ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

В.В.Федорчук

(М. Досанов, Д.Х.Турдибоев, Ҳ.Р.Умаровлар
таржимаси)

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ
(I-Қисм)
Ўқув қўлланма

Гулистон-2020

Д.Х.Турдибоев, М.Досанов, Ҳ.Р.Умаровлар таржимаси "Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия элементлари", ўқув қўлланма 314 бет, Гулистон 2020.

Ушбу ўқув қўлланма: 5130200 - Амалий математика, 5140200 - Физика бакалавр таълим йўналишида ўқитиладиган "Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра" ўқув фан учун ОЎМТВ томонидан тасдиқланган фан дастурига тўла мос келиб, унда векторлар ва улар устида амаллар уларнинг чизиқли боғлиқлиги ва боғланмаганлиги, текисликда тўғри чизиқ тенгламалари ва уларнинг вазияти, иккинчи тартибли чизиқлар, эллипс, гипербола, парабола, фазода тўғри чизиқ ва текислик вазияти, иккинчи тартибли сиртлар, эллипсоид, гиперболоид, параболоидлар, проектив текислик каби мавзуларнинг назарий жиҳатдан кенг баён этилган бўлиб, баъзи мавзуларда адабиётда қисқартирилган қисмларини кенгроқ қилиб ёртишига эътибор қаратилган.

Ўқув қўлланма Гулистон давлат университети Кенгаши томонидан (№___-баённома "____"_________20___ й.) нашрга тавсия этилган.

Тақризчилар: Х.Норжигитов, физика-математика фанлари номзоди, доцент

С.Сидиёров, ЖизДПИ доценти,физика-математика фанлари номзоди

СЎЗ БОШИ

Ўзбекистон Республикасининг Таълим тўғрисидаги Қонунида белгиланган талаблар ва вазифаларини амалга оширишда Гулистон давлат университети физика-математика факультети “Математика” кафедраси жамоаси масъулиятни ҳис этган ҳолда илмий-тадқиқот ишлари ва илмий педагогик кадрлар тайёрлаш самарадорлигини ошириш мақсадларини кўзлаб ўз олдига қатор вазифаларни белгилади.

Илм-фан жадал тараққий этаётган, замонавий ахборот-коммуникация тизимлари воситалари кенг жорий этилаётган жамиятда турли фан соҳаларида билимларнинг тез янгиланиб бориши, таълим олувчилар олдига уларни жадал эгаллаш билан бир қаторда, мунтазам ва мустақил равишда билим излаш вазифасини қўймоқда.

Ҳозирги вақтда чизиқли алгебра ва аналитик геометриянинг услублари фан, техника ва иктисодиётнинг турли-туман масалаларини ҳал қилишда кенг қўлланилмоқда. Халқ хўжалигининг барча соҳаларида компьютерларнинг ва математик усулларнинг ялпи қўлланилиши муносабати билан бу усулларнинг аҳамияти янада ортди.

Юқорида қайд этиб белгиланган вазифалар бажарилишининг исботи сифатида юзага келган ушбу қўлланма чизиқли алгебра ва аналитик геометрия фанидан маъруза машғулотига мўлжалланган бўлиб, ўқув адабиёти Давлат таълим стандартининг бакалавр мутахассислиги “Математика”, “Амалий математика ва информатика” ва “Физика” таълим йўналишларига мос келади.

Қўлланма еттита бобдан иборат бўлиб, уларда “Векторлар”, “Тўғри чизиқ ва текислик тенгламаси”, “Координаталарни алмаштириш. Ориентация. Вектор ва аралаш кўпайтма’’, “Иккинчи тартибли чизиқлар”, “Аффин алмаштиришлар”, “Иккинчи тартибли сиртлар” ва “Проектив текислик” мавзулари батафсил баён қилинган.

Қўлланмани ёзишда муаллифлар томонидан мавзуларнинг оддий ва содда тилда, тушунарли ва равон баён этилишига ҳаракат қилинди. Шу муносабат билан муаллифлар қўлланма талабаларда билим олишга интилиш ҳисси, эркин фикрлаш малакаларининг шаклланишига хизмат қилади деб умид билдирадилар ҳамда у талабаларга чизиқли алгебра ва аналитик геометрия фанининг айтиб ўтилган мавзулари бўйича билимларини оширишда ёрдам беради деб ишонадилар.

I БОБ. ВЕКТОРЛАР

1§. ДАСТЛАБКИ НАЗАРИЙ ТУШУНЧА ВА ФИКРЛАР (ДАЛИЛЛАР)

Бизга математик анализ курсидан тўплам тушунчаси, бир тўпламни иккинчи тўпламга акслантиришлар ҳамда елементар назарий тўпламли амаллар: $\bigcup$ – бирлашма, $\bigcap$ – кесишма, $\setminus$ – айирма, бир тўпламни иккинчи тўпламга декарт кўпайтмаси маълум.

Агар $\forall x_1, x_2 \in X$ ҳар хил элементлар учун уларнинг $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ акслари ҳам ҳар хил бўлса $f: X \to \mathrm{Y}$ акслантириш инъектив ёки ўзаро бир қийматли деб аталади.

Агар ҳар қайси $y \in \mathrm{Y}$ элемент учун шундай $x \in X$ элемент мавжуд бўлсаки бунда $f(x) = y$ бўлса $f: X \to \mathrm{Y}$ акслантириш сюръектив ёки X тўпламни Y тўплам устига акслантириш деб аталади. Агар бу шартларнинг иккиси ҳам бажарилса, у ҳолда f акслантиришини X тўпламни Y тўплам устига ўзаро бир қийматли акслантириши ёки ўзаро бир қийматли мослик ёки биекция деб аталади. X тўпламда R бинар муносабат – бу X тўпламдан олинган барча тартибланган $\left(x_1, x_2\right)$ жуфтликлар тўплами. R – $X \times X$ декарт кўпайтманинг қисм тўпламидир. Агар $\left(x_1, x_2\right) \in R$ бўлса, у ҳолда x_1 ва x_2 елементлар R муносабатда бўлади дейилади ва $x_1 R x_2$ каби ёзилади. X тўпламда эквивалентлик муносабати–бу қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирувчи R бинар мўносабатдир :

1. Рефлексивлик: ихтиёрий $x \in X$ элемент учун xRx;

2. Симметриклик: Агар $x_1 R x_2$ бўлса, у ҳолда $x_2 R x_1$;

3. Транзитивлик: Агар $x_1 R x_2$ ва $x_2 R x_3$ бўлса, у ҳолда $x_1 R x_3$.

Биттадан ортиқ элементга эга бўлган ихтиёрий X тўпламда битта эмас (биттадан ортиқ) эквивалентлик муносабати мавжуд бўлишига қарамасдан, одатда эквивалентлик муносабати $\sim$ символи билан белгиланади. $\sim$ – X тўпламда эквивалентлик муносабати бўлсин. $x \in X$ элементи учун C_x орқали бўш бўлмаган $\{x' \in X : x' \sim x\}$ тўпламни белгилаймиз ва уни x элементнинг эквивалентлик синфи деб атаймиз.

1.1. Жумла. Агар $x_1, x_2 \in C_x$ бўлса, у ҳолда $x_1 \sim x_2$.

Ҳақиқатдан ҳам $x_1, x_2 \in C_x \Rightarrow x_1 \sim x$ ва $x_2 \sim x$. $\Rightarrow x_1 \sim x$ ва $x \sim x_2$. $\Rightarrow x_1 \sim x_2$.

1.2. Жумла. Агар $C_x \bigcap C_y \neq \varnothing$ бўлса, у ҳолда $C_x = C_y$.

Ҳақиқатдан ҳам, $C_x \bigcap C_y \neq \varnothing$ эканлигидан шундай x элемент мавжудки: $x \in C_x \bigcap C_y$. $x \in C_x$ ва $x \in C_y$. $\Rightarrow x' \sim x$ ва $x' \sim y$.

Агар $z \in C_x \Rightarrow z \sim x \Rightarrow z \sim x' \Rightarrow z \sim y \Rightarrow z \in C_y \Rightarrow C_x \subset C_y$.

Худди шундай $C_y \subset C_x$ муносабатни исботлаш мумкин. Демак, $C_x = C_y$.

Шундай қилиб, X тўплам ё жуфт-жуфт бўлиб кесишмайдиган ёки устма–уст тушувчи бўш бўлмаган эквивалент синфларига бўлинади. Эквивалент синфлар тўплами — $\sim$ эквивалентлик муносабатига кўра X тўпламнинг фактор тўплами деб аталади ва $X/\sim$ каби белгиланади. 1.2.жумлага мувофиқ X тўпламнинг ҳар қайси элементи битта эквивалент синфга тегишли. Шунинг учун x элементга унинг эквивалентлик синфи C_x ни мос қўйиб X тўпламни $X/\sim$ фактор тўплам устига акслантиришини ҳосил қиламиз.

X тўпламда R бинар муносабат берилган бўлсин. Унда у ихтиёрий $Y \subset X$ қисм тўпламда R_Y бинар муносабатни вужудга келтирилади: $xR_Y y \Leftrightarrow xRy$ ва $x, y \in Y$.

1.3.Жумла. $Y \subset X$ ва X тўпламда R эквивалентлик муносабати берилган бўлсин. Унда R_Y ҳам шунингдек эквивалентлик муносабати булади, R ва R_Y муносабатларнинг C_x^R ва $C_x^{R_Y}$ эквивалентлик синфлари эса бир–бири билан қуйидаги тарзда боғланган:

$$C_x^{R_Y} = Y \bigcap C_x^R.$$

Ҳақиқатдан ҳам, $Y \subset X$ бўлганидан $\forall x \in \mathrm{Y} \Rightarrow xRx$, $\Leftrightarrow xR_Y x$, яъни R_Y муносабат рефлексивдир.

Агар $xR_Y y \Leftrightarrow xRy$, $x, y \in Y \Leftrightarrow yRx$, $y, x \in Y \Rightarrow yR_{\mathrm{Y}} x$, яъни R_Y муносабат симметрик.

Агар $xR_Y y$ ва $yR_Y z$ бўлса, у ҳолда xRy, $x, y \in Y$ ва yRz, $y, z \in R \Rightarrow xRz,\ x, z \in Y \Rightarrow xR_Y z$, яъни R_Y муносабат транзитивдир .

Бундан ташқари $x \in Y$ да $y \in C_x^{R_Y} \Leftrightarrow yR_Y x \Leftrightarrow yRx$ ва $y, x \in Y \Leftrightarrow y \in Y$ ва $y \in C_x^R \Leftrightarrow y \in Y \bigcap C_x^R$, яъни $C_x^{R_Y} = Y \bigcap C_x^R$ бўлади.

2§. КЕСМА ВА ЯРИМ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

Кесма. Кейинчалик биз Эвклид геометриясининг баъзи аксиомаларидан фойдаланамиз. Эвклид аксиомаларининг турли хил кўринишлари мавжуд бўлиб, қуйида тартиб аксиомаларини масофа иборасида ифодалаймиз. E Эвклид фазосининг ихтиёрий M ва N нуқталари учун, бу нуқталар орасидаги масофа $-\rho(M, N)$ номанфий сон аниқланган. ρ масофа функцияси қуйидаги аксиомаларни қаноатлантиради.

I₁. Айният аксиомаси: $\rho(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$.

II₂. Симметрия аксиомаси: $\rho(M, N) = \rho(N, M)$.

III₃. Учбурчак тенгсизлиги: $\rho(M, N) \le \rho(M, O) + \rho(O, N)$.

1-таъриф. Агар $M \ne O \ne \mathrm{N}$ ва $\rho(M, O) + \rho(O, N) = \rho(M, N)$ бўлса, O нуқта M ва N нуқталар орасида ётади дейилади ва қуйидагича ёзилади: (MON).

2-таъриф. M ва N нуқталар орасида ётувчи барча O нуқталар тўплами

$$(M, N) = \{O : (MON)\}$$

га M ва N нуқталарни туташтирувчи (MN) интервал деб аталади.

(MN) интервалга M ва N нуқталарни қўшиб, M ва N нуқталарни туташтирувчи MN кесмани ҳосил қиламиз. Буни бошқача қилиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$MN=\{O:\rho(M,O)+\rho(O,N)=\rho(M,N)\}.$$

(MN) интервал нуқталари MN кесманинг ички нуқталари, M ва N нуқталар эса унинг чегаравий нуқталари деб аталади. M ва N нуқталар орасидаги масофа MN кесманинг узунлиги деб аталади ва $|MN|$ орқали белгиланади. Шунинг учун MN кесманинг таърифини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$MN=\{O:|M,O|+|O,N|=|M,N|\}.$$

Агар M ва N нуқталар устма-уст тушса, у ҳолда MN кесма нол узунликка эга ва битта нуқтадан иборат бўлади.

Тартиб ва қўйиш аксиомалари:

III₁. Тўғри чизиқдаги ихтиёрий ҳар хил учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитасини орасида ётади.

III₂. Агар O нуқта M ва N нуқталар орасида ётса, у ҳолда M,N,O нуқталар бир тўғри чизиқда ётади.

III₃. l тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий O нуқта ва ихтиёрий $d>0$ сон учун шундай иккита $M_1,M_2\in l$ нуқталар мавжудки, улар учун $\rho(M_1,O)=\rho(M_2,O)=d$ бўлади.

Қуйида исботланадиган 2.1 ва 2.5 жумлаларга мувофиқ **III₃** аксиомани қуйидагича ифодалаш мумкин:

l тўғри чизиқдаги ихтиёрий $O\in l$ нуқтадан бошлаб берилган d узунликка эга бўлган иккита кесмани қуйиш мумкин.

III₄ (Паш аксиомаси). Текисликда учта M,N,O нуқта ва бу нуқталардан бирортасини ҳам ўз ичига олмаган l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Агар l тўғри чизиқ (MN) интервални кесиб ўтса, у ҳолда у (MO) ва (NO) интерваллардан фақат биттасини кесиб ўтади.

2.1 жумла. Агар **III$_3$** аксиома шартлари ўринли бўлса, у ҳолда (M_1, O, M_2) бўлади.

Исбот. **III$_1$** аксиомага мувофиқ M_1, O, M_2 нуқталардан фақат биттаси қолган иккитаси орасида ётади. Фараз қилайлик, (O, M_1, M_2) бўлсин. У ҳолда,

$$\rho(O, M_1) + \rho(M_1, M_2) = \rho(O, M_2)$$

бўлади. Аммо, $\rho(O, M_1) = \rho(O, M_2)$.

Демак, $\rho(M_1, M_2) = 0$, яъни $M_1 = M_2$. Зиддият. Худди шундай, (O, M_2, M_1) ҳоли ўринли эмаслиги исботланади.

2.2 жумла. Агар $O \in MN$ бўлса, у ҳолда $MO \subset MN$ бўлади.

Исбот. Жумлани исботлаш учун ихтиёрий $P \in MN$ нуқта MN кесмага тегишли эканлигини кўрсатиш етарли. Бунинг учун учбурчак тенгсизлигига мувофиқ, $\rho(M, P) + \rho(P, N) \le \rho(M, N)$ (1) тенгсизликни текшириш етарлидир, чунки $\rho(M, P) + \rho(P, N) \ge \rho(M, N)$ (*) уринли бўлади. (1) ва (*) тенгсизликлардан $\rho(M, P) + \rho(P, N) = \rho(M, N)$, яъни $P \in MN$ бўлади.

$P = M \Rightarrow P \in MN$. $P = O$ ва $O \in MN \Rightarrow P \in MN$. Бу ҳолда тасдиқ тўғридир.

P≠M, P≠O, P∈MO⇒(MPO) эга бўламиз. O∈MN бўлгани учун

O=M⇒MO=NM⊂MN.

O=N⇒MO=MN⊂ MN.

O≠M ва O≠N бўлса, у ҳолда O∈MN эканлигидан (MON) эга бўламиз.

(MON) ва (MPO) ларга мувофиқ ушбуларга эга бўламиз:

$$\rho(M, N) = \rho(M, O) + \rho(O, N) = \rho(M, P) + \rho(P, O) + \rho(O, N) \ge \rho(M, P) + \rho(P, N),$$

яъни $\rho(M, N) \ge \rho(M, P) + \rho(P, N)$ (1) тенгсизлик исбот қилинди.

2.3 Жумла. Агар M,N,O нуқталар битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда MO⊂MN∪NO бўлади.

Исбот. Бунда M,N,O нуқталарни жуфт-жуфти билан ҳар хил деб ҳисоблаймиз. Акс ҳолда тасдиқнинг тўғрилиги аён. Чунки, M=N бўлса, MO=NO$\subset$MN$\cup$NO. M=N бўлса, у ҳолда MO=MN={M}$\subset$MN$\subset$MN$\cup$NO, N=O бўлса, MO=MN$\subset$MN$\cup$NO.

N нуқтадан фарқли P$\in$(MO) нуқтани оламиз. M,N,O нуқталар ётган тўғри чизиқни фақат битта P нуқтада кесувчи l тўғри чизиқ мавжуд. Унда Паш аксиомасига мувофиқ, P нуқта (MN) ёки (NO) интерваллардан бирига тегишли бўлади. Демак, P$\in$(MN)$\cup$(NO) ёки P$\in$MN$\cup$NO бўлади .

P=M$\Rightarrow$P$\in$MN$\cup$NO бўлади. P=O$\Rightarrow$P$\in$MN$\cup$NO бўлади. Булардан MO$\subset$MN$\cup$NO бўлиши келиб чиқади.

2.2 ва 2.3 жумлалардан ушбу натижа келиб чиқади.

2.4 натижа. Агар $N \in MO$ бўлса, у холда $M\mathrm{N} \bigcup \mathrm{N}O = MO$бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $N \in MO$ бўлса, 2.2 жумлага мувофиқ $\mathrm{MN} \in \mathrm{MO}$. Ҳудди шундай, $\mathrm{N} \in \mathrm{MO} = \mathrm{OM}$бўлса, 2.2 жумлага мувофиқ $\mathrm{ON} \in \mathrm{OM} = \mathrm{MO}$ бўлиб, MN$\subset$MO ва $\mathrm{ON} \subset \mathrm{MO} \Rightarrow \mathrm{MN} \bigcup \mathrm{ON} \subset \mathrm{MO}$.

2.3 жумлага мувофиқ $\mathrm{N} \in MO \Rightarrow MO \subset M\mathrm{N} \bigcup \mathrm{N}O$. Булардан эса $\mathrm{N} \in MO \Rightarrow MO = M\mathrm{N} \bigcup \mathrm{N}O$ келиб чиқади.

2.5 жумла. Агар $\mathrm{N} \in MO$ бўлса, у ҳолда N нуқта MN ва NO кесмаларнинг ягона умумий нуқтаси бўлади.

Исбот. Бунда N нуқтадан фарқли $\mathrm{P} \in M\mathrm{N} \bigcap \mathrm{N}O$ нуқта мавжуд деб фараз қиламиз. Унда $\mathrm{P} \in M\mathrm{N}$ ва P$\neq$N бўлганидан $\rho(M,\mathrm{P}) + \rho(\mathrm{P},\mathrm{N}) = \rho(M,\mathrm{N})$ бўлиб, $\rho(\mathrm{P},\mathrm{N}) > 0$ бўлгани сабабли

$$\rho(M,\mathrm{N}) - \rho(M,\mathrm{P}) = \rho(\mathrm{P},\mathrm{N}) > 0\,,\ \ \rho(M,P) < \rho(M,N)$$

бўлади. $P \in NO$ ва P$\neq$N бўлганидан эса $\rho(\mathrm{N},\mathrm{P}) + \rho(\mathrm{P},O) = \rho(\mathrm{N},O)$ва $\rho(\mathrm{N},\mathrm{P}) > 0$ бўлиб, $\rho(\mathrm{N},O) - \rho(\mathrm{P},O) = \rho(\mathrm{N},\mathrm{P}) > 0$ ва $\rho(\mathrm{P},O) < \rho(\mathrm{N},O)$ бўлади.

$\mathrm{N} \in MO \Rightarrow M\mathrm{N} \subset MO$. $\mathrm{N} \in OM \Rightarrow O\mathrm{N} \subset OM \Rightarrow \mathrm{N}O \subset MO$. Булардан эса $\mathrm{P} \in M\mathrm{N} \bigcap \mathrm{N}O \subset \mathrm{N}O \subset MO$ бўлади.

$$P \in MO \Rightarrow \rho(M,O) = \rho(M,\mathrm{P}) + \rho(\mathrm{P},O) < \rho(M,\mathrm{N}) + \rho(\mathrm{N},O) = \rho(M,O).$$

Зиддият ҳосил қилдик. Фараз нотўғри. 2.5 жумла исботланади.

2.6 жумла. Агар (MNO) ва (NPO) бўлса, у ҳолда (MNP) бўлади.

Исбот. Шартга кўра қуйидагиларга эга бўламиз:

$\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},O)=\rho(M,O)$, (2), $\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)=\rho(\mathrm{N},O)$ (3) бўлади.

Бундан ташқари 2.2 жумлага мувофиқ, ҳамда $\mathrm{N}\in MO$ га кўра $\mathrm{N}\in OM \Rightarrow O\mathrm{N}\subset OM \Rightarrow \mathrm{N}O\subset MO$.

Демак, $\mathrm{P}\in \mathrm{N}O\subset MO$, яъни $\rho(M,\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)=\rho(M,O)$ (4). (2) ва (3) тенгликлардан ушбуни топамиз:

$$\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)=\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},O)=\rho(M,O) \quad (5).$$

(4) ва (5) тенгликларни таққослаб кўрамиз:

$\rho(M,\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)=\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)$, ёки $\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})=\rho(M,\mathrm{P})$.

(MNO)⇒M≠N≠O ва (NPO)⇒N≠P≠O. $\rho(M,\mathrm{P})=\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})$ ва M≠N≠P муносабатлардан (MNP) бўлиши келиб чиқади.

2.6 жумла исботланди.

2.7 жумла. Агар (MNO) ва (NOP) бўлса, у ҳолда (MNP) бўлади.

2.8-жумла. Ихтиёрий номанфий $d\le\rho(O,M)$ сон учун, шундай битта ягона $N\in OM$ нуқта мавжудки бунда $\rho(O,N)=d$ бўлади.

Исбот. Аввал нуқтанинг ягоналигини текширамиз. N нуқтадан фарқли O нуқтадан d масофадан турувчи $P\in OM$ нуқта мавжуд бўлсин деб фараз қиламиз. Унда

$$\rho(O,N)+\rho(N,M)=\rho(O,M),\ \rho(O,P)+\rho(P,M)=\rho(O,M)$$

$$\rho(P,M)=\rho(O,M)-\rho(O,P)=\rho(O,M)-d=\rho(O,M)-\rho(O,N)=\rho(N,M).$$

Аммо, 2.4-жумлага мувофиқ $N\in OM$ бўлгани туфайли $P\in OM=ON\cup NM$ ва P нуқта ON ёки NM кесмаларнинг бирида ётади, яъни $\rho(O,P)+\rho(P,N)=\rho(O,N)$ ёки $\rho(N,P)+\rho(P,M)=\rho(N,M)$ бўлади. $P\ne N\Rightarrow\rho(P,N)>0$ ва $\rho(O,P)-\rho(O,P)=\rho(P,N)>0$ ва $\rho(O,P)<\rho(O,N)$ ёки $\rho(N,M)-\rho(P,M)=\rho(N,P)>0$ ва $\rho(P,M)>\rho(N,M)$ яьни $\rho(P,M)<\rho(N,M)$

ёки $\rho(O,P)<\rho(O,N)$ тенгсизликларга эга бўламиз, аммо $\rho(P,M)=\rho(N,M)$ ва $\rho(O,P)=\rho(O,N)=d$. Зиддият ҳосил бўлди. Шу билан ягоналиги исботланди.

Мавжудлиги. Бунда $M \neq O$ деб фараз қиламиз. Унда III_3 аксиомага мувофиқ О ва М нуқталардан ўтувчи l тўғри чизиқда М нуқтадан фарқли шундай M_1 нуқта мавжудки бунда, $\rho(M,O)=\rho(O,M)$.

Аввал бунда, агар $N \in l$ ва $\rho(N,O)\le\rho(O,M)$ бўлса, у ҳолда $N \in M_1M$ бўлишини исботлаймиз. Фараз қилайлик, шундай бўлмасин. Унда III_1 аксиомага мувофиқ, ёки (NM_1M) ёки (M_1MN).

Биринчи ҳолни қараймиз. 2.1-жумлага мувофиқ (M_1OM) эга бўламиз. Шунинг учун 2.6-жумлага асосан (NM_1M) ва (M_1OM) лардан (NM_1O) бўлиши келиб чиқади. Бу ердан $\rho(N,O)-\rho(M,O)=\rho(N,M_1)>0$. Чунки фаразга кўра, $N \notin MM_1$ ва $N \neq M_1$. $\rho(N,O)>\rho(M_1,O)=\rho(O,M)$. Зиддият ҳосил қилдик.

(M_1MN) ҳол ҳам худди шундай ҳал этилади. Демак 2.8- жумла исботланди.

Ярим тўғри чизиқ

l тўгри чизиқда ихтиёрий О нуқтани оламиз. $l\setminus\{O\}$ тўпламда эквивалентлик муносабатини киритамиз. Агар $O \notin MN$ бўлса $M,N \in l\setminus\{O\}$ нуқталарни О нуқтадан бир томонда ётади деб айтамиз. $l\setminus\{O\}$ тўпламда шундай таьрифланган бинар муносабат эквивалентлик муносабатидир. Хақиқатан хам $\forall M \in l\setminus\{O\}$ нуқта учун $O \notin MM=\{M\}$, яъни М ва М нуқталар О нуқтадан бир томонда ётади. Агар $M,N \in l\setminus\{0\}$ нуқталар О нуқтадан бир томонда ётса, у ҳолда $O \notin MN$ бўлади. Бундан эса $O \notin NM$, я,ни N ва M нуқталар ҳам О нуқтадан бир томонда ётади. Бу муносабатнинг рефлексив, симметрик бўлишини англатади.

Агар $M,N,P \in l\setminus\{O\}$ нуқталар учун $O \notin MN$ ва $O \notin NP$ бўлса, унда $O \notin MN \cup NP$ бўлади. Бунда 2.3-жумлага асосан $O \notin MP$ келиб чиқади. Демак, M, N нуқталар ва N, P нуқталар О нуқтадан бир томонда ётса, у ҳолда M, P нуқталар ҳам О нуқтадан бир томонда ётади. Демак, бу муносабат транзитив муносабатдир.

2.9-жумла. “Нуқталар О нуқтадан бир томонда ётади” муносабати $l\setminus\{O\}$ тўпламни иккита эквивалентлик синфига ажратади.

Исбот. Бирорта d – мусбат сон бўлсин. III_3-аксиомага мувофиқ, мавжуд шундай $M_1, M_2 \in l$ нуқталарни оламизки, бунда $\rho(M_1,O) = d = \rho(O,M_2)$ бўлади. Унда 2.1-жумлага асосан (M_1OM_2) бўлганлигидан $O \in M_1M_2$ бўлади. Демак M_1, M_2 нуқталар О нуқтадан бир томонда ётмайди. Бошқача қилиб айтганда бу нуқталар эквивалент нуқталар эмас, яъни M_1 ва M_2 нуқталар ҳар хил эквивалентлик синфларида ётади. Энди бунда ҳар қандай $N \in l\setminus\{0\}$ нуқта ёки M_1 нуқтага ёки M_2 нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. N нуқта M_1 нуқтага ҳам M_2 нуқтага ҳам эквивалинт эмас, яъни $O \in M_1N$, $O \in NM_2$ бўлсин. Аммо, Паш аксиомасидан, агар M_1, M_2, N ҳар хил нуқталар битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда ҳеч қандай О нуқта учта (M_1M_2), (M_1N) ва (NM_2) интервалларга бир вақтда тегишли эмаслиги келиб чиқади. Зиддият.

Демак, ҳар қандай $N \in l\setminus\{0\}$ нуқта ё M_1 нуқтага ёки M_2 нуқтага эквивалент. 2.9-жумла исботланди.

Бу эквивалент синифларини l тўғри чизиқни О нуқта бўлгандаги ярим тўғри чизиқлар деб ёки боши О нуқтада бўлган ярим туғри чизиқлар деб атаймиз. Боши О нуқтада бўлган М нуқта орқали ўтувчи ярим тўғри чизиқни $(OM\rightarrow)$ билан белгилаймиз. Ярим тўғри чизиқга О бошланғич нуқтасини қўшиб $OM\rightarrow$ нурни ҳосил қиламиз. Айрим адабиётларда $OM\rightarrow$ нурни $[OM)$ орқали белгиланади.

2.10-жумла. Бошланғич нуқталар O_1 ва O_2 бўлган l тўғри чизиқнинг ихтиёрий икки нури

1) ё кесишмайди;

2) ё O_1O_2 кесма бўйича кесишади;

3) ёки улардан бири иккинчисида ётади.

Исбот. Фараз қилайлик, нурлар кесишсин ва М – уларнинг умумий нуқтаси бўлсин. Умумий ҳол, O_1, O_2, M нуқталар жуфт-жуфт бўлиб ҳар хил бўлган ҳолни қараймиз. Фараз қилайлик, аввал бунда М нуқта O_1O_2 кесмада ётмасин ва масалан (MO_1O_2) бўлсин. Унда $OM \to$ нурнинг ихтиёрий N нуқтаси учун 2.2-жумлага мувофиқ, агар $N \in MO_1$ бўлса, у ҳолда $N \in MO_2$ бўлади. Чунки $(MO_1O_2) \Rightarrow O_1 \in MO_2 \Rightarrow MO_1 \subset MO_2$. Агарда $N \notin MO_1$ бўлса, у ҳолда $N \in O_1M \to$ бўлганлигидан $O_1 \notin NM$, яъни O_1 нуқта N ва M нуқталар орасида ётмаганидан, (NMO_1) бўлиб, бунда (MO_1O_2) ва 2.7-жумлага асосан, (NMO_2) бўлади ва демак, $O_2 \notin NM$, яъни $N \in O_2M \to$. Худди шундай, (O_1O_2M) бўлса, у ҳолда $N \in O_2M \to$ дан $N \in O_1M \to$ бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, $O_2M \to$ нурнинг ихтиёрий N нуқтаси учун 2.2-жумлага мувофиқ, агар $N \in MO_2$ бўлса, у ҳолда $N \in MO_1$ бўлади. Чунки, $(O_1O_2M) \Rightarrow O_2 \in O_1M = MO_1 \Rightarrow MO_2 \subset MO_1$. Агарда $N \notin MO_2$ бўлса, у ҳолда $N \in O_2M \to$ бўлганидан O_2 нуқта N ва M нуқталар орасида ётмаганидан, (NMO_2) бўлиб, бунда (O_1O_2M) билан биргаликда 2.7-жумлага асосан (NMO_2) ва (MO_1O_2) лардан $\left(NMO_1\right)$ ни беради ва демак, $O_1 \notin NM$, яъни $N \in O_1M \to$. Демак, $M \notin O_1O_2$ бўлса, у ҳолда $O_1M \to$ нур бутунлай $O_2M \to$ нурда ётади ёки аксинча, $O_2M \to$ нур бутунлай $O_1M \to$ нурда ётади.

Энди (O_1MO_2) ва N нуқта O_1O_2 кесманинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Унда 2.4 ва 2.3-жумлаларга мувофиқ $\left(MN\right)$ интервал $\left(O_1O_2\right)$ интервалнинг қисми бўлади ва шунинг учун O_1 нуқтани ҳам, O_2 нуқтани ҳам ўз ичига олмайди. Ҳақиқатан ҳам, 2.4-натижага асосан $M \in O_1O_2 \Rightarrow O_1M \subset O_1O_2$, $N \in O_1O_2 \Rightarrow O_1N \subset O_1O_2$. Бундан эса $O_1M \bigcup O_1N \subset O_1O_2$ ёки $MO_1 \bigcup O_1N \subset O_1O_2$ бўлади. 2.3-жумлага асосан $MN \subset O_1O_2$ эга бўламиз. Бундан эса $(MN) \subset (O_1O_2)$, яъни $O_1 \notin (NM)$ ва $O_2 \notin (N, M)$.

Демак N нуқта O_1 ва O_2 нуқталарнинг шундай томонида ётадики, бунда шу томонда М нуқта ҳам ётади.

$O_1O_2 \subset O_1M \to$ ва $O_1O_2 \subset O_2M \to$. Демак, $O_1O_2 \subset (O_1M \to) \bigcap (O_2M \to)$. Иккинчи томондан, агар $N \notin O_1O_2$ ва масалан (NO_1O_2) бўлса, у ҳолда (O_1MO_2) дан ва 2.6-жумладан (NO_1M) бўлиши келиб чиқади, яъни $N \notin O_1M \to$. 2.10-жумла исботланди.

Ундан тўғри чизиқда ярим тўғри чизиқлар ҳам худди шундай жойлашиши келиб чиқади, фақат 2) ҳолда улар интервал бўйича кесишади.

2.11-жумла. l тўғри чизиқ ва $O \in l$ нуқта ва $d > 0$ сон берилган бўлсин. Унда l тўғри чизиқ О нуқта билан бўлингандаги ҳар қандай ярим тўғри чизиқда О нуқтадан d масофада турувчи битта нуқта мавжуд.

Исбот. III_3 аксиомага мувофиқ l тўғри чизиқда О нуқтадан d масофада турувчи иккита M_1 ва M_2 нуқталар мавжуд. 2.1-жумлага мувофиқ О нуқта M_1 ва M_2 нуқталар орасида ётади, яъни M_1 ва M_2 нуқталар бошланғич нуқтаси О бўлган ҳар ҳил ярим тўғри чизиқларда ётади.

3§. ЯРИМ ТЕКИСЛИК ВА ЯРИМ ФАЗО

π текислик ва унда ётувчи l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Планиметрия аксиомаларидан бири, $\pi \setminus l$ тўпламнинг бўшмаслигини тасдиқлайди. Агар $\mathrm{MN} \bigcap l = \varnothing$ бўлса, $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \pi \setminus l$ нуқталарни l тўғри чизиқдан бир томонда ётади деб айтамиз (MS_lN каби ёзамиз).

3.1 жумла. $\pi \setminus l$ тўпламда S_l эквивалентлик муносабатидир.

Исбот. $\forall M \in \pi \setminus l$ нуқта учун $MM = \{M\}$, $MM \bigcap l = \varnothing$, яъни MS_lM. Агар MS_lN бўлса, у ҳолда $MN \bigcap l = \varnothing$ бўлиши келиб чиқади. Бундан $NM \bigcap l = \varnothing$ бўлиб, NS_lM бўлади. Демак, S_l муносабат рефлексив ва симметрик муносабатдир.

Энди транзитивлик аксиомасини текширамиз. MS_lN ва NS_lO бўлсин. Агар M, N, O нуқталар битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда 2.3 жумлага мувофиқ

$MO \subset MN \cup NO$ бўлади ва демак, $MN \bigcap l = \varnothing$ ва $NO \bigcap l = \varnothing$ бўлишидан $(MN \bigcap l) \bigcap (NO \bigcap l) = \varnothing$, $(MN \bigcap NO) \bigcap l = \varnothing$ ёки $MO \bigcap l = \varnothing$ бўлиши келиб чиқади, яъни $MS_l O$ бўлади.

Энди M, N, O нуқталар битта тўғри чизиқда ётмаган бўлсин, шартга кўра $MN \bigcap l = \varnothing$ ва $NO \bigcap l = \varnothing$. Фараз қилайлик, бунда $MO \bigcap l \neq \varnothing$ бўлсин. Аммо унда l тўғри чизиқ MNO учбурчак учларидан ўтмаган тўғри чизиқ учбурчакнинг томонлоридан бири MO ни кесиб, Паш аксиомасига мувофиқ, унинг яъни битта томонини кесиши керак, яъни $MO \bigcap l \neq \varnothing$ ёки $NO \bigcap l \neq \varnothing$. Зиддият. Демак, фараз нотўғри, яъни $MO \bigcap l = \varnothing$ бўлиб, $MS_l O$ бўлади.

3.1-жумла исботланди.

3.2-жумла. S_l муносабатнинг иккита эквивалентлик синфи мавжуд.

Исбот. Ихтиёрий $M \in \pi \setminus l$ ва $O \in l$ нуқталарни оламиз. M ва O нуқталар орқали m тўғри чизиқни ўтказамиз. m тўғри чизиқда 2.9-жумлага мувофиқ $OM \rightarrow$ нурга тегишли бўлмаган N нуқта мавжуд. Шу билан бирга O нуқта MN кесманинг ички нуқтаси бўлиб, M ва N нуқталар эса эквивалент эмасдир.

Энди ихтиёрий $P \in \pi \setminus l$ нуқтанинг ёки M нуқтага, ёки N нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, P ва M нуқталар эквивалент бўлмасин, яъни $l \bigcap MP \neq \varnothing$. Аммо, $M \in \pi \setminus l$ ва $P \in \pi \setminus l$ бўлганидан $l \bigcap (MP) \neq \varnothing$ бўлади. Унда l тўғри чизиқ $O \in MN \bigcap l$ бўлганидан $M \in \pi \setminus l,\ N \in \pi \setminus l$ эканлигидан (MN) ва (MP) интервалларни кесиб Паш аксиомасига мувофиқ (NP) интервални кесмайди, яъни $l \cap (NP) = \varnothing$. $N \in \pi \setminus l,\ P \in \pi \setminus l$ бўлганидан $NP \cap l = \varnothing$, яъни $PS_l N$ бўлади. 3.2-жумла исботланди.

S_l-муносабатининг эквивалент синфларини π текисликни l тўғри чизиқ билан бўлингандаги ярим текисликларни π^-, π^+ ёки π_l^-, π_l^+ символлар билан белгилаймиз. Ярим тўғри чизиқ ва ярим текиликнинг таърифларидан бевосита қуйидагилар келиб чиқади.

3.3-жумла. $l \subset \pi$ тўғри чизиқ π текисликни π^+ ва π^- ярим текисликларга ажратсин. Бундан ташқари π текисликда l тўғри чизиқни O нуқтада кесувчи бошқа m тўғри чизиқ берилган бўлсин. $m \cap \pi^-$ ва $m \cap \pi^+$ тўпламлар m тўғри чизиқни O нуқтада бўлгандаги ярим тўғри чизиқлар бўлади (қисқача: тўғри чизиқ ярим текисликлар билан тўғри чизиқ бўйича кесишади).

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $l \subset \pi$ ва $\pi^- \neq \varnothing$ ва $\pi^+ \neq \varnothing$ эканлигидан $M \in \pi^-$ ва $N \in \pi^+$ бўлиб, M ва N нуқталардан ўтувчи m тўғри чизиқ l тўғри чизиқни O нуқтада кессин. $P \in m \bigcap \pi^- \Leftrightarrow P \in m$ ва $P \in \pi^+ \Rightarrow P \in m$ ва $MP \bigcap l = \varnothing \Rightarrow MP \notin O \Rightarrow$

$\Rightarrow P \in (OM \rightarrow)$, яъни $m \bigcap \pi^- \subset (OM \rightarrow)$.

Энди аксинча, $P \in (OM \rightarrow)$, яъни, $MP \notin O$ бўлсин, унда $MP \bigcap l = \varnothing \Rightarrow P \in \pi^-$. $P \in m$ бўлганидан $P \in m \cap \pi^-$, яъни, $m \in \pi^- \supset (OM \rightarrow)$. Демак, $m \in \pi^- = (OM \rightarrow)$.

Худди шундай, $Q \in m \bigcap \pi^+ \Leftrightarrow Q \in m$ ва $Q \in \pi^+ \Rightarrow Q \in m$ ва $O \notin NQ \Rightarrow$ $\Rightarrow Q \in (ON \rightarrow)$, яъни $m \bigcap \pi^+ \subset (ON \rightarrow)$.

Энди аксинча, $Q \in (ON \rightarrow)$, яъни, $O \notin QN$ бўлсин, унда $NQ \bigcap l = \varnothing \Rightarrow Q \in \pi^+$. Аммо $Q \in m$ бўлганидан $Q \in m \bigcap \pi^+$, яъни, $m \bigcap \pi^+ \supset (ON \rightarrow)$. Демак $m \cap \pi^+ \subset (ON \rightarrow)$ ва $m \cap \pi^+ \supset (ON \rightarrow)$ эканлигидан $m \cap \pi^+ = (ON \rightarrow)$. 3.3-жумла исботланди.

E фазода π текислик берилган бўлсин. Стереометрия аксиомаларидан бири $E \setminus \pi$ тўпламнинг бўш эмаслигини тасдиқлайди. Агар $M, N \in E \setminus \pi$ нуқталар учун $MN \cap \pi = \varnothing$ бўлса, $M, N \in E \setminus \pi$ нуқталарни π текисликдан бир томонда ётади деб атаймиз ($MS_\pi N$ каби ёзамиз).

3.4-жумла. S_π муносабат $E \setminus \pi$ тўпламнинг эквивалентлик муносабатидир.

Исбот. $\forall M \in E \setminus \pi$ нуқта учун $MM = \{M\}$ бўлганидан $MM \bigcap \pi = \varnothing$, яъни $MS_\pi M$ бўлади. Агар $MS_\pi N$ бўлса, у ҳолда $MN \cap \pi = \varnothing \Rightarrow NM \cap \pi = \varnothing \Rightarrow NS_\pi M$.

Энди фақат транзитивлик аксиомаларини текширамиз: $MS_{\pi}N$ ва $NS_{\pi}O$ бўлсин. M, N, O нуқталардан ўтувчи π_1 текислик мавжуд. π ва π_1 текисликлар параллел, яъни $\pi \cap \pi_1 = \varnothing$ бўлса, у ҳолда $MO \subset \pi_1$ бўлгани туфайли $\pi \cap MO = \varnothing$. Демак, $MS_{\pi}O$ бўлади.

Энди π ва π_1 текисликлар π_1 текисликни π_1^- ва π_1^+ яримтекисликларга ажратувчи l тўғри чизиқ бўйича кесишган бўлсин. M ва N нуқталар бу ярим текисликларнинг бирида ётади, чунки акс ҳолда MN кесма l тўғри чизиқ билан кесишиб боз устига $\pi \supset l$ текислик билан ҳам кесишган бўлар эди. Худди шундай N ва O нуқталар ҳам битта ярим текисликда ётади. Унда M, N, O учта нуқталарнинг ҳаммаси N нуқта ётган ярим текисликда ётади ва демак, $MO \bigcap l = \varnothing$ бўлиб,

$$MO \cap \pi = (MO \subset \pi_1 \text{ эканидан}) = \left(MO \cap \pi_1\right) \cap \pi = MO \cap \left(\pi_1 \cap \pi\right) = MO \cap l = \varnothing$$

бўлади, яъни $MO \cap \pi = \varnothing$ бўлиб, $MS_{\pi}O$ бўлади. 3.4-жумла исботланди.

3.5-жумла. S_{π} муносабатнинг иккита эквивалентлик синфи мавжуд.

Исбот. Ихтиёрий $M \in E \setminus \pi$ ва $O \in \pi$ нуқталарни оламиз. M ва O нуқталар орқали m тўғри чизиқни ўтказамиз. m тўғри чизиқда, 2.9-жумлага мувофиқ, $OM \to$ нурга тегишли бўлмаган N нуқта мавжуд. Шу билан бирга O нуқта MN кесманинг ички нуқтаси бўлиб, M ва N нуқталар эса эквивалент эмасдир. Энди ихтиёрий учинчи $P \in E \setminus \pi$ нуқтанинг ёки M нуқтага, ёки N нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, P ва M нуқталар эквивалент бўлмасин. Яъни, $MP \cap \pi \neq \varnothing$. Аммо $M \in E \setminus \pi$ ва $P \in E \setminus \pi$ бўлганидан $(MP) \cap \pi \neq \varnothing$ бўлади. Унда π текислик (MN) ва (NP) интервалларни кесиб, (NP) интервални кесмайди, яъни $\pi \cap (NP) = \varnothing$. Чунки, учбурчакнинг учларидан ўтмаган текислик учбурчак томонларидан бирини кесиб ўтса, у ҳолда қолган икки томондан фақат биттасини кесади. Аммо, $N \in E \setminus \pi$ ва $P \in E \setminus \pi$ бўлганидан $MP \cap \pi = \varnothing$ бўлади, яъни $PS_{\pi}N$. 3.5-жумла исботланди.

S_π муносабатнинг эквивалент синфларини E фазони π текислик билан бўлингандаги ярим фазолар ёки π текислик билан чегараланган ярим фазолар деб атаймиз. Ярим фазо, ярим текислик, ярим тўғри яизикнинг таърифидан қуйидаги иккита тасдиқ бевосита келиб чикади.

3.6-жумла. π_1 ва π_2 – l тўғри чизиқ бўйича кесишувчи текисликлар, E^-, E^+ – π_1 текислик билан чегараланган ярим фазолар бўлсин. Унда $E^- \bigcap \pi_2$ ва $E^+ \bigcap \pi_2$ тўпламлар l тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлардир.

3.7-жумла. π текислик E фазони E^-, E^+ ярим фазоларга ажратсин ва l тўғри чизиқ π текислик билан O нуқтада кесишсин. Унда $E^- \bigcap l$ ва $E^+ \bigcap l$ тўпламлар l тўғри чизиқ O нуқта билан бўлингандаги ярим тўғри чизиқлардир.

4§. ВЕКТОР ТАЪРИФИ

M нуқта боши, N нуқта охири деб эълон қилинган MN йўналган кесмани боши M нуқтада ва охири N нуқтада бўлган $\vec{MN}$ вектор деб аталади. (M, N) тартибланган нуқталар жуфтлигини ҳам $\vec{MN}$ вектор деб аташ мумкин.

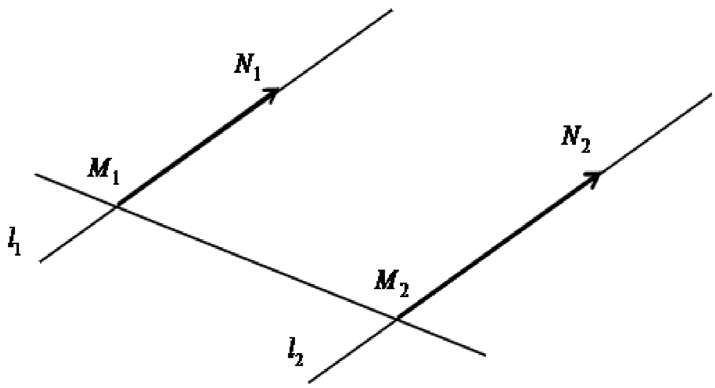
MN кесманинг $|MN|$ узунлигини, шунингдек $\vec{MN}$ векторнинг $\left|\vec{MN}\right|$ узунлиги деб аталади. Узунлиги нолга тенг бўлган вектор нол вектор деб аталади.

Агар $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар бир хил йўналган бўлса, у ҳолда $\vec{M_1N_1} \to$ ва $\vec{M_2N_2} \to$ нолмас векторлар бир хил йўналган векторлар деб аталади. $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурларнинг бир хил йўналган бўлиши эса ўз навбатида қуйидагиларни англатади. Бунда ё:

1) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар битта тўғри чизиқда ётади ва $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар нур буйича кесишади **(1-расм)**.

1-расм.

2) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқларда ётади ва $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар эса l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда M_1M_2 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади **(2-расм).**



2-расм.

4.1-эслатма. 3.3-жумладан $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар M_1M_2 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади, факат ва факат ва ҳолда, қачонки $N_1^1 \in M_1N_1 \to$ ва $N_2^1 \in M_2N_2 \to$ қандайдир нуқталар жуфтлиги учун $N_1^1N_2^1$ кесма M_1M_2 тўғри чизиқ билан кесишмаса, деган тасдиқ келиб чикади.

Агар икки шарт:

а) $\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right| = \left|\overrightarrow{M_2N_2}\right|$;

ва ($\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right| \neq 0$ бўлган ҳолда)

б) $\overrightarrow{M_1N_1}$ ва $\overrightarrow{M_2N_2}$ бир хил йўналган;

бажарилса, у ҳолда $\overrightarrow{M_1N_1}$ ва $\overrightarrow{M_2N_2}$ векторлар тенг деб аталади ва $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$ каби ёзилади.

4.2-жумла. Ихтиёрий $\overrightarrow{MN}$ вектор учун ва ихтиёрий M_1 нуқта учун шундай ягона N_1 нуқта мавжудки, бунда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1}$ бўлади.

Исбот. M_1 нуқта MN тўғри чизиқда ётмаган ҳолни кўриб чиқайлик. Унда N_1 нуқта M_1 нуқта орқали ўтувчи ва MN тўғри чизиққа параллел бўлган l тўғри чизиқда ётиши керак. Шундай l тўғри чизиқ мавжуд ва Евклиднинг V постулатига кўра ягонадир.

M, N, M_1 нуқталар орқали ўтувчи π текисликни қараймиз. MM_1 тўғри чизиқ π текисликни иккита π^- ва π^+ ярим текисликларга ажратади. Фараз қилайлик, N нуқта π^+ ярим текисликда ётсин. Унда N_1 нуқта ҳам π^+ ярим текисликда ётиши керак. Демак, N_1 нуқта $l \bigcap \pi^+$ тўпламга тегишли бўлиши керак, яъни 3.3-жумлага мувофиқ, бошланғич нуқтаси M_1 бўлган ярим тўғри чизиққа тегишлидир. Аммо, 2.11-жумлага мувофиқ, бу ярим тўғри чизиқда M_1 нуқтадан $d = \left|\overrightarrow{MN}\right|$ масофада жойлашган фақат битта ягона N_1 нуқта мавжуд.

Энди M_1 нуқта MN тўғри чизиқда ётган бўлсин. Боши M_1 нуқтада бўлган $MN \rightarrow$ нур билан нур бўйича кесишувчи нурни оламиз. Аммо яна 2.11-жумлага мувофиқ, бу нурнинг ярим тўғри чизиғида M_1 нуқтадан $d = \left|\overrightarrow{MN}\right|$ масофада жойлашган фақат битта ягона N_1 нуқта мавжуд.

Энди $\overrightarrow{MN}$ нол вектор бўлса, у ҳолда унинг узунлиги $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 0$, яъни M нуқта N нуқта билан устма-уст тушади. Демак, бу ҳолда N_1 нуқта сифатида M_1 нуқтанинг ўзини оламиз. 4.2-жумла исботланди.

4.3-жумла. Барча нурлар тўпламида бир хил йўналганлик муносабати эквивалентлик муносати бўлади.

Исбот. Нурларнинг бир хил йўналганлик муносабатини ~ символ билан белгилаймиз. Унда $(MN\to)\cap(MN\to)=MN\to$ бўлганидан $MN\to$ ~ $MN\to$, яъни бир хил йўналганлик муносабати рефлексивдир.

$M_1N_1\to\sim M_2N_2\to$ бўлса, ёки:

1) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар битта тўғри чизиқда ётади ва $M_1N_1\to$ ва $M_2N_2\to$ нурлар нур буйича кесишади, ёки

2) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқларда ётади ва $M_1N_1\to$ ва $M_2N_2\to$ нурлар эса l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда M_1M_2 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади;

ёки:

1) M_2N_2 ва M_1N_1 кесмалар битта тўғри чизиқда ётади ва $M_2N_2\to$ ва $M_1N_1\to$ нурлар нур буйича кесишади, ёки

2) M_2N_2 ва M_1N_1 кесмалар l_2 ва l_1 параллел тўғри чизиқларда ётади ва $M_2N_2\to$ ва $M_1N_1\to$ нурлар эса l_2 ва l_1 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда M_2M_1 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади, яъни $M_2N_2\to\sim M_1N_1\to$ ва бир хил йўналганлик муносабати симметрикдир.

Энди фақат транзитивлик аксиомасини текшириш қолди. $M_1N_1\to\sim M_2N_2\to$ ва $M_2N_2\to\sim M_3N_3\to$ бўлсин. l_i орқали $M_iN_i\to$ нур ётган тўғри чизиқни белгилаймиз, бу ерда $i=1,2,3$. Аввал l_1,l_2,l_3 тўғри чизиқлар битта текисликда ётмаган бўлсин деб фараз қиламиз. M_1, M_2, M_3 нуқталар орқали π текисликни ўтказамиз. У E фазони иккита E^- ва E^+ ярим фазоларга ажратади. Нурларнинг бир хил йўналганлик таърифига мувофиқ, l_1,l_2,l_3 тўғри чизиқлар жуфт-жуфт бўлиб (ихтиёрий иккитаси) параллелдир.

$M_1N_1\to\sim M_2N_2\to\Rightarrow l_1\parallel l_2$, $M_2N_2\to\sim M_3N_3\to\Rightarrow l_2\parallel l_3$ ва

$l_1\parallel l_2\wedge l_2\parallel l_3\Rightarrow l_1\parallel l_3$.

l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликни π_{12} орқали белгилаймиз. N_1N_2 кесма $M_1N_1\to$ ва $M_2N_2\to$ нурларнинг бир хил йўналганлиги туфайли M_1 ва M_2 нуқталардан ўтувчи $l_{12}=\pi\cap\pi_{12}$ тўғри чизиқни кесмайди. Демак, N_1N_2 кесма π текислик билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$N_1N_2\cap\pi=(N_1N_2\cap\pi_{12})\cap\pi=N_1N_2\cap(\pi_{12}\cap\pi)=N_1N_2\cap\ell_{12}=\varnothing.$$

Шундай қилиб, N_1N_2 кесма ярим фазоларнинг бирида, масалан E^+ да ётади. Худди шундай N_2N_3 кесма, $M_2N_2\rightarrow$ ва $M_3N_3\rightarrow$ нурларнинг бир хил йўналганлиги туфайли M_2 ва M_3 нуқталардан ўтувчи $l_{23}=\pi\cap\pi_{23}$ тўғри чизиқни кесмайди. Демак, N_2N_3 кесма π текислик билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам, $N_2N_3\cap\pi=(N_2N_3\cap\pi_{23})\cap\pi=N_2N_3\cap(\pi_{23}\cap\pi)=N_2N_3\cap l_{23}=\varnothing$.

Шундай килиб N_2N_3 кесма E^- ва E^+ ярим фазоларнинг бирида ётади. Аммо, $N_1N_3\subset E^+$ бўлганидан $N_1,N_2\in E^+$ бўлади. Агар $N_2N_3\subset E^-$ бўлса, у ҳолда $N_2,N_3\in E^-$ бўлади. Демак, $N_2\in E^+$ ва $N_2\in E^-$ бўлиб, $E^+\bigcap E^-=\varnothing$ бўлади. Зиддият ҳосил бўлди. Шундай қилиб, $N_2N_3\subset E^+$ ёки $N_2,N_3\in E^+$ бўлади. $N_1,N_2\in E^+$ ва $N_2,N_3\in E^+$ $\Rightarrow$ $N_1,N_3\in E^+\Rightarrow$ $N_1N_3\in E^+$.Демак, $N_1N_3\subset E^+$.

Бу ердан l_1 ва l_3 тўғри чизиқларни ўз ичига олувчи текисликни π_{13} орқали белгилаб, $N_1N_3\subset E^+\cap\pi_{13}$ ҳосил қиламиз.

Аммо $E^+\cap\pi_{13}$ тўплам 3.6-жумлага мувофиқ M_1 ва M_3 нуқталар орқали ўтувчи l_{13} тўғри чизиқ билан чегараланган π_{13}^+ ярим текислик бўлади. Шундай қилиб, N_1N_3 кесма l_{13} тўғри чизиқ билан кесишмайди, бундан 4.1-натижага кўра $M_1N_1\rightarrow$ ва $M_3N_3\rightarrow$ нурларнинг бир хил йўналганлигини ҳосил қиламиз.

Энди турли l_1,l_2,l_3 тўғри чизиқлар битта π текисликда ётсин. π текисликка тегишли бўлмаган M нуқтани оламиз. 4.2-жумлага мувофиқ, шундай N нуқта мавжудки, бунда $MN\rightarrow\sim M_2N_2\rightarrow$. Унда $M_1N_1\rightarrow$, $M_2N_2\rightarrow$, $MN\rightarrow$ ва $MN\rightarrow$, $M_2N_2\rightarrow$, $M_3N_3\rightarrow$ учлик нурлар юқорида қаралган ҳолни қаноатлантиради. Демак, $M_1N_1 \to \sim MN \to$, $MN \to \sim M_3N_3 \to$, $M_1N_1 \to$, $MN \to$, $M_3N_3 \to$ нурлар ҳам бир текисликда ётмайди. Демак, $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.

Энди $l_2 = l_3$ бўлсин. $M_2N_2 \to$, $M_3N_3 \to$ нурлардан бири иккинчисини ўз ичига олади. Фараз қилайлик, $M_2N_2 \to \supset M_3N_3 \to$ бўлсин.

M_1 ва M_2 нуқталар π текисликни π_{12}^- ва π_{12}^+ ярим текисликларга ажратувчи l_{12} тўғри чизиққа тегишли бўлсин. Худди шундай, M_1 ва M_3 нуқталар π текисликни π_{13}^- ва π_{13}^+ ярим текисликларга ажратувчи l_{13} чизиққа тегишли бўлсин. Бунда $N_1 \in \pi_{13}^+$ деб фараз қиламиз. $M_2\,M_3$ кесмада M ички нуқтани орқали l_{12} тўғри чизиққа параллел қилиб, l тўғри чизиқни ўтказамиз. $(M_1N_1 \to)$ ва $(M_2N_2 \to)$ ярим тўғри чизиқлар π_{12}^+ ярим текисликда ётганидан l тўғри чизиқ $(M_1N_1 \to)$ ярим тўғри чизиқни бирорта N нуқтада кесади. l тўғри чизиқ $M_1M_2M_3$ учбурчакнинг M_2M_3 томонини кесиб, Паш аксиомасига мувофиқ, унинг иккинчи томонини ҳам кесиши керак. l ва l_{12} ларнинг параллеллиги туфайли, бу томон фақат M_1M_3 бўлиши мумкин. Демак, l тўғри чизиқ M_1M_3 кесмани кесади. M_1M_3 кесма l_1 ва l_3 тўғри чизиқлар орасида ётганидан, у ҳолда l тўғри чизиқнинг фақат шундай қисми билан l_1 ва l_3 тўғри чизиқлар орасидаги қисми, яъни MN кесма билан кесишиши мумкин. Демак, MN кесма l_{13} тўғри чизиқ билан кесишади. Шунинг учун M ва N нуқталар бу тўғри чизиқ билан чегараланган ҳар хил ярим текисликларда ётади. Аммо, N нуқта $(M_1N_1 \to)$ ярим тўғри чизиққа тегишли. Биз $N_1 \in \pi_{13}^+$ деб, фараз қилган эдик. Демак, $N \in \pi_{13}^+$ ва $M \in \pi_{13}^-$. Унда (M_3MM_2) дан $M_2 \in \pi_{13}^-$ бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун $(M_2M_3N_3)$ дан $N_3 \in \pi_{13}^+$ ни ҳосил қиламиз. Демак, N ва N_3 нуқталар битта π_{13}^+ ярим текисликка тегишлидир ва $l_{13} \cap NN_3 = \varnothing$. Демак, $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.

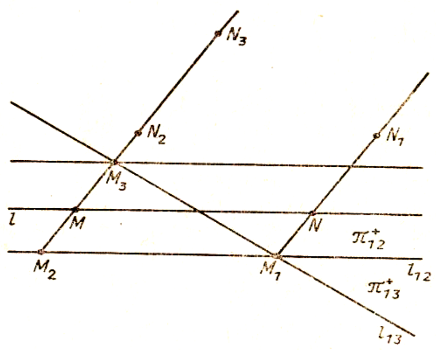
Шундай қилиб, бир хил йуналган нурларни камайтириб, яна бир хил йуналган нурларни ҳосил қиламиз. Бу ердан тўлдирувчи нурларга ўтиб, яъни бир хил йуналган нурларни орттириб яна бир хил йуналган нурларга келамиз. Демак, $l_2 = l_3$ ҳол ва унга ўхшаш $l_1 = l_2$ ҳол тўлиқ ҳал қилинди, бунинг тўлиқ тафсилоти қуйидагичадир.

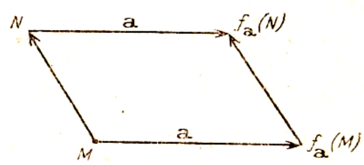
Энди $M_3N_3 \to \supset M_2N_2 \to$ бўлсин. $M_1N_1 \to \sim M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to \sim M_3N_3 \to$. Унда $M_3N_3^1 \to \subset M_2N_2^1 \to$, $M_1N_1^1 \to \sim M_2N_2^1 \to$ ва $M_2N_2^1 \to \sim M_3N_3^1 \to$.

Унда юқоридаги исботга кўра, $M_1N_1^{'} \to \sim M_3N_3^{'} \to$. Бундан эса $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $l_1 = l_2$ бўлса, $M_1N_1 \to \supset M_2N_2 \to \quad \Rightarrow M_2N_2 \to \supset M_1N_1 \to$ $\Rightarrow M_1N_1 \to \sim M_2N_2 \to \;\Rightarrow\; M_2N_2 \to \sim M_3N_3 \to$.

Унда $M_3N_3 \to \sim M_2N_2 \to$, $M_2N_2 \to \sim M_1N_1 \to$. Юқоридаги исботга кўра, $M_3N_3 \to \sim M_1N_1 \to$, бундан эса, $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.





3-расм. **4-расм.**

Энди $l_1 = l_3$ бўлсин. Фараз қилайлик, $M_1N_1 \to$ ва $M_3N_3 \to$ нурлар ҳар хил томонларга йўналган бўлсин.

$N_3^1 \in l_3$ нуқтани шундай танлаймизки, бунда M_3 нуқта N_3 билан N_3^1 нуқта орасида ётсин. Унда $M_3N_3^1 \to$ ва $M_1N_1 \to$ нурлар бир хил йўналгандир. Бу эса $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурларнинг бир хил йўналганлиги билан биргаликда ҳал қилинган ҳолга мувофиқ, $M_3N_3^1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурларнинг бир хил йўналган бўлишини беради, бу эса $M_2N_2 \to$ ва $M_3N_3 \to$

нурларнинг бир хил йўналган бўлишига зиддир. Демак, фараз нотўғри, яъни $M_1N_1 \to$ ва $M_3N_3 \to$ нурлар бир хил йўналгандир.

Ниҳоят, учта нурнинг ҳаммаси битта тўғри чизиқда ётган ҳолни, ҳал этилган иккита тўғри чизиқдаги ҳол, шунингдек, битта текисликда ётган учта бир хил тўғри чизиқли ҳолга фазога чиққан ҳолга келтириш мумкин. Аммо, яна ҳам соддаси текисликка чиқмасдан 2.10–жумладан фойдаланишдир. $M_1N_1 \to \sim M_2N_2 \to$ бўлса, у ҳолда 2.10-жумлага мувофиқ улардан бири иккинчисини ўз ичига олади.

Агар $M_1N_1 \to \subset M_2N_2 \to$ бўлса, у ҳолда $M_2N_2 \to \subset M_3N_3 \to$ ёки $M_2N_2 \to \supset M_3N_3 \to$ бўлади. $M_1N_1 \to \subset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to \subset M_3N_3 \to$ дан $M_1N_1 \to \subset M_3N_3 \to$ бўлиши келиб чиқади, яъни $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.

Агар $M_1N_1 \to \subset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to \supset M_3N_3 \to$ бўлса, $M_1N_1^1 \to \supset M_2N_2^1 \to$ ва $M_2N_2^1 \to \subset M_3N_3^1 \to \Rightarrow M_1N_1^1 \to \bigcap M_3N_3^1 \to \supset M_2N_2^1 \to \Rightarrow M_1N_1^1 \to \sim M_3N_3^1 \to \Rightarrow$

$M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.

Агар $M_1N_1 \to \supset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to \supset M_3N_3 \to \Rightarrow M_1N_1 \to \supset M_3N_3 \to$, яъни $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.

Агар $M_1N_1 \to \supset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to \subset M_3N_3 \to \Rightarrow M_1N_1 \to \supset M_2N_2 \to$ ва $M_3N_3 \to \supset M_2N_2 \to \Rightarrow M_1N_1 \to \bigcap M_3N_3 \to \supset M_2N_2 \to \Rightarrow M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.

4.3 жумла тўлиқ исботланди. Ундан қуйидаги жумла бевосита келиб чиқади.

4.4 жумла. Барча векторлар тўпламида векторларнинг тенглик муносабати эквивалентлик муносабати бўлади.

Тенг векторлар синфини эркин векторлар ёки оддийгина вектор деб аталади. Бундан буён “эркин” сўзини одатда тушириб қолдирамиз ва $\overrightarrow{MN}$ вектор деганда, MN йўналган кесмани ёки $\overrightarrow{MN}$ вектор билан аниқланган $\vec{a}$ эркин векторни, яъни $\overrightarrow{MN}$ векторга тенг бўлган барча векторлардан ташкил топган эквивалентлик синфни тушунамиз. Шунинг учун $\overrightarrow{MN} \in \vec{a}$

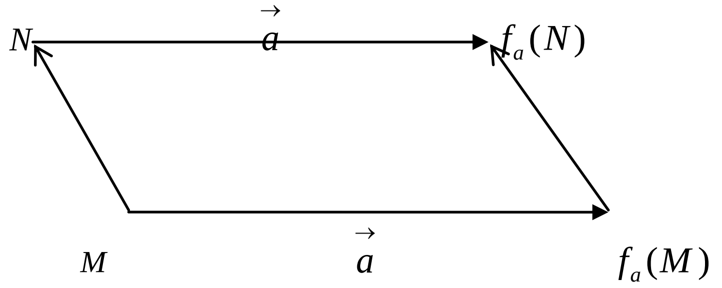
аниқ тасдиқ билан бирга ноформаль $\vec{MN}=\vec{a}$ тенглик ҳам қўлланилади. Узунлиги нолга тенг бўлган векторлар, нол векторлар деб аталувчи эквивалент синфни ҳосил қилади ва $\vec{0}$ каби белгиланади. Ихтиёрий M нуқта учун $\vec{MM}=\vec{0}$ га эга бўламиз. “$\vec{a}$ векторни M нуқтадан қўйиш” ёки “$\vec{a}$ векторни M нуқтага қўйиш” иборалари “4.2 жумлага асосан мавжуд $\vec{MN}=\vec{a}$ векторни олиш”ни англатади.

4.5 эслатма. Биз эркин векторнинг фазодаги таърифини бердик. Шундай таърифни текислик ёки ҳаттоки тўғри чизиқ чегарасида қолиб ҳам бериш мумкин. Шу билан бирга, 4.4 жумладан “фазодаги барча векторлар тўплами”ни ёки “текисликдаги барча векторлар тўплами”га ёки “тўғри чизиқдаги барча векторлар тўплами”га алмаштирилгандаги модификацияси келиб чиқади. Бу ерда ҳам текисликдаги бир хил йўналган векторларнинг транзитивлигини текширишда фазога чиқишдан саросимага тушмаслик керак. Фақат 1.3 жумлани эслаш керак.

Вектор параллел кўчириш сифатида

Ихтиёрий $\vec{a}$ векторни оламиз. M нуқтага M нуқтадан қўйилган $\vec{a}$ векторнинг охирини мос қўювчи $f_a : E \to E$ акс эттириш, бу ерда N 4.2-жумлага мувофиқ ягона, $f_a(M)=N$ ни аниқлаймиз.

Бу акс эттириш қуйидаги асосий хоссага эга: ихтиёрий M ва N нуқталар учун $\vec{MN}=\overrightarrow{f_a(M)\,f_a(N)}$.



Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик, M , N ва $f_a(M)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётмасин. Унда $MNf_a(N)f_a(M)$ тўртбурчакда $Mf_a(M)$ ва $Nf_a(N)$ қарама- қарши томонлар тенг ва параллелдир. Демак, бу тўртбурчак параллелограммдир. Унда N ва $f_a(N)$ нуқталар $Mf_a(M)$ тўғри чизиқнинг бир томонда ётишини эътиборга олиб, $\vec{MN} = \overline{f_a(M)f_a(N)}$ зарурий тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди M , N ва $f_a(M)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётган ҳолни қарайлик. Бу тўғри чизиқда ётмаган бирорта P нуқтани оламиз. Олдинги ҳолга мувофиқ $\vec{MP} = \overline{f_a(M)f_a(P)} \Rightarrow |MP| = |M^1P^1|$ ва $\vec{PN} = \overline{f_a(P)f_a(N)} \Rightarrow |PN| = |P^1N^1|$.

$\angle NMP = \angle N^1M^1P^1$ ва $\angle MNP = \angle M^1N^1P^1$. Чунки, икки параллел тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесишганда мос бурчаклар тенг. Демак, $\angle MPN = \angle M^1P^1N^1$, бундан $\Delta MPN = \Delta M^1P^1N^1$ келиб чиқади. Бундан эса $MN = M^1N^1$ бундан ташқари $MN \rightarrow \sim M^1N^1 \rightarrow$. Демак, $\vec{MN} = \vec{M^1N^1}$ ёки $\vec{MN} = \overline{f_a(M)f_a(N)}$.

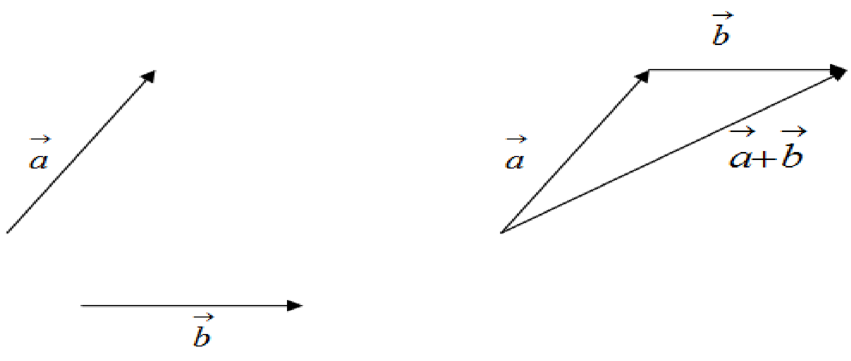
Энди, аксинча, ихтиёрий M ва N нуқталар учун $\vec{MN} = \overline{f(M)f(N)}$ хоссага эга бўлган $f: E \rightarrow E$ акслантириш берилган бўлсин. Унда шундай ягона $\vec{a}$ вектор мавжудки, бунда $f = f_a$. Ҳақиқатан ҳам, M ва $f(M)$ нуқталарнинг тартибланган жуфтлиги ягона $\vec{a} = \overline{Mf(M)}$ векторни аниқлашидан шундай векторнинг ягоналиги келиб чиқади.

Мавжудлиги. O нуқтани танлаймиз ва $\vec{a} = \overline{Of(O)}$ деб, фараз қиламиз. $f = f_a$ тенгликнинг бажарилиши учун ихтиёрий M нуқта учун $\overline{Mf(M)} = \overline{Of(O)}$ тенгликнинг бажарилишини текшириш керак. Бу $\vec{OM} = \overline{f(O)f(M)}$ тенгликка, шунингдек юқорида исботланган

$\overline{Mf_a(M)} = \overline{Nf_a(N)}$ тенгликдан келтириб чиқарилган $\vec{MN} = \overline{f_a(M) f_a(N)}$ тенгликка таяниб ҳосил қилинади. $\vec{OM} = \overline{f(O) f(M)} \Rightarrow \overline{Of(O)} = \overline{Mf(M)}$ ва $\vec{a} = \overline{Of(O)}$ бўлганидан ихтиёрий M нуқта учун $\overline{Mf(M)} = \vec{a}$, яъни $f: E \to E$ шундай акс эттиришки, бунда ихтиёрий $M \in E$ нуқта учун $f(M) = N$ бўлса $\vec{MN} = \overline{Mf(M)} = \vec{a}$. Демак, векторни бу векторга параллел кўчириш билан айнан бир нарса деб қараш мумкин.

5§. ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ ВА ВЕКТОРЛАРНИ СОНГА КЎПАЙТИРИШ

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндисини қуйидагича аниқлаймиз. $\vec{a}$ векторни қандайдир M нуқтага қўямиз. N бу векторнинг охири бўлсин, яъни $\vec{a} = \vec{MN}$. Кейин $\vec{b}$ векторни N нуқтага қўямиз. P бу векторнинг охири бўлсин, яъни $\vec{b} = \vec{NP}$. Энди $\vec{a} + \vec{b}$ ни $\vec{MP}$ векторни ўзининг вақили сифатида ўз ичига олган эркин векторга тенг деб фараз қиламиз, яъни $\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$ **(5-расм).**



5-расм

Бу таърифнинг тўғрилигини, яъни M нуқтанинг танланишига натижанинг боғлиқ эмаслигини текширамиз. $\overline{M_1N_1} \in \vec{a}$ ва $\overline{N_1P_1} \in \vec{b}$ учун $\vec{MP} = \overline{M_1P_1}$ бўлишини кўрсатамиз. $\vec{c} = \overline{MM_1}$ векторга мос $f: E \to E$ параллел кўчиришни қараймиз. У ҳолда, $\vec{MN}=\overline{f(M)f(N)}$. Аммо, $f(M)=M_1$ ва $c=\overline{MM_1}=\overline{NN_1}$. Демак, $f(N)=N_1$. Худди шундай, $\vec{NP}=\overline{f(N)f(P)}$ ва $\vec{c}=\overline{NN_1}=\overline{PP_1}$. Демак, $f(P)=P_1$. Шундай қилиб, $\vec{MP}=\overline{f(M)f(P)}=\overline{M_1P_1}$. Мана шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

$\vec{a}$ векторнинг α ҳақиқий сонга кўпайтмасини қуйидагича аниқлаймиз. $\vec{MN}=\vec{a}$ векторни оламиз ва $\alpha\vec{a}$ вектор $\vec{MP}$ векторни ўз ичига олувчи ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи эркин векторга тенг бўлади:

а) $\vec{MP}$ вектор MN тўғри чизиқда ётади;

б) агар $\alpha>0$ бўлса, $\vec{MP}$ вектор $\vec{MN}$ вектор билан бир хил йўналган, агар $\alpha<0$ бўлса, бошқа томонга йўналган бўлади;

в) $\left|\vec{MP}\right|=|\alpha|\left|\vec{MN}\right|$.

$\vec{MP}$ вектор бу шартлар орқали бир қийматли аниқланишини кўриш осон. Векторнинг сонга кўпайтириш амалининг тўғрилигини текшириш векторларни қўшиш амали учун қандай текширилган бўлса, худди шундай амалга оширилади.

5.1 теорема. Векторларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (қўшишнинг коммутативлиги);

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (қўшишнинг ассоциативлиги);

3) шундай $\vec{\theta}$ мавжудки (нол вектор деб аталувчи), бунда $\vec{a}+\vec{\theta}=\vec{a}$;

4) ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $-\vec{a}$ вектор мавжудки, ($\vec{a}$ векторга қарама-қарши вектор деб аталувчи), бунда $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{\theta}$ бўлади;

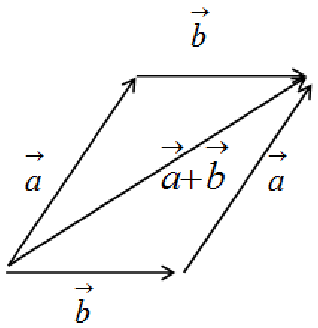
5) ихтиёрий α,β сонлар ва ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;

6) ихтиёрий α, β сонлар ва ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

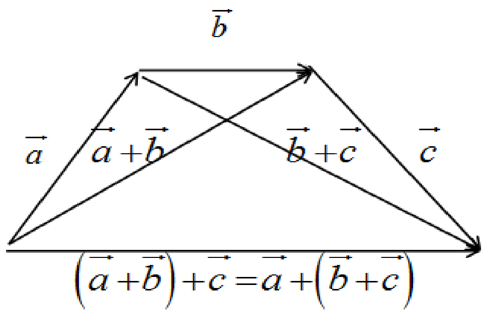
7) ихтиёрий α сон учун ва ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$;

8) ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Исбот. Қўшишнинг коммутативлиги ва ассоциативлиги 6- ва 7-расмларда иллюстрация қилинган.



6-расм.



7-расм.

1) $\left.\begin{array}{l}\vec{AC}\in\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{AC}\in\vec{b}+\vec{a}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2) $\left.\begin{array}{l}\vec{AD}\in\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}\\ \vec{AD}\in\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

1) ва 2) хоссалар исботланди.

A нуқтага $\vec{a}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{AB}\in\vec{a}$. B нуқтага $\vec{\theta}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{BB}\in\vec{\theta}$, унда $\vec{AB}+\vec{BB}=\vec{AB}\in\vec{a}+\vec{\theta}$ бўлиб, $\vec{AB}\in\vec{a}+\vec{\theta}$, $\vec{AB}\in\vec{a}\Rightarrow\vec{a}+\vec{\theta}=\vec{a}$.

Демак, 3) хосса ҳам исботланди.

Агар $\vec{MN} \in \vec{a}$ бўлса, $\vec{NM} \in -\vec{a}$ бўлади. Унда $\vec{a}+(-\vec{a}) \in \vec{MN}+ \vec{NM} = \vec{MM} \in \vec{\theta}$.

Демак, $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{\theta}$. 4) хосса ҳам исботланди.

Энди 5) хоссани исботлаймиз:

а) $\alpha\beta > 0$ ва б) $\alpha\beta < 0$ иккита ҳолларни қараймиз. Фараз қилайлик, $\alpha\beta > 0$ бўлсин. Бирорта A нуқтадан $\alpha\vec{a}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{AB} \in \alpha\vec{a}$. B нуқтадан эса $\beta\vec{a}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{BC} \in \beta\vec{a}$. Бундан $\left|\vec{AB}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{BC}\right| = |\beta|\left|\vec{a}\right|$. $\alpha\beta > 0$ бўлгани учун $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{AC}$. Шунинг учун B нуқта A ва C нуқталар орасида ётади. Демак, $|AC| = |AB| + |BC|$ ёки $\left|\vec{AC}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right| + |\beta|\left|\vec{a}\right|$. Аммо α ва β сонлар бир хил ишорага эга бўлганидан $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$ бўлади. Шундай қилиб, $\left|\vec{AC}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right| + |\beta|\left|\vec{a}\right| = \left(|\alpha| + |\beta|\right)\left|\vec{a}\right| = |\alpha + \beta|\left|\vec{a}\right|$.

Агар $\alpha > 0$, $\beta > 0$, яъни $\alpha + \beta > 0$ бўлса, $\vec{AC} \uparrow\uparrow \vec{a}$ ва агар $\alpha > 0$, $\beta > 0$, яъни $\alpha + \beta < 0$ бўлса, $\vec{AC} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Бундан эса, $\vec{AC} = (\alpha + \beta)\vec{a}$. Иккинчи томондан $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Шундай қилиб, $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

б) $\alpha\beta < 0$ бўлсин. Агар $\alpha + \beta = 0$ (яъни $\alpha = -\beta$) бўлса, у ҳолда $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ тенгликнинг чап томони нол вектордир. Бу ҳолда ўнг томони ҳам нол вектор эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \left(-\left(\alpha\vec{a}\right)\right) = \vec{\theta}$.

$\alpha + \beta \neq 0$ ҳолни қараймиз. α ва β ҳар хил ишорали бўлганидан $-\alpha$, $\alpha + \beta$ ёки $-\beta$, $\alpha + \beta$ бир хил ишорага эгадир.

Агар $(-\alpha)(\alpha + \beta) > 0$ бўлса, $(-\alpha)\vec{a} + (\alpha + \beta)\vec{a} = \left((-\alpha) + (\alpha + \beta)\right)\vec{a} = \beta\vec{a}$.

Агар $(-\beta)(\alpha+\beta)>0$ бўлса, $(-\beta)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{a}=((-\beta)+(\alpha+\beta))\vec{a}=\alpha\vec{a}$.

Икки ҳолда ҳам $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ёки $\beta=0$ бўлган ҳолда тенглик осонгина текширилади.

6) хоссани исботлаш учун $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ ва $(\alpha\beta)\vec{a}$ векторларнинг узунликлари тенг ва бир хил йўналган бўлишини ўрнатиш керак.

1. $\left|\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\right|=|\alpha|\left|\beta\vec{a}\right|=|\alpha||\beta|\left|\vec{a}\right|=|\alpha\beta|\left|\vec{a}\right|=\left|(\alpha\beta)\vec{a}\right|$. $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\vec{a}\neq\vec{\theta}$ деб фараз қиламиз, акс ҳолда $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=(\alpha\beta)\vec{a}$ тенгликнинг иккала томони ҳам $\vec{\theta}$ вектордир.

1) $\alpha>0$ ва $\beta>0$ бўлсин. У ҳолда $\alpha\beta>0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$ бўлади. $\vec{a}\uparrow\uparrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

2) $\alpha<0$ ва $\beta>0$ бўлсин. У ҳолда $\alpha\beta<0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\downarrow(\alpha\beta)\vec{a}$. $\vec{a}\uparrow\uparrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

3) $\alpha>0$ ва $\beta<0$ бўлсин. У ҳолда, $\alpha\beta<0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\downarrow(\alpha\beta)\vec{a}$. $\vec{a}\uparrow\downarrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

4) $\alpha<0$ ва $\beta<0$ бўлсин. У ҳолда $\alpha\beta>0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$. $\vec{a}\uparrow\downarrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Шунинг учун, $\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

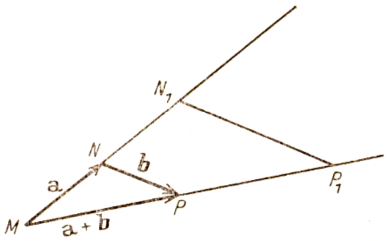
6) хосса тўлиқ исботланди.

8) хоссада $\vec{a}$ векторни 1 сонига кўпайтирилганда, йўналиши ҳам, узунлиги ҳам ўзгармайди. Демак, $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

7) хоссани исботлаймиз. $\vec{a}=\vec{MN}$ бўлсин. N нуқтадан $\vec{b}=\vec{NP}$ векторни қўямиз. Унда $\vec{a}+\vec{b}=\vec{MP}$ бўлади. MN тўғри чизиққа $\vec{MN_1}=\alpha\vec{a}$ векторни қўямиз ва N_1 нуқта орқали NP тўғри чизиққа параллел қилиб, MP тўғри чизиқ билан P_1 нуқтада кесишадиган тўғри чизиқни ўтказамиз **(8-расм)**. Умумий M учга ва N ва N_1 учларга тенг жуфт бурчакларга эга бўлган MNP ва MN_1P_1 учбурчаклар ўхшашдир. Демак,

$$\alpha=\frac{|MN_1|}{|MN|}=\frac{|MP_1|}{|MP|}=\frac{|N_1P_1|}{|NP|}.$$

Бундан эса $\overrightarrow{N_1P_1}=\alpha\vec{b}$ ва $\overrightarrow{MP_1}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ ни ҳосил қиламиз. Натижада ушбу $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\overrightarrow{MP_1}=\overrightarrow{MN_1}+\overrightarrow{N_1P_1}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ тенгликка эга бўламиз.



8-расм

5.1 теорема тўлиқ исботланди.

5.2 эслатма. Ўхшаш учбурчаклар ҳақидаги теореманинг қатъий исботи бурчак томонларини параллел тўғри чизиқлар билан кесилганда кесмаларнинг пропорционаллиги ҳақидаги теоремага таянади (бизнинг белгилашларда $\frac{|MN_1|}{|MN|}=\frac{|MP_1|}{|MP|}$). Охирги йилларда мактаб геометрия курсида бу теорема исботланмайди. Унинг исботи Фалес теоремасидан осонгина келтирилиб чиқарилади:

“Агар бурчак томонларини кесувчи параллел тўғри чизиқлар бурчак томонларининг бирида тенг кесмалар ажратса, у ҳолда бурчакнинг иккинчи томонида ҳам тенг кесмалар ажратади.”

5.3 эслатма. Модификация қилинган (шакли ўзгартирилган) Эвклид аксиоматикасига таяниб биз векторни таърифладик ва 1)–8) хоссаларни текширдик. Бу хоссаларни векторлар фазосининг аксиомалари сифатида олиш мумкин ва бу аксиомалардан келиб чиқиб (аксиомаларга асосланиб) геометрияни қуриш мумкин.

5.4 таъриф. V-элементлари векторлар деб аталган, уларнинг табиати ихтиёрий бўлган бирор тўплам ва K бирор майдон бўлсин (китобхон ҳозирча бунда K ни R барча ҳақиқий сонлар тўплами деб ҳисоблаш мумкин). Фараз қилайлик, $\vec{a},\vec{b}\in V$ бўлган ихтиёрий иккита $\vec{a},\vec{b}$ векторлар учун $\vec{a}+\vec{b}$ символ билан белгиланувчи ҳамда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси деб аталувчи учинчи вектор аниқланган бўлсин. Бундан ташқари, фараз қилайлик, ихтиёрий $\alpha\in R$ сон учун ва ихтиёрий $\vec{a}\in V$ вектор учун $\alpha\vec{a}$ символ билан белгиланувчи ҳамда $\vec{a}$ векторнинг α сонга кўпайтмаси деб аталувчи вектор аниқланган бўлсин. Агарда шу билан бирга (5.1 теоремадаги) 1) – 8) хоссалар бажарилса, у ҳолда V тўпламни K майдон устидаги вектор (ёки чизиқли) фазо деб аталади. 1) – 8) хоссаларни вектор (чизиқли) фазонинг аксиомалари деб аталади.

5.1 теоремани шундай қайта ифодалаш мумкин:

Эвклид фазода барча эркин векторлар тўплами ҳақиқий сонлар майдони устидаги вектор фазони ташкил этади.

Битта элемент нол вектордан ташкил топган V тўплам ихтиёрий K майдон устидаги бошқа (содда) вектор фазога мисол бўлади.

Қуйида яна вектор фазонинг баъзи мисоллари билан танишамиз.

5.5 эслатма. Фазода йўналган кесмаларни қараб векторларни сонга кўпайтириш амалларини таърифладик. Аммо биз текисликдаги ёки тўғри чизиқдаги векторлар билан чегараланиш мумкинлигини юқорида (4.5-эслатма) қайд қилган эдик. Векторларни қўшиш ва векторларни сонга кўпайтириш амаллари берилган текислик (ёки берилган тўғри чизиқ) чегарасидан ташқарига чиқармайди. Шунингдек, қаралаётган “кичиклаштирилган” векторлар тўпламида бу амаллар учун 1)–8) хоссалар ўринли бўлаверади. Шундай қилиб, тўғри чизиқдаги, текисликдаги, фазодаги эркин векторлар тўплами векторларни қўшиш ҳамда векторларни сонга кўпайтириш амаллари билан ҳақиқий сонлар майдони устида вектор фазо ташкил этади. Мос равишда уларни $Vect(1)$, $Vect(2)$, $Vect(3)$ орқали белгилаймиз.

6§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚДА ВЕКТОРЛАР

Нурларнинг бир хил йўналганлик таърифидан, 2.9 ва 2.10 жумлалардан тўғри чизиқда нурларнинг фақат иккита йўналиши борлиги келиб чиқади. Шунинг учун, векторларнинг икки йўналиши борлиги келиб чиқади. Демак, тўғри чизиқдаги барча нолмас векторлар бир хил йўналган векторлардан ташкил топган иккита эквивалент синфларга ажралади. Бу синфлардан биридаги векторларни мусбат йўналган деб эълон қилиб, тўғри чизиқда мусбат йўналишни киритамиз (агар $\overrightarrow{MN}$ вектор мусбат йўналган бўлса, у ҳолда M нуқтадан N нуқтага қараб қилинган ҳаракат йўналиши мусбатдир). Шундай қилиб тўғри чизиқда ориентация берган бўламиз. l тўғри чизиқни унда танланган нолмас $\vec{e}$ вектор билан биргаликда $\left(l, \vec{e}\right)$ ўқ деб атаймиз. Ўқда мусбат йўналиш $\vec{e}$ вектор билан аниқланади. $\left(l, \vec{e}\right)$ ўқда ҳар қайси $\vec{a}$ вектор $\vec{a} = \alpha \vec{e}$ кўринишда бир қийматли ёзилиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{e}$ векторни бирор $O \in l$ нуқтадан бошлаб қўямиз. $\vec{e} = \overrightarrow{OO_1}$ бўлсин. Шу O нуқтадан бошлаб $\vec{a}$ векторни ҳам қўямиз, $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ бўлсин. Агар $M = O$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} = 0 \cdot \vec{e}$. Агар $\vec{a}$ нолмас вектор бўлса, у ҳолда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$ ёки $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}$. Унда векторни сонга кўпайтириш таърифига мувофиқ, биринчи ҳолда

$\overrightarrow{OM} = \frac{|OM|}{|OO_1|}\overrightarrow{OO_1}$, чунки $\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}$ ёки $\frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}$. Иккинчи ҳолда эса $\overrightarrow{OM} = -\frac{|OM|}{|OO_1|}\overrightarrow{OO_1}$, чунки $\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = -\frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}$ ёки $\frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|} = -\frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}$. $\vec{a} = \alpha\,\vec{e}$ тенглик ўринли бўладиган α сонини $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}$ вектордаги алгебраик қиймати деб атаймиз ва $\alpha = \left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a}\right)$ каби ёзамиз. Демак,

$$\vec{a} = \left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a}\right)\cdot\vec{e}\ . \qquad (7)$$

6.1 жумла. Алгебраик қиймат қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\left(aq_{\vec{e}}\lambda\,\vec{a}\right) = \lambda\left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a}\right)$;

2) $\left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a}+\vec{b}\right) = \left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a}\right) + \left(aq_{\vec{e}}\,\vec{b}\right)$;

Исбот. $\left(aq_{\vec{e}}\lambda\,\vec{a}\right)\cdot\vec{e} =$ ((7) га кўра) $= \lambda\,\vec{a} =$ ((7) га кўра) $= \lambda\left(\left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a}\right)\cdot\vec{e}\right) =$ (вектор фазонинг 6) аксиомасига га кўра) $= \left(\lambda\cdot aq_{\vec{e}}\,\vec{a}\right)\cdot\vec{e}$, бундан (1) тенгликни ҳосил қиламиз.Худди шундай,

$\left(aq_{\vec{e}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)\cdot\vec{e} = \vec{a}+\vec{b} = \left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a}\right)\cdot\vec{e} + \left(aq_{\vec{e}}\,\vec{b}\right)\cdot\vec{e} =$ (вектор фазонинг 7) аксиомасига кўра) $= \left(aq_{\vec{e}}\,\vec{a} + aq_{\vec{e}}\,\vec{b}\right)\cdot\vec{e}$, бундан (2) тенгликни ҳосил қиламиз.

6.1 жумланинг иккинчи қисмини қуйидагича ифодалаш мумкин:

6.2. Шаль леммаси. Тўғри чизиқдаги M, N, P нуқталарнинг ихтиёрий жойланишида қуйидаги тенглик ўринли:

$$\left(aq_{\vec{e}}\overrightarrow{MP}\right) = \left(aq_{\vec{e}}\overrightarrow{MN}\right) + \left(aq_{\vec{e}}\overrightarrow{NP}\right).$$

6.3 таъриф. Бирор K майдон устида V, W иккита вектор фазо берилган бўлсин. $f: V \to W$ акслантириш қуйидаги иккита хоссани қаноатлантирса, у чизиқли акслантириш деб аталади:

1) $f\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=f\left(\vec{a}\right)+f\left(\vec{b}\right)$, $\forall\, \vec{a},\vec{b} \in V$ учун;

2) $\forall \alpha \in K$ ва $\forall \vec{a} \in V$ учун $f\left(\alpha \vec{a}\right)=\alpha f\left(\vec{a}\right)$.

V ва W вектор фазолар орасида $f: V \to W$ чизиқли акслантириш биектив бўлса, у V ва W фазолар изоморфизми деб аталади. Бу ҳолда $f^{-1}: W \to V$ тескари акслантириш ҳам чизиқли акслантириш бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $\vec{a}',\vec{b}' \in W$ векторлар оламиз. Бунда $f-$ биекция бўлганидан, у сюрьекция бўлади ва шунинг учун шундай $\vec{a},\vec{b} \in V$ векторлар мавжудки, $\vec{a}'=f\left(\vec{a}\right)$, $\vec{b}'=f\left(\vec{b}\right)$ бўлади. Бундан $\vec{a}=f^{-1}\left(\vec{a}'\right)$, $\vec{b}=f^{-1}\left(\vec{b}'\right)$ ва

$$f^{-1}\left(\vec{a}'+\vec{b}'\right)=f^{-1}\left(f\left(\vec{a}\right)+f\left(\vec{b}\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)=\vec{a}+\vec{b}=f^{-1}\left(\vec{a}'\right)+f^{-1}\left(\vec{b}'\right).$$

Демак, ихтиёрий $\vec{a}',\vec{b}' \in W$ учун $f^{-1}\left(\vec{a}'+\vec{b}'\right)=f^{-1}\left(\vec{a}'\right)+f^{-1}\left(\vec{b}'\right)$ бўлади. Ихтиёрий $\alpha \in K$ ва $\vec{a}' \in W$ учун $f^{-1}\left(\alpha \vec{a}'\right)=f^{-1}\left(\alpha f\left(\vec{a}\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(\alpha \vec{a}\right)\right)=\alpha \vec{a}=\alpha f^{-1}\left(\vec{a}'\right)$ бўлади.

6.5. Мисол. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R, қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан R майдон устида чизиқли вектор фазо бўлишини кўрсатиш мумкин.

6.6-теорема. $\left(l,\vec{e}\right)$ ўқдаги ҳар қайси $\vec{a}$ векторга $\vec{e}$ вектордаги унинг алгебраик қийматини мос қўювчи $f: Vect(1) \to R$ акслантириш вектор фазоларнинг изоморфизми бўлади.

Бу акслантиришнинг чизиқлилиги 6.1-жумладан, биективлиги векторни сонга кўпайтириш таърифидан ҳамда III_3 аксиомадан келиб чиқади.

$\left(l, \vec{e}\right)$ ўқда аввлдан тайинланган O нуқтани оламиз. Унда $f: Vect(1) \to R$ акслантириш $f_O(M) = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = aq_{\vec{e}}\overrightarrow{OM}$ тенглик билан $f_o : l \to R$ акслантиришни аниқлайди. 4.2-жумлага кўра, l тўғри чизиқнинг ҳар бир M нуқтасига $\overrightarrow{OM}$ векторни мос қўйиб, нуқталар ва векторлар орасида бир қийматли мосликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, f_O акслантириш l геометрик тўғри чизиқ билан ҳақиқий сонлар, яъни сонли тўғри чизиқ нуқталари орасидаги биекциядир. f_O акслантириш l тўғри чизиққа сонли тўпламдаги бор тартибни кўчиради: $M < N \Leftrightarrow f_O(M) < f_O(N)$. Бу тартиб қуйидаги хоссага эга:

Агар $M < N$ ва (MPN) бўлса, у ҳолда $M < P < N$. Демак, тўғри чизиқда нолмас $\vec{e}$ векторда ориентациясини киритиб, унинг нуқталар тўпламини тартиблаймиз. Агар $\vec{e}$ – бирлик вектор бўлса, у ҳолда f_O акслантириш нуқталар орасидаги масофани сақлайди.

7§. ЧИЗИҚЛИ БОҒЛАНИШ

Векторларни қўшиш амалининг ассоциативлиги учта вектор йиғиндиси ҳақида гапиришга имкон беради

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right).$$

Ихтиёрий сондаги векторларнинг йиғиндисини индукция орқали аниқлаш мумкин

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n .$$

Шу билан бирга йиғиндининг коммутативлиги туфайли қўшилувчилар тартибини ихтиёрий равишда ўзгартириш мумкин.

Вектор фазо аксиомаларидан келиб чиқадиган яна бир нечта натижилирни қайд қиламиз:

ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $0\vec{a}=\vec{0}$;

ихтиёрий α сон учун $\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$;

ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $-\vec{a}=(-1)\cdot\vec{a}$.

Демак, вектор тенгликлар билан сонли тенгликлар каби иш кўриш мумкин: қавсларни ихтиёрий равишда тақсимлаш мумкин; қўшилувчилар ўрнини алмаштириш мумкин; тенгликнинг иккала томонига бир хил векторларни қўшиш мумкин; қўшилувчи векторнинг ишорасини ўзгартириб тенгликнинг бир томонидан иккинчи томонига ўтказиш мумкин ва ҳ.к.

$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$ ифода $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ коэффициентли векторлар $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ нинг чизиқли комбинацияси деб аталади. Агар барча коэффициентлар нолга тенг бўлса, у ҳолда чизиқли комбинация *тривиаль чизиқли комбинация* деб аталади. Акс ҳолда тривиаль бўлмаган чизиқли комбинация деб аталади. Агар $\vec{a}$ вектор $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ ни $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлар орқали чизиқли ифодаланади деб аталади. Бу таърифни иккита мисолда изоҳлаймиз:

1) $\vec{0}$ вектор ихтиёрий бўшмас $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлар тизими орқали чизиқли ифодаланади: $\vec{0}=0\cdot\vec{a}_1+0\cdot\vec{a}_2+\ldots+0\cdot\vec{a}_n$.

2) 6§ бошида тўғри чизиқда ҳар қандай вектор ихтиёрий нолмас вектор орқали чизиқли ифодаланиши кўрсатилган эди.

7.1 таъриф. Агар $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлар системасининг $\vec{0}$ векторга тенг бўлган тривиал бўлмаган чизиқли комбинация мавжуд бўлса, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлар системаси *чизиқли боғланган система* деб аталади. Акс ҳолда $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлар системаси чизиқли боғланмаган (эркли) дейилади.

Таърифга мувофиқ бўш векторлар системаси чизиқли боғланмаган. Чунки бўш векторлар системасининг $\vec{0}$ векторга тенг бўлган, тривиаль бўлмаган чизиқли комбинация мавжуд эмас. Демак, бўш векторлар тизими чизиқли эрклидир.

7.2 жумла. Ягона $\vec{a}$ вектордан ташкил топган векторлар тизими чизиқли боғланган бўлади, фақат ва фақат $\vec{a}=\vec{0}$ бўлса.

Исбот. $1\cdot\vec{0}=\vec{0}$ тенгликдан фақат битта $\vec{0}$ вектордан ташкил топган тизимнинг чизиқли боғлиқ бўлиши келиб чиқади.

7.3 жумла. Чизиқли эркли векторлар системасининг ихтиёрий қисм системаси чизиқли эркли.

Исбот. Фараз қилайлик, чизиқли эркли векторлар системаси $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ нинг $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ қисм системаси чизиқли боғлиқ бўлсин.

$$\alpha_1\cdot\vec{a}_1+\alpha_2\cdot\vec{a}_2+...+\alpha_k\cdot\vec{a}_k=\vec{0}$$

тривиал бўлмаган чизиқли комбинацияни оламиз. Бу тенгликнинг иккала томонига

$$0\cdot\vec{a}_{k+1}+...+0\cdot\vec{a}_n=\vec{0}$$

тенгликни ҳадма-ҳад қўшамиз, натижада $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлар системасининг нол векторга тенг бўлган нотривиал чизиқли комбинация

$$\alpha_1\cdot\vec{a}_1+...+\alpha_k\cdot\vec{a}_k+\alpha_{k+1}\cdot\vec{a}_{k+1}+...\alpha_n\cdot\vec{a}_n=\vec{0}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ – векторлар системасининг чизиқли эркли эканлигига зид. 7.3 жумла исботланди.

7.2 ва 7.3 жумлалардан қуйидаги жумла келиб чиқади.

7.4 жумла. Нол векторни ўз ичига олган ҳар қандай система чизиқли боғлиқдир.

7.5 жумла. Иккитадан кам бўлмаган векторлар ташкил топган система чизиқли боғлиқ бўлади, фақат ва фақат шундаки, бу системанинг бирор вектори қолган векторлар орқали чизиқли ифодаланган бўлса.

Исбот. Фараз қилайлик, $\vec{a}_n$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ векторлар орқали чизиқли ифодаланган бўлсин:

$$\vec{a}_n = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_{n-1} \cdot \vec{a}_{n-1}.$$

У ҳолда

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_{n-1} \cdot \vec{a}_{n-1} + (-1) \cdot \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Демак, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторларнинг нотривиал чизиқли комбинацияси $\left(\alpha_n = -1\right)$ нол векторига тенг, яъни векторлар чизиқли боғлиқдир.

Аксинча,

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_{n-1} \cdot \vec{a}_{n-1} + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

бу ерда, масалан, $\left(\alpha_1 \neq 0\right)$ бўлсин. У ҳолда

$$\alpha_1 \vec{a}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \cdot \vec{a}_2 + ... + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) \cdot \vec{a}_n$$

бўлади. 7.5 жумла исботланди .

7.6 жумла. Агар $\vec{a}$ вектор чизиқли эркли $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлар орқали чизиқли ифодаланган бўлса, у ҳолда шундай ифода ягонадир.

Исбот. Иккита шундай ифодани оламиз:

$$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n,$$

$$\vec{a} = \beta_1 \cdot \vec{a}_1 + \beta_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \beta_n \cdot \vec{a}_n.$$

Ушбу тенгликларни биридан иккинчисини ҳадма-хад айириб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаб топамиз:

$$\vec{0} = \left(\alpha_1 - \beta_1\right) \cdot \vec{a}_1 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right) \cdot \vec{a}_2 + ... + \left(\alpha_n - \beta_n\right) \cdot \vec{a}_n.$$

Шартга кўра, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлар чизиқли эркли. Унда

$\alpha_1-\beta_1=0, \alpha_2-\beta_2=0, \ldots, \alpha_n-\beta_n=0$, яъни $\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \ldots, \alpha_n=\beta_n$ бўлиши келиб чиқади.

7.7 жумла. Чизиқли эркли $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлар системаси учун $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ чизиқли боғлиқ система бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлар орқали чизиқли ифодаланади.

Исбот. Камида биттаси нолдан бўлган $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ сонлари мавжудки, улар учун

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n + \alpha_{n+1} \cdot \vec{a} = \vec{0} \qquad (8)$$

тенглик ўринли. У ҳолда, албатта, $\alpha_{n+1} \neq 0$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар $\alpha_{n+1}=0$ бўлса, у ҳолда $\alpha_{n+1}\vec{a}=\vec{0}$ ва демак, (8) тенглик $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ тенгликa айланади. Аммо, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлар системанинг чизиқли эркли эканлигидан $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \ldots, \alpha_n=0$ бўлишини ҳосил қиламиз. Шартга кўра, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ сонларининг камида биттаси нолдан фарқли. Ҳосил қилинган зиддият $\alpha_{n+1} \neq 0$ эканлигини кўрсатади. У ҳолда

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) \cdot \vec{a}_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \cdot \vec{a}_n .$$

7.7 жумла исботланди.

8§. ЧИЗИҚЛИ БОҒЛАНИШНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бир тўғри чизиққа параллел бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар *коллинеар векторлар* деб аталади.

8.1 жумла. Иккита вектор коллинеар бўлади, фақат ва фақат шундаки, улар чизиқли боғлиқ бўлса.

Исбот. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлсин. Уларни битта нуқтага қўямиз. Унда улар бирор l тўғри чизиқда ётади. Фараз қилайлик, $\vec{a}$ бўлсин (агар икки вектор ҳам нол вектор бўлса, у ҳолда 7.4 жумлага мувофиқ улар чизиқли боғлиқ бўлади). Аммо, тўғри чизиқда ҳар қандай вектор ихтиёрий нолмас вектор орқали чизиқли ифодаланади. Демак, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар 7.5 жумлага мувофиқ чизиқли боғлиқдир.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлсин. 7.5 жумлага мувофиқ улардан бири иккинчиси орқали чизиқли ифодаланади, масалан $\vec{b}=\alpha\vec{a}$. У ҳолда векторни сонга кўпайтириш таърифига кўра, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеардир.

8.1-жумла исботланди.

8.2 жумла. Текисликда иккита чизиқли эркли вектор мавжуд.

Ҳақиқатан ҳам, текисликда бир тўғри чизиқда ётмаган *O,M,N* нуқталарни оламиз. Унда $\overrightarrow{OM}$ ва $\overrightarrow{ON}$ векторлар ноколлинеар ва 8.1жумлага мувофиқ чизиқли эрклидир.

8.3 жумла. Текисликда эхтиёрий учта вектор чизиқли боғлиқдир.

Исбот. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар бир текисликда ётсин. Агар уларнинг иккитаси коллинеар бўлса, у ҳолда 8.1 ва 7.3 жумлаларга кўра, улар чизиқли боғлиқдир. Фараз қилайлик, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар жуфт-жуфт бўлиб ноколлинеар бўлсин. Унда уларни битта *O* нуқтага қўйиб ($\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{ON}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OP}$), учта ҳар-хил *OM, ON, OP* тўғри чизиқларни ҳосил қиламиз. P нуқта орқали OM тўғри чизиққа параллел қилиб, l_1 тўғри чизиқни ўтказамиз. ON тўғри чизиқ OM тўғри чизиқни кесиб унга параллел бўлган l_1 тўғри чизиқни ҳам кесади. N_1– ON ва l_1 тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси бўлсин.Худди шундай P нуқтадан ON тўғри чизиқга параллел қилиб ўтказилган l_2 тўғри чизиқ OM тўғри чизиқни бирорта M_1 нуқтада кесади **(9-расм)**. OM_1PN_1 тўртбурчак – параллелограмм. Демак, $\overrightarrow{ON_1}=\overrightarrow{M_1P}$. Шунинг учун

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{ON_1}.$$

$\overrightarrow{OM}$ ва $\overrightarrow{ON}$ векторлар нолмас векторлар бўлганидан, шундай α ва β сонлар мавжудки, улар учун $\overrightarrow{OM_1}=\alpha\overrightarrow{OM}$ ва $\overrightarrow{ON_1}=\alpha\overrightarrow{ON}$.

Демак, $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OM} + \alpha\overrightarrow{ON}$ ёки $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Демак, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар 7.5-жумлага мувофиқ чизиқли боғлиқ. 8.3 жумла исботланди.

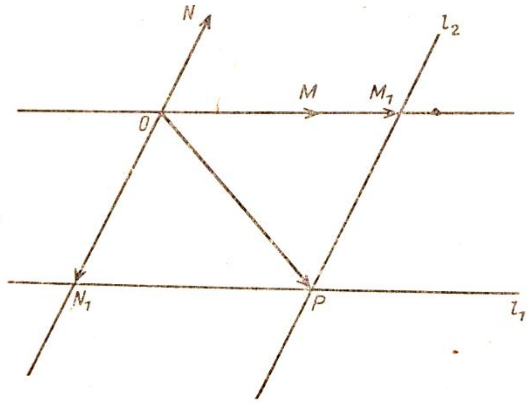
8.3 ва 7.3 жумлалардан текисликда учтадан ортиқ векторлардан ташкил топган система ҳам чизиқли боғлиқ бўлиши келиб чиқади.

Агар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар битта текисликка параллел бўлса, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларни компланар векторлар деб аталади.

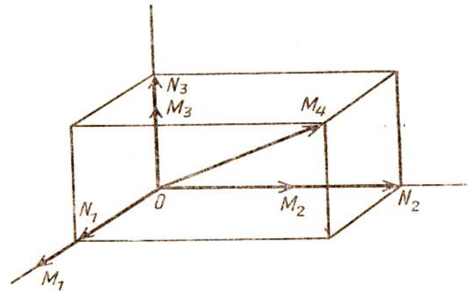
8.4 жумла. Учта вектор компланар бўлади, фақат ва фақат шундаки, улар чизиқли боғлиқ бўлса.

Исбот. Зарурлиги. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда таърифга кўра, битта текисликка параллелдир. Агар бу векторларнинг бошини бир нуқтага қўйсак, у ҳолда улар битта текисликка тегишли бўлади. Унда 8.3 жумлага мувофиқ, улар чизиқли боғлиқ бўлади.

Етарлилиги. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлсин. Унда 7.5-жумлага мувофиқ улардан бири, масалан, $\vec{c}$ вектор қолганлари орқали чизиқли ифодаланади: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларни битта O нуқтага қуйиб: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{ON}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$ ларни ҳосил қиламиз. Бундан $\overrightarrow{OP}$ вектор OM ва ON тўғри чизиқларда ётувчи векторларнинг йиғиндисига тенг бўлиши келиб чиқади. Демак, $\overrightarrow{OP}$ вектор бу тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда ётади, яъни $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар компланардир.



9-расм.



10-расм.

8.5 жумла. Фазода учта чизиқли эркли вектор мавжуд.

8.4 жумлага мувофиқ шундай векторлар сифатига ихтиёрий $\vec{a} = \overline{OM},\ \vec{b} = \overline{ON},\ \vec{c} = \overline{OP}$ учлик векторни олиш мумкин, бу ерда O,M,N,P нуқталар битта текисликда ётмайди.

8.6-жумла. Фазода ихтиёрий тўртта вектор чизиқли боғликдир.

Фазода ихтиёрий тўртта $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ векторлар берилган бўлсин. Агар улар орасида компланар учлик бўлса, у ҳолда 8.4-жумла ва 7.3-жумлага асосан улар чизиқли боғлиқ бўлади.

Фараз қилайлик, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ векторлардан ихтиёрий учтаси компланар бўлмасин. Бошқача қилиб айтганда, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ векторларни битта нуқтага қўйганимизда:

$\vec{a}_i = \overline{OM_i}$ тўртта OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 тўғри чизиқлардан ҳеч бир учтаси бир текисликда ётмасин.

M_4 нуқта орқали M_2OM_3 текисликка параллел қилиб текислик ўтказамиз. OM_1 тўғри чизиқ M_2OM_3 текисликни O нуқтада кесганидан унга параллел қилиб ўтказилган текисликни ҳам бирор N_1 нуқтада кесади. Худди шундай, M_4 нуқта орқали M_1OM_3 текислика параллел қилиб текислик ўтказамиз. OM_2 тўғри чизиқ M_1OM_3 текисликни O нуқтада кеганидан, унга параллел қилиб ўтказилган тексликни ҳам бирорта N_2 нуқтада кесади. M_4 нукта орқали M_1OM_2 текисликка параллел қилиб текислик ўтказамиз. OM_3 тўғри чизиқ M_1OM_2 текисликни O нуқтада кесиб ўтганидан, унга параллел қилиб ўтказилган текисликни ҳам бирорта N_3 нуқтада кесиб ўтади. Демак, шундай параллелепипед мавжудки, у учун:

1) О нуқта унинг учларидан бири;

2) унинг ON_1, ON_2, ON_3 қирралари мос равишда OM_1, OM_2, OM_3 тўғри чизиқларда ётади;

3) OM_4 кесма унинг диагонали бўлади **(10-расм)**. У ҳолда

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2} + \overrightarrow{ON_3} = \alpha_1\overrightarrow{OM_1} + \alpha_2\overrightarrow{OM_2} + \alpha_3\overrightarrow{OM_3}.$$

Демак, $\vec{a}_4$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ векторлари орқали чизиқли ифодаланади, яъни $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ векторлар системаси чизиқли боғлиқдир. 8.6-жумла исботланди.

8.6-жумладан фазода тўрттадан ортиқ векторни ўз ичига олган ихтиёрий система чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади.

Бу параграф натижаларини қуйидагича жамлаш мумкин:

8.7 теорема. $Vect(n)$ $(n = 1, 2, 3)$ вектор фазода n та чизиқли эркли векторлар иборат система мавжуд ва n тадан ортиқ векторлардан иборат ихтиёрий система чизиқли боғлиқдир.

9§. БАЗИСЛАР ВА КООРДИНАТАЛАР

9.1. таъриф. V – вектор фазо ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ -унинг бирорта векторлар системаси бўлади. Агар бу система чизиқли эркли ва тўла бўлса, бу система V–фазонинг *базиси* деб аталади. Бу деган сўз, V–фазонинг ҳар қандай вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлар орқали чизиқли ифодаланишини англатади.

7.7 ва 8.7 жумлалардан қуйидаги келиб чиқади:

9.2. жумла. n та ихтиёрий чизиқли эркли векторлар $Vect(n)$ $(n=1,2,3)$ вектор фазонинг базисини ташкил қилади.

8.1 ва 8.4 жумлалардан қуйидаги келиб чиқади:

9.3. жумла. $Vect(n)$ $(n=1,2,3)$ фазонинг ихтиёрий базиси n та вектордан иборат бўлади.

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – V фазонинг базиси ва $\vec{a}\in V$ бўлсин. Унда базиснинг тўлалигидан

$$\vec{a}=a^1\cdot\vec{e}_1+a^2\cdot\vec{e}_2+...+a^n\cdot\vec{e}_n \qquad (9)$$

ёйилмага эга бўламиз. 7.6-жумлага мувофиқ $a^1, a^2, ..., a^n$ сонлари $\vec{a}$ вектор билан бир қийматли аниқланади. Бу сонлар $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ базисдаги *координаталари* деб аталади. (9) тенгликни $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ базис векторлар бўйича ёйилмаси деб аталади. Агар вектор фазода $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ базис тайинланган бўлса, у ҳолда $\vec{a}=a^1\cdot\vec{e}_1+a^2\cdot\vec{e}_2+...+a^n\cdot\vec{e}_n$ ёзув ўрнида баъзан, $\vec{a}=\left\{a^1, a^2, ..., a^n\right\}$ деб ҳам ёзамиз.

Вектор фазо аксиомалари таърифидан қуйидаги келиб чиқади:

9.4-жумла. Йиғиндиси векторнинг координаталари координаталар йиғиндисига, векторнинг сонга кўпайтмасининг координаталари координаталарнинг бу сонга кўпайтмаларига тенг, яъни

$$\left\{a^1, a^2, ..., a^n\right\}+\left\{b^1, b^2, ..., b^n\right\}=\left\{a^1+b^1, a^2+b^2, ..., a^n+b^n\right\},$$

$$\lambda\left\{a^1, a^2, ..., a^n\right\}=\left\{\lambda a^1,\lambda a^2, ...,\lambda a^n\right\}.$$

9.5. таъриф. n та ҳақиқий сондан ташкил топган барча тартибланган тизмаларнинг тўплами $-R^n$ қўшиш амали

$$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)$$

ва сонга кўпайтириш амали

$$\lambda(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,...,\lambda\alpha_n)$$

билан n – ўлчамли арифметик (ҳақиқий) фазо деб аталади.

Бунда бу амаллар вектор фазонинг 1) – 8) аксиомаларини қаноатлантиришини текшириш осон.

Демак, $R^n = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \middle| \alpha_i \in R, i = \overline{1, n}\right\}$ тўплам вектор фазо бўлади. Бу фазода нол вектор $(0, 0, ..., 0)$ тизма бўлади. $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$элементга қарама-қарши элемент эса $(-\alpha_1, -\alpha_2, ..., -\alpha_n)$ тизма бўлади. R^1 фазо равшанки, R билан устма-уст тушади.

6.6 теореманинг умумлашмаси қуйидагича:

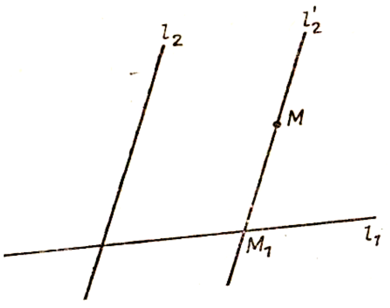
9.6. теорема. Ҳар қайси $\vec{a}$ векторга, унинг бирор тайинланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ базисдаги $(a^1, a^2, ..., a^n)$ координаталар тизмасини мос қўювчи $f : Vect(n) \to \mathbb{R}^n$, $(n = 1, 2, 3)$ акслантириш вектор фазоларнинг изоморфизим бўлади.

$f : Vect(n) \to \mathbb{R}^n$ акслантиришнинг чизиқлилиги 9.4 жумладан келиб чиқади, биективлиги эса равшандир.

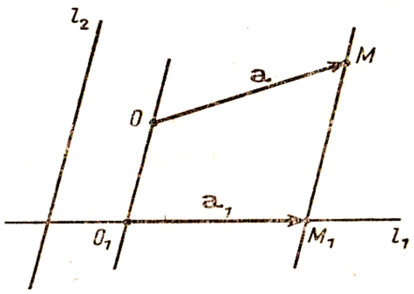
10§. ПРОЕКЦИЯЛАР ВА КООРДИНАТАЛАР

Энди 9§ да берилган вектор координатасининг алгебраик таърифидан уларнинг геометрик баёнига ўтамиз. Текисликда иккита параллел бўлмаган l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар берилган бўлсин.

Текисликнинг ихтиёрий М нуқтаси орқали l_2 тўғри чизиқга параллел қилиб l_{21} тўғри чизиқни ўтказамиз. У l_1 тўғри чизиқни M_1 нуқтадан кесиб ўтади **(11-расм).** Бу нуқта М нуқтанинг l_1 тўғри чизиқдаги l_2 тўғри чизиққа параллел *проекцияси* деб аталади.



11-расм.



12-расм.

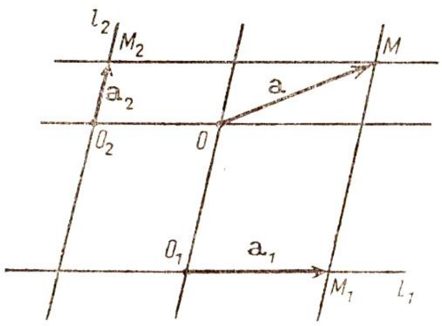
Текисликда $\vec{a}$ вектор берилган бўлсин **(12-расм)**. Уни бирорта O нуқтадан қўямиз: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. O_1 ва M_1 – O ва M нуқталарнинг l_1 тўғри чизиқдаги l_2 тўғри чизиқга параллел проекциялари бўлсин. $\vec{a}_1 = \overrightarrow{O_1M_1}$ вектор $\vec{a}$ векторнинг l_1 тўғри чизиқдаги l_2 тўғри чизиқга параллел *проекцияси* деб аталади. ($\vec{a}_1 = pr_{l_1}^{l_2}\vec{a}$ ёзамиз).

Бу таърифнинг тўғрилигини, яъни $\vec{a}_1$ векторнинг O нуқтани танлашга боғлиқ эмаслигини текшириш керак. Буни соф геометрик нуқтаси назардан қилиш мумкин, аммо биз алгебраик мулоҳазаларни дуч келамиз.

$\overrightarrow{OM}$ векторни l_1 тўғри чизиққа параллел қилиб, l_2 тўғри чизиққа проекциялаймиз. $\vec{a}_2 = \overrightarrow{O_2M_2}$ векторни ҳосил қиламиз **(13-расм)**. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2}$, яъни

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \qquad (10)$$

бўлиши тушунарли.



13-расм.

Демак, $\vec{a}_1 = pr_{l_1}^{l_2}\vec{a}$ вектор таърифи $\vec{a}$ векторнинг O нуқтадан қўйилишига боғлиқмаслигини кўрсатиш учун $\vec{a}$ векторни l_1 ва l_2 тўғри чизиқларга параллел векторларнинг йиғиндиси кўринишдаги (10) тасвирнинг ягоналигини кўрсатиш етарлидир. Шундай бошқа тасвирни олайлик: $\vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$.

У ҳолда

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \quad \text{ёки} \quad \vec{a}_1 - \vec{b}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_2 = \vec{0} \qquad (11)$$

бўлиб, $\vec{a}_1$ ва $\vec{b}_1$ векторлар l_1 тўғри чизиқда, $\vec{a}_2$ ва $\vec{b}_2$ вектордар эса l_2 тўғри чизиқда ётади. Демак, $\vec{a}_1 - \vec{b}_1$ вектор l_1 тўғри чизиқда, $\vec{a}_2 - \vec{b}_2$ вектор l_2 тўғри чизиқда ётади, ҳамда $\vec{a}_1 - \vec{b}_1$ ва $\vec{a}_2 - \vec{b}_2$ векторлар чизиқли боғланган ва 8.1-жумлага мувофиқ бу векторлар коллинеардир.

Демак, улардан бири нол вектор. У ҳолда (11) тенгликга мувофиқ иккинчиси ҳам нол вектордир, яъни $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$ ва $\vec{a}_2 = \vec{b}_2$. Шундай қилиб $\vec{a}_1 = pr_{l_1}^{l_2} \vec{a}$ вектор таърифининг тўғрилиги исботланди. Шу билан бир вақтда, биз қуйидаги тенгликни исботладик:

$$\vec{a} = pr_{l_1}^{l_2} \vec{a} + pr_{l_2}^{l_1} \vec{a}. \qquad (12)$$

$\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар текисликда базис ташкил этсин.

$$pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a} = pr_{l_1}^{l_2} \vec{a} \qquad (13)$$

вектор (бу ерда, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар, мос равишда $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторларга параллел) $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_2$ вектордаги *проекцияси* деб аталади. У ҳолда (12) тенгликни

$$\vec{a} = pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a} + pr_{\vec{e}_2}^{\vec{e}_1} \vec{a} \qquad (14)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Аммо, $pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a}$ векторни $\alpha \vec{e}_1$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда, α маълумки, $aq_{\vec{e}_1}\left(pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a} \right)$ га тенг. Бу α сонни $\left(aq\, pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a} \right)$

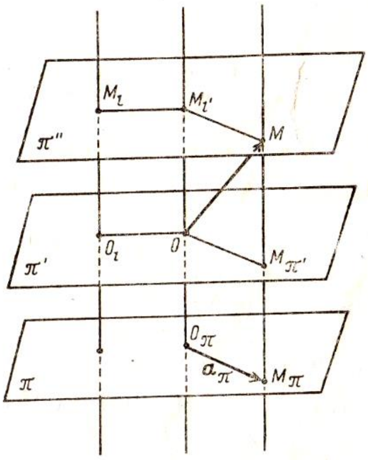
орқали белгилаймиз ва у $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_2$ векторга параллел $\vec{e}_2$ вектордаги *проекциянинг алгебраик қиймати* деб аталади.

Демак, $pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a} = \left(aq\, pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a} \right) \cdot \vec{e}_1$. (14) тенгликдан

$$\vec{a} = \left(aq\, pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2} \vec{a} \right) \cdot \vec{e}_1 + \left(aq\, pr_{\vec{e}_2}^{\vec{e}_1} \vec{a} \right) \cdot \vec{e}_2 \qquad (15)$$

ни топамиз. Аммо, $\vec{a} = a^1 \cdot \vec{e}_1 + a^2 \cdot \vec{e}_2$, бу ерда a^1, a^2 – $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисдаги координаталари. Шундай қилиб, $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ базисдаги координаталари бу – $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлардаги проекциясининг алгебраик қийматларидир.

Фазода π текислик ва унга палалел бўлган l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Фазонинг ихтиёрий M нуқтаси орқали l тўғри чизиқга параллел l_1 тўғри чизиқни ҳамда π текисликка параллел π^1 текисликни ўтказамиз. M_l орқали π^1 текислик билан l тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини ва M_π орқали l_1 тўғри чизиқ билан π текисликнинг кесишиш нуқтасини белгилаймиз **(14-расм)**. M_l нуқтани M нуқтанинг π текисликга параллел l тўғри чизиқдаги проекцияси деб M_π нуқтани эса M нуқтанинг l тўғри чизиқга параллел π текисликдаги проекцияси деб аталади. Энди фазода $\vec{a}$ векторни оламиз ва уни бирорта O нуқтадан қўямиз: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. O ва M нуқталарни l тўғри чизиққа ва π текисликка проекциялаймиз **(15-расм)**. $\overrightarrow{O_l M_l}$ векторни $\vec{a}_l$ орқали белгилаймиз. $\overrightarrow{O_\pi M_\pi}$ векторни эса $\vec{a}_\pi$ орқали белгилаймиз. $\vec{a}_l$ вектор $\vec{a}$ векторнинг π текисликка параллел l тўғри чизиқдаги проекцияси, $\vec{a}_\pi$ вектор эса $\vec{a}$ векторнинг l тўғри чизиққа параллел π текисликка



15-расм

проекцияси деб аталади. Бу векторлар мос равишда, $pr_l^{\pi}\vec{a}$ ва $pr_{\pi}^{l}\vec{a}$ каби белгилаймиз.

15-расмда келтирилган учта параллелограммдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_{l^1}}+\overrightarrow{OM_{\pi^1}}=\overrightarrow{O_lM_l}+\overrightarrow{O_{\pi}M_{\pi}}=\vec{a}_l+\vec{a}_{\pi}\,.$$

Юқоридаги каби 8.1 жумладан

$$\vec{a}=\vec{a}_l+\vec{a}_{\pi} \qquad (16)$$

тасвирнинг ягоналиги келиб чиқади, яъни $\vec{a}$ векторни l тўғри чизиққа параллел ва π текисликка параллел бўлган векторлар йиғиндиси кўринишида ягона усул билан тасвирланиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $pr_l^{\pi}\vec{a}$ ва $pr_{\pi}^{l}\vec{a}$ проекцияларнинг таърифи $\vec{a}$ векторни O нуқтадан қўйишга боғлиқ эмас. (16) тенгликни

$$\vec{a}=pr_l^{\pi}\vec{a}+pr_{\pi}^{l}\vec{a} \qquad (17)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар $\vec{e}$ – l тўғри чизиққа параллел нолмас вектор бўлса, $pr_l^{\pi}\vec{a}$ вектор – $\vec{a}$ векторнинг π текисликка параллел $\vec{e}$ вектордаги *проекцияси* деб аталади ва $pr_{\vec{e}}^{\pi}\vec{a}$ орқали белгиланади. $aq_{\vec{e}}\left(pr_{\vec{e}}^{\pi}\vec{a}\right)$ сони $aq\,pr_{\vec{e}}^{\pi}\vec{a}$ орқали белгиланади. $pr_{\vec{e}}^{\pi}\vec{a}$ вектор $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}$ векторга параллел π текисликдаги проекцияси ҳам деб юритилади ва $pr_{\pi}^{\vec{e}}\vec{a}$ каби белгиланади. Бундай белгланишларда (17) тенгликни $\vec{a}=pr_{\vec{e}}^{\pi}\vec{a}+pr_{\pi}^{\vec{e}}\vec{a}$ (18) кўринишда ёзиш мумкин.

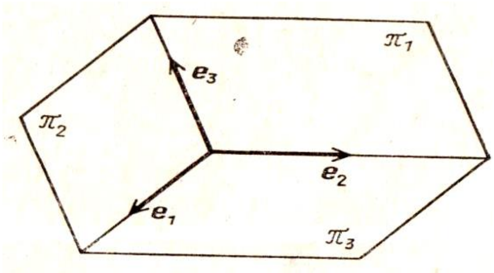
Фазода $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ базисни оламиз ва бу векторларни бирор O нуқтадан қўямиз. O нуқта орқали π_1,π_2,π_3 текисликларни шундай ўтказамизки, π_1

текислик $\vec{e_2}, \vec{e_3}$ векторларга параллел; π_2 текислик $\vec{e_1}, \vec{e_3}$ векторларга параллел; π_3 текислик $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ векторларга параллел бўлсин **(16-расм)**. Бу текисликларни базис текисликлар деб атаймиз.

$\vec{a}$ векторни $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базис векторлари бўйича ёямиз:

$$\vec{a} = a^1 \cdot \vec{e_1} + a^2 \cdot \vec{e_2} + a^3 \cdot \vec{e_3}. \qquad (19)$$

$a^1 \cdot \vec{e_1}$ вектор $\vec{e_1}$ векторга параллел, $a^2 \cdot \vec{e_2} + a^3 \cdot \vec{e_3}$ вектор эса π_1 текисликка параллел бўлганлигидан, ҳамда $\vec{a} = pr_{\vec{e_1}}^{\pi_1} \vec{a} + pr_{\pi_1}^{\vec{e_1}} \vec{a}$ ёйилманинг ягоналигидан $a^1 \cdot \vec{e_1} = pr_{\vec{e_1}}^{\pi_1} \vec{a}$ келиб чиқади. Худду шундай $a^2 \cdot \vec{e_2} = pr_{\vec{e_2}}^{\pi_2} \vec{a}$ ва $a^3 \cdot \vec{e_3} = pr_{\vec{e_3}}^{\pi_3} \vec{a}$.



16-расм.

Демак, (19) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{a} = pr_{\vec{e_1}}^{\pi_1} \vec{a} + pr_{\vec{e_2}}^{\pi_2} \vec{a} + pr_{\vec{e_3}}^{\pi_3} \vec{a}.$$

Шунингдек, $a^i = aq\, pr_{\vec{e_i}}^{\pi_i} \vec{a}\ (i = 1,2,3)$ бўлади. Шунинг учун (19) тенгликни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{a} = \left(aq\, pr_{\vec{e_1}}^{\pi_1} \vec{a} \right) \cdot \vec{e_1} + \left(aq\, pr_{\vec{e_2}}^{\pi_2} \vec{a} \right) \cdot \vec{e_2} + \left(aq\, pr_{\vec{e_3}}^{\pi_3} \vec{a} \right) \cdot \vec{e_3}. \qquad (21)$$

Шундай қилиб, фазода векторнинг координаталари бу–унинг базис текисликларга параллел базис вектордаги проекцияларининг алгебраик қийматларидир.

6.1 жумланинг умумлашмаси қуйидагича:

10.1. теорема. Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ва ихтиёрий α сон учун,

$$\left(aq\, pr\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)=\left(aq\, pr\,\vec{a}\right)+\left(aq\, pr\,\vec{b}\right) \text{ ва } \left(aq\, pr\left(\alpha\,\vec{a}\right)\right)=\alpha\left(aq\, pr\,\vec{a}\right)$$

тенгликлар ўринли.

Бу ерда текисликда $pr_{\vec{e}_1}^{\vec{e}_2}\vec{a}$ типдаги ва фазода $pr_{\vec{e}}^{\pi}\vec{a}$ типдаги проекциялар ҳақида гап боради. Теорема тасдиқи проекциянинг алгебраик қиймати–бу координаталар эканидан ҳамда вектор йиғиндиси ва векторни сон кўпайтмасининг координаталари ҳақидаги 9.4. жумладан келиб чиқади.

10.2. теорема. Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун ҳамда ихтиёрий α сон учун

$$pr\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=pr\,\vec{a}+pr\,\vec{b} \text{ ва } pr\left(\alpha\,\vec{a}\right)=\alpha pr\,\vec{a}$$

тенгликлар ўринли.

Бу ерда гап мумкин бўлган проекциялар ҳақида боради. 10.1. жумлага кўра, ҳолга $pr=pr_{\pi}^{l}$ исбот керак бўлади. (17) тенгликга асосан

$$\vec{a}+\vec{b}=pr_{l}^{\pi}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+pr_{\pi}^{l}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

Бундан ташқари, $pr_{l}^{\pi}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=pr_{l}^{\pi}\vec{a}+pr_{l}^{\pi}\vec{b}$. Демак,

$$pr_{l}^{\pi}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{b}-pr_{\pi}^{l}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{b}-pr_{l}^{\pi}\vec{a}-pr_{l}^{\pi}\vec{b}=$$

$$=\vec{a}-pr_{l}^{\pi}\vec{a}+\vec{b}-pr_{l}^{\pi}\vec{b}=\text{((17) га асосан)}=pr_{\pi}^{l}\vec{a}+pr_{\pi}^{l}\vec{b}.$$

Худди шундай $\alpha\,\vec{a}=pr_{\pi}^{l}\left(\alpha\,\vec{a}\right)$ тенглик исботланади.

Демак, биз векторларнинг ҳар хил проекцияларни аниқланадик. Векторга унинг проекциясини мос қўювчи акслантириш проекциялаш деб аталувчи акслантиришлар бўлади. 10.2 теоремани қуйидагича қайта ифодалаш мумкин (6.3 таърифга қаранг).

10.3-теорема. Қуйидаги проекциялашлар чизиқли акслантиришлар бўлади:

$$pr_{l_1}^{l_2} : Vect(2) \to Vect(1),$$

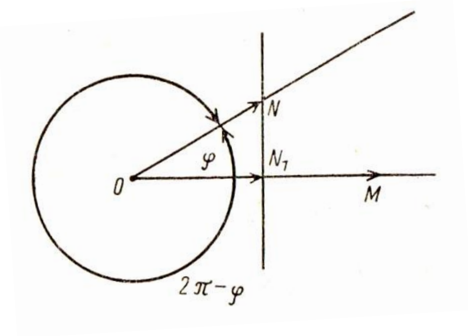
$$pr_{l}^{\pi} : Vect(3) \to Vect(1),$$

$$pr_{\pi}^{l} : Vect(3) \to Vect(2).$$

11§. ВЕКТОРЛАР СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Икки вектор орасидаги бурчак.

Фазода (текисликда) иккита нол бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган бўлсин. Уларни битта O нуқтадан қўямиз: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{ON}$. Текисликда O, M, N нуқталар орқали ўтувчи $OM \to$ ва $ON \to$ нурлар орасида иккита бурчак аниқланган. Бу бурчаклар косинуслари бир хил бўлган φ ва $2\pi - \varphi$ номанфий қийматларни қабул қилади. Бу бурчаклардан кичиги $\overrightarrow{OM}$ *ва* $\overrightarrow{ON}$ *векторлар орасидаги бурчак* деб аталади ва $\overrightarrow{OM} \hat{} \overrightarrow{ON}$ орқали белгилаймиз.



17-расм.

Унинг косинусини топайлик. N нуқтани OM тўғри чизиққа ортогонал проекциялаб, N_1 нуқтани ҳосил қиламиз. $\vec{a}$ вектор қандай йўналган бўлса, худди шундай йўналишга эга бўлган бирлик узунликни векторни $e_{\vec{a}}$ орқали белгилаймиз. $\overrightarrow{ON_1} = \lambda e_{\vec{a}}$ бўлсин. Унда $\left|\overrightarrow{ON_1}\right| = |\lambda|$, λ нинг ишораси эса $\cos\left(\overrightarrow{OM} \hat{} \overrightarrow{ON}\right)$ ишораси билан устма-уст тушади. Иккинчи томондан, ONN_1 тўғри бурчакли учбурчакдан $\left|\overrightarrow{ON_1}\right| = \left|\overrightarrow{ON}\right| \cdot \left|\cos\left(\overrightarrow{OM}\,\hat{}\,\overrightarrow{ON}\right)\right|$ тенгликка эга бўламиз. Демак,

$$\lambda = \left|\overrightarrow{ON}\right| \cdot \left|\cos\left(\overrightarrow{OM}\,\hat{}\,\overrightarrow{ON}\right)\right|. \qquad (22)$$

Ихтиёрий $\vec{c}$ вектор учун $\vec{c}$ векторнинг $\vec{e}_{\vec{a}}$ вектордаги ортогонал проекциясини, яъни, $\vec{c}$ векторнинг $\vec{e}_{\vec{a}}$ вектордаги $\vec{e}_{\vec{a}}$ векторга перпендикуляр текисликка параллел проекциясини $pr_{\vec{e}_{\vec{a}}}\vec{c}$ орқали белгилаймиз. У ҳолда $\overrightarrow{ON_1} = pr_{\vec{e}_{\vec{a}}}\vec{b}$ ва $\overrightarrow{ON_1} = \lambda\vec{e}_{\vec{a}}$ тенглик $\lambda = \left(aq\ pr_{\vec{e}_{\vec{a}}}\vec{b}\right)$ ни англатади.

Демак, (22) га кўра

$$\left(aq\ pr_{\vec{e}_{\vec{a}}}\vec{b}\right) = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OM}\,\hat{}\,\overrightarrow{ON}\right).$$

Бундан

$$\cos\left(\overrightarrow{OM}\,\hat{}\,\overrightarrow{ON}\right) = \left(aq\ pr_{\vec{e}_{\vec{a}}}\vec{b}\right) \cdot \left|\vec{b}\right|^{-1} \qquad (23)$$

ёки

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \left(aq\ pr_{\vec{e}_{\vec{a}}}\vec{b}\right) \cdot \left|\vec{b}\right|^{-1} \qquad (24).$$

(24) тенгликни нол бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчакнинг косинуси таърифи сифатида олиш мумкин. Олдинги мулоҳазалар эса бу таъриф геометрик ёққоллик билан устма-уст тушишини кўрсатади. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак деб, бу векторлар қандай тартибда қаралишига боғлиқ бўлмаган ва 0 дан π гача қиймат қабул қилувчи бурчакни тушунганимиз

боис $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right)$ ва (24) формулага тенг кучли бўлган ушбу формулага эга бўламиз:

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\left(aq\, pr_{\vec{e}_{\vec{b}}}\,\vec{a}\right)\cdot\left|\vec{a}\right|^{-1} \qquad (25).$$

Скаляр кўпайтмани таърифи.

Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб, бу векторларнинг узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг бўлган $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ сонга айтилади:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) \qquad (26).$$

Нол векторнинг ихтиёрий векторга скаляр кўпайтмасини нолга тенг деб оламиз.

(24) ва (25) тенгликлардан ушбуга эга бўламиз:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left(aq\, pr_{\vec{e}_{\vec{a}}}\,\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot\left(aq\, pr_{\vec{e}_{\vec{b}}}\,\vec{a}\right). \qquad (27)$$

Скаляр кўпайтманинг хоссалари.

11.1. теорема. Ихтиёрий $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлар учун ва ихтиёрий α сон учун қуйидагилар ўринли:

1) $\left(\vec{a},\vec{a}\right)\geq 0$, $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=0$ фақат ва фақат шундаки, $\vec{a}=\vec{0}$ бўлса;

2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

4) $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Исбот. 1) ва 2) хосса исботи бевосита таърифдан келиб чиқади. 3) хоссани текширамиз.

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=((27)\text{ ва асосан})=\left|\vec{c}\right|\left(aq\, pr_{\vec{e}_{\vec{c}}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)=((27)\text{ ва асосан})=$$

$$=\left|\vec{c}\right|\left(aq\, pr_{\vec{e}_{\vec{c}}}\vec{a}\right)+\left|\vec{c}\right|\left(aq\, pr_{\vec{e}_{\vec{c}}}\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right).$$

4) хосса ҳам худди шундай текширалади.

11.2. теорема. *(Коши-Буняковский тенгсизлиги.* Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун

$$-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\le\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|.$$

Агар $\vec{a}\neq\vec{0}$ бўлса, у ҳолда $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$, фақат ва фақат шундаки $\vec{b}=\alpha\,\vec{a}$ бўлса, бу ерда $\alpha\ge 0$.

Теорема исботи скаляр кўпайтма таърифидан ва косинуснинг хоссасидан бевосита келиб чиқади.

12§. КООРДИНАТАЛАРДА СКАЛЯР КЎПАЙТМА

Векторларнинг чизиқли комбинациясини кўпҳадлар каби кўпайтириш мумкинлиги скаляр кўпайтма хоссаларидан келиб чиқади:

$$\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3,\ \beta_1\vec{b}_1+\beta_2\vec{b}_2\right)=$$

$$=\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3,\ \beta_1\vec{b}_1\right)+\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3,\ \beta_2\vec{b}_2\right)=$$

$$=\alpha_1\,\beta_1\left(\vec{a}_3,\vec{b}_1\right)+\alpha_2\,\beta_1\left(\vec{a}_2,\vec{b}_1\right)+\alpha_3\,\beta_1\left(\vec{a}_3,\vec{b}_1\right)+$$

$$+\alpha_1\,\beta_2\left(\vec{a}_1,\vec{b}_2\right)+\alpha_2\,\beta_2\left(\vec{a}_2,\vec{b}_2\right)+\alpha_3\,\beta_2\left(\vec{a}_3,\vec{b}_2\right).$$

Текисликда векторлар фазосининг $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ базисини оламиз. У ҳолда

$$\vec{a} = a^1 \cdot \vec{e}_1 + a^2 \cdot \vec{e}_2\,, \quad \vec{b} = b^1 \cdot \vec{e}_1 + b^2 \cdot \vec{e}_2 \qquad (28)$$

векторлар учун

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a^1 b^1 \left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right) + a^1 b^2 \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) + a^2 b^1 \left(\vec{e}_2, \vec{e}_1\right) + a^2 b^2 \left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right) \qquad (29)$$

тенгликка эга бўламиз.

Ушбу $\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = g_{ij}$ сонни базиснинг *метрик коэффициенти* деб атаймиз. Унда $g_{ij} = g_{ji}$ бўлишини эътиборга олиб, (29) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a^1 b^1 g_{11} + \left(a^1 b^2 + a^2 b^1\right) g_{12} + a^2 b^2 g_{22}\,. \quad (30)$$

Худди шундай фазода векторлар учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисни олиб

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3 \text{ ва } \vec{b} = b^1 \vec{e}_1 + b^2 \vec{e}_2 + b^3 \vec{e}_3 \qquad (31)$$

векторлар учун

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a^1 b^1 g_{11} + a^2 b^2 g_{22} + a^3 b^3 g_{33} + \left(a^1 b^2 + a^2 b^1\right) g_{12} +$$

$$+ \left(a^1 b^3 + a^3 b^1\right) g_{13} + \left(a^2 b^3 + a^3 b^2\right) g_{23} \qquad (32)$$

тенгликни ёки анча компакт шаклда

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a^i b^j g_{ij} \qquad (33)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Ушбу $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}, \vec{a}\right)}$, $\quad \cos\left(\vec{a} \,^\wedge\, \vec{b}\right) = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$ тенгликлар векторларнинг координаталари ва базиснинг метрик коэффициетлари орқали вектор узунлиги ва улар орасидаги бурчакни топишга имкон беради. (28) векторлар учун ушбуга эга бўламиз:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(a^1\right)^2 g_{11} + 2 a^1 a^2 g_{12} + \left(a^2\right)^2 g_{22}}\;, \qquad (34)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{a}\,^\wedge\,\overrightarrow{b}\right)=\frac{a^1b^1g_{11}+\left(a^1b^2+a^2b^1\right)g_{12}+a^2b^2g_{22}}{\sqrt{\left(a^1\right)^2g_{11}+2a^1a^2g_{12}+\left(a^2\right)^2g_{22}}\cdot\sqrt{\left(b^1\right)^2g_{11}+2b^1b^2g_{12}+\left(b^2\right)^2g_{22}}}.\ (35)$$

Худди шундай формулалар фазодаги (31) векторлар учун ҳам ўринли. Уларни (33) тенгликни қўллаб компакт шаклда берамиз:

$$\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a^ia^jg_{ij}}\,,\quad (36)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{a}\,^\wedge\,\overrightarrow{b}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a^ib^jg_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a^ia^jg_{ij}}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}b^ib^jg_{ij}}}.\ (37)$$

Агар $g_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\ uchun;\\ 0, & i\neq j\ uchun.\end{cases}$ бўлса, (тўғри чизиқдаги, текисликдаги ёки фазодаги) $\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}$ базис *ортонормал базис* дейилади. Ортонормал базис векторларнинг узунлиги бирга тенг:

$$\left|\overrightarrow{e_i}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_i}\right)}=\sqrt{g_{ii}}=1,$$

$i\neq j$ учун $g_{ij}=0$ тенглик эса $\cos\left(\overrightarrow{e_i}\,^\wedge\,\overrightarrow{e_j}\right)=0$ бўлишини англатади, яъни, ортонормал базиснинг векторлари жуфт – жуфт бўлиб ўзаро перпендикулярдир. Юқорида барча формулалар ортонормал базисда анча содда кўринишга эгадир. Фазодаги векторлар учун ушбу ёзувга эга бўламиз:

$$\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)=a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3,\quad (38)$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{\left(a^1\right)^2+\left(a^2\right)^2+\left(a^3\right)^2}\,,\quad (39)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{a}\,^\wedge\,\overrightarrow{b}\right)=\frac{a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3}{\sqrt{\left(a^1\right)^2+\left(a^2\right)^2+\left(a^3\right)^2}\sqrt{\left(b^1\right)^2+\left(b^2\right)^2+\left(b^3\right)^2}}.\ (40)$$

(38)-(40) формулаларда учинчи қўшилувчини ташлаб юбориб текисликдаги векторлар учун мос формулуларни ҳосил қиламиз. (38) формуладан ушбу жумла келиб чиқади.

12.1. жумла. Ихтиёрий $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ ортонормал базисдаги координаталари $\left(\vec{a},\vec{e_1}\right)$, $\left(\vec{a},\vec{e_2}\right)$, $\left(\vec{a},\vec{e_3}\right)$ скаляр кўпайтмалар бўлади.

13§. КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Аффин координаталари. Тўғри чизиқда, текисликда ёки фазода O нуқта ва $\vec{e_1},...,\vec{e_n}$ базис берилган бўлсин. Унда $O\vec{e_1}...\vec{e_n}$ *репер* берилган деб айтамиз. Ихтиёрий M нуқта учун $\overrightarrow{OM}$ векторни (O нуқтага нисбатан) M нуқтанинг *радиус–вектори* деб аталади ва $\vec{r_M}$ орқали белгиланади.

Айтайлик,

$$\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e_1} + ... + x^n\vec{e_n} \qquad (41)$$

бўлсин. (41) тенгликдаги $x^1,...,x^n$ сонлар M нуқтанинг $O\vec{e_1}...\vec{e_n}$ репердаги *(аффин) координаталари* деб аталади. Баъзан векторнинг $O\vec{e_1}...\vec{e_n}$ репердаги координаталари ҳақида гапирамиз ва бунда унинг $\vec{e_1},...,\vec{e_n}$ базисдаги координаталарини тушунамиз. Шундай қилиб, M нуқтанинг $O\vec{e_1}...\vec{e_n}$ репердаги координаталари бу– унинг радиус векторининг бу репердаги координаталаридир. $x^1,...,x^n$ координатали M нуқтани баъзан $M\left(x^1,...,x^n\right)$ деб ёзамиз.

13.1. жумла. Берилган реперда $M\left(x_1^1,...,x_1^n\right)$ ва $N\left(x_2^1,...,x_2^n\right)$ нуқталар учун $\overrightarrow{MN} = \left\{x_2^1 - x_1^1, ... , x_2^n - x_1^n\right\}$ тенгликка эга бўламиз.

Тасдиқ 18-расм тасвирланган бўлиб, у

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \quad \text{ёки} \quad \overrightarrow{MN} = \vec{r_N} - \vec{r_M} \quad (42)$$

тенгликдан келиб чиқади.

$$\overrightarrow{MN} = \left(x_2^1\vec{e_1} + ... + x_2^n\vec{e_n}\right) - \left(x_1^1\vec{e_1} + ... + x_1^n\vec{e_n}\right) = \left(x_2^1 - x_1^1\right)\vec{e_1} + ... + \left(x_2^n - x_1^n\right)\vec{e_n}$$

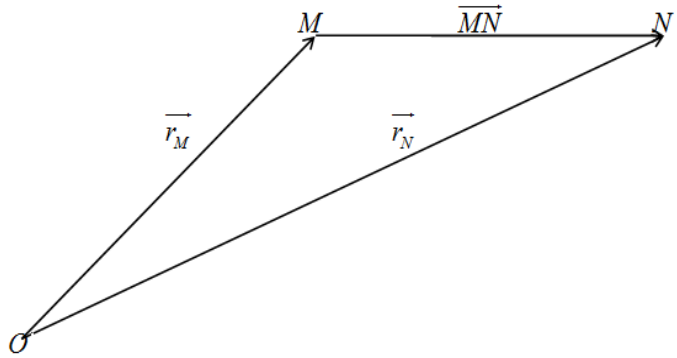
ёки

$$\overrightarrow{MN} = \left\{x_2^1 - x_1^1, \dots, x_2^n - x_1^n\right\}.$$

Шундай қилиб, $O\overrightarrow{e_1}...\overrightarrow{e_n}$ реперни бериш, равшанки, нуқтага унинг координаталар сатрини мос қўювчи:

“нуқта” $\to$ “унинг координаталар сатри” (43)

акслантириш биектив акслантиришни ифодалайди.



18-расм.

13.2. таъриф. (43) биектив акслантиришни $O\overrightarrow{e_1}...\overrightarrow{e_n}$ репер билан аниқланувчи аффин координаталар системаси деб аталади.

Одатда уни $Ox^1,...,x^n$ ёки $Ox_1...x_n$ символ билан белгиланади. O нуқтани координаталар системасининг боши деб аталади. $O\overrightarrow{e_1}$ репер билан берилган тўғри чизиқ боши O нуқтада бўлган Ox координата ўқи деб аталади.

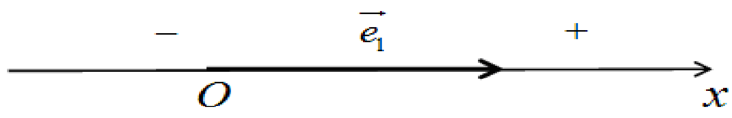
Шундай қилиб, фазода $Oxyz$ координаталар системасини бериш умумий координата бошига эга бўлган учта Ox, Oy, Oz координата ўқларни беришга эквивалентдир. Бу ўқлар мос равишда

Ox - абсисса ўқи,

Oy - ордината ўқи,

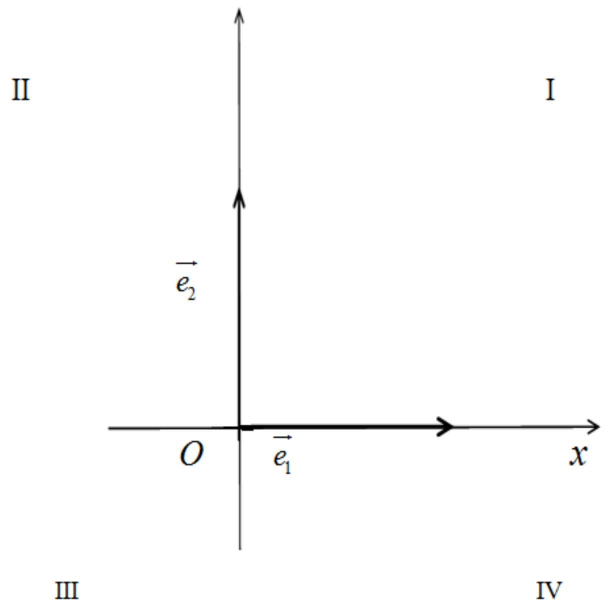
Oz - аппликата ўқи деб аталади.

Координата боши O нуқта Ox ўқини иккита ярим ўққа: манфий ва мусбат ўқларга бўлади **(19-расм)**.



19-расм.

Координаталар ўқи текисликни координаталар ярим текисликларига ажратади, координата ўқлар жуфтлиги эса координата квадрантларига ёки I, II, III, IV чоракларга ажратади **(20-расм)**.

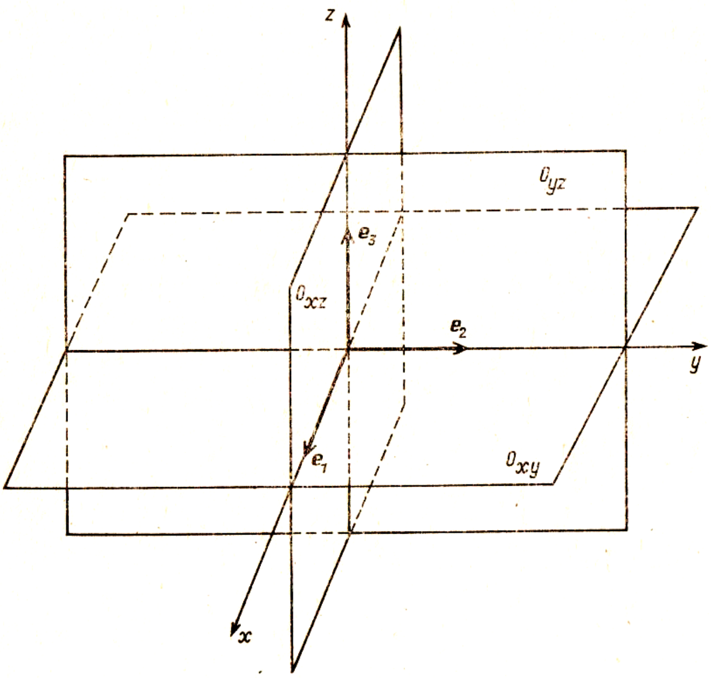


20-расм.

Координата ўқлари жуфтликлари орқали ўтувчи текисликлар $-Oxy, Oxz$, Oyz *координата текисликлари* деб аталади **(21–расм)**.

Фазони координата текислиги иккита ярим координата фазога ажратади. Координата текислиги учликлари эса фазони саккизта координаталар октантларига ажратади.

Фазода ихтиёрий M нуқтани оламиз. Бу нуқтани Ox, Oy, Oz координата ўқларига мос равишда Oxy, Oxz, Oyz координата текисликларига параллел қилиб проекциялаймиз. Ҳосил бўлган проекцияларни M_1, M_2, M_3 орқали белгилаймиз. $x - M_1$ нуқтанинг Ox ўқидаги координатаси бўлсин ҳамда M_2 ва M_3 нуқталар Oy ва Oz ўқлари мос равишда y ва z координаталарга эга бўлсин. Унда 10§ да келтирилган проекция ва координата орасидаги боғланишидан x, y, z сонлар M нуқтанинг $Oxyz$ координаталар системасидаги координаталари бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, фазода нуқтанинг координатаси бу – унинг координата ўқидаги проекциясининг мос координата текислигига параллел проекциясининг координатасидир.



21–расм.

Кесмани берилган нисбатда бўлиш.

Агар

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{MM_1} \qquad (44)$$

тенглик бажарилса, $M \neq M_1$ нуқта M_0M кесмани λ нисбатда бўлади деб айтилади.

$\overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{r_1}$, $\vec{r}$ – M_0, M_1, M нуқталарнинг радиус-векторлари бўлсин. Унда (44) тенгликни $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \lambda\left(\overrightarrow{r_1} - \vec{r}\right)$ ёки

$$\vec{r} = \frac{\overrightarrow{r_0} + \lambda\overrightarrow{r_1}}{1+\lambda} \qquad (45)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу тенглама ихтиёрий $\lambda \neq -1$ да M нуқтанинг M_0M_1 тўғри чизиқдаги радиус вектори $\vec{r}$ ни аниқлайди. $\lambda = -1$ да M_0M_1 –тўғри чизиқнинг “чексиз узоқлашган” нуқтасини ҳосил қиламиз.

(45) тенгликни координата бўйича ёзиб

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1+\lambda} \qquad (46)$$

формулаларни ҳосил қиламиз. $\lambda = 1$ да M нуқта M_0M_1 кесманинг ўртаси бўлади ва (46) формулалар

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad y = \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad z = \frac{z_0 + z_1}{2} \qquad (47)$$

кўринишни олади.

Тўғри бурчакли координаталар системаси.

Агар $Ox^1,...,x^n$ координаталар системаси $O\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$ ортонормал репер билан яъни, ундаги $\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$ базис ортонормал базис бўлган репер билан аниқланган бўлса, у ҳолда $Ox^1,...,x^n$ координаталар системаси тўғри бурчакли система деб аталади.

Фазода $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системаси берилган бўлсин. Иккита $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтани оламиз. Унда улар орасидаги $\rho(M_1, M_2)$ масофа уларни туташтирувчи вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ нинг узунлигига тенгдир.

Шунинг учун (39) формулага асосан

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (48)$$

Хусусан,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \quad R > 0 \qquad (49)$$

тенглама берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан R масофада турувчи барча $M(x, y, z)$ нуқталарнинг геометрик ўрнини яъни, радиуси R га тенг ва маркази M_0 нуқтада бўлган сферани тавсифлайди.

Тўғри бурчакли Oxy координаталар системали текисликда $M_1(x_1, y_1,)$ ва $M_2(x_2, y_2,)$ нуқталар орасидаги масофа

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (50)$$

тенглик билан аниқланади.

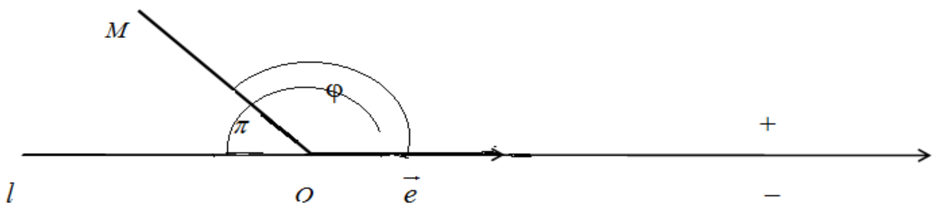
Ушбу

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (51)$$

тенглама радиуси R га тенг бўлган ва маркази $M_0(x_0, y_0)$ нуқта бўлган айланани тавсифлайди.

Қутб координаталар системаси.

Текисликда O нуқтани тайинлаймиз ва уни боши ёки қутби деб атаймиз. $l - O$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўлсин. Бу тўғри чизиққа параллел бирор нолмас $\vec{e}$ векторни танлаб, l тўғри чизиқда ориентация киритамиз. $\vec{e}$ вектор билан бир хил йўналган ва боши O нуқтада бўлган нурни *қутб ўқи* деб атаймиз.



22-расм.

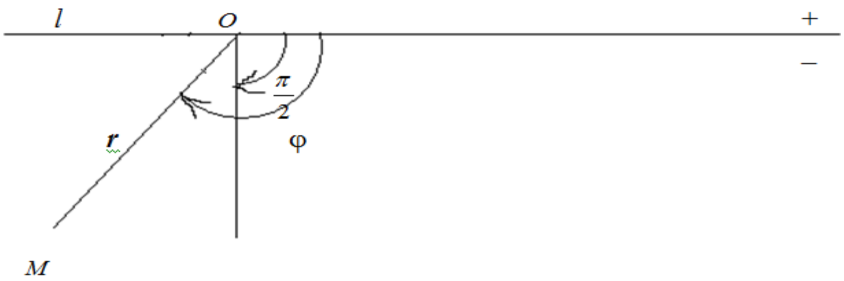
l тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади, улардан бирини (пасткисини) манфий, иккинчисини (юқорисини) эса мусбат деб атаймиз. Энди текисликнинг ихтиёрий M нуқтаси учун унинг кутб координаталарини аниқлаш мумкин, яъни:

1) M нуқтадан O нуқтагача бўлган r масофа;

2) M нуқтанинг $\overrightarrow{OM}$ радиус векторининг кутб ўқидан оғиш бурчаги φ **(22-расм)**.

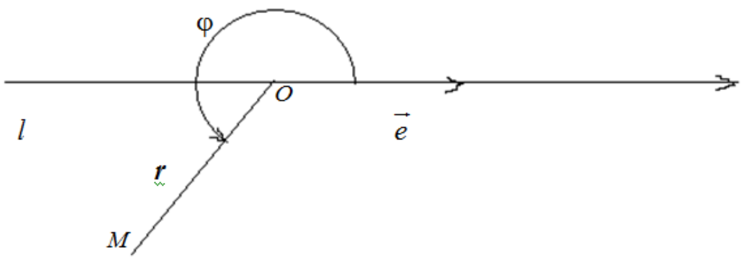
r сони M нуқтанинг *қутб радиуси* деб аталади. O нуқтадан фарқли ихтиёрий нуқтанинг қутб радиуси мусбат. O нуқта учун у нолга тенг.

φ бурчак M нуқтанинг *қутб бурчаги* деб аталади. Қутб бурчак текисликнинг O нуқтасидан бошқа барча нуқталари учун аниқланган. Мусбат ярим текислик нуқталари учун, жумладан, l тўғри чизиқ нуқталари учун ҳам қутб бурчак $\left[0, \pi\right]$ кесмадаги қийматларни қабул қилади. Манфий ярим текислик нуқталари учун қутб бурчак $\left(-\pi, 0\right)$ интервалдан қийматлар қабул қилади **(23-расм)**.



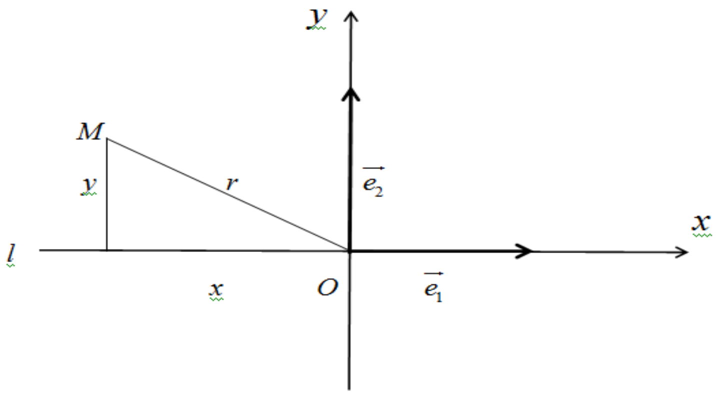
23-расм

Демак, нуқтанинг қутб координаталари бу – қутб радиуси ва қутб бурчагидир. Юқорида тавсифланган M, $M \neq O$ нуқтага унинг қутб координаталари $\left(r, \varphi\right)$ жуфтликни мос қўювчи акслантиришни қутб ўқи ва мусбат ярим текислик билан аниқланувчи $Or\varphi$ координаталар системаси деб аталади. Текисликларда мусбат ярим текисликни танлаш ўрнига айланишнинг мусбат йўналишини танлаш мумкин. Табиийки, φ қутб бурчаги $\left[0, 2\pi\right)$ ярим интервалдаги қийматларни қабул қилади **(24-расм)**.



24-расм.

Агар текисликда қутб координаталар системаси $Or\varphi$ берилган бўлса, у ҳолда у бўйича тўғри бурчакли координаталар системаси ҳам аниқланиши табиийдир. Бу координаталар системасининг боши қутб координаталар системасининг боши билан устма-уст тушади, абсциссаларнинг мусбат ярим ўқи эса мусбат ярим текисликда ётади. Шундай қилиб, ҳосил қилинган Oxy тўғри бурчакли координаталар системасини $Or\varphi$ *қутб координаталар системаси билан аниқланган система* деб атаймиз **(25-расм)**.



25-расм.

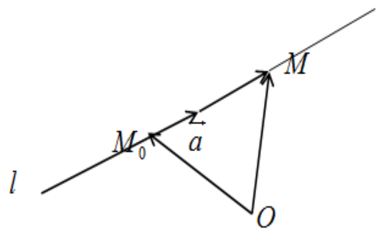
Аксинча, агар Oxy тўғри бурчакли координаталар системаси берилган бўлса, у ҳолда берилган тўғри бурчакли координаталар системасининг координата бошини сақлаб ҳамда қутб ўқи абсциссалар мусбат ярим ўқи билан устма-уст тушишини талаб қилиб, мусбат ярим текислик эса ординаталари мусбат нуқталардан ташкил топиди. Ихтиёрий M нуқтанинг (x, y) тўғри бурчакли координаталарини, унинг (r, φ) қутб координаталари билан боғловчи формулалар ўринлидир:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (52), \qquad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

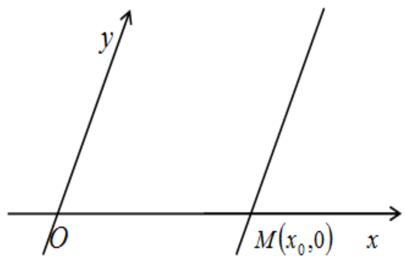
II БОБ
ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАСИ

14§. ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликда аффин координаталар системаси Oxy ни тайинлаймиз. l тўғри чизиққа параллел ҳар қандай нолдан фарқли $\vec{a}$ вектор бу тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи вектори* деб аталади.



26-расм.



27-расм.

$M_0(x_0, y_0)$ нуқта l тўғри чизиқда ётсин. Унда бу тўғри чизиқнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтаси учун $\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{a}$ векторлар коллинеардир. Демак, шундай t сон мавжуд бўлиб,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \qquad (1)$$

тенглик ўринли бўлади. Аксинча, (1) шарт бажариладиган ҳар қандай M нуқта, векторни сонга кўпайтириш таърифига мувофиқ l тўғри чизиқда ётади. Шундай қилиб, (1) шартни фақат l тўғри чизиқнинг нуқталари қаноатлантиради. (1) тенглик бу – тўғри чизиқнинг вектор шаклидаги тенгламасидир. M_0 ва M нуқталарнинг радиус векторларни мос равишда $\vec{r_0}$ ва $\vec{r}$ орқали белгилаймиз: $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Унда

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r_0}$$

ва (1) тенглама

$$\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{a} \quad \text{ёки} \quad \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a} \qquad (2)$$

кўринишга келади. Бу ҳам тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси **(26-расм)**.

Агар $\vec{a}$ вектор $\{\alpha, \beta\}$ координаталарга эга бўлса, у ҳолда (2) вектор тенгликдан координат тенгликларга ўтиб

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t\alpha \\ y &= y_0 + t\beta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу (x_0, y_0) нуқта орқали ўтувчи йўналтирувчи вектори $\{\alpha, \beta\}$ бўлган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси.

(3) тенгламалар системасидан t параметрни йўқотиб тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}. \qquad (4)$$

Бу ерда, агар $\alpha=0$ бўлса, у ҳолда (4) тенглама $x-x_0=0$ тенгликка айланади.

Бу тенглик Oy ўқига параллел ва Ox ўқида $M\left(x_0,0\right)$ нуқта орқали ўтувчи l тўғри чизиқ тенгламасини тавсифлайди **(27-расм)**.

(4) тенгламани умумий махражга келтириб, унга эквивалент тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\beta x-\alpha y-\beta x_0+\alpha y_0=0.$$

Бу тенгламада $A=\beta$, $B=-\alpha$, $C=-\beta x_0+\alpha y_0$ деб, уни

$$Ax+By+C=0 \qquad (5)$$

кўринишда ёзамиз. Бу тўғри чизиқнинг текисликдаги умумий тенгламасидир.

$\vec{a}=\{\alpha,\beta\}$ вектор нолдан фарқли бўлганидан A ва B коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли. Шунинг учун (5) тенгламанинг чап томони x ва y номаълумларнинг биринчи тартибли кўпҳадидан иборатдир. Демак, (5) тенглама – биринчи даражали тенглама, яъни текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиқ биринчи тартибли чизиқдан иборатдир.

Тескариси ҳам тўғридир: текисликда ихтиёрий биринчи тартибли чизиқ, яъни текисликда Oxy Аффин координаталар системасида (5) тенглама тўғри чизиқни тавсифлайди.

Ҳақиқатан, (5) тенгламанинг хусусий ечими $\left(x_0,y_0\right)$ ни оламиз. Бундай ечим ҳамма вақт мавжуд: агар, масалан, $A\neq 0$ бўлса, у ҳолда $y_0=0$ ва $x_0=-\dfrac{C}{A}$ деб оламиз. Агар $B\neq 0$ бўлса, у ҳолда $x_0=0$ ва $y_0=-\dfrac{C}{B}$ деб оламиз. $M_0\left(x_0,y_0\right)$ нуқтадан ўтувчи йўналтирувчи вектори $\vec{a}=\{-B,A\}$ бўлган l тўғри чизиқни қараймиз. Энди l тўғри чизиқда ихтиёрий $M\left(x,y\right)$ нуқтани оламиз ва унинг координаталари (5) тенгламани қоноатлантиришини кўрсатамиз. (1) мувофиқ шундай t сони мавжудки,

$$\{x-x_0, y-y_0\} = t\{-B, A\} \qquad (6)$$

тенглик ўринлидир. Бундан қуйидагини топамиз:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0) = ((6) \text{ га мувофиқ}) = A(-Bt)+B\cdot At = 0$$

ёки

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0. \qquad (7)$$

Аммо, (x_0, y_0) жуфтлик (5) тенгламанинг ечимидан иборат, яъни $C=-Ax_0-By_0$. Демак, (7) тенглик (5) тенглик билан устма-уст тушади. Демак, l тўғри чизиққа тегишли бўлган ихтиёрий M нуқтанинг (x, y) координатаси (5) тенгламани қаноатлантиради.

Айтайлик, $M(x, y)$ нуқта (5) шартни қаноатлантирсин. Шунингдек $M(x_0, y_0)$ нуқта ҳам бу шартни қаноатлантиргани учун ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

ёки

$$\frac{x-x_0}{y-y_0} = -\frac{B}{A}.$$

Демак, $\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0\}$ ва $\vec{a} = \{-B, A\}$ векторлар пропорционалдир. Демак, (1) га мувофиқ M нуқта l тўғри чизиқда ётади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исботладик.

14.1. теорема. Текисликда тўғри чизиқ – бу айнан биринчи тартибли чизиқдир.

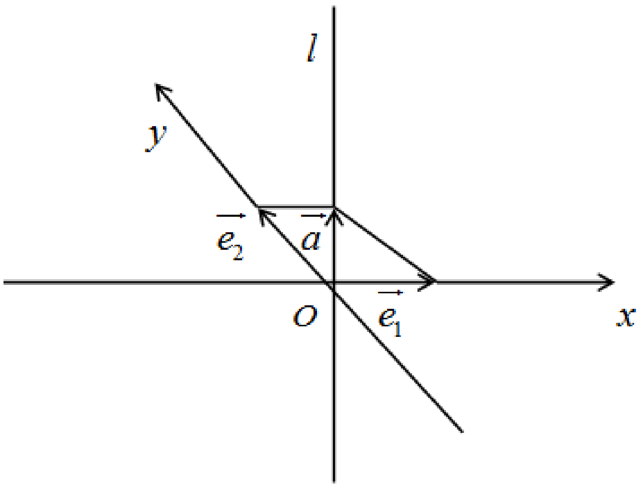
Бу теореманинг исботидан $\vec{a} = \{-B, A\}$ вектор (5) тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлиши келиб чиқади. Агар $B \neq 0$ бўлса, (5) тенгламани

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

кўринишда ёки

$$y = kx + b \qquad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу – k бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламаси. Аффин координаталар системасида k сони тўғри бурчакли координаталар системасидаги каби тўри чизиқнинг Ox ўқига оғиш бурчак тангенси каби геометрик маънога эга эмаслигини қайд қилиш жоиздир. 28-расмда Ox ўқига перпендикуляр l тўғри чизиқ $y = x$ тенгламага эгадир.



28-расм.

Энди (4)-тенгламага қайтамиз. l тўғри чизиқда $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан фарқли $M_1(x_1, y_1)$ нуқта берилган бўлсин. У ҳолда l тўғри чизиқнинг $\vec{a}$ йўналтирувчи вектори сифатида $\{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$ векторни олиш мумкин. Натижада (4) тенглама

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \qquad (9)$$

кўринишга келади. Бу иккита M_0 ва M_1 нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.

l тўғри чизиқнинг (5) умумий тенгламасининг айрим хусусий ҳолларини ажратамиз:

1) l тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади $\Leftrightarrow$ $C = 0$ бўлса;

2) $l : Ax + By + C = 0$ тўғри Ox ўқига параллел бўлади $\Leftrightarrow$ $A = 0$ бўлса;

3) l тўғри чизиқ Oy ўқига параллел бўлади $\Leftrightarrow$ $B = 0$ бўлса;

4) l тўғри чизиқ Ox ўқи билан устма-уст тушади $\Leftrightarrow$ $A=C=0$ бўлса;

5) l тўғри чизиқ Oy ўқи билан устма-уст тушади $\Leftrightarrow$ $B=C=0$ бўлса.

15§. ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШУВИ. ЯРИМ ТЕКИСЛИКЛАР

Бу параграф мобайнида аффин координаталар системаси Oxy ни тайинланган.

15.1. жумла. Мос равишда

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad (10)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \quad (11)$$

тенгламалар билан берилган l_1, l_2 тўғри-чизиқлар устма-уст тушиши учун

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \quad (12)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. ***Зарурлиги.*** l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушсин. $\{-B_1,A_1\}$, $\{-B_2,A_2\}$ векторлар мос равишда l_1, l_2 тўғри чизиқлар учун йўналтирувчи векторлар бўлади. Демак, улар коллинеар. Шундай $\alpha\in\mathbb{R}$ сон мавжуд бўлиб,

$$\{-B_1,A_1\}=\alpha\{-B_2,A_2\} \quad (13)$$

ўринли. $(x_0,y_0)\in l_1=l_2$ нуқтани оламиз. Унда

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,$$

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

Бу тенгламалардан иккинчисини α га кўпайтириб, биринчи тенгламадан айирамиз:

$$(A_1-\alpha A_2)x_0+(B_1-\alpha B_2)y_0+C_1-\alpha C_2=0$$

(13) тенгликка асосланиб, $C_1-\alpha C_2=0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан эса $A_1=\alpha A_2$, $B_1=\alpha B_2$, $C_1=\alpha C_2$ тенгликлар билан бизга $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ шартни беради.

Етарлилиги. (12) шартдан

$$A_1x+B_1y+C_1=\alpha A_2x+\alpha B_2y+\alpha C_2=\alpha\left(A_2x+B_2y+C_2\right)$$

тенглик келиб чиқади, яъни $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқларни берувчи тенгламалар тенг кучли, яъни $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқлар устма-уст тушади.

15.2. жумла. Мос равишда (10), (11) тенгламалар билан берилган $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқлар параллел бўлади, фақат ва фақат шундаки

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} \qquad (14)$$

шарт бажарилса.

Исбот. ***Зарурлиги.*** $\{-B_1,A_1\}$, $\{-B_2,A_2\}$ йўналтирувчи векторларнинг пропорционаллигидан ҳамда 15.1-жумладан $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқларнинг устма-уст тушмаслигини, яъни $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқларнинг параллеллигини англатади.

Етарлилиги. (14) шартнинг биринчи қисми бизга йўналтирувчи векторларнинг параллел бўлишини, иккинчи қисми ва 15.1. жумлага кўра $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқлар устма-уст тушмаслиги келиб чиқади, яъни l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг параллеллигини англатади.

15.1 ва 15.2 жумлалардан

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2} \qquad (15)$$

шарт (10) ва (11) тенгламалар билан бериган $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқларнинг битта нуқтада кесишишига эквивалент эканлиги келиб чиқади.

15.1. жумла. (10) ва (11) тенгламалар билан бериган $l_1,\ l_2$ тўғри чизиқлар $M_0\left(x_0,y_0\right)$ нуқтада кесишсин. У ҳолда l_3 тўғри чизиқ M_0 нуқта орқали ўтади, фақат ва фақат шундаки, у (10) ва (11) тенгламаларнинг чизиқли комбинацияси бўлган

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0,\ \left(\alpha^2+\beta^2\neq0\right) \qquad (16)$$

тенглама билан берилган бўлса.

Етарлилиги. l_3 тўғри чизиқ (10) ва (11) тенгламаларнинг чизиқли комбинацияси бўлган (16) тенглама билан берилсин. (10) ва (11) тенгламалар билан берилган l_1, l_2 тўғри чизиқлар $M_0\left(x_0, y_0\right)$ нуқта бўйича кесишгани учун

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$$

тенгликлар ўринлидир. Унда

$$\alpha\left(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1\right) + \beta\left(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2\right) = 0$$

тенглик ҳам ўринлидир. Демак, l_3 тўғри чизиқ $M_0\left(x_0, y_0\right)$ нуқта орқали ўтади.

Зарурлиги. Айтайлик,

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0 \qquad (17)$$

тенглама билан берилган l_3 тўғри чизиқ M_0 нуқта орқали ўтсин. l_3 тўғри чизиқда $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан фарқли бирорта $M_1\left(x_1, y_1\right)$ нуқтани оламиз. $\alpha_1 = -\left(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2\right)$, $\beta_1 = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1$ бўлсин. M_1 нуқта l_1, l_2 тўғри чизиқларга бир вақтда тегишли бўлмаганлигида α_1 ва β_1 сонлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлади. Унда $\alpha_1\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \beta_1\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0$ (18) тенглама (15) шартга кўра биринчи тартибли тенглама бўлади (номаълумлар олдидаги коэффициентлар бир вақтда нолга айланмайди). Шунинг учун 14.1. жумлага мувофиқ, у бирорта l тўғри чизиқни аниқлайди. M_1 нуқтанинг координаталарини (18) тенгламанинг чап томонига қўйиб, $\alpha_1\beta_1 + \beta_1\left(-\alpha_1\right) = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Демак, l тўғри чизиқ M_1 нуқта орқали ҳам ўтади ва у l_3 тўғри чизиқ билан устма-уст тушиши келиб чиқади. Аммо, унда 15.1-жумлага кўра, (17) тенглама (18) тенгламани бирорта γ сонга кўпайтиришдан ҳосил қилинади. Унда $\alpha = \gamma\alpha_1$, $\beta = \gamma\beta_1$ да (16) ва (17) тенгламалар устма-уст тушади. 15.3. жумла исботланди.

(16) тенглама (10) ва (11) тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи *тўғри чизиқлар дастаси*нинг тенгламаси деб аталади.

15.4. теорема. l тўғри чизиқ $Ax+By+C=0$ (15) тенглама билан берилган бўлсин. Ушбу $X^{-}=\{M(x,y):Ax+By+C<0\}$ ва $X^{+}=\{M(x,y):Ax+By+C>0\}$ тўпламлар l тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлар бўлади.

Исбот. $M_0(x_0,y_0)$ ва $M_1(x_1,y_1)$ нуқталар X^{-} тўпламда ётсин. M_0M_1 кесманинг ихтиёрий ички $M(x,y)$ нуқтасини оламиз. Бу нуқта M_0M_1 кесмани бирор мусбат λ нисбатда бўлади. Унда 12§ да кўрсатилгани каби M нуқтанинг x,y координаталари мос равишда $x=\dfrac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}$ ва $y=\dfrac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda}$ га тенг. Шунинг учун $C=\dfrac{1}{1+\lambda}C+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}C$ айниятни эътиборга олиб топамиз:

$$Ax+By+C=A\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}+B\frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda}+\frac{1}{1+\lambda}C+\frac{\lambda}{1+\lambda}C=$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}\left(Ax_0+By_0+C\right)+\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(Ax_1+By_1+C\right)<0\,.$$

Чунки, M_0 ва M_1 нуқталар X^{-} ярим текисликка тегишлидир. Демак, $M\in X^{-}$. Ярим текислик таърифига кўра (3§), X^{-} тўплам l тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликларнинг бирида ётади. X^{+} тўплам ҳақида ҳам худди шундай айтиш мумкин яъни, X^{+} тўплам l тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлардан бошқаси ётади. Аммо, текислик X^{-}, l, X^{+} тўпламлар билан тугалланади. Демак, X^{-} ва X^{+} тўпламлар ҳар хил ярим текисликларда ётади ва уларни тугатади. 15.4. теорема исботланди.

X^{-} тўплам (5) тўғри чизиққа нисбатан *манфий ярим текислик*, X^{+} тўплам эса *мусбат ярим текислик* деб аталади.

16§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТА СИСТЕМАЛИ ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак.

Текисликда $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ ортонормал репер билан аниқланган Oxy тўғри бурчакли координаталар системаси берилган бўлсин. Маълумки, $\vec{a}=\{-B,A\}$ вектор (5) умумий тенглама билан берилган l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторидир. (10) ва (11) умумий тенгламалар билан берилган l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак уларнинг $\vec{a_1}=\{-B_1,A_1\}$ ва $\vec{a_2}=\{-B_2,A_2\}$ йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка тенг **(29-расм)**. Демак,

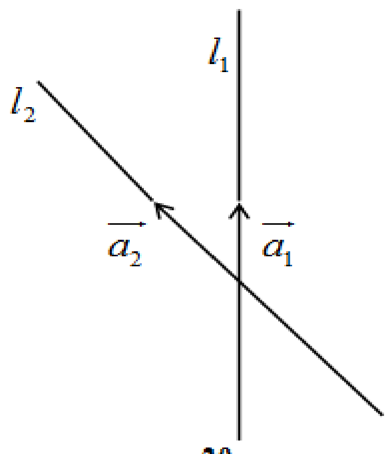
$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a_1},\vec{a_2})}{|\vec{a_1}|\cdot|\vec{a_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \quad (19)$$

Бизга бу формула l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклардан бирининг қийматини беради. Агар тўғри чизиқлардан бирининг тенгламасини (-1) га кўпайтирсак $\pi-\varphi$ тўлдирувчи бурчакнинг косинуси ҳам (19) формуладан ҳосил қилинади.

(19) формуладан l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

келиб чиқади.



29-расм

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа.

M_0 нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган масофа деб, бу нуқтадан тўғри чизиққа туширилган M_0M_1 перпендикулярнинг узунлигига айтилади. M_0M_1 кесма l тўғри чизиқнинг ихтиёрий M нуқтаси билан M_0 нуқтани туташтирувчи ҳар қандай бошқа M_0M кесмадан қисқа.

16.1. жумла. (x_0,y_0) координатали M_0 нуқтадан (5) умумий тенглама билан берилган l тўғри чизиққача бўлган масофа

$$\rho(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (20)$$

формула билан ифодаланади.

Исбот. Маълумки, $\vec{a}=\{-B,A\}$ вектор (5) умумий тенглама билан берилган l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторидир. $\vec{n}=\{A,B\}$ векторни қарайлик. У ҳолда

$$\left(\vec{a},\vec{n}\right)=-B\cdot A+A\cdot B=0$$

эга бўламиз. Демак, $\vec{n}$ вектор $\vec{a}$ векторга перпендикуляр. M_0 нуқта орқали l тўғри чизиққа перпендикуляр қилиб, l_1 тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси M_1 эса M_0 нуқтадан l тўғри чизиққа тушурилган перпендикулярнинг асоси бўлади. l_1 тўғри чизиқнинг (3) параметрик тенгламаси

$$\begin{cases} x=x_0+A\cdot t \\ y=y_0+B\cdot t \end{cases} \qquad (21)$$

кўринишга эга. M_1 нуқта $\left(x_1,y_1\right)$ координаталарга эга бўлсин. Бу координаталар t параметрнинг бирорта t_1 қийматида (21) формулага кўра ҳосил қилинади. $M_1\in l$ бўлганидан

$$A\cdot\left(x_0+A\cdot t_1\right)+B\cdot\left(y_0+B\cdot t_1\right)+C=0$$

бўлади, бундан

$$t_1=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}. \qquad (22)$$

$M_0\left(x_0,y_0\right)$ нуқтани $M_1\left(x_0+A\cdot t_1,y_0+B\cdot t_1\right)$ нуқта билан туташтирувчи $\overrightarrow{M_0M_1}$ вектор $\left\{A\cdot t_1,B\cdot t_1\right\}$ координаталарга эга. Демак,

$$\rho\left(M_0,l\right)=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\sqrt{\left(At_1\right)^2+\left(Bt_1\right)^2}=\left|t_1\right|\sqrt{A^2+B^2}=\text{((22) га мувофиқ)}=$$

$$=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{A^2+B^2}\sqrt{A^2+B^2}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Мана шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Агар $A^2+B^2=1$ бўлса, тўғри чизиқнинг (5) умумий тенгламаси нормал тенглама деб аталади. (5) умумий тенгламадан ҳамма вақт эквивалент нормал

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (23)$$

тенгламага ўтиш мумкин.

Шундай қилиб, 16.1. жумлани қуйидагича қайта ифодалаш мумкин:

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа (абсолют қиймати бўйича) бу нуқтанинг координаталарини бу тўғри чизиқ нормал тенгламасининг чап томонига қўшиш натижасига тенгдир.

17§. ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАСИ

Фазода текислик ҳақидаги тасдиқлар текисликда тўғри чизиқ ҳақидаги тасдиқларга ўхшаш бўлади. Асосий фарқ формула ўлчамида: битта векторга, битта тенгламага, битта координатага, битта қўшилувчига кўп бўлади. Шунинг учун фазода текисликка тегишли формулаларни келтириб чиқаришга текисликда тўғри чизиқлар учун келтириб чиқарилган формулалардан принципиал фарқ қилмаслигидан айрим деталларни тушуриб қолдирамиз.

Фазода текислик нима? Биз биламизки, текисликда иккита чизиқли эркли вектор мавжуд бўлиб, бу текисликда ётувчи ихтиёрий вектор улар орқали чизиқли ифодаланади (8§). Шу билан бирга ихтиёрий иккита чизиқли эркли (ноколлинеар) вектор текисликдаги векторлар фазосида базис ҳосил қилади (9§).

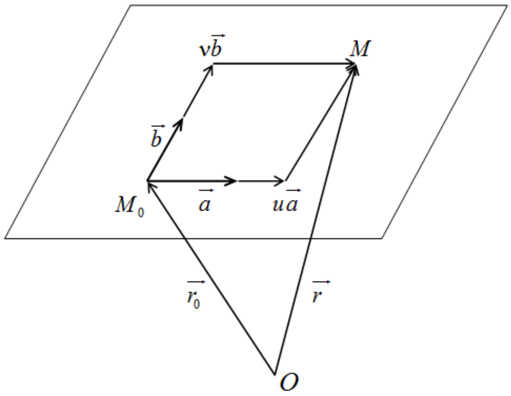
17.1. жумла. π текисликда M_0 нуқта ва иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ноколлинеар векторлар берилган бўлсин. Унда M нуқта π текисликка тегишли бўлади, фақат ва фақат шундаки, u ва v сонлар мавжуд бўлиб, улар учун

$$\overrightarrow{M_0M}=u\vec{a}+v\vec{b} \qquad (24)$$

ёйилма ўринли бўлса.

Исбот. M нуқта π текисликда ётади, фақат ва фақат шундаки, қачонки $\overrightarrow{M_0M}$ вектор π текисликка параллел бўлса. Бу таърифга кўра, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{M_0M}$ векторларнинг компланар бўлишини келиб чиқади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг ноколлинеарлиги сабабли, охирги жумла эса $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали чизиқли ифодаланишига эквивалентдир. 17.1. жумла исботланди.

(24) тенглик текисликнинг вектор шаклдаги тенгламасидан иборат. У тавсифий ҳусусиятга эга бўлиб, текислик асосан ундаги нуқта ва иккита ноколлинеар вектор билан бир қийматли аниқланишини тасдиқлайди.



30-расм

O координата бошини тайинлаймиз. M_0 ва M нуқталарнинг радиус векторларини мос равишда $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ ва $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ орқали белгилаймиз. Унда (24) тенглама

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{a} + v\vec{b} \quad \text{ёки} \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b} \qquad (25)$$

кўринишни олади. Бу тенглама текисликнинг вектор шаклидаги тенгламасидир **(30-расм)**.

Фазода $Oxyz$ аффин координаталар системасини оламиз. Бу системада нуқталар ва векторлар мос равишда

$$M_0(x_0, y_0, z_0),\ M(x, y, z),\ \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\},\ \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

координаталарга эга бўлсин.

(25) вектор тенгликдан координаталар тенгликларга ўтиб ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y &= y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z &= z_0 + ua_3 + vb_3 \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу текисликнинг параметрик тенгламасидир **(30-расм)**.

(26) тенгламалар системаси ёки унга эквивалент ушбу система

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=ua_1+vb_1\\ y-y_0&=ua_2+vb_2\\ z-z_0&=ua_3+vb_3 \end{aligned}\right\}$$

қуйидаги

$$\begin{pmatrix} x-x_0 & a_1 & b_1\\ y-y_0 & a_2 & b_2\\ z-z_0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

матрица устунларининг чизиқли боғланганлигини ифодалайди. Бу ўз навбатида

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & b_1\\ y-y_0 & a_2 & b_2\\ z-z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (27)$$

тенгликка ёки (биринчи сатр бўйича детерминантни ёйганимиздан сўнг)

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (28)$$

тенгламага эквивалентдир. Бу ерда

$$A=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (29).$$

(27) тенглик $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқта ва $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ ноколлинеар векторлар жуфтлиги орқали ўтувчи текислик тенгламаси.

Текисликда учта бир тўғри чизиқда ётмаган $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $i=0,1,2$ нуқталар берилган бўлсин. $\vec{a}=\overrightarrow{M_0M_1}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{M_0M_2}$ бўлсин. Унда (27) тенглама

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0 \qquad (30)$$

кўринишни олади. Бу тенглама (x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) координатали учта нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламасидир.

(28) тенгламага қайтайлик. $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ деб, уни

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (31)$$

кўринишда ёзамиз. Бу текисликнинг умумий тенгламаси. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг пропорционал эмаслигидан (29) тенгламалар билан аниқланувчи A, B, C сонлардан камида биттаси нолдан фарқлидир.

Демак, текисликнинг умумий тенгламаси биринчи тартибли тенгламадир. Шундай қилиб, текислик эса биринчи тартибли сирт бўлади.

Тескари тасдиқ ҳам тўғри: ҳар қандай биринчи тартибли (31) тенглама текислик тенгламаси бўлади. Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик, бунда $A \neq 0$ бўлсин. $M_0\left(-\dfrac{D}{A}, 0, 0\right)$ нуқтани $\vec{a} = \left\{-\dfrac{B}{A}, 1, 0\right\}$, $\vec{b} = \left\{-\dfrac{C}{A}, 0, 1\right\}$ векторларни оламиз ва M_0 нуқта ҳамда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ўтувчи π текислик (31) тенгламанинг ечимлари тўплами билан устма-уст тушушини кўрсатамиз. π текисликнинг (27) тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x + \dfrac{D}{A} & y & z \\ -\dfrac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\dfrac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$x + \frac{D}{A} + \frac{C}{A} z + \frac{B}{A} y = 0. \qquad (32)$$

Шундай қилиб, (31) тенглама ва π текисликни берувчи (32) тенгламалар пропорционалдир. Демак, ушбуни исбот қилдик:

17.2. теорема. Фазода текислик бу – айнан биринчи тартибли сиртдир.

18§. ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШУВИ. ЯРИМ ФАЗОЛАР

18.1. жумла. $\vec{a}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ вектор (31) умумий тенгламаси билан берилган π текисликка параллел бўлади, фақат ва фақат шундаки

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=0 \qquad (33)$$

тенглик ўринли бўлса.

Исбот. Агар векторнинг боши ва охири текисликда ётса, у ҳолда вектор шу текисликка параллел бўлади, ва аксинча.

$\vec{a}$ векторни π текисликнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасидан қўямиз. У ҳолда, унинг M_1 охири $(x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)$ координаталарга эга бўлади. Шундай қилиб, векторнинг текисликка параллел бўлиши ушбу

$$A(x_0+\alpha)+B(y_0+\beta)+C(z_0+\gamma)=0$$

тенгликка тенг кучли бўлиб, $M_0(x_0, y_0, z_0)$нуқтанинг π текисликка тегишли бўлиши шарти

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

ни эътиборга олсак, бу тенглик

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=0 \qquad (33)$$

тенгликка эквивалентдир. 18.1. жумла исботланди.

18.2. жумла. Фазода π_1 ва π_2 текисликлар мос равишда

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad (34)$$

ва

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (35)$$

умумий тенгламалари билан берилган бўлсин.

Агар $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ шарт бажарилса, π_1 ва π_2 текисликлар кенг маънода параллел бўлади(тўплам маъносида кесишмайди ёки устма-уст тушади) ва аксинча.

Исбот. *Етарлилиги* 18.1.жумладан келиб чиқади.

*Зарурлиги*ни текширамиз. Фараз қилайлик, $A_1 \neq 0$ бўлсин.

Унда $\vec{a}=\left\{-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0\right\}$ ва $\vec{b}=\left\{-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1\right\}$ векторлар π_1– текисликка параллелдир, чунки,

$$A_1\cdot\left(-\frac{B_1}{A_1}\right)+B_1\cdot 1+C_1\cdot 0=0,\quad A_1\cdot\left(-\frac{C_1}{A_1}\right)+B_1\cdot 0+C_1\cdot 1=0.$$

Демак, улар π_2 – текисликка ҳам параллелдир. (33) шартга кўра

$$A_2\cdot\left(-\frac{B_1}{A_1}\right)+B_2\cdot 1=0 \quad \text{ва} \quad A_2\cdot\left(-\frac{C_1}{A_1}\right)+C_2\cdot 1=0.$$

Бу тенгликлардан ушбу

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1} \quad \text{ва} \quad \frac{A_2}{A_1}=\frac{C_2}{C_1}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Мана шуни исботлаш талаб этилган эди.

18.3. жумла. Агар

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1} \qquad (37)$$

шарт бажарилса, у ҳолда (34) ва (35) умумий тенгламалар билан берилган π_1 ва π_2 текисликлар устма-уст тушади, ва аксинча.

Исбот. Фақат зарурлиги исботлаш етарли.

π_1 ва π_2 текисликлар устма-уст тушсин. Унда (36) шартга кўра шундай α сон топилиб,

$$A_1=\alpha A_2,\ B_1=\alpha B_2,\ C_1=\alpha C_2 \quad (38)$$

шарт бажарилади. $(x_0, y_0, z_0)\in\pi_1=\pi_2$ нуқтани оламиз. Унда

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0,$$

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0.$$

Бу тенгликларнинг иккинчисини α га кўпайтириб, биринчисидан айирсак, $D_1-\alpha D_2=0$ ёки $D_1=\alpha D_2$ тенгликни ҳосил қиламиз, яъни $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}=\alpha$. Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

18.2. ва 18.3. жумлалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

18.4. Натижа. Агар

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1} \quad (39)$$

шарт бажарилса, у ҳолда (34) ва (35) умумий тенгламалар билан берилган π_1 ва π_2 текисликлар тор маънода параллел бўлади (тўплам маъносида кесишмайди), ва аксинча.

18.2 жумладан қуйидаги жумла келиб чиқади.

18.5. жумла. Агар $\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ ва $\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда (34) ва (35) тенгламалар билан берилган текисликлар тўғри чизиқ бўйича кесишади, ва аксинча.

18.6. жумла. (34) ва (35) тенгламалар билан берилган π_1 ва π_2 текисликлар l тўғри чизиқ бўйича кесишсин.

π_3 текислик l тўғри чизиқ орқали ўтиши учун, унинг тенгламаси

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \quad (40)$$

кўринишга эга бўлиши зарур ва етарли.

Бу тенглама (34) ва (35) текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғи орқали ўтувчи *текисликлар дастасининг тенгламаси* деб аталади. 18.6. жумла тўғри чизиқлар учун берилган 15.3. жумла каби исботланади.

18.7. теорема. π текислик (31) тенглама билан берилган бўлсин. У ҳолда $X^-=\left\{M\left(x,y,z\right)\middle| Ax+By+Cz+D<0\right\}$ ва $X^+=\left\{M\left(x,y,z\right)\middle| Ax+By+Cz+D>0\right\}$ тўпламлари π текислик билан чегараланган ярим фазолардир.

X^- тўплам (41) текисликка нисбатан манфий ярим фазо, X^+ тўплам эса мусбат ярим фазо деб аталади. 18.7. теорема ярим текисликлар учун берилган 15.4. теорема каби исботланади.

19§. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

Тўғри чизиқнинг текисликдаги ва фазодаги вектор тенгламалари устма-уст тушади. Ушбу $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ тенглама, t параметр барча ҳақиқий қийматларни қабул қилганда, M_0 нуқтадан ўтувчи ва нолмас $\vec{a}$ векторга параллел бўлган l тўғри чизиқнинг M ўзгарувчи нуқтасини тавсиф қилишини эслатиб ўтамиз. Агар фазода O координата боши тайинланган бўлса, у ҳолда

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a} \qquad (2)$$

тенглама радиус вектори $\vec{r_0}$ векторга тенг бўлган M_0 нуқта орқали ўтувчи $\vec{a}$ йўналтирувчи векторли l тўғри чизиқнинг M ўзгарувчи нуқтасининг $\vec{r}$ радиус векторни тавсиф этади. $Oxyz$ аффин координаталар системасида M_0 нуқта (x_0, y_0, z_0) координаталарга, $\vec{a}$ вектор эса $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ координаталарга эга бўлсин. У ҳолда (2) вектор тенглик

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t\alpha \\ y &= y_0 + t\beta \\ z &= z_0 + t\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

координаталар тенглиги системасига айланади. Бу тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасидир. (41) тенгламалардан $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ва $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ векторларнинг пропорционаллиги келиб чиқади. Бу тенгликни

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \qquad (42)$$

тенглик кўринишида ёзиш мумкин. Бу тўғри чизиқнинг каноник тенгламасидир. Текисликда тўғри чизиқнинг (4) каноник тенгламасига нисбатан қандай огоҳлантириш қилинган бўлса, бу ерда ҳам худди шундай огоҳлантиришни қилиш мумкин. Агар, масалан, $\alpha = 0$ бўлса, у ҳолда $x - x_0 = 0$ бўлади. Бундан бу тўғри чизиқ $x = x_0$ текисликда ётади ва

$$\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

каноник тенгламага эга бўлишини англатади. Агар, масалан, $\alpha = \beta = 0$ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ $x - x_0 = 0$ ва $y - y_0 = 0$ текисликларда ётади, яъни уларнинг кесичиш чизиғи бўлади.

Агар l тўғри чизиқда M_0 нуқтадан бошқа яна $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқта берилган бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ йўналтирувчи велтор сифатида

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

векторни олиш мумкин. Унда (42) тенглама

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (43)$$

кўринишни олади. Бу иккита M_0 ва M_1 нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.

Ҳар қандай тўғри чизиқни иккита текисликнинг кесишиш чизиғи каби тасвирланиши мумкин. Равшанки, бунда (42) тенглама ҳар бири текислик тенгламаси бўлган иккита биринчи тартибли тенгламадан иборат системага эквивалентдир.

19.1.жумла. Агар l тўғри чизиқ иккита π_1 ва π_2 текисликларнинг кесишиш чизиғи каби

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (44)$$

тенгламалар системаси билан берилган бўлса, у ҳолда

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (45)$$

вектор бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлади.

Исбот. 18.5. жумлага кўра $\{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\{A_2, B_2, C_2\}$ векторларнинг нопропорционал векторлардир. Шунинг учун $\vec{a}$ векторнинг камида битта координатаси нолдан фарқлидир. Энди

$$\triangle_i = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad i = 1,2.$$

детерминантни қараймиз. У нолга тенг, чунки, у бир хил сатрга эга. Уни биринчи сатр бўйича ёйиб топамиз:

$$A_i \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_i \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + B_i \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Аммо, бу тенглик $\vec{a}$ векторнинг π_i, $i = 1,2$ текисликка параллел бўлишининг (33) шарти бўлади. Демак, нолмас $\vec{a}$ вектор π_1 ва π_2 текисликларнинг ҳар бирига параллел. Демак, уларнинг кесишиш чизиғининг йўналтирувчи вектори бўлади.

20§. ФАЗОДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ТЕКИСЛИК

Фазода тўғри бурчакли координаталар системаси $Oxyz$ берилган бўлсин. Векторнинг текисликка паралеллик шарти (33), $\vec{n} = \{A, B, C\}$ векторнинг (31) тенглама билан берилган π текисликка перпендикуляр бўлишини кўрсатади. Унда бу текисликнинг нормал вектори деб аталади. Текисликлар орасидаги бурчак, деб уларнинг нормал векторлари орасидаги φ бурчак қабул қилинади. Шунинг учун (34) ва (35) тенгламалар билан берилган π_1 ва π_2 текисликлар орасидаги φ бурчак учун

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (46)$$

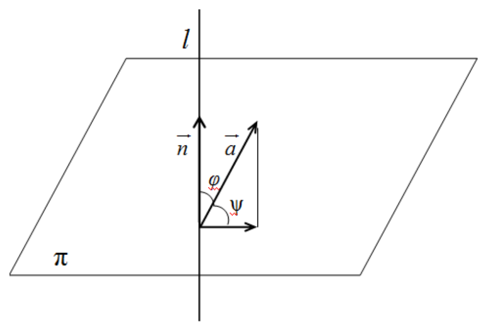
га эга бўламиз.

π_1 ва π_2 текисликларнинг перпендикулярлик шарти

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

тенглик бўлади.

$\vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ вектор ва π текислик орасидаги бурчак таърифига кўра, бу вектор билан унинг текисликдаги проекцияси орасидаги ψ бурчакдан иборат **(31-расм)**.



31-расм.

Бу бурчак 0дан $\frac{\pi}{2}$ гача чегарада ўзгаради. $\vec{a}$ вектор ва π текисликка перпендикуляр бўлган l тўғри чизиқ орасидаги бурчакни φ орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$\sin\psi = \cos\varphi.$$

Аммо, l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{n}$ вектор бўлганидан

$$\cos\varphi = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \qquad (48)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу ерда, π текислик (31) тенглама билан берилган деб ҳисоблаймиз. (48) тенгликнинг ўнг томони абсолют қиймати бўйича олинади, чунки, φ бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан ортиқ эмас. Демак, $\vec{a}$ вектор билан π текислик орасидаги бурчак

$$\sin\varphi = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \qquad (49)$$

формула бўйича аниқланади. Хусусан, (49) формула ёрдамида $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ йўналтирувчи векторли l тўғри чизиқ ва π текислик орасидаги бурчак ҳисобланади.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан (31) тенглама билан берилган π текисликкача бўлган масофа

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (50)$$

формула билан ҳисобланади.

III БОБ
КООРДИНАТАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ. ОРИЕНТАЦИЯ. ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМА.

21§. МАТРИЦА ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Кейинги баёнлар учун бизга алгебрадан айрим маълумотлар керак бўлади. m сатр ва n устундан иборат сонларнинг тўғри бурчакли

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

жадвални $m \times n$ ўлчамли матрица деб аталади.

$1 \times n$ ўлчамли матрица

$$\begin{Vmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{Vmatrix} \text{ ёки } (a_1, \dots, a_n) \text{сатр}$$

бўлади. $m \times 1$ ўлчамли матрица

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Vmatrix}$$

устун бўлади. $m=n$ да (1) матрицани квадрат матрица дейилади. Ўлчами $n\times n$бўлган матрица n–тартибли квадрат матрица деб аталади. Биз асосан квадрат матрицалар билан, шунингдек, сатрлар ва устунлар билан иш кўрамиз. Ўлчами $m\times n$ бўлган матрицалар тўпламини $M_{m,n}$орқали белгилаймиз. Квадрат матрицалар учун анча қисқа белгилашдан фойдаланамиз: $M_{n,n}\equiv M_n$.

$M_{m,n}$ тўпламда қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари аниқланган. Ўлчами $m\times n$ бўлган иккита

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ ва } B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицалар йиғиндиси деб,

$$A+B=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицани оламиз. A матрицани α сонга кўпайтмаси деб,

$$\alpha A=\begin{Vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицани айтамиз.

Равшанки, бу амаллар чизиқли (вектор) фазонинг (I боб, 21§) 1)–8) аксиомаларини қаноатлантиради. $m\times n$ ўлчами A матрицанинг сатрларини кетма-кет битта сатрга ёзиб, $m\cdot n$ узунлили сатр ҳосил қиламиз. Бу билан $M_{m,n}$ чизиқли фазо ва $mn-$ ўлчамли арифметик фазо $\mathbb{R}^{mn}$орасида изоморфизм ўрнатилади. $m\times n$ ўлчамли матрицани $n\times p$ ўлчамли матрицага кўпайтириш мумкин. $A=(a_1,...,a_n)$ сатрнинг ($1\times n$ ўлчамли матрица) $B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$ устунга ($n\times 1$ ўчамли матрица) кўпайтмаси 1×1 ўлчамли матрица, яъни

$$AB=a_1b_1+...+a_nb_n$$

сон бўлади.

Умумий ҳолда

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{матрицанинг} \quad B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицага кўпайтмаси $m\times p$ ўлчамли $AB=C$ матрица бўлиб, унинг $i-$ чи сатр ва $j-$ чи устун кесишган жойда турувчи c_{ij} элементи A матрица, $i-$ чи сатрини B матрицанинг $j-$ чи устунига кўпайтиришга тенг, яъни

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (2).$$

Матрицаларни кўпайтириш ассоциатив, яъни агар $A,\ B,\ C$ матрицалар мос равишда $m\times n,\ n\times p,\ p\times q$ ўлчамларга эга бўлса, у ҳолда

$$(AB)C=A(BC) \qquad (3)$$

тенглик ўринлидир.

Бу икки каррали йиғиндида жамлаш тартибини ўзгартириш мумкинлигидан осонгина келтириб чиқарилади. Ҳақиқатан ҳам, (3) формуланинг чап томонидаги матрицани D орқали ўнг томондаги матрицани эса D^1 орқали белгилаймиз. Унда

$$d_{ij}=\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} \quad \text{ва} \quad d^1_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right)$$

Қавсларни олиб ташлаб ҳамда бу тенгликларнинг бирида жамлаш тартибини ўзгартириб топамиз:

$$d_{ij}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj} \text{ ва } d_{ij}^{1}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj} \Rightarrow \quad d_{ij}^{1}=d_{ij}.$$

Кўпайтириш амали қўшишга нисбатан дистрибутивлиги аён, яъни

$$A(B+C)=AB+AC, \quad (4)$$

$$(A+B)C=AC+BC. \quad (5)$$

Ушбу

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{Vmatrix}$$

квадрат матрица *бирлик матрица* деб аталади. У шундай хоссага эгаки, ихтиёрий шундай тартибли A квадрат матрица учун

$$AE=EA=A. \quad (6)$$

$m\times n$ ўлчамли A матрицага транспонирланган матрица деб аталувчи $n\times m$ ўлчамли A^{*} матрица аниқланган. У

$$c_{ij}^{*}=c_{ij}$$

тенглик билан аниқланади. Матрицани транспонирлаш амали ва матрицаларни кўпайтириш амаллари қуйидагича боғланган:

$$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}.$$

Алгебра ва сонлар назарияси фанидан ҳар бир A квадрат матрицага унинг детерминанти деб аталувчи ва $|A|$ (ёки $\det A$) орқали белгиланувчи сон мос қўйилади. Алгебра ва сонлар назарияси фанидан маълумки,

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B.$$

Детерминанти нолдан фарқли квадрат матрица хосмас матрица деб аталади. Маълумки матрица хос матрица бўлади фақат ва фақат шундаки, унинг сатрлари (ёки устунлари) системали боғланган бўлса. Сатрларнинг (ёки устунларнинг) чизиқли боғлиқлигини R^{n} чизиқли фазо элементларининг чизиқли боғлиқлиги каби маънода тушунилади.

Ҳар бир хосмас A матрица учун тескари матрица деб аталувчи ва A^{-1} символ билан белгиланувчи ягона матрица мавжудки, у учун

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \quad (9)$$

(8) ва (9) да

$$\det\left(AA^{-1}\right)=\det A\cdot\det A^{-1}=\det A^{-1}\cdot\det A=\det E=1$$

ёки

$$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A} \qquad (10)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Тескари матрицага ўтиш амали матрицаларни кўпайтириш ва транспонирлаш амаллари билан

$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}, \qquad (11)$$

$$\left(A^{*}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{*} \qquad (12)$$

формулалар билан боғлангандир.

22§. БИР БАЗИСДАН ИККИНЧИ БАЗИСГА ЎТИШ

Бу параграфда V вектор фазонинг турли базислари орасидаги ҳамда векторларнинг турли базисдаги координаталари орасидаги боғланишларни текширамиз. Бизнинг мулоҳазаларимиз умумий ҳолда тўғри бўлса ҳам вектор фазо деганда $Vect(n)$, $n=1,2,3$ фазони тушунамиз. Фақат бунинг учун қуйидаги талаб қилинади:

Теорема. V вектор фазонинг ихтиёрий иккита базиси бир хил сондаги векторларга эга.

Бу теорема $Vect(n)$, $n=1,2,3$ ҳол учун 9§ да (9.3. жумла) исботланган.

V вектор фазода иккита $\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}$ ва $\overrightarrow{e_1^1},...,\overrightarrow{e_n^1}$ базислар берилган бўлсин. Иккинчи $\overrightarrow{e_1^1},...,\overrightarrow{e_n^1}$ базиснинг ҳар бир векторини биринчи базис векторларининг чизиқли комбинацияси кўринишда тасвирлаб оламиз:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1^1} = c_{11}\overrightarrow{e_1} + c_{21}\overrightarrow{e_2} ... + c_{n1}\overrightarrow{e_n} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ \overrightarrow{e_n^1} = c_{1n}\overrightarrow{e_1} + c_{2n}\overrightarrow{e_2} ... + c_{nn}\overrightarrow{e_n} \end{cases} \qquad (13)$$

(13) формулани матрицали тенглик кўринишида ёзиш мумкин:

$$\begin{Vmatrix} \overrightarrow{e_1^1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n^1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{Vmatrix}. \qquad (14)$$

22.1. Изоҳ. Матрицалар кўпайтмасининг таърифини матрицалардан бирининг элементлари векторлар бўлган ҳолда ҳам тадбиқ қилиш мумкин. Шундай матрицанинг кўпайтмаси вектор элементли матрица бўлади. Шу билан бирга, ихтиёрий $\vec{a}$ вектор ва ихтиёрий α сон учун

$$\vec{a} \cdot \alpha = \alpha \cdot \vec{a}$$

деб ҳисоблаймиз. Векторни сонга кўпайтиришнинг ассоциативлигидан (вектор фазонинг 6) аксиомаси), орасида биттаси векторли бўлган ихтиёрий учта A, B, C матрицалар учун (3) кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни тўғри бўлиши келиб чиқади. Равшанки, шундай матрицаларни кўпайтиришда кўпайтмани транспонирлашнинг (7) қонуни ўз кучида қолади.

(14) тенгликни транспонирлаб

$$\left(\overrightarrow{e_1^1}, \ldots, \overrightarrow{e_n^1}\right) = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right) \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (15)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрица $\vec{e_1},...,\vec{e_n}$ базисдан $\vec{e_1^1},\dots,\vec{e_n^1}$ базисга ўтиш матрицаси деб аталади. Бу матрицанинг устунлари янги $\vec{e_1^1},\dots,\vec{e_n^1}$ базис векторларнинг эски базисдаги координаталари бўлади. Векторнинг базис векторлари бўйича ёйилмасининг ягоналигидан (7.6. жумла) бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси C нинг ягоналиги келиб чиқади. Анча қисқача белгилашлар киритиб, $(e)=\left(\vec{e_1},...,\vec{e_n}\right)$ ва $\left(e^1\right)=\left(\vec{e_1^1},\dots,\vec{e_n^1}\right)$ деб олиб (15) тенгликни

$$\left(e^1\right)=(e)\cdot C \qquad (16)$$

кўринишда ёзамиз.

22.2. жумла. Агар $C-(e)$ базисдан $\left(e^1\right)$базисга ўтиш матрицаси, D эса $\left(e^1\right)$ базисдан $\left(e^{11}\right)$ базисга ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда CD матрица (e) базисдан $\left(e^{11}\right)$ базисга ўтиш матрицаси бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, матрицаларни кўпайтиришнинг ассоцативлигидан

$$\left(e^{11}\right)=\left(e^1\right)\cdot D=\left((e)\cdot C\right)\cdot D=(e)\cdot(CD).$$

22.2. жумладан ушбу жумла келиб чиқади.

22.3. жумла. Агар $C-(e)$ базисдан $\left(e^1\right)$ базисга ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда $\left(e^1\right)$ базисдан (e) базисга ўтиш матрицаси тескари матрица C^{-1} бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\left(e^1\right)$ базисдан (e) базисга ўтиш матрицаси D бўлса, у ҳолда 22.2 жумлага асосан (e) базисдан (e)базисга ўтиш матрицаси CD бўлади. Аммо, (e) базисдан (e)базисга ўтиш матрицаси E бўлганидан ҳамда ўтиш матрицасининг ягоналигидан $CD=E$ ҳосил қиламиз, бундан эса $D=C^{-1}E=C^{-1}$ ни топамиз.

22.4. жумла. Хосмас матрицалар ва фақат улар бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси бўлади.

Исбот. Бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицасининг хосмаслиги 22.3. жумладан келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар $C-(e)$ базисдан $\left(e^1\right)$ базисга ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда $\left(e^1\right)$ базисдан (e) базисга ўтиш матрицаси C^{-1} тескари матрица бўлади. Демак, $CC^{-1}=E$ ва бундан $\det C\cdot\det C^{-1}=\det E=1\Rightarrow\det C\neq 0$ бўлиб, $C-$ хосмас матрица бўлади.

Энди $\vec{e_1},...,\vec{e_n}$ – базис ва

$$C=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

хосмас матрица бўлсин. (13) формула бўйича $\vec{e_1},...,\vec{e_n}$ векторлардан ҳосил қилинган $\vec{e_1^1},\dots,\vec{e_n^1}$ векторлар чизиқли эрклидир, акс ҳолда C – хосмас матрицанинг устунлари чизиқли боғланган бўлар эди. Аммо, агар фазода n та вектордан иборат базис бўлса, у ҳолда ихтиёрий n та чизиқли эркли векторлар унинг базисини ҳосил қилади, яъни $\vec{e_1^1},\dots,\vec{e_n^1}$ чизиқли эркли векторлар системаси базисдир. 22.4. жумла исботланди.

Энди векторларнинг иккита (e) ва $\left(e^1\right)$ базислардаги координаталари орасидаги боғланишни топамиз. $\vec{x}$ вектор $\vec{e_1},...,\vec{e_n}$ базисда $x_1,...,x_n$ координаталарга, $\vec{e_1^1},\dots,\vec{e_n^1}$ базисда эса $x_1^1,...,x_n^1$ координаталарга эга бўлсин:

$$\vec{x}=x_1\cdot\vec{e_1}+\dots+x_n\cdot\vec{e_n} \quad \text{ва} \quad \vec{e}=x_1^1\vec{e_1^1}+\dots+x_n^1\vec{e_n^1}.$$

Матрица шаклда бу

$$\vec{x}=\left(\vec{e_1},...,\vec{e_n}\right)\cdot\begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}=\left(\vec{e_1^1},...,\vec{e_n^1}\right)\cdot\begin{Vmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{Vmatrix} \qquad (17)$$

тенгликни англатади.

C – (e) базисдан $\left(e^1\right)$ базисга ўтиш матрицаси бўлсин. У ҳолда (16) тенгликни эътиборга олиб, (17) тенгликни

$$\vec{x} = \left(\vec{e_1},...,\vec{e_n}\right) \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \left(\vec{e_1},...,\vec{e_n}\right) \cdot C \cdot \begin{Vmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{Vmatrix} \quad (18)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (18) вектор тенгликдан уларнинг координаталар тенглигига ўтиб, ушбу

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = C \cdot \begin{Vmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{Vmatrix} \qquad (19)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, агар $C - (e)$ базисдан $\left(e^1\right)$ базисга ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда $\vec{x}$ векторнинг бу базислардаги координаталари (19) формула билан ўзаро боғланган.

23§. БИР АФФИН КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДАН ИККИНЧИ АФФИН КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИГА ЎТИШ

Фазода мос равишда $O\vec{e_1}\,\vec{e_2}\,\vec{e_3}$ ва $O^1\vec{e_1^1}\,\vec{e_2^1}\,\vec{e_3^1}$ реперлар билан аниқланувчи иккита аффин координаталар системаси $Oxyz$ ва $O^1x^1y^1z^1$ берилган бўлсин. C – (e) базисдан $\left(e^1\right)$ базисга ўтиш матрицаси бўлсин ва $\left(a_1, a_2, a_3\right)$ янги координата боши O^1 нинг эски репердаги координаталари бўлсин. Фараз қилайлик, бунда M нуқта бу реперларда мос равишда (x, y, z) ва $\left(x^1, y^1, z^1\right)$ координаталарга эга бўлсин. Унда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^1} + \overrightarrow{O^1M}$$

вектор тенгликни нуқта координатаси таърифига кўра

$$\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\begin{Vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix}+\left(\overrightarrow{e_1^1},...,\overrightarrow{e_n^1}\right)\cdot\begin{Vmatrix}x^1\\y^1\\z^1\end{Vmatrix}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгликни (16) тенгликни эътиборга олиб,

$$\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\begin{Vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix}+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}\right)\cdot C\cdot\begin{Vmatrix}x^1\\y^1\\z^1\end{Vmatrix}\quad(20)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди (20) вектор тенгликдан уларнинг координаталар тенглигига ўтиб, ушбу

$$\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}=C\cdot\begin{Vmatrix}x^1\\y^1\\z^1\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix}\quad(21)$$

тенгликни ёки

$$\begin{cases}x=c_{11}x^1+c_{12}y^1+c_{13}z^1+a_1\\y=c_{21}x^1+c_{22}y^1+c_{23}z^1+a_2\\z=c_{31}x^1+c_{32}y^1+c_{33}z^1+a_3\end{cases}\quad(22)$$

системани ҳосил қиламиз. Ушбу

$$\begin{Vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&a_1\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&a_2\\c_{31}&c_{32}&c_{33}&a_3\end{Vmatrix}\quad(23)$$

матрица эски координаталар системаси $Oxyz$ дан янги координаталар системаси $O^1x^1y^1z^1$ га ўтиш матрицаси деб аталади. (23) матрицанинг компакт ҳолда $\left(C,a\right)$ кўринишда озиш мумкин, бу ерда

$$a=\begin{Vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix}.$$

23.1. жумла. Агар $\left(C,a\right)-$ $Oxyz$ координаталар системасидан $O^1x^1y^1z^1$ координаталар системасига ўтиш матрицаси, $\left(D,b\right)$ эса $O^1x^1y^1z^1$ координаталар системасидан $O^{11}x^{11}y^{11}z^{11}$ координаталар системасига ўтиш матрицаси бўлса, у ҳолда $Oxyz$ координаталар системасидан $O^{11}x^{11}y^{11}z^{11}$ координаталар системасига ўтиш матрицаси $(CD, Cb+a)$ матрица бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C \cdot \begin{Vmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix} = C \cdot \left(D \cdot \begin{Vmatrix} x^{11} \\ y^{11} \\ z^{11} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix} \right) + \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix} = C \cdot D \cdot \begin{Vmatrix} x^{11} \\ y^{11} \\ z^{11} \end{Vmatrix} + C \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}.$$

24§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ, ТЕКИСЛИКНИНГ, ФАЗОНИНГ ОРИЕНТАЦИЯСИ

6§ да биз бир хил йўналган нолмас векторларнинг икки синфидан бирини танлаб ва уларнинг йўналишини мусбат деб эълон қилиб, тўғри чизиқда ориентациясини аниқлаган эдик. Тўғри чизиқда ҳар бир нолмас вектор базис вектор ҳосил қилади ва битта базис вектордан иккинчи базис векторга ўтиш векторни нолдан фарқли сонга кўпайтириш билан амалга оширилади. Шу билан бирга бир хил йўналган векторлар мусбат кўпайтувчилар билан боғлангандир. Ориентациянинг бу таърифини ўлчами катта бўлган вектор фазоларга татбиқ қилинади.

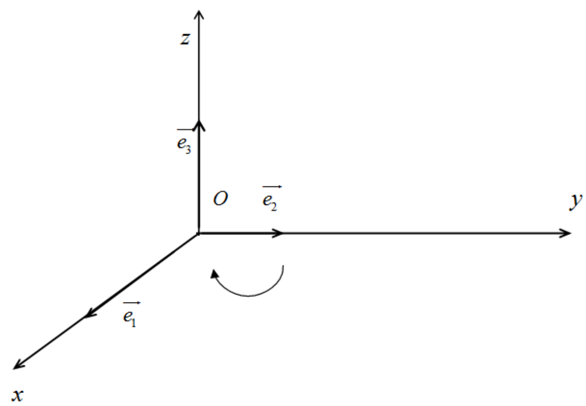
Агар бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси C мусбат детерминантга эга бўлса, у ҳолда V вектор фазонинг иккита $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ ва $\vec{e}_1^{\,1}, ..., \vec{e}_n^{\,1}$ базиси *бир хил исмли* деб аталади.

24.1-жумла. Бир хил исмлилик муносабати V фазонинг барча базислар тўпламида эквивалентлик муносабати бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, базисдан ўзига ўтиш бирлик матрица воситасида амалга оширилгани туфайли бир хил исмлилик муносабатининг реклексивлиги 22.3 жумладан ва (10) формуладан, транзитивлиги эса 22.2 жумла ва (8) формуладан келиб чиқади.

Бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицасининг детерминанти мусбат ёки манфий бўлишидан (бу ерда, биз $\mathbb{R}$ ҳақиқий сонлар майдони устидаги V вектор фазони қараймиз) V фазода бир хил исмли базисларнинг иккита синфи мавжуд. Бу синфларнинг ҳар бири V фазонинг *ориентацияси* деб аталади.

Ориентацияни интутив бериш тўғри чизиқда ҳаракат йўналишини (чапдан ўнгга ёки аксинча) беришини текисликда айланиш йўналишини (соат стрелкаси бўйича ёки аксинча) беришини ва фазода эса винт йўналишини (чап ва ўнг винтни) беришини англатади. Масалан, фазода ўнг ориентацияси шундай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базис билан аниқланганки, бунда $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар текислигига $\vec{e}_3$ векторнинг учидан қараганда $\vec{e}_1$ вектор ва $\vec{e}_2$ вектор билан устма-уст тушиши учун энг қисқа бурилиш йўналиши соат стрелкаси йўналишига тескари бўлади **(32-расм)**.



32-расм.

24.2. жумла. Фазода учинчи векторлари билан фарқ қилувчи иккита $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3^{\,1}$ базислар берилган бўлсин. Унда улар бир хил исмли бўлади, фақат ва фақат шундадаки,

$$\left(aq\ pr_{\vec{e}_3}^{\pi} \vec{e}_3^{\,1} \right) > 0$$

бўлса, бу ерда π – $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторларга параллел текислик.

Исбот. $\vec{e}_3^{\,1}$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ координаталарга эга бўлсин. Унда

$$C=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & \gamma\end{Vmatrix}$$

матрица $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ базисдан $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3^{\,1}$ базисга ўтиш матрицаси бўлади ва $\det C=\gamma$. Иккинчи томондан I бобдаги 22-формуладан

$$aq\; pr^{\pi}_{\vec{e}_3}\vec{e}_3^{\,1}=\left|\vec{e}_3^{\,1}\right|\cos\left(\vec{e}_3\,^{\wedge}\,\vec{e}_3^{\,1}\right)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{0\cdot\alpha+0\cdot\beta+1\cdot\gamma}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\gamma$$

Демак, $aq\; pr^{\pi}_{\vec{e}_3}\vec{e}_3^{\,1}=\gamma=\det C$. Теорема исбот бўлди.

Матрица сатрлари жуфтлиги алмаштирилганда матрица детерминант ишорасини ўзгартиришидан ушбу жумла келиб чиқади.

24.3. жумла. Бир–биридан бирорта векторлар жуфтлигида векторларнинг ўрнини алмаштириш билан ҳосил қилинувчи базислар ҳар хил исмлидир.

25§. ОРИЕНТИРЛАНГАН ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД ҲАЖМИ

Фазода ориентацияси танланган бўлсин. Бу ориентацияни берувчи базисларни *мусбат базислар* деб атаймиз. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ векторларнинг тартибланган учлиги учун $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ векторлар устида қурилган *параллелепипеднинг ориентирланган ҳажми* деб аталувчи $\left\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\rangle$ сонни аниқлаймиз. Бу сон нолга тенг, фақат ва фақат шундаки, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ векторлар компланар бўлса. Агарда $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ векторлар чизиқли эркли бўлса, у ҳолда уларни битта O нуқтадан қўйиб учта қирраси $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ векторлар бўлган параллелепипедни ҳосил қиламиз. Агар $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ учлик мусбат бўлса, “плюс” ишора билан, акс ҳолда “минус” ишора билан олинган бу параллелепипед ҳажми $\left\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\rangle$ сонга тенгдир. Томонлари $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторлар бўлган параллелограмм юзини $S_{\vec{a}_1,\vec{a}_2}$ орқали белгилаймиз. Унда

$$\left|\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle\right| = S_{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}} \cdot h$$

бу ерда, h –параллелепипед баландлиги.

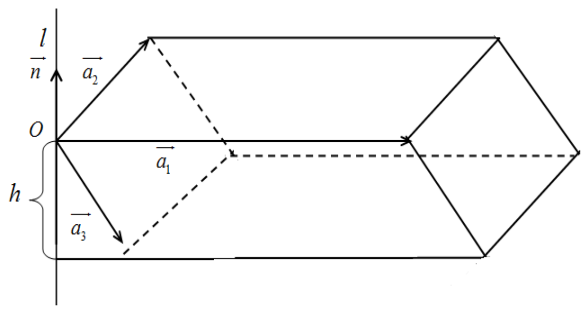
O нуқта орқали $\overrightarrow{a_1}$ ва $\overrightarrow{a_2}$ векторлар текислигига перпендикуляр қилиб l тўғри чизиқни ўтказамиз ва бу тўғри чизиқнинг иккита бирлик векторларидан бирини $\vec{n}$ орқали белгилаймизки, у учун $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \vec{n}$ –учлик мусбат ориентирланган бўлсин **(33-расм).** Бунда

$$h = \left|\left(aq\ pr_{\vec{n}} \overrightarrow{a_3}\right)\right|,$$

бу ерда $pr_{\vec{n}}$ – $\overrightarrow{a_3}$ векторнинг $\vec{n}$ вектордаги ортогонал проекцияси. 24.2. жумладан $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ учликнинг ишораси $\left(aq\ pr_{\vec{n}} \overrightarrow{a_3}\right)$ сон ишораси билан устма-уст тушиши келиб чиқади. Шунинг учун

$$\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = S_{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}} \cdot \left(aq\ pr_{\vec{n}} \overrightarrow{a_3}\right) \qquad (24)$$

формула ўринлидир.



33 - расм.

25.1.теорема. Параллелепипеднинг ориентирланган ҳажми қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_1} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_2} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_2} \right\rangle$

2) $\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \lambda\overrightarrow{a_3} \right\rangle = \lambda\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle$

3) $\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3^{1}} + \overrightarrow{a_3^{11}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3^{1}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3^{11}} \right\rangle$

Ҳақиқатан ҳам, кососкоммутативлик 1) хосса 24.3.жумладан келиб чиқади. 2) ва 3) хоссалар ориентирланган ҳажмнинг чизиқлилиги (24) формула ва проекциянинг алгебраик қийматининг чизиқлилиги ҳақидаги 10.1.теоремадан келиб чиқади.

$\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ ўрнига қўйиш (ўзаро бир қийматли мослик) учун $(-1)^{\sigma}$ орқали бу ўрнига қўйиш ишораси белгиланади, яъни

$$(-1)^{\sigma}=\begin{cases}1, & \textit{агар } \sigma \textit{ жуфт ўрнига қўйиш бўлса};\\ -1, & \textit{агар } \sigma \textit{ жуфт ўрнига қўйиш бўлса}.\end{cases}$$

Бу белгилашларда ориентирланган кососкоммутативлик хоссаси қуйидагича ёзилади:

1) $\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right\rangle=(-1)^{\sigma}\left\langle \overrightarrow{a_{\sigma(1)}},\overrightarrow{a_{\sigma(2)}},\overrightarrow{a_{\sigma(3)}}\right\rangle$.

25.2. эслатма. Ориентирланган ҳажмнинг кососкоммутативлик хоссасидан 2) ва 3) чизиқлилик хоссаси фақатгина учинчи аргумент учун эмас, балки шунингдек биринчи иккита аргумент учун ҳам бажарилиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $\lambda,\mu\in R$ ва ихтиёрий $\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2}\in V$ учун

$$\left\langle \overrightarrow{a_1},\lambda\overrightarrow{b_1}+\mu\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{a_3}\right\rangle=-\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_3},\lambda\overrightarrow{b_1}+\mu\overrightarrow{b_2}\right\rangle=-\left(\lambda\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_1}\right\rangle+\mu\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_2}\right\rangle\right)=$$
$$=-\lambda\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_1}\right\rangle-\mu\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_2}\right\rangle=\lambda\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{a_3}\right\rangle+\mu\left\langle \overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{a_3}\right\rangle=$$
$$=\left\langle \lambda\overrightarrow{b_1}+\mu\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right\rangle=-\left\langle \overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_2},\lambda\overrightarrow{b_1}+\mu\overrightarrow{b_2}\right\rangle=-\lambda\left\langle \overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b_1}\right\rangle-\mu\left\langle \overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b_2}\right\rangle=$$
$$=\lambda\left\langle \overrightarrow{b_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a3}\right\rangle+\mu\left\langle \overrightarrow{b_2},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right\rangle.$$

Шундай қилиб параллелепипеднинг ориентирланган ҳажми, учта вектор аргументнинг кососкоммутатив уч чизиқли функционали (сонли функцияси) бўлади.

Фазода $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$ базис (мусбатлиги шарт эмас) тайинланган бўлсинб, $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ векторлар эса бу базисда ўзининг координаталари билан берилган бўлсин:

$$\overrightarrow{a_i}=\left\{x_i^1,x_i^2,x_i^3\right\},\ i=1,2,3.$$

Унда ориентирланган ҳажмнинг уч чизиқлилигидан фойдаланиб топамиз:

$$\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} x_1^i \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_1^i \left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_1^i \left\langle \overrightarrow{e_i}, \sum_{j=1}^{3} x_2^j \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_1^i \sum_{j=1}^{3} x_2^j \left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_1^i \sum_{j=1}^{3} x_2^j \left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}, \sum_{k=1}^{3} x_3^k \overrightarrow{e_k} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_1^i x_2^j \sum_{k=1}^{3} x_3^k \left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} x_1^i x_2^j x_3^k \left\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k} \right\rangle,$$

$$\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = (-1)^{\sigma} \left\langle \overrightarrow{a_{\sigma(1)}}, \overrightarrow{a_{\sigma(2)}}, \overrightarrow{a_{\sigma(3)}} \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{a_{\sigma(1)}}, \overrightarrow{a_{\sigma(2)}}, \overrightarrow{a_{\sigma(3)}} \right\rangle = (-1)^{\sigma} \left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle.$$

Бу йиғиндида 27 қўшилувчидан 21 қўшилувчи (таркибида учта $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ векторлардан устма-уст тушувчи жуфтлари мавжуд бўлганлари) нолга тенглиги маълум. Бу қўшилувчиларни ташлаб юбориб, ҳамда кососоммутативлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \sum_{\sigma} x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} x_3^{\sigma(3)} \left\langle \overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \overrightarrow{e_{\sigma(2)}}, \overrightarrow{e_{\sigma(3)}} \right\rangle = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} x_3^{\sigma(3)} \left\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \right\rangle.$$

Аммо,

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} x_1^{\sigma(1)} x_2^{\sigma(2)} x_3^{\sigma(3)} = \det \begin{Vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{Vmatrix}.$$

Унда

$$\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \right\rangle. \quad (25)$$

Агар базис ортонормал ва мусбат бўлса, у ҳолда

$$\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

(25) формулани келтириб чиқаришда биз ориентирилган ҳажмининг таърифидан фойдаланмадик. Фақатгина унинг кососоммутативлиги ва уч

чизиқлилигидан фойдаландик. Шунинг учун ихтиёрий кососкоммутатив уч чизиқли φ учун худди шундай формула ўринлидир:

$$\varphi\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right)=\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}\varphi\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right). \qquad (27)$$

Бу ердан хусусий ҳолда қуйидаги тасдиқ келиб чиқади.

25.3. теорема. $Vect(3)$ фазода ҳар қандай кососкоммутатив уч чизиқли φ функционал ориентирланган ҳажмнинг функционалига пропорционал.

Ҳақиқатан ҳам, пропорционаллик коэффициенти

$$\frac{\varphi\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)}{\left\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right\rangle}$$

сон бўлади.

Чунки,

$$\varphi\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right)=\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}\left\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right\rangle\frac{\varphi\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)}{\left\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right\rangle}=\frac{\varphi\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)}{\left\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right\rangle}\left\langle\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right\rangle.$$

Ориентирланган текисликда худди шундай усул билан томонлари $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ векторларга қурилган параллелограмнинг ориентирланган юзи аниқланади. Агар мусбат ортонормал $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ базисда $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ векторлар

$$\overrightarrow{a_1}=\{x_1,y_1\},\ \overrightarrow{a_2}=\{x_2,y_2\}$$

координаталарга эга бўлса, у ҳолда (26) формулага ўхшаш

$$\left\langle\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right\rangle=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (28)$$

формула ўринлидир. Ориентирланган юза кососкоммутатив бичизиқли функционал бўлади ва шундай ҳар қайси функционал ориентирланган юзанинг функционаллигига пропорционалдир.

26§. ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМАЛАР

Аввалги параграфдаги каби фазода ориентация берилган деб ҳисоблаймиз.

26.1.таъриф. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг *вектор кўпайтмаси* деб, шундай $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ векторга айтиладики, бунда:

1) унинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар узунликлари билан улар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасига тенг;

2) у $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг ҳар бирига перпендикуляр;

3) у шундай йўналганки, $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ тартибланган учлик мусбатдир.

26.2.таъриф. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар вектор кўпайтмасининг $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтмасига тенг бўлган $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ сонга учта $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларнинг *аралаш кўпайтмаси* деб аталади.

26.3. жумла. Аралаш кўпайтма ориентирланган ҳажм билан устма-уст тушади:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle. \quad (29)$$

Исбот. 25§ даги (24) формулани 11§ даги (7) формула билан таққослаб топамиз:

$$\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle=S_{\vec{a},\vec{b}}\cdot\left(aq\ pr_{\vec{n}}\vec{c}\right),$$

бу ерда $\vec{a},\vec{b},\vec{n}$ учлик мусбат ориентирланган ва $\vec{a}\perp\vec{n}$, $\vec{b}\perp\vec{n}$, $\left|\vec{n}\right|=1.$

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|\left(aq\ pr_{\vec{e}_{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}}\vec{c}\right)=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|\left(aq\ pr_{\vec{n}}\vec{c}\right),$$

чунки 26.1.2 ва 26.1.3 мувофиқ

$$\vec{e}_{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}=\vec{n}\ .$$

исботни тугатиш учун 26.1.1 мувофиқ

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=S_{\vec{a},\vec{b}}$$

бўлишини кўрсатиш қолди, яъни

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=S_{\vec{a},\vec{b}}\cdot\left(aq\,pr_{\vec{n}}\vec{c}\right)=\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle.$$

26.3.жумладан бевосита

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)\qquad(30)$$

формула келиб чиқади ва яна

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle=-\left\langle\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right\rangle=\left\langle\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right\rangle=\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=\left(\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right).$$

26.4.теорема. Вектор кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

2) $\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

3) $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$.

1) тенглик, $\vec{d}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ векторнинг нол вектор бўлишига эквивалент. Бунинг учун $\left(\vec{d},\vec{d}\right)=0$ бўлишини кўрсатиш кифоя:

$$\left(\vec{d},\vec{d}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{a}\right],\vec{d}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{d}\right)+\left(\left[\vec{b},\vec{a}\right],\vec{d}\right)=$$

$$=\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right\rangle+\left\langle\vec{b},\vec{a},\vec{d}\right\rangle=\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle-\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle=0.$$

2) тенгликнинг исботи.

$$\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]-\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{d}$$

белгилаш киритамиз ва $\left(\vec{d},\vec{d}\right)=0$ бўлишини исботлаймиз.

$$\left(\vec{d},\vec{d}\right)=\left(\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]-\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{d}\right)=\left(\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right],\vec{d}\right)-\lambda\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{d}\right)=$$

$$=\left\langle\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{d}\right\rangle-\lambda\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right\rangle=\lambda\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right\rangle-\lambda\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right\rangle=0$$

3) хоссани текширамиз

(3) тенглик

$$\vec{d}=\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]-\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{a},\vec{c}\right]$$

векторнинг нол бўлишига эквивалент. Бунинг учун $\left(\vec{d}\,,\vec{d}\,\right)=0$ бўлишини кўрсатиш етарли.

$$\left(\vec{d}\,,\vec{d}\,\right)=\left(\left[\vec{a}\,,\vec{b}+\vec{c}\,\right]-\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{a},\vec{c}\,\right],\vec{d}\right)=\left(\left[\vec{a}\,,\vec{b}+\vec{c}\,\right],\vec{d}\,\right)-\left(\left[\vec{a}\,,\vec{b}\,\right],\vec{d}\right)-\left(\left[\vec{a}\,,\vec{c}\,\right],\vec{d}\,\right)=$$

$$=(26.3\text{ га мувофиқ})=\left\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{d}\right\rangle-\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right\rangle-\left\langle\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right\rangle=$$

$$=(25.1.3\text{ га мувофиқ})=\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right\rangle+\left\langle\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right\rangle-\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right\rangle-\left\langle\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right\rangle=0.$$

Теорема исботланди.

Тўғри бурчакли координаталар тизимида вектор кўпайтма.

Агар $\overrightarrow{a_1}$ ва $\overrightarrow{a_2}$ векторлар мусбат ортонормал $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ базисда ўзининг координаталари билан берилган бўлса, $\left[\overrightarrow{a_1}\,,\overrightarrow{a_2}\,\right]$ вектор кўпайтманинг координаталарини топамиз:

$$\overrightarrow{a_1}=\{x_1,y_1,z_1\}\text{ ва }\overrightarrow{a_2}=\{x_2,y_2,z_2\}.$$

$\left[\overrightarrow{a_1}\,,\overrightarrow{a_2}\,\right]=\{X,Y,Z\}$ координаталарга эга бўлсин. Унда 12.1.жумлага мувофиқ

$$X=\left(\left[\overrightarrow{a_1}\,,\overrightarrow{a_2}\,\right],\overrightarrow{e_1}\right),\ Y=\left(\left[\overrightarrow{a_1}\,,\overrightarrow{a_2}\,\right],\overrightarrow{e_2}\right),\ Z=\left(\left[\overrightarrow{a_1}\,,\overrightarrow{a_2}\,\right],\overrightarrow{e_3}\right).$$

Шунинг учун (29) ва (26) формулалардан топамиз:

$$X=\left\langle\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{e_1}\right\rangle=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}.$$

худди шундай

$$Y=\left\langle\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{e_2}\right\rangle\text{ ёки }Y=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix},$$

$$Z=\left(\left[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\,\right],\overrightarrow{e_3}\right)=\left\langle\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{e_3}\right\rangle=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}.$$

Демак,

$$\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (31)$$

ёки детерминант кўринишдаги шартли ёзуви

$$\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{y_1} & \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{x_2} & \overrightarrow{y_2} & \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{y_1} & \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{x_2} & \overrightarrow{y_2} & \overrightarrow{z_2} \\ \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{vmatrix}. \quad (32)$$

27§. ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМАНИНГ АЙРИМ ТАТБИҚЛАРИ

Фазода

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_1} + t\overrightarrow{a_1}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + t\overrightarrow{a_2} \quad (33)$$

вектор тенгламалари билан берилган иккита l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашиши ҳақидаги масалани ечайлик. Уларнинг параллеллик шарти $\overrightarrow{a_1}$ ва $\overrightarrow{a_2}$ векторларнинг коллинеарлиги, устма-уст тушиши эса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ векторлар учлигининг коллинеарлиги бўлади.

l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар битта текисликда ётиши учун, яъни кесишиши ёки параллел бўлиши учта $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ векторларнинг компланар бўлиши зарур ва етарли, яъни ориентирланган ҳажмнинг таърифига кўра

$$\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} \right\rangle = 0 \quad (34)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли.

27.1.жумла. Радиус вектори $\overrightarrow{r_0}$ бўлган M_0 нуқтадан вектор тенгламаси

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_1} + t\overrightarrow{a_1}$$

бўлган l тўғри чизиққача бўлган масофа

$$\rho(M_0, l) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}, \vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}. \quad (36)$$

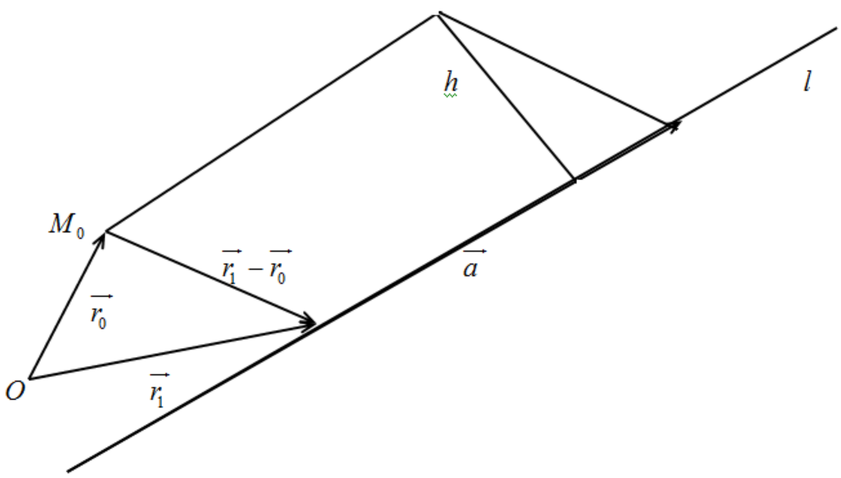
формула бўйича топилади.

Ҳақиқатан ҳам, $\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}$ ва $\overrightarrow{a}$ векторларга қурилган параллелограмнинг h баландлиги бу масофага тенг **(34-расм)**. (36) формула эса бизга “параллелограммнинг юзи бўлинган асос узунлиги қоидаси бўйича ҳам бу баландликни беради. Энди тўғри бурчакли $Oxyz$ координаталар тизимида

$$\overrightarrow{r_0}=\{x_0,y_0,z_0\},\ \overrightarrow{r_1}=\{x_1,y_1,z_1\},\ \overrightarrow{a}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$$

бўлсин. Унда (36) формула (31) тенгликка асосан ушбу кўринишга келади:

$$\rho(M_0,l)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}. \qquad (37)$$



34 - расм

27.2. жумла. (33) тенглама билан берилган l_1 ва l_2 айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа (умумий перпендикуляр узунлиги)

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{\left|\left\langle \overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right\rangle\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right]\right\|} \qquad (38)$$

формула бўйича аниқланади.

Ҳақиқатан ҳам, бу масофа l_1 ва l_2 айқаш тўғри чизиқлар ўтган параллел текисликлар орасидаги масофага тенг. Бу масофа ўз навбатида эса $\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ векторларга қурилган параллелепипеднинг h баландлигига тенг. Аммо, (38) формула ҳам бу баландлик параллелепипед ҳажмини асос юзига нисбатини беради.

Тўғри бурчакли координаталар тизимида $\overrightarrow{r_i}=\{x_i,y_i,z_i\}$, $\overrightarrow{a_i}=\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}$ ($i=1,2$) координаталарга эга бўлсин. Унда (26) ва (31) формулаларга кўра (38) формула

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}} \qquad (39)$$

кўринишни олади.

Фазода текислик ва тўғри чизиқнинг айрим вектор тенгламаларини келтирамиз. Радиус вектори $\overrightarrow{r_0}$ бўлган нуқтадан ўтувчи $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга параллел бўлган текисликнинг вектор тенгламаси

$$\vec{r}-\overrightarrow{r_0}=u\vec{a}+v\vec{b}$$

$\vec{r}-\overrightarrow{r_0},\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг коллинеарлигини англатади. Шунинг учун уни

$$\left\langle \vec{r}-\overrightarrow{r_0},\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0 \quad (40)$$

кўринишда қайта ёзиш мумкин. Аралаш кўпайтманинг чизиқлилигидан фойдаланиб (40) тенгламани

$$\left\langle \vec{r},\vec{a},\vec{b}\right\rangle+D=0, \ (41)$$

бу ерда, $D=\left\langle -\overrightarrow{r_0},\vec{a},\vec{b}\right\rangle$, кўринишда қайта ёзиш мумкин. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ векторни $\vec{n}$ орқали белгилаймиз. Ушбу

$$\left\langle \vec{r},\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\left\langle \vec{a},\vec{b},\vec{r}\right\rangle=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{r}\right)=\left(\vec{n},\vec{r}\right)$$

тенгликни инобатга олиб, (41) тенгламани

$$\left(\vec{n},\vec{r}\right)+D=0 \quad (42)$$

кўринишда қайта ёзамиз. Бу текисликнинг $\vec{n}$ нормал вектори орқали ифодаланувчи тенгламасидир.

Агар тўғри бурчакли координаталар системаси $\vec{n}=\{A,B,C\}$, $\vec{r}=\{x,y,z\}$ бўлса, у ҳолда

$$\left(\vec{r},\vec{n}\right)=Ax+By+Cz$$

ва (42) тенглама текисликнинг умумий тенгламасига айланади.

l тўғри чизиқнинг

$$\vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{a}$$

вектор тенгламаси $\vec{r}-\vec{r_0}$ ва $\vec{a}$ векторларнинг коллинеарлигини англатади. У

$$\left[\vec{r}-\vec{r_0},\vec{a}\right]=\vec{0} \qquad (43)$$

тенгликка ёки

$$\left[\vec{r},\vec{a}\right]-\left[\vec{r_0},\vec{a}\right]=\vec{0} \quad \text{ёки} \quad \left[\vec{r},\vec{a}\right]=\vec{M} \qquad (44)$$

тенгламага эквивалентдир, бу ерда

$$\vec{M}=\left[\vec{r_0},\vec{a}\right]. \qquad (45)$$

27.3. жумла. Агар $\vec{a}$ нолмас вектор ва $\vec{M}$ вектор унинг перпендикуляри бўлса, у ҳолда (44) тенглама йўналтирувчи вектори $\vec{a}$ бўлган l тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

Исбот. (45) шартни қаноатлантирувчи $\vec{r_0}$ векторни топиш керак. Унда (44) тенглама тўғри чизиқни тавсифловчи (43) тенгламага эквивалент бўлади.

Фараз қилайлик,

$$\vec{r_0}=\frac{\left[\vec{a},\vec{M}\right]}{\left|\vec{a}\right|}$$

бўлсин. Агар $\vec{M}=\vec{0}$ бўлса, у ҳолда $\vec{r_0}=\vec{0}$ ва (45) шарт, равшанки бажарилади. Агарда $\vec{M}\neq\vec{0}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}$, $\vec{M}$, $\vec{r_0}$ учлик ортогонал учликни ҳосил қилади ва вектор кўпайтма таърифига кўра, мусбат базис ташкил этади. У ҳолда

$\vec{a}, \vec{M}, \vec{r_0}$ учлик ҳам ортогонал мусбат базисни ташкил қилади. Шунинг учун $\left[\vec{r_0}, \vec{a}\right]$ вектор $\vec{M}$ вектордан фақат мусбат кўпайтувчи билан фарқ қилади. Аммо,

$$\left\|\left[\vec{r_0}, \vec{a}\right]\right\| = \left|\vec{r_0}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| = \frac{\left\|\left[\vec{a}, \vec{M}\right]\right\|}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{M}\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \left|\vec{M}\right|.$$

Демак,

$$\left[\vec{r_0}, \vec{a}\right] = \vec{M} \quad (45)$$

шарт бажарилди. 27.3.жумла исботланди.

IV БОБ
ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

28§.ТЕКИСЛИКДА АЛГЕБРАИК ЧИЗИҚЛАР. КВАДРАТ ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ МАТРИЦАЛАРИ.

28.1-таъриф. Агар бирорта аффин координаталар системасида текисликнинг нуқталар тўплами Г

$$\text{F}(x,y)=0 \tag{1}$$

тенглама ечимлари билан тавсифланса, (бу ерда F кўпҳад) у ҳолда Г текисликнинг нуқталар тўпламини алгебраик чизиқ деб аталади.

Шундай кўпҳаднинг энг юқори даражаси Г чизиқнинг тартиби деб аталади.

28.2. эслатма. Алгебраик чизиқнинг тартиби (1) тенгламаси қаралаётган аффин координаталар системасига боғлиқ эмас. Бу қуйидаги тасдиқдан келиб чиқади.

28.3. жумла. Oxy ва $O'x'y'$ иккита аффин координаталар системаси

$$\left.\begin{aligned} x = c_{11}x' + c_{12}y' + a_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + a_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ўтиш формуласи билан ўзаро боғланган бўлсин. Унда x ва y ўзгарувчилар учун ихтиёрий F(x,y) кўпҳадининг даражаси x' ва y' ўзгарувчиларнинг

$$\varphi(x', y') = F\left(c_{11}x' + c_{12}y' + a_1, c_{21}x' + c_{22}y' + a_2\right) \qquad (3)$$

кўпҳад даражаси билан устма-уст тушади. Бунда φ нинг даражаси F нинг даражасидан катта эмас бўлишини кўрсатиш кифоя. Бу эса шундан келиб чиқадики, бунда F га кирувчи ихтиёрий бир ҳад $ax^p y^q$ учун

$$a\left(c_{11}x' + c_{12}y' + a_1\right)^p \left(c_{21}x' + c_{22}y' + a_2\right)^q$$

кўпҳад $p+q$ дан $\leq$ даражага эга.

Агар Oxy координаталар системасида F(x,y) кўпҳад Г чизиқни берса, у ҳолда ҳар қандай унга пропорционал αF , $\alpha \neq 0$ кўпҳад ҳам шунингдек Г чизиқни беради. Албатта берилган чизиқни анча юқори тартибли кўпҳад билан, масалан F^2 билан бериш мумкин. Агар Oxy координаталар системасида p тартибли Г чизиқни берувчи берилган p тартибли кўпҳадларнинг пропорционал бўлишини хоҳлар эдик. Шундай ҳолда Г чизиқ учун ягоналик теоремаси тўғри деб айтар эдик. 15§да биз биринчи тартибли чизиқлар учун (тўғри физиқлар учун) ягоналик теоремасини аллақачон исбот қилган эдик. Аммо иккинчи тартибли чизиқлар учун ягоналик теоремаси ўринли эмас. Бита нуқтадан ташкил топган шундай иккинчи тартибли чизиқ пропорционал бўлмаган кўпҳадлар билан берилиши мумкин

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{ва} \quad x^2 + 2y^2 = 0 .$$

Шунга қарамасдан биттадан кўпроқ ҳақиқий нуқталарни ўз ичига олган иккинчи тартибли чизиқлар учун ягоналик теоремасини исботлаймиз.

28.4-таъриф. Агар π текисликда ихтиёрий аффин координаталар системаси $s = Oxy$ учун шундай иккинчи тартибли F_s кўпҳад мавжуд бўлсаки, бунда ихтиёрий $M(x, y) \in \pi$ нуқта учун

$$f(M) = F_s(x, y) \qquad (4)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда π текисликни R ҳақиқий сонлар тўпламига акс эттирувчи $f:\pi \to R$ акслантиришни квадрат функция деб аталади.

Тушунарлики бунда берилган Oxy координаталар системасида (4) шартни фақат битта $F=F_s$ кўпҳад қаноатлантириши мумкин. Айтайлик Oxy координаталар системасида F кўпҳад *f* функциядан иборат бўлсин.

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} \qquad (5)$$

бўлсин. Унда

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

матрицани Oxy координаталар системасида *f* квадрат функция матрицаси деб аталади. Бош диагонал ташқарисидаги A матрица элементлари F кўпҳад мос коэффициентларининг ярмига тенг бўлишини таъкидлаб ўтамиз

$$U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

матрицани *f* функция квадрат қисмининг матрицаси деб атаймиз. U матрица элементларининг ақали биттаси нолдан фарқли бўлиши керак. F(*x,y)* кўпҳаднинг квадарат қисми $F_2(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ ни матрица шаклида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F_2(x,y)=(x,y)U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (8)$$

F(*x,y)* кўпҳаднинг ўзини эса матрица шаклида қуйидагича зиш мумкин

$$F(x,y,1)=(x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$(x,y)U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(a_{11}x+a_{12}y,a_{12}x+a_{22}y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=$$
$$=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{12}xy+a_{22}y^2=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=F_2(x,y)$$

$$(x,y,1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\left(a_{11}x+a_{12}y+a_{13},a_{12}x+a_{22}y+a_{23},a_{13}x+a_{23}y+a_{33}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=$$

$$=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{13}x+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{23}y+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=$$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=F(x,y).$$

Энди $O'x'y'$ бошқа аффин координаталар системаси ва Oxy системадан $O'x'y'$ системага ўтиш (2) формулалар бўйича амалга ошириладиган бўлсин. Берилган координаталар системасида квадрат функциядан иборат бўлган кўпҳаднинг ягоналигидан (3) тенглик билан аниқланувчи $\varphi(x',y')$ кўпҳад $O'x'y'$ координаталар системасидаги f функциядан иборат бўлади. $O'x'y'$ координаталар системасида f функциянинг A' матрицасини топайлик. Бунинг учун (2) ўтиш формуласини

$$1=0\cdot x'+0\cdot y'+1\cdot 1$$

тенглик билан тўлдирамиз

$$x=c_{11}\cdot x'+c_{12}\cdot y'+a_1\cdot 1,$$

$$y=c_{21}\cdot x'+c_{22}\cdot y'+a_2\cdot 1,$$

$$1=0\cdot x'+0\cdot y'+1\cdot 1$$

ёки матрица шаклда

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix} \tag{10}$$

бу ерда

$$D=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&a_1\\c_{21}&c_{12}&a_2\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{11}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (10) тенглик транспонирлаб ушбуни ҳосил қиламиз

$$(x,y,z)=(x',y',1)D^* \tag{12}$$

Агар М нуқта Oxy ва $O'x'y'$ координаталар системасида мос равишда (x,y) ва (x',y') координаталарга эга бўлса, у ҳолда (9) тенгликни эътиборга олиб ушбуни ҳосил қиламиз

$$(x',y',1)A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi(x',y') = f(M) = F(x,y) = (x,\mathrm{y},1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Бу ердан (10) ва (12) тенгликларни эътиборга олиб ушбуга эга бўламиз

$$(x',y',1)A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x',y',1)D^*AD\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шундай қилиб ушбу тенглик

$$A' = D^*AD \tag{13}$$

f квадрат функциянинг янги $O'x'y'$ координаталар системасидаги A' матрицасини унинг эски Oxy координаталар системасидаги А матрицаси орқали ифодалайди.

Oxy ва $O'x'y'$ координаталар системасини аниқловчи $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперлар билан бир қатрда $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперни ҳам қарайлик. У $Ox''y''$ координаталар системасини аниқлаган бўлсин. (2) формулани матрица шаклида ёзайлик

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Бу ерда (a_1,a_2) O' нуқтанинг эски координаталар тизимидаги координаталаридир. Унда Oxy координаталар системасидан $Ox''y''$ координаталар системасига ўтиш формуласи (2) ўтиш формуласидан фақат озод ҳадлар устунининг йўқ эканлиги билан фарқ қилади, яъни

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \text{бу ерда} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

(13) формулани келтириб чиқаришда қандай мулоҳаза қилган бўлсак худди шундай мулоҳаза юритиб ушбуни ҳосил қиламиз.

$$(x,y) = (x'',y'')C^* \tag{14}$$

$$\left(x'', y''\right)U\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left(x, y\right)U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(x'', y''\right)C^*UC\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

яъни

$$U'' = C^*UC \qquad (15)$$

$O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперлар фақат координаталар боши билан фарқ қилганидан мос координаталар системасидан бири иккинчисидан параллел кўчириш билан ҳосил қилинади, яъни

$$x'' = x' + b_1$$

$$y'' = y' + b_2$$

Квадрат функциянинг квадрат қисми параллел кўчиришда ўзгармаслигини кўриш осон

$$F_2\left(x, y\right) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

Шунинг учун f функциянинг $O'x'y'$ координаталар системасидаги квадрат қисмининг матрицасини U' орқали белгиласак, у ҳолдда $U' = U''$ ва (15) формулага кўра

$$U' = C^*UC \qquad (16)$$

ҳосил қиламиз.

29§.ОРТОГОНАЛ МАТРИЦАЛАР.

29.1-таъриф. Агар

$$CC^* = E \qquad (17)$$

Тенглик бажарилса C квадрат матрицани ортогонал матрица деб аталади.

(17) тенглик бунда ҳар хил сатрларнинг формал скаляр кўпайтмаси нолга тенг, сатрларнинг скаляр квадратлари эса бирга тенг, яъни

$$\sum_k c_{ik}c_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{агар} \quad i = j \\ 0 & \text{агар} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (18)$$

(17) ва (18) шартларнинг эквивалентлиги сатрлар бўйича C матрицанинг ортогоналлигини ифодалайди. (17) тенгликдан

$$C^{-1}CC^* = C^{-1}E$$

ёки

$$C^* = C^{-1} \tag{19}$$

Тенглик келиб чиқади. Бу эса ортогонал матрицанинг яна битта таърифидир. (17) ва (18) шартларнинг эквивалентлиги С матрицанинг сатрлар бўйича ортогоналлигини ифодалайди (19) тенгликдан

$$C^* C = E \tag{20}$$

Тенглик келиб чиқади. Бу тенглик ҳам ортогонал матрицанинг таърифи бўлади. У С матрицанинг устунлар бўйича ортогоналлигини ифодалайди. Ҳар хил устунларнинг формал скаляр кўпайтмаси нолга тенг, устунларнинг скаляр квадратлари эса бирга тенг, яъни

$$\sum_k c_{ik} c_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{агар} \quad i = j \\ 0 & \text{агар} \quad i \neq j \end{cases}$$

29.2-жумла. Ортогонал матрицалар кўпайтмаси ортогонал матрица бўлиб, ортогонал матрицага тескари матрица ҳам шунингдек ортогонал матрицадир.

Исбот. А ва В матрицалар ортогонал матрицалар бўлсин $C = AB$ матрица учун (17) шартнинг бажарилишини текшириш керак. 21§ даги матрицалар устидаги амалларнинг хоссаларини тадбиқ қилиб ушбуни ҳосил қиламиз.

$$(AB)(AB)^* = AbB^* A^* = AEA^* = AA^* = E$$

Худди шундай $C = A^{-1}$ учун ҳам ушбуга эга бўламиз.

$$\left(A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right)^* = A^{-1}\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^* A\right)^{-1} = E^{-1} = E$$

Е бирлик матрица ҳам равшанки ортогонал матрицадир. Ҳақиқатан ҳам

$$EE^* = E \cdot E = E$$

29.2-жумлани қуйидаги тарзда қайта ифодалаш мумкин. Берилган n-тартибли ортогонал матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан О(n) символ билан белгиланувчи группа (гуруҳ) ҳосил қилади.

Иккинчи тартибли ортогонал матрицалар. Транспонирланганда матрица детерминанти ўзгармагандан, яъни

$$\det C = \det C^*$$

ҳамда 29.1-ортогонал матрица таърифидан унинг детерминанти ±1 тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам

$$CC^* = E \Rightarrow \det C \det C^* = \det E \Rightarrow \det C \det C = 1 \Rightarrow \left(\det C\right)^2 = 1 \Rightarrow \det C = \pm 1.$$

29.3-жумла. Иккинчи тартибли ортогонал матрица, детерминантнинг ишорасига боғлиқ ҳолда у ушбу кўринишларга эга.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{21}$$

Исбот.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Ортогонал матрица бўлсин. Унинг устунларининг ортогоналлик хоссасидан фойдаланамиз

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$$

шартдан шундай φ мавжудки бунда $c_{11} = \cos\varphi$, $c_{21} = \sin\varphi$ бўлади. Биринчи ва иккинчи устунларнинг ортогоналлик шартидан

$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0, \quad \cos\varphi c_{12} + \sin\varphi c_{22} = 0$$

бўлиши келиб чиқади, охирги тенглик

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi & -c_{12} \\ \cos\varphi & c_{22} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\sin\varphi & c_{12} \\ \cos\varphi & c_{22} \end{vmatrix} = 0$$

тенгликка тенг кучли. Детерминант нолга тенг бўлиши учун унинг устунлари чизиқли боғланган бўлишига ёки ўз навбатда устунлари ўзаро пропорционал бўлишига тенг кучлидир, яъни $\exists t \in R$:

$$c_{12} = t\sin\varphi \qquad c_{22} = -t\cos\varphi$$

сўнгра $c_{11}^2 + c_{22}^2 = 1$ шартдан

$$t^2 \sin^2\varphi + t^2\cos^2\varphi = 1$$

$$t^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = 1$$

$t^2 = 1$ бунда $t = \pm 1$ бўлишини ҳосил қиламиз

$$c_{11} = \cos\varphi \qquad c_{21} = \sin\varphi$$

$$c_{12} = t\sin\varphi \qquad c_{22} = -t\cos\varphi$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

бўлиб. Агар $|C|=\det C=1$ бўлса

$$c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=1$$

$$-t\sin^2\varphi-t\cos^2\varphi=1$$

$$-t\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=1$$

$$-t=1$$

$$t=-1$$

Агар $|C|=\det C=-1$ бўлса

$$c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=-1$$

$$-t\sin^2\varphi-t\cos^2\varphi=-1$$

$$-t\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=-1$$

$$-t=-1$$

$$t=1$$

бўлади. Демак, С мтатрица

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

кўринишга эгабўлади.

30§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ.

Бу ерда биз тўғри бурчакли координаталар системасини ҳамда тўғри чизиқдаги, текисликдаги ва фазодаги базисларни қарайлик.

3.1-теорема. С матрица ортогонал матрица бўлади, шу ҳолда ва фақат шу ҳолда қачонки у бирорта ортонормал базисдан бошқа ортонормал базисга ўтиш матрицаси бўлса.

Исбот. С ортонормал базис $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ дан ортонормал базис $\vec{e}'_1,...,\vec{e}'_n$ га ўтиш матрицаси бўлсин. Унда

$$\left(\vec{e}'_i,\vec{e}'_j\right)=\begin{cases}1 & \text{агар} \quad i=j\\ 0 & \text{агар} \quad i\neq j\end{cases} \tag{22}$$

бўлади.

$$\left(\vec{e}_i',...,\vec{e}_n'\right)=\left(\vec{e}_i,...,\vec{e}_n\right)\begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{23}$$

бўлгани туфайли

$$\vec{e}_i'=\sum_k c_{ki}e_k$$

Аммо ортонормал базис $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ да скаляр кўпайтма $\left(\vec{e}_i',\vec{e}_j'\right)$ бу векторлар мос координаталари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг. Шунинг учун (22) тенглик

$$\sum_k c_{ki}c_{kj}=\begin{cases} 1 & \text{агар} \quad i=j \\ 0 & \text{агар} \quad i\neq j \end{cases} \tag{24}$$

айланади. Аммо бу С матриցанинг устунлар бўйича ортогоналлик шартидан иборат бўлади. Аксинча, агар С ортогонал матрица ва $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ ортонормал базис бўлса, у ҳолда (23) формула бўйича ҳосил қилинган $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ базис учун матрицанинг (24) ортогоналлик шарти унинг (22) ортонормаллик шартига айланади. Теорема исботланди.

30.1-теоремадан ушбу натижа келиб чиқади.

30.2-натижа. Агар

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x_1' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$

тенглик $Ox_1...x_n$ тўғри бурчакли координаталар системасидан $O'x_1'...x_n'$ координаталар системасига ўтишни берса, у ҳолда С матрица ортогоналдир. Аксинча, агар $Ox_1...x_n$ координаталар системаси тўғри бурчакли ва С матрица ортогонал бўлса, у ҳолда $O'x_1'...x_n'$ координаталар системаси ҳам шунингдек тўғри бурчакли бўлади. Энди текисликнинг тўғри бурчакли координаталари қандай алмашинишини қарайлик $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ иккита ортонормалланган репер бўлсин. Унда 30.1 ва 29.3 ларга мувофиқ $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ базисдан $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$ базисга (21) матрицалардан бири билан амалга оширилади.

$$(\vec{e}_1',\vec{e}_2')=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

ёки

$$(\vec{e}_1',\vec{e}_2')=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

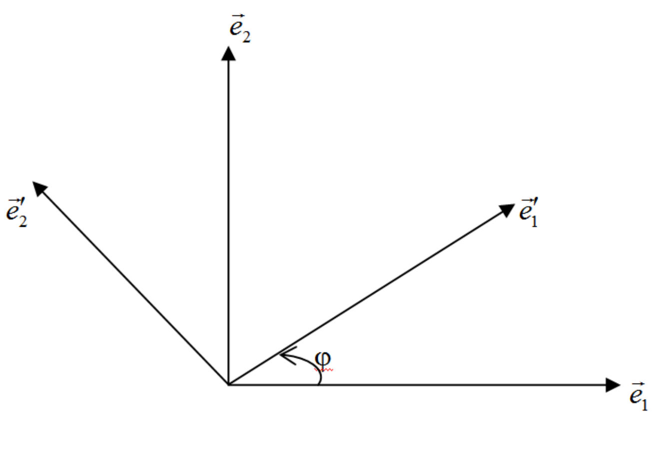
биринчи ҳолда

$$\vec{e}_1'=\cos\varphi\cdot\vec{e}_1+\sin\varphi\cdot\vec{e}_2$$

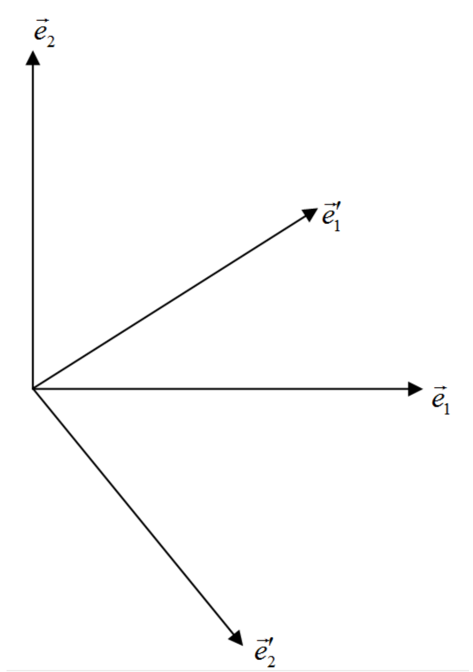
$$\vec{e}_2'=-\sin\varphi\cdot\vec{e}_1+\cos\varphi\cdot\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1'=\{\cos\varphi,\sin\varphi\},\quad \vec{e}_2'=\{-\sin\varphi,\cos\varphi\}$$

Бунда $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ репер $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперни φ бурчакка буриш билан ҳосил қилинишини кўриш осон. Ҳақиқатан ҳам $\vec{e}_1$ векторни φ бурчакка бурганимизда ҳосил бўлган векторнинг координаталари $\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ бўлади ҳамда $\vec{e}_1'$ векторнинг координаталари билан устма-уст тушади. $\vec{e}_2'$ векторни φ бурчакка бурганимизда ҳосил бўлган векторнинг координаталари $\cos(\varphi+90^0)$ ва $\sin(\varphi+90^0)$ бўлиб , $-\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ координаталарга эга бўлиб $\vec{e}_2'$ векторнинг координаталари билан устма-уст тушади.



36-расм



37-расм

Иккинчи ҳолда

$$\vec{e}_1' = \cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin\varphi \cdot \vec{e}_2 \qquad \vec{e}_2' = \sin\varphi \cdot \vec{e}_1 - \cos\varphi \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}, \qquad \vec{e}_2' = \{\sin\varphi, -\cos\varphi\}$$

$O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ репер $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ репердан φ бурчакка буриш билан кейин эса ҳосил бўлган биринчи базис векторга нисбатан иккинчи базис векторга нисбатан иккинчи базис векторни тик акслантириш билан ҳосил қилинади. Шунинг учун биринчи базис векторнинг координаталари $\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ бўлиб $\vec{e}_1'$ вектор билан устма-уст тушади. Икки базис векторнинг координаталари эса $\sin\varphi$ ва $-\cos\varphi$ координаталарга эга бўлиб $\vec{e}_2'$ вектор билан устма-уст тушади (37-расм). Шундай қилиб умумий координаталар бошига эга бўлган иккита тўғри бурчакли координаталар системаси ё ушбу формула билан боғланган

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

бунда координата ўқлари φ бурчакка бурилган бўлади ёки ушбу формула билан боғланган бўлиб

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

координата ўқлари φ бурчакка бурилиб иккинчи координата ўқи биринчи координата ўқига нисбатан тик акслантириш билан ҳосил қилинади. Шу билан бирга *Ox* ва *Oy* ўқига қараб буриш мусбат буриш бўлади.

31§. КВАДАРТ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ОРТОГОНАЛ ИНВАРИАНТЛАРИ.

Oxy координаталар системасида *f* квадрат функция

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

кўпҳад билан тасвирланган бўлсин A ва U матрицалар билан бир қаторда *f* квадрат функцияга уларнинг детерминантлари

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ларни мос қўямиз.

31.1-жумла. Агар Oxy координаталар системасидан $O'x'y'$ координаталар системасига ўтиш $(C,a)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & a_1 \\ c_{21} & c_{22} & a_2 \end{pmatrix}$ матрица ёрдамида рўй берилса ва $\det C=\pm 1$ бўлса, у ҳолда $\Delta'=\Delta$ ва $\delta'=\delta$ бўлади.

Исбот.

$$\Delta'=\det A'=\det D^*\det A\det D=\det\left(\det D\right)^2=\det A\left(\det C\right)^2\det A=\Delta$$

$\delta'=\delta$ тенглик ҳам (16) формула асосида худди шундай текширилади

$$\delta'=\det U'=\det C^*\det U\det C=\det U\left(\det C^2\right)=\left(\det U\right)\cdot 1=\delta$$

31.1-жумла ва 30.2-натижада ушбу жумла келиб чиқади.

31.2-жумла. Берилган квадарт функция учун Δ ва δ сонлар ортогонал инвариантлар бўлади, яъни улар бирор тўғри бурчакли координаталар системасидан бошқа координаталар системасига ўтишда ўзгармайди.

Исбот. (16) формуладан

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

бунда бевосита ушбу тенгликлар келиб чиқади

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11}a_{11}+c_{21}a_{12} & c_{11}a_{12}+c_{21}a_{22} \\ c_{12}a_{11}+c_{22}a_{12} & c_{12}a_{12}+c_{22}a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$a'_{11}=c_{11}\left(c_{11}a_{11}+c_{21}a_{12}\right)+c_{21}\left(c_{11}a_{12}+c_{21}a_{22}\right)$$

$$a'_{22}=c_{12}\left(c_{12}a_{11}+c_{22}a_{12}\right)+c_{22}\left(c_{12}a_{12}+c_{22}a_{22}\right)$$

Шунинг учун a_{ij} олдидаги коэффициентларни гуруҳлаб ушбуни ҳосил қиламиз

$$\delta'=a'_{11}+a'_{22}=a_{11}\left(c_{11}^2+c_{12}^2\right)+a_{12}\left(c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}\right)+a_{12}\left(c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}\right)+a_{22}\left(c_{21}^2+c_{22}^2\right)=$$
$$=a_{11}\left(c_{11}^2+c_{12}^2\right)+a_{22}\left(c_{21}^2+c_{22}^2\right)+2a_{12}\left(c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}\right)=a_{11}\cdot 1+a_{22}\cdot 1+2a_{12}\cdot 0=a_{11}+a_{22}=\delta$$

31.4-таъриф. *f* квадрат функциянинг характеристик кўпҳади деб ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\left(a_{11}-\lambda\right)\left(a_{22}-\lambda\right)-a_{12}^2=$$
$$=a_{11}a_{22}-\lambda a_{22}-\lambda a_{11}+\lambda^2-a_{12}^2=\lambda^2-\left(a_{11}-a_{22}\right)\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\lambda^2-\delta\lambda+\delta \qquad (27)$$

кўпҳадга айтилади. Бу ерда

$$U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

f функция квадрат қисмининг бирорта тўғри бурчакли Oxy координаталар системасидаги матрицасидан иборат бўлиши инобатга олинади. 31.2 ва 31.3 жумлалардан f функция характеристик кўпҳади бошқа тўғри бурчакли координаталар системасига ўтганда ўзгармаслиги келиб чиқади, яъни у ортогонал инвариант бўлади. Квадрат функция характеристик кўпҳади λ_1 ва λ_2 илдизлари ҳам ортогонал инвариантлар бўлади.

31§. КООРДИНАТАЛАР ЎҚЛАРИНИ БУРИШДА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИНИ АЛМАШТИРИШ.

Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида Г иккинчи тартибли чизиқ ўзининг умумий тенгламаси

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (28)$$

билан берилган бўлсин. Дастлабки координаталар системасининг ўқларини φ бурчакка буриб янги тўғри бурчакли координаталар системаси $O'x'y'$ га ўтамиз. Унда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

бўлиб бу ерда (25)га мувофиқ

$$C=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

F кўпҳад Oxy координаталар системасида f квадрат функцияни тасвирлайди. $O'x'y'$ координаталар системасида f квадрат функциянинг квадрат қисмининг U' матрицаси учун (16) формулага мувофиқ ушбуга эга бўламиз.

$$U'=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

бу ерда $U'=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}$.

Бевосита ҳисоблашлар ушбуларни кўрсатади:

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi \\ a'_{12} = \left(-a_{11} + a_{22}\right)\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \end{cases} \qquad (29)$$

Ҳақиқатан ҳам

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi & a_{12}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi \\ -a_{11}\sin\varphi + a_{12}\cos\varphi & -a_{12}\sin\varphi + a_{22}\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$$

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi + a_{12}\cos^2\varphi + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi = \left(-a_{11} + a_{22}\right)\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

агар $a_{12} \neq 0$ бўлса, у ҳолда координаталар системасини шундай φ бурчакга бурамизки бунда $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ бўлиб $a'_{12} = 0$ бўлсин

$$0 = \left(-a_{11} + a_{22}\right)\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

$$\left(a_{11} - a_{22}\right)\cos\varphi\sin\varphi = a_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

$$\left(a_{11} - a_{22}\right)\sin 2\varphi = 2a_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

$$\left(a_{11} - a_{22}\right)\sin 2\varphi = 2a_{12}\cos 2\varphi$$

$$ctg\,2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Демак, агар $a'_{12} = 0$ бўлса координаталар системасини шундай φ, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ бурчакка бурамизки бунда

$$ctg\,2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \qquad (30)$$

шарт бажарилганда шундай координаталар системасини ҳосил қиламизки f функция квадарт қисмининг U' матрицаси ушбу диагонал кўринишга эга бўлади.

$$U = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \qquad (31)$$

Бу $O'x'y'$ координаталар системасида Г чизиқ тенгламаси

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \qquad (32)$$

кўринишга эга бўлади. Бу φ бурчакни бошқача усул билан топайлик $a'_{12}=0$ деб ҳисоблаб, ушбуга эга бўламиз

$$a'_{11}\cos\varphi=a'_{11}\cos\varphi+a'_{12}\sin\varphi$$

бу тенгликнинг ўнг томонига a'_{11} ва a'_{12} қийматларни (29) формулалардан олиб қўйиб ўхшаш ҳадларни ихчамлаб ушбуни ҳосил қиламиз

$$\begin{aligned}&a'_{11}\cos\varphi=a_{11}\cos^3\varphi+2a_{12}\cos^2\varphi\sin\varphi+a_{22}\cos\varphi\sin^2\varphi+\\&+a_{11}\cos\varphi\sin^2\varphi-a_{22}\cos\varphi\sin^2\varphi-a_{12}\cos^2\varphi\sin\varphi+a_{12}\sin^3\varphi=\\&=a_{11}\cos\varphi\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+a_{12}\cos^2\varphi\sin\varphi+a_{12}\sin^3\varphi=\\&=a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi\end{aligned}$$

Бу ердан

$$\left(a'_{11}-a_{11}\right)\cos\varphi=a_{12}\sin\varphi$$

$$tg\varphi=\frac{a'_{11}-a_{11}}{a_{12}}\qquad(33)$$

ҳосил қиламиз.

f функция (27) характеристик кўпҳади учун a'_{11} ва a'_{22} сонлар унинг ортогонал инвариантлиги туфайли илдизлари бўлади.

Шундай қилиб, (33) тенгликни ушбу кўринишда қайта ёзиш мумкин

$$tg\varphi=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}$$

Бу ерда λ_1 илдиз сифатида характеристик кўпҳаднинг илдизларидан шуниси олинадики унинг учун tgφ>0 бўлади ва δ нинг ортогонал инвариантлиги ва $a_{12}\neq 0$ эканлигидан шундай илдизнинг мавжудлиги осонгина келтирилиб чиқарилади. (27) характеристик кўпҳад дискриминанти

$$\begin{aligned}&\delta^2-4\delta=\left(a_{11}+a_{22}\right)^2-4\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)=a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}^2=\\&=a_{11}^2-2a_{11}a_{22}+a_{22}^2+4a_{12}^2=\left(a_{11}-a_{22}\right)^2+a_{12}^2>0\end{aligned}$$

f квадрат функциянинг (6) матрица билан боғланган яна битта сонни аниқлаймиз

$$K=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{13}&a_{33}\end{vmatrix}\qquad(35)$$

деб оламиз.

32.1-жумла. Тўғри бурчакли координаталар системасининг ўқларини буришда К сони ўзгармайди.

Исбот. F(x,y) кўпҳадга x ва y ўзгарувчилар ўрнига (25) формулага кўра x' ва y' ўзгарувчилар орқали ифоларини қўйиб бевосита ҳисоблашлар билан

$$\left.\begin{aligned} a'_{13} &= a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi \\ a'_{23} &= -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi \\ a'_{33} &= a_{33} \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

тенгликларнинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = a_{11}\left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right)^2 +$$
$$+2a_{12}\left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right)\left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right) + a_{22}\left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right)^2 +$$
$$+2a_{13}\left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right) + 2a_{23}\left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right) + a_{33}$$

Бу ердан

$$a'_{13} = a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi$$

$$a'_{23} = -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi$$

$$a'_{33} = a_{33}$$

Шунинг учун (36) формулани қўллаб ва δ нинг инвариантлик хоссасидан фойдаланиб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{13} & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{22}a'_{33} - a'^2_{23} + a'_{11}a'_{33} - a'^2_{13} = a'_{33}\left(a'_{22} + a'_{22}\right) - a'^2_{23} - a'^2_{13} =$$
$$= a'_{33}\delta - \left(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi\right)^2 - \left(-a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi\right)^2 = a_{33}\delta - \left(a_{13}^2\cos^2\varphi + 2a_{13}a_{23}\cos\varphi\sin\varphi + a_{23}^2\sin^2\varphi\right) -$$
$$-\left(a_{23}^2\cos^2\varphi - 2a_{13}a_{23}\sin\varphi\cos\varphi + a_{13}^2\sin^2\varphi\right) = a_{33}\left(a_{11} + a_{22}\right) - a_{13}^2\cos^2\varphi - 2a_{13}a_{23}\cos\varphi\sin\varphi - a_{23}^2\sin^2\varphi -$$
$$-a_{23}^2\cos^2\varphi + 2a_{13}a_{23}\sin\varphi\cos\varphi - a_{13}^2\sin^2\varphi = a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = K$$

К сони шунингдек координаталар ўқларидан бири иккинчисига нисбатан тик қайтганда ҳам ўзгармаслигини осонгина кўриш мумкин. Шу сабабли берилган квадрат функция учун у умумий координаталар бошига эга бўлган барча тўғри бурчакли координаталар системасида бир хил бўлади К сонини ортогонал етти инвариант деб аталади.

33§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИНИ КАНОНИК КЎРИНИШГА КЕЛТИРИШ.

33.1-теорема. Ихтиёрий иккинчи тартибли чизиқ учун шундай тўғри бурчакли координаталар системаси мавжудки, унда бу чизиқнинг тенгламаси қуйидаги кўринишлардан бирига эгадир.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, эллипс;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, мавҳум эллипс;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги;

4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, гипербола;

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги;

6) $y^2=2px$, парабола;

7) $y^2-a^2=0$, параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги;

8) $y^2+a^2=0$, мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги;

9) $y^2=0$, устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги.

Исбот. Умумийликни чегараламасдан бунда иккинчи тартибли чизиқ Г тўғри бурчакли координаталар системаси билан берилган бўлсин деб ҳисоблаш мумкин. Бунда 31§ да координаталар системасининг ўқларини буриш билан (28) тенгламада a_{12} коэффициентнинг нолга тенг бўлишига эришиши мумкинлиги кўрсатилган эди. Энда координаталар тизими параллел кўчириш билан шунга эришишни истаймизки аслида

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (37)$$

тенгламада биринчи даражали ҳадлар йўқолсин.

Энг аввал $a_{11}\neq 0\neq a_{22}$ ҳолни қарайлик. Тўла квадрат ажратиб (37) тенгламани

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+a_{22}\left(y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2+a_{33}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}}-\frac{a_{23}^2}{a_{22}}=0$$

кўринишда қайта ёзамиз. Бу тенгламани

$$x' = x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \ , \quad y' = y + \frac{a_{23}}{a_{22}}$$

ўзгарувчиларни алмаштириш ва янги белгилашлар киритиш билан

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \qquad (38)$$

кўринишда қайта ёзамиз.

Ҳақиқатан ҳам

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0$$

Штрихларни ташлаб қайта белгилаш киритсак (38) тенгламани ҳосил қиламиз.

Энди (37) тенгламада квадратлар олдидаги коэффициентлардан бири нолга тенг бўлсин. Зарурат бўлган ҳолда ўзгарувчилар номини ўзгартириб бунда $a_{11} = 0$ деб ҳисоблаш мумкин. Унда (37) тенгламани

$$a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{13}x + a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0$$

кўринишда ёзамиз. Координаталар системасини *Oy* ўқи бўйича параллел кўчиришдан кейин

$$x = x' \qquad y' = y + \frac{a_{23}}{a_{22}}$$

охирги тенглама

$$a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + a'_{33} = 0$$

ёки штрихларни ташлаб

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0 \qquad (39)$$

кўринишдаги тенгламага айланади. Агар $a_{13} \neq 0$ бўлса, у ҳолда *Ox* ўқи бўйича параллел кўчиришдан кейин (39) тенглама

$$x' = x + \frac{a_{33}}{2a_{13}} \qquad y' = y$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}\left(x + \frac{a_{33}}{2a_{13}}\right) = 0$$

$$a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' = 0$$

штрихларни ташлаб

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \qquad (40)$$

кўринишни олади. Агарда $a_{13}=0$ бўлса, у ҳолда (39) тенглама

$$a_{22}y^2=0 \tag{41}$$

кўринишга эга.

Демак, тўғри бурчакли координаталар системасини буриш ва параллел кўчиришдан сўнг иккинчи тартибли чизиқнинг (28) умумий тенгламаси (38), (40), (41) учта кўринишдан бирига келтирилади, бу ерда a_{11} , a_{22} ва a_{13} сонлар нолдан фарқли. Аммо (38) кўринишдаги тенглама 1)-5) тенгламаларнинг бирига пропорционал, (40) тенглама 6) тенгламага пропорционал, (41) тенглама эса 7)-9) учта тенгламалардан бирига пропорционалдир.

Ҳақиқатан ҳам (38) тенгламада $a_{33}\neq 0$ бўлсин. Унда уни

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2=-a_{33}$$

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{33}}{a_{11}}}+\frac{y^2}{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}=1$$

ёки

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$A=-\frac{a_{33}}{a_{11}} \qquad B=-\frac{a_{33}}{a_{22}}$$

Умумийликни чегараламасдан $A\geq B$ деб фараз қилиш мумкин (A<B бўлган ҳолда координата ўқларининг ўринларини алмаштириб координаталарни алмаштириш қиламиз).

а) Агар A>0, B>0 бўлса $A=a^2$, $B=b^2$ деб (38) тенглама $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсдан иборат бўлади.

б) Агар A>0, B<0 бўлса $A=a^2$, $B=-b^2$ деб (38) тенглама $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболадан иборат бўлади.

в) Агар A<0, B<0 бўлса $A=-a^2$, $B=-b^2$ деб белгилаб, бу ерда $a>0$, $b>0$ тенгламани

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

кўринишда ёзамиз. Бунда (38) тенглама битта ҳам ҳақиқий нуқтага эга бўлмасдан мавҳум эллипсдан иборат бўлади.

(38) тенгламада $a_{33}=0$ бўлсин. Унда уни $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда A>0.

а) Агар B<0 бўлса, у ҳолда $A=a^2$, $B=-b^2$ деб белгилаб топамиз

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ ёки } \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$$

Чизиқ кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \quad \text{ва} \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

олдингига ўхшаш топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Чизиқ фақат битта ҳақиқий нуқтага эга, бу координаталар боши. Бунда чизиқ мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади деб айтилади:

$$\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0 \quad \text{ва} \quad \frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0$$

(40) тенгламани

$$a_{22}y^2=-2a_{13}x$$

ёки

$$y^2=-2\frac{a_{13}}{a_{22}}x$$

$$y^2=2px \text{ бу ерда } p=-\frac{a_{13}}{a_{22}}$$

кўринишда ёзамиз. Бу параболанинг тенгламаси, (41) тенгламани эса

$$y^2+c=0 \quad \text{бу ерда } c=\frac{a_{33}}{a_{22}}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

а) Агар с<0 бўлса, у ҳолда $c=-a^2$ деб белгилаб тенгламани $y^2-a^2=0$ ёки $(y-a)(y+a)=0$ кўринишда ёзамиз. Чизиқ параллел тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади ($y-a=0$ ва $y+a=0$).

б) Агар с>0 бўлса, у ҳолда олдингига ўхшаш $y^2-a^2=0$ ёки $(y-ia)(y+ia)=0$ топамиз. Чизиқ битта ҳам ҳақиқий нуқтага эга эмас. Бунда у мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади деб айтилади: $y-ia=0$ ва $y+ia=0$.

в) Агар с=0 бўлса, у ҳолда тенглама $y^2=0$ ёки $y\cdot y=0$ кўринишга эга. Бунда чизиқ устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади деб айтилади (y=0, y=0).

33.2-эслатма. Зарурат бўлган ҳолда координаталар ўқларининг номларини қайта номлаб ёки уларнинг йўналишини ўзгартириб, бунда

а) 1)-5) тенгламаларда $a^2\geq b^2$ бўлади деб,

б) 6) тенгламада р>0 деб,

в) 7) ва 8) тенгламаларда $a^2\neq 0$ деб ҳисоблаш мумкин.

Бундай шартлар билан 1)-9) тенгламалар иккинчи тартибли чизиқнинг каноник тенгламалари деб аталади.

34§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ИНВАРИАНТЛАР БЎЙИЧА АНИҚЛАШ.

Олдинги параграфда биз бирорта тўғри бурчакли координаталар системасидан бошқа тўғри бурчакли координаталар системасига ўтиб иккинчи тартибли чизиқ умумий тенгламасини

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{28}$$

дан учта кўринишдаги

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0 \tag{38}$$

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0 \tag{40}$$

$$a_{22}y^2+a_{33}=0 \tag{41}$$

Тенгламалардан бирига ўтиш мумкинлигини кўрсатган эдик. Дастлабки координаталар системасидаги (28) тенгламадан умумий кўпҳад F(x,y) билан тасвирланган квадрат функция мос равишда учта гуруҳга бўлинади. Энди биз квадрат функциялар

I) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$

II) $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$

III) $a_{22}y^2 = 0$

уларнинг ортогонал инвариантлар бўйича каноник тасвирларини топишни истаймиз. Бу функцияларнинг каноник координаталар системасидаги A матрицаси мос равишда

I) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

II) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

III) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

кўринишга эгадир.

I) ҳолни қарайлик. У шу билан тавсифланадики, бунда

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \neq 0$$

Шу билан бирга квадрат функция учун каноник координаталар системасида

$$\delta = a_{11}a_{22} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \qquad a_{33} = \frac{\Delta}{\delta}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 \\ 0 & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \delta\lambda + \delta = 0$$

характеристик кўпҳад илдизлари $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$.

Шунинг учун

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \qquad (38)$$

тенгламани қуйидагича қайта ёзиш мумкин

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

Бунда қуйидаги жадвалда λ_1, λ_2, $\frac{\Delta}{\delta}$ сонларнинг ишорасига боғлиқ ҳолда 1 гуруҳ иккинчи тартибли чизиқларнинг твсифланишини кўриш осон

Эллипс	$\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 \neq \operatorname{sgn}\frac{\Delta}{\delta}$
Мвҳум эллипс	$\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\frac{\Delta}{\delta}$
Мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар	$\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2,\ \Delta = 0$
Гипербола	$\operatorname{sgn}\lambda_1 \neq \operatorname{sgn}\lambda_2,\ \Delta \neq 0$
Кесишувчи тўғри чизиқлар	$\operatorname{sgn}\lambda_1 \neq \operatorname{sgn}\lambda_2,\ \Delta = 0$

Ҳақиқатан ҳам

$$\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 \neq \operatorname{sgn}\frac{\Delta}{\delta} \Rightarrow \operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\delta}\right)$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{\Delta}{\delta}$$

$$\frac{x^2}{\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2}} = 1$$

$\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1} > 0 \quad \frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1} = a^2$ белгилаш мумкин, бу ерда $a > 0$

$\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2} > 0 \quad \frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2} = b^2$ белгилаш мумкин, бу ерда $b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипсни ҳосил қиламиз.

$$\operatorname{sgn}\lambda_1=\operatorname{sgn}\lambda_2=\operatorname{sgn}\frac{\Delta}{\delta}\Rightarrow\operatorname{sgn}\lambda_1=\operatorname{sgn}\lambda_2\neq\operatorname{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\delta}\right)$$

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=-\frac{\Delta}{\delta}$$

$$\frac{x^2}{\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2}}=-1$$

$\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1}>0$ $\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1}=a^2$ белгилаш мумкин, бу ерда $a>0$

$\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2}>0$ $\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2}=b^2$ белгилаш мумкин, бу ерда $b>0$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

мавҳум эллипсни ҳосил қиламиз.

$$\operatorname{sgn}\lambda_1=\operatorname{sgn}\lambda_2,\ \Delta=0$$

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$$

дан

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2}}=0$$

Агар $\operatorname{sgn}\lambda_1=\operatorname{sgn}\lambda_2=1$, $\frac{1}{\lambda_1}>0$, $\frac{1}{\lambda_2}>0$ бўлиб $\frac{1}{\lambda_1}=a^2$, $\frac{1}{\lambda_2}=b^2$ бу ерда $a>0$, $b>0$

дейишимизнинг, яъни

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

мавҳум кесишувчи тўғри чизиқларни ҳосил қиламиз.

Агар $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = -1$, $\frac{1}{\lambda_1} < 0$, $\frac{1}{\lambda_2} < 0$ бўлиб $\frac{1}{\lambda_1} = -a^2$, $\frac{1}{\lambda_2} = -b^2$ дейиш мумкин, бу ерда $a > 0$, $b > 0$ дейишимизнинг, яъни

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 0 \quad \text{ёкм} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

яна мавҳум кесишувчи тўғри чизиқларни ҳосил қиламиз.

$$\operatorname{sgn}\lambda_1 \neq \operatorname{sgn}\lambda_2, \ \Delta \neq 0$$

бўлсин, умумийликни чегараламасдан $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\delta}\right)$ бўлади деб ҳисоблаш мумкин, акс ҳолда координата ўқларини қайта номлаймиз

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{\Delta}{\delta}$$

$$\frac{x^2}{\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1}} - \frac{y^2}{\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2}} = 1$$

Юқоридгиларга асосан

$$\frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1} > 0 \text{ бўлганидан } \frac{-\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_1} = a^2 \text{ деб белгилаш мумкин, бу ерда } a > 0$$

$$\frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2} > 0 \text{ бўлганидан } \frac{\frac{\Delta}{\delta}}{\lambda_2} = b^2 \text{ деб белгилаш мумкин, бу ерда } b > 0$$

яъни

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболани ҳосил қиламиз.

$$\operatorname{sgn}\lambda_1 \neq \operatorname{sgn}\lambda_2, \ \Delta = 0$$

бўлса,

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}} - \frac{y^2}{-\frac{1}{\lambda_2}} = 0$$

умумийликни чегараламсдан

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1} > 0 \ , \quad b^2 = \frac{1}{\lambda_2} > 0$$

деб ҳисоблашимиз мумкин, акс ҳолда координата ўқларини қайта номлаймиз, яъни

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

кечишувчи тўғри чизиқлар жуфтини ҳосил қиламиз.

II) ҳол шу билан баҳоланадики, бунда

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \qquad (40)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta = 0 \cdot a_{22} = 0 \qquad \Delta = a_{13}^2 a_{22} \neq 0$$

ва параболани тавсифлайди, квадрат функция учун каноник координаталар системасида

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}^2 a_{22} \qquad \delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \delta = 0 + a_{22} = a_{22}$$

Шунинг учун

$$a_{13}^2 = \frac{\Delta}{-a_{22}} \qquad a_{13}^2 = \frac{\Delta}{-\delta} \qquad a_{13} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{-\delta}} \qquad -\frac{\Delta}{\delta} = -\frac{-a_{22}a_{13}^2}{a_{22}} = a_{13}^2 > 0$$

ва (40) тенглама

$$\delta y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta}}x = 0 \qquad (43)$$

кўринишни олади.

Демак параболанинг каноник тенгламаси қуйидагича ёзилади

$$\delta y^2 = \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta}}x$$

$$y^2 = \pm\frac{2\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta}}}{\delta}x = \pm\frac{2\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta}}}{\sqrt{\delta^2}}x = \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta^3}}x \qquad (44)$$

III) ҳолни қараш қолди

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \tag{41}$$

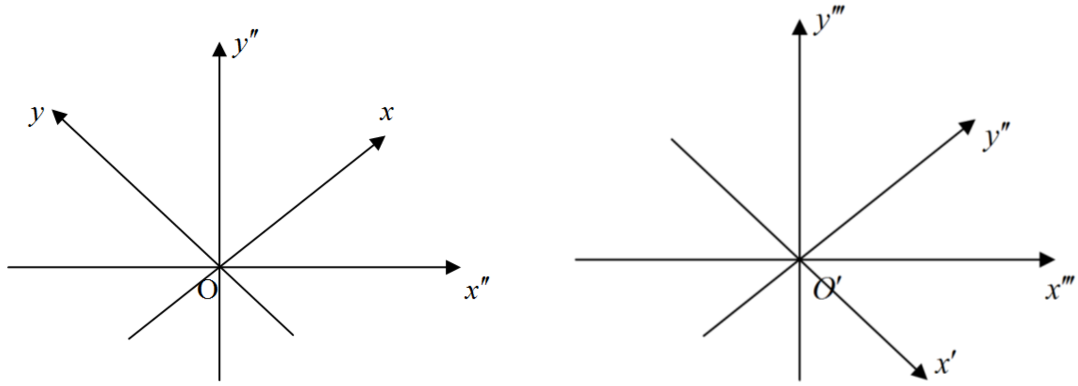
$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

34.1-жумла. Агар $\delta = \Delta = 0$ бўлса, у ҳолда

$$K = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

инвариант бўлади.

Исбот. Тўғри бурчакли координаталар системаси Oxy ва $O'x'y'$ ларни боғловчи ўзгарувчиларни алмаштиришда бунда К нинг ўзгармаслигини кўрсатиш керак. Бунинг учун иккита ёрдамчи тўғри бурчакли координаталар системаси $Ox''y''$ ва $O'x'''y'''$ ларни киритамиз. $Ox''y''$ система Oxy системадан координата ўқларини бирор бурқакга буришдан ҳосил қилинади. $O'x'''y'''$ система эса $Ox''y''$ системадан параллел кўчириш билан ҳосил қилинади (38-расм)



38-расм

Бунда $Oxy \to Ox''y''$ ва $O'x'''y''' \to O'x'y'$ ўтишларда К сонининг ўзгармаслигига 32§ даги натижадан келиб чиқади. Шунинг учун $Ox''y'' \to O'x'''y'''$ параллел кўчиришда, бунда К сонининг ўзгармаслигини кўрсатиш етарлидир. Шу билан бирга биз $Ox''y''$ координаталар системасини ихтиёрий биз хоҳлагандай танлаш мумкин. Биз уни Oxy ни шундай бурчакка буришдан ҳосил қиламизки, қайсики иккинчи тартибли чизиқнинг (28) умумий тенгламасида a_{12} коэффициент нолга айланади (32§ га қаранг). Бу координаталар системасида квадрат қисмнинг U матрицаси диагоналдир

$$U=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Демак, $\delta = a_{11}a_{22}$ шунинг учун $\delta = 0$ бўлганидан a_{11} ва a_{22} сонлардан аққали биттаси нолга тенгдир. Умумийликни чегараламсдан зарурат бўлса координата ўқларни бунда $a_{11}=0$ деб ҳисоблаймиз. Унда $Ox''y''$ системада А матрица

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади. Аммо $\Delta = 0$ дан $a_{13}=0$ бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам

$\Delta = -a_{13}^2 a_{22}$ бўлганидан ва $a_{22} \neq 0$ бўлганидан $a_{13}=0$. Демак $Ox''y''$ координаталар системасида бизнинг квадрат функция

$$\varphi(x'', y'') = a_{22}y''^2 + 2a_{23}y'' + a_{33}$$

кўпҳад билан тасвирланади

$$x'' = x''' + b$$
$$y'' = y''' + c$$

параллел кўчиришда

$$\varphi(x'', y'') = a_{22}(y''' + c)^2 + 2a_{23}(y''' + c) + a_{33} = a_{22}y'''^2 + 2(a_{22}c + a_{23})y''' + a_{22}c^2 + 2a_{23}c + a_{33}$$

ҳосил қиламиз. Шунинг учун $O'x'''y'''$ системада К сони

$$K' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}c + a_{23} \\ a_{22}c + a_{23} & a_{22}c^2 + 2a_{23}c + a_{23} \end{vmatrix}$$

кўринишга келади. Демак,

$$K' = a_{22}a_{33} + 2a_{22}a_{23}c + a_{22}^2c^2 - a_{23}^2 - 2a_{22}a_{23}c - a_{22}^2c^2 = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = K$$

жумла исботланди.

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \qquad (41)$$

тенгламани

$$\delta y^2 + \frac{K}{\delta} = 0 \qquad (45)$$

кўринишда қайта ёзиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам

$$K=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2$$

$a_{22}y^2+a_{33}=0$ тенглама учун $K=a_{22}a_{33}$ бўлганидан $a_{33}=\dfrac{K}{a_{22}}$ бўлиб $a_{33}=\dfrac{K}{\delta}$

$$\delta y^2+\frac{K}{\delta}=0.$$

III гуруҳ иккинчи тартибли чизиқ тенгламси

$$y^2+\frac{K}{\delta^2}=0 \qquad (46)$$

кўринишга эга. Шунинг учун K<0 да $y^2-\dfrac{-K}{\delta^2}=0$ $\dfrac{-K}{\delta^2}=a^2$ деб, бу ерда $a>0$ $y^2-a^2=0$ параллел тўғри чизиқларни, K>0 да $\dfrac{K}{\delta^2}=a^2$ деб, бу ерда $a>0$ $y^2+a^2=0$ мавҳум параллел тўғри чизиқларни, K=0 да $y^2=0$ устма-уст тушувчи параллел тўғри чизиқларни ҳосил қиламиз.

35§. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА ВА ПАРАБОЛАНИНГ ДИРЕКТОРИАЛ ХОССАСИ.

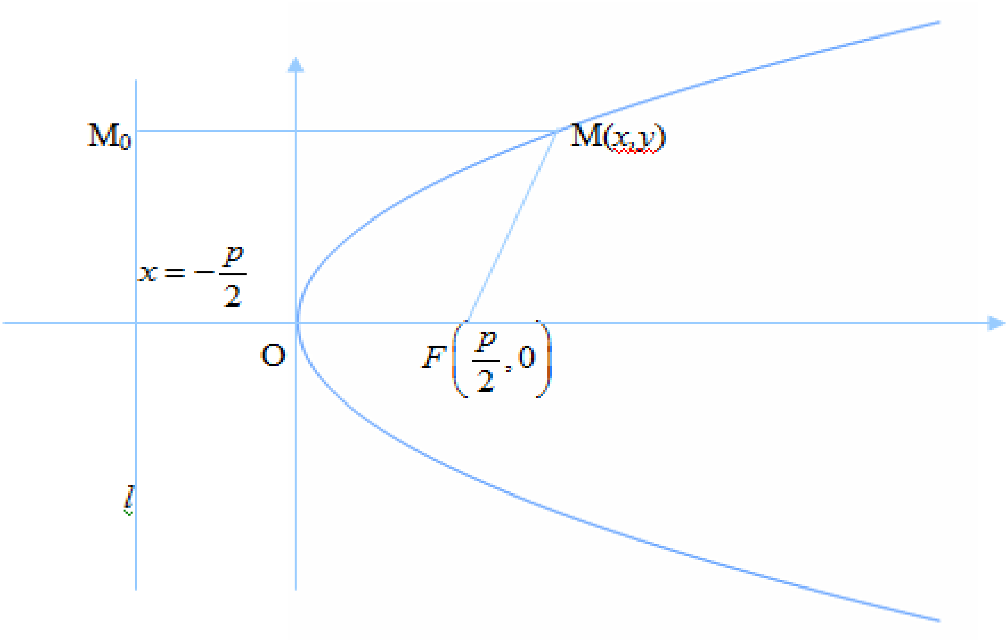
Текисликда l тўғри чизиқ ва унга тегишла бўлмаган F нуқта берилган бўлсин. Қуйидаги масалани ечамиз: Текисликда M нуқталарнинг шундай геометрик ўринлари топилсин, бунда

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}=e>0 \qquad (47)$$

Алоҳида учта ҳолни қараймиз: $e=1,\ e<1,\ e>1.$

1. $e=1$. F нуқта ва l тўғри чизиқ орасидаги масофани p орқали белгилаймиз $\rho(F,l)=p$. шундай тўғри бурчакли Oxy координаталар системасини киритамизки бунда Ox ўқ l тўғри чизиқга перпендикуляр ва F орқали ўтади. Oy ўқи эса F нуқтадан l тўғри чизиқга туширилган перпендикулярни тенг иккига бўлади (39-расм). Бу координатлар системасида F

нуқта $\left(\frac{p}{2},0\right)$ координаталарга эга, l тўғри чизиқ эса $x=-\frac{p}{2}$ тенглама билан тавсифланади. Бизнинг Г тўпламнинг ихтиёрий М нуқтасининг координатасини (x,y) орқали белгилаймиз М(x,y). Унда $l\perp MM_0$ перпендикуляр туширсак $M_0\left(-\frac{p}{2},y\right)$ кординатага эга бўлади



39-расм

$$1=\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}=\frac{\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}}{\rho(M_0M)} \tag{47}$$

$$1=\frac{\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}}=\frac{\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}}$$

$$1=\frac{\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}}{\left|x+\frac{p}{2}\right|} \tag{48}$$

$F\notin l$ бўлганидан (47) тенгликда сурат ҳам, махражи ҳам нолга айланмайди. Шунинг учун (48) тенглама

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$$

тенгламага эквивалент. Унинг ўхшаш ҳадларини ихчамлаб юборсак параболанинг каноник тенгламасга айланади

$$y^2=2px \tag{49}$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

$$y^2=2px$$

Демак, (49) парабола $\left(\frac{p}{2},0\right)$координатали F нуқтадан ва $x+\frac{p}{2}=0$ тенглама билан тавсифланувчи l тўғри чизиқдан тенг узоқдикдаги M нуқталарнинг геометрик ўрни бўлади. F нуқта параболанинг фокуси деб l тўғри чизиқ эса директриссаси деб аталади. Параболанинг фокуси билан директриссаси орасидаги p масофа параболанинг фокал параметри ёки оддийгина параболанинг параметри деб аталади.

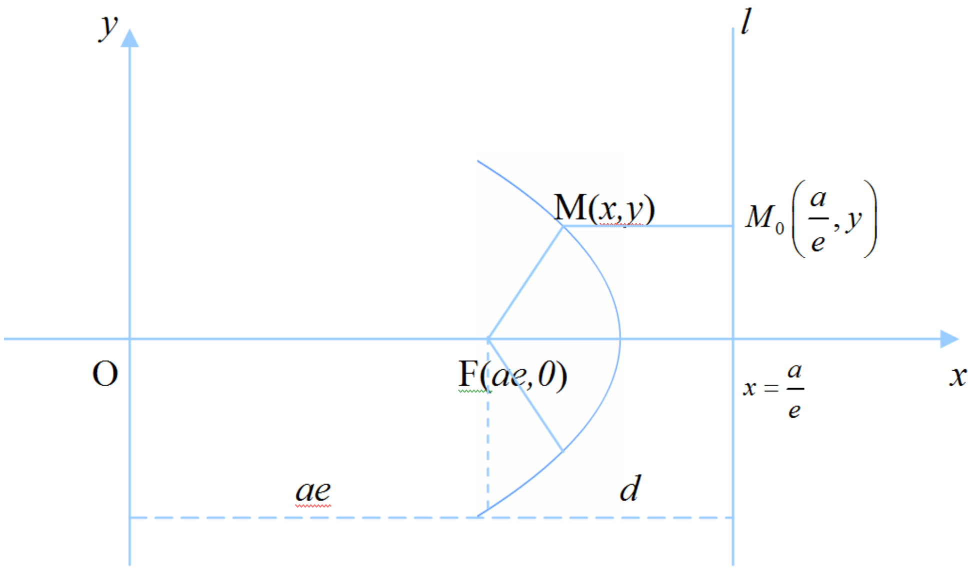
II. $e<1$. F нуқта ва l тўғри чизиқ орасидаги масофани d орқали белгилаймиз. $F\notin l$ бўлганидан

$$d=\rho(F,l)>0 \quad 0<e<1\Rightarrow 1<\frac{1}{e} \text{ ва } e<1\Rightarrow\frac{1}{e}>e\Rightarrow\frac{1}{e}-e>0 \quad \frac{d}{\frac{1}{e}-e}>0$$

бўлганидан $a=\dfrac{d}{\frac{1}{e}-e}$ орқали белгилаймиз. Демак шундай $a>0$ сони мавжудки

бунда $d=\frac{a}{e}-ae$.

шунинг учун тўғри бурчакли координаталар сстемаси Oxy киритиш мумкинки, бунда F нуқта $(ae,0)$ координаталарга эга, l тўғри чизиқ эса $x-\frac{a}{e}=0$ тенглама билан берилади (40-расм).



40-расм

$ae+d=\frac{a}{e}$ унда $\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}=e>0$ (47) тенглама $M_0\left(\frac{a}{e}, y\right)$

$$\frac{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x-\frac{a}{e}\right)^2+(y-y)^2}}=e$$

$$\frac{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a}{e}\right|}=e \qquad (50)$$

кўринишда қайта ёзилади (50) тенгликни умумий махражга келтириб ҳамда иккала томонини квадратга кўтариб эквивалент тенгламани ҳосил қиламиз

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\left|x-\frac{a}{e}\right|$$

$$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

$$(x-ae)^2+y^2=(ex-a)^2$$

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2aex+a^2$$

ўхшаш ҳадларини ихчамлаб қуйидагига эга бўламиз

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=a^2\left(1-e^2\right) \qquad (51)$$

(51) тенгликни ўнг томони $a^2\left(1-e^2\right)$ га бўлиб

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{52}$$

Эллипснинг каноник тенгламасини ҳосил қиламиз. Демак, биз қараётган нуқталарнинг геометрик ўрни (52) эллипс бўлади бу $b=a\sqrt{1-e^2}$, $a=\frac{de}{1-e^2}$ чунки

$$d=\frac{a}{e}-ae \Leftrightarrow de=a-ae^2 \Leftrightarrow de=a\left(1-e^2\right) \Leftrightarrow a=\frac{de}{1-e^2}$$

F(*ae*,*0*) нуқта эллипснинг фокуси деб, $x=\frac{a}{e}$ тўғри чизиқ эса унинг директриссаси деб, *e* сони эксцентриситети деб аталади. Агар эллипснинг (52) каноник тенгламси берилган бўлса ва айлана бўлмаса (яъни $a>b$) у ҳолда

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{53}$$

деб фараз қилиб бу эллипс (47) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни бўлишини ҳосил қиламиз. Бу ерда F(*ae,0*) кооринаталарга эга ва *l* тўғри чизиқ $x-\frac{a}{e}=0$ тенглама билан юқоридаги каби тавсифланади.

$$\rho(M,F)=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}$$

$$MM_0\perp l\ ,\ M_0\in l \text{ бу ерда } M_0\left(\frac{a}{e},y\right)$$

$$\rho(M,l)=\sqrt{\left(x-\frac{a}{e}\right)^2+(y-y)^2}=\left|x-\frac{a}{e}\right|$$

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}=\frac{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a}{e}\right|}=\frac{\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}{\left|\frac{ex-a}{e}\right|}=\frac{\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}{\left|\frac{ex-a}{e}\right|}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2aex+a^2-b^2+b^2}}{\frac{|ex-a|}{e}}=\frac{e\sqrt{e^2x^2-2aex+a^2}}{|ex-a|}=\frac{e|ex-a|}{|ex-a|}=e$$

$x^2+y^2=a^2$ айлана (52) эллипсдан $b\to a$ даги лимитга ўтиш билан ҳосил қилинади. Шу билан бирга

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\to 0$$

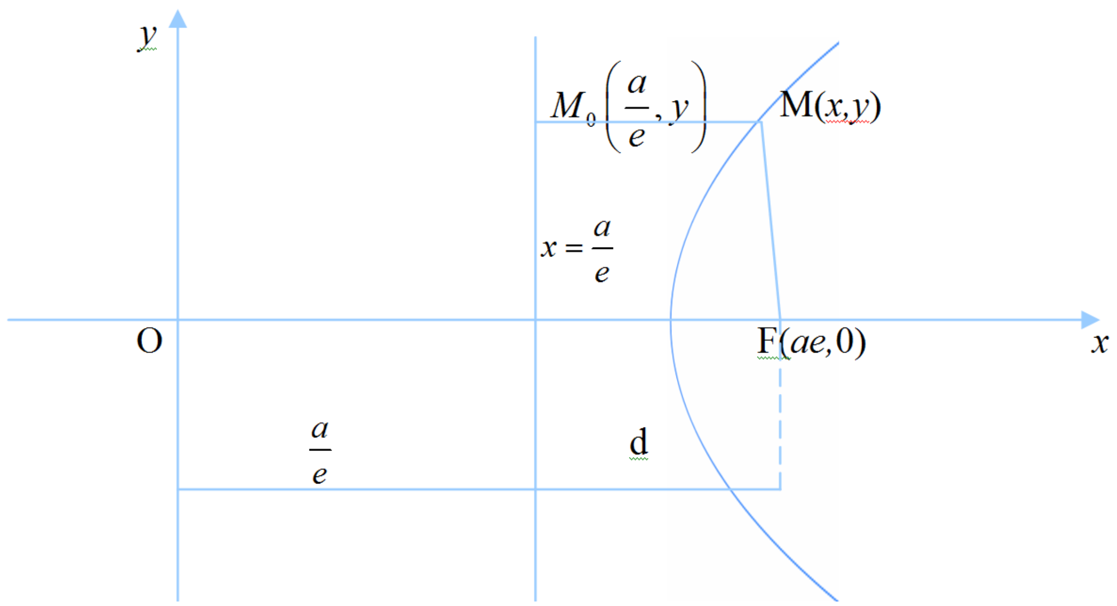
фокус айлана марказига ўтади, директрисса эса чексизликга кетади.

III. $\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}=e>1$

F нуқта ва *l* тўғри чизиқ орасидаги масофани d орқали белгилаймиз. $F\notin l$ бўлганидан

$$d=\rho(F,l)>0 \quad e>1\Rightarrow 1>\frac{1}{e} \quad \text{ва} \quad e>1\Rightarrow e>\frac{1}{e}\Rightarrow e-\frac{1}{e}>0$$

$\frac{d}{e-\frac{1}{e}}>0$ бўлганидан $a=\frac{d}{e-\frac{1}{e}}$ орфали белгилаймиз. Демак шундай $a>0$ сони мавжудки, бунда $d=ae-\frac{a}{e}$. Олдинги ҳол каби шундай тўғри бурчакли координаталар системасини киритамизки бунда F офкус (*ae*,*0*) координаталарга эга *l* директрисса $x-\frac{a}{e}=0$ тенглама билан берилади (41-расм)



41-расм

Унда (47) тенглама

$$\frac{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x-\frac{a}{e}\right)^2+(y-y)^2}}=e \qquad \text{ёки} \qquad \frac{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a}{e}\right|}=e \qquad (*)$$

кўринишда қайта ёзилади. Бу тенгликни умумий махражга келтириб ҳамда иккала томонини квадратга кўтариб эквивалент тенгламани ҳосил қиламихз

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\left|x-\frac{a}{e}\right|$$

$$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

$$(x-ae)^2+y^2=(ex-a)^2$$

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2aex+a^2$$

ўхшаш ҳадларини ихчамлаб қуйидагига эга бўламиз

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=a^2\left(1-e^2\right) \tag{51}$$

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=a^2\left(1-e^2\right)\Leftrightarrow\left(e^2-1\right)x^2-y^2=\left(e^2-1\right)a^2 \tag{**}$$

Аммо энди $e>1\Rightarrow e^2>1\Rightarrow e^2-1>0$ ва $a>0$ бўлганидан $b^2=\left(e^2-1\right)a^2$ деб фараз қилиб бу ерда $b>0$ ҳамда (51) тенгликнинг иккала томонини ўнг томонига бўлиб гиперболанинг каноник тенгламасини ҳосил қиламиз

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{54}$$

Демак нуқталарнинг геометрик ўрни (54) гипербола бўлади бу ерда

$$a=\frac{de}{e^2-1} \qquad b=a\sqrt{e^2-1}$$

Чунки

$$d=ae-\frac{a}{e}\Leftrightarrow de=ae^2-a\Leftrightarrow a\left(e^2-1\right)=de\Leftrightarrow a=\frac{de}{e^2-1}$$

F(ae,0) нуқта гиперболанинг фокуси деб $x=\dfrac{a}{e}$ тўғри чизиқ эса унинг директриссаси деб, e сони эксцентриситети деб аталади. $M_0M\perp l$, $M_0\in l$ бўлсин. Унда

$$\rho(M,F)=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}$$

бу ерда $M_0\left(\dfrac{a}{e},y\right)$ координаталарга эгадир

$$\rho(M,l)=\sqrt{\left(x-\frac{a}{e}\right)^2+(y-y)^2}=\left|x-\frac{a}{e}\right|$$

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}=\frac{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a}{e}\right|}=\frac{\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}}{\left|\frac{ex-a}{e}\right|}$$

Агар гипербола (54) каноник тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда

$$b^2=a^2\left(e^2-1\right)=a^2e^2-a^2$$

$$a^2e^2=a^2+b^2$$

$$e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2} \qquad e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Деб фараз қилиб, бунда бу гипербола (47) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни бўлишини исбот қиламиз, бу ерда F(ae,0) нуқта координатлаарга эга, l – тшғри чизиқ $x=\frac{a}{e}$ тенглама билан тавсифланади.

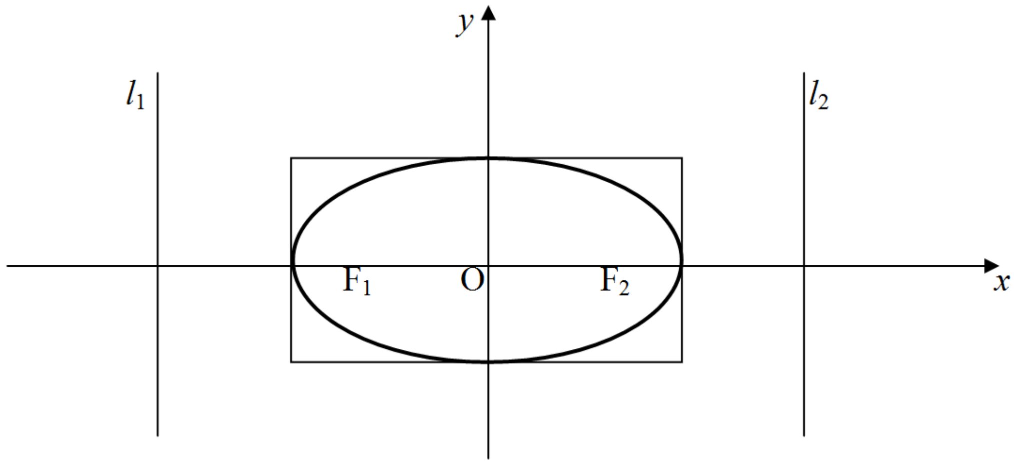
$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}=\frac{\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}}{\left|\frac{ex-a}{e}\right|}=\frac{\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2aex+a^2+b^2-b^2}}{\frac{|ex-a|}{e}}=$$

$$=\frac{\sqrt{e^2x^2-2aex+a^2}}{\frac{|ex-a|}{e}}=\frac{\sqrt{(ex-a)^2}}{\frac{|ex-a|}{e}}=\frac{e|ex-a|}{|ex-a|}=e$$

Энди эллипснинг (52) каноник тенгламасига қайтайлик, эллипсга (x,y) нуқта билан бирга (x,-y) нуқта ҳам ва (-x,y) нуқта ҳам тегишли бўлганидан у координата ўқларига нисбатан симметрик фигура бўлади. F нуқтани ва l тўғри чизиқни Oy ўқига нисбатан акслантириб $F'(-ae,0)$ нуқта ва $l'\left(x=-\frac{a}{e}\right)$ тўғри чизиқни ҳосил қиламиз, у лар ҳам шунингдек эллипснинг фокуси ва директриссаси бўлади, яъни нуқта ва тўғри чизиқ ҳосил қилиндики уларга нисбатан эллипс (47) директориал хоссага эгадир. Шундай қилиб (52) эллипснинг (a>b) F_1 чап ва F_2 ўнг иккита фокуси бор. Улар эллипснинг фокал ўқи деб аталувчи Ox ўқида жойлашгандир. Эллипснинг эксцентриситети $e<1$ бўлганидан унинг l_1 чап ва l_2 ўнг директриссалари координаталар бошидан унинг фокал ўқида жойлашган эллипснинг (-a,0) ва (a,0) учларига қараганда узоқроқда жойлашгандир. Шунинг учун ичида эллипс ётган

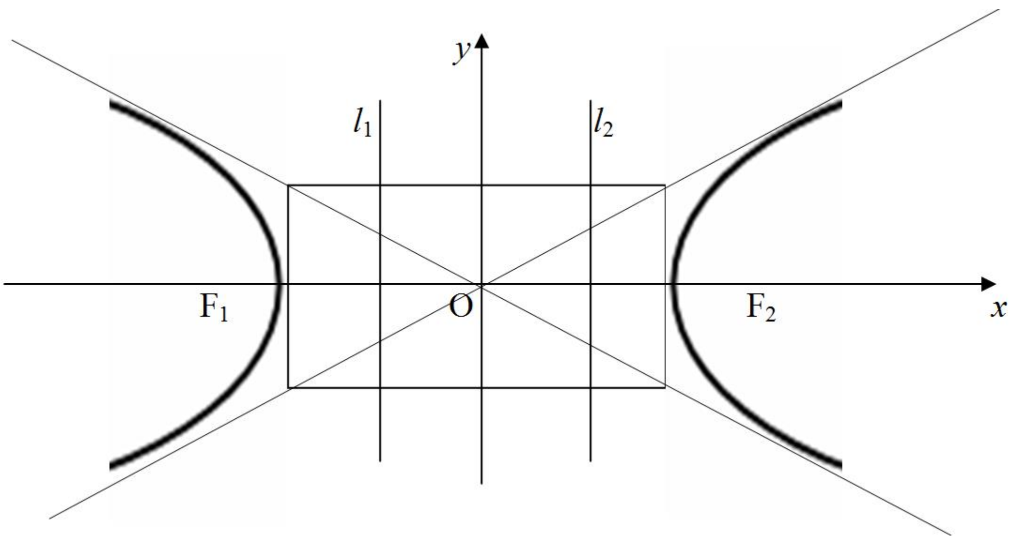
$$-a \le x \le a \qquad -b \le y \le b \tag{56}$$

асосий тўғри тўртбурчак ташқарисида директриссалар ётади.



42-расм

(54) гиперола ҳам шунингдек каноник координаталар системасига нисбатан симметрикдир. Шундай қилиб (54) гиперболанинг ҳам иккита) F_1 чап ва F_2 ўнг фокуслари ва иккита директриссалари бор



43-расм

Гипербола учун эксцентриситет $e > 1$ бўлгнидан унинг l_1 чап ва l_2 ўнг директриссалари координаталар бошидан a дан кичик масофада узоқлашган ва улар асосий (56) тўғри тўртбурчакни кесади ва марказ ҳамда гиперболанинг мос (-a,0) ва (a,0) учлари орасидан ўтади (43-расм).

36§. ЭЛЛИПС ВА ГИПЕРБОЛАНИНГ ФОКАЛ ХОССАЛАРИ.

36.1-теорема. (52) эллипс текисликнинг шундай М нуқталар геометрик ўрники улар учун

$$\rho(M,F_1)+\rho(M,F_2)=2a \tag{57}$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда F_1 ва F_2 нуқталар (-ae,0) ва (ae,0) координаталарга эга, бунда $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$ ва мос равишда $b=a\sqrt{1-e^2}$.

Исбот. (51) тенгламадан топамиз

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=\left(1-e^2\right)a^2 \tag{51}$$

$$y^2=a^2\left(1-e^2\right)-\left(1-e^2\right)x^2$$

$$y^2=\left(1-e^2\right)\left(a^2-x^2\right)$$

Шунинг учун эллипснинг ихтиёрий M(x,y) нуқтаси учун

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{52}$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{a^2-x^2}{a^2}\geq 0\Rightarrow a^2-x^2\geq 0\Rightarrow a^2\geq x^2\Rightarrow|a|\geq|x|\Rightarrow|x|\leq a$$

$a\geq|x|$ бўлганидан

$$\rho(M,F_1)=\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2aex+a^2e^2+\left(1-e^2\right)\left(a^2-x^2\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2+2aex+a^2e^2+a^2-a^2e^2-x^2+e^2x^2}=\sqrt{a^2+2aex+e^2x^2}=\sqrt{(a+ex)^2}=a+ex$$

эга бўламиз. Чунки 0<e<1

$$|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a\Leftrightarrow -ea\leq ex\leq ea$$

$$a>0\Leftrightarrow -a<0$$

$$e<1 \text{ ва } -a<0$$

$$-ae>-a$$

$$-a<-ae \text{ ва } -ae\leq ex\Rightarrow -a<ex\Rightarrow a+ex>0$$

Шундай қилиб

$$\rho\left(M,F_1\right)=a+ex$$

Худди шундай топамиз

$$\rho\left(M,F_2\right)=\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+\left(1-e^2\right)\left(a^2-x^2\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+a^2-a^2e^2-x^2+e^2x^2}=\sqrt{a^2-2aex+e^2x^2}=\sqrt{\left(a-ex\right)^2}=a-ex$$

Чунки

$$a\ge|x|\Leftrightarrow|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a\Leftrightarrow -ea\le ex\le ea$$

$$\left.\begin{array}{c}0<e<1\\ a>0\end{array}\right\}\Rightarrow ea<a$$

$$ea<a \quad \text{ва} \quad ex\le ea$$

эканлигидан

$$ex<a\Rightarrow a-ex>0$$

Шундай қилиб

$$\rho\left(M,F_2\right)=a+ex$$

$$\rho\left(M,F_1\right)+\rho\left(M,F_2\right)=a+ex+a-ex=2a \qquad (57)$$

Демак, эллипснинг ҳар қандай нуқтаси (57) тенгламани қаноатлантиради. Аксинча агар M(x,y) нуқта (57) тенгламани қаноатлантирса

$$\sqrt{\left(x+ae\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}=2a$$

у ҳолда битта қўшилувчини тенгламанинг иккинчи томонига ўтказиб ҳамда квадратга кўтариб топамиз

$$\sqrt{\left(x+ae\right)^2+y^2}=2a-\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}$$

$$\left(x+ae\right)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}+\left(x-ae\right)^2+y^2$$

ёки аён алмаштиришлардан сўнг

$$x^2+2aex+a^2e^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}+x^2-2aex+a^2e^2+y^2$$

$$4a\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}=-4aex+4a^2$$

$$\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}=a-ex$$

$$\left(x-ae\right)^2+y^2=x^2-2aex+e^2x^2$$

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=x^2-2aex+e^2x^2$$

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=a^2\left(1-e^2\right) \tag{51}$$

Шундай қилиб (57) тенгламани қаноатлантирувчи ихтиёрий M(x,y) нуқта (51) тенгламани ҳам қаноатлантиради. 0<e<1 бўлганидан (51) тенгламадан (52) эллипс тенгламаси ҳосил қилинади. Теорема исботланди.

36.2-теорема. (54) гипербола текисликнинг шундай M нуқталар геометрик ўрники улар учун

$$\left|\rho\left(M,F_1\right)-\rho\left(M,F_2\right)\right|=2a$$

тенглик ўринли.

Бу ерда F_1 ва F_2 нуқталар мос равишда (-ae,0) ва (ae,0) координаталарга эга, бунда $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$ ва $b=a\sqrt{e^2-1}$.

Исбот. (**) тенгламадан топамиз

$$\left(e^2-1\right)x^2-y^2=\left(e^2-1\right)a^2$$

$$y^2=\left(e^2-1\right)\left(x^2-a^2\right)$$

Шунинг учун гиперболанинг ихтиёрий M(x,y) нуқтаси учун

$$\rho\left(M,F_1\right)=\sqrt{\left(x+ae\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2aex+a^2e^2+\left(e^2-1\right)\left(x^2-a^2\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2+2aex+a^2e^2+e^2x^2-x^2-a^2e^2+a^2}=\sqrt{a^2+2aex+e^2x^2}=\sqrt{\left(a+ex\right)^2}=\left|a+ex\right|$$

$$\rho\left(M,F_2\right)=\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+\left(e^2-1\right)\left(x^2-a^2\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+e^2x^2-x^2-a^2e^2+a^2}=\sqrt{a^2-2aex+e^2x^2}=\sqrt{\left(a-ex\right)^2}=\left|a-ex\right|$$

Аммо энди эллипсдан фарқли $a\le|x|$. Чунки

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{y^2}{b^2}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x^2-a^2}{a^2}\ge 0\Rightarrow x^2-a^2\ge 0\Rightarrow x^2\ge a^2\Rightarrow|x|\ge a$$

$$a\le|x|\Leftrightarrow a\le x \text{ ёки } x\le -a$$

$$\rho\left(M,F_1\right)=\begin{cases}-a-ex & \text{агар } x\le -a\\ a+ex & \text{агар } x\ge a\end{cases}$$

$$\rho(M,F_2)=\begin{cases} a-ex & \text{агар } x\le -a \\ -a+ex & \text{агар } x\ge a \end{cases}$$

Ҳақиқатан ҳам 1<*e*, *a*>0

$$1<e\Rightarrow \frac{1}{e}<1\Rightarrow -\frac{a}{e}>-a$$

$$x\le -a \ \text{ ва } -a<-\frac{a}{e}\Rightarrow x<-\frac{a}{e}\Rightarrow ex<-a\Rightarrow ex+a<0$$

Демак, $x\le -a$ да

$$\rho(M,F_1)=|a+ex|=-a-ex$$

Энди $x\ge a$ бўлсин *a*>0 бўлганидан *x*>0. Унда *ex*>0 аммо –*a*>0. Демак *ex*>-*a* яъни *a*+*ex*>0 бу ҳолда $\rho(M,F_1)=|a+ex|=a+ex$.

Агар $x\le -a$ бўлса *a*>0 бўлганидан –*a*<0. Демак *x*<0 бўлади. Аммо *a*>0 ҳамда *e*>1 бўлганидан $\frac{a}{e}>x$ яъни *a*>*ex*, *a*-*ex*>0. Демак $x\le -a$ бўлганда $\rho(M,F_2)=|a-ex|=a-ex$.

Энди $x\ge a$ бўлсин $e>1\Rightarrow 1>\frac{1}{e}\Rightarrow a<\frac{a}{e}\Rightarrow x\ge a$ ва $a>\frac{a}{e}$ дан $x>\frac{a}{e}\Rightarrow ex>a\Rightarrow ex-a>0\Rightarrow a-ex<0$ $\quad \rho(M,F_2)=|a-ex|=-a+ex$

Шунинг учун

$$\rho(M,F_1)=\begin{cases} -a-ex & \text{агар } x\le -a \\ a+ex & \text{агар } x\ge a \end{cases}$$

$$\rho(M,F_2)=\begin{cases} a-ex & \text{агар } x\le -a \\ -a+ex & \text{агар } x\ge a \end{cases}$$

бу ердан

$$|\rho(M,F_1)-\rho(M,F_2)|=2a \tag{58}$$

тенглик ҳам келиб чиқади. Аксинча агар М(*x*,*y*) нуқта (58) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда

$$\left|\sqrt{(x+ae)^2+y^2}-\sqrt{(x-ae)^2+y^2}\right|=2a$$

Бўлиб у (51) тенгламани ҳам қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам

$$\sqrt{(x+ae)^2+y^2}-\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}\pm 2a$$

$$(x+ae)^2+y^2=(x-ae)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-ae)^2+y^2}+4a^2$$

$$x^2+2aex+a^2e^2+y^2=x^2-2aex+a^2e^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-ae)^2+y^2}+4a^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=4a^2-4aex$$

$$\pm\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=a-ex$$

$$(x-ae)^2+y^2=x^2-2aex+e^2x^2$$

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=x^2-2aex+e^2x^2$$

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=a^2\left(1-e^2\right) \qquad (51)$$

Аммо $e>1$ бўлганидан (51) тенглама (54) гиперболанинг каноник тенгламасига тенг кучлидир (эквивалентдир) теорема исботланди.

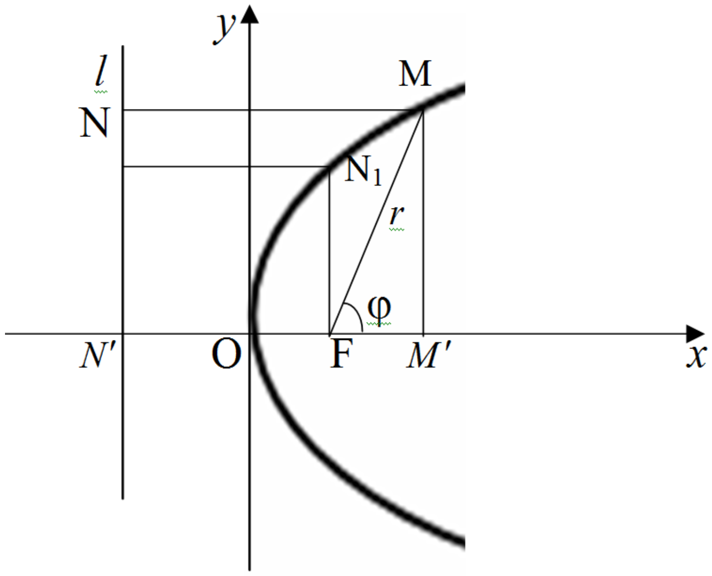
37§. ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР.

Парабола. Тўғри бурчакли координаталар системаси *Oxy* да

$$y^2=2px \qquad (49)$$

каноник тенгламаси билан берилган параболанинг фокусига қутб координаталар системасининг қутбини қўямиз, қутб ўқини эса *Ox* ўқининг мусбат йўналиши томон йўналтирамиз (44-расм). Бу координаталар системасида

$$r=FM=MN=N'O+FM'=p+r\cos\varphi$$



44-расм

Демак, танланган қутб координаталар системасида

$$r=\frac{p}{1-\cos\varphi} \tag{59}$$

тенглама билан тавсифланади. Ҳақиқатан ҳам

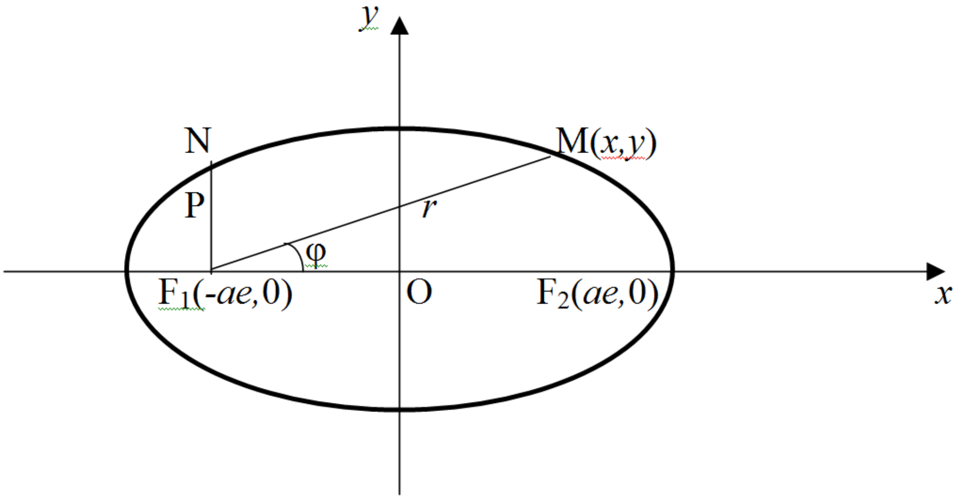
$$p=r-r\cos\varphi$$

$$p=r(1-\cos\varphi)\Rightarrow r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$$

Эллипс. Тўғри бурчакли координаталар системаси *Oxy* да

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{52}$$

Каноник тенгламаси билан берилган эллипснинг чап фокусига қутб координаталар системасининг қутбини қўямиз, қутб ўқини эса *Ox* ўқининг мусбат йўналиши томон йўналтирамиз (45-расм)



45-расм

$x+ea=r\cos\varphi$ ёки $x=r\cos\varphi-ea$. Аммо 36.1-теоремани исботлашда $r=a+ex$ бўлиши кўрсатилган эди $r=\rho(M,F_1)=a+ex$ эди. Шунинг учун

$$r=a+e(r\cos\varphi-ea)=a+er\cos\varphi-e^2a=(1-e^2)a+er\cos\varphi$$

бу ерда

$$r-er\cos\varphi=a(1-e^2)$$

$$r(1-e\cos\varphi)=a(1-e^2)$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\varphi} \qquad (60)$$

Гипербола. Тўғри бурчакли координаталар системаси Oxy да

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (54)$$

тенглама билан берилган гиперболанинг фокуслари қутб координаталар системасининг қутбини қўямиз, қутб ўқини эса Ox ўқининг мусбат йўналиши томонига йўналтирамиз (46-расм).

Бу координаталар системасида $x-ea=r\cos\varphi$ ёки $x=r\cos\varphi+ea$. Аммо 36.2-теоремани исботлашда гипербола ўнг шохи нуқталари учун $r=-a+ex$ бўлиши кўрсатилган эди. Агар $x\geq a$ бўлса $r=\rho(M,F_2)=-a+ex$ эди. Шунинг учун

$$r=-a+ex=-a+e(r\cos\varphi+ea)=-a+er\cos\varphi+e^2a=a(e^2-1)+er\cos\varphi$$

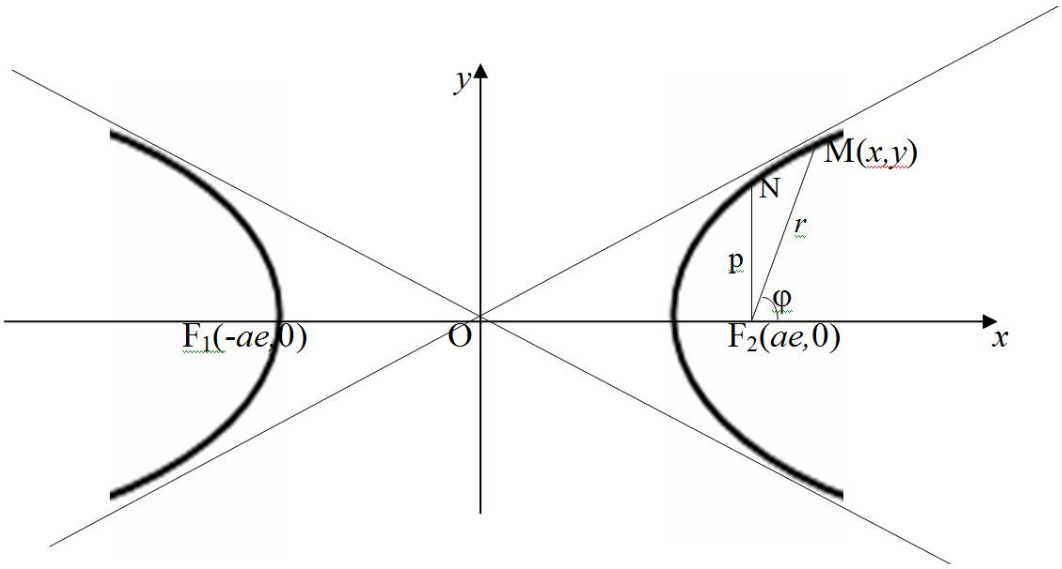
бу ердан ушбуни ҳосил қиламиз. Гиперболанинг ўнг шохи

$$r-er\cos\varphi=a(e^2-1)$$

$$r\left(1-e\cos\varphi\right)=a\left(e^{2}-1\right)$$

$$r=\frac{a\left(e^{2}-1\right)}{1-e\cos\varphi} \qquad (61)$$

тенглама билан твсифланади.



46-расм

Фокал параметри. Г – эллипс, гипербола ёки парабола бўлсин. Каноник координаталар системасида бу иккинчи тартибли чизиқларнинг фокуслари мос эгри чизиқларнинг фокал ўқлари деб аталувчи *Ox* ўқида ётади.

Г эгри чизиқнинг бирорта F фокуси орқали унинг фокал ўқига перпендикуляр қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ Г эгри чизиқни иккита N ва N' нуқталарда кесади. Шундай ҳосил қилинган NN' ватар узунлигини 2p орқали белгилаймиз. Бу ватар узунлигининг ярмини Г эгри чизиқнинг фокал параметри деб аталади. Парабола учун фокал параметр унинг параметри билан устма-уст тушади. Ҳақиқатан ҳам параболанинг директриссасини *l* орқали белгилаб топамиз (44-расмга қаранг). Параболанинг директориал хоссасига мувофиқ

$$\rho\left(F,l\right)=\rho\left(N_{1},l\right)=\rho\left(N_{1},\mathrm{F}\right)$$

Энди эллипс ва гиперболанинг фокал параметрини топамиз. У N нуқтанинг *y* ординатасига тенг (45 ва 46 расмларга қаранг). (51) тенгламадан топамиз, бу тенглама эллипс учун ҳам, гипербола учун ҳам ўринли бўлиб

$$y^2 = a^2\left(1-e^2\right)-\left(1-e^2\right)x^2$$

$$y^2 = \left(1-e^2\right)\left(a^2 - x^2\right)$$

ҳосил қиламиз. Бу ердан $x = \pm ea$ да

$$p^2 = \left(1-e^2\right)\left(a^2 - e^2a^2\right)$$

$$p^2 = \left(1-e^2\right)a^2$$

$$p = \sqrt{\left(1-e^2\right)a^2}$$

$$p = \left|1-e^2\right|a \tag{62}$$

Ҳосил қиламиз. Эллипс учун $b = a\sqrt{1-e^2}$, гипербола учун $b = a\sqrt{e^2-1}$ бўлганидан иккаласи учун ҳам $b = a\sqrt{\left|1-e^2\right|}$ бўлишини эътиборга олиб топамиз

$$b^2 = a^2\left|1-e^2\right|$$

$$\left|1-e^2\right| = \frac{b^2}{a^2}$$

$$p = \frac{b^2}{a^2}a = \frac{b^2}{a}$$

яъни

$$p = \frac{b^2}{a} \tag{63}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (62) тенглик (60) ва (61) тенгламаларни ягона усулда

$$(61) \quad r = \frac{a\left(e^2-1\right)}{1-e\cos\varphi} = \frac{a\cdot\frac{b^2}{a^2}}{1-e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\varphi} = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$$

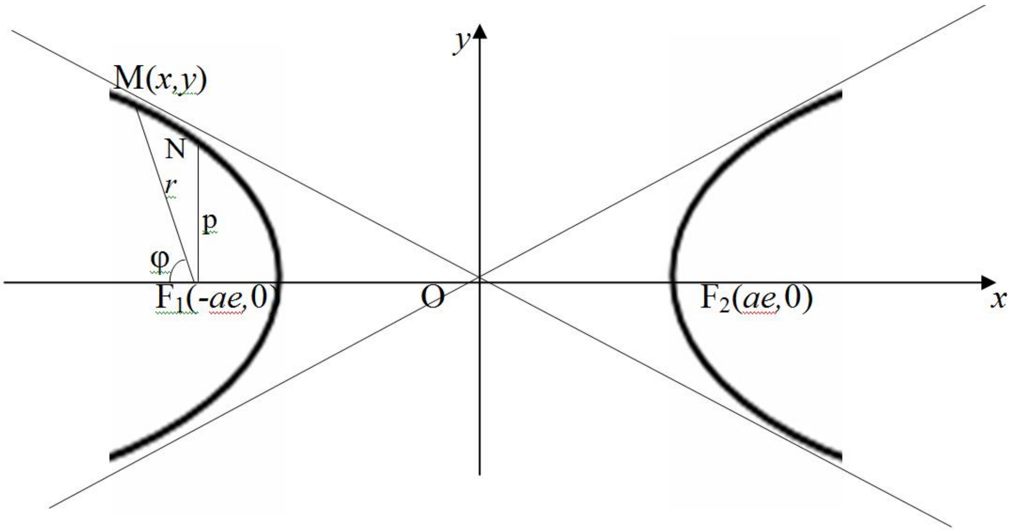
$$(60) \quad r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1-e\cos\varphi} = \frac{a\cdot\frac{b^2}{a^2}}{1-e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\varphi} = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$$

$$r = \frac{p}{1-e\cos\varphi} \tag{64}$$

кўринишда қайта ёзишга имкон беради.

Парабола учун e=1 бўлганидан (64) тенглама параболанинг (59) тенгламаси билан устма-уст тушади. Шундай қилиб иккинчи тартибли чизиқ – парабола, эллипс, гипербола (унинг ўнг шохи) қутб координаталар системасида биргина (64) тенглама билан тавсифланади. Гиперболанинг чап фокусига қутбни қўйиб қутб ўқини *ox* ўқининг манфий томонига йўналтирсак гиперболанинг чап шохи ҳам шунингдек (64) тенглама билан тавсифланади.

$$\rho(M, F_1) = \begin{cases} -a - ex & \text{агар } x \le -a \\ a + ex & \text{агар } x \ge a \end{cases}$$



x=-ae-$r$cosφ

-x=+ae+$r$cosφ

-x-ae=$r$cosφ

Аммо 36.2-теоремани исботлашда гиперболанинг чап шохи нуқталари учун r=-a-ex бўлиши кўрсатилган эди. Шунинг учун

$$r = -a + e(ae + r\cos\varphi) = -a + ae^2 + re\cos\varphi = \left(e^2 - 1\right)a + re\cos\varphi$$

$$r = \left(e^2 - 1\right)a + re\cos\varphi$$

$$r - re\cos\varphi = a\left(e^2 - 1\right)$$

$$r = \frac{a\left(e^2 - 1\right)}{1 - e\cos\varphi} \qquad (61)$$

Формулани ҳосил қиламиз. Демак гиперболанинг чап шохи ҳам шунингдек (61) формула билан тавсифланади. Гипербола чап фокуси F_1 орқали фокал бўйича перпендикуляр қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ гиперболанинг чап шохини N ва N' нуқталарда кесиб ўтади. NN' ватар узунлигини 2p орқали белгилаймиз. Унда бу ватар узунлигининг ярми p гиперболанинг фокал параметри бўлади. У N нуқтанинг y ординатасига тенг, гипербола учун ҳам ўринли бўлган (51) формуладан

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=a^2\left(1-e^2\right)$$

$$y^2=a^2\left(1-e^2\right)-\left(1-e^2\right)x^2$$

$$y^2=\left(1-e^2\right)\left(a^2-x^2\right)$$

эга бўламиз. Бу ердан $x=-ea$ да

$$p^2=\left(1-e^2\right)\left(a^2-e^2a^2\right)$$

$$p^2=\left(1-e^2\right)a^2$$

$$p=\sqrt{\left(1-e^2\right)a^2}$$

$$p=\left|1-e^2\right|a$$

ҳосил қиламиз. Гипербола учун $b=a\sqrt{e^2-1}$ бўлишини эътиборга олиб топамиз

$$p=\left(e^2-1\right)a=\frac{b^2}{a^2}\cdot a=\frac{b^2}{a} \tag{63}$$

$p=a\left(e^2-1\right)$ бўлганидан (61) формулани

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi} \tag{64}$$

формулани ҳосил қиламиз.

38§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН КЕСИШИШИ.

Бирорта аффин координаталар системаси Oxy да

$$F\left(x,y\right)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

Умумий тенгламаси билан берилган Г иккинчи тартибли чизиқ ва

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\alpha t\\ y&=y_0+\beta t\end{aligned}\right\}$$

параметрик тенгламаси билан берилган l тўғри чизиқни қараймиз. l тўғри чизиқ билан Г эгри чизифнинг кесишиш нуқталарини топайлик. Бунинг учун l тўғри чизиқ нуқталарининг координаталарини Г чизиқ тенгламасига қўйиш керак. Буни қилиб иккинчи даражадан юқори бўлмаган t параметрга нисбатан тенглама

$$F_2t^2+2F_1t+F_0=0 \tag{65}$$

ҳосил қиламиз, бу ерда

$$F_2=F_2(\alpha,\beta)=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2$$

$$F_1=F_1(\alpha,\beta,x_0,y_0)=a_{11}\alpha x_0+a_{12}(\alpha y_0+\beta x_0)+a_{22}\beta y_0+a_{13}\alpha+a_{23}\beta$$

$$F_0=F_0(x_0,y_0)=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}$$

Ҳақиқатан ҳам

$$F=F(x_0+\alpha\,\mathrm{t},y_0+\beta t)=a_{11}(x_0+\alpha t)^2+2a_{12}(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t)+a_{22}(y_0+\beta t)^2+$$
$$+2a_{13}(x_0+\alpha t)+2a_{23}(y_0+\beta t)+a_{33}=0$$

$$a_{11}x_0^2+2a_{11}\alpha x_0t+a_{11}\alpha^2t^2+2a_{12}x_0y_0+2a_{12}\alpha ty_0+2a_{12}x_0\beta t+2a_{12}\alpha\beta t^2+$$
$$+a_{22}y_0^2+2a_{22}y_0\beta t+a_{22}\beta^2t^2+2a_{13}x_0+2a_{13}\alpha t+2a_{23}y_0+2a_{23}\beta t+a_{33}=0$$

$$(a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2)t^2+2\left(a_{11}\alpha x_0+a_{12}(\alpha y_0+\beta x_0)+a_{22}\beta y_0+a_{13}\alpha+a_{23}\beta\right)t+$$
$$+a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}=0$$

Агар

$$a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0 \tag{66}$$

Шарт бажарилса, у ҳолда *l* тўғри чизиқнинг $\vec{a}=(\alpha,\beta)$ йўналтирувчи вектори Г чизиқга нисбатан асимптотик йўналишга эга деб атаймиз. Бунда Г чизиқ тенгламаси берилган аффин координаталар системасига бу таърифнинг боғлиқ эмслигини файд қиламз. Ҳақиқатан ҳам

$$(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=(\alpha a_{11}+\beta a_{12},\alpha a_{12}+\beta a_{22})\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=$$
$$=\alpha^2a_{11}+\alpha\beta a_{12}+\alpha\beta a_{12}+\beta^2a_{22}=\alpha^2a_{11}+2\alpha\beta a_{12}+\beta^2a_{22}=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2$$

бўлганидан

$$F_2(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)U\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Бу ерда $U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ - *Oxy* координаталар системасида F(*x*,*y*) кўпҳад билан тисвирланган *f* квадрат функциянинг квадрат қисмининииг матрицаси. Энди $O'x'y'$ - бошқа аффин координаталар системаси бўлсин;

$$\left(C,a\right)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & a_1 \\ c_{12} & c_{22} & a_2 \end{pmatrix}$$

Oxy системадан $O'x'y'$ системага ўтиш координаталар системасида $\vec{a}$ вектор координаталари

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11}x'+c_{12}y' \\ c_{12}x'+c_{22}y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11}x'+c_{12}y'+a_1 \\ c_{12}x'+c_{22}y'+a_2 \end{pmatrix}$$

$$x=c_{11}x'+c_{12}y'+a_1$$
$$y=c_{21}x'+c_{22}y'+a_2$$

$\varphi\left(x',y'\right)$ - $O'x'y'$ координаталар системасида *f* квадрат функцияни тасвирловчи кўпҳад бўлсин. Унда

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

$$\left(\alpha,\beta\right)=\left(\alpha',\beta'\right)C*$$

ва 28§ га мувофиқ

$$U'=C*UC$$

бу ерда U' - $O'x'y'$ координаталар системасида *f* квадрат функция квадрат қисмининг матрицаси. Шунинг учун

$$\varphi_2\left(\alpha',\beta'\right)=\left(\alpha',\beta'\right)U'\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}=\left(\alpha',\beta'\right)C*UC\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}=\left(\alpha,\beta\right)U\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=F_2\left(\alpha,\beta\right)$$

l тўғри чизиқ билан Г чизиқ кесишиш нуқталарининг t параметри учун (65) тенгламани текширишдан қуйидаги келиб чиқади.

38.1-теорема. Агар *l* тўғри чизиқ билан Г иккинчи тартибли чизиқга нисбатан асимптотик бўлмаган (ноасимптотик) йўналишга эга бўлса, у ҳолда *l* тўғри чизиқ билан Г чизиқни иккита ҳқиқий нуқталарда (ҳар хил ёки устма-уст тушувчи) ёки иккита мавҳум нуқталарда кесади.

Агарда l тўғри чизиқ билан Г иккинчи тартибли чизиқга нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлса, у ҳолда у ёки бу тунлай Г чизиқда ётади, ёки у биттадан кўп эмас бўлган умумий нуқталарга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам (65) тенглама иккита илдизга эга

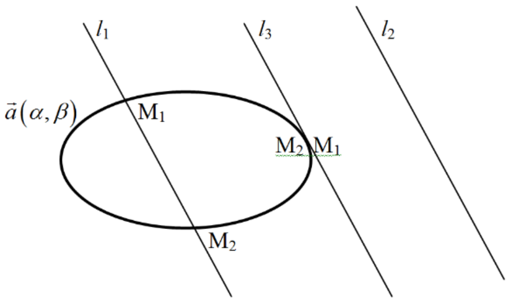
$$t_1 = \frac{-F_1 + \sqrt{\delta_1}}{F_2} \quad , \quad t_2 = \frac{-F_1 - \sqrt{\delta_1}}{F_2}$$

бу ерда $\delta_1 = F_1^2 - F_2 F_1$

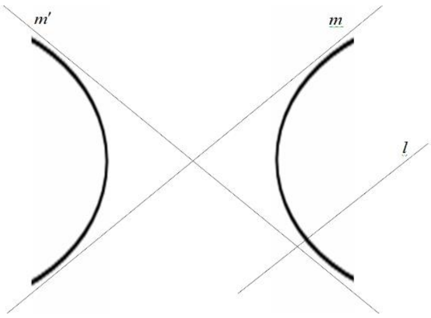
$$F_2 t^2 + 2F_1 t + F_0 = 0 \qquad (65)$$

тенгламанинг дискриминанти.

Агар $\delta_1 > 0$ бўлса l_1 тўғри чизиқ Г чизиқни M_1 ва M_2 ҳақиқий ҳар хил нуқталарда, агар $\delta_1 < 0$ бўлса комплекс қўшма нуқталарда агарда $\delta_1 = 0$ бўлса устма-уст тушувчи нуқталарда кесади.

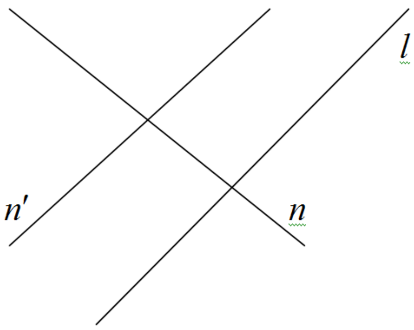


1-расм

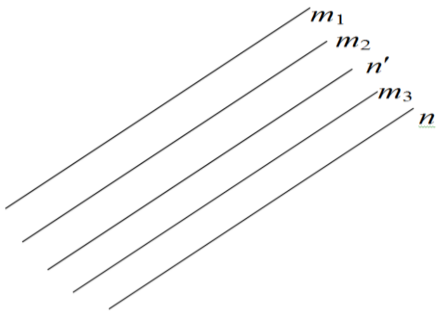


2-расм

Расмда l_1 тўғри чизиқ $\delta_1 > 0$ ҳолга, l_2 тўғри чизиқ $\delta_1 < 0$ ҳолга, l_3 тўғри чизиқ $\delta_1 = 0$ ҳолга тўғри келади.



3-расм



4-расм

2) $F_2=0$ бўлса (65) тенглама

$$2F_1t+F_0=0$$

кўринишни олади. Агар $F_1\neq 0$ бўлса, у ҳолда l_2 тўғри чизиқ Г чизиқни битта нуқтада кесади (2 ёки 3 расмлардаги l_2 тўғри чизиқ). Агар $F_1=0$ $F_0\neq 0$ бўлса, у ҳолда l тўғри чизиқ Г чизиқ билан битта ҳам умумий ҳақиқий ҳам мавҳум ҳам нуқталарга эга эмас (2-расмдаги m ва m' тўғри чизиқлар ёки 4-расмдаги m_1, m_2, m_3,… тўғри чизиқлар). Агар ниҳоят $F_1=F_0=0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий t сон (65) тенгламанинг ечими бўлади.

38.2 комплекс текислик ҳақида эслатма.

Бу параграфда ҳам тўртинчи бобнинг ҳамма жойидаги каби ясси тўпламларни қараймиз. Мавҳум нуқталар, мавҳум тўғри чизиқлар, мавҳум эллипс деганда комплекс текисликнинг қисм тўплами каби тушиниб 38.1 ва 33.1 теоремаларда улар ҳақида гапирилган эди. Арифметик икки ўлчовли комплекс фазо C^2 ни, бу ерда C – комплекс сонлар майдони комплекс текислик деб аталади. Шундай қилиб комплекс сонларнинг тартибланган жуфтлиги (z_1,z_2) комплекс текислик нуқтаси бўлади. Одатдаги π текисликда аффин координаталар системаси Oxy танлаб $M\in\pi$ нуқталарни уларнинг координаталар жуфтлиги (x,y) билан айнан бир нарса деб ҳақиқий текисликни C^2 комплекс текисликнинг қисм тўплами R^2 каби қаралиши мумкин. Комплекс текисликнинг (z_1,z_2) нуқтасини ҳақиқий нуқта дейилади, агарда унинг иккала z_1 ва z_2 координатаси ҳам ҳақиқий сон бўлса, акс ҳолда (z_1,z_2) нуқта мавҳум нуқта дейилади. Ҳақиқий хол сингари комплекс текисликдаги тўғри чизиқ биринчи тартибли чизиқ каби яъни

$$Ax+By+C=0$$

Биринчи даражали тенглама ечимлари тўплами каби аниқланиши мумкин l тўғри чизиқни берувчи барча пропорционал

$$k\left(Ax+By+C\right)=0$$

тенгламалар орасида *kA, kB, kC* ҳақиқий коэфициентли тенглама бор бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ ҳақиқий тўғри чизиқ деб аталади.

Масалан

$$ix + iy = 0$$

тўғри чизиқ ҳақиқий тўғри чизиқ бўлади, чунки у ушбу тенглама билан берилиши мумкин

$$(-i)ix + (-i)iy = 0 \text{ ёки } x + y = 0$$

$F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган алгебраик чизиқ учун шундай $\lambda \neq 0$ комплекс сон топилсаки $\lambda F(x, y)$ кўпҳаднинг барча коэффициентлари ҳақиқий бўлса, у ҳолда чизиқни ҳақиқий чизиқ деб аталади. Ҳақиқий чизиқ бирорта ҳам ҳақиқий нуқтани ўз ичига олмаслиги мумкин. Мисол сифатида мавҳум эллипсни олиш мумкин

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

Ҳақиқий чизиқ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

ягона ҳақиқий нуқта (0,0) эга. Бу чизиқ

$$\frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0$$

мавҳум тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади ва кесишувчи мавҳум тўғри чизиқлар жуфтлиги деб аталади.

38.3-жумла $l: Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ Г: F(*x*,*y*)=0 иккинчи тартибли чизиқда ётади $(l \subset \Gamma)$ шу ҳолда ва фақат шу ҳолда қачонки F(*x*,*y*) кўпҳад $Ax + By + C = 0$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинса.

Етарлилиги. F(*x*,*y*) кўпҳад $Ax + By + C = 0$ кўпҳадга бўлинсин, яъни Q(*x*,*y*) кўпҳад мавжудки бунда

$$F(x, y) = (Ax + By + C)Q(x, y)$$

тенглик ўринли, $\forall (x_0, y_0) \in l$ нуқта учун

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

бўлади. Унда

$$F(x,y)=(Ax_0+By_0+C)Q(x_0,y_0)$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда $(x_0,y_0)\in \Gamma$ яъни $l\subset \Gamma$.

Зарурлиги. $l\subset \Gamma$, $B\neq 0$ бўлсин ва F(x,y) кўпҳадни y ўзгарувчи кўпҳади каби қарайлик

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=a_{22}y^2+(2a_{12}x+2a_{23})y+a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}$$

бу ерда

$$c_1(x)=2a_{12}x+2a_{23}$$

$$c_2(x)=2a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}$$

$$D(x,y)=Ax+By+C$$

дейлик ва y ўзгарувчининг кўпҳади каби F(x,y) кўпҳадни D(x,y) кўпҳадга қолдиқли бўламиз. Унда

$$F(x,y)=\varphi(x,y)D(x,y)+R(x)$$

y ўзгарувчининг кўпҳади каби R(x) кўпҳад даражаси D(x,y) кўпҳад даражасидан кичик. Шунинг учун R(x) кўпҳад y ўзгарувчига боғлиқ эмас. Биз $R(x)\equiv 0$ бўлишини кўрсатишимиз керак. Фараз қилайлик бирорта x_0 учун $R(x_0)\neq 0$ бўлсин. $B\neq 0$ бўлгани учун шундай y_0 сони мавжудки бунда D(x_0,y_0)=0 тўғри чизиқда ётгани учун F(x,y)=0 чизиқга ҳам тегишли бўлади.

$$0=F(x_0,y_0)=\varphi(x_0,y_0)D(x_0,y_0)+R(x_0)\neq 0.$$

Зиддият. Худди шундай $A\neq 0$ ҳол ҳам қаралади.

$l\subset \Gamma, A\neq 0$ бўлсин. F(x,y) кўпҳадни x ўзгарувчи кўпҳади каби қарайлик.

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=$$
$$=a_{11}x^2+(2a_{12}y+2a_{13})x+a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=a_{11}x^2+d_1(y)x+d_2(y)$$

бу ерда

$$d_1(y)=2a_{12}y+2a_{13}$$

$$d_2(y)=a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}$$

яна $D(x,y)=Ax+By+C$ деб фараз қиламиз. x ўзгарувчининг кўпҳади каби F(x,y) кўпҳадни D(x,y) кўпҳадга қолдиқли бўламиз. Унда

$$F(x,y)=\varphi'(x,y)D(x,y)+R'(y)$$

x ўзгарувчининг кўпҳади каби $R'(y)$ кўпҳад даражаси D(x,y) кўпҳад даражасидан кичик. Шунинг учун $R'(y)$ кўпҳад y ўзгарувчига боғлиқ эмас. Биз $R'(y)\equiv 0$ бўлишини кўрсатишимиз керак. Фараз қилайлик бирорта x_0 учун $R'(y_0)\neq 0$ бўлсин. $A\neq 0$ бўлгани учун шундай x_0 сони мавжудки бунда D(x_0,y_0)=0 бўлади $D(x_0,y_0)=Ax_0+By_0+C=0$

$$Ax_0=-By_0-C$$

$$x_0=-\frac{By_0+C}{A}$$

формула билан топилади. Унда (x_0,y_0) нуқта D(x,y)=0 тўғри чизиқда ётгани учун F(x,y)=0 чизиққа ҳам тегишли бўлади, чунки $l\subset Г$.

$$0=F(x_0,y_0)=\varphi(x_0,y_0)D(x_0,y_0)+R'(y_0)\neq 0$$

яна зиддият ҳосил қилдик. Ҳосил қилинган зиддият $l\subset Г$ бўлса, у ҳолда F(x,y) кўпҳадни Аx+By+C=0 кўпҳадга қолдиқсиз бўлинишини англатади жумла исботланди.

Энди иккинчи тартибли чизиқнинг аксиоматик йўналишига қайтайлик. Агар l тўғри чизиқ Г иккинчи тартибли чизиққа нисбатан асимптотик йўналишига эга бўлса, у ҳолда унинг ҳар файси йўналтирувчи вектори асимптотик йўналишидаги вектор бўлади. Г иккинчи тартибли чизиқнинг йўналиши деб асимптотик йўналишдаги бирорта $\vec{a}=\{\alpha,\beta\}$ вектор пропорционал бўлган барча нолмас векторлар синфи $\{\alpha,\beta\}$ни атаймиз. Шундай синф унга кирувчи векторлар координаталарнинг ${}^{\alpha}\!/_{\beta}$ ёки ${}^{\beta}\!/_{\alpha}$ нисбати билан бир қийматли аниқланади. Асимптотик йўналишни аниқловчи

$$a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0 \qquad (66)$$

шартдан ҳар қандай иккинчи тартибли чизиқ иккита асимптотик йўналишга эга бўлиши ҳамда улар ҳақиқий ва ҳар хил, ҳақиқий ва устма-уст тушувчи ёки мавҳум бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, учта a_{11},a_{12},a_{22} коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқлидир. Агар $a_{11}\neq 0$ бўлса (66) муносабатдан $\beta \neq 0$ бўлиши келиб чиқади, чунки $\vec{a} = \{\alpha, \beta\} \neq \vec{0}$. (66) тенгламани β^2 га бўлиб $\{\alpha : \beta\}$ асимптотик йўналишни аниқлаш учун ушбу квадрат тенгламани ҳосил қиламиз

$$a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{22} = 0 \qquad (66_1)$$

бу ерда

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Агар $a_{22} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha \neq 0$ бўлади, чунки $\vec{a} = \{\alpha, \beta\} \neq \vec{0}$. Унда $\alpha : \beta$ нисбатни аниқлаш учун (66) тенгламани α^2 га бўлиб

$$a_{11} + 2a_{12}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + a_{22}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 0 \qquad (66_2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бу ердан

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}$$

Ниҳоят $a_{11} = a_{22} = 0$ да (66) тенглама ушбу кўринишга айланади

$$2a_{12}\alpha\beta = 0$$

бу ердан $\{\alpha : \beta\} = \{0 : 1\}$ ва $\{\alpha : \beta\} = \{1 : 0\}$

35.4-эслатма.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |U|$$

сон f квадрат функциянинг ортогонал инварианти бўлишига қарамасдан битта аффин координатлар системасидан бошқа аффин координаталар системасига ўтишда ўзгариши мумкин. Аммо

$$U' = C^* U C \qquad (16)$$

формуладан шундай ўтишларда бу соннинг ишораси ўзгармайди. Ҳақиқатан ҳам

$$\det U' = \det C^* \det U \det C$$

$$\det U' = (\det C)^2 \det U$$

$$\delta' = \left(\det C\right)^2 \delta \Rightarrow \operatorname{sgn}\delta' = \operatorname{sgn}\delta$$

бундан ташқари f квадрат функция k сонига кўпайтирилганда δ инвариант k^2 сонга кўпайтирилади.

$$F\left(x, y\right) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

$$kF\left(x, y\right) = ka_{11}x^2 + 2ka_{12}xy + ka_{22}y^2 + 2ka_{13}x + 2ka_{23}y + ka_{33}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{12} & ka_{22} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Шундай қилиб берилган иккинчи тартибли чизиқ Г учун δ сонининг ишораси аффин координаталар системасига ҳам иккинчи тартибли чизиқнинг қандай ёзилишига ҳам боғлиқ эмас (39§ да иккинчи тартибли чизиқ умумий ҳолда берилган аффин координаталар системасида пропорционал тенгламалар билан тавсифланиш кўрсатилади) яъни $\operatorname{sgn}\delta$ Г чизиқнинг инвариантлари бўлади.

38.5-таъриф. Агар $\delta > 0$, $\delta < 0$ ёки $\delta = 0$ бўлса, у ҳолда иккинч тартибли чизиқни мос равишда эллиптик, гиперболик ёки параболик типдаги чизиқ деб аталди.

38.6-теорема. Иккинчи тартибли чизиқ асимптотик йўналиш сони ва тури билан тавсифланади:

1) эллиптик типдаги чизиқ мавҳум асиптотик йўналишларга эга;

2) гиперболик типдаги чизиқ ҳар хил ҳақиқий асиптотик йўналишларга эга;

3) параболик типдаги чизиқ устма-уст тушувчи асиптотик йўналишларга эга;

Бу теорема аслида (66) тенгламани текширишда (66_1) ёки (66_2) квадрат тенгламанинг дискриминанти $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\delta$ дан иборат бўлганидан $a_{11} = a_{22} = 0$ бўлган ҳолда эса иккита ҳар хил асимптотик йўналишларга эга бўлганимиздан ва $\delta = -a_{12}^2 < 0$ бўлиб исботланган эди.

38.7-жумла. Эллипс, гипербола ёки параболанинг ҳеч бир учта нуқтаси бир тўғри чизиқда ётмайди.

Исбот. Иккинчи тартибли чизиқнинг учта нуқтаси битта l тўғри чизиқда ётса 38.1-теоремага мувофиқ l тўғри чизиқ асимптотик йўналишга эга ва Г чизиқда бутунлай ётади. Шунинг учун эллипс бундан мустасно, чунки унда умуман асимптотик йўналиш йўқ. $y^2 = 2px$ парабола асимптотик йўналиши $\beta^2 = 0$ тенгламадан аниқланади ва (1:0) кўринишга эга, шундай йўналиш тўғри чизиққа *Ox* ўқига параллел бўлиб y=С тенгламага эга ва парабола билан ягона $\left(C^2\!\big/_{2p} : C \right)$ нуқтада кесишади. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг асимптотик йўналиши $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0$ тенгламадан аниқланади ва $\{\alpha : \beta\} = \{a : -b\}$ кўринишга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{a^2} = \frac{\beta^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{a^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{b} \right)\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{a}{b} \right) = 0$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b} \text{ ёки } \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{a}{b}$$

$$\{\alpha : \beta\} = \{\pm a : b\} \text{ ёки } \{\beta : \alpha\} = \{\pm b : a\}$$

Асимптотик йўналишдаги тўғри чизиқлар параметриктенгламалар билан ушбу кўринишда ёзилади

$$x = t \qquad y = y_0 \pm \frac{b}{a} t$$

t параметр учун тўғри чизиқ билан гиперболанинг кесишиш нуқтасини топиш учун ушбу тенгламани ҳосил қиламиз

$$\frac{t^2}{a^2} - \frac{\left(y_0 \pm \frac{b}{a} t \right)^2}{b^2} = 1$$

ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан кейин

$$\frac{t^2}{a^2} - \left(\frac{y_0}{b} \pm \frac{t}{a} \right)^2 = 1$$

$$\frac{t^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \mp 2\frac{ty_0}{ab} - \frac{t^2}{a^2} = 1$$

$$\mp 2\frac{ty_0}{ab}=1+\frac{y_0^2}{b^2}$$

Аммо бу тенглама t ўзгарувчига нисбатан ўнг томони нолдан фарқли бўлгани учун биттадан кўп бўлмаган ечимларга эга. Жумла исботланди.

39§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚ УЧУН ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАСИ.

39.1-теорема. Агар текисликда бешта ҳар хил M_i i=1,2,3,4,5 нуқта берилган бўлиб улардан ҳуч бир тўрттаси бир тўғри чизиқда ётмаса, у ҳолда бу нуқталар орқали ўтувчи ягона иккинчи тартибли чизиқ мавжуд.

Исбот. Берилган аффин координаталар системаси Oxy учун пропорционаллик аниқлигида ягона шундай иккинчи тартибли $F(x,y)$ кўпҳад мавжудки бунда M_i i=1,2,3,4,5 нуқталарнинг координаталари $F(x,y)=0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатамиз. $F(x,y)$ кўпҳаднинг номаълум коэффициентларини қуйидаги тарзда белгилаймиз:

$$a_{11}=z_1\ ,\ 2a_{12}=z_2\ ,\ a_{22}=z_3\ ,\ 2a_{13}=z_4\ ,\ 2a_{23}=z_5\ ,\ a_{33}=z_6$$

M_i нуқталар (x_i,y_i) координаталарга эга бўлсин. Унда $F(x,y)$ кўпҳаднинг коэффициентларини $z_1,\ldots,z_6$ олтита номаълум бешта бир жинсли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$z_1x_i^2+z_2x_iy_i+z_3y_i^2+z_4x_i+z_5y_i+z_6=0\ ,\ i=1,2,3,4,5,6.$$

Алгебра ва сонлар назарияси курсидан маълумки бу бир жинсли тенгламалар системаси нолмас ечимларга эгадир. Ҳақиқатан ҳам бу бир жинсли системанинг ранги $1\le r\le 5$ бўлиб $6-r$ та ихтиёрий ўзгарувчилар билан параметрланади. Бундан ташқари агар бир жинсли системанинг тенгламалари чизиқли эркли бўлса, у ҳолда шундай система ечими пропорционаллик аниқликда ягонадир. Чунки системанинг ранги бешга тенг бўлиб уни зинапоя кўринишга келтирганимизда 6-5=1 та озод номаълум бўлади. Бу озод номаълум қатнашган ҳадларни тенгликнинг ўнг томонига ўтказиб системани диагонал системага келтириш мумкин. Унда бош номаълумга пропорционал равишда ўзгаради. Демак биз қараётган ҳолда системанинг тенгламалари чизиқли эркли эканлигини кўрамиз.

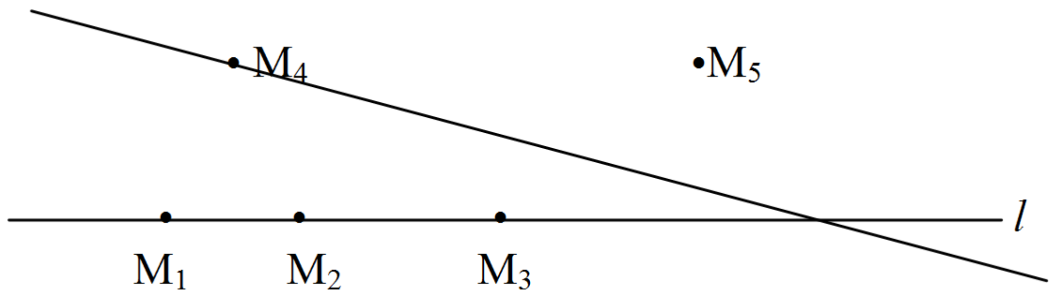
Фараз қилайлик шундай бўлмасин. Унда системанинг бирорта тенгламаси масалан бешинчиси қолганлари орқали чизиқли фодаланади. Бунда M_1, M_2, M_3, M_4 нуқталар орқали ўтувчи ҳар қандай иккинчи тартибли чизиқ M_5 нуқта орқали ҳам ўтишини англатади.

$$
\begin{aligned}
&z_1x_5^2+z_2x_5y_5+z_3y_5^2+z_4x_5+z_5y_5+z_6=A\left(z_1x_5^2+z_2x_5y_5+z_3y_5^2+z_4x_5+z_5y_5+z_6\right)+\\
&+B\left(z_1x_5^2+z_2x_5y_5+z_3y_5^2+z_4x_5+z_5y_5+z_6\right)+C\left(z_1x_5^2+z_2x_5y_5+z_3y_5^2+z_4x_5+z_5y_5+z_6\right)+\\
&+D\left(z_1x_5^2+z_2x_5y_5+z_3y_5^2+z_4x_5+z_5y_5+z_6\right)
\end{aligned}
$$

Бу ерда мантиқан иккита ҳол бўлиши мумкин:

1) M_1, M_2, M_3, M_4 нуқталардан бирорта учтаси бир тўғри чизиқда ётади.
2) M_1, M_2, M_3, M_4 нуқталардан ҳеч бир учтаси бир тўғри чизиқда ётмайди.

Биринчи ҳолни қарайлик M_1, M_2, M_3 нуқталар бирор l тўғри чизиқда ётган бўлсин. Теореманинг шартига кўра M_4 ва M_5 нуқталар бу тўғри чизиқда ётмайди. M_4 нуқта орқали l тўғри чизиқни кесувчи ва M_5 нуқта орқали ўтмайдиган m тўғри чизиқни ўтказиш мумкин



47-расм

Унда иккита кесишувчи l ва m тўғри чизиқлардан ташкл топган иккинчи тартибли чизиқ M_1, M_2, M_3, M_4 нуқталар орқали ўтади ва M_5 нуқта орқали ўтмайди зиддият.

Иккинчи ҳолни қарайлик. M_i ва M_j нуқталар орқали ўқувчи тўғри чизиқни l_{ij} орқали белгилаймиз. Унда l_{12} ва l_{34} тўғри чизиқлар жуфтлиги Γ_1 иккинчи тартибли чизиқни ҳосил қилади ва l_{14} ва l_{23} тўғри чизиқлар жуфтлиги Γ_2

иккинчи тартибли чизиқни ҳосил қилади. M_1, M_2, M_3, M_4 нуқталар орасида ҳеч бир учтаси бир тўғри чизиқдаётмслигидан бунда

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$$

осонгина келтириб чиқариш мумкин.

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = (l_{12} \cup l_{34}) \cap \Gamma_2 = l_{12} \cap \Gamma_2 \cup l_{34} \cap \Gamma_2 = l_{12} \cap (l_{14} \cup l_{23}) \cup l_{34} \cap (l_{14} \cup l_{23}) =$$

$$= \{M_1\} \cup \{M_2\} \cup \{M_3\} \cup \{M_4\} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_i \quad i=1,2$$

Аммо Γ_i иккинчи тартибли чизиқ фаразга кўра M_1, M_2, M_3, M_4 нуқталарни ўз ичига олганидан у ҳолда у M_5 нуқтани ҳам ўз ичига олиши керак.

Зиддият теорема исботланди.

39.2-теорема. Бирорта *Oxy* аффин координаталар системасида иккинчи тартибли тенгламалар $F(x,y)=0$ ва $\varphi(x,y)=0$ биттадан кўпроқ ҳақиқий нуқталарни ўз ичига олувчи бирорта иккинчи тартибли Г чизиқни аниқласин. Унда F ва Q кўпҳадлар пропорционалдир.

Исбот. Эллипс, гипербола, парабола, кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги ва параллел тўғри чизиқлар жуфтлигида ҳеч бир тўртаси бир тўғри чизиқда ётмаган бешта ҳар хил нуқталар мавжудлигини кўриш осон. Шу сабабли бу иккинчи тартибли чизиқлар учун бизнинг ягоналик теоремаси 39.1-теоремадан келиб чиқади. Г устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлган ҳолни кўриш қолди, чунки қолган иккинчи тартибли чизиқлар биттадан кўп бўлмаган ҳақиқий нуқталарни ўз ичига олади (35§ га қаралсин). Г чизиқ нуқталаридан иборат бўлган *l* тўғри чизиқ $Ax + By + C = 0$ тенглама билан берилган бўлсин. Унда 38.3-жумлага мувофиқ

$$F(x, y) = (Ax + By + C)(A_1x + B_1y + C_1)$$

$$\varphi(x, y) = (Ax + By + C)(A_2x + B_2y + C_2)$$

Аммо Г чизиқ устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлганидан

$$A_ix + B_iy + C_i = 0, \quad i = 1, 2$$

тенгламалар ҳам *l* тўғри чизиқни тавсифлайди.

Демак, $A_i x + B_i y + C_i$ кўпҳад $Ax + By + C = 0$ кўпҳадга пропорционал (15§ қаралсин) яъни F ва φ кўпҳадлар пропорционалдир. Теорема исботланди.

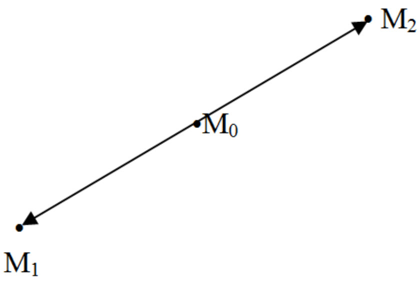
40§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚ МАРКАЗИ.

Бу параграфда ҳам тўртинчи бобнинг ҳамма жойидаги каби ясси тўпламларни қараймиз.

40.1-таъриф.

$$\overrightarrow{M_0M_1} = -\overrightarrow{M_0M_2} \qquad (67)$$

вектор тенглик бажарилса M_1 ва M_2 нуқталар M_0 нуқтага нисбатан симметрик нуқталар деб аталади (48-расм)



48-расм

(67) шарт M_0 нуқта M_1M_2 кесмани тенг иккига бўлишига, ҳақиқатан ҳам (67) шартдан бунда $-\overrightarrow{M_1M_0} = -\overrightarrow{M_0M_2}$ ёки $\overrightarrow{M_1M_0} = \overrightarrow{M_0M_2}$ вектор тенглик келиб чиқади. Унда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_1M_0} = 2\overrightarrow{M_1M_0}$$

бу ердан

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}$$

вектор тенглик келиб чиқади. Аммо бу M_0 нуқта M_1M_2 кесмани тенг иккига бўлишни англатади.

40.2-таъриф. Агар $M \in Г$ =ар қайси М нуқта учун M_0 нуқтага нисбатан симметрик M' нуқта ҳам Г тўпламга тегишли бўлса M_0 нуқтани Г тўпламнинг симметрия маркази деб аталади.

40.3-эслатма. Агар Г тўплам бўш бўлса, у ҳолда ҳар қандай нуқта бу тўпламнинг симметрия маркази бўлади.

40.4-теорема. Агар М(x_0,y_0) нуқта энг камида битта нуқтани ўз ичига олувчи иккинчи тартибли чизиқ Г нинг симметрия маркази бўлса ва бирорта аффин координаталар системасида иккинчи тартибли

$$F\left(x,y\right)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} \qquad (68)$$

тенглама билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0 \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0 \end{array}\right\} \qquad (69)$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот. Координаталар бошини $O'=M\left(x_0,y_0\right)$ нуқтага кўчирамиз, яъни ушбу формулалар бўйича янги x', y' координаталарга ўтамиз. Унда янги $O'x'y'$ координаталар системасида

$$\left.\begin{array}{l} a'_{13}=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13} \\ a'_{23}=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23} \end{array}\right\} \qquad (70)$$

$$F\left(x',y'\right)=a_{11}\left(x'+x_0\right)^2+2a_{12}\left(x'+x_0\right)\left(y'+y_0\right)+a_{22}\left(y'+y_0\right)^2+2a_{13}\left(x'+x_0\right)+2a_{23}\left(y'+y_0\right)+a_{33}=0$$

бу ердан

$$\left(2a_{11}x_0+2a_{12}y_0+2a_{12}\right)x'=2\left(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{12}\right)x'=2a_{13}x'$$

$$\left(2a_{12}x_0+2a_{22}y_0+2a_{23}\right)y'=2\left(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}\right)y'=2a_{23}y'$$

$$\left.\begin{array}{l} a'_{13}=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13} \\ a'_{23}=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23} \end{array}\right\} \qquad (70)$$

ҳосил қиламиз. Шундай қилиб дастлабки масала ушбуга келтирилади: агар О(0;0) – бўш бўлмагана иккинчи тартибли чизиқнинг симметрия маркази бўлса, у ҳолда $a_{13}=a_{23}=0$ $M_1\left(x,y\right)\in\Gamma$ ихтиёрий М$_1$(x,y) нуқтани оламиз. Унда симметрия марказининг таърифига кўра $M_2\left(-x,-y\right)\in\Gamma$ бўлишига эга бўламиз. Демак,

$$0=F\left(x_1,y_1\right)-F\left(-x_1,-y_1\right)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2+2a_{13}x_1+2a_{23}y_1+a_{33}-$$

$$-\left(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2-2a_{13}x_1-2a_{23}y_1+a_{33}\right)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2+2a_{13}x_1+2a_{23}y_1+a_{33}-$$

$$-a_{11}x_1^2-2a_{12}x_1y_1-a_{22}y_1^2+2a_{13}x_1+2a_{23}y_1-a_{33}=4a_{13}x_1+4a_{23}y_1$$

Демак, агар $a_{13}\neq 0$ ёки $a_{23}\neq 0$ бўлса, у ҳолда бутунлай Г чизиқ $a_{13}x+a_{23}y=0$ тўғри чизиқда ётади. Унда Г ё устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги, ёки мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлади. Биринчи ҳолда 39.2-теоремага мувофиқ

$$F(x,y)=k(a_{13}x+a_{23}y)^2$$

Аммо бу F кўпҳаднинг чизиқли қисми $a_{13}x+a_{23}y$ нолдан фарқли бўлишига зид. Иккинчи ҳолда O(0,0) нуқта шунингдек Г чизиқга тегишли, демак $a_{33}=0$ *Ox* ўз билан Г чизиқнинг кесишмаси $F(x,y)=0$ тенглама билан тавсифланади, яъни

$$a_{11}x^2+2a_{13}x=0 \qquad (71)$$

$Ox\cap\Gamma=\{O(0,0)\}$ шартдан бунда (71) тенглама ягона *x*=0 ечимга эга. Аммо мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги эллиптик типдаги чизиқ бўлади. Демак бизнинг ҳолда $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, хусусан $a_{11}\neq 0$. Демак (71) тенглама ягона ечимга эга бўлгани туфайли

$$x(a_{11}x+2a_{13})=0$$

$$x=0 \text{ ёки } x=-\frac{2a_{13}}{a_{11}}=0$$

бу ердан бунда $a_{13}\neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Худди шундай *Oy* ўқ билан Г чизиқнинг кесишмаси F(0,*y*)=0 тенглама билан тавсифланади, яъни

$$a_2y^2+2a_{23}y=0 \qquad (*)$$

$Oy\cap\Gamma=\{O(0,0)\}$ шартдан бунда (*) тенглама ягона *y*=0 ечимга эга. Аммо мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги эллиптик типдаги чизиқ бўлади. Демак бу ҳолда ҳам $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, хусусан $a_{22}\neq 0$. Шундай қилиб (*) тенглама ягона ечимга эга бўлгани туфайли

$$y(a_{22}y+2a_{23})=0$$

$$y=0 \text{ ёки } x=-\frac{2a_{23}}{a_{22}}=0$$

бу ердан бунда $a_{23}\neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

40.5-таъриф. Агар $M_0(x_0,y_0)$ нуқтанинг координаталари (69) тенгламалар чичтемасини қноатлантирса, у ҳолда M_0 нуқтани (68) иккинчи тартибли чизиқнинг маркази деб аталади.

Бу таърифнинг иккинчи тартибли чизиқ тенгламаси қаралаётган аффин координаталар системасига боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. $M_0(x_0,y_0)$ нуқтанинг (69) тенгламалар системасини қаноатлантиришини матрица шаклда қуйидаги тарзда қайта ёзиш мумкин

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \tag{72}$$

бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \ d = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}\,.$$

Энди $O'x'y'$ - бошқа аффин координаталар системаси ва Oxy системадан $O'x'y'$ системага ўтиш 28§ даги

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + a_1 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + a_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

формула бўйича амалга оширилган бўлсин. M_0 нуқта $O'x'y'$ системаа (x_0', y_0') координаталарга эга бўлсин. Унда

$$A'\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ 1 \end{pmatrix} = (13) \text{ формулага мувофик} = D^*AD\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (10) \text{ формулага мувофик} = D^*A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = D^*\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= D^*\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & a_1 \\ c_{12} & c_{22} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

Шундай қилиб, агар M_0 нуқтанинг Oxy системадаги (x_0, y_0) координаталари (69) тенгламалар системасини қаноатлантирса, у ҳолда шу нуқтанинг $O'x'y'$ системадаги $\left(x_0', y_0'\right)$ координаталар системасини қаноатлантиради

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a_{11}'x_0' + a_{12}'y_0' + a_{13}' = 0 \\ a_{12}'x_0' + a_{22}'y_0' + a_{23}' = 0 \end{matrix}\right\}$$

40.6-жумла. Иккинчи тартибли чизиқнинг ҳар қайси маркази унинг симметрия маркази ҳам бўлади.

Исбот. $M_0(x_0, y_0)$ – (68) тенглама билан тавсифланувчи Г иккинчи тартибли чизиқнинг маркази бўлсин. Унда координаталар бошини M_0 нуқтага параллел кўчиришни амалга ошириб (70) ва (69) ларга мувофиқ $a_{13}' = a_{23}' = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу

$$\varphi\left(x', y'\right) = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + a_{33}' =$$

$$= a_{11}'\left(-x'\right)^2 + 2a_{12}'\left(-x'\right)\left(-y'\right) + a_{22}'\left(-y'\right)^2 + a_{33}' = \varphi\left(-x', y'\right)$$

яъни, янги координаталар боши $O' = M_0$ нуқта Г иккинчи тартибли чизиқнинг симметрия маркази бўлишини англатади. Жумла исботланди.

Марказ таърифидан бунда иккинчи тартибли чизиқ ушбуларга эга бўлиши мумкин:

I. бита марказга эга ((69) система ягона ечимга эга);

II. тўғри чизиқдан иборат марказларга эга ((69) система тенгламалари пропорционал)

III. марказга эга эмас ((69) система биргаликда эмас).

40.7-теорема. Иккинчи тартибли чизиқнинг марказлар сонининг юқорида санаб ўтилган вариантлари қуйидаги тарзда тавсифланади:

I. $\delta \neq 0$;

II. $\delta = \Delta = 0$;

III. $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$.

Исбот. I. 15§ га мувофиқ

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \quad \text{ва} \qquad a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади шу ҳолда ва фақат шу ҳолда, қачонки $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ ўринли бўлса, бу эса $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ бўлишига тенг кучлидир.

II. Агар (69) системанинг тенгламалари пропорционал бўлса, яъни $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ бўлса, у ҳолда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицанинг биринчи иккита сатри пропорционал бўлади ва демак

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

Энди $\delta = 0 = \Delta$ бўлсин, $\delta = 0$ шартдан $a_{11} \neq 0$ ёки $a_{22} \neq 0$ бўлиши келиб чиқади. Фараз қилайлик бунда $a_{11} \neq 0$. Унда

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матрица сатрларининг пропорционаллиги туфайли шундай k сони мавжудки, бунда

$$a_{12} = ka_{11}, \quad a_{22} = ka_{12} \tag{73}$$

Δ детерминантни учинчи сатр бўйича ёйиб

$$0 = \Delta = a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\delta = \left((73)\text{га мувофик ва } \delta{=}0\right) =$$

$$= a_{13}\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{13} \\ ka_{12} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\delta = \left(ka_{13} - a_{23}\right)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Унда агар $ka_{13} - a_{23} = 0$ бўлса, у ҳолда $a_{23} = ka_{13}$бўлиб

$$a_{12} = ka_{11}, \quad a_{22} = ka_{12} \tag{73}$$

тенгликларга мувофиқ (69) системанинг тенгламалари пропорционал бўлади. Агар $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$ бўлса, у ҳолда $a_{11} \neq 0$эканлигини эътиборга олиб (73) га мувофиқ $ka_{11} = a_{12}$ $ka_{13} = a_{23}$.

III тасдиқ кўриб чиқилган ҳолларнинг натижаси бўлади. Теорема исботланди.

41§. АСИМПТОТАЛАР ВА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ ҚЎШМА ДИАМЕТРЛАРИ.

Асимптоталар.

41.1-таъриф. Г иккинчи тартибли чизиқ марказидан ўтувчи асимптотик йўналишдаги ҳар қандай тўғри чизиқ Г иккинчи тартибли чизиқнинг асимптотаси деб аталади.

41.2-жумла. 1) Гипербола ва кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги асимптотага эга.
2) Параллел тўғри чизиқлар (ҳар хил, устма-уст тушувчи ва мавҳум) жуфтлиги битта асимптотага эга. 3) Қолган иккинчи тартибли чизиқлар асимптоталарга эга эмас.

Исбот. 1) ва 3) тасдиқлар иккинчи тартибли чизиқларнинг классификациясидан ва асимптотик йўналишлар ҳаамда марказлар сонидан келиб чиқади (38.6 ва 40.7 теоремалар) 2) тасдиқ y^2=С параллел тўғри чизиқлар марказлари йўналиши асимптотик йўналишда бўлишдан келиб чиқади

$$\left.\begin{aligned} 0x_0 + 0y + 0 = 0 \\ 0x_0 + 1\cdot y + 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow y = 0$$

марказлар $\{1,0\}$ йўналишга эга. Параллел тўғри чизиқлар асимптотик йўналиши

$$\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \{1,0\}$$

йўналишга эга.

Марказга эга бўлмаган чизиқлар ёки биттадан ортиқ марказларга эга бўлган чизиқлар номарказли чизиқлар деб аталади. Юқоридаги мулоҳазалардан чизиқлар марказли чизиқлар бўлади шу ҳолда ва фақат шу ҳолда қачонки $\delta \neq 0$ бўлса. Шундай қилиб эллиптик ва гиперболик чизиқлар марказли чизиқлар бўлади, параболик типдаги чизиқлар эса номарказли чизиқлар бўлади.

Гиперболанинг асимптоталардаги тенгламаси. Бирорта аффин *Oxy* координаталар системасидаги Г гиперболанинг

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

каноник тенгламасини қарайлик. Бу гиперболанинг $\{\alpha,\beta\}$ асимптотик йўналиши

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}=1$$

тенгламадан топилади. Бу ердан иккита ечимни оламиз:

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}=0 \text{ ёки } \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b} \text{ ёки } \frac{\alpha}{a}=-\frac{\beta}{b}$$

$$\{\alpha:\beta\}=\{a:b\}\ ,\ \{\alpha:\beta\}=\{a:-b\}$$

гиперболанинг маркази координаталар бошида жойлашган. Ҳақиқатан ҳам

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{a^2}x_0-0y_0+0=0\\ 0x_0-\frac{1}{b^2}y_0+0=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}$$

демак гиперболанинг асимптоталари ушбу тенгламаларга эга

$$k=-\frac{b}{a} \quad \text{ёки} \quad k=-\frac{b}{a}$$

$$y=kx \Leftrightarrow y=\frac{b}{a}x \text{ ёки } y=-\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{y}{b}=\frac{x}{a} \text{ ёки } \frac{y}{b}=-\frac{x}{a} \Leftrightarrow \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ ёки } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \quad (74)$$

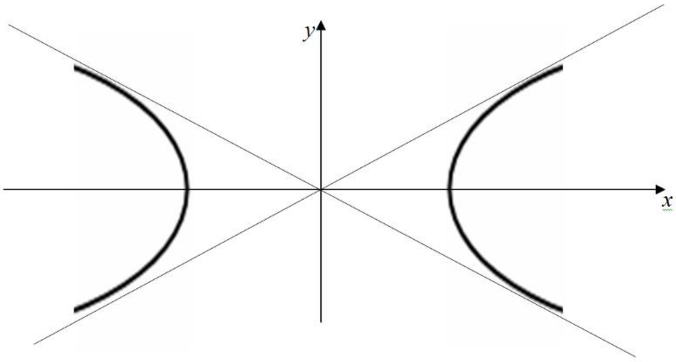
$x'=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$, $y'=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ деб янги координаталар системаси $O'x'y'$ ўтамиз. Унда гиперболанинг

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0 \quad (75)$$

янги координаталар системасида қуйидаги тарзда ёзилади

$$x'y'=1$$

Янги координаталар системасининг ўқлари гиперболанинг асимптоталари бўлади (49-расм) (76) тенглама гиперболанинг асимптоталардаги тенгламалари деб аталади. Гиперболанинг асимптотаси ҳақиқатан ҳам шундай маънода асимптотаси бўладики гиперболанинг М нуқтасини бирор шохи бўйлаб чексизликга қараб интилганда унинг асимптоталаридан бирига ҳар қанча яқин бўлади. Ҳақиқатан ҳам M_0 нукта гипербола ўнг шохининг юқори қисми бўйлаб чексизликга силжиганда $l:\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ асимптотасигача бўлган масофаси нолга интилади.



49-расм.

20§ даги формулага мувофиқ ушбуга эга бўламиз

$$\rho(M,l)=\frac{\left|\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{\frac{|bx_0-ay_0|}{ab}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}}=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Шунинг учун $x_0,y_0>0$ бўлганидан $\rho(M,l)$ масофа

$$\rho(M,l)=\frac{\left|b^2x_0^2-a^2y_0^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}\left(bx_0+ay_0\right)}$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0 \tag{75}$$

$$\frac{bx_0-ay_0}{ab}\cdot\frac{bx_0+ay_0}{ab}=1$$

$$\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{a^2b^2}=1$$

$$\rho(M,l)=\frac{\left|b^2x_0^2-a^2y_0^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}\left(bx_0+ay_0\right)}=\left|\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{a^2b^2}\right|\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\left(bx_0+ay_0\right)}$$

$x_0,y_0\to+\infty$ да $M(x_0,y_0)$ нуқтадан l тўғри чизиқгача бўлган масофа нолга интилади.

Қўшма диаметрлар ва қўшма йўналишлар.

38§ да асимптотик йўналишда бўлмаган *l* тўғри чизиқ иккинчи тартибли Г чизиқни иккита M_1 ва M_2 (ҳар хил, устма-уст тушувчи ёки комплекс қўшма) нуқталарда кесишини тушунтирилган эди. M_0 нуқта M_1M_2 кесма (ватар)нинг ўртаси бўлсин. Берилган асимптотик бўлмаган йўналишга параллел бўлган барча ватарлар ўрталарини топиш масаласини ечайлик. Г чизиқ *Oxy* аффин координаталар системасида умумий тенглама F(*x*,*y*)=0 билан асимптотик йўналишда бўлмаган *l* тўғри чизиқ эса

$$x = x_0 + \alpha t \qquad y = y_0 + \beta t \tag{77}$$

параметрик тенглама билан берилган бўлсин. Фараз қилайлик бунда $M_0(x_0,y_0)$ нуқта *l* тўғри чизиқда Г чизиқ кесилган M_1M_2 ватар бўлсин. M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталари (77) тенгламалардан мос равишда параметрнинг $t=t_1,t_2$ қийматларида ҳосил қилинган бўлсин. M_0 нуқта M_1M_2 ватар ўртаси бўлганидан унинг координаталари (x_0,y_0)га параметрнинг t=0 қиймати мос келиб $t_1+t_2=0$ эга бўламиз. Ҳақиқатан ҳам $\vec{a} = \{\alpha, \beta\} \neq \vec{0}$ вектор бўлгани учун $\alpha \neq 0$ ёки $\beta \neq 0$ бўлади. Масалан $\alpha \neq 0$ бўлсин, унда

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 \ , \ \frac{x_0 + \alpha t_1 + x_0 + \alpha t_2}{2} = x_0$$

$$2x_0 + \alpha\left(t_1 + t_2\right) = 2x_0$$

$$\alpha\left(t_1 + t_2\right) = 0 \text{ ёки } t_1 + t_2 = 0$$

Аммо t_1, t_2 қийматлар

$$F_2 t^2 + 2F_1 t + F_0 = 0 \tag{65}$$

тенгламадан топилади бу ерда

$$F_2 = F_2\left(\alpha, \beta\right) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2,$$

$$F_1 = F_1\left(\alpha, \beta, x_0, y_0\right) = a_{11}\alpha x_0 + a_{12}\left(\alpha y_0 + \beta x_0\right) + a_{22}\beta y_0 + a_{13}\alpha + a_{23}\beta,$$

$$F_0 = F_0\left(x_0, y_0\right) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0 y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}$$

Шунинг учун Виет теоремасига кўра

$$t_1+t_2=-2F_1$$

$$0=-2F_1 \Rightarrow F_1=0$$

$$F_1 = F_1\left(\alpha,\beta,x_0,y_0\right) = a_{11}\alpha x_0 + a_{12}\left(\alpha y_0 + \beta x_0\right) + a_{22}\beta y_0 + a_{13}\alpha + a_{23}\beta = 0$$

бу тенгламанинг ҳадларини қайта гуруҳлаб бунда асимптотик бўлмаган $\{\alpha:\beta\}$ йўналишдаги ҳар қандай ватарларнинг ўрталари M(x,y)

$$\alpha\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}\right) + \beta\left(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}\right) = 0$$

ёки

$$\alpha\left(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}\right) + \beta\left(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}\right) = 0 \qquad (78)$$

тенгламани қаноатлантиради. Бу биринчи даражали тенгламадан иборат. Ҳақиқатан ҳам агар

$$\alpha a_{11} + \beta a_{12} = 0 \quad \alpha a_{12} + \beta a_{22} = 0 \qquad (79)$$

бўлса $\{\alpha:\beta\}$ йўналиш асимтотик йўналиш бўлади, чунки (79) тенгликлар ушбу матрицали тенгликга тенг кучли

$$\left(\alpha,\beta\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \left(0,0\right)$$

$$\left(\alpha a_{11} + \beta a_{12}, \alpha a_{12} + \beta a_{22}\right) = \left(0,0\right)$$

$$\alpha a_{11} + \beta a_{12} = 0 \ , \ \alpha a_{12} + \beta a_{22} = 0$$

$$\alpha^2 a_{11} + \alpha\beta a_{12} = 0 \ , \ \alpha\beta a_{12} + \beta^2 a_{22} = 0$$

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$$

Зиддият чинки $\{\alpha:\beta\}$ асимптотик йўналиш эмас (78) биринчи даражали тенгламадир. Шундай қилиб, биз ушбу жумлани исбот қилдик.

41.3-жумла. Берилган асимптотик бўлмаган $\{\alpha:\beta\}$ йўналишдаги барча ватарлар ўрталари M(x,y) (78) тўғри чизиқда ётади. Бу тўғри чизиқни берилган асимптотик бўлмаган $\{\alpha:\beta\}$ йўналишга қўшма бўлган Г иккинчи тартибли чизиқнинг диаметри деб аталади.

(78) тўғри чизиқ (68) шартга кўра Г чизиқнинг барча марказлари орқали ўтади. Шунинг учун уни бу чизиқнинг диаметри ҳам деб аталади. 50, 51 ва 52 расмларда эллипс, парабола ва параллел тўғри чизиқлар жуфтлигининг диаметрлари тасвирланган.

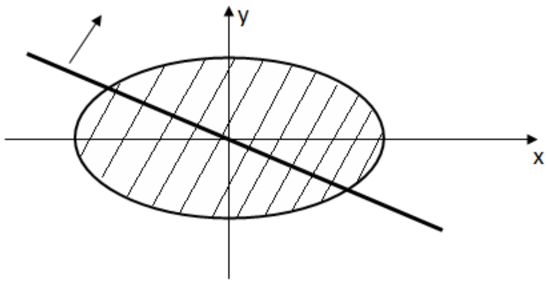
Г чизиқ берилган асимптотик бўлмаган йўналишга қўшма диаметр таърифи бу чизиқ тенгламаси қаралаётган *Oxy* координаталар системасига блғлик эмас. Ҳақиқатан ҳам қўшма диаметрларнинг (78) тенгламаси матрица шаклда қуйидагича тарзда ёзиш мумкин:

$$(\alpha,\beta,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0 \qquad (80)$$

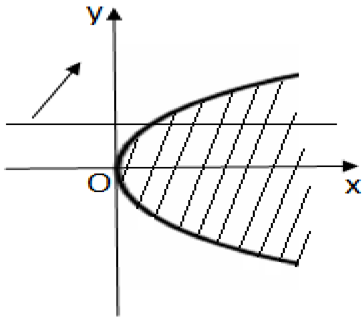
Ҳақиқатан ҳам

$$(\alpha,\beta,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\left(\alpha a_{11}+\beta a_{12},\alpha a_{12}+\beta a_{22}+\alpha a_{13}+\beta a_{23}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=$$

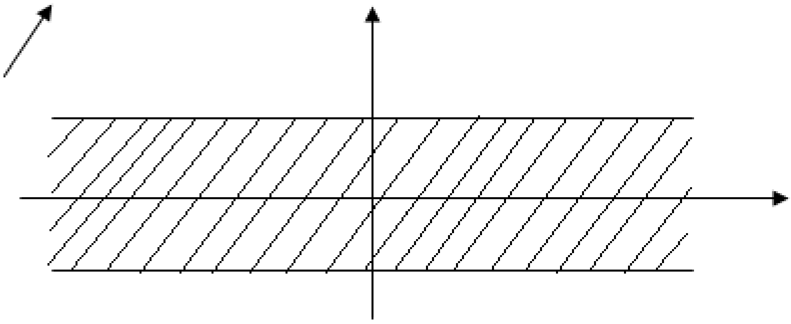
$$=a_{11}\alpha x+a_{12}\beta x+a_{12}\alpha y+a_{22}\beta y+a_{13}\alpha+a_{23}\beta=\alpha\left(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\right)+\beta\left(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}\right)=0$$



50-расм



51-расм



52-расм

Г чизиқ берилган асимптотик бўлмаган йўналишга қўшма диаметр таърифи бу чизиқ тенгламаси қаралаётган *Oxy* координаталар системасига боғлиқ эмаслигини кўрсатайлик

$$\left.\begin{array}{l} x = c_{11}x' + c_{12}y' + a_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + a_2 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

ўтиш формуласи билан боғланган Oxy система билан бошқа $O'x'y'$ аффин координаталар системаси учун

$$(\alpha,\beta,0) = (\alpha',\beta',0)D^*$$

тенгликнинг бажарилишини кўриш осон бу ерда

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & a_1 \\ c_{21} & c_{12} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

28§ дан олинган. Шунинг учун 28§ дан олинган 910) ва 913) тенгликларни эътиборга олиб

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

$$A' = D^*AD \qquad (13)$$

ушбуни ҳосил қиламиз

$$(\alpha,\beta,0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha',\beta',0)D^*AD\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha',\beta',0)A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Демак, (80) шарт $O'x'y'$ координаталар системасида ҳам худди шундай шартнинг бажарилишини келтириб чиқаради.

41.4-таъриф. Агар

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + a_{22}\beta_1\beta_2 = 0 \qquad (81)$$

шарт бажарилса, у ҳолда $\vec{a}_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ ва $\vec{a}_2 = \{\alpha_2, \beta_2\}$ йўналишларни Oxy аффин координаталар системасида умумий

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

тенглама билан берилган Г чизиқга нисбатан қўшма дейилади. Матрица шаклда бу тенгламани қуйидаги тарзда ёзиш мумкин:

$$(\alpha_1,\beta_1)U\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (82)$$

Ҳақиқатан ҳам

$$\left(\alpha_1,\beta_1\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\left(\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12},\alpha_1 a_{12}+\beta_1 a_{22}\right)\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=$$

$$=a_{11}\alpha_1\alpha_2+\beta_1\alpha_2 a_{12}+\alpha_1\beta_2 a_{12}+\beta_1\beta_2 a_{22}=a_{11}\alpha_1\alpha_2+a_{12}\left(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2\right)+\beta_1\beta_2 a_{22}=0$$

Эски *Oxy* координаталар системасидан янги $O'x'y'$ координаталар системасига ўтишда кеторларнинг координаталари

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \text{ ёки } \left(\alpha,\beta\right)=\left(\alpha',\beta'\right)C^* \text{ бу ерда } C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

формула билан ўзгаради. Шунинг учун

$$U'=C^*UC \tag{16}$$

формулага асосан (82) шарт $O'x'y'$ координаталар системасида =ам бажарилади

$$0=\left(\alpha_1,\beta_1\right)U\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\left(\alpha_1',\beta_1'\right)C^*UC\begin{pmatrix} \alpha_2' \\ \beta_2' \end{pmatrix}=\left(\alpha_1',\beta_1'\right)U'\begin{pmatrix} \alpha_2' \\ \beta_2' \end{pmatrix}$$

Шундай қилиб $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ йўналишларнинг қўшмалиги Г чизиқ тенгламаси қаралаётган аффин координаталар системасига боғлиқ эмас. 38§ да киритилган асимптотик йўналиш – бу йўналиш ўзига ўзи қўшма йўналишдир. Ихтиёрий йўналишга қўшма бўлган йўналишни берилган иккинчи тартибли чизиқнинг махсус йўналиши деб аталади.

41.5-жумла. Махсус йўналишлар – бу параболик чизиқларнинг асимптотик йўналишидир. Қолган чизиқлар учун ҳар қайси йўналишга нақ битта йўналиш қўшмадир.

Исбот. Ихтиёрий $\{\alpha_1:\beta_1\}$ йўналишни оламиз ва

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2+a_{12}\left(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2\right)+a_{22}\beta_1\beta_2=0 \tag{81}$$

тенгламадан берилган Г иккинчи тартибли чизиқга нисбатан унга қўшма бўлган барча $\{\alpha_2:\beta_2\}$ йўналишларни топамиз, у α_2 ва β_2 номаълумларга нисбатан бир жнсли тенглама бўлади. Чунки

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2+a_{12}\alpha_1\beta_2+a_{12}\beta_1\alpha_2+a_{22}\beta_1\beta_2=0$$

$$\left(a_{11}\alpha_1+a_{12}\beta_1\right)\alpha_2+\left(a_{12}\alpha_1+a_{22}\beta_1\right)\beta_2=0$$

Шунинг учун бу тенгламанинг (82) ёзувига мувофиқ

$$(\alpha_1,\beta_1)U=(\alpha_1,\beta_1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=(\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12},\alpha_1 a_{12}+\beta_1 a_{22})\neq(0,0) \quad (83)$$

бўлса, у пропорционаллик аниқликда ягона ечимга эга, акс ҳолда эса ҳар қандай $\{\alpha_2:\beta_2\}$ йўналиш унинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$(\alpha_1,\beta_1)U\neq(0,0)$$

$$(\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12},\alpha_1 a_{12}+\beta_1 a_{22})\neq(0,0)$$

(82) системани қуйидагича ёзамиз

$$(\alpha_1,\beta_1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{pmatrix}=0$$

$$(\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12},\alpha_1 a_{12}+\beta_1 a_{22})\begin{pmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\alpha_1 a_{12}-\beta_1 a_{22} & \alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12}\end{vmatrix}=0$$

$$(\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12},\alpha_1 a_{12}+\beta_1 a_{22})\neq(0,0)$$

$$(\alpha_1 a_{12}+\beta_1 a_{22},\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12})\neq(0,0)$$

$$\Rightarrow(-\alpha_1 a_{12}-\beta_1 a_{22},\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12})\neq(0,0)$$

$$\exists K\in R:$$

$$\alpha_2=K(-\alpha_1 a_{12}-\beta_1 a_{22})$$

$$\beta_2=K(\alpha_1 a_{11}+\beta_1 a_{12})$$

Демак, $\{\alpha_2:\beta_2\}$ йўналишининг мавжудлиги кўрсатилди. $\{\alpha_2:\beta_2\}$ векторга пропорционал бўлган ҳар қандай вектор ҳам (82) тенгламани қаноатлантиради. Бу бизга 41.5-жумланинг иккинчи қисмини исботлайди. 41.5-жумланинг биринчи қисмига тегишли бўлгани учун шуни махсус йўналиш ўз ўзига қўшмалигидан параболик чизиқнинг $\{\alpha_1:\beta_1\}$ асимптотик йўналиш махсус йўналиш бўлишини текшириш етарли. Координаталар системасига йўналишнинг қўшмалик шарти боғлиқ эмас бўлгани сабабли каноник системадаги параболик чизиқларнинг y^2=H(x) тенгламасини қараш етарли, бу ерда H(x) даражаси ≤ 1 бўлган кўпҳаддир. Унда

$$U=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$0\cdot\alpha_1^2+2\cdot 0\cdot\alpha_1\cdot\beta_1+1\cdot\beta_1^2=0$$

$$\beta_1=0$$

$$\{\alpha_1:\beta_1\}=\{1,0\}$$

$$(\alpha_1,\beta_1)U=(1,0)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(0,0)$$

41.5-жумла исботланди.

41.6-жумла. $\{\alpha:\beta\}$ йўналишга қўшма бўлган диаметр йўналиши бу йўналишга қўшма бўлади.

Исбот.

$$\alpha(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+\beta(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0 \tag{78}$$

тўғри чизиқ йўналтируви вектори сифатида

$$\vec{e}=\{\alpha a_{12}+\beta a_{22},-\alpha a_{11}-\beta a_{12}\}$$

векторни олиш мумкин. Шу вақтнинг ўзида

$$(\alpha,\beta)U=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=(\alpha a_{11}+\beta a_{12},\alpha a_{12}+\beta a_{22})$$

Шунинг учун (82) мувофиқ

$$(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha a_{12}+\beta a_{22}\\ -\alpha a_{11}-\beta a_{12}\end{pmatrix}=\alpha^2 a_{11}a_{12}+\alpha\beta a_{12}^2+\alpha\beta a_{11}a_{12}+\beta^2 a_{12}a_{22}-$$

$$-\alpha^2 a_{11}a_{12}-\alpha\beta a_{11}a_{12}-\alpha\beta a_{12}^2-\beta^2 a_{12}a_{22}=0$$

$\vec{e}$ вектор $\{\alpha,\beta\}$ векторга қўшма. 41.6-жумла исботланди.

41.7-жумла. Марказли Г чизиқ учун марказдан ўтувчи асимптотик бўлмаган йўналишли ихтиёрий тўғри чизиқ бирорта йўналишга қўшма бўлган диаметр бўлади.

Исбот. $\vec{a}$ - асимптотик бўлмаган йўналишли берилган l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлсин. 41.5-жумлага мувофиқ $\vec{a}$ векторга қўшма бўлган пропорционаллик аниқлигида ягона $\vec{b}$ вектор мавжуд. $\vec{b}$ вектор асимптотик цўналишда бўлиши мумкин эмас, чунки акс ҳолда унга энг камида иккита ҳар хил $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ йўналишлар қўшма бўлган бўлар эди. 41.3-жумлага мувофиқ мавжуд бўлган $\vec{b}$ йўналишга қўшма бўлган *m* диаметрни қарайлик. Унда 41.6-жумлага кўра $\vec{a}$ вектор *m* тўғри чизиқ учун йўналтирувчи вектор бўлади. Бундан ташқари *m* диаметр Г чизиқ марказидан ўтади ва демак *l* тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. 41.7-жумла исботланди.

42§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ БОШ ЙЎНАЛИШЛАРИ ВА БОШ ДИАМЕТРЛАРИ. ЎҚ СИММЕТРИЯЛАРИ.

Бош йўналишлар.

42.1-таъриф. Агарда $\{\alpha,\beta\}$ йўналиш бирорта унга қўшма бўлган йўналишга перпендикуляр бўлса $\{\alpha,\beta\}$ йўналишни Г иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналиши деб аталади.

Ҳар қандай йўналишига хусусан перпендикуляр йўналишига ҳм қўшма бўлгани сабабли махсус йўналиш бош йўналишга мисол бўлади. Текисликда тўғри бурчакли координаталар системасини қараймиз ва F(*x*,*y*)=0 умумий тенглама билан берилган Г чизиқ $\{\alpha,\beta\}$ йўналишларини топайлик. Агар $\{\alpha,\beta\}$ вектор бош йўналишга эга бўлса, у ҳолда у перпендикуляр $\{-\beta,\alpha\}$ векторга қўшмадир. Унда йўналишларнинг

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}\left(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2\right) + a_{22}\beta_1\beta_2 = 0 \qquad (81)$$

қўшмалик шарти қуйидаги тарзда кўринишни олади:

$$-a_{11}\alpha\beta + a_{12}\left(\alpha^2 + \beta(-\beta)\right) + a_{22}\beta\alpha = 0$$

ёки

$$a_{12}\alpha^2 + \left(a_{22} - a_{11}\right)\alpha\beta - a_{12}\beta^2 = 0 \qquad (84)$$

Демак, тўғри бурчакли координаталар системасида Г чизиқнинг ҳамма $\{\alpha,\beta\}$ бош йўналишлари (84) тенгламадан топилади.

$$x^2 + y^2 = c \qquad (85)$$

каноник тенгламага эга бўлган чизиқни умумлашган айлана деб атаймиз.

Агар c>0 бўлса, у ҳолда бу радиус $\sqrt{c}$ бўлган айлана, агар c=0 бўлса, нол радиусли айлана (бизнинг ифодаларимизда мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги), агар c<0 бўлса, мавҳум радиусли айлана (мавҳум айлана)дир.

Бошқа тўғри бурчакли координаталар системасида умумлашган айлана тенгламаси (85) тенгламадан фақат биринчи ва нолинчи даражали ҳадлари билангина фарқ қилиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам биз биламизки бунда янги координаталар системасига ўтишда квадрат қисмининг матрицаси

$$U' = C^*UC$$

қоида бўйича ўзгаради. U=E, C эса битта тўғри бурчакли координаталар системасидан бошқасига ўтиш матрицаси каби ортогонал матрицадир. Демак

$$U' = C^*\mathrm{E}C = C^*C = C^{-1}C = E$$

Шундай қилиб тўғри бурчакли координаталар системасида иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламаси умумлашган айлана тенгламаси бўлади шунда ва фақат шунда қачонки

$$a_{11} = a_{22}\ , \qquad a_{12} = 0 \tag{86}$$

Шунинг учун (84) тенгламадан ушбу жумла келиб чиқади.

42.2-жумла. Ихтиёрий умумлашган айлана учун ихтиёрий йўналиш бош йўналиш бўлади. Бу билан бир қаторда ушбу жумла ҳам ўринли.

42.3-жумла.Агар Г иккинчи тартибли чизиқ умумлашган айлана бўлмаса, у ҳолда унинг нақ иккита ўзаро перпендикуляр бош йўналишлари мавжуд.

Исбот. Агар $a_{12} = 0$ бўлса, у ҳолда (84) тенглама пропорционаллик аниқлигида иккита ечимга эга:

$$\{\alpha : \beta\} = \{1:0\}\ , \qquad \{\alpha : \beta\} = \{0:1\} \tag{87}$$

Агарда $a_{11} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\beta \neq 0$ чунки $\{\alpha, \beta\} = \{0,0\}$. (84) тенгламани β^2 га бўлиб

$$a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(a_{22} - a_{11}\right)\frac{\alpha}{\beta} - a_{12} = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз ва уни ечамиз

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(a_{11}-a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}} \qquad (88)$$

ечимни топамиз. Бевосита текширишлар шуни кўрсатадики, бунда

$$\{\alpha_1,\beta_1\}=\left\{a_{11}-a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2},2a_{12}\right\}$$

ва

$$\{\alpha_2,\beta_2\}=\left\{a_{11}-a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2},2a_{12}\right\}$$

векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг яъни ҳосил қилинган бош йўналишлар перпендикулярдир. Ҳақиқатан ҳам

$$\{\alpha_1,\beta_1\}\cdot\{\alpha_2,\beta_2\}=(a_{11}-a_{22})^2-(a_{11}-a_{22})^2-4a_{12}^2+4a_{12}^2=0$$

$$\{\alpha:\beta\}=\{1:0\}\ , \qquad \{\alpha:\beta\}=\{0:1\} \qquad (87)$$

муносабатлардан каноник тенгламалари билан берилган чизиқлар учун ($a_{12}=0$) бош йўналишлар – бу координата ўқлари йўналишдир.

Бош йўналишлар ва ўқ симметриялари.

Иккинчи тартибли чизиқ диаметрини агар унга перпендикуляр бўлган йўналишга қўшма бўлса бош диаметр деб аталади. Бош диаметр йўналиши равшанки бош йўналиш бўлади. Тескариси нотўғри, махсус йўналишга перпендикуляр йўналиш бош йўналиш бўлади аммо бош диаметр йўналишидан иборат эмас. Шу вақтнинг ўзида ушбу жумла ўринли.

42.5-жумла. Марказли Г чизиқ учун ҳар қайси бош йўналш бош диаметрнинг йўналиши бўлади.

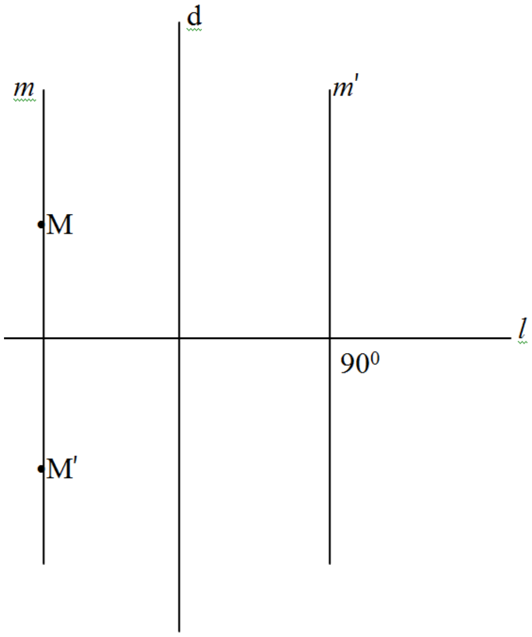
Исбот. 41.7-жумлага мувофиқ бунда бош йўналиш бўлмаслигини ишонч ҳосил қилиш етарли. Аммо бош қўналишга перпедикуляр йўналиш қўшма ва шу вақтнинг ўзида 41.5-жумлага кўра марказли чизиқнинг асимптотик йўналиши ўзига ўзи қўшма.

41.3-жумлага мувофиқ бош диаметрда перпендикуляр йўналишдаги барча ватарларнинг ўрталари ётади. Шунинг учун бош диаметр иккинчи тартибли чизиқнинг симметрия ўқи бўлади.

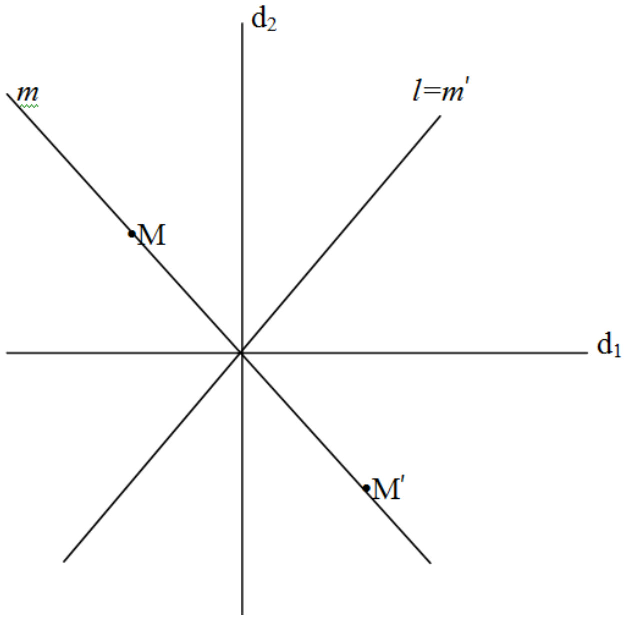
Энди тескари масалани ечайлик. Биттадан кўпроқ ҳақиқий нуқталарни ўз ичига олувчи Г иккинчи тартибли чизиқнинг ҳамма ўқ симметрияларини топайлик. Бас шундай Г чизиқ ўқ симметрияси *l* тўғри чизиқ бўлсин. Энг аввал *l* тўғри чизиқга перпендикуляр бўлган $\{\alpha,\beta\}$йўналиш асимптотик йўналиш бўлмасин. Шартга кўра $\{\alpha,\beta\}$ йўналиш барча ватарлари ўрталари *l* тўғри чизиқда ётади. Иккинчи томондан улар $\{\alpha,\beta\}$ йўналишга қўшмабўлган *m* диаметрда ётади. Г чизиқ биттадан кўпроқ нуқталарни ўз ичига олгани туфайли бу ердан *l* ва *m* тўғри чизиқларнинг устма-уст тушиши келиб чиқади. Энди *l* тўғри чизиқга перпендикуляр йўналиш асимптотик йўналиш бўлсин. Г чизиқ *l* тўғри чизиқда бутунлай ётиши мумкин эмас бу ҳолда Г чизиқ устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлгани учун асимптотик йўналиш *l* тўғри чизиқга параллел бўлган бўлар эди.

Г чизиқда *l* тўғри чизиқда ётмаган М нуқтани оламиз. Унда *l* тўғри чизиқга нисбатан унга симметрик M' нуқта ҳам Г чизиқга тегишли бўлади, чунки *l* тўғри чизиқ Г чизиқнинг симметрия ўқидир. М ва M' нуқталар орқали ўтувчи *m* тўғри чизиқ бутунлай Г чизиқда ётади, чунки у асимптотик йўналишга эга ва Г чизиқ билан энг камида иккита нуқтада кесишади. Демак Г чизиқ иккита *m* ва *m’* кечишувчи, параллел ёки устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади. Иккинчи *m’* тўғри чизиқ *l* тўғри чизиқга оғма бўлиши мумкин эмас, чунки бу ҳолда улардан бири *l* тўғри чизиқга перпендикуляр, бошқаси эса оғма бўлган *m* ва *m’* тўғри чизиқлардан ташкил топган чизиқга *l* тўғри чизиқ ўқ симметриясига бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун *m’* тўғри чизиқ ё *l* тўғри чизқга перпендикуляр ёки у билан устма-уст тушади. Биринчи ҳолда Г чизиқ иккита параллел (устма-уст тушувчи бўлиши ҳам мумкин) тўғри чизиқлардан ташкил топган (53-расм).

Унда бу тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ Г чизиқнинг ўқ симметрияси бўлади. Бундан ташқари уларнинг ягона (бош) диаметри d - *m* ва *m’* тўғр чизиқлар орасидаги ўрта тўғри чизиқ ҳам шунингдек Г чизиқнинг ўқ симметрияси бўлади. Иккинчи ҳолда Г чизиқ перпендикуляр *m* ва $m'=l$ тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат (54-расм). Бу тўғри чизиқларнинг ҳар қайсиси Г чизиқнинг ўқ симметрияси бўлади. Бундан ташқари l ва m тўғри чизиқлар ташкил топган иккита вертикал тўғри бурчакли жуфтлигининг d_1 ва d_2 биссектриссалари ҳам шунингдек Г чизиқнинг ўқ симметриялари бўлади. Бу биссектриссалар ўзаро қўшма бўлган бош диаметрлар бўлади. Демак, биз ушбуни исботладик.



53-расм



54-расм

42.6-теорема. Г иккинчи тартибли чизиқ биттадан кўпроқ ҳақиқий нуқтани ўз ичига олган бўлси. Унда

1) агар Г чизиқ параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги ёки устма-*уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлса, у ҳолда у чексиз кўп ўқ симметрияларга эга, улардан бири бош диаметр бўлади;

2) агар Г чизиқ перпендикуляр тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат бўлса, у ҳолда у тўртта ўқ исмметриясига эга бўлиб, улардан иккитаси бош диаметр бўлади;

3) қолган барча ҳолларда бош диаметрлар ва фақат улар ўқ симметриялари бўлади.

Парабола ўқи. 42.6-теоремадан параболанинг ўқ симметрияси унинг бош диаметри бўлади. Каноник координаталар системасида $(a_{12}=0)$ координата ўқларининг йўналиши бош йўналишлар бўлади, улардан бири парабола учун асимптотик йўналиш бўлади. Демак *Ox* ўқи параболанинг ягона бош диаметри ва ягона ўқ симметрияси бўлади.

Энди ихтиёрий тўғри бурчакли координаталар системасида $a_{12} \neq 0$ деб фараз қилиб парабола ўқининг тенгламасини топайлик. Парабола учун $\delta = 0$ бўлганидан $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ эга бўламиз. Демак,

$$\left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a_{12}^2 = \left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a_{11}a_{22} = a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + 4a_{11}a_{22} = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 = \left(a_{11} + a_{22}\right)^2$$

демак,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(a_{11} - a_{22}\right) \pm \sqrt{\left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}} \tag{88}$$

тенглам ушбу кўринишни олади

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \left(a_{11} + a_{22}\right)}{2a_{12}}$$

Шунинг учун параболанинг бош йўналишлари

$$\{\alpha_1, \beta_1\} = \{a_{11}, a_{12}\} \ , \ \{\alpha_2, \beta_2\} = \{a_{22}, -a_{12}\}$$

лар бўлади. Бу йўналишлардан иккинчиси асимптотик йўнлишдир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\{\alpha_2, \beta_2\} U \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \left(a_{22} - a_{12}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{12} \end{pmatrix} = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2, a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}\right) \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}^2 - a_{12}^2a_{22} - a_{12}^2a_{22} + a_{12}^2a_{22} = a_{11}a_{22}^2 - a_{12}^2a_{22} = a_{22}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) = 0$$

Демак, $\{a_{11}, a_{12}\}$йўналишга қўшма бўлган диаметрни топиш қолди. Бизнинг ҳолда (78) тенглама шундай ёзилади:

$$\alpha\left(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}\right) + \beta\left(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}\right) = 0 \tag{78}$$

$$a_{11}\left(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}\right) + a_{12}\left(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}\right) = 0$$

ёки

$$\left(a_{11}^2 + a_{12}^2\right)x + a_{12}\left(a_{11} + a_{22}\right)y + a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} = 0$$

a_{12}^2 ни $a_{11}a_{22}$ га алмаштириб

$$\left(a_{11}^2 + a_{11}a_{22}\right)x + a_{12}\left(a_{11} + a_{22}\right)y + a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Парабола ҳолда

$$a_{11}+a_{22}=\delta\neq 0$$

шундай қилиб парабола ўқининг тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин

$$a_{11}x+a_{12}y+\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=0 \tag{89}$$

Параллел тўғри чизиқлар учун нима таалуқли бўлиши улар учун бош диаметр марказлар чизиғи бўлишидир. Шунинг учун (89) тенглама бу ҳолда анча содда кўринишга эга

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \tag{90}$$

Ҳақиқатан ҳам

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=0 \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

тенгликлардан $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$ пропорционаллик келиб чиқади. Унда эса тенглик $a_{12}a_{23}=a_{22}a_{13}$ келиб чиқади

$$\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=\frac{a_{11}a_{13}+a_{22}a_{13}}{a_{11}+a_{22}}=\frac{\left(a_{11}+a_{12}\right)a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=a_{13}.$$

43§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ ЖОЙЛАШУВИ.

Тўғри бурчак координаталар системасида ихтиёрий умумий тенглама билан берилган иккинчи тартибли чизиқнинг каноник тенгламасини ортогонал инвариантлар бўйича аниқлаш мумкин (34§). Иккинчи тартибли чизиқ ҳақида тўлиқ маълумотга эга бўлиш учун яна каноник координаталар системасининг ўқлари жойланишини топишни ўрганиш керак.

1. **Марказли ҳол**. $(\delta\neq 0)$. Бу ҳолда каноник тенгламаси

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0 \tag{91}$$

тенгламага пропорционалдир. Координата ўқларини

$$tg\varphi = \frac{a_1' - a_{11}}{a_{12}} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

бўлган φ бурчакга бурганимизда тенгламанинг квадрат қисми

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

кўринишни олишни аллақачон биламиз (32§ га қаралсин) сўнгра

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Системаданг аниқланувчи марказга координаталар бошини кўчирганимизда тенгламадаги биринчи даражали ҳадлар йўқолади ва у (91) кўринишни олади. Координата ўқларининг йўналишини қарама-қаршисига алмаштириш мумкин. Шунинг учун характеристик кўпҳаднинг λ_1 ва λ_2 илдизларини фақат тартиблаш қолади.

$\delta = a_{11}a_{22}$, $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}$, $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$ бўлганидан (91) тенглама

$$\frac{x'^2}{\lambda_2} + \frac{y'^2}{\lambda_2} + \frac{\Delta}{\delta^2} = 0$$

тенгламага пропорционал. Шунинг учун эллиптик ҳолда

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \qquad (92)$$

тенгсизлик бажарилиши керак, чунки фокуслар $O'x'$ ўқда ётади деб ҳисоблаймиз. Гипербола учун

$$\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 \qquad (93)$$

тенглик ўринли бўлиши керак. Кесишувчи тўғри чизиқлар учун λ_1 ва λ_2 танлаш муҳим аҳамият касб этмайди, шунга қарамасдан аниқлик учун кесишувчи тўғри чизиқларнинг каноник тенгламасида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$a^2 \ge b^2$ шарт бажарилади деб фараз қилинади. Бу ҳолда (92) шартдан фойдаланиш мумкин.

Мисол Г иккинчи тартибли чизиқ тўғри бурчакли координаталар системаси *Oxy* да

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

тенглама берилган бўлсин.

Унда

$$U=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 8\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -6\\ 3 & 8 & -13\\ -6 & -13 & 11\end{pmatrix}$$

$$\delta=|U|=-9<0 \quad \text{(гиперболик ҳол)}$$

$$\Delta=|A|=\det A=\begin{vmatrix}0 & 3 & -6\\ 3 & 8 & -13\\ -6 & -13 & 11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & -6\\ 3 & 8 & -13\\ 0 & 3 & -15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 8 & 3\\ 0 & 3 & -9\end{vmatrix}=81 \qquad \delta=0+8=8$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 3\\ 3 & 8-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda-9$$

Характеристик кўпҳад 9, -1 илдизларга эга (93) шартга кўра $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-1$. Шундай қилиб Г гиперболанинг каноник тенгламаси ушбу кўринишга эга, (91) формулага мувофиқ

$$9x'^2-y'^2+\frac{81}{-9}=0$$

$$9x'^2-y'^2-9=0$$

$$9x'^2-y'^2=9$$

$$x'^2-\frac{y'^2}{9}=1$$

$O'x'$ ўқнинг Ox ўқга оғиш бурчаги φ учун ушбуга эга бўламиз

$$tg\varphi=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=\frac{9-0}{3}=\frac{9}{3}=3$$

марказни

$$\begin{cases}3y-6=0\\ 3x+8y-13=0\end{cases}$$

системадан топамиз

$$y=2 \quad 3x=-3 \quad x=-1$$

бу ердан янги координаталар боши O' ушбу координаталарга эга (-1; 2). Биз гиперболани тасвирлаш учун барча маълумотларга эга бўлдик (55-расмга қаралсин) $\frac{b}{a}=3$ бўлганидан асимптоталар $O'x'$ ўқига φ бурчак остида оғишган бўлиб унинг учун tgφ=3. Демак асимптоталардан бири горизонталдир. Гиперболанинг учлари янги O' координаталар бошидан *a*=1 масофада туради.

2. **Гиперболик ҳол** ($\delta=0$). Агар Г чизиқ параллел тўғри чизиқлардан иборат бўлса ($\Delta=0$) у ҳолда у

$$y'^2+\frac{k}{\delta^2}=0$$

каноник тенгламага эга бўлади. $O'x'$ ўқи марказлар тўғри чизиғи бўлади.

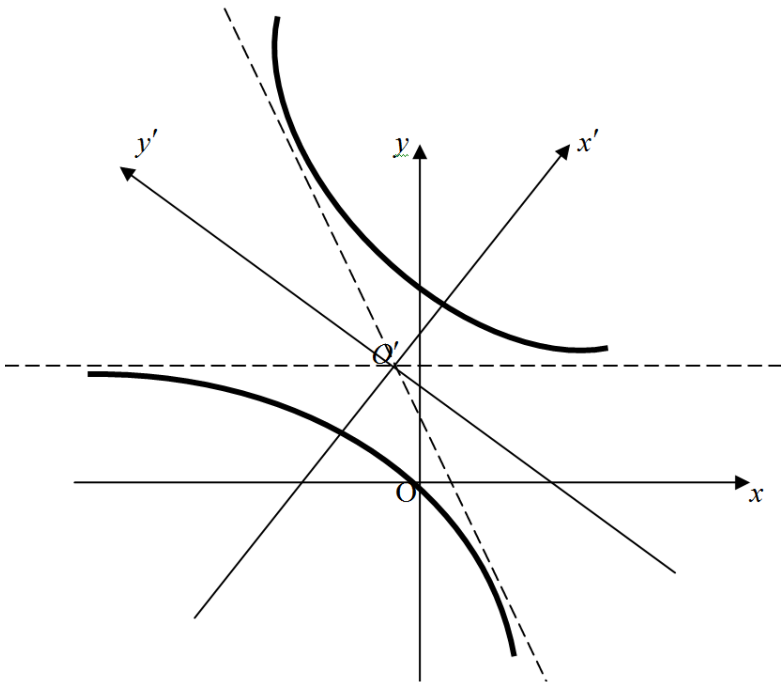
$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$$

Марказлар тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган ихтиёрий тўғри чизиқни $O'y'$ ўқи сифатида олиш мумкин. Агарда Г чизиқ парабола бўлса ($\Delta\neq 0$), у ҳолда у

$$y'^2=2\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta^2}}x'$$

каноник тенгламага эга бўлади. $O'x'$ ўқи параболанинг ўқ симметрияси бўлади

$$a_{11}x+a_{12}y+\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=0\,.$$



55-расм

Параболанинг учи ва янги O' координаталар боши ўқларнинг парабола билан кесишиш нуқталари бўлади. $O'y'$ ўқ эса параболанинг ўқига перпендикуляр ва унинг учи орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўлади. $O'y'$ ўқни ихтиёрий томонга ориентерлаш мумкин. Энди $O'x'$ ўқнинг мусбат йўналишини кўрсатиш қолди. Тўғри бурчакли координаталар системасида $O'x'$ ўқдаги мусбат векторнинг координаталарини параболанинг F(x,y)=0 умумий тенгламасининг коэффициентлари орқали ифодаловчи формулалар бор. Аммо биз уларни келтиришга киришмаймиз. Бунинг ўрнига параболанинг умумий тенгламасини каноник кўринишга алмаштирадиган ва каноник координаталар тизимига ўтиш формуласини топишга имкон берувчи усулни таклиф қиламиз. Бунинг учун конкрет мисол кўрамиз.

Мисол Г.чизиқ

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \tag{94}$$

тенглам билан берилган бўлсин. Тенгламанинг квадрат қисми тўла квадрат бўлади, демак биз параболик типдаги чизиқ билан иш кўрамиз. Унинг (89) ўқи ушбу кўринишга эга

$$x - 2y + \frac{1\cdot 2 - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{5} = 0$$

ёки

$$x - 2y + 1 = 0$$

$$y' = 0$$

тенгламага эга бўлган $O'x'$ ўқ эса ўқ симметрияси бўлади. Фараз қилайлик бунда

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + a_1$$

$$y' = c_{21}x + c_{22}y + a_2$$

формулалар нуқтанинг каноник координаталарини дастлабки координаталари орқали ифодаласин. Унда

$$c_{21}x + c_{22}y + a_2 = 0$$

тўғри чизиқ параболанинг ўқи бўлади. Демак шундай k пропорционаллик коэффициенти мавжудки бунда

$$c_{21}x + c_{22}y + a_2 = k\left(x - 2y + 1\right)$$

тенглик ўринлидир.

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

матрица ортогонал матрица бўлганидан $c_{21}^2+c_{22}^2=1$ тенгликга эга бўламиз бу ердан $k=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$c_{21}=k \quad c_{22}=-2k$$

$$1=c_{21}^2+c_{22}^2=k^2+4k^2=5k^2$$

$$k^2=\frac{1}{5}\Rightarrow k=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Бизнинг (94) тенгламадан $\frac{x-2y+1}{\pm\sqrt{5}}$ ифоданинг тўла квадратик ажратиб алмаштирамиз. Натижада ушбуга эга бўламиз

$$(x-2y+1)^2=x^2+4y^2+1-4xy+2x-4y$$

Бу ердан

$$x^2-4xy+4y^2=(x-2y+1)^2-(2x-4y+1)$$

$$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=(x-2y+1)^2-(2x-4y+1)+4x-3y-7=$$

$$=5\frac{(x-2y+1)^2}{\left(\pm\sqrt{5}\right)^2}-(2x-4y+1)+4x-3y-7=5\left(\frac{x-2y+1}{\pm\sqrt{5}}\right)^2-(2x-4y+1)+4x-3y-7=0$$

ёки

$$5\left(\frac{x-2y+1}{\pm\sqrt{5}}\right)^2=-2x-y+8$$

Бу тенгламанинг чап томони x' га пропорционал ва пропорционаллик коэффициенти мусбатдир С матрицанинг ортогоналлигидан ушбу келиб чиқади

$$x'=k_1(-2x-y+8)$$

$$c_{11}x+c_{12}y+a_1=-2k_1x-k_1y+8k_1$$

$$c_{11}=-2k_1$$

$$c_{12}=-k_1$$

$$a_1=8k_1$$

$$1=c_{21}^2+c_{22}^2=k_1^2+4k_1^2=5k_1^2$$

$$\left.\begin{array}{l}5k_1^2=1\\ k_1>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k_1^2=\dfrac{1}{5}\\ k_1>0\end{array}\right\}\Rightarrow k_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Демак

$$x'=\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}}$$

Шундай қилиб (94) тенглама ушбу кўринишга эга

$$5\left(\frac{x-2y+1}{\pm\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{5}\left(\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}}\right)$$

янги

$$x'=\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}}$$

$$O'(3;2)\ \text{ экан }\ x'=\frac{x-2y+1}{\pm\sqrt{5}}$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$$

$$\left(\frac{1}{\pm\sqrt{5}}\right)^2+\left(-\frac{2}{\pm\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1}{\pm\sqrt{5}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{-2}{\pm\sqrt{5}}\right)=0$$

тўғри бурчакли координаталар системасига ўтамиз. Бу координаталар системасида парабола ушбу тенгламага эга бўлади

$$5y'^2=\sqrt{5}x'\ \text{ ёки }\ y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$$

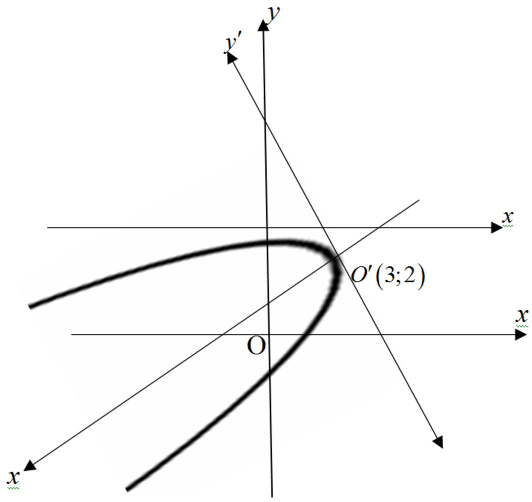
параболанинг параметри $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ га тенг.

Энди параболанинг жойлашиши ҳақида айтайлик. C* матрицанинг устунларида ёки C матрицанинг сатрларида $O'x'y'$ каноник координаталар системасини аниқловчи $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ репернинг ортонормал векторлари координаталари туради. Демак

$$\vec{e}_1' = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\},$$

$$\vec{e}_1' = \left\{ \pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \mp\frac{2}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Параболанинг жойланиши 56-расмда тасвирланган. $O'y'$ ўқнинг мусбат йўналишини ихтиёрий танлаш мумкин.



56-расм

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 8 = 0$

Ечиш.

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4 & 5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -8 \end{pmatrix} \qquad \delta = |U| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 16 = 9 > 0$$

Г эллиптик типдаги чизиқ

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4 & 5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 9 & 5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -8 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -8 \end{vmatrix} =$$

$$=9\begin{vmatrix}1 & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -8\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1 & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & -9\end{vmatrix}=9\cdot(-9)=-81$$

Характеристик кўпҳад

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-16=25-10\lambda+\lambda^2-16=\lambda^2-10\lambda+9$$

$$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=9 \quad |\lambda_1|\le|\lambda_2|$$

илдизларга эга. Шундай қилиб

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0 \qquad (91)$$

формулага мувофиқ Г чизиқ тенгламаси ушбу кўринишга эга

$$x'^2+9y'^2+\frac{-81}{9}=0$$

$$x'^2+9y'^2-9=0$$

$$x'^2+9y'^2=9$$

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{1}=1$$

Бу ярим ўқлари a=3 ва b=1 бўлган эллипснинг каноник тенгламасидир $O'x'$ ўқнинг Ox ўқга φ оғиш бурчаги учун

$$tg\varphi=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=\frac{1-5}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$\varphi=-45^0$ эга бўламиз. Марказни

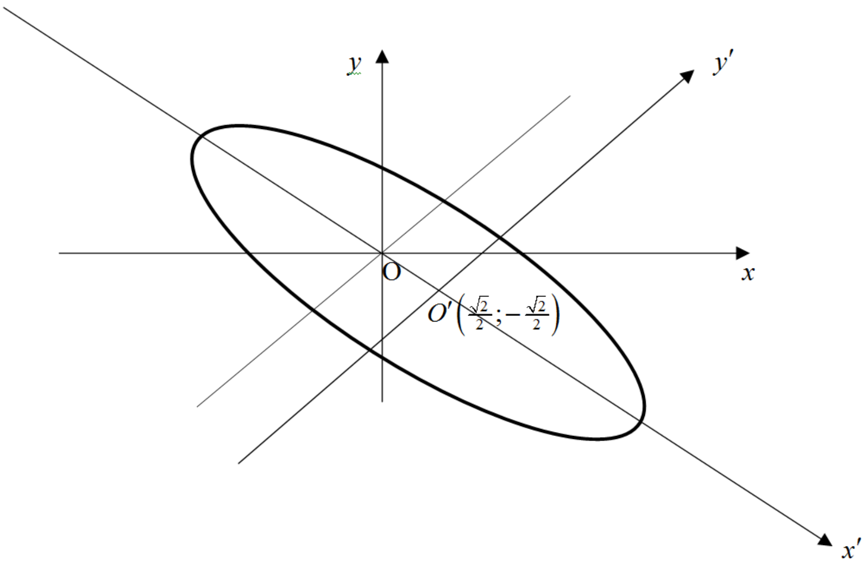
$$\begin{cases}5x+4y-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\\ 4x+5y+\frac{\sqrt{2}}{2}=0\end{cases}$$

системадан топамиз

$$\begin{cases} 5x+4y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 4x+5y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+8y=\sqrt{2} \\ 8x+10y=-\sqrt{2} \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}=100-64=36$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 8 \\ -\sqrt{2} & 10 \end{vmatrix}=10\sqrt{2}+8\sqrt{2}=18\sqrt{2} \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 8 & \sqrt{2} \\ 10 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}=-10\sqrt{2}-8\sqrt{2}=-18\sqrt{2}$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{18\sqrt{2}}{36}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-18\sqrt{2}}{36}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



2-мисол. $2y^2+4x-8y+9=0$

$y^2+2x-4y+\dfrac{9}{2}=0$

$(y-2)^2+2x+\dfrac{9}{2}-4=0$

$(y-2)^2+2x+\dfrac{1}{2}=0$

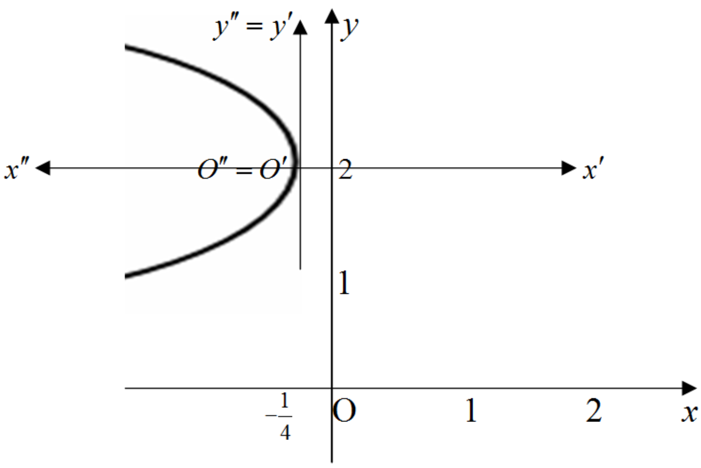
$(y-2)^2+2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)=0$

$y'=y-2 \qquad x'=x+\dfrac{1}{4}$

$y=y'+2 \qquad x=x'-\dfrac{1}{4}$

$y'^2=-2x' \qquad y'=y'' \qquad x''=-x'$

$y''^2=2x'' \quad y''^2=y-2 \qquad x''=-x-\dfrac{1}{4}$



3-мисол. $4y^2+4xy+y^2-15=0$

$$U=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \delta=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=4+4=8 \qquad A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -15\end{pmatrix}$$

$$\Delta=-15\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-15\cdot 8=-120$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-4=4-\lambda-4\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)$$

Характеристик кўпҳад илдизлари $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$.

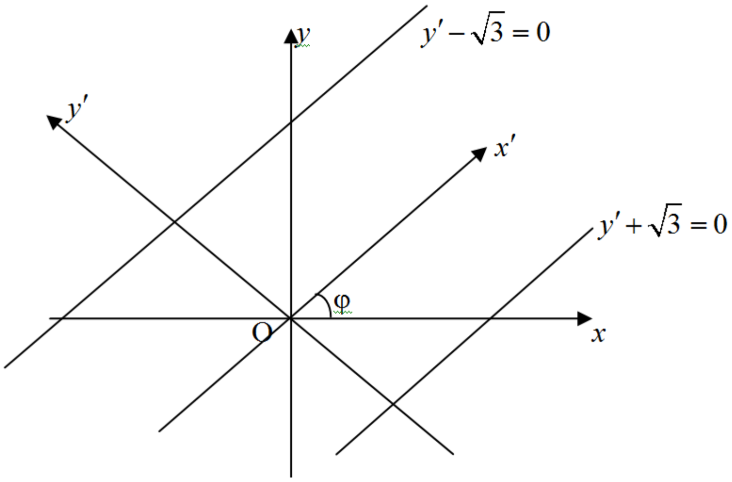
$$tg\varphi=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=\frac{0-4}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$$

(91) тенгламага мувофиқ

$$0\cdot x'^2+5y'^2-\frac{120}{8}=0$$

$$5y'^2-15=0 \quad y'^2-3=0 \quad y'^2=3$$

$$\left(y'-\sqrt{3}\right)\left(y'+\sqrt{3}\right)=0$$



Демак Г чизик $y'-\sqrt{3}=0$ ва $y'+\sqrt{3}=0$ параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлади.

4-мисол.

$x^2+xy-2y^2+5x-5y=0$.

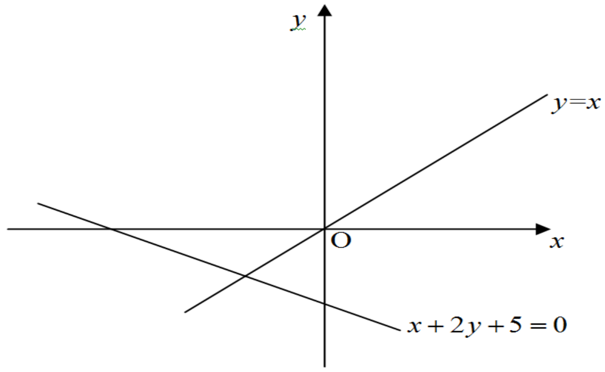
Бу тенгламани қуйидагича ёзамиз

$$x^2+2xy+5x-xy-2y^2-5y=0$$

$$x^2+2xy+5x-\left(xy+2y^2+5y\right)=0$$

$$x\left(x+2y+5\right)-y\left(x+2y+5\right)=0$$

$$\left(x-y\right)\left(x+2y+5\right)=0$$



Берилган чзиқ кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ажралади:

$y=x$, $\quad x+2y+5=0$

V БОБ.
АФФИН АЛМАШТИРИШЛАР.
44§. АЛМАШТИРИШЛАР.

44.1-таъриф. Ихтиёрий $f: X \to X$ биекция, яъни X тўпламни ўзининг устига ўзаро бир қийматли акслантириш X тўпламни ўзига алмаштириш деб аталади. Барча X тўпламни ўзига алмаштиришлар тўпламини $T_r(X)$ орқали белгилаймиз. Чекли тўпламнинг алмаштиришини унинг ўрнига қўйиш ёки ўрин алмаштириш деб аталади. *N* та элементдан ташкил топган чекли тўпламнинг барча ўрнига қўйишлар тўплами *n*-даражали симметрик δ_n гуруҳ деб аталувчи гуруҳ ташкил қилади. G – $T_r(X)$ гуруҳнинг қисм гуруҳи бўлсин. Y_1 тўпламни Y_2 тўплам устига акс эттирувчи $g \in G$ алмаштириш мавжуд бўлса, $Y_1, Y_2 \subset X$ тўпламлар G эквивалент бўлади деб айтамиз. $g(Y_1) = Y_2 \Leftrightarrow Y_1 \sim Y_2$.

44.2-жумла. X тўпламнинг барча қисм тўпламлар тўплами H(X) да G-эквивалентлик муносабати бўлади.

Исбот. Агар ихтиёрий $Y \in P(X)$ ни олиб $g \in G$ сифатида $id_x \in G$ ни олсак

$$id_x(Y) = Y \Leftrightarrow Y \sim Y$$

Энди $Y_1 \sim Y_2$ бўлсин. У =олда шундай $g \in G$ мавжудки $g(Y_1) = Y_2$ бўлади. Унда $g^{-1} \in G$ бўлиб $g^{-1}(g(Y_1)) = g^{-1}(Y_2)$. Бундан $g^{-1}(Y_2) = Y_1$ яъни $Y_2 \sim Y_1$ симметрик хосса ўринли.

Агар $Y_1 \sim Y_2$ ва $Y_2 \sim Y_3$ бўлса, шундай $g_1 \in G$ ва $g_2 \in G$ биекциялар мавжудки

$$g_1(Y_1) = Y_2, \; g_2(Y_2) = Y_3$$

булардан

$$g_2(Y_2) = g_2(g_1(Y_1)) = Y_3 \text{ яъни } (g_2 g_1)(Y_1) = Y_3,$$

$$g_2 g_1 \in G$$

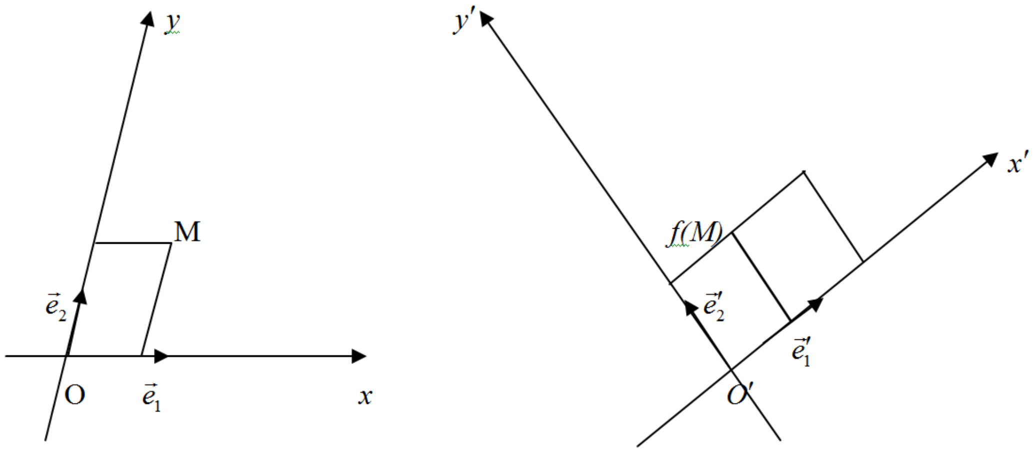
бундан ва $(g_2 g_1)(Y_1) = Y_3$ тенгликдан $Y_1 \sim Y_3$ муносабатни оламиз, транзитивлик хосса ўринли.

Демак $Y_1 \sim Y_2$ (G – эквивалентлик) ҳақиқатан ҳам эквиалентлик муносабат экан. Шундай қилиб P(X) тўплам ўзаро G эквиалент бўлган қисм тўпламларнинг синфларига ажралади. Шу билан бирга G гуруҳ қанча катта бўлса G – эквивалент синф ҳм шунча катта, ўзаро “ўхшаш” фигуралар шунча кўп бўлади. Геометрияда ҳар хил алмаштиришлар гуруҳи кўрилади. Мактабда ўрганиладиган Эвклид геоемтрияси фгураларнинг шундай хоссаларини текширадики улар ҳаракатларда (изометрияларда) ўзгармайди. Фигураларнинг бирини иккинчисига ҳаракат алмаштириш билан ўтказиш мумкин бўлса тенг фигуралар деб аталади.

Аналитик геометрияда изометрик алмаштиришлар билан бир қаторда шунингдек аффин ва проектив алмаштиришлар кўрилади.

45§. АФФИН АЛМАШТИРИШЛАРНИНГ ТАЪРИФИ ВА ХОССАЛАРИ.

45.1-таъриф. Агар шундай иккита $Ox_1...x_n$ ва $O'x'_1...x'_n$ аффин координаталар системаси мавжуд бўлсаки $M \in E^n$ ихтиёрий M нуқтанинг биринчи системасидаги координаталари унинг *f*(M) аксининг иккинчи системасидаги кординаталари билан устма-уст тушса $f: E^n \to E^n$, *n*=1,2,3 тўғри чизиқнинг, текисликнинг ёки фазонинг алмаштиришни аффин алмаштириш деб аталади (57-расмга қаралсин). Бу ҳолда *f* аффин алмаштириш иккита $Ox_1...x_n$ ва $O'x'_1...x'_n$ аффин координаталар системаси билан ёки иккита $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ ва $O'\vec{e}'_1...\vec{e}'_n$ аффин репер билан ассоцирланган деб атаймиз. Биз $\lambda = E^2$ текисликнинг аффин алмаштиришларини тўла текширамиз. Шу билан бирга баъзан ясси ва фазовий ҳоллардаги фарқларни муҳокама қилиб тўғри чизиқ, текислик ва фазо учун умумий бўлган аффин алмаштиришларининг хоссаларига тўхталамиз.



57-расм

45.2. Аффин алмаштириш билан юзага келган векторларни алмаштириш.

f иккита $Ox_1...x_n$ (эски) ва $O'x_1'...x_n'$ (янги) координаталар системаси билан ассоцирланган текисликнинг (фазонинг) аффин алмаштиришлари бўлсин. $\overrightarrow{MN}$ векторни қарайлик. Векторнинг координаталари унинг охирининг координаталаридан унинг бошининг координаталарини айиришдан ҳосил қилингани туфайли $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ векторнинг янги реперга нисбатан координаталари $\overrightarrow{MN}$ векторнинг эски репердаги координаталари билан бир хил бўлади.

Шундай қилиб

$$f\left(\overrightarrow{MN}\right)=\overrightarrow{f(M)f(N)} \qquad (1)$$

тенглик билан аниқланувчи $f:Vect(n)\to Vect(n)$ акслантиришни ҳосил қилдик. f акслантириш шунингдек $\vec{a}$ вектор координаталари ва унинг $f(\vec{a})$ акси координаталари тенглигидан ҳам аниқланади (ҳар хил реперларда) шунинг учун 1-таъриф $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ векторнинг қўйилиш нуқтасига боғлиқ эмас. f акслантириш векторлар координаталари ва акслари координаталари тенгликларидан аниқланганлиги сабабли у $Vect(n)$ фазони ўзининг устига изоморфизм бўлади.

Аниқроғи f акслантириш иккита

$$g:Vect(n)\to R^n \quad \text{ва} \quad h:R^n\to Vect(n)$$

изоморфизмларнинг композицияси бўлади. Биринчи g изоморфизм $\vec{a} \in Vect(n)$ векторга унинг координаталар нисбатини мос қилиб қўяди, эски реперда, иккинчи h изоморфизм эса янги реперда $(x_1,...,x_n) \in R^n$ сонлар наборини $x_1,...,x_n$ координатали векторга ўтказади. f изоморфизмни *f* аффин акслантириш билан юзага келган чизиқли акслантириш деб аталади.

45.3-жумла. $f: E^n \to E^n$ аффин алмаштириш ва $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ - E^n даги ихтиёрий репер бўлсин. Унда $f(0)f(\vec{e}_1)...f(\vec{e}_n)$ - бу шундай ягона реперни бунда *f* алмаштириш $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ ва $f(0)f(\vec{e}_1)...f(\vec{e}_n)$ реперлар билан ассоцирланади.

Исбот. f чизиқли акслантириш изоморфизм бўлгани сабабли чизиқли боғланмаган кеторлар системасини чизиқли боғланмаган векторлар системасига ўтказади, $f(0)f(\vec{e}_1)...f(\vec{e}_n)$ репердир. M - $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ реперда $(x_1,...,x_n)$ координатали ихтиёрий нуқта бўлсин. Бу эса

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$$

бўлишини англатади.

f акслантиришнинг чизиқлилиги туфайли ушбуга эга бўламиз

$$\overrightarrow{f(0)\,f(M)} = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = x_1 f(\vec{e}_1) + ... + x_n f(\vec{e}_n)$$

Аммо бу тенглик *f(M)* нуқта $f(0)f(\vec{e}_1)...f(\vec{e}_n)$ реперда $(x_1,...,x_n)$ координаталарга эга бўлишига эквивалентдир.

f алмаштириш $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ ва $O'\vec{e}'_1...\vec{e}'_n$ репер билан ассоцирланадиган шундай $O'\vec{e}'_1...\vec{e}'_n$ репернинг ягоналигини текшириш қолди. $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ репердаги $(x_1,...,x_n)$ координатани M нуқта учун $O'\vec{e}'_1...\vec{e}'_n$ реперда шундай координатали ягона нуқта *f(M)* нуқта бўлади. Шунинг учун *f(0)* нуқта нол координаталарга эга бўлганидан O' нуқта билан устма-уст тушади. Сўнгра $\vec{e}_i = \overrightarrow{OM_i}$ бўлсин. Унда $f(\vec{e}_i) = f\left(\overrightarrow{OM_i}\right) = \overrightarrow{f(0)\,f(M_i)} = \overrightarrow{O'f(M_i)}$. Аммо $f(M_i)$ - янги реперда *i*-чи координатаси бирга тенг, қолган ҳамма координаталари нолга тенг бўлган ягона нуқтадир. Демак $f(M_i)$ - O' нуқтадан қўйилган $\vec{e}_i'$ векторнинг охири, яъни $f(\vec{e}_i)=\vec{e}_i'$, жумла исботланди.

45.4-жумла. Барча $f: E^n \to E^n$ аффин алмаштиришлар тўплами $T_r(E^n)$ гуруҳнинг E^n тўплам алмаштиришлар гуруҳи деб аталувчи қисм гуруҳ ҳосил қилади.

Исбот. Айний акслантириш ихтиёрий устма-уст тушувчи реперлар жуфтлиги билан ассоцирланади. Агар *f* алмаштириш $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ ва $O'\vec{e}_1'...\vec{e}_n'$ реперлар билан ассоцирланган бўлса, у ҳолда f^{-1} тескари алмаштириш $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ ва $O'\vec{e}_1'...\vec{e}_n'$ реперлар билан ассоцирланади. Агар f ва g – аффин алмаштиришлари бўлиб, улардан биринчиси $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ ва $O'\vec{e}_1'...\vec{e}_n'$ реперлар билан ассоцирланган бўлса, у ҳолда 45.3-жумлага мувофиқ иккинчиси $O'\vec{e}_1'...\vec{e}_n'$ ва $g(0)g(\vec{e}_1)...g(\vec{e}_n)$ реперлар жуфтлиги билан ассоцирланади. Жумла исботланди.

45.5-жумла. Аффин алмаштиришда

а) текислик текисликка ўтади;

б) текисликларнинг параллеллиги сақланади;

в) тўғри чизиқ тўғри чизиқга ўтади;

г) тўғри чизиқларнинг параллеллиги сақланади;

д) кесмани берилган нисбатда бўлиш сақланади.

Исбот. а) π - текислик бирорта аффин координаталар системаси *Oxyz* да A*x*+B*y*+C*z*+D=0 (2) тенглама билан берилган фазонинг барча нуқталар тўпламидан иборатдир. *f* аффин алмаштириши *Oxyz* ва $O'x'y'z'$ аффин координаталар системаси жуфтлиги билан ассоцирланган бўлсин. Унда текисликнинг акси *f(π)* ҳам $O'x'y'z'$ координаталар системасида худди A*x*+B*y*+C*z*+D=0 (2) тенглама билан тавсифланади яъни текислик бўлади.

б) π ва π' текисликларнинг параллеллиги уларнинг кесишмаслигига тенг кучли. f алмаштиришнинг биективлигидан $f(\pi)$ ва $f(\pi')$ текисликлар ҳам шунингдек кесишмаслги келиб чиқади.

в) *l* тўғри чизиқ бирорта аффин координаталар системаси *Oxyz* да

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$

тенглама билан берилган фазонинг барча нуқталар тўпламидан иборатдир. f алмаштириш $Oxyz$ ва $O'x'y'z'$ аффин координаталар системаси жуфтлиги билан ассоцирланган бўлсин. Унда тўғри чизиқнинг акси $f(l)$ ҳам $O'x'y'z'$ координаталар системасида худди шу $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ тенглама билан тавсифланади, яъни тўғри чизиқ бўлади. Фазода l тўғри чизиқ ҳар хил π_1 ва π_2 текисликларнинг кесишиш чизиғи бўлади

$$l=\pi_1\cap\pi_2 \quad f(l)=f(\pi_1\cap\pi_2)\subset f(\pi_1)\cap f(\pi_2)$$

а) бандни эътиборга олиб тескари алмаштириш f^{-1}га ўтиш

$$f^{-1}\left(f(\pi_1)\cap f(\pi_2)\right)\subset f^{-1}\left(f(\pi_1)\right)\cap f^{-1}\left(f(\pi_2)\right)=\pi_1\cap\pi_2=l$$

$$f^{-1}\left(f(\pi_1)\cap f(\pi_2)\right)\subset l$$

$$f(\pi_1)\cap f(\pi_2)\subset f(l)$$

эканлигини кўрсатади. Демак,

$$f(l)=f(\pi_1)\cap f(\pi_2).$$

Демак f – алмаштиришда тўғри чизиик тўғри чизиқга ўтишининг иккинчи исботи бўлади.

г) Текисликдаги l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг параллеллигига уларнинг кесишмаслигига тенг кучли. f алмаштиришнинг биективлигидан $f(l_1)$ ва $f(l_2)$ тўғри чизиқларнинг кесишмаслиги келиб чиқади. Яъни $f(l_1)$ ва $f(l_2)$ тўғри чизиқлар параллелдир.

Агар фазодаги l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар бир текисликда ётиб кесишмаса, у ҳолда улар параллелдир. Бу ҳолда $l_1\subset\pi$, $l_2\subset\pi$ ва $l_1\cap l_2=\varnothing$. Унда $f(l_1)\subset f(\pi)$, $f(l_2)\subset f(\pi)$ $l_1\cap l_2=\varnothing$ f – биективлигидан $f(l_1)\cap f(l_2)=\varnothing$. Демак $f(l_1)\,||\,f(l_2)$ бўлади.

Д) Агар $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$ вектор тенглик бажарилса, у ҳолда P нуқта MN кесмани λ нисбатда бўлади. f акслантиришнинг чизиқлилигига кўра ушбуга эга бўламиз

$$f\left(\overrightarrow{MP}\right)=f\left(\lambda\overrightarrow{PM}\right)=\lambda f\left(\overrightarrow{PM}\right)$$

бу эса $f\left(\overrightarrow{MN}\right)=\overrightarrow{f(M)f(N)}$ тенгликга асосан $\overrightarrow{f(M)f(\mathrm{P})}=\lambda\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{M})}$ тенгликга эквивалентдир, яъни f алмаштиришда кесмани берилган нисбатдан бўлиш сақланади. Жумла исботланди.

д) шарт аффин алмаштиришлари учун ўзига хос хусусият бўлиб ушбу жумла ўринлидир.

45.6-жумла. f алмаштириш аффин алмаштириш бўлади, шунда ва фақат шунда, қачонки у кесмани берилган нисбатда бўлишни сақласа.

Етарлилигининг исботи тривиаль бўлмаганлиги сабабли исботсиз келтирамиз.

45.4-теорема. Текисликнинг бир тўғри чизиқда ётмаган берилган O, M, N нуқталар учлигини шу текисликнинг бир тўғри чизиқда ётмаган бошқа O', M', N' нуқталар учлигига ўтказувчи текисликнинг ягона аффин алмаштириши мавжуд.

Исбот. Мавжудлигини текшириш учун $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперлар билан ассоцирланган f аффин алмаштиришини олиш етарли, бу ерда

$$\vec{e}_1=\overrightarrow{OM},\ \ \vec{e}_2=\overrightarrow{ON},\ \vec{e}_1'=\overrightarrow{O'M'},\ \vec{e}_2'=\overrightarrow{O'N'},\ \ f(O)=O',$$

$$f\left(\vec{e}_1\right)=f\left(\overrightarrow{OM}\right)=\overrightarrow{f\left(O\right)f\left(M\right)}=\overrightarrow{O'M'}=\vec{e}_1'\ ,$$

$$f\left(\vec{e}_2\right)=f\left(\overrightarrow{ON}\right)=\overrightarrow{f\left(O\right)f\left(N\right)}=\overrightarrow{O'N'}=\vec{e}_2'$$

Демак f аффин алмаштириш $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $f(0)f\left(\vec{e}_1\right)f\left(\vec{e}_2\right)$реперлар билан ассоцирланганлиги сабабли 45.3-жумлага мувофиқ, у ягонадир. Худди шундай фазонинг бир текисликда ётмаган берилган O, M, N, P нуқталар тўртлигини фазонинг бир текисликда ётмаган бошқа O', M', N', P' нуқталар тўртлигига ўтказувчи фазонинг ягона аффин алмаштириш мавжуд деган тасдиқ ўринлидир.

45.8. Аффин алмаштиришнинг аналитик ёзуви.

f текисликнинг аффин алмаштириши $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперлар билан ассойирланган бўлсин $\vec{e}_1\vec{e}_2$ базисдан $\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ базисга ўтиш матрицси $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ бўлсин. Бундан ташқари дастлабки Oxy координаталар системасида янги O'

координаталар бошни a_1 ва a_2 координаталари маълум бўлсин. Унда дастлабки репердаги ихтиёрий М нуқтанинг (x,y) координаталари ва унинг акси $M' = f(M)$ нинг (x', y') координаталари

$$\left.\begin{aligned} x' = c_{11}x + c_{12}y + a_1 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + a_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

муносабат билан боғланган. Ҳақиқатан ҳам, ушбуга эга бўламиз

$$\overrightarrow{O'M'} = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (4)$$

шунинг учун

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + (\vec{e}_1, \vec{e}_2)C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Демак

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM'} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\left[C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right]$$

Охирги ёзув (тенглик)

$$\left.\begin{aligned} x' = c_{11}x + c_{12}y + a_1 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + a_2 \end{aligned}\right\}$$

ёзувнинг вектор шаклдаги ёзувдан иборат экан.

Худди шундай f фазонинг аффин алмаштириши $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ реперлари билан ассоцирланган бўлсин. $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ базисдан $\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ базисга ўтиш матрицаси

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

бўлсин. Бундан ташқари дастлабки $Oxyz$ коорддинталар системасида янги O' координаталар бошининг a_1 , a_2 ва a_3 координаталари маълум бўлсин. Дастлабки репердаги М нуқтанинг координаталари (x,y,z) унинг акси $M' = f(M)$ нинг координаталари (x', y', z') орасидаги боғланишни топайлик

$$\overrightarrow{O'M'} = \left(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right) C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

шунинг учун

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right) C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (4')$$

Демак

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM'} = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)\left[C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right]$$

Охирги ёзув (тенглик)

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + a_1 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + a_2 \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + a_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

фазонинг аффин алмаштириши учун тўғри экн.

Аксинча $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ репер билан юзага келган текисликда Oxy координаталар системаси тайинланган бўлсин. f акслантириш М(x,y) нуқтани $f(M) = M'(x', y')$ нуқтага ўтказади бу ерда x', y'

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + a_1 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + a_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

тенглик билан берилади

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

Унда f акслантириш $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперлар билан ассоцирланган аффин алмаштириш булади, бу ерда O' нуқта (a_1,a_2) координаталарга эга

$$\left(\vec{e}_1', \vec{e}_2'\right) = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) C$$

Ҳақиқатан ҳам текисликнинг ихтиёрий N нуқтаси $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперларда мос равишда (ξ, η) ва (ξ', η') координаталарга эга бўлсин. Бу ҳолда бунда биз биламизки (23§ га қаралсин)

$$\left.\begin{aligned}\xi &= c_{11}\xi' + c_{12}\eta' + a_1\\ \eta &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + a_2\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

N нуқта сифатида $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперда (3) муносабат билан аниқланувчи (x', y') координаталарга эга бўлган *f(M)* нуқтани оламиз. $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперда унинг (ξ', η') координаталари (6) муносабатни қаноатлантиради

$$\left.\begin{aligned}x' &= c_{11}\xi' + c_{12}\eta' + a_1\\ y' &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + a_2\end{aligned}\right\}$$

Бу тенгликларни (3) тенгликлар билан таққослаб $\xi' = x$, $\eta' = y$ ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам

$$c_{11}x + c_{12}y + a_1 = c_{11}\xi' + c_{12}\eta' + a_1$$

$$c_{21}x + c_{22}y + a_2 = c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + a_2$$

$$c_{11}(x - \xi') + c_{12}(y - \eta') = 0$$

$$c_{21}(x - \xi') + c_{22}(y - \eta') = 0$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix} \neq 0$$

бўлганидан бир жинсли тенгламалар системаси фақат $x - \xi' = 0$ ва $y - \eta' = 0$ ечимларга эга, яъни $x = \xi'$ ва $y = \eta'$. Демак $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперда (*x*,*y*) координаталарга эга бўлган М нуқта $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперда (*x*,*y*) координаталарга эга бўлган *f(M)* нуқтага *f* акслантириш билан ўтказилади, мана шуни исботлаш талаб этилган эди.

Аксинча $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ репер билан юзага келган фазода *Oxyz* координаталар системаси тайинланган бўлсин. *f* акслантириш М(*x*,*y*,*z*) нуқтани $f(M) = M'(x', y', z')$ нуқтага ўтказади бу ерда x', y', z'

$$\left.\begin{aligned}x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + a_1\\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + a_2\\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + a_3\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

тенглик билан берилади

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{vmatrix} \neq 0$$

Унда f акслантириш $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3'$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ реперлар билан ассоцирланган аффин алмаштириш булади, бу ерда $O'(a_1, a_2, a_3)$ координаталарга эга

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)C$$

Ҳақиқатан ҳам текисликнинг ихтиёрий N нуқтаси $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ва $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ реперларда мос равишда (ξ, η, μ) ва (ξ', η', μ') координаталарга эга бўлсин. Бу ҳолда бунда биз биламизки (23§ га қаралсин)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= c_{11}\xi' + c_{12}\eta' + c_{13}\mu' + a_1 \\ \eta &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + c_{23}\mu' + a_2 \\ \mu &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + c_{33}\mu' + a_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

N нуқта сифатида $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ реперда (5) муносабат билан аниқланувчи (x', y', z') координаталарга эга бўлган *f(M)* нуқтани оламиз. $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$реперда унинг (ξ', η', μ') координаталари $(6')$ муносабатни қаноатлантиради

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}\xi' + c_{12}\eta' + c_{13}\mu' + a_1 \\ y' &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + c_{23}\mu' + a_2 \\ z' &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + c_{33}\mu' + a_3 \end{aligned}\right\}$$

Бу тенгликларни (5) тенгликлар билан таққослаб топамиз

$$\begin{aligned} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + a_1 &= c_{11}\xi' + c_{12}\eta' + c_{13}\mu' + a_1 \\ c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + a_2 &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + c_{23}\mu' + a_2 \\ c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + a_3 &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + c_{33}\mu' + a_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11}(x - \xi') + c_{12}(y - \eta') + c_{13}(z - \mu') &= 0 \\ c_{21}(x - \xi') + c_{22}(y - \eta') + c_{23}(z - \mu') &= 0 \\ c_{31}(x - \xi') + c_{32}(y - \eta') + c_{33}(z - \mu') &= 0 \end{aligned}$$

бир жинсли тенгламалар системасида

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлгани учун ягона нол ечимга эга, яъни $x - \xi' = 0$, $y - \eta' = 0$, $y - \mu' = 0$, яъни $x = \xi'$, $y = \eta'$, $y = \mu'$. Демак $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ реперда *(x,y,z)* координаталарга эга бўлган М нуқта $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ реперда (*x*,*y*,*z*) координаталарга эга бўлган *f(M)* нуқтага *f* акслантириш билан ўтказилади, мана шуни исботлаш талаб этилган эди.

45.9-эслатма. Агар $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ базисда

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + a_1 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + a_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

муносабат f алмаштиришнинг аналитик ёзувини берса, у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Формулалар бу алмаштириш билан юзага келган f чизиқли акслантиришнинг аналитик ёзувидан иборат бўлади, яъни $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ вектор $f(\vec{a}) = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ векторга ўтади. Ҳаққатан ҳам $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ деб $f(\vec{a}) = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{f(O)\,f(M)} = \overrightarrow{O'M'}$ кейин эса (4) тенгликдан фойдаланиш керак

$$f(\vec{a}) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$$

Худди шундай, агар $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + a_1 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + a_2 \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + a_3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

муносабат f аффин алмаштиришининг аналитик ёзувини берса, у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{aligned}\right\}$$

формулалар бу алмаштириш билан юзага келган f чизиқли акслантиришнинг аналитик ёзувидан иборат бўлади, яъни $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ вектор $f(\vec{a}) = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$ векторга ўтади.. Ҳақиқатан ҳам $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ деб $f(\vec{a}) = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{f(O)\,f(M)} = \overrightarrow{O'M'}$ эга бўламиз, кейин эса $(4')$ тенгликдан фойдаланиш керак

$$f\left(\vec{a}\right)=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\begin{pmatrix}c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z\\c_{21}x+c_{22}y+c_{23}z\\c_{31}x+c_{32}y+c_{33}z\end{pmatrix}=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3$$

46§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ АФФИН КЛАССИФИКАЦИЯЛАРИ (ТАВСИФЛАРИ).

Аффин алмаштириш таърифидан ва 45.3-жумладан ушбу жумла келиб чиқади.

46.1-жумла. Текисликнинг f аффин алмаштиришида Г иккинчи тартибли чизиқ *f(Г)* иккинчи тартибли чизиқга ўтади. Унинг устига ихтиёрий аффин координаталар системаси *Oxy* учун шундай $O'x'y'$ аффин координаталар системаси мавжудки, ундаги *f(Г)* чизиқнинг тенгламаси Г чизиқнинг *Oxy* координаталар системасидаги тенгламаси билан устма-уст тушади.

46.2-жумла. Иккинчи тартибли чизиқ маркази, асимптотик йўналиши ва асимптоталари аффин алмаштиришининг инвариантлари бўлади.

Бунда бу агар $f:E^n\to E^n$ - аффин алмаштириши; Г – иккинчи тартибли чизиқ% Р нуқта $\vec{a}$ вектор, l тўғри чизиқ мос равишда Г чизиқ маркази, асимптотик йўналиши, асиптотаси бўлса, у ҳолда $f\left(P\right)$, $f\left(\vec{a}\right)$, $f\left(l\right)$лар мос равишда *f(Г)* чизиқнинг маркази, асимптотик йўналиши асимптотатси бўлишини англатади. Номлари тилга олинган элементлар (маркази, асимптотик йўналиши, асимптоталари) берилган иккинчи тартибли чизиқнинг бир қийматли берилган тенгламаси билан ифодаланганлиги сабабли 46.2 жумла 46.1 жумладан бевосита келиб чиқади.

46.3-теорема. Ихтиёрий иккинчи тартибли чизиқ аффин алмаштириш воситасида, бирорта тўғри бурчакли координаталар системасида қуйидаги тенгламалар билан берилган чизиқлардан бирига ўтказилади

1) $x^2+y^2=1$;

2) $x^2 + y^2 = -1$;

3) $x^2 + y^2 = 0$;

4) $x^2 - y^2 = 1$;

5) $x^2 - y^2 = 0$;

6) $y^2 = x$;

7) $y^2 = 1$;

8) $y^2 = -1$;

9) $y^2 = 0$.

Исбот. Бу ерда ёзилган тенгламалар 33.1-теоремадан олинган каноник тенгламалари билан берилган

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, эллипс;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, мавҳум эллипс;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги;

4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, гипербола;

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги;

6) $y^2 = 2px$, парабола;

7) $y^2 - a^2 = 0$, параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги;

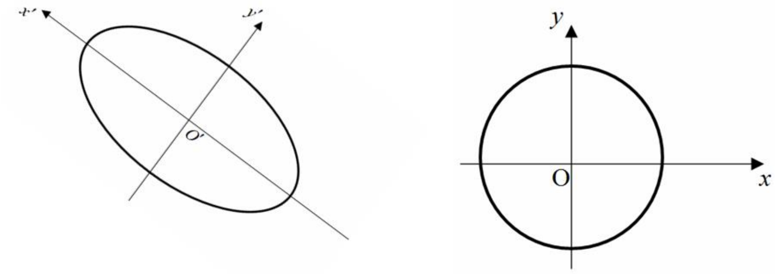
8) $y^2 + a^2 = 0$, мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги;

9) $y^2 = 0$, устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги,

чизиқларнинг содда кўринишдаги тенгламалардан иборат. 33.1-теоремадаг олинган 1)-9) чизиқларнинг ҳар қайсисини 46.3-теоремадан олинган шу номерли чизиқга ўтказувчи аффин алмаштиришини кўрсатиш керак. Исботни (1) тенглама) эллипс учун олиб борамиз. Демак Г эллипс бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчаклик координаталар системасида

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

тенглама билан берилган. Биз учун бошқа Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида $x^2+y^2=1$ тенглама билан берилган δ' айланага ўтказишимиз керак (58-расм)



58-расм

Биз излаётган f аффин алмаштиришни f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O''x''y''$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x''=\frac{x'}{a}=\frac{1}{a}x'+0y'+0$$

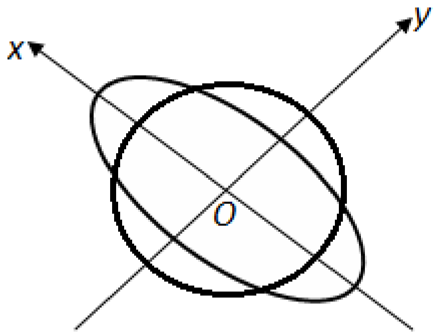
$$y''=\frac{y'}{b}=0x'+\frac{1}{b}y'+0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix}=\frac{1}{ab}\neq 0$$

Бунда Г эллипс $O'x'y'$ координаталар системасида $x''^2+y''^2=1$ тенглама билан берилган $\delta_0'=f_1(\Gamma)$ айланага ўтди. Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва Oxy координаталар системаси жуфтлиги билан ассоцирланган δ_0' ва δ' айланалар бу координаталар системасида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

тенглама билан берилган эллипс $f=f_1f_2$ аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $x^2+y^2=1$ тенглама билан берилган айланага ўтади. (59-расм). Бу ҳолда теорема исботланди.



59-расм.

Энди исботни (2) тенглама) мавҳум эллипс учун олиб борамиз. Демак Г мавҳум эллипс бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1$$

тенглама билан берилган. Биз уни бошқа *Oxy* тўғри бурчакли координаталар системасида $x^2+y^2=-1$ тенглама билан берилган мавҳум айланага ўтказишимиз керак. Изланаётган *f* аффин алмаштиришини f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O'x'y'$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x''=\frac{x'}{a}=\frac{1}{a}x'+0y'+0$$

$$y''=\frac{y'}{b}=0x'+\frac{1}{b}y'+0$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{vmatrix}=\frac{1}{ab}\neq 0$$

Бунда Г мавҳум эллипс $O'x'y'$ координаталар системасида $x''^2+y''^2=-1$ тенглама билан берилган мавҳум айланага ўтди. Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва *Oxy* координаталар системаси жуфтлиги билан ассоцирланган δ_0' ва δ' айланалар бу координаталар системасида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1$ тенглама билан берилган эллипс $f=f_1f_2$

аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $x^2+y^2=-1$ тенглама билан берилган мавҳум айланага ўтади. Теорема бу ҳолда исботланди.

Исботни (3) тенглама мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги учун олиб борамиз. Демак Г мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$$

тенглама билан берилган. Биз уни бошқа Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида $x^2+y^2=0$ мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтказишимиз керак. Изланаётган f аффин алмаштиришини f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O'x'y'$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x''=\frac{x'}{a}=\frac{1}{a}x'+0y'+0$$

$$y''=\frac{y'}{b}=0x'+\frac{1}{b}y'+0$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{vmatrix}=\frac{1}{ab}\neq 0$$

Бунда Г мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги $O'x'y'$ координаталар системасида $x''^2+y''^2=0$ тенглама билан берилган мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтди. Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва Oxy координаталар системаси жуфтлиги билан ассоцирланган, бунда ҳосил бўлган мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бу координаталар системасида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$ тенглама билан берилган мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги $f=f_1f_2$ аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $x^2+y^2=0$ тенглама билан берилган мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтади. Теорема бу ҳолда исботланди.

Энди исботни (4) тенглама) гипербола учун олиб борамиз. Демак Г гипербола бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$ тенглама билан берилган. Биз уни бошқа Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида $x^2-y^2=0$ билан берилган тенг томонли гиперболага ўтказишимиз керак. Изланаётган f аффин алмаштиришини f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O'x'y'$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x''=\frac{x'}{a}=\frac{1}{a}x'+0y'+0$$

$$y''=-\frac{y'}{b}=0x'-\frac{1}{b}y'+0$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{b}\end{vmatrix}=-\frac{1}{ab}\neq 0$$

Бунда Г мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги $O'x'y'$ координаталар системасида $x''^2-y''^2=1$ тенглама билан берилган тенг томонли гиперболага ўтади. Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва Oxy координаталар системалари билан ассоцирланади, тенг томонли гиперболалар бу координаталар системаларида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$ тенглама билан берилган гипербола $f=f_1f_2$ аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $x^2-y^2=1$ тенглама билан берилган тенг томонли гиперболага ўтади. Теорема бу ҳолда исботланди.

Исботни (5) тенглама) кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги учун олиб борамиз. Демак Г кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$ тенглама билан берилган. Биз уни бошқа Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида $x^2-y^2=0$ тенглама билан берилган кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтказишимиз керак.

Изланаётган f аффин алмаштиришини f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O'x'y'$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x'' = \frac{x'}{a} = \frac{1}{a}x' + 0y' + 0$$

$$y'' = \frac{y'}{b} = 0x' + \frac{1}{b}y' + 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab} \neq 0$$

Бунда Г мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги $O'x'y'$ координаталар системасида $x''^2 - y''^2 = 0$ тенглама билан берилган кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтди. Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва Oxy координаталар системалари билан ассоцирланган. Кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлилари бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$ тенглама билан берилган кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги $f=f_1f_2$ аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $x^2 - y^2 = 0$ тенглама билан берилган кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтади. Бу ҳолда ҳам теорема исботланди.

Исботни (6) тенглама) парабола учун олиб борамиз. Демак Г парабола бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $y'^2 = 2px'$ тенглама билан берилган. Биз уни бошқа Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида $y^2 = x$ тенглама билан параболага ўтказишимиз керак. Изланаётган f аффин алмаштиришини f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O'x'y'$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x'' = 2px' = 2px' + 0y' + 0$$

$$y'' = 1y' = 0x' + 1y' + 0$$

$$\begin{vmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2p \neq 0$$

Бунда Г мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги $O'x'y'$ координаталар системасида $y''^2 = 2p\frac{1}{2p}x'' = x''$ тенглама билан берилган параболага ўтади. Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва Oxy координаталар системалари билан ассоцирланган. Параболалар бу координаталар системасида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $y'^2 = 2px'$ тенглама билан берилган парабола $f=f_1f_2$ аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $y^2 = x$ тенглама билан берилган параболага ўтади. Бу ҳолда ҳам теорема исботланди.

Энди исботни (7) тенглама) параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги учун олиб борамиз. Демак Г параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $y'^2 - a^2 = 0$ тенглама билан берилган. Биз уни бошқа Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида $y^2 = 1$ билан берилган параллел тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтказишимиз керак. Изланаётган f аффин алмаштиришини f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O'x'y'$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x'' = x' = 1x' + 0y' + 0$$

$$y'' = \frac{y'}{a} = 0x' + \frac{1}{a}y' + 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \neq 0$$

$$y'^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow y'^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{y'^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow y''^2 = 1$$

Бунда Г параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги $O'x'y'$ координаталар системасида $y''^2 = 1$ тенглама билан берилган параллел тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтади. Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва Oxy координаталар системалари билан ассоцирланади, параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги бу координаталар системаларида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $y'^2 - a^2 = 0$ тенглама билан берилган параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги $f=f_1f_2$ аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $y^2 = 1$ тенглама билан берилган параллел тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтади. Бу ҳолда ҳам теорема исботланди.

Исботни (8) тенглама мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги учун олиб борамиз. Демак Г мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $y'^2 + a^2 = 0$ тенглама билан берилган. Биз уни бошқа Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида $y^2 = -1$ билан берилган мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтказишимиз керак. Изланаётган f аффин алмаштиришини f_1 ва f_2 аффин алмаштиришларнинг композицияси каби қурамиз. Улардан биринчиси $O'x'y'$ координаталар системасида қуйидаги аналитик ёзувига эга

$$x'' = x' = 1x' + 0y' + 0$$

$$y'' = \frac{y'}{a} = 0x' + \frac{1}{a}y' + 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \neq 0$$

$$y'^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow y'^2 = -a^2 \Leftrightarrow \frac{y'^2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow y''^2 = -1$$

Иккинчи f_2 аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва Oxy координаталар системалари билан ассоцирланади, бу мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги мос координаталар системаларида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Демак $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $y'^2 + a^2 = 0$ тенглама билан берилган мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги $f=f_1f_2$ аффин алмаштириш ёрдамида Oxy координаталар системасида $y^2 = -1$ тенглама билан берилган мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтади. Бу ҳолда ҳам теорема исботланди. Исботни (9) тенглама устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги учун олиб борамиз. Демак Г устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бирорта $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системасида $y'^2=0$ тенглама билан берилган. Биз уни бошқа *Oxy* тўғри бурчакли координаталар системасида $y^2=0$ билан берилган устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига ўтказишимиз керак. Биз излаётган *f* аффин алмаштириш $O'x'y'$ ва *Oxy* координаталар системаси жуфтлиги билан ассоцирланган бўлсин. Унда устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтликлари бу координаталар системаларида бир хил тенгламаларга эга бўлганидан улардан бири иккинчисига ўтади. Теорема бу ҳолда ҳам исботланди.

46.4-теорема. Ҳар хил номларга эга бўлган иккинчи тартибли чизиқлар аффин эквиалент эмас. Энг аввал биттадан ортиқ ҳақиқий нуқталарни ўз ичига олувчи иккинчи тартибли чизиқларни фарқлаймиз. Тўғри чизхиқни ўз ичига олувчи чизиқ эллипсга гиперболага ва параболага аффин эквиалент эмас, чунки бу чизиқларнинг ҳеч бир учта нуқтаси битта тўғри чизиқда ётмайди (38§ га қаралсин).

46.2-жумла эллипс, гипербола ва праболалалрни ўзаро фарқлашга имкон беради: парабола марказга эга эмас, эллипс эса асимптотик йўналишга эга эмас. Тўғри чизиқларга ажралувчи чизиқларни симметрия марказлари бўйича фарқлаш мумкин. Кесишувчи тўғри чизиқлар ягона симметрия марказига эга, параллел ва устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар марказлар тўғри чизиғига эга. Устма-уст тушувчи тўғри чизиқларнинг ихтиёрий маркази уларнинг ўзида ётади, параллел тўғри чизиқларда эса ундай эмас. Фақат битта ҳақиқий нуқтани ўз ичига олувчи ягона чизиқни (мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги) равшанки ҳеч бир бошқа чизиқга ҳеч қандай аффин алмаштириш билан ўтказиш мумкин эмас. Бу тасдиқ бирорта ҳақиқий нуқтага эга бўлмаган чизиқга нисбатан ҳам (мавҳум эллипс ва мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги) тўғри бўлади. Фақат уларни ўзаро фарқлаш қолади. Назарий тўпламлар нуқтаи назардан бу чизиқлар ҳақиқий текисликнинг бўш қисм тўпламидан иборат бўлиб ихтиёрий алмаштиришлар гуруҳига нисбатан ўзаро эквивалентдир.

Уларни комплекс текисликда фарқлаш мумикн (38.2 бандга қаралсин). Бу ҳолда ихтиёрий ҳақиқий тўғри чизиқ мавҳум эллипсни ё битта мавҳум эллипсни ё битта ёки иккита қўшма комплес нуқтада кесади шу вақтнинг ўзида асимптотик йўналишидаги тўғри чизиқ y=0 эса мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги $y^2+1=0$ни мутлақо кесмайди. Теорема исботланди.

47§. ИЗОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАРНИНГ ТАЪРИФИ ВА ХОССАЛАРИ.

47.1-таъриф. Аффин алмаштириш $f: E^n \to E^n$, $n=1,2,3$ ни агар у иккита тўғри бурчакли координаталар системаси билан ассоцирланган бўлса, изометрик алмаштириш деб аталди. Изометрик алмаштириш шунингдек ҳаракат алмаштириш ҳам деб аталади.

Изометрик алмаштириш таърифининг асоси бўлиб таърифининг асоси бўлиб, ушбу теорема хизмат қилади.

47.2-теорема. $f: E^n \to E^n$, $n=1,2,3$ алмаштириш изометрик алмаштириш бўлади, шунда ва фақат шунда қачонки у нуқталар орасидаги масофани сақласа, яъни қачонки $M_1, M_2 \in E^n$ нуқталар учун $\rho(M_1, M_2)=\rho\left(f(M_1), f(M_2)\right)$.

Исботни текислик бўлган ҳол учун олиб борамиз. f - Oxy ва $O'x'y'$ тўғри бурчакли координаталар системалари билан ассоцирланган изометрик алмаштириш бўлсин. Бу координаталар системасининг тўғри бурчаклилиги туфайли (13§ га қаралсин)

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

f(M₁) ва *(M₂)* нуқталар ҳам аммо энди янги $O'x'y'$ координаталар системасида у ҳам шунингдек тўғри бурчаклидир худди шундай координаталарга эга бўлади. Шунинг учун $\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ва (8) тенглик текширилди.

Энди f акслантириш нуқталар орасидаги масоқани сақласин. Унда у кесмани берилган нисбатда бўлишини сақлайди. Ҳақиқатан ҳам MN кесмани P нуқта λ нисбатда бўлсин. Унда

$$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$$

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|=\rho(M,P)=\rho\big(f(M),f(P)\big)=\left|\overrightarrow{f(M)f(P)}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{PN}\right|=\rho(P,N)=\rho\big(f(P),f(N)\big)=\left|\overrightarrow{f(P)f(N)}\right|$$

$$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MP}\right|=|\lambda|\left|\overrightarrow{PN}\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{f(M)f(P)}\right|=|\lambda|\left|\overrightarrow{f(P)f(N)}\right|\Rightarrow\overrightarrow{f(M)f(P)}=\lambda\overrightarrow{f(P)f(N)}$$

яъни *f* алмаштириш кесмани берилган нисбатда бўлишни сақлайди. Шунинг учун 45.6-жумлага мувофиқ *f* алмаштириш аффин алмаштириш бўлади. Текисликда бирорта ортонормал $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперни оламиз. Исботни тугатиш учун 45.3-жумлага мувофиқ $f(0)f(\vec{e}_1)f(\vec{e}_2)$ репер ҳам шунингдек ортонгормал репер бўлишини кўрсатиш қолди. О нуқтадан қўйилган $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар охирлари M_1 ва M_2 нуқталарда жойлашган бўлсин. Унда $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ репернинг ортонормаллиги M_1OM_2 учбурчак тоомнлари 1, 1, $\sqrt{2}$ узунликда бўлишига эквивалентдир. *f* акслантириш нуқталар орасидаги масофани сақлагани учун $f(M_1)f(O)f(M_2)$ учбурчак томонлари ҳам худди шундай узунликда бўлади. Демак $f(0)f(\vec{e}_1)f(\vec{e}_2)$ репер ҳам ортонормалдир. Теорема исботланди.

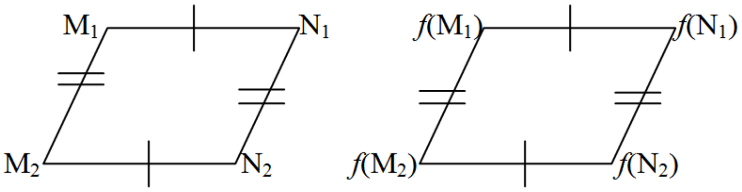
47.3-эслатма. 47.2-теореман исботлашда исботи келтирилмаган 45.6-жумлани татбиқ қилдик. Нуқталар орасидаги масофани сақловчи *f* акслантиришнинг аффин алмаштириш эканлигини 45.6-жумлага таянмасдан ҳам исботлаш мумкин. Бунинг учун кўрамизки бунда *f* акслантириш тенг векторни тенг векторларга ўтказади. Ҳақиқатан ҳам $\overrightarrow{M_1N_1}=\overrightarrow{M_2N_2}$ векторларнинг тенглиги $M_1N_1N_2M_2$ тўртбурчакнинг параллелограмм бўлишига тенг кучли бўлади. Унда $f(M_1)f(N_1)f(N_2)f(M_2)$ тўртбурчак ҳам параллелограмм, чунки

$$\rho\big(f(M_1),f(M_2)\big)=\rho(M_1,M_2)$$

$$\rho\big(f(M_2),f(N_2)\big)=\rho(M_2,\mathrm{N}_2)$$

$$\rho\big(f(N_2),f(N_1)\big)=\rho(N_2,\mathrm{N}_1)$$

$$\rho\big(f(M_1),f(N_1)\big)=\rho(M_1,\mathrm{N}_1)$$



Демак, $\overrightarrow{f(M_1)\,f(N_1)} = \overrightarrow{f(M_2)\,f(N_2)}$ (шундай хулоса қилишда тўртбурчак томонлари узунликлари сақланишига таяниб қолмасдан балки, унинг диагоналлари узунликларининг сақланишига ҳам таянамиз).

Демак $f: E^2 \to E^2$ алмаштириш $f: Vect(2) \to Vect(2)$ аксlantиришни юзага келтиради. Яна шундаки *f* алмаштиришнинг параллелограммни сақланишдан ва кесмани берилган нисбатда бўлишини сақлашидан бу акслантириш чизиқли бўлади. Шунинг учун *f* алмаштириш аффин алмаштириш эканлигини текширишни тугатиш учун ушбу жумлани исботлаш етарли.

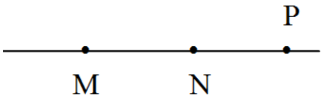
47.4-жумла. $f: E^n \to E^n$, $n = 1, 2, 3$ алмаштриш тенг векторларни тенг векторларга ўтказган бўлсин ва бу алмаштириш юзага келтирган $f: Vect(\text{n}) \to Vect(\text{n})$ акслантириш чизиқли бўлсин. Унда *f* алмаштириш аффин алмаштиришдир.

Исбот. Энг олдин бунда *f* алмаштириш бўлгани туфайли f алмаштириш шунингдек биектив бўлишини таъкидлаб ўтамиз. Шунинг учун у изоморф бўлади. Хусусан базисни базисга ўтказади ҳам. $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ - текисликдаги бирорта репер бўлсин. Унда $f(0)\,f(\vec{e}_1)\,f(\vec{e}_2)$ ҳам репер бўлади. Ихтиёрий М нуқта $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперда (*x,y*) координаталарга эга бўлсин. Бу бунда $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ бўлишини англатади. Унда f акслантириш чизиқлилиг туфайли

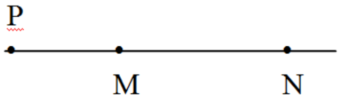
$$\overrightarrow{f(O)\,f(M)} = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = x\,f(\vec{e}_1) + y\,f(\vec{e}_2)$$

тенглик ҳосил қиламиз. Аммо бу тенглик *f(M)* нуқта $f(0)\,f(\vec{e}_1)\,f(\vec{e}_2)$ реперда (*x,y*) координаталарга эга бўлишини англатади. Шундай қилиб алмаштириш реперлар жуфтлиги билан ассоцирланган ва демак аффин алмаштириши. Жумла исботланди.

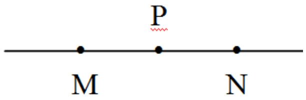
47.5-эслатма 47.3-эслатма ва 47.4-жумлада келтирилган мулоҳазалар 45.6-жумлани амалий жиҳатдан исботлаганини кўриш осон. Фақат бунда f алмаштириш кесмани берилган нисбатда бўлишни сақласа, у ҳолда у параллелограммни парллелограммга ўтказишини текшириш керак. Бунинг учун бунда f алмаштириш тўғри чизиқни тўғри чизиқга, параллел тўғри чизиқларни эса параллелл тўғри чизиқларга ўтказишини кўриш керак. Текислик бўлган ҳолда охирги тасдиқ параллел тўғри чизиқлар шундай хоссаси уларнинг кесишмаслигидан келиб чиқади. Фазо бўлган ҳолда эса дастлаб бунда f алмаштириш текисликни текисликга ўтказишни кўрсатиш керак. MN кесмани λ нисбатда бўлувчи P нукта MN кесманинг ўнг томонида жойлашган бўлса, $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$ тенгликга мувофик $\lambda\in(-\infty,-1)$, агар чап томонида бўлса, $\lambda\in(-1;0)$, агар P нуқта M,N нуқталар орасида бўлса $\lambda\in(0;+\infty)$ (*а), б), в*) расмлар) бўлади.



а) расм



б) расм



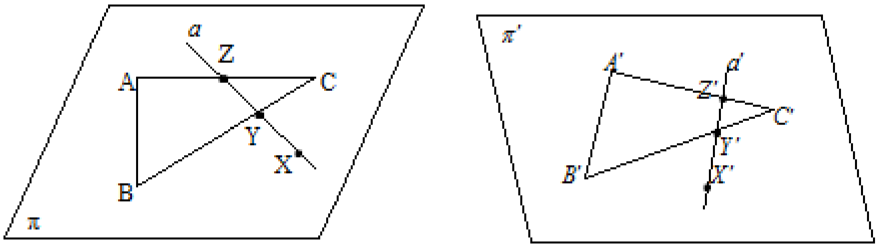
в) расм

Агар λ=0 бўлса, у ҳолда M=P устма-уст тушади, f алмаштириш кесмани берилган нисбатда бўлишни сақлагани учун, яъни $\overrightarrow{f(M)f(P)}=\lambda\overrightarrow{f(P)f(N)}$ тенгликга асосан $\lambda\in(-\infty,-1)$ да f(P) нуқта *f(M)f(N)* кесманинг ўнг томонида, $\lambda\in(-1;0)$ да f(P) нуқта *f(M)f(N)* кесманинг чап томонида, $\lambda\in(0;+\infty)$да да f(P) нуқта *f(M)* ва *f(N)* нуқталар орасида жойлашган бўлади. Демак агар f алмаштириш кесмани берилган нисбатда бўлишни сақласа, у ҳолда у тўғри чизиқни тўғри чизиқга ўтказади. Текислик бўлган ҳолда параллел тўғри чизиқлар шундай хоссаси уларнинг кесишмаслигидан кесмани берилган нисбатда бўлишни аниқловчи f алмаштириш параллел тўғри чизиқларга ўтказиш келиб чиқади, чунки f алмаштириш биектив акс эттириш бўлгшанидан текисликдаги a ва b тўғри чизиқлар учун

$$a\parallel b\Leftrightarrow a\cap b=\varnothing\Rightarrow f(a)\cap f(b)\neq\varnothing\Leftrightarrow f(a)\parallel f(b)$$

муносабат ўринлидир.

Энди фазо бўлган ҳолни кўрайлик.

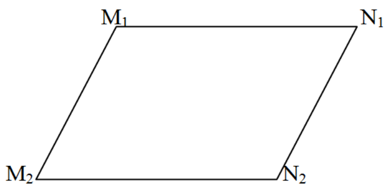


г) расм

Кесмани берилган нисбатда бўлишни сақловчи f алмаштириш текисликни текисликга ўтказишини исботлайлик. π-ихтиёрий текислик бўлсин. Унда бир тўғри чизиқда ётмаган ихтиёрий учта A, B, C нуқталарни белгилаймиз, f алмаштиришда улар ҳам шунингдек бир тўғри чизиқда ётмаган учта A', B', C' нуқталарга ўтади. Улар орқали π' текисликни ўтказамиз. Биз қараётган алмаштиришда π текислик π' текисликга ўтишини исботлаймиз.

X - π текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У орқали ABC учбурчакни иккита Y ва Z нуқталарда кесувчи a тўғри чизиқни ўтказамиз. A тўғри чизиқ f алмаштиришда бирорта a' тўғри чизиқга ўтади. Y ва Z нуқталар эса $A'B'C'$ учбурчакга тегишли бўлган, демак π' текисликга ҳам тегишли бўлган Y' ва Z' нуқталарга ўтади. Демак a' тўғри чизиқ π' текисликда ётади. f алмаштиришда X нуқта a' тўғри чизиқнинг, демак π' текисликнинг ҳам нуқтаси бўлган Y' нуқтага ўтади, мана шуни исботлаш талаб этилган эди.

Энди $M_1N_1N_2M_2$ тўртбурчак параллелограмм бўлсин



Унда кесмани берилган нисбатда бўлишни аниқловчи f алмаштиришда M_1N_1 ва M_2N_2 параллел тўғри чизиқлар $f(M_1)f(N_1)$ $f(M_2)f(N_2)$ параллел тўғри чизиқларга, M_1M_2 ва N_1N_2 параллел тўғри чизиқлар $f(M_1)f(M_2)$ $f(N_1)f(N_2)$ параллел тўғри чизиқларга ўтади. Демак $M_1N_1N_2M_2$ параллелограммга ўтади. 47.2-теоремаданг ушбу жумла келиб чиқади.

47.6-жумла. Изометрик алмаштиришлар барча аффин алмаштиришлар гуруҳининг қим гуруҳини ҳосил қилади.

47.7. Изометрик алмаштиришларнинг аналитик ёзуви. *Oxy* тўғри бурчакли координаталар системасида

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + a_1 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + a_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

формула билан ёзилган f ффин алмаштириш изометрик алмаштириш бўлади, шунда ва фақат шунда қачонки унинг $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ матрицаси ортогонал матрица бўлса.

Исбот. *Oxy* координаталар системаси $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ортонормал репер билан берилган бўлсин. 45.3 ва 45.8 ларга мувофиқ $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$ базисга ўтиш матрицаси бўлиши келиб чиқади. Шунинг С матриканинг ортогонал бўлиши $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$ базиснинг ортонормал базис бўлишига тенг кучли (30§ га қаралсин). Бошқа томондан 47.2-теоремани исботлашда изометрик алмаштириш ортонормал реперни ортонормал реперга ўтказишини кўрсатган эдик. 47.7-тасдиқнинг исботини тугатиш учун изометрик алмаштириш таърифини эсга олиш ва 45.3-жумлага яна бир марта эътибор бериш қолди.

48§. ТЕКИСЛИК ҲАРАКАТ АЛМАШТИРИШНИ КЛАССИФИКАЦИЯ ҚИЛИШ.

48.1-теорема. Текисликнинг ҳар қандай хос ҳаракати ё параллел кўчириш ёки бирорта нуқта атрофида аниқ α бурчакка буришдан иборта бўлади.

Текисликнинг ҳар қандай хосмас ҳаракати бирорта тўғри чизиқга нисбатан қайтиш шу билан бирга бўлиш мумкин бўлган бу тўғри чизиқ бўйлаб кўчиш (силжиш) бўлади. Тўғри бурчакли координаталар системасини тегишли қилиб танлашда бу алмаштиришлар мос равишда қуйидаги аналитик ёзувларга эга:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a_1 \\ y' &= y + a_2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= -y \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Текисликда буришнинг мусбат йўналишини масалан соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишни тайинлаймиз. Бу бизга текисликнинг ориентациясини беради. Шу билан бирга барча реперлар мусбат ва манфий реперларга бўлинади. Бирорта $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ мусбат ортонормал репер билан боғланган *Oxy* тўғри бурчакли координаталар системасини олайлик. Бу координаталар системасида бизнинг ҳаракат алмаштириш

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + a_1 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + a_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

формула билан ёзилади, бу ерда С ортогонал матрица.

Агар С – бирлик матрица бўлса, у ҳолда (3) формула (9) формулага айланади. Агар С≠Е бўлса, аммо *f* – хос ҳаракат бўлганидан, у ҳолда мусбат детерминатга (detC>0) эга бўлади. Биз биламизки (29§) бу ҳолда, бунда $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ кўринишга эга. *F* алмаштириш жойида қолдирилган O_1 нуқтанинг мавжудлигини кўрсатамиз ($f(O_1)=O_1$). Бунинг учун

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}y_1 + a_1 \\ y_1 &= c_{21}x_1 + c_{22}y_1 + a_2 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини ёки С матрица конкрет кўриниши эътиборга олиб

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha x_1 + (-\sin\alpha) y_1 + a_1 \\ y_1 &= \sin\alpha x_1 + \cos\alpha y_1 + a_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned} x_1(1-\cos\alpha) + \sin\alpha y_1 &= a_1 \\ -x_1\sin\alpha + y_1(1-\cos\alpha) &= a_2 \end{aligned}\right\}$$

Системанинг биргаликда эканлигини кўрсатиш керак. Бу системанинг детерминанти $(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$ а тенг бўлиб, у нолдан фарқли, чунки $\cos\alpha \neq 1$ $(C \neq E)$. Демак *f* ҳаракат алмаштириш қўзғалмас O_1 нуқтага эга. Унда у $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперда (10) формула билан ёзилади. Ҳақиқатан ҳам *f* алмаштиришнинг $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ва $O_1\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперлардаги аналитик ёзувлари бир хил С матрицага эга, чунки 5.9 га мувофиқ бу матрица воситасида $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисда f чизиқли акслантириш ёзилади $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ дейилса

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \qquad x' = c_{11}x + c_{12}y \quad y' = c_{21}x + c_{22}y \qquad f\left(\vec{a}\right) = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$$

Бошқа томондан f ҳаракат алмаштиришнинг (3) ёзувидаги a_1 ва a_2 озод ҳадлар $O_1\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперда нолга тенг, яунки 45.8 га мувофиқ (a_1,a_2) – бу $O_1\vec{e}_1\vec{e}_2$ репердаги *f(O*$_1$*)=O*$_1$ нуқта координаталаридир. Хос ҳаракат алмаштиришини текширишни тугатиш учун бунда (10) формула координаталар бошига нисбатан π текисликни α бурчакга буриш формуласи эканлигини таъкидлаш қолди. Бу ерда $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторлар бу алмаштиришда мос равишда $\vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_2 \sin\alpha$, $-\vec{e}_1 \sin\alpha + \vec{e}_2 \cos\alpha$ векторларга ўтишларидан, яъни α бурчакга буришдан келиб чиқади (30§ га қаралсин). f хосмас ҳаракат алмаштириш бўлсин. Унда (3) ёзувдаги С матрица детерминанти манфийдир. Бу ҳолда (29§ га қаралсин) $C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Бунда f акслантириш ўз ўрнида қолдирадиган нолмас $\vec{e}$ вектор топилишини кўрсатамиз

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad f\left(\vec{a}\right) = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$$

акслантиришнинг аналитик ёзуви

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

кўринишга эга

$$\left.\begin{aligned} x &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y &= x\sin\alpha - y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned} x\left(1-\cos\alpha\right) + \sin\alpha\, y &= 0 \\ -x\sin\alpha + y\left(1-\cos\alpha\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системанинг нолмас учимларини топишимиз керак. Бу бир жинсли системанинг детерминанти нолга тенг.

$$\left(1-\cos\alpha\right)\left(1+\cos\alpha\right) - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

Демак у нолмас ечимларга эга. Аммо агар $f(\vec{e})=\vec{e}$ бўлса, у ҳолда ўнга ихтиёрий пропорционал вектор $\vec{e}'=\lambda\vec{e}$ учун ушбуга эга бўламиз

$$f(\vec{e}')=f(\lambda\vec{e})=\lambda f(\vec{e})=\lambda\vec{e}=\vec{e}'$$

Демак шундай $\vec{e}_1'$ бирлик вектор мавжудки бунда $f(\vec{e}_1')=\vec{e}_1'$. Уни ортонормал базисгача тўлдирамиз $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$. f хосмас ҳаракат алмаштириш бўлганидан $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$ ва $f(\vec{e}_1'), f(\vec{e}_2')$ ортонормал базислар ҳар хил исмлидир. Аммо $f(\vec{e}_1')=\vec{e}_1'$ демак, $f(\vec{e}_2')=-\vec{e}_2'$ бўлади. Чунки

$$f(\vec{e}_1')=1\cdot\vec{e}_1'+0\cdot\vec{e}_2' \qquad f(\vec{e}_2')=c_{21}\cdot\vec{e}_1'+c_{22}\cdot\vec{e}_2'$$

$$1^2+c_{21}^2=1\Rightarrow c_{21}^2=0\Rightarrow c_{21}=0$$

$$0^2+c_{22}^2=1\Rightarrow c_{22}^2=1\Rightarrow c_{21}=\pm1$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \pm1\end{vmatrix}=-1<0 \qquad c_{22}=-1 \text{ экан.}$$

Демак $\vec{e}_1'$ ва $\vec{e}_2'$ базисдан $f(\vec{e}_1'), f(\vec{e}_2')$ базисга ўтиш матрицаси $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ кўринишга эга. Шунинг учун $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперда f ҳаракат алмаштириши

$$\left.\begin{aligned}x'&=x+b_1\\ y'&=y+b_2\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

кўринишда ёзилиши 45.3 ва 45.8 лардан келиб чиқади, бу ерда b_1, b_2 сонлар умуман олганда (3) бошланғич ёзувидаги a_1 ва a_2 сонлардан фарқ қилади. Энди $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперда $\left(\frac{b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)$ координатали O' нуқтани

$$\left(\frac{b_1}{2}+b_1,-\frac{b_2}{2}+b_2\right)=\left(\frac{3}{2}b_1,\frac{1}{2}b_2\right)$$

координатали $f(O')$ нуқтага ўтказади, яъни уни

$$\overrightarrow{O'f(O')}=\left(\frac{3}{2}b_1-\frac{b_2}{2},\frac{1}{2}b_2-\frac{b_2}{2}\right)=(b_1,0)=b_1e_1'$$

векторга силжитади. Шунинг учун $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперда $f(O')$ нуқта $(b_1,0)$ координаталарга эга. Демак $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ реперда f ҳаракат алмаштириши ёзуви бу ҳаракат алмаштиришининг $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ репердаги (2) ёзувидан фақат озод ҳадлари билан фарқ қилиб (11) кўринишга эга, бу ерда $a=b_1$ бўлади. Теорема исботланди.

VI БОБ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР.

49§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТ ҲАҚИДА АСОСИЙ ТЕОРЕМА.

49.1-таъриф. Бирорта $Oxyz$ аффин координаталар системасида иккинчи даражали

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \qquad (1)$$

тенглама билан берилган фазонинг ихтиёрий Ф нуқталар тўпламини иккинчи тартибли сирт деб аталади.

Иккинчи тартибли чизиқ бўлган хол каби бу таъриф ҳам баъзи тушунтиришларни талаб қилади.

1) Агар бирорта аффин координаталар системасида Ф тўплам (1) иккинчи даражали

тенглама билан тавсифланса, у ҳолда уни ихтиёрий бошқа афин координаталар системасида ҳам шунингдек иккинчи даражали тенглама билан бериш мумкин.

Бунинг учун (1) тенгламадан x, y, z ўзгарувчилар ўрнига уларнинг x', y', z' ўзгарувчилар орқали ифодаларини қўйиш етарли. x, y, z ўзгарувчилар $\Phi(x, y, z)$ кўпҳад даражаси

$$\varphi(x,y,z) = \Phi\left(c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + a_1, c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + a_2, c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + a_3,\right)$$

кўпҳад даражаси билан устма-уст тушади.

Бунда φ нинг даражаси Ф нинг даражасидан катта эмас бўлишини кўрсатиш кифоя. Бу эса шундан келиб чиқадики бунда Ф га кирувчи ихтиёрий бирҳад $ax^p y^q z^l$ учун

$$a\left(c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + a_1\right)^p \left(c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + a_2\right)^q \left(c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + a_3\right)^l$$

кўпҳад $p+q+l$ дан ≤ даражага эга.

2) Фазода ҳар қандай текислик $Ax+By+Cz+D=0$ биринчи даражали тенглама билан

ҳам ҳамда

$$(Ax+By+Cz+D)^2=0 \qquad (2)$$

кккинчи даражали тенглама билан ҳам тавсифланиши мумкин.

Текислик албатта биринчи даражали сирт бўлади, аммо аналитик геометрияда (2)

тенглама устма-уст тушувчи текисликлар жуфтлиги ёки қўшилувчи текисликлар жуфтлиги деб аталувчи иккинчи даражали сиртни тасвирлайди.

3) ниҳоят принципиал ҳар хил тенгламалар битта тўпламни тавсифлаш мумкин.

Масалан $x^2+1=0$ ва $x^2+y^2+1=0$ тенгламалардан ҳар қйсиси ҳақиқий фазода бўш тўпламни тавсифлайди. 38§ даги ҳақиқий текисликдан комплекс текисликга ўтилгани каби агар ҳақиқий фазодан комплекс фазога ўтилса, у ҳолда юқорида айтилган тенгламалар ҳар хил ечимлар тўпламига эга бўлади. Шунинг учун бу тенгламалар аналитик геометрияда ҳар хил иккинчи тартибли чизиқларни тавсифлайди.

49.2-теорема. Ихтиёрий иккинчи тартибли сирт учун шундай *Oxyz* тўғри бурчакли координаталар системаси мавжудки ундаги иккинчи тартибли сиртнинг тенгламаси қуйидаги 17 хил кўринишлардан бириг эга:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ мавҳум эллипсоид;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ бир паллали гиперболоид;

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ икки паллали гиперболоид;

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ конус;

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ мавҳум конус;

7) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \ \left(p,q>0\right)$ эллиптик параболоид;

8) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \ \ (p,q>0)$ гиперболик параболоид;

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллиптик цилиндр;

10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ мавҳум эллиптик цилиндр;

11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболик цилиндр;

12) $y^2=2px$ параболик цилиндр;

13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ кесишувчи текисликлар жуфтлиги;

14) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ мавҳум кесишувчи текисликлар жуфтлиги;

15) $y^2=a^2 \ \ (a\neq 0)$ параллел текисликлар жуфтлиги;

16) $y^2+a^2=0 \ \ (a\neq 0)$ мавҳум параллел текисликлар жуфтлиги;

17) $y^2=0$ устма-уст тушувчи текисликлар жуфтлиги.

Бу теорема китобнинг иккинчи қисмида 44§да исбот қилинади. 1) – 17) тенгламалар иккинчи тартибли сиртнинг каноник тенгламалари деб аталади.

50§ ЭЛЛИПСОИДЛАР.

50.1. Эллипсоиднинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

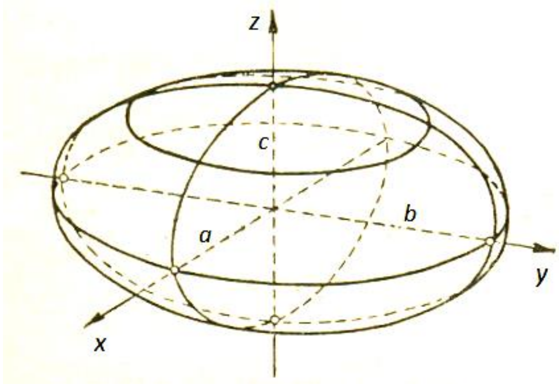
кўринишга эга. a, b, c мусбат сонлар эллипсоиднинг ярим ўқлари деб аталади. Умумийликни чегараламасдан (агар керак бўлса координата ўқларини алмаштириб) (3) каноник тенгламада $a\geq b\geq c$ деб ҳисоблаш мумкин. 60-расмда тасвирланган эллипсоид $-a\leq x\leq a$, $-b\leq y\leq b$, $-c\leq z\leq c$ тўғри бурчакли параллелопипедда ётади.

Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}\Rightarrow 1-\frac{z^2}{c^2}\geq 0\Rightarrow 1\geq \frac{z^2}{c^2}\Rightarrow z^2\leq c^2\Rightarrow |z|\leq c\Rightarrow -c\leq z\leq c$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow 1-\frac{x^2}{a^2} \ge 0 \Rightarrow 1 \ge \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow x^2 \le a^2 \Rightarrow |x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \Rightarrow 1-\frac{y^2}{b^2} \ge 0 \Rightarrow 1 \ge \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y^2 \le b^2 \Rightarrow |y| \le b \Rightarrow -b \le y \le b$$



60-расм

Агар $a=b$ бўлса, у ҳолда $z=h$, $-c \le h \le c$ текисликлар билан эллипсоид кесилганда кесимда $h=\pm c$ да нуқтага айланувчи $r_h=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$ радиусли

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\ z=h$$

айлана ҳосил бўлади. Шунинг учун шундай эллипсоидни айланма эллипсоид деб аталад. Уни

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$$

эллипснинг z ўқи атрофида айланишидан ҳосил қилиш мумкин. Худди шундай тарзда $b=c$ да $x=h$, $-a \le h \le a$ текисликлар билан эллипсоид кесилганда кесимда $h=\pm a$ да нуқтага айланувчи $r=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-h^2}$ радиусли

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2},\ x=h$$

айлана ҳосил бўлади. Уни

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$$

эллипснинг x ўқи атрофида айланишидан ҳосил қилинади.

Агар $a=c$ да $y=h$, $-b \le h \le b$ текисликлар билан эллипсоид кесилганда кесимда $h=\pm b$ да нуқтага айланувчи $r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$ радиусли

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2},\ y=h$$

айлана ҳосил бўлади. Уни

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$$

эллипснинг y ўқи атрофида айланишидан ҳосил қилинади.

Ниҳоят $a=b=c$ да (3) эллипсоид a радиусли сфера бўлади. Ихтиёрий (3) эллипсоид $x^2+y^2+z^2=a^2$ сферадан y ва z ўқлар бўйича иккита сиқишнинг композицияси бўлган аффин алмаштириш воситасида ҳосил қилинади

$$x'=x \quad y'=\frac{b}{a}y \quad z'=z \quad \text{ва} \quad x''=x' \quad y''=\frac{b}{a}y' \quad z''=\frac{c}{a}z'$$

Бу аффин алмаштириш қуйидаги тарзда ёзилади

$$x''=x \quad y''=\frac{b}{a}y \quad z''=\frac{c}{a}z$$

ёки штрихларнинг биттасини ўчириб ёзамиз

$$x'=x \quad y'=\frac{b}{a}y \quad z'=\frac{c}{a}z$$

$$x'=x+0\cdot y+0\cdot z+0 \qquad y'=0\cdot x+\frac{b}{a}y+0\cdot z+0 \qquad z'=0\cdot x+0\cdot y+\frac{c}{a}z+0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{a} \end{vmatrix}=\frac{bc}{a^2}\neq 0$$

$$x'^2+\left(\frac{a}{b}y'\right)^2+\left(\frac{a}{c}z'\right)^2=a^2 \qquad x'^2+\frac{a^2}{b^2}y'^2+\frac{a^2}{c^2}z'^2=a^2$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$$

штрихларни ўчириб

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

ҳосил қиламиз. Эллипсоиднинг ихтиёрий ясси кесимини текширишдан аввал битта умумий тасдиқни айтамиз.

50.2-жумла. Иккинчи тартибли сиртнинг текислик билан кесишмаси бу текисликда ётувчи даражаси иккинчи даражадан катта бўлмаган чизиқ бўлади.

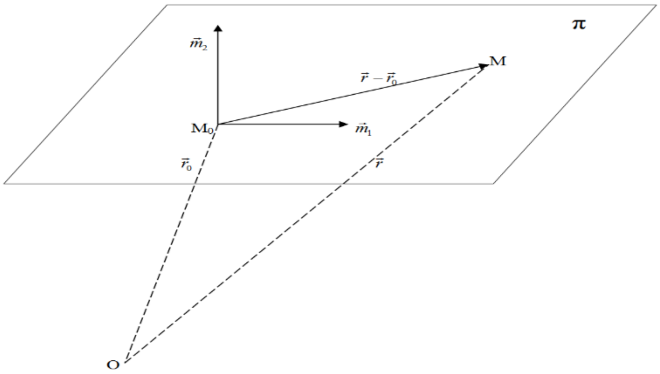
Исбот. Шундай *Oxyz* координаталар системасини оламизки унда бизнинг текислик z=0 тенгламага эга бўлсин. Агар (1) тенгламада z ўзгарувчини нол билан алмаштириб бу текисликдаги x ва y координаталардаги кесишиш чизиғи тенгламасини яъни $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ ҳосил қиламиз. Бу биз биламизки иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламаси. Аммо бизнинг ҳолатда $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$ бўлган ҳол рўй бериши мумкин, бунда кесишмада тўғри чизиқ ҳосил бўлади $\left(a_1^2+a_2^2>0\right)$ ёки у $a_0=0$ тенглама билан берилиб ё бўш тўпламни тавсифлайди $\left(a_0\neq 0\right)$ ёки бутун текисликни тавсифлайди $\left(a_0=0\right)$. Жумла исботланди.

50.3-жумла. Эллипсоиднинг ихтиёрий ясси кесими ё эллипс, ё мавҳум эллипс ёки мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат.

Исбот. Эллипсоид (3) каноник тенгламаси билан берилган бўлсин. П текисликга таалуқли ўзининг параметрик тенгламаси

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\alpha_1u+\beta_1v\\ y&=y_0+\alpha_2u+\beta_2v\\ z&=z_0+\alpha_3u+\beta_3v \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

билан берилган бўлиб, бунда $\vec{m}_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ ва $\vec{m}_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ векторлар фазонинг текисликда ётувчи барча векторларнинг ортонормал базисини ҳосил қилади. Унда u ва v параметрлар бу текислик ўзгарувчи нуқталарининг тўғри бурчакли координаталари бўлади. Ҳақиқтан ҳам (4) праматерик тенгламасидан вектор тенгламага ўтайлик $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{m}_1u+\vec{m}_2v$ унда $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{m}_1u+\vec{m}_2v$ *чизмага қаранг*



Унда ўзгарувчи М нуқтанинг $M_0\vec m_1\vec m_2$ репердаги координаталари (u,v) бўлади. Исбот (3) тенглама x,y,z ўзгарувчилар ўрнига (4) тенгламалар системасидан олинган u ва v параметрлар орқали ифодаларини қўйиб u ва v координаталардаги ясси кесим тенгламасини ҳосил қиламиз.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

$$\frac{\left(x_0+\alpha_1 u+\beta_1 v\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y_0+\alpha_2 u+\beta_2 v\right)^2}{b^2}+\frac{\left(z_0+\alpha_3 u+\beta_3 v\right)^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x_0^2+\alpha_1^2u^2+\beta_1^2v^2+2\alpha_1 ux_0+2\beta_1 vx_0+2\alpha_1\beta_1 uv}{a^2}+\frac{y_0^2+\alpha_2^2u^2+\beta_2^2v^2+2\alpha_2 uy_0+2\beta_2 vy_0+2\alpha_2\beta_2 uv}{b^2}+$$
$$+\frac{z_0^2+\alpha_3^2u^2+\beta_3^2v^2+2\alpha_3 uz_0+2\beta_3 vz_0+2\alpha_3\beta_3 uv}{c^2}=1$$

Содда ҳисоблар бунда бу тенгламанинг квадрат қисми ушбу кўринишга эга бўлишини кўрсатади

$$\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\alpha_2^2}{b^2}+\frac{\alpha_3^2}{c^2}\right)u^2+2\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{a^2}+\frac{\alpha_2\beta_2}{b^2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{c^2}\right)uv+\left(\frac{\beta_1^2}{a^2}+\frac{\beta_2^2}{b^2}+\frac{\beta_3^2}{c^2}\right)v^2 \tag{5}$$

$$\vec n_1=\left\{\frac{\alpha_1}{a},\frac{\alpha_2}{b},\frac{\alpha_3}{c}\right\},\quad \vec n_2=\left\{\frac{\beta_1}{a},\frac{\beta_2}{b},\frac{\beta_3}{c}\right\}$$

ёрдамчи векторларни қараймиз. (5) кўпҳад улар ёрдамида анча компакт ёзувга эга бўлади.

$$\vec n_1^2u^2+2\left(\vec n_1,\vec n_2\right)uv+\vec n_2^2v^2$$

Бизнинг ясси кесим тенгламасининг δ инвариантни ҳисоблаймиз. Унда ушбуга эга бўламиз.

$$\delta=\begin{vmatrix}\vec{n}_1^2 & (\vec{n}_1,\vec{n}_2)\\ (\vec{n}_1,\vec{n}_2) & \vec{n}_2^2\end{vmatrix}=\vec{n}_1^2\vec{n}_2^2-(\vec{n}_1,\vec{n}_2)^2=\vec{n}_1^2\vec{n}_2^2-\left(|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|\cdot\cos\varphi\right)^2=$$
$$=\vec{n}_1^2\vec{n}_2^2-\vec{n}_1^2\vec{n}_2^2\cos^2\varphi=\vec{n}_1^2\vec{n}_2^2\left(1-\cos^2\varphi\right)=\vec{n}_1^2\vec{n}_2^2\sin^2\varphi$$

бу ерда φ - $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлар орасидаги бурчак. Аммо $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлар чизиқли эркли. Акс ҳолда улар пропорционал бўлиб

$$\frac{\frac{\alpha_1}{a}}{\frac{\beta_1}{a}}=\frac{\frac{\alpha_2}{b}}{\frac{\beta_2}{b}}=\frac{\frac{\alpha_3}{c}}{\frac{\beta_3}{c}}\Leftrightarrow\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}$$

яъни $\vec{m}_1$ ва $\vec{m}_2$ перпендикуляр векторларнинг пропорционал бўлиши келиб чиққан бўлар эди. Демак $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлар коллениар эмас. Бу $(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\neq 0$ бўлишига эквиалент

$$|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|\cdot\sin\varphi\neq 0\Rightarrow\sin\varphi\neq 0$$

Демак $\delta=\vec{n}_1^2\vec{n}_2^2\sin^2\varphi>0$ охирги шарт бизга учта эллиптик типдаги чизиқларни тавсифлайди (34§ га қаралсин). Шундай қилиб эллипсоиднинг ясси кесимида бошқа ҳеч қандай чизиқнинг бўлиши мумкин эмас. Шу вақтнинг ўзида $z=h$ (3) эллипсоид текислик билан кесилганда барча учта имконият амалга ошади. Жумла исботланди.

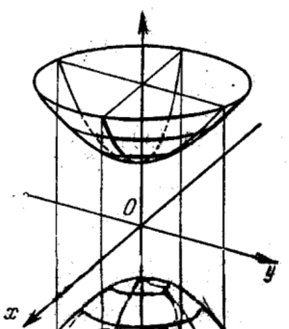
50.4-масала. Ихтиёрий эллипсоиднинг ясси кесимлари орасида айлананинг бор бўлиши исботлансин.

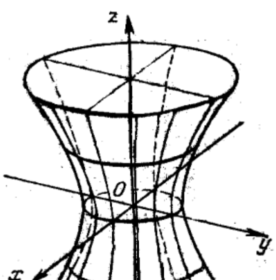
51§. ГИПЕРБОЛОИДЛАР.

51.1. Икки паллали гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{6}$$

каноник тенгламага эга, бу ерда $a>b$ 61-расмда икки паллали гиперболоид тасвирланган.





61-расм 62-расм

Агар $a=b$ бўлса, $z=h$, $|h|>c$ текислик билан икки паллали гперболоид кесилганда кесим аслида айланадир. Шунинг учун шундай гиперболоид айланма гиперболоид бўлади. Уни $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $y=0$ гиперболани z ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил қилинади. Ихтиёрий (6) икки паллаи гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ айланма гиперболоиддан y ўқини $\frac{b}{a}$ коэффициентли сиқишдан иборат бўлган аффин алмаштириш воситасида ҳосил қилинади. Ҳақиқатан ҳам

$$x'=1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0$$

$$y'=\frac{b}{a}y=0\cdot x+\frac{b}{a}y+0\cdot z+0$$

$$z'=z=0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z+0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{b}{a} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{b}{a}\neq 0$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}\frac{a^2}{b^2}y'^2-\frac{z'^2}{c^2}=-1$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=-1$$

51.2. Икки паллали гиперболоиднинг текисликлар билан кесимлари эллипслар ва гиперболалар ҳамда параболалар бўлади. Ҳақиқатан ҳам (6) тенглама билан берилган икки паллали гиперболоидни $z=h$ текислик билан кесилганда $|h|>c$ да кесимда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\quad z=h$$

эллипс, $h=\pm c$ да мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги ҳосил бўлади. (6) тенглама билан берилган икки паллали гиперболоидни $x=h$ текислик билан кесилганда кесимда

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1$$

$|h|>a$ бўлганда Oz мавҳум ўқли гипербола ҳосил бўлади. $|h|=a$да кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги ҳосил бўлади. $|h|<a$ бўлганда Oy мавҳум ўқли гипербола ҳосил бўлади. (6) тенглама билан берилган ики паллали гиперболоидни $y=h$ текислик билан кесилганда ҳам кесимда шу ҳолатлар рўй беради. Энди икки паллали гиперболоиднинг ясси кесимларида эллипс ва гиперболадан ташқари параболалар ҳам борлигини кўрсатайлик.

51.2. Икки паллали гиперболоид ясси кесимларида эллипслар, ва гиперболалардан тақари параболалалр ҳам бор. Ҳақиқатан ҳам

$$cx\text{-}ax+ac=0 \tag{7}$$

текисликни оламиз. Бу текислик $M_0(0;0;c)$ нуқта орқали ўтади ва $\vec{m}_1=\{0;1;0\}$, $\vec{m}_2=\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}};0;\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right\}$ векторларга параллелдир

$$c\cdot 0\text{-}a\cdot 0+ac=0$$

$$c\cdot 0\text{-}a\cdot 0=0$$

$$\frac{ca}{\sqrt{a^2+c^2}}-\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}=0$$

Бу текисликни параметрик кўринишда қуйидаги тарзда бериш мумкин

$$x=0+u\cdot 0+v\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$y=1+u\cdot 1+v\cdot 0$$

$$z=c+u\cdot 0+v\cdot\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\left.\begin{array}{c} x=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}v \\ y=u \\ z=c+\dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}v \end{array}\right\} \tag{8}$$

бунда $\vec{m}_1 = \{0;1;0\}$, $\vec{m}_2 = \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}; 0; \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \right\}$ векторлар фазонингда ётувчи барча векторларнинг ортонормал базисини ҳосил қилади. Унда *u* ва *v* параметрлар бу текислик ўзгарувчи нуқталарининг тўғри бурчакли координаталари бўлади. (6) тенглама *x,y,z* ўзгарувчилар ўрнига (8) тенгламалар системасидан олинган *u* ва *v* параметрлар орқали ифодаларини қўйиб *u* ва *v* координаталардаги ясси кесим тенгламасини ҳосил қиламиз

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2+c^2} \cdot v^2 + \frac{1}{b^2} \cdot u^2 - \frac{1}{c^2}\left(c + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot v \right)^2 = -1$$

$$\frac{v^2}{a^2+c^2} + \frac{u^2}{b^2} - \left(1 + \frac{v}{\sqrt{a^2+c^2}} \right)^2 = -1$$

$$\frac{v^2}{a^2+c^2} + \frac{u^2}{b^2} - 1 - \frac{2v}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{v^2}{a^2+c^2} = -1$$

$$\frac{u^2}{b^2} = \frac{2v}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$u^2 = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot v$$

бу $p = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$ параметрли параболанинг каноник тенгламасидан иборат.

51.3-таъриф. Агар l тўғри чизиқ бирорта Ф сиртда ётса $(l \subset \Phi)$ l тўғри чизиқни Ф сиртнинг ясовчиси деб аталади.

51.4-жумла. Икки паллали гиперболоид тўғри чизиқли ясовчиларга эга эмас.

Исбот. Барча тўғри чизиқларни *z=0* текисликни кесувчи тўғри чизиқларга ва бу текисликга параллел тўғри чизиқларга бўлиш мумкин. *z=0* текисликни кесувчи тўғри чизиқлар бу текисликнинг (6) гиперболоид билан кесишмаслиги туфайли тўғри чизиқли ясовчи бўлмайди, қолган тўғри чизиқлар эса *z=h* текисликда ётиб ё (6) гиперболоид билан $|h|<c$ да кесишмаси бўш тўплам, ё $(|h|=c)$ да битта нуқтадан иборат, $(|h|>c)$ да кесишмаси эллипс бўлади.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$$

ярим ўқлари $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ бўлган эллипсдир.

51.5. Бир паллаи гиперболоид тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9}$$

каноник кўринишга эга, бу ерда $a \ge b$. Бир паллали гиперболоид 62-расмда тасвирланган. Агар $a=b$ бўлса, икки паллали гиперболоид каби бир паллали гиперболоид айлана гиперболоид бўлади. Ихтиёрий бир паллали гиперболоид икки паллали гиперболоид каби айланма бир паллали гиперболоиддан y ўқи бўйича сиқишдан ҳосил қилинади. Ҳақиқатан ҳам

$$x'=x \quad y'=\frac{b}{a}y \quad z'=z$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}y'^2-\frac{z'^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$$

$z=h$ текислик билан кесамиз

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1$$

яъни

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1$$

Демак ихтиёрий $z=h$ текислик (9) гиперболоидни $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ ярим ўқли эллипс бўйича кесади $|h|$ 0 дан $+\infty$ гача ўсганда ярим ўқлар ҳам a ва b дан $+\infty$ гача монотон ўсади, гиперболоиднинг $z=0$ текислик билан кесими $z=h=0$ да ҳосил бўлган

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$$

ҳосил бўлган эллипс берилган гиперболоиднинг ёки кесимдаги эллипс бўғоз эллипс деб аталади.

$y=h$ текислик билан (9) гиперболоид кесими

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},\ y=h$$

тенгламали чизиқни беради, яъни агар $|h|<b$ да

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2}=1$$

агар $|h|=b$ бўлса

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

агар $|h|>b$ бўлса

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}-1$$

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2}=1$$

худди шундай $x=h$ тенглик билан (9) гиперболоид кесими

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2},\ x=h$$

тенгламали чизиқни беради, яъни агар $|h|<a$ да

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

агар $|h|=a$ бўлса

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

агар $|h|>a$ бўлса

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}-1$$

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}=1$$

Демак $x=\pm a,\ y=\pm b$ ҳолдан бошқа (9) гиперболоиднинг $x=h$ ва $y=h$ ҳолларда текисликлари билан кесими гиперболалар бўлади. $x=\pm a,\ y=\pm b$ ҳолларда бу гиперболалар кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигига айланади.

cx-ax+ac=0 (7) текислик $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (9) бир паллали гиперболоидни парабола бўйича кесиши, бу текислик координаталар бошига параллел кўчирилганда эса параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги бўйича кесиши исботлансин

(9) тенгламада *x,y,z* ўзгарувчилар ўрнига (8) тенгламалар системасидан олинган *u* ва *v* параметрлар орқали ифодаларини қўйиб *u* ва *v* координаталардаги ясси кесим тенгламасни ҳосил қиламиз

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9}$$

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+c^2}\cdot v^2+\frac{1}{b^2}\cdot u^2-\frac{1}{c^2}\left(c+\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\cdot v\right)^2=1$$

$$\frac{v^2}{a^2+c^2}+\frac{u^2}{b^2}-\left(1+\frac{v}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2=1$$

$$\frac{v^2}{a^2+c^2}+\frac{u^2}{b^2}-1-\frac{2v}{\sqrt{a^2+c^2}}-\frac{v^2}{a^2+c^2}=1$$

$$\frac{u^2}{b^2} = \frac{2v}{\sqrt{a^2+c^2}} + 2$$

$$u^2 = 2b^2\left(\frac{v}{\sqrt{a^2+c^2}} + 1\right)$$

Энди $u' = u$, $v' = \frac{v}{\sqrt{a^2+c^2}} + 1$ деб алмаштириш қилсак $u'^2 = 2b^2 v'$ бу $p = b^2$ параметрли параболанинг каноник тенгламасидан иборат бўлади. cx-ax+ac=0 (7) текисликни координаталар бошига параллел кўчирилганда (8) система ушбу кўринишга эга бўлади

$$\left.\begin{array}{c} x = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} v \\ y = u \\ z = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} v \end{array}\right\}$$

буларни (9) тенгламага олиб бориб қўйсак

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2+c^2} \cdot v^2 + \frac{1}{b^2} \cdot u^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot v\right)^2 = 1$$

$$\frac{v^2}{a^2+c^2} + \frac{u^2}{b^2} - \frac{v^2}{a^2+c^2} = 1$$

$$\frac{u^2}{b^2} = 1$$

$$u^2 = b^2$$

$$u^2 - b^2 = 0$$

$$(u-b)(u+b) = 0$$

кесим u=b ва u=-b параллел тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат бўлади. Масала ечилди.

51.7-теорема. (9) бир паллали гиперболоиднинг ҳар қайси нуқтаси орқали нақ иккита тўғри чизиқли ясовчилари ўтади.

Исбот. Энг аввал бу масалани содда бўлган

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \tag{10}$$

бир паллали гиперболоид ва бўғиз кесим айланасидаги $M_0(1;0;0)$ аниқ нуқта учун ечамиз. M_0 нуқта орқали ўтувчи l тўғри чизиқ йўналтирувчи вектори

$\vec{m} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ бўлсин. Бу тўғри чизиқнинг ўзгарувчи M_t нуқтаси $(1+\alpha t,\ \beta t,\ \gamma t)$ координаталарга, бу ерда t параметр ихтиёрий ҳақиқий қийматлар қабул қилади. M_t нуқта гиперболоидга тегишли бўлади, шу ҳолда ва фақат шу ҳолда қачонки

$$(1+\alpha t)^2 + \beta^2 t^2 - \gamma^2 t^2 = 1$$

ёки

$$1+\alpha^2 t^2 + 2\alpha t + \beta^2 t^2 - \gamma^2 t^2 = 1$$

$$\left(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2\right) t^2 + 2\alpha t = 0 \qquad (11)$$

Шунинг учун *l* тўғри чизиқ (10) гиперболоидда ётади шунда ва фақат шунда қачонки (11) тенгламанинг чап тоомни айнан нолга тенг, яъни

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0 \quad \alpha = 0$$

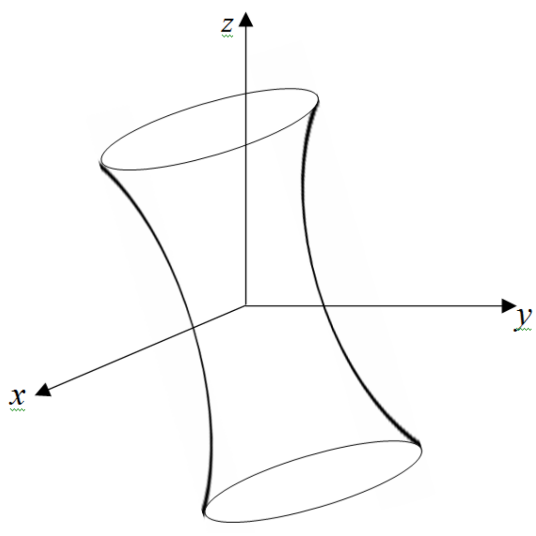
бўлса, яъни $\alpha = 0$, $\beta^2 = \gamma^2$

$$\alpha = 0, \beta^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow \beta = \pm\gamma \Leftrightarrow \alpha = 0, \gamma = \pm\beta$$

Бу ердан пропорционаллик аниқлигида фақат тўғри чизиқли ясовчиларнинг иккита йўналтирувчи векторларини ҳосил қиламиз

$$\vec{m}_1 = \{0;1;1\} \quad \vec{m}_2 = \{0;1;-1\}$$

Демак, (10) гиперболоиднинг $M_0(1;0;0)$ нуқтаси учун теорема тасдиғи исботланди. Энди M_0 нуқтани (10) гиперболоиднинг ихтиёрий бошқа M нуқтасига бу гиперболоидни ўзининг устига акс эттирувчи аффин алмаштириш воситасида ўтказиш мумкинлигини кўрсатамиз. Аффин алмаштиришида тўғри чизиқ тўғри чизиқга ўтиши туфайли бу ердан M_0 нуқта орқали қанча тўғри чизиқли ясовчи ўтган бўлса M нуқта орқали ҳам шунча тўғри чизиқли ясовчи ўтиши келиб чиқади. (10) гиперболоид айланма гиперболоид бўлади



$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \qquad (10)$$

$$x^2 - z^2 = 1, \quad y = 0$$

Демак унинг ихтиёрий нуқтасини

$$x^2 - z^2 = 1, \quad y = 0 \qquad (12)$$

гиперболоидда ётувчи нуқтани z ўқи атрофида айланиш воситасида ҳосил қилиш мумкин. Шунинг учун $M_0(1;0;0)$ нуқтани гиперболанинг ихтиёрий $M(x_0;0;z_0)$ нуқтасига ўтказиш етарли

$$\left.\begin{array}{c} x' = x_0 x + z_0 z; \\ y' = y; \\ z' = z_0 x + x_0 z \end{array}\right\} \qquad (13)$$

формула билан аффин алмаштиришни аниқлаймиз. (12) тенгламага мувофиқ туфайли $x_0^2 - z_0^2 = 1, \quad y_0 = 0$ бўлгани туфайли бу алмаштириш матрицаси детерминанти бирга тенг

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 & z_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_0 & 0 & z_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - z_0^2 = 1$$

$$y' = y$$

$$x' = x_0 x + z_0 z$$

$$z' = z_0 x + x_0 z$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - z_0^2 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} x' & z_0 \\ z' & x_0 \end{vmatrix} = x_0 x' - z_0 z'$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} x_0 & x' \\ z_0 & z' \end{vmatrix} = x_0 z' - z_0 x' = -z_0 x' + x_0 z'$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \Delta_x = x_0 x' - z_0 z'$$

$$y = y'$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\Delta_z=-z_0x'+x_0z'$$

Демак f^{-1} тескари алмаштириш матрицаси

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & z_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_0 & 0 & z_0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

матрица бўлади. Бевосита ўрнига қўйишлар $f(M_0)=M$ бўлишини кўрсатади.

$$x'=x_0\cdot 1+z_0\cdot 0=x_0$$

$$y'=0$$

$$z'=z_0\cdot 1+x_0\cdot 0=z_0$$

$$f(M_0)=f(1;0;0)=(x_0;0;z_0)=M$$

Энди f акслантириш (10) гиперболоидни ўзига ўтказишини кўрсатамиз. (13) га асосан ушбуга эга бўламиз

$$x'^2+y'^2-z'^2=(x_0x+z_0z)^2+y^2-(z_0x+x_0z)^2=x_0^2x^2+2x_0z_0xz+z_0^2z^2+y^2-z_0^2x^2-2x_0z_0xz-x_0^2z^2=$$

$$=\left(x_0^2-z_0^2\right)x^2+y^2-\left(x_0^2-z_0^2\right)z^2=\left((12)\text{га асосан}\right)=x^2+y^2-z^2=1$$

Худди шундай ((14) матрицани тадбиқ қилиш билан) f^{-1} тескари алмаштириш ҳам шунингдек (10) гиперболоидни ўзига ўтказиши кўрсатилади.

$$x=x_0x'-z_0z'$$

$$y=y'$$

$$z=-z_0x'+x_0z'$$

$$x^2+y^2-z^2=(x_0x'-z_0z')^2+y^2-(-z_0x'+x_0z')^2=x_0^2x'^2-2x_0z_0x'z'+z_0^2z'^2+y^2-z_0^2x'^2+2x_0z_0x'z'-x_0^2z'^2=$$
$$=\left(x_0^2-z_0^2\right)x'^2+y'^2-\left(x_0^2-z_0^2\right)z'^2=\left((12)\text{га асосан}\right)=x'^2+y'^2-z'^2=1$$

формула билан берилган аффин алмаштириш (9) гиперболоидни (10) гиперболоидга акс эттиришини кўриш қолди.

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{a^2x'^2}{a^2}+\frac{b^2y'^2}{b^2}-\frac{c^2z'^2}{c^2}=x'^2+y'^2-z'^2.$$

52§. КОНУС КЕСИМЛАР

52.1. Ихтиёрий конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ \text{бу ерда } a\geq b$$

айланма конус ёки доиравий конусдан ($a=b$)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

y ўқи бўйича сиқишдан ҳосил қилинади. Ҳақиқатан ҳам

$$x'=x \qquad y'=\frac{b}{a}y \qquad z'=z$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}y'^2-\frac{z'^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0$$

Айланма конусни

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$x^2+y^2-\frac{a^2}{c^2}z^2=0$$

$$x^2+y^2-R^2z^2=0 \tag{15}$$

бу ерда $R^2=\frac{a^2}{c^2}$ кўринишда ёзиш қулайдир. $z=1$ текислик бу конусни R радиусли айлана бўйича кесади. Бу параграфда (15) конуснинг барча ясси кесимларини топамиз. Бунинг учун y ўқига параллел бўлган текисликларни қараш етарлидир. Y ўқига параллел текисликни $z=h$ горизонтал текисликни y ўқи атрофида бирорта α бурчакга буришдан ҳосил қилинади. Шундай буриш қуйидаги тарзда ёзилади:

$$\left.\begin{array}{c} x'=x\cos\alpha-z\sin\alpha \\ y'=y \\ z'=x\sin\alpha+z\cos\alpha \end{array}\right\} \tag{16}$$

Бу (16) алмаштиришда $\vec{e}_2$ вектор ўз жойида қолиб $\vec{e}_1,\vec{e}_3$ векторлар эса мос равишда $\vec{e}_1\cos\alpha+\vec{e}_3\sin\alpha$, $-\vec{e}_1\sin\alpha+\vec{e}_3\cos\alpha$ векторларга ўтишидан, яъни Oxz текисликда α бурчакга бурилишидан келиб чиқади (30§ га қаралсин). $z=h$ текислик $M_0(0;0;h)$ нуқта орқали ўтади ҳамда $\vec{e}_1=\{1;0;0\}$ ва $\vec{e}_2=\{0;1;0\}$

векторларга параллел бўлади. (16) формуладан бу текисликни y ўқи атрофида α бурчакга буришдан кейин $M_0'\left(-h\sin\alpha;0;h\cos\alpha\right)$ нуқта орқали ўтувчи ҳамда $\vec{e}_1' = \{\cos\alpha;0;\sin\alpha\}$ ва $\vec{e}_2'$ векторларга параллел бўлган π_α текисликни ҳосил қиламиз. π_α текисликнинг параметрик тенгламасини ёзамиз:

$M_0(0;0;h)$ нуқтанинг координаталарини (16) тенгламалар системасига қўйиб $M_0'\left(-h\sin\alpha;0;h\cos\alpha\right)$ нуқтанинг координаталарини ҳосил қиламиз.

$$\left.\begin{aligned} x &= -h\sin\alpha + u\cos\alpha + 0\cdot v \\ y &= 0 + u\cdot 0 + 1\cdot v \\ z &= h\cos\alpha + u\sin\alpha + 0\cdot v \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x &= -h\sin\alpha + u\cos\alpha \\ y &= v \\ z &= h\cos\alpha + u\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

(17) параметрик тенгламадан вектор тенгламага ўтамиз

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0'} + u\vec{e}_1' + v\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0'} = u\vec{e}_1' + v\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{M_0'M} = u\vec{e}_1' + v\vec{e}_2$$

u ва v параметрлар $M_0'\vec{e}_1\vec{e}_2$ ортонормал репер билан аниқланган бу текисликдаги нуқталарнинг тўғри бурчакли координаталари бўлади. (17) ифодаларни (15) тенгламага қўйиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб

$$\left(-h\sin\alpha + u\cos\alpha\right)^2 + v^2 - R^2\left(h\cos\alpha + u\sin\alpha\right)^2 = 0$$

$$h^2\sin^2\alpha - 2hu\sin\alpha\cos\alpha + u^2\cos^2\alpha + v^2 - R^2h^2\cos^2\alpha - 2R^2hu\sin\alpha\cos\alpha - R^2u^2\sin^2\alpha = 0$$

$$u^2\left(\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha\right) + v^2 - 2hu\sin\alpha\cos\alpha\left(1+R^2\right) + h^2\left(\sin^2\alpha - R^2\cos^2\alpha\right) = 0 \qquad (18)$$

u, v кординаталардаги бизнинг ясси кесим тенгламсини ҳосил қиламиз.

1) $\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha = 0$ да

$$\cos^2\alpha = R^2\sin^2\alpha$$

$$R^2 = \mathrm{ctg}^2\,\alpha \qquad R = ctg\alpha$$

эга бўламиз. Шунинг учун (18) тенглама

$$v^2 - 2hRu + h^2\left(\sin^2\alpha - R^2\cos^2\alpha\right) = 0$$

$$v^2 = 2hRu + h^2\left(R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

кўринишни ёки *u, v* кординаталар системасининг бошини параллел кўчиришдан сўнг, яъни

$$v^2 = 2hR\left(u + \frac{h^2\left(R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{2hR}\right)$$

бўлганидан

$$v' = v$$

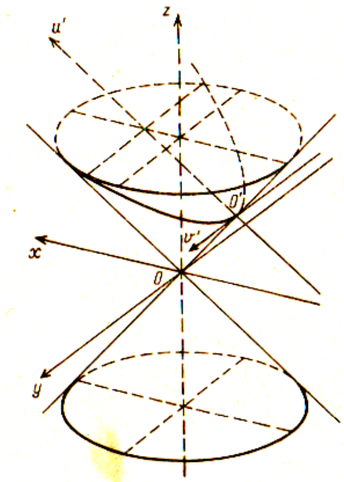
$$u' = u + \frac{h^2\left(R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{2hR}$$

дейилса

$$v'^2 = 2hRu' \tag{19}$$

кўринишни олади. Бу h>0 да параметри p=hR бўлган параболанинг каноник тенгламасидан иборат бўлади. H ўзгарганда у барча мусбат қийматларни қабул қилиши мумкин (63-расм) h=0 а эса устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлади. Шундай қилиб биз ушбу жумлани исбот қилдик.

52.2-жумла. (15) конуснинг ясси кесим ихтиёрий параметрли парабола бўлиши мумкин.



63-расм

2) Энди $\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha \neq 0$ бўлсин. *U* ўзгарувчи билан тўла квадрат ажратиб

$$u^2\left(\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha\right) + v^2 - 2hu\sin\alpha\cos\alpha\left(1+R^2\right) + h^2\left(\sin^2\alpha - R^2\cos^2\alpha\right) = 0 \tag{18}$$

тенгламани алмаштирамиз

$$\left(\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha\right)\left[u^2-2uh\frac{\left(1+R^2\right)\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}+\frac{h^2\left(1+R^2\right)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}\right]+$$

$$+v^2-\frac{h^2\left(1+R^2\right)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}+h^2\left(\sin^2\alpha-R^2\cos^2\alpha\right)=0$$

$$\left(\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha\right)\left[u^2-2uh\frac{\left(1+R^2\right)\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}+\frac{h^2\left(1+R^2\right)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}\right]+v^2=$$

$$=\frac{h^2\left(1+R^2\right)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}-h^2\left(\sin^2\alpha-R^2\cos^2\alpha\right) \qquad (20)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенглманинг ўнг томони равшан алмаштиришлардан сўнг ушбу кўринишни қабул қилади

$$\frac{h^2\left(1+R^2\right)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}-h^2\left(\sin^2\alpha-R^2\cos^2\alpha\right)=$$

$$=h^2\,\frac{\left(1+R^2\right)^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\left(\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha-R^2\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}=$$

$$=h^2\,\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha+2R^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+R^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha+R^2\sin^4\alpha+R^2\cos^4\alpha-R^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}=$$

$$=h^2\,\frac{\left(R\cos^2\alpha+R\sin^2\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}=h^2\,\frac{R^2}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}=\frac{h^2R^2}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}$$

u, *v* кординаталар системасини параллел кўчиришдан сўнг (20) тенглама $u'=u-h\dfrac{\left(1+R^2\right)\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}$ $\quad v'=v$ деб

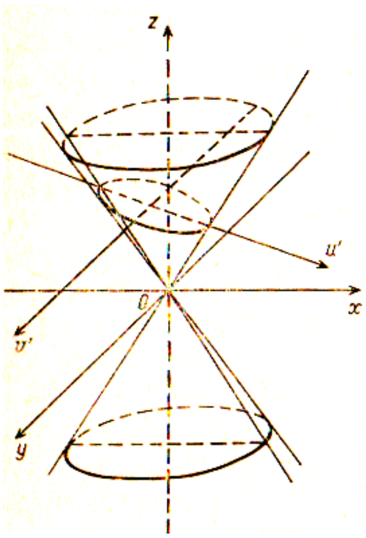
$$\left(\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha\right)\left[u-h\frac{\left(1+R^2\right)\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}\right]^2+v^2=\frac{h^2R^2}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}$$

$$\left(\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha\right)u'^2+v'^2=\frac{h^2R^2}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha} \qquad (21)$$

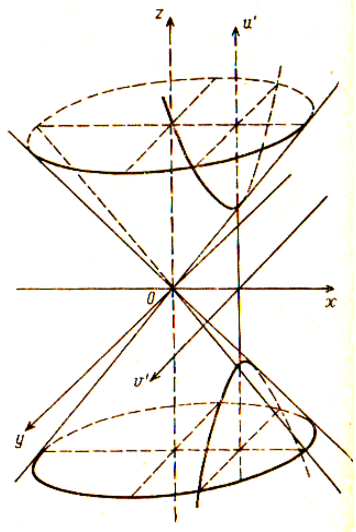
тенгламага айланади ёки $h\neq 0$ да

$$\frac{u'^2}{\dfrac{h^2R^2}{\left(\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha\right)^2}}+\frac{v'^2}{\dfrac{h^2R^2}{\cos^2\alpha-R^2\sin^2\alpha}}=1 \qquad (22)$$

тенгламага айланади.



64-расм



65-расм

2а) Агар $\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha > 0$ бўлса, у ҳолда (22) тенглама кичик ўқи y ўқига параллел бўлган эллипс каноник тенгламасидан иборат бўлади (64-расмга қаралсин)

$$ctg\alpha = R \Rightarrow \frac{1}{tg\alpha} = R \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{R}$$

α бурчак 0 дан $arctg\dfrac{1}{R}$ гача ўзгарганда ярим ўқлар нисбати

$$\frac{a}{b} = \frac{|h|R}{\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha} : \frac{|h|R}{\sqrt{\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha}}$$

бўлиб 1 дан +∞ гача ўзгаради. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 0 - R^2\sin^2 0}} \to 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 arctg\frac{1}{R} - R^2\sin^2 \alpha arctg\frac{1}{R}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+tg^2 arctg\frac{1}{R}} - R^2\frac{tg^2 arctg\frac{1}{R}}{1+tg^2 arctg\frac{1}{R}}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{R^2}} - \frac{R^2\frac{1}{R^2}}{1+\frac{1}{R^2}}}} \to +\infty$$

бундан ташқари h ўзгарганда катта ярим ўқ

$$a = \frac{|h|R}{\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha}$$

барча йўл қўйилган қийматларни қабул қилади. Шундай қилиб биз ушбуни исботладик.

52.3-жумла. (15) конуснинг ясси кесими ихтиёрий ўлчамли эллипс бўлиши мумкин. Агар (22) тенгламада h=0 бўлса, у ҳолда биз мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигини ҳосил қиламиз.

2б) $\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha < 0$ бўлса (22) тенгламани

$$\frac{u'^2}{\dfrac{h^2R^2}{\left(\cos^2\alpha - R^2\sin^2\alpha\right)^2}} - \frac{v'^2}{\dfrac{h^2R^2}{R^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}} = 1$$

кўринишда ёзиб олсак, у ҳолда (22) тенглама 65-расмда тасвирланган гиперболанинг каноник тенгламаси бўлади. Эллипс бўлган ҳол каби *a* фокал ярим ўқ барча мусбат қийматларни қабул қилади аммо ярим ўқларнинг нисбати учун

$$\frac{a}{b} = \frac{|h|R}{R^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} : \frac{|h|R}{\sqrt{R^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{R^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}} \ge \frac{1}{\sqrt{R^2\sin^2\alpha}} = \frac{1}{R|\sin\alpha|} \ge \frac{1}{R}$$

чекланиш бор. Демак ҳар қандай гипербола (15) доиравий конуснинг ясси кесими бўлавермайди. Аммо R ни ўзгартириб ярим ўқларнинг ҳар қанча кичик нисбатини ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб биз ушбуни исбот қилдик.

52.4-жумла. (15) доиравий конуснинг ясси кесими ярим ўқлар нисбати $\frac{a}{b} \ge \frac{1}{R}$ бўлган ҳар қандай гипербола бўлиши мумкин. Ихтиёрий ўлчамли гипербола бирорта доиравий конуснинг ясси кесими бўлиши мумкин.

Агар (21) тенгламада h=0 бўлса, у ҳолда кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигини ҳосил қиламиз.

52.5. Демак эллипслар, гиперболалалр, параболалалр, кесишувчи тўғри чизиқлар, мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар, устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар конус кесимлар бўлади.

53§. ПАРАБОЛОИДЛАР.

53.1. Эллиптик параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (23)$$

каноник тенгламага эга, бу ерда $p \geq q > 0$, y=0 текислик бу параболоидни p параметрли

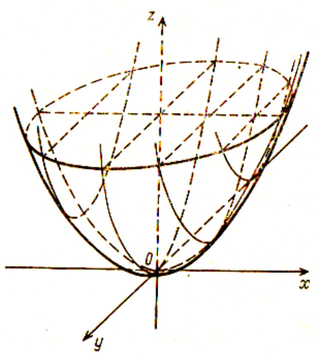
$$x^2 = 2pz,\ y=0$$

парабола бўйича кесади, x=h текислик эса уни q параметрли

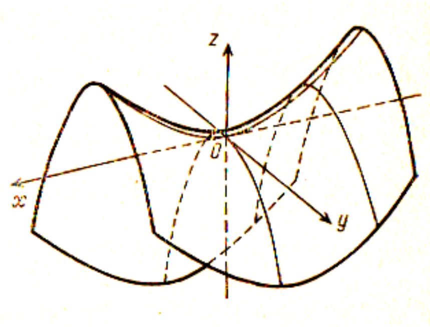
$$x=h, \frac{y^2}{q}=2z-\frac{h^2}{p} \Leftrightarrow y^2 = 2qz-\frac{q}{p}h^2, x=h$$

парабола бўйича кесади. Шунинг учун эллиптик параболоид бирорта қўзғалувчи параболанинг қачонки унинг учи бошқа қўзғалмас парабола бўйлаб сирпанишдан ҳосил бўлган параллел кўчиришдан ҳосил қилиш мумкин. Шу билан бирга параболалар перпендикуляр текисликларда ётади, уларнинг ўқлари эса параллел ва бир томонга йўналган бўлади (66-расмга қаралсин).

53.2. Агар p=q бўлса, у ҳолда (23) параболоиднинг z=h>0 текислик билан кесими $x^2+y^2=\sqrt{ph}^2$ айлана бўлади.



66-расм



67-расм

Шундай параболоид айланма параболоиддан иборат бўлади. У $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z$ айланма параболоид $x^2=2pz$, $y=0$ параболанинг z ўқи атрофида айланишидан ҳосил қилиш мумкин. Ихтиёрий эллиптик параболоид $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, $p \geq q > 0$, $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z$ айланма параболоиддан айланиш ўқига перпендикуляр бўлган бирор йўналиш бўйича сиқиш билан ҳосил қилинади. Ҳақиқатан ҳам масалан

$$x' = x$$

$$y' = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} y \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} y'$$

$$z' = z$$

y ўқи бўйича сиқиш натижасида

$$\frac{x'^2}{p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q} y'^2 = 2z'$$

$$\frac{x'^2}{p} + \frac{y'^2}{q} = 2z'$$

(23) эллиптик параболоид ҳосил қилинади.

52.3.Эллиптик параболоид тўғри чизиқли ясовчиларга эга эмас.

Исбот икки паллали гиперболоидлар учун қандай бўлса худди шундайдир (51§ га қаралсин). Ҳақиқатан ҳам барча тўғри чизиқларни z=0 текисликни кесувчи ва бу текисликга параллел тўғри чизиқларга бўлиш мумкин. z=0 текисликни кесувчи тўғри чизиқлар бу текисликнинг (23) эллиптик параболоид билан кесишмаси ($\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$ мавҳум тўғри чизиқлар жуфтлиги) фақат битта нуқтада кесишгани туфайли тўғри чизиқли ясовчилари бўлмайди. Тўғри чизиқларнинг текислик бир томонида ётувчи қисми эллиптик параболоидда ётмайди, қолган тўғри чизиқлар эса z=h текисликда ётиб ё (23) эллиптик праболоид билан текислик кесишмаси

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \; z = h$$

чизиқ бўлиб h>0 да ярим ўқлари $\sqrt{2ph}$, $\sqrt{2qh}$ бўлган эллипс. H=0 да мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги h<0 бўш тўпламдир, яъни бу тўғри чизиқлар (23) эллиптик параболоиднинг тўғри чизиқли ясовчилари бўлмайди.

53.4-масала. (23) эллиптик параболоиднинг ихтиёрий вертикал ясси кесими q дан p гача чегарада ўзгарувчи p' параметрли парабола бўлади.

(23) эллиптик параболоиднинг ихтиёрий вертикал ясси кесимини топамиз. Бунинг учун zўқига параллел бўлган текисликларни қараш етарлидир.

z ўқига параллел текисликни x=h вертикал текисликни z ўқи атрофида бирорта α бурчакга буришдан ҳосил қилинади. Шундай буриш қуйидаги тарзда ёзилади.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Бу (*) алмаштиришда, $\vec{e}_3$ вектор ўз жойида қолиб, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторлар эса мос равишда

$$\vec{e}_1\cos\alpha + \vec{e}_2\sin\alpha$$

$$\vec{e}_1\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\vec{e}_2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{e}_1\sin\alpha + \vec{e}_2\cos\alpha$$

Векторларга ўтишдан, яъни Oxy текисликда α бурчакга буришдан келиб чиқади (30§га қаралсин). x=h текислик M_0(h;0;0) нуқта орқали ўтади ҳамда $\vec{e}_2 = \{0;1;0\}$ ва $\vec{e}_3 = \{0;0;1\}$ векторларга параллел бўлади. (*) формуладан бу текисликни zўқи атрофида α бурчакга буришдан кейин $M_0'(h\cos\alpha; h\sin\alpha; 0)$ нуқта орқали ўтувчи ҳамда $\vec{e}_2' = \{-\sin\alpha;\cos\alpha;0\}$ ва $\vec{e}_3 = \{0;0;1\}$ векторларга параллел бўлган π_α текисликни ҳосл қиламиз. π_α текисликнинг параметрик тенгламасини ёзамиз.

M_0(h;0;0) нуқтанинг координаталарини (*) тенгламалар системасига қўйиб $M_0'(h\cos\alpha; h\sin\alpha; 0)$ нуқтанинг координаталарини ҳосил қиламиз

$$\left.\begin{aligned} x &= h\cos\alpha - u\sin\alpha + 0\cdot v \\ y &= h\sin\alpha + u\cos\alpha + 0\cdot v \\ z &= 0 + 1\cdot v \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x &= h\cos\alpha - u\sin\alpha \\ y &= h\sin\alpha + u\cos\alpha \\ z &= v \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

(**) параметрик тенгламадан вектор тенгламага ўтамиз

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0'} + u\vec{e}_2' + v\vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0'} = u\vec{e}_2' + v\vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{M_0'M} = u\vec{e}_2' + v\vec{e}_3$$

u ва v параметрлар $M_0'\vec{e}_2'\vec{e}_3$ ортонормал репер билан аниқланган бу текисликдаги нуқталарнинг тўғри бурчакли координаталари бўлади. (**) ифодаларни айланма параболоид тенгламага қўйиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб

$$\frac{\left(h\cos\alpha - u\sin\alpha\right)^2}{p} + \frac{\left(h\sin\alpha + u\cos\alpha\right)^2}{p} = 2v$$

$$h^2\cos^2\alpha - 2hu\cos\alpha\sin\alpha + u^2\sin^2\alpha + h^2\sin^2\alpha + 2hu\cos\alpha\sin\alpha + u^2\cos^2\alpha = 2pv$$

$$h^2 + u^2 = 2pv$$

$$u^2 = 2pv - h^2$$

$$u^2 = 2p\left(v - \frac{h^2}{2p}\right)$$

$$u' = u$$

$$v' = v - \frac{h^2}{2p}$$

алмаштириш қилиб

$$u'^2 = 2pv'$$

p параметрли парабола ҳосил қиламиз.Демак (23) эллиптик параболоиднинг ихтиёрий вертикал ясси кесими q дан p гача чегарада ўзгарувчи p' параметрли парабола бўлади.

53.5-масала. (23) эллиптик параболоиднинг ихтиёрий вертикал бўлмаган ясси кесими эллипс, мавҳум эллипс ёки мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлади. Шу билан бирга ихтиёрий ўлчамли эллипс (23) берилган эллиптик параболоиднинг ясси кесими бўлади.

(23) эллиптик параболоиднинг ихтиёрий вертикал бўлмаган ясси кесими эллипс, мавҳум эллипс ёки мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлади. Шу билан бирга ихтиёрий ўлчамли эллипс (23) берилган эллиптик параболоиднинг ясси кесими бўлади.

Исбот. Ихтиёрий вертикал бўлмаган π текислик тенгламасини $Ax + By + z + C = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу текислик $O(0,0,\mathrm{c})$ нуқта орқали ўтади ва $\vec{e}_1\,' = \{1, 0, -A\}$ ва $\vec{e}_2\,' = \{0, 1, -B\}$ векторларга параллел. Бу текисликнинг параметрик тенгламаси $x=u$, $y=v$, $z=-c-uA-vB$ (23) эллиптик параболоиднинг π текисликда u,v аффин координаталардаги яси кесим тенгламасини ёзишга имкон беради

$$\frac{u^2}{p}+\frac{v^2}{q}+2\left(C+uA+vB\right)=0$$

тайинланган A ва B да да ҳамда C ўзгарганда (яъни π текислик параллел силжиганда) тенглама эллипс, мавҳум эллипс ёки мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат бўлади. Шу билан бирга ихтиёрий ўлчамли эллипс (23) берилган эллиптик параболоиднинг ясси кесими бўлади.

53.6. Гиперболик параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \tag{24}$$

каноник тенгламага эга, бу ерда p>0, q>0, y=0 текислик бу параболоидни $x^2=2pz$, y=0 p – параметрли парабола бўйича кесади. x=h текисликлар эса уни

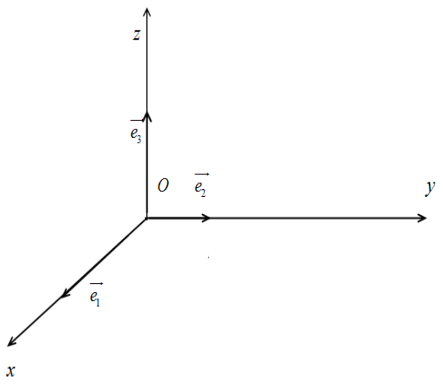
$$\frac{x^2}{p}-2z=\frac{y^2}{q}$$

$$y^2=-2qz+\frac{qh^2}{p}, x=h$$

q – параметрли параболалар бўйича кесади. Аммо бу параболанинг y=0 текисликда ётувчи параболадан фарқли z ўқининг манфий томонига қараб йўналгандир. Гиперболик параболоид эллиптик параболоид каби бирорта қўзғалувчи параболанинг қачонки унинг учи бошқа қўзғалмас парабола бўйлаб сирпанишидан ҳосил бўлган параллел кўчиришдан ҳосил қилиш мумкин. Шу билан бирга параболалар перпендикуляр текисликларда ётади. Уларнинг ўқлари эса параллел аммо қарма-қарши томонга йўналгандир. (67-расмга қаралсин). Мана шундай ясалишига кўра гиперболик параболоид эгар кўринишга эга эканлиги кўриниб турибди.

53.7 жумла. (24) гиперболоиднинг ихтиёрий вертикал бўлмаган ясси кесими гипербола ёки кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги бўлади.

Исбот. Ихтиёрий вертикал бўлмаган π – текислик тенгламасини Ax+By+z+C=0 кўринишда ёзиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам вертикал бўлмаган π: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ текислик учун $C_1 \neq 0$ бўлади.



$$\vec{e}_1 = \{1;0;0\}$$
$$\vec{e}_2 = \{0;1;0\}$$
$$\vec{e}_3 = \{0;0;1\}$$

$$Oz \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{e}_3 \parallel \pi \Leftrightarrow A_1O + B_1O + C_1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$Oz \nparallel \pi \Leftrightarrow C_1 \neq 0$$

$$\pi : \frac{A_1}{C_1}x + \frac{B_1}{C_1}y + z + \frac{D_1}{C_1} = 0$$

$$\pi : Ax + By + z + C = 0$$

Бу текислик $O'(0;0;-c)$ нуқта орқали ўтади ҳамда $\vec{e}'_1 = \{1;0;-A\}$ ва $\vec{e}'_2 = \{0;1;-B\}$ векторларга параллел бўлади.

Чунки

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 - C + C = 0$$
$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + 1 \cdot (-A) = 0$$
$$A \cdot 0 + B \cdot 1 + 1 \cdot (-B) = 0$$

бу текисликнинг параметрик тенгламаси

$$x = 0 + u \cdot 1 + v \cdot 0$$
$$y = 0 + u \cdot 0 + v \cdot 1$$
$$z = -C + u \cdot (-A) + v \cdot (-B)$$

ёки

$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = -C - Au - Bv$$

бўлади. π – теккисликда *u,v* аффин координаталарда (24) гиперболоид ясси кесим тенгламасини

$$\frac{u^2}{p} - \frac{v^2}{q} = 2\left(-C - Au - Bv\right)$$

ёки

$$\frac{u^2}{p} - \frac{v^2}{q} + 2\left(C + Au + Bv\right) = 0 \qquad (25)$$

кўринишда ёзишга имкон беради. Тайинланган A ва B ларда ҳамда C параметрнинг ўзгаришида (яъни π текисликнинг параллел кўчишида) (25) тенглама гипербола тенгламасидан иборат бўлиб C нинг фақат битта қийматида кесишувчи тўғри чизиқлар жутлигига айланади.

53.8 жумла. (24) гиперболоиднинг ихтиёрий вертикал ясси кесими парабола ёки тўғри чизиқ бўлади.

Исбот. Ихтиёрий π-вертикал текисликни ушбу кўринишда ёзиш мумкин.

$$Ax+By+C=0 \tag{26}$$

бу ерда $A^2+B^2=1$ ва $B\neq 0$ деб фараз қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам

$$\pi:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

вертикал текислик бўлгани учун

$$Oz \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{e}_3 \parallel \pi \Leftrightarrow A_1O+B_1O+C_1\cdot 1=0 \Leftrightarrow C_1=0$$

π-текислик тенгламасини $A_1x+B_1y+D_1=0$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $A^2+B^2>0$ бўлгани сабабли

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}x+\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}y+\frac{D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=0$$

$$A=\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},\quad B=\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},\quad C=\frac{D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$

дейилса π-текислик тенгламаси

$$Ax+By+C=0 \tag{26}$$

кўринишда бўлади, бу ерда

$$A^2+B^2=\frac{A_1^2}{A_1^2+B_1^2}+\frac{B_1^2}{A_1^2+B_1^2}=1 \text{ ва } B\neq 0$$

деб фараз қилиш мумкин. Бу текислик $O'\left(0;-\frac{C}{B};0\right)$ нуқта орқали ўтади ҳамда $\vec{e}_1'=\{0;0;1\}$ ва $\vec{e}_2'=\{-B;A;0\}$ векторларга параллелдир. Чунки

$$A\cdot 0+B\cdot\left(\frac{-C}{B}\right)+C=0$$
$$A\cdot 0+B\cdot 0+0\cdot 1=0$$
$$A\cdot(-B)+B\cdot A+0\cdot 0=0$$

текисликнинг параметрик тенгламаси

$$x = 0 + u \cdot 0 + (-B) \cdot v$$
$$y = \frac{-C}{B} + u \cdot 0 + A \cdot v$$
$$z = 0 + u \cdot 1 + v \cdot 0$$

ёки

$$x = -Bv$$
$$y = \frac{-C}{B} + Av$$
$$z = u$$

дан u,v тўғри бурчакли координаталарда (24) гиперболоиднинг ясси кесим тенгламасини ҳосил қиламиз.

$$\frac{B^2 v^2}{p} - \frac{\left(\frac{-C}{B} + Av\right)^2}{q} = 2u \tag{27}$$

$$\frac{B^2 v^2}{p} - \frac{C^2}{B^2 q} + \frac{2AC}{qB} v - \frac{A^2 v^2}{q} = 2u$$

$$\left(\frac{B^2}{p} - \frac{A^2}{q}\right) v^2 = -2A \frac{C}{qB} v + 2u + \frac{C^2}{B^2 q}$$

Агар $qB^2 - pA^2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\left(qB^2 - pA^2\right) v^2 = 2upq - 2A \frac{C}{B} pv + \frac{C^2}{B^2} p$$

$$\left(qB^2 - pA^2\right) v^2 + 2A \frac{C}{B} pv - 2upq - \frac{C^2}{B^2} p = 0$$

$$qB^2 - pA^2 = \alpha, \quad A \frac{C}{B} p = \beta, \quad 2pq = \gamma, \quad -\frac{C^2}{B^2} p = \delta$$

дейилса тенглама

$$\alpha \neq 0, \; \alpha v^2 + 2\beta v + \gamma u + \delta = 0$$

$$\alpha \left(v^2 + 2\frac{\beta}{\alpha} v + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) + \gamma u + \delta - \frac{\beta^2}{\alpha} = 0$$

$$\alpha \left(v + \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 + \gamma u + \delta - \frac{\beta^2}{\alpha} = 0$$

$$u' = u, \quad v' = v + \frac{\beta}{\alpha} \text{ деб}$$

$$\alpha v'^2 + \gamma u' + \delta - \frac{\beta^2}{\alpha} = 0$$

Демак агар $\alpha = qB^2 - pA^2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда (27) тенглама ўқи z ўқига параллел u ўқ билан устма-уст тушувчи ҳамда $qB^2 - pA^2 = \alpha$ соннинг ишорасига боғлиқ ҳолда юқорига ёки пастга қараб йўналган парабола бўлади.

Агарда $qB^2 - pA^2 = \alpha = 0$ бўлса, яъни

$$qB^2 = pA^2 \Leftrightarrow \frac{A^2}{B^2} = \frac{q}{p} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}$$

бўлса, у ҳолда шундай текислик (24) гиперболоидни

$$2pqu - 2A\frac{C}{B}pv + \frac{C^2}{B^2}p = 0$$

Тўғри чизиқ бўйлаб кесади. Тасдиқ исботланди.

53.9-теорема. Гиперболик параболоиднинг ихтиёрий нуқтаси орқали нақ иккита тўғри чизиқли ясовчиси ўтади.

Исбот. $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ (24) гиперболоидда ихтиёрий $M_0(x_0,y_0)$ нуқтани оламиз. Бу нуқта орқали (28) шартни қаноатлантирувчи (26) тенглама билан берилган нақ иккита π_1 ва π_2 текисликлар ўтади. Бу текисликлар (24) гиперболоидни l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар бўйича кесади. Вертикал $x=x_0$, $y=y_0$ тўғри чизиқ (24) гиперболоидни ягона $\left(x_0, y_0, \frac{qx_0^2 - py_0^2}{2pq}\right)$ нуқтада кесгани туфайли, бу икки тўғри чизиқ ҳам M_0 нуқта орқали ўтади. M_0 нуқта орқали ўтувчи бошқа тўғри чизиқлари йўқ чунки ихтиёрий тўғри чизиқ вертикал текисликда ётади. Мабода (26) вертикал текислик (24) гиперболоидни тўғри чизиқ бўйлаб кесса у ҳолда унинг тенгламаси (28) шартни қаноатлантиради. Теорема исботланди.

54§. ЦИЛИНДРЛАР.

54.1-таъриф. (Цилиндрнинг ясовчиси деб аталувчи) тўғри чизиқнинг ўзига ўзи параллел кўчишидан ҳамда (бу цилиндрнинг йўналтирувчиси деб аталувчи) берилган чизиқни кесиши натижасида ҳосил қилинган сирт цилиндрик сирт ёки цилиндр деб аталади.

54.2-теорема. Умумий иккинчи тартибли

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0 \qquad (1)$$

тенглама билан берилган бўшмас Ф сирт ясовчиси Oz ўқига параллел бўлган цилиндр бўлади фақат ва фақат шунда қачонки (1) тенглама ушбу кўринишга эга F(x,y)=0 бўлса, яъни $a_{33}=a_{43}=a_{23}=a_3=0$.

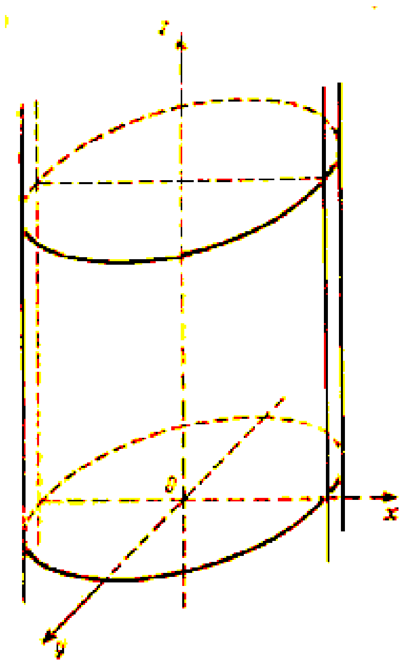
Исбот. Етарлилиги. Агар (1) тенглама F(x,y)=0 кўринишга эга бўлса, яъни (1) тенгламада $a_{33}=a_{43}=a_{23}=a_3=0$ бўлса, у ҳолда (1) тенглама билан берилган бўшмас Ф сирт ясовчиси Oz ўқига параллел бўлган цилиндр бўлади.

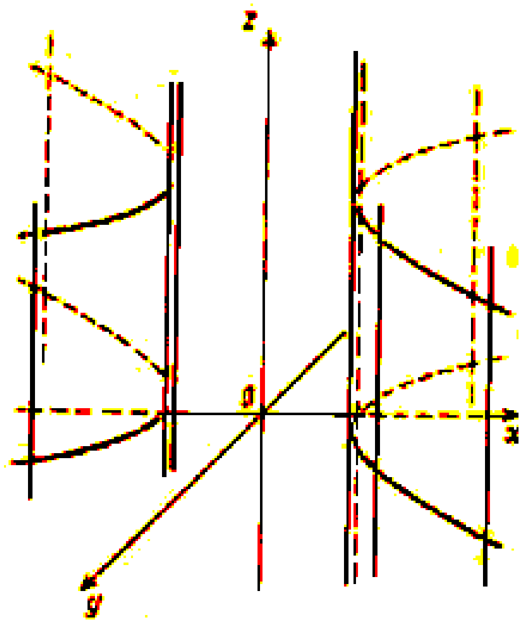
Зарурлигини текшириш учун Ф сиртда бирорта $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтани оламиз. Унда $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадан ўтувчи $\vec{k}(0;0;1)$ векторга параллел тўғри чизиқ параметрик тенгламаси

$$\begin{cases} x=x_0+0\cdot t \\ y=y_0+0\cdot t \\ z=z_0+1\cdot t \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0+t \end{cases} \qquad (29)$$

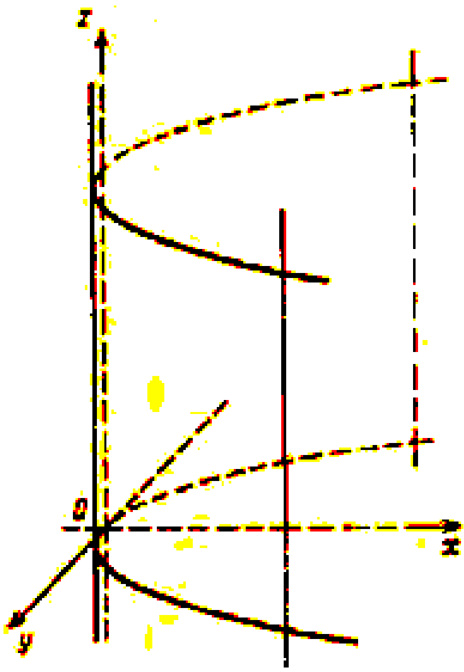
бўлади. Унда $x=x_0, y=y_0, z=z_0+t$ (29) тўғри чизиқ δ сиртда бутунлай ётади. (29) тўғри чизиқ нуқталарининг координаталарини (1) тенгламага қўйиб ҳамда бунда $M_0\in\Phi$ эканлигини эътиборга олиб ушбуни ҳосил қиламиз.

$$a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+a_{33}\left(z_0^2+2z_0t+t^2\right)+2a_{12}x_0y_0+2a_{13}x_0\left(z_0+t\right)+2a_{23}y_0\left(z_0+t\right)+$$
$$+2a_1x_0+2a_2y_0+2a_3\left(z_0+t\right)+a_0=0$$





68-расм 69-расм



70-расм

$$a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 +$$
$$+2a_1x_0 + 2a_2y_0 + 2a_3z_0 + a_0 + a_{33}t^2 + 2\left(a_{33}z_0 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_3\right)t = 0$$

$$a_{33}t^2 + 2\left(a_{33}z_0 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_3\right)t = 0$$

Бу тенглик t нинг барча қийматларида бажариилиши керак. Демак $a_{33}=0$. Энди (1) тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин

$$F(x,y) + 2z\left(a_{13}x + a_{23}y + a_3\right) = 0$$

Агар $a_{13} = a_{23} = a_3 = 0$ шарт бажарилмаса, у ҳолда шундай (x_1,y_1) жуфтликни топиш мумкинки бунда

$$a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_3 \neq 0$$

унда

$$z_1 = \frac{F\left(x_1, y_1\right)}{2(a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_3)}$$

деб $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right) \in \Phi$ нуктани ҳосил қиламиз. Шу вақтнинг ўзида $x = x_1, y = y_1, z = z_1 + t$ тўғри чизиқнинг ҳеч бир бошқа нуқтаси Ф сиртга тегишли эмас. Бу зиддият исботни тугатади.

54.3. Демак иккинчи тартибли цилиндрик сирт бирорта каноника координаталар системасида

$$F(x,y)=0 \qquad (30)$$

тенглама билан берилади, бу ерда $F(x,y)$ - x, y ўзгарувчиларнинг иккинчи даражали кўпҳадидир. $z=0$ текисликда (30) тенглама билан аниқланувчи иккинчи тартибли чизиқ берилган цилиндрик сиртнинг йўналтирувчи чизиғи бўлади. Агар бу чизиқ ҳақиқий ёки парабола бўлса, у ҳолда унинг устидаги цилиндр мос равишда эллиптик цилиндр, гиперболик цилиндр (69-расм) ёки параболик цилиндр (70-расм) деб аталади. Агар йўналтирувчи чизиқ тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат бўлса, у ҳолда цилиндрик сирт (устма-уст тушувчи параллел ёки кесишувчи ҳақиқий ёки мавҳум) текисликлар жуфтлигига ажралади.

54.4 жумла. (30) цилиндрнинг ҳар қандай вертикал бўлмаган ясси кесими унинг йўналтирувчиси қандай номланса худди шундай номланувчи иккинчи тартибли чизиқ бўлади.

Исбот. Биз биламизки (53.7 жумлага қаранг) ҳар қандай вертикал бўлмаган текислик

$$x = u,\ y = v,\ z = -C - Au - Bv$$

Параметрик тенглама билан берилиши мумкин. Бу ифодаларни (30) тенгламага қўйиб u,v аффин координаталардаги ясси кесимни ифодаловчи

$$F(u,v)=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

54.5 жумла. Ихтиёрий вертикал текислик (30) цилиндрни ё кесмайди (ҳаттоки умумий мавҳум нуқталарга ҳам эга эмас), ё унда бутунлай ётади, ёки уни (ҳақиқий, мавҳум ёки устма-уст тушувчи) параллел тўғри чизиқлар жуфтлиги бўйича кесади.

Бу тасдиқ 38§даги иккинчи тартибли чизиқ билан тўғри чизиқнинг кесишиши ҳақидаги натижалардан ва ушбу кузатишлардан келиб чиқади.

(30) цилиндрни Ф орқали, вертикал текисликни π орқали, Оху текисликни π_{12} орқали, $\pi \cap \pi_{12}$ тўғри чизиқни l орқали, $\Phi \cap \pi_{12}$ чизиқни эса Γ орқали

белгилаймиз. Унда $\pi \cap \Phi$ ясси кесим $l \cap \Gamma$ чизиқ устидаги (вертикал) цилиндр бўлади.

55§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАРНИНГ АФФИН КЛАССИФИКАЦИЯЛАРИ.

55.1 жумла. $f: E^3 \to E^3$ аффин алмаштириш Ф иккинчи тартибли сиртни Φ' иккинчи тартибли сиртга, π текисликни π' текисликга ўтказсин. Унда $\pi \cap \Phi$ ва $\pi' \cap \Phi'$ чизиқлар бир хил номларга эга.

Исбот. Oxyz аффин координаталар системасини шундай оламизки униннг учун π текислик Oxy координаталар текислиги бўлсин. 45.3-жумлага мувофиқ шундай ягона $O'x'y'z'$ аффин координаталар системаси мавжудки бунда f алмаштириш Oxyz ва $O'x'y'z'$ координаталар системаси билан ассоцирланади. $f(\pi) = \pi'$ бўлгани туфали π' текислик $O'x'y'$ координаталар текислиги бўлади. Oxyz координаталар системасида Ф сирт иккинчи тартибли тенглама F(x,y,z)=0 билан берилган бўлсин. Унда Φ' сирт $O'x'y'z'$ координаталар системасида худди шу $F(x'y'z') = 0$ тенглама билан берилиши мумкин. Шунинг учун $\pi \cap \Phi$ ва $\pi' \cap \Phi'$ ясси кесимлар Oxy ва $O'x'y'$ координаталар системасида мос равишда бир хил F(x,y,z)=0 ва $F(x'y'z') = 0$ тенгламаларга эга бўлади. Аммо биз биламизки (ҳар хил аффин координаталар системасида) бир хил тенгламалар билан берилган иккинчи тартибли чизиқлар аффин эквивалентдир ва демак (46§ га қаранг) бир хил номларга эга. Жумла исботланди.

55.2-теорема.Ихтиёрий иккинчи тартибли сирт аффин алмаштириш воситасида бирорта тўғри бурчакли координаталар системасида қуйидаги 17 тенгламалар билан берилган сиртлардан бирига ўтказилади.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$;

3) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

4) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$;

6) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

7) $x^2 + y^2 = z$;

8) $x^2 - y^2 = z$;

10) $x^2 + y^2 = -1$;

11) $x^2 - y^2 = 1$;

12) $y^2 = x$;

13) $x^2 - y^2 = 0$;

14) $x^2 + y^2 = 0$;

15) $y^2 = 1$;

16) $y^2 + 1 = 0$;

17) $y^2 = 0$.

Шу билан бирга бир хил исмли сиртлар (49§) аффин эквивалент, ҳар хил исмли сиртлар эса аффин эквивалент эмас.

Исбот. Бу тасдиқнинг биринчи қисми иккинчи тартибли чизиқ учун мос 46.3-теорема қандай исбот қилинган бўлса, худди шундай исботланади. 49.2-теоремадан олинган 1)-17) сиртларнинг ҳар қайсисини мос равишда 55.2-теоремадан олинган шу номерли сиртга каноник координаталар системаси ўқлари бўйлаб учта сиқиш ёки чўзишларнинг композицияси бўлган аффин алмаштириш воситасида ўтказилади. Масалалан шундай 1)-6) сиртлар учун аналитик ёзуви $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$, $z' = \frac{z}{c}$ бўлган битта аффин алмаштириш ярайди.

Теореманинг иккинчи қисмига келсак, у ҳолда ҳар хил исмли сиртларни улар ясси кесимлари билан, хусусан тўғри чизиқли ясовчиларининг борлиги ёки йўқлиги билан фарқлаймиз. Шу билан бирга биз 55.1 жумлага таянамиз. Энг олдин ҳақиқий нуқталарга эга бўлмаган сиртларни (мавҳум эллипсоид, мавҳум эллиптик цилиндр, мавҳум параллел текисликлар жуфтлигини) фақат комплекс фазода фарқлаш мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз. Мавҳум эллипсоиднинг (ҳақиқий) текислик билан барча кесимлари мавҳум эллипслар бўлади, мавҳум эллиптик цилиндрнинг ясси кесимлари орасида мавҳум эллипслар ва шундай мавҳум параллел тўғри чизиқлар бор, мавҳум параллел текисликлар жуфтлигининг ясси кесимлари орасида эса мавҳум эллипслар умуман олганда йўқ. Қолган сиртларни ҳақиқий фазода фарқлаш мумкин. Мавҳум конус бу биргина ҳақиқий нуқтага эга бўлган ягона сиртдир. Мавҳум кесишувчи текисликлар жуфтлиги бу ҳақиқий нуқталари тўғри чизиқни ташкил қилувчи ягона сиртдир. Цилиндрлар ўзаро ўзларининг йўналтирувчилари билан фарқланади. Олтита асосий сиртлар (эллипсоид, гиперболоидлар, конус, параболоидлар) тўғри чизиқли ясовчиларнинг йўқлиги ёки борлиги билан иккита гуруҳга бўлинади. Эллипсоиднинг ясси кесими эллипс бўлиб, эллиптик параболоид ва икки паллали гиперболоид ясси кесимли мос равишда прабола ва гипербола борлиги билан фарқланади. Иккинчи гуруҳда фақат гиперболик параболоид ясси кесимда эллипсга эга бўлмайди, бир паллали гиперболоидда параллел тўғри чизиқли ясовчилари бор, конусда эса йўқ. Масаланинг қолган қисми асосий сиртлардан цилиндрни фарқлаш қолди.

VII БОБ

ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИК

56§. ТЎЛДИРИЛГАН ТЕКИСЛИК ВА БОҒЛАМ.

56.1. Инцидентлик. Ҳозирги замон математикаси тўпламлар назариясига асосланади. Назарий–тўпламли ёндашувда геометриянинг асосий элементи нуқта ҳисобланади.

Тўғри чизиқлар, текисликлар, бошқа геометрик фигураларга келсак, у ҳолда улар нуқталар тўплами бўлади. Аммо, асосий элементлари тўғри чизиқ ёки энг камида тенг ҳуқуқли бўлган тўғри чизиқлар ва нуқталар геометриясини қуриш мумкин.

Бунинг учун, биринчи навбатда, нуқта ва тўғри чизиқ орасидаги нуқта тўғри чизиққа тегишли эканлигидан иборат симметрик бинар муносабатни киритиш керак. Агар тўлақонли ишлатиладиган "нуқта тўғри чизиқда ётади" ифодадан фойдаланилган бўлса, бу мақсадга эришиш мумкин: унга симметрик ифода "тўғри чизиқ нуқтада ётади" – эшитилганда одатдан ташқарида бўлишига қарамасдан яққол тассаввурга зиддиятли эмас.

Бу ҳолда одатда бунда тўғри чизиқ ва нуқта инцидент деб айтилади. Планиметриянинг энг муҳим аксиомаларидан бири шундай дейдики:

$П_1$. Текисликнинг ихтиёрий хар ҳил нуқтаси битта ва фақат битта тўғри чизиқ билан инцидентдир.

Унга симметрик тасдиқ:

$П_2$. Текисликнинг ихтиёрий иккита ҳар ҳил тўғри чизиғи битта ва фақат битта нуқтага инцидент − Эвклиднинг бешинчи постуладига зиддир. Шу сабабли тўғри чизиқлар ва нуқта орасида тенг ҳуқуқли таъминлаш учун параллел тўғри чизиқларнинг кесишишга мажбур қилиш керак. Ҳозир тўлдирилган текисликни қуриб буни биз қиламиз.

56.2. Тўлдирилган текислик. π − текисликда параллел тўғри чизиқлар бўлмаслиги учун ҳар қайси тўғри чизиққа энг камида битта нуқтани қўшиш керак. $l \subset \pi$ тўғри чизиқ учун l тўғри чизиққа параллел бўлган хосмас тўғри чизиқлар дастасини $[l]$ орқали белгилаймиз. Бу $[l]$ даста π текисликнинг хосмас нуқтаси деб аталади. Унинг одатдаги нуқталари эса хос нуқталари деб аталади. π текисликка унинг ҳамма хосмас нуқталарини қўямиз ва бу янги тўпламни $\overline{\pi}$ орқали белгилаймиз. Ҳар қайси $[l]$ қўшилган π текислик l тўғри чизиқлари $\overline{\pi}$ тўпламдаги (хос) тўғри чизиқлар деб аталади. Бу тўғри чизиқлар l символ билан ёки оддийгина шу l ҳарф билан белгиланади. $[l]$ хосмас нуқта l тўғри чизиқнинг хосмас нуқтаси деб аталади. Янги (кенгайтирилган) $\overline{\pi}$ текисликда $\mathbf{A_2}$ аксиоманинг бажарилишини осонгина текширилади. Аммо, шу билан бирга $\mathbf{A_1}$ аксиоманинг бажарилиши тўхтайди: ҳеч қайси тўғри чизиқ иккита хосмас нуқтадан ўтмайди. Ҳамма хосмас нуқталарнинг $\overline{\pi}\setminus\pi$ тўпламини яна битта (хосмас) тўғри чизиқ деб эълон қилиб, вазиятни тузатиш мумкин.

$\overline{\pi}$ тўплам унда ажратилган хос ва хосмас тўғри чизиқлар билан биргаликда тўлдирилган текислик деб аталади. Тўлдирилган текислик хосмас нуқталарини шунингдек, “чексиз узоқликдаги” нуқталари, хосмас тўғри чизиқни – “чексиз узоқликдаги” тўғрилик деб аталади.

56.3. Проектив текисликнинг умумий таърифи. Тўлдирилган текислик $\mathbf{A_1}$ ва $\mathbf{A_2}$ аксиомаларни қаноатлантиради. Бундан ташқари у, равшанки, қуйидаги икки аксиомани қаноатлантиради:

$\mathbf{A_3}$. Битта тўғри чизиққа инцидент бўлмаган учта нуқта мавжуд. Чунки икки нуқта орқали фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Тўғри чизиқ қандай бўлмасин бу тўғри чизиққа тегишли бўлган ва унга тегишли бўлмаган нуқта мавжуд. Демак, текисликда иккита A ва B нуқталарни олсак, улар орқали AB тўғри чизиққа тегишли бўлмаган C нуқта мавжуд. Шундай қилиб, A, B ва C нуқталар бир тўғри чизиққа инцидент эмас.

$\mathbf{A_4}$**.** Ҳар қайси тўғри чизиқ энг камида учта нуқтага инцидент бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $l\subset\pi$ тўғри чизиқда $O\in l$ нуқтани оламиз. “Нуқталар O бир томонда ётади” муносабати $l\setminus\{O\}$ тўпламни иккита эквивалентлик синфга ажратади. Биринчи синфдан M нуқтани, иккинчи синфдан N нуқтани оламиз. Демак, l тўғри чизиқ M,O,N нуқталарга инцидент бўлади. Бундан, ҳар қайси тўғри чизиқ энг камида учта нуқтага инцидент бўлади, деб, хулоса қиламиз.

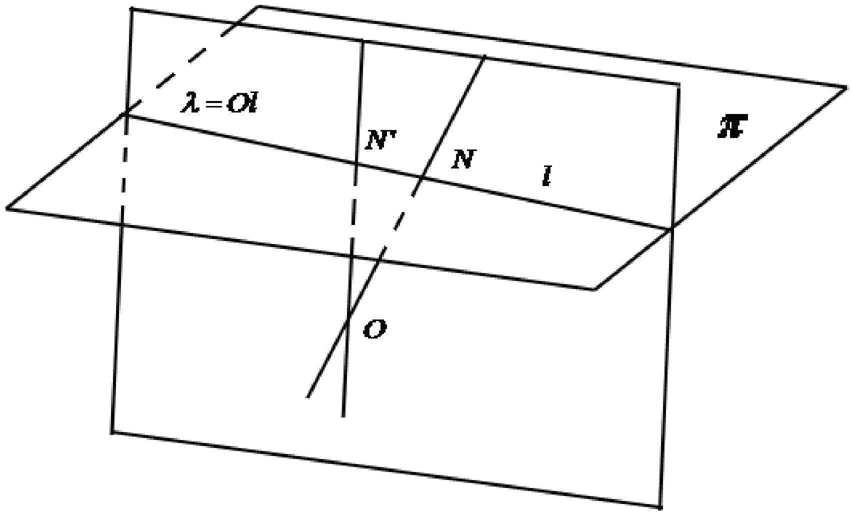
Элементлари нуқталар деб, номланадиган ва тўғри чизиқлар деб номланувчи унинг қисм тўпламлар сидраси (набори) бор бўлиб, шу билан бирга агар **A_1–A_4** аксиомалар бажариладиган ихтиёрий тўпламни $L-$ проектив текислик деб аталади.

Масала. Ихтиёрий проектив текислик энг камида еттита нуқтани ўз ичига олиши исботлансин. Еттита нуқтадан проектив текислик қурилсин.

56.4. Ҳақиқий проектив текислик. Агар нуқтани, нуқтага, тўғри чизиқни тўғри чизиққа ўтказивчи ва инцидентлик муносабатни сақловчи $f: L_1 \to L_2$ биекция мавжуд бўлса, у ҳолда иккита проектив L_1 ва L_2 текисликларни изоморф деб аталади. Тўлдирилган текисликга изоморф бўлган проектив текисликни ҳақиқий проектив текислик деб аталади. Одатда, ҳақиқий проектив текислик RP^2 символ билан белгиланади. Бунга мос равишда тўлдирилган текисликни, ҳақиқий проектив текисликнинг (биринчи) модели деб аталади. Кейинчалик ҳақиқий проектив текислик соддагина проектив текислик деб аталади.

56.5. Боғлам. O нуқта орқали ўтувчи барча тўғри чизиқлар ва текисликлар тўплами маркази O нуқтадаги боғлам ёки O боғлам деб аталади. Боғлам тўғри чизиқларини нурлар деб аталади. Агар берилган нур берилган текисликда ётса, у ҳолда O боғлам нури ва текислиги инцидент деб аталади. Агар боғлам нурларини нуқталар деб, унинг текисликларини эса тўғри чизиқлар деб атасак, у ҳолда боғламнинг **A_1–A_4** аксиомаларни қаноатлантиришини осонгина кўриш мумкин, яъни проектив текислик бўлади.

56.6. Перспектив мослик. O нуқта орқали ўтмаган бирорта π текисликни оламиз. Унда π текисликнинг ҳар қайси N нуқтаси орқали O боғламнинг ягона $m = ON$ тўғри чизиғи (нури) ўтади. Шундай қилиб, перспектив мослик деб аталувчи π – текислик нуқталари билан O боғлам нурлари орасида мослик ўрнатилди. Шу билан бирга, бу мосликда текисликда ётувчи ҳар қайси l тўғри чизиққа O нуқта ва l тўғри чизиқ орқали ўтувчи O боғламнинг $\lambda = Ol$ текислиги мос қўйилади (71–расм). Равшанки, π–текислик ва O боғлам орасидаги перспектив мосликда инцидентлик муносабати сақланади: агар π текисликдаги N нуқта l тўғри чизиқ билан инцидент бўлса, у ҳолда боғламнинг мос ON нури ва Ol текислиги инцидент бўлади ва аксинча. Аммо, π–текислик ва O боғлам орасидаги перспектив мослик ўзаро бир қийматли бўлмайди: π–текисликка параллел бўлган боғлам нурларига π текисликнинг ҳеч қандай нуқтаси мос келмайди. π–текисликка параллел бўлган боғлам текислигига эса π текисликнинг ҳеч бир тўғри чизиғи мос келмайди. π–текисликка параллел бўлган ҳар қандай нурни боғламнинг махсус нури деб, π–текисликга параллел бўлган унинг текислиги эса боғламнинг махсус текислиги, деб аталади.



71–расм.

Махсус нур орқали ўтувчи текисликлар дастасини қарайлик. Бу дастанинг махсусмас текисликлари перспектив мосликда $\overline{\pi}$ – тўлдирилган текисликнинг хосмас нуқтасини берувчи $\overline{\pi}$–тўлдирилган текисликдаги хосмас параллел тўғри чизиқлар дастасига ўтади. $\overline{\pi}$– тўлдирилган текисликнинг хосмас нуқтасини берувчи π– текисликда ётувчи ҳар қайси хосмас параллел тўғри чизиқларга параллел бўлган O дастанинг махсус нурини $\overline{\pi}$–текисликнинг хосмас тўғри чизиғига эса O боғламнинг махсус текислигини мос қўйиб, перспектив мосликни $\bar{\pi}$ тўлдирилган текислик нуқталари ва тўғри чизиқлари билан O боғлам барча нурлари ва текисликлари орасидаги биекциягача давом эттирамиз. Бу биекция ҳам инцидентлик муносабатини сақлайди. Демак, у проектив текисликнинг изоморфизми ва боғлам тўлдирилган текисликка изоморф ҳамда ҳақиқий проектив фазонинг (иккинчи) модели бўлади.

57§. ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИКНИНГ БИР ЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАРИ. ДЕЗАРГ ТЕОРЕМАСИ.

57.1. Боғламда бир жинсли координаталар. O боғлам берилган бўлсин. Фазода бошланғич нуқтаси O нуқта бўлган бирорта $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ реперни оламиз. Боғламнинг ихтиёрий m нури учун бу нур ихтиёрий йўналтирувчи векторининг x_1, x_2, x_3 координаталари учлиги (берилган $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ репердаги) m нурнинг бир жинсли координаталар учлиги деб аталади. Берилган x_1, x_2, x_3 учликкка пропорционал бўлган барча нолмас учлик синфини $(x_1 : x_2 : x_3)$ орқали белгилаймиз. $(x_1 : x_2 : x_3)$ синфдан олинган ҳар қайси учлик m нурнинг бир жинсли координаталар учлиги бўлади. $(x_1 : x_2 : x_3)$ учликлар синфининг ҳаммаси ($O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ репердаги) m нурнинг бир жинсли координаталари деб аталади. Энди O боғламга тегишли бўлган λ текислик берилган бўлсин. У $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ реперда

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (1)$$

тенглама билан ёзилган бўлсин. a_1, a_2, a_3 учликни λ текисликнинг бир жинсли координаталар учлиги деб атаймиз. Текисликнинг бир жинсли координаталар учлиги ҳам пропорционаллик аниқликда тавсифланади. Берилган a_1, a_2, a_3 учликка пропорционал бўлган барча нолмас учликлар синфини $(a_1 : a_2 : a_3)$ орқали белгилаймиз ва ($O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ репердаги) λ текисликнинг бир жинсли координаталари деб атаймиз. (1) тенгламани қаноатлантирувчи ихтиёрий нолмас x_1, x_2, x_3 учликни λ текисликка тегишли бўлган N нуқтанинг координатаси каби ҳам, λ текисликка инцидент бўлган $m = ON$ нурнинг бир жинсли координаталар учлиги каби ҳам қараш мумкин. Шундай қилиб, (1) тенглама $(x_1 : x_2 : x_3)$ бир жинсли координатали нур ва $(a_1 : a_2 : a_3)$ бир жинсли координатали текисликнинг инцидентлик шартидан иборат бўлади.

57.2. Текисликда бир жинсли координаталар. Фараз қилайлик, одатдаги π текисликда $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ базис танланган бўлсин. M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси ва x, y унинг бу репердаги координаталари бўлсин. Унда $x, y, 1$ учликка пропорционал бўлган ҳар қандай нолмас x_1, x_2, x_3 ($O\vec{e_1}\vec{e_2}$ репердаги) M нуқтанинг бир жинсли координаталар учлиги деб аталади. Тушунарлики, M нуқтанинг x_1, x_2, x_3 бир жинсли координаталаридан унинг x, y аффин координаталарига ўтиш

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad (2)$$

формулалар билан амалга ошади. x_1, x_2, x_3 нолмас учлик $x, y, 1$ учликка пропорционал бўлганидан, $x_3 \neq 0$ бўлади ва демак, бундай ўтишни амалга ошириш мумкин.

M нуқтанинг барча бир жинсли x_1, x_2, x_3 координаталар учликлари мажмуи $(x_1 : x_2 : x_3)$ орқали белгиланади ва ($O\vec{e_1}\vec{e_2}$ репердаги) M нуқтанинг бир жинсли координатаси деб аталади. Энди ($O\vec{e_1}\vec{e_2}$ репердаги)

$$Ax + By + C = 0 \quad (3)$$

умумий тенгламаси билан берилган π – текисликдаги бирорта l тўғри чизиқни оламиз. Биламизки, берилган l тўғри чизиқ коэффициентлари пропорционаллик аниқлигида аниқланган, яъни A, B, C учликка пропорционал нолмас учлик a_1, a_2, a_3 учун

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \quad (4)$$

тенглама ҳам, мана шу тўғри чизиқни тавсифлайди. A,B,C учликка пропорционал бўлган барча нолмас a_1, a_2, a_3 учликлар мажмуи $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ орқали белгиланади ва ($O\vec{e}_1\vec{e}_2$ репердаги) l тўғри чизиқнинг бир жинсли координатаси деб аталади.

Эгри l тўғри чизиқ ўз нуқталарининг бир жинсли координаталари билан қандай тавсифланишини топамиз. Агар M нуқтанинг x, y аффин координаталари

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0 \quad (4)$$

тенгламаларни қаноатлантирса, у ҳолда унинг бир жинсли x_1, x_2, x_3 координаталари (2) формулага мувофиқ ушбу тенгламани қаноатлантиради

$$a_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + a_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + a_3 = 0$$

ёки

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \quad (5)$$

Шу билан бирга, равшанки, агар $x_3 \neq 0$ бўлса, у ҳолда (5) тенгламани қаноатлантирувчи x_1, x_2, x_3 учлик (4) тўғри чизиққа тегишли бўлган M нуқтанинг бир жинсли координаталар учлиги бўлади. Аммо, (5) тенгламани фақатгина (4) тўғри чизиқ нуқталарининг бир жинсли нолмас координата учликларигина қаноатлантирмаслигини таъкидлаш муҳим. $x_3 = 0$ да (5) тенгламани $a_2, -a_1, 0$ учликка пропорционал учликлар қаноатлантиради. $(a_2 : -a_1 : 0)$ мажмуани l тўғри чизиқ $[l]$ – чексиз узоқликдаги нуқтасининг бир жинсли координаталаридан иборат бўлади, деб фараз қилиш табиийдир. Ҳақиқатдан ҳам, шундай эканлигига ҳозир биз ишонч ҳосил қиламиз.

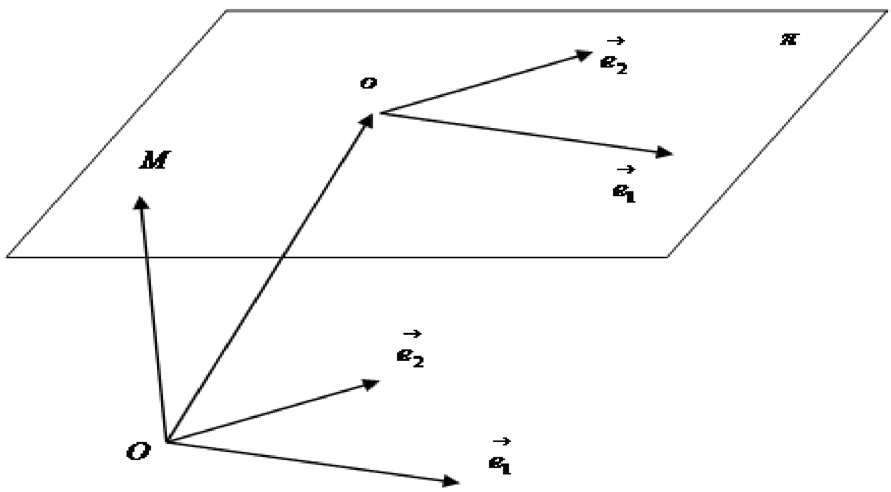
57.3. Боғламдаги бир жинсли координаталар билан текисликдаги бир жинсли координаталар орасидаги боғланиш.

O нуқтадан қўйилган $\vec{e}_3$ вектор охирини o билан белгилаймиз. O нуқта орқали $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторга параллел π текисликни ўтказамиз (72-расм).

$O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ реперга π текислик равшанки, $x_3 = 1$ тенгламага эга. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\begin{vmatrix} x_1 - 0 & x_2 - 0 & x_3 - 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_3 = 1.$$

Шунинг учун π текисликнинг $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ реперда x, y координаталарига эга бўлган ҳар қайси M нуқтаси $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ реперда $x, y, 1$ координатага эга ва аксинча. Демак, (π текисликка нисбатан) $M(x, y)$ нуқта орқали ўтувчи O боғламнинг ҳар қайси нури боғламда бир жинсли $(x,\ y,\ 1)$ координатага эга.



72-расм.

Перспектив мосликда $\bar{\pi}$ тўлдирилган текисликнинг ҳар қайси хосмас нуқтасига (π текисликдаги параллел тўғри чизиқларнинг $[l]$ синфига) $[l]$ синфининг параллел тўғри чизиқларига параллел бўлган боғлам нури мос қўйилади. Шундай нур хосмас нур бўлади ва $x = 0$ текисликда ётади. Демак, тўлдирилган текисликнинг хосмас нуқталарига $(x_1 : x_2 : 0)$ кўринишдаги бир жинсли координатали боғламнинг нури мос келади. Энди α текисликдаги l тўғри чизиқ $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ (4) тенгламага эга бўлсин. Текисликда $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$

базисда бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторларидан бири $\{a_2, -a_1\}$ координаталарга эга бўлади. Унга фазода $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ базисда бу вектор $\{a_2, -a_1, 0\}$ координаталарга эга. Аммо бу l тўғри чизиқ $[l]$ хосмас нуқтасига мос келувчи боғлаш нурининг йўналтирувчи векторларидан иборат. Шундай қилиб, перспентив мосликда (4) тенглама билан берилган l тўғри чизиқнинг $[l]$ хосмас нуқтаси бир жинсли $\{a_2, -a_1, 0\}$ координатали боғлам нурига ўтади. Бу 57.2 банд охирда хосмас нуқтанинг бир жинсли координаталари ҳақида айтганимизни тасдиқлайди ва бир жинсли координаталар таърифини хосмас нуқталарга таркатишга имкон беради. $(a_2 : -a_1 : 0)$ нолмас учликлар мажмуи $\bar{\pi}$ тўлдирилган текисликда (4) тўғри чизиқ хосмас нуқталарнинг бир жинсли координаталари бўлади. Мана шундай таърифларда x_1, x_2, x_3 ўзаро ўсувчиларга нисбатан биринчи даражали ихтиёрий (5) тенгламани ($\bar{\pi}$ тўлдирилган текисликда) $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ бир жинсли координатали тўғри чизиқ тенгламаси каби қараш мумкин. Хос тўғри чизиқлар $a_1^2 + a_2^2 > 0$ шарт билан тавсифланади. Хосмас тўғри чизиқлар $x_3 = 0$ тенгламага эга, яъни унинг бир жинсли координаталари $\{0 : 0 : 0 :\}$ га тенг. Демак, $\bar{\pi}$ тўлдирилган текисликда нуқталар ва тўғри чизиқларнинг бир жинсли координаталарини таърифладик. Шу билан бирга перспектив мосликда бир бирига мос келувчи нуқта ва нур, тўғри чизиқ ва текислик бир жинсли координаталарининг тенгламаси билан аниқланади.

(5) тенглама (унга айнан тенг кучли каби (1) тенглама) (x_1, x_2, x_3) нуқта $\{a_1, a_2, a_3\}$ тўғри чизиқ инцидентлик шартидан иборат бўлади.

57.4. Проектив текисликнинг арифметик модели. Икки турдаги элементлари мос равишда арифметик нуқталар ва арифметик тўғри чизиқлар деб аталувчи P тўпламни арифметик проектив текислик деб аталади. Элементларининг иккиси ҳам ҳақиқий сонларнинг ўзаро пропорционал нолмас учликлар синифидан иборат. Масалан, нуқталар $(x_1 : x_2 : x_3)$ орқали, тўғри чизиқлар эса – $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ орқали белгиланади. Шу билан бирга нуқталар ва тўғри чизиқлар орасидаги инциндентлик муносабати ўрнатилган:

Агар $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (5) шарт бажарилса, у ҳолда (x_1, x_2, x_3) нуқта ва $\{a_1, a_2, a_3\}$ тўғри чизиқ ўзаро инцидент деб аталади.

Эслатма. Нуқта ва тўғри чизиқнинг тўлиқ тенг ҳуқуқли шундай симметрик таърифи тўғри чизиқни нуқталар тўплами деб атаган проектив текисликнинг 56.3 таърифи билан унчалик келишмайди. Аммо, бу келишмовчилик, агарда биз $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ арифметик тўғри чизиқ (5) қаноатлантирувчи барча арифметик (x_1, x_2, x_3) нуқталар тўплами билан айнан бир нарса деб қаралса осонгина йўқ бўларди. Энди арифметик проектив текисликнинг $(x_1 : x_2 : x_3)$ нуқталарига ва $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ тўғри чизиқларга бирорта тайинланган реперда мос равишда $(x_1 : x_2 : x_3)$ ва $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ бир жинсли координаталарга эга бўлган O боғламнинг тўғри чизиқлари ва текисликларини (ёки $\bar{\pi}$ тўлдирилган текисликнинг нуқталарини ва тўғри чизиқларини) мос қўйиб аёнки арифметик проектив текислик билан олдинги проектив текислик моделлари орасида изоморфизми ҳосил қилади. Шундай қилиб, арифметик проектив текислик, проектив текисликларнинг яна битта (арифметик) модели бўлади.

57.5. Иккилик принципи. Проектив текисликда нуқта ва тўғри чизиққа тегишли бўлган бирорта тасдиқ ва улар орасида инциндентлик муносабати ўринли бўлсин. Унда берилган тасдиқдан “тўғри чизиқ” сўзини “нуқта”га ва аксинча, “нуқта” сўзини “тўғри чизиқ”га алмаштиришдан ҳосил бўлган иккилик тасдиқ ҳам тўғри бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, инцидентликни ифодаловчи

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (5)$$

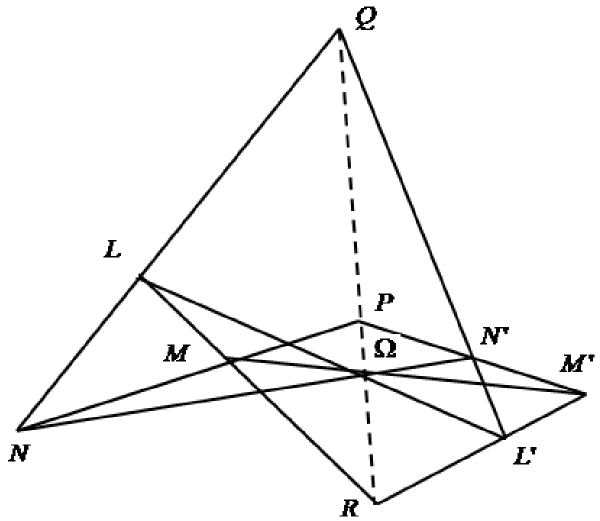
сонли тенглик иккита $x_1 : x_2 : x_3$ ва $a_1 : a_2 : a_3$ учликлардан қайси бирини доиравий қавс билан қайсини эса фигурали қавс билан ўрашга, яъни биз $x_1 : x_2 : x_3$ ва $a_1 : a_2 : a_3$ учликларни мос равишда нуқта ва тўғри чизиқнинг бир жинсли координаталар учлиги ёки аксинча, тўғри чизиқ ва нуқтанинг бир жинсли координаталар учлиги деб, ҳисоблашга боғлиқ эмас.

Иккилик принципи проектив текисликда нуқталар ва тўғри чизиқларнинг тенг ҳуқуқлилигини тасдиқлайди. Аввал биз нуқтани бошланғич тушунча деб шундай ҳуқуқга нуқта деб ҳисоблар эдик, тўғри чизиқни эса (5) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами деб аниқлаган эдик, бошланғич тушунча деб тўғри чизиқни ҳисоблашимиз мумкин ва нуқтани ҳам шундай (1) тенгламани қаноатлантирувчи унга инциндент бўлга тўғри чизиқлар тўплами каби аниқлаш мумкин. Бунда тўғрисини айтганда, ўзгарувчилар энди $a_1 : a_2 : a_3$ лар бўлади.

57.6. Дезарг теоремаси. A ва B нуқталарга инцидент бўлган тўғри чизиқни AB орқали, a ва b тўғри чизиқларга инцидент бўлган нуқталарни $(a \cdot b)$ орқали белгилаймиз.

Битта тўғри чизиққа инцидент бўлмаган учта нуқталар мажмуини учбурчак деб атаймиз. Бу нуқталарни эса учбурчак учлари деб аталади. Учбурчакнинг учлари жуфтлигига инцидент бўлмаган тўғри чизиқларни учбурчак томонлари деб атаймиз.

Теорема. Проектив текисликда мос учлари ва мос томонлари устма–уст тушмайдиган иккита LMN ва LMN учбурчаклар берилган бўлсин. LL', MM', NN' учта тўғри чизиқ битта нуқтада инцидент бўлади, шу ҳолда ва фақат шу ҳолда қачонки учта $(MN, M'N')$, $(NL, N'L')$, $(LM, L'M')$ нуқталар орқали битта тўғри чизиқда инцидент бўлса.



73–расм.

Исбот. $MN = l$, $NL = m$, $LM = n$, $M'N' = l'$, $N'L' = m'$, $L'M' = n'$ деб тўғри чизиқлар учун белгилашлар киритамиз. Бу теореманинг тўғри ва тескари тасдиқлари бир-бирига иккиламчи эканлигини осонгина кўриш мумкун. Шунинг учун иккилик принципига кўра, бу теореманинг зарурий шартини текшириш кифоя.

Фараз қилайлик, проектив текисликда бир жинсли координаталар киритилган бўлсин L, M, N, L', M', N' нуқталарнинг бирорта бир жинсли координаталари мос равишда $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{l'}$, $\vec{m'}$, $\vec{n'}$ орқали белгилаймиз. Шартга кўра, учта LL', MM', NN' тўғри чизиқлар битта Ω нуқтага инцидентдир. $\vec{\omega}$ – бу нуқтанинг бирорта бир жинсли координаталар учлиги бўлсин. Учта L, L', Ω нуқталар коллиенар бўлганидан учта $\vec{l}$, $\vec{l'}$, $\vec{\omega}$ учлик чизиқли боғланган (агар проектив текислик сифатида, масалан, боғлам олинса бу осонгина ҳосил қилинади). Фазодаги бир текисликда ётувчи учта вектор чизиқли боғланган аммо, $\vec{l}$ ва $\vec{l'}$ учликлар эса ҳар хил L ва L' нуқталарнинг координаталар учликлари бўлгани учун пропорционал эмас. Шунинг учун $\vec{\omega}$ учлик $\vec{l}$ ва $\vec{l'}$ учликларнининг чизиқли комбинацияси бўлади. Ҳудди шундай, мулоҳазалар билан $\vec{\omega}$ учун $\vec{m}$ ва $\vec{m'}$ учликларнинг, шунингдек $\vec{n}$ ва $\vec{n'}$ учликларнининг чизиқли комбинацияси бўлади. Демак, шундай (λ, λ'), (μ, μ'), (ν, ν') сонлар жуфтликлари мавжудки,

$$\vec{\omega} = \lambda \vec{l} + \lambda' \vec{l'} = \mu \vec{m} + \mu' \vec{m'} = \nu \vec{n} + \nu' \vec{n'}$$

тенглик ўринли бўлади, бу ердан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\mu \vec{m} - \nu \vec{n} = \nu' \vec{n'} - \mu' \vec{m'} \quad (6)$$

$$\nu \vec{n} - \lambda \vec{l} = \lambda' \vec{l'} - \nu' \vec{n'} \quad (7)$$

$$\lambda \vec{l} - \mu \vec{m} = \mu' \vec{m'} - \lambda' \vec{l'} \quad (8)$$

L, M, N, L', M', N' нуқталар жуфт–жуфти билан турли бўлгани учун $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{l'}$, $\vec{m'}$, $\vec{n'}$ учликлар ҳам жуфт-жуфти билан пропорционал бўлмайди. Демак, (6)–(8) тенгламалар нолмас учликлар бўлиб, уларни мос равишда $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ орқали белгилаймиз. Бир жинсли координаталар учликлари мос равишда $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

учликлар хизмат қиладиган нуқталарни мос равишда P, Q, R орқали белгилаймиз. (6) тенглик $P=(MN\cdot M'N')$ ни MN ва $M'N'$ тўғри чизиқларга инцидент бўлган нуқталарни англатади. Ҳудди шунингдек, (7) ва (8) тенглик мос равишда $Q=(NL\cdot N'L')$, $R=(LM\cdot L'M')$ нуқталарни англатади. Иккинчи томондан, (6)–(8) тенгламаларни қўшиб ушбуни ҳосил қиламиз

$$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=(0;0;0)$$

Демак, P, Q, R нуқталар битта тўғри чизиқга инцидент. Дезарг теоремаси исботланди.

58§. ПРОЕКТИВ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

58.1.таъриф. Агар шундай сон мавжуд бўлсаки, $\vec{e_i}'=\lambda\vec{e_i}$, $i=1,2,3$ тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда иккита умумий O учли $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ ва $O\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ реперларини эквивалент деб аталади.

58.2. жумла. $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ ва $O\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ реперларини еквивалент бўлади шунда ва фақат шунда қачонки O боғламнинг ҳар қайси нури бу реперларда бир хил бир жинсли координаталарга эга бўлса.

Исбот. Зарурлиги айён. O учли $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ ва $O\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ реперларини эквивалент бўлсин. Унда шундай α сони мавжудки, $\vec{e_i}'=\lambda\vec{e_i}$, $i=1,2,3$ тенгликлар ўринли бўлади. Боғламнинг ихтиёрий m нури учун, бу нур ихтиёрий йўналтирувчи векторининг x_1,x_2,x_3 координаталари учлиги (берилган $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ репердаги) m нурнинг бир жинсли координаталар учлиги деб аталишини эслатиб ўтамиз Унда ушбу тенгликка

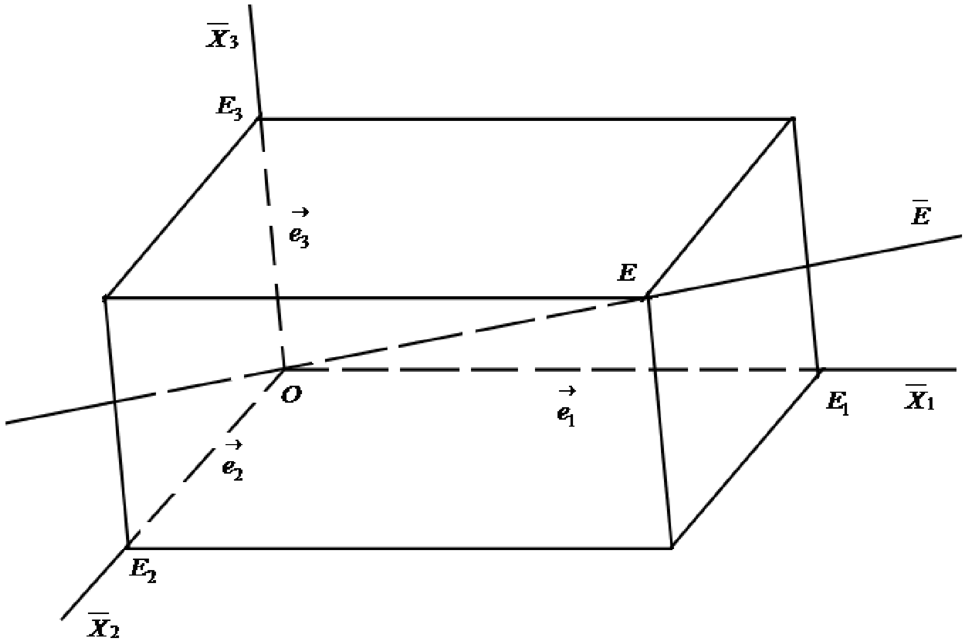
$$\vec{x}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}=\frac{x_1}{\lambda}\lambda\vec{e_1}+\frac{x_2}{\lambda}\lambda\vec{e_2}+\frac{x_3}{\lambda}\lambda\vec{e_3}=\frac{x_1}{\lambda}\vec{e_1}'+\frac{x_2}{\lambda}\vec{e_2}'+\frac{x_3}{\lambda}\vec{e_3}'$$

эга бўламиз Агар m нур $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ реперда (x_1,x_2,x_3) бир жинсли координаталар учлигига эга бўлса, у ҳолда бу нур $O\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ реперда $\left(\frac{x_1}{\lambda},\frac{x_2}{\lambda},\frac{x_3}{\lambda}\right)$ бир жинсли координаталар учлигига эга бўлади. Демак, эквивалент $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ ва $O\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ реперларга O боғламнинг ҳар қайси нури бир хил бир жинсли координаталарга эга бўлади.

Етарлилиги. Энди боғлам ҳар қайси нурининг бу реперлардаги бир жинсли координаталари бир хил бўлсин деб фараз қиламиз. Унда $\vec{e_1}'$ вектор тутиб турган нур иккала реперларга бир хил $(\lambda, 0, 0)$ бир жинсли координаталарга эга бўлади, бу ерда бирорта $\lambda_1 \neq 0$ сон учун $\vec{e_1}' = \lambda_1 \vec{e_1}$ бўлиши келиб чиқади. Ҳудди шунингдек, $\vec{e_2}' = \lambda_2 \vec{e_2}$, $\vec{e_3}' = \lambda_3 \vec{e_3}$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Йўналтирувчи вектори $\vec{e}' = \vec{e_1}' + \vec{e_2}' + \vec{e_3}'$ бўлган нур фаразга кўра, реперларда ҳам (1,1,1) бир хил бир жинсли координаталарга эга, бу ерда бирорта $\lambda \neq 0$ да $\vec{e}' = \lambda\left(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}\right)$ тенглик келиб чиқади. Чунки $\vec{e_1}' + \vec{e_2}' + \vec{e_3}'$ йўналтирувчи векторларга эга бўлган нур ҳам иккала репердаларда бир хил (1,1,1) координаталарга эга. Аммо иккинчи томондан $\vec{e}' = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$. Базис векторларда ёйилманинг ягоналигидан $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$эканлиги келиб чиқади. Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

58.3. таъриф. Бошланғич нуқтаси O бўлган ўзаро эквивалент аффин реперлар синфи (ёки ўзаро эквивалент аффин координаталар системалари синфи) O боғламдаги проектив координаталар системаси деб аталади.

58.2 жумла исботидан O боғламдан проектив координаталар системаси тартиб билан тўртта компланар бўлмаган (ҳеч қайси учтаси бир текисликда ётмаган) $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{E}$ нурлар билан бир қийматли аниқланиши келиб чиқади. $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$ нурлар координаталари деб, $\vec{E}$ нур эса – бирлик нур деб аталади. Координата нурлари эквивалент аффин координаталар системасининг координата ўқлари бўлади, $\vec{E}$ бирлик нурдаги ихтиёрий Е нуқта эса проектив координаталар системасига тегишли бўлган аффин координаталар системасининг $\vec{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{OE_3}$ бирлик векторларига қурилган параллепипед OE диагоналининг охири бўлади (74-расм).



74-расм

Шунинг учун $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{E}$ тўртликни ҳам, шунингдек проектив координаталар системаси ёки аниқроқ берилган проектив координаталар системаси билан аниқланувчи проектив репер деб аташ мумкин.

58.4. таъриф. $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ аффин репердаги ёки $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ аффин реперига эквивалент бўлган ихтиёрий аффин реперидаги O боғлам ихтиёрий нурининг бир жинсли координаталар учлиги $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{E}$ проектив реперидаги бу нурнинг проектив координаталари учлиги деб аталади.

58.5. Бир жинсли координаталар проектив координаталар каби. Шундай қилиб, O боғлам ихтиёрий нурнинг $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ аффин реперидаги бир жинсли координаталар учлиги (57.1 га қаралсин) – бу $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ репер билан аниқланувчи $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{E}$ проектив координаталар системасидаги бу нурнинг проектив координаталар учлигидир.

Хусусан, $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{E}$ нурлар бу системада қуйидаги координатага эга бўлади:

$$\overrightarrow{X_1} = (1;0;0), \overrightarrow{X_2} = (0;1;0), \overrightarrow{X_3} = (0;0;1), \vec{E} = (1;1;1)$$

Юқорида баён қилинган проектив текисликлар моделларининг изоморфизмларида (боғлам тўлдирилган текислик, боғлам арифметик проектив текислик) боғламда проектив координаталар тўлдирилган текисликка ҳам, арифметик проектив текисликка ҳам кўчирилади. Аммо, боғламдан фарқли моделга, бу ерда ҳамма проектив координаталар системаси тенг ҳуқуқли, арифметик проектив текисликда дастлабки имтиёзли координаталар системаси бор. Тўлдирилган текисликка келсак, у ҳолда бу ерда бир қанча имтиёзли проектив координаталар системаси оиласи бор. Уларнинг ҳар қайси бир жинсли координаталарни берувчи аффин координаталар системаси билан аниқланади. Фазода жойлашган π текисликдаги ҳар қандай $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ аффин репери тайинланган $O \notin \pi$ нуқтада фазода шундай $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 = 0$ аффин реперини бир қийматли берадики, бунда $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ репер билан аниқланган O боғлам нурининг проектив координаталари уларга мос келувчи тўлдирилган текислик нуқталарининг $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ репер билан аниқланган бир жинсли координаталари билан устма–уст тушади.

58.6. Проектив координаталар системаси биридан бошқа проектив координаталар системасига ўтиш. Гарчи проектив текисликни тўлдирилган текислик каби яққол тасаввур қилиш мумкин бўлишига, аналитик амалларни бир жинсли координаталарга яъни, аслида арифметик проектив текисликда ўтказиш осон бўлишига қарамасдан, энди проектив текисликнинг асосий модели боғлам деб ҳисоблаймиз. Биз, одатда, унинг нурларини P проектив текисликнинг нуқталари деб, текисликларини эса P проектив текисликнинг тўғри чизиқлари деб атаймиз. Бунга мувофиқ проектив координаталар системасини аниқловчи $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{E}$ нурларни X_1, X_2, X_3, E деб белгилаймиз. $X_1X_2X_3E$ проектив координаталар системасини аниқлаб берувчи X_1, X_2, X_3, E нуқталарни унинг фундаментал нуқталари деб атаймиз. P проектив текисликда иккита проектив координаталар системаси – дастлабки $X_1X_2X_3E$ ва “янги” $X_1'X_2'X_3'E'$ берилган бўлсин. Янги система дастлабки системага нисбатан унинг фундаментал нуқталарининг проектив координаталар учлари билан берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} X_1'=(c_{11}:c_{21}:c_{31}) \\ X_2'=(c_{12}:c_{22}:c_{32}) \\ X_3'=(c_{13}:c_{23}:c_{33}) \\ E'=(\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3) \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Дастлабки координаталар системасига нисбатан M нуқтанинг x_1, x_2, x_3 координаталарини янги координаталар системасидаги шу нуқтанинг x_1', x_2', x_3' координаталари орқали ифодаловчи алмаштириш формулаларини топиш керак. Аввал X_1', X_2', X_3', E' нуқталарнинг (9) координаталар учлигига мослаштириб танлаган деб, яъни

$$\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\} + \{c_{12}, c_{22}, c_{32}\} + \{c_{13}, c_{23}, c_{33}\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \ (10)$$

шартга бўйсунган, деб фараз қиламиз. Унда O боғламга қайтамиз ва дастлабки $X_1X_2X_3E$ проектив координаталар системаси $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ аффин репер билан вужудга келади, деб фараз қилиб кўрамиз. Бунда $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ базисда

$$\vec{e}_1' = \{c_{11}, c_{21}, c_{31}\},\ \vec{e}_2' = \{c_{12}, c_{22}, c_{32}\},\ \vec{e}_3' = \{c_{13}, c_{23}, c_{33}\} \ (11)$$

координаталари билан берилган вектор чизиқли эркли чунки X_1', X_2', X_3' нурлар битта текисликда ётмайди. Бундан ташқари (10) тенглик бизга $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ аффин репери $X_1'X_2'X_3'E'$ проектив координаталар системасини вужудга келтиришини кафолатлайди. Сўнгра m ихтиёрий нурнинг $X_1X_2X_3E$ проектив координаталар системасидаги ҳар қайси x_1, x_2, x_3 проектив координаталар учлиги 58.4–таърифга мувофиқ, бу нур бирорта йўналтирувчи векторининг $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ аффин репердаги координаталар учлигидан иборат. Худди шундай, $X_1'X_2'X_3'E'$ проектив координаталар системасидаги m

нурнинг x_1', x_2', x_3' координаталар учлиги учун m нур бирорта $\vec{a}' = \lambda \vec{a}$ йўналтирувчи векторининг $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ аффин репердаги координаталар учлигидан иборат. Шунинг учун (11) дан ва аффин координаталарини алмаштириш формуласидан ушбуни ҳосил қиламиз

$$\lambda \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}. \quad (12)$$

Бу $X_1X_2X_3E$ проектив координаталар системасидан $X_1'X_2'X_3'E'$ проектив координаталар системасига ўтиш формуласидан иборат. Бу ерда λ – барча нолдан фарқли қийматларни қабул қилувчи ҳақиқий кўпайтувчидир. (12) формула X_1', X_2', X_3', E' нуқталар координаталарининг (10) мослаштириш фаразида ҳосил қилинган. Аммо, бу шартга ҳамма вақт (11) даги $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ векторларни $\lambda_1 \vec{e}_1', \lambda_2 \vec{e}_2', \lambda_3 \vec{e}_3'$ пропорционал векторларга алмаштириш билан эришиш мумкин. Бунинг учун λ_j, $j = 1,2,3$ сонларни

$$\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\lambda_j = \varepsilon_i, \quad i = 1,2,3 \qquad (13)$$

тенгламалар системасидан излаш керак. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\lambda_1\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\} + \lambda_2\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\} + \lambda_3\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$$

вектор тенгликдан

$$\lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{12} + \lambda_3 c_{13} = \varepsilon_1$$

$$\lambda_1 c_{21} + \lambda_2 c_{22} + \lambda_3 c_{32} = \varepsilon_2$$

$$\lambda_1 c_{31} + \lambda_2 c_{32} + \lambda_3 c_{33} = \varepsilon_3$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу эса (13) га эквивалент.

Бу системанинг C матрицаси хосмас. Чунки, унинг устунлари битта текисликда ётмаган $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ векторларнинг координаталаридан ташкил топган. Шунинг учун (13) система $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ягона ечимдан иборат. Бу сонлардан бирортаси ҳам нолга тенгмас. Ҳақиқатдан, агарда $\lambda_1 = 0$ бўлса, у ҳолда X_2', X_3', E' нурлар бир текисликда ётган бўлар эди. Демак, $\overrightarrow{e_i}'$ векторлардан $\lambda_i \overrightarrow{e_i}'$ векторларга ўтиб, (10) шартга эришиш мумкин ва бундан кейин (12) ўтиш формуласидан фойдаланиш мумкин. Ундаги C матрица дастлабкисидан, албатта, фарқли бўлади.

58.7. эслатма. Берилган проектив координаталар системаси $X_1 X_2 X_3 E$ ва хосмас C матрица учун дастлабки координаталар системасидан (12) формула билан амалга оширувчи ягона X_1', X_2', X_3', E' проектив координаталар системаси мавжуд. Бу пропорционалик аниқлигида C матрица $X_1 X_2 X_3 E$ проектив координаталар системасини берувчи $O\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}$ аффин репередан $X_1' X_2' X_3' E'$ проектив координаталар системасини берувчи $O\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$ аффин реперига ўтиш матрицаси бўлиши келиб чиқади.

59§. ПРОЕКТИВ АЛМАШТИРИШЛАР

59.1. таъриф. Агар шундай иккита проектив координаталар системаси $X_1 X_2 X_3 E$ ва $X_1' X_2' X_3' E'$ мавжуд бўлсаки, бунда ихтиёрий $M \in P$ нуқта X_1, X_2, X_3, E координаталар системасида қандай координаталарга эга бўлса, $M' = f(M)$ нуқта ҳам $X_1' X_2' X_3' E'$ координаталар системасида худди шундай координатага эга бўлса, у ҳолда P проектив текисликнинг $f: P \to P$ акслантириши унинг проектив алмаштириши дейилади.

59.2. Проектив алмаштиришларнинг проектив ёзуви. Фараз қилайлик, f проектив алмаштириш иккита координаталар системаси $X_1 X_2 X_3 E$ ва $X_1' X_2' X_3' E'$ берилган бўлиб, улар ўзаро

$$\lambda \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} \qquad (12)$$

ўтиш формуласи орқали боғланган бўлсин. $X_1X_2X_3E$ координаталар системасидаги ихтиёрий M нуқта x_1, x_2, x_3 координаталари ва шу координаталар системасидаги унинг акси $M' = f(M)$ нинг x_1', x_2', x_3' координаталари ўзаро қандай боғланган бўлишини излаймиз. Бунинг учун $X_1X_2X_3E$ ва $X_1'X_2'X_3'E'$ координаталар системасидаги M' нуқтанинг координаталари мос равишда y_1, y_2, y_3 ва y_1', y_2', y_3' орқали белгилаймиз. Унда (12) га мувофиқ ушбуга эга бўламиз:

$$\lambda y_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} y_j', \quad i = 1, 2, 3. \qquad (14)$$

Аммо, проектив алмаштириш таърифига мувофиқ $y_i' = x_i$, $i = 1, 2, 3$. Бундан ташқари, дастлабки белгилашларга кўра, $y_i = x_i'$, $i = 1, 2, 3$. Демак, (14) формула ушбу кўринишга келади:

$$\lambda x_i' = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (15)$$

Бу проектив алмаштиришнинг проектив координаталардаги аналитик ёзувидан иборат. Аксинча, 58.7 эслатмада C хосмас матрица ва $X_1X_2X_3E$ проектив координаталар системаси учун (15) формула билан ёзилган проектив алмаштиришнинг мавжудлиги ва ягоналиги осонгина келиб чиқади.

59.3. Проектив алмаштиришлар группаси. (15) формуланинг матрицали ёзуви, яъни

$$\lambda \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \qquad (15')$$

дан, агарда $X_1X_2X_3E$ проектив координаталар системасида f проектив алмаштириш C матрица билан, g проектив алмаштириш эса D матрица билан берилса, у ҳолда уларнинг композицияси DC матрица билан берилиши ва шунингдек проектив алмаштириш бўлиши келиб чиқади. Ҳудди шундай, C^{-1} матрица f^{-1} алмаштиришни беради. Демак, проектив алмаштиришга тескари алмаштириш ҳам проектив алмаштириш бўлади. Айний алмаштириш ҳам шунингдек проектив алмаштириш бўлгани сабабли, биз ушбуни исбот қилдик.

Теорема. Проектив текисликнинг барча проектив алмаштиришлар тўплами (учинчи тартибли барча хосмас матрицалар группасига изоморф бўлган) группа бўлади.

59.4. жумла. C матрицали проектив алмаштиришда $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ координатали тўғри чизиқ $\{a_1 : a_2 : a_3\}C^{-1}$ координатали тўғри чизиққа ўтади.

Исбот. f проектив алмаштириш $X_1X_2X_3E$ ва $X_1'X_2'X_3'E'$ проектив координаталар системаси билан ассоцирланган ва l тўғри чизиқ $X_1X_2X_3E$ координаталар системасида $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ тенглама билан берилган бўлсин. Унда унинг $f(l)$ акси янги проектив координаталар системасида ҳам ҳудди шу тенглама билан ёки нуқта координаталарининг янги белгилашларини эътиборга олганда,

$$a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' = 0$$

ёки

$$(a_1, a_2, a_3)\begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} = 0$$

тенглама билан берилади. (12) тенгликдан қисқа белгилашларда $\lambda X = CX'$, $\lambda = 1$ дейилса, $X = CX'$ бўлади, уни X' га нисбатан ечиб $X' = C^{-1}X$ ни ҳосил қиламиз. Дастлабки проектив координаталар системасида $f(l)$ тўғри чизиқ

$$(a_1, a_2, a_3)C^{-1}\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0$$

тенглама билан берилади. Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

59.5. Проектив аффин алмаштиришлари. Проектив текислик унда ажратилган хосмас тўғри чизиқ билан проектив аффин текислиги деб аталади. Хосмас тўғри чизиқ нуқталарини хосмас нуқталар деб, қолганларини эса хос нуқталар деб атаймиз. Проектив аффин текислигининг проектив алмаштириши, агар у хосмас тўғри чизиқни ўзига акс эттирса проектив аффин алмаштириш дейилади. Проектив – аффин текислиги сифатида $x_3=0$ хосмас тўғри чизиқ билан арифметик проектив текисликни ёки x,y аффин координаталар билан вужудга келган x_1,x_2,x_3 бир жинсли координатаи ҳудди шу тўлдирилган текисликни оламиз.

59.6. теорема. 1). (15) формула билан берилган проектив алмаштириш, проектив–аффин алмаштириш бўлиши учун,

$$c_{31}=c_{32}=0\neq c_{33} \qquad (16)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли;

2). текисликнинг хос нуқталар тўпламида қаралаётган ҳар қандай (15) проектив аффин алмаштирилиши қуйидаги аналитик ёзувга эга бўлган аффин алмаштириши бўлади

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \end{aligned}$$

бу ерда, $a_{ij}=\dfrac{c_{ij}}{c_{33}}$,

$$\lambda\begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \qquad (15')$$

$$c_{31}=c_{32}=0\neq c_{33}.$$

3). Ҳар қандай (17) аффин алмаштиришни ушбу аналитик ёзувга эга бўлган проектив–аффин алмаштиришигача давом эттириш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ \lambda x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ \lambda x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Исбот. 1). Зарурийлиги $(1,0,0)$ нуқта (15) алмаштириши билан, агар $c_{31}=0$ бўлса, хосмас нуқта бўлган $(\lambda c_{11}:\lambda c_{21}:\lambda c_{31})$нуқтага ўтади. Худди шундай $(0,1,0)$ нуқта (15) алмаштириши билан, агар $c_{32}=0$ бўлса, хосмас нуқта бўлган $(\lambda c_{12} : \lambda c_{22} : \lambda c_{32})$ нуқтага ўтади. $C = (c_{ij})$ матрицанинг хосмаслиги туфайли $c_{33} \neq 0$ бўлишини ҳосил қиламиз.

Етарлилигини исботи аён.

2). (15) тенгликлар биринчи ва иккинчисини учинчи тенгликка бўлиб, (16) шартларни ҳамда $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ тенгликларни эътиборга олиб (17) тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

бу ерда, $a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}$. Бу тенгликлар аффин алмаштиришини аниқлайди. Чунки,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c_{11}}{c_{33}} & \frac{c_{12}}{c_{33}} \\ \frac{c_{21}}{c_{33}} & \frac{c_{22}}{c_{33}} \end{vmatrix} = \frac{1}{(c_{33})^2}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{(c_{33})^3}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} c_{33} =$$

$$= \frac{1}{(c_{33})^3}\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{Vmatrix} = \frac{\det C}{(c_{33})^3} \neq 0.$$

3). (18) алмаштириш проектив аффин алмаштиришидир. Чунки, (16) шарт бажарилади. Бу алмаштириш (17) аффин алмаштиришнинг давоми бўлади. Чунки, (17) тенгликлар (18) тенгликларнинг биринчиси ва иккинчиси (18) тенгликларнинг учинчисига бўлишдан ҳосил қилинади.

59.7. натижа. Барча проектив аффин алмаштиришлар тўплами аффин текислигининг аффин алмаштиришлар группасига изоморф бўлган барча проектив алмаштиришлар группасининг қисм группалардан иборат.

59.8. жумла. Ихтиёрий l_1, l_2 кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигини бошқа ихтиёрий кесишувчи l_1', l_2' тўғри чизиқлар жуфтлигига проектив алмаштиришлар воситасида ўтказиш мумкун.

Исбот. X_3 – l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси, X_1, X_2 – мос равишда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлардаги X_3 нуқта билан устма–уст тушмайдиган нуқталар бўлсин. E нуқта l_1, l_2, X_1, X_2 – тўғри чизиқларнинг бирортасига ҳам тегишли бўлмаган нуқта бўлсин. Ҳудди шундай l_1', l_2' тўғри чизиқлардан чиқиб X_1', X_2', X_3', E' нуқталарни қурамиз. Унда $X_1X_2X_3E$ ва $X_1'X_2'X_3'E'$ реперлар билан ассоцирланган проектив алмаштириш, равшанки, биз излаган проектив алмаштириш бўлади.

60§. БИР ЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАРДА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚ

60.1. Агар аффин координатали x, y текисликда Γ иккинчи тартибли чизиқ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (19)$$

умумий тенглама билан берилган бўлсин. Аффин координаталардан $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$ формула билан бир жинсли координаталарга ўтилса, у ҳолда (19) тенглама

$$a_{11}\frac{x_1^2}{x_3^2} + 2a_{12}\frac{x_1x_2}{x_3^2} + a_{22}\frac{x_2^2}{x_3^2} + 2a_{13}\frac{x_1}{x_3} + 2a_{23}\frac{x_2}{x_3} + a_{33} = 0$$

ёки

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \qquad (20)$$

кўринишни олади. Бу тенглама текисликнинг барча хос нуқталари тўпламида $(x_3 \neq 0)$ айёнки, (19) тенгламага эквивалент. Агар (20) тенгламани $\overline{\pi}$ тўлдирилган текисликда қаралса, у ҳолда уни (19) тенгламани қаноатлантирувчи барча хос нуқталардан, яъни Γ чизиқ нуқталаридан ташқари

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

шартга бўйсунувчи хосмас нуқталар ҳам, яъни Γ чизиқ асимптотик йўналиши ҳам қаноатлантиради. Шундай қилиб, (20) тенглама билан берилган $\overline{\Gamma}$ чизиқ Γ чизиққа унинг асимтотик йўналишини қўшилишидан (агар шундай йўналиш бор бўлса) ҳосил қилинади.

60.2. таъриф. Бирор проектив координаталар системасида проектив координаталари (20) бир жинсли тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг Г тўплами проектив текисликдаги иккинчи тартибли чизиқ деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики,

$$a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2 \neq 0 \quad (21)$$

шартнинг бажарилиши фараз қилинмайди.

60.3. Проектив аффин текислигида иккинчи тартибли чизиқ (21) шартни қаноатлантирувчи тўлдирилган текисликдаги иккинчи тартибли чизиқ, одатдаги текисликда (19) иккинчи тартибли чизиқни унинг асимтотик йўналиши билан тўлдирилганлигини биламиз. Проектив аффин текислигида яна қандай иккинчи тартибли чизиқлар бўлиши мумкин?

Фараз қилайлик, $a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2 = 0$ бўлсин. У ҳолда (20) тенглама

$$x_3\left(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3\right) = 0 \quad (22)$$

тенгламага айланади. Бу иккита тўғри чизиқ

$$x_3 = 0\,, \quad 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

тенгламалардан иборат. Бу тўғри чизиқларнинг биринчиси хосмас, иккинчиси эса хос тўғри чизиқ ҳам ва шундай хосмас тўғри чизиқ ҳам бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, проектив аффин текислигида ҳар қандай иккинчи тартибли чизиқ ушбудан иборат:

1). асимтотик йўналиши билан тўлдирилган одатдаги иккинчи тартибли чизиқдан иборат;

2). Улардан бири хосмас бўлган кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат;

3). Хосмас устма–уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат.

61§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ПРОЕКТИВ ВА ПРОЕКТИВ АФФИН КЛАСИФИКАЦИЯЛАРИ (ТАСНИФЛАРИ)

61.1. жумла. Эллипс, гипербола ва парабола проектив эквивалент, яъни проектив алмаштириш воситасида бир–бирига ўтказилади.

Исбот. Энг аввал, биз, эллипс, гипербола ва парабола деб, бу ерда ўзининг асимптотик йўналишлари билан тўлдирилган одатдаги эллипс, гипербола ва парабола аталишини, яъни гиперболага нуқталар жуфтлиги, параболага эса битта нуқта қўшилишини таъкидлаб ўтамиз. Бу учта чизиқ ҳақиқий овалги, яъни бирорта проектив координаталар системасида

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (23)$$

тенгламага эга бўлган чизиққа эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, бирорта аффин координаталар системасида эллипс

$$x^2 + y^2 = 1$$

кўринишдаги тенгламага эга бўлиб, бу тенгламани бир жинсли координаталарда ёзилса, у ҳолда у (23) тенглама билан устма–уст тушади. Чунки,

$$\frac{x_1^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Гипербала бирорта аффин координаталар системасида

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

тенглама билан ёки бир жинсли координаталарда эса

$$\frac{x_1^2}{x_3^2} - \frac{x_2^2}{x_3^2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

тенглама билан ёзилиши мумкин. Охирги тенглама ушбу тенгламага тенг кучли

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 = 0. \quad (24)$$

Равшанки, ушбу проектив алмаштириш

$$\left.\begin{array}{l}\lambda x_1' = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = x_2\\ \lambda x_2' = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = x_3\\ \lambda x_3' = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = x_1\end{array}\right\}$$

бу ерда,

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

(24) чизиқни (23) ҳақиқий овалга ўтказади, чунки

$$\lambda^2 x_1'^2 + \lambda^2 x_2'^2 - \lambda^2 x_3'^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$$

ва штрихларни ўчириб, (23) тенгламага келамиз.

Ниҳоят, парабола бирорта аффин координаталар системасида $y^2 = x \Leftrightarrow$ $x - y^2 = 0$ тенглама билан берилади.

$$\left.\begin{array}{l}x' = y = 0\cdot x + 1\cdot y\\ y' = x = 1\cdot x + 0\cdot y\end{array}\right\},$$

бу ерда, $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$, аффин алмаштириш билан $x'^2 - y' = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламада штрихларни ўчириб, $x^2 - y = 0$ тенгламага келамиз. Бир жинсли координаталарда эса

$$\frac{x_1^2}{x_3^2} - \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad \text{ёки} \quad x_1^2 - x_2 x_3 = 0 \qquad (25)$$

тенгламага келамиз.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda x_1 = x_1' = 1\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + 0\cdot x_3'\\ \lambda x_2 = -x_2' + x_3' = 0\cdot x_1' - 1\cdot x_2' + 1\cdot x_3'\\ \lambda x_3 = x_2' + x_3' = 0\cdot x_1' + 1\cdot x_2' + 1\cdot x_3\end{array}\right\}$$

бу ерда,

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

проектив алмаштиришга тескари алмаштириш (25) чизиқни (23) чизиққа ўтказади. Ҳақиқатадан ҳам,

$$\lambda^2 x_1^{\ 2} - \lambda x_2 \cdot \lambda x_3 = 0 \ \Rightarrow \ x_1'^2 + (-x_2' + x_3')(x_2' + x_3') = 0 \ \Rightarrow \ x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 = 0 .$$

Агар $x_1' = x_1$, $x_3' = x_2$, $x_2' = x_3$ деб белгилаб, (23) тенгламани ҳосил қиламиз. Жумла исботланди.

61.2. теорема. Иккинчи тартибли чизиқларнинг бешта проектив эквивалантлик синфи мавжуд, яъни

1). $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - x_3^{\ 2} = 0$ – ҳақиқий овал;

2). $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} = 0$ – мавжуд овал;

3). $x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} = 0$ – кесишувчи тўғри чизиқлар;

4). $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 0$ – мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар;

5). $x_1^{\ 2} = 0$ – устма–уст тушувчи тўғри чизиқлар.

Исбот. Проектив текисликни $x_3 = 0$ хосмас тўғри чизиқли проектив–аффин текислиги каби қараймиз. Унда 60.3 га мувофиқ (20) ихтиёрий иккинчи тартибли чизиқ ё асимптотик йўналишлари билан тўлдирилган одатдаги тўққизта иккинчи тартибли чизиқларнинг биридан иборат; ё улардан бири хосмас бўлган кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлигидан иборат. Охирги иккита чизиқ, 59.8 жумлага кўра, хос тўғри чизиқлардан ташкил топган мос чизиқларга проектив эквивалант. Шундай қилиб, одатдаги тўққизта тўлдирилган иккинчи тартибли чизиқлардан ҳар бири теоремада санаб чиқилган бешта чизиқдан бирига проектив эквивалент бўлишини исботлаш керак.

Биз эллипс, гипербола ва параболанинг ҳақиқий овалига проектив эквивалент бўлишини юқорида исбот қилганмиз. Шунингдек, равшанки, мавҳум эллипс $\left(x^2 + y^2 - 1 = 0\right)$ мавҳум овалга проектив эквивалент. Чунки,

$$\frac{x_1^{\ 2}}{x_3^{\ 2}} + \frac{x_2^{\ 2}}{x_3^{\ 2}} + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \quad x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} = 0 .$$

Кесишувчи тўғри чизиқлар $\left(x^2 - y^2 = 0\right)$, мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар $\left(x^2 + y^2 = 0\right)$ ва устма–уст тушувчи тўғри чизиқлар $\left(x^2 = 0\right)$, мос равишда 3), 4), 5) чизиқларга проектив эквивалентдир. Чунки,

$$\frac{x_1{}^2}{x_3{}^2} - \frac{x_2{}^2}{x_3{}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1{}^2 - x_2{}^2 = 0;$$

$$\frac{x_1{}^2}{x_3{}^2} + \frac{x_2{}^2}{x_3{}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1{}^2 + x_2{}^2 = 0;$$

$$\frac{x_1{}^2}{x_3{}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1{}^2 = 0.$$

Параллел тўғри чизиқлар $\left(x^2 - 1 = 0\right)$ хосмас (0:1:0) нуқтада кесишади ва бир жинсли координаталарда 3) тенгламадан фарқ қилмайдиган $x_1{}^2 - x_3{}^2 = 0$ тенглама билан ёзилади. Чунки,

$$\frac{x_1{}^2}{x_3{}^2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1{}^2 - x_3{}^2 = 0.$$

Ниҳоят, мавҳум параллел тўғри чизиқлар $\left(x^2 + 1 = 0\right)$ шу ҳақиқий хосмас (0:1:0) нуқтада кесишади. Уларнинг бир жинсли координаталардаги тенгламалари $x_1{}^2 + x_3{}^2 = 0$ бўлиб, 4) тенгламага проектив эквивалентдир.

1)–5) чизиқларнинг жуфт–жуфт бўлиб проектив эквивалент эмаслигини кўрсатиш қолди.

Мавҳум овал – бу бешта чизиқдан ҳақиқий нуқталарга эга бўлмаган ягона чизиқдир. Мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар – бу битта ҳақиқий нуқтага эга бўлган ягона чизиқдир. Ҳақиқий овал эллипсга проектив эквивалент. Демак, унинг ҳеч бир учта нуқтаси бир тўғри чизиқда ётмайди. Бу хосса уни 3) ва 5) чизиқлардан фарқлайди. Ниҳоят 5) чизиқнинг ихтиёрий учта нуқтаси бир тўғри чизиқда ётади, 3) чизиқ учун бу эса нотўғри. Теорема исботланди.

61.3. таъриф. Агар проектив–аффин текислигидаги иккинчи тартибли чизиқдан бирини иккинчисига проектив–аффин алмаштириш воситасида ўтказиш мумкин бўлса, у ҳолда улар проектив–аффин эквивалент деб аталади.

61.4. теорема. Иккинчи тартибли чизиқларнинг проектив–аффин эквивалент бўлган ўн битта синфи мавжуд, яъни

1). тўққизта одатдаги тўлдирилган иккинчи тартибли чизиқлар;

2). улардан бири хосмас бўлган кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги;

3). хосмас устма–уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтлиги.

Исбот. 59.6–теоремадан аффин эквивалент чизиқлар проектив–аффин еквивалент бўлиши келиб чиқади. Сўнгра 2) турдаги ихтиёрий чизиқлар 59.8 жумлага мувофиқ проектив алмаштириш билан биридан бошқасига шундай ўтказиш мумкинки, бунда хосмас тўғри чизиқ хосмас тўғри чизиқга ўтади. Бу проектив алмаштириш проектив–аффин алмаштириши бўлади. 3) турдаги ихтиёрий чизиқлар айний алмаштиришда ўзига ўтади. Равшанки, айний алмаштириш проектив–аффин алмаштириши бўлади. Шундай қилиб 60.3 бандаги мулоҳазалардан юқорида санаб ўтилган ўн биттадан кўп бўлмаган проектив–аффин эквивалент синфларининг мавжудлиги келиб чиқади. Турли синфдаги чизиқларнинг эквивалент эмаслигини кўрсатишда 61.2 теоремадан фойдаланиш мумкин. Демак, бешта проектив эквивалент синфларидан фақат бирига кирувчи чизиқларни фарқлаш зарур. Эллипс, гипербола ва парабола ҳақиқий овал бўлади. Улар ўзаро проектив–аффин эквивалент эмас. Чунки, хосмас тўғри чизиқ билан турли сондаги нуқталарда келишади: $0,2,1$. Мавҳум овалга фақат мавҳум эллипс киради. Кесишувчи тўғри чизиқлар системасига учта чизиқ киради; хос кесишувчи тўғри чизиқлар, параллел тўғри чизиқлар ва бир хосмас тўғри чизиқ бўлган кесишувчи тўғри чизиқлар. Бу чизиқлар ҳам хосмас тўғри чизиқ билан турли сондаги нуқталарда кесишади: $2,1,\infty$.

Мавҳум тўғри чизиқлар хос нуқтада (мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар) ва хосмас нуқтада (мавҳум параллел тўғри чизиқлар) кесишиши мумкин. Бу чизиқлар бир–бири билан шу хоссалари билан фарқланади. Ниҳоят, устма–уст тушувчи тўғри чизиқлар хос ва хосмас бўлиши мумкин. Равшанки, улар турли проектив аффиндир, яъни улар ўзаро проектив аффин эквивалент эмас. Теорема исбот бўлди.

М у н д а р и ж а

IV БОБ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

V БОБ. АФФИН АЛМАШТИРИШЛАР

VI БОБ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

VII БОБ. ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИК

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДОСАНОВ Муртозақул
ТУРДИБОЕВ ДИЛШОД
УМАРОВ Ҳабибулло Раҳматуллаевич

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ