmaning har bir nuqtasida $\alpha = \pi/2$ yoki $\alpha = -\pi/2$ bo'ladi. Demak, $\cos\alpha = 0$ bo'lib, har qanday $f$ funksiya uchun (15.2.38) egri chiziqli integral nolga teng. Shunga o'xshash, agar $L$ abssissalar o'qiga parallel kesmadan iborat bo'lsa, u holda (15.2.39) egri chiziqli integral nolga teng.

**4 - eslatma.** Yuqorida keltirilgan barcha tasdiqlar bo'lakli-silliq egri chiziq uchun ham, ya'ni chekli sondagi silliq qismlarga ajratish mumkin bo'lgan egri chiziq uchun ham, o'rinli. Bunday egri chiziq bo'yicha egri chiziqli integral barcha silliq qismlar bo'yicha olingan egri chiziqli integrallar yig'indisi sifatida aniqlanadi.

**13.** Amaliy masalalarni yechishda yopiq yassi egri chiziq bo'yicha olingan, ya'ni egri chiziqning (15.2.30) parametrlashtirishi $\Phi(a) = \Phi(b)$ shartni qanoatlantirgan holdagi ikkinchi tur egri chiziqli integrallar muhim rol o'ynaydi.

Agar $L$ egri chiziq birlik aylananing homeomorf aksi bo'lsa, u *Jordan* egri chizig'i deyiladi.

Ravshanki, $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 = 1\}$ aylana $\mathbb{R}^2$ tekislikni ikki qismga bo'ladi: birinchisi quyidagi

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\} \tag{15.2.40}$$

chegaralangan soha bo'lib, ikkinchisi esa, ushbu

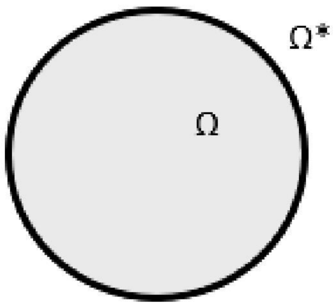
$$\Omega^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 > 1\} \tag{15.2.41}$$

chegaralanmagan sohadir.

Boshqacha aytganda,

$$\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega \cup \Omega^* \tag{15.2.42}$$

bo‘lib, bunda $\Omega$ va $\Omega^*$ lar yuqoridagi bog‘lamli ochiq o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlardir (15.1 - rasm).

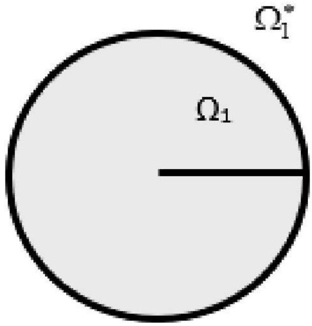



15.1-rasm

Jordanning klassik teoremasiga ko‘ra, aylananing homeomorf aksi ham aynan shu xossaga ega. Chunonchi, har qanday $L$ Jordan egri chizig‘i tekislikni ikki $\Omega$ va $\Omega^*$ ochiq bog‘lamli to‘plamlarga bo‘ladi; bulardan biri chegaralangan bo‘lib, ikkinchisi esa, chegaralanmagan to‘plamlardir. Bu to‘plamlar o‘zaro kesishmaydi va (15.2.42) shartni qanoatlantiradi. Bundan tashqari, $L$ egri chiziq $\Omega$ to‘plamning ham va $\Omega^*$ to‘plamni ham chegarasidir, ya’ni

$$L = \partial\Omega = \partial\Omega^*. \tag{15.2.43}$$

E’tibor bering, har qanday ochiq bog‘lamli to‘plam chegarasining Jordan egri chizig‘i bo‘lishi shart emas. Haqiqatan, agar (15.2.40) ochiq birlik doiradan abssissalar o‘qining $[0,1)$ yarim intervalini chiqarib tashlasak, hosil bo‘lgan $\Omega_1$ to‘plam bog‘lamli, ochiq va chegaralangan bo‘ladi. Uning $\partial\Omega_1$ chegarasi birlik aylana va chiqarib tashlangan $[0,1)$ yarim interval birlashmasidan iborat (15.2 - rasm).




15.2-rasm

Bu chegaraning Jordan egri chizig‘i emasligi aniq. Bundan tashqari, $\Omega_1^* = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_1$ desak,

$$\partial\Omega_1 \neq \partial\Omega_1^*$$

munosabat o‘rinli.

Shuni aytish kerakki, Jordan teoremasining mazmuni yaqqol ko‘rinib turgan bo‘lsa ham, uning isboti texnik jihatdan ancha murakkab va katta hajmga ega. Shu sababli biz isbotni bu yerda keltirmaymiz.

Bundan buyon, *kontur* deganda biz bo‘lakli-silliq Jordan egri chizig‘ini tushunamiz. Yuqoridagi bayonimizga ko‘ra, har qanday $L$ Jordan egri chizig‘i biror chegaralangan $\Omega$ sohaning chegarasidan iborat bo‘lib, $L$ egri chiziqni istalgan nuqtasining har qanday atrofida $\Omega$ ga tegishli nuqtalar ham, $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ ga tegishli nuqtalar ham mavjud.

Biror $L = \partial\Omega$ kontur bo‘yicha ikkinchi tur egri chiziqli integralni aniqlash uchun bu konturda qanday tartibda yo‘nalish o‘rnatishni kelishib olishimiz kerak.

Har qanday konturda ikki o‘zaro qarama-qarshi yo‘nalish tanlash mumkin va bunga mos ravishda, egri chiziqning har bir nuqtasida urinma vektor sifatida o‘zaro qarama-qarshi yo‘nalgan ikki vektordan birini tanlash mumkin. Biz maxsus bir yo‘nalish tanlash usulini ko‘rsatib, bu yo‘nalishni musbat va unga teskari yo‘nalishni esa, manfiy yo‘nalish deb ataymiz. Albatta, musbat yo‘nalishni tanlash tekislikda berilgan Dekart koordinatalar sistemasining qanday orientirlanganiga bog‘liq.

Avval $L = \partial\Omega$ silliq konturda istalgan bir yo‘nalish tanlangan deb faraz qilamiz. Aytaylik, $M$ bu konturning biror nuqtasi bo‘lib, $\boldsymbol{\tau}$ egri chiziqda tanlangan yo‘nalishga mos keluvchi $M$ nuqtadagi urinma vektor va $\mathbf{n}$ esa, $M$ nuqtadagi ikki normaldan biri bo‘lsin.

Ushbu paragrafning 11* - bandida keltirilgan mulohazalarga asoslanib, navbatdagi tasdiqni isbotlash qiyin emas:

*agar $L = \partial\Omega$ silliq egri chiziqning $M$ nuqtasi maxsus bo‘lmasa, u holda shunday $\varepsilon > 0$ topiladiki, u uchun $M$ nuqtadan chiquvchi $\varepsilon\mathbf{n}$ yo‘naltirilgan kesma butunlay (boshlang‘ich $M$ nuqta bundan istisno) yoki $\Omega$ sohaning ichida, yoki uning tashqarisida, ya’ni $\Omega^* = R^2 \setminus \overline{\Omega}$ da yotadi.*

Birinchi holda normal $\Omega$ sohasining ichiga yo‘nalgan va ikkinchi holda esa, normal $\Omega$ sohasining tashqarisiga yo‘nalgan deyiladi.

$\Omega$ sohasining ichiga yo‘nalgan normal *ichki* va qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan normal esa, *tashqi* normal deyiladi.

E’tibor bering, biz ichki normalni butunlay $\Omega$ sohasining ichida yotadi deb ayta olmaymiz. Haqiqatan, agar bu soha yetarlicha kichik bo‘lsa, u holda ichki normalning birlik vektori albatta $\Omega$ dan chiqib ketishini 15.2.3 - misolda ko‘rgan edik.

Berilgan konturning musbat yo‘nalishini qaralayotgan tekislikdagi $\{Oxy\}$ Dekart koordinatalar sistemasiga bog‘lab aniqlaymiz. Buning uchun markazi $M$ nuqtada bo‘lib, abssissalar o‘qi $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektor bo‘ylab va ordinatalar o‘qi esa, $\mathbf{n}$ ichki normal vektori bo‘ylab yo‘nalgan yangi $\{M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\}$ to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini kiritamiz.

*Agar $\{M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\}$ koordinatalar sistemasini $\{Oxy\}$ Dekart koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish va burish yordamida hosil qilish mumkin bo‘lsa, u holda $L$ da tanlangan yo‘nalishni **musbat** deymiz.*

Konturning qarama-qarshi yo‘nalishini *manfiy* deymiz.

Masalan, agar tekislikdagi Dekart koordinatalar sistemasi o‘ng tomonli bo‘lsa, u holda konturning musbat yo‘nalishiga mos $\{M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\}$

koordinatalar sistemasi ham o'ng tomonli bo'lishi kerak.

**5 - eslatma.** Xayolan abssissalar o'qi bo'ylab musbat yo'nalishda harakat qilayapmiz deylik. Agar bunda ordinatalar o'qi chapga yo'nalgan bo'lsa, tekislikdagi bunday Dekart koordinatalar sistemasini o'ng tomonli deymiz. Bunday atamalashga asoslanib, $L$ konturning musbat yo'nalishini quyidagicha ta'riflashimiz mumkin:

*Agar L kontur bo'ylab berilgan yo'nalishda harakatlanganda ichki normal chap tomonga yo'nalgan bo'lsa, bu yo'nalish konturning musbat yo'nalishi deyiladi.*

Boshqacha aytganda, musbat yo'nalishda soha chegarasini aylanib chiqilayotganda soha chap tomonda qolishi kerak.

**6 - eslatma.** Musbat yo'nalish faqat yopiq kontur uchun, ya'ni bo'lakli-silliq Jordan egri chizig'i uchun kiritiladi. Yopiq bo'lmagan egri chiziq uchun unda aniqlanishi mumkin bo'lgan ikki yo'nalish ham teng kuchlidir va bunday egri chiziqlarda musbat yo'nalish hamda ichki yoki tashqi normal kabi tushunchalar kiritilmaydi.

**15.2.4 - misol.** Markazi koordinatalar boshida va radiusi birga teng bo'lgan

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$$

doira berilgan bo'lsin. Bu doiraning chegarasidan iborat birlik aylanada musbat yo'nalishni aniqlang.

Agar aylana

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{15.2.44}$$

parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, chegaraning qanday yo'nalishda aylanib chiqilishini aniqlaymiz.

Agar $\mathbf{r} = (x, y)$ vektor $\partial\Omega$ chegaraga tegishli bo'lsa, uning komponentalari $x^2 + y^2 = 1$ shartni qanoatlantiradi. 15.2.2 - misolga ko'ra, $(x, y)$ nuqtadagi urinma vektor

$$\boldsymbol{\tau} = (-y, \ x)$$

ga teng.

Ravshanki, $\mathbf{r} = (x, y)$ vektor $(x, y)$ nuqtadagi urinmaga ortogonal bo‘lib, uning uzunligi 1 ga teng. Demak, bu vektor normaldir. Boshqa normal $-\mathbf{r} = (-x, -y)$ ga teng.

Ichki normal $\mathbf{n} = -\mathbf{r}$ vektordan iborat, chunki u $(x, y)$ nuqtadan doira markaziga yo‘nalgan. Unga qarama-qarshi bo‘lgan $(-\mathbf{n}) = \mathbf{r}$ vektor tashqi normaldir.

E’tibor bering, $\{M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\}$ koordinatalar sistemasi o‘ng tomonlidir, chunki u xuddi dastlabki $\{Oxy\}$ Dekart koordinatalar sistemasi singari orientirlangan. Haqiqatan, masalan, $(x, y) = (0, -1)$ nuqtada urinma vektori $\boldsymbol{\tau} = (1, 0)$ komponentalarga ega bo‘lib, ichki normal vektori esa, $\mathbf{n} = (0, 1)$ komponentalarga ega, ya’ni urinma abssissalar o‘qi bilan va ichki normal esa, ordinatalar o‘qi bilan bir xilda yo‘nalgan.

Shunday qilib, (15.2.44) parametrlash birlik aylanada musbat yo‘nalishni beradi.

**7 - eslatma.** (15.2.44) parametrlashda parametrning oshib borishi natijasida nuqtaning birlik aylana bo‘ylab harakati soat miliga qarama-qarshi yo‘nalishdagi harakat deyiladi. Shunday qilib, soat miliga qarama-qarshi yo‘nalishdagi harakat birlik aylanada musbat yo‘nalishni aniqlaydi.

**8 - eslatma.** Birlik aylana

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

tenglamalar bilan ham parametrlanishi mumkin.

Bu parametrlash birlik aylanada manfiy yo‘nalishni aniqlaydi. Bunda nuqtaning parametr oshgandagi harakati soat mili bo‘yicha bo‘ladi.

Bundan buyon, yassi kontur bo‘yicha egri chiziqli integralni qarayotganda, biz integrallash musbat yo‘nalishda olib borilayapti deb hisoblaymiz. Ba’zan, yopiq $L$ kontur bo‘yicha integrallanayotganiga urg‘u berish maqsadida, egri chiziqli integral uchun quyidagi

$$I = \oint_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

belgilashdan foydalaniladi.

**15.2.5 - misol.** Ushbu

$$L = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

ellips bo‘yicha soat miliga teskari yo‘nalishda quyidagi

$$I = \oint_L (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

Ellipsni

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi,$$

parametrik ko‘rinishda yozib olamiz.

Ravshanki, bu parametrlash ellipsning musbat yo‘nalishiga mos keladi.

Yuqoridagi integralni hisoblash uchun (15.2.36) va (15.2.37) tengliklarni qo‘llash yetarli:

$$I = \int_0^{2\pi}(a\cos t - b\sin t)(-a\sin t)dt + \int_0^{2\pi}(a\cos t + b\sin t)b\cos t\,dt = 2\pi ab.$$

## 15.3-§. Grin formulasi

Grin formulasi biror funksiya hosilasidan ikki o‘lchovli $\Omega$ sohasi bo‘yicha olingan ikki karrali integralni bu sohaning $\partial\Omega$ chegarasi bo‘yicha funksiyaning o‘zidan olingan egri chiziqli integral bilan bog‘laydi. Nyuton-Leybnits formulasi bir o‘lchovli integral uchun qanday rolni o‘ynasa, bu formula ham matematik tahlilda xuddi shu rolni o‘ynaydi.

Biz quyida $\partial\Omega$ chegarani musbat yo‘nalish o‘rnatilgan yopiq bo‘lakli-silliq egri chiziq deb faraz qilamiz. Bu degani egri chiziqni shunday parametrlashtirishni anglatadiki, bunda parametr oshib borib, nuqta $\partial\Omega$ kontur bo'yicha harakatlanganda, $\Omega$ soha chap tomonda qoladi.

**1.** Biror $[a, b]$ kesmada ikki $y_1(x)$ va $y_2(x)$ uzluksiz bo'lakli-silliq funksiyalar berilgan bo'lsin. Ushbu

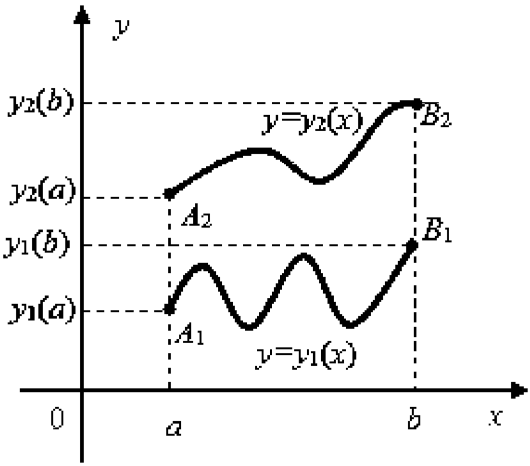
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y < y_2(x), \quad a < x < b\} \qquad (15.3.1)$$

ko'rinishda berilgan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohani qaraymiz.

Bu soha chegarsiga tegishli 4 ta nuqtani

$$A_1 = (a, y_1(a)),\ A_2 = (a, y_2(a)),\ B_1 = (b, y_1(b)),\ B_2 = (b, y_2(b)) \qquad (15.3.2)$$

kabi belgilaymiz (15.3 - rasm).




15.3-rasm

Musbat yo'nalish bo'yicha chegarani quyidagicha aylanib chiqish mumkin: $A_1$ nuqtadan boshlab $y = y_1(x)$ egri chiziq bo'ylab $x$ ning o'sish yo'nalishida $B_1$ nuqtagacha harakatlanamiz, so'ngra $B_1$ nuqtadan $B_2$ nuqtagacha $x = b$ to'g'ri chiziqning vertikal kesmasi bo'ylab, keyin $y = y_2(x)$ egri chiziq bo'ylab $x$ ning kamayish yo'nali shida to $A_2$ nuqtagacha va nihoyat, $x = a$ to‘g‘ri chiziqning vertikal kesmasi bo‘ylab $A_2$ nuqtadan to boshlang‘ich $A_1$ nuqtagacha harakat lanamiz (15.3 - rasm).

Chegarani aylanish yo‘nalishi haqidagi kelishuvimizni simvolik ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\oint\limits_{\partial\Omega} = \int\limits_{A_1B_1} + \int\limits_{B_1B_2} + \int\limits_{B_2A_2} + \int\limits_{A_2A_1} . \tag{15.3.3}$$

Biz bitta yoki ikkala vertikal kesmani nuqtaga aylanish holini istisno qilmaymiz. Shu sababli har qanday qavariq sohani (15.3.1) ko‘rinishda yozish mumkin.

Navbatdagi tasdiq o‘rinli.

**15.3.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $P(x, y)$ funksiya va uning $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ xususiy hosilasi (15.3.1) ko‘rinishdagi $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohada uzluksiz bo‘lsin. U holda*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\oint\limits_{\partial\Omega} P(x, y)\, dx \tag{15.3.4}$$

*tenglik o‘rinli bo‘lib, bunda o‘ng tomondagi integral $\Omega$ sohasining chegarasi bo‘yicha, ya’ni yopiq egri chiziq bo‘yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.*

**Isbot.** Nyuton-Leybnits formulasiga ko‘ra,

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dy = P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)).$$

Bu tenglikni $x$ bo‘yicha $[a, b]$ kesmada integrallasak,

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dy = \int\limits_a^b P(x, y_2(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\, dx$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Chap tomondagi takroriy integral, 12.5.2 - teoremaga ko‘ra, $\Omega$ sohasi bo‘yicha olingan ikki karrali integralga teng. O‘ng tomondagi integrallar esa, ikkinchi tur egri chiziqli integrallar bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun bu tenglikni

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy \;=\; \int\limits_{A_2B_2} P(x,y)\, dx - \int\limits_{A_1B_1} P(x,y)\, dx \quad (15.3.5)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Boshqa tomondan, (15.3.4) ning o‘ng tomonidagi egri chiziqli integralni, (15.3.3) ga ko‘ra,

$$\oint\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\, dx \;=\; \left( \int\limits_{A_1B_1} + \int\limits_{B_1B_2} + \int\limits_{B_2A_2} + \int\limits_{A_2A_1} \right) P(x,y)\, dx \quad (15.3.6)$$

deb yozsa bo‘ladi.

Endi bu tenglikning o‘ng tomonidagi 4 ta integralga ahamiyat beraylik. $B_1B_2$ va $A_2A_1$ vertikal kesmalar bo‘yicha olingan ikkinchi va to‘rtinchi integrallar nolga teng. Shunday ekan, uchinchi integralda integrallash yo‘nalishini qarama-qarshi tomonga o‘zgartirsak,

$$\int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\, dx \;=\; \int\limits_{A_1B_1} P(x,y)\, dx \;-\; \int\limits_{A_2B_2} P(x,y)\, dx$$

tenglikni olamiz.

Bu tenglikni (15.3.5) bilan taqqoslasak, talab qilingan (15.3.4) tenglikka kelamiz.■

**Natija.** *Agar 15.3.1 - teorema shartlari bajarilsa,*

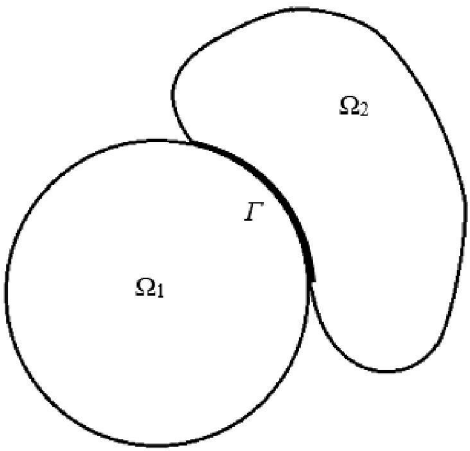
$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy \;=\; -\int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\, \cos\alpha(x,y)\, dl, \qquad (15.3.7)$$

*tenglik o‘rinli bo‘lib, bu tenglikning o‘ng tomoni birinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.*

**1 - eslatma.** Isbotlangan (15.3.4) formula chekli sondagi (15.3.1) ko'rinishga ega bo'lgan sohalar birlashmasi uchun ham o'rinli. Haqiqatan, aytaylik,

$$\Omega \;=\; \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$$

bo'lsin, bunda $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ - bo'lakli-silliq egri chiziq va $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ (15.4 - rasm).




15.4-rasm

Har bir $\Omega_1$ va $\Omega_2$ soha uchun (15.3.4) tenglikni yozamiz:

$$\iint\limits_{\Omega_k} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy \;=\; -\int\limits_{\partial\Omega_k} P(x,y)\, dx, \quad k = 1, 2.$$

Bu tengliklarni qo'shib, ikki karrali integralning additivligiga ko'ra,

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy \;=\; -\int\limits_{\partial\Omega_1} P(x,y)\, dx \;-\; \int\limits_{\partial\Omega_2} P(x,y)\, dx$$

tenglikni olamiz.

Endi

$$\int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx \;=\; \int\limits_{\partial\Omega_1} P(x,y)\,dx \;+\; \int\limits_{\partial\Omega_2} P(x,y)\,dx$$

ekanini qayd etish yetarli.

Aslida o‘ng tomondagi yig‘indi $\partial\Omega$ «tashqi» chegara va $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ichki egri chiziq bo‘yicha olingan integraldan iborat bo‘lib, bunda $\Gamma$ bo‘yicha ikki marta o‘zaro qarama-qarshi yo‘nalishlar bo‘yicha integrallanadi. Shuning uchun, $\Gamma$ bo‘yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integral nolga teng bo‘lib, faqat $\partial\Omega$ bo‘yicha integral qoladi.

**2 - eslatma.** (15.3.1) da $y_1(x) \equiv 0$ bo‘lsin deylik. (15.3.4) formulani $P(x,y) = y$ funksiyaga qo‘llaymiz. U holda $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ bo‘lib, (15.3.4) formulaning chap tomonidagi integral $\Omega$ sohaning $|\Omega|$ yuziga teng. Demak,

$$|\Omega| \;=\; -\oint\limits_{\partial\Omega} y\,dx.$$

Bu egri chiziqli integralni, (15.3.6) dagi kabi, 4 ta integral yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin. Bu integrallardan faqat uchinchisining noldan farqli ekanini ko‘rish qiyin emas. Shuning uchun

$$|\Omega| \;=\; -\int\limits_{B_2A_2} y\,dx.$$

Bu yerda minus ishora paydo bo‘lishiga sabab shundaki, kelishuvimizga ko‘ra, chegarani musbat yo‘nalishda aylanayotganda, $B_2$ nuqtadan $A_2$ nuqtagacha yoy bo‘yicha harakat $x$ o‘zgaruvchining kamayishi bilan amalga oshadi va shuning uchun integral manfiy qiymatga ega bo‘ladi. Yo‘nalish o‘zgarganda egri chiziqli integral ishorasi o‘zgargani uchun, oxirgi tenglikni quyidagi

$$|\Omega| \;=\; \int\limits_{A_2B_2} y\,dx \;=\; \int\limits_a^b y_2(x)\,dx$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Bu formula $y_2(x)$ funksiya grafigi ostidagi egri chiziqli trapetsiya yuzining klassik formulasi bilan ustma-ust tushadi.

**2.** Endi biror $[c, d]$ kesmada ikki $x_1(y)$ va $x_2(y)$ uzluksiz bo'lakli-silliq funksiyalar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\Omega \; = \; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x_1(y) < x < x_2(y), \quad c < y < d\} \tag{15.3.8}$$

ko'rinishda berilgan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohani qaraymiz. Bu bandda ham biz $\partial\Omega$ chegara deganda musbat yo'nalish o'rnatilgan bo'lakli-silliq egri chiziqni tushunamiz, ya'ni parametrning qiymati oshib borganda nuqta egri chiziq bo'ylab shunday harakat qiladiki, bunda $\Omega$ soha chap tomonda qoladi.

**15.3.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $Q(x, y)$ funksiya va uning $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilasi (15.3.8) ko'rinishdagi $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohada uzluksiz bo'lsin. U holda*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy \; = \; \oint\limits_{\partial\Omega} Q(x, y)\, dy \tag{15.3.9}$$

*tenglik o'rinli bo'lib, bunda o'ng tomondagi integral $\Omega$ sohasining chegarasi bo'yicha, ya'ni yopiq egri chiziq bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.*

**Isbot.** Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra,

$$\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx \; = \; Q(x_2(y), y) \; - \; Q(x_1(y), y).$$

Hosil bo'lgan tenglikni $y$ bo'yicha $[c, d]$ kesmada integrallasak,

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx \; = \; \int\limits_c^d Q(x_2(y), y)\, dx \; - \; \int\limits_c^d Q(x_1(y), y)\, dy$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan, xuddi 15.3.1 - teorema isbotidagidek,

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\, dx\, dy \;=\; \int\limits_{C_2 D_2} Q(x_2(y),y)\, dx \;+\; \int\limits_{D_1 C_1} Q(x_1(y),y)\, dy$$

tenglikni olamiz, bu yerda

$$C_1 = (x_1(c),c),\; C_2 = (x_2(c),c),\; D_1 = (x_1(d),d),\; D_2 = (x_2(d),d)$$

deb belgilangan. Endi gorizontal $C_1C_2$ va $D_2D_1$ kesmalar bo‘yicha ikkita nolga teng bo‘lgan integrallarni qo‘shsak, talab qilingan (15.3.9) tenglikka ega bo‘lamiz.■

**Natija.** *Agar 15.3.2 - teorema shartlari bajarilsa, quyidagi*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\, dx\, dy \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} Q(x,y)\, \sin\alpha(x,y)\, dl \qquad (15.3.10)$$

*tenglik o‘rinli bo‘lib, bu tenglikning o‘ng tomoni birinchi tur egri chiziqli integraldan iborat.*

**3 - eslatma.** Isbotlangan (15.3.9) formula chekli sondagi (15.3.8) ko‘rinishga ega bo‘lgan sohalarning birlashmasi uchun ham o‘rinli.

**4 - eslatma.** (15.3.8) da $x_1(y) \equiv 0$ deylik. (15.3.9) formulani $Q(x,y) = x$ funksiyaga qo‘llaymiz. U holda $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$ bo‘lib, (15.3.9) formulaning chap tomonidagi integral $\Omega$ sohasining $|\Omega|$ yuziga teng. Demak,

$$|\Omega| \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} x\, dy \;=\; \int\limits_{C_2 D_2} x\, dy\ .$$

Oxirgi ikkinchi tur egri chiziqli integralda $y$ ning o‘sish yo‘nalishida integrallanayapti. Shuning uchun

$$|\Omega| \;=\; \int\limits_{c}^{d} x_2(y)\, dy$$

bo‘lib, bu formula $x_2(y)$ funksiya grafigi va ordinatalar o‘qi orasidagi egri chiziqli trapetsiya yuzining klassik formulasi bilan ustma-ust tushadi.

**3.** Faraz qilaylik, $\Omega$ sohani chekli sondagi (15.3.1) ko'rinishga ega sohalarning yoki chekli sondagi (15.3.8) ko'rinishga ega sohalarning birlashmasi sifatida yozish mumkin bo'lsin. Bunday sohani lo'nda qilib regulyar deb ataymiz. Regulyar soha chegarasini $L$ orqali belgilab, uni *regulyar kontur* deymiz.

Ma'lumki, regulyar sohada har ikki 15.3.1 - va 15.3.2 - teorema o'rinli. Bu tasdiqlarni birlashtirib, Grin formulasi deb ataluvchi navbatdagi tasdiqni olamiz.

**15.3.3 - teorema (Grin formulasi).** *Faraz qilaylik, $\Omega$ regulyar soha bo'lib, $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar yopiq $\overline{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda quyidagi*

$$\boxed{\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} P\, dx + Q\, dy} \tag{15.3.11}$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot**. To'g'ridan-to'g'ri yoki zarur bo'lsa, avval $\Omega$ sohani (15.3.1) va (15.3.8) ko'rinishdagi qismiy sohalarga bo'lib, so'ngra, mos ravishda, 15.3.1 - va 15.3.2 - teoremalarni qo'llashdan iborat.

Grin formulasi juda ko'p tadbiqlarga ega. Masalan, kontur bo'yicha integral yordamida soha yuzini topish mumkin. Haqiqatan, faraz qilaylik, $P$ va $Q$ funksiyalar uchun

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \;=\; 1 \tag{15.3.12}$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda (15.3.11) formulaning chap tomonidagi integral $\Omega$ sohasining yuziga teng.

**15.3.1 - misol.** Quyidagi

$$L \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$$

astroida bilan chegaralangan $\Omega$ sohaning yuzini toping.

Agar $P(x,y) = -y/2,\ Q(x,y) = x/2$ desak, (15.3.12) tenglik o‘rinli bo‘ladi va Grin formulasiga ko‘ra,

$$|\Omega| \ = \ \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} -y\,dx + x\,dy.$$

Astroidaning

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

ko‘rinishdagi parametrik tenglamasi musbat yo‘nalishni beradi. Shuning uchun

$$|\Omega| \ = \ \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} [-y(t)\,x'(t) + x(t)\,y'(t)]\,dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} [a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \sin t \ + \ a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t \cos t]\,dt \ = \ \frac{3\pi}{8} a^2.$$

Grin formulasidan yana egri chiziqli integral hisoblashni ikki karrali integral hisoblashga keltirishda foydalanish mumkin.

**15.3.2 - misol.** Agar

$$L \ = \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = R^2\}$$

aylana bo‘lsa, Grin formulasi yordamida

$$I \ = \ \int\limits_L x^2y^3\,dx - x^3y^2\,dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

$P = x^2y^3,\ Q = -x^3y^2$ deylik. U holda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2y^2$$

bo‘lib, Grin formulasiga ko‘ra,

$$I = \iint\limits_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = -6 \iint\limits_{\Omega} x^2 y^2\, dx\,dy\ .$$

Oxirgi $\Omega$ doira bo‘yicha integral, qutb koordinatalariga o‘tib oson hisoblanadi:

$$I = -6 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 \cos^2\varphi \cdot \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho\, d\rho =$$

$$= -\frac{3}{2} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^R \rho^5\, d\rho = \frac{\pi R^6}{4}\ .$$

## 15.4-§. Egri chiziqli integralning integrallash yo‘liga bog‘liqmaslik sharti

**1.** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada aniqlangan $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalarni qaraymiz. Agar $\Omega$ sohada differensiallanuvchi shunday $U(x,y)$ funksiya topilsaki, uning birinchi differensiali uchun

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (15.4.1)$$

tenglik bajarilsa, u holda

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (15.4.2)$$

ifodani $\Omega$ sohada *to‘la differensial* deymiz.

Bunda

$$P(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\ , \quad Q(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \qquad (15.4.3)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Ko'pincha $U(x, y)$ funksiyani $\boldsymbol{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ kuchning potensiali deb atashadi.

Masalan,

$$x^2\,dx \ + \ y^2\,dy$$

ifoda to'la differensialdir, chunki $U(x, y) = (x^3 + y^3)/3$ funksiya differensiali shu ifodaga teng.

Lekin, agar

$$y^2\,dx \ + \ x^2\,dy$$

ifodani qarasak, quyida isbotlanadigan 15.4.2 - teoremadan uning to'la differensial emasligi, ya'ni differensiali bu ko'rinishga ega bo'lgan $U(x, y)$ funksiyaning mavjud emasligi kelib chiqadi.

Qanday shartlarda (15.4.2) ifodaning to'la differensial bo'lishlik masalasi, ya'ni biror $U(x, y)$ funksiya bilan (15.4.1) tenglikning bajarilishi nihoyatda muhim ahamiyatga ega. Bu masalaning yechimlaridan biri navbatdagi teoremada keltirilgan.

**15.4.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $P$ va $Q$ funksiyalar $\Omega \in \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda (15.4.2) ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun har qanday ikki $A \in \Omega$ va $B \in \Omega$ nuqtalar olganda ham $\Omega$ da yotuvchi hamda $A$ va $B$ nuqtalarni tutashtiruvchi bo'laklisilliq egri chiziq bo'yicha olingan*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx \ + \ Q(x, y)\,dy \tag{15.4.4}$$

*egri chiziqli integralning integrallash yo'lini tanlashga bog'liq bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

**Isbot.** 1) Faraz qilaylik, (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'lsin, ya'ni (15.4.1) shartni qanoatlantiruvchi $U(x, y)$ funksiya mavjud bo'lsin.

Bundan tashqari, $A$ va $B$ nuqtalarni tutashtiruvchi bo'laki-silliq egri chiziq $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ parametrik tenglama orqali berilgan bo'lib, $\Phi(a) = A$, $\Phi(b) = B$ bo'lsin. U holda, 15.2.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx \ + \ Q(x, y)\,dy \ =$$

$$= \int_a^b \left\{ P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi^{'}(t) \; + \; Q[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi^{'}(t) \right\} dt \; .$$

Boshqa tomondan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan

$$\frac{dU[\varphi(t), \psi(t)]}{dt} \; = \; \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}\, \varphi'(t) \; + \; \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\, \psi'(t) \; =$$

$$= \; P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi^{'}(t) \; + \; Q[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi^{'}(t)$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday ekan, Nyuton-Leybnits formulasiga ko‘ra,

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \; = \int_a^b \frac{dU[\varphi(t), \psi(t)]}{dt}\, dt \; = \; U(B) - U(A).$$

Demak, integral faqat $U(x, y)$ potensialning $A$ va $B$ nuqtalardagi qiymatiga bog‘liq bo‘lib, integrallanayotgan $AB$ egri chiziqning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmas ekan.

2) Endi (15.4.4) egri chiziqli integral integrallanayotgan egri chiziqning tanlanishiga bog‘liq emas deb faraz qilaylik.

Ixtiyoriy $A = (a_1, a_2) \in \Omega$ nuqtani tayinlaylik. Aytaylik, $B = (x_0, y_0) \in \Omega$ bo‘lib, $AB$ bu ikki $A$ va $B$ nuqtani tutashtiruvchi va $\Omega$ sohada yotuvchi silliq egri chiziq bo‘lsin (eslatib o‘tamiz, soha deb ochiq bog‘lamli to‘plamga aytgan edik). Quyidagi

$$U(x_0, y_0) \; = \; \int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \qquad (15.4.5)$$

belgilashni kiritamiz.

Farazimizga ko‘ra, bunday aniqlangan funksiya qiymati faqat $(x_0, y_0)$ nuqtaga bog‘liq bo‘lib, $A$ va $B$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqning tanlanishiqa bog‘liq emas. Biz mana shu shart ostida (15.4.3) tenglik bajarilishini ko‘rsatishimiz kerak.

Ravshanki, ixtiyoriy yetarlicha kichik $h$ uchun $B_h = (x_0 + h, y_0)$ nuqta ham $\Omega$ sohada yotadi. $[BB_h]$ simvol orqali $B$ va $B_h$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani belgilaylik.

U holda, farazimizga koʻra,

$$U(x_0 + h, y_0) \ = \ \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy \ + \ \int\limits_{[BB_h]} P\,dx + Q\,dy. \quad (15.4.6)$$

Bu tenglikning oʻng tomonidagi birinchi integral, (15.4.5) ga asosan, $U(x_0, y_0)$ ga teng. $[BB_h]$ kesma $x$ oʻqiga parallel boʻlgani uchun, ikkinchi integralda $dy$ koʻpaytuvchi qatnashgan hadni tashlab yuborish mumkin. Natijada

$$U(x_0 + h, y_0) \ - \ U(x_0, y_0) \ = \int\limits_{[BB_h]} P(x, y)dx$$

tenglikka ega boʻlamiz.

$P(x, y)$ funksiyaning $(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksizligiga koʻra esa,

$$\int\limits_{[BB_h]} P(x, y)dx \ = \ P(x_0, y_0) \cdot h \ + \ o(h), \quad h \to 0,$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$U(x_0 + h, y_0) \ - \ U(x_0, y_0) \ = P(x_0, y_0) \cdot h \ + \ o(h), \quad h \to 0.$$

Bu esa,

$$\frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x} \ = \ P(x_0, y_0)$$

tenglikning oʻrinli ekanini, ya’ni (15.4.3) dagi birinchi tenglik bajarilishini anglatadi.

Xuddi shunga oʻxshab, (15.4.3) dagi ikkinchi tenglik ham isbotlanadi.$\blacksquare$

**Natija.** *Faraz qilaylik, $P$ va $Q$ funksiyalar $\overline{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin. Agar (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'lsa, u holda istalgan regulyar yopiq $L \subset \Omega$ kontur uchun*

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; 0 \tag{15.4.7}$$

*tenglik o'rinli.*

Haqiqatan, istalgan ikki $A \in L$ va $B \in L$ nuqtani tanlab, $L$ konturni ikki $(AB)'$ va $(BA)''$ yoyga bo'lamiz. U holda, integral $A$ va $B$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqning tanlanishiga bog'liq emasligini hisobga olsak, talab qilingan natijani olamiz:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=$$

$$\int_{(AB)'} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;+ \int_{(BA)''} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=$$

$$= \int_{(AB)'} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int_{(AB)''} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; 0.$$

**2.** Agar $P$ va $Q$ funksiyalarni faqat uzluksiz emas, balki uzluksiz $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ va $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ hosilalarga ham ega deb faraz qilsak, u holda (15.4.2) ifoda to'la diffrensial bo'lishi uchun oson tekshiriladigan shartni keltirish mumkin. Bu tasdiqning isboti ixtiyoriy soha uchun ancha murakkab bo'lgani sababli, biz maxsus sohalar sinfini (lekin ancha keng bo'lgan) qarash bilan cheklanamiz.

Eslatib o'tamiz, agar berilgan $A \in \Omega$ nuqta bilan ixtiyoriy $B \in \partial\Omega$ nuqtani tutashtiruvchi kesmaning barcha ichki nuqtalari $\Omega$ sohasida yotsa, bunday sohani $A$ nuqtaga nisbatan yulduzli degan edik.

Masalan, har qanday qavariq soha o'zining ixtiyoriy nuqtasiga nisbatan yulduzli bo'ladi.

Navbatdagi tasdiq o'rinli.

**15.4.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar biror $A$ nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lgan yopiq regulyar $\overline{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin.*

*(15.4.2) ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun $\Omega$ sohada*

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \tag{15.4.8}$$

*tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

**Isbot.** 1) Faraz qilaylik, (15.4.2) ifoda biror $U(x, y)$ funksiyaning to'la differensiali bo'lsin, ya'ni $U$ funksiya differensiali (15.4.1) ko'rinishga ega bo'lsin. U holda (15.4.3) tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklardan birinchisini $y$ bo'yicha, ikkinchisini esa, $x$ bo'yicha differensiallab, quyidagi

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{15.4.9}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Teorema shartiga ko'ra, bu tengliklarning chap tomonlari uzluksiz. Bundan chiqdi, tengliklarning o'ng tomonlari ham uzluksiz bo'lib, aralash hosilalarning tengligi haqidagi teoremaga ko'ra, ular o'zaro teng bo'ladi, ya'ni (15.4.8) tenglik bajariladi.

E'tibor bering, teoremaning bu qismini isbotlashda biz $\Omega$ sohaning yulduzli ekanidan foydalanmadik.

2) Endi (15.4.8) munosabat bajarilsin deb faraz qilaylik. U holda har qanday regulyar $G \subset \Omega$ sohaning chegarasidan iborat regulyar $L$ kontur uchun, Grin formulasiga ko'ra,

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_G \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = 0 \tag{15.4.10}$$

tenglik o'rinli.

Berilgan $A$ nuqta bilan ixtiyoriy $(x_0, y_0)$ koordinataga ega bo'lgan $B$ nuqtani tutashtiruvchi kesmani $[AB]$ orqali belgilab,

$$U(x_0,y_0) \;=\; \int\limits_{[AB]} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{15.4.11}$$

funksiyani qaraymiz.

Agar $B_h = (x_0 + h, y_0)$ desak, $\Omega$ sohaning ochiqligiga ko‘ra, yetarlicha kichik $h$ uchun $BB_h$ kesma butunligicha $\Omega$ da yotadi. $ABB_h$ uchburchak tomonlari regulyar konturni tashkil qiladi va shuning uchun, (15.4.10) tenglikka asosan,

$$\int\limits_{[AB]} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{[BB_h]} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{[B_hA]} P\,dx+Q\,dy = 0 \tag{15.4.12}$$

munosabat o‘rinli.

$U$ funksiyaning (15.4.1) ta’rifiga ko‘ra

$$\int\limits_{[B_hA]} P\,dx + Q\,dy \;=\; -\int\limits_{[AB_h]} P\,dx + Q\,dy \;=\; -\,U(x_0+h,y_0)$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun, (15.4.12) dan

$$U(x_0+h,y_0)\;-\;U(x_0,y_0)\;=\;\int\limits_{[BB_h]} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

munosabat kelib chiqadi.

Bundan, xuddi 15.4.1 - teorema isbotidagi singari,

$$U(x_0+h,y_0)\;-\;U(x_0,y_0)\;=\;P(x_0,y_0)\cdot h\;+o(h)$$

tenglikni olamiz.

Demak, (15.4.3) tengliklardan birinchisi bajarilar ekan.

Xuddi shu singari, (15.4.3) tengliklardan ikkinchisi ham isbotlanadi. Bundan chiqdi, (15.4.2) ifoda (15.4.11) tenglik bilan aniqlangan funksiyaning to‘la differensiali bo‘lar ekan.■

**Natija.** *Faraz qilaylik, $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar biror $A$ nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lgan yopiq regulyar $\overline{\Omega}$ sohada uzluksiz bo'lsin.*

*Agar $\Omega$ sohada yotuvchi istalgan $L$ aylana uchun*

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; 0 \tag{15.4.13}$$

*tenglik bajarilsa, u holda (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'ladi.*

Haqiqatan, (15.4.13) dan (15.4.8) tenglik kelib chiqishini ko'rsatamiz.

Buning uchun (15.4.8) tenglik biror nuqtada bajarilmasin deb faraz qilaylik. U holda, qaralayotgan xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun, biror $K$ doirada

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} > 0$$

tengsizlik bajariladi deyish mumkin.

Lekin, (15.4.13) farazimiz va Grin formulasiga ko'ra,

$$\iint\limits_K \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{\partial K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Hosil bo'lgan qarama-qarshilik (15.4.8) tenglikning bajarilishini anglatadi. Demak, 15.4.2 - teoremaga ko'ra, (15.4.2) ifoda to'la differensial bo'lar ekan.■

**Eslatma.** Agar (15.3.13) tenglik istalgan $L$ aylana uchun bajarilsa, u holda, 15.4.1 - teoremaga ko'ra, bu tenglik har qanday regulyar $L$ kontur uchun ham bajariladi.

15.4.2 - teoremadan (15.4.8) shartning (15.4.2) ifoda biror $U(x,y)$ funksiya differensiali bo'lishi uchun kriteriy ekanligi kelib chiqadi. Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, (15.4.8) shart bajarilganda har qanday $A \in \Omega$ va $B \in \Omega$ nuqtalar uchun

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; U(B) - U(A) \tag{15.4.14}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, bunda $AB$ sifatida $A$ va $B$ nuqtalarni tutashtiruvchi istalgan bo‘lakli-silliq egri chiziqni olishimiz mumkin. E’tibor bering, $U$ potensial o‘zgarmas qo‘shiluvchi aniqligida topiladi.

(15.4.14) tenglik $U(x, y)$ potensialni topish masalasini mos ikkinchi tur egri chiziqli integral hisoblashga keltiradi. Ammo ba’zi hollarda $U$ potensial nisbatan oson topilib, bunda (15.4.14) tenglikdan, aksincha, egri chiziqli integralni hisoblash uchun foydalaniladi.

**15.4.1 - misol.** Agar $AB$ bo‘lakli-silliq egri chiziq koordinatalar boshi $A = (0, 0)$ va $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtani tutashtirsa, u holda ushbu

$$I \;=\; \int\limits_{AB} e^y(\cos x\, dx + \sin x\, dy) \tag{15.4.15}$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin.

Quyidagi

$$P(x, y) = e^y \cos x, \quad Q(x, y) = e^y \sin x$$

belgilashlarni kiritaylik.

Bunda (15.4.8) shartlarning bajarilishi aniq. Agar

$$U(x, y) \;=\; e^y \sin x$$

desak, bu funksiya uchun

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^y \cos x = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^y \sin x = Q(x, y)$$

munosabatlar o‘rinli.

Demak, (15.4.15) integral ostidagi ifoda $U$ funksiya differensiali bo‘lib, (15.4.14) formulaga ko‘ra,

$$\int\limits_{AB} e^y(\cos x\, dx + \sin x\, dy) \;=\; U(B) - U(A) \;=\; e^{1/2} \sin \pi/2 - 0 \;=\; \sqrt{e}.$$

**3*.** 15.4.2 - teorema va uning natijasi biror nuqtaga nisbatan yulduzli sohalardan ko'ra ancha umumiyroq sohalar uchun ham o'rinli. Bu xulosaga quyida keltirilgan mulohazalarga asoslanib kelish mumkin.

Biror $A \in \Omega$ nuqtani tayinlab, uni ixtiyoriy $B \in \Omega$ nuqta bilan to'g'rilanuvchi $(AB)'$ egri chiziq yordamida tutashtiramiz ($\Omega$ soha bog'lamli bo'lgani uchun buni amalga oshirish mumkin). So'ngra, xuddi shunday boshqa $(AB)''$ egri chiziq olib, yo'nalishni qarama-qarshisiga o'zgartirsak, biz biror $D \subset \Omega$ sohani chegaralovchi $L = (AB)' \cup (BA)''$ konturga ega bo'lamiz. Agar (15.4.8) shart bajarilsa,

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \;=\; \int\limits_L P\,dx + Q\,dy \qquad (15.4.16)$$

Grin formulasidan (15.4.16) dagi ikki karrali integralning nolga tengligi kelib chiqadi. Shuning uchun, $L = (AB)' \cup (BA)''$ kontur bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integral ham nolga teng va

$$\int\limits_{(AB)'} P\,dx + Q\,dy \;=\; \int\limits_{(AB)''} P\,dx + Q\,dy$$

tenglik o'rinli.

Bundan chiqdi, egri chiziqli integral integrallash egri chizig'ini tanlashga bog'liq emas. Demak, integral ostidagi ifoda to'la differensial bo'ladi.

Ammo bu mulohazalarni mukammal deb bo'lmaydi. Muammo shundaki, $L$ egri chiziq kontur bo'lmasligi, ya'ni biror $D$ sohani chegaralovchi yopiq egri chiziq bo'lmasligi mumkin. Hatto kontur bo'lgan taqdirda ham, u $D$ sohasining to'la chegarasi bo'lmasligi mumkin va shu sababli, bu holda (15.4.16) Grin formulasini qo'llab bo'lmaydi.

Mana shu qiyinchiliklarni chetlab o'tish maqsadida, 15.4.2 - teoremada biz $\Omega$ sohani yulduzli, deb faraz qildik; bunda $A$ va $B$ nuqtalarni tutashtiruvchi standart chiziq sifatida $[AB]$ kesmani olish mumkin.

Umumiy holda, agar nomatematik tilda aytadigan bo‘lsak, $\Omega$ sohada ≪bo‘shliqlar≫ yo‘q deb faraz qilishimiz zarur. Bunday sohalarning aniq ta’rifini berish uchun ba’zi yangi tushunchalarni kiritishga to‘g‘ri keladi.

$\Omega$ sohada yotuvchi va $\Phi : [a, b] \to \Omega$ akslantirish yordamida berilgan $L$ egri chiziqni qaraylik. Faraz qilaylik, $\alpha$ parametrga bog‘liq va $(t, \alpha) \in [a, b] \times [0, 1]$ da uzluksiz bo‘lgan shunday $\Phi_\alpha : [a, b] \to \Omega$ akslantirish mavjud bo‘lsinki, $\Omega$ sohadan olingan biror $M$ nuqta uchun

$$\Phi_0(t) \equiv \Phi(t), \quad \Phi_1(t) \equiv M, \quad a \le t \le b,$$

ayniyatlar bajarilsin.

Agar bunday shartni qanoatlantiruvchi $\Phi_\alpha$ akslantirish topilsa, u holda $L$ egri chiziq $\Omega$ *sohada uzluksiz ravishda $M$ nuqtaga tortib kelinadi deymiz.*

Eslatib o‘tamiz, agar $L$ yopiq egri chiziq birlik aylananing homeomorfizmi bo‘lsa, uni Jordan egri chizig‘i deb atagan edik.

**Ta’rif.** *Agar bog‘lamli $\Omega$ sohada yotuvchi istalgan Jordan egri chizig‘ini $\Omega$ sohada uzluksiz ravishda bir nuqtaga tortib kelish mumkin bo‘lsa, u holda bunday sohani* ***bir bog‘lamli*** *deymiz.*

Masalan, biror nuqtaga nisbatan yulduzli bo‘lgan har qanday soha bir bog‘lamli bo‘ladi.

Haqiqatan, umumiylikni saqlagan holda, $\Omega$ sohani koordinatalar boshiga nisbatan yulduzli deyishimiz mumkin. Aytaylik, $L \subset \Omega$ Jordan egri chizig‘i $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ akslantirish yordamida berilgan bo‘lsin. Bu degani, $(x, y) \in L$ bo‘lishi uchun

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \le t \le b,$$

tengliklar bajarilib, $\Phi(a) = \Phi(b)$ bo‘lishi kerak.

$\Phi_\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ akslantirishni $\Phi_\alpha(t) = (1 - \alpha)\Phi(t)$ ko‘rinishda aniqlaylik. Bu akslantirishning $0 \le \alpha < 1$ dagi aksi

$$x = (1 - \alpha)\varphi(t), \quad y = (1 - \alpha)\psi(t), \quad a \le t \le b,$$

kabi aniqlangan $L_\alpha$ egri chiziq bo‘lib, $L_0 = L$ va $\alpha = 1$ da $L_1$ to‘plam nuqtadan, ya’ni koordinata boshidan iborat bo‘ladi.

$\Omega$ soha koordinata boshiga nisbatan yulduzli bo'lgani sababli, barcha $0 \leq \alpha \leq 1$ larda $L_\alpha \subset \Omega$ bo'ladi.

Ma'lumki, $\Phi_\alpha$ akslantirishlar oilasi $L$ egri chiziqni uzluksiz ravishda nuqtaga, ya'ni koordinatalar boshiga tortib keladi.

Bir bog'lamli bo'lmagan sohaga

$$\Omega \; = \; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; a < \sqrt{x^2 + y^2} < b\}$$

ko'rinishda aniqlangan xalqa misol bo'la oladi.

Agar radiusi $R$, $a < R < b$, bo'lib, markazi koordinatalar boshida bo'lgan $L$ aylanani olsak, uni $\Omega$ sohadan chiqmasdan turib nuqtaga uzluksiz ravishda tortib kelish mumkin emas.

Navbatdagi tasdiqni biz isbotsiz keltiramiz:

*Faraz qilaylik, $\Omega$ ixtiyoriy bir bog'lamli soha bo'lsin. Agar $P$, $Q$, $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ funksiyalar $\Omega$ sohaning yopig'ida uzluksiz bo'lib,*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \; = \; \frac{\partial Q}{\partial x}$$

*tenglik bajarilsa, u holda istalgan yopiq bo'lakli-silliq $L \subset \Omega$ kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral uchun*

$$\oint_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \; = \; 0$$

*tenglik bajarilib, integral ostidagi ifoda to'la differensialdan iborat bo'ladi.*

Bu tasdiqning isboti, bo'lakli-silliq egri chiziqlar murakkab ko'rinishga ega bo'lgani sababli, ancha texnik qiyinchiliklarni yechishni talab qiladi.

Bir bog'lamlilik talabining muhimligi navbatdagi misolda ko'rinadi.

**15.4.2 - misol.** Faraz qilaylik, $0 < a < b$ bo'lib, $\Omega$ soha

$$\Omega \; = \; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; a < \sqrt{x^2 + y^2} < b\}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin.

Agar

$$P(x,y) \;=\; \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) \;=\; \frac{x}{x^2+y^2}$$

desak, ravshanki,

$$\frac{\partial P}{\partial y} \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x} \;=\; \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

tengliklar bajariladi. Ammo, $a < R < b$ bo'lganda ixtiyoriy $L = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 = R^2\}$ aylana uchun

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{-R\sin\varphi\ d(R\cos\varphi)}{R^2} \;+$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R\cos\varphi\ d(R\sin\varphi)}{R^2} \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi \;=\; 2\pi,$$

ya'ni $L \subset \Omega$ yopiq kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral nolga teng emas.

**4.** Fazoviy egri chiziq bo'yicha olingan umumiy ikkinchi tur egri chiziqli integralning, ya'ni

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{15.4.17}$$

integralning integrallanayotgan egri chiziq tanlanishiga bog'liqmaslik masalasi ham xuddi yuqoridagidek hal qilinadi.

Agar shunday differensiallanuvchi $U(x,y,z)$ funksiya topilsaki, u uchun

$$dU \;=\; P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{15.4.18}$$

bo'lsa, integral ostidagi ifoda to'la differensial bo'ladi, bunda

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z),\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z),\ \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z) \tag{15.4.19}$$

munosabatlar o'rinli.

15.4.1 - teoremaning fazoviy analogi navbatdagi ko'rinishga ega.

**15.4.3 - teorema.** *Agar $P$, $Q$ va $R$ funksiyalar $\Omega \in \mathbb{R}^3$ sohada uzluksiz bo'lsa, u holda (15.4.17) integral ostidagi ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun ixtiyoriy $A \in \Omega$ va $B \in \Omega$ nuqtalarni olganda ham bu nuqtalarni tutashtiruvchi va $\Omega$ da yotuvchi bo'lakli-silliq egri chiziq bo'yicha olingan (15.4.17) egri chiziqli integralning egri chiziqni tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

**Isbot** 15.4.1 - teorema isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

Aslida 15.4.2 - teoremaning ham uch o'lchovli analogi o'rinli. Ammo mos tasdiqni keltirish va isbotlash uchun bizga qo'shimcha tushunchalar zarur bo'ladi. Biz bu tushunchalarni keyingi boblarda keltiramiz.

## 15.5-§. Misollar

**1 - misol**. Agar $C$ uchlari $O(0,0)$, $A(1,0)$ va $B(0,1)$ bo'lgan uchburchak bo'lsa, quyidagi

$$\int_C (x+y)^2\, ds$$

birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

**Ko'rsatma**. Uchburchakning $OA$ va $OB$ tomonlari bo'yicha olingan egri chiziqli integrallar aniq integralga keladi. $AB$ tomon boyicha integralni hisoblashda integral ostidagi funksiya 1 ga tengligini hisobga oling.

**2 - misol**. Tekislikdagi

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t\cos t) 0 \le t \le 2\pi\}$$

egri chiziq bo'yicha quyidagi

$$\int_C (x^2+y^2)\, ds$$

birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

**Ko'rsatma**. 15.1.2 - teorema yordamida aniq integralga keltiring.

**3 - misol**. Fazoviy

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi\}$$

egri chiziq bo'yicha quyidagi

$$\int_C (\sqrt{x^2 + y^2} + z)\, ds$$

birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

**Ko'rsatma**. 15.1.4 - teorema yordamida aniq integralga keltiring.

**4 - misol**. Agar $C$ quyidagi

$$y = x^2, \quad -1 \le x \le 1,$$

parabola bo'lsa, $x$ ning o'sish yo'nalishi bo'yicja olingan

$$\int_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2x^2 y)\, dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

**Ko'rsatma**. Parametrni $x$ deb olib, 15.2.1 - teoremani qo'llang.

**5 - misol**. Agar to'g'ri chiziqning $A(0, \pi)$ va $B(\pi, 0)$ nuqtalar orasidagi kesmasini $AB$ deb belgilansa, quyidagi

$$\int_{AB} \sin y\, dx + \sin x\, dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

**Ko'rsatma**. $AB$ kesma tenglamasi

$$x + y = \pi, \quad 0 \le x \le \pi,$$

ko‘rinishga ega. Endi $x$ ni parametr deb, 15.2.1 - tasdiqdan foydalaning.

**6 - misol**. Fazoviy

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t,\ y = t^2,\ z = t^3, \quad 0 \le t \le 1\}$$

egri chiziq bo‘ylab parametrning o‘sish yo‘nalishi bo‘yicha olingan

$$\int\limits_C (y^2 - z^2)\, dx + 2yz\, dy \ - x^2\, dz$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

**Ko‘rsatma**. 15.2.1 - teorema yordamida aniq integralga keltiring.

**7 - misol**. Agar

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$$

aylana bo‘lsa, Grin formulasini qo‘llab, quyidagi

$$\oint\limits_C xy^2\, dy - x^2 y\, dx$$

ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblang.

**Ko‘rsatma**. $P(x, y) = -x^2 y$ va $Q(x, y) = xy^2$ deb, (15.3.11) Grin formulasini qo‘llang. Hosil bo‘lgan doira boyicha integralni hisoblash uchun qutb koordinatalar sistemasiga o‘ting.

**8 - misol.** Quyidagi

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\cos t,\, y = b\sin t,\, 0 \le t \le 2\pi\}$$

ellips bilan chegaralangan $\Omega$ sohaning yuzini toping.

**Ko‘rsatma**. Agar $P(x, y) = -y/2,\ Q(x, y) = x/2$ desak, (15.3.12) tenglik o‘rinli bo‘ladi va Grin formulasiga ko‘ra,

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int\limits_C x\, dy - y\, dx.$$

Hosil bo‘lgan ikkinchi tur egri chiziqli integralni 15.2.1 - tasdiq yordamida aniq integralga keltirib hisoblang.

**9 - misol.** Agar $AB$ bo‘lakli-silliq yassi egri chiziq $A = (0, 1)$ va $B = (2, 3)$ nuqtalarni tutashtirsa, u holda quyidagi

$$\int\limits_{AB} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral ostidagi funksiya to‘la differensial ekaniga ishonch hosil qilib, uni hisoblang.

**Ko‘rsatma**. $P(x, y) = x + y$ va $Q(x, y) = x - y$ deb, (15.4.3) shartni tekshiring. Agar bu shartni qanoatlantiruvchi $U(x, y)$ funksiya topilsa, integralni (15.4.14) formula yordamida hisoblang.

**10 - misol.** Agar $AB$ bo‘lakli-silliq fazoviy egri chiziq $A = (1, 2, 3)$ va $B = (6, 1, 1)$ nuqtalarni tutashtirsa, u holda quyidagi

$$\int\limits_{AB} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral ostidagi funksiya to‘la differensial ekaniga ishonch hosil qilib, uni hisoblang.

**Ko‘rsatma**. $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$ va $R(x, y, z) = xy$ deb, (15.4.19) shartni tekshiring. Agar bu shartni qanoatlantiruvchi $U(x, y, z)$ funksiya topilsa, integralni

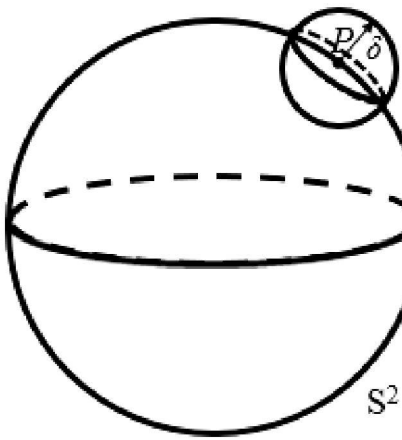
$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz \;=\; U(B) - U(A)$$

formula yordamida hisoblang (bu formula xuddi (15.4.14) singari isbotlanadi).

# 16-bob. Sirt bo‘yicha integrallar

## 16.1-§. Sirt yuzi

**1.** Sirtga klassik misol sifatida $S^2$ sferani, ya’ni uch o‘lchovli shar sirtini olishimiz mumkin. Biror $S^2$ sferani istalgan $P$ nuqtasining $\delta$-atrofini, aniqrog‘i, markazi $P$ nuqtada va radiusi $\delta$ ga teng uch o‘lchovli sharni qaraylik. Ravshanki, yetarlicha kichik $\delta$ lar uchun bu sharning $S^2$ sfera bilan kesishmasi sferaga $P$ nuqtada urinuvchi va radiusi $\delta$ ga teng doira bilan deyarli ustma-ust tushadi (16.1-rasm qarang). Boshqacha aytganda, sferani istalgan nuqtasining shu sferada yotuvchi kichik atrofi kichik radiusli yassi doira ko‘rinishida bo‘ladi. Aynan shu lokal xossa uch o‘lchovli fazodagi ikki o‘lchovli sirtning umumiy ta’rifi asosida yotadi.




16.1-rasm

Eslatib o‘tamiz, agar $\mathbb{R}^3$ fazosining ikki qismiy to‘plamlari uchun ulardan birini ikkinchisiga o‘zaro bir qilymatli va o‘zaro uzluksiz akslantirish mavjud bo'lsa, bunday to'plamlar homeomorf deb ataladi.

Biror $S \subset \mathbb{R}^3$ to'plam berilgan bo'lsin. Istalgan $P \in S$ nuqta uchun $U(P)$ orqali bu nuqtaning ixtiyoriy atrofini, ya'ni $P$ nuqtani o'z ichiga oluvchi $\mathbb{R}^3$ dagi ochiq to'plamni belgilab,

$$V(P) \ = \ U(P) \cap S \tag{16.1.1}$$

ko'rinishdagi to'plamni qaraymiz. Qizig'i shundaki, agar $S$ sirt bo'lsa, $U(P)$ atrofni doimo shunday tanlash mumkinki, natijada $V(P)$ to'plam doiraga homeomorf bo'ladi. Bu sirtning har bir nuqtasini xarakterlovchi xossadir.

**Ta'rif.** *Agar $S \subset \mathbb{R}^3$ bog'langan to'plamning har bir nuqtasi uchun shunday atrof topilsaki, bu atrofning $S$ bilan kesishmasi biror doiraga homeomorf bo'lsa, u holda bunday $S$ to'plamga* ***sirt*** *deb ataladi.*

$V(P)$ to'plamni $P$ nuqtaning $S$ da yotuvchi biror «atrofi» deb qarash mumkin. Bundan buyon (16.1.1) ko'rinishdagi to'plamni $P$ *nuqtaning $S$ sirtga nisbatan atrofi*, yoki qisqa qilib, *$P$ ning $S$ dagi atrofi* deb ataymiz.

**16.1.1 - misol.** Biror ikki o'lchovli sohada uzluksiz funksiyaning grafigi sirtdan iborat ekanini ko'rsatamiz.

Eslatib o'tamiz, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada aniqlangan $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiyaning grafigi deb

$$\Gamma(f) \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y), \ (x, y) \in \Omega\} \tag{16.1.2}$$

to'plamga aytgan edik.

$S = \Gamma(f)$ to'plam sirt ta'rifidagi barcha shartlarni qanoatlantirishini tekshiramiz. Faraz qilaylik, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ grafikning istalgan nuqtasi bo'lsin, ya'ni $(x_0, y_0) \in \Omega$ bo'lib, $f(x_0, y_0) = z_0$ tenglik bajarilsin. $\Omega$ tekislikning ochiq qismiy to'plami bo'lgani sababli, shunday

$$D \ = \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$$

doira topiladiki, uning $\overline{D} = D \cup \partial D$ yopig'i butunligicha $\Omega$ da yotadi.

$f$ funksiya $\Omega$ da uzluksiz bo‘lgani uchun, u $\overline{D}$ da chegaralangan. Shunday ekan, bu funksiyaning $\overline{D}$ da qabul qiladigan barcha qiymatlari biror $(a, b) \subset \mathbb{R}$ interval ichida yotadi. $P_0$ nuqtaning, balandligi $b - a$ va ko‘ndalang kesimi $D$ dan iborat bo‘lgan, quyidagi

$$U(P_0) \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a < z < b, \ (x, y) \in D\}$$

ochiq silindr ko‘rinishidagi atrofini qaraymiz. Bu silindrning $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiya grafigi bilan kesishmasi (16.1.1) ko‘rinishdagi $V(P_0)$ to‘plamdan iborat. Ma’lumki, $V(P_0)$ to‘plam $D \subset \mathbb{R}^2$ doiraga homeomorf va bunda homeomorfizm $D$ doiraning har bir $(x, y)$ nuqtasiga $\Gamma(f)$ grafikning $(x, y, f(x, y))$ nuqtasini mos qo‘yuvchi akslantirishdan iborat.

Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra, $S = \Gamma(f)$ to‘plam sirt ekan.

**1 - eslatma.** Yuqorida keltirilgan ta’rifga ko‘ra, sirtning barcha nuqtalari «ichki» nuqtadir, ya’ni sirt «chegaraviy» nuqtaga ega emas. Aslida sirt uchun chegaraviy nuqta tushunchasiga aniqlik kiritish zarur. Masalan, $S^2$ sferani istalgan nuqtasining ixtiyoriy atrofida $\mathbb{R}^3$ fazosining bu sferaga tegishli bo‘lmagan nuqtasi topiladi. Shunday ekan, sferaning har bir nuqtasi §11.1 da keltirilgan ta’rif ma’nosida chegaraviy nuqtadir.

Sirt chegarasiga mantiqan to‘g‘ri ta’rif berish uchun limit nuqta va yopilma tushunchalaridan foydalanamiz. Eslatib o‘tamiz, ixtiyoriy $E \subset \mathbb{R}^n$ to‘plamning yopilmasi deb, $E$ ga uning barcha limit nuqtalarini qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan $\overline{E}$ to‘plamga aytgan edik (§11.1 ga qarang).

Faraz qilaylik, $S$ ixtiyoriy sirt va $\overline{S}$ uning yopilmasi bo‘lsin. $S$ sirtning *chekkasi* deb $\Gamma(S) = \overline{S} \setminus S$ to‘plamga aytamiz.

Masalan, agar $S$ sirt ochiq doiradan iborat bo‘lsa, uning chekkasi aylana bo‘ladi.

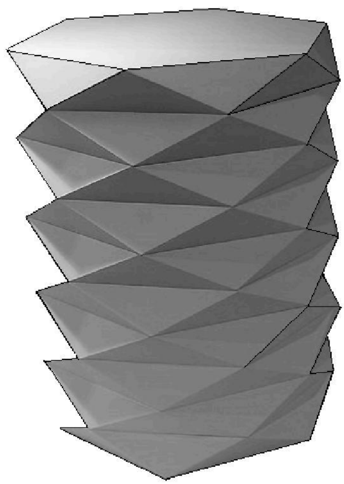
Har qanday sirt ham chekkaga ega bo‘lavermaydi, ya’ni ba’zi sirtlarning chekkalari bo‘sh to‘plamdan iborat. Masalan, $S^2$ sfera chekkasiz sirtdir, ya’ni $\Gamma(S^2) = \emptyset$. Umuman, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sohaning chegarasidan iborat har qanday $\partial\Omega$ sirt chekkasiz sirtdir, ya’ni $\Gamma(\partial\Omega) = \emptyset$. Bunday sirtlar *yopiq* deyiladi.

**2 - eslatma.** Sirt ta'rifida (16.1.1) tenglik bilan aniqlangan $V(P)$ to'plamning biror ochiq $D$ doiraga homeomorf bo'lishi talab qilingan edi. Ravshanki, doirani unga homeomorf bo'lgan istalgan boshqa to'plam bilan almashtirish mumkin. Masalan, $V(P)$ to'plamning biror ochiq $Q$ kvadratga homeomorf bo'lish sharti ta'rifdagi talabga teng kuchlidir.

Ushbu paragrafning asosiy maqsadi sirt yuzi tushunchasini kiritishdan iboratdir.

Eslatib o'tamiz, uch o'lchovli jism hajmini aniqlash uchun biz jismni ichki chizilgan ko'pyoqlilar bilan approksimatsiyalab, hajm sifatida bu ko'pyoqlilar hajmlarining aniq yuqori chegarasini olgan edik. Xuddi shu kabi, egri chiziq uzunligini unga ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunliklarining aniq yuqori chegarasi sifatida aniqlagan edik.

Afsuski, sirt yuzini yuqoridagi usulda aniqlab bo'lmas ekan. Nemis matematigi H. Shvars (Hermann Schwarz) silindr ichiga garmon cholg'u asbobini eslatuvchi ko'pyoqlikni (Shvars «etigi» deb atashadi, 16.2 -rasm) chizib, bu ko'pyoqlik sirti yuzini istalgancha katta qilish mumkinligini ko'rsatdi. Bundan chiqdi, silindrik sirt yuzini ichki chizilgan ko'pyoqliklar yuzi yordamida aniqlab bo'lmas ekan.



16.2-rasm

Ixtiyoriy sirt yuzi ta'rifi asosida quyidagi prinsip yotadi. Sirt kichik qismlarga bo'linadi va har bir qism urinma tekislikka proeksiyalanadi. Proeksiyalar yuzi yig'ilib, bu yig'indining limiti sirt yuzi deb qabul qilinadi.

Bunday ta'rifni to'g'ri ekanini asoslash uchun, avval, urinma tekislik tushunchasini kiritish zarur, so'ngra har bir nuqtaning yetarlicha kichik atrofini mana shu nuqtada sirtga urinuvchi tekislikka ortogonal proeksiyalash mumkinligiga ishonch hosil qilish kerak va nihoyat, sirtlarning yetarlicha katta sinfi uchun proeksiyalar yuzlari yig'indisining limitga ega ekanini isbotlash zarur. Aynan mana shu ishlarni ushbu paragrafda amalga oshiramiz.

**2.** E'tibor bering, sirt ta'rifi lokal xarakterga ega. Sodda qilib aytganda, bu ta'rifda sirtning har bir nuqtasi uchun, uni o'z ichiga oluvchi, sirtning yetarlicha kichik qismini doiraga o'xshash to'plam bo'lishi talab qilinadi.

Yuqoridagi misolda ko'rganimizdek, uzluksiz funksiya grafigidan iborat sirt butunligicha tekislikdagi biror sohaga homeomorfdir. Albatta, har qanday sirt ham bunday xossaga ega bo'lavermaydi. Masalan, sfera hech qanday $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohaga homeomorf emas.

Bizning navbatdagi maqsadimiz tekislikdagi biror sohaga homeomorf bo'lgan eng sodda sirtlarni o'rganishdir.

**Ta'rif.** *Biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohaga homeomorf bo'lgan $S$ sirtni* ***sodda sirt*** *deymiz.*

Odatda, $\Omega$ soha nuqtalari $(u, v) \in \Omega$ simvol orqali belgilanadi, bunda $u$ va $v$ kattaliklar parametr deb ataladi. Shunday qilib, $S \subset \mathbb{R}^3$ sodda sirt biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohaning

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega, \quad (16.1.3)$$

akslantirish bilan berilgan homeomorfizmidan iborat ekan.

Bu tenglikda $\mathbf{r}$ radius-vektor komponentalari parametrlarning biror funksiyalaridan iborat, ya'ni

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)). \quad (16.1.4)$$

Bunda $S$ sirt (16.1.3) akslantirish bilan parametrik ravishda berilgan deyiladi.

Agar (16.1.3) akslantirish silliq bo‘lsa, ya’ni uning (16.1.4) komponentalari uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda bunday sirt *silliq* deyiladi.

Biz ikki o‘zgaruvchili silliq funksiya grafigi tashkil qilgan sirtni o‘rganishdan boshlaymiz. 16.1.1 - misolda ko‘rsatilganidek, biror $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiya grafigi sodda sirtdan iborat. Bu sirt tenglamasini formal ravishda (16.1.3) va (16.1.4) kabi quyidagicha yozish mumkin:

$$x = u, \;\; y = v, \;\; z = f(u, v).$$

Biz $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi deb faraz qilamiz. U holda bu funksiyaning (16.1.2) grafigi silliq sodda sirt bo‘ladi.

Eslatib o‘tamiz, grafikning $(a, b, c) \in \Gamma(f)$ (bu yerda $c = f(a, b)$) nuqtasida urinuvchi tekislik deb, biz tenglamasi

$$z \;=\; c \;+\; \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot (x - a) \;+\; \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot (y - b)$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan tekislikka aytgan edik.

Biz $(a, b, c) \in \Gamma(f)$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi, $f$ funksiya grafigining biror yetarlicha kichik qismini urinma tekislikka ortogonal proeksiyalash mumkinligini ko‘rsatamiz. Quyida keltirilgan mulohazalar 15-bobni 2-paragrafining 11-bo‘limida keltirilgan mulohazalarga o‘xshash.

**16.1.1* - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $z = f(x, y)$ funksiya $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda bu funksiya grafigining istalgan $P$ nuqtasi uchun markazi $O' = P$ nuqtada bo‘lgan shunday $\{O'\xi\eta\zeta\}$ Dekart koordinatalar sistemasini kiritish mumkinki, bunda quyidagi shartlar bajariladi:*

*i) $O'\xi\eta$ koordinatalar tekisligi grafikning $P$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tekislik bilan ustma-ust tushadi;*

*ii) $z = f(x, y)$ funksiya tenglamasini $P$ nuqtaning biror atrofida*

$$\zeta \;=\; g(\xi, \eta)$$

*ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda g - koordinatalar boshining atrofida uzluksiz differensiallanuvchi funksiya;*

*iii) quyidagi*

$$g(0,0) \;=\; \frac{\partial g}{\partial \xi}(0,0) \;=\; \frac{\partial g}{\partial \eta}(0,0) \;=\; 0 \tag{16.1.5}$$

*tengliklar o'rinli.*

**Isbot.** i) Aytaylik, $P = (a,b,c)$ berilgan $f$ funksiya grafigining ixtiyoriy nuqtasi, ya'ni $f(a,b) = c$ bo'lsin. Applikata o'qi bo'ylab parallel ko'chirish, burish va so'ngra cho'zish yordamida markazi $O' = (a,b,c)$ nuqtada bo'lgan shunday yangi $\{O'\xi\eta\zeta\}$ koordinatalar sistemasini kiritamizki, bunda $O'\zeta$ o'q urinma tekislikka perpendikulyar bo'lib,

$$\zeta \;=\; (z-c) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cdot(x-a) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\cdot(y-b)$$

tenglik bajarilsin.

U holda urinma tekislik tenglamasi $\zeta = 0$ ko'rinishga keladi. Eski o'zgaruvchilar yangi o'zgaruvchilar bilan quyidagicha

$$x = \varphi(\xi,\eta,\zeta), \quad y = \psi(\xi,\eta,\zeta), \quad z = \chi(\xi,\eta,\zeta),$$

bog'lanadi, bunda $\varphi, \ \psi, \ \chi$ – biror chiziqli funksiyalardir.

Xususan,

$$\zeta \;=\; [\chi(\xi,\eta,\zeta)-c]-\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cdot[\varphi(\xi,\eta,\zeta)-a]-\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\cdot[\psi(\xi,\eta,\zeta)-b] \tag{16.1.6}$$

ayniyat o'rinli bo'ladi.

Bundan tashqari, o'zgaruvchilarni bunday almashtirishda $\varphi(0,0,0) = a, \ \psi(0,0,0) = b, \ \chi(0,0,0) = c$ tengliklar bajariladi.

ii) Koordinatalar boshining biror atrofida

$$F(\xi,\eta,\zeta) \;=\; \chi(\xi,\eta,\zeta) - f[\varphi(\xi,\eta,\zeta), \psi(\xi,\eta,\zeta)] \tag{16.1.7}$$

funksiyani qaraylik. Ayonki,

$$F(0,0,0) \;=\; \chi(0,0,0) - f[\varphi(0,0,0), \psi(0,0,0)] \;=\; c - f(a,b) \;=\; 0.$$

(16.1.7) funksiyaning $\zeta$ o'zgaruvchi bo'yicha hosilasini hisoblaylik. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}. \tag{16.1.8}$$

Boshqa tomondan, (16.1.6) ayniyatni differensiallasak,

$$1 = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \tag{16.1.9}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar $f$ funksiya xususiy hosilalarining uzluksizligini hisobga olib, (16.1.8) va (16.1.9) tengliklarni taqqoslasak, biz $(a,b,c)$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida (16.1.8) ning chap tomoni 1 sonidan kam farq qilishini ko'ramiz. Shuning uchun, qayd etilgan atrofda

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} > 0$$

shart o'rinli.

Shunday ekan, oshkormas funksiya haqidagi teoremaga (12.3.2 - teoremaga qarang) ko'ra, koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrofida aniqlangan shunday $\zeta = g(\xi,\eta)$ funksiya topiladiki, u uchun

$$F(\xi,\eta,g(\xi,\eta)) = 0$$

tenglik bajariladi.

Ahamiyat bering, (16.1.7) tenglikka ko'ra, $\zeta = g(\xi,\eta)$ funksiya grafigi $f$ funksiya grafigining qaralayotgan qismi bilan ustma-ust tushadi.

iii) Oshkormas ko'rinishda berilgan $\zeta = g(\xi,\eta)$ funksiyaning bevosita (16.1.7) ta'rifidan $g(0,0) = 0$ tenglik kelib chiqadi. Endi, agar (16.1.7) tenglikni oshkormas funksiya hosilasini hisoblash qoidasiga ko'ra ((12.3.17) formulaga qarang) differensiallasak,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}} \cdot \left[\frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right] \tag{16.1.10}$$

tenglikni olamiz.

Boshqa tomondan, (16.1.6) ayniyatni $\xi$ o'zgaruvchi bo'yicha (boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb hisoblab) differensiallasak,

$$0 = \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu tenglikni (16.1.10) tenglik bilan taqqoslab, urinish nuqtasida

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0$$

shart bajarilishini ko'ramiz.

Quyidagi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$$

tenglik ham xuddi yuqoridagidek ko'rsatiladi.

iv) Zaruriyat bo'lsa, $O'\zeta$ o'qi bo'ylab masshtabni o'zgartirib, $\{Oxyz\}$ Dekart koordinatalar sistemasidan yangi $\{O'\xi\eta\zeta\}$ koordinatalar sistemasiga o'tishni izometrik qilish mumkin. Bunda, xuddi avvalgidek, koordinatalar boshining atrofida funksiya grafigi urinma tekislikda aniqlangan funksiya grafigi bilan ustma-ust tushaveradi.■

**Natija.** *Faraz qilaylik, $z = f(x,y)$ funksiya $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\Gamma(f)$ grafikni istalgan $P$ nuqtasining $\Gamma(f)$ da shunday atrofi topiladiki, bu atrof $P$ nuqtada $\Gamma(f)$ ga urinuvchi tekislikka ortogonal proeksiyalanadi.*

Haqiqatan, ortogonal proeksiya 16.1.1* - tasdiqdagi $\zeta = g(\xi, \eta)$ funksiya bilan beriladi.

**3.** Ma'lumki, har qanday sirt ham sodda bo'lavermaydi. Misol sifatida sferani olishimiz mumkin:

$$S_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Boshqa misol sifatida

$$x = (a + b\cos v)\cos u,$$

$$y = (a + b\cos v)\sin u,$$

$$z = b\sin v,$$

komponentali $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor bilan berilgan $T_{ab}$ torni olsak bo‘ladi, bunda $a > b > 0$ bo‘lib, $(u, v)$ parametrlar

$$-\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi$$

kvadratda o‘zgaradi.

Shuni aytish kerakki, zamonaviy matematik adabiyotlarda $T_{ab}$ tor ba’zan $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ kvadrat bilan almashtiriladi. Bunda, torda berilgan $f$ funksiyani $\mathbb{T}^2$ kvadratda berilgan va quyidagi

$$f(u, -\pi) = f(u, \pi), \quad f(-\pi, v) = f(\pi, v)$$

davriylik shartini qanoatlantiradi, deb hisoblanadi.

Ochiq sohada berilgan ikki o‘zgaruvchili istalgan uzluksiz funksiya grafigining sodda sirt bo‘lishi yuqorida qayd etilgan edi. Ammo bu tasdiqning teskarisi o‘rinli emas. Masalan, sferadan bir nuqtani olib tashlasak, hosil bo‘lgan to‘plam sodda sirt bo‘ladi, lekin u hech qanday ikki o‘zgaruvchili funksiyaning grafigi bo‘la olmaydi.

**16.1.2 - misol.** Diametri $Oz$ o‘qining $[0, 1]$ kesmasi bo‘lgan $S$ sferani, ya’ni

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

sferani qaraylik.

$S^*$ simvol orqali $S$ dan «shimoliy qutbni» olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan to‘plamni belgilab, ya’ni

$$S^* = S \setminus \{N\}, \quad N = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$$

deb, $S^*$ ning sodda sirt ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun, 11.3-paragrafning 3-bandi natijalariga ko‘ra, $S^*$ ning $\mathbb{R}^2$ tekisligiga homeomorf ekanini ko‘rsatish yetarli.

Faraz qilaylik, $M = (x, y, 0)$ nuqta $z = 0$ tekisligining ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Bu nuqtani $S$ sferaning $N = (0, 0, 1)$ nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesma $S$ sferani biror $P$ nuqtada kesadi. Biz bu nuqtani $M$ ga mos qo‘yamiz. Shunday qilib,

$$P = \Phi(M)$$

tenglik bilan $\Phi : \mathbb{R}^2 \to S^*$ akslantirish aniqlandi. Aynan shu akslantirish izlanayotgan homeomorfizm bo‘ladi.

Haqiqatan, $\mathbb{R}^3$ da $(\rho, \phi, z)$ silindrik koordinatalarni kiritaylik. Sodda hisoblashlar ko‘rsatadiki, agar

$$r = \frac{\rho}{\rho^2 + 1}, \quad \psi = \phi, \quad z = \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1}$$

desak, $\Phi$ akslantirish har bir $M = (\rho, \phi, 0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaga $(r, \psi, z)$ koordinatalarga ega bo‘lgan $P \in S^*$ nuqtani mos qo‘yadi.

Bundan $\Phi$ ning $\mathbb{R}^2$ ni $S^*$ ga homeomorf akslantirish ekani bevosita kelib chiqadi.

**Eslatma.** Yuqoridagi mulohazalarga ko‘ra, bir nuqtasi olib tashlangan sfera silliq sodda sirt bo‘ladi.

**4.** Bundan buyon biz $S$ sodda sirtni aniqlovchi $\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiyani silliq, ya’ni $\Omega$ sohasida uzluksiz differensiallanuvchi, deb faraz qilamiz.

Agar $v = const$ deb tayinlasak, $\mathbf{r}(u, v)$ funksiya $u$ o‘zgarganda $S$ da yotuvchi biror egri chiziqni aniqlaydi. Bu egri chiziqni koordinata egri chizig‘i deyishimiz mumkin. 15.2- paragrafda ko‘rsatilganidek,

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \tag{16.1.11}$$

vektor (birlik bo‘lishi shart emas) bu egri chiziqqa urinma bo‘ladi.

Xuddi shu kabi,

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{16.1.12}$$

vektor $S$ da yotuvchi boshqa $u = const$ koordinata egri chizig‘iga urinma bo‘ladi.

Ravshanki, $S$ sirtning har bir nuqtasidan ikki koordinata egri chiziqlaridan bittadan o'tadi.

Agar $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlar $(u_0, v_0) \in \Omega$ nuqtada nolga aylanmasa va o'zaro kollinear bo'lmasa, u holda $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko'paytma ham shu nuqtada noldan farqli bo'lib, har bir $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorga ortogonal bo'ladi.

Agar, bordiyu, qayd etilgan vektor ko'paytma biror nuqtada nolga teng bo'lsa, u holda bu nuqtani (16.1.3) radius-vektor bilan parametrlangan sirtning *maxsus nuqtasi* deymiz. Bundan buyon, buni alohida qayd qilmasdan, biz faqat maxsus nuqtasiz sirtlarni qaraymiz.

Aytaylik, $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ homeomorfizm bo'lib, $\mathbf{r} = \Phi(u, v)$ tenglama $S$ sodda silliq sirtni aniqlasin. $S$ da yotuvchi va $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy $L$ silliq egri chiziqni qaraymiz. Bu chiziq $\Omega$ sohada yotuvchi $\Lambda = \Phi^{-1}(L)$ egri chiziqqa homeomorf.

Faraz qilaylik, $\Lambda$ egri chiziq parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\Lambda \;=\; \{(u, v) \in \Omega \;:\; u = \alpha(t),\; v = \beta(t), \quad a \le t \le b\}.$$

U holda $L \subset S$ egri chiziqni ham $\Phi$ homeomorfizm yordamida parametrik ko'rinishda yozishimiz mumkin, ya'ni

$$\mathbf{r} \;=\; \Phi(\alpha(t), \beta(t)), \quad a \le t \le b.$$

Agar $(u_0, v_0) = (\alpha(t_0), \beta(t_0))$ desak, 15.2-paragraf natijalariga ko'ra, $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ vektor $L$ egri chiziqqa $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ nuqtada urinadi va murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(u_0, v_0) \;=\; \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \alpha'(t_0) \;+\; \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \beta'(t_0) \;=\; \alpha'(t_0)\, \mathbf{r}_u + \beta'(t_0)\, \mathbf{r}_v.$$

Bundan chiqdi, $P$ nuqtada $L$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinma $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

Boshqacha aytganda, $S$ sirtda yotuvchi egri chiziqlarga $P$ nuqtada o'tkazilgan barcha urinmalar bitta tekislikda, aniqrog'i, kollinear bo'lmagan $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlardan o'tuvchi tekislikda yotar ekan.

**Ta'rif.** *Faraz qilaylik, maxsus nuqtasiz silliq $S$ sirtning ixtiyoriy $P$ nuqtasi berilgan bo'lsin. $S$ da yotuvchi va $P$ nuqtadan o'tuvchi barcha silliq egri chiziqlarga shu nuqtada o'tkazilgan urinmalar yotuvchi tekislikni urinma tekislik deymiz.*

$S$ sirtning $P$ nuqtasidagi urinma tekislikni $T(P)$ orqali belgilaymiz.

**5.** Agar $S$ sirtning $P = \mathbf{r}(u, v)$ nuqtasi maxsus bo'lmasa,

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} \tag{16.1.13}$$

ko'rinishdagi vektorni aniqlash mumkin.

Vektor ko'paytmaning xossasiga ko'ra, bu vektor $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlarga ortogonaldir va demak, u $T(P)$ urinma tekislikka ham ortogonal bo'ladi. (16.1.13) vektor $S$ sirtga $\mathbf{r}(u, v)$ nuqtada o'tkazilgan *birlik normal vektor*, yoki qisqa qilib, $S$ sirtga *normal* deyiladi.

Qarama-qarshi yo'nalgan $\overline{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$ vektor ham normal vektor deyiladi.

Ravshanki, $[0, \pi]$ kesmada bir qiymatli aniqlangan shunday $\alpha, \beta$ va $\gamma$ sonlar mavjudki, ular uchun

$$\mathbf{n} \;=\; (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

bo'lib,

$$|\mathbf{n}|^2 \;=\; \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \;=\; 1$$

tenglik bajariladi.

Qayd etilgan kosinuslar normalning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

**6.** Endi $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko'paytmani batafsilroq o'rganamiz. Ma'lumki, bu vektor ko'paytmani quyidagi

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \;=\; \det \begin{Vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix} \tag{16.1.14}$$

determinant ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ lar mos ravishda $Ox, Oy, Oz$ o'qlarining yo'naltiruvchi birlik vektorlaridir.

Determinantni birinchi satr elementlari boyicha yoyib,

$$[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v] \;=\; \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}\mathbf{i} \;-\; \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}\mathbf{j} \;+\; \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\mathbf{k} \quad (16.1.15)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

O‘ng tomondagi ikkinchi tartibli har bir determinant

$$\mathbf{r}(u,v) \;=\; (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v)\in\Omega,$$

akslantirishga mos yakobianlardan birini beradi, ya’ni:

$$[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v] \;=\; \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\mathbf{i} \;+\; \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\mathbf{j} \;+\; \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\mathbf{k}. \qquad (16.1.16)$$

Bu tenglikni

$$[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v] \;=\; (y_u z_v - y_v z_u)\,\mathbf{i} \;+\; (z_u x_v - z_v x_u)\,\mathbf{j} \;+\; (x_u y_v - x_v y_u)\,\mathbf{k}$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin.

Quyidagi

$$A \;=\; \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B \;=\; \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C \;=\; \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \qquad (16.1.17)$$

belgilashlarni kiritaylik.

Silliq sirtning ta’rifiga ko‘ra, $A(u,v), B(u,v), C(u,v)$ funksiyalar $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz bo‘ladi.

(16.1.17) belgilashdan foydalanib,

$$[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v] \;=\; A\mathbf{i} \;+\; B\mathbf{j} \;+\; C\mathbf{k}$$

deb yozishimiz mumkin.

U holda

$$|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]| \;=\; \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \qquad (16.1.18)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, normal vektor uchun

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{A\mathbf{i} \;+\; B\mathbf{j} \;+\; C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (16.1.19)$$

formulaga ega bo'lamiz.

**16.1.3 - misol.** Faraz qilaylik, $S$ sirt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiyaning grafigi bo'lsin. Agar $u = x$ va $v = y$ desak, bu sirtni $\mathbf{r} = (x, y, z)$ radius-vektor bilan berish mumkin, bu yerda $z = f(x, y)$. Bunda, (16.1.17) ta'rifga ko'ra,

$$A = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad C = 1,$$

demak, (16.1.18) ga asosan,

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \tag{16.1.20}$$

Bu holda (16.1.13) normal vektori, (16.1.19) ga ko'ra, quyidagi

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \tag{16.1.21}$$

komponentalarga ega.

Shuni aytish kerakki, qaralayotgan sirt uchun normal vektorining $Oz$ o'qiga proeksiyasi musbat. Odatda, bunday hollarda normal «yuqoriga yo'nalgan» deyiladi.

**7.** Eslatib o'tamiz, agar $S$ sirtning $P = \mathbf{r}(u, v)$ nuqtasida $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = 0$ shart bajarilsa, bu nuqtani maxsus degan edik. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, $P$ nuqtaning maxsus bo'lmasligi uchun (16.1.17) determinantlardan aqalli bittasining bu nuqtada noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli. Bu, o'z navbatida, quyidagi matritsaning rangi ikkiga tengligini anglatadi:

$$\operatorname{rank}\left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\| = 2. \tag{16.1.22}$$

Agar $S$ sirtning $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ nuqtasi maxsus bo'lmasa, u holda bu nuqtaning biror atrofini koordinata tekisliklaridan biriga bir qiymatli proeksiyalash mumkin.

Haqiqatan, faraz qilaylik, (16.1.22) shart bajarilsin. U holda (16.1.17) determinantlardan biri, masalan, $C$, $(u_0, v_0) \in \Omega$ nuqtada noldan farqli boʻladi:

$$C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (16.1.23)$$

Uzluksizlikka koʻra, bu determinant $(u_0, v_0)$ nuqtaning biror atrofida ham noldan farqli. Bundan chiqdi, oshkormas funksiya haqidagi teoremaga (12.3.4 - teoremaga qarang) koʻra, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida teskari $(u(x, y), v(x, y))$ akslantirish mavjud. Bu akslantirishning komponentalarini $z = z(u, v)$ funksiyaga qoʻysak, $P$ nuqta atrofida $S$ sirtning

$$z = z(u(x, y), v(x, y) = f(x, y)$$

koʻrinishdagi tenglamasiga ega boʻlamiz.

Bu esa talab qilingan tasdiqni, ya'ni $S$ sirtni qaralayotgan qismi $(x, y)$ oʻzgaruvchilarning biror uzluksiz funksiyasi grafigidan iborat ekanini va bundan chiqdi, $Oxy$ koordinatalar tekisligiga bir qiymatli proeksiyalanishini anglatadi.

**16.1.2 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $S$ maxsus nuqtasiz sodda silliq sirt boʻlsin. U holda har qanday $P \in S$ nuqta uchun $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanuvchi (16.1.1) koʻrinishdagi $V(P)$ atrof mavjud.*

**Isbot.** Yuqoridagi mulohazalarga koʻra, har qanday $P \in S$ nuqta $S$ da shunday atrofga egaki, bu atrof koordinata tekisliklaridan biriga bir qiymatli proeksiyalanadi. Bu degani, $P$ nuqtaning mana shu atrofini biror ikki oʻzgaruvchili uzluksiz funksiya grafigi koʻrinishida tasvirlash mumkin. Shunday ekan, 16.1.1 - tasdiqning natijasiga koʻra, $P$ nuqtaning $S$ da shunday atrofi topiladiki, u $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanadi.■

**Eslatma.** Urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanuvchi atrofning kattaligi, umuman aytganda, nuqtadan nuqtaga oʻzgaradi va istalgancha kichik bo'lishi ham mumkin. Ammo tekis silliq deb ataluvchi akslantirishlar uchun bunday atroflar o'lchovini quyidan barcha nuqtalar uchun bitta musbat son bilan chegaralash mumkin. Eslatib o'tamiz, ixtiyoriy $V \subset \mathbb{R}^3$ to'plamning diametri deb, biz

$$d(V) \;=\; \sup_{x\in V,\, y\in V} |x-y|$$

songa aytgan edik.

Agar $S$ sirt tenglamasi bo'lgan (16.1.3) akslantirishning komponentalari $\Omega$ sohada tekis uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, bunday akslantirishni *tekis silliq* deymiz. 11.2.7 - teoremaga ko'ra, akslantirish tekis silliq bo'lishining yetarli sharti uning barcha qismiy hosilalarini $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohada uzluksiz bo'lishidan iborat.

Tekis silliq akslantirishlar uchun shunday $\delta > 0$ son ko'rsatish mumkinki, istalgan $P \in S$ nuqta olganda ham uning $S$ dagi, diametri $\delta$ dan kichik, har qanday atrofini urinma tekislikka bir qiymatli proeksiyalash mumkin.

Bundan buyon biz, bunga alohida urg'u bermasdan, sodda silliq sirtni aniqlovchi akslantirish hosilalarini tekis uzluksiz, deb faraz qilamiz.

**8.** Endi biz sodda sirt yuziga ta'rif bera oladigan holatga keldik.

$S$ sodda silliq sirtni bo'lakli-silliq egri chiziqlar yordamida yetarlicha kichik $S_k$ qismlarga bo'lib, har bir qismda ixtiyoriy ravishda $\xi_k \in S_k$ nuqtani tanlaymiz va bu nuqtada $T(\xi_k)$ urinma tekislikni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan $P = \{S_k\}$ bo'linish diametri deb

$$d(P) \;=\; \max_k \,\mathrm{diam}\, S_k$$

songa aytamiz.

16.1.2 - tasdiqqa ko'ra, yetarlicha kichik $d(P)$ diametr uchun har bir $S_k$ qismni $T(\xi_k)$ urinma tekislikka ortogonal ravishda proeksiyalash mumkin. Hosil bo'lgan proeksiya bo'lakli-silliq chegarali yassi shakldan iborat va shuning uchun, u kvadratlanuvchidir. Bu proeksiya yuzini $\sigma_k$ orqali belgilab,

$$\Sigma(P) \;=\; \sum_k \sigma_k \qquad (16.1.24)$$

yig'indini qaraymiz.

Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $S$ sirtning $d(P) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $P = \{S_k\}$ bo'linishini olib, $\xi_k \in S_k$ nuqtalarni istalgancha tanlaganda ham, biror $I$ soni bilan

$$|\Sigma(P) - I| < \varepsilon$$

baho bajarilsa, u holda bunday $I$ soniga (16.1.24) yig'indining diametr nolga intilgandagi limiti deymiz.

**Ta'rif.** *$S$ silliq sodda sirtning yuzi deb quyidagi*

$$\sigma(S) = \lim_{d(P)\to 0} \sum_k \sigma_k \tag{16.1.25}$$

*limitga aytiladi.*

Eslatib o'tamiz, $|S|$ simvolni biz $S$ to'plamning Jordan o'lchovi uchun ishlatgan edik. Bundan buyon biz bu simvol bilan, agar bunda biror tushunmovchilik hosil bo'lmasa, $S$ sirtning yuzini ham belgilaymiz, ya'ni

$$|S| = \sigma(S).$$

Bizning endigi maqsadimiz har qanday silliq sodda sirt yuzaga ega ekanini isbotlash va bu yuzani hisoblash usulini ko'rsatishdan iborat.

(16.1.3) formula bilan berilgan sirt yuzini hisoblashda $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko'paytmaning absolyut qiymati asosiy rolni o'ynaydi. Chunonchi, navbatdagi tasdiq o'rinli.

**16.1.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $\Omega$ kvadratlanuvchi soha bo'lsin. $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ silliq akslantirish bilan berilgan har qanday $S$ sodda sirt yuzi uchun*

$$|S| = \iint_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv \tag{16.1.26}$$

*tenglik o'rinli.*

Navbatdagi band bu teorema isbotiga bag'ishlanadi.

**9.** Faraz qilaylik, $S$ (16.1.3) formula bilan berilgan ixtiyoriy sodda silliq sirt bo'lsin. Avval biz $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$ kattalik koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burishga nisbatan invariant (ya'ni, o'z qiymatini o'zgartirmas) ekanini ko'rsatamiz.

**16.1.1 - lemma.** *Faraz qilaylik,* $\mathbf{a}$ *biror tayinlangan vektor bo'lib,*

$$\widetilde{\mathbf{r}}(u,v) \;=\; \mathbf{r}(u,v) \;+\; \mathbf{a}$$

*bo'lsin. U holda*

$$[\widetilde{\mathbf{r}}_u, \widetilde{\mathbf{r}}_v] \;=\; [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v].$$

**Isbot** quyidagi

$$\widetilde{\mathbf{r}}_u \equiv \frac{\partial \widetilde{\mathbf{r}}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \equiv \mathbf{r}_u, \quad \widetilde{\mathbf{r}}_v \;=\; \mathbf{r}_v$$

o'z-o'zidan ko'rinib turgan tengliklardan kelib chiqadi.

**16.1.2 - lemma.** *Faraz qilaylik, $Q$ ortogonal matritsa bo'lib,*

$$\widetilde{\mathbf{r}}(u,v) \;=\; Q\mathbf{r}(u,v)$$

*bo'lsin. U holda*

$$|[\widetilde{\mathbf{r}}_u, \widetilde{\mathbf{r}}_v]| \;=\; |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|.$$

**Isbot.** $Q$ matritsa elementlari o'zgarmas sonlar bo'lgani uchun

$$\widetilde{\mathbf{r}}_u \;=\; \frac{\partial Q\mathbf{r}}{\partial u} \;=\; Q\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \;=\; Q\mathbf{r}_u, \quad \widetilde{\mathbf{r}}_v \;=\; Q\mathbf{r}_v,$$

tengliklar o'rinli.

Endi $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ vektorlarning $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ vektor va $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ skalyar ko'paytmalarini bog'lovchi

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 \;+\; (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \;\equiv\; |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$$

ayniyatdan foydalansak, $Q$ matritsa ortogonal bo'lgani uchun,

$$|[\widetilde{\mathbf{r}}_u, \widetilde{\mathbf{r}}_v]|^2 \;\equiv\; |\widetilde{\mathbf{r}}_u|^2 \cdot |\widetilde{\mathbf{r}}_v|^2 \;-\; (\widetilde{\mathbf{r}}_u, \widetilde{\mathbf{r}}_v)^2 \;=$$

$$=\; |Q\mathbf{r}_u|^2 \cdot |Q\mathbf{r}_v|^2 \;-\; (Q\mathbf{r}_u, Q\mathbf{r}_v)^2 \;=$$

$$= \ |\mathbf{r}_u|^2 \cdot |\mathbf{r}_v|^2 \ - \ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 \ \equiv \ |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2$$

tengliklarga ega boʻlamiz.■

Eslatib oʻtamiz, (16.1.3) formula yordamida $S$ sirtni aniqlovchi $\mathbf{r}(u,v)$ vektor komponentalarini $(u,v) \in \Omega$ parametrlarning silliq funksiyalari, deb faraz qilgan edik.

**16.1.3 - lemma.** *Faraz qilaylik, $P$ berilgan $S$ sirtning shunday nuqtasi boʻlsinki, bunda $T(P)$ urinma tekislik $Oxy$ koordinatalar tekisligiga parallel boʻlsin. U holda yetarlicha kichik $\delta > 0$ lar uchun $P$ nuqtaning $S$ dagi, diametri $\delta$ dan kichik, istalgan atrofida*

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \ = \ \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \ + \ o(1) \tag{16.1.27}$$

*tenglik oʻrinli, bu yerda $\delta \to 0$ da $o(1) \to 0$.*

**Isbot.** $P$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida sirt tenglamasini $z = z(x,y)$ koʻrinishda yozish mumkin; bunda $P$ nuqtada

$$\frac{\partial z}{\partial x} \ = \ \frac{\partial z}{\partial y} \ = \ 0$$

tengliklar oʻrinli boʻladi.

Demak, bu nuqtada

$$\frac{\partial z}{\partial u} \ = \ \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} = \ 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Shunday ekan, (16.1.15) ga koʻra, bu nuqtada

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \ = \ \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \mathbf{k} \ = \ \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \mathbf{k}$$

deb yozishimiz mumkin. Demak, $P$ nuqtada

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \ = \ \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$$

tenglik oʻrinli boʻlar ekan. Yakobian $(u,v) \in \Omega$ oʻzgaruvchilarga uzluksiz bogʻliq boʻlgani uchun, $P$ nuqtaning $\delta$-atrofida (16.1.27) tenglik bajariladi. ■

Navbatdagi lemmada $S$ ni (16.1.3) formula bilan berilgan silliq sirt deb, $\delta > 0$ son esa shunday tanlanganki, bunda $P \in S$ nuqtaning diametri $\delta$ dan kichik bo'lgan istalgan $V \subset S$ atrofi $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyalanadi (16.1.2 - tasdiqqa qarang), deb faraz qilamiz. $P$ nuqtaning $V$ atrofini qayd etilgan proeksiyasi yuzini $\sigma_P(V)$ simvol bilan belgilaymiz. Bundan tashqari, $W$ bilan $\Omega$ ning (16.1.3) akslantirish yordamida $V$ ga akslantiriluvchi qismiy sohasini belgilaymiz.

**16.1.4 - lemma.** *Istalgan $P \in S$ nuqta va uning $S$ dagi, diametri $\delta$ dan kichik hamda bo'lakli-silliq chegarali, ixtiyoriy $V$ atrofi uchun*

$$\iint\limits_W \|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\| \, du \, dv \;=\; \sigma_P(V) \;+\; o(1)|W| \tag{16.1.28}$$

*tenglik o'rinli, bu yerda $\delta \to 0$ da $o(1) \to 0$.*

**Isbot.** 1) Avval $P$ nuqtada $T(P)$ urinma tekislik $Oxy$ koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushadi deb faraz qilamiz. Bu holda 16.1.3 - lemmaga ko'ra, (16.1.27) tenglik bajariladi. Bu tenglikni $W$ soha bo'yicha integrallasak,

$$\iint\limits_W \|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\| \, du \, dv \;=\; \iint\limits_W \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du \, dv \;+\; o(1) \iint\limits_W du \, dv \tag{16.1.29}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

E'tibor bering, $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ akslantirish $W$ ni $V \subset S$ to'plamning $Oxy$ koordinatalar tekisligidagi proeksiyasiga, ya'ni $T(P)$ urinma tekislikka o'tkazadi. Shunday ekan, 13.6.1 - teoremaga ko'ra, (16.1.29) ning o'ng tomonidagi yakobiandan olingan integral bu proeksiyaning $\sigma_P(V)$ yuziga teng. (16.1.29) ning o'ng tomonidagi oxirgi integral esa $|W|$ ga teng. Demak, (16.1.29) tenglik (16.1 28) tenglik bilan ustma-ust tushadi.

2) Endi, faraz qilaylik, $P$ nuqta $S$ sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parallel ko'chirish va burish yordamida shunday yangi $\{O'XYZ\}$ koordinatalar sistemasiga o'taylikki, bunda $T(P)$ urinma tekislik $O'XY$ koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushsin. $S$

sirtni aniqlovchi radius-vektorni $\widetilde{\mathbf{r}}(u, v)$ simvol orqali belgilab, isbotning birinchi qismini qo‘llaymiz. Agar Jordan o‘lchovining parallel ko‘chirish va burishga nisbatan invariantligini e’tiborga olsak,

$$\iint\limits_{W} |[\widetilde{\mathbf{r}}_u, \widetilde{\mathbf{r}}_v]|\, du\, dv \;=\; \sigma_P(V) \;+\; o(1)|W| \qquad (16.1.30)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Ravshanki, 16.1.1 - va 16.1.2 - lemmalarga asosan,

$$|[\widetilde{\mathbf{r}}_u, \widetilde{\mathbf{r}}_v]| \;=\; |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|.$$

Shunday ekan, (16.1.30) dan talab qilingan (16.1.28) tenglik kelib chiqadi.■

**16.1.1 - teorema isboti.** Faraz qilaylik, $\Omega$ kvadratlanuvchi soha bo‘lib, $S$ silliq $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ akslantirish yordamida berilgan sodda sirt bo‘lsin.

Ixtiyoriy yetarlicha kichik $\delta > 0$ olib, $S$ sirtni bo‘lakli-silliq egri chiziqlar yordamida diametri $\delta$ dan kichik $S_k$ qismlarga bo‘lamiz. Bu bo‘linish berilgan $\Omega$ sohasining, kvadratlanuvchi $\Omega_k$ qismlardan iborat, mos bo‘linishini hosil qiladi; bunda $\mathbf{r}(\Omega_k) = S_k$.

Har bir $S_k$ da ixtiyoriy ravishda $\xi_k \in S_k$ nuqtani tanlab, bu nuqtada $T(\xi_k)$ urinma tekislikni o‘tkazamiz. 16.1.4 - lemmaga ko‘ra, $S_k$ ni $T(\xi_k)$ urinma tekislikka ortogonal proeksiyasining $\sigma_k$ yuzi

$$\sigma_k \;=\; \iint\limits_{\Omega_k} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv \;+\; o(1)\, |\Omega_k|$$

munosabatni qanoatlantiradi.

Agar bu tengliklarni yig‘sak, quyidagi

$$\sum_k \sigma_k \;=\; \iint\limits_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv \;+\; o(1)|\Omega|$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan, $d(P) \to 0$ deb limitga o'tib, sirt yuzining (16.1.25) ta'rifini e'tiborga olsak, talab qilingan (16.1.26) tenglikka ega bo'lamiz.■

**10.** 16.1.1 - teorema tadbig'iga misollar keltiramiz.

**16.1.4 - misol.** Quyidagi

$$z \;=\; xy, \quad x^2+y^2 \;\le\; R^2$$

tenglama bilan berilgan $S$ sirtning yuzini toping.

$S$ sirt ikki o'zgaruvchili funksiyaning grafigi bo'lgani uchun, biz (16.1.20) formuladan foydalanishimiz mumkin. Demak,

$$\|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\|^2 \;=\; 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \;=\; 1 + y^2 + x^2.$$

Shunday ekan, (16.2.26) formulaga ko'ra,

$$|S| \;=\; \iint\limits_{x^2+y^2 \;\le\; R^2} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \;.$$

Ikki karrali integralni qutb koordinatalariga o'tib hisoblasak,

$$|S| \;=\; 2\pi \int\limits_0^R \sqrt{1+\rho^2}\, \rho\, d\rho \;=\; \frac{2\pi}{3}\left[(1+R^2)^{3/2} - 1\right]$$

tenglikni olamiz.

E'tibor bering, (16.1.26) formula bu formuladagi integral xosmas bo'lganda ham o'rinli.

**16.1.5 - misol.** Yarim sferaning, ya'ni

$$z \;=\; \sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2 \;\le\; R^2$$

tenglama bilan berilgan $S$ sirt yuzini toping.

(16.1.20) formuladagi ifoda

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 \;+ \frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} \;+$$

$$+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

ko‘rinishga ega.

Agar (16.1.26) formulada qutb koordinatalar sistemasiga o‘tsak,

$$|S| = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 2\pi R \int\limits_0^R \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2\pi R\,\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_{r=0}^{r=R} = 2\pi R^2$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

(16.1.26) formulani $S$ sirt sodda bo‘lmasada, lekin chekli sondagi sodda sirtlar yig‘indisidan iborat bo‘lsa ham qo‘llash mumkin.

**16.1.6 - misol.** Faraz qilaylik, $a > b > 0$ bo‘lib, $(u, v)$ o‘zgaruvchilar $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ kvadratga tegishli bo‘lsin:

$$-\pi \le u \le \pi, \quad -\pi \le v \le \pi.$$

Quyidagi

$$x = (a + b\cos v)\cos u,$$

$$y = (a + b\cos v)\sin u,$$

$$z = b\sin v,$$

komponentalarga ega $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor bilan berilgan sirt, ya’ni tor yuzini toping.

$R(v) = a + b\cos v$ deb belgilab, (16.1.17) va (16.1.18) formulalarni qo‘llaymiz. Sodda hisoblashlar ko‘rsatadiki,

$$A = \begin{vmatrix} R(v)\cos u & 0 \\ -b\sin v\sin u & b\cos v \end{vmatrix} = R(v)b\cos u\cos v,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -R(v)\sin u \\ b\cos v & -b\sin v\cos u \end{vmatrix} = R(v)b\sin u\cos v$$

va

$$C = \begin{vmatrix} -R(v)\sin u & R(v)\cos u \\ -b\sin v\cos u & -b\sin v\sin u \end{vmatrix} = R(v)b\sin v.$$

Bundan

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = bR(v).$$

Demak,

$$|S| = \iint_{\mathbb{T}^2} b(a + b\cos v)\,du\,dv = 2\pi b \int_{-\pi}^{\pi} (a + b\cos v)\,dv = 4\pi^2 ab.$$

## 16.2-§. Sirtning birinchi kvadratik formasi

**1.** Faraz qilaylik, $\Omega$ ikki o'lchovli soha bo'lib, $S$ sodda sirt $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ silliq akslantirish bilan aniqlangan bo'lsin.

Eslatib o'tamiz, radius-vektor

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lib, har bir $x, y$ va $z$ komponenta ikki $(u, v) \in \Omega$ o'zgaruvchining silliq funksiyasidan iborat.

$\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiyaning birinchi differensialini qaraylik:

$$\mathbf{dr}(u, v) = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv. \tag{16.2.1}$$

$d\mathbf{r}$ o'rniga $\mathbf{dr}$ deb belgilash umum qabul qilingan bo'lib, bu belgilash differensialning vektor qiymatli funksiya ekaniga urg'u beradi.

Birinchi differensial $du$ va $dv$ erksiz o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo'lgani sababli, u *chiziqli forma* deb ham ataladi.

Birinchi differensialning skalyar kvadrati, ya'ni quyidagi

$$\mathbf{dr}^2 = \mathbf{dr}\cdot\mathbf{dr} = \mathbf{r}_u^2\,du^2 + 2\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v\,du\,dv + \mathbf{r}_v^2\,dv^2 \tag{16.2.2}$$

ifoda kvadratik formadan iborat bo'lib, u $S$ sirtning *birinchi kvadratik formasi* deb ataladi.

Odatda, bu formaning koeffitsiyentlari

$$E(u,v) = \mathbf{r}_u^2, \quad F(u,v) = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G(u,v) = \mathbf{r}_v^2 \tag{16.2.3}$$

ko‘rinishda belgilanadi. Bu belgilashlardan foydalanib, birinchi kvadratik formani quyidagi

$$\mathbf{dr}^2 \;=\; E(u,v)\,du^2 \;+\; 2F(u,v)\,du\,dv \;+\; G(u,v)\,dv^2 \tag{16.2.4}$$

standart ko‘rinishda yozish mumkin.

Agar sirt sodda silliq maxsus nuqtasiz bo‘lsa, bevosita (16.2.2) dan birinchi kvadratik formaning qat’iy musbat aniqlangan forma ekani kelib chiqadi.

**16.2.1 - misol.** Birinchi misol sifatida eng sodda sirtni, ya’ni

$$Q \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; a<x<b,\; c<y<d,\; z=0\}$$

to‘g‘ri to‘rtburchakni qaraylik.

Bu to‘g‘ri to‘rtburchakni radius-vektor bilan quyidagi

$$\mathbf{r}(u,v) \;=\; (u,v,0) \;=\; u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+0\mathbf{k}$$

parametrik ko‘rinishda formal aniqlash mumkin, bu yerda $(u,v)\in Q$. Shunday ekan,

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = (1,0,0) \quad \text{va} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (0,1,0).$$

Demak,

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1, \quad F = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v = 0, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = 1.$$

Shunday qilib, to‘g‘ri to‘rtburchak holida kvadratik forma

$$\mathbf{dr}^2 \;=\; du^2 + dv^2$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan.

**16.2.2 - misol.** Faraz qilaylik, $S$ markazi koordinatalar boshida va radiusi $R$ ga teng bo'lgan sfera bo'lib, u $u = \theta$, $v = \varphi$ sferik koordinatalar yordamida

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin\theta \cos\varphi,\ R \sin\theta \sin\varphi,\ R \cos\theta)$$

parametrik ravishda berilgan bo'lsin.

Bu vektor-funksiyaning hosilalari

$$\mathbf{r}_\theta = (R \cos\theta \cos\varphi,\ R \cos\theta \sin\varphi,\ -R \sin\theta)$$

va

$$\mathbf{r}_\varphi = (-R \sin\theta \sin\varphi,\ R \sin\theta \cos\varphi,\ 0)$$

kabi hisoblanadi.

Shuning uchun,

$$E = \mathbf{r}_\theta^2 = R^2, \quad F = (\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi) = 0, \quad G = \mathbf{r}_\varphi^2 = R^2 \sin^2\theta.$$

Demak, sfera uchun birinchi kvadratik forma

$$\mathbf{dr}^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

ko'rinishga ega.

**Eslatma.** Sferik koordinatalar parametrlarning o'zgarish sohasi bo'lgan quyidagi

$$Q = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$$

ochiq to'g'ri to'rtburchakni sferadan, geografik tilda aytadigan bo'lsak, $M_0 = \{(x, y, z) \in S \ :\ y = 0,\ x \geq 0\}$ meridianni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'lgan sohaga homeomorf akslantiradi.

**16.2.3 - misol.** $S$ sirt sifatida

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

parametrik ravishda berilgan $\{z = x^2 - y^2\}$ hiperbolik paraboloidni («egarni») olaylik.

Bunda

$$\mathbf{r}_u \;=\; (1,\; 0,\; 2u)$$

va

$$\mathbf{r}_v \;=\; (0,\; 1,\; -2v).$$

Shuning uchun,

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1 + 4u^2,\; F = (\mathbf{r}_u,\, \mathbf{r}_v) = -4uv,\; G = \mathbf{r}_v^2 = 1 + 4v^2.$$

Demak, hiperbolik paraboloid uchun birinchi kvadratik forma

$$\mathbf{dr}^2 \;=\; (1 + 4u^2)du^2 - 8uv\, du\, dv + (1 + 4v^2)dv^2$$

ko‘rinishga ega.

**16.2.4 - misol.** $u = \varphi,\; v = z$ silindrik koordinatalar yordamida

$$\mathbf{r}(\varphi, z) \;=\; (R\cos\varphi,\; R\sin\varphi,\; z)$$

parametrik ravishda berilgan to‘g‘ri doiraviy silindrni qaraylik, bu yerda $0 \le \varphi < 2\pi$ va $0 < z < h$.

Ravshanki, bunda

$$\mathbf{r}_\varphi \;=\; (-R\sin\varphi,\; R\cos\varphi,\; 0)$$

va

$$\mathbf{r}_z \;=\; (0, 0, 1)\,.$$

Shuning uchun,

$$E = \mathbf{r}_\varphi^2 = R^2, \quad F = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_z) = 0, \quad G \;=\; \mathbf{r}_z^2 = 1.$$

Demak, silindr uchun birinchi kvadratik forma quyidagi

$$\mathbf{dr}^2 \;=\; R^2\, d\varphi^2 + dz^2$$

ko‘rinishga ega.

**Eslatma.** Agar parametr sifatida $u = R\varphi,\; v = z$ larni olib, radius-vektorni

$$\mathbf{r}(u, v) \;=\; \left(R\cos\frac{u}{R},\; R\sin\frac{u}{R},\; v\right)$$

deb aniqlasak,

$$\mathbf{r}_u = \left(-\sin\frac{u}{R},\ \cos\frac{u}{R},\ 0\right) \quad \text{va} \quad \mathbf{r}_v = (0,\ 0,\ 1)$$

bo'ladi.

Demak, ushbu holda silindr uchun birinchi kvadratik forma quyidagi

$$\mathbf{dr}^2 = du^2 + dv^2$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, parametrlarni bunday tanlashda silindrning birinchi kvadratik formasi to'g'ri to'rtburchakning birinchi kvadratik formasi bilan ustma-ust tushar ekan.

**2.** Birinchi kvadratik formaning muhimligi shundaki, u yordamida biz sirtning asosiy kattaliklarini, sirtni parametrik ravishda aniqlovchi $\mathbf{r}(u,v)$ funksiyaga murojaat qilmasdan, hisoblashimiz mumkin.

Masalan, birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlarini bilgan holda sirt yuzini qanday hisoblash mumkinligini ko'raylik. Buning uchun quyidagi

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]^2 + (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 = \mathbf{r}_u^2 \cdot \mathbf{r}_v^2$$

ayniyatdan foydalanamiz.

Bevosita bu ayniyat va (16.2.3) ta'rifdan

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]^2 + F^2 = E \cdot G$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak,

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]^2 = EG - F^2. \tag{16.2.5}$$

Shunday ekan, navbatdagi tasdiq o'rinli.

**16.2.1 - tasdiq.** *Birinchi kvadratik formasi (16.2.4) ga teng bo'lgan $S$ sirtning yuzi*

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\, du\, dv \tag{16.2.6}$$

*formula yordamida hisoblanadi.*

**Isbot** 16.1.1 - teorema va (16.2.5) tenglikdan kelib chiqadi.

**16.2.5 - misol.** 16.2.2 - misolga ko‘ra, sfera sirti uchun quyidagi

$$EG - F^2 = R^4 \sin^2 \theta$$

tenglik o‘rinli.

Agar $\Omega \subset (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ sohani

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi,\ R \sin \theta \sin \varphi,\ R \cos \theta)$$

radius-vektor akslantiradigan sfera qismini $S$ deb belgilasak, u holda $S$ sirt yuzi uchun

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$$

tenglikni olamiz.

**16.2.6 - misol.** Hiperbolik paraboloid uchun

$$EG - F^2 = (1 + 4u^2)(1 + 4v^2) - (-4uv)^2 = 1 + 4u^2 + 4v^2.$$

Agar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohani

$$\mathbf{r}(u, v) = (u,\ v,\ u^2 - v^2)$$

radius-vektor akslantiradigan hiperbolik paraboloid qismini $S$ deb belgilasak, u holda $S$ sirt yuzi uchun

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \, du \, dv$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Agar, masalan,

$$\Omega = \{(u, v) \ : \ u^2 + v^2 < R^2\}$$

bo‘lsa, u holda qutb koordinatalariga o‘tib,

$$|S| = \iint\limits_{u^2+v^2<R^2} \sqrt{1+4u^2+4v^2}\,du\,dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{\pi}{6}\left[\left(1+4R^2\right)^{3/2} - 1\right]$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

**3.** Birinchi kvadratik forma yordamida sirtda yotuvchi egri chiziq uzunligini ham hisoblash mumkin.

Ushbu

$$\Phi(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k}, \quad a \le t \le b$$

parametrik ko‘rinishda berilgan $L$ fazoviy egri chiziqni qaraylik.

E’tibor bering, sirtni aniqlovchi $\mathbf{r}(u,v)$ radius-vektordan farqli o‘laroq, $\Phi(t)$ radius-vektor komponentalari bir o‘zgaruvchili haqiqiy funksiyalardir.

Parametr $a$ dan $t$ gacha o‘zgargandagi egri chiziq yoyi uzunligini $l(t)$ orqali belgilaylik. (7.1.19) formulaga ko‘ra,

$$l(t) = \int\limits_a^t \left|\frac{d\Phi(s)}{ds}\right| ds, \quad \text{ya'ni} \quad \frac{dl}{dt} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|. \tag{16.2.7}$$

Endi, faraz qilaylik, $S$ silliq sirt $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ radius-vektor bilan berilgan bo‘lib, $L$ egri chiziq $S$ sirtda yotsin: $L \subset S$. Bu holda $L$ egri chiziqni, $w(t) = (u(t), v(t))$ komponentalarga ega bo‘lgan $w : [a,b] \to \Omega$ akslantirish va $\mathbf{r}(u,v)$ akslantirishlarning superpozitsiyasi sifatida parametrik ko‘rinishda yozish mumkin, ya’ni

$$\Phi(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad a \le t \le b.$$

Bunda

$$\varphi(t) = x(u(t), v(t)), \quad \psi(t) = y(u(t), v(t)), \quad \chi(t) = z(u(t), v(t)).$$

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga koʻra,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{r}_u \cdot \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Shunday ekan, hosilaning skalyar kvadrati

$$\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|^2 = \mathbf{r}_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\,\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \mathbf{r}_v^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

kabi aniqlanadi.

Birinchi kvadratik formaning (16.2.3) ta’rifidan foydalanib, biz yuqoridagi tenglikni

$$\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \qquad (16.2.8)$$

koʻrinishda yozishimiz mumkin.

Bu tenglikni (16.2.7) bilan taqqoslab, biz egri chiziq uzunligi uchun birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari orqali ifodalangan, quyidagi formulaga kelamiz.

**16.2.2 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $L$ egri chiziq, birinchi kvadratik formasi (16.2.4) koʻrinishga ega boʻlgan sodda silliq $S$ sirtda yotsin. U holda $L$ egri chiziq uzunligi*

$$|L| = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (16.2.9)$$

*ga teng.*

Bu formulada birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari $L$ egri chiziqni aniqlovchi $(u(t), v(t))$ vektor-funksiyaga bogʻliq.

**1 - eslatma.** Faraz qilaylik, $S$ silliq sirt biror almashtirishlardan soʻng shunday $S_1$ silliq sirtga akslansinki, bunda $S_1$ ning birinchi kvadratik formasi $S$ ning birinchi kvadratik formasiga teng boʻlsin. U holda, 16.2.1 - va 16.2.2 - tasdiqlarga asosan, bunday almashtirishda sirt yuzi va bu sirtda yotgan egri chiziqlarning uzunliklari oʻzgarmaydi.

Masalan, to‘g‘ri to‘rtburchakni shunday bukish mumkinki, natijada u silindrik sirt ko‘rinishiga keladi, lekin bunda egri chiziqlar uzunligi va shakllar yuzi o‘zgarmay qoladi.

**2 - eslatma.** (16.2.8) tenglikni differensiallarda quyidagi

$$d\Phi^2 \;=\; E(u,v)\,du^2 \;+\; 2F(u,v)\,du\,dv \;+\; G(u,v)\,dv^2 \qquad (16.2.10)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

(16.2.7) ga ko‘ra, $\Phi(t)$ vektor-funksiyaning $t$ parametr va $l$ yoy uzunligi bo‘yicha hosilalari

$$\frac{d\Phi}{dt} \;=\; \frac{d\Phi}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} \;=\; \frac{d\Phi}{dl}\cdot\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$$

munosabat bilan bog‘langan.

Shuning uchun, tabiiy parametr bo‘yicha hosila

$$\frac{d\Phi}{dl} \;=\; \frac{\dfrac{d\Phi}{dt}}{\left|\dfrac{d\Phi}{dt}\right|} \qquad (16.2.11)$$

ga teng.

Demak,

$$\left|\frac{d\Phi}{dl}\right| \;=\; 1. \qquad (16.2.12)$$

15.2 - paragraf natijalariga ko‘ra ((15.2.16) formulaga qarang), $\dfrac{d\Phi}{dl}$ vektor $L$ egri chiziqqa o‘tkazilgan $\boldsymbol{\tau}$ birlik urinma vektorga teng. Shuning uchun, (16.2.11) tenglikni

$$\frac{d\Phi}{dl} = \boldsymbol{\tau}, \quad \text{yoki} \quad d\Phi = \boldsymbol{\tau}\,dl$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Oxirgi tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko‘tarib,

$$d\Phi^2 \;=\; dl^2 \qquad (16.2.13)$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

Bundan va (16.2.10) tenglikdan $S$ sirtda yotgan egri chiziq uzunligi differensiali uchun

$$dl^2 \;=\; E(u,v)\,du^2 \;+\; 2F(u,v)\,du\,dv \;+\; G(u,v)\,dv^2 \qquad (16.2.14)$$

formulani olamiz.

Bu formulada $u$ va $v$ lar $[a,b]$ kesmani biror $L' \subset \Omega$ egri chiziqqa akslantiruvchi $(u(t),v(t))$ vektor-funksiyaning komponentalari bo‘lib, $\mathbf{r}(u,v)$ akslantirish bu $L'$ egri chiziqni $S$ da yotuvchi berilgan $L$ egri chiziqqa o‘tkazadi.

## 16.3-§*. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi

**1.** Ushbu paragrafda biz ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi sirtlarni qaraymiz, ya’ni sirtni aniqlovchi $\mathbf{r}(u,v)$ vektor-funksiya komponentalarini $\Omega$ sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi, deb faraz qilamiz. Bu vektor-funksiyaning ikkinchi differensiali

$$\mathbf{d}^2\mathbf{r}(u,v) \;=\; \mathbf{r}_{uu}\,du^2 \;+\; 2\mathbf{r}_{uv}\,du\,dv \;+\; \mathbf{r}_{vv}\,dv^2 \qquad (16.3.1)$$

ko‘rinishdagi vektor qiymatli kvadratik formadan iborat.

Aytaylik, $\mathbf{n}$ berilgan $S$ sirtning birlik normal vektori bo‘lsin. (16.3.1) tenglikning ikki tomonini $\mathbf{n}$ vektorga skalyar ko‘paytiraylik. Natijada hosil bo‘lgan

$$\mathbf{d}^2\mathbf{r}(u,v)\cdot\mathbf{n} \;=\; \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}\,du^2 \;+\; 2\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}\,du\,dv \;+\; \mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n}\,dv^2 \quad (16.3.2)$$

skalyar kattalik $S$ sirtning *ikkinchi kvadratik formasi* deyiladi. Ikkinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari, odatda,

$$L(u,v) = \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}, \quad M(u,v) = \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}, \quad N(u,v) = \mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n} \quad (16.3.3)$$

ko‘rinishda belgilanadi.

Bu belgilashlar yordamida ikkinchi kvadratik forma quyidagi

$$\mathbf{d}^2\mathbf{r}(u,v)\cdot\mathbf{n} \;=\; L(u,v)\,du^2 \;+\; 2M(u,v)\,du\,dv \;+\; N(u,v)\,dv^2 \qquad (16.3.4)$$

standart ko'rinishda yoziladi.

**16.3.1 - misol.** Quyidagi (16.2.1 - misolga qarang)

$$\mathbf{r}(u,v) \;=\; (u,v,0)$$

radius-vektor bilan aniqlangan $Q$ to'g'ri to'rtburchak uchun

$$\mathbf{r}_{uu} \;=\; \mathbf{r}_{uv} \;=\; \mathbf{r}_{vv} \;=\; 0$$

tengliklar o'rinli.

Bu holda $\mathbf{d^2r}(u,v) = 0$ va demak, ikkinchi kvadratik forma aynan nolga teng.

**16.3.2 - misol.** Quyidagi

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) \;=\; (R\sin\theta\cos\varphi,\;\; R\sin\theta\sin\varphi,\;\; R\cos\theta)$$

radius-vektor bilan berilgan sfera uchun normal vektor sifatida ichki $\mathbf{n} = -\,\mathbf{r}(\theta,\varphi)/R$ normalni olamiz.

Ikki marta differensiallab, $\mathbf{r}_{\theta\theta} = -\mathbf{r}(\theta,\varphi)$ tenglikka ega bo'lamiz. Bundan

$$L(\theta,\varphi) \;=\; \mathbf{r}_{\theta\theta}(\theta,\varphi)\cdot\mathbf{n} \;=\; -\,\mathbf{r}\cdot(-\,\mathbf{r}/R) \;=\; |\mathbf{r}|^2/R \;=\; R$$

kelib chiqadi.

Endi

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi}(\theta,\varphi) \;=\; -\,(R\sin\theta\cos\varphi,\;\; R\sin\theta\sin\varphi,\;\; 0)$$

bo'lgani uchun,

$$N(\theta,\varphi) \;=\; \mathbf{r}_{\varphi\varphi}(\theta,\varphi)\cdot\mathbf{n} \;=\; R\sin^2\theta.$$

Nihoyat, quyidagi

$$\mathbf{r}_{\theta\varphi}(\theta,\varphi) \;=\; (-\,R\cos\theta\sin\varphi,\;\; R\cos\theta\cos\varphi,\;\; 0)$$

tenglikka ko'ra,

$$M(\theta,\varphi) \;=\; \mathbf{r}_{\theta\varphi}(\theta,\varphi)\cdot\mathbf{n} \;=\; 0.$$

Shunday qilib, sfera uchun ikkinchi kvadratik forma

$$d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} \;=\; R\,d\theta^2 + R\,\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

ga teng.

**16.3.3 - misol.** Ushbu

$$\mathbf{r}(\varphi, z) \;=\; (R\,\cos\varphi,\;R\,\sin\varphi,\;z)$$

radius-vektor bilan berilgan silindr $\mathbf{n} = (-\,\cos\varphi,\;-\,\sin\varphi,\;0)$ ichki normalga ega.

Ravshanki, $\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = (-R\,\cos\varphi,\;-R\,\sin\varphi,\;0)$. Shuning uchun,

$$L(\varphi, z) \;=\; \mathbf{r}_{\varphi\varphi}\cdot\mathbf{n} \;=\; R.$$

Endi $\mathbf{r}_{\varphi z}(\varphi, z) = 0$ bo‘lgani uchun,

$$M(\varphi, z) \;=\; \mathbf{r}_{\varphi z}\cdot\mathbf{n} \;=\; 0.$$

Nihoyat, $\mathbf{r}_{zz}(\theta, \varphi) = 0$ tenglikka ko‘ra,

$$N(\varphi, z) \;=\; \mathbf{r}_{zz}\cdot\mathbf{n} \;=\; 0.$$

Shunday qilib, qaralayotgan silindrning ikkinchi kvadratik formasi

$$d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} \;=\; R\,d\varphi^2$$

ga teng.

**16.3.4 - misol.** $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ parametrlar yordamida

$$\mathbf{r}(u, v) \;=\; (u, v, u^2 - v^2)$$

radius-vektor bilan aniqlangan hiperbolik paraboloidni qaraylik.

Quyidagi

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, 2u), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1 - 2v)$$

tengliklarga ko‘ra,

$$\mathbf{r}_{uu} \;=\; (0, 0, 2), \quad \mathbf{r}_{uv} \;=\; (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{vv} \;=\; (0, 0, -2).$$

Eslatib o‘tamiz,

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \ = \ (-2u, 2v, 1)$$

vektor ko‘paytma urinma tekislikka ortogonal bo‘lgani sababli, u normalga kollinear.

Normal sifatida

$$\mathbf{n} \ = \ \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} \ = \ \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

vektorni olaylik.

Oson hisoblashlar ko‘rsatadiki,

$$L(u,v) \ = \ \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} \ = \ \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}},$$

$$M(u,v) \ = \ \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} \ = \ 0$$

va

$$N(u,v) \ = \ \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} \ = \ \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

Demak, hiperbolik paraboloidning ikkinchi kvadratik formasi

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \ = \ \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(du^2 - dv^2)$$

ga teng.

**16.3.5 - misol.** Ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiyaning grafigidan iborat $S$ sirtni qaraylik. Bu holda $(u, v)$ parametrlar sifatida $(x, y)$ o‘zgaruvchilarni olish mumkin, bunda $\mathbf{r}$ radius-vektor

$$\mathbf{r}(x,y) \ = \ (x, y, f(x,y))$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Shunday ekan,

$$d^2\mathbf{r}(x,y) \ = \ (0, 0, d^2f(x,y)).$$

Faraz qilaylik, koordinatalar boshida urinma tekislik $z = 0$ koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushsin. U holda

$$f(0,0) \; = \; \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \; = \; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \; = \; 0.$$

Koordinatalar boshida sirtga normal sifatida $\mathbf{n} = (0,0,1)$ vektorni olaylik. U holda

$$d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} \; = \; d^2 f(0,0) \; = \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2, \quad (16.3.5)$$

ya'ni ikkinchi kvadratik forma grafigi qaralayotgan sirtdan iborat funksiyaning ikkinchi differensialiga teng.

**Eslatma.** $Oxy$ tekislikni $Oz$ o'qi atrofida burish yordamida (16.3.5) formuladagi $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ aralash hosilani koordinatalar boshida nolga teng qilish mumkin. Haqiqatan, soat miliga qarama-qarshi $\varphi$ burchakka burish natijasida hosil bo'lgan yangi $(x', y')$ koordinatalar eski $(x, y)$ koordinatalar bilan

$$x \; = \; x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$

$$y \; = \; x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

tengliklar orqali bog'langan.

Shunday ekan, (indekslar mos o'zgaruvchilar bo'yicha hosila olishni anglatadi) murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$f_{x'} \; = \; f_x \cos\varphi + f_y \sin\varphi$$

va

$$f_{x'y'} \; = \; f_{xx}\cos\varphi\;(-\sin\varphi) + f_{xy}\cos^2\varphi + f_{yx}(-\sin^2\varphi) +$$

$$+ f_{yy}\sin\varphi\;\cos\varphi \; = \; f_{xy}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy})\sin 2\varphi.$$

Endi $\varphi$ burchakni

$$f_{xy}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy})\sin 2\varphi$$

shartdan tanlab olamiz, ya'ni, $f_{xy} = 0$ bo'lsa, $\varphi = 0$ deymiz va $f_{xy} \neq 0$ bo'lsa,

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{(f_{xx} - f_{yy})}{2 f_{xy}}$$

deymiz.

Ravshanki, $\varphi$ ni bunday tanlashda $f_{x'y'}(0,0) = 0$ shart bajariladi. (16.3.5) formula esa,

$$d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \;=\; d^2 f(0,0) \;=\; f_{x'x'} dx'^2 \;+\; f_{y'y'}\, dy'^2 \tag{16.3.6}$$

ko'rinishga keladi.

**2.** Sirtni aniqlovchi parametrlarni o'zgartirish natijasida sirtning ikkinchi kvadratik formasi qanday o'zgarishini o'rganamiz.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ radius-vektor yordamida berilgan $S$ silliq sodda sirtni qaraylik, bu yerda $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Faraz qilaylik, $P$ bu sirtning istalgan nuqtasi bo'lib, $\mathbf{n}(P)$ esa, $P$ nuqtadan chiquvchi va $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal normal vektor bo'lsin.

Bundan tashqari, faraz qilaylik, $(u,v)$ parametrlar yangi $(\xi,\eta) \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ parametrlarning

$$u = u(\xi,\eta), \quad v = v(\xi,\eta)$$

ko'rinishdagi silliq funksiyalari bo'lib, bunda $\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta) = r(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ radius-vektor xuddi o'sha $S$ sirtni aniqlasin va bu sirtda, xuddi avvalgidek, maxsus nuqtalar bo'lmasin. Buning uchun parametrlarni almashtirish xosmas bo'lsin deb, ya'ni

$$\frac{D(u,v)}{D(\xi,\eta)} \;\neq\; 0$$

deb shart qo'yamiz.

Agar $P = \mathbf{r}(u_0,v_0)$ bo'lsa, $P = \boldsymbol{\rho}(\xi_0,\eta_0)$ bo'lib, bunda $u(\xi_0,\eta_0) = u_0,\; v(\xi_0,\eta_0) = v_0$ bo'ladi.

Yangi parametrlarga mos ikkinchi kvadratik forma

$$d^2\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta) \cdot \mathbf{n} \;=\; \boldsymbol{\rho}_{\xi\xi} \cdot \mathbf{n}\, d\xi^2 \;+\; 2\boldsymbol{\rho}_{\xi\eta} \cdot \mathbf{n}\, d\xi\, d\eta \;+\; \boldsymbol{\rho}_{\eta\eta} \cdot \mathbf{n}\, d\eta^2 \tag{16.3.7}$$

ko‘rinishga ega.

Bu forma ham xuddi (16.3.2) ikkinchi kvadratik forma kabi qiymatlarni qabul qilishini ko‘rsatamiz.

**16.3.1 - tasdiq.** *Ikkinchi kvadratik forma parametrlarni xosmas o‘zgartirishga nisbatan invariantdir.*

**Isbot.** Birinchi differensial formasining invariantligiga ko‘ra,

$$d\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta) \;=\; \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv.$$

Shunday ekan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga asosan,

$$d^2\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta) = \mathbf{r}_{uu}du^2 + 2\mathbf{r}_{uv}du\,dv + \mathbf{r}_{vv}dv^2 + \mathbf{r}_u\cdot d^2u(\xi,\eta) + \mathbf{r}_v\cdot d^2v(\xi,\eta) =$$

$$= \; d^2\mathbf{r}(u,v) + \mathbf{r}_u \cdot d^2u(\xi,\eta) + \mathbf{r}_v \cdot d^2v(\xi,\eta)\;.$$

E’tibor bering, $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ vektorlar urinma tekislikda yotadi, shuning uchun ular $\mathbf{n}$ normal vektorga ortogonal. Demak,

$$d^2\mathbf{r}(\xi,\eta)\cdot\mathbf{n} \;=\; d^2\mathbf{r}(u,v)\cdot\mathbf{n}$$

tenglik o‘rinli. Bu tenglik esa, (16.3.2) va (16.3.7) kvadratik formalar tengligini anglatadi.■

**Eslatma.** Agar ikkinchi kvadratik forma ta’rifida $\mathbf{n}$ vektor normal vektoridan farq qilsa, u holda mos kvadratik forma invariantlik xossasiga ega bo‘lmaydi.

**3.** Ikkinchi kvadratik forma sirtning ancha nozik kattaliklarini ham, sirtni parametrik ravishda aniqlovchi formulalardan foydalanmasdan turib topish imkonini beradi. Bunday kattaliklardan biri egrilikdir.

Tegishli tushunchalarni kiritish maqsadida avval fazoviy va yassi egri chiziqlarning ba’zi xossalarini o‘rganamiz.

Xuddi avvalgi banddagidek,

$$\Phi(t) \;=\; \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b,$$

kabi parametrik ravishda berilgan $L$ fazoviy egri chizqni qaraylik. (16.2.12) formulaga ko‘ra, radius-vektorning yoy uzunligi bo‘yicha hosilasi quyidagi

$$\left(\frac{d\Phi}{dl}, \frac{d\Phi}{dl}\right) = \left|\frac{d\Phi}{dl}\right|^2 = 1$$

shartni qanoatlantiradi.

Bu tenglikni $l$ bo'yicha differensiallab,

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{d\Phi}{dl}, \frac{d\Phi}{dl}\right) = 2\left(\frac{d^2\Phi}{dl^2}, \frac{d\Phi}{dl}\right) = 0$$

tenglikni olamiz. Bu tenglik radius-vektorning ikkinchi hosilasi birinchi hosilaga ortogonal ekanini anglatadi.

Eslatib o'tamiz, 15.2 - paragraf natijalariga ((15.2.16) formulaga qarang) ko'ra, $\dfrac{d\Phi}{dl}$ vektor $L$ egri chiziqqa o'tkazilgan $\boldsymbol{\tau}$ birlik urinma vektor bilan ustma-ust tushadi. Demak, $\dfrac{d^2\Phi}{dl^2}$ ikkinchi hosila $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektorga ortogonal bo'lar ekan.

Egri chiziqning urinma vektoriga ortogonal har qanday birlik vektor bu egri chiziqqa normal deb ataladi. Silliq fazoviy egri chiziq har bir nuqtasida cheksiz ko'p turli normallarga ega. $\Phi(t)$ radius-vektor bilan berilgan $L$ egri chiziqning *bosh normali* deb

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\dfrac{d^2\Phi}{dl^2}}{\left|\dfrac{d^2\Phi}{dl^2}\right|} \tag{16.3.8}$$

(albatta, maxraj noldan farqli bo'lgan hollarda) vektorga aytiladi. Agar maxraj nolga teng bo'lsa, barcha normallar teng kuchli bo'lib, bunda bosh normal mavjud bo'lmaydi.

Agar (16.3.8) ning ikki tomonini $\boldsymbol{\nu}$ birlik vektorga skalyar ko'paytirib, so'ngra maxrajdan ozod bo'lsak,

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}\right| = \frac{d^2\Phi}{dl^2}\,\boldsymbol{\nu} \tag{16.3.9}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi (16.3.9) ning chap tomonini koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish va burishga nisbatan invariant ekanini ko‘rsatamiz.

**16.3.2 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $\Psi(l) = S\Phi(l) + \mathbf{c}$ bo‘lib, bunda $S$ ortogonal matritsa va $\mathbf{c}$ esa, biror o‘zgarmas vektor bo‘lsin. U holda*

$$\left|\frac{d^2\Psi}{dl^2}\right| = \left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}\right| \tag{16.3.10}$$

*tenglik o‘rinli.*

**Isbot.** Agar $\Psi(l)$ radius-vektorni aniqlovchi tenglikni ikki marta differensiallab, $S$ matritsa va $\mathbf{c}$ vektorning o‘zgarmas ekanini hisobga olsak, $\Psi''(l) = S\Phi''(l)$ tenglikni olamiz.

Lekin, $S$ ortogonal matritsa bo‘lgani uchun $S^*S = I$, bunda $S^*$ qo‘shma matritsa. Demak,

$$\left|\Psi''(l)\right|^2 = (S\Phi''(l), S\Phi''(l)) = (\Phi''(l), S^*S\Phi''(l)) =$$

$$= (\Phi''(l), \Phi''(l)) = |\Phi''(l))|^2. \quad \blacksquare$$

**Natija.** *Agar $\boldsymbol{\nu}$ bosh normal bo‘lsa,*

$$k(l) = \frac{d^2\Phi}{dl^2} \cdot \boldsymbol{\nu} \tag{16.3.11}$$

*kattalik koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish va burishga nisbatan invariantdir.*

Bu tasdiqning to‘g‘riligi (16.3.9) tenglikdan kelib chiqadi.

**4.** Agar fazoviy $L$ egri chiziqni o‘z ichiga oluvchi $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tekislik mavjud bo‘lsa, ya’ni $L \subset \Pi$ bo‘lsa, u holda $L$ yassi egri chiziq deyiladi.

Biror $y = f(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya grafigidan iborat $L \subset \mathbb{R}^2$ silliq yassi egri chiziqni qaraylik. $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lgani uchun, istalgan $(a, f(a))$ nuqtaning kichik atrofida bu egri chiziqni biror $y = kx + b$ (urinma deb ataluchi) to‘g‘ri chiziq bilan birinchi tartibli kichiklikda approksimatsiyalash mumkin, ya’ni

$$x \to a \quad \text{da} \quad f(x) = kx + b + o(x - a).$$

Umuman aytganda, har qanday $L$ silliq egri chiziqni ham to‘g‘ri chiziq yordamida ikkinchi tartibli kichiklikda approksimatsiyalab bo‘lmaydi. Ammo, agar $f$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, uning grafigini $(a, f(a))$ nuqtaning kichik atrofida radiusi $R > 0$ va markazi biror $P \in \mathbb{R}^2$ nuqtada bo‘lgan aylana bilan approksimatsiyalab, ikkinchi tartibli approksimatsiyaga erishish mumkin. Bunday aylananing $R$ radiusiga egri chiziqning $(a, f(a))$ nuqtadagi *egrilik radiusi* va $P$ nuqtaga esa, *egrilik markazi* deyiladi.

**16.3.6 - misol.** Faraz qilaylik, $f$ funksiya

$$f(0) \ = \ f'(0) \ = \ 0 \tag{16.3.12}$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Bu degani, $f$ funksiya grafigiga $(0, 0)$ koordinatalik nuqtada o‘tkazilgan urinma abssissalar o‘qi bilan ustma-ust tushadi.

$f$ funksiya grafigiga koordinatalar boshi atrofida ikkinchi tartibli approksimatsiya bilan yaqinlashadigan aylana radiusini topamiz. Ravshanki, aylana $(0, 0)$ nuqtadagi urinmaga ham, ya’ni abssissalar o‘qiga ham urinishi kerak. Shunday ekan, aylananing markazi ordinatalar o‘qida yotishi zarur. Faraz qilaylik, markaz yuqori yarim tekislikda yotsin. U holda aylana tenglamasi

$$y \ = \ R - \sqrt{R^2 - x^2}, \quad |x| < R$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shunday $R > 0$ ni topish talab qilinadiki,

$$x \to 0 \quad \text{da} \quad f(x) \ = \ R - \sqrt{R^2 - x^2} \ + \ o(x^2)$$

bo‘lsin.

Kichik $x$ larda Nyuton binomi formulasiga ko‘ra,

$$R - \sqrt{R^2 - x^2} \ = \ R \ - \ R\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{1/2} \ =$$

$$= \ R \ - \ R\left[1 - \frac{x^2}{2R^2} + O(x^4)\right] \ = \ \frac{x^2}{2R} \ + \ O(x^4).$$

Demak, shunday $R > 0$ sonni topish kerakki, kichik $x$ larda

$$f(x) \ = \ \frac{x^2}{2R} \ + \ o(x^2) \tag{16.3.13}$$

tenglik bajarilsin.

Faraz qilaylik, $f$ funksiya nolning atrofida ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi boʻlsin. U holda, (16.3.12) ni hisobga olsak, Teylor formulasiga koʻra,

$$f(x) \ = \ f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \ = \ \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2). \tag{16.3.14}$$

(16.3.13) va (16.3.14) ni taqqoslab,

$$f''(0) \ = \ \frac{1}{R}$$

tenglikni olamiz.

Agar aylana markazi quyi yarim tekislikda boʻlsa, u holda oxirgi tenglikning oʻng tomonida minus ishora hosil boʻladi. Demak, umumiy holda

$$\left|f''(0)\right| \ = \ \frac{1}{R}. \tag{16.3.15}$$

Shunday qilib, biz qarayotgan holda, $f$ funksiya grafigidan iborat egri chiziqning egrilik radiusi bu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi bilan (16.3.15) munosabat yordamida bogʻlangan.

**1 - eslatma.** Xuddi shu egri chiziqni parametrik koʻrinishda beraylik. $\Phi(x) \ = \ (x, f(x))$ deb, koordinatalar boshi bilan egri chiziqning $(x, f(x))$ nuqtasini tutashtiruvchi $\Phi(x)$ radius-vektorni kiritamiz. Bu vektor egri chiziqni parametrik ravishda aniqlaydi.

$\Phi''(x) = (0, f''(x))$ tenglikka koʻra,

$$|\Phi''(x)| = |f''(x)| \tag{16.3.16}$$

va biz (16.3.15) tenglikni

$$\left|\Phi''(0)\right| \ = \ \frac{1}{R} \tag{16.3.17}$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

**2 - eslatma.** (16.3.17) kabi tenglik urinish nuqtasida hosilani $x$ bo‘yicha emas, balki yoy uzunligi $l$ bo‘yicha olsa ham, o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan, qaralayotgan holda yoy uzunligi

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

ga teng.

Shunday ekan,

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

va bundan chiqdi,

$$\frac{dx}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}. \tag{16.3.18}$$

Demak,

$$\frac{df}{dl} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dl} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}.$$

Bundan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra,

$$\frac{d^2 f}{dl^2} = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \frac{[f'(x)]^2 \cdot f''(x)}{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^2} = \frac{f''(x)}{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^2}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Boshqa tomondan, agar (16.3.18) ni differensiallasak,

$$\frac{d^2 x}{dl^2} = -\frac{f'(x) f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} = \frac{f'(x) f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^2}$$

munosabatni olamiz.

Shuning uchun,

$$\left(\frac{d^2 x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 f}{dl^2}\right)^2 = \frac{[f'(x)]^2 [f''(x)]^2}{(1 + [f'(x)]^2)^4} +$$

$$+\frac{[f''(x)]^2}{(1+[f'(x)]^2)^4} \;=\; \frac{[f''(x)]^2}{(1+[f'(x)]^2)^3}.$$

Demak,

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}\right| \;=\; \frac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{3/2}}. \tag{16.3.19}$$

Bu tenglik va (16.3.16) formuladan, (16.3.12) shartga ko‘ra,

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}(0)\right| \;=\; |f''(0)| \;=\; \left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(0)\right|$$

munosabat kelib chiqadi.

Shuning uchun, (16.3.17) ga ko‘ra, urinish nuqtasida

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}\right| \;=\; \frac{1}{R} \tag{16.3.20}$$

tenglik bajariladi.

**Ta’rif.** *$L$ yassi egri chiziqning $P \in L$ nuqtadagi **egriligi** deb shu nuqtadagi egrilik radiusiga teskari kattalikka aytamiz.*

Shunday qilib, agar $k$ yassi egri chiziqning egriligi bo‘lsa, u egrilik radiusi $R$ bilan

$$k \;=\; \frac{1}{R} \tag{16.3.21}$$

ko‘rinishda bog‘langan.

**16.3.3 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $L$ yassi egri chiziq $\Phi(t)$ radius-vektor bilan berilgan bo‘lib, $l$ bu egri chiziqning yoy uzunligi bo‘lsin. U holda $k$ egrilik uchun*

$$k \;=\; \left|\frac{d^2\Phi}{dl^2}\right| \tag{16.3.22}$$

*tenglik o‘rinli.*

**Isbot**. (16.3.20) va (16.3.21) formulalarga ko‘ra, isbotlanayotgan (16.3.22) tenglik urinma abssissalar o‘qi bilan ustma-ust tushgan nuqtalarda bajarilishi aniq.

Endi $P$ berilgan $L$ silliq egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parallel ko'chirish va burish yordamida markazi $P$ nuqtada bo'lgan shunday yangi koordinatalar sistemasiga o'taylikki, bunda $L$ ga urinma abssissalar o'qi bilan ustma-ust tushsin. Natijada $\Phi(t)$ radius-vektor yangi $\Psi(t)$ radius-vektorga o'tadi va yuqoridagi mulohazalarga ko'ra,

$$k = \left|\frac{d^2\Psi}{dl^2}\right|. \tag{16.3.23}$$

Nihoyat, 16.3.1 - tasdiqqa ko'ra, (16.3.22) va (16.3.23) tengliklarning o'ng tomonlari teng. Demak, (16.3.22) tenglik istalgan $P \in L$ nuqta uchun o'rinli bo'lar ekan.■

**Natija.** *Faraz qilaylik, $L$ yassi egri chiziq $\Phi(t)$ radius-vektor bilan berilgan bo'lib, $\boldsymbol{\nu}$ bosh normal, $l$ esa $L$ egri chiziqning yoy uzunligi bo'lsin. U holda egri chiziq egriligi uchun*

$$k = \frac{d^2\Phi}{dl^2} \cdot \boldsymbol{\nu} \tag{16.3.24}$$

*tenglik o'rinli.*

Haqiqatan, (16.3.24) tenglik (16.3.9) va (16.3.22) dan kelib chiqadi.

**Eslatma.** Agar $L$ egri chiziq biror silliq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lsa, u holda uning $(x, f(x))$ nuqtadagi egriligi uchun

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}} \tag{16.3.25}$$

tenglik o'rinli. Bu formula bevosita (16.3.19) va (16.3.22) tengliklardan kelib chiqadi.

**16.3.7 - misol.** Tenglamasi

$$y = x^2$$

ko'rinishda bo'lgan parabolaning egrilik radiusini toping.

Ma'lumki,

$$y'(x) = 2x, \quad y''(x) = 2.$$

Demak, (16.3.25) formulaga ko‘ra, egrilik

$$k = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

ga teng.

Shunday ekan, parabolaning egrilik radiusi uchun

$$R = \frac{1}{2}\left(1+4x^2\right)^{3/2}$$

munosabat o‘rinli.

**5.** Yuqorida kiritilgan yassi egri chiziq egriligi tushunchasi yordamida sirt egriligi tushunchasini kiritish va uning asosiy xossalarini o‘rganish mumkin.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ radius-vektor bilan parametrik ko‘rinishda berilgan $S$ silliq sodda sirtni qaraymiz, bu yerda $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Faraz qilaylik, $P$ bu sirtning istalgan nuqtasi bo‘lib, $\mathbf{n}(P)$ esa $P$ nuqtada $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal birlik normal vektor bo‘lsin.

$\Pi$ orqali qayd etilgan normaldan o‘tuvchi biror tekislikni, ya’ni $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal bo‘lib, $P$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror tekislikni belgilaylik. Bunda $L = \Pi \cap S$ kesishmani $S$ sirtning $P$ nuqtadagi *normal* kesimi deymiz.

**16.3.4 - tasdiq.** *Silliq sodda $S$ sirtning biror $P \in S$ nuqtasidagi ixtiyoriy normal kesimi $P$ nuqtaning biror atrofida silliq yassi egri chiziq bo‘ladi.*

**Isbot**. $P \in S$ nuqtani koordinatalar boshi qilib tanlab, shunday lokal koordinatalar sistemasini kiritamizki, bunda $Oxy$ koordinatalar tekisligi $T(P)$ urinma tekislik bilan ustma-ust tushsin. Bu koordinatalar sistemasida sirtning $P$ nuqtasini o‘rab turgan biror qismi $z = f(x,y)$ tenglama bilan aniqlanadi.

$Oxy$ urinma tekislikka ortogonal va $Oz$ o‘qdan o‘tuvchi istalgan tekislik $Ax + By = 0$ tenglama bilan berilishi mumkin, bunda $A$ va $B$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli. Agar, masalan, $B \neq 0$ bo‘lsa, qayd etilgan tekislik tenglamasini $y = kx$ ko‘rinishda yozish mumkin. Shunday ekan, bu tekislikning $S$ sirt bilan kesishmasi $z = F(x)$ tenglamaga ega, bunda $F(x) = f(x, kx)$.

$F(x)$ funksiya koordinatalar boshining biror atrofida silliq bo'lib, uning grafigi silliq yassi egri chiziqdan iborat.■

**Eslatma.** $L = \Pi \cap S$ egri chiziqqa $P$ nuqtada o'tkazilgan $\boldsymbol{\nu}$ bosh normal $\Pi$ tekislikda yotadi va $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektorga ortogonal bo'ladi. Xuddi shuni $\Pi$ tekislik o'tadigan $\mathbf{n}(P)$ normal haqida ham aytish mumkin. Bundan chiqdi, $\boldsymbol{\nu}$ vektor $\mathbf{n}(P)$ bilan yoki $-\mathbf{n}(P)$ bilan ustma-ust tushar ekan, ya'ni $\boldsymbol{\nu} = \pm\mathbf{n}$.

Faraz qilaylik, $L$ egri chiziq

$$\Phi(t) \; = \; \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

vektor-funksiya bilan aniqlangan bo'lsin, bu yerda $(u(t), v(t)) \in \Omega$.

Ikkinchi kvadratik formaning (16.3.2) ta'rifida qatnashgan normalni $L$ egri chiziqning bosh normaliga teng qilib tanlaymiz, ya'ni $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}$ deymiz. U holda (16.3.24) tenglik

$$k \; = \; \frac{d^2\Phi}{dl^2} \cdot \mathbf{n} \tag{16.3.26}$$

ko'rinishga keladi.

Bu tenglik normal kesim egriligini birinchi va ikkinchi kvadratik formalar yordamida hisoblash imkonini beradi.

**16.3.5 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $S$ silliq sodda sirt $\mathbf{r}(u, v)$ radius-vektor bilan aniqlangan bo'lib, $P \in S$ nuqtadagi normal kesimi $L$ bo'lsin. U holda $L$ egri chiziqning $P$ nuqtadagi egriligi*

$$k \; = \; \frac{L(u, v)\, du^2 \; + \; 2M(u, v)\, du\, dv \; + \; N(u, v)\, dv^2}{E(u, v)\, du^2 \; + \; 2F(u, v)\, du\, dv \; + \; G(u, v)\, dv^2} \tag{16.3.27}$$

*kasrga teng bo'lib, bunda surat ikkinchi kvadratik formaga va maxraj esa, birinchi kvadratik formaga teng.*

**Isbot.** (16.3.26) ning o'ng tomonidagi ikkinchi tartibli hosilani, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{d^2\Phi}{dl^2} \; = \; \frac{d}{dl}\,\frac{d\Phi}{dl} \; = \; \frac{d}{dl}\left(\mathbf{r}_u \frac{du}{dl} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dl}\right) \; =$$

$$= \; \mathbf{r}_{uu}\left(\frac{du}{dl}\right)^2 + \; 2\mathbf{r}_{uv}\frac{du}{dl} \cdot \frac{dv}{dl} \; + \; \mathbf{r}_{vv}\left(\frac{dv}{dl}\right)^2 \tag{16.3.28}$$

deb yozamiz.

$u(t)$ va $v(t)$ funksiyalar birinchi differensiallari formasining invariantligiga ko‘ra, oxirgi tenglikni ikkinchi differensial ko‘rinishida yozish mumkin, ya’ni

$$d^2\Phi \;=\; \mathbf{r}_{uu}du^2 \;+\; 2\mathbf{r}_{uv}du\,dv \;+\; \mathbf{r}_{vv}dv^2 \;=\; d^2\mathbf{r}.$$

Bu tenglikni hisobga olib, (16.3.26) ning o‘ng tomonini

$$k \;=\; \frac{d^2\Phi\cdot\mathbf{n}}{dl^2} \;=\; \frac{d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{dl^2} \tag{16.3.29}$$

ko‘rinishga keltiramiz.

(16.3.4) ga ko‘ra, bu tenglik o‘ng tomonidagi kasr surati ikkinchi kvadratik formaga, (16.2.14) ga ko‘ra esa, kasr maxraji birinchi kvadratik formaga teng. Bundan talab qilingan (16.3.27) tenglikni olamiz.■

**Eslatma.** (16.3.2) ta’rifga asosan, ikkinchi kvadratik forma sirtga o‘tkazilgan $\mathbf{n}$ birlik normal vektorni ikkinchi differensialga skalyar ko‘paytmasiga teng. Yuqorida normal kesimning $\boldsymbol{\nu}$ bosh normali yoki $\mathbf{n}$ bilan, yoki $(-\mathbf{n})$ bilan ustma-ust tushishi shartligi qayd etilgan edi. Birinchi holda (16.3.27) tenglik bajariladi, ikkinchi holda esa, kasr oldiga minus ishora qo‘yiladi. Agar $\mathbf{n}$ normal ixtiyoriy tanlansa, biz faqat

$$k \;=\; \pm\,\frac{L(u,v)\,du^2 \;+\; 2M(u,v)\,du\,dv \;+\; N(u,v)\,dv^2}{E(u,v)\,du^2 \;+\; 2F(u,v)\,du\,dv \;+\; G(u,v)\,dv^2} \tag{16.3.30}$$

tenglik bajariladi deya olamiz.

**16.3.8 - misol.** Agar $S$ radiusi $R$ ga teng sfera bo‘lsa, u holda (16.3.27) tenglik va 16.2.2 - hamda 16.2.8 - misollarga ko‘ra, normal kesimning har bir nuqtadagi egriligi

$$k \;=\; \frac{R\,d\theta^2 + R\,\sin^2\theta\,d\varphi^2}{R^2\;d\theta^2 \;+\; R^2\sin^2\theta\;d\varphi^2} \;=\; \frac{1}{R}$$

ga teng.

Demak, sferaning har qanday normal kesimi egriligi o'zgarmas bo'lib, egrilik radiusi sfera radiusiga teng. Aslida xuddi shu natijaga oddiy geometrik mulohazalar yordamida ham kelish mumkin.

**16.3.9 - misol.** Agar silindr

$$\mathbf{r}(\varphi, z) \ = \ (R\cos\varphi, \ R\sin\varphi, \ z)$$

radius-vektor bilan parametrik berilgan bo'lsa, u holda ichki normal $\mathbf{n} = (-\cos\varphi, \ -\sin\varphi, \ 0)$ ga teng.

Bu silindrning ikkinchi kvadratik formasi

$$d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} \ = \ R\,d\varphi^2$$

kabi va birinchi kvadratik formasi esa,

$$\mathbf{dr}^2 \ = \ R^2\,d\varphi^2 + dz^2$$

kabi aniqlanadi.

Demak,

$$k \ = \ \frac{1}{R}\cdot\frac{(R\,d\varphi)^2}{(R\,d\varphi)^2 + dz^2}.$$

Ahamiyat bering, o'ng tomondagi ikkinchi kasr qiymati 0 va 1 orasida yotadi. Ravshanki, $\varphi = const$ chiziqlar (bunda $d\varphi = 0$) nolga teng minimal egrilikka ega, $1/R$ ga teng maksimal egrilikka esa, $z = const$ chiziqlar (bunda $dz = 0$) ega. Boshqacha aytganda, silindr o'qidan o'tuvchi kesimlar minimal egrilikka, silindr o'qiga ortogonal kesimlar esa, maksimal egrilikka ega bo'ladi. Shunday qilib, ekstremal egriliklar

$$k_{\min} = 0, \quad k_{\max} = \frac{1}{R}$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

**6.** Ushbu bandda biz normal kesimlar egriliklarini batafsilroq o'rganamiz va olingan natijalardan foydalanib, keyingi bandda sirt egriligi tushunchasini kiritamiz va uni eng sodda xossalarini aniqlaymiz.

Faraz qilaylik, $P$ silliq $S$ sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lib, $T(P)$ bu sirtga $P$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik bo‘lsin. 16.1.2 - tasdiqqa ko‘ra, $O‘ = P$ nuqtani koordinatalar boshi qilib tanlab, shunday $\{O‘x'y'z'\}$ lokal koordinatalar sistemasini kiritish mumkinki, bunda $O‘x'y'$ koordinatalar tekisligi $T(P)$ bilan ustma-ust tushadi va $S$ sirtning koordinatalar boshi atrofidagi qismi biror $z' = f(x', y')$ funksiya grafigidan iborat bo‘ladi.

(16.3.6) tenglikka ko‘ra, $O‘x'$ abssissalar o‘qini va $O‘y'$ ordinatalar o‘qini shunday tanlash mumkinki, bunda $P$ nuqtadagi kvadratik forma uchun (16.3.6) tenglik bajariladi. Bundan buyon, qulaylik uchun, lokal koordinatalardagi shtrixni tushirib qoldiramiz.

Shunday qilib, biz shunday lokal koordinatalarni tanlashimiz mumkinki, bunda $P$ nuqtaning atrofida $S$ sirt $z = f(x, y)$ funksiya grafigi bilan ustma-ust tushib, $P$ nuqtadagi ikkinchi kvadratik forma

$$d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} \;=\; d^2 f(0,0) \;=\; f_{xx}dx^2 \;+\; f_{yy}\,dy^2 \tag{16.3.31}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $L$ normal kesim

$$\Phi(t) \;=\; \mathbf{r}(x(t), y(t)) \;=\; (x(t), y(t), f(x(t), y(t))), \quad a \le t \le b,$$

vektor-funksiya bilan berilgan bo‘lsin.

Agar $L$ egri chiziq bosh normalining yo‘nalishi $Oz$ o‘qining musbat yo‘nalishi bilan ustma-ust tushsa, u holda (16.3.29) va (16.3.31) larga ko‘ra, $L$ egri chiziq egriligi

$$k \;=\; \frac{d^2\Phi\cdot\mathbf{n}}{dl^2} \;=\; \frac{d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{dl^2} \;=\; f_{xx}\cdot\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 \;+\; f_{yy}\cdot\left(\frac{dy}{dl}\right)^2 \tag{16.3.32}$$

kabi aniqlanadi.

Bordiyu, bosh normal $Oz$ o‘qiga teskari yo‘nalgan bo‘lsa, (16.3.32) ning o‘ng tomonidagi kattalik $-k$ ga teng bo‘ladi. Lekin, shunga qaramasdan, biz $L$ egri chiziqning egriligini (16.3.32) kattalikka teng deb, ya’ni kesim egriligini manfiy bo‘lishi ham mumkin deb hisoblaymiz.

E'tibor bering, (16.2.12) ga ko'ra,

$$\boldsymbol{\tau} \; = \; \left(\frac{dx}{dl}, \; \frac{dy}{dl}, \; \frac{dz}{dl}\right)$$

vektor $L$ egri chiziqning birlik urinma vektori bo'lib, uning komponentalari

$$\cos^2\alpha \, + \, \cos^2\beta \, + \, \cos^2\gamma \; = \; 1$$

shartni qanoatlantiruvchi

$$\boldsymbol{\tau} \; = \; (\cos\alpha, \, \cos\beta, \, \cos\gamma)$$

yo'naltiruvchi kosinuslardan iborat.

Eslatib o'tamiz, $Oz$ o'qni $T(P)$ urinma tekislikka ortogonal qilib tanlagan edik. Demak, $\boldsymbol{\tau}$ urinma vektor $T(P)$ da yotgani uchun, u $Oz$ o'qqa ortogonal bo'ladi. Demak, $\cos\gamma = 0$ va

$$\cos^2\beta \; = \; 1 - \cos^2\alpha \; = \; \sin^2\alpha.$$

Shunday ekan, $k_1 \; = \; f_{xx}(0,0)$ va $k_2 \; = \; f_{yy}(0,0)$ deb belgilab, (16.3.32) tenglikni

$$k \; = \; k_1\cos^2\alpha \; + \; k_2\sin^2\alpha \qquad (16.3.33)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (16.3.33) tenglikda $\alpha$ abssissalar o'qi bilan $L$ normal kesimni aniqlaydigan tekislik orasidagi burchakdir.

Faraz qilaylik, $k_1 \geq k_2$ bo'lsin. U holda o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$k_1 \; \equiv \; k_1\cos^2\alpha + k_1\sin^2\alpha \; \geq \; k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha \; = \; k$$

va

$$k \; = \; k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha \; \geq \; k_2\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha \; \equiv \; k_2$$

tengsizliklarga ko'ra, $S$ sirtda yotgan va $P$ nuqtadan o'tuvchi istalgan egri chiziq egriligi quyidagi

$$k_2 \; \leq \; k \; \leq \; k_1$$

ikki tomonlama tengsizlikni qanoatlantiradi.

E'tibor bering, $Oz$ o'q yo'nalishini tanlash va $Oxy$ koordinatalar tekisligini burish hisobiga $k_1 \geq |k_2|$ shart bajarilishiga erishish mumkin. Bunda $k_2$ kattalik istalgan qiymatni: musbat, manfiy yoki nol qiymatni qabul qilishi mumkin.

$k_1$ va $k_2$ kattaliklar $S$ sirtning $P$ nuqtadagi *bosh egriliklari* deyiladi. Ularga mos normal kesimlar *bosh normal kesim*, bu kesimlarga urinmalar esa, *bosh yo'nalishlar* deb ataladi.

Ravshanki, $k_1$ normal kesimning maksimal egriligi va $k_2$ esa, uning minimal egriligi bo'ladi. Bundan tashqari, har bir nuqtada bosh yo'nalishlar o'zaro ortogonaldir; bu tasdiq bevosita (16.3.33) formuladan kelib chiqadi. Haqiqatan, $k_1$ maksimal egrilikka mos keluvchi bosh yo'nalish $\alpha = 0$ va $\alpha = \pi$ burchaklar bilan aniqlanib, abssissalar o'qiga kollinear, $k_2$ minimal egrilikka mos keluchi bosh yo'nalish esa, $\alpha = \pi/2$ va $\alpha = 3\pi/2$ burchaklar bilan aniqlanib, ordinatalar o'qiga kollinear bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan tasdiqlarni umumlashtirib, navbatdagi teorema ko'rinishida yozishimiz mumkin.

**16.3.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $S$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi, maxsus nuqtasiz sodda sirt bo'lsin. Istalgan $P \in S$ nuqta uchun bu nuqtadagi bosh yo'nalishlar o'zaro ortogonal bo'lib, ixtiyoriy $L$ normal kesimning egriligi normal egrilik bilan* ***Eyler formulasi***

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi \tag{16.3.34}$$

*orqali bog'langan, bu yerda $\varphi$ orqali $L$ normal kesimni aniqlovchi tekislik bilan $k_1$ maksimal egrilikka mos keluvchi bosh yo'nalish orasidagi burchak belgilangan.*

**7.** Yuqorida kiritilgan tushunchalar yordamida ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi sirt egriligiga turli ta'riflar berish mumkin.

Sirtning biror nuqtadagi *o'rtacha egriligi* deb bu nuqtadagi bosh egriliklarning o'rta arifmetigiga aytiladi, ya'ni

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{16.3.35}$$

O'rtacha egrilik ba'zan *Eyler* egriligi deb ham ataladi.

O'rtacha egrilik tushunchasi 1768 yilda birinchi marta J. L. Lagranj o'rgangan masala bilan chambarchas bog'liq bo'lib chiqdi. Eslatib o'tamiz, Lagranj masalasi berilgan konturga tortilgan eng kichik yuzalik sirtni topishdan iborat. Agar berilgan kontur yopiq yassi egri chiziqdan iborat bo'lsa, u holda yechim bu egri chiziq bilan chegaralangan tekislikning qismi bo'ladi, albatta. Keyinchalik aniqlanishicha, kontur fazoviy yopiq egri chiziq bo'lganda, sirt yuzi eng kichik bo'lishining zaruriy sharti uni o'rtacha egriligining har bir nuqtada nolga teng bo'lishidan iborat ekan. Bu shart yetarli bo'lmasada, shunga qaramasdan, o'rtacha egriligi nolga teng sirtlar uchun «minimal sirt» nomi biriktirib qo'yilgan.

Sirtning berilgan nuqtadagi *to'la* yoki *Gauss egriligi* deb shu nuqtadagi bosh egriliklarining ko'paytmasiga aytiladi, ya'ni

$$K = k_1 \cdot k_2. \tag{16.3.36}$$

Gauss egriligi sirt nuqtalarining umum qabul qilingan klassifikatsiyasi asosida yotadi. Agar $S$ sirtning $P$ nuqtasida Gauss egriligi musbat bo'lsa, bu nuqta *elliptik*, agar Gauss egriligi manfiy bo'lsa, bu nuqta *hiperbolik* va nihoyat, agar Gauss egriligi nolga teng bo'lib, hech bo'lmasa bitta bosh egrilik noldan farqli bo'lsa, bu nuqta *parabolik* deb ataladi.

Bordiyu har ikkala bosh egrilik nolga teng bo'lsa, u holda $P$ nuqta *yassilanish nuqtasi* deyiladi. Masalan, agar $S$ sirt tekislikning qismi bo'lsa, u holda ikkinchi kvadratik forma aynan nolga teng bo'lib, natijada sirtning barcha nuqtasida har ikki bosh egrilik nolga teng, ya'ni sirtdagi har bir nuqta yassilanish nuqtasi bo'ladi. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli, ya'ni, agar $S$ sirtning barcha nuqtasi yassilanish nuqtasi bo'lsa, u holda bu sirt tekislikning qismidir.

**16.3.10 - misol.** Agar $S$ radiusi $R$ ga teng sfera bo'lsa, u holda, 16.3.8 - misolga ko'ra, istalgan normal kesim egriligi $1/R$ ga teng bo'ladi. Demak, bosh egriliklar ham $1/R$ ga teng bo'lib, har bir nuqtada o'rtacha egrilik va Gauss egriligi mos ravishda

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R}, \quad K = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}$$

kabi aniqlanadi.

Ravshanki, sfera sirtining har bir nuqtasi elliptik nuqtadir.

**16.3.11 - misol.** Agar $S$ radiusi $R$ ga teng silindr bo‘lsa, u holda, 16.3.9 - misolga ko‘ra, normal kesim maksimal egriligi $1/R$ ga, minimal egriligi esa, 0 ga teng. Silindrning har bir nuqtasida o‘rtacha egrilik va Gauss egriligi mos ravishda

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + 0\right) = \frac{1}{2R}, \quad K = \frac{1}{R} \cdot 0 = 0$$

kabi aniqlanadi.

Demak, silindr sirtining har bir nuqtasi parabolik nuqtadir.

**16.3.6 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $S$ ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi maxsus nuqtasiz sirt bo‘lib, $P \in S$ nuqtada ikkinchi kvadratik forma noldan farqli bo‘lsin. U holda,*

*1) agar ikkinchi kvadratik forma $P$ nuqtada aniq ishorali bo‘lsa, bu nuqta elliptik*;

*2) agar ikkinchi kvadratik forma $P$ nuqtada ishorasi o‘zgaruvchi bo‘lsa, bu nuqta hiperbolik*;

*3) agar ikkinchi kvadratik forma $P$ nuqtada xos bo‘lsa, bu nuqta parabolik bo‘ladi.*

**Isbot.** Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish va burishni qo‘llab, so‘ngra $(u, v)$ lardan yangi $(x, y)$ parametrlashga o‘tib, ikkinchi kvadratik formani $dl^2$ ko‘paytuvchi aniqligida (16.3.33) ko‘rinishga keltiramiz. E’tibor bering, (16.2.14) ga ko‘ra, $dl^2$ birinchi kvadratik formaga teng bo‘lib, bu forma musbat aniqlangandir.

Shartga ko‘ra, bosh egriliklardan kamida bittasi noldan farqli; masalan, $k_1 \neq 0$ deb hisoblashimiz mumkin. Shunday ekan, (16.3.33) ning o‘ng tomonidagi kvadratik forma ishorasining aniqlanganligi faqat $k_2$ ikkinchi bosh egrilikka bog‘liq. Jumladan, agar $k_2$ ning ishorasi $k_1$ ishorasi bilan ustma-ust tushsa, kvadratik forma aniq ishorali bo‘lib, bunda $K = k_1 \cdot k_2 > 0$ bo‘ladi, ya’ni $P$ elliptik nuqtadir.

Bordiyu $k_2$ ishorasi $k_1$ ishorasiga teskari bo‘lsa, qaralayotgan kvadratik forma ishorasi o‘zgaruvchan bo‘lib, bunda $K = k_1 \cdot k_2 < 0$ bo‘ladi, ya’ni $P$ hiperbolik nuqtadir.

Nihoyat, agar $k_2 = 0$ bo'lsa, berilgan kvadratik forma xos bo'lib, $P$ parabolik nuqta bo'ladi.

Isbotni yakunlash uchun quyidagi ikki tasdiqni hisobga olish yetarli: koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish ikkinchi kvadratik formani o'zgartirmaydi; 16.3.1 - tasdiqqa ko'ra, ikkinchi kvadratik forma parametrlarni o'zgartirishga nisbatan invariantdir.■

**16.3.12 - misol.** Hiperbolik paraboloidning ikkinchi kvadratik formasi, 16.2.10 - misolga ko'ra,

$$d^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} \;=\; \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(du^2 - dv^2)$$

ga teng.

Ravshanki, bu kvadratik forma ishorasi o'zgaruvchan va shuning uchun, hiperbolik paraboloid sirtining har bir nuqtasi hiperbolikdir.

Har bir nuqtasida Gauss egriligi manfiy bo'lgan hiperbolik paraboloidning egarsimon ko'rinishga egaligi tasodif emas. Umuman, istalgan sirtning har qanday hiperbolik turdagi nuqtasi atrofida egarsimon ko'rinishga ega bo'lishini ko'rsatish qiyin emas, chunki bosh egriliklar markazlari urinma tekislikning turli tomonlarida yotadi.

**1 - eslatma.** Berilgan

$$Q(du,dv) \;=\; L(u,v)\,du^2 + 2M(u,v)\,du\,dv + N(u,v)\,dv^2 \quad (16.3.37)$$

kvadratik formaning ishorasi aniqlanganligi uning

$$D \;=\; M^2 - LN$$

diskriminanti orqali aniqlanadi.

Jumladan, agar $D < 0$ bo'lsa, (16.3.37) kvadratik forma aniq ishorali, agar $D > 0$ bo'lsa, ishorasi o'zgaruvchan va nihoyat, $D = 0$ bo'lsa, kvadratik forma xos bo'ladi. Shunday qilib, 16.3.6 - tasdiqqa ko'ra, agar

$$M^2 - LN < 0$$

bo‘lsa, $P$ nuqta elliptik, agar

$$M^2 - LN > 0$$

bo‘lsa, $P$ nuqta hiperbolik, agar

$$M^2 - LN = 0$$

bo‘lsa, $P$ nuqta parabolik bo‘ladi.

**2 - eslatma.** Sirt bo‘yicha olingan va ossilyatsiyalanuvchi deb ataladigan integrallar nazariyasida bosh egriliklar teng bo‘lgan, ya’ni $k_1 = k_2$ bo‘lgan nuqtalar alohida o‘rin tutadi. Bunday nuqtalar *ombilik* nuqtalar deb ataladi. Masalan, sferaning barcha nuqtalari ombilikdir. Ravshanki, har qanday ombilik nuqta elliptik bo‘ladi.

**16.3.13 - misol.** Ushbu

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

ellipsoid berilgan bo‘lsin.

Ellipsoidni $P_\pm = (0, 0, \pm c)$ nuqtalarining ombilik ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun $P_+ = (0, 0, c)$ nuqta atrofida ellipsoid tenglamasini

$$z = f(x, y) = c\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ko‘rinishda yozamiz.

Ravshanki,

$$f_{xx}(0, 0) = -c, \quad f_{xy}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = -c.$$

Demak, (16.3.33) ga ko‘ra, bosh egriliklar o‘zaro teng:

$$k_1 = k_2 = c.$$

Bundan $P_+ = (0, 0, c)$ nuqta ombilik nuqta ekanligi kelib chiqadi. $P_- = (0, 0, -c)$ nuqtaning ombilik ekani xuddi yuqoridagidek ko‘rsatiladi.

## 16.4-§. Birinchi tur sirt integrallari

**1.** Faraz qilaylik, $S$ sodda silliq sirt $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya bilan berilgan bo'lib, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ soha bo'lakli-silliq chegaraga ega bo'lsin. Bundan tashqari, $\mathbf{r}(u, v)$ vektor-funksiya hamda uning qismiy hosilalari yopiq $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sohada uzluksiz bo'lsin.

Aytaylik, $P = \{\Delta S_k\}_{k=1}^n$ berilgan $S$ sirtning $\Delta S_k$ qismiy to'plamlarga bo'linishi bo'lsin. $\Omega_k$ simvol orqali $\Delta S_k$ to'plamlarning aslini belgilaymiz, ya'ni $\mathbf{r}(\Omega_k) = \Delta S_k$. $S$ sirtning $P$ bo'linishi natijasida $\Omega$ sohasining mos $P^* = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ bo'linishi hosil bo'ladi. Bundan buyon shunday $P$ bo'linishlarni qaraymizki, bunda $\Delta S_k$ larga mos bo'lgan har bir $\Omega_k$ qismiy to'plamning chegarasi bo'lakli-silliq egri chiziq bo'lsin.

Odatdagidek, $d(P)$ simvol orqali $P$ bo'linishning diametrini belgilaymiz, ya'ni

$$d(P) \ = \ \max_k \operatorname{diam} \Delta S_k.$$

Haqiqiy qiymat qabul qiluvchi va $S$ da aniqlangan $f : S \to \mathbb{R}$ funksiyani qaraylik. Istalgan ravishda $\xi_k \in \Delta S_k$ nuqtalarni tanlab, quyidagi

$$\Sigma_P(f) \ = \ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |\Delta S_k| \qquad (16.4.1)$$

integral yig'indini tashkil qilamiz.

**Ta'rif.** *$f$ funksiyadan $S$ sirt bo'yicha birinchi tur sirt integrali deb (16.4.1) integral yig'indilarning limitiga aytamiz va*

$$\lim_{d(P)\to 0} \Sigma_P(f) \ = \ \iint_S f(x, y, z)\, dS \qquad (16.4.2)$$

*ko'rinishda belgilaymiz.*

Biz yana

$$I \ = \ \int_S f(x, y, z)\, d\sigma$$

belgilashdan ham foydalanamiz.

Bu belgilashda, bu haqida aniq aytilmasada, $\sigma(E)$ simvol $E \subset S$ sirtning yuzini anglatadi deb faraz qilinadi.

**Eslatma.** Agar $f(x, y, z)$ funksiya $S$ sirt bo‘yicha taqsimlangan biror massa zichligi bo‘lsa, u holda $f$ dan olingan birinchi tur sirt integrali bu sirtning to‘la massasiga teng bo‘ladi.

**2.** Sirt bo‘yicha birinchi tur integralni hisoblash parametrlar o‘zgarish sohasi bo‘yicha olingan ikki karrali integralni hisoblashga keltiriladi. Chunonchi, navbatdagi tasdiq o‘rinli.

**16.4.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $S$ sirt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ tenglama bilan parametrik ravishda berilgan bo‘lib, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ bo‘lsin.*

*Istalgan tekis uzluksiz $f : S \to \mathbb{R}$ funksiyadan $S$ bo‘yicha olingan birinchi tur sirt integrali mavjud bo‘lib, u*

$$\int_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Omega f(\mathbf{r}(u, v))\, |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv \qquad (16.4.3)$$

*kabi hisoblanadi.*

**Isbot.** $|S|$ orqali $S$ sirtning yuzini belgilaylik. Istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ ni tanlaylikki, $|M - M'| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $M \in S$ va $M' \in S$ nuqtalar juftligi uchun

$$|f(M') - f(M)| < \frac{\varepsilon}{|S|} \qquad (16.4.4)$$

tengsizlik bajarilsin.

(16.4.3) formulaning o‘ng tomonidagi integralni $I$ bilan belgilaylik. U holda, 16.1.1 - teoremaga ko‘ra, (16.4.1) integral yig‘indi uchun

$$\Sigma_P(f) - I = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |S_k| - \iint_\Omega f(\mathbf{r}(u, v))\, |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint_{\Omega_k} [f(\mathbf{r}(u_k, v_k)) - f(\mathbf{r}(u, v))]\, |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv \qquad (16.4.5)$$

tenglikni olamiz.

Agar $\operatorname{diam} S_k < \delta$ bo‘lsa, $(u,v) \in \Omega_k$ uchun

$$|\mathbf{r}(u_k, v_k) - \mathbf{r}(u,v)| \ < \ \delta$$

baho o‘rinli.

Shuning uchun, (16.4.4) ga ko‘ra,

$$|f(\mathbf{r}(u_k, v_k)) \ - \ f(\mathbf{r}(u,v))| \ < \ \frac{\varepsilon}{|S|}.$$

Endi esa, 16.1.1 - teoremani qo‘llab, (16.4.5) dan

$$|\Sigma_P(f) - I| \leq \frac{\varepsilon}{|S|} \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_k} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv =$$

$$= \frac{\varepsilon}{|S|} \iint\limits_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv = \frac{\varepsilon}{|S|} \cdot |S| = \varepsilon$$

bahoni olamiz.

Demak, (16.4.1) integral yig‘indilarning limiti mavjud bo‘lib, (16.4.3) tenglik bajarilar ekan.■

**Natija.** *Agar $E, F$ va $G$ berilgan $S$ sirtni birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari bo‘lsa,*

$$\int\limits_S f(x,y,z) \, d\sigma \ = \ \iint\limits_{\Omega} f(\mathbf{r}(u,v)) \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)} \, du \, dv \tag{16.4.6}$$

*tenglik o‘rinli.*

Haqiqatan, bu tenglikning to‘g‘riligi (16.2.5) formuladan kelib chiqadi.

**16.4.1 - misol.** Agar

$$S \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ z > a\}, \quad 0 \leq a < R,$$

bo‘lsa,

$$I \ = \ \int\limits_S z \, d\sigma(x,y,z)$$

sirt integrali hisoblansin.

Yuqoridagi (16.4.6) formuladan foydalanamiz. Buning uchun $(\theta,\varphi)$ sferik koordinatalarni kiritib, $\beta = \arccos\dfrac{a}{R}$ deymiz. 16.2.2 - misolga ko'ra, radiusi $R$ ga teng sfera uchun

$$\sqrt{E(\theta,\varphi)G(\theta,\varphi) - F^2(\theta,\varphi)} \;=\; R^2\sin\theta$$

tenglik o'rinli.

Shuning uchun, (16.4.6) ga ko'ra,

$$I \;=\; \int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{2\pi}(R\cos\theta)\,R^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta \;=$$

$$= 2\pi R^3\int\limits_0^{\beta}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,d\theta \;=\; \frac{\pi R^3}{2}\left[1-\cos 2\beta\right].$$

Lekin $1-\cos 2\beta = 2(1-\cos^2\beta) = 2(1-a^2/R^2)$ bo'lgani uchun,

$$\int\limits_S z\,d\sigma(x,y,z) \;=\; \pi R(R^2-a^2).$$

**Eslatma.** Agar $S$ sirtni chekli sondagi, bo'lakli-silliq chekkaga ega bo'lgan, $S_k,\ k=1,2,...,m$, silliq sodda sirtlarga ajratish mumkin bo'lsa, $S$ sirtni bo'lakli-silliq deymiz. Shunday sirt uchun, agar $\overline{S}_k$ bilan $S_k$ to'plam yopig'ini belgilasak,

$$S \;=\; \bigcup_{k=1}^{m}\overline{S}_k$$

deb yozish mumkin, bunda $k\neq j$ bo'lganda, $S_k\cap S_j=\emptyset$.

(16.4.3) va (16.4.6) formulalar bo'lakli-silliq $S$ sirt uchun ham o'rinli. Bunga ishonch hosil qilish uchun $S$ ni chekli sondagi sodda silliq sirtlarga bo'lib, o'ng tomondagi ikki karrali integralning additivligidan foydalanish kifoya.

**16.4.2 - misol.** Ushbu

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < R^2,\ 0 < z < h\}$$

silindrik sohaning chegarasi $S$ bo'yicha olingan

$$I = \int\limits_S \frac{z}{x^2 + y^2 + a^2}\, d\sigma(x,y,z), \quad a > 0,$$

sirt integralini hisoblang.

$S$ sirtni quyidagi uch qismga bo'lamiz, ya'ni silindrning quyi asosi:

$$S_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < R^2,\ z = 0\},$$

yuqori asosi:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < R^2,\ z = h\},$$

va yon sirti:

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = R^2,\ 0 < z < h\}.$$

Mos integrallarni $I_0, I_1$ va $I_2$ deb belgilaymiz.

$S_0$ quyi asosda integral ostidagi funksiya nolga teng va shuning uchun $I_0 = 0$. $S_1$ yuqori asosda $z = h$, shuning uchun qutb koordinatalariga o'tib,

$$I_1 = \int\limits_{S_1} \frac{z}{x^2 + y^2 + a^2}\, d\sigma(x,y,z) = h \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 + a^2} =$$

$$= 2\pi h \cdot \frac{1}{2} \ln(\rho^2 + a^2)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \pi h \ln\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)$$

tenglikni olamiz.

$I_2$ integralni hisoblash uchun (16.4.6) formuladan foydalanamiz. Silindrni $\{\varphi = 0,\ \rho = R\}$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesib, silindrik koordinatalarga o'tamiz. Agar $\sqrt{EG - F^2} = R$ tenglikni va $S_2$ yon sirtda $x^2 + y^2 = R^2$ ekanini hisobga olsak,

$$I_2 = \int\limits_{S_2} \frac{z}{x^2 + y^2 + a^2}\, d\sigma(x, y, z) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{h} \frac{z}{R^2 + a^2}\, R\, d\varphi\, dz =$$

$$= \frac{2\pi R}{R^2 + a^2} \int\limits_0^{h} z\, dz = \frac{\pi R h^2}{R^2 + a^2}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib,

$$I = \frac{\pi R h^2}{R^2 + a^2} + \pi h \ln\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right).$$

## 16.5-§. Ikkinchi tur sirt integrallari

**1. Ikki yoqli sirtlar.** Agar $S$ sodda silliq sirt maxsus nuqtaga ega bo'lmasa, u holda bu sirtning har bir nuqtasida ikki o'zaro qarama-qarshi yo'nalgan normal vektorni aniqlash mumkin.

Istalgan $A \in S$ nuqtani tayinlab, ikki normaldan birini tanlaymiz va uni $\mathbf{n}(A)$ deb belgilaymiz. $A$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofidan olingan har bir nuqtada normal yo'nalishini shunday tanlash mumkinki, bunda tanlangan normal qayd etilgan atrofda uzluksiz bo'ladi.

Aytaylik, $B$ berilgan $S$ sirtning istalgan boshqa nuqtasi bo'lsin. $A$ nuqtani $B$ nuqta bilan $S$ sirtda yotuvchi uzluksiz $AB$ egri chiziq yordamida tutashtiramiz (ta'rifga ko'ra har bir sirt bog'lamli to'plam bo'lgani sababli, bunday egri chiziq mavjud). $AB$ egri chiziq kompakt bo'lgani uchun, uning har bir nuqtasida normalni shunday tanlash mumkinki, natijada u $AB$ da uzluksiz bo'ladi. Normalni qayd etilgan egri chiziq bo'yicha harakatlantirib, uni $A$ nuqtadan $B$ nuqtaga olib kelamiz.

Bunda quyidagi ikki holdan biri yuz berishi mumkin:

1) istalgan $B \in S$ nuqta uchun, $AB$ egri chiziqni qanday tanlashdan qat'iy nazar, $\mathbf{n}(A)$ birlik normal bu egri chiziq bo'ylab harakatlanganda xuddi o'sha vektorning o'ziga, ya'ni $\mathbf{n}(B)$ ga o'tadi;

2) biror $B \in S$ nuqta uchun uni $A$ nuqta bilan tutashtiruvchi shunday ikki egri chiziqlar topiladiki, $\mathbf{n}(A)$ birlik vektor bu egri chiziqlardan biri bo'ylab harakatlanganda $\mathbf{n}(B)$ vektorga o'tib, ikkinchisi bo'ylab harakatlanganda esa, unga qarama-qarshi $\widetilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}(B)$ vektorga o'tadi.

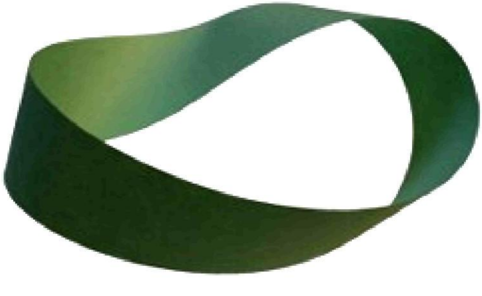
Birinchi holda $S$ sirt *ikki yoqli*, ikkinchi holda esa, u *bir yoqli* deyiladi.

Ikki yoqli $S$ sirtga yana quyidagi teng kuchli ta'rifni berish mumkin:

*har qanday $A \in S$ nuqta va bu nuqtadan o'tuvchi istalgan yopiq $L \subset S$ kontur uchun $A$ nuqtada $\mathbf{n}(A)$ birlik normal vektorni olib, uni uzluksiz ravishda $L$ kontur bo'ylab harakatlantirsak, $A$ nuqtaga qaytganda yana o'sha $\mathbf{n}(A)$ vektorni olamiz.*

Bordiyu biror $L \subset S$ kontur uchun uni aylanib chiqqanda qarama-qarshi yo'nalgan $\widetilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}(A)$ vektorni olsak, u holda $S$ sirt bir yoqli bo'ladi.

Ikki yoqli sirtga misol sifatida sfera yoki torni, bir yoqli sirtga esa, Myobius yaprog'ini olish mumkin. Myobius yaprog'ini tasavvur qilish uchun, qog'ozdan $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak kesib olib, uning qarama-qarshi $AB$ va $CD$ tomonlarini, avval bulardan birini teskarisiga qayirib olib, yelimlash kerak (16.3 - rasm). Bunda $A$ nuqta $D$ bilan $B$ nuqta esa, $C$ bilan ustma-ust tushadi.



16.3-rasm

Agar oq qog'ozni buklab, oddiy xalqa (silindrik sirt) hosil qilsakda, so'ngra, chekkalaridan chiqib ketmasdan, uni qora rangga bo'yasak, u holda sal turib xalqaning bir tomoni qora rang bo'lib, ikkinchi tomoni esa, oqligicha qoladi. Agarda Myobius yaprog'ini shu usulda bo'yasak, natijada sirtda oq qism qolmaydi. Aynan mana shu hol oddiy xalqa ikki yoqqa, Myobius yaprog'i esa, bir yoqqa ega ekanini anglatadi.

E'tibor bering, ixtiyoriy sirtni har qanday nuqtasining kichik atrofi ikki yoqli sirt bo'ladi, ya'ni istalgan sirt lokal ma'noda ikki yoqlidir. Boshqacha aytganda, sirtning bir yoki ikki yoqli bo'lishlik xossasi global xossadir.

Bundan buyon biz faqat ikki yoqli sirtlarni qaraymiz.

Har qanday ikki yoqli sirtda normalni shunday tanlash mumkinki, bunda u sirtning har bir nuqtasida bir qiymatli aniqlangan bo'lib, bir nuqtadan ikkinchisiga o'tganda uzluksiz o'zgaradi. $\mathbf{n}(A)$ normal yo'nalishi tanlangan ikki yoqli $S$ sirt *orientirlangan* (yoki yo'nalish o'rnatilgan) sirt deyiladi. Ma'lumki, har qanday ikki yoqli sirtni ikki xil usulda orientirlash mumkin.

Sirtda yo'nalish o'rnatish sirtda yoq tanlash deb ham ataladi. Ba'zan tanlangan normal musbat deb atalib, agar $S$ sirtni shaffof emas deb faraz qilsak, musbat normal uchidan ko'rinadigan sirt yog'i ham musbat deyiladi va $S^+$ simvol bilan belgilanadi. Unga qaramaqarshi yoq manfiy deyilib, $S^-$ kabi belgilanadi.

Agar $S$ sirt biror uch o'lchovli $G$ sohaning chegarasi bo'lsa, ya'ni $S = \partial G$ bo'lsa, bunday sirt yopiq deyiladi. Har qanday yopiq $S$ sirtning chekkasi bo'sh to'plamdan iborat, ya'ni $S$ o'zining yopig'i bilan ustma-ust tushadi.

Maxsus nuqtasiz har qanday yopiq sirt ikki yoqlidir. Yopiq $\partial G$ sirt nuqtasidagi $G$ sohaga yo'nalgan normal *ichki*, qarama-qarshi tomonga yo'nalgan normal esa, *tashqi* normal deb ataladi.

Odatda, yopiq sirt musbat normal sifatida tashqi normal olgan holda orientirlanadi.

**2. Ikkinchi tur sirt integrali.** Ikkinchi tur sirt integrallari $S$ sirtdan $\mathbf{v}$ tezlik bilan o'tayotgan va $\rho$ zichlikka ega bo'lgan suyuqlik oqimi ta'rifi bilan bog'liq. Avval tezlik vektori o'zgarmas bo'lib, $S$

sirt tekislikning qismidan iborat bo‘lsin deylik. U holda $S$ sirtdan bir vaqt birligi ichida massasi quyidagi

$$\mu \;=\; \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,|S|$$

skalyar ko‘paytmaga teng bo‘lgan suyuqlik o‘tadi, bu yerda $\mathbf{n}$, odatdagidek, $S$ ga o‘tkazilgan birlik normal vektor.

Endi, faraz qilaylik, $\mathbf{A} = \rho\mathbf{v}$ vektor $(x, y, z)$ ga uzluksiz bog‘liq bo‘lib, $S$ ixtiyoriy silliq sirt bo‘lsin. $S$ sirtdan o‘tuvchi $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor oqimini topish uchun bu sirtni chekkalari silliq bo‘lgan $\Delta S_k$ qismlarga bo‘lamiz. $T = \{\Delta S_k\}_{k=1}^{n}$ bo‘linish diametrini shunchalik kichik qilib tanlaymizki, bunda har bir $\Delta S_k$ ni deyarli tekislikning qismi deb, $\mathbf{A}$ vektorni esa, $\Delta S_k$ da o‘zgarmas deb hisoblash mumkin bo‘lsin. U holda $\mathbf{A}$ vektorning $\Delta S_k$ dan o‘tuvchi oqimi taxminan

$$\mu_k \;=\; \mathbf{A}(\xi_k)\cdot\mathbf{n}(\xi_k)\,|\Delta S_k|$$

ga teng bo‘ladi, bu yerda $\xi_k$ orqali $\Delta S_k$ to‘plamining istalgan nuqtasi belgilangan. Shunday ekan, $S$ sirtdan o‘tuvchi to‘la oqim taxminan quyidagi

$$\Sigma_T(\mathbf{A}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}(\xi_k)\cdot\mathbf{n}(\xi_k)\,|\Delta S_k| \qquad (16.5.1)$$

integral yig‘indiga teng deyishimiz mumkin.

$T$ bo‘linish diametrini qanchalik kichik olsak, yuqoridagi taxminiy tenglik shunchalik aniq bo‘ladi.

16.4.1 - teoremaga ko‘ra, istalgan tekis uzluksiz $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor-funksiya uchun (16.5.1) integral yig‘indilar limiti mavjud bo‘lib, u $f(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z)\cdot\mathbf{n}(x, y, z)$ funksiyadan olingan birinchi tur sirt integraliga teng, ya’ni

$$\lim_{d(T)\to 0} \Sigma_T(\mathbf{A}) \;=\; \int_S \mathbf{A}(x, y, z)\cdot\mathbf{n}(x, y, z)\,d\sigma. \qquad (16.5.2)$$

(16.5.2) integral $\mathbf{A}(x, y, z)$ vektor-funksiyadan olingan *ikkinchi tur sirt integrali* deb ataladi.

**Eslatma.** Ikkinchi tur sirt integrali faqat ikki yoqli sirtlar uchun aniqlanadi, ya’ni tanlangan normal har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lgan sirtlar uchungina aniqlanadi. Eslatib o‘tamiz, normalni tanlash sirtning musbat yog‘ini aniqlaydi.

Xuddi shu natijaga fizik mulohazalar bilan ham kelish mumkin: vektor-funksiyaning sirt orqali o‘tadigan oqimini aniqlash uchun sirtning bir yog‘i kiruvchi va boshqa yog‘i chiquvchi bo‘lishi zarur.

Bir yoqli sirtlar uchun ikkinchi tur sirt integrallari aniqlanmagan. Masalan, Myobius yaprog’ini to‘laligicha olsak, u orqali hech qanday oqim o‘tmaydi, shuning uchun Myobius yaprog’i bo‘yicha ikkinchi tur integrali ma’noga ega emas.

Shuni aytish zarurki, ikkinchi tur sirt integralidan farqli o‘laroq, birinchi tur sirt integrallari istalgan (ikki yoqli bo‘lishi shart bo‘lmagan) silliq sirt uchun aniqlangan va bunday integral yordamida, masalan, (bir jinsli bo‘lmagan zichlikli) Myobius yaprog‘ining massasini hisoblash mumkin.

Navbatdagi teorema ikkinchi tur sirt integralini hisoblashni yassi soha bo‘yicha ikki karrali integral hisoblashga keltiradi.

**16.5.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, ikki yoqli silliq $S$ sirt parametrik ravishda $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ tenglama bilan berilgan bo‘lib, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ bo‘lsin. Bundan tashqari, sirtning musbat yog‘i*

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} \tag{16.5.3}$$

*normal vektor bilan aniqlangan bo‘lsin.*

*U holda istalgan tekis uzluksiz $\mathbf{A} : S \to \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya uchun $S$ bo‘yicha ikkinchi tur sirt integrali mavjud va u quyidagi ikki karrali integralga teng:*

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\, du\, dv \tag{16.5.4}$$

**Isbot**. 16.4.1 - teoremaga ko‘ra, (16.5.2) integral mavjud va

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v))\, ||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||\, dudv. \tag{16.5.5}$$

Endi o‘ng tomondagi $\mathbf{n}$ normal vektor o‘rniga uning (16.5.3) qiymatini qo‘ysak, talab qilingan (16.5.4) tenglikni olamiz.■

**1 - eslatma.** Agar $S$ sirt $\mathbf{r}(u,v)$ vektor-funksiya bilan parametrik berilib, qarama-qarshi yo‘nalgan

$$\widetilde{\mathbf{n}} = -\frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}$$

normal bilan orientirlangan bo‘lsa, u holda

$$\int_S \mathbf{A}(x,y,z) \cdot \widetilde{\mathbf{n}}(x,y,z)\, d\sigma = -\iint_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\, du\, dv.$$

**2 - eslatma.** $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ vektorni $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ vektor ko‘paytmaga skalyar ko‘paytirsak,

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = (\mathbf{A}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

determinantga teng aralash ko‘paytmani olamiz.

Shuning uchun, (16.5.4) tenglikni

$$\int_S \mathbf{A}(x,y,z) \cdot \mathbf{n}(x,y,z)\, d\sigma = \iint_\Omega (\mathbf{A}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\, du\, dv \qquad (16.5.6)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

**16.5.1 - misol.** Agar $S$ sirt

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}$$

ko‘rinishdagi yarim sfera bo‘lib, $\mathbf{r} = (x,y,z)$ bo‘lsa,

$$I = \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(x,y,z)\, d\sigma$$

ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin.

Sferik koordinatalarda radius-vektor

$$\mathbf{r} = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$$

ko‘rinishga ega. Shuning uchun, aralash ko‘paytma

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi) = \begin{vmatrix} R\sin\theta\cos\varphi & R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta \\ R\cos\theta\,\cos\varphi & R\cos\theta\,\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\,\sin\varphi & R\sin\theta\,\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = R^3\sin\theta$$

kabi aniqlanadi. Shunday ekan, (16.5.6) formulaga ko‘ra,

$$I = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} (\mathbf{r}, \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi)\, d\theta\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} R^3 \sin\theta\, d\theta = 2\pi R^3.$$

**3.** Faraz qilaylik, silliq orientirlangan $S$ sirtda

$$\mathbf{n}(x,y,z) = (\cos\alpha(x,y,z), \cos\beta(x,y,z), \cos\gamma(x,y,z)),\ (x,y,z) \in S,$$

normal tanlangan bo‘lib, bu sirtda $\mathbf{A} : S \to \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya quyidagi

$$\mathbf{A}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)) \qquad (16.5.7)$$

koordinatalar ko‘rinishida berilgan bo‘lsin.

U holda, bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

kabi aniqlanadi.

Bundan chiqdi, (16.5.4) ning chap tomonidagi integralni uchta integral yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\int\limits_S \mathbf{A}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\, d\sigma = \int\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\ d\sigma =$$

$$= \int\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\, d\sigma + \int\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta\, d\sigma + \int\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma. \qquad (16.5.8)$$

Boshqa tomondan, (16.1.16) tenglikka ko'ra, (16.5.4) ning o'ng tomonidagi integral ostidagi skalyar ko'paytma

$$A \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \ = \ P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \ + \ Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \ + \ R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

ga teng. Shunday ekan, qayd etilgan ikki karrali integral uchun

$$\iint\limits_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\, du\, dv \ = \iint\limits_{\Omega} P\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\, du\, dv +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\, du\, dv + \iint\limits_{\Omega} R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\, du\, dv \qquad (16.5.9)$$

tenglikni olamiz.

(16.5.8) va (16.5.9) munosabatlardan (16.5.4) tenglikning koordinatalardagi ko'rinishi kelib chiqadi, ya'ni

$$\int\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma \ =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[P\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \ + \ Q\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \ + \ R\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right] du\, dv.$$

**16.5.1 - tasdiq.** *Faraz qilaylik, $S$ sirt $z : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiya grafigidan iborat bo'lsin. Bu sirtni $r = (x, y, z(x,y))$ radius-vektor bilan berib, normal vektor yuqoriga yo'nalgan qilib, ya'ni bu vektorning $Oz$ o'qiga proeksiyasini musbat qilib orientirlaymiz. U holda istalgan tekis uzluksiz $R : S \to \mathbb{R}$ funksiya uchun*

$$\int\limits_{S} R(x,y,z)\cos\gamma(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{\Omega} R(x,y,z(x,y))\, dx\, dy \quad (16.5.10)$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot.** 16.5.1 - teoremadan foydalanamiz. Buning uchun $\mathbf{A} = (0, 0, R)$ deb, (15.6.4) formulani qo'llaymiz. U holda,

$$\int\limits_{S} R(x,y,z)\cos\gamma(x,y,z)\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} R(x, y, z(x, y)) \cos\gamma \cdot \|[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]\| \, dx\, dy. \tag{16.5.11}$$

16.1.3 - misolga ko‘ra, qaralayotgan holda

$$\cos\gamma \cdot \|[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]\| = 1$$

tenglik o‘rinli ((16.1.21) formulaga qarang). Bu qiymatni (16.5.11) ning o‘ng tomonida turgan integral ostidagi ifodaga qo‘ysak, talab qilingan (16.5.10) tenglikni olamiz.

**1 - eslatma.** Ushbu

$$\iint\limits_{S} R(x, y, z)\, dx\, dy \;=\; \iint\limits_{\Omega} R(x, y, z(x, y))\, dx\, dy \tag{16.5.12}$$

belgilashni kiritamiz; bu belgilash integrallash jarayonida $(x, y, z)$ nuqta $S$ sirtni aylanib chiqishini anglatadi.

Bu belgilashdan foydalanib, (16.5.10) tenglik, odatda, quyidagi

$$\int\limits_{S} R(x, y, z) \cos\gamma(x, y, z)\, d\sigma \;=\; \iint\limits_{S} R(x, y, z)\, dx\, dy \tag{16.5.13}$$

ko‘rinishda yoziladi.

(16.5.12) ning chap tomonidagi simvol $S$ sirt biror funksiyaning grafigi emas, balki ixtiyoriy sirt bo‘lgan holda ham ishlatiladi. Yana shuni aytish kerakki, (16.5.12) ning o‘ng tomonidagi integral hatto $S$ sirt uchun normal vektori aniqlanmagan va u yuzaga ega bo‘lmagan hollarda ham mavjud. Shuning uchun, bunday hollarda ham $S$ bo‘yicha ikkinchi tur sirt integrali (16.5.12) ta’rif ma’nosida mavjud va u odatdagi xossalarga ega.

Xuddi (16.5.13) dagi kabi

$$\int\limits_{S} P(x, y, z) \cos\alpha(x, y, z)\, d\sigma \;=\; \iint\limits_{S} P(x, y, z)\, dy\, dz, \tag{16.5.14}$$

$$\int\limits_{S} Q(x, y, z) \cos\beta(x, y, z)\, d\sigma \;=\; \iint\limits_{S} Q(x, y, z)\, dz\, dx \tag{16.5.15}$$

belgilashlardan ham foydalaniladi.

(16.5.13), (16.5.14) va (16.5.15) belgilashlarda o'ng tomonda turgan har bir integral chap tomondagi ikkinchi tur sirt integralini anglatadi. Bu belgilashlarga ko'ra, (16.5.8) formulani

$$\int_S \mathbf{A}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,d\sigma \;=\; \iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz\;+$$

$$+\;\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx\;+\;\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy \tag{16.5.16}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

**2 - eslatma.** (16.5.9) va (16.5.16) formulalarni taqqoslab, (16.5.4) ni hisobga olsak, biz quyidagi uchta

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz \;=\; \iint_\Omega P\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,du\,dv, \tag{16.5.17}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx \;=\; \iint_\Omega Q\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,du\,dv, \tag{16.5.18}$$

$$\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy \;=\; \iint_\Omega R\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv \tag{16.5.19}$$

tenglikni olamiz.

**3 - eslatma.** Odatda (16.5.13)-(16.5.15) belgilashlarni kiritish quyidagicha asoslanadi: agar sirtni cheksiz kichik elementining yuzi $d\sigma$ ga teng bo'lsa, u holda uni $Oxy$ koordinatalar tekisligiga proeksiyasining yuzi $\cos\gamma\,d\sigma$ ga teng bo'ladi. Boshqa tomondan, $Oxy$ koordinatalar tekisligida cheksiz kichik element yuzi $dx\,dy$ ga teng. Shuning uchun

$$\cos\gamma\,d\sigma \;=\; dx\,dy$$

deb hisoblasak, (16.5.13) tenglik formal ravishda kelib chiqadi.

**16.5.2 - misol.** Faraz qilaylik, $S$ sirt quyidagi

$$S \;=\; \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;:\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad z>0\right\}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. U holda navbatdagi

$$I = \iint_S z\,dx\,dy$$

ikkinchi tur sirt integralini hisoblang.

Agar

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$$

deb belgilasak, bu sirt

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (x,y) \in \Omega,$$

funksiyaning grafigidan iborat bo‘ladi.

16.5.1 - tasdiqqa va (16.5.13) tenglikka ko‘ra,

$$I = \iint_\Omega c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Integralda quyidagi munosabatlar yordamida o‘zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x = ar\cos\varphi,$$

$$y = b\,r\sin\varphi.$$

Bu almashtirishning yakobiani

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$

ga teng.

Yangi o‘zgaruvchilarda

$$z(x,y) = \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-r^2}$$

ekanini hisobga olsak,

$$I = abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr = -\,\frac{2\pi}{3} abc\,(1-r^2)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{2\pi}{3} abc\,.$$

## 16.6-§. Stoks formulasi

**1.** Stoks formulasi Grin formulasining umumlashgan holi bo'lib, u funksiya hosilasidan sirt bo'yicha olingan integralni funksiyaning o'zidan sirt chekkasi bo'yicha olingan integral bilan bog'laydi.

Chekkasi $\partial S$ silliq egri chiziq bo'lgan sodda silliq $S$ sirtni qaraylik. Biz, qisqaroq qilib, $S$ sirt silliq $\partial S$ egri chiziq bilan chegaralangan deymiz.

Faraz qilaylik, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada berilgan va $S$ sirtni aniqlovchi $\mathbf{r}(u,v)$ radius-vektor o'zining $\mathbf{r}_u$ va $\mathbf{r}_v$ hosilalari bilan birga $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ yopiq sohaga uzluksiz davom ettirilsin. Bundan tashqari, qayd etilgan radius-vektor $\overline{\Omega}$ ni $\overline{S} = S \cup \partial S$ ga homeomorf aks ettirsin. Bunda, albatta, $\partial\Omega$ chegara $S$ sirtning $\partial S$ chekkasiga homeomorf akslanadi.

So'ngra $S$ sirtni shunday orientirlaylikki, bunda

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} \qquad (16.6.1)$$

normal vektor musbat bo'lsin.

Bundan tashqari, biz $(u,v)$ parametrlarning o'zgarish sohasidan iborat $\Omega$ ni bir bog'lamli va uning $\partial\Omega$ chegarasini silliq Jordan egri chizig'i deb hisoblaymiz.

$(u,v)$ nuqta $\partial\Omega$ egri chiziq bo'ylab musbat yo'nalishda ($\Omega$ soha chapda qolib) harakatlanganda, $\mathbf{r}(u,v)$ nuqta $\partial S$ egri chiziq bo'ylab harakatlanadigan yo'nalishni biz musbat deb ataymiz. Shunday qilib, $\mathbf{r}(u,v)$ radius-vektor tabiiy ravishda $\partial S$ egri chiziqning $\partial\Omega$ egri chiziq yo'nalishiga mos yo'nalishini aniqlaydi.

Shuni aytish kerakki, orientirlangan $S$ sirt chekkasi uchun bunday aniqlangan yo‘nalish (16.6.1) normalni tanlashga bog‘liq. Bu yo‘nalishni quyidagicha tasavvur qilish mumkin: agar $S$ sirtning musbat yog‘ida turgan kuzatuvchi uchun $\xi$ nuqta $\partial S$ kontur bo‘yicha soat miliga teskari yo‘nalishda harakatlanayotgan ko‘rinsa, bu yo‘nalish konturning musbat yo‘nalishi bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $G \subset \mathbb{R}^3$ soha $S$ sirtni o‘z ichiga olsin, ya’ni $S \subset G$. $P(x, y, z)$ funksiya esa, shu $G$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsin. Navbatdagi tasdiq o‘rinli.

**16.6.1 - teorema.** *$S$ sirtni o‘z ichiga oluvchi $G \subset \mathbb{R}^3$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi istalgan $P$ funksiya uchun*

$$\int\limits_{\partial S} P(x, y, z)\, dx \;=\; \iint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx \;-\; \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \tag{16.6.2}$$

*tenglik o‘rinli, bu tenglikning chap tomonida ikkinchi tur egri chiziqli integral va o‘ng tomonida esa, ikkinchi tur sirt integrali turibdi.*

**Isbot.** Faraz qilaylik, $S$ sirt $\mathbf{r} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ vektor-funksiya bilan, $\partial\Omega$ chegara esa, $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ komponentalarga ega bo‘lgan$\Phi$ : $[a, b] \to \mathbb{R}^2$ vektor-funksiya bilan berilgan bo‘lsin. U holda $S$ sirtning $\partial S$ chekkasi $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ vektor-funksiya bilan aniqlanadi, bu yerda $u(t) = \varphi(t),\ v(t) = \psi(t)$.

(15.2.21) formulaga ko‘ra, (16.6.2) ning chap tomonidagi ikkinchi tur egri chiziqli integral uchun

$$\int\limits_{\partial S} P(x, y, z)\, dx \;=\; \int\limits_{a}^{b} P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt \tag{16.6.3}$$

tenglik o‘rinli, bu yerda $x(t) = x(u(t), v(t))$.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra,

$$x'(t) \;=\; \frac{\partial x}{\partial u}\, u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\, v'(t).$$

Bundan chiqdi, (16.6.3) ning o'ng tomonidagi integral

$$\int_a^b P\, x'(t)\, dt \;=\; \int_a^b P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\, u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\, v'(t)\right) dt$$

ga teng.

Yana (15.2.21) formulani qo'llab, oxirgi tenglikni

$$\int_{\partial S} P\, dx \;=\; \int_{\partial\Omega} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) du \;+\; P\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv \tag{16.6.4}$$

ko'rinishda yozamiz.

So'ngra quyidagi

$$\int_{\partial\Omega} f\, du + g\, dv \;=\; \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) du\, dv$$

Grin formulasidan foydalanamiz.

Bu formulada $f = P\cdot x_u$ va $g = P\cdot x_v$ deb, (16.6.4) dan

$$\int_{\partial\Omega}\left(P\,\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(P\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv \;=$$

$$= \iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] du\, dv \tag{16.6.5}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

O'ng tomondagi hosilalarni murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra hisoblaymiz:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) \;=\; \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) \;=\; \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}.$$

Mos hadlarni soddalashtirsak,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(y,x)}{D(u,v)}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Demak, (16.6.4) va (16.6.5) larga ko‘ra,

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx = \iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(y,x)}{D(u,v)}\right] du\,dv.$$

Agar (16.5.17)-(16.5.19) formulalarni hisobga olsak, bu tenglik talab qilingan (16.6.3) tenglikning o‘zidir.■

**1 - eslatma.** Teoremani isbotlash jarayonida biz oshkormas ravishda ikkinchi tartibli $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ aralash hosila mavjudligini talab qildik. Bu hosila (16.6.5) integral ostidagi ifodani hisoblashda paydo bo‘lib, mos hadlarni soddalashtirish natijasida yo‘qoldi. Shunga qaramasdan, teorema bu shartsiz ham o‘rinli ekanini isbotlash mumkin.

Buni sirt bir marta uzluksiz differensiallanuvchi $z = f(x,y)$ funksiya grafigidan iborat bo‘lgan holda ko‘rsatish oson. Haqiqatan, $x = u,\ y = v,\ z = f(u,v)$ parametrlashtirishni kiritaylik. Bunda $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \equiv 0$ tenglik o‘rinli bo‘lib, teorema isbotining korrektligi ko‘rinib turibdi.

**2 - eslatma.** 16.6.1 - teorema isboti Grin formulasiga asoslanadi. Bu formula §15.3 da regulyar bo‘lakli-silliq kontur uchun isbotlangan edi. Bunga mos ravishda biz $S$ sirtning $\partial S$ chekkasini shunday bo‘lakli-silliq egri chiziq deb faraz qilamizki, uning $\mathbf{r}(u,v)$ akslantirishdagi asli regulyar bo‘lakli-silliq kontur bo‘lsin.

**2**. Ushbu paragrafning asosiy maqsadi navbatdagi teoremani isbotlashdan iborat.

**16.6.2 - teorema (Stoks formulasi).** *Faraz qilaylik, $P$, $Q$ va $R$ funksiyalar $S$ ni o'z ichiga olgan $G \subset \mathbb{R}^3$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda*

$$\int\limits_{\partial S} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \;=$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx \tag{16.6.6}$$

*formula o'rinli.*

**Isbot.** 16.6.1 - teoremaga ko'ra,

$$\int\limits_{\partial S} P(x,y,z)\,dx \;=\; \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx \;-\; \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\;, \tag{16.6.7}$$

$$\int\limits_{\partial S} Q(x,y,z)\,dy \;=\; \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \;-\; \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz \tag{16.6.8}$$

va

$$\int\limits_{\partial S} R(x,y,z)\,dz \;=\; \iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz \;-\; \frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx\;. \tag{16.6.9}$$

Endi (16.6.7)-(16.6.9) tengliklarni qo'shib, talab qilingan (16.6.6) formulaga ega bo'lamiz.■

**Eslatma.** Stoks teoremasining isboti 16.6.1 - teoremaga asoslanadi. Lekin 16.6.1 - teoremada oshkormas ravishda $\mathbf{r}(u,v)$ radius-vektorning komponentalari uzluksiz ikkinchi tartibli aralash hosilaga ega, deb faraz qilingan edi. 16.6.1 - teoremada keltirilgan 1-eslatmaga ko'ra, $S$ sirt koordinata tekisliklaridan biriga o'zaro bir qiymatli proeksiyalangan holda, ya'ni $S$ sirt istalgan ikki o'zgaruvchili funksiya grafigi bo'lgan holda bu farazni olib tashlash mumkin.

**3**. $G \subset \mathbb{R}^3$ sohada aniqlangan uchta $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ va $R(x,y,z)$ funksiyani olaylik. Agar $G$ sohada shunday differensiallanuvchi $U(x,y,z)$ funksiya topilsaki, uning birinchi differensiali

$$dU(x,y,z) \ = \ P(x,y,z)\,dx \ + \ Q(x,y,z)\,dy \ + \ R(x,y,z)\,dz \tag{16.6.10}$$

ga teng bo'lsa,

$$P(x,y,z)\,dx \ + \ Q(x,y,z)\,dy \ + \ R(x,y,z)\,dz \tag{16.6.11}$$

ifodani $G$ da *to'la differensial* deymiz.

(16.6.10) dan quyidagi

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}\ , \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}\ , \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{16.6.12}$$

tengliklarning bajarilishi kelib chiqadi.

Bunda $U(x,y,z)$ funksiya $\mathbf{A} = (P,Q,R)$ vektorning potensiali deb ataladi.

Masalan,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

ifoda to'la differensial bo'ladi, chunki $U(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)/2$ funksiya differensiali bu ifodaga teng.

Lekin

$$y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

ifoda, quyida isbotlanadigan 16.6.3 - teoremaga ko'ra, to'la differensial bo'lmaydi, ya'ni differensiali shu ifodaga teng $U(x,y,z)$ funksiya mavjud emas.

Xuddi ikki o'zgaruvchili funksiya holidagidek, (16.6.11) ifodaning to'la differensial bo'lishlik shartlarini, ya'ni biror $U(x,y,z)$ funksiya uchun (16.6.10) tenglikning bajarilish shartlarini topish masalasi nihoyatda muhimdir. Bu masalaning bitta yechimini, xuddi 15.4.2 - teorema kabi isbotlanadigan navbatdagi teorema beradi.

**16.6.3 - teorema.** *Faraz qilaylik, $P$, $Q$ va $R$ funksiyalar biror nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lgan $G$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.*

*(16.6.11) ifodaning to'la differensial bo'lishi uchun $G$ sohada*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \tag{16.6.13}$$

*tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.*

**Isbot.** 1) Faraz qilaylik, (16.6.11) ifoda biror $U(x,y,z)$ funksiyaning to'la differensiali bo'lsin, ya'ni (16.6.12) tengliklar bajarilsin. Bu tengliklardan $U$ potensialning barcha ikkinchi tartibli uzluksiz aralash hosilalarga ega ekani kelib chiqadi. Bundan chiqdi, (16.6.13) tengliklar qayd etilgan aralash hosilalarning differensiallash tartibiga bog'liq emasligini anglatadi, xolos.

2) Aytaylik, $G$ soha $A$ nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lsin. $[AB]$ simvol orqali $A$ nuqtani istalgan $(x_0,y_0,z_0)$ koordinatali $B\in G$ nuqta bilan tutashtiruvchi kesmani belgilab,

$$U(x_0,y_0,z_0) \;=\; \int\limits_{[AB]} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz \tag{16.6.14}$$

deymiz.

$B$ nuqtani $Ox$ o'q bo'ylab $h$ masofaga siljitib, $B_h=(x_0+h,y_0,z_0)$ deb belgilaymiz. $G$ to'plam ochiq bo'lgani uchun, yetarlicha kichik $h$ larda $BB_h$ kesma butunligicha $G$ da yotadi. Ravshanki, $S_h=ABB_h$ uchburchakning tomonlari regulyar bo'lakli-silliq $\partial S_h$ konturni tashkil qiladi; bu kontur uchun (16.6.6) Stoks formulasini qo'llash mumkin. (16.6.13) ga ko'ra, (16.6.6) ning o'ng tomonidagi sirt integrali nolga teng. Demak,

$$\int\limits_{\partial S_h} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz \;=\; 0. \tag{16.6.15}$$

$\partial S_h$ kontur uch qismdan, ya'ni $AB, BB_h$ va $B_hA$ dan iborat bo'lgani sababli, (16.6.15) integralni quyidagi

$$\int\limits_{[AB]} P\,dx+Q\,dy+R\,dz+\int\limits_{[BB_h]} P\,dx+Q\,dy+R\,dz+$$

$$+ \int\limits_{[B_h A]} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \qquad (16.6.16)$$

integrallar yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin.

Birinchi integral, (16.6.4) ga ko‘ra, $U(x_0, y_0, z_0)$ ga teng. Uchinchi integral uchun, ikkinchi tur egri chiziqli integral xossasiga asosan,

$$\int\limits_{[B_h A]} Pdx+Qdy+Rdz = -\int\limits_{[AB_h]} Pdx+Qdy+Rdz = -U(x_0+h, y_0, z_0)$$

tenglik o‘rinli.

Shunday ekan, (16.6.16) ga ko‘ra,

$$U(x_0 + h, y_0, z_0) \; - \; U(x_0, y_0, z_0) \; = \int\limits_{[BB_h]} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \; .$$

Abssissalar o‘qiga parallel bo‘lgan $BB_h$ kesmada $dy = 0$ va $dz = 0$, hamda $P$ funksiyaning uzluksizligini hisobga olsak,

$$\int\limits_{[BB_h]} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \; = \int\limits_{BB_h} P\,dx \; = \; P(x_0, y_0, z_0) \cdot h \; + \; o(h).$$

Demak,

$$U(x_0 + h, y_0, z_0) \; - \; U(x_0, y_0, z_0) \; = \; P(x_0, y_0, z_0) \cdot h \; + o(h) \; .$$

Bu esa (16.6.12) dagi birinchi tenglik bajarilishini anglatadi.

(16.6.12) dagi qolgan ikki tenglik ham xuddi shu usulda isbotlanadi. Binobarin (16.6.11) ifoda (16.6.14) tenglik bilan aniqlangan funksiyaning to‘la differensiali bo‘lar ekan.■

**16.6.1 - misol.** Ushbu

$$y^2 z^3\,dx + 2xyz^3\,dy + 3xy^2 z^2\,dz$$

ifoda to‘la differensial ekanini ko‘rsating.

Agar

$$P = y^2 z^3, \quad Q = 2xyz^3, \quad R = 3xy^2 z^2$$

desak, oddiy hisoblashlar (16.6.13) shartlarning bajarilishini ko‘rsatadi, ya’ni yuqoridagi ifoda biror $U(x, y, z)$ potensialning to‘la differensiali ekan. Berilgan ifodani navbat bilan har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha integrallab, va bunda qolgan o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb hisoblab, potensialni topish qiyin emas:

$$U(x, y, z) \ = \ xy^2z^3 + C,$$

bunda $C$ ixtiyoriy o‘zgarmas son.

## 16.7-§. Gauss-Ostrogradskiy formulasi

**1.** Gauss-Ostrogradskiy formulasi Grin formulasining uch o‘lchovli analogidir. Uch o‘lchovli quyidagi

$$G \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z_1(x, y) < z < z_2(x, y), \quad (x, y) \in D\} \tag{16.7.1}$$

to‘plamni olaylik, bu yerda ikki o‘lchovli $D \subset \mathbb{R}^2$ soha silliq chegaraga ega. Shu ko‘rinishdagi sohalarni bundan buyon $Oz$ o‘qi bo‘ylab joylashgan soha deb ataymiz.

**16.7.1 - teorema.** *Faraz qilaylik, $f(x, y, z)$ funksiya va uning $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ xususiy hosilasi $Oz$ o‘qi bo‘ylab joylashgan yopiq $\overline{G}$ sohada uzluksiz bo‘lsin. U holda*

$$\iiint\limits_G \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \, dx\, dy\, dz \ = \ \iint\limits_{\partial G} f(x, y, z) \, dx\, dy \tag{16.7.2}$$

*tenglik o‘rinli; bunda tenglikning o‘ng tomonida ikkinchi tur sirt integrali turibdi.*

**Isbot.** Quyidagi

$$\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \, dz \ = \ f(x, y, z_2(x, y)) \ - \ f(x, y, z_1(x, y))$$

Nyuton-Leybnits formulasini olib, uni $D$ soha bo'yicha integrallasak,

$$\iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_D f(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy - \iint\limits_D f(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi bu tenglikning chap va o'ng tomonlari mos ravishda talab qilingan (16.7.2) tenglikning chap va o'ng tomonlari bilan ustma-ust tushishini qayd etish yetarli.■

Faraz qilaylik, (16.7.1) ta'rifdagi $z_1(x,y)$ va $z_2(x,y)$ funksiyalar $\overline{D}$ yopiq sohada uzluksiz va uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Bundan tashqari, bo'lakli-silliq $\partial G$ sirtning tashqi birlik normal vektori

$$\mathbf{n}(x,y,z) = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

ko'rinishda bo'lsin.

**Natija.** *16.7.1 - teorema shartlari bajarilganda*

$$\iiint\limits_G \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} f(x,y,z)\ \cos\gamma(x,y,z)\,d\sigma$$

*formula o'rinli.*

**2.** Agar $G$ soha har bir koordinata o'qlari bo'ylab joylashgan bo'lsa, biz uni regulyar deymiz. Masalan, har qanday qavariq soha regulyar bo'ladi.

**16.7.2 - teorema (Gauss-Ostrogradskiy formulasi).** *Faraz qilaylik, $P, Q, R$ funksiyalar va ularning $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ xususiy hosilalari yopiq regulyar $\overline{G}$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\partial G} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\; d\sigma \tag{16.7.3}$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot.** 16.7.1 - teorema natijasiga ko'ra,

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \;=\; \iint\limits_{\partial G} P(x,y,z)\;\cos\alpha(x,y,z)\, d\sigma, \tag{16.7.4}$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \;=\; \iint\limits_{\partial G} Q(x,y,z)\;\cos\beta(x,y,z)\, d\sigma, \tag{16.7.5}$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \;=\; \iint\limits_{\partial G} R(x,y,z)\;\cos\gamma(x,y,z)\, d\sigma. \tag{16.7.6}$$

Bu (16.7.4)-(16.7.6) tengliklarni qo'shib chiqsak, talab qilingan (16.7.3) tenglikni olamiz.■

**Eslatma.** (16.7.3) formula chekli sondagi regulyar sohalarning birlashmasi uchun ham o'rinli. Haqiqatan,

$$G \;=\; G_1 \cup G_2 \cup S,$$

bu yerda $S$ bo'lakli-silliq sirt bo'lib, u $G$ sohani umumiy nuqtaga ega bo'lmagan ikki $G_1$ va $G_2$ regulyar qismiy sohalarga ajratadi.

$G_1$ va $G_2$ sohalarning har biri uchun (16.7.3) tenglikni yozamiz:

$$\iiint\limits_{G_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\partial G_k} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\; d\sigma\;, \quad k = 1, 2.$$

Bu tengliklarni qo‘shib, uch karrali integralning additivligiga ko‘ra,

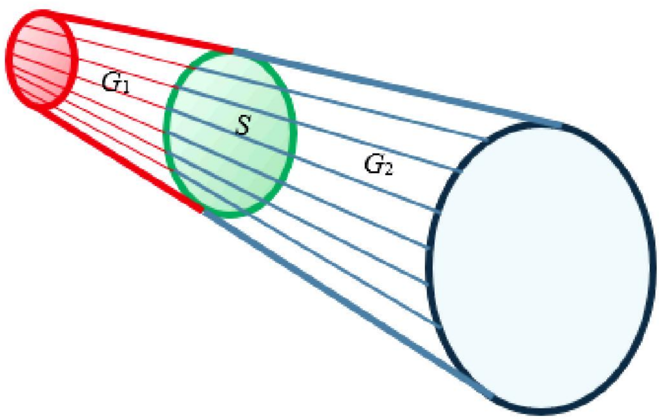
$$\iiint\limits_{G} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\partial G_1} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\partial G_2} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

Endi $\partial G_1$ va $\partial G_2$ bo‘yicha olingan ikkinchi tur sirt integrallarining yig‘indisi $\partial G$ bo‘yicha integralga teng ekanini qayd etish yetarli. Haqiqatan, qayd etilgan yig‘indi «tashqi» $\partial G$ chegara hamda «ichki» $S$ sirt bo‘yicha integrallar yig‘indisidan iborat (16.4 - rasm).




16.4-rasm

Bunda $S$ boyicha ikkinchi tur sirt integrali ikki marta olinadi: birinchi marta sirtning musbat yog‘i va ikkinchi marta esa, uning manfiy yog‘i bo‘yicha. Shuning uchun $S$ bo‘yicha ikki integral yig‘indisi nolga teng bo‘lib, faqat $\partial G$ bo‘yicha integral qoladi.

**16.7.1 - misol.** Agar $a+b+c=1$ bo‘lsa,

$$\iint\limits_{\partial G} (ax\cos\alpha + by\cos\beta + cz\cos\gamma)\, d\sigma \;=\; |G|$$

tenglik o‘rinli, bu yerda $|G|$ uch o‘lchovli $G$ sohaning hajmi.

Haqiqatan, Gauss-Ostrogradskiy formulasiga ko‘ra,

$$\iint\limits_{\partial G} (ax\cos\alpha + by\cos\beta + cz\cos\gamma)\, d\sigma \;=$$

$$= \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial(ax)}{\partial x} + \frac{\partial(by)}{\partial y} + \frac{\partial(cz)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{G} (a+b+c)\, dx\,dy\,dz = |G|.$$

**Eslatma.** Yuqoridagi misol istalgan sohaning chegarasi bo‘ylab harakatlanib, uning hajmini hisoblash imkonini beradi.

## 16.8-§. Misollar

**1 - misol**. Agar $S$ sirt $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \le 1\}$ doirada berilgan $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiya grafigi bo‘lsa, bu sirtga $(x_0,y_0)\in\Omega$ nuqtada o‘tkazilgan normal vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

**Ko‘rsatma**. Bu sirtni $\mathbf{r} = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ radius-vektor bilan berilgan deb hisoblab, (16.1.21) formulalarni qo‘llang.

**2 - misol**. Agar $S$ sirt $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2\le 1\}$ doirada berilgan $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ funksiya grafigi bo‘lsa, bu sirt yuzini toping.

**Ko‘rsatma**. Agar $u=x$ va $v=y$ desak,

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \;=\; \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Talab qilingan yuzani topish uchun bu kattalikni (16.1.26) integralga qo‘yib, hosil bo‘lgan integralni qutb koordinatalar sistemasiga o‘tib hisoblang.

**3 - misol**. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiyaning grafigidan iborat $S$ sirt uchun birinchi kvadratik formani hisoblang. (16.2.5) formula yordamida $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$ kattalikni topib, (16.1.20) formula bilan taqqoslang. So‘ngra $S$ sirt yuzasini hisoblash formulasini toping.

**Ko‘rsatma**. Agar $u = x$, $v = y$ va $z = f(x, y)$ desak, bu sirtni $\mathbf{r} = (x, y, z)$ radius-vektor bilan berish mumkin. Shunday ekan, $E$, $F$ va $G$ kattaliklarni (16.2.3) formula yordamida hisoblang. $S$ sirt yuzasi uchun formula (16.2.6) dan kelib chiqadi.

**4 - misol**. Faraz qilaylik, $S$ sirt $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$ kvadratda aniqlangan $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funksiya grafigidan iborat bo‘lsin. Bu sirtda yotuvchi $z = f(0, y)$ egri chiziq uzunligi uchun formula toping.

**Ko‘rsatma**. $S$ sirt uchun $E$, $F$ va $G$ kattaliklar xuddi 3 - misoldagi singari hisoblanadi. Egri chiziqni $\mathbf{r} = (0, \ y, \ f(0, y))$ radius-vektor bilan aniqlab, (16.2.9) formulani qo‘llang (bu yerda parametr $y$ bo‘lib, $u(y) = 0$ va $v(y) = y$).

**5 - misol**. Faraz qilaylik, $S$ sirt $z = x^2 + y^2$ funksiyaning grafigidan iborat bo‘lsin. Bu sirt uchun ikkinchi kvadratik formani toping.

**Ko‘rsatma**. Agar $u = x$, $v = y$ va $z = x^2 + y^2$ desak, bu sirtni $\mathbf{r} = (x, y, z)$ radius-vektor bilan berish mumkin. Endi normal vektorni (16.1.13) formula bilan aniqlab, ikkinchi kvadratik formani hisoblash uchun (16.3.2) formulani qo‘llang.

**6 - misol**. Agar $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x^2 + y^2)^2 + z^4 = 1, \ z \geq 0\}$ ko‘rinishda aniqlangan sirt bo‘lsa, $P = (0, 0, 1, )$ nuqtadagi bosh egriliklarni hisoblang.

**Ko‘rsatma**. $P$ nuqtadagi $T(P)$ urinma tekislikni toping va bu tekislikni $Oz$ o‘qiga ortogonal ekanligiga ishonch hosil qiling. So‘ngra, (16.3.33) formula asosida bosh egriliklarni hisoblang.

**7 - misol**. Agar $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1, \ x \geq 0, \ y \geq$

$0,\ z \geq 0\}$ ko'rinishda aniqlangan sirt bo'lsa, quyidagi

$$I = \iint\limits_S (x+y)\, d\sigma$$

birinchi tur sirt integralini hisoblang.

**Ko'rsatma**. Agar $u = x$, $v = y$ deb olsak, bu sirtni $\mathbf{r} = (x,\ y,\ 1-x-y)$ radius-vektor bilan berish mumkin. Endi $||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||$ kattalikni hisoblab, $I$ integralni (16.4.3) formula yordamida $Oxy$ tekislikdagi uchburchak bo'yicha integralga keltiring.

**8 - misol**. Agar $S$ sirt

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z > 0\}$$

ko'rinishdagi yarim sfera bo'lib, $\mathbf{r} = (0,0,z^2)$ bo'lsa,

$$I = \int\limits_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(x,y,z)\, d\sigma$$

ikkinchi tur sirt integrali hisoblansin.

**Ko'rsatma**. Agar

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 < a^2\right\}$$

deb belgilasak, bu sirt

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad (x,y) \in \Omega,$$

funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi. Endi 16.5.1 - tasdiqni qo'llab, hosil bo'lgan doira bo'yicha integralda qutb koordinatalar sistemasiga o'tish yetarli.

**9 - misol**. Faraz qilalylik, $S$ sirt

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 = a^2\}$$

ko'rinishdagi sfera bo'lib, $S_1$ esa, quyidagi

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x+y+z = 0\}$$

tekislik bo‘lsin. Agar $\Gamma$ aylana $S$ sferani $S_1$ tekislik bilan kesish natijasida hosil bo‘lsa,

$$I = \int_{\Gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

integralni hisoblang (integral, agar $Ox$ o‘qining musbat yo‘nalishidan qaralsa, soat miliga teskari yo‘nalishda olinayapti).

**Ko‘rsatma**. Avval $I$ integralni (16.6.6) Stoks formulasi yordamida $\Gamma$ o‘rab turgan va $S_1$ tekislikda yotuvchi $S_2$ doira bo‘yicha integralga olib kelamiz:

$$I = -\iint_{S_2} dy\,dz + dx\,dz + dx\,dy.$$

So‘ngra bu integralni, (16.5.13) tenglikdan foydalanib,

$$I = -\int_{S_2} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,d\sigma.$$

ko‘rinishda yozib olib, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tengliklardan foydalanamiz.

**10 - misol**. Agar $S$ sirt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

ko‘rinishdagi sfera bo‘lsa, uning tashqi tomoni bo‘yicha olingan

$$I = \iint_{S} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$$

integralni hisoblang.

**Ko‘rsatma**. 16.7.1 - teorema yordamida Gauss-Ostrogradskiy formulasini

$$\iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{\partial G} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu formula yordamida $I$ integralni shar bo‘yicha integral sifatida yozib olib, sferik koordinatalarga o‘ting.

## ALIFBOLI KO‘RSATMA

**A**bsolyut yaqinlashuvchi xosmas integral 254
Aralash ko‘paytma 419,

**B**ir bog‘lamli soha 187
Bir yoqli sirt 415
Birinchi differensial formasining invariantligi 73
Birinchi kvadratik forma 375
Birinchi tur egri chiziqli integral 290, 295
Birinchi tur sirt integrali 409
Birlik normal vektor 363
Bog‘langan toplam 21
Bog‘liq va bog‘liqmas funksiyalar 108
Bo‘linish diametri 367,149
Bolsano - Veyershtrass teoremasi 14
Bosh egriliklar 404
Bosh normal 404
Bosh normal kesim 391
Bosh yo‘nalish 404

**C**hegaralangan ketma-ketlik 14
Chegaraviy nuqta 16
Chiziqli forma 375
Chiziqning nuqtadagi egriligi 396

**D**arbu ma’nosida integrallanuvchi funksiya 158
Darbu yuqori yig‘indilarining limiti 158
Diffeomorfizm 107
Differensial 72
Differensiallanuvchi funksiya 56

**E**grilik markazi 393
Egrilik radiusi 393

Evklid fazosi 10
Eyler egriligi 404

**F**undamental ketma-ketlik 14
Funksiya grafigi 29
Funksiya limit qiymati 31

**G**auss egriligi 405
Gauss-Ostrogradskiy formulasi 434
Gradient 58,
Grin formulasi 332

**H**essian 77
Homeomorfizm 43

**I**chki nuqta 16
Ichki normal 321, 416
Ikki karrali Riman integrali 149
Ikki yoqli sirt 415
Ikkinchi (va yuqori) tartibli xususiy hosila 66, 71
Ikkinchi kvadratik forma 384
Ikkinchi tur egri chiziqli integral 298
Ikkinchi tur sirt integrali 417
Integral ostidagi funksiya 150
Integral yig‘indi limiti 149, 210
Integrallash sohasi 150

**J**ism hajmi 227
Jordan egri chizig‘i 318

**K**antor teoremasi 39
Ketma-ketlik limiti 12
Kompakt to‘plam 24
Kontur 320
Konturning manfiy yo‘nalishi 321

Konturning musbat yo'nalishi 321
Koshi ketma-ketligi 13
Koshi kriteriysi 14
Koshi ma'nosida yaqinlashish 275
Koshi tengsizligi 11
Kublanuvchi to'plam 208

**L**agranj funksiyasi 123
Limit nuqta 18
Lokal integrallanuvchi funksiya 244
Lokal maksimum 117

**M**axsus nuqta 290
$m$ - tartibli differensial 80

**N**uqtada uzluksiz funksiya 32
$n$ karrali Riman integrali 230
Nuqtaga nisbatan yulduzli soha 342
Nuqtaning sirtdagi atrofi 352

**O**chiq to'plam 17
Ombilik nuqta 408
Orientirlangan sirt 416
O'rtacha egrilik 404
Ortogonal elementlar 11
Ortogonal vektorlar 11
Oshkormas funksiya 88

**Q**avariq to'plam 20
Qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligi 245
Qismiy hosila, ikki o'zgaruvchili holda 53
Qismiy hosila, n o'zgaruvchili holda qismiy yig'indi 54

**R**egulyar kontur 331

**S**hakl bo‘linishi 148
Shakl yuzi 138
Shartli ekstremum nuqtasi 126
Shartli maksimum 121
Silliq egri chiziq 290
Silliq sirt 355
Silliq sodda sirtning yuzi 368
Singulyar integral 276
Siniq chiziq 22
Sirt 352
Sirt chekkasi 353
Sirtning elliptik nuqtasi 405
Sirtning hiperbolik nuqtasi 405
Sirtning maxsus nuqtasi 362
Sirtning parabolik nuqtasi 405
Skalyar ko‘paytma 10
Sodda funksiya 150
Sodda sirt 355
Soha 22
Statsionar nuqta 118
Stoks formulasi 429

**T**abiiy parametrlash 290
Taqqoslashning umumiy alomati 250
Taqqoslashning xususiy alomati 251
Tashqi normal 416
Tekis silliq akslantirish 367
Tekis uzluksiz funksiya 38
Teskarilanuvchi vektor-funksiya 40
To‘la differensial 429
To‘la egrilik 405
To‘plam yopilmasi 18
To‘plamning quyi va yuqori hajmi 208

**U**ch karrali Riman integrali 210

Urinma 301
Urinma tekislik 362

**V**ektor funksiya 40,
Veyershtrass teoremalari 38

**X**osmas integralning bosh qiymati 275

**Y**akobi determinanti 99
Yakobian 98
Yaqinlashuvchi xosmas integral 246, 247
Yassilanish nuqtasi 405
Yo'nalish bo'yicha hosila 63
Yo'naltiruvchi kosinuslar 304
Yopiq sirt 353
Yopiq to'plam 17

*Qaydlar uchun*

*Qaydlar uchun*

*Alimov Shavkat Orifjonovich,*
*Ashurov Ravshan Radjabovich*

**MATEMATIK ANALIZ**
2-qism

Darslik

*Nashriyot muharriri: Ilhom Yo'ldashev*

*Musahhiha: G. Murodova,*

*Texnik muharrir: B. Boltaboyev*

*Sahifalovchi: A. Xudoyberdiyeva*

*Kompyuterda dasturlovchi: Sh. Sheraliev*

*«MUMTOZ SO'Z»*
*mas'uliyati cheklangan jamiyati*
*nashriyoti*

*Manzil: Toshkent, Navoiy ko'chasi, 69.*
*Тел.: 241-60-33*

*Nashriyot litsenziyasi AI № 103. 15.07.2008*
*Bosishga ruxsat etildi 27.12.2018*
*Qog'oz bichimi 60x84 1/32. Ofset qog'ozi.*
*Times New Roman garniturasi. Hisob-nashriyot tobog'i 33 b.t.*
*Shartli bosma tobog'i 28. Adadi 200 ta*
*Buyurtma №105. Bahosi kelishilgan narxda.*

*O'zbekiston Milliy universiteti bosmaxonasida bosildi.*
*Toshkent, Talabalar shaharchasi, O'zMU.*