O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI
GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

K.JAMURATOV

FUNKSIYALAR NAZARIYASI
O‘QUV QO‘LLANMA

70540101-Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) magistratura ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

Guliston-2022

Mundarija:

Kirish.

Mazkur o‘quv qo‘llanma magistrlarning matematika yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan.

Matematik analiz kursidan ma’lum bo‘lgan Riman integrali tushunchasiga nazar tashlasak ,unda Riman integralining ba’zi bir sinf funksiyalari uchun mavjud emasligini ko‘ramiz. Rimanning g‘oyasi bo‘yicha $[a, b]$ segment funksiyalari $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n$ bo‘lgan n ta bo‘lakka bo‘linar edi va har bir bo‘lakdan ixtiyoriy ξ_k nuqta tanlanib , bu nuqtalardagi funksiya qiymatlari $f(\xi_k)$ larni hisoblab quyidagi integral yig‘indi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k$$

tuzilar edi. Bunda , $n \to \infty$ da

$$(\max_{1<k<n} \Delta x_k \to \infty)$$

$S_n$ketma-ketlik limiti mavjud bo‘lsa va bu limit $[a, b]$ segmentni bo‘laklarga bo‘lish usuliga hamda har bir bo‘lakdan ξ_k nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmasa, bu limit $f(x)$ funksiyadan $[a, b]$ segment bo‘yicha olingan Riman integrali deyilar edi.

Agar $f(x)$ funksiya sifatida $[a, b]$segmentda aniqlangan Dirixle funksiyasini olsak , ya’ni

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{agar } \ x - \text{ratsional bo}'\text{lsa}, \\ 0, \text{agar } x - \text{irrotsional bo}'\text{lsa}, \end{cases}$$

u holda yuqorida keltirilgan Riman ta’rifi bo‘yicha bu funksiyaning integrali mavjud bo‘lmaydi. Haqiqatdan ham, agar Δ_k bo‘lakchalarning har biridan ξ_k nuqta irrotsional qilib tanlansa, $S_n = 0$, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

bo‘ladi. Agar Δ_k bo‘lakchalarning har birida ξ_k nuqta ratsional qilib tanlansa, $S_n = b - a$ ya’ni ,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b - a$$

bo‘ladi. Ko‘rinadiki, S_n ketma-ketlikning $n \to \infty$ dagi limiti Δ_k bo‘lakdan ξ_k nuqtani tanlashga bog‘liq.

Bu kabi misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Ko‘ramizki, Riman integrali tushunchasini matematikada ko‘plab ishlatiladigan muhim funksiyalarga tatbiq qilib bo‘lmaydi. Bu masala bilan ko‘p matematiklar shug‘ullanib, Riman integralining turli umumlashtirishlarini topishgan. Bularning ichida eng muhimi Lebeg tomonidan kiritilgan integral tushunchasidir. Bu g‘oya bir yo‘la Riman integrali mavjud bo‘lgan funksiyalar sinfidan kengroq sinfi uchun integral tushunchasini aniqlashga imkon beradi. Riman va Lebeg g‘oyalarini boshqacha ya’ni quyidagicha ham solishtirish mumkin. Aytaylik, $[a, b]$ segmentning uzunligiga teng bo‘lgan unga ixtiyoriy ravishda har xil qiymatli tangalar tekis tizilgan deylik. Shu tangalarning umumiy qiymatini hisoblash uchun Riman ularning har birining unda joylashish tartibida qo‘shish usulini qo‘llaydi, Lebeg esa avvalo ularning bir xil qiymatlarini guruhlab, so‘ng ularni qo‘shish usulini qo‘llaydi. Yuzaki qaraganda bu ikki usulda hisoblashlarning bir-biridan ustunligi sezilmasa-da, Lebeg usulining katta imkoniyatlariga ega ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Lebeg integraliga ta’rif berishdan avval bizning nuqtali to‘plamlarimizning o‘lchovi, o‘lchovli to‘plamlarda aniqlangan haqiqiy o‘zgaruvchili o‘lchovli funksiya tushunchalari bilan tanish bo‘lishimizni taqozo etadi. Shuning uchun ham qo‘llanmaning birinchi bobi “O‘lchovli funksiyalar nazariyasi” deb nomlanadi.

Chegaraviy masalalar ikkita katta sinfga bo‘linadi. Birinchisi:

- oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalarga qo‘yilgan Koshi masalasi, shuningdek chegarada funksiyaning o‘zi yoki hosilalari berilgandagi chegaraviy masalalar Dirixle va Nitman masalalari va hakozo masalalardir. Ikkinchisi:
- an’anaviy funksiyalar nazariyasining chegaraviy masalalari deb nomlangan Riman masalasi, Gilbert masalasi, Shvarq masalasi va hokazo masalalardir. Birinchi turdagi chegaraviy masalalar bakalavriat bosqichida Matematik-fizik tenglamalari kursida qisman o‘rganilgan. Ammo ikkinchi turdagi masalalar bakalavriat bosqichida o‘rganilmagan.

O‘quv qo‘llanmaning ikkinchi va uchinchi boblari “Analitik funksiyalar nazariyasi” va “Analitik funksiyalar nazariyasining chegaraviy masalalari” deb nomlanib, unda Koshi tipidagi integral va uning chegaraviy qiymatlari bilan bo‘liq turli chegaraviy masalalar o‘rganilgan.

O‘quv qo‘llanma matematika yo‘nalishidagi magistratura talabalari uchun mo‘ljallangan.

III. ASOSSIY QISM.

1-bob. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalar nazariyasi.

1.1. To‘plamlarni bir-birida aks ettirish.To‘plamning quvvati.

Turli to‘plamlar orasida bog‘lanish aks ettirish tushunchasi orqali o‘rnatiladi.

1-ta’rif. Ikkita X va Y to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar ma’lum bir qoida bo‘yicha X to‘plamning har bir elementiga Y to‘plamning aniq bir elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa , X to‘plam Y to‘plamda aks ettirilgan deyiladi va bu munosabat

$$f: X \rightarrow Y \qquad (1.1.1)$$

shaklda yoziladi. Ba’zan (1.1.1) aks ettirishni X to‘plamda aniqlangan va qiymatlari Y da bo‘lgan funksiya (yoki moslik) deb ham ataladi.

Berilgan $f: X \rightarrow Y$ aks ettirishda x elementga mos keluvchi y element uchun $y = f(x)$ belgilash ishlatiladi va uni x ning tasviri (obrazi) deyiladi. Masalan $y = x^3$ aks ettirishni olsak, bunda 2 sonning tasviri 8 ga teng , -3 ning tasviri -27 ga teng va hokazo.

Y to‘plamning ixtiyoriy y elementi berilgan bo‘lsin. X to‘plamning y da akslantiruvchi barcha elementlaridan iborat qismi y elementning asli (porobrazi) deyiladi va u $f^{-1}(x)$ kabi yoziladi.

Masalan Dirixle funksiyasini

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, \text{agar } x - \text{ratsional bo'lsa}, \\ 0, \text{agar } x - \text{irrotsional bo'lsa}, \end{cases}$$

Haqiqiy sonlar to‘plamini 0 va 1 sonlardan iborat . $Y = \{0,1\}$ to‘plamga aks ettirdi. Bunda 1 sonining asli barcha ratsional sonlar to‘plamidan, 0 ning asli esa barcha irrotsional sonlar to‘plamidan iborat.

Agar Y to‘plamdan har bir elementning asli bo‘sh to‘plam bo‘lmasa, u holda X to‘plam Y to‘plamning ustiga aks ettirilgan deyiladi. Agar Y to‘plamda shunday element mavjud bo‘lsaki, bu elementning asli bo‘sh to‘plam bo‘lsa, u holda X to‘plam Y to‘plamning ichiga aks ettirilgan deyiladi. Misol uchun, haqiqiy sonlar to‘plamini o‘zini o‘ziga aks ettiruvchi quyidagi ikki funksiyani olaylik:

$$y = x^3, \quad y = x^2$$

Ravshanki, bularning birinchisi ustiga aks ettirish, ikkinchisi esa ichiga aks ettirishdir.

2-ta’rif: $f: X \to Y$ ustiga aks ettirish berilgan bo‘lsin. Agar Y dagi har bir elementning asli yagona bir elementdan iborat bo‘lsa, u holda bu aks ettirish o‘zaro bir qiymatli aks ettirish (munosabati) deyiladi.

Misollar. 1. $y = x^3$ funksiya haqiqiy sonlar to‘plamini o‘zini o‘ziga o‘zaro bir qiymatli aks ettiradi.

2. R_+ manfiy bo‘lmagan barcha haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. Ushbu

$$y = x^2$$

funksiya R ni R_+ ning ustiga aks ettiradi. Bu aks ettirish o‘zaro bir qiymatli emas, chunki, masalan, 1 sonning asli ikkita elementdan :1 va -1 sonlardan iborat.

Odatda chekli va cheksiz to‘plamlarni bir-biridan farq qiladilar. Elementlarning soni chekli bo‘lgan to‘plam chekli to‘plam deyiladi. Matematikada ko‘pincha cheksiz to‘plamlar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Umuman, cheksiz to‘plam deyilganda shunday to‘plamni tushunish kerakki, bu to‘plamdan bitta, ikkita va hokazo elementlarni olganda unda yana elementlar qolaveradi. Masalan, natural sonlar to‘plami, barcha toq sonlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plami hamda uzluksiz funksiyalar to‘plami bularning har biri cheksiz to‘plamdir.

Endi ikkita A va B to‘plam berilgan bo‘lib, ularni son jihatdan solishtirish kerak bo‘lsin. Bu masalani quyidagi ikki usul bilan hal etish mumkin.

1) bu to‘plamlar elementlarning soni hisoblab chiqib, chiqqan sonlarni solishtirish;

2) agar shunday bir qoida mavjud bo‘lsaki, bu qoidaga muvofiq A to‘plamning har bir elementiga B to‘plamdan birgina elementi mos keltirilsa, ya’ni A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar elementlarining soni jihatdan bir xil bo‘ladi.

Keltirilgan usullarning farqi cheksiz to‘plamlarni solishtirilganda yaqqol ko‘rinadi. Birinchi usul bilan cheksiz to‘plamlarni farq qilib bo‘lmaydi, chunki bu to‘plamlarning ikkalasida ham elementlarning soni cheksiz.

Ammo ikkinchi usul bilan masalan, natural sonlar to‘plami elementlari son jihatdan barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan farqli ekanligini, ya’ni bu to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli munosabat mavjud emasligini ko‘rsatish mumlin.

3-ta’rif. Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli munosabat mavjud bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar ekvivalent yoki teng quvvatli to‘plamlar deyiladi va

$$A \sim B$$

ko‘rinishda yoziladi.

Odatda A to‘plamga ekvivalent bo‘lgan to‘plamlar sinfi $\bar{\bar{A}}$ bilan belgilanadi va $\bar{\bar{A}}$ ni A to‘plamning quvvati yoki kardinal soni deb ataladi.

Chekli to‘plamning quvvati sifatida odatda bu to‘plam elementlarining soni olinadi.

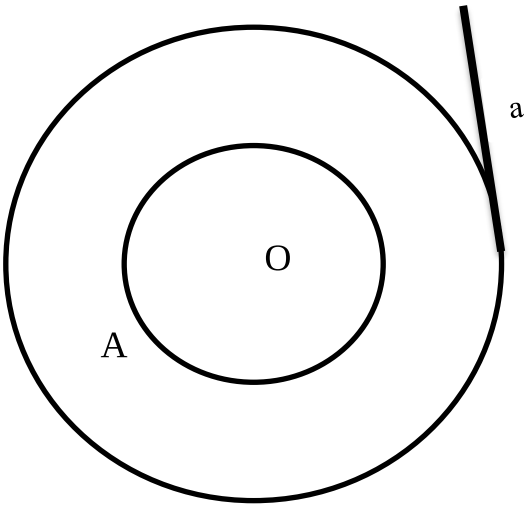
To‘plamlarning ekvivalentligi, ekvivalent tushunchasining refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga egaligi bevosita tekshiriladi. To‘plamlarning ekvivalentligiga doir misollar keltiramiz:

1. Agar A to‘plam hamma butun musbat sonlardan, B to‘plam esa hamma butun manfiy sonlardan iborat bo‘lsa, bu to‘plamlar ekvivalent bo‘ladi. Ekvivalentlik, masalan, quyidagicha o‘rnatiladi: musbat n songa manfiy $-n$ son qo‘yiladi.

1. Agar A to‘plam barcha natural sonlardan va B to‘plam barcha $\frac{1}{n}$ (n-natural son) ko‘rinishdagi sonlardan iborat bo‘lsa, bu to‘plamlar o‘zaro ekvivalent bo‘ladi. Ekvivalentlik masalan, n natural songa $\frac{1}{n}$ sonni mos qo‘yish bilan o‘rnatiladi.

3. Agar A va B to‘plamlar radiuslari turlicha bo‘lgan ikkita aylananing nuqtalaridan iborat bo‘lsa, bu to‘plamlar ekvivalent bo‘ladi. Ekvivalentlikni, masalan, quyidagicha o‘rnatish mumkin: bu aylanalarni konsentrik joylashtirib, ularning bir-biriga mos keltiramiz: bu moslik aylanalar orasida o‘zaro bir qiymatli munosaabat o‘rnatadi (shaklga qaralsin).

b



B

1-shakl.

Chekli to‘plamlarning quvvati son bo‘lgani uchun ularning quvvatlarini bir-biri bilan solishtirish mumkin. Shuningdek, ixtiyoriy to‘plamlarning quvvatlarini solishtirish uhun quyidagi ta’rifni keltiramiz.

4-ta’rif. Quvvatlar α va β bo‘lgan A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

$$\bar{\bar{A}} = \alpha, \qquad \bar{\bar{B}} = \beta.$$

Agar A va B to‘plamlar ekvivalent bo‘lmasa va B to‘plamda A to‘plamga ekvivalent B qism mavjud bo‘lsa, B to‘plamning quvvati A ning quvvatidan katta, A to‘plamning quvvati esa B to‘plamning quvvatidan kichik deyiladi va

$\alpha < \beta$ yoki $\beta > \alpha$ shaklda yoziladi.

Chekli to‘plamlarning eng sodda natural sonlar to‘plamidir.

5-ta’rif. Natural sonlar to‘plami va unga ekvivalent bo‘lgan to‘plamlar sanoqli to‘plamlar deyiladi. Sanoqli bo‘lmagan cheksiz to‘plam sanoqsiz to‘plam deyiladi. Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, har qanday sanoqli to‘plamning ekvivalentlari barcha natural sonlar bilan raqmlab chiqish imkoniyati bor, demak, sanoqli to‘plamlarni quyidagicha cheksiz ketma-ketlik shaklida yozishimiz mumkin:

$$a_1, a_2, a_3, \dots , \qquad a_n, \dots$$

1-teorema. Chekli yoki sanoqli to‘plamlarning cheki yoki sanoqli yig‘indisi ham chekli yoki sanoqli to‘plamdir.

2- teorema. Har qanday cheksiz to‘plamning sanoqli to‘plamdan iborat qismi mavjud.

3-teorema. Ratsional sonlar to‘plami sanoqlidir.

Isbot. Q_+ - bilan musbat ratsional sonlar to‘plamini, Q_- bilan esa manfiy ratsional sonlar to‘plamini belgilaymiz. U holda hamma ratsional sonlar to‘plamini quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin:

$$Q = Q_+ \cup \{0\} \cup Q_- \ ,$$

bu yerda $\{0\}$ bilan birgina nol sondan iborat to‘plamni belgiladik.

Agar Q_+ va Q_- to‘plamlarning sanoqli ekanligi ko‘rsatilsa, u holda 1-teoremaga ko‘ra Q ham sanoqli bo‘ladi.

Q_- to‘plamga ekvivalent bo‘lganligi uchun Q_+ ning sanoqli ekanligini isbotlash kifoya.

Ma’lumki, har qanday munosabat ratsional sonni $\frac{p}{q}$ qisqarmaydigan kasr ko‘rinishda yozish mumkin. Q_+ to‘plamning ekvivalentlarini nomerlashda quyidagi qoidaga amal qilamiz.

Avval maxrajni va suratning yig‘indisi ikkiga teng bo‘lgan ratsional sonlarni nomerlaymiz, so‘ng maxrajning va suratning yig‘indisi 3 ga teng sonlarni nomerlaymiz va hokazo. Bu nomerlashda ikki ratsional sonlarning maxraji va suratlari yig‘indisi bir-biriga teng bo‘lsa, u holda surati kichik bo‘lgan ratsional songa kichikroq nomer yozamiz.

Bu qoidaga muvofiq musbat ratsional sonlarni nomerlab chiqsak,

$$a_1 = \frac{1}{1},\ \ a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{2}{1}, a_4 = \frac{1}{3},\ \ a_5 = \frac{3}{1}, a_6 = \frac{1}{4}\ , a_7 = \frac{2}{3}, \dots$$

ketma-ketlikka ega bo‘lamiz. Natijada har bir musbat ratsional son birgina nomerga ega bo‘ladi va ketma-ketlikda aniq bir o‘rinni egallaydi. Demak Q_+-sanoqli to‘pam .

Quyidagi jumlalar 3-teoremaga o‘xshash isbot qilinadi:

a) Tekislikdagi koordinatalari ratsional sonlardan iborat bo‘lgan barcha nuqtalar sanoqli to‘plam hosil qilmiz.

b) n o‘lchovli Evklid fazosida koordinatalari ratsional sonlar bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami sanoqlidir.

To‘g‘ri chiziq nuqtalaridan iborat to‘plam natural sonlar to‘plami kabi ko‘p uchrab turadigan cheksiz to‘plamlar jumlasidandir.

Shunisi taajjubliki, to‘g‘ri chiziq nuqtalari to‘plami (va hatto $[0; 1]$ segmentdagi nuqtalar to‘plami) natural sonlar to‘plamiga ekvivalent emas, ya’ni to‘g‘ri chiziq nuqtalarini nomerlab chiqish mumkin emas. Bu quyidagi teoremada isbotlanadi.

4-teorema. $[0; 1]$ segmentning nuqtalaridan iborat to‘plam sanoqsizdir.

Isbot. $E = [0; 1]$ segmentning nuqtalaridan iborat to‘plamni sanoqli deb faraz qilaylik. U holda E ning barcha elementlarini nomerlab chiqish mumkin:

$$E = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \qquad (1.1.2)$$

endi $\frac{1}{3}$ va $\frac{2}{3}$ nuqtalar bilan uchta teng segmentga bo‘lami;

$$\left[0; \frac{1}{3}\right] \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \left[\frac{2}{3}; 1\right].$$

Ravshanki x_1 element bir vaqtda bu uchala segmentning har biriga tegishli bo‘lolmaydi, demak, ularning kamida bittasi kirmaydi. O‘sha segmentni E_1 bilan belgilaymiz (agar bunday segmentlar ikkita bo‘lsa, ulardan chaproqdagisini E_1 bilan belgilaymiz). Endi E_1 segmentni 3 ta teng segmentga bo‘lamiz. Bu segmentlarning kamida bittasiga x_2 nuqta kirmaydi; o‘sha segmentni E_2 bilan belgilaymiz (bunday segmentlar 2 ta bo‘lsa , chaproqdagisini E_2 bilan belgilaymiz).

E_2 segmentni o‘z navbatida yana uchta teng segmentga bo‘lamiz; bularning kamida bittasiga x_3 nuqta kirmaydi, o‘shanisini E_3 bilan belgilaymiz va hokazo.

Natijada biri ikkinchisini ichiga joylashgan.

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset, \dots, \supset E_n \supset \dots$$

Segmentlar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz. Bu to‘plamlarning yasalishiga ko‘ra x_n nuqta E_n segmentga kirmaydi. E_n segmentning uzunligi $\frac{1}{3^n}$ bo‘lib, n ortganda nolga intiladi. Limitlar nazariyasidagi ma’lum teoremaga asosan, E_n segmentlarning barchasiga kiruvchi birgina y nuqta mavjud:

$$y \in E_n \ \ (n = 1,2,3, \dots).$$

Bu y nuqta E to‘plamga tegishli bo‘lgani uchun (1.1.2) ketma-ketlikda uchraydi, ya’ni shunday m uchun $y = x_m$ bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan,

$$x_m \notin E_m, \qquad y \in E_m$$

munosabatlardan $y \neq x_m$ kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi.

6-ta’rif. $[0;1]$ segmentdagi nuqtalar to‘plamiga ekvivalent bo‘lgan to‘plamlarni kontinuum quvvatli to‘plamlar deyiladi.

5-teorema. Har qanday $[a;b]$ segmentdagi nuqtalar to‘plami kontinuum quvvatli to‘plamdir .

Isbot. Agar $[a;b]$ segmentning o‘zgaruvchisini x bilan $[a;b]$ segmentning z bilan belgilasak, u holda $z = a + (b - a)x$ almashtirish bu segmentlarni bir-biriga o‘zaro bir qiymatli aks ettiradi. Demak, $[a;b]$ segmentdagi nuqtalar to‘plami kontinuum quvvatga ega.

Tabiiyki , albatta kontinuum quvvatli to‘plamlar sanoqsiz to‘plamlardir.

1.2 . Nuqtali to‘plamlar. Ochiq va yopiq to‘plamlarning tuzilishi.

Bu bandda elementlari haqiqiy sonlar to‘plamining elementlaridan (ya’ni to‘g‘ri chiziq nuqtalaridan) iborat to‘plamlar bilan shug‘ullanamiz. Bu to‘plamlar nuqtali to‘plamlar deyiladi.

To‘g‘ri chiziqdagi ξ nuqtaning atrofi deb shu nuqtani o‘z ichiga olgan oraliqqa aytiladi. Har bir nuqta cheksiz ko‘p atroflarga ega.

1-ta’rif. To‘g‘ri chiziqdan biror ξ nuqta va E to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar ξ ning har qanday atrofida E to‘plamning ξ dan orqali kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, ξ nuqta E to‘plamning limit nuqtasi deyiladi.

Agar $\xi \in$ E bo‘lib , ξ elementning biror atrofida E to‘plamning ξ dan boshqa elementni bo‘lmasa, u holda ξ nuqta E to‘plamning yolg‘iz nuqtasi deyiladi.

Agar ξ nuqta E to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, u E to‘plamga kirishi ham kirmasligi ham mumkin.

1-teorema. Agar ξ nuqta E to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, u holda ξ ning ixtiyoriy atrofida E to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalar mavjud.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni ξ nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu atrofga E to‘plamning soni chekli elementlarigina kirgan bo‘lsin. Shu elementlarni , masalan, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bilan belgilaymiz.

Bu holda ξ ning limit nuqta emasligini ko‘rsatamiz. x_i $(i = \overline{1,n})$ nuqtalar orasida ξ ga eng yaqin bitta yoki ko‘pi bilan ikkita bo‘lishi mumkin. ξ dan ulargacha eng yaqin bo‘lgan masofani δ bilan belgilaymiz, u holda $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ oraliq ξ dan boshqa (agar $\xi \in E$ bo‘lsa) E to‘plashga ko‘radigan birorta ham nuqtani o‘z ichiga olmaydi. Demak, ξ nuqta E to‘plam uchun limit nuqta bo‘lolmaydi.

Agar $E_0 \subset E$ bo‘lib, ξ nuqta E_0 to‘plamning limit nuqtasi, u holda ξ nuqta E ning ham limit nuqtasi bo‘ladi.

2-ta’rif. E to‘plamning barcha limit nuqtalaridan iborat bo‘ladi E to‘plamning hosila to‘plami deyiladi. U holda E' bilan belgilanadi.

Agar to‘plam yolg‘iz (diskret) to‘plam deyiladi.

3-ta’rif. Agar E ning hamma limit nuqtalari o‘ziga tegishli bo‘lsa (ya’ni $E' \subset$ E bo‘lsa), u holda E to‘plam yopiq to‘plam deyiladi.

Bu ta’rifga ko‘ra chekli to‘plam limit nuqtalari bo‘lmagani sababli, yopiq bo‘ladi.

Bo‘sh to‘plamni ham yopiq to‘plam deb hisoblaymiz.

Agar $E = E'$ bo‘lsa, u holda E to‘plam mukammal to‘plam deyiladi.

$\bar{E} = E'$ ∪E to‘plam E to‘plamning yoyilmasi deyiladi.

4- ta’rif. Biror segment ichiga joylashtirish mumkin bo‘lgan to‘plam chegaralangan to‘plam deyiladi.

2-teorema. (Boltsano –Veyeshtrass). Har qanday chegaralangan cheksiz E to‘plam hech bo‘lmaganda bitta limit nuqtaga ega.

Bu teoremaning isboti matematik analiz kursida keltirilgan.

5-ta’rif. Agar chegaralangan E to‘plam birgina ξ limit nuqtaga ega bo‘lsa, u holda E ni yaqinlashuvchi to‘plam deyiladi va E ning ξ ga yaqinlashishini $E \to \xi$ ko‘rinishda yoziladi.

3-teorema. 1) agar E to‘plam ξ ga yaqinlashsa, u holda ξ ning ixtiyoriy (x_1, x_2) atrofidan tashqarida E ning ko‘pi bilan soni chekli elementlarigina bo‘lishi mumkin.

2)aksincha, agar ξ ning ixtiyoriy (x_1, x_2) atrofidan tashqaridan cheksiz E to‘plamning ko‘pi bilan soni chekli elementlari bo‘lsa, u holda $E \to \xi$ bo‘ladi.

4-teorema. Har qanday yaqinlashuvchi E to‘plam sanoqlidir.

5-teorema. Soni chekli yopiq to‘plamlarning yig‘indisi yopiq to‘plamdir.

Bu teorema ikki yopiq to‘plamlar uchun isbotlanilsa kifoya, chunki induksiya yo‘li bilan umumiy hol ham shu holga keltirish mumkin.

F_1 va F_2 yopiq to‘plamlar bo‘lsin. Bu to‘plamlarning yopiq ekanligidan

$$(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2' \subset F_1 \cup F_2$$

munosabat kelib chiqadi. Bu esa $F_1 \cup F_2$ to‘plamning yopiq ekanligini ko‘rsatadi. Lekin hadlarning soni cheksiz bo‘lgan to‘plamlar yig‘indisi yopiq bo‘lmasligi mumkin.

Masalan

$$F_1 = \left[0;\frac{1}{2}\right], F_2 = \left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right], F_3 = \left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right], \dots, \;\; F_n \left[\frac{n-1}{n};\frac{n}{n+1}\right], \dots$$

to‘plamlarning har biri yopiq to‘plamdir. Ammo ularning yig‘indisi $[0;1]$ yarim oraliqqa teng, bu to‘plam esa yopiq emas, chunki bir nuqta bu to‘plam uchun limit nuqta bo‘lib o‘ziga kirmaydi.

6-teorema. Hadlarning soni ixtiyoriy (ya’ni chekli yoki cheksiz) bo‘lgan yopiq to‘plamlarning ko‘paytmasi yopiq to‘plamdir.

Isbot. F_x yopiq to‘plam bo‘lib, uning indeksi ixtiyoriy quvvatli biror Γ to‘plamning elementlari bo‘yicha o‘zgarsin deyiladi.

Ushbu

$$\Phi = \bigcap_{x \in \Gamma} F_x$$

to‘plamni tuzib, uning yopiq ekanligini ko‘rsatamiz.

Teoremaning shartiga muvofiq har bir $x \in \Gamma$ uchun F_x yopiq to‘plam, u holda $\Phi \subset F_x$, $(x \in \Gamma)$ munosabat bevosita kelib chiqadi. Bundan esa $\Phi' \subset F_x$ bo‘ladi (chunki F_x yopiq). Bu munosabat ixtiyoriy $x \in \Gamma$ uchun o‘rinli bo‘lgani sababli

$$\Phi' \subset \bigcap_{x \in \Gamma} F_x = \Phi$$

munosabat kelib chiqadi. Bu esa Φ to'plamning yopiq ekanini ko'rsatadi.

5-ta'rif. E biror nuqtali to'plam va M biror oraliqlar sistemasi bo'lsin. Agar E ning har bir nuqtasi uchun M sistemada bu nuqtani o'z ichiga oladigan oraliq mavjud bo'lsa, u holda E to'plam M oraliqlar sistemasi bilan qoplangan deyiladi. M sistema esa E to'plamni qoplovchi sistema deyiladi.

7-teorema.(Borel-Lebeg) . Agar yopiq va chegaralangan F to'plam soni cheksiz oraliqlar sistemasi bilan qoplangan bo'lsa, u holda bu sistemadan F ni qoplaydigan chekli qism sistemani ajratib olish mumkin.

Isbot. Yopiq va chegaralangan F to'plam M cheksiz sistema bilan qoplangan bo'lib, M sistemada F ni qoplaydigan chekli qism yo'q deb faraz qilamiz. Bundan, xususiy, F ning cheksiz to'plam ekanligi kelib chiqadi. C chegaralangan to'plam bo'lgani uchun shunday $[a; b]$ segment mavjudki, bu segment F to'plamni o'z ichiga oladi, ya'ni $F \subset [a; b]$.

Endi $c = \frac{a+b}{2}$ nuqtani olib, $F_1 = F \cap [a; c]$ va $\Phi_1 = F \cap [c; b]$ to'plamlarni tuzamiz.

Farazimizga muvofiq, bu to'plamlarning har birini ham birdaniga M sistemaning chekli qismi bilan qoplab bo'lmaydi, chunki aks holda F to'plam ham M sistemaning biror chekli qismi bilan qoplangan bo'lar edi.

Agar F_1 (yoki Φ_1) to'plam M sistemanning chekli qismi sistemasi bilan qoplangan bo'lsa, u holda $[a_1; b_1]$ bilan $[a; c]$ (mos ravishda $[c; b]$) segmentni belgilaymiz. Agar F_1 va Φ_1 to'plamlarning har ikkalasi ham M ning chekli qism sisitemasi bilan qoplangan bo'lsa, u holda $[a_1; b_1]$ orqali $[a; c]$ va $[c; b]$ segmentlardan ixtiyoriy bittasini olishimiz mumkin.

Ravshanki, $F_1 \cap [a_1; b_1]$ to'plam cheksiz bo'ladi. Endi $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ nuqtani olib, $F_2 = F \cap [a_1; c_1]$ va $\Phi_2 = F \cap [c_1; b_1]$ to'plamlarni tuzamiz. Agar F_2 (yoki Φ_2) to'plam M ning chekli sistemasi bilan qoplangan bo'lsa, (farazimizga muvofiq, F_2 yoki Φ_2 to'plam M to'plamning hech qanday chekli qism sistemasi bilan qoplanmaydi), $[a_2; b_2]$ bilan $[a_1; c_1]$ (mos ravishda $[c_1; b_1]$) segmentni belgilaymiz.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ichma-ich joylashgan

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \ldots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo‘ladi va

$$F \cap [a_n;b_n] = F_n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

to‘plam farazimizga muvofiq M sistemaning hech qanday chekli qismi sistemasi bilan qoplanmaydi; bundan, xususan, bu to‘plamlarning har bir cheksiz to‘plam ekanligi kelib chiqadi. Yuqoridagi sistemalar ketma-ketligida $[a_n;b_n]$ segmentning $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ uzunligi n cheksizlikka intilganda hammasiga umumiy bo‘lgan yagona x_0 nuqta mavjud bo‘ladi. Bu x_0 ning F ga tegishli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $F \cap [a_1;b_1]$ to‘plamdan x_1 nuqtani, $F \cap [a_2;b_2]$ to‘plamdan x_2 $(x_1 \neq x_2)$ nuqtani, $F \cap [a_3;b_3]$ to‘plamdan x_3 $(x_1 \neq x_3,\ x_3 \neq x_2)$ nuqtani va hokazo nuqtalarni olamiz.

Endi yuqoridagi $[a_n;b_n]$ lar uchun munosabatlardan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

bo‘lishi ko‘rinadi. Lekin F yopiq to‘plam bo‘lganligi uchun $x_0 \in F$. Bundan foydalanib, teoremani isbot qilamiz. Buning uchun yuqoridagi qilgan farazimizga zid natija keltirib chiqarish kifoya.

Darhaqiqat, teoremaning shartiga muvofiq x_0 nuqtani M sistemadagi biror (α,β) oraliq qoplaydi n yetarli katta bo‘lganda $[a_n;b_n]$ sistemaning uzunligi istalgan kichik bo‘lishi mumkinligidan va har bir $[a_n;b_n]$ segment x_0 nuqtani o‘z ichiga olganligi sababli yetarli katta n uchun $[a_n;b_n] \subset \delta$ munosabatning bajarilishi kelib chiqadi. Bu munosabat esa $F \cap [a_n;b_n] \subset \delta$ kelib chiqadi; demak, $F \cap [a_n;b_n]$

to‘plam M sistemadan olingan birgina orali bilan qoplanadi. Bu natija esa $[a_n; b_n]$ segmentlarning yuqorida aytilgan xossasiga zid.

6-ta’rif. Agar ξnuqtaning ixtiyoriy atrofi bilan E to‘plamning kesishmasi sanoqsiz to‘plam bo‘lsa, ξ nuqta E to‘plamning quyuqlanish nuqtasi deyiladi, aks holda bu nuqta quyuqlanmaslik nuqtasi deyiladi, ya’ni bu nuqtaning shunday atrofi mavjudki, uning E to‘plam bilan kesishmasi bilan sanoqli to‘plamdir.

8-teorema. Elementlari ratsional oraliqlardan iborat bo‘lgan sistema sanoqli to‘plamdir.

9-teorema. (Kantor-Bendikson). Har qanday yopiq E to‘plamni $E = Q \cup M$ ko‘rinishida yozish mumkin. Bu yerda Q to‘plam E ning hamma quyuqlanish nuqtalaridan iborat bo‘lgan mukammal to‘plam, M esa Ening quyuqlanmaslik nuqtalaridan iborat bo‘lgan sanoqli to‘plam.

Endi yopiq to‘plamlar bilan uzviy bog‘langan ochiq to‘plamlarni o‘rganishga o‘tamiz.

7-ta’rif. Agar ξ nuqtani o‘z ichiga olgan va E to‘plamga butunlay kirgan (x', x'') oraliq mavjud bo‘lsa, ξ nuqta E to‘plamning ichki nuqtasi deyiladi.

8-ta’rif. Agar E to‘plamning hamma nuqtalari ichki nuqtalardan iborat bo‘lsa , u holda E to‘plam ochiq to‘plam deyiladi. Bo‘sh to‘plamni ham ochiq to‘plam deb hisoblaymiz.

10-teorema. 1). Soni ixtiyoriy bo‘lgan ochiq to‘plaamlarning yig‘indisi ham ochiq to‘plamdir.

2). Soni chekli ochiq to‘plamlarning kesishmasi ochiq to‘plamdir.

11-teorema. Agar G ochiq to‘plam bo‘lsa, u holda uning CG to‘ldiruvchisi yopiq to‘plam bo‘ladi.

Isbot. $CG$to‘plamni yopiq emas deb faraz qilaylik , u holda uning o‘ziga tegishli bo‘lmagan x_0 limit nuqtasi mavjud. Demak, $x_0 \in G$, G ochiq to‘plam bo‘lgani uchun x_0 nuqtaning shunday (α, β) atrofi mavjudki, bu atrofning hamma nuqtalari G ga kiradi. Bundan ko‘rinadiki (α, β) oraliqda $CG$to‘plamning birorta ham elementi yo‘q, binobarin x_0 nuqta CG to‘plamning limit nuqtasi bo‘la olmaydi. Bu esa farazimizga zid.

12-teorema. Agar F yopiq to‘plam bo‘lsa, uning CF to‘ldiruvchisi ochiq bo‘ladi.

Isbot. $CF$to‘plamning ixtiyoriy x_0 nuqtasini olib uning ichki nuqta ekanligini ko‘rsatamiz.

F yopiq to‘plam bo‘lganligi uchun x_0 nuqta F ning limit nuqtasi bo‘la olmaydi. Shuning uchun ham x_0 nuqtani o‘z ichiga olgan va F to‘plamning birorta ham nuqtasini o‘z ichiga olmagan (x', x'') oraliq mavjud. Demak, bu oraliqning hamma nuqtalari CF to‘plamga kiradi, ya’ni x_0 CF to‘plamning ichki nuqtasi bo‘ladi.

13-teorema. Agar F chegaralangan yopiq to‘plam bo‘lsa, $S = [a, b]$ uni o‘z ichiga olgan eng kichik segment bo‘lsa, u holda $C_s\,[a, b] = [a, b] \backslash F$ to‘plam ochiq bo‘ladi.

Chegaralangan ochiq va yopiq to‘plamlarning tuzilishini o‘rganish keyingi boblar uchun katta ahamiyatga ega.

Ochiq G to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar $(\alpha, \beta) \subset G$ va $\alpha \bar{\in} G,\ \beta \bar{\in} G$ bo‘lsa, (α, β) oraliq G to‘plamni tuzuvchi oraliq deymiz.

14-teorema. Ochiq G to‘plamning turli tuzuvchi $(\alpha_1\beta_1)$ va $(\alpha_2\beta_2)$ oraliqlari umumiy nuqtaga ega emas.

Isbot. $(\alpha_1\beta_1)$ va $(\alpha_2\beta_2)$ oraliqlar turli (ya’ni $\alpha_1 \neq \beta_1,\ \alpha_2 \neq \beta_2$) munsabatlarning kamida biri o‘rinli bo‘lib, umumiy ξ nuqtaga ega bo‘lsin. U holda

$$\alpha_1 < \xi < \beta_1, \alpha_2 < \xi < \beta_2$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengsizliklardan

$$\alpha_2 < \xi < \beta_1, \alpha_1 < \xi < \beta_2$$

tengsizliklar bevosita kelib chiqadi. Bunda ikki hol bo‘lishi mumkin:

$$\alpha_2 < \alpha_1 \text{ yoki } \alpha_1 < \alpha_2$$

Agar $\alpha_2 < \alpha_1$ bo‘lsa, u holda $\alpha_1 \in (\alpha_2, \beta_2) \subset G$ bu munosabat esa bajarilishi mumkin emas, chunki $\alpha_1 \bar{\in} G$ ziddiyat kelib chiqadi. Agar $\alpha_1 < \alpha_2$ bo‘lsa, u holda $\alpha_2 \in (\alpha_1, \beta_1) \subset G$; bu munosabat bajarilishi mumkin emas, chunki, $\alpha_2 \overline{\in} G$, yana ziddiyat kelib chiqadi.

15-teorema. Agar G bo‘sh bo‘lmagan ochiq va chegaralangan to‘plam bo‘lsa, u holda G ning har bir nuqtasi G ni tuzuvchi birorta oraliqqa kiradi.

Isbot. a nuqta G to‘plamning ixtiyoriy elementi bo‘lsin. Ushbu $F = [a, +\infty) \cap CG$ to‘plamni tuzamiz. $[a, +\infty)$ $b \subset G$ to‘plamlarning har biri yopiq bo‘lgani uchun F to‘plam ham yopiq. F to‘plamning tuzulishdan uning quyidagi chegaralanganligi va bo‘sh emasligi ko‘rinadi. F ning quyi chegarasidan α bilan belgilaymiz $\alpha \in F$, chunki F yopiq to‘plam. So‘ngra $\alpha > a$, chunki a va undan chapdagi hamma nuqtalar F to‘plamga kirmaydi. Bundan tashqari $[a, \alpha) \subset G$. Aks holda, ya’ni $[a, \alpha) \subset G$ bo‘lmaganda shunday b nuqta mavjud bo‘ladiki, $b \in [a, \alpha)$ va $b \overline{\in} G$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bu munosabatlardan ko‘rinadiki, $b \in F$ va $b < a$ so‘ngi tengsizlik α uchun $\alpha > a$, $\alpha \overline{\in} G$, $[a, \alpha) \subset G$ munosabatlarning hammasi o‘rinli ekanligi ko‘rsatildi.

Xuddi shunday quyidagi munosabatlarning hammasini qanoatlantiradigan β nuqtaning mavjudligi ko‘rsatiladi:

$$\beta < a,\ \beta \overline{\in} G\ , (\beta, a) \subset G.$$

Buning uchun $f = (-\infty, a] \cap G$ to‘plamni tuzib, yuqoridagiga o‘xshash mulohazalardan foydalanish kerak. Yuqoridagi munosabatlardan (β, a) oraliq G ning tuzuvchi oralig‘i va $a \in (\beta, a)$ ekanligi ko‘rinadi.

Bu teoremadan bevosita quyidagi natijalar kelib chiqadi:

Natija. G ochiq, chegaralangan va bo‘sh bo‘lmagan to‘plam bo‘lib, (a, β) oraliq G ga butunlay kirgan bo‘lsa, u holda G ning tuzuvchi oraliqlari orasida (a, β) oraliqni butunlay o‘z ichiga oladigan oraliq mavjuddir.

16- teorema. Chegaralangan har qanday ochiq G, $(G \neq 0)$ to‘plamni $G = \bigcup_k \delta_k$, $\delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ $(\alpha_k \overline{\in} G\ , \beta_k \overline{\in} G)$ ko‘rinishda yozish mumkin, bu yerda δ_k lar G ning tuzuvchi oraliqlari $\delta_k \cap \delta_{k'} = \emptyset$ (agar $k \neq k'$ bo‘lsa) va δ_k oraliqdan iborat sistema ko‘pi bilan sanoqli bo‘ladi.

Isbot. Yuqoridagi natijadan kelib chiqadi.

Endi bo‘sh bo‘lmagan, chegaralangan, yopiq to‘plamlarning tuzilishini tekshirishga o‘tamiz.

E chegaralangan to‘plam va $a = \inf E$ va $b = \sup E$ bo‘lsin. U holda $S = [a, b]$ ni o‘z ichiga olgan eng kichik segment bo‘lsin. U holda $C_s F$ ochiq to‘plam bo‘ladi. Agar $C_s F$ bo‘sh bo‘lmasa unda 16- teoremani tatbiq qilish mumkin. Natijada quyidagi teoremaga kelamiz.

17- teorema. Har qanday chegaralangan yopiq F to‘plam yo segmentlar yoki biror segmentdan soni chekli yoki sanoqli oraliqlar sistemasini chiqarib tashlashdan hosil bo‘lgan to‘plamdir.

Shuni ta’kidlash kerakki, chiqarib tashlangan oraliqlarning chegara nuqtalari F to‘plamda qoladi.

1.3. To‘plamning o‘lchovi. Tekislikdagi to‘plamlarning Lebeg o‘lchovi.

To‘g‘ri chiziqda biror (a, b) oraliq (yoki segment) berilgan bo‘lsa, bu oraliqning (segmentning) uzunligi yoki o‘lchovi deb, odatda $b - a$ songa aytiladi. Endi to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqtali to‘plam uchun o‘lchov tushunchasini turlicha kiritish mumkin, o‘lchov tushunchasini umumlashtirish natijasida kelib chiqqan o‘lchov nazariyasini fransuz matematiklari E.Borel, K. Jordan va A. Lebeglar yaratganlar.

E chegaralangan to‘plam va $[a, b]$ shu to‘plamni o‘z ichiga olgan eng kichik segment bo‘lsin. Faraz qilaylik, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \dots$ soni chekli yoki sanoqli oraliqlar sistemasi bo‘lib, E ning har bir x nuqta

δ_i $(i = 1,2,3 \dots.)$ oraliqlarning birortasi joylashgan bo‘lsin, μ_i bilan δ_i oraliqning uzunligini belgilaymiz. Bunday oraliqlar sistemasini cheksiz ko‘p usullar bilan tuzish mumkin. U holda $\sum_i \mu_i$ yig‘indi ham cheksiz ko‘p qiymatga ega bo‘ladi, ammo $\sum_i \mu_i > 0$, chunki μ_i −oraliqning uzunligi. Demak, $\sum_i \mu_i$ yig‘indilar sistemasi quyidan chegaralangan va uning uchun u aniq quyi chegaraga ega.

1-ta’rif. $\sum_i \mu_i$ yig‘indilar sistemasining aniq quyi chegarasi E to‘plamning tashqi o‘lchovi deyiladi va uni $\mu^*(E)$ bilan bellgilanadi, ya’ni

$$\mu^*(E) = \inf \sum_i \mu_i$$

Izoh. a)

$$\sum_i \mu_i > 0$$

bo‘lgani uchun $\mu^*(E) \geq 0$ bo‘ladi,

c) $\mu^* \leq b - a$ tengsizlik o‘rinli; haqiqatdan har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $E \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Bunda

$$\mu^*(E) < b - a + 2\varepsilon.$$

Ushbu

$$\mu^*(E) = b - a - \mu^*(CE) \qquad (CE = [a, b] \backslash E)$$

son E to‘plamning ichki o‘lchovi deyiladi. $\mu^*(E) \geq 0$, chunki,

$CE \subset [a, b]$ va o‘z navbatida $\mu^*(CE) = b - a$.

Tashqi va ichki o‘lchovlarning bir nechta xossalarini ko‘rib chiqamiz.

1-xossa. To‘plamning tashqi o‘lchovi uning ichki o‘lchovidan kichik emas, ya’ni

$$\mu_*(E) \leq \mu^*(E).$$

2-xossa. Agar A va B to‘plamlar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B), \quad C(A) \leq \mu_*(B).$$

3-xossa. Agar chegaralangan E to‘plam chekli yoki soni sanoqli $E_1, E_2, E_3, \dots$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat bo‘lsa, ya’ni $E = \bigcup_k E_k$ bo‘lsa, u holda

$$\mu^*(E) \leq \sum_k \mu^*(E_k)$$

4-xossa. Agar chegaralangan E to‘plam uchun $E = \bigcup_k E_k,\ E_k \cap E_{k'} = \emptyset$, $k \neq k'$ bo‘lsa u holda

$$\mu^*(E) \geq \sum_k \mu_*(E_k)$$

2-ta’rif.(A.Lebeg) . Agar E to‘plamning $\mu^*(E)$ tashqi o‘lchovi uning $\mu_*(E)$ ichki o‘lchoviga teng bo‘lsa, u holda E o‘lchovli to‘plam deyiladi va uning o‘lchovi $\mu(E)$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$\mu(E) = \mu^*(E) = \mu_*(E)$$

Bu ta’rif ma’nosidagi o‘lchovli to‘plamni (4) o‘lchovli to‘plam deyiladi.

5-xossa. Agar E to‘plam o‘lchovli bo‘lsa, u holda $CE = [a, b] \backslash E$ to‘plam ham o‘lchovli bo‘ladi.

6-xossa. Agar $E_1, E_2, E_3, \dots E_n$ o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, ularning yig‘indisi ham o‘lchovli to‘plam bo‘ladi, yig‘indining hadlari o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlardan iborat bo‘lsa, yig‘indining o‘lchovi hadlar o‘lchovlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

7-xossa. O‘lchovli E_1 va E_2 to‘plamlarning ayirmasi ham o‘lchovli bo‘ladi; agar $E_2 \subset E_1$ bo‘lsa, u holda

$$\mu(E_1 \backslash E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$$

bo‘ladi.

8-xossa. Agar $[a, b]$ segmentda joylashgan o‘lchovli $E_1, E_2, E_3, \dots E_n, \dots$ to‘plamlar ketma- ketligi berilgan bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

to‘plam $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ bo‘lsa u holda

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.Odatda bu tenglik o‘lchovning to‘la additivlik yoki $6-$additivlik xossasi deyiladi.

9-xossa. Har qanday sanoqli E to‘plam o‘lchovli va uning o‘chovi nolga teng.

10-xossa. $[a, b]$ segmentda joylashgan, soni chekli yoki sanoqli o‘lchovli to‘plamlarning kesishmasi o‘lchovli to‘plamdir.

11-xossa. Agar $[a, b]$ segmentda joylashgan o‘lchovli

$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset$ ... to‘plamlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsa, u holda

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

12-xossa. (N.Luzin). Agar E to‘plam o‘lchovli bo‘lib, uning o‘lchovi musbat bo‘lsa, u holda istalgan kichik $\eta > 0$ son uchun shunday mukammal $P \subset E$ to‘plam topish mumkinki, bu to‘plam uchun ushbu

$$\mu(P) > \mu(E) - \eta$$

tengsizlik bajariladi.

Bu xossaning mohiyati shundaki, u har qanday o‘lchovli to‘plamning o‘lchovi uning o‘lchoviga istalgancha yaqin bo‘lgan mukammal qism to‘plam bilan almashtirish imkoniyatini beradi.

Endi ilgarigi bobda bayon etilgan abstrakt o‘lchovning tatbiqi sifatida tekislikdagi to‘plamlarning Lebeg o‘lchovi bilan shug‘ullanamiz.

Biz (oldingi bobda) yuqorida to‘g‘ri chiziqdagi to‘plamlarning o‘lchovi haqidagi masalani ko‘rib o‘tdik. Unga diqqat bilan e’tibor bersak, μ o‘lchov to‘g‘ri chiziqdan o‘lchovli to‘plamlar sistemasida aniqlangan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy funksiya ekanligini ko‘ramiz:

a) har qanday A o‘lchovli to‘plam uchun $\mu(A) \geq 0$;

b) agar $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ o‘lchovli to‘plamlar o‘zaro kesishmasa, u holda

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n).$$

Bu xossa o‘lchovning additivlik xossasi deyiladi.

To‘plamlar sistemasida aniqlangan haqiqiy funksiya to‘plam funksiyasi deyiladi.

3-ta’rif. Agar H sistemaning ikkita A va B elementi uchun $A \cap B \in H$ va $A \Delta B \in H$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda H sistema to‘plamlar halqasi deyiladi.

To‘plamlarning o‘chovi haqidagi masalaga diqqat bilan qarasak, μ o‘lchov to‘g‘ri chiziqdagi o‘lchovli to‘plamlar sistemasida aniqlangan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy funksiya ekanligini ko‘ramiz:

a) har qanday A o‘lchovli to‘plam uchun $\mu(A) \geq 0$;

b) agar $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ o‘lchovli to‘plamlar o‘zaro kesishmasa, u holda

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n).$$

Bu xossa o‘lchovning additivlik xossasi deyiladi.

To‘plamlar sistemasida aniqlangan haqiqiy funksiya to‘plam funksiya deyiladi.

4-ta’rif. Agar H to‘plamlar sistemasining biror E elementi va shu sistemaning istalgan A elementi uchun $E \cap A = A$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda E element H sistemaning birlik elementi deyiladi.

Izoh. Halqada birlik element yagonadir.

5-ta’rif. Birlik elementga ega bo‘lgan H halqa to‘plamlar algebrasi (qisqacha algebra) deyiladi.

Misol. H sistema $N_n = \{1,2,3, \ldots, n\}$ to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan tuzilgan sistema bo‘lsin. Istalgan ikkita $A \in H$ va $B \in H$ uchun $A \cap B \subset H$ va

$A\Delta B \in H$ munosabatlarning o‘rinli ekanligi H sistemaning ta’rifidan ko‘rinib turibdi.

Demak, sistema halqa tashkil etadi.

N_n to‘plam ham H sistemaning elementi bo‘lganligidan u H sistema uchun birlik element bo‘ladi. Demak, H sistema ayni vaqtda algebra ham ekan.

1-teorema. Istalgan sondagi $\{H_\alpha, \ \alpha \in I\}$ halqalar sistemasining ko‘paytmasi

$$H = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$$

ham halqadir.

2-teorema. Har qanday H to‘plamlar sistemasi uchu sistemani o‘z ichiga olgan yagona minimal halqa mavjud.

6-ta’rif. H to‘plamlar sistemasi uchun $\emptyset \in H$ va har qanday $A \in H$ va $B \in H$ uchun $A \cap B \in H$ bo‘lib, shu sistemaning A va A_1 elementlari $A_1 \subset A$ munosabatni qanoatlantirganda H sistemada o‘zaro kesishmaydigan soni chekli $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ elementlar topilsa, ular uchun

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ \dots \cup A_n$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa u holda H sistema yarim halqa deyiladi.

7-ta’rif. Agar H to‘plamlar halqa sifatida $A_n \in H, n = 1,2,3, \dots$ munosabatdan

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in H$$

munosabat kelib chiqsa, bunday halqa Ϭ-halqa deyiladi.

Birlik elementga ega bo‘lgan Ϭ- halqa Ϭ-algebra deyiladi.

8-ta’rif. Agar H to‘plamlar halqa sifatida $A_n \in H, n = 1,2,3, \dots$ munosabatdan

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in H$$

munosabat kelib chiqsa, bunday halqa Ϭ-halqa deyiladi.

Agar μ to‘plam funksiyasi biror G sistemaning elementlarida aniqlangan bo‘lsa, bundan buyon aniqlik uchun G sistemani G_μ orqali belgilaymiz.

9-ta’rif. G_μ yarim halqada aniqlangan μ haqiqiy to‘plam funksiyasi uchun ushbu ikkita shart bajarilsa, bunday to‘plam funksiyasi o‘lchov deyiladi:

1). har qanday $A \in G_\mu$, $\mu(A) \geq 0$;

2). μ-additiv funksiya, yani $A \in G_\mu$ uchun

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ , A_k \ \cap A_l \ = \emptyset, \ \ k \neq l, \ \ A \in G_\mu, k = 1,2, \dots, n$$

bo‘lsa, u holda

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

10-ta’rif. Faraz qilaylik, ikkita μ_1 va μ_2 o‘lchov berilgan bo‘lsin. Agar μ_1 va μ_2 o‘lchovlar uchun $G_{\mu_1} \subset G_{\mu_2}$bo‘lib , har bir $A \in G_{\mu_1}$ uchun $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ bo‘lsa, u holda μ_2 o‘lchov μ_1 o‘lchovning davomi deyiladi.

Berilgan o‘lchovlarning davomi yagonami yoki yo‘qmi degan savol tug‘iladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

3-teorema. Biror G_m yarim halqada aniqlangan har bir m o‘lchov uchun shunday yagona m_1 davomi mavjudki, uning aniqlanish sohasi G_m yarim halqani o‘z ichiga olgan F minimal halqadan iborat.

Izoh. Shunday qilib, agar yarim halqada aniqlangan o‘lchov mavjud bo‘lsa, shu yarim halqa orqali hosil bo‘lgan minimal halqada o‘lchovni aniqlash imkoniyatiga ega bo‘ldik.

11-ta’rif. Agar m o‘lchovning G_m aniqlanish sohasidan olingan soni sohani kesishmaydigan $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, \dots$ to‘plamlar uchun

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in G_m$$

bo‘lganda

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, m o‘lchov Ϭ-additiv o‘lchov deyiladi.

Endi G_m yarim halqada aniqlangan Ϭ-additiv m o‘lchovni Lebeg ma’nosida davom ettirish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Bunda G_m yarim halqada birlik element bo‘lgan hol bilan chegaralanamiz.

Shunday qilib, G_m yarim halqada aniqlangan Ϭ-additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsin. Bu yarim halqadagi E birlik elementning barch qism to‘plamlaridan tuzilgan sistemani M orqali belgilaymiz. Ma’lumki M sistema Ϭ-algebrani tashkil etadi.

Bu Ϭ-algebrada tashqi o‘lchov tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik, $A \subset E$ to‘plam berilgan bo‘lib, $\{B_1, B_2, B_3, ...\}$ to‘plamlar sistemasi G_m yarim halqadan olingan chekli yoki sanoqli sistema bo‘lsin. Agar ushbu

$$A \subset \bigcup_k B_k$$

Munosabat o‘rinli bo‘lsa, $\{B\}$ to‘plamlar sistemasi A to‘plamni qoplovchi sistema deyiladi. A to‘plamni qoplaydigan bunday sistemani cheksiz ko‘p usul bilan tuzatish mumkinligi ravshan. Shuning uchun ham, ushbu

$$\sum_k m(B_k)$$

yig‘indi cheksiz ko‘p qiymatga ega va har xil k natural son uchun $m(B_k) \geq 0$ bo‘lgani tufayli bu yig‘indi quyidan chegaralangan bo‘ladi.

12-ta’rif. $\sum_k m(B_k)$ yig‘indilar sistemasining aniq quyi chegarasi A to‘plamning tashqi o‘lchovi deyiladi va u

$$\mu^*(A) = \inf_{A\subset\bigcup_k B_k} \sum_k m(P_k), \quad B_k \in G_m\,, \quad k = 1,2,\dots$$

orqali belgilanadi.

4-teorema. Agar G_m yarim halqani o‘z ichiga olgan minimal halqa F bo‘lib, m o‘lchovning F halqaga davomi m' bo‘lsa, u holda har qanday $A \in F$ uchun

$\mu^*(A) = m'$ (A)

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

5-teorema. Agar $A_1 \in M$ va $A_2 \in M$ to‘plamlar uchun $A_1 \subset A_2$ bo‘lsa, u holda $\mu^*(A) = \mu^*(A_2)$ bo‘ladi.

Endi G_m yarim halqani o‘z ichiga olgan minimal halqani F orqali belgilab, o‘lchovli to‘plamga quyidagicha ta’rif beramiz:

13- ta’rif. Agar biror $A \in M$ to‘plam berilgan bo‘lib, har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun F minimal halqadan shunday B to‘plam topilsa, $A\Delta B$ to‘plamning tashqi o‘lchovi uchun ushbu

$$\mu^*(A\Delta B\,) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda A to‘plam o‘lchovli to‘plam deyiladi.

M sistemaning barcha o‘lchovli to‘plamlari sistemani Z orqali belgilaymiz.

6-teorema. Agar A o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda uning to‘ldiruvchisi $E\backslash A$ ham o‘lchovli to‘plamdir, ya’ni agar $A \in Z$ bo‘lsa, u holda $E\backslash A \in Z$ bo‘ladi.

7-teorema. Har qanday ikkita o‘lchovli to‘plamning yig‘indisi, ko‘paytmasi, ayirmasi va simmetrik ayirmasi ham o‘lchovli to‘plamdir.

Natija. Z o‘lchovli to‘plamlar sistemasi algebradir.

8-teorema. Agar

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k\,, \quad A_k \cap A_j = \emptyset,\ \ k \neq j, \quad A_k \in Z, \quad k = 1,2,3,\dots n$$

bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)$$

Bu teoremadan ko‘rinadiki, Z o‘lchovli to‘plamlar sistemasida aniqlangan $\mu^*$to‘plam funksiyasi (tashqi o‘lchov) aslida o‘lchov ekan.

14-ta’rif. Z o‘lchovli to‘plamlar sistemasida aniqlangan μ^* to‘plam funksiyasi (tashqi o‘lchov) Lebeg o‘lchovi deyiladi va μ orqali belgilanadi.

9-teorema. Soni sanoqli o‘lchovli to‘plamlarning yig‘indisi va ko‘paytmasi o‘lchovli to‘plamdir.

10-teorema. Lebeg o‘lchovi $6-$additiv o‘lchovdir $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, \dots$ o‘lchovli to‘plamlar bo‘lib,

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_n \cap A_m = \emptyset, \quad n \neq m$$

bo‘lsa,

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib G_m yarim halqada aniqlangan $6-$additiv m o‘lchovni aniqlanish sohasi $6-$algebradan iborat bo‘lgan $6-$additiv hamda uluksiz bo‘lgan μ o‘lchovga davom ettirdik. Bu usul bilan davom ettirilgan μ o‘lchov m o‘lchovning Lebeg ma’nosidagi davomi deyiladi.

Endi tengsizlikdagi to‘plamlarning Lebeg o‘lchovi bilan shug‘ullanmiz.

Faraz qilaylik $a,\ b,\ c,\ d$ haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin. Tengsizlikdagi quyidagi ko‘rinishdagi to‘plamlar to‘g‘ri to‘rtburchaklar deyiladi.

1. $P_1 = \{(x,y)\colon\ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$
2. $P_2 = \{(x,y)\colon\ a \leq x \leq b, \quad c \leq y < d\}$

....,

16. $P_{16} = \{(x,y)\colon\ a < x < b, \quad c < y < d\}$.

Tekislikdagi biror to‘g‘ri to‘rtburchaklar to‘plamini G_0 orqali belgilaymiz.

11-teorema. G_0 to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi yarim halqadir.

Endi G_0 yarim halqada m to‘plam funksiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$m(P) = 0,$ agar $P = \emptyset$ bo‘lsa $m(P) = (b-a)(d-c),$ agar $P = P_i$, $i = 1,2,\ldots,16$ (to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lsa)

m to‘plam funksiyasi o‘lchov. Haqiqatdan ham har qanday $P \in G_0$ uchun $m(P) \geq 0$ ekanligi m funksiyaning ta’rifidan ko‘rinadi:

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k\ , \qquad P_k \cap P_j = \emptyset,\ \ k \neq j,\ \ P_k \in G_0,$$

bo‘lganda

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

tenglikning o‘rinli ekanligi esa elementar geometriyadan ma’lum.

Endi tekislikda chegaralangan A to‘plam uchun tashqi o‘lchov tenglamasini kiritamiz. Umumiylikni kamaytirmasdan bunday to‘plamlarni biror E to‘g‘ri to‘rtburchakning qisimlaridan iborat deb qarashimiz mumkin.

Faraz qilaylik, $P_1, P_2, P_3, \ldots P_k, \ldots,$ $P_k \in G_0,$ $k = 1,2,3,\ldots$ soni chekli yoki sanoqli to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi $A \subset E$ to‘plamni qoplasin.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

Ma’lumki, bunday to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasini cheksiz usul bilan tuzish mumkin. Shuning uchun

$$\sum_{k} m(P_k) \geq 0$$

bo‘lganligi tufayli, bu yig‘indi quyidan chegaralangan bo‘ladi. Bu yig‘indilar sistemasi A to‘plamning tashqi o‘lchovi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\mu^*(A) = \inf_{A\subset \bigcup_k B_k} \sum_k m(P_k)$$

Agar $A \subset E$ to‘plam va berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun $B \in F_0$ topilsaki $\mu(A\Delta B) < \varepsilon$ t engsizlik bajarilsa, A to‘plam o‘lchovli to‘plam deyiladi.

Tengsizlikdagi barcha o‘lchovli to‘plamlar sistemasi Z_0 orqali belgilaymiz. Z_0 sistemasida aniqlangan μ^* funksiya Lebeg o‘lchovli deyiladi va μ orqali belgilanadi.

O’LCHOVLI FUNKSIYALAR.

Uzluksiz funksiya tushunchasiga ma’lum manoda yaqin va matematik analiz uchun muxim axamyatga ega bo’lgan o’lchovli funksiya tushunchasini keltiramiz.

f(x) funksiya o’lchovli E to’plamda aniqlangan va a biror xaqiqiy son bo’lsin; o’zgaruvchi xэE miqdorining f(x)>a tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlaridan iborat to’plamni E{ f > a} bilan belgilaymiz, ya’ni E { f>a}={xэE: f(x)>a}

Shunga o’xshash, E{ f≥a], E{f=a}, E{f≤a}, E{a<f<b} to’plamlarning har biri x∈E o’zgaruvchining katta qavs ichida yozilgan munosabatlarni qanoatlantiradigan qiymatlardan iborat.

1-Ta’rif. Agar o’lchovli E to’plamda berilgan f(x) funksiya uchun E{f>a} har qanday a va o’lchovli bo’lsa, u holda f(x) o’lchovli funksiya deyiladi.

Bu ta’rifda (4) o’lchovli to’plamlar haqida gap borganligi uchun f(x) funksiya ba’zan (4) o’lchovli funksiya deyiladi. Agar bu ta’rifda E va E{f>a} to’plamlar (B) o’lchovli bo’lsa u holda f(x) funktsiya ham (B) o’lchovli deyiladi.

1-teoremma. Agar f(x) funksiya E to’plamida o’lchovli bo’lsa, u holda har qanday a va b sonlar uchun.

1)E{f≤a}, 2)E{a<f≤b}, 3)E{f=a}, 4)E{f≥a}, 5)E{f<a} to’plamlarning har biri ham o’lchovli bo’ladi.

ISBOT. E va E[f≤a} to'plamlar o'lchovli bo'lgan uchun E{f<a}=E/E{f>a} tenglikdan E{f<a} to'plamning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2- teoremma Agar f(x) funksiya Eto'plamida o'lchovli bo'lsa, u holda bu funksiya E to'plamning ixtiyoriy o'lchovli E_1 qismida ham bo'ladi.

ISBOT. 1-ta'rifga muvofiq har qanday haqiqiy a son uchun E_1{f>a} to'plamning o'lchovli ekanligi ko'rsatsa bu teorema isbotlangan bo'ladi. Bu to'plamning o'lchovligi bu E_1{f>a}=E_1 ∩E{f>a} tenglikdan kelib chiqadi chunki E_1 va E{f>a} to'plamlarning har biri teorema shartiga ko'ra o'lchovli u holda ularning kesishmasi ham o'lchovli bo'ladi.

3- teoremma Agar f(x) funksiya o'lchovli E to'plamida o'zgarmas k songa teng bo'lsa u holda f(x) o'lchovli funksiya bo'ladi.

ISBOT. Darhaqiqat , E{f>a} =$\begin{cases} E, agar\ k > a\ bo'lsa \\ a, agar\ k \leq a\ bo'lsa \end{cases}$

4- teoremma Agar f(x) o'lchovli funksiya bo'lib k o'zgarmas son bo'lsa, u holda f(x)+k va k f(x) funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi.

5- teoremma Agar f(x) va φ(x) funksiyalar E to'plamida o'lchovli bo'lsa, u holda E{f>φ} to'plam o'lchovli bo'ladi.

6- teoremma Agar f(x) va φ (x) funksiyalar E to'plamida o'lchovli bo'lsa, u holda f(x)+φ(x) va f(x) – φ (x) funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi.

7- teoremma Agar f(x) va φ (x) funksiyalar E to'plamida o'lchovli bo'lsa, u holda f(x)* φ (x) funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi.

8- teoremma. Agar f(x) va φ (x) funksiyalar E to'plamida o'lchovli bo'lib, E da φ (x) ≠0 bo'lsa u holda f(x)/(x) funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi.

2-TA'RIF. Agar μ(E{f$\neq \varphi$ }=0 bo'lsa f(x) va φ (x) funksiyalar E to'plamida ekvivalent deyiladi. f(x) va φ (x) funksiyalarning ekvivalentligi f~ φ ko'rinishida yozilafi. Ikki ekvivalent funksiya E to'plamida bir vaqtda o'lchovli yoki o'lchovsiz bo'lishi ta'rifdan bevosita ko'rinadi.

9- teoremma Agar f(x) funksiya E to'plamida uzluksiz bo'lsa u holda f(x) bu to'plamda o'lchovli bo'ladi.

3-TA’RIF. Agar biror o’lchovli to’plam uchun μ(E)>0 bo’lib biror xossa o’lchovi nolga teng ACE to’plamda bajarilmay, E to’plamning qolgan qismida (ya’ni E/A to’plamda) bajirlsa, u holda bu xossa E to’plamda deyarli bajirilgam deyiladi.

Masalan. E to’plamda ekvivalent bo’lgan ikki funksiya bir- biriga deyarli teng deyildai.

4-TA’RIF. Agar biror o’lchovli E to’plamda f(x) funksiyaning cheksiz qiymatga ega bo’lgan nuqtalardan iborat to’plamning o’lchovi nolga teng bo’lsa f(x) funksiya E to’plamning deyarli chekli deyiladi.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan ko’rinadiki o’lchovli funksiyalar ustidagi arifmetik amallarning natijasi yana o’lchovli funksiyalar.Endi o’lchovli funksiyalar sinfida bir necha xil limitga o’tish amallarni ko’rib ularning xossalarni o’rnatamiz.

10-TEOREMA. O’lchovli E to’plamda o’lchovli $\{f_n$(x)} funksiyalar ketma –ketligi berilgan bo’lsin. Agar E to’plamning har bir x nuqtasida f(x)=$\lim_{n\to\infty} f_n$ (x) tenglik bajarilsa u holda f(x) funksiya E to’plamda o’lchovli bo’ladi.

1-IZOX. Agar lim f(x)= f_n (x) munosabat E to’plamdagi xar bir nuqtasida emas, balki E to’plamda deyarli bajarilganda ham teorema o’z kuchini saqlaydi.

5-TA’RIF. O’lchovli E to’plamda deyarli chekli o’lchovli f(x) funksiya va deyarli chekli o’lchovli {f(x)} funksiyalar ketma –ketligi berilgan bo’lsin. Agar $\lim_{n\to\infty} \mu(E\{|f_n - f| \geq 0\})$ =0

munosabat bajirlsa u holda {f(x)} funksiyalar ketma –ketligi f(x) funksiya o’lchov bo’yicha yaqinlashuvchi deyiladi va f_n kabi yoziladi. Quyidagi Lebex, Egorov, Luzin teoremalardan barcha funksiyalarni deyarli chekli deb faraz qilamiz va uni bundan keyin alohida aytib o’tirmaymiz.

11-TEOREMA. (A.Lebez). f(x) funksiyaga o’lchovli E to’plamida deyarli yaqinlashuvchi o’lchovli {f(x)} funksiyalar ketma – ketligi berilgan bo’lsin. U holda {f(x)} funksiyalar ketma – ketligi E to’plamda f(x) funksiyaga o’lchov bo’yicha ham yaqinlashuvchin deyiladi.

2-IZOH. Teoremaning teskarisi to'g'ri emas ya'ni o'lchov bo'yicha yaqinlashadigsn deyarli yaqinlashish kelib chiqmaydi.

MISOL. Har bir natural k va i=1,k sonlar uchun [0 , 1) yarim oraliqda ushbu

$$f^{(k)}{}_i\ (\mathrm{x})=\begin{cases} 1, x \in [\frac{i-1}{k}, \frac{1}{k}] \\ 0, x \in [\frac{i-1}{k}, \frac{1}{k}] \end{cases}$$

Tenglik bilan aniqlangan $f^{(k)}{}_i$(x) funksiyani tuzamiz. Bu funksiyalar ketma-ketligi

Ushbu φ_1(x)= $f^{(1)}{}_1$(x) , φ_2(x)= $f^{(2)}{}_2$(x), φ_3(x)= $f^{(3)}{}_3$(x), φ_4(x)= $f^{(3)}{}_4$(x) o'lchov bo'yicha nolga intiladi; darhaqiqat agar φ_n(x)= $f^{(k)}{}_i$(x) har qanday $\partial(o < \partial \leq 1)$ son uchun

E$\{|f_n|\} \geq \partial) = [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ tenglik o'rinli bo'ladi . bundan

$$\mu(\mathrm{E}\{|f_n|\} \geq \partial) = \frac{1}{k} \to 0, n \to \infty$$

Chunki n→ ∞ da k son ham cheksizlikga intiladi. Ikkkinchi tomondan munosabat [0,1) yarim oraliqning birorta ham nuqtasida bajirlmaydi. Xaqiqatdan, agar $x_0 \in$ [0,1) bo'lsa u holda har qanday k uchun shubday i son topladiki, ular uchun ushbu $x_0 \in (\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})$munosabat bajariladi . Demak$f^{(k)}{}_i$ (x)=1. . Boshqachasiga aytganda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \dots \dots \varphi_n(x_0)$sonlar ketma-ketligi bir soni cheksiz marta o'zgaradi.Demak bu ketma –ketlik x nuqada 0 ga yaqinlashmaydi. X nuqta ixtiyoriy bo'lgani uchun ketma –ketlik [0,1)ning hech qanday nuqtasida 0 ga intilmaydi. Bu misoldan va Lebez teoremasidan o'lchov b'yicha yaqinlashishi tushunchasiga deyarli yaqinlashish tushunchsiga qaraganda kengroq ekanligi ko'rinadi. Deyarli yaqinlashish tushunchsi esa har bir nuqtada tushunchasidan kengroqdir.

12-TEOREMA. Agar {f(x)} funksiyalar ketma –ketligi E to'plamda o'lchov bo'yicha f(x) va g(x) funksiyalarga yaqinlashsa, bu funksiyalar E to'plamda ekvivalent bo'ladi.

13-TEOREMA. Agar $\{f_n(x)\ \}$ funksiyalar ketma –ketligi E to'plamda f(x) funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa u holda bu ketma-ketlikdan shunday $\{f_n(x)\}$ qism ketma-ketlikni ajratib olish mumkinki, bu qism ketma-ketliik E to'plamida f(x) funksiyaga deyarli yaqinlashuvchi bo'ladi.

14-TEOREMA. O'lchovli E to'plamda $f_n(x)$ funksiyaga deyarli yaqinlashuvchi {f(x)} funksiyalar ketma-jketligi berilgan bo'lsin. U holda har qanday uchun shunday o'lchovli PCE to'plamning topish mumkinki, uning uchun $\mu(P) > \mu(E) - \varepsilon$ munosbat bajarilib, bu P to'plamda $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi f(x) funksiyaga tekis yaqinlashadi.Fnksiyalar nazaryasida uzluksiz funksiyalar sinfi g'oyat katta axamyatga ega. 9-teoremaga ko'ra har qaday uzluksiz funksiya o'lchovli funksiya bo'ladi. Endi uzluksiz funksiyalar bilan o'lchovli funksiyalar orasida (ularning tuzulishi manosida qanday munosabat bor degan savol savol tug'iladi.

Bu savolga Luizin teoremasini isbotlashdan oldin qiymatdagi teoremani isbotlamiz.

15-teorema. Faraz qilaylik , $F_1, F_2, \dots, F_n$ to'plamlar o'zaro kesishmaydigan yopiq to'plamlar bo'lsin . Agar F=$\bigcup_{k=1}^{n} F_k$, to'plamda aniqlangan f(x) funksiya har bir $F_k, k = 1,2,..,n$ to'plamda o'zgarmas bo'lsa u holda f(x) funksiya F to'plamda uzliksiz bo'ladi .

ISBOT . F to'plam chekli sondagi yopiq to'plamlarning yig'indisi bo'lgani sababli F ham yopiq bo'ladi .

Bundan $\mathrm{X_n} \to \mathrm{X_o}$bo'lgan har qanday $\{\mathrm{X_n}\}$, $\mathrm{X_n}$ ∈F ketma –ketlik uchun $\mathrm{X_o} \in \mathrm{X_n}$ munosabat kelib chiqadi. Demak , shunday $\mathrm{m}(1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{n})$ topiladiki $\mathrm{X_o} \in \mathrm{F_m}$ bo'lib $F_k$to'plamlarning o'zaro kesishadigan k≠m bo'lganda $\mathrm{X_o} \in F_k$ munosabat o'rinli bo'ladi . Bundan F_1,F_2,F_{k-1}, F_{k+1}, F_n to'plamlarda $\{\mathrm{X_n}\}$ ketma-ketlikning ko'pi bilan chekli sondagi elementlarini bo'lishi bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi . Faraz qilaylik , $\mathrm{X_n}$ bu elementlarning eng oxirgisi bo'lsin . U holda har qanday k>n uchun $X_k \in E_m$ munosabatga ega bo'lamiz . u holda tenglama shartiga kora f(x)=f(x_0) tenglik barcha k>n uchun o'rinli bo'ladi , bundan f(x) dgunktsiyaning uzluksiz ekanligi kelib chiqadi .

16-teorema (N.N.Luzin) . Agar f(x) dgunksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa , u holda har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday yopiq F$\subset E$ to'plamni topish mumkin , bu yo'plamda f(x) funksiya uzliksiz bo'ladi bo'ladi va

$$\mu(F) > \mu(E) - \varepsilon$$

Munosabat o'rinli bo'ladi

Bu tenglamaning isbotini keltirib o'tirmaymiz , chunki ancha murakkab .

Ba'zi mualliflar funksiyaning Luzin tenglamasida ifodalangan xossasini o'lchovli funksiyaning ta'rifi sifatida oladilar va undan funksiyaning Lebeg ma'nosida o'lchovli ekanligini keltirib chiqaradilar .

1.5 . Chegaralangan funksiyaning Lebel integrali . Tanlanuvchi funksiyalar .

Matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan Riman integrali tushunchasi nazar tashlasak , unda riman integralining ba'zi bir sinf funksiyalari uchun mavjud emasligini ko'ramiz .

Masalan $[a, b]$ sigmentda aniqlangan f(x) funksiya sifatida Dirixle funksiyasini olsak , yani

$$\text{f(x)}=\begin{cases} 1, agar\ x - ratsional\ son\ bo'lsa, \\ 0, agar\ x - irattsional\ bo'lsa \end{cases}$$

u holda integral yig'indi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\check{ʒ}_k)\Delta k$$

ning qiymati $\check{ʒ}_k$ lat irratsional bo'lgand a0ga , $\check{ʒ}_k$ lar ratsional bo'lganda esa b-a gat eng bo'ladi , ya'ni $\lim_{n\to\infty} S_n$ $=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\check{ʒ}_k)$ mavjud bo'lmaydi bu kabi misollarni ko'plab keltirish mumkin .

Ko'ramizki , Riman integrali tushunchasini matematikada ko'plab ishlatiladigan ko'plab funksiyalarga tadbig' etib bo'lmaydi . Shu sababli Riman integrali tushumchasini kengaytirish masalasi tug'iladi . Bu masala bilan ko'plab matematiklar shug'ullanib , Riman integralini turli umumlashtirishlarini topishgan . bularning ichida eng muhimi Lebel tomonidan kiritilgan integtal tushunchasidir .

Lebel integralining asosiy g'oyasi shundaki u funksiyaning aniqlanish soxasi bo'lgan [a,b] sigmentni bo'laklarga bo'layotganda argument qiymatlarining yaqinligiga emas , balki dgunksiya qiymatlarining yaqinligini hisobga oladi . Bu g'oya bir yo'la Riman integrali mavjud bo'lgan funksiyalar sinfidan kengroq funksiyalar sinfi uchun integral tushunchasini aniqlashga imkon beradi . Riman va Lebel g'oyalarini boshqacha yana quyidagicha ham solishtirish mumkin . Aytaylik, [a,b] uzunligiga teng b'lgan ipga ixtiyoriy ravishda har xil qiymatli hisoblash uchun Riman ularning har birining qiymatini ipda joylashish tartibida qo'shish usulini qo'llasa , Lebel esa avvalo ularning bir xil qiymatlarini guruhlab , so'ng usulini qo'llaydi . Yuzaki qaraganda bu ikki usulda hisoblashlarning bir-biridan ustunligi sezilmasa-da , quyida Lebel usulining katta imkoniyatlaga ega ekanligini ko'ramiz .

Avvalo Lebel integralini [a,b] sigmentdagi o'lchovli E to'plamning xarakteristik funksiyasi uchun aniqlaymiz .

Ushbu

$$f_E(\mathrm{x})=\begin{cases}1, x \in E\\ 0, x \in E\end{cases}$$

Funksiyani E to'plamning harakteristik funksiyasi deyiladi .

$f_E(\mathrm{x})$ funksiyaning Lebel integrali deb $\mu(E)$ songa , (yani E to'plamning o'lchoviga) aytiladi va quyidagicha belgilanadi :

$$(4)\ \int_E f_E(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\mu(E)$$

Ushbu

$$f_E(\mathrm{x})=\begin{cases}k, x \in E\\ 0, x \in E\end{cases}$$

Fuksiya uchun esa Lebel integrali

$$(4)\ \int_E f_E(\mathrm{x})\mathrm{dx}=k\mu(E)$$

Tenglik bilan aniqlaymiz .

Umumiy holga o'tish uchun A va B bilan E to'plamda aniqlangan f(x) funksiyaning mos ravishda aniq quyi va aniq yuqori chagaralarini belgilaymiz aniq quyi va aniq yuqori chegaralarini belgilaymiz hamda [A,B] sigmentni quyidagicha n qismga bo’lamiz :

$$A=y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B$$

So’ngra l_y $(\partial = 0, n-1)$ bilan

$$y_y \leq f(x) < y_{\partial+1}$$

Tengliklarni qanoatlantiradigan x nuqtalardan iborat to’plam belgilaymiz , f(x) funksiya o’lchovi bo’lganligi uchun

l_y $(\partial = 0, n-1)$ to’plamlar o’lchovli bo’ladi .

Endi ushbu

$$S=\sum_{\partial=0}^{n-1} y_\partial \mu(l_y), \quad S=\sum_{\partial=0}^{n-1} y_{n+1}\mu(l_\partial)$$

Yig’indilarni tuzamiz (s va Sni mos ravishda quyi va yuqori yig’indilar deyiladi) va quyidagi te’rifni keltiramiz :

1-ta’rif . Agar λ_n (=max[$y_{\partial+1}$-y_∂]) nolga intilganda (n→ ∞)s vaS larning limiti mavjud bo’lib , bir-biriga teng bo’lsa va bulimit y_∂nuqtalarni tanlabolishga bog’liq bo’lmasa , y holda bu limitni f(x) funksiyaning E to’plamdagi Lebel integrali yuqoridagi xususiy hollarda kabi ushbu (L) $\int_E f_E(x)dx$ ko’rinishda belgilanadi .

1-teorema. Agar f(x) funksiya o’lchovli E to’plamda o’lchovli va va chegaralangan bo’lsa , u holda uning uchun Lebel integrali mavjuddir .

Isbot.Chegaralangan va o’lchovli f(x) funksiyani olib , uning uchun s va S yig’indilarni umumiy limintga ega ekanligini ko’rsatamiz . Bu funksiya chegaralanganligi uchun uning aniq quyi va aniq yuqori chegaralari mavjud : ular mos ravishda A va B bo’lsin . [A,B] sigmentni ikki usul bilan quyidagicha n_1 va n_2 qismlarga bo’lamiz :

$$A=y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B \qquad (1.5.1)$$

$$A=y_0' < y_1' < y_2' < \ldots < y'_{n-1} < y'_n = B \qquad (15.1,2)$$

Agar λ_{n_1}=max ($y_{\partial+1}$-y_∂) λ_{n_2}=max ($y'_{\partial+1}$-y'_∂)

$0 \leq \partial \leq n_1$-1 $\qquad$ $0 \leq \partial \leq n_2$-1

$$\lambda = max(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2})$$

Belgilashlarni kiritsak , u holda nuqtalar ushbu

$$\begin{cases} y_{\partial+1} - y_{\partial} \le \lambda \\ (y'_{\partial+1} - y'_{\partial}) \le \lambda \end{cases} \qquad \begin{matrix} \partial=0,n_1-1, \\ \partial=0,n_2-1 \end{matrix}$$

Tengsizliklar bajariladi . Bu tengsizliklardan quyidagi munosabat chiqadi :

$$\text{S-s}=\sum_{\partial=0}^{n_1-1}(y_{\partial+1} - y_{\partial})\mu(l_{\lambda})=\lambda\sum_{\partial=0}^{n_1-1}\mu(l_{\lambda}) \ =\lambda\mu \quad (E)$$

$$\text{S'-s'}=\sum_{\partial=0}^{n_1-1}(y'_{\partial+1} - y'_{\partial})\mu(l'_{\partial})=\lambda\sum_{\partial=0}^{n_1-1}\mu(l'_{\partial}) \quad =\lambda\mu \quad (E)$$

Bu yerda s' va S'sonlar (1.5,2) bo’linishi uchun tuzulgan quyi va yuqori yig’indilar . Endi (1.5,1) va (1.5,2) bo’linish nuqtalarini , ya’ni y_{∂}va y'_{∂} nuqtalarning hammasini bo’luvchi nuqtalar sifatida olamiz va tegishli s'',S'' yig’indilarni tuzamiz . Buning natijasida s va s' yig’indilar kamaymaydi, S va S' yig’indilar ortmaydi , ya’ni

$$s \le s'' \le S'' \le S$$

$$s' \le s'' \le S'' \le S' \qquad (1.5.3)$$

Tengsizliklar o’rinli bo’ladi . Darhaqiqat , agar $(y_{\partial}, y_{\partial+1})$ oraliqni brorta ya’ni ӡ̌ nuqta yordami bilan $(y_{\partial}, ӡ̌)$, $(ӡ̌, y_{\partial+1})$ oraliqqa bo’lsak u holda ushbu

$$y_{\partial}\mu(l_{\lambda} \le y_{\partial}\mu\{E(y_{\partial} \le f \le ӡ̌)\}+ӡ̌\mu\{E(ӡ̌ \le f \le y_{\partial+1})\}$$

Tengsizlik bajariladi . bundan ko’rinadiki S≤ S'' , ya’ni qo’shimcha bo’linish nuqtalari kiritilishi natijasida quyi yig’indi kamayadi .

Shunga o’xshash ushbu

$$y_{\partial}\mu(l_{\lambda} \le ӡ̌\mu\{E(y_{\partial} \le f \le ӡ̌)\}+y_{\partial+1}\mu\{E(ӡ̌ \le f \le y_{\partial+1})\}$$

Tengsizlikni ham yozishimiz mumkin ; bundan ko’rinadiki ,ya’ni nuqtani kiritishnatijasida S yig’indining

3-natija. Agar c son o’zgarmas son bo’lsa, u xolda

$$4)\int_E c\text{f(x)dx=c(4)}\int_E f(x)\text{dx}$$

4-natija. Agar E, E_i, i=$\overline{1,00}$ o’lchovli to’plamlar bo’lib, E=$\bigcup_{i=1}^{a} E_i$ ($E_k \cap E_j$=$\emptyset, k$ ≠j) va f(x) fumksiya E to’plamda o’lchovli bo’lsa, u holda

$$(4)\int_E f(x)\text{dx}=\sum_{i=1}^{00}(4)\int_{E_i} f(x)\text{dx}. \ (1,5,4)$$

integralning bu xossasi uning to’la additivligi deyiladi

2-teorema. Agar E o'lchovli to'plamda o'lchovli f_1(x) va f_2(x) funksiyalar berilgan bo'lsa, u holda

$$(4)\int_E (f_1(x)+f_2(x))dx=(4)\int_E f_1(x)dx+(4)\int_E f_2(x)dx$$

5-natija. Agar o'lchovli E to'plamda o'lchovli f(x) va g(x) funksiyalar berilgan bo'lib, bu to'plamda f(x)=g(x) bo'lsa, u holda

$$(4)\int_E f(x)dx=(4)\int_E g(x)dx$$

3-teorema. Agar o'lchovli E to'plamda f(x)≠g(x) bo'lsa, u holda

$$(4)\int_E f(x)dx \leq (4)\int_E g(x)dx$$

4-teorema. Quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\left|(4)\int_E f(x)dx\right| \leq (4)\int_E |f(x)|dx$$

5-teorema. Agar f(x)≥ 0 va $\int_E F(x)dx = 0$ bo'lsa, u holda f(x) funksiya E to'plamda deyarli nolga teng.

6-teorema. (A.Lebeg). O'lchovli E to'plamda aniqlangan o'lchovli va chegaralangan $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, bu ketma-ketlik o'lchovli F(x) funksiyaga E to'plamning o'lchov bo'yicha yaqinlashuvchi bo'lsin. Agar barcha n lar uchun $|f_n(x)| < k$ bo'ladigan k son topilsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}(4)\int_E f_n(x)dx = (4)\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = (4)\int_E f(x)dx$$

Endi chegaralanmagan funksiyaning Lebeg integrali haqida to'xtalamiz.

O'lchovli f(x) funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lsin. Avval f(x) ni E to'plamda manfiy emas, ya'ni f(x)≥ 0 deb faraz qilamiz va ushbu

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases} f(x), agar\ f(x) \leq n\ bo'lsa, \\ n, agar\ f(x) > bo'lsa \end{cases}$$

funksiyani tuzamiz. Bu funksiya E to'plamda chegaralangan va demak uning Lebeg integrali mavjud.

2-tarif. Agar

$$\lim_{n\to\infty}(4)\int_E [f(x)]_n dx \qquad (1.5.4)$$

mavjud bo’lsa, bu limitni f(x) funksiyaning E to’plamdagi Lebeg integrali deyiladi va u $(4)\int_E f(x)dx$ orqali belgilanadi.

E to’plamda o’lchovli va musbat f(x) funksiya Lebeg integraliga ega bo’lishi uchun

$$(4)\int_E [f(x)]_n dx$$

integralning chegaralangan bo’lishi zarur va yetarlidir, chunki

$$(4)\int_E [f(x)]_n dx \leq \int_E [f(x)]_{n+1} dx$$

tenglik n ning xamma qiymatlari uchun bajariladi.

Manfiy funksiyaning Lebeg integrali xam xuddi shunga o’xshash aniqlanadi.

Endi umumiy xolni, ya’ni o’lchovli f(x) funksiya E to’plamda xar hil ishorali qiymatlarni qabul qiladigan holni ko’ramiz. Bu holda E to’plamni quyidagicha ikki o’zaro kesishmaydigan $E_1 va\, E_2$ qismlarga ajratamiz:

$$E_1 = E\{f(x) \geq 0\},$$

$$E_2 = E\{f(x) < 0\}, \quad (1.5.5)$$

ya’ni E_1 ning xar bir nuqtasida f(x) manfiy emas, E_2ning xar bir nuqtasida esa f(x) funksiya manfiy

3-ta’rif. Agar f(x) funksiya uchun ushbu

$$\int_{E_1} f(x)dx, \ \int_{E_2} f(x)dx$$

integrallarning xar biri mavjud bo’lsa, u holda f(x) funksiyani E to’plamda jamlanuvchi deyiladi va E to’plam bo’yicha integrali ushbu

$$(4)\int_E f(x)dx = (4)\int_{E_1} f(x)\,dx + (4)\int_{E_2} f(x)dx \qquad (1.5.6)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

2-teorema. O’lchovli f(x) funksiyaning jamlanuvchi bo’lishi uchun $|f(x)|$ funksiyaning jamlanuvchi bo’lishi zarur va yetarlidir; $|f(x)|$ jamlanuvchi bo’lgan holda ushbu

$$\left|(4)\int_E f(x)dx\right| \leq (4)\int_E |f(x)|dx$$

munosabat o’rinli.

Chegaralangan funksiyaning Lebeg integrali ega bo'lgan xossalarga o'xshash xossalarga jamlanuvchi funksiyalar ham ega bo'lishini ta'kidlash zarur.

7-teorema(Fatu tereması). Agar o'lchovli va manfiy bo'lmagan jamlanuvchi $f_1(x)$, $f_2(x)$,… $f_n(x), \ldots$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f(x) funksiyaga deyarli yaqinlashashsa, u holda

$$(4)\int_E f(x)dx \le \lim_{n\to\infty}(4)\int_E f_n(x)dx \qquad (1.5.5)$$

8-teorema.(Levi teoremasi) O'lchovli E to'plamda manfiy bo'lmagan jamlanuvchi $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ funksiyalarning o'sib boruvchi (ya'ni $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$) ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar har bir n uchun

$$(4)\int_E f_n(x)dx \le M(-o'zgarmas\ son) \quad (1.5.6)$$

bo'lsa, u holda E to'plamda ushbu

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

(chekli) limit deyarli mavjud bo'lib, f(x) funksiyani E to'plamda jamlanuvchi va

$$\lim_{n\to\infty}(4)\int_E f_n(x)dx = (4)\int_E f(x)dx$$

Endi Riman va Lebeg integrallarini almashtirish masalasiga to'xtalamiz.

3-ta'rif. Agar biror o'lchovli E to'plamda berilgan f(x) funsiyaning uzilishi nuqtalaridan iborat to'plamining o'lchovi nol bo'lsa, u holda f(x) funksiya E to'plamda deyarli uzluksiz funksiya deyiladi

9-teorema.(A.Lebeg teoremasi). [a,b] segmentda f(x) funksiyaning Riman integrali mavjud bo'lishi uchun uning bu segmentda chegaralangan va deyarli uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

10-teorema. Agar [a,b] segmentda f(x) funksiya uchun Riman integrali mavjud bo'lsa, u holda bu funksiya uchun Lebeg integrali xam mavjud bo'lib, bu integrallar o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$(4)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$$

Biror o'lchovli E to'plamda aniqlangan va absolyut qiymatining p-darajasi bilan jamlanuvchi f(x) o'lchovli funkiyalar to'plami matematikaning turli sohalarida muhim tadbiqlarga egadir.

Faraz qilaylik, biror o'lchovli X to'plamning barcha qism to'plamlari sistemasida aniqlangan σ-additiv μ o'lchov berilgan bo'lsin. X to'plamda μ o'lchov bo'yicha jamlanuvchi funksiyalar to'plamini L_1 (X,μ) orqali belgilaymiz. Bu to'plam chiziqli fazo bo'ladi (funksiyalarni qo'shish va funksiyalarni songa ko'paytirish amaliga nisbatan).

4-ta'rif. Funksiyalarning L_p (X,μ) (p>0) sinfi deb

$$(4)\int_X |f(X)|^P d\mu$$

Integrali mavjud bo'ladigan barcha o'lchovli f(x) funksiyalar to'plamiga aytiladi.

Agar X=[a,b] bo'lsa L_2([a,b],μ)=L_2(a,b) deb belgilaymiz.

2-bob. Analitik funksiyalar nazariyasi

2.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya tushunchasi. Asosiy elementar funksiyalar.

Kompleks sonlarning xossalarini o'rganishda ularning geometrik integratsiyasi juda muhim (x,y) nuqtaning absissasi sifatida z=a+ib kompleks sonning xaqiqiy qismi a ni, ordinatasida sifatida esa b ni olsak, z=0 kompleks songa kordinatalar boshi O(0,0) nuqtani mos qo'ysak barcha {z} kompleks sonlar to'plami va barcha tekislikdagi (x,y) nuqtalar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Shunda absissalar o'qi Ox ni xaqiqiy o'q, ordinatalar o'qi Oy ni ordinatalar o'qi deb ataymiz, tekislikni esa kopleks tekislik deb ataymiz.

Agar {z} kompleks sonlar to'plamidagi xar bir z=x+iy kompleks songa x=$\rho cos\varphi$, y=$\rho sin\varphi$ bu yerda ρ (x,y) nuqtagacha koordinata boshi (0,0)dan bo'lgan masofa, φ $-$absissa o'qi bilan radius vektori orasidagi burchak. Shunda kompleks sonning algebraik formasi z=$\rho(cos\varphi + isin\varphi)$ga o'tadi.

Bu yerda $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,$tg\varphi = \frac{b}{a}$

Odatda $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ni z=x+iy kompleks sonning moduli, ya'ni $\rho = |z,|$ $\varphi = Arctg\frac{b}{a} = argz + 2\pi k$ (k=0, $\pm 1, \pm 2, \dots$)ni esa uning argumenti deyiladi.

Nihoyat Eyler formulasi $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$ni eslasak z=x+iy kompleks son uchun uning ko'rsatkichli formasi deb ataluvchi

$$z = \rho e^{i\varphi} \qquad (2.1.1)$$

1-ta'rif. Kompleks sonlar ketma-ketligi $\{z_n\}$ z limitga ega deyiladi, agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday N=N(ε) nomer topilib n≥ $N(\varepsilon)$ nomerlar uchun $|z_n - z| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa

2-ta'rif. Kompleks tekislikdagi barcha $|z - z_0| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoalantiruvchi nuqtalar to'plamiga z_0 nuqtaning ε −atrofi deyiladi.

Xar bir $z_0 = a_n + ib_n$ kompleks son $a_n \, va \, b_n$ xaqiqiy sonlar juftligi bilanxarakterlangani uchun $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligiga ikkita xaqiqiy $\{a_n\} \, va\{b_n\}$ sonlar ketma-ketligi mos keladi.

1-teorema. $\{z_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun haqiqiy sonlar ketma-ketliklari $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$larning yaqinlashuvchi bo'lishligi zarur va yetarlidir.

2-teorema (Koshi kriteriysi). $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi barcha

n≥ $N(\varepsilon) va \, barcha \, \rho$=1,2,3,.. sonlar uchun $\left|z_{n+\rho} - z_n\right| < \varepsilon$ (2.1.2) tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir 3-ta'rif.Agar kompleks tekislikdagi E to'plamning har bir nuqtasiga aniq bir qonun yoki qoida bilan biror kompleks son mos qo'yilsa, u holda E to'plamda kompleks argumentli funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi.

4-ta'rif.Agar z nuqta biror ε atrofi bilan E to'plamda to'la yotsa, u holda bu z nuqta E to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

5-ta'rif. Agar 1) E to'plamning barcha nuqtalari shu to'plamning ichki nuqtalari bo'lsa, 2)E to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasini shu to'plamdan chiqmaydigan siniq chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu E to'plamni soha deymiz.

6-t'rif. Agar u soha biror chekli radiusli doira ichiga joylashgan bo'lsa,u holda bu sohani chegaralangan aks holda esa chegaralanmagan deymiz.

Biz asosan kompleks o'zgaruvchi z ning qiymatlari bo'lgan U to'plamni soha yoki yopiq to'plam bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda bir qiymatli funksiyani U to'plamning har bir z nuqtasiga U to'plamdan aniq bir W qiymatni qabul qilingan holda simvolik ravishda

$$W=f(z) \qquad (2.1.3)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Har bir z U to'plamga mos qo'yilgan W kompleks sonlar to'plami f (z) funksiya qiymatlari to'plami deyiladi.

z=x+iy kompleks o'zgaruvchiga mos keluvchi funksiya qiymati ikki haqiqiy o'zgaruvchili ikkita u=U(x,y) va v(x,y) funksiyalarning beri limitiga ekvivalent. Shuning uchun funksiyani

$$W(z)=U(x,y)+iv(x,y) \qquad (2.1.4)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Ko'pgina hollarda ko'p qiymatli komleks o'zgaruvchili funksiyani qarashga to'g'ri keladi.

7-ta'rif. E to'plamning turli nuqtalarida turli qiymatlarni qabul qiladigan funksiyani bir yaproqli funksiya deyiladi.

Ba'zida ko'p qiymatli funksiyani (ko'p yaproqli funksiyani) qarashga to'g'ri keladi. Bu holda har bir

$z \in E$ qiymatga bir necha kompleks sonlar mos qo'yilgan bo'ladi.

8-ta'rif. E to'plamda aniqlangan f(z) funksiya uchun va $z_0 \in E$ uchun $\lim_{z \to z} f(z) = f(z)$ tenglik bajarilsa, f(z) funksiyani z_0 nuqtada uzluksiz deymiz.

Bu 8-ta'rifni "ε-δ" tilida quyidagicha keltirish mumkin.

8-ta'rif. E to'plamda f(z) funksiya aniqlangan va $z_0 \in E$ bo'lsin. Agar $\forall\varepsilon>0$ son olganda ham shunday $\delta>0$ son topilib $|z- z_0|<\varepsilon$ bo'ladigan har $z \in E$ nuqtalarda $|f(z)-f(z_0)|< \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f(z) funksiyani z_0 nuqtada uzluksiz deymiz.

Kompleks o'zgaruvchini f(z)=U(x,y)+iv(x,y) funksiyaning $z_0=x_0+iy_0$ nuqtada uzluksizligidan u=U(x,y) va v(x,y) funksiyalarning (x_0,y_0) nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi.

3-teorema. E to’plamda $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiyalar uzluksiz bo’lsin. U holda ularning yig’indisi, ayirmasi, ko’paytmasi va mahrajidagi funksiya noldan farqli bo’lganda nisbati ham uzluksizdir.

Bir necha misol keltiramiz.

1-misol.

$$\omega = f(z) = a\,z + b \qquad (2.1.5)$$

Chiziqli funksiyani qaraymiz. Bu yerda a va b berilgan o’zgarmas komleks sonlar. Bu funksiya barcha chekli z larda aniqlangan.

$$\phi(\omega) = \frac{1}{a}\,\omega - \frac{b}{a} = a_1\,\omega + b_1$$

funksiya o’ng funksiyaning xossalariga ega.

2-misol.Quyidagi

$$\omega = f(z) = \frac{1}{z} \qquad (2.1.6)$$

funksiyani qaraymiz . Bu funksiya butun komleks tekislikda aniqlangan. $f(\omega)=0 f(0)=\infty$.

Bu funksiya $z \neq 0$ nuqtalarda uzluksiz. (2.1.6) funksiyaning geometrik interpretatsiyasini aytmoqchi bo’lsak uni

$$\omega = z\,e^{i\phi} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \qquad (z = \rho e^{i\phi}),$$

$|\omega| = \frac{1}{|z|}$, arg ω= - arg z ekanligini ko’ramiz.

3-misol.

$$\omega = f(z) = z^2 \qquad (2.1.7)$$

Bu funksiya z kompleks o’zgaruvchining bir qiymatli funksiyasi bo’lib,

$$z = \rho e^{i\phi},$$

$\omega = \rho^2 e^{i2\phi}$. $Z = \sqrt{\omega}$ teskari funksiya ko’p qiymatlidir.

$$Z_k = \sqrt{r} e^{1/2}(x + 2k\pi) ,\ k=0,1$$

$$r = |Z|,\ x = \arg Z.$$

Endi kompleks argumentli asosiy elementar (sodda) funksiyalar ro’yxatini keltiramiz.

1.Kasr-ratsional funksiya

$$\omega = \frac{a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + a_2 Z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} Z + a_n}{b_0 Z^m + b_1 Z^{m-1} + b_2 Z^{m-2} + \ldots + b_{m-1} Z + b_m}$$

Xususan ratsional (ko'phad) funksiya

$$\omega = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + a_2 Z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} Z + a_n$$

2. $\omega = e^z$ ko'rsatkichli funksiya (absolyut yaqinlashuvchi kompleks tekislikdagi darajali qator)

$$e^z = 1 + Z + \frac{Z2}{2!} + \frac{Z3}{3!} + \ldots + \frac{Zn}{n!} + \ldots$$

Ko'rsatkichli funksiya quyidagi xossalariga ega:

1) $e^{Z1+Z2} = e^{Z1} * e^{Z2}$, bu yerda Z_1 va Z_2 ixtiyoriy kompleks sonlar
2) $e^z = e^{z+2\pi k}$; ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$), ya'ni e^z $2\pi i$ davrli davriy funksiyasi.

3.sinZ va cosZ trigonometrik funksiyalar darajali qatorlar bilan aniqlanadi:

$$\sin Z = Z - \frac{Z3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{Z2n+1}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos Z = 1 - \frac{Z2}{2!} + \frac{Z4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{Z2n}{(2n)!}$$

Bu qatorlar ixtiyoriy Z kompleks qiymatda absolyut yaqinlashuvchidir sinZ va cosZ funksiyalar 2π davrli davriy funksiyalar va ular mos ravishda $Z=k\pi$ va

$$Z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ haqiqiy nollarga ega.

e^z, cosZ va sinZ funksiyalar uchun Eyler formulalari

$e^{iz} = \cos Z + i \sin Z$, $e^{-iz} = \cos Z - i \sin Z$, bu yerdan $\cos Z = \frac{e(iz)+e(-iz)}{2}$,

$\sin Z = \frac{e(iz)-e(-iz)}{2}$, hamda $tgZ = \frac{\sin Z}{\cos Z}$, $ctgZ = \frac{\cos Z}{\sin Z}$ tekisliklar o'rinli.

4. shZ, chZ, thZ, cthZ giperbolik funksiyalar quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi.

$$shZ = \frac{e(iz)-e(-iz)}{2}, \quad chZ = \frac{e(iz)+e(-iz)}{2}$$

$$thZ = \frac{shZ}{chZ}, \quad cthZ = \frac{chZ}{shZ}$$

5.Trigonometrik va giperbolik funksiyalar o'rtasida quyidagi munosabatlar mavjud:

$$\sin Z = -i\, sh\, iZ, \qquad shZ = -i \sin iZ,$$

$$\cos Z = ch\, iZ, \qquad chZ = \cos iZ,$$

$$tgƵ=-i\ th\ iƵ, \qquad thƵ=-i\ tg\ iƵ,$$

$$ctgƵ=i\ cth\ iƵ, \qquad cthƵ=i\ ctg\ iƵ.$$

6. LnƵ , Ƶ≠0 logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiya teskari funksiya sifatida , shuningdek:

$$LnƵ=\ln|Ƶ|+i\ ArgƵ=\ln|Ƶ|+i\ argƵ+2\pi ki\ (k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots..)$$

Bu funksiya ko'p qiymatlidir. LnƵ funksiyaning bosh qiymati k=0 da hosil bo'ladi va u lnƵ orqali belgilanadi:

$$\ln Ƶ=\ln|Ƶ|+i\ argƵ.$$

Ko'rinib turibdiki

$$LnƵ=\ln Ƶ+2k\pi i,\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

Quyidagi munosabatlar o'rinli

$$Ln(Ƶ_1 * Ƶ_2)=LnƵ_1+LnƵ_2,$$

$$Ln\left(\frac{Ƶ1}{Ƶ2}\right)=Ln\ Ƶ_1-LnƵ_2$$

7.Teskari trigonometric funksiyalar sin ω, cos ω, tg ω, ctg ω funksiyalarga teskari funksiya sifatida aniqlanadi:

$$\arcsin Ƶ=-i\ Ln(iƵ+\sqrt{1-Ƶ2});$$

$$\arccos Ƶ=-i\ Ln(Ƶ+\sqrt{Ƶ2-1});$$

$$arctgƵ=-\frac{i}{2}Ln\frac{1+iƵ}{1-iƵ};$$

$$arctgƵ=-\frac{i}{2}Ln\frac{Ƶ+1}{Ƶ-1}.$$

Teskari trigonometrik funksiyalarning bosh qiymatlari mos logarifmik funksiyalarning bosh qiymatlariga mos keladi.

8.Umimiy darajali funksiya $\omega=Ƶ^a$, bu yerda $a=\alpha+ij^3$ ixtiyoriy kompleks son. Bu funksiya $Ƶ^{\alpha}=e^{2\ln Ƶ}$ ko'rinishda aniqlanadi. Uning bosh qiymati $Ƶ^{\alpha}=e^{2\ln Ƶ}$ ko'rinishda bo'ladi.

9.Umumiy ko'rsatkichli funksiya:

$\omega=a^Ƶ$ (a≠0 - ixtiyoriy kompleks son) quyidagicha ko'rinishda aniqlanadi:

$$a^Ƶ=e^{Ƶ\ln a}$$

Bu funksiyaning bosh qiymati $a^Ƶ=e^{Ƶ\ln a}$ bo'ladi.

2.2. Kompleks o`zgaruvchili funksiyani differensiallash . Koshi-Riman shartlari.

Shu paytgacha kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasi xususan sonli ketma-ketliklar limiti , funksiya limiti , funksiya uzluksizligi, tekis uzluksizligi kabi tushunchalar haqiqiy o`zgaruvchili funksiyalar uchun kiritilganda to`la o`xshash kiritiladi .

Biroq komleks o`zgaruvchili differensiallanuvchi funksiya tushunchasi haqiqiy o`zgaruvchilari differensiallanuvchi funksiya tushunchasiga o`xshasada, xossalari jihatdan farq qiladi .

**Ta`rif 1.** $Z$ kompleks tekislikdagi $E$ to`plamda $f(z)$ funksiya berilgan bo`lsin . Agar, $z_0 \epsilon E$ nuqta uchun $\frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{\Delta z}$ ayirmalar nisbatining $\Delta z \to 0$ dagi limiti mabjud bo`lsa, u holda bu limitni z kompleks o`zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning $z_0$ nuqtadagi hosilasi deymiz va $f'(z_0)$ kabi belgilaymiz , ya`ni :

$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ (2.2.1)

Bu holda $f(z)$ funksiyani z_0 nuqtada differensiallanuvchi deymiz. Shuni alohida ta`kidlash zarurki (2.2.1) limit mavjud deymiz , agar $y$ $\Delta z \to 0$ da $z_0 + \Delta z$ nuqtaning $z_0$ nuqtaga tekislikda qanday intilishiga bog`liq bo`lmasa . Kompleks o`zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchiligi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi haqiqiy qismi $u(x, y)$, mavhum qismi $v(x, y)$ ga muhim shartlar qo`yadi . Bu shartlarni Koshi-Riman shartlari deyiladi . Quyida bu shartlarni keltirib chiqaramiz .

1-teorema. Agar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyasi (x_0, y_0) nuqtada (yoki $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada) differensiallanuvchi bo`lsa, u holda bu $(x_0, y_0)$ nuqtada $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning $x$ va $y$ o`zgaruvchilar bo`yicha xususiy hosilalari mavjud va quyidagi munosabatlar o`rinli bo`ladi:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}. \qquad (2.2.2)$$

(2.2.2) munosabatlar odatda Koshi-Riman shartlari deyiladi .

Isbot. Teorema shartiga ko`ra (2.2.1) $\Delta z$ ning nolga qay usulda intilishiga bog`liq bo`lmasdan mavjud . $\Delta z = \Delta x$ deb olamiz va quyidagi ifodalarni qaraymiz.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad (2.2.3)$$

Kompleks ifodaning limiti mavjudligidan uning haqiqiy vamavhum qismlari limiti mavjudligi ham kelib chiqqanligi uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada x bo`yicha xususiy hosilasi ham mavjud bo`ladi , ya`ni quyidagi formula o`rinli bo`ladi :

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) .$$

$\Delta z = i\Delta y$ deb olib quyidagiga ega bo`lamiz :

$$f'(z_0) = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_{0x}+\Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0). \qquad (2.2.4)$$

Bu (2.2.3) va (2.2.4) formulalarni taqqoslab (2.2.2) formulalarga ega bo`lamiz .

2-teorama. Agar $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo`lib ularning xususiy hosilalari (2.2.2) munosabatlarmi qanoatlantirsa, u holda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks o`zgaruvchili funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo`ladi .

Isbot. $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo`lishidan quyidagi tengliklar o`rinli bo`ladi:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(x, y) \qquad (2.2.5)$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(x, y)$$

Bu yerda $\xi(x, y)$ va $\eta(x, y)$ funksiyalar $x \to x_0$ va $y \to y_0$ da Δx va Δy larga nisbatan tezroq nolga intiladi .

($\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\xi(x,y)}{|\Delta z|}=0$, $\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\eta(x,y)}{|\Delta z|}=0$, $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$)

Endi $\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ ayirmani nisbatini tuzib olib va (2.2.1)va (2.2.2) tengliklardan kelib chiqib , uni quyidagicha o`zgartiramiz :

$$\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + v_y(x_0, y_0) \frac{i\Delta x - \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\xi(x,y) + i\eta(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{\xi(x,y) + i\eta(x,y)}{\Delta z}$$

Oxirgi qo`shiluvchi $\Delta z \to 0$ da nolga intilishini e`tiborga olsak , va dastlabki qo`shiluvchilar o`zgarmay qolishini hisobga olsak ,

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$ tenglikni o`rinli ekanligi , ya`ni $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi .

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvali ham ta`rifdan foydalanib tuziladi .

2.3. Analitik funksiyalarning xossalari .

**1-ta`rif.** Agar $f(z)$ funksiya $z \epsilon E$ nuqtada va nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo`lsa, u holda $f(z)$ funksiyani z nuqtada analitik deymiz.

**2-ta`rif.** Agar $f(z)$ funksiya $E$ sohaning barcha nuqtalarida differensiallanuvchi va $f(z)$ funksiyaning hosilasi $E$ sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo`lsa, bu $f(z)$

funksiyani E sohada nalitik deymiz .

Ma`lumki , ko`p o`zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchi bo`lishligi uchun uning xususiy hosilalarining bu sohada uzluksiz bo`lishligi zarur va yetarli shart edi . Shuning uchun ham 2.2. banddagi 1-teorema va 2-teoremadan kelib chiqadiki , $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyaning analitik bo`lishligi uchun $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalarning uzluksiz hosilalarga ega bo`lishligi zarur va yetarlidir .

Kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasida analitik funksiya tushunchasi alohida o`rin tutadi.

Analitik funksiyalar nazariyasida Koshi-Riman shartlari muhim o`rin tutadi va (2.2.2) ko`rinishga ekvivalent turli ko`rinishga ham egadir . Agar kompleks o`zgaruvchi $z = \rho e^{i\varphi}$ ning kompleks o`zgaruvchili funksiyasining , ya`ni $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$ differensiallovchi funksiyasining haqiqiy va mavhum qismlari

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \ , \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \ (2.3.1)$$

Munosabatni qanoatlantiradi, bu yerda ρ va φ - (x,y) nuqtalarning qutb koordinatalari .

Xuddi shunday $f(z) = R(x,y)e^{i\varphi(x,y)}$ analitik funksiyaning moduli va argumenti

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \varphi}{\partial y}\ ,\frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.3.2)$$

munosabat bilan bog`langan bo`ladilar . Yana shuni ta`kidlash zarurki, (2.2.2) munosabatlar kompleks o`zgaruvchili $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyaning hosilasi uchun turli ko`rinishni olishga imkon beradi :

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) + iv_x(x,y) = u_x(x,y) - iv_y(x,y)$$
$$= v_y(x,y) - iu_y(x,y)$$

(2.2.1) hosila ta`rifi kompleks o`zgaruvchili analitik funksiyalarning xossalari o`rnatishga imkon yaratadi .

1. Agar $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiyalar E sohada analitik bo`lsalar ularning yig`indisi , ayirmasi va ko`paytmasi ham $E$ sohada analitik bo`ladilar . $\varphi(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ funksiya esa barcha $z\epsilon E$ va $f_2(z) \neq 0$ bo`lganda $E$ sohada analitik bo`ladi .

2. Agar $\omega = f(z)$ funksiya Z kompleks tekislikdagi y sohada va shuningdek bu funksiyaning qiymatlari sohasi (ω tekislikdagi) G da aniqlangan $\eta = \varphi(\omega)$ funksiya analitik bo`lsa $F(z) = \varphi[f(z)]$ murakkab funksiya $z$ kompleks tekislikning $Y$ sohada analitigi bo`ladi .

3. Agar Y sohada $f(z)$ funksiya analitik analitik bo`lib, $|f'(z) \neq 0|$ bo`lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning qiymatlari sohasi G da $z = \varphi(\omega)$ teskari funksiya aniqlangan va $f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(\omega_0)}$ munosabat o`rinli bo`ladi .

Isbot. Teskari funkiya mavjud bo`lishligi uchun

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

tengalamalar sistemasini Y sohada x va y larga nisbatan yechimi zarur .
Buning uchun oshkormas funksiyalar mavjudligi shartiga ko`ra

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \neq 0 \quad (2.3.3)$$

munosabat bajarilishi yetarli .
(2.2.2) shart bajarilganda (2.2.3) shartni $u_x^2 + v_x^2 \neq 0$ ko`rinishda yozib olish mumkin. Bu esa $z = \varphi(\omega)$ teskari funksiya mavjudligini isbotlaydi .

$\frac{\Delta z}{\Delta \omega} = \frac{1}{\frac{\Delta \omega}{\Delta z}}$ chekli ayirmalar nisbatining limiti mavjudligi $|f'(z_0) \neq 0$ shartning bajarilishidan kelib chiqadi , ya`ni

$$\lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta \omega} = \frac{1}{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta \omega}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}|$$

munosabat o`rinli bo`ladi .

4. (x, y) tekislikda $f(z)$ analitik funksiyaning haqiqiy qismi bo`lgan $u(x, y)$ funksiya berilgan bo`lsin, u holda bu funksiyaning mavhum qismi o`zgarmas qo`shiluvchi aniqlanganida topiladi .

Isbot. $f(z)$ analitik funksiya bo`lgani uchun Koshi-Riman shartlariga ko`ra $v_x = -u_y, v_y = u_x$ tengliklar o`rinli bo`ladi . U holda

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$$

tenglikdan $v(x, y)$ funksiya o`zgarmas son qo`shiluvchi aniqligida aniqlanadi .

5. E sohada $f(z)$ analitik funksiya bo`ladi . U holda qaralayotgan sohada $u(x, y) = C = const$ , $v(x, y) = C = const$ chiziqlar oilasi $f(z)$ analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari bo`lsin . U holda (2.2.2) munosabatlardan kelib chiqsak

$$gradu \cdot gradv = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_x u_y = 0$$

tengliklar bajariladi . Bu yerdan gradient sath chiziqlariga ortogonalligidan $u(x, y) = C,\ \ v(x, y) = C$ chiziqlar oilasi ham o`zaro ortogonal ekanligi kelib chiqadi .

2.4. Kompleks o`zgaruvchili funksiya hosilasining geometric ma`nosi.

Biror E sohada $W = f(z)$ analitik funksiya bo`lsin . $E$ sohada biror $z_0 \epsilon E$ nuqtani olib bu nuqtadan butunlay $E$ sohada joylashgan $\gamma_1$ chiziq o`tkazamiz . $f(z)$ funksiya z kompleks tekislikdan E to`plamni ω kompleks tekislikdagi biror G sohaga akslantiramiz .

Faraz qilaylik, z_0 nuqta ω_0 nuqtaga o`tsin , $\gamma_1$ chiziq esa $\omega_0$ nuqtadan o`tuvchi G_1 chiziqqa o`tsin .

1-rasmga qaralsin :

$\omega = f(z)$ funksiyaning z_0 nuqta hosilasi mavjudligidan va $f'(z_0) \neq 0$ den hisoblasak, $f'(z_0)$ kompleks sonning ko`rsatkichi formasidan kelib chiqsak

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = ke^{i\alpha} \quad (2.4.1)$$

Δz nolga γ_1 chiziq ustida , ya`ni $z = z_0 + \Delta z$ $\gamma_1$ chiziq ustidagi nuqtalar bo`lib nolga intilgan holini tanlaymiz . Tabiiyki , bu z nuqtaga mos $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ nuqtalar G_1 chiziq ustida yotgan bo`ladilar . $\Delta z$ va $\Delta\omega$ kompleks sonlar mos ravishda $\gamma_1$ va $G_1$ chiziqlarga o`tkazilgan kesuvchilar ustidagi vektorlarni ifodalaydi .

$grd\Delta z$, $arg\Delta\omega$ lar geometric ma`noda mos $\Delta z, \Delta\omega$ vektorlar bilan $Ox$ va $Oy$ o`qlarning musbat yo`nalishi orasidagi burchaklarni ifodalaydi . $|\Delta z|$ va $|\Delta\omega|$ lar esa $\Delta z$ va $\Delta\omega$ vektorlarning uzunligini ifodalaydi . $z \to 0$ va $\omega \to 0$ da kesuvchi vektorlar mos ravishda $\gamma_1$ va $F_1$ chiziqlar urinmalariga o`tadilar .

(2.4.1) tenglikdan

$$\gamma = argf'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} arg\Delta\omega - \lim_{\Delta z \to 0} arg\Delta z = G_1 - \varphi_1$$

Bu (2.4.2) tenglikdan ko`rinadiki , hosilaning argumenti $\gamma$ $G_1$ chiqining $\omega_0$ nuqtasiga o`tkazilgan urinma va OU o`qi orasidagi burchakda $\gamma_1$ chiziqning $z_0$ nuqtasiga o`tkazilgan urinma va Ox o`qining musbat yo`nalishi orasidagi burchak φ_1 lar orasidagi ayirmaga teng bo`lar ekan .

Madomiki , $f'(z_0)$ hosila limitga o`tish usuliga bog`liq emas ekan , u holda bu ayirma z_0 nuqtadan o`tuvchi ixtiyotiy $\gamma$ chiziq uchun bir xil bo`laveradi (hatto G_1 va φ_1 burchaklar o`zgarganda ham). Bu yerdan quyidagi xulosa kelib chiqadi : $f(z)f'(z_0) \neq 0$ bo`lgan shartda analitik funksiya yordamida akslantirish amalga oshirilganda z_0 nuqtada kesishuvchi ixtiyoriy γ_2 va γ_1 chiziqlar orasidagi

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ burchak ularning obrazlari bo`lgan $G_2$ va $G_1$ chiziqlar orasidagi burchaklar ayirmasi burchak $G = G_2 - G_1$ ga teng bo`ladi . Shuningdek , $f(z)$

analitik va $f'(z_0) \neq 0$ bo`lganda nafaqat $\gamma_1$ va $\gamma_2$ chiziqlar orasidagi burchakning ayirmasi absolyut qiymati va ularning obrazlari orasidagi burchaklar ayirmasi absolyut qiymatlari o`zgarmas qoladi balki burchaklar yo`nalishi ham saqlanib qoladi .

Xuddi shunday (2.4.1) munosabatlardan

$$K = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|} \quad (2.4.1)$$

$|\Delta\omega| = k|\Delta z|$ tenglik taqribiy bajariladi . Bu yerda ham γ_1 chiziqning tanlanishiga bog`liq emasligi ko`rinadi . (2.4.2) tenglikning geometrik ma`nosi shunday iboratki $f'(z_0) \neq 0$, bo`ladigan $f(z)$ funksiya bilan akslantirish amalga oshirilganda cheksiz kichik chiziqli elementlar o`xshash bo`lib akslanar ekan, shuningdek , $|f'(z_0)|$ berilgan akslantirishning bu xossasini odatda o`zgarmas cho`zilish xossasi deyiladi .

**1-ta`rif.** Agar $z_0$ nuqtaning atrofini $\omega_0 = f'(z_0)$ nuqta atrofiga $\omega = f(z)$ analitik funksiya yordamida akslantirilganda bu akslantirishi burchakli saqlash va o`zgarmas cho`zilish xossasiga ega bo`lsa, u holda akslantirishni konform akslantirish deyiladi .

Konform akslantirish paytida z_0 nuqtaning atrofi ω_0 nuqtaning atrofiga akslangan bo`lsa uchlari $z_0$ nuqtada bo`lgan cheksiz kichik uchburchaklar uchlari ω_0 nuqtada bo`lgan cheksiz kichik o`xshash uchburchakka akslanadi .

Endi kompleks argumentli funksiyalarning xossalarini hisoblashga doir bir necha misollar keltiramiz .

1-misol. Yuqoridagi mulohozalardan ko`rinadiki , chiziqli funksiya va $\omega = z^2$ funksiyalar analitik funksiya bo`lishligi ko`rinib turibdi.

2-misol.

$$(az+b)' = a \ , \ (z^2)' = 2z \ , \ (\tfrac{1}{z})' = -\frac{1}{z^2} \qquad (2.4.3)$$

Tengliklarning o`rinli ekanligi hosila ta`rifidan bevosita kelib chiqadi . Bundan shuningdek, berilgan funksiyalar butun kompleks tekislikda ($\frac{1}{z}$ funksiya $z \neq 0$ da) analitikdir .

3-misol. e^z fu ksiyaning analitik funksiya ekanligini tekshiramiz.

$$e^z = e^x(cosy + isiny) = e^x cosx + ie^x siny \qquad (2.4.4)$$

Koshi-Riman shartlarining bajarilishini tekshiramiz .

$$u = u(x,y) = e^x cosy, v = v(x,y) = e^x siny$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cosy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x siny \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x siny \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x cosy$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (K.-R) bajariladi .

Shuningdek , barcha xususiy hosilalar butun kompleks tekislikda uzluksiz . Demak, isbot qilingan teoremaga ko`ra e^z funksiya analitikdir.

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x cosy + ie^x siny = e^x(cosy + i\, siny) = e^z$$

Xuddi shunday $(e^{\alpha z})' = \alpha e^z, \alpha = const$ (2.4.5)

$f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiyalarni qaraymiz :

$$f_1(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad f_2(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$z = x$ bo`lganda bu funksiyalar cosx va sinx funksiyalar bilan ustma-ust tushadi . Bevosita tekshirish bilan

$$f_1{}^2(z) + f_2{}^2(z) \equiv 1\, , \left(e^{iz}\right)^2 = e^{2\alpha z} \quad (2.4.6)$$

2.5. Kompleks o`zgaruvchili funksiyaning integrali . Koshi teoremasi .

Z kompleks tekislikda bo`lak-bo`lak silliq C egri chiziq berilgan bo`lsin. C chiziqli parametric tenglamasi orqali ifodalasak , u holda

$$\theta(t) = \xi(t) + i\,\eta(t) \quad , \quad \alpha \le t \le \beta \quad (2.5.1)$$

Bu yerdagi $\xi(t)\; va\, \eta(t)$ lar bo`lak-bo`lak silliq funksiyalar , t-parametr , $\alpha = const\, , \beta = const$ haqiqiy sonlar . Shuningdek ,

$$[\xi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2 \neq 0 \;\; (2.5.2)$$

shart ham bajarilishi kerak .

Shunday qilib C egri chiziqning har bir nuqtasi $\theta(t) = \xi(t) + i\,\eta(t)$ haqiqiy t argumentli kompleks funksiya bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik , C egri chiziqning har bir θ nuqtasida $f(\theta)$ funksiyaning qiymati aniqlangan bo`lsin .

Kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasida $f(\theta)$ funksiyaning $C$ chiziq bo`yicha olingan integral tushunchasi muhim tushunchalardan biri hisoblanadi . Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi . C chiziqni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, , , , \theta_n$ nuqtalar yordamida n ta qismiy yoylarga ajratib olamiz . Bu yerda qismiy yoylar t parametrning o`suvchi qiymatlariga mos keluvchidir. $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ belgilash kiritib quyidagi yig`indini tuzamiz: $\delta(\theta_i \theta_i{}^*) = \sum_{i=1}^{n} t(\theta_i{}^*)\Delta\theta_i$ (2.5.3)

Bu yerda $\theta_i{}^*, i -$ qismiy yoydagi ixtiyoriy nuqta .

**1-ta`rif.** Agar $C$ egri chiziq nib o`laklash usulidan va har bir qismiy yoydan nuqtani tanlash usulidan bog`liq bo`lmasdan (2.5.3) bo`lsa, $|\Delta\theta_i| \to 0$ dagi limiti mavjud bo`lsa, u holda bu limit $f(\theta)$ funksiyaning C chiziq bo`yicha integrali deyiladi va $\int_C f(\theta)d\theta$ (2.5.4) kabi belgilanadi.

(2.5.4) integralning mavjudligi $f(\theta)$ funksiyaning haqiqiy u va mavhum v qismlaridan olingan (haqiqiy funksiyalaridan olingan) egri chiziqli integrallaning mavjudligiga olib kelinadi . Haqiqatdan ham

$$(\theta_i{}^*) = u(P_i{}^*) + iv(P_i{}^*) ,$$

$\Delta\theta_i = \Delta\xi_i + i\Delta\eta_i$, bu yerda $P_i(\xi_i{}^* \eta_i{}^*) - C$ egri chiziqning (x, y) tekislikdagi nuqtasi . Biz (2.5.4) ifodani quyidagi ko`rinishga keltiramiz :

$$S(\theta_i, \theta_i{}^*) = \sum_{i=1}^{n} \{u(P_i{}^*)\Delta\xi_1\} - v(P_I{}^*)\Delta\eta_1 + i\sum_{i=1}^{n} \{u(P_i{}^*)\Delta\eta_i\} + v(P_I{}^*)\Delta\xi_i\}$$

S$(\theta_i, \theta_i{}^*)$ yig`indining haqiqiy va mavhum qismlari

$$\int_C u\, d\xi - v\, d\eta \quad \text{va} \int_C u\, d\xi + v\, d\eta$$

ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning integral yig`indilarini ifodalaydi . Bu holat yuqoridagi fikrlarimizni tasdiqlaydi .

(2.5.5) egri chiziqli integrallarning shuningdek , (2.5.4) kompleks o`zgaruvchi bo`yicha integrtalning mavjud bo`lishi uchun haqiqiy argumentli $u$ va $v$ funksiyalarning bo`lak-bo`lak uzluksiz bo`lishi yetarli ekanligini ta`kidlash zarur. Bu esa analitik bo`lmagan $f(z)$ funksiyaning (2.5.4) integrali mavjud bo`lishi uchun bu $f(z)$ funksiyaning bo`lak-bo`lak uzluksiz bo`lishi yetarliligi ekanligini ko`rsatadi .

Shunday qilib , (2.5.4) integralni

$$\int_c f(\theta)d\theta = \int_c ud\xi - vd\eta + i\int_c ud\eta + vd\zeta \quad (2.5.6)$$

ifodalash ekanligi ko`rinadi . Bu munosabatning $f(z)$ funksiyaning $C$ egri chiziq bo`yicha olingan integral ta`rifi bo`lib xizmat qilishi ko`rinadi . Bu (2.5.6) munosabatning o`zidan va egri chiziqli integrallarning qator xossalaridan kelib chiqsak , quyidagilar o`rinli bolishi ko`rinadi:

1. $\int_{AB} f(\theta)d\theta = -\int_{AB} f(\theta)d\theta$ (2.5.7)

2. $\int_{C_1} f(\theta)d\theta + \int_{C_2} f(\theta)d\theta = \int_{C_1+C_2} f(\theta)d\theta$ (2.5.8)

3. Agar α-kompleks o`zgarmas bo`lsa, u holda $\int_c \alpha f(\theta)d\theta = \alpha\int_c \alpha f(\theta)d\theta$ (2.5.9)

4. $\int_c [f_1(\theta) + f_2(\theta)]d\theta = \int_C f_1(\theta)d\theta + \int_C f_1(\theta)d\theta$ (2.5.10)

5. $|\int_C f(\theta)d\theta| = \int_c |f(\theta)|dS$ (2.5.11)

Bu yerda $dS - C$ chiziq yoyining differensiali , o`ng tomondagi integral esa birinchi tur egri chiziqli integral .

6. Integrallashning o`zgaruvchilarni almashtirish formulasi deb ataluvchi quyidagi

$$\int_C f(z)dz = \int_G f\big(\varphi(\theta)\big)\varphi'(\theta)d\theta \quad (2.5.12)$$

Tenglik o`rinli . Bu yerda $Z = \varphi(\theta)$ $\theta$ o`zgaruvchining C va G chiziqlar o`rtasidagi o`zaro bir qiymatli akslantirishi , xususan, C chiziqning parametric tenglamasi $z = z(t)$ funksiya va $z(\alpha)$, $z(\beta)$ C chiziqning boshlang`ich va oxirgi nuqtasi bo`lganda

$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \quad (2.5.13)$$

Tenglik ham o`rinli bo`ladi .

Misol . Kompleks o`zgaruvchi bo`yicha integrallarga doir misollar uchun juda muhim bo`lgan

$$I = \int_c \frac{d\theta}{\theta - z_0} \quad (2.5.14)$$

Integralni hisoblaymiz . Bu yerda $C_\rho -$ markazi z_0 nuqta radiusi ρ ga teng bo`lgan aylana , musbat yo`nalishi sifatida C_ρ aylana ustidagi soat strelkasiga qarshi harakat olinadi . C_ρ chiziqning (aylananing) parametric tenglamasidan foydalanamiz .

$$z = z_0 + \rho e^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) .$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \quad (2.5.15)$$

Bu yerdan ko`rinadiki , (2.5.14) integral $\rho$ dan ham $z_0$ dan ham bog`liq bo`lmaydi.

Keyingi tekshiruvarda asosan biror ρ sohada (chegaralangan) analitik bo`lgan funksiyaning integrallarini o`rganamiz . Shuning uchun bizni sohaning chegarasi bo`lak-bo`lak silliq bo`lgan yopiq (o`z-o`zini kesmaydigan) chiziq qiziqtiradi .

**2-ta`rif.** O`z-o`zini kesmaydigan , bo`lak-bo`lak silliq yopiq chiziqli yopiq kontur deymiz .

Agar funksiya $z = z(t), (\alpha \leq t \leq \beta)$ yopiq konturni ifodalasa, u holda bu funksiya $t_i \neq t_k$, $z(t_i) \neq z(t_k)$ shartni qanoatlantiradi (faqat $t_i = \alpha , t_k = \beta$ bo`lgan hollarda bundan mustasno) . (2.5.4) integral ko`p hollarda kontur integral deb ham ataladi .

Kontur integral qiymati integrallash yo`nalishidan bog`liq bo`lgani uchun kontur bo`ylab musbat yo`nalishi deb yopiq soha bo`lgani da kontur bo`ylab harakatlanishimizda soha chapda qolgan holni qabul qilamiz .

Musbat yo`nalishi bo`yicha integrallanish bo`lganda, uni $\int_c f(z)dz$ yoki oddiy qilib $\int_c f(z)dz$ deb belgilaymiz . Manfiy yo`nalish bo`lganda esa $\int_{C^-} f(z)dz$ deb belgilaymiz .

Yopiq kontur bilan chegaralangan sohaning ichkariisda analitik bo`lgan funksiyadan olingan integral xossalari ko`p hollarda ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning xossalari bilan aniqlanadi .

Ma`lumki , yopiq kontur bo`yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar uchun quyidagi tasdiq o`rinli .

1-teorema. Agar bo`lak-bo`lak silliq yopiq C kontur bilan chegaralangan yopiq E sohada $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar uzluksiz va ularning xususiy birinchi tartibli hosilalari E sohada uzluksiz bo`lsa, u holda

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_E \{\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\}dxdy \quad (2.5.16)$$

Tenglik o`rinli bo`ladi .

2-teorema. (Koshi teoremasi) Bir bog`lamli $E$ sohada $f(z)$ bir qiymatli $f(z)$ funksiya berilgan bo`lsin . U holda Bu $f(z)$ funksiyadan E sohada to`la yotuvchi ixtiyoriy $G$ yopiq kontur bo`yicha olingan integral nolga teng bo`ladi .

Isbot . (2.5.6) formulaga ko`ra

$$\int_G f(z)dz = \int_G udx - vdy + i\int_G vdx + udy$$

$f(z)$ funksiya G kontur bo`yicha chegaralangan sohada analitik bo`lgani uchun $u(x,y), v(x,y)$ funksiyalar birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo`laid . Shuning uchun oxirgi tengsizlikning o`ng tomoniga (2.5.16) formulani qo`llash mumkin . Bundan tashqari $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalarning xususiy hosilalari Koshi-Riman shartlari bilan bog`langan , shuning uchun

$$\int_G udx - vdy = \iint_E \left\{-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right\} dxdy = 0$$

$$\int_G vdx - udy = \iint_E \left\{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right\} dxdy = 0$$

Teorema isbot bo`ldi .

Shunday qilib 2-teoremaga ko’ra $f(z)$ funksiyaning bir bog’lamli analitik sohasida yotgan har qanday yopiq kontur bo’yicha olingan integrali nolga teng bo’lar ekan. Bu tasdiq qo’shimcha shart – yopiq sohada uzluksiz va analitik bo’lgan funksiya uchun sohaning chegarasi – yopiq kontur uchun ham teorema o’rinli bo’ladi. Shuning uchun bu hol amaliyot uchun juda muhim bo’lgani sababli Koshi teoremasining alohida ko’rinishida beriladi.

3 – Teorema. (Koshi teoremasining 2-formulirovkasi)

Agar $f(z)$ funksiya C bo'lak-bo'lak silliq kontur bilan chegaralangan E sohada analitik hamda yopiq E sohada uzluksiz bo'lsa, u xolda E sohaning chegarasi C kontur bo'yicha olingan integral nolga teng, ya'ni :

$$\int_{c} f(z)dz = 0$$

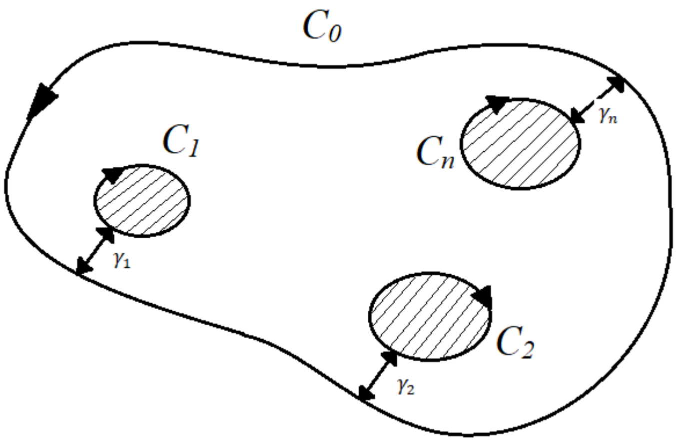
(2.5.17)

Koshi teoremasining kompleks o'zgaruvchili analitik funksiyasining asosiy xossalaridan birini ifodalaydi.

Koshi teoremasi bir bog'lamli soha uchun formulirovka qilingan bo'lsada, uni ko'p bog'lamli soha uchun umumlashtirish qiyin emas. Bu xolda sohaning to'la chegarasi bir necha yopiq konturlardan iborat bo'ladi.

C_0 – tashqaridan, C_1 , $C_{2, \dots ,}C_n$ – ichkaridan chegaralovchi yopiq konturlar.

Ko'p bog'lanishli sohada musbat yo'nalish sifatida shunday harakat yo'nalishini qabul qilamizki, bu xolda soha har doim chap tomonda qolsin. (2-rasmga qaralsin)



2-rasm.

Bu xolda tashqi kontur musbat yo'nalishda, ichki konturlar esa manfiy yo'nalishda aylanib chiqiladi.

<u>3 – Teorema.</u> $f(z)$ funksiya tashqi chegarasidan C_0 bilan, ichkaridan C_1, C_2, ... , C_n konturlar bilan chegaralangan E sohada analitik va yopiq E sohada uzluksiz bo'lsin, u xolda $\int_C f(z)dz = 0$ bo'ladi, bu yerda C – E sohaning to'la chegarasi, ya'ni $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, shuningdek C da harakat musbat yo'nalishda bo'ladi.

Isbot. C_0 konturni C_1, C_2, ... , C_n konturlarni bog'lovchi $\gamma_1, \gamma_{2,\dots,}\gamma_n$ silliq chiziqlarni o'tkazamiz. (2-rasmga qaralsin). Bu xolda C_0, C_1, C_2, ... , C_n va $\gamma_1, \gamma_{2,\dots,}\gamma_n$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bir bog'lamli bo'ladi (bu xolda $\gamma_1, \gamma_{2,\dots,}\gamma_n$ chiziqlar ustida 2 martadan manfiy yo'nalishda harakat qilinadi).
Shuningdek 3-Teoremaga ko'ra soxaning chegarasi C bo'yicha olingan integral nolga teng bo'ladi. Ammo yordamchi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ chegaralar (chiziqlar) bo'yicha olinga integrallar bir-biriga qarama-qarshi yo'nalishda ikki marta olingani uchun ular o'zaro yeyishib ketadilar.
Shunday qilib

$$\int_{C_0^+} f(z)dz + \int_{C_1^+} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n^+} f(z)dz = 0$$

(2.5.18)
tenglik o'rinli ekanligi ko'rinadi. Bu yerda yuqoridagi indekslar harakat yo'nalishining musbatligini anglatadi.
Koshi teoremasining yana bir muhim natijasiga to'xtalamiz. Bir bog'lamli E sohada $f(z)$ analitik funksiya bo'lsin. Bu sohada biror nuqtani tayinlab, bu E sohadan boshqa bir z nuqta olib, bu E sohada butunlay yotuvchi chiziq bo'yicha olingan integralni

$$\int_{z_0}^{z} f(\theta)d\theta$$

orqali belgilaymiz, Koshi teoremasiga ko'ra bu integral E da yotuvchi integrallanuvchi chiziqdan bog'liq bo'lmaydi, va z o'zgaruvchining bir qiymatli funksiyadir

$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\theta)d\theta$ (2.5.18)

4 – Teorema. Biror bir bog'lamli E sohada $f(z)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz bo'sin. Shuningdek bu $f(z)$ funksiyadan E sohada butunlay yotuvchi ixtiyoriy yopiq Γ kontur bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lsin, u xolda

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\theta)d\theta$$

funksiya E sohada analitik va $\Phi^1(z) = f(z)$ bo'ladi.

Isbot. Quyidagi ayirmali nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left\{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\theta)d\theta-\int\limits_{z_0}^{z} f(\theta)d\theta\right\}=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\theta)d\theta$$

Oxirgi tenglik $\Phi(z)$funksiyaning qiymati integrallash yo'lidan bog'liq emasligidan kelib chiqadi.

Oxirgi tenglikda integrallash yo'li sifatida z va $z+\Delta z$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqni olamiz. Integrallash yo'lini bunay olsih qulay, chunki $\int_z^{z+\Delta z} d\theta = \Delta z$ munosabat o'rinlidir. Quyidagi ifodani baholaymiz:

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\{f(\theta)-f(z)\}d\theta\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\theta\in[z,z+\Delta z]}|f(\theta)-f(z)|\cdot|\Delta z|=$$

$$=\max_{\theta\in[z,z+\Delta z]}|f(\theta)-f(z)|$$

$f(z)$ funksiya z nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki $|\Delta z|<\delta$ bo'lganda

$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$ bo'ladi.

Bu esa $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\Phi(z)=f(z)$ bo'lishini anglatadi.

Shunday qilib (2.5.18) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(z)$ funksiya E sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz hosilaga ega ekan (teorema shartiga ko'ra $f(z)$ E da uzluksiz edi).

Isbot qilingan teorema kompleks o'zgaruvchili funksiyaning boshlang'ich funksiyasi tushunchasini kiritishga imkon yaratadi. $\Phi'(z)=f(z)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\Phi(z)$ funksiya E to'plamda analitik bo'lgan $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi yoki aniqmas integrali deyiladi. Tabiiyki $f(z)$

funksiyaning bir-biridan o’zgarmas qo’shiluvchiga farq qiluvchi turli boshlang’ich funksiyalari bordir.

Agar $f(z)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi $F(z)$ funksiya bo’lsa, u xolda haqiqiy o’zgaruvchili funksiya bo’lgan xoldagidek

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\theta)d\theta = F(z_2) - F(z_1)$$

formula o’rinli bo’ladi. Haqiqatdan ham chap tomodagi integral integrallash yo’lidan bog’liq bo’lmaganligi uchun

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\theta)d\theta = \int_{z_0}^{z_2} f(\theta)d\theta - \int_{z_0}^{z_1} f(\theta)d\theta \ ,$$

bu yerda $z_0 \epsilon E$ ixtiyoriy nuqta.

Kelajakdagi misollarga juda kerak bo’ladigan quyidagi funksiyani qaraymiz.

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\theta}{\theta} \qquad (2.5.19)$$

Integral ostidagi funksiya butun z kompleks tekislikning $z = 0$ nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida analitik bo’lgani uchun (2.5.19) ifoda integrallash chizig’i $z = 0$ nuqtadan o’tmaydigan barcha xollarda ma’noga ega bo’ladi. Bu xolda $f(z)$ funksiya kompleks tekislikning $z = 0$ nuqtadagi o’zida saqlamaydigan ixtiyoriy bir bog’lamli E sohasida bir qiymatli analitik funksiyani ifodlaydi, shuningdek (2.5.19) integral integrallash yo’liga bog’liq bo’lmaydi. $z = 0$ nuqtani saqlamaydigan soha sifatida haqiqiy o’qning manfiy qismini chiqarib tashlangandan so’ng xosil bo’lgan butun tekislikning qismini qaraymiz, ya’ni $-\pi < \arg(z) < \pi$ bo’ladigan z nuqtalar to’plamini. (2.5.19) integralda integrallash yo’li $-\pi < \arg(z) <$ sohada butunlay yotadigan va $z = 0$ nuqtadan o’tmaydigan chiziq deb hisoblaymiz. U xolda $z = x > 0$ bo’lganda haqiqiy o’qning $1 < t < x$ kesmasini qaraymiz va

$$f(x) = \int_1^x \frac{dx}{x} = \ln(x) \qquad (2.5.20)$$

tenglikka ega bo’lamiz.

Demak $f(z)$ funksiya argumentning musbat qiymatlarida haqiqiy argumentli logarifmik funksiya bilan ustma-ust tushar ekan. Shuning uchun (2.5.19) funksiya uchun $(-\pi < \arg(z) < \pi)$ qaralayotgan soha uchun belgilashni qoldirib,

$$\ln(z) = \int_1^z \frac{dz}{z} \qquad (2.5.21)$$

deb olamiz. (2.5.21) tenglikni argumenti $-\pi < \arg(z) < \pi$ bo'ladigan (yoki $z = x > 0$ bo'ladigan) kompleks argumentli logarifmik funksiyaning ta'rifi sifatida qarash mumkin. Shunday qilib ko'rsatilgan soxada

$$-\pi < \arg(z) < \pi \qquad (2.5.22)$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan. Keyinchalik (2.5.21) tenglik bilan aniqlangan $\ln(z)$ funksiya $\omega = e^z$ funksiyaga teskari funksiya bo'lishligini ko'rsatiladi.

2.6 Koshi integrali. Koshi formulasi.

Oldingi isbot qilingan Koshi teoremasidan juda muhim teoremalar kelib chiqadi. Masalan analitik funksiyaning ichki nuqtasidagi qiymati va analitiklik sohasi chegarasidagi qiymati orasidagi bog'lanishni o'rnatishda asos bo'ladi.

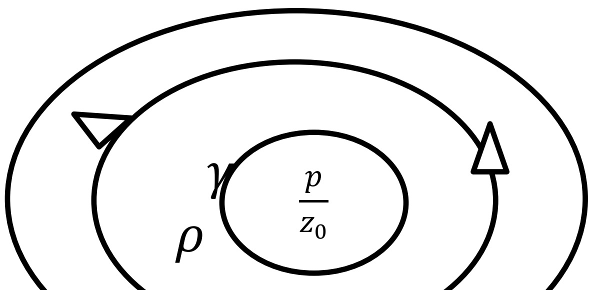
C kontur bilan chegaralangan bir bog'lashli E sohada analitik bo'lgan f(z) funksiyani qaraymiz. E sohaning ixtiyoriy ichki z_0 nuqtasini olib, shu z_0 nuqtani o'z ichida saqlaydigan va E sohada butunlay yotadigan G konturni yasaymiz. Yordamchi

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \qquad (2.6.\ 1)$$

funksiyani qaraymiz. Ko'rinib turibdiki $\varphi(z)$ funksiya E sohaning z_0 nuqtasidan boshqa qismida analitik bo'ladi. Shuning uchun E sohadan G konturni o'z ichiga olgan va G konturning ichida yotuvchi hamda z_0 nuqtani o'z ichida saqlovchi γ kontur chizilsa $\varphi(z)$ funknsiya G va γ konturlar bilan chegaralangan ikki bog'lamchi E* sohada analitik bo'ladi (3-rasmga qaralsin)

C

G



3-rasm

Koshi teoremasiga ko`ra $\varphi(z)$ funksiyadan $\mathrm{G} + \gamma$ chiziq bo`yicha olingan integral nolga teng :

$$\int_{G^+} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta + \int_{\gamma^+} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta = 0$$

Ikkinchi integralda integrallash yo`nalishini o`zgartirib oxirgi tenglikni

$$\int_{G^+} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta = \int_{\gamma^+} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta \quad (2.6.\ 2)$$

ko`rinishda yozibib olamiz . Bu (2.6 2) tenglikning chap tomonidagi integral $\gamma$ konturining qanday tanlanganidan bog`liq emas, shuning uchun soddalik uchun γ kontur sifatida markazi z_0 nuqtada radiusi ρ ga teng bo`lgan ayalanani olamiz (3-rasmga qaralsin $\theta = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ deb olamiz, u holda

$\int_{\gamma^+} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(\theta) d\varphi$ bo`ladi. Oxirgi integralni quyidagicha o`zgartiramiz:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\varphi = \int_0^{2\pi} [\, f(\theta) - f(z_0)] d\varphi + \int_0^{2\pi} f(z_0)\, d\varphi = \quad = \quad \int_0^{2\pi} [\, f(\theta) - f(z_0)] d\varphi + 2\pi f(z_0). \quad (2.6.\ 3)$$

Endi ρ ni nolga intiltiramiz. f(z) funksiya E da analitik bo`lgani uchun, shu E sohada uzluksiz hamdir, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\rho$ topiladiki $|\theta - z_0| < \rho$ bo`lganda $|f(\theta) - f(z_0)| < \varepsilon$ bo`ladi.

Bu yerdan

$$\rho \to 0 \text{ da } \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} [f(\theta) - f(z_0)] d\varphi = 0$$

bo`ladi.

(2.6. 3) formulada o`ng tomonining oxirgi qo`shiluvchisi ρ dan bog`liq emas, shuning uchun

$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\varphi = 2\pi f z_0\ va$ demak, $\int_{\gamma^+} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta = 2\pi i\, f(z_0)$ va (2.6. 2) ga

asosan $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G^+} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta$ (2.6. 4)

(2.6.4) tenglamaning o'ng tomonidagi integral $f(z)$ analitik unksiyaning biror z_0 nuqtadagi qiymatini uning analitiklik sohasidagi z_0 nuqtaning o'z ichiga oluvchi ixtiyoriy G konturdagi qiymatlari orqali ifodalayapdi. Odatda (2.6.4) o'ng tomonidagi integralni Koshi integrali deyiladi.

1-izoh. (2.6.4) formulada integrallash $f(z)$ funksiyaning analitikliksohasida butunlay yotuvchi va z_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi ixtiyoriy G kontur buyicha bo'lgan. Qo'shimcha $f(z)$ funiksiyaning yopiq E sohada uzluksiz bo'lishlik sharti quyilsa (2.6.4) E sohaning chegarasi C bo'yicha ham urinish bo'ladi,ya'ni

$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta = f(z_0)$ (2.6.4) bo'ladi.

2-izoh. Yuqorida keltirilgan mulohazalar ko'p bog'lamni E uchun ham o'z kuchida qoladi.Bu holda (2.6.4) formulani keltirib chiqarishda G kontur z_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi va E sohada butunlay yotadigan bulishi kerak bo'ladi.Ana shunday qo'shimcha $f(z)$ ni yopiq E (bo'lak-bo'lak siliq chegarali) sohada uzluksiz bo'lsin va ochiq E da analitik bo'lsin deyilib (2.6.4) formulani G chegaraning musbat yo'nalishi bo'yicha integral olinganda ham urinish bo'lishini kuzatish mumkin.

Endi (2.6.4) Koshi formulasidan bir necha natijalar keltirib chiqaramiz.

1-natija.

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_G \frac{f(\theta)}{\theta - z_0} d\theta$$

ko`rinishdagi integral G kontur $f(z)$ funksiyaning analitiklik sohasida butunlay yotgan va $z_0$ nuqta kompleks tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo`lib faqat G kontur ustida ixtiyoriymaslik shartida ma'noga ega bo`laveradi. Bu holda agar $z_0$ nuqta G kontur ichida yotsa integralning qiymati $f(z_0)$ ga teng bo`ladi, agar z_0 G konturdan tashqari bo`lsa integralning qiymati nolga teng bo`ladi, chunki bu holda integral ostidagi funksiya G konturning butunlay ichida analitik bo`ladi. Shunday qilib,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(\theta)}{\theta - z_0}d\theta = \begin{cases} f(z_0), \quad agar\ z_0\ Gning\ ichida\ bo`lsa, \\ 0, agar\ z_0\ G\ ning\ tashqarisida\ bo`lsa. \end{cases}$$

2-natija. $f(z)$ bir bog`lamli E sohada analitik funksiya $z_0$ E sohaning biror ichki nuqtasi bo`lsin. Z_0 nuqtani markaz qilib R_0 radiusli aylanani E sohada butunlay yotadigan qilib chizaylik. U holda Koshi formulasiga ko`ra quyidagi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_0}} \frac{f(\theta)}{\theta - z_0}d\theta$$

tenglik o`rinli bo`ladi. C_{R_0} aylana ustidagi θ nuqtalar $\theta = z_0 R_0 e^{i\varphi}$ ko`rinishda bo`ladi. Shuning uchun

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0\, e^{i\varphi})d\varphi$ (2.6. 5) yoki $f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_{R_0}} f(\theta)ds$

(2.6. 6).

Tengliklar o`rinli bo`ladilar. Bu (2.6.6) formula analitik funksiyaning markazidagi qiymati aylana ustidagi qiymatlarning o`rtacha qiymatiga tengligini anglatadi.

3-natija (analitik funiksiya moduli uchun maksimum prinsipi). E sohada analitik va yoriq E sohada uzluksiz bo`lgan $f(z)$ funksiyani moduli yoki $|f(z)| \equiv const$ bo`ladi yoki $|f(z)|$ modul o`zining maksimal qiymatiga sohaning chegarasida erishadi.

2.7. Analitik funksiyaning barcha tartibli hosilalari mavjudligi.

Koshi integralini o`rganganimizda integral ostidagi funksiyaning ikkita o`zgaruvchiga – biri integrallash o`zgaruvchisi θ, ikkinchisi $z_0$ tayin o`zgaruv bog`liq ekanligini bilamiz. Shunday qilib Koshi integrali $z_0$ parametrga bog`liq ekanligini ko`rdik. Shunday qilib parametrga bog`liq kompleks o`zgaruvchili funksiyaning integrali masalasi bilan shug`ullanishga to`g`ri keladi.

E sohagi $z = x + iy$ kompleks o`zgaruvchi va C bo`lak –bo`lak silliq chiziqdagi $\theta = \xi + i\eta$ o`rgaruvchiga bo`liq ikki o`zgaruvchili $\varphi(z,\theta)$ funksiya berilgan bo`lsin. Bunda E soha va C chiziqlarning o`zaro joylashuvi ixtiyoriydir. Ikki kompleks o`zgaruvchili $\varphi(z,\theta)$ ko`rinishdagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $\varphi(z,\theta)$ funksiya har qanday θ ∈ C qiymat uchun E sohada z o`zgaruvchining analitik funksiyasi bo`ladi.

b) $\varphi(z,\theta)$ funksiya va uning xosilasi $\frac{\partial\varphi(z,\theta)}{\partial z}$ $z \in E\ va\ \theta \in C$ o`zgaruvchilarning uzluksiz funksiyasi bo`lsin.

Oxirgi b) shart $\frac{\partial\varphi(z,\theta)}{\partial z}$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari x, y,ξ,η o`zgaruvchilarning o`zliksiz bo`lishligining anglatadi.

Yuqoridagi ikkita a) va b) shartlar bajarilganda ϕ(z,Θ) funksiyadan C chiziq bo'yicha olingan integral ixtiyoriy z€ E uchun mavjud va z kompleks o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi

$$F(z)=\int_C \varphi(z,\Theta)d\Theta = \cup(x,y)+i\vartheta(x,y) \qquad (2.7.1)$$

F(z) funksiyaning xossalarini aniqlash masalasiga to'xtaymiz.

1-tasdiq. F(z) funksiya E sohadagi z kompleks o'zgaruvchining analitik funksiyasi bo'ladi , shuningdek F(z) funksiyaning hosilasini integral ostida hisoblash mumkin bo'ladi.

Isbot. Bu tasdiqni isbotlash uchun quyidagi egri chiziqli integralni qaraymiz

$$\cup(x,y)=\int_C U(x,y,\xi,\eta)d\xi-\vartheta(x,y,\xi,\eta)d\eta.$$

Farazimizga ko'ra υ va ϑ funksiyalar x va y o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega va bu hosilalarni integral belgisi ostida hisoblash mumkin bo'ladi

$$\cup_x(x,y)=\int_C U_x d\xi-\vartheta_y d\eta$$

$$\cup_y(x,y)=\int_C U_y d\xi-\vartheta_x d\eta$$

$\cup_x$ va $\cup_y$ funksiyalarni o'zlari E sohada x va y o'zgaruvchilarning uzluksiz funksiyaklari bo'ladi.

ϑ(x,y) funksiya ham huddi U(x,y) funksiya kabi xossalarga ega bo'lgani va Koshi-Riman shartlariga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\cup_y\ (x,y)=\int_C \vartheta_y d\xi + U_y d\eta = \int_C U_x d\xi - \vartheta_x d\eta = \cup_x,$$

$$\cup_x\ (x,y) = \int_C \vartheta_x d\xi + U_x d\eta = -\int_C U_y d\xi - \vartheta_y d\eta = -\cup_y \qquad (2.7.2)$$

Shunday qilb F(ƶ) funksiya uchun Koshi –Riman shartlari bajarilyapti va U(x,y) va V(x,y) funksiyalarning xususiy hosilalari uzluksiz xamda (2.7.2) munosabatlarni qanoatlantiradi. Bu hulosa F(ƶ) funksiyaning E soxada analitikligiga asos bo'ladi.

Takidlash zarurki

$$F'(ƶ) = \cup_x\ (x,y) + iV_x(x,y) = \int_C U_x d\xi - \vartheta_x d\eta + i\int_C \vartheta_x d\xi + U_x d\eta =$$

$$\int_C \frac{\partial\varphi}{\partial ƶ}(ƶ,\Theta)d\Theta \quad (2.7.3)$$

tenglik o'rinlidir. Bunda integraldan parameter bo'yicha xosila olish uchun integral ostidagi ϕ(z,Θ) funksiyadan ƶ bo'yicha integrallab so'ngra integrallash yetarli ekanligi ko'rinadi.

Demak, agar $\frac{\partial\varphi}{\partial ƶ}$ a) va b) shartlarni qanoatlantirsa F'(ƶ) funksiya (hosila ham) E sohada analitik bo'lar ekan.

Parametrga bog'liq integralning ko'rib chiqilgan xossalari analitik funksiyaning muhim harakteristikalarini o'rnatishga xizmat qiladi.

Ma'lumki Г kontur bilan chegaralangan E sohada analitik va yopiq E sohada uzluksiz bo'lgan f(ƶ) funksiyaning (ƶ€ E ichki nuqtadagi qiymatlari soha chegarasidagi qiymatlari.) orqali Koshi integrali deb ataluvchi

$$F(ƶ)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f\theta}{\theta - ƶ}d\theta \quad (2.7.4)$$

Formula bilan aniqlaqnar edi.

E sohada yotuvchi va barcha nuqtalari bilan E ning chegarsi Г chiziq nuqtalari orasidagi masofa d(|z-Θ|≥d>0) bo'lgan biror yopiq Ē sohani qaraymiz. Φ(z,Θ)

$=\frac{f(\theta)}{\theta-z}$ E sohada z o'zgaruvchining analitik funksiyasi bo'ladi bundan tashqari uning xususiy hosilasi $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{f(z)}{(\theta-z)^2}$ o'zining argumentlari bo'yicha shu E sohada uzluksiz funksiya. Yuqorida o'rganilgan parametrga bog'liq integralning xossalaridan kelib chiqsak E sohaning ichki z nuqtalarida f'(z) hosila quyidagicha ifodalanishi mumkin.

$$F'\,(f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\theta)}{(\theta-z)^2}d\theta \quad (2.7.5)$$

(2.7.5) integral yana parametrga bog'liq integralni ifodalaydi va bu integralning integral ostidagi funksiya (2.7.4) integral ostidagi funksiyaning xossalariga ega bo'ladi.

Shuning uchun (2.7.5) tenglik bilam amiqlangan f'(z) funksiyaning hosilasi uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\theta)}{(\theta-z)^3}d\theta \qquad (2.7.6)$$

2-tasdiq. f(z) funksiya E sohada analitik va yopiq Ē da uzluksiz bo'lsin. U holda E sohaning barcha ichki nuqtalaridan f(z) funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilalari mavjud va bu hosilalar uchun

$$f^{(k)}(z)=\frac{K!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\theta)}{(\theta-z)^{n+1}}d\theta \qquad (2.7.7)$$

Tenglik o'rinli bo'ladi.Bu tasdiqning isboti yuqoridagi muloxazalardan kelib chiqadi.

Shunday qilb, agar f(z) funksiya E sohada analitik bo'lsa, u holda bu E sohada f(z) barcha uzluksiz hosilalarga ega bo'lar ekan . Kompleks o'zgaruvchili analitik funksiyaning bu xossasi haqiqiy o'zgaruvchili va birinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan funksiyadan tubdan farq qilishini ko'rsatadi.

2.8. Analitik funksiyalar qatori. Teylor qatori. Loran qatori.

Dastlab hadlari kompleks sonlardan iborat qatorning ya'ni sonli qatorning umumiy xossalarini keltiramiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (2.8.1)$$

ifodaga sonli qator deyiladi,bu yerda a_k k=1,2,3,,, kompleks sonlar

1-Ta'rif

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (2.8.1)$$

Qatorning n-qismiy yig'indi deyiladi. Agar $\{S_n$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib S limitga ega bo'lsa (2.8.1) qatorni yaqinlashuvchi va S ni uning yig'indisi deymiz. (2.8.1)Qatorning yaqinlashishi uchun $\lim_{n\to\infty} a_n$=0 shart bajarilishi zarur.Haqiqatdan ham qator yaqinlashishining Koshi kriteriyasiga asosan,$\forall\varepsilon > 0$ son oldinda ham shunday N nomer topilib n$\geq N$lar uchun

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$$

Bajarilishi zarur,ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=0 bo'lishi zarur.

Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad (2.8.2)$$

Qator yaqinlashuvchi bo'lsa (2.8.1) ni absolyut yaqinlashuvchi qator deymiz.Kompleks hadli sonli qatorni yaqinlashishga tekshirishning usullari haqiqiy hadli qatorni yaqinlashishga tekshirishdagi Dalamber va Koshi belgilari hisoblanadi.

Endi hadlari kompleks o'zgaruvchili funksiyalardan iborat bo'lgan qatorni qaraymiz.

Faraz qilaylik E soxada kompleks o'zgaruvchili bir qiymatli funksiyalarning cheksiz $\{U_n(z)\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) \quad (2.8.3)$$

Ifodani funksiyonal qator deymiz. E soxada z_0 tayin nuqta uchun (2.8.3) funksiyonal qator (2.8.1) sonli qatorga aylanadi.

2-Tarif. Agar ixtiyoriy z∈E uchun unga mos (2.8.1) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa (2.8.3) funksiyonal qatorni E soxada yaqinlashuvchi deymiz.

3-Tarif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olganda ham shunday N=N(ε)nomer topilib, n≥N(ε) bo'lganda

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon$$

Tengsizlik E soxadagi barcha z nuqtalar uchun bajarilsa,u holda (2.8.3) qator E soxada tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

1-teorema. Agar $u_n(z)$ funksiyalar E sohada uzluksiz va

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k(z)$$

Qator E sohada f(z) funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda f(z) funksiya E sohada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema. Agar (2.8.3) qator hadlari $U_n(z)$ funksiyalar E sohada uzluksiz bo'lib, bu qator E sohada f(z) funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda (2.8.3) qatorni E sohada butunlay yotuvchi bo'lak-bo'lak silliq C chiziq bo'yicha hadlab integrallash mumkin va quyidagi

$$\int_C f(\theta)d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C U_k(\theta)d\theta$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3-Teorema.(Veyershtrass teoremasi) . $U_n(z)$ funksiyalar E sohada analitik bo'lib,

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k\ (z)$$

Qator E sohaning ixtiyoriy yopiq $\bar{E}$ qismida f(z) funksiyaga tekis yaqinlashsin, u holda

1) f(z) funksiya E sohada analitik bo'ladi.

2) $f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)}\ (z)$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)}\ (z)$

Qator ixtiyoriy yopiq $\bar{E} \subset E$ to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

4-Teorema. .(Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). $U_n\ (z)$ funksiyalar E sohada analitik $\overline{E}$ qism sohada uzluksiz funksiyalar va

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k\ (z)$$

qator E sohada chegarasi Γ chiziqda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k\ (z)$$

qator $\bar{E}$ soha ostida tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Funksional qatorlar orasida juda muhim darajali qatordir. Darajali qator deb (2.8.3) qatordagi $U_n\ (z)$,n=1,2,3… hadlar darajali funksiyalar bo'lgan holni tushunamiz, ya'ni

$$U_n\ (z) = C_n\ (z - z_0)^n$$

Bu yerda C_n-biror kompleks sonlar, z_0-kompleks tekislikning tayin nuqtasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\ (z - z_0)^n \qquad (2.8.4)$$

qatorning hadlari butun kompleks tekislikda analitikdir,shuning uchun dastlabki 1,2,3 teoremalar bu qatorlar uchun ham o'rinlidir. Yuqorida keltirilgan teoremalarga ko'ra darajali qatorning asosiy xossalari ularning tekis yaqinlashishi bilan bog'liq. Shuni takidlash kerakki (2.8.4) qatorning yaqinlashish sohasi uning $C_n$koeffisentlari orqali aniqlanadi.

5-Teorema. (Abel teoremasi). Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \,(z - z_0)^n$$

Darajali qator biror $(z_1 \neq z_0)$ $z_1$nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy z nuqtada absolut yaqinlashuvchi bo'ladi, shuningdek radiusi ρ $|z_1 - z_0|$ dan kichik bo'lgan $|z - z_0| \leq \rho$ doirada tekis yaqinlashadi.Abel teoremasidan bir necha natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Agar (2.8.4) darajali qator biror z=$z_1$nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z nuqtalarda ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

2-natija. Har qanday darajali qator uchun shunday R son mavjudki, $|z - z_0| \leq R$ doiraning ichkarisida qator yaqinlashuvchi va tashqarisida uzoqlashuvchi bo'ladi .

4-tarif. $|z - z_0| < R$ doiraning ichkarisida darajali qator yaqinlashuvchi bo'lsa bu doirani darajali qatorning yaqinlashish doirasi, R ni esa yaqinlashish radiusi deyiladi.

Yaqinlashish radiusi C_n koeffitsientlar orqali aniqlanadi.

3-natija. Darajali qaator yaqinlashish doirasining ichkarisida analitik funksiyaga yaqinlashadi.

4-natija. Darajali qatorni yaqinlashish doirasining ichkarisida hadlab integrallash va istalgan tartibda hadlab differensiallash mumkin, bu holda hosil bo'lgan qatorlarning yaqinlashish radiusi dastlabki qatorlarning yaqinlashish radiusi bilan bir xil bo'ladi.

5-natija.

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \,(z - z_0)^k$$

Darajali qatorning koeffitsientlari uning yig'indisi f(z) hamda f(z) hosilalari orqali

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad (2.8.5)$$

formula orqali bog'langan bo'ladi.

6-natija.

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(z-z_0)^k$$

Darajali qatorning yaqinlashish radiusi R=$\frac{1}{l}$, $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$

formula bilan topiladi.

Izoh. l=0 bo'lganda (2.8.4) darajali qator har qanday z nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi (Chunki R=∞).

l=∞ bo'lganda (2.8.4) darajali qator z≠ z_0 bo'ladigan barcha z nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'ladi (chunki R=0).

Shunday qilib quyidagi xulosaga keldik. Darajali qator yaqinlashish doirasining ichkarisida biror analitik funksiyani aniqlaydi. Shuning uchun quyidagi savol tug'iladi: Biror doiraning ichkarisida analitik bo'lgan funksiyaga shu doirada shu funksiyaga yaqinlashadigan darajali qatorni mos qo'yish mumkinmi?

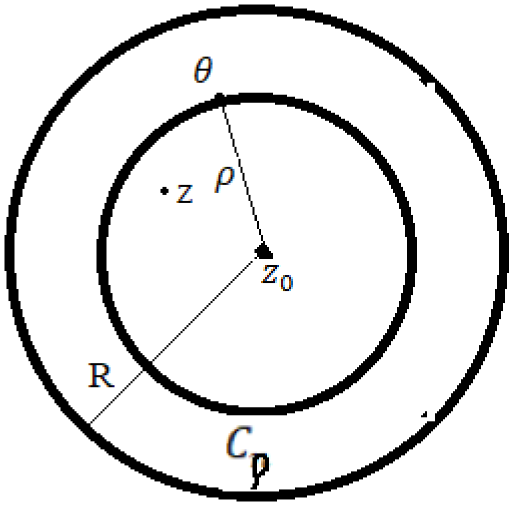
Bu savolga quyidagi teorema javob bo'ladi.

Teorema. (Teylor teoremasi)

$|z-z_0| < R$ doiraning ichkarisida analitik bo'lgan f(z) funksiya shu doirada yaqinlashuvchi darajali qator orqali ifodalanishi mumkin va bu qator yagona bo'ladi, ya'ni

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(z-z_0)^k \qquad tenglik\ o'rinlidir.$$

Isbot. $|z-z_0| < R$ doira ichidan ixtiyoriy z nuqtani tanlab markazi z_0 nuqtada bo'lgan va z nuqtani o'z ichida saqlaydigan ρ radiusni (bu yerda $\rho < R$) doira yasaymiz



4-rasm

Madomiki z nuqta $|z - z_0| < R$ sohaning ichki nuqtasi bo'lar ekan bu nuqtada teorema shartiga ko'ra f(z) funksiya analitik, u holda Koshi formulalariga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\theta)}{\theta - z} d\theta \qquad (2.8.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (2.8.6) ifodaning integral ostida o'zgartirish qilamiz.

$$\frac{1}{\theta - z} = \frac{1}{\theta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\theta - z_0}} = \frac{1}{\theta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\theta - z_0)^n} \qquad (2.8.7)$$

$\left|\frac{z-z_0}{\theta-z_0}\right| < 1$ bo'lgani uchun (2.8.7) qator yaqinlashuvchidir. $\theta \in C_\rho$ bo'lganda (2.8.7) qator θ bo'yicha tekis yaqinlashadi, chunki yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}} \quad (|z - z_0| < \rho)$$

Sonli qator bilan mojarantlanadi (2.8.7) ni (2.8.6) ga qo'yib va hadma-had integrallab quyidagini keltiramiz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\iota}\int_{C_\rho} \frac{f(\theta)}{(\theta - z)^{n+1}} d\theta (z - z_0)^n \quad (2.8.8)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi\iota}\int_{C_\rho} \frac{f(\theta)}{(\theta - z)^{n+1}} d\theta \quad (2.8.9)$$

Belgilash qilib (2.8.8) tanlangan z nuqtada yaqinlashuvbchi darajali qator ko'rinishida yozib olamiz.

$$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n \quad (2.8.10)$$

(2.8.9) formuladagi $C_\rho$aylanani Koshi teoremasiga ko'ra $|z - z_0|$ <R sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq z_0 nuqtani o'z ichiga oladigan kontorga almashtirishimiz mumkun. Z berilgan sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lgani uchun (2.8.10) kontor $|z - z_0| < R$ doiraning ichkaarisida f(z) funksiyaga yaqinlashadi, $|z - z_0| \leq \rho$<R doirada esa tekis yaqinlashadi.

Shunday qilib $|z - z_0|$ <R doiraning ichkarisida analtik bo'lgan f(z) funksiya yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyilar ekan. Yoyilmaning koefisentlari esa

$$C_n = \frac{1}{2\pi \iota} \int_{C_\rho} \frac{f(\theta)}{(\theta - z)^{n+1}} d\theta = \frac{f^n(z_0)}{n!} \quad (2.8.11)$$

ko'rinishida bo'lar ekan.

(2.8.10) yoyilmaning yagonaligini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik (2.8.10) dan boshqa yoyilma ham bo'lsin, ya'ni

$$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n(z - z_0)^n \quad (2.8.10')$$

qaysiki hech bo'lmaganda bitta koeffitsiyent uchun $C'_n \neq C_n$ (2.8.10') qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun

$$C'_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

bo'ladi, bu esa (2.8.11) bilan ustma-ust tushishini ko'rsatadi.

$|z - z_0|$ <R doirada analitik bo'lgan funksiyaning (2.8.10) darajali qatorga yoyilmasini f(z) funksiyaning Teylor yoyilmasi deyiladi. (2.8.10) qatorni esa Teylor qatori deyiladi.

Isbot qilingan teorema shuni ko’rsatadiki, biror z_0 nuqta atrofida analitik bo’lgan funksiya va markazi z_0 nuqtada bo’lgan darajali qator o’rtasida o’zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Misol.

$$f(z) = ln\, z = \int_1^z \frac{d\theta}{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \qquad (2.8.12)$$

bo’lishini ko’rsatishimiz mumkin.

5-Tarif. $f(z)$ funksiya G kontor bilan chegaralangan E soxada berilgan bo’lsin. Agar $z_0 \in \bar{E}$ nuqta uchun yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

darajali qator topilib, bu qator o’zining yaqinlashish doirasi $|z - z_0| < \rho(z_0)$ va E soxaning umumiy qismida $f(z)$ funksiyaga yaqinlashsa, u holda $f(z)$ funksiyaning to’g’ri nuqtasi deyiladi.

$\rho(z_0)$ dan yagona talab noldan kata bo’lishligi talab qilinadi.

6-Tarif. $f(z)$ funksiyaning nollari bo’lmaydigan $z \in \bar{E}$ nuqtalar $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtalari deyiladi. G chegaraning nuqtalari $f(z)$ funksiya uchun to’g’ri nuqtalar ham maxsus nuqtalar ham bo’lishligi mumkin.

Ta’biiyki agar $f(z)$ funksiya E soxada analitik bo’lsa, u holda soxaning barcha ichki nuqtalari $f(z)$ uchun to’g’ri nuqtalar bo’ladi. G chegaraning nuqtalari analitik funksiya $f(z)$ uchun to’g’ri nuqta ham maxsus nuqta ham bo’lishi mumkin. G dagi $z_0 \in \bar{E}$ to’g’ri nuqtaning biror atrofi $|z - z_0| < \rho(z_0)$ doiraning G ga tegishli nuqtalari ham to’g’ri nuqtalar bo’ladi.

Analitik funksiyalarning maxsus nuqtalar atrofidagi tuzilishini o’rganamiz. Quyidagi ko’rinishdagi qatorni qaraymiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, (z - z_0)^n \qquad (2.8.13)$$

bu yerda z_0-kompleks tekislikning tayin nuqtasi, C_n- kompleks sonlar, (2.8.13) ifodani Loron qatori deyishadi. Bu qatorning yaqinlashish soxasini topamiz.Buning uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} \qquad (2.8.14).$$

Tabiiyki (2.8.13) qatorning yaqinlashish soxasi (2.8.14) ning o'ng tomonidagi qatorlar yaqinlashishi soxalarining umumiy qismidan iborat bo'ladi.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

qatorning yaqinlashish soxasi markazi z_0 nuqtada bo'lgan biror R_1 radiusli doiradan iborat bo'ladi. Bu doiraning ichkarisida qator biror kompleks argumentli analitik funksiyaga yaqinlashadi.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R \quad (2.8.15),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(z-z_0)^n}$$ qatorning yaqinlashish soxasini toppish uchun

$\theta = \frac{1}{z-z_0}$ ko'rinishdagi o'zgaruvchini almashtirish qilamiz. U holda bu qator

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{-n}\theta^n$$ ko'rinishni oladi.

hosil bo'lgan qator o'zining yaqinlashish doirasi ichki nuqtalarida biror θ argumentli kompleks $\varphi(\theta)$ analitik funksiyaga yaqinlashadi. Bu qatorning yaqinlashish radiusi $\frac{1}{R_2}$ orqali belgilaymiz. U holda

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \theta^n, \ |\theta| < \frac{1}{R_2} \quad (2.8.16)$$

Eski o'zgaruvchiga qaytib va $\varphi(\theta(z)) = f_2(z)$ deb,

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(z-z_0)^n}, \quad |z-z_0| > R_2 \quad (2.8.17),$$ ni olamiz. Bu yerdan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(z-z_0)^n}$ qatorning yaqinlashish sohasi $|z-z_0| = R_2$ aylananing tashqarisi ekanligi bo'lishligi kelib chiqadi.

Agar $R_2 < R_1$ bo'lsa, u holda (2.8.13) ning yaqinlashish sohasi

$R_2 < |z-z_0| < R_2$ doiraviy halqadan iborat bo'ladi va bu halqada (2.8.13) qator f(z) $= f_1(z) + f_2(z)$ analitik funksiyaga yaqinlashadi, ya'ni quyidagi

$$\mathrm{f(z)} = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n, \qquad R_2 < |z-z_0| < R_2 \quad (2.8.18)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $R_2 > R_1$ bo'lsa, u holda (2.8.13) qator umumiy yaqinlashish sohaga ega bo'lmaydi.

3-BOB. Analitik funksiyalar nazariyasining chegaraviy masalalari

3.1. Koshi tipidagi integral. Gyolder shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar.

L oraqali z kompleks o'zgaruvchi tekisligidagi silliq konturni belgilaymiz.

L chiziq ichida yotuvchi sohani ichki soha deymiz va D^+ orqali belgilaymiz, $D^+ + L$ ga to'ldiruvchi sohani esa D^- orqali belgilaymiz.

Agar f(z) funksiya D^+ sohada analitik va $D^+ + L$=D^- da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

tenglik o'rinli bo'lar edi.

Agar f(z) funksiya D^- sohada analitik va $D^- + L$=D^- da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

tenglik o'rinli bo'lar edi. (3.1.1) va (3.1.2) tengliklar Koshi formulalari deb atalar edi. Koshi formulalari agar funksiyaning soha chegarasida qiymatlari ma'lum bo'lsa, u holda bu funksiyaning soha ichkarisidagi ixtiyoriy nuqtasidagi qiymatini hisoblash imkonini tug'diradi.

Bu holatni qisqa qilib: Koshi formulasi analitik funksiyalar uchun chegaraviy masalani yechadi deyish mumkin. (3.1.1) va (3.1.2) formulalarning chap tomonidagi integral Koshi integrali deyiladi.

Faraz qilaylik L-silliq ochiq yoki yopiq kontur kompleks tekislikning chekli qismida joylashgan; τ-chiziq nuqtalarining kompleks koordinatasi va $\varphi(\tau)$- kontur nuqtalarining uzluksiz funksiyasi bo'lsin. U holda

$$\phi(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} \quad (3.1.3)$$ integral Koshi tilidagi integral deyiladi.

$\varphi(\tau)$ integralining zichligi, $\frac{1}{\tau-t}$ esa integralning yadrosi deyiladi. Koshi tilidagi integral kompleks tekislikning L kontur nuqtalaridan boshqa nuqtalarida analitik bo'lgan funksiyani aniqlaydi. $\phi(\tau)$ funksiyaning analitikligi integral ostida τ o'zgaruvchi parameter bo'yicha differensiallash mumkinligidan kelib chiqadi. Biz ancha umumiyroq tasdiqni isbotlaymiz, Koshi tilidagi integral bilan aniqlangan $\phi(\tau)$ funksiyaning analitikligi undan xususiy hol sifatida kelib chiqadi.

Teorema. L-silliq (ochiq yoki yopiq) kontur bo'lsin.

$f(\tau, z)$ funksiya $\tau \in L$ o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz va τ ning barcha qiymatlari uchun z o'zgaruvchi bo'yicha analitik funksiya bo'lsin, u holda egri chiziqli integral bilan aniqlangan

$$f(z) = \int_L f(\tau, z)d\tau \quad (3.1.4)$$

$f(z)$ funksiyasi z o'zgaruvchi bo'yicha analitik bo'ladi.

Isbot. Quyidagi ayirmaga qaraymiz:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \int_L f_z'(\tau, z)d\tau = \int_L \left[\frac{f(\tau, z+\Delta z) - f(\tau, z)d\tau}{\Delta z} - f_z'(\tau, z)\right]d\tau$$

Teorema shartiga ko'ra $f(\tau, z)$ funksiya analitikligidan $|\Delta z|$ yetarlicha kichik bo'lganda

$\frac{f(\tau, z+\Delta z)-f(\tau, z)d\tau}{\Delta z}-f'_z(\tau, z)$ miqdorni barcha τ lar uchun xohlagancha kichiklashtirish mumkin. L kontur chekli uzunlikka egaligidan $|\Delta z| \to 0$ da limitga o'tib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \int_L f'_z(\tau, z)d\tau \qquad (3.1.5)$$

Shunday qilib, F(z) funksiya $f(\tau, z)$ funksiyaning analitiklik sohasining hamma joyida analitik bo'lar ekan.f(τ,z) funksiyaning analitik bo'linmaydigan z o'zgaruvchining qiymatlari F (z) funksiya uchun maxsus nuqta bo'ladi.

Koshi tipidagi integral uchun $\varphi(\tau)$ zichlik uzliksiz funksiya bo'lganda integral ostidagi funksiya analitik bo'linmaydigan nuqtalar L integrallash chiziq ustidagi nuqtalar bo'ladi.

Agar L - ochiq kontur bo'lsa, u holda φ(z) funksiya butun kompliks tekislikdan L chiziqni chiqarib tashlashdan xosil bo'lgan sohada analitik bo'ladi.

Agar L - yopiq kontur bo'lsa, u holda φ(z) funksiya ikkta funksiyaga : D^+ da aniqlangan $\varphi^+(z)$ va D^- da aniqlangan $\varphi^-(z)$ mustaqil funksiyalarga aytiladi. Bu funksiyalar umuman olganda bir-biriga analitik davom bo'lmaydilar.

Bir-birini butun kompleks tekislikka to'ldiradigan D^+ va D^-sohalarida aniqlash ikkta mustaqil $\varphi^+(z)$ va $\varphi^-(z)$ funksiyalar bilan aniqlangan φ(z) funksiyani bo'lak-bo'lak analitik funksiya deymiz.

Koshi tipidagi integraling bir muhum xossasini keltiramiz.

1-xossa. (3,1,3) formula bilan aniqlangan Koshi tipidagi integral cheksiz uzoqlashgan nuqtada nolga aylanadi.

Isbot. φ(z) funksiyani cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida $\frac{1}{z}$ ning darajalari bo'yicha darajali qatorga yozamiz.

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \cdots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} - \cdots$$

Tenglikning ikkala tomoni $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$ ga ko'paytirib so'ngra integrallasak, quyidagiga ega bo'ladi.

$C_k = \frac{1}{2\pi i}\int \tau\ k -^1\ \varphi(\tau)d\tau.$

Yoyilmada nolinchi darajali qo'shiluvchi qatnashasining, bundan esa $\varphi^-(\tau)$=0 kelib chiqadi.

1-Misol. $\varphi(\tau)$=$\frac{2}{\tau(\tau-2)}$ zichlik funksiyasi bilan $|z|$=1 birlik aylanma bo'yicha Koshi tipidagi integralni xisoblaymiz. $\frac{1}{z-2}$ D^+ sohada analitik funksiya $\frac{1}{z}$ esa D^- da analitik va cheksizlikda nolga aylanadi.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{\tau(\tau-2)}\times\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{\tau-2}\times$$

$$\times\frac{1}{\tau - z}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{d\tau}{\tau(\tau - z)}$$

Birinchi integral (3,1,1) ga asosan $\frac{1}{z-2}$ ga teng $z \in D^+$ bo'lganda 0 ga teng $z \in D^-$ bo'lganda. Ikkinchi integral (3,1,2) formulaga asosan $z \in D^-$ bo'lganda $-\frac{1}{z}$ ga teng, $z \in D^+$bo'lganda esa 0 ga teng. Bu yerdan $\varphi^+(z)$=$\frac{1}{z-2}$; $\varphi^-(z)$=$\frac{1}{z}$.

Koshi tipidagi integralning integrallash chizig'I ustidagi xarakterini o'rganish masalani ko'rishdan oldin qo'shimcha masala funksiyalar klassi (sinfi) masalani qaraymiz.

$\varphi(t)$ funksiya argument haqiqiy, ham kompleks ham bo'lishi mumkin.

Ma'lumki agar $|t_2$-$t_1|$ yetarli kichik bo'lganida $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$ hoxlagancha kichik bo'lsa $\varphi(t)$ funksiyani uzluksiz deyiladi. Boshqacha aytganda biror nuqtada argument orttirmasi nolga intilganda mos funksiya orttirmasi ham nolga intilsa funksiyani o'sha nuqtaga uzliksiz deyilar edi.

Bu holda funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatan kichiklik tartibi masalasi qaralmasi, bu tartib hoxlagancha bo'lishi mumkin.

1-Ta'rif. L chiziq ustida aniqlangan φ(t) fuksiyaning uzluksiz moduli deb $\omega(\delta)$=sup | $\varphi(t_2)$- $\varphi(t_1)$|, $t_1, t_2 \in L$ ifodani tushunamiz.

Funksiyaning ko'pgina xossalari uning uzluksizlik moduli tartibi kichikligi bilan aniqlanadi. Shuning uchun ham uzluksiz funksiyalarning keng kassini uzluksizlik moduli tartibining kengligi bo'yicha klasslarga bo'lish maqsadga muofiq bo'ladi. Bu klasslardan muximi uzluksizlik moduli argument orttirmasining darajali funksiya ko'rinishida bo'lgan holidir.

1-Ta'rif . L - silliq chiziq bo'lib, bu chiziq nuqtalarda φ(t) funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar L ustidagi ihtiyoriy ikkita nuqta uchun

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A \cdot |t_2 - t_1|^{\lambda} \quad (3.1.6)$$

munosabat bajarilsa, bu yerda A va λ musbat sonlar, $\varphi(t)$ funksiyani Gyolder (H shartini) qanoatlantiradi deymiz.A ni Gyolder o'zgarmasi, λ ni esa Gyolder ko'rsatkichi deyiladi.

Agar λ bir sondan katta bo'lsa, (3.1.6) shartdan $\varphi'(t)$ hosila hamma joyda nolga tengligi kelib chiqardi va $\varphi(t)$ aynan o'zgarmas bo'lar edi. Shuning uchun biz $0 < \lambda < 1$ deb hisoblaymiz. Agar $\lambda = 1$ bo'lsa, Gyolder sharti Lipshits sharti bilan ustma-ust tushadi.

Agar $t_1\, va\, t_2$ bir-biriga yetarlicha yaqin va Gyolder sharti biror λ_1 ko'rsatkich bilan bajarilsa, ko'rinib turibdiki Gyolder sharti ixtiyoriy $(0 < \lambda < \lambda_1)$ λ ko'rsatkich bilan ham bajariladi. Teskarisi, umuman olganda har vaqt ham o'rinli bo'lavermaydi. Shuning uchun kichikroq λ ga kengroq funksiyalar sinfi (klassi) mos keladi. Eng tor klass Lipshits bo'lishi ko'rinib turibdi.

Oxirgi mulohazalardan kelib chiqsak, agar $\varphi_1(t)\; va\; \varphi_2(t)$ funksiyalar mos ravishda $\lambda_1\, va\, \lambda_2$ ko'rsatkich bilan. Gyolder klassiga tegishli bo'lsa, ularning

$$\varphi_1(t) \pm \varphi_2(t),\; \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)\; va\; \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \quad (\varphi_2(t) \neq 0) \text{ lari}$$

$\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ ko'rsatkich bilan Gyolder klassiga tegishli bo'ladi.

3.2. Koshi tipidagi integralning bosh qiymati.

Ma'lumki haqiqiy o'zgaruvchili f(x) funksiya biror [a;b] oraliqda integrallanuvchi bo'lishligi uchun bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'lishi zarur edi. Agar [a;b] oraliqning biror c $(a \le c \le b)$ nuqtasida chegaralanmagan bo'lsa, c nuqtaning [a;b] oraliqqa tegishli bir qismi ajratilib so'ngra oraliqning qolgan qismidan integral olinar edi. Agar c nuqta oraliqning ichki nuqtasi, ya'ni a<c<b bo'lsa, u holda quyidagi karrali limit

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right] \quad \text{mavjud bo'lsa, bu limitni}$$

[a;b] oraliqda integrallanmagan f(x) funksiyadan olingan xosmas integral deyilar edi. Bu ta'rifda c nuqtaning atrofi ixtiyoriy bo'lib, nolga intilsa bas edi. Demak, $\varepsilon_1 \ va \ \varepsilon_2$ bir-biridan bog'liqmas bo'lib, har biri o'zining qonuniyati bilan nolga intiladilar.

Matematik analiz kursida aytilgan ediki, agar f(x) funksiyaning cheksizlik tartibi birdan kichik bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi, ya'ni

$|f(x)| < \frac{M}{(x-c)^{\alpha}}$ $(\alpha < 1)$ bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar f(x) funksiya c nuqtada 1 da katta yoki 1 ga teng tartibli cheksiz bo'lsa, xosmas integral mavjud emas, ya'ni uzoqlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi integralni qaraymiz

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b),$$

Bu integralni xosmas integral sifatida hisoblasak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[-\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} \frac{dx}{x-c} \right] = ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (3.2.1)$$

Oxirgi ifodadagi limit $\varepsilon_1 \ va \ \varepsilon_2$ larning nolga intilish usuliga bog'liq. Demak, bu integral xosmas ma'noda mavjud emas. Uni maxsus (singular) integral deyishadi.

Ammo agar ε_1 va ε_2 lar o'rtasida biror ma'qul munosabat o'rnatsak, masalan $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ deyilsa, (3.2.1) integral mavjud bo'ladi. Bunday munosabat bilan hisoblangan maxsus integralning qiymatini maxsus integralning **Koshining bosh qiymati ma'nosidagi** qiymati deyiladi.

1-ta'rif.

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b), \quad \text{maxsus integralning}$$

Koshining bosh qiymati ma'nosidagi qiymati deb

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c}\right] = ln\frac{b-c}{c-a} \qquad \text{(3.2.2) limitni tushunamiz.}$$

Endi ancha umumiy bo'lgan ushbu integralni

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx \quad \text{qaraymiz, bu yerda } \varphi(x) - (a;b)\text{intervalda Gyolder}$$

Shartini qanoatlantiruvchi funksiya. Bu holni yuqoridagi holatga olib kelish mumkin. Haqiqatdan ham,

Gyolder shartiga ko'ra

$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{X-c}\right| < \frac{A}{(x-c)^{1-\tau}}$ bo'lgani uchun birinchi qo'shiluvchi xosmas ma'noda yaqinlashuvchi integralni ifodalaydi, ikkinchi qo'shiluvchi esa (3, 2, 2) ning o'zginasi. Shunday qilib $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx$ maxsus (singulyar) integral $\varphi_{(x)}$ dunksin Gyolder shartini qanoatlantirsa Koshining bosh qiymati ma'nosida mavjud bo'ladi va

$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{X-c}dx + \varphi(c)ln\frac{b-c}{c-a}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Maxsus (singulyar) integralni odatda S' yoki v.p.$\int$ (valeur principale) orqali bellashadilar. Endi egri chiziqli maxsus integralning bosh qiymati tushunchasini kiritamiz. L – silliq kontur; t,τ – chiziq kontur nuqtalarining kompleks koordinatalari bo'lsin.

Quyidagi maxsus egri cizhiqli integralni qaraymiz.

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \quad (3.2.3)$$

Konturning t nuqtasini markaz qilib ρ radiusli aylana chizaylik t_1 va t_2 bu aylana va L konturning kesishish nuqtalari bolsin.

ρ radiusni shunchalik kichik qilib olamizki chizilgan aylana L chiziqni t_1 va t_2 nuqtalardan boshqa nuqtalarda kesmasin. l orqali L konturning kesuvchi aylana ichida qolgan qismini belgilaylik. Integralni L ning kelgan qismi boyicha olamiz.

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

2-ta'rif. $\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ integralning p→0 dagi limitini $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ maxsus integralni bosh qiymati deymiz.

Egri chiziqli maxsus integralning mavjudlik masalasini o'rganishni sodda holdan boshlaymiz Ya'ni $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ integralni o'rganamiz. Integral ostidagi ifodaning $\frac{1}{\tau-t}$ ning boshlang'ich funksiyasi $\ln(\tau-t)$ ga teng. Bu kompleks o'zgaruvchi ko'p qiymatli bo'lgani uchun ma'leri qiyinchiliklar yuzaga keladi.

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \ln(\tau-t)$$

Bu yerda a va b lar L konturning oxirlari ammo

$\ln\frac{t_1-t}{t_2-t}=\ln\left|\frac{t_1-t}{t_2-t}\right| + [\arg(t_1-t) - \arg(t_2-t)].$

Ta'rifga ko'ra $|t_2-t| = |t_1-t|$ demak birinchi qo'shiluvchi no'lga aylanadi. Kvadrat qavs ichidagi ifoda $\overrightarrow{tt_1}$, $\overrightarrow{tt_2}$ vektorlar orasidagi burchak α ga teng. Shguningdek $\lim_{\rho\to 0} ln\frac{t_1-t}{t_2-t} = i\pi$.

Demak,

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} = ln\frac{b-t}{a-t} + i\pi \quad (3.2.4)$$

Oxirgi integralni logarifmik funksiyaning shoxlaridan $\ln(-1) = i\pi$ bo'lganini tanlab quyidagicha

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = ln\frac{b-t}{a-t} \qquad (3.2.6) \ \text{ko'rinishida ham yozish mumkin.}$$

Agar L kontur yopiq bo'lsa, bu holda a=b deb (3.2.4) ning o'ngh qismidan birinchi qo'shiluvchi nolga aylanadi va quyidagi sodda formulaga

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\pi \qquad (3.2.6) \ \text{kelamiz}$$

Endi umumiy holda

$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$ maxsus integralni qaraymiz. Bu yerda $\varphi(\tau)$ − Gyolder shartini qanoatlantiruvchi funksiya. Bu integralni quyidagicha

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}d\tau + \varphi(t)\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \qquad (3.2.7)$$

yozib olamiz. Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab

$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$ maxsus integral $\varphi(\tau)$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantirganda Koshining bosh qiymati ma'nosida mavjud bo'lishligiga amin bo'lamiz. Bu integralni ikki ko'rinishda:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}d\tau + \varphi(t)\left[ln\frac{b-t}{a-t} + i\pi\right] \quad (3.2.8)$$

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}d\tau + \varphi(t)ln\frac{b-t}{a-t} \quad (3.2.9)$$

yozib olish mumkin. Xususan yopiq kontur uchun

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + i\pi\varphi(t) \quad (3.2.10) \ \text{formulaga ega bo'lamiz.}$$

3.3. Koshi tipidagi integralning limitik qiymatlari sohasidagi formulalar.

Koshi tipidaghi integralni o'rganganimizda ko'rdikki, integrallash konturining o'zi maxsuslik, beruvchi chiziq bo'lar edi. Endi biz muxim tekshirishga o'tamiz,aniqrog'i Koshi tipidagi integralning integrallash konturidagi xarakterlarini o'rganamiz. Kengroq olingan rezultetlar shuni ko'rsatadiki Koshi tipidagi integralning zarurligi Geylder klasidan bo'lganda integrallash konturiga turli tomondan yaqinlashganda uzliksiz limitik qiymatga ega bo'ladi, ammo bu limitik qiymatlarning qiymatlari turiga bo'linadi, ya'ni konturdan o'tishda sakrashga ega bo'ladi.

Lemma(Asosiy) . Agar t nuqta konturning oxirgi nuqtalari bo'lmasa va $\varphi(\tau)$ Gyolder shartini qanoatlantirsa, u holda

ψ(z)=$\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z} d\tau$

$\varphi(\tau)$ funksiya z=t konturning nuqtasidan o'tilgМесто для уравнения.anda o'zini uzluksiz funksiyadek tutadi, ya'ni z nuqta t nuqtaga konturning ixtiyoriy tomonidan intilganda ham aniq qiymatga ega bo'ladi:

$\lim_{z\to t} \psi(\mathrm{z}) = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z} \mathrm{d}\,\tau = \psi(\mathrm{t})$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z} d\tau \qquad (3.3.1)$$

bo'lsin, bu yerda $\varphi(\tau)$-Tyolder shartini qanotlantiradigan funksiya 4-yopiq kontur. Agar 4 ochiq ko' ntur bo'lsa uni biror chiziq bilan yopiq konturga to'ldiramiz va bu to'ldiruvchi chiziq ustida $\varphi(\tau) = 0$ deb olamiz.

(3.3.1) tenglik bilan aniqlangan $\varphi(\tau)$funksiyaning konturining t nuqtadagi limitik qiymatlarini o'rganish uchun

$$\psi(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z} d\tau \quad (3.3.2)$$

Funksiyani olamiz. Φ(z) va ψ(z) funkiyalarning Z nuqta L ko'turdagi t nuqtaga ichkaridan intilgandagi limitik qiymatlarini mos ravishda $\Phi^{+}(t)$, $\psi^{+}(t)$ orqali, tashqaridan intilgandagi limitik qiymatlarni esa $\Phi^{-}(t)$, $\psi^{-}(t)$ orqali belgilab olamiz. Ochiq kontur uchun bu qiymatlar o'ng limitik va chap limitik qiymatlarga mos keladi. Limitga o'tish yo'nalishini takidlash uchun mos ravishda z→ t^{+}, $z \to t^{-}$ kabi yozamiz. Funksiyaning t nuqtadagi bevosita qiymatlarini Φ(z), ψ(z) orqali yozamiz. Φ(t) funksiya deganda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}d\tau$$

integralni tushunamiz va integralni koshining bosh qiymati manosida tushunamiz.

$$\int_{L} \frac{d\tau}{\tau-z}=\begin{cases} 2\pi i, z\epsilon D^{+}, \\ 0, z \in D^{-}, \\ \pi i, z \in 4 \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

Tenglikdan kelib chiqib

$$\psi^{+}(t)=\lim_{z\to t^{+}}[\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L} \frac{d\tau}{d-t}]=\Phi^{+}(t)-\psi(t),$$

$$\psi^{-}(t)=\lim_{z\to t^{-}}[\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L} \frac{d\tau}{d-t}]=\Phi^{-}(t),$$

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L} \frac{d\tau}{d-t}]=\Phi^{-}(t)-\frac{1}{2}f(t),$$

Tengliklarni olamiz. Asosiy lemmaga ko'ra $\psi(t)$ uzluksiz funksiya bo'lgani uchun oxirgi tengliklarning o'ng tomonlari tengdir, ya'ni

$$\Phi^{+}(t)-\psi(t)=\Phi^{-}(t)= \Phi^{-}(t)-\frac{1}{2}f(t), \quad (3.3.4)$$

Bundan esa

$$\begin{cases} \Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \\ \Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(x)}{\tau-t}dx \end{cases} \quad (3.3.5\ )$$

Maxsus integral Koshining bosh qiymati ma'nosida tushuniladi.

Oxirgi (3.3.5) formulalarni rus matematigi Y.V.Soxoskiy tomonidan 1873 yil olingan, shuning uchun ham (3.3.5) ni Soxoskiy formulalari deyiladi.

Olingan rezultatlarni teorema shaklida jamlaymiz.

1- Teorema L-silliq kontur (yopiq yoki ochiq) va $\varphi(\tau)$ funksiya kontur nuqtalarida aniqlangan Gyolder shartini qanotlantiruvchi bo'lsin. U xolda

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

Koshi tipidagi integral L konturning nuqtalariga o'ngdan yoki chapdan ixtiyoriy yo'l bilan intilganda ham $\Phi^{+}(t)$, $\Phi^{-}(t)$ limitik qiymatlarga ega bo'ladi va bu limitik qiymatlar integralning zinchligi U(t) va maxsus integral ϕ(t) lar bilan (3.3.5) Soxoskiy formulalari orqali topiladi. (3.3.5) formulalarini qo'shib ayirish natijasida ularga teng kuchli bo'lgan quyidagi formulalarni

$$\begin{cases} \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t) \\ \Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Olamiz. Bu (3.3.6) formulalardan ko'p foydalanamiz.

Endi ixtiyoriy kompleks funksiyaning sohada analitik bo'lgan funksiyaning chegaradagi qiymati bo'lishlik shartini ishlab chiqamiz.

Faraz qilaylik L yopiq silliq konturda biror uzluksiz kompleks $\varphi(t)$ funksiya berilgan bo'lsin. Shuningdek t=t(s)=$t_1(s)+it_2(s)$ – konturning kompleks ko'rinishdagi tenglamasi, t(s) chiziqning (konturning) biror nuqtadan boshlab hisoblangan S yoyning funksiyasi bo'lsin. t Argumentning kompleks ifodasini $\varphi(t)$funksiyaga olib borib qo'yamiz.

$$\varphi(t)=\varphi[t(s)]=\varphi_1(s)+i\varphi_2(s)$$

Ko'rinishini olamiz.

$\varphi(t)$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsin, bu $\varphi(t)$ funksiyani zinchlikfunksiyasi sifatida olib

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

Koshi tipidagi integralni qaraymiz.

Agar z∈ D^{+}fu $va\ \varphi(t)$ nksiya D^{+} da analitik bo'lsa, u holda

$\Phi^{+}(t) = \varphi(z)$;

Agar z∈ D^{-} bo'lib $\varphi(t)-D^{-}$ da analitik bo'lgan funksiyaning chegaradagi qiymati bo'lsa, u xolda koshi formulasiga asosan cheksiz sohada

$$\Phi^{-}(t) = \varphi(t)+\varphi(\infty)$$

bo'ladi.

L kontordagi limitik qiymatlarni xisoblab va (3.3.5) soxooskiy formulalarni qo'llab

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}d\tau,$$

Agar $\varphi(z)$ funksiya D^+da analitik bo’lsa,

- $\varphi(t)$+ $\varphi(\infty)$=-$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau-t}d\tau$, agar $\varphi(z)$ funksiya D^- da analitik bo’lsa, bu tengliklardan

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} = 0 \qquad (3.3.7)$$

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau-t}d\tau - \Gamma=0 \qquad (3.3.8)$$

Formulalarga kelamiz. Bu yerda $\Gamma = \varphi(\infty)$.

Yuqoridagi muloxozalardan kelib chiqsak, $\varphi(t)$ funksiya D^+va D^- soxalarda analitik fuksiyaning chegaraviy qiymatlari bo’lishi uchun (3.3.7), (3.3.8) shartlarning bajarilishi zarur ekan. Bu shartlarning etarli bo’lishligini xam ko’rsatish qiyin emas.

Xaqiqatdan ham, $\varphi(t)$ funksiya (3.3.7) shartni qanotlantirsin. U xolda

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

Integral uchun soxoskiy formulasiga ko’ra bu holat $\Phi^-(t) = 0$ bo’lishini anglatadi. Ammo (3.3.6) va $\Phi^-(t)$=0 ligidan

$$\varphi(t)=\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \Phi^+(t)$$

Bo’lishligini taqqoza etadi.

Olingan rezultatlardan teorema ko’rinishida jamlaymiz.

2-teorema. Yopiq silliq L konturda Gyolder shartini qanotlantiruvchi $\varphi(t)$ funksiya berilgan bo’lsin. Bu $\varphi(t)$ funksiya D^+ soxada analitik bo’lgan funksiyaning chegaraviy qiymati bo’lishligi uchun (3.3.7) shartlarning bajarilishi zarur va yetarli. Shunungdek $\varphi(t)$ funksiya D^- soxada analitik va cheksizlikda Γ= $\varphi(\infty)$ qiymatni qabul qiluvchi funksiyaning chegaraviy qiymati bo’lishligi uchun (3.3.8) shartningshartining bajarilishi zarur va yetarli.

Faraz qilaylik $\varphi(t)$ funksiya yopiq L kontur nuqtalarining funksiyasi bo’lib, uning m-tartibli xosilasi Gyolder shartini qanotlantirsin. U xolda

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

tenglik bilan (Koshi tipidagi integral bilan) aniqlangan

ϕ(z)funksiyaning m-tartibli xosilasi mavjud va bu xosilalar soxoskiy formulalariga o'xshash

$$\Phi^{(m)+}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad (3.3.9)$$

$$\Phi^{(m)-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad (3.3.10)$$

Formula bilan topiladi.

Haqiqatdan ham Koshi tipidagi integralning m-tartibli hosilasi

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{(\tau - t)^{m+1}}d\tau, \qquad (3.3.11)$$

formula bilan topilar edi. Bu (3.3.11) formulaning o'ng tomonini m marta bo'laklab integrallaymiz. Konturning yopiqligidan integrallangan qism har vaqt nolga aylanadi, shuning uchun:

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(t)}{\tau - t}d\tau,$$

tenglikka kelamiz. Hosil bo'lgan Koshi tipidagi integralga Soxotskiy formulalarini qo'llab (3.3.9), (3.3.10) tengliklarga ega bo'lamiz.

3-teorema. Agar L silliq yopiq konturda aniqlangan $\varphi(t)$ funksiya λ ko'rsatkich bilan Gyolder shartini qanoatlantirsa, u holda $\Phi^{+}(t)\ va\ \Phi^{-}(t)$ - Koshi tipidagi integralning limitik qiymatlari ham $\lambda < 1$ bo'lganda λ dan kichik ko'rsatkich bilan Gyolder shartini qanoatlantiradi.

Isboti.

$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}d\tau$ funksiya uchun

$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left\{\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1}\right\}d\tau\right|$$

ayirmani baholasak yetarli.

3.4. Indeks. Asosiy xossalar. Indeksni hisoblash.

L-silliq yopiq kontur va G(t) – kontur ustida aniqlangan uzluksiz va nolga aylanmaydigan funksiya bo'lsin.

1-ta'rif. G(t) funksiyaning L kontur bo'yicha ***indeksi*** deb, L konturni musbat yo'nalishida aylantiradigan orttirmasining 2π ga nisbatiga aytiladi.

Indeksni simvolik ravishda

$$\gamma = Ind\, G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \quad (3.4.1)$$

Ko'rinishida belgilaymiz. Indeksni funksiya logorifmining o'zgarishi orqali ifodalash mumkin.

$$\ln G(t) = \ln|G(t)| + i \arg G(t),$$

L$|G(t)|$ konturni aylangandan so'ng o'zining boshlang'ich qiymatiga ega bo'ladi. Shuning uchun

$$[\arg G(t)]_L = \frac{1}{i}[\ln G(t)]\,|_L$$

Bu yerdan

$\gamma = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]|_L$ (3.4.2)

Shuningdek indeksni integral ko'rinishda ham ifodalash mumkin

$$\lambda = Ind\, G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t)\,, \quad (3.4.3)$$

Bu yerda integral Stiltes ma'nosida tushiniladi.

G(t) ning uzluksizligidan, uning argumenti konturning aylanadagi 2π ga karrali bo'lishi kerak.

Shuday qilib quyidagilar o'rinli bo'ladi;

1.Uzliksiz va xech yerda no'lga aylanmaydigan funksiyaning yopiq ko'ntur bo'yichaindeksi butun son yoki no'l.

1.Ko'paytmaning indeksi ko'paytuvchilar ineksilarning yig'indisiga teng. Bo'linmaning indeksi bo'linuvchi va bo'luvchilar indekslari ayirmasiga teng.

Faraz qilaylik G(t) funksiyadifferensiyallanuvchi va analitik funksiyaning kontor ichidagi yoki tashqarisidagi limitik qiymati bo’lsin. Lagarafimik chegiraxaqidagi teoremadan indekisning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1.Agar G(t)funksiya kontur ichidagi analitik funksiyaning limitik funksiyaning limitik qiymati bo’lsa, u xolda funksiyaning indeksi kontur ichidagi nollari soniga teng, agar mosravishda tashqaridagi analitik funksiyaning limitik qiymati bo’lsa, u xolda no’llari sonning minus bilan olinganiga teng.

1.Agar G(t) funksiya ichkaridagi chekli sondagi nuqtalarda qutbga ega bo’lib qolgan joyda anlitik bo’lsa, u xolda funksiya indeksi no’llar soni va qutublar soni ayirmasiga teng.

Bu xolda no’llar va qutublarularning karraligi soni bo’yicha xisoblanadi. Shuni takidlash kerakki kompleks qo’shma funksiyalarning indekslarni ishoralari bo’yicha bir-biriga teskari bo’ladi.

Endi indeksni xisoblashga o’tamiz. Faraz qilaylik L konturning tenglamasi

t=$t_1(s) + it_2(s)$ (0$\leq s \leq l$ bo’lsin

G(t) funksiyaga tko’pleks koordinatani qo’yib

$$G(t)=G[t_1(s) + it_2(s)] = \xi(s0 + i\eta(s) \quad (3.4.4)$$

Ifodani olamiz. ξ va η ni dekart kordinatalari deb xisoblaymiz. U xolda

$\xi = \xi(s), \eta = \eta(s)$ lar biror Γ chiziqning parametrik tenglamalari bo’ladi. G(t) funksiyaning uzluksizligidan va L konturning yopiqligidan Γ chiziq ham yopiq bo’ladi.

Umumiy xolda indeksi (3.4.3 formula bo’yicha xisoblash mumkin. Bu formuladagi G(t) ning o’rniga (3.4.4) dan

d arg G(t)=d arctg$\frac{\eta(s)}{\xi(s)}$ ni olamiz. U xolda

$$X=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2+\eta^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\xi(s)\eta'(s) - \eta(s)\xi'(s)}{\xi^2(s)+\eta^2(s)}\, ds \qquad (3.4.5)$$

Indeks tushunchasini aniq L kontur uchun ham joriy qilish mumkin, shuningdek G(t) uzulishga ega bo’sin yoki chiziqning bazi nuqtalarida no’lga aylanadigan xollarda ham indeks tushunchasini kiritish mumkin.

Agar G(t) analitik funksiyaning limitik qiymati bo'lsa, u xolda L konturni deformatsiyallanish natijasida indeks o'zgarmay qolsin.

Misol. G(t)=t^n funksiyaning ixtiyoriy L kontur koordinatalar boshini o'rab to'lsa.

Yechish. X=Indt^n =n.

3.5. bir bog'lami soxa uchun riman masalasi.

Masalaning qo'yilishi. Butun kompleks tekislikni ichki D^+ soxaga tashqi D^- soxaga ajratadigan silliq yopiq L ko'ntur va uning ustida aniqlangan Gyolder shartini qanatlantiruvchi G(t) va g(t) funksiyalar berilgan bo'lsin.

Shuningdek G(t)≠0 t∈L bo'lsin.

D^+ soxada analitik bo'lgan Φ^+(e), D^- soxadaanlaitik bo'lgan Φ^-(e) L ko'tur ustidagi shartlar (chiziqli munosabatlar)

Φ^+(t)=G(t) Φ^-(t) (bir jinsli masala) (3.5.1)

yoki Φ^+(t)=G(t) Φ^-(t)tg(t) (birjinslimas masala) (3.5.2)

Bajarilganda topilsin.

G(t) funksiyani Riman masalasining koyiffisenti, g(t) funksiyani uning ozod hadi deyiladi.

Dastlab Riman masalasining bitta xusisiy xoli, aniqrog'i berilgan sakirashga ko'ra bo'lak-bo'lak analitik funksiyani toppish masalasini qaraymiz.

Faraz qilaylik yopiq L kontur ustuda Gyolder shartini qanotlantiruvchi ф(t) sakirashga ega bo'lgan bo'lak-bo'lak analitik

ф(z) (ф(я)= Φ^+(z), z∈ D^+,ф(z)= Φ^-(z), z∈ D^-, Φ^-(∞)=0) funksiya topilsin, yani

Φ^+(t)– Φ^-(t)=ф(e) (3,5,3)

Masala yechilsin.

Tabiyki bu masalaning echimi (3.3.6) formulaga asosan

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \qquad (3.5.4)$$

funksiya bo’ladi. Hosil bo’lgan yechimning yagonaligini ko’rsatish qiyin emas. Haqiqatdan ham,agar (3.5.3) masalaning ikkita yechimi bor desak va bu yechimlar ayirmasini qarasak,u holda yechimlar ayirmasi L konturdan o’tganda nol sakrashga ega bo’ladi. Bu degani ayirma butun kompleks tekislikda analitik va cheksizlikda nolga aylanadi. Liuvill teoremasiga asosan bu funksiya aynan nolga neng bo’ladi.

Odatda (3.5.3) masalani berilgan sakrashli masala ham deyishadi. Bu masalaning yechimini quyidagicha formulirovka qilish mumkin:

Yopiq kontur ustida berilgan Gyolder shartini qanoatlantiruvchi har qanday $\varphi(t)$ funksiyani $\Phi^{+}(z)$ va $\Phi^{-}(z)$ analitik funksiyalarning ($\Phi^{-}(\infty) = 0$ bo’ladigan) limitik qiymatlari $\Phi^{+}(t)$ va $\Phi^{-}(t)$ funksiyalar ayirmasi ko’rinishida yagona usulda tasvirlash mumkin bo’ladi.

Agar $\Phi^{-}(\infty) = 0$ shartni tashlab yuborsak, u holda (3.5.3) masalaning yechimini

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau + const \qquad (3.5.4')$$

ko’rinishda yozish mumkin.

<u>Bir jinsli masalaning yechimiga to’xtalamiz.</u> Faraz qilaylik (3.5.1) masala yechimga ega va $\Phi^{+}(z)$ va $\Phi^{-}(z)$ funksiyalar uning yechimlari bo’lsin. $N^{+}\ va\ N^{-}$ orqali $\Phi^{+}(z)$ va $\Phi^{-}(z)$ funksiyalarning nollari sonini belgilaylik, (3.5.1) tenglikning ikkala qismidan indeks olib, indeksning xossalariga ko’ra

$$N^{+} + N^{-} = IndG(t) = \chi \qquad (3.5.4)$$

tenglikni olamiz.

Riman masalasi koeffitsienti $\chi\ ni$ masala koeffitsienti deymiz.

Oxirgi tenglikning chap tomonida manfiymas son turibdi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

1. Bir jinsli Riman masalasi yechimga ega bo’lishligi uchun uning indeksi manfiymas ($\Phi^{+}(z)$ va $\Phi^{-}(z)$ funksiyalar shartga ko’ra qutbga ega emas) bo’lishi zarur.

2. Agar $\chi > 0$ bo’lsa, u holda yechim bo’lgan $\Phi^{+}(z)$ va $\Phi^{-}(z)$ funksiyalar birgalikda χ nolga ega bo’ladi.

3. Agar $\chi = 0$, u holda $\Phi^{+}(z)$ va $\Phi^{-}(z)$ funksiyalar nolga ega bo’lmaydilar.

1-hol. $\chi = 0$ bo'lsin. Bu holda lnG(t) bir qiymatli funksiya, $\ln\Phi^{+}(z)$ va $\ln\Phi^{-}(z)$ funksiyalar analitik bo'ladilar. (3.5.1) chegaraviy shartni logarifmlab

$$\ln\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{lnG(t)}{\tau - z}d\tau \qquad (3.5.5)$$

Qisqalik uchun $\ln\Phi(z) = \Gamma(z)$ (3.5.6) belgilash kiritamiz va $\Phi^{-}(\infty) = 1$ deb hisoblab, Soxotskiy formulasidan kelib chiqib

$$\Phi^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \Phi^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)} \qquad (3.5.7)$$

yechimlarga ega bo'lamiz.

Agar $\Phi^{-}(\infty) = 1$ shartdan voz kechsak, u holda (3.5.5) formulaning o'ng tomoniga ixtiyoriy o'zgarmasni qo'shamiz, u holda masala yechimi

$$\Phi^{+}(z) = Ae^{\Gamma^{+}(z)}, \Phi^{-}(z) = Ae^{\Gamma^{-}(z)} \qquad (3.5.8)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda A-ixtiyoriy o'zgarmas. $\Gamma^{-}(\infty) = 0$ bo'lishligidan A son $\Phi^{-}(z)$ ning cheksizlikdagi qiymatini ifodalaydi.

Shunday qilib, $\chi = 0$ bo'lgan holda va $\Phi^{-}(\infty) \neq 0$ bo'lganda yechim bitta o'zgarmasni o'z ichida saqlaydi, demak chiziqli bog'lanmagan yechimlr soni bitta bo'lar ekan. Agar $\Phi^{-}(\infty) = 0$ bo'lsa, u holda A=0 va masala faqat trivial yechimga-aynan nolga teng yechimga ega bo'ladi. Bundan juda muhim xulosa kelib chiqadi:

1-xulosa: L konturda aniqlangan nol indeksli, Gyolder shartini qanoatlantiradigan ixtiyoriy G(t) funksiyani $D^{+}\ va\, D^{-}$ sohalarda analitik bo'lgan va bu sohalarda nullarga ega bo'lmagan funksiyalarning limitik qiymatlari $\Phi^{+}(t)$ va $\Phi^{-}(t)$ funksiyalar nisbati ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lar ekan. Bu funksiyalar ixtiyoriy o'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida topiladi, ya'ni (3.5.8) ko'rinishda bo'ladi.

2-hol: $\chi > 0$ bo'lsin. Aniqlik uchun koordinatalar boshi D^{+} sohaga tegishli bo'lsin deymiz. Ma'lumki, t^{χ} funksiyaning indeksi χ ga teng bo'lar edi. (3.5.1) chegaraviy shartni

$$\Phi^{+}(t) = t^{\chi}[t^{-\chi}G(t)]\Phi^{-}(t)$$

ko'rinishda yozib olamiz. $G_1(t) = t^{-\chi}G(t)$ funksiya nul indekslidir. $G_1(t)$ funksiyani

$$G_1(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}$$

nisbat ko'rinishda tasvirlash mumkin. Bu yerda

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{ln[t^{-\chi}G(\tau)]}{\tau - z}d\tau \qquad (3.5.9)$$

Shunday qilib (3.5.1) chegaraviy shartni

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^{\chi}\frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi.

Oxirgi tenglik shuni ko'rsatadiki D^+ sohada analitik bo'lgan $\frac{\Phi^+(z)}{e^{\Gamma^+(z)}}$ funksiya D^- sohada analitik bo'lgan $\frac{\Phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}}$ funksiya (bu yerda funksiya cheksiz uzoqlashgan nuqtada analitik emas, balki χ dan katta bo'lmagan qutbga ega bo'lishi mumkin) L kontur orqali bir-biriga analitik davom ettirilgan bo'ladi. Demak,ular cheksizlikda χ dan yuqori bo'lgan qutbga ega bo'ladigan butun tekislikda analitik bo'lgan yagona funksiyaning shoxlari bo'lar ekan. Liuvillning umumlashgan teoremasiga ko'ra bu funksiya darajasi χ dan yuqori bo'lmagan kompleks koeffitsientli ko'phad bo'ladi.

Bu yerdan masalaning umumiy yechimini quyidagicha bo'lishligi kelib chiqadi:

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma(z)}P_\chi(z)\,, \;\; \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}P_\chi(z) \qquad (3.5.10)$$

Natijani quyidagi teorema ko'rinishda ifodalaymiz:

1-teorema. Agar Riman chegaraviy masalasining χ indeksi musbat bo'lsa, u holda masala quyidagi $\chi + 1$ ta chiziqli bog'lanmagan

$$\Phi_K^+(z) = z^K e^{\Gamma^+(z)}\,, \;\; \Phi_K^-(z) = z^{K-\chi}\, e^{\Gamma^-(z)}\; (K = 0,1,2,\dots,\chi) \qquad (3.5.10')$$

yechimlarga ega bo'ladi. Umumiy yechim $\chi + 1$ ta ixtiyoriy o'zgarmaslar saqlovchi (3.5.10) formula bilan aniqlanadigan funksiya bo'ladi.

Yuqorida qaralgan nul indeksli Riman masalasi hozirgina isbotlangan 1-teoremaning xususiy holidir. Shuningdek, agar $\chi < 0$ bo'lsa bir jinsli masala yechimga ega bo'lmaydi.

Masala yechimi to'la aniqlangan bo'lishi uchun $\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)$ funksiyalarga qo'shimcha $\chi+1$ ta shartlar qo'yish kerak bo'ladi. Qo'shimcha shartlarni turli usullar bilan berish mumkin. Masalan $\chi+1$ tartibli oddiy differensial tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasidagidek Φ^{+}yoki Φ^{-} funksiyalarning biriga biror nuqtadagi (masalan koordinatalar boshidagi) o'zining va ketma-ket χ tartibgacha hosilasining qiymatini berish kerak bo'ladi. Bu holda ixtiyoriy o'zgarmaslarning qiymatlari $\chi+1$ ta chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi kabi aniqlanadi.

Keyinchalik Riman masalasining tadbiqlarida aniqrog'i singulyar integral tenglamalarning yechimini qidirishda qo'shimcha $\Phi^{-}(\infty)=0$ shartni qo'yish kerak bo'ladi.

(3.5.10) formuladan ko'rinadiki $\Phi^{-}(\infty)$ miqdor $P_{\chi}(z)$ ko'phadning z^{χ} daraja oldidagi koeffitsientiga teng bo'ladi.

Agar yechim funksiya cheksizlikda nolga aylanadigan bo'lsin deyilsa, bu yechim

$$\Phi^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)}P_{\chi-1}(z)\,,\;\; \Phi^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)}z^{-\chi}P_{\chi-1}(z) \qquad (3.5.11)$$

Ko'rinishda bo'ldi. Bu yerda $P_{\chi-1}$ – darajasi $\chi-1$ bo'lgan ixtiyoriy koeffitsientli ko'phad. Shunday qilib bu holda masala χ ta chiziqli bog'lanmagan yechimga ega bo'lar ekan.

Birjinslimas Riman masalasi yechimini olish uchun birjinsli masalaning maxsus xususiy yechimidan foydalanish kerak bo'ladi. Bunday maxsus xususiy yechimni o'rganishga kirishamiz.

1-ta'rif: $\Phi(z)$ analitik funksiyaning z_0 nuqtadagi tartibi deb, bu $\Phi(z)$ funksiyaning $z-z_0$ bo'yicha darajali qatorga yoygandagi eng kichik ko'rsatkichga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki $\Phi(z)$ funksiya z_0 nuqtada biror m tartibli nulga ega bo'lsa, shu m son funksiyaning tartibi bo'lar ekan. Funksiyaning z_0 nuqtadagi m tartibli qutbiga manfiy tartibli (-m) nul mos keladi. Agar $\Phi(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik bo'lib $\Phi(z_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\Phi(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi trtibi nolga teng bo'ladi.

Cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida yoyilma $\frac{1}{z}$ ning darajalari bo'yicha bo'ladi. Bu holda funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi tartibi deb $\frac{1}{z}$ bo'yicha darajali qatorga yoyilmaning eng kichik ko'ratkichiga aytiladi.

2-ta'rif: $\Phi(z)$ funksiyaning biror sohadagi barcha nullari(qutblari) tartiblarining algebraik yig'indisiga bu funksiyaning yig'indi tartibi deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, yig'indi tartib nullar soni bilan qutblar sonining ayirmasiga teng bo'ladi.

Riman masalasining yig'indi tartibi, shu masalaning indeksiga teng bo'ladi.

Biz kelajakda bitta nuqtada yig'indi tartibi Riman masalasining indeksiga teng bo'lgan tartibga ega qolgan nuqtalarda nul tartibli bo'lgan Riman masalasining yechimini qidiramiz. Bunday nuqta sifatida biz cheksiz uzoqlashgan nuqtani olamiz.

3-ta'rif: Bir jinsli Riman masalasining kanonik funksiyasi deb (3.5.1) munosabatni qanoatlantiruvchi bo'lak-bo'lak silliq tekislikning chekli nuqtalarda nul tartibga ega bo'lgan funksiyani tushunamiz.

Cheksiz uzoqlashgan nuqtada uning tartibi masala indeksi χ ga teng.

Agar $\chi \geq 0$ bo'lsa kanonik funksiya qutbga ega bo'lmaydi va masala yechimi bo'ladi. Biz kanonik funksiyani kanonik yechim ham deb ataymiz.

$\chi < 0$ bo'lsa kanonik funksiya cheksiz uzoqlashgan nuqtada qutbga ega bo'ladi,tabiiyki funksiya birjinsli masalaning yechimi bo'lmaydi((3.5.1) ma'nosida!). Biroq bunday funksiya keyinroq birjinslimas masalani yechishda ishlatiladi.

Riman chegaraviy masalasini

$$\Phi^{+}(t) = t^{\chi}[t^{-\chi}G(t)]\Phi^{-}(t)$$

ko'rinishda yozib olib, ixtiyoriy χ uchun masalaning kanonik funksiyani quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, X^{-}(z) = z^{-\chi}e^{\Gamma^{-}(z)} \qquad (3.5.12)$$

$\chi \geq 0$ bo'lganda bir jinsli masalaning umumiy yechimi kanonik funksiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\Phi(z) = X(z)P_\chi(z) \qquad (3.5.13)$$

Endi bir jinslimas Riman masalasini yechishga kirishamiz.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \qquad (3.5.2)$$

chegaraviy shartdagi $G(t)$ koeffitsientni (3.5.14) ga mos birjinsli chegaraviy masalaning kanonik funksiyalari limitik qiymatlarining nisbati shaklida ifodalab, ya’ni $G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$ ko’rinishda olib (3.5.14) ni

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

Ko’rinishga keltiramiz. Chegaraviy shartning ozod hadi $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantiradi.

Oxirgi tenglikdan bu $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ funksiyani analitik funksiyalar chegaraviy qiymatlari ayirmasi ko’rinishda tasvirlash mumkinligi ya’ni

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t),$$

bu yerda $$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \qquad (3.5.14)$$

bo’lishligini bildiradi. U holda (3.5.14) chegaraviy shartni

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t)$$

ko’rinishda yozish mumkin bo’ladi.

$\chi \geq 0$ bo’lganda $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ funksiya cheksizlikda qutbga ega, $\chi < 0$ bo’lganda esa χ tartibli nulga ega bo’ladi.

Birjinsli Riman masalasini yechishdagi mulohazalarni takrorlab quyidagi rezultatlarga kelamiz:

1^0. $\chi > 0$ bo’lsin. U holda

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = P_\chi(z)$$

bo’ladi. Bu yerdan yechim

$$\Phi(z) = X(z)\left[\psi(z) + P_\chi(z)\right] \qquad (3.5.15)$$

ko'rinishda bo'lishligi kelib chiqadi,shuningdek $X(z), \psi(z)$ lar (3.5.12), (3.5.14) formulalar bilan ifodalanadi, $P_\chi(z)$ – ixtiyoriy koeffitsientli χ darajali ko'phad.

(3.5.15) formula bir jinslimas masalaning umumiy yechimini beradi,chunki u birjinsli masalaning umumiy yechimi bo'lgan $X(z)P_\chi(z)$ ni qo'shiluvchi sifatida o'zida saqlaydi.

2^0. $\chi < 0$ bo'lsin. Bu holda $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ cheksizlikda nolga teng va

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = 0,$$

bu yerdan quyidagi tenglikni olamiz:

$$\Phi(z) = X(z)\psi(z) \qquad (3.5.16)$$

$\Phi^-(z)$ ning ifodasida birinchi ko'paytuvchi (3.5.12) formulaga asosan cheksizlikda $-\chi$ tartibli qutbga ega bo'ladi, ikkinchi ko'paytuvchi esa Koshi tipidagi integral –(3.5.14) formula bo'lgani uchun cheksizlikda umumiy holda birinchi tartib nulga ega bo'ladi. Demak $\Phi^-(z)$ cheksizlikda $-\chi - 1$ dan katta bo'lmagan qutbga ega. Shunday qilib, agar $\chi < -1$ bo'lsa, u holda birjinslimas masala umuman aytganda yechimga ega bo'lmaydi.

Birjinslimas masala faqat o'ng tomon (ozod had) qo'shimcha shartlarni qanoatlantirgandagina yechimga ega bo'ladi. Shu shartlarni keltirib chiqarish uchun (3.5.14) Koshi tipidagi integralni cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida qatorga yoyamiz:

$$\psi^-(z) = \sum_{k=1}^{n} C_k z^{-k},$$

bu yerda

$$C_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau.$$

$\Phi^-(z)$ ∞ nuqtada analitik bo'lishi uchun yoyilmadagi dastlabki $-\chi - 1$ ta koeffitsientlar nolga aylanishi zarur. Shuning uchun ham $(\chi < -1)$ manfiy indeks bo'lganda quyidagi $-\chi - 1$ ta shartlarning:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0\,, \quad (k = 1,2,\dots,\chi - 1) \qquad (3.5.17)$$

bajarilishi zarur va yetarli bo’lar ekan.

Tekshiruv natijalaridan so’ng quyidagi teoremaga kelamiz:

2-teorema: $\chi > 0$ bo’lganda birjinslimas Riman masalasi ixtiyoriy ozod had uchun yechimga ega bo’ladi va bu yechim quyidagi formula bila beriladi:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)P_\chi(z) \qquad (3.5.18)$$

bu yerda $X(z)$ kanonik funksiya (3.5.12) formula bilan aniqlanadi, $P_\chi(z)$-ixtiyoriy kompleks koeffitsientli χ darajali ko’phad. Agar $\chi = -1$ bo’lsa, u holda birjinslimas masala yana yechimga ega bo’ladi, agar $\chi < -1$ bo’lsa birjinslimas masala umuman olganda yechimga ega emas. Bu holda birjinslimas masala yechimga ega bo’lishi uchun masalaning ozod hadi $-\chi - 1$ ta (3.5.17) shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarli. Oxirgi shartlar bajarilganda birjinslimas masalaning yagona yechimi (3.5.18) dagi $P(z) \equiv 0$ bo’lgan hol bilan topiladi.

Agar izlanuvchi funksiyaga qo’shimcha cheksiz uzoqlashgan nuqtada nolga aylanishni talab qilsak, u holda ko’phadni $\chi - 1$ darajali qilib olishga to’g’ri keladi. Manfiy indeks bo’lganda masala yechimga ega bo’lishligi uchun yoyilmadagi $C_{-\chi}$ koeffitsientlarning nolga teng bo’lishligini talab qilish kerak bo’ladi.

Demak, $\Phi^-(\infty)$=0 shartda $\chi \geq 0$ bo’lgan holda yechim

$$\Phi(z) = X(z)\left[\psi(z) + P_{\chi-1}(z)\right] \qquad (3.5.18)$$

formula bilan topiladi ($\chi = 0$ bo’lganda $P(z) \equiv 0$ deb olish kerak.

3.6 Yarim tekislik uchun Riman masalasi.

Faraz qilaylik L kontur haqiqiy o’q bo’lsin. U holda Riman masalasi L kontur ustida (haqiqiy o’qda)

$$\Phi(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad (3.6.1)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yuqori va pastki yarim tekislikda mos ravishda analitik $\Phi^{-}(z)$ va $\Phi^{+}(z)$ funksiyalarni ($\Phi(z)$ bo'lak-bo'lak analitik funksiyani) topishdan iborat bo'ladi.

Berilgan $G(t)$ va $g(t)$ funksiyalar chekli nuqtalarda va shuningdek cheksiz uzoqlashgan nuqtalaratrofida Gyolder shartini qanoatlantiradilar. $G(t) \neq 0$ deb ham hisoblaymiz.

Oldingi bandlarda ishlatilgan L bo'yicha birga teng indeksga ega bo'lgan yordamchi funksiya o'rniga o'sha xossalarga ega bo'lgan (haqiqiy o'qda) kasr chiziqli

$$\frac{t-i}{t+i}$$

funksiya kiritiladi.

Bu funksiyaning argumenti

$$\arg\frac{t-i}{t+i} = \arg\frac{(t-i)^2}{t^2+1} = 2\arg(t-i)$$

2π ga o'zgaradi (t haqiqiy o'qni musbat yo'nalish bo'yicha harakatlanganda). Shunday qilib,

$$Ind\frac{t-i}{t+i} = 1$$

$$\frac{\Phi^{+}(z)}{X^{+}(z)} - \psi^{+}(z) = \frac{\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)} - \psi^{-}(z) = \frac{P_{\chi}(z)}{(z+i)^{\chi}} \quad (\chi \geq 0)$$

Bu yerda $P_{\chi}(z)$ – darajasi χ dan yuqori bo'lmagan ixtiyoriy koeffitsientli ko'phad.

Bu yerdan masalaning umumiy yechimini quyidagi ko'rinishda

$\Phi(z) = X(z)\left[\psi(z) + \frac{P_{\chi}(z)}{(z+i)^{\chi}}\right], \chi \geq 0$ bo'lganda (3.6.4)

$\Phi(z) = X(z)[\psi(z) + C], \chi < 0$ bo'lganda (3.6.5)

Agar $\chi < 0$ bo'lsa X(z) funksiya z=-i nuqtada χ tartibli qutbga ega bo'ladi. Shuning uchun masala yechimga ega bo'lishlik sharti quyidagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^{k}} = 0 \qquad (k = 2,3,\dots,-\chi) \qquad (3.6.6)$$

tengliklar bajarilishi zarurligini taqozo etadi. Shunday qilib biz quyidagi teoremani isbotladik:

1-teorema. $\chi \geq 0$ bo'lganda yarim tekislik uchun qo'yilgan Riman masalasi so'zsiz yechimga ega bo'ladi va bu yechim $\chi + 1$ ixtiyoriy o'zgarmaslardan chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar $\chi < 0$ bo'lsa birjinsli masala yechimga ega bo'lmaydi. Birjinslimas masala $\chi = -1$ bo'lganda so'zsiz yechimga ega bo'ladi, $\chi < -1$ bo'lganda esa $-\chi - 1$ ta (3.6.6) shartlar bajarilganda yechimga ega bo'ladi.

Biz hozirgacha cheksiz uzoqlashgan nuqtada izlanuvchi funksiya chegaralangan bo'lsin degan shart bilan Riman masalasini o'rgandik. Agar $\Phi^{-}(\infty)$= $\Phi^{+}(\infty) =$ 0 deyilsa g(∞)=0 bo'lishligidan (3.6.5) c=0 deb, (3.6.4) da esa P_{χ} o'rniga $P_{\chi-1}$ deb olish kerak bo'ladi.

Agar IndG(t)= χ bo'lsa, u holda

$$G(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\chi}$$

funksiya indeksi nolga teng bo'ladi. Uning logarifmi haqiqiy o'qda bir qiymatli funksiya bo'ladi.

Chiqarib tashlanishi kerak bo'ladigan nuqtasi –i bo'ladigan kanonik funksiyani tuzamiz:

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}\,,\; X^{-}(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\chi} e^{\Gamma^{-}(z)} \qquad (3.6.2)$$

bu yerda

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\chi} G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau - z}$$

Bu funksiyaning limitik qiymatlaridan foydalanib (3.6.1) chegaraviy shartni

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)} = \frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} = \frac{g(t)}{X^{+}(t)}$$

ko'rinishga keltiramiz. Shundan so'ng

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} \qquad (3.6.3)$$

analitik funksiyani kiritib, chegaraviy shartni

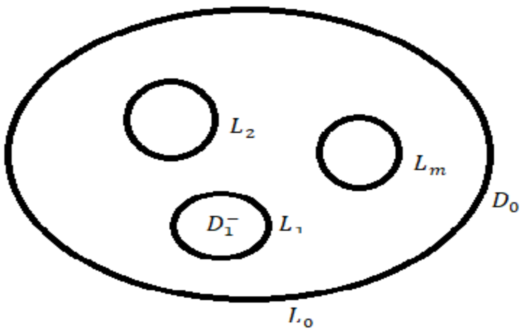
$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t)$$

ko'rinishga keltiramiz.

Shuni ta'kidlash lozimki kontur chekli bo'lgan holdan farqli o'laroq bu holda,umuman olganda $\Phi^-(\infty) \neq 0$ bo'ladi. Analitik davom ettirish haqidagi umumlashgan Liuvill teoremasiga ko'ra, $\chi > 0$ bo'lganda quyidagini olamiz:

3.7. Ko'p bog'lamli soha uchun Riman masalasi

Faraz qilaylik $L = L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_m$ kontur m+1 ta o'zaro kesishmaydigan konturlar birlashmasidan iborat bo'lsin. Shuningdek L_0 kontur boshqa barcha qolganlarini o'z ichida saqlasin (9-rasm):



9-rasm

L_0 konturning ichida $L_1, L_2, \dots, L_m$ konturlar tahqarisida joylashgan m+1 bog'lamli sohani D^+ orqali belgilaymiz. $D^+ + L$ dan butun komleks tekislikgacha to'ldiruvchi to'plamni D^- orqali belgilaymiz. Aniqlik uchun koordinatalar boshini D^+da saqlanadi deb hisoblaymiz. L konturda o'ng (musbat) yo'nalish deb D^+ soha chapda qoladigan yo'nalishni qabul qilamiz, ya'ni L_0 da soat strelkasiga qarama-qarshi harakatni, $L_1, L_2, \dots, L_m$ larda esa soat strelkasi bilan ustma-ust tushadigan harakatni tushunamiz.

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$$

Sakrash haqidagi masalaning bir bog'lamli sohadagi sakrash masalaning yechimi kabi bo'lishligi Soxotskiy formulasidan kelib chiqadi:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

Birjinsli va birjinslimas Riman masalasi bir bog'lamli soha uchun qo'yilganidek qo'yiladi.

$\chi_k = \frac{1}{2\pi i}[argG(t)]$ deb belgilab olamiz (barcha L_k konturlarda musbat yo'nalish yuqorida eslatilgandek bo'ladi).

Masalaing indeksi deb

$$\chi = \sum_{k=0}^{m}\chi_k \qquad (3.7.1)$$

miqdorni tushunamiz.

Agar barcha ichki konturlar uchun χ_k (k=1,2,3,…,m) indekslar nolga teng bo'lsa, ko'p bog'lamli soha uchun qo'yilgan masala bir bog'lamli soha uchun qo'yilgan masala bilan bir xil bo'ladi.

Umumiy holni sodda holga keltirish uchun

$$\prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\chi_k}$$

funksiyani kiritamiz, bu yerda z_k lar L_k konturlar ichida joylashgan biror nuqtalar. $[\arg(t - z_k)]_{Lj} = 0$, agar $k \neq j$ va $\left[\arg\left(t - z_j\right)\right]_{Lj} = -2\pi$ ekanligini e'tiborga olsak:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[arg\prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\chi_k}\right]_{Lj} = \frac{1}{2\pi i}\left[\arg\left(t - z_j\right)^{\chi_j}\right]_{Lj} = -\chi_j \quad (j = 1,2,\dots,m)$$

bo'ladi. Bu yerdan

$$\left\{arg\left[G(t)\prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\chi_k}\right]\right\}_{Lj} = 0 \quad (j = 1,2,\dots,m)$$

bo'ladi.

L_0 kontur bo'yicha $G(t)\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}$ funksiya argumentining o'zgarishini hisoblaymiz:

$$\frac{1}{2\pi}\left\{arg\left[G(t)\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}\right]\right\}_{L_0} =$$

$$=\frac{1}{2\pi}[argG(t)]_{L_0}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}[\chi_k \arg(t-z_k)]_{L_0}=\chi_0+\sum_{k=1}^{m}\chi_k=\chi$$

Koordinatalar boshi D^+ soha yotgani uchun

$$[argt]_{L_k}=Q\,,\quad (k=1,2,\dots,m),\ \ [argt]_{L_0}=2\pi$$

Shuning uchun quyidagi o'rinli bo'ladi.

$$\left\{arg\left[t^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}G(t)\right]\right\}_{L}=0 \qquad (3.7.2)$$

Endi masalani batafsil yechishga o'tamiz. Dastlab birjinsli Riman masalasini qaraymiz.

$$\Phi(t)=G(t)\Phi^-(t) \qquad (3.7.3)$$

chegaraviy shartni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Phi^+(t)=\frac{t^k}{\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}}\left[t^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}G(t)\right]\Phi^-(t) \quad (3.7.4)$$

Har bir L_k (k=0,1,2,…,m) konturlarda $t^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}G(t)$ funksiya indeksi nolga teng bo'lgani uchun, bu funksiyani

$$t^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}G(t)=\frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}} \qquad (3.7.5)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin. Bu yerda

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{ln\left[\tau^{-k}\prod_{k=1}^{m}(\tau-z_k)^{\chi_k}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau \qquad (3.7.6)$$

(3.7.4) chegaraviy shartga quyidagi ko'rinish beramiz:

$$\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}}=t^k\frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}$$

Odatdagidek analitik davom ettirish haqidagi va umumlashgan Liuvill teoremasiga ko'ra

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(z) = \prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{-\chi_k}e^{\Gamma^+(z)}P_\chi(z) \\ \Phi^-(z) = z^{-\chi}e^{\Gamma^-(z)}P_\chi(z) \end{aligned}\right\} \qquad (3.7.7)$$

formulalarni olamiz.

Ko'rinib turibdiki ko'p bog'lamli soha uchun quyidagi Riman chegaraviy masalasining yechimi bir bog'lamli soha uchun qo'yilgan chegaraviy masala yechimidan $\Phi^+(z)$ funksiyada $\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{-\chi_k}$ ko'paytuvchi borligi bilan farq qiladi.

Qo'shimcha $\Phi^-(\infty)=0$ shart olinsa (3.7.7) formulalarda $P_{\chi-1}(z)$ ko'phad olinadi.

Kanonik funksiya quyidagi formulalar ko'rinishda

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{-\chi_k}e^{\Gamma^+(z)},\;\; X^-(z) = z^{-\chi}e^{\Gamma^-(z)} \qquad (3.7.8)$$

bo'ladi. Kanonik funksiyalarning kontur nuqtalaridagi limitik qiymatlari esa

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^\chi \Pi(t)}}e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = \frac{1}{\sqrt{t^\chi \Pi(t) G(t)}}e^{\Gamma(t)} \qquad (3.7.9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bir bog'lamli soha uchun qo'yilgan birjinslimas Riman masalasini yechishda mulohazalarni takrorlab

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \qquad (3.7.10)$$

chegaraviy shartni

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t)$$

ko'rinishda ifodalab olamiz. Bu yerda

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} \qquad (3.7.11)$$

Umumiy yechim (3.7.10) chegaraviy shart uchun:

$$\Phi(z) = X(z)\left[\psi(z) + P_\chi(z)\right] \qquad (3.7.11)$$

yoki agar $\Phi^-(\infty) = 0$ qo'shimcha shart qo'yilsa

$$\Phi(z) = X(z)\left[\psi(z) + P_{\chi-1}(z)\right] \qquad (3.7.12)$$

formulalarni olamiz.

$\chi < 0$ bo'lganda birjinslimas masala yechimga ega bo'lishligi uchun

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)} t^{\chi-1} dt = 0\,, k = 1,2,\dots,-\chi-1 \qquad (3.7.13)$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarli. (3.7.13) shartlar bajarilganda masala yechimini (3.7.11) yoki (3.7.12) formulalarda $P(z) \equiv 0$ deb olish kerak bo'ladi.

3.8. Gilbert masalasining qo'yilishi.

Analitik funksiyalar nazariyasining yana bir muhim chegaraviy masalasi – Gilbert chegaraviy masalasi haqida to'xtalamiz.

Sodda silliq yopiq L kontur va Gyolder shartini qanoatlantiradigan kontur yoyining $a(s), b(s), c(s)$ funksiyalari berilgan bo'lsin.

Gilbert chegaraviy masalasi deb quyidagini tushunamiz:

D^+ sohada analitik va L konturda uzluksiz bo'lgan

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

funksiyani, haqiqiy va mavhum qismlarining konturdagi limitik qiymatlari L kontur ustida

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) \qquad (3.8.1)$$

chiziqli munosabatni qanoatlantiradigan qilib topilsin.

$c \equiv 0$ bo'lsa birjinsli Gilbert masalasiga, $G(s)$ noldan farqli bo'lganda birjinslimas Gilbert masalasiga ega bo'lamiz.

Qo'yilgan masalani yechish uchun qo'shimcha bir qancha formulalarni bilish kerak bo'ladi. Shulardan biri Shvarts masalasi bo'lib, bu masala: sohada analitik bo'lib sohaning chegarasida haqiqiy qismi $u(s)$ ma'lum bo'lganda $F(z) = u + iv$ funksiya topilsin deyiladi. Bu yerda $u(s) = u[x(s), y(s)]$ s – chiziq yoyi. Shvarts masalasi matematik fizika tenglamalari kursidagi D^+ da Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi, L da berilgan funksiyaga teng bo'ladigan garmonik funksiyani topish masalasiga keltiriladi.

Shunday qilib Shvarts masalasi ixtiyoriy o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida yechiladi.

Masala yechimi to'liq aniqlangan bo'lishi uchun analitik funksiyaning mavhum qismi biror nuqtada berilgan bo'lishi kifoya. Shvarts masalasini yechish uchun Shvarts operatori tushunchasini kiritamiz.

Shvarts operatori deganda analitik funksiyani uning haqiqiy qismi chegaraviy qiymati bo'yicha aniqlaydigan operatorni tushunamiz.

Faraz qilaylik silliq konturda Gyolder shartini qanoatlantiruvchi $u(s)$ haqiqiy funksiya berilgan bo'lsin.

Haqiqiy qismining qiymati kontur ustida berilgan $u(s)$ funsiya bilan ustma-ust tushadigan, mavhum qismi berilgan z_0 nuqtada nolga aylanadigan $F(z)$ analitik funksiyani aniqlaydigan S operator Shvarts operatori deyiladi.

Simvolik ravishda bu masala quyidagicha bo'ladi:

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = Su$$

Agar L birlik aylana bo'lsa, u holda Shvarts operatori Shvarts integrali bilan ustma-ust tushadi.

Agar L haqiqiy o'q bo'lsa, u holda Shvarts operatori Koshi tipidagi integral bo'ladi. Ixtiyoriy kontur bo'lganda Shvarts operatoriga Grin funksiyasi orqali oshkor ko'rinish berish mumkin.

Faraz qilaylik quyidagi funksiya

$$G(x, y, \xi, \eta) = \ln\left(\frac{1}{r}\right) + g(x, y, \xi, \eta)$$

Laplas operatorining D^+ soha uchun Grin funksiyasi bo'lsin, shuningdek

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad g(x, y, \xi, \eta)$$

esa $(x, y), (\xi, \eta)$ nuqtalarning biri L konturga tegishli bo'lganda lnr qiymatni qabul qiladigan $(x, y), (\xi, \eta)$ o'zgaruvchilar juftligi bo'yicha garmonik funksiya.

$G(x, y, \xi, \eta)$ funksiyani har biri D^+ sohada o'zgaradigan ikkita $z = x + iy, \theta = \xi + i\eta$ kompleks o'zgaruvchilar juftligining funksiyasi deb qaraymiz va $G(z, \theta)$ orqali belgilaymiz.

Matematik fizikadagi Dirixle masalasining yechimi (birinchi chegaraviy masalaning yechimi)

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\delta G(z,\tau)}{\delta n}u(\sigma)d\sigma \qquad (3.8.2)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $\tau = \tau(\sigma)$ L kontur nuqtalarining kompleks koordinatalari, n – ichki normal.

$H(z,\theta)$ – funksiya z o'zgaruvchi bo'yicha $G(z,\theta)$ funksiyaga qo'shma garmonik funksiya bo'lsin. Bu $H(z,\theta)$ funksiya Koshi – Riman shartlariga ko'ra

$$H(z,\theta) = \int_{z_0}^{z}\left(-\frac{\delta G}{\delta y}dx + \frac{\delta G}{dx}dy\right) \qquad (3.8.3)$$

formula bilan topiladi. Bu yerda z_0 nuqta D^+ sohaning tayin nuqtasi.

D^+ soha bir bog'lamli bo'lgani uchun H funksiya bir qiymatli aniqlanadi, shuningdek oxirgi formulaga ko'ra $H(z,\theta) \equiv 0$.

$$M(z,\theta) = G(z,\theta) + iH(z,\theta)$$

Funksiyani D^+ sohaning kompleks Grin funksiyasi deyiladi. Bu funksiya $z = 0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda analitik, $z = 0$ nuqtada esa logarifmik maxsuslikka ega.

(3.8.2) va (3.8.3) tengliklarga asosan

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\delta H(z,\tau)}{\delta n}u(\sigma)d\sigma$$

formula u(x,y) bilan garmonik qo'shma bo'lgan v(x,y) funksiyani aniqlaydi.

Bu yerdan

$$F(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\delta M(z,\tau)}{\delta n}u(\sigma)d\sigma$$

Tenglik haqiqiy qismi L konturda berilgan $u(\sigma)$ funksiyaga teng bo'lgan qo'shimcha $v(z_0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi analitik $F(z)$ funksiyani aniqlaydi.

Demak Shvarts operatori

$$Su \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\delta M(z,\tau)}{\delta n} u(\sigma)d\sigma \qquad (3.8.4)$$

Formula bilan aniqlanadi. Agar $v(z_0) = 0$ shartni tashlab yuborsak, u holda

$$F(z) = Su + i\beta_0 \qquad (3.8.5)$$

bo'ladi, bu yerda β_0 o'zgarmas $v(z_0)$ ga teng ixtiyoriy o'zgarmas.

$T(z,\tau) = \frac{\delta M(z,\tau)}{\delta n} -$ funksiyani L kontur uchu Shvarts yadrosi deyiladi.

Nihoyat Gilbertning chegaraviy masalasini yechishga kirishamiz.

Dastlab birjinsli chegaraviy masalani qaraymiz:

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = 0 \qquad (3.8.6)$$

$a(s)$ va $b(s)$ koeffitsientlarni nolga aylanmaydi deb faraz qilamiz. (3.8.6) chegaraviy shartni $\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}$ ga bo'lib uni (ya'ni (3.8.6) ni) koeffitsientlari

$$a^2(s) + b^2(s) = 1 \qquad (3.8.7)$$

bo'lgan holga keltiramiz. Bundan keyin harvaqt (3.8.7) bajarilgan deb hisoblaymiz.

$$\frac{u + iv}{a + ib} = (a - ib)(u + iv) = au + vb + i(av - bu)$$

tenglikni olamiz,chunki $a^2 + b^2 = 1$ deb oldik. (3.8.6) chegaraviy shartni ikkita bir-biriga ekvivalent formada

$$Re\left\{\frac{F(t)}{a + ib}\right\} = 0 \qquad (3.8.8)$$

$$Re\{(a - ib)F(t)\} = 0 \qquad (3.8.9)$$

ko'rinishda olish mumkin. Bu yerda

$$F(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (3.8.10)$$

izlanuvchi funksiya.

$a(s) + ib(s)$ funksiyaning L kontur bo'yicha indeksini Gilbert masalasining indeksi deymiz.

(3.8.8) tenglikning ikkala tomonini $a + ib$ funksiyaning regulyarlashtiruvchi ko'paytuvchisiga bo'lib

$$Re\left[\frac{F(t)}{t^{\chi}e^{i\gamma(t)}}\right] = 0 \qquad (3.8.11)$$

ko’rinishga keltiramiz. Bir necha hollarni qaraymiz.

1-hol. $\chi = 0$ bo’lsin. Bu holda (3.8.11) chegaraviy shart Dirixle masalasining chegaraviy sharti bilan ustma-ust tushadi. D^+ sohada Dirixle masalasining yechimi yagona bo’lishligidan, D^+ sohada $Re\left[\frac{F(t)}{e^{i\gamma(z)}}\right] = 0$ bo'ladi, bu yerdan esa izlanuvchi funksiya

$$F(z) = i\beta_0 e^{i\gamma(z)} \qquad (3.8.12)$$

ko’rinishda bo’lishligi kelib chiqadi, bunda β_0 – ixtiyoriy o’zgarmas.

2-hol. $\chi > 0$ bo’lsin. Bu holda masala yechimi $F(z) = z^{\chi} e^{i\gamma(z)} Q(z)$ ko’rinishda bo’lib, masala $2\chi + 1$ ta chiziqli bog’lanmagan yechimga ega bo’ladi.

3-hol. $\chi < 0$ bo’lsin. Bu holda masalaning yechimi analitik funksiyalar sinfida mavjud bo’lmaydi.

Bir jinslimas masalani yechishga o’tamiz: (3.8.1) chegaraviy shartni

$$Re\left[\frac{F(t)}{a(s) + ib(s)}\right] = c(s) \qquad (3.8.13)$$

ko’rinishda yozib olamiz.

Birjinsli masalani o’rganganimizdagidek bu chegaraviy shartning ikkala tomonini $a(s) + ib(s)$ funksiyaning regulyarlashtiruvchi ko’paytuvchisiga bo’lib quyidagiga kelamiz:

$$Re\left[\frac{F(t)}{t^{\chi} e^{i\gamma(t)}}\right] = |t|^{-\chi} e^{\omega_1(s)} c(s) \qquad (3.8.14)$$

Bir necha holni qaraymiz:

1-hol. Bu holda (3.8.14) Dirixle sharti bo’ladi. Ikkala tomonida Shvarts operatorini olib, yechimni

$$F(z) = e^{i\gamma(z)}\left[s|t|^{-\chi} e^{\omega_1(s)} c(s) + i\beta_0\right] \qquad (3.8.15)$$

ko’rinishda ifodalaymiz.

2-hol. $\chi > 0$ bo’lsin. Bu holda masala yechimi

$$F(z) = z^{\chi} e^{i\gamma(z)}\left[s|t|^{-\chi} e^{\omega_1(s)} c(s) + Q(z)\right] \qquad (3.8.16)$$

ko’rinishda bo’lishiga ishonamiz.

3-hol. Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab yechimni

$$F(z) = z^{\chi} e^{i\gamma(z)} \left[s|t|^{-\chi} e^{\omega_1(s)} c(s) + iC \right] \qquad (3.8.17)$$

ko'rinishda bo'lishligiga amin bo'lamiz.

Shunday qilib olingan rezultatlarni umumlashtirsak quyidagi teoremani isbotlagan bo'ldik.

Teorema. Agar $a(s) + ib(s)$ kompleks funksiyaning indeksi $\chi \geq 0$ bo'lsa, u holda (3.8.6) birjinsli Gilbert chegaraviy masalasi va (3.8.13) birjinslimas Gilbert chegaraviy masalasi so'zsiz yechimga ega bo'ladi. Bir jinsli masala $2\chi + 1$ ta chiziqli bog'lanmagan yechimlarga ega bo'lib,ularning chiziqli kombinatsiyasi umumiy yechimga qo'shiluvchi bo'lib kiradi.

Bayon qiingan nazariya shuni ko'rsatadiki, Gilbert masalasini yechish asosan uch xil Dirixle masalasini yechishga olib kelinar ekan.

Asosiy adabiyotlar:

1. Gaxov F.D. Kraevie zadachi. Gos. Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literature. Moskva,1963.

2. Musxelishvili N.I. Singulyarnie integralnie uravneniya. Izd-vo “Nauka”, Moskva,1968.

3. Babaev A.A. , Salaev V.V. Ob odnom analoge teoremi Plemelya-Privalova v sluchaye negladkix krivix I ee prilojeniyax. Dokl. AN SSSR, T.161. N2, 1965.

4. Titgmarsh E. Teoriya funksiy. Glavnaya redaksiya fiziko-matem. Literaturi, Moskva, “Nauka”. 1980.

5. Sveshnikov A.G. , Tixonov A.N. Teoriya funksiy kompleksnoy peremennoy. Glavnaya redaksiya fiziko-matem. Literature, Moskva, “Nauka”, 1970.

6. sarimsoqov T.A Haqiqiy o’zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. “O’qituvchi” nashriyoti , Toshkent, 1993.