

SHAVKAT ALIMOV  
RAVSHAN ASHUROV

# MATEMATIK ANALIZ

3-qism

*Darslik O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta-maxsus ta'lim  
vazirligining 2018-yil 25-avgust 744-sonli buyrug'iga asosan  
nashrga tavsiya etilgan (Ro'yatga olish raqami 744-227)*

Toshkent  
"MUMTOZ SO'Z"  
2018

UO'K 51(075)

KBK 71.2

A 50

Matematik analiz / Sh.O.Alimov, R.R.Ashurov; mas'ul muharrir  
Y.E.Fayziyev. — Toshkent: MUMTOZ SO'Z, 2018.

Jild 3. 320 bet.

*Ushbu "Matematik analiz" kitobi universitetlarning "Matematika", "Amaliy matematika va informatika", "Informatika va axborot texnologiyalari" yo'nalishlari bo'yicha ta'lim oluvchi hamda oliy matematika chuqur o'rganiladigan texnika oliy o'quv yurtlarida ta'lim oluvchi talabalar uchun mo'ljallangan.*

**Taqrizchilar:** *f.-m.f.d., professor Xolmuhammedov O. R.,*

*f.-m.f.d., professor Ikromov I.A.*

**Mas'ul muharrir:** *f.-m.f.n., dotsent Fayziyev Y. E.*

ISBN 978-9943-5562-7-0

©Sh.O.Alimov, R.R.Ashurov, 2018.

©MUMTOZ SO'Z, 2018.

## M U N D A R I J A

Qisqacha sharh .....	5
Soʻz boshi .....	8
<b>17-bob. Parametrga bogʻliq integrallar</b> .....	<b>11</b>
17.1-§. Parametrga bogʻliq integrallarning asosiy xos- salari .....	11
17.2-§. Parametrga bogʻliq xosmas integrallar .....	29
17.3-§. Eylarning beta va gamma funksiyalari .....	64
17.4-§. Parametrga bogʻliq integrallarni asimptotik hisoblash usullari .....	75
17.5-§. Parametrga bogʻliq karrali integrallar .....	87
17.6-§. Misollar .....	100
<b>18-bob. Maydon nazariyasi elementlari</b> .....	<b>105</b>
18.1-§. Skalyar va vektor maydonlar .....	105
18.2-§. Vektor maydon divergensiyasi va rotori .....	112
18.3-§. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida maydon naza- riyasining asosiy operatsiyalari .....	122
18.4-§. Potensial va solenoidal maydonlar .....	139
18.5-§. Maksvell tenglamalari .....	146
18.6-§. Misollar .....	152
<b>19-bob. Furiye integrali</b> .....	<b>155</b>
19.1-§. Furiye almashtirishi .....	155
19.2-§. Furiye integral formulasi .....	167
19.3-§. Boʻlakli-silliq funksiyalarning Furiye integraliga yoyili- shi .....	176
19.4-§. Furiye integraliga yoyilmalarni differensiallash ...	183
19.5-§*. Furiye integrallarini Abel usuli bilan jamlash ...	192
19.6-§*. Plansherel teoremasi .....	201
19.7-§. Karrali Furiye integrallari .....	207
19.8-§. Misollar .....	227
<b>20-bob. Furiye qatorlari</b> .....	<b>231</b>

20.1-§. Furiye qatorlari yaqinlashishining yetarlilik shartlari .....	235
20.2-§. Furiye qatorlari yaqinlashishining lokal shartlari .	252
20.3-§. Furiye qatorlarining regulyar usullar bilan jamlanishi .....	268
20.4-§. Furiye qatorlarining kompleks shakli .....	276
20.5-§. Karrali Furiye qatorlari .....	281
20.6-§. Ilova (Evklid fazosidagi ortogonal qatorlar) .....	291
20.7-§. Misollar .....	311

## Qisqacha sharh

Ushbu kitob mualliflarning Matematik Tahlil deb nomlangan 2 qismlik o'quv qo'llanmalarini qayta ishlash natijasida yozilgan 3 ta kitobdan uchinchisidir. Ushbu qismda parametrغا bog'liq integral-lar xossalari bir va ko'p o'zgaruvchili hollarda o'rganilgan (17-bob). Darslikdan maydon nazariyasi hamda Furiye integrallari va qator-lariga bag'ishlangan boblar ham o'rin olgan (18–20-boblar).

Mazkur kitobda, xuddi birinchi va ikkinchi qismlardagi singari, barcha matematik xulosalar qisqa va sodda isbotlar asosida bayon qilingan va ko'p sonli misollar bilan oydinlashtirilgan. Har bir bob-ning oxirida mavzularni chuqur o'zlashtirishga yo'naltirilgan misol-lar keltirilgan.

Ushbu kitob Mirzo Ulug'bek nomli O'zbekiston Milliy univer-siteti va M. V. Lomonosov nomli Moskva davlat universitetining Toshkentdagi filiali talabalariga mualliflar tomonidan o'qilgan ma'ruzalar asosida yozilgan. Ushbu darslik universitetlarning "Matematika", "Amaliy matematika va Informatika", "Mexanika", "Informatika va axborot texnologiyalari" yo'nalishlari bo'yicha ta'-lim oluvchi hamda oliy matematika chuqur o'rganiladigan texnika oliy o'quv yurtlarida ta'lim oluvchi talabalar uchun mo'ljallangan.

### Аннотация

Данная книга является третьей из трех книг написанных в результате переработки двухтомного учебного пособия авторов по математическому анализу. В книге излагаются свойства интегралов, зависящих от параметров, как в одномерном так и в многомерном случаях (Глава 17). Включены также элементы теории поля, интегралы и ряды Фурье (Главы 18–20).

Так же как и в первом и втором томах, все математические утверждения снабжены краткими и простыми доказательствами и проиллюстрированы большим количеством примеров. В конце каждой главы приводится набор задач, предназначенных для лучшего усвоения материала.

Настоящая книга написана на основе лекций, читавшихся авторами студентам Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Ташкентского филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Предназначено для студентов университетов по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информатика и информационные технологии» и «Механика» а также для студентов технических вузов с углубленным изучением высшей математики.

---

## Annotation

This book is the third volume of the second edition of the two volume books of these authors named *Mathematical Analysis*. The book outlines properties of integrals depending on parameters as in the one-dimensional and multidimensional cases (Chapter 17). Also elements of field theory and Fourier series and integrals are included (Chapters 18-20).

As in the first two volumes, all mathematical statements are equipped with short and simple proofs and are illustrated by many examples. At the end of each chapter there is a set of tasks designed to enable better absorption of the material.

This manual is based on lectures given by the authors to students of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek and the Tashkent branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov. It is designed for students of universities in areas of "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Information technology" and "Mechanics" as well as for advanced students of engineering with indepth study of higher mathematics.

## Soʻz boshi

Ushbu kitob mualliflarning Matematik Tahlil deb nomlangan 2 qismlik (1-qism 2012 yil va 2-qism 2017 yil chop etilgan) oʻquv qoʻllanmalarini qayta ishlash natijasida yozilgan 3 ta kitobdan uchinchisidir. Ushbu qism parametrga bogʻliq integrallar, maydon nazariyasi elementlari hamda Furiye integrallari va qatorlarini oʻrganishga bagʻishlangan.

Uchinchi kitobdagi baʼzi oʻziga xosliklar sanab oʻtamiz. Koʻpchilik darsliklarda biror natijaning muhimligi haqida umumiy soʻzlar bilan cheklaniladi. Masalan, Maksvell nazariyasi toʻgʻrisida gap ketganda faqat Maksvell tenglamalarining katta ahamiyat kasb qilishi qayd qilinadi. Ushbu qoʻllanmada esa, maydon nazariyasining muhim yutuqlaridan biri aynan Maksvell nazariyasi ekanligi koʻrsatilgan va Maksvell tenglamalarining fizik mohiyati ochib berilgan. Bundan tashqari, Kulon potentsiali xossalari tayangan holda, Kulon qonuni hamda Bio-Savar qonuni keltirib chiqarilgan.

Parametrga bogʻliq integrallarga bagʻishlangan bobda Laplas usulini bayon qilingan boʻlib, ushbu usulga asoslangan holda Stirling formulasi keltirib chiqarilgan.

Furiye qatorlari va integrallariga bagʻishlangan boblarga alohida toʻxtalib oʻtish maqsadga muvofiqdir. Odatda, Furiye qatorlari Furiye integrallaridan soʻng oʻrganiladi. Biz bu anʼanani oʻzgartirishni taklif qildik, yaʼni bizda oʻquvchi avval Furiye integrallari bilan tanishib, soʻng Furiye qatorlarini oʻrganadi. Nima uchun biz bunday taklifni oʻrtaga tashladik? Birinchidan, bizning oʻylashimizcha, Furiye integrallari nazariyasini oʻrganish Furiye qatorlari nazariyasini oʻrganishga nisbatan ancha oson. Ikkinchidan, bunday tartibda bayon qilganda, Furiye integrallari nazariyasi bilan tanish boʻlgan oʻquvchi Furiye qatorlari nazariyasidagi koʻpgina natijalarni sezilarli darajada oson qabul qiladi. Shu sababli, Furiye integrallariga bagʻishlangan bobdagi deyarli barcha natijalar yangi boʻlib, ular boshqa adabiyotlarda keltirilmagan. Bundan tashqari, qoʻllanmada karrali Furiye integrallari va qatorlari nisbatan ancha toʻla oʻrganilgan. Karrali Furiye integrallarining xossalari tadqiq qilishda biz karrali xosmas



integrallarni regulyar jamlash usullarini qoʻlladik.

Furye integrallari nazariyasini bayon qilishda asosiy qiyinchilik xosmas integrallarning yaqinlashishini isbotlashdan iborat. Mazkur kitobda, biz Furye integrali nazariyasini parametrga bogʻliq xosmas integrallar nazariyasining tatbiqi deb qarab, bu qiyinchilikni yengib oʻtishda asosiy vosita sifatida Abel jamlash usulini tanladik. Bu usulni qoʻllash koʻpgina teoremlarning isbotini sezilarli darajada soddalashtirish imkonini berdi.

Furye integrallarining muhim ahamiyatga ega ekanini qayd etish maqsadida, biz Helmholtz tenglamalari nazariyasiga oid misol keltirdik va Radon almashtirishi hamda kompyuter tomografiyasiga bagʻishlangan band kiritdik. Bu bandda funksiyani uning Radon almashtirishiga koʻra tiklash usuli asoslab berildi hamda bu almashtirishning kompyuter tomografiyasida qoʻllanilishi tushuntirildi.

Mazkur qismning yana bir oʻziga xosligi shundan iboratki, biz oʻrganilayotgan mavzuga yaqin baʼzi fandagi zamonaviy yutuqlarning matematik asoslarini keltirishga harakat qildik. Bunga misol sifatida kompyuter tomografiyasini va shu nuqtai nazardan oʻta muhim boʻlgan (umuman aytganda, juda sodda tushuntirish mumkin boʻlgan) Gibbs hodisasini olishimiz mumkin.

Xuddi avvalgi ikki kitobdagi singari, ayrim paragraflar, bandlar hamda alohida tasdiqlarning tartib raqamlariga yulduzcha qoʻyilgan. Buning maʼnosi shundan iboratki, bu paragraf va bandlar, asosiy matndan unchalik qiyin boʻlmasada, matematik tahlil boʻyicha odatdagi dasturlarga kirmagan, lekin matematik tahlilni hamda uning tadbirlarini kelgusidagi oʻrganishlarda foydali boʻlgan materiallarga egadirlar.

Nihoyat yana shuni qayd etamizki, darslikda qulaylik uchun isbotlar yakuni qora kvadrat ■ orqali belgilangan.

Kitob Mirzo Ulugʻbek nomli Oʻzbekiston Milliy universiteti va Lomonosov nomli Moskva davlat universitetining Toshkentdagi filiali talabalariga mualliflar tomonidan oʻqilgan maʼruzalar asosida yozilgan.

Ushbu Matematik analiz deb nomlangan 3 ta kitob birgalik-

da universitetlarning "Matematika", "Amaliy matematika va informatika", "Mexanika", "Informatika va axborot texnologiyalari" va "Axborat tizimlarini matematik va dasturiy taʼminoti" yoʻnalishlari boʻyicha hamda oliy matematika chuqur oʻrganiladigan texnika oliy oʻquv yurtlarida taʼlim oluvchi talabalar uchun moʻljallangan boʻlib, u differensial va integral hisobi kursini toʻla qamrab oladi.

## 17-bob. Parametrga bog‘liq integrallar

### 17.1-§. Parametrga bog‘liq integrallarning asosiy xossalari

1. Yopiq to‘g‘ri to‘rtburchak:

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

va bu to‘g‘ri to‘rtburchakda haqiqiy qiymat qabul qiluvchi  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  funksiya berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, har bir tayinlangan  $x \in [a, b]$  uchun  $y$  o‘zgaruvchining  $f(x, y)$  funksiyasi  $[c, d]$  kesmada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda har bir  $x \in [a, b]$  uchun

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

integralni aniqlash mumkin.

Bu integralda  $x$  o‘zgaruvchi parametr deb va integralning o‘zi esa,  $x$  *parametrga bog‘liq integral* deb ataladi.

Ba‘zan parametr uchun Yunon alifbosidagi harflardan foydalaniladi, masalan,

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} e^{-\alpha y} dy.$$

Bizning navbatdagi maqsadimiz parametrga bog‘liq integralning parametr bo‘yicha uzluksiz, differensiallanuvchi va integrallanuvchi funksiya bo‘lish shartlarini topishdan iborat.

Tadbiqlarda ko‘pincha shunday integrallar uchraydiki, bunda integral ostidagi funksiya  $x$  parametr bo‘yicha uzluksiz bo‘lib,  $y$

o'zgaruvchi bo'yicha esa, uzilishga ham ega bo'lishi mumkin. Shu sababli, biz

$$\Phi(x) = \int_c^d g(y)f(x, y) dy \quad (17.1.1)$$

ko'rinishdagi parametrga bog'liq integrallarni o'rganamiz.

Ushbu paragrafda integral ostidagi  $g$  funksiyani  $[c, d]$  kesmada integrallanuvchi deb faraz qilamiz. Shuning uchun

$$\|g\|_1 = \int_c^d |g(y)| dy$$

kattalik chekli sondan iborat.

**2.** Biz (17.1.1) integralning uzluksizligini ko'rsatishdan boshlaymiz. Eslatib o'tamiz,  $C(Q)$  simvol bilan yopiq  $Q$  to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plami belgilangan edi.

**17.1.1 - teorema.** Agar  $f \in C(Q)$  bo'lsa,  $u$  holda (17.1.1) integral  $[a, b]$  kesmada uzluksiz funksiya bo'ladi.

**Isbot.** Kantor teoremasiga ko'ra,  $f$  funksiya  $Q$  to'g'ri to'rtburchakda tekis uzluksiz, ya'ni istalgan  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta > 0$  topiladiki, barcha  $(x, y) \in Q$  va  $(\xi, \eta) \in Q$  lar uchun

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \delta$$

shartdan

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Aytaylik,  $x \in [a, b]$  va  $x + h \in [a, b]$  bo'lsin. U holda

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_c^d g(y) [f(x + h, y) - f(x, y)] dy$$

tenglik o'rinli.

Agar  $|h| < \delta$  bo'lsa, Kantor teoremasiga ko'ra,  $|f(x+h, y) - f(x, y)| < \varepsilon$  bo'ladi va demak,

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leq \varepsilon \int_c^d |g(y)| dy = \|g\|_1 \cdot \varepsilon.$$

Bu esa (17.1.1) integralning  $x$  nuqtada uzluksizligini anglatadi. ■

**17.1.1 - misol.** Ushbu

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + \alpha \sin x} dx$$

integral  $\alpha \geq 0$  yarim to'g'ri chiziqda  $\alpha$  parametrning uzluksiz funksiyasi ekani ko'rsatilsin.

Ahamiyat bering, integral ostidagi funksiya  $x = 0$  nuqtada aniqlanmagan va shuning uchun integralni, umuman aytganda, xosmas deb hisoblashimiz kerak. Ammo, birinchi ajoyib limitdan foydalanib,  $x = 0$  da integral ostidagi funksiyani  $1/(1+\alpha)$  ga teng deb hisoblasak, uning  $[0, \pi]$  kesmada uzluksiz funksiyaga aylanishini ko'rsatish qiyin emas.

Umuman, agar integral ostidagi funksiya integrallanish kesmasining chegaraviy nuqtasida chekli limitga ega bo'lsa, ana shu limit funksiyaning qayd etilgan nuqtadagi qiymati deb hisoblanadi.

Bunday kelishuvda integral ostidagi funksiya  $(x, \alpha)$  o'zgaruvchilar bo'yicha  $0 \leq x \leq \pi$  va  $\alpha \geq 0$  sohada uzluksiz funksiyaga aylanaadi. Shunday ekan, o'rganilayotgan integralning uzluksizligi bevosita 17.1.1 - teoremdan kelib chiqadi.

**3.** Parametrga bog'liq integralning integrallanish masalasini o'rganamiz.

**17.1.2 - teorema.** *Ixtiyoriy  $f \in C(Q)$  funksiya uchun (17.1.1) tenglik bilan aniqlangan  $\Phi$  funksiya  $[a, b]$  kesmada integrallanuvchi bo'lib,*

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \int_c^d g(y) dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (17.1.2)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** (17.1.2) ning chap tarafida avval  $y$ , so'ngra  $x$  bo'yicha olingan takroriy integral turibdi. Bu tenglikning o'ng tarafida esa, avval  $x$ , so'ngra  $y$  bo'yicha olingan takroriy integral turibdi. 13.5.1 - teoremda bu ikki integralning quyidagi

$$\iint_Q g(y)f(x, y) dx dy$$

ikki karrali integralga tengligi ko'rsatilgan. Demak, (17.1.2) dagi takroriy integrallar o'zaro teng. ■

Ba'zan, bir karrali integrallarni hisoblashda ham, sun'iy ravishda parametr kiritib, 17.1.2 - teoremani qo'llash foydali bo'ladi.

**17.1.2 - misol.** Ushbu

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\ln \cos x} dx$$

xosmas integral hisoblansin.

Yordamchi

$$\Phi(x) = \int_0^2 (\cos x)^t dt = \frac{(\cos x)^t}{\ln \cos x} \Big|_{t=0}^{t=2} = \frac{\cos^2 x - 1}{\ln \cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\ln \cos x}$$

integralni kiritaylik. 17.1.2 - teoreмага ko'ra,

$$I = -\int_0^{\pi/2} \Phi(x) \sin x dx = -\int_0^2 dt \int_0^{\pi/2} (\cos x)^t \sin x dx .$$

Agar

$$-\int_0^{\pi/2} (\cos x)^t \sin x dx = \frac{(\cos x)^{t+1}}{t+1} \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = -\frac{1}{t+1}$$

ekanini hisobga olsak, berilgan integral uchun

$$I = - \int_0^2 \frac{dt}{t+1} = - \ln 3$$

tenglikka ega bo'lamiz.

4. Parametrga bog'liq integralning differensiallanuvchi bo'lish masalasini o'rganamiz.

**17.1.3 - teorema.** Agar  $f \in C(Q)$  va  $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(Q)$  bo'lsa, u holda (17.1.1) integral  $[a, b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \int_c^d g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (17.1.3)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** Ushbu

$$\psi(x) = \int_c^d g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (17.1.4)$$

funksiyani qaraylik.

17.1.1 - teoreмага ko'ra, bu funksiya  $[a, b]$  kesmada uzluksiz. Demak, istalgan  $x \in [a, b]$  uchun u  $[a, x]$  kesmada integrallanuvchi. U holda

$$\int_a^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt = f(x, y) - f(a, y), \quad a \leq x \leq b,$$

Nyuton-Leybnits formulasini qo'llab, 17.1.2 - teoreмага ko'ra,

$$\int_a^x \psi(t) dt = \int_c^d g(y) dy \int_a^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt =$$

$$= \int_c^d g(y) [f(x, y) - f(a, y)] dy = \Phi(x) - \Phi(a)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \psi(t) dt.$$

O'ng tarafda uzluksiz funksiya dan olingan yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral turibdi. Bu integralni  $x$  bo'yicha differensiallab,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \psi(x)$$

tenglikni olamiz.

Bundan, (17.1.4) ta'rifni e'tiborga olsak, talab qilingan (17.1.3) tenglik kelib chiqadi. ■

**Eslatma\***. Aniq integralga Riman bergan ta'rif quyidagi ikki

$$F'(x) = f(x) \quad (*)$$

va

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt \quad (**)$$

tenglik orasida maksimal umumiylikda bog'lanish o'rnatishga intilish bilan bog'liq.

Chunonchi, agar  $f$  funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, (\*) tenglikdan (\*\*) tenglik kelib chiqadi. Teskari tasdiq, umuman aytganda, o'rinli emas:  $f$  funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, (\*\*) tenglikni qanoatlantirsada, ammo (\*) tenglik bajarilmasligi mumkin (6 - bob oxirida keltirilgan 9 - misolga qarang). Teskari tasdiq qo'shimcha shartlarda, masalan,  $f$  uzluksiz bo'lganda o'rinli.

Zamonaviy yondashuvda hosila ta'rifi (\*\*) tenglikka asoslana-di: agar  $f$  funksiya integrallanuvchi bo'lib, (\*\*) tenglik bajarilsa, u



holda bu funksiya  $F$  funksiyaning umumlashgan hosilasi deb ataladi va  $F'$  orqali belgilanadi. Bunday yondashuvda (\*) tenglik (\*\*\*) tenglikning boshqa bir ko'rinishiga aylanadi.

Shuni aytish kerakki, 17.1.3 - teoremaning yuqorida keltirilgan isboti, aslida, umumlashgan hosila uchun ham o'rinli.

5. Faraz qilaylik,  $\varphi(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada aniqlangan bo'lib, qiymatlar to'plami  $[c, d]$  kesmadan iborat bo'lsin. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan

$$\Psi(x) = \int_c^{\varphi(x)} f(x, y) dy \quad (17.1.5)$$

integralni qaraylik.

**17.1.4 - teorema.** Faraz qilaylik,  $f \in C(Q)$  va  $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(Q)$  bo'lib,  $\varphi$  funksiya  $[a, b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.  $U$  holda (17.1.5) integral  $[a, b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lib,

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = \int_c^{\varphi(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f[x, \varphi(x)] \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (17.1.6)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** Ikki o'zgaruvchili

$$F(x, u) = \int_c^u f(x, y) dy \quad (17.1.7)$$

funksiyani qaraylik.

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral xossasi va 17.1.3 - teoreмага ko'ra, bu funksiya uzluksiz qisman hosilalarga ega:

$$\frac{\partial F(x, u)}{\partial x} = \int_c^u \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy, \quad \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} = f(x, u). \quad (17.1.8)$$

Demak,  $F(x, u)$  ikki o'zgaruvchining uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo'lar ekan. (17.1.5) ta'rifga ko'ra,

$$\Psi(x) = F[x, \varphi(x)].$$

Shunday ekan, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\Psi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}[x, \varphi(x)] + \frac{\partial F}{\partial u}[x, \varphi(x)] \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

(17.1.8) tengliklarni hisobga olsak, bundan talab qilingan (17.1.6) tenglik kelib chiqadi. ■

**Natija.** Faraz qilaylik,  $f \in C(Q)$  va  $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(Q)$  bo'lsin. Agar  $\varphi(x)$  va  $\psi(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, qiymatlari  $[c, d]$  kesmada yotsa,

$$I(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy$$

integral  $[a, b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi va

$$I'(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f[x, \varphi(x)] \cdot \varphi'(x) - f[x, \psi(x)] \cdot \psi'(x) \quad (17.1.9)$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan, buni ko'rsatish uchun

$$I(x) = \int_c^{\varphi(x)} f(x, y) dy - \int_c^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

tenglikdan foydalanib, 17.1.4 - teoremani qo'llash yetarli.

**17.1.3 - misol.** Parametrga bog'liq

$$I(x) = \int_x^{2x} \ln(x^2 + y^2) dy$$

integralning  $x > 0$  da hosilasini toping.

(17.1.9) formulaga ko'ra,

$$\begin{aligned} I'(x) &= 2x \int_x^{2x} \frac{dy}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + 4x^2) \cdot 2 - \ln(x^2 + x^2) = \\ &= 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{y=x}^{y=2x} + 2 \ln 5x^2 - \ln 2x^2 = \\ &= 2 \operatorname{arctg} 2 - 2 \operatorname{arctg} 1 + 2 \ln 5 - \ln 2 + 2 \ln x . \end{aligned}$$

Demak,

$$I'(x) = 2 \ln x + C_0, \quad \text{bu yerda } C_0 = 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} + \ln \frac{25}{2}.$$

**6.** Integral ostidagi funksiya haqiqiy o'zgaruvchining kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyasi bo'lgan holda ham, ya'ni

$$f(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$$

bo'lganda ham parametrga bog'liq  $\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  integrallar xuddi yuqoridagidek o'rganiladi.

Agar

$$\Phi_k(x) = \int_c^d f_k(x, y) dy, \quad k = 1, 2,$$

deb belgilasak, qayd etilgan integral

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + i\Phi_2(x)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ko'pgina parametrga bog'liq integrallarni hisoblashda bu belgilashdan foydalanish asqotadi.

**17.1.4 - misol.** Ushbu

$$I = \int_0^R e^{-\alpha x} \sin \beta x dx$$

integralni hisoblang.

Buning uchun

$$\Phi(\beta) = \int_0^R e^{-\alpha x + i\beta x} dx$$

yordamchi integralni qaraymiz, bu yerda  $\beta$  haqiqiy parametr. Kompleks qiymatli funksiyalarni integrallash qoidasiga ko'ra:

$$\Phi(\beta) = \int_0^R e^{(i\beta - \alpha)x} dx = \frac{e^{(i\beta - \alpha)x}}{i\beta - \alpha} \Big|_{x=0}^{x=R} = \frac{1 - e^{-\alpha R + i\beta R}}{\alpha - i\beta}.$$

Demak,

$$\Phi(\beta) = \frac{1 - e^{-\alpha R}(\cos \beta R + i \sin \beta R)}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha + i\beta). \quad (17.1.10)$$

Haqiqiy va mavhum qismlarni ajratsak, quyidagi ikki

$$\int_0^R e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha - e^{-\alpha R}(\alpha \cos \beta R - \beta \sin \beta R)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (17.1.11)$$

va

$$\int_0^R e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta - e^{-\alpha R}(\beta \cos \beta R + \alpha \sin \beta R)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (17.1.12)$$

tenglikni olamiz.

7. Parametrga bog'liq integrallar funksiyalarni silliqlashda, ya'ni berilgan funksiyani undan kam farq qiladigan silliq funksiya bilan almashtirishda foydalaniladi. Buni biz hammasidan ko'ra keng qo'llaniladigan silliqlash usuli misolida ko'rsatamiz. Buning uchun

$$\frac{1}{A} = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x^2-1}} dx$$

deb,

$$\omega(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (17.1.13)$$

funksiyani kiritamiz.

Bu funksiyaning  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi ekani tekshirish qiyin emas (10.9.9 - misol bilan solishtiring). Bundan tashqari, u  $(-1, 1)$  intervaldan tashqarida nolga teng bo'lib,

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(x) dx = 1$$

shartni qanoatlantiradi.

Shunday ekan, istalgan  $h > 0$  uchun

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \quad (17.1.14)$$

funksiya ham cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, u manfiy,  $(-h, h)$  intervaldan tashqarida nolga teng va

$$\int_{\mathbb{R}} \omega_h(x) dx = 1 \quad (17.1.15)$$

shartni qanoatlantiradi.

Bundan istalgan  $h_n \rightarrow 0$  ketma-ketlik uchun  $\{\omega_{h_n}(x)\}$  funksiyalar ketma-ketligining delta-simon ekani kelib chiqadi (§10.6 ning 1 - bandiga qarang).

Eslatib o'tamiz, agar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funksiya sonlar o'qidagi har qanday kesmada integrallanuvchi bo'lsa, biz uni lokal integrallanuvchi deb atagan edik. Ixtiyoriy lokal integrallanuvchi  $f$  funksiya va istalgan  $h > 0$  uchun

$$f_h(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(x-y) f(y) dy \quad (17.1.16)$$

funksiyani ( $f$  funksiyaning o'rtachasi deb ataymiz) kiritamiz.

Bu funksiyaning integralda o'zgaruvchini almashtirib, quyidagi

$$f_h(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) f(y+x) dy = \int_{-h}^h \omega_h(y) f(y+x) dy \quad (17.1.17)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Oxirgi integralga,  $x$  ni parametr deb hisoblab, yuqorida isbotlangan teoremlarni qo'llashimiz mumkin. Xususan, (17.1.16) tenglikdan  $f_h(x)$  funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

(17.1.17) formula uzluksiz funksiyalarni cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar bilan tekis yaqinlashtirishda ishlatiladi.

**17.1.1 - tasdiq.** *Istalgan uzluksiz  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funksiya uchun  $\mathbb{R}$  dagi har qanday kesmada tekis ravishda*

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x) \quad (17.1.18)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** Aytaylik,  $h_n$  nolga intiluvchi musbat sonlarning ixtiyoriy ketma-ketligi bo'lsin. Yuqorida qayd qilinganidek,  $\{\omega_{h_n}(x)\}$  funksiyalar ketma-ketligi deltasimondir (§10.6 ning 1 - bandiga qarang). Shunday ekan, teoremaning o'rinli ekanligi bevosita 10.6.1 - teorema va funksiya limitining Heine ta'rifidan kelib chiqadi. ■

**1 - eslatma.** Agar  $f$  funksiya  $k$ -tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d^k f_h(x)}{dx^k} = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

tenglik bajariladi.

Buni isbotlash uchun (17.1.17) formula o'rniga

$$f_h^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) f^{(k)}(y+x) dy$$

tenglikdan foydalanish yetarli.

**2 - eslatma.** (17.1.18) tenglikning biror tayinlangan  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada bajarilishi uchun  $f$  funksiyaning  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida uzluksizligini talab qilish shart emas. Buning uchun  $f$  funksiyaning aynan o'sha  $x$  nuqtada uzluksiz bo'lishi kifoya. Haqiqatan, (17.1.17) ta'rif va (17.1.15) shartga ko'ra,

$$f_h(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) [f(x+y) - f(x)] dy. \quad (17.1.19)$$

Demak,

$$\begin{aligned} |f_h(x) - f(x)| &\leq \sup_{|y| \leq h} |f(x+y) - f(x)| \int_{|y| \leq h} \omega_h(y) dy = \\ &= \sup_{|y| \leq h} |f(x+y) - f(x)|. \end{aligned}$$

Endi, funksiya uzluksiz bo'lgan har bir nuqtada o'ng taraf  $h \rightarrow 0$  da nolga intilishini qayd etish yetarli.

(17.1.17) funksiyadan uzilishga ega funksiyalarni silliqlashda ham foydalaniladi.

**17.1.5 - misol.** Quyidagi

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (17.1.20)$$

funksiyani qaraylik.

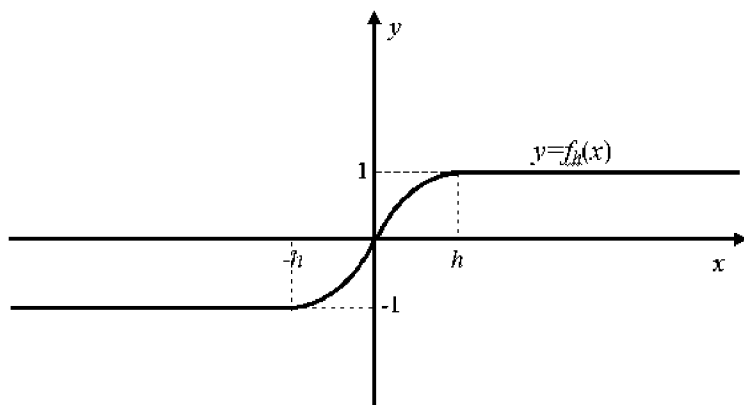
(17.1.17) tenglikdan mos silliqlangan  $f_h(x)$  funksiyaning  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi. Bundan

tashqari, bu funksiya  $|x| \geq h$  da  $\text{sign } x$  funksiya bilan ustma-ust tushadi.

Haqiqatan, agar  $x > h$  bo'lsa,  $f(y+x)$  funksiya  $-h \leq y \leq h$  da 1 ga teng va shuning uchun, (17.1.17) dan  $f_h(x) = 1$  tenglikni olamiz. Shunga o'xshash, agar  $x < -h$  bo'lsa,  $f_h(x) = -1$ . Demak, qaralayotgan holda

$$f_h(x) = \text{sign } x, \quad |x| > h,$$

va  $-h \leq x \leq h$  kesmada esa,  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida cheksiz differentsiallanuvchi bo'lgan holda,  $f_h(x)$  funksiya  $-1$  dan  $1$  gacha o'sadi (17.1 - rasm).



17.1-rasm

Yuqoridagi singari mulohazalarni navbatdagi funksiyaga ham qo'llash mumkin.

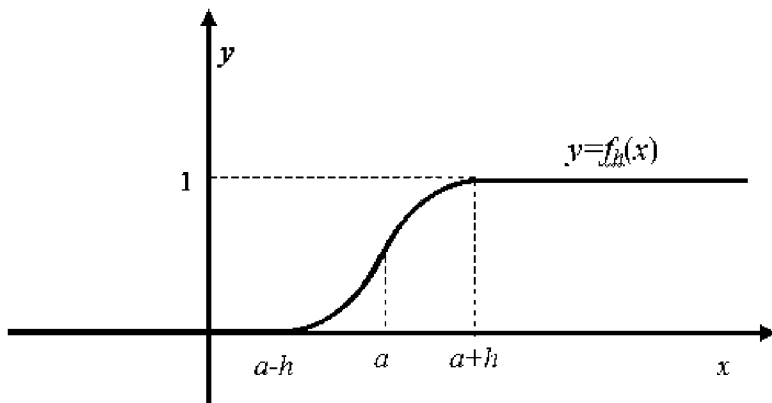
**17.1.6 - misol.** Istalgan  $a \in \mathbb{R}$  uchun Hevisayd yoki «zina» deb ataluvchi

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a, \end{cases} \quad (17.1.21)$$

funksiyani qaraymiz.



Bu funksiyaning (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan  $\chi_h(x)$  o'rtachasi,  $x \leq a-h$  da 0 ga va  $x \geq a+h$  da 1 ga teng.  $a-h \leq x \leq a+h$  kesmada  $\chi_h(x)$  funksiya,  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida cheksiz differensiallanuvchi bo'lgan holda, 0 dan 1 gacha o'sadi (17.2 - rasm).



17.2-rasm

8. Albatta, Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday  $f$  funksiyani cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar bilan tekis approksimatsiyalash mumkin emas, chunki  $f$  uzluksiz bo'lmashligi ham mumkin. Shunday bo'lsada, o'rtacha ma'noda (ya'ni quyida keltirilgan (17.2.22) tenglik ma'nosida) bunday approksimatsiyalash o'rinli.

**17.1.2 - tasdiq.** Agar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda istalgan  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  kesmada

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx = 0 \quad (17.1.22)$$

tenglik o'rinli, bu yerda  $f_h$  funksiya (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan.

**Isbot.** (17.1.19) tenglikka ko'ra,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx &\leq \int_a^b dx \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) |f(x+y) - f(x)| dy = \\ &= \int_{|y| \leq h} \omega_h(y) dy \int_a^b |f(x+y) - f(x)| dx. \end{aligned} \quad (17.1.23)$$

10 - bobdagi 10.8.3 - teoreмага asosan, istalgan lokal integrallanuvchi  $f$  funksiya uchun

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+y) - f(x)| dx = 0.$$

Bundan chiqdi, istalgan  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta > 0$  topiladiki,  $|y| < \delta$  bo'lganda

$$\int_a^b |f(x+y) - f(x)| dx < \varepsilon$$

baho bajariladi.

Demak,  $h < \delta$  da (17.1.23) va (17.1.15) munosabatlarga ko'ra,

$$\int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon \int_{|y| \leq h} \omega_h(y) dy = \varepsilon.$$

Bu esa talab qilingan (17.1.22) tenglikning bajarilishini anglatadi. ■

O'rta kvadratik yaqinlashish uchun ham shunga o'xshash tasdiq o'rinli.

**17.1.3 - tasdiq.** Agar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funksiya lokal integrallanuvchi bo'lsa,  $u$  holda istalgan  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  kesmada

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (17.1.24)$$

tenglik o'rinli, bu yerda  $f_h$  funksiya (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan.

**Isbot.** Ma'lumki, biror kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiya shu kesmada chegaralangan bo'ladi. Shartga ko'ra  $f$  funksiya lokal integrallanuvchi bo'lgani sababli, u har bir kesmada chegaralangan va xususan,  $[a-1, b+1]$  kesmada ham, ya'ni

$$|f(x)| \leq M, \quad a-1 \leq x \leq b+1.$$

Bevosita (17.1.16) formula va silliqlovchi  $\omega_h$  yadro xossalariga ko'ra,  $f$  funksiyani approksimatsiyalovchi  $f_h(x)$  funksiya ham  $0 < h \leq 1$  uchun  $[a, b]$  kesmada xuddi o'sha  $M$  o'zgarimas bilan tekis chegaralangan. Ya'ni:

$$|f(x) - f_h(x)|^2 \leq 2M|f(x) - f_h(x)|, \quad a \leq x \leq b.$$

Demak, (17.1.24) munosabat to'g'ridan to'g'ri (17.1.22) dan kelib chiqadi. ■

**9.** Funksiyani silliqlashning yuqorida o'rganilgan usuli matematika-kada keng foydalaniladi. Biz buni, 6 - bobda ancha chegaralovchi shartlar ostida isbotlangan, ikkinchi o'rta qiymat formulasi misolida ko'rsatamiz. Quyida bu formulani umumiyroq (klassik) ko'rinishining isboti keltiriladi.

**17.1.4 - tasdiq (ikkinchi o'rta qiymat formulasi).** Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $[a, b]$  kesmada integrallanuvchi bo'lib,  $g$  funksiya esa, bu kesmada monoton va kesma chekkalarida uzluksiz bo'lsin. U holda shunday  $\xi \in [a, b]$  nuqta topiladiki, u uchun

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (17.1.25)$$

tenglik (Bonne formulasi) bajariladi.

**Isbot.** Avvalo shuni qayd etish joizki, har qanday monoton funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi (6.5.1 - teoremaga qarang) bo'lgani sababli, (17.1.25) formulaning chap qismidagi integral ma'noga ega.

Eslatib o'tamiz, 6 - bobda (17.1.25) formula  $f$  uzluksiz va  $g$  esa, differensiallanuvchi funksiya bo'lgan holda isbotlangan edi ((6.5.29) formulaga qarang).

$f$  funksiyani  $[a, b]$  kesmadan  $\mathbb{R}$  to'g'ri chiziqqa  $x < a$  da  $f(x) = f(a)$  deb va  $x > b$  da  $f(x) = f(b)$  deb davom ettiramiz. Xuddi shu usulda  $g$  funksiyani ham davom ettiramiz.  $f_h(x)$  simvol orqali  $f$  funksiyaning (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan o'rtachasini belgilaymiz.  $g_h(x)$  belgilash ham xuddi shu ma'noga ega.

Bu ikki funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lib,  $g_h(x)$  monoton hamdir. Haqiqatan, aytaylik,  $g(x)$  o'suvchi bo'lib,  $x_1 < x_2$  bo'lsa, u holda, (17.1.17) ta'rifga ko'ra,

$$g_h(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) g(y + x_1) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_h(y) g(y + x_2) dy = g_h(x_2).$$

Shunday ekan, biz  $f_h(x)$  va  $g_h(x)$  silliq funksiyalarga 6 - bobda isbotlangan ikkinchi o'rta qiymat formulasini qo'llashimiz mumkin. Natijada

$$\int_a^b f_h(x) g_h(x) dx = g_h(a) \int_a^{\xi_h} f_h(x) dx + g_h(b) \int_{\xi_h}^b f_h(x) dx \quad (17.1.26)$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda  $\xi_h [a, b]$  kesmaning biror nuqtasidir.

17.1.2 - tasdiqqa ko'ra,  $h \rightarrow 0$  da  $f_h$  va  $g_h$  funksiyalar mos ravishda  $f$  va  $g$  funksiyalarga o'rtacha ma'noda yaqinlashadi. Bundan tashqari, 17.1.1 - tasdiqqa keltirilgan 2 - eslatmaga ko'ra,

$$g_h(a) \rightarrow g(a), \quad g_h(b) \rightarrow g(b), \quad h \rightarrow 0.$$

Aytaylik,  $\{h_n\}$  biror cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lib,  $h$  indeks  $h_n$  qiymatlarni qabul qilsin.  $\xi_{h_n}$  sonli ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, Boltsano-Veyershtross teoremasiga ko'ra, undan biror  $\xi \in [a, b]$  nuqtaga intiluvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. (17.1.26) tenglikda  $h$  indeksni shu ketma-ketlik bo'yicha nolga intiltirsak, talab qilingan (17.1.25) formulani olamiz. ■

**Eslatma.** 3.4.1 - teoremaga ko'ra, har qanday monoton  $g$  funksiya istalgan  $c$  nuqtada bir taraffi  $g(c \pm 0)$  limit qiymatlarga ega. Ikkinchi o'rta qiymat formulasi  $g$  funksiya  $a$  va  $b$  nuqtalarda uzluksiz bo'lmagan holda ham o'rinli ekanini ko'rsatish oson. Umumiy holda bu formula

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b-0) \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (17.1.27)$$

ko'rinishda yoziladi.

## 17.2-§. Parametrga bog'liq xosmas integrallar

### 1. Parametrga bog'liq birinchi tur xosmas integrallar-ning tekis yaqinlashishi.

1<sup>o</sup>. Faraz qilaylik,  $f(x, y)$  funksiya

$$Q_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y < \infty\}$$

yarim tasmada berilgan bo'lib, har bir  $x \in [a, b]$  uchun  $[c, +\infty)$  yarim to'g'ri chiziqda xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsin. U holda, *parametrga bog'liq birinchi tur xosmas integral* deb ataluvchi, quyidagi

$$\Phi(x) = \int_c^{\infty} f(x, y) dy \quad (17.2.1)$$

funksiya  $[a, b]$  kesmada aniqlangan bo'ladi.

**Eslatma.** Ikki va undan ortiq parametrga bog'liq xosmas integrallar ham xuddi shunday aniqlanadi. Masalan, navbatdagi

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx$$

va

$$\Psi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx$$

ikki integral  $\alpha$  va  $\beta$  parametrlarga bog'liq xosmas integrallardir.

Bu integrallarning istalgan  $\alpha > 0$  parametr uchun yaqinlashishi (17.1.11) va (17.1.12) tengliklardan kelib chiqadi. Haqiqatan, bu tengliklarda  $R \rightarrow +\infty$  deb limitga o'tsak,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0, \quad (17.2.2)$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0 \quad (17.2.3)$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

**Ta'rif.** Agar (17.2.1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib, istalgan  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $A > 0$  son topilsaki, barcha  $x \in [a, b]$  lar uchun

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y) dy \right| < \varepsilon$$

baho bajarilsa, bu xosmas integralni  $x \in [a, b]$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi deyimiz.

**Eslatma.** Faraz qilaylik,  $f(x, y)$  funksiya  $x \in [a, b]$  parametrning har bir qiymatida  $y \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lsin. Koshi kriteriysiga ko'ra, agar istalgan  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $A_\varepsilon > 0$  son topilsaki, har qanday  $B > A \geq A_\varepsilon$  va barcha  $x \in [a, b]$  lar uchun

$$\left| \int_A^B f(x, y) dy \right| < \varepsilon \quad (17.2.4)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (17.2.1) xosmas integral  $x \in [a, b]$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

$E \subset \mathbb{R}$  to'plam kesma bo'lmagan holda ham bu to'plamga tegishli parametr bo'yicha tekis yaqinlashish xuddi yuqoridagidek aniqlanadi.

Parametrga bog'liq xosmas integral tekis yaqinlashishining navbatdagi yetarli sharti tadbirlarda ko'p uchraydi.

**17.2.1 - teorema (Veyershtrass alomati).** *Faraz qilaylik, har bir  $x \in [a, b]$  uchun  $f(x, y)$  funksiya  $y \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib,*

$$|f(x, y)| \leq g(y), \quad (x, y) \in Q_+,$$

shart bajarilsin. Agar

$$\int_c^\infty g(y) dy$$

integral yaqinlashsa, u holda (17.2.1) integral  $x \in [a, b]$  bo'yicha tekis yaqinlashadi.

**Isbot** parametrga bog'liq xosmas integral tekis yaqinlashishining (17.2.4) Koshi kriteriyasi va

$$\left| \int_A^B f(x, y) dx \right| \leq \int_A^B g(y) dy$$

bahodan kelib chiqadi.

Haqiqatan, teorema shartiga ko'ra, istalgan  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $A_\varepsilon > 0$  son topiladiki, barcha  $B > A \geq A_\varepsilon$  lar uchun o'ng tarafdagi integral  $\varepsilon$  dan kichik bo'ladi. Demak, chap taraf ham bir vaqtning o'zida barcha  $x$  lar uchun o'sha  $\varepsilon$  dan kichik bo'ladi. ■

**17.2.1 - misol.** Ushbu

$$\int_0^\infty e^{-y} \sin(x^2 + y^2) dy$$

integralning  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashishini ko'rsating.

17.2.1 - teorema ko'ra, berilgan integralning tekis yaqinlashishi  $e^{-y}$  funksiyani  $y \geq 0$  yarim to'g'ri chiziqda integrallanuvchi ekani va quyidagi

$$|e^{-y} \sin(x^2 + y^2)| \leq e^{-y}$$

bahodan kelib chiqadi.

2<sup>0</sup>. Tekis yaqinlashishning Dirixle-Abel alomati nisbatan nozik-roq alomatdir.

Faraz qilaylik,  $f(x, \alpha)$  funksiya  $\alpha$  parametrning biror  $E \subset \mathbb{R}$  to'plamdan olingan barcha qiymatlarida  $x \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda aniqlangan bo'lsin. Agar  $x$  bo'yicha differensiallanuvchi shunday  $F(x, \alpha)$  funksiya topilsaki, u uchun  $x$  va  $\alpha$  ga bog'liqmas biror  $M$  soni bilan

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = f(x, \alpha), \quad |F(x, \alpha)| \leq M, \quad x \geq c, \quad \alpha \in E, \quad (17.2.5)$$

munosabatlar bajarilsa, biz  $f$  funksiyani  $x \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda  $\alpha \in E$  bo'yicha tekis chegaralangan boshlang'ich funksiyaga ega deymiz.

**17.2.2 - teorema (Dirixle-Abel alomati).** Faraz qilaylik,  $f(x, \alpha)$  funksiya parametrning har bir  $\alpha \in E$  qiymatida  $x \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib, bu yarim to'g'ri chiziqda  $\alpha \in E$  bo'yicha tekis chegaralangan boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsin. Bundan tashqari,  $g(x)$  funksiya  $x \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda monoton kamayuvchi bo'lib,  $x \rightarrow +\infty$  da nolga intilsin.

$U$  holda

$$\int_c^\infty f(x, \alpha)g(x) dx \quad (17.2.6)$$

xosmas integral  $\alpha \in E$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

**Isbot.** Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $A_\varepsilon$  son topilib,



istalgan  $B > A \geq A_\varepsilon$  va barcha  $\alpha \in E$  larda

$$\left| \int_A^B f(x, \alpha)g(x) dx \right| < \varepsilon \quad (17.2.7)$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz.

Aytaylik,  $F(y, \alpha)$  funksiya  $f(y, \alpha)$  funksiyaning (17.2.5) shartlarini qanoatlantiruvchi boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. (17.1.27) ikkinchi o'rta qiymat formulasini qo'llasak,

$$\int_A^B f(x, \alpha)g(x) dx = g(A+0) \int_A^\xi f(x, \alpha) dx + g(B-0) \int_\xi^B f(x, \alpha) dx$$

tenglikni olamiz.

Nyuton-Leybnits formulasini e'tiborga olib, bu tenglikni

$$\begin{aligned} & \int_A^B f(x, \alpha)g(x) dx = \\ & = g(A+0)[F(\xi, \alpha) - F(A, \alpha)] + g(B-0)[F(B, \alpha) - F(\xi, \alpha)] \end{aligned}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bundan chiqdi, (17.2.5) shart va  $g$  funksiyaning monoton kamayuvchi ekanini hisobga olsak,

$$\left| \int_A^B f(x, \alpha)g(x) dx \right| \leq 4Mg(A)$$

bahoga ega bo'lamiz.

$A \rightarrow +\infty$  da  $g(A) \rightarrow 0$  bo'lgani uchun,  $A_\varepsilon$  ni

$$g(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

shartdan tanlab olish mumkin. Demak, talab qilingan (17.2.7) baho o'rinli ekan. ■

**17.2.2 - misol.** Agar  $E$  sonlar o'qining nol kirmaydigan istalgan kesmasi bo'lsa, har qanday tayinlangan  $\beta > 0$  uchun

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty} x^{1-\beta} \cos(\alpha x^2) dx$$

integral  $\alpha \in E$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Haqiqatan,

$$F(x, \alpha) = \frac{\sin(\alpha x^2)}{2\alpha}, \quad g(x) = x^{-\beta}$$

deylik.

Agar

$$f(x, \alpha) = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = x \cos(\alpha x^2)$$

deb belgilasak,

$$f(x, \alpha)g(x) = x^{1-\beta} \cos(\alpha x^2)$$

bo'ladi. Endi Dirixle-Abel alomatidan foydalanish yetarli.

Yana N. Abel va P. Dirixle nomlari bilan bog'liq tekis yaqinlashish alomatining boshqa ko'rinishini keltiramiz.

**17.2.3 - teorema (Abel-Dirixle alomati).** Faraz qilaylik, quyidagi

$$\int_c^{\infty} f(x) dx \tag{17.2.8}$$

xosmas integral yaqinlashsin.

Bundan tashqari,  $g(x, \alpha)$  funksiya har bir  $\alpha \in E$  da  $x \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda monoton kamayib,

$$0 \leq g(x, \alpha) \leq M, \quad x \geq c, \quad \alpha \in E, \tag{17.2.9}$$

shartni qanoatlantirsin, bu yerda  $M$  o'zgarmas  $x$  va  $\alpha$  ga bog'liq emas.

$U$  holda

$$\int_c^{\infty} f(x)g(x, \alpha) dx$$

xosmas integral  $\alpha \in E$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi.

**Isbot.** Agar

$$F(x) = \int_x^{\infty} f(y) dy$$

va

$$\varepsilon(R) = \sup_{x \geq R} |F(x)|$$

deb belgilasak, (17.2.8) xosmas integral yaqinlashgani uchun,  $\varepsilon(R)$  kattalik  $R$  o'sganda monoton kamayib,  $R \rightarrow \infty$  da nolga intiladi.

Keyingi mulohazalar 17.2.2 - teorema isbotiga o'xshash bo'lib, quyidagi

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x)g(x, \alpha) dx &= g(A-0, \alpha) \int_A^{\xi} f(x) dx + g(B-0, \alpha) \int_{\xi}^B f(x) dx = \\ &= g(A-0, \alpha) [F(\xi) - F(A)] + g(B-0, \alpha) [F(B) - F(\xi)] \end{aligned}$$

ikkinchi o'rta qiymat formulasiga asoslanadi.

Bu formuladan, (17.2.9) shartlarni hisobga olsak,

$$\left| \int_A^B f(x)g(x, \alpha) dx \right| \leq M[\varepsilon(\xi) + \varepsilon(A)] + M[\varepsilon(B) + \varepsilon(\xi)] \leq 4M\varepsilon(A)$$

baho kelib chiqadi. Demak, teorema o'rinli ekan. ■

**17.2.3 - misol.** Quyidagi integralning  $\alpha \geq 0$  bo'yicha tekis yaqinlashishini ko'rsating:

$$J(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos x^2 dx.$$

Buning uchun

$$f(x) = \cos x^2, \quad g(x, \alpha) = e^{-\alpha x^2}$$

funksiyalar 17.2.3 - teorema shartlarini qanoatlantirishini qayd etish yetarli.

3<sup>o</sup>. Faraz qilaylik,  $f(x, y)$  funksiya uzluksiz bo'lib,  $g(y)$  lokal integrallanuvchi bo'lsin. Parametrga bog'liq xosmas integralning quyidagi

$$\Phi(x) = \int_c^{\infty} g(y)f(x, y) dy \quad (17.2.10)$$

maxsus ko'rinishini o'rganamiz.

Buning uchun

$$\Phi_n(x) = \int_c^{c+n} g(y)f(x, y) dy \quad (17.2.11)$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz.

Agar (17.2.10) integral biror  $\Phi(x)$  funksiya tekis yaqinlashsa,  $\Phi_n(x)$  ketma-ketlik ham  $n \rightarrow \infty$  da  $\Phi(x)$  ga tekis yaqinlashadi. Boshqacha aytganda,  $x \in [a, b]$  bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^A g(y)f(x, y) dy = \Phi(x) \quad (17.2.12)$$

limitning mavjudligidan  $x \in [a, b]$  bo'yicha tekis ravishda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^{c+n} g(y)f(x, y) dy = \Phi(x) \quad (17.2.13)$$

ketma-ketlik limitining mavjudligi kelib chiqadi.

Ammo teskarisi o'rinli emas. Masalan,  $g(y) = \cos \pi y$  va  $f(x, y) \equiv 1$  funksiya uchun  $c = 0$  da

$$\int_0^n \cos \pi y dy = \frac{1}{\pi} \sin n\pi y \Big|_{y=0}^{y=n} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lib, (17.2.13) limit mavjud va u nolga teng. Lekin unga mos (17.2.12) limit mavjud emas, chunki

$$\int_0^A \cos \pi y \, dy = \frac{1}{\pi} \sin \pi A.$$

Ammo, shunga qaramasdan, agar  $f(x, y)$  va  $g(y)$  funksiyalar manfiymas bo'lsa, teskari tasdiq ham o'rinli bo'ladi, ya'ni (17.2.13) limit mavjudligidan (17.2.12) limitning mavjudligi kelib chiqadi. Haqiqatan, agar biror natural  $N$  uchun

$$\Phi(x) - \Phi_N(x) = \int_{c+N}^{\infty} g(y)f(x, y) \, dy < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda  $A \geq c + N$  da bundan

$$\int_A^{\infty} g(y)f(x, y) \, dy < \varepsilon$$

baho kelib chiqadi. Demak, (17.2.10) integral tekis yaqinlashar ekan.

4<sup>0</sup>. Tekis yaqinlashuvchi parametrga bog'liq xosmas integrallar xos integrallar xossalarga o'xshash xossalarga ega.

**17.2.4 - teorema.** *Faraz qilaylik,  $g$  funksiya  $[c, +\infty)$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib,  $f$  funksiya esa,  $Q_+ = [a, b] \times [c, +\infty)$  yarim tasmada uzluksiz bo'lsin.*

*Agar (17.2.10) xosmas integral biror kesmada parametr bo'yicha tekis yaqinlashsa, u holda bu integral o'sha kesmada parametrning uzluksiz funksiyasi bo'ladi.*

**Isbot.** 17.1.1 - teoreмага ko'ra, (17.2.11) funksiyalar ketma-ketligi uzluksiz funksiyalardan tashkil topgan. Shartga ko'ra, bu ketma-ketlik tekis yaqinlashadi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \int_c^{\infty} g(y)f(x, y) \, dy$$

tenglik o'rinli.

Shunday ekan, integral parametrning uzluksiz funksiyasi bo'lishi tekis yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi limitining uzluksizligi haqidagi teoremdan kelib chiqadi (10.1.2 - teoreмага qarang).■

**Eslatma.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qi bo'yicha xosmas integrallar ham xuddi yuqoridagi singari xossalarga ega. Bunda  $g$  funksiyadan hech qanday sillqlik talab qilinmaydi. Masalan,  $\mathbb{R}$  sonlar o'qi bo'yicha absolyut integrallanuvchi  $g(y)$  funksiya uchun

$$C(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cos y\xi \, dy, \quad S(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \sin y\xi \, dy$$

integrallar, Veyershtross alomatiga ko'ra, tekis yaqinlashadi va 17.2.4 - teoreмага ko'ra esa, ular uzluksiz funksiyalardir.

Navbatdagi tasdiq qandaydir ma'noda 17.2.4 - teoreмага teskari tasdiqdir.

**17.2.5 - teorema.** Faraz qilaylik,  $g$  funksiya  $[c, +\infty)$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib,  $f$  funksiya esa,  $Q_+$  yarim tasmada uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari,  $g(y) \geq 0$  va  $f(x, y) \geq 0$  shartlar bajarilsin.

Agar (17.2.10) integral yaqinlashib,  $[a, b]$  kesmada parametrning uzluksiz funksiyasi bo'lsa,  $u$  holda bu integral o'sha kesmada tekis yaqinlashadi.

**Isbot.** Dini teoremasiga ko'ra (10.4.1 - teoreмага qarang), (17.2.11) ketma-ketlik tekis yaqinlashadi. U holda,  $2^0$  banddagi muhohazalarga asosan, (17.2.10) integral ham tekis yaqinlashadi.■

**2. Parametrga bog'liq xosmas integrallarning differensiallanuvchanligi.**

**17.2.6 - teorema.** Faraz qilaylik,  $y \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi  $g$  funksiya va  $f \in C(Q_+)$  funksiya shunday bo'lsinki, bunda (17.2.10) xosmas integral barcha  $x \in [a, b]$  larida yaqinlashsin. Agar  $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(Q_+)$  va quyida keltirilgan (17.2.14) tenglikning o'ng tarafidagi integral  $x$  bo'yicha  $[a, b]$  kesmada tekis

yaqinlashsa, u holda (17.2.10) xosmas integral  $[a, b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyaga yaqinlashadi va

$$\frac{d}{dx} \int_c^{\infty} g(y)f(x, y) dy = \int_c^{\infty} g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (17.2.14)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** Agar

$$\Phi_n(x) = \int_c^{c+n} g(y)f(x, y) dy$$

desak, 17.1.3 - teorema ko'ra, bu funksiyalar  $[a, b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{d\Phi_n(x)}{dx} = \int_c^{c+n} g(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$$

tenglik bajariladi.

Teorema shartidan  $\frac{d\Phi_n(x)}{dx}$  ketma-ketlikni (17.2.14) ning o'ng tarafidagi integralga  $[a, b]$  kesmada tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Shunday ekan, 10.3.2 - teorema asosan,  $\{\Phi_n(x)\}$  ketma-ketlik uzluksiz differensiallanuvchi (17.2.10) funksiyaga  $[a, b]$  kesmada tekis yaqinlashadi va bunda (17.2.14) tenglik bajariladi. ■

Xosmas integrallarni parametr bo'yicha differensiallash ularni hisoblashda samarali qo'llaniladi. Masalan, (17.2.2) va (17.2.3) tengliklarni  $\alpha$  parametr bo'yicha differensiallab,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x \cos \beta x dx = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0, \quad (17.2.15)$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x \sin \beta x dx = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0, \quad (17.2.16)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

$\alpha$  va  $\beta$  parametrlar bo'yicha differensiallashni davom ettirib, xosmas integrallar uchun boshqa formulalarni ham olish mumkin.

Navbatdagi misolda integralni hisoblash uchun avval uni parametr bo'yicha differensiallab, so'ngra uni yana integrallanadi.

**17.2.4 - misol.** Ixtiyoriy  $\alpha > 0$  va  $\beta \in \mathbb{R}$  lar uchun

$$I_\alpha(\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

xosmas integral hisoblansin.

Bu integral  $\alpha > 0$  da  $\beta \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashadi. 17.2.6 - teoremaga ko'ra esa,

$$\frac{dI_\alpha(\beta)}{d\beta} = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \beta x dx.$$

Differensiallash mumkinligi

$$|e^{-\alpha x} \cos \beta x| \leq e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0,$$

baho va o'ng tarafdagi funksiyaning integrallanuvchi ekanidan kelib chiqadi.

(17.2.2) formulaga ko'ra,

$$\frac{dI_\alpha(\beta)}{d\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Demak,

$$I_\alpha(\beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha).$$

Agar  $\beta = 0$  da  $I_\alpha(0) = 0$  va  $\operatorname{arctg} 0 = 0$  ekanini hisobga olsak,  $C(\alpha) \equiv 0$  ayniyatni olamiz. Shunday qilib,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (17.2.17)$$



Ba'zi hollarda bu usulni qo'llash juda sodda differensial tenglamalarni yechishni talab qiladi.

**17.2.5 - misol.** Istalgan  $\alpha > 0$  va  $\beta \in \mathbb{R}$  lar uchun

$$J_\alpha(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \lambda x dx$$

xosmas integral hisoblansin.

$\lambda$  parametr bo'yicha differensiallab, so'ngra bo'laklab integrallasak,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\alpha(\lambda)}{d\lambda} &= - \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x \sin \lambda x dx = \\ &= \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \sin \lambda x \Big|_{x=0}^\infty - \frac{\lambda}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \lambda x dx = - \frac{\lambda}{2\alpha} J_\alpha(\lambda) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\frac{d}{d\lambda} \ln J_\alpha(\lambda) = - \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Hosil bo'lgan differensial tenglamani integrallasak,

$$\ln J_\alpha(\lambda) = - \frac{\lambda^2}{4\alpha} + C(\alpha)$$

yoki

$$J_\alpha(\lambda) = C_0(\alpha) e^{-\lambda^2/4\alpha}$$

ko'rinishdagi umumiy yechimni olamiz.

$\lambda = 0$  deb,  $C_0(\alpha)$  o'zgarmasni topamiz:

$$C_0(\alpha) = J_\alpha(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Demak,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \lambda x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\lambda^2/4\alpha}. \quad (17.2.18)$$

### 3. Xosmas integrallarda integrallash tartibini o'zgartirish.

Ushbu bandda chegaralanmagan yopiq

$$Q_{++} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < \infty, \quad c \leq y < \infty\}$$

sohada berilgan uzluksiz funksiyani, ya'ni  $f(x, y) \in C(Q_{++})$  funksiyani qaraymiz. Bundan tashqari,  $f(x, y)$  funksiya har bir  $y \geq c$  da  $x$  bo'yicha  $[a, +\infty)$  yarim to'g'ri chiziqda xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsin deymiz.

Faraz qilaylik,  $g(y)$  funksiya  $y \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lib, har bir  $x \geq a$  da  $g(y)f(x, y)$  ko'paytma  $y$  bo'yicha  $[c, +\infty)$  sohada xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lsin.

Keltirilgan shartlarda  $x \geq a$  yarim to'g'ri chiziqda

$$\Phi(x) = \int_c^{\infty} g(y)f(x, y) dy \quad (17.2.19)$$

funksiya va  $y \geq c$  yarim to'g'ri chiziqda esa,

$$\Psi(y) = g(y) \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad (17.2.20)$$

funksiya aniqlangan bo'ladi.

**17.2.7 - teorema.** Faraz qilaylik,  $f \in C(Q_{++})$  funksiya va lokal integrallanuvchi  $g$  funksiya

$$f(x, y) \geq 0, \quad g(y) \geq 0$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Bundan tashqari, (17.2.19) va (17.2.20) integrallar parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashsin.

U holda, agar quyida keltirilgan integrallardan biri yaqinlashsa, ikkinchisi ham yaqinlashib,

$$\int_a^{\infty} \Phi(x) dx = \int_c^{\infty} \Psi(y) dy \quad (17.2.21)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** Aytaylik, (17.2.21) integrallardan birinchisi yaqinlashsin. Shartga ko'ra, quyidagi monoton o'suvchi

$$\Phi_n(x) = \int_c^{c+n} g(y)f(x,y) dy, \quad \Psi_m(y) = \int_a^{a+m} g(y)f(x,y) dx \quad (17.2.22)$$

ketma-ketliklar  $\Phi(x)$  va  $\Psi(y)$  funksiyalarga mos ravishda yaqinlashadi. Bu ikki funksiya 17.2.4 - teoreмага ko'ra uzluksiz bo'lgani sababli, ular lokal integrallanuvchidir.

17.1.2 - teoreмага ko'ra,

$$\int_a^{a+m} \Phi_n(x) dx = \int_c^{c+n} \Psi_m(y) dy. \quad (17.2.23)$$

$\Psi_m$  ketma-ketlik o'suvchi bo'lgani sababli,  $\Psi_m(x) \leq \Psi(x)$ . Demak,

$$\int_c^{c+n} \Psi_m(y) dy \leq \int_c^{c+n} \Psi(y) dy \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy$$

va yuqoridagi farazimizga ko'ra, o'ng tarafdagi integral yaqinlashadi.

Bu tengsizlik va (17.2.23) tenglikdan quyidagi

$$\int_a^{a+m} \Phi_n(x) dx \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy \quad (17.2.24)$$

munosabatni olamiz.

$\Phi_n(x)$  ketma-ketlik  $n \rightarrow \infty$  da  $\Phi(x)$  funksiyaga  $a \leq x \leq a + m$  kesmada tekis yaqinlashgani sababli, 10.3.1 - teoreмага ko'ra, tayinlangan  $m$  da integral ostida limitga o'tish mumkin. Shunday ekan,  $n \rightarrow \infty$  deb, (17.2.24) tengsizlikdan

$$\int_a^{a+m} \Phi(x) dx \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy$$

bahoga ega bo'lamiz.

Agar  $m \rightarrow \infty$  desak,

$$\int_a^{\infty} \Phi(x) dx \leq \int_c^{\infty} \Psi(y) dy. \quad (17.2.25)$$

Shunday qilib, isbotlanayotgan (17.2.21) tenglikning o'ng tarafida turgan integralning yaqinlashishidan uning chap tarafida turgan integralni yaqinlashishi kelib chiqar ekan.

Endi biz,  $\Phi$  va  $\Psi$  funksiyalarning o'rnini almashtirib, yuqoridagi mulohazalarni qaytarsak,

$$\int_c^{\infty} \Psi(y) dy \leq \int_a^{\infty} \Phi(x) dx$$

teskari tengsizlikni hosil qilamiz.

Oxirgi ikki tengsizlikdan talab qilingan (17.2.21) tenglik kelib chiqadi. ■

**Natija.** 17.2.7 - teorema shartlari bajarilganda  $g(y)f(x, y)$  funksiya ikki o'lchovli  $Q_{++}$  sohada xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'lib,

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy &= \int_c^{\infty} g(y) dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \\ &= \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} g(y)f(x, y) dy \end{aligned} \quad (17.2.26)$$

tengliklar bajariladi.

Haqiqatan, (17.2.26) takroriy integrallardan biri mavjud desak, u holda, 17.2.7 - teoreмага ko'ra, ikkinchisi ham mavjud va ular o'zaro teng bo'ladi. So'ngra, agar istalgan  $n$  va  $m$  nomerlar uchun

$Q_{nm} = [a, a+n] \times [c, c+m]$  orqali tomonlari uzunligi  $n \times m$  bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni belgilasak, 13.5.1 - teoreмага ko'ra,

$$\iint_{Q_{nm}} g(y)f(x, y) dx dy = \int_c^{c+m} g(y) dy \int_a^{a+n} f(x, y) dx \quad (17.2.27)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak,  $f$  funksiya manfiy emas bo'lgani uchun,

$$\iint_{Q_{nm}} g(y)f(x, y) dx dy \leq \int_c^{\infty} g(y) dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx.$$

Bu baho va 14.1.2 - teoreмага ko'ra, (17.2.26) ning chap tarafidagi ikki karrali integral yaqinlashadi va

$$\iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy \leq \int_c^{\infty} g(y) dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad (17.2.28)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Boshqa tarafdin, (17.2.27) tenglik va  $g(y)f(x, y) \geq 0$  shartga ko'ra,

$$\iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy \geq \int_c^{c+m} g(y) dy \int_a^{a+n} f(x, y) dx .$$

Bu tengsizlikda  $n \rightarrow +\infty$ , so'ngra  $m \rightarrow +\infty$  deb,

$$\iint_{Q_{++}} g(y)f(x, y) dx dy \geq \int_c^{\infty} g(y) dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad (17.2.29)$$

tengsizlikka kelamiz.

(17.2.28) va (17.2.29) baholardan talab qilingan (17.2.26) tenglik kelib chiqadi.

**Eslatma.** 17.2.7 - teoremda integral ostidagi funksiyaning manfiylik sharti muhimdir. Bu shart olib tashlanganda teorema tasdiq'i o'z kuchini yo'qotishini navbatdagi misolda ko'ramiz.

**17.2.6 - misol.**  $\mathbb{R}^2$  tekislikda

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

to'g'ri to'rtburchak va

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & (x, y) \in P, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus P, \end{cases}$$

funksiya berilgan bo'lsin.

Ravshanki, bu funksiya tekislikda uzluksiz bo'lib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx = \sin y \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \sin y, \quad 0 \leq y \leq 2\pi,$$

va

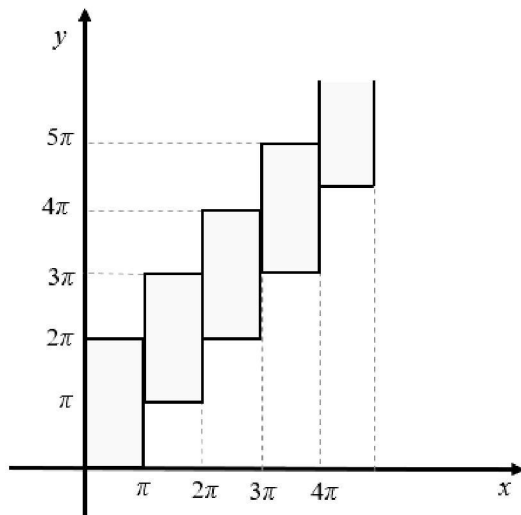
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = \sin x \int_0^{2\pi} \sin y dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

tengliklarni qanoatlantiradi.

Endi

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x - k\pi, y - k\pi)$$

funksiyani kiritaylik.



17.3-rasm

Bu funksiya  $\mathbb{R}^2$  tekislikda uzluksiz bo'lib, 17.3 - rasmda tasvirlangan to'g'ri to'rtburchaklardan tashqarida nolga teng ekanini ko'rish qiyin emas.

Bevosita funksiya ta'rifidan

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy = 0, \quad x \geq 0,$$

va

$$\Psi(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 2 \sin y, & 0 \leq y \leq \pi, \\ 0, & y > \pi \end{cases}$$

tengliklarni olamiz.

Demak,

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) dx = 0$$

va

$$\int_0^{\infty} \Psi(y) dy = 2 \int_0^{\pi} \sin y dy = 4.$$

Bundan

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy \neq \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(x, y) dx.$$

kelib chiqadi.

E'tibor bering, bunda har ikki takroriy integral yaqinlashadi, buning ustiga, ichki integrallar parametr bo'yicha uning o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashadi.

Navbatdagi teoremda turli ishorali qiymat qabul qiluvchi integral ostidagi funksiyaga integrallar tartibini o'zgartirish uchun yetarli bo'lgan shartlar keltirilgan.

**17.2.8 - teorema.** Faraz qilaylik,  $F(x, y) = g(y)f(x, y)$  bo'lib,  $g$  funksiya lokal integrallanuvchi va  $f \in C(Q_{++})$  bo'lsin. Bundan tashqari, parametrga bog'liq

$$\int_a^{\infty} |F(x, y)| dx \quad \text{va} \quad \int_c^{\infty} |F(x, y)| dy$$

integrallar parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashsin va quyidagi

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} |F(x, y)| dx \quad \text{yoki} \quad \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} |F(x, y)| dy$$

takroriy integrallardan biri yaqinlashsin.

$U$  holda  $F(x, y)$  funksiya chegaralanmagan  $Q_{++}$  sohada integrallanuvchi bo'lib,

$$\iint_{Q_{++}} F(x, y) dx dy = \int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} F(x, y) dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} F(x, y) dy \quad (17.2.30)$$

tengliklar bajariladi.



**Isbot.** Agar

$$F_+(x, y) = \frac{|F(x, y)| + F(x, y)}{2}, \quad F_-(x, y) = \frac{|F(x, y)| - F(x, y)}{2}$$

desak, bu funksiyalar manfiymas bo'lib, ular

$$F_+(x, y) - F_-(x, y) = F(x, y), \quad F_+(x, y) + F_-(x, y) = |F(x, y)|$$

ayniyatlarni qanoatlantiradi.

Teorema sharti va

$$0 \leq F_{\pm}(x, y) \leq |F(x, y)|$$

tengsizliklarga ko'ra,  $F_+(x, y)$  va  $F_-(x, y)$  funksiyalar 17.2.7 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, ularning har biri uchun (17.2.30) tenglik o'rinli; bu tenglikni  $F_+$  va  $F_-$  funksiyalar uchun alohida yozib, keyin bu tengliklarni o'zaro ayirib tashlasak, xosmas integrallarning chiziqililigiga ko'ra,  $F$  uchun ham talab qilingan (17.2.30) tenglikni olamiz. ■

**Eslatma.** Shunga o'xshash natija kompleks qiymat qabul qiluvchi, ya'ni  $F(x, y) = F_1(x, y) + iF_2(x, y)$  ko'rinishdagi funksiyalar uchun ham o'rinli. Buni ko'rsatish uchun 17.2.8 - teoremani  $F_1$  va  $F_2$  funksiyalar uchun qo'llab, keyin hosil bo'lgan tengliklarni qo'shish kifoya.

**17.2.7 - misol.** Ixtiyoriy  $\alpha > 0$  va  $\beta \geq 0$  lar uchun

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)x^2} dx$$

integralni hisoblang.

Buning uchun integral ostidagi funksiyani

$$e^{-(\alpha-i\beta)x^2} = e^{-\alpha x^2} [\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2]$$

deb yozib, berilgan integral kvadratini, ya'ni quyidagi

$$I^2(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} g(x) dx \int_0^{\infty} g(y) dy = \iint_{x \geq 0, y \geq 0} e^{-(\alpha-i\beta)(x^2+y^2)} dx dy$$

integralni qutb koordinatalariga o'tib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} I^2(\alpha, \beta) &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)t} dt = \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{e^{-(\alpha-i\beta)t}}{-(\alpha-i\beta)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\alpha-i\beta} = \frac{\pi}{4} \frac{\alpha+i\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Demak,

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{\alpha+i\beta}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Agar

$$\sqrt{\alpha+i\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$$

ekanini hisobga olsak, berilgan integral qiymati uchun

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)x^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}} \right) \end{aligned} \quad (17.2.31)$$

formulaga ega bo'lamiz.

**1 - eslatma.** (17.2.31) formulada haqiqiy va mavhum qismlarni ajratsak, quyidagi ikki

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{\alpha^2+\beta^2}} \quad (17.2.32)$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \sin \beta x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\alpha^2+\beta^2}} \quad (17.2.33)$$

formulani olamiz.

**2 - eslatma.** (17.2.32) va (17.2.33) formulalar  $\alpha = 0$  da ham o'rinli. Haqiqatan, agar  $\beta > 0$  bo'lsa, u holda 17.2.3 - misolda ko'rganimizdek, yuqoridagi integrallar  $\alpha \geq 0$  bo'yicha tekis yaqinlashadi va shuning uchun, 17.2.1 - teorema ko'ra, ular  $\alpha$  ning o'sha qiymatlariga uzluksiz bog'liq bo'ladi. Endi o'z-o'zidan ko'rinib turgan quyidagi tasdiqdan foydalanamiz: agar biror kesmada uzluksiz ikki funksiya bir nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda o'zaro teng bo'lsa, ular o'sha nuqtada ham o'zaro teng qiymat qabul qiladi.

Yuqorida (17.2.32) va (17.2.33) tengliklar faqat  $\alpha > 0$  uchun isbotlangan edi. Lekin bu tengliklarning chap va o'ng taraflari  $\alpha \geq 0$  da uzluksiz bo'lgani sababli, ular  $\alpha = 0$  da ham o'rinli. Bundan chiqdi, barcha  $\beta > 0$  larda

$$\int_0^{\infty} \cos \beta x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \quad (17.2.34)$$

va

$$\int_0^{\infty} \sin \beta x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \quad (17.2.35)$$

tengliklar bajariladi.

Bu integrallar birinchi bo'lib fransuz olimi O.J. Frenel tomonidan optika masalalarini yechish uchun kiritilgan edi. Shuning uchun bu ikki integral o'sha olim nomi bilan ataladi.

#### 4. Parametrga bog'liq ikkinchi tur xosmas integrallar.

Faraz qilaylik,  $f(x, y)$  funksiya

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x \leq b, \quad c \leq y \leq d\} \quad (17.2.36)$$

yarim ochiq to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan bo'lsin.

Bundan chiqdi, biz  $f$  funksiyaning  $x = a$  nuqtada aniqlanmagan bo'lishini istisno qilmaymiz (masalan, bu funksiya to'g'ri

to'rtburchakning chap chegarasi atrofida chegaralanmagan bo'lishi mumkin).

Shunday ekan,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (17.2.37)$$

integral  $y \in [c, d]$  parametrga bog'liq ikkinchi tur xosmas integrallidir. Eslatib o'tamiz, agar

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{a+\alpha}^b f(x, y) dx$$

limit mavjud bo'lsa, (17.2.37) xosmas integral yaqinlashadi deyiladi.

**Ta'rif.** Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $0 < \alpha < \delta$  bo'lganda barcha  $y \in [c, d]$  uchun

$$\left| F(y) - \int_{a+\alpha}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (17.2.37) ikkinchi tur xosmas integral  $F(y)$  funksiyaga  $y \in [c, d]$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi deyiladi.

Tekis yaqinlashuvchi ikkinchi tur xosmas integrallar ham birinchi tur xosmas integrallar kabi xossalarga ega. Xususan, ular uchun tekis yaqinlashishning yetarli shartlari haqidagi Veyershtross va Dini teoremlari o'rinli.

Navbatdagi tasdiqlarda  $\Omega$  (17.2.36) tenglik bilan aniqlangan yarim ochiq to'g'ri to'rtburchakni anglatadi.

**17.2.9 - teorema.** Agar  $f \in C(\Omega)$  bo'lib, (17.2.37) xosmas integral  $F(y)$  ga  $y \in [c, d]$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashsa, u holda  $F \in C[c, d]$  bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar integral ostidagi funksiya uzluksiz bo'lsa, tekis yaqinlashuvchi xosmas integral parametrga uzluksiz bog'liq bo'ladi.

**17.2.10 - teorema.** Faraz qilaylik,  $f \in C(\Omega)$  bo'lib, (17.2.37) xosmas integral barcha  $y \in [c, d]$  larda yaqinlashsin. Agar  $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Omega)$  va quyida keltirilgan (17.2.38) tenglikning o'ng tarafidagi integral  $y$  bo'yicha  $[c, d]$  kesmada tekis yaqinlashsa, u holda (17.2.37) xosmas integral  $[c, d]$  kesmada uzluksiz differentsiallanuvchi funksiyaga yaqinlashadi va

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \quad (17.2.38)$$

tenglik bajariladi.

Ikki ikkinchi tur xosmas integralning tartibini o'zgartirish haqida ham 17.2.7 - teoreмага o'xshash tasdiq o'rinni. Bu tasdiqni keltirish maqsadida quyidagi

$$\Omega_* = \{(x, y) : a < x \leq b, c < y \leq d\}$$

yarim ochiq to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan  $f(x, y)$  funksiya uchun ikki

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_c^d f(x, y) dy \quad (17.2.39)$$

xosmas integrallarni qaraymiz.

**17.2.11 - teorema.** Faraz qilaylik,  $f \in C(\Omega_*)$  va  $f(x, y) \geq 0$  bo'lsin. Bundan tashqari, (17.2.39) integrallarni parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashadi deb faraz qilamiz.

U holda, quyida keltirilgan takroriy integrallardan biri yaqinlashsa, ikkinchisi ham yaqinlashib,  $f(x, y)$  funksiya ikki o'lchovli  $\Omega_*$  sohada xosmas ma'noda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\iint_{\Omega_*} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (17.2.40)$$

tengliklar bajariladi.

Keltirilgan teoremlar isboti parametrga bog'liq birinchi tur xosmas integrallar holdagi singari olib boriladi. Bunda (17.2.22) ketma-ketliklar o'rniga (17.2.39) integrallarga tekis yaqinlashuvchi

$$\Phi_n(y) = \int_{a+1/n}^b f(x, y) dx, \quad \Psi_m(x) = \int_{c+1/m}^d f(x, y) dy$$

ketma-ketliklarni olish kerak. Bundan keyingi mulohazalar 17.2.7 - , 17.2.4 - hamda 17.2.6 - teoremlar isbotlarida keltirilgan mulohazalardan farq qilmaydi.

**17.2.8 - misol.** Agar  $p > -1$  bo'lsa,

$$I(p) = \int_0^1 (x^p - 1) \frac{dx}{\ln x}$$

integral hisoblansin.

Integral ostidagi funksiya  $x = 0$  nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lishi mumkinligi sababli, bu integral ikkinchi tur xosmas integraldir.

17.1.2 - misoldagi sun'iy usuldan foydalanamiz: avval quyidagi

$$\int_0^p f(x, t) dt = \int_0^p x^t dt = \frac{x^t}{\ln x} \Big|_{t=0}^{t=p} = \frac{x^p - 1}{\ln x}$$

integralni hisoblab, so'ngra, 17.2.11 - teoreмага ko'ra, berilgan integralni hisoblaymiz:

$$I(p) = \int_0^1 dx \int_0^p x^t dt = \int_0^p dt \int_0^1 x^t dx = \int_0^p \frac{dt}{1+t} = \ln(1+p) .$$

**Eslatma.** Integral ostida turli ishorali qiymat qabul qiluvchi funksiya turgan holda, integrallash tartibini almashtirish haqidagi 17.2.8 - teoreмага o'xshash tasdiq ham o'rinli bo'lib, bunda

(17.2.39) va (17.2.40) integrallar absolyut yaqinlashishini talab qilish zarurdir.

5. Bir vaqtning o'zida birinchi va ikkinchi tur bo'lgan xosmas integrallar ham xuddi yuqoridagidek o'rganiladi. Chunonchi, agar  $f(x, y)$  funksiya  $a < x < +\infty$  ochiq to'g'ri chiziqda aniqlangan bo'lsa, u holda bu ochiq to'g'ri chiziq bo'yicha integral, biri birinchi tur va ikkinchisi ikkinchi tur bo'lgan, ikki xosmas integral yig'indisi deb tushuniladi:

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx + \int_b^{\infty} f(x, y) dx,$$

bu yerda  $b$  quyidagi  $a < b < +\infty$  shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonidir. Agar bu tenglikning o'ng tarafidagi ikki integral tekis yaqinlashsa, u holda chap tarafidagi integral ham tekis yaqinlashadi deyiladi.

Ravshanki, bunday aniqlangan xosmas integral  $b$  sonni tanlashga bog'liq emas va uni

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{a+\alpha}^A f(x, y) dx$$

ko'rinishdagi ikki karrali limit deb aniqlash mumkin.

**17.2.9 - misol.** Quyidagi xosmas integralni

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (17.2.41)$$

$\alpha$  bo'yicha uzluksizlikka tekshiring.

Bu integralni ikkiga ajratamiz, ya'ni uni biri  $(0, 1]$  yarim interval va ikkinchisi  $[1, +\infty)$  yarim to'g'ri chiziq bo'yicha integrallar yig'indisi deb yozamiz. Bunda

$$\int_1^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

integral, Abel-Dirixle alomatiga ko'ra (17.2.3 - teoreмага qarang),  $\alpha \geq 0$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi. Ikkinchi

$$\int_0^1 e^{-\alpha x} \cos x \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

integral esa, Veyershtrass alomatiga ko'ra,  $\alpha \geq 0$  bo'yicha tekis yaqinlashadi, chunki integral ostidagi funksiya, o'ng tarafida  $(0, 1]$  da integrallanuvchi funksiya bo'lgan,

$$\left| \frac{e^{-\alpha x} \cos x}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

bahoni qanoatlantiradi. Shunday qilib, (17.2.41) integral  $\alpha \geq 0$  bo'yicha tekis yaqinlashar ekan.

**6\***. Yuqorida o'rganilgan parametrga bog'liq xosmas integrallar ba'zan mahkamlangan maxsuslikka ega integrallar deb ataladi. Bu degani, integral ostidagi funksiya maxsuslikka ega bo'lgan nuqtalar parametrga bog'liq emas. Ammo, ko'pgina misollarni yechishda maxsus nuqtalari to'plami parametrga bog'liq bo'lgan integrallarni o'rganishga to'g'ri keladi. Bunday integrallarga misol sifatida

$$T(y) = \int_0^y \frac{g(x) dx}{\sqrt{y-x}} \quad (17.2.42)$$

integralni olishimiz mumkin.

$T(y)$  vaqt ichida  $y$  balandlikdan absissalar o'qiga tortishish kuchi ta'siri ostida tushayotgan nuqta traektoriyasi haqidagi masalani yechishda, N. Abel bu integralni atroflicha o'rgangan. Bu yerda noma'lum funksiya  $g(x)$  bo'lib, u qidirilayotgan traektoriyani aniqlaydi. Bu funksiya integral ostida qatnashgani uchun, (17.2.42) tenglama *integral tenglama* deb ataladi. Abel o'rgangan bu masala matematik fizikadagi integral tenglamalarni o'rganish zaruriyatini tug'dirgan birinchi masala deb hisoblanadi.



Integral ostidagi funktsiyaning maxsus nuqtalari to'plami parametrga bog'liq bo'lgan xosmas integrallar §17.5 da karrali integrallar uchun batafsil o'rganiladi.

### 7. Xosmas integrallarni jamlash usullari.

1<sup>0</sup>. Parametrga bog'liq integrallar uzoqlashuvchi xosmas integrallarni quyularlashtirishda ham ishlatiladi. Uzoqlashuvchi qatorlarni jamlash usullari kabi (9 - bobning §9.5 bandiga qarang), qayd etilgan quyularlashtirish usullari uzoqlashuvchi integrallarni jamlash usullari deb ataladi.

Integral ostidagi funktsiya cheksizlikda "o'zini yomon tutishi" sababli uzoqlashuvchi bo'lgan

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad (17.2.43)$$

xosmas integralni qaraylik. Integral ostidagi funktsiyani, cheksizlikda yetarlicha tez nolga intiluvchi funktsiyaga ko'paytirib, o'zgartiramiz, ya'ni  $\alpha > 0$  parametrga bog'liq

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi(\alpha x) f(x) dx \quad (17.2.44)$$

integralni qaraymiz. Faraz qilaylik,  $\varphi(t)$  bo'lakli-uzluksiz,  $t \rightarrow +\infty$  da nolga intiluvchi, nolga uzluksiz va  $\varphi(0) = 1$  shartni qanoatlantiruvchi funktsiya bo'lsin. U holda, agar (17.2.44) da  $\alpha = 0$  desak, formal ravishda (17.2.43) integralni olamiz.

Odatda,  $\varphi(t)$  funktsiyani (17.2.44) xosmas integral istalgan  $\alpha > 0$  da yetarlicha keng  $f$  funktsiyalar sinfi uchun yaqinlashadigan qilib tanlanadi. Masalan, agar  $\varphi(t) = e^{-t}$  funktsiyani olsak, u holda (17.2.44) integral polinom bilan chegaralangan yoki polinomial o'suvchi deb ataladigan har qanday funktsiya uchun yaqinlashadi.

Albatta, eng qiziqarli hol bu - qachonki (17.2.44) integral  $\alpha = 0$  da (bunda u berilgan (17.2.43) integral bilan ustma-ust tushadi)

uzoqlashib,  $\alpha > 0$  yaqinlashsa hamda quyidagi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi(\alpha) = I$$

limitga ega bo'lsa.

Bu holda  $I$  soni (17.2.43) integralning  $\langle \varphi \rangle$  jamlash usuli bilan aniqlanuvchi umumlashgan ma'nodagi qiymati va (17.2.43) xosmas integralning o'zi esa,  $\langle \varphi \rangle$  usul bilan  $I$  ga *jamlanadi* deyiladi.

Masalan,  $\varphi(t) = e^{-t}$  funksiya bilan aniqlanuvchi usul *Abel jamlash usuli* deb ataladi. Boshqacha aytganda, agar

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = I \quad (17.2.45)$$

tenglik bajarilsa, (17.2.43) integral Abel usuli bilan  $I$  soniga jamlanadi deyiladi.

(17.2.45) tenglik qisqartirilgan holda

$$(A) \int_0^{\infty} f(x) dx = I$$

deb yoziladi.

Bunda (17.2.45) ning chap tarafidagi integral (17.2.43) integralning *Abel o'rtachasi* deyiladi. Masalan, uzoqlashuvchi

$$\int_0^{\infty} \cos \beta x dx, \quad \int_0^{\infty} \sin \beta x dx, \quad \beta > 0,$$

integrallar uchun Abelning mos o'rtachalari ((17.2.2) va (17.2.3) formularga qarang):

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0,$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0,$$

ko'rinishga ega.

Bu tengliklarda  $\alpha \rightarrow 0$  desak,

$$(A) \int_0^{\infty} \cos \beta x dx = 0, \quad (A) \int_0^{\infty} \sin \beta x dx = \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 0, \quad (17.2.46)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

**1 - eslatma.** Agar  $r = e^{-\alpha}$  desak,  $\alpha \rightarrow 0 + 0$  shart faqat va faqat  $r \rightarrow 1 - 0$  bo'lganda bajariladi. Bu belgilashlarda (17.2.45) tenglik

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{\infty} f(t)r^t dt = I$$

ko'rinishga kelib, sonli qatorlar uchun Abel o'rtachalarining (9.5.10) ta'rifiga mos keladi.

**2 - eslatma.** Xosmas integralning oddiy ma'nodagi yaqinlashishini ham, jamlash usulini beruvchi funksiya sifatida quyidagi

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{agar } 0 \leq t \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } t > 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani olib, jamlash usulining xususiy holi deyish mumkin. Chunki, xosmas integralni  $\langle \varphi^* \rangle$  usul bilan jamlash integral yaqinlashishi bilan ustma-ust tushadi. Haqiqatan,  $\alpha > 0$  da

$$\int_0^{\infty} \varphi^*(\alpha x) f(x) dx = \int_0^{1/\alpha} f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$$

bo'lib,  $\alpha \rightarrow 0$  da  $A = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \infty$  bo'ladi.

2<sup>0</sup>. Jamlash usulining *regulyar* bo'lishi mos  $\varphi$  funksiyani tanlashning muhim shartidir. Bu degani, har qanday yaqinlashuvchi xosmas integral  $\langle \varphi \rangle$  usul bilan ham xuddi integral yaqinlashadigan songa jamlanishi zarur. Boshqacha aytganda, yaqinlashuvchi (17.2.43) xosmas integral uchun

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha x) f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

tenglik bajarilsa, mos jamlash usuli *regulyar* deyiladi. Shunday qilib, agar (17.2.43) integralning yaqinlashishidan (17.2.44) tenglik bilan aniqlangan  $\Phi(\alpha)$  funksiyaning nolda uzluksizligi kelib chiqsa,  $\langle \varphi \rangle$  funksiya bilan aniqlangan jamlash usuli *regulyar* bo'ladi. Demak,  $\langle \varphi \rangle$  usulning *regulyar* bo'lishining yetarli sharti, 17.2.4 - teorema ko'ra, (17.2.44) integralning  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  kesmadan olingan  $\alpha$  larda tekis yaqinlashishidan iborat, bu yerda  $\alpha_0$  biror musbat sonidir.

**17.2.12 - teorema.** *Xosmas integrallarni jamlashning Abel usuli regulyardir.*

**Isbot** parametrga bog'liq xosmas integrallar tekis yaqinlashishining Abel-Dirixle alomatidan bevosita kelib chiqadi (17.2.3- teorema qarang).

Haqiqatan, aytaylik, (17.2.43) xosmas integral yaqinlashsin. U holda, agar

$$g(x, \alpha) = e^{-\alpha x}, \quad \alpha \geq 0,$$

desak, 17.2.3 - teoremaning barcha shartlari o'rinli bo'ladi. Shuning uchun

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$$

integral  $\alpha \geq 0$  bo'yicha tekis yaqinlashadi. Bundan chiqdi, 17.2.4 - teorema ko'ra,  $\Phi(\alpha)$  funksiya  $\alpha = 0$  nuqtada uzluksiz bo'lib, bu esa o'z navbatida, Abel jamlash usulining *regulyar* ekanini anglatadi. ■

**Eslatma.** 17.2.12 - teorema odatda quyidagi ko'rinishda keltiriladi:

Agar  $f(x)$  funksiya  $x \geq 0$  da lokal integrallanuvchi bo'lib, (17.2.43) xosmas integral yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (17.2.47)$$

tenglik bajariladi.

**17.2.10 - misol.** Dirixle-Abel alomati bo'yicha yaqinlashuvchi bo'lgan

$$I(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

integralni ixtiyoriy haqiqiy  $\beta$  uchun hisoblang.

Yordamchi (17.2.17) xosmas integralni qaraymiz:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Ma'lumki,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta.$$

U holda, (17.2.47) ga ko'ra,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta. \quad (17.2.48)$$

(17.2.48) integral uzilishga ega bo'lgan Dirixle ko'paytuvchisi deb ataladi.

Integrallangan sinusning ta'rifiga ko'ra,

$$\operatorname{Si}(\lambda\beta) = \int_0^{\lambda\beta} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{\lambda} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

Shunday ekan, (17.2.48) tenglikni quyidagi

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{Si}(\lambda\beta) = \frac{\pi}{2} \text{sign } \beta \quad (17.2.49)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Abel usuli oddiy ma'noda uzoqlashuvchi bo'lgan ko'pgina xosmas integrallarga ma'no beradi. Masalan,

$$\int_0^{\infty} x \cos \beta x \, dx, \quad \int_0^{\infty} x \sin \beta x \, dx$$

integrallarni qaraylik. (17.2.15) va (17.2.16) tengliklarga ko'ra, bu integrallar uchun Abel o'rtachasi

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x \cos \beta x \, dx = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0,$$

va

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x \sin \beta x \, dx = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \alpha > 0,$$

ko'rinishga ega. Bundan,  $\alpha \rightarrow 0$  deb,

$$(A) \int_0^{\infty} x \cos \beta x \, dx = -\frac{1}{\beta^2}$$

va

$$(A) \int_0^{\infty} x \sin \beta x \, dx = 0$$

tengliklarni olamiz.

3<sup>0</sup>. Shuni aytish kerakki, Abel jamlash usuli (xuddi boshqa regular usullar kabi) integral ostidagi funksiya nol atrofida tebranganda ayniqsa samaralidir, chunki bunda funksiya musbat va manfiy bo'lgan qismlar bo'yicha integrallar o'zaro qisqarib ketib (bu hodisa

"interferentsiya" deb ataladi), natijada Abel o'rtachalari limitga ega bo'lishi mumkin. Bordiyu integral ostidagi funksiya manfiymas bo'lsa, u holda Abel usuli oddiy yaqinlashishdan kuchli bo'lmas ekan, ya'ni manfiymas funksiyadan olingan integralning Abel usuli bilan jamlanishidan integral o'zining ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

Haqiqatan, aytaylik  $f$  funksiya lokal integrallanuvchi bo'lib,  $f(x) \geq 0$ ,  $x \geq 0$  tengsizlikni qanoatlantirsin.

Istalgan  $R > 0$  uchun  $\alpha = 1/R$  deb belgilasak,  $0 \leq x \leq R$  kesmada  $1 \leq e^{1-\alpha x}$  baho bajariladi. Demak,

$$\int_0^R f(x) dx \leq e \int_0^{1/\alpha} e^{-\alpha x} f(x) dx \leq e \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx .$$

Agar  $f$  funksiyadan olingan xosmas integral Abel usuli bilan jamlansa, u holda o'ng taraf  $\alpha \rightarrow 0$  da limitga ega bo'ladi. Demak, chap taraf  $R$  bo'yicha chegaralangan va integral ostidagi funksiya manfiymas bo'lgani uchun  $f$  dan olingan integral yaqinlashadi.

4<sup>0</sup>. Yuqorida Abel o'rtachalarining  $\alpha > 0$  da istalgan polinomial o'sishga ega funksiya uchun mavjudligi aytilgan edi. Bordiyu integral ostidagi funksiya eksponensial o'ssa, u holda Abel o'rtachalari mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Bunday hollarda Riss usulini qo'llash qulay bo'ladi. Bu usul uzoqlashuvchi qatorlar uchun qo'llanilgan Chezaro jamlash usulining integral ko'rinishidan iboratdir.

Tartibi  $s \geq 0$  bo'lgan *Riss usuli* quyidagi

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} (1-t)^s, & \text{agar } 0 \leq t \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } t > 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya bilan aniqlanadi.

*Riss o'rtachalari*

$$R_s(\alpha) = \int_0^{1/\alpha} (1-\alpha x)^s f(x) dx$$

ko'rinishga ega bo'lib,  $x \geq 0$  yarim to'g'ri chiziqda lokal integrallanuvchi bo'lgan ixtiyoriy  $f$  funksiya uchun mavjud. Riss usuli  $s$  ko'rsatkichning o'sishi bilan kuchayadi, ya'ni  $\alpha \rightarrow 0$  da  $s$  - tartibli Riss o'rtachalarining biror limitga yaqinlashishidan,  $s_1 > s$  - tartibli Riss o'rtachalarining ham xuddi o'sha limitga yaqinlashishi kelib chiqadi.

Shuni aytish kerakki, Riss o'rtachalarini aniqlash mumkin bo'lgan funksiyalar sinfi Abel o'rtachalarini aniqlash mumkin bo'lgan funksiyalar sinfidan kengroq bo'lsada, Abel usuli Riss usulidan kuchliroqdir. Chunonchi, agar xosmas integral biror  $s$  uchun Riss usuli bilan jamlansa va u uchun Abel o'rtachalari aniqlangan bo'lsa, u holda Abel o'rtachalarining limiti aynan Riss o'rtachalarining limitiga teng bo'ladi. Masalan,  $f(x) = \sin \beta x$  funksiyaning birinchi tartibli Riss o'rtachalari uchun

$$R_1(\alpha) = \int_0^{1/\alpha} (1 - \alpha x) \sin \beta x \, dx = -(1 - \alpha x) \frac{\cos \beta x}{\beta} -$$

$$- \alpha \frac{\sin \beta x}{\beta^2} \Big|_{x=0}^{x=1/\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \frac{1}{\beta}, \quad \alpha \rightarrow 0$$

munosabat o'rinli.

Demak,

$$(R_1) \int_0^{\infty} \sin \beta x \, dx = \frac{1}{\beta}$$

bo'lib, bu (17.2.46) ning o'ngidagi tenglikning o'zidir.

### 17.3-§. Eylerning beta va gamma funksiyalari

Parametrga bog'liq quyidagi ikki

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx \quad (17.3.1)$$



va

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad (17.3.2)$$

integralni L. Eyler batafsil o'rgangan.

(17.3.1) integral Eylerning *beta-funksiyasi* yoki Eylerning birinchi tur integrali deb, (17.3.2) integral esa, Eylerning *gamma-funksiyasi* yoki Eylerning ikkinchi tur integrali deb ataladi.

Bu ikki funksiyani, quyida isbot qilinadigan,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (17.3.3)$$

klassik formula bog'laydi. Bu formulaga ko'ra, Eyler funksiyalari xossalarini o'rganish uchun faqat gamma-funksiya xossalarini batafsil o'rganish yetarli.

## 1. Eyler gamma-funksiyasining asosiy xossalari.

1<sup>0</sup>. Uzluksizligi va differensiallanuvchanligi.

**17.3.1 - tasdiq.** *Eyler gamma-funksiyasi (17.3.2) tenglik bilan istalgan  $p > 0$  uchun aniqlangan.*

**Isbot.** (17.3.2) integral ikki sababga ko'ra xosmasdir, ya'ni yoki integral ostidagi funksiya  $x = 0$  nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lgani uchun yoki integrallash intervali chegaralanmagan bo'lgani uchun. Bu integralni ikki

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

integral yig'indisi ko'rinishida yozib olsak, birinchi integral  $p > 0$  da yaqinlashadi va ikkinchi integral esa, barcha haqiqiy  $p$  larda yaqinlashadi. Shunday qilib, gamma-funksiya (17.3.1) tenglik bilan istalgan  $p > 0$  uchun aniqlangan.

Xususan,  $p = 1$  da

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

**17.3.2 - tasdiq.** *Eyler gamma-funksiyasi  $p > 0$  yarim to'g'ri chiziqda uzluksizdir.*

**Isbot.** E'tibor bering, integral ostidagi

$$f_p(x) = f(x, p) = e^{-x} x^{p-1} \quad (17.3.4)$$

funksiya ikki o'zgaruvchining funksiyasi sifatida  $x > 0$  va  $p > 0$  da uzluksiz. Demak, 17.2.4 - teoreмага ko'ra, (17.3.2) xosmas integralning  $p > 0$  yarim to'g'ri chiziqdagi istalgan  $[a, b]$  kesmada parametr-ga nisbatan tekis yaqinlashishini isbotlash yetarli. Shu maqsadda  $0 < a \leq p \leq b$  deylik. U holda istalgan  $x \geq 0$  uchun

$$x^{p-1} \leq x^{a-1} + x^{b-1} \quad (17.3.5)$$

tengsizlik o'rinli; bunda o'ng tarafdagi birinchi had chap tarafni  $0 \leq x \leq 1$  da yuqoridan baholaydi, ikkinchi had esa,  $x \geq 1$  da baholaydi.

Demak, integral ostidagi (17.3.4) funksiya uchun

$$f_p(x) = e^{-x} x^{p-1} \leq e^{-x} (x^{a-1} + x^{b-1}) = f_a(x) + f_b(x)$$

baho o'rinli.

O'ng tarafdagi funksiya  $p$  ga bog'liq emas va  $0 < x < \infty$  soha bo'yicha integrallanuvchi. Shunday ekan, (17.3.2) integralning tekis yaqinlashishi Veyershtross alomatidan kelib chiqadi (17.2.1 - teoreмага qarang).■

**17.3.3 - tasdiq.** *Eylarning gamma-funksiyasi  $p > 0$  yarim to'g'ri chiziqda cheksiz differentsiallanuvchidir.*

**Isbot.** Integral ostidagi (17.3.4) funksiya hosilasi

$$\frac{\partial f(x, p)}{\partial p} = e^{-x} x^{p-1} \ln x$$

ga teng.

Ravshanki, (17.3.5) tengsizlikka ko'ra, ixtiyoriy  $0 < a < b$  lar uchun  $a \leq p \leq b$  kesmada tekis ravishda

$$\left| \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \right| \leq e^{-x} |\ln x| (x^{a-1} + x^{b-1}), \quad x > 0,$$

baho o'rinli.

Bahoning o'ng tarafidagi funksiya  $p$  parametrga bog'liq emas va xosmas ma'noda  $x > 0$  yarim to'g'ri chiziqda integrallanuvchi. Shuning uchun, bu baho va Veyershtross alomatiga ko'ra,

$$\Gamma'(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x \, dx \quad (17.3.6)$$

tenglikning o'ng tarafidagi integral  $p$  parametr bo'yicha  $a \leq p \leq b$  kesmada tekis yaqinlashadi.

Demak, 17.2.6 - teoreмага asosan, formal ravishda differensiallab olingan (17.3.6) tenglik aslida ham o'rinlidir.

Yuqoridagi mulohazalarni so'zma-so'z qaytarib,  $p > 0$  da gamma-funksiyaning  $m$ -tartibli hosilasi uchun

$$\Gamma^{(m)}(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} (\ln x)^m \, dx \quad (17.3.7)$$

tenglikni olamiz. Bunda integral  $p$  parametr o'zgarish sohasidagi har bir kesmada tekis yaqinlashadi. ■

**17.3.4 - tasdiq.** *Eylerning gamma-funksiyasi har bir  $p > 0$  da*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (17.3.8)$$

rekurrent munosabatni qanoatlantiradi.

**Isbot** bo'laklab integrallash formulasidan kelib chiqadi:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p \, dx = -e^{-x} x^p \Big|_{x=0}^{x=\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \, dx.$$

**Natija.** *Istalgan natural  $n$  uchun*

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (17.3.9)$$

*tenglik o'rinli.*

$\Gamma(1) = 1$  bo'lgani sababli, agar  $0! = 1$  desak, bu tenglik  $n = 0$  da ham o'rinli bo'ladi. Bu 0 ning faktorialini 1 ga teng deb kelishish to'g'ri ekanligiga yana bir sababdir.

2<sup>0</sup>. Gamma-funksiyaning grafigini o'rganish.

Eslatib o'tamiz, gamma-funksiya (17.3.2) formula yordamida  $p > 0$  yarim to'g'ri chiziqda aniqlangan.

1) Bevosita (17.3.2) ta'rifdan gamma-funksiyaning qat'iy musbat ekani kelib chiqadi:

$$\text{barcha } p > 0 \text{ larda } \Gamma(p) > 0.$$

Demak, gamma-funksiya nolga aylanmaydi.

2) Agar  $m = 2$  desak, (17.3.7) tenglikdan  $\Gamma''(p) > 0$  kelib chiqadi. Shuning uchun gamma-funksiya grafigining qavariqligi pastga qaragan.

3) (17.3.8) munosabatga ko'ra,  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ . Roll teoremasiga ko'ra (4.4.1 - teoreмага qarang),  $1 < p < 2$  intervalda shunday  $p^*$  nuqta topiladiki, u uchun

$$\Gamma'(p^*) = 0, \quad 1 < p^* < 2.$$

4)  $\Gamma''(p) > 0$  tengsizlikka ko'ra, birinchi hosila o'suvchi funksiyadir. Demak,

$$0 < p < p^* \text{ da } \Gamma'(p) < 0 \text{ va } p > p^* \text{ da } \Gamma'(p) > 0.$$

Bundan chiqdi, gamma-funksiya  $0 < p < p^*$  intervalda qat'iy kamayadi va  $p > p^*$  yarim to'g'ri chiziqda qat'iy o'sadi.

5)  $p^*$  nuqta gamma-funksiyaning minimum nuqtasi bo'lib, bu nuqtada

$$0 < \Gamma(p^*) < 1.$$

6) Uzluksizlikka ko'ra,  $p \rightarrow 0$  da  $\Gamma(p+1) = 1 + o(1)$ . Demak,

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \cdot [1 + o(1)] \rightarrow +\infty, \quad p \rightarrow 0 + 0.$$

Shunday ekan, ordinatalar o'qi gamma-funksiya grafigiga vertikal asimptota bo'ladi.

7) (17.3.7) rekurrent formuladan,  $t \geq 1$  da

$$\Gamma(t+2) = (t+1)\Gamma(t+1) = (t+1)t\Gamma(t) \geq (t+1)t\Gamma(1) = (t+1)t$$

tenglik kelib chiqadi. Agar  $p = t + 2$  desak, bundan  $p \geq 3$  lar uchun

$$\Gamma(p) \geq (p-1)(p-2)$$

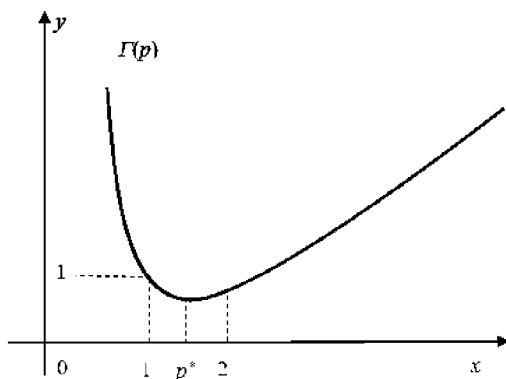
bahoni olamiz.

Bu bahodan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \Gamma(p) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(p)}{p} = +\infty.$$

Demak, gamma-funksiya grafigi og'ma asimptotaga ega bo'lmas ekan.

Gamma-funksiya grafigining eskizi 17.4 - rasmda keltirilgan.



17.4-rasm

3<sup>0</sup>. Matematik tahlilda keng foydalaniladigan ko'plab o'zgarmas kattaliklar gamma-funksiya orqali ifodalanadi. Masalan, (13.8.18) formula bilan kiritilgan kattalikni, ya'ni

$$\omega_n = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

sonni qaraylik.

Bu  $\omega_n$  kattalik  $\mathbb{R}^n$  fazodagi radiusi 1 ga teng  $(n-1)$  o'lchovli sfera sirtining yuzasi bilan ustma-ust tushadi.

Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki,  $\omega_2 = 2\pi$  va  $\omega_3 = 4\pi$ . Gamma-funksiya yordamida ixtiyoriy o'lchovli fazodagi birlik sfera sirtining yuzasi uchun formula olishimiz mumkin.

Buning uchun (14.1.13) formuladan, ya'ni

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \pi^{n/2} \quad (17.3.10)$$

tenglikdan foydalanamiz.

Chap tarafdagi xosmas integralni,  $\mathbb{R}^n$  fazoni qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligi sifatida

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}$$

sharlarni olib, hisoblaymiz.

Sferik koordinatalar sistemasiga o'tib, (13.8.17) formuladan foydalansak,

$$\int_{\Omega_k} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \omega_n \int_0^k e^{-r^2} r^{n-1} dr$$

tenglikni olamiz.

O'ng taraf  $k \rightarrow \infty$  da quyidagi xosmas integralga intiladi:

$$\omega_n \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Demak,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Bu tenglik va (17.3.10) ga ko'ra,

$$\frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{n/2}.$$

Bundan chiqdi,

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (17.3.11)$$

**Eslatma.** (17.3.11) tenglikdan  $n = 3$  da

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\pi^{3/2}}{\omega_3}$$

tenglikni olamiz. Lekin,  $\omega_3 = 4\pi$  bo'lgani uchun,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(17.3.8) munosabatga ko'ra,  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ . Shunday ekan, oxirgi tenglikdan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (17.3.12)$$

ko'rinishdagi muhim formula kelib chiqadi.

## 2. Eyler beta-funksiyasining asosiy xossalari.

### 17.3.5 - tasdiq. Eyler beta-funksiyasi

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (17.3.13)$$

tenglik bilan barcha  $p > 0$  va  $q > 0$  larda aniqlangan.

**Isbot.** (17.3.13) integralni quyidagi

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

ikki integral yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz.

Ravshanki, bu tenglikning o'ng tarafidagi birinchi integral ostidagi funksiya faqat  $x = 0$  nuqtada maxsuslikka ega bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu integral  $p > 0$  da barcha haqiqiy  $q$  lar uchun yaqinlashadi.

Xuddi shu kabi, ikkinchi integral  $x = 1$  nuqtada maxsuslikka ega bo'lib,  $q > 0$  da barcha haqiqiy  $p$  lar uchun yaqinlashadi.

Demak, beta-funksiya (17.4.1) tenglik bilan barcha  $p > 0$  va  $q > 0$  lar uchun aniqlangan. ■

(17.3.13) integralda o'zgaruvchilarni almashtirish natijasida hosil bo'ladigan, Eyer beta-funksiyasining boshqa ko'rinishlari ham tadbirlarda ko'p uchraydi. Shunday ko'rinishlardan birini  $x = \sin^2 t$  almashtirish bajarib olish mumkin:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cdot \cos^{2q-1} t dt. \quad (17.3.14)$$

Ba'zan beta-funksiyani birinchi tur xosmas integral ko'rinishida yozib olish qulay bo'ladi. Buning uchun  $(0, 1)$  integrallash intervalini  $(0, +\infty)$  yarim to'g'ri chiziqqa o'tkazadigan almashtirishdan, masalan,  $x = \frac{1}{1+t}$  almashtirishdan foydalaniladi. U holda,

$$dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}, \quad 1-x = \frac{t}{1+t}.$$

Natijada, beta-funksiya uchun barcha  $p > 0$  va  $q > 0$  larda o'rinli bo'lgan

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{q-1} dt}{(1+t)^{p+q}} \quad (17.3.15)$$



formulaga ega bo'lamiz.

Biz beta-funksiyaning xossalarini batafsil o'rganish o'rniga, quyida keltirilgan klassik formula yordamida, uni yuqorida o'rganilgan Eylerning gamma-funksiyasiga keltiramiz.

**17.3.1 - teorema.** Har qanday  $p > 0$  va  $q > 0$  lar uchun

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \quad (17.3.16)$$

ayniyat o'rinli.

**Isbot.** Ikki o'zgaruvchining

$$F(x, t) = t^{q-1} x^{p+q-1} e^{-(1+t)x}$$

funksiyasini qaraylik.

(17.3.4) belgilashlardan foydalanib, uni

$$F(x, t) = x f_p(x) \cdot f_q(tx) = x [e^{-x} x^{p-1}] \cdot [e^{-tx} (tx)^{q-1}]$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(17.2.26) formulaga ko'ra,

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} F(x, t) dt = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} F(x, t) dx. \quad (17.3.17)$$

Bu tenglikning chap tarafidagi integralni, ichki integralda  $y = tx$  almashtirish bajarib, hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} x e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-tx} (tx)^{q-1} dt = \\ & = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y} y^{q-1} dy = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q). \end{aligned}$$

Endi (17.3.17) ning o'ng tomonidagi integralni, ichki integralda  $y = (1+t)x$  almashtirishni bajaramiz, so'ngra (17.3.15) formulani qo'llab hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} t^{q-1} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t)x} x^{p+q-1} dx = \\ & = \int_0^{\infty} \frac{t^{q-1} dt}{(1+t)^{p+q}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{p+q-1} dy = B(p, q) \cdot \Gamma(p+q) . \end{aligned}$$

Bundan, (17.3.17) formulaga ko'ra, talab qilingan (17.3.16) tenglik kelib chiqadi. ■

(17.3.16) formula yordamida Eyler beta-funksiyasining uzluksiz va differensiallanuvchi ekanligi haqida xulosa qilish va boshqa turli xossalarni o'rnatish mumkin. Masalan, bevosita o'sha formuladan beta-funksiyaning simmetrikligi kelib chiqadi:

$$B(p, q) = B(q, p) .$$

Yana shu formula orqali turli rekurrent munosabatlarni keltirib chiqarish mumkin. Masalan, (17.3.16) va (17.3.8) formulalarni qo'llab,

$$B(p+1, q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q} B(p, q)$$

munosabatni olamiz. Demak, istalgan  $p > 0$  va  $q > 0$  lar uchun

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$$

tenglik o'rinli.

(17.3.16) formula yordamida Eyler funksiyalarining ba'zi nuqtalardagi qiymatini ham hisoblash mumkin. Masalan, shu formulaga ko'ra,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2 + 1/2)} = [\Gamma(1/2)]^2 .$$

Boshqa tarafdin, (17.3.14) formulaga asosan,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} dt = \pi.$$

Demak,

$$[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$$

va yana (17.3.12) tenglikka keldik:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

## 17.4-§. Parametrga bog‘liq integrallarni asimptotik hisoblash usullari

1. Turli matematik masalalarni yechishda yechim uchun aniq formulaningina emas, balki bu yechimga yetarlicha yaqin bo‘lgan taqribiy yechimni ham bilish muhimdir.

Masalan,  $n$  ta jismning joyini o‘zgartirish va biror mezonga ko‘ra, eng yaxshi o‘zgartirishni topish masalasini qaraylik. Aytaylik, kompyuter har bir o‘zgartirish mezonga mos ekanini 1 mikrosekundda baholasin, ya‘ni bir sekundda 1 million baholashni amalga oshirsin. Ma‘lumki,  $n$  ta jismni  $n!$  ta usulda joyini o‘zgartirish mumkin. 10 ta jism bo‘lganda bu masalani yechish uchun qancha vaqt ketadi? 20 ta bo‘lgandachi? 100 ta bo‘lgandachi?

Ravshanki,

$$10! = 3\,628\,800 \simeq 3,6 \cdot 10^6.$$

Demak, 10 ta jism uchun eng yaxshi o‘zgartirishni kompyuter 4 sekunddan kam vaqtda topar ekan.

Yana oson hisoblashlar ko‘rsatadiki,

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \simeq 2,4 \cdot 10^{18}.$$

Bu hol uchun kompyuter  $2,4 \cdot 10^{12}$  sekund yoki 77 000 yilga yaqin ishlashi kerak ekan.

100! ga kelsak, bu sonni oddiy usulda hisoblash ancha murakkab masaladir. Ammo, asimptotik usullardan foydalansak, bu masala ancha soddalashadi.

**2.** Parametrga bog'liq integral asimptotikasini topishning eng kuchli usullaridan birini P. Laplas taklif qilgan. Biz *Laplas usulining* eng sodda holini, ya'ni

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt \quad (17.4.1)$$

ko'rinishdagi integralning  $\lambda \rightarrow +\infty$  dagi asimptotikasini topish uchun ishlatiladigan holini keltiramiz (biz  $a = -\infty$  yoki  $b = +\infty$  hollarni istisno qilmaymiz).

Agar  $g''(t) > 0$  bo'lib,  $(a, b)$  interval ichida  $g$  minimumga erishsa, u holda (17.4.1) integralda o'zgaruvchini shunday almashtirish mumkinki, bunda integral

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx \quad (17.4.2)$$

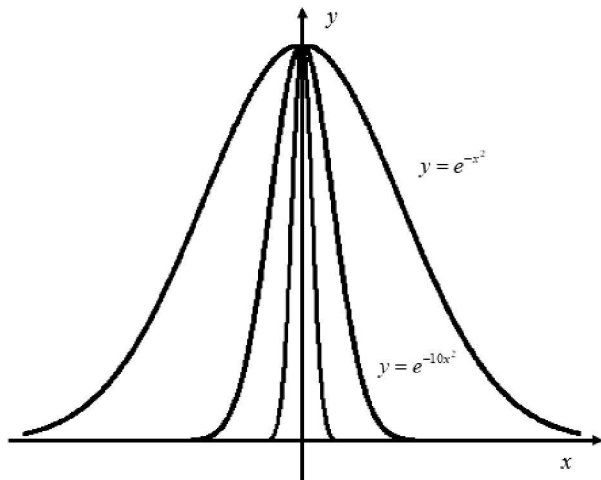
ko'rinishga keladi (ba'zan asimptotika olishning aynan shu qismi eng ko'p mehnat talab qiladi).

Faraz qilalylik,  $f(x)$  shunday funksiya bo'lsinki, quyidagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |f(x)| dx < +\infty \quad (17.4.3)$$

xosmas integral yaqinlashsin.

E'tibor bering, (17.4.2) integral ostidagi ifodada eksponenta  $x = 0$  nuqtada 1 ga teng bo'lib, boshqa nuqtalarda 1 dan qat'iy kichik. Shuning uchun,  $\lambda \rightarrow +\infty$  da integral ostidagi ifoda noldan tashqari barcha nuqtalarda nolga intiladi (17.5 - rasm). Ravshanki, bunda (17.4.2) integral ham nolga intiladi va bizning maqsadimiz mana shu intilish tartibini baholashdan iborat.



17.5-rasm

Laplas usuli quyidagi g'oyaga asoslangan: (17.4.2) integralga asosiy qiymatni  $x = 0$  nuqtaning istalgancha kichik atrofi bo'yicha olingan integral beradi va bu atrofda esa, integral asimptotikasini,  $f$  funksiyani uning Teylor qatori bilan almashtirib, topish mumkin.

Masalan,  $f(x) \equiv 1$  bo'lsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad (17.4.4)$$

ya'ni integral parametr kvadrat ildiziga teskari proporsional ravishda nolga intiladi. Xuddi shu natijani  $\mathbb{R}$  to'g'ri chiziq bo'yicha emas, balki istalgancha kichik  $(-\delta, \delta)$  interval bo'yicha integrallaganda ham olamiz; integralni bunday almashtirishdagi xato eksponensial kichik bo'ladi.

Laplas usulini qo'llash uchun (17.4.2) integral ostidagi funksiya-dan faqat koordinatalar boshining biror atrofidagina silliqlik talab qilinadi, boshqa nuqtalarda esa, funksiya ixtiyoriy lokal integrallanuvchi bo'lib, (17.4.3) shartni qanoatlantirishi yetarli.

Biz (17.4.2) integralga asosiy qiymatni  $x = 0$  nuqtaning istalgancha kichik atrofi berishi haqidagi sodda tasdiqni isbotlashdan boshlaymiz.

**17.4.1 - tasdiq.** Faraz qilaylik,  $f$  funksiya (17.4.3) shartni qanoatlantirsin. U holda istalgan  $\delta > 0$  uchun (17.4.2) integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx + O(1)e^{-\lambda\delta^2}, \quad \lambda \geq 1, \quad (17.4.5)$$

bahoni qanoatlantiradi.

**Isbot.** Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$I_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx, \quad I_2(\lambda) = \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx.$$

U holda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx + I_1(\lambda) + I_2(\lambda). \quad (17.4.6)$$

Masalan,  $I_2(\lambda)$  integralni baholaylik. Ravshanki,  $\lambda \geq 1$  va  $x \geq \delta$  lar uchun

$$e^{-\lambda x^2} = e^{-(\lambda-1)x^2} e^{-x^2} \leq e^{-(\lambda-1)\delta^2} e^{-x^2}$$

baho o‘rinli.

Shuning uchun, (17.4.3) shartga ko‘ra,

$$|I_2(\lambda)| \leq e^{-(\lambda-1)\delta^2} \int_{\delta}^{\infty} e^{-x^2} |f(x)| dx = C(\delta) e^{-\lambda\delta^2}.$$

$I_1(\lambda)$  integral ham xuddi shu usulda baholanadi. Bu baholarni (17.4.6) tenglikka qo‘ysak, talab qilingan (17.4.5) munosabatga ega bo‘lamiz. ■

Natija sifatida (17.4.4) tenglikning umumiyroq ko‘rinishini olishimiz mumkin.

**17.4.2 - tasdiq.** Har qanday  $\delta > 0$  va ixtiyoriy  $k \geq 0$  uchun

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx = \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + O(e^{-\lambda\delta^2}) \quad (17.4.7)$$

baho o'rinli.

**Isbot.** Isbotlangan (17.4.5) bahoda  $f(x) = x^{2k}$  desak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx + O(e^{-\lambda\delta^2}) \quad (17.4.8)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Agar chap tomondagi integralda integral ostidagi funksiya juftligidan foydalanib,  $x = \sqrt{\frac{t}{\lambda}}$  almashtirish bajarsak,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^{2k} dx = \\ &= \frac{1}{\lambda^{k+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1/2} dt = \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\lambda^{k+1/2}} \end{aligned}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu ifodani (17.4.8) ning chap tarafidagi integral o'rniga qo'ysak, talab qilingan (17.4.7) bahoga kelamiz. ■

Navbatdagi tasdiq yuqoridagi mulohazalarning natijasidir.

**17.4.3 - tasdiq.** Faraz qilaylik,  $f$  funksiya (17.4.3) shartni qanoatlantirib, koordinatalar boshining biror atrofida  $2m$  marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. U holda  $\lambda \rightarrow \infty$  da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda^{m+1/2}} \quad (17.4.9)$$

asimptotik tenglik o'rinli.

**Isbot.** Aytaylik,  $f$  funksiya  $2m$  marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan interval  $(-\delta, \delta)$  bo'lsin. Agar  $e^{-\lambda\delta^2}$  eksponenta  $\lambda \rightarrow +\infty$  da  $\lambda^{-m-1/2}$  darajadan tezroq nolga intilishini hisobga olsak, 17.4.1 - tasdiqqa ko'ra, quyidagi

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda^{m+1/2}}, \quad (17.4.10)$$

formulani isbotlash yetarli.

Berilgan  $f(x)$  funksiyani  $(-\delta, \delta)$  intervalda Teylor formulasi bilan almashtiramiz:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{2m}).$$

Bu formulani (17.4.10) ning chap qismidagi integralga qo'yib, integral chegaralari simmetrik ekanini hisobga olsak, toq  $k$  larga mos kelgan integrallar nolga aylanadi. Juft  $k$  larga mos kelgan integrallarga 17.4.2 - tasdiqni qo'llasak, talab qilingan (17.4.9) tenglikka ega bo'lamiz. ■

**Natija.** *Koordinatalar boshining biror atrofida ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi  $f$  funksiya uchun*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cdot \left[ f(0) + \frac{O(1)}{\lambda} \right], \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (17.4.11)$$

*asimptotik tenglik o'rinli.*

**3.** Endi (17.4.1) integralni (17.4.2) ko'rinishga keltirish masalasi-ni qaraylik. Integrallash intervalini surib, ya'ni chiziqli almashtirish bajarib, doim  $a < 0$  va  $b > 0$  deyishimiz mumkin. Shunday ekan, yuqoridagi masala quyidagi ko'rinishga keladi: qanday shartlarda  $g(t)$  funksiyani

$$g(t) = \varphi^2(t) \quad (17.4.12)$$

deb yozish mumkin, bu yerda  $\varphi(t)$  funksiya

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(t) > 0, \quad a < t < b, \quad (17.4.13)$$



shartlarni qanoatlantiradi.

Haqiqatan, (17.4.13) shartga ko'ra,  $x = \varphi(t)$  funksiya monoton o'sadi va  $t = \psi(x)$  teskari funksiyaga ega, bunda teskari funksiya ham monoton o'sib,  $\psi(0) = 0$  shartni qanoatlantiradi. U holda (17.4.1) integralda  $t = \psi(x)$  almashtirish bajarsak, (17.4.12) tenglikka ko'ra,

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \int_\alpha^\beta e^{-\lambda x^2} \psi'(x) dx \quad (17.4.14)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Endi  $(\alpha, \beta)$  interval ichida  $f(x) = \psi'(x)$  va intervaldan tashqarida  $f(x) = 0$  desak,

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} f(x) dx \quad (17.4.15)$$

tenglikka kelamiz.

Shunday qilib, biz (17.4.1) integralni (17.4.2) ko'rinishga keltirdik.

E'tibor bering, 3 - bobda isbotlangan 3.6.9 - teoreмага asosan, har qanday elementar funksiya o'zi aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir. Ammo, differensiallanuvchanlik haqida bunday teorema yo'q va bo'lishi ham mumkin emas. Masalan,  $\varphi(t) = \sqrt{t^2} = |t|$  murakkab funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida uzluksiz bo'lib, lekin faqat  $t \neq 0$  nuqtalardagina differensiallanuvchidir. Bunga sabab shundaki,  $\sqrt{x}$  funksiya faqat  $x > 0$  larda differensiallanuvchidir ( $x \geq 0$  da uzluksiz bo'lishiga qaramasdan).

Demak, agar  $g(t)$  differensiallanuvchi funksiya qat'iy musbat bo'lsa,  $\varphi(t) = \sqrt{g(t)}$  murakkab funksiya ham differensiallanuvchi va musbat bo'ladi. Bordiyu  $g(t)$  funksiya manfiy emas bo'lsa, u holda  $\varphi(t) = \sqrt{g(t)}$  funksiya differensiallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin. Bunda silliqlik  $g$  funksiya nolga aylangan nuqtalarda yo'qolishi mumkin.

Lekin, shunga qaramasdan, har qanday cheksiz differensiallanuvchi nomanfiy funktsiyani cheksiz differensiallanuvchi funktsiyaning kvadrati (manfiymas bo'lishi shart bo'lmagan) ko'rinishda yozish mumkin. Qulaylik uchun shu paragrafnig oxirigacha, agar funktsiya biror intervalda cheksiz differensiallanuvchi bo'lsa, biz uni shu intervalda *silliq* deymiz.

Aytaylik,  $g(t)$  funktsiya nolning biror atrofida silliq bo'lib, shu atrofning noldan boshqa nuqtalarida musbat bo'lsin. Bundan tashqari, nol nuqtada

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g''(0) > 0 \quad (17.4.16)$$

shartlar bajarilsin.

Qayd etilgan atrofda  $g(t)$  funktsiyani, integral ko'rinishdagi qoldiq had bilan, Teylor formulasi bo'yicha yoyamiz (6.5.4 - teoremaga qarang):

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \int_0^t (t-s)g''(s) ds.$$

(17.4.16) shartni hisobga olib va  $s = yt$  almashtirish bajarib, bu tenglikni biz

$$g(t) = t^2 \int_0^1 (1-y)g''(ty) dy$$

deb yozishimiz mumkin.

Endi

$$h(t) = \int_0^1 (1-y)g''(ty) dy,$$

funktsiyani kiritaylik; 17.1.3 - teoremaga asosan, bu funktsiya nolning atrofida silliqdir. Ya'ni:

$$g(t) = t^2 h(t).$$

Ikkinchi hosila uzluksiz bo'lgani uchun, yuqoridagi  $g''(0) > 0$  tengsizlik nolning biror atrofida ham o'rinni bo'ladi, ya'ni  $g''(t) > 0$ .

Demak,  $h(t)$  funksiya nolning atrofida nafaqat silliq, balki qat'iy musbat ham bo'lar ekan. Bundan chiqdi,  $\sqrt{h(t)}$  va

$$\varphi(t) = t\sqrt{h(t)}$$

funksiyalar nolning atrofida cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, (17.4.12) tenglik bajariladi.

Shunday qilib, (17.4.16) shart ostida,  $g$  funksiyani silliq funksiya kvadrati ko'rinishida yozish mumkin ekan. Bunda

$$\varphi(t) = (\text{sign } t) \sqrt{g(t)}$$

ekanini ko'rish qiyin emas.

Yuqoridagi mulohazalarni umumlashtirib, biz quyidagi asosiy teoreмага kelimiz.

**17.4.1 - teorema.** *Faraz qilaylik,  $g(t)$  funksiya 0 nuqtani o'z ichiga olgan  $(a, b)$  intervalda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, (17.4.16) shartlarni qanoatlantirsin. Bundan tashqari,  $t = 0$  nuqtaning biror atrofida bu funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lsin. U holda istalgan natural  $m$  uchun  $\lambda \rightarrow \infty$  da quyidagi*

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\psi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1/2)}{\lambda^{k+1/2}} + \frac{O(1)}{\lambda^{m+1/2}} \quad (17.4.17)$$

asimptotik tenglik bajariladi. Bu tenglikda  $\psi(x)$  funksiya  $\varphi^2(t) = g(t)$  tenglikni qanoatlantiruvchi  $\varphi(t)$  funksiyaga teskari funksiyadir.

**Isbot** 17.4.3 - tasdiqqa ko'ra, bevosita (17.4.14) va (17.4.15) tengliklardan kelib chiqadi.

**1 - eslatma.** 17.4.1 - teorema shartlarida  $g(t)$  funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi bo'lishini talab qilish shart emas. Buning o'rniga uning biror chekli sondagi hosilaga ega ekanini talab qilish yetarli, lekin bunda (17.4.17) formuladagi hadlar soni hosilalar soniga bog'liq bo'ladi.

**2 - eslatma.**  $x = \varphi(t)$  funksiyaga teskari, ya'ni

$$g[\psi(x)] = x^2 \quad (17.4.18)$$

tenglamaning yechimi bo'lgan,  $t = \psi(x)$  funksiya hosilalarining noldagi qiymatini hisoblash uchun yuqoridagi tenglamani yechish shart emas. Biz buni, masalan, (17.4.7) asimptotikaning birinchi hadiga kirgan  $\psi'(0)$  qiymatni hisoblashda ko'rsatamiz.

Buning uchun  $t = \psi(x)$  deb, (17.4.18) ayniyatni  $x$  bo'yicha ikki marta differensiallaymiz. Birinchi differensiallashdan so'ng

$$g'(t) \cdot \psi'(x) = 2x$$

tenglikni va ikkinchi differensiallash natijasida esa,

$$g''(t) \cdot [\psi'(x)]^2 + g'(t) \cdot \psi''(x) = 2$$

tenglikni olamiz.

Ravshanki,  $x = 0$  da  $t = \psi(0) = 0$  tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, agar  $g'(0) = 0$  ekanini hisobga olsak, oxirgi ayniyatdan

$$g''(0) \cdot [\psi'(0)]^2 = 2$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{g''(0)}}. \quad (17.4.19)$$

Shunday ekan, 17.4.1 - teoremadan navbatdagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi.

**17.4.4 - tasdiq.** 17.4.1 - teorema shartlari ostida

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{g''(0) \cdot \lambda}} \left[ 1 + \frac{O(1)}{\lambda} \right] \quad (17.4.20)$$

asimptotik tenglik o'rinli.

Haqiqatan, (17.4.17) formulada  $m = 1$  deb,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  ekani hisobga olish yetarli.

Xuddi shu usulda (17.4.17) asimptotik yoyilmadagi boshqa hadlarni ham topish mumkin.

**Eslatma.** Laplas usulini yanada umumiyroq bo'lgan quyidagi

$$\int_a^b e^{-\lambda g(t)} f(t) dt$$

integrallarga ham qo'llash mumkin.

Bunda asosiy mulohazalar xuddi (17.4.1) integralni o'rganishdagidek bo'lib qolaveradi.

**3.** Laplas usulini

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx \quad (17.4.21)$$

Eyler gamma-funksiyasini  $p$  parametrning katta qiymatlaridagi asimptotikasini o'rganishga qo'llaymiz.

Agar

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-p(y-1)} y^p dy = \int_0^{\infty} e^{-p(y-1-\ln y)} dy$$

deb belgilab,  $x = py$  almashtirish bajarsak,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = p^{p+1} \int_0^{\infty} e^{-py} y^p dy = p^{p+1} e^{-p} I(p) \quad (17.4.22)$$

ifodani olamiz.

Endi  $I(p)$  integralda  $t = y - 1$  almashtirish bajarsak, bu integral

$$I(p) = \int_{-1}^{\infty} e^{-pg(t)} dt$$

ko'rinishga keladi, bu yerda

$$g(t) = t - \ln(1+t). \quad (17.4.23)$$

Ma'lumki,

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t}, \quad g''(t) = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Bundan chiqdi,  $g$  funksiya 17.4.1 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, 17.4.4 - tasdiqqa ko'ra,

$$I(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left[ 1 + \frac{O(1)}{p} \right].$$

Bunda biz  $g''(0) = 1$  ekanini hisobga oldik. Nihoyat, topilgan asimptotik bahoni (17.4.22) ning o'ng tarafiga qo'yib, (17.4.21) ta'rifni hisobga olsak,

$$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p \left[ 1 + \frac{O(1)}{p} \right] \quad (17.4.24)$$

asimptotik formulaga ega bo'lamiz.

Parametr  $p$  natural son bo'lganda bu formula *Stirling formulasi* deb ataladi va odatda,

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (17.4.25)$$

ko'rinishda yoziladi.

**Eslatma.** Agar (17.4.20) formula o'rniga (17.4.17) formulani qo'llasak, faktorialning yetarlicha ko'p hadli asimptotik yoyilmasini olamiz. Masalan, beshta hadli yoyilmasi

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[ 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} - \frac{571}{2\,488\,320n^4} + \frac{O(1)}{n^5} \right]$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ishorasi takrorlanadigan qatorlar kabi, bu asimptotik formula-ning xatoligi ham oxirgi topilgan hadning absolyut qiymatidan oshmaydi.

**17.4.1 - misol.** O'nlik sanoq sistemasida  $N = 100!$  sonini taqriban hisoblang.

Buning uchun (17.4.25) formulani qo'llash yetarli:

$$100! \simeq \sqrt{2\pi \cdot 100} \left(\frac{100}{e}\right)^{100} = 10\sqrt{2\pi} 10^{100(\lg 100 - \lg e)} \simeq 9 \cdot 10^{157}.$$

Shuni aytish kerakki, tabiatda bunday katta son bilan xarakterlanadigan ob'ekt topish qiyin.

## 17.5-§. Parametrga bog'liq karrali integrallar

**1. Ta'rif va asosiy xossalari.** Ixtiyoriy ikki  $G \subset \mathbb{R}^m$  va  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  to'plamlarni hamda  $f : G \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funksiyani qaraylik. Bu degani,  $f(x, y)$  ikki ko'p o'lchovli o'zgaruvchilarning, ya'ni  $m$  o'lchovli  $x$  ning va  $n$  o'lchovli  $y$  ning funksiyasidir.

Faraz qilaylik,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  to'plam Jordan ma'nosida o'lchovli (ya'ni,  $n = 2$  da kvadratlanuvchi va  $n \geq 3$  da kublanuvchi) bo'lsin. Bundan tashqari,  $f(x, y)$  har bir tayinlangan  $x \in G$  da  $y$  ning funksiyasi sifatida  $\Omega$  to'plamda integrallanuvchi bo'lsin. Bu holda

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy \quad (17.5.1)$$

integral  $x \in G$  parametrga bog'liq karrali integral deb ataladi.

Quyida keltirilgan tasdiqlarda biz  $G$  va  $\Omega$  to'plamlarni soha deb, ya'ni ochiq bog'lamlil to'plam deb hisoblaymiz. Jordan bo'yicha o'lchovli ekanidan ularning chegaralangani kelib chiqadi. Eslatib o'tamiz,  $\overline{G}$  simvol  $G$  to'plamning yopig'ini anglatar edi.

Parametrga bog'liq karrali integrallar ham xuddi bir karrali integrallar kabi xossalarga ega.

**17.5.1 - tasdiq.** *Istalgan  $f \in C(\overline{G} \times \overline{\Omega})$  funksiya uchun (17.5.1) integral  $\overline{G}$  yopiq to'plamda uzluksiz funksiyadir.*

**17.5.2 - tasdiq.** *Agar  $G$  kvadratlanuvchi soha bo'lsa, istalgan  $f \in C(\overline{G} \times \overline{\Omega})$  funksiya uchun (17.5.1) tenglik bilan aniqlangan  $\Phi$*

funksiya  $G$  to'plamda integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_G \Phi(x) dx = \int_{\Omega} dy \int_G f(x, y) dx \quad (17.5.2)$$

tenglik bajariladi.

**17.5.3 - tasdiq.** Agar  $f \in C(\overline{G} \times \overline{\Omega})$  va har bir  $1 \leq j \leq m$  uchun  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\overline{G} \times \overline{\Omega})$  bo'lsa, u holda (17.5.1) integral  $G$  sohada  $x_j$  o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_j} dy \quad (17.5.3)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot** xuddi mos 17.1.1 - 17.1.3 - teoremlar isboti kabidir. Masalan, 17.5.3 - tasdiqni isbotlaylik.

Buning uchun  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$  deb belgilash kiritamiz. U holda,  $x = (\tilde{x}, x_m) \in G$ . Endi  $\tilde{x}$  ni tayinlab, shunday  $a$  son tanlaymizki, bunda  $(\tilde{x}, a)$  va  $(\tilde{x}, x_m)$  nuqtalarni tutashtiruvchi kesma butunligicha  $G$  sohada yotsin.

Agar

$$\psi(x_m) = \int_{\Omega} \frac{\partial f(\tilde{x}, x_m, y)}{\partial x_m} dy \quad (17.5.4)$$

bir o'zgaruvchili funksiyani kiritsak, u holda bu funksiya integrali uchun, 17.5.2 - tasdiqni qo'llab va Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib,

$$\begin{aligned} \int_a^{x_m} \psi(t) dt &= \int_{\Omega} dy \int_a^{x_m} \frac{\partial f(\tilde{x}, t, y)}{\partial t} dt = \\ &= \int_{\Omega} [f(\tilde{x}, x_m, y) - f(\tilde{x}, a, y)] dy = \Phi(\tilde{x}, x_m) - \Phi(\tilde{x}, a) \end{aligned}$$



tenglikni olamiz.

Bu tenglikning ikki tarafini  $x_m$  bo'yicha differensiallasak,

$$\psi(x_m) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_m}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan tenglikni (17.5.4) bilan taqqoslab, talab qilingan (17.5.3) formulani  $j = m$  uchun olamiz. Boshqa  $j$  lar uchun ham isbot xuddi shu kabi bo'ladi.

## 2. Parametrga bog'liq karrali xosmas integrallar.

(17.5.1) ko'rinishdagi karrali xosmas integrallar xuddi bir karrali parametrga bog'liq integrallar kabi o'rganiladi. Bunda quyidagi ikki holni alohida qarash kerak: 1) integral ostidagi funksiya maxsusliklar to'plami parametrga bog'liq emas; 2) bu to'plam parametrga bog'liq.

Birinchi holda (17.5.1) xosmas integral mahkamlangan maxsuslikka ega bo'lgan integral deb ataladi. Ushbu bandda aynan shunday xosmas integrallarni o'rganamiz.

Mahkamlangan maxsuslikka ega (17.5.1) xosmas integralni, parametrga bog'liqmas ravishda tanlangan, qamrab oluvchi sohalar bo'yicha integrallar bilan yaqinlashtirish mumkin. Biz integral ostidagi funksiya maxsusliklari  $\Omega$  sohasining chegarasida yotadi deb faraz qilamiz. Masalan, agar  $\psi$  funksiyaning maxsusligi bo'lmasa,

$$\int_{|y|<1} \frac{\psi(x, y)}{|y|^{n-1} \sqrt{1-|y|^2}} \quad (17.5.5)$$

xosmas integral uchun  $\Omega$  soha sifatida, tabiiyki,

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < |y| < 1\}$$

to'plamni olish kerak.

Bu sohaning chegarasi radiusi 1 va markazi  $y = 0$  nuqtada bo'lgan sfera va  $y = 0$  nuqtaning o'zidan iborat.

Ravshanki,

$$\Omega_k = \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |y| < 1 - \frac{1}{k}\}$$

to'plamlar  $\Omega$  ni qamrab oluvchi  $\{\Omega_k\}$  sohalar ketma-ketligini tashkil qiladi.

Yana bir misol sifatida

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x, y) dy}{|y - a|^{n-1}} \quad (17.5.6)$$

integralni olishimiz mumkin, bu yerda  $a$  orqali  $\mathbb{R}^n$  fazosining ixtiyoriy tayinlangan nuqtasi belgilangan. (17.5.6) integral uchun  $\Omega$  soha sifatida  $\mathbb{R}^n$  fazodan  $a$  nuqtani chiqarib tashlash natijasida hosil bo'lgan to'plamni olish mumkin, ya'ni

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y \neq a\}.$$

Ayonki,

$$\Omega_k = \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < |y - a| < k\}$$

sohalar  $x$  parametrga bog'liq bo'lmay,  $\Omega$  ni qamrab oluvchi ketma-ketlikni tashkil qiladi.

Har bir (17.5.5) va (17.5.6) integral mahkamlangan maxsuslikka ega va  $x$  parametrga bog'liq xosmas integraldir. Shuning uchun integrallash sohasini qamrab oluvchi sohalar ketma-ketligini  $x$  parametrga bog'liqmas ravishda tanlash mumkin. (E'tibor bering, agar (17.5.6) integralda  $a$  ni parametr deb hisoblasak, u holda  $\Omega_k$  sohalarini  $a$  ga bog'liq qilib tanlashga to'g'ri kelar edi).

Faraz qilaylik, (17.5.1) xosmas integral bo'lib,  $x \in G$  parametrning har bir qiymatida yaqinlashsin. Bundan tashqari,  $\Omega_k$  sohalar ketma-ketligi  $\Omega$  ni qamrab olsin. Quyidagi

$$\Phi_k(x) = \int_{\Omega_k} f(x, y) dy \quad (17.5.7)$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz.

Agar (17.5.7) ko'rinishdagi ixtiyoriy  $\Phi_k(x)$  ketma-ketlik  $\Phi(x)$  ga  $G$  da tekis yaqinlashsa, u holda

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy$$

xosmas integralni  $x \in G$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi deymiz.

Xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, karrali xosmas integrallar uchun ham Veyershtassning tekis yaqinlashish alomati o'rinli: agar integral ostidagi  $f(x, y)$  funksiya yuqoridan  $x$  ga bog'liqmas  $g(y)$  funksiya bilan baholansa, u holda  $g$  dan olingan integral yaqinlashishidan  $f$  dan olingan integralning tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Masalan, agar  $\psi$  funksiya biror o'zgarimas bilan chegaralangan bo'lsa, u holda (17.5.5) integral  $x$  bo'yicha tekis yaqinlashadi.

Parametrga bog'liq (17.5.1) ko'rinishdagi tekis yaqinlashuvchi karrali xosmas integrallar uchun ham bir o'zgaruvchili holda isbotlangan kabi tasdiqlar o'rinli. Xususan,

1) agar integral ostidagi  $f(x, y)$  funksiya  $G \times \Omega$  da uzluksiz bo'lsa, u holda tekis yaqinlashuvchi (17.5.1) integral  $G$  da uzluksiz funksiya bo'ladi;

2) agar (17.5.1) integral barcha  $x \in G$  larda yaqinlashsa hamda integral ostidagi funksiya  $G \times \Omega$  da uzluksiz  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_j}$  hosilaga ega bo'lib, bu hosiladan olingan integral tekis yaqinlashsa, u holda integral ostida differentsiallashtirish formulasi o'rinli:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_j} dy.$$

**17.5.1 - misol.** Quyidagi

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x, y) dy}{|y|^\lambda}, \quad \lambda < n, \quad (17.5.8)$$

integralni qaraymiz.

Aytaylik,  $\psi(x, y)$  funksiya markazi koordinatalar boshida bo'lgan biror shardan tashqarida nolga teng bo'lsin, ya'ni shunday  $R > 0$  son topilsinki,

$$\psi(x, y) = 0, \quad |y| > R, \quad (17.5.9)$$

shart bajarilsin.

U holda integral, aslida, shu shar bo'yicha olinadi, ya'ni

$$u(x) = \int_{|y| \leq R} \frac{\psi(x, y) dy}{|y|^\lambda}.$$

Ravshanki,  $g(y) = |y|^{-\lambda}$  funksiya  $\lambda < n$  da shu shar bo'yicha integrallanuvchi. Shunday ekan, biz Veyershtress alomatini qo'llashimiz mumkin. Bu alomatga ko'ra:

1) agar  $\psi$  ikki o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi bo'lsa, u holda (17.5.8) integral uzluksiz funksiya bo'ladi;

2) agar  $\psi$  funksiya uzluksiz  $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$  hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x_j} \frac{dy}{|y|^\lambda}, \quad \lambda < n,$$

tenglik bajariladi.

**Eslatma.** Agar  $\psi(x, y)$  funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, (17.5.9) shartni qanoatlantirsa, u holda (17.5.8) integral ham parametrga nisbatan cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, istalgan  $\alpha$  multiindeks uchun (§12.2 ning 6 - bandini qarang)

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{D_x^\alpha \psi(x, y) dy}{|y|^\lambda}, \quad 0 < \lambda < n, \quad (17.5.10)$$

tenglik bajariladi.

**3. Diagonalda maxsuslikka ega karrali xosmas integral-lar.**

Ushbu bandda biz integral ostidagi funksiya parametrga bog'liq to'plamda cheksizlikka aylanishi mumkin bo'lgan xosmas integrallarni qaraymiz. Bunday turdagi xosmas integrallardan eng ko'p ahamiyatga ega bo'lgani quyidagi

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y-x) \psi(y) dy \quad (17.5.11)$$

ko'rinishdagi integrallardir. Bu integralda  $\psi(y)$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazoda aniqlangan va yetarlicha silliq bo'lib,  $F(y)$  esa, faqat  $y = 0$  nuqtada maxsuslikka ega bo'lishi mumkin bo'lgan,  $\mathbb{R}^n$  fazoda uzluksiz funksiyadir. Bu degani, integral ostidagi funksiyaning maxsusligi  $x = y$  «diagonalda» joylashgan. Parametr rolini  $x \in \mathbb{R}^n$  o'zgaruvchi o'ynaydi.

Agar  $F$  funksiyani tayinlab qo'ysak, (17.5.11) integral o'zi aniqlangan har bir  $\psi(x)$  funksiyaga biror  $u(x)$  funksiyani mos qo'yadi. Bunday akslantirish *integral operator* va  $F(y-x)$  funksiya esa, uning *yadrosi* deb ataladi. Yadroni biz lokal integrallanuvchi deb hisoblaymiz, ya'ni istalgan  $R > 0$  uchun

$$\int_{|y|<R} |F(y)| dy = C_R < +\infty \quad (17.5.12)$$

xosmas integral yaqinlashadi deyimiz.

(17.5.11) integral operator ta'sir qiluvchi  $\psi$  funksiyalar sifatida biror  $R > 0$  ( $\psi$  ga bog'liq bo'lgan) o'zgarmas bilan

$$\psi(y) = 0, \quad |y| > R, \quad (17.5.13)$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiyalarni olamiz.

Bu shartlardan (17.5.11) da integrallash, aslida,  $\mathbb{R}^n$  fazosi bo'yicha emas, balki radiusi  $R$  va markazi koordinatalar bo'shida bo'lgan shar bo'yicha olinayotgani kelib chiqadi. Shunday ekan, (17.5.11) ikkinchi tur xosmas integral bo'lib, integral ostidagi funksiya maxsusligi  $y = x$  nuqtada joylashgan. Misol sifatida, matematik fizikada

muhim rol o'ynovchi,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

integralni olishimiz mumkin.

(17.5.11) ko'rinishdagi xosmas integrallar quyidagi ajoyib xossaga ega: agar integral operator ta'sir qiluvchi  $\psi(x)$  funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda, yadro silliq bo'lmasada,  $u(x)$  funksiya ham cheksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, o'zgaruvchini almashtirib, (17.5.11) integralni

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) \psi(y+x) dy$$

deb yozishimiz mumkin.

Agar  $\psi(x)$  funksiya cheksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda istalgan  $\alpha$  multiindeks uchun, formal ravishda quyidagi

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) D^\alpha \psi(x+y) dy \quad (17.5.14)$$

tenglik o'rinli.

Agar  $F$  funksiya lokal integrallanuvchi ((17.5.12) shartga qarang) bo'lib,  $\psi$  funksiya (17.5.13) shartni qanoatlantirsa, u holda Veyer-shtrass alomatiga ko'ra, (17.5.14) integrallar tekis yaqinlashadi. Bundan (17.5.14) formulalarning to'g'ri ekanligi va (17.5.11) integralning cheksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi. Teskari almashtirishni amalga oshirsa,

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y-x) D^\alpha \psi(y) dy \quad (17.5.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

#### 4. Potensial xilidagi integrallar. Quyidagi

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad 0 < \lambda < n, \quad (17.5.16)$$

ko'rinishdagi integrallar potensial xilidagi integrallar deyiladi.

Agar  $n = 3$  va  $\lambda = 1$  bo'lsa, yuqoridagi integral gravitatsiya nazariyasida *Nyuton* potentsiali deb, elektr nazariyasida esa, *Kulon* potentsiali deb ataladi. Bunda integral ostidagi  $\psi$  funksiyaga zichlik deyiladi.

Potensial xilidagi integrallarni  $F(y) = |y|^{-\lambda}$  yadro bilan (17.5.11) ko'rinishda yozish mumkin, bunda, albatta, yadro lokal integrallanuvchi bo'ladi, ya'ni (17.5.12) shartni qanoatlantiradi. Shunday ekan, yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, navbatdagi tasdiqni olamiz.

**17.5.5 - tasdiq.** *Faraz qilaylik,  $\alpha$  ixtiyoriy multiindeks bo'lsin. Agar  $\psi$  funksiya uzluksiz  $D^\alpha \psi(x)$  hosilaga ega bo'lib, (17.5.13) shartni qanoatlantirsa, u holda potensial xilidagi (17.5.16) integral ham  $\alpha$  - tartibli hosilaga ega bo'lib,*

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{D^\alpha \psi(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad 0 < \lambda < n, \quad (17.5.17)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot** (17.5.15) formuladan kelib chiqadi.

E'tibor bering, umumiy (17.5.11) holdan farqli o'laroq, potensial xilidagi integrallar yadrosi diagonaldan tashqarida cheksiz differensiallanuvchidir. Shu sababli, (17.5.16) integral silliqqligini  $\psi$  funksiyaga nisbatan kamroq shartlarda isbotlash mumkin.

Haqiqatan, bu holda biz

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^\lambda} = -\lambda \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{\lambda+2}}$$

tenglikdan foydalanishimiz mumkin.

Ravshanki, differensiallangan

$$F_j(x-y) = -\lambda \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{\lambda+2}}$$

yadro

$$|F_j(x - y)| \leq \frac{\lambda}{|x - y|^{\lambda+1}}$$

bahoni qanoatlantiradi.

Agar  $\lambda + 1 < n$  bo'lsa,  $F_j(y)$  funksiya lokal integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} F_j(x - y) \psi(y) dy$$

tenglikdan uzluksiz  $\psi$  zichlikka ega potentsiallarning barcha qisimiy hosilalari uzluksiz ekani kelib chiqadi. Bundan chiqdi, navbatdagi tasdiq o'rinli bo'lar ekan.

**17.5.6 - tasdiq.** Agar  $\lambda < n - 1$  bo'lsa,  $u$  holda (17.5.13) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz  $\psi$  funksiya uchun potentsial xilidagi (17.5.16) integral  $\mathbb{R}^n$  fazoda uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lib,

$$\nabla u(x) = -\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x - y}{|x - y|^{\lambda+2}} \psi(y) dy \quad (17.5.18)$$

tenglik bajariladi.

**1 - eslatma.**  $\lambda = n - 1$  da bu tasdiq o'rinli emas, chunonchi, shunday uzluksiz  $\psi$  zichlik topiladiki, bunda (17.5.16) funksiya uzluksiz bo'lib, uzluksiz differensiallanuvchi bo'lmaydi.

**2 - eslatma.** Agar 17.5.6 - tasdiq shartida qo'shimcha ravishda  $\psi$  funksiyaning uzluksiz differensiallanuvchi desak,  $u$  holda (17.5.16) potentsial xilidagi integral ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. Xususan, agar  $\Delta$  simvol orqali Laplas operatorini belgilasak:

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

$u$  holda

$$\Delta u(x) = -\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{\lambda+2}} y \cdot \nabla \psi(x + y) dy \quad (17.5.19)$$



tenglik bajariladi. Isbot bevosita (17.5.18) tenglik va 17.5.5 - tasdiqdan kelib chiqadi.

**5. Nyuton potentsiali.** Agar  $n \geq 3$  desak,  $\mathbb{R}^n$  fazosida Nyuton potentsiali

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(y)}{|x-y|^{n-2}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x+y)}{|y|^{n-2}} dy \quad (17.5.20)$$

kabi aniqlanadi.

**17.5.1 - teorema.** (17.5.13) shartni qanoatlantiruvchi istalgan uzluksiz differensiallanuvchi  $\psi(x)$  zichlik uchun (17.5.20) Nyuton potentsiali ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lib, u quyidagi

$$\Delta u(x) = -(n-2)\omega_n \psi(x) \quad (17.5.21)$$

tenglikni qanoatlantiradi, bu yerda  $\omega_n$  —  $\mathbb{R}^n$  dagi birlik sfera sirtining yuzi ((13.8.18) ta'rif va (17.3.11) tenglamaga qarang).

**Isbot.** (17.5.19) tenglikda  $\lambda = n - 2$  deb, markazi  $x$  nuqtada bo'lgan  $(r, \theta)$  sferik koordinatalarni kiritamiz (13.8.5 - bandga qarang). Bu koordinatalarda radius bo'yicha hosila uchun

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi(x + r\theta) = \theta \cdot \nabla \psi(x + r\theta) = \frac{y}{|y|} \cdot \nabla \psi(x + y)$$

tenglik o'rinli.

Shunday ekan, (17.5.19) formulaning o'ng tomonidagi integralda qayd qilingan sferik koordinatalarga o'tib, so'ngra Nyuton-Leybnits formulasi qo'llanilsa, talab qilingan natija olinadi:

$$\Delta u(x) = -(n-2) \int_{\Sigma^{n-1}} \Phi(\theta) d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \psi(x + r\theta) r^{n-1} dr =$$

$$= -(n-2) \int_{\Sigma^{n-1}} \psi(x) \Phi(\theta) d\theta = -(n-2) \omega_n \cdot \psi(x). \blacksquare$$

**3 - eslatma.** 17.5.1 - teorema shartida zichlik (17.5.13) munosabatni qanoatlantirishini talab qilish shart emas. Teorema tasdig'i  $\psi$  zichlik cheksizlikda yetarlicha tez nolga intilganda ham o'rinli.

### 6. Uzoqlashuvchi karrali xosmas integrallarni jamlash.

Parametrga bog'liq integrallardan uzoqlashuvchi karrali xosmas integrallarni jamlashda ham foydalaniladi.

Masalan,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad (17.5.22)$$

xosmas integralni olsak.

Abel jamlash usulini ko'p o'lchovli holda kiritish uchun,  $\alpha > 0$  parametrga bog'liq quyidagi

$$A(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx \quad (17.5.23)$$

integralni qaraymiz. Agar

$$(A) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx$$

tenglikning o'ng tarafidagi limit mavjud bo'lsa, u holda (17.5.22) xosmas integral Abel usuli bilan jamlanadi deyiladi. Eslatib o'tamiz, agar (17.5.22) integralning bosh qiymati:

$$\text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq R} f(x) dx$$

mavjud bo'lsa, integral Koshi ma'nosida yaqinlashadi deyiladi. Navbatdagi tasdiq Abel jamlash usuli bilan xosmas integrallarni Koshi bo'yicha integrallashni bog'laydi.

**17.5.2 - teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazosida uzluksiz bo'lib, istalgan  $\alpha > 0$  uchun (17.5.23) integral yaqinlashsin. Agar (17.5.22) xosmas integral Koshi bo'yicha yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx = \text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** Sferik koordinatalarni kiritib, radiusi  $r$  va markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera bo'yicha

$$\psi(r) = \int_{|x|=r} f(x) d\sigma(x)$$

sirt integralini qaraylik.

Ravshanki,

$$\int_{|x| \leq R} f(x) dx = \int_0^R \psi(r) dr$$

va (17.5.22) integralning bosh qiymati uchun

$$\text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^{\infty} \psi(r) dr \quad (17.5.24)$$

tenglik o'rinli.

Bundan chiqdi, (17.5.23) integralni quyidagi

$$A(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} \psi(r) dr \quad (17.5.25)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Isbotni yakunlash uchun Abelning 17.2.9 - teoremasini qo'llash yetarli. Bu teoreмага ko'ra, (17.5.25) tenglikning o'ng tarafidagi integral  $\alpha \rightarrow 0$  da (17.5.24) ning o'ng tarafidagi integralga yaqinlashadi. ■

**Natija.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazoda uzluksiz bo'lsin. Agar (17.5.22) xosmas integral yaqinlashsa, u holda quyidagi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

tenglik bajariladi.

**1 - eslatma.** (17.5.22) integralni jamlashning Abel nomi bilan bog'liq yana bir usuli

$$\Phi(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|^2} f(x) dx \quad (17.5.26)$$

integral bilan aniqlanadi.  $\Phi(\alpha)$  funksiya ba'zan Gauss o'rtachalari deb ham ataladi.

Xuddi yuqoridagidek, agar (17.5.22) integral  $I$  soniga yaqinlashsa, u holda (17.5.26) integrallarning  $\alpha \rightarrow 0$  dagi limiti mavjud bo'lib, u  $I$  ga teng bo'ladi.

**2 - eslatma.** (17.5.23) va (17.5.26) integrallar bilan aniqlangan Abel jamlash usullaridan biz, aslida, Dirixlening uzilishga ega bo'lgan (17.2.48) ko'paytuvchisini hamda (17.2.34) va (17.2.35) Frenel integrallarini hisoblashda foydalangan edik.

## 17.6-§. Misollar

**1 - misol.** Quyidagi integral parametrning uzluksiz funksiyasi ekanini ko'rsating va limitni hisoblang:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \sin \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx.$$

**Ko'rsatma.** Integral ostidagi funksiya 17.1.1 - teorema shartlarini qanoatlantiradi. Shunday ekan, integral ostida limitga o'tish mumkin.

**2 - misol.** Ushbu

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x \cos x - 1)(\cos x - x \sin x)}{\ln(x \cos x)} dx$$

integralni hisoblang.

**Ko'rsatma.** Yordamchi

$$\Phi(x) = \int_0^1 (x \cos x)^t dt = \frac{x \cos x - 1}{\ln(x \cos x)}$$

integralni kiritib, 17.1.2 - va 17.2.8 - misollarda keltirilgan sun'iy usulni qo'llang.

**3 - misol.** Parametrga bog'liq quyidagi

$$I(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{ye^{x(1-y^2)}}{1-y^2} dy$$

integralning  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  nuqtadagi hosilasini toping.

**Ko'rsatma.** (17.1.9) formulani qo'llash kifoya.

**4 - misol.** Parametrga bog'liq quyidagi

$$I(x) = \int_0^{\infty} xy e^{-xy^2} dy$$

integralning har qanday  $[a, b] \subset (0, \infty)$  kesmada tekis yaqinlashishini va  $[0, b]$  kesmada esa, har bir  $x$  uchun yaqinlashadiyu, lekin tekis yaqinlashmasligini ko'rsating.

**Ko'rsatma.** Integral tekis yaqinlashishini ko'rsatish uchun integralda  $t = y^2$  almashtirish bajarib, 17.2.1 - teoremani qo'llang. Integralning ikkinchi kesmada yaqinlashishini ko'rsatish uchun esa, integralda  $t = xy^2$  almashtirish bajarib, bevosita ta'rif yordamida tekshiring.

**5 - misol.** Har qanday  $n \geq 1$  uchun

$$I(\alpha) = \int_2^{\infty} \frac{x^{n-1} \sin(\alpha x^n)}{\ln x} dx$$

integral istalgan  $[a, b] \subset (0, \infty)$  kesmada tekis yaqinlashishini ko'rsating.

**Ko'rsatma.**  $f(x, \alpha) = x^{n-1} \sin(\alpha x^n)$  va  $g(x) = \frac{1}{\ln x}$  deb, 17.2.2 - teoremani qo'llang.

**6 - misol.**  $\alpha \in [0, \infty)$  parametrta bog'liq bo'lgan quyidagi

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ikkinchi tur xosmas integralni tekis yaqinlashishga tekshiring.

**Ko'rsatma.** §17.2.4 da qayd etilganidek, bunday integrallar uchun ham Veyershtrass teoremasi o'rinli. Mana shu teoremadan foydalaning.

**7 - misol.** Birinchi tartibli Riss usuli bilan  $\cos x$  funksiyadan  $(0, \infty)$  yarim o'q bo'yicha olingan integral jamlansada,  $\cos \sqrt{x}$  funksiyadan olingan integral esa, shu usul bilan jamlanmas ekanini ko'rsating.

**Ko'rsatma.**  $\cos x$  funksiyadan olingan integral xuddi  $\sin x$  funksiyadan olingan integral kabi o'rganiladi (§17.2.7 ning 4° bandiga qarang).  $\cos \sqrt{x}$  funksiya uchun birinchi tartibli Riss o'rtachalari quyidagi

$$R_1(\alpha) = \int_0^{1/\alpha} (1 - \alpha x) \cos \sqrt{x} dx$$

ko'rinishga ega. Bu integralning  $\alpha \rightarrow 0$  dagi limitini aniqlash uchun integralda  $\sqrt{x} = t$  almashtirish bajarib, bo'laklab integrallash yetarli.

**8 - misol.** Agar  $a > 0$  bo'lsa, Eylar integrallaridan foydalanib, quyidagi integralni hisoblang:

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

**Ko'rsatma.** Integralda  $x = a\sqrt{t}$  almashtirish bajarung. So'ngra beta-funksiyaning (17.3.13) ta'rifidan foydalaning. Hosil bo'lgan beta-funksiyani (17.3.16) formula yordamida gamma-funksiyaga keltiring. Gamma-funksiyani hisoblash uchun (17.3.9) va (17.3.11) formulalarni qo'llang.

**9 - misol.** Quyidagi

$$\int_{-1}^1 e^{-\lambda(1-\sqrt{1-x^2})+x} dx$$

integral asimptotik yoyilmasining birinchi hadini toping.

**Ko'rsatma.** Avval  $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$  funksiya (17.4.16) shartlarni qanoatlantirishiga ishonch hosil qiling. So'ngra  $g(x) = \varphi^2(x)$  almashtirish bajarib, (17.4.9) formuladan foydalaning.

**10 - misol.** Faraz qilaylik,  $x \in \mathbb{R}^n$  va  $t \in \mathbb{R}$  bo'lsin. Agar  $\theta(t)$  Hevisayd funksiyasi bo'lib,

$$E(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

bo'lsa,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) E(y - x, t) dy$$

funksiya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

issiqlik tarqalishi tenglamasini va

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(x, t) = f(x)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantirishini ko'rsating.

**Ko'rsatma.** Avval  $\xi_j = \frac{x_j}{2\sqrt{t}}$  almashtirish bajarib,

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = 1$$

ekanini ko'rsating. So'ngra integral ostida limitga o'tish va integral ostida differensiallash qoidalaridan foydalaning.



## 18-bob. Maydon nazariyasi elementlari

### 18.1-§. Skalyar va vektor maydonlar

1. Ushbu bobda, bizni o‘rab turgan olamdagi fizik hodisalarning matematik tavsifi deb tushuniladigan, an’anaviy maydonlar nazariyasi bayon qilinadi. Mavjud dunyoning uch o‘lchovliligi haqiqatga yaqin bo‘lib, u Evklid geometriyasiga bo‘ysungani uchun, maydonlar nazariyasidagi asosiy ob’ektlar uch o‘lchovli  $E^3$  Evklid fazosidagi turli akslantirishlardan iborat. Eslatib o‘tamiz, ixtiyoriy  $\mathbf{r}_1 \in E^3$  va  $\mathbf{r}_2 \in E^3$  elementlari uchun  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  skalyar ko‘paytma aniqlangan  $E^3$  vektor fazosiga Evklid fazosi deyiladi. Skalyar ko‘paytma tabiiy ravishda vektorning  $|r| = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}$  uzunligini (yoki normasini) aniqlaydi. Natijada, ikki vektor orasidagi  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  masofa va bundan chiqdi, ochiq va yopiq to‘plamlar tushunchasi aniqlanadi.

Navbatdagi ikki turdagi akslantirishlar asosiy hisoblanib, ularni tavsiflash uchun biz fizik atamalardan foydalanamiz. Lekin bu atamalar ushbu bobdan tashqarida umuman qo‘llanilmaydi.

$1^0$ .  $E^3$  fazosining har bir  $\mathbf{r}$  nuqtasiga  $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$  sonni mos qo‘yuvchi  $f : E^3 \rightarrow \mathbb{R}$  akslantirish skalyar funksiya yoki *skalyar maydon* deb ataladi.

Masalan, issiqlik tarqalish nazariyasida fazoning har bir nuqtasi haroratga ega deb hisoblanadi. Har bir nuqtaga uning haroratini mos qo‘yuvchi funksiya haroratlar maydoni deb atalib, u skalyar maydonga klassik misol bo‘ladi.

$2^0$ .  $E^3$  fazosining har bir  $\mathbf{r}$  nuqtasiga  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \in E^3$  vektorni mos qo‘yuvchi  $\mathbf{A} : E^3 \rightarrow E^3$  akslantirish vektor funksiya yoki *vektor maydon* deb ataladi.

Masalan, suyuqlik harakati nazariyasida suyuqlik bilan to‘la fazoning har bir nuqtasi biror yo‘nalishda qandaydir tezlik bilan harakatlanadi deb faraz qilinadi. Har bir nuqtaga tezlik vektorini mos

qo'yuvchi funksiya tezliklar maydoni deb atalib, u vektor maydonga klassik misol bo'ladi.

Ushbu bobda skalyar va vektor maydonlar va ularning bir-biriga ta'siri o'rganiladi. Shuni aytish kerakki, matematik maydonlar nazariyasida skalyar va vektor maydonlar butun fazoda emas, balki biror  $\Omega \subset E^3$  sohada, ya'ni ochiq bog'lamli to'plamda aniqlangan bo'lishi mumkin. Ushbu bobning mazmuni matematik tahlilning nazariy fizikaga tadbiquidan iborat deyish mumkin.

**2.** Ixtiyoriy  $E^3$  Evklid fazosida aniqlangan skalyar funksiya gradienti 12 - bobda arifmetik  $\mathbb{R}^3$  fazosidagi funksiya uchun kiritilgani kabi aniqlanadi. Bunda farq shundan iboratki, umumiy holda tayinlangan bazisdagi koordinatalardan foydalanishga zaruriyat yo'q.

$E^3$  fazosidagi biror  $\Omega$  sohada aniqlangan  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalyar maydonni qaraylik. Agar shunday  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \in E^3$  vektor topilsaki, har qanday yetarlicha kichik  $\mathbf{h} \in E^3$  vektor uchun

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{r}) = (\mathbf{A}, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0, \quad (18.1.1)$$

munosabat bajarilsa,  $f$  skalyar maydonni  $\mathbf{r} \in \Omega$  nuqtada *differensiallanuvchi* deymiz.

Bunda  $\mathbf{A}$  ni  $f$  skalyar maydonning hosila vektori yoki *gradienti* deb ataymiz va  $\text{grad} f$  yoki  $\nabla f(\mathbf{r})$  simvol bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{grad} f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}).$$

Gradientning biror ortonormal bazisdagi ko'rinishini topaylik. Eslatib o'tamiz, agar uch vektordan iborat  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^3$  sistema

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

munosabatni qanoatlantirsa, u  $E^3$  fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi.

Bunda har bir  $\mathbf{r} \in E^3$  vektor, o'zaro bir qiymatli aniqlangan haqiqiy

$$x_j = (\mathbf{r}, \mathbf{e}_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

koeffitsientlar yordamida,

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

kabi yoziladi.

Bu holda skalyar maydon

$$f(\mathbf{r}) = f(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3)$$

ko'rinishga ega bo'lib, biz bu maydonni uch  $(x_1, x_2, x_3)$  haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasi deb qarashimiz mumkin.

Agar skalyar maydon differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (18.1.1) tenglik istalgan yetarlicha kichik  $\mathbf{h} \in E^3$  vektor uchun bajariladi. Bu tenglikda  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$  deb,  $t$  ga bo'lsak,

$$\frac{f(\mathbf{r} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{r})}{t} = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_j) + o(1), \quad t \rightarrow 0,$$

munosabatni hosil qilamiz.

Chap taraf  $t \rightarrow 0$  da  $f$  funksiyaning  $x_j$  o'zgaruvchi bo'yicha qisman hosilasiga intiladi, o'ng taraf esa, maydon gradientining  $j$ -komponentasi  $A_j = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_j)$  ga intiladi. Demak, istalgan  $j = 1, 2, 3$  uchun

$$(\nabla f(\mathbf{r}))_j = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \quad (18.1.2)$$

tenglik o'rinli.

Shu sababli, tanlangan bazisda gradient vektori simvolik ravishda

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

kabi yoziladi.

Ko'rinib turibdiki, istalgan  $E^3$  Evklid fazosida gradient har qanday ortonormal bazisda bir xilda yozilar ekan. Shuning uchun, gradient ko'rinishi koordinatalar sistemasini ortogonal akslantirishga nisbatan invariant deyiladi.

Eslatib o'tamiz, agar  $U : E^3 \rightarrow E^3$  akslantirish, ya'ni  $E^3$  fazoni  $E^3$  fazoga akslantirish, ixtiyoriy ikki  $\mathbf{r}_1 \in E^3$  va  $\mathbf{r}_2 \in E^3$  vektor uchun

$$(U\mathbf{r}_1, U\mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

tenglikni qanoatlantirsa, bu akslantirish ortogonal deyiladi.

Ortogonal akslantirish skalyar ko'paytmani saqlagani sababli, u normani va vektorlar orasidagi masofani ham saqlaydi, ya'ni u *izometrik* akslantirish bo'ladi. Ravshanki, ortogonal akslantirish istalgan ortonormal bazisni yana biror ortonormal bazisga o'tkazadi.

Asosiy Evklid fazosi  $E^3$  sifatida, maydonlar nazariyasi uchun nihoyatda muhim bo'lgan, uch o'lchovli  $\mathbb{R}^3$  arifmetik fazosini olamiz. Bu fazo elementlarini

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Qaralayotgan fazoning eng muhim ortonormal bazislaridan birini

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1) \quad (18.1.3)$$

vektorlar tashkil qiladi.

Ushbu bazisda  $\mathbf{r}$  vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

ko'rinishga ega bo'lib,  $f$  skalyar maydonni esa,

$$f(x, y, z) = f(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

kabi yozish mumkin.

(18.1.2) ga ko'ra, bu maydon gradienti

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

ga teng. Shunday ekan, simvolik ravishda,

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (18.1.4)$$

deyishimiz mumkin.

$\mathbb{R}^3$  fazosida  $f$  skalyar maydon gradientini yana

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Bu formula 12 - bobda keltirilgan (12.1.16) ta'rif bilan ustma-ust tushadi.

**18.1.1 - misol.** Sferik simmetrik maydonning, ya'ni faqat koordinatalar boshigacha bo'lgan masofaga bog'liq  $f(\mathbf{r}) = \varphi(|\mathbf{r}|)$  maydonning gradienti topilsin.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(|\mathbf{r}|)}{\partial x} = \varphi'(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial x} = \varphi'(|\mathbf{r}|) \frac{x}{|\mathbf{r}|}.$$

Xuddi shu usulda  $y$  va  $z$  bo'yicha differensiallasak, talab qilingan

$$\text{grad } \varphi(|\mathbf{r}|) = \varphi'(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

formulani olamiz.

Eslatib o'tamiz, agar  $\mathbf{e}$  birlik vektor bo'lsa,  $f(\mathbf{r})$  funksiyaning  $\mathbf{e}$  yo'nalish bo'yicha hosilasi

$$\frac{df(\mathbf{r})}{d\mathbf{e}} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{r} + t\mathbf{e}) \Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}$$

formula bilan aniqlangan edi (§12.1 ning 5 - bandiga qarang). Ravshanki, berilgan nuqtada hosila o'zining maksimal qiymatiga  $\mathbf{e}$  vektor  $\nabla f(\mathbf{r})$  gradient vektoriga kollinear bo'lgan yo'nalishda erishadi.

**3. Vektor ko'paytma.** Har qanday uch o'lchovli  $E^3$  Evklid fazosining uchdan farqli o'lchovli Evklid fazolaridan farqi shundaki,  $E^3$  da, skalyar ko'paytmadan tashqari, vektor ko'paytmani ham kiritish mumkin.

Buning uchun  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ortonormal bazisni tayinlab,  $[\times]$  vektor ko'paytirish amalini

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (18.1.5)$$

tengliklar yordamida kiritamiz. E'tibor bering, bu tengliklardan har biri avvalgisidan siklik almashtirish yordamida olinadi. Yuqoridagi tengliklarga yana quyidagi

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j$$

antisimmetriklik shartini qo'shamiz. Bundan, xususan,  $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_j = 0$  tenglik kelib chiqadi.

Endi, agar

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

bo'lsa, antisimmetriklik shartini hisobga olib, bazis elementlari uchun kiritilgan (18.1.5) amalni chiziqli ravishda davom ettirsak, *vektor ko'paytma* uchun

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$$

formulaga ega bo'lamiz.

Bunday aniqlangan vektor ko'paytma ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) bazisni tanlashga bog'liq. Masalan, agar bazis elementlari sifatida ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$ ) ni olsak, yangi bazisda xuddi yuqoridagidek aniqlangan vektor ko'paytma avvalgisidan farq qiladi, aniqrog'i unga qarama-qarshi vektor bo'ladi.

Agar bir ortonormal bazisdan ikkinchisiga o'tish matritsasining determinanti 1 ga teng bo'lsa, u holda, oson ko'rsatish mumkinki, har ikki bazisda aniqlangan vektor ko'paytma ustma-ust tushadi va agarda determinant  $-1$  ga teng bo'lsa, bu vektor ko'paytmalar o'zaro teskari yo'nalgan bo'ladi.

Biz uchun muhim bo'lgan uch o'lchovli  $\mathbb{R}^3$  arifmetik vektor fazosida asosiy bazis sifatida (18.1.3) olinadi.

Bu bazisda ixtiyoriy ikki

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

vektor uchun ularning vektor ko'paytmasi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} \quad (18.1.6)$$

kabi aniqlanadi. (18.1.6) dan ko'rinib turibdiki  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  tenglik o'rinli bo'ladi.

Eslab qolishni osonlashtirish uchun, ikki vektorning vektor ko'paytmasi simvolik ravishda quyidagi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (18.1.7)$$

determinant ko'rinishida yoziladi.

Bundan buyon skalyar ko'paytmani yana

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

simvol bilan belgilaymiz.

Bu belgilashlarda uch vektorning *aralash ko'paytmasini*  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  deb yozish mumkin. Bevosita (18.1.7) dan aralash ko'paytmaning

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

determinantga teng ekanligi kelib chiqadi.

4. Faraz qilaylik,  $\mathbb{R}^3$  fazosining istalgan  $\Omega$  sohasi berilgan bo'lsin.  $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektor maydon (18.1.3) bazisda

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, z) &= A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k} = \\ &= (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)) \end{aligned}$$

ko'rinishga ega.

Aytaylik,  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  va  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  ikki vektor maydon bo'lsin.

Bu ikki vektor maydonning  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  skalyar ko'paytmasi skalyar maydon bo'lib,  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  bazisda

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (18.1.8)$$

kabi yoziladi.

Ravshanki,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Ikki vektor maydonning  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  vektor ko'paytmasi vektor maydon bo'lib, (18.1.7) ga ko'ra,  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  bazisda

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (18.1.9)$$

ko'rinishga ega.

Ravshanki,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

Skalyar ko'paytma uchun (18.1.8) formula va vektor ko'paytma uchun (18.1.9) formuladan

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \quad (18.1.10)$$

ayniyatning kelib chiqishini tekshirish oson.

Shu sababli, noldan farqli istalgan ikki  $\mathbf{A}$  va  $\mathbf{B}$  vektorlar uchun

$$0 \leq \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} \leq 1 \quad (18.1.11)$$

tengsizliklar o'rinli.

(18.1.10) va (18.1.11) munosabatlarga ko'ra,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  shartni qanoatlantiruvchi shunday  $\varphi$  son mavjud va yagona bo'ladiki, uning uchun (18.1.11) da chapdagi kasr  $\sin \varphi$  ga va o'ngdagi kasr esa,  $\cos \varphi$  ga teng bo'ladi. Shunday qilib,

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \varphi, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \varphi. \quad (18.1.12)$$

Bunda  $\varphi$  burchak  $\mathbf{A}$  va  $\mathbf{B}$  vektorlar orasidagi burchak deyiladi.

## 18.2-§. Vektor maydon divergentsiyasi va rotori



1.  $\nabla$  gradient vektorining (18.1.4) simvolik ko‘rinishi yordamida  $f$  skalyar maydon gradientini  $\nabla$  vektor va  $f$  funksiyalarning formal ko‘paytmasi sifatida aniqlash mumkin:

$$\text{grad}f(x, y, z) = \nabla \cdot f(x, y, z).$$

Endi, agar  $f(x, y, z)$  skalyar maydon o‘rniga  $\mathbf{A}(x, y, z)$  vektor maydonni olsak, u holda  $\nabla$  simvolik vektorni  $\mathbf{A}(x, y, z)$  vektorga ham skalyar, ham vektor ko‘paytirish mumkin. Bunda skalyar ko‘paytirish natijasi divergensiya deb ataluvchi skalyar maydon bo‘lib, vektor ko‘paytirish natijasi esa, rotor deb ataluvchi vektor maydonni tashkil qiladi.

Ushbu paragrafda  $\mathbf{A}$  vektor maydonni

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \quad (18.2.1)$$

komponentalarga ega deb hisoblaymiz.

Barcha vektor maydonlarni cheksiz differensiallanuvchi deb, ya’ni uzluksiz va yetarlicha marta differensiallanuvchi deb faraz qilamiz.

**2. Divergensiya.** (18.2.1) vektor maydonning *divergensiyasi* deb quyidagi

$$\text{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (18.2.2)$$

skalyar funksiyaga aytiladi.

Yuqorida qayd qilinganidek, vektor maydon divergensiya  $\nabla$  simvolik vektorning  $\mathbf{A}$  vektorga skalyar ko‘paytmasi sifatida ham aniqlash mumkin:

$$\text{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z). \quad (18.2.3)$$

**18.2.1 - misol.** Agar  $g(|\mathbf{r}|)$  sferik simmetrik skalyar maydon bo‘lsa,

$$\mathbf{A} = g(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (18.2.4)$$

vektor maydon divergensiyasini hisoblang.

(18.2.1) belgilashlarga ko'ra,

$$P = g \cdot \frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, \quad Q = g \cdot \frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, \quad R = g \cdot \frac{z}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Endi murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llasak,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g'(|\mathbf{r}|) \frac{x}{|\mathbf{r}|} \cdot \frac{x}{|\mathbf{r}|^3} + g(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} - g(|\mathbf{r}|) \cdot \frac{3x^2}{|\mathbf{r}|^5}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Xuddi shu usulda  $Q$  funksiyaning  $y$  bo'yicha va  $R$  funksiyaning  $z$  bo'yicha qisman hosilalarini hisoblab, so'ngra ularni yig'ib chiqsak, (18.2.2) ta'rifga ko'ra,

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{g'(|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^2} \quad (18.2.5)$$

tenglikni olamiz.

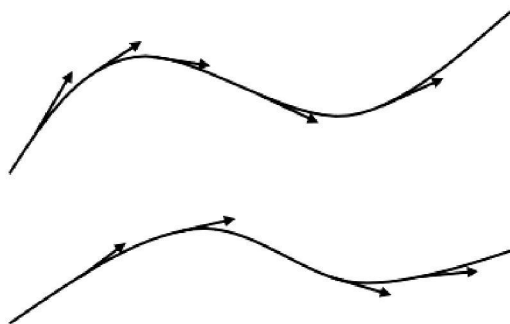
**1 - eslatma.** (18.2.4) vektor maydon divergensiya skalyar funktsiya bo'lib, uning ishorasi  $g(|\mathbf{r}|)$  ning o'sish yoki kamayishiga bog'liq. Xususan,  $g(|\mathbf{r}|) = \text{const}$  bo'lsa, divergeniya nolga teng bo'ladi. Bu hol tadbiq uchun hammasidan ko'ra muhim bo'lib, bunda (18.2.4) vektor maydon Nyuton tortish kuchi maydoni bilan yoki nuqtaviy elektr zaryadi hosil qilayotgan Kulon elektr kuchlanish maydoni bilan ustma-ust tushadi. Bu maydonlarning asosiy o'ziga xosligi shundaki, ular cheksizlikda masofaning kvadratiga teskari proporsional ravishda nolga intiladi.

Shunday qilib, (18.2.5) formulaga ko'ra, (18.2.4) vektor maydon divergensiya nolga tengligi bu maydonning Kulon maydoni bilan aynan ustma-ust tushishini anglatadi.

Bordiyu divergeniya noldan farqli bo'lsa, o'rganilayotgan maydon Kulon maydonidan farq qiladi. Aniqrog'i, agar divergeniya musbat bo'lsa, u holda  $g'(|\mathbf{r}|) > 0$  bo'lib,  $g(|\mathbf{r}|)$  funktsiya o'sadi. Shuning uchun vektor maydon Kulon maydonidan ortiq bo'ladi, ya'ni kattaroq masofaga ta'sir ko'rsatadi. Agar divergeniya manfiy

bo'lsa, u holda  $g(|\mathbf{r}|)$  kamayadi va shuning uchun, vektor maydon Kulon maydonidan tezroq nolga intilib, kichikroq masofaga samarali ta'sir ko'rsatadi. Shunday qilib, ushbu holda divergensiya (18.2.4) maydonning klassik Kulon maydonidan uzoqlashish o'lchovini xarakterlaydi, deyishimiz mumkin.

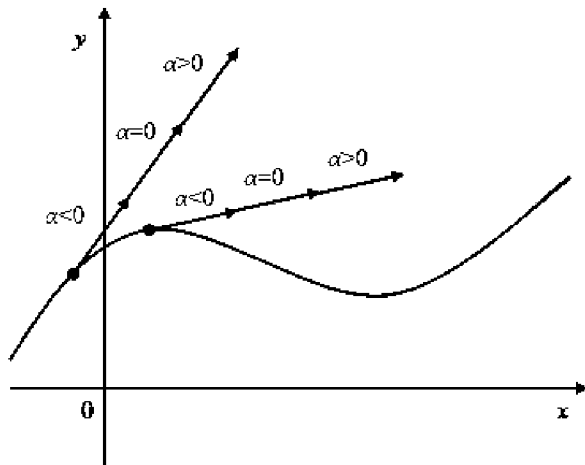
**2 - eslatma.** Vektor maydon haqida tasavvur hosil qilish uchun fazoning har bir nuqtasida vektorlarni mos uzunlik va mos yo'nalishga ega bo'lgan strelkachalar shaklida tasvirlash kerak. Tekislikda bunday tasvirlash ayniqsa ifodali ko'rinadi (18.1 - rasm). Bunda strelkachalarni ular urinadigan egri chiziqlar bo'ylab joylashtirishga harakat qilinadi. Bunday egri chiziqlar vektor chiziqlari deyiladi. Agar vektor maydon biror kuchlar maydoni bo'lsa, vektor chiziqlarini kuch chiziqlari deb va agar u tezliklar maydoni bo'lsa, u holda bu chiziqlarni tok chiziqlari deb atashadi. Shuni aytish kerakki, vektor maydon va kuch chiziqlari tushunchalari ingliz fizigi M. Faradey tomonidan kiritilgan.



18.1-rasm

Taassufki, qayd etilgan tasvirlar qaralayotgan vektor maydon divergensiya haqida tasavvur bermaydi. Masalan,  $g(|\mathbf{r}|) = |\mathbf{r}|^\alpha$  bo'lsa,  $Oxy$  tekislikdagi (18.2.4) vektor maydonning tasviri  $|\alpha| < 1$  intervaldan olingan barcha  $\alpha$  lar uchun taxminan bir xil ko'rinadi (18.2 - rasm), ammo, aslida esa,  $\alpha < 0$  da divergensiya manfiy bo'lib,  $\alpha > 0$  da musbat va  $\alpha = 0$  da esa, divergensiya nolga tengdir. Boshqacha aytganda, chizmadan nafaqat divergensiyaning kattaligi

haqida, hattoki uning ishorasi haqida ham hech qanday xulosa qilib bo'lmaydi.



18.2-rasm

Divergensiyaning fizik ma'nosi navbatdagi bandda ochib beriladi.

**18.2.2 - misol.** Agar  $u(\mathbf{r})$  skalyar maydon bo'lsa,  $\mathbf{A} = \text{grad } u$  vektor maydonning divergensiyasini hisoblang.

Shartga ko'ra,

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (P, Q, R) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Demak,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Shunday ekan, (18.2.2) ta'rifga ko'ra,

$$\text{div } \mathbf{A} = \text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

**Eslatma.** Maydon nazariyasida  $\Delta$  Laplas operatori

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u \quad (18.2.6)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Yuqoridagi misoldan istalgan  $u$  skalyar maydon uchun

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (18.2.7)$$

tenglikning bajarilishi kelib chiqadi.

Bundan chiqdi, (18.2.6) va (18.2.7) ta'riflar teng kuchli ekan.

**3. Rotor.**  $\mathbf{A} = (P, Q, R)$  vektor maydonining *rotori* (ba'zan *uyurma* deb ham ataladi) deb

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (18.2.8)$$

vektor funksiyaga aytamiz.

(18.1.6) formulaga asosan, vektor maydon rotorini formal ravishda  $\nabla$  vektorni  $\mathbf{A}$  vektorga vektor ko'paytmasi sifatida, ya'ni

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z) \quad (18.2.9)$$

deb aniqlash mumkin.

(18.1.7) formulaga ko'ra, vektor maydon rotorini simvolik ravishda, esda saqlashga qulay bo'lgan,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (18.2.10)$$

determinant ko'rinishida ham yozsa bo'ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun, determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyish yetarli.

**18.2.3 - misol.** Faraz qilaylik,  $\mathbb{R}^3$  fazosining har bir nuqtasi  $Oz$  o'qi atrofida  $\omega$  burchak tezligi bilan aylansin. Tezliklar vektor maydonining rotori topilsin.

Shartga ko'ra,

$$x(t) = \rho \cos \omega t, \quad y(t) = \rho \sin \omega t, \quad z(t) = \text{const.}$$

Bu tengliklarni vaqt bo'yicha differentsiallab va  $x(t)$  funksiyaning  $t$  bo'yicha hosilasini  $\dot{x}(t)$  simvol bilan belgilab,

$$\dot{x}(t) = -\omega \rho \sin \omega t, \quad \dot{y}(t) = \omega \rho \cos \omega t, \quad \dot{z}(t) = 0$$

munosabatlarni olamiz.

Shunday ekan,  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  tezliklar vektor maydoni

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$$

ko'rinishga ega bo'lib,

$$\text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) = (0, 0, 2\omega) = 2\omega \mathbf{k}$$

ekanini tekshirish oson.

Shunday qilib, rotor aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan va burchak tezligining ikkilanganiga teng bo'lgan vektor ekan. 2 ga teng koeffitsientni ba'zan quyidagicha talqin qilishadi: agar har bir nuqtani kichkina pirildoq deb qarasaq, u  $T = 2\pi/\omega$  vaqt ichida  $Oz$  o'qi atrofida ham va o'z o'qi atrofida ham to'la aylanadi.

Kiritilgan differensial operatsiyalarining o'zaro bog'liq ekanini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan, har qanday  $U(x, y, z)$  skalyar maydon uchun

$$\text{rot grad } U \equiv 0 \quad (18.2.11)$$

ayniyat bajarilishini tekshirish qiyin emas.

Bundan tashqari, har qanday  $\mathbf{A}$  vektor maydon uchun quyidagi

$$\text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0 \quad (18.2.12)$$

muhim ayniyat o'rinli.

Keltirilgan (18.2.11) va (18.2.12) formulalar ahamiyati navbatdagi §18.4 bandeda aniqlashtiriladi.

#### 4. Integral formulalarning vektor ko‘rinishida yozilishi.

16 - bobda isbotlangan Stoks va Gauss-Ostrogradskiy formulalari maydon nazariyasi atamalarida ayniqsa bejirim ko‘rinishga ega.

$1^0$ . Faraz qilaylik,  $\Omega$  uch o‘lchovli  $\mathbb{R}^3$  fazosining, Gauss-Ostrogradskiy formulasi o‘rinli bo‘lgan (16.7.2 - teoreмага qarang), ixtiyoriy sohasi bo‘lsin.  $\Omega$  sohani chegaralovchi  $\partial\Omega$  sirtga o‘tkazilgan tashqi birlik normal vektorini  $\mathbf{n}$  simvol bilan belgilaymiz.

**18.2.1 - tasdiq.** *Yopiq  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  sohada aniqlangan ixtiyoriy silliq  $\mathbf{A}(x, y, z)$  vektor maydon uchun quyidagi*

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (18.2.13)$$

*Gauss-Ostrogradskiy formulasi o‘rinli.*

(18.2.13) formulaning haqligi bevosita 16.7.2 - teoremadan kelib chiqadi.

(18.2.13) formula divergensiya tushunchasining fizik ma‘nosini ochib berishda asosiy rolni o‘ynaydi. Eslatib o‘tamiz, o‘ng tarafdagi sirt integrali  $\partial\Omega$  sirt orqali o‘tuvchi  $\mathbf{A}$  vektor maydon oqimi deyiladi. Biz  $\Omega$  sohaning ichida bu oqimni vujudga keltiruvchi va  $D(x, y, z)$  zichlikka ega bo‘lgan manbalar bor deb faraz qilamiz.  $D(x, y, z) < 0$  tengsizlik berilgan nuqtada manba emas, balki oqib ketadigan joy, ya‘ni tarnov borligini anglatadi. Shunday ekan, muvozanat tenglamasini quyidagi ko‘rinishda keltirish mumkin:  $\Omega$  sohani chegaralovchi yopiq sirt bo‘yicha umumiy oqim  $\Omega$  ichidagi barcha manbalar unumdorligidan hamma tarnovlar ish intensivligini olib tashlanganiga teng, ya‘ni

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} D(x, y, z) \, dx \, dy \, dz . \quad (18.2.14)$$

(18.2.13) va (18.2.14) formulalarni taqqoslasak, bu formulalarda-gi uch o'lvohvli integrallar tengligini ko'ramiz. Demak,  $\Omega$  integral-lash sohasining ixtiyoriyligiga ko'ra, integral ostidagi ifodalar o'zaro teng, ya'ni  $\operatorname{div}\mathbf{A} = D$ . Bundan chiqdi, yuqorida aniqlangan vektor maydon divergentsiyasi manbalar (va tarnovlar) taqsimotining zich-ligiga teng bo'lar ekan.

Boshqacha aytganda, divergentsiya vektor maydonning kiruvchi va chiquvchi oqimlari orasidagi farqqa teng. Darhaqiqat, divergentsiya so'zining kelib chiqishiga aynan shu fakt sabab bo'lgan bo'lishi mumkin (inglizcha *divergency* so'zi uzoqlashish yoki og'ish deb tar-jima qilinadi).

Agar istalgan yopiq sirt bo'yicha oqim ma'lum bo'lsa, u holda Gauss-Ostrogradskiy formulasi vektor maydon divergentsiyasini hi-soblashga imkon beradi. Haqiqatan, agar istalgan  $\mathbf{r}$  nuqtani olib,  $\Omega$  soha sifatida shu nuqtaga tortilib keluvchi kichik atroflar ketma-ketligini olsakda, so'ngra limitga o'tsak, u holda ixtiyoriy  $\mathbf{A}$  vektor maydoni uchun

$$\lim_{\Omega \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{1}{|\Omega|_3} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{A}(x, y, z) dx dy dz = \operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

tenglikni olamiz. Bu yerda  $|\Omega|_3$  simvol  $\Omega$  sohasining hajmini va  $\Omega \rightarrow \{\mathbf{r}\}$  simvol esa,  $\Omega$  sohalar ketma-ketligining  $\mathbf{r}$  nuqtaga tortilishini anglatadi.

Shunday ekan, Gauss-Ostrogradskiy formulasiga ko'ra,

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Omega \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{1}{|\Omega|_3} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{A}_n d\sigma. \quad (18.2.15)$$

**Eslatma.** (18.2.15) formuladan vektor maydon divergentsiyasi ta'rifi sifatida foydalanish mumkin. Bu ta'rifning afzalligi shundaki, u o'ng tarafdagi sirt integrali invariant bo'lgan barcha almashtirish-larga nisbatan invariantdir.

Ma'lumki, bu integral ta'rifi uch o'lvohvli fazodagi (chegaraviy sirt qismining proeksiyasidan iborat) yassi shakl yuzi tushunchasiga



asoslanadi. 13 - bobda bu yuzaning izometrik akslantirishlarga nisbatan invariant ekani ko'rsatilgan edi. Demak, divergensiya har qanday izometrik akslantirishda, xususan, ortogonal akslantirishda qiymatini o'zgartirmaydi.

2<sup>0</sup>. Aytaylik,  $\mathbf{A}(x, y, z)$  vektor maydon  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sohada aniqlangan bo'lib,  $S$  sirt shu sohada yotsin. Faraz qilaylik, bu sirt Stoks formulasi o'rinli bo'lishini ta'minlaydigan shartlarni qanoatlantirsin (16.6.2 - teoreмага qarang). Bundan tashqari,  $\boldsymbol{\tau}(x, y, z)$  vektor  $(x, y, z)$  koordinatali nuqtada  $\partial S$  egri chiziqqa urinma bo'lsin.

**18.2.2 - tasdiq.** *Istalgan silliq  $\mathbf{A}$  vektor maydon uchun quyidagi*

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl \quad (18.2.16)$$

*Stoks formulasi o'rinli.*

**Isbot** 16 - bobda o'rnatilgan quyidagi

$$\begin{aligned} \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx = \\ = \int_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \end{aligned}$$

((16.6.6) formulaga qarang) formuladan kelib chiqadi. Buning uchun vektor maydon rotorining (18.2.8) ta'rifi va 15 - bobda isbotlangan

$$\int_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl$$

((15.2.28) va (15.2.29) tengliklarga qarang) tenglikdan foydalanish kifoya.

**Eslatma.** Stoks formulasining o'ng tarafidagi egri chizikli integral  $\mathbf{A}$  vektor maydonining  $\partial S$  yopiq kontur bo'ylab sirkulyatsiyasi (aylanishi) deyiladi. Maydon nazariyasida Stoks teoremasini quyidagicha keltirish qabul qilingan:

vektor maydon rotorining biror sirt orqali oqimi bu vektor maydonining berilgan sirt chegarasi bo'ylab sirkulyatsiyasiga teng.

Agar  $\mathbf{A}$  vektor maydonining istalgan aylana bo'ylab sirkulyatsiyasi ma'lum bo'lsa, Stoks formulasi  $\mathbf{A}$  vektor maydon rotorining istalgan  $\mathbf{n}$  yo'nalishga  $(\text{rot } \mathbf{A})_n$  proeksiyasini topish imkonini beradi. Buning uchun  $S$  sirt sifatida  $\mathbf{n}$  vektorga perpendikulyar  $K$  doirani olamiz. U holda (18.2.16) formula

$$\iint_K (\text{rot } \mathbf{A})_n d\sigma = \oint_{\partial K} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$$

ko'rinishga keladi.

Xuddi (18.2.15) tenglikning isbotidagidek,  $K$  doirani  $\mathbf{r}$  nuqtaga tortib kelib,

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n(\mathbf{r}) = \lim_{K \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{1}{|K|_2} \oint_{\partial K} \mathbf{A}_\tau dl \quad (18.2.17)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu yerda  $|K|_2$  simvol  $\mathbf{r}$  nuqtaga tortiluvchi  $K$  doira yuzini va  $\mathbf{A}_\tau$  kattalik esa, vektor maydonning  $\boldsymbol{\tau}$  urinma vektorga proeksiyasini anglatadi.

E'tibor berib, rotorning  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  va  $\mathbf{k}$  bazis vektorlarga proeksiyasi rotorning Dekart koordinatalari bilan ustma-ust tushadi. Shunday ekan, istalgan aylana bo'ylab vektor maydonining sirkulyatsiyasini bilsak, u holda bu maydon rotorini topa olamiz.

(18.2.17) formuladan vektor maydon rotorining ikkinchi tur sirt integrallarini o'zgartirmaydigan almashtirishlarga nisbatan invariant ekani kelib chiqadi.

### 18.3-§. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida maydon nazariyasining asosiy operatsiyalari

**1. Koordinatalarni almashtirish.** Avvalgi paragrafda biz maydon nazariyasining asosiy operatsiyalari koordinatalarni keng qo'lla-

niladigan chizikli almashtirishlarga nisbatan invariant ekanini aniqladik. Agarda almashtirish chizikli bo'lmasa, u holda yangi koordinatalarda gradient, divergensiya va rotor murakkab ko'rinishga ega bo'lishi mumkin. Ushbu paragrafda biz bu operatsiyalar uchun chiziqsiz almashtirishlardagi formulalarni aniqlaymiz.

Biror  $G \subset \mathbb{R}^3$  sohani berilgan  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sohaga o'tkazuvchi  $\Phi : G \rightarrow \Omega$  homeomorf (ya'ni, o'zaro bir qiymatli va o'zaro uzluksiz) akslantirishni qaraymiz. Yangi  $G$  sohaning nuqtalarini  $q = (q_1, q_2, q_3)$  simvol bilan belgilaymiz, bu yerda  $q_j$  orqali  $q \in G$  nuqtaning Dekart koordinatalari belgilangan. Berilgan  $\Omega$  sohasining nuqtalarini, odatdagidek,  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \Omega$  simvol bilan belgilaymiz.

U holda  $\Phi$  akslantirish qiymatini

$$\mathbf{r} = \Phi(q) = (x(q), y(q), z(q)) = x(q)\mathbf{i} + y(q)\mathbf{j} + z(q)\mathbf{k}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Eslatib o'tamiz, koordinata chiziqlari deb biz  $\Omega$  sohada yotuvchi

$$L_k = \{\mathbf{r} \in \Omega : \mathbf{r} = \Phi_k(t), \quad t \in (\alpha_k, \beta_k)\}$$

ko'rinishdagi chiziq'larga aytgan edik. Bu yerdagi  $\Phi_k$  akslantirish  $\Phi$  da  $q_k$  o'zgaruvchini  $t$  parametrga almashtirib, qolgan o'zgaruvchilarni «muzlatish» orqali hosil qilinadi:

$$\Phi_1(t) = \Phi(t, q_2, q_3), \quad \Phi_2(t) = \Phi(q_1, t, q_3), \quad \Phi_3(t) = \Phi(q_1, q_2, t).$$

Har bir  $\mathbf{r} \in \Omega$  nuqta orqali uchta (ya'ni har bir turdan bittadan) koordinata egri chizig'i o'tadi.

Bundan buyon shu bobda biz  $\Phi$  akslantirishni va qaralayotgan maydonlarni silliq deb faraz qilamiz. Ixtiyoriy  $q \in G$  nuqtani tayinlab, har bir koordinata egri chiziq tenglamasini parametr bo'yicha differensiallaymiz. Natijada quyidagi uchta urinma vektorga ega bo'lamiz:

$$\mathbf{g}_k = \left. \frac{d\Phi_k}{dt} \right|_{t=q_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Har bir  $\mathbf{g}_k$  vektor mos  $L_k$  koordinata egri chizig'iga  $\mathbf{r} = \Phi(q)$  nuqtada urinadi.

Dekart koordinatalarida  $\mathbf{g}_k$  urinma vektorlar quyidagi

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} = \left( \frac{\partial x}{\partial q_k}, \frac{\partial y}{\partial q_k}, \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial x}{\partial q_k} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \mathbf{k} \quad (18.3.1)$$

ko'rinishga ega.

Bundan keyingi mulohazalarda (18.3.1) vektorlar muhim rol o'ynaydi. Biz bundan buyon har bir nuqtada uchalla koordinata egri chiziqlari to'g'ri burchak ostida kesishadi deb faraz qilamiz. Ya'ni, bu egri chiziq'larga o'tkazilgan urinmalar o'zaro ortogonal bo'lsin deymiz:

$$\text{agar } i \neq k \text{ bo'lsa, } (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k) = 0 \text{ bo'ladi.} \quad (18.3.2)$$

Tadbiq uchun muhim bo'lgan barcha hollarda bu shart bajariladi.

Shunday qilib, har bir tayinlangan  $q \in G$  nuqta uchun  $\mathbf{r}(q)$  nuqtadan chiquvchi ( $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ ) urinma vektorlar ortogonal bazis tashkil qiladi. Agar

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{|\mathbf{g}_k|} = \frac{1}{H_k} \mathbf{g}_k \quad (18.3.3)$$

desak, bu bazis ortonormal bazisga aylanadi.

Bu yerda  $H_k = |\mathbf{g}_k|$  ko'paytuvchilar *Lame koeffitsiyentlari* deb atalib, ular, (18.3.1) ga ko'ra, quyidagi

$$H_k = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2} \quad (18.3.4)$$

ko'rinishga ega.

(18.3.3) ortonormal bazis tashkil qilgan koordinatalar sistemasi lokal koordinatalar deyiladi, chunki bu sistemaning markazi ixtiyoriy  $\mathbf{r}(q)$  nuqtada joylashgan bo'lib, vektor maydonni bu bazis bo'yicha yoyilmasi, odatda, qayd etilgan nuqtaning biror atrofida qaraladi.

Maydon nazariyasida juda ko'p egri chiziqli koordinatalar sistemasidan foydalaniladi. Ushbu bobda asosan ikki eng muhim koordinatalar sistemasi — sferik va silindrik koordinatalar sistemalari qaraladi.

**18.3.1 - misol.** Quyidagi

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \mathbf{i} \rho \cos \varphi + \mathbf{j} \rho \sin \varphi + \mathbf{k} z$$

akslantirish orqali aniqlangan silindrik koordinatalar sistemasini qaraylik.

Bunda

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

va

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Agar  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$  desak, urinma vektorlar

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \mathbf{g}_2 &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{g}_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu urinma vektorlar ortogonal sistemani tashkil qilishini ko'rish qiyin emas. Mos Lamé koeffitsiyentlari

$$H_1 = |\mathbf{g}_1| = 1, \quad H_2 = |\mathbf{g}_2| = \rho, \quad H_3 = |\mathbf{g}_3| = 1$$

kabi aniqlanadi.

Shunday ekan, silindrik sistema uchun (18.3.3) ortonormal bazis

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

ko'rinishga ega.

**18.3.2 - misol.** Quyidagi

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

sferik koordinatalar sistemasini qaraylik. Bunda

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Agar  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$  desak, u holda urinma vektorlar

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{g}_2 &= (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, -r \sin \theta), \\ \mathbf{g}_3 &= (-r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \sin \theta, 0)\end{aligned}$$

kabi aniqlanadi.

Bu urinma vektorlar ortogonal sistema tashkil qiladi. Mos Lamé koeffitsiyentlari

$$H_1 = |\mathbf{g}_1| = 1, \quad H_2 = |\mathbf{g}_2| = r, \quad H_3 = |\mathbf{g}_3| = r \sin \theta$$

ko'rinishga ega.

Shunday ekan, sferik koordinatalar sistemasi uchun (18.3.3) ortogonal bazis

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{e}_2 &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_3 &= (\sin \varphi, \cos \varphi, 0)\end{aligned}$$

kabi yoziladi.

Navbatdagi bandlarda maydon nazariyasining asosiy operatsiyalari (gradient, divergensiya va rotor)  $(q_1, q_2, q_3)$  koordinatalarda Lamé koeffitsiyentlari orqali ifodalanishi mumkinligini ko'rsatamiz.

**2. Lamé koeffitsiyentlari.** Biz Lamé koeffitsiyentlarining geometrik ma'nosini aniqlashdan boshlaymiz.

**18.3.1 - tasdiq.** Agar  $a \leq q_k \leq b$  bo'lsa,  $L_k$  koordinata egri chizig'ining yoy uzunligi

$$|L_k| = \int_a^b H_k(q) dq_k \quad (18.3.5)$$

formula bilan aniqlanadi.

**Isbot.** Ta'rif bo'yicha,  $L_k$  koordinata egri chizig'ini parametrik ko'rinishda berish uchun  $\Phi(q_1, q_2, q_3)$  akslantirishda  $q_k$  o'zgaruvchini parametr deb, qolgan o'zgaruvchilarni tayinlab qo'yish kerak edi. Bunday egri chiziq yoyi uzunligi, (7.1.19) formulaga asosan,

$$|L_k| = \int_a^b \left| \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \right| dq_k$$

kabi aniqlanadi.

(18.3.1) va (18.3.4) formulalarga ko'ra,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2} = H_k. \quad (18.3.6)$$

Bundan talab qilingan (18.3.5) tenglik kelib chiqadi. ■

**Eslatma.** Isbotlangan tasdiq  $L_k$  koordinata chizig'i uzunligining elementi

$$dl = H_k dq_k \quad (18.3.7)$$

ga tengligini anglatadi.

Demak,  $H_k$  kattalikni  $L_k$  koordinata egri chizig'i bo'yicha cho'zi-lish koeffitsienti deyish mumkin.

**18.3.2 - tasdiq.** Agar  $k \neq j$  bo'lsa, (18.3.1) vektor ko'paytma uchun

$$|\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j| = H_k \cdot H_j \quad (18.3.8)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** (18.1.10) ayniyatga ko'ra,

$$|\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j|^2 + (\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j)^2 = |\mathbf{g}_k|^2 \cdot |\mathbf{g}_j|^2.$$

(18.3.2) ortogonallik shartiga asosan, skalyar ko'paytma nolga teng va shuning uchun

$$|\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j| = |\mathbf{g}_k| \cdot |\mathbf{g}_j| = H_k \cdot H_j. \quad \blacksquare$$

**Eslatma.** Bu tasdiq  $L_i$  koordinata egri chizig'iga ortogonal sirt yuzining elementi

$$d\sigma = H_k H_j dq_k dq_j \quad (18.3.9)$$

ga tengligini anglatadi, bu yerdagi barcha  $i, j, k$  indekslar har xildir.

**18.3.3 - tasdiq.**  $\Phi(q) = (x(q), y(q), z(q))$  almashtirishning yakobiani uchun

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = H_1 H_2 H_3 \quad (18.3.10)$$

tenglik o‘rinli.

**Isbor.** E‘tibor bering,  $\Phi(q)$  almashtirishning

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

tenglik bilan aniqlangan yakobiani (18.3.1) dagi uch vektorning aralash ko‘paytmasi bilan ustma-ust tushadi, ya‘ni:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 .$$

Agar  $\{\mathbf{e}_k\}$  ortonormal bazis bo‘lsa, (18.3.3) dan  $\mathbf{g}_k = H_k \cdot \mathbf{e}_k$  ekani kelib chiqadi. Demak,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = H_1 H_2 H_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) = H_1 H_2 H_3 . \quad \blacksquare$$

**Eslatma.** Bu tasdiq ortogonal egri chiziqli koordinatalarga o‘tish yakobianining Lamé koeffitsiyentlari ko‘paytmasiga tengligini anglatadi. Bu holda hajm elementi uchun

$$dv = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (18.3.11)$$

tenglik o‘rinli.

(18.3.9) va (18.3.11) formulalarning (18.3.7) tenglik bilan mantiqiy kelishuvda ekaniga e‘tibor bering.

**3. Gradient.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sohada aniqlangan  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalyar maydonni, ya‘ni  $U = U(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in \Omega$ , maydonni qaraylik.

Aytaylik  $\mathbf{r} = \Phi(q)$  almashtirish natijasida  $\Omega$  soha  $G$  sohaga akslansin. Bunda hosil bo‘lgan  $V = V(q) = U(\mathbf{r}(q))$  murakkab



funksiyani fizik xossalarni saqlash nuqtai nazaridan  $U$  va  $V$  larni bitta skalyar maydon deb qarash mumkin. Ammo ularning matematik tavsifi o'zaro farq qiladi.

$U(\mathbf{r})$  skalyar maydon gradienti deb

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad (18.3.12)$$

vektor maydonga aytgan edik. Shunga ko'ra, agar  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  (18.1.3) da aniqlangan ortonormal bazis bo'lsa,  $V(q)$  skalyar maydon gradientining

$$\Gamma(V) = \frac{\partial V}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3} \mathbf{e}_3$$

kabi aniqlanishini kutish mumkin edi. Ammo, bu bazis  $\mathbf{r}(p) \in \Omega$  nuqtaga bog'liq bo'lgani uchun, masala murakkablashadi.

$U(\mathbf{r}(q))$  skalyar maydon gradientining  $q$  koordinatalardagi ko'rinishini topaylik. Eslatib o'tamiz,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  (18.3.3) va (18.3.1) tengliklar bilan aniqlangan ortonormal bazisdir.

**18.3.1 - teorema.** *Ixtiyoriy  $U$  silliq vektor maydon berilgan bo'lsin. Agar  $\nabla U$  (18.3.12) tenglik bilan aniqlangan vektor bo'lsa,*

$$\nabla U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \quad (18.3.13)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini qo'llab, (18.3.1) formulani hisobga olsak,

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_k} = \nabla U \cdot \mathbf{g}_k$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Lekin  $\mathbf{g}_k = H_k \mathbf{e}_k$  bo'lgani uchun,

$$\nabla U \cdot \mathbf{e}_k = \frac{1}{H_k} \frac{\partial U}{\partial q_k} .$$

Nihoyat,  $\{\mathbf{e}_k\}$  ortonormal bazis bo'lgani sababli, bundan talab qilingan

$$\nabla U = \sum_{k=1}^3 (\nabla U, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{H_k} \frac{\partial U}{\partial q_k} \mathbf{e}_k$$

tenglikni olamiz. ■

**Eslatma.** (18.3.13) tenglik formal ravishda quyidagi

$$\nabla = \sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{e}_k}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{\mathbf{e}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (18.3.14)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu tenglik gradientning lokal koordinatalar sistemasidagi ko'rinishi deb ataladi.

**18.3.3 - misol.** Silindrik koordinatalar sistemasini qaraylik, ya'ni

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Lame koeffitsiyentlari uchun

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1$$

tengliklar o'rinli (indeks sifatida mos koordinata egri chizig'ini aniqlovchi o'zgaruvchi olingan). (18.3.14) formulaga ko'ra, silindrik koordinatalarda gradient

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ko'rinishga ega.

**18.3.4 - misol.** Sferik koordinatalar sistemasini qaraylik, ya'ni

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Bu holda Lamé koeffitsiyentlari

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta$$

kabi aniqlanadi.

Demak,

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

**4. Divergensiya.**  $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  vektor maydon berilgan bo'lib, u  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  bazisda

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Bu maydon divergensiyasi

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (18.3.15)$$

ga teng.

Qaralayotgan vektor maydon bilan  $\Phi : G \rightarrow \Omega$  akslantirish superpozitsiyasini, ya'ni  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  koordinatalarda

$$\tilde{\mathbf{A}}(q) = \mathbf{A}[\Phi(q)] = A_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + A_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + A_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3 \quad (18.3.16)$$

kabi aniqlangan vektor maydonni qaraymiz.

Fizik nuqtai nazardan  $\mathbf{A}$  va  $\tilde{\mathbf{A}}$  vektor maydonlar bir xil xossalarga ega. Ushbu maydonning lokal koordinatalardagi divergensiyasini topamiz.

**18.3.2 - teorema.** *Istalgan silliq (18.3.16) vektor maydon uchun*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right) \quad (18.3.17)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** Agar (18.3.17) formulani murakkab funksiyani differensiallash qoidasi yordamida isbotlamoqchi bo'lsak, zerikarli hisobkitoblarni amalga oshirishga to'g'ri kelar edi. Shuning uchun biz (18.2.13) Gauss-Ostrogradskiy formulasidan foydalanamiz.

Qirralari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ixtiyoriy yopiq  $Q \subset G$  kubni tayinlaymiz.  $\Phi$  akslantirish bu kubni egri chiziqli

$Q^* = \Phi(Q) \subset \Omega$  «parallelepipedga» o'tkazadi. Bu «parallelepipedga» Gauss-Ostrogradskiy formulasini qo'llaymiz:

$$\iiint_{Q^*} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial Q^*} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (18.3.18)$$

Chap tarafdagi integralda  $\mathbf{r} = \Phi(q)$  almashtirish bajaramiz. U holda, (18.3.11) formulaga ko'ra,

$$\iiint_{Q^*} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot H_1(q)H_2(q)H_3(q) \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3. \quad (18.3.19)$$

Shu almashtirishni (18.3.18) ning o'ng tarafidagi sirt integralida ham bajaramiz. Buning uchun  $S$  simvol bilan  $Q$  kubning  $Oq_2q_3$  tekislikka proeksiyasini va  $S_t$  simvol bilan esa,  $Q$  kubning  $q_1 = t$  tekislik bilan kesishmasini belgilaymiz. Faraz qilaylik,  $a \leq t \leq b$  lar uchun bu kesishma bo'sh bo'lmasin. U holda qaralayotgan kesishma  $S$  kvadratni parallel ko'chirish bilan hosil qilingan  $Oq_1$  o'qqa perpendikulyar kvadratdan iborat bo'ladi. Bunda  $S_a$  va  $S_b$  berilgan  $Q$  kubning qarama-qarshi yoqlari bilan ustma-ust tushadi. Faraz qilaylik, bu yoqlar  $\Phi$  almashtirish natijasida mos ravishda  $S_a^*$  va  $S_b^*$  sirtlarga o'tsin.

$S_b^*$  sirtga tashqi normal  $\mathbf{e}_1$  ga va  $S_a^*$  ga tashqi normal esa,  $-\mathbf{e}_1$  ga tengligini ko'rish qiyin emas. Boshqacha aytganda,  $\mathbf{A}$  vektor maydonning  $\mathbf{n}$  normal vektoriga proeksiyasi  $S_b^*$  sirtida  $A_1$  ga va  $S_a^*$  sirtida esa,  $-A_1$  ga teng. Shunday ekan, (18.3.9) ga ko'ra,

$$\begin{aligned} \iint_{S_a^* \cup S_b^*} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_{S_b^*} A_1 \, d\sigma - \iint_{S_a^*} A_1 \, d\sigma = \\ &= \iint_S A_1 H_2 H_3(b, q_2, q_3) \, dq_2 \, dq_3 - \iint_S A_1 H_2 H_3(a, q_2, q_3) \, dq_2 \, dq_3. \end{aligned} \quad (18.3.20)$$

Agar

$$I(t) = \iint_S A_1 H_2 H_3(t, q_2, q_3) \, dq_2 \, dq_3$$

deb belgilasak, u holda Nyuton-Leybnits formulasi va karrali integralni takroriy integralga keltirish qoidasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} I(b) - I(a) &= \int_a^b I'(t) dt = \int_a^b dt \iint_S \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)(t, q_2, q_3)}{\partial t} dq_2 dq_3 = \\ &= \iiint_Q \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)(q)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 . \end{aligned}$$

Bundan chiqdi, (18.3.20) tenglikka asosan,

$$\iint_{S_a^* \cup S_b^*} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_Q \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)(q)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Qolgan ikki qarama-qarshi yoqlar bo'yicha sirt integrallarida ham yuqoridagidek almashtirish bajarib,

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial Q^*} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \\ &= \iiint_Q \left[ \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_3 H_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_1} \right] dq_1 dq_2 dq_3 \end{aligned} \quad (18.3.21)$$

tenglikni olamiz.

(18.3.18), (18.3.19) va (18.3.21) munosabatlarga ko'ra,

$$\begin{aligned} &\iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot H_1(q) H_2(q) H_3(q) dq_1 dq_2 dq_3 = \\ &= \iiint_Q \left[ \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_3 H_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_1} \right] dq_1 dq_2 dq_3 . \end{aligned}$$

Bu tenglik ixtiyoriy  $Q \subset G$  kubda bajarilgani uchun,  $G$  sohaning barcha nuqtalarida integral ostidagi ifodalar o'zaro teng. Demak, (18.3.17) formula o'rinli bo'lar ekan. ■

**Eslatma.** Isbot yakunida biz o‘z-o‘zidan ko‘rinib turgan quyidagi tasdiqdan foydalandik: *agar uzluksiz funksiyadan istalgan kub bo‘yicha olingan integral nolga teng bo‘lsa, bu funksiya aynan nolga tengdir.* Haqiqatan, agar funksiya biror nuqtada musbat bo‘lsa, u holda, uzluksizlikka ko‘ra, bu funksiya nuqtaning biror atrofida ham musbat bo‘ladi. Bundan chiqdi, bu atrofda yotuvchi kub bo‘yicha olingan integral qat‘iy musbat bo‘lishi kerak, ya‘ni u nolga teng bo‘la olmaydi.

**18.3.5 - misol.** (18.3.17) formulaga ko‘ra, silindrik koordinatalar sistemasida (18.3.3 - misolga qarang)  $\mathbf{A}$  vektor maydon divergensiya uchun

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_r)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

tenglik o‘rinli.

**18.3.6 - misol.** Yana o‘sha formulaga ko‘ra, sferik koordinatalar sistemasida (18.3.4 - misolga qarang)  $\mathbf{A}$  vektor maydon divergensiya uchun

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

tenglik o‘rinli.

**5. Rotor.**  $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  vektor maydonni  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Phi(q))$  ko‘rinishdagi  $\mathbf{A} : G \rightarrow \mathbf{R}^3$  murakkab akslantirish deb qarab, uning rotorini topamiz.

**18.3.3 - teorema.** *Istalgan silliq (18.3.16) vektor maydon uchun*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_3} \right] \mathbf{e}_1 + \\ &+ \frac{1}{H_3 H_1} \left[ \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_1} \right] \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_2} \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (18.3.22)$$

tenglik o‘rinli.

**Isbot** xuddi 18.3.2 - teorema isboti singari olib boriladi. Buning uchun (18.2.16) Stoks formulasidan foydalanamiz.

Bu formula yordamida rotorni  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  bazis bo'yicha yoyilmasining, masalan, oxirgi  $(\text{rot } \mathbf{A})_3$  komponentasini topamiz.  $Oq_3$  o'qqa perpendikulyar, ya'ni  $Oq_1q_2$  tekislikka parallel istalgan  $Q \subset G$  kvadratni tayinlaylik. Faraz qilaylik, bu kvadrat

$$Q = \{(q_1, q_2, q_3) \in G : a \leq q_1 \leq b, c \leq q_2 \leq d, q_3 = \text{const}\}$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

$\Phi$  akslantirish bu kvadratni biror egri chiziqli  $Q^*$  «to'rtburchakka» o'tkazadi. Bu «to'rtburchak» uchun Stoks formulasini yoza-miz:

$$\iint_{Q^*} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\partial Q^*} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl. \quad (18.3.23)$$

$Q$  kvadratning tanlanishiga ko'ra, uning  $Q^*$  aksiga o'tkazilgan  $\mathbf{n}$  normal  $\mathbf{e}_3$  vektoriga teng. Shuning uchun  $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (\text{rot } \mathbf{A})_3$ .

(18.3.23) ning chap tarafidagi sirt integralida  $\mathbf{r} = \Phi(q)$  almashtirish bajaramiz. U holda, (18.3.9) formulaga ko'ra,

$$\iint_{Q^*} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{Q^*} (\text{rot } \mathbf{A})_3 \, d\sigma = \iint_Q (\text{rot } \mathbf{A})_3 H_1(q) H_2(q) \, dq_1 \, dq_2. \quad (18.3.24)$$

Xuddi shu kabi almashtirishni (18.3.23) ning o'ng tarafidagi egri chiziqli integralda ham bajaramiz.  $\{q_1 = b\}$  koordinata chizig'i bo'ylab  $\boldsymbol{\tau}$  urinma vektor  $\mathbf{e}_2$  ga va  $\{q_1 = a\}$  koordinata chizig'i bo'ylab esa,  $-\mathbf{e}_2$  ga teng. Shuning uchun  $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}$  skalyar ko'paytma birinchi holda  $A_2$  ga va ikkinchi holda esa,  $-A_2$  ga teng. Shunday ekan, o'zgaruvchini almashtirgandan so'ng, (18.3.7) formula-ga ko'ra, chegaraning mos qismi bo'yicha egri chiziqli integrallar quyidagi ayirmaga ayplanadi:

$$\int_c^d A_2(b, q_2, q_3) H_2(b, q_2, q_3) \, dq_2 - \int_c^d A_2(a, q_2, q_3) H_2(a, q_2, q_3) \, dq_2 =$$

$$= \int_a^b dt \int_c^d \frac{\partial[A_2(t, q_2, q_3)H_2(t, q_2, q_3)]}{\partial t} dq_2 = \iint_Q \frac{\partial[A_2(q)H_2(q)]}{\partial q_1} dq_1 dq_2.$$

Bunda biz Nyuton-Leybnits formulasidan va ikki karrali integralni takroriy integralga keltirish qoidasidan foydalandik.

Xuddi shu mulohazalarni  $q_2 = c$  va  $q_2 = d$  koordinata chiziq-lari bo'yicha integrallarga qo'llab, chegaraning mos qismi bo'yicha olingan egri chiziqli integrallar uchun

$$\begin{aligned} & \int_a^b A_1(q_1, c, q_3)H_1(q_1, c, q_3)dq_1 - \int_a^b A_1(q_1, d, q_3)H_1(q_1, d, q_3)dq_1 = \\ & = - \int_c^d dt \int_a^b \frac{\partial[A_1(q_1, t, q_3)H_1(q_1, t, q_3)]}{\partial t} dq_1 = \\ & = - \iint_Q \frac{\partial[A_1(q)H_1(q)]}{\partial q_2} dq_1 dq_2 \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$\oint_{\partial Q^*} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \iint_Q \left[ \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2. \quad (18.3.25)$$

(18.3.23) Stoks formulasiga ko'ra, (18.3.24) va (18.3.25) formula-larning chap taraflari o'zaro teng bo'lgani uchun o'ng taraflari ham o'zaro teng bo'ladi.  $Q$  kvadratning ixtiyoriyligidan integral ostidagi ifodalarning tengligi, ya'ni  $G$  sohaning barcha nuqtalarida

$$(\text{rot } \mathbf{A})_3 H_1(q)H_2(q) = \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2}$$

tenglikning bajarilishi kelib chiqadi.



Bundan  $A$  vektor maydon rotorining  $(\text{rot } \mathbf{A})_3$  komponentasi uchun talab qilingan (18.3.22) tenglikni olamiz. Xuddi shu usulda rotorning qolgan ikki komponentasi uchun mos tengliklar ko'rsatiladi. ■

## 6. Laplas operatori.

Maydon nazariyasida Laplas operatori

$$\Delta u = \text{div grad } u$$

tenglik bilan aniqlanishi yuqorida qayd qilingan edi ((18.2.6) formulaga qarang). Bu operator matematik fizikada nihoyatda muhim rol o'ynaydi.

Dekart koordinatalarida Laplas operatori

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ko'rinishga ega bo'lib, u elliptik xildagi ikkinchi tartibli qisman hosi-  
lali chiziqli differensial operatorga klassik misoldir.

Agar  $u(x, y, z)$  funksiya  $\Omega$  sohada quyidagi

$$\Delta u(x, y, z) = 0$$

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, u bu sohada *garmonik* deyiladi.

Agar qaralayotgan soha geometriyasi bilan bog'liq maxsus tanlangan egri chiziqli koordinatalarga o'tilsa, ba'zi sohalar uchun Laplas tenglamasining chegarada berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish jarayoni ancha osonlashadi.

Laplas operatorining ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasidagi ko'rinishini topamiz.

**18.3.4 - teorema.** *Ixtiyoriy  $U$  skalyar maydon uchun*

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (18.3.26)$$

*tenglik o'rinli.*

**Isbot** Laplas operatorining  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  ta'rifi hamda 18.3.1 - va 18.3.2 - teoremlardan kelib chiqadi.

**18.3.7 - misol.** Silindrik koordinatalar sistemasida (18.3.3 - misolga qarang) Laplas operatori, (18.3.26) formulaga ko'ra,

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (18.3.27)$$

ko'rinishga ega.

Bu formuladan foydalanib, Laplas tenglamasining faqat  $z$  o'qiga cha masofadan bog'liq bo'lgan barcha yechimlarini topaylik. Shunday qilib,  $U = v(\rho)$  va

$$\Delta v(\rho) = 0$$

bo'lsin. U holda (18.3.27) ga ko'ra,

$$[\rho v'(\rho)]' = 0.$$

Demak,

$$v'(\rho) = \frac{C}{\rho}$$

va bundan

$$v(\rho) = C \ln \rho + C_1, \quad (18.3.28)$$

kelib chiqadi, bu yerda  $C$  va  $C_1$  ixtiyoriy o'zgarmas sonlardir. Agar  $C \neq 0$  bo'lsa, bu funksiya  $\mathbb{R}^3$  fazosining  $z$  o'qidan tashqari nuqtalarida Laplas tenglamasining yechimidir.

**18.3.8 - misol.** Sferik koordinatalar sistemasida (18.3.4 - misolga qarang) Laplas operatori, (18.3.26) formulaga ko'ra,

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (18.3.29)$$

ko'rinishga ega.

Bu ko'rinishdan foydalanib, barcha sferik simmetrik garmonik funksiyalarni, ya'ni Laplas tenglamasining faqat koordinatalar bo-shigacha masofaga bog'liq yechimlarini topamiz. Shunday qilib,  $U = v(r)$  va

$$\Delta v(r) = 0$$

bo'lsin. (18.3.29) ga ko'ra,

$$[r^2 v'(r)]' = 0.$$

Demak,

$$v'(r) = \frac{C}{r^2}$$

va bundan

$$v(r) = \frac{C_1}{r} + C_2, \quad (18.3.30)$$

kelib chiqadi, bu yerda  $C_1$  va  $C_2$  ixtiyoriy o'zgarmas sonlardir. Agar  $C_1 \neq 0$  bo'lsa, bu funksiya  $\mathbb{R}^3$  fazosining koordinatalar boshidan tashqari nuqtalarida Laplas tenglamasining yechimidir.

**Eslatma.** (18.2.6) tenglik bilan Laplas operatori ixtiyoriy sillik skalyar maydon uchun aniqlanadi. Agar  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  vektor maydon bo'lib, uning komponentalari ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$$

deb hisoblanadi, ya'ni vektor maydon Laplasiani yana vektor maydon tashkil qiladi.

Istalgan silliq  $A$  vektor maydon uchun

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (18.3.31)$$

ayniyatning haqligi bevosita hisoblash orqali ko'rsatiladi. Bu ayniyatni ham vektor maydon Laplasianini ta'riflash uchun asos qilib olish mumkin.

## 18.4-§. Potensial va solenoidal maydonlar

Maydon nazariyasidagi asosiy differensiallash operatsiyalarining o'zaro bog'liqligi §18.2 da qayd etilgan edi ((18.2.11) va (18.2.12) formulalarga qarang). (18.2.11) formulaga ko'ra, istalgan  $U(x, y, z)$  skalyar maydon uchun  $\mathbf{E} = \text{grad } U$  vektor maydon rotori nolga teng:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot grad } U \equiv 0. \quad (18.4.1)$$

(18.2.12) formulaga ko'ra esa, istalgan  $\mathbf{A}$  vektor maydon uchun  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  vektor maydon divergensiya nolga teng:

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0. \quad (18.4.2)$$

Bu ayniyatlarga e'tibor bersak, keltirilgan tasdiqlarning teskarisi ham o'rinli degan, matematik nuqtai nazardan tabiiy bo'lgan taxmin tug'iladi. Bu taxmin aslida to'g'ri bo'lib, uning fizik ma'nosi elektr va magnetizm nazariysida aniqlanadi.

**1. Potensial maydonlar. Ta'rif.** Agar  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  vektor maydon uchun shunday  $U(\mathbf{r})$  skalyar maydon topilib,

$$\mathbf{E} = \text{grad } U \quad (18.4.3)$$

tenglik bajarilsa, u **potensial** maydon deyiladi.

Bunda  $U(\mathbf{r})$  skalyar maydon  $\mathbf{E}$  vektor maydonning *potensial* deyiladi.

**18.4.1 - teorema.** Faraz qilaylik,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  soha biror nuqtaga nisbatan yulduzli bo'lsin.  $\mathbf{E}$  vektor maydonning  $\Omega$  sohada potensial bo'lishi uchun bu sohada

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (18.4.4)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

**Isbot.** 1) Zarurligi bevosita (18.4.1) ayniyatdan kelib chiqadi. Haqiqatan, agar  $\mathbf{E}$  vektor maydon potensial bo'lsa, ya'ni (18.4.3) ko'rinishga ega bo'lsa, u holda (18.4.4) shart (18.4.1) bilan ustma-ust tushadi.

2) Yetarliligi.  $\mathbf{E} = (P, Q, R)$  vektor maydon (18.4.4) shartni qanoatlantirsin, deylik. U holda, rotor ta'rifiga ko'ra,

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (18.4.5)$$

Shunday ekan, qaralayotgan sohaning yulduzli ekanini hisobga olib, biz 16.6.3 - teoremani qo'llashimiz mumkin. Bu teoreмага ko'ra,  $\mathbf{E}$  vektor maydon potensialdir. ■

**Eslatma.** Vektor maydonning  $U(\mathbf{r})$  potentsiali o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida aniqlanadi, ya'ni ixtiyoriy boshqa potentsial  $U(\mathbf{r}) + C$  ko'rinishga egadir.

Haqiqatan, agar  $\mathbf{E} = \text{grad } U_1 = \text{grad } U_2$  bo'lsa, u holda

$$\text{grad}[U_1(\mathbf{r}) - U_2(\mathbf{r})] = 0.$$

Demak, 12.1.3 - teorema ko'ra,  $U_1(\mathbf{r}) - U_2(\mathbf{r}) = \text{const}$ .

**18.4.1 - misol.** Kulon qonuniga ko'ra, koordinatalar boshida joylashgan  $q$  nuqtali elektrik zaryad, masofa kvadratiga teskari proporsional ravishda nolga intiluvchi va markazga yo'naltirilgan  $\mathbf{F}$  kuch maydonini vujudga keltiradi:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (18.4.6)$$

Bu vektor maydonining potentsial ekanini ko'rish qiyin emas. Haqiqatan, agar  $U(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}|}$  desak,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad } U(\mathbf{r}).$$

$U(\mathbf{r})$  skalyar maydon Kulon potentsiali deb ataladi.

**2. Solenoidal maydonlar. Ta'rif.** Agar  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  vektor maydon uchun shunday  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  vektor maydon topilib,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (18.4.7)$$

tenglik bajarilsa, u **solenoidal** maydon deyiladi.

Bunda  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  vektor maydon  $\mathbf{H}$  maydonning vektor potentsiali deyiladi.

**18.4.2 - teorema.**  $\mathbf{H}$  vektor maydonning

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2, c_1 < z < c_3\}$$

sohada solenoidal bo'lishi uchun bu sohada

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (18.4.8)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

**Isbot.** 1) *Zarurligi* bevosita (18.4.2) ayniyatdan kelib chiqadi. Haqiqatan, agar  $\mathbf{H}$  vektor maydon solenoidal bo'lsa, ya'ni u (18.4.7) ko'rinishga ega bo'lsa, u holda (18.4.8) shart (18.4.2) ayniyat bilan ustma-ust tushadi.

2) *Yetarliligi.*  $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$  vektor maydon (18.4.8) shartni qanoatlantirsin, deylik. Shunday  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  maydon topaylikki, u uchun (18.4.7) tenglik bajarilsin. Bunday vektor maydonlar aslida cheksiz ko'p. Shuning uchun biz imkon darajasida eng soddasini, masalan, oxirgi komponentasi nolga teng bo'lganini, ya'ni  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, 0)$  ko'rinishdagisini topamiz. Bu degani,  $\Omega$  sohasining har bir nuqtasida  $\mathbf{A}$  vektor  $Oxy$  koordinata tekisligida yotadi.

Ixtiyoriy ravishda  $(a_1, a_2)$  intervaldan  $a$  sonini va  $(c_1, c_2)$  intervaldan  $c$  sonini tanlab,

$$A_1(\mathbf{r}) = \int_c^z H_2(x, y, t) dt$$

va

$$A_2(\mathbf{r}) = \int_a^x H_3(s, y, c) ds - \int_c^z H_1(x, y, t) dt$$

deymiz.

U holda, vektor maydon rotorining ta'rifiga ko'ra,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \\ &= \left( H_1(\mathbf{r}), H_2(\mathbf{r}), H_3(x, y, c) - \int_c^z \left[ \frac{\partial H_1(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial H_2(x, y, t)}{\partial y} \right] dt \right). \end{aligned} \quad (18.4.9)$$

(18.4.8) shartga ko'ra  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  bo'lgani uchun,

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} = - \frac{\partial H_3}{\partial z}.$$

Shunday ekan, (18.4.9) vektorning oxirgi komponentasi uchun

$$H_3(x, y, c) + \int_c^z \frac{\partial H_3(x, y, t)}{\partial z} dt = H_3(x, y, z)$$

tenglik o'rinli (oxirgi tenglikni olish uchun biz Nyuton-Leybnits formulasini qo'lladik). Bu munosabatni hisobga olsak, (18.4.9) tenglik talab qilingan rot  $\mathbf{A} = \mathbf{H}$  ko'rinishga keladi. ■

**1 - eslatma.** 18.4.1 - teorema asosan, solenoidal maydonning  $\mathbf{A}$  vektor potentsiali maydon potentsialidan iborat ixtiyoriy qo'shiluvchi aniqligida aniqlanadi, ya'ni har qanday boshqa vektor potentsiali  $\tilde{\mathbf{A}}(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) + \nabla\varphi(x, y, z)$  ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda  $\varphi$  silliq skalyar maydondir.

**2 - eslatma.** Magnit maydonning vektor maydoni ekanligi naycha ko'rinishidagi silindrik metall spiraldan o'tayotgan elektr toki harakati o'rganilganda aniqlangan. Bunday tok o'tkazuvchi spiral birinchi marta fransuz fizik olimi A. Amper tomonidan yasalgan bo'lib, u solenoid nomini olgan (yunoncha  $\sigma\omega\lambda\eta\nu\omicron\epsilon\iota\delta\acute{\epsilon}\zeta$  – naysimon degani). Solenoid vujudga keltirayotgan magnit maydon divergensiyasi nolga teng. Keyinroq har qanday magnit maydoni shunday xossaga ega ekani, ya'ni har qanday magnit maydoni solenoidal bo'lishi isbotlandi.

**3. Nyuton potentsiali.** Butun  $\mathbb{R}^3$  fazosida silliq bo'lib, cheksizlikda tez nolga intiluvchi  $\rho(x, y, z)$  funksiyani qaraymiz. Eslatib o'tamiz,

$$U(x, y, z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (18.4.10)$$

funksiya *Nyuton* yoki *hajm* potentsiali deb,  $\rho$  funksiya esa, potentsial *zichligi* deb ataladi.

17.5.1 - teorema asosan, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi istalgan  $\rho(x, y, z)$  funksiya uchun  $U(x, y, z)$  hajm potentsiali ham

ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lib,

$$\Delta U(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z) \quad (18.4.11)$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Bu yerda  $\Delta = \text{div grad}$ , ya'ni Laplas operatoridir.

Hajm potensialining bu xossasidan foydalanib, har qanday vektor maydonini potensial va solenoidal maydonlar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkinligini isbotlaymiz.

**18.4.3 - teorema (H. Helmholtz).** *Har qanday silliq  $\mathbf{F}$  vektor maydonini*

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{H} \quad (18.4.12)$$

*ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda  $\mathbf{E}$  potensial maydon bo'lib,  $\mathbf{H}$  esa, solenoidal maydondir.*

**Isbot.** Faraz qilalylik,  $\mathbf{F}(x, y, z)$  silliq vektor maydoni berilgan bo'lsin. (18.4.10) formulada

$$\rho(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{F}(x, y, z)$$

deb,

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{div } \mathbf{F}(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

hajm potensialini qaraymiz.

Hajm potensialining asosiy (18.4.11) xossasiga ko'ra,

$$\Delta U(x, y, z) = \text{div } \mathbf{F}(x, y, z).$$

Agar

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$$

desak, ta'rifga ko'ra,  $\mathbf{H}$  potensial maydon bo'lib,

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div grad } U = \Delta U = \text{div } \mathbf{F}$$

tengliklar bajariladi.



Nihoyat,

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} - \mathbf{H}$$

deylik. U holda  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{F} - \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  va bundan chiqdi, 18.4.2 - teorema ko'ra,  $\mathbf{E}$  solenoidal maydondir. ■

**1 - eslatma.** Istalgan vektor maydonni potensial va solenoidal maydonlar yig'indisi qilib yozish o'zaro bir qiymatli emas. Agar  $\mathbf{P}(x, y, z)$  vektor maydon bir vaqtning o'zida ham potensial, ham solenoidal maydon bo'lsa, ya'ni

$$\operatorname{rot} \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{P} = 0 \quad (18.4.13)$$

tengliklarni qanoatlantirsa, u *garmonik* maydon deyiladi.

Ravshanki, (18.4.12) yoyilmada  $\mathbf{E}$  potensial maydondan ixtiyoriy  $\mathbf{P}$  garmonik maydonni ayirib, xuddi shu garmonik maydonni  $\mathbf{H}$  solenoidal maydonga qo'shish mumkin.

(18.3.31) ayniyat va (18.4.13) tenglikka ko'ra, garmonik vektor maydon

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (18.4.14)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Yuqoridagi mulohazalarga asosan, har qanday  $\mathbf{P}$  garmonik maydon

$$\mathbf{P} = \operatorname{grad} \psi$$

ko'rinishga ega, bunda  $\psi$  garmonik funksiyadir, ya'ni u Laplas tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\Delta \psi(x, y, z) = 0.$$

**2 - eslatma.** 18.4.3 - teoremadan har qanday  $\mathbf{F}$  vektor maydonni

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi$$

kabi yozish mumkinligi kelib chiqadi. Bunda  $\mathbf{A}$  vektor maydon  $\mathbf{F}$  maydonning vektor potentsiali va  $\varphi$  esa, skalyar potentsiali deyiladi.

### 18.5-§. Maksvell tenglamalari

1. 1831 yilda ingliz fizik-tajribachisi Maykl Faradey, gidro elektr stansiyasidan tortib to atom elektr stansiyasigacha elektr tokini ishlab chiqaruvchi barcha zamonaviy generatorlar ishlash prinsipi asosida yotuvchi, elektromagnit induksiya hodisasini kashf qildi. Faradey elektr va magnit hodisalarni bitta fizik ob'ektning turli xossalarni namoyon bo'lishi deb hisobladi. Bu ob'ektni u *elektromagnit maydon* deb atadi. O'ttiz yildan so'ng Shotlandiyalik olim J. K. Maksvell, elektromagnit induksiyani tushuntirish maqsadida, muhitni elektr va magnit xossalari o'zgarishining matematik qonuniyatlarini tadqiq qildi. Buning uchun Maksvell ikki vektor maydonni, ya'ni  $\mathbf{E}$  elektr maydonni va  $\mathbf{H}$  magnit maydonni o'rgandi.

Bu vektor maydonlarning har biri uch fazoviy o'zgaruvchi va vaqtga bog'liq, ya'ni ular to'rt haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasidir:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t).$$

Elektromagnit maydon deganda qayd etilgan ikki vektor maydonning majmui tushuniladi. Bu maydon zaryadlangan zarrachaga (agar zarracha elektr zaryadiga ega bo'lmasa, u holda elektromagnit maydon unga ta'sir o'tkazmaydi) qayd etilgan ikki maydon vujudga keltirgan kuch ta'siri natijasida namoyon bo'ladi.

Tajribada aniqlanishicha, vakuumda  $\mathbf{v}$  tezlik bilan harakatlana-yotgan  $q$  zaryadga ta'sir qiluvchi  $\mathbf{F}$  kuch

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \quad (18.5.1)$$

ga teng, bu yerda  $c$  yorug'lik tezligidir. Bunda  $\mathbf{F}$  kuchni *Lorens kuchi* deb atashadi.

Elektromagnit maydonini to'la tavsiflash uchun  $\rho$  elektr zaryadi zichligini (ya'ni birlik hajmdagi zaryadlar soni) va  $\mathbf{J}$  elektr toki zichligini (birlik vaqt ichida birlik yuzadan o'tuvchi elektr zaryadlar miqdori) kiritish zarur.

Elektromagnit maydonining yuqorida qayd etilgan barcha xarakteristikalari vakuumda Maksvellning to'rtta tenglamasi bilan bog'langan. Bu tenglamalar Gauss absolyut birliklari deb ataluvchi sistemada quyidagi ko'rinishga ega:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (18.5.2)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (18.5.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (18.5.4)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \quad (18.5.5)$$

Maksvell tenglamalari tajriba usulida topilgan fizik qonunlarning matematik formasi bo'lib, ular quyidagilardan iborat:

(18.5.2) tenglama — Amper va Bio-Savar qonuni,

(18.5.3) tenglama — Faradey qonuni,

(18.5.4) tenglama — Kulon qonuni,

(18.5.5) tenglama — magnit zaryadlari qatnashmasligining tasdiqi.

Bu qonunlarning ba'zi natijalarini biz navbatdagi bandlarda keltiramiz.

Birinchi (18.5.2) tenglamaning o'ng tarafiga  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  tok siljishini qo'shilishi Maksvell kashfiyotlaridan biri bo'lib, natijada tenglamalar nafaqat simmetrik ko'rinishga keldi, balki ular orasidagi o'zaro qarama-qarshilik ham yo'qoldi.

**2.** Sodda natija sifatida, (18.5.2) va (18.5.4) Maksvell tenglamalari va (18.2.12) ayniyatdan quyidagi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{J} = 0$$

uzluksizlik tenglamasini olish qiyin emas (*elektr zaryadining saqlanish qonuni*).

Bu tenglamani

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}$$

ko'rinishda yozib, (18.2.13) formulani hisobga olsak, uzluksizlik tenglamasini quyidagicha o'qish mumkin: *biror jismda zaryad zichligi-ning kamayishi bu jismdan chiquvchi zaryad oqimiga teng.*

Maksvell tenglamalarining yana bir natijasi sifatida, elektr maydoni qanoatlantiruvchi differensial tenglamani keltirib chiqaramiz. (18.5.2) va (18.5.3) tenglamalarga ko'ra,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (18.5.6)$$

Endi, (18.2.12) ayniyat va (18.5.4) tenglamaga asosan,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 4\pi \nabla \rho - \Delta \mathbf{E}. \quad (18.5.7)$$

Oxirgi (18.5.6) va (18.5.7) tengliklarni taqqoslasak,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - 4\pi c^2 \nabla \rho \quad (18.5.8)$$

tenglikka kelamiz.

Agar tok va zaryad qatnashmasa, ya'ni  $\mathbf{J} = 0$  va  $\rho = 0$  bo'lsa, (18.5.8) dan elektr maydonining *to'liqin tenglamasini* qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E}. \quad (18.5.9)$$

Xuddi shu kabi magnit maydon uchun ham differensial tenglama keltirib chiqariladi.

Aytaylik,  $f(t)$  ikki marta differensiullanuvchi bir o'zgaruvchili ixtiyoriy funksiya va  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  istalgan birlik vektor bo'lsin. U holda

$$u(x, y, z, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct) = f(k_1 x + k_2 y + k_3 z - ct)$$

funksiya, ravshanki, to'liqin tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u. \quad (18.5.10)$$

Haqiqatan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(k_1 x + k_2 y + k_3 z - ct)$$

va

$$\Delta u = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) f''(k_1 x + k_2 y + k_3 z - ct) = f''(k_1 x + k_2 y + k_3 z - ct).$$

Odatda,  $u = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct)$  ko'rinishdagi yechim to'liqinli yechim deb ataladi. Agar  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - ct_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - ct_2$  bo'lsa, ya'ni

$$\frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{t_2 - t_1} = c$$

tenglik o'rinli bo'lsa, to'liqinli yechimning  $\mathbf{r}_1$  nuqtada va  $t_1$  vaqt fursatidagi qiymati  $\mathbf{r}_2$  nuqtada va  $t_2$  vaqt fursatidagi qiymatiga teng bo'ladi.

Oxirgi tenglik bunday to'liqinning  $\mathbf{k}$  birlik vektori yo'nalishi bo'yicha tarqalish tezligi  $c$  yorug'lik tezligiga tengligini anglatadi. Bundan fundamental ahamiyatga ega bo'lgan quyidagi ikki natija olingan:

1) elektromagnit to'liqlari mavjud va ular yorug'lik tezligi bilan tarqaladi;

2) yorug'lik ham elektromagnit to'liqinidir.

Yorug'lik to'liqini uzunligidan katta to'liqin uzunligiga ega bo'lgan elektromagnit to'liqlari (radio to'liqlari) birinchi marta nemis fizigi Henrix Herts tomonidan (1888) vujudga keltirildi va detektirlandi. Radio to'liqini diapazonidagi elektromagnit to'liqlarining amaliyotga tadbiqu Rossiyalik fizik A.C.Popov izlanishlaridan boshlandi.

Shuni aytish zarurki, elektromagnit to'liqlari yordamida axborot uzatishdan foydalanuvchi zamonaviy texnologiyalarning barchasi Maksvell tenglamalarini matematik tahlil qilish natijasida paydo bo'lgan.

**3. Elektrostatika va magnitostatika.** Vaqtga bog‘liq elektromagnit jarayonlarni o‘rganuvchi fizik nazariya *elektrodinamika* deb ataladi. Bu nazariyaning matematik tavsifi (18.5.2)-(18.5.5) Maksvell tenglamalar sistemasi bilan beriladi.

Agar elektr va magnit maydonlarining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi shunchalik kam bo‘lsaki, ularni vaqtga bog‘liqmas deb hisoblash mumkin bo‘lsa, u holda Maksvell tenglamalar sistemasi sodda ko‘rinishga keladi:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (18.5.11)$$

va

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \quad (18.5.12)$$

Natijada Maksvell sistemasi ikki o‘zaro bog‘liqmas (18.5.11) va (18.5.12) sistemalarga ajraladi. (18.5.11) sistema bilan tavsiflanadigan hodisalar *elektrostatikaga* va (18.5.12) sistema bilan tavsiflanadigan hodisalar esa, *magnitostatikaga* kiradi.

Bevosita (18.5.11) tenglamalardan o‘zgarimas elektr maydonning potensial maydon ekani kelib chiqadi. Bundan chiqdi, o‘zgarimas elektr maydon

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi(x, y, z)$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, (18.5.11) dagi ikkinchi tenglama va Laplas operatori ta‘rifidan

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z)$$

munosabatga kelimiz.

Agar elektr maydon butun  $\mathbb{R}^3$  fazoda qaralsa, elektr zaryadlar esa,  $\rho$  zichlik bilan taqsimlangan bo‘lsa, u holda  $\varphi$  potensial (18.4.10) hajm potentsiali bilan ustma-ust tushadi, ya‘ni

$$\varphi(x, y, z) = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Parametrga bog'liq bo'lgan bu integralni formal ravishda differensiallasak,

$$\mathbf{E} = \nabla\varphi = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{(x - \xi)\mathbf{i} + (y - \eta)\mathbf{j} + (z - \zeta)\mathbf{k}}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (18.5.13)$$

tenglikni olamiz.

Bundan va (18.5.1) tenglikdan, xususan, berilgan elektr maydonning elektr zaryadga ta'sir kuchi Kulon qonuniga bo'ysunishi kelib chiqadi. Shunday qilib, Kulon qonuni Maksvell tenglamalarining natijasi ekan.

4. (18.5.5) tenglamaga ko'ra, magnit maydon doim solenoidal bo'lib, u

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

ko'rinishga ega. (18.5.12) dagi birinchi tenglamadan esa, (18.3.20) ayniyatga ko'ra,

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

munosabat kelib chiqadi. Bundan, xuddi elektr maydon holidagidek,

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (18.5.14)$$

tenglikni olamiz.

Agar  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$  simvol bilan

$$\mathbf{R} = (x - \xi)\mathbf{i} + (y - \eta)\mathbf{j} + (z - \zeta)\mathbf{k}$$

vektorni belgilab, parametrga bog'liq (18.5.14) integralni formal ravishda differensiallasak,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{[\mathbf{J}, \mathbf{R}]}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (18.5.15)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu tenglik va (18.5.1) formuladan, xususan,  $\mathbf{J}$  zichlikka ega bo'lgan o'zgarmas tokni vujudga keltiruvchi, harakatdagi elektr zaryadlariga berilgan magnit maydonning ta'sir kuchi, Bio-Savar qonuni deb tanilgan qonunga bo'ysunishi kelib chiqadi. Shunday qilib, tajriba usulida topilgan Bio-Savar qonuni ham Maksvell tenglamalarining natijasi ekan.

## 18.6-§. Misollar

**1 - misol.** Agar skalyar maydon  $u = xz - y^2$  funksiya bilan berilgan bo'lsa,  $M(-9, 10, 12)$  nuqtada grad  $u$  ning qiymatini va yo'nalishini toping. Berilgan skalyar maydonning  $xOz$  koordinata burchagi bissektisasi yo'nalishi bo'yicha hosilasini hisoblang.

**Ko'rsatma.** Gradient (18.1.4) formula yordamida topiladi. Har qanday  $\mathbf{v}$  vektor yo'nalishi  $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$  formula orqali aniqlanadi. Agar  $\tau$  koordinata boshidan  $xOz$  koordinata burchagi bissektisasi bo'yicha yo'nalgan birlik vektor bo'lsa,  $\tau = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  tenglik o'rinli. Bu yo'nalish bo'yicha hosilani (12.1.31) formula yordamida hisoblang.

**2 - misol.** Quyidagi

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y - \mathbf{k}z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

vektor maydon divergentsiyasining  $M(7, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  nuqtadagi qiymatini toping.

**Ko'rsatma.** (18.2.2) formuladan foydalaning.

**3 - misol.** Agar  $u$  skalyar maydon bo'lsa,  $\text{div}(u \text{ grad } u)$  ni toping.

**Ko'rsatma.** Divergentsiya va gradient ta'riflari hamda ko'paytmani differentsiallashtirish qoidasidan foydalaning.

**4 - misol.** Agar vektor maydon

$$\mathbf{v} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$$

funksiya bilan berilgan bo'lsa,  $M(1, 2, -2)$  nuqtada rot  $\mathbf{v}$  ning qiymatini va yo'nalishini toping.



**Ko'rsatma.** (18.2.8) formuladan foydalaning.

**5 - misol.** Umumlashgan qutb koordinatalari:

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

quyidagi

$$x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \theta, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \theta, \quad z = cr \sin^\beta \theta$$

formulalar yordamida kiritiladi. Bu yerda  $a, b, c, \alpha$  va  $\beta$  parametrlar noldan farqli o'zgarmaslardir.

Umumlashgan qutb koordinatalari uchun urinma vektorlarni toping. Parametrlarning qanday qiymatlarida urinma vektorlar o'zaro ortogonal bo'lishini aniqlang. Urinma vektorlar ortogonal bo'lgan holda Lamé koeffitsiyentlarini toping.

**Ko'rsatma.** Urinma vektorlarni (18.3.1) formula bo'yicha hisoblab, (18.3.2) shart bajarilishini tekshiring. Lamé koeffitsiyentlarini (18.3.4) formulalar yordamida hisoblang.

**6 - misol.** Umumlashgan silindrik koordinatalari:

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

quyidagi

$$x = a \rho \cos^\alpha \varphi, \quad y = b \rho \sin^\alpha \varphi, \quad z = z$$

formulalar yordamida kiritiladi. Bu yerda  $a, b$  va  $\alpha$  parametrlar noldan farqli o'zgarmaslardir.

Umumlashgan silindrik koordinatalari uchun urinma vektorlarni toping. Parametrlarning qanday qiymatlarida urinma vektorlar o'zaro ortogonal bo'lishini aniqlang. Urinma vektorlar ortogonal bo'lmagan holda ham (18.3.10) tenglik o'rinli bo'ladimi?

**Ko'rsatma.** Urinma vektorlarni topish va ulani ortogonallikka tekshirish xuddi 5 - misoldagi kabi amalga oshiriladi. Umumiy holda (18.3.10) tenglikni tekshirish uchun bevosita uning ikki tomonida turgan ifodani hisoblang.

**7 - misol.** Silindrik koordinatalarda  $u = \rho \cos \varphi + z \sin^2 \varphi - 3\rho$  funksiya bilan berilgan skalyar maydon gradientini toping. So'ngra hosil bo'ldan vektor maydonning divergensiyasini hisoblang.

**Ko'rsatma.** Gradientni 18.3.1 - teorema yordamida hisoblang (18.3.3 - misolga qarang). Divergensiyaning hisoblash uchun esa, 18.3.2 - teoremani qo'llang (18.3.5 - misolga qarang).

**8 - misol.**  $\mathbf{v} = (2r + \alpha \cos \varphi, -\alpha \sin \theta, r \cos \theta)$  sferik koordinatalar bilan berilgan vektor maydon rotorini hisoblang.

**Ko'rsatma.** 18.3.3 - teoremani qo'llang.

**9 - misol.** Agar  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  bo'lib,  $u = f(r)$  skalyar maydon berilgan bo'lsa,  $\text{div}(\text{grad } u)$  ni toping. Qanday  $f(r)$  funksiyalar uchun  $\text{div}(\text{grad } u) = 0$  bo'lishini aniqlang.

**Ko'rsatma.**  $\Delta$  Laplas operatorining (18.2.6) ta'rifini va 18.3.4 - teoremadan foydalaning.

**10 - misol.**  $\mathbf{E} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$  ko'rinishda berilgan vektor maydonning potensial maydon ekanini ko'rsating va potensialini toping.

**Ko'rsatma.** Berilgan maydonning potensial maydon ekaniga 18.4.1 - teorema yordamida ishonch hosil qiling. So'ngra, ta'rifga ko'ra o'rinli bo'lgan

$$\mathbf{E} = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$$

tenglikdan  $\varphi$  potensialini toping.

# 19-bob. Furiye integrali

## 19.1-§. Furiye almashtirishi

### 1. Kirish.

Bizni o'rab turgan olamdagi ko'p hodisalar davriy xarakterga ega, yoki ularni davriy jarayonlar superpozitsiyasi deb tasavvur qilish mumkin. Eng sodda davriy jarayon *garmonik tebranish* deb atalib, uning vaqtga bog'liqligi

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty,$$

ko'rinishdagi funksiya bilan ifodalanadi. Bu yerda  $A$  o'zgarmas *amplituda*,  $\omega$  esa *siklik chastotadir*. Kosinusning  $(\omega t + \varphi)$  argumenti *to'la faza*,  $\varphi$  esa *boshlang'ich faza* deb ataladi.

Qavslarni ochib, tebranish tenglamasini

$$u(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

ko'rinishda, yoki kompleks shaklda

$$u(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

kabi yozish mumkin.

Turli davrga ega bo'lgan sodda davriy jarayonlarning superpozitsiyasi

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ko'rinishdagi integrallarni o'rganishga olib keladi.

Deyarli har qanday funksiyani shunday integral ko'rinishida yozish mumkinligi, ya'ni uni cheksiz sondagi garmonik tebranishlar

yig'indisiga yoyilishi, ham kutilmagan, ham ajoyib fakt bo'ldi. Albatta, yuqoridagi integral ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan funksiyalar sinfi bu xosmas integralni qanday tushinishimizga bog'liq.

Bu xildagi integrallar birinchi marta Fransuz matematigi J.B. Furiye tomonidan XIX asrning boshida o'rganildi va keyinchalik *Furiye integrali* deb atala boshlandi. XX asrga kelib Furiye integral-lari bizni o'rab turgan olamni o'rganishda eng muhim qurolga aylandi va turli matematik modellarda keng foydalanila boshlandi. Furiye integraliga yoyilishni o'rganadigan matematik nazariya *garmonik tahlil* degan nom oldi.

Ushbu bobda  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida aniqlangan va kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyalar, ya'ni

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

ko'rinishdagi funksiyalar o'rganiladi, bu yerda  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  - haqiqiy o'zgaruvchining haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyalaridir. Tadbiqlarda ko'pincha  $f_2(x) \equiv 0$  bo'ladi.

$\mathbb{R}$  sonlar o'qida aniqlangan  $f$  funksiyaning navbatdagi

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (19.1.1)$$

integral almashtirishini kiritamiz. Bunda  $\widehat{f}$  funksiya  $f$  ning *Furiye almashtirishi* deb ataladi.

Furiye almashtirishi korrekt aniqlangan bo'lishi uchun (19.1.1) integral istalgan  $\xi \in \mathbb{R}$  larda yaqinlashishi kerak. Odatda, bu shart o'rinli bo'lishi uchun,  $f$  funksiyaning  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanishi talab qilinadi. Ushbu bobda biz o'rganilayotgan funksiya-ga aynan shu talabni qo'yamiz.

Bizning galdagi maqsadimiz yetarlicha silliq funksiyalarni quyida-gi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.1.2)$$

Furiye integrali ko'rinishida yozish mumkinligini ko'rsatishdan iborat.

Agar bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi tur xosmas integral yaqinlashsa, u holda  $f$  funksiya Furiye integraliga yoyiladi deyiladi. (19.1.2) integral yana *teskari Furiye almashtirishi* deb ham ataladi.

Umumiy holda qayd qilingan xosmas integral Koshi bosh qiymati ma'nosida tushuniladi, ya'ni quyidagi

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

limit deb aniqlanadi.

Agarda o'ng tomondagi integral ostida  $\widehat{f}$  ni uning (19.1.1) qiymati bilan almashtirsak, so'ngra integrallar tartibini o'zgartirib, yangi o'zgaruvchilarga o'tsak, ushbu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt$$

muhim munosabatni olishimiz mumkin (keyingi paragrafdagi (19.2.3) formulaga qarang).

Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  da absolyut integrallanuvchi hosilaga ega bo'lsin. U holda integrallangan sinus ta'rifidan foydalanib, o'ng tomonni quyidagi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{d}{dt} \text{Si}(\lambda t) dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x+t) \text{Si}(\lambda t) dt \end{aligned}$$

ko'rinishga keltirish mumkin (bu yerda  $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$  ekanini hisobga oldik).

Shunday ekan,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{Si}(\lambda t) = \frac{\pi}{2} \text{sign } t$$

tenglikga ko'ra ((17.2.49) formulaga qarang),

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x+t) \text{sign } t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f'(x+t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f'(x+t) dt = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) = f(x) \end{aligned}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bunda hosil bo'lgan tasdiq (19.1.2) tenglikning o'rinli ekanini ko'rsatuvchi Furyening mashhur *integral teoremasidir*.

Keltirilgan isbot yoyilayotgan funksiyaning absolyut integrallanuvchi hosilaga ega degan shartga asoslangan. Ammo kompyuter tomografiyasi yoki elektromagnit to'lqinlarning tarqalishi kabi tadbirlarda bunday xossaga ega bo'lmagan funksiyalarni qarashga to'g'ri keladi. Natijada yuqoridagi isbot ancha murakkablashadi.

Shuni aytish kerakki, funksiyani Furye integraliga yoyilish masalasini yetarlicha to'la hal qilish uchun mashhur matematiklarning bir yarim asr davomida tinimsiz tadqiqoti talab qilindi. Biz eng sodda va shu bilan birga tadbirlarning aksariyati uchun yetarli bo'lgan holni qarash bilan cheklanamiz. Buning uchun funksiyalarning yangi sinflarini kiritib, absolyut integrallanuvchi funksiya Furye almashtirishini to'laroq o'rganishimiz zarur.

Biz, asosan, (19.1.2) integralning Koshi bosh qiymati ma'nosida yaqinlashishini o'rganamiz. Buning uchun, albatta,  $\widehat{f}(\xi)$  Furye almashtirishning absolyut integrallanishini talab qilishga zaruriyat yo'q. Lekin, hisoblash algoritmlarini amalga oshirish uchun qanday hollarda  $\widehat{f}(\xi)$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi

bo'lishi muhim ahamiyatga ega. Shu sababdan, ushbu bobda biz bu masalaga ham e'tibor qaratamiz.

**19.1.1 - misol.** Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

funksiyaning Furiye almashtirishi topilsin.

Ta'rifga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} (\cos x\xi - i \sin x\xi) dx .$$

Agar toq va juft funksiyalardan simmetrik oraliqda olingan integrallar xossasini e'tiborga olib, (17.2.2) tenglikdan foydalansak,

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x\xi dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2} \quad (19.1.3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

**19.1.2 - misol.** Ushbu

$$f(x) = xe^{-\alpha|x|}$$

funksiyaning Furiye almashtirishi topilsin.

Ta'rifga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha|x|} (\cos x\xi - i \sin x\xi) dx .$$

Agar toq va juft funksiyalardan simmetrik oraliqda olingan integrallar xossasini e'tiborga olib, (17.2.2) tenglikdan foydalansak,

$$\widehat{f}(\xi) = -2i \int_0^{\infty} xe^{-\alpha x} \sin x\xi dx = -i \frac{4\alpha\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^2} \quad (19.1.4)$$

formulaga ega bo'lamiz.

**19.1.3 - misol.** Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}$$

funksiyaning Furiye almashtirishi topilsin.

Bu funksiyaning juftligiga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos x\xi dx .$$

Demak, (17.2.18) formulaga asosan,

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\xi^2/4\alpha} . \quad (19.1.5)$$

## 2. Furiye almashtirishi xossalari.

Eslatib o'tamiz, biz (19.1.1) tenglik yordamida Furiye almashtirishni  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan, ya'ni

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \quad (19.1.6)$$

kattalik chekli bo'lgan funksiyalar uchun aniqlagan edik.

**19.1.1 - tasdiq.** Agar  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda uning  $f$  Furiye almashtirishi sonlar o'qida uzluksiz va chegaralangan funksiya bo'ladi:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 .$$

**Isbot.** Furiye almashtirishining chegaralanganligi bevosita (19.1.1) va (19.1.6) ta'riflar va  $|e^{-ix\xi}| = 1$  ayniyatdan kelib chiqadi:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx .$$



(19.1.1) da integral ostidagi funksiya absolyut integrallanuvchi  $|f(x)|$  funksiya bilan yuqoridan chegaralangan. Bu baho parametr-ga bog'liq emas. Shu sababli, Veyershtrass alomatiga (17.2.1 - teoremaga qarang) ko'ra, (19.1.1) integral  $\xi$  parametr-ga nisbatan tekis yaqinlashadi. Demak, 17.2.4 - teoremaga asosan, Furiye almashtirishi uzluksiz funksiyadir. ■

**19.1.2 - tasdiq.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi  $f$  funksiya uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx = 0 \quad (19.1.7)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** Istalgan  $A > 0$  uchun quyidagi

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } |x| \leq A \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x| > A \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani aniqlaymiz.

Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday katta  $A > 0$  sonni tanlaymizki, u uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_A(x)| dx < \varepsilon \quad (19.1.8)$$

baho bajarilsin. Birinchi tur xosmas integral ta'rifiga ko'ra, buni amalga oshirish mumkin.

$f_A(x)$  funksiya finit hamda xos ma'noda Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgani sababli, 10.8.3 - teoremaga ko'ra,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x+h) - f_A(x)| dx = 0. \quad (19.1.9)$$

Ayonki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f_A(x+h)| dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x+h) - f_A(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x) - f(x)| dx .$$

O'ng tomondagi birinchi va uchinchi integrallar (19.1.8) integralga teng ekanini ko'rish qiyin emas. Demak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x+h) - f_A(x)| dx + 2\varepsilon .$$

(19.1.9) ga ko'ra,

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)| dx \leq 2\varepsilon .$$

Endi  $\varepsilon \rightarrow 0$  desak, talab qilingan (19.1.7) munosabatni olamiz. ■

**Eslatma.** (19.1.7) tenglik har qanday absolyut integrallanuvchi funksiya o'rtacha ma'noda uzluksiz ekanini anglatadi. Agar  $f$  funksiya lokal integrallanuvchi bo'lib, kvadrati  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, bu funksiyaning o'rta kvadratik ma'noda uzluksizligi, ya'ni

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (19.1.10)$$

tenglikning bajarilishi xuddi yuqoridagidek isbotlanadi.

**19.1.3 - tasdiq.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan ixtiyoriy  $f$  funksiyaning Furiye almashtirishi barcha  $\lambda \neq 0$  larda

$$|\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx \quad (19.1.11)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

**Isbot.** Agar

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (19.1.12)$$

tenglikda integral ostidagi funksiyani  $e^{i\pi} = -1$  o'zgarmasga ko'paytirsak,

$$\widehat{f}(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda(x-\pi/\lambda)} dx$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu integralda yangi o'zgaruvchi sifatida  $x - \pi/\lambda$  kattalikni olib, uni yana  $x$  deb belgilasak,

$$\widehat{f}(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{-i\lambda x} dx$$

tenglikka kelamiz. Hosil bo'lgan tenglikni (19.1.12) ga qo'shsak,

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] e^{-i\lambda x} dx$$

munosabatni olamiz.

Endi  $|e^{-i\lambda x}| = 1$  ekanini hisobga olsak, bundan talab qilingan (19.1.11) tengsizlik kelib chiqadi. ■

**19.1.1 - teorema.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan ixtiyoriy  $f$  funksiyaning Furiye almashtirishi uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\lambda) = 0 \quad (19.1.13)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot** 19.1.2 - va 19.1.3 - tasdiqlardan kelib chiqadi. Buning uchun  $h = \pi/\lambda$  deb, (19.1.11) va (19.1.7) formulalardan foydalanish kifoya.

**1 - natija.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan har qanday  $f$  funksiya uchun quyidagi

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad (19.1.14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0 \quad (19.1.15)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot uchun (19.1.1) ta'rif va

$$e^{-ix\xi} = \cos x\xi - i \sin x\xi$$

ayniyatdan foydalanish yetarli.

**2 - natija.**  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgan har qanday  $f$  funksiya uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0 \quad (19.1.16)$$

tengliklar o'rinli.

Isbot uchun  $f$  funksiyani  $[a, b]$  kesmadan tashqarida nol deb,  $\mathbb{R}$  sonlar o'qiga davom ettirish kifoya.

Navbatdagi tasdiqda qaralayotgan funksiya  $[a, b]$  kesmada yotuvchi biror  $c$  nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lishi mumkin. Bunday  $g$  funksiyadan  $[a, b]$  kesmada olingan ikkinchi tur xosmas integral quyidagi ikki limit yig'indisi sifatida aniqlanadi:

$$\int_a^b g(x) \, dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \int_a^{c-\alpha} g(x) \, dx + \lim_{\beta \rightarrow 0+0} \int_{c+\beta}^b g(x) \, dx. \quad (19.1.17)$$

Bunda  $g$  funksiya  $c \in (a, b)$  nuqtani o'z ichiga olmagan har qanday  $\Delta \subset [a, b]$  kesmada Riman ma'nosida integrallanadi, deb faraz qilinadi.

**19.1.4 - tasdiq.** Faraz qilaylik,  $g(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmaning  $c \in (a, b)$  dan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan bo'lib,

$$\int_a^b |g(x)| dx \quad (19.1.18)$$

xosmas integral (19.1.17) tenglik ma'nosida yaqinlashsin. U holda

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x dx = 0 \quad (19.1.19)$$

tengliklar o'rinli.

**Isbot.** Yetarlicha kichik  $\delta > 0$  lar uchun barcha  $x \in [a, b]$  larda aniqlangan

$$g_\delta(x) = \begin{cases} g(x), & \text{agar } |x - c| \geq \delta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x - c| < \delta \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (19.1.20)$$

funksiyani kiritamiz.

(19.1.18) xosmas integralning ta'rifiga ko'ra, istalgan  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $\delta > 0$  topiladiki, u uchun

$$\int_a^b |g(x) - g_\delta(x)| dx < \varepsilon \quad (19.1.21)$$

tengsizlik bajariladi.

Bundan chiqdi, agar

$$\int_a^b g(x) \cos \lambda x dx = \int_a^b [g(x) - g_\delta(x)] \cos \lambda x dx + \int_a^b g_\delta(x) \cos \lambda x dx$$

deb yozib olsak,

$$\left| \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \varepsilon(b - a) + \left| \int_a^b g_\delta(x) \cos \lambda x dx \right| \quad (19.1.22)$$

munosabatni olamiz.

$g_\delta$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lgani uchun, u 19.1.1 - teoremaning 2 - natijasi shartlarini qanoatlantiradi. Shunday ekan, (19.1.22) da yuqori limitga o'tib,

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \varepsilon(b-a)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Nihoyat  $\varepsilon > 0$  ning ixtiyoriyligiga ko'ra, bundan (19.1.19) dagi birinchi limitning nolga tengligini olamiz. Ikkinchi limitning nolga tengligi xuddi shu usulda ko'rsatiladi. ■

**Eslatma.** 19.1.4 - tasdiq B. Riman tomonidan isbotlangan. Keyinroq A. Lebeg bu tasdiqni hozirda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deb ataladigan funksiyalar uchun isbotladi. Matematik adabiyotlarda bu olimlar isbotlagan tasdiq *Riman-Lebeg lemmasi* deb ataladi. Bu lemmaning 19.1.4 - tasdiq ko'rinishidagi dastlabki variantini ham biz shu nom bilan ataymiz.

**19.1.4 - misol.** Faraz qilaylik,  $\varphi(x)$  funksiya  $[-1, 1]$  kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda istalgan  $\alpha > 0$  uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |x|^{\alpha-1} \varphi(x) \sin \lambda x dx = 0 \quad (19.1.23)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra,  $\varphi(x)$  funksiya  $[-1, 1]$  kesmada chegaralangan. Bundan chiqdi,

$$|x|^{\alpha-1} |\varphi(x)| \leq C|x|^{\alpha-1}.$$

Taqqoslashning xususiy alomati hamda Riman-Lebeg lemmasini (ya'ni 19.1.4 - tasdiqni) qo'llab, talab qilingan (19.1.23) tenglikka ega bo'lamiz.

### 19.2-§. Furiye integral formulasi

1. Ushbu paragrafdagi asosiy maqsadimiz (19.1.2) tenglikni imkon darajada kengroq  $f$  funksiyalar sinfi uchun isbotlashdan iborat. Barcha qaralayotgan funksiyalarni  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi deb faraz qilamiz.

E'tibor bering, hatto tez kamayuvchi funksiyalar uchun ham qayd etilgan tenglikning o'ng tarafidagi integral absolyut yaqinlashmasligi mumkin. Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (19.2.1)$$

funksiya finit bo'lishiga qaramasdan, uning Furiye almashtirishi

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = 2 \int_0^1 \cos x\xi dx = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}$$

ko'rinishda bo'lib, u  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi emas.

Umumiy holda (19.1.2) Furiye integrali Koshi bosh qiymati ma'nosida tushuniladi:

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Furiye qismaniy integralini quyidagi

$$I_{\lambda} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.2.2)$$

ko'rinishda aniqlab, uning  $\lambda \rightarrow +\infty$  dagi limitini o'rganamiz.

Avval (19.1.1) formuladan foydalanib, so'ngra integrallar tartibini o'zgartirsak,

$$I_{\lambda} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ix\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(x-y)\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda(x-y)}{(x-y)} f(y) dy$$

munosabatni olamiz. Endi  $y = x + t$  almashtirish bajarib, Furiye qisimiy integrallari uchun Furiye almshtirishi oshkor ravishda qat-nashmagan, quyidagi

$$I_{\lambda}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt \quad (19.2.3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

**2.** Navbatdagi tasdiq (19.2.3) formuladagi xosmas integralni  $x$  nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofi bo'yicha olingan integral bilan almashtirish mumkinligini ko'rsatadi.

**19.2.1 - teorema.** *Ixtiyoriy  $\delta > 0$  son uchun quyidagi*

$$I_{\lambda}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (19.2.4)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** Agar

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{agar } |t| > \delta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |t| < \delta \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani kiritsak, shubhasiz,  $|\psi(t)| \leq 1/\delta$  shart bajariladi va (19.2.3) integral

$$I_{\lambda}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\psi(t) \sin \lambda t dt$$

ko'rinishga keladi.



$g(t) = f(x+t)\psi(t)$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgani uchun, (19.1.15) ga ko'ra, oxirgi integral nolga intiladi. ■

**Natija.** Agar  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi  $f_1$  va  $f_2$  funksiyalar  $x$  nuqtaning biror atrofida ustma-ust tushsa,  $u$  holda

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [I_\lambda f_1(x) - I_\lambda f_2(x)] = 0.$$

Haqiqatan,  $f = f_1 - f_2$  funksiyaga (19.2.4) formulani qo'llaylik. Yetarlicha kichik  $\delta > 0$  lar uchun  $f$  funksiya  $(x - \delta, x + \delta)$  intervalda aynan nolga teng. Demak, (19.2.4) formulaning o'ng qismidagi integral nolga aylanib, bu formula talab qilingan ko'rinishga keladi:

$$I_\lambda f_1(x) - I_\lambda f_2(x) = o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

**Eslatma.** Bu natijadan quyidagi xulosa kelib chiqadi: Furye integrallarning istalgan nuqtada yaqinlashishi yoki uzoqlashishi faqat shu nuqta atrofida funksiya o'zini qanday tutishiga bog'liq bo'lib, nuqtadan uzoqda funksiya qanday bo'lishiga bog'liq emas. Boshqacha aytganda, qayd etilgan yaqinlashish yoyilayotgan funksiyaning lokal xossalari bilan aniqlanadi. Ushbu xulosa Furye integrallari uchun *Riman lokallashtirish prinsipi* degan nom bilan tanilgan.

**3.** (19.2.4) formula yordamida (19.2.2) qisman integrallarning  $f$  funksiyaga yaqinlashish shartlarini aniqlash mumkin. Avvalo shuni aytish kerakki, (17.2.48) formuladan ixtiyoriy tayinlangan  $\delta > 0$  da o'rinli bo'lgan ushbu

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin u}{u} du = 1 + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

munosabat kelib chiqadi.

Bu munosabatni va

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt +$$

$$+ \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin t}{t} dt$$

ayniyatni (19.2.4) formulaga qo'llasak, quyidagi

$$I_{\lambda} f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (19.2.5)$$

asosiy tenglikni olamiz.

E'tibor bering, (19.2.5) tenglik sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi istalgan  $f$  funksiya va sonlar o'qidagi har qanday  $x$  nuqta uchun o'rinli.

4. (19.2.5) tenglikdan Furiye qismaniy integrallarining yoyilayotgan funksiyaga yaqinlashishi uchun (19.2.5) ni o'ng tomonidagi integralning nolga intilishi zarur va yetarli ekani kelib chiqadi. Riman-Lebeg lemmasiga (19.1.4 - tasdiq) ko'ra, bu integralning nolga intilishi uchun yetarli shart

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad (19.2.6)$$

funksiyaning  $[-\delta, \delta]$  kesmada xosmas ma'noda absolyut integrallanuvchi bo'lishidan iborat. Ravshanki, bu shart bajarilishini tekshirish uchun funksiyani  $t = 0$  nuqta atrofida o'rganish kifoya. (19.2.6) kasr maxraji bu nuqtada nolga aylangani sababli, kasr integrallanuvchi bo'lishi uchun, suratning ham  $t = 0$  nuqtada, masalan, biror  $\alpha > 0$  bilan  $|t|^{\alpha}$  kabi nolga aylanishi yetarli.

Agar shunday  $M$ ,  $\alpha$  va  $\delta$  musbat sonlar topilsaki,  $|t| < \delta$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $t$  lar uchun

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^{\alpha} \quad (19.2.7)$$

baho bajarilsa, biz  $f$  funksiyani  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada *Holder shartini qanoatlantiradi* deyimiz.

Agar  $f$  funksiya biror  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada Holder shartini qanoatlantirsa, (19.2.6) tenglik bilan aniqlangan  $g(t)$  funksiya  $x$  nuqtaning

biror  $\delta$ -atrofida xosmas ma'noda absolyut integrallanuvchi bo'ladi. Haqiqatan, (19.2.7) shartga ko'ra,

$$|g(t)| \leq M \cdot |t|^{\alpha-1}$$

baho o'rinli, ya'ni  $g(t)$  funksiya nolda integrallanuvchi maxsuslikka ega.

Demak, bunday funksiyalar uchun, Riman-Lebeg lemmasiga ko'ra, (19.2.5) ning o'ng qismidagi integral  $\lambda \rightarrow +\infty$  da nolga intiladi.

Shunday qilib, biz navbatdagi tasdiq o'rinli ekanini ko'rsatdik.

**19.2.2 - teorema (Furyening integral teoremasi).** *Agar  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi  $f$  funksiya  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada Holder shartini qanoatlantirsa, u holda shu nuqtada*

$$\text{V. p. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x) \quad (19.2.8)$$

*tenglik bajariladi.*

**Isbot** bevosita (19.2.5) formula va yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadi.

**Eslatma.** Agar absolyut integrallanuvchi  $f$  funksiya  $x$  nuqtada faqat uzluksiz bo'lsa, u holda uning Furye integralini shu nuqtada yaqinlashishi haqida hech gap aytib bo'lmaydi. Furye integrali biror tayinlangan  $x$  nuqtada uzoqlashuvchi bo'lgan uzluksiz funksiyaga misollar XIX asrdayoq qurilgan. Shubhasiz, bunday funksiyalar uchun (19.2.6) kasr surati  $t \rightarrow 0$  da nolga yetarlicha tez intilmaydi. Shunga qaramasdan, Shved matematigi L. Karleson istalgan uzluksiz funksiya Furye integralining uzoqlashish nuqtalari to'plami u qadar ko'p bo'la olmasligini ko'rsatdi. Chunonchi, istalgan  $\varepsilon > 0$  uchun bunday nuqtalar to'plamini shunday sanoqli sondagi interval bilan qoplash mumkinki, ularning umumiy uzunligi  $\varepsilon$  dan oshmaydi.

**5.** Holder shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfi ancha katta. Masalan, agar  $f$  funksiya  $x$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u ana shu nuqtada Holder shartini ixtiyoriy  $\alpha \leq 1$  ko'rsatgich bilan qanoatlantiradi. Haqiqatan, funksiya differensiallanishi ta'rifiga

ko'ra,

$$f(x+t) - f(x) = f'(x) \cdot t + o(t) = t[f'(x) + o(1)], \quad t \rightarrow 0.$$

Ravshanki,  $x$  nuqtaning biror  $(x - \delta, x + \delta)$  atrofida  $|f'(x) + o(1)| \leq M(x)$  baho o'rinli bo'lib, bu yerda  $M$  soni  $t$  ga bog'liq emas. Demak,

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M(x) \cdot t, \quad |t| < \delta.$$

Shubhasiz, bu bahodan (19.2.7) shartning istalgan  $\alpha \leq 1$  da bajarilishi kelib chiqadi.

Bu mulohazalar 19.2.2 - teoremaning navbatdagi natijasi o'rinli ekanini ko'rsatadi.

**Natija.** Agar sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi  $f$  funksiya  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtada (19.2.8) tenglik bajariladi.

**19.2.1 - misol.** Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

funksiya sonlar o'qining noldan farqli istalgan nuqtasida differensiallanuvchi. (19.1.3) formulaga ko'ra, uning Furiye almashtirishi

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$$

ko'rinishga ega.

Shuning uchun, 19.2.2 - teoremadan istalgan  $x \neq 0$  uchun

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos x\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi \quad (19.2.9)$$

tenglik kelib chiqadi.

**Eslatma.** Quyida isbotlanadigan 19.4.1 - teoremaga ko'ra, (19.2.9) Furiye integrali, aslida, barcha  $x$  larda (ya'ni  $x = 0$  nuqtada ham) funksiya qiymatiga yaqinlashadi.

**19.2.2 - misol.** Ushbu

$$f(x) = xe^{-\alpha|x|}$$

funksiya sonlar o'qining har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lib, uning Furiye almashtirishi ((19.1.4) ga qarang)

$$\widehat{f}(\xi) = -4\alpha i \frac{\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^2}$$

ga teng.

19.2.2 - teorema ko'ra, istalgan  $x \in \mathbb{R}$  uchun

$$xe^{-\alpha|x|} = \frac{-4\alpha i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{ix\xi}}{(\alpha^2 + \xi^2)^2} d\xi = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin x\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)^2} d\xi \quad (19.2.10)$$

tenglik o'rinli.

**19.2.3 - misol.** Barcha nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lgan ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}$$

funksiyaning Furiye almashtirishi ((19.1.5) ga qarang)

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\xi^2/4\alpha}$$

ga teng.

Demak, (19.2.8) formulaga ko'ra,

$$e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - \xi^2/4\alpha} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/4\alpha} \cos x\xi d\xi. \quad (19.2.11)$$

**Eslatma.** 19.2.1 - 19.2.3 - misollarda Furiye integrali birinchi tur xosmas integral sifatida oddiy ma'noda yaqinlashadi. Shu sababli, integral oldiga bosh qiymat belgisi qo'yilmagan.

6. Faraz qilaylik,  $f$  funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qilsin. Agar Furye almashtirishning (19.1.1) ta'rifida eksponentani quyidagi

$$e^{-ix\xi} = \cos x\xi - i \sin x\xi$$

Eyler formulasi bilan almashtirsak, u holda (19.1.1) tenglik

$$\widehat{f}(\xi) = A(\xi) - iB(\xi) \quad (19.2.12)$$

ko'rinishga keladi, bunda

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x\xi dx \quad (19.2.13)$$

va

$$B(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x\xi dx. \quad (19.2.14)$$

$A(\xi)$  funksiya  $f$  funksiyaning *kosinus Furye almashtirishi* va  $B(\xi)$  esa,  $f$  funksiyaning *sinus Furye almashtirishi* deb ataladi.

E'tibor bering, istalgan absolyut integrallanuvchi funksiya uchun uning kosinus Furye almashtirishi juft funksiya bo'lib, uning sinus Furye almashtirishi esa, toq funksiya bo'ladi.

(19.2.12) formulani (19.1.2) ga qo'yaylik:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\xi) - iB(\xi)](\cos x\xi + i \sin x\xi) d\xi.$$

Toq funksiya dan  $\mathbb{R}$  sonlar o'qi bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lgani uchun, oxirgi tenglikda qavslarni ochib,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\xi) \cos x\xi + B(\xi) \sin x\xi] d\xi \quad (19.2.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(19.2.15) formula haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasidir.

Agar qaralayotgan funksiya juft bo'lsa, uning (19.2.15) yoyilmasi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos x\xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\xi) \cos x\xi d\xi \quad (19.2.16)$$

ko'rinishga keladi. Bunda (19.2.13) tenglikka ko'ra,

$$A(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos y\xi dy.$$

Nihoyat, bu formulani (19.2.16) yoyilmaga qo'yib, haqiqiy qiymat qabul qiluvchi juft funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasi uchun

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos x\xi d\xi \int_0^{\infty} f(y) \cos y\xi dy \quad (19.2.17)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Xuddi shunga o'xshash, haqiqiy qiymat qabul qiluvchi toq funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasini

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin x\xi d\xi \int_0^{\infty} f(y) \sin y\xi dy \quad (19.2.18)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Kompleks sonlar ishlatishni chekkalab o'tilmoqchi bo'lingan hollarda (19.2.17) va (19.2.18) yoyilmalardan keng foydalaniladi.

**7.** Faraz qilaylik, haqiqiy qiymat qabul qiluvchi  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida emas, balki

$$\overline{\mathbb{R}_+} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

yarim to'g'ri chiziqda berilgan bo'lsin.

Bunday holda biz berilgan funksiyani  $\mathbb{R}$  sonlar o'qiga juft yoki toq qilib davom ettirib, yangi funksiyaning Furye integrali uchun mos ravishda (19.2.17) yoki (19.2.18) yoyilmalardan foydalanishimiz mumkin. Davom ettirish usuli Furye almashtirish yordamida yechilishi kerak bo'lgan masalaga bog'liq. Odatda, agar  $f$  funksiya  $f(0) = 0$  shartni qanoatlantirsa, toq davom ettirish tanlanadi, bordiyu funksiya  $f'(0) = 0$  shartni qanoatlantirsa, u holda juft davom ettirish tanlanadi. Ammo bunday tanlov majburiy emas, chunki funksiyaga qo'yilgan boshqa talablar ham e'tirbarga olinishi mumkin.

### 19.3-§. Bo'lakli-silliq funksiyalarning Furye integraliga yoyilishi

1. Bo'lakli-silliq funksiyalarning Furye integraliga yoyilmalari tadbirlarda hammasidan ko'ra ko'p uchraydigan integral yoyilmalardan biridir. Eslatib o'tamiz, agar  $[a, b]$  kesmada aniqlangan  $f$  funksiya uchun shunday

$$P = \{a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b\}$$

bo'linish topilsaki, har bir  $(c_{k-1}, c_k)$  intervalda  $f$  funksiya  $[c_{k-1}, c_k]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan biror funksiya bilan ustma-ust tushsa,  $f$  funksiyani  $[a, b]$  kesmada *bo'lakli-silliq* degan edik.

Bu ta'rifga ko'ra,  $f$  funksiya chekli sondagi  $c_k$  nuqtalarda uzilishga ega bo'lishi mumkin, lekin bu uzilishlar faqat birinchi tur bo'la oladi. Bu degani, o'ng  $f(c_k + 0)$  va chap  $f(c_k - 0)$  limitlar mavjud bo'lsada, ular o'zaro teng bo'lmasligi mumkin. Bundan tashqari, bunday ta'riflashda hosilani bir tarafli  $f'(c_k \pm 0)$  limitlarining mavjudligi kafolatlanadi.

Agar  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida aniqlangan bo'lib, sonlar o'qining har bir kesmasida bo'lakli-silliq bo'lsa, biz uni bo'lakli-silliq deymiz.

Bo'lakli-silliq funksiyaga klassik misol  $\text{sign } x$  funksiyadir.  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida aniqlangan va cheksiz sondagi uzilish nuqtaga ega funksiyaga misol sifatida  $f(x) = \text{sign } \sin x$  funksiyani olish mumkin.



Yuqoridagi bayonimizga ko'ra, ixtiyoriy bo'lakli-silliq funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtasida Holder shartini qanoatlantiradi va shuning uchun, uning Furye integraliga yoyilmasi funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga Koshi ma'nosida yaqinlashadi. Qizig'i shundaki, bo'lakli-silliq funksiyaning Furye integrali hatto uning  $c$  uzilish nuqtasida ham yaqinlashadi va bunda quyidagi tenglik bajariladi:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda f(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}. \quad (19.3.1)$$

Bunga sabab shundaki, uzilish nuqtalarida nafaqat funksiyaning o'zi, balki hosilasi ham bir taraffi limitlarga ega. Shu nuqtai nazardan, garmonik tahlil uchun hatto uzilishga ega bo'lakli-silliq funksiyalar uzluksiz funksiyalardan yaxshiroq ob'ekt hisoblanadi, chunki, yuqorida qayd etilganidek, uzluksiz funksiyaning Furye integraliga yoyilmasi ba'zi nuqtalarda uzoqlashishi ham mumkin.

(19.3.1) tenglik munosabati bilan birinchi tur uzilish nuqtalarida funksiya qiymatini aniqlash masalasi tug'iladi. Garmonik tahlil nuqtai nazaridan, qayd qilingan qiymatni bir taraffi limitlarning o'rta arifmetigiga teng qilib, ya'ni

$$f(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2} \quad (19.3.2)$$

deb olish tabiiydir.

Bunday aniqlashda istalgan bo'lakli-silliq funksiya Furye integrali bu funksiyaga barcha nuqtalarda yaqinlashishini quyida ko'rsatamiz.

Masalan, (17.1.21) formula bilan aniqlangan Hevisayd funksiyasini qaraylik:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Bu funksiya bo'lakli-silliq, lekin (19.3.2) shartni qanoatlantirmaydi. Bu shart bajarilishi uchun funksiyaning noldagi qiymatini  $\chi(0) = 1/2$  deb aniqlash kifoya.

2. Bo'lakli-silliqlik  $f$  funksiyani ixtiyoriy  $c$  uzilish nuqta atrofiga to'laroq o'rganaylik. Lagranj formulasiga ko'ra, yetarlicha kichik  $t > 0$  uchun  $c < \xi < c + t$  intervaldan

$$f(c + t) - f(c + 0) = tf'(\xi) = O(t)$$

shartni qanoatlantiruvchi  $\xi$  son topiladi.

Shunga o'xshash,  $c - t < \eta < c$  intervaldan shunday  $\eta$  topiladiki, u uchun

$$f(c - t) - f(c - 0) = (-t)f'(\eta) = O(t)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu ikki munosabatni qo'shib,

$$\frac{f(c + t) + f(c - t)}{2} - \frac{f(c + 0) + f(c - 0)}{2} = O(t)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Shunday ekan, (19.3.2) tenglikka ko'ra,

$$\frac{f(c + t) + f(c - t)}{2} = f(c) + O(t). \quad (19.3.3)$$

E'tibor bering, funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtada chap va o'ng limitlar funksiya qiymatiga teng bo'lib, bu nuqtalarda ham, tabiiyki, (19.3.2) tenglik o'rinli. Bundan chiqdi, (19.3.3) munosabat nafaqat uzilish nuqtalarida, balki barcha  $c \in \mathbb{R}$  nuqtalarda bajariladi.

(19.3.3) munosabatning muhimligini hisobga olib, (19.2.5) asosiy tenglikni bo'lakli-silliqlik funksiyalar yoyilmasini o'rganishga qulayroq qilib o'zgartiramiz. Buning uchun tenglik o'ng tarafidagi integralni ikki integral yig'indisi qilib yozamiz:

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} \sin \lambda t \, dt = \\ & = \int_{-\delta}^0 \frac{f(x + t) - f(x)}{t} \sin \lambda t \, dt + \int_0^{\delta} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} \sin \lambda t \, dt. \end{aligned} \quad (19.3.4)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integralda  $t$  ni  $-t$  ga o'zgartirsak,

$$\int_{-\delta}^0 \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt = \int_0^{\delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt$$

munosabatni olamiz. Shuning uchun (19.3.4) ni

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \lambda t dt = \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin \lambda t dt$$

deb yozish mumkin.

Bundan chiqdi, (19.2.5) asosiy tenglik

$$I_{\lambda} f(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \left[ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right] \frac{\sin \lambda t}{t} dt +$$

$$+o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.3.5)$$

ko'rinishga keladi.

(19.3.5) formula va (19.3.3) munosabat navbatdagi tasdiqni isbotlashda asosiy rol ni o'ynaydi.

**19.3.1 - teorema (Furyening integral teoremasi).** Agar  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan bo'lakli-silliqlik  $f$  funksiya uzilish nuqtalarida (19.3.2) munosabatni qanoatlantirsa, u holda

$$\text{V. p. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x) \quad (19.3.6)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** (19.3.3) munosabatga ko'ra,

$$g(t) = \left[ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right] \cdot \frac{1}{t}$$

funksiya istalgan  $0 < t \leq \delta$  yarim intervalda chegaralangan va shuning uchun, u  $[0, \delta]$  kesmada xosmas ma'noda integrallanuvchi. Shunday ekan, Riman-Lebeg lemmasiga binoan,

$$\int_0^{\delta} g(t) \sin \lambda t dt = o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Demak, (19.3.5) asosiy tenglikka ko'ra,

$$I_{\lambda} f(x) = f(x) + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Bu esa talab qilingan (19.3.6) tenglik o'rinli ekanini anglatadi. ■

**19.3.1 - misol.** Ushbu

$$\phi(x) = (\text{sign } x) \cdot e^{-|x|} \quad (19.3.7)$$

funksiyani qaraylik.

Bu funksiya toq bo'lgani uchun, uning Furye almashtirishi

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sign } x) \cdot e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = -2i \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\xi dx$$

kabi aniqlanadi.

Demak, (17.2.3) formulaga ko'ra,

$$\widehat{\phi}(\xi) = -\frac{2i\xi}{1 + \xi^2}.$$

Berilgan  $\phi$  funksiya bo'lakli-silliq bo'lib, (19.3.2) shartni qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, 19.3.1 - teoreмага asosan, har qanday  $x \in \mathbb{R}$  ( $x = 0$  uzilish nuqtasida ham) nuqtada

$$\phi(x) = \frac{-2i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{ix\xi}}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi$$

tenglik o'rinli.

Shunday qilib, qaralayotgan funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasi

$$(\text{sign } x) \cdot e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (19.3.8)$$

ko'rinishga ega.

**3.** Qismaniy Furiye integrallarini yoyilayotgan bo'lakli-silliqlik funksiya uzilish nuqtalari atrofida batafsilroq o'rganaylik. Bo'lakli-silliqlik funksiya uchun eng tipik misol sifatida birinchi tur uzilishga ega bo'lgan  $\text{sign } x$  funksiyani olish mumkin. Lekin bu funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi emas. Uni eksponensial ravishda nolga intiluvchi funksiyaga ko'paytirsak, 19.3.1 - misolda o'rganilgan ((19.3.7) formulaga qarang),  $(\text{sign } x)e^{-|x|}$  funksiyani olamiz. Bu funksiya avvalgiday nolda birinchi tur uzilishga ega bo'lib, endi  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'ladi. Uning Furiye integraliga yoyilmasi (19.3.8) ko'rinishda bo'lib, qismaniy integrallari uchun

$$I_\lambda \phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{\xi \sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi \quad (19.3.9)$$

tenglik o'rinli.

19.3.1 - teoremaga asosan, har bir  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I_\lambda \phi(x) = (\text{sign } x)e^{-|x|}$$

tenglik bajariladi.

Ravshanki,  $x \rightarrow 0+0$  desak, o'ng taraf 1 ga intiladi. Shu sababli, bir vaqtning o'zida  $\lambda \rightarrow \infty$  va  $x \rightarrow 0+0$  bo'lsa ham, qismaniy integrallarning 1 ga intilishini kutish tabiiydir. Ammo, quyida ko'rsatilganidek, aslida bunday emas ekan.

(19.3.9) tenglikni

$$I_\lambda \phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{\sin x\xi}{\xi} d\xi - x\beta_\lambda(x) \quad (19.3.10)$$

ko'rinishda yozaylik, bunda

$$\beta_\lambda(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \frac{\sin x\xi}{x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi^2}.$$

Bu  $\beta_\lambda(x)$  funksiyani

$$|\sin x\xi| \leq |x\xi|$$

tengsizlikdan foydalanib, baholaymiz:

$$|\beta_\lambda(x)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\lambda \frac{\sin x\xi}{x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda \leq 1. \quad (19.3.11)$$

(19.3.10) integralda  $t = x\xi$  almashtirish bajarib, (19.3.11) tengsizlikni hisobga olsak,  $\lambda > 0$  ga nisbatan tekis ravishda bajariluvchi

$$I_\lambda \phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda x} \frac{\sin t}{t} dt + O(x) \quad (19.3.12)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Bundan keyingi mulohazalarimizda

$$S(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^u \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} \cdot Si(u) \quad (19.3.13)$$

funksiya xossalari muhim rol o'ynaydi.

Bu funksiya  $u > 0$  da musbat bo'lib, (17.2.48) formulaga ko'ra,  $u \rightarrow \infty$  da 1 ga intiladi va bundan tashqari,  $u = \pi$  nuqtada maksimumga erishadi:

$$\gamma = \max_{u \geq 0} S(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du. \quad (19.3.14)$$

Agar (19.3.12) formulada  $\lambda \rightarrow \infty$  va shu bilan bir vaqtda,  $x \rightarrow 0$  bo'lsa,  $x_\lambda = \pi/\lambda$  deb,

$$I_\lambda \phi(x_\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + O(x_\lambda) = \gamma + O(1/\lambda) \quad (19.3.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(19.3.14) da integral ostidagi funksiyani quyidan baholab,  $\gamma > 1$  ekanini ko'rsatish qiyin emas. Demak,

$$\phi(x_\lambda) \rightarrow 1, \quad \text{ammo} \quad I_\lambda \phi(x_\lambda) \rightarrow \gamma > 1, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Bu aniqlangan effekt *Gibbs hodisasi* degan nom olgan.

**Eslatma.** (19.3.14) integralni biror taqribiy usul bilan hisoblab (8 - bobdagi §8.3 ni qarang),

$$Si(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1,85193705\dots$$

ekanini ko'rsatish mumkin.

Demak,

$$\gamma = \frac{2}{\pi} \cdot Si(\pi) = 1,1789797\dots \approx 1,18.$$

Shunday qilib, bo'lakli-silliq funksiya uzilish nuqtasi yaqinida uning Furiye integraliga yoyilmasi taxminan 18% og'ishlikka ega. Zamonaviy garmonik tahlil tadbirlarida paydo bo'lgan bunday og'ishlikni yo'qotish muammosi §19.5 da muhokama qilinadi.

## 19.4-§. Furiye integraliga yoyilmalarni differensiallash

1. Ushbu paragrafda funksiya Furiye almashtirishi bilan funksiya hosilasi orasidagi bog'liqlik o'rganiladi. Bundan buyon  $Df$  simvol bilan  $f$  funksiya hosilasini belgilaymiz, ya'ni

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

**19.4.1 - tasdiq.** Agar  $f$  funksiya va uning  $Df$  hosilasi  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda ularning Furye almashtirishlari uchun

$$\widehat{Df}(\xi) = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi) \quad (19.4.1)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.**  $f' = Df$  hosila  $\mathbb{R}$  da integrallanuvchi bo'lgani uchun, quyidagi

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra,

$$A = \lim_{a \rightarrow -\infty} f(a), \quad B = \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b)$$

limitlar mavjud.

$f$  ning  $\mathbb{R}$  da integrallanuvchi ekanidan  $A = B = 0$  kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Bu tenglikni hisobga olib,  $Df$  hosila Furye almashtirishini bo'laklab integrallash yordamida hisoblashimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \widehat{Df}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx = \\ &= f(x)e^{-ix\xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Natija.** Agar  $f$  funksiya va uning  $m$  - tartibgacha barcha  $D^k f$  hosilalari  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda ularning Furye almashtirishlari

$$\widehat{D^k f}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (19.4.2)$$



tenglikni qanoatlantiradi.

Bu tenglik (19.4.1) formulani ketma-ket qo'llash yordamida isbotlanadi.

**Eslatma.** 19.4.1 - tasdiq absolyut integrallanuvchi  $f$  funktsiya uzluksiz bo'lakli-silliqlik funktsiya bo'lganda ham o'rinli. Bu holda ham bo'laklab integrallash formulasi o'rinli bo'lib, natija o'z kuchida qoladi.

**19.4.1 - misol.** Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

funktsiya uzluksiz bo'lakli-silliqlik bo'lib, uning

$$f'(x) = -\alpha e^{-\alpha|x|} \operatorname{sign} x$$

hosilasi  $x = 0$  nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda mavjud. Bu ikki funktsiya absolyut integrallanuvchi. (19.1.3) formulaga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Shunday ekan, 19.4.1 - tasdiqdan hosilaning Furye almashtirishi uchun

$$\widehat{Df}(\xi) = \frac{2i\alpha\xi}{\alpha^2 + \xi^2}$$

tenglik kelib chiqadi.

**19.4.2 - misol.** (17.1.13) va (17.1.14) tengliklar bilan aniqlangan  $\omega_h(x)$  funktsiyani qaraymiz. Bu funktsiya finit va cheksiz differensiallanuvchi bo'lgani sababli, istalgan  $k$  nomer uchun

$$\widehat{D^k \omega_h}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{\omega_h}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

tenglik bajariladi.

Demak,

$$|\widehat{D^k \omega_h}(\xi)| \leq \|D^k \omega\|_1$$

bahoga ko'ra, istalgan  $k$  nomer uchun

$$|\widehat{\omega_h}(\xi)| \leq \|D^k \omega\|_1 \cdot |\xi|^{-k}, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

tengsizlik o'rinli.

Xuddi shu usulda har qanday cheksiz differensiallanuvchi finit funksiyaning Furye almashtirishi cheksizlikda istalgan darajadan tez nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Bundan, xususan, qayd qilingan Furye almashtirishining sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ekani kelib chiqadi.

Aslida, biror  $f$  funksiya Furye almashtirishining absolyut integrallanuvchi bo'lishi uchun,  $\widehat{f}(\xi)$  funksiyaning cheksizlikda  $|\xi|^{-2}$  kabi nolga intilishini talab qilish yetarli.

**19.4.2 - tasdiq.** Agar  $f$  funksiya va uning birinchi hamda ikkinchi hosilalari  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda  $f$  funksiyaning  $\widehat{f}$  Furye almashtirishi sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'ladi.

**Isbot.** 19.1.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (19.4.3)$$

Agar bu bahoda  $f$  ni  $D^2 f$  ga almashtirib, (19.4.2) tenglikdan foydalansak,

$$|\xi^2 \widehat{f}(\xi)| \leq \|D^2 f\|_1 \quad (19.4.4)$$

bahoni olamiz.

(19.4.3) va (19.4.4) tengsizliklarni qo'shsak,

$$(1 + |\xi|^2) |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 + \|D^2 f\|_1$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f\|_1 + \|D^2 f\|_1}{1 + |\xi|^2} = \frac{C}{1 + |\xi|^2}. \quad (19.4.5)$$

Bu tengsizlik va taqqoslash alomatidan  $\widehat{f}(\xi)$  funksiyaning absolyut integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. ■

**Natija.** Agar  $f$  funksiya va uning birinchi hamda ikkinchi hosilalari  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda  $f$  funksiyaning Furye integraliga (19.1.2) yoyilmasi absolyut va  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashadi.

**2.** Yuqorida funksiya qanchalik silliq bo'lsa, uning Furye almash-tirishi shunchalik tez nolga intilishi ko'rsatilgan edi. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli, ya'ni funksiya qanchalik tez nolga intilsa, uning Furye almashtirishi shunchalik silliq bo'ladi. Chunonchi, quyidagi tasdiq o'rinli.

**19.4.3 - tasdiq.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $xf(x)$  funksiyalar  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. U holda  $\widehat{f}(\xi)$  Furye almashtirish differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi  $\mathbb{R}$  da uzluksiz va chegaralangan bo'ladi.

**Isbot.** (19.1.1) tenglikni formal ravishda integral ostida differensiallaylik:

$$\widehat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\xi} dx.$$

Veyershtross alomatiga binoan, integral  $\xi \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashadi va shuning uchun, 17.2.6 - teoremaga ko'ra, bu differensiallash asoslangandir. Bundan tasdiqning to'g'ri ekanligi kelib chiqadi. ■

**Natija.** Faraz qilaylik,  $k$  natural son bo'lib,  $f(x)$  va  $x^k f(x)$  funksiyalar  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. U holda  $\widehat{f}(\xi)$  Furye almashtirish  $\mathbb{R}$  da uzluksiz va chegaralangan  $k$  - tartibli hosilaga ega.

**3.** 19.4.1 - tasdiqqa asosan,  $f$  funksiya uning  $\widehat{f}$  Furye almashtirishiga o'tishda, differensiallash operatsiyasi erkli o'zgaruvchiga ko'paytirish operatsiyasiga o'zgaradi. Furye almashtirishning bu ajoyib xossasi uning qisman hosilali differensial tenglamalar nazariyasida keng foydalanishiga asos bo'ladi.

**19.4.3 - misol.** Agar  $\varphi(x)$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (19.4.6)$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini va

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (19.4.7)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi  $u(x, t)$  funksiya topilsin.

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish muammosini differensial tenglamalar nazariyasida *Koshi masalasi* deb atashadi.

Bu masalaning  $x$  o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va 19.4.2 - tasdiq shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini qidiramiz.

Yechimning  $x$  o'zgaruvchi bo'yicha Furye almashtirishini qaraylik:

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx. \quad (19.4.8)$$

(19.4.2) formulaga ko'ra,

$$\widehat{D^2u}(\xi, t) = -\xi^2 \widehat{u}(\xi, t),$$

bu yerda  $D^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Bu tenglikni hisobga olib, (19.4.8) Furye almashtirishni  $t$  bo'yicha differensiallasak, (19.4.6) tenglamadan

$$\frac{\partial \widehat{u}(\xi, t)}{\partial t} = -a^2 \xi^2 \cdot \widehat{u}(\xi, t) \quad (19.4.9)$$

tenglikni olamiz.

Shunday qilib,  $u$  yechimdan uning  $\widehat{u}$  Furye almashtirishiga o'tsak, qismiyl hosilali (19.4.6) tenglama (19.4.9) oddiy differensial tenglamaga aylandi. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$\widehat{u}(\xi, t) = C(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}$$

ko'rinishga ega, bu yerda  $C(\xi)$  o'zgarmas  $t$  ga bog'liq emas. Bu o'zgarmasni topish uchun (19.4.7) boshlang'ich shartdan foydalanamiz:

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\varphi}(\xi).$$

Demak,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2t}. \quad (19.4.10)$$

Shunday qilib, Furye integral formulasiga asosan,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2t+ix\xi} d\xi \quad (19.4.11)$$

funksiya (19.4.6)-(19.4.7) Koshi masalasining izlanayotgan yechimidir.

4. Agar shu bobning boshida qaralgan 19.1.3 - misolda  $\alpha = 1/(4a^2t)$  desak, u holda (19.1.5) formuladan

$$G(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \quad (19.4.12)$$

funksiyaning Furye almashtirishi

$$\widehat{G}(\xi) = \exp(-a^2\xi^2t)$$

ko'rinishga ega ekani kelib chiqadi.

Bunga ko'ra, (19.4.10) formulani

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi) \cdot \widehat{G}(\xi) \quad (19.4.13)$$

deb yozish mumkin.

Furye integral formulasiga ko'ra, (19.4.6)-(19.4.7) Koshi masalasi yechimini topish uchun (19.4.13) tenglik o'ng tarafidagi ko'paytmadan teskari Furye almashtirish olish kerak. Shu munosabat bilan, Furye almashtirishi ikki ma'lum funksiyaning Furye almashtirishlari ko'paytmasiga teng bo'lgan funksiyaning topish masalasi tug'iladi.

Bunday masalani yechish maqsadida ikki integrallanuvchi funksiya o'ramasi tushunchasini kiritamiz.

**Ta'rif.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ikki  $f$  va  $g$  funksiyalar **o'ramasi**  $f * g$  simvol bilan belgilanadi va

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \quad (19.4.14)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Avvalambor shuni qayd etamizki, agar aqalli bitta  $f$  yoki  $g$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida uzluksiz va chegaralangan bo'lsa, u holda ularning o'ramasi ham  $\mathbb{R}$  da uzluksiz va chegaralangan bo'ladi. Haqiqatan, agar, masalan,  $g$  uzluksiz va  $|g(x)| \leq M$  shartni qanoatlantirsa, (19.4.14) integral ostidagi funksiya

$$|f(y)g(x-y)| \leq M|f(y)| \quad (19.4.15)$$

bahoga ega bo'ladi.

Shunday ekan, Veyershtross alomatiga ko'ra, (19.4.14) integral  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashadi va demak, 17.2.4 - teoremaga asosan, o'rama uzluksiz funksiyasidir. Yana o'sha (19.4.15) bahodan o'ramaning chegaralangani kelib chiqadi:

$$|(f * g)(x)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy = M \|f\|_1.$$

Bundan tashqari, qaralayotgan holda o'rama sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ham bo'ladi. Buni isbotlash uchun takroriy integralda tartibni o'zgartirib,  $x - y = u$  almashtirish bajarish kifoya:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du. \end{aligned}$$

Integrallash tartibini o'zgartirish mumkinligi 17.2.7 - teoremada ko'rsatilgan.

Shunday qilib,

$$\|(f * g)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (19.4.16)$$

Uzluksiz absolyut integrallanuvchi funksiyalar sinfida  $f * g$  o'rama  $f$  va  $g$  funksiyalarga nisbatan simmetrikdir. Buni isbotlash uchun (19.4.14) integralda  $t = x - y$  almashtirish bajarish yetarli:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t) dt = g * f. \quad (19.4.17)$$

Navbatdagi tenglik o'ramaning asosiy xossalaridan biridir.

**19.4.4 - tasdiq.** Agar  $f$  absolyut integrallanuvchi funksiya bo'lib,  $g$  uzluksiz, chegaralangan va absolyut integrallanuvchi funksiya bo'lsa,

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (19.4.18)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** O'rama Furye almashtirishini hisoblaylik:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy. \quad (19.4.19)$$

Endi  $e^{-ix\xi} = e^{-iy\xi} \cdot e^{-i(x-y)\xi}$  ayniyatdan foydalanib, integrallash tartibini o'zgartiramiz:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) e^{-i(x-y)\xi} dx. \end{aligned} \quad (19.4.20)$$

Nihoyat, ichki integralda  $x - y = u$  almashtirish bajarsak, (19.4.19) tenglikka ko'ra, talab qilingan formulani olamiz:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-iu\xi} du = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi). \quad \blacksquare$$

Yuqorida ko'rsatilganidek, (19.4.6) - (19.4.7) Koshi masalasi yechimining Furye almashtirishi boshlang'ich funksiyaning  $\widehat{\varphi}$  Furye almashtirishi va (19.4.12) formula bilan aniqlangan  $G$  funksiyaning  $\widehat{G}$  Furye almashtirishi ko'paytmasiga teng. Shunday ekan, 19.4.4 - tasdiqqa ko'ra,  $u$  yechim  $\varphi$  va  $G$  funksiyalarning o'ramasidan iborat. Demak, istalgan  $t > 0$  va har qanday  $x \in \mathbb{R}$  uchun

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} \varphi(y) dy \quad (19.4.21)$$

tenglik o'rinli.

**Eslatma.** Furye almashtirishini qo'llash qisman hosilali diffrensial tenglamalar yechimi uchun formula topishda samarali usul hisoblanadi. Odatda, bunday formulalarni topishda, barcha hisoblashlarni asoslash uchun berilgan funksiyalarga juda og'ir shartlar qo'yishga to'g'ri keladi. Ammo, yechim uchun formula topilgandan so'ng, bu shartlardan ko'pini olib tashlash mumkin.

Masalan, (19.4.6)-(19.4.7) Koshi masalasi yechimi uchun Furye almashtirishi yordamida topilgan (19.4.21) formuladan  $\varphi$  boshlang'ich funksiya unga qo'yilgan shartlarni qanoatlantirmagan holda ham foydalanish mumkin. Xususan,  $\varphi$  funksiya nafaqat absolyut integrallanuvchi bo'lganda, balki u cheksizlikda (eksponentadan sekinroq) o'suvchi bo'lganda ham yechimni (19.4.21) ko'rinishda yozish mumkin.

## 19.5-§\*. Furye integrallarini Abel usuli bilan jamlash

1. Funksiyani Furye integraliga yoyilmasining biror nuqtada yaqinlashishi uchun yetarli shart uning shu nuqtada Holder shartini qanoatlantirishidan iborat ekani §19.2 da ko'rsatilgan edi. Agar yoyilayotgan funksiya uzluksiz bo'lib, lekin qo'shimcha (Holder sharti kabi) silliqlikka ega bo'lmasa, u holda, umuman aytganda, yaqinlashish bo'lmasligi mumkin. Chunonchi, uzluksiz va sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan shunday funksiyani qurish mumkin, uning Furye integrali biror nuqtada uzoqlashadi.



Lekin, shunga qaramasdan, agar funksiyaning biror nuqtada uzluksizligi ma'lum bo'lsa, uning Furiye integralini shu nuqtada Abel usuli bilan jamlash mumkin.

Abel o'rtachalarini istalgan  $\alpha > 0$  uchun quyidagi

$$A_\alpha f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \cdot e^{-\alpha|\xi|} d\xi \quad (19.5.1)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

Bizning maqsadimiz  $f$  funksiya uzluksiz bo'lgan har qanday  $x$  nuqtada

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} A_\alpha f(x) = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatishdan iborat.

(19.5.1) integralda  $\widehat{f}(\xi)$  o'rniga (19.1.1) integralni qo'yib, integ-rallash tartibini o'zgartiramiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - \alpha|\xi|} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi - \alpha|\xi|} d\xi.$$

Lekin, (17.2.2) tenglikka ko'ra,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi - \alpha|\xi|} d\xi = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\xi} \cos(x-y)\xi d\xi = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (x-y)^2}. \quad (19.5.2)$$

Shunday ekan, (19.5.1) Abel o'rtachalari uchun quyidagi

$$A_\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y) dy}{\alpha^2 + (x-y)^2} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) dt}{\alpha^2 + t^2} \quad (19.5.3)$$

formulani olamiz (e'tibor bering, bu formulada  $\widehat{f}(\xi)$  oshkora qat-nashmayapti).

Nihoyat,

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} = 1 \quad (19.5.4)$$

tenglikka ko'ra, (19.5.3) dan Abel o'rtachalari bilan yoyilayotgan funksiya farqi uchun

$$A_{\alpha}f(x) - f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x)}{\alpha^2 + t^2} dt \quad (19.5.5)$$

formulaga ega bo'lamiz.

**19.5.1 - teorema.** Agar  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda  $f$  uzluksiz bo'lgan har bir  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi - \alpha|\xi|} d\xi = f(x) \quad (19.5.6)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** Shartga ko'ra,  $f$  funksiya  $x$  nuqtada uzluksiz. Shunday ekan, istalgan  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $\delta > 0$  topiladiki, u uchun

$$|t| < \delta \text{ bo'lganda } |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon \text{ bo'ladi.} \quad (19.5.7)$$

Shunday  $\delta > 0$  ni tayinlab, (19.5.5) integralni uchta integral yig'indisi qilib yozamiz:

$$\begin{aligned} & A_{\alpha}f(x) - f(x) = \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\alpha^2 + t^2} dt + \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x+t)}{\alpha^2 + t^2} dt - f(x) \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2}. \end{aligned} \quad (19.5.8)$$

O'ng tarafdagi birinchi integral (19.5.7) va (19.5.4) yordamida baholanadi:

$$\left| \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\alpha^2 + t^2} dt \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} < \varepsilon. \quad (19.5.9)$$

Ikkinchi integral ostidagi ifodada maxraj  $\delta^2$  dan katta. Demak,

$$\left| \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x+t)}{\alpha^2 + t^2} dt \right| \leq \frac{\alpha}{\delta^2 \pi} \int_{|t|>\delta} |f(x+t)| dt \leq \frac{\alpha}{\delta^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy.$$

Demak, ixtiyoriy tayinlangan  $\delta > 0$  uchun (19.5.8) ning o'ng tarafdagi ikkinchi integral  $\alpha \rightarrow 0 + 0$  da nolga intiladi.

Nihoyat, (19.5.8) ning o'ng tarafdagi uchinchi integral oddiy hisoblash yordamida baholanadi:

$$\left| f(x) \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \right| \leq |f(x)| \cdot \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\alpha} \right) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0 + 0.$$

Shunday ekan, (19.5.8) tenglik va (19.5.9) bahodan tayinlangan  $\delta > 0$  uchun

$$|A_{\alpha}f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0 + 0,$$

munosabatni olamiz.

Demak,

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0 + 0} |A_{\alpha}f(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Bundan,  $\varepsilon > 0$  ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0 + 0} A_{\alpha}f(x) = f(x)$$

tenglik kelib chiqadi. ■

**Natija.** Faraz qilaylik,  $f$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lib,  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix_0\xi} d\xi,$$

xosmas integral yaqinlashsa, u  $2\pi f(x_0)$  ga teng bo'ladi.

Haqiqatan, 19.5.1 - teoreмага ko'ra, bu integral Abel usuli bilan  $2\pi f(x_0)$  songa jamlanadi. Abel usuli regulyar bo'lgani sababli, bu son yaqinlashuvchi integral qiymatiga teng.

**1 - eslatma.** Abel usuli bilan jamlanuvchi integral uchun, §17.5 ning 6 - bandidagi belgilashdan foydalanib, (19.5.6) tenglikni

$$(A) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = 2\pi f(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

**2 - eslatma.** 19.3.1 - teorema va Abel usulining regulyarligiga ko'ra, agar  $f$  funksiya bo'lakli-silliq bo'lsa, (19.5.6) tenglik uzilish nuqtalarda ham o'rinni.

**3 - eslatma.** Faraz qilaylik, sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi  $f$  funksiya haqiqiy qiymatlar qabul qilib,

$$m \leq f(x) \leq M, \quad -\infty < x < +\infty,$$

shartni qanoatlantirsin. U holda (19.5.3) va (19.5.4) tengliklardan Abel o'rtachalari uchun quyidagi

$$m \leq A_\alpha f(x) \leq M, \quad -\infty < x < +\infty,$$

baho kelib chiqadi.

Masalan, 19.3.1 - misolda qaralgan

$$\phi(x) = (\text{sign } x) \cdot e^{-|x|}$$

funksiyaning Abel o'rtachalari ikki yoqli

$$-1 \leq A_\alpha \phi(x) \leq 1, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (19.5.10)$$

bahoni qanoatlantiradi.

Eslatib o'tamiz, bu funksiyaning qismaniy Furiye integrallari funksiyani  $x = 0$  uzilish nuqtasi atrofida uning maksimal qiymatidan taxminan 18% ga ortiq bo'lgan sapchishga ega ekanini kuzatgan edik (Gibbs hodisasi). (19.5.10) tengsizlikdan, qayd etilgan integralni Abel usuli bilan jamlaganda, Gibbs hodisasining yo'qolishi kelib chiqadi.

**2.** Riman bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiya ham uzluksiz bo'lavermaydi. Shuning uchun, Abel o'rtachalarining yoki Furiye qismaniy integrallarining limiti mavjud bo'lsada, bu limit ba'zi nuqtalarda funksiya qiymati bilan ustma-ust tushmasligi mumkin. Biz biror nuqtada funksiya qiymatini istalgancha o'zgartirsak ham, bu funksiyadan olingan integral qiymati o'zgarmaydi. U holda funksiyaning Furiye almashtirishi ham o'zgarmaydi, ya'ni funksiya o'zgarsa ham, uning Furiye almashtirishi avvalgidek bo'lib qolaveradi.

Funksiyani (Riman integrali nuqtai nazaridan) ahamiyatsiz ravishda o'zgartirishga aniqlik kiritish maqsadida, nolga ekvivalent funksiya tushunchasini kiritamiz.

Agar  $f$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lib,

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0 \quad (19.5.11)$$

tenglik bajarilsa, biz bu funksiyani o'sha kesmada *nolga ekvivalent* deyimiz.

Agar  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida aniqlangan bo'lib, istalgan kesmada nolga ekvivalent bo'lsa, shubhasiz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 0$$

tenglik bajariladi, ya'ni  $f$  sonlar o'qida nolga ekvivalent bo'ladi.

Agar  $f$  funksiya nolga ekvivalent bo'lib,  $g$  funksiya chegaralangan bo'lsa,  $f \cdot g$  ko'paytma ham nolga ekvivalent bo'ladi. Haqiqatan,

$|g(x)| \leq M$  bahoga ko'ra,

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq M \int_a^b |f(x)| dx = 0.$$

Agar ikki  $f$  va  $g$  funksiyaning  $f - g$  ayirmasi nolga ekvivalent bo'lsa, biz ularni o'zaro ekvivalent deymiz.

Yuqoridagi bayonimizdan o'zaro ekvivalent funksiyalardan olingan integrallarning bir-biridan farq qilmasligi kelib chiqadi. Xususan, ekvivalent funksiyalarning Furiye almashtirishlari o'zaro tengdir.

E'tibor bering, uzluksiz funksiyaning biror kesmada nolga ekvivalent bo'lishi uchun, uning shu kesmada aynan nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqorida qayd qilinganidek, agar funksiya sonlar o'qida faqat absolyut integrallanuvchi bo'lsa (bunda u Furiye almashtirishga ega bo'ladi), Furiye integrali funksiya qiymatiga barcha nuqtada yaqinlashmasligi mumkin. Shunga qaramasdan, silliqlik bo'yicha hech qanday qo'shimcha shartsiz, bunday funksiyalarni Abel o'rtachalari bilan o'rtacha ma'noda yaqinlashtirish mumkin.

Chunonchi, quyidagi tasdiq o'rinli.

**19.5.2 - teorema.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lgan istalgan funksiyaning Abel o'rtachalari shu funksiya o'rtacha yaqinlashadi, ya'ni

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)| dx = 0. \quad (19.5.12)$$

**Isbot.** (19.5.5) asosiy formulaga ko'ra, istalgan absolyut integrallanuvchi funksiya uchun

$$|A_{\alpha}f(x) - f(x)| \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{\alpha^2 + t^2} dt \quad (19.5.13)$$

tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlikni integrallab, so'ngra integrallar tartibini o'zgartiramiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)| dx \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx.$$

Keyingi mulohazalar 19.5.1 - teorema isbotidagiga o'xshash. Ixtoriy  $\delta > 0$  ni tayinlab, o'ng tarafdagi tashqi integralni ikkiga bo'lamiz:  $[-\delta, \delta]$  kesma bo'yicha va bu kesmadan tashqaridagi nurlar bo'yicha. Natijada

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)| dx &\leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx + \\ &+ \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \end{aligned} \quad (19.5.14)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

19.1.2 - teoreмага ko'ra ((19.1.7) formulaga qarang), istalgan  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta > 0$  ko'rsatish mumkinki,

$$|t| < \delta \quad \text{bo'lsa,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx < \varepsilon \quad \text{bo'ladi.}$$

Ravshanki,  $\delta$  sonni bunday tanlashda (19.5.14) ning o'ng tomondagi birinchi qo'shiluvchi barcha  $\alpha > 0$  larda  $\varepsilon$  dan kichik bo'ladi:

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx < \varepsilon \cdot \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} < \varepsilon. \quad (19.5.15)$$

Agar quyidagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 2\|f\|_1$$

bahoni hisobga olsak, (19.5.14) ning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini quyidagicha baholash mumkin:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \leq \\ & \leq 2\|f\|_1 \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0+0. \end{aligned} \quad (19.5.16)$$

Demak, (19.5.14)-(19.5.16) tengsizliklarga ko'ra,

$$\|A_\alpha f - f\|_1 \leq \varepsilon + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0+0,$$

yoki

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} \|A_\alpha f - f\|_1 \leq \varepsilon.$$

Bundan,  $\varepsilon > 0$  ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan (19.5.12) munosabatga ega bo'lamiz. ■

**1 - natija.** Agar sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi  $f$  funksiyaning Furiye almashtirishi nolga ekvivalent bo'lsa, u holda funksiyaning o'zi ham nolga ekvivalent bo'ladi.

Haqiqatan, agar  $\widehat{f}(\xi)$  funksiya nolga ekvivalent bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiyani Furiye integraliga yoyilmasining Abel o'rtachalari aynan nolga teng, ya'ni  $A_\alpha f(x) \equiv 0$  bo'ladi. Demak, 19.5.2 - teorema ko'ra,

$$\|f\|_1 = \|f - A_\alpha f\|_1 \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0+0.$$

Bundan  $\|f\|_1 = 0$  ekani, ya'ni  $f$  funksiyaning nolga ekvivalentligi kelib chiqadi.

**2 - natija.** Agar sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ikki funksiyaning Furiye almashtirishlari o'zaro teng bo'lsa, bu funksiyalar ekvivalentdir.

Haqiqatan, aytaylik,  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  funksiyalar absolyut integrallanuvchi bo'lib,  $\widehat{f_1}(\xi) = \widehat{f_2}(\xi)$  bo'lsin. U holda  $f = f_1 - f_2$  deb, bu funksiyaga 1 - natijani qo'llasak, talab qilingan tasdiqni olamiz.



**3\***. Agar absolyut integrallanuvchi  $f$  funksiyaning kvadrati ham absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda Abel o'rtachalari berilgan funksiyaga o'rta kvadratik ham yaqinlashadi.

**19.5.3 - teorema.**  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi funksiyaning kvadrati ham absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (19.5.17)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot** 19.5.2 - teorema isbotiga o'xshash. (19.5.13) formulani olib, o'ng tarafdagi integralga Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llaymiz ((6.8.7) formulaga qarang). Bu tengsizlikdagi  $f$  funksiya sifatida  $|f(x+t) - f(x)|(\alpha^2 + t^2)^{-1/2}$  ni va  $g$  funksiya sifatida esa,  $(\alpha^2 + t^2)^{-1/2}$  ni olamiz. U holda, (19.5.4) tenglikka ko'ra,

$$|A_{\alpha}f(x) - f(x)|^2 \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+t) - f(x)|^2}{\alpha^2 + t^2} dt .$$

Demak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_{\alpha}f(x) - f(x)|^2 dx \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^2 dx.$$

Bundan keyingi mulohazalar xuddi 19.5.2 - teorema isbotidek bo'lib, yagona farq shundaki, (19.1.7) formula o'rniga (19.1.10) formuladan foydalaniladi. ■

## 19.6-§\*. Plansherel teoremasi

**1.** Furiye integrali nazariyasi  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida ayniqsa bejirim ko'rinishga ega. Bunday funksiyalar kompleks chiziqli fazo tashkil qilib, bu fazoda skalyar

ko'paytma

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx \quad (19.6.1)$$

kabi aniqlanadi, bu yerda chiziqcha kompleks qo'shmasini anglatadi.

Bunday aniqlangan skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

- 1)  $(f, g) = \overline{(g, f)}$ ;
- 2)  $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ ;
- 3)  $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- 4) agar  $f \neq 0$  bo'lsa,  $(f, f) > 0$  bo'ladi.

Oxirgi xossada  $f$  element, faqat va faqat  $f$  funksiya (19.5.11) tenglik ma'nosida nolga ekvivalent bo'lganda, nolga teng deb tushuniladi.

Yozuvni qisqartirish maqsadida, ushbu paragrafda (boshqa paragraflarda bu belgilashdan foydalanilmaydi)  $E(\mathbb{R})$  simvol orqali  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida kvadrati bilan birga absolyut integrallanuvchi kompleks qiymatli funksiyalarning (19.6.1) skalyar ko'paytma bilan aniqlangan Evklid fazosini belgilaymiz.

Kiritilgan skalyar ko'paytma quyidagi

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx \right)^{1/2} \quad (19.6.2)$$

normani aniqlaydi. Skalyar ko'paytmaning sanab o'tilgan xossalari-dan (19.6.2) kattalik normaning barcha xossalari-ga ega ekani kelib chiqadi. Xususan, istalgan  $f \in E(\mathbb{R})$  va  $g \in E(\mathbb{R})$  elementlar uchun *Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o'rinli*:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \quad (19.6.3)$$

Bu tengsizlikdan *uchburchak tengsizligi* deb ataluvchi quyidagi

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (19.6.4)$$

munosabat kelib chiqadi.

(19.6.4) tengsizlikka ko'ra,

$$| \|f\| - \|g\| | \leq \|f - g\|. \quad (19.6.5)$$

**2.** Furiye almashtirishi bilan bog'liq matematik tadqiqotlarda va ularning tadbirlarida navbatdagi tasdiq muhim rol o'ynaydi.

**19.6.1 - teorema.** *Faraz qilaylik,  $f$  va  $g$  funksiyalar  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. Agar  $g$  funksiyaning  $\widehat{g}$  Furiye almashtirishi ham  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa,  $u$  holda*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \quad (19.6.6)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** Shartga ko'ra,  $\widehat{g}(\xi)$  funksiya absolyut integrallanuvchi. Demak, Veyershtrass alomatiga ko'ra,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.6.7)$$

xosmas integral sonlar o'qida biror uzluksiz va chegaralangan funksiyaga  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashadi. Integralning aynan  $g(x)$  ga yaqinlashishi 19.5.1 - teorema va Abel usulining regulyar ekanidan kelib chiqadi.

Qaralayotgan funksiyaning kompleks qo'shmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{g(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi.$$

Bu integralni (19.6.6) tenglik chapidagi  $\overline{g(x)}$  funksiya o'rniga qo'yib, integrallash tartibini o'zgartiramiz (teorema shartlariga ko'ra, bu almashtirish o'rinli):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

O'ng tarafdagi kosmas integralning yaqinlashishi  $\widehat{f}(\xi)$  funksiya-ning tekis chegaralangani hamda  $\widehat{g}(\xi)$  funksiyaning, shartga ko'ra, absolyut integrallanuvchi ekanidan kelib chiqadi. ■

**Natija (Plansherel teoremasi).** Agar  $f$  funksiya va uning  $\widehat{f}$  Furye almashtirishi  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (19.6.8)$$

tenglik o'rinli.

E'tibor bering, shartga ko'ra, har ikki  $f$  va  $\widehat{f}$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida tekis chegaralangan.

**Eslatma.** (19.6.8) formulani *Parseval tengligi* deb ham atashadi.

**3.** (19.6.8) formuladan shu fikrga kelish mumkinki, Parseval tengligi o'rinli bo'lishi uchun  $\widehat{f}$  Furye almashtirishning absolyut integrallanuvchiligi o'rniga,  $f$  funksiyaning o'zi va kvadrati sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ekanini, ya'ni uning yuqorida aniqlangan  $E(\mathbb{R})$  Evklid fazosiga tegishli bo'lishini talab qilish yetarlidir. Haqiqatan, navbatdagi tasdiq o'rinli.

**19.6.2 - teorema.** Faraz qilaylik,  $f$  va uning  $f^2$  kvadrati  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin. U holda (19.6.8) Parseval tengligi o'rinli.

**Isbot.**  $f$  funksiyaning (19.5.1) formula bilan aniqlangan  $A_\alpha f(x)$  Abel o'rtachalarini qaraymiz. O'sha formuladan qayd qilingan o'rtachalar Furye almashtirishi uchun

$$\widehat{A_\alpha f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot e^{-\alpha|\xi|} \quad (19.6.9)$$

tenglikni olamiz.

Ravshanki,  $\alpha > 0$  bo'lgani uchun, eksponensial ravishda nolga intiluvchi ko'paytuvchi hisobiga,  $\widehat{A_\alpha f}(\xi)$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'ladi. Shunday ekan, (19.6.8) tenglikka ko'ra,

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |A_\alpha f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{A_\alpha f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\alpha|\xi|} d\xi . \quad (19.6.10)$$

Agar  $\alpha \rightarrow 0+0$  desak, bu tenglikning o'ng tomonidagi integral Abel usulining regulyarligiga ko'ra, (19.6.8) Parseval tengligining chap tarafiga intiladi (§17.2.7 ning 3<sup>o</sup> - bandidagi mulohazalarga qarang). (19.6.10) tenglikning chap tarafi esa, (19.5.17) formula va (19.6.5) tengsizlikka ko'ra, (19.6.8) Parseval tengligining o'ng tarafiga intiladi. Shunday ekan, (19.6.10) da  $\alpha \rightarrow 0+0$  deb limitga o'tsak, talab qilingan (19.6.8) tenglikka ega bo'lamiz. ■

4. Yuqoridagi §19.4 da ko'rsatilganidek, funksiyaning absolyut integrallanuvchi ikkinchi hosilasining mavjudligi uni Furrye almashtirishining absolyut yaqinlashishini kafolatlaydi (19.4.2 - tasdiqqa qarang). Plansherel teoremasi bu talabni funksiyaning kvadrati bilan integrallanuvchi birinchi hosilasi mavjudligi bilan almashtirishga imkon beradi.

**19.6.3 - teorema.** *Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  da absolyut integrallanuvchi bo'lib, uning  $f'$  hosilasi yuqorida kiritilgan  $E(\mathbb{R})$  Evklid fazosiga tegishli bo'lsin. U holda  $f$  funksiyaning Furrye integraliga yoyilmasi absolyut va  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashadi.*

**Isbot.** Teorema shartlari  $Df(x) = f'(x)$  funksiya (19.6.8) Parseval tengligini qo'llashga imkon beradi. 19.4.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\widehat{Df}(\xi) = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi).$$

Shuning uchun, Parseval tengligi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \xi^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \quad (19.6.11)$$

ko'rinishga keladi.

Endi quyidagi

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{1 + \xi^2} + \frac{\xi^2 \widehat{f}(\xi)}{1 + \xi^2} \quad (19.6.12)$$

ayniyatdan foydalanamiz. 19.1.1 - tasdiqqa ko'ra,  $\widehat{f}(\xi)$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida uzluksiz va chegaralangan, ya'ni  $|\widehat{f}(\xi)| \leq M$ . Shunday ekan, (19.6.12) ning o'ng tomonidagi birinchi had integrallanuvchi funksiya bilan baholanadi:

$$\frac{|\widehat{f}(\xi)|}{1 + \xi^2} \leq \frac{M}{1 + \xi^2}.$$

Ikkinchi hadni esa, quyidagicha baholash mumkin:

$$\frac{\xi^2 |\widehat{f}(\xi)|}{1 + \xi^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\xi^4 |\widehat{f}(\xi)|^2 + 1}{1 + \xi^2} \leq \frac{1}{2} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

(19.6.11) Parseval tengligiga ko'ra, bu tengsizlikning o'ng tomoni integrallanuvchi bo'lib, (19.6.12) ayniyatdan  $\widehat{f}(\xi)$  funksiyaning absolyut integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. Demak, (19.1.2) Furye integrali absolyut va  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashadi. ■

**1 - natija.** Faraz qilaylik, uzluksiz bo'lakli-silliq  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  da absolyut integrallanuvchi bo'lib, chegaralangan absolyut integrallanuvchi hosilaga ega bo'lsin. U holda uning  $\widehat{f}$  Furye almashtirishi ham  $\mathbb{R}$  da absolyut integrallanuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, agar  $|f'(\xi)| \leq M$  desak,  $|f'(\xi)|^2 \leq M|f'(\xi)|$  bo'ladi. Demak, hosila kvadrati ham absolyut integrallanuvchi bo'lib,  $f$  funksiya 19.6.3 - teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

**2 - natija.** Agar 1 - natija shartlari bajarilsa, uzluksiz bo'lakli-silliq funksiyaning Furye integraliga yoyilmasi  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi.

Masalan, uzluksiz bo'lakli-silliq  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$  funksiyaning Furye integrali absolyut va tekis yaqinlashadi, chunki bu funksiya chegaralangan absolyut integrallanuvchi

$$f'(x) = -\alpha(\text{sign } x)e^{-\alpha|x|}$$

hosilaga ega (buni bevosita (19.2.9) formuladan ko'rish mumkin). E'tibor bering, bu funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lmagani uchun, unga 19.4.2 - tasdiqni qo'llash mumkin emas.

**Eslatma.** Agar bo'lakli-silliq  $f$  funksiya yagona birinchi tur uzi-lishga ega bo'lsa, u holda bu uzilsihni

$$\phi(x) = (\text{sign } x)e^{-|x|}$$

kabi funksiyani qo'shib, bartaraf qilish mumkin ((19.3.7) formulaga qarang). Masalan, agar funksiya nol nuqtada sakrashga ega bo'lib,

$$f(0+0) = A, \quad f(0-0) = -A$$

bo'lsa, u holda

$$f_1(x) = f(x) - A\phi(x) = f(x) - A(\text{sign } x)e^{-|x|}$$

funksiya, bo'lakli-silliq bo'la turib,  $x = 0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi. 2 - natijaga ko'ra, uning Furiye integraliga yoyilmasi tekis yaqinlashadi. Bu degani, istalgan bo'lakli-silliq  $f$  funksiya Furiye integrali uzilsih nuqta yonida o'zini  $\phi(x)$  funksiya Furiye integrali kabi tutadi. Xususan, istalgan bo'lakli-silliq funksiya uchun uzilish nuqtasi atro-fida Gibbs hodisasi o'rinli (§19.3 ning 3 - bandiga qarang).

## 19.7-§. Karrali Furiye integrallari

1. Ushbu paragrafda  $n$  o'lchovli  $\mathbb{R}^n$  fazosida aniqlangan va kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyalar, ya'ni

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ko'rinishdagi funksiyalar qaraladi, bu yerda  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$   $n$  ta haqiqiy o'zgaruvchili haqiqiy qiymat qabul qiluvchi funksiyalardir.

Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi bo'lsin. Uning Furiye almashtirishi deb

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (19.7.1)$$

xosmas integralga aytamiz. Biz  $x\xi$  simvol bilan ikki vektorning skal-yar ko'paytmasini belgilaymiz:  $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n$ .

Eslatib o'tamiz, 14.1.5 - teoreмага ko'ra,  $\mathbb{R}^n$  fazoda integrallanuvchi har qanday funksiya  $\mathbb{R}^n$  da absolyut integrallanuvchidir. Shuning uchun, ushbu paragrafda  $\mathbb{R}^n$  fazoda integrallanuvchi funksiya deganda, biz bu funksiyaning absolyut integrallanuvchi ekanini nazarda tutamiz.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar Furye almashtirishining asosiy xossalari asosan bir o'lchovli Furye almashtirish xossalari kabidir. Masalan, istalgan integrallanuvchi funksiyaning Furye almashtirishi  $\mathbb{R}^n$  fazosida uzluksiz va chegaralangan ekani xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek isbotlanadi. Bunda, uzluksizlikni isbotlashda integrallanuvchi funksiyaning o'rtacha va o'rta kvadratik uzluksizligidan foydalaniladi (ikki o'zgaruvchilik holda 13.4.10 - teorema va unga keltirilgan eslatmaga qarang).

**19.7.1 - misol.** Ushbu

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} = e^{-\alpha(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \prod_{k=1}^n e^{-\alpha x_k^2}$$

funksiya Furye almashtirishi topilsin.

$n$  karrali integralni bir o'lchovli takroriy integrallar ko'rinishida yozsak,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx = \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x_k^2 - ix_k \xi_k} dx_k$$

tenglikni olamiz.

Demak, (19.1.5) formulaga ko'ra,

$$\widehat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\xi_k^2/4\alpha} = \pi^{n/2} \alpha^{-n/2} e^{-\xi^2/4\alpha}. \quad (19.7.2)$$

Ushbu paragrafda asosiy diqqat ko'p o'chovli holda vujudga keladigan qiyinchiliklarga va (19.7.1) formulaning bir o'lchovli Furye integralidan farqli tomonlariga qaratiladi.



Navbatdagi

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.7.3)$$

tenglikka  $f$  funksiyaning  $n$  karrali Furye integraliga yoyilmasi deyiladi.

Ko'p o'lchovli garmonik tahlilning asosiy muammolaridan biri (19.7.3) formula o'rinli bo'lishini ta'minlovchi shartlarni topishdan iborat. Bir o'lchovli holdan farqli o'laroq, ko'p o'lchovli holda Furye integrali yaqinlashishini qanday ma'noda tushunish imkoniyati ancha ko'p.

Odatda, Furye integrali yaqinlashishini ta'riflash uchun bosh qiymat tushunchasi, ya'ni kengayib boruvchi o'xshash sohalar bo'yicha xos integrallar limiti asos qilib olinadi. Bir o'lchovli holda bunday sohalar sifatida faqat intervallarni olish mumkin edi, ammo ko'p o'lchovli hol bunday sohalarining turli-tumanligi bilan farq qiladi. Kengayib boruvchi shar va kublardan (ikki o'lchovli holda doira va kvadratlardan) ayniqsa ko'p foydalaniladi. Lekin parallelepipedlar, ellipsoidlar hamda murakkabroq ko'rinishdagi sohalar ham tez-tez uchrab turadi. Odatda, yaqinlashish shartlari turli kengayuvchi sohalar uchun turlicha bo'ladi.

Ammo, ba'zi muhim hollarda, yaqinlashish shartlari barcha kengayuvchi sohalar uchun bir xilda bo'ladi. Masalan, agar (19.7.3) Furye integrali absolyut yaqinlashsa, u holda, kengayuvchi sohalar ketma-ketligini tanlanishiga bog'liqmas ravishda, u  $x \in \mathbb{R}^n$  bo'yicha tekis yaqinlashadi. Boshqa misol sifatida xosmas integrallarni klassik Abel jamlash usulini yoki shunga o'xshash boshqa jamlash usullarini olishimiz mumkin.

**2.** Ixtiyoriy  $\alpha > 0$  uchun (19.7.3) Furye integralining Abel o'rtachalarini

$$A_\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} d\xi \quad (19.7.4)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

E'tibor bering, bu o'rtachalar karrali Furye integrallarini o'rganishga (17.5.28) o'rtachalarga nisbatan ko'proq moslashgan.

(19.7.4) integralda (19.5.3) formulani keltirib chiqarishdagiga o'xshash o'zgartirish bajaramiz. Chunonchi, integralda  $\widehat{f}(\xi)$  funksiya o'rniga uning (19.7.1) qiymatini qo'yamiz. Bundan so'ng integrallash tartibini o'zgartirsak,

$$A_\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)+i(x-y)\xi} d\xi \quad (19.7.5)$$

tenglikni olamiz.

Ichki integralni  $n$  ta bir karrali integrallar ko'paytmasi qilib yozish mumkin:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)+i(x-y)\xi} d\xi = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|\xi_k|+i(x_k-y_k)\xi_k} d\xi_k.$$

(19.5.2) tenglikka ko'ra,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_k-y_k)\xi_k-\alpha|\xi_k|} d\xi_k = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (x_k - y_k)^2}. \quad (19.7.6)$$

Agar

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha}{\alpha^2 + x_k^2} \quad (19.7.7)$$

deb belgilasak, (19.7.6) ga ko'ra, (19.7.5) dagi ichki integralni

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)+i(x-y)\xi} d\xi = (2\pi)^n \Phi_\alpha(x - y)$$

ko'rinishda yozsak bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy integrallanuvchi  $f$  funksiyaning Abel o'rtachalarini

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(x - y) f(y) dy \quad (19.7.8)$$

deb, yoki o'zgaruvchilarni almashtirib,

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) f(y+x) dy \quad (19.7.9)$$

deb yozish mumkin.

Bevosita (19.7.7) formula va

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_k}{\alpha^2 + x_k^2} = 1$$

tenglikka ko'ra,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) dy = 1. \quad (19.7.10)$$

Shunday ekan, (19.7.9) dan yoyilayotgan funksiya bilan Abel o'rtachalarining farqi uchun

$$A_\alpha f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) [f(x+y) - f(x)] dy \quad (19.7.11)$$

formula kelib chiqadi.

**19.7.1 - teorema.** *Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi bo'lsin. Agar  $f$  funksiya  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada uzluksiz bo'lsa,  $u$  holda*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} A_\alpha f(x) = f(x) \quad (19.7.12)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot** 19.5.1 - teorema isbotini deyarli so'zma-so'z qaytarishdan iborat. Avval istalgan  $\delta > 0$  uchun

$$Q(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_k| \leq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$$

kubdan tashqarida  $\Phi_\alpha(x)$  funksiyaning  $\alpha \rightarrow 0$  da tekis va o'rtacha nolga yaqinlashishi ko'rsatiladi. Bu quyidagi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{x \notin Q(\delta)} \Phi_\alpha(x) = 0 \quad (19.7.13)$$

va

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q(\delta)} \Phi_\alpha(x) dx = 0 \quad (19.7.14)$$

tengliklarning bajarilishini anglatadi.

Ixtiyoriy integrallanuvchi  $f$  funksiya uchun (19.7.11), (19.7.13) va (19.7.14) larga ko'ra,

$$A_\alpha f(x) - f(x) = \int_{Q(\delta)} \Phi(y)[f(x+y) - f(x)] dy + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (19.7.15)$$

Istalgan  $\varepsilon > 0$  uchun  $\delta > 0$  sonni shunday tanlaymizki, bunda

$$|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon, \quad y \in Q(\delta)$$

tengsizlik bajarilsin.

Bu tengsizlik va (19.7.10) hamda (19.7.15) larga ko'ra,

$$|A_\alpha f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + o(1), \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Bundan,  $\alpha \rightarrow 0$  deb limitga o'tsak,

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+0} |A_\alpha f(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

munosabatni olamiz.

Bu tengsizlikdan,  $\varepsilon > 0$  ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan (19.7.12) tenglik kelib chiqadi. ■

**Natija.** Agar  $f$  funksiya va uning  $\hat{f}$  Furye almashtirishi  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda  $f$  funksiyaning Furye integraliga yoyilmasi absolyut va  $x \in \mathbb{R}^n$  bo'yicha tekis yaqinlashib, (19.7.3) tenglik bajariladi.

Haqiqatan, (19.7.3) integralning absolyut va tekis yaqinlashishi bevosita taqqoslash va Veyershtrass alomatlaridan kelib chiqadi. Endi integralning aynan  $f(x)$  ga yaqinlashishini ko'rsatish yetarli. Bu integralni  $A_0 f(x)$  simvol bilan belgilab,  $A_\alpha f(x)$  ni  $\alpha$  parametrning  $[0, 1]$  kesmadagi funksiyasi deb qaraymiz.

(19.7.4) integral ostidagi funksiyani  $\alpha$  parametrga bog'liqmas integrallanuvchi  $|\widehat{f}(\xi)|$  funksiya bilan baholash mumkin bo'lgani uchun, Veyershtass alomatiga ko'ra, (19.7.4) integral  $\alpha$  parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi va shuning uchun,  $0 \leq \alpha \leq 1$  kesmada  $\alpha$  ning uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Demak,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_\alpha f(x) = A_0 f(x).$$

Bu munosabatni (19.7.12) bilan taqqoslasak, talab qilingan  $A_0 f(x) = f(x)$  tenglikni olamiz.

Bu natijaga ko'ra,  $f$  funksiyaning (19.7.3) Furiye integraliga yoyilishini ko'rsatish uchun uning  $\widehat{f}$  Furiye almashtirishi absolyut integrallanuvchi ekaniga ishonch hosil qilish yetarli.

**3.** 19.5.2 - teoremaning quyidagi ko'p o'lchovli ko'rinishi ham o'rinli.

**19.7.2 - teorema.**  $\mathbb{R}^n$  da integrallanuvchi istalgan  $f$  funksiyaning (19.7.4) Abel o'rtachalari bu funksiyaga o'rtacha yaqinlashadi:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{\mathbb{R}^n} |A_\alpha f(x) - f(x)| dx = 0. \quad (19.7.16)$$

**Isbot** (19.7.11) asosiy formuladan kelib chiquvchi quyidagi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |A_\alpha f(x) - f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)| dx$$

bahoga va (19.7.13)-(19.7.14) xossalarga asoslangan bo'lib, 19.5.2 - teorema isbotini deyarli so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

**1 - natija.** Agar  $f$  funksiya Furiye almashtirishi nolga aynan teng bo'lsa, u holda funksiyaning o'zi nolga ekvivalent bo'ladi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = 0. \quad (19.7.17)$$

Bundan chiqdi, agar  $f$  funksiya uzluksiz va integrallanuvchi bo'lib, barcha  $\xi \in \mathbb{R}^n$  larda

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx = 0$$

bo'lsa, u holda  $f(x) \equiv 0$  bo'ladi.

Bu tasdiqdan navbatdagi yagonalik teoremasi kelib chiqadi.

**2 - natija.** *Agar ikki funksiya Furye almashtirishlari o'zaro teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar o'zaro ekvivalentdir (ya'ni ularning ayirmasi nolga ekvivalentdir).*

**Eslatma.** Agar  $f$  funksiya va uning  $f^2$  kvadrati  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda (19.7.4) Abel o'rtachalari  $f$  ga o'rta kvadratik yaqinlashadi:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |A_\alpha f(x) - f(x)|^2 dx = 0. \quad (19.7.18)$$

Bu tasdiqning isboti xuddi 19.5.3 - teorema isboti kabidir.

**4.**  $\mathbb{R}^n$  da integrallanuvchi ikki  $f$  va  $g$  funksiyalar o'ramasi

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \quad (19.7.19)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Xuddi bir o'zgaruvchilik holdagidek, o'rama  $f$  va  $g$  ga simmetrik bog'liq:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = (g * f)(x).$$

O'rama Furye almashtirishining navbatdagi xossasi asosiy hisoblanadi.

**19.7.3 - teorema.** *Integrallanuvchi  $f$  funksiya va uzluksiz, chegaralangan hamda integrallanuvchi  $g$  funksiya o'ramasining Furye almashtirishi uchun*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (19.7.20)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot** 19.4.4 - tasdiq isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

**19.7.2 - misol.** Ixtiyoriy  $f$  funksiya va (19.7.7.) tenglik bilan aniqlangan  $\Phi_\alpha(x)$  funksiya o'ramasini qaraymiz. (19.7.8) formulaga

ko'ra, bu o'rama  $f$  funksiya Furiye integralining Abel o'rtachalari bilan ustma-ust tushadi:

$$A_\alpha f(x) = (\Phi_\alpha * f)(x). \quad (19.7.21)$$

(19.7.6) munosabat va (19.7.3) formuladan  $\Phi_\alpha(x)$  funksiya Furiye almashtirishi uchun

$$\widehat{\Phi}_\alpha(\xi) = e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)}$$

tenglik kelib chiqadi.

$\Phi_\alpha(x)$  funksiyaning uzluksiz, chegaralangan va integrallanuvchi ekani aniq. Shuning uchun, 19.7.3 - teoreмага ko'ra, istalgan integrallanuvchi  $f$  funksiya uchun

$$(\widehat{\Phi_\alpha * f})(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} \quad (19.7.22)$$

tenglik o'rinli.

**Eslatma.** (19.7.21) va (19.7.22) formulalarga ko'ra, (19.7.4) Abel o'rtachalarini Furiye almashtirishi

$$\widehat{A_\alpha f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} \quad (19.7.23)$$

ko'rinishda bo'lgan funksiya deb aniqlash mumkin.

4.  $D_j$  simvol bilan  $j$  nomerli o'zgaruvchi bo'yicha differensiallash operatsiyasini belgilaymiz:

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}.$$

Bu operatsiya Abel o'rtachalariga o'tish operatsiyasi bilan kommutirlanadi. Haqiqatan, (19.7.21) tenglik va o'ramaning simmetrik ekaniga ko'ra,

$$\begin{aligned} D_j A_\alpha f(x) &= D_j (\Phi_\alpha * f)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) f(x-y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) D_j f(x-y) dy = (\Phi_\alpha * D_j f)(x) = A_\alpha D_j f(x), \end{aligned}$$

ya'ni

$$D_j A_\alpha f(x) = A_\alpha D_j f(x). \quad (19.7.24)$$

Funksiya Furye almashtirishi bilan uning hosilasi Furye almash-tirishini bog'lovchi (19.4.2) formulaga o'xshash formula o'rinli.

**19.7.4 - teorema.** Agar  $f$  va  $D_j f$  funksiyalar  $\mathbb{R}^n$  fazosida in-tegrallanuvchi bo'lsa, u holda  $D_j f$  hosila Furye almashtirishi uchun

$$\widehat{D_j f}(\xi) = (i\xi_j) \widehat{f}(\xi) \quad (19.7.25)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** Agarda (19.7.3) Furye integralini formal differensiallash natijasida hosil bo'lgan integral parametrarga nisbatan tekis yaqin-lashsa, (19.7.25) tenglik bevosita 17.2.6 - teoremadan kelib chiqadi.

Umumiy holda har qanday  $\alpha > 0$  uchun  $x \in \mathbb{R}^n$  bo'yicha tekis yaqinlashuvchi (19.7.4) integralni qarash kerak. Bu integralni formal ravishda differensiallasak,

$$D_j A_\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi_j) \widehat{f}(\xi) e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} e^{ix\xi} d\xi \quad (19.7.26)$$

tenglikni olamiz.

Boshqa tarafdin, Abel o'rtachalarining (19.7.4) ta'rifiga ko'ra,

$$A_\alpha D_j f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D_j f}(\xi) e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} e^{ix\xi} d\xi. \quad (19.7.27)$$

Endi (19.7.27) tenglikdan (19.7.26) tenglikni ayiraylik:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[ \widehat{D_j f}(\xi) - (i\xi_j) \widehat{f}(\xi) \right] e^{-\alpha(|\xi_1|+|\xi_2|+\dots+|\xi_n|)} e^{ix\xi} d\xi \equiv 0.$$

Bundan chiqdi, 19.7.2 - teoremaning 1 - natijasiga asosan, in-tegral ostidagi funksiya ham aynan nolga teng, ya'ni talab qilingan (19.7.25) tenglik bajarilar ekan. ■



**Natija.** Agar  $f$  funksiya, uning  $\nabla f$  gradienti va barcha ikkinchi tartibli  $D_j^2 f$  hosilalari  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda  $\Delta f$  Laplas operatorining Furrye almashtirishi uchun

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{f}(\xi) \quad (19.7.28)$$

tenglik o'rinli.

**Eslatma.** 19.7.4 - teoremani quyidagicha isbotlash mumkindek ko'rinadi: avval (19.7.1) integralni,  $x_j$  o'zgaruvchi bo'yicha integralni ajratib olib, takroriy integral ko'rinishida yozamiz va so'ngra unga 19.4.1 - teorema isbotidagi mulohazalarni qo'llaymiz. Ammo funksiyaning  $\mathbb{R}^n$  da absolyut integrallanuvchi ekanidan alohida to'g'ri chiziq bo'yicha integralning mavjudligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$f(x, y) = e^{-x^2(1+y^2)^2}$$

funksiya  $\mathbb{R}^2$  tekislikda cheksiz differensiallanuvchi, chegaralangan va integrallanuvchidir. Integrallanuvchi ekani quyidagi tenglikdan kelib chiqadi (ichki integralda  $t = x(1 + y^2)$ ) deb o'zgaruvchi almashirilgan):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2(1+y^2)^2} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \pi^{3/2}. \end{aligned}$$

Shunga qaramasdan,  $x = 0$  to'g'ri chiziq bo'yicha integral mavjud emas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(0, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy = +\infty.$$

**5. 19.7.4 - teorema qisman hosilali differensial tenglamalar yechimlarini topishda keng qo'llaniladi.**

**19.7.3 - misol.** Istalgan integrallanuvchi  $f$  funksiya va ixtiyoriy  $\alpha > 0$  parametr uchun

$$\Delta u(x) - \alpha^2 u(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (19.7.29)$$

tenglamaning  $u$  yechimi  $\mathbb{R}^3$  fazoda topilsin.

Furye almashtirishiga o'tib, so'ngra (19.7.28) formuladan foydalanilgach,

$$-|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) - \alpha^2 \widehat{u}(\xi) = -\widehat{f}(\xi)$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\alpha^2 + |\xi|^2}. \quad (19.7.30)$$

19.7.3 - teorema ko'ra, yechimni  $f$  funksiya va Furye almashtirishi  $(\alpha^2 + |\xi|^2)^{-1}$  ga teng bo'lgan  $v_\alpha(x)$  funksiya o'ramasi ko'rinishida yozish mumkin.

Avval

$$v_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha|x|}}{4\pi|x|} \quad (19.7.31)$$

ekanini ko'rsataylik. Buning uchun, bu funksiya Furye almashtirishini  $(r, \theta, \varphi)$  sferik koordinatalarga o'tib hisoblaylik. Bu koordinatalarda  $x \cdot \xi = r|\xi| \cos \theta$  bo'lgani uchun,

$$\begin{aligned} \widehat{v}_\alpha(\xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha r} dr \int_0^\pi e^{-ir|\xi| \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \left[ \frac{e^{-ir|\xi| \cos \theta}}{i|\xi|} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr = \frac{1}{|\xi|} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin r|\xi| dr. \end{aligned}$$

Bundan chiqdi, (17.2.3) formuladan talab qilingan tenglikni olamiz:

$$\widehat{v}_\alpha(\xi) = \frac{1}{|\xi|} \cdot \frac{|\xi|}{\alpha^2 + |\xi|^2} = \frac{1}{\alpha^2 + |\xi|^2}. \quad (19.7.32)$$

Endi (19.7.30)-(19.7.32) formulalarni va 19.7.3 - teoremani qo'lab, yechim uchun

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy \quad (19.7.33)$$

formulaga ega bo'lamiz.

**1 - eslatma.** (19.7.29) tenglamada  $\alpha$  qat'iy mavhum bo'lgan hol, ya'ni  $\beta > 0$  bo'lib,  $\alpha = \pm i\beta$  bo'lgan hol eng qiziqarlidir. Bunda tenglama

$$\Delta u(x) + \beta^2 u(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (19.7.34)$$

ko'rinishga keladi va *Helmholts tenglamasi* (H. Helmholtz) deb ataladi. Bu tenglama bir jinsli muhitda elektromagnit to'lqinlar tarqalish nazariyasida muhim rol o'ynaydi. Ammo bu holda yuqoridagi mulohazalarni asoslash qiyinroq bo'ladi.

Shunday bo'lsada, (19.7.33) formula bunday holda ham o'rinli. Bunga ishonch hosil qilish uchun, avval  $\alpha = \varepsilon \pm i\beta$  deb faraz qilamiz, bu yerda  $\varepsilon > 0$ .  $\varepsilon$  kattalik elektromagnit to'lqinlar intensivligining muhit yutishi tufayli kamayish tezligini xarakterlaydi va yutilish koeffitsienti deb ataladi. Bunday  $\alpha$  lar uchun yuqoridagi barcha mulohazalar va (19.7.33) formulaning o'rinli ekanligini tekshirish oson. So'ngra  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$  deb limitga o'tib, Helmholtz tenglamasi yechimi uchun

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\pm i\beta|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy \quad (19.7.35)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Eksponenta oldidagi ishora o'rganilayotgan elektromagnit to'lqinning keluvchi yoki ketuvchi ekaniga qarab tanlanadi. Bayon qilingan usul eng so'nggi yutish prinsipi deyiladi (принцип предельного поглощения).

**2 - eslatma.** Xuddi shunga o'xshab, (19.7.33) formulada ham  $\alpha \rightarrow 0$  deb limitga o'tishimiz mumkin. Natijada

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy$$

funksiyani, ya'ni

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

Puasson tenglamasining yechimi bo'lgan Nyuton (yoki Kulon) potensialini olamiz.

**6.** Furye integrallarini o'rganish vositasi sifatida Parseval tengligi muhim rol o'ynaydi. Xuddi bir o'zgaruvchilik holdagidek (19.6.2 - teoreмага qarang), uning o'rinli bo'lishi uchun yoyilayotgan  $f$  funksiya va uni kvadratining integrallanuvchi bo'lishi yetarli.

**19.7.5 - teorema (Parseval tengligi).** *Faraz qilaylik,  $f$  funksiya va uning  $f^2$  kvadrati  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (19.7.36)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot** 19.6.2 - teorema isbotini so'zma-so'z qaytarishdan iborat.

Endi biz  $f$  funksiyaning tekis yaqinlashuvchi Furye integraliga yoyilishi uchun yetarli shartlar haqidagi ushbu paragrafning asosiy natijasini isbotlashga tayyormiz.

**19.7.6 - teorema.** *Faraz qilaylik,  $m > n/2$  bo'lsin. Agar  $f$  funksiya va uning to  $m$  - tartibgacha barcha qisman hosilalari, hamda ularning kvadratlari  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda  $f$  funksiyaning quyidagi*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (19.7.37)$$

Furye integraliga yoyilmasi absolyut va  $x \in \mathbb{R}^n$  bo'yicha tekis yaqinlashadi.

**Isbot.** Shartga ko'ra,  $f$  funksiya va uning barcha  $D_j^m f$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) qisman hosilalari (19.7.36) Parseval tengligini qanoatlantiradi. 19.7.4 - teoreмага ko'ra,

$$\widehat{D_j^m f}(\xi) = (i\xi_j)^m \widehat{f}(\xi), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Shunday ekan,  $D_j^m f$  funksiya uchun Parseval tengligi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_j^m f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\xi_j|^{2m} d\xi \quad (19.7.38)$$

ko'rinishga ega.

Bu tengliklarni (19.7.36) ga qo'shsak,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \xi_1^{2m} + \xi_2^{2m} + \dots + \xi_n^{2m}) d\xi = \\ & = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)|^2 + |D_1^m f(x)|^2 + |D_2^m f(x)|^2 + \dots + |D_n^m f(x)|^2) dx \end{aligned} \quad (19.7.39)$$

tenglikni olamiz.

Endi quyidagi

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \xi_1^{2m} + \dots + \xi_n^{2m}) + \frac{1}{4(1 + \xi_1^{2m} + \dots + \xi_n^{2m})} \quad (19.7.40)$$

sodda tengsizlikdan foydalanamiz. (19.7.39) ga ko'ra, bu tengsizlik o'ng tarafidagi birinchi qo'shiluvchi  $\mathbb{R}^n$  fazosida integrallanuvchi. Ikkinchi qo'shiluvchining integrallanuvchi ekani  $2m > n$  shartdan kelib chiqadi.  $|\widehat{f}(\xi)|$  funksiya ham integrallanuvchi, demak, (19.7.37) integral absolyut va tekis yaqinlashadi. ■

**Eslatma.** Isbotlangan teoremaga ko'ra,  $n$  o'zgaruvchili funksiya  $n$  karrali Furiye integraliga yoyilishi uchun bu funksiya  $n/2$  dan katta tartibgacha barcha qisman hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalar kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lishi yetarli. E'tibor bering, hosila tartibi fazo o'lchovi o'sgan sari o'sadi. Bu hol masala mohiyati tufayli sodir bo'layotganini ko'rsatish mumkin, ya'ni agar  $m \leq n/2$  bo'lsa, shunday  $f$  funksiyani ko'rsatish mumkinki, uning to  $m$  - tartibgacha barcha qisman hosilalari va ularning kvadratlari integrallanuvchi bo'lsada, lekin  $f$  funksiyaning (19.7.37) Furiye integraliga yoyilmasi biror nuqtada uzoqlashadi.

Masalan, ikki o'zgaruvchili funksiya kvadrati bilan integrallanuvchi ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsa, uning Furye integrali absolyut va tekis yaqinlashadi. Lekin shunday ikki o'zgaruvchili funksiya topiladiki, uning birinchi hosilalari kvadratlari bilan integrallanuvchi bo'la turib, Furye integrali uzoqlashadi.

**7\*. Radon almashtirishi.**  $\mathbb{R}^2$  tekislikda berilgan  $f$  funksiyaga ixtiyoriy  $L \subset \mathbb{R}^2$  to'g'ri chiziq bo'yicha olingan integralni mos qo'yuvchi  $R$  akslantirishga Radon almashtirishi deyiladi:

$$Rf(L) = \int_L f(x) dl. \quad (19.7.41)$$

<sup>10</sup>. Ixtiyoriy  $L$  to'g'ri chiziqni ikki  $\psi \in [0, \pi)$  va  $t \in \mathbb{R}$  sonli parametr yordamida quyidagicha aniqlash mumkin.

$\psi$  burchakni  $0 \leq \psi < \pi$  intervaldan shunday tanlaymizki,  $\mathbf{n} = (\cos \psi, \sin \psi)$  birlik vektor  $L$  ga perpendikulyar bo'lsin. U holda shunday yagona  $t \in \mathbb{R}$  son topiladiki,  $t\mathbf{n}$  vektor koordinatalar boshi bilan  $L$  to'g'ri chiziqni tutashtiradi. Bunday tanlovda  $\mathbf{l} = (-\sin \psi, \cos \psi)$  birlik vektor  $L$  to'g'ri chiziqqa kollinear bo'ladi. Shuning uchun,  $x = t\mathbf{n} + u\mathbf{l}$  nuqta, ya'ni

$$x = (t \cos \psi - u \sin \psi, t \sin \psi + u \cos \psi)$$

nuqta ixtiyoriy  $u \in \mathbb{R}$  larda  $L$  to'g'ri chiziqda yotadi. Bundan chiqdi, *Radon almashtirishini* quyidagi

$$Rf(t, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \psi + u \sin \psi, -t \sin \psi + u \cos \psi) du \quad (19.7.42)$$

tenglik bilan aniqlash mumkin, bu yerda  $0 \leq \psi < \pi$  va  $-\infty < t < +\infty$ .

Radon almashtirishi nazariyasida asosiy masala berilgan  $Rf(t, \psi)$  qiymatga ko'ra  $f(x)$  funksiyani topishdan iborat.

Bu masalani yechish maqsadida  $f$  funksiya Furiye almashtirishini qaraymiz:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix\xi} dx .$$

Aytaylik,  $\xi = s(\cos \psi, \sin \psi)$  bo'lib,  $s \in \mathbb{R}$  va  $\psi \in [0, \pi)$  bo'lsin. Bu integralda

$$y_1 = x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi, \quad y_2 = -x_1 \sin \psi + x_2 \cos \psi$$

yangi o'zgaruvchilarga o'tamiz.

Bu almashtirish yakobiani 1 ga teng bo'lib, teskari almashtirish

$$x_1 = y_1 \cos \psi - y_2 \sin \psi, \quad x_2 = y_1 \sin \psi + y_2 \cos \psi$$

ko'rinishga ega.

U holda

$$x\xi = (y_1 \cos \psi - y_2 \sin \psi, y_1 \sin \psi + y_2 \cos \psi) \cdot s(\cos \psi, \sin \psi) = y_1 s$$

bo'ladi. Shunday ekan,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy_1} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 \cos \psi - y_2 \sin \psi, y_1 \sin \psi + y_2 \cos \psi) dy_2 . \quad (19.7.43)$$

Oxirgi tenglikni (19.7.42) bilan taqqoslab,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy_1} Rf(y_1, \psi) dy_1$$

tenglikni hosil qolamiz.

Shunday qilib, navbatdagi tasdiq o'rinli.

**19.7.1 - tasdiq.** Faraz qilaylik,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funksiya  $\mathbb{R}^2$  tekislikda integrallanuvchi bo'lib,

$$g(t, \psi) = Rf(t, \psi)$$

funksiya qiymati ma'lum bo'lsin.  $U$  holda,  $f$  funksiya Furiye almash-tirishi uchun

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(t, \psi) dt \quad (19.7.44)$$

formula o'rinli. Bu formulada  $\xi = t(\cos \psi, \sin \psi)$ .

Demak, agar  $f$  funksiyaning Radon almashtirishi ma'lum bo'lsa,  $u$  holda  $f$  funksiyani (19.7.44) formula va (19.7.3) Furiye integrali yordamida aniqlash mumkin.

**8\*. Kompyuter tomografiyasi.** Kompyuter tomografiyasi ilmiy-texnik taraqqiyotning Furiye almash-tirishini qo'llashga asoslangan oxirgi sezilarli yutuqlaridandir. Kompyuter tomografiyasining usullari o'rganilayotgan muhit tarkibini, bu muhit orasidan o'tayotgan elektromagnit nur intensivligini o'lchash natijasiga ko'ra, aniqlash imkonini berdi.

Faraz qilaylik, elektromagnit nur  $L$  to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanib, muhitning biror qatlamiga kirishda  $I$  intensivlikka ega bo'lsin. Qalinligi  $\Delta l$  bo'lgan qatlamdan o'tgandan so'ng uning intensivligi yutilish natijasida kirish intensivligi va qatlam qalinligiga proporsional ravishda kamayadi, ya'ni intensivlikning  $\Delta I$  o'zgarishi uchun

$$\Delta I = -kI\Delta l \quad (19.7.45)$$

tenglik o'rinli.

Bu yerda  $k = k(x, y, z)$  yutilish ko'rsatkichi deb ataluvchi proporsionallik koeffitsientidir. Qatlam qalinligini cheksiz kichik deb, (19.7.45) tenglamani

$$dI = -k(x, y, z)I dl$$

differensial tenglama bilan almash-tiramiz.

Bu differensial tenglamani  $L$  to'g'ri chiziq bo'yicha integrallab, nur intensivligi uchun qatlamdan chiqishda quyidagi

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_L k(x, y, z) dl \right\} \quad (19.7.46)$$



formulani olamiz, bu yerda  $I_0$  kirishdagi nur intensivligi.

(19.7.46) formula nur intensivligini qatlamdan o'tgandan so'ng aniqlash masalasining yechimini beradi. Teskari masala, kuchsizlashgan intensivlik qiymatini istalgan yo'nalish bo'yicha ma'lum deb hisoblab,  $k(x, y, z)$  yutilish koeffitsientini topishdan iborat. (19.7.46) ga ko'ra, bu masala

$$\int_L k(x, y, z) dl = \ln \frac{I_0}{I}$$

tenglamaga teng kuchlidir; bu yerda noma'lum  $k(x, y, z)$  funksiya integral ostida turibdi.

Matematik nuqtai nazardan bu masala uch o'lchovli fazoda Radon almashtirishiga teskari almashtirish topishdan iborat.

Tomografik diagnostikada bu masalani uch o'lchovli  $\mathbb{R}^3$  fazoda yechish o'rniga, uni turli ikki o'lchovli  $z = \text{const}$  ko'rinishdagi tekisliklarda yechishadi. Bunday parallel tekisliklarni qirqim yoki kesim deb atashadi (Yunoncha "tomos"). Ushbu holda yutilish koeffitsientini har bir qatlamda topish uchun yuqorida o'rganilgan  $\mathbb{R}^2$  tekislikdagi Radon almashtirishi nazariyasi qo'llaniladi.

Tajribalar yordamida aniqlanishicha, Radon almashtirishi yordamida topilgan  $k(x, y, z)$  yutilish koeffitsienti (qaysiki, umuman aytganda, elektromagnit nurlanish chastotasiga ham bog'liq) qaralayotgan muhit tuzilishi haqida yetarlicha to'la ma'lumot manbai bo'lib hizmat qiladi.

Shuni aytish kerakki, odatda o'rganilayotgan muhit bo'lakli-silliq bo'lgani uchun, Furye integralini to'g'ridan-to'g'ri hisoblashda xush ko'rilmaydigan Gibbs hodisasi sodir bo'ladi. Natijada ortiqcha chiziqlar paydo bo'lib, bu hodisa noto'g'ri diagnostikaga olib keladi. Mazkur holdan qutilish maqsadida Furye integrallarini quyurlashtirish usullaridan foydalaniladi. §19.5 da o'rganilgan Abel jamlash usuli ana shunday usullardan biridir.

Qayd qilish joizki, kompyuterli tomograf yordamida olingan tasvir, rentgen suratidan farqli o'laroq, integral tenglamalar sistemasi yechimining grafigidan iboratdir. Bu yechim skalyar funksiya bo'lgani sababli, yechimning turli nuqtalardagi qiymati faqat bir son bilan

xarakterlanadi va natijada tasvir oq-qora rangda bo'ladi, ya'ni har bir nuqtada faqat ravshanlik darajasi ko'rsatiladi.

O'rganilayotgan integral tenglamalarni maqbul vaqt ichida faqat kompyuterlarda yechish mumkin. Aynan shu sababli "*Kompyuter tomografiyasi*" degan nom paydo bo'lgan. Bunda hisoblangan yutish koeffitsientining o'rganilayotgan qatlamni turli nuqtalaridagi qiymati har xil ravshanlikdagi yorqin nuqtalar bilan (odatda  $2^8$  dan  $2^{10}$  gacha ravshanlik darajalari yordamida) ko'rsatiladi.

**9. Yakuniy mulohazalar.** Zamonaviy matematik tadqiqotlarda

$$\mathbf{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

deb, ya'ni  $\widehat{f}(\xi)$  dan  $(2\pi)^{-n/2}$  ko'paytuvchiga farq qiluvchi Furye almashtirish operatori kiritiladi.

Teskari Furye almashtirish operatori

$$\mathbf{F}^*g(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu operatorlar funksiyalarning yetarlicha keng sinfi uchun aniqlangan bo'lib,

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \mathbf{I}$$

tengliklarni qanoatlantiradi, bu yerda  $\mathbf{I}$  birlik operatoridir. Bu belgilashlarda Parseval tengligi

$$\|\mathbf{F}u\| = \|u\|$$

ko'rinishda yoziladi, bunda funksiya normasi

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx$$

kabi aniqlanadi.

Furiye integrali nazariyasi kvadrati Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar fazosida ayniqsa takomillashgan ko'rinishga ega. Bu fazoda Plansherel teoremasi quyidagicha o'qiladi: *Furiye almashtirish operatori unitardir.*

Differensial tenglamalarni ko'p yechimlarining cheksizlikda nolga intilmasligi va integrallanuvchi emasligi bunday tenglamalarni yechishda Furiye almashtirishidan keng foydalanishga to'siq bo'lib keldi. Eslatib o'tamiz, funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi uning Furiye almashtirishini aniqlash uchun zaruriy shartdir. XX asr o'rtalariga kelib taqsimotlar nazariyasining yaratilishi Furiye almashtirishini deyarli barcha funksiyalar uchun aniqlash imkonini berdi. Natijada, qisman hosilali differensial tenglamalar umumiy nazariyasida, shu bilan birga zamonaviy matematikaning boshqa bir qancha bo'limlarida ham, muhim rivojlanishga erishildi.

### 19.8-§. Misollar

**1 - misol.** Agar  $b > a$  bo'lsa,

$$f(x) = \text{sign}(x - a) - \text{sign}(x - b)$$

funksiyaning Furiye almashtirishini toping.

**Ko'rsatma.**  $\text{sign } x$  funksiyaning ta'rifidan foydalanib, (19.1.1) formulani qo'llang.

**2 - misol.** Har qanday  $a \in (0, 1)$  uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x + \cos 2x + |x|^a) \cos \lambda x}{1 + x^2} dx = 0$$

tenglikni isbotlang.

**Ko'rsatma.** Integral ostidagi funksiyani  $f(x) \cdot \cos \lambda x$  ko'rinishda yozib olib,  $f(x)$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi ekanini ko'rsating. So'ngra 19.1.1 - teoremaning 1 - natijasini qo'llang.

**3 - misol.** Agar  $\alpha$  va  $\beta$  haqiqiy sonlar bo'lib,  $\alpha > 0$  bo'lsa,

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x$$

funksiyani qismani Furiye integrallari limiti ko'rinishida ifoda qiling.

**Ko'rsatma.** Avval  $f(x)$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi va differensiallanuvchi ekanini tekshiring. So'ngra bu funksiyaning Furiye almashtirishini (19.1.1) formula yordamida hisoblang. Bunda sinuslar ko'paytmasini kosinuslar yig'indisi ko'rinishida yozib olib, 19.1.1 - misoldan foydalaning. Furiye almashtirish topilgandan so'ng, 19.2.2 - teoremani qo'llang.

**4 - misol.** Quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ e^{1-x}, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

funksiyaning kosinus Furiye almashtirishini toping.

**Ko'rsatma.** Avval  $f(x)$  funksiya sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi va bo'lakli-silliq ekanini tekshiring. So'ngra bu funksiyaning kosinus Furiye almashtirishini (19.2.13) formula yordamida hisoblang.

**5 - misol.** Quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

bo'lakli-silliq funksiyaning Furiye integraliga yoyilmasini toping. Furiye integrali uzilish nuqtalarida ham yaqinlashishi uchun bu nuqtalarda  $f(x)$  ni qanday aniqlash kerak?

**Ko'rsatma.** Furiye almashtirishni hisoblayotganda sinuslar ko'paytmasini kosinuslar yig'indisiga keltiring.  $f(x)$  funksiya  $\pm \frac{\pi}{2}$  nuqtalarda uzilishga ega. 19.3.1 - teoremani qo'llash maqsadida, funksiyaning bu nuqtalarda (19.3.2) shartni qanoatlantiradigan qilib aniqlang.

**6 - misol.** Quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

bo'lakli-silliq funksiyani va uning hosilasini Furiye integraliga yoyilmasini toping.

**Ko'rsatma.** Funksiyaning Furiye almashtirishini hisoblashda sinus va cosinus ko'paytmasini sinuslar yig'indisiga keltiring. Hosilaning Furiye almashtirishini 19.4.1 - tasdiq yordamida hisoblang.

**7 - misol.** Faraz qilaylik,  $f$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi funksiya bo'lib,  $a > 0$  bo'lsin. Furiye almashtirishidan foydalanib, quyidagi

$$y'' - a^2 y = -f(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

tenglamaning shunday yechimi topilsinki, uning o'zi va ikkinchi tartibgacha hosilalari  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsin.

**Ko'rsatma.** Tenglamaning ikki tomoniga Furiye almashtirishini qo'llang. So'ngra ikkinchi hosila Furiye almashtirishini hisoblashda 19.4.1 - tasdiqqa keltirilgan natijadan foydalaning.

**8 - misol.** Agar  $\frac{1}{2} < a < 1$  bo'lsa, quyidagi

$$f(x) = \frac{\sin(|x|^a)}{1 + x^2}$$

funksiya Furiye integraliga yoyilmasining absolyut va  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashishini ko'rsating.

**Ko'rsatma.** Berilgan funksiya 19.6.3 - teorema shartlarini qanoatlantirishiga ishonch hosil qilib, shu teoremani qo'llang.

**9 - misol.** Quyidagi

$$f(x) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3^2}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

funksiyaning Furiye almashtirishini hisoblang.

**Ko'rsatma.** Berilgan funksiyaning

$$f(x) = \frac{1}{1 + x_1^2} \cdot \frac{1}{1 + x_2^2} \cdot \frac{1}{1 + x_3^2}$$

ko'rinishda yozib olib, (19.2.9) formulani qo'llang (formuladan keyingi eslatmani hisobga oling).

**10 - misol.** Agar  $\varphi(x)$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  da absolyut integrallanuvchi va uzluksiz bo'lsa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

tenglamani va

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi  $u(x, t)$  funksiya topilsin.

**Ko'rsatma.** Tenglamada  $x$  bo'yicha Furiye almashtirishga o'tib, uni  $t$  bo'yicha oddiy diferensial tenglamaga keltiring.

## 20-bob. Furiye qatorlari

*Trigonometrik qator* deb, odatda, quyidagi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.0.1)$$

ko'rinishda yoziladigan funksional qatorga aytiladi.

Agar (20.0.1) qator  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha tekis yaqinlashsa, u holda uning  $f(x)$  yig'indisi sonlar o'qida aniqlangan va  $2\pi$  davrga ega uzluksiz davriy funksiya bo'ladi:

$$f(x + 2\pi) = f(x). \quad (20.0.2)$$

Bunday holda, agar  $a_k$  va  $b_k$  koeffitsientlarni bilsak,  $f$  funksiyani nazariy jihatdan istalgan aniqlikda topishimiz mumkin.

Fransiyalik matematik J.B. Furiye istalgan  $2\pi$  davrga ega funksiyani (20.0.1) trigonometrik qator ko'rinishida yozish mumkin deb faraz qilib, bu qator koeffitsiyentlarini qator yig'indisiga ko'ra topishning quyidagi usulini taklif qildi.

Avvalo shunga e'tibor beraylikki, istalgan  $n = 0, 1, 2, \dots$  va  $m = 1, 2, 3, \dots$  lar uchun

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \cdot \delta_{nm}; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx &= 0 \end{aligned} \quad (20.0.3)$$

tengliklar o'rinli.

Bu yerda, odatdagidek,  $\delta_{nm}$  Kroneker delta-simvolini anglatadi:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{agar } n = m \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } n \neq m \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Agar  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi ikki  $f$  va  $g$  funksiya uchun

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ular *ortogonal* deyiladi va  $f \perp g$  kabi belgilanadi.

(20.0.3) munosabat qaralayotgan trigonometrik funksiyalarning juft-jufti bilan ortogonal ekanini anglatadi. Shu sababli quyidagi

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (20.0.4)$$

ketma-ketlik *trigonometrik ortogonal sistema* deb nomlanadi.

Aytaylik, (20.0.1) qator  $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$  kesmada  $f(x)$  funksiyaga tekis yaqinlashsin. U holda,  $\cos nx$  ga ko'paytirilgan qator ham tekis yaqinlashadi va bunda

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos nx$$

tenglik bajariladi.

Tenglikning ikki tarafini  $[-\pi, \pi]$  kesma bo'yicha integrallab, (20.0.3) munosabatlardan foydalanamiz. Natijada qatorning bitta hadidan tashqari barcha hadi nolga aylanadi:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos nx dx = a_n \pi. \end{aligned} \quad (20.0.5)$$

Demak,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.0.6)$$



E'tibor bering, (20.0.6) formula  $n = 0$  da ham o'rinli bo'lib qolishi uchun (20.0.1) yoyilmadagi  $a_0$  koeffitsient  $1/2$  ga ko'paytirilgan.

Xuddi yuqoridagidek, (20.0.1) qatorni endi  $\sin nx$  ga ko'paytirib, so'ngra integrallasak, (20.0.3) ga ko'ra,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20.0.7)$$

tengliklarni olamiz.

Agar (20.0.1) qator koeffitsiyentlari ixtiyoriy haqiqiy son bo'lmasdan, (20.0.6) va (20.0.7) formulalar orqali aniqlansa, u holda bunday qator  $f$  funksiyaning *Furye qatori* deb,  $a_k$  va  $b_k$  sonlarning o'zi esa,  $f(x)$  funksiyaning *Furye koeffitsiyentlari* deb ataladi. Bunda

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.0.8)$$

kabi yoziladi.

Bunday simvolik yozish qator koeffitsiyentlari (20.0.6) va (20.0.7) tengliklarni qanoatlantirishini anglatadi. Lekin bundan qator yaqinlashishi yoki qator yig'indisi haqida hech qanday xulosa kelib chiqmaydi.

**20.0.1 - misol.**  $(-\pi, \pi)$  intervalda

$$g(x) = x, \quad -\pi < x < \pi, \quad (20.0.9)$$

tenglik bilan berilgan  $g$  funksiyaning Furye qatorini topamiz.

Interval chegaraviy nuqtalarida bu funksiyani  $g(-\pi) = g(\pi) = 0$  tenglik bilan aniqlaymiz va  $2\pi$  davr bilan sonlar o'qiga davriy davom ettiramiz.

Funksiya Furye koeffitsiyentlarini hisoblaylik. Kosinus-koeffitsiyentlar, to'liqlikka ko'ra, nolga teng. Integral ostidagi funksiya juft bo'lgani sababli, sinus-koeffitsiyentlar uchun

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{\sin kx - kx \cos kx}{k^2} \right|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{k} \cos k\pi = 2 \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

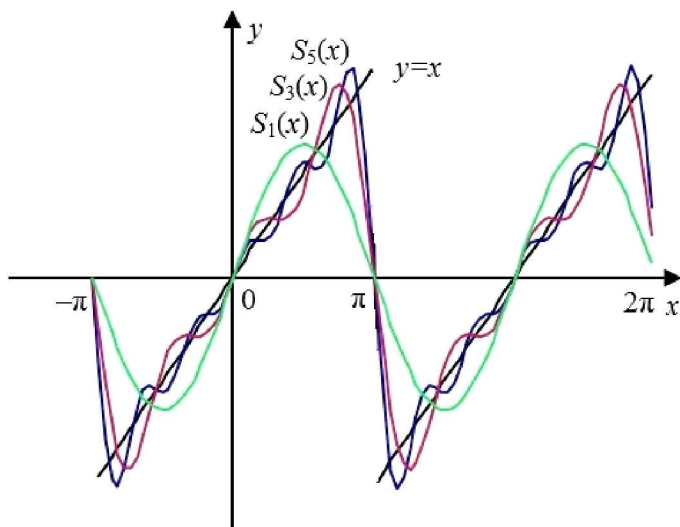
tengliklar o'rinli.

Demak, qaralayotgan funksiya Furiye qatori

$$x \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi < x < \pi, \quad (20.0.10)$$

ko'rinishga ega.

Furiye qatorining matematik nazariyasidagi asosiy muammolardan biri qanday funksiyalar uchun (20.0.8) Furiye qatori unga yaqinlashishini aniqlashdan iborat. Bu savolga javob qaysi turdagi yaqinlashish nazarda tutilayotganiga bog'liq, ya'ni  $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$  kesmada tekis yaqinlashishmi, bu kesmaning har bir nuqtasida yaqinlashishmi, o'rtacha yoki o'rta kvadratik yaqinlashishmi va hokazo (20.1-rasm).



20.1-rasm

J.B. Furiye uchun trigonometrik qatorlarini o'rganish asosiy maqsad bo'lmasdan, u bu qatorlarni issiqlik tarqalish jarayonlarini

o'rganishga qo'lladi. Olimning bu yo'nalishdagi "Issiqlikning analitik nazariyasi" nomli monografiyasi 1806 yili nashr qilindi. Keyinchalik Furiye qatorlarining ko'p xossalari faqat (20.0.3) munosabatlarga bog'liq ekani va ularning, (20.0.3) ga o'xshash munosabatlarga ega bo'lgan, har qanday funksiyalar sistemasi uchun ham o'rinli ekani aniqlandi. Boshqacha aytganda, Furiye nazariyasini nafaqat trigonometrik qatorlarni o'rganishga, balki, (20.0.3) munosabatlarga o'xshash xossalarga ega bo'lgan, istalgan funksiyalar sistemasi bo'yicha qatorlarni o'rganishga ham qo'llash mumkin.

### 20.1-§. Furiye qatorlari yaqinlashishining yetarlilik shartlari

1. Furiye qatorlarining yaqinlashish muammosini shartli ravishda quyidagi ikki masalaga ajratish mumkin:

1) funksiya uchun uning Furiye qatori yaqinlashishini ta'minlaydigan shartlarni topish;

2) Furiye qatorini biror ma'noda aynan yoyilayotgan funksiyaga yaqinlashishini isbotlash.

Bunda (20.0.8) Furiye qatori yaqinlashadi deganda uning

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.1.1)$$

qisman yig'indilarining limiti mavjudligi tushuniladi.

Biz ikkinchi masalani o'rganishdan boshlaymiz, ya'ni ushbu bandda istalgan integrallanuvchi  $f$  funksiyaning Furiye qatori shu funksiyaga o'rta kvadratik yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Ushbu paragrafning keyingi bandida ixtiyoriy uzluksiz differensiallanuvchi funksiya Furiye qatorining tekis yaqinlashishi isbotlanadi. Keltirilgan isbot qatorning qanday funksiyaga yaqinlashishi haqidagi savolga javob bermaydi. Ammo, ushbu bandda ikkinchi masalaning o'rta kvadratik yaqinlashish uchun hal bo'lganini hisobga olsak, istalgan silliq  $f$  funksiya Furiye qatorining aynan  $f$  funksiyaga tekis yaqinlashishini ko'ramiz.

Eslatib o'tamiz, 10-bobda istalgan uzluksiz funksiyani quyidagi

$$P_n(x) = c_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n (c_k^{(n)} \cos kx + d_k^{(n)} \sin kx)$$

ko'rinishdagi  $n$ -tartibli trigonometrik ko'phadlar ketma-ketligi bilan tekis yaqinlashtirish mumkinligi haqidagi Veyershtass teoremasi (10.6.3 - teoreмага qarang) isbotlangan edi, bu yerda  $c_k^{(n)}$  va  $d_k^{(n)}$  ixtiyoriy haqiqiy sonlar (biror funksiyaning Furye koeffitsienti bo'lishi shart emas).

Bu ko'phadlar, umuman aytganda, Furye qatorining qismaniy yig'indilari bo'lmagani uchun, bu tasdiqdan Furye qatorlarining tekis yaqinlashishi kelib chiqmaydi. Lekin, shunga qaramasdan, Veyershtass teoremasi yordamida Riman bo'yicha integrallanuvchi istalgan funksiya Furye qatorining aynan shu funksiyaning o'ziga o'rta kvadratlik yaqinlashishini isbotlash mumkin.

Keyingi mulohazalarimizda quyidagi oson tekshiriladigan tasdiq muhim rol o'ynaydi: *istalgan integrallanuvchi  $f$  funksiya va  $n$ -tartibli ixtiyoriy  $P_n$  trigonometrik ko'phad uchun quyidagi*

$$f - S_n f \perp P_n \quad (20.1.2)$$

*munosabat o'rinli* (20.6-§, Ilovadagi (20.6.18) formulaga qarang).

Bu munosabatdan ushbu

$$f - P_n = (f - S_n f) + (S_n f - P_n)$$

formuladagi qavs ichida turgan ifodalarning o'zaro ortogonal ekani kelib chiqadi.

Agar ikki  $u(x)$  va  $v(x)$  funksiya ortogonal bo'lsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(x) \pm v(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} |v(x)|^2 dx$$

tenglik (Pifagor teoremasi) bajarilishini ko'rish qiyin emas.

Shunday ekan,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx = \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n f(x)|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} |S_n f(x) - P_n(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (20.1.3)$$

Istalgan integrallanuvchi  $f$  funksiya va ixtiyoriy trigonometrik  $P_n$  ko'phad uchun o'rinli bo'lgan bu ayniyat trigonometrik sistema haqida muhim ma'lumot olishga imkon beradi.

Navbatdagi teorema funksiyalarni trigonometrik ko'phadlar bilan yaqinlashtirish nazariyasida asosiy rolni o'ynaydi.

**20.1.1 - teorema.** *Faraz qilaylik,  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi ixtiyoriy  $f$  funksiya berilgan bo'lsin. U holda  $n$ -tartibli istalغان trigonometrik  $P_n$  ko'phad uchun*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx \quad (20.1.4)$$

tengsizlik o'rinli.

**Isbot** bevosita (20.1.3) ayniyatdan kelib chiqadi. ■

(20.1.4) tengsizlikning ma'nosi shundan iboratki, unga ko'ra istalغان integrallanuvchi  $f$  funksiyaga barcha  $n$ -tartibli ko'phadlar ichida o'rta kvadratik ma'noda eng yaqini bu funksiya Furiye qatorining  $S_n f$  qismaniy yig'indilaridir. Shu munosabat bilan, Furiye qatorining qismaniy yig'indilari o'rta kvadratik ma'noda *eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phadlar* deb ataladi.

**20.1.2 - teorema.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi har qanday funksiyaning Furiye qatori shu funksiyaga  $[-\pi, \pi]$  kesmada o'rta kvadratik yaqinlashadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n f(x)|^2 dx = 0. \quad (20.1.5)$$

**Isbot.** 20.1.1 - teoremaga ko'ra,  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi har qanday  $f$  funksiyani istalgancha aniqlikda trigonometrik ko'phadlar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkinligini ko'rsatish yetarli.

Buning uchun 17.1.3 - tasdiqdan foydalanamiz. Bu tasdiqqa ko'ra,  $[-\pi, \pi]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi  $2\pi$ -davriy istalgan funksiyaga o'rta kvadratik yaqinlashuvchi (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan silliq  $f_h(x)$  funksiyalarni ko'rsatish mumkin. (17.1.17) ta'rifga ko'ra, har qanday  $f_h(x)$  funksiya  $2\pi$ -davriydir.

10.6.3 - teoremaga asosan, har qanday  $2\pi$ -davriy uzluksiz  $f_h(x)$  funksiyani  $[-\pi, \pi]$  kesmada tekis yaqinlashuvchi, demak, o'rta kvadratik,  $P_n(x)$  trigonometrik ko'phadlar bilan approksimatsiyalash mumkin.

Shunday ekan,  $[-\pi, \pi]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi har bir  $2\pi$ -davriy funksiyani  $P_n(x)$  trigonometrik ko'phadlar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkin. ■

(20.1.2) munosabatdan

$$f = (f - S_n f) + S_n f$$

ayniyatning o'ng tomonidagi ikki had o'zaro ortogonal ekani kelib chiqadi va shuning uchun

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n f(x)|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} |S_n f(x)|^2 dx$$

tenglik o'rinli.

Oxirgi integralni ortogonallikdan foydalanib hisoblasak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n f(x)|^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

tenglikni olamiz.

Demak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n f(x)|^2 dx + \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \quad (20.1.6)$$

(20.6-§, Ilovadagi (20.6.21) formulaga qarang).

20.1.2 - teorema quyidagi muhim natijaga ega.

**20.1.2 - teorema natijasi (Parseval tengligi).**  $[-\pi, \pi]$  kesma-da integrallanuvchi istalgan  $f$  funksiya uchun

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (20.1.7)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan, (20.1.6) tenglikning o'ng tomonidagi integral, 20.1.2 - teoreмага ko'ra,  $n \rightarrow \infty$  da nolga intilgani uchun biz (20.1.7) tenglikka kelamiz.

**20.1.1 - misol.** 20.0.1 - misoldagi (20.0.9) funksiya uchun Parseval tengligi

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

ko'rinishga ega. Bundan, integralni hisoblasak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (20.1.8)$$

tenglikni olamiz.

Eslatib o'tamiz, 9 - bobda (9.6.17) tenglik bilan biz Riman zeta-funksiyasini aniqlagan edik:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Shunday ekan, (20.1.8) tenglik  $\zeta(2) = \pi^2/6$  ekanini anglatadi.

**2.** Hisoblash nuqtai nazaridan uzluksiz funksiyani o'zining Furiye qatori bilan tekis yaqinlashtirish muhim ahamiyatga ega. Afsuski, bu holda Furiye qatorining qisman yig'indilari eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phad bo'lmaydi. Xatto qisman yig'indilar funksiyaga tekis

yaqinlashmasligi ham mumkin. Bunday holda funksiyadan qo'shimcha ravishda silliqlik talab qilishga to'g'ri keladi.

Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmada uzluksiz differensialanuvchi bo'lib,

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad (20.1.9)$$

davriylik shartini qanoatlantirsin.

U holda davriylilik shartidan  $f'(x)$  hosila uchun

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, agar  $f'$  hosilaning Furye qatori

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \quad (20.1.10)$$

ko'rinishga ega bo'lsa,  $\alpha_0 = 0$  bo'ladi.

Aytaylik, berilgan funksiyaning Furye qatori (20.0.8) ko'rinishda bo'lsin. U holda  $f'$  hosilaning Furye koeffitsientlari  $f$  funksiya Furye koeffitsientlari bilan

$$\alpha_k = k \cdot b_k, \quad \beta_k = -k \cdot a_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20.1.11)$$

kabi bog'langan bo'ladi.

Haqiqatan, bo'laklab integrallab, integraldan tashqaridagi hadlarning davriylik shartiga ko'ra nolga aylanishini hisobga olsak, (20.1.11) dagi birinchi:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} f(x) \cos kx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) k \sin kx dx = kb_k \end{aligned} \quad (20.1.12)$$



tenglikni hosil qilamiz. Keyingi tenglik ham xuddi shunday ko'rsatiladi.

(20.1.11) tenglikka ko'ra,  $f'(x)$  hosila uchun Parseval formulasini

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \quad (20.1.13)$$

kabi yozish mumkin.

Aynan mana shu tenglikdan uzluksiz differensiallanuvchi funksiya Furye qatorining tekis va absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi.

**20.1.3 - teorema.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi va davriylik shartini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya Furye qatori butun sonlar o'qida shu funksiya tekis va absolyut yaqinlashadi.

**Isbot.** Teorema shartlari bajarilganda,  $f$  funksiyaning Furye koeffitsientlaridan tuzilgan sonli qatorning absolyut yaqinlashishini ko'rsatamiz, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty \quad (20.1.14)$$

munosabatni o'rnatamiz.

Buning uchun o'z-o'zidan ko'rinib turgan

$$|a_k| \leq a_k^2 k^2 + \frac{1}{4k^2}, \quad |b_k| \leq b_k^2 k^2 + \frac{1}{4k^2}$$

tengsizliklardan foydalansak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (20.1.15)$$

bahoga ega bo'lamiz.

Bu yerda o'ng tomondagi har ikki qator yaqinlashadi. Birinchi qator (20.1.13) Parseval tengligiga ko'ra, hosila kvadratidan olingan

integralga yaqinlashadi, ikkinchi qator yig'indisi esa,  $\pi^2/6$  ga teng ((20.1.8) formulaga qarang). Demak, chap tomondagi qator ham yaqinlashadi, ya'ni (20.1.14) munosabat bajariladi.

Endi funksional qatorlar tekis yaqinlashishining Veyershtrass alomati (10.7.6 - teorema) qarang) va

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|$$

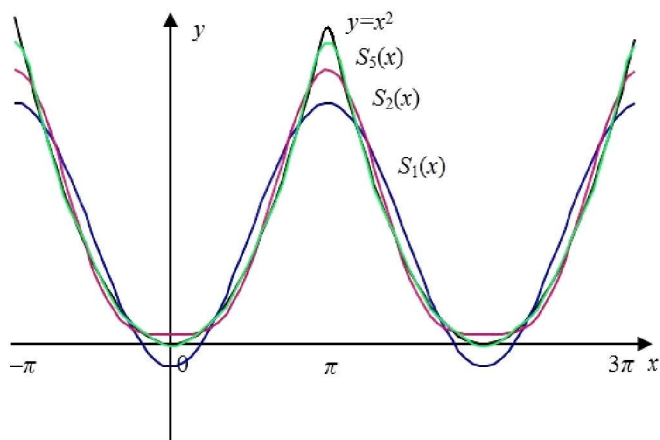
bahodan (20.1.1) qisman yig'indilar ketma-ketligining butun sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashishini ko'ramiz.  $S_n f(x)$  qisman yig'indilar ketma-ketligining aynan  $f(x)$  ga yaqinlashishi 20.1.2 - teoremdan kelib chiqadi. ■

**20.1.3 - misol.** Ushbu

$$h(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.1.16)$$

funksiyani sonlar o'qiga  $2\pi$ -davriy davom ettirib, Furye qatorini toping.

Biz 20.0.1 - misoldan foydalanamiz. Avvalo shuni qayd etamizki,  $g(x)$  funksiya 20.1.2 - teorema shartini qanoatlantirgani uchun, (20.0.10) qator  $g(x)$  funksiyaga  $[-\pi, \pi]$  kesmada o'rta kvadratik yaqinlashadi (20.2-rasm).



20.2-rasm

(20.1.16) tenglik bilan aniqlangan  $h(x)$  funksiyaning  $(-\pi, \pi)$  intervaldagi hosilasi  $2g(x)$  ga teng. Demak, (20.0.10) ga ko'ra,

$$h'(x) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}. \quad (20.1.17)$$

Bu qator o'rta kvadratik yaqinlashgani sababli, uni hadma-had integrallab,

$$h(x) = C + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \quad (20.1.18)$$

munosabatga ega bo'lamiz, bu yerda  $C$  biror o'zgarmas son.

Oxirgi qator  $h(x)$  funksiyaga sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi. Xususan,  $x = \pi$  nuqtada (20.1.18) tenglikka asosan,

$$\pi^2 = C + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\pi}{k^2} = C + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = C + \frac{2\pi^2}{3}.$$

Demak, intergallash koeffitsienti  $C = \pi^2/3$  ekan. Shunday qilib,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (20.1.19)$$

**1 - eslatma.** Agar  $x = 0$  bo'lsa, (20.1.19) formulaga ko'ra,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (20.1.20)$$

**2 - eslatma.** Yuqoridagi mulohazalar nafaqat silliq funksiyalar uchun, balki uzluksiz bo'lakli-silliq funksiyalar uchun ham o'rinli. Bo'lakli-silliq funksiya tushunchasi 19.3-paragrafda kiritilgan edi. Eslatib o'tamiz,  $[-\pi, \pi]$  kesmada bo'lakli-silliq har qanday funksiya shu kesmaning, oshib borsa chekli sondagi nuqtalardan tashqari, barcha nuqtalarida aniqlangan hosilaga ega.

Agar bo‘lakli-silliq  $f$  funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmada uzluksiz bo‘lib, (20.1.9) davriylik shartini qanoatlantirsa, uning Furye koeffitsientlari hosilaning Furye koeffitsientlari bilan (20.1.11) tenglik orqali bog‘langan ekanini ko‘rsatish qiyin emas. Shunday ekan, uzluksiz bo‘lakli-silliq funksiyalar uchun ham (20.1.13) Parseval tengligi bajarilar ekan.

Natijada navbatdagi tasdiqni olamiz.

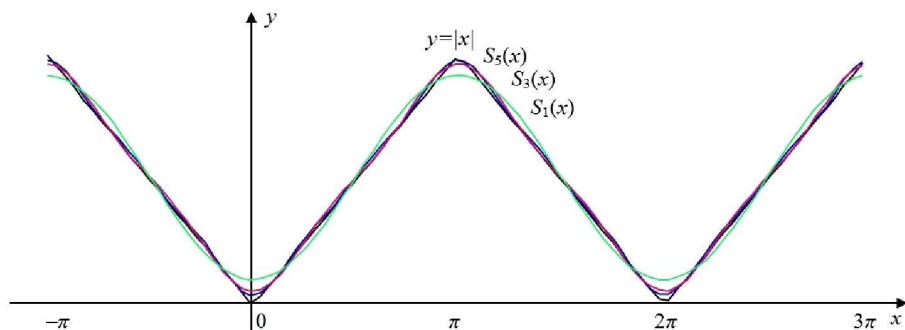
**20.1.4 - teorema.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada uzluksiz bo‘lakli-silliq va davriylik shartini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya Furye qatori butun sonlar o‘qida shu funksiyaga tekis va absolyut yaqinlashadi.

**Isbot** (20.1.13) Parseval tengligiga asoslangan bo‘lib, 20.1.2 - teorema isbotini so‘zma-so‘z qaytarishdan iborat.

**20.1.3 - misol.**  $w(x)$  funksiyani  $[-\pi, \pi]$  kesmada

$$w(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.1.21)$$

tenglik bilan aniqlab, uni sonlar o‘qiga  $2\pi$ -davriy davom ettiramiz. E’tibor bering,  $w(-\pi) = w(\pi) = \pi$ , ya’ni (20.1.9) davriylik sharti bajarilgani uchun bunday davom ettirish o‘rinli. Bu funksiya uzluksiz va bo‘lakli-silliq bo‘lgani sababli, 20.1.3 - teoreмага binoan, uning Furye qatori sonlar o‘qida shu funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashadi (20.3-rasm).



20.3-rasm

### 3. Sinuslar va kosinuslar trigonometrik sistemalari.

1<sup>o</sup>. Faraz qilaylik,  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya juft bo'lsin:

$$f(-x) = f(x). \quad (20.1.22)$$

U holda uning barcha sinus koeffitsiyentlari nolga aylanib, Furiye qatori

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (20.1.23)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Buning teskarisini ham ko'rsatish mumkin, ya'ni, agar biror  $2\pi$ -davriy funksiyaning barcha sinus-koeffitsiyentlari nolga teng bo'lsa (ya'ni, Furiye qatori (20.1.23) ko'rinishda bo'lsa), u holda bu funksiya juftdir.

Juft funksiyaning (20.0.6) integraldan iborat kosinus-koeffitsiyentlari, integral ostidagi ifoda juft bo'lgani uchun,  $[0, \pi]$  bo'yicha olingan integralning ikkilanganiga teng:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20.1.24)$$

(20.1.23) tenglik har qanday juft funksiyaning quyidagi

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \quad (20.1.25)$$

*kosinuslar sistemasi* bo'yicha Furiye qatoriga yoyilishi mumkinligini anglatadi.

(20.1.25) sistema  $[0, \pi]$  kesmada ortogonal ekanini ko'rsatish qiyin emas:

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad n \neq m = 1, 2, 3, \dots$$

**20.1.4 - misol.**  $[0, \pi]$  kesmada berilgan

$$f(x) = \pi - x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (20.1.26)$$

funksiyani (20.1.25) sistema bo'yicha Furiye qatoriga yoying.

Furiye koeffitsientlarni (20.1.24) formula bo'yicha, bo'laklab integrallab, hisoblaymiz:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{(\pi - x) \sin kx}{k} - \frac{\cos kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos k\pi}{k^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k^2}.$$

Demak,

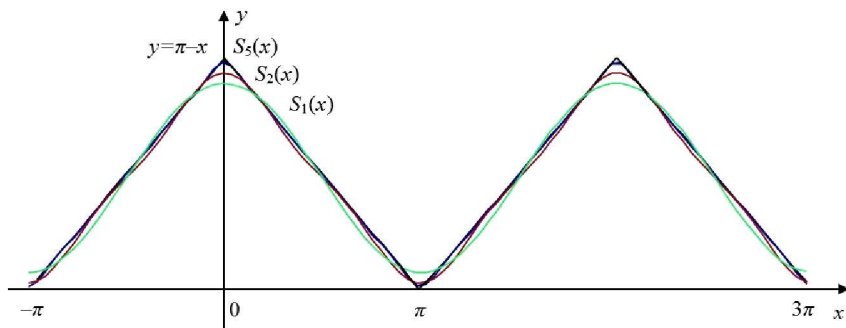
$$a_{2m-1} = \frac{4}{\pi(2m-1)^2}, \quad a_{2m} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Bundan tashqari,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \pi.$$

Shunday qilib,

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (20.1.27)$$



20.4-rasm

**Eslatma.** (20.1.27) qator  $f$  funksiyaning sonlar o'qiga  $2\pi$ -davriy juft davomini beradi. Xususan,  $[-\pi, \pi]$  kesmada

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.1.28)$$

tenglik o'rinli.

$2^0$ . Xuddi shunga o'xshash, agar  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya toq bo'lsa, ya'ni

$$f(-x) = -f(x) \quad (20.1.29)$$

bo'lsa, u holda barcha kosinus-koeffitsientlar nolga teng bo'lib, mos Furye qatori

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (20.1.30)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

E'tibor bering, funksiya toq bo'lgani uchun  $f(0) = 0$ , davriylik shartiga ko'ra esa,  $f(\pi) = 0$ .

(20.0.7) integral bilan aniqlangan sinus-koeffitsientlar uchun, integral ostidagi ifodaning toqligi sababli,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (20.1.31)$$

tengliklar o'rinli.

(20.1.30) tenglik har qanday toq funksiyaning quyidagi

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots \quad (20.1.32)$$

*sinuslar sistemasi* bo'yicha Furye qatoriga yoyilishi mumkinligini anglatadi.

Oddiy hisoblash yordamida (20.1.32) sistemaning  $[0, \pi]$  kesmada ortogonal ekanini ko'rsatish mumkin.

**20.1.5 - misol.** 20.1.4 - misolda  $f(x) = \pi - x$  tenglik bilan  $(0, \pi)$  intervalda aniqlangan funksiyani (20.1.32) sistema bo'yicha Furye

qatoriga yoyamiz. Buning uchun funksiyani chegaraviy nuqtalarda  $f(0) = f(\pi) = 0$  deb aniqlaymiz.

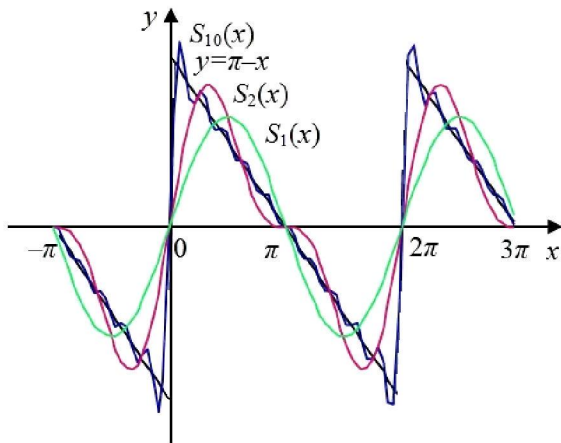
Furye koeffitsiyentlarini (20.1.31) formula bo'yicha, bo'laklab integrallab, hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx = \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[ -\frac{(\pi - x) \cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{k}.
 \end{aligned}$$

Demak,

$$\pi - x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (20.1.33)$$

Bu tenglik, xuddi (20.1.27) kabi, o'rta kvadratik yaqinlashish ma'nosida tushuniladi (bunda (20.1.33) tenglik har bir  $x \in [0, \pi]$  da o'rinli bo'lishi shart emas).



20.5-rasm



**Eslatma.** (20.1.33) qator  $f$  funksiyaning sonlar o'qiga  $2\pi$ -davriy toq davomini beradi. Xususan,  $[-\pi, \pi]$  kesmada

$$(\pi - |x|) \cdot \text{sign } x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.1.34)$$

tenglik o'rinli.

E'tibor bering, (20.1.27) qator koeffitsiyentlari (20.1.33) qator koeffitsiyentlariga nisbatan tezroq nolga intiladi. Bunga sabab shundaki, (20.1.27) qator uzluksiz bo'lakli-silliq funksiyani, (20.1.34) qator esa, nolda birinchi tur uzilishga ega bo'lgan bo'lakli-silliq funksiyani aniqlaydi. 20.1.3 - teorema ko'ra, (20.1.27) qator koeffitsiyentlari, (20.1.34) qator koeffitsiyentlaridan farqli o'laroq, absolyut yaqinlashuvchi qator tashkil qiladi.

**4. Uzunligi  $2\pi$  ga teng bo'lgan ixtiyoriy kesmadagi Furye qatorlari.** Oddiy tekshirish ko'rsatadiki, (20.0.4) trigonometrik sistema nafaqat  $[-\pi, \pi]$  kesmada, balki uzunligi  $2\pi$  ga teng ixtiyoriy kesmada, masalan,  $[0, 2\pi]$  kesmada ortogonaldir. Kesmani tanlash, odatda, trigonometrik qatorlar bilan yechiladigan masalaga bog'liq. Bunda Furye koeffitsiyentlari (20.0.6) va (20.0.7) larga o'xshash ko'rinishga ega bo'ladi. Masalan,  $[0, 2\pi]$  kesma hoida koeffitsiyentlar

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (20.1.35)$$

kabi aniqlanadi.

**20.1.6 - misol.**  $(0, 2\pi)$  intervalda

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (20.1.36)$$

tenglik bilan aniqlangan  $f(x)$  funksiyani qaraylik.  $[0, 2\pi]$  kesma chekkalarida uni  $f(0) = f(2\pi) = \pi$  deb aniqlab, sonlar o'qiga  $2\pi$ -davriy davom ettiramiz. Ravshanki, hosil bo'lgan funksiya bo'lakli-silliq bo'lib,  $c_n = 2\pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  nuqtalarda birinchi tur uzilishga ega.

Davom ettirilgan funksiya Furiye koeffitsiyentlari quyidagicha hisoblanadi:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=2\pi} = 2\pi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = -\frac{2}{k},$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

Demak, qaralayotgan funksiya Furiye qatori

$$x = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (20.1.37)$$

ko'rinishga ega.

E'tibor bering, bu qator xuddi shu funksiyaning  $[-\pi, \pi]$  kesmadagi yoyilmasidan farq qiladi ((20.0.10) formulaga qarang).

**5.  $[-l, l]$  kesmada Furiye qatorlari.** Ko'p muhim amaliy masalalarni yechishda,  $2\pi$  dan farqli biror  $T$  davrga ega bo'lgan, davriy funksiyalarni qarashga to'g'ri keladi. Shu munosabat bilan,

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{3\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots \quad (20.1.38)$$

funksiyalar ketma-ketligini olaylik. Bu funksiyalardan har biri davriy bo'lib, davri  $T = 2l$  ga teng.

Agar  $t = \frac{\pi x}{l}$  almashtirish bajarsak, bu sistema  $[-\pi, \pi]$  kesmada ortogonal bo'lgan (20.0.4) sistemaga keladi. Bundan chiqdi, (20.1.38) sistema  $[-l, l]$  kesmada ortogonaldir.

$[-l, l]$  kesmada integrallanuvchi istalgan  $f$  funksiya Furiye qatori

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (20.1.39)$$

ko'rinishga ega bo'lib, Furiye koeffitsientlar uchun

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (20.1.40)$$

tengliklar o'rinli.

**20.1.7 - misol.**  $(-l, l)$  intervalda

$$f(x) = x, \quad -l < x < l, \quad (20.1.41)$$

tenglik bilan aniqlangan  $f(x)$  funksiyani qaraymiz.  $[-l, l]$  kesmaning chekkalarida uni  $f(-l) = f(l) = 0$  deb aniqlab, sonlar o'qiga  $2l$  davr bilan davriy davom ettiramiz. (20.2.58) formula bo'yicha Furiye koeffitsiyentlarini hisoblab, davom ettirilgan funksiyaning Furiye qatorini olamiz:

$$x = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (20.1.42)$$

**1 - eslatma.** Bundan buyon biz trigonometrik qatorlarni  $[-\pi, \pi]$  kesmada qaraymiz. Bunda olingan natijalarni, koordinatalarni surish va cho'zish yordamida, ixtiyoriy kesma uchun ko'chirish mumkin.

**2 - eslatma.** Furiye ilk bor o'rnatgan ixtiyoriy silliq funksiyani, xattoki grafigini "qo'lning erkin harakati bilan"(libera manu ducta) chizish mumkin bo'lgan funksiyani ham, trigonometrik qator ko'rinishida yozish imkoniyati mavjud matematik qarashlarga teskaridek ko'rindi. Furiyening bu kashfiyoti matematikadagi funksiya, integral, yaqinlashish kabi bir qator fundamental tushunchalarini qayta ko'rib chiqishga majbur qildi va to'plamlar nazariyasi yaratilishining sabablaridan biri bo'lib xizmat qildi.

## 20.2-§. Furiye qatorlari yaqinlashishining lokal shartlari

**1. Dirixle yadrosi.** Yuqorida Furiye qatorlarining sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashishi uchun yetarli shartlar o'rnatildi. Ushbu paragrafda ixtiyoriy nuqtada yaqinlashish uchun, shu nuqtaning istalgancha kichik atrofidagi funksiya silliqligiga bog'liq bo'lgan shartlar olamiz. Buning uchun biz avval qisman yig'indilarni, argumentlar ayirmasiga bog'liq maxsus yadrolik integral operator ko'rinishida yozib olamiz.

Shu maqsadda *Dirixle yadrosi* deb ataluvchi,

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \quad (20.2.1)$$

funksiyani kiritaylik.

Bu tenglikda  $x$  ni  $x-y$  ga o'zgartirib, ikki argument ayirmasining kosinusi uchun formulani qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} D_n(x-y) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-y) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky). \end{aligned}$$

Endi oxirgi tenglikning ikki tarafini  $f(y)$  ga ko'paytirib,  $[-\pi, \pi]$  kesma bo'yicha integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left( \cos kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ky dy + \sin kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ky dy \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = S_n f(x)$$

(biz Furiye koeffitsiyentlari uchun (20.0.6) va (20.0.7) formulalardan foydalandik).

Shunday qilib, Furiye qatori qisman yig'indilari uchun quyidagi

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy \quad (20.2.2)$$

integral ko'rinishga ega bo'ldik.

Dirixle yadrosini soddaroq ko'rinishga keltirish maqsadida, istalgan  $z \neq 1$  kompleks son uchun o'rinli bo'lgan,

$$\sum_{k=1}^n z^{k-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

ayniyatdan foydalanamiz. Agar  $z = e^{i\varphi} \neq 1$  desak, ayniyat

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\varphi} = \frac{1-e^{i(n+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$$

ko'rinishga keladi.

Bundan, haqiqiy qismni ajratib, quyidagi muhim munosabatni olamiz:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\varphi = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Chap tomon, (20.2.1) ta'rifga binoan, Dirixle yadrosidir. Demak,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad 0 < |x| \leq \pi. \quad (20.2.3)$$

E'tibor bering, bevosita (20.2.1) ta'rifdan  $D_n(0) = n + 1/2$  va

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1 \quad (20.2.4)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Agar (20.2.3) formulani tahlil qilsak, Dirixle yadrosini  $n \rightarrow \infty$  dagi asimptotasining bosh qismi xuddi Furye almashtirishdagi yadro kabi ekanini ko'rish mumkin ((19.2.3) formulaga qarang).

**20.2.1 - tasdiq.** *Dirixle yadrosi*  $0 < |x| \leq \pi$  da

$$D_n(x) = \frac{\sin nx}{x} + \psi(x) \sin nx + \frac{1}{2} \cos nx \quad (20.2.5)$$

*ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda  $\psi(x)$   $[-\pi, \pi]$  kesmada uzluksiz biror funksiyadir.*

**Isbot.** (20.2.3) dagi qavsni ochib, yig'indi sinusi formulasidan foydalansak,

$$D_n(x) = \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2} + \cos nx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \cdot \sin nx + \frac{1}{2} \cos nx$$

tenglikka kelamiz.

Talab qilingan (20.2.5) tenglikni olish uchun quyidagi

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{x}, \quad 0 < |x| \leq \pi,$$

belgilashni kiritib,  $\psi(0) = 0$  deb aniqlaylik.

Bu funksiyaning uzluksizligini ko'rsatamiz. Trigonometrik funksiyalari xossalardan  $\psi$  ning  $[-\pi, 0)$  va  $(0, \pi]$  yarim intervallarda cheksiz differensiallanuvchi ekan kelib chiqadi. Shunday ekan,  $\psi$  ni  $x = 0$  nuqtada uzluksizlikka tekshirish yetarli.

Kotangensni kasr ko'rinishda yozib, surat va maxrajga Teylor formulasini qo'llaymiz:

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + O(x^2)}{2 \left[ \frac{x}{2} + O(x^3) \right]} = \frac{1}{x} [1 + O(x^2)] = \frac{1}{x} + O(x).$$

Demak,  $\psi(x) = O(x)$ , ya'ni bu funksiya nolda uzluksiz va bundan chiqdi,  $[-\pi, \pi]$  kesmada ham uzluksizdir. ■

**1 - eslatma.** Teylor yoyilmasida ko'proq had olib,  $\psi(x)$  funksiya nolda istalgan tartibli hosilaga egaligini ko'rsatish mumkin. Demak, qaralayotgan funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmada aslida cheksiz differensiallanuvchi bo'lar ekan.

**2 - eslatma.** (20.2.5) formuladan foydalanish maqsadida, (20.2.2) integral ko'rinishda  $y - x = t$  almashtirish bajarish qulay bo'ladi. Qizig'i shundaki, bunda integrallash oralig'i o'zgarmaydi. Chunonchi, quyidagi sodda tasdiq o'rinli:

*istalgan  $x \in \mathbb{R}$  va  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi har qanday  $g$  funksiya uchun*

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \quad (20.2.6)$$

*tenglik o'rinli.*

Haqiqatan, integralning to'plam funksiyasi sifatida additivligiga ko'ra (6.2.2 - teoreмага qarang),

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(y) dy = \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(y) dy + \int_{-\pi}^{\pi} g(y) dy + \int_{\pi}^{\pi+x} g(y) dy .$$

(20.2.6) tenglikni olish uchun birinchi va uchinchi integrallar ishorasi bilan farq qilishini ko'rsatish yetarli. Birinchi integralda  $z = y + 2\pi$  almashtirish bajarib,  $g$  funksiyaning  $2\pi$ -davriyligini hisobga olsak, talab qilingan tenglikni olamiz:

$$\int_{-\pi+x}^{-\pi} g(y) dy = \int_{\pi+x}^{\pi} g(z - 2\pi) dz = \int_{\pi+x}^{\pi} g(z) dz = - \int_{\pi}^{\pi+x} g(z) dz .$$

Endi (20.2.2) integralda  $y - x = t$  almashtirish bajarib, (20.2.6)

formulani qo'llasak,

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt \quad (20.2.7)$$

tenglikka kelamiz.

**2. Furye qatori va integraliga yoyilmalarining baravariga yaqinlashishi.** Ushbu bandda (20.1.9) davriylik shartini qanoatlantiruvchi va  $[-\pi, \pi]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning Furye qatorlari o'rganiladi.

Bunda bizning asosiy qurolimiz qisman yig'indining (20.2.7) integral ko'rinishi bo'ladi. Yaqinlashish bo'yicha natijalar olish uchun bizga trigonometrik integrallarning nolga intilishi haqidagi 19.1.4 - tasdiq (Riman-Lebeg lemmasi) kerak bo'ladi. Eslatib o'tamiz, bu tasdiqda integral ostidagi funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmadagi biror nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lishi ham mumkin. Bunday funksiyadan olingan integral ikkinchi tur xosmas integral ma'nosida tushuniladi (§6.6 ga qarang). 19.1.4 - tasdiq o'rinli bo'lgan funksiyaga misol sifatida

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha-1}, & 0 < |x| \leq \pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

funksiyani olsa bo'ladi, bu yerda  $0 < \alpha < 1$ .

Biz bu tasdiqning quyidagi kuchliroq holdan ham foydalanamiz.

**20.2.2 - tasdiq (Riman-Lebeg lemmasi).** *Faraz qilaylik,  $\psi$  funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo'lsin. U holda, shu kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi ixtiyoriy  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya uchun,  $x \in [-\pi, \pi]$  bo'yicha tekis ravishda*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\psi(t) \cos nt dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\psi(t) \sin nt dt = 0 \quad (20.2.8)$$

tengliklar o'rinli.



**Isbot.** Har ikkala integral uchun tasdiq bir xilda isbotlanadi. Masalan, birinchisini isbotlaylik. Buning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\psi(t) \cos nt \, dt \right| = 0$$

tenglikni ko'rsatish yetarli.

Agar bu tenglik bajarilmasa, shunday  $\varepsilon_0 > 0$  son va  $n_k$  va  $x_k \in [-\pi, \pi]$  ketma-ketliklar topiladiki, ular uchun

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x_k+t)\psi(t) \cos n_k t \, dt \right| \geq \varepsilon_0 \quad (20.2.9)$$

baho o'rinni bo'ladi. Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra,  $x_k$  ketma-ketlik biror  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  songa yaqinlashadi deyish mumkin.

Endi

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_k+t)\psi(t) \cos n_k t \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\psi(t) \cos n_k t \, dt + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_k+t) - f(x_0+t)]\psi(t) \cos n_k t \, dt \end{aligned}$$

desak, shartga ko'ra  $\psi$  chegaralangan bo'lgani uchun, ya'ni  $|\psi(t)| \leq M$  munosabatga ko'ra,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x_k+t)\psi(t) \cos n_k t \, dt \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\psi(t) \cos n_k t \, dt \right| + \\ &+ M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_k+t) - f(x_0+t)| \, dt. \end{aligned}$$

O'ng tarafdagi birinchi integral  $k \rightarrow \infty$  da, 19.1.4 - tasdiqqa asosan, nolga intiladi, ikkinchi integral esa, 19.1.2 - tasdiqqa ko'ra

(bu tasdiqni qo'llashdan avval  $f$  funksiyani  $[-2\pi, 2\pi]$  kesmadan tashqariga nolga teng qilib davom ettirish kerak), nolga intiladi. Shunday qilib, chap tarafdagi integral nolga intilar ekan, bu esa, o'z navbatida, (20.2.9) tengsizlikka ziddir. ■

Riman-Lebeg lemmasi yordamida qisman yig'indilarning (20.2.2) formulasini tadqiq uchun qulayroq ko'rinishga keltirish mumkin.

**20.2.3 - tasdiq.** *Faraz qilaylik,  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsin. U holda  $f$  funksiya Furiye qatorining qisman yig'indisi uchun  $x \in [-\pi, \pi]$  bo'yicha tekis ravishda*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (20.2.10)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** (20.2.7) integral ko'rinishdan foydalanamiz. 20.2.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \psi(t) \sin nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nt dt. \end{aligned}$$

Endi oxirgi ikki integral, Riman-Lebeg lemmasiga binoan, nolga intilishini qayd etish yetarli. ■

Furiye qatorlari va integrallarining yaqinlashishini o'rganayotganda funksiyaning Furiye qatori va Furiye integralining ayirmasi tekis ravishda nolga intilishidan foydalanish mumkin. Quyida biz mana shu tasdiqni asoslaymiz.

Aytaylik,  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi  $f$  funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning butun sonlar o'qi  $\mathbb{R}$  ga davriy davomini yana  $f$  harfi bilan belgilaylik. Bundan tashqari,

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } |x| \leq 2\pi, \\ 0, & \text{agar } |x| > 2\pi, \end{cases} \quad (20.2.11)$$

funksiyani kiritaylik. Bu funksiyani  $f$  ning butun sonlar o'qi  $\mathbb{R}$  ga *finit ravishdagi* davomi deymiz.

Ravshanki,  $f_*(x)$  sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi funktsiyadir. Uning Furiye almashtirishi

$$\widehat{f}_*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_*(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

ko'rinishga ega.

Bu funktsiya Furiye integralining

$$I_\lambda f_*(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}_*(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

qismaniy integralini qaraymiz ((19.2.2) formulaga qarang).

Bevosita 19.2.1 - teoremdan  $[-\pi, \pi]$  kesmadagi barcha  $x$  lar uchun

$$I_\lambda f_*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.2.12)$$

munosabat kelib chiqadi.

Haqiqatan, bunga ishonch hosil qilish uchun (19.2.4) formulada  $\delta = \pi$  deb,

$$f_*(x+t) = f(x+t), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

tenglik  $[-\pi, \pi]$  kesmadagi barcha  $x$  va  $t$  lar uchun o'rinli ekanini e'tiborga olish yetarli.

Xuddi 20.2.2 - tasdiqning isboti kabi, (20.2.12) munosabatning ham  $x \in [-\pi, \pi]$  bo'yicha tekis ravishda bajarilishini isbotlash mumkin.

Agar  $\lambda$  natural son bo'lsa, (20.2.12) munosabat

$$I_n f_*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.2.13)$$

ko'rinishga keladi.

Endi (20.2.13) va (20.2.10) formulalarni taqqoslasak, quyidagi muhim natijaga ega bo'lamiz.

**20.2.1 - teorema.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi ixtiyoriy  $f$  funksiya Furye qatorining (20.2.10) qisman yig'indisi bilan bu funksiyaning (20.2.11) formula orqali aniqlangan finit ravishdagi davomi  $f_*$  funksiya Furye integralining (20.2.13) qisman integrali ayirmasi  $[-\pi, \pi]$  kesmada tekis ravishda nolga intiladi.

**Isbot** bevosita (20.2.13) va (20.2.10) formulalardan kelib chiqadi. ■

Shunday qilib, ikki yoyilmaning, ya'ni Furye integrali va Furye qatorining yaqinlashish shartlarini o'rganish o'rniga, bu yoyilmalardan faqat bittasini yaqinlashishini o'rganish yetarli.

19-bob natijalariga suyangan holda, Furye qatorlari uchun ham xuddi Furye integrallari uchun isbotlangan tasdiqlar o'rinli deyishimiz mumkin. Xususan, quyidagi lokallashtirish prinsipi o'rinli:

**20.2.2 - teorema (Riman lokallashtirish prinsipi).** Faraz qilaylik,  $2\pi$ -davriy  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  funksiyalar  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi bo'lsin. Agar biror  $\Delta \subset [-\pi, \pi]$  intervalda bu funksiyalar o'zaro teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar Furye qatorlarining qisman yig'indilari uchun ixtiyoriy  $[a, b] \subset \Delta$  kesmada  $x$  bo'yicha tekis ravishda

$$S_n(x, f_1) - S_n(x, f_2) = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

munosabat o'rinli.

Lokallashtirish prinsipi quyidagini anglatadi: Furye qatori qisman yig'indilarining biror nuqta atrofida o'zini qanday tutishi beril-

gan funksiyaning shu nuqtani istalgancha kichik atrofidagi silliqli-ga bog'liq. Boshqacha aytganda, biz funksiyani, absolyut integral-lanuvchiligini saqlab qolgan holda, ko'rsatilgan atrofdan tashqarida istalgancha o'zgartirsak ham, qisman yig'indilarning shu nuqtadagi asimptotasi cheksiz kichik miqdor aniqligida o'zgarmay qoladi.

**3. Berilgan nuqtada Furiye qatori yaqinlashishining Hol-der sharti.** Yuqorida qayd etilganidek, Furiye qatorlari uchun ham xuddi Furiye integrallari uchun isbotlangan tasdiqlar o'rinli. Shun-day bo'lsada, Furiye integrallari va Furiye qatorlari haqidagi boblarni bog'liqsiz ravishda o'qishni ta'minlash maqsadida, Furiye qatorlari yaqinlashishining yetarli shartlarini quyida asoslab beramiz.

Aytaylik,  $f$  funksiya  $2\pi$ -davriy bo'lib,  $[-\pi, \pi]$  kesmada integral-lanuvchi bo'lsin. Bunday funksiya Furiye qatorining biror  $x \in [-\pi, \pi]$  nuqtada yaqinlashish masalasini o'rganayotganda (20.2.10) formula asosiy rol ni o'ynaydi.

Avvalo shuni aytish kerakki, (20.2.10) formuladan qisman yig'in-dilar va berilgan funksiya farqi uchun,  $x \in [-\pi, \pi]$  bo'yicha tekis ravishda bajariluvchi, quyidagi

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin nt \, dt + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (20.2.14)$$

asosiy formula kelib chiqadi.

Asosiy formula, xuddi (19.2.5) formula holdagidek, quyidagi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} \, du = 1 + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

munosabatning natijasidir.

E'tibor bering, (20.2.14) tenglik sonlar o'qining barcha nuqtasi-da aniqlangan  $2\pi$ -davriy hamda  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi bo'lgan istalgan  $f$  funksiya va sonlar o'qining har qanday  $x$  nuqtasi uchun o'rinli.

Eslatib o'tamiz, agar shunday  $M$ ,  $\alpha$  va  $\delta$  musbat sonlar topilsaki,  $|t| < \delta$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $t$  lar uchun

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^\alpha \quad (20.2.15)$$

baho bajarilsa, biz  $f$  funksiyani  $x \in \mathbb{R}$  nuqtada Holder shartini qanoatlantiradi degan edik.

**20.2.3 - teorema.** Agar  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmada absolyut integrallanuvchi bo'lib,  $x \in [-\pi, \pi]$  nuqtada Holder shartini qanoatlantirsa, u holda bu funksiya Furiye qatori shu nuqtada funksiyaning o'ziga yaqinlashadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x). \quad (20.2.16)$$

**Isbot.** Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $x \in [-\pi, \pi]$  nuqtada (20.2.15) Holder shartini qanoatlantirsin. (20.2.14) formuladan foydalanish maqsadida,  $g(t)$  funksiyani  $|t| < \delta$  lar uchun

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

tenglik bilan va  $\delta \leq |t| \leq \pi$  da esa, nolga teng deb aniqlaymiz. U holda (20.2.14) tenglik

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt \, dt + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (20.2.17)$$

ko'rinishga keladi.

(20.2.15) shartga ko'ra,

$$|g(t)| \leq M \cdot |t|^{\alpha-1}, \quad |t| < \delta,$$

ya'ni  $g(t)$  funksiya nolda integrallanuvchi maxsuslikka ega. Shunday ekan, Riman-Lebeg lemmasiga ko'ra (19.1.4 - tasdiqqa qarang), (20.2.17) ning o'ng tarafidagi integral nolga intiladi. ■

**20.2.1 - misol.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada

$$f_\alpha(x) = (\pi^2 - x^2)^\alpha, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (20.2.18)$$

ko'rinishga ega bo'lgan  $2\pi$ -davriy  $f_\alpha(x)$  funksiyani qaraylik.

Agar  $0 < \alpha < 1$  bo'lsa, bu funksiya har bir nuqtada  $\alpha$  ko'rsatkich bilan Holder shartini qanoatlantiradi. Bundan chiqdi, 20.2.3 - teoreмага binoan,  $f_\alpha$  funksiya Furiye qatori sonlar o'qining har bir nuqtasida funksiyaning o'ziga yaqinlashadi.

**4. Bo'lakli-silliq funksiyalar Furiye qatorlarining yaqinlashishi.** Garmonik tahlil tadbiqlarida bo'lakli-silliq funksiyalar asosiy rolni o'ynagani sababli, bunday funksiyalarning Furiye qatorlarini o'rganish muhimdir.

Eslatib o'tamiz: agar  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya berilib, shunday

$$P = \{-\pi = c_0 < c_1 < \dots < c_m = \pi\} \quad (20.2.19)$$

bo'linish topilsaki, bunda har bir  $(c_{k-1}, c_k)$  intervalda  $f$  funksiya  $[c_{k-1}, c_k]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan biror funksiya bilan ustma-ust tushsa, u holda bu funksiya bo'lakli-silliq deyiladi.

Shunday qilib, bo'lakli-silliq funksiya har bir intervalda chekli sondagi uzilish nuqtaga ega bo'lishi mumkin va bunda barcha uzilish nuqtalari birinchi tur bo'ladi. Chunonchi, agar  $c \in [-\pi, \pi]$  uzilish nuqta bo'lsa, quyidagi bir tarafi limitlar mavjud bo'ladi:

$$f(c \pm 0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} f(c \pm h), \quad f'(c \pm 0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} f'(c \pm h). \quad (20.2.20)$$

Agar  $t > h > 0$  kattaliklar yetarlicha kichik bo'lsa, u holda  $f$  funksiya  $[c+h, c+t]$  kesmada differensiallanuvchi bo'ladi va Lagranj formulasiga ko'ra, biror  $\xi \in [c+h, c+t]$  uchun

$$f(c+t) - f(c+h) = f'(\xi)(t-h)$$

tenglik bajariladi.

Bundan chiqdi,  $|f'(\xi)| \leq M$  tengsizlikka ko'ra,

$$|f(c+t) - f(c+h)| \leq Mt.$$

Endi ikki tarafni  $t$  ga bo'lib,  $h \rightarrow 0+0$  desak, quyidagi

$$\left| \frac{f(c+t) - f(c+0)}{t} \right| \leq M, \quad t > 0, \quad (20.2.21)$$

muhim bahoni olamiz.

Xuddi shu usulda navbatdagi

$$\left| \frac{f(c+t) - f(c-0)}{t} \right| \leq M, \quad t < 0, \quad (20.2.22)$$

bahoni ham isbotlash mumkin.

(20.2.21) va (20.2.22) baholar bo'lakli-silliq funksiya Furye qatorining uzilish nuqtalarida yaqinlashishini ko'rsatish imkonini beradi. Isbot navbatdagi sodda lemmaga asoslanadi.

**20.2.1 - lemma.** *Agar  $x$  bo'lakli-silliq funksiya uzilish nuqtasi bo'lsa,  $u$  holda*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt = \frac{1}{2} f(x+0) \quad (20.2.23)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot.** Dirixle ko'paytuvchisi uchun (17.2.48) tenglikdan foydalanib,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t} dt = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu munosabatga ko'ra,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin nt dt = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt - \frac{1}{2} f(x+0) + o(1). \end{aligned}$$



Chap taraf, (20.2.21) bahoga asosan, chegaralangan funksiya-ning sinus-koeffitsientidan iborat va Riman-Lebeg lemmasiga ko'ra,  $n \rightarrow \infty$  da nolga intiladi. Demak, o'ng taraf ham nolga intiladi va bundan chiqdi, (20.2.23) tenglik bajarilar ekan. ■

**Eslatma.** Xuddi shu singari, (20.2.22) bahodan foydalanib, bo'lakli-silliq funksiya uzilish nuqtasida

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt = \frac{1}{2} f(x-0) \quad (20.2.24)$$

tenglik bajarilishini ko'rsatish mumkin.

**20.2.4 - teorema.** *Istalgan bo'lakli-silliq  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya-ning Furye qatori har bir  $x \in \mathbb{R}$  uzilish nuqtasida yaqinlashadi va bunda*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (20.2.25)$$

tenglik bajariladi.

**Isbot.** (20.2.10) tenglikni ikki integral yig'indisi qilib yozamiz:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(x+t) dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

O'ng tarafdagi integrallar mos ravishda (20.2.23) va (20.2.24) ga teng limitlarga ega. Demak, (20.2.25) tenglik o'rinli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad \blacksquare$$

**Eslatma.** Odatda, bo'lakli-silliq funksiya uzilish nuqtasida aniqlanmagan bo'lib, o'rganilayotgan masalaga qarab aniqlanishi mumkin. Masalan, funksiya qiymatini  $c$  uzilish nuqtasida  $f(c+0)$  ga (bu holda funksiya o'ngdan uzluksiz deyiladi) yoki  $f(c-0)$  ga teng qilib (bunda funksiya chapdan uzluksiz deyiladi) aniqlash mumkin.

20.2.4 - teorema funksiyani uzilish nuqtasida aniqlashning garmonik tahlil nuqtai nazaridan eng yaxshi usulini beradi. Chunonchi,

$$f(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2} \quad (20.2.26)$$

desak, 20.2.3 - va 20.2.4 - teoremalardan navbatdagi tasdiq kelib chiqadi:

agar  $2\pi$  davriy bo'lakli-silliq  $f$  funksiya uzilish nuqtalarida (20.2.26) shartni qanoatlantirsa, uning Furiye qatori sonlar o'qining har bir nuqtasida shu funksiyaga yaqinlashadi va bunda uzilish nuqtalarini o'z ichiga olmagan istalgan kesmada yaqinlashish tekisdir.

**20.2.2 - misol.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada  $2\pi$ -davriy  $\phi(x)$  funksiya

$$\phi(x) = \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right) \text{sign } x = \frac{1}{\pi} (\pi - |x|) \cdot \text{sign } x \quad (20.2.27)$$

tenglik bilan aniqlangan bo'lsin.

Uning Furiye qatori, (20.1.34) formulaga ko'ra, quyidagi ko'rinishga ega:

$$\left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right) \text{sign } x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (20.2.28)$$

$\phi$  funksiya bo'lakli-silliq bo'lib,  $x = 0$  uzilish nuqtasida (20.2.26) shartni qanoatlantiradi. 20.2.4 - teoremaga ko'ra, (20.2.28) qator  $\phi(x)$  funksiyaga sonlar o'qining har bir nuqtasida yaqinlashadi va bunda  $x_k = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , nuqtalarga ega bo'lmagan har bir kesmada yaqinlashish tekisdir.

(20.2.28) qatorning

$$S_n \phi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$$

qisimiy yig'indilarini batafsilroq o'rganamiz.

Agar  $D_n(x)$  (20.2.1) tenglik bilan aniqlangan Dirixle yadrosi bo'lsa, u holda

$$\frac{d}{dx} S_n \phi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{2}{\pi} D_n(x) - \frac{1}{\pi}$$

tenglik o'rinli. Tenglikni integrallasak, quyidagi

$$S_n\phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x D_n(y) dy - \frac{x}{\pi}$$

munosabatni hosil qilamiz.

Demak, 20.2.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$S_n\phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin ny}{y} dy + O(x).$$

O'zgaruvchini almashtirsak, bu munosabat

$$S_n\phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t} dt + O(x) \quad (20.2.29)$$

ko'rinishga keladi.

(20.2.29) va (19.3.12) formulalarni taqqoslab, (20.2.27) bo'lakli-silliqlik funksiya Furiye qatorining qisman yig'indilari va (19.3.7) bo'lakli-silliqlik funksiya Furiye integralining qisman integrallari  $x = 0$  uzilish nuqtasi atrofida o'zini bir xil tutishini ko'rishimiz mumkin. Bundan chiqdi, Furiye integrallari kabi, bo'lakli-silliqlik funksiya Furiye qatori uchun ham uzilish nuqtasi atrofida *Gibbs hodisasi* o'rinli ((19.3.15) formulaga qarang). Bu degani, yoyilayotgan funksiya  $|\phi(x)| \leq 1$  shartni qanoatlantirsada, uning Furiye qatorining qisman yig'indilari  $x_n = \pi/n$  da "sakraushga" ega:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\phi\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > 1. \quad (20.2.30)$$

Shuni aytish kerakki, ushbu hodisa avval aynan Furiye qatorlari uchun aniqlangan edi. Bu hodisani to'la tavsifi ingliz matematigi Henri Uilbraxam maqolasida keltirilgan bo'lib (1848), ellik yildan so'ng Amerikalik matematik J. Gibbs tomonidan qayta kashf qilingan.

**Eslatma.** 1872 yilda nemis matematigi P. Dyubua-Reymon Furiye qatori biror nuqtada uzoqlashuvchi bo'lgan uzluksiz funksiyaga misol keltirdi. Ammo yana ancha vaqtgacha bunday nuqtalar to'plami qanchalik katta bo'lishi no'malum bo'lib qoldi.

1915 yilda Rossiyalik matematik N.N. Luzin kvadrati bilan Lebeg bo'yicha integrallanuvchi har qanday funksiya Furiye qatori shu funksiyaga, o'lchovi nolga teng to'plamdan tashqari, barcha joyda yaqinlashadi degan gipotezani o'rtaga tashladi. Eslatib o'tamiz, agar  $E \subset \mathbb{R}$  to'plam umumiy uzunligini istalgancha kichik qilish mumkin bo'lgan sanoqli sondagi intervallar oilasi bilan qoplangan, uning o'lchovi nolga teng deyiladi.

1966 yilda Shvetsiyalik matematik L. Karleson Luzin gipotezasi to'g'ri ekanini isbotladi. Karleson teoremasidan, xususan, istalgan uzluksiz funksiya Furiye qatori unga deyarli barcha nuqtalarda yaqinlashishi kelib chiqadi, ya'ni Furiye qatori uzoqlashadigan nuqtalar to'plami, oshib borsa, o'lchovi nolga teng to'plam bo'ladi.

## 20.3-§. Furiye qatorlarining regulyar usullar bilan jamlanishi

**1. O'rta arifmetiklar yoki Chezaro usuli.** Yuqorida uzluksiz funksiya Furiye qatori ba'zi nuqtalarda uzoqlashishi mumkinligi qayd etilgandi. Boshqacha aytganda, ba'zi nuqtalarda funksiyani yaqinlashuvchi Furiye qatori ko'rinishida yozish mumkin emas. Ammo, matematik fizikaning ko'pgina masalalarini Furiye taklif qilgan usul bilan yechishda, funksiyaning Furiye qatoriga yoyilmasi bo'yicha uning har bir nuqtadagi qiymatini aniqlash muhimdir. Bu masalaning istalgan  $2\pi$ -davriy uzluksiz funksiya uchun yechimini o'rta arifmetiklar usuli beradi.

$f$  funksiya Furiye qatorining birinchi  $(n+1)$  ta qisman yig'indilari-ning o'rta arifmetik qiymatini

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x) \quad (20.3.1)$$

simvol bilan belgilaymiz.

(20.3.1) o'rtachalar *birinchi tartibli Chezaro o'rtachalari* deb ham ataladi.

(20.3.1) o'rtachalar uchun integral ko'rinish topamiz. Buning uchun Dirixle yadrolari o'rta arifmetiklarini

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) \quad (20.3.2)$$

ko'rinishda belgilaymiz.

(20.3.2) o'rtachalar *Feyer yadrosi* deb ataladi. (20.3.2) ta'rif va (20.2.2) tenglikka ko'ra,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-y) f(y) dy &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x-y) f(y) dy = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x) = \sigma_n(x, f). \end{aligned}$$

Shunday qilib, (20.3.1) o'rta arifmetiklar uchun quyidagi

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-y) f(y) dy \quad (20.3.3)$$

integral ko'rinishga ega bo'lamiz.

E'tibor bering, (20.2.4) tenglikka ko'ra,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1. \quad (20.3.4)$$

(20.3.2) Feyer yadrosini qulayroq ko'rinishga keltirish uchun, (20.2.3) tenglik va undan kelib chiquvchi quyidagi

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot D_k(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x = \cos kx - \cos(k+1)x$$

ayniyatdan foydalanamiz.

Agar bu tengliklarni  $k$  bo'yicha noldan  $n$  gacha yig'ib chiqsak, o'ng tarafdagi hadlar o'zaro qisqaradi:

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sum_{k=0}^n D_k(x) = 1 - \cos(n+1)x = 2 \sin^2 \frac{(n+1)x}{2}.$$

Bu tenglikni (20.3.2) ta'rif bilan taqqoslab,

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2 \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (20.3.5)$$

tenglikni olamiz.

**20.3.1 - tasdiq.** *Feyer yadrosi  $2\pi$ -davriy uzluksiz funksiya bo'lib, u quyidagi xossalarga ega:*

1) *istalgan  $x \in \mathbb{R}$  uchun*

$$F_n(x) \geq 0; \quad (20.3.6)$$

2) *quyidagi tenglik o'rinli:*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 1; \quad (20.3.7)$$

3)  $0 < \alpha < \pi$  *intervaldagi istalgan  $\alpha$  uchun,  $E_\alpha = \{x : \alpha \leq |x| \leq \pi\}$  to'plamda tekis ravishda,*

$$F_n(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (20.3.8)$$

*munosabat o'rinli.*

**Isbot.** 1) va 2) shartlar bevosita (20.3.5) va (20.3.4) formulalaridan kelib chiqadi.

Agar  $\alpha \leq |x| \leq \pi$  bo'lsa, (20.3.5) ga ko'ra,

$$F_n(x) \leq \frac{C(\alpha)}{n+1}, \quad \text{bu yerda} \quad C(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (20.3.9)$$

Demak, 3) shart ham bajarilar ekan. ■

**Natija.** *Feyer yadrolari delta-simon ketma-ketlik tashkil qiladi (10.6 - paragrafning 1 - bandidagi ta'rifga qarang).*

Navbatdagi tasdiq uzluksiz funksiyalarning trigonometrik Furiye qatorlarini jamlash nazariyasida asosiy rolni o'ynaydi.

**20.3.1 - teorema (Feyer).** *Istalgan uzluksiz  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya uchun,  $x \in [-\pi, \pi]$  bo'yicha tekis ravishda,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x) = f(x) \quad (20.3.10)$$

tenglik o'rinli.

**Isbot** bevosita 10.6.1 - teorema va Feyer yadrolari delta-simon ketma-ketlik ekanidan kelib chiqadi.

**Eslatma.** Chezaro o'rtachalari ma'lum Furiye qatori bo'yicha funksiya qiymatlarini tiklashda muvaffaqiyatli foydalaniladi. E'tibor bering, (20.3.3) integral ko'rinish va Feyer yadrosi musbat bo'lganidan,

$$\min_{-\pi \leq x \leq \pi} f(x) \leq \sigma_n(x, f) \leq \max_{-\pi \leq x \leq \pi} f(x)$$

baho kelib chiqadi. Bu bahodan ko'rinib turibdiki, o'rta arifmetiklar usuli Gibbs hodisasini va u sababli hosil bo'ladigan Furiye qatori tadbirlaridagi xatoliklarni bartaraf qiladi.

**2\*. Abel usuli.** Furiye qatorlarini jamlashning yana bir usuli N. Abel nomi bilan bog'liq bo'lib, u quyidagi

$$A_0 f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k$$

limitni hisoblashdan iborat.

$[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi istalgan  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya uchun uni Furiye qatorining *Abel o'rtachalarini* kiritamiz:

$$A_r f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k. \quad (20.3.11)$$

Abel o'rtachalari uchun integral ko'rinish topish maqsadida

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \quad (20.3.12)$$

tenglikdan foydalanamiz.

Istalgan  $0 < r < 1$  va barcha  $x \in \mathbb{R}$  uchun o'rinli bo'lgan bu tenglik 9 - bobda isbotlangan edi ((9.1.15) formulaga qarang).

(20.3.12) tenglikning o'ng tarafidagi funksiya *Puasson yadrosi* deb ataladi va

$$P(r, x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \quad (20.3.13)$$

deb belgilanadi.

(20.3.12) formulada  $x$  ni  $x - y$  ga o'zgartirib, ayirma kosinusi formulasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} P(r, x - y) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(x - y) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky), \quad 0 < r < 1. \end{aligned}$$

E'tibor bering,  $0 < r < 1$  da oxirgi qator  $x$  va  $y$  parametrlar bo'yicha tekis va absolyut yaqinlashadi. Shunday ekan, tenglik ikki tarafini  $f(y)$  ga ko'paytirib,  $[-\pi, \pi]$  kesma bo'yicha integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, x - y) f(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left( \cos kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky dy + \sin kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky dy \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k = A_r f(x). \end{aligned}$$



Bundan chiqdi, Abel o'rtachalari uchun quyidagi integral ko'rinish o'rinli ekan:

$$A_r f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, x-y) f(y) dy .$$

Agar  $y - x = t$  almashtirish bajarib,  $f$  funksiya davriyligini va  $P(r, t)$  yadroning  $t$  o'zgaruvchi bo'yicha juftligini hisobga olsak,

$$A_r f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) f(x+t) dt \quad (20.3.14)$$

tenglikni olamiz.

**20.3.1 - lemma.** *Ixtiyoriy  $r \in \mathbb{R}$  va  $-\pi \leq t \leq \pi$  uchun*

$$1 - 2r \cos t + r^2 \geq \frac{t^2}{\pi^2} \quad (20.3.15)$$

baho o'rinli.

**Isbot.** Chap tarafdagi ifodani  $q(r, t)$  bilan belgilaylik. Agar  $\pi/2 \leq |t| \leq \pi$  bo'lsa,  $\cos t \leq 0$  tengsizlik o'rinli. Demak,  $t$  ning bunday qiymatlari uchun (20.3.15) baho o'z-o'zidan ko'rinib turibdi:

$$q(r, t) = 1 + 2r|\cos t| + r^2 \geq 1 \geq \frac{t^2}{\pi^2}.$$

Agarda  $|t| \leq \pi/2$  bo'lsa, (20.3.15) baho quyidagicha ko'rsatiladi:

$$q(r, t) = (r - \cos t)^2 + \sin^2 t \geq \sin^2 t \geq \left(\frac{2t}{\pi}\right)^2 \geq \frac{t^2}{\pi^2}. \quad \blacksquare$$

Abel o'rtachalarini o'rganayotganda navbatdagi tasdiq asosiy rolni o'ynaydi.

**20.3.2 - tasdiq.** (20.3.13) Puasson yadrosi uzluksiz  $2\pi$ -davriy funksiya bo'lib, u quyidagi xossalarga ega:

1) *ixtiyoriy  $t \in \mathbb{R}$  va  $0 < r < 1$  uchun*

$$P(r, t) > 0; \quad (20.3.16)$$

2) quyidagi tenglik o'rinli:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1; \quad (20.3.17)$$

3)  $0 < \alpha < \pi$  intervaldagi ixtiyoriy  $\alpha$  uchun,  $E_\alpha = \{t : \alpha \leq |t| \leq \pi\}$  to'plamda tekis ravishda,

$$P(r, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (20.3.18)$$

*munosabat o'rinli.*

**Isbot.** 1) (20.3.16) tengsizlik bevosita (20.3.13) formuladan kelib chiqadi.

2) Agar  $f(x) \equiv 1$  bo'lsa, (20.3.11) ta'rifga ko'ra,  $A_r f(x) \equiv 1$ . Shunday ekan, (20.3.14) da  $f(x) \equiv 1$  deb, talab qilingan (20.3.17) tenglikni olamiz.

3) (20.3.13) ta'rif va (20.3.15) bahoga ko'ra,

$$P(r, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+r)(1-r)}{1-2r \cos t + r^2} \leq \pi^2 \frac{(1-r)}{t^2}.$$

Demak,  $\alpha \leq |t| \leq \pi$  va  $0 < r < 1$  lar uchun

$$P(r, x) \leq C_\alpha (1-r), \quad \text{bu yerda } C_\alpha = \frac{\pi^2}{\alpha^2}. \quad (20.3.19)$$

Bundan (20.3.18) shartning  $t \in E_\alpha$  bo'yicha tekis bajarilishi kelib chiqadi. ■

**Eslatma.** 20.3.2 - tasdiq, aslida,  $P(r, x)$  Puasson yadrosi  $r \rightarrow 1 - 0$  da delta-simon oilani tashkil qilishini anglatadi. Bundan 2π-davriy ixtiyoriy uzluksiz funksiyani o'z Furye qatorining Abel o'rtachalari bilan tekis yaqinlashtirish mumkinligi darhol kelib chiqadi. Bunda biz, xuddi 20.3.1 - teorema isbotidagi singari, 10.6.1 - teoremani qo'llab,  $r_k \rightarrow 1 - 0$  da tekis yaqinlashishga ega bo'lamiz, so'ngra, limit qiymatning Koshi va Heine ta'riflari teng kuchli bo'lgani sababli (11.2.2 - teoremaga qarang),  $r \rightarrow 1 - 0$  da talab qilingan tekis yaqinlashishni olamiz.

Shunday qilib, quyidagi tasdiq o'rinli:

**20.3.2 - teorema.**  $2\pi$ -davriy istalgan uzluksiz  $f$  funksiya uchun  $x \in [-\pi, \pi]$  bo'yicha tekis ravishda

$$\frac{a_0}{2} + \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k = f(x) \quad (20.3.20)$$

tenglik o'rinli.

**20.3.1 - misol.** Faraz qilaylik,  $\Omega$  ixtiyoriy ikki o'lchovli soha bo'lib, u  $\partial\Omega$  Jordan egri chizig'i bilan chegaralangan bo'lsin. Bu sohada, matematik fizikada nihoyatda muhim rol o'ynovchi, *Dirixle masalasini* qaraymiz. Bu masala,  $\Omega$  ochiq sohada garmonik va  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  yopiq sohada uzluksiz bo'lgan, shunday  $u(x)$  funksiyani topishdan iboratki, bu funksiya chegarada  $f(s)$  qiymatni qabul qilsin, ya'ni

$$\Delta u(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in \Omega; \quad u(s) = f(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (20.3.21)$$

Berilgan  $f$  chegaraviy funksiya  $\partial\Omega$  egri chiziqda uzluksiz deb faraz qilinadi.

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  birlik doira bo'lgan maxsus holda Dirixle masalasini yechishning sxemasini keltiramiz.

Ma'lumki,  $(r, \varphi)$  qutb koordinatalarida  $f$  chegaraviy funksiya  $\varphi$  burchakning  $2\pi$ -davriy uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani Furye qatoriga yoyamiz:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (20.3.22)$$

$\Omega$  birlik doirada  $u(r, \varphi)$  funksiyani

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (20.3.23)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

E'tibor bering, bu funksiya  $f$  chegaraviy funksiya Furiye qatori-ning Abel o'rtachalari bilan ustma-ust tushadi.

(20.3.23) qatorning har bir hadi garmonik funksiya bo'lib, ikki marta differensiallangan qator  $r < 1$  da tekis yaqinlashishini ko'rsatish qiyin emas. Demak,  $u$  funksiya  $\Omega$  doirada garmonik, ya'ni bu doira ichida Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

20.3.2 - teoremdan esa, bu funksiyaning doira chegarasidagi limit qiymati  $f(\varphi)$  ga teng ekani kelib chiqadi. Shuning uchun  $u$  funksiyani, uzluksizligini saqlagan holda,  $\Omega$  ochiq sohadan  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  yopiq doiraga davom ettirish mumkin. Demak, (20.3.23) tenglik bilan aniqlangan  $u$  funksiya birlik doirada (20.3.21) Dirixle masalasini yechimidir.

**Eslatma.** Qaralgan misolda maxsus soha sifatida doira tanlanishi bejiz emas. Chunki kompleks argumentli funksiyalar nazariyasida isbotlanganidek, Jordan egri chizig'i bilan chegaralangan har qanday yassi sohani birlik doiraga shunday homeomorf akslantirish mumkinki, bunda har bir garmonik funksiya yangi o'zgaruvchilarda ham garmonik bo'lib qoladi. Dirixle masalasini doirada yechib, teskari akslantirish qo'llasak, biz masala yechimini boshlang'ich sohada olamiz. Bundan chiqdi, birlik doirada Dirixle masalasini yechilishi bu masalaning yassi sohalarning keng sinfi uchun ham yechilishiga olib keladi.

## 20.4-§. Furiye qatorlarining kompleks shakli

1. Ushbu paragrafda biz sonlar o'qida aniqlangan  $2\pi$ -davriy va kompleks qiymat qabul qiluvchi funksiyalarni, ya'ni  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  ko'rinishdagi funksiyalarni qaraymiz, bu yerda  $f_k(x)$  funksiyalar  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi funksiyalardir.

Navbatdagi

$$e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20.4.1)$$

funksiyalarning cheksiz ketma-ketligi  $[-\pi, \pi]$  kesmada xuddi (20.0.3) singari ortogonallik shartini qanoatlantiradi. Haqiqatan,

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ijx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx = \delta_{kj}.$$

$[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi ixtiyoriy  $f$  funksiyaning (20.4.1) sistema bo'yicha Furiye qatorini quyidagicha yozamiz:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (20.4.2)$$

bunda  $c_k$  sonlar Furiye koeffitsiyentlari deb atalib,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (20.4.3)$$

ko'rinishga ega.

**Eslatma.** Agar  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi  $f$  funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qilsa, uning Furiye qatorini

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (20.4.4)$$

ko'rinishda yozgan edik. Bu qatorini (20.4.2) kompleks shaklda ham yozish mumkin. Haqiqatan, sinus va kosinuslar uchun Eyler formulasi ((10.9.37) formulaga qarang) foydalanib, quyidagi

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2} (a_k - ib_k) e^{ikx} + \frac{1}{2} (a_k + ib_k) e^{-ikx} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \quad (20.4.5) \end{aligned}$$

talab qilingan natijani olamiz, bunda kompleks ko‘rinishdagi Furiye koeffitsientlari

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k \geq 1), \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (20.4.6)$$

kabi aniqlanadi.

Aksincha, agar haqiqiy funksiyaning Furiye qatori (20.4.3) kompleks shaklida berilgan bo‘lsa, (20.4.5) tengliklar va

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad (20.4.7)$$

formular yordamida uni oddiy (20.4.4) shaklga olib kelish mumkin.

(20.1.1) ta’rifga o‘xshash, (20.4.3) Furiye qatorining *qisimiy yig‘indilari* deb quyidagi

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (20.4.8)$$

yig‘indiga aytamiz.

Xuddi (20.1.1) formula kabi, (20.4.8)  $n$ -qisimiy yig‘indiga ham ortogonal sistemaning  $(2n + 1)$  ta elementi kiradi.

(20.4.3) kompleks Furiye qatori uchun quyidagi Parseval tengligi o‘rinli:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (20.4.9)$$

**2.** Ushbu bandda funksiya va uni hosilasining kompleks shakldagi Furiye qatorlari o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganamiz. Bunda,  $c_k$  lar  $f$  funksiyaning Furiye koeffitsiyentlari ekaniga urg‘u berish maqsadida, ularni  $c_k(f)$  simvol bilan belgilaymiz.

Aytaylik,  $2\pi$ -davriy  $f(x)$  funksiya Riman bo‘yicha integrallanuvchi  $f'(x)$  hosilaga ega bo‘lsin. Hosilaning  $c_k(f')$  Furiye koeffitsientlarini bo‘laklab integrallash yordamida hisoblaymiz (davriylik shartiga ko‘ra, integraldan tashqari hadlar nolga aylanadi):

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = ik c_k(f).$$

Bu jarayonni davom ettirib, navbatdagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

**20.4.1 - tasdiq.** Faraz qilaylik,  $f$  funksiya  $[-\pi, \pi]$  kesmada  $m-1$  ta uzluksiz hosilaga ega bo'lib,  $m$ -tartibli hosilasi shu kesmada integrallanuvchi bo'lsin. Agar  $f$  va uning birinchi  $m-1$  ta hosilasi quyidagi

$$f^{(j)}(\pi) = f^{(j)}(-\pi), \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (20.4.10)$$

davriylik shartini qanoatlantirsa,  $u$  holda, istalgan  $k \in \mathbb{Z}$  uchun

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f) \quad (20.4.11)$$

tenglik bajariladi.

**Natija.** 20.4.1 - tasdiq shartlari ostida quyidagi Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 |k|^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(x)|^2 dx. \quad (20.4.12)$$

(20.4.12) tenglik funksiya silliqdigi oshgan sari uning Furiye koefitsientlari tezroq nolga intilishini anglatadi. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli ekanini, ya'ni Furiye koefitsientlar qanchalik tez nolga intilsa, funksiya shuncha silliq bo'lishini ko'rsatish mumkin.

**20.4.2 - tasdiq.** Faraz qilaylik,  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi  $f$  funksiya Furiye koefitsiyentlari biror natural  $m$  bilan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \cdot |k|^m < +\infty \quad (20.4.13)$$

shartni qanoatlantirsin.

$U$  holda  $f$  funksiya  $\mathbb{R}$  sonlar o'qida  $m$  marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

**Isbot.** (20.4.13) shart chap tomondagi sonli qatorning yaqinlashishini anglatadi. Bundan chiqdi, Veyershtass alomatiga asosan,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^m c_k e^{ikx} \quad (20.4.14)$$

funksional qator sonlar o'qida absolyut va tekis yaqinlashadi. 20.4.1 - tasdiqqa ko'ra, (20.4.14) qator  $f$  funksiya Furye qatorini  $m$  marta formal ravishda differensiallash natijasidir. Bu qator yaqinlashgani sababli, 10.7.4 - teoremaga ko'ra,  $f$  funksiya  $m$ -tartibli uzluksiz hosilaga ega. ■

**Eslatma.** Odatda, 20.4.2 - tasdiq (20.4.12) tenglik bilan birgalikda qo'llaniladi. Buni navbatdagi misolda ko'rishimiz mumkin.

**20.4.1 - misol.** Faraz qilaylik, barcha  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  lar uchun  $\{\mu_k\}$  chegaralangan kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.  $[-\pi, \pi]$  kesmada integrallanuvchi har bir  $f$  funksiyaga, Furye qatori

$$Bf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k c_k(f) e^{ikx} \quad (20.4.15)$$

ko'rinishga ega bo'lgan,  $Bf$  funksiyani mos qo'yuvchi  $B$  akslantirishni qaraymiz. Boshqacha aytganda, barcha  $k$  indekslar uchun  $c_k(Bf) = \mu_k c_k(f)$  tenglik bajarilsin.

Shunday eng katta  $W[-\pi, \pi]$  sinfni topish talab qilinadiki, bunda istalgan  $f \in W[-\pi, \pi]$  uchun  $Bf$  funksiya mavjud va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.

20.4.2 - tasdiq va (20.4.12) tenglikka ko'ra,  $W[-\pi, \pi]$  sinf sifatida  $m = 3$  uchun 20.4.1 - tasdiq shartlarini qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar sinfini olishimiz mumkin. Haqiqatan, har bir bunday  $f$  funksiya uchun

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 k^6 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'''(x)|^2 dx$$

tenglik o'rinli. Bu tenglik va

$$|c_k(f)| k^2 = |c_k(f)| |k|^3 \cdot \frac{1}{|k|} \leq |c_k(f)|^2 k^6 + \frac{4}{k^2}$$

bahoga ko'ra,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| \cdot k^2 < +\infty.$$



Boshqa tarafdin,  $\{\mu_k\}$  ketma-ketlik chegaralanganligi sababli,  $|c_k(Bf)| \leq M|c_k(f)|$ . Demak,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(Bf)| < +\infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(Bf)| \cdot |k|^2 < +\infty. \quad (20.4.18)$$

(20.4.18) dagi birinchi qator yaqinlashgani sababli, (20.4.17) qator yig'indisi korrekt aniqlangan va u  $2\pi$ -davriy uzluksiz funksiyadir. Ikkinchi qator yaqinlashishidan esa, 20.4.2 - tasdiqqa ko'ra, (20.4.17) funksiyaning ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi ekani kelib chiqadi.

$\{\mu_k\}$  ketma-ketlikka misol sifatida

$$\mu_k(t) = e^{itk^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ketma-ketlikni olaylik. U holda  $|\mu_k| \leq 1$  bo'ladi. Shunday ekan, istalgan  $f \in W[-\pi, \pi]$  uchun

$$\psi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{itk^2 + ikx} \quad (20.4.19)$$

funksiya  $x \in \mathbb{R}$  bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchidir. Bu funksiya  $t \in \mathbb{R}$  bo'yicha ham bir marta uzluksiz differensiallanuvchi. Oddiy hisoblash ko'rsatadiki,  $t$  bo'yicha birinchi hosila va  $x$  bo'yicha ikkinchi hosila

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (20.4.20)$$

tenglik bilan bog'langan. Bundan tashqari,  $\psi(x, 0) = f(x)$ .

Shuni aytish joizki, (20.4.20) munosabat kvant mexanikasining asosiy tenglamasi - Shredinger tenglamasining sodda variantidir.

## 20.5-§. Karrali Furiye qatorlari

1. Ushbu paragrafda ko'p o'lchovli  $\mathbb{R}^n$  fazosidagi trigonometrik Furiye qatorlari haqida umumiy ma'lumotlar beriladi. Asosiy o'rganiladigan ob'ekt har bir argumenti bo'yicha  $2\pi$ -davriy va  $n$  o'lchovli

$$\mathbb{T}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : -\pi \leq x_j \leq \pi\}$$

kubda Riman bo'yicha integrallanuvchi kompleks qiymatli funksiyalardir.

Eslatib o'tamiz, barcha butun sonlar to'plamini  $\mathbb{Z}$  bilan belgilagan edik.  $\mathbb{Z}^n$  simvol bilan  $\mathbb{R}^n$  dagi butun sonli panjarani belgilaymiz, ya'ni  $k \in \mathbb{Z}^n$  degani  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  bo'lib,  $k_j \in \mathbb{Z}$  ekanini anglatadi.

Odatdagidek,  $k \in \mathbb{Z}^n$  va  $x \in \mathbb{R}^n$  elementlarning skalyar ko'paytmasi

$$kx = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n \quad (20.5.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Har bir argumenti bo'yicha  $2\pi$ -davriy bo'lgan

$$e_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{ikx} \quad (20.5.2)$$

funksiyalar sistemasi xuddi (20.0.3) singari ortogonallik shartini qanoatlantiradi.

$\mathbb{T}^n$  da integrallanuvchi istalgan  $f$  funksiyaning (20.5.2) sistema bo'yicha *Furye qatori*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx} \quad (20.5.3)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda  $f_k$  *Furye koeffitsiyentlari*

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx \quad (20.5.4)$$

kabi aniqlanadi.

Agar (20.5.2) funksiyalarni

$$(2\pi)^{-n/2} e^{ikx} = \frac{e^{ik_1x_1}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{ik_2x_2}}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{e^{ik_nx_n}}{\sqrt{2\pi}}$$

kabi ko'paytma ko'rinishida yozib olsak, har bir ko'paytuvchi uchun (20.4.9) Parseval tengligi o'rinli ekanini ko'ramiz. Demak, 20.6.2 -

teoreмага asosan, ularning ko'paytmasi uchun ham quyidagi natijalar o'rinli (20.6.1 - teoreмага ham qarang):

**20.5.1 - tasdiq.**  $\mathbb{T}^n$  da integrallanuvchi istalgan  $f$  funksiya Furye qatori unga o'rta kvadratik yaqinlashadi.

**20.5.2 - tasdiq.**  $\mathbb{T}^n$  da integrallanuvchi istalgan  $f$  funksiya uchun Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx. \quad (20.5.5)$$

**2.** Karrali Furye qatorlarining navbatdagi xossasi qisman hosilali differensial tenglamalarni yechishda qo'llaniladi.

**20.5.1 - teorema.** Agar  $f$  funksiya va uning  $D_j f$  hosilasi  $\mathbb{T}^n$  da integrallanuvchi va  $2\pi$ -davriy bo'lib,  $D_j f$  hosila  $Ox_j$  o'qqa parallel bo'lgan ixtiyoriy kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda ularning Furye koeffitsiyentlari

$$(D_j f)_k = (ik_j) f_k \quad (20.5.6)$$

tenglik bilan bog'langan bo'ladi.

**Isbot.** Agar  $x_j$  dan boshqa o'zgaruvchilarni tayinlab,  $-\pi \leq x_j \leq \pi$  kesmada bo'laklab integrallasak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_j f(x) e^{-ik_j x_j} dx_j = f(x) e^{-ik_j x_j} \Big|_{x_j=-\pi}^{x_j=\pi} + ik_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ik_j x_j} dx_j$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikni boshqa o'zgaruvchilar bo'yicha integrallab, integraldan tashqari hadlar nolga aylannishini hisobga olsak, talab qilingan tenglikni olamiz:

$$(D_j f)_k = \int_{\mathbb{T}^n} D_j f(x) e^{-ikx} dx = ik_j \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx = ik_j f_k. \quad \blacksquare$$

**1 - natija.** Agar  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya  $\mathbb{T}^n$  yopiq kubda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda quyidagi Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla f(x)|^2 dx. \quad (20.5.7)$$

**Eslatma.**  $\mathbb{T}^n$  yopiq kubda  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiyaning uzluksiz differensiallanuvchiligi barcha  $D_j f$  hosilalarning kub ichida uzluksiz bo'lib, chegarada esa,  $D_j f$  hosilaning kub ichidan limit qiymatiga teng bo'lgan bir tarfli hosilalar mavjudligini anglatadi. Bunday ta'rifda, funksiyaning o'zi har bir  $x_m$  o'zgaruvchi bo'yicha

$$f(x)|_{x_m=-\pi} = f(x)|_{x_m=\pi}, \quad j, m = 1, 2, \dots, n, \quad (20.5.8)$$

davriylik shartlarini qanoatlantirsada, ammo  $D_j f$  hosilalar bu shartlarni qanoatlantirmasligi mumkin.

**2 - natija.** Agar  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazoda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,  $\mathbb{T}^n$  yopiq kubda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda unga Laplas operatori ta'sirining Furye qatori

$$\Delta f(x) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^2 f_k e^{ikx} \quad (20.5.9)$$

ko'rinishga ega. Bunda quyidagi Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^4 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\Delta f(x)|^2 dx. \quad (20.5.10)$$

**Eslatma.** Agar  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazoda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u  $\mathbb{T}^n$  kub chegarasida ham differensiallanuvchi bo'ladi. Ya'ni, har bir  $x_m$  o'zgaruvchi bo'yicha davriylik sharti bajariladi:

$$D_j f(x)|_{x_m=-\pi} = D_j f(x)|_{x_m=\pi}, \quad j, m = 1, 2, \dots, n. \quad (20.5.11)$$

Lekin, 2 - natija shartida ikkinchi hosilalar  $\mathbb{T}^n$  chegarasida bir tomonli ma'noda tushunilgani uchun, ular davriylik shartini qanoatlantirishi shart emas.

**3.** Ko'p o'zgaruvchili holda istalgan funksiya Furye qatorining yaqinlashish muammosi bir o'zgaruvchili holga nisbatan ancha murakkabdir. Bu murakkablik karrali qatorlar qismaniy yig'indilarini tanlashda xilma-xillikning ko'pligidanoq seziladi. Eng ko'p uchraydigan qismaniy yig'indilar to'g'ri to'rtburchakli va sferik qismaniy yig'indilardir.

To'g'ri to'rtburchakli qismaniy yig'indilar  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  vektor bilan aniqlanib,

$$S_m f(x) = \sum_{|k_1| \leq m_1} \sum_{|k_2| \leq m_2} \dots \sum_{|k_n| \leq m_n} f_{k_1 k_2 \dots k_n} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} \quad (20.5.12)$$

ko'rinishga ega, bu yerda  $m_j$  lar natural sonlardir.

Agar istalgan  $\varepsilon > 0$  olganda ham shunday  $N$  topilsaki,

$$m_1 \geq N, m_2 \geq N, \dots, m_n \geq N$$

shartlarni qanoatlantiruvchi barcha  $m$  vektorlar uchun

$$|S_m f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (20.5.3) Furye qatori  $f(x)$  ga to'g'ri to'rtburchakli bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Doiraviy yoki sferik qismaniy yig'indilar  $R > 0$  haqiqiy son bilan aniqlanib,

$$S_R f(x) = \sum_{|k| < R} f_k e^{ikx} \quad (20.5.13)$$

ko'rinishga ega.

Agar

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} S_R f(x) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, (20.5.3) Furye qatori  $f(x)$  ga doiralalar bo'yicha (yoki sferalar bo'yicha) yaqinlashadi deyiladi.

Absolyut yaqinlashmaydigan qatorlar uchun to'g'ri to'rtburchakli va sferik qismaniy yig'indilar o'zlarini turlicha tutishadi va shu sababli, ular uchun yaqinlashish shartlari ham turlichadir.

Ammo karrali qatorlarning absolyut yaqinlashish shartlari qisimiy yig'indilarni tanlashga bog'liqmas va eng sodda yetarli shartlar navbatdagi lemmaga asoslanadi. Bunda biz quyidagi

$$\|f\| = \left( \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

belgilashdan foydalanamiz.

**20.5.1 - lemma.** Faraz qilaylik,  $\mathbb{T}^n$  da integrallanuvchi  $2\pi$ -davriy funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazosida  $m$  marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.  $U$  holda uning Furye koeffitsiyentlari uchun

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 (1 + |k|^{2m}) \leq C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2 \quad (20.5.14)$$

tengsizlik o'rinli.

**Isbot.** Eslatib o'tamiz, ixtiyoriy  $\alpha$  multiindeks uchun  $D^\alpha f(x)$  xususiy hosilalar (12.2.36) tenglik bilan aniqlanadi.

(20.5.14) bahoning isboti  $m$  sonining toq yoki juftligiga bog'liq.

Agar  $m = 2l$  bo'lsa, biz (20.5.10) formulada  $f$  funksiyani uning  $\Delta^{l-1} f = \Delta^{m/2-1} f$  takroriy Laplasianiga almashtirib, (20.5.9) tenglikdan kelib chiqadigan  $(\Delta^{m/2-1} f)_k = (-|k|^2)^{m/2-1} f_k$  munosabatdan foydalanamiz. Natijada (e'tibor bering, oxirgi tengsizlikni olishda takroriy Laplasiani koordinatalarga yoyishimiz kerak)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^{2m} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx \leq C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2 \quad (20.5.15)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Agar  $m = 2l+1$  bo'lsa, (20.5.7) formulada  $f$  o'rniga uning  $\Delta^l f = \Delta^{(m-1)/2} f$  takroriy Laplasianlarini qo'yib,  $(\Delta^l f)_k = (-|k|^2)^l f_k$  munosabatdan foydalanamiz:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 |k|^{2m} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\text{grad}[\Delta^{(m-1)/2} f(x)]|^2 dx \leq$$

$$\leq C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2. \quad (20.5.16)$$

(20.5.5) Parseval tengligiga juft  $m$  larda (20.5.15) tengsizlikni, toq  $m$  larda esa, (20.5.16) tengsizlikni qo'shib,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2 (1 + |k|^{2m}) \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|f\|^2 + C_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2$$

bahoni olamiz. Bu baho talab qilingan (20.5.14) bahoga teng kuchlidir. ■

**20.5.2 - teorema.** *Faraz qilaylik, har bir argumenti bo'yicha  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya  $\mathbb{R}^n$  fazosida  $m$  marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar  $m > n/2$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya Furye qatori absolyut va  $x \in \mathbb{R}^n$  bo'yicha tekis yaqinlashadi.*

**Isbot.** Teorema shartini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya Furye koeffitsiyentlari absolyut yaqinlashuvchi qator tashkil qilishini, ya'ni

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k| < +\infty \quad (20.5.17)$$

ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun quyidagi sodda

$$\begin{aligned} |f_k| &= |f_k| (1 + |k|^2)^{m/2} \cdot \frac{1}{(1 + |k|^2)^{m/2}} \leq \\ &\leq |f_k|^2 (1 + |k|^2)^m + \frac{1}{4(1 + |k|^2)^m} \end{aligned}$$

tengsizlikka ahamiyat beraylik.

O'ng tarafdagi har ikki had (bunda birinchisi 20.5.1 - lemmaga ko'ra, ikkinchisi esa, 14.1.7 - misolga ko'ra) yaqinlashuvchi qatorlar hadlaridir. Bundan (20.5.17) qatorning va demak, (20.5.3) Furye qatorining absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi. Furye qatorining tekis yaqinlashishi Veyershtrass alomatining natijasidir. ■

**1 - eslatma.** Agar  $2\pi$ -davriy  $f$  funksiya 20.5.2 - teorema shartlarini qanoatlantirsa, u  $\mathbb{T}^n$  kub chegarasida ham  $m$  marta differensiallanuvchi bo'ladi. Bundan chiqdi, har bir  $x_j$  o'zgaruvchi bo'yicha

$|\alpha| \leq m$  shartni qanoatlantiruvchi istalgan  $\alpha$  multiindeks uchun

$$D^\alpha f(x)|_{x_j=-\pi} = D^\alpha f(x)|_{x_j=\pi}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (20.5.18)$$

davriylik shartlari bajariladi.

Ammo bevosita isbotdan ko'rinib turibdiki, (20.5.18) davriylik shartlari  $|\alpha| \leq m - 1$  uchun bajarilganida ham, teorema o'rinli bo'lib qoladi. Bunda,  $m$ -xususiy hosilalar  $\mathbb{T}^n$  chegarasida bir tomonli ma'nosida tushunilib, ularning davriylik shartini qanoatlantirishi shart emas.

**2 - eslatma.**  $n$  karrali Furye qatori absolyut yaqinlashishining  $m > n/2$  yetarli shartini kuchsizlantirish mumkin emas. Chunonchi, agar  $m \leq n/2$  bo'lsa, shunday  $2\pi$ -davriy va  $\mathbb{R}^n$  fazoda  $m$  marta uzluksiz differensiallanuvchi  $f$  funksiya topiladiki, uning Furye qatori absolyut uzoqlashadi.

**4.** Karrali Furye qatorlarining tadbiqui sifatida davriy muhitda issiqlik tarqalish masalasini qaraylik.

**20.5.1 - misol.** Navbatdagi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad t > 0, \quad (20.5.19)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining  $2\pi$ -davriy va  $u(x, 0) = \varphi(x)$  boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechimni, aniqlanishi talab qilinadigan  $c_k(t)$  koeffitsientli,  $x \in \mathbb{T}^n$  o'zgaruvchi bo'yicha Furye qator ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(t) e^{ikx}. \quad (20.5.20)$$

Bu tenglikni  $t$  bo'yicha formal ravishda differensiallasak,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c'_k(t) e^{ikx}$$

tenglikni olamiz.



Endi  $x$  bo'yicha formal ravishda differensiallasak,

$$\Delta u(x, t) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^2 c_k(t) e^{ikx}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan chiqdi, (20.5.20) funksiya (20.5.19) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} [c'_k(t) + a^2 |k|^2 c_k(t)] e^{ikx} = 0$$

tenglik bajarilishi zarur.

Demak, har qanday butun koordinatali  $k$  vektor uchun

$$c'_k(t) + a^2 |k|^2 c_k(t) = 0$$

bo'lishi kerak.

Bu tenglik oddiy differensial tenglama bo'lib, uning umumiy yechimi

$$c_k(t) = C_k e^{-a^2 |k|^2 t}$$

ko'rinishga ega, bu yerda  $C_k$  koeffitsient  $t$  ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmasdir. Shunday qilib, issiqlik tarqalish tenglamasining  $x$  bo'yicha  $2\pi$ -davriy yechimini karrali trigonometrik qator ko'rinishida yozish mumkin:

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} C_k e^{ikx - a^2 |k|^2 t}. \quad (20.5.21)$$

Biz  $t = 0$  da  $\varphi(x)$  funksiyaga teng yechimni qidirayapmiz. Bu funksiyani Furiye qatoriga yoyaylik:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k e^{ikx}. \quad (20.5.22)$$

$u(x, 0) = \varphi(x)$  bo'lgani uchun, (20.5.21) va (20.5.22) ga ko'ra,  $C_k = \varphi_k$ . Demak, o'rganilayotgan masalaning yechimi

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k e^{ikx - a^2 |k|^2 t}$$

ko'rinishga ega.

**Eslatma.** Yuqoridagi mulohazalarni 20.5.2 - teorema yordamida asoslash mumkin.

Xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, har bir  $x_j$  o'zgaruvchi bo'yicha juft funksiyalar quyidagi

$$\varphi_k(x) = \cos k_1 x_1 \cdot \cos k_2 x_2 \cdots \cos k_n x_n \quad (20.5.23)$$

*kosinuslar sistemasi* bo'yicha yoyilishi mumkin.

Agar

$$\mathbb{T}_+^n = [0, \pi]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, n\}$$

deb belgilasak,  $\mathbb{T}_+^n$  da integrallanuvchi funksiyalarning (20.5.23) ortogonal sistema bo'yicha Furye qatorlari uchun 20.5.1- va 20.5.2 - kabi tasdiqlar o'rinli bo'ladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun bir karrali kosinuslar sistemasi-ning xossasini esga olib, ilovadagi 20.6.2 - teoremani qo'llash yetarli.

Har bir  $x_j$  o'zgaruvchi bo'yicha toq funksiyalar quyidagi

$$\psi_k(x) = \sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n \quad (20.5.24)$$

*sinuslar sistemasi* bo'yicha yoyilishi mumkin.

$\mathbb{T}_+^n$  da integrallanuvchi funksiyalarning (20.5.24) ortogonal sistema bo'yicha Furye qatorlari uchun ham 20.5.1- va 20.5.2 - kabi tasdiqlar o'rinli bo'ladi.

Navbatdagi misolda issiqlik tarqalish tenglamasining davriy bo'lishi shart bo'lmagan yechimlari qidiriladi.

**20.5.2 - misol.**  $t > 0$  da  $\mathbb{T}_+^n$  kub ichida (20.5.19) issiqlik tarqalish tenglamasining, kub chegarasida nolga teng va  $u(x, 0) = \varphi(x)$  boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi, yechimi topilsin.

Yechimni (20.5.24) sinuslar sistemasi bo'yicha Furye qator ko'rinishida qidiramiz. Bunda chegarada nolga tenglik shartlari o'z-o'zidan bajariladi.

Avval boshlang'ich funksiyani bu sistema bo'yicha qatorga yoyaylik:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, k_j \geq 1} \varphi_k \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n.$$

Endi 20.5.1 - misolda keltirilgan mulohazalarni takrorlasak, yechim uchun

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, k_j \geq 1} \varphi_k e^{-a^2 |k|^2 t} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n \quad (20.5.25)$$

formulani olamiz.

**Eslatma.** Birinchi marta uch o'lovli kubning sovish masalasi J.B. Furiye tomonidan ikki yuz yil avval o'rganilgan edi. Furiye aniqlagan va keyinchalik uning klassik "Issiqlikning analitik nazariyasi" (1822) nomli monografiyasida keltirilgan yechim

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{klm} e^{-a^2(k^2+l^2+m^2)t} \sin kx \sin ly \sin mz$$

ko'rinishga ega edi ((20.5.25) formula bilan taqqoslang).

Bu formuladan vaqtni katta qiymatlaridagi asimptotikaning bosh qismini aniqlash mumkin:

$$u(x, t) = e^{-3a^2 t} \sin x \sin y \sin z [\varphi_{111} + o(1)], \quad t \rightarrow +\infty.$$

Oxirgi ikki asr davomida matematik tahlilning eng sermahsul tarmoqlaridan biri bo'lib kelayotgan garmonik tahlilning rivojlani-shiga yuqoridagi monografiya katta turtki bo'lib xizmat qildi.

## 20.6-§. Ilova (Evklid fazosidagi ortogonal qatorlar)

1.  $(u, v)$  skalyar ko'paytma va unga mos  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$  normaga ega bo'lgan  $E$  vektor fazo Evklid fazosi deyiladi. Ushbu paragrafda biz haqiqiy Evklid fazolarini, ya'ni haqiqiy sonlar maydoni ustidagi vektor fazolarni qaraymiz.

Skalyar ko'paytmaning asosiy xossalariidan biri Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidir:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (20.6.1)$$

Uchburchak tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (20.6.2)$$

tengsizlik (20.6.1) ning natijasi ekanini ko'rish qiyin emas.

Agar  $u_n \in E$  ketma-ketlik va  $u \in E$  element uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

tenglik bajarilsa, bu ketma-ketlik  $u$  ga yaqinlashadi deyiladi.

Ushbu

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|$$

tengsizlikdan  $u$  ga yaqinlashuvchi  $\{u_n\}$  ketma-ketlikning

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u\| \quad (20.6.3)$$

munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Ushbu paragrafda asosan cheksiz o'lvohli Evklid fazolari, ya'ni istalgan  $n$  nomer uchun  $n$  ta chiziqli erkli elementga ega bo'lgan Evklid fazolari qaraladi.

**20.6.1 - misol.** Haqiqiy qiymat qabul qiluvchi hamda  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning vektor fazosini qaraymiz. Riman integrali xossalariga ko'ra, bunday funksiyalarning kvadrati ham  $[a, b]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'ladi (6.4.4 - teorema va uning natijasiga qarang).

Skalyar ko'paytmani

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (20.6.4)$$

ko'rinishda aniqlab, bu vektor fazoni Evklid fazosiga aylantirish mumkin. Hosil bo'lgan Evklid fazosini  $R[a, b]$  simvol bilan belgilaymiz.

Shuni qayd qilish kerakki, bu simvoldan biz faqat ushbu bobda va faqat yozuvni soddalashtirish maqsadida foydalanamiz. Kiritilgan Evklid fazosini bunday belgilashdan matematik adabiyotlarda

foydalanilmaslikning sababi ushbu paragraf oxiridagi eslatmada tushuntiriladi.

Istalgan  $f \in R[a, b]$  element uchun (20.6.4) skalyar ko'paytmaga mos norma

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (20.6.5)$$

kabi aniqlanadi.

Bu holda (20.6.1) Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi quyidagi

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (20.6.6)$$

ko'rinishga ega.

Skalyar ko'paytmaning muhim xossalardan biri uning xosmasligidir, ya'ni  $(f, f) = 0$  shartdan  $f$  vektor fazoning nol elementi ekani kelib chiqishi kerak. Lekin, biz kiritgan fazoda, masalan, faqat biror nuqtada noldan farqli istalgan funksiya uchun (20.6.5) skalyar kvadratning nolga tengligi aniq.

$R[a, b]$  Evklid fazosidagi skalyar ko'paytma xosmaslik xossasiga ega bo'lishiga erishish uchun, §19.5 da kiritilgan nolga ekvivalent funksiya tushunchasidan foydalanamiz. Chunonchi, agar biror  $f \in R[a, b]$  funksiya uchun

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0 \quad (20.6.7)$$

shart bajarilsa, uni *nolga ekvivalent* deymiz.

$R[a, b]$  sinfidagi kiritilgan bu ta'rifning (19.5.11) ta'rif bilan ustma-ust tushishini tekshirish oson.

Agar  $f$  nolga ekvivalent bo'lsa, (20.6.6) Koshi-Bunyakovskiy

tengsizligiga ko'ra, istalgan  $g \in R[a, b]$  funksiya uchun

$$(f, g) \equiv \int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli, ya'ni, agar istalgan  $g \in R[a, b]$  funksiya uchun  $(f, g) = 0$  bo'lsa,  $f$  nolga ekvivalent bo'ladi. Isbotlash uchun  $g = f$  deb olish yetarli.

Agar ikki  $f_1 \in R[a, b]$  va  $f_2 \in R[a, b]$  funksiya uchun  $f_1 - f_2$  ayirma nolga ekvivalent bo'lsa, bu funksiyalarni *ekvivalent* deymiz. Agar  $f_1$  va  $f_2$  funksiyalar ekvivalent bo'lsa, istalgan  $g \in R[a, b]$  funksiya uchun

$$(f_1, g) = (f_2, g)$$

tenglik o'rinli.

Bundan buyon, biz  $R[a, b]$  fazosida ekvivalent funksiyalarni farqlamaymiz. Aniqlik uchun,  $R[a, b]$  fazo elementi deganda, biz ekvivalent funksiyalar sinfini tushunamiz. Natijada  $R[a, b]$  vektor fazo Evklid fazosiga aylanadi.

E'tibor bering, agar uzluksiz funksiya nolga ekvivalent bo'lsa, u aynan nolga teng bo'ladi. Umuman, agar  $R[a, b]$  dagi nolga ekvivalent funksiya biror  $\Delta \subset [a, b]$  intervalda uzluksiz bo'lsa, u shu intervalning barcha nuqtasida nolga tengdir.

**2.** Skalyar ko'paytmaning mavjudligi tufayli, muhim bo'lgan ortogonallik tushunchasini kiritish mumkin.

**Ta'rif.** Agar ikki  $u \in E$  va  $v \in E$  element uchun

$$(u, v) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ular **ortogonal** deyiladi.

Ikki va uch o'lchovli Evklid fazolarida ikki vektor ortogonallik ularning perpendikulyarligini anglatadi. Shu sababli, umumiy holda ham, ortogonallik  $u \perp v$  simvol bilan belgilanadi.

Ixtiyoriy Evklid fazosida Pifagor teoremasi o'rinli:

har qanday ikki ortogonal  $u \in E$  va  $v \in E$  element uchun

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad (20.6.8)$$

tenglik bajariladi.

Bu tenglik quyidagi

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2$$

ayniyatdan kelib chiqadi.

(20.6.8) tenglikni takroriy qo'llash natijasida Pifagor teoremasining quyidagi ko'p o'lchovli holiga kelamiz:

agar  $u_1, u_2, \dots, u_n$  elementlar o'zaro ortogonal bo'lsa, ya'ni

$$(u_k, u_j) = 0, \quad k \neq j,$$

bo'lsa,  $u$  holda

$$\left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \quad (20.6.9)$$

tenglik bajariladi.

Cheksiz o'lchovli Evklid fazosida Pifagor teoremasining cheksiz o'lchovli holi ham o'rinli:

faraz qilaylik,  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  ketma-ketlik o'zaro ortogonal elementlardan tashkil topgan bo'lsin. Agar

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

qator yaqinlashsa,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 \quad (20.6.10)$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan, shartga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow u, \quad n \rightarrow \infty.$$

U holda, (20.6.9) va (20.6.3) formulalarga asosan,

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|^2 \rightarrow \|u\|^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

**3.** Agar Evklid fazosining  $\{\mathbf{g}_k\}_{k=1}^{\infty}$  elementlari ketma-ketligidagi har bir element noldan farqli bo'lib,

$$(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) = 0, \quad j \neq k,$$

tengliklar bajarilsa, bu elementlar sistemasi *ortogonal sistema* tashkil qiladi deyiladi.

**20.6.2 - misol.** Quyidagi

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots$$

trigonometrik sistema  $R[-\pi, \pi]$  Evklid fazosida ortogonal sistema tashkil qiladi.

Bu tasdiq bevosita (20.0.3) formulalardan kelib chiqadi.

**20.6.3 - misol.**  $R[-1, 1]$  Evklid fazosida quyidagi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (20.6.11)$$

*Lejandr ko'phadlari* sistemasini qaraylik.

Har bir Lejandr ko'phadi  $n$ -darajali ko'phad bo'lib, bunda  $x^n$  oldidagi koeffitsient noldan farqlidir. Haqiqatan, quyidagi

$$(x^2 - 1)^n = x^{2n} - nx^{2n-2} + \dots$$

Nyuton binomi formulasiga ko'ra,

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{n!} x^n - \dots$$

Shuning uchun,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \dots, \quad (20.6.12)$$



bu yerda ko'p nuqta orqali kichik darajali hadlar belgilangan.

Masalan,

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

(20.6.11) formulada hosila oldidagi koeffitsient  $P_n(1) = 1$  shartni ta'minlash uchun qo'yilgan. Lejandr ko'phadlari sferik deb ataluvchi funksiyalar tarkibida qatnashadi va bu shart bunday funksiyalarda almashtirishlar bajarishni ancha soddalashtiradi.

Bo'laklab integrallash yordamida,  $P_n(x)$  ko'phad barcha  $k = 0, 1, \dots, n-1$  lar uchun  $f(x) = x^k$  ko'rinishdagi funksiyalarga  $[-1, 1]$  kesmada ortogonal ekanini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan,  $k$  marta bo'laklab integrallash natijasida,  $x = \pm 1$  nuqtalarda barcha integraldan tashqari hadlar nolga teng bo'lgani sababli, quyidagi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx = \\ &= \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n dx = 0 \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak,  $P_n(x)$  ko'phad  $x^k$ ,  $k < n$ , darajalarning istalgan chiziqli kombinatsiyasiga va bundan chiqdi,  $k < n$  da istalgan  $P_k(x)$  ko'phadga ortogonaldir. Bundan, albatta, Lejandr ko'phadlari ortogonal sistema tashkil qilishi kelib chiqadi.

Ortogonal sistemadagi barcha elementlarning normalari 1 ga teng bo'lgan holda umumiy ortogonal qatorlar nazariyasidagi formulalar, ayniqsa, sodda ko'rinishga ega bo'ladi.

**Ta'rif.** Agar Evklid fazosining  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  elementlari ketma-ketligi

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk} \quad (20.6.13)$$

shartni qanoatlantirsa, bu elementlar sistemasi **ortonormal (ortonormalangan) sistema** deyiladi (bu yerda  $\delta_{jk}$  Kroneker-ning delta-simvolidir).

Ravshanki, istalgan ortogonal sistemani, har bir elementini sonli ko'paytuvchiga ko'paytirib, ortonormal sistemaga aylantirish mumkin.

**20.6.4 - misol.** Quyidagi

$$\mathbf{e}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{e}_{2k}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \mathbf{e}_{2k+1}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20.6.14)$$

funksiyalar ketma-ketligi  $R[-\pi, \pi]$  da ortonormal sistema tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun (20.0.3) munosabatlardan foydalanish yetarli.

**20.6.5 - misol.** Lejandr ko'phadlari sistemasini qaraylik (20.6.3 - misolga qarang). Bo'laklab integrallab,

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

ekanini, ya'ni Lejandr ko'phadlarining normalari nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Quyidagi normalangan

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$$

Lejandr ko'phadlari  $R[-1, 1]$  Evklid fazosida ortonormal sistema tashkil qiladi.

Aytaylik,  $E$  Evklid fazosida  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistema berilgan bo'lsin. Istalgan  $f \in H$  element uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$$

formal yig'indi  $f$  funksiyaning shu ortonormal sistema bo'yicha *Furye qatori*,  $(f, \mathbf{e}_k)$  sonlar esa, *Furye koeffitsiyentlari* deb ataladi.

$f$  element Furye qatorining  $n$  - qisman yig'indisini quyidagi

$$S_n f = \sum_{k=1}^n (f, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \quad (20.6.15)$$

ko'rinishda aniqlaymiz.

Bevosita (20.6.10) formulaga ko'ra,

$$\|S_n f\|^2 = \sum_{k=1}^n |(f, \mathbf{e}_k)|^2. \quad (20.6.16)$$

E'tibor bering, qisman yig'indining (20.6.15) ta'rifi va (20.6.13) ortogonallik shartiga asosan,

$$(S_n f, \mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (20.6.17)$$

**4.** Berilgan  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistema bo'yicha  $n$ -tartibli polinom deb birinchi  $n$  ta elementning ixtiyoriy

$$P_n = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k, \quad c_k \in \mathbb{R},$$

chiziqli kombinatsiyasiga aytamiz.

Masalan, istalgan  $f \in E$  element Furye qatorining  $S_n f$   $n$ -qisman yig'indisi  $n$ -tartibli polinom bo'ladi.

Navbatdagi sodda tasdiq juda muhim ahamiyatga ega.

**20.6.1 - tasdiq.** *Istalgan  $f \in E$  element va har qanday  $P_n$  polinom uchun quyidagi*

$$f - S_n f \perp P_n \quad (20.6.18)$$

*ortogonallik munosabati o'rinli.*

**Isbot.** (20.6.18) munosabat chap qismini barcha  $j = 1, 2, \dots, n$  lar uchun  $\mathbf{e}_j$  elementlarga skalyar ko'paytiramiz. U holda, (20.6.17) ga ko'ra:

$$(f - S_n f, \mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j) - (S_n f, \mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j) - (f, \mathbf{e}_j) = 0.$$

Demak,  $f - S_n f$  ayirma  $j = 1, 2, \dots, n$  nomerli barcha  $\mathbf{e}_j$  elementlarga va ularning chiziqli kombinatsiyasiga, ya'ni  $P_n$  polinomga ortogonaldir. ■

**1 - natija.** *Istalgan  $f \in E$  element va har qanday  $P_n$  polinom uchun*

$$\|f - P_n\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f - P_n\|^2 \quad (20.6.19)$$

*tenglik o'rinli.*

Haqiqatan, quyidagi

$$f - P_n = [f - S_n f] + [S_n f - P_n] \quad (20.6.20)$$

sodda ayniyatdan foydalanaylik.

20.6.1 - tasdiqqa ko'ra,

$$f - S_n f \perp S_n f - P_n$$

ortogonallik munosabati o'rinli, chunki munosabatning o'ng tarafi  $n$ -tartibli polinomidir. Demak, (20.6.20) ayniyatning o'ng tarafida turgan kvadrat qavslar ichidagi ifodalar o'zaro ortogonaldir. Shunday ekan, (20.6.8) Pifagor teoremasiga ko'ra, talab qilingan (20.6.19) tenglikka ega bo'lamiz.

**2 - natija.** *Istalgan  $f \in E$  element uchun **Bessel ayniyati** deb ataluvchi*

$$\sum_{k=1}^n |(f, \mathbf{e}_k)|^2 = \|f\|^2 - \|f - S_n f\|^2 \quad (20.6.21)$$

*tenglik o'rinli.*

1-natijadagi (20.6.19) formulada  $P_n$  sifatida aynan nolga teng bo'lgan  $P_n \equiv 0$  polinomni olib,

$$\|f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2$$

tenglikka kelamiz.

Endi (20.6.21) ayniyat (20.6.16) tenglikdan kelib chiqadi.

**3 - natija.** *Istalgan  $f \in E$  element uchun **Bessel tengsizligi** deb ataluvchi*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \mathbf{e}_k)|^2 \leq \|f\|^2} \quad (20.6.22)$$

tengsizlik o'rinli.

Haqiqatan, (20.6.21) Bessel ayniyatiga ko'ra,

$$\sum_{k=1}^n |(f, \mathbf{e}_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Bu tengsizlikda  $n \rightarrow \infty$  desak, (20.6.22) tengsizlikka ega bo'lamiz.

**4 - natija.** Har qanday  $f \in E$  elementning Furye koeffitsiyentlari nolga intiladi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f, \mathbf{e}_k) = 0.$$

Tasdiq yaqinlashuvchi qatorning hadlari nolga intilishidan kelib chiqadi.

**5 - natija.** Istalgan  $f \in E$  element va har qanday  $P_n$  polinom uchun

$$\|f - S_n f\| \leq \|f - P_n\| \quad (20.6.23)$$

tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlik (20.6.19) tengsizlikning oddiy natijasidir.

**Eslatma.** 5 - natija yaqinlashtirish nazariyasida (теория приближений) nihoyatda muhim rol o'ynaydi. Masalan, berilgan  $f$  elementni  $n$ -tartibli biror polinom bilan yaqinlashtirish masalasini qaraylik:

$$f \simeq P_n.$$

Bu masalada  $f$  elementdan og'ishi eng kam bo'lgan polinom topish, ya'ni

$$\|f - P_n\|$$

xatoni minimumlashtirish talab qilinadi.

(20.6.23) formulaga ko'ra, bu minimumga  $P_n = S_n f$  da erishiladi. Boshqacha aytganda,  $E$  Evklid fazosi metrikasida barcha  $n$ -tartibli polinomlar ichida  $f$  elementga eng yaqini  $f$  element Furye qatorining  $n$ -qismaniy yig'indilari bo'ladi. Shu munosabat bilan, bu qismaniy yig'indilar eng yaxshi yaqinlashuvchi polinomlar deb ataladi.

**5.** Agar ortonormal sistemaga hech qanday qo'shimcha shart qo'yilmasa, u holda  $f$  funksiyaning Furye qatori aynan shu funksiya-ga yaqinlashmasligi mumkin.

Faraz qilaylik,  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistema va  $f \in E$  element berilgan bo'lsin. Agar istalgan  $\varepsilon > 0$  uchun  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  sistema bo'yicha shunday  $P^\varepsilon$  polinom topilsaki, u uchun

$$\|f - P^\varepsilon\| < \varepsilon \quad (20.6.24)$$

baho o'rinli bo'lsa,  $f$  elementni  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  bo'yicha polinomlar bilan ixtiyoriy aniqlikda yaqinlashtirish mumkin deyiladi.

**Ta'rif.** Agar  $E$  Evklid fazosining istalgan elementini  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistema bo'yicha polinomlar bilan ixtiyoriy aniqlikda yaqinlashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu sistema  $E$  fazosida **yopiq** deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar polinomlar to'plamining yopilmasi Evklid fazosi bilan ustma-ust tushsa, ortonormal sistema yopiq deyiladi.

**20.6.6 - misol.** Lejandr ko'phadlari sistemasi  $R[-1, 1]$  Evklid fazosida yopiqdir.

Haqiqatan, bevosita (20.6.12) tenglikdan istalgan  $x^n$  darajani Lejandr ko'phadlari chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida yozish mumkinligi kelib chiqadi:

$$x^n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + \dots + c_1 P_1(x) + c_0 P_0.$$

Bu degani,  $n$ -darajali istalgan  $Q_n(x)$  ko'phadni Lejandr ko'phadlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x).$$

17.1.3 - tasdiqqa ko'ra,  $[-1, 1]$  kesmada Riman bo'yicha integralanuvchi istalgan  $f$  funksiyani (17.1.16) tenglik bilan aniqlangan  $f_h(x)$  silliq funksiyalar bilan  $R[-1, 1]$  normasi bo'yicha approksimatsiyalash mumkin. Lekin, 10.6.2 - Veyershtass teoremasiga ko'ra, har bir uzluksiz  $f_h(x)$  funksiyani  $Q_n(x)$  ko'phadlar bilan  $[-1, 1]$  kesmada tekis va demak, o'rta kvadratlik approksimatsiyalash mumkin.

Bundan,  $[-1, 1]$  kesmada Riman bo'yicha integrallanuvchi istalgan funksiyani  $P_n(x)$  Lejandr ko'phadlari chiziqli kombinatsiyalari bilan  $R[-1, 1]$  normasi bo'yicha approksimatsiyalash mumkinligi kelib chiqadi.

**20.6.2 - tasdiq.** *Ortonormal sistema yopiq bo'lishi uchun istalgan element Furiye qatorining shu elementga yaqinlashishi zarur va yetarlidir.*

**Isbot.** 1) Faraz qilaylik,  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  yopiq ortonormal sistema va  $E$  fazosining istalgan  $f$  elementi berilgan bo'lsin.  $f$  funksiya Furiye qatorining shu funksiyaga yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Qaralayotgan ortonormal sistema yopiq bo'lgani tufayli, istalgan  $\varepsilon > 0$  olganda ham biror  $N = N(\varepsilon)$ -tartibli shunday  $P^\varepsilon$  polinom topiladiki, u uchun (20.6.24) tengsizlik bajariladi. E'tibor bering, har bir  $N$ -tartibli polinom  $n \geq N$  bo'lganda  $n$ -tartibli ham polinom bo'ladi. Shunday ekan, 20.6.1 - tasdiqning 5 - natijasiga ko'ra ((20.6.23) formulaga qarang), istalgan  $n \geq N$  uchun

$$\|f - S_n f\| \leq \|f - P^\varepsilon\|$$

baho o'rinli.

Bu baho va (20.6.24) ga ko'ra,  $n \geq N$  bo'lganda,

$$\|f - S_n f\| < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

bo'ladi. Bu esa,  $f$  funksiya Furiye qatori  $E$  fazo metrikasida  $f$  elementga yaqinlashishini anglatadi.

2) Faraz qilaylik,  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistema shunday bo'lsinki, bunda istalgan  $f \in E$  element Furiye qatori shu elementga yaqinlashsin. U holda, approksimatsiyalovchi polinomlar sifatida Furiye qatorining qisman yig'indilarini olib, qaralayotgan sistemaning yopiq ekaniga iqrar bo'lamiz. ■

Shunday qilib, berilgan ortonormal sistema bo'yicha ixtiyoriy elementning Furiye qatori aynan shu elementga yaqinlashishini ko'rsatish uchun, bu sistemaning yopiq ekanini isbotlash zarur va yetarlidir.

Furiye qatorlari nazariyasida navbatdagi yopiqlik kriteriyasi muhim rol o'ynaydi.

**20.6.1 - teorema.**  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistema faqat va faqat istalgan  $f \in E$  element uchun **Parseval tengligi** deb ataluvchi quyidagi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \mathbf{e}_k)|^2 = \|f\|^2} \quad (20.6.25)$$

tenglik bajarilganda yopiq bo'ladi.

**Isbot** (20.6.21) Bessel ayniyati va 20.6.2 - tasdiqdan kelib chiqadi. Haqiqatan, (20.6.21) ayniyatda  $n \rightarrow \infty$  desak,

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \mathbf{e}_k)|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|^2 = 0$$

bo'ladi, ya'ni talab qilingan tenglik bajariladi.

**Eslatma.** (20.6.25) Parseval tengligi *yopiqlik tenglamasi* deb ham ataladi. E'tibor bering, Parseval tengligidan farqli o'laroq, (20.6.22) Bessel tengsizligi ixtiyoriy ortonormal sistema (ya'ni yopiq bo'lishi shart bo'lmagan) uchun o'rinni.

**6.** Agar  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistemadan biror elementni, masalan  $\mathbf{e}_1$  ni, chiqarib tashlasak, u holda qolgan elementlar tashkil qilgan  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=2}^{\infty}$  sistema yopiq bo'lmay qoladi. Haqiqatan,  $f = \mathbf{e}_1$  element sistemaning qolgan barcha elementlariga ortogonal bo'ladi. Demak, istalgan

$$P = \sum_{k=2}^n c_k \mathbf{e}_k$$

polinom uchun, Pifagor teoremasiga ko'ra,

$$\|f - P\|^2 = \|\mathbf{e}_1 - P\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \|P\|^2 \geq \|\mathbf{e}_1\|^2 = 1$$

munosabat o'rinni bo'ladi.

Shunday qilib,  $f = \mathbf{e}_1$  elementni  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=2}^{\infty}$  sistema bo'yicha polinomlar bilan 1 dan kichik xatolikda approksimatsiya qilib bo'lmas ekan.

Boshqa tarafdin, boshlang'ich ortonormal  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  sistema ham, o'z navbatida, boshqa sistemadan biror elementni chiqarib tashlash



natijasida hosil bo'lmagani maqsadga muvofiqdir. Aniqrog'i, noldan farqli va  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  sistemaga ortogonal element bo'lmashligi kerak.

**Ta'rif.** Agar  $f \in E$  element  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  sistemaning barcha elementlariga ortogonal ekanidan  $f = 0$  tenglik kelib chiqsa, u holda bu sistema  $E$  Evklid fazosida **to'la** deyiladi.

Shunday qilib, to'la ortonormal sistemaga biror yangi element qo'shilsa, sistema ortonormallik xossasini saqlab qolmas ekan.

**Eslatma.** Agar biror  $f \in E$  element to'la ortonormal  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  sistemaning, bitta  $\mathbf{e}_n$  elementidan tashqari, barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, u holda

$$f = (f, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$$

tenglik bajariladi, ya'ni  $f$  element  $\mathbf{e}_n$  elementga kollinear bo'ladi.

Haqiqatan,  $g = f - (f, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$  element qayd qilingan to'la ortonormal sistemaning barcha elementlariga ortogonal va bundan u nolga teng ekanligi kelib chiqadi.

**20.6.3 - tasdiq.** Har qanday yopiq ortonormal sistema to'ladir.

**Isbot.** Aytaylik,  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$  yopiq ortonormal sistema bo'lsin. Agar  $f$  element bu sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, u holda uning barcha Furye koeffitsiyentlari nolga teng bo'ladi. Shunday ekan, (20.6.25) Parseval tengligidan  $f = 0$  ekani kelib chiqadi. ■

Teskari tasdiq, umuman aytganda, to'g'ri emas. Lekin, agar Evklid fazosi to'la bo'lsa, u holda teskari tasdiq ham o'rinli bo'ladi.

**Ta'rif.** Agar Evklid fazosi elementlaridan tuzilgan har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashsa, u holda bu fazo to'la deyiladi.

Odatdagidek, agar  $f_n \in E$  ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

bo'lsa, u fundamental deyiladi.

Koshi kriteriysiga ko'ra (11.1.2 - teoremaga qarang), har qanday chekli o'lchovli Evklid fazosi to'ladir.

Cheksiz o'lchovli to'la Evklid fazosi *Hilbert* fazosi deyiladi va odatda,  $H$  simvoli bilan belgilanadi.

**20.6.4 - tasdiq.** Hilbert fazosida istalgan elementning har qanday to'la ortonormal sistema bo'yicha Furrye qatori shu elementga yaqinlashadi.

**Isbot.** Avval istalgan element Furrye qatorining yaqinlashishini, so'ngra esa, aynan berilgan elementga yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Aytaylik,  $H$  Hilbert fazosi bo'lib,  $\{\mathbf{e}_k\}$  bu fazodagi to'la ortonormal sistema va  $f$  fazoning istalgan elementi bo'lsin. Qisman yig'indilarning (20.6.15) ta'rifi va (20.6.16) formulaga ko'ra, istalgan  $n > m$  nomerlar uchun

$$\|S_n f - S_m f\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |(f, \mathbf{e}_k)|^2 \quad (20.1.26)$$

tenglik o'rinli.

Bessel tengsizligiga asosan, (20.6.22) ning chap tarafidagi qator yaqinlashadi. Demak, Koshi kriteriysiga ko'ra, (20.6.26) ning o'ng tarafidagi ifoda  $n \rightarrow \infty$  va  $m \rightarrow \infty$  da nolga intiladi.  $\{S_n f\}$  qisman yig'indilar ketma-ketligi fundamental bo'lib, Hilbert fazosi to'la bo'lgani sababli, Furrye qatori biror

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$$

elementga yaqinlashadi.

Endi  $\tilde{f} = f$  ekanini ko'rsatish yetarli. Buning uchun

$$g = f - \tilde{f} = f - \sum_{k=1}^{\infty} (f, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$$

deylik. Bu tenglik va (20.6.13) ortogonallik shartiga ko'ra:

$$(g, \mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j) - \sum_{k=1}^{\infty} (f, \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j) - (f, \mathbf{e}_j) = 0.$$

Demak, istalgan  $j$  nomer uchun  $(g, \mathbf{e}_j) = 0$  tenglik o'rinli ekan. Ortonormal sistema to'la bo'lgani sababli, bundan  $g = 0$  ekani, ya'ni  $\tilde{f} = f$  ekani kelib chiqadi. ■

**Natija.** Hilbert fazosida har bir to'la ortonormal sistema yopiq bo'ladi.

Haqiqatan, bu bevosita 20.6.2 - va 20.6.4 - tasdiqlardan kelib chiqadi.

Shunday qilib, Hilbert fazosida yopiq va to'la ortonormal sistema tushunchalari ustma-ust tushadi.

**7.** Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning  $R(G)$  Evklid fazosini Jordan bo'yicha o'lchovli har qanday  $G$  to'plam uchun aniqlash mumkin. Eslatib o'tamiz, agar  $G \subset \mathbb{R}^n$  to'plam  $n = 2$  da kvadratlanuvchi,  $n \geq 3$  da esa, kublanuvchi bo'lsa, u Jordan bo'yicha o'lchovli deyiladi.  $R(G)$  da skalyar ko'paytma

$$(f, g) = \int_G f(x)g(x) dx \quad (20.6.27)$$

tenglik orqali kiritiladi.

Ushbu bandda biz ikki  $G \subset \mathbb{R}^n$  va  $F \subset \mathbb{R}^m$  Jordan to'plami ko'paytmasida, ya'ni

$$G \times F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in G, y \in F\} \quad (20.6.28)$$

da ortonormal sistemalarni qaraymiz.

Aytaylik,  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  sistema  $R(G)$  fazoda ortonormal,  $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$  sistema esa,  $R(F)$  fazoda ortonormal bo'lsin. U holda

$$\Phi_{kj}(x, y) = \varphi_k(x)\psi_j(y), \quad x \in G, y \in F, \quad (20.6.29)$$

funksiyalar sistemasining  $R(G \times F)$  Evklid fazosida ortonormal ekanini ko'rsatish oson.

Haqiqatan,

$$\begin{aligned} & \int_{G \times F} \Phi_{kj}(x, y)\Phi_{ml}(x, y) dx dy = \\ & = \int_G \varphi_k(x)\varphi_m(x) dx \int_F \psi_j(y)\psi_l(y) dy = \delta_{km} \cdot \delta_{jl}, \end{aligned}$$

ya'ni skalyar ko'paytma faqat  $k = m$  va  $j = l$  da noldan farqli; bunda u 1 ga teng.

Ixtiyoriy  $f \in R(G \times F)$  funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning (20.6.29) ortonormal sistema bo'yicha Furye qatori

$$f(x, y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} (f, \Phi_{kj}) \Phi_{kj}(x, y) \quad (20.6.30)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda Furye koeffitsiyentlari

$$(f, \Phi_{kj}) = \int_{G \times F} f(x, y) \varphi_k(x) \psi_j(y) dx dy \quad (20.6.31)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

20.6.1 - teorema ko'ra, (20.6.29) ortonormal sistema faqat va faqat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \Phi_{kj})|^2 = \int_F \int_G |f(x, y)|^2 dx dy \quad (20.6.32)$$

Parseval tengligi bajarilganda yopiq bo'ladi.

Navbatdagi tasdiq yopiq ortonormal sistemalar ko'paytmasi yopiq sistema tashkil qilishini ta'kidlaydi.

**20.6.2 - teorema.** Faraz qilaylik,  $G$  va  $F$  Jordan bo'yicha o'lchovli yopiq to'plamlar bo'lib,  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormal sistema  $R(G)$  da va  $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$  ortonormal sistema esa,  $R(F)$  da yopiq bo'lsin. U holda (20.6.29) funksiyalar sistemasi  $R(G \times F)$  Evklid fazosida yopiq ortonormal sistema bo'ladi.

**Isbot.** 1) Aytaylik,  $f$  yopiq  $G \times F$  sohada aniqlangan istalgan uzluksiz funksiya bo'lsin. Agar  $y \in F$  ni parametr desak,  $f$  funksiyaning  $\{\varphi_k\}$  sistema bo'yicha Furye koeffitsiyentlari

$$g_k(y) = \int_G f(x, y) \varphi_k(x) dx \quad (20.6.33)$$

kabi aniqlanadi.

$\{\varphi_k\}$  sistema yopiq bo'lgani sababli, Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(y)|^2 = \int_G |f(x, y)|^2 dx, \quad y \in F. \quad (20.6.34)$$

17.1.1 - teoreмага ko'ra, (20.6.34) ning chap tarafidagi qator uzluksiz funksiyalardan iborat bo'lib, uzluksiz funksiyaga yaqinlashadi. Dini teoremasiga asosan (10.7.5 - teoreмага qarang), bu qator tekis yaqinlashadi. Qatorni hadmahad integrallab (10.7.3 - teorema va uning natijasiga ko'ra, buni amalga oshirish mumkin),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_F |g_k(y)|^2 dy = \int_F \int_G |f(x, y)|^2 dx dy \quad (20.6.35)$$

tenglikni olamiz.

Boshqa tarafdin, har bir  $g_k(y)$  funksiyani  $\{\psi_j\}$  sistema bo'yicha Furye qatoriga yoysak,

$$g_k(y) = \sum_{j=1}^{\infty} (g_k, \psi_j) \psi_j(y)$$

tenglikni hosil qilamiz, bunda:

$$(g_k, \psi_j) = \int_F g_k(y) \psi_j(y) dy = \int_F \psi_j(y) dy \int_G f(x, y) \varphi_k(x) dx = (f, \Phi_{kj}). \quad (20.6.36)$$

Shartga ko'ra  $\{\psi_j\}$  sistema yopiq bo'lgani uchun, Parseval tengligi o'rinli:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(g_k, \psi_j)|^2 = \int_F |g_k(y)|^2 dy.$$

Bu tenglikni  $k$  bo'yicha yig'ib chiqsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(g_k, \psi_j)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_F |g_k(y)|^2 dy$$

munosabatni olamiz.

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tarafi (20.6.35) tenglikning chap tarafiga teng. Demak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(g_k, \psi_j)|^2 = \int_F \int_G |f(x, y)|^2 dx dy.$$

Bundan, (20.6.36) munosabatlarni e'tiborga olib, (20.6.32) Parseval tengligi bajarilishiga iqrор bo'lamiz. Bunga ko'ra har qanday uzluksiz funksiya Furiye qatori shu funksiyaga  $R(G \times F)$  fazo metriksida yaqinlashar ekan. Demak, istalgan uzluksiz funksiyani (20.6.29) sistema bo'yicha polinomlar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkin.

2) Endi  $f$  funksiya  $R(G \times F)$  ning istalgan elementi bo'lsin. Xuddi bir o'zgaruvchili holdagidek, bunday funksiyani uzluksiz funksiyalar bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish mumkin (13.4.9 - teorema va 13.4.10 - teoremaga eslatmani qarang). Shunday ekan, yuqoridagi mulohazalardan  $f$  funksiyani (20.6.29) sistema bo'yicha polinomlar bilan yaqinlashtirish mumkinligi kelib chiqadi. Bu esa, o'z navbatida, qaralayotgan sistemaning yopiq ekanini anglatadi. ■

**1 - eslatma.** Yuqoridagi teorema matematik fizikaning ko'p o'lchovli masalalarini o'zgaruvchilarni ajratish deb ataluvchi usul bilan yechishda muhim rol o'ynaydi. Bu usulni birinchi bo'lib J.B. Furiye 1822 yilda chop qilingan "Issiqlikning analitik nazariyasi" nomli ishida asoslagan.

**2 - eslatma.** Ushbu paragrafda kiritilgan  $R(G)$  Evklid fazosi to'la emas, ya'ni u Hilbert fazosi emas. Bunga sabab shundaki, bu fazo elementlaridan tuzilgan fundamental ketma-ketlik limiti Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiya bo'lmasligi mumkin.

Agar skalyar ko'paytmani aniqlovchi integralni Lebeg ma'nosida deb qarasaq, u holda  $R(G)$  fazo to'la bo'ladi va u, odatda,  $L_2(G)$  orqali belgilanadi. Mana shu hol, zamonaviy matematik tahlilda qo'llanuvchi asosiy qurol sifatida, aynan Lebeg integrali tanlanishida hal qiluvchi rol o'ynagan.

$L_2(G)$  fazosining to'laligi tufayli, ortogonal sistemalar bo'yicha qatorlar asosan aynan shu fazoda o'rganiladi.

Lekin, shunga qaramasdan, Riman bo'yicha integrallanuvchi funksiyalarning yuqorida kiritilgan  $R(G)$  Evklid fazosi ham Furiye qatorlari nazariyasi tadbiqu uchun bimalol yetarli bo'lar ekan.

## 20.7-§. Misollar

**1 - misol.** Rademaxer sistemasi deb ataluvchi

$$\psi_k(x) = \text{sign}(\sin(2\pi \cdot 2^k \cdot x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

funksiyalar sistemasining grafigini chizing va  $R[0, 1]$  da ortonormal ekanini ko'rsating.

**Ko'rsatma.** Har bir navbatdagi funksiya avvalgisi 1 ga yoki  $-1$  ga teng kesma yarmida 1 ga va qolgan yarmida esa,  $-1$  ga teng ekanidan foydalaning.

**2 - misol.** Ixtiyoriy  $k = 0, 1, \dots$  va  $j = 1, 2, 4, \dots, 2^k$  lar uchun  $[0, 1]$  kesmada Xaar sistemasi deb ataluvchi

$$\chi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{j}{2^k} - \frac{1}{2^k} \leq x < \frac{j}{2^k} - \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{j}{2^k} - \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \leq x < \frac{j}{2^k}, \\ 0, & \text{boshqa } x \text{ larda,} \end{cases}$$

funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemaning  $R[0, 1]$  da ortogonal ekanini ko'rsating va uni ortonormalashtiring.  $\chi_k^{(j)}(x)$  funksiyalar grafigini chizing.

**Ko'rsatma.** Bu sistemadagi har bir funksiya tashuvchisi boshqasining tashuvchisi bilan yoki kesishmaydi, yoki yuqoridagi misolga keltirilgan ko'rsatmadagi hol yuz beradi.

**3 - misol.** Quyidagi

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi x}{b-a}, \sin \frac{2\pi x}{b-a}, \dots, \cos \frac{2\pi nx}{b-a}, \sin \frac{2\pi nx}{b-a}, \dots$$

trigonometrik sistemaning nafaqat  $[a, b]$  kesmada, balki ixtiyoriy  $[A, A + b - a]$  kesmada ham ortogonal ekanini ko'rsating.

**Ko'rsatma.**  $[a, b]$  kesmada ortogonallikni oddiy hisoblash orqali tekshiring.  $[A, A + b - a]$  kesmada ortogonallikni tekshirishda, davri  $b - a$  ga teng bo'lgan har qanday uzluksiz davriy  $f(x)$  funksiya uchun istalgan  $A$  son olganda ham

$$\int_A^{A+b-a} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

tenglik bajarilishidan foydalaning.

**4 - misol.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

funksiyaning Furye qatorini toping va uni yaqinlashishga tekshiring. Furye qator yordamida

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

tenglikni isbotlang.

**Ko'rsatma.** Furye koeffitsiyentlarini (20.0.6) va (20.0.7) formulalar bo'yicha hisoblang. Berilgan funksiya barcha  $x \neq k\pi$  larda differensiallanuvchi bo'lgani sababli, bu nuqtalarda 20.2.3 - teoremani qo'llash mumkin. Furye qatorida  $x = \frac{\pi}{2}$  desak, talab qilingan tenglikni olamiz.

**5 - misol.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada  $f(x) = \cos ax$  funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning  $a$  parametr butun va butun emas bo'lganda Furye qatorini toping. Parametr butun bo'lmaganda hosil bo'lgan qatorni yaqinlashishga tekshiring va mos Parseval tengligini yozing.

**Ko'rsatma.** Parametr butun bo'lganda trigonometrik sistemaning ortogonallik shartidan foydalaning. Parametr butun bo'lmaganda qatorni yaqinlashishga tekshirish uchun 20.2.3 - teoremani qo'llang. (20.1.7) Parseval tengligida o'ng va chap tomonlarni berilgan funksiya uchun hisoblang.



**6 - misol.**  $[0, 2]$  kesmada quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyani sonlar o'qiga davriy davom ettirib, hosil bo'lgan funksiyaning Furiye qatorini toping va yaqinlashishga tekshiring.

**Ko'rsatma.**  $f(x)$  funksiyani sonlar o'qiga davriy davom ettirish natijasida hosil bo'lgan funksiyani  $\tilde{f}(x)$  deb belgilaylik. Bu funksiya davriy bo'lakli-silliq juft funksiya bo'lib, uning davri 2 ga teng. Bundan chiqdi,  $\tilde{f}(x)$  ning Furiye qatorida faqat cosinuslar ishtirok etadi. Furiye qatorini yaqinlashishga tekshirish uchun 20.1.3 - teoremdan foydalaning.

**7 - misol.** 4 - misoldagi  $f(x)$  funksiya Furiye qatori yordamida quyidagi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

tenglikni isbotlang ((20.1.8) tenglik bilan solishtiring).

**Ko'rsatma.** Agar  $0 \leq x \leq \pi$  bo'lsa, 4 - misoldagi funksiya Furiye qatorini  $\frac{\pi}{2}$  dan  $x$  gacha integrallang. Hosil bo'lgan ifodada  $x = 0$  deyish yetarli.

**8 - misol.**  $[-\pi, \pi]$  kesmada aniqlangan quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

funksiya Furiye koeffitsiyentlarini hisoblamasdan turib, uning Furiye qatori  $x = 0$  nuqtada  $\frac{1}{2}$  qiymatga yaqinlashishini ko'rsating.

**Ko'rsatma.**  $f(x)$  funksiya  $x = 0$  nuqtada chap hosilaga ega bo'lib, bu nuqtadan o'ngda  $\alpha = \frac{1}{2}$  ko'rsatgich bilan (20.2.15) Holder shartini qanoatlantirishini ko'rsating. So'ngra 20.2.3 - teoremani qo'llang.

**9 - misol.** Shunday  $\lambda$  sonlarni va  $[0, l]$  kesmada aniqlangan hamda aynan noldan farqli shunday  $y(x)$  funksiyalarni topingki, ular

$$-y''(x) = \lambda y(x)$$

tenglamani va

$$y(0) = y(l) = 0$$

chegaraviy shartni qanoatlantirsin. Bu masalaning  $y(x)$  yechimlari to'plami  $R[0, l]$  da ortogonal trigonometrik sistema tashkil qilishini isbotlang. Hosil bo'lgan yechimlar sistemasini ortonormalashtiring.

**Ko'rsatma.** Masalani yechishda uchta:  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$  va  $\lambda > 0$  holni alohida o'rganing. Birinchi ikki holda faqat nol yechim mavjud ekaniga ishonch hosil qiling. Uchinchi holda esa, istalgan  $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , son uchun masalaning aynan noldan farqli yechimi mavjud ekanini ko'rsating.

**10 - misol.** Navbatdagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad t > 0,$$

to'lqin tenglamasining  $2\pi$ -davriy va  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$  boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

**Ko'rsatma.** Yechimni, aniqlanishi talab qilinadigan  $c_k(t)$  koef-fitsientli  $x \in \mathbb{T}^n$  o'zgaruvchi bo'yicha quyidagi

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(t) e^{ikx}$$

Furye qator ko'rinishida qidiring. Bu yechimni tenglamaga qo'yib,  $c_k(t)$  koeffitsientlarni aniqlash uchun ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama oling. Umumiy yechimdagi ikki o'zgarmasni aniqlash uchun ikkita boshlang'ich shartdan foydalaning.

**ALIFBOLI KO'RSATMA**

Abel jamlash usuli 58  
Abel o'rtachalari 58  
Amper 143  
Aralash ko'paytma 111

Bessel ayniyati 300  
Bessel tengsizligi 300  
Beta - funksiya 65  
Bio - Savar qonuni 151  
Birinchi tartibli Chezaro o'rtachalari 268  
Birinchi tur xosmas integral 29  
Bo'lakli silliq 176  
Bonne formulasi 27

Dirixle ko'paytuvchisi 61  
Dirixle masalasi 275  
Dirixle yadrosi 252  
Divergensiya 113

Elektr zaryadining saqlanish qonuni 147  
Elektrodinamika 149  
Elektromagnit maydon 146  
Elektrostatika 150

Faradey qonuni 146  
Feyer yadrosi 269  
Funksiyalar o'ramasi 189  
Furye almashtirishi 156  
Furye integrali 156  
Furye koeffitsiyentlari 233, 298  
Furye qatori 298

Gamma - funksiya 65

- Garmonik funksiya 137
- Garmonik maydon 145
- Garmonik tebranish 155
- Gauss absolyut birliklari 146
- Gauss-Ostrogradskiy formulasi 119
- Gibbs hodisasi 183
- Gradient 106
  
- H**ajm potentsiali 143
- Helmholts 144
- Helmholts tenglamasi 219
- Henrix Herts 149
- Hevisayd funksiyasi 24
- Hilbert fazosi 305
- Holder sharti 170
  
- Ikkinchi o'rta qiymat formulasi 27
- Ikkinchi tur xosmas integral 52
- Integral operator 93
- Integral operator yadrosi 93
- Izometrik akslantirish 108
  
- K**arleson L. 171, 268
- Karrali Furiye integrali 208
- Kompyuter tomografiyasi 224
- Koshi masalasi 188
- Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi 293
- Kosinus Furiye almashtirishi 174
- Kosinuslar sistemasi 245
- Kroneker delta-simvoli 231
- Kulon potentsiali 95
- Kulon qonuni kvadratlanuvchi shakl 147
  
- L**ame koeffitsiyentlari 124
- Laplas operatori 137

- Laplas usuli 77  
Lejandr ko'phadlari 296  
Lorens kuchi 146  
Luzin N.N. 268
- M**agnitostatika 150  
Maksvell 147  
Maykl Faradey 146
- N**olga ekvivalent funksiya 197  
 $n$  - tartibli polinom 299  
Nyuton potentsiali 95, 143
- O**rtogonal sistema 296  
Ortonormal (ortonormallangan) sistema 297
- P**arametrga bog'liq integral 11  
Parseval tengligi 303  
Plansherel teoremasi 204  
Popov A. S. 149  
Potensial maydon 140  
Potensial zichligi 143  
Puasson yadrosi 272
- R**adon almashtirishi 222  
Regulyar jamlash usuli 60  
Riman lokallashtirish prinsipi 169  
Riman-Lebeg lemmasi 166, 260  
Riss o'rtachalari 63  
Riss usuli 63  
Rotor (uyurma)117
- S**fera ( doira) bo'yicha yaqinlashish 285  
Sferik qismaniy yig'indilar 285  
Sinus Furye almashtirishi 174

Sinuslar sistemasi 247  
Skalyar maydon 105  
Solenoidal maydon 141  
Stirling formulasi 86  
Stoks formulasi 121  
Stoks teoremasi 121, 121

Tekis yaqinlashishning Abel - Dirixle alohati 32  
Tekis yaqinlashishning Veyershtross alohati 31  
Teskari Furiye almashtirishi 157  
To'g'ri to'rtburchaklar bo'yicha yaqinlashish 285  
To'g'ri to'rtburchakli qismaniy yig'indilar 285  
To'la fazo 305  
To'la sistema 305  
To'lqin tenglamasi 148  
Trigonometrik qator 231

Uchburchak tengsizligi 202

Vektor funksiya 105  
Vektor ko'paytma 109  
Vektor maydon 105

Xosmas integralning parametr bo'yicha tekis yaqinlashishi 30

Yopiq sistema 302

*Qaydlar uchun*

---

*Alimov Shavkat Orifjonovich,  
Ashurov Ravshan Radjabovich*

## **MATEMATIK ANALIZ**

3-qism

Darslik

*Nashriyot muharriri: Ilhom Yoʻldashev*

*Musahhiha: G. Murodova,*

*Texnik muharrir: B. Boltaboyev*

*Sahifalovchi: A. Xudoyberdiyeva*

*Kompyuterda dasturlovchi: Sh. Sheraliev*

*«MUMTOZ SOʻZ»  
masʼuliyati cheklangan jamiyati  
nashriyoti*

*Manzil: Toshkent, Navoiy koʻchasi, 69.  
Tel.: 241-60-33*

*Nashriyot litsenziyasi AI № 103. 15.07.2008*

*Bosishga ruxsat etildi 27.12.2018*

*Qogʻoz bichimi 60x84 1/32. Ofset qogʻoz.*

*Times New Roman garniturasi. Hisob-nashriyot tobogʻi 20 b.t.*

*Shartli bosma tobogʻi 20. Adadi 200 ta*

*Buyurtma №106. Bahosi kelishilgan narxda.*

*Oʻzbekiston Milliy universiteti bosmaxonasida  
bosildi. Toshkent, Talabalar shaharchasi, OʻzMU.*